
Tullio Papa

LEZIONI DI FISICA

MECCANICA

EDIZIONI KAPPA

Indice

III Capitolo 1 - Grandezze fisiche

1.1 - Introduzione	Pag.	1
1.2 - Grandezze fisiche ed equazioni dimensionali	"	3
1.3 - Unità di misura delle grandezze fondamentali. Sistema Internazionale di Unità di Misura (SI)	"	6
1.3.1 - <i>Lunghezza</i>	"	6
1.3.2 - <i>Massa</i>	"	7
1.3.3 - <i>Intervallo di tempo</i>	"	7
1.3.4 - <i>Intensità di corrente</i>	"	8
1.3.5 - <i>Altre grandezze del Sistema Internazionale di Unità di Misura</i>	"	8
1.4 - Fattori di conversione	"	9
1.5 - Ordini di grandezza	"	10
1.6 - Misure	"	11
1.6.1 - <i>Sensibilità di lettura</i>	"	12
1.6.2 - <i>Giustificazione della media</i>	"	12
1.7 - Distribuzione degli errori	"	13
1.8 - Stima dell'errore massimo nelle misure indirette	"	15
1.8.1 - <i>Errore relativo</i>	"	16
1.8.2 - <i>Cifre significative</i>	"	17

III Capitolo 2 - Elementi di algebra vettoriale

2.1 - Grandezze vettoriali	"	19
2.2 - Direzione di un vettore	"	20
2.3 - Operazioni elementari	"	20
2.3.1 - <i>Somma di vettori</i>	"	20
2.3.2 - <i>Differenza di vettori</i>	"	22
2.4 - Proiezione ortogonale di un vettore; componenti	"	23
2.4.1 - <i>Componenti cartesiane di un vettore</i>	"	24
2.5 - Prodotto tra vettori	"	25
2.5.1 - <i>Prodotto scalare</i>	"	25
2.5.2 - <i>Prodotto vettoriale</i>	"	26
2.5.3 - <i>Rappresentazione vettoriale di una superficie</i>	"	27
2.6 - Operazioni tra vettori in coordinate cartesiane	"	28
2.7 - Prodotto misto	"	33

2.8 - Doppio prodotto vettoriale	Pag.	33
2.9 - Derivata di un vettore	"	34
2.10 - Reticolo cristallino e reticolo reciproco	"	35
III Capitolo 3 - Cinematica Studio generale del moto		
3.1 - Introduzione	"	37
3.2 - Spostamento	"	40
3.2.1 - <i>Spostamento rigido traslatorio</i>	"	41
3.2.2 - <i>Spostamento rigido rotatorio</i>	"	41
3.2.3 - <i>Spostamento rigido parallelo ad un piano</i>	"	43
3.2.4 - <i>Spostamento rigido polare</i>	"	43
3.2.5 - <i>Spostamento rototraslatorio</i>	"	43
3.3 - Moto del punto	"	44
3.4 - Velocità del punto	"	45
3.5 - Moto dei sistemi di punti	"	47
3.5.1 - <i>Atto di moto rigido traslatorio</i>	"	48
3.5.2 - <i>Atto di moto rigido rotatorio</i>	"	48
3.5.3 - <i>Atto di moto rigido polare</i>	"	49
3.5.4 - <i>Atto di moto rigido rototraslatorio</i>	"	50
3.5.5 - <i>Atto di moto rigido piano</i>	"	53
3.6 - Accelerazione del punto	"	57
3.6.1 - <i>Alcuni elementi di geometria differenziale</i>	"	57
3.6.2 - <i>Accelerazione sotto forma intrinseca</i>	"	60
3.7 - Accelerazione dei sistemi di punti	"	61
3.8 - Cenno sul problema inverso della cinematica	"	63
III Capitolo 4 - Cinematica Moti particolari		
4.1 - Moto rettilineo	"	65
4.1.1 - <i>Moto armonico</i>	"	70
4.2 - Sovrapposizione di due moti armonici sullo stesso asse	"	72
4.2.1 - <i>Moti armonici di frequenze uguali</i>	"	73
4.2.2 - <i>Moti armonici di frequenze diverse</i>	"	74
4.2.3 - <i>Metodo trigonometrico</i>	"	75
4.3 - Moti piani	"	77
4.3.1 - <i>Moto piano in coordinate polari</i>	"	77
4.3.2 - <i>Velocità areolare</i>	"	80
4.3.3 - <i>Moto centrale</i>	"	80
4.4 - Composizione di due moti armonici su assi ortogonali	"	82
4.4.1 - <i>Moto circolare</i>	"	82
4.4.2 - <i>Composizione di due moti armonici su assi ortogonali differenti per ampiezza, pulsazione e fase</i>	"	83
4.5 - Moti piani e problema inverso della cinematica	"	87
III Capitolo 5 - Cinematica relativa		
5.1 - Introduzione	"	93

5.2 - Velocità nei moti relativi	Pag.	95
5.2.1 - <i>Velocità relativa di due particelle</i>	"	96
5.3 - Accelerazione nei moti relativi	"	100
5.3.1 - <i>Accelerazione relativa di due particelle</i>	"	102
III Capitolo 6 - Dinamica del punto materiale		
6.1 - Introduzione	"	107
6.2 - Legge di inerzia o prima legge della dinamica	"	108
6.3 - Forza, seconda legge della dinamica, massa	"	109
6.4 - Terza legge della dinamica	"	114
6.5 - Considerazioni sulle tre leggi della dinamica	"	116
6.6 - Campo di forza	"	117
6.7 - Proprietà elementari dei campi di forza	"	121
6.7.1 - <i>Flusso del vettore campo</i>	"	121
6.7.2 - <i>Divergenza</i>	"	122
6.7.3 - <i>Circuitazione, rotore</i>	"	123
6.7.4 - <i>Gradiente</i>	"	126
6.7.5 - <i>Laplaciano</i>	"	127
III Capitolo 7 - Forze		
7.1 - Forze in Natura	"	129
7.2 - Forza gravitazionale	"	130
7.2.1 - <i>Esperienza di Cavendish</i>	"	137
7.3 - Forze elettromagnetiche	"	138
7.3.1 - <i>Moto di un elettrone in un campo elettrico uniforme</i>	"	139
7.3.2 - <i>Moto di una carica q in un campo di induzione magnetica uniforme</i>	"	140
7.4 - Forze elastiche (forze esercitate da molle)	"	141
7.5 - Forze vincolari	"	147
7.6 - Forze di attrito	"	149
7.6.1 - <i>Attrito statico e cinetico</i>	"	149
7.6.2 - <i>Attrito nel mezzo</i>	"	152
7.7 - Equilibrio del punto materiale	"	155
7.8 - Tensioni nei fili	"	156
7.9 - Analisi delle forze agenti su un corpo	"	163
III Capitolo 8 - Lavoro ed Energia		
8.1 - Lavoro	"	165
8.2 - Potenza	"	166
8.3 - Teorema dell'energia cinetica	"	167
8.4 - Lavoro di una forza posizionale	"	170
8.4.1 - <i>Campo di forza uniforme</i>	"	175
8.4.2 - <i>Campo di forze centrali</i>	"	176
8.5 - Conservazione dell'energia	"	179
8.5.1 - <i>Energia totale dell'oscillatore armonico</i>	"	181
8.5.2 - <i>Energia di un oscillatore quasi armonico</i>	"	183

8.6 - Lavoro delle forze non conservative	Pag. 185
8.7 - Studio dell'energia potenziale in una dimensione	" 187
8.7.1 - <i>Energia di mutua interazione tra due particelle</i>	" 189
8.8 - Integrali del moto	" 192
III Capitolo 9 - Teoremi dinamici	
9.1 - Impulso	" 195
9.2 - Momento di una forza	" 197
9.2.1 - <i>Momento di più forze applicate ad un punto (forze concorrenti)</i>	" 198
9.3 - Momento angolare (momento della quantità di moto)	" 198
9.3.1 - <i>Teorema del momento angolare</i>	" 199
9.3.2 - <i>Moti piani</i>	" 200
9.4 - Sistemi a massa variabile	" 204
III Capitolo 10 - Problemi di dinamica del punto materiale	
10.1 - Interazione gravitazionale tra corpi sferici	" 209
10.2 - Moto di un punto materiale soggetto a forza gravitazionale	" 213
10.2.1 - <i>Integrale dell'energia</i>	" 216
10.3 - Oscillazioni	" 221
10.3.1 - <i>Radici reali e distinte</i>	" 222
10.3.2 - <i>Radici coincidenti</i>	" 223
10.3.3 - <i>Radici immaginarie</i>	" 224
10.3.4 - <i>Dissipazione di energia</i>	" 225
10.4 - Oscillazioni forzate	" 227
10.5 - Oscillatori accoppiati	" 231
10.6 - Oscillazioni di grande ampiezza del pendolo	" 241
10.7 - Moto verticale di un grave soggetto a forza viscosa	" 244
10.8 - Moto verticale dei gravi nell'aria	" 246
10.9 - Moto di una particella carica in un campo di induzione magnetica uniforme	" 248
III Capitolo 11 - Dinamica relativa	
11.1 - Equazione fondamentale della dinamica in riferimenti non inerziali	" 251
11.1.1 - <i>Forza centrifuga</i>	" 252
11.1.2 - <i>Forza di Coriolis</i>	" 252
11.2 - Equilibrio relativo	" 254
11.3 - Moto relativo	" 260
11.3.1 - <i>Deviazione dalla verticale nella caduta dei gravi</i>	" 263
11.4 - Pendolo di Foucault	" 265
11.5 - Dipendenza dell'accelerazione di gravità dalla latitudine	" 267
III Capitolo 12 - Dinamica dei sistemi	
12.1 - Sistemi di punti e seconda legge della dinamica	" 269
12.2 - Centro di massa	" 270
12.3 - Teorema della quantità di moto	" 270
12.4 - Prima equazione cardinale della dinamica dei sistemi	" 271

12.5 - Conservazione della quantità di moto	Pag. 272
12.6 - Seconda equazione cardinale della dinamica dei sistemi, momento angolare	" 274
12.7 - Conservazione del momento angolare	" 276
12.8 - Dinamica relativa dei sistemi	" 279
12.8.1 - <i>Forza centrifuga</i>	" 280
12.8.2 - <i>Risultante e momento delle forze esterne, momento angolare</i>	" 280
12.8.3 - <i>Energia cinetica</i>	" 280
12.9 - Riferimento del centro di massa	" 281
12.9.1 - <i>Quantità di moto</i>	" 281
12.9.2 - <i>Momento angolare</i>	" 282
12.9.3 - <i>Energia cinetica di un sistema</i>	" 283
12.10 - Lavoro ed energia cinetica	" 288
12.11 - Urti	" 290
12.11.1 - <i>Parametro d'urto</i>	" 292
12.12 - Urto centrale elastico	" 292
12.12.1 - <i>Urto centrale anelastico; coefficiente di restituzione</i>	" 294
12.12.2 - <i>Urto centrale completamente anelastico</i>	" 295
12.12.3 - <i>Urto obliquo elastico</i>	" 295
III Capitolo 13 - Statica dei sistemi	
13.1 - Sistemi di punti materiali	" 303
13.1.1 - <i>Sistemi rigidi</i>	" 303
13.1.2 - <i>Sistemi elementari di forze</i>	" 304
13.2 - Momenti	" 305
13.2.1 - <i>Momento assiale</i>	" 305
13.2.2 - <i>Momento di una coppia</i>	" 306
13.2.3 - <i>Sistema forza-coppia</i>	" 307
13.2.4 - <i>Momento di un sistema di forze</i>	" 308
13.2.5 - <i>Riduzione di un sistema di forze</i>	" 309
13.2.6 - <i>Forze concorrenti e forze complanari</i>	" 309
13.2.7 - <i>Forze parallele</i>	" 311
13.2.8 - <i>Riduzione di un sistema di forze generico</i>	" 312
13.3 - Baricentro	" 315
13.3.1 - <i>Teorema di Pappo-Guldino</i>	" 316
13.4 - Equilibrio	" 319
13.5 - Cenno sul principio dei lavori virtuali	" 326
III Capitolo 14 - Dinamica dei sistemi rigidi	
14.1 - Equazioni della dinamica	" 331
14.1.1 - <i>Corpo rigido vincolato</i>	" 332
14.1.2 - <i>Rotazione attorno ad un asse fisso</i>	" 332
14.1.3 - <i>Teorema dell'energia cinetica</i>	" 333
14.2 - Calcolo di momenti di inerzia	" 334
14.3 - Momento d'inerzia di un corpo omogeneo rispetto ad assi concorrenti in un punto prefissato	" 337

14.4 - Momento angolare di un corpo rigido omogeneo	Pag. 342
14.5 - Energia cinetica	” 343
14.6 - Rotolamento	” 355
14.6.1 - <i>Rotolamento con forza motrice</i>	” 355
14.6.2 - <i>Rotolamento con coppia motrice</i>	” 357
14.6.3 - <i>Attrito di rotolamento</i>	” 358
14.6.4 - <i>Equilibrio di una ruota soggetta a forza motrice</i>	” 360
14.6.5 - <i>Equilibrio di una ruota soggetta a coppia motrice</i>	” 361
14.7 - Corpo rigido con un punto fisso	” 366
14.7.1 - <i>Moto per inerzia</i>	” 367
14.7.2 - <i>Assi permanenti di rotazione</i>	” 369
14.7.3 - <i>Giroscopio</i>	” 370
14.7.4 - <i>Moto in presenza di un momento esterno</i>	” 371
14.7.5 - <i>Moto di un corpo rigido pesante con un punto fisso</i>	” 372
14.7.6 - <i>Moto di una trottola pesante</i>	” 373
III Capitolo 15 - Corpi deformabili	
15.1 - Considerazioni introduttive	” 377
15.2 - Sforzi	” 380
15.3 - Equazione dell'equilibrio	” 386
15.4 - Deformazioni	” 387
15.5 - Elasticità dei corpi omogenei e isotropi	” 392
15.5.1 - <i>Modulo di compressibilità</i>	” 397
15.5.2 - <i>Relazione tra il modulo di rigidità e il modulo di Young</i>	” 398
III Capitolo 16 - Statica dei fluidi	
16.1 - Sforzi nei fluidi in equilibrio	” 401
16.2 - Equilibrio dei fluidi	” 403
16.3 - Equilibrio dei fluidi soggetti alla gravità	” 405
16.3.1 - <i>Pressione all'interno di un fluido omogeneo</i>	” 406
16.3.2 - <i>Principio di Pascal</i>	” 406
16.3.3 - <i>Torchio idraulico</i>	” 407
16.3.4 - <i>Liquidi in vasi comunicanti</i>	” 407
16.3.5 - <i>Forze di pressione, peso di un liquido</i>	” 409
16.4 - Calcolo delle forze di pressione	” 410
16.5 - Misura delle pressioni	” 416
16.5.1 - <i>Barometro</i>	” 416
16.5.2 - <i>Manometri metallici</i>	” 417
16.5.3 - <i>Manometro di Mac Leod</i>	” 417
16.6 - Principio di Archimede	” 419
16.6.1 - <i>Natanti</i>	” 420
16.6.2 - <i>Sommergibili, Aerostati</i>	” 421
16.7 - Misure di densità	” 422
16.8 - Fluidi compressibili	” 425

16.8.1 - <i>Pressione in un liquido compressibile</i>	Pag. 426
16.8.2 - <i>Variazione della pressione atmosferica con l'altezza</i>	" 427
16.9 - <i>Equilibrio relativo di masse fluide</i>	" 427
16.10 - <i>Tensione superficiale</i>	" 430
16.10.1 - <i>Bolle di sapone</i>	" 433
16.10.2 - <i>Formula di Laplace</i>	" 434
16.10.3 - <i>Linee di contatto</i>	" 435
16.10.4 - <i>Capillarità</i>	" 436
16.10.5 - <i>Contagocce</i>	" 438
III Capitolo 17 - Dinamica dei fluidi	
17.1 - <i>Introduzione</i>	" 441
17.2 - <i>Equazione di continuità</i>	" 442
17.3 - <i>Distribuzione delle velocità</i>	" 445
17.4 - <i>Dinamica dei fluidi ideali</i>	" 449
17.4.1 - <i>Moti irrotazionali</i>	" 452
17.5 - <i>Deduzione elementare del teorema di Bernoulli</i>	" 453
17.6 - <i>Teorema della quantità di moto</i>	" 457
17.7 - <i>Viscosità</i>	" 458
17.7.1 - <i>Moto laminare</i>	" 459
17.7.2 - <i>Moto in regime di Poiseuille in un tubo di sezione circolare</i>	" 462
17.8 - <i>Equazione della dinamica dei fluidi viscosi</i>	" 464
17.9 - <i>Moto vorticoso, numero di Reynolds</i>	" 467
17.10 - <i>Cenni sull'attrito nel mezzo</i>	" 468
17.10.1 - <i>Regime a resistenza di attrito</i>	" 468
17.10.2 - <i>Regime a resistenza di pressione</i>	" 469
17.10.3 - <i>Resistenza del mezzo non parallela alla velocità</i>	" 470
III Capitolo 18 - Onde elastiche	
18.1 - <i>Considerazioni preliminari</i>	" 473
18.2 - <i>Propagazione nei mezzi elastici isotropi e indefiniti</i>	" 475
18.3 - <i>Onde piane</i>	" 479
18.4 - <i>Deduzione elementare dell'equazione di D'Alembert</i>	" 481
18.4.1 - <i>Onde piane nei fluidi</i>	" 481
18.4.2 - <i>Velocità di propagazione delle onde nei gas ideali</i>	" 482
18.4.3 - <i>Onde piane longitudinali in una sbarra indefinita</i>	" 483
18.4.4 - <i>Onde trasversali</i>	" 484
18.5 - <i>Piccole vibrazioni trasversali di un filo indefinito</i>	" 485
18.6 - <i>Generalità sulla equazione delle onde piane</i>	" 486
18.7 - <i>Riflessione delle onde piane per incidenza normale</i>	" 490
18.7.1 - <i>Discontinuità rigida</i>	" 490
18.7.2 - <i>Discontinuità cedevole</i>	" 491
18.7.3 - <i>Riflessione parziale delle onde piane per incidenza normale</i>	" 493
18.8 - <i>Onde armoniche piane</i>	" 494

18.9 - Intensità di un'onda piana	Pag. 497
18.10 - Onde sferiche	" 502
18.10.1 - <i>Propagazione per onde sferiche</i>	" 504
18.10.2 - <i>Onde sferiche armoniche</i>	" 506
18.11 - Effetto Doppler	" 508
18.11.1 - <i>Mezzo in moto rispetto alla sorgente e all'osservatore</i>	" 508
18.11.2 - <i>Sorgente in moto</i>	" 509
18.11.3 - <i>Ricevitore in moto</i>	" 509
III Capitolo 19 - Interferenza e diffrazione	
19.1 - Sovrapposizione di onde armoniche piane	" 513
19.1.1 - <i>Onde progressive</i>	" 513
19.1.2 - <i>Onde progressive di frequenze diverse</i>	" 514
19.1.3 - <i>Onde che si propagano in verso opposto</i>	" 515
19.1.4 - <i>Vibrazioni stazionarie in sistemi finiti</i>	" 516
19.2 - Sviluppo in serie di Fourier	" 519
19.3 - Soluzione dell'equazione di D'Alembert con assegnate condizioni al contorno; piccole vibrazioni di un filo fissato agli estremi	" 524
19.4 - Vibrazioni di una membrana rettangolare fissata al contorno	" 529
19.5 - Vibrazioni di un parallelepipedo rettangolo fissato al contorno	" 531
19.5.1 - <i>Numero dei modi di vibrazione con frequenza minore o uguale a ν</i>	" 532
19.6 - Interferenza di onde sferiche	" 533
19.7 - Mezzi dispersivi	" 537
19.7.1 - <i>Corda di massa trascurabile, fissata agli estremi, con masse distribuite</i>	" 537
19.7.2 - <i>Onde sulla superficie di liquidi</i>	" 540
19.8 - Velocità di gruppo	" 545
19.9 - Preliminari di meccanica ondulatoria	" 546
19.10 - Attenuazione	" 551
19.11 - Principio di Huygens	" 552
19.12 - Diffrazione	" 553
III Capitolo 20 - Simmetria Invarianza Relatività ristretta	
20.1 - Simmetria	" 557
20.2 - Invarianza della equazione di Newton	" 558
20.2.1 - <i>Invarianza per inversione della coordinata temporale</i>	" 560
20.2.2 - <i>Inversione delle coordinate spaziali</i>	" 561
20.3 - Invarianza dell'energia potenziale	" 562
20.4 - Invarianza per trasformazioni galileane	" 563
20.4.1 - <i>Legge di conservazione della quantità di moto</i>	" 564
20.5 - Velocità della luce	" 565
20.6 - Esperienza di Michelson-Morley	" 567
20.6.1 - <i>Velocità limite</i>	" 570
20.7 - Postulati della relatività ristretta	" 571
20.7.1 - <i>Sincronizzazione degli orologi</i>	" 573

20.7.2 - <i>Deduzione diretta della dilatazione dei tempi</i>	Pag.	574
20.8 - Trasformazioni di Lorentz	"	575
20.8.1 - <i>Contrazione delle lunghezze</i>	"	577
20.8.2 - <i>Paradosso dei gemelli</i>	"	578
20.8.3 - <i>Esperimento di Hafele e Keating (1971)</i>	"	579
20.8.4 - <i>Decadimento di particelle elementari instabili</i>	"	579
20.9 - Cronotopo	"	580
20.9.1 - <i>Effetto Doppler relativistico</i>	"	586
20.10 - Trasformazioni della velocità	"	587
20.11 - Legge di inerzia	"	588
20.12 - Legge fondamentale della dinamica relativistica	"	591
20.13 - Teorema dell'energia cinetica	"	591
20.13.1 - <i>Altra deduzione della massa relativistica</i>	"	593
20.13.2 - <i>Altra deduzione dell'energia relativistica</i>	"	596
20.14 - Trasformazione della quantità di moto e dell'energia	"	597
20.15 - Trasformazioni dell'accelerazione e della forza	"	599
20.16 - Principio di equivalenza	"	601
20.17 - Alcune conseguenze	"	603
III Appendice - A	"	605
III Appendice - B	"	607
III Appendice - C	"	609
INDICE ANALITICO	"	613

2. Elementi di algebra vettoriale

1. Grandezze vettoriali

Una grandezza fisica vettoriale è definita dal suo valore numerico, che si chiama modulo o intensità, e dalla sua direzione. In generale un numero reale positivo ed una direzione individuano un vettore. Si rammenti che una retta orientata, sulla quale è stato stabilito un verso positivo, e di conseguenza quello negativo, definisce una *direzione*.

Esempi di grandezze vettoriali sono: lo spostamento, la velocità, l'accelerazione, la forza, il campo elettrico e molte altre. Un vettore nello spazio euclideo è rappresentato graficamente da un segmento la cui lunghezza, una volta fissata l'unità di misura, rappresenta il modulo o l'intensità del vettore, e la cui direzione, indicata da una freccia, è stabilita dagli angoli che esso forma con gli assi di una terna cartesiana di riferimento prefissata.

Se il vettore non è applicato in un punto prefissato si dice *vettore libero* ed è rappresentato da uno degli ∞^3 segmenti equipollenti dello spazio, figura 1; esso pertanto può essere spostato lungo la retta su cui giace, retta d'azione, o trasportato su una qualsiasi altra retta parallela; in figura, \mathbf{A}_1 , \mathbf{A}_2 , \mathbf{A}_3 , ... sono tutti vettori equipollenti. Viceversa un vettore applicato ad un punto P è definito univocamente e lo indichiamo, precisando il punto di applicazione, con (\mathbf{A}, P) .

Graficamente un vettore è rappresentato da una lettera in grassetto \mathbf{A} , oppure da una lettera sormontata da una freccia \vec{A} . Altre volte, alludendo al vettore spostamento di un punto da una posizione P_1 ad una P_2 , che si scrive $\mathbf{s} = P_2 - P_1$, si può usare la notazione $\mathbf{A} = (P - Q)$, avendo indicato con P e Q gli estremi del vettore.

Il modulo di un vettore \mathbf{A} si indica semplicemente con A , oppure con $|\mathbf{A}|$.

Si definisce *versore* un vettore di modulo unitario. Esso, di solito, si indica con una lettera minuscola in carattere grassetto, munita di accento circonflesso; per esempio $\hat{\mathbf{u}}$. Il versore ovvia-

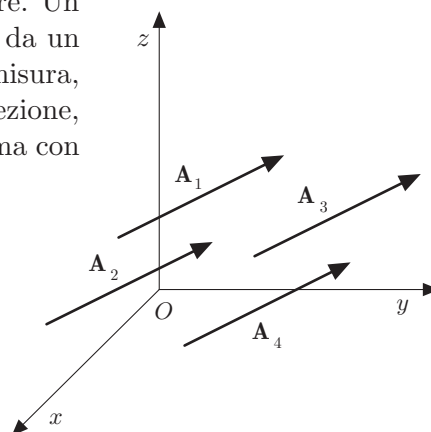


Fig. 2.1

mente stabilisce una direzione nello spazio, pertanto un vettore \mathbf{A} , può essere indicato mediante il prodotto del suo modulo col versore che ne indica la direzione, ossia $A\hat{\mathbf{u}}$. In particolare, i versori degli assi di una terna cartesiana ortogonale x, y, z , nel seguito saranno indicati con le lettere $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$.

2. Direzione di un vettore

Consideriamo un vettore \mathbf{A} appartenente ad un piano; fissata sul piano una retta orientata di riferimento, la direzione del vettore risulta stabilita univocamente dall'angolo θ che la retta d'azione del vettore forma con la retta di riferimento, figura 2. Un vettore \mathbf{B} di direzione opposta formerà con la retta di riferimento un angolo $\pi + \theta$.

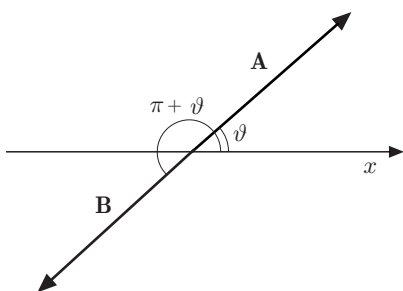


Fig. 2.2

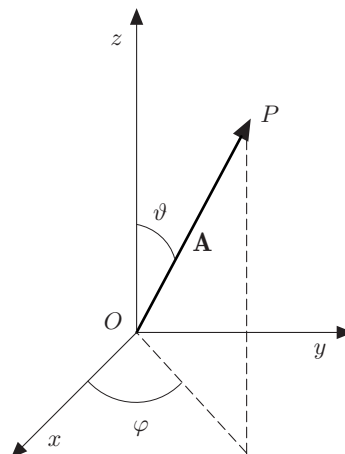


Fig. 2.3

Se il vettore \mathbf{A} è rappresentato nello spazio, per quanto detto al paragrafo 1, a proposito dei vettori liberi, è possibile fissare una terna cartesiana e spiccare il vettore dalla sua origine come in figura 3. Gli angoli θ , polare, e φ , azimutale, stabiliscono la direzione del vettore. Il vettore di direzione opposta forma angoli $\theta + \pi$, $\varphi + \pi$. La direzione del vettore può essere individuata anche dai coseni direttori $\cos \alpha$, $\cos \beta$, $\cos \gamma$, dove α , β , γ , sono gli angoli che la retta d'azione di \mathbf{A} forma con gli assi x , y e z .

3. Operazioni elementari

3.1. Somma di vettori

Consideriamo due vettori \mathbf{A} e \mathbf{B} ; si dice somma dei due vettori il vettore \mathbf{R} , definito da

$$\mathbf{R} = \mathbf{A} + \mathbf{B}.$$

Il vettore somma si ottiene mediante il seguente procedimento: si scelga un punto O e partendo da questo si riportino i vettori \mathbf{A} e \mathbf{B} ; completando il parallelogramma individuato dai due vettori, la diagonale concorrente con essi è il vettore somma \mathbf{R} , figura 4; è questa la così detta *regola del parallelogramma*. È altresì intuitiva l'operazione inversa: è possibile scomporre un vettore in due o più vettori aventi direzioni assegnate.

Dalla figura 4 si osserva che per costruire in maniera più semplice la somma di due vettori basta riportare il secondo adiacente al primo e chiudere il lato del triangolo col vettore risultante \mathbf{R} . Si deduce inoltre che la somma di due vettori gode della proprietà commutativa:

$$\mathbf{R} = \mathbf{A} + \mathbf{B} = \mathbf{B} + \mathbf{A}.$$

Quando si deve eseguire la somma di più vettori la regola va applicata in successione. Ne discende che la somma di vettori gode della proprietà associativa.

MODULO DEL VETTORE SOMMA

Dalla figura 5 si ha

$$\overline{OE}^2 = \overline{OD}^2 + \overline{DE}^2;$$

ma:

$$\overline{OD} = \overline{OF} + \overline{FD} = A + B \cos \theta, \quad \overline{DE} = B \sin \theta,$$

pertanto:

$$\begin{aligned} \overline{OE}^2 &= R^2 = (A + B \cos \theta)^2 + B^2 \sin^2 \theta \\ &= A^2 + B^2 \cos^2 \theta + 2AB \cos \theta + B^2 \sin^2 \theta \\ &= A^2 + B^2 + 2AB \cos \theta; \end{aligned}$$

da cui:

$$R = |\mathbf{R}| = \sqrt{A^2 + B^2 + 2AB \cos \theta} \quad (1)$$

Se si prende in considerazione l'angolo γ , figura 5, si ha

$$2AB \cos \theta = 2AB \cos(\pi - \gamma) = -2AB \cos \gamma,$$

quindi:

$$R = \sqrt{A^2 + B^2 - 2AB \cos \gamma}. \quad (2)$$

DIREZIONE DEL VETTORE SOMMA

La direzione del risultante, per esempio rispetto ad \mathbf{A} , si ottiene mediante il teorema dei seni:

$$\frac{R}{\sin \gamma} = \frac{B}{\sin \alpha} = \frac{A}{\sin \beta} \Rightarrow \frac{R}{\sin \theta} = \frac{B}{\sin \alpha} = \frac{A}{\sin \beta},$$

da cui si ricava α . Nel caso che i due vettori siano ortogonali si ha $\tan \alpha = B/A$.

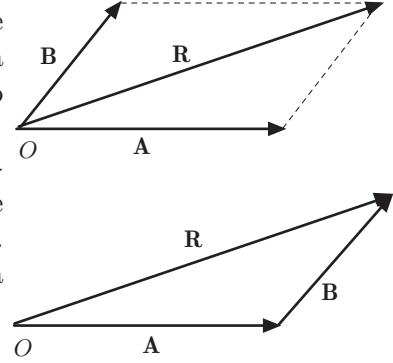


Fig. 2.4

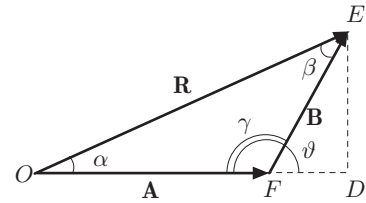


Fig. 2.5

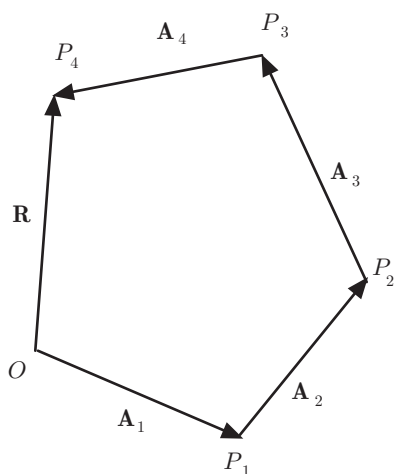


Fig. 2.6

Consideriamo ora n vettori $\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2, \dots, \mathbf{A}_n$ di cui vogliamo determinare il risultante. Preso un punto qualunque O , costruiamo i vettori

$$\mathbf{A}_1 = (P_1 - O), \quad \mathbf{A}_2 = (P_2 - P_1), \quad \dots \quad \mathbf{A}_n = (P_n - P_{n-1}),$$

La somma degli n vettori è il vettore $\mathbf{R} = (P_n - O)$ espresso da

$$\mathbf{R} = (P_n - O) = (P_1 - O) + (P_2 - P_1) + \dots + (P_n - P_{n-1}).$$

La somma vettoriale così ottenuta stabilisce la *regola della poligonale costruita con vettori adiacenti*, come mostrato in figura 6. In particolare se la poligonale si chiude, la somma è nulla.

3.2. Differenza di vettori

Dati due vettori \mathbf{A} e \mathbf{B} , si definisce differenza tra i due vettori il vettore \mathbf{D} che aggiunto a \mathbf{B} riproduce \mathbf{A} , ossia:

$$\mathbf{D} = \mathbf{A} - \mathbf{B}.$$

Considerando opposto di \mathbf{B} il vettore $-\mathbf{B}$, avente lo stesso modulo ma direzione opposta, si può scrivere

$$\mathbf{D} = \mathbf{A} + (-\mathbf{B}).$$

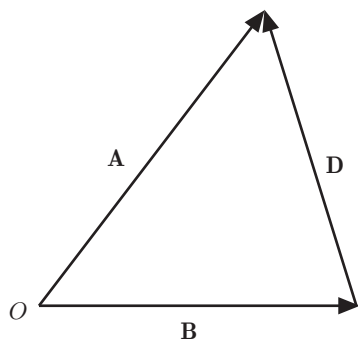


Fig. 2.7

La differenza tra vettori è operazione opposta alla somma e gode di tutte le proprietà formali di quest'ultima. In figura 7 è mostrato un semplice modo per effettuare la differenza di due vettori. Scelto un punto O , da questo si riportino i vettori \mathbf{A} e \mathbf{B} ; il vettore differenza \mathbf{D} chiude il triangolo puntando sull'estremo di \mathbf{A} .

MODULO DELLA DIFFERENZA

Dalla figura 8 si ha

$$\begin{aligned} D^2 &= (A - B \cos \theta)^2 + B^2 \sin^2 \theta \\ &= A^2 + B^2 \cos^2 \theta - 2AB \cos \theta + B^2 \sin^2 \theta \\ &= A^2 + B^2 - 2AB \cos \theta, \end{aligned}$$

da cui

$$D = \sqrt{A^2 + B^2 - 2AB \cos \theta}. \quad (3)$$

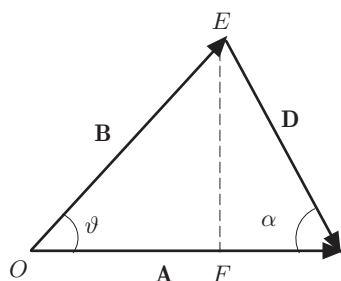


Fig. 2.8

L'angolo α che dà la direzione di \mathbf{D} , per esempio rispetto ad \mathbf{A} , si può ricavare, come nel caso della somma, dal teorema dei seni.

Si osservi che la somma algebrica di più vettori può essere effettuata mediante la regola della poligonale costruita con vettori adiacenti. Basta riportare sui lati della poligonale, gli opposti dei vettori da sottrarre.

Esempi

- ||| 1. Dati due vettori di modulo $A = 5u$, $B = 8u$, che formano un angolo $\theta = 60^\circ$, determinare il modulo del vettore \mathbf{R} somma e l'angolo formato da quest'ultimo con \mathbf{A} , figura 9. (u indica una unità di misura arbitraria)

$$R = \sqrt{A^2 + B^2 + 2AB \cos \theta} = \sqrt{129} = 11,36u$$

$$\frac{R}{\sin(\pi - \theta)} = \frac{B}{\sin \alpha}, \quad \Rightarrow \quad \sin \alpha = \frac{B \sin \theta}{R}; \quad \alpha = 37,58^\circ.$$

- ||| 2. Il vettore \mathbf{R} somma di due vettori \mathbf{A} e \mathbf{B} ha modulo $R = 10u$ e forma un angolo $\alpha = 30^\circ$ con \mathbf{A} , il cui modulo è $A = 12u$, figura 10. Trovare il modulo di \mathbf{B} e l'angolo θ compreso tra \mathbf{A} e \mathbf{B} .

$$\frac{A}{\sin \beta} = \frac{B}{\sin \alpha} = \frac{R}{\sin(\pi - \theta)}; \quad \alpha + \beta + \gamma = 180^\circ, \quad \Rightarrow \quad \alpha + \beta = \theta.$$

$$\frac{A}{\sin(\theta - \alpha)} = \frac{R}{\sin(\pi - \theta)}, \quad \Rightarrow \quad A \sin \theta = R \sin \theta \cos \alpha - R \cos \theta \sin \alpha;$$

$$\tan \theta = \frac{R \sin \alpha}{R \cos \alpha - A} = -1,5 \quad \Rightarrow \quad \theta = 123,74^\circ;$$

$$\frac{B}{\sin \alpha} = \frac{R}{\sin \theta} \quad B = \frac{R \sin \alpha}{\sin \theta} = 6,01u.$$

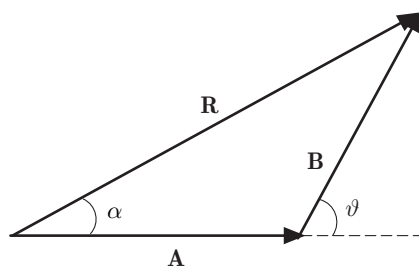


Fig. 2.9

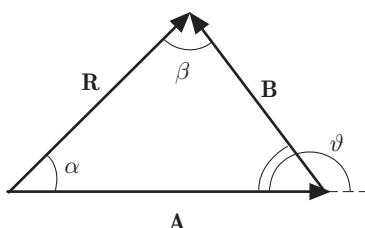


Fig. 2.10

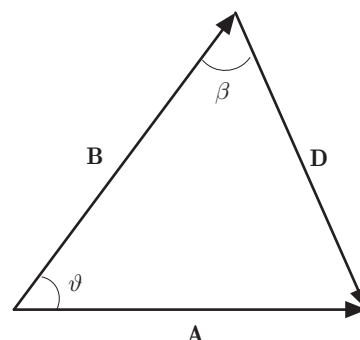


Fig. 2.11

- ||| 3. Dati due vettori \mathbf{A} e \mathbf{B} , di moduli $A = 8u$, $B = 10u$, che formano un angolo $\theta = 60^\circ$, determinare il modulo D della differenza fra i due vettori e l'angolo β formato con \mathbf{B} ; figura 11.

$$\mathbf{A} - \mathbf{B} = \mathbf{D}; \quad D = \sqrt{A^2 + B^2 - 2AB \cos \theta} = 9,16u;$$

$$\frac{A}{\sin \beta} = \frac{D}{\sin \theta}; \quad \sin \beta = \frac{A \sin 60^\circ}{D} = 0,76; \quad \beta = 49,1^\circ$$

||| 4. **Proiezione ortogonale di un vettore; componenti**

Un vettore \mathbf{A} può essere proiettato ortogonalmente su una retta orientata o su un piano. Conduciamo dagli estremi P , Q del vettore due piani π , π' , perpendicolari ad una retta r orientata, figura 12, e siano P' , Q' le intersezioni con r .

Il vettore $(P' - Q')$ si chiama *il componente* di \mathbf{A} secondo r . Il modulo del vettore $(P' - Q')$, preso col segno positivo se concorde

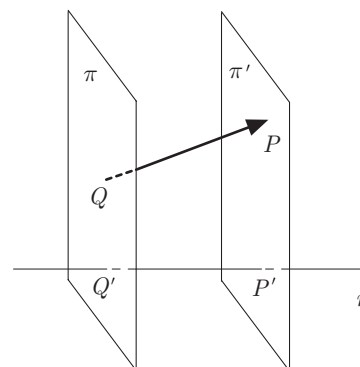


Fig. 2.12

con la direzione di r o negativo se discorde, si chiama *la componente* di \mathbf{A} secondo r , e va indicata con A_r ; essa è chiaramente una quantità scalare:

$$Q'P' \equiv A_r = A \cos \theta,$$

dove θ è l'angolo formato dal vettore con r . Ovviamente tali considerazioni valgono, in particolare, se \mathbf{A} ed r giacciono nello stesso piano. Analogamente proiettando il vettore su un piano, si ottengono il componente e la componente del vettore secondo il piano.

|| 4.1. Componenti cartesiane di un vettore

Fissato un riferimento cartesiano ortogonale nel piano ed un vettore giacente in esso come in figura 13, proiettiamo gli estremi del vettore \mathbf{A} sugli assi x ed y ; le quantità:

$$OP' \equiv A_x, \quad OP'' \equiv A_y,$$

prese col loro segno, sono le componenti di \mathbf{A} secondo gli assi x ed y . Il modulo di \mathbf{A} è:

$$A = \sqrt{A_x^2 + A_y^2}.$$

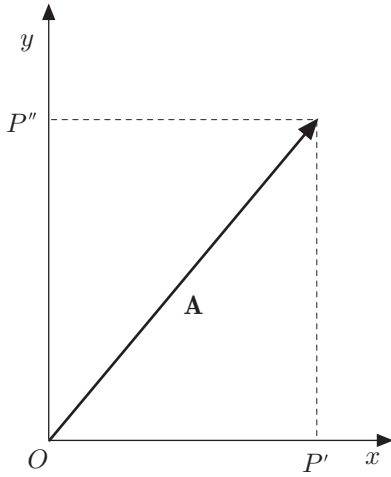


Fig. 2.13

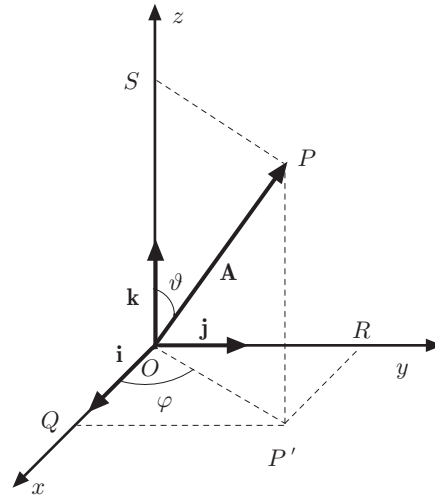


Fig. 2.14

Analogamente si definiscono le componenti di un vettore nello spazio secondo gli assi di una terna cartesiana ortogonale. Dalla figura 14 si ha:

$$OQ \equiv A_x, \quad OR \equiv A_y, \quad OS = PP' \equiv A_z,$$

oppure:

$$A_x = A \sin \theta \cos \varphi, \quad A_y = A \sin \theta \sin \varphi, \quad A_z = A \cos \theta.$$

Il modulo di \mathbf{A} è:

$$A = \sqrt{A_x^2 + A_y^2 + A_z^2}. \quad (5)$$

Ovviamente, cambiando la terna di riferimento cambiano le componenti, però il modulo rimane inalterato.

Tenendo presente che un vettore può essere rappresentato dal prodotto del suo modulo per il versore della sua retta d'azione, fissata una terna cartesiana ortogonale e indicando con \mathbf{i} , \mathbf{j} , \mathbf{k} , i versori degli assi spiccati dall'origine O , come in figura 14, il vettore \mathbf{A} può essere espresso come somma dei suoi componenti secondo gli assi:

$$\mathbf{A} = A_x \mathbf{i} + A_y \mathbf{j} + A_z \mathbf{k}. \quad (5)$$

Per comodità, si è rappresentato il vettore \mathbf{A} spiccato dall'origine degli assi; se esso è comunque posizionato nello spazio, indicandolo con la notazione $\mathbf{A} = (P - Q)$, figura 15, le sue componenti risultano:

$$A_x = x_P - x_Q, \quad A_y = y_P - y_Q, \quad A_z = z_P - z_Q.$$

Si noti che in queste relazioni non compaiono le coordinate di P e Q separatamente, ma solo le loro differenze, perciò le proiezioni del segmento PQ non mutano se si sostituisce ad esso uno qualsiasi dei segmenti equipollenti atti ad individuare il vettore.

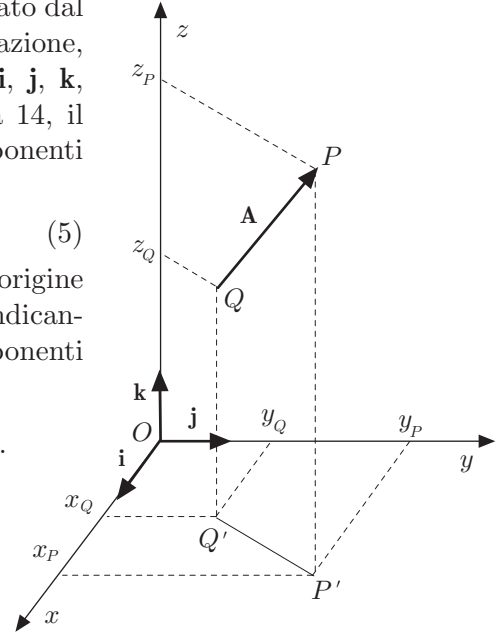


Fig. 2.15

5. Prodotto tra vettori

5.1. Prodotto scalare

Si definisce prodotto scalare di due vettori \mathbf{A} e \mathbf{B} la quantità scalare

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = AB \cos \theta; \quad (6)$$

Il prodotto scalare si indica con un punto; l'angolo θ formato dai due vettori stabilisce il segno del prodotto scalare, figura 16. In particolare esso è massimo quando i vettori sono allineati ed è nullo quando sono ortogonali.

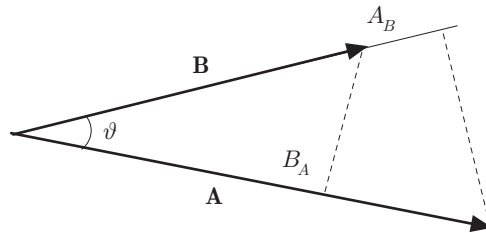


Fig. 2.16

Dalla definizione si deduce che il prodotto scalare di due vettori è uguale al modulo di uno di essi per la componente dell'altro secondo il primo e viceversa, cioè:

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = A_B B = B_A A.$$

Il prodotto scalare di due vettori paralleli ed equiversi è uguale al prodotto dei moduli, $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = AB$; in particolare $\mathbf{A} \cdot \mathbf{A} = A^2$.

Dalla (6) discende che il prodotto scalare di \mathbf{A} per un versore $\hat{\mathbf{u}}$ rappresenta la componente di \mathbf{A} secondo la direzione individuata da $\hat{\mathbf{u}}$. La (6) mostra infine che il prodotto scalare gode della proprietà commutativa:

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = \mathbf{B} \cdot \mathbf{A}$$

ed inoltre della proprietà distributiva:

$$\mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} + \mathbf{C}) = \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} + \mathbf{A} \cdot \mathbf{C}.$$

È inoltre evidente che se m è uno scalare:

$$m(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) = m\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = \mathbf{A} \cdot m\mathbf{B}.$$

5.2. Prodotto vettoriale

Si definisce prodotto vettoriale tra due vettori \mathbf{A} e \mathbf{B} e si indica con $\mathbf{A} \times \mathbf{B}$, il vettore ortogonale al piano individuato dai due vettori che ha modulo

$$|\mathbf{A} \times \mathbf{B}| = AB \sin \theta, \quad (7)$$

in cui θ è l'angolo, $< 180^\circ$, compreso tra i due vettori, figura 17. Il prodotto vettoriale è massimo se i due vettori sono ortogonali mentre è nullo se sono paralleli.

La direzione del vettore $\mathbf{A} \times \mathbf{B}$ è determinata dalla regola di Ampère. Questa regola dice che un osservatore in piedi sul piano dei due vettori, deve vedere il vettore prodotto entrare dai piedi e uscire dalla testa quando \mathbf{A} si sovrappone a \mathbf{B} , per una rotazione antioraria minore di 180° . Esistono altre regole equivalenti, per esempio quella dell'avanzamento di una vite destra o la ben nota regola della mano destra.

Dalla definizione si deduce che il prodotto vettoriale non gode della proprietà commutativa, in altri termini:

$$\mathbf{A} \times \mathbf{B} = -\mathbf{B} \times \mathbf{A}.$$

Il modulo del prodotto vettoriale si può interpretare anche come il prodotto del modulo di \mathbf{B} per la componente di \mathbf{A} ortogonale a \mathbf{B} e viceversa; esso geometricamente rappresenta l'area del parallelogramma individuato dai due vettori.

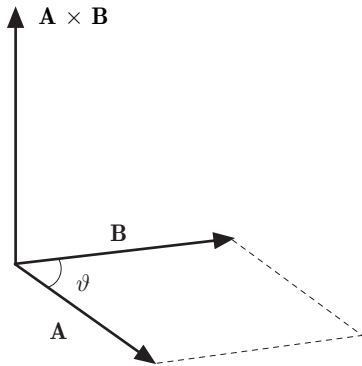


Fig. 2.17

5.3. Rappresentazione vettoriale di una superficie

In conformità alla rappresentazione geometrica del modulo del prodotto vettoriale, una superficie piana S , il cui contorno è orientato come in figura 18, può essere rappresentata da un vettore \mathbf{S} , di modulo uguale al valore numerico dell'area della superficie, ortogonale ad essa ed orientato secondo la regola di Ampère. Le componenti di \mathbf{S} secondo gli assi di una terna cartesiana, hanno un significato geometrico semplice. Consideriamo una superficie piana S e supponiamo che il piano cui appartiene la superficie formi un angolo θ col piano $x-y$, allora la proiezione di S su tale piano è $S \cos \theta$, figura 19. La normale ad S forma anch'essa l'angolo θ con l'asse z ; pertanto la componente del vettore \mathbf{S} lungo z è $S_z = S \cos \theta$. Lo stesso ragionamento vale se la superficie è comunque orientata; le componenti di \mathbf{S} secondo gli assi cartesiani sono uguali alle proiezioni della superficie sui piani coordinati.

Se la superficie non è piana, si può sempre suddividere in un gran numero di superfici elementari ΔS , ciascuna approssimativamente piana. Perciò il vettore che rappresenta l'intera superficie è dato da

$$\mathbf{S} = \sum_i \Delta \mathbf{S}_i.$$

Si osservi che il modulo di \mathbf{S} non è uguale all'area della superficie; il modulo del vettore risultante non è uguale alla somma dei moduli $\sum_i \Delta S_i$. Tuttavia le sue componenti sono uguali alle proiezioni della superficie sui piani coordinati.

Consideriamo ora una superficie chiusa che suddividiamo in tante superfici elementari, approssimativamente piane, ciascuna rappresentata da un vettore $\Delta \mathbf{S}$, volto verso l'esterno. Possiamo associare le superfici elementari a coppie, tali che la somma delle loro proiezioni sia nulla. Per esempio, in figura 20 $\Delta \mathbf{S}$, $\Delta \mathbf{S}'$ hanno la stessa proiezione sul piano $x-y$, ma segni opposti: $\Delta S_z = -\Delta S'_z$. Così per le proiezioni sugli altri piani coordinati.

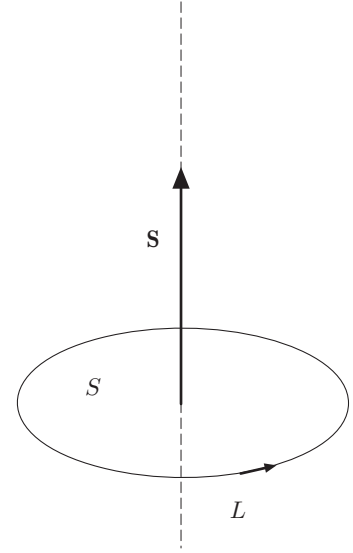


Fig. 2.18

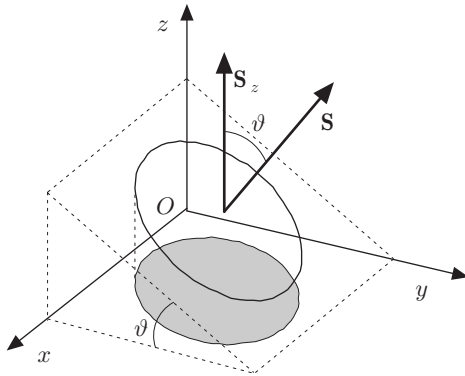


Fig. 2.19

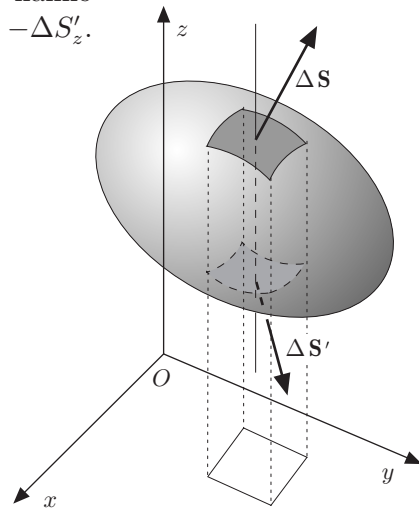


Fig. 2.20

Estendendo il ragionamento a tutte le coppie di superfici elementari in cui si può suddividere S , si conclude che il vettore rappresentativo di una superficie chiusa è sempre nullo.

6. Operazioni tra vettori in coordinate cartesiane

Se esprimiamo i vettori \mathbf{A} e \mathbf{B} in coordinate cartesiane:

$$\begin{aligned}\mathbf{A} &= A_x \mathbf{i} + A_y \mathbf{j} + A_z \mathbf{k}, \\ \mathbf{B} &= B_x \mathbf{i} + B_y \mathbf{j} + B_z \mathbf{k};\end{aligned}$$

la somma o la differenza tra i due vettori si può scrivere

$$\mathbf{A} \pm \mathbf{B} = (A_x \pm B_x) \mathbf{i} + (A_y \pm B_y) \mathbf{j} + (A_z \pm B_z) \mathbf{k}; \quad (8)$$

espressione che si estende al caso di più vettori. Si rammenti che le componenti, essendo quantità scalari, vanno prese sempre col loro segno, determinato dall'orientazione degli assi.

Il prodotto scalare è dato da:

$$\begin{aligned}\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} &= (A_x \mathbf{i} + A_y \mathbf{j} + A_z \mathbf{k}) \cdot (B_x \mathbf{i} + B_y \mathbf{j} + B_z \mathbf{k}) \\ &= A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z,\end{aligned} \quad (9)$$

essendo nulli i prodotti scalari dei termini misti che contengono vettori ortogonali tra loro.

Analogamente, il prodotto vettoriale si scrive:

$$\mathbf{A} \times \mathbf{B} = (A_x \mathbf{i} + A_y \mathbf{j} + A_z \mathbf{k}) \times (B_x \mathbf{i} + B_y \mathbf{j} + B_z \mathbf{k}).$$

Si osservi che i prodotti vettoriali tra i versori \mathbf{i} , \mathbf{j} , \mathbf{k} della terna, risultano:

$$\begin{aligned}\mathbf{i} \times \mathbf{j} &= \mathbf{k} & \mathbf{j} \times \mathbf{k} &= \mathbf{i} & \mathbf{k} \times \mathbf{i} &= \mathbf{j} \\ \mathbf{j} \times \mathbf{i} &= -\mathbf{k} & \mathbf{k} \times \mathbf{j} &= -\mathbf{i} & \mathbf{i} \times \mathbf{k} &= -\mathbf{j},\end{aligned}$$

relazioni che possono essere facilmente rammentate, disponendo i versori secondo lo schema di figura 21. Circolando in senso antiorario, si ottengono i prodotti vettoriali positivi. Ciclando in senso orario, quelli negativi. Pertanto si ha:

$$\mathbf{A} \times \mathbf{B} = (A_y B_z - A_z B_y) \mathbf{i} + (A_z B_x - A_x B_z) \mathbf{j} + (A_x B_y - A_y B_x) \mathbf{k},$$

che si può esprimere, più semplicemente, con la matrice

$$\begin{pmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{pmatrix}, \quad (10)$$

sviluppando secondo i minori della prima riga.

La (10) conferma che il prodotto vettoriale non gode della proprietà commutativa; infatti scambiando due righe della matrice, il prodotto vettoriale cambia segno.

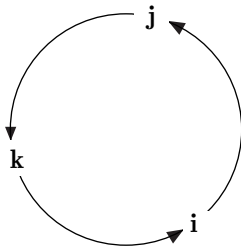


Fig. 2.21

Facendo attenzione all'ordine, vale la proprietà distributiva; infatti:

$$\mathbf{A} \times (\mathbf{B} + \mathbf{C}) = \begin{pmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x + C_x & B_y + C_y & B_z + C_z \end{pmatrix} \equiv \mathbf{A} \times \mathbf{B} + \mathbf{A} \times \mathbf{C}.$$

Infine, se m è uno scalare positivo:

$$m(\mathbf{A} \times \mathbf{B}) = m\mathbf{A} \times \mathbf{B} = \mathbf{A} \times m\mathbf{B}.$$

Si osservi che il modulo di un vettore, il prodotto scalare e il prodotto vettoriale sono grandezze invarianti rispetto ad un cambiamento della terna di riferimento. Infatti, nella traslazione di una terna di riferimento rispetto ad un'altra, le componenti di un vettore non variano perché, per quanto detto al paragrafo 4.1, intervengono le differenze tra le coordinate degli estremi del vettore. Nella rotazione, passando da una terna cartesiana (x, y, z) ad una nuova terna cartesiana (x', y', z') , avente in comune con la prima l'origine O , le componenti, espresse dalle coordinate dell'estremo del vettore spiccato dall'origine, si trasformano, come insegna la geometria, nel modo seguente:

$$A_i = \sum_{k=1}^3 \alpha_{i,k} A_k, \quad (11)$$

dove A_k sono le componenti secondo la terna (x, y, z) , A_i le componenti secondo la terna (x', y', z') ed $\alpha_{i,k}$ i nove coseni direttori di quest'ultima rispetto alla prima. La trasformazione (11) è lineare, lascia inalterata la distanza tra due punti e quindi il modulo del vettore.

La (11) può essere illustrata mediante le formule di trasformazione di coordinate cartesiane piane, per rotazione. In figura 22 è mostrata la rotazione di un angolo θ degli assi x', y' rispetto agli assi x, y ; si ricava facilmente

$$\begin{aligned} x &= x' \cos \theta - y' \sin \theta & \Rightarrow & & x' &= x \cos \theta + y \sin \theta \\ y &= x' \sin \theta + y' \cos \theta & & & y' &= -x \sin \theta + y \cos \theta \end{aligned}$$

dove

$$\alpha_{x',x} = \cos \theta, \quad \alpha_{x',y} = \sin \theta, \quad \alpha_{y',x} = -\sin \theta, \quad \alpha_{y',y} = \cos \theta.$$

Si verifica immediatamente che il modulo del vettore, distanza del suo estremo dall'origine, in seguito alla trasformazione, è invariante per rotazione delle coordinate.

$$x'^2 + y'^2 = x^2 + y^2.$$

Le precedenti formule di trasformazione si possono esprimere sotto

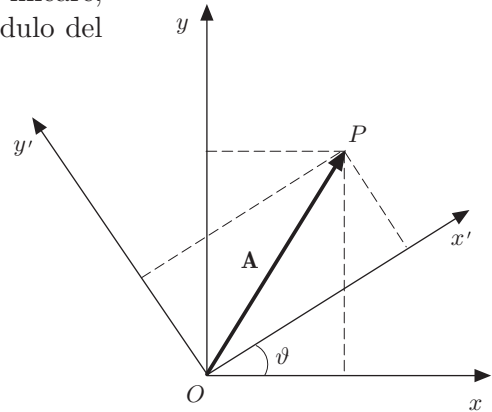


Fig. 2.22

forma di matrice, mediante trasformazioni ortogonali, ossia:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

Indicando con M la matrice della trasformazione, si ha:

$$r' = Mr.$$

Poiché M è una matrice ortogonale, come noto, il suo inverso è uguale alla trasposta; $M^{-1} = M^T$. Si ottiene pertanto la trasformazione inversa:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}.$$

Esempi

- ||| 4. Dati tre vettori complanari di modulo $A = 6u$, $B = 5u$, $C = 4u$ e assegnati l'angolo $\theta_1 = 50^\circ$ tra \mathbf{A} e \mathbf{B} , l'angolo $\theta_2 = 75^\circ$ tra \mathbf{B} e \mathbf{C} , trovare il modulo del vettore risultante \mathbf{R} e l'angolo θ che forma con \mathbf{A} .

Assunto l'asse x orientato come \mathbf{A} , l'asse y ortogonale ad esso e indicando con \mathbf{R} il risultante, si ha:

$$R_x = A + B \cos 50^\circ + C \cos 125^\circ = 6,92u$$

$$R_y = B \sin 50^\circ + C \sin 125^\circ = 7,11u,$$

$$R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2} = 9,9u, \quad \tan \theta = \frac{R_y}{R_x} = 1,027, \quad \theta = 45,77^\circ.$$

- ||| 5. Dati i vettori:

$$\mathbf{A} = 3\mathbf{i} + 4\mathbf{j} - 5\mathbf{k}, \quad \mathbf{B} = -1\mathbf{i} + 1\mathbf{j} + 2\mathbf{k},$$

trovare modulo e direzione della somma, della differenza e l'angolo α tra i due vettori.

$$\begin{aligned} R &= |\mathbf{A} + \mathbf{B}| = \sqrt{(A_x + B_x)^2 + (A_y + B_y)^2 + (A_z + B_z)^2} \\ &= \sqrt{(3-1)^2 + (4+1)^2 + (-5+2)^2} = 6,16u \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} D &= |\mathbf{A} - \mathbf{B}| = \sqrt{(A_x - B_x)^2 + (A_y - B_y)^2 + (A_z - B_z)^2} \\ &= \sqrt{(3+1)^2 + (4-1)^2 + (-5-2)^2} = 8,6u. \end{aligned}$$

Per determinare la direzione di \mathbf{R} si tenga presente la figura 3; per la somma si ha

$$R_z = R \cos \theta, \quad \Rightarrow \quad \cos \theta = \frac{R_z}{R} = -0,487, \quad \Rightarrow \quad \theta = 119,14^\circ;$$

$$R_x = R \sin \theta \cos \varphi, \quad \Rightarrow \quad \cos \varphi = \frac{R_x}{R \sin \theta} = 0,371, \quad \Rightarrow \quad \varphi = 68,178^\circ.$$

Per la differenza:

$$D_z = D \cos \theta, \quad \Rightarrow \quad \cos \theta = \frac{D_z}{D} = -0,81, \quad \Rightarrow \quad \theta = 144,48^\circ;$$

$$D_x = D \sin \theta \cos \varphi, \quad \Rightarrow \quad \cos \varphi = \frac{D_x}{D \sin \theta} = 0,8, \quad \Rightarrow \quad \varphi = 36,8^\circ.$$

L'angolo tra \mathbf{A} e \mathbf{B} si ricava per mezzo della definizione di prodotto scalare;

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = AB \cos \alpha,$$

$$\cos \alpha = \frac{\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}}{AB} = \frac{A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z}{AB},$$

e poiché

$$A = \sqrt{9 + 16 + 25} = 7,07 u, \quad B = \sqrt{1 + 1 + 4} = 2,45 u,$$

risulta:

$$\cos \alpha = -0,519, \quad \Rightarrow \quad \alpha = 121,30^\circ.$$

- ||| 6. Dati due punti di coordinate $P_1 \equiv (1, 2, -3)$, $P_2 \equiv (3, -1, 2)$, determinare la loro distanza e l'equazione della retta passante per P_1 e P_2 .

Scelta una terna cartesiana ortogonale con origine in O , i vettori

$$\mathbf{r}_1 = 1\mathbf{i} + 2\mathbf{j} - 3\mathbf{k}, \quad \mathbf{r}_2 = 3\mathbf{i} - 1\mathbf{j} + 2\mathbf{k},$$

individuano la posizione dei punti P_1 e P_2 . Il vettore differenza

$$\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1 = 2\mathbf{i} - 3\mathbf{j} + 5\mathbf{k},$$

ha modulo

$$|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1| = \sqrt{4 + 9 + 25} = 6,16 u,$$

e rappresenta la distanza $P_1 P_2$.

L'equazione della retta passante per i punti assegnati è

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1}, \quad \Rightarrow \quad \frac{x - 1}{2} = \frac{y - 2}{-3} = \frac{z + 3}{5}.$$

In generale, assegnato un vettore

$$\mathbf{A} = A_x \mathbf{i} + A_y \mathbf{j} + A_z \mathbf{k},$$

si può ricavare l'equazione della retta ad esso parallela e passante per il punto $P \equiv (x_1, y_1, z_1)$. Infatti, essendo le differenze $(x - x_1)$, $(y - y_1)$, $(z - z_1)$, rispettivamente parallele ad A_x , A_y , A_z , si ha

$$\frac{x - x_1}{A_x} = \frac{y - y_1}{A_y} = \frac{z - z_1}{A_z}.$$

Il lettore può facilmente verificare che l'equazione di tale retta è data vettorialmente, dall'equazione:

$$(\mathbf{r} - \mathbf{r}_1) \times \mathbf{A} = 0.$$

- ||| 7. *Coseni direttori*

I coseni direttori fissano univocamente una direzione rispetto ad una terna di riferimento x, y, z . Spicchiamo dall'origine O della terna un vettore \mathbf{A} di modulo arbitrario, come mostrato in figura 23, e siano α , β , γ gli angoli che esso forma con gli assi. Poiché:

$$\mathbf{A} = A_x \mathbf{i} + A_y \mathbf{j} + A_z \mathbf{k},$$

dividendo per il modulo di \mathbf{A} , si ha:

$$\frac{\mathbf{A}}{A} = \frac{A_x}{A} \mathbf{i} + \frac{A_y}{A} \mathbf{j} + \frac{A_z}{A} \mathbf{k}.$$

Ma:

$$\frac{A_x}{A} = \cos \alpha, \quad \frac{A_y}{A} = \cos \beta, \quad \frac{A_z}{A} = \cos \gamma, \quad (12)$$

per cui possiamo scrivere:

$$\frac{\mathbf{A}}{A} = \cos \alpha \mathbf{i} + \cos \beta \mathbf{j} + \cos \gamma \mathbf{k},$$

cioè, il versore di \mathbf{A} fissa la direzione mediante i coseni direttori.

Quadrando e sommando le (12) si ottiene:

$$\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1,$$

relazione ben nota in geometria.

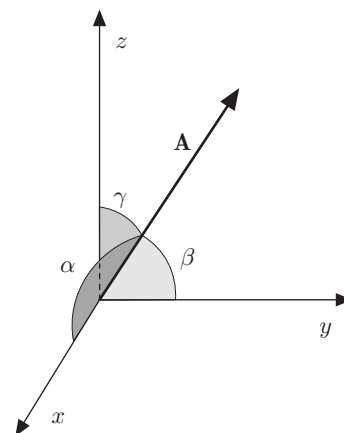


Fig. 2.23

8. Equazione del piano

Indichiamo con \mathbf{N} un vettore normale al piano con origine in un punto O esterno ad esso e con l'estremo sul piano, figura 24. \mathbf{r} sia un vettore arbitrario che ha la stessa origine O e l'altro estremo in un punto P generico del piano.

Si ha:

$$\mathbf{r} \cdot \mathbf{N} = N^2$$

Ciò significa che se O è l'origine di una terna cartesiana, per tutti i punti del piano ortogonale ad \mathbf{N} si deve avere:

$$xN_x + yN_y + zN_z = N^2,$$

che è l'equazione del piano cercata.

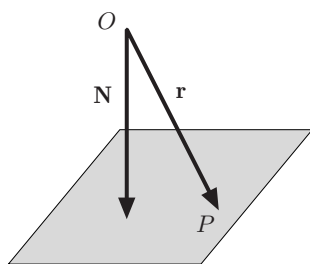


Fig. 2.24

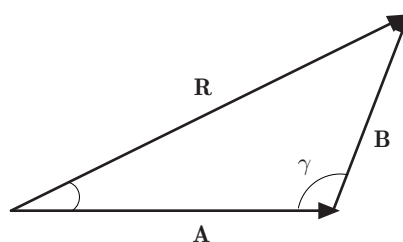


Fig. 2.25

9. Teorema dei seni

Dato un triangolo definito da $\mathbf{R} = \mathbf{A} + \mathbf{B}$, figura 25, moltiplichiamo tale somma vettorialmente per \mathbf{A} :

$$\mathbf{A} \times \mathbf{R} = \mathbf{A} \times (\mathbf{A} + \mathbf{B}) = \mathbf{A} \times \mathbf{B},$$

che implica l'uguaglianza dei moduli, cioè:

$$AR \sin \beta = AB \sin \gamma, \quad \Rightarrow \quad \frac{B}{\sin \beta} = \frac{R}{\sin \gamma}.$$

10. Angolo tra due vettori

L'angolo tra due vettori \mathbf{A} e \mathbf{B} , come si è visto nell'esempio 5, si ricava da

$$\cos \theta = \frac{\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}}{AB} = \frac{A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z}{AB}.$$

L'angolo è invariante al mutare della terna di riferimento, anche se le componenti dei due vettori cambiano con essa. L'angolo si può ricavare anche da un'altra espressione. Se i due vettori sono individuati dagli angoli polari, θ_1 , θ_2 e dagli angoli azimutali φ_1 , φ_2 , come in figura 26; si ha:

$$A_x = A \sin \theta_1 \cos \varphi_1, \quad A_y = A \sin \theta_1 \sin \varphi_1, \quad A_z = A \cos \theta_1,$$

$$B_x = B \sin \theta_2 \cos \varphi_2, \quad B_y = B \sin \theta_2 \sin \varphi_2, \quad B_z = B \cos \theta_2,$$

Il prodotto scalare tra i vettori è

$$AB \cos \theta_{12} = AB \sin \theta_1 \sin \theta_2 \cos \varphi_1 \cos \varphi_2 + AB \sin \theta_1 \sin \theta_2 \sin \varphi_1 \sin \varphi_2 + AB \cos \theta_1 \cos \theta_2;$$

da cui:

$$\cos \theta_{12} = \sin \theta_1 \sin \theta_2 \cos(\varphi_1 - \varphi_2) + \cos \theta_1 \cos \theta_2,$$

espressione indipendente dalle componenti dei vettori che, pertanto, dà l'angolo tra due direzioni nello spazio.

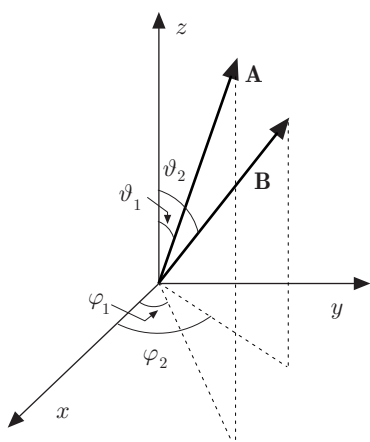


Fig. 2.26

7. Prodotto misto

Si definisce prodotto misto di tre vettori $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}$, lo scalare $(\mathbf{A} \times \mathbf{B}) \cdot \mathbf{C}$. Il suo valore numerico rappresenta il volume del parallelepipedo che ha come spigoli i tre vettori, figura 27. Infatti il modulo di $\mathbf{A} \times \mathbf{B}$ è dato dal valore numerico dell'area di base del parallelepipedo e la componente di \mathbf{C} secondo $\mathbf{A} \times \mathbf{B}$ ne è, a meno del segno, l'altezza. In base a questa interpretazione geometrica discende che:

$$(\mathbf{A} \times \mathbf{B}) \cdot \mathbf{C} = (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) \cdot \mathbf{A} = (\mathbf{C} \times \mathbf{A}) \cdot \mathbf{B}, \quad (13)$$

espressione che può essere rammentata disponendo i vettori come in figura 21 e circolando in senso antiorario.

Inoltre è possibile scambiare i simboli di prodotto scalare e vettoriale:

$$\mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) = \mathbf{B} \cdot (\mathbf{C} \times \mathbf{A}) = \mathbf{C} \cdot (\mathbf{A} \times \mathbf{B}).$$

Il prodotto misto, mediante le componenti cartesiane dei tre vettori, si esprime:

$$(\mathbf{A} \times \mathbf{B}) \cdot \mathbf{C} = \begin{vmatrix} A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \\ C_x & C_y & C_z \end{vmatrix}, \quad (14)$$

In conformità con l'interpretazione geometrica e con la (14), il prodotto misto cambia segno se vengono scambiate due righe della matrice ed è nullo se due dei vettori che vi partecipano sono uguali.

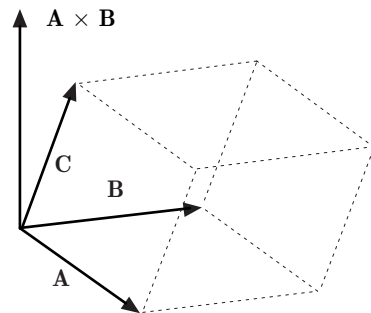


Fig. 2.27

8. Doppio prodotto vettoriale

Si definisce doppio prodotto vettoriale di tre vettori $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}$, il vettore $(\mathbf{A} \times \mathbf{B}) \times \mathbf{C}$. Esso è un vettore complanare con \mathbf{A} e \mathbf{B} e per esso vale la relazione:

$$(\mathbf{A} \times \mathbf{B}) \times \mathbf{C} = (\mathbf{A} \cdot \mathbf{C})\mathbf{B} - (\mathbf{B} \cdot \mathbf{C})\mathbf{A}. \quad (15)$$

Questa identità va verificata scrivendo il primo membro in forma cartesiana.

$$(\mathbf{A} \times \mathbf{B}) \times \mathbf{C} = \left\{ \begin{pmatrix} A_z & A_x \\ B_z & B_x \end{pmatrix} C_z - \begin{pmatrix} A_x & A_y \\ B_x & B_y \end{pmatrix} C_y \right\} \mathbf{i} + \dots$$

Sommando e sottraendo rispettivamente $A_x B_x C_x$, $A_y B_y C_y$, $A_z B_z C_z$, alle componenti secondo \mathbf{i} , \mathbf{j} , e \mathbf{k} , la (15) resta dimostrata. Si faccia attenzione che nello scrivere il doppio prodotto vettoriale; le parentesi sono essenziali, cioè non vale la proprietà associativa.

Altro doppio prodotto vettoriale è il seguente:

$$\mathbf{A} \times (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) = (\mathbf{A} \cdot \mathbf{C})\mathbf{B} - (\mathbf{A} \cdot \mathbf{B})\mathbf{C}, \quad (16)$$

che può essere verificato come prima.

La (16), come la (15), può essere dimostrata in maniera più immediata; si osservi infatti che il vettore $\mathbf{A} \times (\mathbf{B} \times \mathbf{C})$ è complanare con \mathbf{B} e \mathbf{C} , perciò possiamo scrivere:

$$\mathbf{A} \times (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) = \lambda \mathbf{B} + \mu \mathbf{C},$$

essendo λ e μ due scalari, indipendenti dal riferimento, in quanto tale è il prodotto vettoriale.

Scelta, per comodità, una terna in cui l'asse y coincida con la direzione di \mathbf{B} e l'asse z in modo che \mathbf{C} sia disposto nel piano y - z , si ha

$$\mathbf{B} = B\mathbf{j}, \quad \mathbf{C} = C_y\mathbf{j} + C_z\mathbf{k}, \quad \mathbf{A} = A_x\mathbf{i} + A_y\mathbf{j} + A_z\mathbf{k}.$$

Quindi:

$$\begin{aligned} \mathbf{A} \times (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) &= A_z B C_z \mathbf{j} - A_y B C_z \mathbf{k} \\ &= (A_y C_y + A_z C_z) B \mathbf{j} - A_y B (C_y \mathbf{j} + C_z \mathbf{k}). \end{aligned}$$

Pertanto:

$$\lambda = A_y C_y + A_z C_z = \mathbf{A} \cdot \mathbf{C}, \quad \mu = -A_y B = -\mathbf{A} \cdot \mathbf{B},$$

da cui discende la (16).

Altra relazione notevole è:

$$(\mathbf{A} \times \mathbf{B}) \times (\mathbf{C} \times \mathbf{D}) = [\mathbf{D} \cdot (\mathbf{A} \times \mathbf{B})] \mathbf{C} - [\mathbf{C} \cdot (\mathbf{A} \times \mathbf{B})] \mathbf{D}. \quad (17)$$

Infatti ponendo $\mathbf{F} = \mathbf{A} \times \mathbf{B}$ e tenendo presente la (16), si deduce immediatamente la (17).

9. Derivata di un vettore

Consideriamo un vettore $\mathbf{A}(t)$ funzione di una certa variabile, per esempio del tempo. Possiamo scrivere

$$\mathbf{A}(t) = A(t) \hat{\mathbf{u}}(t),$$

con $A(t)$ e $\hat{\mathbf{u}}(t)$ rispettivamente, modulo e versore del vettore assegnato.

La derivata del vettore è definita da:

$$\frac{d\mathbf{A}}{dt} = \frac{d}{dt}[A(t)\hat{\mathbf{u}}(t)] = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{A(t + \Delta t)\hat{\mathbf{u}}(t + \Delta t) - A(t)\hat{\mathbf{u}}(t)}{\Delta t}.$$

Scrivendo il numeratore:

$$\begin{aligned} &\left[A(t) + \frac{dA}{dt} \Delta t \right] \left[\hat{\mathbf{u}}(t) + \frac{d\hat{\mathbf{u}}}{dt} \Delta t \right] - A(t)\hat{\mathbf{u}}(t) \\ &= \left[\frac{dA}{dt} \hat{\mathbf{u}}(t) + A \frac{d\hat{\mathbf{u}}}{dt} \right] \Delta t + \left[\frac{dA}{dt} \frac{d\hat{\mathbf{u}}}{dt} \right] (\Delta t)^2. \end{aligned}$$

Dividendo per Δt e passando al limite per $\Delta t \rightarrow 0$, si ottiene

$$\frac{d\mathbf{A}(t)}{dt} = \frac{dA}{dt} \hat{\mathbf{u}} + A \frac{d\hat{\mathbf{u}}}{dt}. \quad (18)$$

La derivata di un vettore è costituita da due termini: il primo vettore ha come modulo la derivata del modulo stesso ed è diretto lungo $\hat{\mathbf{u}}$; il secondo rappresenta la variazione di direzione. Per quanto riguarda quest'ultimo, si noti che $d\hat{\mathbf{u}}/dt$ è un vettore ortogonale ad $\hat{\mathbf{u}}$. Infatti derivando l'identità $\hat{\mathbf{u}} \cdot \hat{\mathbf{u}} = 1$, si ha

$$2 \frac{d\hat{\mathbf{u}}}{dt} \cdot \hat{\mathbf{u}} = 0.$$

Essendo diversi da zero sia $\hat{\mathbf{u}}$ che $d\hat{\mathbf{u}}/dt$, si deduce che essi sono ortogonali.

10. Reticolo cristallino e reticolo reciproco

Nei solidi cristallini gli atomi sono disposti secondo un reticolo, costituito da celle elementari, ciascuna delle quali contiene uno o più atomi.

La cella elementare del reticolo cristallino più semplice, reticolo di Bravais, contiene un solo atomo. È conveniente, ma non necessario, rappresentare la posizione degli atomi nei vertici delle celle elementari cosicchè, definiti gli spigoli della cella mediante i vettori fondamentali o di base \mathbf{a} , \mathbf{b} e \mathbf{c} , in genere non ortogonali tra loro, la posizione di ogni atomo, rispetto ad un qualsiasi altro atomo, assunto come origine, può essere definita per mezzo del vettore traslazione \mathbf{T} :

$$\mathbf{T} = n_1\mathbf{a} + n_2\mathbf{b} + n_3\mathbf{c},$$

dove n_1, n_2, n_3 sono numeri interi, figura 28.

Si deduce che un reticolo cristallino possiede simmetria di traslazione, pertanto gli atomi appaiono disposti nello stesso modo se osservati da un punto individuato da un vettore posizione \mathbf{r} oppure da un vettore posizione \mathbf{r}' , tale che:

$$\mathbf{r}' = \mathbf{r} + n_1\mathbf{a} + n_2\mathbf{b} + n_3\mathbf{c}.$$

I vettori \mathbf{r}' e \mathbf{r} devono differire per una traslazione \mathbf{T} . In figura 29 è mostrato, per semplicità, un reticolo bidimensionale rettangolare, di vettori fondamentali \mathbf{a} e \mathbf{b} . In Fisica dei Solidi si dimostra che le proprietà strutturali ed elettroniche dei solidi cristallini possiedono simmetria di traslazione; lo studio di tali proprietà è fondato sul concetto di reticolo reciproco, introdotto da J. W. Gibbs.

Limitandoci a considerare le caratteristiche vettoriali del reticolo reciproco, i suoi vettori di base \mathbf{a}^* , \mathbf{b}^* , \mathbf{c}^* , sono definiti in funzione dei vettori \mathbf{a} , \mathbf{b} e \mathbf{c} , dalle equazioni:

$$\mathbf{a}^* = 2\pi \frac{\mathbf{b} \times \mathbf{c}}{\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c})}, \quad \mathbf{b}^* = 2\pi \frac{\mathbf{c} \times \mathbf{a}}{\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c})}, \quad \mathbf{c}^* = 2\pi \frac{\mathbf{a} \times \mathbf{b}}{\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c})}.$$

L'unità di misura di tali vettori è l'inverso di una lunghezza; infatti si osservi che il denominatore delle equazioni di definizione rappresenta il volume della cella elementare. Inoltre \mathbf{a}^* , \mathbf{b}^* , \mathbf{c}^* , risultano ortogonali ai piani reticolari del reticolo diretto.

Si verifica immediatamente che $\mathbf{a}^* \cdot \mathbf{a} = 2\pi$, $\mathbf{a}^* \cdot \mathbf{b} = 0$ e le altre analoghe relazioni.

Il volume della cella del reticolo reciproco è definita da:

$$V^* = \mathbf{a}^* \cdot (\mathbf{b}^* \times \mathbf{c}^*) = \left(\frac{2\pi}{V}\right)^3 (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) \cdot [(\mathbf{c} \times \mathbf{a}) \times (\mathbf{a} \times \mathbf{b})],$$

dove V è il volume della cella del reticolo diretto. Ma per la (17):

$$(\mathbf{c} \times \mathbf{a}) \times (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) = \mathbf{b} \cdot (\mathbf{c} \times \mathbf{a}) \mathbf{a} = V\mathbf{a},$$

pertanto

$$V^* = \mathbf{a}^* \cdot (\mathbf{b}^* \times \mathbf{c}^*) = \left(\frac{2\pi}{V}\right)^3 V(\mathbf{b} \times \mathbf{c}) \cdot \mathbf{a} = \left(\frac{2\pi}{V}\right)^3 V^2 = \frac{(2\pi)^3}{V}.$$

Il volume della cella elementare del reticolo reciproco è inversamente proporzionale al volume della cella elementare del reticolo diretto.

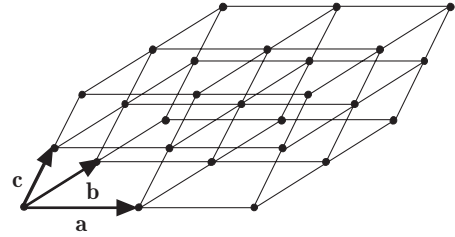


Fig. 2.28

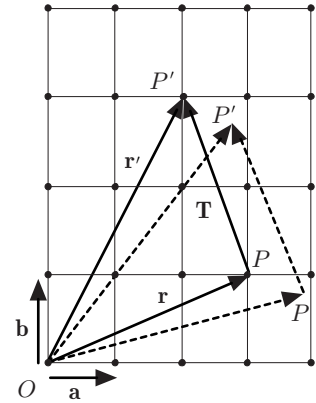


Fig. 2.29

3. Cinematica

Studio generale del moto

1. Introduzione

La cinematica classica è la parte della meccanica che studia il movimento dei corpi indipendentemente dalle cause che lo determinano e si fonda essenzialmente sui concetti di spazio euclideo e tempo assoluto.

Considerando la cinematica come *geometria del movimento*, è essenziale associare al punto della geometria, l'elemento fisico che in cinematica da esso viene rappresentato. Si dirà dunque che un punto è atto a rappresentare un corpo mobile se le dimensioni di quest'ultimo sono abbastanza piccole rispetto a quelle del campo di movimento, e se non si considera l'eventuale movimento indipendente delle parti di cui il corpo è costituito. Per esempio si può rappresentare con un punto mobile un elettrone che si muove attorno al nucleo, oppure la Terra nel suo movimento di rivoluzione attorno al Sole, trascurando il moto di rotazione attorno al suo asse, e così via.

Pertanto definiamo punto mobile un punto suscettibile di posizioni diverse rispetto ad un osservatore e sempre individuabile nelle varie posizioni. La sua posizione può essere stabilita da un vettore \mathbf{r} che va da un punto fisso prestabilito O alla posizione P del punto mobile, oppure da coordinate, cartesiane, polari, cilindriche, opportunamente scelte.

Un punto mobile si dice libero se non è soggetto a nessuna condizione; vincolato se esistono certe condizioni alle quale deve soddisfare. Tali condizioni sono chiamate *vincoli*; essi sono definiti come *bilateri* se, per esempio, il punto deve appartenere ad una data superficie, ad una linea ecc... , mentre sono *unilateri* se impongono condizioni meno restrittive, per esempio se impediscono al punto di attraversare una data superficie.

La posizione di un punto soggetto a vincoli bilateri può essere individuata da un numero di coordinate minore di tre. Per esempio, se un punto è vincolato ad una linea, basta dare come coordinata la lunghezza dell'arco misurato a partire da una origine P_0 alla posizione P sulla linea, secondo un verso prefissato, figura 1.

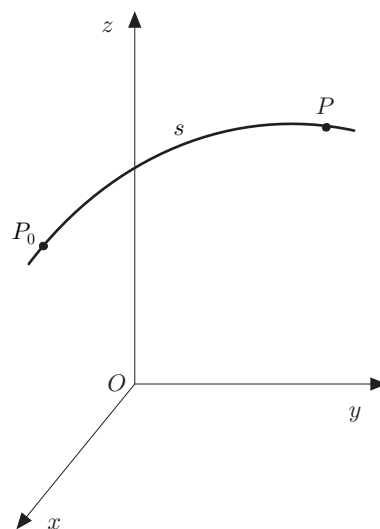


Fig. 3.1

Un insieme di punti mobili, liberi o vincolati, si chiama sistema di punti o, più brevemente, sistema. Il sistema può essere soggetto a vincoli, fra i quali dobbiamo annoverare anche quelli che caratterizzano la natura del sistema, come ad esempio il vincolo della rigidità, e quelli che impongono particolari limitazioni di mobilità, come ad esempio l'esistenza di un punto o di un asse fisso.

Consideriamo un sistema mobile costituito da N punti. Ogni posizione del sistema è determinata da N vettori \mathbf{r}_i che vanno da un'origine prefissata, solidale con un osservatore, ai punti P_i . Tale posizione è anche individuata dai valori di ogni genere di coordinate adottate. Le coordinate o i vettori presuppongono un osservatore ovvero una terna di riferimento prefissata, figura 2.

I vincoli imposti al sistema stabiliscono legami fra le $3N$ coordinate dei suoi punti; si verificherà, allora, che sono necessarie, per individuare la posizione del sistema, un numero di coordinate minore di $3N$. Se queste coordinate così individuate risultano indipendenti, si diranno *coordinate libere o lagrangiane*.

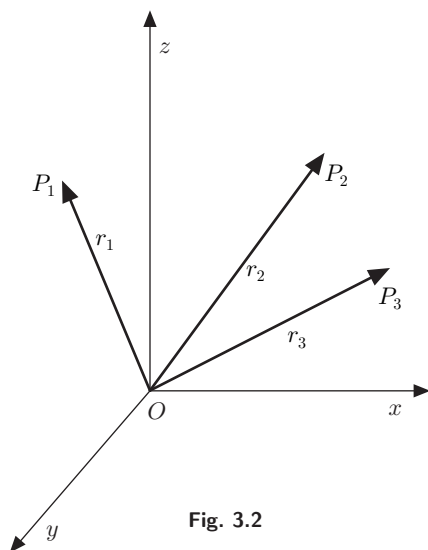


Fig. 3.2

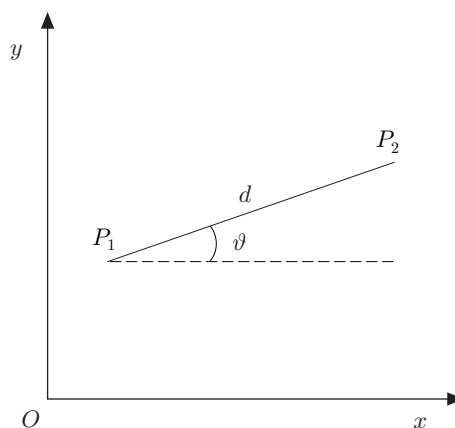


Fig. 3.3

Come esempio consideriamo un sistema costituito da due punti, giacenti nel piano x - y di un riferimento cartesiano ortogonale, e tali che la loro distanza si mantenga sempre costante e pari a d , figura 3. Il sistema è soggetto ad un vincolo bilatero perché giace su un piano e ad un vincolo che dipende dalla natura del sistema, perché la distanza tra i due punti deve rimanere costante. Le 6 coordinate dei punti P_1 e P_2 sono legate dalle 3 relazioni:

$$(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 = d^2, \quad z_1 = 0, \quad z_2 = 0.$$

Per individuare la posizione del sistema basta assegnare 3 coordinate: quelle di uno dei punti ed una coordinata dell'altro, oppure

le coordinate di un punto e l'angolo θ indicato in figura 3. Queste coordinate sono indipendenti e costituiscono le coordinate libere del sistema.

Il numero di coordinate libere che si possono assegnare per individuare la posizione di un sistema costituisce il numero di gradi di libertà del sistema stesso; in altri termini: se i punti del sistema sono individuati da r coordinate di qualsiasi specie e tra queste sussistono s equazioni traducenti i vincoli, il numero di gradi di libertà del sistema risulta uguale ad $r - s$. Nell'esempio precedente il numero di gradi di libertà è 3 perché 6 sono le coordinate dei punti e 3 le relazioni traducenti i vincoli.

Sistemi di punti molto importanti sono i sistemi rigidi; essi si definiscono tali se la loro configurazione geometrica non cambia col movimento. Supponiamo che un sistema occupi una certa posizione S nello spazio, determinata dalla posizione di ogni suo punto, e successivamente una posizione S' diversa, figura 4. Tali posizioni siano determinate rispetto ad un osservatore O , ovvero rispetto ad una terna di riferimento con origine in O . Se l'osservatore in O , qualunque siano le posizioni S ed S' del sistema, può mutare la propria origine in O' in maniera tale da vedere, da questa nuova origine, il sistema in modo identico a quello con cui lo vedeva da O , il sistema si dice *rigido*.

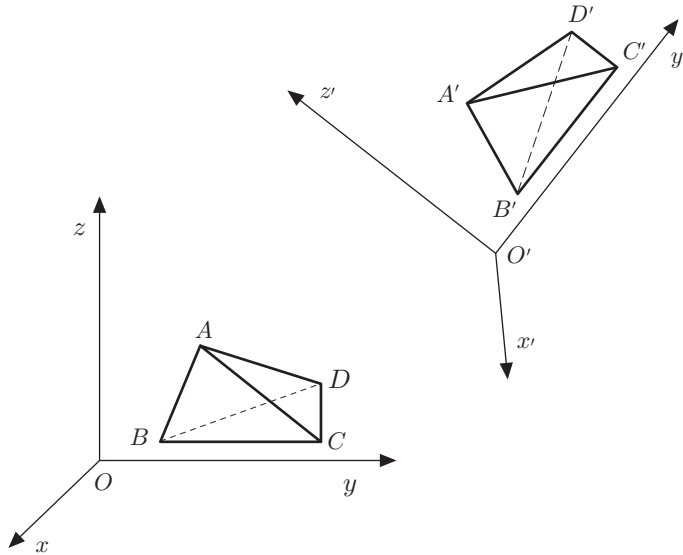


Fig. 3.4

Ne segue che la configurazione geometrica dei sistemi rigidi non dipende dall'osservatore e pertanto rimane immutata anche nel passaggio del sistema dalla posizione S ad S' nel riferimento O . Le figure geometriche, determinate dai punti del sistema rigido in una posizione S , sono dunque uguali a quelle determinate dagli

stessi punti in un'altra posizione S' ; anzi le due figure sono sovrapponibili.

La proprietà di conservazione delle figure geometriche può essere assunta come definizione di sistema rigido, quando si presupponga la nozione di congruenza. Infatti consideriamo il sistema rigido di figura 4 nelle posizioni S ed S' ; se il segmento AB è congruente con $A'B'$ ed il segmento BC con $B'C'$, anche il segmento AC è congruente con $A'C'$. Allora l'angolo $\angle ABC$ è congruente con l'angolo $\angle A'B'C'$, il triangolo ABC col triangolo $A'B'C'$ e così via. Poiché questo ragionamento vale per tre punti qualsiasi del sistema, ne segue che tutte le figure geometriche che possiamo considerare sono congruenti.

Ma una terna di punti qualsiasi è individuata dalle coordinate corrispondenti, dunque la posizione di un sistema rigido è stabilita dalle nove coordinate di tre punti non allineati. Tali coordinate non sono coordinate libere, poiché tra esse hanno luogo tre relazioni che esprimono l'invarianza delle mutue distanze dei tre punti. Se il sistema rigido è libero, cioè non è imposto altro vincolo se non quello della rigidità, sussistono solo le tre relazioni che esprimono l'invarianza delle mutue distanze di tre punti generici del sistema; pertanto i gradi di libertà, o coordinate libere, sono sei, $(9 - 3 = 6)$. Se il sistema rigido è vincolato, il numero di gradi di libertà diminuisce. Infatti se, per esempio, il sistema ha un punto fisso, assunto quest'ultimo come uno dei tre punti, si hanno: le tre coordinate di tale punto e le tre relazioni che stabiliscono le distanze fra i tre punti; dunque 6 relazioni. I gradi di libertà del sistema si riducono a tre, $(9 - 6 = 3)$. Se il sistema rigido ha due punti fissi A e B , cioè può ruotare attorno all'asse da essi individuato, note le sei coordinate di tali punti e le due relazioni che stabiliscono le distanze del terzo punto dai due prefissati, si hanno otto relazioni. Pertanto il sistema rigido ha un solo grado di libertà, $(9 - 8 = 1)$: l'angolo di rotazione attorno all'asse fisso.

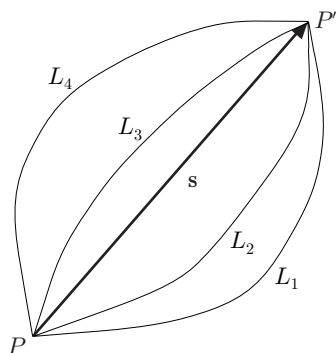


Fig. 3.5

2. Spostamento

Definiamo spostamento di un punto, relativo al passaggio da una posizione P ad una posizione P' il vettore

$$\mathbf{s} = (P' - P). \quad (1)$$

Lo spostamento dipende solo dalla posizione iniziale e finale del punto e non dal suo percorso lungo una qualsiasi linea L , figura 5. Se un punto esegue spostamenti successivi, $\mathbf{s}_1, \mathbf{s}_2, \dots, \mathbf{s}_n$, lo spostamento totale \mathbf{s}_T è dato dalla somma vettoriale degli spostamenti, figura 6.

$$\mathbf{s}_T = \mathbf{s}_1 + \mathbf{s}_2 + \dots + \mathbf{s}_n.$$

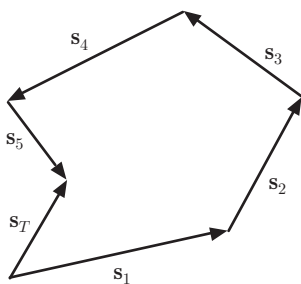


Fig. 3.6

Definiamo spostamento di un sistema di punti, l'insieme degli spostamenti dei punti del sistema relativo al passaggio da una configurazione iniziale ad una configurazione finale.

Un importante spostamento è lo *spostamento rigido*, caratteristico dei sistemi rigidi. In questo caso ad ogni figura geometrica nella posizione iniziale corrisponde una figura congruente nella posizione finale. Per quanto si è detto al paragrafo precedente, per individuare uno spostamento rigido basta dare lo spostamento di tre punti non allineati.

Diamo qualche cenno, omettendo le dimostrazioni che vengono svolte nel corso di Meccanica Razionale, sugli spostamenti rigidi fondamentali.

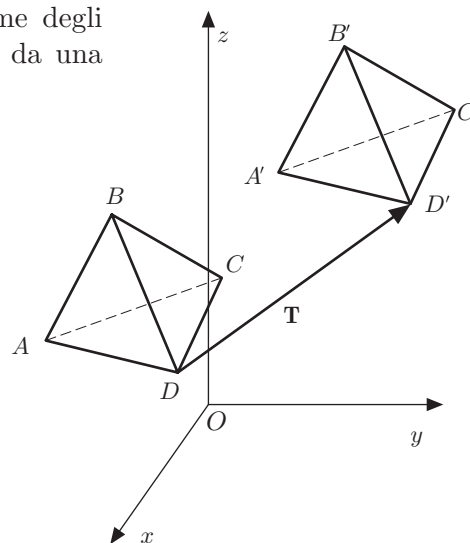


Fig. 3.7

|| 2.1. Spostamento rigido traslatorio

Lo spostamento si dice traslatorio se tutti i punti del sistema subiscono lo stesso spostamento. Questo spostamento comune a tutti i punti si chiama *traslazione* ed è individuato dal vettore traslazione \mathbf{T} .

In figura 7 è mostrato lo spostamento traslatorio di un tetraedro; gli spostamenti $(A' - A)$, $(B' - B)$,... sono tutti uguali.

|| 2.2. Spostamento rigido rotatorio

Uno spostamento rigido è rotatorio se a due punti del sistema compete spostamento nullo. Se A e B sono tali punti, la retta passante per A e B si dice retta fissa dello spostamento rotatorio o asse di rotazione; a tutti i punti di questo asse compete spostamento nullo. Se un punto, non appartenente all'asse, compie uno spostamento $(P' - P)$, è individuato anche lo spostamento del semipiano contenente A, B e P , ed essendo A e B fissi, tale spostamento deve essere rotatorio, figura 8. Per la condizione di rigidità, l'angolo di rotazione è lo stesso qualunque sia il punto giacente nel semipiano. Attribuendo una orientazione all'asse, definita dal versore $\hat{\mathbf{u}}$, risulta stabilito il segno dell'angolo di rotazione che si ritiene positivo se il verso dell'asse coincide con quello dell'avanzamento di una vite destra, negativo al contrario; dunque il versore ed il valore dell'angolo individuano completamente lo spostamento considerato.

Definiamo rotazione il vettore

$$\mathbf{R} = \Delta\varphi \hat{\mathbf{u}}; \quad (2)$$

dunque, assegnato un punto dell'asse, il vettore rotazione individua l'asse, il verso e l'ampiezza della rotazione. Se viene assegnato

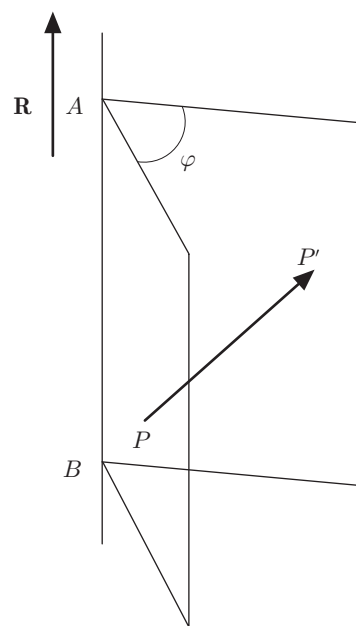


Fig. 3.8

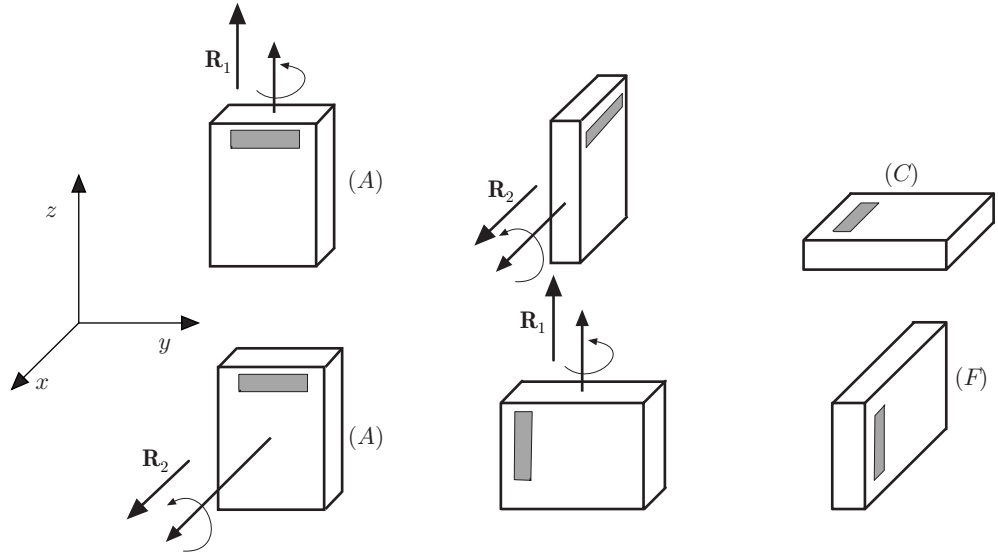


Fig. 3.9

solo \mathbf{R} , risultano determinati l'ampiezza della rotazione e l'orientamento dell'asse, ma non la posizione di quest'ultimo.

È molto importante notare che le rotazioni finite, caratterizzate da modulo e direzione, pur essendo per comodità espresse da vettori, non verificano l'algebra vettoriale. Per convincersene basta considerare le rotazioni di 90° di un libro attorno a due assi ortogonali, come illustrato in figura 9. Fissata la posizione iniziale A , si ruoti il libro attorno all'asse z , impartendo la rotazione \mathbf{R}_1 e successivamente, attorno all'asse x , la rotazione \mathbf{R}_2 ; il libro risulterà nella posizione C . Riportando il libro nella posizione A , imprimiamo per prima la rotazione \mathbf{R}_2 attorno all'asse x e successivamente \mathbf{R}_1 attorno all'asse z . La posizione finale F , è diversa da quella raggiunta in C . Concludiamo che la proprietà commutativa della somma vettoriale non è soddisfatta; in altri termini

$$\mathbf{R}_1 + \mathbf{R}_2 \neq \mathbf{R}_2 + \mathbf{R}_1. \quad (3)$$

Le rotazioni infinitesime viceversa non presentano questo problema. Consideriamo il vettore rotazione infinitesimo $d\varphi \hat{\mathbf{u}}$, ortogonale al piano del foglio ed un punto nella posizione P che per effetto della rotazione giunge in P' , figura 10. I vettori

$$d\varphi \hat{\mathbf{u}} \times (P - O), \quad (P' - P) = d\mathbf{r},$$

hanno rispettivamente moduli $r|d\varphi|$ e $2r|\sin d\varphi/2|$. A meno di infinitesimi di ordine superiore a $|P' - P|$, è manifestamente

$$|P' - P| = |d\varphi \hat{\mathbf{u}} \times (P - O)|,$$

in quanto $2r \sin d\varphi/2 \approx 2rd\varphi/2 = rd\varphi$. Ma, ancora a meno di infi-

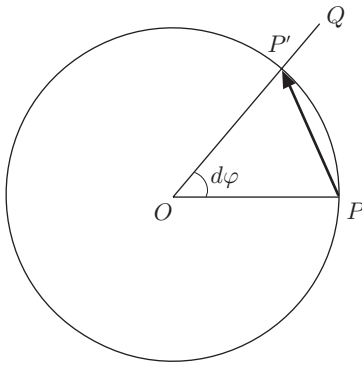


Fig. 3.10

nitesimi di ordine superiore a $|P' - P|$, la direzione di $(P' - P)$, corda PP' , coincide con la direzione della tangente alla circonferenza, lungo cui è diretto il vettore $d\varphi \hat{\mathbf{u}} \times (P - O)$. Pertanto, a meno di infinitesimi di ordine superiore a quelli che si considerano, trascurabili per il teorema fondamentale sugli infinitesimi, scriveremo:

$$(P' - P) = d\mathbf{r} = d\varphi \hat{\mathbf{u}} \times (P - O). \quad (4)$$

Infine se il punto è soggetto a due generici spostamenti $d\mathbf{r}_1$ e $d\mathbf{r}_2$ determinati da due rotazioni infinitesime, si ha

$$\begin{aligned} d\mathbf{r} = d\mathbf{r}_1 + d\mathbf{r}_2 &= d\varphi_1 \hat{\mathbf{u}}_1 \times (P - O) + d\varphi_2 \hat{\mathbf{u}}_2 \times (P - O) \\ &= (d\varphi_1 \hat{\mathbf{u}}_1 + d\varphi_2 \hat{\mathbf{u}}_2) \times (P - O). \end{aligned}$$

Questa relazione esprime che la somma degli spostamenti del punto dovuti a due rotazioni infinitesime è equivalente allo spostamento dovuto alla somma delle rotazioni infinitesime, (*legge del parallelogramma delle rotazioni infinitesime*).

|| 2.3. Spostamento rigido parallelo ad un piano

Uno spostamento rigido nel quale ogni punto subisce uno spostamento parallelo ad un piano, chiamato *piano direttore*, può essere studiato considerando soltanto gli spostamenti in detto piano e si chiama *spostamento piano*. Per esempio, uno spostamento traslatorio è uno spostamento piano, il piano direttore è un piano qualsiasi, parallelo alla traslazione; uno spostamento rotatorio è piano, il piano direttore, in tal caso, è un qualsiasi piano perpendicolare all'asse di rotazione.

|| 2.4. Spostamento rigido polare

Se in un sistema rigido un punto O , chiamato polo o centro dello spostamento, è fisso, lo spostamento del sistema si chiama polare o sferico. Per la condizione di rigidità, gli estremi dei vettori $(P' - O)$ e $(P - O)$ che individuano un generico spostamento $(P' - P)$, appartengono ad una superficie sferica con centro nel polo. Si può dimostrare, e ciò peraltro è intuitivo, che ogni spostamento polare, ad un certo istante, è uno spostamento rotatorio con asse istantaneo di rotazione passante per il polo (Eulero).

|| 2.5. Spostamento rototraslatorio

Uno spostamento rigido composto di uno spostamento traslatorio e di uno rotatorio si chiama *rototraslatorio*. Se in tale spostamento il vettore traslazione ed il vettore rotazione sono paralleli, lo spostamento si dice elicoidale; l'asse dell'elica coincide con l'asse di rotazione; è il caso dell'avanzamento della vite nella sua madrevite.

III 3. Moto del punto

Nello studio del moto di un punto è fondamentale associare ordinatamente alle posizioni P_0, P_1, \dots, P_n del punto, misurate da un certo osservatore, la successione dei valori t_0, t_1, \dots, t_n dei tempi corrispondenti. Nella meccanica classica l'esperienza mostra che due osservatori diversi, nelle situazioni più comuni di esperienza, misurano gli stessi intervalli di tempo. In meccanica relativistica ciò non si verifica ed il tempo va considerato come una coordinata legata all'osservatore, come le coordinate spaziali. Stabilito dunque un tempo *assoluto*, indipendente dall'osservatore, lo scopo della cinematica è quello di stabilire relazioni tra lo spazio percorso dal punto ed il tempo impiegato a percorrerlo.

Fissiamo una terna cartesiana di riferimento solidale con l'osservatore, d'ora in poi terna cartesiana ed osservatore rappresenteranno la stessa cosa e indicheremo l'una o l'altro indifferentemente, e individuiamo la posizione P del punto con un vettore \mathbf{r} che va dall'origine O della terna a P , come in figura 11. L'equazione vettoriale

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(t), \quad (5)$$

definisce l'equazione del moto del punto, che di solito è una funzione regolare. Il vettore $\mathbf{r}(t)$ può essere espresso in forma cartesiana per mezzo delle sue componenti:

$$\mathbf{r}(t) = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j} + z(t)\mathbf{k}. \quad (6)$$

Ciò significa che la (5) equivale alle tre relazioni scalari:

$$x = x(t), \quad y = y(t), \quad z = z(t), \quad (7)$$

che chiamiamo equazioni del moto o moti componenti. Queste equazioni possono anche essere interpretate come le equazioni parametriche della linea L , luogo delle successive posizioni P , che chiamiamo *traiettoria*.

La sola conoscenza della traiettoria non basta a caratterizzare il moto del punto; bisogna associare a questa una legge che ne dia la posizione in funzione del tempo, cioè la legge oraria; per esempio le leggi dei moti componenti espresse dalle (7). Peraltro, note queste ultime, si può ricavare l'equazione della traiettoria eliminando il tempo. Inoltre, una legge che dà la posizione del punto sulla traiettoria in funzione del tempo, si ottiene fissando sulla traiettoria la posizione P_0 , occupata all'istante $t = t_0$, e la posizione generica P all'istante t . La lunghezza s dell'arco P_0P , coordinata curvilinea, contata positivamente secondo un verso prefissato, in funzione del tempo t , individua in ogni istante la posizione P sulla

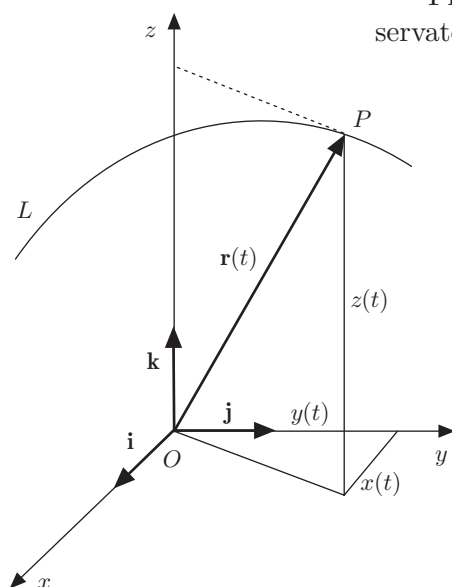


Fig. 3.11

traiettoria. Il moto del punto è dunque individuato assegnando, insieme alla traiettoria, la legge oraria:

$$s = s(t), \quad (8)$$

che in genere è una curva regolare, rappresentabile in un riferimento cartesiano che ha come ascisse il tempo e come ordinate lo spazio s , figura 12.

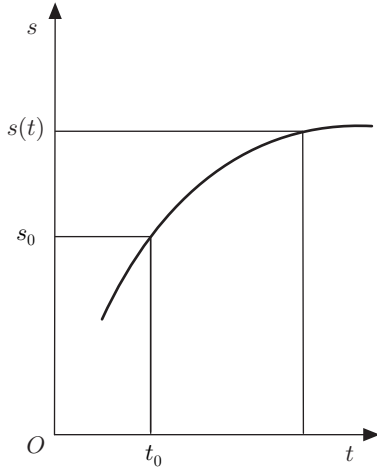


Fig. 3.12

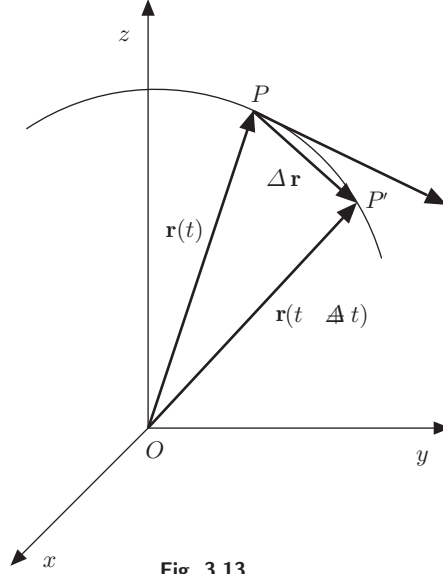


Fig. 3.13

4. Velocità del punto

Consideriamo un punto in moto su una traiettoria la cui posizione P è individuata ad un certo istante t dal vettore $\mathbf{r}(t)$; all'istante $t + \Delta t$ la sua posizione sarà in P' ed il vettore \mathbf{r} avrà subito un incremento:

$$\Delta \mathbf{r} = \mathbf{r}(t + \Delta t) - \mathbf{r}(t),$$

che è lo spostamento del punto nell'intervallo di tempo Δt , figura 13. Il vettore

$$\bar{\mathbf{v}} = \frac{\Delta \mathbf{r}}{\Delta t}, \quad (9)$$

che ha direzione della corda dell'arco PP' , definisce la velocità media nell'intervallo di tempo Δt . Se consideriamo intervalli di tempo sempre più piccoli, infinitesimi, la velocità media relativa a questi intervalli diverrà sempre più prossima alla velocità del punto mobile all'istante t e scriveremo:

$$\mathbf{v} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \mathbf{r}}{\Delta t} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \dot{\mathbf{r}}. \quad (10)$$

La velocità istantanea è uguale alla derivata del vettore \mathbf{r} rispetto al tempo. Indicheremo la derivata di una grandezza funzione del

tempo, soprasegnando con un punto la grandezza stessa. L'operazione analitica di derivazione assume così un preciso significato fisico.

Nel *SI* la velocità si misura in metri al secondo (m/s).

Il vettore velocità è diretto come la tangente alla traiettoria in P , figura 13; infatti $\Delta \mathbf{r}$ è diretto lungo la corda dell'arco PP' e quando si considerano intervalli di tempo infinitesimi, cioè P' tende a P , la corda tende alla tangente alla traiettoria; la direzione del vettore velocità è concorde col verso del moto.

Il modulo del vettore velocità è dato dal rapporto fra la lunghezza infinitesima della corda dr che congiunge due punti infinitamente vicini e l'intervallo infinitesimo di tempo dt corrispondente. È ovvio che in queste condizioni, a meno di infinitesimi di ordine superiore, dr coincide con l'elemento di arco ds , pertanto il modulo della velocità sarà:

$$v = \left| \frac{ds}{dt} \right| = |\dot{s}|. \quad (11)$$

In altri termini: il modulo della velocità istantanea coincide col valore assoluto della derivata della lunghezza dell'arco rispetto al tempo.

Questa definizione ha anche una interpretazione geometrica: infatti consideriamo la curva oraria di figura 14; la velocità media, rapporto tra la lunghezza dell'arco o spazio percorso ed il corrispondente intervallo di tempo, $\Delta s / \Delta t$, è rappresentata dal valore numerico di $\tan \theta_0$. Allorché gli intervalli di tempo diventano sempre più piccoli, infinitesimi, il modulo della velocità media tende al modulo della velocità all'istante t ed è rappresentata dal valore numerico di $\tan \theta$, dove θ è l'angolo che forma la tangente alla curva oraria con l'asse orizzontale in corrispondenza all'istante t .

Il vettore velocità, indicando con $\boldsymbol{\tau}$ il versore della tangente alla traiettoria, può essere rappresentato in forma intrinseca o riferita all'arco, con la notazione

$$\mathbf{v} = \frac{ds}{dt} \boldsymbol{\tau} = \dot{s} \boldsymbol{\tau}. \quad (12)$$

Se $\mathbf{r}(t)$ è dato dalla (6), essendo i versori della terna di riferimento costanti perché la terna è fissa, la sua derivata è semplicemente:

$$\mathbf{v} \equiv \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \dot{x}(t) \mathbf{i} + \dot{y}(t) \mathbf{j} + \dot{z}(t) \mathbf{k}. \quad (13)$$

La velocità è così espressa in forma cartesiana mediante le derivate delle componenti di \mathbf{r} , le quali non sono altro che le componenti cartesiane della velocità:

$$v_x = \frac{dx}{dt} \equiv \dot{x}(t), \quad v_y = \frac{dy}{dt} \equiv \dot{y}(t), \quad v_z = \frac{dz}{dt} \equiv \dot{z}(t).$$

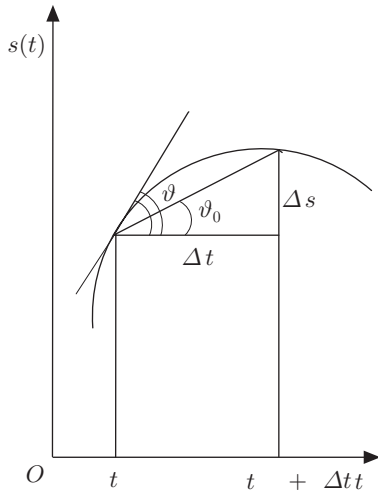


Fig. 3.14

Il modulo della velocità è quindi

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2} \equiv \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}. \quad (14)$$

Siamo ora in grado di esprimere la lunghezza dell'arco di traiettoria. Infatti scegliendo un arco infinitesimo ds e considerando un parallelepipedo elementare, di spigoli dx , dy , dz , tale che ds ne congiunga due vertici opposti, a meno di infinitesimi di ordine superiore, possiamo scrivere:

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2} = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2} dt, \quad (15)$$

da cui

$$s = \pm \int_{t_0}^t \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2} dt, \quad (16)$$

relazione che, una volta precisato il segno, dipendente dal verso fissato sulla traiettoria, permette di trovare la lunghezza dell'arco s in funzione del tempo.

Dividendo la (15) per dt , si ha

$$\left| \frac{ds}{dt} \right| = \sqrt{\left(\frac{dx}{dt} \right)^2 + \left(\frac{dy}{dt} \right)^2 + \left(\frac{dz}{dt} \right)^2} = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2},$$

che, in conformità con la (14), dà il modulo della velocità.

5. Moto dei sistemi di punti

Si definisce *atto di moto* di un sistema di punti la distribuzione delle velocità di tutti i punti del sistema, ad un certo istante.

Se \mathbf{v}_i è la velocità del generico punto all'istante t , essendo $\mathbf{v}_i = d\mathbf{r}_i/dt$, si ottiene $d\mathbf{r}_i = \mathbf{v}_i dt$, che rappresenta lo spostamento infinitesimo del punto nella posizione P_i , nell'intervallo di tempo dt . L'insieme degli spostamenti infinitesimi di tutti i punti si chiama spostamento elementare del sistema all'istante t .

Particolare importanza presenta l'atto di moto dei sistemi rigidi; in questo caso è opportuno definire una terna cartesiana $Oxyz$, solidale col sistema, in moto rispetto ad una terna fissa $\Omega\xi\eta\zeta$, figura 15. In questa rappresentazione ogni punto P del sistema, pur muovendosi rispetto a $\Omega\xi\eta\zeta$, durante il moto ha sempre posizione invariata rispetto a $Oxyz$; in altri termini le coordinate x, y, z di P risultano costanti, ossia indipendenti dal tempo. Il moto di P , rispetto a $\Omega\xi\eta\zeta$, è completamente definito una volta prefissate le sue coordinate x, y, z , costanti rispetto a $Oxyz$, e la posizione della terna solidale rispetto a quella fissa; allo scopo basta assegnare la posizione dell'origine O

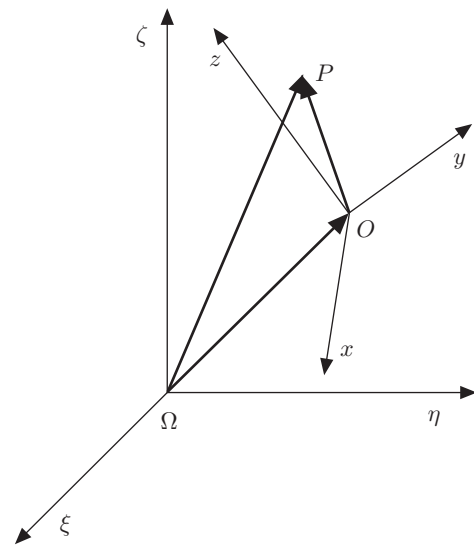


Fig. 3.15

e i versori degli assi $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ di $Oxyz$, in funzione del tempo. Allora l'equazione del moto di P è data dalla relazione:

$$(P - \Omega) = (O - \Omega) + x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}.$$

Oppure, sottintendendo Ω , perché fisso:

$$P = O + x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}.$$

|| 5.1. Atto di moto rigido traslatorio

Se il sistema trasla rigidamente, tutti i suoi punti, ad un certo istante, sono animati della stessa velocità. I versori $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ della terna $Oxyz$ mantengono costante la loro direzione; perciò detta \mathbf{v}_O la velocità dell'origine della terna solidale col sistema, funzione del tempo, questo solo vettore individua l'atto di moto traslatorio dell'intero sistema, rispetto alla terna $\Omega\xi\eta\zeta$. Se \mathbf{v}_O è costante, il moto si dice traslatorio uniforme. Manifestamente $d\mathbf{r}_O = \mathbf{v}_O dt$, individua lo spostamento traslatorio elementare del sistema.

|| 5.2. Atto di moto rigido rotatorio

Si è visto che lo spostamento rigido rotatorio attorno ad un asse fisso, passante per due punti A e B del sistema, ai quali compete spostamento nullo, è individuato dal vettore rotazione $\Delta\varphi \hat{\mathbf{u}}$. Se l'angolo di rotazione è una funzione nota del tempo $\varphi = \varphi(t)$, il rapporto $\Delta\varphi/\Delta t$ tra l'angolo di rotazione e l'intervallo di tempo impiegato a descriverlo, definisce la velocità angolare media $\bar{\omega}$ del moto rotatorio; in simboli:

$$\bar{\omega} = \frac{\Delta\varphi}{\Delta t}.$$

La velocità angolare istantanea è data da

$$\omega = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta\varphi}{\Delta t} = \frac{d\varphi}{dt} \equiv \dot{\varphi},$$

cioè dalla derivata rispetto al tempo dell'angolo di rotazione. La velocità angolare si misura in rad/s . In base alla convenzione stabilita sul verso di percorrenza degli angoli, la velocità angolare sarà positiva o negativa se il moto rotatorio è destro o sinistro, rispetto all'asse orientato.

Si noti che in un moto rotatorio tutti i punti del sistema si muovono di moto circolare in piani ortogonali all'asse di rotazione, luogo dei punti dei centri delle circonferenze descritte dai punti del sistema.

Servendoci del vettore rotazione $\Delta\varphi \hat{\mathbf{u}}$, definiamo vettore velocità angolare la grandezza

$$\boldsymbol{\omega} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta\varphi}{\Delta t} \hat{\mathbf{u}} = \frac{d\varphi}{dt} \hat{\mathbf{u}} = \frac{d\boldsymbol{\varphi}}{dt}, \quad (17)$$

dove si è posto $d\varphi \hat{\mathbf{u}} = d\boldsymbol{\varphi}$, vettore rotazione infinitesimo.

Nel moto rotatorio la velocità angolare $\boldsymbol{\omega}$ ha direzione parallela all'asse di rotazione, ed il suo modulo è funzione del tempo.

In conformità con la (4), lo spostamento infinitesimo $d\mathbf{r}$ di un generico punto del sistema è dato da:

$$d\mathbf{r} = d\boldsymbol{\varphi} \times (\mathbf{P} - \Gamma) = d\boldsymbol{\varphi} \times \mathbf{r},$$

dove $\mathbf{r} = (\mathbf{P} - \Gamma)$ è il vettore che individua il punto rispetto ad un punto Γ , che riterremo fisso, scelto arbitrariamente sull'asse di rotazione.

Poiché $d\mathbf{r} = \mathbf{v}dt$, dalla precedente si ottiene la velocità del punto:

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt} = \mathbf{v} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}. \quad (18)$$

Questa equazione individua ad ogni istante l'atto di moto rotatorio del sistema; figura 16. La velocità angolare ad ogni istante assume un unico valore mentre le velocità dei vari punti del sistema sono diverse. Il moto rotatorio è uniforme se $\boldsymbol{\omega}$ è costante.

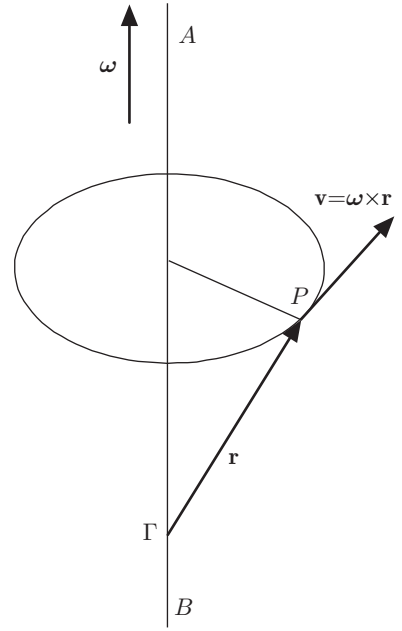


Fig. 3.16

|| 5.3. Atto di moto rigido polare

Ricordiamo che in uno spostamento polare rigido un punto O (polo) rimane fisso. L'atto di moto polare è descritto da equazioni identiche alle (17) e (18); però, a differenza di quanto avviene nel moto rotatorio, il vettore $\boldsymbol{\omega}$ varia da istante ad istante in modulo e direzione; la rotazione avviene attorno ad un asse istantaneo di rotazione passante per il polo O . Dimostriamo ora come per il moto polare sia possibile determinare, in ogni istante, il vettore $\boldsymbol{\omega}$ che, per la (18), permette di individuare l'atto di moto.

La terna cartesiana fissa e la terna mobile, solidale col sistema rigido, animato dal moto polare, hanno la stessa origine, $O \equiv \Omega$; allora i versori degli assi della terna solidale, mutando ad ogni istante di direzione, sono funzioni del tempo:

$$\mathbf{i} = \mathbf{i}(t), \quad \mathbf{j} = \mathbf{j}(t), \quad \mathbf{k} = \mathbf{k}(t).$$

Sostituendo nella (18), al posto di \mathbf{r} , successivamente \mathbf{i} , \mathbf{j} , \mathbf{k} , si ha:

$$\frac{d\mathbf{i}}{dt} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{i}, \quad \frac{d\mathbf{j}}{dt} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{j}, \quad \frac{d\mathbf{k}}{dt} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{k}. \quad (19)$$

Moltiplicando scalarmente la prima per \mathbf{j} , la seconda per \mathbf{k} , la terza per \mathbf{i} e ricordando le proprietà del prodotto misto, paragrafo 7-II,

si ottiene:

$$\frac{d\mathbf{i}}{dt} \cdot \mathbf{j} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{i} \cdot \mathbf{j} = \boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{i} \times \mathbf{j} = \boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{k},$$

ed analogamente

$$\frac{d\mathbf{j}}{dt} \cdot \mathbf{k} = \boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{i}, \quad \frac{d\mathbf{k}}{dt} \cdot \mathbf{i} = \boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{j}.$$

Queste relazioni danno semplicemente le componenti cartesiane di $\boldsymbol{\omega}$ secondo gli assi della terna mobile; si ha dunque:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\omega} &= \left(\frac{d\mathbf{j}}{dt} \cdot \mathbf{k} \right) \mathbf{i} + \left(\frac{d\mathbf{k}}{dt} \cdot \mathbf{i} \right) \mathbf{j} + \left(\frac{d\mathbf{i}}{dt} \cdot \mathbf{j} \right) \mathbf{k} \\ &= \omega_x \mathbf{i} + \omega_y \mathbf{j} + \omega_z \mathbf{k}, \end{aligned} \quad (20)$$

che risolve il problema, una volta note le funzioni $\mathbf{i}(t)$, $\mathbf{j}(t)$, $\mathbf{k}(t)$.

Le (19) e (20) sono note sotto il nome di *formule di Poisson*.

È importante notare come le (19) possano essere espresse mediante una unica formula. Consideriamo infatti un generico vettore \mathbf{V} , costante rispetto alla terna $Oxyz$, solidale col sistema rigido in moto. Con riferimento alla terna fissa $\Omega\xi\eta\zeta$, derivando rispetto al tempo l'identità

$$\mathbf{V} = V_x \mathbf{i} + V_y \mathbf{j} + V_z \mathbf{k},$$

si ottiene:

$$\frac{d\mathbf{V}}{dt} = V_x \frac{d\mathbf{i}}{dt} + V_y \frac{d\mathbf{j}}{dt} + V_z \frac{d\mathbf{k}}{dt},$$

e tenendo presente le (19),

$$\frac{d\mathbf{V}}{dt} = V_x (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{i}) + V_y (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{j}) + V_z (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{k}).$$

Raccogliendo $\boldsymbol{\omega}$ a fattor comune:

$$\frac{d\mathbf{V}}{dt} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{V}. \quad (21)$$

Questa espressione comprende ovviamente, come casi particolari, le equazioni (19).

|| 5.4. Atto di moto rigido rototraslatorio

Consideriamo un sistema rigido animato di moto rotatorio, con velocità angolare $\boldsymbol{\omega}$ di direzione fissa, e di velocità di traslazione \mathbf{v}_T , entrambe funzioni solo del tempo. Tenuto conto della (18), la velocità di un generico punto P del sistema, rispetto al riferimento fisso $\Omega\xi\eta\zeta$, è data dalla relazione:

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_T + \boldsymbol{\omega} \times (P - \Gamma), \quad (22)$$

dove Γ è un qualsiasi punto dell'asse di rotazione. Il moto così definito si dice rototraslatorio e la velocità del punto è, istante

per istante, somma delle velocità di traslazione \mathbf{v}_T e di rotazione $\boldsymbol{\omega} \times (P - \Gamma)$, quest'ultima dipendente da P , figura 17.

La velocità del punto P può essere espressa in infiniti modi. Infatti, scelto un qualsiasi punto O , solidale col sistema rigido, in accordo con la (22), la velocità di tale punto sarà

$$\mathbf{v}_O = \mathbf{v}_T + \boldsymbol{\omega} \times (O - \Gamma),$$

e sottraendo membro a membro dalla (22), si ottiene:

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_O + \boldsymbol{\omega} \times (P - O), \quad (23)$$

Questa equazione presenta analogia formale con la (22), ma ne differisce per il fatto che O è un generico punto mobile del sistema. È chiaro però che il vettore $\boldsymbol{\omega} \times (P - O)$ ha la stessa caratteristica del vettore $\boldsymbol{\omega} \times (P - \Gamma)$, solo nella terna in cui sia fisso O e costante la direzione di $\boldsymbol{\omega}$. Per l'invariabilità della direzione di $\boldsymbol{\omega}$, tale è la terna con origine in O , assi paralleli a quelli della terna $\Omega\xi\eta\zeta$, che pertanto è animata di moto traslatorio di velocità \mathbf{v}_O , dipendente solo dal tempo, come \mathbf{v}_T . In questa terna il moto rotatorio avviene attorno all'asse passante per O e parallelo ad $\boldsymbol{\omega}$.

Un moto rototraslatorio di particolare importanza è il *moto rototraslatorio uniforme*, in cui sia \mathbf{v}_T che $\boldsymbol{\omega}$ sono *costanti* rispetto alla terna $\Omega\xi\eta\zeta$. In queste condizioni risultano altresì costanti sia \mathbf{v}_O che $\boldsymbol{\omega}$ rispetto alla terna $Oxyz$. Dimostriamo ora che nel moto rototraslatorio uniforme, la velocità del punto può essere rappresentata in modo che la velocità di traslazione risulti parallela a $\boldsymbol{\omega}$, ossia in modo che il moto considerato risulti elicoidale.

Scomponiamo infatti \mathbf{v}_T nei componenti \mathbf{v}_{\parallel} e \mathbf{v}_{\perp} , rispettivamente parallelo e ortogonale a $\boldsymbol{\omega}$. A causa dell'ortogonalità di \mathbf{v}_{\perp} ed $\boldsymbol{\omega}$, esiste un particolare punto Q tale che:

$$\mathbf{v}_{\perp} = -\boldsymbol{\omega} \times (Q - \Gamma), \quad (24)$$

dove $(Q - \Gamma)$ è un vettore costante, al pari di \mathbf{v}_T ed $\boldsymbol{\omega}$, figura 18.

Scrivendo la (22) come:

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_{\parallel} + \mathbf{v}_{\perp} + \boldsymbol{\omega} \times (P - \Gamma),$$

e sostituendovi la (24), si ottiene:

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_{\parallel} - \boldsymbol{\omega} \times (Q - \Gamma) + \boldsymbol{\omega} \times (P - \Gamma) = \mathbf{v}_{\parallel} + \boldsymbol{\omega} \times (P - Q).$$

Il moto risulta elicoidale attorno ad un asse passante per Q e parallelo ad $\boldsymbol{\omega}$. Appare dunque giustificato, una volta individuato Q , chiamare elicoidale qualunque moto rototraslatorio uniforme.

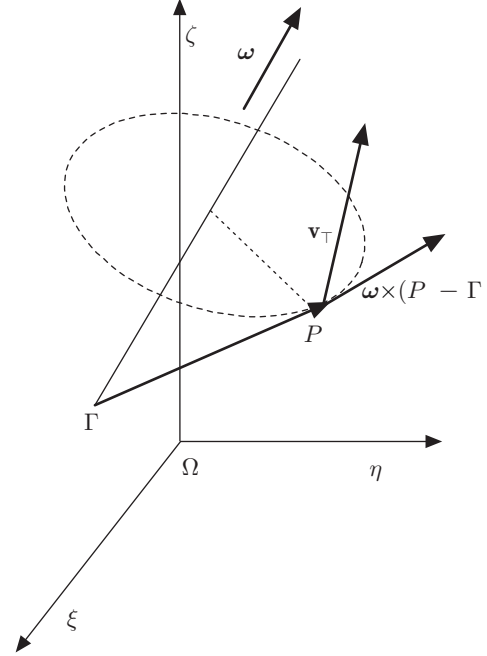


Fig. 3.17

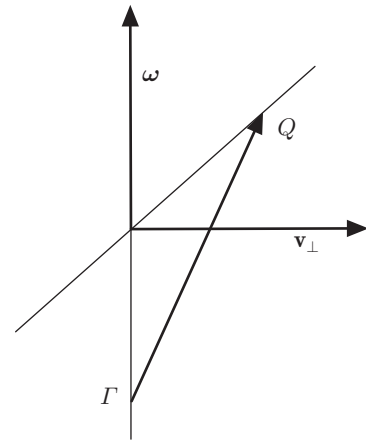


Fig. 3.18

Al fine di determinare il punto Q , si osservi che il prodotto vettoriale $\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}_\perp$ rappresenta il vettore di modulo ωv_\perp , ruotato di 90° in senso antiorario rispetto a \mathbf{v}_\perp ; perciò il prodotto vettoriale $\boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}_\perp)$ risulta un vettore opposto a \mathbf{v}_\perp e pari a $-\omega^2 \mathbf{v}_\perp$. Dunque:

$$\mathbf{v}_\perp = -\frac{1}{\omega^2} \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}_\perp).$$

Ma, tenuto conto della (24), si ha:

$$\boldsymbol{\omega} \times (Q - \Gamma) = \frac{1}{\omega^2} \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}_\perp),$$

ossia:

$$(Q - \Gamma) = \frac{1}{\omega^2} (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}_\perp) \equiv \frac{1}{\omega^2} (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}_T). \quad (25)$$

La (25) è l'equazione vettoriale dell'asse del moto elicoidale, passante per Q , parallelo sia a \mathbf{v}_\parallel che alla velocità angolare, che viene chiamato anche *asse del moto rototraslatorio uniforme*. Dunque ogni atto di moto rototraslatorio uniforme può essere ricondotto ad un moto elicoidale e, in particolare, se $\mathbf{v}_\parallel = 0$, ad un moto rotatorio.

Consideriamo ora il moto rototraslatorio più generale, in cui $\boldsymbol{\omega}$ può cambiare di direzione istante per istante. Si osservi che il vettore $(P - O)$, per quanto detto al paragrafo 5, è costante rispetto alla terna $Oxyz$ solidale col sistema. Pertanto, in virtù della (21), la sua derivata rispetto al tempo, nel riferimento fisso, risulta:

$$\frac{d(P - O)}{dt} = \boldsymbol{\omega} \times (P - O), \quad \Rightarrow \quad \frac{d\vec{P}}{dt} - \frac{d\vec{O}}{dt} = \boldsymbol{\omega} \times (P - O),$$

ossia:

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_O + \boldsymbol{\omega} \times (P - O), \quad (26)$$

relazione analoga alla (23), dove, come s'è detto, \mathbf{v}_O rappresenta la velocità di traslazione del riferimento solidale e $\boldsymbol{\omega} \times (P - O)$, con $\boldsymbol{\omega}$ definito dalla (20), rappresenta la velocità di rotazione del sistema attorno ad un asse istantaneo, passante per O .

La (26) si può ritenere l'equazione più generale del moto rigido rototraslatorio, ove si considerino i valori assunti dai vettori $\mathbf{v}(t)$, $\mathbf{v}_O(t)$ e $\boldsymbol{\omega}(t)$ al tempo t .

Dunque l'atto di moto rototraslatorio è lo stesso che si avrebbe se il sistema fosse animato, all'istante t , di moto rototraslatorio uniforme. Per quanto si è detto prima, nell'istante considerato, esso è riconducibile ad un moto elicoidale. Come variano nel tempo i vettori \mathbf{v} ed $\boldsymbol{\omega}$, varia altresì il moto elicoidale istantaneo. La retta passante per O , parallela ad $\boldsymbol{\omega}$ si chiama *asse istantaneo di rotazione*, mentre l'asse istantaneo del moto elicoidale, anch'esso parallelo ad $\boldsymbol{\omega}$, si dice *asse di moto* del sistema rigido nell'istante considerato.

L'equazione dell'asse di moto è analoga alla (25):

$$(Q - O) = \frac{1}{\omega^2}(\omega \times \mathbf{v}_O). \quad (27)$$

Indicando con \mathbf{r}_O il vettore $(P - O)$, dalla (26), si ottiene lo spostamento elementare:

$$d\mathbf{r} = \mathbf{v}dt = \overrightarrow{dO} + \omega dt \times \mathbf{r}_O.$$

Moltiplicando scalarmente la (26) per ω , si ha

$$\mathbf{v} \cdot \omega = \mathbf{v}_O \cdot \omega = \text{cost}, \quad (28)$$

relazione valida anche con riferimento alle (22) e (23).

Si deduce che le velocità di ogni punto del sistema hanno la stessa componente v_{\parallel} secondo una retta parallela ad ω . La (28) si chiama *trinomio invariante* dell'atto di moto rigido perché costituito dalla somma dei prodotti delle componenti omonime. Naturalmente l'invarianza non si riferisce al tempo da cui il trinomio dipende.

Affinché il trinomio si annulli è necessario e sufficiente che le velocità \mathbf{v} e ω siano mutuamente ortogonali oppure che una di esse sia nulla. Per esempio in un atto di moto rigido rotatorio il trinomio invariante è nullo, poiché la velocità di qualunque punto è sempre ortogonale alla velocità angolare.

La velocità di un punto, ad ogni istante, si può dunque esprimere come somma della velocità di traslazione \mathbf{v}_{\parallel} , parallela a ω , comune a tutti i punti,

$$\mathbf{v}_{\parallel} = \frac{\mathbf{v} \cdot \omega}{\omega}$$

e di una velocità $\mathbf{v} - \mathbf{v}_{\parallel}$, ortogonale a ω , diversa per ogni punto.

|| 5.5. Atto di moto rigido piano

Nel moto rigido piano, come nello spostamento rigido piano, la velocità di un punto giace sempre in un piano parallelo al piano direttore. Tali sono il moto rigido traslatorio ed il moto rigido rotatorio; in quest'ultimo, invariabile nel tempo è la direzione di ω , ortogonale al piano direttore. L'invariante scalare è sempre nullo. Nel moto rigido piano la componente della velocità parallela ad ω è sempre nulla, $\mathbf{v}_{\parallel} = 0$, pertanto un atto di moto rigido piano rototraslatorio, si può ridurre sempre ad un atto di moto rotatorio con asse istantaneo di rotazione, che è anche l'asse di moto, ortogonale al piano direttore. Tale asse incontra il piano direttore in un punto Q , chiamato *centro istantaneo di rotazione*, che può essere determinato per mezzo della (27). Graficamente, note le velocità di due punti P_1 e P_2 , che giacciono nel piano direttore e, all'istante t , sono tangenti alle loro traiettorie, il punto

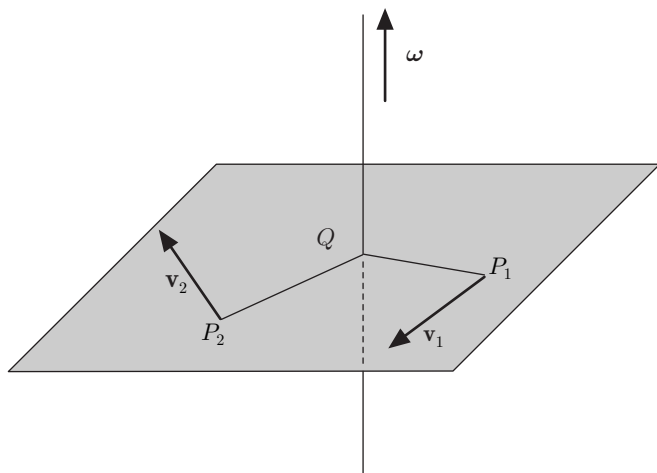


Fig. 3.19

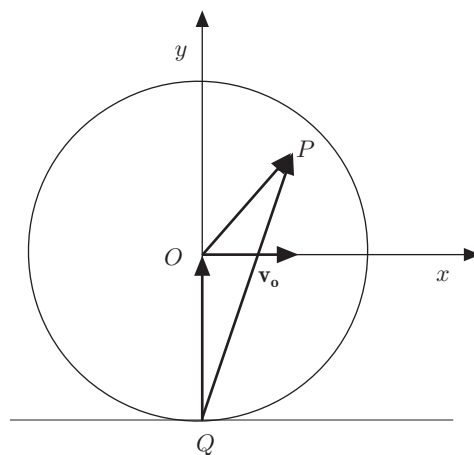


Fig. 3.20

di intersezione delle loro normali determina univocamente il centro istantaneo di rotazione, figura 19.

Esempi

- ||| 1. Un corpo rigido ruota attorno ad un asse che passa per l'origine di una terna di riferimento ortogonale e forma angoli uguali con gli assi coordinati. Determinare la velocità di un punto posto sull'asse x di ascissa $x = 3\text{ m}$, sapendo che la velocità angolare è costante ed ha modulo $2\pi\text{ rad/s}$.

Poiché i coseni direttori dell'asse di rotazione sono uguali, è

$$3 \cos^2 \alpha = 1, \quad \Rightarrow \quad \cos \alpha = \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

Le componenti di ω sono

$$\omega_x = \omega_y = \omega_z = \frac{\omega}{\sqrt{3}};$$

pertanto

$$\omega = \frac{\omega}{\sqrt{3}}(\mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k}).$$

Essendo

$$\mathbf{v} = \omega \times \mathbf{r}, \quad \mathbf{r} = x\mathbf{i},$$

e svolgendo il prodotto vettoriale si ottiene

$$\mathbf{v} = \frac{\omega x}{\sqrt{3}}(\mathbf{j} - \mathbf{k}), \quad v = \sqrt{\frac{2}{3}} \omega x = 15\text{ m/s}$$

- ||| 2. Un disco di raggio R rotola in un piano orizzontale, lungo una retta orientata nel verso del moto. La velocità del centro O del disco sia \mathbf{v}_O , parallela alla retta, come in figura 20. Trovare il centro istantaneo di rotazione.

Si tratta di un moto piano in cui il piano direttore è quello del foglio. Fissato un riferimento solidale col disco, con origine nel centro O , asse x parallelo alla retta lungo cui avanza il disco, e asse z ortogonale ad esso, positivo uscente, la velocità angolare ha come unica componente lungo z , $-\omega$. Dalla (27), svolgendo il prodotto vettoriale e chiamando x_Q e y_Q le coordinate del centro istantaneo di rotazione Q , si deduce

$$x_Q = 0, \quad y_Q = -\frac{v_O}{\omega}.$$

Il punto Q , in ogni istante, ha velocità nulla, perciò

$$v_O = |\boldsymbol{\omega} \times (O - Q)| = \omega R,$$

e le precedenti diventano

$$x_Q = 0, \quad y_Q = -\frac{v_O}{\omega} = -R.$$

Il centro istantaneo di rotazione coincide con la traccia della generatrice del disco nel punto di contatto con la retta orizzontale.

La velocità di un punto P del disco è

$$\mathbf{v} = \boldsymbol{\omega} \times (P - Q),$$

Tenendo conto che $(P - Q) = (O - Q) + (P - O)$, si può scrivere

$$\mathbf{v} = \boldsymbol{\omega} \times [(O - Q) + (P - O)] = \mathbf{v}_O + \boldsymbol{\omega} \times (P - O).$$

Il moto di rotolamento è rototraslatorio; composto da una traslazione con velocità \mathbf{v}_O , parallela alla retta orizzontale, e una rotazione attorno all'asse del disco.

Il centro istantaneo di rotazione può anche essere determinato, osservando che la velocità di Q dev'essere nulla istante per istante. Dalla (23) si ha

$$\mathbf{v}_Q = \mathbf{v}_O + \boldsymbol{\omega} \times (Q - O) = 0, \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{\omega} \times (Q - O) = -\mathbf{v}_O;$$

nel punto Q le velocità rotazionale e traslazionale sono opposte.

Svolgendo il prodotto vettoriale, nel riferimento O , si ottiene

$$x_Q = 0, \quad y_Q = -\frac{v_O}{\omega} = -R,$$

come prima.

Si osservi ancora che la velocità di un punto del disco può essere espressa dal termine di pura rotazione, $\mathbf{v} = \boldsymbol{\omega} \times (P - Q)$, oppure come somma della velocità di traslazione e di quella di rotazione attorno all'asse del disco, $\mathbf{v} = \mathbf{v}_O + \boldsymbol{\omega} \times (O - Q)$. In ogni caso la velocità è tangente alla traiettoria che, vista dall'osservatore solidale col piano direttore, è una cicloide, figura 21.

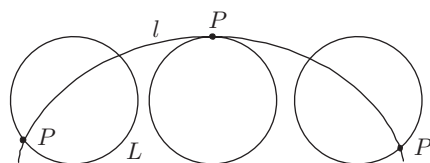


Fig. 3.21

In Meccanica Razionale si dimostra in generale, che il luogo dei punti Q , traccia dell'asse istantaneo del moto, visti dall'osservatore fisso col piano direttore, è una linea L che si chiama *base* del moto; mentre tale luogo, visto da un osservatore solidale con la figura mobile, è una linea l che si chiama *rulletta* del moto. In ogni istante base e rulletta hanno in comune il centro Q di istantanea rotazione.

Nel caso del disco che rotola, la base è la retta orizzontale e la rulletta la circonferenza che rappresenta il disco; in questo moto il centro O della rulletta, rispetto all'osservatore fisso, si muove di moto rettilineo con velocità \mathbf{v}_O , parallela alla base, mentre la base, rispetto all'osservatore solidale con la rulletta, è dotata di moto traslatorio con velocità $-\mathbf{v}_O$. Si realizza così la trasformazione per frizione di un moto rotatorio attorno ad O , in un moto traslatorio e viceversa.

Se la base è una circonferenza e la rulletta un'altra circonferenza, facendo rotolare senza strisciare la seconda sulla prima si ottiene un moto epicicloidale, se la seconda circonferenza è esterna alla prima, un moto ipocicloidale in caso contrario; un punto della rulletta genera rispettivamente una epicicloide o

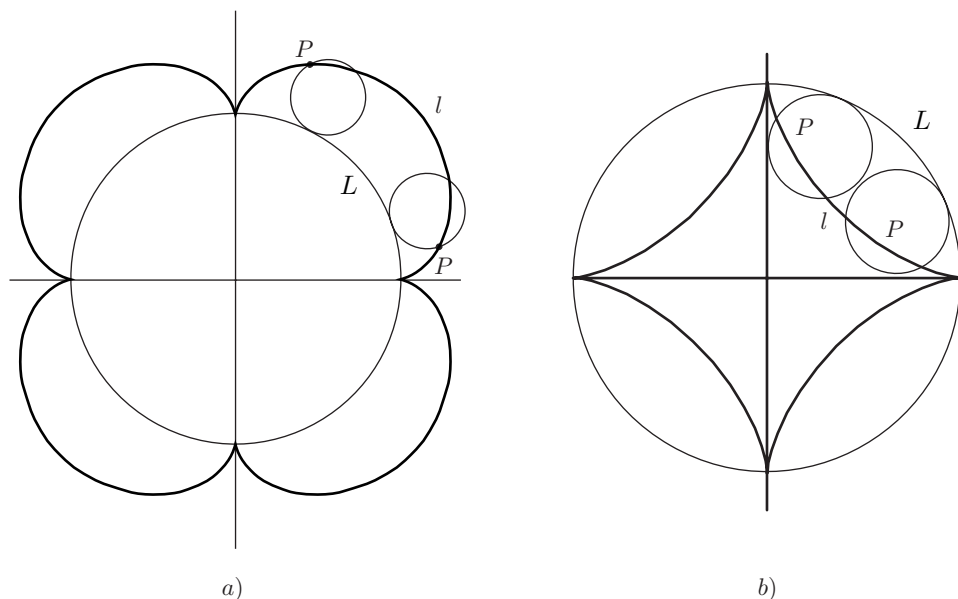


Fig. 3.22

una ipocicloide. In figura 22 sono mostrate tali traiettorie, nel caso in cui il rapporto tra il raggio R della base e il raggio r della rulletta è uguale a 4.

In questo moto il centro O' della rulletta ruota attorno al centro O della base con velocità angolare Ω . Un osservatore ruotante rispetto ad O con velocità angolare Ω , vede il centro O' fisso, e la base ruotante rigidamente attorno ad O con velocità angolare $-\Omega$. La rulletta ruota attorno ad O' senza strisciare sulla base, e deve avere una velocità angolare ω tale che la velocità del punto di contatto Q sia uguale a $-\Omega R$. Ne segue:

$$-\Omega R = \mp \omega r,$$

valendo il segno positivo o il segno negativo se il moto è epicicloidale o ipocicloidale. In ogni caso si ha

$$\left| \frac{\Omega}{\omega} \right| = \frac{r}{R};$$

il rapporto tra le velocità angolari è costante e si realizza la trasformazione per frizione di un moto rotatorio attorno ad O in un moto rotatorio attorno ad O' e viceversa.

- III 3. Una trave è appoggiata su rulli di raggio R che rotolano senza strisciare rispetto alla trave e rispetto al terreno. Determinare il legame che intercorre tra la velocità di avanzamento della trave e quella dei rulli, figura 23.

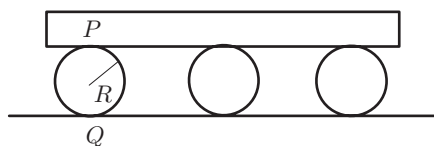


Fig. 3.23

L'asse istantaneo di rotazione di ogni rullo passa per il punto Q di contatto col terreno; la velocità di avanzamento dei rulli è in modulo $v_O = \omega R$, mentre la velocità del punto P , dove il rullo tocca la trave ha modulo $v_P = 2\omega R$. Questa è pure la velocità di avanzamento della trave, doppia di quella dei rulli.

I rulli restano indietro rispetto alla trave e se si dispone di un numero limitato di essi, per percorrere un lungo tratto, è necessario raccogliere quelli che restano dietro e portarli davanti alla trave. Questo metodo di trasporto apparve certamente spontaneo ai primitivi, finché qualcuno non ebbe l'idea geniale di collegare rigidamente agli estremi della trave due assi orizzontali alle cui estremità sistemò quattro dischi forati al centro. La ruota era inventata.

6. Accelerazione del punto

Consideriamo un punto P che si muove su una certa traiettoria; sia $\mathbf{v}(t)$ la sua velocità all'istante t e $\mathbf{v}(t + \Delta t)$ la velocità all'istante $t + \Delta t$; $\Delta \mathbf{v} = \mathbf{v}(t + \Delta t) - \mathbf{v}(t)$ sarà la variazione di velocità durante l'intervallo di tempo considerato, figura 24.

Si definisce accelerazione media il rapporto

$$\bar{\mathbf{a}} = \frac{\Delta \mathbf{v}}{\Delta t},$$

che è un vettore diretto come $\Delta \mathbf{v}$ e indica la rapidità con cui varia la velocità nell'intervallo di tempo Δt .

Se consideriamo intervalli di tempo sempre più piccoli, infinitesimi, l'accelerazione media tende all'accelerazione all'istante t , che indichiamo col vettore \mathbf{a} , cioè:

$$\mathbf{a} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \mathbf{v}}{\Delta t} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} \equiv \dot{\mathbf{v}},$$

oppure

$$\mathbf{a} = \frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2} \equiv \ddot{\mathbf{r}} = \ddot{x}(t)\mathbf{i} + \ddot{y}(t)\mathbf{j} + \ddot{z}(t)\mathbf{k}. \quad (29)$$

L'accelerazione è la derivata rispetto al tempo del vettore velocità, ovvero la derivata seconda, rispetto al tempo, del vettore posizione. Nel *SI* l'accelerazione si misura in metri al secondo per secondo ($m \cdot s^{-2}$).

Il modulo dell'accelerazione risulta

$$a = \sqrt{\ddot{x}^2 + \ddot{y}^2 + \ddot{z}^2}.$$

Per formulare l'accelerazione sotto forma intrinseca va premessa qualche nozione di geometria differenziale.

6.1. Alcuni elementi di geometria differenziale

Consideriamo un arco di traiettoria s che congiunge una posizione prefissata P_0 con la posizione P generica del punto. Il vettore \mathbf{r} e le sue componenti, $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$ possono essere considerate funzioni dell'arco s qualora si ricavi t dalla funzione $s(t)$, cioè la funzione inversa $t = t(s)$; così si ottiene:

$$x = x(s), \quad y = y(s), \quad z = z(s).$$

Lo scopo di assumere s come variabile anziché t è quello di rendere più semplici i calcoli; d'altra parte si può passare da una variabile all'altra, avendo introdotto la variabile intermedia s , tenendo presente che se $x = x(s)$, la derivata rispetto al tempo è

$$\frac{dx}{dt} = \frac{dx}{ds} \frac{ds}{dt}$$

e viceversa.

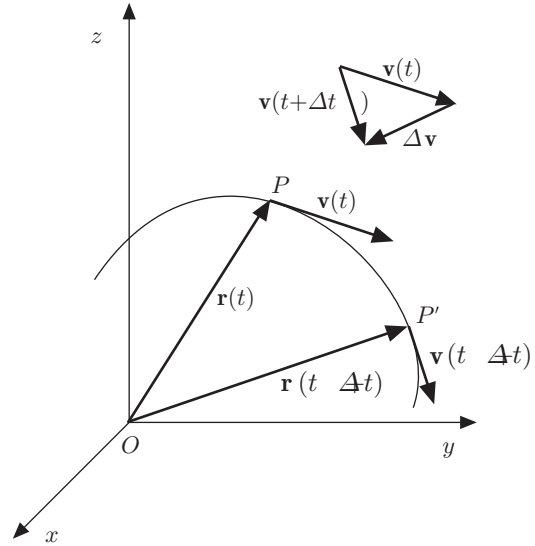


Fig. 3.24

Consideriamo il rapporto:

$$\frac{\Delta \mathbf{r}(s)}{\Delta s},$$

che, scalarmente, è il rapporto tra la corda di un elemento d'arco e l'elemento stesso; il limite di tale rapporto, che chiamiamo $\boldsymbol{\tau}$,

$$\lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{\Delta \mathbf{r}}{\Delta s} = \frac{d\mathbf{r}}{ds} = \boldsymbol{\tau},$$

è il versore della tangente alla traiettoria in un punto P . Il modulo è ovviamente unitario perché quando l'arco diventa infinitesimo, corda ed arco tendono ad assumere lo stesso valore. Le componenti di $\boldsymbol{\tau}$ rispetto alla terna cartesiana ortogonale, sono i coseni direttori della tangente orientata.

Consideriamo sulla traiettoria due punti P e P' e le tangenti in questi punti; quando P' tende a P le due tangenti individuano un piano π che si chiama *piano osculatore*. Esso è il piano in cui meglio si adagia il tratto infinitesimo ds di traiettoria e, per definizione, contiene i versori $\boldsymbol{\tau}$ e $\boldsymbol{\tau}'$ delle tangenti considerate. Nel piano osculatore definiamo una circonferenza osculatrice, o cerchio osculatore C , che è la circonferenza passante per tre punti infinitamente vicini della traiettoria, sulla quale si adatta al meglio l'arco infinitesimo ds . Il raggio R e il centro di tale circonferenza sono, rispettivamente, il raggio ed il centro di curvatura della traiettoria; $1/R$ è chiamata prima curvatura. In figura 25 è mostrato un arco Δs di traiettoria, piccolo ma finito, ed i versori delle tangenti condotte nei suoi estremi P, P' . Quando l'arco diventa infinitesimo, i due versori appartengono sia alla traiettoria che alla circonferenza osculatrice e le normali ad essi permettono di individuarne il raggio ed il centro.

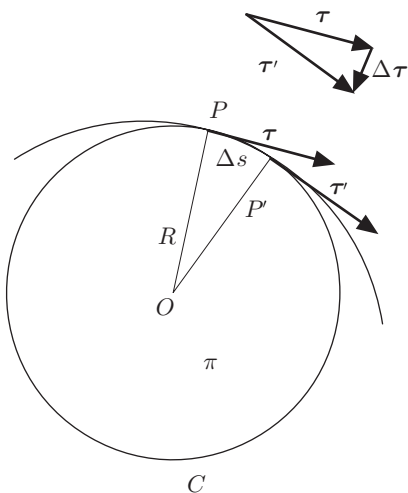


Fig. 3.25

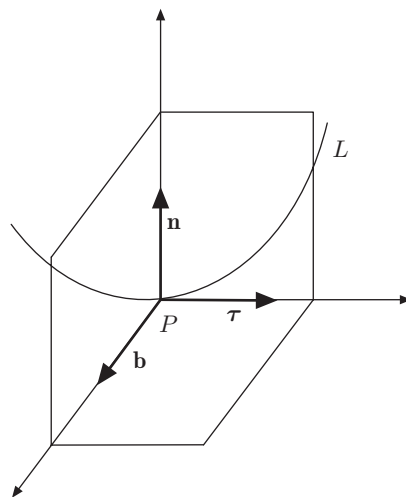


Fig. 3.26

La traiettoria in un punto P è caratterizzata da tre versori: $\boldsymbol{\tau}$, che abbiamo già definito, dal versore $\hat{\mathbf{n}}$ della normale principale, ortogonale a $\boldsymbol{\tau}$ e giacente nel piano osculatore, dal versore $\hat{\mathbf{b}}$ della binormale ortogonale al piano osculatore; la terna formata dai tre versori individua in ogni punto un triedro (mobile) che si chiama *triedro principale*; figura 26.

I tre versori ora definiti, sono dati da:

$$\boldsymbol{\tau} = \frac{d\mathbf{r}}{ds}, \quad \hat{\mathbf{n}} = \frac{d\boldsymbol{\tau}}{ds} \left| \frac{d\boldsymbol{\tau}}{ds} \right|^{-1} = \frac{d^2\mathbf{r}}{ds^2} \left| \frac{d^2\mathbf{r}}{ds^2} \right|^{-1}, \quad \hat{\mathbf{b}} = \boldsymbol{\tau} \times \hat{\mathbf{n}}; \quad (30)$$

Per determinare $\hat{\mathbf{n}}$ osserviamo che $\boldsymbol{\tau} \cdot \boldsymbol{\tau} = 1$, quindi derivando rispetto ad s si ha:

$$2\boldsymbol{\tau} \cdot \frac{d\boldsymbol{\tau}}{ds} = 0;$$

ne segue che il vettore $d\boldsymbol{\tau}/ds$ che, si noti, non ha modulo unitario, è ortogonale al versore $\boldsymbol{\tau}$; ciò si può capire dalla figura 25 dove si osserva che il vettore $\Delta\boldsymbol{\tau}$ tende a disporsi ortogonalmente a $\boldsymbol{\tau}$ appena l'arco diventa infinitesimo, puntando verso il centro di curvatura. Pertanto il suo versore

$$\frac{d\boldsymbol{\tau}}{ds} \left| \frac{d\boldsymbol{\tau}}{ds} \right|^{-1}$$

coincide proprio con $\hat{\mathbf{n}}$.

Consideriamo un arco infinitesimo ds di traiettoria che appartiene quindi alla circonferenza osculatrice, figura 27; si ha $ds = R d\varphi$, essendo R il raggio di curvatura. La *prima curvatura* della traiettoria è definita da

$$\frac{1}{R} = \frac{d\varphi}{ds}. \quad (31)$$

Per determinare l'angolo infinitesimo $d\varphi$ consideriamo i versori delle tangenti in corrispondenza ad s e, limitandosi a variazioni del primo ordine, ad $s + ds$:

$$\boldsymbol{\tau}, \quad \boldsymbol{\tau}' = \boldsymbol{\tau} + \frac{d\boldsymbol{\tau}}{ds} ds;$$

essi hanno entrambi modulo unitario, quindi il modulo del loro prodotto vettoriale è uguale a $\sin d\varphi \approx d\varphi$ perché le tangenti sono infinitamente vicine.

Svolgendo infatti tale prodotto, si ha:

$$\boldsymbol{\tau} \times \left(\boldsymbol{\tau} + \frac{d\boldsymbol{\tau}}{ds} ds \right) = \boldsymbol{\tau} \times \boldsymbol{\tau} + \boldsymbol{\tau} \times \frac{d\boldsymbol{\tau}}{ds} ds = \boldsymbol{\tau} \times \frac{d\boldsymbol{\tau}}{ds} ds,$$

da cui discende:

$$\left| \boldsymbol{\tau} \times \frac{d\boldsymbol{\tau}}{ds} ds \right| = d\varphi, \quad \Rightarrow \quad \left| \boldsymbol{\tau} \times \frac{d\boldsymbol{\tau}}{ds} \right| = \frac{d\varphi}{ds} \equiv \frac{1}{R}.$$

Ma $\boldsymbol{\tau}$ ha modulo unitario, quindi la precedente si può scrivere

$$\left| \frac{d\boldsymbol{\tau}}{ds} \right| = \frac{1}{R},$$

e, tenendo presente la seconda delle (30),

$$\frac{d\boldsymbol{\tau}}{ds} = \frac{\hat{\mathbf{n}}}{R}. \quad (32)$$

Esprimiamo ora la prima curvatura in funzione di t . Essendo:

$$\boldsymbol{\tau} = \frac{d\mathbf{r}}{ds} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} \left(\frac{ds}{dt} \right)^{-1} = \dot{\mathbf{r}} \left(\frac{ds}{dt} \right)^{-1},$$

$$\frac{d^2\mathbf{r}}{ds^2} = \frac{d}{dt} \left[\dot{\mathbf{r}} \left(\frac{ds}{dt} \right)^{-1} \right] \frac{dt}{ds} = \left(\ddot{\mathbf{r}} \frac{ds}{dt} - \frac{d^2s}{dt^2} \dot{\mathbf{r}} \right) \left(\frac{ds}{dt} \right)^{-3},$$

si ricava:

$$\begin{aligned} \frac{1}{R} &= \left| \boldsymbol{\tau} \times \frac{d\boldsymbol{\tau}}{ds} \right| = \left| \dot{\mathbf{r}} \left(\frac{ds}{dt} \right)^{-1} \times \left(\ddot{\mathbf{r}} \frac{ds}{dt} - \frac{d^2s}{dt^2} \dot{\mathbf{r}} \right) \left(\frac{ds}{dt} \right)^{-3} \right| \\ &= |\dot{\mathbf{r}} \times \ddot{\mathbf{r}}| \left(\frac{ds}{dt} \right)^{-3} = \frac{|\dot{\mathbf{r}} \times \ddot{\mathbf{r}}|}{|\dot{\mathbf{r}}|^3}. \end{aligned}$$

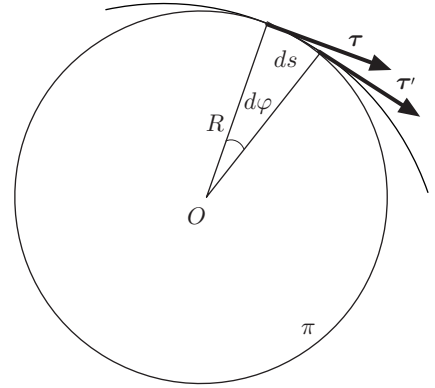


Fig. 3.27

Dunque la (32) diventa:

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2)^{3/2}} |(\dot{y}\ddot{z} - \dot{z}\ddot{y})\mathbf{i} + (\dot{z}\ddot{x} - \dot{x}\ddot{z})\mathbf{j} + (\dot{x}\ddot{y} - \dot{y}\ddot{x})\mathbf{k}|. \quad (33)$$

Non ci occuperemo della seconda curvatura, che è definita nel piano di $\boldsymbol{\tau}$ e di $\hat{\mathbf{b}}$, perché ai fini del calcolo dell'accelerazione non interessa.

Quando la traiettoria giace in un piano, che supponiamo sia quello x - y della terna di riferimento, nella (33) sopravvive solo la componente secondo z , allora la prima curvatura diventa:

$$\frac{1}{R} = \frac{\dot{x}\ddot{y} - \dot{y}\ddot{x}}{(\dot{x}^2 + \dot{y}^2)^{3/2}}, \quad (34)$$

oppure, se la traiettoria è data sotto forma esplicita:

$$\frac{1}{R} = \frac{d^2y/dx^2}{[1 + (dy/dx)^2]^{3/2}}. \quad (35)$$

Le (34) e (35) si possono dimostrare anche in maniera più elementare: Consideriamo una traiettoria piana i cui moti componenti sono

$$x = x(t), \quad y = y(t).$$

L'angolo infinitesimo $d\varphi$ tra le tangenti in due punti infinitamente vicini della traiettoria può essere ricavato tenendo presente che:

$$\tan \varphi = \frac{dy}{dx} = \frac{dy/dt}{dx/dt} = \frac{\dot{y}}{\dot{x}}, \quad \Rightarrow \quad \varphi = \tan^{-1} \frac{\dot{y}}{\dot{x}},$$

da cui, derivando rispetto al tempo:

$$\frac{d\varphi}{dt} = \frac{\ddot{y}\dot{x} - \dot{y}\ddot{x}}{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}, \quad \Rightarrow \quad d\varphi = \frac{\ddot{y}\dot{x} - \dot{y}\ddot{x}}{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} dt.$$

ma, essendo

$$\frac{1}{R} = \frac{d\varphi}{ds} = \frac{d\varphi}{dt} \frac{dt}{ds} = \frac{d\varphi}{dt} \left(\frac{ds}{dt} \right)^{-1}, \quad \left| \frac{ds}{dt} \right| = v = (\dot{x}^2 + \dot{y}^2)^{1/2},$$

si ottiene

$$\frac{1}{R} = \frac{\dot{x}\ddot{y} - \dot{y}\ddot{x}}{(\dot{x}^2 + \dot{y}^2)^{3/2}}, \quad \left| \frac{d\varphi}{dt} \right| = \frac{v}{R}.$$

Analogo ragionamento vale per una traiettoria espressa sotto forma esplicita.

6.2. Accelerazione sotto forma intrinseca

Siamo ora in grado di esprimere l'accelerazione del punto in forma intrinseca. Essendo la velocità data da

$$\mathbf{v} = \frac{ds}{dt} \boldsymbol{\tau} = \dot{s} \boldsymbol{\tau};$$

derivando rispetto al tempo, si ottiene

$$\mathbf{a} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \ddot{s} \boldsymbol{\tau} + \dot{s} \frac{d\boldsymbol{\tau}}{ds} \frac{ds}{dt} = \ddot{s} \boldsymbol{\tau} + \dot{s}^2 \frac{d\boldsymbol{\tau}}{ds}.$$

Ricordando la (32):

$$\mathbf{a} = \ddot{s} \boldsymbol{\tau} + \frac{\dot{s}^2}{R} \hat{\mathbf{n}} = \ddot{s} \boldsymbol{\tau} + \frac{v^2}{R} \hat{\mathbf{n}}. \quad (36)$$

Poiché $\boldsymbol{\tau}$ e $\hat{\mathbf{n}}$ giacciono nel piano osculatore, anche l'accelerazione giace in tale piano.

Concludiamo che, in generale, a differenza della velocità, l'accelerazione non è diretta lungo la tangente alla traiettoria; essa presenta una componente tangenziale a_t uguale alla derivata seconda dell'arco s rispetto al tempo, ed una componente normale a_n uguale al rapporto tra il quadrato della velocità e il raggio di curvatura:

$$a_t = \ddot{s}, \quad a_n = \frac{v^2}{R}. \quad (37)$$

Il componente normale dell'accelerazione ha il verso della normale principale, cioè è diretto verso la concavità della traiettoria.

7. Accelerazione dei sistemi di punti

Ci limitiamo a considerare il moto dei sistemi rigidi. Nel moto rigido traslatorio tutti i punti, ad un certo istante, hanno la stessa velocità; essi avranno quindi, in ogni istante, la stessa accelerazione. Nel moto rigido rotatorio l'atto di moto, come abbiamo visto, è dato dalla relazione:

$$\mathbf{v} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r},$$

che derivata rispetto al tempo dà:

$$\mathbf{a} = \frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt} \times \mathbf{r} + \boldsymbol{\omega} \times \dot{\mathbf{r}} = \frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt} \times \mathbf{r} + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}). \quad (38)$$

Il vettore $d\boldsymbol{\omega}/dt$, diretto lungo l'asse di rotazione, si chiama *accelerazione angolare* e si indica con $\boldsymbol{\alpha}$:

$$\boldsymbol{\alpha} = \frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt}.$$

L'accelerazione angolare va misurata in rad/s^2 . I termini

$$\frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt} \times \mathbf{r}, \quad \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}) = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v},$$

rappresentano rispettivamente l'*accelerazione tangenziale* e l'*accelerazione centripeta*; quest'ultima è ortogonale all'asse di rotazione, figura 28.

Nel moto rigido polare l'accelerazione è data formalmente dalla (38) in cui però si deve tenere conto che $\boldsymbol{\omega}$ varia, istante per istante, oltre che in modulo anche in direzione.

Nel moto rigido rototraslatorio, essendo:

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_O + \boldsymbol{\omega} \times (\mathbf{P} - \mathbf{O}) = \mathbf{v}_O + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_O,$$

derivando rispetto al tempo, si ha:

$$\mathbf{a} = \mathbf{a}_O + \frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt} \times \mathbf{r}_O + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_O). \quad (39)$$

L'accelerazione è somma dell'accelerazione di O e dell'accelerazione del moto rotatorio attorno ad un asse passante per O .

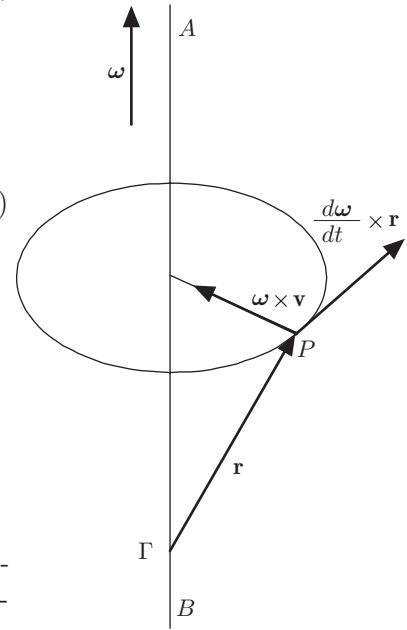


Fig. 3.28

Esempi

- ||| 4. Una particella si muove su una circonferenza di raggio R , con legge oraria:

$$R\varphi = s = \frac{1}{2}bt^2, \quad \varphi = \frac{1}{2R}bt^2,$$

con b costante. Determinare l'accelerazione, la velocità angolare e l'accelerazione angolare.

Il moto non è uniforme, dunque l'accelerazione ha una componente tangenziale ed una componente normale, centripeta. Dalla precedente, derivando rispetto al tempo, si ha $\dot{s} = bt$ e $\ddot{s} = b$, pertanto

$$a_\tau = \frac{dv}{dt} = \ddot{s} = b, \quad a_n = \frac{v^2}{R} = \frac{\dot{s}^2}{R} = \frac{b^2 t^2}{R}.$$

La velocità angolare e l'accelerazione angolare risultano:

$$\dot{\varphi} = \omega = \frac{1}{R}bt, \quad \ddot{\varphi} = \alpha = \frac{b}{R}.$$

- ||| 5. Una particella compie un moto cicloidale; determinarne velocità e accelerazione.

Le equazioni del moto, figura 29, sono date da:

$$x = r(\varphi - \sin \varphi), \quad y = r(1 - \cos \varphi),$$

dove $\varphi = \omega t$. Derivando rispetto al tempo, si ottiene

$$\dot{x} = \omega r(1 - \cos \omega t), \quad \dot{y} = \omega r \sin \omega t;$$

quindi:

$$v^2 = \dot{x}^2 + \dot{y}^2 = 2\omega^2 r^2(1 - \cos \omega t).$$

La velocità della particella è massima nel punto più alto della traiettoria, si annulla quando transita in corrispondenza alla base del moto. Derivando ancora, si ottengono le componenti cartesiane dell'accelerazione:

$$\ddot{x} = \omega^2 r \sin \omega t, \quad \ddot{y} = \omega^2 r \cos \omega t,$$

da cui si ottiene il modulo:

$$a = \sqrt{\ddot{x}^2 + \ddot{y}^2} = \omega^2 r.$$

L'accelerazione è centripeta. Tenendo presente le (37), i moduli delle accelerazioni tangenziale e normale risultano:

$$a_t = \frac{dv}{dt} = \frac{d}{dt} \left[\omega r \sqrt{2(1 - \cos \omega t)} \right] = \omega^2 r \frac{\sin \omega t}{\sqrt{2(1 - \cos \omega t)}},$$

$$a_n = \frac{v^2}{R} = \omega^2 r \frac{\cos \omega t - 1}{\sqrt{2(1 - \cos \omega t)}},$$

dove $1/R$ è dato dalla (34).

In conformità al risultato trovato più sopra, si ha ancora:

$$a = \sqrt{a_t^2 + a_n^2} = \omega^2 r.$$

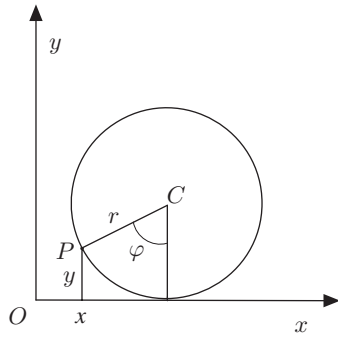


Fig. 3.29

8. Cenzo sul problema inverso della cinematica

Questo problema sarà svolto con ogni dettaglio in dinamica; tuttavia, data la sua importanza, conviene formularlo fin da ora.

Abbiamo ricavato velocità ed accelerazione mediante successive derivazioni rispetto al tempo del vettore posizione $\mathbf{r}(t)$. Dalla definizione di accelerazione si ha:

$$d\mathbf{v} = \mathbf{a}(t)dt$$

che, come è noto dall'analisi, rappresenta una equazione differenziale che si può integrare, nota l'accelerazione $\mathbf{a}(t)$ e la velocità \mathbf{v}_0 iniziale del punto all'istante $t = 0$, assegnata nel problema come condizione iniziale. In simboli:

$$\mathbf{v} = \int \mathbf{a}(t)dt + \mathbf{v}_0; \quad (40)$$

si rammenti che nell'operazione di derivazione le costanti scompaiono e di ciò bisogna tener conto nell'integrazione che, come noto, è l'operazione inversa.

La (40) è una equazione vettoriale che, in un problema tridimensionale, si scinde nelle tre equazioni scalari:

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= \int \ddot{x}(t)dt + \dot{x}_0, \\ \dot{y}(t) &= \int \ddot{y}(t)dt + \dot{y}_0, \\ \dot{z}(t) &= \int \ddot{z}(t)dt + \dot{z}_0. \end{aligned} \quad (41)$$

Una volta ricavata la velocità, essendo:

$$d\mathbf{r}(t) = \mathbf{v}(t)dt,$$

con una successiva integrazione si ricava il vettore posizione:

$$\mathbf{r}(t) = \int \mathbf{v}(t)dt + \mathbf{r}_0;$$

anche qui \mathbf{r}_0 è la posizione del punto all'istante $t = 0$.

Questa equazione, in modo analogo a quanto detto per la velocità, si traduce nelle tre relazioni scalari:

$$\begin{aligned} x(t) &= \int \dot{x}(t)dt + x_0, \\ y(t) &= \int \dot{y}(t)dt + y_0, \\ z(t) &= \int \dot{z}(t)dt + z_0, \end{aligned} \quad (42)$$

che integrate danno le equazioni dei moti componenti.

4. Cinematica

Moti particolari

1. Moto rettilineo

Nel moto rettilineo la traiettoria è una retta. Fissando su questa un'origine O , l'orientazione e l'ascissa x , tutte le grandezze vettoriali che caratterizzano il moto, (spostamento, velocità, accelerazione) risultano perfettamente determinate in modulo e direzione; non occorre quindi usare la notazione vettoriale. La legge oraria del moto sarà del tipo: $x = x(t)$; lo spostamento del punto da una posizione x_1 ad una posizione x_2 sarà dato da $\Delta x = x_2 - x_1$, come mostrato in figura 1, dove x_0 indica la posizione del punto all'istante $t = 0$.



Fig. 4.1

La velocità media è definita dal rapporto tra lo spostamento del punto ed il corrispondente intervallo di tempo:

$$\bar{v} = \frac{\Delta x}{\Delta t}.$$

Il moto rettilineo è uniforme allorché la velocità \mathbf{v} è costante, quindi ha modulo e direzione costanti lungo l'asse del moto. Il punto percorre spazi uguali in tempi uguali; la velocità media coincide con la velocità istantanea.

Se all'istante iniziale, $t = 0$, il punto occupa la posizione iniziale x_0 si ha:

$$v = \frac{x - x_0}{t} \Rightarrow x = vt + x_0, \quad (1)$$

che rappresenta la legge oraria del moto rettilineo uniforme; essa è una legge lineare il cui grafico è mostrato in figura 2.

Si osservi che considerando due valori generici del tempo, t_1 e t_2 ed i corrispondenti valori di x_1 e x_2 , il rapporto

$$\frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1}$$

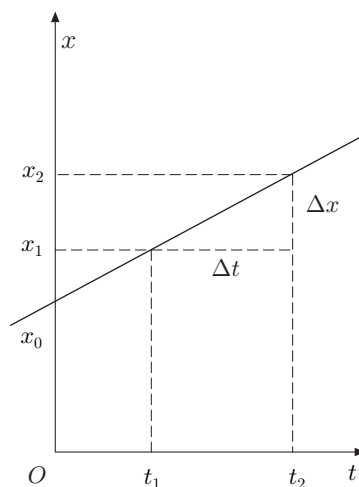


Fig. 4.2

è sempre costante ed uguale al valore numerico della tangente dell'angolo θ , figura 2; esso è anche il coefficiente angolare della retta che rappresenta la legge oraria. Se, in particolare, tale coefficiente è negativo il moto del punto avviene in verso opposto a quello fissato come positivo. Naturalmente la velocità istantanea del punto è la derivata della (1) rispetto al tempo e fornisce il valore v costante.

Il moto rettilineo è uniformemente accelerato se l'accelerazione \mathbf{a} è costante, cioè ha modulo e direzione costanti lungo l'asse del moto. Tipico esempio è l'accelerazione di gravità, diretta lungo la verticale alla superficie terrestre, dove si può ritenere costante in una regione sufficientemente ampia.

L'equazione oraria del moto rettilineo con accelerazione costante, che ricaveremo più avanti, è data da:

$$x(t) = \frac{1}{2}at^2 + v_0t + x_0, \quad (2)$$

dalla quale per derivazione si ottengono velocità e accelerazione:

$$\dot{x} = v = at + v_0, \quad \ddot{x} = a; \quad (3)$$

Le grandezze x_0 e v_0 rappresentano posizione e velocità iniziali del punto all'istante $t = 0$.

L'equazione oraria (2) è rappresentata graficamente da una parabola ad asse verticale, la velocità da una retta, l'accelerazione da una retta parallela all'asse dei tempi, che ne indica il valore costante. La concavità della parabola è volta verso l'alto se $a > 0$, al contrario se $a < 0$; le intercette con gli assi coordinati dipendono dalle costanti iniziali x_0 e v_0 , che fissano le caratteristiche particolari del moto. In figura 3 sono mostrati i grafici relativi al moto espresso dall'equazione

$$x(t) = t^2 - 4t + 3.$$

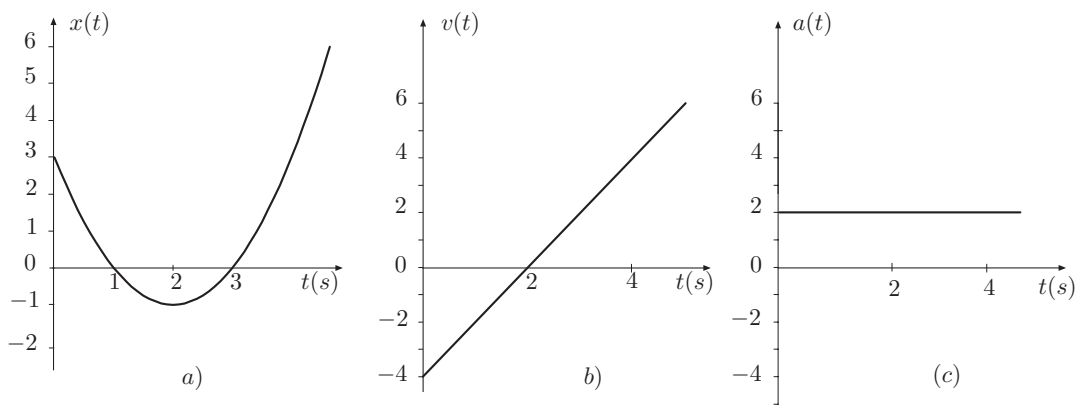


Fig. 4.3

L'accelerazione è $a = 2\text{ m/s}^2$, la velocità iniziale è $v_0 = -4\text{ m/s}$ e la posizione iniziale $x_0 = 3\text{ m}$. Il grafico del moto mostra che il punto, soggetto ad accelerazione positiva, parte dalla posizione iniziale con velocità v_0 , negativa, transita per l'origine dell'asse del moto all'istante $t = 1\text{ s}$, raggiunge la posizione $x = -1\text{ m}$ all'istante $t = 2\text{ s}$, quindi percorre l'asse nel verso positivo, transitando ancora per l'origine all'istante $t = 3\text{ s}$, infine prosegue nel suo moto con accelerazione costante. Il grafico della velocità mostra che essa è negativa nell'intervallo di tempo tra 0 e 2 s; per quest'ultimo valore si annulla, punto di inversione del moto, quindi cresce linearmente col tempo.

Eliminando il tempo dalle (2) e (3), si ottiene la relazione notevole:

$$x - x_0 = \frac{v^2 - v_0^2}{2a}. \quad (4)$$

Per ricavare l'equazione oraria (2), assegnata l'accelerazione, occorre risolvere un problema inverso di cinematica, paragrafo 8-III. Poiché nel nostro caso il problema è unidimensionale, va integrata l'equazione differenziale:

$$\ddot{x} = a \quad (t = 0; \dot{x}_0 = v_0, x = x_0),$$

con le condizioni iniziali assegnate in parentesi. Si ha

$$\dot{x}(t) = \int a dt + C_1 = a \int dt + C_1 = at + C_1,$$

dove la costante C_1 va stabilita in base alle condizioni iniziali; si ottiene così la velocità:

$$\dot{x}(t) = v(t) = at + v_0.$$

Per ricavare l'equazione oraria, essendo $\dot{x} = dx/dt$, si ha:

$$dx = \dot{x} dt = at dt + v_0 dt,$$

da cui:

$$x = \int dx = a \int t dt + v_0 \int dt + C_2,$$

che integrata dà

$$x(t) = \frac{1}{2}at^2 + v_0t + C_2.$$

La costante C_2 va determinata in base alle condizioni iniziali; pertanto:

$$x(t) = \frac{1}{2}at^2 + v_0t + x_0.$$

Come si vede in questo caso l'integrazione è molto semplice; si tratta di integrare equazioni differenziali a variabili separabili, cioè equazioni differenziali in cui è possibile separare, nei due membri, i differenziali delle due variabili.

Esempi

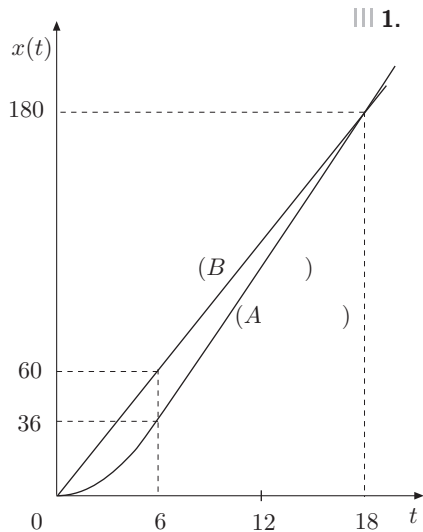


Fig. 4.4

1. Una macchina parte da ferma con accelerazione costante $a = 2 \text{ m/s}^2$ e dopo 6 s si muove di moto uniforme. All'istante della partenza viene sorpassata da un'altra macchina che si muove di moto uniforme con velocità $v = 10 \text{ m/s}$; trovare a che distanza e dopo quanto tempo le due macchine si incontreranno.

La macchina A dopo 6 s ha percorso uno spazio $x_A = at^2/2 = 36 \text{ m}$ ed ha assunto una velocità finale $v_A = at = 12 \text{ m/s}$, dopo di che il suo moto sarà uniforme. La macchina B dopo 6 s ha percorso uno spazio $x_B = vt = 60 \text{ m}$. Assumendo come tempo iniziale $t = 6 \text{ s}$, si ha

$$x_A = v_A t + 36, \quad x_B = v_B t + 60.$$

L'istante, dopo i primi 6 secondi, in cui le macchine si incontrano si ottiene per $x_A = x_B$, cioè:

$$(v_A - v_B)t = 60 - 36; \quad t = 12 \text{ s}; \quad x_B = x_A = 120 \text{ m}.$$

Il tempo totale è $t^* = 12 + 6 = 18 \text{ s}$; la distanza complessiva $x^* = 120 + 60 = 180 \text{ m}$. Il grafico degli spazi percorsi è mostrato in figura 4.

2. Un punto si muove con accelerazione costante su una traiettoria rettilinea. Negli istanti t_1 e t_2 le sue posizioni sono x_1 e x_2 . Esprimere l'accelerazione in funzione di t_1 , t_2 , x_1 , x_2 .

Supponendo che il punto si trovi inizialmente nella posizione $x_0 = 0$, si ha

$$x_1 = \frac{1}{2}at_1^2 + v_0 t_1, \quad x_2 = \frac{1}{2}at_2^2 + v_0 t_2.$$

Moltiplicando rispettivamente per t_2 e t_1 , e sottraendo

$$x_2 t_1 - x_1 t_2 = \frac{1}{2}at_1 t_2 (t_2 - t_1),$$

da cui:

$$a = \frac{2(x_2 t_1 - x_1 t_2)}{t_1 t_2 (t_2 - t_1)}.$$

3. Un grave è lanciato verso l'alto da una certa quota H rispetto al suolo, con velocità iniziale $v_0 = 29,4 \text{ m/s}$. Un altro grave viene fatto cadere liberamente dalla stessa quota dopo 4 s . Dimostrare che il primo grave sorpassa il secondo esattamente dopo 4 s dall'istante in cui inizia la caduta di quest'ultimo.

Assumendo come riferimento un asse orientato verso l'alto ed origine al suolo, come posizione e velocità iniziali del primo grave i valori corrispondenti ai primi 4 secondi, cioè

$$x_1(4) = -8g + 4v_0 + H, \quad v_1(4) = -4g + v_0,$$

dove g è l'accelerazione di gravità ($9,81 \text{ m/s}^2$), gli spazi percorsi diventano:

$$x_1 = -\frac{1}{2}gt^2 + (-4g + v_0)t - 8g + 4v_0 + H, \quad x_2 = -\frac{1}{2}gt^2 + H.$$

Poiché dev'essere $x_1 = x_2$, si ottiene

$$t = \frac{8g - 4v_0}{v_0 - 4g} = 4 \text{ s}.$$

Il risultato non dipende da H . In alternativa, scegliendo l'origine dei tempi del primo moto in modo che coincida con l'istante in cui il secondo grave inizia la caduta, gli spazi percorsi dai due gravi sono

$$x_1 = -\frac{1}{2}g(4+t)^2 + v_0(4+t) + H, \quad x_2 = -\frac{1}{2}gt^2 + H;$$

per $x_1 = x_2$, dalle precedenti si ottiene

$$-8g - 4gt + 4v_0 + v_0t = 0, \quad \Rightarrow \quad t = \frac{8g - 4v_0}{v_0 - 4g} = 4 \text{ s.}$$

Il grafico dei moti è mostrato in figura 5, per $H = 150 \text{ m}$.

- ||| 4. Un punto si muove su una traiettoria rettilinea secondo la legge

$$x = -2t^2 + 4t.$$

Discutere il moto, eseguire i grafici di $x(t)$ e $v(t)$ e trovare la velocità media per $0 < t < 2 \text{ s}$.

Derivando successivamente rispetto al tempo, si ha:

$$\dot{x} = -4t + 4, \quad \ddot{x} = -4 \text{ m/s}^2.$$

Il moto avviene con accelerazione negativa $a = -4 \text{ m/s}^2$, la velocità iniziale è $v_0 = 4 \text{ m/s}$. Il punto passa per $x = 0$ agli istanti $t_1 = 0$ e $t_2 = 2 \text{ s}$. La velocità è nulla per $t = 1 \text{ s}$; istante cui $x = 2 \text{ m}$. La velocità media per $0 < t < 2 \text{ s}$ è

$$\bar{v} = \frac{x(2) - x(0)}{2 - 0} = 0 \text{ m/s}.$$

- ||| 5. Un grave soggetto all'azione della gravità, viene lanciato verso l'alto con velocità iniziale $v_0 = 25 \text{ m/s}$. Si calcoli la velocità con cui raggiunge un traguardo posto verticalmente ad una altezza $h = 30 \text{ m}$ dal suolo ed gli istanti in cui lo oltrepassa in salita e in discesa.

Assumendo come riferimento un asse volto verso l'alto, la velocità con cui il grave raggiunge il traguardo, per la (4), è

$$v^2 = v_0^2 + 2ah, \quad \Rightarrow \quad v = \sqrt{v_0^2 - 2gh} = 6,1 \text{ m/s};$$

il tempo corrispondente, per la (3), risulta

$$t_1 = \frac{v_0 - v}{g} = 1,93 \text{ s}.$$

Il tempo per raggiungere la massima quota è dato da $t_{max} = v_0/g = 2,55 \text{ s}$; quello impiegato per andare dal traguardo alla massima quota è $t^* = v/g = 0,62 \text{ s}$, che è lo stesso di quello di ricaduta fino al traguardo. Pertanto i tempi richiesti sono $t_1 = 1,93 \text{ s}$, $t_2 = 3,17 \text{ s}$. Le velocità di transito al traguardo sono ovviamente uguali.

- ||| 6. Un corpo in caduta libera percorre nell'ultimo secondo $93,1 \text{ m}$. Supponendo $v_0 = 0$, determinare l'altezza H da cui è caduto.

Indichiamo con v la velocità con cui il grave giunge al suolo, con h il percorso nell'ultimo secondo e con v_h la velocità di transito in h . Assumendo come riferimento un asse orientato verso l'alto, per la (4), si ha

$$v^2 = 2gh + v_h^2,$$

ed essendo, nell'ultimo secondo, $v = -gt + v_h$, da cui $v_h = v + gt$, si ottiene:

$$v^2 = 2gh + (v + gt)^2, \quad \Rightarrow \quad v = -\frac{2h + gt^2}{2t} = -98 \text{ m/s}.$$

L'altezza H da cui è caduto il grave è $H = v^2/2g = 490 \text{ m}$.

- ||| 7. Un punto materiale descrive una traiettoria di equazione $y = x^2$. La componente della velocità secondo x è costante ed ha il valore $v_x = \dot{x} = 3 \text{ m/s}$. Determinare velocità e accelerazione in modulo e direzione in corrispondenza al punto di ascissa $x = 2/3 \text{ m}$.

Il modulo della velocità è

$$v = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} = \dot{x} \sqrt{1 + \left(\frac{\dot{y}}{\dot{x}}\right)^2};$$

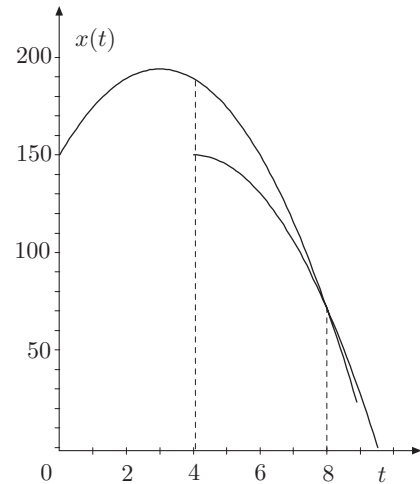


Fig. 4.5

ma

$$\frac{\dot{y}}{\dot{x}} = \frac{(dy/dt)}{(dx/dt)} = \frac{dy}{dx},$$

pertanto

$$v = \dot{x} \sqrt{1 + 4x^2} = 5 \text{ m/s}, \quad \tan \theta = \frac{dy}{dx} = 2x = \frac{4}{3}, \quad \theta = 53,13^\circ.$$

Per l'accelerazione, osservando che

$$\dot{x} = \cos t, \quad \dot{y} = \frac{dy}{dx} \dot{x},$$

si ottiene

$$\ddot{x} = 0, \quad \ddot{y} = \frac{d^2y}{dx^2} \dot{x}^2 + \frac{dy}{dx} \ddot{x} = \frac{d^2y}{dx^2} \dot{x}^2 = 18 \text{ m/s}^2.$$

La direzione dell'accelerazione è quella dell'asse y positivo.

1.1. Moto armonico

Un punto è animato di moto armonico se, su una traiettoria rettilinea, oscilla tra due posizioni di elongazione massima $-A$ e $+A$, simmetriche rispetto ad un punto O , origine degli spostamenti, figura 6.

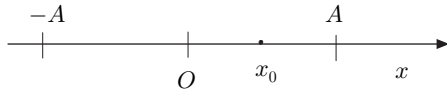


Fig. 4.6

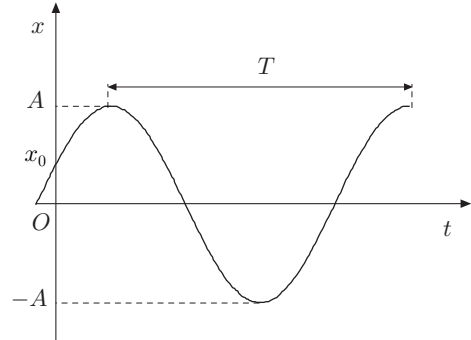


Fig. 4.7

Il moto armonico è uno dei più importanti della fisica e verrà studiato in maniera completa in dinamica; per ora ne consideriamo solo gli aspetti cinematici. La sua equazione oraria è

$$x(t) = A \sin(\omega t + \varphi), \quad (5)$$

dove A è l'ampiezza del moto, ω la pulsazione o frequenza angolare, φ è l'angolo di fase iniziale che determina, per $t = 0$, la posizione iniziale x_0 del punto. L'equazione del moto è mostrata in figura 7.

Il moto armonico è un moto periodico; infatti, se nella (5) il tempo aumenta di una quantità $2\pi/\omega$, si ha

$$\begin{aligned} x(t + 2\pi/\omega) &= A \sin \left[\omega \left(t + \frac{2\pi}{\omega} \right) + \varphi \right] = A \sin(\omega t + 2\pi + \varphi) = \\ &= A \sin(\omega t + \varphi). \end{aligned}$$

L'equazione del moto rimane invariata. Si definisce dunque periodo T , ossia l'intervallo di tempo impiegato dal punto per compiere una oscillazione completa, qualunque sia la sua posizione iniziale, la grandezza

$$T = \frac{2\pi}{\omega},$$

da cui $\omega = 2\pi/T$.

Si definisce frequenza del moto la grandezza

$$\nu = \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi}.$$

Essa esprime il numero di oscillazioni nell'unità di tempo e, nel SI, si misura in *hertz* (Hz); le sue dimensioni sono s^{-1} .

Dalle precedenti relazioni si deduce che la pulsazione può essere espressa come

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi\nu.$$

Nel SI la pulsazione si misura in rad/s , la stessa con cui si misura la velocità angolare. Va notato tuttavia che le due grandezze, pur avendo le stesse unità di misura e essendo denotate con lo stesso simbolo, hanno significato diverso. Come si vedrà nel seguito, questa coincidenza discende da una relazione geometrica che sussiste tra moto armonico e moto circolare uniforme.

Velocità ed accelerazione sono date da

$$\begin{aligned} \dot{x} &= A\omega \cos(\omega t + \varphi), \\ \ddot{x} &= -A\omega^2 \sin(\omega t + \varphi) = -\omega^2 x. \end{aligned} \quad (6)$$

Si noti che l'accelerazione è sempre opposta, ma proporzionale allo spostamento x . In figura 8 è mostrato l'andamento di $x(t)$, $v(t)$ e $a(t)$.

Un moto armonico può essere rappresentato convenientemente dalla componente, secondo l'asse x oppure y , di un vettore $(P - O)$ ruotante in senso antiorario intorno all'origine O , con velocità angolare costante. Assumendo come asse, l'asse x orizzontale con origine in O , chiamando con A il modulo di $(P - O)$ e con $(\omega t + \varphi)$ l'angolo che forma con x , figura 9, si ha

$$x = A \cos(\omega t + \varphi).$$

Il moto armonico è espresso stavolta con la funzione coseno, del tutto equivalente alla (5) perché basta aggiungere alla fase iniziale un angolo di $-\pi/2 rad$.

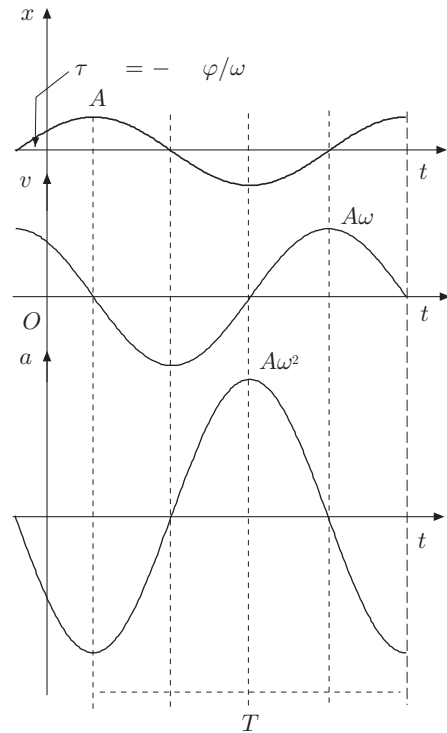


Fig. 4.8

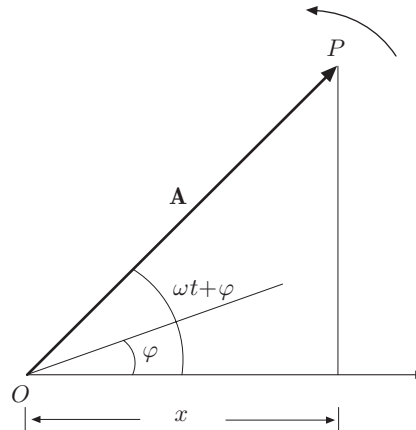


Fig. 4.9

Analogamente velocità ed accelerazione possono essere rappresentate mediante le componenti di due vettori ruotanti rispettivamente di modulo $A\omega$ e $A\omega^2$; esse sono sfasate in anticipo rispetto allo spostamento di $\pi/2$ e π , figura 10.

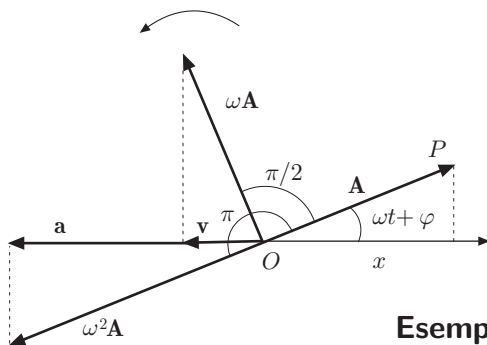


Fig. 4.10

Esempio

- ||| 8. Una particella si muove di moto armonico con legge, $x = A \sin \omega t$. Esprimere velocità ed accelerazione in funzione di x .

Dall'equazione del moto e dalla sua derivata rispetto al tempo,

$$x = A \sin \omega t, \quad \dot{x} = A\omega \cos \omega t,$$

si ha:

$$\frac{x}{A} = \sin \omega t, \quad \frac{\dot{x}}{\omega A} = \cos \omega t.$$

Quadrando e sommando:

$$\frac{x^2}{A^2} + \frac{\dot{x}^2}{(A\omega)^2} = 1, \quad \Rightarrow \quad \dot{x} = \omega \sqrt{A^2 - x^2}.$$

L'accelerazione è

$$\ddot{x} = -A\omega^2 \sin \omega t = -\omega^2 x.$$

||| 2. Sovrapposizione di due moti armonici sullo stesso asse

Lo studio della sovrapposizione di moti generici che avvengono sullo stesso asse non presenta particolare interesse se non quello specifico del problema che si sta esaminando. Se, per esempio, $x_1(t)$ e $x_2(t)$ rappresentano due moti, il moto risultante è semplicemente $x(t) = x_1(t) + x_2(t)$.

Viceversa lo studio della sovrapposizione di due moti armonici ha notevole importanza nella descrizione dei fenomeni di interferenza, che si verificano con le onde elastiche ed elettromagnetiche. Esso può essere descritto agevolmente mediante i vettori ruotanti rappresentativi dei due moti.

2.1. Moti armonici di frequenze uguali

Supponiamo che i moti abbiano la *stessa frequenza*; lo spostamento risultante del punto, determinato dai due moti armonici

$$x_1 = A_1 \cos(\omega t + \varphi_1), \quad x_2 = A_2 \cos(\omega t + \varphi_2),$$

è dato da

$$x = x_1 + x_2 = A_1 \cos(\omega t + \varphi_1) + A_2 \cos(\omega t + \varphi_2).$$

Consideriamo, figura 11, i vettori $\mathbf{A}_1 = (P_1 - O)$, $\mathbf{A}_2 = (P_2 - O)$, entrambi ruotanti con velocità angolare ω . La posizione dei vettori, ad un certo istante, è quella determinata dagli angoli $\omega t + \varphi_1$ e $\omega t + \varphi_2$. È chiaro che le loro proiezioni sull'asse x rappresentano i moti componenti in esame. La proiezione sull'asse x del vettore $(P - O)$, somma dei vettori $(P_1 - O)$ e $(P_2 - O)$ è proprio $x_1 + x_2$.

Poiché l'angolo compreso fra i due vettori ha il valore costante $\varphi = \varphi_2 - \varphi_1$, il vettore risultante ha modulo costante e ruota attorno ad O con la stessa velocità angolare dei vettori componenti. Si può dunque scrivere:

$$x = x_1 + x_2 = A \cos(\omega t + \Phi),$$

dove l'ampiezza A del moto è il modulo del risultante dei due vettori, che formano l'angolo $\varphi = \varphi_2 - \varphi_1$, cioè:

$$A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2 \cos \varphi}. \quad (7)$$

La fase Φ , come si vede dalla figura 11, si ricava dalla relazione

$$\tan \Phi = \frac{A_1 \sin \varphi_1 + A_2 \sin \varphi_2}{A_1 \cos \varphi_1 + A_2 \cos \varphi_2}. \quad (8)$$

CASI PARTICOLARI

Quando le ampiezze sono uguali, $A_1 = A_2$, per la (7) si ha $A = A_1 \sqrt{2 + 2 \cos \varphi}$ e, dalla (8), si deduce $\tan \Phi = (\sin \varphi_1 + \sin \varphi_2) / (\cos \varphi_1 + \cos \varphi_2)$.

Se le fasi sono uguali, $\varphi_1 = \varphi_2$, $\varphi = 0$, i due moti sono in fase; i vettori ruotanti sono paralleli e dalla (7) si ha

$$A = A_1 + A_2;$$

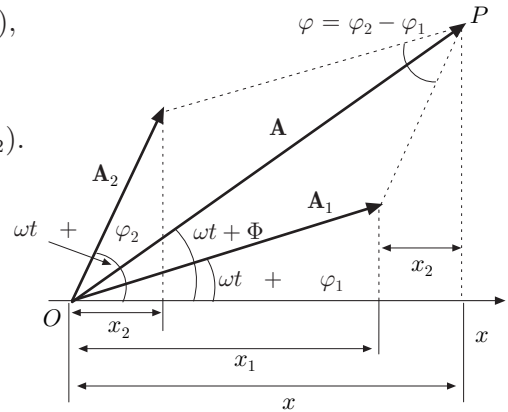


Fig. 4.11

le ampiezze si sommano e, per la (8), $\tan \Phi = \tan \varphi_1$. In figura 12 è mostrata la composizione di due moti armonici in fase.

Se $\varphi_2 = \varphi_1 + \pi$, risulta $\varphi = \pi$; i due moti sono in *opposizione di fase* e se $A_1 > A_2$, l'ampiezza risultante è $A_1 - A_2$; i due moti si attenuano, figura 13; risulta anche $\tan \Phi = \tan \varphi_1$. Lo stesso avviene se $A_1 < A_2$; questa volta però il moto risultante è in anticipo di π . Se, in particolare, le ampiezze dei moti componenti sono uguali il moto risultante è nullo.

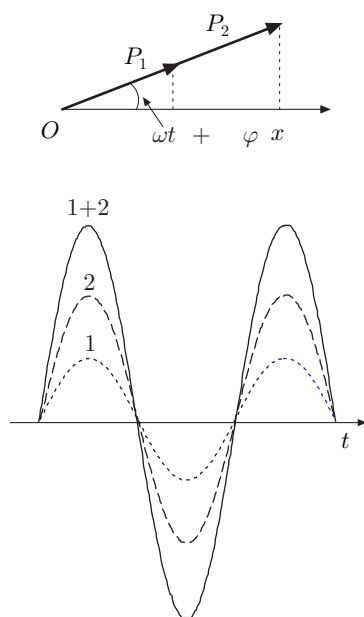


Fig. 4.12

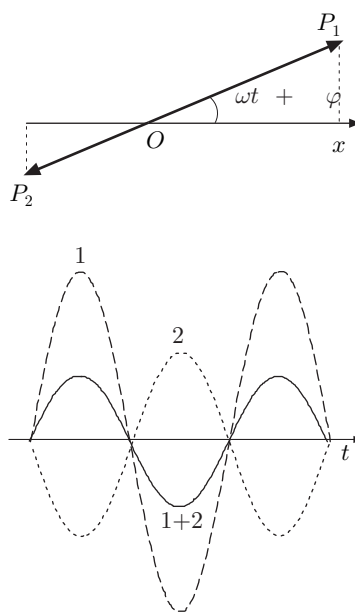


Fig. 4.13

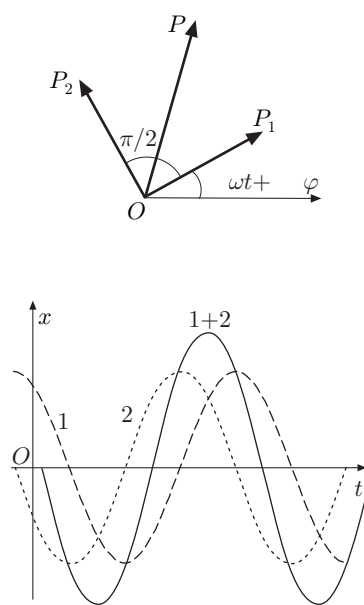


Fig. 4.14

Allorché $\varphi_2 = \varphi_1 + \pi/2$, si ha $\varphi = \pi/2$; i vettori ruotanti sono ortogonali e si dice che i due moti sono in *quadratura*; allora $A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2}$. Se $\varphi_1 = 0$, risulta $\tan \Phi = A_2/A_1$. In figura 14 è rappresentata la composizione di due moti armonici in quadratura.

2.2. Moti armonici di frequenze diverse

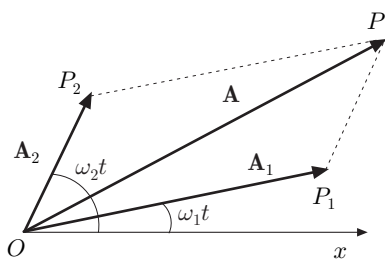


Fig. 4.15

Consideriamo il caso in cui i due moti armonici *non* abbiano la stessa frequenza. Supponiamo, per semplicità che $\varphi_1 = \varphi_2 = 0$, cosicché essi sono descritti dalle equazioni

$$x_1 = A_1 \cos \omega_1 t, \quad x_2 = A_2 \cos \omega_2 t. \quad (9)$$

L'angolo compreso tra i vettori ruotanti $(P_2 - O)$ e $(P_1 - O)$ è $\omega_2 t - \omega_1 t = (\omega_2 - \omega_1)t$ e non è costante, figura 15.

Il vettore risultante non ha modulo costante e non ruota con velocità angolare costante; ne segue che il moto risultante non è

armonico semplice. Dalla figura 15 si riconosce che l'ampiezza del moto ad un dato istante risulta

$$A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2 \cos(\omega_2 - \omega_1)t}; \quad (10)$$

essa oscilla tra il valore $A = A_1 + A_2$, per

$$(\omega_2 - \omega_1)t = 2n\pi,$$

ed il valore $A = |A_1 - A_2|$, per

$$(\omega_2 - \omega_1)t = (2n + 1)\pi,$$

con n intero positivo.

Il periodo T_b di oscillazione è uguale alla differenza tra i tempi t_{n+1} e t_n , corrispondenti ai valori che le precedenti assumono per $n+1$ ed n , per i quali si hanno valori massimi, consecutivi, oppure minimi dell'ampiezza. Considerando i massimi:

$$T_b = t_{n+1} - t_n = \frac{2\pi}{\omega_2 - \omega_1},$$

al quale corrisponde la frequenza:

$$\nu_b = \frac{\omega_2 - \omega_1}{2\pi} = \nu_2 - \nu_1.$$

Il periodo T_b si chiama *periodo di battimento* e la frequenza ν_b , *frequenza di battimento*.

Il fenomeno dei battimenti si verifica, come si vedrà nello studio delle onde, quando si sovrappongono due onde di frequenze diverse. Nel caso della onde elastiche e nel campo di udibilità dell'orecchio, se le frequenze differiscono di poco si percepisce una fluttuazione dell'intensità del suono, *battimento*, proporzionale ad A^2 , causata dall'oscillazione dell'ampiezza.

|| 2.3. Metodo trigonometrico

Posto

$$\frac{\omega_2 + \omega_1}{2} = \bar{\omega}, \quad \frac{\omega_2 - \omega_1}{2} = \omega_m,$$

si ottiene

$$\omega_1 = \bar{\omega} - \omega_m, \quad \omega_2 = \bar{\omega} + \omega_m.$$

La somma delle (9) si può scrivere:

$$\begin{aligned} A_1 \cos \omega_1 t + A_2 \cos \omega_2 t &= \\ &= A_1 \cos(\bar{\omega} - \omega_m)t + A_2 \cos(\bar{\omega} + \omega_m)t \\ &= A_1 \cos \bar{\omega} t \cos \omega_m t + A_1 \sin \bar{\omega} t \sin \omega_m t \\ &\quad + A_2 \cos \bar{\omega} t \cos \omega_m t - A_2 \sin \bar{\omega} t \sin \omega_m t \\ &= (A_1 + A_2) \cos \omega_m t \cos \bar{\omega} t + (A_1 - A_2) \sin \omega_m t \sin \bar{\omega} t, \end{aligned} \quad (11)$$

Questa equazione rappresenta la somma di due oscillazioni quasi armoniche di frequenza

$$\bar{\nu} = \frac{\nu_2 + \nu_1}{2},$$

e di ampiezze

$$(A_1 + A_2) \cos \omega_m t, \quad (A_1 - A_2) \sin \omega_m t,$$

modulate alla frequenza

$$\nu_m = \frac{\nu_2 - \nu_1}{2},$$

metà della frequenza di battimento. Si ottenuto ciò che si chiama *modulazione di ampiezza*. In figura 16 è mostrato l'andamento del-

l'ampiezza, equazione (10), e l'andamento della (11) o della somma delle (9) in funzione del tempo, dove si è posto $A_1 = 2A_2$ (unità arbitrarie), $\nu_2 = 10 \text{ Hz}$, $\nu_1 = 9 \text{ Hz}$. Si osservi che l'ampiezza ha il periodo del battimento, $2\pi/(\omega_1 - \omega_2)$, mentre il periodo di modulazione è $4\pi/(\omega_1 - \omega_2)$.

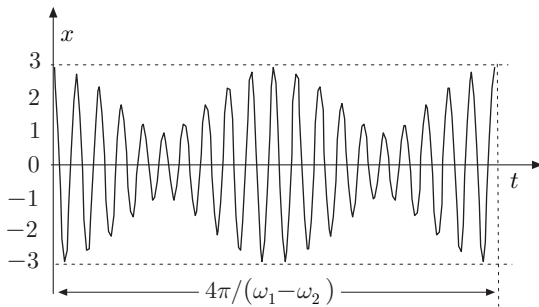
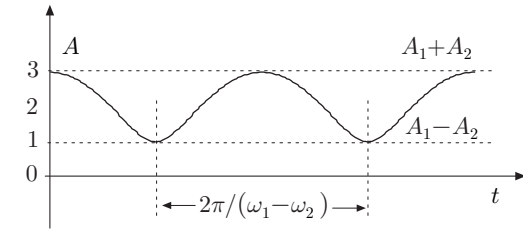


Fig. 4.16

Fig. 4.17

Nel caso in cui le ampiezze A_1 e A_2 dei moti componenti siano uguali, si ha:

$$\begin{aligned} x &= x_1 + x_2 = A_1(\cos \omega_1 t + \cos \omega_2 t) = \\ &= 2A_1 \cos \frac{\omega_2 - \omega_1}{2} t \cos \frac{\omega_1 + \omega_2}{2} t. \end{aligned}$$

Questa relazione può essere ottenuta direttamente dalla (10), oppure usando semplicemente le formule di prostaferesi. Essa rappresenta un moto oscillatorio, figura 17, di ampiezza

$$A = 2A_1 \cos \frac{\omega_2 - \omega_1}{2} t.$$

In tal caso la modulazione è del 100 %.

Per ricavare l'ampiezza, come espressa dalla (10), si consideri l'identità:

$$A \cos(\bar{\omega}t - \delta) = A \cos \bar{\omega}t \cos \delta + A \sin \bar{\omega}t \sin \delta.$$

Confrontando con la (11), si ha:

$$A \cos \delta = (A_1 + A_2) \cos \omega_m t, \quad A \sin \delta = (A_1 - A_2) \sin \omega_m t.$$

Quadrando e sommando:

$$\begin{aligned} A^2 &= A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2(\cos^2 \omega_m t - \sin^2 \omega_m t) = \\ &= A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2 \cos 2\omega_m t, \end{aligned}$$

come l'equazione (10).

3. Moti piani

In un riferimento cartesiano ortogonale, un moto piano è rappresentato da due moti $x(t)$ e $y(t)$ che avvengono sugli assi del riferimento, ossia:

$$\mathbf{r}(t) = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j}.$$

L'equazione della traiettoria si ottiene eliminando il tempo nei due moti. Velocità ed accelerazione sono definite dalle equazioni vettoriali,

$$\mathbf{v}(t) = \dot{x}(t)\mathbf{i} + \dot{y}(t)\mathbf{j}, \quad \mathbf{a}(t) = \ddot{x}(t)\mathbf{i} + \ddot{y}(t)\mathbf{j}.$$

3.1. Moto piano in coordinate polari

La posizione di un punto in un piano può essere individuata, oltre che dalle coordinate cartesiane, anche da coordinate polari così definite: scelto un punto O del piano, chiamato polo, si consideri la famiglia di circonferenze, di raggi ρ , concentriche in O e la famiglia di rette passante per esso, figura 18. Chiamando asse polare la retta orizzontale, qualsiasi altra retta può essere individuata per rotazione di un angolo θ rispetto all'asse polare, assumendo come positiva la rotazione antioraria. Si noti che per rotazioni che differiscono per $n\pi$, con n intero, si ottiene la stessa retta. La posizione del punto risulta così individuata dall'intersezione della circonferenza e della retta passanti per esso, cioè dalle coordinate:

$$\rho = \rho(t), \quad \theta = \theta(t).$$

Fissando un riferimento cartesiano ortogonale con origine nel polo O e l'asse x coincidente con l'asse polare, le coordinate cartesiane risultano legate alle coordinate polari dalle relazioni:

$$x = \rho \cos \theta, \quad y = \rho \sin \theta, \quad (12)$$

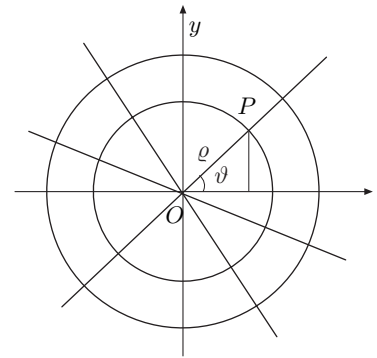


Fig. 4.18

da cui,

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \theta = \tan^{-1} \frac{y}{x}. \quad (13)$$

Derivando le (12) rispetto al tempo si ottiene

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \dot{\rho} \cos \theta - \rho \dot{\theta} \sin \theta \\ \dot{y} &= \dot{\rho} \sin \theta + \rho \dot{\theta} \cos \theta. \end{aligned} \quad (14)$$

Dalle precedenti, tenuto conto delle (12), oppure derivando direttamente le (13), si ha

$$\dot{\rho} = \frac{x\dot{x} + y\dot{y}}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \quad \dot{\theta} = \frac{x\dot{y} - \dot{x}y}{x^2 + y^2}. \quad (15)$$

Quadrando e sommando le (14) si ottiene:

$$\dot{x}^2 + \dot{y}^2 = \dot{\rho}^2 + \rho^2 \dot{\theta}^2. \quad (16)$$

Da questa relazione si riconosce che il vettore velocità risulta composto da due vettori i cui moduli sono $\dot{\rho}$ e $\rho\dot{\theta}$. Il primo si chiama componente radiale \mathbf{v}_ρ , il secondo componente trasversale \mathbf{v}_θ ; figura 19.

D'altra parte lo spostamento infinitesimo $d\mathbf{r}$ del punto può essere rappresentato come somma di due spostamenti, uno radiale di modulo $d\rho$ e l'altro di rotazione di modulo $\rho d\theta$. Introducendo il versore $\hat{\rho}$ radiale e il versore trasversale $\hat{\theta}$, si ha

$$d\mathbf{r} = d\rho \hat{\rho} + \rho d\theta \hat{\theta},$$

e

$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \frac{d\rho}{dt} \hat{\rho} + \rho \frac{d\theta}{dt} \hat{\theta} = \dot{\rho} \hat{\rho} + \rho \dot{\theta} \hat{\theta}. \quad (17)$$

Le relazioni precedenti possono essere ottenute in maniera più semplice introducendo il numero complesso

$$z = x + iy = \rho e^{i\theta},$$

da cui derivando rispetto al tempo:

$$\dot{z} = \dot{\rho} e^{i\theta} + i\rho \dot{\theta} e^{i\theta},$$

ma $i = e^{i\pi/2}$, quindi:

$$\dot{z} = \dot{\rho} e^{i\theta} + \rho \dot{\theta} e^{i(\theta+\pi/2)}. \quad (18)$$

Questa espressione si interpreta dicendo che il vettore velocità è somma di due vettori: il primo diretto radialmente, di modulo $\dot{\rho}$, il secondo ortogonale, di modulo $\rho\dot{\theta}$ e ottenuto ruotando ρ di $\pi/2$ nel verso antiorario. La grandezza definita dal numero complesso z si chiama anche vettore ruotante. Lo scalare $\dot{\theta}$ rappresenta la velocità angolare nel moto piano considerato.

Per mezzo della (18) è piuttosto semplice ricavare l'accelerazione; infatti derivando rispetto al tempo, e tenendo conto che

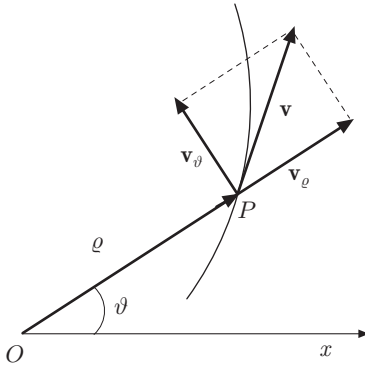


Fig. 4.19

$e^{i\pi} = -1$, si ottiene:

$$\ddot{z} = \ddot{\rho}e^{i\theta} + (2\dot{\rho}\dot{\theta} + \rho\ddot{\theta})e^{i(\theta+\pi/2)} - \rho\dot{\theta}^2e^{i\theta}. \quad (19)$$

Il vettore accelerazione è somma di due vettori: il primo è radiale ed ha componente $\ddot{\rho} - \rho\dot{\theta}^2$; il secondo è ortogonale al primo, ruotato di $\pi/2$ nel verso antiorario, ed ha componente $2\dot{\rho}\dot{\theta} + \rho\ddot{\theta}$; le due componenti dell'accelerazione si chiamano rispettivamente componente radiale e componente trasversale, figura 20. Lo scalare $\ddot{\theta}$ rappresenta l'accelerazione angolare del moto piano. L'accelerazione dunque si scrive:

$$\mathbf{a} = (\ddot{\rho} - \rho\dot{\theta}^2)\hat{\rho} + (2\dot{\rho}\dot{\theta} + \rho\ddot{\theta})\hat{\theta}. \quad (20)$$

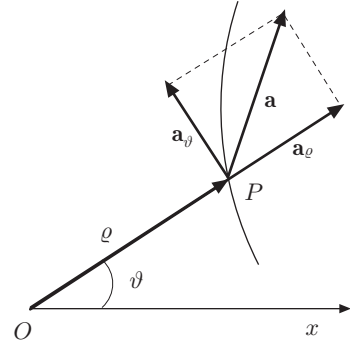


Fig. 4.20

Esempi

9. Moto circolare uniforme

Per tale moto risulta spontaneo assumere coordinate polari in cui

$$\rho = R, \quad \theta = \omega t + \theta_0.$$

Introducendo il numero complesso $z = \rho e^{i\theta}$, il moto risulta espresso da

$$z = Re^{i(\omega t + \theta_0)}.$$

Derivando rispetto al tempo e tenendo presente che R è costante e $i = e^{i\pi/2}$, si ottiene

$$\dot{z} = \omega Re^{i(\omega t + \theta_0 + \pi/2)}.$$

La componente radiale della velocità è nulla, la componente trasversale ha modulo ωR ed è ruotata di $\pi/2$ in senso antiorario.

L'accelerazione si ottiene derivando ancora la precedente:

$$\ddot{z} = i\omega^2 Re^{i(\omega t + \theta_0 + \pi/2)} = \omega^2 Re^{i\pi} e^{i(\omega t + \theta_0)},$$

ed essendo $e^{i\pi} = -1$, si ha

$$\ddot{z} = -\omega^2 Re^{i(\omega t + \theta_0)}.$$

L'accelerazione è centripeta e, in conformità con la (20) risulta $-\rho\omega^2\hat{\rho}$.

10. Si consideri il moto piano espresso dal numero complesso

$$z = Re^{(a+i\omega)t} = Re^{at}e^{i\omega t},$$

con a costante. Le coordinate polari, o equazioni del moto, sono:

$$\rho = Re^{at}, \quad \theta = \omega t.$$

Eliminando il tempo si ottiene la traiettoria del moto:

$$\rho = Re^{a\theta/\omega};$$

essa è una spirale logaritmica che, per $a = 0$, si riduce ad un moto circolare.

Derivando z rispetto al tempo si ha

$$\dot{z} = Rae^{at}e^{i\omega t} + i\omega Re^{at}e^{i\omega t} = Rae^{at}e^{i\omega t} + \omega Re^{at}e^{i(\omega t + \pi/2)}.$$

Si individuano immediatamente le componenti della velocità: $\dot{\rho} = Rae^{at}$, radiale e $\rho\dot{\theta} = Re^{at}\omega$, trasversale.

Derivando ancora rispetto al tempo, si ottiene

$$\ddot{z} = (Ra^2e^{at} - R\omega^2e^{at})e^{i\omega t} + 2Rawe^{at}e^{i(\omega t + \pi/2)}.$$

In conformità con la (20), le componenti radiale e trasversale dell'accelerazione sono rispettivamente:

$$Ra^2e^{at} - R\omega^2e^{at} \equiv \ddot{\rho} - \rho\dot{\theta}^2, \quad 2Rawe^{at} \equiv 2\dot{\rho}\dot{\theta}.$$

|| 3.2. Velocità areolare

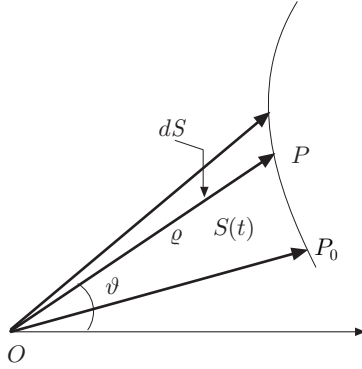


Fig. 4.21

Nei moti piani è opportuno introdurre una nuova grandezza chiamata velocità areolare. Sia $S(t)$ l'area descritta dal raggio vettore $\rho = (P - O)$ all'istante t , a partire dalla posizione $(P_0 - O)$ relativa all'istante t_0 , figura 21; il rapporto tra l'area infinitesima $dS(t)$ descritta dal raggio vettore nel tempo infinitesimo dt , definisce la velocità areolare:

$$\dot{S} = \frac{dS}{dt}. \quad (21)$$

Poiché, a meno di infinitesimi di ordine superiore a dS e dt , si può scrivere:

$$dS = \frac{1}{2}\rho^2 d\theta,$$

si ha

$$\dot{S} = \frac{1}{2}\rho^2 \dot{\theta}. \quad (22)$$

In coordinate cartesiane, per le (13), si ottiene

$$\dot{S} = \frac{1}{2}(x\dot{y} - \dot{x}y), \quad (23)$$

oppure vettorialmente

$$\dot{\mathbf{S}} = \frac{1}{2}(\mathbf{r} \times \mathbf{v}). \quad (26)$$

Questo vettore, ortogonale al piano del moto, definisce completamente modulo e direzione della velocità areolare. La velocità areolare si misura in m^2/s .

|| 3.3. Moto centrale

La velocità areolare assume particolare importanza nei moti centrali, in cui l'accelerazione \mathbf{a} del punto è sempre diretta verso un punto fisso O , detto polo.

Detto \mathbf{r} il vettore che individua la posizione del punto rispetto al polo, è manifestamente

$$\mathbf{r} \times \mathbf{a} = 0,$$

che può essere scritta

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{r} \times \mathbf{v}) = 0,$$

come si constata immediatamente, derivando e tenendo presente che $\dot{\mathbf{r}} \times \mathbf{v} = 0$. Integrando e indicando con \mathbf{c} un vettore costante arbitrario, si ha

$$\mathbf{r} \times \mathbf{v} = \mathbf{c}.$$

Questa espressione mostra che il moto avviene in un piano passante per il polo e ortogonale al vettore \mathbf{c} . Pertanto il moto centrale è piano ed ha velocità areolare costante; viceversa se un moto è piano e la velocità areolare è costante, il moto è centrale. Per la (24) si deduce inoltre che

$$\mathbf{c} = 2\dot{\mathbf{S}}.$$

Consideriamo un moto centrale in cui il punto descrive una traiettoria ellittica simmetrica rispetto all'origine e agli assi coordinati x - y , di equazioni

$$x = a \cos \theta, \quad y = b \sin \theta,$$

in cui a e b sono i semiassi dell'ellisse. Per la (23) risulta

$$\dot{S} = \frac{1}{2}ab\dot{\theta},$$

ed essendo $2\dot{S} = c$, segue che

$$\frac{c}{ab} = \dot{\theta} = \text{cost.}$$

Si deduce che θ è funzione lineare del tempo,

$$\theta = \frac{c}{ab}t + \theta_0,$$

con θ_0 costante arbitraria.

Le equazioni del moto dunque si scrivono:

$$x = a \cos \left(\frac{c}{ab}t + \theta_0 \right), \quad y = b \sin \left(\frac{c}{ab}t + \theta_0 \right).$$

Si noti che la quantità $c/(ab)$ ha le dimensioni della pulsazione; le precedenti dunque rappresentano moti armonici che avvengono su assi ortogonali, la cui composizione dà una traiettoria ellittica, come si vedrà al paragrafo 4.

Le componenti della velocità sono:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -\frac{c}{b} \sin \left(\frac{c}{ab}t + \theta_0 \right) \\ \dot{y} &= \frac{c}{a} \cos \left(\frac{c}{ab}t + \theta_0 \right). \end{aligned}$$

Quelle dell'accelerazione

$$\begin{aligned} \ddot{x} &= -\frac{c^2}{ab^2} \cos \left(\frac{c}{ab}t + \theta_0 \right) = -\left(\frac{c}{ab} \right)^2 x \\ \ddot{y} &= -\frac{c^2}{a^2b} \sin \left(\frac{c}{ab}t + \theta_0 \right) = -\left(\frac{c}{ab} \right)^2 y. \end{aligned}$$

Vettorialmente:

$$\mathbf{a} = -\left(\frac{c}{ab} \right)^2 \mathbf{r},$$

che mostra come l'accelerazione sia volta verso il centro dell'ellisse ed il suo modulo sia proporzionale alla distanza del punto dal centro. Come si vedrà in Dinamica, le forze elastiche presentano tale caratteristica.

4. Composizione di due moti armonici su assi ortogonali

4.1. Moto circolare

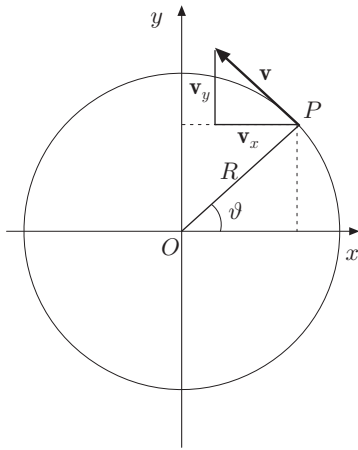


Fig. 4.22

Nel moto circolare uniforme, le coordinate del punto, nel riferimento cartesiano con origine nel centro O della traiettoria di raggio R , figura 22, sono date da

$$\begin{aligned}x &= R \cos \theta = R \cos \omega t, \\y &= R \sin \theta = R \sin \omega t = R \cos \left(\omega t - \frac{\pi}{2} \right).\end{aligned}$$

Esse rappresentano due moti armonici, della stessa ampiezza e uguale pulsazione, sfasati di $\pi/2$ che avvengono sugli assi x ed y . L'equazione della traiettoria si ottiene immediatamente quadrando e sommando le precedenti:

$$x^2 + y^2 = R^2(\cos^2 \omega t + \sin^2 \omega t) = R^2,$$

che è proprio la circonferenza con centro nell'origine e raggio R . Derivando rispetto al tempo si ottengono le componenti della velocità:

$$\dot{x} = -R\omega \sin \omega t = -\omega y, \quad \dot{y} = R\omega \cos \omega t = \omega x.$$

il cui modulo è

$$v = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} = \omega R.$$

Derivando ancora, si ottengono le componenti dell'accelerazione:

$$\begin{aligned}\ddot{x} &= -R\omega^2 \cos \omega t = -\omega^2 x, \\ \ddot{y} &= -R\omega^2 \sin \omega t = -\omega^2 y,\end{aligned}$$

che ha modulo:

$$a = \sqrt{\ddot{x}^2 + \ddot{y}^2} = \omega^2 R.$$

Si osservi che l'accelerazione è soltanto centripeta. Le componenti della velocità e dell'accelerazione sono mostrati nelle figure 22 e 23.

Più in generale, come stabilito nel capitolo precedente, la velocità del punto materiale è data da

$$\mathbf{v} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}.$$

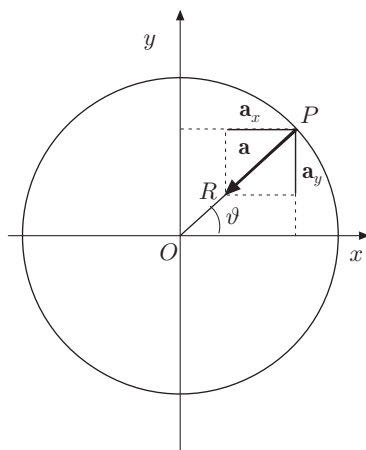


Fig. 4.23

Se il vettore velocità angolare è costante, il modulo della velocità del punto risulta costante, mentre cambia, ad ogni istante, la sua direzione; il moto è circolare uniforme e, in modulo, si ha $v = \omega R$.

L'accelerazione presenta solo la componente normale:

$$a_n = \frac{v^2}{R} = \omega^2 R. \quad (25)$$

Si osservi che la circonferenza è una traiettoria a curvatura costante.

Se il moto non è uniforme, è presente anche la componente tangenziale dell'accelerazione, $a_\tau = d^2s/dt^2$, che può essere determinata nota la legge oraria $s(t)$ del moto oppure, essendo $s(t) = \varphi(t)R$, da

$$a_\tau = \frac{d^2\varphi}{dt^2} R = \frac{d\omega}{dt} R = \alpha R, \quad (26)$$

dove $\alpha = d\omega/dt$ è il modulo dell'accelerazione angolare, in conformità con la (38)-III.

|| 4.2. Composizione di due moti armonici su assi ortogonali differenti per ampiezza, pulsazione e fase

Più in generale, consideriamo due moti armonici che avvengono sugli assi x ed y :

$$x = A_x \sin \omega_x t, \quad y = A_y \sin(\omega_y t + \varphi). \quad (27)$$

Consideriamo per prima il caso in cui i due moti abbiano la stessa frequenza $\omega_x = \omega_y = \omega$, ma differiscano per l'ampiezza e per la fase iniziale. L'equazione della traiettoria si ricava eliminando il tempo nelle (27); si ha

$$\sin \omega t = \frac{x}{A_x}; \quad \cos \omega t = \frac{y/A_y - (x/A_x) \cos \varphi}{\sin \varphi},$$

da cui quadrando e sommando si ottiene

$$\frac{x^2}{A_x^2} + \frac{y^2}{A_y^2} - \frac{2xy}{A_x A_y} \cos \varphi = \sin^2 \varphi. \quad (28)$$

Tale traiettoria è un'ellisse con centro nell'origine delle coordinate, di eccentricità e inclinazione rispetto agli assi coordinati dipendenti da φ e dal rapporto A_x/A_y . In figura 24 è mostrata una di tali ellissi per $A_x > A_y$.

CASI PARTICOLARI

Per $\varphi = 0$ e $\varphi = \pi$, l'ellisse è degenera e si riduce, per i due valori della fase, alla forma:

$$y = \pm \frac{A_y}{A_x} x.$$

Il moto avviene su un asse passante per l'origine con pendenza dipendente dalle ampiezze; la composizione dei due moti determina una *polarizzazione rettilinea*.

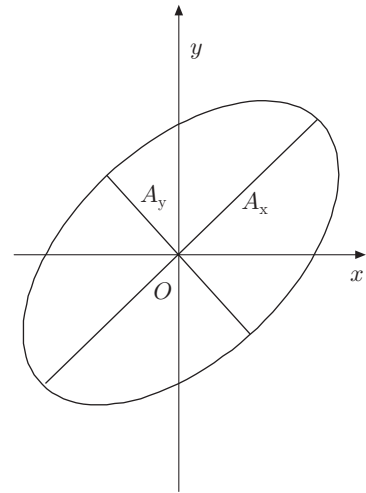


Fig. 4.24

Per $\varphi = \pm\pi/2$, dalla (28) si ha

$$\frac{x^2}{A_x^2} + \frac{y^2}{A_y^2} = 1;$$

la traiettoria è una ellisse simmetrica rispetto al centro e agli assi coordinati; la polarizzazione è ellittica. Per quanto riguarda il verso con cui il punto percorre l'ellisse, basta osservare che nell'istante in cui x ha elongazione massima, $t = T/4$, per le (27), deve essere

$$\begin{aligned} x &= A_x, & y &= 0, \\ \dot{x} &= 0, & \dot{y} &= A_y\omega \cos\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right) = -A_y\omega; \end{aligned}$$

la componente lungo y della velocità è negativa quindi il moto avviene nel verso orario. Con analogo ragionamento, per $\varphi = -\pi/2$, si verifica che il moto avviene in verso antiorario. Se, in particolare, $\varphi = \pm\pi/2$ ed è anche $A_x = A_y$, la traiettoria è una circonferenza; *polarizzazione circolare*. In figura 25 sono mostrati i vari casi.

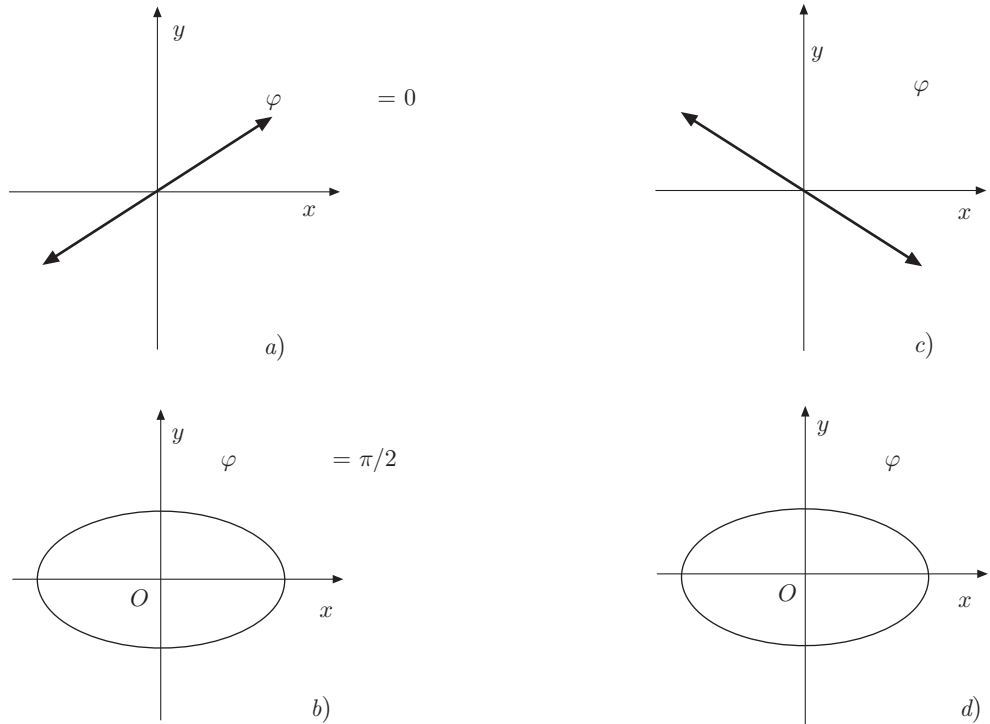


Fig. 4.25

Quando le frequenze sono diverse le traiettorie sono più complicate; tuttavia se il rapporto $\omega_x/\omega_y = m/n$ è espresso da due numeri m ed n interi, risultano sempre curve chiuse, *figure di Lissajous*. Si può verificare, ad esempio, che se scegliamo $m = 1$ ed

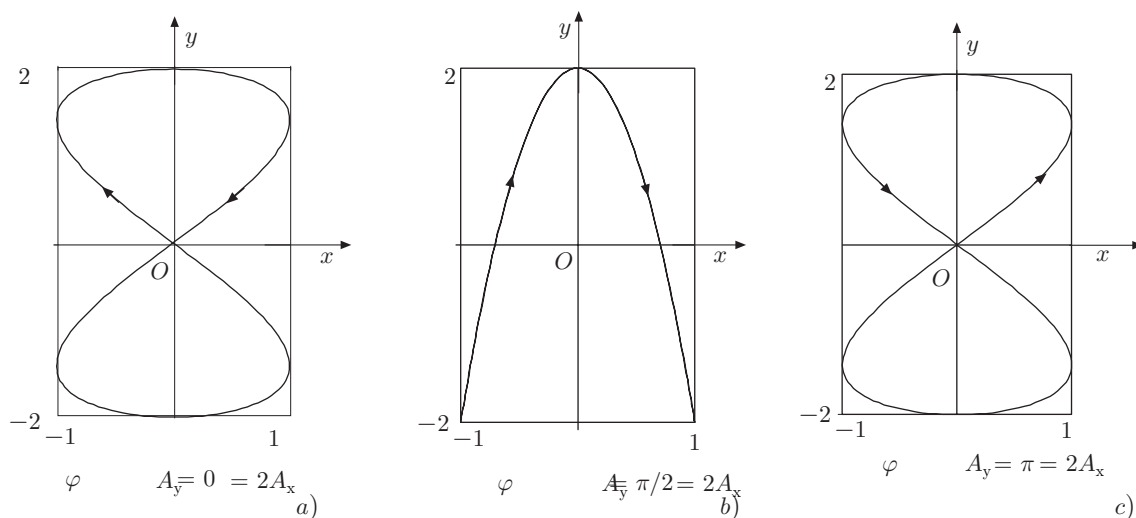


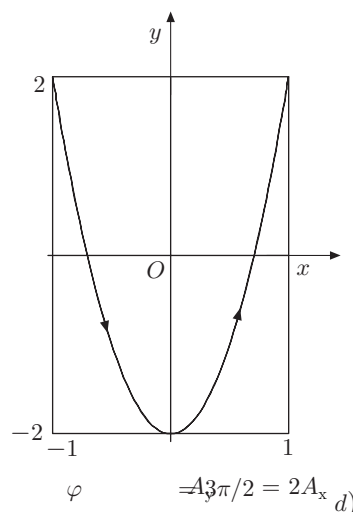
Fig. 4.26

$n = 2$, cioè se le equazioni del moto sono

$$x = A_x \sin \omega t, \quad y = A_y \sin(2\omega t + \varphi),$$

le traiettorie sono quelle mostrate in figura 26, per i tre valori indicati della fase.

Si lascia al lettore questa verifica che va fatta seguendo il metodo indicato prima per due oscillazioni della stessa frequenza e ricordando le formule trigonometriche di duplicazione. In genere le figure di Lissajous hanno aspetto molto vario e dipendono dal rapporto m/n e dalla fase.



Esempi

- III 11. Un disco di diametro 3 m che ruota attorno al proprio asse fisso, decelera uniformemente passando da un regime di rotazione di 120 giri/min a zero in 4 s . Calcolare la velocità angolare, l'accelerazione tangenziale e normale di un punto sul bordo del disco all'istante $t = 2\text{ s}$.

La velocità angolare non è costante, pertanto l'accelerazione è somma dell'accelerazione tangenziale e normale:

$$\mathbf{a} = \frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt} \times \mathbf{r} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}.$$

Essendo $\nu = 120\text{ giri/min} = 2\text{ giri/s} = 2\text{ Hz}$, la velocità angolare iniziale è $\omega_0 = 2\pi\nu = 12,56\text{ rad/s}$, quella finale nulla. Indicando con α l'accelerazione angolare, si ha

$$\alpha = \frac{\Delta\omega}{\Delta t} = \frac{\omega - \omega_0}{t} = -3,14\text{ rad/s}^2.$$

L'accelerazione angolare è negativa, pertanto la velocità angolare, all'istante assegnato, è

$$\omega = -\alpha t + \omega_0 = 6,28\text{ rad/s}.$$

L'accelerazione tangenziale è

$$a_\tau = \alpha R = -4,71\text{ m/s}^2;$$

quella normale,

$$a_n = \omega^2 R = 59 \text{ m/s}^2.$$

||| 12. Sia dato il moto piano di equazioni orarie

$$x = bt, \quad y = ct^2, \quad (29)$$

con a e b costanti positive. Il moto sull'asse x è un moto uniforme con velocità $v = b$, mentre quello sull'asse y è un moto con accelerazione costante $a = 2c$. L'equazione della traiettoria si ottiene eliminando il tempo dalle precedenti; risulta:

$$y = \frac{c}{b^2} x^2,$$

che è l'equazione di una parabola. Le equazioni orarie e la traiettoria sono mostrate in figura 27.

Derivando le (29) si ottengono le componenti cartesiane della velocità,

$$\dot{x} = b, \quad \dot{y} = 2ct, \quad (30)$$

ed il suo modulo:

$$v = \frac{ds}{dt} = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} = \sqrt{b^2 + 4c^2 t^2}. \quad (31)$$

Infine,

$$\mathbf{v} = b\mathbf{i} + 2ct\mathbf{j}.$$

Derivando le (30) otteniamo le componenti cartesiane dell'accelerazione,

$$\ddot{x} = 0, \quad \ddot{y} = 2c,$$

da cui:

$$a = \sqrt{\ddot{x}^2 + \ddot{y}^2} = 2c, \quad \mathbf{a} = 2c\mathbf{j}. \quad (32)$$

L'accelerazione è diretta nel verso positivo dell'asse y ed ha modulo $2c$.

Calcoliamo l'accelerazione tangenziale e normale. Il modulo dell'accelerazione tangenziale è

$$a_\tau = \frac{d^2 s}{dt^2} = \frac{d}{dt} (b^2 + 4c^2 t^2)^{1/2} = \frac{4c^2 t}{(b^2 + 4c^2 t^2)^{1/2}}.$$

Poiché la prima curvatura è data da

$$\frac{1}{R} = \frac{\dot{x}\ddot{y} - \ddot{x}\dot{y}}{(\dot{x}^2 + \dot{y}^2)^{3/2}} = \frac{2bc}{(b^2 + 4c^2 t^2)^{3/2}},$$

il modulo dell'accelerazione normale, $a_n = v^2/R$, risulta

$$a_n = \frac{v^2}{R} = \frac{2bc}{(b^2 + 4c^2 t^2)^{1/2}}.$$

Ovviamente,

$$a = \sqrt{a_t^2 + a_n^2} = \sqrt{\frac{(4c^2 t)^2}{b^2 + 4c^2 t^2} + \frac{4b^2 c^2}{b^2 + 4c^2 t^2}} = 2c;$$

infatti il modulo di un vettore è invariante qualunque sia la sua rappresentazione. Dunque, in generale,

$$\begin{aligned} a_\tau &= \frac{dv}{dt} = \frac{d}{dt} \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} = \frac{\dot{x}\ddot{x} + \dot{y}\ddot{y}}{(\dot{x}^2 + \dot{y}^2)^{1/2}} \\ a_n &= \frac{v^2}{R} = \frac{\dot{x}\ddot{y} - \ddot{x}\dot{y}}{(\dot{x}^2 + \dot{y}^2)^{1/2}} \\ a^2 &= a_t^2 + a_n^2 = \frac{(\dot{x}\ddot{x} + \dot{y}\ddot{y})^2 + (\dot{x}\ddot{y} - \ddot{x}\dot{y})^2}{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} = \ddot{x}^2 + \ddot{y}^2. \end{aligned}$$

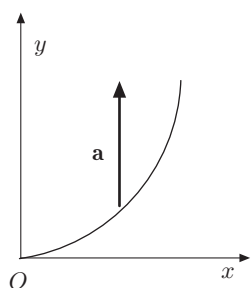
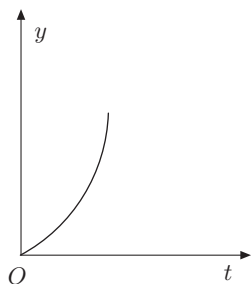
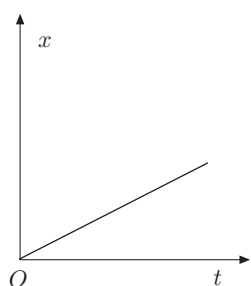


Fig. 4.27

||| 13. Moto in tre dimensioni

Consideriamo un moto circolare uniforme che si svolge nel piano $x-y$ ed un moto rettilineo uniforme lungo l'asse z . Supponendo che la traiettoria circolare abbia centro nell'origine della terna di riferimento e raggio R , le equazioni del moto sono

$$\begin{aligned}x &= R \cos(\omega t + \varphi_0), \\y &= R \sin(\omega t + \varphi_0), \\z &= vt + z_0.\end{aligned}$$

La posizione del punto è

$$\mathbf{r}(t) = R \cos(\omega t + \varphi_0) \mathbf{i} + R \sin(\omega t + \varphi_0) \mathbf{j} + (vt + z_0) \mathbf{k}$$

La traiettoria è un'elica cilindrica, figura 28.

L'equazione oraria del moto o la lunghezza dell'arco è

$$s(t) = \pm \int_{t_0}^t \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2} dt = \pm \sqrt{\omega^2 R^2 + v^2} (t - t_0).$$

Il moto è uniforme.

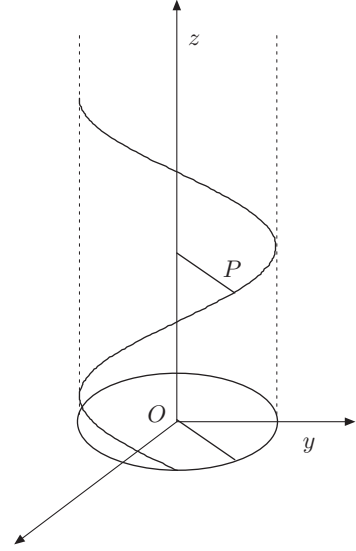


Fig. 4.28

||| 5. Moti piani e problema inverso della cinematica

Il problema, come già detto, verrà affrontato in maniera esauriente in dinamica; tuttavia è importante fin d'ora chiarire quanto è stato esposto al paragrafo 7-III e sottolineare l'importanza delle condizioni iniziali ai fini della caratterizzazione del moto.

PROBLEMA BALISTICO

Consideriamo un grave (o un proiettile) che venga lanciato con una velocità iniziale \mathbf{v}_0 che forma un angolo θ con la linea orizzontale e che sia sottoposto solo all'azione dell'accelerazione di gravità. Supponendo che la terra sia piatta, ipotesi lecita se il campo del moto è limitato rispetto al raggio terrestre, e trascurando la resistenza dell'aria, scegliamo un riferimento cartesiano piano con origine nel punto in cui viene lanciato il grave, come in figura 29.

Il sistema di equazioni differenziali che va integrato è il seguente:

$$\ddot{x} = 0, \quad \ddot{y} = -g, \quad (33)$$

assegnate le condizioni iniziali:

$$t = 0: \quad x_0 = 0, \quad y_0 = 0, \quad \dot{x}_0 = v_0 \cos \theta, \quad \dot{y}_0 = v_0 \sin \theta. \quad (34)$$

Integrando una prima volta le (33) si ha

$$\dot{x} = C_1, \quad \dot{y} = -gt + C_2.$$

Tenendo conto delle (34), si ottiene:

$$\dot{x} = v_0 \cos \theta, \quad \dot{y} = -gt + v_0 \sin \theta.$$

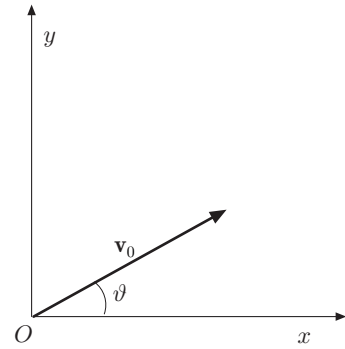


Fig. 4.29

Integrando una seconda volta e ricordando le (34):

$$x = (v_0 \cos \theta)t, \quad y = -\frac{1}{2}gt^2 + (v_0 \sin \theta)t. \quad (35)$$

I moti componenti sono: un moto rettilineo uniforme lungo l'asse x ed un moto con accelerazione costante g , volta in basso, lungo l'asse y . Le equazioni orarie di questi moti sono mostrate in figura 30.

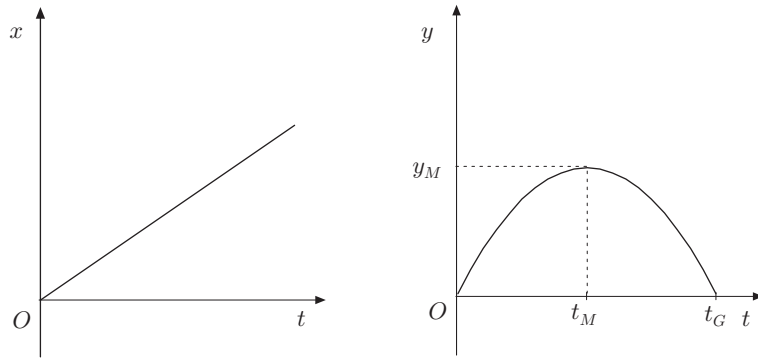


Fig. 4.30

La seconda equazione è rappresentata da una parabola ad asse verticale con la concavità rivolta verso il basso, che interseca l'asse dei tempi nell'origine e in corrispondenza a $t_G = (2v_0 \sin \theta)/g$, istante in cui il grave ricade sulla terra, chiamato tempo di gittata. L'istante in cui il grave raggiunge l'altezza massima è $t_M = (v_0 \sin \theta)/g = t_G/2$.

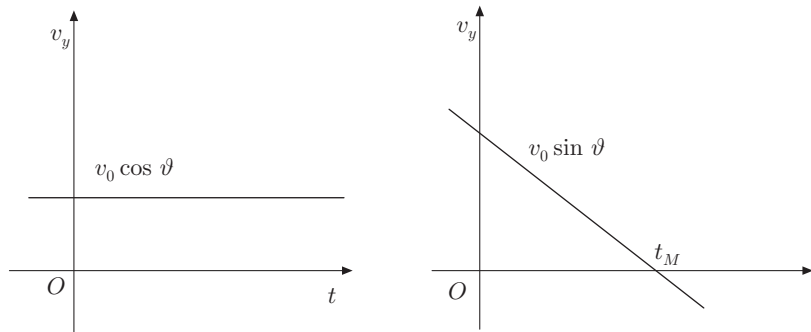


Fig. 4.31

Le componenti della velocità, in funzione del tempo, hanno l'andamento mostrato in figura 31. La componente lungo x è costante come vuole il moto rettilineo uniforme, la componente lungo y si annulla in corrispondenza a t_M . Considerando il modulo della velocità

$$v = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} = \sqrt{v_0^2 + g^2 t^2 - 2v_0 g (\sin \theta)t},$$

si può facilmente verificare che per $t = 0$, $v = v_0$; per $t = t_M$, $v = v_0 \cos \theta$; per $t = t_G$, $v = v_0$. Si lascia al lettore di tracciare il grafico del modulo della velocità in funzione del tempo, ricavare l'accelerazione tangenziale e normale e verificare che la loro composizione ha per modulo g .

L'equazione della traiettoria si ottiene eliminando il tempo nelle (35); si ha

$$y = -\frac{1}{2}g\frac{x^2}{v_0^2 \cos^2 \theta} + (\tan \theta)x, \quad (36)$$

che è una parabola ad asse verticale e concavità rivolta verso il basso, figura 32. L'ascissa del massimo e l'ascissa del punto in cui il grave ricade sulla terra si possono ottenere sostituendo nella prima delle (35) i valori dei tempi t_M e t_G ricavati prima; si ottiene

$$x_M = \frac{v_0^2 \sin \theta \cos \theta}{g},$$

$$x_G = \frac{2v_0^2 \sin \theta \cos \theta}{g} = \frac{v_0^2}{g} \sin 2\theta,$$

da cui si conclude che la gittata è massima per $\theta = \pi/4$.

Si osservi che per angoli $\pi/4 \pm \Delta\theta$, con $(0 < \Delta\theta < \pi/4)$, le gittate sono uguali. Dette G_1 e G_2 le gittate corrispondenti a tali angoli, si ha:

$$x_{G_1, G_2} = \frac{v_0^2}{g} \sin [2(\pi/4 \pm \Delta\theta)] = \frac{v_0^2}{g} \sin(\pi/2 \pm 2\Delta\theta);$$

infatti $\sin(\pi/2 + 2\Delta\theta) = \sin(\pi/2 - 2\Delta\theta)$.

La soluzione dello stesso problema con condizioni iniziali differenti conduce ad un moto con caratteristiche diverse. Infatti si abbiano le seguenti condizioni iniziali

$$t = 0 : \quad x = 0, \quad y = H; \quad \dot{x} = v_0, \quad \dot{y} = 0.$$

Ciò significa che il grave o il proiettile è lanciato con una velocità iniziale v_0 orizzontale da un'altezza H .

Le equazioni differenziali di partenza, come prima, sono

$$\ddot{x} = 0, \quad \ddot{y} = -g,$$

che, tenendo conto delle condizioni iniziali, con successive integrazioni, danno le componenti della velocità

$$\dot{x} = v_0, \quad \dot{y} = -gt,$$

ed i moti componenti

$$x = v_0 t, \quad y = -\frac{1}{2}gt^2 + H.$$

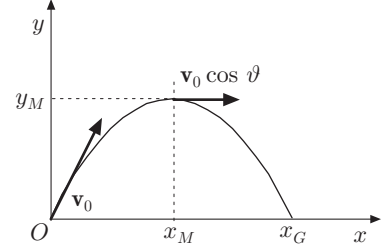


Fig. 4.32

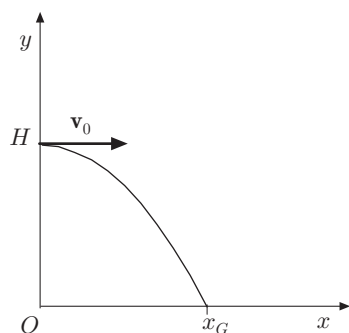


Fig. 4.33

Eliminando il tempo da queste ultime, si ottiene l'equazione della traiettoria

$$y = -\frac{1}{2}g\frac{x^2}{v_0^2} + H,$$

che è la parabola mostrata in figura 33.

Si ricava inoltre

$$x_G = v_0 \sqrt{\frac{2H}{g}}, \quad t_G = \frac{x_G}{v_0} = \sqrt{\frac{2H}{g}}.$$

Il tempo di gittata non dipende dalla velocità iniziale ed è uguale al tempo di caduta verticale di un grave (Galilei).

Galilei per primo studiò in maniera sistematica il moto dei proiettili ed esprime questo risultato nel *Dialogo sopra i due massimi sistemi del mondo*: "... quando in cima di una torre fusse una colubrina livellata, e con essa si tirassero tiri di punto bianco, cioè paralleli all'orizzonte, per poca o molta carica si desse al pezzo, sì che la palla andasse a cadere ora lontana mille braccia, or quattro mila, or sei mila, or dieci mila ecc, tutti questi tiri si spedirebbero in tempi eguali tra di loro, e ciascheduno eguale al tempo che la palla consumerebbe a venire dalla bocca del pezzo sino a terra, lasciata, senz'altro impulso, cadere semplicemente giù a perpendicolo".

Galilei stesso riconobbe l'indipendenza dei moti componenti che esprime con le leggi di relatività galileiana. Infatti il moto del proiettile, come ogni moto piano, è composto da due moti: uno uniforme lungo l'asse x , e l'altro con accelerazione costante lungo l'asse y ; se un osservatore si muovesse lungo x con la velocità costante del moto componente su quest'asse, vedrebbe il moto in una dimensione lungo la verticale, e ciò è conforme al metodo usato per risolvere il problema del moto del proiettile.

Fu proprio nell'analizzare la componente verticale di questo moto che Galilei si trovò di fronte al problema di descrivere la caduta libera di un corpo. Non avendo la possibilità di osservare il fenomeno nel vuoto, ma sperimentando con corpi diversi in caduta in vari fluidi, giunse alla conclusione che tutti i corpi che cadono dalla stessa altezza raggiungono alla fine la stessa velocità indipendentemente dal loro peso. Naturalmente allora non aveva la possibilità di misurare il tempo di caduta con sufficiente precisione, ma gli esperimenti condotti con sfere fatte rotolare lungo piani inclinati, in maniera da rendere il tempo dell'esperimento opportunamente lungo e perciò facilmente misurabile, gli permisero di concludere che la velocità finale delle sfere dipendeva esclusivamente dall'altezza e non dalla lunghezza del percorso effettivamente seguito.

Questi risultati permisero a Galilei di concludere che i moti verticale e orizzontale di un proiettile potevano avvenire contemporaneamente *senza alterarsi, perturbarsi o ostacolarsi a vicenda*.

Esempi

- ||| 14. Una particella si muove sull'asse x con accelerazione $a = -2x$. Trovare la relazione tra velocità e spazio percorso supponendo che per $x = 0$, $v_0 = 4 \text{ m/s}$. Poiché

$$dv = a dt, \quad v = \frac{dx}{dt},$$

moltiplicando ambo i membri per v , si ha

$$v dv = a \frac{dx}{dt} dt = a dx.$$

Integrando

$$\int v dv = \int a dx, \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{2} v^2 = ax + C;$$

sostituendo l'espressione dell'accelerazione e tenendo conto della condizione iniziale, si ottiene

$$\frac{1}{2} v^2 = -2x^2 + 8, \quad \Rightarrow \quad v = \sqrt{16 - 4x^2}.$$

- ||| 15. Una particella si muove in un piano con velocità di componenti

$$\dot{x} = 4t^3 + 4t, \quad \dot{y} = 4t.$$

Trovare l'equazione della traiettoria sapendo che per $t = 0$ la particella è nella posizione $P_0 \equiv (1; 2)$. Integrando e tenendo conto delle condizioni iniziali, si ha

$$x = 4 \int t^3 dt + 4 \int t dt = t^4 + 2t^2 + C_1 = t^4 + 2t^2 + 1,$$

$$y = 4 \int t dt = 2t^2 + C_2 = 2t^2 + 2.$$

Ma dalla seconda $t^2 = (y - 2)/2$, e sostituendo nella prima si ottiene

$$x = \left(\frac{y-2}{2}\right)^2 + 2\left(\frac{y-2}{2}\right) + 1 = \frac{y^2}{4}.$$

L'equazione della traiettoria è

$$y^2 = 4x.$$

- ||| 16. Una particella si muove in un piano con velocità di modulo costante $v = 2 \text{ m/s}$. L'angolo θ che il vettore velocità forma con l'asse x varia nel tempo con legge $\theta = \pi t/2$.

Supponendo che per $t = 0$, $x_0 = y_0 = 0$, determinare la traiettoria della particella.

La componenti della velocità lungo gli assi x e y si scrivono

$$\dot{x} = v \cos \frac{\pi}{2} t, \quad \dot{y} = v \sin \frac{\pi}{2} t.$$

Integrando si ha

$$x = \frac{2v}{\pi} \sin \frac{\pi}{2} t + C_1, \quad y = -\frac{2v}{\pi} \cos \frac{\pi}{2} t + C_2,$$

dove le costanti, per $t = 0$, risultano $C_1 = 0$, $C_2 = 2v/\pi$. Pertanto

$$x = \frac{2v}{\pi} \sin \frac{\pi}{2} t, \quad y = -\frac{2v}{\pi} \cos \frac{\pi}{2} t + \frac{2v}{\pi}.$$

Per ottenere la traiettoria va eliminato il tempo. Essendo:

$$\frac{\pi}{2v} x = \sin \frac{\pi}{2} t, \quad \frac{\pi}{2v} \left(y - \frac{2v}{\pi}\right) = -\cos \frac{\pi}{2} t;$$

quadrando e sommando, si ottiene

$$\left(\frac{\pi}{2v}\right)^2 x^2 + \left(\frac{\pi}{2v}\right)^2 \left(y - \frac{2v}{\pi}\right)^2 = 1;$$

$$x^2 + \left(y - \frac{2v}{\pi}\right)^2 = \frac{4v^2}{\pi^2};$$

e poiché $v = 2\text{ m/s}$:

$$x^2 + \left(y - \frac{4}{\pi}\right)^2 = \frac{16}{\pi^2},$$

che è l'equazione di una circonferenza di centro $C \equiv (0; 4/\pi)$ e raggio $R = 4/\pi\text{ m}$.

||| **17.** Le componenti dell'accelerazione di una particella secondo gli assi cartesiani sono

$$\ddot{x} = -3 \sin \omega t, \quad \ddot{y} = 2 \cos \omega t. \quad (37)$$

Determinare l'equazione della traiettoria supponendo che per $t = 0$ sia

$$x = 0, \quad y = 2/\omega^2; \quad \dot{x} = 3/\omega, \quad \dot{y} = 0.$$

Integrando la prima delle (37), si ottiene

$$\dot{x} = -3 \int \sin \omega t \, dt = \frac{3}{\omega} \cos \omega t + C_1$$

$$x = \frac{3}{\omega} \int \cos \omega t \, dt + \int C_1 dt = \frac{3}{\omega^2} \sin \omega t + C_1 t + C_2.$$

Tenuto conto delle condizioni iniziali, risulta $C_1 = 0$, $C_2 = 0$, quindi

$$x = \frac{3}{\omega^2} \sin \omega t; \quad (38)$$

il moto lungo x è armonico.

Integrando la seconda delle (37), si ha

$$\dot{y} = 2 \int \cos \omega t \, dt = \frac{2}{\omega} \sin \omega t + C_1,$$

$$y = \frac{2}{\omega} \int \sin \omega t \, dt + \int C_1 dt = -\frac{2}{\omega^2} \cos \omega t + C_1 t + C_2.$$

Infine, per le condizioni iniziali, $C_1 = 0$, $C_2 = 4/\omega^2$, pertanto:

$$y = -\frac{2}{\omega^2} \cos \omega t + \frac{4}{\omega^2}.$$

Poiché dalla (38):

$$\sin \omega t = \frac{\omega^2}{3} x,$$

ed inoltre

$$\cos \omega t = \sqrt{1 - \sin^2 \omega t} = \sqrt{1 - \frac{\omega^4 x^2}{9}},$$

si ottiene

$$y = \frac{4}{\omega^2} - \frac{2}{\omega^2} \sqrt{1 - \frac{\omega^4 x^2}{9}}.$$

La traiettoria è una ellisse con centro in $P_0 \equiv (0; 4/\omega^2)$, assi di equazioni $x = 0$, $y = 4/\omega^2$ e semiassi $a = 3/\omega^2$, $b = 2/\omega^2$.

5. Cinematica relativa

1. Introduzione

Nei capitoli precedenti abbiamo insistito sulla necessità di fissare una terna di riferimento rispetto alla quale descrivere il moto di un punto o di una particella. Tale descrizione, pur rappresentando una ben determinata realtà fisica, è diversa se si cambia terna di riferimento. In particolare se, in una certa terna, la posizione del punto non cambia nel tempo, il punto sarà in quiete relativa rispetto ad essa, mentre rispetto ad un'altra terna può apparire in movimento. Quando un treno passa in una stazione, diciamo che il treno è in moto rispetto alla stazione; un passeggero che si trova sul treno potrebbe dire con altrettanto fondamento che la stazione è in moto rispetto al treno. Un osservatore fisso sulla strada percorsa da un veicolo vede un punto della circonferenza di una ruota del veicolo descrivere una cicloide; l'osservatore che si trova sul veicolo vede lo stesso punto descrivere una circonferenza. Gli esempi potrebbero essere infiniti e da tutti si può trarre la conclusione che la quiete ed il moto sono concetti relativi. Tuttavia se gli osservatori conoscono il loro moto relativo, possono correlare le loro rispettive descrizioni. In particolare se le terne di riferimento sono fisse, tali cioè che la loro mutua posizione rimanga costante nel tempo, il moto del punto, a parte la sua posizione iniziale, nelle due terne è descritto nello stesso modo.

In generale consideriamo una terna $\Omega\xi\eta\zeta$ che diciamo *fissa*, ed una seconda terna $Oxyz$ mobile rispetto alla prima; le equazioni del moto di un punto nelle due terne, sono rispettivamente:

$$\begin{aligned}\xi &= \xi(t), & \eta &= \eta(t), & \zeta &= \zeta(t), \\ x &= x(t), & y &= y(t), & z &= z(t)\end{aligned}$$

Le seconde sono le equazioni del moto giudicate dall'osservatore mobile, che dice se stesso fisso e prescinde dal proprio movimento rispetto all'osservatore della prima terna; esse definiscono il moto relativo. Per contro il moto definito dalle prime si chiama moto assoluto. Si badi però che si tratta solo di due nomi e basta; nessun carattere di privilegio ha il moto del punto rispetto ad Ω

nei riguardi del moto dello stesso punto rispetto ad O . Sarebbe più giusto abbandonare tale terminologia in uso e dire: moto M rispetto ad Ω e moto M' rispetto ad O .

Il legame tra il moto M ed il moto M' e viceversa, è dato dalle relazioni che in geometria trasformano le coordinate della terna $\Omega\xi\eta\zeta$ nelle coordinate della terna $Oxyz$ e dalle relazioni inverse.

Va osservato che nei secoli scorsi la possibilità di definire un riferimento assoluto, in quiete rispetto allo spazio vuoto, è stata oggetto di discussioni molto controverse da parte di fisici e filosofi. Questo perché si pensava che lo spazio vuoto fosse riempito da un misterioso fluido, dotato di proprietà straordinarie e contraddittorie, chiamato *etere cosmico*; quindi era logico pensare che i fenomeni fisici potessero essere descritti senza ambiguità in un riferimento in quiete rispetto all'etere. Quando l'idea di etere cosmico, perché inutile, fu abbandonata, risultò impossibile definire un riferimento assoluto perché lo spazio vuoto non ha elementi che possano essere presi come punti di riferimento. Ciò che al meglio si può fare è definire un particolare riferimento in quiete rispetto a certe stelle che sono fisse nello spazio cosmico. Così tutti gli altri riferimenti possono essere definiti rispetto a quest'ultimo; in particolare le infinite terne fisse o in moto traslatorio uniforme rispetto alla terna legata alle stelle fisse si chiamano *terne o riferimenti inerziali*.

Esempio

||| 1. In una terna fissa il moto rettilineo ed uniforme di un punto ha equazioni

$$\xi = vt + \xi_0, \quad \eta = 0, \quad \zeta = 0. \quad (1)$$

Una terna mobile, avente origine ed asse z coincidenti con quella fissa, ruota uniformemente attorno al comune asse $z \equiv \zeta$. Determinare il moto relativo del punto.

Le equazioni di trasformazione delle coordinate dalla terna fissa a quella mobile e le inverse, sono

$$\begin{aligned} \xi &= x \cos \theta - y \sin \theta & x &= \xi \cos \theta + \eta \sin \theta \\ \eta &= x \sin \theta + y \cos \theta & y &= -\xi \sin \theta + \eta \cos \theta \end{aligned}$$

Sostituendo le (1) nelle equazioni di trasformazione inverse, si ottengono i moti componenti nella terna mobile:

$$x = (vt + \xi_0) \cos \omega t, \quad y = -(vt + \xi_0) \sin \omega t, \quad (2)$$

dove $\theta = \omega t$ ed ω è la velocità angolare, costante, della terna mobile.

Le equazioni del moto ottenute si possono esprimere in coordinate polari. Quadrando e sommando le (2), si ottiene

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2} = vt + \xi_0,$$

e poiché

$$\theta = \tan^{-1} \frac{y}{x},$$

dal rapporto delle (2) si ha:

$$\theta = -\omega t.$$

Quindi

$$\rho = vt + \xi_0, \quad \theta = -\omega t.$$

Infine, eliminando il tempo:

$$\rho = -\frac{v}{\omega}\theta + \xi_0,$$

che è l'equazione della spirale di Archimede mostrata in figura 1, per $\xi_0 = 0$.

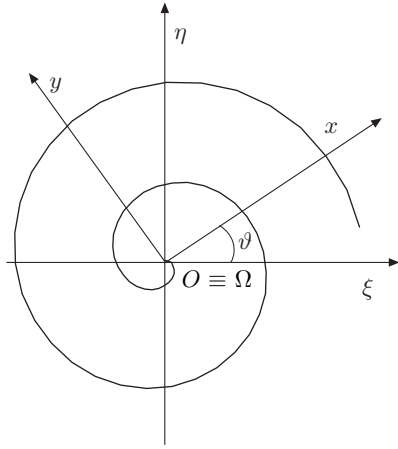


Fig. 5.1

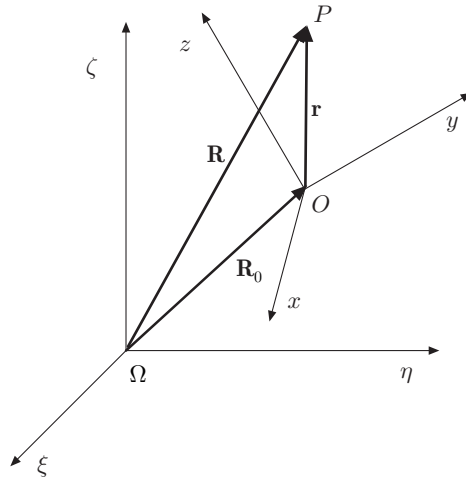


Fig. 5.2

2. Velocità nei moti relativi

Consideriamo due terne di riferimento: una fissa con origine in Ω e l'altra con origine in O , mobile rispetto alla prima; siano \mathbf{R} , \mathbf{R}_0 ed \mathbf{r} i vettori che rispettivamente individuano la posizione del punto nella terna fissa, la posizione dell'origine della terna mobile rispetto alla terna fissa e la posizione del punto rispetto alla terna mobile. Osservando la figura 2 si ha

$$\mathbf{R} = \mathbf{R}_0 + \mathbf{r}. \quad (3)$$

Per ottenere la relazione tra le velocità nei due riferimenti, scriviamo la (3) come

$$\mathbf{R} = \mathbf{R}_0 + \mathbf{r} = \mathbf{R}_0 + x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k},$$

dove con \mathbf{i} , \mathbf{j} , \mathbf{k} , indichiamo i versori degli assi della terna mobile. Derivando rispetto al tempo e tenendo presente che i versori della terna mobile, sono funzioni del tempo, cioè cambiano orientazione istante per istante, si ha

$$\dot{\mathbf{R}} = \dot{\mathbf{R}}_0 + \dot{x}\mathbf{i} + y\dot{\mathbf{j}} + z\dot{\mathbf{k}} + x\frac{d\mathbf{i}}{dt} + y\frac{d\mathbf{j}}{dt} + z\frac{d\mathbf{k}}{dt}. \quad (4)$$

Ricordando le formule di Poisson, equazione (19)-III,

$$\frac{d\mathbf{i}}{dt} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{i}, \quad \frac{d\mathbf{j}}{dt} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{j}, \quad \frac{d\mathbf{k}}{dt} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{k},$$

e sostituendo nella (4), si ottiene

$$\dot{\mathbf{R}} = \dot{\mathbf{R}}_0 + \dot{x}\mathbf{i} + \dot{y}\mathbf{j} + \dot{z}\mathbf{k} + \boldsymbol{\omega} \times (x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}). \quad (5)$$

$\dot{\mathbf{R}}_0$ è la velocità dell'origine O della terna mobile rispetto a quella fissa; $\dot{x}\mathbf{i} + \dot{y}\mathbf{j} + \dot{z}\mathbf{k}$ è la velocità del punto rispetto alla terna mobile, che chiamiamo velocità relativa \mathbf{v}_r ; $\boldsymbol{\omega} \times (x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}) = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}$ è la velocità che compete al punto nel movimento polare della terna mobile.

Indicando con

$$\mathbf{v}_t = \dot{\mathbf{R}}_0 + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}$$

la velocità di trascinamento, si ottiene

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_t + \mathbf{v}_r. \quad (6)$$

La velocità assoluta è somma della velocità di trascinamento e della velocità relativa. Dunque la velocità relativa risulta:

$$\mathbf{v}_r = \mathbf{v} - \mathbf{v}_t.$$

Se le origini delle due terne coincidono e quella mobile si muove di movimento polare o rotatorio con asse fisso, risulta $\mathbf{v}_t = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}$. Se la terna mobile si muove di moto traslatorio si ha $\mathbf{v}_t = \dot{\mathbf{R}}_0$, e se, in particolare, \mathbf{v}_t è costante, le terne sono inerziali. In tal caso per la (3) si ha

$$\mathbf{R} = \mathbf{v}_t t + \mathbf{r}, \quad \mathbf{r} = \mathbf{R} - \mathbf{v}_t t, \quad (7)$$

che proiettate sugli assi coordinati costituiscono le *trasformazioni di Galilei* (relatività galileana). Esse non sono altro che le formule di trasformazione di coordinate di due terne in moto relativo uniforme. Se, in particolare, la velocità di trascinamento è diretta lungo l'asse x , si ha

$$\xi = v_t t + x, \quad x = \xi - v_t t, \quad \eta = y, \quad \zeta = z.$$

2.1. Velocità relativa di due particelle

Siano A e B due particelle animate di velocità \mathbf{v}_A e \mathbf{v}_B , rispetto ad un riferimento fisso; se immaginiamo che A sia ferma in un riferimento solidale con essa, che dunque si muova con velocità di trascinamento v_A , allora per la (6), v_B può essere espressa come somma della velocità di trascinamento e della velocità relativa di B rispetto ad A :

$$\mathbf{v}_B = \mathbf{v}_A + \mathbf{v}_{BA}, \quad \Rightarrow \quad \mathbf{v}_{BA} = \mathbf{v}_B - \mathbf{v}_A. \quad (8)$$

Analogamente per la velocità di A rispetto a B

$$\mathbf{v}_{AB} = \mathbf{v}_A - \mathbf{v}_B, \quad \Rightarrow \quad \mathbf{v}_{BA} = -\mathbf{v}_{AB}, \quad (9)$$

Le (8) e (9) si possono anche dimostrare considerando il riferimento fisso, figura 3, in cui le due particelle sono individuate dai vettori \mathbf{r}_A ed \mathbf{r}_B ; si ha:

$$\mathbf{v}_A = \frac{d\mathbf{r}_A}{dt}, \quad \mathbf{v}_B = \frac{d\mathbf{r}_B}{dt};$$

ed essendo $\mathbf{r}_{BA} = \mathbf{r}_B - \mathbf{r}_A$, segue

$$\frac{d\mathbf{r}_{BA}}{dt} = \frac{d\mathbf{r}_B}{dt} - \frac{d\mathbf{r}_A}{dt}, \quad \Rightarrow \quad \mathbf{v}_{BA} = \mathbf{v}_B - \mathbf{v}_A,$$

e viceversa.

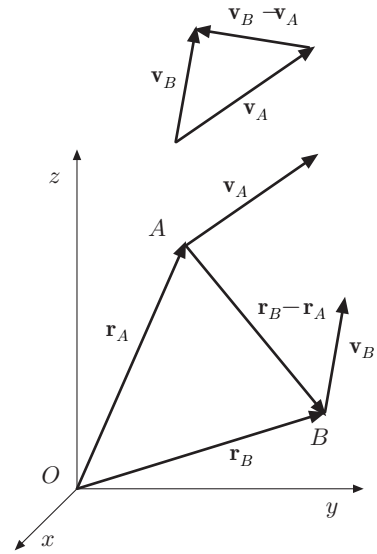


Fig. 5.3

- ||| 2. Un aereo A vola in direzione nord con velocità $v_A = 400 \text{ km/h}$ rispetto al suolo. Un altro aereo B , vola in direzione $N 60^\circ O$ con velocità $v_B = 300 \text{ km/h}$, anch'essa rispetto al suolo. Trovare il modulo delle velocità relative \mathbf{v}_{BA} , \mathbf{v}_{AB} e le rispettive direzioni.

Le velocità relative sono opposte, $\mathbf{v}_{BA} = -\mathbf{v}_{AB}$. Dalla figura 4 risulta

$$v_{AB} = v_{BA} = \sqrt{v_A^2 + v_B^2 - 2v_A v_B \cos 60^\circ} = 360,5 \text{ km/h}.$$

La direzione si ricava da

$$\frac{v_B}{\sin \varphi} = \frac{v_{AB}}{\sin 60^\circ}, \quad \sin \varphi = \frac{v_B}{v_{AB}} \sin 60^\circ = 0,72, \quad \varphi = 46,1^\circ.$$

L'aereo B vede A viaggiare in direzione $N 46,1^\circ E$, ed A vede B viaggiare in direzione $S 46,1^\circ O$.

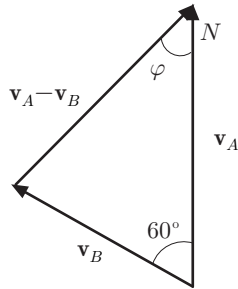


Fig. 5.4

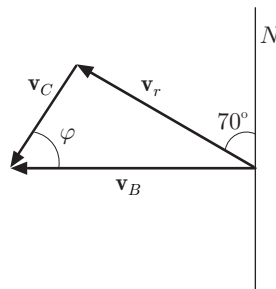


Fig. 5.5

- ||| 3. Una barca si muove su uno specchio d'acqua dove è presente una corrente. La velocità della barca rispetto alla corrente è di 4 km/h ed ha direzione $N 60^\circ O$, mentre rispetto alla terra è di 5 km/h con direzione ovest. Trovare velocità e direzione della corrente rispetto alla terra.

Dalla figura 5, indicando con v_r la velocità della barca rispetto alla corrente, con v_B e v_C le velocità della barca e della corrente rispetto alla terra, si ha

$$v_C = \sqrt{v_B^2 + v_r^2 - 2v_B v_r \cos 30^\circ} = 2,52 \text{ km/h}.$$

La direzione si ricava da

$$\frac{v_r}{\sin \varphi} = \frac{v_C}{\sin 30^\circ}, \quad \sin \varphi = \frac{v_r}{v_C} \sin 30^\circ = 0,79, \quad \varphi = 52,52^\circ;$$

oppure $S 37,48^\circ O$.

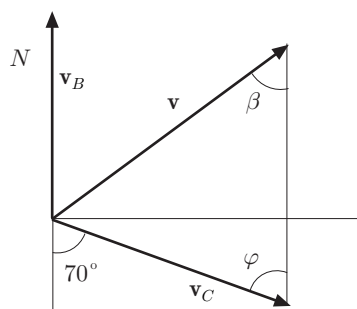


Fig. 5.6

- III 4. La velocità di una barca che viaggia verso N, su acqua in quiete, è $v_B = 10 \text{ km/h}$. Trovare la velocità \mathbf{v} della barca, in modulo e direzione, quando sullo specchio d'acqua è presente una corrente di velocità $v_C = 2 \text{ km/h}$, diretta verso S 70° E.

Si ha

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_B + \mathbf{v}_C,$$

e poiché, figura 6, l'angolo tra corrente e barca è $\theta = 110^\circ$, il modulo della velocità della barca risulta

$$v = \sqrt{v_B^2 + v_C^2 + 2v_B v_C \cos \theta} = 9,5 \text{ km/h}.$$

Per trovare la direzione, si considerino gli angoli β e φ della figura; si ha

$$\frac{v_C}{\sin \beta} = \frac{v}{\sin \varphi}, \quad \sin \beta = \frac{v_C \sin 70^\circ}{v} = 0,197, \quad \beta = 11,41^\circ.$$

Dunque la direzione lungo cui procede la barca è $\beta = N 11,41^\circ E$.

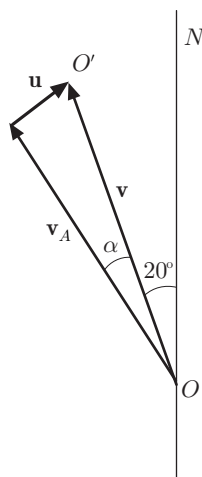


Fig. 5.7

- III 5. La velocità di un aereo in aria calma è $v_A = 200 \text{ km/h}$. Il pilota deve recarsi da un punto O ad un altro O' situato a N 20° O, sfruttando l'azione favorevole del vento che soffia a velocità $u = 30 \text{ km/h}$ in direzione N 40° E. Trovare la velocità assoluta dell'aereo e la direzione lungo cui deve avanzare.

Indicando rispettivamente con \mathbf{v} e \mathbf{v}_A la velocità assoluta e la velocità relativa al vento dell'aereo, dalla figura 7 si ha

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_A + \mathbf{u}.$$

L'angolo α tra \mathbf{v} e \mathbf{v}_A si ottiene da

$$\frac{v_A}{\sin 60^\circ} = \frac{u}{\sin \alpha}, \quad \sin \alpha = \frac{u \sin 60^\circ}{v_A} = 0,13, \quad \alpha = 7,47^\circ.$$

Dunque il pilota deve puntare in direzione N $27,47^\circ$ O. Il modulo di \mathbf{v} è

$$v = \sqrt{v_A^2 + u^2 + 2v_A u \cos 67,47^\circ} = 213 \text{ km/h}.$$

La velocità \mathbf{v} dipende dalla velocità vento; in particolare l'aereo non potrà raggiungere O' se \mathbf{v}_A e \mathbf{u} sono opposti.

- III 6. Un aereo proveniente da sud deve recarsi in una località situata a nord e distante L , mentre un vento soffia verso est con velocità \mathbf{u} . Trovare il tempo di andata e ritorno sapendo che la velocità dell'aereo rispetto al vento è \mathbf{v} . Sia \mathbf{V} la velocità assoluta dell'aereo; dalla figura 8 si ha

$$\mathbf{V} = \mathbf{v} + \mathbf{u}, \quad V = \sqrt{v^2 + u^2}.$$

Il tempo di andata e ritorno è

$$t_1 = \frac{2L}{\sqrt{v^2 + u^2}} = \frac{2L}{v\sqrt{1 - (u/v)^2}},$$

maggiore del tempo impiegato in assenza di vento, quando $v = V$. Lo stesso ragionamento vale se il vento soffia verso ovest.

Supponiamo ora che il cammino L venga percorso nella direzione del vento; allora $V = v + u$, e l'aereo impiega il tempo $L/(v + u)$. Al ritorno, essendo il vento sfavorevole, la sua velocità è $V = v - u$ ed il tempo impiegato risulta $L/(v - u)$. La durata del viaggio di andata e ritorno è

$$t_2 = \frac{2Lv}{v^2 - u^2} = \frac{2L}{v[1 - (u/v)^2]}.$$

Il rapporto tra i tempi t_1 e t_2 risulta:

$$\frac{t_1}{t_2} = \sqrt{1 - \left(\frac{u}{v}\right)^2};$$

come si vede $t_1 < t_2$.

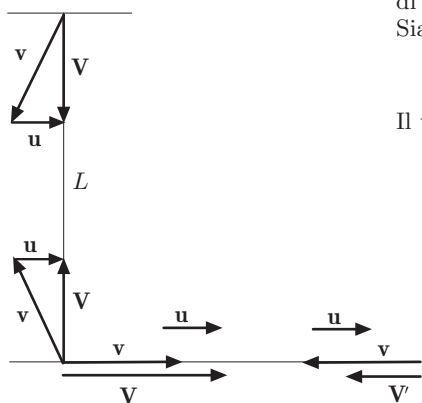


Fig. 5.8

Supponiamo di sostituire all'aereo un raggio di luce di velocità c che viaggia in una corrente di *etere*, quale è quella che dovrebbe rilevare un osservatore solidale con la terra per effetto del suo moto rispetto all'etere. In accordo col risultato precedente, tale osservatore dovrebbe ottenere per i tempi impiegati dalla luce a percorrere il medesimo percorso in un senso e nel senso opposto, valori diversi a seconda se questo percorso è orientato nella direzione del moto della terra rispetto all'etere, oppure trasversalmente a questa direzione. La diversità dei due tempi, pur essendo del secondo ordine rispetto al rapporto tra la velocità di rivoluzione della terra (30 km/s) e quella della luce (300.000 km/s), dovrebbe essere rilevata nell'esperienza di Michelson e Morley. Ciò non si verifica.

L'esperienza mostra che, quando v è la velocità della luce, risulta $t_1 = t_2$. Ciò significa che il modulo della velocità di propagazione della luce non è influenzato dal moto dell'osservatore. Questo risultato costituisce uno dei fondamenti della teoria della relatività.

- ||| 7. Una barca a vela viaggia verso N con velocità $v_B = 10 \text{ km/h}$. La bandierina sul pennone della barca indica un vento in direzione $O 45^\circ S$, mentre una bandierina sulla terraferma indica un vento in direzione $O 30^\circ S$. Trovare la velocità del vento rispetto alla terra e rispetto alla barca.

Dalla figura 9, indicando con \mathbf{v} e \mathbf{v}_B le velocità del vento e della barca rispetto alla terraferma e con \mathbf{v}_r la velocità del vento rispetto alla barca, si ha

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_B + \mathbf{v}_r.$$

Per il teorema dei seni:

$$\frac{v}{\sin 45^\circ} = \frac{v_B}{\sin 15^\circ} = \frac{v_r}{\sin 120^\circ},$$

da cui

$$v = v_B \frac{\sin 45^\circ}{\sin 15^\circ} = 27,32 \text{ km/h},$$

$$v_r = v_B \frac{\sin 120^\circ}{\sin 15^\circ} = 33,46 \text{ km/h}.$$

- ||| 8. Un corpo ruota uniformemente attorno ad un asse che, a sua volta, ruota uniformemente attorno ad un asse fisso. I due assi hanno un punto in comune O ; determinare il moto assoluto del corpo.

Sia ω_1 la velocità angolare del corpo rispetto all'asse mobile ed ω_2 la velocità angolare dell'asse mobile attorno all'asse fisso, figura 10. La velocità relativa del generico punto P del corpo è

$$\mathbf{v}_r = \omega_1 \times \mathbf{r},$$

con \mathbf{r} distanza di P da O ; la velocità di trascinamento è

$$\mathbf{v}_t = \omega_2 \times \mathbf{r}.$$

La velocità assoluta risulta

$$\mathbf{V} = \mathbf{v}_r + \mathbf{v}_t = (\omega_1 + \omega_2) \times \mathbf{r}.$$

Il moto assoluto è polare e l'atto di moto in ogni istante è rotatorio attorno ad un asse diretto come la diagonale del parallelogramma e velocità angolare $\omega_1 + \omega_2$.

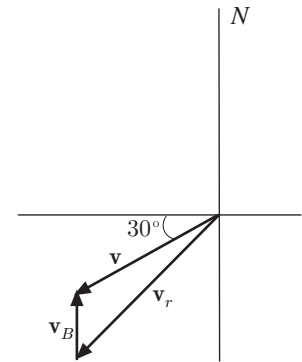


Fig. 5.9

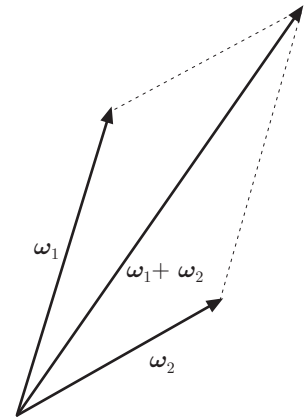


Fig. 5.10

III 3. Accelerazione nei moti relativi

Al fine di ricavare la relazione tra le accelerazioni nei moti relativi deriviamo la (4) rispetto al tempo; si ha

$$\begin{aligned}\ddot{\mathbf{R}} &= \ddot{\mathbf{R}}_0 + \ddot{x}\mathbf{i} + \ddot{y}\mathbf{j} + \ddot{z}\mathbf{k} + \dot{x}\frac{d\mathbf{i}}{dt} + \dot{y}\frac{d\mathbf{j}}{dt} + \dot{z}\frac{d\mathbf{k}}{dt} \\ &\quad + \dot{x}\frac{d\mathbf{i}}{dt} + \dot{y}\frac{d\mathbf{j}}{dt} + \dot{z}\frac{d\mathbf{k}}{dt} + x\frac{d^2\mathbf{i}}{dt^2} + y\frac{d^2\mathbf{j}}{dt^2} + z\frac{d^2\mathbf{k}}{dt^2} \\ &= \ddot{\mathbf{R}}_0 + (\ddot{x}\mathbf{i} + \ddot{y}\mathbf{j} + \ddot{z}\mathbf{k}) + 2\left(\dot{x}\frac{d\mathbf{i}}{dt} + \dot{y}\frac{d\mathbf{j}}{dt} + \dot{z}\frac{d\mathbf{k}}{dt}\right) \\ &\quad + \left(x\frac{d^2\mathbf{i}}{dt^2} + y\frac{d^2\mathbf{j}}{dt^2} + z\frac{d^2\mathbf{k}}{dt^2}\right).\end{aligned}$$

Usando le formule di Poisson e le loro derivate,

$$\begin{aligned}\frac{d^2\mathbf{i}}{dt^2} &= \frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt} \times \mathbf{i} + \boldsymbol{\omega} \times \frac{d\mathbf{i}}{dt}, \\ \frac{d^2\mathbf{j}}{dt^2} &= \frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt} \times \mathbf{j} + \boldsymbol{\omega} \times \frac{d\mathbf{j}}{dt}, \\ \frac{d^2\mathbf{k}}{dt^2} &= \frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt} \times \mathbf{k} + \boldsymbol{\omega} \times \frac{d\mathbf{k}}{dt},\end{aligned}$$

la precedente diventa

$$\begin{aligned}\ddot{\mathbf{R}} &= \ddot{\mathbf{R}}_0 + (\ddot{x}\mathbf{i} + \ddot{y}\mathbf{j} + \ddot{z}\mathbf{k}) + 2[\dot{x}(\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{i}) + \dot{y}(\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{j}) + \dot{z}(\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{k})] \\ &\quad + x\left[\frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt} \times \mathbf{i} + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{i})\right] + y\left[\frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt} \times \mathbf{j} + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{j})\right] \\ &\quad + z\left[\frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt} \times \mathbf{k} + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{k})\right].\end{aligned}$$

Raccogliendo i vari termini si ottiene

$$\begin{aligned}\ddot{\mathbf{R}} &= \ddot{\mathbf{R}}_0 + (\ddot{x}\mathbf{i} + \ddot{y}\mathbf{j} + \ddot{z}\mathbf{k}) + 2\boldsymbol{\omega} \times (\dot{x}\mathbf{i} + \dot{y}\mathbf{j} + \dot{z}\mathbf{k}) \\ &\quad + \frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt} \times (x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}) + \boldsymbol{\omega} \times [\boldsymbol{\omega} \times (x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k})] \quad (10) \\ &= \ddot{\mathbf{R}}_0 + \mathbf{a}_r + 2\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}_r + \frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt} \times \mathbf{r} + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}).\end{aligned}$$

Definiamo accelerazione di trascinamento la quantità

$$\mathbf{a}_t = \ddot{\mathbf{R}}_0 + \frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt} \times \mathbf{r} + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}); \quad (11)$$

il primo termine è l'accelerazione di traslazione del riferimento mobile, il secondo e il terzo termine dipendono dal moto polare del riferimento intorno all'origine O ; in particolare, il secondo termine è l'accelerazione tangenziale del punto; il terzo termine l'accelerazione centripeta.

In definitiva la relazione che lega le accelerazioni nei due riferimenti si scrive

$$\mathbf{a} = \mathbf{a}_t + \mathbf{a}_r + 2\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}_r; \quad (12)$$

da cui

$$\mathbf{a}_r = \mathbf{a} - \mathbf{a}_t - 2\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}_r. \quad (13)$$

L'accelerazione misurata nel riferimento assoluto o fisso, come quella misurata nel riferimento mobile, consta di tre termini: accelerazione di trascinamento, accelerazione relativa ed accelerazione complementare o di Coriolis, quest'ultima data da:

$$\mathbf{a}_c = 2\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}_r.$$

Si osserva subito che contrariamente a quanto avviene per la velocità, in cui si ha un termine di trascinamento e un termine relativo, nel caso dell'accelerazione compare un terzo termine che, come s'è detto, è chiamata *accelerazione Coriolis* o anche *accelerazione di deviazione*. Essendo quest'ultima definita da un prodotto vettoriale, risulta nulla quando la velocità angolare della terna mobile è nulla, cioè se questa si muove di moto traslatorio, quando la velocità relativa del punto è nulla oppure quando velocità angolare e velocità relativa sono parallele.

Si osservi che un riferimento legato alla terra non è un riferimento inerziale, pertanto non lo possiamo ritenere assoluto o fisso; in queste condizioni l'accelerazione misurata da un osservatore legato alla terra è data dalla (13). L'accelerazione di Coriolis, essendo $\boldsymbol{\omega}$ la velocità angolare di rotazione della terra, dipende dal vettore velocità di cui è animato il punto. Per esempio, se un corpo si muove ortogonalmente alla superficie terrestre, tale accelerazione è nulla ai poli e massima all'equatore; essa in generale è piuttosto modesta in quanto la velocità angolare di rotazione della terra è piccola, tuttavia poiché dipende dalla velocità relativa del corpo, può avere effetti importanti, come vedremo in dinamica relativa.

Passiamo a considerare alcuni casi particolari. Quando le origini delle due terne coincidono e la terna mobile è animata da movimento polare $\ddot{\mathbf{R}}_0 = 0$, l'accelerazione di trascinamento risulta

$$\mathbf{a}_t = \frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt} \times \mathbf{r} + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}).$$

Se inoltre il vettore velocità angolare è costante, il moto è piano e l'accelerazione di trascinamento si riduce al termine centripeto. Si noti che, per la (13), nel riferimento mobile il termine di trascinamento compare col segno negativo, ciò significa che il vettore $-\mathbf{a}_t$ è opposto all'accelerazione centripeta; chiamiamo questo vettore *accelerazione centrifuga*.

Quando la terna mobile è animata di moto traslatorio l'accelerazione assoluta è somma dell'accelerazione di trascinamento

$\ddot{\mathbf{R}}_0$ e dell'accelerazione relativa \mathbf{a}_r . Ancora, se il moto della terna mobile è traslatorio uniforme, l'accelerazione misurata nelle due terne è la stessa, le due terne sono inerziali; è impossibile distinguere con esperimenti di meccanica, quale delle due terne è in moto rispetto all'altra. In altri termini due osservatori in moto relativo uniforme non possono riconoscere il moto assoluto.

Questo principio di relatività fu enunciato da Galilei nel XVII secolo ma solo alla fine del secolo scorso, in seguito al risultato negativo dell'esperienza di Michelson e Morley, che con una accurata misura della velocità della luce rispetto alla terra tendeva a rivelare il moto assoluto della terra rispetto all'etere cosmico, fu rinunciato come legge universale da Einstein e Poincaré.

Il grande precursore è stato dunque Galilei, il quale nel Dialogo dei Massimi Sistemi dice: "... Rinserratevi con qualche amico nella maggiore stanza che sia sotto coverta di alcun gran navilio, e quivi fate d'aver mosche, farfalle e simili animaletti volanti; siavi anco un gran vaso d'acqua, e dendrovi de' pescetti; suspendasi anco in alto qualche secchiello, che a goccia a goccia vadia versando dell'acqua in un altro vaso di angusta bocca, che sia posto a basso: e stando ferma la nave, osservate diligentemente come quelli animaletti volanti con pari velocità vanno verso le pareti della stanza; i pesci si vedranno andar notando indifferentemente per tutti i versi; le stille cadenti entreranno tutte nel vaso sottoposto; e voi, gettando all'amico alcuna cosa, non più gagliardamente la dovrete gettare verso quella parte che verso questa, quando le lontananze sieno eguali; e saltando voi, come si dice, a piè giunti, eguali spazi passerete verso tutte le parti. Osservate che avrete diligentemente tutte queste cose, benché niun dubbio ci sia che mentre il vassello sta fermo non debbano succeder così fate muover la nave con quanta si voglia velocità; ché (pur che il moto sia uniforme e non fluttuante in qua e in là) voi non riconoscerete una minima mutazione in tutti li nominati effetti, né da alcuno di quelli potrete comprender se la nave cammina o pure sta ferma: voi saltando passerete nel tavolato i medesimi spazi che prima, né, perché la nave si muova velocissimamente, farete maggior salti verso la poppa che verso la prua, benché, nel tempo che voi state in aria, il tavolato sottopostovi scorra verso la parte contraria al vostro salto; e gettando alcuna cosa al compagno, non con più forza bisognerà tirarla, per arrivarlo, se egli sarà verso la prua e voi verso la poppa, che se voi fuste situati per l'opposito; le goccioline cadranno come prima nel vaso inferiore, senza caderne pur una verso poppa, benché, mentre la gocciola è per aria, la nave scorra molti palmi; i pesci nella lor acqua non con più fatica noteranno verso la precedente che verso la susseguente parte del vaso, ma con pari agevolezza verranno al cibo posto su qualsivoglia luogo dell'orlo del vaso; e finalmente le farfalle e le mosche continueranno i lor voli indifferentemente verso tutte le parti, né mai accaderà che si riduchino verso la parte che riguarda la poppa, quasi che fussero stracche in tener dietro al veloce corso della nave, dalla quale per lungo tempo trattenendosi per aria, saranno state separate; e se abbruciando alcuna lagrima d'incenso si farà un poco di fumo, vedrassi ascender in alto ed a guisa di nugoletta trattenervisi, e indifferentemente muoversi non più verso quella che questa parte."

|| 3.1. Accelerazione relativa di due particelle

L'accelerazione relativa tra due particelle si definisce con procedimento analogo a quello che ha condotto alle (8) e (9). Derivando queste ultime rispetto al tempo, si ha

$$\mathbf{a}_{AB} = \mathbf{a}_A - \mathbf{a}_B, \quad \mathbf{a}_{BA} = -\mathbf{a}_{AB}. \quad (14)$$

Esempi

- ||| 9. Un riferimento mobile che ha origine ed asse z coincidenti con un riferimento fisso, ruota con velocità angolare costante attorno all'asse comune $z \equiv \zeta$. Determinare le relazioni tra velocità ed accelerazioni nel moto di un punto che si svolge nel piano ortogonale all'asse di rotazione.

Indicando con ξ, η le coordinate del riferimento fisso e con x, y quelle del riferimento mobile, le equazioni di trasformazione di tali coordinate, come già visto, sono

$$\begin{aligned}\xi &= x \cos \theta - y \sin \theta = x \cos \omega t - y \sin \omega t \\ \eta &= x \sin \theta + y \cos \theta = x \sin \omega t + y \cos \omega t.\end{aligned}\quad (15)$$

Derivando rispetto al tempo

$$\begin{aligned}\dot{\xi} &= \dot{x} \cos \omega t - \dot{y} \sin \omega t - \omega(x \sin \omega t + y \cos \omega t) \\ \dot{\eta} &= \dot{x} \sin \omega t + \dot{y} \cos \omega t + \omega(x \cos \omega t - y \sin \omega t);\end{aligned}\quad (16)$$

La velocità relativa, conformemente alle (15), nel riferimento fisso ha componenti

$$\begin{aligned}v_x &= \dot{x} \cos \omega t - \dot{y} \sin \omega t \\ v_y &= \dot{x} \sin \omega t + \dot{y} \cos \omega t.\end{aligned}$$

La velocità di trascinamento, $\mathbf{v}_t = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}$, di sola rotazione perché le terne hanno origini coincidenti, nel riferimento fisso ha componenti che si ricavano da:

$$\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r} = \begin{pmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 0 & 0 & \omega \\ \xi & \eta & 0 \end{pmatrix} = -\omega(\eta \mathbf{i} - \xi \mathbf{j}).$$

ossia

$$\begin{aligned}v_{tx} &= -\omega(x \sin \omega t + y \cos \omega t) \\ v_{ty} &= \omega(x \cos \omega t - y \sin \omega t).\end{aligned}$$

In conformità alla relazione $\mathbf{v} = \mathbf{v}_r + \mathbf{v}_t$, le componenti della velocità secondo gli assi fissi, date dalle (16), risultano somma delle componenti della velocità relativa e di quelle della velocità di trascinamento.

Derivando le (16) rispetto al tempo, si ottiene:

$$\begin{aligned}\ddot{\xi} &= (\ddot{x} \cos \omega t - \ddot{y} \sin \omega t) - \omega^2(x \cos \omega t - y \sin \omega t) \\ &\quad - 2\omega(\dot{x} \sin \omega t + \dot{y} \cos \omega t) \\ \ddot{\eta} &= (\ddot{x} \sin \omega t + \ddot{y} \cos \omega t) - \omega^2(x \sin \omega t + y \cos \omega t) \\ &\quad + 2\omega(\dot{x} \cos \omega t - \dot{y} \sin \omega t).\end{aligned}\quad (17)$$

Si trova che ciascuna componente dell'accelerazione consta di tre termini. Il primo termine è la componente dell'accelerazione relativa, il secondo la componente dell'accelerazione di trascinamento, centripeta, il terzo la componente del prodotto vettoriale $2\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}_r$; infatti

$$2\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}_r = 2 \begin{pmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 0 & 0 & \omega \\ v_x & v_y & 0 \end{pmatrix} = -2\omega(v_y \mathbf{i} - v_x \mathbf{j}).$$

Si verifica dunque che l'accelerazione assoluta è somma dell'accelerazione relativa, dell'accelerazione di trascinamento e dell'accelerazione di Coriolis.

CASI PARTICOLARI

a) Punto fermo nel riferimento ruotante ($\dot{x} = 0, \dot{y} = 0$).

Le (16) diventano

$$\begin{aligned}\dot{\xi} &= -\omega(x \sin \omega t + y \cos \omega t) = -\omega \eta \\ \dot{\eta} &= \omega(x \cos \omega t - y \sin \omega t) = \omega \xi;\end{aligned}$$

il moto è circolare uniforme con velocità di modulo

$$v = \sqrt{\dot{\xi}^2 + \dot{\eta}^2} = \sqrt{\omega^2 R^2 (\sin^2 \omega t + \cos^2 \omega t)} = \omega r.$$

Analogamente, le (17) risultano:

$$\begin{aligned}\ddot{\xi} &= -\omega^2 (x \cos \omega t - y \sin \omega t) = -\omega^2 \xi \\ \ddot{\eta} &= -\omega^2 (x \sin \omega t + y \cos \omega t) = -\omega^2 \eta;\end{aligned}$$

l'accelerazione è quella di trascinamento, centripeta:

$$\mathbf{a} = \mathbf{a}_t = -\omega^2 \mathbf{r}.$$

b) Punto fermo nel riferimento fisso ($\dot{\xi} = 0, \dot{\eta} = 0$).

Le (16) diventano

$$\begin{aligned}\dot{x} \cos \omega t - \dot{y} \sin \omega t - \omega(x \sin \omega t + y \cos \omega t) &= 0 \\ \dot{x} \sin \omega t + \dot{y} \cos \omega t + \omega(x \cos \omega t - y \sin \omega t) &= 0.\end{aligned}$$

Raccogliendo i termini che contengono $\sin \omega t$ e $\cos \omega t$, si ha

$$\begin{aligned}(\dot{x} - \omega y) \cos \omega t - (\dot{y} + \omega x) \sin \omega t &= 0 \\ (\dot{y} + \omega x) \cos \omega t + (\dot{x} - \omega y) \sin \omega t &= 0.\end{aligned}$$

Queste relazioni, poiché $\sin \omega t$ e $\cos \omega t$ non sono mai contemporaneamente nulli, comportano

$$\begin{aligned}\dot{x} - \omega y &= 0 & \Rightarrow & \dot{x} = \omega y \\ \dot{y} + \omega x &= 0 & & \dot{y} = -\omega x\end{aligned}\tag{18}$$

L'osservatore ruotante, per esempio in senso antiorario, vede il punto ruotare in senso orario; infatti è

$$\begin{aligned}\dot{x} &= v \sin \omega t = \omega r \sin \omega t = \omega y \\ \dot{y} &= -v \cos \omega t = -\omega r \cos \omega t = -\omega x.\end{aligned}$$

Per quanto riguarda l'accelerazione, essendo $\ddot{\xi} = 0, \ddot{\eta} = 0$, con lo stesso criterio di prima, si ha

$$\begin{aligned}(\ddot{x} - \omega^2 x - 2\omega \dot{y}) \cos \omega t + (\omega^2 y - \ddot{y} - 2\omega \dot{x}) \sin \omega t &= 0 \\ (\ddot{y} - \omega^2 y + 2\omega \dot{x}) \cos \omega t + (\ddot{x} - \omega^2 x - 2\omega \dot{y}) \sin \omega t &= 0,\end{aligned}$$

le quali comportano

$$\begin{aligned}\ddot{x} &= \omega^2 x + 2\omega \dot{y} \\ \ddot{y} &= \omega^2 y - 2\omega \dot{x}.\end{aligned}\tag{19}$$

Sostituendo a \dot{x} e \dot{y} le (18), si ottiene

$$\ddot{x} = -\omega^2 x, \quad \ddot{y} = -\omega^2 y\tag{20}$$

L'accelerazione risultante è rivolta verso il centro e la potremmo chiamare centripeta. Però bisogna fare attenzione; essa risulta, nelle (19), dalla somma delle componenti dell'accelerazione di trascinamento e dell'accelerazione di Coriolis cambiate di segno. Questa circostanza merita un commento che si può capire meglio considerando le relazioni vettoriali; se $\mathbf{a} = 0$, dalla (13) si ha:

$$\mathbf{a}_r = -\mathbf{a}_t - 2\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}_r;\tag{21}$$

ma $-\mathbf{a}_t = -(-\omega^2 \mathbf{r}) = \omega^2 \mathbf{r}$ che, vista dall'osservatore ruotante, è l'accelerazione *centrifuga*; essa è diretta lungo il raggio della traiettoria circolare e volge verso l'esterno; inoltre l'accelerazione di Coriolis cambiata di segno, è anch'essa diretta lungo il raggio ma volge verso il centro della circonferenza. La loro somma dà il risultato trovato; infatti in termini di componenti della (21), otteniamo le (19) e quindi la (20).

||| 10. Determinare le relazioni tra velocità ed accelerazioni nel moto dell'esempio 1.

Derivando rispetto al tempo le equazioni del moto (2), si ottengono le componenti della velocità nel riferimento ruotante:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= v \cos \omega t - \omega(vt + \xi_0) \sin \omega t \\ \dot{y} &= -v \sin \omega t - \omega(vt + \xi_0) \cos \omega t.\end{aligned}\quad (22)$$

La velocità assoluta, diretta come l'asse ξ , nel riferimento mobile, ha componenti

$$v_x = v \cos \omega t, \quad v_y = -v \sin \omega t.$$

La velocità di trascinamento, $\mathbf{v}_t = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}$, secondo gli assi mobili, ha componenti

$$\begin{aligned}v_{tx} &= -\omega y = \omega(vt + \xi_0) \sin \omega t \\ v_{ty} &= \omega x = \omega(vt + \xi_0) \cos \omega t.\end{aligned}$$

In conformità alla relazione $\mathbf{v}_r = \mathbf{v} - \mathbf{v}_t$, le (22) sono uguali alla differenza tra le componenti di \mathbf{v} e \mathbf{v}_t .

Le componenti dell'accelerazione relativa si ottengono derivando le (22):

$$\begin{aligned}\ddot{x} &= -2v\omega \sin \omega t - \omega^2(vt + \xi_0) \cos \omega t \\ \ddot{y} &= -2v\omega \cos \omega t + \omega^2(vt + \xi_0) \sin \omega t.\end{aligned}\quad (23)$$

L'accelerazione assoluta è nulla; l'accelerazione di trascinamento, secondo gli assi mobili, ha componenti

$$\begin{aligned}a_{tx} &= -\omega^2 x = -\omega^2(vt + \xi_0) \cos \omega t \\ a_{ty} &= -\omega y = \omega^2(vt + \xi_0) \sin \omega t.\end{aligned}\quad (24)$$

Le componenti dell'accelerazione di Coriolis, $\mathbf{a}_c = 2\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}_r$, secondo gli assi mobili sono:

$$\begin{aligned}a_{cx} &= 2v\omega \sin \omega t + 2\omega^2(vt + \xi_0) \cos \omega t \\ a_{cy} &= 2v\omega \cos \omega t - 2\omega^2(vt + \xi_0) \sin \omega t.\end{aligned}\quad (25)$$

Conformemente alla

$$\mathbf{a}_r = \mathbf{a} - \mathbf{a}_t - 2\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}_r,$$

le (23) risultano dalla somma cambiata di segno delle (24) e (25).

.....

6 ■ Dinamica del punto materiale

1. Introduzione

Il problema fondamentale della dinamica consiste nello studio del moto dei corpi in dipendenza delle cause che lo determinano. L'esperienza comune fa osservare che il moto di un corpo è il risultato delle sue interazioni con altri corpi che lo circondano: la traiettoria di un grave, tenuto conto delle condizioni iniziali, è il risultato dell'interazione del grave con la terra; il moto di un elettrone attorno al nucleo è il risultato della sua interazione col nucleo e con gli altri elettroni; la deviazione della traiettoria di una particella in seguito all'urto con un'altra particella è il risultato della loro interazione. Prima di chiarire e definire operativamente ciò che abbiamo chiamato genericamente *interazione* vanno fatte alcune considerazioni introduttive.

In dinamica si fa sovente uso della nozione di punto materiale, nel senso precisato in Cinematica. Un corpo le cui dimensioni siano molto piccole rispetto alle dimensioni del campo di movimento e tale che non sia necessario considerare il moto indipendente di alcuna sua parte, può essere assimilato ad un punto materiale. Un sistema di corpi, ciascuno dei quali assimilabile ad un punto, si dirà sistema di punti materiali. Il sistema solare è un esempio di sistema siffatto; un atomo costituito dall'insieme dei suoi elettroni e dal nucleo è un altro esempio.

In cinematica le terne di riferimento possono essere prese con larga arbitrarietà in quanto si conoscono le leggi che permettono di esprimere le grandezze cinematiche in qualsiasi riferimento, sia esso inerziale oppure no. Viceversa per stabilire le leggi fondamentali della dinamica classica occorre fissare un riferimento inerziale nel quale, come si è visto, l'accelerazione è uguale a quella misurata in ogni altro riferimento di questo tipo; un tale riferimento, come s'è detto, viene spesso indicato con l'aggettivo assoluto.

Il tempo misurato in questi riferimenti si chiama tempo assoluto e coincide col tempo definito mediante un orologio al cesio; riterremo che questo tempo, secondo i postulati classici, sia indipendente dal moto dell'osservatore.

In questo modo, come apparirà chiaro, le leggi della dinamica non richiedono correzioni dipendenti dal moto dell'osservatore, sono valide in tutti i riferimenti inerziali e sono invarianti, cioè hanno sempre la stessa forma. Naturalmente tutto questo non impedisce di studiare la dinamica di un punto materiale in un riferimento non inerziale, come si vedrà studiando la dinamica relativa; ciò sarà possibile tenendo presente i risultati ottenuti a proposito della composizione delle accelerazioni.

2. Legge di inerzia o prima legge della dinamica

L'esperienza comune indica che l'interazione di un punto materiale con altri punti ha come conseguenza la variazione del suo stato di moto; si osserva inoltre che, una volta cessata l'interazione, esso tende a mantenere lo stato di moto acquistato, vale a dire, in un riferimento inerziale e con buona approssimazione in un riferimento legato con la Terra, tende a mantenere costante la sua velocità.

Poniamo l'attenzione su una palla di biliardo in quiete su un tavolo, essa rimane in quiete fin quando non subisce un urto; la superficie del tavolo compensa l'interazione della palla con la Terra. Dopo l'urto essa acquista velocità in una certa direzione e, se è ben levigata e la superficie del tavolo perfettamente orizzontale, tende a mantenere la sua velocità nella direzione intrapresa. In pratica dopo un intervallo di tempo più o meno lungo la palla rallenta e si ferma. Possiamo spiegare questo comportamento ipotizzando che c'è stata un'interazione aggiuntiva tra palla e superficie del tavolo, detta *attrito*.

Lo stesso Galilei fece l'ipotesi che un corpo in moto, non soggetto ad interazioni con altri corpi, viene rallentato da fenomeni d'attrito e di resistenza del mezzo in cui si muove; anzi, si può affermare che egli per primo ebbe la geniale intuizione dell'esistenza della legge d'inerzia, formulata poi esattamente da Newton, quando descrive le sue osservazioni nel *Dialogo sopra i due massimi sistemi del mondo*.

Con esperienze analoghe a quella descritta, realizzate in condizioni tali da eliminare, per quanto è possibile, l'attrito (tavoli e guide a cuscino d'aria), figura 1, si può verificare, estrapolando, l'ipotesi che in un riferimento inerziale e, con buona approssimazione, in un riferimento solidale con la Terra, un corpo, una volta cessata l'interazione, si muove di moto rettilineo ed uniforme. Si è trascurato l'attrito del corpo nel mezzo in cui si muove, altrimenti l'esperienza in laboratorio diventerebbe molto complessa; tuttavia i risultati dell'osservazione astronomica del moto dei corpi celesti, di cui lo stesso Newton tenne conto, permettono di enunciare la legge di inerzia:

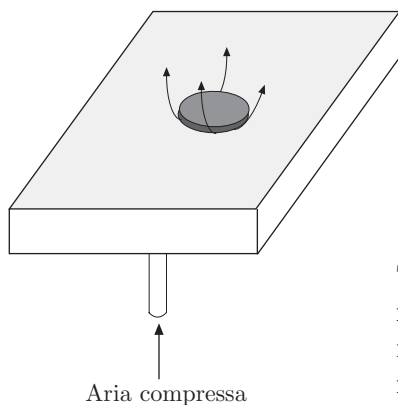


Fig. 6.1

In un riferimento inerziale un punto materiale, sottratto ad ogni interazione, permane nel suo stato di quiete o di moto rettilineo uniforme.

Legge che da Isacco Newton nella sua opera “Philosophiae Naturalis Principia Mathematica”, (1686), viene così enunciata:

Lex I. Corpus omne perseverare in statu suo quiescendi vel movendi uniformiter in directum, nisi quatenus a viribus impressis cogitur statum illum mutare .

In questa legge compare il concetto di forza che finora abbiamo indicato genericamente con interazione.

III 3. Forza, seconda legge della dinamica, massa

Il concetto di forza va introdotto in maniera accurata anche se esso deriva essenzialmente dall'intuizione. Prima di Galilei, della forza si aveva un'idea molto rudimentale; la caduta libera di un grave veniva attribuita alla forza di gravità e si riteneva, in generale, che essendo lo *stato naturale* di ogni corpo la quiete, per far muovere un corpo su questo dovesse agire un qualche ente esterno chiamato forza. Pertanto per mantenere il moto uniforme di un corpo doveva essere esercitata una forza per spingerlo continuamente, altrimenti avrebbe cessato naturalmente di muoversi. Se così fosse, nelle esperienze del tipo descritto nel paragrafo precedente questa ipotesi dovrebbe essere verificata; viceversa si trova che il moto del corpo, appena l'azione esterna cessa, tende ad essere rettilineo uniforme.

D'altra parte i risultati sperimentali di Galilei mostrarono che i gravi in prossimità della terra cadono con accelerazione costante; ciò portò all'affermarsi dell'idea che una forza determinasse una variazione della velocità e non la velocità stessa. Riportiamo la definizione data da Newton nei “Principia”:

Definizione quarta: *Una forza impressa è un'azione esercitata su un corpo per mutarne lo stato, sia esso di quiete o di moto rettilineo uniforme.*

Se la forza determina una variazione del moto del punto materiale, si riconosce ad essa una natura vettoriale; infatti nell'intervallo di tempo Δt durante il quale essa agisce, il punto subisce una variazione di velocità $\Delta \mathbf{v}$ e quindi un'accelerazione, data sensibilmente dal rapporto $\Delta \mathbf{v} / \Delta t$. Se ne deduce che la forza è necessariamente proporzionale al vettore accelerazione. Enunciamo con Newton la seconda legge della dinamica (Principia):

Lex II. Mutationem motus proportionalem esse vi motrici impressae, et fieri secundum lineam rectam qua vis illa imprimitur.

La variazione del moto è proporzionale alla forza motrice impressa, e segue la retta secondo cui tale forza è stata applicata. “Se una forza genera un moto qualsiasi, una forza doppia

ne produrrà uno doppio, una tripla triplo: sia che essa agisca tutta insieme e in una volta, sia che essa agisca a poco a poco e successivamente. E questo moto (essendo sempre determinato nella stessa direzione della forza generatrice), se il corpo già si moveva, o si aggiungerà al moto precedente se cospira con esso, o ne sarà detratto se gli è contrario; o infine sarà sommato o detratto parzialmente da esso, se ha direzione obliqua; producendo così un nuovo moto risultante dalle determinazioni dei due moti considerati". Newton riconosce dunque il principio di sovrapposizione che è espresso nei Principia con i seguenti corollari.

Corollario primo: *Un corpo sotto l'azione simultanea di due forze descrive la diagonale del parallelogrammo nel tempo stesso che impiegherebbe a descrivere i lati di esso sotto l'azione delle singole forze separatamente.*

Corollario secondo: *Donde si spiega la composizione di una forza diretta AD a partire da forze oblique AB e BD, e viceversa la scomposizione di una forza diretta AD in due forze oblique AB e BD. Tale composizione e risoluzione sono ampiamente confermate dalla meccanica.*

Per confrontare quantitativamente le proprietà inerziali dei corpi Newton introdusse il concetto di massa ed eseguì esperimenti con materiali diversi trovando che l'inerzia di un corpo, al variare del suo stato di moto, è sempre proporzionale al suo peso, cioè alla forza di attrazione esercitata su di esso dalla Terra. Riportiamo la definizione dai Principia:

Definizione prima: *La quantità di materia è la misura di questa, derivante dal prodotto della sua densità per il volume. Quindi aria di densità doppia occupante uno spazio doppio è in quantità quadrupla; in uno spazio triplo è in quantità sestupla. Lo stesso vale per la neve, e per le sostanze finissime o polveri, condensate per liquefazione o per compressione, e così pure per tutti i corpi per qualsiasi causa diversamente condensati. Non tengo conto, in questa sede, se alcuno ne esiste, del mezzo che pervade liberamente gli interstizi tra le parti dei corpi. D'ora in avanti è sempre a questa quantità che mi riferisco parlando di corpo o di massa. Essa viene conosciuta attraverso il peso di ciascun corpo, in quanto essa è proporzionale al peso, come ho trovato con esperimenti molto precisi sui pendoli, che descriverò in seguito.*

Definizione seconda: *La quantità di moto è la misura di esso, derivante dal prodotto della velocità per la quantità di materia.*

Definizione terza: *La vis insita o forza propria della materia è una potenza a resistere, per la quale ogni corpo, per quanto sta in esso, permane nel suo stato presente, sia esso uno stato di quiete o di moto rettilineo uniforme.*

Consideriamo un corpo assimilabile ad un punto materiale, inizialmente in quiete, in prossimità della superficie terrestre; se esso cade, la semplice osservazione della variazione del suo stato di moto indica che è soggetto ad una forza che chiamiamo “peso”. Possiamo impedire che il punto materiale cada applicando ad esso una forza \mathbf{F} per mezzo di un filo inestendibile. In questa condizione la forza equilibra il peso; ciò significa che il peso è rappresentabile con un vettore \mathbf{F}_p applicato al punto ed opposto ad \mathbf{F} . L’esperienza mostra che \mathbf{F} è volta come la verticale verso l’alto del luogo dove si effettua l’esperienza ed il peso \mathbf{F}_p come la verticale discendente. Possiamo misurare il modulo di \mathbf{F} inserendo nel filo un dinamometro, il quale è un corpo elastico, ordinariamente una molla, che subisce un allungamento in corrispondenza biunivoca con l’intensità della forza e che si annulla con questa. Per un dato corpo il dinamometro denuncia sempre lo stesso allungamento in tutti i punti di una regione non troppo estesa della Terra; il modulo di \mathbf{F} è costante. Ripetendo l’esperienza con corpi di varia natura e dimensioni diverse, per il modulo di \mathbf{F} si trovano valori diversi nell’ambito considerato.

Le esperienze di Galilei indicano peraltro che l’accelerazione di gravità è costante per tutti i corpi in prossimità della Terra, per cui, introducendo un certo coefficiente C positivo, si può scrivere

$$\mathbf{F}_p = \frac{p}{C} \mathbf{g}, \quad (1)$$

da cui si trae

$$C = |\mathbf{g}|.$$

La costante C si identifica col modulo di \mathbf{g} . Le esperienze condotte con corpi di natura e dimensioni diverse ci permettono di concludere che il rapporto p/g dipende dal corpo considerato e, con Newton, diremo *massa* tale rapporto:

$$m = \frac{p}{g}.$$

Si sottolinea che essa è distinta dal peso pur essendo legata al modulo di questo da una semplice relazione di proporzionalità. Per essere più precisi, chiamiamo la massa definita in questo modo, *massa gravitazionale*, perché ottenuta considerando l’interazione gravitazionale del corpo con la Terra.

Se, secondo Newton, l’inerzia del corpo è proporzionale al suo peso, la (1), che è servita a determinare la costante C , può essere estesa ad ogni forza nel modo seguente

$$\mathbf{F} = \frac{p}{g} \mathbf{a} = m \mathbf{a} \quad (2)$$

È questa la forma consueta che si dà a quella che si chiama, per eccellenza, *Legge fondamentale della Dinamica*; forza ed accelera-

zione di un punto materiale sono proporzionali ed il coefficiente di proporzionalità è la massa. La (2) esprime la seconda legge di Newton; in realtà l'enunciato di questa legge, originariamente, si riferiva alla variazione della quantità di moto, grandezza che da Newton è stata definita come il prodotto della massa per la velocità:

$$\mathbf{p} = m\mathbf{v}. \quad (3)$$

La quantità di moto, nel *SI* ha come unità $m\,kg\,s^{-1}$. Infatti, nell'ambito della meccanica classica, la massa risulta essere costante poiché costituisce una proprietà intrinseca del punto materiale, pertanto

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = \frac{d(m\mathbf{v})}{dt} = m\frac{d\mathbf{v}}{dt} = m\mathbf{a}.$$

Di conseguenza possiamo riformulare la seconda legge scrivendo

$$\mathbf{F} = \frac{d\mathbf{p}}{dt}. \quad (4)$$

In meccanica classica la legge espressa dalla (2) si ritiene valida o invariante in ogni caso, purché subordinata ai riferimenti inerziali dove, essendo valida la relatività galileiana, l'accelerazione impressa ad un punto materiale ha lo stesso valore. La legge fondamentale della dinamica può essere estesa fuori dall'ambito delle esperienze locali che hanno permesso di stabilirla; le osservazioni astronomiche giustificano questa estensione e mostrano indirettamente che la massa dipende solo dal punto materiale cui è attribuita. Viceversa l'estensione precedente non è ammessa in teoria della relatività, dove la massa varia con la velocità; tuttavia siccome tale variazione è trascurabile per velocità piccole rispetto alla velocità della luce, nell'ambito ordinario, possiamo usare la meccanica classica con ottima approssimazione.

Chiamiamo *massa inerziale* la massa che compare nella (2); è una distinzione piuttosto importante, perché nulla permette di asserire, a priori, che massa inerziale e massa gravitazionale debbano coincidere, in quanto le azioni esercitate sul punto materiale sono diverse: in un caso è la forza di gravità, nell'altro una qualsiasi forza esercitata, ad esempio, mediante trazioni compressioni od altro. Il problema riguardante la diversità delle due masse fu affrontato dallo stesso Newton il quale concluse, nell'ambito della precisione delle sue misure, che massa inerziale e massa gravitazionale coincidono. Misure recenti, eseguite nei primi anni 60, hanno permesso di concludere che l'equivalenza tra le due masse può essere stabilita con una precisione di una parte su 10^{11} . Torneremo sull'argomento successivamente.

La massa è una grandezza estensiva: unendo due punti materiali di masse $m_1 = F_{p1}/g$, $m_2 = F_{p2}/g$, si ottiene un unico punto

materiale di peso $F_p = F_{p1} + F_{p2}$, e quindi di massa

$$m = F_p/g = (F_{p1} + F_{p2})/g = m_1 + m_2,$$

uguale alla somma delle masse dei due punti materiali.

La (2) permette di stabilire la misura dinamica della forza attraverso la conoscenza della massa e la misura cinematica dell'accelerazione; inoltre fornisce una definizione operativa di forza. Nel *SI* l'unità di forza è il *newton* (*N*) che è la forza necessaria per impartire all'unità di massa una accelerazione unitaria, (1 ms^{-2}).

La legge fondamentale della dinamica permette di trarre importanti conclusioni; se, in particolare, sul punto materiale non agisce nessuna forza, ossia è isolato, risulta $\mathbf{a} = 0$ e quindi la sua velocità \mathbf{v} è costante, oppure il punto è fermo. Dalla seconda legge di Newton si deduce la legge d'inerzia.

Se, senza essere isolato, il punto materiale è soggetto a più forze con risultante nulla, dobbiamo porre nella (2), $\mathbf{F} = 0$ e concludere che il punto è in equilibrio oppure si muove di moto rettilineo uniforme.

In generale, considerando due punti materiali di masse m_1 ed m_2 , soggetti alla stessa forza \mathbf{F} , si ha:

$$\mathbf{F} = m_1\mathbf{a}_1, \quad \mathbf{F} = m_2\mathbf{a}_2, \quad \Rightarrow \quad \frac{m_1}{m_2} = \frac{\mathbf{a}_2}{\mathbf{a}_1},$$

in altri termini, a parità di forza, le accelerazioni subite dai due punti materiali sono inversamente proporzionali alle loro masse; la massa del punto materiale rappresenta l'inerzia alla variazione di velocità.

Consideriamo ora un punto materiale soggetto a due forze \mathbf{F}_1 , \mathbf{F}_2 . Se la prima forza agisse separatamente, il punto acquisterebbe l'accelerazione $\mathbf{a}_1 = \mathbf{F}_1/m$; analogamente, se agisse separatamente la seconda forza, si avrebbe $\mathbf{a}_2 = \mathbf{F}_2/m$.

Quando le due forze agiscono contemporaneamente sono equivalenti ad un'unica forza $\mathbf{F} = \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2$; l'accelerazione con cui si muove il punto materiale risulta:

$$\mathbf{a} = \frac{\mathbf{F}}{m} = \frac{\mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2}{m} = \mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_2,$$

da cui

$$m\mathbf{a} = m\mathbf{a}_1 + m\mathbf{a}_2,$$

relazione che conferma il principio di sovrapposizione o la legge sperimentale del parallelogramma.

Non è sfuggito come la seconda legge della dinamica permetta la misura della forza nel modo più corretto, attraverso la misura della massa e dell'accelerazione impartita al punto materiale. La misura statica non è altrettanto generale; infatti esistono forze che dipendono dalla velocità. Tali sono, per esempio, la forza di

Coriolis, $\mathbf{F}_c = 2m\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}_r$, la forza di Lorentz, che viene esercitata su una carica in moto in un campo di induzione magnetica \mathbf{B} , $\mathbf{F} = q\mathbf{v} \times \mathbf{B}$. Queste forze cessano appena la velocità si annulla, quindi non è possibile usare il metodo descritto per misurare, ad esempio, la forza peso che viene equilibrata dalla forza elastica esercitata dal dinamometro. Si capisce che con questo metodo, statico, qualora la natura delle forze lo consenta, più forze agenti su un punto materiale, saranno equilibrate da una forza che chiude la poligonale costituita dalle forze applicate.

4. Terza legge della dinamica

La terza legge della dinamica è la legge di *azione e reazione*; essa afferma che se, in un riferimento inerziale, due punti materiali isolati interagiscono, l'azione di uno dei punti sull'altro è uguale alla reazione del secondo sul primo e viceversa. Riportiamo dai Principia la definizione di Newton:

Lex III. *Actioni contrariam semper et aequalem esse reactionem; sive corporum duorum actiones in se mutuo semper esse aequales et in partes contrarias dirigi.*

L'azione è sempre uguale e contraria alla reazione; cioè le mutue azioni di due corpi sono sempre uguali e dirette in senso opposto. L'enunciato di questa legge fu il risultato di numerose esperienze sull'urto tra sfere, eseguite da Newton stesso e da altri ricercatori suoi contemporanei, in particolare da Christian Huygens.

Consideriamo due particelle o punti materiali isolati che urtano o che genericamente interagiscano; l'esperienza mostra che, indipendentemente dall'intervallo di tempo durante il quale si verifica l'interazione, le variazioni di velocità $\Delta\mathbf{v}_1$, $\Delta\mathbf{v}_2$ delle particelle, dopo l'interazione, sono opposte ed il loro rapporto è costante; pertanto scriveremo

$$\frac{\Delta\mathbf{v}_1}{\Delta\mathbf{v}_2} = -C,$$

dove C ha lo stesso valore per ogni coppia di particelle. Di conseguenza possiamo definire in maniera appropriata la massa inerziale. Infatti consideriamo le interazioni di un certo numero di particelle con una particella di riferimento; se le interazioni sono tali da provocare, a quest'ultima, sempre la stessa variazione di velocità $\Delta\mathbf{v}_0$, indicando con m_1, m_2, \dots i valori della costante C trovati per ogni interazione, si ha

$$\Delta\mathbf{v}_0 = -m_1\Delta\mathbf{v}_1, \quad \Delta\mathbf{v}_0 = -m_2\Delta\mathbf{v}_2, \dots$$

Chiamiamo tali valori, masse inerziali delle particelle, avendo attribuito alla particella di riferimento massa unitaria, ($m_0 = 1$).

Se si prende in esame l'interazione tra le particelle 1 e 2, o quella di qualunque altra coppia di particelle, si otterrà:

$$m_1 \Delta \mathbf{v}_1 = -m_2 \Delta \mathbf{v}_2, \quad \frac{\Delta \mathbf{v}_1}{\Delta \mathbf{v}_2} = -\frac{m_2}{m_1} \dots$$

Il rapporto tra le variazioni di velocità è sempre uguale al rapporto inverso tra le masse inerziali delle particelle che partecipano all'interazione. Se poi si confrontano le masse inerziali $m_0 = 1, m_1, m_2, \dots$ con le corrispondenti masse gravitazionali, misurate con la bilancia, si trova che massa inerziale e massa gravitazionale coincidono. Si sottolinea come il processo considerato, implichi che la corretta determinazione della massa inerziale vada effettuata attraverso la misura dell'accelerazione, impartita al punto materiale da una forza nota.

Poiché nell'ambito della meccanica classica la massa è costante, possiamo scrivere

$$\Delta \mathbf{p}_1 = -\Delta \mathbf{p}_2, \quad (5)$$

ossia, in seguito all'interazione, la variazione della quantità di moto di una particella è opposta alla variazione della quantità di moto dell'altra. In altri termini la quantità di moto che una particella guadagna è uguale alla quantità di moto sottratta all'altra particella e viceversa, figura 2.

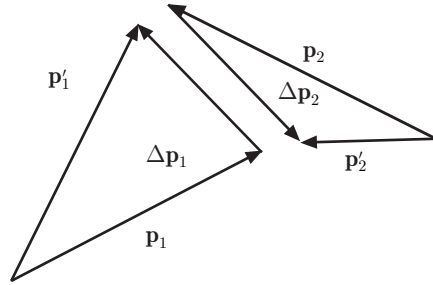


Fig. 6.2

Se indichiamo con $\mathbf{p}'_1, \mathbf{p}'_2$ le quantità di moto delle due particelle dopo l'interazione, possiamo scrivere

$$\Delta \mathbf{p}_1 = \mathbf{p}'_1 - \mathbf{p}_1, \quad \Delta \mathbf{p}_2 = \mathbf{p}'_2 - \mathbf{p}_2,$$

pertanto la (5) diventa

$$\mathbf{p}'_1 + \mathbf{p}'_2 = \mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2. \quad (6)$$

La quantità di moto di due punti materiali isolati soggetti solo alla loro mutua interazione resta costante.

Questa conclusione costituisce la legge della conservazione della quantità di moto che verrà estesa ai sistemi di punti mate-

riali. Va detto che questa legge costituisce un principio fondamentale ed universale della Fisica su cui torneremo ampiamente in seguito.

Dividendo la (5) per l'intervallo di tempo Δt durante il quale si verifica l'interazione e facendo tendere tale intervallo a zero, si ottiene

$$\frac{d\mathbf{p}_1}{dt} = -\frac{d\mathbf{p}_2}{dt}$$

che si scrive

$$\mathbf{F}_1 = -\mathbf{F}_2. \quad (7)$$

Concludiamo dunque dicendo che se due punti materiali interagiscono tra loro, la forza agente su un punto è uguale ed opposta alla forza esercitata dall'altro e viceversa. Le forze si presentano sempre a coppie e sono dovute essenzialmente alla presenza di corpi ed è loro caratteristica quella di soddisfare la terza legge della dinamica. Limitandoci per il momento alle forze di contatto, determinate cioè da trazioni, compressioni o simili, osserviamo che anche nella vita di ogni giorno facciamo esperienza della legge dell'azione e reazione. Se viene esercitata una forza muscolare avente carattere di pressione su un oggetto, questo, sia che si muova o che stia fermo, esercita a sua volta, una forza avente carattere di pressione opposta a quella che si è esercitata. Sappiamo che non ci si può alzare da una sedia tirandola con le nostre braccia verso l'alto, non possiamo scendere da una piccola barca con un balzo perché la barca per reazione si allontana ecc..

Va sottolineato che azione e reazione *non* sono applicate allo stesso punto materiale; *non* si può sostituire ad esse la loro risultante nulla.

III 5. Considerazioni sulle tre leggi della dinamica

Un ulteriore commento sulle tre leggi si può fare seguendo lo schema adottato da Mach e Kirchhoff.

a) L'accelerazione di un punto materiale è nulla, rispetto ad un osservatore inerziale, quando il punto è isolato da ogni altro. Non è invece nulla, in generale, quando esso è posto in presenza di altri punti materiali; essa non dipende, in ogni istante, né dalla posizione iniziale, né dalla velocità iniziale del punto, ma dalla sua posizione e dalla sua velocità attuali, da quelle degli altri punti e dalle condizioni fisiche del sistema.

b) Due punti materiali isolati interagenti subiscono accelerazioni in verso opposto \mathbf{a}_1 , \mathbf{a}_2 , dirette come la congiungente i due punti e tali che il rapporto fra i loro moduli non varia mai durante il moto. Inoltre questo rapporto è inverso a quello tra due numeri positivi m_1 e m_2 , ognuno dei quali costituisce un invariante del punto cui si riferisce; esso non muta né col luogo, né col

tempo, né col punto con cui interagisce. Si tratta di un invariante intrinseco avente carattere additivo che chiamiamo massa. Posto quindi

$$\mathbf{F}_{12} = m_1 \mathbf{a}_1,$$

$$\mathbf{F}_{21} = m_2 \mathbf{a}_2,$$

troviamo che le due forze sono opposte e hanno come retta di azione quella congiungente i due punti; vale la terza legge di Newton.

c) Consideriamo tre punti materiali isolati; il prodotto della massa di uno qualsiasi per la sua accelerazione uguaglia la somma \mathbf{F} dei due vettori che si otterrebbero isolando il punto materiale con ognuno degli altri due.

L'insieme delle circostanze a), b), c) giustifica la definizione di forza \mathbf{F} che punti materiali esercitano sul punto in esame, come prodotto della massa per la sua accelerazione:

$$\mathbf{F} = m\mathbf{a}.$$

Questa appropriata definizione costituisce la seconda legge di Newton.

Le leggi della dinamica affermano sostanzialmente che coppie di punti materiali diverse determinano, indipendentemente l'una dall'altra, coppie di accelerazioni, tali che le accelerazioni di una medesima coppia sono nel rapporto invariabile che caratterizza la coppia di punti materiali.

Da un altro punto di vista possiamo affermare che le leggi della dinamica danno tre definizioni del movimento: la legge d'inerzia definisce il riferimento inerziale, la legge fondamentale della dinamica definisce la forza, la legge di azione e reazione definisce la massa.

6. Campo di forza

L'estensione della terza legge, valida per le forze di contatto, alle forze che si esercitano a distanza, per esempio alla forza gravitazionale, non presenta difficoltà operative ma qualche difficoltà concettuale; infatti si trova che nell'interazione a distanza la terza legge è pienamente verificata e ciò implica, dal punto di vista classico, che la variazione della quantità di moto si trasmetta istantaneamente da un corpo all'altro attraverso lo spazio che li separa. Per esempio nel sistema Terra Sole questa variazione si dovrebbe trasmettere con velocità infinita attraverso i 150 milioni di chilometri da cui i due corpi sono separati. Newton stesso accettò questo dato di fatto perché ciò gli consentiva di calcolare correttamente le orbite dei pianeti con la legge di gravitazione, ma evitò di formulare ipotesi anche perché non poteva spiegare come la

quantità di moto si potesse propagare attraverso lo spazio vuoto. Nella sua terza lettera a Bentley, infatti, così si esprime:

“È inconcepibile che la materia bruta e inanimata possa, senza la mediazione di qualcos'altro che non sia materiale, agire sul resto della materia o influenzarlo senza mutuo contatto, come dovrebbe accadere se la gravitazione, nel senso di Epicuro, fosse essenziale e inerente alla materia. E questa è una delle ragioni per cui desidero che non mi attribuiate la gravità come innata. Che la gravità sia innata, inerente ed essenziale alla materia, così che un corpo possa agire su un altro a una certa distanza attraverso il vuoto, senza la mediazione di qualcos'altro mediante il quale l'azione e la forza di quei corpi possano essere trasmesse dall'uno all'altro, è per me un'assurdità così grande che non credo che alcuna persona che abbia una sufficiente capacità di ragionare in questioni filosofiche possa mai credermi”.

Il problema dell'azione a distanza è oggi risolto per mezzo del concetto di campo. Consideriamo, per esempio, l'interazione gravitazionale tra due corpi che, come noto, è attrattiva. Si può ritenere che tale interazione si verifichi attraverso due stadi. Uno dei corpi crea nello spazio che lo circonda una condizione tale che ogni altro corpo, in qualunque punto di questo spazio, subisca la forza gravitazionale prodotta dal primo; la regione di spazio così “condizionata” è chiamata *campo gravitazionale*; dunque il campo esiste di per se stesso, sia che poniamo in esso un corpo su cui agisce la forza o meno. Questo campo ha, ovviamente, natura vettoriale ed è definito come la forza che agisce sull'unità di massa in ogni suo punto. Nel secondo stadio il corpo interagisce direttamente col campo e non con il corpo (o i corpi) che lo determinano; in altri termini il campo ha il ruolo di agente mediatore. L'utilità di questa rappresentazione appare chiara perché, una volta definito il campo prodotto da una massa o da un insieme di masse in una certa regione dello spazio, la forza che viene esercitata su un punto materiale posto in un punto del campo è data semplicemente dal prodotto della sua massa per il valore del campo in quel punto.

Per esempio, se consideriamo la Terra come isolata, sappiamo che la forza che viene esercitata su un punto materiale, in una regione non molto estesa, è la forza peso \mathbf{F}_p ; possiamo associare a ciascun punto della regione il vettore accelerazione di gravità, uniforme, e indicare con \mathbf{g} il campo di gravità nella regione in esame, $\mathbf{g} = \mathbf{F}_p/m$; la forza peso agente su un punto materiale è data semplicemente dal prodotto della massa per l'accelerazione di gravità. Più precisamente indichiamo con

$$|\mathbf{F}| = G \frac{mM_T}{R_T^2}$$

il modulo della forza gravitazionale agente su una massa m , di solito molto minore della massa della terra M_T , in prossimità della terra, supposta sferica di raggio R_T e massa M_T . L'intensità del

campo gravitazionale o dell'accelerazione di gravità è

$$g = \frac{F}{m} = G \frac{M_T}{R_T^2}.$$

In modo analogo si può definire il campo elettrostatico \mathbf{E} prodotto da una carica puntiforme. L'interazione tra due cariche, poste nel vuoto a distanza r , è descritta dalla legge di Coulomb:

$$\mathbf{F} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{qq_0}{r^2} \hat{\mathbf{r}},$$

da cui:

$$\mathbf{E} = \frac{\mathbf{F}}{q_0} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2} \hat{\mathbf{r}},$$

che esprime il campo elettrico prodotto dalla carica q ed agente sulla carica q_0 ; esso è dunque dato dal rapporto tra la forza coulombiana e la carica; ϵ_0 è la costante dielettrica del vuoto.

Va osservato che la carica q_0 , come la massa m nel caso gravitazionale, deve essere molto piccola e tale comunque da non perturbare sensibilmente il campo determinato dalla carica q . Pertanto si suole definire il campo elettrostatico con la notazione

$$\mathbf{E} = \lim_{q_0 \rightarrow 0} \frac{\mathbf{F}}{q_0},$$

che non implica operazioni di limite in senso algebrico, ma evidenzia il fatto che la carica di prova dev'essere la più piccola possibile.

Il concetto di campo è fondamentale in elettromagnetismo, per lo studio delle interazioni tra cariche statiche o in moto e sarà considerato con maggiori dettagli in quella sede.

Si è detto che il campo, nell'interazione a distanza, ha il ruolo di intermediario, pertanto l'interazione deve essere descritta in due fasi: calcolo del campo prodotto da un insieme di masse o da cariche o da qualcos'altro; calcolo della forza che il campo esercita sulla massa o sulla carica posta in esso; ciò implica un'interazione del tipo:

$$massa (carica) \leftrightarrow campo \leftrightarrow massa (carica)$$

e non

$$massa (carica) \leftrightarrow massa (carica).$$

Le relazioni scritte si possono leggere da sinistra a destra o viceversa; questo significa che le interazioni sono mutue, in altri termini si può considerare il campo come prodotto dalla seconda massa (carica) e l'interazione subita dalla prima massa (carica), in accordo con la terza legge della dinamica. La situazione è perfettamente simmetrica, ognuna delle due masse essendo posta nel campo prodotto dall'altra.

Un problema molto importante, a questo punto, è quello di analizzare cosa succede quando le masse o le cariche sono in movimento; se fossero ferme le descrizioni in termini di campo o di azione a distanza sarebbero equivalenti. Quando una delle due subisce una variazione di quantità di moto, ci si può chiedere con quale rapidità l'altra sente questa variazione; la risposta è che la perturbazione del campo generato dalla prima si propaga con la velocità della luce nel vuoto e non istantaneamente come vuole la descrizione di azione a distanza.

Questo risultato è fondamentale in elettromagnetismo dove si trova che la variazione della quantità di moto o l'accelerazione delle cariche in una certa regione dello spazio influenza le cariche di un'altra regione distante r solo dopo un tempo r/c , dove c è la velocità della luce. Nel caso dell'interazione gravitazionale tra Terra e Sole, quando la Terra varia la sua posizione a causa del suo moto di rivoluzione si ha una variazione del campo gravitazionale; però durante gli 8 minuti circa che il campo impiega per propagarsi lungo la distanza Terra-Sole, la Terra descrive solo un piccolo tratto della sua orbita corrispondente a circa $9,6 \cdot 10^{-5} \text{ rad}$. Si può quindi trascurare il tempo occorrente per la propagazione della variazione del campo e trattare le forze che ne conseguono come interazioni mutue a distanza; in altri termini il campo si può considerare statico, ed il fatto che esso esista o meno ha poca importanza: valgono la terza legge di Newton e il principio di conservazione della quantità di moto.

Con questo non si intende dire che il principio di conservazione della quantità di moto non sia valido in generale, una volta che si è riconosciuto che la propagazione dell'informazione viaggia con velocità finita. Tale principio può essere rinunciato come legge esatta, introducendo il concetto che il campo stesso possiede una quantità di moto e che la quantità di moto scambiata tra i due corpi venga trasportata dal campo durante il tempo di transito. Ciò si può dimostrare agevolmente nel caso dell'interazione elettromagnetica ma è più complicato per il campo gravitazionale.

È importante sottolineare che molte volte la rappresentazione di una certa grandezza fisica risulta più comoda ed immediata se si danno i valori che essa assume nei punti di una regione dello spazio e, se varia nel tempo, ad un certo istante. Esempi tipici sono la distribuzione dei valori della temperatura in un certo sistema, l'andamento della pressione in una data regione, la distribuzione delle velocità delle particelle di un fluido in moto, ecc... Comunque l'insieme di tali grandezze è indicato come campo delle temperature, delle pressioni, delle velocità e così via; è evidente che in queste circostanze il significato di campo è diverso da quello più sopra esposto.

7. Proprietà elementari dei campi di forza

Indichiamo col vettore \mathbf{A} il generico campo, sia esso gravitazionale o elettrico o di qualsiasi altro tipo; se due campi di ugual natura agiscono nello stesso punto, si ha

$$\mathbf{A} = \mathbf{A}_1 + \mathbf{A}_2;$$

in altri termini vale il principio di sovrapposizione; così se i campi sono più di due. Si definisce *linea di forza o linea di flusso* una linea tale che in ogni suo punto ha per tangente il vettore \mathbf{A} del campo; il verso della linea di forza è concorde con quello del campo. Ad esempio, nel campo della gravità, la verticale in ogni punto volta verso il basso, individua la tangente ed il verso della linea di forza; nel campo gravitazionale di una massa puntiforme, le linee di forza sono radiali ed hanno verso concorrente sulla massa stessa, figura 3.

Se si considera nel campo una linea chiusa l e per tutti i suoi punti si traccia la linea di forza corrispondente, si ottiene il cosiddetto *tubo di flusso*, figura 4.

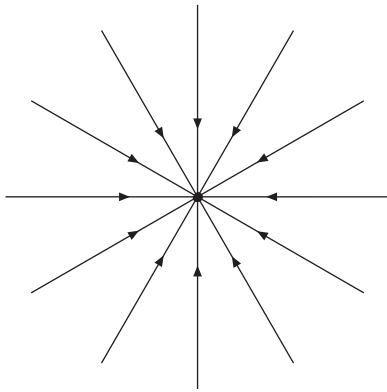


Fig. 6.3

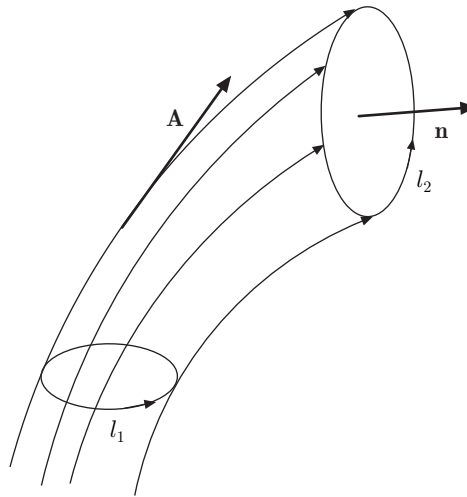


Fig. 6.4

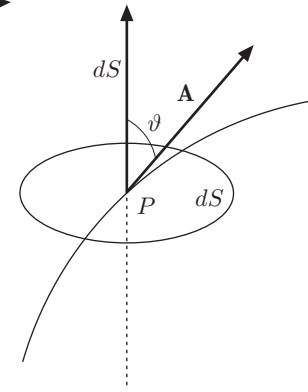


Fig. 6.5

7.1. Flusso del vettore campo

Si consideri nel campo di forza una superficie elementare dS , figura 5, e sulla normale $\hat{\mathbf{n}}$ a dS si fissi un verso positivo che individua anche, secondo la convenzione di Ampère, il verso positivo di percorrenza del perimetro della superficie dS . Si può così definire anche il vettore $d\mathbf{S}$, la cui orientazione è quella fissata sulla normale; tale vettore ovviamente non è un vettore applicato ma caratterizza completamente l'elemento di area, nel senso che è possibile attribuire ad esso un segno: è positiva la faccia il cui perimetro, secondo la convenzione adottata, è percorso in

senso antiorario, negativa l'altra. Definiamo flusso elementare del campo la grandezza

$$d\Phi = \mathbf{A} \cdot \hat{\mathbf{n}} dS = \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S} = AdS \cos \theta.$$

Il flusso elementare gode dunque delle proprietà del prodotto scalare e, se \mathbf{A} e $d\mathbf{S}$ non sono identicamente nulli, dipende dal coseno dell'angolo da essi formato; dunque il flusso può essere positivo se l'angolo è acuto (flusso uscente), negativo se l'angolo è ottuso (flusso entrante) o nullo se l'angolo è di 90° . Esso inoltre è invariante perché tale è il prodotto scalare.

Il flusso totale attraverso una superficie finita è dato dall'integrale esteso a tutta la superficie:

$$\Phi = \int_S \mathbf{A} \cdot \hat{\mathbf{n}} dS = \int_S \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S}. \quad (8)$$

Quest'ultima espressione in coordinate cartesiane si scrive

$$\Phi = \int_S (A_x dS_x + A_y dS_y + A_z dS_z).$$

dove compaiono le componenti cartesiane di \mathbf{A} e le proiezioni di $d\mathbf{S}$ sugli assi coordinati ($dS_x = dS \cos(x, \hat{\mathbf{n}}), \dots$).

Per comprendere il significato fisico di flusso basta pensare al campo delle velocità di un fluido ideale in moto stazionario in un condotto; in tal caso il prodotto della velocità per l'area della sezione del condotto, dà la portata espressa come volume di fluido che passa attraverso la sezione nell'unità di tempo; anzi la terminologia adottata nello studio dei campi prende origine appunto dalla fluidodinamica.

7.2. Divergenza

La divergenza del vettore campo è un operatore atto ad esprimere il flusso uscente dall'unità di volume; il significato fluidodinamico è evidente. Consideriamo il vettore campo \mathbf{A} in un punto P e una superficie chiusa costituita da un cubo elementare di spigoli dx, dy, dz , paralleli agli assi di una terna cartesiana, con origine in P , figura 6. Come di consueto, assumiamo che la normale alla superficie considerata sia volta verso l'esterno.

Supponendo che \mathbf{A} sia una funzione regolare di x, y, z , le sue componenti al centro delle facce del cubetto possono essere espresse dal valore medio che assumono sulle facce stesse. Consideriamo la componente A_x al centro del cubetto; detto A'_x il valore di tale componente in corrispondenza alla faccia $ABCD$ e limitandoci a variazioni del primo ordine, si ha:

$$A'_x = A_x + \frac{\partial A_x}{\partial x} \frac{dx}{2}.$$

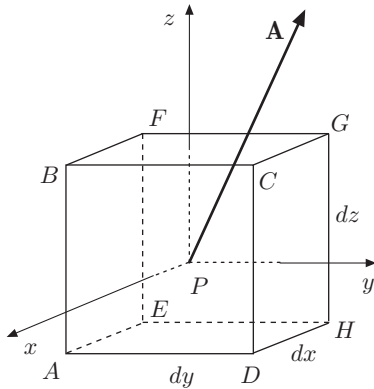


Fig. 6.6

Il flusso di \mathbf{A} uscente da detta faccia è

$$d\Phi_{ABCD} = \left(A_x + \frac{\partial A_x}{\partial x} \frac{dx}{2} \right) dydz.$$

Analogamente, il flusso uscente dalla faccia $EFGH$ risulta

$$d\Phi_{EFGH} = - \left(A_x - \frac{\partial A_x}{\partial x} \frac{dx}{2} \right) dydz,$$

dove il segno negativo discende dal fatto che il componente $A_x \mathbf{i}$ punta verso l'interno del cubetto, mentre la normale alla faccia considerata è volta verso l'esterno.

La somma dei flussi attraverso le due facce è

$$d\Phi_{ABCD} + d\Phi_{EFGH} = \frac{\partial A_x}{\partial x} dx dy dz.$$

Lo stesso vale per le altre coppie di facce; il flusso complessivo uscente dal cubetto è pertanto

$$d\Phi = \left(\frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z} \right) dx dy dz,$$

dove $dx dy dz$ è il volume dV del cubetto.

Si definisce *divergenza* di \mathbf{A} la grandezza scalare

$$\text{div} \mathbf{A} = \nabla \cdot \mathbf{A} = \frac{d\Phi}{dV}. \quad (9)$$

dove con ∇ si è indicato, in coordinate cartesiane, l'operatore

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial}{\partial y} \mathbf{j} + \frac{\partial}{\partial z} \mathbf{k}, \quad (10)$$

chiamato *nabla*. Si ha pertanto

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = \frac{d\Phi}{dV} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}, \quad (11)$$

da cui si deduce

$$d\Phi = \nabla \cdot \mathbf{A} dV, \quad \Rightarrow \quad \Phi = \int_V \nabla \cdot \mathbf{A} dV. \quad (12)$$

Pertanto il flusso del vettore \mathbf{A} attraverso una superficie chiusa si può ottenere per mezzo dell'integrale della divergenza di \mathbf{A} esteso al volume V delimitato dalla superficie considerata. La divergenza è invariante perché il prodotto scalare $\nabla \cdot \mathbf{A}$ è invariante.

|| 7.3. Circuitazione, rotore

Si definisce circuitazione del vettore campo \mathbf{A} lungo una linea chiusa l , sulla quale è fissato un verso positivo di percorrenza, l'espressione

$$\oint \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l}, \quad (13)$$

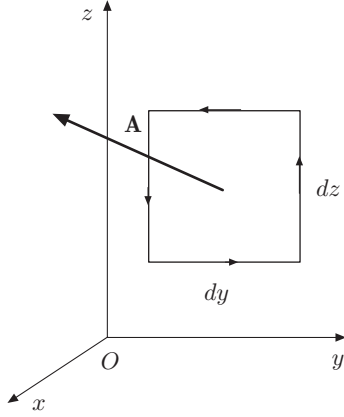


Fig. 6.7

che in coordinate cartesiane si scrive

$$\oint (A_x dx + A_y dy + A_z dz) = \oint A_x dx + \oint A_y dy + \oint A_z dz.$$

Si consideri ora il campo \mathbf{A} in un punto P , al centro di un elemento rettangolare di superficie $dS_x = dydz$, perpendicolare all'asse x . La normale all'elemento rispetta la convenzione sul verso positivo di percorrenza del suo perimetro, figura 7. La circuitazione infinitesima di \mathbf{A} lungo tale perimetro è data da

$$\oint_{dS_x} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l} = \oint_{dS_x} (A_y dy + A_z dz) = \oint_{dS_x} A_y dy + \oint_{dS_x} A_z dz. \quad (14)$$

Se A_y è la componente di \mathbf{A} al centro dell'elemento, limitandosi a variazioni del primo ordine, le componenti in corrispondenza ai lati AB e CD risultano rispettivamente:

$$A_y - \frac{\partial A_y}{\partial z} \frac{dz}{2}, \quad A_y + \frac{\partial A_y}{\partial z} \frac{dz}{2};$$

pertanto si ha

$$\begin{aligned} \oint_{dS_x} A_y dy &= \left(A_y - \frac{\partial A_y}{\partial z} \frac{dz}{2} \right) dy - \left(A_y + \frac{\partial A_y}{\partial z} \frac{dz}{2} \right) dy = \\ &= -\frac{\partial A_y}{\partial z} dy dz. \end{aligned}$$

Il segno negativo nel secondo termine indica che l'elemento di linea CD è percorso in direzione opposta a quella fissata sull'asse y .

Lo stesso ragionamento vale per A_z ; infatti sui lati BC e DA si ha:

$$A_z + \frac{\partial A_z}{\partial y} \frac{dy}{2}, \quad A_z - \frac{\partial A_z}{\partial y} \frac{dy}{2};$$

quindi:

$$\oint_{dS_x} A_z dz = \left(A_z + \frac{\partial A_z}{\partial y} \frac{dy}{2} \right) dz - \left(A_z - \frac{\partial A_z}{\partial y} \frac{dy}{2} \right) dz = \frac{\partial A_z}{\partial y} dy dz.$$

In definitiva la (14) diventa

$$\oint_{dS_x} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l} = \left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} \right) dy dz. \quad (15)$$

In maniera analoga si procede per la circuitazione lungo il perimetro delle superfici elementari dS_y e dS_z ortogonali, rispettivamente, all'asse y e all'asse z :

$$\oint_{dS_y} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l} = \left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} \right) dx dz. \quad (16)$$

$$\oint_{dS_z} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l} = \left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \right) dx dy. \quad (17)$$

Definiamo *rotore* o *rotovettore* di \mathbf{A} , denotandolo con la notazione

$$\mathbf{R} = \text{rot } \mathbf{A} = \nabla \times \mathbf{A}, \quad (18)$$

il vettore che, in coordinate cartesiane, ha componenti:

$$\begin{aligned} R_x &= \left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} \right), \\ R_y &= \left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} \right), \\ R_z &= \left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \right), \end{aligned}$$

che può anche essere espresso con la matrice

$$\nabla \times \mathbf{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ A_x & A_y & A_z \end{pmatrix} \quad (19)$$

da cui deriva la notazione $\nabla \times \mathbf{A}$.

Dalla (15) si deduce

$$\oint_{dS_x} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l} = R_x dS_x = d\Phi(\mathbf{R}),$$

cioè la circuitazione lungo il contorno di dS_x è uguale al flusso elementare del vettore \mathbf{R} attraverso tale superficie. Dalle (16) e (17) si giunge ad analoga conclusione per le superfici dS_y e dS_z . Tenuto però conto dell'invarianza del prodotto scalare, si riconosce che tale risultato è valido qualunque sia l'orientazione dell'elemento; in altri termini si potrà scrivere

$$\oint_{dS} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l} = (\nabla \times \mathbf{A}) \cdot \hat{\mathbf{n}} dS. \quad (20)$$

Questa equazione è valida se la circuitazione è estesa al perimetro di una superficie sufficientemente piccola e tale che $\nabla \times \mathbf{A}$ si possa ritenere costante su di essa. Tuttavia la circuitazione può essere estesa ad una linea l finita e il flusso di $\nabla \times \mathbf{A}$ ad una generica superficie che ha come bordo la linea stessa. Infatti, figura 8, la superficie considerata può essere suddivisa in tanti elementi dS , in modo che per ognuno di essi si abbia

$$\oint_{dS} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l}_i = (\nabla \times \mathbf{A}) \cdot \hat{\mathbf{n}} dS.$$

Sommando i contributi di tutti gli elementi, si osserva che al primo membro la somma si riduce all'integrale lungo la linea l che costituisce il bordo della superficie finita; infatti i contributi dei contorni elementari adiacenti si cancellano, in quanto sono sempre opposti. La somma dei contributi al secondo membro, non è altro che l'integrale $\nabla \times \mathbf{A}$ esteso alla superficie considerata. Pertanto si ottiene la relazione

$$\oint_l \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l} = \int_S \nabla \times \mathbf{A} \cdot \hat{\mathbf{n}} dS, \quad (21)$$

che esprime il teorema di Stokes:

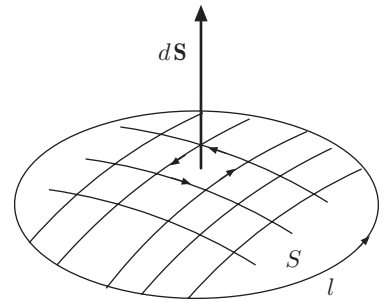


Fig. 6.8

la circuitazione del vettore \mathbf{A} lungo un percorso chiuso l è uguale al flusso del rotovettore di \mathbf{A} attraverso una qualunque superficie che ha come contorno l .

Il significato di rotore appare particolarmente intuitivo col seguente esempio. Si consideri un disco ruotante attorno al suo asse con velocità angolare costante; i punti del disco distanti r dall'asse di rotazione hanno velocità $v = \omega r$. Fissata una terna cartesiana con l'asse z coincidente con l'asse di rotazione, per le componenti del vettore velocità \mathbf{v} si ha

$$v_x = -\omega r \sin \theta, \quad v_y = \omega r \cos \theta, \quad v_z = 0,$$

cioè:

$$v_x = -\omega y, \quad v_y = \omega x, \quad v_z = 0.$$

Il vettore \mathbf{v} è funzione del punto e tutti i punti del disco costituiscono il campo del vettore velocità; dalla (19) il rotore di \mathbf{v} risulta

$$\begin{aligned} \nabla \times \mathbf{v} &= \left(\frac{\partial v_z}{\partial y} - \frac{\partial v_y}{\partial z} \right) \mathbf{i} + \left(\frac{\partial v_x}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial x} \right) \mathbf{j} + \left(\frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y} \right) \mathbf{k} \\ &= 2\omega \mathbf{k} = 2\boldsymbol{\omega}. \end{aligned}$$

Il rotovettore di \mathbf{v} è uguale al doppio della velocità angolare. Il campo delle velocità, in questo caso, si dice *rotazionale*.

Se consideriamo un campo vettorialmente costante \mathbf{A} , orientato, per esempio, lungo uno degli assi coordinati, dalla (19) si ricava immediatamente che $\nabla \times \mathbf{A} = 0$; il campo è irrotazionale ed altresì ha circuitazione nulla.

7.4. Gradiente

Consideriamo una grandezza scalare $\varphi(x, y, z)$, funzione della posizione, continua e derivabile nel campo in cui è definita. Il differenziale

$$d\varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial x} dx + \frac{\partial \varphi}{\partial y} dy + \frac{\partial \varphi}{\partial z} dz,$$

può essere interpretato come il prodotto scalare di due vettori \mathbf{A} e \overrightarrow{dP} :

$$\begin{aligned} \mathbf{A} &= \frac{\partial \varphi}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \mathbf{j} + \frac{\partial \varphi}{\partial z} \mathbf{k} \\ \overrightarrow{dP} &= dx \mathbf{i} + dy \mathbf{j} + dz \mathbf{k}. \end{aligned}$$

Il vettore \mathbf{A} , le cui componenti rappresentano il tasso di variazione della funzione φ secondo gli assi cartesiani, si chiama *gradiente* della grandezza scalare considerata. Il vettore \overrightarrow{dP} , nel campo di definizione della grandezza rappresenta lo spostamento elementare, in corrispondenza al quale tale grandezza passa dal valore

φ al valore $\varphi + d\varphi$. Il gradiente viene indicato col simbolo ∇ , definito dalla (10); pertanto:

$$\mathbf{A} = \text{grad}\varphi = \nabla\varphi. \quad (22)$$

Si ha dunque:

$$d\varphi = \nabla\varphi \cdot \overrightarrow{dP} = |\nabla\varphi| dP \cos \theta, \quad (23)$$

dove θ è l'angolo formato dal vettore gradiente con lo spostamento \overrightarrow{dP} . Si deduce che la direzione lungo la quale la variazione di φ è massima è quella di $\nabla\varphi$. Il gradiente è pertanto un vettore il cui modulo e la cui direzione individuano la variazione massima della funzione considerata. Esso è ovviamente invariante per trasformazioni di coordinate.

|| 7.5. Laplaciano

Si definisce laplaciano l'operatore che si ottiene mediante l'operazione di divergenza del gradiente; in coordinate cartesiane si ha:

$$\nabla \cdot \nabla\varphi = \nabla \cdot \left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial\varphi}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial\varphi}{\partial z}\mathbf{k} \right) = \frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2} = \nabla^2\varphi. \quad (24)$$

Analogamente, il laplaciano di un vettore \mathbf{A} , in coordinate cartesiane, è definito dalla relazione:

$$\nabla^2\mathbf{A} = \nabla^2 A_x\mathbf{i} + \nabla^2 A_y\mathbf{j} + \nabla^2 A_z\mathbf{k}. \quad (25)$$

L'operatore di Laplace è invariante per trasformazioni di coordinate perché risultato di due operazioni invariantive.

7. Forze

1. Forze in Natura

Tutte le forze che si manifestano in natura sono determinate da quattro interazioni fondamentali:

1. Interazione gravitazionale
2. Interazione elettromagnetica
3. Interazione nucleare forte
4. Interazione nucleare debole

Oggi i fisici stanno elaborando una grande teoria unificante che possa ricondurre tutte le forze che osserviamo ad un'unica forza fondamentale che ha dato origine all'Universo. I risultati conseguiti per le tre ultime interazioni sono soddisfacenti, tuttavia per includere nella teoria l'interazione gravitazionale è necessario ancora parecchio lavoro.

Nello studio della dinamica si prenderanno in considerazione le prime due. Per quanto riguarda l'interazione elettromagnetica si esamineranno semplici problemi di dinamica di particelle cariche soggette all'azione di campi elettrici e magnetici; ma anzitutto verranno descritte le forze che usualmente vengono chiamate di contatto, e cioè le forze esercitate mediante trazioni o compressioni, le forze di attrito, le forze vincolari, le forze esercitate da molle e fili, tutte complicate manifestazioni dell'interazione elettromagnetica fondamentale, naturalmente non dedotte da principi primi, ma accettate semplicemente come forze di natura meccanica.

Le forze fittizie, dipendenti dal moto del riferimento adottato, verranno descritte nel capitolo XI.

Una forza può essere funzione delle coordinate, della velocità e del tempo, cioè $\mathbf{F}(x, y, z; \mathbf{v}; t)$; pertanto l'equazione fondamentale della dinamica si scrive

$$m\mathbf{a} = \mathbf{F}(x, y, z; \mathbf{v}; t)$$

che si traduce nelle tre relazioni scalari

$$\begin{aligned}\ddot{x} &= \frac{1}{m} F_x(x, y, z; v_x; t) \\ \ddot{y} &= \frac{1}{m} F_y(x, y, z; v_y; t) \\ \ddot{z} &= \frac{1}{m} F_z(x, y, z; v_z; t).\end{aligned}\tag{1}$$

Queste relazioni, assegnate le forze che agiscono sul punto e le condizioni iniziali, costituiscono un sistema di equazioni differenziali del secondo ordine che, integrate, permettono di ricavare le equazioni del moto: $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$.

Se, in particolare, la forza dipende solo dalle coordinate si dice *posizionale*. Ovviamente \mathbf{F} , per il principio di sovrapposizione, rappresenta la risultante di tutte le forze agenti sul punto. In generale, il problema matematico risulta piuttosto complesso e non sempre risolvibile per via analitica.

2. Forza gravitazionale

La forza di gravitazione universale tra due corpi di massa (gravitazionale) m_1 ed m_2 , scoperta da Newton, è data dalla relazione:

$$\mathbf{F} = -G \frac{m_1 m_2}{r^2} \hat{\mathbf{r}},\tag{2}$$

dove r è la distanza tra le masse ed $\hat{\mathbf{r}}$ è il versore del vettore \mathbf{r} che fissa la posizione della massa m_2 rispetto a m_1 e viceversa; il segno negativo indica il carattere attrattivo della forza. G è una costante universale che caratterizza la forza gravitazionale per tutti i corpi; essa è stata determinata nel 1798, con un esperimento molto famoso, da Cavendish il quale trovò il valore $G = 6,67 \cdot 10^{-11} \text{ Nm}^2 \text{ kg}^{-2}$. Misure recenti hanno permesso di stabilire il valore, oggi universalmente accettato, $G = (6,672 \pm 0,004) \cdot 10^{-11} \text{ Nm}^2 \text{ kg}^{-2}$.

La forza gravitazionale è inversamente proporzionale al quadrato della distanza tra i corpi che si attraggono, perciò decresce rapidamente al crescere della loro distanza; però è proporzionale al prodotto tra le masse. Per questo motivo l'attrazione esercitata da un corpo molto grande, come la Terra o le stelle, è notevole anche se il valore di G è molto piccolo, mentre l'attrazione gravitazionale tra corpi di dimensioni ordinarie è osservabile solo con esperienze molto delicate.

La (2) risulta abbastanza accurata se le dimensioni delle masse sono piccole rispetto alla distanza che le separa; è esatta, come si dimostrerà in seguito, per corpi perfettamente sferici; in tal caso r misura la distanza tra i centri delle sfere. Si osservi che la (2) è simmetrica, nel senso che esprime l'attrazione che subisce

la massa m_1 nel campo gravitazionale generato dalla massa m_2 e viceversa; la forza ha lo stesso modulo ma orientazione opposta ($\hat{\mathbf{r}}$ cambia verso). In altri termini è verificata la legge di azione e reazione. La forza gravitazionale è una forza posizionale poiché dipende dalla distanza tra le masse interagenti e fissato il centro di attrazione, m_1 o m_2 , è anche una forza centrale.

Newton giunse alla formulazione della (2) studiando, in particolare, il moto della Luna intorno alla Terra, convinto che per la validità della seconda legge della dinamica, da egli stesso verificata per una grande varietà di fenomeni fisici, si dovesse ricercare l'espressione di una forza appropriata agente sulla Luna, che ne determinasse il moto.

La legge di gravitazione universale è stata la sintesi mirabile di circa un secolo e mezzo di studi sul moto degli astri. Nel 1543 l'astronomo e matematico polacco Nikolaj Kopernik (Copernico), (1473-1543), pochi mesi prima della sua morte, pubblicò la sua teoria eliocentrica nel "De revolutionibus orbium coelestium", in completa contrapposizione con la cosmologia aristotelica. Successivamente l'astronomo danese Tycho Brahe, (1546-1601), condusse accurate e lunghe osservazioni astronomiche che lo indussero ad una formulazione di sistema planetario in parte eliocentrico ed in parte geocentrico. Si noti che il cannocchiale fu inventato nel 1608 dall'occhialaio fiammingo Lippershey e fu usato per la prima volta per studi astronomici da Galilei, il quale nel 1609 scoprì i satelliti medicei di Giove. Infine l'astronomo tedesco Johannes Kepler (Keplero), (1571-1630), assistente di Tycho Brahe a Praga, dove questi passò gli ultimi anni della sua vita, utilizzando le osservazioni del maestro e perfezionando la teoria copernicana, riuscì a formulare le tre leggi empiriche che portano il suo nome:

- 1) *Le orbite dei pianeti sono ellissi di cui il Sole occupa uno dei fuochi.*
- 2) *La velocità areolare dei pianeti è costante; cioè, le aree descritte dal raggio vettore che congiunge il Sole ad un pianeta sono proporzionali ai tempi impiegati a percorrerle.*
- 3) *I quadrati dei periodi di rivoluzione dei vari pianeti sono proporzionali ai cubi dei semiassi maggiori delle loro orbite.*

Le prime due leggi furono enunciate nel 1609 e si fondano sui dati di Tycho Brahe relativi al moto di Marte; successivamente, pur senza una precisa dimostrazione, Keplero ne propose l'estensione a tutti i pianeti allora noti; al moto della Luna attorno alla Terra e ai satelliti di Giove scoperti da Galilei.

La terza legge, nota come legge armonica, venne enunciata dieci anni dopo e precisa la relazione esistente tra il periodo di rivoluzione T e le dimensioni delle orbite dei pianeti attorno al Sole o di quelle dei satelliti attorno al pianeta. Tale legge infatti

afferma che il rapporto

$$\frac{T^2}{a^3} = C, \quad (3)$$

dove a è la lunghezza del semiasse maggiore dell'orbita ellittica e C una costante che ha un valore unico per ogni famiglia di astri; cioè un valore per i pianeti che ruotano attorno al Sole, un altro valore per i satelliti di Giove e così via.

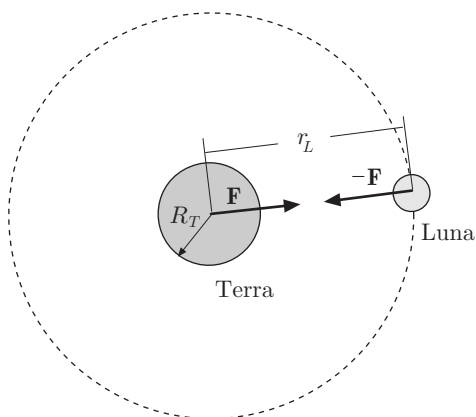


Fig. 7.1

Ritorniamo ora al problema di Newton e consideriamo il calcolo nei particolari. Era noto che il moto della Luna attorno alla Terra fosse pressoché circolare ed uniforme, con raggio dell'orbita uguale a circa 60 volte il raggio R_T della terra e periodo T circa uguale a 27,32 giorni; pertanto l'accelerazione alla quale è soggetta la Luna è puramente centripeta. Detta r_L la distanza tra i centri della Terra e della Luna, figura 1, l'accelerazione centripeta è v^2/r_L ; ma $v = 2\pi r_L/T$, pertanto si ha

$$a_L = \frac{v^2}{r_L} = \frac{4\pi^2 r_L}{T^2} = 2,71 \cdot 10^{-3} \text{ m/s}^2,$$

essendo $r = 60R_T$, $R_T = 6,37 \cdot 10^6 \text{ m}$ e $T = 27,3 \text{ d} = 2,36 \cdot 10^6 \text{ s}$.

D'altra parte era noto che ogni corpo in prossimità della superficie terrestre è soggetto all'accelerazione di gravità, e poiché il rapporto tra g ed a_L risulta

$$\frac{g}{a_L} \approx 3600,$$

che è uguale al rapporto tra i quadrati della distanza Terra Luna e il raggio della Terra,

$$\frac{g}{a_L} = \left(\frac{r_L}{R_T} \right)^2 = \left(\frac{60R_T}{R_T} \right)^2 = 3600,$$

Newton dedusse che l'accelerazione cui è soggetto un grave e l'accelerazione alla quale è soggetta la Luna sono inversamente proporzionali ai quadrati delle corrispondenti distanze dal centro della Terra.

A questo proposito, è famoso l'aneddoto secondo cui si vuole che Newton sia pervenuto a questo risultato, osservando casualmente la caduta di una mela. In effetti la Luna, come la mela o qualsiasi altro oggetto, tenderebbe a cadere sulla Terra se non fosse animata da una velocità iniziale diversa da zero. Pertanto la forza gravitazionale deve essere puramente radiale ed inversamente proporzionale al quadrato della distanza tra i due corpi. Con le sue parole:

Confrontai così la forza necessaria per mantenere la Luna nella sua orbita con la forza di gravità sulla superficie della Terra, e trovai che esse concordano abbastanza strettamente.

Questa conclusione indusse Newton a formulare la forza di gravitazione universale. La (2), frutto di una geniale intuizione, ha caratteristiche universali che non potevano essere manifeste soltanto nello studio del moto della Luna. Successivamente, Newton dimostrò la validità della legge dell'inverso del quadrato della distanza per le orbite ellittiche, di cui la circonferenza è un caso particolare. Dimostrò che il moto di una qualsiasi coppia di corpi celesti soggetti alla interazione gravitazionale, avviene intorno al comune centro di massa, che costituisce il vero centro di attrazione. Tuttavia se una delle masse è molto maggiore dell'altra, il centro di massa del sistema coincide praticamente col centro geometrico della massa più grande. Infine, facendo uso del calcolo infinitesimale di cui, contemporaneamente ma indipendentemente da Leibnitz, fu ideatore, dimostrò che una sfera uniforme o un guscio sferico uniforme attrae gravitazionalmente come se tutta la massa fosse concentrata nel suo centro geometrico. Sembra che per questa dimostrazione, Newton abbia impiegato venti anni; il tempo necessario per sviluppare i procedimenti del calcolo infinitesimale. Questi argomenti saranno trattati dettagliatamente in seguito.

La forza gravitazionale può essere dedotta dalla terza legge di Keplero la quale, come s'è visto, asserisce che per ogni sistema di pianeti o di satelliti ruotanti intorno ad un centro di attrazione, vale la relazione $T^2/a^3 = C$, con C costante. Supponendo, in prima approssimazione, che le orbite siano circolari, $a = r$ (raggio dell'orbita), l'accelerazione centripeta è

$$\frac{v^2}{r} = \frac{4\pi^2 r^2}{T^2} \frac{1}{r},$$

essendo $v = 2\pi r/T$.

Moltiplicando il secondo membro della precedente per r/r e tenendo conto della (3), si ottiene:

$$\frac{v^2}{r} = \frac{4\pi^2}{C} \frac{1}{r^2}; \quad (4)$$

l'accelerazione centripeta è uguale ad un fattore costante moltiplicato per $1/r^2$.

Consideriamo la forza gravitazionale che il Sole esercita sulla Terra; per la (4) si ha

$$F = \frac{4\pi^2}{C} \frac{M_T}{r_{TS}^2},$$

con M_T massa della Terra ed r_{TS} distanza Terra Sole.

La forza di reazione che la Terra esercita sul Sole è uguale ma di verso opposto; indicando con M_S la massa del Sole e con a_S l'accelerazione subita dal Sole è

$$F = M_S a_S;$$

poiché,

$$a_S = \frac{F}{M_S} = \frac{4\pi^2}{C} \frac{M_T}{M_S} \frac{1}{r_{TS}^2},$$

moltiplicando ancora per M_S , si ha:

$$F = \frac{4\pi^2}{CM_S} \frac{M_T M_S}{r_{TS}^2}. \quad (5)$$

Ponendo

$$G = \frac{4\pi^2}{CM_S}, \quad (6)$$

costante gravitazionale, la (5) assume la forma

$$F = G \frac{M_T M_S}{r_{TS}^2}$$

che è il modulo della forza gravitazionale. Pertanto la costante gravitazionale G , può essere ottenuta dalla (6), una volta nota la massa del Sole e la costante C relativa alla famiglia di pianeti orbitanti attorno al Sole, o comunque considerando un qualsiasi sistema di pianeti ruotanti attorno ad un centro di attrazione.

In tabella sono riportati alcuni dati astronomici relativi al sistema solare per mezzo dei quali il lettore può verificare numericamente il valore di C e di G .

Pianeta	Semiasse maggiore (U.A.)*	Periodo di rotazione, (s)	Massa (kg)
Mercurio	0,3871	$7,60 \cdot 10^6$	$3,18 \cdot 10^{23}$
Venere	0,7223	$1,94 \cdot 10^7$	$4,88 \cdot 10^{24}$
Terra	1,0000	$3,16 \cdot 10^7$	$5,98 \cdot 10^{24}$
Giove	5,203	$3,74 \cdot 10^8$	$1,90 \cdot 10^{27}$
Plutone	39,44	$7,84 \cdot 10^9$	$1,08 \cdot 10^{24}$
Luna	0,00257	$2,34 \cdot 10^6$	$7,35 \cdot 10^{22}$

* 1 U. A. (unità astronomica) = $1,496 \cdot 10^{11}$ m

Massa del Sole, $M_S = 1,99 \cdot 10^{30}$ kg

Nel caso dell'interazione Terra-Luna, con considerazioni analoghe, si ottiene

$$G = \frac{4\pi^2}{C' M_T},$$

essendo C' il rapporto tra il quadrato del periodo di rivoluzione della Luna ed il cubo del raggio dell'orbita e M_T la massa della Terra. Riscrivendo la precedente nella forma

$$GM_T = \frac{4\pi^2}{T_L^2} r_{TL}^3,$$

e sostituendo i valori numerici si ha

$$GM_T = 3.95 \cdot 10^{14} \text{ m}^3/\text{s}^2.$$

Si osservi che questo risultato è ottenuto con dati puramente cinematici; Newton avrebbe potuto ottenere la costante gravitazionale G se avesse conosciuto la massa della Terra. In ogni caso, perché sia valida la (2) per ogni coppia di corpi, occorre una misura indipendente di G , misura che descriveremo più oltre.

Assumendo dunque che G sia stata misurata in qualche modo e che la forza peso agente su un corpo di massa m , in prossimità della superficie terrestre, sia della stessa natura della forza gravitazionale e nell'ipotesi che la massa della Terra sia localizzata nel suo centro geometrico, si può scrivere

$$F = G \frac{mM_T}{R_T^2},$$

dove R_T è il raggio terrestre e, con buona approssimazione, la distanza del corpo dal centro della Terra. Allora si ha

$$g = \frac{F}{m} = G \frac{M_T}{R_T^2}. \quad (7)$$

Numericamente:

$$g = G \frac{M_T}{R_T^2} = 9,8 \text{ m/s}^2.$$

Si è verificato dunque che il moto della Luna attorno alla Terra e la caduta libera di un grave sono dovuti alla stessa forza fondamentale, cioè alla interazione gravitazionale.

Esempi

- ||| 1. Forza di attrazione gravitazionale tra due sfere di massa $m = 1 \text{ kg}$ i cui centri si trovano alla distanza di 1 m . Si ha

$$F = G \frac{m_1 m_2}{r^2} = 6,67 \cdot 10^{-11} \text{ N}.$$

Ciò dimostra che la forza gravitazionale tra due corpi di dimensioni ordinarie è estremamente piccola; dunque tale forza può essere trascurata rispetto ad altre forze agenti.

- ||| 2. Variazione dell'accelerazione di gravità con l'altezza dalla superficie terrestre.

Secondo la (2) la forza gravitazionale decresce con l'inverso del quadrato della distanza; detta $r = R_T + h$ la distanza di un grave dal centro della Terra si ha

$$g(r) = \frac{F}{m} = G \frac{M_T}{(R_T + h)^2};$$

Se h è piccola rispetto a R_T , la quantità $(R_T + h)^{-2}$ si può sviluppare in serie di potenze:

$$(R_T + h)^{-2} = R_T^{-2} \left(1 - 2 \frac{h}{R_T} + \dots \right);$$

pertanto, trascurando i termini di ordine superiore al primo, si ha:

$$g(r) \approx G \frac{M_T}{R_T^2} \left(1 - 2 \frac{h}{R_T}\right) = g \left(1 - 2 \frac{h}{R_T}\right),$$

dove $g = GM_T/R_T^2$. La variazione di g è:

$$\Delta g = g(r) - g = -2g \frac{h}{R_T}. \quad (8)$$

Il segno negativo indica che g decresce al crescere di h . Tipicamente alla quota di $10^5 m$ il valore di g si riduce del 3%.

Si deve osservare che, oltre alla variazione di g con la quota, si ha anche una variazione con la latitudine. Infatti la Terra non è perfettamente sferica ma ha la forma di un ellissoide schiacciato ai poli, perciò il suo raggio varia con la latitudine; inoltre si è supposto che la Terra sia costituita da materiale omogeneo. La presenza di zone di diversa densità influenza localmente il valore di g e le variazioni che ne conseguono, dell'ordine di qualche unità per mille, possono essere sfruttate per la prospezione geologica del suolo anche al fine di rilevare giacimenti di minerali o petrolio. La variazione di g con la latitudine è dovuta anche alla forza centrifuga che ha origine dalla rotazione della Terra intorno al proprio asse. A causa di tutti questi fattori, è conveniente fissare un valore medio o standard ($g = 9,807 m/s^2$) in base al quale è possibile stabilire una diretta proporzionalità tra massa e peso.

- ||| **3.** Ricavare il periodo di rivoluzione di un satellite artificiale che percorre un'orbita circolare attorno alla Terra alla quota $h = 35 \cdot 10^3 km$, essendo noti il raggio della Terra $R_T = 6370 km$, il raggio dell'orbita lunare $r_L = 382 \cdot 10^3 km$ ed il periodo di rivoluzione della luna, $T_L = 27,3 d$.

Indicando con l'indice s le grandezze relative al satellite, per la terza legge di Keplero, si ha

$$\frac{T_s^2}{r_s^3} = \frac{T_L^2}{r_L^3},$$

poiché $r_s = R_T + h$, si ottiene:

$$T_s = T_L \left(\frac{R_T + h}{r_L} \right)^{3/2} \approx 1 d.$$

- ||| **4.** Determinare il raggio dell'orbita circolare che la Terra descrive attorno al centro di massa Terra-Luna, a causa dell'attrazione gravitazionale che la Luna esercita sulla Terra.

Poiché il centro di massa del sistema è sempre allineato con i centri della Luna e della Terra, la velocità angolare ω , e quindi il periodo di rotazione, dei due corpi è la stessa. Dette m_T , m_L le masse della Terra e della Luna ed R la distanza tra i rispettivi centri, dalla forza gravitazionale,

$$F = G \frac{m_T m_L}{R^2},$$

si ricava l'accelerazione della Terra:

$$a_T = \frac{F}{m_T} = G \frac{m_L}{R^2}.$$

Se la Terra percorre un'orbita circolare di raggio r_T , si ha:

$$a_T = \omega^2 r_T = G \frac{m_L}{R^2}, \quad \Rightarrow \quad r_T = G \frac{1}{\omega^2} \frac{m_L}{R^2}.$$

Analogamente per la Luna:

$$a_L = \frac{F}{m_L} = G \frac{m_T}{R^2},$$

e

$$a_L = \omega^2 r_L = G \frac{m_T}{R^2}, \quad \Rightarrow \quad r_L = G \frac{1}{\omega^2} \frac{m_T}{R^2}.$$

Poiché $r_L \approx R$, si ottiene

$$\frac{1}{\omega^2} = \frac{R^3}{Gm_T};$$

pertanto:

$$r_T = R \frac{m_L}{m_T}.$$

Essendo $m_L = 7,35 \cdot 10^{22} \text{ kg}$, $m_T = 5,98 \cdot 10^{24} \text{ kg}$, $R = 60R_T$ e $R_T = 6,37 \cdot 10^6 \text{ m}$, si ottiene:

$$r_T = 4,67 \cdot 10^6 \text{ m}.$$

Il raggio di tale orbita risulta minore del raggio della Terra. La Terra si può considerare praticamente fissa; dunque, nel caso in cui una delle masse che si attraggono è molto maggiore dell'altra, è possibile trascurare il moto intorno al centro di massa della massa più grande.

- ||| 5. La cometa di Halley raggiunge il sistema solare ogni 76 anni e passa a una distanza minima dal Sole (perielio) trascurabile rispetto alla massima distanza dal Sole (afelio), figura 2. Chiamando d la massima distanza dal Sole raggiunta dalla cometa, si ha $d \approx 2a$, dove a è il semiasse maggiore della sua orbita ellittica. Si calcoli d sapendo che l'orbita della Terra intorno al Sole è con buona approssimazione circolare di raggio $R = 150 \cdot 10^6 \text{ km}$.

Anche in questo problema si applica la terza legge di Keplero. Indicando con T_T il periodo di rivoluzione della Terra e con T_C quello della cometa (76 anni), si ha

$$\frac{T_T^2}{R^3} = \frac{T_C^2}{a^3}.$$

Poiché $a \approx d/2$:

$$\frac{T_T^2}{R^3} = 8 \frac{T_C^2}{d^3}, \quad \Rightarrow \quad d = 2R \left(\frac{T_C}{T_T} \right)^{2/3} = 5,38 \cdot 10^9 \text{ km}.$$

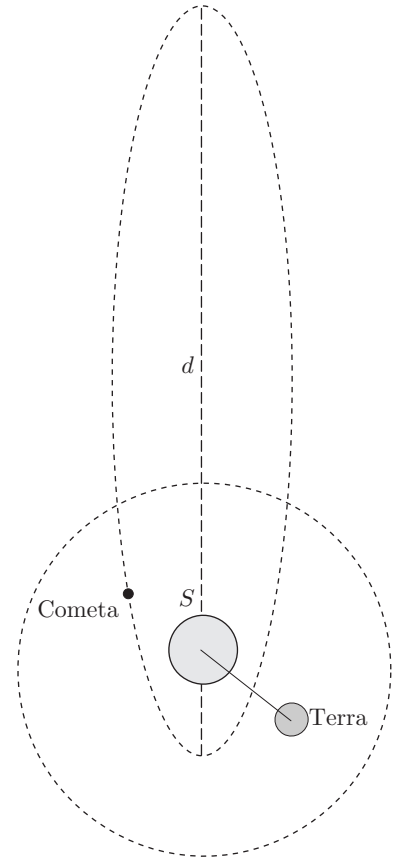


Fig. 7.2

|| 2.1. Esperienza di Cavendish

L'esperienza di Cavendish ha una importanza storica perché la determinazione numerica di G permette di "pesare" la Terra, come Cavendish stesso ebbe a dire intitolando *Weighing the Earth* l'articolo con cui presentò il risultato.

Si è visto nell'esempio 1 che la forza gravitazionale tra due masse di dimensioni ordinarie è estremamente piccola perciò la sua misura richiede accorgimenti particolari. Cavendish usò una versione perfezionata della bilancia di torsione, già inventata da J. Michell per rivelare forze molto deboli ed usata da Coulomb per la misura delle forze che si esercitano tra cariche puntiformi. Il dispositivo è schematizzato in figura 3. Due piccole sfere di uguale massa m sono disposte agli estremi di una sbarretta, sospesa per il centro ad un sottile filo di quarzo. Se due forze opposte agiscono sulle masse, si determina un momento che viene equilibrato dal momento di torsione elastica del filo, proporzionale all'angolo di torsione. Per evidenziare questo angolo, al filo è fissato uno specchietto su cui incide un raggio di luce, poi riflesso su una scala graduata, (leva ottica). In assenza di forze il filo non subisce torsione

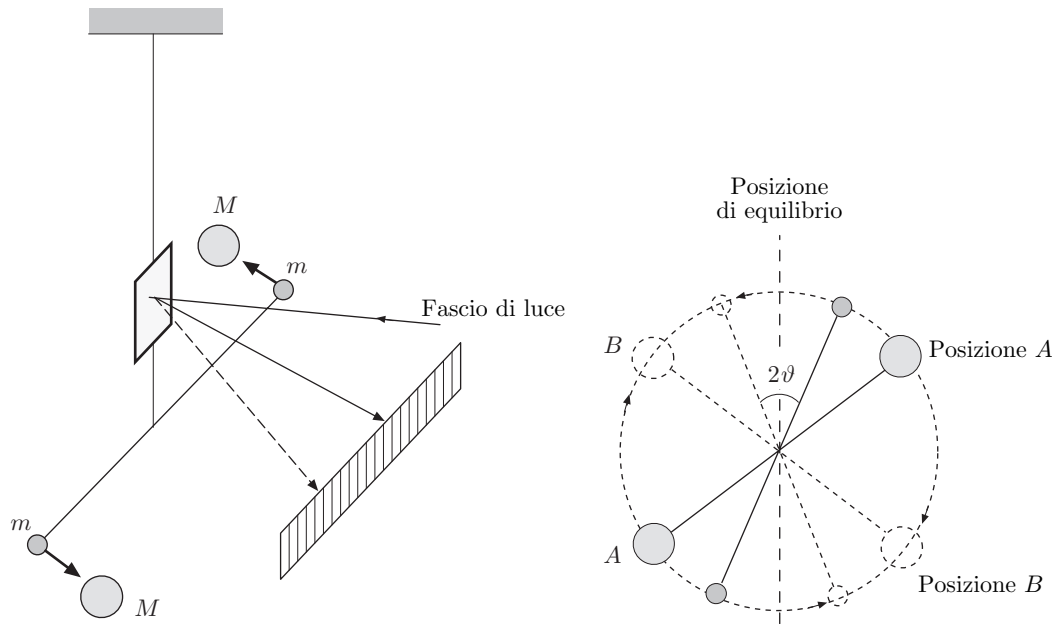


Fig. 7.3

e il sistema si trova in una certa situazione di equilibrio iniziale. Due grosse masse sferiche M uguali, i cui centri, come quelli delle masse m , giacciono sulla stessa circonferenza orizzontale, sono poste in prossimità delle masse m nella posizione A della figura. Una volta raggiunto l'equilibrio, e ciò richiede diverse ore essendo la forza molto debole e il sistema molto sensibile, viene misurato l'angolo θ di torsione. Infine le masse M vengono poste nella posizione simmetrica B , come indicato a tratteggio in figura, e si misura l'angolo corrispondente al nuovo equilibrio; ovviamente l'angolo di torsione complessivo è 2θ . Da questi dati, note le masse e le distanze tra i centri delle sfere, si ricava la costante di gravitazione G .

III 3. Forze elettromagnetiche

Le forze elettromagnetiche verranno studiate in dettaglio in Elettromagnetismo; ora ci limiteremo a descrivere alcuni casi in cui l'interazione di cariche o correnti con campi elettrici e magnetici dà luogo a forze che ne causano il moto. Accettata dunque l'espressione della forza, il movimento verrà determinato con l'equazione fondamentale della dinamica. Ne citiamo alcune.

La forza che si esercita su una carica q in presenza di un campo elettrico \mathbf{E} , creato da un'altra carica o comunque da una distribuzione di cariche, è:

$$\mathbf{F} = q\mathbf{E}. \quad (9)$$

La forza che viene esercitata su una carica animata di velocità \mathbf{v} in un campo di induzione magnetica \mathbf{B} , è espressa dalla forza di Lorentz:

$$\mathbf{F} = q\mathbf{v} \times \mathbf{B}. \quad (10)$$

Se è presente, oltre al campo magnetico, un campo elettrico si ha

$$\mathbf{F} = q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}). \quad (11)$$

La forza per unità di lunghezza tra due fili paralleli, posti a distanza r , percorsi da correnti I e I' è data, in modulo, da

$$\frac{dF}{dl} = \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{II'}{r},$$

dove μ_0 è la permeabilità magnetica del vuoto; la forza è attrattiva o repulsiva se le correnti sono concordi o discordi.

|| 3.1. Moto di un elettrone in un campo elettrico uniforme

Un campo elettrico uniforme è realizzato all'interno di due elettrodi piani, carichi uniformemente di segno opposto, figura 4. Detta l la lunghezza degli elettrodi e $2d$ la loro distanza, fissiamo un riferimento x, y con origine O in d . Supponiamo che in corrispondenza all'origine un elettrone di massa m entri, con velocità iniziale \mathbf{v}_0 diretta come l'asse x , nella regione in cui è presente il campo elettrico. La seconda equazione della dinamica si scrive:

$$\mathbf{F} = m\mathbf{a} = -e\mathbf{E},$$

che va integrata con le condizioni iniziali

$$t = 0; \quad x_0 = 0, \quad \dot{x}_0 = v_0; \quad y_0 = 0, \quad \dot{y}_0 = 0.$$

La situazione è analoga a quella di un corpo soggetto all'azione della gravità, animato di velocità iniziale orizzontale. Proiettando sugli assi si ha

$$\ddot{x} = 0, \quad \ddot{y} = \frac{eE}{m},$$

che integrate successivamente, tenuto conto delle condizioni iniziali, danno:

$$x = v_0 t, \quad y = \frac{1}{2} \frac{eE}{m} t^2.$$

I moti componenti sono: un moto uniforme secondo l'asse x e un moto con accelerazione costante secondo l'asse y . La traiettoria, nello spazio in cui è presente il campo elettrico, è un arco di parabola con vertice nell'origine e concavità volta verso l'alto:

$$y = \frac{1}{2} \frac{eE}{m} \frac{x^2}{v_0^2}.$$

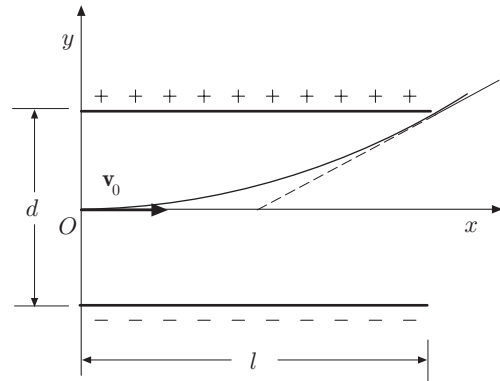


Fig. 7.4

Affinché l'elettrone fuoriesca dagli elettrodi, fissata la velocità iniziale, il valore E_0 del campo elettrico deve essere tale che

$$d = \frac{1}{2} \frac{eE_0}{m} \frac{l^2}{v_0^2}.$$

La traiettoria dell'elettrone fuori dagli elettrodi sarà una retta tangente alla parabola nel punto $x = l$. Il coefficiente angolare di tale retta è

$$\left(\frac{dy}{dx} \right)_{x=l} = \frac{eE_0}{m} \frac{l}{v_0^2},$$

e la sua equazione:

$$\frac{y - d}{x - l} = \frac{eE_0}{m} \frac{l}{v_0^2},$$

cioè

$$y = \frac{eE_0}{m} \frac{l}{v_0^2} (x - l) + d,$$

le cui intercette con gli assi, tenendo conto dell'espressione di d , sono

$$x = \frac{l}{2}, \quad y = -\frac{1}{2} \frac{eE_0}{m} \frac{l^2}{v_0^2}.$$

|| 3.2. Moto di una carica q in un campo di induzione magnetica uniforme

Sia \mathbf{B} il campo volto secondo l'asse z di una terna cartesiana di origine O ; poiché

$$\mathbf{F} = q\mathbf{v} \times \mathbf{B},$$

la forza è sempre ortogonale al piano di \mathbf{v} e \mathbf{B} . Consideriamo l'accelerazione:

$$\mathbf{a} = \frac{q}{m} \mathbf{v} \times \mathbf{B},$$

le cui componenti cartesiane, secondo le regole del prodotto vettoriale, sono

$$\ddot{x} = \frac{q}{m} B \dot{y}, \quad \ddot{y} = -\frac{q}{m} B \dot{x}, \quad \ddot{z} = 0. \quad (12)$$

La componente della velocità lungo z è costante o nulla.

Le soluzioni delle (12) verranno studiate in dettaglio nel seguito; per ora, osservando che la forza è sempre ortogonale alla velocità, quindi alla traiettoria, possiamo tentare soluzioni del tipo:

$$\dot{x} = v \cos \omega t, \quad \dot{y} = -v \sin \omega t, \quad \dot{z} = \dot{z}_0. \quad (13)$$

Le prime due sono le componenti della velocità di un moto circolare uniforme che, in particolare, avviene in senso orario. Poiché:

$$\ddot{x} = -\omega v \sin \omega t, \quad \ddot{y} = -\omega v \cos \omega t,$$

sostituendo nelle (12), si ottiene

$$\begin{aligned} -\omega v \sin \omega t &= -\frac{qB}{m} v \sin \omega t, \\ -\omega v \cos \omega t &= -\frac{qB}{m} v \cos \omega t, \end{aligned}$$

che sono soddisfatte se si pone

$$\omega = \frac{qB}{m} = \omega_c.$$

Questa relazione definisce la *pulsazione o frequenza di ciclotrone* ed ha effettivamente le dimensioni dell'inverso di un tempo, come si può verificare osservando che le dimensioni del prodotto qB sono $[qB] = [F]/[v]$.

Integrando le (13) si ottiene:

$$\begin{aligned} x &= \frac{v}{\omega_c} \sin \omega_c t + x_0 \\ y &= \frac{v}{\omega_c} \cos \omega_c t + y_0 \\ z &= \dot{z}_0 t + z_0. \end{aligned} \quad (14)$$

Eliminando il tempo tra le prime due, come proiezione della traiettoria sul piano $x-y$, si ottiene una circonferenza con centro in x_0, y_0 e raggio

$$R = \frac{v}{\omega_c} = \frac{mv}{qB},$$

che si chiama raggio di ciclotrone. La terza rappresenta un moto uniforme lungo z ; pertanto la traiettoria sarà un'elica cilindrica con asse parallelo a z , figura 5. Se $\dot{z}_0 = z_0 = 0$, la traiettoria si riduce a una circonferenza nel piano $x-y$.

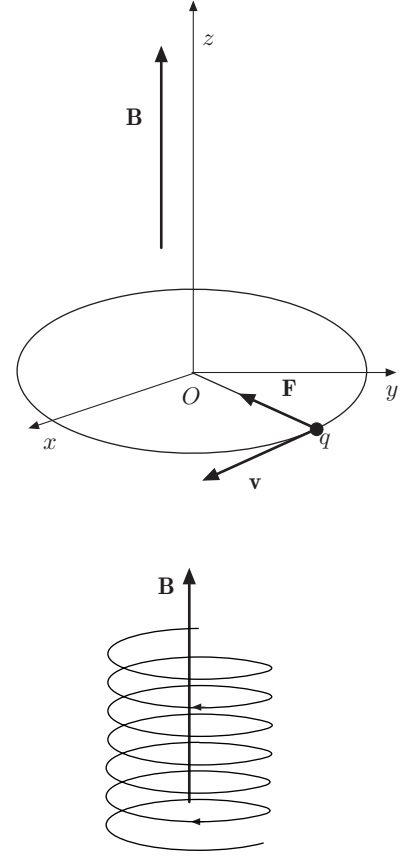


Fig. 7.5

4. Forze elastiche (forze esercitate da molle)

Una forza elastica è esprimibile mediante la relazione

$$\mathbf{F} = -k\mathbf{r}, \quad (15)$$

dove k è la costante elastica ed \mathbf{r} il vettore che stabilisce la posizione del punto materiale rispetto ad un determinato punto fisso; si noti che la forza è sempre opposta ad \mathbf{r} , il segno negativo quindi indica che si tratta di una forza elastica di richiamo. La forza elastica è manifestamente una forza posizionale.

Se una molla ideale, perfettamente elastica e di massa trascurabile, fissata ad un suo estremo, viene allungata o compressa, esercita su un punto materiale posto all'altro estremo, una forza diretta lungo il suo asse il cui modulo è proporzionale alla deformazione \mathbf{r} . In figura 6 è mostrata una molla su una superficie

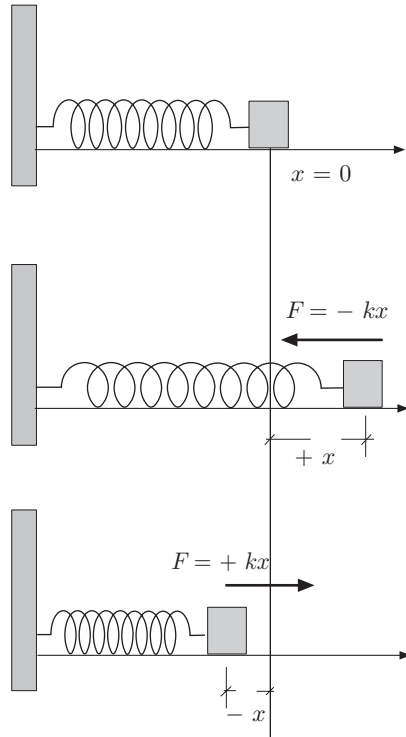


Fig. 7.6

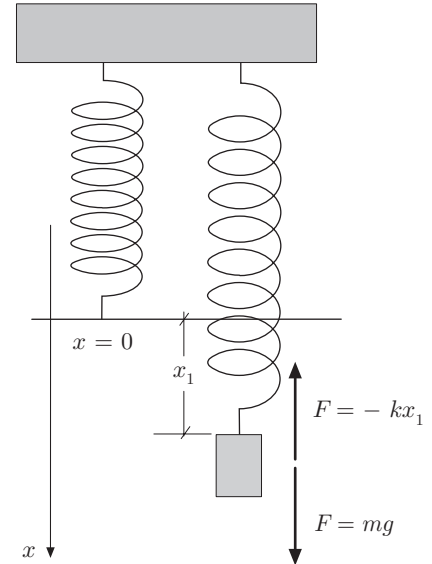


Fig. 7.7

orizzontale priva di attrito con un estremo fisso. Poniamo l'origine O delle coordinate x nell'estremo libero della molla in posizione di riposo, dove è collegata con una massa. Se la molla viene allungata, sulla massa si destina una forza diretta verso l'origine la cui intensità è proporzionale allo spostamento x ,

$$|F| = kx;$$

analogamente, se la molla viene compressa, la forza esercitata sulla massa è diretta ancora verso O e si ha

$$|F| = kx;$$

relazioni che si possono compendiare con

$$F = -kx.$$

La costante k , costante elastica della molla, rappresenta la *rigidità* della molla.

In figura 7 è mostrata una molla disposta verticalmente con un estremo fisso e, come prima, scegliamo l'asse x delle coordinate con origine nell'estremo libero e volto verso il basso. Sospendiamo in questo estremo una massa m ; la molla si allunga di una quantità x_1 e la forza di richiamo esercitata è $F = -kx_1$, uguale ed opposta alla forza peso $F_p = mg$. Avendo cura di porre la massa lentamente in modo da non imprimere oscillazioni, l'estremo della

molla risulta in equilibrio; perciò:

$$kx_1 = mg,$$

da cui si ricava la costante elastica della molla,

$$k = \frac{mg}{x_1}.$$

Se la massa viene in qualche modo sollecitata, il sistema oscilla attorno alla nuova posizione di equilibrio x_1 .

È altresì possibile verificare la (15), ponendo all'estremo della molla pesi via via crescenti e riportare in un grafico i pesi in funzione delle deformazioni (allungamenti) ottenute; tale grafico deve essere lineare, e il rapporto tra un peso qualsiasi e la corrispondente deformazione fornisce la costante k .

Consideriamo ora il sistema massa-molla, posto su un piano orizzontale senza attrito, figura 6; spostando la massa dalla posizione di riposo, il sistema oscilla intorno a tale posizione, realizzando materialmente un oscillatore armonico per il quale l'equazione fondamentale della dinamica è

$$ma = -kx. \quad (16)$$

Per trovare l'equazione del moto, $x(t)$, occorre integrare la precedente assumendo note certe condizioni iniziali; per esempio, per $t = 0$, sia $x(0) = A$ e $v(0) = 0$; ciò significa che la massa all'istante iniziale si trova nel punto di inversione del moto, dove la velocità è nulla e l'elongazione massima. Scriviamo la (16) come segue:

$$m \frac{dv}{dt} = m \frac{dv}{dx} \frac{dx}{dt} = mv \frac{dv}{dx} = -kx;$$

separando le variabili si ha

$$mv dv = -kx dx,$$

ed integrando

$$m \int v dv = -k \int x dx, \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{2}mv^2 = -\frac{1}{2}kx^2 + C_1,$$

con C_1 costante di integrazione che, per le condizioni iniziali assegnate, ha il valore $C_1 = kA^2/2$. Pertanto:

$$\frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}k(A^2 - x^2).$$

Per ottenere l'equazione del moto $x(t)$, bisogna integrare ancora; dalla precedente si ha:

$$v = \frac{dx}{dt} = \sqrt{\frac{k}{m}(A^2 - x^2)} = A\sqrt{\frac{k}{m}}\sqrt{1 - \left(\frac{x}{A}\right)^2}.$$

Separando le variabili e ponendo $\omega^2 = k/m$, si ha

$$\frac{d(x/A)}{\sqrt{1 - (x/A)^2}} = \omega dt,$$

ed integrando:

$$\sin^{-1} \frac{x}{A} = \omega t + C_2,$$

con C_2 costante di integrazione che, per le condizioni iniziali, risulta $C_2 = \sin^{-1} A/A = \pi/2$. Pertanto:

$$x(t) = A \sin \left(\omega t + \frac{\pi}{2} \right).$$

La massa esegue oscillazioni di frequenza

$$\nu = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k}{m}}. \quad (17)$$

In generale possiamo scrivere

$$x(t) = A \sin(\omega t + \varphi). \quad (18)$$

La costante φ dipende dalle condizioni iniziali ($t = 0$); infatti $x(0) = A \sin \varphi$ e $\dot{x}(0) = A\omega \cos \varphi = v(0)$. Prendiamo in esame il sistema molla massa di figura 7; le oscillazioni avvengono attorno ad una posizione di equilibrio diversa da quella assunta dalla molla a riposo, che dipende dalla massa sospesa. Le forze che agiscono sulla massa sono il peso $m\mathbf{g}$ e la forza elastica; l'equazione fondamentale della dinamica è:

$$m \frac{dv}{dt} = mg - kx. \quad (19)$$

L'equilibrio si ha per $x_1 = mg/k$, posizione in cui peso e forza elastica hanno risultante nulla. Indicando con x' una nuova coordinata con origine in questa posizione, $x' = x - mg/k$, la (19) diventa

$$m \frac{d^2 x'}{dt^2} = mg - k \left(x' + \frac{mg}{k} \right) = -kx'.$$

Ciò è lecito poiché sia velocità che accelerazione non cambiano; quindi la soluzione della precedente è

$$x'(t) = A \sin(\omega t + \varphi).$$

Pertanto:

$$x(t) = A \sin(\omega t + \varphi) + \frac{mg}{k}. \quad (20)$$

La massa esegue oscillazioni armoniche attorno al nuovo centro di oscillazione x_1 .

Si osservi che questo risultato è valido anche quando si considera il sistema molla massa posto su un piano orizzontale e soggetto oltre che alla forza elastica, ad una forza \mathbf{F} costante. Un

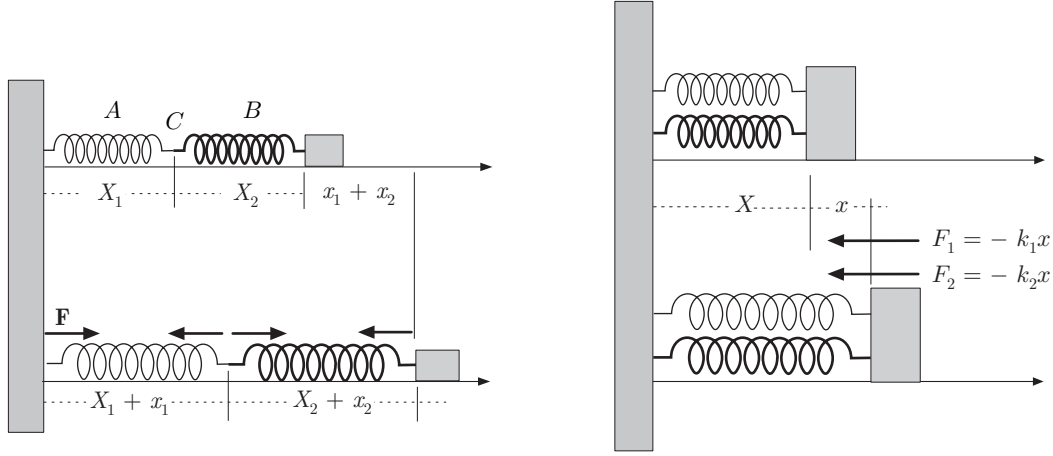


Fig. 7.8

problema importante è quello di studiare il moto di una massa collegata a due molle A e B in serie o in parallelo di costanti elastiche diverse, figura 8.

Nel primo caso siano X_1 e X_2 le lunghezze delle molle a riposo; indicando con k_1 e k_2 le rispettive costanti elastiche e con x_1 e x_2 le deformazioni provocate, la deformazione totale è

$$x = x_1 + x_2.$$

Sia F la forza esercitata dalla molla B sulla massa m ; per la terza legge della dinamica, una forza di reazione opposta è applicata nel punto C di collegamento delle molle. La molla A , a sua volta, esercita in C una forza elastica opposta alla forza di reazione; dunque si ha

$$x_1 = -\frac{F}{k_1}, \quad x_2 = -\frac{F}{k_2},$$

da cui:

$$x = x_1 + x_2 = -F \left(\frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2} \right) = -\frac{F}{k},$$

dove

$$\frac{1}{k} = \left(\frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2} \right) = \frac{k_1 + k_2}{k_1 k_2}. \quad (21)$$

La frequenza delle oscillazioni è dunque:

$$\nu = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k}{m}} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k_1 k_2}{m(k_1 + k_2)}}, \quad (22)$$

ed il periodo

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{m(k_1 + k_2)}{k_1 k_2}}.$$

Se $k_1 = k_2$, cioè le molle hanno la stessa rigidità, per un certo spostamento della massa, ogni molla verrà deformata della metà;

la forza di richiamo sarà metà di quella esercitata dalla singola molla.

Nel caso delle molle in parallelo, indichiamo con X la posizione di equilibrio; se la massa viene spostata in $X + x$, le molle si deformano della stessa quantità ed esercitano le forze:

$$F_1 = -k_1 x, \quad F_2 = -k_2 x.$$

La forza agente sulla massa è

$$F = F_1 + F_2 = -(k_1 + k_2)x = -kx;$$

la costante elastica complessiva è la somma delle costanti elastiche; se $k_1 = k_2$ le molle si comportano come una singola molla, di rigidità doppia. La frequenza delle oscillazioni risulta

$$\nu = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k_1 + k_2}{m}}. \quad (23)$$

Esempi

- ||| 6. La massa puntiforme m di figura 9 è vincolata a due molle ideali di costanti elastiche k_1 e k_2 . Determinare la frequenza delle oscillazioni quando il sistema viene perturbato.

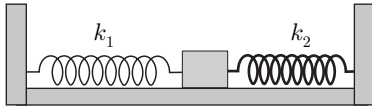


Fig. 7.9

Si tratta di una massa collegata a due molle in parallelo; la frequenza di oscillazione è:

$$\nu = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k_1 + k_2}{m}}.$$

- ||| 7. Una particella di massa $m = 1 \text{ kg}$ è soggetta ad una forza elastica di richiamo $\mathbf{F} = -k\mathbf{r}$, con $k = 1 \text{ N/m}$. Si determini la traiettoria della particella assumendo che per $t = 0$, posizione e velocità iniziali sono: $x_0 = 0$, $y_0 = 0,5 \text{ m}$, $z_0 = 0$ e $\dot{x}_0 = 0$, $\dot{y}_0 = 0$, $\dot{z}_0 = 0,25 \text{ m/s}$.

Assumendo un riferimento cartesiano ortogonale $Oxyz$ e proiettando la forza sui tre assi, si ha

$$m\ddot{x} = -kx, \quad m\ddot{y} = -ky, \quad m\ddot{z} = -kz,$$

che hanno soluzioni:

$$\begin{aligned} x(t) &= A_x \sin(\omega t + \varphi_x) \\ y(t) &= A_y \sin(\omega t + \varphi_y) \\ z(t) &= A_z \sin(\omega t + \varphi_z), \end{aligned} \quad (24)$$

con $\omega = \sqrt{k/m} = 1 \text{ rad/s}$. Si ha inoltre:

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= A_x \omega \cos(\omega t + \varphi_x) \\ \dot{y}(t) &= A_y \omega \cos(\omega t + \varphi_y) \\ \dot{z}(t) &= A_z \omega \cos(\omega t + \varphi_z). \end{aligned} \quad (25)$$

Le ampiezze e le fasi vanno determinate per mezzo delle condizioni iniziali. Dalle (24) e (25) si ottiene

$$0 = A_x \sin \varphi_x, \quad 0 = A_x \omega \cos \varphi_x;$$

e poiché $\sin \varphi_x$ e $\cos \varphi_x$ non sono mai contemporaneamente nulli, dev'essere $A_x = 0$. Dalle seconde delle (24) e (25) si ottiene:

$$0,5 = A_y \sin \varphi_y, \quad 0 = A_y \omega \cos \varphi_y;$$

da cui si deduce che A_y è diversa da zero e che $\cos \varphi_y = 0$; perciò $\varphi_y = \pi/2$ e $A_y = 0,5 m$. Infine, dalle terze delle (24) e (25) si ha:

$$0 = A_z \sin \varphi_z, \quad 0,25 = A_z \omega \cos \varphi_z;$$

dalle quali si deduce che $A_z \neq 0$; dunque deve essere $\sin \varphi_z = 0$, cioè $\varphi_z = 0$; pertanto $A_z = 0,25/\omega = 0,25 m$. Le equazioni del moto diventano:

$$y(t) = 0,5 \sin \left(\omega t + \frac{\pi}{2} \right) = 0,5 \cos \omega t,$$

$$z(t) = \frac{0,25}{\omega} \sin \omega t.$$

Il moto si svolge nel piano y - z e l'equazione della traiettoria si ottiene eliminando il tempo nelle precedenti:

$$\frac{y^2}{(0,5)^2} + \frac{z^2}{(0,25/\omega)^2} = 1.$$

Si tratta di una ellisse con centro nell'origine.

.....

III 5. Forze vincolari

Nel capitolo III-1 si è visto che i vincoli riducono i gradi di libertà di un punto materiale. Verranno presi in considerazione vincoli bilateri. Per esempio, il punto può essere soggetto alla condizione di appartenere ad una superficie fissa di equazione $f(x, y, z) = 0$; in tal caso ha due soli gradi di libertà, perché assegnate due sue coordinate, la terza risulta determinata una volta nota l'equazione della superficie. Il punto materiale può essere vincolato ad una linea fissa di equazione

$$f_1(x, y, z) = 0,$$

$$f_2(x, y, z) = 0;$$

con un ragionamento analogo, si riconosce che il punto ha un solo grado di libertà.

Si capisce che in queste condizioni il movimento di un punto soggetto a forze, che se necessario preciseremo come *attive*, subisce limitazioni sia nello spostamento che nella velocità; ne segue che il vincolo, assumendo che sia rigido e quindi indeformabile, deve esercitare sul punto materiale una forza, in genere, a priori incognita. Questa forza è chiamata *forza vincolare* e si indica con $\mathbf{F}^{(v)}$ o, se non ci sono ambiguità, con \mathbf{R} . Poiché inoltre, per la terza legge della dinamica, l'azione che il punto materiale esercita sul vincolo è opposta alla reazione che il vincolo esercita sul punto, la forza vincolare si chiama abitualmente *reazione vincolare*.

Non si prenderà in esame il problema generale del moto del punto soggetto a vincoli mobili, che verrà considerato in Meccanica Razionale. Va sottolineato che le forze vincolari costituiscono un elemento molto importante anche in problemi molto comuni; infatti, in generale, il moto di un punto materiale o di un sistema privo di vincoli non è frequente.

Prenderemo in esame dapprima i vincoli *privi di attrito o lisci*. In tal caso la reazione vincolare non si oppone al moto del punto; si deduce immediatamente che essa è *ortogonale* alla velocità e quindi al vincolo, pur essendo la sua intensità a priori incognita.

Esempi

- ||| 8. Moto di un grave lungo un piano inclinato, privo di attrito, che forma un angolo θ con la superficie orizzontale, figura 10.

Le forze che agiscono sul grave sono il peso e la forza vincolare; quest'ultima, essendo il vincolo privo di attrito, è ortogonale al piano. Indicando con \mathbf{R} la forza o reazione vincolare, l'equazione della dinamica è

$$m\mathbf{a} = m\mathbf{g} + \mathbf{R}.$$

Proiettiamo lungo il piano inclinato, assumendo come positiva la direzione discendente, e lungo la normale al piano, assumendo come positiva la direzione uscente:

$$ma_t = mg \sin \theta$$

$$ma_n = -mg \cos \theta + R.$$

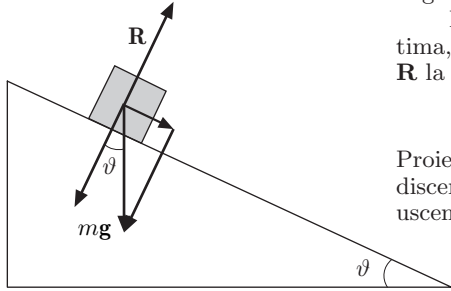


Fig. 7.10

Dalla prima si ottiene

$$a_t = g \sin \theta;$$

il grave, una volta fissato l'angolo θ , scende lungo il piano inclinato con accelerazione costante. Al variare dell'angolo si ottengono tutte le possibili frazioni dell'accelerazione di gravità per lo studio del moto dei gravi (Galilei). Dalla seconda, essendo $a_n = 0$, si ottiene il valore della reazione vincolare:

$$R = mg \cos \theta.$$

- ||| 9. Pendolo semplice

Un pendolo semplice è realizzato da un punto materiale, soggetto all'azione della gravità, che si muove lungo un arco di circonferenza posta in un piano verticale. Esso può essere realizzato sospendendo una massa m puntiforme ad un estremo di un filo, inestendibile e di massa trascurabile, libero di ruotare attorno all'altro estremo fisso in O , figura 11. In alternativa si può considerare una massa vincolata ad una guida circolare, priva di attrito, posta in un piano verticale.

Se la massa viene spostata dalla posizione di equilibrio, che si trova lungo la verticale passante per O , inizia a oscillare ed il moto sarà quello di un punto vincolato, con un solo grado di libertà. Pertanto come unica coordinata possiamo adottare la lunghezza dell'arco s oppure l'angolo θ che il filo forma rispetto alla verticale, assumendo come positivo il verso degli archi crescenti.

Le forze che agiscono sul punto materiale sono il peso $m\mathbf{g}$ e la reazione vincolare, che indichiamo con \mathbf{R} . L'equazione fondamentale della dinamica è

$$m\mathbf{a} = m\mathbf{g} + \mathbf{R}.$$

Proiettando lungo la tangente alla traiettoria, orientata nel verso positivo stabilito e lungo la normale, assumendo su quest'ultima come verso positivo quello centripeto, si ha

$$ma_t = m \frac{d^2 s}{dt^2} = -mg \sin \theta$$

$$ma_n = m \frac{v^2}{l} = -mg \cos \theta + R.$$

Essendo l'arco $s = l\theta$, dove l è la lunghezza del filo, la prima diventa

$$ml \frac{d^2 \theta}{dt^2} = -mg \sin \theta, \quad \Rightarrow \quad \frac{d^2 \theta}{dt^2} + \frac{g}{l} \sin \theta = 0.$$

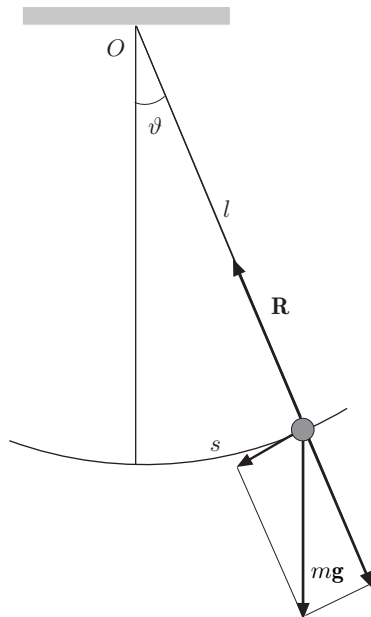


Fig. 7.11

L'equazione differenziale ottenuta non è risolvibile analiticamente; tuttavia limitandosi ad angoli piccoli, tali che $\sin \theta \approx \theta$, l'equazione diventa quella dell'oscillatore armonico:

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{g}{l}\theta = 0.$$

con

$$\omega^2 = \frac{g}{l}, \quad \Rightarrow \quad T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}, \quad (26)$$

che dà il periodo delle piccole oscillazioni del pendolo. Tale periodo dipende ovviamente dalla lunghezza l del pendolo.

La seconda equazione fornisce la reazione del vincolo:

$$R = m\frac{v^2}{l} + mg \cos \theta. \quad (27)$$

La reazione vincolare dipende dall'angolo; essa è minima nei punti di inversione del moto ($v = 0$) e massima quando il punto transita sulla verticale.

.....

6. Forze di attrito

Le forze di attrito hanno la caratteristica comune di opporsi al moto e di essere espresse essenzialmente da relazioni empiriche. Prenderemo in considerazione l'attrito statico, di scorrimento o cinetico, e l'attrito nel mezzo: viscoso, idraulico e balistico.

6.1. Attrito statico e cinetico

La principale causa di attrito tra due superfici solide è costituita da forze intermolecolari che si esercitano nei punti in cui le superfici sono in contatto molto stretto; in questi punti si manifesta in pratica una sorta di saldatura a freddo che si chiama *adesione superficiale* perché le molecole del materiale che si trovano in questi punti sono così vicine da esercitare forze intermolecolari molto intense. Si può quindi definire un'area di contatto effettiva, area microscopica, proporzionale alla forza normale, dove si verifica una deformazione plastica del materiale, sotto l'azione di sforzi molto grandi che si originano in quest'area. In figura 12 è mostrato esageratamente ingrandito l'aspetto di due superfici in contatto.

Quando un corpo scorre sopra un altro la resistenza di attrito si può associare alla rottura di queste numerosissime microsaldature che si riformano continuamente durante lo scorrimento del corpo. Si capisce dunque che la forza di attrito dipende da molte variabili: natura dei materiali, finitura delle superfici, ossidi presenti, impurezze, temperatura ed eventuali lubrificanti interposti. Quest'ultima condizione è molto importante per le parti di macchine in movimento; infatti si potrebbe pensare che solamente una lavorazione molto accurata dei pezzi possa far diminuire la resistenza di attrito; in effetti in queste condizioni i punti di contatto

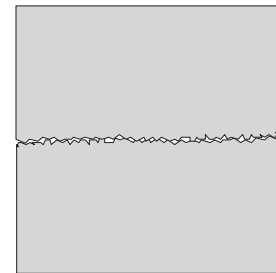


Fig. 7.12

sono molto più numerosi, aumentando così la resistenza di attrito; bisogna interporre un lubrificante che serva a tenere separate le superfici in moto. Se, ad esempio, due superfici accuratamente levigate vengono poste in contatto in alto vuoto, in modo che non si formino pellicole di ossido superficiali, l'attrito diventa molto grande e le superfici si comportano come se fossero effettivamente saldate; quando vengono riportate nell'atmosfera la formazione di ossido riduce l'attrito al suo valore normale.

Consideriamo un corpo poggiato su una superficie orizzontale; l'esperienza mostra che, se vengono applicate forze la cui risultante non ha una componente parallela alla superficie, il corpo non si muove purché la superficie sia in grado di esercitare una forza vincolare opposta alle forze applicate. Se la risultante presenta una componente orizzontale, si osserva che il corpo non si muove finché tale componente non ha intensità sufficientemente elevata. Si conclude che si è destata una forza che tende ad impedire il moto; tale forza, parallela alla superficie d'appoggio, è la forza di attrito.

Sperimentando con una forza orizzontale e aumentando l'intensità di tale forza, che possiamo misurare mediante un dinamometro, osserviamo che il corpo inizia appena a muoversi quando l'intensità della forza applicata raggiunge un ben determinato valore. Il moto, una volta iniziato, risulta accelerato. Se l'intensità della forza applicata viene ridotta opportunamente, si trova che è possibile mantenere il corpo in moto uniforme, ma la forza non è mai nulla, per quanto piccola possa essere. Si è realizzato, in queste condizioni, un equilibrio dinamico tra forza applicata e forza di attrito.

L'esperienza suggerisce due cose: esiste una forza di attrito statico che ha intensità uguale alla più piccola forza necessaria per determinare il moto incipiente; una volta iniziato il moto è necessaria una forza minore per mantenere il moto uniforme; tale forza, agente tra superfici in moto relativo, è detta forza di attrito dinamico.

La forza di attrito non dipende dall'estensione della superficie di contatto tra il piano ed il corpo, ma è proporzionale alla componente normale della forza agente sul corpo. Questa conclusione si può giustificare con le seguenti considerazioni qualitative. L'area di contatto effettiva, area microscopica, è una piccola parte della superficie di contatto del corpo; la forza di attrito è proporzionale all'area microscopica, S_m , per cui, indicando con F_A il modulo della forza di attrito, possiamo scrivere

$$F_A = \sigma S_m,$$

quindi σ deve rappresentare il rapporto tra la forza normale e la superficie di contatto S , tale rapporto si chiama sforzo. Si ha

dunque

$$F_A = \frac{F_n}{S} S_m.$$

Ma l'area microscopica è proporzionale alla superficie di contatto, $S_m = \mu S$, per cui, in definitiva, risulta

$$F_A = \mu F_n.$$

La forza d'attrito non dipende dalla superficie ma solo dalla forza normale. Il coefficiente di proporzionalità μ si chiama *coefficiente di attrito*; esso dipende dai materiali, dalla lavorazione delle superfici a contatto, dai lubrificanti eventualmente presenti ecc... Se, ad esempio, consideriamo un mattone e lo poggiamo una volta sulla faccia (a) e un'altra volta sulla faccia (b), figura 13, si ha:

$$F_A^{(1)} = \sigma_1 S_m^{(1)}, \quad F_A^{(2)} = \sigma_2 S_m^{(2)};$$

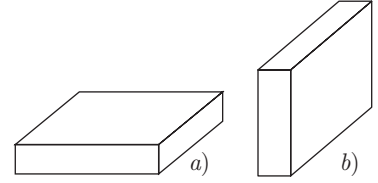


Fig. 7.13

ma

$$S_m^{(1)} = \mu S_1, \quad S_m^{(2)} = \mu S_2,$$

dunque:

$$F_A^{(1)} = \frac{F_n}{S_1} \mu S_1, \quad F_A^{(2)} = \frac{F_n}{S_2} \mu S_2, \quad \Rightarrow F_A^{(1)} = F_A^{(2)};$$

la forza di attrito è la stessa.

Leonardo da Vinci per primo comprese che la forza di attrito è indipendente dall'estensione della superfici in contatto e ce ne ha lasciato la descrizione in uno dei suoi taccuini.

Il coefficiente d'attrito μ è una quantità adimensionata e va distinto in coefficiente di attrito statico μ_s e coefficiente di attrito cinetico o dinamico μ_c . Per una certa coppia di superfici, il coefficiente di attrito statico è maggiore del coefficiente di attrito cinetico perché, come s'è detto, l'esperienza mostra che una volta posto in moto il corpo, la forza necessaria per determinare il suo moto uniforme è minore della forza necessaria per determinare il moto incipiente. Entro limiti abbastanza ampi, μ_c risulta indipendente dalla estensione delle superfici a contatto poiché la forza d'attrito non ne dipende e, per F_n non troppo elevata, non dipende dalla velocità. Il suo valore numerico è minore di uno; nelle condizioni di levigatezza ordinarie, tra due metalli è compreso tra 0,13 e 0,25, e può ridursi fino a 0,07 se fra le superfici è interposto un lubrificante; varia tra 0,4 e 0,6 nel contatto tra due mattoni e può raggiungere il valore 0,76 nel contatto tra pietre rugose.

Indicando con F_t l'intensità della forza necessaria per il moto incipiente, parallela alla superficie d'appoggio, è

$$|F_t| = |F_A| = \mu_s F_n.$$

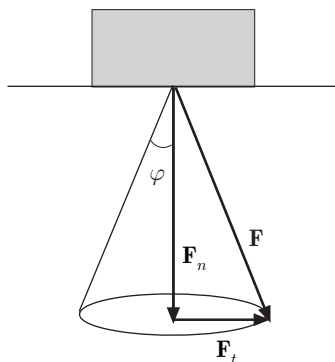


Fig. 7.14

Schematizzando la situazione come mostrato in figura 14, chiaramente si ha

$$F_A = F_n \tan \varphi = \mu_s F_n; \quad (28)$$

allora μ_s assume un significato geometrico preciso, essendo uguale alla tangente dell'angolo di semiapertura di un cono con vertice in P , che si chiama *cono di attrito*.

Se la risultante \mathbf{F} delle forze applicate al corpo si trova all'interno della falda del cono di attrito, il corpo non riesce a muoversi; quando giace sulla falda, $F_t = \mu_s F_n$, si stabiliscono le condizioni di moto incipiente, allora F_t soddisfa la (28). Una volta iniziato il moto e stabilita la nuova forza necessaria per il moto uniforme, la semiapertura del cono diminuisce e la tangente del nuovo angolo è pari al valore del coefficiente di attrito cinetico μ_c .

Le forze di attrito sono molto importanti nella vita di tutti i giorni. Qualunque dispositivo in movimento sottoposto all'attrito finisce per fermarsi e per questo bisogna ridurne gli effetti mediante lubrificanti; d'altra parte, se non ci fosse l'attrito non potremmo esercitare le operazioni più banali: non potremmo camminare, non potremmo tenere in mano una penna e anche se lo potessimo, non riusciremmo a scrivere; i trasporti su ruote non sarebbero possibili.

6.2. Attrito nel mezzo

Forze di attrito si destano quando un corpo si muove in un fluido che oppone resistenza al moto; tali forze dipendono in maniera più o meno complicata dalla velocità del corpo, sono sempre opposte ad essa e si annullano per $v = 0$. Possiamo individuare tra queste forze:

la *resistenza viscosa*, proporzionale alla velocità,

$$\mathbf{F} = -\kappa_v v \hat{\mathbf{v}}, \quad (29)$$

la *resistenza idraulica* con modulo proporzionale al quadrato della velocità,

$$\mathbf{F} = -\kappa_i v^2 \hat{\mathbf{v}}, \quad (30)$$

la *resistenza balistica* con modulo dipendente da una funzione $f(v)$, che cresce più rapidamente di v^2 ,

$$\mathbf{F} = -\kappa_b f(v) \hat{\mathbf{v}}. \quad (31)$$

I coefficienti κ dipendono dalle caratteristiche del fluido che esercita la resistenza e dalla forma e dimensioni del corpo in moto.

Esempi

10. Un corpo di massa m è posto alla sommità di un piano inclinato scabro di altezza h , con velocità iniziale nulla. Noti i coefficienti di attrito statico, μ_s , e

dinamico, μ_c , determinare per quale valore dell'angolo di inclinazione il corpo inizia a scendere e il tempo di discesa. Confrontare quest'ultimo con quello che si ottiene in assenza di attrito.

Le forze agenti sul corpo sono il peso e la reazione vincolare, figura 15, quindi l'equazione della dinamica è

$$m\mathbf{a} = m\mathbf{g} + \mathbf{R}.$$

Si osservi che, essendo il vincolo scabro, la reazione vincolare \mathbf{R} non è normale al piano, quindi proiettando la precedente nelle direzioni discendente del piano e uscente della normale, assunte come positive, si ha

$$ma_t = mg \sin \theta - R_t, \quad ma_n = -mg \cos \theta + R_n, \quad (32)$$

dove R_t non è altro che la forza di attrito che si oppone al moto:

$$F_A = R_t = \mu mg \cos \theta,$$

con μ coefficiente di attrito.

Poiché non si verifica moto lungo la normale, $a_n = 0$, la seconda delle (32) dà la reazione normale:

$$R_n = mg \cos \theta.$$

Regolando l'inclinazione del piano si può ottenere la condizione di moto incipiente, per il quale nella prima delle (32) è ancora $a_t = 0$. Sostituendo in questa l'espressione di R_t , si troverà un certo angolo θ_c , detto anche angolo critico, per il quale

$$\mu_s mg \cos \theta_c = mg \sin \theta_c, \quad \Rightarrow \quad \mu_s = \tan \theta_c,$$

dove μ_s è il coefficiente di attrito statico.

Ne segue che se $\theta > \theta_c$ il corpo può scivolare lungo il piano inclinato. Se θ_c è molto grande si può verificare una caduta precipitosa del corpo. Appena $\theta > \theta_c$, il corpo inizia a scivolare e il coefficiente di attrito diventa quello cinetico. Pertanto la forza di attrito diventa

$$F_A = \mu_c mg \cos \theta,$$

e l'accelerazione:

$$a_t = g \sin \theta - \mu_c g \cos \theta,$$

indipendente dalla massa del corpo. Il moto avviene con accelerazione costante e poiché per $t = 0$ si è assunto che posizione e velocità iniziali siano nulle; si ha:

$$s = \frac{1}{2} a_t t^2, \quad \Rightarrow \quad t = \sqrt{\frac{2s}{a_t}}.$$

Per un piano inclinato di lunghezza l è

$$t = \sqrt{\frac{2l}{g(\sin \theta - \mu_c \cos \theta)}},$$

maggiore del tempo impiegato dal corpo in assenza di attrito:

$$t = \sqrt{\frac{2l}{g \sin \theta}} = \frac{1}{\sin \theta} \sqrt{\frac{2h}{g}},$$

dove h è l'altezza del piano inclinato.

Le stesse conclusioni valgono per un punto vincolato alla falda di un cono, le cui generatrici formano un angolo θ con il piano orizzontale. Si comprende inoltre come, ammassando sabbia, per effetto del peso e dell'attrito, si formi un cono le cui generatrici formano con la verticale, un angolo la cui tangente uguaglia il coefficiente d'attrito tra i grani di sabbia.

11. Determinare il moto di una particella di massa m e velocità iniziale \mathbf{v}_0 , soggetta all'azione di una forza viscosa del tipo $\mathbf{F} = -b\mathbf{v}$.

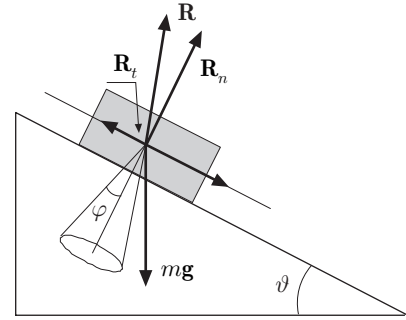


Fig. 7.15

La forza è parallela alla velocità, dunque il problema è unidimensionale. Proiettando su un asse che indichiamo con x , si ha l'equazione differenziale

$$m \frac{dv}{dt} = -bv,$$

che va integrata separando le variabili; si ha:

$$\frac{dv}{v} = -\frac{b}{m} dt.$$

Integrando

$$\ln v = -\frac{b}{m} t + C_1.$$

Poiché per $t = 0$, $v = v_0$, la costante di integrazione risulta $C_1 = \ln v_0$, pertanto

$$\ln v = -\frac{b}{m} t + \ln v_0;$$

si deduce

$$v = v_0 e^{-(b/m)t}. \quad (33)$$

L'andamento della (33) in funzione del tempo è mostrato qualitativamente in figura 16. Si osserva che per il valore del tempo $t^* = m/b$ dipendente dalla massa e dalle caratteristiche viscosi del mezzo, la velocità si riduce al valore $v^* = v_0/e$, tanto più rapidamente quanto più elevato è b .

Dalla (33) si ottiene:

$$\frac{dx}{dt} = v_0 e^{-(b/m)t}, \quad \Rightarrow \quad dx = v_0 e^{-(b/m)t} dt,$$

che integrata dà

$$x = -\frac{v_0 m}{b} v_0 e^{-(b/m)t} + C_2.$$

Se per $t = 0$ assumiamo che la particella si trovi nell'origine $x = 0$, la costante di integrazione risulta $C_2 = (v_0 m)/b$. Pertanto l'equazione oraria del moto è

$$x(t) = \frac{v_0 m}{b} (1 - v_0 e^{-(b/m)t}),$$

il cui andamento è mostrato in figura 17. Il punto raggiunge asintoticamente la posizione $(v_0 m)/b$.

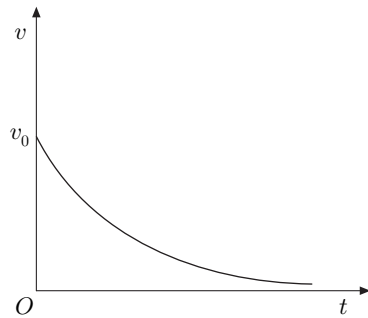


Fig. 7.16

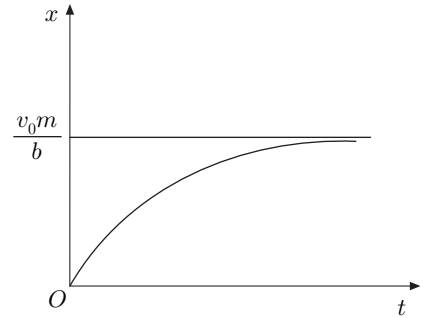


Fig. 7.17

7. Equilibrio del punto materiale

Nel caso di un punto materiale lo studio dell'equilibrio è particolarmente semplice. Condizione necessaria perché un punto materiale sia in equilibrio è che tutte le forze agenti, ivi comprese le reazioni vincolari, abbiano risultate nulla:

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 + \cdots + \mathbf{F}_n = \sum_i \mathbf{F}_i = 0,$$

che, in un riferimento cartesiano si traduce nelle:

$$\sum_i F_{ix} = 0, \quad \sum_i F_{iy} = 0, \quad \sum_i F_{iz} = 0.$$

Ciò significa che il poligono avente come lati le forze deve essere chiuso.

Si noti che la condizione è anche sufficiente se inizialmente il punto è in equilibrio nel riferimento adottato; infatti, per la legge di inerzia, la quantità di moto iniziale può essere diversa da zero, e tale permane se non agiscono forze.

È utile fare ancora qualche considerazione sull'equilibrio del punto materiale vincolato. Indicando con \mathbf{F} la risultante delle forze attive e con \mathbf{R} la reazione vincolare, per l'equilibrio si deve avere

$$\mathbf{F} + \mathbf{R} = 0. \quad (34)$$

Se il vincolo è privo d'attrito la reazione, come s'è visto, è normale ad esso; pertanto per l'equilibrio del punto è necessario e sufficiente che la risultante delle forze attive non abbia componente tangenziale al vincolo. Se il vincolo è scabro dette rispettivamente R_t , R_n le componenti tangenziale e normale della reazione vincolare, la condizione di equilibrio è anche data dalla relazione

$$R_t \leq \mu R_n.$$

La reazione vincolare, come \mathbf{F} , si trova all'interno o al massimo sulla falda del cono di attrito, figura 18.

Esempi

12. Equilibrio di un punto materiale soggetto a tre forze. Si ha

$$\mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 + \mathbf{F}_3 = 0.$$

Le tre forze costituiscono i lati di un triangolo, perciò devono essere complanari, figura 19. Applicando il teorema dei seni a questo triangolo si ottiene

$$\frac{F_1}{\sin \alpha} = \frac{F_2}{\sin \beta} = \frac{F_3}{\sin \gamma},$$

che è una relazione utile per correlare i moduli delle forze con gli angoli compresi tra le loro direzioni.

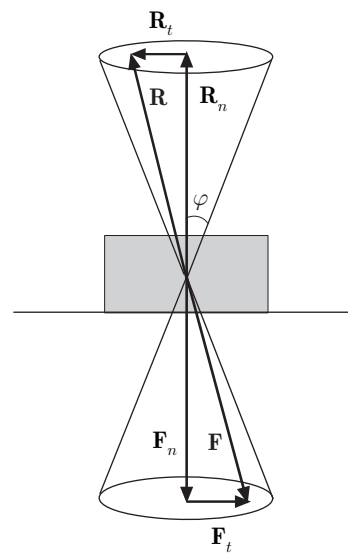


Fig. 7.18

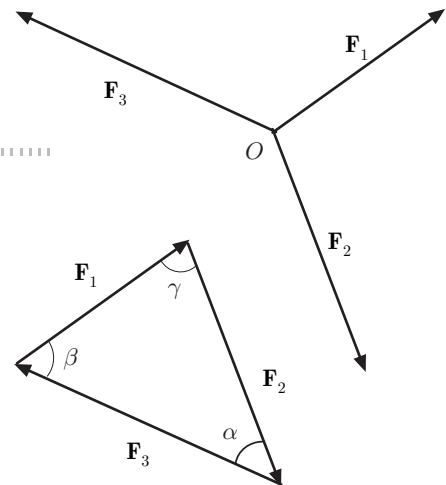


Fig. 7.19

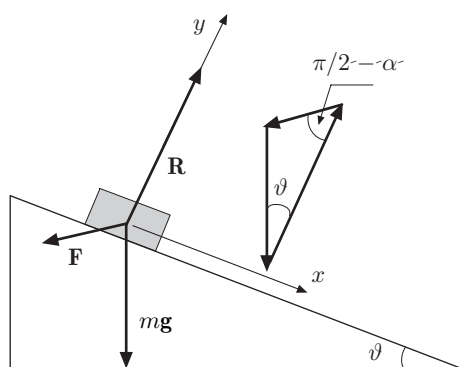


Fig. 7.20

13. Equilibrio di un punto materiale di massa m su un piano inclinato liscio.

Sul punto agiscono il peso mg , la reazione del vincolo \mathbf{R} , normale al piano, e una forza \mathbf{F} , figura 20. Assegnati l'angolo di inclinazione θ del piano e l'angolo α che \mathbf{F} forma con esso, determinare il suo modulo e la reazione vincolare. Per il teorema dei seni:

$$\frac{F}{\sin \theta} = \frac{mg}{\sin(\pi/2 - \alpha)} = \frac{R}{\sin[\pi/2 - (\theta - \alpha)]},$$

ovvero

$$\frac{F}{\sin \theta} = \frac{mg}{\cos \alpha} = \frac{R}{\cos(\theta - \alpha)}.$$

Si ottiene

$$F = \frac{mg \sin \theta}{\cos \alpha}, \quad R = \frac{mg \cos(\theta - \alpha)}{\cos \alpha}.$$

In alternativa, possiamo introdurre un riferimento di assi x - y ortogonali, volti nella direzione discendente del piano e nella direzione uscente, e proiettare sugli assi le forze; si ha

$$\begin{aligned} \sum F_x &= mg \sin \theta - F \cos \alpha = 0 \\ \sum F_y &= R - F \sin \alpha - mg \cos \theta = 0. \end{aligned}$$

Risolvendo il sistema si trovano facilmente le espressioni di F ed R ottenute prima.

8. Tensioni nei fili

Definiamo *filo* un sistema materiale perfettamente flessibile e rappresentato geometricamente da una linea; esso inoltre è inestendibile se l'arco di linea delimitato da due suoi punti generici ha sempre la stessa lunghezza, qualunque sia la configurazione del filo.

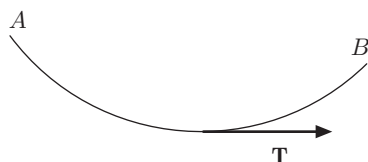


Fig. 7.21

Consideriamo un filo di lunghezza l fissato agli estremi A e B , in equilibrio sotto l'azione di forze esterne assegnate. Immaginiamo di tagliare il filo in P , figura 21; affinché il tratto AP sia in equilibrio, basta aggiungere alle forze esterne agenti su AP , quelle che rappresentano l'azione che PB esercita su AP . Poiché la sezione trasversale del filo è necessariamente finita, si può ritenere che tali forze, ortogonali alla sezione, siano distribuite in ogni punto della sezione stessa; esse, in generale, capitolo XIII, possono essere ridotte ad un sistema equivalente, costituito dalla forza risultante, applicata all'asse del filo, e da una coppia. Tuttavia, nell'ipotesi di perfetta flessibilità del filo, essendo le forze distribuite uniformemente in ogni sezione, la coppia risulterà nulla. Dunque il sistema di forze equivale ad una unica forza che chiamiamo *tensione* \mathbf{T} , funzione dell'arco s , tangente al filo e volta verso B . Viceversa l'azione che AP esercita su PB è rappresentata dalla tensione $-\mathbf{T}$.

Consideriamo un filo, agli estremi del quale agiscono le forze \mathbf{F}_A e \mathbf{F}_B e forze esterne distribuite con continuità sul filo stesso,

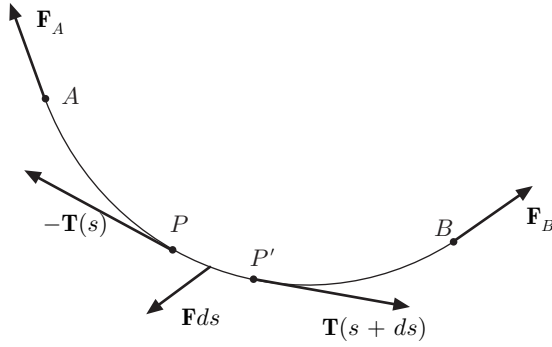


Fig. 7.22

per esempio il suo peso, figura 22. Prendiamo in esame l'equilibrio dell'elemento $PP' = ds$ di filo. È opportuno rappresentare le forze esterne mediante la forza per unità di lunghezza, \mathbf{F} , cosicché la forza che agisce sull'elemento ds , è rappresentata dal vettore $\mathbf{F}ds$. Per esempio, nel caso di un filo pesante, la forza agente sarà $\mathbf{F}_p ds$, essendo \mathbf{F}_p il peso per unità di lunghezza. La configurazione di equilibrio di un filo soggetto a sollecitazione continua, è una linea chiamata *linea funicolare*.

Assumendo che la tensione sia funzione della lunghezza dell'arco s e stabilendo come positivo il verso che va da A a B , sull'elemento ds agiscono: la forza $\mathbf{F}ds$, la tensione $-\mathbf{T}(s)$ applicata in P , che rappresenta l'azione di AP su PP' , la tensione $\mathbf{T}(s+ds)$ applicata in P' , che rappresenta l'azione di $P'B$ su PP' . Allora, per l'ipotesi di perfetta flessibilità, la condizione necessaria e sufficiente per l'equilibrio del generico elemento di filo, è data dalla relazione:

$$\mathbf{F}ds + \mathbf{T}(s+ds) - \mathbf{T}(s) = 0, \quad \Rightarrow \quad \mathbf{F}ds + d\mathbf{T} = 0,$$

che scriviamo

$$\mathbf{F} + \frac{d\mathbf{T}}{ds} = 0. \quad (35)$$

Se ci si riferisce all'arco s , indicando con $\boldsymbol{\tau}$ il versore della tangente, la (35) diventa:

$$\mathbf{F} + \frac{dT}{ds} \boldsymbol{\tau} + T \frac{d\boldsymbol{\tau}}{ds} = 0. \quad (36)$$

Ma, per la (32)-III, il modulo del vettore $d\boldsymbol{\tau}/ds$ è uguale alla prima curvatura $1/R$ della linea funicolare, in corrispondenza all'elemento ds . Pertanto la forza $T d\boldsymbol{\tau}/ds$ è volta secondo la normale principale. Indicando con F_t e F_n le componenti tangenziale e normale di \mathbf{F} , la (36) equivale alle seguenti relazioni scalari:

$$F_t + \frac{dT}{ds} = 0, \quad F_n + \frac{T}{R} = 0. \quad (37)$$

La (35) può essere proiettata sugli assi di un riferimento cartesiano ortogonale, dando luogo alle relazioni:

$$F_x + \frac{dT_x}{ds} = 0 \quad F_y + \frac{dT_y}{ds} = 0, \quad F_z + \frac{dT_z}{ds} = 0.$$

Tenendo presente che \mathbf{T} è tangente in ogni punto al filo e che i coseni direttori della tangente sono dx/ds , dy/ds , dz/ds , si può scrivere:

$$F_x + \frac{d}{ds} \left(T \frac{dx}{ds} \right) = 0, \quad F_y + \frac{d}{ds} \left(T \frac{dy}{ds} \right) = 0, \quad F_z + \frac{d}{ds} \left(T \frac{dz}{ds} \right) = 0. \quad (38)$$

Questo sistema di equazioni differenziali, nota \mathbf{F} e tenendo presente la ben nota relazione

$$\left(\frac{dx}{ds} \right)^2 + \left(\frac{dy}{ds} \right)^2 + \left(\frac{dz}{ds} \right)^2 = 1,$$

permette di ricavare l'intensità della tensione $T = T(s)$, funzione della lunghezza di arco s , in ogni punto del filo, e le equazioni parametriche $x(s)$, $y(s)$, $z(s)$ della linea funicolare, assegnante certe condizioni al contorno, ossia le forze agenti agli estremi del filo.

Riferendoci alla figura 22, per l'equilibrio nell'estremo A , assunto come origine della linea funicolare, si ha la condizione al contorno

$$\mathbf{T}(0) + \mathbf{F}_A = 0;$$

analogamente per l'equilibrio nell'estremo B :

$$-\mathbf{T}(l) + \mathbf{F}_B = 0,$$

dove l è la lunghezza del filo.

Ma, dalla (35) si ha

$$d\mathbf{T} = -\mathbf{F}ds;$$

integrando, si ottiene

$$\mathbf{T}(s) = - \int_0^s \mathbf{F}ds + \mathbf{T}(0) = - \int_0^s \mathbf{F}ds - \mathbf{F}_A, \quad (39)$$

dove si è tenuto conto della condizione al contorno in A . La tensione in un punto P , corrispondente alla lunghezza di arco s , è opposta alla risultante delle forze esterne, agenti a sinistra di P .

Ponendo come limite superiore dell'integrale la lunghezza l del filo, tenuto conto della condizione al contorno assegnata nell'estremo B , per la (39), si ottiene:

$$\mathbf{T}(l) = - \int_0^l \mathbf{F}ds - \mathbf{F}_A, \quad \Rightarrow \quad \int_0^l \mathbf{F}ds + \mathbf{F}_A + \mathbf{F}_B = 0. \quad (40)$$

La risultante di tutte le forze esterne è nulla, come imposto dall'equilibrio.

Prendiamo ora in esame fili che, oltre ad essere flessibili ed inestendibili, hanno massa trascurabile e consideriamo un filo con tali caratteristiche, in equilibrio, sul quale agiscono le sole forze esterne \mathbf{F}_A e \mathbf{F}_B , opposte, applicate agli estremi A e B , figura 23. Poiché il filo ha massa trascurabile, la forza per unità di lunghezza $\mathbf{F} = 0$, quindi dalla (35) si ha $d\mathbf{T}/ds = 0$. Si deduce che la tensione è costante in tutti i punti del filo. Inoltre per la (39), si ricava $\mathbf{T} = -\mathbf{F}_A$, oppure dalla (40), $\mathbf{T} = \mathbf{F}_B$. Si comprende come un filo siffatto possa servire a trasmettere una forza \mathbf{F}_A da A a B e viceversa.

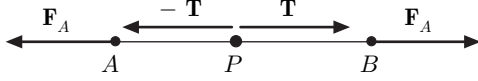


Fig. 7.23

Poiché inoltre i moduli delle forze esterne considerate sono uguali, si deduce che il modulo della tensione è costante lungo tutto il filo. Esso si mantiene tale anche quando il filo assume una direzione diversa da quella rettilinea.

Consideriamo infatti un filo, di massa trascurabile, poggiato su una superficie priva di attrito e sia AB l'arco di filo in contatto con essa, figura 24. Supponendo ancora $\mathbf{F} = 0$, ed essendo la reazione vincolare ortogonale alla superficie, dalla prima delle (37) si deduce $dT/ds = 0$. Il modulo della tensione è lo stesso lungo l'arco AB . Questa conclusione è vera anche in condizioni dinamiche, allorché un filo perfettamente teso realizza una connessione tra due parti di un sistema in moto. Si consideri, figura 25, il sistema costituito da un blocco M , appoggiato su un piano orizzontale privo di attrito, collegato per mezzo di un filo inestendibile e di massa trascurabile ad una massa m , soggetta all'azione della gravità. Il filo scorrendo su un supporto anch'esso privo di attrito, assume la direzione verticale ed esercita su M una tensione costante; pertanto il sistema, costituito dal blocco, dal filo e da m , si muove con accelerazione costante.

Supponiamo, per semplicità, che il supporto abbia forma circolare e che l'arco di filo AB a contatto con esso sottenda un angolo $\Delta\theta$, figura 26. Le forze agenti sull'arco di filo AB sono le tensioni, applicate

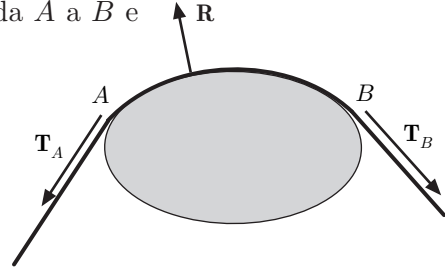


Fig. 7.24

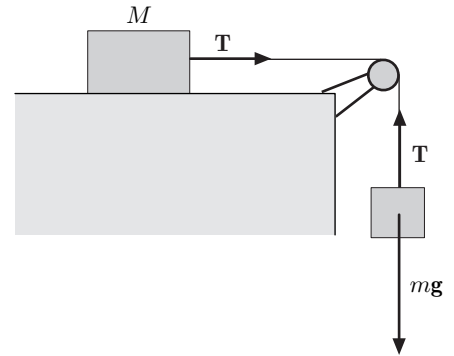


Fig. 7.25

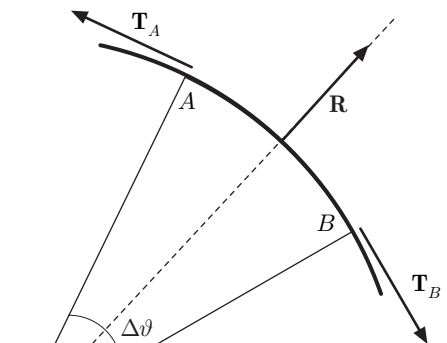


Fig. 7.26

ai suoi estremi e la reazione vincolare \mathbf{R} , ortogonale al supporto. Queste forze, poiché è trascurabile la massa del filo e, a maggior ragione, quella della porzione di filo considerata, danno luogo alla relazione:

$$\mathbf{T}_A + \mathbf{T}_B + \mathbf{R} = 0,$$

perciò non influiscono sul movimento del sistema. Proiettando sulla tangente in P , orientata verso B , si ha:

$$T_B \cos \Delta\theta/2 - T_A \cos \Delta\theta/2 = 0,$$

da cui

$$T_A = T_B.$$

Il modulo della tensione è costante in ogni punto del filo.

Proiettando sulla normale orientata verso l'esterno, si ottiene la reazione vincolare,

$$R - T_A \sin \Delta\theta/2 - T_B \sin \Delta\theta/2 = 0, \quad \Rightarrow \quad R = 2T \sin \Delta\theta/2.$$

Si osservi che i supporti non sono mai privi di attrito perciò, durante il moto, le tensioni in A e B risultano diverse; tuttavia questo effetto può essere in gran parte eliminato impiegando una carrucola costituita da un disco che può ruotare liberamente attorno al suo asse O che, a sua volta, è fissato ad una staffa di sostegno (carrucola fissa). Sul bordo esterno del disco è praticata una gola in cui passa il filo. Poiché l'attrito dell'asse può essere reso trascurabile, si può ritenere che il filo non riesca a slittare sulla gola e quindi venga trascinato nella rotazione. La carrucola deve avere massa trascurabile; il motivo di questa ipotesi sarà chiarito in dinamica dei corpi rigidi. Al sistema formato dalla carrucola e dal tratto di filo AB , figura 27, sono applicate le tensioni \mathbf{T}_A , \mathbf{T}_B e la reazione vincolare \mathbf{R} dell'asse di rotazione. Poiché queste forze non influenzano il moto del sistema, con un ragionamento analogo al precedente, si trova che il modulo della tensione si trasmette inalterato lungo il filo e che il modulo della reazione è $R = 2T \sin \Delta\theta/2$.

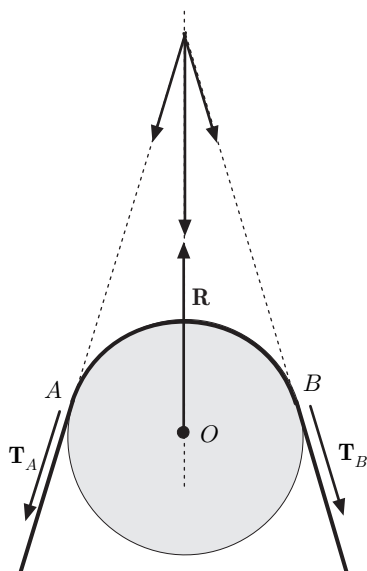


Fig. 7.27

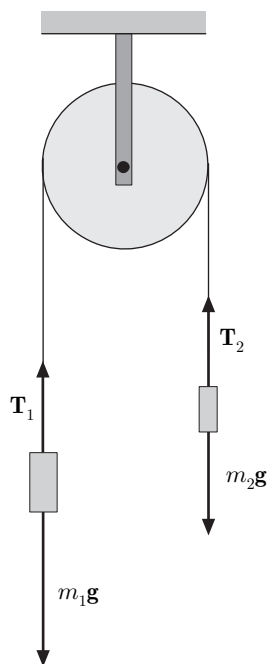


Fig. 7.28

Esempi

14. Macchina di Atwood

La macchina consiste in una carrucola fissa, lungo la quale passa un filo disposto verticalmente ai cui estremi sono sospese due masse m_1 ed m_2 , figura 28. Sia la carrucola che il filo hanno i requisiti illustrati in precedenza (massa trascurabile, flessibilità ecc...). Se $m_1 > m_2$ la massa m_1 scende mentre l'altra sale e poiché il filo rimane sempre teso sia la velocità che l'accelerazione del sistema masse filo sono costanti in modulo. Si determini l'accelerazione del sistema e la tensione del filo.

Le forze che agiscono sulla massa m_1 sono il peso $m_1 \mathbf{g}$ e la tensione \mathbf{T}_1 esercitata dal filo; sulla massa m_2 agiscono il peso $m_2 \mathbf{g}$ e la tensione \mathbf{T}_2 . Il modulo delle tensioni, come si è dimostrato, è costante lungo il filo. La

reazione vincolare è applicata sull'asse della carrucola. Assumendo un asse di riferimento orientato verso l'alto, per le due masse si ha

$$\begin{aligned} -m_1 a &= T - m_1 g \\ m_2 a &= T - m_2 g. \end{aligned}$$

Risolvendo si ottiene

$$a = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} g, \quad T = \frac{2m_1 m_2}{m_1 + m_2} g.$$

Il sistema si comporta come se sulla massa totale $m_1 + m_2$ agisse una forza $F = (m_1 - m_2)g$; l'accelerazione che ne segue è una frazione dell'accelerazione di gravità. La macchina, scegliendo convenientemente le masse, può essere usata, come il piano inclinato, per studiare il moto di corpi soggetti ad accelerazione costante.

15. Carrucola mobile

Nella carrucola mobile A un capo del filo è fissato a un supporto rigido, figura 29; all'altro capo, che passa attraverso una carrucola fissa B , è sospesa una massa m_1 ; alla staffa della carrucola mobile è sospesa una massa m_2 . Sulla carrucola mobile dunque agiscono tre forze: le tensioni \mathbf{T}_1 , \mathbf{T}_2 e $\mathbf{F} = m_2 \mathbf{g}$. All'equilibrio, le tre forze devono essere complanari e passare per uno stesso punto P ; essendo il modulo delle tensioni $T_1 = T_2 = m_1 g$ costante lungo il filo, si ha

$$F = m_2 g = 2T \cos \frac{\theta}{2} = 2m_1 g \cos \frac{\theta}{2}.$$

Se, in particolare, $\theta = 0$ è $m_1 = m_2/2$; la massa m_2 è sostenuta da una massa di grandezza metà.

16. Equilibrio di un filo pesante e omogeneo soggetto all'azione della gravità. Catenaria

Consideriamo un filo sospeso ai suoi estremi A e B come in figura 30; supponendo che il filo sia flessibile, l'arco di filo giace nel piano verticale passante per A e B . Sull'elemento di filo $PP' = ds$ agiscono le tensioni ai suoi estremi e il peso $\mathbf{F}_p ds$, essendo \mathbf{F}_p il peso per unità di lunghezza.

Per trovare la configurazione di equilibrio, dalla prima delle (38), essendo nulla la proiezione di $\mathbf{F}_p ds$ sull'asse x , si ha

$$\frac{d}{ds} \left(T \frac{dx}{ds} \right) = 0,$$

dove dx/ds è il coseno direttore dell'elemento di filo. Pertanto

$$T \frac{dx}{ds} = C, \quad (41)$$

dove C la proiezione costante della tensione.

Consideriamo la seconda delle (38); si ha

$$-F_p + \frac{d}{ds} \left(T \frac{dy}{ds} \right) = 0, \quad \Rightarrow \quad \frac{d}{ds} \left(T \frac{dy}{ds} \right) = F_p, \quad (42)$$

essendo dy/ds il coseno direttore dell'elemento di filo. Ma, per la (41), $T = C ds/dx$, dunque la (42) diventa

$$\frac{C}{F_p} d \left(\frac{dy}{dx} \right) = ds, \quad \text{ad} \left(\frac{dy}{dx} \right) = ds, \quad (43)$$

con $a = C/F_p$, costante che ha le dimensioni di una lunghezza.

Essendo

$$ds = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} dt = dx \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx} \right)^2},$$

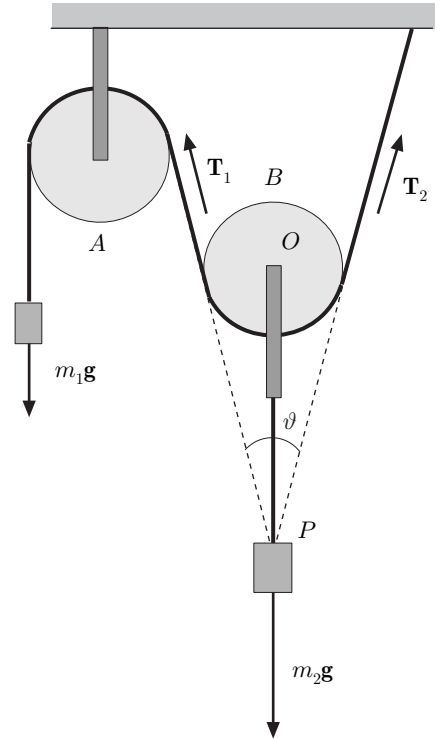


Fig. 7.29

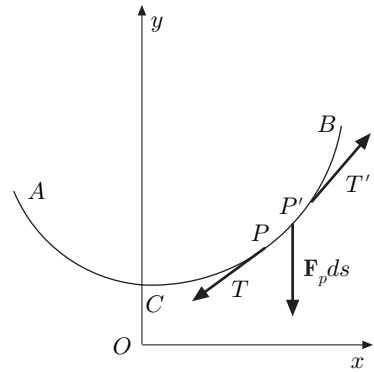


Fig. 7.30

e indicando con $y' = dy/dx$ la (42) si scrive

$$\frac{dy'}{\sqrt{1+y'^2}} = \frac{dx}{a}. \quad (44)$$

Scegliendo l'origine O delle coordinate in modo che per $x = 0$ sia $y = \cosh^{-1} a$ ed integrando, si ha

$$\sinh^{-1} y' = \frac{x}{a}, \quad \Rightarrow \quad y' = \sinh \frac{x}{a};$$

integrando ancora, si ottiene

$$y = a \cosh \frac{x}{a} = a \frac{e^{x/a} + e^{-x/a}}{2}. \quad (45)$$

Questa curva si chiama *catenaria*, avente per base l'asse x ; essa rappresenta la configurazione che assume un cavo sospeso ai suoi estremi. La (45) permette di calcolare la lunghezza dell'arco CP , figura 30, e la tensione in P in funzione dell'ascissa x . Dalla (43) si ha

$$ds = a dy' = a \cosh \frac{x}{a} dx, \quad \Rightarrow \quad s = a \sinh \frac{x}{a}. \quad (46)$$

Tenuto conto delle (41), (45) e della relazione precedente:

$$T = C \frac{ds}{dx} = a F_p \frac{ds}{dx} = a F_p \cosh \frac{x}{a} = F_p y. \quad (47)$$

In particolare la tensione nel punto C della catenaria è $T_C = y_C F_p = a F_p$. Dalla (47) segue che la differenza tra le tensioni in due punti del filo è uguale al peso di una lunghezza di filo uguale alla distanza verticale tra tali punti:

$$T_2 - T_1 = (y_2 - y_1) F_p.$$

Supponiamo che i punti A e B di sospensione siano alla stessa altezza, figura 31. Indichiamo con $2l$ la lunghezza del filo e chiamiamo con h la *freccia*, cioè la distanza verticale dei punti da C ; quest'ultimo abbia coordinate $(0; a)$ e B coordinate $(x_0; a + h)$. Dalle (45) e (46) si ha

$$a + h = a \cosh \frac{x_0}{a}, \quad l = a \sinh \frac{x_0}{a}.$$

Ricordando che

$$\cosh^2 \frac{x}{a} - \sinh^2 \frac{x}{a} = 1,$$

quadrando e sommando le precedenti, si ottiene

$$(a + h)^2 - l^2 = a^2,$$

da cui:

$$a = \frac{l^2 - h^2}{2h}.$$

Le tensioni T in C e in B sono:

$$T_C = a F_p = \frac{l^2 - h^2}{2h} F_p, \quad T_B = T_C + F_p h = \frac{l^2 + h^2}{2h} F_p.$$

Poiché, in genere, h è piccolo rispetto a $2l$ si può assumere che la tensione è circa costante lungo tutto il filo, cioè

$$T = F_p \frac{l^2}{2h}.$$

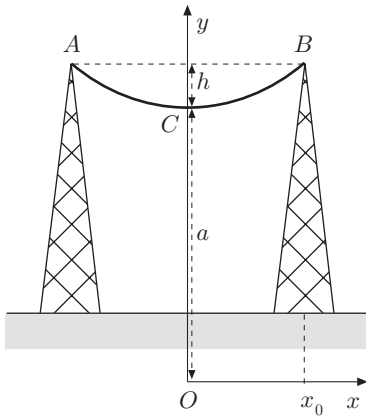


Fig. 7.31

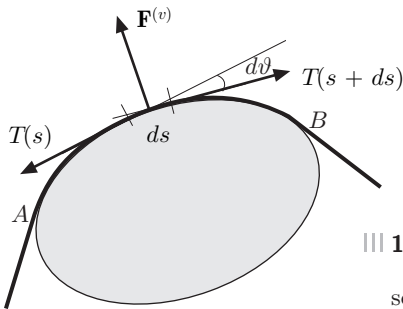


Fig. 7.32

16. Equilibrio di un cavo teso su una superficie scabra

Consideriamo una porzione AB di cavo flessibile teso su una superficie scabra fissa, figura 32; supponiamo che si realizzi la condizione di moto incipiente da A verso B e che il coefficiente di attrito sia μ_s . Un elemento di cavo ds , le cui tangenti negli estremi formano un angolo $d\theta = ds/R$, con R raggio

di curvatura, è soggetto alle tensioni $\mathbf{T}(s)$, $\mathbf{T}(s + ds)$ e alla reazione vincolare $\mathbf{F}^{(v)}$. A causa dell'attrito la reazione vincolare ha componenti $F_t^{(v)} = \mu_s F_n^{(v)}$, tangente, e $F_n^{(v)}$ normale alla superficie. Fissato come positivo il verso che va da A a B , le equazioni di equilibrio (37) si scrivono

$$\frac{dT}{ds} = -\mu_s F_n^{(v)}, \quad T \frac{d\theta}{ds} = -F_n^{(v)},$$

dove μ_s è il coefficiente di attrito statico. Dividendo membro a membro, si ha

$$\frac{dT}{T} = \mu_s d\theta,$$

che integrata fornisce il rapporto tra le tensioni in due punti qualsiasi del cavo, in funzione dell'angolo formato dalle tangenti in questi punti. Nel caso della figura, si ha

$$\ln \frac{T_B}{T_A} = \mu_s \theta, \quad \Rightarrow \quad T_B = T_A e^{\mu_s \theta}.$$

Si consideri ancora un cavo di ormeggio che si avvolge su un supporto fisso al molo (bitta), come in figura 33; assumendo $\mu_s = 0,5$ e $\theta = 2\pi$ si ha $e^\pi = 23$. È sufficiente, per equilibrare una certa trazione su BB' , esercitare su AA' una forza 23 volte minore. Se il cavo viene avvolto al supporto 2, 3, ... n volte, si capisce che un uomo può equilibrare trazioni esercitate da navi molto grandi.

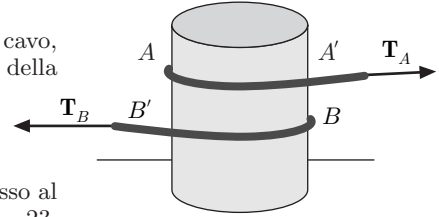


Fig. 7.33

9. Analisi delle forze agenti su un corpo

Una analisi delle forze agenti su un corpo non è sempre immediata e, per evitare errori grossolani, richiede una certa accuratezza, in particolare, quando più corpi sono presenti. Un modo semplice è quello di considerare il corpo come isolato ed eseguire il cosiddetto *diagramma di corpo libero*. Per esemplificare prendiamo in esame due blocchi, di masse m_1 e m_2 , che poggiano su una superficie liscia orizzontale, collegati da un filo, flessibile inestensibile e di massa trascurabile, e trascinati con una forza \mathbf{F} costante parallela alla superficie, figura 34. È noto, in generale, che le forze agenti possono essere classificate in forze di contatto e forze a distanza; nel nostro caso, tra le prime abbiamo le tensioni esercitate dai fili e le reazioni vincolari, tra le seconde la forza peso. Rappresentiamo i diagrammi di corpo libero relativi ai due blocchi mostrati in figura 35.

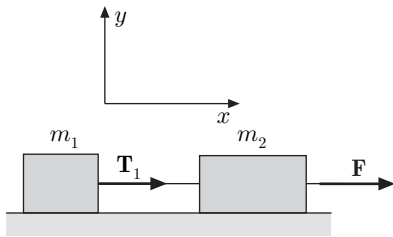


Fig. 7.34

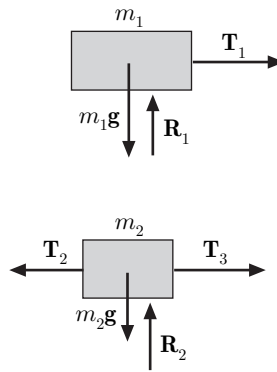


Fig. 7.35

Sulla massa m_1 agiscono la tensione \mathbf{T}_1 esercitata dal filo, il peso $m_1\mathbf{g}$ e la forza vincolare del piano \mathbf{R}_1 ; le ultime due si equilibrano, quindi l'unica forza che determina il moto, lungo la direzione x di trascinamento, è la tensione. Per la seconda legge della dinamica si ha

$$T_1 = m_1 a_1.$$

Sulla massa m_2 agiscono le tensioni \mathbf{T}_2 , \mathbf{T}_3 , esercitate dai fili di collegamento, il peso $m_2\mathbf{g}$ e la forza vincolare \mathbf{R}_2 del piano; queste due ultime hanno risultante nulla, dunque le forze che determinano il moto, nella direzione x , sono le tensioni. Per la seconda legge della dinamica:

$$T_3 - T_2 = m_2 a_2.$$

Se il filo di collegamento resta sempre teso, l'accelerazione di ogni punto del sistema è la stessa, $a_1 = a_2 = a$. Inoltre il modulo della tensione è lo stesso lungo ciascun filo; pertanto $T_1 = T_2 = T$ e $T_3 = F$. Le equazioni precedenti diventano:

$$T = m_1 a, \quad F - T = m_2 a,$$

da cui, nota la forza F , si ricavano accelerazione e tensione.

Occorre comunque tener presente che, per la terza legge della dinamica, le forze agiscono sempre a coppie, azione e reazione; queste ultime, per il blocco m_1 sono: la reazione \mathbf{R}' esercitata sul piano, la forza gravitazionale \mathbf{p}' esercitata sulla Terra e la tensione \mathbf{T}' esercitata sul filo, figura 36. Tutte queste forze non sono applicate al blocco, pertanto ai fini dello studio del moto devono essere omesse.

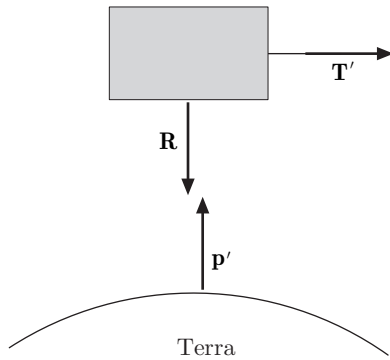


Fig. 7.36

8. Lavoro ed Energia

1. Lavoro

Si definisce lavoro elementare $d\mathcal{L}$ di una forza \mathbf{F} , agente su un punto materiale (particella), lo scalare

$$d\mathcal{L} = \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \mathbf{F} \cdot \mathbf{v} dt, \quad (1)$$

in cui $d\mathbf{r}$ è lo spostamento elementare del punto, \mathbf{v} la sua velocità, figura 1. Il lavoro dipende dalla traiettoria l della particella e dal riferimento, essendo spostamento e velocità grandezze relative. Per la definizione di prodotto scalare si ha

$$d\mathcal{L} = F ds \cos \theta,$$

dove θ è l'angolo formato da \mathbf{F} con $d\mathbf{r}$, e ds il modulo di quest'ultimo, ossia l'elemento d'arco della traiettoria.

Evidentemente il lavoro elementare dipende da tale angolo ed è positivo o negativo se θ è minore di oppure maggiore di $\pi/2$; in particolare è nullo se $\theta = \pi/2$, supponendo, ovviamente, che né \mathbf{F} né $d\mathbf{r}$ siano nulli. Il lavoro compiuto dalla forza nello spostamento finito lungo una traiettoria l che congiunge le posizioni iniziale A e finale B del punto è dato dall'integrale di linea

$$\mathcal{L} = \int_{A(l)}^B \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}. \quad (2)$$

dove, in genere, la forza è funzione della posizione, del tempo e della velocità.

Nel caso in cui la forza sia vettorialmente costante il suo lavoro è uguale al prodotto scalare della forza per lo spostamento del punto; se inoltre la forza è concorde con lo spostamento il lavoro è uguale semplicemente al prodotto dell'intensità della forza per lo spostamento compiuto.

Esprimendo le (1) e (2) in forma cartesiana si ha

$$d\mathcal{L} = F_x dx + F_y dy + F_z dz, \quad (3)$$

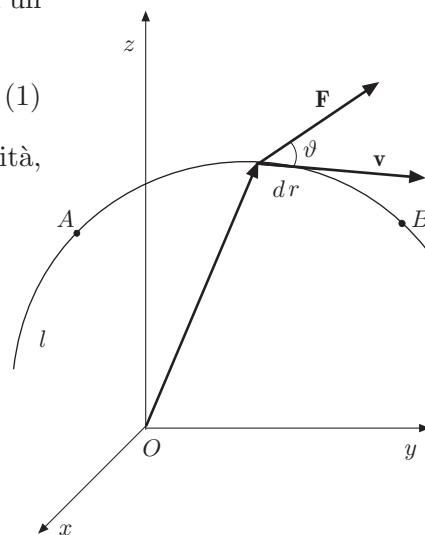


Fig. 8.1

e

$$\mathcal{L} = \int_{A, (l)}^B (F_x dx + F_y dy + F_z dz). \quad (4)$$

In genere, l'integrale di linea (4) dipende dagli estremi A e B della traiettoria l che congiunge tali estremi e dalla traiettoria stessa.

L'unità di lavoro, nel SI , è il *joule* (J) definito come *il lavoro eseguito da una forza avente l'intensità di un newton, quando lo spostamento è concorde con essa ed ha la lunghezza di un metro*.

2. Potenza

Consideriamo una forza che, in generale, dipende dalla posizione del punto materiale, dalla sua velocità, e da altre grandezze variabili col tempo; il rapporto tra il lavoro elementare dato dalla (1) ed il tempo infinitesimo dt , definisce la potenza W al tempo t relativa alla forza \mathbf{F} ed alla velocità \mathbf{v} :

$$W = \frac{d\mathcal{L}}{dt} = \mathbf{F} \cdot \mathbf{v}. \quad (5)$$

La potenza è una grandezza che misura la rapidità con cui viene compiuto lavoro; essa corrisponde quindi al concetto di potenza quale è inteso nel linguaggio ordinario, relativamente a motori e dispositivi atti a generare lavoro. Nel SI l'unità di misura è il *watt* (W), che corrisponde al lavoro di un J/s . Dalla (5) si deduce:

$$\mathcal{L} = \int_{t_1}^{t_2} W dt.$$

Il lavoro compiuto nell'intervallo di tempo $t_2 - t_1$ è uguale all'integrale della potenza esteso all'intervallo di tempo considerato. Ovviamente anche la potenza è una grandezza che dipende dal riferimento.

Per quanto si è detto, le forze si possono distinguere in motrici e resistenti, a seconda che l'angolo formato con lo spostamento elementare o con la velocità del punto materiale sia acuto oppure ottuso.

Esistono particolari forze la cui potenza è sempre nulla, perchè sono ortogonali alla velocità del punto; tali sono le forze di deviazione, come la forza di Lorentz $\mathbf{F} = q\mathbf{v} \times \mathbf{B}$ che viene esercitata su una carica q in moto con velocità \mathbf{v} in un campo magnetico \mathbf{B} , la forza di Coriolis, le forze vincolari esplicate da vincoli bilateri lisci. Queste forze si indicano come forze a potenza nulla. Inoltre una forza si dice dissipativa quando la sua potenza è negativa, come le forze di attrito o le forze di resistenza nel mezzo; infatti nel riferimento solidale col fluido la resistenza del mezzo ha sempre orientamento opposto alla velocità.

III 3. Teorema dell'energia cinetica

Il concetto di energia cinetica è legato a quello di lavoro e di potenza ora stabiliti. Consideriamo un punto materiale con velocità \mathbf{v} e soggetto ad una forza \mathbf{F} ; tenendo presente la legge fondamentale della dinamica,

$$\mathbf{F} = m \frac{d\mathbf{v}}{dt},$$

e moltiplicando scalarmente per \mathbf{v} ambo i membri, si ottiene:

$$\mathbf{F} \cdot \mathbf{v} = m \mathbf{v} \cdot \frac{d\mathbf{v}}{dt}. \quad (6)$$

Il primo membro è la potenza, il secondo membro si può scrivere

$$m \mathbf{v} \cdot \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} m \mathbf{v} \cdot \mathbf{v} \right) = \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} m v^2 \right);$$

e sostituendo nella (6)

$$W = \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} m v^2 \right). \quad (7)$$

Nella (7) si è introdotta la grandezza

$$T = \frac{1}{2} m v^2,$$

che chiamiamo *energia cinetica*, dipendente dalla massa e dalla velocità del punto. L'energia cinetica si misura in *joule*. La (7) asserisce che: *la derivata rispetto al tempo dell'energia cinetica di un punto è uguale alla potenza della forza che ne determina il movimento*, ed esprime il teorema dell'energia cinetica nella prima forma.

Integrando ambo i membri della (7) in un certo intervallo di tempo, si ha

$$\int_{t_1}^{t_2} W dt = \int_{t_1}^{t_2} d \left(\frac{1}{2} m v^2 \right) = \frac{1}{2} m v_2^2 - \frac{1}{2} m v_1^2 = T_2 - T_1,$$

cioè

$$\mathcal{L} = \Delta T. \quad (8)$$

Il lavoro della forza che determina il moto, in un certo intervallo di tempo, è uguale alla variazione di energia cinetica del punto materiale nello stesso intervallo di tempo.

La (8) esprime il teorema dell'energia cinetica nella seconda forma. Dunque un aumento di energia cinetica di una particella esige lavoro, mentre una sua diminuzione ne fornisce; per esempio, se un grave viene lanciato con una certa velocità iniziale \mathbf{v}_0 , esso assume una energia cinetica pari a $m v_0^2 / 2$, corrispondente al lavoro muscolare svolto oppure, se si tratta di un proiettile, all'energia chimica sprigionatasi nello sparo, che imprime al grave di massa

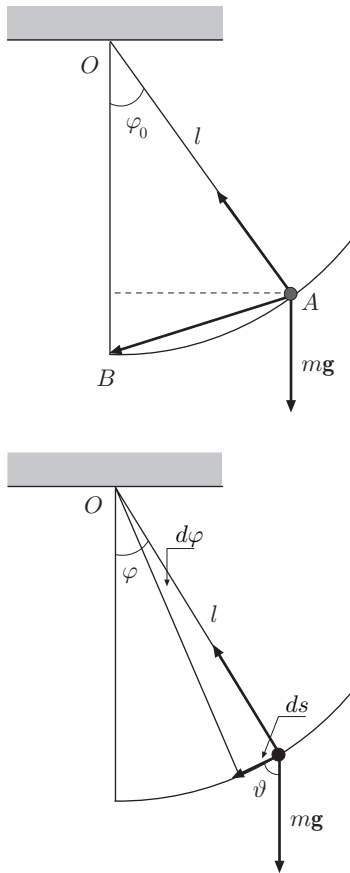


Fig. 8.2

m la velocità \mathbf{v}_0 . Quando il grave, dopo aver descritto la sua traiettoria tocca il terreno con velocità \mathbf{v}_1 e quindi si ferma, la sua energia cinetica passa dal valore $mv_1^2/2$ a zero; il grave fermandosi compie un lavoro esattamente uguale all'energia cinetica finale (perforazione del terreno, calore, onde acustiche, ecc.).

Esempi

1. Lavoro di una forza costante

Un pendolo semplice, costituito da una massa puntiforme sospesa ad un filo di lunghezza l , inestensibile e di massa trascurabile, viene abbandonato all'azione della gravità dalla posizione A , figura 2. Determinare il lavoro fatto dalle forze agenti quando il pendolo passa da A , corrispondente all'angolo φ_0 , che il filo forma con la verticale, a B cui corrisponde $\varphi = 0$.

Le forze agenti sono la forza vincolare ed il peso, delle quali la prima non compie lavoro essendo sempre ortogonale allo spostamento. La forza peso è costante e pertanto il lavoro è dato dal prodotto della forza per la proiezione dello spostamento nella direzione della forza. Tale proiezione, come indicato in figura, è h ; quindi

$$\mathcal{L} = mgh.$$

Il calcolo esplicito del lavoro ovviamente dà lo stesso risultato; si ha

$$d\mathcal{L} = \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = Fds \cos \theta.$$

Assumendo come positivo il verso degli angoli crescenti, è

$$ds = -l d\varphi, \quad \cos \theta = \cos \left(\frac{\pi}{2} - \varphi \right) = \sin \varphi;$$

quindi:

$$d\mathcal{L} = Fds \cos \theta = -mgl \sin \varphi d\varphi.$$

Integrando,

$$\mathcal{L} = -mgl \int_{\varphi_0}^0 \sin \varphi d\varphi = mgl(1 - \cos \varphi_0) = mgh.$$

2. Lavoro di una forza elastica

Un blocco di massa m e velocità \mathbf{v} costante, si muove su un piano orizzontale privo di attrito. Esso urta contro l'estremo libero di una molla, di costante k , posta sulla sua traiettoria, figura 3. Trovare la massima compressione della molla in seguito all'urto.

Assumiamo, come in figura, l'asse x con origine nell'estremo libero della molla. L'energia cinetica iniziale del blocco è $T_1 = mv^2/2$, mentre quella finale, nel momento in cui la molla è compressa al massimo ed il blocco è fermo, è $T_2 = 0$. Pertanto la variazione di energia cinetica è

$$\Delta T = T_2 - T_1 = -\frac{1}{2}mv^2;$$

d'altra parte, se la molla risulta compressa di $|x_1|$, il lavoro compiuto dalla forza elastica è

$$\mathcal{L} = \int_0^{-x_1} kx dx = -\frac{k}{2}x_1^2.$$

Per il teorema dell'energia cinetica si ha

$$-\frac{1}{2}kx_1^2 = -\frac{1}{2}mv^2, \quad \Rightarrow \quad x_1 = v\sqrt{m/k}.$$

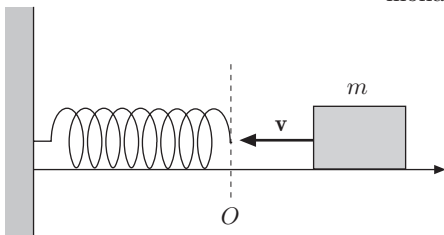


Fig. 8.3

III 3. Lavoro di una forza dipendente dal tempo

Una particella di massa m , in un riferimento inerziale, è soggetta ad una forza che ha direzione costante e modulo che varia nel tempo secondo la relazione $F = F_0 e^{-\alpha t}$, con α coefficiente costante. Calcolare il lavoro della forza tra gli istanti $t = 0$ e $t = t_1$, supponendo che la velocità iniziale v_0 sia nulla.

La traiettoria è rettilinea nella direzione della forza, quindi

$$d\mathcal{L} = F dx = F v dt;$$

poiché l'accelerazione è

$$a = \frac{F_0}{m} e^{-\alpha t}, \quad \Rightarrow \quad v = \frac{F_0}{m} \int e^{-\alpha t} dt = -\frac{F_0}{\alpha m} e^{-\alpha t} + C,$$

dove, in base alla condizione iniziale: $t = 0$, $v_0 = 0$, la costante di integrazione risulta $C = F_0/(\alpha m)$. Si ha:

$$v = \frac{F_0}{\alpha m} (1 - e^{-\alpha t}).$$

Il lavoro elementare è

$$d\mathcal{L} = F v dt = \frac{F_0^2}{\alpha m} e^{-\alpha t} (1 - e^{-\alpha t}) dt.$$

Integrando:

$$\mathcal{L} = \frac{F_0^2}{\alpha m} \int_0^{t_1} (e^{-\alpha t} - e^{-2\alpha t}) dt = \frac{1}{2} m \left(\frac{F_0}{\alpha m} \right)^2 (1 - e^{-\alpha t_1})^2.$$

Si ottiene lo stesso risultato in maniera più immediata, applicando il teorema dell'energia cinetica:

$$\mathcal{L} = T_1 - T_0 = \frac{1}{2} m v_1^2;$$

sostituendo l'espressione ottenuta per la velocità, si ha:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} m \left(\frac{F_0}{\alpha m} \right)^2 (1 - e^{-\alpha t_1})^2.$$

III 4. Lavoro di una forza dissipativa

Una particella di massa m è soggetta alla forza viscosa $\mathbf{F}_v = -b\mathbf{v}$, proporzionale alla velocità. Supponendo che per $t = 0$, la particella abbia velocità iniziale \mathbf{v}_0 , determinare il lavoro della forza nell'intervallo di tempo $t = 0$ e $t_1 = m/b$.

Il lavoro è dato da

$$\mathcal{L} = - \int_A^B b\mathbf{v} \cdot d\mathbf{r} = - \int_0^{t_1} b v^2 dt.$$

Per determinare la velocità, essendo l'accelerazione $a = -bv/m$, occorre risolvere l'equazione differenziale

$$\frac{dv}{dt} = -\frac{b}{m} v, \quad \Rightarrow \quad \frac{dv}{v} = -\frac{b}{m} dt.$$

Tenendo conto delle condizioni iniziali assegnate, si ha

$$\int \frac{dv}{v} = -\frac{b}{m} \int dt, \quad \Rightarrow \quad \ln v = -\frac{b}{m} t + \ln v_0;$$

da cui:

$$v = v_0 e^{-(b/m)t}.$$

Introducendo la precedente nell'espressione del lavoro si ha

$$\mathcal{L} = -b \int_0^{t_1} v_0^2 e^{-2(b/m)t} dt = \frac{1}{2} m v_0^2 [e^{-2(b/m)t}]_0^{t_1} = \frac{1}{2} m v_0^2 (e^{-2} - 1).$$

Il lavoro della forza dissipativa, come c'era da aspettarsi, è negativo; per t tendente ad infinito l'energia dissipata è uguale all'energia cinetica iniziale.

4. Lavoro di una forza posizionale

Particolare importanza assume il caso in cui la forza sia posizionale, cioè dipenda solo dalle coordinate, ed il lavoro compiuto non dipenda dalla traiettoria l lungo cui viene calcolato, ma solo dalle posizioni A iniziale e B finale. In queste circostanze la forza si dice *conservativa* ed il campo di forza ad essa associato campo conservativo.

In generale, affinché una forza sia conservativa è necessario, ma non sufficiente, che essa sia posizionale; non sono conservative le forze di deviazione, la forza di attrito e la resistenza nel mezzo che dipendono dalla velocità. Il carattere conservativo della forza dipende dal riferimento; se, infatti, in un certo riferimento la forza risulta conservativa, non risulterà tale in un riferimento in rotazione rispetto al primo dove, in generale, dipende dal tempo.

Esempi di forze conservative sono: una forza vettorialmente costante, come la forza di gravità, in una regione sufficientemente ristretta della superficie terrestre; le forze centrali, come la forza gravitazionale, le forze elastiche, il campo elettrico generato da una distribuzione di cariche, ecc... La circostanza fisica che il lavoro di una forza posizionale conservativa è indipendente dal percorso, matematicamente si traduce nel fatto che il lavoro elementare $d\mathcal{L}$ può essere espresso da un differenziale esatto:

$$d\mathcal{L} = F_x(x, y, z)dx + F_y(x, y, z)dy + F_z(x, y, z)dz = d\Phi,$$

in cui si è evidenziato che \mathbf{F} è funzione delle coordinate e $d\Phi$ è il differenziale totale di una grandezza scalare Φ , anch'essa funzione delle coordinate. Coordinate che possono essere cartesiane, polari o di qualsiasi altro genere. Ne discende che il lavoro della forza conservativa lungo un percorso chiuso qualsiasi è sempre nullo:

$$\oint \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = 0. \quad (9)$$

Viceversa, si dimostra immediatamente che la precedente dà una condizione necessaria e sufficiente perché la forza sia conservativa. Consideriamo infatti, figura 4, il lavoro di una forza che verifica la (9), lungo un percorso chiuso che va da A a B lungo la linea l_1 , e quindi da B ad A lungo la linea l_2 ; si ha

$$\oint \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_{A(l_1)}^B \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} + \int_{B(l_2)}^A \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = 0,$$

pertanto:

$$\int_{A(l_1)}^B \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = - \int_{B(l_2)}^A \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r},$$

ed invertendo i limiti di integrazione nell'integrale al secondo membro:

$$\int_{A(l_1)}^B \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_{A(l_2)}^B \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}.$$

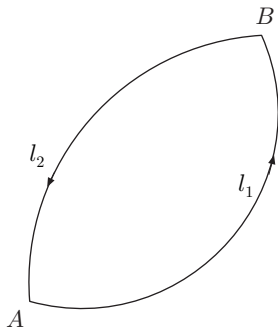


Fig. 8.4

Essendo i percorsi l_1 ed l_2 arbitrari, resta dimostrato che la forza è conservativa.

In maniera più rigorosa, osserviamo che la (9) non è altro che la circuitazione di \mathbf{F} ; poiché essa è nulla, il campo è irrotazionale, paragrafo 7.3-VI, e pertanto $\nabla \times \mathbf{F} = 0$; ciò implica l'annullarsi delle componenti del rotore:

$$\frac{\partial F_z}{\partial y} - \frac{\partial F_y}{\partial z} = 0, \quad \frac{\partial F_x}{\partial z} - \frac{\partial F_z}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y} = 0. \quad (10)$$

Le equazioni (9) e (10), se la forza è una funzione regolare delle coordinate, costituiscono le condizioni necessarie e sufficienti perché il campo di forza sia conservativo.

Motivi che evidenziano un significato fisico più preciso inducono, come si comprenderà subito, ad introdurre una grandezza scalare funzione del punto, che chiamiamo energia potenziale, definita da

$$U = -\Phi$$

e tale che la sua variazione sia uguale al lavoro della forza conservativa cambiato di segno:

$$\Delta U = -\Delta \mathcal{L}.$$

Ciò significa che la variazione di energia potenziale del punto materiale viene determinata compiendo un lavoro esterno contro la forza del campo. Valga questa considerazione molto semplice: se un grave viene portato dal suolo ad una certa quota, si è compiuto un lavoro contro la forza di gravità; nello stesso tempo il grave ha acquistato energia potenziale che può, ritornando al suolo, restituire sotto varie forme (energia cinetica, calore, suono, ecc...). In termini differenziali scriviamo

$$dU = -(F_x dx + F_y dy + F_z dz),$$

e siccome il differenziale totale di U , in coordinate cartesiane, è definito da

$$dU = \frac{\partial U}{\partial x} dx + \frac{\partial U}{\partial y} dy + \frac{\partial U}{\partial z} dz,$$

confrontando le due ultime relazioni, si ricava

$$F_x = -\frac{\partial U}{\partial x}, \quad F_y = -\frac{\partial U}{\partial y}, \quad F_z = -\frac{\partial U}{\partial z}, \quad (11)$$

che sono le componenti cartesiane della forza.

Si ha dunque:

$$U(B) - U(A) = - \int_A^B d\mathcal{L}. \quad (12)$$

La differenza tra i valori che l'energia potenziale assume in corrispondenza alle posizioni finale ed iniziale è uguale al lavoro della

forza conservativa cambiato di segno ed è indipendente dal percorso.

Dalle (11) si trae che la forza può essere espressa da:

$$\mathbf{F} = - \left(\frac{\partial U}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial U}{\partial y} \mathbf{j} + \frac{\partial U}{\partial z} \mathbf{k} \right),$$

essendo \mathbf{i} , \mathbf{j} , \mathbf{k} rispettivamente, i versori della terna cartesiana.

La precedente, in maniera più compatta si scrive:

$$\mathbf{F} = -\text{grad } U = -\nabla U, \quad (13)$$

dove l'operatore gradiente, in coordinate cartesiane, è stato definito al paragrafo 7.4-VI.

Si coglie immediatamente il vantaggio importantissimo nel fatto che un campo di forze conservativo è completamente caratterizzato se è nota la funzione $U(x, y, z)$ in ogni punto del campo, come espresso dalla (13). Viceversa dato un campo conservativo, è possibile determinare l'energia potenziale mediante integrazione, operazione piuttosto semplice nel caso di problemi unidimensionali.

L'energia potenziale come funzione della posizione del punto materiale è data da

$$U(P) = - \int_{P_0}^P d\mathcal{L} + U(P_0), \quad (14)$$

dove la posizione P del punto è espressa da ogni genere di coordinate e $U(P_0)$ è l'energia potenziale in una posizione di riferimento opportunamente scelta. Un altro vantaggio dell'energia potenziale è il seguente: poiché vale il principio di sovrapposizione, se si prendono in considerazione più forze conservative di ugual natura, essendo la forza totale $\mathbf{F} = \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 + \dots$, si ha anche $U = U_1 + U_2 + \dots$. Con l'introduzione di tale funzione dunque, le operazioni vettoriali sui campi si riducono ad operazioni scalari, più semplici, sull'energia potenziale.

Tutti i punti del campo che hanno la stessa energia potenziale sono definiti dalla relazione

$$U(x, y, z) = \text{cost}, \quad (15)$$

dunque si trovano su una superficie che si chiama *superficie equipotenziale*. Se il punto materiale si muove su una di tali superfici, è sempre $dU = 0$; quindi:

$$dU = -d\mathcal{L} = |F ds \cos \theta| = 0;$$

ed essendo F e ds diversi da zero, dev'essere $\cos \theta = 0$. La forza del campo è in ogni punto ortogonale alla superficie equipotenziale.

Consideriamo ora spostamenti che non avvengono sulla superficie equipotenziale, figura 5; poniamo l'attenzione sulla linea di

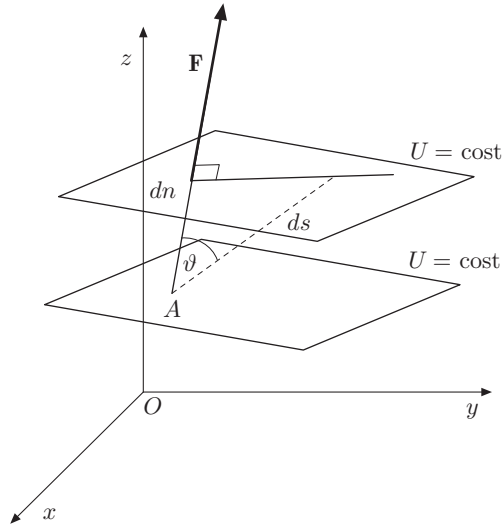


Fig. 8.5

forza che interseca ortogonalmente in A la superficie equipotenziale U_1 e fissiamo su essa come verso positivo quello concorde con \mathbf{F} . Per uno spostamento elementare dn lungo la linea di forza, nel verso positivo fissato, si ha

$$-dU = Fdn > 0, \quad (16)$$

da cui

$$F = -\frac{dU}{dn}. \quad (17)$$

Ma, per definizione di gradiente, possiamo scrivere

$$\nabla U = \frac{dU}{dn} \hat{\mathbf{n}},$$

dove $\hat{\mathbf{n}}$ è il versore normale alla superficie equipotenziale. Dunque

$$\mathbf{F} = -\nabla U = -\frac{dU}{dn} \hat{\mathbf{n}}. \quad (18)$$

Se consideriamo uno spostamento ds che non avviene lungo la linea di forza considerata, si ha

$$\frac{dU}{ds} = \frac{dU}{dn} \frac{dn}{ds} = \frac{dU}{dn} \cos \theta.$$

Questa relazione è chiamata *derivata direzionale* lungo una direzione $\hat{\mathbf{u}}$ generica ed esprime il legame tra tale derivata e la derivata direzionale dU/dn secondo la normale alla superficie equipotenziale. Essendo $\cos \theta$ massimo per $\theta = 0$, si deduce che dU/dn è la derivata direzionale massima di U . Pertanto ∇U è un vettore ortogonale alla superficie equipotenziale, il cui modulo è uguale alla derivata direzionale massima di U .

Consideriamo ora la linea di forza che interseca nei punti A e B le superfici equipotenziali U_1 e U_2 . Integrando la (16) si ha

$$U_A - U_B = \int_A^B F dn > 0, \quad \Rightarrow \quad U_A > U_B.$$

Ciò significa che la forza del campo è volta verso i punti di energia potenziale decrescenti. Se una particella si muove nel verso della linea di forza, procede nel verso delle energie potenziali decrescenti; in tal caso le forze del campo eseguono un lavoro positivo, quindi favoriscono il moto. Si deduce che, se un campo di forza ha linee di forza chiuse, sulle quali il verso è concorde lungo tutto il percorso, non può esistere energia potenziale; il campo non è conservativo e, come s'è detto, non è irrotazionale.

Definiamo inoltre *potenziale* l'energia potenziale per unità di massa o per unità di carica e la indichiamo col simbolo V . Questa grandezza, che gode di tutte le proprietà dell'energia potenziale, è particolarmente utile in Elettromagnetismo.

Non tutte le forze posizionali sono conservative; ciò si verifica spesso in molti campi della Fisica anche se in meccanica tale eventualità è meno frequente. Consideriamo la forza posizionale

$$\mathbf{F} = Ax\mathbf{j},$$

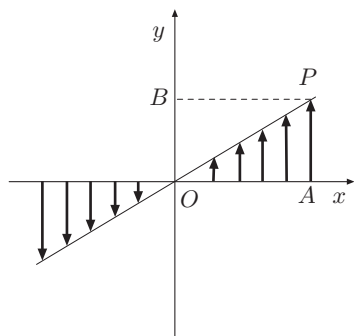


Fig. 8.6

in cui il modulo è proporzionale a x , la direzione è quella dell'asse y ed A è una costante, figura 6. Per mezzo delle (10) si verifica immediatamente che la forza non è conservativa; si può inoltre constatare che il lavoro dipende dalla traiettoria. Si considerino infatti i percorsi $l_1 = OAP$ e $l_2 = OBP$, indicati in figura, che congiungono l'origine col punto di coordinate $x = 1\text{ m}$, $y = 1\text{ m}$. Il lavoro lungo l_1 comprende il tratto orizzontale OA dove è nullo, ed il tratto AP dove è diverso da zero, quindi $\mathcal{L}_1 = A$; il lavoro lungo l_2 comprende il tratto OB ed il tratto BP ; in entrambi i tratti il lavoro è nullo, $\mathcal{L}_2 = 0$. Si trova dunque che il lavoro dipende dal percorso, pertanto la forza non è conservativa.

Un altro esempio riguarda la *forza di betatrone*. È noto che una particella, con carica q e velocità \mathbf{v} , in un campo di induzione magnetica B , è soggetta alla forza di Lorentz $\mathbf{F} = q\mathbf{v} \times \mathbf{B}$. Essendo $\mathbf{F} \times \mathbf{v} = 0$, la forza è ortogonale in ogni punto alla traiettoria ed è a potenza nulla, quindi l'energia cinetica della particella non varia. Se in particolare \mathbf{B} è costante ed ortogonale a \mathbf{v} , il moto è circolare uniforme; detto R il raggio della circonferenza e uguagliando i moduli della forza centripeta e della forza di Lorentz si ha

$$\frac{mv^2}{R} = qvB, \quad \Rightarrow \quad mv = qRB.$$

Nel caso che \mathbf{B} sia variabile nel tempo, derivando la precedente:

$$\frac{d(mv)}{dt} = qR \frac{dB}{dt},$$

si trova una forza tangente alla traiettoria, proporzionale a dB/dt , che accelera la particella nella fase in cui questa derivata è crescente. Per i nostri scopi e senza entrare nei dettagli, possiamo schematizzare la forza con l'espressione

$$\mathbf{F} = F(R)\hat{\theta},$$

dove $\hat{\theta}$ è il versore trasversale, ortogonale ad R , figura 7. Fissando la nostra attenzione su un certo valore di R , il lavoro della forza lungo la circonferenza di raggio R è

$$\mathcal{L} = F(R)2\pi R,$$

diverso da zero; la forza non è conservativa. Esaminiamo ora alcuni campi di forza.

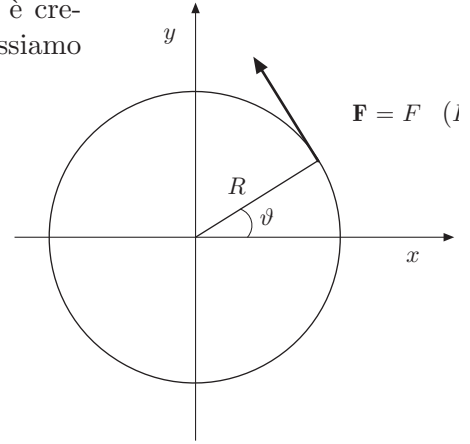


Fig. 8.7

4.1. Campo di forza uniforme

Un campo di forza si dice uniforme quando \mathbf{F} è vettorialmente costante in tutti i punti del campo. Come si è detto, il campo della gravità \mathbf{g} può ritenersi uniforme in uno spazio limitato della superficie terrestre; le linee verticali costituiscono le linee di forza, la forza peso è costante. Assumendo dunque come unico asse di riferimento, l'asse z volto lungo la verticale discendente, le linee di forza sono concordi con esso e l'unica componente di \mathbf{F} o di \mathbf{g} è diretta lungo z . Sono verificate immediatamente le (10); la forza è irrotazionale e quindi conservativa. Poiché

$$F = mg = -\frac{\partial U}{\partial z} = -\frac{dU}{dz}, \quad \Rightarrow \quad dU = -Fdz,$$

integrando, si ottiene l'energia potenziale:

$$U = -mgz + C, \quad (19)$$

con C costante di integrazione che dipende dal valore che assume U in corrispondenza ad una quota z_0 prefissata. Il grafico della (19) è mostrato in figura 8.

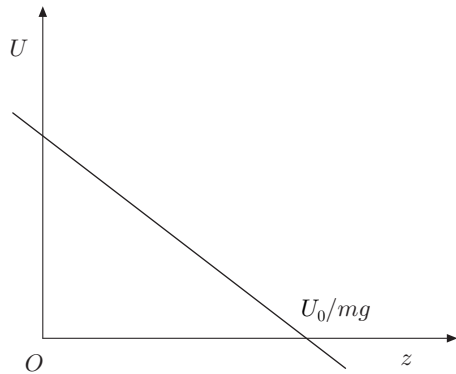


Fig. 8.8

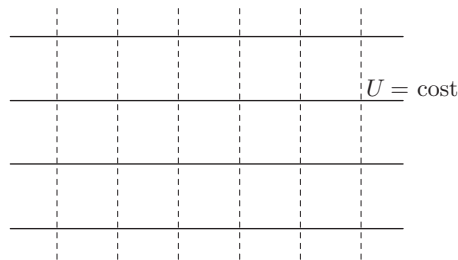


Fig. 8.9

In figura 9 sono mostrate le superfici equipotenziali del campo; esse hanno per equazione $U = cost$, cioè $z = cost$, pertanto sono piani orizzontali; le linee di forza (tratteggiate) sono verticali.

La variazione di energia potenziale è

$$\begin{aligned}\Delta U &= - \int_A^B (F_x dx + F_y dy + F_z dz) \\ &= - \int_{z_1}^{z_2} mg dz = -mg(z_2 - z_1).\end{aligned}\quad (20)$$

La proprietà conservativa della forza si può verificare anche esaminando se il lavoro dipende o meno dalla traiettoria. Poiché la forza è vettorialmente costante, il lavoro lungo un percorso l qualsiasi è dato dal prodotto del modulo della forza per la proiezione dello spostamento s nella direzione della forza, figura 10, perciò:

$$\mathcal{L} = mg(z_2 - z_1),$$

indipendente da l .

Più esplicitamente, il lavoro elementare

$$d\mathcal{L} = \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = F ds \cos \theta = F dz,$$

è palesemente indipendente dal percorso l ; esso dipende solo dalla coordinata z .

Molte volte è più opportuno assumere l'orientazione dell'asse z verso l'alto; in tal caso le (19) e (20) cambiano di segno:

$$F = -mg = -\frac{dU}{dz},$$

da cui

$$U = mgz + C.$$

Se si conviene di assumere nulla l'energia potenziale per $z = 0$, allora la costante C è uguale a zero, dunque:

$$U = mgz. \quad (21)$$

La variazione di energia potenziale diventa

$$\Delta U = mg(z_2 - z_1) = mgh. \quad (22)$$

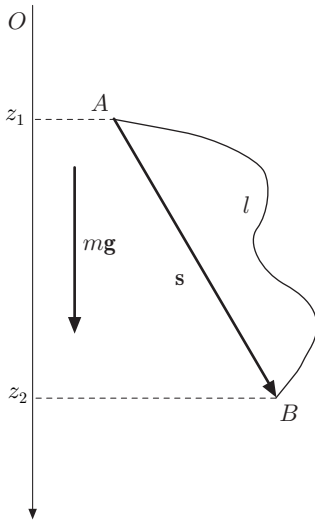


Fig. 8.10

|| 4.2. Campo di forze centrali

Un campo di forza si dice centrale se la forza definita nel generico punto P del campo è costantemente diretta lungo la retta che congiunge un punto fisso O , detto centro delle forze o polo, e il punto P ed è funzione solo della loro distanza r . La forza è attrattiva se ha verso opposto al vettore \mathbf{r} che, a partire da O , individua il punto; repulsiva se ha verso concorde. Un campo siffatto è conservativo.

Consideriamo, figura 11, la forza $\mathbf{F}(r)$ nel riferimento cartesiano con origine nel polo O ; poiché la forza è esclusivamente funzione di r , detti x/r , y/r , z/r i coseni direttori di \mathbf{r} , si ha

$$F_x = F(r) \frac{x}{r}, \quad F_y = F(r) \frac{y}{r}, \quad F_z = F(r) \frac{z}{r},$$

con $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$. La prima delle (10) impone

$$\frac{\partial F_z}{\partial y} = \frac{\partial F_y}{\partial z}.$$

Per il primo membro si ha

$$\frac{\partial F_z}{\partial y} = \frac{\partial F_z}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial y} = \frac{rF'(r) - F(r)}{r^2} \frac{\partial r}{\partial y} z,$$

per il secondo

$$\frac{\partial F_y}{\partial z} = \frac{\partial F_y}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial z} = \frac{rF'(r) - F(r)}{r^2} \frac{\partial r}{\partial z} y.$$

Essendo

$$\frac{\partial r}{\partial y} z = (x^2 + y^2 + z^2)^{-1/2} yz;$$

e analogamente

$$\frac{\partial r}{\partial z} y = (x^2 + y^2 + z^2)^{-1/2} yz$$

l'uguaglianza risulta manifesta; nello stesso modo si possono verificare le altre due condizioni imposte dalla (10).

La proprietà conservativa della forza si può dedurre verificando, al solito, che il lavoro della forza è indipendente dalla traiettoria. Si dimostrerà che il moto di un punto materiale soggetto ad una forza centrale è piano. Supponendo che la forza sia attrattiva e giacente nel piano del moto, figura 12, osserviamo che il lavoro elementare

$$d\mathcal{L} = \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = F(r) ds \cos \theta = F(r) dr,$$

essendo dr la proiezione di dl secondo \mathbf{r} , è funzione solo di r , coordinata che caratterizza la forza. Il lavoro lungo una traiettoria generica dalla posizione iniziale A a quella finale B , si scrive

$$\mathcal{L} = \int_A^B F(r) dr,$$

e dipende esclusivamente da r . Qualunque traiettoria può essere sostituita dal percorso radiale tra r_A e r_B . L'energia potenziale è

$$U(r) = - \int_{r_0}^r F(r) dr + U(r_0);$$

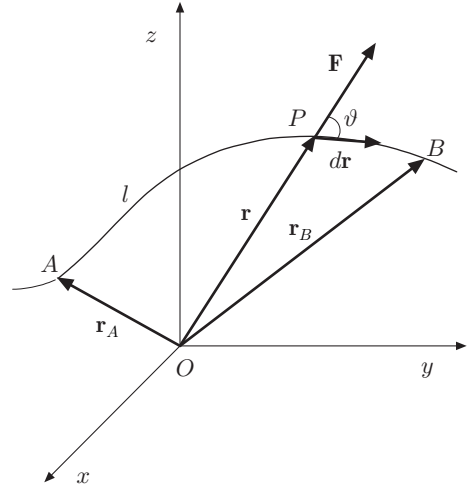


Fig. 8.11

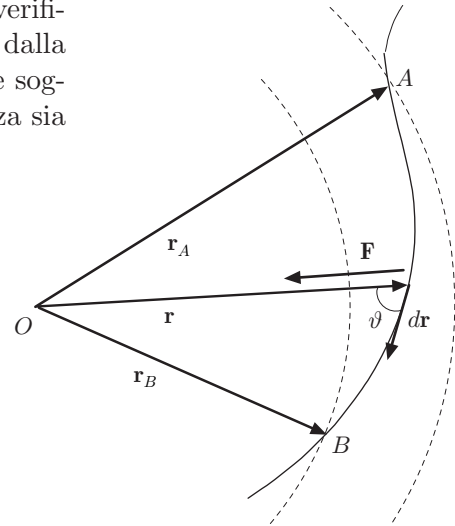


Fig. 8.12

ovvero

$$U(r) = - \int F(r) dr + C, \quad (21)$$

dove la costante C dipende dal valore che assume l'energia potenziale in un punto r_0 opportunamente scelto. Esaminiamo ora alcuni casi particolari.

FORZA GRAVITAZIONALE

Assegnata la forza gravitazionale

$$\mathbf{F} = -G \frac{m_1 m_2}{r^2} \hat{\mathbf{r}},$$

l'energia potenziale della massa m_1 nel campo creato dalla massa m_2 e viceversa, è data da

$$U(r) = - \int -G \frac{m_1 m_2}{r^2} dr = -G \frac{m_1 m_2}{r} + C.$$

La costante C è uguale a zero se si fa l'ipotesi che l'energia potenziale si annulli all'infinito. Tale ipotesi è confortata dal fatto che, essendo $U < 0$, il lavoro fatto contro le forze del campo, nello spostamento della massa m_1 da una certa posizione all'infinito è negativo; cioè la forza, attrattiva, ostacola tale spostamento. All'infinito, essendo nulla l'azione del campo, poiché esso decresce come $1/r^2$, il lavoro risulta nullo; pertanto

$$U(r) = -G \frac{m_1 m_2}{r}. \quad (22)$$

Il grafico di $U(r)$, nell'ipotesi di masse puntiformi, è mostrato in figura 13. Le superfici equipotenziali sono sfere con centro nella massa attrattiva, le linee di forza raggi convergenti in essa, figura 14.

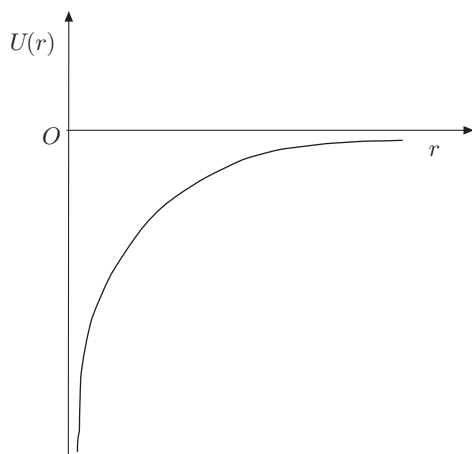


Fig. 8.13

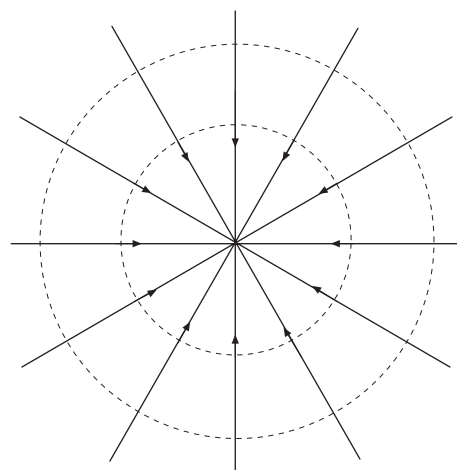


Fig. 8.14

FORZA COULOMBIANA

La forza coulombiana tra due cariche è data da

$$\mathbf{F} = \pm \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{r^2} \hat{\mathbf{r}};$$

essa è attrattiva ($-$) o repulsiva ($+$) se le cariche sono di segno opposto oppure dello stesso segno. L'espressione dell'energia potenziale è analoga a quella ottenuta per il campo gravitazionale.

FORZA ELASTICA

Una forza elastica è espressa dall'equazione

$$\mathbf{F} = -k\mathbf{r},$$

dove k è la costante elastica ed \mathbf{r} il vettore che individua la posizione del punto materiale, rispetto al centro O della forza. La forza elastica è conservativa, come si verifica subito considerando le sue componenti cartesiane,

$$F_x = -kx, \quad F_y = -ky, \quad F_z = -kz,$$

e imponendo le (10).

L'oscillatore armonico unidimensionale è un esempio di punto materiale soggetto a forza elastica che, come abbiamo visto, può essere schematizzato mediante una massa puntiforme collegata all'estremo libero di una molla ideale. La molla, quando subisce una deformazione x lungo il suo asse, esercita una forza opposta $F = -kx$.

Essendo

$$F = -\frac{dU}{dx} = -kx, \quad \Rightarrow \quad dU = kx dx,$$

l'energia potenziale risulta:

$$U = \int dU = k \int x dx = \frac{1}{2}kx^2 + C.$$

La costante C è uguale a zero se si assume nulla l'energia potenziale per $x = 0$. Pertanto:

$$U = \frac{1}{2}kx^2. \quad (23)$$

Il grafico della (23), mostrato in figura 15, è una parabola con vertice nell'origine, definita per i valori x compresi tra i punti di inversione del moto ($-A \leq x \leq A$) ed è *tipica delle oscillazioni armoniche*.

La relazione

$$F = -\frac{dU}{dx},$$

come le (11) in generale, ha un significato geometrico ben preciso; infatti dU/dx dà il valore numerico della tangente alla curva nel punto generico, perciò rappresenta la forza cambiata di segno. In figura 15 la tangente è positiva in P , quindi la forza è negativa, volta verso il centro delle oscillazioni; in P' la tangente è negativa, la forza è positiva, ancora rivolta verso il centro delle oscillazioni. Per $x = 0$, vertice della parabola, la forza è nulla; questo punto rappresenta una posizione di equilibrio dell'oscillatore. In altri termini se una particella, soggetta a forza elastica, si trova in equilibrio nel centro delle oscillazioni, una volta spostata da tale posizione, esegue oscillazioni armoniche.

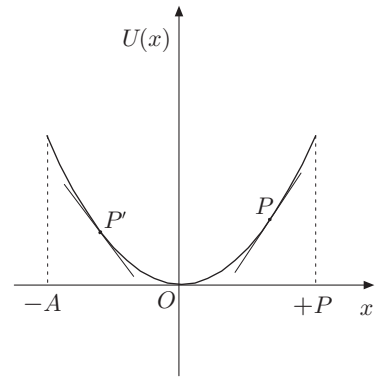


Fig. 8.15

5. Conservazione dell'energia

Si è stabilito che il lavoro di una forza è sempre uguale alla variazione dell'energia cinetica del punto materiale. Se la forza è posizionale e conservativa, il lavoro è uguale alla variazione di energia potenziale cambiata di segno, cioè

$$\mathcal{L} = -\Delta U = U_A - U_B.$$

Dalla (8) discende che

$$U_A - U_B = T_B - T_A,$$

ossia

$$T_A + U_A = T_B + U_B = E = \text{cost}, \quad (24)$$

In assenza di forze dissipative, al punto materiale, nel suo movimento, sono attribuite due forme di energia: l'energia cinetica T che dipende dalla velocità e l'energia potenziale U che dipende dalla posizione. La somma di queste due energie si chiama *energia totale o meccanica* E .

In virtù della (24), essendo i punti A e B arbitrari, questa energia non varia durante il movimento e *si conserva*, ossia è *una quantità costante indipendente dal tempo e dalla posizione*; se cresce l'energia cinetica di altrettanto diminuisce l'energia potenziale e viceversa. In altri termini, durante il moto del punto, l'energia cinetica si trasforma in energia potenziale e viceversa ma l'energia totale resta sempre costante. Si ha dunque la seguente legge di conservazione dell'energia meccanica:

l'energia totale di un punto materiale soggetto ad una forza conservativa si mantiene costante durante il moto.

La legge di conservazione dell'energia meccanica, insieme alle leggi di conservazione della quantità di moto e del momento angolare ha, in Fisica, una importanza straordinaria. Essa, come le altre citate, costituisce uno strumento molto potente per lo studio dei fenomeni fisici poiché le conclusioni che si ottengono sono molto più generali e indipendenti dalle equazioni del moto; perciò è possibile eliminare il tempo come variabile esplicita.

Tuttavia ciò non significa che le forze non conservative non rispettino la conservazione dell'energia nella sua formulazione più generale; in tal caso, nella (24) devono essere considerati altri termini che riguardano il lavoro di tali forze che, in genere, si traduce in dissipazione di energia sotto forma di calore, suono ecc. Inoltre, nel bilancio energetico, vanno considerati termini che rappresentano l'energia nelle sue varie forme: elettromagnetica, termica, chimica e così via.

Esempi

III 5. Moto di un corpo soggetto all'azione della gravità

a) Caduta libera

Il problema cinematico della caduta libera di un grave di massa m , in assenza di forze dissipative può essere risolto in maniera molto semplice per mezzo della legge di conservazione dell'energia, senza studiare i dettagli del moto e, in particolare, senza l'intervento della variabile tempo.

Consideriamo il grave fermo ad una altezza y dal suolo, figura 16; esso è caratterizzato da una energia potenziale U e da una energia cinetica $T = 0$; quindi la sua energia totale è

$$E = U + T = U = mgy.$$

Successivamente il grave viene abbandonato all'azione della gravità; alla quota y_0 la sua energia totale è

$$E = U_0 + T_0 = mgy_0 + \frac{1}{2}mv_0^2.$$

Essendo costante E , dalle due precedenti si ottiene

$$mgy = mgy_0 + \frac{1}{2}mv_0^2 \quad \Rightarrow \quad v_0 = \sqrt{2g(y - y_0)} = \sqrt{2gh}.$$

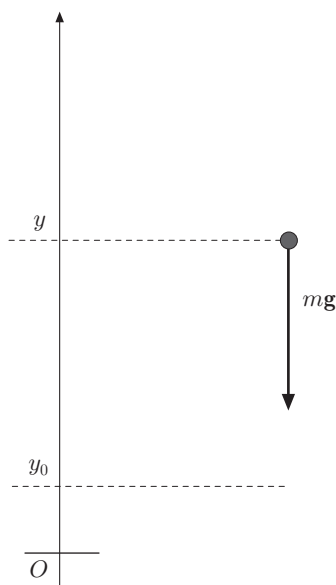


Fig. 8.16

In particolare y_0 può coincidere con la quota zero della superficie terrestre, dove di solito si assume nulla l'energia potenziale.

Lo stesso valore della velocità si ottiene se il grave viene lanciato con velocità v_0 dalla quota y_0 e raggiunge y con velocità nulla. I risultati sono identici a quelli ottenuti con considerazioni cinematiche, ma nel procedimento non sono intervenute le equazioni del moto.

b) Moto lungo un piano inclinato

Si consideri un grave, con velocità iniziale nulla, che scivola dalla sommità di un piano inclinato, privo di attrito. Il grave è soggetto alla forza peso e alla reazione vincolare; quest'ultima è ortogonale al piano perché privo di attrito, pertanto non compie lavoro. Se h è l'altezza del piano inclinato, alla sommità si ha $T = 0$, $U = mgh$; $E = T + U = mgh$. Alla base del piano, supponendo che si trovi alla superficie terrestre, dove si assume nulla l'energia potenziale, si ha $T = (mv^2)/2$, $U = 0$, pertanto:

$$\frac{1}{2}mv^2 = mgh, \quad \Rightarrow \quad v = \sqrt{2gh}.$$

Lo stesso risultato vale se, viceversa, il grave, con una certa velocità v iniziale, risale dalla base lungo il piano fino a raggiungere la sommità, con velocità nulla.

c) Pendolo semplice

Il lavoro delle forze agenti sul pendolo semplice è stato determinato nell'esempio 1. È ovvio che vale la legge di conservazione dell'energia: il pendolo inizialmente, viene abbandonato dalla posizione corrispondente all'angolo φ_0 , dove possiede l'energia potenziale mgh_0 , e raggiunge la posizione corrispondente a $\varphi = 0$, dove, assumendo che l'energia potenziale sia nulla, possiede energia cinetica massima. Essendo costante l'energia totale, si ha

$$\frac{1}{2}mv^2 = mgh_0, \quad \Rightarrow \quad v = \sqrt{2gh_0}.$$

Se il pendolo è in una posizione corrispondente all'angolo φ generico, figura 17, la conservazione dell'energia meccanica impone

$$\frac{1}{2}mv^2 + mgh = mgh_0,$$

da cui:

$$v = \sqrt{2g(h_0 - h)} = \sqrt{2gl(\cos \varphi - \cos \varphi_0)}.$$

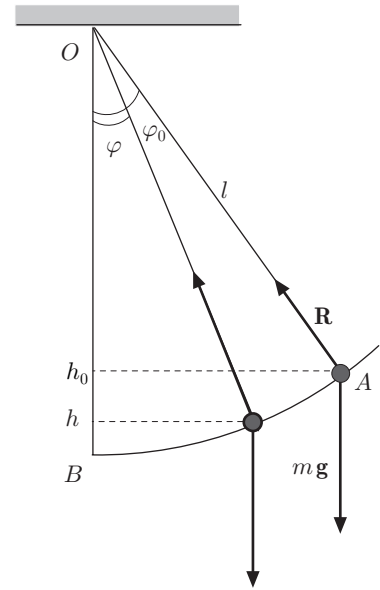


Fig. 8.17

5.1. Energia totale dell'oscillatore armonico

L'energia totale dell'oscillatore armonico,

$$E = T + U = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}kx^2,$$

deve essere costante, indipendente dal tempo e dalla posizione x . Per determinare il valore di E basta tener presente che l'equazione oraria e la velocità dell'oscillatore sono date da

$$x = A \sin(\omega t + \varphi), \quad \dot{x} = A\omega \cos(\omega t + \varphi),$$

e sostituendo nella precedente:

$$E = \frac{1}{2}mA^2\omega^2 \cos^2(\omega t + \varphi) + \frac{1}{2}kA^2 \sin^2(\omega t + \varphi);$$

ma, $k = m\omega^2$; pertanto:

$$E = \frac{1}{2}mA^2\omega^2[\sin^2(\omega t + \varphi) + \cos^2(\omega t + \varphi)] = \frac{1}{2}mA^2\omega^2,$$

che è la velocità massima con cui l'oscillatore transita nell'origine.

Si ha anche

$$E = \frac{1}{2}kA^2,$$

energia potenziale massima che l'oscillatore possiede nel punto di massima elongazione; pertanto:

$$E = \frac{1}{2}mA^2\omega^2 = \frac{1}{2}kA^2.$$

L'andamento nel tempo di T ed U sono mostrate in figura 18; si osservi che la loro somma è sempre costante ed uguale all'energia totale, indipendente dal tempo.

L'energia totale è altresì indipendente da x ; infatti

$$E = \frac{1}{2}kA^2 = T + \frac{1}{2}kx^2,$$

da cui si ottiene l'energia cinetica in funzione di x :

$$T = \frac{1}{2}kA^2 - \frac{1}{2}kx^2.$$

Il grafico di questa funzione è una parabola ad asse verticale, concavità rivolta verso il basso e vertice sull'asse delle ordinate nel punto $kA^2/2$. Dalla figura 19, in cui sono riportate T ed U , si osserva che la loro somma è sempre costante, uguale all'energia totale, indipendente da x .

Eseguendo la media dell'energia potenziale in un periodo T , simbolo da non confondere con l'energia cinetica, si ottiene l'energia potenziale media:

$$\overline{U(t)} = \frac{1}{2}kA^2 \frac{1}{T} \int_0^T \sin^2(\omega t + \varphi) dt.$$

Per risolvere l'integrale, posto $\omega t + \varphi = x$, si ottiene:

$$\frac{1}{\omega} \int_0^{2\pi} \sin^2 x dx = \frac{1}{\omega} \left[\frac{1}{2}x - \frac{1}{4}\sin 2x \right]_0^{2\pi} = \frac{\pi}{\omega};$$

pertanto

$$\overline{U(t)} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2}kA^2 \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2}m\omega^2 A^2 \right). \quad (25)$$

L'energia potenziale media è uguale a metà dell'energia potenziale massima o dell'energia cinetica massima. La stessa conclusione vale per l'energia cinetica media.

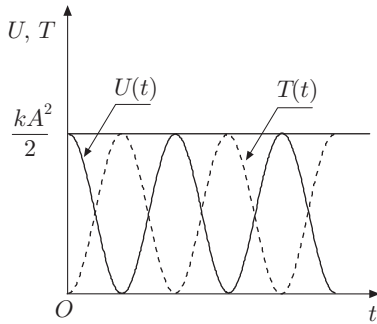


Fig. 8.18

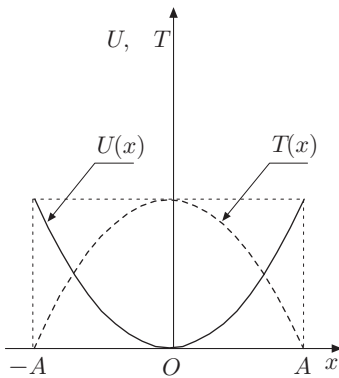


Fig. 8.19

|| 5.2. Energia di un oscillatore quasi armonico

Consideriamo, paragrafo 2.3-IV, l'oscillazione che si ottiene sovrapponendo due moti armonici di ampiezze A_1 e A_2 e frequenze ν_1 , ν_2 , diverse. Posto $\bar{\omega} = (\omega_2 + \omega_1)/2$ e $\omega_m = (\omega_2 - \omega_1)/2$, l'oscillazione, formula (10)-IV, ha ampiezza:

$$A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2 \cos 2\omega_m t}.$$

Pertanto l'energia totale dell'oscillatore è data da

$$E = \frac{1}{2}m\bar{\omega}^2 A^2 = \frac{1}{2}m\bar{\omega}^2 (A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2 \cos 2\omega_m t).$$

Nel caso che le ampiezze siano uguali:

$$\begin{aligned} E &= \frac{1}{2}m\bar{\omega}^2 A^2 = \frac{1}{2}m\bar{\omega}^2 (2A_1^2 + 2A_1^2 \cos 2\omega_m t) \\ &= 2m\bar{\omega}^2 A_1^2 \frac{1}{2} (1 + \cos 2\omega_m t) = 2m\bar{\omega}^2 A_1^2 \cos^2 \omega_m t. \end{aligned} \quad (26)$$

Ciò è conforme al fatto che l'oscillazione risultante è data dalla formula:

$$x = x_1 + x_2 = A_1(\cos \omega_1 t + \cos \omega_2 t) = 2A_1 \cos \omega_m t \cos \bar{\omega} t,$$

alla quale si può attribuire una ampiezza, funzione del tempo,

$$A = 2A_1 \cos \omega_m t.$$

Esempi

- ||| 6. Una particella di massa m è vincolata a muoversi senza attrito su una guida circolare di raggio R , giacente in un piano verticale come in figura 20. Scelto un sistema di coordinate x - y , con origine nel punto O più basso della guida, determinare l'energia potenziale della particella in funzione di x nel caso che sia $x \ll R$, ed il periodo delle piccole oscillazioni intorno ad O .

Questo problema è analogo a quello del pendolo semplice; la diversità consiste nel modo di realizzare il vincolo che però impone, in entrambi i casi, una traiettoria circolare.

Le forze che agiscono sulla particella sono il peso e la reazione vincolare; quest'ultima, essendo il vincolo liscio, è ortogonale alla traiettoria e non compie lavoro. L'energia potenziale della particella alla quota y è dunque

$$U = mgy.$$

Poiché vogliamo ottenere l'energia potenziale in funzione di x , occorre fare uso dell'equazione del vincolo che è la circonferenza con centro O , di coordinate $x = 0$ e $y = R$, quindi per una generica posizione (x, y) della particella si ha:

$$x^2 + (y - R)^2 = R^2, \quad \Rightarrow \quad y^2 - 2Ry + x^2 = 0;$$

da cui

$$y = R \pm \sqrt{R^2 - x^2} = R \left(1 \pm \sqrt{1 - (x/R)^2} \right).$$

Scegliendo nell'espressione ottenuta il segno negativo, il segno positivo porterebbe, per $x \ll R$, al risultato $y \approx 2R$, privo di significato, e sviluppando in serie di potenze la radice, si ottiene

$$y = R \left[1 - \left(1 - \frac{x^2}{2R^2} - \frac{x^4}{8R^4} - \dots \right) \right] = \frac{x^2}{2R} \left(1 + \frac{x^2}{4R^2} + \dots \right).$$

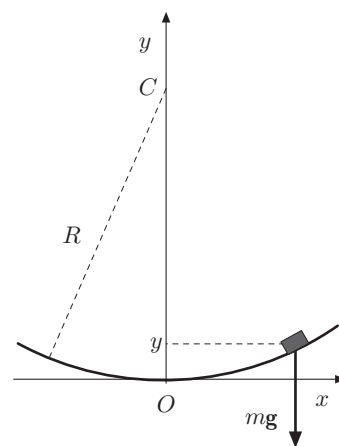


Fig. 8.20

Trascurando i termini di ordine superiore ad x^2 , si ha

$$y \approx \frac{x^2}{2R};$$

ne segue che l'energia potenziale della particella diventa

$$U = \frac{1}{2} \left(\frac{mg}{R} \right) x^2,$$

che è del tipo armonico. Al termine mg/R si riconosce il ruolo della costante k ; si conclude che, per le condizioni imposte, essendo y molto piccolo rispetto ad R , si può ritenere il moto come armonico sull'asse x . Infine essendo $k = m\omega^2$, come per il pendolo semplice, il periodo delle piccole oscillazioni è

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{R}{g}},$$

dove il raggio R della guida equivale alla lunghezza del pendolo.

- ||| 7. Un blocchetto di massa m e velocità iniziale nulla scivola lungo la guida $ABCD$, giacente su un piano verticale, la cui parte BCD è circolare di raggio R , figura 21. In assenza di attrito, determinare la minima quota h dalla quale deve essere abbandonato il blocchetto affinché raggiunga il punto più alto C della circonferenza, senza distaccarsene.

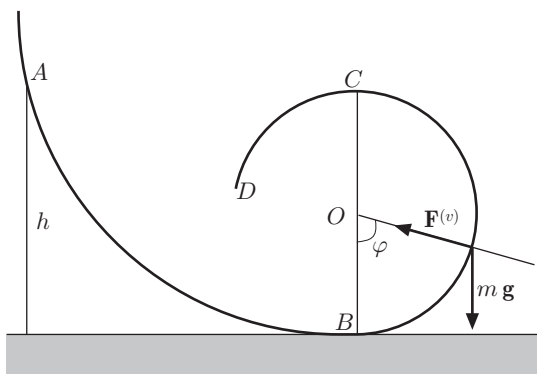


Fig. 8.21

Le forze alle quali è soggetto il blocchetto sono il peso mg e la reazione vincolare $\mathbf{F}^{(v)}$; quest'ultima, essendo il vincolo privo di attrito, è sempre ad esso ortogonale e non compie lavoro. Affinché il blocchetto non si distacchi dalla guida deve transitare in C con una velocità tale che $\mathbf{F}^{(v)} \geq 0$.

La reazione vincolare in un punto generico della circonferenza si ottiene proiettando nella direzione centripeta le forze agenti sul blocchetto. Fissando in B l'origine degli archi, si ha

$$mg + \mathbf{F}^{(v)} = m\mathbf{a},$$

che proiettata sul raggio, assumendo positivo il verso centripeto, dà

$$F^{(v)} - mg \cos \varphi = m \frac{v^2}{R}.$$

Poiché si vuole determinare l'altezza minima, in C è $F^{(v)} = 0$ ed essendo $\cos \varphi = \cos \pi = -1$, si ha

$$m \frac{v_0^2}{R} = mg, \quad \Rightarrow \quad v_0^2 = gR.$$

Infine, per la legge di conservazione dell'energia, si ottiene

$$mgh = 2mgR + \frac{1}{2}mv_0^2 = \frac{5}{2}mgR, \quad h = \frac{5}{2}R.$$

- ||| 8. Una particella si trova in equilibrio, nel punto A più alto di una guida circolare liscia di raggio R , disposta in un piano verticale. Una piccola perturbazione fa scivolare la particella lungo la guida dalla quale se ne distacca in un punto P , figura 22. Determinare la posizione di tale punto.

Le forze che agiscono sulla particella sono la reazione vincolare, ortogonale alla guida perché liscia, ed il peso. Durante il moto sulla guida la seconda equazione della dinamica si scrive

$$m\mathbf{g} + \mathbf{F}^{(v)} = m\mathbf{a}.$$

Al distacco $F^{(v)} = 0$ e proiettando nella direzione centripeta si ha

$$mg \cos \varphi = m \frac{v^2}{R}.$$

Indicando con h la differenza di quota tra A e P , $h = R(1 - \cos \varphi)$, per la conservazione dell'energia meccanica, possiamo scrivere

$$mgR(1 - \cos \varphi) = \frac{1}{2}mv^2, \quad \Rightarrow \quad v^2 = 2gR(1 - \cos \varphi),$$

che sostituita nella precedente permette di ricavare

$$\cos \varphi = \frac{2}{3}.$$

- ||| 9. Determinare la velocità iniziale necessaria da imprimere ad un grave che si trova sulla superficie terrestre, affinché possa sfuggire all'attrazione gravitazionale (velocità di fuga).

L'energia totale di un grave che ha velocità v , nel campo gravitazionale è

$$E = \frac{1}{2}mv^2 - G \frac{M_T m}{R_T},$$

dove M_T ed R_T sono rispettivamente la massa e il raggio della terra.

Supponiamo che il grave raggiunga con velocità nulla una distanza infinita dalla terra, dove l'energia potenziale è zero; allora l'energia totale E dev'essere nulla e tale deve rimanere per la legge di conservazione dell'energia; pertanto:

$$\frac{1}{2}mv^2 = G \frac{M_T m}{R_T}, \quad \Rightarrow \quad v = \sqrt{\frac{2GM_T}{R_T}}.$$

Essendo, alla superficie della terra $g = GM_T/R_T^2$, si ottiene

$$v_{min} = \sqrt{2gR_T}.$$

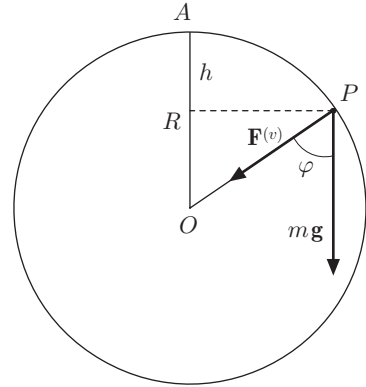


Fig. 8.22

||| 6. Lavoro delle forze non conservative

Oltre ad alcune categorie di forze posizionali, esistono forze che dipendono da grandezze diverse dalla posizione come, per esempio, la resistenza viscosa e la resistenza idraulica; queste forze non sono conservative. Infatti, il lavoro eseguito dalla forza, quando la particella si sposta dalla posizione iniziale A a quella finale B , dipende dalla velocità e non può essere espresso come funzione della posizione; pertanto non è possibile definire l'energia potenziale.

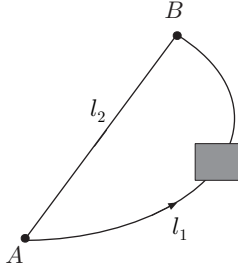


Fig. 8.23

Anche la forza di attrito cinetico non è conservativa anche se, in prima approssimazione, il suo modulo non dipende dalla velocità; la sua direzione, infatti, è sempre opposta al moto. Si capisce facilmente che il lavoro delle forze non conservative è sempre negativo, dipende dal percorso ed, in particolare, è diverso da zero lungo un percorso chiuso.

Consideriamo, figura 23, un corpo poggiato su una superficie orizzontale scabra; supponendo che la forza di attrito sia costante in modulo, spostiamo il corpo dalla posizione A alla posizione B , lungo la traiettoria l_1 . Essendo la forza d'attrito parallela in ogni punto allo spostamento elementare, il lavoro compiuto è

$$\mathcal{L}_{(1)} = - \int_A^B F_A ds_1 = F_A l_1.$$

Analogamente, spostando il corpo da A a B , lungo la traiettoria l_2 , il lavoro sarà

$$\mathcal{L}_{(2)} = - \int_A^B F_A ds_2 = F_A l_2.$$

Poichè si è supposto F_A costante, i lavori lungo le due traiettorie sono diversi e la forza non è conservativa.

Analogo ragionamento si può fare a proposito della resistenza viscosa o della resistenza idraulica. Ad esempio, consideriamo un natante soggetto a resistenza idraulica del tipo $\mathbf{F} = -\kappa_i v^2 \hat{\mathbf{v}}$ e supponiamo che segua una rotta rettilinea di lunghezza l . Il lavoro compiuto dalla forza di resistenza è

$$\mathcal{L} = -\kappa_i v^2 l,$$

che, fissato il percorso l , dipende chiaramente dalla velocità. Altra forza non conservativa è la forza muscolare che si esplica su un corpo mediante trazioni o compressioni.

Si supponga che sul punto materiale agiscano forze conservative e non conservative. Il teorema dell'energia cinetica permette di asserire che il lavoro di tutte le forze, conservative $L^{(c)}$ e non conservative $L^{(nc)}$, è uguale alla variazione di energia cinetica del punto:

$$\mathcal{L}^{(c)} + L^{(nc)} = T_B - T_A.$$

Poichè il lavoro delle forze conservative è

$$\mathcal{L}^{(c)} = U_A - U_B,$$

sostituendo nella precedente si ha

$$U_A - U_B + \mathcal{L}^{(nc)} = T_B - T_A,$$

da cui:

$$\mathcal{L}^{(nc)} = (U_B + T_B) - (U_A + T_A) = \Delta E, \quad (27)$$

Come prevedibile, il lavoro delle forze non conservative è uguale alla variazione dell'energia totale.

Esempi

- ||| 10. Un corpo viene spinto dalla base di un piano inclinato di un angolo θ rispetto all'orizzontale, con una velocità iniziale v_0 . Assegnato il coefficiente di attrito cinetico μ_c , determinare la massima quota h raggiunta.

Siamo in presenza di forze non conservative, forza d'attrito, il cui lavoro è sempre negativo; tale lavoro, indicando con l la lunghezza del piano inclinato, è

$$\mathcal{L}^{(nc)} = -mgl\mu_c \cos \theta = -mg\mu_c h \frac{\cos \theta}{\sin \theta}.$$

Per la (27) possiamo scrivere:

$$-mg\mu_c h \frac{\cos \theta}{\sin \theta} = mgh - \frac{1}{2}mv_0^2,$$

da cui:

$$h = \frac{v_0^2}{2g(1 - \mu_c \cos \theta / \sin \theta)}.$$

- ||| 11. Un blocchetto di massa m è vincolato a muoversi su una guida costituita da un arco di circonferenza di raggio R , disposta in un piano verticale, figura 24. Il blocchetto è abbandonato con velocità iniziale nulla da una posizione A , ad una quota h_0 rispetto al punto più basso della guida, e raggiunge la posizione B , di inversione del moto, ad una quota $h < h_0$. Determinare il modulo F_A della forza di attrito, supposto costante, e la velocità massima del blocchetto.

Considerando la figura, per la (27) si ha

$$-F_A R(\varphi_0 + \varphi) = mgh - mgh_0,$$

da cui

$$F_A = \frac{mg(h_0 - h)}{R(\varphi_0 + \varphi)} = \frac{mg(\cos \varphi - \cos \varphi_0)}{\varphi + \varphi_0}.$$

La velocità massima si ha in corrispondenza al punto più basso della guida; ancora per la (27), è

$$-F_A R\varphi_0 = \frac{1}{2}mv^2 - mgh_0,$$

da cui

$$v = \left[2gh_0 - 2\frac{F_A}{m}R\varphi_0 \right]^{1/2} = \left[2gR(1 - \cos \varphi_0) - 2\frac{F_A}{m}R\varphi_0 \right]^{1/2}.$$

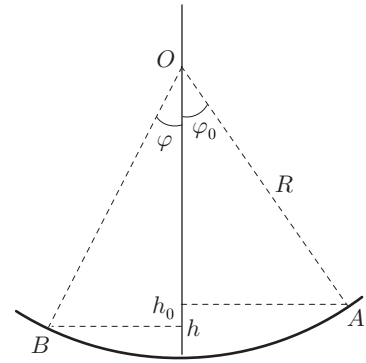


Fig. 8.24

||| 7. Studio dell'energia potenziale in una dimensione

Lo studio dell'andamento dell'energia potenziale in una dimensione è particolarmente semplice ma conduce a risultati generali di importanza fondamentale. Esemplificando, consideriamo l'energia potenziale di una particella, espressa da una relazione del tipo:

$$U(x) = x^2(1 + x)^2,$$

il cui andamento, come si può facilmente verificare, è mostrato in

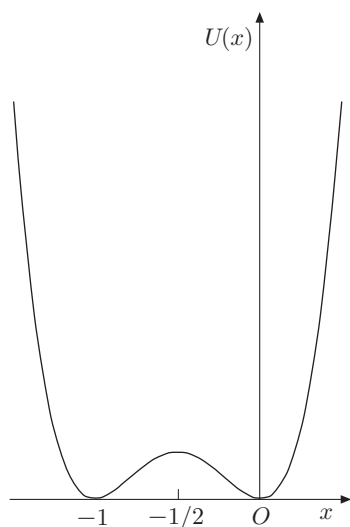


Fig. 8.25

figura 25. La curva è regolare e sempre positiva; i punti in cui la forza si annulla sono dati dai valori di x che annullano la derivata dU/dx ; ossia dai valori: $x_1 = 0$, $x_2 = -1/2$, $x_3 = -1$. Geometricamente, significa che in questi punti la curva ha tangente orizzontale, in corrispondenza ai valori di massimo, $d^2U/dx^2 < 0$, e di minimo, $d^2U/dx^2 > 0$. I minimi corrispondenti a $x_1 = 0$, $x_3 = -1$, rappresentano punti di equilibrio stabile; se la particella viene spostata leggermente a destra o a sinistra da tali punti, tende a ritornarvi. Il massimo corrispondente a $x_2 = -1/2$, rappresenta un punto di equilibrio instabile poiché, se la particella viene spostata leggermente verso destra è soggetta ad una forza positiva che tende a portarla nel punto $x_1 = 0$, mentre se viene spostata leggermente verso sinistra, la forza è negativa e tende a portarla nel punto $x_3 = -1$. Ancora: a destra del primo, la forza agente sulla particella è negativa, mentre a sinistra del secondo è positiva. In assenza di forze dissipative, come abbiamo supposto, l'energia totale $E = T + U$ si conserva e se la particella possiede una energia totale E_1 , oscillerà tra certe posizioni x_A ed x_B , punti di inversione del moto, con velocità data da

$$E_1 = \frac{1}{2}mv^2 + U(x), \quad \Rightarrow \quad v = \sqrt{\frac{2}{m}[E_1 - U(x)]}.$$

Le oscillazioni evidentemente non sono armoniche poiché l'energia potenziale non ha andamento parabolico.

Tuttavia possiamo chiederci sotto quali condizioni le oscillazioni si possono assumere come armoniche. Intuitivamente, se nell'intorno di un minimo fissiamo un intervallo δx , sufficientemente piccolo, possiamo ritenere che la curva, in quell'intorno, si adatti ad un arco di parabola; pertanto le piccole oscillazioni possono essere considerate armoniche.

In generale, prendiamo in esame l'energia potenziale di una particella che presenta un minimo in corrispondenza a $x = x_0$, figura 26. Se l'energia totale è E_1 , la particella è *legata*, ovvero si trova in una *buca di potenziale*, e nel suo moto non può oltrepassare i punti x_A ed x_B , punti di inversione del moto; le oscillazioni, in genere, non sono armoniche.

Come è noto dall'Analisi, una funzione regolare e derivabile nell'intorno di un punto x_0 , può essere espressa mediante uno sviluppo in serie di Taylor; pertanto l'energia potenziale sarà:

$$U(x) = U(x_0) + \left(\frac{dU}{dx}\right)_{x_0} \delta x + \left(\frac{d^2U}{dx^2}\right)_{x_0} \frac{(\delta x)^2}{2!} + \dots,$$

dove $\delta x = x - x_0$. Pertanto, se x_0 è il punto di equilibrio

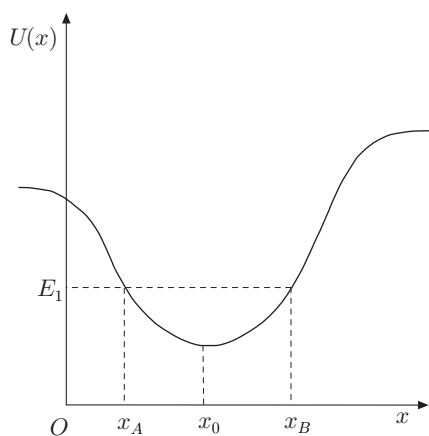


Fig. 8.26

$(dU/dx)_{x_0} = 0$, si ha

$$U(x) = U(x_0) + \left(\frac{d^2U}{dx^2} \right)_{x_0} \frac{(\delta x)^2}{2!} + \dots$$

Scegliendo l'intervallo δx sufficientemente piccolo è lecito trascurare, nella precedente i termini di ordine superiore al secondo; inoltre il fattore $(d^2U/dx^2)_{x_0}$, nel minimo, è una costante positiva che indichiamo con k ; dunque si ottiene

$$U(x) = U(x_0) + \frac{1}{2}k(x - x_0)^2,$$

che è l'energia potenziale di un oscillatore armonico, al quale è attribuito un certo valore $U(x_0)$ di riferimento dell'energia potenziale.

Nel caso si consideri un intorno di $x_0 = 0$, la funzione può essere approssimata con uno sviluppo in serie di MacLaurin; l'energia potenziale si scrive

$$U(x) = U(0) + \left(\frac{dU}{dx} \right)_0 + \left(\frac{d^2U}{dx^2} \right)_0 \frac{x^2}{2!} + \dots$$

Ritorniamo all'energia potenziale considerata prima; sviluppando in serie di potenze e tenendo conto che $U(0) = 0$, $(dU/dx)_0 = 0$, si ha

$$U(x) = x^2 + 2x^3 + \dots$$

Limitandoci a piccoli valori di x , tali da potere trascurare le potenze superiori alla seconda, la precedente si può approssimare a

$$U(x) = x^2,$$

che è una parabola ad asse verticale e vertice nell'origine, le oscillazioni sono armoniche, di costante $k = 2$. Lo stesso procedimento si può adottare nell'altro punto di minimo.

7.1. Energia di mutua interazione tra due particelle

L'energia potenziale di interazione tra due particelle, siano esse due molecole o due atomi di una molecola, è descritta molto bene dall'espressione

$$U(r) = U_0 \left[\left(\frac{r_0}{r} \right)^{12} - 2 \left(\frac{r_0}{r} \right)^6 \right], \quad (28)$$

dove r è la mutua distanza tra le particelle ed r_0 la distanza di equilibrio. Il grafico della (28), nota come potenziale di Lennard-Jones è mostrato in figura 27; U_0 ed r_0 dipendono dalla struttura delle molecole interagenti.

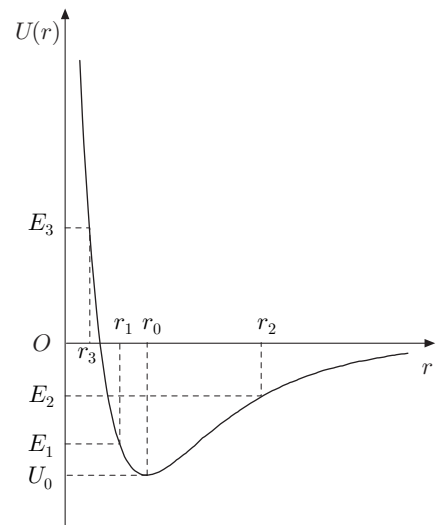


Fig. 8.27

Nel punto r_0 si ha un minimo dell'energia potenziale, poiché la derivata

$$\frac{dU}{dr} = U_0 \left[12 \frac{r_0^6}{r^7} - 12 \frac{r_0^{12}}{r^{13}} \right]$$

si annulla per $r = r_0$. Questo punto corrisponde alla distanza di equilibrio delle molecole dove $F = -dU/dr = 0$. A sinistra di r_0 la forza è repulsiva e cresce molto rapidamente al diminuire di r (derivata negativa, forza positiva). A destra la forza è attrattiva e diminuisce al crescere di r (derivata positiva, forza negativa).

Supponiamo, come è indicato in figura, che l'energia totale sia E_1 ; le molecole oscilleranno intorno alla posizione di equilibrio come due masse collegate ad una molla. Siccome gli spostamenti sono piccoli e la curva, nell'intorno di r_0 , può essere approssimata ad un arco di parabola, le oscillazioni possono essere ritenute armoniche.

La derivata seconda della (28) è

$$\frac{d^2U}{dr^2} = U_0 \left[156 \frac{r_0^{12}}{r^{14}} - 84 \frac{r_0^6}{r^8} \right],$$

che per $r = r_0$ dà

$$\left(\frac{d^2U}{dr^2} \right)_{r=r_0} = 72 \frac{U_0}{r_0^2}.$$

Pertanto $k = 72U_0/r_0^2$ e le oscillazioni hanno pulsazione $\omega = k/\mu$, dove μ è la massa ridotta, che definiremo al paragrafo 9.1-XII.

Se l'energia totale è E_2 , il moto sarà ancora oscillatorio ma, ovviamente, non armonico; i punti r_1 ed r_2 , punti di inversione del moto, non sono simmetrici rispetto a r_0 . Quando l'energia è $E_3 > 0$ le molecole non sono legate; esse possono recarsi fino al punto r_3 di massimo avvicinamento per poi allontanarsene indefinitamente. C'è da notare che, nella posizione di equilibrio, le molecole non sono mai in quiete a causa dell'energia termica posseduta ma, se questa non è molto elevata come ordinariamente avviene, si può ritenere che le oscillazioni, con buona approssimazione, siano armoniche. Si deduce che quando energia viene ceduta dall'esterno, il sistema passa a valori di energia crescenti, finché le particelle non si separano. Dal grafico si osserva che l'energia minima occorrente, che si chiama *energia di legame* o di dissociazione, è proprio pari all'energia U_0 , corrispondente alla distanza di equilibrio r_0 ; in realtà è leggermente minore perché le particelle, a causa dell'agitazione termica, oscillano con un'energia totale un poco più alta dell'energia potenziale minima.

La figura 28 riporta il grafico della forza in funzione di r ; essa si annulla in corrispondenza della distanza di equilibrio ed è importante osservare che in un intorno di r_0 sufficientemente piccolo, la forza ha un andamento lineare come accade per l'oscillatore armonico, ($F = -kr$).

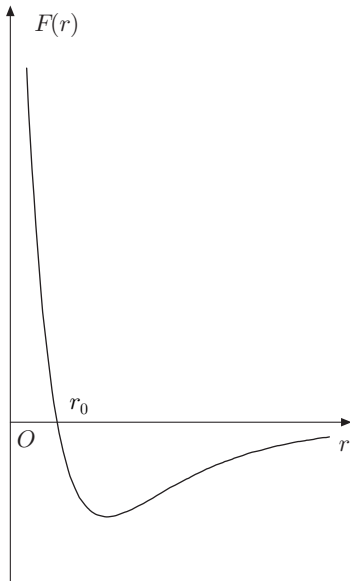


Fig. 8.28

Esempi

- ||| 12. L'energia potenziale di una particella di massa m , in funzione della posizione x , è data dall'espressione

$$U(x) = Ax^2 - U_0.$$

Supponendo che per $U = 0$, $v = v_0 = 0$, descrivere il moto della particella e determinare la sua velocità massima.

L'energia potenziale ha andamento parabolico, figura 29, quindi il moto è armonico; infatti la forza $F = -dU/dx = -2Ax$ è di tipo elastico. Ponendo $U = 0$ si trova che le oscillazioni avvengono con centro in $x = 0$ ed ampiezza

$$x_{1,2} = \pm \sqrt{\frac{U_0}{A}}.$$

Infatti in questi due punti $v = v_0 = 0$, quindi essi corrispondono a punti di inversione del moto. Si deduce che l'energia meccanica, costante, è uguale a zero. Pertanto

$$T + U = \frac{1}{2}mv^2 + Ax^2 - U_0 = 0,$$

da cui:

$$v = \sqrt{\frac{2}{m}(U_0 - Ax^2)}, \quad \Rightarrow \quad v_{max} = \sqrt{2\frac{U_0}{m}}.$$

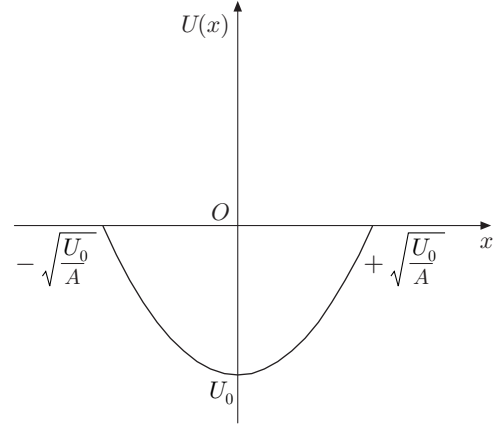


Fig. 8.29

- ||| 13. L'energia potenziale di una particella in funzione della posizione x , è data da

$$U(x) = -U_0 \cos \frac{\pi x}{l},$$

definita per $-l \leq x \leq l$, con U_0 ed l assegnati. Determinare i punti di equilibrio, l'energia cinetica, l'energia di legame E_{min} ed i punti di inversione del moto, supponendo che nel punto di equilibrio stabile l'energia totale sia $E = -U_0/2$.

L'andamento di $U(x)$, figura 30, non è armonico. I punti di equilibrio sono dati dai valori di x che soddisfano la relazione

$$F = -\frac{dU}{dx} = -U_0 \frac{\pi}{l} \sin \frac{\pi x}{l} = 0,$$

cioè $x = nl$; ($n = 0, \pm 1$). Il solo punto di equilibrio stabile si ha per $n = 0$. In corrispondenza si ha $U(x) = -U_0$, quindi l'energia totale è

$$E = T + U = T - U_0 = -\frac{1}{2}U_0, \quad \Rightarrow \quad T = \frac{1}{2}U_0.$$

Ciò significa che in fondo alla buca di potenziale l'energia della particella è tutta cinetica. L'energia di legame è data da

$$E_{min} = 2U_0 - \frac{1}{2}U_0 = \frac{3}{2}U_0.$$

Nei punti di inversione del moto si ha $T = 0$ ed $U = -U_0/2$, pertanto

$$-\frac{1}{2}U_0 = -U_0 \cos \frac{\pi x}{l}, \quad \Rightarrow \quad \frac{\pi x}{l} = \pm \frac{\pi}{3}, \quad \Rightarrow \quad x = \pm \frac{l}{3}.$$

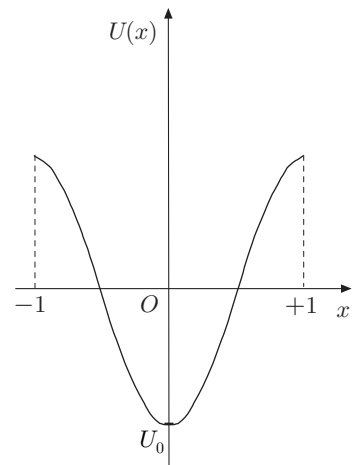


Fig. 8.30

8. Integrali del moto

La legge di conservazione dell'energia permette molte volte di determinare l'equazione del moto. Supponendo che il punto materiale abbia un solo grado di libertà, cioè si muova lungo un asse o una linea e l'energia potenziale possa essere espressa in funzione di una sola coordinata, l'ascissa x dell'asse o la coordinata curvilinea s della traiettoria, possiamo scrivere

$$E = \frac{1}{2}mv^2 + U(x),$$

da cui

$$v = \frac{dx}{dt} = \sqrt{\frac{2}{m}[E - U(x)]}, \quad (29)$$

la quale mostra che il moto della particella può avvenire solo nell'intervallo in cui l'energia potenziale è minore dell'energia totale, altrimenti la velocità sarebbe immaginaria.

Dalla (29), separando le variabili, si ottiene l'equazione differenziale:

$$\frac{dx}{\sqrt{(2/m)[E - U(x)]}} = dt, \quad (30)$$

da cui, nota l'energia potenziale ed integrando, si può ricavare l'equazione del moto $x(t)$. Si ha dunque il vantaggio di risolvere una equazione differenziale del primo ordine piuttosto che del secondo, come impone la seconda legge della dinamica.

Esempi

14. Moto di una particella soggetta a forza costante

Poiché la forza è costante ammette energia potenziale. Orientato l'asse x nella direzione di \mathbf{F} e assegnate le condizioni iniziali: $t = 0$, $x = 0$, $U = 0$, si ha:

$$F = -\frac{dU}{dx}, \quad \Rightarrow \quad U = -\int F dx = -Fx + C.$$

Tenendo conto delle condizioni iniziali, la costante di integrazione $C = 0$; quindi $U(x) = -Fx$. Per la (29) si ha

$$\int \frac{dx}{\sqrt{(2/m)[E + Fx]}} = \int dt.$$

Integrando

$$\frac{2}{F}\sqrt{E + Fx} = \sqrt{\frac{2}{m}}t + C_1,$$

dove $C_1 = (2/F)E^{1/2}$; pertanto:

$$\frac{2}{F}\sqrt{E + Fx} - \frac{2}{F}\sqrt{E} = \sqrt{\frac{2}{m}}t.$$

Ricavando x , si ottiene

$$x = \frac{1}{2}\frac{F}{m}t^2 + \sqrt{\frac{2E}{m}}t.$$

Poiché, per le condizioni iniziali assegnate ($t = 0, x = 0$), l'energia totale

$$E = T + U = \frac{1}{2}mv^2 - Fx,$$

risulta tutta cinetica, $E = mv_0^2/2$, sostituendo nella precedente si ottiene

$$x = \frac{1}{2}at^2 + v_0t,$$

equazione oraria del moto rettilineo con accelerazione costante.

||| 15. *Oscillatore armonico*

Dalla conservazione dell'energia

$$\frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}kA^2,$$

si ottiene

$$v = \frac{dx}{dt} = \sqrt{\frac{k}{m}(A^2 - x^2)} = \omega\sqrt{A^2 - x^2}.$$

Separando le variabili

$$\frac{dx}{\sqrt{A^2 - x^2}} = \omega dt,$$

ed integrando

$$\sin^{-1} \frac{x}{A} = \omega t + \varphi;$$

infine:

$$x = A \sin(\omega t + \varphi).$$

.....

9. Teoremi dinamici

1. Impulso

Si definisce impulso elementare $d\mathbf{J}$ di una forza \mathbf{F} la grandezza:

$$d\mathbf{J} = \mathbf{F}dt. \quad (1)$$

Se la forza è costante, l'impulso finito nell'intervallo di tempo Δt è

$$\mathbf{J} = \mathbf{F}\Delta t. \quad (2)$$

Se la forza è funzione del tempo, l'impulso nell'intervallo di tempo $\Delta t = t_2 - t_1$ è

$$\mathbf{J} = \int_{t_1}^{t_2} \mathbf{F}(t)dt. \quad (3)$$

Nel *SI* l'impulso di una forza si misura in newton per secondo ($N \cdot s$) e si definisce come impulso della forza costante di un newton per il tempo di un secondo; esso ha le stesse dimensioni della quantità di moto.

Moltiplicando ambo i membri dell'equazione fondamentale della dinamica per dt , si ha

$$\mathbf{F}dt = m\mathbf{a}dt = m\frac{d\mathbf{v}}{dt}dt = d(m\mathbf{v}) = d\mathbf{p}.$$

L'impulso elementare è uguale alla variazione infinitesima della quantità di moto essendo, nell'ambito della meccanica classica, la massa invariante. Dalla precedente si deduce che l'impulso finito, in un certo intervallo di tempo, è dato da

$$\mathbf{J} = \int_{t_1}^{t_2} \mathbf{F}dt = \int_{t_1}^{t_2} d\mathbf{p} = \Delta\mathbf{p}. \quad (4)$$

La precedente esprime il teorema dell'impulso:

L'impulso della forza agente su un punto materiale in un certo intervallo di tempo, è uguale alla variazione della quantità di moto del punto materiale nello stesso intervallo di tempo.

Il teorema dell'impulso può dare un contributo alla soluzione di problemi di dinamica quando la forza agente sul punto materiale è funzione solo del tempo. La variazione della quantità di

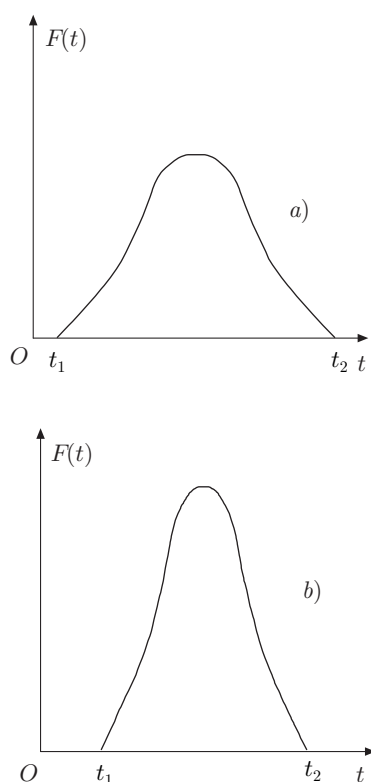


Fig. 9.1

moto del punto materiale viene ottenuta integrando la (4), senza risolvere l'equazione differenziale del moto.

Molto spesso, come nei problemi d'urto, non è nota l'esatta espressione di $F(t)$ o l'intervallo di tempo durante il quale essa agisce ma, viceversa, è noto l'effetto integrato della forza, cioè la variazione della quantità di moto, espressa dalla (4). Si noti che una certa variazione di quantità di moto può essere determinata da una forza molto intensa, che agisce per un breve intervallo di tempo, oppure da una forza meno intensa che agisce per un intervallo di tempo più lungo. Per esempio, la stecca che colpisce una palla da biliardo produce una forza molto intensa in un intervallo di tempo molto breve, determinando una certa variazione di quantità di moto della palla. Viceversa, una forza come la gravità, per produrre la stessa variazione, deve agire per un tempo notevolmente più lungo. In figura 1 sono mostrati qualitativamente due grafici della forza che agisce durante l'urto tra due corpi, in funzione del tempo. La variazione della quantità di moto è la stessa, valore numerico dell'area racchiusa dalla curva e l'asse dei tempi; nel caso (a) l'urto avviene in un tempo più lungo e la forza ha intensità massima minore rispetto al caso (b), in cui l'intervallo di tempo è più breve.

Dal teorema dell'impulso segue che se la risultante delle forze agenti sul punto materiale è nulla, si ha

$$\mathbf{p} = \text{cost},$$

relazione che esprime il teorema della conservazione della quantità di moto:

La quantità di moto di un punto materiale è costante se è nulla la risultante delle forze agenti su esso.

Questo teorema si può dedurre direttamente dalla legge fondamentale della dinamica $\mathbf{F} = d\mathbf{p}/dt$, ponendo $\mathbf{F} = 0$ (legge di inerzia). Si osservi ancora che se la forza agente sul punto materiale è ortogonale ad una certa retta, la componente della quantità di moto lungo tale retta è costante; in particolare la retta può essere coincidente con uno degli assi della terna di riferimento.

Esempi

- III 1. Il battipalo è una macchina che serve a conficcare pali nel terreno facendo cadere pressoché liberamente il maglio sul palo. Supponendo che il maglio abbia una massa di 1000 kg e cada dall'altezza $h = 10 \text{ m}$, determinare la forza agente sul palo, assumendo che l'impulso venga trasmesso in 10^{-2} s .

La velocità con cui il maglio giunge sul palo è

$$v = \sqrt{2gh} = 14 \text{ m/s}$$

e la corrispondente quantità di moto:

$$p_1 = mv = 1,4 \cdot 10^4 \text{ kg} \cdot \text{m/s}.$$

Dopo l'urto il maglio in pratica si ferma; la quantità di moto è $p_2 \approx 0$. La variazione della quantità di moto risulta $\Delta p = p_1$; pertanto l'impulso è dato da

$$J = \Delta p = 1,4 \cdot 10^4 \text{ N} \cdot \text{s}.$$

La forza corrispondente è

$$F = \frac{J}{\Delta t} = 1,4 \cdot 10^6 \text{ N}.$$

Se invece di impiegare il battipalo si poggiasse semplicemente una massa sul palo, il suo valore dovrebbe essere circa 140 tonnellate.

- ||| **2.** Una palla di 100 grammi cade da un'altezza $h = 2 \text{ m}$, con velocità iniziale nulla e, dopo l'urto col pavimento, supponendo l'urto perfettamente elastico, rimbalza verso l'alto, raggiungendo la stessa quota di partenza. Determinare l'impulso impresso alla palla dalla forza di gravità e quello nell'urto col pavimento.

La velocità con cui la palla tocca il pavimento è $v = \sqrt{2gh}$, pertanto il modulo dell'impulso dovuto alla gravità è

$$J = \Delta p = mv - 0 = m\sqrt{2gh} = 0,626 \text{ N} \cdot \text{s}.$$

Poiché è nota sia la forza che l'intervallo di tempo, $t_1 = 0$, $t_2 = v/g = 0,639 \text{ s}$, è possibile calcolare l'impulso mediante la (3); infatti:

$$J = \int_{t_1}^{t_2} mg dt = mg(t_2 - 0) = 0,626 \text{ N} \cdot \text{s},$$

risultato identico al precedente.

L'impulso impresso alla palla durante il rimbalzo è

$$\mathbf{J} = \Delta \mathbf{p} = m\mathbf{v}_2 - m\mathbf{v}_1,$$

dove \mathbf{v}_1 è la velocità con cui la palla raggiunge il pavimento e \mathbf{v}_2 la velocità con cui essa rimbalza. Poiché i moduli di tali velocità sono uguali, urto elastico, il modulo dell'impulso risulta

$$J = \Delta p = mv - (-mv) = 2mv = 2m\sqrt{2gh} = 1,25 \text{ N} \cdot \text{s}.$$

Confrontando questo valore con quello relativo alla caduta libera, e tenendo conto che l'urto con il pavimento avviene in un tempo molto breve, si conclude che la forza agente durante l'urto, è maggiore della forza di gravità, che agisce nella caduta libera. Se l'intervallo di tempo durante il quale avviene l'urto potesse essere misurato, potremmo ricavare l'intensità della forza. Supponendo che $\Delta t = 10^{-2} \text{ s}$, risulta

$$F = \frac{J}{\Delta t} = 1,25 \cdot 10^2 \text{ N},$$

maggiore di un fattore 1000 della forza di gravità.

.....

||| 2. Momento di una forza

Si definisce momento \mathbf{M} di una forza rispetto ad un polo O la grandezza:

$$\mathbf{M} = \mathbf{r} \times \mathbf{F}, \quad (5)$$

dove \mathbf{r} è il vettore che individua il punto di applicazione della forza rispetto al polo O . Il momento di una forza gode di tutte le proprietà del prodotto vettoriale; inoltre non muta spostando la forza lungo la sua retta d'azione, né assumendo un qualsiasi

altro polo su una retta parallela alla retta d'azione della forza. Le componenti cartesiane del momento sono:

$$M_x = yF_z - zF_y, \quad M_y = zF_x - xF_z, \quad M_z = xF_y - yF_x.$$

Nel *SI* il momento di una forza si misura in newton per metro ($N \cdot m$).

II 2.1. Momento di più forze applicate ad un punto (forze concorrenti)

Se più forze sono applicate ad un punto, cioè sono concorrenti, la forza agente sul punto è la risultante delle forze:

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 + \cdots + \mathbf{F}_n.$$

Il momento risultante delle forze rispetto ad un polo O , è ovviamente uguale alla somma dei momenti delle singole forze, valutati rispetto allo stesso polo:

$$\mathbf{M} = \mathbf{r} \times \mathbf{F}_1 + \mathbf{r} \times \mathbf{F}_2 + \cdots + \mathbf{r} \times \mathbf{F}_n;$$

ma per la proprietà distributiva del prodotto vettoriale si ha

$$\mathbf{M} = \mathbf{r} \times (\mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 + \cdots + \mathbf{F}_n) = \mathbf{r} \times \mathbf{F}.$$

Ciò significa che, nel caso di forze concorrenti, *il momento risultante è uguale al momento della risultante delle forze*. In altri termini un sistema di forze concorrenti può essere sostituito da una singola forza: la risultante.

III 3. Momento angolare (momento della quantità di moto)

Si definisce momento angolare \mathbf{L} , rispetto ad un polo O , la grandezza:

$$\mathbf{L} = \mathbf{r} \times \mathbf{p}; \quad (6)$$

dove \mathbf{r} è il vettore che individua il punto rispetto al polo. Il momento angolare gode delle proprietà del prodotto vettoriale. Nel *SI* il momento angolare si misura in $J \cdot s$ oppure in $m^2 \cdot kg \cdot s^{-1}$. Le componenti cartesiane del momento angolare risultano

$$L_x = m(x\dot{z} - z\dot{x}), \quad L_y = m(z\dot{x} - x\dot{z}), \quad L_z = m(x\dot{y} - y\dot{x}).$$

Si osservi che il vettore quantità di moto \mathbf{p} può essere scomposto in un componente radiale \mathbf{p}_r , avente la direzione di \mathbf{r} , ed in un componente trasversale \mathbf{p}_θ normale ad \mathbf{r} , perciò si ha

$$\mathbf{L} = \mathbf{r} \times (\mathbf{p}_r + \mathbf{p}_\theta) = \mathbf{r} \times \mathbf{p}_\theta. \quad (7)$$

Nella definizione di momento angolare è efficace solo il componente trasversale della quantità di moto.

Una relazione molto semplice sussiste tra momento angolare e velocità areolare; ricordando che quest'ultima è definita da

$$\frac{d\mathbf{S}}{dt} = \frac{1}{2}(\mathbf{r} \times \mathbf{v}),$$

si ottiene immediatamente

$$\mathbf{L} = 2m \frac{d\mathbf{S}}{dt}, \quad \Rightarrow \quad \frac{d\mathbf{S}}{dt} = \frac{\mathbf{L}}{2m}. \quad (8)$$

Velocità areolare e momento angolare sono vettori equiversi.

Il momento angolare è una grandezza fondamentale della dinamica in quanto rappresenta l'analogo rotazionale della quantità di moto. In figura 2 è mostrato il momento angolare, rispetto ad un polo O , di un punto materiale che percorre una traiettoria circolare di raggio R , attorno ad un asse di rotazione fisso, coincidente con l'asse z del riferimento. La componente L_z del momento angolare, secondo l'asse z è

$$L_z = L \sin \theta = mvr \sin \theta;$$

essendo $r \sin \theta = R$ e $v = \omega R$, si ottiene

$$L_z = mR^2\omega.$$

La velocità areolare, in conformità con la 22-III, risulta

$$\frac{dS}{dt} = \frac{L_z}{2m} = \frac{1}{2}R^2\omega = \frac{1}{2}R^2\dot{\theta}.$$

3.1. Teorema del momento angolare

Nel riferimento inerziale di figura 3 si consideri il momento della forza \mathbf{F} applicata ad un punto, rispetto ad un polo Q :

$$\mathbf{M} = (\mathbf{r} - \mathbf{r}_Q) \times \mathbf{F} = (\mathbf{r} - \mathbf{r}_Q) \times \frac{d\mathbf{p}}{dt},$$

ed il momento angolare del punto materiale rispetto allo *stesso* polo,

$$\mathbf{L} = (\mathbf{r} - \mathbf{r}_Q) \times \mathbf{p}.$$

Derivando rispetto al tempo, si ha

$$\frac{d\mathbf{L}}{dt} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} \times \mathbf{p} - \frac{d\mathbf{r}_Q}{dt} \times \mathbf{p} + (\mathbf{r} - \mathbf{r}_Q) \times \frac{d\mathbf{p}}{dt},$$

ed osservando che il primo termine del secondo membro è nullo, perché i due vettori sono paralleli, si ha

$$\frac{d\mathbf{L}}{dt} = -\mathbf{v}_Q \times \mathbf{p} + \mathbf{M}.$$

Da quest'ultima relazione si ottiene:

$$\mathbf{M} = \frac{d\mathbf{L}}{dt} + \mathbf{v}_Q \times \mathbf{p}. \quad (9)$$

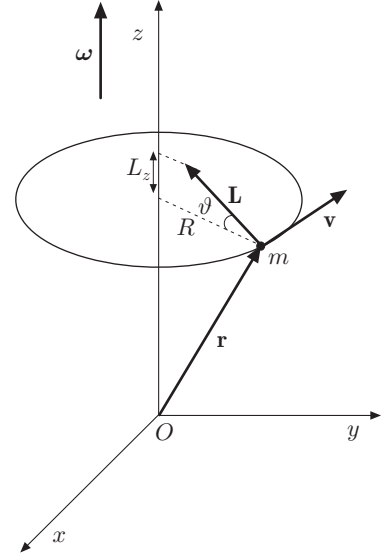


Fig. 9.2

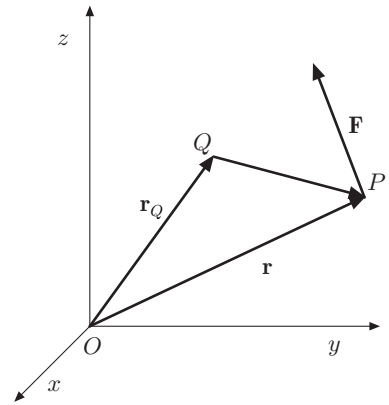


Fig. 9.3

Se il polo Q è fisso o la velocità di quest'ultimo è parallela a \mathbf{p} :

$$\mathbf{M} = \frac{d\mathbf{L}}{dt}. \quad (10)$$

Le equazioni (9) e (10) sono le analoghe della legge fondamentale della dinamica relativamente alle rotazioni ed esprimono il teorema del momento angolare:

In un riferimento inerziale il momento risultante delle forze agenti sul punto materiale, rispetto ad un polo Q , è uguale alla derivata del momento angolare rispetto al tempo, essendo questo determinato rispetto allo stesso polo, più il prodotto vettoriale tra la velocità del polo e la quantità di moto.

In analogia alle (1) e (2), definiamo *impulso angolare* elementare la quantità:

$$d\mathbf{J}_\theta = \mathbf{M}dt. \quad (11)$$

Poiché dalla (10) $\mathbf{M}dt = d\mathbf{L}$, si ha

$$d\mathbf{J}_\theta = d\mathbf{L}. \quad (12)$$

Se \mathbf{M} dipende solo dal tempo, l'impulso angolare nell'intervallo di tempo $\Delta t = t_2 - t_1$, è dato da

$$\mathbf{J}_\theta = \int_{t_1}^{t_2} \mathbf{M}dt = \int_{t_1}^{t_2} d\mathbf{L} = \Delta\mathbf{L}.$$

Se, in un riferimento inerziale, il momento della risultante delle forze agenti sul punto è nullo, e ciò si verifica quando $\mathbf{F} = 0$, sistema isolato, oppure se \mathbf{F} è diretta come \mathbf{r} , si ha

$$\frac{d\mathbf{L}}{dt} = 0, \quad \Rightarrow \quad \mathbf{L} = \text{cost}, \quad (13)$$

relazione che esprime la *conservazione del momento angolare*. Il moto si svolge in un piano ortogonale a \mathbf{L} . Il momento angolare si conserva, per esempio, nei campi di forza centrali se si assume come polo il centro delle forze.

In coordinate cartesiane, assumendo un riferimento con origine nel polo O e asse z ortogonale al piano del moto, le componenti del momento angolare risultano

$$L_x = 0, \quad L_y = 0, \quad L_z = m(xy\dot{y} - y\dot{x}). \quad (14)$$

L'unica componente del momento angolare è quella lungo l'asse z . Le (14) verificano il legame con la velocità areolare.

|| 3.2. Moti piani

In fondo al paragrafo 3 è stata evidenziata la relazione esistente tra momento angolare e velocità angolare. Nei moti piani,

ricordando la (7) e tenendo presente che il modulo della velocità trasversale è dato da

$$v_\theta = r \frac{d\theta}{dt},$$

si ha:

$$\mathbf{L} = \mathbf{r} \times \mathbf{p}_\theta = mr^2 \frac{d\theta}{dt} \mathbf{k} = mr^2 \boldsymbol{\omega}.$$

Definendo momento di inerzia del punto materiale rispetto all'asse passante per il polo O , la quantità $I = mr^2$, si ottiene

$$\mathbf{L} = I\boldsymbol{\omega}. \quad (15)$$

In un moto piano momento angolare e velocità angolare sono paralleli e ortogonali al piano del moto.

Si colga l'analogia che esiste tra la quantità di moto \mathbf{p} , grandezza che si riferisce alla traslazione, definita dal prodotto della massa per la velocità, ed il momento angolare definito dal prodotto tra il momento di inerzia e la velocità angolare.

Nei moti piani momento delle forze e momento angolare sono ortogonali al piano del moto ma possono avere direzioni opposte. Fissato un riferimento con origine nel polo e asse z ortogonale al piano, derivando rispetto al tempo la (14), si ha

$$\frac{dL_z}{dt} = m(\dot{x}\dot{y} + x\ddot{y} - \dot{y}\dot{x} - y\ddot{x}) = x(m\ddot{y}) - y(m\ddot{x}).$$

Poiché per la seconda legge della dinamica:

$$m\ddot{x} = F_x, \quad m\ddot{y} = F_y,$$

si ottiene

$$\frac{dL_z}{dt} = xF_y - yF_x,$$

che è proprio la componente secondo l'asse z del momento della forza, equazione (10). Inoltre dalla (15) si deduce:

$$M_z = I \frac{d\omega}{dt} = I\alpha,$$

dove α è l'accelerazione angolare; il momento della forza determina una accelerazione angolare. Nel moto circolare uniforme è ovviamente $M_z = 0$ e $L = \text{cost}$.

Per quanto riguarda l'energia cinetica $T = mv^2/2$, essendo $v = \omega r$, si ha

$$T = \frac{1}{2} m \omega^2 r^2 = \frac{1}{2} (mr^2) \omega^2 = \frac{1}{2} I \omega^2, \quad (16)$$

e, per la (15):

$$T = \frac{1}{2} L \omega. \quad (17)$$

Più in generale, qualora il moto non fosse piano,

$$T = \frac{1}{2} \mathbf{L} \cdot \boldsymbol{\omega}.$$

Questa espressione verrà considerata in seguito, a proposito dell'energia cinetica dei sistemi rigidi.

Esempi

- ||| 3. Momento angolare della Terra rispetto al Sole e dell'elettrone di un atomo di idrogeno rispetto al nucleo. Si supponga, in entrambi i casi, che le orbite siano circolari.

Poiché le forze sono centrali, il momento angolare è costante. Per la Terra si assuma: massa $M_T = 5,98 \cdot 10^{24} \text{ kg}$, distanza media dal Sole $r = 1,49 \cdot 10^{11} \text{ m}$, periodo di rivoluzione $T = 3,16 \cdot 10^7 \text{ s}$.

Essendo $\omega = 2\pi/T = 1,98 \cdot 10^{-7} \text{ rad/s}$, si ha

$$L_T = M_T r^2 \omega = 2,67 \cdot 10^{40} \text{ J} \cdot \text{s}.$$

Per l'elettrone: massa $m_e = 9,11 \cdot 10^{-31} \text{ kg}$, distanza media dal nucleo $r_e = 5,29 \cdot 10^{-11} \text{ m}$, velocità angolare $\omega = 4,13 \cdot 10^{16} \text{ rad/s}$; si ha

$$L_e = m r_e^2 \omega = 1,05 \cdot 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s}.$$

Si noti l'enorme diversità degli ordini di grandezza. Il momento angolare dell'elettrone costituisce una delle costanti fondamentali della fisica; infatti esso è numericamente uguale a $\hbar = h/2\pi$, dove h è la costante di Planck.

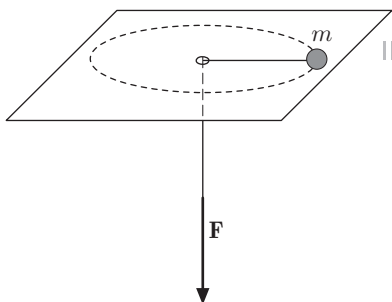


Fig. 9.4

- ||| 4. Una massa m , fissata ad un estremo di un filo, ruota su una superficie orizzontale priva di attrito come in figura 4. All'altro estremo del filo, che passa attraverso un foro, praticato nel piano in corrispondenza al centro della traiettoria, è applicata una forza che trascina il filo con velocità costante. Determinare l'espressione della forza ed il lavoro compiuto quando il raggio della traiettoria si riduce da r_0 a r_1 .

La forza è centrale ed essendo il suo momento rispetto ad O nullo, il momento angolare della massa si conserva:

$$L = m r_0^2 \omega_0 = m r^2 \omega.$$

Poiché il filo è trascinato con velocità costante, la forza è quella centripeta

$$F = m \omega^2 r,$$

che, tenendo conto dell'espressione del momento angolare, diventa

$$F = m \frac{r_0^4 \omega_0^2}{r^3} = m \frac{r^4 \omega^2}{r^3} = \frac{L^2}{m} \frac{1}{r^3}.$$

Il lavoro per ridurre il raggio della traiettoria da r_0 a r_1 è

$$\mathcal{L} = \frac{L^2}{2m} \left(\frac{1}{r_1^2} - \frac{1}{r_0^2} \right),$$

che si può scrivere

$$\mathcal{L} = \frac{L^2}{2m} \frac{1}{r_0^2} \left[\left(\frac{r_0}{r_1} \right)^2 - 1 \right] = \frac{1}{2} m v_0^2 \left[\left(\frac{r_0}{r_1} \right)^2 - 1 \right].$$

L'energia cinetica della massa è aumentata; si può dire che il momento angolare si comporta in maniera analoga ad una energia potenziale repulsiva. Per portare una particella in rotazione da una certa distanza a una distanza minore, deve essere compiuto lavoro esterno.

- III 5. Una massa puntiforme m , legata all'estremo di un filo inestendibile di lunghezza l_0 , si può muovere su un piano orizzontale privo di attrito. L'altro estremo del filo è fissato al bordo di un perno cilindrico fisso, di raggio R , ortogonale al piano del moto, figura 5. Alla massa è impressa una velocità iniziale v_0 , ortogonale al filo che inizia ad avvolgersi attorno al perno. Determinare il momento angolare e la velocità della massa in funzione del tempo.

Questo caso è diverso da quello dell'esempio precedente, anche se a prima vista potrebbe sembrare analogo. Infatti osserviamo subito che la forza applicata dal vincolo (perno) alla massa non passa per l'asse del perno. Il momento angolare rispetto a tale asse *non* si conserva. L'energia cinetica è però costante, poiché il vincolo non compie lavoro sul sistema filo massa. Pertanto

$$\frac{1}{2}m\omega^2 r^2 = \text{cost}, \quad \Rightarrow \quad \omega r = \text{cost},$$

che dà per ogni valore di $r = |(P-O)|$ il corrispondente valore di ω . Il modulo della velocità è dunque costante nel tempo.

Discutiamo con qualche dettaglio il problema. La lunghezza del filo all'istante t è

$$l = l_0 - R\theta,$$

e, dalla figura, le coordinate di Q sono

$$x_Q = R \sin \theta, \quad y_Q = R(1 - \cos \theta).$$

Le coordinate di P , componenti del vettore $(P-O)$, sono date da

$$\begin{aligned} x &= R \sin \theta + (l_0 - R\theta) \cos \theta \\ y &= R(1 - \cos \theta) + (l_0 - R\theta) \sin \theta; \end{aligned}$$

da cui, derivando, si ottengono le componenti della velocità:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -(l_0 - R\theta)\dot{\theta} \sin \theta \\ \dot{y} &= (l_0 - R\theta)\dot{\theta} \cos \theta. \end{aligned}$$

Poiché si conserva l'energia cinetica, il modulo della velocità all'istante t è uguale al modulo della velocità iniziale:

$$v = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} = (l_0 - R\theta)\dot{\theta} = v_0.$$

Integrando questa equazione, si ottiene $\theta(t)$:

$$\int_0^\theta (l_0 - R\theta) d\theta = \int_0^t v_0 dt, \quad \Rightarrow \quad l_0\theta - \frac{R}{2}\theta^2 = v_0 t.$$

Si ricava

$$\theta = \frac{l_0}{R} \pm \frac{1}{R} \sqrt{l_0^2 - 2Rv_0 t}.$$

dove va assunto il segno negativo perché devono essere soddisfatte le condizioni iniziali, ossia per $t = 0$, $\theta = 0$.

La tensione del filo varia nel tempo ed è uguale alla reazione del vincolo esercitata in Q ; pertanto

$$T = ma_n = m \frac{v^2}{l} = \frac{v_0^2}{l_0 - R\theta}.$$

La tensione cresce ad diminuire di l o all'aumentare di θ , e può raggiungere un valore uguale al carico di rottura del filo.

Essendo il moto piano, il momento angolare è ortogonale al piano del moto e dipende ovviamente dalla scelta del polo. Assumendo come polo l'origine delle coordinate O , l'unica componente del momento angolare è quella lungo l'asse z , ortogonale al piano del moto:

$$L_z = m(xy\dot{y} - y\dot{x}).$$

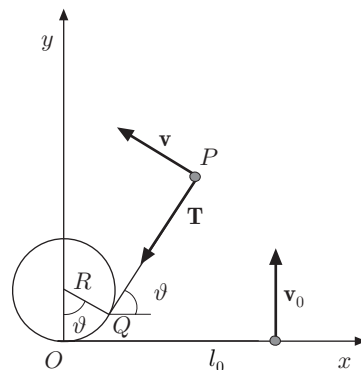


Fig. 9.5

Sostituendo le espressioni ricavate per x , y , \dot{x} , \dot{y} , si ottiene

$$L_z = m(l_0 - R\theta) \dot{\theta} (l_0 - R\theta + R \sin \theta) = mv_0(l_0 - R\theta + R \sin \theta).$$

Poiché il momento angolare iniziale, $\theta = 0$, è

$$L_0 = mv_0 l_0,$$

si deduce che il momento angolare è diminuito.

Ciò si può verificare anche per mezzo della (10); poiché la tensione è orientata sempre verso il centro di curvatura della traiettoria, il suo momento è opposto a \mathbf{L} , che deve diminuire ed ha quindi derivata temporale negativa. Analogamente diminuisce il momento angolare rispetto a Q ; infatti, pur essendo il momento della tensione rispetto a Q nullo, questo polo non è fisso e per la (9) si ha

$$\frac{dL_z}{dt} = -mv_Q v_0.$$

Si conclude che in ogni caso non si ha conservazione del momento angolare.

4. Sistemi a massa variabile

La seconda legge della dinamica scritta nella forma

$$\mathbf{F} = \frac{d\mathbf{p}}{dt},$$

è stata applicata in tutti i casi in cui la massa si mantiene costante durante il moto. A parte gli effetti relativistici, che qui non prenderemo in esame, esistono casi in cui la massa varia per qualche motivo. Per esempio, un missile durante il moto consuma combustibile e subisce una continua diminuzione di massa. Una fune pesante posta al suolo, un estremo della quale venga sollevato, costituisce un altro esempio di sistema a massa variabile; man mano che la fune viene sollevata una massa sempre maggiore di fune partecipa al moto e la massa aumenta fino al valore della massa totale. In casi del genere, anziché considerare l'accelerazione, bisogna prendere in esame la variazione della quantità di moto e dunque scrivere

$$\mathbf{F} = \frac{dm}{dt} \mathbf{v} + m \frac{d\mathbf{v}}{dt}, \quad (18)$$

la quale esprime chiaramente come la forza comprenda un termine relativo alla variazione dell'inerzia al moto ed un termine relativo alla variazione di velocità.

Esempi

6. Moto di un razzo

L'invenzione dei razzi è attribuita ai Cinesi e risale a circa 1500 anni fa; è certamente noto che l'espulsione dal razzo dei gas di combustione con velocità \mathbf{v} ne provoca il moto in direzione opposta. Il razzo inizialmente è rifornito di combustibile che consuma gradualmente durante il moto, perciò la sua massa diminuisce.

Supponiamo che il razzo inizialmente si trovi in una regione dello spazio in cui non siano presenti forze esterne, per esempio nello spazio interplanetario, e che abbia una certa quantità di moto iniziale. Ad un certo istante viene acceso il motore ed i gas di combustione vengono espulsi, a ritmo costante, con velocità \mathbf{v} ; figura 6. Poiché $\mathbf{F} = 0$, indicando con le lettere maiuscole le grandezze relative al razzo e con le minuscole quelle relative al gas, la (18) si scrive

$$\frac{d}{dt}(MV) + \frac{d}{dt}(mv) = 0, \quad (19)$$

dove le velocità sono riferite ad una terna inerziale.

Il primo termine, tenendo presente che la massa del razzo diminuisce col ritmo con cui il gas viene espulso ($-dm/dt$), diventa

$$\frac{d}{dt}(MV) = \frac{dM}{dt}V + M\frac{dV}{dt} = -\frac{dm}{dt}V + M\frac{dV}{dt}. \quad (20)$$

Il secondo termine va considerato con maggiore dettaglio; la velocità v del gas è legata alla velocità V del razzo e alla velocità di espulsione v_e relativa al razzo, di solito costante, dalla relazione $v = V - v_e$, quindi

$$\frac{d}{dt}(mv) = \frac{dm}{dt}(V - v_e) + m\frac{dv}{dt}.$$

La derivata dm/dt è semplicemente la quantità, costante, di combustibile bruciata nell'unità di tempo; il secondo termine è nullo perché il gas, una volta lasciato il razzo, non cambia ulteriormente la sua velocità, pertanto

$$\frac{d}{dt}(mv) = \frac{dm}{dt}(V - v_e). \quad (21)$$

Sostituendo le (20) e (21) nella (19) si ottiene

$$-\frac{dm}{dt}V + M\frac{dV}{dt} + \frac{dm}{dt}(V - v_e) = 0$$

da cui

$$M\frac{dV}{dt} = \frac{dm}{dt}v_e. \quad (22)$$

La precedente definisce la *spinta* del razzo, che dipende dalla massa di combustibile bruciata nell'unità di tempo e dalla velocità di espulsione.

Per ottenere la velocità finale del razzo basta tener presente, nella (22), che la quantità di gas espulso è uguale alla diminuzione di massa del razzo, $dm = -dM$, dunque

$$M\frac{dV}{dt} = -\frac{dM}{dt}v_e, \quad \Rightarrow \quad dV = -\frac{dM}{M}v_e.$$

Integrando:

$$\int_{V_0}^{V_f} dV = -v_e \int_{M_0}^{M_f} \frac{dM}{M},$$

si ottiene

$$V_f - V_0 = -v_e \ln \frac{M_f}{M_0}.$$

Quando il razzo è soggetto a forze esterne, la (22) diventa

$$M\frac{d\mathbf{V}}{dt} - \frac{dm}{dt}\mathbf{v}_e = \mathbf{F}$$

e, se si tratta di un razzo posto in verticale e soggetto all'azione della gravità, assumendo positiva l'orientazione verso l'alto:

$$\frac{dV}{dt} + \frac{v_e}{M} \frac{dM}{dt} = -g;$$

moltiplicando per dt ed integrando

$$\int_{V_0}^V dV + v_e \int_{M_0}^M \frac{dM}{M} = -g \int_{t_0}^t dt;$$

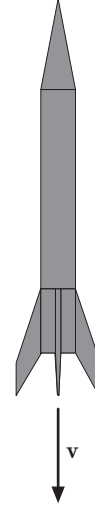


Fig. 9.6

si ottiene:

$$V - V_0 + v_e \ln \frac{M}{M_0} = -gt,$$

ovvero

$$V = V_0 + v_e \ln \frac{M_0}{M} - gt.$$

Se t_f è il tempo impiegato per bruciare tutto il combustibile, $V = V_f$ e $M = M_f$, velocità e massa sono quelle finali.

- ||| **7.** Un carrello di massa m_0 si muove con velocità v_0 costante su un binario rettilineo privo di attrito. All'istante $t = 0$ e nella posizione $x_0 = 0$ inizia a nevicare e la neve si deposita sul carrello al ritmo costante di $\lambda \text{ kg/s}$. Determinare la posizione del carrello in funzione del tempo in assenza di forze, supponendo che la neve cada verticalmente e che la sua velocità sia trascurabile. Si determini inoltre la forza necessaria per mantenere costante la velocità iniziale del carrello.

Poiché

$$\frac{dm}{dt} = \lambda, \quad \Rightarrow \quad m = m_0 + \lambda t,$$

la (18) diventa

$$\lambda v + (m_0 + \lambda t) \frac{dv}{dt} = 0, \quad \Rightarrow \quad \lambda v = -(m_0 + \lambda t) \frac{dv}{dt}.$$

Separando le variabili:

$$\frac{dv}{v} = -\frac{\lambda}{m_0 + \lambda t} dt$$

e integrando

$$\ln v = -\ln(m_0 + \lambda t) + C_1.$$

La costante di integrazione, per le condizioni iniziali, è $C_1 = \ln m_0 v_0$, dunque

$$\ln v = -\ln(m_0 + \lambda t) + \ln m_0 v_0,$$

da cui

$$v = \frac{m_0 v_0}{m_0 + \lambda t} = \frac{m_0 v_0}{m},$$

che esprime la conservazione della quantità di moto.

Lo spazio percorso si ottiene integrando l'espressione della velocità:

$$\frac{dx}{dt} = \frac{m_0 v_0}{m_0 + \lambda t},$$

che, separando le variabili, diventa

$$dx = m_0 v_0 \frac{dt}{m_0 + \lambda t}.$$

Integrando, si ottiene

$$x = \frac{m_0 v_0}{\lambda} \ln(m_0 + \lambda t) + C_1.$$

La costante di integrazione, per le condizioni iniziali, risulta $-m_0 v_0 \ln m_0 / \lambda$, pertanto

$$x = \frac{m_0 v_0}{\lambda} \ln \left(\frac{m_0 + \lambda t}{m_0} \right).$$

La precedente, in funzione del tempo, ha un andamento logaritmico mostrato qualitativamente in figura 7. Per determinare la forza orizzontale necessaria affinché il carrello mantenga costante la velocità iniziale, basta osservare che nella (18) dev'essere $dv/dt = 0$, perciò

$$F = \frac{dm}{dt} v = \lambda v_0.$$

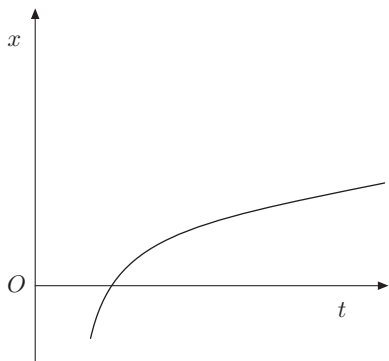


Fig. 9.7

- ||| 8. Determinare velocità e accelerazione del carrello dell'esempio precedente, supponendo di applicare una forza orizzontale costante F e che la velocità iniziale v_0 sia nulla. Per la (18) si ha

$$F = \lambda v + (m_0 + \lambda t) \frac{dv}{dt},$$

e separando le variabili:

$$\frac{dv}{F - \lambda v} = \frac{dt}{m_0 + \lambda t},$$

che integrata dà

$$-\frac{1}{\lambda} \ln(F - \lambda v) = \frac{1}{\lambda} \ln(m_0 + \lambda t) + C.$$

La costante di integrazione va determinata tenendo conto delle condizioni iniziali; risulta

$$C = -\frac{1}{\lambda} \ln(m_0 F).$$

Sostituendo nella precedente e ricavando v , si ha

$$v = \frac{Ft}{m_0 + \lambda t}.$$

Derivando si ottiene

$$a = \frac{Fm_0}{(m_0 + \lambda t)^2}.$$

- ||| 9. Una catena omogenea di lunghezza l e densità lineica λ , è appoggiata su un piano orizzontale, privo di attrito, con un tratto di lunghezza x_0 pendente lungo la verticale, figura 8. La catena è inizialmente in quiete; determinare il moto di caduta.

Fissato come riferimento un asse verticale volto verso il basso, assumiamo come coordinata l'estremo libero x della catena. L'energia cinetica e l'energia potenziale sono

$$T = \frac{1}{2} \lambda l \dot{x}^2, \quad U = - \int_0^x g \lambda x dx = -\frac{1}{2} g \lambda x^2,$$

dove si è assunta nulla l'energia potenziale per $x = 0$, superficie del piano, e si è indicato con λx la massa di catena che all'istante t , partecipa al moto.

Per la conservazione dell'energia meccanica si ha

$$\frac{1}{2} \lambda l \dot{x}^2 - \frac{1}{2} g \lambda x^2 = -\frac{1}{2} g \lambda x_0^2,$$

da cui si ottiene

$$\dot{x}^2 = \frac{g}{l} (x^2 - x_0^2).$$

Separando le variabili si ha l'equazione differenziale:

$$\frac{dx}{\sqrt{x^2 - x_0^2}} = \sqrt{\frac{g}{l}} dt,$$

che integrata dà

$$\cosh^{-1} \frac{x}{x_0} = \sqrt{\frac{g}{l}} t + C.$$

La costante C nulla perché per $t = 0$, $\cosh^{-1} 1 = 0$. Pertanto

$$x(t) = x_0 \cosh \left(\sqrt{\frac{g}{l}} t \right).$$

La precedente esprime il moto fino all'istante τ in cui la catena abbandona il piano; dopo di che il moto avviene con accelerazione costante, g . Allo scopo di ricavare il tempo, per comodità, poniamo $\alpha = \sqrt{g/l}$; si ha

$$x = x_0 \frac{e^{\alpha t} + e^{-\alpha t}}{2}, \quad \Rightarrow \quad x_0 e^{2\alpha t} - 2x e^{\alpha t} + x_0 = 0,$$

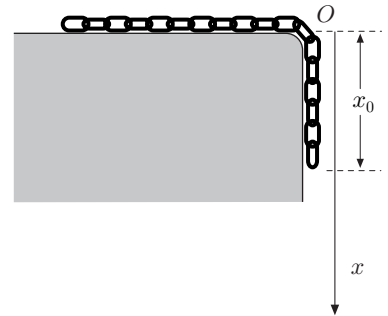


Fig. 9.8

$$e^{\alpha t} = \frac{x \pm \sqrt{x^2 - x_0^2}}{x_0}, \quad \Rightarrow \quad t = \sqrt{\frac{l}{g}} \ln \frac{x \pm \sqrt{x^2 - x_0^2}}{x_0},$$

avendo escluso il segno negativo perché privo di significato. Per $x = l$ si ha

$$\tau = \sqrt{\frac{l}{g}} \ln \frac{l \pm \sqrt{l^2 - x_0^2}}{x_0}.$$

La velocità della catena prima di lasciare il piano è

$$\dot{x} = v(t) = x_0 \sqrt{\frac{g}{l}} \sinh \left(\sqrt{\frac{g}{l}} t \right).$$

All'istante in cui lascia il piano è

$$v(\tau) = x_0 \sqrt{\frac{g}{l}} \sinh \left(\sqrt{\frac{g}{l}} \tau \right) = x_0 \sqrt{\frac{g}{l}} \frac{e^{\alpha \tau} - e^{-\alpha \tau}}{2}.$$

Poiché

$$e^{\alpha \tau} = \frac{l + \sqrt{l^2 - x_0^2}}{x_0},$$

si ha

$$\begin{aligned} v(\tau) &= \frac{x_0}{2} \sqrt{\frac{g}{l}} \left(\frac{l + \sqrt{l^2 - x_0^2}}{x_0} - \frac{x_0}{l + \sqrt{l^2 - x_0^2}} \right) \\ &= \frac{x_0}{2} \sqrt{\frac{g}{l}} \left(\frac{l + \sqrt{l^2 - x_0^2}}{x_0} - \frac{l - \sqrt{l^2 - x_0^2}}{x_0} \right) = \sqrt{\frac{g}{l}} (l^2 - x_0^2). \end{aligned}$$

L'accelerazione in funzione della lunghezza x , è data da

$$\ddot{x} = \frac{g}{l} x_0 \cosh \left(\sqrt{\frac{g}{l}} t \right) = \frac{g}{l} x.$$

Quando la catena abbandona il piano, $x = l$, come s'è detto, l'accelerazione è quella di gravità.

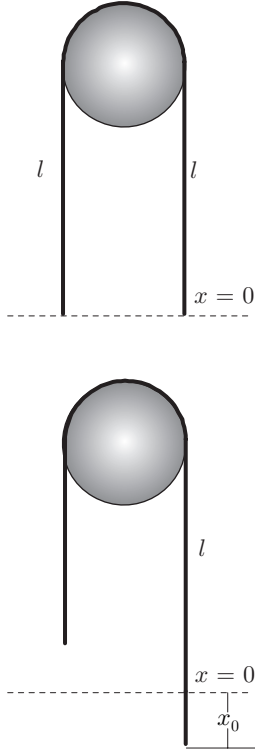


Fig. 9.9

- III 10. Una cavo omogeneo pesante, di lunghezza $2l$, è posto a cavallo di un piolo liscio. Determinarne il moto di caduta, supponendo che il cavo inizialmente penda da una parte di una lunghezza $l + x_0$ e che inizi a scivolare con velocità iniziale nulla, figura 9.

Il problema è analogo al precedente. Indichiamo con x la lunghezza del tratto più lungo di cavo e assumiamo uguale a zero l'energia potenziale quando il cavo è in equilibrio, cioè i due capi sono alla stessa quota. Per la conservazione dell'energia si ha:

$$\frac{1}{2} 2l \lambda \dot{x}^2 - \frac{1}{2} \lambda g (x - l)^2 = -\frac{1}{2} \lambda g x_0^2.$$

$$\dot{x}^2 = \frac{g}{l} [(x - l)^2 - x_0^2].$$

Separando le variabili si ottiene l'equazione differenziale

$$\frac{dx}{\sqrt{(x - l)^2 - x_0^2}} = \sqrt{\frac{g}{l}} dt,$$

che integrata fornisce

$$x = l + x_0 \cosh \left(\sqrt{\frac{g}{l}} t \right).$$

Il moto è descritto dalla relazione precedente fino all'istante τ in cui $x = 2l$. Successivamente il cavo abbandona il piolo con velocità v e cade con l'accelerazione di gravità. Come nell'esempio precedente, si ottiene:

$$\tau = \sqrt{\frac{l}{g}} \ln \frac{l + \sqrt{l^2 - x_0^2}}{x_0},$$

$$v = \sqrt{\frac{g}{l}} (l^2 - x_0^2).$$

10. Problemi di dinamica del punto materiale

1. Interazione gravitazionale tra corpi sferici

Premettiamo, come si è anticipato nel capitolo VII, la dimostrazione che l'interazione gravitazionale tra due corpi sferici omogenei, avviene come se la massa dei corpi sia localizzata nel centro geometrico delle sfere. Ricordando che l'energia potenziale di una massa puntiforme m_1 , nel campo gravitazionale di una massa m , è data dall'espressione

$$U(r) = -G \frac{mm_1}{r}, \quad (1)$$

consideriamo un guscio sferico omogeneo, di raggio R , massa m e densità areica di massa $\sigma = dm/dS$, ed una massa m_1 esterna, posta a distanza r dal suo centro. Dividiamo il guscio sferico in tanti anelli, di altezza infinitesima e superficie dS , coassiali con la retta congiungente la massa m_1 e il centro del guscio, come mostrato in figura 1.

La massa dell'anello sferico è data da

$$dm = \sigma dS = \sigma 2\pi R \sin \theta R d\theta = 2\pi \sigma R^2 \sin \theta d\theta,$$

ed essendo $\sigma = m/(4\pi R^2)$, risulta

$$dm = \frac{1}{2} m \sin \theta d\theta.$$

L'energia potenziale di m_1 nel campo gravitazionale prodotto da dm è dunque:

$$dU = -G \frac{dm m_1}{r_s} = -G \frac{m m_1}{2r_s} \sin \theta d\theta, \quad (2)$$

essendo r_s la distanza di m_1 dall'anello. Dalla figura si trae:

$$r_s^2 = r^2 + R^2 - 2Rr \cos \theta,$$

che differenziata dà

$$2r_s dr_s = 2Rr \sin \theta d\theta, \quad \Rightarrow \quad \sin \theta d\theta = \frac{1}{R} \frac{r_s}{r} dr_s.$$

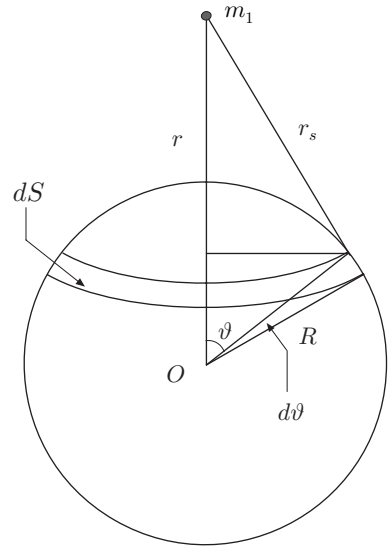


Fig. 10.1

Sostituendo nella (2), si ha

$$dU = -G \frac{mm_1}{2Rr} dr_s. \quad (3)$$

L'energia potenziale di m_1 nel campo prodotto da tutto il guscio è

$$U(r) = -G \frac{mm_1}{2Rr} \int_{r-R}^{r+R} dr_s = -G \frac{mm_1}{2Rr} (2R) = -G \frac{mm_1}{r}. \quad (4)$$

Il risultato indica che la massa di un guscio sferico si può ritenere localizzata nel suo centro geometrico.

La forza gravitazionale è data da

$$F = -\frac{dU}{dr} = -G \frac{mm_1}{r^2}.$$

Se la massa m_1 si trova all'interno del guscio, figura 2, la (4) diventa

$$U(r) = -G \frac{mm_1}{2Rr} \int_{R-r}^{R+r} dr_s = -G \frac{mm_1}{2Rr} (2r) = -G \frac{mm_1}{R}. \quad (5)$$

L'energia potenziale di m_1 all'interno del guscio è *costante*; ciò implica che la forza gravitazionale è nulla. Si noti che questo risultato è possibile solo se la forza è inversamente proporzionale al quadrato della distanza.

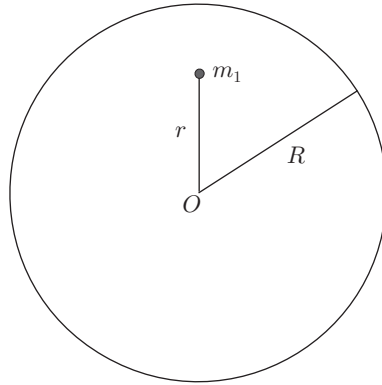


Fig. 10.2

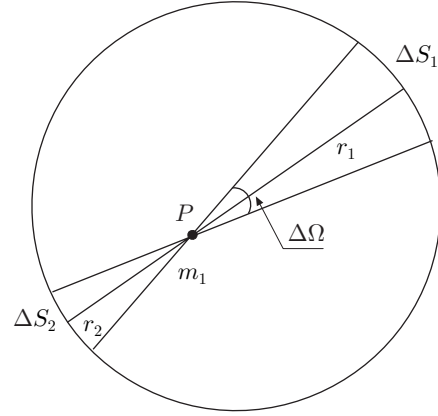


Fig. 10.3

Infatti si consideri all'interno del guscio sferico un qualsiasi punto P , in cui è posta la massa m_1 ; l'angolo solido $\Delta\Omega$, con vertice in P sottende sulle pareti del guscio le superfici opposte ΔS_1 , ΔS_2 , figura 3. Detta σ la densità areica di massa, le forze gravitazionali dovute alle masse distribuite su ΔS_1 e ΔS_2 , che agiscono sulla massa sono

$$F_1 = -G \frac{m_1 \sigma \Delta S_1}{r_1^2}, \quad F_2 = -G \frac{m_1 \sigma \Delta S_2}{r_2^2};$$

ed essendo

$$\Delta\Omega = \frac{\Delta S_1}{r_1^2} = \frac{\Delta S_2}{r_2^2},$$

si conclude che forze opposte agiscono sulla massa, determinandone l'equilibrio. Si colga l'analogia con il caso dell'equilibrio di una carica posta all'interno di una distribuzione uniforme di cariche a simmetria sferica.

In figura 4 è mostrato l'andamento dell'energia potenziale e della forza relative al guscio sferico, in funzione di r . Il risultato ottenuto si estende immediatamente alla sfera piena, considerando questa come costituita da gusci concentrici e sommando tutti i contributi. Tuttavia l'energia potenziale e la forza all'interno della sfera piena hanno andamenti diversi.

Consideriamo la forza gravitazionale che viene esercitata su una massa m_1 , posta all'interno della sfera piena, a distanza r dal centro; tale forza è

$$F_r = -G \frac{m_r m_1}{r^2},$$

essendo m_r la massa della sfera di raggio r . Supponendo la sfera omogenea, ed essendo la densità data da $\rho = m/(4\pi R^3/3)$, la massa di tale sfera risulta $m_r = \rho V_r = mr^3/R^3$, pertanto

$$F_r = -G \frac{mm_1}{R^3} r. \quad (6)$$

La forza ha un andamento lineare con r , figura 5.

Per quanto riguarda l'energia potenziale si ha

$$dU = -Fdr, \quad dU = G \frac{mm_1}{R^3} r dr;$$

integrando si ottiene:

$$U = \frac{1}{2} G \frac{mm_1}{R^3} r^2 + C.$$

La costante di integrazione va determinata in modo che per $r = R$ la funzione $U(r)$ sia continua ed assuma il valore $U(R) = -Gmm_1/R$, cioè

$$-G \frac{mm_1}{R} = \frac{1}{2} G \frac{mm_1}{R^3} R^2 + C,$$

da cui

$$C = -\frac{3}{2} G \frac{mm_1}{R}.$$

Pertanto, per $r < R$, l'energia potenziale è espressa da

$$U(r) = \frac{1}{2} G \frac{mm_1}{R^3} r^2 - \frac{3}{2} G \frac{mm_1}{R}. \quad (7)$$

La figura 6 mostra l'andamento di $U(r)$ per $r < R$ e per $r > R$.

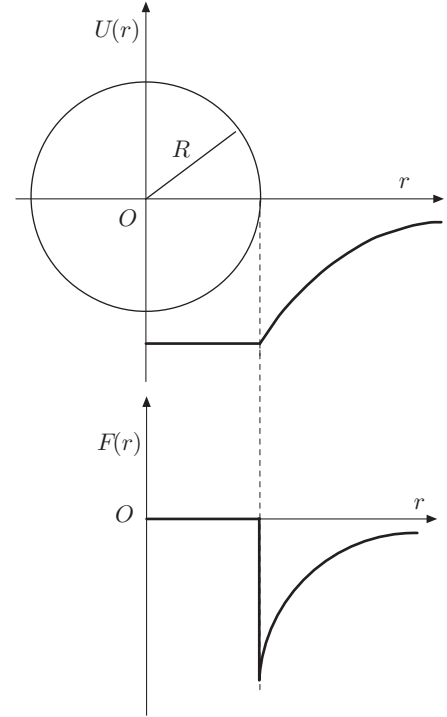


Fig. 10.4

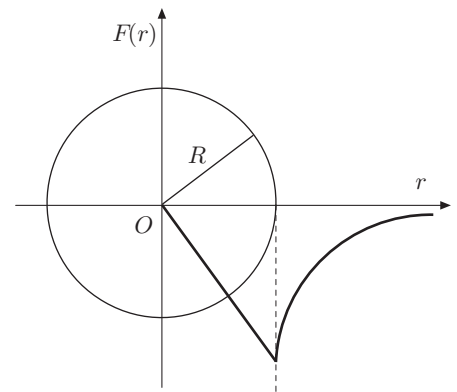


Fig. 10.5

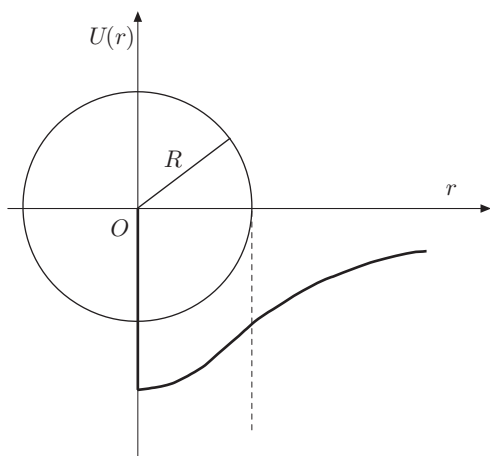


Fig. 10.6

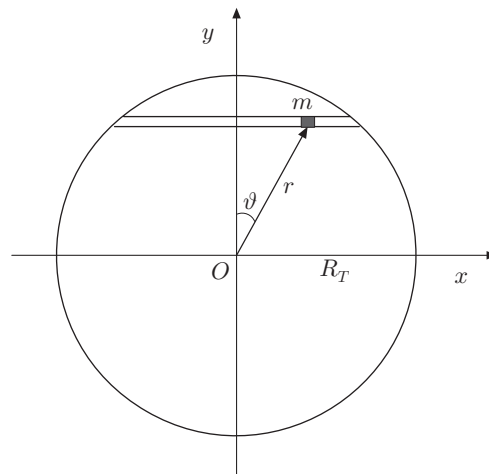


Fig. 10.7

Esempi

- ||| 1. Una massa m è posta in una galleria rettilinea praticata nella terra, dove può muoversi senza attrito, figura 7. Determinarne il moto.

Indicando con M_T ed R_T la massa e il raggio della terra, la forza gravitazionale che agisce sulla massa m alla distanza r , per la (6), è data da

$$\mathbf{F} = -G \frac{M_T m}{R_T^3} \hat{\mathbf{r}}.$$

Assumendo come riferimento l'asse x orientato, parallelo alla galleria, la componente della forza lungo tale asse è

$$F_x = -G \frac{M_T m}{R_T^3} r \sin \theta,$$

ed essendo $\sin \theta = x/r$, si ha

$$F_x = -G \frac{M_T m}{R_T^3} x.$$

Tale componente denota una forza di richiamo proporzionale a x ; il moto è dunque armonico con $\omega^2 = GM_T/R_T^3$, che si scrive anche $\omega^2 = g/R_T$. Il periodo è

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi \sqrt{\frac{R_T}{g}} = 84.4 \text{ min.}$$

Esso è indipendente dalla lunghezza della galleria; il sistema (molto costoso) consentirebbe di viaggiare da un punto all'altro della terra in circa 42 minuti. Il periodo è anche uguale a quello di un satellite orbitante nelle vicinanze della superficie terrestre.

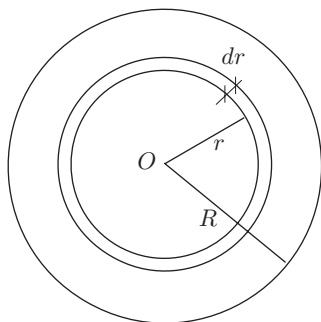


Fig. 10.8

- ||| 2. *Energia gravitazionale di un corpo sferico.*

L'energia gravitazionale di un corpo si dice anche *energia gravitazionale propria*; essa rappresenta il lavoro necessario per aggregare gli elementi che lo costituiscono, posti inizialmente a distanza infinita, e formare il corpo stesso. Tale energia avrà segno negativo perché la forza gravitazionale è attrattiva.

Supponiamo di voler formare una sfera omogenea di raggio R e massa m , iniziando da un nucleo centrale e sovrapponendo a questo gusci sferici di spessore dr , figura 8. L'energia potenziale gravitazionale di un guscio a distanza r dal centro è

$$dU = -G \frac{(4\pi r^3 \rho / 3) 4\pi r^2 \rho dr}{r} = -\frac{1}{3} G (4\pi \rho)^2 r^4 dr,$$

essendo ρ la densità. L'energia della sfera risulta

$$\begin{aligned} U &= -\frac{1}{3}G(4\pi\rho)^2 \int_0^R r^4 dr = -\frac{1}{3}G(4\pi\rho)^2 \frac{R^5}{5} \\ &= -\frac{3}{5}G \left(\frac{4}{3}\pi R^3 \rho \right)^2 \frac{1}{R} = -\frac{3}{5}G \frac{m^2}{R}. \end{aligned}$$

L'energia gravitazionale è enorme; ad esempio, per il Sole, $m \approx 10^{30} \text{ kg}$, $R = 7 \cdot 10^8 \text{ m}$, risulta $U \approx 4 \cdot 10^{41} \text{ J}$.

III 3. Stima dell'energia gravitazionale di una galassia.

In modo analogo all'esempio precedente, definiamo energia gravitazionale della galassia il lavoro necessario affinché questa assuma la configurazione propria, cioè

$$U = -G \frac{1}{2} \sum_{i \neq j} \frac{m_i m_j}{r_{ij}},$$

dove il fattore $1/2$ indica che, per due masse, l'energia non va contata due volte. Considerando N stelle di massa media m e poste a distanza media r , si ha

$$U = -\frac{1}{2}G(N-1)N \frac{m^2}{r}.$$

Assumendo $N \approx 2 \cdot 10^{11}$, $r = 10^{21} \text{ m}$, $m = 2 \cdot 10^{30} \text{ kg}$, $G = 6,6 \cdot 10^{-11} \text{ N} \cdot \text{m}^2 / \text{kg}^2$, risulta $U \approx 5 \cdot 10^{51} \text{ J}$.

.....

III 2. Moto di un punto materiale soggetto a forza gravitazionale

Consideriamo la forza gravitazionale che agisce su un corpo puntiforme di massa m :

$$\mathbf{F} = -k \frac{m}{r^2} \hat{\mathbf{r}}.$$

La costante k comprende il prodotto di G e della massa attraente, che supponiamo *fissa*. La forza è centrale ed essendo il momento angolare $\mathbf{L} = \text{cost}$, il moto è piano.

Conviene adottare coordinate polari con polo nel centro della forza; pertanto le componenti dell'accelerazione, equazione (20)-IV, sono

$$a_r = \ddot{r} - r\dot{\theta}^2, \quad a_\theta = r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta},$$

Poiché la forza è radiale, l'accelerazione trasversale è nulla:

$$a_\theta = r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta} = 0,$$

che moltiplicata per r diventa

$$r^2\ddot{\theta} + 2r\dot{r}\dot{\theta} = 0.$$

Questa espressione è la derivata rispetto al tempo di $r^2\dot{\theta}$, pertanto

$$r^2\dot{\theta} = h, \quad (8)$$

con h costante. Ricordando la (22)-IV, si riconosce che la velocità areolare è costante e uguale a $h/2$; *seconda legge di Keplero*.

Consideriamo ora la forza, radiale:

$$-k \frac{m}{r^2} = m(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2). \quad (9)$$

Ponendo $r = 1/u$ e derivando rispetto al tempo:

$$\frac{dr}{dt} = \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{u} \right) = -\frac{1}{u^2} \frac{du}{dt} = -\frac{1}{u^2} \frac{du}{d\theta} \frac{d\theta}{dt},$$

dove si è introdotto la variabile ausiliaria θ . Essendo, per la (8), $d\theta/dt = hu^2$, si ottiene

$$\frac{dr}{dt} = -h \frac{du}{d\theta}.$$

Derivando ancora

$$\frac{d^2r}{dt^2} = -h \frac{d}{dt} \left(\frac{du}{d\theta} \right) = -h \frac{d^2u}{d\theta^2} \frac{d\theta}{dt} = -h^2 u^2 \frac{d^2u}{d\theta^2}.$$

Sostituendo nella (9), si deduce

$$-ku^2 = -h^2 u^2 \frac{d^2u}{d\theta^2} - \frac{1}{u} h^2 u^4, \quad \Rightarrow \quad k = h^2 \frac{d^2u}{d\theta^2} + h^2 u;$$

da cui:

$$\frac{d^2u}{d\theta^2} + u = \frac{k}{h^2}. \quad (10)$$

La soluzione della (10) è nota, in quanto somma della soluzione dell'equazione omogenea associata,

$$u_1 = C_1 \cos \theta + C_2 \sin \theta,$$

e della soluzione

$$u_2 = \frac{k}{h^2};$$

ossia

$$u = C_1 \cos \theta + C_2 \sin \theta + \frac{h}{h^2}.$$

Ponendo

$$C_1 = A \cos \theta_0, \quad C_2 = A \sin \theta_0,$$

si ottiene

$$u = A \cos(\theta - \theta_0) + \frac{k}{h^2}.$$

Infine

$$\frac{1}{r} = \frac{1 + (Ah^2/k)[\cos(\theta - \theta_0)]}{h^2/k},$$

da cui:

$$r = \frac{h^2/k}{1 + (Ah^2/k) \cos \theta}, \quad (11)$$

avendo assunto, senza ledere la generalità, $\theta_0 = 0$.

La (11) rappresenta l'equazione della traiettoria; essa è una conica espressa in coordinate polari col fuoco nel polo che, come noto dalla geometria, ha equazione generale

$$r = \frac{pe}{1 - e \cos \theta}. \quad (12)$$

Confrontando la (11) con la (12), si deduce:

$$pe = h^2/k, \quad e = -Ah^2/k, \quad p = -1/A,$$

con e eccentricità e p distanza della direttrice dal fuoco.

La conica è un'ellisse se $0 < e < 1$, una parabola se $e = 1$, una iperbole se $e > 1$. Si rammenti che l'ellisse, la parabola e l'iperbole sono definite come il luogo dei punti le cui distanze da un punto fisso, fuoco, e da una retta fissa d , direttrice, hanno rapporto costante che si chiama eccentricità. Il caso dell'ellisse è mostrato in figura 9.

Per verificare se l'orbita è chiusa occorre studiare l'energia totale $E = T + U$. Consideriamo il punto dell'orbita in cui si verifica il massimo avvicinamento al fuoco; in tale punto la velocità è solamente trasversale, $v_\theta = r\dot{\theta}$, dunque

$$E = T + U = \frac{1}{2}mr_{min}^2\dot{\theta}^2 - k\frac{m}{r_{min}}. \quad (13)$$

Dalla (12), per $\theta = \pi$, si ha

$$r_{min} = \frac{pe}{1 + e} = \frac{h^2/k}{1 + e},$$

e poiché, equazione (8),

$$r^2\dot{\theta} = r_{min}^2\dot{\theta} = h,$$

si ha anche

$$\dot{\theta}^2 = \frac{h^2}{r_{min}^4}.$$

Tenuto conto delle precedenti, la (13) diventa

$$E = \frac{1}{2}m\frac{k^2}{h^2}(1 + e)^2 - m\frac{k^2}{h^2}(1 + e) = \frac{mk^2}{2h^2}(e^2 - 1),$$

da cui si trae:

$$e = \left(1 + \frac{2h^2E}{mk^2}\right)^{1/2}.$$

Si deduce che l'orbita è ellittica se $E < 0$, eccentricità $e < 1$. È verificata la *prima legge di Keplero*.

Per dedurre la terza legge di Keplero, consideriamo un'orbita ellittica, figura 10. L'ellisse gode della proprietà che la somma delle distanze di qualsiasi suo punto P dai fuochi F_1, F_2 è costante:

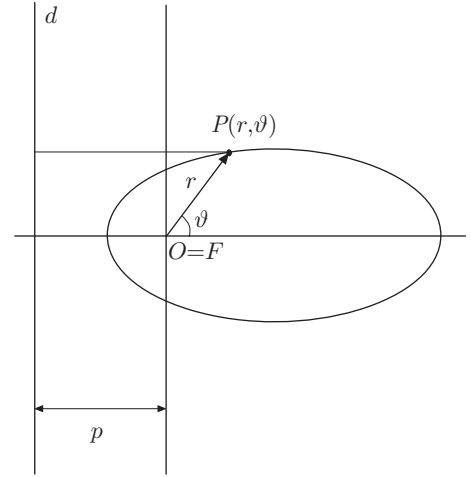


Fig. 10.9

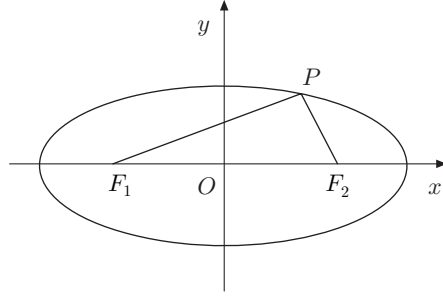


Fig. 10.10

$PF_1 + PF_2 = 2a$, con a lunghezza del semiasse maggiore. È anche $r_{max} + r_{min} = 2a$, dunque per la (12) si deduce:

$$2a = pe \left(\frac{1}{1-e} + \frac{1}{1+e} \right) = \frac{2pe}{1-e^2}, \quad \Rightarrow \quad a = \frac{pe}{1-e^2}. \quad (14)$$

Poiché il semiasse minore b è dato da $b = \sqrt{a^2 - c^2}$, ed essendo

$$c = \frac{r_{max} - r_{min}}{2} = pe \left(\frac{1}{1-e} - \frac{1}{1+e} \right) = \frac{pe^2}{1-e^2} = ea,$$

dove si è tenuto conto della (14), si ottiene:

$$b = \sqrt{a^2(1-e^2)} = \sqrt{ape} = \sqrt{a \frac{h^2}{k}}.$$

Ricordando che l'area dell'ellisse è $S = \pi ab$ e tenuto conto della (8), la velocità areolare è data da

$$\frac{dS}{dt} = \frac{\pi ab}{T} = \frac{1}{2}h,$$

con T periodo. Da questa si ricava

$$T = \frac{2\pi ab}{h} = \frac{2\pi a}{h} \sqrt{a \frac{h^2}{k}},$$

cioè

$$T^2 = \frac{4\pi^2}{k} a^3, \quad (15)$$

che esprime la *terza legge di Keplero*.

Si noti che il metodo descritto fornisce direttamente la traiettoria in coordinate polari ma non le equazioni del moto $r(t)$, $\theta(t)$.

|| 2.1. Integrale dell'energia

È particolarmente interessante dedurre il moto di un punto materiale, soggetto ad una forza centrale dipendente dall'inverso del quadrato della distanza, dalla conservazione dell'energia meccanica e del momento angolare. Per l'energia totale scriveremo

$$E = \frac{1}{2}mv^2 + U(r),$$

dove l'energia potenziale $U(r)$ è del tipo km/r , positiva o negativa se la forza è repulsiva o attrattiva. In coordinate polari è

$$v^2 = \left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + r^2 \left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2,$$

ed essendo il momento angolare,

$$L = mr^2 \frac{d\theta}{dt}, \quad \Rightarrow \quad \frac{d\theta}{dt} = \frac{L}{mr^2},$$

la precedente diventa:

$$v^2 = \left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + \frac{L^2}{m^2 r^2}.$$

Dunque l'energia totale si può scrivere

$$E = \frac{1}{2}m \left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + \frac{1}{2} \frac{L^2}{mr^2} + U(r). \quad (16)$$

Il termine $L^2/(mr^2)$, essendo L costante, può essere interpretato come una energia potenziale radiale, che sommata all'energia potenziale effettiva dà luogo ad un'energia potenziale efficace

$$U_{eff}(r) = \frac{1}{2} \frac{L^2}{mr^2} + U(r).$$

In figura 11 è mostrato il grafico di questa funzione, nel caso della forza attrattiva; esso è somma di $U(r)$, curva (a), e dell'energia potenziale radiale $L^2/(2mr^2)$, curva (b). È evidente che se l'energia totale è E_1 , il punto materiale percorre un'orbita chiusa, ellittica, di dimensioni comprese tra r_1 e r_2 ; se l'energia totale corrisponde al minimo di $U_{eff}(r)$, l'orbita è circolare di raggio r_0 ; infine se l'energia meccanica è E_2 , l'orbita è aperta; il punto, proveniente dall'infinito, giunge alla distanza r_{min} di massimo avvicinamento al centro delle forze e quindi si allontana indefinitamente.

Esaminiamo il caso in cui l'energia potenziale è dovuta ad una forza attrattiva; poiché $L = mh$, scriviamo la (16) nella forma:

$$E = \frac{1}{2}m \left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + \frac{1}{2} \frac{mh^2}{r^2} - k \frac{m}{r},$$

da cui

$$\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 = \frac{2}{m}E - \frac{h^2}{r^2} + 2\frac{k}{r},$$

Sommando e sottraendo il termine costante k^2/h^2 , scriviamo

$$\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 = \left(\frac{2}{m}E + \frac{k^2}{h^2}\right) - \left(\frac{h}{r} - \frac{k}{h}\right)^2. \quad (17)$$

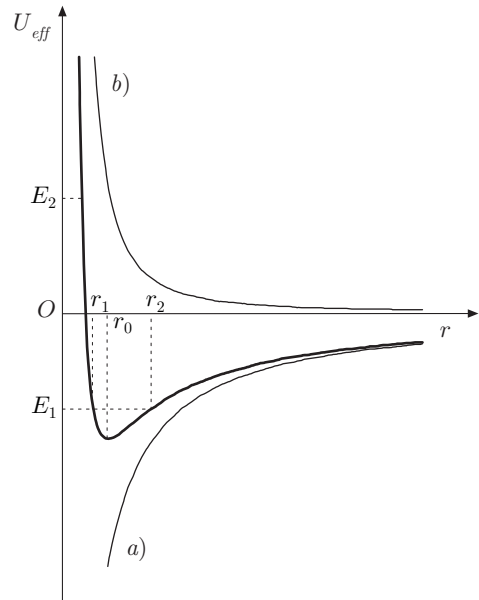


Fig. 10.11

Come al paragrafo 2, introduciamo la variabile $u = 1/r$ e la variabile θ , cosicché $dr/dt = -hdu/d\theta$; pertanto dalla (17) si trae:

$$h \frac{du}{d\theta} = \sqrt{\left(\frac{2}{m}E + \frac{k^2}{h^2}\right) - \left(hu - \frac{k}{h}\right)^2}$$

Poniamo

$$\zeta = \left(hu - \frac{k}{h}\right), \quad \chi^2 = \left(\frac{2}{m}E + \frac{k^2}{h^2}\right);$$

dunque, tenuto conto delle precedenti:

$$h \frac{du}{d\theta} = \sqrt{\chi^2 - \zeta^2}, \quad \Rightarrow \quad \frac{d\zeta}{d\theta} = \sqrt{\chi^2 - \zeta^2}.$$

Separando le variabili, si ha

$$d\theta = \frac{d\zeta}{\sqrt{\chi^2 - \zeta^2}},$$

che integrata fornisce:

$$\theta = \cos^{-1} \frac{\zeta}{\chi} + \gamma,$$

dove la costante di integrazione γ è

$$\gamma = \theta_0 - \cos^{-1} \frac{\zeta_0}{\chi}.$$

Ne segue:

$$\frac{h}{r} - \frac{k}{h} = \chi \cos(\theta - \gamma), \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{r} = \frac{k}{h^2} + \frac{\chi}{h} \cos(\theta - \gamma).$$

Quindi si ottiene:

$$r = \frac{pe}{1 + e \cos(\theta - \gamma)}.$$

La precedente è l'equazione di una conica in coordinate polari che, fissando la direttrice a sinistra del fuoco, figura 9, viene espressa come la (12), supponendo che $\gamma = 0$. Si verifica facilmente che

$$pe = \frac{h^2}{k}, \quad e = \chi \frac{h}{k} = \left(1 + \frac{2h^2 E}{mk^2}\right)^{1/2},$$

conformemente a quanto ottenuto al paragrafo 2.

Riassumendo: nel caso di una forza attrattiva, la traiettoria è una iperbole, una parabola o una ellisse, dipendente dal valore dell'energia totale E , che naturalmente è fissata dalle condizioni iniziali

$$E = \frac{1}{2}mv_0^2 + U(r_0).$$

Particolare attenzione merita il caso in cui l'eccentricità $e > 1$; l'energia totale è maggiore di zero, la conica è un ramo di iperbole. Occorre però distinguere se l'energia potenziale è attrattiva

o repulsiva. Nel primo caso il centro di attrazione si trova nel fuoco interno; nel secondo caso il centro di repulsione è nel fuoco esterno F . Ciò si può facilmente verificare ponendo nella (16) $U(r) = km/r$, positiva. Si ottiene come equazione della traiettoria:

$$r = \frac{pe}{e \cos \theta - 1}, \quad (18)$$

che rappresenta un ramo di iperbole in cui si è assunto come polo il fuoco esterno F , figura 12. Gli asintoti si ottengono per $r = \infty$ e ad essi corrispondono gli angoli $\pm\theta_\infty$, per i quali il denominatore della (18) si annulla. Dalla figura si osserva che l'angolo φ formato dagli asintoti è

$$\varphi = \pi - 2\theta_\infty, \quad \Rightarrow \quad \theta_\infty = \frac{\pi}{2} - \frac{\varphi}{2}.$$

Questo caso è molto importante in fisica atomica e nucleare.

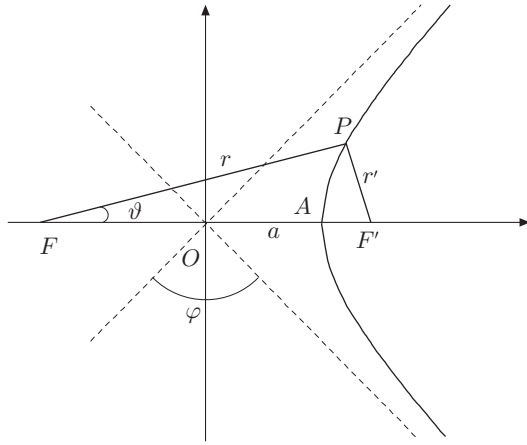


Fig. 10.12

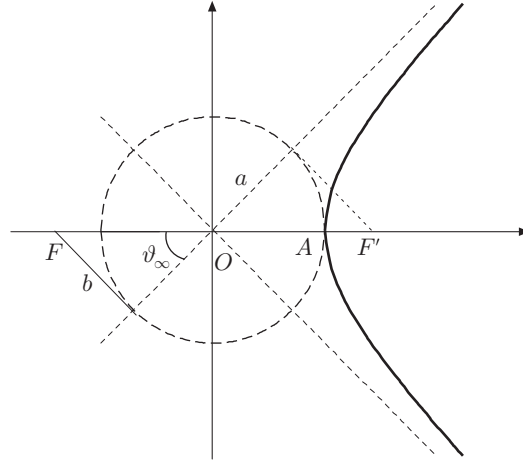


Fig. 10.13

Una particella carica positivamente, proveniente da grande distanza rispetto alle distanze atomiche, passando vicino a un nucleo atomico in F , viene deflessa di un certo angolo φ , a causa della repulsione coulombiana. Supponendo che la velocità iniziale v sia parallela ad un asintoto, la traiettoria è il ramo di iperbole descritto. In seguito alla deflessione, la particella procede lungo l'altro asintoto e, a distanze sufficientemente grandi, il modulo della velocità sarà uguale a quello iniziale. L'angolo di deflessione è evidentemente l'angolo formato dagli asintoti. Tale angolo può essere ricavato noto il parametro d'urto b , che rappresenta la distanza del centro di repulsione dall'asintoto, figura 13. Si ha

$$b = a \tan \theta_\infty = a \frac{\sin(\pi/2 - \varphi/2)}{\cos(\pi/2 - \varphi/2)} = a \cot \varphi/2. \quad (19)$$

Per ricavare b , si osservi che l'energia totale della particella a grande distanza dal nucleo è tutta cinetica, mentre in un generico

punto della traiettoria è somma dell'energia cinetica e dell'energia potenziale. Tenuto conto che in A , punto di distanza minima dal nucleo, la velocità ha solo la componente trasversale ($dr/dt = 0$), per la conservazione dell'energia e del momento angolare, possiamo scrivere

$$\frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}\frac{L^2}{mr_A^2} + k\frac{m}{r_A} = \frac{1}{2}m\frac{h^2}{r_A^2} + k\frac{m}{r_A},$$

da cui

$$v^2 = \frac{h^2}{r_A^2} + 2\frac{k}{r_A}. \quad (20)$$

Dalla (18), per $\theta = 0$, si ha

$$r_A = \frac{pe}{e-1},$$

sostituendo nella (20) e tenuto conto che $pe = h^2/k$, si ottiene:

$$v^2 = \frac{k^2}{h^2}(e^2 - 1). \quad (21)$$

Ma l'iperbole è definita come luogo dei punti per i quali è costante la differenza tra le distanze dai fuochi $r - r' = 2a$, dove a è la lunghezza del semiasse maggiore; pertanto, essendo l'equazione dell'iperbole con origine nel fuoco interno F' espressa da

$$r' = \frac{pe}{1 - e \cos \theta},$$

per $\theta = \pi$ si deduce

$$r'_A = \frac{pe}{1 + e}.$$

Dunque si ha

$$r_A - r'_A = pe \left(\frac{1}{e-1} - \frac{1}{1+e} \right) = 2\frac{pe}{e^2-1} = 2a,$$

$$a = \frac{pe}{e^2-1} \Rightarrow e^2 - 1 = \frac{pe}{a} = \frac{1}{a} \frac{h^2}{k}.$$

Sostituendo nella (21), si ottiene

$$v^2 = \frac{k}{a}, \quad \Rightarrow \quad a = \frac{k}{v^2}.$$

Infine, ricordando la (19):

$$b = \frac{k}{v^2} \cot \frac{\varphi}{2}.$$

Nota la costante k di interazione coulombiana e l'energia iniziale della particella, dalla misura dell'angolo di deflessione si ottiene il parametro d'urto, che dà l'ordine di grandezza delle dimensioni del nucleo.

Nel 1910 Geiger e Mursden, su suggerimento di Rutherford, eseguirono una esperienza in cui particelle alfa incidevano su una sottile lamina di oro. Lo studio della distribuzione angolare delle particelle α deviate dai nuclei di oro, permise loro di dedurre che il nucleo atomico ha dimensioni dell'ordine di grandezza di $10^{-14} m$.

3. Oscillazioni

Consideriamo un punto materiale di massa m , soggetto all'azione di una forza elastica $F = -kx$ e di una forza viscosa $F = -bv$. Il problema è unidimensionale e la seconda equazione della dinamica si scrive

$$m\ddot{x} = -kx - bv,$$

oppure

$$\ddot{x} + \frac{b}{m}\dot{x} + \frac{k}{m}x = 0. \quad (22)$$

Questa equazione differenziale del secondo ordine, omogenea e a coefficienti costanti, non può essere risolta separando le variabili, ma va usato un metodo diverso che consiste nell'assumere certe funzioni di prova, che si presume possano soddisfarla. Osserviamo che nella (22) la somma della derivata seconda, della derivata prima e della funzione stessa, moltiplicate per certe costanti è nulla; pertanto la funzione che la soddisfa deve essere tale che le sue derivate successive siano multiple della funzione stessa. Ciò si verifica, ad esempio, per le funzioni esponenziali e trigonometriche. Scegliendo la funzione esponenziale

$$x(t) = e^{\alpha t},$$

le sue derivate sono

$$\dot{x} = \alpha e^{\alpha t}, \quad \ddot{x} = \alpha^2 e^{\alpha t}.$$

Sostituendo nella (22), si ha

$$\alpha^2 e^{\alpha t} + \frac{b}{m}\alpha e^{\alpha t} + \frac{k}{m}e^{\alpha t} = 0,$$

da cui

$$\alpha^2 + \frac{b}{m}\alpha + \frac{k}{m} = 0. \quad (23)$$

La precedente si chiama equazione algebrica caratteristica della (22) e determina, assegnate le grandezze meccaniche m , b e k , la struttura della soluzione. Le radici della (23) sono:

$$\alpha_{1,2} = -\frac{b}{2m} \pm \sqrt{\frac{b^2}{4m^2} - \frac{k}{m}};$$

queste possono essere reali e distinte, coincidenti o complesse

coniugate secondo che il discriminante

$$\Delta = \frac{b^2}{4m^2} - \frac{k}{m},$$

sia maggiore, uguale o minore di zero. Ciò intuitivamente significa che, nel primo caso, il termine di smorzamento prevale sul termine oscillatorio; nel secondo i due termini si compensano; nel terzo il termine oscillatorio prevale su quello di smorzamento. Studiamo in dettaglio i tre casi.

|| 3.1. Radici reali e distinte

Posto

$$\frac{b}{2m} = \gamma, \quad \sqrt{\frac{b^2}{4m^2} - \frac{k}{m}} = \omega,$$

scriviamo

$$\alpha_1 = -\gamma + \omega, \quad \alpha_2 = -\gamma - \omega.$$

La soluzione generale della (22) è data da

$$x(t) = C_1 e^{(-\gamma+\omega)t} + C_2 e^{(-\gamma-\omega)t} = e^{-\gamma t} (C_1 e^{\omega t} + C_2 e^{-\omega t}). \quad (24)$$

Tale soluzione è una combinazione lineare di due soluzioni particolari; infatti le condizioni iniziali del problema, per $t = 0$, sono due: posizione iniziale x_0 e velocità iniziale v_0 , dunque C_1 e C_2 vanno determinate conformemente a queste ultime.

Derivando la (24) si ha

$$\dot{x} = -\gamma e^{-\gamma t} (C_1 e^{\omega t} + C_2 e^{-\omega t}) + e^{-\gamma t} (\omega C_1 e^{\omega t} - \omega C_2 e^{-\omega t}). \quad (25)$$

Per $t = 0$, le (24) e (25) danno

$$\begin{aligned} x_0 &= C_1 + C_2 \\ \dot{x}_0 = v_0 &= -\gamma x_0 + \omega(C_1 - C_2), \end{aligned}$$

che risolte rispetto a C_1 e C_2 forniscono

$$C_1 = \frac{x_0}{2} + \frac{v_0 + \gamma x_0}{2\omega}, \quad C_2 = \frac{x_0}{2} - \frac{v_0 + \gamma x_0}{2\omega}.$$

Sostituendo questi valori, la (24) diventa

$$x(t) = e^{-\gamma t} \left[\left(\frac{x_0}{2} + \frac{v_0 + \gamma x_0}{2\omega} \right) e^{\omega t} + \left(\frac{x_0}{2} - \frac{v_0 + \gamma x_0}{2\omega} \right) e^{-\omega t} \right],$$

ovvero

$$\begin{aligned} x(t) &= e^{-\gamma t} \left[x_0 \frac{e^{\omega t} + e^{-\omega t}}{2} + \frac{v_0 + \gamma x_0}{\omega} \frac{e^{\omega t} - e^{-\omega t}}{2} \right] \\ &= e^{-\gamma t} \left[x_0 \cosh \omega t + \frac{v_0 + \gamma x_0}{\omega} \sinh \omega t \right]. \end{aligned} \quad (26)$$

Le funzioni seno iperbolico e coseno iperbolico sono entrambe crescenti, tuttavia la (26) decresce al crescere del tempo, perché moltiplicata per il termine di smorzamento $\exp[-\gamma t]$ che decade tanto più rapidamente quanto più elevato è b .

Il punto materiale, dalla posizione iniziale, tende a tornare asintoticamente nella posizione di equilibrio con un andamento che dipende dal termine di smorzamento. L'oscillatore si dice sovrasmorzato; ciò è giustificato dal fatto che, come si è detto, il termine viscoso prevale su quello oscillatorio, $b^2/(4m^2) > k/m$. In figura 14 è mostrato l'andamento di $x(t)$, per certi valori delle costanti iniziali.

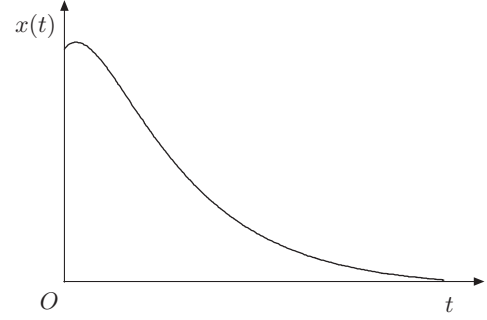


Fig. 10.14

|| 3.2. Radici coincidenti

L'unica radice dell'equazione algebrica è $\alpha = -\gamma$. Una soluzione della (22) è

$$x(t) = e^{-\gamma t};$$

tale soluzione, però, non può essere utile perché si deve ricercare una soluzione più generale, in cui siano coinvolte due costanti per il motivo che si è già detto.

Possiamo tentare una soluzione del tipo

$$x(t) = \chi(t)e^{-\gamma t}, \quad (27)$$

dove $\chi(t)$ è una opportuna funzione del tempo. Questa funzione non può essere arbitraria perché, come visto prima, devono essere coinvolte due costanti da determinare, in accordo con le condizioni iniziali.

Derivando successivamente la (27) si ha

$$\begin{aligned} \dot{x} &= (\dot{\chi} - \gamma\chi)e^{-\gamma t} \\ \ddot{x} &= (\ddot{\chi} - 2\gamma\dot{\chi} + \gamma^2\chi)e^{-\gamma t}; \end{aligned}$$

sostituendo nella (22) che, in questo caso, si scrive

$$\ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + \gamma^2x = 0,$$

perché $b^2/(4m^2) = k/m = \gamma^2$, si ottiene

$$[(\ddot{\chi} - 2\gamma\dot{\chi} + \gamma^2\chi) + 2\gamma(\dot{\chi} - \gamma\chi) + \gamma^2\chi]e^{-\gamma t} = 0.$$

Si deduce

$$\ddot{\chi} = 0;$$

dunque la funzione χ deve essere del tipo

$$\chi(t) = C_1 + C_2t.$$

Pertanto

$$x(t) = (C_1 + C_2t)e^{-\gamma t}. \quad (28)$$

Le costanti vanno determinate come prima; derivando la (28) si ha

$$\dot{x} = [-\gamma(C_1 + C_2 t) + C_2]e^{-\gamma t},$$

e per $t = 0$, si ottiene

$$x_0 = C_1, \quad C_2 = v_0 + \gamma x_0.$$

Infine, la soluzione cercata è

$$x(t) = [x_0 + (v_0 + \gamma x_0)t]e^{-\gamma t}. \quad (29)$$

La (29) è il prodotto di due funzioni: una crescente linearmente col tempo e l'altra che decresce esponenzialmente, pertanto il suo andamento sarà decrescente. Il moto non è oscillatorio; il punto materiale ritorna asintoticamente nella posizione di equilibrio più rapidamente che nel caso precedente. È il caso dello smorzamento critico; questa condizione va ricercata in molte situazioni sperimentali, in cui vanno evitate oscillazioni meccaniche o elettromagnetiche. L'andamento della (29) è mostrato in figura 15.

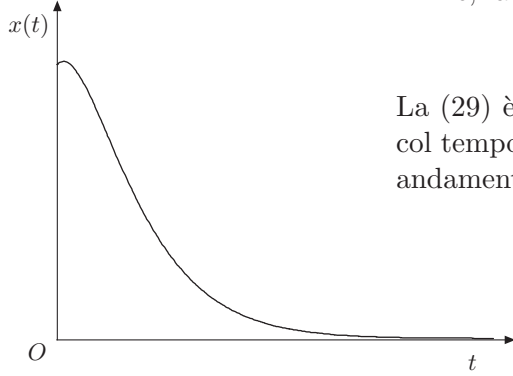


Fig. 10.15

3.3. Radici immaginarie

In questo caso si ha

$$\alpha_{1,2} = -\gamma \pm i\omega.$$

Come prima, la soluzione generale è

$$x(t) = C_1 e^{(-\gamma + i\omega)t} + C_2 e^{(-\gamma - i\omega)t} = e^{-\gamma t} (C_1 e^{i\omega t} + C_2 e^{-i\omega t}); \quad (30)$$

derivando:

$$\dot{x} = -\gamma e^{-\gamma t} (C_1 e^{i\omega t} + C_2 e^{-i\omega t}) + e^{-\gamma t} (i\omega C_1 e^{i\omega t} - i\omega C_2 e^{-i\omega t}).$$

Le precedenti, per $t = 0$, danno

$$x_0 = C_1 + C_2, \quad v_0 = -\gamma x_0 + i\omega(C_1 - C_2);$$

da cui

$$C_1 = \frac{x_0}{2} - i \frac{v_0 + \gamma x_0}{2\omega}, \quad C_2 = \frac{x_0}{2} + i \frac{v_0 + \gamma x_0}{2\omega}.$$

Infine, sostituendo nella (30):

$$x(t) = e^{-\gamma t} \left(x_0 \frac{e^{i\omega t} + e^{-i\omega t}}{2} + \frac{\gamma x_0 + v_0}{\omega} \frac{e^{i\omega t} - e^{-i\omega t}}{2i} \right),$$

e, tenendo presente le formule di Eulero

$$x(t) = e^{-\gamma t} \left(x_0 \cos \omega t + \frac{\gamma x_0 + v_0}{\omega} \sin \omega t \right).$$

Introducendo le costanti A e φ e ponendo:

$$x_0 = A \cos \varphi, \quad \frac{\gamma x_0 + v_0}{\omega} = A \sin \varphi,$$

si ottiene

$$x(t) = Ae^{-\gamma t} \cos(\omega t - \varphi). \quad (31)$$

La soluzione trovata rappresenta oscillazioni smorzate di ampiezza

$$Ae^{-\gamma t};$$

tale ampiezza decresce nel tempo tanto più rapidamente quanto più elevato è γ , come mostrato in figura 16. Ad essa si può associare una costante di tempo $\tau = 1/\gamma = 2m/b$, che indica la rapidità con cui le oscillazioni si attenuano; infatti dopo un intervallo di tempo τ l'ampiezza si riduce di un fattore $e^{-1} = 1/e \approx 0,37$. Ovviamente la pulsazione ω non è più quella dell'oscillatore libero; ma a questa si riduce nel caso in cui $\gamma = 0$, ($\omega_0 = \sqrt{k/m}$).

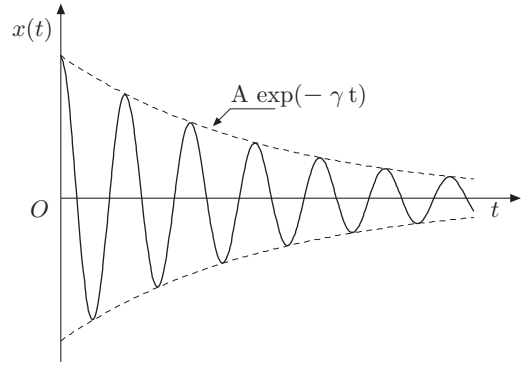


Fig. 10.16

|| 3.4. Dissipazione di energia

L'energia totale dell'oscillatore armonico smorzato diminuisce nel tempo. Per ottenere una valutazione dell'energia dissipata, consideriamo il caso in cui lo smorzamento sia debole, γ piccolo, o meglio, costante di tempo τ lunga rispetto al periodo T_0 dell'oscillatore libero. Ciò significa inoltre che la pulsazione è $\omega \approx \omega_0$. Derivando la (31),

$$\dot{x} = -\gamma Ae^{-\gamma t} \cos(\omega t - \varphi) - A\omega e^{-\gamma t} \sin(\omega t - \varphi)$$

e trascurando, per le ipotesi fatte, il primo termine

$$\dot{x} \approx -A\omega e^{-\gamma t} \sin(\omega t - \varphi).$$

Sostituendo quest'ultima e la (31) nell'espressione dell'energia totale dell'oscillatore

$$E = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}kx^2,$$

e tenendo conto che $\omega \approx \sqrt{k/m}$, si ottiene:

$$E = \frac{1}{2}kA^2e^{-2\gamma t} = E_0e^{-2\gamma t},$$

avendo indicato con E_0 l'energia totale dell'oscillatore all'istante $t = 0$ e con A l'ampiezza dell'oscillazione allo stesso istante.

La rapidità con cui varia l'energia è

$$\frac{dE}{dt} = -2\gamma E_0e^{-2\gamma t} = -2\gamma E.$$

Poiché lo smorzamento non è molto elevato, la perdita di energia in un periodo $\Delta E/T$ è piccola, quindi, con buona approssimazione, uguale alla derivata dE/dt :

$$\frac{\Delta E}{T} \approx \frac{dE}{dt} = -2\gamma E.$$

Pertanto l'energia relativa, dissipata in un periodo risulta:

$$\frac{\Delta E}{E} = -2\gamma T \approx -2\gamma \frac{2\pi}{\omega_0} = -\frac{2\pi}{Q},$$

dove si è introdotta la grandezza

$$Q = \frac{2\pi}{|\Delta E/E|} = \frac{\omega_0}{2\gamma} = \frac{m\omega_0}{b}, \quad (32)$$

chiamata Q o *fattore di qualità* oppure *fattore di merito* dell'oscillatore. Esso dà la misura del rapporto tra l'energia dell'oscillatore e l'energia dissipata in un periodo. Sistemi che mantengono a lungo le oscillazioni hanno un Q elevato.

OSSERVAZIONE

L'ipotesi che, nello smorzamento debole, si possa assumere $\omega \approx \omega_0$, è giustificata dalle seguenti considerazioni quantitative. Supponendo che in un oscillatore smorzato l'energia dissipata in un periodo sia un decimo dell'energia totale

$$\left| \frac{\Delta E}{E} \right| = 2\gamma \frac{2\pi}{\omega} = \frac{1}{10},$$

che corrisponde ad uno smorzamento non debole, determinare la variazione percentuale della pulsazione rispetto a quella dell'oscillatore libero.

Scriviamo la pulsazione come

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m} - \frac{b^2}{4m^2}} = \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2} = \omega_0 \sqrt{1 - \left(\frac{\gamma}{\omega_0}\right)^2}.$$

Essendo

$$\frac{\gamma}{\omega} \approx \frac{\gamma}{\omega_0} = \frac{1}{10} \frac{1}{4\pi},$$

risulta:

$$\omega = \omega_0 \sqrt{1 - \frac{1}{15775}}.$$

Poiché per x piccolo $\sqrt{1-x} \approx 1 - x/2$, si ha

$$\omega \approx \omega_0 \left(1 - \frac{1}{31550}\right), \quad \Rightarrow \quad \frac{\omega - \omega_0}{\omega_0} = -\frac{1}{31550} = -0,003\%.$$

Si riconosce che la variazione è piuttosto piccola; pertanto, in alcuni casi, anche per smorzamenti piuttosto forti non si commette un errore sensibile se si assume $\omega = \omega_0$.

4. Oscillazioni forzate

Quando sull'oscillatore, studiato nel paragrafo precedente, agisce una forza esterna di tipo sinusoidale $F \cos \omega t$, la seconda equazione della dinamica si scrive

$$m\ddot{x} + b\dot{x} + kx = F \cos \omega t. \quad (33)$$

La soluzione di questa equazione differenziale del secondo ordine, non omogenea, come insegna l'Analisi, è data dalla somma della soluzione dell'omogenea associata, che si è già ricavata, e di una soluzione particolare da ricercare. Fisicamente ci si attende che, una volta esaurito il transitorio smorzato, l'oscillatore esegua le oscillazioni della forza impressa, però con ampiezza e fase diverse. Ne segue che per determinare tali grandezze, basta assumere come soluzione:

$$x(t) = C_1 \sin \omega t + C_2 \cos \omega t, \quad (34)$$

dove C_1 e C_2 sono costanti da stabilire.

Derivando successivamente rispetto al tempo la (34), si ha

$$\begin{aligned} \dot{x} &= C_1 \omega \cos \omega t - C_2 \omega \sin \omega t \\ \ddot{x} &= -C_1 \omega^2 \sin \omega t - C_2 \omega^2 \cos \omega t. \end{aligned}$$

Sostituendo nella (33):

$$\begin{aligned} m(-C_1 \omega^2 \sin \omega t - C_2 \omega^2 \cos \omega t) + b(C_1 \omega \cos \omega t - C_2 \omega \sin \omega t) \\ + k(C_1 \sin \omega t + C_2 \cos \omega t) - F \cos \omega t = 0. \end{aligned}$$

Raccogliendo i termini $\sin \omega t$ e $\cos \omega t$ si ottiene:

$$\begin{aligned} (-mC_1 \omega^2 - bC_2 \omega + kC_1) \sin \omega t &= 0 \\ (-mC_2 \omega^2 + bC_1 \omega + kC_2 - F) \cos \omega t &= 0, \end{aligned}$$

e poiché $\sin \omega t$ e $\cos \omega t$ non sono mai contemporaneamente nulli, si deve avere:

$$\begin{aligned} (k - m\omega^2)C_1 - b\omega C_2 &= 0 \\ (k - m\omega^2)C_2 + b\omega C_1 &= F. \end{aligned}$$

Risolvendo il sistema, si ricava

$$C_1 = \frac{Fb\omega}{(k - m\omega^2)^2 + b^2\omega^2}, \quad C_2 = \frac{(k - m\omega^2)F}{(k - m\omega^2)^2 + b^2\omega^2}.$$

Pertanto la (34) si scrive:

$$\begin{aligned} x(t) &= \frac{F}{\sqrt{(k - m\omega^2)^2 + b^2\omega^2}} \left[\frac{b\omega}{\sqrt{(k - m\omega^2)^2 + b^2\omega^2}} \sin \omega t \right. \\ &\quad \left. + \frac{k - m\omega^2}{\sqrt{(k - m\omega^2)^2 + b^2\omega^2}} \cos \omega t \right]. \end{aligned}$$

Ponendo:

$$\sin \varphi = \frac{b\omega}{\sqrt{(k - m\omega^2)^2 + b^2\omega^2}}, \quad \cos \varphi = \frac{k - m\omega^2}{\sqrt{(k - m\omega^2)^2 + b^2\omega^2}}; \quad (35)$$

posizione legittima, poiché si verifica subito che $\sin^2 \varphi + \cos^2 \varphi = 1$, e ricordando che la pulsazione dell'oscillatore libero è data da $\omega_0^2 = k/m$, si ha

$$x(t) = \frac{F}{\sqrt{m^2(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + b^2\omega^2}} \cos(\omega t - \varphi) = A \cos(\omega t - \varphi), \quad (36)$$

dove l'ampiezza di oscillazione è

$$A = \frac{F}{\sqrt{m^2(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + b^2\omega^2}} \quad (37)$$

La soluzione generale della (33) è dunque combinazione lineare di una oscillazione smorzata e della (36):

$$x(t) = A'e^{-\gamma t} \cos(\omega t - \varphi') + A \cos(\omega t - \varphi).$$

Il primo termine si attenua più o meno rapidamente, cosicché la soluzione a regime o stazionaria, è data dal secondo termine. In figura 17 è mostrato l'andamento della forza impressa (a), dell'oscillazione smorzata (b) e dell'oscillazione risultante (c).

Dalle (35) si ottiene

$$\tan \varphi = \frac{b\omega}{k - m\omega^2} = \frac{b\omega}{m(\omega_0^2 - \omega^2)}. \quad (38)$$

La fase, come indica la (36), è sempre negativa; ciò significa che l'oscillatore segue in ritardo la sollecitazione impressa. È importante osservare che ampiezza di oscillazione e fase dipendono dalla pulsazione ω della forza impressa e dal fattore di smorzamento b .

L'ampiezza può essere opportunamente espressa evidenziando il fattore di merito Q , equazione (32),

$$\begin{aligned} A &= \frac{F}{m\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + b^2\omega^2/m^2}} \\ &= \frac{F}{m\omega_0^2\sqrt{(1 - \omega^2/\omega_0^2)^2 + b^2\omega^2/m^2\omega_0^4}} \\ &= \frac{F}{m\omega_0^2\sqrt{(1 - \omega^2/\omega_0^2)^2 + (\omega/\omega_0 Q)^2}}, \end{aligned}$$

analogamente la fase:

$$\tan \varphi = \frac{\omega}{\omega_0} \frac{1}{Q} \frac{1}{1 - (\omega/\omega_0)^2}.$$

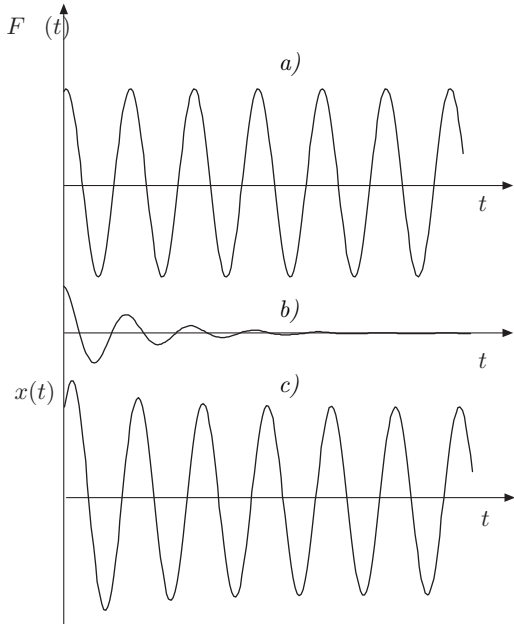


Fig. 10.17

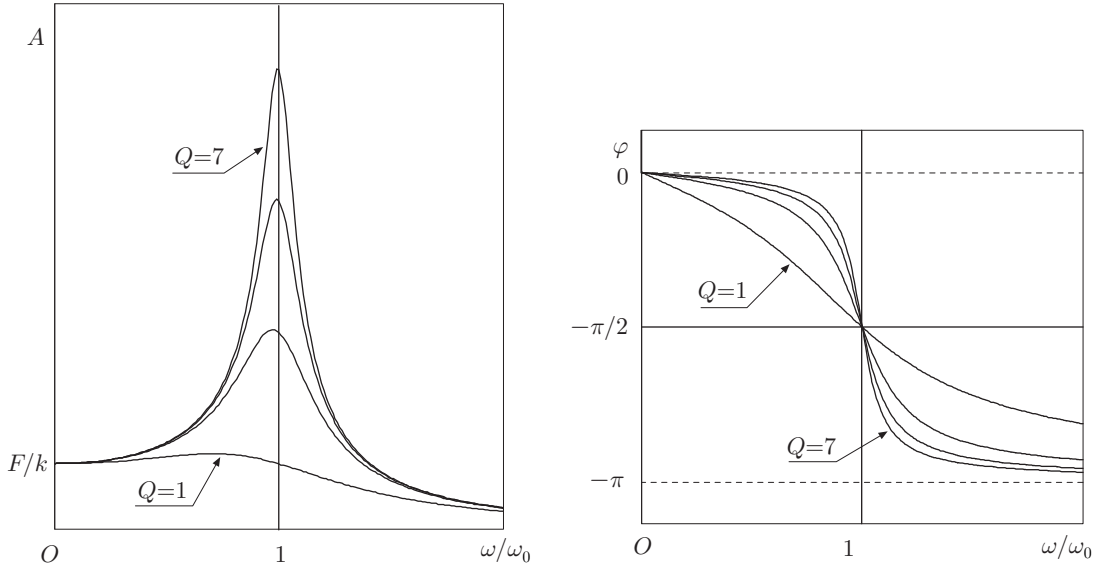


Fig. 10.18

In figura 18 è riportato qualitativamente l'andamento di A e di φ in funzione di ω/ω_0 , per differenti valori di $Q = \omega_0/2\gamma$. L'ampiezza, per $\omega = 0$, risulta sempre F/k ; assume il valore massimo per ω che rende minimo il denominatore della (37), ossia per

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \frac{b^2}{2m^2}} = \omega_0 \sqrt{1 - \frac{1}{2Q^2}}.$$

Ciò significa che il massimo dell'ampiezza, per valori elevati dello smorzamento o valori piccoli di Q , si trova a sinistra di $\omega/\omega_0 = 1$, mentre per $b \rightarrow 0$, o valori elevati di Q , corrisponde sensibilmente a $\omega = \omega_0$. L'ampiezza infine tende a zero al crescere di ω . In coincidenza col massimo dell'ampiezza si verifica il fenomeno della *risonanza*.

La fase varia da 0 a $-\pi/2$, per ω che va da 0 a ω_0 ; da $-\pi/2$ a $-\pi$, per ω che va da ω_0 a ∞ .

In condizioni di regime l'oscillatore ha una energia totale E , somma dell'energia cinetica e dell'energia potenziale. L'energia cinetica è

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2}m \left(\frac{dx}{dt} \right)^2 = \frac{1}{2}m\omega^2 \frac{F^2}{m^2(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + b^2\omega^2} \sin^2(\omega t - \varphi) \\ &= \frac{1}{2}m\omega^2 A^2 \sin^2(\omega t - \varphi). \end{aligned} \quad (39)$$

Essa raggiunge il suo valore massimo nell'istante in cui l'oscillatore transita per la sua posizione di equilibrio. Il valore medio di tale energia, come il valore medio dell'energia potenziale, per la (25)-VIII, è $E/2$.

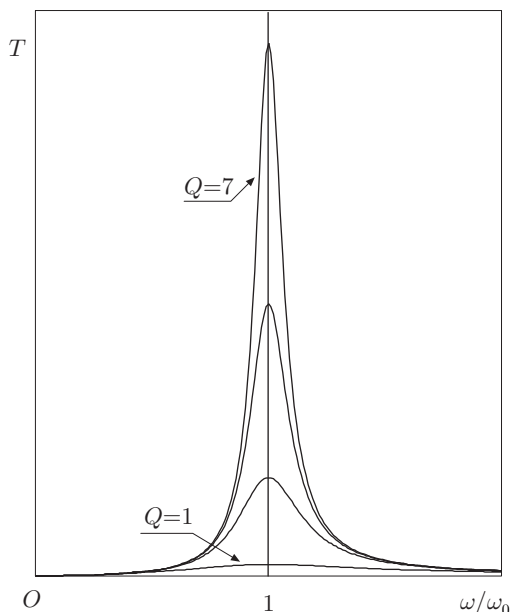


Fig. 10.19

È notevole dedurre dalla precedente, che la risonanza per l'energia si ha, in ogni caso, per $\omega = \omega_0$, figura 19, cioè

$$T_{max} = \frac{1}{2}m \frac{F^2}{b^2} = \frac{1}{2}m \frac{F^2}{4m^2\gamma^2} = \frac{1}{2} \frac{F^2}{m\omega_0^2} Q^2. \quad (40)$$

La risonanza è tanto più alta quanto più elevato è Q .

Si osservi che i problemi oscillatori esaminati, sono perfettamente equivalenti a quelli relativi a circuiti elettrici contenenti in serie, induttanza L , corrispondente alla massa m , capacità C , corrispondente a $1/k$, e resistenza R , corrispondente a b . Nell'oscillatore forzato la forza periodica corrisponde ad una tensione elettrica $V = V_0 \cos \omega t$.

I sistemi meccanici devono avere un valore di Q piuttosto basso, di solito inferiore a 100. Infatti una struttura meccanica, soggetta a sollecitazione periodica, come raffiche di vento, vibrazioni esterne, moto ondoso, può assumere una ampiezza di oscillazione molto elevata, se la frequenza della sollecitazione esterna coincide con la frequenza propria del sistema. In tal caso possono verificarsi effetti disastrosi, come quello del ponte sospeso di Tacoma Narrows a Ponget Sound, Washington, crollato nel 1940 perché investito da raffiche di vento che eccitarono la frequenza propria della struttura. Viceversa oscillatori elettrici di buona qualità possono avere Q dell'ordine di 10^5 .

Esempi

4. Larghezza di banda della curva di risonanza.

La buona qualità di un sistema elettrico oscillante, richiede una risposta elevata in ampiezza solo in un intervallo di frequenze piuttosto ristretto, centrato intorno ad ω_0 . Un criterio per fissare tale intervallo, $\omega_1 < \omega_0 < \omega_2$, può essere quello di determinare la larghezza della curva di risonanza per cui l'energia si riduce a metà del valore che ha in ω_0 .

Ricordando la (39), scriviamo l'energia cinetica massima:

$$T_{max} = \frac{1}{2}m\omega^2 \frac{F^2}{m^2 [(\omega_0 - \omega)(\omega_0 + \omega)]^2 + 4m^2\gamma^2\omega^2};$$

Supponendo che ω_1 e ω_2 non differiscano molto da ω_0 , si può assumere $\omega_0 + \omega \approx 2\omega_0$ e $\omega \approx \omega_0$; perciò l'equazione precedente diventa:

$$T_{max} = \frac{1}{2}m\omega_0^2 \frac{F^2}{4m^2\omega_0^2 [(\omega_0 - \omega)^2 + \gamma^2]} = \frac{1}{2} \frac{F^2}{4m\gamma^2 [(\omega_0 - \omega)^2/\gamma^2 + 1]}.$$

Per $\omega - \omega_0 = \pm\gamma$, questa espressione diventa la metà di quella che si ottiene alla risonanza, equazione (40).

La differenza tra le due frequenze $\omega_2 = \omega_0 + \gamma$ e $\omega_1 = \omega_0 - \gamma$, è uguale a

$$\omega_2 - \omega_1 = \Delta\omega = 2\gamma;$$

La larghezza relativa della curva risulta

$$\frac{\Delta\omega}{\omega} \approx \frac{\Delta\omega}{\omega_0} = \frac{2\gamma}{\omega_0} = \frac{1}{Q}.$$

Questo risultato dimostra che la risonanza dell'energia è tanto più stretta e tanto più alta è la sua ampiezza, quanto più elevato è il fattore di merito dell'oscillatore.

5. Energia dissipata.

L'energia dissipata dall'oscillatore forzato è data dal lavoro della forza esterna $F \cos \omega t$. In un periodo è

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= \int_0^T F \cos \omega t dx \\ &= - \int_0^T F \cos \omega t \frac{F\omega}{\sqrt{m^2(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + b^2\omega^2}} \sin(\omega t - \varphi) dt, \end{aligned}$$

che per la prima delle (35), si scrive:

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= - \frac{F^2 \sin \varphi}{b} \int_0^T \cos \omega t \sin(\omega t - \varphi) dt \\ &= - \frac{F^2 \sin \varphi}{b} \left[\int_0^T \cos \varphi \sin \omega t \cos \omega t dt - \int_0^T \sin \varphi \cos^2 \omega t dt \right]. \end{aligned}$$

Il primo integrale è nullo; il secondo risulta

$$\frac{F^2 \sin^2 \varphi}{b} \int_0^T \cos^2 \omega t dt = \frac{F^2 \sin^2 \varphi}{b\omega} \pi > 0.$$

La potenza dissipata in un periodo è

$$W = \frac{F^2 \sin^2 \varphi}{b\omega T} \pi = \frac{F^2 \sin^2 \varphi}{2b}.$$

Entrambe le grandezze dipendono dallo sfasamento e da b . A parità di smorzamento sono massime per $\varphi = -\pi/2$ che corrisponde alla risonanza per l'energia.

.....

5. Oscillatori accoppiati

È importante sottolineare che il problema delle oscillazioni finora studiato è governato da equazioni differenziali lineari, in cui viene escluso che la forza di richiamo dipenda da potenze di x superiori alla prima, cioè x^2 , x^3 , ..., o da funzioni più complicate; in tale circostanza l'equazione differenziale è detta non lineare. È facile convincersi che questi casi sono frequenti: basta pensare al pendolo, in cui la forza di richiamo dipende da $\sin \theta$. Per angoli piccoli, $\sin \theta \approx \theta$, l'oscillazione è armonica; per angoli che non soddisfano questa approssimazione il problema non è semplice e ne daremo la soluzione nel prossimo paragrafo.

Un altro esempio è il sistema massa-molle che esegue oscillazioni trasversali, cioè ortogonali all'asse delle molle. In figura 20 è schematizzata una massa, collegata a due molle identiche tese, di costanti elastiche k uguali, che può oscillare lungo l'asse delle

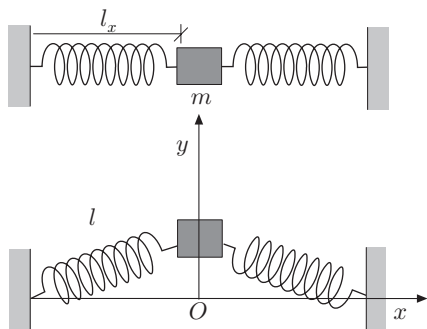


Fig. 10.20

molle, asse x , e in direzione ortogonale ad esso, asse y . L'oscillazione lungo l'asse è armonica e avviene con pulsazione $\omega = \sqrt{2k/m}$, esempio 6-VII.

Per studiare l'oscillazione lungo y , chiamiamo l_0 la lunghezza propria delle molle, l_x la lunghezza delle molle tese e $T = k(l_x - l_0)$ la tensione alla quale ciascuna è soggetta quando sono allineate. Spostando la massa in una posizione y e detta l la lunghezza che assume ciascuna molla in questa posizione, la tensione risulta $T = k(l - l_0)$, perciò la forza alla quale è soggetta la massa è

$$F = -2T \sin \theta = -2T \frac{y}{l} = -2k \left(1 - \frac{l_0}{l}\right) y,$$

dove l è ovviamente funzione di y . Poiché

$$l^2 = l_x^2 + y^2 = l_x^2 \left(1 + \frac{y^2}{l_x^2}\right),$$

si può scrivere

$$\frac{1}{l} = \frac{1}{l_x} \left(1 + \frac{y^2}{l_x^2}\right)^{-1/2}.$$

Sviluppando in serie di potenze la quantità in parentesi, si ha

$$\frac{1}{l} = \frac{1}{l_x} \left(1 - \frac{1}{2} \frac{y^2}{l_x^2} + \dots\right),$$

dunque la forza diventa:

$$F = -\frac{2k}{l_x} (l_x - l_0) y - k l_0 \left(\frac{y}{l_x}\right)^3 + \dots$$

Se lo spostamento y è piccolo rispetto ad l_x , oscillazioni di piccola ampiezza, è lecito trascurare le potenze di y superiori alla prima. Le oscillazioni si possono ritenere armoniche.

Nel seguito si prenderanno in considerazione problemi che rientrano nell'ambito dell'approssimazione armonica. C'è da osservare che nei sistemi masse-molle ideali, interviene la lunghezza propria l_0 della molla. Tale lunghezza può essere ritenuta trascurabile, rispetto agli allungamenti elastici, solo nel caso di certe molle, *slinky*, che hanno lunghezza propria di alcuni centimetri e si possono tendere fino a qualche metro, rimanendo nell'ambito degli allungamenti lineari. In queste condizioni, come si deduce dall'ultima relazione, le oscillazioni risultano armoniche.

Consideriamo ora il sistema costituito da due particelle a e b di uguale massa. a è sospesa ad un punto fisso O per mezzo di un filo inestendibile e di massa trascurabile, di lunghezza l ; b è sospesa ad a per mezzo di un filo identico. All'equilibrio il sistema si trova lungo la verticale passante per O ; una volta spostato da

questa posizione e abbandonato a se stesso, inizia ad oscillare in un piano verticale in modo più o meno complesso. Per studiare il moto, fissiamo un riferimento con origine O , asse x orizzontale e asse y volto verso il basso, figura 21. Se \mathbf{T}_a e \mathbf{T}_b sono le tensioni nel filo superiore ed inferiore e (x_a, y_a) , (x_b, y_b) le coordinate delle particelle, le componenti delle forze agenti sono:

$$\begin{aligned} F_{a,x} &= T_b \sin \varphi - T_a \sin \theta & F_{b,x} &= -T_b \sin \varphi \\ F_{a,y} &= mg + T_b \cos \varphi - T_a \cos \theta & F_{b,y} &= mg - T_b \cos \varphi, \end{aligned}$$

dove

$$\sin \theta = \frac{x_a}{l}, \quad \sin \varphi = \frac{x_b - x_a}{l}.$$

Supponiamo che gli angoli siano piccoli e tali che $\cos \theta$ e $\cos \varphi$ siano circa uguali ad uno; sostanzialmente risulta anche $T_b \approx mg$ e $T_a \approx T_b + mg = 2mg$. Le equazioni della dinamica di a e b sono:

$$\begin{aligned} m\ddot{x}_a &= mg \frac{x_b - x_a}{l} - 2mg \frac{x_a}{l} = \frac{mg}{l} (x_b - 3x_a) \\ m\ddot{x}_b &= -\frac{mg}{l} (x_b - x_a). \end{aligned}$$

cioè

$$\begin{aligned} \ddot{x}_a + 3\frac{g}{l}x_a - \frac{g}{l}x_b &= 0 \\ \ddot{x}_b + \frac{g}{l}x_b - \frac{g}{l}x_a &= 0. \end{aligned} \quad (41)$$

Le equazioni ottenute si dicono *accoppiate* nel senso che ognuna di esse contiene le coordinate di entrambe le particelle. Esse non possono essere risolte con i metodi esposti finora; tuttavia poiché le equazioni sono lineari e si presuppongono soluzioni di tipo armonico, è possibile costruire soluzioni generali mediante combinazioni lineari di soluzioni particolari, tali che il rapporto x_b/x_a resti costante durante il moto. Assegnate certe condizioni iniziali, tali soluzioni devono essere del tipo

$$x_a = A_1 \cos(\omega t + \varphi), \quad x_b = A_2 \cos(\omega t + \varphi).$$

Sostituendo le precedenti e le loro derivate seconde nelle (41), si ottiene:

$$\begin{aligned} (3\omega_0^2 - \omega^2)A_1 - \omega_0^2 A_2 &= 0 \\ (\omega_0^2 - \omega^2)A_2 - \omega_0^2 A_1 &= 0, \end{aligned} \quad (42)$$

dove $\omega_0^2 = g/l$.

Eliminando A_1 e A_2 , si ottiene

$$(3\omega_0^2 - \omega^2)(\omega_0^2 - \omega^2) - \omega_0^4 = 0, \quad \Rightarrow \quad \omega^4 - 4\omega_0^2\omega^2 + 2\omega_0^4 = 0,$$

che ha come radici:

$$\omega^2 = \omega_0^2 (2 \pm \sqrt{2}).$$

Entrambe le radici sono positive, quindi danno valori reali di ω^2 :

$$\omega_1^2 = \omega_0^2 (2 + \sqrt{2}), \quad \omega_2^2 = \omega_0^2 (2 - \sqrt{2}).$$

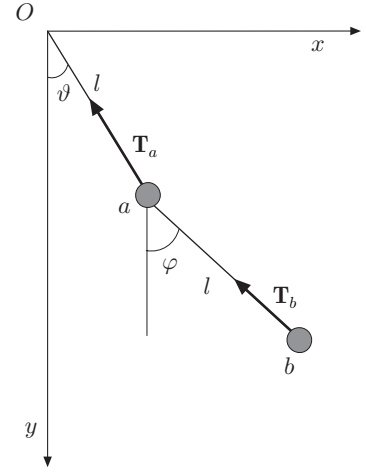


Fig. 10.21

Ricavando dalle (42) il rapporto A_2/A_1 :

$$\frac{A_2}{A_1} = \frac{3\omega_0^2 - \omega^2}{\omega_0^2},$$

per ognuna delle radici si ottiene:

$$\frac{A_2}{A_1} = 1 - \sqrt{2}, \quad \frac{A_2}{A_1} = 1 + \sqrt{2}.$$

Si deducono due possibili coppie di soluzioni:

$$\begin{aligned} x_{1a} &= C_1 \cos(\omega_1 t + \varphi_1) \\ x_{2a} &= C_2 \cos(\omega_2 t + \varphi_2) \\ x_{1b} &= C_1 (1 - \sqrt{2}) \cos(\omega_1 t + \varphi_1) \\ x_{2b} &= C_2 (1 + \sqrt{2}) \cos(\omega_2 t + \varphi_2), \end{aligned}$$

dove sono coinvolte quattro costanti arbitrarie $C_1, C_2, \varphi_1, \varphi_2$, dipendenti dalle condizioni iniziali.

Si verifica facilmente che, per la linearità delle equazioni, principio di sovrapposizione, le soluzioni:

$$\begin{aligned} \xi_a &= C_1 \cos(\omega_1 t + \varphi_1) + C_2 \cos(\omega_2 t + \varphi_2) \\ \xi_b &= C_1 (1 - \sqrt{2}) \cos(\omega_1 t + \varphi_1) + C_2 (1 + \sqrt{2}) \cos(\omega_2 t + \varphi_2), \end{aligned} \quad (43)$$

soddisfano le (41). Le (43) contengono il numero richiesto di costanti, determinabili una volta assegnate posizioni e velocità iniziali, quindi rappresentano la soluzione generale del problema.

Se le condizioni iniziali sono tali che la costante C_2 risulti nulla, x_a e x_b hanno andamento armonico di uguale frequenza; inoltre il rapporto x_b/x_a è costante, ossia la configurazione del sistema rimane costante durante il moto. Allora si dice che il sistema si trova in uno dei *modi normali di vibrazione*. Analogo comportamento si ha per $C_1 = 0$. In figura 22 sono schematizzati i due modi. Si sottolinea il fatto che tali modi vengono determinati da particolari condizioni iniziali; loro caratteristica è che il rapporto tra le ampiezze rimane costante durante il movimento. Il sistema considerato, che ha due gradi di libertà, presenta dunque due modi normali con due frequenze normali. Il moto più generale è combinazione lineare dei due modi ed è espresso dalle (43). Si può dimostrare, in generale, che un sistema oscillante con n gradi di libertà presenta n modi normali di vibrazione.

Complementi ed esempi

III 6. Sistema masse-molle.

Consideriamo il sistema costituito da due masse a e b uguali collegato con tre molle identiche di costante elastica k , libero di oscillare su un piano privo di attrito.

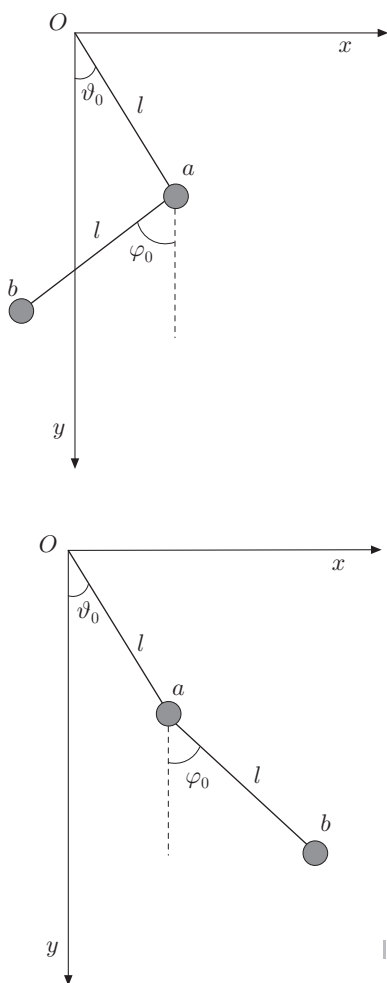


Fig. 10.22

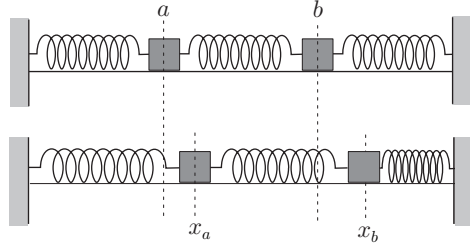


Fig. 10.23

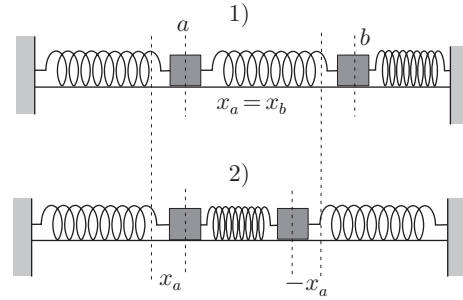


Fig. 10.24

Il sistema ha due gradi di libertà, dunque devono esistere due modi normali di vibrazione. Supponiamo di perturbare il sistema dall'equilibrio e siano x_a e x_b gli spostamenti di a e b , rispetto alla posizione di riposo, entrambi verso destra, figura 23. Le forze che agiscono su a sono $-kx_a$ e $k(x_b - x_a)$; le forze che agiscono su b sono $-kx_b$ e $-k(x_b - x_a)$. Le equazioni della dinamica delle due masse si scrivono:

$$\begin{aligned} m\ddot{x}_a &= -kx_a + k(x_b - x_a) \\ m\ddot{x}_b &= -kx_b - k(x_b - x_a). \end{aligned}$$

Sommando e sottraendo le precedenti, si ottengono le equazioni non accoppiate del moto:

$$\begin{aligned} m(\ddot{x}_a + \ddot{x}_b) &= -k(x_a + x_b) \\ m(\ddot{x}_a - \ddot{x}_b) &= -3k(x_a - x_b), \end{aligned} \quad (44)$$

nelle variabili $(x_a + x_b)$ e $(x_a - x_b)$. Le (44) hanno le soluzioni

$$\begin{aligned} x_a + x_b &= A_1 \cos(\omega_1 t + \varphi_1) \\ x_a - x_b &= A_2 \cos(\omega_2 t + \varphi_2), \end{aligned}$$

con $\omega_1^2 = k/m$ e $\omega_2^2 = 3k/m$. Esse rappresentano i modi normali.

Si osserva subito che la prima soluzione descrive il moto del centro di massa del sistema, la cui posizione è proprio $(x_a + x_b)/2$; la seconda lo spostamento relativo delle masse. I due modi sono mostrati in figura 24; nel primo la molla centrale non risulta deformata, nel secondo viene compressa.

Il moto più generale, come s'è detto, si ottiene dalla combinazione lineare dei due modi; sommando e sottraendo le precedenti si ha

$$\begin{aligned} \xi_a = 2x_a &= A_1 \cos(\omega_1 t + \varphi_1) + A_2 \cos(\omega_2 t + \varphi_2) \\ \xi_b = 2x_b &= A_1 \cos(\omega_1 t + \varphi_1) - A_2 \cos(\omega_2 t + \varphi_2), \end{aligned} \quad (45)$$

Il primo modo normale si ottiene per $A_2 = 0$, in cui $\xi_a = \xi_b$; il secondo, per $A_1 = 0$, in cui $\xi_b = -\xi_a$.

7. Pendoli accoppiati.

Prendiamo in esame il sistema costituito da due pendoli a e b identici accoppiati per mezzo di una molla di costante elastica k , figura 25. Per le considerazioni precedenti, è semplice prevedere quali siano i due modi normali delle piccole oscillazioni.

Nel primo modo si deve avere $x_a = x_b$; la molla di accoppiamento potrebbe essere eliminata poiché le ampiezze si mantengono sempre uguali. La forza di richiamo è dovuta alla gravità e la pulsazione del modo è $\omega_1 = \sqrt{g/l}$. Nel secondo modo è $x_a = -x_b$. Si ha una forza di richiamo della molla $-2kx_a$, il fattore 2 dipende dal fatto che la molla è compressa di $2x_a$, e una forza di richiamo dovuta alla gravità $-mg \sin \theta \approx -mg\theta = -mgx_a/l$, quindi la pulsazione risulta $\omega_2 = \sqrt{g/l + 2k/m}$.

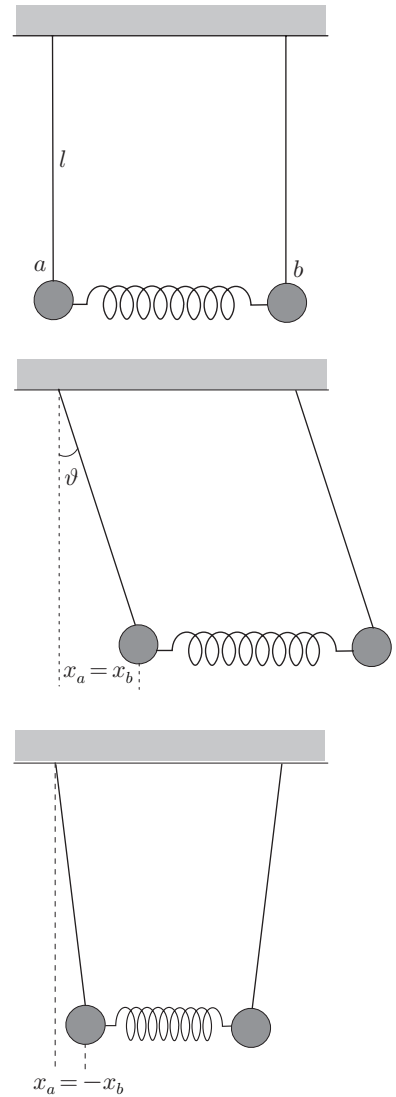


Fig. 10.25

In virtù delle (45), il moto generico del sistema risulta dalla sovrapposizione dei due modi normali. Se le frequenze dei modi sono vicine si osserva il fenomeno dei battimenti, paragrafo 2.2-IV, particolarmente evidente nel caso in cui le ampiezze dei modi sono uguali. Altrettanto si può affermare per il sistema masse-molle, descritto più sopra; tuttavia i pendoli accoppiati si prestano meglio a visualizzare questo fenomeno perché è più semplice rendere la frequenza del battimento, $\nu_1 - \nu_2$, piccola rispetto alla frequenza media, $(\nu_1 + \nu_2)/2$, scegliendo una molla di costante elastica tale che $2k/m \ll g/l$.

Esaminiamo in quali condizioni si possono osservare i battimenti; le equazioni generali del moto di a e b si possono esprimere mediante la combinazione dei modi normali:

$$\xi_a = A_1 \cos(\omega_1 t + \varphi_1) + A_2 \cos(\omega_2 t + \varphi_2)$$

$$\xi_b = A_1 \cos(\omega_1 t + \varphi_1) - A_2 \cos(\omega_2 t + \varphi_2).$$

Assumendo $A_1 = A_2 = A$ e $\varphi_1 = \varphi_2 = 0$; le precedenti diventano

$$\begin{aligned}\xi_a &= A \cos \omega_1 t + A \cos \omega_2 t \\ \xi_b &= A \cos \omega_1 t - A \cos \omega_2 t.\end{aligned}\tag{46}$$

Derivando, si hanno le velocità di oscillazione:

$$\begin{aligned}\dot{\xi}_a &= -\omega_1 A \sin \omega_1 t - \omega_2 A \sin \omega_2 t \\ \dot{\xi}_b &= -\omega_1 A \sin \omega_1 t + \omega_2 A \sin \omega_2 t.\end{aligned}$$

Per $t = 0$, si trovano le seguenti condizioni iniziali:

$$\xi_a(0) = 2A, \quad \xi_b(0) = 0, \quad \dot{\xi}_a(0) = 0, \quad \dot{\xi}_b(0) = 0.$$

Si tenga la massa a nella posizione $2A$, la massa b nella posizione di equilibrio e si liberino entrambe con velocità iniziale nulla. Si osserva che l'ampiezza di oscillazione di a decresce e b inizia ad oscillare; in seguito a si ferma e b oscilla con l'ampiezza iniziale di a . L'oscillazione si è completamente trasferita a b ; il processo continua e l'oscillazione fluisce lentamente da a verso b e viceversa.

Per comprendere il fenomeno, basta ricordare le considerazioni del paragrafo 2.2-IV, a proposito dei battimenti. Usando le formule di prostaferesi, le (46) si possono scrivere:

$$\begin{aligned}\xi_a &= 2A \cos \frac{\omega_1 - \omega_2}{2} t \cos \frac{\omega_1 + \omega_2}{2} t \\ \xi_b &= -2A \sin \frac{\omega_1 - \omega_2}{2} t \sin \frac{\omega_1 + \omega_2}{2} t,\end{aligned}$$

che rappresentano oscillazioni in cui l'ampiezza è modulata al 100%. Esse si interpretano, paragrafo 2.3-IV, come oscillazioni in cui l'ampiezza, espressa da

$$A' = 2A \cos \frac{\omega_1 - \omega_2}{2} t, \quad B' = 2A \sin \frac{\omega_1 - \omega_2}{2} t,$$

è modulata alla frequenza $(\nu_1 - \nu_2)/2$. I corrispondenti battimenti, proporzionali ad A'^2 e B'^2 , hanno frequenza $\nu_1 - \nu_2$ e periodo uguale al tempo impiegato perché l'energia si trasferisca da un pendolo all'altro e viceversa.

ENERGIA

Supponiamo che la molla di accoppiamento abbia costante elastica piccola, cosicché l'energia trasferita nella molla sia trascurabile. Posto $\bar{\omega} = (\omega_1 + \omega_2)/2$ e $\omega_m = (\omega_1 - \omega_2)/2$, l'energia totale di ciascun pendolo, paragrafo 5.2-VIII, è data dalle relazioni:

$$\begin{aligned}E_a &= \frac{1}{2} m \bar{\omega}^2 A'^2 = 2m A^2 \bar{\omega}^2 \cos^2 \omega_m t \\ E_b &= \frac{1}{2} m \bar{\omega}^2 B'^2 = 2m A^2 \bar{\omega}^2 \sin^2 \omega_m t.\end{aligned}$$

L'energia totale di entrambi i pendoli è costante:

$$E_a + E_b = 2m A^2 \bar{\omega}^2 = E.$$

La differenza di energia tra i due pendoli è

$$\begin{aligned} E_a - E_b &= E(\cos^2 \omega_m t - \sin^2 \omega_m t) \\ &= E \cos 2\omega_m t = E \cos(\omega_1 - \omega_2)t. \end{aligned}$$

Dalle relazioni precedenti si ottiene

$$\begin{aligned} E_a &= \frac{1}{2} E[1 + \cos(\omega_1 - \omega_2)t] \\ E_b &= \frac{1}{2} E[1 - \cos(\omega_1 - \omega_2)t]. \end{aligned}$$

Si deduce che l'energia totale E è costante e che fluisce da un pendolo all'altro alla frequenza del battimento. La figura 26 mostra gli andamenti di x_a , x_b , E_a , E_b .

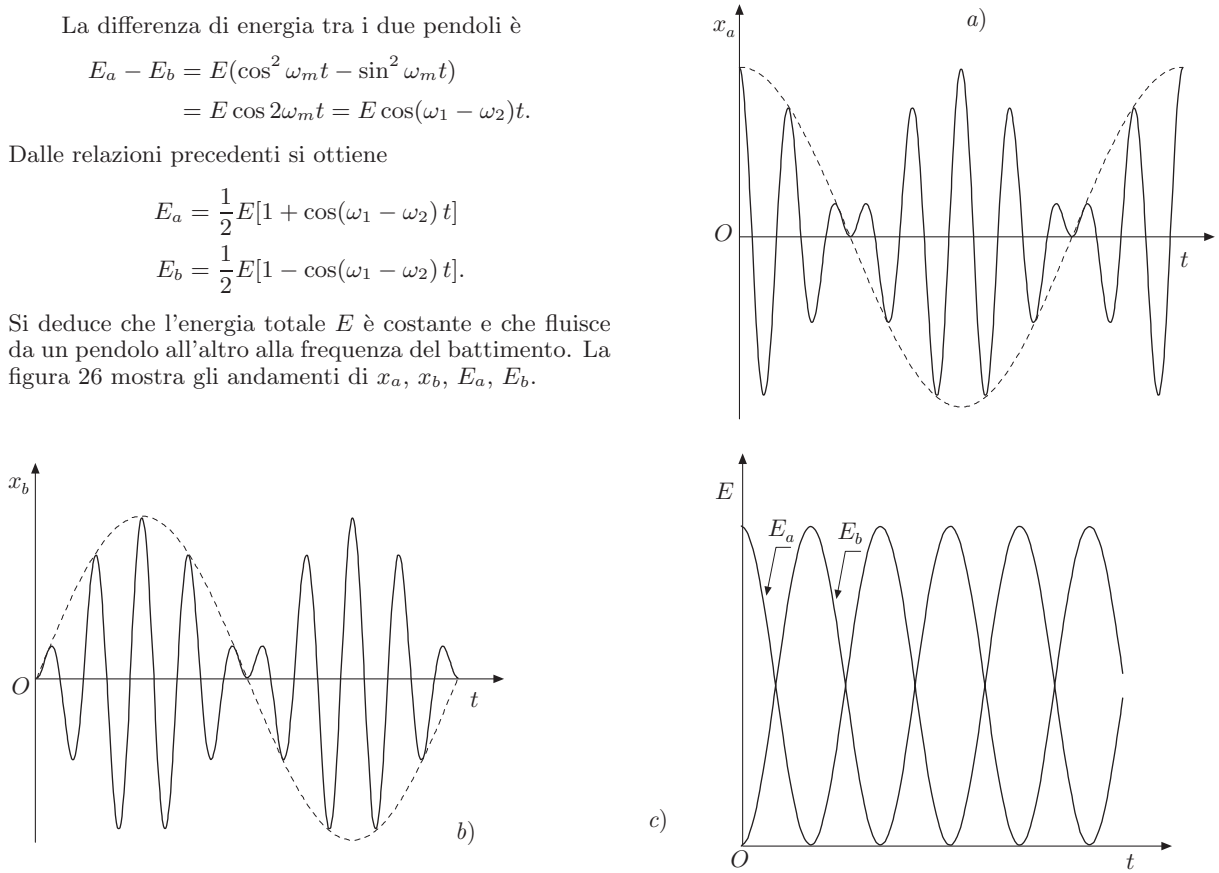


Fig. 10.26

||| 8. Oscillazioni trasversali di due particelle identiche collegate ad un filo teso.

Le particelle a e b , distanti tra loro $d = l/3$ siano fissate, come in figura 27, ad un filo di lunghezza l e massa trascurabile, teso tra O e O' . Supponendo che gli spostamenti trasversali siano piccoli, detta T la tensione del filo, la componente trasversale della forza che agisce su a è data da

$$\begin{aligned} F_{a,y} &= -T \sin \theta_a + T \sin \varphi_a = -T \frac{y_a}{\sqrt{d^2 + y_a^2}} + T \frac{y_b - y_a}{\sqrt{d^2 + (y_b - y_a)^2}} \\ &= -T \frac{y_a}{d\sqrt{1 + y_a^2/d^2}} + T \frac{y_b - y_a}{d\sqrt{1 + (y_b - y_a)^2/d^2}}. \end{aligned}$$

Trascurando i termini y_a^2/d^2 e $(y_b - y_a)^2/d^2$, si ha

$$F_{a,y} = -\frac{T}{d}(2y_a - y_b).$$

Analogamente per la particella b :

$$F_{b,y} = -\frac{T}{d}(2y_b - y_a).$$

Scrivendo le equazioni della dinamica,

$$\begin{aligned} m\ddot{y}_a &= -\frac{T}{d}(2y_a - y_b) \\ m\ddot{y}_b &= -\frac{T}{d}(2y_b - y_a), \end{aligned}$$

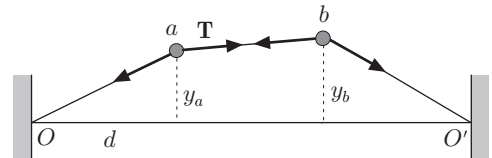


Fig. 10.27

si ottiene:

$$\begin{aligned}\ddot{y}_a + 2\omega_0^2 y_a - \omega_0^2 y_b &= 0 \\ \ddot{y}_b + 2\omega_0^2 y_b - \omega_0^2 y_a &= 0,\end{aligned}\quad (47)$$

dove $\omega_0^2 = T/md = 3T/ml$.

I modi normali di vibrazione sono due:

$$y_a = A_1 \cos(\omega t + \varphi), \quad y_b = A_2 \cos(\omega t + \varphi).$$

Sostituendo le precedenti e le loro derivate seconde nelle (47), si ottiene:

$$\begin{aligned}(2\omega_0^2 - \omega^2)A_1 - \omega_0^2 A_2 &= 0 \\ (2\omega_0^2 - \omega^2)A_2 - \omega_0^2 A_1 &= 0.\end{aligned}\quad (48)$$

Eliminando A_2 e A_1 , si deduce l'equazione in ω^2 :

$$\omega^4 - 4\omega_0^2 \omega^2 + 3\omega_0^4 = 0,$$

che ammette le radici:

$$\omega_1^2 = 3\omega_0^2, \quad \omega_2^2 = \omega_0^2.$$

Ricavando il rapporto tra le ampiezze dalle (48) e sostituendo la prima radice, si ha

$$\frac{A_2}{A_1} = \frac{\omega_0^2}{2\omega_0^2 - 3\omega_0^2} = -1;$$

sostituendo la seconda:

$$\frac{A_2}{A_1} = \frac{\omega_0^2}{2\omega_0^2 - \omega_0^2} = 1.$$

Infine, tenuto conto del rapporto tra le ampiezze trovato, l'equazione del modo a frequenza inferiore è

$$y_a = C_1 \cos(\omega_0 t + \varphi_1) = y_b,$$

quella del modo a frequenza superiore:

$$y_a = C_2 \cos(\sqrt{3}\omega_0 t + \varphi_2) = -y_b.$$

Il primo modo si chiama simmetrico, il secondo antisimmetrico; la loro configurazione è mostrata in figura 28.

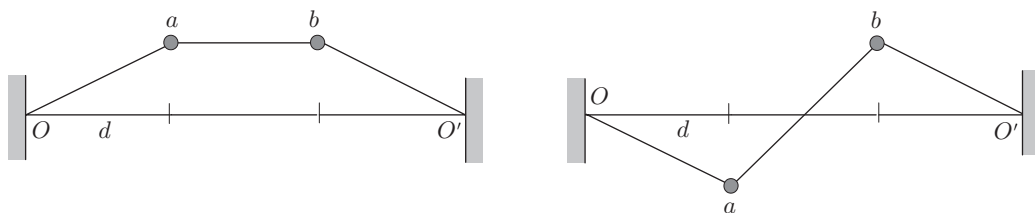


Fig. 10.28

9. Coordinate normali.

È possibile trovare i modi normali di vibrazione con la ricerca degli autovalori che si ottengono mediante la diagonalizzazione della matrice della trasformazione lineare, rappresentativa di un vettore.

Si consideri il problema masse-molle, collegate come nell'esempio 6. L'energia cinetica del sistema è data da

$$T = \frac{1}{2}m(\dot{x}_a^2 + \dot{x}_b^2);$$

l'energia potenziale:

$$U = \frac{1}{2}kx_a^2 + \frac{1}{2}kx_b^2 + \frac{1}{2}k(x_a - x_b)^2 = \frac{1}{2}k(2x_a^2 + 2x_b^2 - 2x_a x_b).$$

Sia l'energia cinetica che l'energia potenziale possono essere scritte sotto forma di matrici, come segue:

$$T = \frac{1}{2}m \begin{pmatrix} \dot{x}_a & \dot{x}_b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{x}_a \\ \dot{x}_b \end{pmatrix}, \quad (49)$$

$$U = \frac{1}{2}k \begin{pmatrix} x_a & x_b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_a \\ x_b \end{pmatrix}. \quad (50)$$

La matrice quadrata dell'energia cinetica è una matrice diagonale, in particolare unitaria; mentre la matrice quadrata dell'energia potenziale va diagonalizzata.

A questo proposito va rammentato che un vettore \mathbf{r}' , di componenti $r' \equiv \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$, può essere espresso mediante un vettore \mathbf{r} , di componenti $r \equiv \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, secondo la trasformazione lineare:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \quad \Rightarrow \quad r' = Mr, \quad (51)$$

dove a, b, c, d sono costanti.

Diagonalizzare la matrice M significa individuare i possibili vettori $\mathbf{r}' = \lambda \mathbf{r}$, *autovettori*, una volta trovati gli *autovalori* λ . Pertanto la (51) diventa

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda x \\ \lambda y \end{pmatrix}. \quad (52)$$

Sotto forma di equazioni:

$$\begin{cases} ax + by = \lambda x \\ cx + dy = \lambda y, \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} (a - \lambda)x + by = 0 \\ cx + (d - \lambda)y = 0. \end{cases}$$

Perché questo sistema abbia soluzioni diverse da zero, si deve annullare la matrice:

$$\begin{vmatrix} a - \lambda & b \\ c & d - \lambda \end{vmatrix} = 0,$$

da cui si ottengono gli autovalori.

Gli autovalori della matrice quadrata dell'energia potenziale sono dati da

$$\begin{vmatrix} 2 - \lambda & -1 \\ -1 & 2 - \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 4\lambda + 3 = (\lambda - 1)(\lambda - 3) = 0,$$

ossia

$$\lambda_1 = 1, \quad \lambda_2 = 3.$$

Pertanto la matrice diagonale risulta

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Esiste dunque una matrice C ortogonale, inversa uguale alla sua trasposta, $CC^T = CC^{-1} = 1$, tale che

$$C^{-1} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}, \quad \Rightarrow \quad C^{-1}MC = D, \quad (53)$$

dove M è la matrice quadrata della (50).

Per trovare le coordinate normali X_a, X_b , dell'energia potenziale, si consideri la trasformazione ortogonale

$$\begin{pmatrix} x_a \\ x_b \end{pmatrix} = C \begin{pmatrix} X_a \\ X_b \end{pmatrix}, \quad (54)$$

Dalla (50) si ha

$$\begin{pmatrix} x_a & x_b \end{pmatrix} M \begin{pmatrix} x_a \\ x_b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_a & x_b \end{pmatrix} MC \begin{pmatrix} X_a \\ X_b \end{pmatrix}.$$

Ricordando che la trasposta del prodotto di due matrici è uguale al prodotto delle trasposte nell'ordine inverso, la trasposta della (54) risulta

$$(x_a \ x_b) = (X_a \ X_b)C^{-1},$$

pertanto sostituendo nella precedente e tenendo conto della (54)

$$\begin{aligned} (x_a \ x_b)MC \begin{pmatrix} X_a \\ X_b \end{pmatrix} &= (X_a \ X_b)C^{-1}MC \begin{pmatrix} X_a \\ X_b \end{pmatrix} \\ &= (X_a \ X_b) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_a \\ X_b \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Nelle nuove variabili, l'energia potenziale è data da

$$U = \frac{1}{2}k(X_a^2 + 3X_b^2). \quad (55)$$

Per quanto riguarda l'energia cinetica, si noti che essendo C una costante, derivando rispetto al tempo la (54), si ha:

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_a \\ \dot{x}_b \end{pmatrix} = C \begin{pmatrix} \dot{X}_a \\ \dot{X}_b \end{pmatrix}.$$

La matrice quadrata che compare nell'energia cinetica è unitaria, quindi

$$C^{-1} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} C = C^{-1}C = 1.$$

Pertanto l'energia cinetica nelle nuove variabili, risulta

$$T = \frac{1}{2}m(\dot{X}_a^2 + \dot{X}_b^2).$$

Dalla (55) si deducono le equazioni della dinamica del sistema:

$$m\ddot{X}_a = -kX_a, \quad m\ddot{X}_b = -3kX_b,$$

che ammettono soluzioni:

$$X_a = A \sin(\omega_1 t + \varphi_1), \quad X_b = B \sin(\omega_2 t + \varphi_2),$$

con

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{k}{m}}, \quad \omega_2 = \sqrt{\frac{3k}{m}},$$

ed $A, B, \varphi_1, \varphi_2$ costanti dipendenti dalle condizioni iniziali.

Per trovare la matrice C , si osservi che per le (50) e (52) si ha

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_a \\ x_b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda x_a \\ \lambda x_b \end{pmatrix}. \quad (56)$$

Pertanto:

$$\mathbf{r}' = (2x_a - x_b)\mathbf{i} + (-x_a + 2x_b)\mathbf{j}. \quad (57)$$

Ponendo, nella (56), gli autovalori trovati, $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 3$, si hanno i sistemi

$$\begin{cases} 2x_a - x_b = x_a \\ -x_a + 2x_b = x_b, \end{cases} \quad \begin{cases} 2x_a - x_b = 3x_a \\ -x_a + 2x_b = 3x_b, \end{cases},$$

che ammettono soluzioni

$$x_a = x_b, \quad x_a = -x_b.$$

Sostituendo la prima soluzione nella (57), si ottiene il vettore

$$\mathbf{r}' = x_a \mathbf{i} + x_a \mathbf{j},$$

che ha modulo:

$$r' = x_a \sqrt{2}.$$

Pertanto il vettore unitario risulta:

$$\frac{\mathbf{r}'}{r'} = \frac{x_a}{x_a\sqrt{2}} \mathbf{i} + \frac{x_a}{x_a\sqrt{2}} \mathbf{j}.$$

Esso ha come componenti i coseni direttori degli assi X_a , x_a , ossia:

$$\cos \alpha_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad \cos \alpha_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Sostituendo la seconda soluzione nella (57), si ha il vettore

$$\mathbf{r}' = -3x_b \mathbf{i} + 3x_b \mathbf{j},$$

che ha modulo:

$$r' = 3x_b\sqrt{2}.$$

Il vettore di modulo unitario è

$$\frac{\mathbf{r}'}{r'} = -\frac{1}{\sqrt{2}} \mathbf{i} + \frac{1}{\sqrt{2}} \mathbf{j},$$

che fornisce l'altra coppia di coseni direttori:

$$\cos \alpha'_1 = -\frac{1}{\sqrt{2}}, \quad \cos \alpha'_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Pertanto si ha:

$$C = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}.$$

Infine la (54) diventa:

$$\begin{pmatrix} x_a \\ x_b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_a \\ X_b \end{pmatrix}.$$

Si ottiene:

$$x_a = \frac{1}{\sqrt{2}}(X_a - X_b), \quad x_b = \frac{1}{\sqrt{2}}(X_a + X_b).$$

In generale il moto risulta combinazione delle due vibrazioni di pulsazioni ω_1 e ω_2 .

Imponendo la condizione iniziale $B = 0$, si ha

$$x_a = x_b = \frac{X_a}{\sqrt{2}} = \frac{A}{\sqrt{2}} \sin(\omega_1 t + \varphi_1).$$

Le oscillazioni sono concordi, ossia $\rightarrow \rightarrow$, oppure $\leftarrow \leftarrow$, con pulsazione ω_1 .

Se $A = 0$, si ottiene

$$x_a = -x_b = -\frac{X_b}{\sqrt{2}} = -\frac{B}{\sqrt{2}} \sin(\omega_2 t + \varphi_2).$$

In questo caso le oscillazioni avvengono in direzioni opposte, ossia $\leftarrow \rightarrow$, oppure $\rightarrow \leftarrow$, con pulsazione ω_2 .

.....

6. Oscillazioni di grande ampiezza del pendolo

Le piccole oscillazioni del pendolo sono state considerate al capitolo VII, esempio 9. Nello studio delle oscillazioni di grande ampiezza va applicato il teorema di conservazione dell'energia; tuttavia anche in questo modo non si ottiene una soluzione analitica del problema.

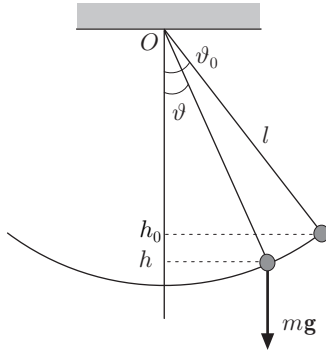


Fig. 10.29

Scriviamo la conservazione dell'energia meccanica del pendolo nella posizione corrispondente al generico angolo θ , figura 29; si ha

$$\frac{1}{2}mv^2 + mgh = mgh_0, \quad (58)$$

dove h e h_0 sono le quote assunte rispetto al punto più basso della traiettoria. Essendo $h = l(1 - \cos \theta)$ e $h_0 = l(1 - \cos \theta_0)$, dalla (58) si trae

$$v^2 = 2gl(\cos \theta - \cos \theta_0)$$

ed essendo $v = \omega l = \dot{\theta}l$,

$$\dot{\theta}^2 = \left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 = 2\frac{g}{l}(\cos \theta - \cos \theta_0).$$

Separando le variabili:

$$\sqrt{\frac{l}{2g}} \frac{d\theta}{\sqrt{\cos \theta - \cos \theta_0}} = dt;$$

il semiperiodo τ dell'oscillazione è dunque dato da

$$\tau = \sqrt{\frac{l}{2g}} \int_{-\theta_0}^{\theta_0} \frac{d\theta}{\sqrt{\cos \theta - \cos \theta_0}} = \sqrt{\frac{2l}{g}} \int_0^{\theta_0} \frac{d\theta}{\sqrt{\cos \theta - \cos \theta_0}}. \quad (59)$$

Questo integrale è improprio perché presenta una singolarità per $\theta = \theta_0$, che non ha significato fisico, perché il periodo è finito. La singolarità va eliminata con le seguenti sostituzioni:

$$k = \sin \frac{\theta_0}{2}, \quad k \sin u = \sin \frac{\theta}{2}; \quad (60)$$

differenziando la seconda si ottiene

$$k \cos u \, du = \frac{1}{2} \cos \frac{\theta}{2} d\theta,$$

da cui, tenuto conto della (60):

$$d\theta = \frac{2k \cos u \, du}{\cos(\theta/2)} = \frac{2k \cos u \, du}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 u}}.$$

D'altra parte si può porre:

$$\begin{aligned} \cos \theta - \cos \theta_0 &= (1 - \cos \theta_0) - (1 - \cos \theta) = 2 \left(\sin^2 \frac{\theta_0}{2} - \sin^2 \frac{\theta}{2} \right) \\ &= 2 \left(k^2 - \sin^2 \frac{\theta}{2} \right) = 2k^2(1 - \sin^2 u); \end{aligned}$$

pertanto sostituendo nella (59) si ottiene

$$\tau = \sqrt{\frac{2l}{g}} \int_0^{\theta_0} \frac{d\theta}{\sqrt{\cos \theta - \cos \theta_0}} = 2\sqrt{\frac{l}{g}} \int_0^{\pi/2} \frac{du}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 u}}.$$

Questo integrale si chiama integrale ellittico di prima specie e va calcolato sviluppando l'integrando in serie di potenze. Posto $x = k^2 \sin^2 u$, è

$$(1 - k^2 \sin^2 u)^{-1/2} = (1 - x)^{-1/2}.$$

Sviluppando in serie di potenze si ottiene

$$(1 - x)^{-1/2} = 1 + \frac{1}{2}x + \frac{3}{4}\frac{x^2}{2!} + \dots$$

cioè:

$$(1 - k^2 \sin^2 u)^{-1/2} = 1 + \frac{1}{2}k^2 \sin^2 u + \frac{3}{4}\frac{1}{2}k^4 \sin^4 u + \dots$$

Integrando:

$$\begin{aligned} \int_0^{\pi/2} (1 - k^2 \sin^2 u)^{-1/2} du &= \int_0^{\pi/2} du + \frac{1}{2}k^2 \int_0^{\pi/2} \sin^2 u du \\ &\quad + \frac{3}{8}k^4 \int_0^{\pi/2} \sin^4 u du + \dots \end{aligned}$$

Risulta:

$$\int_0^{\pi/2} du = \frac{\pi}{2};$$

$$\frac{k^2}{2} \int_0^{\pi/2} \sin^2 u du = \frac{k^2}{2} \left[\frac{1}{2}u - \frac{1}{4}\sin 2u \right]_0^{\pi/2} = \frac{1}{8}k^2\pi;$$

$$\begin{aligned} \frac{3}{8}k^4 \int_0^{\pi/2} \sin^4 u du &= \frac{3}{8}k^4 \left[-\frac{\sin^3 u \cos u}{4} + \frac{3}{4} \left(\frac{1}{2}u - \frac{1}{4}\sin 2u \right) \right]_0^{\pi/2} \\ &= \frac{9}{128}k^4\pi. \end{aligned}$$

Infine

$$\int_0^{\pi/2} (1 - k^2 \sin^2 u)^{-1/2} du = \frac{\pi}{2} + \frac{1}{8}k^2\pi + \frac{9}{128}k^4\pi + \dots$$

Pertanto si ottiene:

$$\begin{aligned} \frac{T}{2} &= \pi \sqrt{\frac{l}{g}} \left(1 + \frac{1}{4}k^2 + \frac{9}{64}k^4 + \dots \right) \\ T &= 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}} \left(1 + \frac{1}{4}k^2 + \frac{9}{64}k^4 + \dots \right). \end{aligned}$$

Poiché $k = \sin \theta_0/2$, ed essendo lecito ritenere che, per potenze superiori alla prima, si possa porre $k \approx \theta_0/2$, si ha

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}} \left(1 + \frac{\theta_0^2}{16} + \frac{9}{64}\frac{\theta_0^4}{16} + \dots \right).$$

Si trova dunque che per oscillazioni di piccola ampiezza, il periodo è

$$T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}, \quad \Rightarrow \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{g}{l}},$$

la frequenza è unica. Per oscillazioni di ampiezza tale che sia lecito trascurare i termini successivi al secondo, si ha

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}} \left(1 + \frac{\theta_0^2}{16}\right)$$

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{l}} \left(1 + \frac{\theta_0^2}{16}\right)^{-1} \approx \omega_0 \left(1 - \frac{\theta_0^2}{16}\right).$$

Pur limitandosi ai soli due termini considerati, si osserva che oltre alla frequenza ω_0 è presente una frequenza multipla di quest'ultima. Le oscillazioni sono anarmoniche.

7. Moto verticale di un grave soggetto a forza viscosa

È il caso del moto di un punto materiale soggetto ad una forza costante e ad una forza viscosa che, per velocità modeste, è del tipo $\mathbf{F} = -b\mathbf{v}$.

Il coefficiente $b = \chi\eta$ dipende dal coefficiente di viscosità η del mezzo e dal fattore di forma χ del corpo; quest'ultimo, di solito, va determinato sperimentalmente. Solo nel caso di una sfera di raggio R , calcoli piuttosto laboriosi danno come risultato $\chi = 6\pi R$ (legge di Stokes).

Supponiamo di lasciar cadere una pallina in un fluido viscoso, in modo che all'istante $t = 0$, posizione x_0 e velocità v_0 siano nulle. Assumendo come riferimento un asse con origine in corrispondenza al pelo libero del fluido e volto verso il basso, la seconda equazione della dinamica si scrive

$$m\mathbf{a} = m\mathbf{g} - b\mathbf{v}, \quad (61)$$

avendo trascurato la spinta di Archimede.

Il moto è unidimensionale, perciò dalla (61) si ha:

$$\frac{dv}{dt} = g - \frac{b}{m}v.$$

Separando le variabili:

$$\frac{dv}{g - (b/m)v} = dt.$$

Integrando

$$\int \frac{dv}{g - (b/m)v} = \int dt,$$

si ottiene:

$$-\frac{m}{b} \ln \left(g - \frac{b}{m}v \right) = t + C_1. \quad (62)$$

La costante C_1 , tenendo conto delle condizioni iniziali: $t = 0$, $v_0 = 0$, risulta $C_1 = -(m/b) \ln g$. Dunque

$$-\frac{m}{b} \ln \left(g - \frac{b}{m} v \right) = t - \frac{m}{b} \ln g,$$

cioè

$$\ln \frac{g - bv/m}{g} = -\frac{b}{m} t, \quad \Rightarrow \quad g - \frac{b}{m} v = g e^{-(b/m)t},$$

da cui

$$v = \frac{mg}{b} \left(1 - e^{-(b/m)t} \right). \quad (63)$$

L'andamento della velocità in funzione del tempo è mostrato in figura 30, per $b_1 > b_2 > b_3$. Essa cresce fino a un valore costante mg/b , che si chiama velocità limite, valore per cui si ha equilibrio dinamico tra la forza di gravità e la forza viscosa. Infatti ponendo nella (61) $a = 0$, si ottiene

$$mg - bv = 0, \quad \Rightarrow \quad v = \frac{mg}{b}.$$

La pallina raggiunge tanto più rapidamente la velocità limite, quanto più elevato è il fattore di smorzamento b/m dell'esponentiale; tale fattore ha le dimensioni dell'inverso di un tempo e si può indicare con $1/\tau$ dove τ è chiamata costante di tempo. Per avere una stima della rapidità con cui la velocità assume il valore limite, si osservi che per $t = \tau$ si ha

$$v = \frac{mg}{b} (1 - e^{-1}) \approx \frac{mg}{b} (1 - 0,37);$$

pertanto quanto più piccola è la costante di tempo o più elevato è b/m , tanto più rapidamente viene raggiunta la velocità limite. Si colga l'analogia con i transistori elettrici; circuiti R, C ed R, L .

Se la velocità iniziale v_0 è diversa da zero, la costante C_1 , ricavata dalla (62), diventa

$$C_1 = -\frac{m}{b} \ln \left(g - \frac{b}{m} v_0 \right).$$

Allora la velocità è

$$v = \frac{mg}{b} - \left(\frac{mg}{b} - v_0 \right) e^{-(b/m)t}.$$

Se $v_0 < mg/b$, la velocità, dal valore iniziale, tende asintoticamente alla velocità limite mg/b , come c'era da aspettarsi. Se $v_0 > mg/b$, si ha:

$$v = \frac{mg}{b} - \left(v_0 - \frac{mg}{b} \right) e^{-(b/m)t};$$

la velocità tende ancora a mg/b . L'andamento di $v(t)$ nei due casi, è mostrato in figura 31.

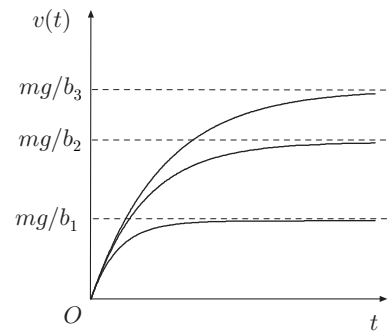


Fig. 10.30

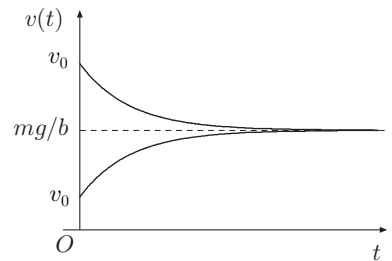


Fig. 10.31

L'equazione oraria del moto si ottiene dalla (63) che, separando le variabili, si scrive

$$dx = \frac{mg}{b}dt - \frac{mg}{b}e^{-(b/m)t}dt;$$

integrando si ottiene:

$$x(t) = \frac{mg}{b}t + \frac{m^2g}{b^2}e^{-(b/m)t} + C_2.$$

Tenendo conto delle condizioni iniziali, la costante risulta $C_2 = -m^2g/b^2$. Infine:

$$x(t) = \frac{mg}{b}t + \frac{m^2g}{b^2}e^{-(b/m)t} - \frac{m^2g}{b^2}. \quad (64)$$

Il controllo dimensionale assicura che mg/b è una velocità e che m^2g/b^2 è una lunghezza. Per studiare l'andamento della (64), si osservi che essa è somma del termine lineare

$$x_1 = \frac{mg}{b}t - \frac{m^2g}{b^2}$$

e del termine esponenziale

$$x_2 = \frac{m^2g}{b^2}e^{-(b/m)t}.$$

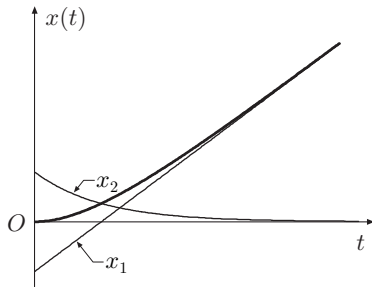


Fig. 10.32

Il termine lineare, in figura 32, è rappresentato da una retta, le cui intercette con gli assi sono $-m^2g/b^2$ ed $m/b = \tau$. Il secondo è un esponenziale decrescente che per $t = 0$ assume il valore m^2g/b^2 e per $t = \tau$, il valore $(m^2g/b^2)e^{-1}$. La somma dei due termini dà l'equazione oraria; è chiaro che per t sufficientemente grande rispetto a τ l'andamento è solo lineare; il moto, esaurito il transitorio, è uniforme con velocità mg/b . Si lascia al lettore lo studio dell'equazione oraria nel caso in cui la velocità iniziale sia diversa da zero.

8. Moto verticale dei gravi nell'aria

In questo caso la forza agente sul grave è una forza di resistenza idraulica che scalarmente scriviamo $F(v) = -\kappa_i v^2$, dove $\kappa_i = \chi \rho l^2$, con χ coefficiente di forma, l una lunghezza caratteristica del grave e ρ densità dell'aria.

Supponiamo che per $t = 0$, x_0 e v_0 siano uguali a zero; assunto come riferimento un asse verticale volto verso il basso, la seconda equazione della dinamica è

$$m \frac{dv}{dt} = mg - \kappa_i v^2. \quad (65)$$

Separando le variabili si ha

$$\frac{dv}{g - (\kappa_i/m)v^2} = dt, \quad \Rightarrow \quad \frac{dv}{1 - v^2/v_L^2} = gdt,$$

avendo indicato con $v_L^2 = mg/\kappa_i$ una grandezza che ha le dimensioni del quadrato di una velocità. Integrando:

$$\int \frac{dv}{1 - v^2/v_L^2} = g \int dt, \quad \Rightarrow \quad \frac{v_L}{2} \ln \frac{v_L + v}{v_L - v} = gt + C_1,$$

la quale è valida per $0 \leq v < v_L$. La costante di integrazione è uguale a zero. Dalla precedente si ottiene

$$v = v_L \frac{e^{2gt/v_L} - 1}{e^{2gt/v_L} + 1} = v_L \tanh \frac{gt}{v_L}, \quad (66)$$

la quale mostra che al crescere di t , v cresce tendendo al valore v_L , per $t \rightarrow \infty$. Si deduce che v_L è la velocità *asintotica o limite*, che si può ottenere immediatamente dalla (65) ponendo $dv/dt = 0$.

Integrando la (66) e ricordando che per $t = 0$, $x_0 = 0$, si ottiene l'equazione del moto:

$$x(t) = \frac{v_L^2}{g} \ln \cosh \frac{gt}{v_L}. \quad (67)$$

L'andamento delle (66) e (67) è mostrato nelle figure 33 e 34.

È interessante confrontare la (58) con la legge di caduta dei gravi nel vuoto

$$x(t) = \frac{1}{2}gt^2,$$

indicata con tratteggio in figura 34.

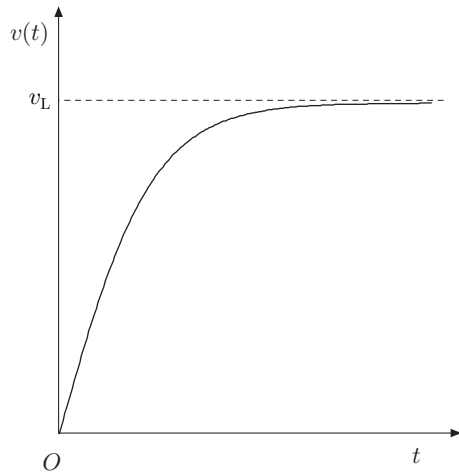


Fig. 10.33

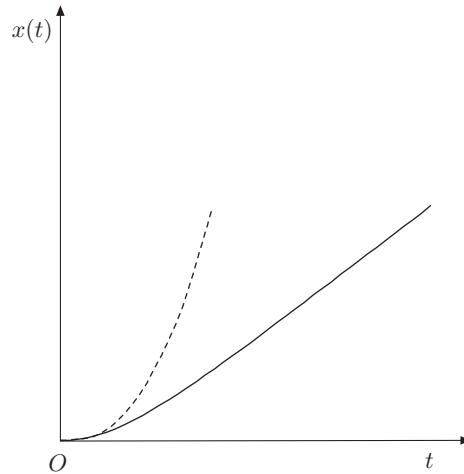


Fig. 10.34

Esempi

- ||| 10. Un paracadutista incontra una forza di resistenza idraulica $F = -\kappa_i v^2$, dove $\kappa_i = 0,8R^2$ con R raggio del paracadute. Si vuole determinare R in modo che il paracadutista col suo equipaggiamento, di massa totale m , raggiunga il suolo con la stessa velocità con cui vi perverrebbe cadendo da una altezza di un metro.

Uguagliando la velocità limite

$$v_L = \sqrt{\frac{mg}{\kappa_i}} = \sqrt{\frac{mg}{0,3R^2}}$$

a quella che il paracadutista assumerebbe in caduta libera da un metro, $v = \sqrt{2gh}$, si ricava R .

- ||| **11.** Determinare la velocità di caduta di un grave soggetto al peso e alla forza di resistenza idraulica, in funzione della distanza x percorsa.

Esprimiamo l'equazione della dinamica nella variabile x :

$$m \frac{dv}{dx} \frac{dx}{dt} = mg - \kappa_i v^2, \quad m \frac{dv}{dx} v = mg - \kappa_i v^2. \quad (68)$$

Ponendo $u = v^2$, si ha

$$du = 2v dv, \quad \frac{dv}{dx} = \frac{1}{2v} \frac{du}{dx}.$$

Sostituendo nella (68), si ottiene:

$$\frac{du}{dx} = 2 \left(g - \frac{\kappa_i}{m} u \right).$$

Questa equazione è analoga a quelle considerate nel paragrafo 7; supponendo che per $x = 0$, $v = v_0$ sia maggiore di mg/κ_i , si ottiene:

$$v^2 = \frac{mg}{\kappa_i} - \left(\frac{mg}{\kappa_i} - v_0^2 \right) e^{-2(\kappa_i/m)x}.$$

||| **9. Moto di una particella carica in un campo di induzione magnetica uniforme**

Come s'è visto, una particella carica, animata di velocità \mathbf{v} , in un campo di induzione magnetica \mathbf{B} , è soggetta alla forza di Lorentz

$$\mathbf{F} = q\mathbf{v} \times \mathbf{B}.$$

Supponiamo che \mathbf{B} sia diretto come l'asse z positivo di una terna cartesiana ortogonale e che \mathbf{v} giaccia nel piano xy ; si ha

$$\mathbf{v} \times \mathbf{B} = \dot{y}B\mathbf{i} - \dot{x}B\mathbf{j}.$$

Per la seconda legge della dinamica, il sistema di equazioni differenziali da risolvere è

$$\begin{aligned} m\ddot{x} &= qB\dot{y} & \ddot{x} &= (qB/m)\dot{y} = \omega\dot{y} \\ m\ddot{y} &= -qB\dot{x} & \ddot{y} &= -(qB/m)\dot{x} = -\omega\dot{x}, \end{aligned}$$

avendo indicato con $\omega = qB/m$ la *frequenza di ciclotrone*.

Si osservi che ciascuna equazione contiene sia le derivate di x che le derivate di y , complicando il problema matematico. Tuttavia derivando successivamente rispetto al tempo, si ha

$$\frac{d}{dt}\ddot{x} = \omega\ddot{y}, \quad \frac{d}{dt}\ddot{y} = -\omega\ddot{x},$$

e sostituendo a \ddot{x} e \ddot{y} le rispettive espressioni, si ottiene

$$\frac{d}{dt}\dot{x} = -\omega^2 \dot{x}, \quad \frac{d}{dt}\dot{y} = -\omega^2 \dot{y}.$$

Ponendo $p = \dot{x}$ e $q = \dot{y}$, le precedenti diventano:

$$\ddot{p} + \omega^2 p = 0, \quad \ddot{q} + \omega^2 q = 0, \quad (69)$$

che rappresentano equazioni di oscillazioni armoniche su assi ortogonali.

Supponiamo che le condizioni iniziali per $t = 0$ siano:

$$\begin{aligned} x &= 0, & p &= \dot{x} = v_0, & \dot{p} &= \ddot{x} = 0, \\ y &= y_0, & q &= \dot{y} = 0, & \dot{q} &= \ddot{y} = -\omega v_0 \\ z &= 0 & \dot{z} &= 0. \end{aligned}$$

Ciò significa che la particella entra nella regione in cui è presente il campo di induzione magnetica a distanza y_0 dall'origine, con velocità iniziale v_0 parallela all'asse x e subendo l'accelerazione centripeta iniziale $-\omega v_0$.

Le soluzioni delle (69) si ricavano come descritto al paragrafo 3.

$$\begin{aligned} p(t) &= C_1 e^{i\omega t} + C_2 e^{-i\omega t}, \\ \dot{p}(t) &= i\omega C_1 e^{i\omega t} - i\omega C_2 e^{-i\omega t}. \end{aligned}$$

Imponendo le condizioni iniziali si ottiene $C_1 = C_2 = v_0/2$, dunque:

$$p(t) = \dot{x} = \frac{v_0}{2} (e^{i\omega t} + e^{-i\omega t}) = v_0 \cos \omega t,$$

che integrata, tenuto conto delle condizioni iniziali, dà

$$x(t) = \frac{v_0}{\omega} \sin \omega t. \quad (70)$$

Analogamente si procede per $q(t)$ e $y(t)$; si ha

$$y(t) = \frac{v_0}{\omega} \cos \omega t + y_0 - \frac{v_0}{\omega}. \quad (71)$$

Quadrando e sommando le (70) e (71) si ottiene la traiettoria:

$$x^2 + \left[y - \left(y_0 - \frac{v_0}{\omega} \right) \right]^2 = \left(\frac{v_0}{\omega} \right)^2,$$

che è una circonferenza con centro C di coordinate $C \equiv [0; (y_0 - v_0/\omega)]$ e raggio v_0/ω . Se esistesse una componente della velocità lungo l'asse z , la traiettoria sarebbe un'elica cilindrica.

11. Dinamica relativa

1.1. Equazione fondamentale della dinamica in riferimenti non inerziali

La seconda legge della dinamica nei riferimenti inerziali permette di ricavare le equazioni del moto che, a parte posizioni e velocità iniziali, sono valide per ogni osservatore in moto relativo traslatorio uniforme, essendo accelerazione e tempo, misurati da tali osservatori, grandezze assolute. È valida la relatività galileana, perciò gli spostamenti e tutte le grandezze dipendenti dalla velocità (quantità di moto, energia cinetica, momento angolare), dipendono dal riferimento. Tuttavia molte volte è necessario o più conveniente, pur assumendo come tempo quello assoluto, adottare un riferimento mobile rispetto ad un riferimento, che come precisato nel capitolo V, viene detto “assoluto”. D'altra parte viviamo in un riferimento non inerziale e molte conseguenze di questa circostanza ci sono abbastanza familiari.

Per ottenere la legge fondamentale della dinamica di un punto materiale rispetto ad una terna comunque mobile, basta ricordare il teorema di composizione delle accelerazioni, stabilito nel capitolo V, secondo il quale l'accelerazione assoluta è somma dell'accelerazione relativa, di trascinamento e dell'accelerazione di Coriolis:

$$\mathbf{a} = \mathbf{a}_r + \mathbf{a}_t + 2\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}_r.$$

Moltiplicando per m e tenendo conto che $\mathbf{F} = m\mathbf{a}$, si deduce

$$m\mathbf{a}_r = \mathbf{F} - m\mathbf{a}_t - 2m\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}_r.$$

Ponendo

$$\mathbf{F}_t = -m\mathbf{a}_t, \quad \mathbf{F}_C = -2m\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}_r,$$

si ottiene

$$m\mathbf{a}_r = \mathbf{F} + \mathbf{F}_t + \mathbf{F}_C, \quad (1)$$

La (1) è la legge fondamentale della dinamica relativa. Confrontando questa relazione con la seconda legge della dinamica stabilita nei riferimenti inerziali, si deduce che *un punto materiale si muove rispetto ad un riferimento comunque mobile come se questo*

fosse inerziale, pur di aggiungere alla risultante delle forze reali \mathbf{F} , che traduce l'azione di altri corpi, la forza di trascinamento \mathbf{F}_t e la forza di Coriolis \mathbf{F}_C . Le forze di trascinamento e la forza di Coriolis vengono chiamate *forze fittizie* o *forze apparenti*, perché cessano di esistere non appena vengono ripristinate le condizioni di inerzia del riferimento. Per queste forze, che non rappresentano azioni fisiche da parte di altri punti materiali, *non vale la legge di azione e reazione*. Inoltre, se le forze reali hanno risultante nulla, $\mathbf{F} = 0$, si deduce che $\mathbf{a}_r \neq 0$; pertanto in un riferimento non inerziale *non vale la legge di inerzia*.

1.1. Forza centrifuga

Una forza di trascinamento molto importante è la forza centrifuga. Si consideri una terna mobile dotata soltanto di moto rotatorio uniforme con velocità angolare ω , costante, diretta lungo l'asse z . In tale riferimento l'accelerazione di trascinamento di un punto materiale, come si è visto al paragrafo 3-V, ha segno negativo; indicando con \mathbf{r} il vettore perpendicolare all'asse z , che individua la posizione del punto, è

$$-\mathbf{a}_t = \omega^2 \mathbf{r}.$$

La forza di trascinamento corrispondente è dunque

$$\mathbf{F}_t = m\omega^2 \mathbf{r}.$$

Chiamiamo tale forza apparente, *forza centrifuga*; tra le sue evidenti caratteristiche c'è da sottolineare che la sua direzione è radiale rispetto all'asse di rotazione, cioè centrifuga.

1.2. Forza di Coriolis

La forza di Coriolis o complementare è una forza di deviazione; in quanto tale, non determina variazione dell'energia cinetica del punto materiale, è dunque a potenza nulla. Essendo definita dalla relazione $\mathbf{F}_c = -2m\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}_r$, gode delle proprietà del prodotto vettoriale e risulta nulla se $\boldsymbol{\omega} = 0$ o $\mathbf{v}_r = 0$, oppure se i due vettori sono paralleli. Nel riferimento solidale con la Terra, sebbene la velocità angolare sia modesta, $\approx 10^{-5} \text{ rad/s}$, la forza di Coriolis può avere effetti cospicui, se la velocità relativa è elevata, come nel caso di proiettili, missili e simili.

Consideriamo un punto materiale in moto da sud verso nord lungo un meridiano, figura 1. Nell'emisfero australe la forza di Coriolis è volta verso ovest, nell'emisfero boreale è diretta verso est; la sua intensità è nulla all'equatore, massima ai poli. Il contrario si verifica se il punto materiale procede da nord a sud. Si può verificare, per esempio, che un aereo di linea del tipo DC 747 di 370000 kg a pieno carico, alla velocità di crociera di 900 km/h ,

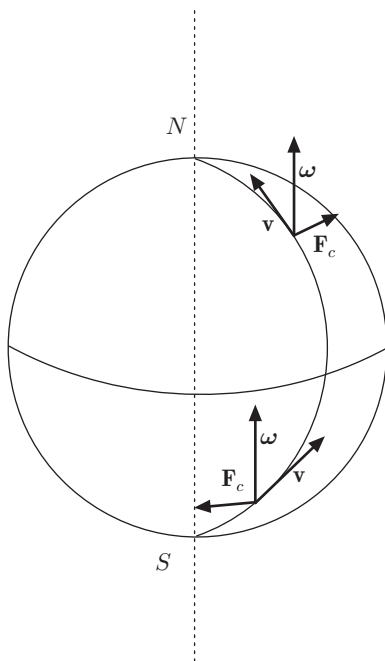


Fig. 11.1

a 45° di latitudine, è soggetto alla forza di circa 5000 N . Se l'aereo viaggia verso est lungo un parallelo, la forza di Coriolis è ascendente; discendente nel caso contrario.

La forza di Coriolis ha un ruolo preminente in fisica dell'atmosfera, scienza che studia il moto delle masse di aria e l'andamento meteorologico nel nostro pianeta. Diamo qualche cenno su certi fenomeni più noti.

Una particella di aria è soggetta a diverse forze: forza gravitazionale, forze di pressione verticali dovute alle differenze di pressione ad altezze diverse, forze di pressione orizzontali che si manifestano da regioni di alta pressione verso quelle di bassa pressione. Inoltre se la particella d'aria è in movimento, agiscono forze di attrito, le forze centrifughe e la forza di Coriolis. Si capisce che lo studio del moto della masse d'aria è molto complicato se non si introducono ipotesi semplificatrici.

Supponiamo che il movimento sia orizzontale; ciò significa che le forze di pressione verticali sono equilibrate. Il flusso sia lento e tale da potere trascurare l'accelerazione lungo la traiettoria e le forze di attrito. Trascuriamo inoltre la forza centrifuga rispetto alla forza di Coriolis, poiché la prima dipende dal quadrato della velocità della particella d'aria. È tale il moto lento delle grandi masse di aria che circolano attorno alla Terra e che determinano i cicloni, gli anticicloni e i cosiddetti venti geostrofici che spirano da ovest e da est, venti costanti a velocità non molto elevata, presenti alle alte quote, dove la pressione è di circa 200 mbar .

I cicloni e gli anticicloni sono causati dal movimento orizzontale di masse d'aria verso regioni di bassa pressione. Nei cicloni dell'emisfero boreale, nell'ipotesi di movimento lento, le particelle d'aria inizialmente in moto radiale, vengono deflesse a causa della forza di Coriolis. Una volta che si è stabilito l'equilibrio, il moto dell'aria avviene lungo le isobare, dove la forza di pressione è equilibrata dalla forza di Coriolis, figura 2; un osservatore solidale con la Terra, vede il vento spirare nel verso antiorario, figura 3; negli anticicloni il moto del vento è orario, figura 4. Nell'emisfero australe, l'osservatore vede i moti invertiti.

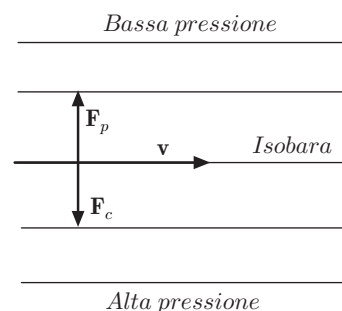


Fig. 11.2

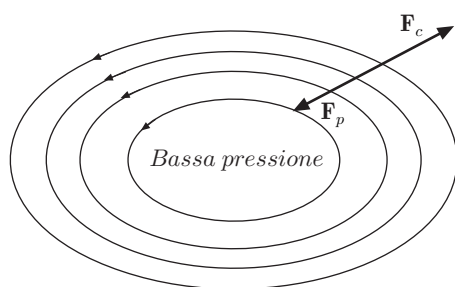


Fig. 11.3

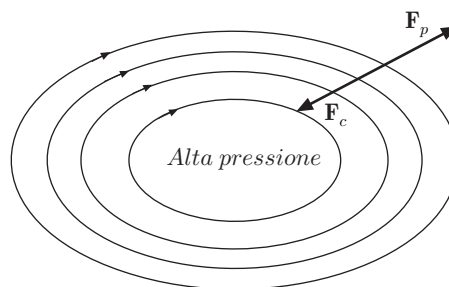


Fig. 11.4

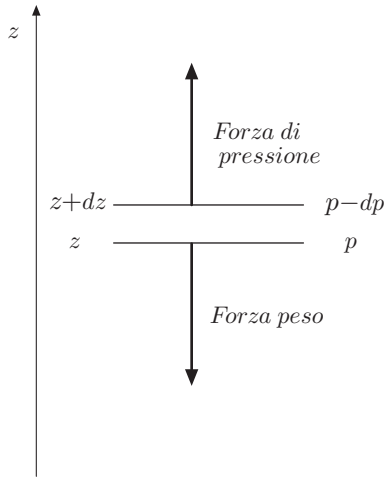


Fig. 11.5

Per capire l'andamento dei venti geostrofici, occorre studiare l'andamento della pressione lungo la verticale. Consideriamo lo strato di atmosfera compreso tra le quote z e $z + dz$, alle quali corrispondono le pressioni p e $p - dp$, figura 5. Se l'atmosfera è equilibrata, per la legge di Stevino, si ha

$$dp = -\rho g dz,$$

dove ρ è la densità dell'aria alla quota z . D'altra parte, per la legge dei gas perfetti, è

$$p = \frac{k_B}{m} \rho T,$$

dove k_B è la costante di Boltzmann, T la temperatura assoluta e m la massa della particella d'aria. Dalle precedenti si ottiene

$$\frac{dp}{p} = -\frac{dz}{k_B T / (mg)}.$$

Chiamiamo *altezza di scala* dell'atmosfera, il fattore $H = k_B T / (mg)$, che è funzione della temperatura. Supponendo, per semplicità, che H sia costante e integrando la precedente, si ottiene

$$p = p_0 e^{-z/H},$$

in cui p_0 è la pressione alla superficie terrestre. Si deduce che la pressione alla quota z dipende da H , e sarà tanto più elevata quanto più alta è la temperatura. Ad alcuni chilometri di quota, la pressione, nelle regioni più calde, è più elevata di quella delle regioni più fredde. Pertanto, a tali quote, esisteranno forze di pressione dirette dall'equatore ai poli e, per effetto della forza di Coriolis, il vento soffia verso est. Il sistema geostrofico si comporta come un enorme ciclone a circolazione lenta.

La forza di Coriolis determina il comportamento degli uragani. In questo caso il vento non è equilibrato; se nell'atmosfera si crea un centro di bassa pressione, il vento soffia verso tale centro e può essere molto violento se la pressione è molto bassa, come si verifica nelle regioni tropicali a causa di un riscaldamento locale eccessivo. La forza di Coriolis devia le particelle di aria che, nell'emisfero boreale, visti dall'alto, assumono una configurazione antioraria, originando un moto vorticoso, mentre nell'emisfero australe, visti dall'alto, hanno una configurazione oraria, figura 6.

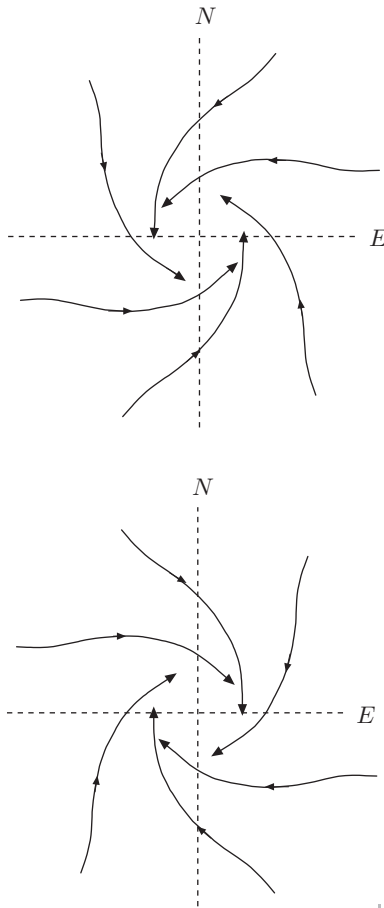


Fig. 11.6

2. Equilibrio relativo

In un riferimento comunque mobile, un punto materiale è in equilibrio relativo, se $\mathbf{a}_r = 0$ e $\mathbf{v}_r = 0$; pertanto dalla (1) si deduce

$$\mathbf{F} + \mathbf{F}_t = 0. \quad (2)$$

Dunque aggiungendo alla risultante delle forze reali la sola forza apparente di trascinamento, la condizione di equilibrio relativo di un punto materiale è analoga a quella in un riferimento assoluto. Un osservatore che cade liberamente sotto l'azione della gravità si muove di moto uniformemente accelerato rispetto alla terra, praticamente rispetto ad un riferimento assoluto; se un corpo pesante cade contemporaneamente, l'osservatore lo giudica in equilibrio, poiché la forza di trascinamento $\mathbf{F}_t = -m\mathbf{g}$ è opposta alla forza reale $m\mathbf{g}$. L'osservatore solidale con la terra, ovviamente, giudica il corpo soggetto alla sola forza reale, di gravità, ed animato di moto con accelerazione costante.

Analogamente, un osservatore che si muove nello spazio interstellare, con accelerazione costante rivolta, per esempio, verso il soffitto della sua cabina, giudica "pesante" un corpo sottratto all'azione della gravità. Infatti il corpo è soggetto solo alla forza costante di trascinamento $m\mathbf{a}_r = \mathbf{F}_t = -m\mathbf{a}_t$.

Un viaggiatore che si trova in un veicolo, a causa di una frenata o di una accelerazione in avanti, viene proiettato in avanti o indietro. L'equilibrio del viaggiatore può essere assicurato, per esempio, dalle cinture di sicurezza che esercitano una reazione vincolare che è una forza reale.

Esempi

- III 1. All'interno di un razzo, lanciato verso l'alto con accelerazione a costante, una massa m è sospesa ad una molla, figura 7. Determinare la forza che la molla esercita sulla massa all'equilibrio.

Per l'equilibrio relativo deve essere soddisfatta la (2), dove la forza reale è somma della forza elastica e del peso, $\mathbf{F} = m\mathbf{g} + \mathbf{F}_{el}$, e la forza di trascinamento è $\mathbf{F}_t = -m\mathbf{a}_t$. Detto x l'allungamento della molla e assumendo positiva la direzione del moto, si ha

$$-mg + kx - ma_t = 0, \quad kx = m(g + a_t).$$

Nel caso che l'accelerazione sia volta verso il basso:

$$kx = m(g - a_t);$$

se $a = g$, caduta libera, $kx = 0$, la molla è indeformata.

- III 2. Una navicella spaziale di massa M , orbita attorno alla terra. Supponendo che all'interno siano realizzate le condizioni di assenza di gravità, discutere l'equilibrio delle forze.

La sola forza agente sulla navicella è la forza gravitazionale esercitata dalla terra. Detta R la distanza della navicella dal centro della terra, tale forza, in modulo $F = -GMM_T/R^2$, è diretta verso il centro dell'orbita. Inoltre ogni massa all'interno della navicella è soggetta alla stessa accelerazione di quest'ultima, $a = GM_T/R^2$. Navicella e corpi in essa racchiusi hanno la stessa accelerazione, diretta verso il centro della terra e *cadono* continuamente, come la navicella, in quella direzione; tuttavia l'*accelerazione relativa* tra corpi e navicella è nulla, pertanto all'interno non si può rilevare la forza gravitazionale.

Un osservatore, nel riferimento ruotante con la navicella, per l'equilibrio di qualsiasi corpo di massa m , rileva una forza di trascinamento, centrifuga, opposta alla forza gravitazionale:

$$G \frac{mM_T}{R^2} = m\omega^2 R.$$

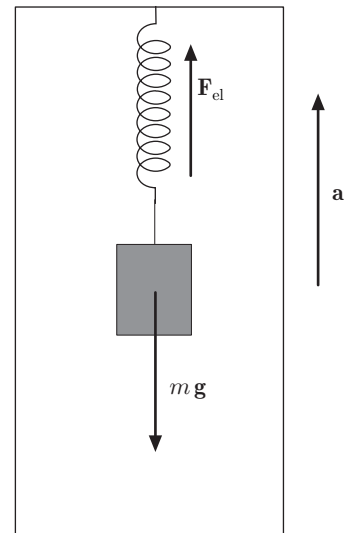


Fig. 11.7

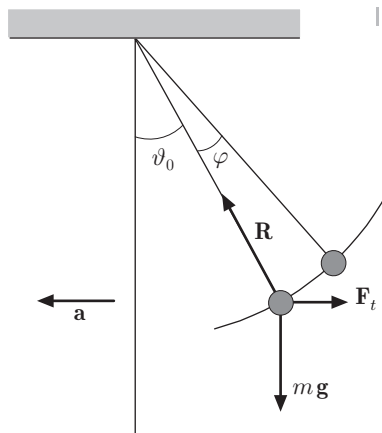


Fig. 11.8

- III 3. Si determini il moto di un pendolo semplice fissato al soffitto di un vagone ferroviario, animato di accelerazione traslatoria costante, intorno alla posizione di equilibrio.

Se il vagone è fermo oppure in moto traslatorio uniforme, la posizione di equilibrio del pendolo è lungo la verticale. Se è presente l'accelerazione di trascinamento, il pendolo assume una nuova posizione di equilibrio ed il filo forma un angolo θ_0 rispetto alla verticale, figura 8. Tale posizione è stabilita dalla (2), dove le forze reali sono la reazione \mathbf{R} del vincolo e il peso $m\mathbf{g}$, mentre la forza di trascinamento è $\mathbf{F}_t = -m\mathbf{a}_t$. Pertanto

$$m\mathbf{g} + \mathbf{R} + \mathbf{F}_t = 0.$$

Proiettando sulla tangente e sulla normale alla traiettoria del pendolo, si ha

$$ma_t \cos \theta_0 - mg \sin \theta_0 = 0, \quad \Rightarrow \quad a_t = g \frac{\sin \theta_0}{\cos \theta_0} = g \tan \theta_0,$$

$$R - mg \cos \theta_0 - ma_t \sin \theta_0 = 0, \quad \Rightarrow \quad R = mg \cos \theta_0 + ma_t \sin \theta_0.$$

Dalla prima relazione si deduce che dalla misura dell'angolo θ_0 è possibile ricavare l'accelerazione di trascinamento; dunque il sistema può costituire un accelerometro.

Se il pendolo viene spostato di un angolo φ rispetto a θ_0 , inizia ad oscillare; il moto oscillatorio può essere ricavato proiettando sulla tangente alla traiettoria l'equazione:

$$m\mathbf{a} = m\mathbf{g} + \mathbf{R} + \mathbf{F}_t.$$

Detto $\theta = \theta_0 + \varphi$ l'angolo che il filo forma con la verticale ed l la sua lunghezza, si ottiene

$$\begin{aligned} l\ddot{\varphi} &= a_t \cos(\theta_0 + \varphi) - g \sin(\theta_0 + \varphi) \\ &= (a_t \cos \theta_0 - g \sin \theta_0) \cos \varphi - (a_t \sin \theta_0 + g \cos \theta_0) \sin \varphi. \end{aligned}$$

Ma si è trovato:

$$a_t \cos \theta_0 - g \sin \theta_0 = 0,$$

dunque la precedente diventa:

$$l\ddot{\varphi} + (a_t \sin \theta_0 + g \cos \theta_0) \sin \varphi = 0.$$

Se $\sin \varphi \approx \varphi$, si ha

$$l\ddot{\varphi} + (a_t \sin \theta_0 + g \cos \theta_0) \varphi = 0;$$

Le oscillazioni sono armoniche con periodo:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{a_t \sin \theta_0 + g \cos \theta_0}}.$$

Il periodo delle piccole oscillazioni è diverso da quello di un pendolo soggetto solamente alla gravità. Solo se l'accelerazione di trascinamento è modesta, $\theta_0 \approx 0$, i periodi sono circa uguali.

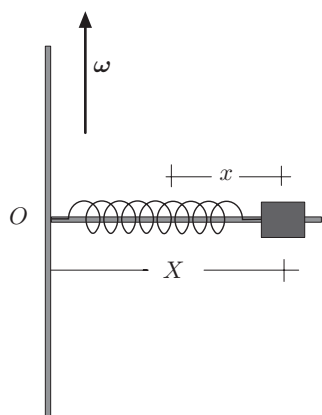


Fig. 11.9

- III 4. Una massa puntiforme può scorrere lungo un'asta rigida orizzontale che ruota con velocità angolare ω costante, attorno ad un asse verticale passante per un estremo dell'asta, figura 9. La massa è vincolata ad O mediante una molla di massa trascurabile e costante elastica k . Discutere la posizione di equilibrio relativo.

Nel riferimento ruotante la condizione di equilibrio relativo è stabilita dalla (2). Detta X la posizione della massa rispetto ad O , x l'allungamento della molla ed l_0 la lunghezza della molla a riposo, si ha

$$m\omega^2 X - kx = 0,$$

ed, essendo $X = l_0 + x$:

$$m\omega^2 X - k(X - l_0) = 0, \quad \Rightarrow \quad X = \frac{kl_0}{k - m\omega^2}. \quad (3)$$

L'osservatore ruotante vede la massa in equilibrio sotto l'azione della forza elastica, reale, e della forza di trascinamento, centrifuga, volta radialmente. L'allungamento della molla visualizza la forza centrifuga. Si noti che per $\omega = 0$, $X = l_0$. Se $l_0 \approx 0$ e $k - m\omega^2 = 0$, cioè $\omega = \sqrt{k/m}$, X è indeterminata; la massa è in equilibrio indifferente in ogni punto dell'asta. Se la massa è vincolata con un filo, la reazione del filo realizza la forza reale.

La (3) può essere ricavata con considerazioni sull'energia; infatti la forza centrifuga è conservativa, perciò l'energia potenziale del sistema è

$$U = -\frac{1}{2}m\omega^2 X^2 + \frac{1}{2}k(X - l_0)^2.$$

Derivando si ha

$$\frac{dU}{dX} = -m\omega^2 X + k(X - l_0),$$

che, per l'equilibrio, va posta uguale a zero. Pertanto:

$$-m\omega^2 X + k(X - l_0) = 0, \quad \Rightarrow \quad X = \frac{kl_0}{k - m\omega^2}.$$

L'equilibrio è stabile se $d^2U/dX^2 > 0$, instabile se $d^2U/dX^2 < 0$. Poiché

$$\frac{d^2U}{dX^2} = k - m\omega^2,$$

si deduce che per

$$k > m\omega^2, \quad \Rightarrow \quad \omega < \sqrt{\frac{k}{m}},$$

l'equilibrio è stabile, mentre per

$$k < m\omega^2, \quad \Rightarrow \quad \omega > \sqrt{\frac{k}{m}},$$

l'equilibrio è instabile. Per ottenere ulteriori informazioni, occorre studiare il moto della massa; la seconda equazione della dinamica nel riferimento ruotante è:

$$ma_r = m\omega^2 X - kx = (m\omega^2 - k)X + kl_0,$$

ossia,

$$\ddot{X} + \frac{k - m\omega^2}{m}X - \frac{k}{m}l_0 = 0. \quad (4)$$

L'equazione va risolta come di solito; nel caso in esame però, il coefficiente di X dipende dalla velocità angolare ω , perciò da essa dipenderà il moto. Assumendo come nuova variabile

$$\chi = X - \frac{kl_0}{k - m\omega^2},$$

la (4) diventa

$$\ddot{\chi} + \frac{k - m\omega^2}{m}\chi = 0. \quad (5)$$

L'equazione algebrica associata, paragrafo 3-X, ammette le radici

$$\alpha_{1,2} = \pm \sqrt{\frac{k - m\omega^2}{m}}.$$

Se le radici sono reali, $m\omega^2 > k$, $\omega > \sqrt{k/m}$, l'equilibrio è instabile e la soluzione della (5) è del tipo

$$\chi(t) = C_1 e^{\alpha t} + C_2 e^{-\alpha t}, \quad (6)$$

dove le costanti C_1 e C_2 vanno determinate conformemente alle condizioni iniziali. Assumiamo, per semplicità che, per $t = 0$, sia $\chi = \chi_0$ e $\dot{\chi} = 0$; derivando la (6) si ha

$$\dot{\chi} = \alpha C_1 e^{\alpha t} - \alpha C_2 e^{-\alpha t}. \quad (7)$$

Per $t = 0$, le (6) e (7) danno

$$\chi_0 = C_1 + C_2, \quad 0 = \alpha C_1 - \alpha C_2;$$

da queste si ottiene $C_1 = C_2 = C = \chi_0/2$. Dunque la (6) diventa

$$\chi(t) = \frac{\chi_0}{2} (e^{\alpha t} + e^{-\alpha t}) = \chi_0 \cosh \alpha t.$$

La massa si allontana tendendo a $+\infty$ oppure a $-\infty$ secondo che χ_0 si trovi a destra oppure a sinistra del punto di equilibrio. Naturalmente una molla reale non può essere allungata o compressa oltre certi limiti; nondimeno il problema va risolto come se la forza elastica fosse ideale.

Se le radici dell'equazione algebrica sono immaginarie, $m\omega^2 - k < 0$, poniamo

$$\alpha = \pm i \sqrt{\frac{k - m\omega^2}{m}} = \pm i\Omega;$$

la soluzione della (5), in conformità alle condizioni iniziali assegnate, è una oscillazione armonica del tipo

$$\chi(t) = \chi_0 \cos \Omega t,$$

come si è trovato al paragrafo 3-X.

- III 5. Equilibrio di un corpo puntiforme P , posto in un recipiente conico ruotante attorno al suo asse, in assenza di attrito, figura 10.

Detta m la massa del corpo, l'equilibrio, nel riferimento ruotante, è dato dalla (2), perciò

$$m\mathbf{g} + \mathbf{R} + m\omega^2 \mathbf{r} = 0, \quad (8)$$

dove \mathbf{R} è la reazione vincolare, normale alla falda del cono, ed r la distanza di P dall'asse; ovviamente la risultante del peso e della forza centrifuga deve essere opposta ad \mathbf{R} . Assumiamo il riferimento ruotante con origine nel vertice del cono, asse x volto radialmente e asse z coincidente con l'asse di rotazione. Proiettando la precedente e detta x la coordinata di P , si ha

$$m\omega^2 x - R \cos \alpha = 0, \quad R \sin \alpha - mg = 0, \quad (9)$$

essendo α la semiapertura del cono.

Eliminando R , si ottiene

$$m\omega^2 x - \frac{mg}{\tan \alpha} = 0, \quad \Rightarrow \quad \omega = \sqrt{\frac{g}{x \tan \alpha}}. \quad (10)$$

Da questa si può ricavare x , oppure la distanza di P dal vertice del cono.

La condizione di equilibrio si può determinare con considerazioni sull'energia; il riferimento ruotante è sede del campo di forza della gravità e del campo della forza centrifuga, conservativi. L'energia potenziale è

$$U(x) = mgz - \frac{1}{2}m\omega^2 x = mg \frac{x}{\tan \alpha} - \frac{1}{2}m\omega^2 x^2.$$

La condizione di equilibrio si ha quando l'energia potenziale è minima, cioè per $dU/dx = 0$:

$$\frac{dU}{dx} = \frac{mg}{\tan \alpha} - m\omega^2 x = 0,$$

da cui si ottiene la (10). Il punto di equilibrio,

$$x = \frac{g}{\omega^2 \tan \alpha},$$

è instabile. Infatti la funzione $U(x)$ è rappresentata da una parabola ad asse verticale, concavità volta verso il basso e massimo nel punto di equilibrio; d'altra parte risulta anche $d^2U/dx^2 < 0$.

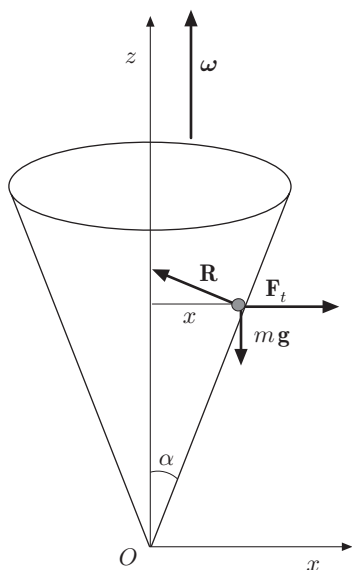


Fig. 11.10

Si osservi ancora che la (8) può essere proiettata su una generatrice del cono, assumendo positivo il verso ascendente, e sulla sua normale, assumendo positivo il verso della reazione vincolare. Si ha

$$-mg \cos \alpha + m\omega^2 x \sin \alpha = 0 \quad (11)$$

$$R - mg \sin \alpha - m\omega^2 x \cos \alpha = 0. \quad (12)$$

Dalla (11) si ottiene la coordinata x di equilibrio, dalla (12) la reazione vincolare:

$$R = mg \sin \alpha + m\omega^2 x \cos \alpha = \frac{mg}{\sin \alpha}, \quad (13)$$

in conformità con la seconda delle (9). Se la falda del cono presenta attrito, la forza di attrito $F_A = \mu_s R$, è volta nel verso positivo assunto sulla generatrice. In tal caso l'equilibrio si ha per

$$-mg \cos \alpha + m\omega^2 x \sin \alpha + \mu_s R = 0;$$

da cui, tenuto conto della (13),

$$\begin{aligned} mg \cos \alpha &= m\omega^2 x \sin \alpha + \mu_s R \\ &= m\omega^2 x \sin \alpha + \mu_s (mg \sin \alpha + m\omega^2 x \cos \alpha), \end{aligned}$$

oppure:

$$mg \cos \alpha = m\omega^2 x \sin \alpha + \mu_s \frac{mg}{\sin \alpha}.$$

Si ricava inoltre

$$\omega^2 = \frac{g \cos \alpha - \mu_s \sin \alpha}{x \sin \alpha + \mu_s \cos \alpha}.$$

Si deduce che per $\mu_s = 0$, si ottiene la (10). Se $\alpha = 0$, parete verticale, si ha

$$\omega^2 = \frac{g}{x\mu_s}, \quad \Rightarrow \quad mg = \mu_s m\omega^2 x.$$

La forza di gravità, per un opportuno valore di ω , può essere equilibrata dalla forza centrifuga nel senso che, essendo quest'ultima ortogonale alla parete, la reazione vincolare presenta un componente verticale, opposto al peso del corpo considerato.

Se $\alpha = \pi/2$, piano orizzontale, si deduce

$$\omega^2 = -\mu_s \frac{g}{x}, \quad \Rightarrow \quad m\omega^2 x = -\mu_s mg;$$

la forza centrifuga, per un opportuno valore di ω , è equilibrata dalla forza di attrito.

Infine se $\omega = 0$, si ha

$$\cos \alpha = \mu_s \sin \alpha, \quad \mu_s = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} = \frac{1}{\tan \alpha},$$

conformemente alla definizione di coefficiente d'attrito. Si tenga conto che il verso positivo dell'angolo è fissato rispetto alla verticale.

- ||| **6.** Una massa puntiforme si può muovere senza attrito lungo una circonferenza rigida di raggio R , che ruota con velocità angolare costante attorno ad un suo diametro disposto verticalmente, figura 11. Determinare le posizioni di equilibrio nel riferimento ruotante.

Detta $\mathbf{F}^{(v)}$ la reazione vincolare, l'equilibrio relativo è dato dalla (2):

$$m\mathbf{g} + \mathbf{F}_t + \mathbf{F}^{(v)} = 0.$$

Proiettando lungo la tangente e la normale alla circonferenza, si ha

$$\begin{aligned} mg \sin \theta - m\omega^2 R \sin \theta \cos \theta &= 0 \\ F^{(v)} - mg \cos \theta - m\omega^2 R \sin^2 \theta &= 0. \end{aligned}$$

Dalla prima si ottiene

$$\sin \theta (g - \omega^2 R \cos \theta) = 0,$$

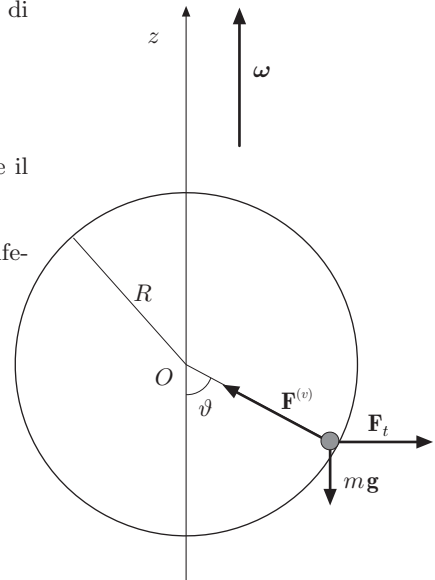


Fig. 11.11

che ha come soluzioni

$$\theta = 0, \quad \theta = \pi, \quad \cos \theta = \frac{g}{\omega^2 R}.$$

La prima corrisponde al punto più basso della circonferenza, la seconda alla sommità. La terza implica che dev'essere $\omega^2 R > g$.

Assunto un riferimento x - z solidale con la circonferenza, con origine nel punto più basso di questa e asse z coincidente col diametro, l'energia potenziale in tale riferimento è

$$U = mgz - \frac{1}{2}m\omega^2 x^2.$$

Posto

$$z = R(1 - \cos \theta), \quad x = R \sin \theta,$$

si ha

$$U = mgR - mgR \cos \theta - \frac{1}{2}m\omega^2 R^2 \sin^2 \theta.$$

Le posizioni di equilibrio si ottengono uguagliando a zero la derivata di U rispetto a θ :

$$\frac{dU}{d\theta} = mR \sin \theta (g - \omega^2 R \cos \theta) = 0,$$

che coincidono con quelle trovate prima.

La stabilità dell'equilibrio va studiata esaminando la derivata seconda:

$$\frac{d^2U}{d\theta^2} = mR(g \cos \theta - \omega^2 R \cos 2\theta).$$

Per $\theta = 0$ si ha

$$\left(\frac{d^2U}{d\theta^2} \right)_{\theta=0} = mR(g - \omega^2 R);$$

Se $\omega^2 R < g$, l'equilibrio è stabile: Se $\omega^2 R > g$, l'equilibrio è instabile.

Per $\theta = \pi$ si ha

$$\left(\frac{d^2U}{d\theta^2} \right)_{\theta=\pi} = -mg(g + \omega^2 R) < 0;$$

l'equilibrio è instabile. Per $\cos \theta = g/(\omega^2 R)$, è

$$\frac{d^2U}{d\theta^2} = m\omega^2 R^2 \left(1 - \frac{g^2}{\omega^4 R^2} \right).$$

Tale espressione è positiva se $\omega^2 R > g$, e dunque l'equilibrio è stabile.

III 3. Moto relativo

Nel capitolo V si è messo ben in evidenza che una certa realtà fisica può essere descritta in modi differenti a seconda del riferimento che viene adottato. Se è noto il movimento in uno dei riferimenti, per esempio in quello inerziale, è possibile descrivere il moto in un riferimento non inerziale, o viceversa, applicando le leggi di trasformazione di coordinate dirette ed inverse. La scelta del riferimento deve rispondere a un criterio di convenienza. Di norma il riferimento è quello inerziale, in quanto non sono presenti le forze fittizie; tuttavia molte volte è indifferente adottare un riferimento piuttosto che un altro. Nel caso dell'esempio 5, possiamo adottare un riferimento fisso in cui l'osservatore vede

il punto materiale animato di moto circolare uniforme. Il punto è soggetto alla forza peso e alla reazione del vincolo, necessaria per fargli descrivere la traiettoria circolare. In tale riferimento la seconda equazione della dinamica si scrive

$$m\mathbf{g} + \mathbf{R} = m\mathbf{a}.$$

Proiettando nella direzione centripeta e in direzione ortogonale ascendente, si ha

$$R \cos \alpha = m \frac{v^2}{r} = m\omega^2 r, \quad R \sin \alpha - mg = 0,$$

avendo indicato con r la distanza del punto materiale dall'asse di rotazione. Dalle precedenti si traggono le stesse conclusioni dell'esempio citato.

Un altro sistema che può essere studiato in un riferimento fisso oppure ruotante è il pendolo conico. Esso è costituito da una massa m sospesa per mezzo di un filo, inestensibile e di massa trascurabile, ad un punto O , figura 12. La massa è posta in rotazione attorno alla verticale passante per O , in modo che il filo formi con essa un angolo θ , perciò la traiettoria descritta è una circonferenza in un piano orizzontale, di raggio $r = l \sin \theta$.

Nel riferimento fisso, le forze che agiscono sono il peso e la reazione esercitata dal filo, dunque si ha

$$m\mathbf{g} + \mathbf{R} = m\mathbf{a}.$$

Proiettando, come prima, lungo la direzione centripeta e nella direzione ortogonale ascendente, si ottiene

$$R \sin \theta = m \frac{v^2}{l \sin \theta} = m\omega^2 l \sin \theta, \quad R \cos \theta - mg = 0.$$

Nel riferimento ruotante, deve essere soddisfatta la condizione di equilibrio relativo:

$$m\mathbf{g} + \mathbf{R} + m\omega^2 \mathbf{r} = 0.$$

Proiettando lungo la direzione radiale e nella direzione ortogonale ascendente, si ha

$$-R \sin \theta + m\omega^2 l \sin \theta = 0, \quad R \cos \theta - mg = 0.$$

In entrambi i riferimenti si ottengono risultati identici.

Dalle relazioni precedenti si deduce una interessante relazione:

$$\cos \theta = \frac{g}{\omega^2 l},$$

la quale mostra che se la velocità angolare cresce, l'angolo θ aumenta. Sistemi meccanici che sfruttano questa relazione sono usati per regolare l'alimentazione di vapore o di combustibile di

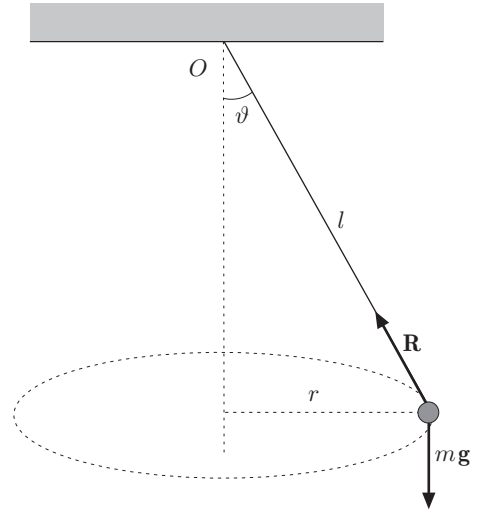


Fig. 11.12

certe macchine, quando la velocità angolare supera un valore prefissato (regolatore di Watt).

Consideriamo due terne $\Omega\xi\eta\zeta$ e $Oxyz$ con l'origine in comune ed assi ζ e z coincidenti; la prima fissa e la seconda ruotante attorno al comune asse z con velocità angolare costante. Un punto materiale sia in equilibrio nel piano $x-y$, perché vincolato ad un filo inestendibile fissato all'origine O . L'osservatore fisso vede il punto descrivere una circonferenza, mentre l'osservatore mobile vede il punto in equilibrio; la forza centrifuga è opposta alla reazione del vincolo. Ad un certo istante il filo viene tagliato; ovviamente l'osservatore fisso, per la legge di inerzia, vede il punto sfuggire lungo la tangente alla circonferenza, con moto rettilineo uniforme. Per l'osservatore ruotante la situazione è ben diversa; le forze che agiscono sul punto sono: la forza centrifuga e la forza di Coriolis. Per ricavare il moto nel riferimento ruotante bisogna considerare l'equazione della dinamica relativa:

$$m\mathbf{a}_r = m\omega^2\mathbf{r} - 2m\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}_r.$$

Proiettando sugli assi del riferimento ruotante si ha

$$\begin{aligned}\ddot{x} &= \omega^2 x + 2\omega\dot{y} \\ \ddot{y} &= \omega^2 y - 2\omega\dot{x},\end{aligned}\tag{14}$$

cioè

$$\begin{aligned}\ddot{x} - 2\omega\dot{y} - \omega^2 x &= 0 \\ \ddot{y} + 2\omega\dot{x} - \omega^2 y &= 0.\end{aligned}$$

Questo sistema, con una certa fatica, può essere risolto analiticamente. Supponendo che per $t = 0$

$$x = x_0, \quad y = 0, \quad \dot{x} = 0, \quad \dot{y} = 0,$$

si trova la soluzione:

$$\begin{aligned}x &= x_0(\cos \omega t + \omega t \sin \omega t) \\ y &= x_0(-\sin \omega t + \omega t \cos \omega t).\end{aligned}\tag{15}$$

Il punto materiale descrive una traiettoria che è l'evolvente della circonferenza (evoluta), con centro in O e raggio x_0 . In Geometria si definisce evoluta il luogo dei punti involuppo delle normali in ogni punto all'evolvente. Tale traiettoria è percorsa dal punto con accelerazione tangenziale costante. Infatti:

$$v = \frac{ds}{dt} = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} = x_0\omega^2 t,$$

$$a_t = \frac{d^2s}{dt^2} = x_0\omega^2.$$

Tuttavia non è necessario risolvere il sistema di equazioni differenziali (14); infatti nel riferimento fisso le condizioni iniziali imposte

comportano un moto descritto dalle seguenti equazioni:

$$\xi = x_0, \quad \eta = \omega x_0 t.$$

Questo moto è un aspetto diverso della stessa situazione fisica; se si rompono i legami che fissano un oggetto su un veicolo che percorre una curva, chi si trova sul veicolo afferma che la traiettoria è espressa dalle (15); mentre chi si trova sulla strada afferma semplicemente che l'oggetto sfugge lungo la tangente alla sua primitiva traiettoria, muovendosi quindi di moto rettilineo uniforme.

D'altra parte servendosi delle formule di trasformazione delle coordinate ruotanti:

$$\begin{aligned} x &= \xi \cos \theta + \eta \sin \theta \\ y &= -\xi \sin \theta + \eta \cos \theta, \end{aligned}$$

con $\theta = \omega t$, e sostituendovi ξ ed η , si ottengono immediatamente le (15).

Supponiamo ora di imporre condizioni iniziali diverse; per $t = 0$:

$$x_0 = 0, \quad y_0 = 0, \quad \dot{x}_0 = v_0, \quad \dot{y}_0 = 0.$$

Le equazioni del moto nel riferimento fisso sono:

$$\xi = v_0 t, \quad \eta = 0;$$

usando la trasformazione di coordinate precedente, si ottiene:

$$\begin{aligned} x &= v_0 t \cos \omega t \\ y &= -v_0 t \sin \omega t. \end{aligned}$$

Nel riferimento mobile, la traiettoria è una spirale di Archimede. Ancora, se la posizione iniziale del punto fosse diversa da zero, si avrebbe

$$\begin{aligned} x &= (v_0 t + x_0) \cos \omega t \\ y &= -(v_0 t + x_0) \sin \omega t. \end{aligned}$$

|| 3.1. Deviazione dalla verticale nella caduta dei gravi

Si è detto che la Terra non è un riferimento inerziale, a causa della rotazione attorno al suo asse. Consideriamo un grave che cade alla latitudine λ ed in corrispondenza fissiamo una terna solidale con la terra, con asse x tangente alla superficie terrestre, asse y volto ad est ed asse z coincidente con la verticale, figura 13.

L'equazione della dinamica in tale riferimento è

$$m\mathbf{a}_r = m\mathbf{g} + m\omega^2\mathbf{r} - 2m\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}_r,$$

Poiché la velocità angolare della terra è piccola, in prima approssimazione, possiamo trascurare i termini in ω^2 . Proiettando $\boldsymbol{\omega}$

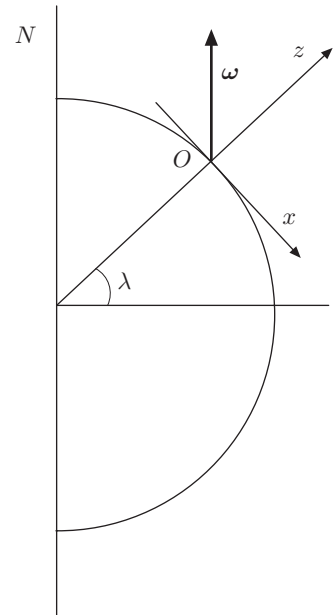


Fig. 11.13

sugli assi del riferimento, si ha

$$\omega_x = -\omega \cos \lambda, \quad \omega_y = 0, \quad \omega_z = \omega \sin \lambda.$$

Essendo

$$\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}_r = \begin{pmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ -\omega \cos \lambda & 0 & \omega \sin \lambda \\ \dot{x} & \dot{y} & \dot{z} \end{pmatrix},$$

si ottiene il sistema di equazioni:

$$\begin{aligned} \ddot{x} &= 2\omega \dot{y} \sin \lambda \\ \ddot{y} &= -2\omega \dot{x} \sin \lambda - 2\omega \dot{z} \cos \lambda \\ \ddot{z} &= -g + 2\omega \dot{y} \cos \lambda, \end{aligned} \quad (16)$$

che vanno integrate imponendo, per $t = 0$, le seguenti condizioni iniziali:

$$x_0 = y_0 = 0, \quad z_0 = H, \quad \dot{x}_0 = \dot{y}_0 = \dot{z}_0 = 0.$$

Se trascuriamo, come per ipotesi, i termini in ω^2 , il sistema può essere risolto facilmente. Infatti integrando la prima e la terza equazione, si ha

$$\dot{x} = 2\omega y \sin \lambda, \quad \dot{z} = -gt + 2\omega y \cos \lambda. \quad (17)$$

Sostituendo nella seconda delle (16) si ha

$$\ddot{y} = -2\omega \cos \lambda (-gt + 2\omega y \cos \lambda) - 4\omega^2 y \sin^2 \lambda,$$

e trascurando i termini in ω^2 :

$$\ddot{y} = 2\omega g \cos \lambda t.$$

Con successive integrazioni si ottiene

$$\dot{y} = \omega g \cos \lambda t^2, \quad y = \frac{1}{3} \omega g \cos \lambda t^3.$$

Sostituendo nella prima delle (17), si trova che $x(t)$ dipende da ω^2 , dunque è trascurabile, mentre la seconda delle (17), con lo stesso criterio, fornisce

$$z = -\frac{1}{2}gt^2 + H.$$

La traiettoria si svolge nel piano y - z e le equazioni del moto sono

$$y = \frac{1}{3} \omega g \cos \lambda t^3, \quad z = -\frac{1}{2}gt^2 + H.$$

Dalla seconda si ottiene il tempo che impiega il grave per toccare il suolo,

$$t = \sqrt{\frac{2H}{g}}.$$

Il punto di impatto ha coordinate:

$$x = 0, \quad y = \frac{1}{3}\omega g \cos \lambda \left(\frac{2H}{g} \right)^{2/3}, \quad z = 0.$$

La deviazione avviene verso est e dipende dalla latitudine; è massima all'equatore e nulla ai poli.

Un calcolo esatto, che comporta mantenere i termini in ω^2 , condurrebbe ad una leggera deviazione aggiuntiva verso sud. In realtà un corpo, soggetto all'azione della gravità, cade con la velocità iniziale di trascinamento

$$\mathbf{v}_0 = \boldsymbol{\omega} \times (\mathbf{P}_0 - \mathbf{O}),$$

volta verso est, lungo il parallelo corrispondente al piede della verticale di caduta: $\boldsymbol{\omega}$ è la velocità angolare della Terra, $(\mathbf{P}_0 - \mathbf{O})$ è il vettore che individua la posizione iniziale del grave rispetto al centro della terra O , figura 14. Il moto è kepleriano e la traiettoria assoluta una ellisse appartenente al piano di O e \mathbf{v}_0 , con il fuoco in O .

Noto dunque il moto assoluto, si può passare a quello relativo mediante le formule di trasformazione di coordinate, tenendo conto che la velocità angolare alla latitudine λ , è $\omega \sin \lambda$. Il punto di impatto col suolo è intersezione della traiettoria ellittica con la superficie terrestre, supponendo quest'ultima sferica. Con questo procedimento si ottiene il risultato esatto, evitando le approssimazioni che si sono fatte[†].

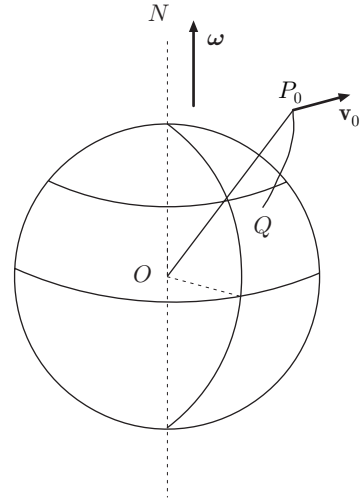


Fig. 11.14

4. Pendolo di Foucault

La deviazione della caduta dei gravi dalla verticale costituisce una prova della rotazione terrestre; una seconda prova è data dal pendolo di Foucault.

Supponiamo che un pendolo oscilli sospeso ad un punto appartenente all'asse terrestre, per esempio, al polo nord. L'osservatore solidale con la Terra rileva che il piano di oscillazione del pendolo ruota compiendo un giro completo in 24 ore, nel verso che va da est ad ovest. Egli attribuisce tale movimento alla forza fittizia di Coriolis $(-2m\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}_r)$, che in ogni punto della traiettoria è ortogonale alla velocità del pendolo: Viceversa, un osservatore inerziale rileva che la giacitura di tale piano è invariante e conclude che la terra ruota rispetto al pendolo.

Omettiamo la risoluzione del problema del moto nel riferimento terrestre;[‡] ci limitiamo pertanto a dimostrare che, nel rife-

[†]Il lettore può utilmente consultare: A. Sommerfeld, *Mechanics*, pag. 167
J.B. Marion, *Classical Dynamics*, Academic Press, New York, pag. 352

[‡]J.B. Marion, *Classical Dynamics*, Academic Press, New York, pag. 355

rimento inerziale, la giacitura del piano di oscillazione è invariante. In tale riferimento è

$$m \frac{d\mathbf{v}}{dt} = m\mathbf{g} + \mathbf{R}, \quad (18)$$

dove \mathbf{R} è la reazione vincolare. Indichiamo con \mathbf{r} la posizione del punto materiale rispetto al punto di sospensione e moltiplichiamo scalarmente ambo i membri della (18) per $\mathbf{r} \times \mathbf{g}$; si ha

$$m \frac{d\mathbf{v}}{dt} \cdot (\mathbf{r} \times \mathbf{g}) = 0,$$

poiché $\mathbf{r} \times \mathbf{g}$ è ortogonale sia a \mathbf{g} che a \mathbf{R} . Consideriamo ora l'espressione:

$$\frac{d}{dt} \mathbf{v} \cdot (\mathbf{r} \times \mathbf{g}) = \frac{d\mathbf{v}}{dt} \cdot (\mathbf{r} \times \mathbf{g}) + \mathbf{v} \cdot \left(\frac{d\mathbf{r}}{dt} \times \mathbf{g} \right) + \mathbf{v} \cdot \left(\mathbf{r} \times \frac{d\mathbf{g}}{dt} \right).$$

Si vede facilmente che il secondo e terzo termine sono nulli perché $\mathbf{v} = d\mathbf{r}/dt$ e inoltre \mathbf{g} è costante. Risulta dunque

$$\frac{d}{dt} \mathbf{v} \cdot (\mathbf{r} \times \mathbf{g}) = \frac{d\mathbf{v}}{dt} \cdot (\mathbf{r} \times \mathbf{g}) = 0.$$

Pertanto

$$\mathbf{v} \cdot \mathbf{r} \times \mathbf{g} = \text{cost};$$

ma nei punti di inversione del moto è $\mathbf{v} = 0$, perciò in ogni istante la costante è uguale a zero:

$$\mathbf{v} \cdot \mathbf{r} \times \mathbf{g} = 0;$$

i tre vettori sono complanari.

Se il punto di sospensione non appartiene all'asse terrestre, ma si trova alla latitudine λ , la velocità angolare ω ha una componente radiale $\omega \sin \lambda$ e una componente tangente al meridiano, figura 15; quest'ultima, per piccole oscillazioni è inefficace. Dunque, alla latitudine λ , il piano di oscillazione del pendolo ruota attorno ad un asse verticale con velocità angolare $-\omega \sin \lambda$.

L'esperienza, per evidenziare la rotazione del piano di oscillazione, fu eseguita da Foucault nel 1851, nella chiesa des Invalides di Parigi; egli sospese un pendolo lungo 67 m, che durante ogni oscillazione lasciava cadere della sabbia, mostrando una rotazione di 11° 15' ogni ora. Il giro completo, alla latitudine di Parigi, avveniva in 32 ore e 32 minuti. Le traiettorie tracciate sul suolo dalla sabbia sono mostrate in figura 16. Nell'emisfero australe le tracce sono analoghe ma descritte in senso inverso perché il piano di oscillazione ruota in senso antiorario a causa dell'inversione della forza di Coriolis.

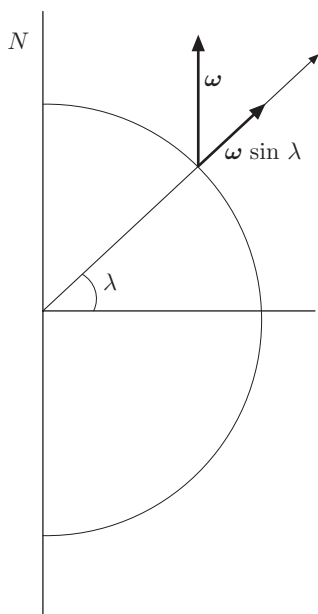


Fig. 11.15

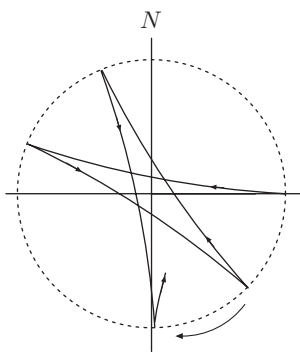


Fig. 11.16

5. Dipendenza dell'accelerazione di gravità dalla latitudine

L'accelerazione di gravità dipende dalla latitudine perché, nel riferimento solidale con la terra, agisce anche la forza centrifuga. La figura 17 mostra la composizione dell'accelerazione di gravità e dell'accelerazione centrifuga; quest'ultima indicata necessariamente in modo sproporzionato rispetto alla gravità, ad una certa latitudine λ . Supponendo la terra perfettamente sferica ed omogenea, si riconosce che l'accelerazione di gravità "efficace" è un vettore \mathbf{g}' , dato da

$$\mathbf{g}' = \mathbf{g} + \omega^2 \mathbf{r},$$

da cui:

$$g'^2 = g^2 + \omega^4 r^2 - 2g\omega^2 r \cos \lambda.$$

Essendo $r = R_T \cos \lambda$, dove R_T è il raggio della terra, la precedente diventa

$$g'^2 = g^2 + \omega^4 R_T^2 \cos^2 \lambda - 2g\omega^2 R_T \cos^2 \lambda.$$

Da questa relazione si trae che ai poli, $\cos \lambda = 0$, $g' = g$; all'equatore, $\cos \lambda = 1$, è

$$g'^2 = g^2 + \omega^4 R_T^2 - 2g\omega^2 R_T. \quad (19)$$

Trascurando nella (19) il secondo termine, che contiene ω^4 , con ottima approssimazione si può scrivere:

$$g'^2 = g^2 - 2g\omega^2 R_T \cos^2 \lambda;$$

si ottiene:

$$g' = g \left(1 - \frac{2\omega^2 R_T \cos^2 \lambda}{g} \right)^{1/2} \approx g \left(1 - \frac{1}{2} \frac{2\omega^2 R_T \cos^2 \lambda}{g} \right).$$

Infine:

$$g' = g - \omega^2 R_T \cos^2 \lambda = g - 3,5 \cdot 10^{-2} \cos^2 \lambda. \quad (20)$$

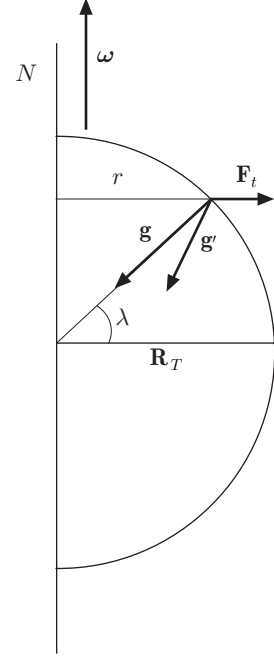


Fig. 11.17

12. Dinamica dei sistemi

1. Sistemi di punti e seconda legge della dinamica

In cinematica si è introdotto il concetto di sistema di punti materiali; se ne è studiato l'atto di moto ponendo particolare attenzione sui sistemi rigidi. Quando un sistema di punti materiali è soggetto a forze, occorre distinguere tra queste le *forze interne* al sistema e le *forze esterne*, esercitate da altri punti o sistemi di punti esterni.

Per le forze interne vale la terza legge della dinamica, secondo cui tali forze si presentano a coppie e la loro risultante è nulla. Non si intende dire con ciò che per le forze esterne non valga tale legge, ma che essa risulta verificata quando si prendono in esame le interazioni tra sistemi esterni l'uno all'altro. Queste interazioni diventano interne in un sistema più esteso comprendente i sistemi considerati. Poiché la terza legge della dinamica è verificata solo in riferimenti inerziali e le forze fittizie presenti in riferimenti non inerziali non verificano tale legge, per il momento, limiteremo il nostro studio ai sistemi in riferimenti inerziali.

Consideriamo, per semplicità, un sistema costituito da due soli punti; l'estensione ad un sistema di n punti risulterà spontanea. Indichiamo con \mathbf{f} le forze interne e con \mathbf{F} le forze esterne, come mostrato in figura 1. Scrivendo la seconda legge della dinamica per i due punti:

$$\begin{aligned} m_1 \mathbf{a}_1 &= \mathbf{F}_1 + \mathbf{f} \\ m_2 \mathbf{a}_2 &= \mathbf{F}_2 - \mathbf{f}, \end{aligned}$$

e sommando, si ottiene

$$m_1 \mathbf{a}_1 + m_2 \mathbf{a}_2 = \mathbf{F}.$$

Per n punti materiali, si ha

$$\sum_i m_i \mathbf{a}_i = \sum_i \mathbf{F}_i = \mathbf{F}, \quad (1)$$

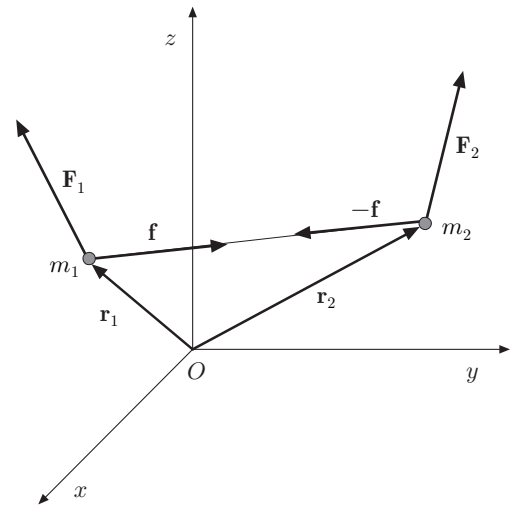


Fig. 12.1

con \mathbf{F} risultante delle forze esterne.

La (1) costituisce l'estensione della seconda legge della dinamica ai sistemi; si osservi che in essa non compaiono le forze interne. Per dare alla (1) una forma più significativa occorre definire il centro di massa di un sistema.

2. Centro di massa

Si definisce centro di massa di un sistema, il punto che ha coordinate assegnate dalle seguenti relazioni:

$$\begin{aligned}x_C &= \frac{\sum_i m_i x_i}{\sum_i m_i} = \frac{\sum_i m_i x_i}{M} \\y_C &= \frac{\sum_i m_i y_i}{\sum_i m_i} = \frac{\sum_i m_i y_i}{M} \\z_C &= \frac{\sum_i m_i z_i}{\sum_i m_i} = \frac{\sum_i m_i z_i}{M},\end{aligned}\quad (2)$$

dove con M si è indicata la massa totale del sistema.

Le precedenti sono espresse in forma vettoriale dalla relazione

$$\mathbf{r}_C = \frac{\sum_i m_i \mathbf{r}_i}{M}, \quad (3)$$

dove \mathbf{r}_C è il vettore che individua il centro di massa.

Esempio

1. Un sistema è costituito da particelle di masse

$$m_1 = 5 \text{ g}, \quad m_2 = 3 \text{ g}, \quad m_3 = 2 \text{ g}, \quad m_4 = 2 \text{ g},$$

che, in un riferimento cartesiano ortogonale, hanno coordinate:

$$\begin{aligned}x_1 &= 0 \text{ cm}, & y_1 &= 0 \text{ cm}; & x_2 &= 10 \text{ cm}, & y_2 &= 30 \text{ cm}, \\x_3 &= 30 \text{ cm}, & y_3 &= 0 \text{ cm}; & x_4 &= -15 \text{ cm}, & y_4 &= 15 \text{ cm}.\end{aligned}$$

Le coordinate del centro di massa risultano

$$\begin{aligned}x_C &= \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2 + m_3 x_3 + m_4 x_4}{m_1 + m_2 + m_3 + m_4} = 5 \text{ cm} \\y_C &= \frac{m_1 y_1 + m_2 y_2 + m_3 y_3 + m_4 y_4}{m_1 + m_2 + m_3 + m_4} = 10 \text{ cm}.\end{aligned}$$

3. Teorema della quantità di moto

Si definisce quantità di moto di un sistema la somma delle quantità di moto dei singoli punti del sistema:

$$\mathbf{p} = \mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2 + \cdots + \mathbf{p}_n = \sum_i \mathbf{p}_i.$$

Derivando le (2) rispetto al tempo, si ha

$$\dot{x}_C = \frac{\sum_i m_i \dot{x}_i}{\sum_i m_i}, \quad \dot{y}_C = \frac{\sum_i m_i \dot{y}_i}{\sum_i m_i}, \quad \dot{z}_C = \frac{\sum_i m_i \dot{z}_i}{\sum_i m_i}, \quad (5)$$

e moltiplicando per M , massa del sistema,

$$M\dot{x}_C = \sum_i m_i \dot{x}_i, \quad M\dot{y}_C = \sum_i m_i \dot{y}_i, \quad M\dot{z}_C = \sum_i m_i \dot{z}_i. \quad (6)$$

In forma vettoriale si ha

$$M\mathbf{v}_C = \sum_i \mathbf{p}_i = \mathbf{p}. \quad (7)$$

La quantità di moto di un sistema è uguale alla quantità di moto del centro di massa in cui si ritiene localizzata la massa del sistema.

4. Prima equazione cardinale della dinamica dei sistemi

Derivando le (6) rispetto al tempo, si ha

$$M\ddot{x}_C = \sum_i m_i \ddot{x}_i, \quad M\ddot{y}_C = \sum_i m_i \ddot{y}_i, \quad M\ddot{z}_C = \sum_i m_i \ddot{z}_i.$$

In forma vettoriale:

$$M \frac{d^2 \mathbf{r}_C}{dt^2} = \sum_i m_i \frac{d^2 \mathbf{r}_i}{dt^2}, \quad (8)$$

in cui \mathbf{r}_C e \mathbf{r}_i rappresentano rispettivamente il vettore che individua la posizione del centro di massa ed i vettori che individuano la posizione dei punti. Confrontando la (8) con la (1) si ottiene

$$\sum_i \mathbf{F}_i = \mathbf{F} = M \frac{d^2 \mathbf{r}_C}{dt^2}.$$

Si deduce quindi che la risultante delle forze esterne è uguale alla massa del sistema per l'accelerazione del centro di massa. L'equazione precedente si scrive:

$$\mathbf{F} = \frac{d\mathbf{p}}{dt} = M \frac{d\mathbf{v}_C}{dt}. \quad (9)$$

Essa costituisce la *prima equazione cardinale della dinamica dei sistemi*.

Diremo dunque: *in un sistema sottoposto a forze esterne, il centro di massa si muove come un punto dotato della massa totale del sistema e sollecitato dalla risultante di tutte le forze esterne agenti sul sistema* (Newton). Si deduce che le forze interne, che non compaiono nella (9), non influenzano il moto del centro di massa. Discende inoltre, che con forze interne non si riesce ad alterare il moto del centro di massa. Se un proiettile che percorre, come noto, una traiettoria parabolica, esplode in volo e i suoi frammenti vengono proiettati in varie direzioni per effetto di forze interne dovute all'esplosione, il centro di massa dei frammenti (sistema) continua a percorrere indisturbato la sua traiettoria parabolica.

5. Conservazione della quantità di moto

Se la risultante delle forze esterne è nulla, dalla (9) discende

$$M \frac{d\mathbf{v}_C}{dt} = 0,$$

che comporta

$$M\mathbf{v}_C = \mathbf{p} = \text{cost.} \quad (10)$$

La quantità di moto del sistema si conserva.

Tipico esempio di conservazione della quantità di moto è il sistema cannone proiettile prima e dopo lo sparo. La quantità di moto del sistema si conserva solo in direzione orizzontale, poiché lungo la verticale agisce la forza esterna di gravità. Essendo nulla la componente orizzontale della quantità di moto iniziale, tale si manterrà dopo lo sparo; dunque si deve avere

$$m_1 v_1 - m_2 v_2 = 0,$$

dove gli indici 1 e 2 si riferiscono al proiettile ed al cannone. Naturalmente il cannone rincula con una velocità $v_2 = m_1 v_1 / m_2$, molto minore di quella del proiettile.

Se si considerano due particelle che interagiscono per effetto di forze interne, la conservazione della quantità di moto è espressa dalla relazione:

$$\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2 = \mathbf{p}'_1 + \mathbf{p}'_2,$$

dove con gli apici sono state indicate le quantità di moto dopo l'interazione, paragrafo 4-VI. La precedente si può scrivere:

$$\mathbf{p}'_1 - \mathbf{p}_1 = -(\mathbf{p}'_2 - \mathbf{p}_2), \quad \Delta\mathbf{p}_1 = -\Delta\mathbf{p}_2.$$

La variazione della quantità di moto di una particella, in un certo intervallo di tempo Δt , è uguale ed opposta alla variazione della quantità di moto dell'altra particella, durante lo stesso intervallo di tempo. Tale interazione determina uno scambio di quantità di moto; la quantità di moto perduta da una particella è uguale a quella guadagnata dall'altra particella. Ciò è evidentemente in accordo con la terza legge della dinamica. Infatti dividendo la relazione precedente per l'intervallo di tempo Δt , e facendo tendere a zero tale intervallo, si ha

$$\frac{d\mathbf{p}_1}{dt} + \frac{d\mathbf{p}_2}{dt} = 0, \quad \frac{d\mathbf{p}_1}{dt} = -\frac{d\mathbf{p}_2}{dt}, \quad \mathbf{f}_1 = -\mathbf{f}_2,$$

e viceversa.

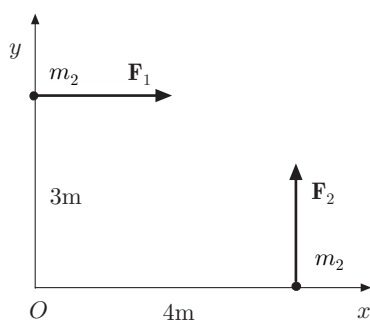


Fig. 12.2

Esempi

2. Due masse $m_1 = 1 \text{ kg}$, $m_2 = 0,6 \text{ kg}$, inizialmente in quiete, sono disposte in un piano $x-y$ privo di attrito, come in figura 2. Le coordinate di m_1 siano $(0; 3 \text{ m})$, quelle di m_2 $(4; 0 \text{ m})$. Si applichino ad esse le forze $\mathbf{F}_1 = 4\mathbf{i} \text{ N}$, $\mathbf{F}_2 =$

3j N ; trovare le equazioni del moto del centro di massa e la quantità di moto del sistema.

Le coordinate iniziali del centro di massa sono

$$x_{0C} = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2}{m_1 + m_2} = 1,5 \text{ m}$$

$$y_{0C} = \frac{m_1 y_1 + m_2 y_2}{m_1 + m_2} = 1,87 \text{ m}.$$

Dalla prima equazione della dinamica dei sistemi:

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 = (m_1 + m_2)\mathbf{a}_C,$$

si ricava il moto del centro di massa. Si ha

$$x_C(t) = x_{0C} + \frac{1}{2} \frac{F_1}{m_1 + m_2} t^2 = 1,5 + 1,25t^2$$

$$y_C(t) = y_{0C} + \frac{1}{2} \frac{F_2}{m_1 + m_2} t^2 = 1,87 + 0,94t^2.$$

La quantità di moto del sistema, quantità di moto del centro di massa, è

$$\mathbf{p} = (m_1 + m_2)\mathbf{v}_C = (m_1 + m_2)(\dot{x}_C \mathbf{i} + \dot{y}_C \mathbf{j})$$

$$= (F_1 \mathbf{i} + F_2 \mathbf{j})t = 4t \mathbf{i} + 3t \mathbf{j}.$$

- III 3. Due blocchi di massa m_1 , m_2 , collegati mediante una molla di costante elastica k e di massa trascurabile, poggiano su un piano orizzontale privo di attrito, figura 3. Alla massa m_2 è applicata una forza orizzontale \mathbf{F} costante; determinare l'allungamento della molla.

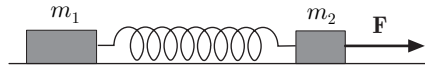


Fig. 12.3

La forza elastica è una forza interna, dunque non influisce sull'accelerazione del centro di massa, che è data da

$$a_C = \frac{F}{m_1 + m_2}.$$

Ma, se non si sono instaurate oscillazioni, questa è anche l'accelerazione di ciascun blocco. Detto x l'allungamento della molla, per il blocco m_2 è $F - kx = m_2 a_C$; per il blocco m_1 , $kx = m_1 a_C$. Pertanto

$$x = \frac{m_1}{k} \frac{F}{m_1 + m_2}.$$

- III 4. Un proiettile, lanciato verticalmente con velocità iniziale \mathbf{v}_0 , esplode in due frammenti di ugual massa. Dopo t_1 secondi dall'esplosione, uno dei frammenti raggiunge la quota h_1 . Determinare la quota dell'altro frammento allo stesso istante.

Le forze interne, causate dall'esplosione non influiscono sul moto del centro di massa; poiché la gravità è l'unica forza esterna, il centro di massa si muove di moto uniformemente ritardato e all'istante t_1 raggiunge la quota

$$y_C = v_0 t_1 - \frac{1}{2} g t_1^2,$$

avendo fissato come riferimento un asse verticale volto verso l'alto e con origine nel punto di lancio. Poiché

$$y_C = \frac{m_1 y_1 + m_2 y_2}{m_1 + m_2},$$

$m_1 = m_2$ e $y_1 = h_1$, si ottiene

$$y_2 = h_2 = 2y_C - h_1.$$

Si osservi che la coordinata x dei frammenti non risulta determinata perché dipende dalle velocità vettoriali acquistate all'istante dell'esplosione. Tuttavia va tenuto presente che i frammenti devono essere allineati col centro di massa. Nel caso in esame deve essere soddisfatta la condizione

$$x_C = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2}{m_1 + m_2} = 0.$$

5. Un uomo di massa m si trova all'estremo di un carrello di massa M e lunghezza l , in quiete, libero di muoversi su un binario orizzontale. Trascurando ogni forma di attrito, determinare di quanto si sposta il carrello se l'uomo si reca all'estremo opposto.

Il sistema, uomo più carrello, non è soggetto a forze esterne, a parte la gravità equilibrata dalla reazione vincolare; dunque il suo centro di massa, inizialmente in quiete, resta tale dopo lo spostamento dell'uomo.

Fissato un asse x solidale col binario, con origine nel centro di massa C , prima e dopo lo spostamento dell'uomo, sarà:

$$x_C = 0 = \frac{mx_1 + Mx_2}{m + M} = \frac{mx'_1 + Mx'_2}{m + M},$$

dove x_1, x_2 sono le ascisse iniziali dei centri di massa dell'uomo e del carrello, e x'_1, x'_2 quelle finali.

Dalla relazione precedente si ottiene

$$M(x'_2 - x_2) = -m(x'_1 - x_1), \quad M\Delta x_2 = -m\Delta x_1,$$

essendo $\Delta x_2, \Delta x_1$ gli spostamenti del carrello e dell'uomo, rispetto al riferimento fisso. Chiamando con l la lunghezza del carrello, lo spostamento assoluto dell'uomo è somma dello spostamento relativo l e dello spostamento di trascinamento Δx_2 del carrello:

$$\Delta x_1 = l + \Delta x_2.$$

Pertanto

$$M\Delta x_2 = -m(l + \Delta x_2), \quad \Rightarrow \quad \Delta x_2 = -\frac{m}{m + M}l,$$

in verso opposto allo spostamento relativo dell'uomo.

6. Seconda equazione cardinale della dinamica dei sistemi, momento angolare

Si consideri un sistema di particelle, ciascuna soggetta a forze interne ed a forze esterne. Indichiamo con \mathbf{f}_i la risultante delle forze interne e con \mathbf{F}_i la risultante delle forze esterne agenti sulla singola particella; si rammenti la figura 1 in cui sono rappresentate due sole particelle. Per ogni particella si ha

$$\mathbf{F}_i + \mathbf{f}_i = m_i \mathbf{a}_i.$$

Consideriamo i momenti di ambo i membri rispetto ad un polo O fisso, per esempio, rispetto all'origine del riferimento:

$$\mathbf{r}_i \times (\mathbf{F}_i + \mathbf{f}_i) = \mathbf{r}_i \times \frac{d\mathbf{p}_i}{dt}.$$

Sommando su tutte le particelle, si ottiene

$$\sum_i \mathbf{r}_i \times (\mathbf{F}_i + \mathbf{f}_i) = \sum_i \mathbf{r}_i \times \frac{d\mathbf{p}_i}{dt}.$$

Il primo membro dà il risultante \mathbf{M} dei momenti delle forze esterne. Si osservi che il risultante dei momenti delle forze interne è nullo qualunque sia il polo, perché ogni coppia di forze interne giace sulla stessa retta d'azione, perciò i momenti sono a due a due opposti. Pertanto si ha

$$\mathbf{M} = \sum_i \mathbf{r}_i \times \frac{d\mathbf{p}_i}{dt}. \quad (11)$$

Ricordando che il momento angolare di una particella è

$$\mathbf{L}_i = \mathbf{r}_i \times \mathbf{p}_i$$

e derivando rispetto al tempo, si ottiene:

$$\frac{d\mathbf{L}_i}{dt} = \frac{d\mathbf{r}_i}{dt} \times \mathbf{p}_i + \mathbf{r}_i \times \frac{d\mathbf{p}_i}{dt}.$$

Ma, essendo $d\mathbf{r}_i/dt$ e \mathbf{p}_i vettori paralleli,

$$\frac{d\mathbf{r}_i}{dt} \times \mathbf{p}_i = 0,$$

dunque:

$$\frac{d\mathbf{L}_i}{dt} = \mathbf{r}_i \times \frac{d\mathbf{p}_i}{dt}.$$

Allora la (11) diventa

$$\mathbf{M} = \sum_i \frac{d\mathbf{L}_i}{dt} = \frac{d\mathbf{L}}{dt}, \quad (12)$$

in cui $\mathbf{L} = \sum_i \mathbf{L}_i$ è il risultante dei momenti angolari, che chiamiamo *momento angolare del sistema*.

La (12) è la *seconda equazione cardinale della dinamica dei sistemi*; essa descrive il moto del sistema attorno al polo prescelto. Se il polo O non è fisso, con un ragionamento analogo a quello fatto per il singolo punto, paragrafo 3.1-IX, si ottiene una equazione più generale della (12).

Nel riferimento inerziale di figura 4 si scelga un punto Q comunque mobile e si considerino i momenti angolari delle singole particelle rispetto a Q . Si ha

$$\begin{aligned} \mathbf{L}_{iQ} &= \mathbf{r}_{iQ} \times \mathbf{p}_i = (\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_Q) \times \mathbf{p}_i \\ \mathbf{L}_Q &= \sum_i \mathbf{L}_{iQ} = \sum_i (\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_Q) \times \mathbf{p}_i. \end{aligned}$$

Derivando rispetto al tempo:

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{L}_Q}{dt} &= \sum_i \left(\frac{d\mathbf{r}_i}{dt} - \frac{d\mathbf{r}_Q}{dt} \right) \times \mathbf{p}_i + \sum_i (\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_Q) \times \frac{d\mathbf{p}_i}{dt} \\ &= - \sum_i \frac{d\mathbf{r}_Q}{dt} \times \mathbf{p}_i + \sum_i (\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_Q) \times \frac{d\mathbf{p}_i}{dt} \\ &= -\mathbf{v}_Q \times \sum_i \mathbf{p}_i + \mathbf{M}_Q = -\mathbf{v}_Q \times \mathbf{p}_C + \mathbf{M}_Q, \end{aligned}$$

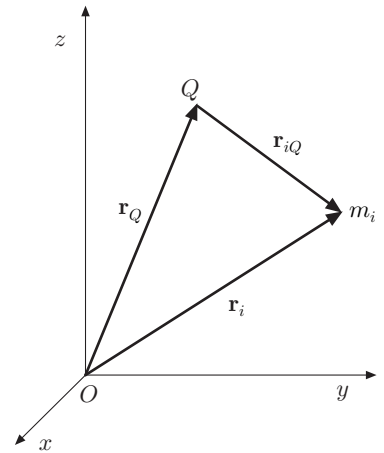


Fig. 12.4

da cui:

$$\mathbf{M}_Q = \frac{d\mathbf{L}_Q}{dt} + \mathbf{v}_Q \times \mathbf{p}_C. \quad (13)$$

Il secondo addendo del secondo termine è nullo se Q è fisso o coincide con il centro di massa, oppure se si muove parallelamente ad esso.

La (13) costituisce l'espressione più generale della seconda equazione cardinale della dinamica dei sistemi. *Il risultante dei momenti delle forze esterne è uguale alla derivata rispetto al tempo del momento angolare, se i momenti sono valutati rispetto allo stesso polo che può essere fisso o coincidere col centro di massa (o con un punto che si muove parallelamente a quest'ultimo).* (Eulero, Bernoulli).

7. Conservazione del momento angolare

Se il sistema non è soggetto a forze esterne oppure il risultante dei momenti delle forze esterne è nullo si ha

$$\frac{d\mathbf{L}}{dt} = 0.$$

Ciò significa che il momento angolare del sistema è costante:

$$\mathbf{L} = \sum_i \mathbf{L}_i = \text{cost.} \quad (14)$$

Questa equazione costituisce la legge di conservazione del momento angolare. In altri termini: *il momento angolare di un sistema isolato o di un sistema in cui è nullo il risultante dei momenti delle forze esterne, è costante.*

In un atomo, in cui elettroni e nucleo sono dotati di momento angolare (di spin ed orbitale), il momento angolare è costante perché le forze di attrazione coulombiana tra elettroni e nucleo e le forze di repulsione tra coppie di elettroni sono forze interne che agiscono lungo la congiungente coppie di particelle; il momento risultante di queste forze, qualunque sia il polo scelto è sempre nullo. Ancora: il Sistema Solare rispetto al centro di massa del sistema, praticamente rispetto al Sole, ha momento angolare costante, se trascuriamo l'interazione col resto della Galassia. Infatti i vari pianeti si mantengono in rotazione rispetto al proprio asse con momento angolare costante, poiché le forze di mutua interazione tra essi ed il Sole sono forze centrali che hanno tutto momento nullo rispetto al centro di massa del sistema (Sole).

La legge di conservazione del momento angolare ha validità universale, sia a livello microscopico che a livello macroscopico. Se, infatti, il momento angolare di una parte del sistema varia, si deve presupporre che si sia verificata una variazione opposta nel resto del sistema, in modo che in totale valga la legge di conservazione. Tale legge si verifica, per esempio, nelle reazioni nucleari;

se un nucleo si disintegra, e ciò accade a causa di forze interne, il suo momento angolare varia esattamente di una quantità opposta a quello delle particelle emesse, le quali, per così dire, hanno sottratto momento angolare. Lo stesso processo si verifica quando un nucleo, un atomo o una molecola emettono radiazione elettromagnetica.

In generale, se si considerano due sistemi S_1 ed S_2 interagenti, ma nel loro insieme isolati, si deve avere

$$\mathbf{L}_1 + \mathbf{L}_2 = \text{cost.}$$

Per effetto dell'interazione, \mathbf{L}_1 varierà di una quantità $\Delta\mathbf{L}_1$ e \mathbf{L}_2 di una quantità $\Delta\mathbf{L}_2$. Ovviamente le due variazioni devono essere tali che

$$\Delta\mathbf{L}_1 + \Delta\mathbf{L}_2 = 0, \quad \Rightarrow \quad \Delta\mathbf{L}_1 = -\Delta\mathbf{L}_2.$$

I due sistemi hanno scambiato tra loro momento angolare.

Allo scopo di chiarire ancora la legge di conservazione del momento angolare, insistiamo sul fatto che esso si conserva anche quando il sistema non è isolato, purché il risultante dei momenti delle forze esterne sia nullo. Per esempio se un corpo rigido, posto in rotazione attorno ad un suo asse spontaneo di rotazione, (vedi dinamica dei corpi rigidi), con velocità angolare costante e quindi con momento angolare costante, viene fatto cadere nel vuoto, il moto del centro di massa del corpo è sempre traslatorio con accelerazione costante. Infatti la forza esterna (peso) è applicata al centro di massa rispetto al quale il suo momento è nullo; \mathbf{L} è costante e tale si mantiene lungo tutta la caduta. Lo stesso naturalmente accade se il corpo rigido cade senza ruotare; in questo caso il momento angolare è nullo e tale si mantiene durante la caduta. Queste conclusioni, valide per un corpo rigido, sono verificate anche per un sistema articolato, oppure elastico, in caduta libera. Infatti accade che forze interne determinino un movimento di una parte del sistema rispetto ad un'altra ed imprimano rotazioni per conservare costante il valore di \mathbf{L} . Per esempio, un gatto, lasciato cadere di schiena, riesce sempre con contorsioni opportune a volgere le zampe verso il suolo in modo da rendere inoffensiva la caduta.

Come altro esempio si consideri il sistema mostrato in figura 5. Due masse m uguali, possono scorrere senza attrito lungo una guida l orizzontale e sono tenute ferme alla stessa distanza x_1 dal centro O della guida mediante un filo. Il sistema ruota con velocità angolare ω attorno all'asse verticale passante per O . Il momento angolare del sistema, supponendo trascurabile la massa della guida, è

$$L_1 = 2mx_1^2\omega_1.$$

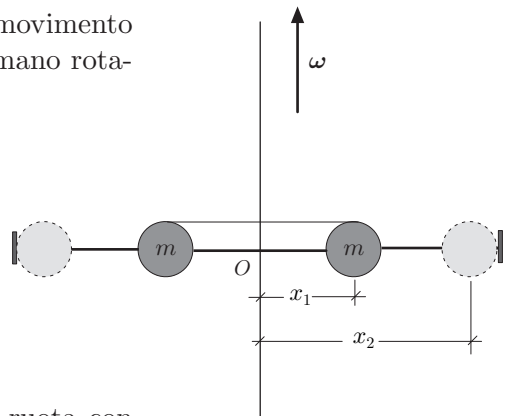


Fig. 12.5

Se il filo viene bruciato, le due masse si disporranno all'estremità della guida, dove sono predisposti due fermi; il nuovo momento angolare sarà

$$L_2 = 2mx_2^2 \omega_2.$$

Poiché il momento delle forze esterne, peso e reazione vincolare, rispetto all'asse è nullo, il momento angolare si conserva:

$$L_1 = L_2, \quad \Rightarrow \quad 2mx_1^2 \omega_1 = 2mx_2^2 \omega_2.$$

Chiamando momento d'inerzia I delle masse, rispetto all'asse, la quantità $I = 2mx^2$, si ha

$$L = I_1 \omega_1 = I_2 \omega_2.$$

Dunque, in corrispondenza alla posizione finale delle masse, la velocità angolare assume il valore

$$\omega_2 = \frac{I_1}{I_2} \omega_1 = \frac{x_1^2}{x_2^2} \omega_1,$$

inferiore a quella iniziale.

È molto importante esaminare l'energia cinetica del sistema nelle due configurazioni:

$$T_1 = 2 \frac{1}{2} m v_1^2 = \frac{1}{2} 2mx_1^2 \omega_1^2 = \frac{1}{2} I_1 \omega_1^2, \quad T_2 = \frac{1}{2} I_2 \omega_2^2.$$

Dalle relazioni precedenti si deduce che le energie cinetiche stanno nel rapporto

$$\frac{T_1}{T_2} = \frac{I_1 \omega_1^2}{I_2 \omega_2^2} = \frac{x_2^2}{x_1^2}. \quad T_1 = T_2 \frac{x_2^2}{x_1^2}.$$

L'energia cinetica iniziale è maggiore di quella finale. Il risultato indicherebbe una violazione della conservazione dell'energia. Tuttavia occorre tener presente che nel riferimento ruotante le masse sono soggette alla forza centrifuga, e per spostare le masse dalla posizione x_2 alla posizione x_1 , minore, occorre compiere un lavoro \mathcal{L} contro tale forza; perciò

$$\mathcal{L} = -2m \int_{x_2}^{x_1} x \omega^2(x) dx.$$

Tenuto conto che ω è funzione di x , mentre il momento angolare L è costante, conviene scrivere

$$L = 2mx^2 \omega(x), \quad \omega(x) = \frac{L}{2mx^2}.$$

Sostituendo nell'integrale precedente, si ha

$$\mathcal{L} = -\frac{L^2}{2m} \int_{x_2}^{x_1} \frac{dx}{x^3} = \frac{L^2}{4m} \left(\frac{1}{x_1^2} - \frac{1}{x_2^2} \right) > 0.$$

D'altra parte, per mezzo delle relazioni ottenute, si verifica facilmente che la differenza tra le energie cinetiche iniziale e finale è proprio

$$T_1 - T_2 = \frac{L^2}{4m} \left(\frac{1}{x_1^2} - \frac{1}{x_2^2} \right);$$

dunque il bilancio energetico è soddisfatto.

È importante sottolineare due aspetti caratteristici del principio di conservazione della quantità di moto e del principio di conservazione del momento angolare. Nel primo, non è possibile far variare la velocità del centro di massa senza l'intervento di forze esterne, anche se si verificano moti interni tra le parti del sistema; nel secondo è possibile far variare la velocità angolare del sistema perché le forze interne possono modificare la distribuzione delle masse e quindi il momento di inerzia.

Lo stesso accade se ci si siede su uno sgabello, ruotante con una certa velocità angolare, con le braccia aderenti al corpo; se allarghiamo le braccia, meglio reggendo in mano due grossi libri od altro, si noterà una diminuzione sensibile della velocità angolare. In questo modo il momento d'inerzia del corpo e dei libri rispetto all'asse di rotazione è aumentato, perché parte della massa, braccia più libri, si è distribuita a distanza maggiore dall'asse. Analogamente il caso di una ballerina ruotante attorno al proprio asse, con le braccia allineate lungo il corpo; quando essa allarga le braccia, ottiene una diminuzione della velocità angolare iniziale. Si osservi che le forze esterne agenti, peso e reazione del piano di appoggio, hanno momento nullo rispetto all'asse di rotazione.

8. Dinamica relativa dei sistemi

La dinamica relativa dei sistemi si istituisce in maniera analoga a quella del punto materiale. Per un sistema in moto rispetto ad una terna non inerziale, la prima equazione cardinale della dinamica dei sistemi diventa

$$\frac{d\mathbf{p}_r}{dt} = \mathbf{F} + \mathbf{F}_t + \mathbf{F}_c, \quad (15)$$

dove \mathbf{p}_r è la quantità di moto relativa, \mathbf{F} la risultante delle forze reali esterne, \mathbf{F}_t e \mathbf{F}_c le risultanti delle forze apparenti. Dalla (15) si deduce che, nel movimento relativo, il centro di massa si muove come un punto dotato della massa complessiva del sistema, e soggetto alla somma delle forze reali e delle forze apparenti.

Analogamente, la seconda equazione cardinale della dinamica dei sistemi è espressa dalla relazione:

$$\frac{d\mathbf{L}_r}{dt} = \mathbf{M} + \mathbf{M}_t + \mathbf{M}_c, \quad (16)$$

dove \mathbf{L}_r è il momento angolare relativo del sistema. Il risultante

dei momenti delle forze esterne \mathbf{M} e delle forze apparenti \mathbf{M}_t e \mathbf{M}_c , sono valutati rispetto allo stesso polo, solidale col riferimento, oppure rispetto al centro di massa. Particolare rilievo hanno le seguenti grandezze.

8.1. Forza centrifuga

La somma delle forze centrifughe agenti sui punti del sistema, è uguale alla forza centrifuga del centro di massa, ritenuto come un punto dotato della massa dell'intero sistema.

Dette P_i le posizioni dei punti materiali e Q_i i piedi delle perpendicolari sull'asse di rotazione della terna mobile, figura 6, la risultante delle forze centrifughe è data da

$$\omega^2 \sum_i m_i (P_i - Q_i).$$

Se C è il centro di massa e Q è il piede della sua perpendicolare sull'asse, essendo

$$P_i - Q_i = (P_i - Q) + (Q - Q_i), \quad (C - Q) = \frac{\sum_i m_i (P_i - Q)}{M},$$

risulta

$$\begin{aligned} \omega^2 \sum_i m_i (P_i - Q_i) &= \omega^2 \sum_i (P_i - Q) + \omega^2 \sum_i (Q - Q_i) \\ &= M\omega^2 (C - Q) + \omega^2 \sum_i m_i (Q - Q_i). \end{aligned}$$

Il secondo termine del secondo membro è parallelo all'asse, perciò non dà alcun contributo, dunque

$$\omega^2 \sum_i m_i (P_i - Q_i) = M\omega^2 (C - Q). \quad (17)$$

8.2. Risultante e momento delle forze esterne, momento angolare

La risultante e il momento risultante delle forze esterne sono somma delle forze reali e delle forze apparenti. Queste ultime, per quanto si è detto, devono essere annoverate tra le forze esterne al sistema.

Il momento angolare ha espressione analoga a quella stabilita nel riferimento inerziale, purché si sostituisca la velocità relativa a quella assoluta.

8.3. Energia cinetica

L'energia cinetica merita qualche considerazione in più. Poiché essa è data da una forma quadratica della velocità, ed essendo

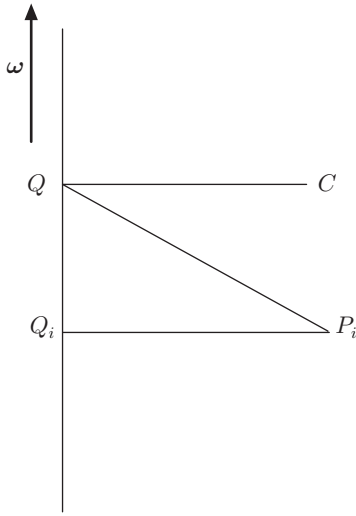


Fig. 12.6

$\mathbf{v} = \mathbf{v}_t + \mathbf{v}_r$, per un punto materiale, nel riferimento assoluto, si ha

$$\frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m\mathbf{v} \cdot \mathbf{v} = \frac{1}{2}mv_t^2 + \frac{1}{2}mv_r^2 + m\mathbf{v}_t \cdot \mathbf{v}_r,$$

e per il sistema:

$$\frac{1}{2} \sum_i m_i v_i^2 = \frac{1}{2} \sum_i m_i v_{it}^2 + \frac{1}{2} \sum_i m_i v_{ir}^2 + \sum_i m_i \mathbf{v}_{it} \cdot \mathbf{v}_{ir}, \quad (18)$$

9. Riferimento del centro di massa

Molte volte è particolarmente utile fissare una terna di riferimento con origine nel centro di massa; se in particolare, il sistema non è soggetto a forze esterne, tale terna è inerziale. Chiameremo questo riferimento: riferimento C , mentre chiameremo L il riferimento inerziale del laboratorio, rispetto al quale C si muove con velocità \mathbf{v}_C .

9.1. Quantità di moto

La quantità di moto di un sistema nel riferimento C è sempre nulla; ciò si può verificare agevolmente per un sistema costituito da due particelle. Siano $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$ le velocità delle due particelle nel riferimento L ; la velocità del centro di massa è data da

$$\mathbf{v}_C = \frac{m_1 \mathbf{v}_1 + m_2 \mathbf{v}_2}{m_1 + m_2}.$$

Le velocità di ciascuna particella nel riferimento C sono

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_{1C} &= \mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_C = \mathbf{v}_1 - \frac{m_1 \mathbf{v}_1 + m_2 \mathbf{v}_2}{m_1 + m_2} = \frac{m_2(\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2)}{m_1 + m_2} = \frac{m_2 \mathbf{v}_{12}}{m_1 + m_2} \\ \mathbf{v}_{2C} &= \mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_C = \mathbf{v}_2 - \frac{m_1 \mathbf{v}_1 + m_2 \mathbf{v}_2}{m_1 + m_2} = -\frac{m_1 \mathbf{v}_{12}}{m_1 + m_2}. \end{aligned}$$

Con \mathbf{v}_{12} si è indicata la velocità relativa delle due particelle. Per la quantità di moto si ha

$$\begin{aligned} \mathbf{p}_{1C} &= \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \mathbf{v}_{12} = \mu \mathbf{v}_{12} \\ \mathbf{p}_{2C} &= -\frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \mathbf{v}_{12} = -\mu \mathbf{v}_{12}, \end{aligned} \quad (19)$$

la cui somma è nulla. Con μ si è indicata la massa ridotta del sistema, definita da

$$\frac{1}{\mu} = \frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2}.$$

La massa ridotta è sempre inferiore sia a m_1 che a m_2 . Poiché si può scrivere

$$\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} = \frac{m_1}{1 + m_1/m_2} = m_1 \left(1 + \frac{m_1}{m_2}\right)^{-1},$$

se $m_1 \ll m_2$, si ha

$$\mu \approx m_1 \left(1 - \frac{m_1}{m_2}\right) \approx m_1.$$

9.2. Momento angolare

Consideriamo un sistema di particelle in un riferimento inerziale la cui origine O coincida con il polo, figura 7. Il momento angolare della generica particella è

$$\mathbf{L}_i = \mathbf{r}_i \times \mathbf{p}_i.$$

Indichiamo con \mathbf{r}_C , \mathbf{v}_C , posizione e velocità del centro di massa e con \mathbf{r}_{iC} , \mathbf{v}_{iC} , posizione e velocità della particella di indice i rispetto al centro di massa. Poiché

$$\begin{aligned}\mathbf{r}_i &= \mathbf{r}_C + \mathbf{r}_{iC} \\ \mathbf{v}_i &= \mathbf{v}_C + \mathbf{v}_{iC},\end{aligned}$$

il momento angolare della particella si scrive

$$\begin{aligned}\mathbf{L}_i &= (\mathbf{r}_C + \mathbf{r}_{iC}) \times m_i(\mathbf{v}_C + \mathbf{v}_{iC}) \\ &= \mathbf{r}_C \times m_i \mathbf{v}_C + \mathbf{r}_C \times m_i \mathbf{v}_{iC} + \mathbf{r}_{iC} \times m_i \mathbf{v}_C + \mathbf{r}_{iC} \times m_i \mathbf{v}_{iC}.\end{aligned}$$

Il momento angolare del sistema risulta

$$\begin{aligned}\mathbf{L} &= \sum_i \mathbf{L}_i = \sum_i \mathbf{r}_C \times m_i \mathbf{v}_C + \sum_i \mathbf{r}_C \times m_i \mathbf{v}_{iC} \\ &\quad + \sum_i \mathbf{r}_{iC} \times m_i \mathbf{v}_C + \sum_i \mathbf{r}_{iC} \times m_i \mathbf{v}_{iC}.\end{aligned}$$

La prima somma è uguale a $\mathbf{r}_C \times M \mathbf{v}_C$, dove M è la massa totale del sistema, la seconda somma è nulla perché è il prodotto vettoriale tra \mathbf{r}_C e la quantità di moto del sistema nel riferimento del centro di massa, riferimento a quantità di moto nulla. Infine, la terza somma è uguale a zero in quanto $\sum_i m_i \mathbf{r}_{iC} = 0$, per analogo motivo.

In definitiva si ha

$$\mathbf{L} = \mathbf{r}_C \times M \mathbf{v}_C + \mathbf{L}_C, \quad (20)$$

avendo indicato con

$$\mathbf{L}_C = \sum_i \mathbf{r}_{iC} \times m_i \mathbf{v}_{iC},$$

il momento angolare del sistema rispetto al centro di massa.

Si conclude che il momento angolare di un sistema rispetto ad un polo fisso O , descrive il moto del centro di massa intorno ad O ed il moto del sistema intorno al centro di massa. Derivando

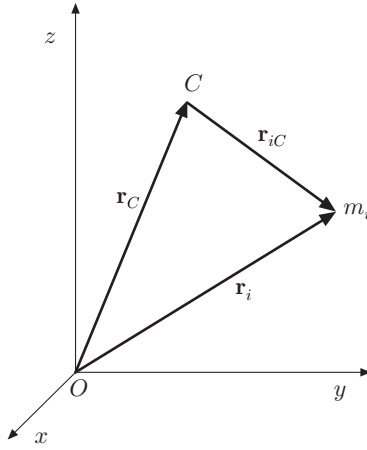


Fig. 12.7

la (20) rispetto al tempo si ha

$$\begin{aligned}\frac{d\mathbf{L}}{dt} &= \frac{d\mathbf{r}_C}{dt} \times M\mathbf{v}_C + \mathbf{r}_C \times M\frac{d\mathbf{v}_C}{dt} + \frac{d\mathbf{L}_C}{dt} \\ &= \mathbf{r}_C \times M\frac{d\mathbf{v}_C}{dt} + \frac{d\mathbf{L}_C}{dt},\end{aligned}$$

essendo nullo il primo termine del secondo membro. La precedente si può anche scrivere:

$$\frac{d\mathbf{L}}{dt} = \mathbf{r}_C \times \mathbf{F} + \mathbf{M}_C, \quad (21)$$

essendo $\mathbf{r}_C \times \mathbf{F}$ e \mathbf{M}_C , rispettivamente il momento della risultante delle forze esterne rispetto ad O ed il risultante dei momenti delle forze esterne rispetto al centro di massa.

Se i momenti vengono presi rispetto al centro di massa ovviamente si ha

$$\mathbf{M}_C = \frac{d\mathbf{L}_C}{dt}. \quad (22)$$

Si noti che la (22) è formalmente analoga alla (12), ma ne differisce perché il centro di massa è mobile.

|| 9.3. Energia cinetica di un sistema

L'energia cinetica di un sistema, in un riferimento comunque mobile rispetto a quello assoluto, è espressa dalla (18). Se il riferimento mobile è solidale col centro di massa, si può stabilire il seguente teorema di König.

L'energia cinetica di un sistema nel riferimento L è pari alla somma dell'energia cinetica del centro di massa, dove si ritiene localizzata l'intera massa del sistema, e dell'energia cinetica del sistema nel riferimento C .

L'energia cinetica del sistema nel riferimento del laboratorio è data da

$$T = \frac{1}{2} \sum_i m_i v_i^2.$$

Ma la velocità della generica particella è $\mathbf{v}_i = \mathbf{v}_C + \mathbf{v}_{iC}$, pertanto si può scrivere

$$\begin{aligned}T &= \frac{1}{2} \sum_i m_i (\mathbf{v}_C + \mathbf{v}_{iC}) \cdot (\mathbf{v}_C + \mathbf{v}_{iC}) \\ &= \frac{1}{2} \sum_i m_i v_C^2 + \mathbf{v}_C \cdot \sum_i m_i \mathbf{v}_{iC} + \frac{1}{2} \sum_i m_i v_{iC}^2 \\ &= \frac{1}{2} M v_C^2 + \frac{1}{2} \sum_i m_i v_{iC}^2,\end{aligned}$$

essendo $\sum_i m_i \mathbf{v}_{iC} = 0$, poiché il riferimento C è un riferimento a quantità di moto nulla. Infine:

$$T = \frac{1}{2} M v_C^2 + T_C. \quad (23)$$

Consideriamo, nel riferimento L , due particelle con velocità \mathbf{v}_1 e \mathbf{v}_2 . L'energia cinetica del sistema è $(m_1 v_1^2 + m_2 v_2^2)/2$. Nel riferimento C si ha

$$\begin{aligned} T_C &= T - \frac{1}{2} M v_C^2 \\ &= \frac{1}{2} \left[m_1 v_1^2 + m_2 v_2^2 - (m_1 + m_2) \left(\frac{m_1 \mathbf{v}_1 + m_2 \mathbf{v}_2}{m_1 + m_2} \right)^2 \right] \\ &= \frac{1}{2} \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} (v_1^2 + v_2^2 - 2 \mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_2) \\ &= \frac{1}{2} \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} (\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2)^2 = \frac{1}{2} \mu v_{12}^2. \end{aligned} \quad (24)$$

L'energia cinetica delle particelle, nel riferimento C , è uguale all'energia cinetica di una particella di massa ridotta μ e velocità uguale alla velocità relativa.

Complementi ed esempi

- ||| 6. *Momento angolare di due particelle rispetto al loro centro di massa.*
Il momento angolare delle particelle rispetto al centro di massa è

$$\mathbf{L}_C = \mathbf{r}_{1C} \times \mathbf{p}_{1C} + \mathbf{r}_{2C} \times \mathbf{p}_{2C}.$$

Poiché

$$\mathbf{r}_C = \frac{m_1 \mathbf{r}_1 + m_2 \mathbf{r}_2}{m_1 + m_2},$$

le posizioni delle particelle rispetto al centro di massa sono

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_{1C} &= \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_C = \mathbf{r}_1 - \frac{m_1 \mathbf{r}_1 + m_2 \mathbf{r}_2}{m_1 + m_2} = \frac{m_2 (\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2)}{m_1 + m_2} = \frac{m_2 \mathbf{r}_{12}}{m_1 + m_2} \\ \mathbf{r}_{2C} &= \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_C = \mathbf{r}_2 - \frac{m_1 \mathbf{r}_1 + m_2 \mathbf{r}_2}{m_1 + m_2} = -\frac{m_1 \mathbf{r}_{12}}{m_1 + m_2}. \end{aligned}$$

Ricordando le equazioni (19),

$$\mathbf{p}_{1C} = \mu \mathbf{v}_{12}, \quad \mathbf{p}_{2C} = -\mu \mathbf{v}_{12},$$

si ottiene:

$$\mathbf{L}_C = \frac{m_2}{m_1 + m_2} \mathbf{r}_{12} \times \mu \mathbf{v}_{12} + \frac{m_1}{m_1 + m_2} \mathbf{r}_{12} \times \mu \mathbf{v}_{12} = \mu \mathbf{r}_{12} \times \mathbf{v}_{12}. \quad (23)$$

Il momento angolare di due particelle rispetto al centro di massa si può esprimere come il momento angolare di una particella di massa ridotta μ , quantità di moto $\mu \mathbf{v}_{12}$ e vettore posizione \mathbf{r}_{12} . Viceversa si può anche esprimere come il momento angolare di una particella con quantità di moto $\mu \mathbf{v}_{21}$ e vettore posizione \mathbf{r}_{21} . La verifica di quest'ultimo asserto è immediata. Questo risultato è molto importante perché mostra che il momento angolare rispetto al centro di massa è indipendente dalla posizione di quest'ultimo. Però il vero centro di rotazione è il centro di massa. A riprova si può verificare che la (23) coincide effettivamente con quella di definizione; infatti:

$$\begin{aligned} \mathbf{L}_C &= \mathbf{r}_{12} \times \mu \mathbf{v}_{12} = \frac{m_1 + m_2}{m_2} \mathbf{r}_{1C} \times \mu \frac{m_1 + m_2}{m_2} \mathbf{v}_{1C} \\ &= \frac{m_1 + m_2}{m_2} \mathbf{r}_{1C} \times m_1 \mathbf{v}_{1C} = \left(\frac{m_1}{m_2} + 1 \right) \mathbf{r}_{1C} \times m_1 \mathbf{v}_{1C} \\ &= \frac{m_1}{m_2} \mathbf{r}_{1C} \times m_1 \mathbf{v}_{1C} + \mathbf{r}_{1C} \times m_1 \mathbf{v}_{1C}; \end{aligned}$$

ma nel riferimento del centro di massa è

$$m_1 \mathbf{r}_{1C} + m_2 \mathbf{r}_{2C} = 0, \quad m_1 \mathbf{v}_{1C} + m_2 \mathbf{v}_{2C} = 0;$$

da cui

$$\mathbf{r}_{1C} = -\frac{m_2}{m_1}\mathbf{r}_{2C}, \quad \mathbf{v}_{1C} = -\frac{m_2}{m_1}\mathbf{v}_{2C};$$

sostituendo si ha:

$$\mathbf{L}_C = \mathbf{r}_{1C} \times m_1\mathbf{v}_{1C} + \mathbf{r}_{2C} \times m_2\mathbf{v}_{2C}.$$

Se il sistema è isolato, derivando la (23) rispetto al tempo, si ha

$$\frac{d\mathbf{L}_C}{dt} = \mu \frac{d\mathbf{r}_{12}}{dt} \times \mathbf{v}_{12} + \mu \mathbf{r}_{12} \times \frac{d\mathbf{v}_{12}}{dt} = 0; \quad (26)$$

infatti i due termini esprimono prodotti vettoriali tra vettori paralleli. Il momento angolare si conserva.

III 7. *Problema dei due corpi; particelle soggette a mutua interazione.*

Le forze di interazione sono forze interne opposte, $\mathbf{f}_{12} = -\mathbf{f}_{21}$. Le equazioni cardinali della dinamica dei sistemi suggeriscono:

- a) il centro di massa del sistema sta fermo oppure si muove di moto rettilineo uniforme;
- b) il momento angolare del sistema è costante.

Le equazioni della dinamica rispetto ad un osservatore assoluto sono

$$m_1 \frac{d\mathbf{v}_1}{dt} = \mathbf{f}_{12}, \quad m_2 \frac{d\mathbf{v}_2}{dt} = \mathbf{f}_{21}.$$

Sommando si ha

$$m_1 \frac{d\mathbf{v}_1}{dt} + m_2 \frac{d\mathbf{v}_2}{dt} = \mathbf{f}_{12} + \mathbf{f}_{21} = 0.$$

Questa relazione esprime la conservazione della quantità di moto. Inoltre si può scrivere

$$\frac{d\mathbf{v}_1}{dt} = \frac{\mathbf{f}_{12}}{m_1}, \quad \frac{d\mathbf{v}_2}{dt} = \frac{\mathbf{f}_{21}}{m_2};$$

sottraendo si ha

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{v}_1}{dt} - \frac{d\mathbf{v}_2}{dt} &= \frac{\mathbf{f}_{12}}{m_1} - \frac{\mathbf{f}_{21}}{m_2}, \\ \frac{d(\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2)}{dt} &= \left(\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2} \right) \mathbf{f}_{12}, \end{aligned}$$

ovvero:

$$\frac{d\mathbf{v}_{12}}{dt} = \frac{1}{\mu} \mathbf{f}_{12}, \quad \mathbf{f}_{12} = \mu \frac{d\mathbf{v}_{12}}{dt} = \mu \mathbf{a}_{12}, \quad (27)$$

in cui \mathbf{v}_{12} , μ , \mathbf{a}_{12} sono rispettivamente, la velocità relativa, la massa ridotta e l'accelerazione relativa.

Si può dunque concludere che la (27) esprime la seconda equazione della dinamica relativa per due particelle. Discende che il moto di una particella rispetto all'altra, e viceversa, è equivalente al moto di una particella di massa ridotta, accelerazione uguale all'accelerazione relativa e soggetta alla forza di mutua interazione.

La (27) esprime anche la seconda equazione della dinamica nel riferimento del centro di massa. Infatti si è trovato che la velocità \mathbf{v}_{12} è legata alla velocità relativa al centro di massa, dalla relazione

$$\mathbf{v}_{12} = \frac{m_1}{\mu} \mathbf{v}_{1C};$$

sostituendo nella (27) si ottiene

$$\mathbf{f}_{12} = m_1 \frac{d\mathbf{v}_{1C}}{dt} = m_1 \mathbf{a}_{1C}, \quad (28)$$

dove \mathbf{a}_{1C} è l'accelerazione rispetto al centro di massa. Lo stesso ragionamento vale per la seconda particella.

||| 8. *Vibrazione di una molecola biatomica.*

Una molecola biatomica è costituita da due atomi di masse m_1, m_2 , la cui energia potenziale di interazione $U(r)$, può essere descritta con buona approssimazione, in funzione della mutua distanza r , dal potenziale di Lennard-Jones, paragrafo 7.1-VII. Gli atomi possono vibrare attorno alla posizione di equilibrio, coincidente col minimo dell'energia potenziale e se le oscillazioni sono di piccola ampiezza, l'energia potenziale d'interazione è armonica. In tal caso la molecola può essere schematizzata da due masse collegate agli estremi di una molla di costante elastica k . Il moto degli atomi va studiato rispetto al centro di massa del sistema che, per semplicità, si suppone in quiete. Dette r_1 e r_2 le distanze degli atomi dal centro di massa ed r la loro distanza, si ha

$$m_1 r_1 = m_2 r_2, \quad r_1 + r_2 = r.$$

che combinate danno

$$m_1 r_1 = m_2 r_2 = \frac{m_1 m_2}{M_1 + m_2} = \mu r,$$

dove μ è la massa ridotta. Pertanto le equazioni della dinamica degli atomi considerati:

$$m_1 \frac{d^2 r_1}{dt^2} = -\frac{dU}{dr}, \quad m_2 \frac{d^2 r_2}{dt^2} = -\frac{dU}{dr},$$

vengono espresse dall'unica equazione

$$\mu \frac{d^2 r}{dt^2} = -\frac{dU}{dr},$$

relativa ad una particella di massa μ e coordinata r . Sviluppando l'energia potenziale in serie di potenze intorno al minimo, si ha

$$U = -U_0 + \frac{1}{2} k (r - r_0)^2 + \dots,$$

dove $k/2$ denota il coefficiente del termine quadratico. Se le oscillazioni sono di piccola ampiezza è lecito trascurare i termini di ordine superiore, quindi si può scrivere:

$$\mu \frac{d^2 (r - r_0)}{dt^2} = -k (r - r_0).$$

Le oscillazioni sono armoniche, con frequenza

$$\nu = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k}{\mu}}.$$

||| 9. *Interazione gravitazionale; moto di una stella doppia.*

Una stella doppia è costituita da due stelle di masse confrontabili che ruotano attorno al loro centro di massa. Evidentemente la velocità angolare delle stelle è la stessa. In figura 8 è mostrato il moto rispetto al centro di massa della stella Sirio, che ha come compagna una stella nana bianca, e il moto apparente della nana bianca rispetto a Sirio. L'equazione della dinamica del sistema è la (27),

$$\mathbf{f}_{12} = \mu \mathbf{a}_{12}.$$

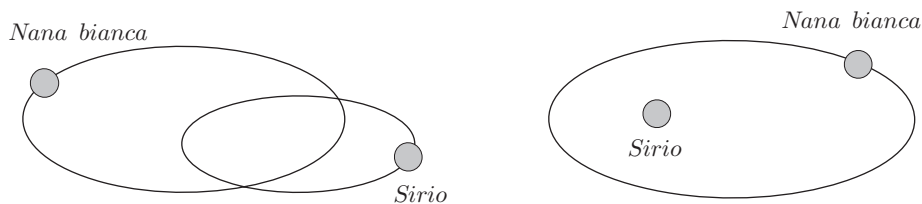


Fig. 12.8

Assumendo l'origine del riferimento in m_2 , come se fosse l'origine fissa di un riferimento assoluto, si ha

$$f_{12} = -G \frac{m_1 m_2}{r_{12}^2} = \mu a_{12},$$

da cui

$$a_{12} = -G \frac{m_1 + m_2}{r_{12}^2}. \quad (29)$$

Il problema gravitazionale va risolto esattamente come esposto al paragrafo 2-X.

Possiamo usare l'equazione (28):

$$\mathbf{f}_{12} = m_1 \mathbf{a}_{1C},$$

dove

$$a_{1C} = \frac{m_2}{m_1 + m_2} a_{12}.$$

Pertanto

$$f_{12} = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} a_{12},$$

da cui si trae

$$a_{12} = \frac{m_1 + m_2}{m_1 m_2} f_{12} = -G \frac{m_1 + m_2}{r_{12}^2},$$

come prima.

Si ottengono inoltre le seguenti relazioni alternative. Nel riferimento del centro di massa è

$$m_1 \mathbf{r}_{1C} + m_2 \mathbf{r}_{2C} = 0, \quad \Rightarrow \quad m_1 r_{1C} = m_2 r_{2C},$$

ed essendo $r_{12} = r_{1C} + r_{2C}$, la (29) diventa

$$a_{12} = -G \frac{m_1 + m_2}{(r_{1C} + r_{2C})^2} = -G \frac{m_1 + m_2}{(r_{1C} + r_{1C} m_1 / m_2)^2} = -G \frac{m_2^2}{r_{1C}^2 (m_1 + m_2)}.$$

Oppure,

$$a_{12} = -G \frac{m_1^2}{r_{2C}^2 (m_1 + m_2)}.$$

Supponendo che le orbite delle due stelle siano pressoché circolari e note le velocità orbitali, v_1, v_2 ; si possono ricavare le masse m_1, m_2 . Si ha

$$a_{1C} = \frac{m_2}{m_1 + m_2} a_{12} = -G \frac{m_2}{(r_{1C} + r_{2C})^2}.$$

Poiché le velocità areolari sono

$$\frac{\pi r_{1C}^2}{T} = \frac{1}{2} r_{1C} v_{1C}, \quad \frac{\pi r_{2C}^2}{T} = \frac{1}{2} r_{2C} v_{2C}, \quad (30)$$

sommando si ha

$$r_{1C} + r_{2C} = \frac{1}{\omega} (v_{1C} + v_{2C}).$$

Essendo le orbite circolari, l'accelerazione gravitazionale è uguale all'accelerazione centripeta:

$$a_{1C} = \omega^2 r_{1C}, \quad G \frac{m_2}{(r_{1C} + r_{2C})^2} = \omega^2 r_{1C}.$$

Tenendo conto delle (30), si ricava

$$m_2 = \frac{1}{\omega} \frac{v_{1C} (v_{1C} + v_{2C})^2}{G}.$$

Analogamente per l'altra massa.

.....

10. Lavoro ed energia cinetica

Consideriamo, per semplicità, un sistema costituito da due particelle, soggette a forze interne \mathbf{f}_{12} , \mathbf{f}_{21} , e a forze esterne \mathbf{F}_1 , \mathbf{F}_2 . Il teorema dell'energia cinetica afferma che il lavoro di *tutte* le forze è uguale alla variazione dell'energia cinetica del sistema. Se per semplicità, poniamo l'energia cinetica iniziale pari a zero, si ha

$$T = \frac{1}{2}m_1v_1^2 + \frac{1}{2}m_2v_2^2.$$

L'energia cinetica è data dal contributo del lavoro delle forze interne e del lavoro delle forze esterne; possiamo dunque scrivere

$$T = \mathcal{L}^{(e)} + \mathcal{L}^{(i)},$$

dove

$$\begin{aligned}\mathcal{L}^{(e)} &= \int_A^B (\mathbf{F}_1 \cdot d\mathbf{r}_1 + \mathbf{F}_2 \cdot d\mathbf{r}_2) \\ \mathcal{L}^{(i)} &= \int_A^B (\mathbf{f}_{12} \cdot d\mathbf{r}_1 + \mathbf{f}_{21} \cdot d\mathbf{r}_2).\end{aligned}$$

Gli estremi d'integrazione A e B indicano le configurazioni iniziale e finale del sistema.

Essendo $\mathbf{f}_{12} = -\mathbf{f}_{21}$, si ha

$$\mathcal{L}^{(i)} = \int_A^B \mathbf{f}_{12} \cdot d(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2) = \int_A^B \mathbf{f}_{12} \cdot d\mathbf{r}_{12}.$$

Il lavoro delle forze interne dipende dallo spostamento relativo delle particelle; dunque è indipendente dal riferimento.

Inoltre, poiché le forze interne, in assenza di fenomeni dissipativi, sono conservative, si ha

$$\int_A^B \mathbf{f}_{12} \cdot d\mathbf{r}_{12} = U_A^{(i)} - U_B^{(i)}.$$

Queste considerazioni si possono estendere facilmente ad un sistema di n particelle. Si ha

$$\mathcal{L}^{(i)} = \int_A^B \sum_{i \neq j} \mathbf{f}_{ij} \cdot d\mathbf{r}_{ij},$$

per $(i, j = 1, \dots, n)$ ed inoltre

$$\int_A^B \sum_{i \neq j} \mathbf{f}_{ij} \cdot d\mathbf{r}_{ij} = U_A^{(i)} - U_B^{(i)}.$$

Le relazioni precedenti mostrano ancora che la variazione di energia potenziale interna dipende dalla distanza relativa tra le particelle ed è quindi indipendente dal riferimento. Pertanto, essendo

$$T_B - T_A = \mathcal{L}^{(e)} + U_A^{(i)} - U_B^{(i)},$$

si ottiene

$$\mathcal{L}^{(e)} = (T_B + U_B^{(i)}) - (T_A + U_A^{(i)}). \quad (31)$$

La quantità

$$E_P = T + U^{(i)}, \quad (32)$$

è chiamata *energia propria* del sistema. Possiamo dunque scrivere

$$\mathcal{L}^{(e)} = \Delta E_P.$$

Il lavoro delle forze esterne è uguale alla variazione dell'energia propria del sistema.

Se il sistema è isolato, ossia non è soggetto a forze esterne, si ha

$$\Delta E_P = 0; \quad E_P = \text{cost.}$$

L'energia propria del sistema resta costante.

Nel caso in cui le forze esterne siano conservative, si ha

$$\mathcal{L}^{(e)} = U_A^{(e)} - U_B^{(e)},$$

pertanto:

$$T_A + U_A^{(i)} + U_A^{(e)} = T_B + U_B^{(i)} + U_B^{(e)},$$

che esprime la conservazione dell'energia meccanica totale.

Si osservi che, come le equazioni cardinali della dinamica dei sistemi esprimono l'interazione del sistema con l'esterno, la (31) esprime la stessa interazione per mezzo della variazione dell'energia propria del sistema. Le forze interne non modificano tale energia anche se possono modificarne l'energia cinetica come conseguenza di una variazione dell'energia potenziale interna e viceversa. Se il sistema è isolato, come s'è visto, l'energia propria rimane costante. Questo costituisce il principio di conservazione dell'energia che ha validità generale, come il principio di conservazione della quantità di moto, di cui ne è conseguenza, e come il principio di conservazione del momento angolare. Tali principi regolano i fenomeni naturali nella loro totalità.

Se, per esempio, due sistemi S_1 ed S_2 , nel loro insieme isolati, interagiscono tra loro, tale interazione può essere espressa per mezzo del lavoro che ciascun sistema compie sull'altro, cioè mediante le variazioni dell'energia propria ΔE_{P_1} e ΔE_{P_2} . Poichè l'insieme dei due sistemi è isolato, la conservazione dell'energia richiede che $E_{P_1} + E_{P_2}$ risulti costante, dunque:

$$\Delta E_{P_1} = -\Delta E_{P_2}.$$

In altri termini si è ottenuto uno scambio di energia tra i due sistemi.

Consideriamo due masse unite da una molla ideale, soggette all'azione della gravità; l'energia propria del sistema è data da

$$E_P = \frac{1}{2}m_1v_1^2 + \frac{1}{2}m_2v_2^2 + \frac{1}{2}kx^2,$$

dove con x si è indicata la deformazione della molla. Se sul sistema non agiscono forze esterne l'energia propria rimane costante; quando agisce la forza esterna di gravità, conservativa, anche l'energia totale si mantiene costante durante il moto, cioè

$$E = \frac{1}{2}m_1v_1^2 + \frac{1}{2}m_2v_2^2 + \frac{1}{2}kx^2 + m_1gy_1 + m_2gy_2,$$

dove con y si è indicata la quota delle masse. Va sottolineato che l'energia cinetica di un sistema dipende dal riferimento e che, in particolare, vale il teorema di König, mentre l'energia potenziale interna dipende solo dalla mutua distanza tra le particelle ed ha lo stesso valore qualunque sia il riferimento. Se dunque consideriamo il riferimento del centro di massa, possiamo definire energia interna del sistema la quantità

$$E_i = T_C + U^{(i)}.$$

Il termine di energia potenziale, nell'espressione precedente, può comprendere altre forme di energia. Infatti lo stato di un sistema può essere definito non solo dalle coordinate geometriche di posizione o di configurazione, come nel caso dell'energia potenziale, ma da altre grandezze come gli sforzi interni, la densità, la pressione e da grandezze elettromagnetiche (intensità di polarizzazione, intensità di magnetizzazione ecc...). Per esempio, l'energia interna di un corpo deformabile continuo dipende dal tensore degli sforzi e dal tensore delle deformazioni in ogni punto e, più semplicemente, nel caso di un fluido, dalla pressione, dalla densità e dalla temperatura. In questi casi il termine di energia cinetica è certamente trascurabile. In generale possiamo denominare le varie forme di energia elencate col termine *energia interna*. In definitiva l'interazione del sistema con l'esterno determina una variazione della sua energia interna nelle varie forme descritte. Va notato inoltre che si è usato il termine interazione; ciò comporta evidentemente il caso di lavoro eseguito dal sistema verso l'esterno, ora, a spese della sua energia interna. Questi concetti costituiscono il fondamento per l'enunciazione della prima legge della Termodinamica.

11. Urti

Si verifica un urto tra particelle, se esse interagendo e non pervenendo necessariamente a contatto, scambiano tra loro quantità di moto ed energia in un intervallo di tempo molto breve. Prenderemo in esame urti binari, ossia urti tra due particelle

Ricordando le considerazioni svolte al paragrafo 1-IX, possiamo trascurare, durante l'intervallo di tempo in cui avviene l'interazione, l'impulso delle forze esterne e considerare il sistema

come isolato. Si ha conservazione della quantità di moto e del momento angolare. Si può pertanto trascurare il contributo delle forze esterne al moto delle particelle. Una palla da tennis, nell'intervallo di tempo durante il quale è a contatto con la racchetta, circa $10^{-3} s$, è soggetta ad una forza media di $\approx 2 \cdot 10^3 N$; forza molto maggiore di qualsiasi altra, gravità, attrito ecc... Per esempio, si può stimare che, a causa della gravità, nell'intervallo di tempo considerato, la palla si sposta di qualche frazione di millimetro, distanza senz'altro trascurabile rispetto alla gittata, che è di alcune decine di metri.

Consideriamo l'urto che si verifica tra due sfere rigide allorché vengono a contatto; essendo il sistema isolato, si conserva la quantità di moto e l'energia propria; indicando con gli apici le grandezze dopo l'urto, per la quantità di moto si ha

$$\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2 = \mathbf{p}'_1 + \mathbf{p}'_2,$$

e per l'energia propria

$$T + U = T' + U';$$

in cui

$$T = \frac{p_1^2}{2m_1} + \frac{p_2^2}{2m_2},$$

prima dell'urto, e

$$T' = \frac{p'^2_1}{2m_1} + \frac{p'^2_2}{2m_2},$$

dopo l'urto.

Indichiamo con Q la quantità:

$$Q = T' - T = U - U', \quad (33)$$

che rappresenta l'energia dissipata durante l'urto. Se $Q = 0$, non si ha variazione di energia cinetica; la collisione si dice *elastica*. Se $Q \neq 0$ la collisione si dice *anelastica*. In particolare per $Q < 0$, dopo l'urto si ha una diminuzione di energia cinetica e un aumento dell'energia potenziale interna. Per $Q > 0$, si ha un aumento dell'energia cinetica a spese dell'energia potenziale interna. Questi ultimi due casi sono molto importanti in certe collisioni nucleari e si indicano rispettivamente come urto endotermico e urto esotermico.

In generale si scrive

$$\frac{p_1^2}{2m_1} + \frac{p_2^2}{2m_2} + Q = \frac{p'^2_1}{2m_1} + \frac{p'^2_2}{2m_2}. \quad (34)$$

In certe reazioni nucleari si può anche verificare che le masse delle particelle, dopo l'urto, siano diverse dalle masse iniziali; non considereremo tale eventualità.

Nel riferimento del centro di massa la quantità di moto del sistema è nulla prima e dopo l'urto:

$$\mathbf{p}_{1C} + \mathbf{p}_{2C} = 0, \quad \mathbf{p}'_{1C} + \mathbf{p}'_{2C} = 0,$$

dunque la (34) diventa

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \left(\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2} \right) p_{1C}^2 + Q &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2} \right) p_{1C}'^2, \\ \frac{1}{2\mu} p_{1C}^2 + Q &= \frac{1}{2\mu} p_{1C}'^2, \end{aligned} \quad (35)$$

Si noti che Q , essendo definito anche come variazione dell'energia potenziale interna, equazione (33), è indipendente dal riferimento.

Se l'urto è elastico, $Q = 0$, si deduce

$$p_{1C}^2 = p_{1C}'^2, \quad p_{2C}^2 = p_{2C}'^2.$$

Quindi

$$p_{1C} = p_{1C}', \quad p_{2C} = p_{2C}'. \quad (36)$$

11.1. Parametro d'urto

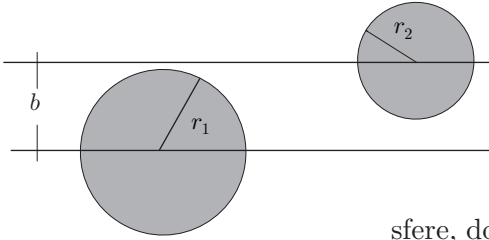


Fig. 12.9

Consideriamo due sfere rigide che collidono e supponiamo che le rette d'azione delle velocità iniziali siano parallele. La distanza b tra tali rette definisce il parametro d'urto, figura 9. Se $b = 0$, l'urto è centrale ed il moto, dopo l'urto, si svolge lungo la congiungente i centri delle sfere. Se il parametro d'urto è diverso da zero ed è $b < (r_1 + r_2)$, con r_1 e r_2 raggi delle sfere, dopo l'urto le traiettorie risultano deviate; urto obliquo. Se $b > (r_1 + r_2)$, nell'ipotesi di sfere rigide, non si ha urto. Nelle collisioni tra particelle nucleari, a causa dell'interazione tra i campi coulombiani e nucleari, si può verificare scambio di energia e quantità di moto anche se le traiettorie iniziali hanno distanza maggiore della somma delle dimensioni geometriche delle particelle, supponendo che queste possano essere definite classicamente.

12. Urto centrale elastico

Consideriamo l'urto centrale elastico nel riferimento L . Indichiamo con v e V le velocità prima e dopo l'urto; per la conservazione della quantità di moto e dell'energia cinetica, si ha

$$\begin{aligned} m_1 v_1 + m_2 v_2 &= m_1 V_1 + m_2 V_2 \\ m_1 v_1^2 + m_2 v_2^2 &= m_1 V_1^2 + m_2 V_2^2. \end{aligned} \quad (37)$$

Assegnate le masse e le velocità prima dell'urto, il sistema di equazioni fornisce le velocità dopo l'urto. Poiché si ha

$$m_1(v_1 - V_1) = m_2(V_2 - v_2), \quad m_1(v_1^2 - V_1^2) = m_2(V_2^2 - v_2^2),$$

dividendo membro a membro:

$$\frac{v_1 - V_1}{v_1^2 - V_1^2} = \frac{V_2 - v_2}{V_2^2 - v_2^2}, \quad \Rightarrow \quad v_1 + V_1 = v_2 + V_2. \quad (38)$$

Si ottiene

$$\begin{aligned} V_1 &= \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} v_1 + \frac{2m_2}{m_1 + m_2} v_2 \\ V_2 &= \frac{2m_1}{m_1 + m_2} v_1 + \frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2} v_2. \end{aligned} \quad (39)$$

CASI PARTICOLARI

- $m_1 = m_2$; le (39) danno

$$V_1 = v_2, \quad V_2 = v_1.$$

Dopo l'urto, le velocità delle particelle risultano scambiate.

- $m_1 = m_2$, $v_2 = 0$; risulta:

$$V_1 = 0, \quad V_2 = v_1.$$

La particella urtante si arresta e la particella urtata assume la velocità della prima.

- $m_2 \gg m_1$; essendo m_1/m_2 trascurabile, si deduce:

$$V_1 \approx -v_1 + 2v_2, \quad V_2 = v_2.$$

La seconda particella, in pratica, non subisce variazione di velocità. Se, in particolare, $v_2 = 0$, la particella incidente viene riflessa con la stessa velocità iniziale e la particella urtata resta ferma. È il caso di una particella incidente ortogonalmente ad una parete.

- $m_1 \gg m_2$; essendo ora trascurabile m_2/m_1 si ha

$$V_1 \approx v_1, \quad V_2 \approx 2v_1 - v_2,$$

e se, in particolare, $v_2 = 0$ è

$$V_1 \approx v_1, \quad V_2 \approx 2v_1.$$

È il caso della boccia che colpisce il boccino; essa in pratica non subisce variazione di velocità, mentre il boccino assume velocità doppia della boccia incidente.

Nel riferimento C la descrizione è più semplice; la quantità di moto del sistema, prima e dopo l'urto, è nulla:

$$\mathbf{p}_{1C} + \mathbf{p}_{2C} = 0, \quad \mathbf{p}'_{1C} + \mathbf{p}'_{2C} = 0.$$

Essendo l'urto elastico, l'energia cinetica si conserva, $Q = 0$, e per la (36) si deduce

$$\mathbf{V}_{1C} = -\mathbf{v}_{1C}, \quad \mathbf{V}_{2C} = -\mathbf{v}_{2C}.$$

Nel riferimento C , dopo l'urto, le particelle invertono il moto e si allontanano con la velocità e l'energia cinetica possedute prima

dell'urto. Si ha una variazione del vettore quantità di moto di ciascuna particella, mentre i moduli delle quantità di moto e le energie cinetiche, prima e dopo l'urto, sono gli stessi.

12.1. Urto centrale anelastico; coefficiente di restituzione

Nell'urto centrale tra sfere rigide, in realtà si osserva che l'energia cinetica del sistema dopo l'urto, è sempre minore dell'energia cinetica iniziale. Facendo cadere una pallina d'acciaio su una superficie rigida, le altezze dei successivi rimbalzi diminuiscono progressivamente. Ciò significa che una parte dell'energia propria, energia elastica interna, è stata dissipata in altre forme di energia: calore, suono, ecc..., espresse dal fattore Q .

Poichè dalle (37) si ha

$$V_1 - V_2 = v_2 - v_1, \quad \Rightarrow \quad V_{12} = -v_{12},$$

si deduce che le velocità relative, prima e dopo l'urto sono opposte. Se l'urto non è elastico, possiamo introdurre un coefficiente di restituzione e , tale che

$$V_{12} = -e v_{12},$$

con $0 < e < 1$, dove il valore 1 compete all'urto elastico.

Con procedimento analogo a quello che conduce alle (39), si trova facilmente che le velocità dopo l'urto sono date da

$$\begin{aligned} V_1 &= \frac{\mu}{m_2}(1 - e m_2/m_1)v_1 + \frac{\mu}{m_1}(1 + e)v_2 \\ V_2 &= \frac{\mu}{m_2}(1 + e)v_1 + \frac{\mu}{m_1}(1 - e m_1/m_2)v_2. \end{aligned} \quad (40)$$

Per quanto riguarda l'energia dissipata, espressa da Q , ricordiamo che questa grandezza è indipendente dal riferimento, perciò dalla (35), si ha

$$Q = \frac{1}{2\mu}(p'_{1C}{}^2 - p_{1C}^2),$$

ed, essendo

$$p_{1C} = \mu v_{12}, \quad p'_{1C} = \mu V_{12} = -e \mu v_{12},$$

si ottiene

$$Q = \frac{1}{2}\mu(e^2 - 1)v_{12}^2. \quad (41)$$

Per un dato valore del coefficiente di restituzione, Q dipende dalla velocità relativa prima dell'urto.

12.2. Urto centrale completamente anelastico

Se l'urto è completamente anelastico, nel senso che le particelle dopo l'urto restano unite, $e = 0$, la conservazione della quantità di moto è espressa da

$$m_1 v_1 + m_2 v_2 = (m_1 + m_2) V,$$

da cui si ottiene la velocità dopo l'urto:

$$V = \frac{m_1 v_1 + m_2 v_2}{m_1 + m_2} = v_C.$$

In tali condizioni, Q è dato da

$$Q = \frac{1}{2} [(m_1 + m_2) V^2 - (m_1 v_1^2 + m_2 v_2^2)].$$

Si trova immediatamente

$$Q = -\frac{1}{2} \mu v_{12}^2.$$

Esempi tipici sono: le collisioni tra due corpi plastici: dopo l'urto i corpi procedono insieme; il pendolo balistico; in fisica nucleare, le reazioni di cattura: un neutrone può essere assorbito da un atomo di idrogeno, formando un atomo di deuterio. In questi casi $Q < 0$; si ha aumento dell'energia potenziale interna, perché il sistema ha assorbito energia.

12.3. Urto obliquo elastico

Consideriamo l'urto che avviene tra una particella di massa m_1 incidente con velocità v_1 , su una particella di massa m_2 , in quiete, $v_2 = 0$. Questo è il caso che si verifica più frequentemente in fisica nucleare, dove fasci di particelle vengono fatte incidere su particelle bersaglio in quiete.

RIFERIMENTO DEL LABORATORIO

Quantità di moto $m_1 \mathbf{v}_1$ ed energia cinetica $(m_1 v_1^2)/2$ del sistema sono costanti:

$$\begin{aligned} m_1 \mathbf{v}_1 &= m_1 \mathbf{V}_1 + m_2 \mathbf{V}_2 \\ \frac{1}{2} m_1 v_1^2 &= \frac{1}{2} m_1 V_1^2 + \frac{1}{2} m_2 V_2^2. \end{aligned} \quad (42)$$

Dopo l'urto, le particelle vengono deviate, rispetto alla direzione della particella incidente, di angoli θ e φ . In figura 10 è mostrato il diagramma delle velocità prima e dopo l'urto.

Proiettando la (42) su due assi, uno parallelo alla direzione della particella incidente e l'altro ortogonale, si ha

$$\begin{aligned} m_1 v_1 &= m_1 V_1 \cos \theta + m_2 V_2 \cos \varphi \\ 0 &= m_1 V_1 \sin \theta - m_2 V_2 \sin \varphi. \end{aligned}$$

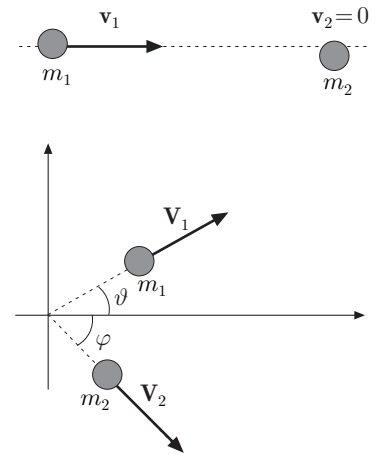


Fig. 12.10

Queste due equazioni scalari, insieme all'equazione di conservazione dell'energia cinetica, assegnate le masse e la velocità iniziale della particella 1, non sono sufficienti a determinare le quattro componenti delle velocità dopo l'urto. Occorre conoscere una delle grandezze coinvolte nel processo; per esempio uno degli angoli di deviazione; misurabile sperimentalmente. La velocità del centro di massa resta immutata, prima e dopo l'urto, ed è data da

$$m_1 v_1 = (m_1 + m_2) v_C, \quad v_C = \frac{m_1}{m_1 + m_2} v_1 = \frac{\mu}{m_2} v_1.$$

RIFERIMENTO DEL CENTRO DI MASSA

Nel riferimento C la quantità di moto del sistema è nulla, prima e dopo l'urto; dunque le particelle si muovono in direzioni opposte, figura 11. Si ha:

$$m_1 \mathbf{v}_{1C} + m_2 \mathbf{v}_{2C} = 0, \quad m_1 \mathbf{V}_{1C} + m_2 \mathbf{V}_{2C} = 0.$$

Scalarmente,

$$m_1 v_{1C} = m_2 v_{2C}, \quad m_1 V_{1C} = m_2 V_{2C}; \quad (43)$$

Ma, per l'equazione (36), nel riferimento C i moduli della quantità di moto di ciascuna particella sono uguali:

$$p_{1C} = p'_{1C}, \quad p_{2C} = p'_{2C},$$

pertanto

$$v_{1C} = V_{1C}; \quad v_{2C} = V_{2C}.$$

Ne segue che, per la seconda delle (43), si ha

$$\frac{V_{2C}}{V_{1C}} = \frac{v_{2C}}{v_{1C}} = \frac{m_1}{m_2}.$$

Tenuto conto di queste relazioni, è possibile dedurre il legame tra gli angoli di deflessione Θ e Φ del riferimento C e gli angoli θ e φ del riferimento L . Dalla figura 12 si riconosce che il triangolo ABC è isoscele, $V_{2C} = v_C$, quindi:

$$\Phi = \pi - \Theta = 2\varphi, \quad \varphi = \frac{1}{2}(\pi - \Theta).$$

Inoltre:

$$\frac{V_{1C}}{\sin \theta} = \frac{v_C}{\sin(\Theta - \theta)}, \quad \frac{\sin \Theta}{\tan \theta} - \cos \Theta = \frac{v_C}{V_{1C}} = \frac{m_1}{m_2},$$

da cui:

$$\tan \theta = \frac{\sin \Theta}{m_1/m_2 + \cos \Theta}. \quad (44)$$

ENERGIA CINETICA

L'energia cinetica nel riferimento L è semplicemente $\frac{1}{2} m_1 v_1^2$; nel riferimento C , per il teorema di König, si ha

$$T_C = \frac{1}{2} m_1 v_1^2 - \frac{1}{2} (m_1 + m_2) v_C^2 = \frac{1}{2} \mu v_1^2.$$

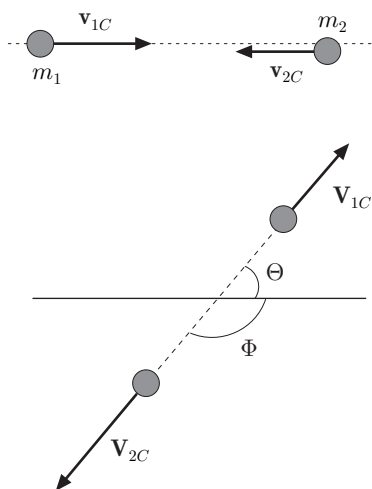


Fig. 12.11

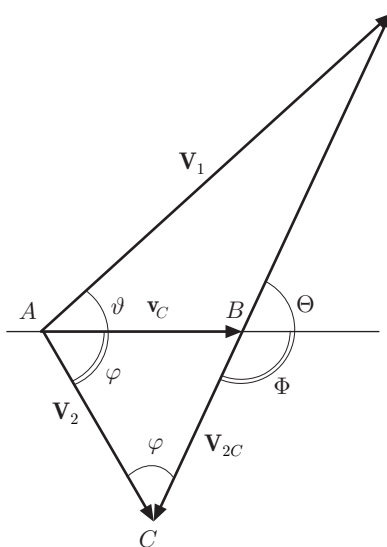
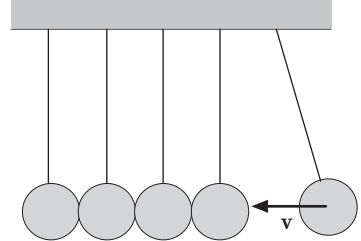


Fig. 12.12

Complementi ed esempi

||| 10. Collisione centrale elastica tra sfere rigide di uguale massa.

Si consideri un certo numero di sfere di acciaio identiche, sospese ad un supporto come mostrato in figura 13. Questo sistema viene chiamato “culla di Newton” e si può trovare nei negozi di giocattoli. Le sfere sono a contatto; se una delle sfere di un estremo della fila viene spostata dalla posizione di equilibrio e quindi abbandonata, urtando contro quelle in quiete si ferma e l'ultima, all'altro estremo, assume la velocità della sfera incidente mentre le altre restano ferme. L'ultima sfera, a sua volta, ritornando contro le altre, si arresta e la prima si muove in verso opposto. Il processo, se non fossero presenti inevitabili dissipazioni di energia, continuerebbe indefinitamente. Se si spostano contemporaneamente due sfere e quindi vengono abbandonate, le ultime due assumono la velocità di quelle incidenti e così via. Questo comportamento si spiega facilmente ricordando le conclusioni sull'urto tra due sfere identiche di cui una ferma; le sfere intermedie praticamente restano in quiete, perché gli urti avvengono in tempi dell'ordine di grandezza di 0,001 s.

||| 11. Urto obliquo elastico di una particella contro una parete piana, $m_2 = \infty$.
Per la conservazione della quantità di moto, figura, è

$$\mathbf{p}_1 = \mathbf{p}'_1 + \mathbf{p}'_2.$$

La parete, che supponiamo liscia e perfettamente elastica, assorbe la quantità di moto \mathbf{p}'_2 , che restituisce integralmente; vale cioè la relazione

$$\mathbf{p}_1 + (-\mathbf{p}'_2) = \mathbf{p}'_1.$$

I diagrammi vettoriali sono mostrati in figura 14; il moto si svolge nel piano individuato dai vettori quantità di moto, prima e dopo la collisione.

Fissiamo un riferimento cartesiano e la normale $\hat{\mathbf{n}}$ alla parete, come in figura 15. Siano v_x, v_y le componenti della velocità prima dell'urto, V_x, V_y le componenti dopo l'urto; è manifestamente

$$v_x = -V_x, \quad v_y = V_y.$$

Dunque la velocità \mathbf{V} , dopo l'urto, appartiene al piano $\mathbf{v}-\hat{\mathbf{n}}$, *piano di incidenza*. Indicando con i l'angolo di incidenza e con r l'angolo di riflessione, si ha

$$\tan i = \left| \frac{v_y}{v_x} \right|, \quad \tan r = \left| \frac{V_y}{V_x} \right| = \left| \frac{v_y}{-v_x} \right|;$$

l'angolo di incidenza è uguale all'angolo di riflessione.

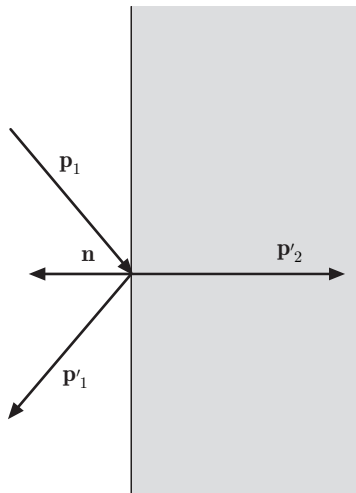


Fig. 12.14

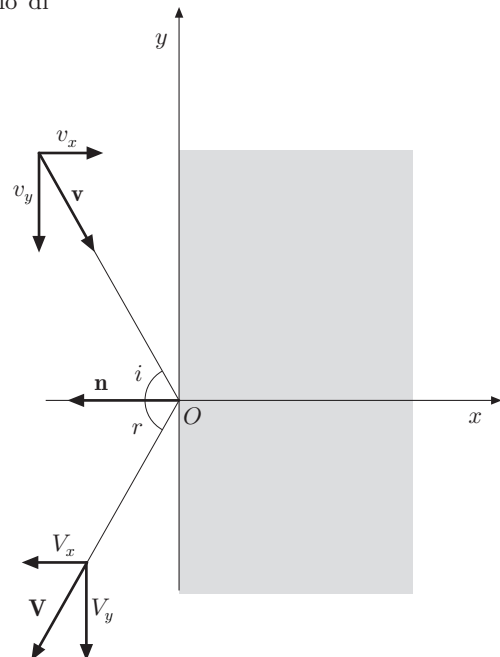


Fig. 12.15

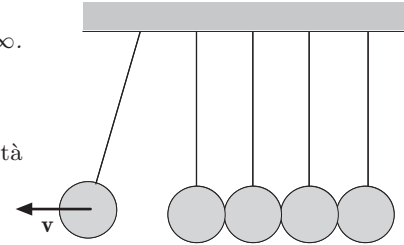


Fig. 12.13

||| 12. *Pressione prodotta dall'urto.*

La quantità di moto \mathbf{p}_1 ha componenti

$$m_1 v_x, \quad m_1 v_y.$$

Dopo l'urto, \mathbf{p}'_1 ha componenti

$$-m_1 v_x, \quad m_1 v_y,$$

La variazione di quantità di moto è dunque

$$\mathbf{p}'_1 - \mathbf{p}_1 = -2m_1 v_x \mathbf{i},$$

ortogonale alla parete e opposta al verso positivo stabilito sull'asse x .

Tale variazione va attribuita a una forza \mathbf{F} , variazione della quantità di moto, assorbita e restituita dalla parete nell'intervallo di tempo durante il quale si verifica l'urto; la reazione della particella contro la parete (pressione d'urto), è $-\mathbf{F}$. Se $\Delta t = t_2 - t_1$ è la durata dell'urto che, come s'è detto è molto breve, si ha

$$\int_{t_1}^{t_2} F dt = -2m_1 v_x,$$

e la forza media

$$\overline{F} = -\frac{2m_1 v_x}{\Delta t}.$$

||| 13. *Collisione elastica obliqua di una particella contro un'altra identica, in quiete, nel riferimento L .*

Essendo le masse uguali e indicando con v la velocità della particella incidente, si ha conservazione dell'energia cinetica,

$$\frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}(mV_1^2 + mV_2^2);$$

ossia

$$p^2 = p_1'^2 + p_2'^2,$$

e conservazione della quantità di moto,

$$\mathbf{p} = \mathbf{p}'_1 + \mathbf{p}'_2.$$

Da quest'ultima si ottiene

$$p^2 = p_1'^2 + p_2'^2 + 2\mathbf{p}'_1 \cdot \mathbf{p}'_2.$$

Perché questa equazione sia compatibile con la conservazione dell'energia, deve essere $\mathbf{p}'_1 \cdot \mathbf{p}'_2 = 0$. Nel riferimento L , dopo l'urto, le particelle si muovono in direzioni ortogonali.

||| 14. *Termalizzazione dei neutroni.*

Nei reattori nucleari i neutroni veloci emessi dalla disintegrazione dell'uranio 235, passano attraverso un mezzo moderatore in modo da essere rallentati. Infatti la sezione d'urto di cattura di tale elemento è elevata solo per i neutroni che hanno energia termica, dell'ordine di qualche unità della grandezza $k_B T$, dove k_B è la costante di Boltzmann e T la temperatura assoluta, cosicché è possibile provocare la fissione di altri atomi di uranio e mantenere controllata la reazione a catena.

L'urto che prendiamo in considerazione è perfettamente elastico, $Q = 0$. Per lo studio del problema conviene adottare il riferimento C . Indicando con m_1 e \mathbf{v}_1 massa e velocità del neutrone incidente e con m_2 la massa degli atomi del moderatore, $\mathbf{v}_2 = 0$, si ha

$$\mathbf{v}_{1C} = \mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_C, \quad \mathbf{v}_{2C} = -\mathbf{v}_C,$$

dove la velocità del centro di massa è

$$\mathbf{v}_C = \frac{m_1}{m_1 + m_2} \mathbf{v}_1.$$

Chiamando con $\alpha = m_2/m_1$ il rapporto tra la massa degli atomi del moderatore e la massa del neutrone, le relazioni precedenti diventano:

$$\mathbf{v}_C = \frac{1}{1+\alpha} \mathbf{v}_1, \quad \mathbf{v}_{1C} = \frac{\alpha}{1+\alpha} \mathbf{v}_1, \quad \mathbf{v}_{2C} = -\frac{1}{1+\alpha} \mathbf{v}_1.$$

Dal diagramma delle velocità dopo l'urto, nei riferimenti L e C , mostrato in figura 16, si ha

$$V_1^2 = V_{1C}^2 + v_C^2 + 2V_{1C}v_C \cos \Theta, \quad (45)$$

dove Θ è l'angolo di diffusione nel riferimento C . Poiché $p_{1C} = p'_{1C}$, equazione (36), è anche $v_{1C} = V_{1C}$. Pertanto la (45) diventa

$$V_1^2 = \left(\frac{\alpha}{1+\alpha} \right)^2 v_1^2 + \frac{1}{(1+\alpha)^2} v_1^2 + \frac{2\alpha}{(1+\alpha)^2} v_1^2 \cos \Theta.$$

Da questa relazione si trae

$$\frac{V_1^2}{v_1^2} = \frac{\alpha^2 + 2\alpha \cos \Theta + 1}{(1+\alpha)^2},$$

che è il rapporto T'/T tra l'energia cinetica finale ed iniziale del neutrone.

Si deduce che per $\Theta = 0$, assenza d'urto, ovviamente non c'è perdita di energia; per $\Theta = \pi$, urto centrale in cui il neutrone inverte la direzione della velocità, si verifica la massima perdita di energia. In quest'ultimo caso si ha

$$\frac{T'}{T} = \frac{\alpha^2 - 2\alpha + 1}{(1+\alpha)^2} = \left(\frac{\alpha - 1}{\alpha + 1} \right)^2.$$

Si verifica facilmente che la perdita relativa di energia risulta

$$\frac{T - T'}{T} = \frac{4\alpha}{(\alpha + 1)^2};$$

essa è tanto più elevata quanto più il rapporto α è vicino all'unità. Questo risultato suggerisce che il moderatore va scelto tra i materiali che contengono idrogeno in percentuale elevata. L'idrogeno puro non può essere usato perché, essendo gassoso, il numero di atomi per unità di volume è piuttosto piccolo, perciò va impiegata acqua, paraffina o altri materiali idrogenati.

15. Q in una collisione obliqua anelastica nel riferimento L .

Supponiamo che una particella di massa m_1 e velocità v_1 , incida obliquamente su una particella di massa m_2 in quiete, e che le masse, dopo la collisione, siano uguali. Si ha

$$Q = \left(\frac{p_1'^2}{2m_1} + \frac{p_2'^2}{2m_2} \right) - \frac{p_1^2}{2m_1}.$$

Poiché

$$\mathbf{p}_1 = \mathbf{p}_1' + \mathbf{p}_2', \quad \Rightarrow \quad \mathbf{p}_2' = \mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_1',$$

si ottiene:

$$p_2'^2 = (\mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_1')^2 = p_1^2 + p_1'^2 - 2p_1p_1' \cos \theta.$$

L'espressione di Q diventa

$$\begin{aligned} Q &= \frac{p_1'^2}{2m_1} - \frac{p_1^2}{2m_1} + \frac{1}{2m_2} (p_1^2 + p_1'^2 - 2p_1p_1' \cos \theta) \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2} \right) p_1'^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{m_2} - \frac{1}{m_1} \right) p_1^2 - \frac{p_1p_1' \cos \theta}{m_2}. \end{aligned}$$

In una reazione nucleare, le masse delle particelle emergenti possono essere diverse; Q risulta analogo.

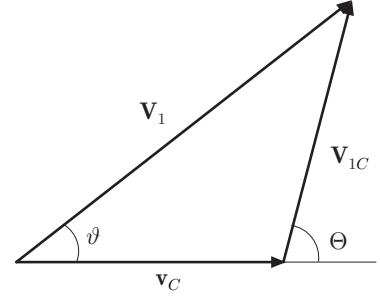


Fig. 12.16

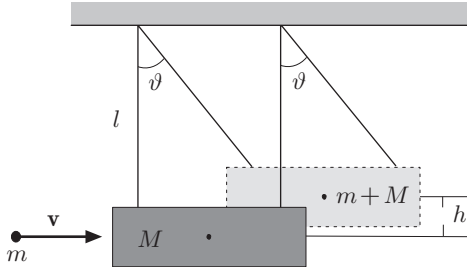


Fig. 12.17

16. Pendolo balistico.

Il pendolo balistico è mostrato in figura 17; esso consiste di un blocco di materiale opportuno, massa M , sospeso con fili di lunghezza l , in modo che si possa spostare solo nel piano verticale senza ruotare. Quando esso è in quiete, una pallottola lo colpisce rimanendovi conficcata; quindi acquista una velocità V che si ricava dalla conservazione della quantità di moto. L'urto è totalmente anelastico; detta m la massa della pallottola e v la sua velocità prima dell'impatto, si ottiene

$$mv = (M + m)V, \quad \Rightarrow \quad V = \frac{m}{M + m}v.$$

L'energia cinetica del blocco, subito dopo l'urto, è

$$T = \frac{1}{2}(M + m)V^2 = \frac{m}{M + m} \left(\frac{1}{2}mv^2 \right),$$

che è una frazione dell'energia cinetica iniziale della pallottola.

Se h è la quota raggiunta dal pendolo, la variazione di energia potenziale, uguale all'energia cinetica iniziale, risulta

$$\Delta U = (M + m)gh = \frac{m}{M + m} \left(\frac{1}{2}mv^2 \right). \quad (46)$$

Poiché

$$h = l(1 - \cos \theta) = 2l \sin^2 \frac{\theta}{2},$$

detto x lo spostamento orizzontale del blocco, per piccoli angoli di elongazione, si può porre

$$\sin \theta \approx \theta = \frac{x}{l},$$

quindi $h = x^2/2l$. Sostituendo nella (46):

$$gh = g \frac{x^2}{2l} = \frac{m}{(M + m)^2} \left(\frac{1}{2}mv^2 \right).$$

Si ottiene

$$v = \frac{M + m}{m} x \sqrt{\frac{g}{l}}.$$

L'energia dissipata è data dalla (41), con $e = 0$ e $v_{12} = v$.

17. Studio dell'esplosione di una bomba.

Il problema è analogo alla disintegrazione di un nucleo, alla dissociazione di una molecola biatomica e a tutti i processi in cui, come risultato finale, si ottengono due particelle a causa di liberazione di energia interna. Supponiamo che inizialmente la bomba sia in quiete e che i frammenti siano due. È indifferente studiare il problema nel riferimento L o nel riferimento C , perché in ogni caso la quantità di moto iniziale è nulla e tale si mantiene dopo l'esplosione; dunque dette \mathbf{p}_1 , \mathbf{p}_2 le quantità di moto dei frammenti, è

$$\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2 = 0, \quad p_1 = p_2.$$

I frammenti procedono in direzioni opposte. L'energia cinetica, dopo l'esplosione, è dovuta all'energia Q liberata:

$$T' = \frac{p_1^2}{2m_1} + \frac{p_2^2}{2m_2} = p_1^2 \left(\frac{1}{2m_1} + \frac{1}{2m_2} \right) = Q;$$

da cui

$$\frac{1}{2\mu} p_1^2 = Q, \quad p_1 = p_2 = \sqrt{2\mu Q}.$$

Le energie cinetiche dei frammenti sono rispettivamente

$$T'_1 = \frac{p_1^2}{2m_1} = \frac{\mu}{m_1} Q, \quad T'_2 = \frac{p_2^2}{2m_2} = \frac{\mu}{m_2} Q.$$

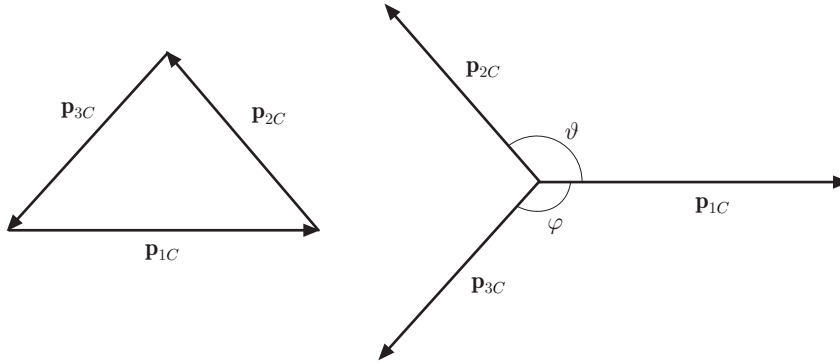


Fig. 12.18

Se la bomba prima dell'esplosione possiede quantità di moto, essendo Q indipendente dal riferimento, è opportuno adottare il riferimento C . Le conclusioni sono quelle ottenute.

Se i frammenti sono tre e la bomba inizialmente possiede una certa quantità di moto, conviene adottare il riferimento C , in cui la quantità di moto del sistema è nulla. Essendo

$$\mathbf{p}_{1C} + \mathbf{p}_{2C} + \mathbf{p}_{3C} = 0, \quad (47)$$

i vettori quantità di moto costituiscono i lati di un triangolo, pertanto risultano complanari. L'energia cinetica del sistema è

$$\frac{p_{1C}^2}{2m_1} + \frac{p_{2C}^2}{2m_2} + \frac{p_{3C}^2}{2m_3} = Q.$$

Proiettando la (47) nella direzione di una delle quantità di moto, figura 18, si ottengono due equazioni scalari:

$$p_{1C} + p_{2C} \cos \theta + p_{3C} \cos \varphi = 0$$

$$p_{2C} \sin \theta - p_{3C} \sin \varphi = 0.$$

Queste relazioni insieme all'equazione dell'energia cinetica non sono sufficienti per risolvere il problema, a meno che non siano noti due parametri; per esempio gli angoli θ e φ .

.....

13. Statica dei sistemi

1. Sistemi di punti materiali

Su ogni punto del sistema agiscono forze interne e forze esterne che, a loro volta, si possono distinguere in forze *attive* e reazioni vincolari.

Condizione necessaria e sufficiente per l'equilibrio del sistema è che ogni punto sia in equilibrio sotto l'azione di tutte le forze su di esso agenti, esterne ed interne, attive e reattive; ossia che *la risultante di tutte le forze agenti su ogni punto sia nulla*.

Segue che senza alterare l'equilibrio di un sistema, si può sostituire alle forze agenti su un punto, altre forze ad esso applicate la cui risultante sia nulla.

1.1. Sistemi rigidi

Un sistema di punti materiali si dice rigido quando ad esso è imposto il vincolo della rigidità, paragrafo 1-III; dunque le considerazioni che verranno fatte sono valide per i corpi rigidi.

L'esperienza permette di formulare i seguenti postulati fondamentali della statica dei sistemi rigidi:

a) *L'equilibrio di un sistema rigido non viene alterato se alle forze applicate in un punto del sistema si sostituisce la loro risultante applicata nello stesso punto, o viceversa si sostituisce ad una forza applicata in un punto altre forze aventi come risultante la forza assegnata.*

b) *L'equilibrio di un sistema rigido non viene alterato se si trasporta il punto di applicazione di una forza lungo la sua retta di azione.*

c) *L'equilibrio di un sistema rigido non viene alterato se alle forze agenti in un suo qualsiasi punto, viene aggiunto un sistema di forze di risultante nulla.* Per esempio, due forze opposte aventi la stessa retta di azione.

Si deduce che le operazioni descritte nei postulati enunciati, se necessario applicate più volte, permettono di passare da un sistema di forze S ad un altro S' , senza alterare l'equilibrio di un

corpo rigido. In tal caso le operazioni che permettono di passare da S a S' si dicono *operazioni invariantive* e i due sistemi di forze *equipollenti*. Poiché le operazioni invariantive non alterano il sistema di forze applicato, si trae che i sistemi di forze equipollenti hanno la stessa risultante e uguale momento risultante rispetto allo stesso polo. Ad esempio, per il postulato b), sono equipollenti due forze rappresentate dallo stesso vettore ed aventi la stessa retta di azione ma non lo stesso punto di applicazione.

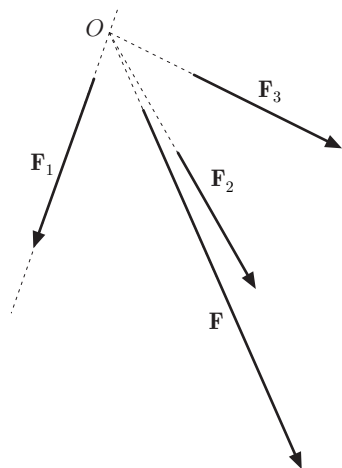


Fig. 13.1

1.2. Sistemi elementari di forze

FORZE CONCORRENTI

Se le rette d'azione delle forze applicate concorrono tutte in un punto O , è possibile trasportare le forze in tale punto e sommarle vettorialmente, figura 1. La risultante \mathbf{F} può essere applicata in O oppure, per il postulato b), in qualsiasi punto della retta d'azione di \mathbf{F} , passante per O . Pertanto *un sistema di forze concorrenti è equipollente ad una unica forza, applicata ad un qualunque punto della sua retta di azione*.

DUE FORZE PARALLELE A RISULTANTE NON NULLA

Questo caso può rientrare nel precedente se si suppone che O sia posto all'infinito; ne segue che esiste sempre una risultante applicata ad un punto qualunque della sua retta di azione.

Per determinare tale retta, consideriamo il caso di due forze parallele \mathbf{F}_1 , \mathbf{F}_2 , applicate rispettivamente in P_1 e P_2 , figura 2.

Si aggiungano in tali punti due forze opposte $-\mathbf{F}$ e \mathbf{F} , dirette come la congiungente P_1P_2 . Sommando \mathbf{F}_1 con $-\mathbf{F}$ e \mathbf{F}_2 con \mathbf{F} , si ottengono due forze concorrenti in O , la cui risultante ha una retta d'azione che interseca il segmento P_1P_2 in Q . Il punto Q è tale che, se \mathbf{F}_1 e \mathbf{F}_2 hanno lo stesso verso, divide internamente il segmento P_1P_2 in parti inversamente proporzionali a \mathbf{F}_1 e \mathbf{F}_2 . Infatti consideriamo le coppie di triangoli simili P_1AB , OP_1Q e P_2CD , OQP_2 ; si ha

$$\frac{P_1Q}{AB} = \frac{OQ}{F_1}, \quad \frac{P_2Q}{CD} = \frac{OQ}{F_2}, \quad \Rightarrow \quad \frac{P_1Q}{P_2Q} = \frac{F_2}{F_1}.$$

L'operazione può essere reiterata se le forze sono più di due. Se le forze hanno verso opposto e hanno risultante diversa da zero, il procedimento è analogo. Il problema generale andrà considerato nel seguito.

DUE FORZE A RISULTANTE NULLA

Un sistema di forze a risultante nulla \mathbf{F} e $-\mathbf{F}$, applicate in due punti distinti P e Q costituisce una *coppia*. Il piano cui appartengono le forze si chiama piano della coppia e la distanza tra le due

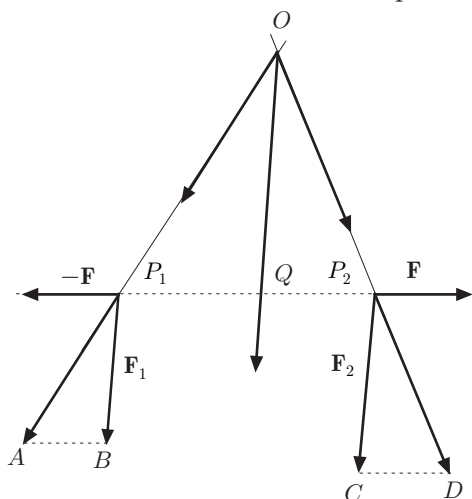


Fig. 13.2

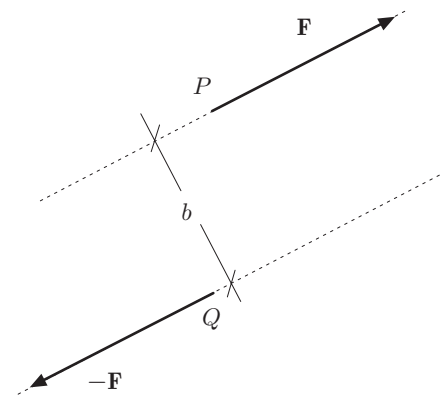


Fig. 13.3

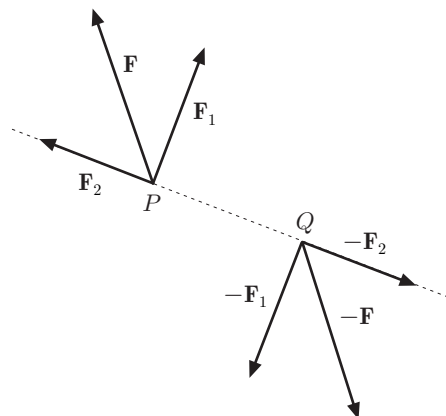


Fig. 13.4

rette d'azione *braccio* b della coppia, figura 3. Una coppia può essere trasformata in un'altra, in cui le forze che la costituiscono risultano perpendicolari alla congiungente i loro punti di applicazione. Infatti, figura 4, si consideri la coppia costituita dalle forze \mathbf{F} e $-\mathbf{F}$, applicate in P e Q ; si scomponga \mathbf{F} nelle due forze \mathbf{F}_1 e \mathbf{F}_2 , nelle direzioni ortogonale e parallela al segmento PQ . Nello stesso modo si scomponga $-\mathbf{F}$ nelle forze $-\mathbf{F}_1$ e $-\mathbf{F}_2$. Le forze \mathbf{F}_1 e $-\mathbf{F}_1$ costituiscono la nuova coppia; infatti \mathbf{F}_2 e $-\mathbf{F}_2$ hanno risultante nulla perché si trovano sulla stessa retta di azione.

2. Momenti

Il momento di un vettore rispetto a un polo O è stato definito nel paragrafo 2-IX. Va ricordato che il momento gode delle proprietà del prodotto vettoriale e varia al variare del polo.

Definiamo momento \mathbf{M} di una forza \mathbf{F} , applicata in un punto P , rispetto ad un polo O , la grandezza

$$\mathbf{M} = \mathbf{r} \times \mathbf{F},$$

dove $\mathbf{r} = (P - O)$. Se O' è un nuovo polo, figura 5, essendo

$$\mathbf{r} = (O' - O) + \mathbf{r}', \quad \Rightarrow \quad \mathbf{r}' = \mathbf{r} + (O - O'),$$

il momento della forza rispetto ad O' risulta:

$$\mathbf{M}' = \mathbf{r}' \times \mathbf{F} = [\mathbf{r} + (O - O')] \times \mathbf{F} = \mathbf{M} + (O - O') \times \mathbf{F}. \quad (1)$$

In particolare, se O' appartiene alla retta passante per O e parallela a \mathbf{F} , è ovviamente $\mathbf{M} = \mathbf{M}'$.

2.1. Momento assiale

Sia una forza \mathbf{F} applicata in un punto del corpo rigido e una retta orientata, cioè un asse, definito in direzione dal versore $\hat{\mathbf{u}}$;

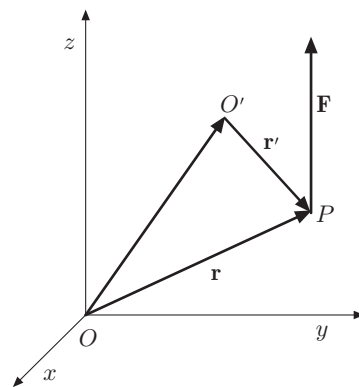


Fig. 13.5

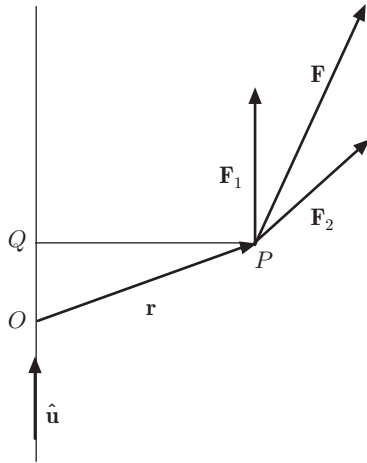


Fig. 13.6

assegnato un polo O sull'asse, definiamo momento assiale della forza la componente secondo tale asse del momento della forza rispetto ad O . Indicando questa quantità scalare con M_a , si ha

$$M_a = \mathbf{M} \cdot \hat{\mathbf{u}} = \mathbf{r} \times \mathbf{F} \cdot \hat{\mathbf{u}}. \quad (2)$$

Il significato fisico del momento assiale appare evidente dalla figura 6. Scomponiamo \mathbf{F} in un componente \mathbf{F}_1 e in un componente \mathbf{F}_2 , rispettivamente parallelo e ortogonale all'asse; analogamente scomponiamo \mathbf{r} nei componenti $\mathbf{r}_1 = (Q - O)$ e $\mathbf{r}_2 = (P - Q)$. Il momento assiale si scrive:

$$\begin{aligned} M_a &= [(\mathbf{r}_1 + \mathbf{r}_2) \times (\mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2)] \cdot \hat{\mathbf{u}} \\ &= \mathbf{r}_1 \times \mathbf{F}_1 \cdot \hat{\mathbf{u}} + \mathbf{r}_1 \times \mathbf{F}_2 \cdot \hat{\mathbf{u}} + \mathbf{r}_2 \times \mathbf{F}_1 \cdot \hat{\mathbf{u}} + \mathbf{r}_2 \times \mathbf{F}_2 \cdot \hat{\mathbf{u}}. \end{aligned}$$

Si osservi che tutti i prodotti tripli, eccetto l'ultimo sono nulli; pertanto

$$M_a = \mathbf{r}_2 \times \mathbf{F}_2 \cdot \hat{\mathbf{u}} = \mathbf{M} \cdot \hat{\mathbf{u}}.$$

Soltanto il componente della forza ortogonale all'asse, è attivo ai fini della rotazione del corpo rigido attorno all'asse.

Se assumiamo sull'asse un polo O' diverso, essendo $\mathbf{r}' = \mathbf{r} + (O - O')$, il momento assiale diventa

$$M'_a = \mathbf{M}' \cdot \hat{\mathbf{u}} = \mathbf{r} \times \mathbf{F} \cdot \hat{\mathbf{u}} + (O - O') \times \mathbf{F} \cdot \hat{\mathbf{u}}.$$

Ma il secondo termine è nullo perché $(O - O')$ e $\hat{\mathbf{u}}$ sono paralleli; se ne trae che il momento assiale di una forza è indipendente dal polo scelto sull'asse. Si riconosce altresì che questa conclusione è vera qualunque sia il punto di applicazione della forza sulla sua retta d'azione.

In particolare, il momento assiale è nullo quando l'asse e la retta d'azione della forza sono paralleli. Se la retta di azione della forza giace in un piano ortogonale all'asse, risulta

$$M_a = \pm bF,$$

essendo b il braccio, ossia la distanza tra la retta d'azione di \mathbf{F} ed O , punto di intersezione dell'asse col piano; il segno dipende dal verso positivo fissato per il momento; figura 7.

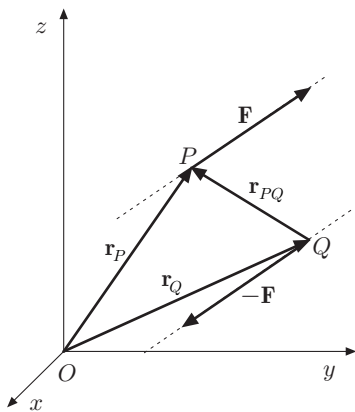


Fig. 13.8

2.2. Momento di una coppia

Il momento risultante di due forze \mathbf{F} e $-\mathbf{F}$, applicate in P e Q , costituenti la coppia, rispetto a un polo O , figura 8, è dato da

$$\mathbf{M} = \mathbf{r}_P \times \mathbf{F} + \mathbf{r}_Q \times (-\mathbf{F}) = (\mathbf{r}_P - \mathbf{r}_Q) \times \mathbf{F}.$$

Ma $\mathbf{r}_P - \mathbf{r}_Q = \mathbf{r}_{PQ}$ è il vettore che congiunge i punti di applicazione delle forze, dunque il momento risultante, momento della coppia, diventa

$$\mathbf{M} = \mathbf{r}_{PQ} \times \mathbf{F}, \quad (3)$$

ed ha modulo:

$$M = r_{PQ} F \sin \theta = Fb,$$

dove b è il braccio della coppia, cioè la distanza tra le rette d'azione delle forze. Dalla (3) si deduce che il momento di una coppia è *indipendente dal polo*.

Si deduce inoltre che due coppie, giacenti nello stesso piano o su piani paralleli, sono equivalenti se

$$F_1 b_1 = F_2 b_2.$$

Una coppia di braccio b_1 , costituita dalle forze $\mathbf{F}_1, -\mathbf{F}_1$, è equivalente ad una qualsiasi altra coppia, giacente nello stesso piano, se l'una può essere trasformata nell'altra per mezzo di operazioni invariantive. Consideriamo infatti due rette parallele arbitrarie, distanti b_2 , che intersecano rispettivamente le rette d'azione delle forze assegnate nei punti A e B , D e C , figura 9. Si trasporti la forza \mathbf{F}_1 in A e la forza $-\mathbf{F}_1$ in C ; quindi si scomponga \mathbf{F}_1 nelle forze \mathbf{F}_2 , diretta come AD , e \mathbf{R} diretta come AC ; analogamente si scomponga $-\mathbf{F}_1$ nelle forze $-\mathbf{F}_2$, diretta come CB , e $-\mathbf{R}$ diretta come AC . Il modulo del momento di \mathbf{F}_1 rispetto al polo C è $F_1 b_1$; ma $\mathbf{F}_1 = \mathbf{F}_2 + \mathbf{R}$, dunque il modulo del momento, rispetto allo stesso polo, di queste due forze componenti è $F_2 b_2$, essendo nullo il momento di \mathbf{R} , perché C appartiene alla sua retta d'azione. Segue che le coppie costituite dalle forze $\mathbf{F}_1, -\mathbf{F}_1$ e dalle forze $\mathbf{F}_2, -\mathbf{F}_2$ sono equivalenti.

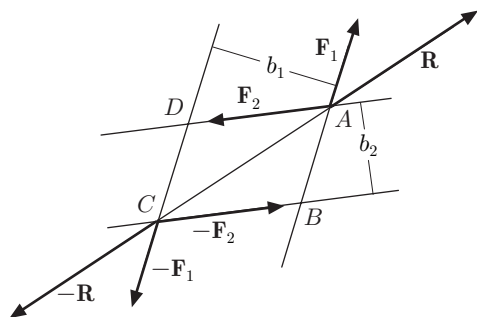


Fig. 13.9

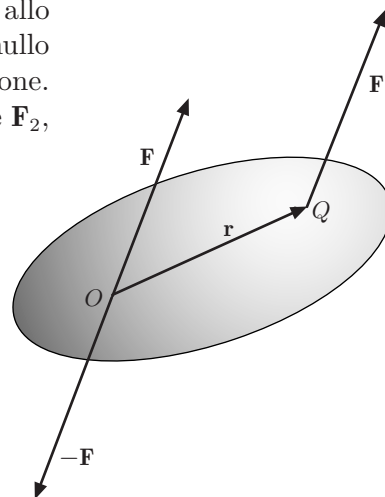


Fig. 13.10

|| 2.3. Sistema forza-coppia

L'aggiunta di una coppia opportuna, permette di trasportare una forza \mathbf{F} , applicata in un punto Q di un corpo rigido, ad un altro punto O arbitrario dello stesso corpo. Infatti si voglia trasportare la forza \mathbf{F} da Q ad O , figura 10; in quest'ultimo punto

possiamo applicare le forze opposte \mathbf{F} e $-\mathbf{F}$, sistema nullo, ottenendo una forza applicata in O e la coppia costituita dalle forze \mathbf{F} e $-\mathbf{F}$, rispettivamente applicate in Q ed O . Pertanto la forza \mathbf{F} può essere trasportata in punto di applicazione diverso, purché insieme ad essa si consideri una coppia di momento uguale al momento della forza rispetto ad O , ossia:

$$\mathbf{M} = \mathbf{r} \times \mathbf{F},$$

dove \mathbf{r} è il vettore che individua la posizione di Q rispetto ad O . Si tenga presente che il momento non è un vettore applicato. Il sistema così ottenuto si dice sistema *forza-coppia*.

Viceversa un tale sistema si può sempre ridurre ad una sola forza applicata in Q spostando, nel piano ortogonale al momento della coppia, la forza finché il suo momento rispetto ad O non sia uguale a \mathbf{M} .

2.4. Momento di un sistema di forze

Assegnato un sistema di forze $\mathbf{F}_1, \mathbf{F}_2, \dots$, applicate nei punti P_1, P_2, \dots di un corpo rigido e scelto un polo O , si definisce momento del sistema di forze la somma vettoriale dei momenti delle singole forze rispetto ad O :

$$\mathbf{M} = \mathbf{M}_1 + \mathbf{M}_2 + \dots = \sum_i \mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_i.$$

Analogamente si definisce momento assiale del sistema di forze rispetto ad un asse a , di versore $\hat{\mathbf{u}}$, la grandezza

$$M_a = \sum_i \mathbf{M}_i \cdot \hat{\mathbf{u}} = \mathbf{M} \cdot \hat{\mathbf{u}}.$$

Se, in particolare, le forze sono concorrenti nello stesso punto, detta \mathbf{r} la posizione di tale punto rispetto al polo, si ha

$$\mathbf{M} = \mathbf{r} \times \mathbf{F}_1 + \mathbf{r} \times \mathbf{F}_2 + \dots = \mathbf{r} \times (\mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 + \dots) = \mathbf{r} \times \mathbf{F}.$$

Il momento risultante è uguale al momento della risultante come stabilito al paragrafo 2-IX, (*Teorema di Varignon*).

Risultato analogo si ottiene per il momento assiale:

$$M_a = \mathbf{r} \times \mathbf{F} \cdot \hat{\mathbf{u}}.$$

Supponiamo ora di assumere un polo O' ; in conformità alla (1), il momento risultante del sistema di forze è:

$$\mathbf{M}' = \sum_i \mathbf{M}_i + \sum_i (O - O') \times \mathbf{F}_i = \mathbf{M} + (O - O') \times \mathbf{F}, \quad (4)$$

che stabilisce la relazione con cui varia il momento del sistema di forze al variare del polo. Dalla (4) si deduce che $\mathbf{M}' = \mathbf{M}$, se la risultante \mathbf{F} delle forze è nulla oppure, nel caso che sia diversa da zero, se $(O - O')$ ed \mathbf{F} sono paralleli.

Moltiplicando scalarmente per \mathbf{F} ambo i membri della (4), si ottiene:

$$\mathbf{M}' \cdot \mathbf{F} = \mathbf{M} \cdot \mathbf{F} = \text{cost.} \quad (5)$$

Questa relazione si chiama *invariante scalare o trinomio invariante*. Esso costituisce un elemento caratteristico del sistema di forze ed esprime che la componente del momento risultante \mathbf{M} secondo \mathbf{F} , e viceversa, è sempre costante e indipendente dal polo. Va notato che nella (4) compare la risultante delle forze, che verrà determinata con metodi descritti nel prossimo paragrafo.

|| 2.5. Riduzione di un sistema di forze

Elementi caratteristici di un sistema di forze sono la risultante e il momento risultante. Essi vanno determinati mediante operazioni invariantive che permettono, in particolare, di verificare se due sistemi di forze sono equipollenti, ossia se hanno la stessa risultante e lo stesso momento risultante rispetto ad un polo prescelto.

Vogliamo ora stabilire la massima riduzione di un sistema di forze assegnato. Consideriamo per prima il caso in cui l'invariante scalare (5) sia nullo; questa condizione comporta:

- a) Risultante e momento risultante sono ortogonali
- b) $\mathbf{F} = 0$, $\mathbf{M} \neq 0$; per la (4) si ha $\mathbf{M}' = \mathbf{M}$ qualunque sia il polo. Se si considera una coppia di braccio b , tale che $M = bF$, il sistema di forze si riduce alla coppia costituita dalle forze \mathbf{F} , $-\mathbf{F}$.
- c) $\mathbf{M} = 0$; il sistema di forze si riduce alla sola risultante.
- d) $\mathbf{F} = 0$, $\mathbf{M} = 0$; le forze costituiscono un sistema nullo.

|| 2.6. Forze concorrenti e forze complanari

In tali sistemi di forze l'invariante scalare è nullo.

FORZE CONCORRENTI IN UN PUNTO

La massima riduzione consiste nella risultante applicata al punto o in qualsiasi punto della sua retta d'azione.

FORZE COMPLANARI

Fissato un punto O arbitrario nel piano delle forze, ciascuna forza può essere trasportata in O aggiungendo la rispettiva coppia. Poiché il momento di ogni forza, rispetto ad O , è ortogonale al piano, si otterrà una risultante \mathbf{F} , applicata in O e un momento risultante \mathbf{M} ad essa ortogonale, figura 11.

Volendo ridurre il sistema ottenuto alla sola risultante, occorre ricercare il punto Q di applicazione della risultante, rispetto al quale il momento risultante del sistema di forze è nullo. Ponendo nella (4) $\mathbf{M}' = 0$, si ha

$$\mathbf{M} + (O - Q) \times \mathbf{F} = 0, \quad \Rightarrow \quad (Q - O) \times \mathbf{F} = \mathbf{M}; \quad (6)$$

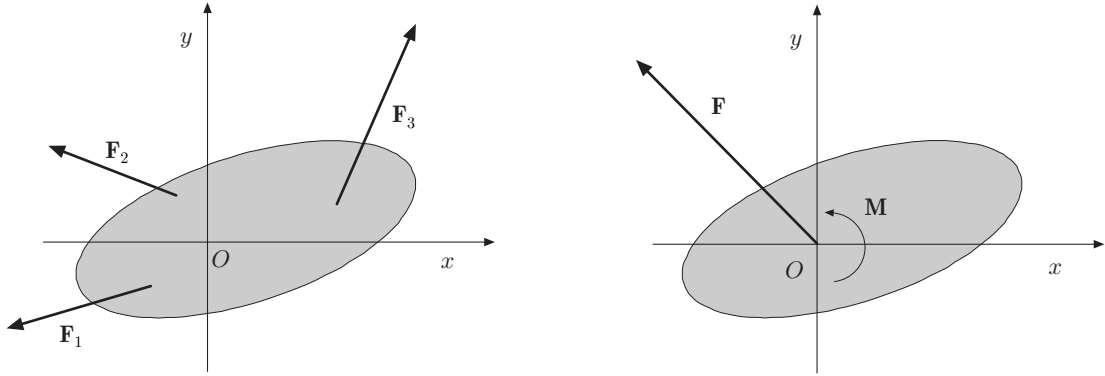


Fig. 13.11

il momento della risultante rispetto ad O deve essere uguale al momento risultante rispetto allo stesso polo. Fissato un riferimento cartesiano nel piano delle forze con origine in O , il momento risultante è

$$\mathbf{M} = \sum_i \mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_i = \sum_i (x_i F_{iy} - y_i F_{ix}) \mathbf{k},$$

che ha come unica componente

$$M_z = \sum_i (x_i F_{iy} - y_i F_{ix}).$$

D'altra parte, dette x_Q, y_Q le coordinate di Q , il momento della risultante è dato da

$$(Q - O) \times \mathbf{F} = (x_Q F_y - y_Q F_x) \mathbf{k},$$

pertanto:

$$x_Q F_y - y_Q F_x = \sum_i (x_i F_{iy} - y_i F_{ix}) = M_z.$$

L'espressione

$$x_Q F_y - y_Q F_x = M_z,$$

rappresenta l'equazione della retta d'azione di \mathbf{F} . Per la definizione di prodotto vettoriale, la distanza d di tale retta da O è:

$$d = \frac{M_z}{|\mathbf{F}|}.$$

Più in generale, la ricerca del vettore $\mathbf{r}_Q = (Q - O)$ che individua le coordinate x_Q, y_Q del punto di applicazione della risultante, è analoga a quella esposta per determinare l'asse istantaneo di rotazione nei moti rototraslatori, definito dall'equazione vettoriale (25) del capitolo III. Ricordando la (4), che stabilisce come varia il momento al variare del polo, si può scrivere

$$\mathbf{M}' = \mathbf{M} + \mathbf{F} \times (O' - O).$$

Tenuto conto che, nel caso in esame, \mathbf{F} ed \mathbf{M} sono ortogonali, esisterà un particolare punto $Q \equiv O'$ per il quale è soddisfatta la relazione:

$$\mathbf{M} = -\mathbf{F} \times (Q - O), \quad (7)$$

che rende nullo \mathbf{M}' . Per determinare il punto Q , si osservi che il prodotto vettoriale $\mathbf{F} \times \mathbf{M}$ rappresenta il vettore di modulo FM , ruotato di 90° rispetto ad \mathbf{M} ; quindi il doppio prodotto $\mathbf{F} \times (\mathbf{F} \times \mathbf{M})$ è un vettore opposto ad \mathbf{M} , uguale a $-F^2\mathbf{M}$. Pertanto:

$$\mathbf{M} = -\frac{1}{F^2}\mathbf{F} \times (\mathbf{F} \times \mathbf{M}).$$

Confrontando con la (7), si ha

$$-\mathbf{F} \times (Q - O) = -\frac{1}{F^2}\mathbf{F} \times (\mathbf{F} \times \mathbf{M}),$$

dalla quale si trae

$$(Q - O) \equiv \mathbf{r}_Q = \frac{\mathbf{F} \times \mathbf{M}}{F^2}. \quad (8)$$

L'equazione ottenuta è analoga alla (25)-III, qualora si scriva \mathbf{F} al posto di $\boldsymbol{\omega}$ e \mathbf{M} al posto di \mathbf{v}_T .

2.7. Forze parallele

Anche in questo caso l'invariante scalare è nullo. Supponiamo che le rette d'azione delle forze siano parallele all'asse z del riferimento di figura 12, ma non tutte abbiano lo stesso verso. La risultante è parallela all'asse z e poiché il momento delle singole forze è ortogonale a ciascuna di esse, il momento risultante è rappresentato da un vettore parallelo al piano $x-y$. Il sistema forza-coppia, che si ottiene col procedimento descritto, consta dunque di una risultante \mathbf{F} , applicata nell'origine O del riferimento, o in qualsiasi altro punto dove le forze sono state trasportate, e di un momento risultante \mathbf{M} , somma dei momenti associati alle forze, mutuamente ortogonali. Esso può essere ridotto ad una singola forza oppure, se la risultante $\mathbf{F} = 0$, a una coppia di momento \mathbf{M} .

La riduzione a una singola forza, come per le forze complanari, va fatta ricercando, nel piano $x-y$, il punto Q rispetto al quale il momento risultante uguaglia il momento della risultante, equazione (6).

Il momento risultante rispetto ad O è dato da

$$\mathbf{M} = \sum_i \mathbf{r}_i \times F_i \mathbf{k} = \sum_i (x_i \mathbf{i} + y_i \mathbf{j} + z_i \mathbf{k}) \times F_i \mathbf{k} = \sum_i (-x_i F_i \mathbf{j} + y_i F_i \mathbf{i}). \quad (9)$$

D'altra parte, dette x_Q, y_Q le coordinate di Q , si ha

$$(x_Q \mathbf{i} + y_Q \mathbf{j}) \times F \mathbf{k} = -x_Q F \mathbf{j} + y_Q F \mathbf{i}. \quad (10)$$

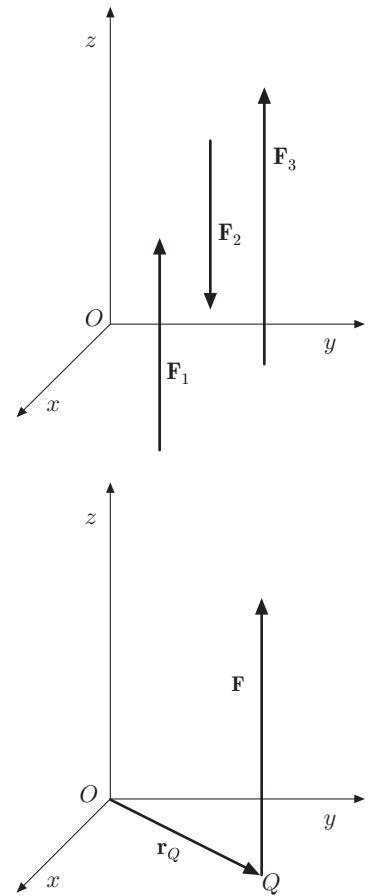


Fig. 13.12

Uguagliando nelle (9) e (10), le rispettive componenti, si ottiene

$$x_Q = \frac{\sum_i x_i F_i}{F}, \quad y_Q = \frac{\sum_i y_i F_i}{F}. \quad (11)$$

Nello stesso modo si procede se le forze sono parallele all'asse x oppure all'asse y . Si noti che le F_i sono le componenti delle forze, pertanto F rappresenta la loro somma algebrica. Ovviamente, le (11) possono essere ricavate mediante la (8).

Le (11) danno le coordinate dell'intersezione della retta d'azione della risultante col piano $x-y$, dunque il suo punto d'applicazione resta indeterminato. Tuttavia uguagliando il momento della risultante col momento risultante, si ha

$$\mathbf{r}_Q \times F\mathbf{k} = \sum_i \mathbf{r}_i \times F_i \mathbf{k}. \quad (12)$$

Questa relazione si può scrivere:

$$\mathbf{r}_Q F \times \mathbf{k} = \sum_i \mathbf{r}_i F_i \times \mathbf{k},$$

da cui:

$$\mathbf{r}_Q F = \sum_i \mathbf{r}_i F_i.$$

Pertanto si ottiene

$$\mathbf{r}_Q = \frac{\sum_i \mathbf{r}_i F_i}{F}. \quad (13)$$

La (13) definisce univocamente la posizione del punto Q , le cui coordinate risultano:

$$x_Q = \frac{\sum_i x_i F_i}{F}, \quad y_Q = \frac{\sum_i y_i F_i}{F}, \quad z_Q = \frac{\sum_i z_i F_i}{F}. \quad (14)$$

Questo risultato è valido qualunque sia l'orientazione forze parallele. Infatti, detto $\hat{\mathbf{u}}$ il versore comune delle forze, risulta $F\hat{\mathbf{u}} = \sum_i F_i \hat{\mathbf{u}}$. Sostituendo nella (12), si ottiene lo stesso risultato. Il punto Q definito dalle (14) si chiama *centro delle forze parallele*.

|| 2.8. Riduzione di un sistema di forze generico

Consideriamo un sistema di forze $\mathbf{F}_1, \mathbf{F}_2, \dots$ applicate a un corpo rigido, nei punti P_1, P_2, \dots , la cui posizione rispetto ad un punto O , origine di una terna cartesiana ortogonale, è definita dai vettori $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \dots$.

La forza \mathbf{F}_i può essere trasportata in O aggiungendo la coppia di momento $\mathbf{M}_i = \mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_i$. Ripetendo il procedimento per ogni forza, otterremo un sistema consistente nelle forze concorrenti in O e nelle coppie di momenti $\mathbf{M}_1, \mathbf{M}_2, \dots$, figura 13. Ne segue che il sistema di forze è equivalente alla risultante \mathbf{F} ed al momento risultante $\mathbf{M} = \mathbf{M}_1 + \mathbf{M}_2 + \dots$. Pertanto un sistema di forze

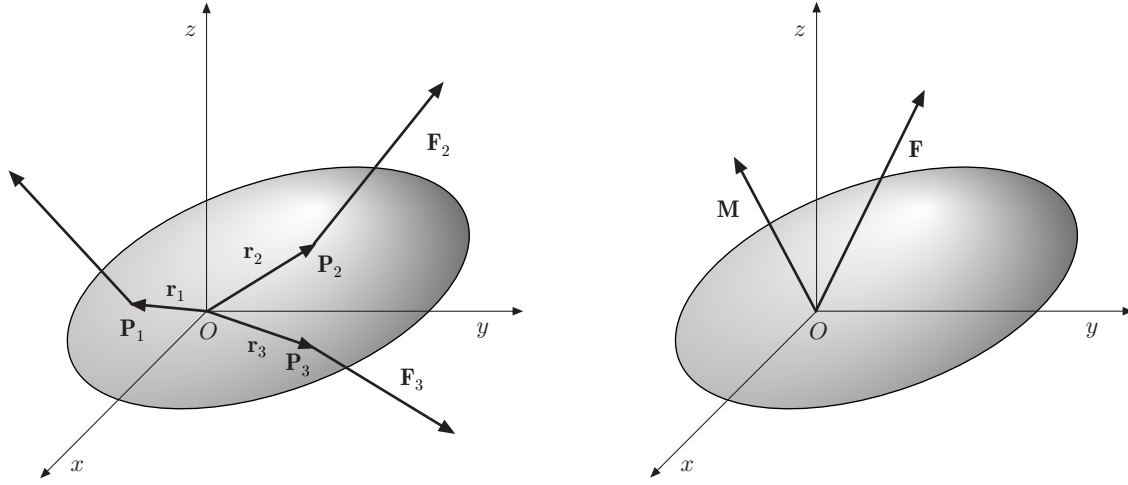


Fig. 13.13

comunque complesso, può essere ridotto al sistema forza-coppia agente nel punto O prefissato.

Il sistema forza-coppia, così ottenuto, è espresso da:

$$\mathbf{F} = \sum_i \mathbf{F}_i, \quad \mathbf{M} = \sum_i \mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_i. \quad (15)$$

La prima dà luogo alle relazioni scalari

$$F_x = \sum_i F_{ix}, \quad F_y = \sum_i F_{iy}, \quad F_z = \sum_i F_{iz}.$$

Dalla seconda, essendo

$$\mathbf{r}_i = x_i \mathbf{i} + y_i \mathbf{j} + z_i \mathbf{k}, \quad \mathbf{F}_i = F_{ix} \mathbf{i} + F_{iy} \mathbf{j} + F_{iz} \mathbf{k},$$

si ha:

$$\begin{aligned} M_x &= \sum_i (y_i F_{iz} - z_i F_{iy}) \\ M_y &= \sum_i (z_i F_{ix} - x_i F_{iz}) \\ M_z &= \sum_i (x_i F_{iy} - y_i F_{ix}). \end{aligned}$$

Va notato che, mentre il momento di ciascuna coppia è ortogonale alla corrispondente forza, la risultante \mathbf{F} e il momento risultante \mathbf{M} , in genere, non sono ortogonali. L'invariante scalare è diverso da zero; il sistema di forze non può essere ridotto alla sola risultante. Il momento \mathbf{M} può essere scomposto in un componente \mathbf{M}_1 , parallelo a \mathbf{F} e in un componente \mathbf{M}_2 ortogonale, figura 14. Il sistema costituito da \mathbf{F} e \mathbf{M}_2 , come si è visto in precedenza, può essere ridotto alla risultante applicata in un punto Q opportuno. Ne segue che la massima riduzione del sistema di forze consiste nella risultante \mathbf{F} e nella coppia di momento \mathbf{M}_1 ad essa parallela. Dunque la risultante imprime al corpo rigido una traslazione

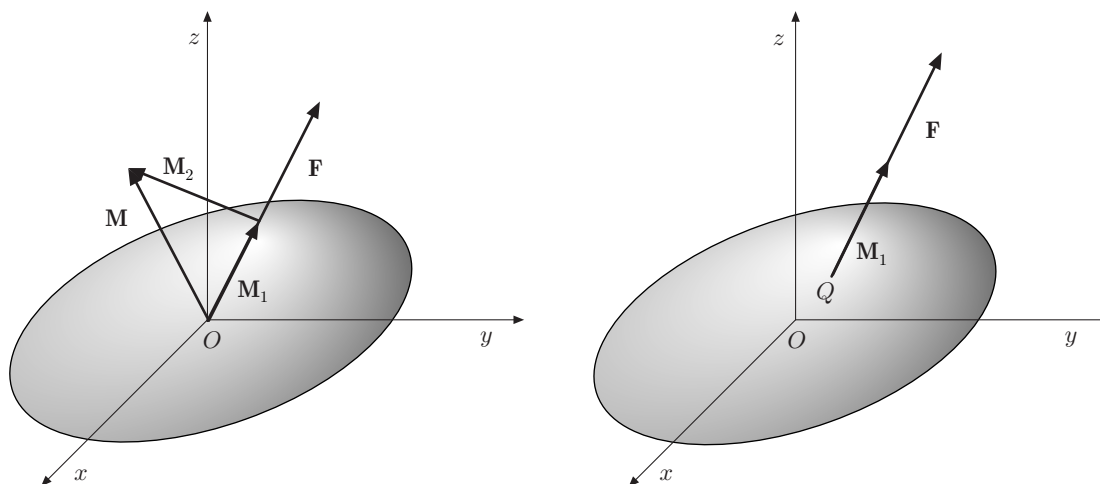


Fig. 13.14

lungo la sua retta d'azione ed il momento una rotazione attorno ad essa. Questa retta d'azione si chiama *asse centrale del sistema*.

Il modulo di \mathbf{M}_1 si ottiene immediatamente dalla definizione di prodotto scalare:

$$M_1 = \frac{\mathbf{F} \cdot \mathbf{M}}{F}.$$

Esso, come indica l'invariante scalare, è indipendente dalla scelta del polo.

Esempio

1. Una sbarra AB , appoggiata su un piano orizzontale, è sollecitata da quattro forze ad essa ortogonali e tra loro parallele, come mostrato in figura 15. Assunto un riferimento con origine in A , asse x orientato lungo la sbarra ed asse y ortogonale, sono assegnate le componenti delle forze lungo y , $F_1 = 35 \text{ N}$, $F_2 = -155 \text{ N}$, $F_3 = 20 \text{ N}$, $F_4 = -80 \text{ N}$, e i rispettivi punti di applicazione: $x_1 = 0$, $x_2 = 0,4 \text{ m}$, $x_3 = 0,7 \text{ m}$, $x_4 = 1,2 \text{ m}$. Ridurre le forze al sistema forza-coppia in A .

La componente della risultante lungo y è negativa e vale $F = -180 \text{ N}$. Il momento risultante rispetto ad A , ortogonale al piano delle forze, è dato da

$$\begin{aligned} \mathbf{M}_A &= \sum_i \mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_i \\ &= 0,4 \mathbf{i} \times (-F_2 \mathbf{j}) + 0,7 \mathbf{i} \times F_3 \mathbf{j} + 1,2 \mathbf{i} \times (-F_4 \mathbf{j}) \\ &= -0,4 \cdot 155 \mathbf{k} + 0,7 \cdot 20 \mathbf{k} - 1,2 \cdot 80 \mathbf{k} = -144 \mathbf{k} \text{ N} \cdot \text{m} \end{aligned}$$

In modo analogo si procede nella riduzione ad un sistema forza-coppia in un punto qualunque della sbarra.

Volendo ridurre il sistema alla sola risultante, occorre trovare il suo punto di applicazione; detta x_C la coordinata di tale punto, dalle (14) si ottiene

$$x_C = \frac{\sum_i x_i F_i}{F} = 0,8 \text{ m}.$$

Si rammenti che le F_i rappresentano le componenti delle forze ed F la loro somma algebrica.

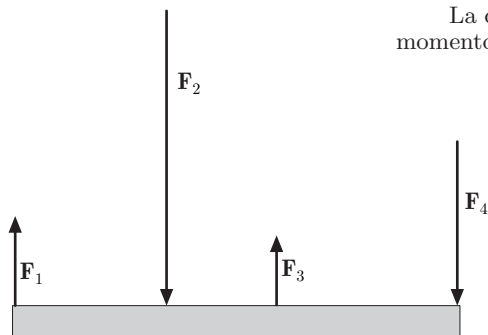


Fig. 13.15

3. Baricentro

Consideriamo un sistema rigido costituito da punti materiali, soggetti all'azione della gravità. Detta M la massa totale del sistema, alle forze parallele m_1g, m_2g, \dots , possiamo sostituire la forza

$$Mg = m_1g + m_2g + \dots,$$

applicata nel centro delle forze, che chiamiamo baricentro. Le (14) diventano:

$$x_C = \frac{\sum_i x_i m_i g}{Mg}, \quad y_C = \frac{\sum_i y_i m_i g}{Mg}, \quad z_C = \frac{\sum_i z_i m_i g}{Mg}, \quad (16)$$

Supponendo che il sistema non sia molto esteso, cioè sia tale che l'accelerazione di gravità possa ritenersi costante in tutto il sistema, le (16) esprimono anche le coordinate del centro di massa;

$$x_C = \frac{\sum_i x_i m_i}{M}, \quad y_C = \frac{\sum_i y_i m_i}{M}, \quad z_C = \frac{\sum_i z_i m_i}{M}.$$

Le (16) si estendono a un sistema continuo, corpo rigido; infatti suddividendo il corpo in elementi di massa dm e indicando con \mathbf{r} il vettore che individua l'elemento rispetto all'origine del riferimento, possiamo scrivere

$$\mathbf{r}_C = \frac{\int \mathbf{r} dm}{\int dm}.$$

Se il corpo è omogeneo, densità $\rho = \text{costante}$, essendo $dm = \rho dV = \rho dx dy dz$ e $M = \rho \int_V dV$ la massa del corpo, si ha

$$x_C = \frac{\int_V x dx dy dz}{V}, \quad y_C = \frac{\int_V y dx dy dz}{V}, \quad z_C = \frac{\int_V z dx dy dz}{V}. \quad (17)$$

La ricerca del baricentro diventa piuttosto semplice, se si tiene conto di alcune proprietà elementari dei corpi.

a) Il baricentro o centro di massa di due corpi assimilabili a punti materiali, si trova sul segmento che li congiunge e divide questo in parti inversamente proporzionali alle masse dei punti materiali. Assunto come origine il baricentro e indicando con $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2$ la posizione dei due punti, si ha

$$m_1 \mathbf{r}_1 + m_2 \mathbf{r}_2 = 0, \quad \Rightarrow \quad \frac{r_1}{r_2} = \frac{m_2}{m_1}.$$

b) Se il corpo si estende su un piano o lungo una retta, il baricentro appartiene al piano o alla retta; ciò discende immediatamente dalle (16).

c) Se il corpo ammette un piano di simmetria materiale, il baricentro si trova su tale piano. Infatti, assunto il piano di simmetria

come piano $x-y$ e cambiando nella terza delle (16) z in $-z$, si ottiene $z_C = 0$; cosicch  il baricentro giace in tale piano.

d) Se il corpo ammette due piani di simmetria materiale e dunque la loro intersezione   asse di simmetria materiale, il baricentro si trova su tale asse. Se inoltre esistono tre piani di simmetria materiale, il loro punto di intersezione   centro di simmetria materiale. Il baricentro coincide con tale punto. Il baricentro di un corpo omogeneo che ha forma di poligono o poliedro regolare, coincide col centro geometrico della figura.

e) Il baricentro gode della propriet  distributiva; infatti le (16) hanno manifestamente caratteristiche estensive. Se il corpo viene suddiviso in due o pi  parti e di ognuna di queste viene determinato il baricentro, ivi ritenendo localizzata la massa di ciascuna parte, il baricentro dell'intero corpo coincide con quello dei punti materiali cos  ottenuti.

f) Se un corpo omogeneo presenta delle cavit , il baricentro si ottiene attribuendo al corpo densit  ρ costante e alle cavit  la densit  fittizia $-\rho$. Lo stesso si verifica nel caso bidimensionale, in cui sono presenti fori, e nel caso unidimensionale di figure formate da archi separati.

3.1. Teorema di Pappo-Guldino

Si consideri un arco l di linea, nel piano $x-y$ di un riferimento cartesiano. Facciamo ruotare l'arco considerato di un angolo giro attorno all'asse x , figura 16; la superficie S da esso generata   data da

$$S = \int_l 2\pi y dl. \quad (18)$$

D'altra parte, per la seconda delle (17), la coordinata del baricentro dell'arco  

$$y_C = \frac{\int_l y dl}{l}.$$

Per la (18) segue:

$$y_C = \frac{S}{2\pi l}. \quad (19)$$

Viceversa, nota la coordinata del baricentro,   possibile calcolare l'area della superficie del solido di rotazione.

Analogamente si dimostra che se y_C   la coordinata del baricentro di una porzione di superficie S del piano $x-y$, che ruotando attorno all'asse x genera un volume V , si ha

$$y_C = \frac{V}{2\pi S}, \quad (20)$$

da cui si pu  ricavare il volume del solido di rotazione.

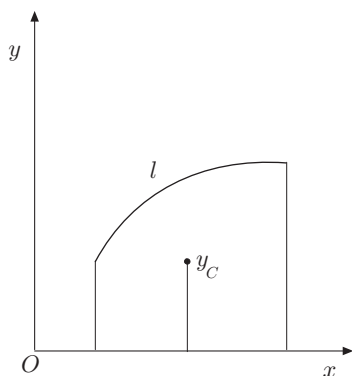


Fig. 13.16

Calcolo di baricentri

- ||| 2. Intuitivamente si assume che il baricentro o centro di massa di una sbarra omogenea di sezione costante e lunghezza l , si trovi a metà lunghezza. Ciò è conforme alla proprietà a); infatti, detta λ la densità lineica della sbarra e assunto un asse di riferimento con origine in un suo estremo, la massa dell'elemento distante x dall'origine è $dm = \lambda dx$, pertanto:

$$x_C = \frac{\lambda \int_0^l x dx}{\lambda \int_0^l dx} = \frac{1}{l} \left[\frac{x^2}{2} \right]_0^l = \frac{l}{2}.$$

Altrettanto intuitivamente assumiamo che il centro di massa di un disco circolare omogeneo si trova nel suo centro geometrico; infatti qualunque diametro è asse di simmetria ed ha come centro di massa il centro del disco.

- ||| 3. Si determini il centro di massa di un disco circolare omogeneo di raggio R , in cui è praticato un foro circolare di raggio $r < R$. Per la proprietà f), possiamo assumere che il foro sia equivalente a un disco di massa negativa. Detta M la massa del disco di raggio R e m la massa del disco equivalente di raggio r , si ha

$$M = \sigma \pi R^2, \quad m = -\sigma \pi r^2,$$

essendo σ la densità areica del disco.

Assunto un asse di riferimento con origine nel bordo del disco e passante per i due centri, figura 17, e detta a la distanza tra questi, si ha

$$x_C = \frac{\sigma \pi R^2 R - \sigma \pi r^2 (R - a)}{\sigma \pi (R^2 - r^2)} = R + \frac{r^2 a}{R^2 - r^2}.$$

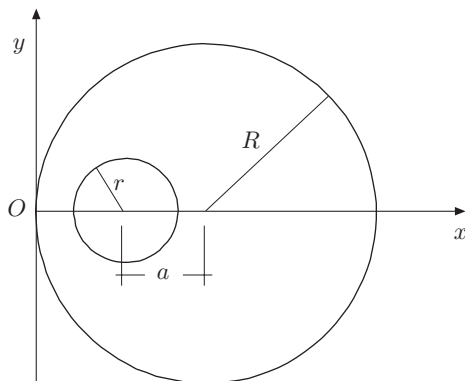


Fig. 13.17

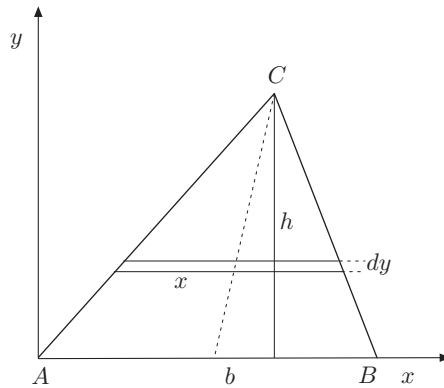


Fig. 13.18

- ||| 4. *Baricentro di un triangolo omogeneo.*

Si divida il triangolo in striscie di spessore infinitesimo parallele al lato AB , figura 18. Il baricentro di ogni striscia si trova nel punto di mezzo; il luogo di tali punti è la mediana del triangolo passante per C e, per le proprietà b) e c), su questa si troverà il baricentro del triangolo. Analogo ragionamento si può fare relativamente alle altre due mediane del triangolo, pertanto, come noto, il baricentro del triangolo è individuato dalla intersezione delle tre mediane.

Sia b un lato del triangolo ed h l'altezza relativa ad esso; detta S la superficie ed y_C la coordinata del baricentro, per le (17), si ha

$$Sy_C = \int y dS.$$

Dividiamo il triangolo in strisce parallele a b , di lunghezza x e altezza dy , perciò $dS = xdy$. Essendo $x = (h - y)b/h$ e $S = bh/2$, la precedente diventa:

$$\frac{1}{2}bhy_C = \frac{b}{h} \int_0^h (h - y)ydy = \frac{1}{2}bh^2 - \frac{1}{3}bh^2;$$

perciò:

$$y_C = \frac{1}{3}h.$$

||| 5. *Baricentro di un quadrilatero omogeneo.*

Si divida il quadrilatero nei due triangoli ABD e CBD , figura 19, e vengano determinati i baricentri C_1 , C_2 dei triangoli ottenuti. Il baricentro del quadrilatero si troverà sulla loro congiungente. Dividendo il quadrilatero nei due triangoli ADC e ABC si troverà un'altra retta sulla quale si trova il baricentro e, per intersezione, il baricentro del quadrilatero.

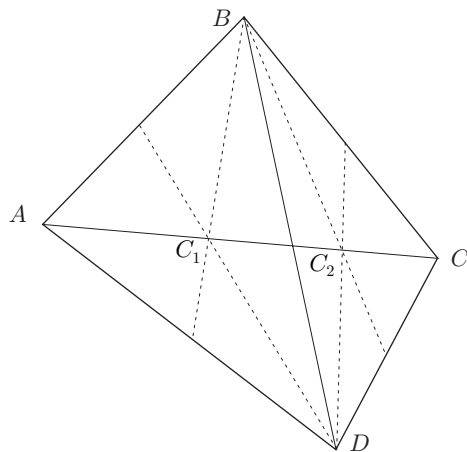


Fig. 13.19

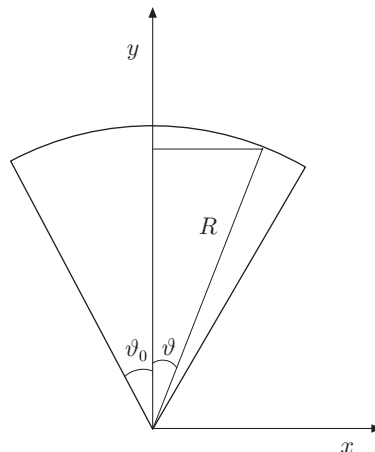


Fig. 13.20

||| 6. *Baricentro di un arco omogeneo di circonferenza.*

Detto $2\theta_0$ l'angolo sotteso dall'arco e disposti gli assi del riferimento come in figura 20, per le proprietà b) e d), il baricentro si trova sull'asse y . Dalle (17), si ha

$$y_C = \frac{\int_{-\theta_0}^{\theta_0} yRd\theta}{2R\theta_0} = \frac{R \int_{-\theta_0}^{\theta_0} \cos \theta d\theta}{2\theta_0} = \frac{\sin \theta_0}{\theta_0} R.$$

In particolare il baricentro di una semicirconferenza è

$$y_C = \frac{2R}{\pi}.$$

In maniera più semplice, il baricentro di una semicirconferenza può essere ricavato per mezzo della (19). Infatti la superficie generata dall'arco è quella della sfera, $4\pi R^2$ e la lunghezza dell'arco è $l = \pi R$, perciò:

$$y_C = \frac{S}{2\pi l} = \frac{2R}{\pi}.$$

||| 7. *Baricentro di un semicerchio omogeneo.*

Fissato un riferimento $x-y$ con origine nel centro del semicerchio, come in figura 21, per la proprietà c) e d), il baricentro si trova sull'asse y . Suddivisa la figura in strisce di altezza dy , parallele all'asse x , si ha

$$y = R \sin \theta, \quad dy = R \cos \theta d\theta, \quad 2r = 2R \cos \theta,$$

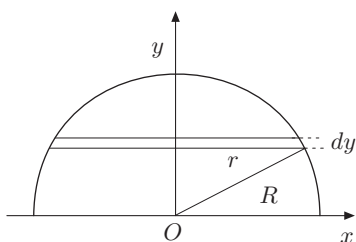


Fig. 13.21

$$dS = 2r dy = 2R^2 \cos^2 \theta d\theta.$$

Poiché

$$Sy_C = \int y dS,$$

si ha

$$Sy_C = 2R^3 \int_0^{\pi/2} \cos^2 \theta \sin \theta d\theta.$$

Posto $x = \cos \theta$, è $dx = -\sin \theta d\theta$ e tenendo presente che $S = \pi R^2/2$, la precedente diventa:

$$\frac{\pi R^2}{2} y_C = 2R^3 \int_1^0 -x^2 dx = \frac{2}{3} R^3.$$

Infine:

$$y_C = \frac{4}{3} \frac{R}{\pi}.$$

A questo risultato si può pervenire più rapidamente per mezzo della (20). Il volume generato nella rotazione è quello della sfera, $V = 4\pi R^3/3$, ed essendo $S = \pi R^2/2$, si ottiene:

$$y_C = \frac{V}{2\pi S} = \frac{4}{3} \frac{R}{\pi}.$$

8. Baricentro di un cono rotondo omogeneo.

Assunti gli assi del riferimento come in figura 22, per la proprietà d), il baricentro si trova sull'asse z . Suddividendo il cono in dischi di spessore dz e detta h la sua altezza, si ha

$$z_C = \frac{\int_0^h z \pi r^2 dz}{\pi R^3 h/3};$$

ma $r/z = R/h$, pertanto:

$$z_C = \frac{\pi (R/h)^2 \int_0^h z^3 dz}{\pi R^3 h/3} = \frac{3}{4} h.$$

9. Baricentro della lastra omogenea di figura 23.

Per la simmetria della lastra e per la proprietà d), il baricentro si trova sull'asse y e si può calcolare dividendo la lastra in due rettangoli $ABCD$ e $EFGH$. Il baricentro del primo ha coordinata $y'_C = d + b/2$, quello del secondo coordinata $y''_C = d/2$. Dette S_1 e S_2 le superfici dei due rettangoli, il baricentro dell'intera lastra risulta

$$y_C = \frac{S_1 y'_C + S_2 y''_C}{S_1 + S_2} = \frac{(d + b/2)ab + d^2 c/2}{ab + dc}.$$

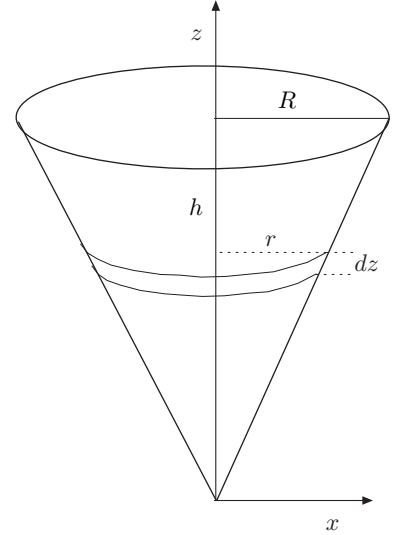


Fig. 13.22

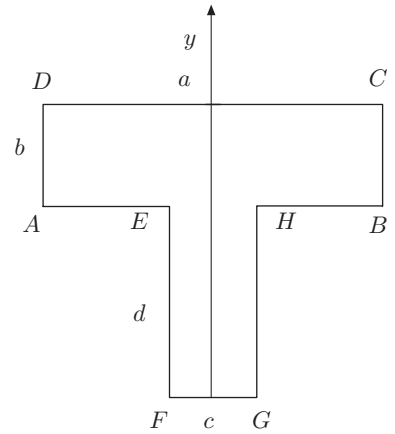


Fig. 13.23

4. Equilibrio

L'equilibrio di un sistema rigido va determinato imponendo che la risultante delle forze ed il momento risultante rispetto a qualsiasi polo, siano uguali a zero:

$$\mathbf{F} = \sum_i \mathbf{F}_i = 0, \quad \mathbf{M} = \sum_i \mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_i = 0. \quad (21)$$

Queste relazioni comprendono le *forze attive* e le *reazioni vincolari*. Assunto un opportuno riferimento cartesiano, in problemi piani, le (16) danno luogo a quattro equazioni scalari; in problemi tridimensionali a sei equazioni scalari.

Mediante le (16) si può determinare l'equilibrio, note le forze agenti sul corpo o, viceversa, assegnata una configurazione di equilibrio, le reazioni vincolari e/o parte delle forze. In ogni caso, perché il problema sia staticamente determinato, le incognite non possono essere più di quattro in problemi piani, non più di sei in problemi tridimensionali. La natura dei vincoli e i gradi di libertà del corpo rigido, determinano ovviamente il numero delle incognite.

Lasciando l'analisi completa a corsi specializzati, le reazioni vincolari hanno caratteristiche dipendenti dai supporti e dalle connessioni del corpo; in linea di massima possono essere classificate come segue.

REAZIONI DI DIREZIONE NOTA

I vincoli, supporti e connessioni, permettono il movimento del corpo in due dimensioni; la retta d'azione della reazione coincide con la direzione in cui viene ostacolato il movimento. Per esempio, una superficie priva di attrito esercita una reazione ad essa ortogonale; l'eventuale moto del corpo è piano. Analogo è il moto di un corpo poggiato su rulli. Un collare liscio che può scorrere senza attrito lungo un'asta, esercita una reazione ortogonale all'asta. Un corpo fissato ad una estremità di un cavo, è soggetto ad una reazione diretta lungo questo. In figura 24 sono mostrati alcuni vincoli di questo tipo.

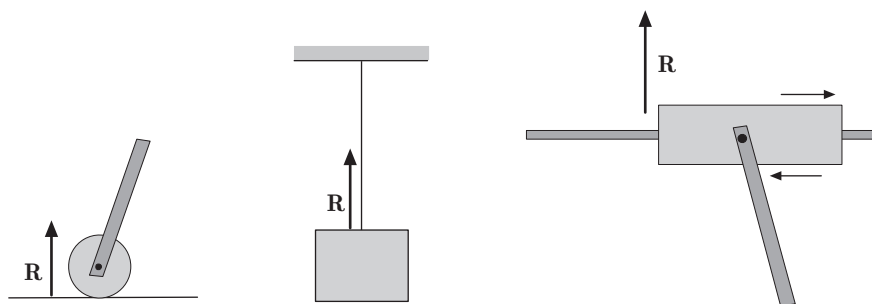


Fig. 13.24

REAZIONI DI DIREZIONE INCOGNITA

Se i supporti e connessioni permettono l'eventuale movimento del corpo in una direzione, la reazione ha due componenti. Per esempio, una rotaia permette l'eventuale moto del corpo in una direzione; la reazione ha due componenti: una ortogonale, l'altra laterale alla rotaia. Superfici scabre possono ostacolare il movimento in tre direzioni, pertanto la reazione ha tre componenti.

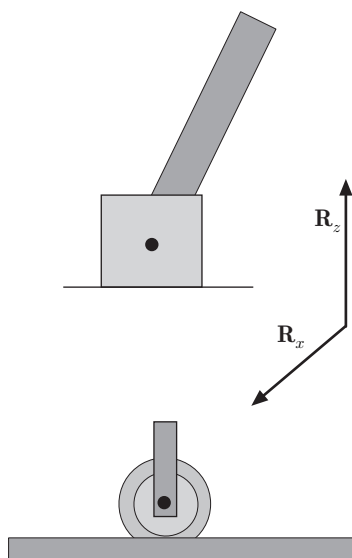


Fig. 13.25

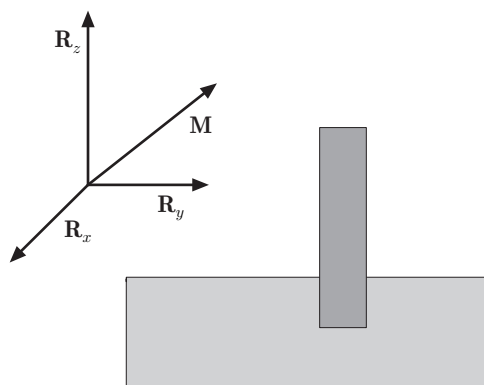


Fig. 13.26

Perni e cerniere permettono soltanto rotazioni; le reazioni possono avere due o tre componenti a seconda della sollecitazione impressa, figura 25.

REAZIONI EQUIVALENTI AD UN SISTEMA FORZA-COPPIA

Se il supporto è fisso, la connessione determina un insieme di forze distribuite sulla superficie di contatto, che possono essere ridotte a una forza e ad una coppia; occorre determinare le componenti della forza e il momento della coppia, figura 26. Se le forze attive sono conservative e i vincoli lisci, l'equilibrio è stabilito dalle condizioni in cui l'energia potenziale è minima. Gli esempi che seguono possono meglio chiarire gli elementi sopra esposti.

Esempi

10. Un quadro di massa m è fissato alla parete mediante due fili ideali, che formano con la verticale due angoli θ uguali, figura 27. Determinare le tensioni dei fili.

Il quadro è in equilibrio; dette \mathbf{T}_1 , \mathbf{T}_2 le tensioni, per l'equilibrio si ha

$$\mathbf{T}_1 + \mathbf{T}_2 + m\mathbf{g} = 0.$$

Assumendo positivo il verso ascendente e proiettando sull'orizzontale e sulla verticale:

$$T_1 \sin \theta - T_2 \sin \theta = 0, \quad T_1 \cos \theta + T_2 \cos \theta - mg = 0.$$

Si ricava

$$T_1 = T_2 = T, \quad T = \frac{mg}{2 \cos \theta}.$$

La tensione dipende dall'angolo e cresce all'aumentare di questo; per esempio, lo sforzo che esercitiamo nel sollevarci con le braccia unite al corpo, risulta minore di quello che esercitiamo con le braccia più aperte.

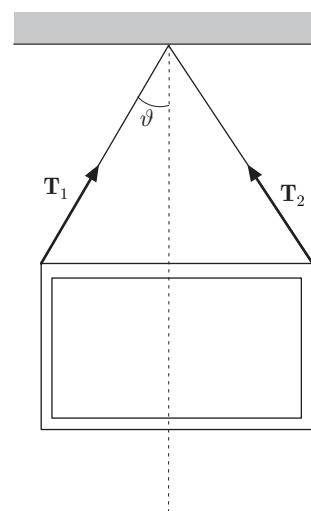


Fig. 13.27

11. Un'asta omogenea di sezione costante, massa m e lunghezza l , incerniata in O , come mostrato in figura 28, è tenuta in equilibrio per mezzo di un filo ideale. Su di essa agiscono: una forza \mathbf{F} verticale, applicata al suo estremo, la tensione esercitata dal filo e il peso proprio. Determinare la tensione del filo e la reazione vincolare \mathbf{R} in O .

Per l'equilibrio si deve avere

$$\mathbf{F} + \mathbf{T} + m\mathbf{g} + \mathbf{R} = 0,$$

e assumendo come polo O , l'annullarsi dei momenti delle forze coinvolte, ossia della forza applicata, della tensione e del peso:

$$\mathbf{M}_F + \mathbf{M}_T + \mathbf{M}_P = 0.$$

Fissato un riferimento con origine in O , asse y volto in alto, asse x orizzontale, e proiettando la prima, si ha

$$-T \cos 60^\circ + R_x = 0, \quad -F + T \sin 60^\circ - mg + R_y = 0.$$

I momenti hanno componenti ortogonali al piano x - y :

$$-Fl \sin 60^\circ - mg \frac{l}{2} \sin 60^\circ + Tl \sin 30^\circ = 0.$$

Da quest'ultima si ricava la tensione:

$$T = \left(F + \frac{1}{2}mg \right) \frac{\sin 60^\circ}{\sin 30^\circ};$$

dalle prime, le componenti della reazione:

$$R_x = T \cos 60^\circ, \quad R_y = F + mg - T \sin 60^\circ.$$

Il problema è staticamente definito; numericamente, assumendo $F = 20 \text{ N}$, $m = 1 \text{ kg}$, si ottiene

$$T = 43,12 \text{ N}, \quad R_x = 21,56 \text{ N}, \quad R_y = -7,54 \text{ N}.$$

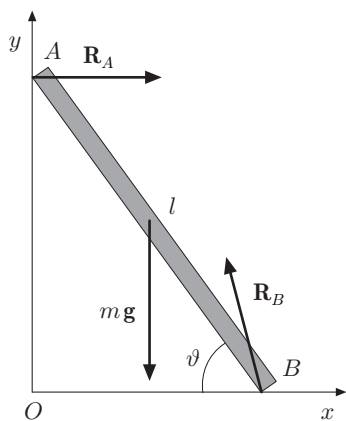


Fig. 13.29

12. Un'asta AB omogenea, di lunghezza l e sezione costante, è in equilibrio appoggiata con l'estremo A su una parete verticale e l'altro estremo B su un piano orizzontale, col quale forma un angolo θ , figura 29. Supponendo che soltanto la parete sia priva di attrito, determinare le reazioni in A e B . Essendo la parete liscia, la reazione in A è ortogonale ad essa, mentre in B ha componenti, parallela ed ortogonale al piano. All'equilibrio, la somma delle forze è nulla

$$\mathbf{R}_A + \mathbf{R}_B + m\mathbf{g} = 0.$$

Assunto un riferimento con l'asse x coincidente col piano e l'asse y con la parete, la precedente dà luogo alle equazioni scalari

$$R_A + R_{Bx} = 0, \quad R_{By} - mg = 0.$$

Per quanto riguarda i momenti, conviene scegliere come polo B , in modo che il momento di \mathbf{R}_B sia nullo, sicché vanno considerati i momenti della reazione in A ed il momento del peso. Si ha

$$\mathbf{M}_A + \mathbf{M}_P = 0.$$

I momenti hanno componenti ortogonali al piano x - y , e dalla precedente si ottiene l'equazione scalare:

$$-R_A l \sin \theta + mg \frac{l}{2} \cos \theta = 0;$$

da quest'ultima si ottiene

$$R_A = \frac{mg \cos \theta}{2 \sin \theta}.$$

Dall'equazione di equilibrio delle forze si ha

$$R_A = -R_{Bx}, \quad R_{By} = mg.$$

Naturalmente, l'equilibrio dipende dall'angolo θ ; inoltre R_{Bx} dev'essere minore o uguale alla forza di attrito statico. Si osservi che se la parete non fosse liscia la reazione \mathbf{R}_A avrebbe una componente parallela ad essa. Si otterrebbero così quattro forze componenti incognite e il problema non potrebbe essere risolto senza una ulteriore ipotesi.

- ||| 13. Si consideri l'asta dell'esempio precedente nel caso che anche il piano orizzontale sia privo di attrito e che l'equilibrio venga realizzato mediante una molla di costante k , fissata in O e nell'estremo B dell'asta, figura 30. La condizione di equilibrio può essere determinata col metodo precedente; è però interessante, essendo le forze coinvolte conservative e il lavoro delle reazioni nullo, perché ortogonali ai vincoli, trovare tale condizione studiando l'energia potenziale del sistema.

Detta x_0 la lunghezza della molla a riposo e y_C l'ordinata del centro di massa, l'energia potenziale, funzione della distanza x di B dall'origine, è

$$U(x) = mgy_C + \frac{1}{2}k(x - x_0)^2,$$

che si può scrivere:

$$U(x) = \frac{1}{2}mg\sqrt{l^2 - x^2} + \frac{1}{2}k(x - x_0)^2.$$

L'equilibrio si ha per

$$\frac{dU}{dx} = -\frac{1}{2}mg\frac{x}{\sqrt{l^2 - x^2}} + k(x - x_0) = 0,$$

da cui:

$$\frac{mg}{2 \tan \theta} = k(x - x_0).$$

Per quanto riguarda le reazioni, evidentemente si ha

$$R_A = k(x - x_0), \quad R_B = -mg.$$

- ||| 14. Un'asta omogenea di massa m , è vincolata a scorrere all'interno di una guida circolare priva di attrito, di raggio r e disposta in un piano verticale. La lunghezza dell'asta è uguale al raggio della guida. Una forza \mathbf{F} , diretta lungo l'asta e applicata a un suo estremo, determina l'equilibrio dell'asta, in modo che l'altro estremo si trovi nel punto più basso della guida, figura 31. Determinare le reazioni vincolari nei punti A e B .

Per l'equilibrio:

$$\mathbf{F} + m\mathbf{g} + \mathbf{R}_A + \mathbf{R}_B = 0, \quad \sum_i \mathbf{M}_i = 0.$$

Proiettando la prima su due assi, orizzontale e verticale, si ha

$$F \cos 30^\circ - R_B \cos 30^\circ = 0$$

$$F \cos 60^\circ + R_B \cos 60^\circ + R_A - mg = 0,$$

da cui:

$$R_B = F, \quad R_A = mg - 2F \cos 60^\circ.$$

Assumendo come polo il centro della guida, per i moduli dei momenti si ottiene:

$$Fr \sin 60^\circ - mg \frac{r}{2} \sin 60^\circ = 0, \quad F = \frac{1}{2}mg.$$

- ||| 15. Una sfera di massa m , in equilibrio, è appoggiata tra un piano verticale e un piano inclinato che forma col primo un angolo θ , figura 32. Determinare le reazioni esercitate dai vincoli.

Le forze agenti sulla sfera sono il peso e le reazioni \mathbf{R}_1 , \mathbf{R}_2 , ortogonali ai piani. Per l'equilibrio delle forze, si ha

$$\mathbf{R}_1 + \mathbf{R}_2 + m\mathbf{g} = 0;$$

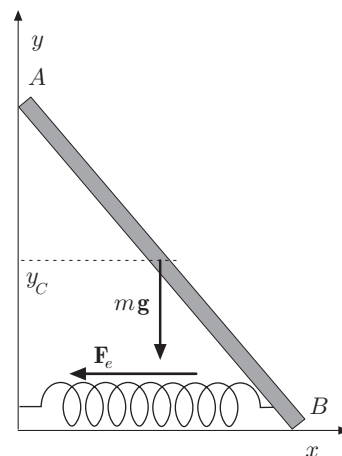


Fig. 13.30

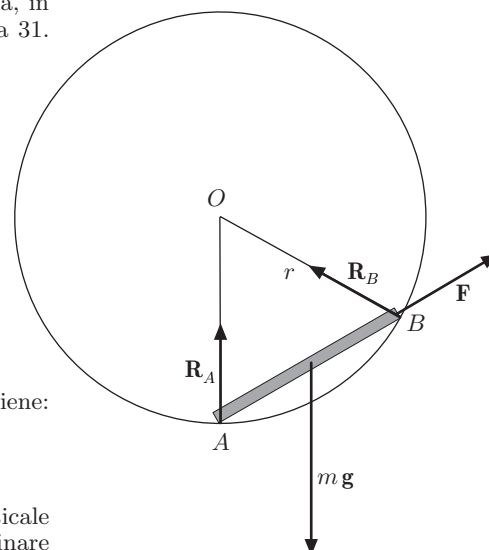


Fig. 13.31

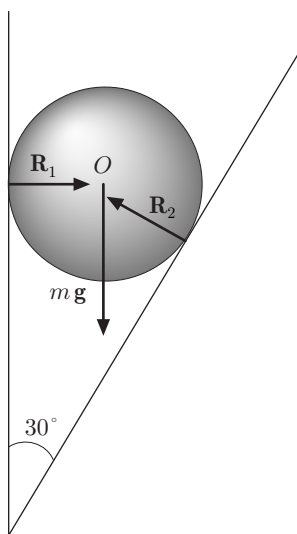


Fig. 13.32

Proiettando su due assi orientati, orizzontale e verticale, si ottiene:

$$R_1 - R_2 \cos \theta = 0, \quad R_2 \sin \theta - mg = 0,$$

$$R_2 = \frac{mg}{\sin \theta}, \quad R_1 = R_2 \cos \theta = mg \frac{\cos \theta}{\sin \theta}.$$

Non è necessaria l'equazione dell'equilibrio dei momenti. Si può subito verificare che il momento risultante è nullo qualunque sia il polo assunto.

- ||| 16. Due sfere uguali, di raggio r e massa m , sono in equilibrio in un contenitore a pareti verticali. La distanza tra queste è $l < 4r$, figura 33; determinare le reazioni esercitate dai vincoli.

Le forze che agiscono sono: le reazioni \mathbf{R}_1 , \mathbf{R}_2 , \mathbf{R}_3 , i pesi e la forza \mathbf{F} al contatto tra le sfere. Dette x e x' le ascisse dei centri, rispetto allo spigolo del contenitore, si ha

$$x' - x = l - 2r = 2r \cos \theta, \quad \cos \theta = \frac{l - 2r}{2r}.$$

Per l'equilibrio della sfera A :

$$\mathbf{R}_1 + \mathbf{R}_2 + m\mathbf{g} + \mathbf{F} = 0,$$

che proiettata sugli assi, orizzontale e verticale, dà

$$R_1 - F \cos \theta = 0, \quad R_2 - mg - F \sin \theta = 0.$$

Analogamente per la sfera B :

$$F \cos \theta - R_3 = 0, \quad F \sin \theta - mg = 0.$$

Da queste ultime si trae

$$F = \frac{mg}{\sin \theta}, \quad R_3 = F \cos \theta = \frac{mg}{\tan \theta}.$$

dalle prime:

$$R_1 = F \cos \theta = \frac{mg}{\tan \theta}, \quad R_2 = mg + F \sin \theta = 2mg.$$

Anche in questo caso non è necessaria l'equazione dell'equilibrio dei momenti; si verifica facilmente che essa è soddisfatta qualunque sia il polo assunto.

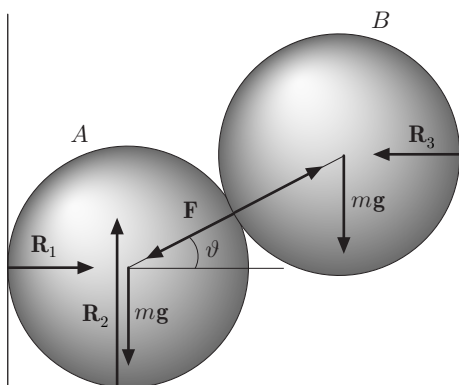


Fig. 13.33

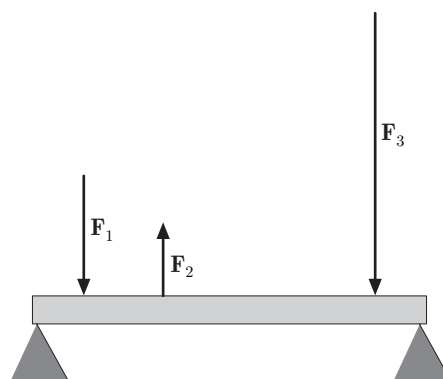


Fig. 13.34

- ||| 17. Un'asta omogenea di sezione costante, lunga $0,8\text{ m}$, è in equilibrio, appoggiata ai suoi estremi sui supporti lisci A e B . L'asta è sollecitata dalle forze ad essa ortogonali come in figura 34. Assunto un riferimento con origine in A e l'asse x orientato lungo la sbarra, le forze sono applicate rispettivamente nei punti $x_1 = 0,1\text{ m}$, $x_2 = 0,3\text{ m}$ e $x_3 = 0,7\text{ m}$ ed hanno componenti lungo l'asse

y: $F_1 = -10 \text{ N}$, $F_2 = 5 \text{ N}$, $F_3 = -25 \text{ N}$. Trascurando il peso dell'asta, trovare il punto di applicazione della risultante e le reazioni in A e B .

La risultante vale $F = -30 \text{ N}$; il suo punto di applicazione, centro delle forze, è

$$x_C = \frac{\sum_i F_i x_i}{F} = 0,56 \text{ m}.$$

Le reazioni R_A , R_B , possono essere determinate dall'equilibrio dei momenti; assumendo come polo A , si ha

$$0,8R_B - 0,56F = 0, \quad R_B = \frac{0,56}{0,8}F = 21,2 \text{ N},$$

ed essendo

$$R_A + R_B - F = 0,$$

si ottiene

$$R_A = F - R_B = 8,78 \text{ N}.$$

- ||| 18. Una mensola, lunga $1,2 \text{ m}$, è incastrata in O ad una parete verticale, come in figura 35. Essa è sollecitata dalle forze $F_1 = 200 \text{ N}$, $F_2 = 100 \text{ N}$, $F_3 = 50 \text{ N}$, applicate nei punti $x_1 = 0,3 \text{ m}$, $x_2 = 0,8 \text{ m}$ e $x_3 = 1,2 \text{ m}$. Determinare la reazione all'incastro.

La parte della mensola incastrata è soggetta a forze distribuite, equivalenti a una forza e ad una coppia. Fissato un riferimento con origine in O , asse x coincidente con la mensola, e asse y ortogonale, per l'equilibrio delle forze è

$$\sum F_x + R_x = 0, \quad R_x = 0.$$

Inoltre:

$$-F_1 - F_2 - F_3 + R_y = 0, \quad R_y = F_1 + F_2 + F_3 = 350 \text{ N},$$

Indicando con M il momento della coppia di reazione, per l'equilibrio dei momenti, si ha

$$\sum_i M_i = -F_1 x_1 - F_2 x_2 - F_3 x_3 + M = 0$$

$$M = F_1 x_1 + F_2 x_2 + F_3 x_3 = 200 \text{ N} \cdot \text{m}.$$

La reazione è costituita da una forza verticale $R = 350 \text{ N}$ e da una coppia di momento positivo $M = 200 \text{ N} \cdot \text{m}$.

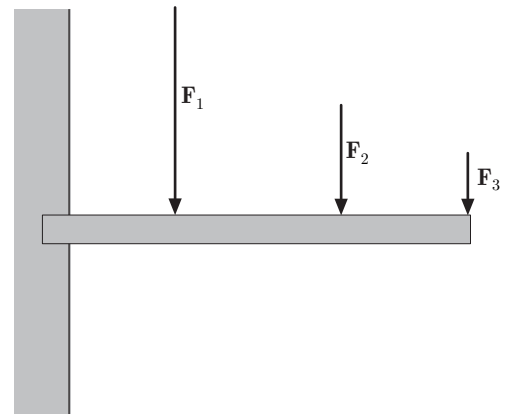


Fig. 13.35

- ||| 19. Una trave omogenea, lunga 2 m , è appoggiata agli estremi su due supporti lisci A e B . Su di essa è distribuito un carico crescente linearmente con la distanza, dal valore 100 N/m al valore 300 N/m , figura 36. Determinare le reazioni agli appoggi.

Il carico, per unità di lunghezza, varia con la legge

$$F(x) = ax + 100, \quad a = 100 \text{ N/m}^2.$$

Il carico totale risulta:

$$F = \int_0^2 (100x + 100) dx = \left[100 \frac{x^2}{2} + 100x \right]_0^2 = 400 \text{ N}.$$

Il punto di applicazione, per le (13), risulta

$$x_C = \frac{1}{400} \int_0^2 (100x + 100) dx = \frac{1}{400} \left[100 \frac{x^3}{3} + 100 \frac{x^2}{2} \right]_0^2 = 1,16 \text{ m}.$$

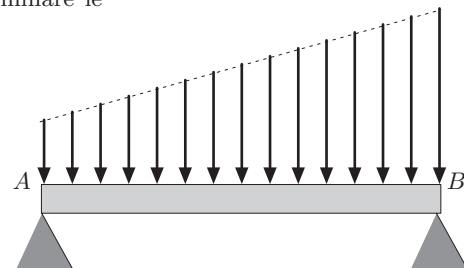


Fig. 13.36

5. Cenzo sul principio dei lavori virtuali

Un principio fondamentale della Statica e, in generale, della Meccanica è il principio dei lavori virtuali. Esso costituisce uno strumento molto potente nello studio dell'equilibrio e viene descritto in modo esauriente in Meccanica Razionale. Tuttavia, essendo la sua formulazione piuttosto semplice e notevole la sua utilità nei problemi di statica, ne daremo i lineamenti fondamentali.

Consideriamo un sistema di n punti materiali, P_1, P_2, \dots ai quali siano imposti dei vincoli e siano $\mathbf{F}_1, \mathbf{F}_2, \dots$ le forze attive agenti su ciascun punto. Se il sistema compie uno spostamento virtuale, ossia uno spostamento infinitesimo ammissibile perché conforme ai vincoli, indicando con $\delta \mathbf{s}_i$ lo spostamento virtuale del generico punto P_i , il lavoro virtuale, corrispondente a tale spostamento, è dato da

$$\delta \mathcal{L} = \sum_i \mathbf{F}_i \cdot \delta \mathbf{s}_i.$$

Il simbolo δ indica, come di consueto, lo spostamento e il lavoro elementari, virtuali, e ricorda che non si tratta di un operatore differenziale. Per chiarire il concetto di lavoro virtuale, consideriamo alcuni particolari sistemi in equilibrio. Ad ognuno diamo un generico spostamento virtuale compatibile con i vincoli, e determiniamo il corrispondente lavoro delle forze *attive* atte a mantenere l'equilibrio del sistema considerato. All'equilibrio il lavoro delle forze vincolari, ortogonali ai vincoli, è nullo.

PUNTO MATERIALE LIBERO

Non essendo presenti vincoli, un qualunque spostamento è ammissibile, dunque è virtuale. Se \mathbf{F} è la risultante delle forze agenti, il lavoro virtuale corrispondente allo spostamento $\delta \mathbf{s}$, è $\delta \mathcal{L} = \mathbf{F} \cdot \delta \mathbf{s}$. In condizioni di equilibrio $\mathbf{F} = 0$, dunque $\delta \mathcal{L} = 0$.

PUNTO MATERIALE VINCOLATO AD UNA LINEA O AD UN PIANO

Ogni spostamento virtuale è tangente al vincolo. Il lavoro virtuale della risultante delle forze attive è $\delta \mathcal{L} = \mathbf{F} \cdot \delta \mathbf{s}$. Ma, in condizioni di equilibrio, \mathbf{F} è ortogonale al vincolo, dunque $\delta \mathcal{L} = 0$.

CORPO RIGIDO LIBERO

Qualunque spostamento rototraslatorio è ammissibile e pertanto virtuale. Detta \mathbf{F} la risultante ed \mathbf{M} il momento risultante delle forze attive rispetto ad un polo O , il lavoro virtuale, paragrafo 5-XIV, è

$$\delta \mathcal{L} = \mathbf{F} \cdot \mathbf{v}_O dt + \mathbf{M}_O \cdot \boldsymbol{\omega} dt = \mathbf{F} \cdot \delta \mathbf{s}_O + \mathbf{M}_O \cdot \delta \boldsymbol{\varphi}.$$

In condizioni di equilibrio $\mathbf{F} = 0$, $\mathbf{M}_O = 0$, dunque $\delta \mathcal{L} = 0$.

CORPO RIGIDO CON UN ASSE FISSO

Ogni spostamento virtuale è rotatorio attorno all'asse fisso; il corrispondente lavoro virtuale è $\delta\mathcal{L} = M_a\delta\varphi$, essendo M_a il momento assiale. Per l'equilibrio $M_a = 0$, dunque $\delta\mathcal{L} = 0$.

Quanto si è esemplificato, sia pure in maniera incompleta e poco rigorosa, può essere riassunto con l'enunciato:

Condizione necessaria e sufficiente per l'equilibrio di un sistema soggetto a vincoli, è che il lavoro delle forze attive, per ogni spostamento virtuale, sia nullo.

Si osservi che in questo enunciato non compaiono le reazioni vincolari né la natura dei vincoli. Le eventuali forze di attrito possono essere annoverate tra le forze attive.

Esempi

||| 20. Macchine semplici.

Agli effetti statici, macchina è un qualsiasi dispositivo atto ad equilibrare una forza applicata in un punto di un corpo, con un'altra applicata in un punto diverso. Le macchine semplici, note fin dall'antichità, sono in sostanza tre: la fune, la leva, il piano inclinato.

a) Fune

La fune sia inestendibile e di peso trascurabile; ai suoi estremi siano applicate le forze $\mathbf{F}_1, \mathbf{F}_2$. Per uno spostamento virtuale, gli estremi della fune si spostano di $\delta\mathbf{s}$; per l'equilibrio si deve avere

$$\mathbf{F}_1 \cdot \delta\mathbf{s} + \mathbf{F}_2 \cdot \delta\mathbf{s} = 0, \quad \Rightarrow \quad \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 = 0;$$

le forze devono essere opposte.

b) Leva

Uno spostamento virtuale è una rotazione $\delta\varphi$ attorno al fulcro O , figura 37. L'estremo A della leva si sposta di $\delta s_1 = l_1\delta\varphi$, l'altro estremo si sposta di $\delta s_2 = l_2\delta\varphi$, essendo l_1, l_2 le distanze da O degli estremi della leva. Per l'equilibrio, il lavoro virtuale dev'essere nullo:

$$\delta\mathcal{L} = \mathbf{F}_1 \cdot \delta\mathbf{s}_1 + \mathbf{F}_2 \cdot \delta\mathbf{s}_2 = 0.$$

Poiché:

$$\delta\mathcal{L} = F_1\delta\varphi l_1 \cos\theta_1 + F_2\delta\varphi l_2 \cos\theta_2 = F_1 b_1 \delta\varphi - F_2 b_2 \delta\varphi = 0,$$

avendo indicato con b_1, b_2 i bracci delle forze rispetto ad O , si ottiene:

$$F_1 b_1 = F_2 b_2.$$

Questa relazione non è altro che quella che si otterrebbe dall'equilibrio dei momenti delle forze rispetto ad O .

c) Piano inclinato

Sono spostamenti virtuali tutti quelli paralleli al piano inclinato. Se il corpo su di esso poggiato è in equilibrio, il lavoro virtuale per tali spostamenti deve essere nullo. Ciò significa che la risultante delle forze è normale al piano inclinato e volta contro esso. Ove si consideri unilatero il vincolo imposto, siano perciò inclusi spostamenti virtuali nel semispazio delimitato dal piano, allora il lavoro virtuale della risultante deve essere negativo.

Consideriamo un cilindro di raggio R , che può rotolare lungo un piano inclinato di un angolo θ rispetto all'orizzontale. Su di esso agisce il peso e una forza equilibrante \mathbf{F} , parallela al piano e applicata mediante un filo tangenzialmente ad un cilindro di raggio r , coassiale col primo, figura 38. Unico spostamento virtuale è la rotazione infinitesima $\delta\varphi$ attorno all'asse

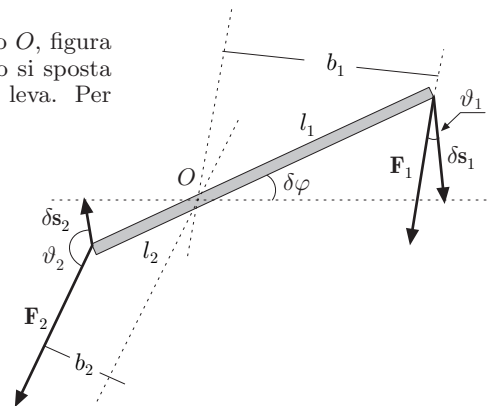


Fig. 13.37

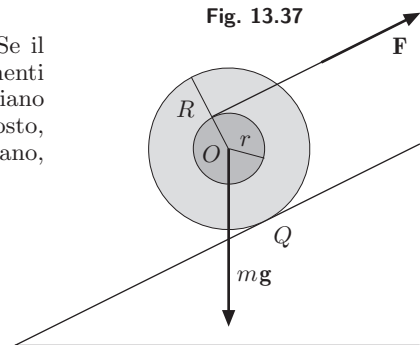


Fig. 13.38

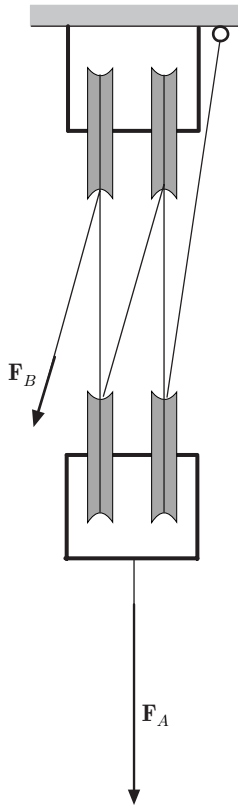


Fig. 13.39

istante di rotazione passante per Q . Assunto come positivo il verso discendente, tale rotazione determina uno spostamento del centro O del cilindro uguale a $R\delta\varphi$ e uno spostamento del punto di applicazione A della forza equilibrante, uguale a $(R+r)\delta\varphi$. Il lavoro virtuale è

$$\delta\mathcal{L} = mg \sin \theta R \delta\varphi - F(R+r)\delta\varphi = 0,$$

da cui si ricava la condizione di equilibrio:

$$\frac{F}{mg \sin \theta} = \frac{R}{R+r}.$$

21. Carrucola fissa.

Con riferimento alla figura 27, capitolo VII, sono spostamenti virtuali le rotazioni infinitesime attorno all'asse. Supponendo che le caratteristiche del filo siano ideali, il lavoro virtuale delle forze è

$$F_A R \delta\varphi - F_B R \delta\varphi = 0, \quad F_A = F_B.$$

22. Carrucola mobile.

Dalla figura 29, capitolo VII, assunto come positivo il verso discendente, gli spostamenti virtuali avvengono lungo la verticale. Se F_2 scende di δz , F_1 si sposta in valore e segno di $-2 \cos(\theta/2) \delta z$. Il lavoro virtuale risulta

$$F_2 \delta z - F_1 2 \cos \frac{\theta}{2} \delta z = 0;$$

pertanto l'equilibrio si ha per

$$F_2 = 2F_1 \cos \frac{\theta}{2}, \quad F_1 = \frac{F_2}{2 \cos \theta/2}.$$

Se $\theta = 0$, la forza equilibrante risulta $F_2/2$.

23. Paranco.

Il paranco è costituito da due o più carrucole fisse collegate mediante una fune ad altrettante carrucole mobili, figura 39. Si vuole trovare la forza \mathbf{F}_B che equilibra il peso \mathbf{F}_A , sospeso alle carrucole mobili.

Assunta come positiva la direzione discendente, se la forza \mathbf{F}_A sposta il suo punto di applicazione verso il basso di δz , la forza \mathbf{F}_B , nel caso della figura, sposta il suo punto di applicazione, verso l'alto, di $4\delta z$. Il lavoro virtuale è

$$\delta\mathcal{L} = F_A \delta z - F_B 4\delta z = 0,$$

pertanto risulta $F_B = F_A/4$. Per equilibrare \mathbf{F}_A occorre una forza quattro volte più piccola.

24. Puleggia differenziale.

La puleggia differenziale è costituita da due pulegge solidali e coassiali, di raggi r_1, r_2 , collegate con una fune ad una puleggia mobile, figura 40. Essa, come il paranco, permette di sollevare pesi notevoli con una forza di modesta intensità.

Sia \mathbf{F} la forza applicata lungo il tratto di fune AB ; per un giro della puleggia fissa, AB si allunga di $2\pi r_2$, contemporaneamente la puleggia mobile si solleva di metà dell'accorciamento del tratto CED . Poiché la fune si avvolge nella puleggia di raggio r_1 , in totale la fune si accorcia di $2\pi(r_2 - r_1)$, quindi O' si solleva di $\pi(r_2 - r_1)$.

Detto $\delta\varphi$ l'angolo di rotazione, gli spostamenti virtuali di A e di O' sono:

$$R_2 \delta\varphi, \quad \frac{r_2 - r_1}{2} \delta\varphi.$$

Per l'equilibrio è nullo il lavoro virtuale:

$$F r_2 \delta\varphi - mg \frac{r_2 - r_1}{2} \delta\varphi = 0, \quad F = mg \frac{r_2 - r_1}{2r_2}.$$

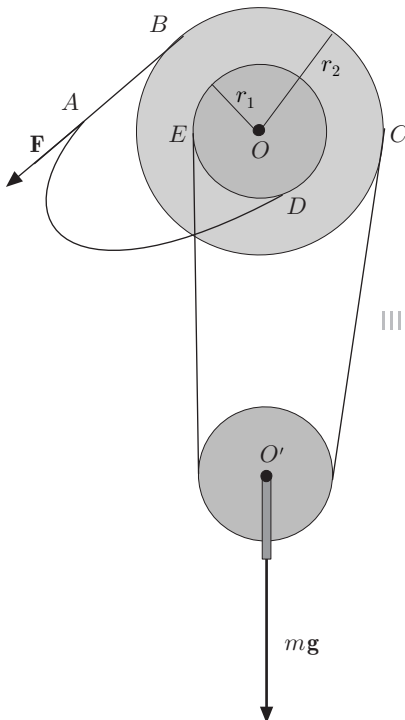


Fig. 13.40

La forza \mathbf{F} può essere resa piccola a piacere perché dipende dalla differenza $r_2 - r_1$. Il sistema è munito di un dispositivo a scappamento per impedire la rotazione inversa.

Da questi esempi si deduce che, in generale, nelle “macchine”, tanto si guadagna in forza quanto si perde in spostamento oppure, riferendosi alla velocità, tanto si guadagna in forza quanto si perde in velocità. È questa la *regola d'oro* delle macchine.

- ||| 25. Si consideri la scala di lunghezza l di figura 41. Supponendo che l'attrito tra parete e scala sia trascurabile e che μ_s sia il coefficiente di attrito statico del pavimento, determinare l'angolo θ massimo tra scala e parete, per il quale essa è in equilibrio.

Gli spostamenti virtuali degli estremi della scala, compatibili con i vincoli, sono δx e δy ; in corrispondenza l'angolo varia di $\delta\theta$.

Detta y_C l'ordinata del centro di massa, punto medio se si suppone la scala omogenea, si ha $y_C = l \cos \theta / 2$ e $x = l \sin \theta$. Se l'angolo varia di $\delta\theta$, si ha

$$\delta y_C = \frac{dy}{d\theta} \delta\theta = -\frac{l}{2} \sin \theta \delta\theta, \quad \delta x = \frac{dx}{d\theta} \delta\theta = l \cos \theta \delta\theta.$$

Il lavoro virtuale della forza peso è

$$\delta \mathcal{L}_1 = -mg \delta y_C = \frac{l}{2} mg \sin \theta \delta\theta,$$

quello della forza d'attrito:

$$\delta \mathcal{L}_2 = -F_A \delta x = -F_A l \cos \theta \delta\theta.$$

Essendo il lavoro virtuale totale nullo, si ricava:

$$F_A = \frac{1}{2} mg \tan \theta.$$

Poiché per l'equilibrio deve essere $F_A \leq \mu_s mg$, si trae

$$\tan \theta \leq 2\mu_s, \quad \tan \theta_{max} = 2\mu_s.$$

Si osservi che in tutti gli esempi, non intervengono le reazioni vincolari né le tensioni delle funi.

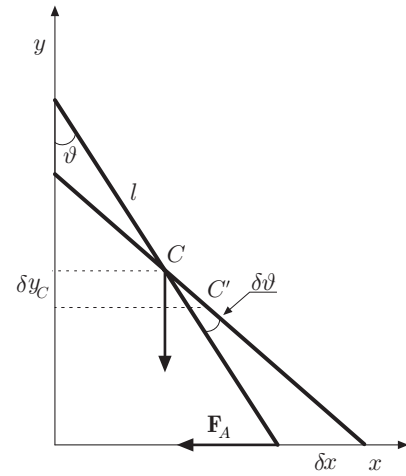


Fig. 13.41

- ||| 26. Il principio dei lavori virtuali è particolarmente utile nella soluzione di problemi in cui sono coinvolti corpi rigidi connessi tra loro.

Si consideri il sistema articolato, incernierato in A , B e C , che comprime un blocco in B , quando una forza \mathbf{F} è applicata in C , figura 42. Si vuole trovare la forza di compressione esercitata sul blocco.

Fissato un riferimento x, y , con origine in A , e detta l la lunghezza di AC e CB , le coordinate di B e C sono $x_B = 2l \sin \theta$, $y_C = l \cos \theta$. Gli spostamenti virtuali sono

$$\delta x_B = 2l \cos \theta \delta\theta, \quad \delta y_C = -l \sin \theta \delta\theta.$$

Il lavoro virtuale:

$$\delta \mathcal{L} = 2F_B l \cos \theta \delta\theta + F l \sin \theta \delta\theta, \quad F_B = \left| \frac{1}{2} F \tan \theta \right|.$$

dove F_B è la forza di compressione. Le reazioni vincolari non intervengono. Si lascia al lettore lo svolgimento del problema col metodo convenzionale.

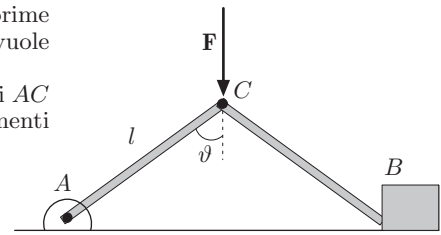


Fig. 13.42

14. Dinamica dei sistemi rigidi

1. Equazioni della dinamica

Le forze che agiscono su un corpo rigido sono la risultante e il momento risultante delle forze esterne; quest'ultimo è somma dei momenti delle singole forze, rispetto ad un polo opportunamente scelto, che può coincidere col centro di massa. Indicando con $\mathbf{F} = \sum_i \mathbf{F}_i$ e con $\mathbf{M} = \sum_i \mathbf{M}_i$ risultante e momento risultante, le equazioni cardinali della dinamica dei corpi rigidi si scrivono

$$\mathbf{F} = \frac{d\mathbf{p}}{dt}, \quad \mathbf{M} = \frac{d\mathbf{L}}{dt}, \quad (1)$$

Come s'è dimostrato in dinamica dei sistemi di punti materiali, \mathbf{p} è la quantità di moto del centro di massa in cui si ritiene localizzata la massa del corpo.

Queste relazioni danno luogo a sei equazioni scalari; pertanto, assegnate le condizioni iniziali, sono sufficienti a individuare il moto del corpo rispetto ad un riferimento "assoluto". Infatti la posizione di un corpo rigido è determinata dalle coordinate di tre punti non allineati, che dovendo soddisfare alle tre relazioni che esprimono l'invarianza delle loro mutue distanze, riducono a sei i gradi di libertà. Peraltro si possono assegnare le coordinate del centro di massa e gli angoli che gli assi di una terna solidale col corpo rigido, con origine nel centro di massa, formano con gli assi della terna fissa.

La prima delle (1) permette di studiare il moto del centro di massa; la seconda il movimento rotatorio del corpo rigido attorno ad un asse istantaneo di rotazione passante per l'origine della terna con esso solidale. L'atto di moto del corpo rigido libero, come si è mostrato in cinematica dei sistemi rigidi, è dunque roto-traslatorio e si può ricondurre in infiniti modi nella forma

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_O + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r},$$

dove \mathbf{v} è la velocità del generico punto, \mathbf{v}_O la velocità dell'origine della terna solidale, e \mathbf{r} la posizione del punto rispetto a tale terna.

Si osservi che nelle (1) le forze agenti intervengono solo attraverso la risultante e al loro momento risultante; ne segue che il

moto del corpo rigido non subisce alterazioni se a un sistema di forze se ne sostituisce un altro equipollente, avente cioè la stessa risultante e lo stesso momento risultante. Questa operazione, lecita nella statica del corpo rigido, è valida nella dinamica di tale corpo. Per esempio, si potrà tener conto del peso di un corpo rigido mediante un unico vettore, applicato al centro di massa.

Se la risultante delle forze esterne è diversa da zero e il momento risultante è nullo, il moto del corpo rigido è governato dalla prima delle (1); tutti i punti del corpo traslano con accelerazione e velocità, ad ogni istante, uguali. Il moto del corpo rigido dunque può essere rappresentato dal moto del suo centro di massa.

1.1. Corpo rigido vincolato

Un corpo rigido è vincolato se, oltre al vincolo della rigidità, sono imposti ad esso altri vincoli, come quello di avere un punto o un asse fisso, oppure di poggiare su un piano ecc. Per determinare il movimento del corpo, basta aggiungere, nelle (1), alle forze attive le reazioni vincolari. Chiamando con \mathbf{R} la risultante delle reazioni vincolari e con \mathbf{M}_R il momento risultante di queste ultime, le equazioni fondamentali si scrivono

$$\mathbf{F} + \mathbf{R} = \frac{d\mathbf{p}}{dt}, \quad \mathbf{M} + \mathbf{M}_R = \frac{d\mathbf{L}}{dt}. \quad (2)$$

Come s'è visto in cinematica, i vincoli riducono i gradi di libertà del corpo; pertanto le equazioni scalari atte a determinare il moto sono inferiori a sei. È importante rilevare che, una volta determinato il moto, le (2) permettono di ricavare la risultante e il momento risultante delle reazioni vincolari:

$$\mathbf{R} = \frac{d\mathbf{p}}{dt} - \mathbf{F}, \quad \mathbf{M}_R = \frac{d\mathbf{L}}{dt} - \mathbf{M}. \quad (3)$$

Si sottolinea che, durante il moto, le reazioni sono diverse da quelle in condizioni di equilibrio. Questa circostanza è fondamentale in molti problemi tecnici, come ad esempio nella valutazione degli sforzi che vengono esercitati su assi, perni ecc. che collegano una parte fissa di una macchina ad altre parti mobili.

1.2. Rotazione attorno ad un asse fisso

Un corpo rigido ruotante attorno ad un asse ha un solo grado di libertà; l'angolo φ di rotazione è sufficiente a individuare la posizione di ogni suo punto.

Supponiamo che il corpo sia solidale con un asse che possa ruotare per mezzo di due supporti A e B fissi, che esplicano le reazioni vincolari \mathbf{R}_A , \mathbf{R}_B . Nelle (1), oltre alla risultante \mathbf{F} delle forze attive, si deve tenere conto di tali reazioni, perciò si ha

$$\mathbf{F} + \mathbf{R}_A + \mathbf{R}_B = \frac{d\mathbf{p}}{dt}, \quad \mathbf{M} + \mathbf{r}_A \times \mathbf{R}_A + \mathbf{r}_B \times \mathbf{R}_B = \frac{d\mathbf{L}}{dt}, \quad (4)$$

dove i momenti delle reazioni vincolari vanno valutati rispetto ad un punto dell'asse di rotazione. Le reazioni sono a priori incognite; per la loro determinazione torneremo nel seguito.

Proiettando la seconda delle (4) sull'asse, si ottiene

$$M_a = \frac{dL_a}{dt}, \quad (5)$$

che è una equazione scalare atta a determinare il movimento rotatorio. M_a , L_a sono rispettivamente il momento assiale risultante e la componente del momento angolare secondo l'asse; i momenti delle reazioni vincolari hanno proiezione nulla.

La componente assiale del momento angolare ha una espressione particolarmente semplice. Consideriamo un elemento del corpo rigido di massa dm , distante r dall'asse, figura 1. Se $v = \omega r$ è la velocità dell'elemento, il momento angolare elementare è

$$dL_a = r v dm = r^2 \omega dm;$$

pertanto per l'intero corpo si ha

$$L_a = \omega \int_m r^2 dm, \quad L_a = I \omega,$$

dove l'espressione

$$I = \int_m r^2 dm, \quad (6)$$

definisce il *momento di inerzia* del corpo rigido rispetto all'asse di rotazione. Il momento di inerzia è una grandezza caratteristica del corpo; esso dipende dalla sua forma e dall'asse rispetto al quale viene determinato. Per definizione, è una grandezza estensiva e si misura in $\text{kg} \cdot \text{m}^2$. La (5) si può scrivere

$$M_a = I_a \frac{d\omega}{dt}, \quad (7)$$

dove $d\omega/dt$ è l'accelerazione angolare. Si colga l'analogia formale con la prima delle (1); in quest'ultima sono presenti la risultante delle forze esterne, la massa del corpo e l'accelerazione del centro di massa; nella (7) il momento assiale, il momento d'inerzia e l'accelerazione angolare.

1.3. Teorema dell'energia cinetica

Essendo l'asse di rotazione fisso, i punti di applicazione delle reazioni vincolari sono fissi e non compiono lavoro; dette $\mathbf{F}_1, \mathbf{F}_2, \dots$ le forze attive che agiscono sul corpo, il lavoro elementare di tali forze è

$$\begin{aligned} d\mathcal{L} &= \sum_i \mathbf{F}_i \cdot d\mathbf{r}_i = \sum_i \mathbf{F}_i \cdot \mathbf{v}_i dt = \sum_i \mathbf{F}_i \cdot \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_i dt \\ &= \left(\sum_i \mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_i \right) \cdot \boldsymbol{\omega} dt = \mathbf{M} \cdot \boldsymbol{\omega} dt, \end{aligned}$$

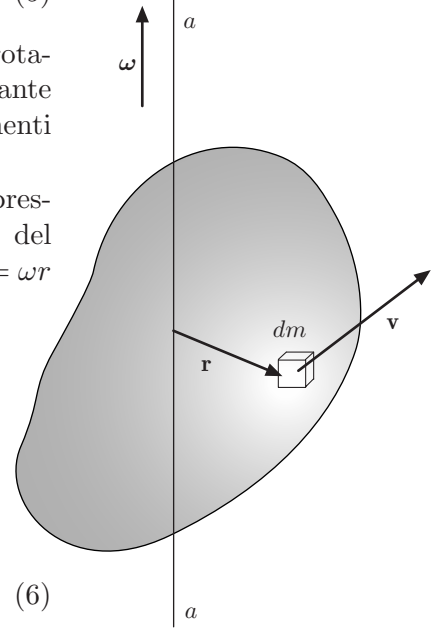


Fig. 14.1

dove \mathbf{M} è il momento risultante.

Nel caso del corpo rigido ruotante attorno ad un asse fisso, la velocità angolare è diretta lungo l'asse di rotazione, perciò il lavoro elementare risulta

$$d\mathcal{L} = M_a \omega dt = M_a d\varphi.$$

La potenza è

$$W = \frac{d\mathcal{L}}{dt} = M_a \omega.$$

Il lavoro elementare è uguale alla corrispondente variazione dell'energia cinetica, pertanto:

$$d\mathcal{L} = M_a d\varphi = dT.$$

L'espressione dell'energia cinetica è una diretta conseguenza della (7); infatti, introducendo la variabile φ , si può scrivere:

$$M_a = I_a \frac{d\omega}{d\varphi} \frac{d\varphi}{dt}, \quad \Rightarrow \quad M_a d\varphi = I_a \omega d\omega.$$

Integrando tra gli angoli di rotazione iniziale e finale, si ha

$$\mathcal{L} = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} M_a d\varphi = \frac{1}{2} I_a \omega_2^2 - \frac{1}{2} I_a \omega_1^2. \quad (8)$$

Definiamo energia cinetica del corpo rigido ruotante attorno all'asse fisso la quantità:

$$T = \frac{1}{2} I_a \omega^2.$$

Dunque il lavoro delle forze è uguale alla variazione dell'energia cinetica di rotazione del corpo. Si noti l'analogia formale con l'espressione dell'energia cinetica del punto materiale. Se le forze attive sono conservative, detta U l'energia potenziale, si ha

$$T + U = E = \text{cost},$$

che si può scrivere:

$$\frac{1}{2} I_a \omega^2 + U(\varphi) = E = \text{cost}. \quad (9)$$

Questa relazione costituisce l'integrale dell'energia e spesso può vantaggiosamente sostituire la (7) per il calcolo del movimento.

2. Calcolo dei momenti di inerzia

Il calcolo dei momenti d'inerzia di un corpo rigido, analogamente a quello del centro di massa, può essere eseguito facilmente sfruttando le simmetrie che il corpo eventualmente presenta e tenendo presente la proprietà additiva di cui esso gode.

Il momento d'inerzia di una massa puntiforme, rispetto ad un asse, è

$$I = mr^2,$$

dove r è la distanza della massa dall'asse. Il momento di inerzia di un sistema di punti materiali rispetto a un asse, è dato da

$$I = \sum_i m_i r_i^2.$$

Il momento di inerzia di un corpo di massa m rispetto a un asse, può essere espresso dalla relazione

$$I = mK^2,$$

dove K si chiama raggio giratore del corpo. Ciò significa che il corpo può essere assimilato a una massa puntiforme posta alla distanza K dall'asse.

È particolarmente utile, nel calcolo dei momenti di inerzia, il seguente teorema di Huygens.

Il momento di inerzia di un corpo rispetto ad un asse, è uguale al momento di inerzia del corpo rispetto ad un asse passante per il centro di massa, parallelo al primo, più il prodotto della massa del corpo per il quadrato della distanza tra i due assi.

Questo teorema viene chiamato anche teorema degli assi paralleli. Fissiamo una terna ortogonale con asse z passante per il centro di massa del corpo e un asse z' parallelo, di coordinate $x = a$, $y = b$, la cui distanza da z è $d = \sqrt{a^2 + b^2}$, figura 2. Supponendo che il corpo sia omogeneo e abbia densità ρ , il momento di inerzia rispetto all'asse z è

$$I_C = \rho \int_V (x^2 + y^2) dV;$$

il momento d'inerzia rispetto all'asse z' risulta:

$$\begin{aligned} I &= \rho \int_V [(x - a)^2 + (y - b)^2] dV = \rho \int_V (x^2 + y^2) dV \\ &+ (a^2 + b^2) \rho \int_V dV - 2a\rho \int_V x dV - 2b\rho \int_V y dV. \end{aligned}$$

Il primo termine al secondo membro è uguale a I_C , il secondo termine è uguale alla massa del corpo per il quadrato della distanza degli assi, il terzo ed il quarto termine sono nulli. Infatti, per la definizione di centro di massa, le quantità

$$\int_V x dV, \quad \int_V y dV,$$

sono uguali al prodotto della massa del corpo e delle coordinate x_C , y_C del centro di massa, che, per ipotesi, sono nulle. Dunque si ha

$$I = I_C + md^2. \quad (10)$$

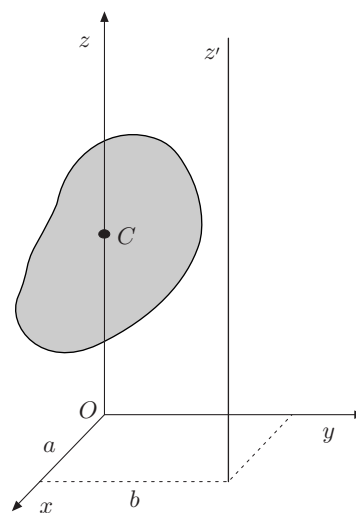


Fig. 14.2

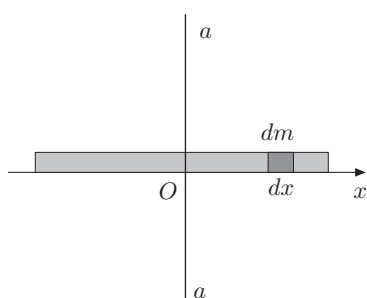


Fig. 14.3

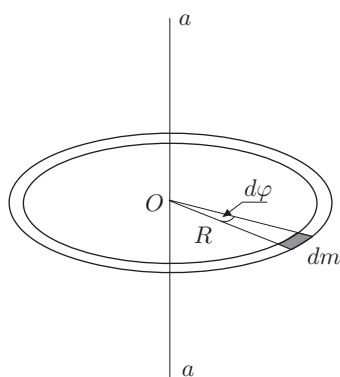


Fig. 14.4

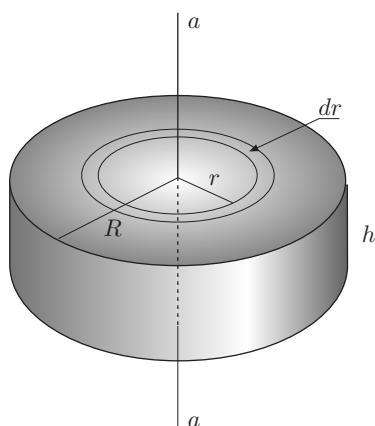


Fig. 14.5

Si noti che il risultato è indipendente dalla terna di riferimento adottata. Ecco alcuni esempi.

MOMENTO D'INERZIA DI UNA SBARRA OMOGENEA DI SEZIONE COSTANTE RISPETTO AD UN ASSE ORTOGONALE, PASSANTE PER IL CENTRO DI MASSA

Indichiamo con L la lunghezza della sbarra e fissiamo come origine delle coordinate il suo centro di massa. Poiché la sbarra è omogenea ed ha sezione costante, detta λ la sua densità lineica, la massa di un elemento di lunghezza dx posto a distanza x dall'origine è $dm = \lambda dx$, figura 3. Il momento d'inerzia di tale elemento rispetto all'asse assegnato è $dI = \lambda x^2 dx$. Sfruttando la proprietà additiva del momento d'inerzia, possiamo scrivere

$$I = 2\lambda \int_0^{L/2} x^2 dx = \lambda \frac{L^3}{12}.$$

Poiché la massa della sbarra è $m = \lambda L$, si ottiene

$$I = m \frac{L^2}{12}. \quad (11)$$

MOMENTO D'INERZIA DI UN ANELLO OMOGENEO DI SEZIONE COSTANTE RISPETTO AL SUO ASSE

Come nel caso precedente, detta λ la densità lineica dell'anello e indicando con R il suo raggio, la massa di un elemento di lunghezza dl è $dm = \lambda dl = \lambda R d\varphi$, figura 4. Il momento d'inerzia elementare è

$$dI = R^2 dm = \lambda R^3 d\varphi;$$

integrando, si ottiene

$$I = \lambda R^3 \int_0^{2\pi} d\varphi = 2\pi \lambda R^3 = m R^2, \quad (12)$$

essendo $m = 2\pi \lambda R$ la massa dell'anello.

MOMENTO D'INERZIA DI UN DISCO OMOGENEO, O DI UN CILINDRO, RISPETTO AL SUO ASSE

Sia R il raggio del disco ed h l'altezza; dividiamo il disco in anelli elementari concentrici di raggio r e spessore dr , figura 5. Se $dV = 2\pi h r dr$ è il volume di un anello elementare, detta ρ la densità del disco, la sua massa è $dm = 2\pi \rho h r dr$. Il momento d'inerzia elementare risulta

$$dI = 2\pi \rho h r^3 dr,$$

e il momento d'inerzia totale:

$$I = 2\pi \rho h \int_0^R r^3 dr = 2\pi \rho h \frac{R^4}{4} = \frac{1}{2} m R^2. \quad (13)$$

essendo $m = \pi \rho R^2 h$ la massa del disco.

MOMENTO D'INERZIA DI UNA SFERA OMOGENEA RISPETTO AD UN ASSE PASSANTE PER IL CENTRO

Suddividiamo la sfera in dischi di spessore dz normali all'asse che indichiamo z , figura 6. Il momento d'inerzia elementare del generico disco è

$$dI = \frac{1}{2}r^2 dm,$$

dove r è il raggio del disco e $dm = \rho\pi r^2 dz$ la sua massa, dunque

$$dI = \frac{1}{2}\rho\pi r^4 dz.$$

Se R è il raggio della sfera, si ha $r^2 + z^2 = R^2$; pertanto

$$r^4 = R^4 - 2R^2 z^2 + z^4.$$

Il momento d'inerzia elementare risulta

$$dI = \frac{1}{2}\rho\pi(R^4 - 2R^2 z^2 + z^4)dz;$$

integrando tra i limiti $-R, +R$, si ottiene

$$I = \int_{-R}^{+R} dI = \frac{1}{2}\rho\pi \left[R^4 z - \frac{2}{3}R^2 z^3 + \frac{1}{5}z^5 \right]_{-R}^{+R} = \frac{8}{15}\rho\pi R^5.$$

Ma la massa della sfera è

$$m = \frac{4}{3}\pi\rho R^3,$$

pertanto si ottiene

$$I = \frac{2}{5}mR^2. \quad (14)$$

Gli esempi riportati indicano possibili metodi per il calcolo dei momenti di inerzia. Il teorema di Huygens inoltre permette di determinare il momento di inerzia rispetto ad un qualunque asse parallelo ad un asse passante per il centro di massa. Le considerazioni che seguono vengono svolte in dettaglio in Meccanica Razionale; tuttavia, per comprendere le straordinarie proprietà dei corpi rigidi in rotazione, è opportuno esporre alcuni concetti essenziali.

III 3. Momento d'inerzia di un corpo omogeneo rispetto ad assi concorrenti in un punto prefissato

Fissiamo un punto O , origine di una terna cartesiana ortogonale solidale col corpo rigido, ed un generico asse di versore $\hat{\mathbf{u}}$ passante per esso. Detta $d = |\mathbf{r} \times \hat{\mathbf{u}}|$ la distanza da tale asse dell'elemento generico del corpo, di massa $dm = \rho dV$, figura 7, il momento di inerzia è espresso da

$$I = \rho \int_V |\mathbf{r} \times \hat{\mathbf{u}}|^2 dV.$$

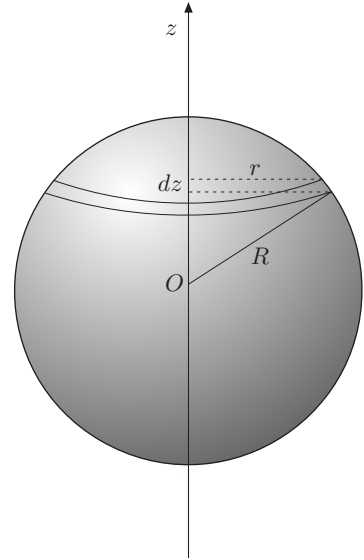


Fig. 14.6

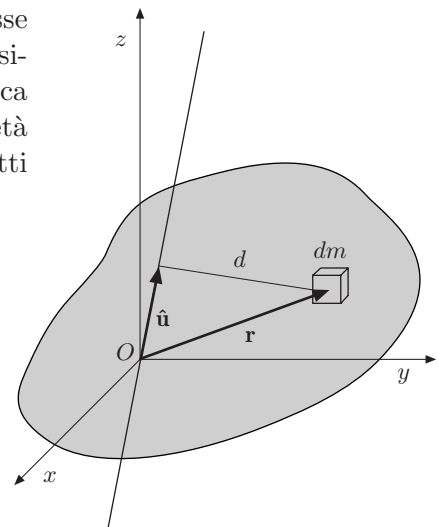


Fig. 14.7

Indicando, per brevità, con α , β e γ i coseni direttori dell'asse, componenti secondo gli assi della terna del versore $\hat{\mathbf{u}}$, si ha

$$\mathbf{r} \times \hat{\mathbf{u}} = \begin{pmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ x & y & z \\ \alpha & \beta & \gamma \end{pmatrix}.$$

Pertanto

$$\begin{aligned} |\mathbf{r} \times \hat{\mathbf{u}}|^2 &= (y\gamma - z\beta)^2 + (z\alpha - x\gamma)^2 + (x\beta - y\alpha)^2 \\ &= \alpha^2(y^2 + z^2) + \beta^2(x^2 + z^2) + \gamma^2(x^2 + y^2) \\ &\quad - 2\alpha\beta xy - 2\alpha\gamma xz - 2\beta\gamma yz. \end{aligned}$$

Il momento d'inerzia risulta

$$\begin{aligned} I &= \alpha^2 \rho \int_V (y^2 + z^2) dV + \beta^2 \rho \int_V (x^2 + z^2) dV + \gamma^2 \rho \int_V (x^2 + y^2) dV \\ &\quad - 2\alpha\beta \rho \int_V xy dV - 2\alpha\gamma \rho \int_V xz dV - 2\beta\gamma \rho \int_V yz dV. \end{aligned}$$

che scriviamo

$$I = I_{xx}\alpha^2 + I_{yy}\beta^2 + I_{zz}\gamma^2 + 2I_{xy}\alpha\beta + 2I_{xz}\alpha\gamma + 2I_{yz}\beta\gamma. \quad (15)$$

Nella relazione precedente si è indicato con

$$I_{xx} = \rho \int_V (y^2 + z^2) dV, \quad I_{yy} = \rho \int_V (x^2 + z^2) dV, \quad I_{zz} = \rho \int_V (x^2 + y^2) dV,$$

i momenti d'inerzia rispetto agli assi x , y e z , e con

$$I_{xy} = -\rho \int_V xy dV, \quad I_{xz} = -\rho \int_V xz dV, \quad I_{yz} = -\rho \int_V yz dV,$$

i *prodotti d'inerzia*.

Consideriamo l'ellissoide con centro nell'origine O della terna, di equazione

$$I_{xx}x^2 + I_{yy}y^2 + I_{zz}z^2 + 2I_{xy}xy + 2I_{xz}xz + 2I_{yz}yz = 1. \quad (16)$$

Questo ellissoide si chiama ellissoide d'inerzia e gode della seguente proprietà. Un punto P dell'ellissoide, individuato dal vettore $(P - O)$, ha coordinate

$$x = \alpha|P - O|, \quad y = \beta|P - O|, \quad z = \gamma|P - O|;$$

sostituendo questi valori nella (16), si ottiene

$$\frac{1}{(P - O)^2} = I_{xx}\alpha^2 + I_{yy}\beta^2 + I_{zz}\gamma^2 + 2I_{xy}\alpha\beta + 2I_{xz}\alpha\gamma + 2I_{yz}\beta\gamma.$$

Confrontando con la (15), si ha

$$I = \frac{1}{(P - O)^2}.$$

Questa equazione, noto l'ellissoide d'inerzia ed il punto P intersecato dall'asse passante per O , permette di ricavare il momento d'inerzia del corpo rispetto a quell'asse.

Se gli assi della terna, coincidono con gli assi dell'ellissoide, come noto dalla Geometria, risultano nulli i prodotti d'inerzia. Tali assi, tra loro ortogonali, si chiamano *assi principali d'inerzia*; i momenti d'inerzia rispetto a questi assi, *momenti principali d'inerzia*. In tal caso l'equazione dell'ellissoide diventa

$$I_{xx}x^2 + I_{yy}y^2 + I_{zz}z^2 = 1, \quad (17)$$

e la (15):

$$I_{xx}\alpha^2 + I_{yy}\beta^2 + I_{zz}\gamma^2 = 1, \quad (18)$$

La ricerca degli assi principali d'inerzia si effettua diagonalizzando la matrice dei coefficienti dell'ellissoide d'inerzia. Si osservi che se esistono assi di simmetria materiale del corpo, tali assi sono principali d'inerzia. In particolare può esistere una *terna di assi di simmetria materiale*, che, se il corpo è omogeneo, è una terna di simmetria geometrica; allora tale terna ha origine nel centro di massa; i momenti principali d'inerzia si dicono *momenti baricentrali d'inerzia*. Per esempio, gli assi di simmetria di un parallelepipedo rettangolo, di un cilindro rotondo, omogenei, costituiscono assi principali e baricentrali di inerzia. Si capisce subito che riferendoci agli assi di simmetria, e scambiando y in $-y$, oppure x in $-x$, che sono coordinate di elementi simmetrici, i prodotti d'inerzia sono nulli.

Complementi

1. Assi principali di una quadrica.

Assegnata la quadrica

$$x^2 + 6xy - 2y^2 - 2yz + z^2 = 24;$$

sotto forma di matrice, si ha

$$\begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 3 & -2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 24.$$

Gli autovalori di questa matrice sono dati da

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 3 & 0 \\ 3 & -2-\lambda & -1 \\ 0 & -1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = -\lambda^3 + 13\lambda - 12 \\ = -(\lambda-1)(\lambda+4)(\lambda+3).$$

Quindi:

$$\lambda_1 = 1, \quad \lambda_2 = -4, \quad \lambda_3 = 3.$$

La quadrica, rispetto agli assi principali, ha equazione:

$$\begin{pmatrix} X & Y & Z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} = 24,$$

ossia:

$$X^2 - 4Y^2 + 3Z^2 = 24.$$

Se si vogliono trovare le relazioni tra i due riferimenti x, y, z , X, Y, Z , occorre trovare la matrice C , esempio 9-X, le cui colonne sono costituite dalle componenti degli autovettori unitari.

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 3 & -2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda x \\ \lambda y \\ \lambda z \end{pmatrix}.$$

Ponendo nell'equazione precedente, $\lambda_1 = 1$, poi $\lambda_2 = -4$ e infine $\lambda_3 = 3$, come nell'esempio citato, le componenti degli autovettori unitari risultano:

$$\frac{1}{\sqrt{10}}, \quad 0, \quad \frac{3}{\sqrt{10}}, \quad -\frac{3}{\sqrt{35}}, \quad \frac{5}{\sqrt{35}}, \quad \frac{1}{\sqrt{35}}, \quad \frac{3}{\sqrt{14}}, \quad \frac{2}{\sqrt{14}}, \quad -\frac{1}{\sqrt{14}}.$$

Dunque la matrice rotazione risulta:

$$C = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{10} & 3/\sqrt{35} & 3/\sqrt{14} \\ 0 & 5/\sqrt{35} & 2/\sqrt{14} \\ 3/\sqrt{10} & 1/\sqrt{35} & -1/\sqrt{14} \end{pmatrix}.$$

Gli elementi della matrice costituiscono i nove coseni direttori tra gli assi X, Y, Z e x, y, z .

I momenti principali d'inerzia godono della seguente proprietà: la loro somma è isotropa rispetto all'origine delle coordinate. Infatti

$$\begin{aligned} I_{xx} + I_{yy} + I_{zz} &= \rho \int_V [(y^2 + z^2) + (x^2 + z^2) + (x^2 + y^2)] dV \\ &= 2\rho \int_V (x^2 + y^2 + z^2) dV = 2\rho \int_V r^2 dV. \end{aligned} \quad (19)$$

Questo risultato offre notevoli vantaggi se il corpo presenta particolari simmetrie. Per esempio, nel caso della sfera è $I_{xx} = I_{yy} = I_{zz}$, perciò, indicando con I il suo momento d'inerzia, si ha

$$3I = 2\rho \int_V r^2 dV, \quad I = \frac{2}{3}\rho \int_V r^2 dV.$$

Suddividendo la sfera in gusci sferici concentrici di spessore dr , è $dV = 4\pi r^2 dr$. Pertanto

$$I = \frac{2}{3}4\pi\rho \int_0^R r^4 dr = \frac{2}{3}4\pi\rho \frac{R^5}{5}.$$

ed essendo

$$\rho = \frac{m}{4\pi R^3/3},$$

dove m è la massa della sfera, si ottiene

$$I = \frac{2}{5}mR^2,$$

come si è trovato prima.

Per i corpi omogenei e simmetrici, che si estendono nel piano x - y , dischi, lamine, ecc..., assunti gli assi di simmetria come assi della terna, si ottengono le seguenti relazioni

$$I_{xx} = \sigma \int_S y^2 dxdy, \quad I_{yy} = \sigma \int_S x^2 dxdy, \quad I_{zz} = \sigma \int_S (x^2 + y^2) dxdy,$$

dove σ è la densità areica di massa. Risulta immediatamente

$$I_{zz} = I_{xx} + I_{yy}. \quad (20)$$

Esempi

- ||| 2. *Momento d'inerzia di un disco rispetto a un suo diametro.*

Poiché è $I_{zz} = mR^2/2$, ed essendo $I_{xx} = I_{yy}$ per ogni diametro, risulta

$$2I = I_{zz} = \frac{1}{2}mR^2, \quad I = \frac{1}{4}mR^2.$$

- ||| 3. *Momento d'inerzia di un guscio sferico di raggio R , rispetto a un asse passante per il centro.*

È $I_{xx} = I_{yy} = I_{zz}$. Dalla (19), si ha

$$3I = 2\sigma R^2 \int_S dS = 8\sigma\pi R^4, \quad I = \frac{8}{3}\pi\sigma R^4,$$

ed essendo $\sigma = m/(4\pi R^2)$, si ottiene

$$I = \frac{2}{3}mR^2.$$

Da questa espressione si può ricavare ancora il momento d'inerzia della sfera, ritenendola suddivisa in gusci sferici concentrici, ciascuno di momento d'inerzia elementare $2dmr^2/3$, e integrando tra 0 e R . Si lascia al lettore la verifica.

- ||| 4. Determinare i momenti principali di inerzia, i momenti d'inerzia rispetto ai lati e alle diagonali, di una piastra rettangolare omogenea di densità areica σ , lati a e b , figura 8.

Fissato un riferimento con origine nel centro di massa e assi x - y paralleli ai lati, tenendo presente la (20), si ha:

$$I_{xx} = \sigma \int_{-b/2}^{+b/2} y^2 a dy = \sigma a \frac{b^3}{12} = m \frac{b^2}{12}$$

$$I_{yy} = \sigma \int_{-a/2}^{+a/2} x^2 b dx = \sigma b \frac{a^3}{12} = m \frac{a^2}{12}$$

$$I_{zz} = I_{xx} + I_{yy} = m \frac{a^2 + b^2}{12}.$$

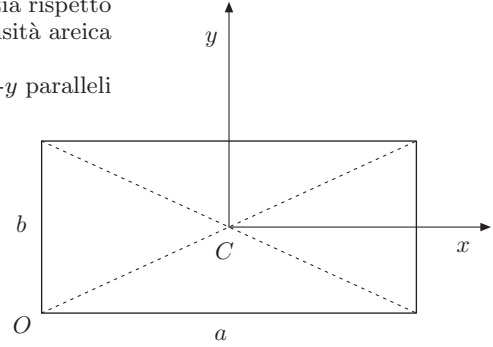


Fig. 14.8

Il momento d'inerzia rispetto alla diagonale di coseni direttori

$$\alpha = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}, \quad \beta = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}, \quad \gamma = 0,$$

per la (18), è

$$I = I_{xx}\alpha^2 + I_{yy}\beta^2 + I_{zz}\gamma^2 = \frac{1}{6}m \frac{a^2b^2}{a^2 + b^2}.$$

Assumiamo ora un riferimento con origine nel vertice O e assi, x coincidente col lato a , y con b e z ortogonale a questi, i momenti d'inerzia rispetto a tali assi, per il teorema degli assi paralleli, sono:

$$I'_{xx} = I_{xx} + m \frac{b^2}{4} = m \frac{b^2}{3}$$

$$I'_{yy} = I_{yy} + m \frac{a^2}{4} = m \frac{a^2}{3}$$

$$I'_{zz} = I_{zz} + m \frac{a^2 + b^2}{4} = m \frac{a^2 + b^2}{3}.$$

I prodotti d'inerzia risultano

$$I_{xz} = 0, \quad I_{yz} = 0, \quad I_{yx} = -\sigma \int_0^b y dy \int_0^a x dx = -m \frac{ab}{4}.$$

Noti questi elementi si può anche scrivere l'equazione dell'ellissoide d'inerzia (16), relativo al vertice O .

- ||| 5. Determinare i tre momenti principali d'inerzia di una lamina triangolare omogenea isoscele di massa m , relativi al vertice O dove concorrono i lati uguali.

Gli assi principali d'inerzia, nel piano della lamina, sono l'asse y di simmetria, l'asse x ortogonale a y , passanti per O e l'asse z ortogonale ai precedenti. Indichiamo con σ la densità areica, con a la lunghezza del lato opposto ad O e con h la corrispondente altezza. Per calcolare il momento principale d'inerzia rispetto all'asse x , suddividiamo il triangolo in tanti elementi paralleli a detto asse, di spessore dy , figura 9; risulta:

$$I_{xx} = \sigma \int_S y^2 dS = \sigma \int_0^h y^2 x dy;$$

ma $x = ya/h$, dunque

$$I_{xx} = \sigma \frac{a}{h} \int_0^h y^3 dy = \sigma a \frac{h^3}{4} = \frac{1}{2} m h^2.$$

In maniera analoga si procede per il calcolo di I_{yy} ; suddividiamo il triangolo in elementi paralleli all'asse y di spessore dx , figura 9; si ha

$$I_{yy} = \sigma \int_S x^2 dS = 2\sigma \int_0^{a/2} x^2 (h - y) dx;$$

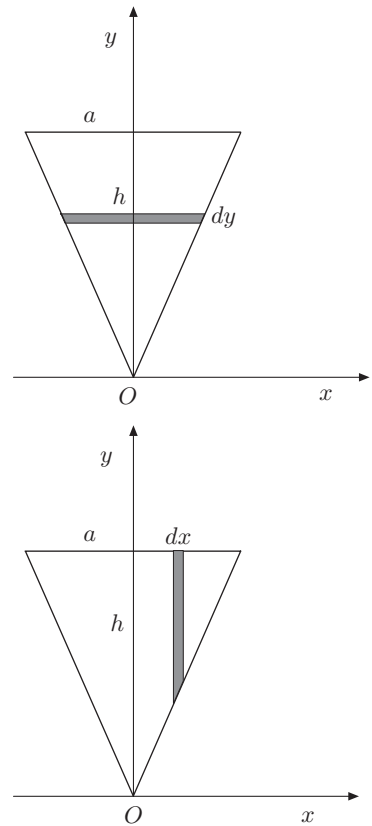


Fig. 14.9

ma $h - y = h - 2hx/a$, pertanto:

$$I_{yy} = 2\sigma \int_0^{a/2} \left(hx^2 - 2\frac{h}{a}x^3 \right) dx = \frac{1}{48}\sigma ha^3 = \frac{1}{24}ma^2.$$

Si ha inoltre:

$$I_{zz} = I_{xx} + I_{yy} = m \left(\frac{h^2}{2} + \frac{a^2}{24} \right).$$

Si verifica immediatamente che i prodotti d'inerzia rispetto agli assi x , y sono nulli; dunque gli assi prescelti sono assi principali d'inerzia.

4. Momento angolare di un corpo rigido omogeneo

Determiniamo ora il momento angolare di un corpo rigido omogeneo rispetto ad un asse passante per un polo O , origine del riferimento con esso solidale. Detta ρ la densità del corpo ed \mathbf{r} il vettore che individua la posizione dell'elemento di massa dm , si ha

$$\mathbf{L} = \rho \int_V \mathbf{r} \times \mathbf{v} dV = \rho \int_V \mathbf{r} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}) dV. \quad (21)$$

Poiché $\mathbf{v} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}$, è

$$v_x = \omega_y z - \omega_z y, \quad v_y = \omega_z x - \omega_x z, \quad v_z = \omega_x y - \omega_y x;$$

dunque

$$\mathbf{r} \times \mathbf{v} = \begin{pmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ x & y & z \\ \omega_y z - \omega_z y & \omega_z x - \omega_x z & \omega_x y - \omega_y x \end{pmatrix}.$$

Tenendo presente la (15), si deducono le componenti del momento angolare. Per la componente L_x si ottiene

$$\begin{aligned} L_x &= \rho \int_V [(y^2 + z^2)\omega_x - xy\omega_y - xz\omega_z] dV \\ &= I_{xx}\omega_x + I_{xy}\omega_y + I_{xz}\omega_z. \end{aligned}$$

Analogamente per le altre.

Complessivamente si ha

$$\begin{aligned} L_x &= I_{xx}\omega_x + I_{xy}\omega_y + I_{xz}\omega_z \\ L_y &= I_{yz}\omega_x + I_{yy}\omega_y + I_{yz}\omega_z \\ L_z &= I_{zx}\omega_x + I_{zy}\omega_y + I_{zz}\omega_z. \end{aligned} \quad (22)$$

La matrice dei coefficienti del sistema precedente è simmetrica, e si chiama matrice d'inerzia. Gli elementi diagonali sono i momenti principali d'inerzia; quelli non diagonali, i prodotti d'inerzia, definiti nel paragrafo precedente. Il momento angolare del corpo rigido è dunque dato dall'espressione

$$\mathbf{L} = L_x \mathbf{i} + L_y \mathbf{j} + L_z \mathbf{k}. \quad (23)$$

Ebbene, si deduce immediatamente che, in generale, il momento angolare non è parallelo ad $\boldsymbol{\omega}$; a meno che il corpo non ruoti attorno a uno degli assi principali d'inerzia. Per questo motivo, tali assi si chiamano anche *assi spontanei di rotazione*. Per esempio, se un parallelepipedo rettangolo ruota attorno ad un asse di simmetria, $\mathbf{L} \parallel \boldsymbol{\omega}$; la rotazione avverrà di preferenza attorno all'asse per il quale I_{xx} , I_{yy} oppure I_{zz} è più elevato. Una sfera ha $I_{xx} = I_{yy} = I_{zz}$; il momento angolare rispetto a qualunque asse, passante per il centro, è parallelo alla velocità angolare.

5. Energia cinetica

L'energia cinetica di rotazione di un corpo rigido omogeneo, attorno ad un asse passante per l'origine O del riferimento con esso solidale, con la solita notazione, è data da

$$T = \frac{1}{2} \rho \int_V \mathbf{v} \cdot \mathbf{v} dV.$$

Essendo

$$\begin{aligned} \mathbf{v} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r} &= \begin{pmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \omega_x & \omega_y & \omega_z \\ x & y & z \end{pmatrix} \\ &= (\omega_y z - \omega_z y) \mathbf{i} + (\omega_z x - \omega_x z) \mathbf{j} + (\omega_x y - \omega_y x) \mathbf{k}, \end{aligned}$$

si ha

$$\mathbf{v} \cdot \mathbf{v} = (\omega_y z - \omega_z y)^2 + (\omega_z x - \omega_x z)^2 + (\omega_x y - \omega_y x)^2.$$

Pertanto si ottiene

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2} I_{xx} \omega_x^2 + \frac{1}{2} I_{yy} \omega_y^2 + \frac{1}{2} I_{zz} \omega_z^2 \\ &\quad + I_{xy} \omega_x \omega_y + I_{xz} \omega_x \omega_z + I_{yz} \omega_y \omega_z. \end{aligned} \quad (24)$$

Con considerazioni analoghe a quelle fatte per il momento angolare, si deduce che, se gli assi del riferimento coincidono con gli assi principali d'inerzia, i prodotti d'inerzia sono nulli. Inoltre se il corpo ruota attorno ad uno di tali assi, sopravvive un solo termine della (24).

In generale, l'energia cinetica di rotazione si può scrivere

$$T = \frac{1}{2} \boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{L}. \quad (25)$$

Per un corpo rigido libero, l'atto di moto è rototraslatorio; se assumiamo il centro di massa come origine del riferimento solidale col corpo, e gli assi di tale riferimento coincidenti con gli assi principali d'inerzia, l'energia cinetica, per il teorema di König, è

$$T = \frac{1}{2} m v_C^2 + \frac{1}{2} (I_{xx} \omega_x^2 + I_{yy} \omega_y^2 + I_{zz} \omega_z^2). \quad (26)$$

Inoltre, detta \mathbf{F} la risultante delle forze e \mathbf{M}_C il momento risultante, rispetto al centro di massa, la potenza è data da

$$W = \mathbf{F} \cdot \mathbf{v} + \mathbf{M}_C \cdot \boldsymbol{\omega}. \quad (27)$$

Se il moto del corpo rigido è piano, la velocità angolare è sempre ortogonale al piano direttore; allora detto I_C il momento d'inerzia rispetto all'asse passante per il centro di massa e ortogonale al piano direttore, la (26) diventa

$$T = \frac{1}{2} m v_C^2 + \frac{1}{2} I_C \omega^2. \quad (28)$$

È importante osservare che, mentre per un sistema generico il teorema dell'energia cinetica è indipendente dalle equazioni che esprimono il teorema della quantità di moto e il teorema del momento angolare, nel caso del corpo rigido le (26) e (27) sono una diretta conseguenza delle equazioni (1). Infatti moltiplicando scalarmente la prima delle (1) per \mathbf{v}_C , la seconda per $\boldsymbol{\omega}$ e sommando, si ha

$$W = \frac{d\mathbf{p}}{dt} \cdot \mathbf{v}_C + \frac{d\mathbf{L}}{dt} \cdot \boldsymbol{\omega}.$$

Ricordando che $\mathbf{p} = m\mathbf{v}_C$, si ha

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} \cdot \mathbf{v}_C = \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} m v_C^2 \right).$$

Inoltre essendo

$$\mathbf{L} = I_{xx} \omega_x \mathbf{i} + I_{yy} \omega_y \mathbf{j} + I_{zz} \omega_z \mathbf{k}.$$

e tenendo presente, nella derivazione rispetto al tempo, le formule di Poisson, si deduce:

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{L}}{dt} &= I_{xx} \dot{\omega}_x \mathbf{i} + I_{yy} \dot{\omega}_y \mathbf{j} + I_{zz} \dot{\omega}_z \mathbf{k} \\ &+ I_{xx} \omega_x \frac{d\mathbf{i}}{dt} + I_{yy} \omega_y \frac{d\mathbf{j}}{dt} + I_{zz} \omega_z \frac{d\mathbf{k}}{dt} \\ &= I_{xx} \dot{\omega}_x \mathbf{i} + I_{yy} \dot{\omega}_y \mathbf{j} + I_{zz} \dot{\omega}_z \mathbf{k} \\ &+ \boldsymbol{\omega} \times (I_{xx} \omega_x \mathbf{i} + I_{yy} \omega_y \mathbf{j} + I_{zz} \omega_z \mathbf{k}). \end{aligned}$$

Pertanto:

$$\frac{d\mathbf{L}}{dt} \cdot \boldsymbol{\omega} = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} (I_{xx} \omega_x^2 + I_{yy} \omega_y^2 + I_{zz} \omega_z^2).$$

Complementi ed esempi

6. Due sfere A e B identiche sono fissate agli estremi di una sbarretta, di massa trascurabile, solidale con un'asta verticale, passante per il suo centro O . L'asta forma con la sbarretta un angolo θ e ruota con velocità angolare costante mediante due supporti, privi di attrito, disposti ai suoi estremi, figura 10. Determinare il momento angolare del sistema.

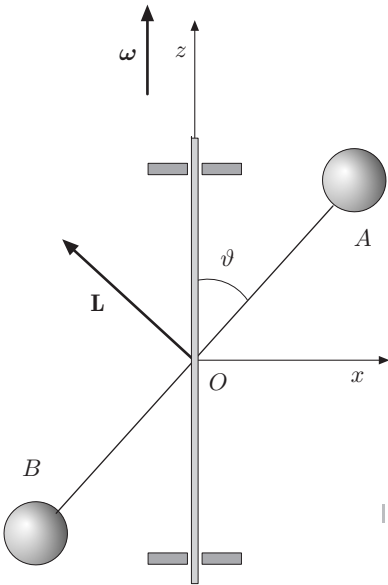


Fig. 14.10

Detta $2l$ la lunghezza della sbarretta e ω la velocità angolare, la velocità di rotazione delle sfere è $\omega l \sin \theta$. Il momento angolare delle sfere, rispetto ad O , è in modulo $L = 2ml^2 \omega \sin \theta$, costante. Poiché l'asse di rotazione non è un asse di simmetria del sistema, il vettore \mathbf{L} forma con $\boldsymbol{\omega}$ un angolo $\beta = \pi/2 - \theta$. Esso ruota o *precede* attorno all'asse di rotazione con la stessa velocità angolare del sistema. La componente di \mathbf{L} secondo questo asse è

$$L_a = L \cos \left(\frac{\pi}{2} - \theta \right) = 2ml^2 \omega \sin^2 \theta = I_a \omega.$$

dove $I_a = 2ml^2 \sin^2 \theta$ è il momento d'inerzia del sistema rispetto all'asse.

Il vettore momento angolare non è costante poiché cambia continuamente di direzione. Si deve concludere che, per la seconda delle (1), sul sistema deve agire un momento esterno. Tale momento è quello delle reazioni vincolari \mathbf{R}_1 , \mathbf{R}_2 esercitate dai supporti. Il modulo del momento, figura 11, è dato da

$$M = \left| \frac{d\mathbf{L}}{dt} \right| = \frac{d\varphi L \sin \theta}{dt} = \omega L \sin \beta,$$

dove $d\varphi$ è l'angolo infinitesimo di precessione che, in questo caso è anche l'angolo di rotazione del sistema.

Si osservi che il momento delle reazioni vincolari cambia continuamente di direzione come \mathbf{L} . Tuttavia \mathbf{M} è sempre ortogonale al piano definito da $\boldsymbol{\omega}$ e \mathbf{L} . Le reazioni vincolari, se il sistema ruotante non è perfettamente bilanciato, esercitano sempre un momento. Infatti l'asse di rotazione non è un asse di simmetria; velocità angolare e momento angolare non sono allineati.

Diamo ora una soluzione del problema conforme a quanto esposto nel paragrafo 4. Assumiamo un riferimento, solidale con la sbarretta, che abbia origine nel centro di massa O , asse x coincidente con quest'ultima e asse z ortogonale ad essa, figura 12. Le componenti della velocità angolare, in tale riferimento, sono

$$\omega_x = \omega \cos \theta, \quad \omega_y = 0, \quad \omega_z = \omega \sin \theta.$$

Poiché gli assi del riferimento sono assi di simmetria, i prodotti di inerzia, come si può facilmente verificare, sono nulli; mentre i momenti principali d'inerzia risultano:

$$I_{xx} = 0, \quad I_{yy} = 2m(x^2 + z^2) = 2ml^2, \quad I_{zz} = 2m(x^2 + y^2) = 2ml^2.$$

Pertanto, per le (22) e (23) si ottiene

$$\mathbf{L} = 2ml^2 \omega \sin \theta \mathbf{k}.$$

Il momento esercitato dalle reazioni vincolari, rispetto ad un osservatore inerziale, è

$$\mathbf{M} = \frac{d\mathbf{L}}{dt} = 2ml^2 \omega \sin \theta \frac{d\mathbf{k}}{dt},$$

che, per le formule di Poisson, si scrive

$$\mathbf{M} = 2ml^2 \omega \sin \theta \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{k}.$$

Il momento è un vettore ortogonale al piano definito da $\boldsymbol{\omega}$ e \mathbf{k} ; il suo modulo è

$$M = 2ml^2 \omega^2 \sin \theta \sin \beta = \omega L \sin \beta,$$

come si è trovato prima.

Se si assume un riferimento con asse z coincidente con l'asse di rotazione, come in figura 10, dette

$$x_A = l \sin \theta, \quad z_A = l \cos \theta; \quad x_B = -l \sin \theta, \quad z_B = -l \cos \theta,$$

le coordinate delle sfere, i momenti principali d'inerzia risultano:

$$I_{xx} = 2m(y^2 + z^2) = 2ml^2 \cos^2 \theta$$

$$I_{yy} = 2m(x^2 + z^2) = 2m(l^2 \sin^2 \theta + l^2 \cos^2 \theta) = 2ml^2$$

$$I_{zz} = 2m(x^2 + y^2) = 2ml^2 \sin^2 \theta,$$

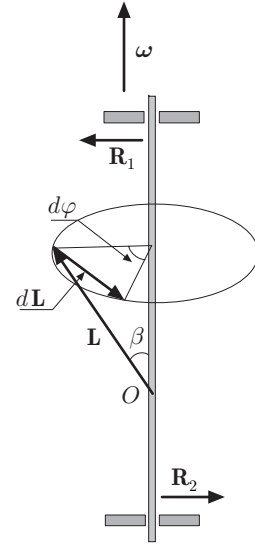


Fig. 14.11

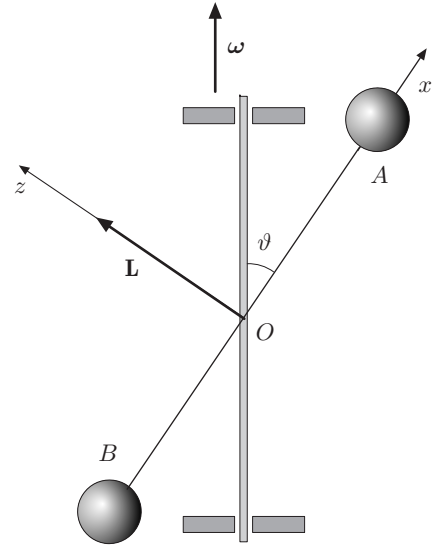


Fig. 14.12

e i prodotti d'inerzia:

$$I_{xy} = 0, \quad I_{xz} = -mx_A z_A - mx_B y_B = -2ml^2 \sin \theta \cos \theta, \quad I_{yz} = 0.$$

Poiché

$$\omega_x = 0, \quad \omega_y = 0, \quad \omega_z = \omega,$$

dalle (22) e (23), si ottiene

$$\mathbf{L} = -2ml^2 \omega \sin \theta \cos \theta \mathbf{i} + 2ml^2 \omega \sin^2 \theta \mathbf{k}.$$

Il modulo di \mathbf{L} è

$$L = 2ml^2 \omega \sin \theta,$$

come si è già trovato. Si constata dunque che se gli assi del riferimento non coincidono con gli assi di simmetria del sistema, i calcoli risultano più complessi.

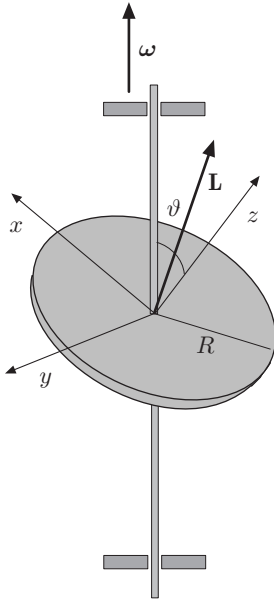


Fig. 14.13

- ||| 7. Un disco omogeneo, di massa m e raggio R , è sostenuto da un'asta passante per il centro O , in modo da formare un angolo θ con l'asse z della terna cartesiana ortogonale con esso solidale. L'asta, disposta verticalmente, ruota con velocità angolare costante mediante due supporti, privi di attrito, disposti agli estremi, figura 13. Gli assi di simmetria del disco sono l'asse z e due qualsiasi assi x e y , giacenti nel piano del disco. Determinare il momento angolare del sistema.

Il problema è analogo al precedente. Scegliendo gli assi x e y in modo che le componenti della velocità angolare, parallela all'asse di rotazione, si ha:

$$\omega_x = \omega \sin \theta, \quad \omega_y = 0, \quad \omega_z = \omega \cos \theta.$$

Detti:

$$I_{zz} = \frac{1}{2}mR^2, \quad I_{xx} = I_{yy} = \frac{1}{4}mR^2,$$

i momenti principali d'inerzia del disco, il momento angolare espresso da

$$\mathbf{L} = I_{xx} \omega_x \mathbf{i} + I_{yy} \omega_y \mathbf{j} + I_{zz} \omega_z \mathbf{k},$$

risulta:

$$\mathbf{L} = \frac{1}{2}mR^2 \omega \left(\frac{1}{2} \sin \theta \mathbf{i} + \cos \theta \mathbf{k} \right).$$

Il suo modulo è

$$L = \sqrt{L_x^2 + L_y^2 + L_z^2} = \frac{1}{4}m^2 R^2 \omega \sqrt{1 + 3 \cos^2 \theta}.$$

Si noti che il momento angolare del disco ha componenti lungo l'asse x e lungo l'asse z del riferimento con esso solidale; esso non ha direzione costante e precede con la velocità angolare del sistema. I supporti esercitano le reazioni vincolari il cui momento è responsabile della precessione, come si è visto nell'esempio precedente.

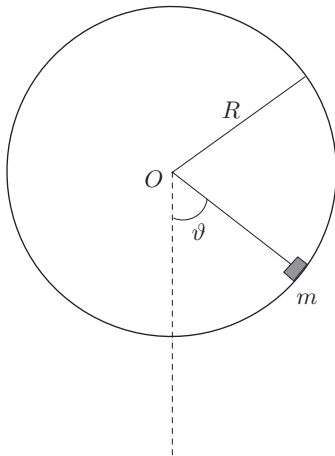


Fig. 14.14

- ||| 8. Un disco omogeneo può ruotare attorno al suo asse, disposto orizzontalmente; al bordo è fissata una massa m puntiforme che, in condizioni di equilibrio, si trova lungo la verticale. Studiare il moto del sistema quando viene perturbato dalla posizione di equilibrio.

Nella posizione di equilibrio la massa m si trova lungo la verticale passante per O , traccia dell'asse di rotazione, figura 14. Nella posizione perturbata il raggio del disco, passante per m forma un angolo θ con la verticale. Detta M la massa del disco e R il suo raggio, l'unica equazione atta a individuare il moto è la (7):

$$M_a = I_a \frac{d\omega}{dt},$$

dove M_a , I_a sono il momento della forza peso e il momento d'inerzia del sistema rispetto all'asse. Il momento della reazione vincolare, rispetto all'asse è nullo. La precedente diventa

$$-mgR \sin \theta = I_a \frac{d^2 \theta}{dt^2}, \quad I_a \frac{d^2 \theta}{dt^2} + mgR \sin \theta = 0,$$

in cui il momento d'inerzia del sistema è

$$I_a = \frac{1}{2}MR^2 + mR^2.$$

L'equazione ottenuta è analoga a quella del pendolo, e per piccoli spostamenti angolari si può scrivere

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{mgR}{I_a} \theta = 0.$$

Il sistema oscilla attorno alla posizione di equilibrio con pulsazione

$$\omega = \sqrt{\frac{mgR}{I_a}}.$$

9. Pendolo composto.

Il sistema dell'esempio precedente costituisce un pendolo composto. In generale, un corpo rigido girevole attorno a un asse fisso orizzontale, non passante per il centro di massa e soggetto, oltre che alla reazione vincolare esercitata dall'asse, al solo peso, è un pendolo composto, figura 15. L'unica equazione scalare atta a determinarne il moto è la (7):

$$M = I \frac{d\omega}{dt},$$

dove M ed I sono rispettivamente il momento della forza peso e il momento d'inerzia del corpo rispetto all'asse di rotazione. Detta d la distanza del centro di massa dall'asse di rotazione, dalla precedente si ha

$$-mgd \sin \theta = I \frac{d^2\theta}{dt^2}, \quad \frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{mgd}{I} \sin \theta = 0.$$

Se θ è tale che $\sin \theta \approx \theta$, la precedente è l'equazione di un pendolo semplice, in cui

$$\omega^2 = \frac{mgd}{I},$$

che oscilla con periodo

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{I}{mgd}} = 2\pi \sqrt{\frac{l_e}{g}},$$

dove con $l_e = I/md$ si è indicata la *lunghezza equivalente* del pendolo composto; ossia la lunghezza di un pendolo semplice di ugual periodo.

Un sistema siffatto gode delle seguenti proprietà. Osserviamo che, per il teorema degli assi paralleli, il momento d'inerzia del corpo rispetto all'asse di rotazione, può essere espresso come $I = I_C + md^2$, pertanto il periodo si scrive:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{I_C + md^2}{mgd}}.$$

Si riconosce che tutti gli infiniti assi, distanti d dal centro di massa e che costituiscono le generatrici di un cilindro di raggio d , sono assi di rotazione o assi di sospensione, rispetto ai quali il pendolo composto oscilla con lo stesso periodo.

Esiste un altro insieme di assi di sospensione, distanti d_1 dal centro di massa, rispetto ai quali il periodo è lo stesso. Infatti perché questa circostanza si verifichi, deve essere:

$$\frac{I_C + md^2}{mgd} = \frac{I_C + md_1^2}{mgd_1},$$

da cui si trae

$$I_C(d_1 - d) = mdd_1(d_1 - d), \quad d_1 = \frac{I_C}{md}.$$

La lunghezza equivalente del pendolo risulta

$$l_e = \frac{I_C + md^2}{md} = \frac{I_C}{md} + d = d_1 + d.$$

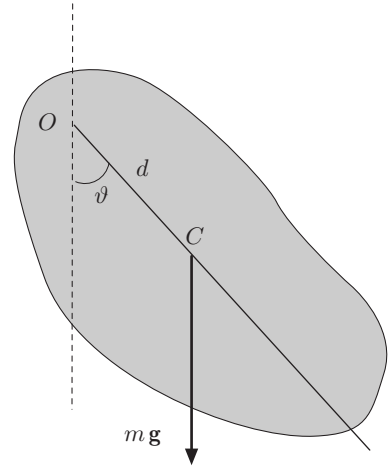


Fig. 14.15

Una misura molto accurata dell'accelerazione di gravità, come è richiesta nelle prospezioni geologiche, può essere effettuata mediante un pendolo composto. Senza entrare in dettagli, la ricerca sperimentale degli assi di sospensione (assi coniugati) rispetto ai quali le oscillazioni del pendolo hanno lo stesso periodo, permette di definire esattamente la lunghezza equivalente.

||| 10. *Reazioni vincolari relative a un corpo rigido girevole attorno ad un asse fisso.*

Le reazioni vincolari vanno determinate mediante le (3). Consideriamo una terna cartesiana ortogonale, solidale col corpo, con origine in O , traccia dell'asse di rotazione, ed asse x coincidente con quest'ultimo. La velocità angolare è dunque $\boldsymbol{\omega} = \omega_x \mathbf{i}$. Indicando con \mathbf{r}_C la posizione del centro di massa nel riferimento mobile, la quantità di moto è

$$\mathbf{p} = m\mathbf{v}_C = m\omega_x \mathbf{i} \times \mathbf{r}_C = m\omega_x (y_C \mathbf{k} - z_C \mathbf{j}).$$

Il momento angolare, tenendo presente le (22) dove $\omega_y = 0$, $\omega_z = 0$, risulta:

$$\mathbf{L} = \omega_x (I_{xx} \mathbf{i} + I_{yx} \mathbf{j} + I_{zx} \mathbf{k}).$$

Derivando rispetto al tempo la quantità di moto, si ha

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = m\dot{\omega}_x (y_C \mathbf{k} - z_C \mathbf{j}) + m\omega_x \left(y_C \frac{d\mathbf{k}}{dt} - z_C \frac{d\mathbf{j}}{dt} \right);$$

ma, per le formule di Poisson, è

$$\frac{d\mathbf{k}}{dt} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{k} = \omega_x \mathbf{i} \times \mathbf{k} = -\omega_x \mathbf{j}, \quad \frac{d\mathbf{j}}{dt} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{j} = \omega_x \mathbf{i} \times \mathbf{j} = \omega_x \mathbf{k},$$

pertanto la precedente diventa:

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = m\dot{\omega}_x (y_C \mathbf{k} - z_C \mathbf{j}) - m\omega_x^2 (y_C \mathbf{j} + z_C \mathbf{k}).$$

Analogamente si ricava la derivata rispetto al tempo del momento angolare:

$$\frac{d\mathbf{L}}{dt} = \dot{\omega}_x (I_{xx} \mathbf{i} + I_{yx} \mathbf{j} + I_{zx} \mathbf{k}) + \omega_x \left(I_{xx} \frac{d\mathbf{i}}{dt} + I_{yx} \frac{d\mathbf{j}}{dt} + I_{zx} \frac{d\mathbf{k}}{dt} \right).$$

Tenendo presente le formule di Poisson, come prima, si ottiene:

$$\frac{d\mathbf{L}}{dt} = \dot{\omega}_x (I_{xx} \mathbf{i} + I_{yx} \mathbf{j} + I_{zx} \mathbf{k}) + \omega_x^2 (I_{yx} \mathbf{k} - I_{zx} \mathbf{j}).$$

Essendo inoltre $\dot{\omega}_x = M_x/I_{xx}$, con questi elementi possiamo scrivere le componenti delle (3):

$$\begin{aligned} R_x &= -F_x \\ R_y &= -F_y - m \left(\frac{M_x}{I_{xx}} z_C + \omega_x^2 y_C \right) \\ R_z &= -F_z + m \left(\frac{M_x}{I_{xx}} y_C - \omega_x^2 z_C \right). \end{aligned} \quad (29)$$

$$M_{Rx} = 0$$

$$\begin{aligned} M_{Ry} &= -M_y + \frac{I_{yx}}{I_{xx}} M_x - I_{zx} \omega_x^2 \\ M_{Rx} &= -M_z + \frac{I_{zx}}{I_{xx}} M_x + I_{yx} \omega_x^2. \end{aligned} \quad (30)$$

Si noti che le reazioni vincolari e loro momenti, equazioni (29) e (30), sono riferite agli assi solidali col corpo; le forze esercitate sull'asse fisso, che hanno risultante e momento opposti, sollecitano a vibrazione i supporti e tendono a flettere l'asse. Se l'asse di rotazione passa per il centro di massa ed è principale d'inerzia, si deduce immediatamente che le reazioni e i loro momenti coincidono con le reazioni e i momenti statici. Se l'asse è principale d'inerzia ma non passa per il centro di massa, tale coincidenza si verifica per le reazioni

ma non per i momenti. Anche se le forze attive fossero nulle, moto rotatorio uniforme, le sollecitazioni sarebbero diverse da zero; infatti:

$$R_x = 0, \quad R_y = -m y_C \omega_x^2, \quad R_z = -m z_C \omega_x^2,$$

$$M_{Rx} = 0, \quad M_{Ry} = -I_{zx} \omega_x^2, \quad M_{Rz} = I_{yx} \omega_x^2.$$

Nelle masse ruotanti i valori delle sollecitazioni possono raggiungere valori intollerabili. Da qui la necessità di assumere come assi di rotazione, gli assi principali d'inerzia. Ciò si consegue con opportuni interventi di equilibratura dinamica.

- III 11. Una piastra rettangolare omogenea di massa m , lati a e b , soggetta alla sola azione del peso, può ruotare attorno al lato a che costituisce l'asse fisso orizzontale di rotazione. Determinare le reazioni esercitate dall'asse e il loro momenti, quando la piastra oscilla attorno alla posizione verticale, di equilibrio.

Stabiliamo un riferimento $Oxyz$, solidale con la piastra; asse x coincidente con l'asse di rotazione e asse y passante per il centro di massa C , figura 16. Detta y_C la coordinata del centro di massa e θ l'angolo di rotazione rispetto alla verticale, essendo

$$F_y = mg \cos \theta, \quad F_z = -mg \sin \theta, \quad M_x = -mg y_C \sin \theta,$$

e, tenendo presente l'esempio 4,

$$I_{xx} = \frac{1}{3} m b^2, \quad I_{yx} = -\frac{1}{4} m a b$$

dalle (29), si ottiene

$$R_x = 0$$

$$R_y = -mg \cos \theta - m y_C \omega_x^2 = -mg \cos \theta - \frac{1}{2} m b \omega_x^2$$

$$R_z = mg \sin \theta + m \frac{M_x}{I_{xx}} y_C = \frac{1}{4} mg \sin \theta.$$

e dalle (30):

$$M_{Rx} = 0$$

$$M_{Ry} = M_x \frac{I_{yx}}{I_{xx}} = \frac{3}{8} m g a \sin \theta$$

$$M_{Rz} = I_{yx} \omega_x^2 = -\frac{1}{4} m a b \omega_x^2.$$

Si deduce che R_y è minima nei punti di inversione del moto oscillatorio, massima nel punto di transito con la verticale, dove R_z è nulla. Le componenti dei momenti tendono a torcere l'asse di rotazione; in particolare M_{Ry} e M_{Rz} sono rispettivamente nulli, per $\theta = 0$ e nei punti di inversione del moto. Se la dimensione a della piastra è piccola rispetto a b , sbarra girevole attorno a un estremo, i momenti M_{Ry} , M_{Rz} sono trascurabili; sussistono solo le reazioni R_y , R_z .

Nel caso di una sbarra omogenea girevole attorno a un estremo, le reazioni vincolari possono essere ricavate senza ricorrere alle (29) e (30). Le forze agenti sono la gravità e la reazione vincolare; dalla prima equazione cardinale

$$m\mathbf{g} + \mathbf{R} = m\mathbf{a}_C,$$

proiettando sulla tangente e sulla normale alla traiettoria, circolare, del centro di massa e assumendo positive la rotazione antioraria e la direzione centripeta della sbarra, si ha

$$m a_t = -mg \sin \theta + R_t, \quad m a_n = -mg \cos \theta + R_n. \quad (31)$$

L'accelerazione tangenziale si ottiene con l'ausilio della seconda equazione cardinale:

$$-mg \frac{b}{2} \sin \theta = I \frac{d\omega}{dt} = \frac{a_t}{b/2}.$$

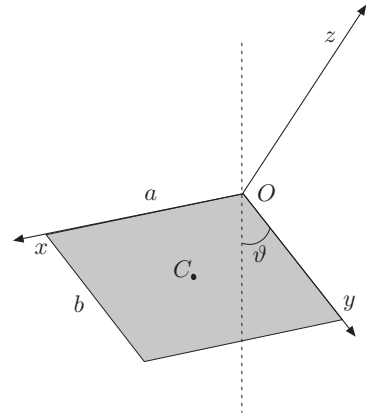


Fig. 14.16

Poiché il momento d'inerzia della sbarra rispetto all'asse di rotazione è

$$I = m \frac{b^2}{12} + m \frac{b^2}{4} = \frac{1}{3} m b^2,$$

risulta:

$$-mg \frac{b}{2} \sin \theta = \frac{2}{3} m b^2 \frac{a_t}{b}, \quad a_t = -\frac{3}{4} g \sin \theta.$$

Dalla prima delle (31) si ha

$$-\frac{3}{4} mg \sin \theta = -mg \sin \theta + R_t, \quad \Rightarrow \quad R_t = \frac{1}{4} mg \sin \theta;$$

dalla seconda:

$$\frac{1}{2} m b \omega^2 = -mg \cos \theta + R_n, \quad \Rightarrow \quad R_n = mg \cos \theta + \frac{1}{2} m b \omega^2.$$

- III 12. Una piastra omogenea quadrata, di lato a e massa m , ruota con velocità angolare costante, attorno ad un lato che costituisce un asse fisso verticale di rotazione, figura 17. Determinare le reazioni vincolari ed i loro momenti.

Essendo

$$F_x = -mg, \quad F_y = F_z = 0, \quad M_x = M_y = 0, \quad M_z = \frac{1}{2} m g a,$$

$$I_{yx} = -\frac{1}{4} m a^2, \quad I_{zx} = 0,$$

dalle (29) si ottiene

$$R_x = mg, \quad R_y = -\frac{1}{2} m \omega_x^2, \quad R_z = 0;$$

e dalle (30)

$$M_{Rx} = 0, \quad M_{Ry} = 0, \quad M_{Rz} = -\frac{1}{2} m g - \frac{1}{4} m a^2 \omega_x^2.$$

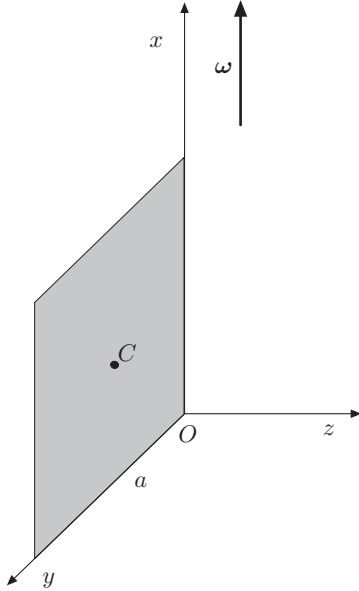


Fig. 14.17

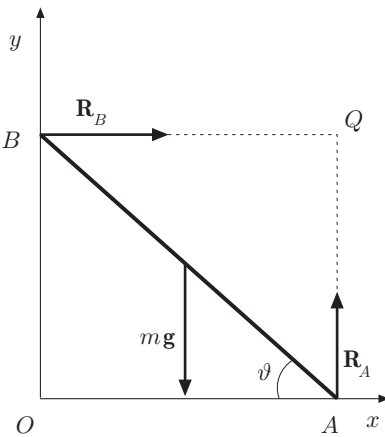


Fig. 14.18

- III 13. Un'asta omogenea di massa m e lunghezza l , cade in modo che i suoi estremi striscino su una parete verticale e sul suolo, che supponiamo privi di attrito, figura 18. Determinare il movimento sapendo che, inizialmente, l'asta è disposta verticalmente e viene rimossa da questa posizione a causa di una lieve perturbazione.

Le forze che agiscono sull'asta sono il peso \mathbf{p} e le reazioni vincolari \mathbf{R}_A , \mathbf{R}_B , nei punti d'appoggio A e B ; queste ultime, non essendoci attrito, sono ortogonali ai vincoli. Il problema può essere risolto per mezzo delle equazioni della dinamica dei corpi rigidi; tuttavia, poiché per questa via si incontra qualche difficoltà matematica, è preferibile svolgere il problema mediante la conservazione dell'energia, anche perché le reazioni vincolari non compiono lavoro. Esse comunque vanno calcolate poiché assumono un ruolo importante ai fini del movimento.

Fissato un riferimento x, y e chiamando θ l'angolo che l'asta forma con l'asse x , le coordinate del centro di massa, in una posizione generica dell'asta, sono

$$x_C = \frac{l}{2} \cos \theta, \quad y_C = \frac{l}{2} \sin \theta,$$

dove θ è funzione del tempo. Finché l'estremo B dell'asta non abbandona la parete, l'atto di moto sarà rotatorio attorno ad un centro istantaneo di rotazione Q , intersezione delle normali ai vincoli, passanti per A e B . Per la conservazione dell'energia, si ha

$$mg \frac{l}{2} = \frac{1}{2} I \omega^2 + mg \frac{l}{2} \sin \theta,$$

dove I è il momento d'inerzia dell'asta rispetto a Q :

$$I = m \frac{l^2}{12} + m \frac{l^2}{4} = \frac{1}{3} m l^2.$$

Si ottiene dunque:

$$mg\frac{l}{2} = \frac{1}{6}ml^2\dot{\theta}^2 + mgy_C = \frac{1}{6}ml^2\dot{\theta}^2 + mg\frac{l}{2}\sin\theta,$$

da cui:

$$\dot{\theta}^2 = 3\frac{g}{l}(1 - \sin\theta). \quad (32)$$

Derivando,

$$\ddot{\theta} + \frac{3}{2}\frac{g}{l}\cos\theta = 0. \quad (33)$$

Si può anche assumere che il moto dell'asta sia rototraslatorio, cioè composto dalla traslazione del centro di massa e dalla rotazione attorno ad un asse passante per quest'ultimo e ortogonale al piano del moto. Allora, l'energia cinetica risulta

$$T = \frac{1}{2}mv_C^2 + \frac{1}{2}I_C\omega^2;$$

i risultati che ne seguono sono ovviamente identici.

Le reazioni vincolari si ricavano dalle:

$$m\ddot{x}_C = R_B, \quad \ddot{y}_C = -mg + R_A,$$

da cui:

$$R_A = mg + m\frac{d^2}{dt^2}\left(\frac{l}{2}\sin\theta\right)$$

$$R_B = m\frac{d^2}{dt^2}\left(\frac{l}{2}\cos\theta\right),$$

alle quali bisogna dare forma esplicita. Si ha

$$\frac{d}{dt}(\sin\theta) = \dot{\theta}\cos\theta,$$

e

$$\frac{d^2}{dt^2}(\sin\theta) = \ddot{\theta}\cos\theta - \dot{\theta}^2\sin\theta.$$

Sostituendo le (32) e (33), si ottiene

$$\frac{d^2}{dt^2}(\sin\theta) = -\frac{3g}{2l}\cos^2\theta - \frac{3g}{l}\sin\theta + \frac{3g}{l}\sin^2\theta.$$

Pertanto è

$$R_A = mg + \frac{3}{2}mg\left(-\frac{1}{2}\cos^2\theta - \sin\theta + \sin^2\theta\right)$$

$$= \frac{1}{4}mg(1 + 9\sin^2\theta - 6\sin\theta) = \frac{1}{4}mg(1 - 3\sin\theta)^2.$$

Per determinare R_B , osserviamo che

$$\frac{d}{dt}(\cos\theta) = -\dot{\theta}\sin\theta, \quad \frac{d^2}{dt^2}(\cos\theta) = -\ddot{\theta}\sin\theta - \dot{\theta}^2\cos\theta;$$

sostituendo le (32) e (33), si ha

$$\frac{d^2}{dt^2}(\cos\theta) = -\frac{3g}{l}\cos\theta + \frac{9g}{2l}\sin\theta\cos\theta.$$

Infine:

$$R_B = \frac{1}{4}mg(9\sin\theta - 6)\cos\theta.$$

Si conclude che R_A non è mai negativa, mentre R_B diventa negativa per $\sin\theta < 2/3$. Poiché la parete non può esercitare una reazione negativa, l'asta scorre col suo estremo B lungo questa finché $\sin\theta = 2/3$, $\theta \approx 41^\circ$; successivamente l'asta si stacca dalla parete e continua a cadere. Le componenti della velocità del centro di massa prima del distacco dalla parete sono

$$\dot{x}_C = -\frac{l}{2}\dot{\theta}\sin\theta, \quad \dot{y}_C = \frac{l}{2}\dot{\theta}\cos\theta;$$

il modulo:

$$v_C = \sqrt{\dot{x}_C^2 + \dot{y}_C^2} = \dot{\theta} \frac{l}{2}.$$

Dopo il distacco la componente orizzontale si mantiene costante, mentre quella verticale è quella relativa alla caduta con accelerazione costante. La traiettoria del centro di massa è parabolica.

Se l'asta inizialmente è verticale, le forze che agiscono sono il peso e la reazione nel punto di appoggio A . Essendo queste forze dirette lungo la verticale, il moto del centro di massa, una volta che l'asta abbandona la posizione di equilibrio instabile, sarà anch'esso verticale. Per la conservazione dell'energia, nelle posizioni estreme, si ha

$$mg \frac{l}{2} = \frac{1}{2}mv_C^2 + \frac{1}{2}I\omega^2,$$

dove I è il momento d'inerzia della sbarra rispetto al centro di massa. Durante la caduta, detto θ l'angolo che forma l'asta con l'orizzontale, la coordinata del centro di massa è $y_C = l \sin \theta / 2$, che derivata rispetto al tempo ne dà la velocità:

$$v_C = \dot{y}_C = \frac{l}{2} \dot{\theta} \cos \theta, \quad \Rightarrow \quad \dot{\theta} = \omega = 2 \frac{v_C}{l \cos \theta}.$$

Dunque la conservazione dell'energia si scrive:

$$mg \frac{l}{2} = \frac{1}{2}mv_C^2 + \frac{1}{2}m \frac{l^2}{12} \left(\frac{2v_C}{l \cos \theta} \right)^2 + mg \frac{l}{2} \sin \theta,$$

$$gl(1 - \sin \theta) = v_C^2 \left(1 + \frac{1}{3} \frac{1}{\cos^2 \theta} \right),$$

che permette di ricavare v_C . In particolare, per $\theta = 0$, si ha velocità di impatto col suolo:

$$v_C = \frac{1}{2} \sqrt{3gl}.$$

La reazione vincolare va determinata come nell'esempio precedente.

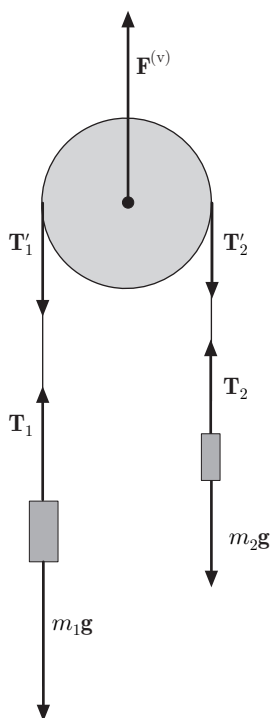


Fig. 14.19

- ||| 14. Una sbarretta omogenea di massa m e lunghezza l in quiete, è appoggiata su un piano orizzontale privo di attrito. Determinare l'energia cinetica acquistata dalla sbarretta in seguito ad un impulso di modulo $J = 4 \text{ N}\cdot\text{s}$ applicato normalmente, a una distanza $l/4$ da un estremo.

L'energia cinetica è

$$T = \frac{1}{2}mv_C^2 + \frac{1}{2}I\omega^2,$$

con $I = ml^2/12$. Essendo:

$$J = mv_C, \quad J \frac{l}{4} = I\omega,$$

dalla precedente si ottiene:

$$T = \frac{1}{2} \frac{J^2}{m} + \frac{1}{2} \frac{J^2 l^2}{16I} = \frac{7}{8} \frac{J^2}{m}.$$

- ||| 15. Il sistema di figura 19 è costituito da una carrucola di massa m e raggio R che può ruotare senza attrito attorno al suo asse, disposto orizzontalmente, e da due masse m_1, m_2 collegate agli estremi di un filo, inestensibile e di massa trascurabile, che passa lungo la gola della carrucola senza slittare. Supponendo che $m_1 > m_2$, determinare il movimento del sistema. Si tratta della macchina di Atwood, studiata nell'ipotesi che la massa della carrucola fosse trascurabile, esempio 13-VII. Questa volta, a causa del momento d'inerzia della carrucola, le tensioni applicate al bordo dalla carrucola hanno modulo diverso. Le forze che agiscono sul sistema sono: le tensioni T_1, T_2 , trasmesse dal filo, forze interne, i pesi e la reazione vincolare sull'asse della carrucola.

Esaminiamo il problema mediante le equazioni della dinamica, applicate alle singole parti del sistema. Poiché il filo è inestensibile, possiamo assumere

che il modulo dell'accelerazione a sia lo stesso in ogni parte del sistema e, in particolare, che l'accelerazione angolare α della carrucola soddisfi la condizione $a = \alpha R$. Fissato un asse x di riferimento volto verso il basso, per le due masse si ha

$$m_1 a = m_1 g - T_1, \quad -m_2 a = m_2 g - T_2. \quad (34)$$

Per la carrucola, dalla seconda equazione cardinale si ha

$$(T_1 - T_2)R = I \frac{d\omega}{dt}. \quad (35)$$

Dalle (34) si ottiene

$$T_1 - T_2 = (m_1 - m_2)g - (m_1 + m_2)a;$$

perciò la (35) diventa

$$[(m_1 - m_2)g - (m_1 + m_2)a]R = \frac{1}{2}mR^2 \frac{a}{R}.$$

Da questa si trae

$$a = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2 + m/2}g,$$

e

$$T_1 - T_2 = \frac{1}{2}m \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2 + m/2}g.$$

Quest'ultima mostra che se la massa m della carrucola è $m \ll m_1, m_2$, le tensioni risultano circa uguali, $T_1 \approx T_2$, come si è assunto nell'esempio citato. Il moto delle parti del sistema avviene con accelerazione costante che può essere stabilita scegliendo opportunamente la differenza $m_1 - m_2$ tra le masse.

Il problema può essere svolto mediante la conservazione dell'energia, tenendo conto che le tensioni non compiono lavoro. Infatti l'accelerazione delle parti del sistema è costante; le tensioni \mathbf{T}_1 e $-\mathbf{T}_1$ applicate alla carrucola e alla massa m_1 sono opposte e gli spostamenti dei loro punti di applicazione sono uguali. Lo stesso si può dire per la tensione \mathbf{T}_2 .

Tenuto conto che le velocità delle masse, in ogni istante, sono uguali in modulo, la conservazione dell'energia si esprime:

$$-g(m_1 x_1 - m_2 x_2) + \frac{1}{2}m_1 v^2 + \frac{1}{2}m_2 v^2 + \frac{1}{2}I\omega^2 = cost,$$

dove x_1 e x_2 sono le quote raggiunte dalle masse rispetto alla posizione in cui sono allineate. Poiché $I = mR^2/2$ e $\omega = v/R$, si ha

$$-g(m_1 x_1 - m_2 x_2) = \frac{1}{2} \left(m_1 + m_2 + \frac{m}{2} \right) v^2 = cost;$$

derivando rispetto al tempo:

$$-g(m_1 - m_2)v + \left(m_1 + m_2 + \frac{m}{2} \right) v \frac{dv}{dt} = 0,$$

da cui:

$$a = \frac{dv}{dt} = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2 + m/2}g.$$

Il problema può essere risolto esclusivamente mediante le equazioni cardinali dei sistemi, tenendo presente che, in questa formulazione, intervengono le sole forze esterne, pesi e reazione vincolare; le tensioni sono forze interne. In questo modo possiamo altresì determinare la reazione vincolare $\mathbf{F}^{(v)}$. Scriveremo dunque

$$\mathbf{F} + \mathbf{F}^{(v)} = (m_1 + m_2 + m)\mathbf{a}_C, \quad \mathbf{M} = \frac{d\mathbf{L}}{dt}. \quad (36)$$

Notiamo che l'accelerazione del centro di massa è diretta lungo la verticale e sappiamo che l'accelerazione delle due masse è uguale in modulo, mentre quella della carrucola è nulla. Dunque è

$$a_C = \frac{m_1 a - m_2 a}{m_1 + m_2 + m} = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2 + m}a.$$

Dalla prima delle (36), proiettata lungo l'asse di riferimento, si ottiene

$$(m_1 + m_2 + m)g + F^{(v)} = (m_1 + m_2 + m)a_C = (m_1 - m_2)a,$$

$$F^{(v)} = (m_1 - m_2)a - (m_1 + m_2 + m)g.$$

La reazione ha segno negativo, quindi è volta verso l'alto.

Il momento angolare del sistema, proiettato lungo l'asse di rotazione, risulta

$$L = I\omega + m_1 Rv + m_2 Rv,$$

pertanto la seconda delle (36) diventa

$$\begin{aligned} m_1 g R - m_2 g R &= \frac{d}{dt}(I\omega + m_1 Rv + m_2 Rv) \\ (m_1 - m_2)gR &= I\dot{\omega} + (m_1 + m_2)aR, \end{aligned}$$

dalla quale, essendo $\dot{\omega} = a/R$, si ottiene l'accelerazione.

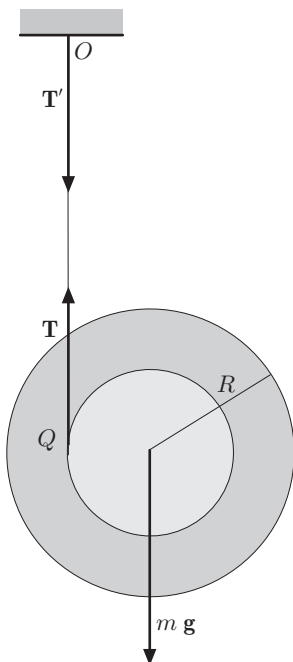


Fig. 14.20

- III 16. Un roccetto è costituito da tre dischi omogenei coassiali ognuno di massa m ; i due esterni hanno raggio R , mentre quello interno ha raggio $R/2$, figura 20. Sul disco interno è avvolto un filo, inestensibile e di massa trascurabile, il cui estremo è fissato in un punto O . Determinare il moto di caduta del roccetto e la tensione del filo, sapendo che inizialmente il suo centro è al livello di O e che la velocità iniziale è nulla.

Il moto è rototraslatorio; rotazione attorno all'asse del roccetto e traslazione del centro di massa. È anche di pura rotazione attorno all'asse istantaneo di rotazione, passante per il punto di tangenza del filo col disco interno, che ha come traccia Q . Le forze agenti sono il peso e la tensione del filo; fissato un asse di riferimento con origine in O e volto verso il basso, dalla prima equazione cardinale, si ha

$$3mg - T = 3ma_C, \quad (37)$$

dove a_C è l'accelerazione del centro di massa.

Dalla seconda equazione cardinale:

$$T \frac{R}{2} = I_C \frac{d\omega}{dt}, \quad (38)$$

con

$$I_C = \frac{1}{2}m \frac{R^2}{4} + mR^2.$$

Poiché $a_C = \alpha R/2$, essendo α l'accelerazione angolare, combinando le (37) e (38), si ottiene

$$a_C = \frac{3m}{3m + 4I_C/R^2} g = \frac{2}{5}g, \quad T = 3m(g - a_C).$$

Se si considera il moto come pura rotazione attorno all'asse istantaneo passante per Q , dalla seconda equazione cardinale:

$$3mg \frac{R}{2} = I_Q \frac{d\omega}{dt},$$

essendo $I_Q = I_C + 3m(R/2)^2$, si ha:

$$a_C = \frac{d\omega}{dt} \frac{R}{2} = \frac{3mR^2}{4I_Q} g = \frac{2}{5}g.$$

Il problema può essere risolto mediante la conservazione dell'energia, tenendo presente che la tensione T non compie lavoro, poiché è applicata in Q la cui velocità è istantaneamente nulla.

Assumendo costante e pari a zero, l'energia totale in O , si può scrivere

$$\frac{1}{2}3mv_C^2 + \frac{1}{2}I_C\omega^2 - 3mgx_C = \text{cost} = 0,$$

essendo x_C la coordinata del centro di massa. L'energia cinetica può essere considerata di pura rotazione attorno all'asse istantaneo di rotazione.

Derivando rispetto al tempo:

$$\frac{1}{2}3m2v_C \frac{dv_C}{dt} + \frac{1}{2}I_C 2\omega \frac{d\omega}{dt} - 3mgv_C = 0.$$

Da questa relazione, tenendo conto che $v_C = \omega R/2$ e $a_C = \dot{\omega} R/2$, si ottiene

$$3mv_C a_C + 4 \frac{I_C}{R^2} v_C a_C - 3mgv_C = 0,$$

dalla quale si ricava a_C . Una volta che il filo si è svolto completamente, si verifica uno strappo durante il quale, in assenza di attriti, l'energia cinetica non varia, ma la velocità del centro di massa cambia verso. Il rocchetto risale nella posizione iniziale, realizzando un moto oscillatorio (pendolo di Maxwell, yo-yo).

6. Rotolamento

Il moto di rotolamento, descritto in cinematica, è un moto piano in cui la ruota o il disco e il piano su cui rotola, sono in contatto lungo una generatrice coincidente con l'asse istantaneo di rotazione che ha come traccia un punto Q . Dinamicamente tale moto non può verificarsi senza la presenza di attrito e poiché la generatrice di contatto è istantaneamente ferma, non c'è dissipazione di energia; l'attrito che interviene è quello statico, caratterizzato dal coefficiente μ_s . Ciò che spinge un autoveicolo è la forza di attrito; infatti il motore può esplicare solo forze interne e il moto del centro di massa dell'autoveicolo, non può variare senza l'ausilio di forze esterne.

6.1. Rotolamento con forza motrice

Consideriamo una ruota di raggio R appoggiata su un piano orizzontale, lungo una generatrice che ha come traccia il punto Q . Nel centro O gravi il peso, proprio ed esterno, e agisca una forza orizzontale \mathbf{F} costante; in Q sia applicata la forza di attrito statico \mathbf{F}_A , figura 21.

Il problema del moto può essere risolto mediante le equazioni cardinali della dinamica dei corpi rigidi,

$$\mathbf{F} = \frac{d\mathbf{p}}{dt}, \quad \mathbf{M} = I \frac{d\omega}{dt}.$$

Proiettiamo la prima lungo la direzione del moto orizzontale, e riferiamo i momenti rispetto al centro O del disco. La reazione normale e il peso si equilibrano; dunque si ha

$$F - F_A = m_T a, \quad F_A R = I \frac{d\omega}{dt}, \quad (39)$$

dove m_T è la massa totale, somma della massa esterna e della ruota.

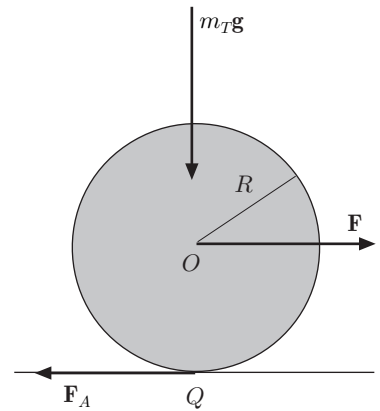


Fig. 14.21

Poiché supponiamo che il moto sia di puro rotolamento, essendo

$$\mathbf{v}_O = \mathbf{v}_Q + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{R},$$

e la velocità \mathbf{v}_Q istantanea per istante nulla, è $v_O = \omega R$. Dunque $d\omega/dt = a/R$, dove a è l'accelerazione del centro di massa. La seconda delle (39) diventa

$$F_A R = I \frac{a}{R},$$

ed essendo il momento d'inerzia della ruota rispetto al suo asse $I = mR^2/2$, con m massa della ruota, si ottiene

$$F_A = \frac{1}{2}ma.$$

Sostituendo nella prima delle (39) si ricava:

$$a = \frac{F}{m_T + m/2}.$$

Inoltre si ottiene:

$$F_A = \frac{F}{2m_T/m + 1}.$$

Se sulla ruota non grava alcun peso aggiuntivo, $m_T = m$, si ha

$$F_A = \frac{1}{3}F, \quad a = \frac{2}{3}\frac{F}{m}.$$

Per ottenere la condizione di puro rotolamento, osserviamo che deve essere $F_A \leq \mu_s R_n$, dunque il coefficiente di attrito statico dovrà soddisfare la condizione

$$\mu_s \geq \frac{F_A}{m_T g} = \frac{1}{m_T g} \frac{F}{2m_T/m + 1}.$$

Se μ_s risulta minore, la ruota rotola e striscia. Per ottenere il puro rotolamento anche con valori piccoli di μ_s , occorre ridurre F oppure aumentare la massa.

Si osservi che in questa schematizzazione non intervengono forze dissipative; il problema può essere risolto per mezzo del teorema dell'energia cinetica. Supponendo, per semplicità, che sulla ruota non gravi alcun peso aggiuntivo, il lavoro della forza è uguale alla variazione di energia cinetica della ruota. Assumendo che la velocità iniziale sia nulla e chiamando con x lo spazio percorso dal centro di massa, si ha

$$Fx = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}I\omega^2.$$

Essendo la forza costante, risulta

$$x = \frac{1}{2}at^2, \quad v = at, \quad \omega = \frac{v}{R}.$$

Sostituendo nella precedente, per la forza d'attrito e l'accelerazione si ottengono le stesse espressioni.

6.2. Rotolamento con coppia motrice

Consideriamo una ruota motrice soggetta ad una coppia di momento \mathbf{M} costante, diretto come l'asse della ruota, alla forza d'attrito statico \mathbf{F}_A ed al peso, proprio ed esterno. Si noti che, in questo caso, la forza d'attrito ha la direzione del moto, figura 22. Proiettando le equazioni cardinali della dinamica dei corpi rigidi lungo la direzione del moto e assumendo come polo il centro O della ruota, si ha

$$F_A = m_T a, \quad M - F_A R = I \frac{d\omega}{dt}.$$

Supponendo che il moto sia di puro rotolamento, $d\omega/dt = a/R$, e sostituendo la prima equazione nella seconda, si ha

$$M - m_T a R = I \frac{a}{R}.$$

Si ottiene:

$$a = \frac{M}{R(m_T + m/2)}, \quad F_A = \frac{M}{R(1 + m/2m_T)}.$$

Se sulla ruota non grava alcun peso aggiuntivo, si ricava

$$a = \frac{2}{3} \frac{M}{mR}, \quad F_A = \frac{2}{3} \frac{M}{R}.$$

In ogni caso, per ottenere accelerazioni elevate occorre aumentare il momento M , oppure diminuire la massa e/o il raggio. Tuttavia occorre tener presente la condizione che l'attrito impone. Le considerazioni sono analoghe a quelle già fatte:

$$F_A \leq \mu_s R_n, \quad \mu_s \geq \frac{F_A}{m_T g} = \frac{M}{R(1 + m/2m_T)} \frac{1}{m_T g}.$$

Se si vuole ottenere puro rotolamento con bassi valori di μ_s , bisogna ridurre il momento motore oppure aumentare la massa e/o il raggio.

Si osservi che la forza di attrito assume il ruolo di forza di trazione; ciò si può capire dalla figura 23. Infatti il veicolo che grava sulla ruota/ruote è soggetto a una trazione \mathbf{T} ed esercita, a sua volta, una reazione $-\mathbf{T}$, opposta a \mathbf{F}_A , sulla ruota. Questa, come abbiamo visto, è soggetta alla coppia motrice di momento \mathbf{M} e alla coppia $-\mathbf{T}$ e \mathbf{F}_A , di momento equivalente a quello della forza di attrito $F_A R$. L'intensità della forza di trazione di cui è capace la ruota non può superare la frazione μ_s del peso che su di essa grava. Per esempio, allo scopo di ottenere forti trazioni, è necessario aumentare il peso dei locomotori.

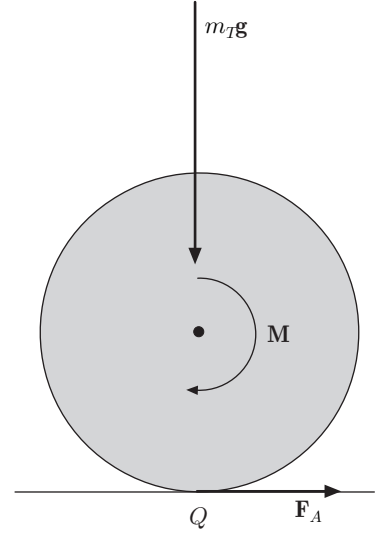


Fig. 14.22

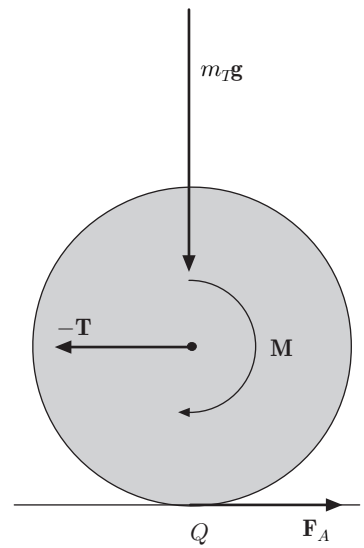


Fig. 14.23

Anche in questo caso non è presente dissipazione di energia; dunque si può usare il teorema dell'energia cinetica. Supponendo che sulla ruota agisca soltanto il peso proprio e che la sua velocità iniziale sia nulla, il lavoro della coppia di momento M , costante, è uguale alla variazione di energia cinetica della ruota:

$$M\varphi = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}I\omega^2.$$

Nelle condizioni di puro rotolamento è $\varphi = x/R$, $x = at^2/2$ e $v = at$. Sostituendo nella precedente si hanno i risultati già ottenuti.

6.3. Attrito di rotolamento

L'osservazione più semplice indica che nel moto di puro rotolamento è sempre presente una forma di attrito, diversa dall'attrito statico e dinamico, che ostacola il moto del corpo. Una palla di biliardo o qualsiasi altro oggetto che rotola su un piano, progressivamente si ferma. Ciò è dovuto a complicati processi di interazione non elastica tra le superfici a contatto, dipendenti dalle proprietà dei materiali. Finora si è fatta l'ipotesi che la ruota, schematizzata come un disco, poggi su un piano orizzontale lungo una generatrice; in realtà, a causa delle deformazioni prodotte dal peso proprio e da quello che grava su di essa, viene prodotta una superficie di contatto più o meno deformata, su cui sono distribuite le reazioni vincolari. Tali reazioni costituiscono un sistema di forze che possono sempre essere ridotte ad una risultante applicata nel punto Q , traccia della generatrice di contatto, e ad una coppia. La reazione risultante si scompone nella forza tangenziale di attrito e nella reazione normale. Il momento della coppia si scompone in un componente M_t tangente e in un componente M_n ortogonale alle superfici in contatto, figura 24; il primo è dovuto all'*attrito di rotolamento*, il secondo all'*attrito di giro*; quest'ultimo ostacola la rotazione della ruota o dei corpi attorno ad un asse ortogonale alle superfici a contatto.

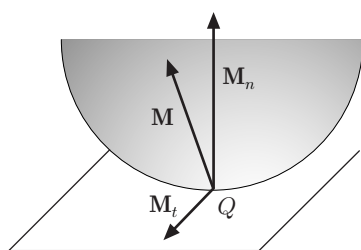


Fig. 14.24

Lo studio dell'attrito di rotolamento va fatto mediante esperienze analoghe a quelle relative all'attrito statico e cinetico. Le esperienze di Coulomb mostrano che i momenti, tangente e ortogonale, sono proporzionali alla reazione normale e che per l'equilibrio della ruota si devono verificare le condizioni:

$$M_t \leq hR_n, \quad M_n \leq kR_n, \quad (40)$$

dove R_n è il modulo della reazione normale; h e k sono due parametri positivi aventi, a differenza del coefficiente d'attrito μ , che è un numero puro, le dimensioni di una lunghezza. Questi parametri dipendono, come s'è detto, dalla natura del materiale delle superfici a contatto; l'uno è detto *parametro di attrito di rotolamento*, l'altro *parametro di attrito di giro*; quest'ultimo, in genere,

è minore del precedente. Nel nostro caso interessa il primo parametro; il secondo riguarda essenzialmente sistemi ruotanti attorno ad un asse munito di perni e simili, poggiati su supporti.

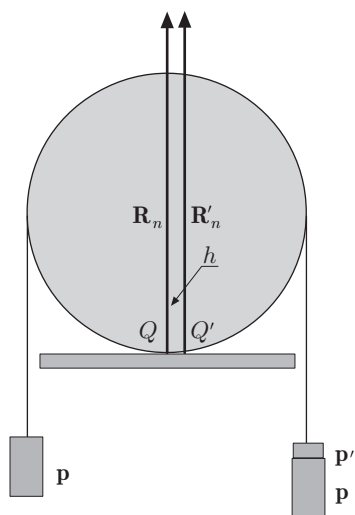


Fig. 14.25

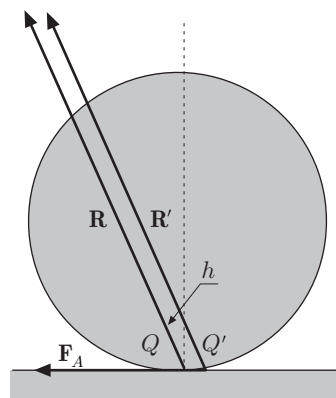


Fig. 14.26

Si consideri una ruota poggiata su un piano orizzontale, come in figura 25. Il sistema è in equilibrio sotto l'azione dei momenti di due pesi \mathbf{p} uguali, rispetto all'asse passante per Q , oppure rispetto all'asse del cilindro. I due pesi sono posti agli estremi di un filo avvolto, senza che slitti, alla periferia della ruota. Se si pone un peso \mathbf{p}' aggiuntivo a un estremo del filo, finché il suo momento \mathbf{M} è sufficientemente piccolo, si osserva che la ruota è in equilibrio. Ciò significa che il modulo del momento di resistenza al rotolamento M_t , è maggiore di M ; allorché quest'ultimo raggiunge un certo valore, si osserva che la ruota inizia a rotolare. L'esperienza mostra che l'intensità di M_t è proporzionale alla somma del peso della ruota e di quelli applicati \mathbf{p} e $\mathbf{p} + \mathbf{p}'$, cioè alla reazione normale; allora, in conformità con la prima delle (40), si ha

$$M_t \leq hR_n.$$

Il sistema formato dalla reazione normale R_n e dal momento di intensità $M_t = hR_n$ che si oppone alla rotazione, è equivalente ad una forza normale R'_n applicata in un punto Q' distante h da Q , nel verso del moto. Se si vuole tenere conto anche della forza di attrito statico F_A , è sufficiente comporre quest'ultima con \mathbf{R}'_n . La reazione totale, tenuto conto della resistenza di rotolamento, si ottiene dunque spostando \mathbf{R}_n di una quantità h nella direzione del moto, figura 26; pertanto è

$$\mathbf{R}' = \mathbf{F}_A + \mathbf{R}'_n.$$

Si sottolinea che se il cilindro rotola senza strisciare, si deve tener presente l'esistenza della forza di attrito statico; infatti è proprio questa che determina il rotolamento, opponendosi allo slittamento delle superfici a contatto. Il valore di h , ordinariamente, è piuttosto piccolo; per ruote di vagoni ferroviari su rotaie è compreso tra 0,5 e 1 mm; per ruote di vetture su pavé è compreso tra 18 e 25 mm.

6.4. Equilibrio di una ruota soggetta a forza motrice

Consideriamo una ruota di raggio R , appoggiata su un piano orizzontale, figura 27. Su essa gravi il peso proprio ed esterno e agisca una forza orizzontale \mathbf{F} nel piano della ruota e applicata al centro. Detti R_n , R_t le componenti normale e tangenziale della reazione, M_t il modulo del momento di attrito volvente, riferito al polo Q ; all'equilibrio, si deve avere

$$F - R_t = 0, \quad mg - R_n = 0, \quad FR - M_t = 0.$$

Per la prima delle (40), è necessario e sufficiente che sia:

$$F \leq \mu_s mg, \quad F \leq \frac{h}{R} mg.$$

Se il vincolo è liscio, $\mu_s = 0$, $h = 0$, l'equilibrio non è possibile con $\mathbf{F} \neq 0$. Non è neanche possibile se, pur essendo $\mu_s > 0$, fosse $h = 0$, se cioè non ci fosse attrito volvente, perché in tal caso non sarebbe possibile, con $F > 0$, soddisfare la seconda condizione. Se è soddisfatta la condizione più restrittiva, che è la seconda, l'equilibrio è verificato. Per esempio, se $R = 50 \text{ cm}$, $h = 1 \text{ cm}$, $\mu_s = 0,2$, la prima condizione impone a F di non superare $1/5$ del peso, la seconda di non superare $1/50$ del peso. Se $F = hmg/R$, il moto di rotolamento risulta uniforme; allora F è uguale alla forza di resistenza di rotolamento. Tale forza è proporzionale al peso e inversamente proporzionale al raggio.

La determinazione di h può essere fatta studiando il moto della ruota lungo un piano inclinato. Supponiamo che la ruota sia inizialmente in quiete su un piano orizzontale e sia μ_s il coefficiente di attrito statico. Se si inclina gradualmente il piano di appoggio rispetto all'orizzontale, indicando con φ l'angolo di inclinazione, l'equilibrio è soddisfatto dalla più restrittiva delle seguenti condizioni

$$mg \sin \varphi \leq \mu_s mg \cos \varphi, \quad mg \sin \varphi \leq \frac{h}{R} mg \cos \varphi.$$

Se $h/R \leq \mu_s$, la ruota è in equilibrio finché $\tan \varphi \leq h/R$; in particolare per $\tan \varphi = h/R$, il moto di rotolamento risulta uniforme. Superato questo limite essa rotola senza strisciare con accelerazione costante. Se fosse $h/R > \mu_s$, la ruota resterebbe in equilibrio finché $\tan \varphi \leq \mu_s$; superato questo limite, essa si muove

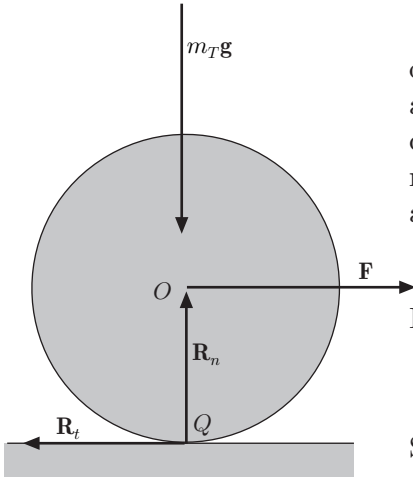


Fig. 14.27

strisciando senza rotolare. Se infine fosse $h/R = \mu_s$, la ruota resterebbe in equilibrio finché $\tan \varphi \leq h/R = \mu_s$; superato tale limite, essa si muove rotolando e strisciando.

6.5. Equilibrio di una ruota soggetta a coppia motrice

Una ruota motrice di un veicolo, figura 28, è appoggiata su un piano orizzontale. Essa è soggetta alla coppia motrice di momento \mathbf{M} , al peso proprio, ad un carico esterno e alla reazione $-\mathbf{T}$, esercitata dal veicolo. Le reazioni vincolari sono: \mathbf{R} applicata in Q , somma di \mathbf{R}_n , e \mathbf{R}_t , e al momento di resistenza di attrito volvente \mathbf{M}_t . Assumendo come polo Q , per l'equilibrio, si deve avere

$$mg - R_n = 0, \quad T - F_A = 0, \quad M - TR - M_t = 0.$$

Allora le condizioni necessarie e sufficienti per l'equilibrio sono:

$$T \leq \mu_s mg, \quad M - TR \leq hmg.$$

L'equilibrio si ottiene se è soddisfatta la più restrittiva di queste condizioni, cioè la seconda.

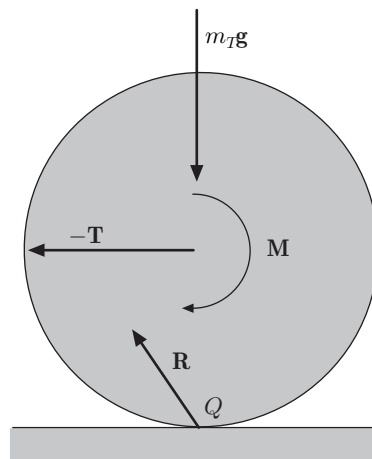


Fig. 14.28

Esempi

17. Un disco rotola senza strisciare lungo un piano inclinato di un angolo φ rispetto all'orizzontale. Trascurando l'attrito di rotolamento, determinare l'accelerazione del centro di massa del disco e la velocità con cui giunge alla fine del piano inclinato.

Le forze che agiscono sul disco sono il peso mg , la reazione normale al piano \mathbf{R}_n e la forza di attrito statico \mathbf{F}_A , figura 29. Le equazioni cardinali si scrivono:

$$\mathbf{F}_A + \mathbf{R}_n + mg = \frac{d\mathbf{p}}{dt}, \quad \mathbf{M} = I \frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt}.$$

Proiettiamo la prima lungo il piano inclinato, assumendo positivo il verso discendente, e valutiamo i momenti rispetto all'asse del disco; si ha

$$-F_A + mg \sin \varphi = ma, \quad F_A R = I \frac{d\omega}{dt}.$$

Ricavando F_A dalla seconda e sostituendo nella prima:

$$mg \sin \varphi - \frac{I}{R} \frac{d\omega}{dt} = ma;$$

ma, poiché il moto è di puro rotolamento, è

$$\frac{d\omega}{dt} = \frac{a}{R},$$

ed essendo $I = mR^2/2$, si ottiene

$$mg \sin \varphi - \frac{1}{2}ma = ma, \quad \Rightarrow \quad a = \frac{2}{3}g \sin \varphi.$$

In generale, l'accelerazione dipende dal momento d'inerzia del corpo che rotola poiché

$$a = \frac{mg \sin \varphi}{m + I/R^2}.$$

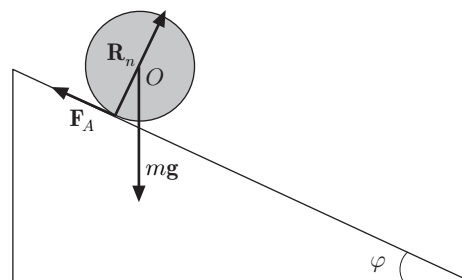


Fig. 14.29

Infatti, se alla sommità del piano inclinato, un disco e un anello sono lasciati liberi nello stesso istante, il disco giunge alla base per primo, indipendentemente dalla massa e dal raggio, come si può verificare mediante la relazione precedente, sostituendo il momento d'inerzia del disco, $mR^2/2$, e dell'anello $I = mR^2$. Analogamente, una sfera giungerà alla base del piano inclinato prima del disco poiché il suo momento d'inerzia è $I = 2mR^2/5$. Il moto avviene con accelerazione costante.

Supponendo che la velocità iniziale del disco sia nulla, la velocità alla fine del piano inclinato, detta l la sua lunghezza, è

$$v = \sqrt{2al} = \sqrt{\frac{4}{3}gl \sin \varphi}.$$

Si osservi che il problema può essere risolto per mezzo della conservazione dell'energia; infatti il punto di applicazione della forza di attrito è istante per istante in quiete, pertanto, avendo trascurato l'attrito di rotolamento, la forza di attrito statico non compie lavoro dissipativo. L'energia cinetica si può esprimere come somma dell'energia cinetica di rotazione attorno all'asse del disco e dell'energia cinetica di traslazione del centro di massa oppure, se si vuole, come energia cinetica di rotazione attorno all'asse istantaneo di rotazione, coincidente con la generatrice del cilindro in contatto col piano. Si ha dunque

$$\frac{1}{2}I\omega^2 + \frac{1}{2}mv_C^2 = mgh.$$

Osservando che $\omega = v/R$ e sostituendo, nella precedente, l'espressione del momento d'inerzia, si ottiene

$$\frac{1}{2} \frac{1}{2} mR^2 \frac{v_C^2}{R^2} + \frac{1}{2} mv_C^2 = mgh, \quad v_C = \sqrt{\frac{4}{3}gh} = \sqrt{\frac{4}{3}gl \sin \varphi}.$$

Studiamo ora le condizioni perché si verifichi il rotolamento. Il modulo della forza di attrito è

$$|F_A| = I \frac{a}{R^2} = \frac{1}{3}mg \sin \varphi;$$

pertanto, se

$$\left| \frac{F_A}{R_n} \right| = \frac{1}{3} \frac{mg \sin \varphi}{mg \cos \varphi} = \frac{1}{3} \tan \varphi \leq \mu_s, \quad \tan \varphi \leq 3\mu_s,$$

il moto sarà di puro rotolamento. Se invece $\tan \varphi > 3\mu_s$, il disco si muove strisciando e rotolando.

In tal caso il disco ruota attorno al proprio asse, ma l'angolo di rotazione θ , contato positivamente in verso orario, non è uguale al rapporto tra la distanza percorsa x e il raggio R , come se il disco rotolasse senza strisciare. Detto $\mu < \mu_s$ il coefficiente di attrito dinamico ed essendo $F_A = -\mu mg \cos \varphi$, la prima equazione cardinale fornisce l'accelerazione del centro di massa del disco:

$$a = g(\sin \varphi - \mu \cos \varphi).$$

Dalla seconda equazione cardinale si deduce:

$$\frac{1}{2}mR^2 \frac{d\omega}{dt} = \frac{1}{2}mR^2 \ddot{\theta} = -RF_A = R\mu g \cos \varphi.$$

Ne segue:

$$\ddot{\theta} = \frac{2\mu g \cos \varphi}{R},$$

che corrisponde a un moto rotatorio uniformemente accelerato. Accelerazione e velocità del punto di contatto Q col piano inclinato, sono

$$\ddot{x} - R\ddot{\theta} = g(\sin \varphi - 3\mu \cos \varphi), \quad \dot{x} - R\dot{\theta} = g(\sin \varphi - 3\mu \cos \varphi)t.$$

Essendo $\mu < \mu_s$ e $\tan \varphi > 3\mu_s$, accelerazione e velocità hanno sempre segno positivo.

18. Una palla da biliardo di massa m e raggio R , in quiete, viene colpita dalla stecca in modo che la direzione dell'impulso trasmesso, orizzontale, passi per il centro di massa, figura 30. Supponendo che la palla in seguito all'impulso, acquisti una velocità iniziale v_0 e che il coefficiente di attrito cinetico con il tavolo sia μ , determinare la distanza d percorsa dalla palla prima che abbia inizio il moto di puro rotolamento. Trascurare l'attrito di rotolamento.

L'impulso trasmesso alla palla passa per il centro di massa, dunque il momento angolare, rispetto a questo polo è zero. Viceversa il momento della forza di attrito è

$$M_A = F_A R = \mu mg R.$$

L'accelerazione angolare della palla risulta:

$$\alpha = \frac{d\omega}{dt} = \frac{M_A}{I_C} = \frac{\mu mg R}{I_C} = \frac{\mu mg R}{\frac{2mR^2}{5}} = \frac{5}{2} \mu \frac{g}{R}.$$

La forza di attrito determina un moto ritardato con accelerazione

$$a_C = -\frac{F_A}{m} = -\frac{\mu mg}{M} = -\mu g.$$

Integrando le due relazioni precedenti si ottiene

$$\omega = \int \alpha dt = \frac{5}{2} \mu \frac{g}{R} t, \quad v_C = \int a_C dt = v_0 - \mu g t.$$

L'istante in cui si verifica il puro rotolamento si ottiene dalla condizione $v_C = \omega R$, cioè

$$v_0 - \mu g t = \frac{5}{2} \mu g t, \quad \Rightarrow \quad v_0 = \frac{7}{2} \mu g t, \quad t = \frac{2}{7} \frac{v_0}{\mu g}.$$

Integrando l'espressione della velocità

$$\int v_C dt = v_0 t - \frac{1}{2} \mu g t^2,$$

e sostituendo il valore di t trovato, si ottiene

$$d = \frac{2}{7} \frac{v_0^2}{\mu g} - \frac{2}{49} \frac{v_0^2}{2\mu g} = \frac{12}{49} \frac{v_0^2}{\mu g}.$$

In figura 31 è mostrato l'andamento della velocità del centro di massa e di ωR in funzione del tempo; all'istante $t = (2v_0/\mu g)/7$ inizia il rotolamento puro.

Se la palla viene colpita ad un'altezza b rispetto al centro, essa assume un momento angolare $mv_0 b = I\omega$ e, oltre alla velocità v_0 , ha una velocità angolare

$$\omega = \frac{mv_0 b}{I_C} = \frac{5}{2} \frac{b}{R^2} v_0.$$

Pertanto se $b = 2R/5$ si ottiene subito un moto di puro rotolamento. In questo caso, prescindendo dall'attrito di rotolamento, non si ha dissipazione di energia.

L'energia dissipata, fino all'istante in cui si ha puro rotolamento, è data da

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_A &= \frac{1}{2} m v^2 + \frac{1}{2} I \omega^2 - \frac{1}{2} m v_0^2 \\ &= \frac{1}{2} m (v_0 - \mu g t)^2 + \frac{1}{2} I \left(\frac{5}{2} \mu \frac{g}{R} t \right)^2 - \frac{1}{2} m v_0^2. \end{aligned}$$

Sostituendo l'espressione del tempo trovata, si ottiene:

$$\mathcal{L}_A = -\frac{2}{7} \left(\frac{1}{2} m v_0^2 \right).$$

19. Un disco omogeneo di massa m e raggio R , ruota inizialmente con velocità angolare ω_0 uniforme attorno al suo asse disposto orizzontalmente; quindi il

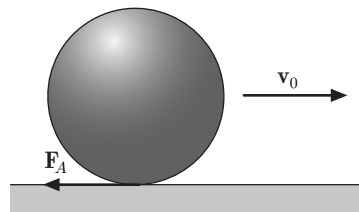


Fig. 14.30

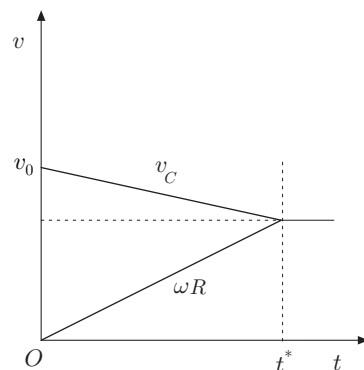


Fig. 14.31

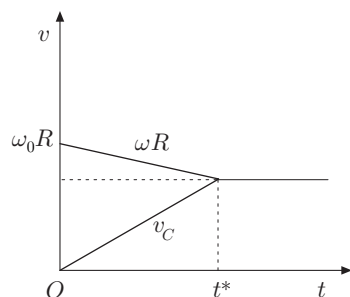
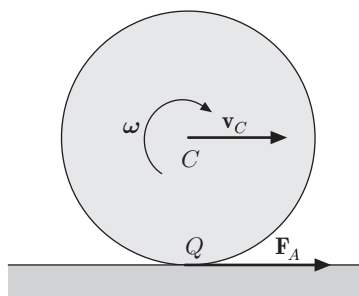


Fig. 14.32

suo bordo viene posto in contatto con un piano orizzontale scabro. Studiarne il movimento trascurando l'attrito di rotolamento.

Subito dopo il contatto il disco striscia sul piano perché, essendo la velocità del centro di massa nulla, non è soddisfatta la condizione $v_C = \omega R$. Dalle equazioni cardinali della dinamica si ha

$$F_A = ma_C, \quad -F_A R = I_C \frac{d\omega}{dt},$$

dove F_A è la forza di attrito dinamico, il cui verso è tale da contrastare la rotazione iniziale. Integrando le relazioni precedenti, si ottiene

$$v_C = \frac{F_A}{m} t, \quad \omega = \omega_0 - \frac{F_A R}{I_C} t.$$

Il centro di massa acquista velocità nel verso di F_A e la velocità angolare diminuisce finché non sono realizzate le condizioni di puro rotolamento, figura 32.

Dalle precedenti si ottiene l'istante in cui si verifica il rotolamento puro. Imponendo la condizione $v_C = \omega R$, si ha

$$\frac{F_A}{m} t = \omega_0 R - \frac{F_A R^2}{I_C} t,$$

ed essendo $F_A = \mu mg$ e $I_C = mR^2/2$, si ottiene:

$$t_1 = \frac{1}{3} \frac{\omega_0 R}{mg}.$$

La velocità del centro di massa a tale istante risulta

$$v_C = \frac{F_A}{m} t = \frac{1}{3} \omega_0 R.$$

La velocità della generatrice di contatto, per $t < t_1$, è

$$v = \omega R = \omega_0 R - \frac{F_A R^2}{I_C} t = \omega_0 R - 2v_C.$$

L'energia dissipata fino a che non si instaura il rotolamento puro è data da

$$\mathcal{L}_A = \left(\frac{1}{2} m v_C^2 + \frac{1}{2} I_C \omega^2 \right) - \frac{1}{2} I_C \omega_0^2.$$

Tenuto conto delle relazioni stabilite e operando come nell'esempio precedente, si ottiene

$$\mathcal{L}_A = -\frac{2}{3} \left(\frac{1}{2} I_C \omega_0^2 \right).$$

Durante il rotolamento, prescindendo dalla corrispondente forma di attrito, l'energia cinetica si mantiene costante.

- ||| 20. Un rocchetto di massa m , raggio interno r e raggio esterno R , è in quiete su un piano orizzontale. All'estremo libero del filo su di esso avvolto, inestendibile e di massa trascurabile, è applicata una forza \mathbf{F} orizzontale costante, figura 33. Studiare il moto del rocchetto quando rotola senza strisciare, prescindendo dall'attrito di rotolamento.

Detto φ l'angolo di rotazione del rocchetto e a_C l'accelerazione del suo centro di massa, è $a_C = R\ddot{\varphi}$. Il moto è rotatorio attorno all'asse istantaneo di rotazione che ha come traccia Q . Assumendo come polo Q , per la seconda equazione cardinale è

$$F(R-r) = I_Q \ddot{\varphi},$$

da cui segue

$$a_C = \frac{FR(R-r)}{I_Q}, \quad x_C = \frac{FR(R-r)}{I_Q} \frac{t^2}{2}.$$

Il moto del centro di massa è uniformemente accelerato e avviene nella direzione di \mathbf{F} . Dalla prima equazione cardinale, si ha

$$\mathbf{F} + \mathbf{F}_A = m\mathbf{a}_C.$$

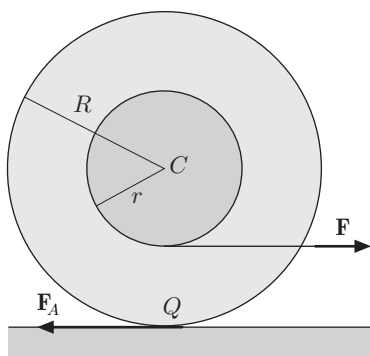


Fig. 14.33

Proiettando nella direzione del moto:

$$F + F_A = ma_C, \quad F_A = ma_C - F = \frac{mR(R-r) - I_Q}{I_Q} F,$$

che scriviamo

$$F_A = \frac{mR(R-r) - (I_C + mR^2)}{I_C + mR^2} F = -\frac{I_C + mRr}{I_C + mR^2} F.$$

La direzione della forza di attrito, componente orizzontale della reazione, è opposta a F .

Detto mg il modulo della reazione normale, il moto è di puro rotolamento, se è soddisfatta la condizione:

$$\frac{I_C + mRr}{I_C + mR^2} F \leq \mu_s mg.$$

Se la forza forma un angolo θ con l'orizzontale, figura 34, essendo $R \cos \theta - r$ la distanza tra la retta d'azione della forza e la retta parallela passante per Q , il momento rispetto a Q è $F(R \cos \theta - r)$, pertanto, procedendo come più sopra, si ottiene

$$x_C = \frac{FR(R \cos \theta - r)}{I_Q} \frac{t^2}{2}.$$

Il moto è uniformemente accelerato, ma la direzione dipende dall'angolo θ . Infatti, se $\cos \theta > r/R$, il moto avviene nel verso positivo dell'asse x ; se $\cos \theta < r/R$ nel verso opposto; se infine $\cos \theta = r/R$, il rocchetto resta in quiete. Perché il rocchetto non abbandoni l'appoggio, deve essere

$$mg \geq F \sin \theta.$$

Infine la condizione perchè il moto sia di puro rotolamento è

$$\frac{I_C F \cos \theta + mRrF}{I_C + mR^2} \leq \mu_s (mg - F \sin \theta).$$

- ||| 21. Il sistema di figura 35, costituito da due dischi omogenei coassiali, di uguale spessore, raggi R e $2R$, rigidamente collegati, è girevole attorno all'asse orizzontale fisso. Sulla periferia del disco più piccolo si avvolge un filo inestendibile e di massa trascurabile, il quale reca all'estremo una massa m . Sulla periferia del disco più grande agisce una forza tangenziale F costante. Determinare il movimento sapendo che la velocità angolare iniziale è ω_0 .

Detta M la massa complessiva, il momento d'inerzia dei dischi è $17MR^2/10$. Assumendo come unica coordinata l'angolo φ di rotazione, dal teorema dell'energia si ha:

$$\frac{1}{2} \left(\frac{17}{10} M + m \right) R^2 (\omega^2 - \omega_0^2) = mgR\varphi - 2RF\varphi.$$

I dischi si muovono di moto rotatorio uniformemente accelerato/ritardato, con accelerazione angolare

$$\dot{\omega} = \frac{mg - 2F}{(17M/10 + m)R},$$

Se $mg > 2F$ il moto rotatorio è uniformemente accelerato. Se $mg = 2F$ il moto è uniforme, con velocità angolare ω_0 . Se $mg < 2F$ il moto è ritardato e il sistema raggiunge la quiete all'istante

$$t = \frac{17M/10 + m}{2F - mg} R\omega_0.$$

Soluzione analoga hanno i problemi in cui si considerano verricelli, carrucole e sistemi simili.

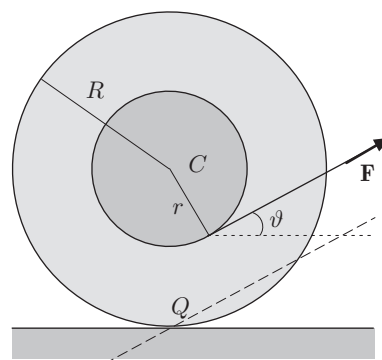


Fig. 14.34

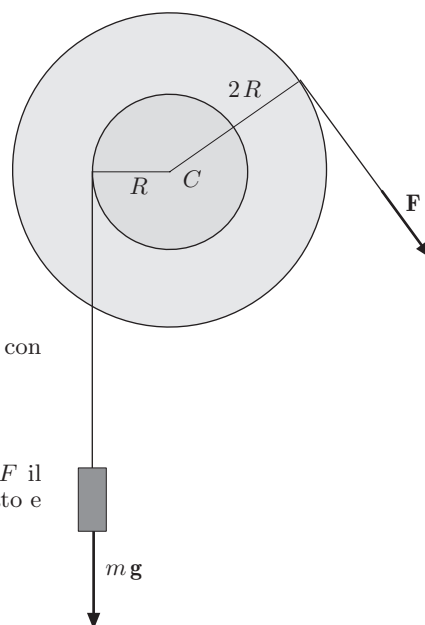


Fig. 14.35

7. Corpo rigido con un punto fisso

Consideriamo un corpo rigido con un punto O fisso, che assumiamo come polo. Il movimento è polare attorno a tale punto, nel quale viene esercitata una reazione \mathbf{R} , a priori incognita. Le equazioni cardinali della dinamica, nella terna “fissa”, sono

$$\mathbf{F} + \mathbf{R} = \frac{d\mathbf{p}}{dt}, \quad \mathbf{M} = \frac{d\mathbf{L}}{dt}. \quad (41)$$

La prima, introducendo l'accelerazione del centro di massa, permette di determinare, se interessa, la reazione vincolare,

$$\mathbf{R} = -\mathbf{F} + m\mathbf{a}_C.$$

La seconda è l'unica equazione atta a determinare il moto.

Consideriamo la terna cartesiana mobile, solidale col corpo rigido con origine in O e costituita da tre assi principali d'inerzia. Nella terna fissa l'espressione del momento angolare, rispetto ad O , è

$$\mathbf{L} = I_{xx}\omega_x \mathbf{i} + I_{yy}\omega_y \mathbf{j} + I_{zz}\omega_z \mathbf{k}, \quad (42)$$

che derivata rispetto al tempo dà:

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{L}}{dt} &= I_{xx}\dot{\omega}_x \mathbf{i} + I_{yy}\dot{\omega}_y \mathbf{j} + I_{zz}\dot{\omega}_z \mathbf{k} \\ &+ I_{xx}\omega_x \frac{d\mathbf{i}}{dt} + I_{yy}\omega_y \frac{d\mathbf{j}}{dt} + I_{zz}\omega_z \frac{d\mathbf{k}}{dt}. \end{aligned}$$

Ricordando le formule di Poisson, si ottiene:

$$\frac{d\mathbf{L}}{dt} = I_{xx}\dot{\omega}_x \mathbf{i} + I_{yy}\dot{\omega}_y \mathbf{j} + I_{zz}\dot{\omega}_z \mathbf{k} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{L}.$$

Questa espressione, denotando con $(d\mathbf{L}/dt)_m$ la derivata temporale del momento angolare rispetto alla terna mobile, si può scrivere:

$$\frac{d\mathbf{L}}{dt} = \left(\frac{d\mathbf{L}}{dt} \right)_m + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{L}.$$

Si osservi che

$$\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{L} = \begin{pmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \omega_x & \omega_y & \omega_z \\ I_{xx}\omega_x & I_{yy}\omega_y & I_{zz}\omega_z \end{pmatrix},$$

ovvero:

$$\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{L} = (I_{zz} - I_{yy})\omega_y \omega_z \mathbf{i} + (I_{xx} - I_{zz})\omega_x \omega_z \mathbf{j} + (I_{yy} - I_{xx})\omega_x \omega_y \mathbf{k}.$$

Dunque la seconda delle (41) equivale alle seguenti tre equazioni scalari:

$$\begin{aligned} I_{xx}\dot{\omega}_x + (I_{zz} - I_{yy})\omega_y \omega_z &= M_x \\ I_{yy}\dot{\omega}_y + (I_{xx} - I_{zz})\omega_x \omega_z &= M_y \\ I_{zz}\dot{\omega}_z + (I_{yy} - I_{xx})\omega_x \omega_y &= M_z. \end{aligned} \quad (43)$$

Queste relazioni si chiamano *equazioni di Eulero*.

In generale, assegnato il momento risultante, note velocità angolare e posizione iniziali, tali equazioni sono atte a determinare il movimento polare del corpo. Osserviamo inoltre che la reazione vincolare non compie lavoro perché applicata al punto fisso, dunque nel teorema dell'energia cinetica intervengono solo le forze attive.

Se la sollecitazione è conservativa, $T + U = E = \text{cost}$, con

$$T = \frac{1}{2}(I_{xx}\omega_x^2 + I_{yy}\omega_y^2 + I_{zz}\omega_z^2),$$

e U funzione delle coordinate prescelte. La soluzione del sistema (43) non è semplice e richiede l'uso di concetti svolti in Meccanica Razionale; pertanto ci limiteremo a considerare alcuni aspetti fisici estremamente interessanti e suggestivi.

|| 7.1. Moto per inerzia

Supponiamo nulle le forze attive o, in generale, nullo il momento risultante, rispetto a un punto fisso O ; come avviene, ad esempio, per un corpo soggetto solamente al proprio peso e fissato nel centro di massa. La seconda delle (41) diventa

$$\frac{d\mathbf{L}}{dt} = 0, \quad \Rightarrow \quad \mathbf{L} = \text{cost}.$$

Rispetto ad un osservatore inerziale (fisso), il momento angolare è vettorialmente costante; si ha *conservazione del momento angolare*.

Essendo nullo il lavoro delle forze attive, si ha anche conservazione dell'energia cinetica:

$$I_{xx}\omega_x^2 + I_{yy}\omega_y^2 + I_{zz}\omega_z^2 = 2T = \text{cost}.$$

Consideriamo il caso particolare in cui

$$I_{xx} = I_{yy} = I_{zz} = I;$$

l'ellissoide d'inerzia si riduce a una sfera. Si deduce che

$$\mathbf{L} = I\boldsymbol{\omega}, \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{\omega} = \text{cost}.$$

Il moto per inerzia, rispetto a un osservatore inerziale, è rotatorio uniforme attorno ad un asse; la velocità angolare mantiene modulo e direzione iniziali.

Un secondo notevole caso particolare è quello in cui

$$I_{xx} = I_{yy} \neq I_{zz};$$

l'ellissoide d'inerzia è di rotazione attorno all'asse z della terna solidale col corpo. Si dice che il corpo ha struttura giroscopica. È il caso, per esempio, di un disco o di un volano che possono ruotare

attorno al centro di massa. Dalla terza delle (43), si deduce che $\omega_z = \text{cost}$. La componente della velocità angolare ω secondo l'asse z , asse giroscopico, è costante. La (42) diventa:

$$\mathbf{L} = I_{xx}(\omega_x \mathbf{i} + \omega_y \mathbf{j}) + I_{zz} \omega_z \mathbf{k},$$

pertanto:

$$\omega_x^2 + \omega_y^2 = \frac{L^2 - I_{zz}^2 \omega_z^2}{I_{xx}^2}.$$

Ma $L^2 = \text{cost}$, dunque

$$\omega_x^2 + \omega_y^2 = \text{cost}.$$

Infine, poiché $\omega_z = \text{cost}$, si deduce:

$$\omega_x^2 + \omega_y^2 + \omega_z^2 = \text{cost};$$

la velocità angolare ha modulo costante.

Il vettore velocità angolare però non è allineato col vettore momento angolare, a meno che la rotazione non avvenga attorno ad uno degli assi principali d'inerzia. Osserviamo che ω forma un angolo θ costante col vettore \mathbf{L} , e un angolo φ anch'esso costante con l'asse z della terna solidale col corpo. Infatti, figura 36, è

$$\cos \theta = \frac{\omega \cdot \mathbf{L}}{\omega L} = \frac{I_{xx} \omega_x^2 + I_{yy} \omega_y^2 + I_{zz} \omega_z^2}{\omega L}.$$

Questa espressione è il rapporto tra il doppio dell'energia cinetica e il prodotto $L\omega$, entrambi costanti, per quanto visto prima. Siccome $\cos \theta$ è costante, lo è anche θ . Analogamente:

$$\cos \varphi = \frac{\omega \cdot \mathbf{k}}{\omega} = \frac{\omega_z}{\omega};$$

si conclude che anche φ è costante.

Pertanto ω è un vettore di modulo costante che forma, rispetto a un osservatore inerziale, un angolo θ , costante, con la direzione di \mathbf{L} e un angolo φ , costante, con l'asse z , solidale col corpo mobile. In figura 36, per comodità, si è assunto l'asse ζ della terna fissa coincidente con \mathbf{L} . Il luogo degli assi istantanei di rotazione, visti dall'osservatore fisso, è un cono rotondo di vertice O e semiapertura θ ; mentre il luogo di questi assi, visti dall'osservatore solidale col corpo mobile, è un cono rotondo di vertice O e semiapertura φ . Questi due coni si chiamano *coni di Poincaré*; il movimento polare avviene come se il cono mobile rotolasse senza strisciare sul cono fisso, con velocità angolare Ω di modulo costante. Il moto si dice di *precessione regolare*. Ponendo

$$\Omega = \frac{I_{zz} - I_{xx}}{I_{xx}} \omega_z,$$

le (43) diventano

$$\dot{\omega}_x + \Omega \omega_y = 0, \quad \dot{\omega}_y - \Omega \omega_x = 0.$$

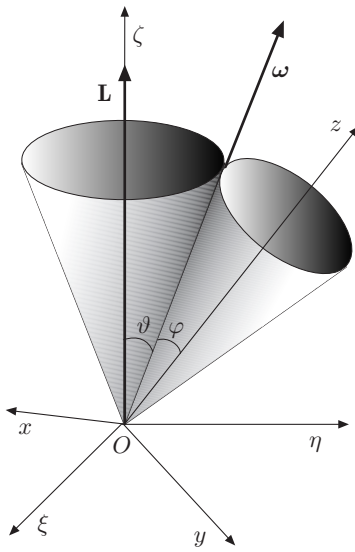


Fig. 14.36

Queste relazioni si integrano facilmente; derivando rispetto al tempo si ottiene

$$\ddot{\omega}_x + \Omega \dot{\omega}_y = 0, \quad \ddot{\omega}_y - \Omega \dot{\omega}_x = 0.$$

Sostituendo le espressioni di $\dot{\omega}_x$, $\dot{\omega}_y$, si ottengono equazioni del tipo armonico, le cui soluzioni sono

$$\omega_x = A \cos \Omega t, \quad \omega_y = A \sin \Omega t,$$

con A costante. Dunque le componenti secondo x e y della velocità angolare descrivono una circonferenza con velocità angolare uguale a Ω , *velocità angolare di precessione*.

Se l'asse di rotazione coincide con un asse principale d'inerzia, la velocità angolare $\boldsymbol{\omega}$ è parallela al momento angolare \mathbf{L} ; ovviamente non si ha moto di precessione. Se l'ellissoide d'inerzia ha tre assi distinti il problema risulta piuttosto complesso; si rimanda dunque ai testi di Meccanica Razionale.

|| 7.2. Assi permanenti di rotazione

Dimostriamo ora che tra gli infiniti moti per inerzia di un corpo rigido con un punto fisso, ve ne sono certi per i quali la velocità angolare è un vettore costante e parallelo al momento angolare. Nel caso che il corpo abbia struttura giroscopica,

$$I_{xx} = I_{yy} \neq I_{zz},$$

poiché ω_x , ω_y , ω_z sono costanti, dalle (43) si deduce che dev'essere $\omega_z = 0$, oppure $\omega_x = \omega_y = 0$. Sia nel primo che nel secondo caso $\boldsymbol{\omega}$ è diretto lungo un asse principale d'inerzia, e risultando \mathbf{L} proporzionale alla velocità angolare, si deduce che $\boldsymbol{\omega}$ è un vettore costante. Il moto è rotatorio uniforme attorno a un asse principale d'inerzia che rimane fisso rispetto all'osservatore inerziale.

Questa conclusione è ovviamente valida se

$$I_{xx} = I_{yy} = I_{zz},$$

Nel caso che i momenti d'inerzia principali siano distinti, la conclusione è la stessa. Infatti, per ω_x , ω_y , ω_z costanti, in assenza di momenti esterni, dalle (43) si deduce:

$$\omega_y \omega_z = \omega_z \omega_x = \omega_x \omega_y = 0,$$

ossia due delle tre componenti della velocità angolare devono essere nulle. Dunque la velocità angolare ha modulo costante ed è diretta lungo un asse principale di inerzia. Se, per esempio, quest'asse è quello z , sarà $\mathbf{L} = I_{zz} \omega_z \mathbf{k}$. Ma \mathbf{L} è costante, quindi \mathbf{k} dovrà essere costante. Possiamo affermare dunque che, in ogni caso, le rotazioni uniformi attorno agli assi principali d'inerzia,

fissi rispetto ad un osservatore inerziale, sono *permanenti* e permanenti si dicono i rispettivi assi.

7.3. Giroscopio

Un giroscopio, costituito da un corpo rigido che può liberamente ruotare attorno al centro di massa C , per il quale

$$I_{xx} = I_{yy} \neq I_{zz},$$

è realizzato come mostrato in figura 37. Un volano può ruotare attorno al suo asse, asse z , baricentrale d'inerzia; esso è sostenuto mediante due anelli centrati nel centro di massa e liberi di ruotare attorno a due assi tra loro perpendicolari. Questa disposizione si chiama sospensione cardanica e realizza la possibilità di rotazione attorno a tre assi baricentrali mutuamente ortogonali, senza che il giroscopio sia influenzato dall'azione di momenti dovuti alla rotazione terrestre o prodotti dal moto del veicolo al quale il supporto del giroscopio è fissato. È questo lo schema di un *giroscopio ad asse z* .

Il giroscopio, una volta posto in rotazione, assume un momento angolare \mathbf{L} vettorialmente costante, diretto come l'asse z ; dunque se esso volge in una certa direzione dello spazio, tale direzione si mantiene inalterata. Ciò si può verificare facendo ruotare il supporto del giroscopio di un certo angolo; l'asse del giroscopio ruota a sua volta in maniera tale da mantenere la direzione iniziale di \mathbf{L} . Supponiamo, per esempio, che un giroscopio venga posto in rotazione al polo nord, con l'asse ortogonale all'asse terrestre, figura 38; l'osservatore solidale con la terra vede ruotare l'asse del giroscopio in senso orario e compiere un giro completo in 24 ore; in effetti l'orientazione del giroscopio è rimasta invariata, mentre la terra ha compiuto la sua rotazione completa. Anche questa prova della rotazione terrestre è dovuta a Foucault.

Se l'asse del giroscopio è volto lungo l'equatore nella direzione est ovest, inizialmente parallelo alla superficie terrestre, l'osservatore solidale con la terra, vede il giroscopio disposto, in successione, come in figura 39. In realtà il giroscopio, rispetto alle stelle fisse, ha mantenuto inalterata la direzione iniziale.

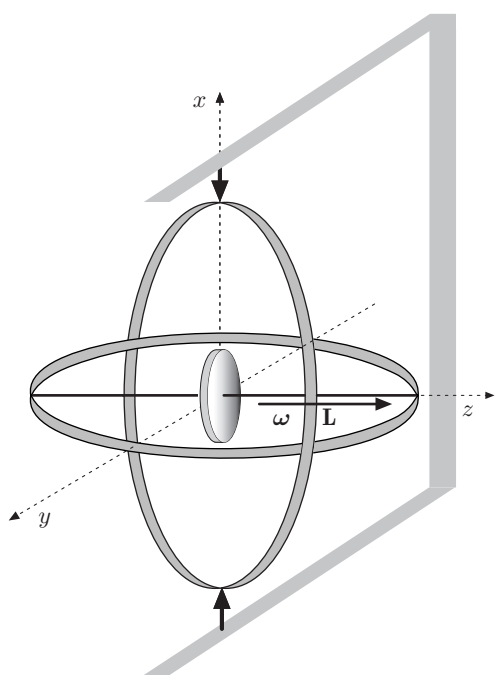


Fig. 14.37

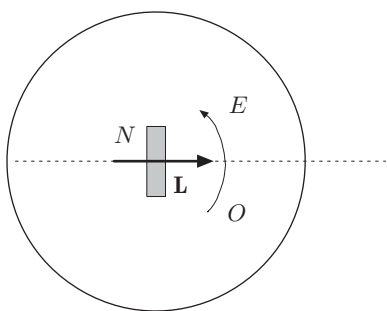


Fig. 14.38

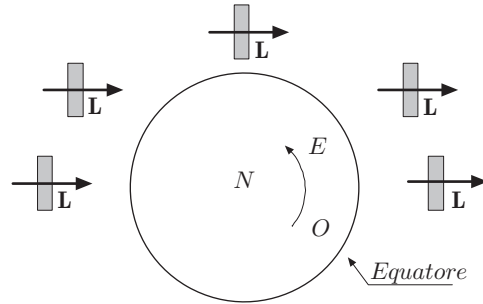


Fig. 14.39

7.4. Moto in presenza di un momento esterno

Un giroscopio ad asse z in rotazione, con ω_z molto elevata, mostra la tendenza a mantenere inalterata la direzione dell'asse di rotazione. Se infatti, figura 40, viene applicata in A una forza \mathbf{F} , ortogonale al piano $y-z$, allo scopo di deviare l'asse del giroscopio, esso mostra una inattesa tenacia a mantenere la sua direzione. Neppure forze atte a muovere il supporto oppure forze apparenti dovute alla rotazione terrestre o che si manifestano su un veicolo in moto non inerziale, purché non molto intense, riescono allo scopo. Questa proprietà è dimostrata rigorosamente in Meccanica Razionale; per i nostri scopi è sufficiente una descrizione sperimentale.

L'esperienza mostra che se la forza ha intensità sufficiente, si riesce a vincere la tenacia dell'asse giroscopico facendolo deviare. Ma contro ogni intuizione, lo spostamento elementare del punto di applicazione della forza risulta perpendicolare a \mathbf{F} , e precisamente parallelo al momento \mathbf{M} della forza rispetto al centro di massa del giroscopio. Se dunque la forza è applicata come in figura 40, il giroscopio ruota attorno all'asse x e non attorno all'asse y (moto di precessione). Analogamente se la forza viene applicata in B , nel piano $y-z$, figura 41, il giroscopio precessa attorno all'asse y . Questo comportamento è diretta conseguenza della seconda equazione cardinale, che possiamo scrivere:

$$d\mathbf{L} = \mathbf{M}dt.$$

Riferendoci al caso in cui la forza è applicata in A , poiché il momento angolare varia solo in direzione, figura 42, è

$$d\mathbf{L} = L \frac{d\mathbf{k}}{dt}dt.$$

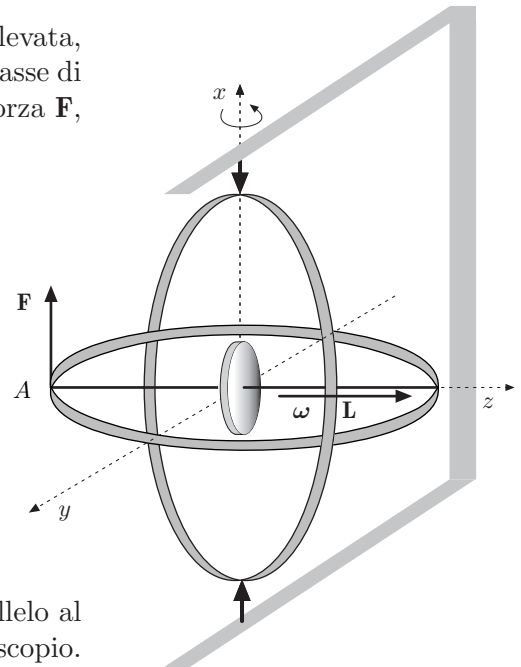


Fig. 14.40

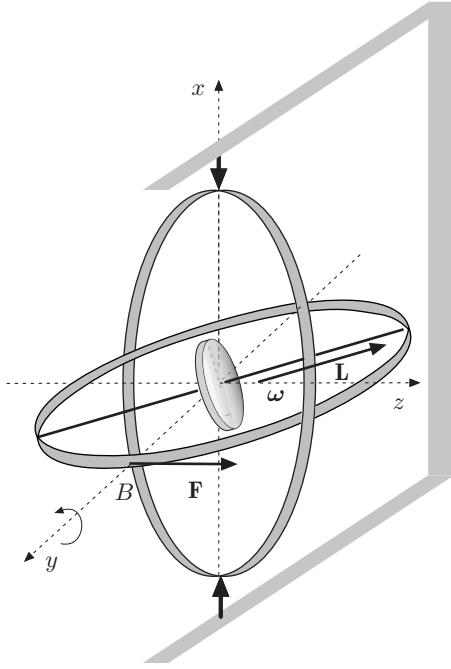


Fig. 14.41

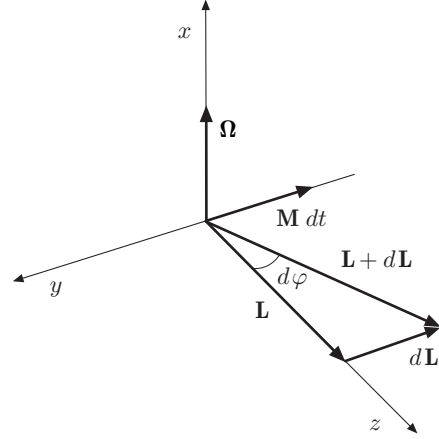


Fig. 14.42

Ma, ricordando le formule di Poisson:

$$\frac{d\mathbf{k}}{dt} = \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{k},$$

dove $\Omega = d\varphi/dt$ è la velocità angolare di precessione, si ha:

$$d\mathbf{L} = L(\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{k})dt = (\boldsymbol{\Omega} \times L\mathbf{k})dt = (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{L})dt = \mathbf{M}dt. \quad (44)$$

Il vettore \mathbf{L} ruota di un angolo $d\varphi$ in senso antiorario oppure in senso orario se la forza è opposta a quella di figura. Si può ritenere che l'asse del giroscopio tenda ad allinearsi col momento sollecitante.

La (44) si scrive:

$$\frac{d\mathbf{L}}{dt} = \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{L},$$

che è una soluzione, *ma non la più generale*, della seconda equazione cardinale. Il modulo della velocità angolare di precessione, nel caso in esame, è dato da

$$\Omega = \frac{M}{L}.$$

|| 7.5. Moto di un corpo rigido pesante con un punto fisso

Consideriamo un corpo mobile attorno a un punto fisso O e soggetto al proprio peso. Detto $\hat{\mathbf{u}}$ il versore dell'asse ζ verticale

ascendente del riferimento fisso, C il centro di massa del corpo e mg il suo peso, è

$$\mathbf{M} = -\mathbf{r}_C \times mg\hat{\mathbf{u}},$$

essendo \mathbf{r}_C il vettore che individua il centro di massa rispetto ad O . Poiché la componente di \mathbf{M} , secondo la verticale è nulla, deduciamo che la componente verticale del momento angolare è costante:

$$\mathbf{L} \cdot \hat{\mathbf{u}} = \text{cost.}$$

Questa relazione costituisce un integrale primo del moto. Un secondo integrale primo è quello dell'energia; detta ζ_C la quota di C , si ha

$$T + mg\zeta_C = E = \text{cost.}$$

Si dimostra in Meccanica Razionale che i due integrali primi non sono sufficienti per determinare il movimento. Occorre una terza relazione da porre accanto alle precedenti; ad esempio, che sia costante la velocità angolare del corpo attorno all'asse di rotazione.

7.6. Moto di una trottola pesante

La soluzione del moto di una trottola pesante richiede l'impiego di metodi avanzati di Meccanica Analitica; perciò ci limiteremo a dare una soluzione particolare, nell'ipotesi che la trottola ruoti con velocità angolare molto elevata attorno al suo asse, asse z della terna con essa solidale. Supponiamo che tale asse formi un angolo θ con l'asse ζ verticale della terna fissa, figura 43; la trottola è soggetta al momento della forza peso, di modulo

$$M = mg\zeta_C \sin \theta.$$

Se è soddisfatta la relazione

$$\mathbf{M} = \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{L}, \quad (45)$$

la trottola compie un moto di precessione regolare. Poiché il modulo della (45) è

$$|\mathbf{M}| = \Omega L \sin \theta,$$

uguagliando le precedenti, si ottiene

$$\Omega = \frac{mg\zeta_C \sin \theta}{L \sin \theta} = \frac{mg\zeta_C}{I_{zz}\omega}.$$

La velocità di precessione è indipendente dall'angolo di inclinazione.

In figura 44 è mostrato lo schema vettoriale del moto di precessione; nell'intervallo di tempo infinitesimo dt , il vettore \mathbf{L} , di modulo costante, cambia la sua direzione da OA a OB , dunque subisce una variazione $d\mathbf{L}$, parallela al momento \mathbf{M} . L'estremo del

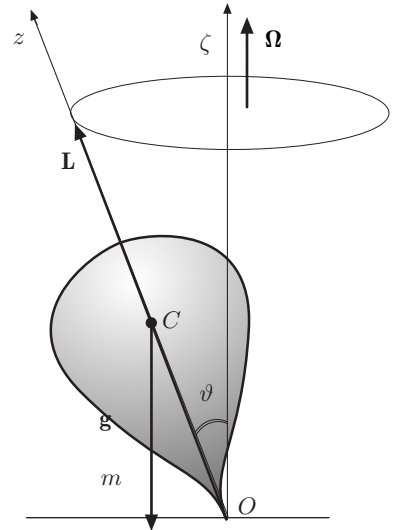


Fig. 14.43

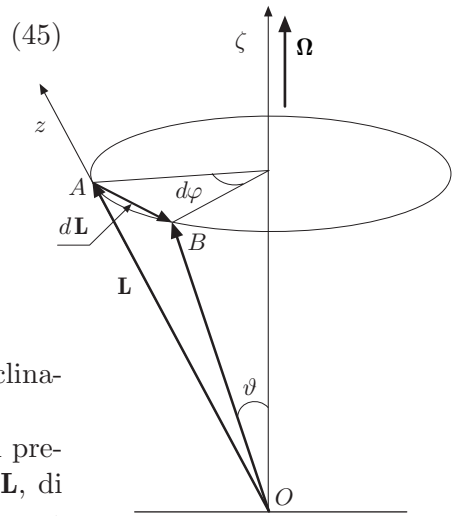


Fig. 14.44

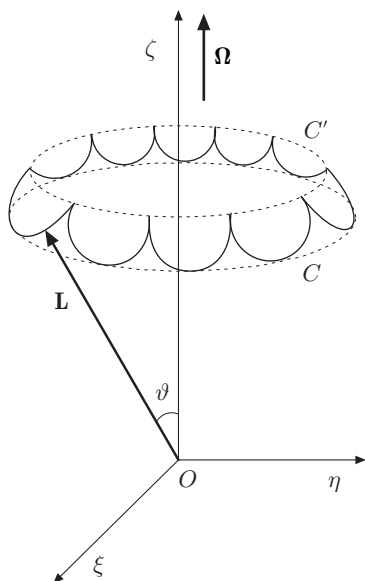


Fig. 14.45

momento angolare \mathbf{L} descrive una circonferenza di raggio $L \sin \theta$ il quale, a sua volta, ruota di un angolo infinitesimo $d\varphi$. Avendo definito la velocità angolare di precessione come $\Omega = d\varphi/dt$, dagli elementi geometrici della figura e dalla relazione $|d\mathbf{L}| = M dt$, si deduce facilmente il risultato ottenuto.

In realtà la trottola, oltre al moto di precessione, compie un movimento a *festone* più o meno complicato, come mostrato qualitativamente in figura 45, detto moto di nutazione. L'angolo θ non resta costante, ma oscilla tra due valori fissi in modo che l'estremo di \mathbf{L} , durante la precessione, oscilli tra due circonferenze C e C' . Ciò dipende dal fatto che se essa precessa attorno all'asse ζ , possiede anche un momento angolare rispetto a tale asse. Il momento angolare totale non è $I_{zz} \omega$, come si è supposto, poiché la velocità angolare risultante è $\omega + \Omega$. Tuttavia se $\Omega \ll \omega$, il momento angolare della trottola rispetto a ζ si può trascurare, come implicitamente abbiamo fatto; allora la (45) è soddisfatta.

Complementi

GIROBUSSOLA

La girobussola è costituita da un pendolo giroscopico, cioè da un pendolo contenente un giroscopio ad asse z orizzontale, tenuto in rapida rotazione perché rotore di un motorino elettrico. Il pendolo è sospeso a un punto O , solidale con la terra, sicché è girevole attorno a qualunque asse orizzontale, figura 46. All'equilibrio il centro di massa della girobussola è disposto lungo la verticale. Supponiamo che il piano della figura sia il piano dell'equatore, visto da Sud, e che il pendolo inizialmente sia nella posizione di equilibrio, in corrispondenza ad un meridiano G ; l'asse del giroscopio sia volto verso est.

A causa della rotazione terrestre, il pendolo passa dalla configurazione di equilibrio (A) a quella (B) della figura. L'asse del giroscopio mantiene la sua orientazione rispetto alle stelle fisse, dunque il centro di massa del pendolo non è più lungo la verticale. Il momento \mathbf{M} della forza peso rispetto ad O , tende a riportare il centro di massa sulla verticale (tratteggiata). Tale momento è ortogonale al piano della figura puntando all'interno del foglio, pertanto il momento angolare tende ad allinearsi con esso. Ha luogo un moto di precessione attorno alla verticale, a causa del quale \mathbf{L} attraversa il piano meridiano. In corrispondenza, il momento del peso è massimo e tende a far ruotare la girobussola nel verso intrapreso, figura 47 (C). A causa della rotazione terrestre, il pendolo si dispone come in figura 47 (D), dove il momento della forza peso è nullo, e successivamente nella posizione (E), da dove la girobussola inverte il moto di precessione, passando ancora attraverso il piano meridiano e iniziando un nuovo ciclo.

Alla latitudine λ l'effetto della rotazione terrestre è ridotto in ragione di $\cos \lambda$. In pratica la girobussola, inizialmente viene disposta in modo da formare un angolo di pochi gradi $N-E$. Il suo moto di precessione $N-E$, $N-O$ e viceversa, viene opportunamente smorzato in modo che, dopo qualche oscillazione, essa indichi con sufficiente prontezza il vero nord geografico. La girobussola così schematizzata è immune da perturbazioni magnetiche, derivanti da strutture di acciaio e da circuiti elettrici, e sostituisce in molti casi la bussola magnetica, in particolare nella navigazione aerea commerciale e nei sottomarini.

PRECESSIONE DEGLI EQUINOZI

Questo fenomeno, noto fin dai tempi di Ipparco (130 a. C.), consiste nella precessione dell'asse terrestre attorno alla normale all'eclittica. La terra non è perfettamente sferica, ma ha piuttosto la forma di un ellissoide "rigonfio" all'equatore; questa asimmetria comporta una differente forza di attrazione da

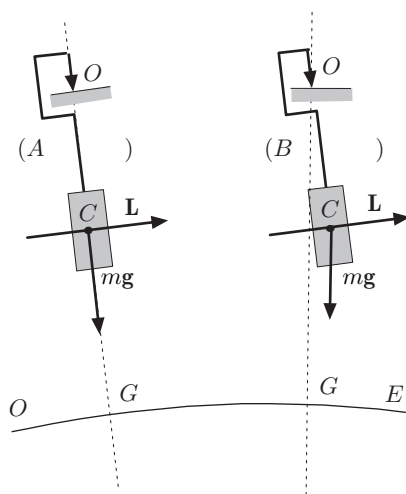


Fig. 14.46

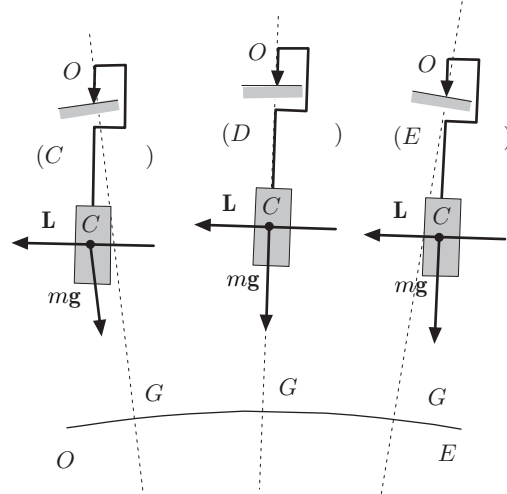


Fig. 14.47

parte del sole e della luna ed ha notevoli conseguenze sul corso delle stagioni e sul clima.

Consideriamo solo l'effetto dell'attrazione del sole; l'effetto dell'attrazione della luna è dello stesso ordine di grandezza poichè la sua distanza dalla terra è notevolmente inferiore. In figura 48 è mostrata la posizione della terra, il cui asse è inclinato di $23^\circ 27'$ rispetto alla normale all'eclittica, ai solstizi e agli equinozi; il rigonfiamento dell'equatore è schematizzato, per chiarezza, con due sferette che subiscono forze di attrazione diverse. In corrispondenza ai solstizi l'effetto di tale diversità è massimo; sulla terra viene esercitato un momento che tende a "raddrizzare" l'asse terrestre; in corrispondenza agli equinozi l'effetto è nullo. La terra, pur essendo animata da una modesta velocità angolare, ha un momento d'inerzia elevato, dunque si comporta come un grande giroscopio. Ne segue un moto di precessione dell'asse terrestre che descrive un cono attorno alla normale all'eclittica; il periodo di tale moto è di 25920 anni, corrispondente a una frequenza di $50''$ d'arco l'anno.

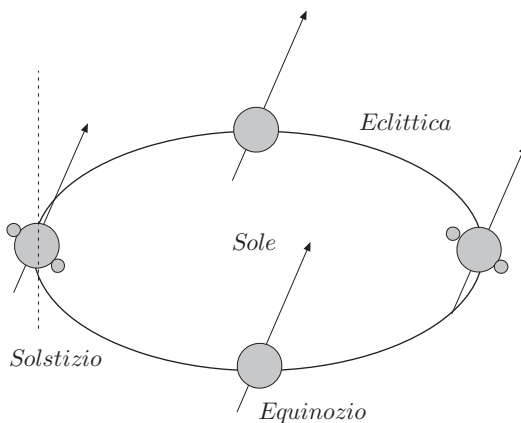


Fig. 14.48

Gli effetti giroscopici sono notevoli in molti sistemi: nelle ruote dei veicoli, nei motori rotativi, nelle biciclette ecc. È a tutti ben noto che nei veicoli a due ruote la stabilità è assicurata durante il moto e che, per effettuare una curva, non occorre usare il manubrio, ma basta inclinarsi convenientemente a destra o a sinistra.

15. Corpi deformabili

1. Considerazioni introduttive

Nei capitoli XIII e XIV è stata studiata la meccanica dei corpi rigidi, definiti come tali se la distanza tra due loro punti generici resta invariata, qualunque sia la sollecitazione alla quale sono soggetti. In realtà l'esperienza mostra che le sollecitazioni determinano deformazioni più o meno notevoli, dipendenti dalla natura del corpo. Una sbarra metallica e un elastico, soggetti alla stessa sollecitazione, presentano deformazioni molto diverse; nella prima la deformazione è rilevabile solamente con apparecchi molto sensibili, nel secondo è molto vistosa.

A parte queste situazioni estreme, un corpo o, più in generale, un mezzo sottoposto a sollecitazioni, presenta deformazioni che diremo elastiche se, cessata la sollecitazione, il corpo ritorna alle dimensioni iniziali; anelastiche se le deformazioni risultano permanenti. Lo studio di questi fenomeni, legati essenzialmente alla struttura microscopica della materia, costituisce un argomento molto importante della Fisica dei materiali. Ci limiteremo a considerare il problema da un punto di vista macroscopico e prenderemo in esame corpi in equilibrio, perché se il corpo, soggetto a forze, è in moto, le deformazioni assumono caratteristiche differenti.

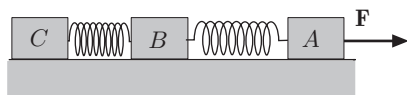


Fig. 15.1

Si consideri il sistema di figura 1, dove una forza F orizzontale è applicata al blocco A che trascina altri due blocchi, B e C , collegati mediante due molle identiche; i blocchi simulano le particelle del corpo, le deformazioni delle molle indicano le forze interne che si destano a causa della forza applicata. È palese che l'allungamento subito dalla molla compresa tra A e B risulta $x_{AB} = 2F/3k$, mentre quello della molla tra B e C è $x_{BC} = F/3k$,

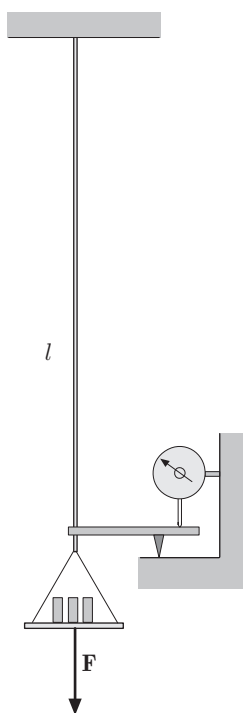


Fig. 15.2

minore del primo, come si può verificare applicando la seconda legge della dinamica. In altri termini, nei corpi deformabili non è lecito spostare la forza applicata lungo la sua retta d'azione, come nei corpi rigidi.

Se il legame tra sollecitazioni e deformazioni di un corpo in equilibrio è lineare, diremo che la deformazione è elastica. Tuttavia anche in questa situazione particolare si constaterà che il problema coinvolge numerosi parametri che, però, si riducono notevolmente se si considerano corpi isotropi e omogenei. Per chiarire in via preliminare questi concetti, consideriamo il caso semplice di una sbarretta metallica di lunghezza l , isotropa ed omogenea, ad un estremo della quale è applicata una forza di trazione \mathbf{F} , mentre l'altro estremo è fissato ad un supporto rigido, figura 2.

La forza può essere realizzata per mezzo di pesi e gli allungamenti prodotti, possono essere misurati mediante un estensimetro. Se la sbarretta è di sezione sufficientemente piccola, si può ritenere che la sollecitazione sia uniforme in ogni sua sezione, nel senso che se si immagina un tratto di sbarretta, sulle sue sezioni trasversali si destano forze interne, distribuite uniformemente che, all'equilibrio, sono equivalenti alla forza applicata, figura 3. Detta S la sezione della sbarretta, definiamo *sforzo* σ , la quantità

$$\sigma = \frac{F}{S},$$

uniforme su tutte le sezioni. Lo sforzo si misura in N/m^2 o in pascal, (Pa).

Se l è la lunghezza iniziale della sbarretta e Δl l'allungamento, definiamo *deformazione* ϵ , la quantità

$$\epsilon = \frac{\Delta l}{l};$$

essa è una grandezza adimensionata che indica l'allungamento relativo. Per le ipotesi fatte nei riguardi dello sforzo, la deformazione risulta uniforme lungo tutta la sbarretta. Aumentando gradualmente la forza applicata, e misurando i corrispondenti allungamenti, si ottengono un insieme di valori dello sforzo e della corrispondente deformazione, mostrati nel grafico di figura 4. Si

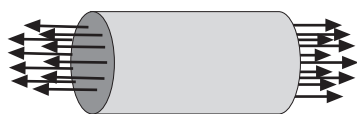


Fig. 15.3

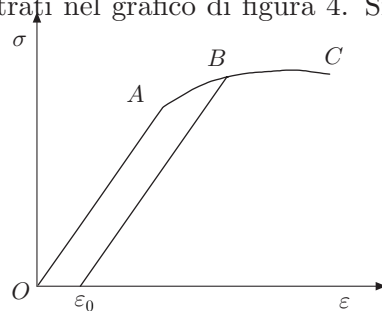


Fig. 15.4

osserva che l'andamento è lineare fino al punto A ; se, a partire dal valore dello sforzo corrispondente in A , si diminuisce l'intensità della forza applicata, la sbarretta ritorna alla sua lunghezza iniziale. È questo l'intervallo delle *deformazioni elastiche*. Aumentando la sollecitazione, la deformazione aumenta più rapidamente dello sforzo, fino al punto B , dove la curva tende a disporsi quasi parallelamente all'asse delle deformazioni. Questo intervallo è quello delle *deformazioni plastiche*.

Aumentando di poco lo sforzo, la deformazione aumenta notevolmente, finché la curva non raggiunge il punto C , dove si verifica la rottura della sbarretta; lo sforzo corrispondente si chiama carico di rottura. In realtà tra i punti A e C intervengono fenomeni più complessi che richiedono un esame a livello microscopico. In ogni caso si osserva che se, in questo intervallo, il carico viene diminuito fino ad annullarsi, il filo presenta una deformazione permanente, indicata in figura con ϵ_0 .

Dall'esperienza possiamo dunque dedurre che, nell'intervallo delle deformazioni elastiche, vale una relazione del tipo

$$\sigma = E\epsilon; \quad (1)$$

lo sforzo è proporzionale alla deformazione.

La (1) esprime la *legge di Hooke*, "*Ut tensio sic vis*", che però, come vedremo, ha una forma più generale. La grandezza E si chiama *modulo di Young* ed ha le dimensioni dello sforzo. Il suo ordine di grandezza, nei solidi, è molto elevato, circa $10^{10} Pa$; infatti esprime lo sforzo necessario per produrre la deformazione unitaria. Naturalmente il carico di rottura, in pratica, è molto minore.

L'esperienza mostra inoltre che insieme alla deformazione ϵ , si ha una contrazione delle dimensioni trasversali della sbarretta; supponendo che la sezione sia circolare, di raggio r , detta Δr la contrazione, la corrispondente deformazione è data da

$$\epsilon_t = -\frac{\Delta r}{r}.$$

Quest'ultima è legata a ϵ per mezzo del rapporto o coefficiente di Poisson, μ , definito dalla relazione:

$$\mu = -\frac{\epsilon_t}{\epsilon}. \quad (2)$$

Il coefficiente di Poisson è un numero puro e descrive, insieme agli altri moduli elastici, le proprietà elastiche dei materiali; il suo valore non può superare $1/2$. Infatti, supponiamo di isolare all'interno della sbarretta un cubo infinitesimo, di spigolo a ; in seguito alla trazione, la lunghezza dello spigolo parallelo all'asse diventa $a(1 + \epsilon)$, mentre quella dello spigolo trasversale $a(1 + \epsilon_t)$.

Pertanto il volume del cubo diventa

$$a(1 + \epsilon)a^2(1 + \epsilon_t)^2 = a^3(1 + \epsilon)(1 - \mu\epsilon)^2.$$

Poiché in seguito alla deformazione, il volume del cubo non può diminuire, sviluppando la precedente e trascurando i termini di ordine superiore al primo, si ha

$$a^3[1 + \epsilon(1 - 2\mu)] \geq 0.$$

Essendo $\epsilon > 0$, si ottiene $\mu \leq 1/2$.

2. Sforzi

Consideriamo ora con maggiore dettaglio, le caratteristiche degli sforzi. Le forze esterne che agiscono su un corpo vanno classificate in *forze di volume* e *forze di superficie*. Le prime sono forze che agiscono su ogni particella del corpo; per esempio, la gravità, le forze d'inerzia, le forze elettromagnetiche ecc. Le seconde sono forze che agiscono sulla superficie del corpo; cioè forze di contatto dovute ad altri corpi che esercitano tensioni o compressioni.

Detto dV l'elemento di volume, è conveniente rappresentare la forza di volume che agisce su tale elemento con la notazione $\mathbf{F}dV$, dove \mathbf{F} rappresenta la forza per unità di volume. Analogamente, detto dS l'elemento di superficie del corpo, la forza di superficie che agisce su tale elemento si indica con $\mathbf{F}dS$, dove \mathbf{F} è la forza per unità di superficie. Consideriamo un corpo, in equilibrio, soggetto a forze di volume e di superficie esterne, figura 5. Le forze di coesione, interne, equilibrano le sollecitazioni impresse al corpo. Scegliamo un punto P interno al corpo, e immaginiamo di sezionare il corpo con un piano π generico, passante per P , in modo da dividerlo in due parti A e B ; se il corpo è in equilibrio, le forze di coesione interne esercitate da B e le forze esterne applicate ad A hanno risultante nulla. Analogamente, si ha equilibrio tra le forze esterne applicate a B e le forze di coesione esercitate da A . L'effetto delle forze di coesione si può ritenere distribuito sul piano π . Su tale piano consideriamo una areola ΔS nell'intorno di P e fissiamo in corrispondenza la normale $\hat{\mathbf{n}}$ orientata. Indicando con $\Delta\mathbf{F}$ la forza relativa a ΔS , definiamo sforzo nel punto P , la grandezza

$$\sigma = \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{\Delta\mathbf{F}}{\Delta S}.$$

Naturalmente, per la legge di azione e reazione, uno sforzo opposto $-\sigma$, si desta sull'altra faccia dell'elemento d'area considerato. Lo sforzo può essere scomposto in un componente lungo la normale $\hat{\mathbf{n}}$, sforzo normale σ_n , e in un componente tangente a ΔS ,

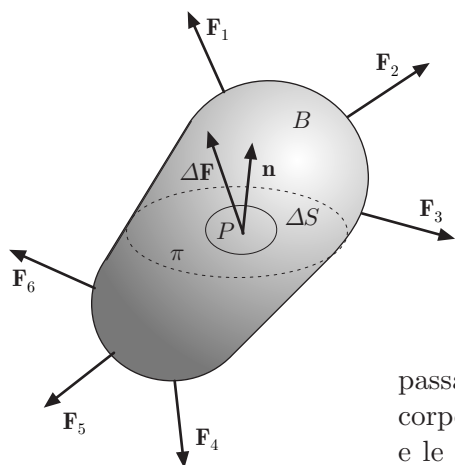


Fig. 15.5

sforzo tangenziale o di taglio σ_t . Se immaginiamo di sezionare il corpo con infiniti piani, tutti passanti per P , per ognuno di essi è associato uno sforzo σ in P , che varia al variare del piano. Tuttavia lo sforzo in P può essere specificato da tre soli vettori σ_x , σ_y , σ_z , relativi ai tre piani coordinati, definiti da una terna cartesiana ortogonale.

Consideriamo, nell'intorno di P , un elemento di volume dV , costituito da un tetraedro con tre spigoli coincidenti con gli assi x, y, z di una terna di riferimento con origine in P , e fissiamo sulla faccia obliqua dS , la normale $\hat{\mathbf{n}}$ orientata verso l'esterno. Le facce dS_x , dS_y , dS_z , giacenti sui piani coordinati, sono ortogonali ai rispettivi assi ed hanno come normali i versori \mathbf{i} , \mathbf{j} e \mathbf{k} della terna, orientati verso l'interno dell'elemento; figura 6. Assumiamo inoltre positivi gli sforzi di tensione e negativi quelli di compressione.

Per l'equilibrio dell'elemento, la somma delle forze, di volume e di superficie, dev'essere nulla. Detta $\mathbf{F}dV$ la forza di volume, σ lo sforzo sulla faccia obliqua, σ_x , σ_y , σ_z gli sforzi sulle altre facce, scriviamo:

$$\sigma dS - \sigma_x dS_x - \sigma_y dS_y - \sigma_z dS_z + \mathbf{F}dV = 0.$$

In questa relazione si è convenuto di assumere positive le normali orientate verso l'esterno dell'elemento. Trascurando gli infinitesimi di ordine superiore al secondo, cioè dV rispetto a dS , si ha

$$\sigma dS = \sigma_x dS_x + \sigma_y dS_y + \sigma_z dS_z,$$

quindi:

$$\sigma = \sigma_x \frac{dS_x}{dS} + \sigma_y \frac{dS_y}{dS} + \sigma_z \frac{dS_z}{dS};$$

ma $dS_x/dS, \dots$ sono i coseni direttori della normale a dS , dunque:

$$\sigma = \sigma_x \cos \alpha + \sigma_y \cos \beta + \sigma_z \cos \gamma. \quad (3)$$

La (3) costituisce la *relazione di Cauchy*. Essa definisce lo sforzo su un elemento di normale qualsiasi, contenente P , noti gli sforzi relativi a tre elementi di normali prefissate che, nel nostro caso, sono mutuamente ortogonali.

Esprimiamo gli sforzi al secondo membro della (3), mediante le loro componenti cartesiane, figura 7, dove sono mostrate le stesse componenti, relative ad un cubo infinitesimo, nell'intorno di P . Si ha

$$\begin{aligned} \sigma_x &= \sigma_{xx} \mathbf{i} + \sigma_{yx} \mathbf{j} + \sigma_{zx} \mathbf{k} \\ \sigma_y &= \sigma_{xy} \mathbf{i} + \sigma_{yy} \mathbf{j} + \sigma_{zy} \mathbf{k} \\ \sigma_z &= \sigma_{xz} \mathbf{i} + \sigma_{yz} \mathbf{j} + \sigma_{zz} \mathbf{k}. \end{aligned}$$

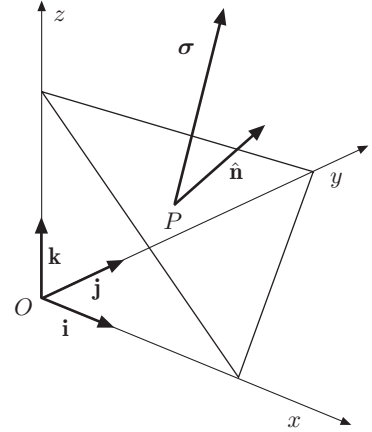


Fig. 15.6

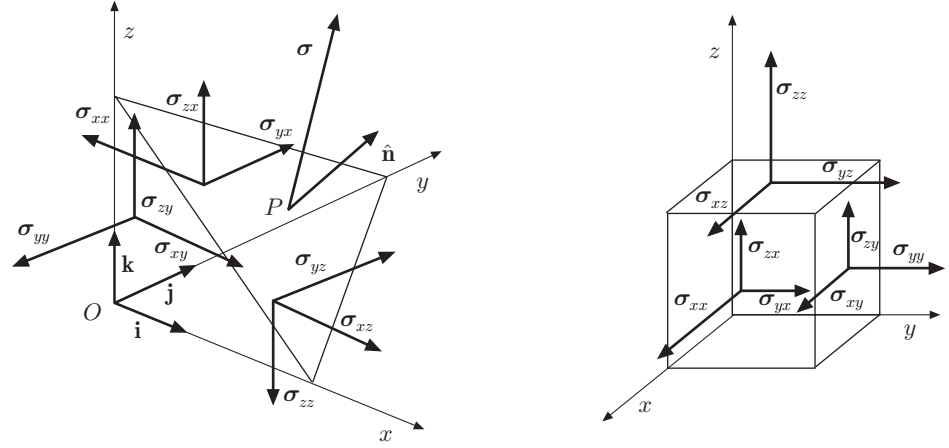


Fig. 15.7

Sostituendo nella (3), si ottengono le componenti cartesiane di σ :

$$\begin{aligned}\sigma_x &= \sigma_{xx} \cos \alpha + \sigma_{xy} \cos \beta + \sigma_{xz} \cos \gamma \\ \sigma_y &= \sigma_{yx} \cos \alpha + \sigma_{yy} \cos \beta + \sigma_{yz} \cos \gamma \\ \sigma_z &= \sigma_{zx} \cos \alpha + \sigma_{zy} \cos \beta + \sigma_{zz} \cos \gamma.\end{aligned}\quad (4)$$

Queste relazioni indicano come varia lo sforzo in un punto al variare dell'inclinazione della faccia obliqua; simbolicamente, si può scrivere:

$$\sigma = \mathcal{T} \hat{\mathbf{n}}. \quad (5)$$

dove \mathcal{T} è un tensore doppio, rappresentato dalla matrice

$$\begin{pmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} & \sigma_{yz} \\ \sigma_{zx} & \sigma_{zy} & \sigma_{zz} \end{pmatrix}, \quad (6)$$

i cui elementi sono le componenti degli sforzi secondo gli assi cartesiani. Pertanto lo sforzo in corrispondenza a una superficie elementare dS di normale $\hat{\mathbf{n}}$, è dato dalla relazione

$$\sigma = \begin{pmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} & \sigma_{yz} \\ \sigma_{zx} & \sigma_{zy} & \sigma_{zz} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \alpha \\ \cos \beta \\ \cos \gamma \end{pmatrix}. \quad (7)$$

Le componenti degli sforzi σ_{ij} , con $i = j$, rappresentano gli sforzi normali, mentre quelle con $i \neq j$, gli sforzi tangenziali o di taglio. Dalle (4) si deduce che le componenti dello sforzo, mutano con la terna di riferimento. Infatti, riferendoci alla figura 7, è chiaro che se, per esempio, facciamo ruotare gli assi della terna x, y, z , in modo che i nuovi assi x', y', z' siano paralleli alla faccia obliqua del tetraedro e z' alla normale a tale faccia, nelle (4) sopravviverà solo il terzo termine; dunque si ha:

$$\sigma_x = \sigma_{xz}, \quad \sigma_y = \sigma_{yz}, \quad \sigma_z = \sigma_{zz}.$$

In generale, indicando con $l_{zx'}, l_{xy'}, l_{xz'}$, ecc..., i nove coseni direttori che gli assi x', y', z' formano con gli assi x, y, z , le componenti degli sforzi si trasformano secondo la legge:

$$\sigma_{i'j'} = \sum_i \sum_j l_{ii'} \sigma_{ij} l_{jj'},$$

dove i, j indicano ognuno, x, y, z e $i' j'$ indicano x', y', z' . Ogni grandezza le cui componenti, riferite a una nuova terna, si trasformano secondo la relazione precedente, è infatti un tensore doppio†.

Dall'equilibrio dei momenti si deduce una importante proprietà degli sforzi. Consideriamo, per semplicità, i momenti assiali delle forze di superficie, rispetto ad un asse parallelo all'asse z e passante per il baricentro C di dS , figura 8. Essendo le facce del tetraedro infinitesime, si può ritenere che lo sforzo sia uniforme su tutta la superficie e quindi applicato nel baricentro. Sotto queste ipotesi gli sforzi σ e σ_z , hanno momento assiale nullo. Dette b_x, b_y le distanze (infinitesime) da C delle facce dS_x, dS_y , si ha

$$\sigma_{yx} dS_x b_x - \sigma_{xy} dS_y b_y = 0. \quad (8)$$

Indicando con dx, dy, dz le lunghezze degli spigoli del tetraedro coincidenti con gli assi coordinati, è

$$dS_x = \frac{1}{2} dy dz, \quad dS_y = \frac{1}{2} dx dz, \quad b_x = \frac{1}{3} dx, \quad b_y = \frac{1}{3} dy.$$

Sostituendo nella (8), si ottiene

$$\sigma_{yx} = \sigma_{xy}.$$

Analogamente per gli altri sforzi tangenziali:

$$\sigma_{xz} = \sigma_{zx},$$

Il tensore degli sforzi è simmetrico.

Esempi

1. Una sbarra omogenea di sezione S , è sottoposta a trazione mediante due forze F opposte, applicate lungo l'asse, ai suoi estremi. Determinare l'orientazione della sezione in cui lo sforzo di taglio ha il valore massimo e calcolare il corrispondente sforzo normale.

Si immagini di sezionare la sbarra con un piano la cui normale forma l'angolo θ con l'asse, figura 9. Detta S_1 la sezione praticata, si ha

$$\sigma_n = \frac{\mathbf{F} \cdot \hat{\mathbf{n}}}{S_1} = \frac{F \cos \theta}{S_1}, \quad \sigma_t = \frac{F \sin \theta}{S_1}.$$

Poiché $S = S_1 \cos \theta$, possiamo scrivere:

$$\sigma_n = \frac{F \cos^2 \theta}{S}, \quad \sigma_t = \frac{F \sin \theta \cos \theta}{S},$$

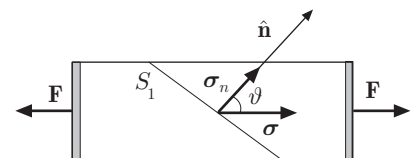


Fig. 15.9

†Il lettore può consultare: Finzi e Pastori, Calcolo Tensoriale e applicazioni, Zanichelli.

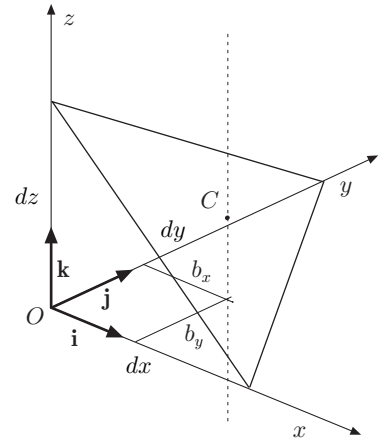


Fig. 15.8

Il massimo di σ_t , al variare di θ , si ha per

$$\frac{d\sigma(\theta)}{d\theta} = 0, \quad \frac{F}{S}(\cos^2 \theta - \sin^2 \theta) = \frac{F}{S} \cos 2\theta = 0;$$

cioè per $\theta = \pi/4$. I valori degli sforzi sono:

$$\sigma_n(\pi/4) = \sigma_t(\pi/4) = \frac{F}{2S}.$$

Lo sforzo di taglio è uguale, in modulo, allo sforzo normale.

- ||| **2.** Le componenti degli sforzi che si esercitano nel punto $P \equiv (1, -2, 2)$ di un corpo elastico continuo sono:

$$\begin{aligned} \sigma_{xx} &= 3 \cdot 10^5 \text{ Pa}, & \sigma_{yy} &= 12 \cdot 10^5 \text{ Pa}, & \sigma_{zz} &= 15 \cdot 10^5 \text{ Pa} \\ \sigma_{xy} &= \sigma_{yx} = 6 \cdot 10^5 \text{ Pa}, & \sigma_{xz} &= \sigma_{zx} = \sigma_{yz} = \sigma_{zy} = 0. \end{aligned}$$

Determinare lo sforzo normale, su un elemento di superficie la cui normale è orientata come la congiungente l'origine del riferimento col punto P dell'elemento.

Poiché la distanza di P dall'origine è $d = \sqrt{1+4+4} = 3$, i coseni direttori della normale risultano:

$$\cos \alpha = \frac{1}{3}, \quad \cos \beta = -\frac{2}{3}, \quad \cos \gamma = \frac{2}{3}.$$

Dalle (4), si ha

$$\sigma_x = -3 \cdot 10^5 \text{ Pa}, \quad \sigma_y = -6 \cdot 10^5 \text{ Pa}, \quad \sigma_z = 10 \cdot 10^5 \text{ Pa}.$$

Il modulo dello sforzo è:

$$\sigma = \sqrt{145 \cdot 10^{10}} \text{ Pa} \approx 12 \cdot 10^5 \text{ Pa}.$$

La componente normale dello sforzo risulta:

$$\sigma_n = \boldsymbol{\sigma} \cdot \hat{\mathbf{n}} = \left(-3\frac{1}{3} + 6\frac{2}{3} + 10\frac{2}{3}\right) 10^5 \text{ Pa} = \frac{29}{3} 10^5 \text{ Pa}.$$

La componente tangenziale, sforzo di taglio, è data da

$$\sigma_t = \sqrt{\sigma^2 - \sigma_n^2} \approx 7 \cdot 10^5 \text{ Pa}.$$

- ||| **3.** Le componenti degli sforzi in un punto P di un corpo elastico continuo sono:

$$\begin{aligned} \sigma_{xx} &= 4 \text{ Pa}, & \sigma_{yy} &= -2 \text{ Pa} & \sigma_{xy} &= \sigma_{yx} = 1 \text{ Pa} \\ \sigma_{xz} &= \sigma_{zx} = \sigma_{yz} = \sigma_{zy} = \sigma_{xz} = 0. \end{aligned}$$

Determinare secondo quali elementi di superficie, passanti per P , gli sforzi risultano normali.

Si tratta di un problema piano; poiché su tali superfici lo sforzo deve essere normale, le (4) si scrivono:

$$\begin{aligned} \sigma_x &= \sigma_n \cos \alpha = \sigma_{xx} \cos \alpha + \sigma_{xy} \cos \beta \\ \sigma_y &= \sigma_n \cos \beta = \sigma_{yx} \cos \alpha + \sigma_{yy} \cos \beta, \end{aligned}$$

cioè

$$\begin{aligned} (\sigma_{xx} - \sigma_n) \cos \alpha + \sigma_{xy} \cos \beta &= 0 \\ \sigma_{yx} \cos \alpha + (\sigma_{yy} - \sigma_n) \cos \beta &= 0. \end{aligned} \tag{9}$$

Perché questo sistema sia soddisfatto da valori non nulli degli sforzi, il suo determinante deve essere uguale a zero:

$$\begin{vmatrix} (\sigma_{xx} - \sigma_n) & \sigma_{xy} \\ \sigma_{yx} & (\sigma_{yy} - \sigma_n) \end{vmatrix} = 0.$$

Sostituendo i valori degli sforzi assegnati, si ha

$$\sigma_n^2 - 2\sigma_n - 9 = 0,$$

che ha come radici:

$$\sigma_n = 1 \pm \sqrt{10}.$$

Questi sforzi sono normali a due piani di cui va determinata la giacitura. Sostituendo il primo in una delle (9) e tenendo presente che $\cos \beta = \sin \alpha$, si ottiene:

$$[4 - (1 + \sqrt{10})] \cos \alpha_1 + \sin \alpha_1 = 0, \quad \tan \alpha_1 = -3 + \sqrt{10}.$$

e

$$[4 - (1 - \sqrt{10})] \cos \alpha_2 + \sin \alpha_2 = 0, \quad \tan \alpha_2 = -3 - \sqrt{10},$$

valori che indicano le direzioni delle normali ai piani. Riconosciamo che tali piani sono ortogonali; infatti:

$$\tan \alpha_2 = -\frac{1}{\tan \alpha_1} = \tan(\alpha_1 + \pi/2),$$

come si può facilmente verificare.

Questo procedimento è generale; infatti imponendo, al primo membro delle (4), che lo sforzo sia normale, otteniamo la seguente equazione

$$\begin{pmatrix} \sigma_{xx} - \sigma_n & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} - \sigma_n & \sigma_{yz} \\ \sigma_{zx} & \sigma_{zy} & \sigma_{zz} - \sigma_n \end{pmatrix} = 0,$$

che, risolta, dà tre valori di σ_n , di cui uno massimo, uno intermedio e l'altro minimo, che chiamiamo σ_1 , σ_2 , σ_3 . Si è così *diagonalizzato* il tensore degli sforzi. In altri termini, il procedimento consiste nella ricerca degli autovalori della matrice degli sforzi, in analogia all'esempio 1-XIV.

I tre piani su cui agiscono gli sforzi, puramente normali, sono mutuamente ortogonali e sono chiamati *piani principali degli sforzi normali*; le direzioni delle loro normali possono essere ricavate sostituendo i valori degli sforzi ottenuti nelle (4). Tali direzioni si chiamano *direzioni principali degli sforzi*.

Esistono piani in cui lo sforzo risulta puramente tangenziale; per determinare tali piani conviene assumere la terna di riferimento con assi coincidenti con le direzioni principali degli sforzi. Su un piano di *inclinazione generica* di tale terna, le componenti dello sforzo, per le (3), sono:

$$\sigma'_1 = \sigma_1 \cos \alpha, \quad \sigma'_2 = \sigma_2 \cos \beta, \quad \sigma'_3 = \sigma_3 \cos \gamma,$$

essendo α , β e γ gli angoli che la normale al piano considerato, forma con gli assi della terna; pertanto

$$\sigma'^2 = \sigma_1^2 \cos^2 \alpha + \sigma_2^2 \cos^2 \beta + \sigma_3^2 \cos^2 \gamma.$$

Si ha inoltre:

$$\sigma'^2 = \sigma_1'^2 + \sigma_2'^2 + \sigma_3'^2 = \sigma_n'^2 + \sigma_t'^2,$$

essendo σ_n' e σ_t' , lo sforzo normale e quello tangenziale; pertanto:

$$\sigma_t'^2 = \sigma'^2 - \sigma_n'^2.$$

Poiché

$$\begin{aligned} \sigma_n' &= \boldsymbol{\sigma}' \cdot \hat{\mathbf{n}} = \sigma'_1 \cos \alpha + \sigma'_2 \cos \beta + \sigma'_3 \cos \gamma \\ &= \sigma_1 \cos^2 \alpha + \sigma_2 \cos^2 \beta + \sigma_3 \cos^2 \gamma, \end{aligned}$$

si ottiene

$$\sigma_t'^2 = \sigma_1^2 \cos^2 \alpha + \sigma_2^2 \cos^2 \beta + \sigma_3^2 \cos^2 \gamma - (\sigma_1 \cos^2 \alpha + \sigma_2 \cos^2 \beta + \sigma_3 \cos^2 \gamma)^2.$$

Per ottenere i piani in cui lo sforzo è puramente tangenziale, cioè massimo, basta imporre:

$$\frac{\partial \sigma_t'}{\partial \alpha} = 0, \quad \frac{\partial \sigma_t'}{\partial \beta} = 0,$$

e tener conto della relazione di vincolo:

$$\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1.$$

Senza condurre ulteriormente avanti la dimostrazione, applichiamo i concetti precedenti al problema bidimensionale considerato. Tenuto conto che $\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta = 1$, si ha

$$\begin{aligned} \sigma_t'^2 &= \sigma_1^2 \cos^2 \alpha + \sigma_2^2 \cos^2 \beta - (\sigma_1 \cos^2 \alpha + \sigma_2 \cos^2 \beta)^2 \\ &= (\sigma_1 - \sigma_2)^2 \cos^2 \alpha \cos^2 \beta, \end{aligned}$$

e

$$\sigma_t' = (\sigma_1 - \sigma_2) \cos \alpha \cos \beta.$$

Poiché $\cos \beta = \sin \alpha$, possiamo scrivere,

$$\sigma_t' = (\sigma_1 - \sigma_2) \cos \alpha \sin \alpha.$$

Derivando rispetto ad α e annullando tale derivata:

$$\frac{\partial \sigma_t'}{\partial \alpha} = (\sigma_1 - \sigma_2)(\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha) = 0,$$

si ottiene

$$\sin \alpha = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad \alpha = \pm \frac{\pi}{4}.$$

Lo sforzo tangenziale massimo si ha nei piani le cui normali formano gli angoli $\alpha = \pm \pi/4$, rispetto agli assi principali degli sforzi. Lo sforzo tangenziale massimo risulta

$$\sigma_t(max) = (\sigma_1 - \sigma_2) \sin \alpha \cos \alpha = [(1 + \sqrt{10}) - (1 - \sqrt{10})] \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{1}{\sqrt{2}} = \sqrt{10}.$$

III 3. Equazione dell'equilibrio

Si consideri un cubo elementare di volume $dV = dxdydz$ di un corpo elastico in equilibrio, soggetto a forze di volume e di superficie figura 10. Siano σ_x , σ_y , σ_z rispettivamente gli sforzi sulle facce (dy, dz) , (dx, dz) , $(dxdy)$; limitandosi a variazioni del primo ordine:

$$-\left(\sigma_x + \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} dx\right), \quad -\left(\sigma_y + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} dy\right), \quad -\left(\sigma_z + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} dz\right),$$

gli sforzi sulle corrispondenti facce opposte. Il segno negativo dipende dall'orientazione dei versori degli assi cartesiani. Per l'equilibrio, si ha

$$\begin{aligned} \mathbf{F}dV + \sigma_x dydz - \left(\sigma_x + \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} dx\right) dydz + \sigma_y dxdz \\ - \left(\sigma_y + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} dy\right) dxdz + \sigma_z dxdy - \left(\sigma_z + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} dz\right) dxdy = 0. \end{aligned}$$

Svolgendo i prodotti, si ricava:

$$\mathbf{F} = \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z}. \quad (10)$$

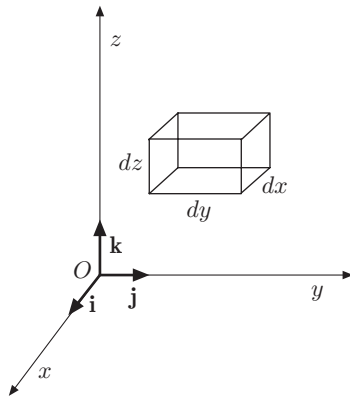


Fig. 15.10

La precedente costituisce l'equazione *indefinita dell'equilibrio*; si dice indefinita perché dà luogo a tre equazioni scalari e non permette, in generale, di ricavare le sei componenti degli sforzi; si rammenti che il tensore degli sforzi è simmetrico. Occorre dunque aggiungere altre condizioni che dipendono dalla natura del corpo che si considera. Una seconda equazione si ricava imponendo l'equilibrio dei momenti; ma, come abbiamo verificato al paragrafo precedente, questa permette solo di stabilire la simmetria del tensore degli sforzi.

4. Deformazioni

Lo stato di deformazione di un corpo è conseguenza degli sforzi ai quali è soggetto; infatti le particelle del corpo mutano la loro posizione iniziale, subendo uno spostamento elementare che, per comodità, indichiamo con \mathbf{s} . Se tutte le particelle presentassero lo stesso spostamento, il corpo non subirebbe deformazioni e il risultato netto sarebbe uno spostamento rigido. Si ha deformazione quando le particelle hanno spostamenti differenti, cioè se \mathbf{s} è funzione del vettore \mathbf{r} che individua la posizione della particella. Più esattamente, se un punto del corpo nella posizione \mathbf{r} , subisce uno spostamento \mathbf{s} ed un punto nella posizione $\mathbf{r} + d\mathbf{r}$ subisce uno spostamento $\mathbf{s} + d\mathbf{s}$, lo stato di deformazione può essere rappresentato attraverso il vettore $d\mathbf{s}$, o meglio, dalla relazione che lega $d\mathbf{s}$ a $d\mathbf{r}$. La figura 11 mostra il diagramma di tali vettori nell'intorno di un punto.

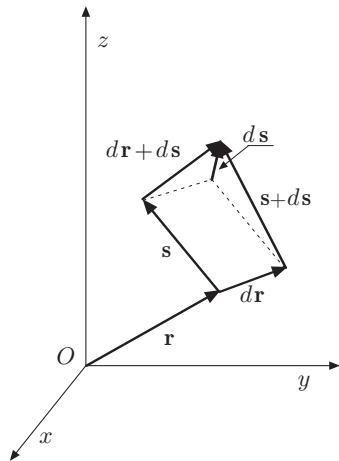


Fig. 15.11

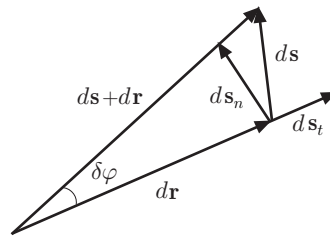


Fig. 15.12

Se $d\mathbf{s}$ dipende linearmente da $d\mathbf{r}$, la deformazione è elastica; le particelle che inizialmente giacciono lungo $d\mathbf{r}$, a causa degli sforzi, si disporranno lungo $d\mathbf{s} + d\mathbf{r}$. In figura 12 è mostrata la somma dei vettori $d\mathbf{r}$ e $d\mathbf{s}$; quest'ultimo, a meno di infinitesimi

di ordine superiore, può essere scomposto nei due vettori ds_t e ds_n . Il segmento infinitesimo dr subisce una elongazione o una contrazione ds_t , e ruota di un angolo $\delta\varphi = ds_n/dr$.

In un riferimento cartesiano è

$$ds = ds_x \mathbf{i} + ds_y \mathbf{j} + ds_z \mathbf{k}$$

$$d\mathbf{r} = dr_x \mathbf{i} + dr_y \mathbf{j} + dr_z \mathbf{k};$$

ma ds è funzione della posizione \mathbf{r} , quindi delle coordinate. Pertanto si ha:

$$ds_x = \frac{\partial s_x}{\partial x} dx + \frac{\partial s_x}{\partial y} dy + \frac{\partial s_x}{\partial z} dz$$

$$ds_y = \frac{\partial s_y}{\partial x} dx + \frac{\partial s_y}{\partial y} dy + \frac{\partial s_y}{\partial z} dz$$

$$ds_z = \frac{\partial s_z}{\partial x} dx + \frac{\partial s_z}{\partial y} dy + \frac{\partial s_z}{\partial z} dz.$$

Queste relazioni esprimono il legame tra ds e $d\mathbf{r}$, nell'intorno del punto individuato da \mathbf{r} . Tale dipendenza, introducendo il tensore:

$$\mathcal{T} = \begin{pmatrix} \frac{\partial s_x}{\partial x} & \frac{\partial s_x}{\partial y} & \frac{\partial s_x}{\partial z} \\ \frac{\partial s_y}{\partial x} & \frac{\partial s_y}{\partial y} & \frac{\partial s_y}{\partial z} \\ \frac{\partial s_z}{\partial x} & \frac{\partial s_z}{\partial y} & \frac{\partial s_z}{\partial z} \end{pmatrix},$$

è espressa dalla relazione:

$$ds = \mathcal{T} d\mathbf{r}, \quad (11)$$

ossia:

$$ds = \begin{pmatrix} \frac{\partial s_x}{\partial x} & \frac{\partial s_x}{\partial y} & \frac{\partial s_x}{\partial z} \\ \frac{\partial s_y}{\partial x} & \frac{\partial s_y}{\partial y} & \frac{\partial s_y}{\partial z} \\ \frac{\partial s_z}{\partial x} & \frac{\partial s_z}{\partial y} & \frac{\partial s_z}{\partial z} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} dx \\ dy \\ dz \end{pmatrix}.$$

Tuttavia il tensore così definito, non solo esprime lo stato di deformazione nell'intorno di P , ma anche una rotazione rigida del corpo. Occorre dunque isolare la parte di rotazione da quella di deformazione.

Il tensore \mathcal{T} può essere espresso mediante la somma di un tensore simmetrico \mathcal{T}_S e di un tensore antisimmetrico \mathcal{T}_A :

$$\mathcal{T} = \mathcal{T}_S + \mathcal{T}_A,$$

dove:

$$\mathcal{T}_S = \begin{pmatrix} \frac{\partial s_x}{\partial x} & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial s_x}{\partial y} + \frac{\partial s_y}{\partial x} \right) & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial s_x}{\partial z} + \frac{\partial s_z}{\partial x} \right) \\ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial s_y}{\partial x} + \frac{\partial s_x}{\partial y} \right) & \frac{\partial s_y}{\partial y} & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial s_y}{\partial z} + \frac{\partial s_z}{\partial y} \right) \\ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial s_z}{\partial x} + \frac{\partial s_x}{\partial z} \right) & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial s_z}{\partial y} + \frac{\partial s_y}{\partial z} \right) & \frac{\partial s_z}{\partial z} \end{pmatrix},$$

e

$$\mathcal{T}_A = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial s_x}{\partial y} - \frac{\partial s_y}{\partial x} \right) & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial s_x}{\partial z} - \frac{\partial s_z}{\partial x} \right) \\ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial s_y}{\partial x} - \frac{\partial s_x}{\partial y} \right) & 0 & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial s_y}{\partial z} - \frac{\partial s_z}{\partial y} \right) \\ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial s_z}{\partial x} - \frac{\partial s_x}{\partial z} \right) & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial s_z}{\partial y} - \frac{\partial s_y}{\partial z} \right) & 0 \end{pmatrix},$$

cosicché la (11) si scrive:

$$ds = (\mathcal{T}_S + \mathcal{T}_A) d\mathbf{r}. \quad (12)$$

Il tensore simmetrico ha elementi $\mathcal{T}_{ij} = \mathcal{T}_{ji}$; il tensore antisimmetrico ha elementi $\mathcal{T}_{ij} = -\mathcal{T}_{ji}$. Il termine $\mathcal{T}_A d\mathbf{r}$ rappresenta lo spostamento rotatorio elementare del corpo elastico. Infatti si ha:

$$\mathcal{T}_A d\mathbf{r} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial s_x}{\partial y} - \frac{\partial s_y}{\partial x} \right) & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial s_x}{\partial z} - \frac{\partial s_z}{\partial x} \right) \\ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial s_y}{\partial x} - \frac{\partial s_x}{\partial y} \right) & 0 & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial s_y}{\partial z} - \frac{\partial s_z}{\partial y} \right) \\ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial s_z}{\partial x} - \frac{\partial s_x}{\partial z} \right) & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial s_z}{\partial y} - \frac{\partial s_y}{\partial z} \right) & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} dx \\ dy \\ dz \end{pmatrix},$$

da cui si deduce:

$$\begin{aligned} (\mathcal{T}_A d\mathbf{r})_x &= \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial s_x}{\partial y} - \frac{\partial s_y}{\partial x} \right) dy + \left(\frac{\partial s_x}{\partial z} - \frac{\partial s_z}{\partial x} \right) dz \right] \\ (\mathcal{T}_A d\mathbf{r})_y &= \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial s_y}{\partial x} - \frac{\partial s_x}{\partial y} \right) dx + \left(\frac{\partial s_y}{\partial z} - \frac{\partial s_z}{\partial y} \right) dz \right] \\ (\mathcal{T}_A d\mathbf{r})_z &= \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial s_z}{\partial x} - \frac{\partial s_x}{\partial z} \right) dx + \left(\frac{\partial s_z}{\partial y} - \frac{\partial s_y}{\partial z} \right) dy \right]. \end{aligned}$$

La relazione precedente si compendia nell'equazione nell'equazione vettoriale:

$$\mathcal{T}_A d\mathbf{r} = \frac{1}{2} \nabla \times \mathbf{s} \times d\mathbf{r}. \quad (13)$$

Tenendo presente il significato di rotore, paragrafo 7.3-VI si può scrivere

$$\frac{1}{2} \nabla \times \mathbf{s} = \delta \boldsymbol{\varphi},$$

essendo $\delta \boldsymbol{\varphi}$ il vettore rotazione elementare. Pertanto l'equazione

$$\mathcal{T}_A d\mathbf{r} = \delta \boldsymbol{\varphi} \times d\mathbf{r},$$

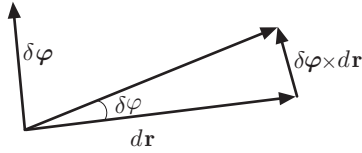


Fig. 15.13

rappresenta lo spostamento rotatorio rigido elementare del sistema elastico. Si osservi che le componenti del vettore $\delta\varphi$, secondo gli assi cartesiani sono date dagli elementi del tensore \mathcal{T}_A , ossia

$$\delta\varphi_x = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial s_x}{\partial y} - \frac{\partial s_y}{\partial x} \right),$$

$$\delta\varphi_y = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial s_x}{\partial z} - \frac{\partial s_z}{\partial x} \right),$$

$$\delta\varphi_z = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial s_y}{\partial x} - \frac{\partial s_x}{\partial y} \right).$$

Poiché tali considerazioni sono valide per qualunque punto, si deduce che la rotazione rigida avviene attorno ad un asse orientato parallelo a $\delta\varphi$, figura 13. Lo stato di deformazione è rappresentato soltanto dal tensore simmetrico.

Caratteristiche del tensore simmetrico

Si riconosce subito che i termini diagonali del tensore \mathcal{T}_S esprimono le deformazioni lineari, allungamenti o contrazioni, rispettivamente secondo gli assi x, y, z . Gli elementi non diagonali danno le deformazioni angolari; specificano cioè le rotazioni infinitesime che subiscono le particelle del corpo che inizialmente si trovano disposte parallelamente agli assi coordinati. Esaminiamo il termine

$$\left(\frac{\partial s_x}{\partial y} + \frac{\partial s_y}{\partial x} \right).$$

In figura 14, è mostrata la sezione, col piano $x-y$, di un cubo infinitesimo del corpo; la somma delle due derivate è uguale all'incremento degli angoli retti del cubetto in seguito alla deformazione. Chiamando γ tale incremento, si ha

$$\left(\frac{\partial s_x}{\partial y} + \frac{\partial s_y}{\partial x} \right) = \gamma_{xy}. \quad (14)$$

Tenuto conto della simmetria del tensore, è anche

$$\left(\frac{\partial s_y}{\partial x} + \frac{\partial s_x}{\partial y} \right) = \gamma_{yx}. \quad (15)$$

Analogamente per gli altri termini. Pertanto il tensore delle deformazioni si scrive:

$$\mathcal{T}_S = \begin{pmatrix} \epsilon_{xx} & \frac{1}{2}\gamma_{xy} & \frac{1}{2}\gamma_{xz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{yx} & \epsilon_{yy} & \frac{1}{2}\gamma_{yz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{zx} & \frac{1}{2}\gamma_{zy} & \epsilon_{zz} \end{pmatrix}.$$

Indicando con $\epsilon_{ij} = \gamma_{ij}/2$, si ha:

$$\mathcal{T}_S = \begin{pmatrix} \epsilon_{xx} & \epsilon_{xy} & \epsilon_{xz} \\ \epsilon_{yx} & \epsilon_{yy} & \epsilon_{yz} \\ \epsilon_{zx} & \epsilon_{zy} & \epsilon_{zz} \end{pmatrix}. \quad (16)$$

Nell'ambito delle deformazioni elastiche, l'espressione più generale della legge di Hooke è data dal sistema lineare:

$$\begin{aligned} \sigma_{xx} &= C_{11}\epsilon_{xx} + C_{12}\epsilon_{yy} + C_{13}\epsilon_{zz} + C_{14}\epsilon_{yz} + C_{15}\epsilon_{zx} + C_{16}\epsilon_{xy} \\ \sigma_{yy} &= C_{21}\epsilon_{xx} + C_{22}\epsilon_{yy} + C_{23}\epsilon_{zz} + C_{24}\epsilon_{yz} + C_{25}\epsilon_{zx} + C_{26}\epsilon_{xy} \\ \sigma_{zz} &= C_{31}\epsilon_{xx} + C_{32}\epsilon_{yy} + C_{33}\epsilon_{zz} + C_{34}\epsilon_{yz} + C_{35}\epsilon_{zx} + C_{36}\epsilon_{xy} \\ \sigma_{yz} &= C_{41}\epsilon_{xx} + C_{42}\epsilon_{yy} + C_{43}\epsilon_{zz} + C_{44}\epsilon_{yz} + C_{45}\epsilon_{zx} + C_{46}\epsilon_{xy} \\ \sigma_{zx} &= C_{51}\epsilon_{xx} + C_{52}\epsilon_{yy} + C_{53}\epsilon_{zz} + C_{54}\epsilon_{yz} + C_{55}\epsilon_{zx} + C_{56}\epsilon_{xy} \\ \sigma_{xy} &= C_{61}\epsilon_{xx} + C_{62}\epsilon_{yy} + C_{63}\epsilon_{zz} + C_{64}\epsilon_{yz} + C_{65}\epsilon_{zx} + C_{66}\epsilon_{xy}, \end{aligned} \quad (17)$$

in cui i 36 coefficienti C_{ij} sono i *moduli di elasticità*.

Viceversa, risolvendo il precedente sistema rispetto alle deformazioni, si ha

$$\begin{aligned}\epsilon_{xx} &= S_{11}\sigma_{xx} + S_{12}\sigma_{yy} + S_{13}\sigma_{zz} + S_{14}\sigma_{yz} + S_{15}\sigma_{zx} + S_{16}\sigma_{xy} \\ \epsilon_{yy} &= S_{21}\sigma_{xx} + S_{22}\sigma_{yy} + S_{23}\sigma_{zz} + S_{24}\sigma_{yz} + S_{25}\sigma_{zx} + S_{26}\sigma_{xy} \\ \epsilon_{zz} &= S_{31}\sigma_{xx} + S_{32}\sigma_{yy} + S_{33}\sigma_{zz} + S_{34}\sigma_{yz} + S_{35}\sigma_{zx} + S_{36}\sigma_{xy} \\ \epsilon_{yz} &= S_{41}\sigma_{xx} + S_{42}\sigma_{yy} + S_{43}\sigma_{zz} + S_{44}\sigma_{yz} + S_{45}\sigma_{zx} + S_{46}\sigma_{xy} \\ \epsilon_{zx} &= S_{51}\sigma_{xx} + S_{52}\sigma_{yy} + S_{53}\sigma_{zz} + S_{54}\sigma_{yz} + S_{55}\sigma_{zx} + S_{56}\sigma_{xy} \\ \epsilon_{xy} &= S_{61}\sigma_{xx} + S_{62}\sigma_{yy} + S_{63}\sigma_{zz} + S_{64}\sigma_{yz} + S_{65}\sigma_{zx} + S_{66}\sigma_{xy},\end{aligned}\quad (18)$$

dove i coefficienti S_{ij} sono detti *coefficienti di elasticità*. I moduli di elasticità e i coefficienti di elasticità sono simmetrici; pertanto delle 36 grandezze solo 21 risultano indipendenti.

Infatti, consideriamo il lavoro necessario per deformare un cubo infinitesimo di lati dx , dy , dz . Sulla faccia ortogonale a x , le forze che agiscono sono: $\sigma_{xx}dydz$, $\sigma_{xy}dydz$, $\sigma_{xz}dydz$. Queste subiscono rispettivamente gli spostamenti: $d\epsilon_{xx}dx$, $d\epsilon_{xy}dy$ e $d\epsilon_{xz}dz$. Riconoscendo che sulle facce ortogonali agli assi y e z , le forze e gli spostamenti sono analoghi, il lavoro elementare per unità di volume è

$$\delta\mathcal{L} = \sigma_{xx}d\epsilon_{xx} + \sigma_{yy}d\epsilon_{yy} + \sigma_{zz}d\epsilon_{zz} + 2\sigma_{yz}d\epsilon_{yz} + 2\sigma_{zx}d\epsilon_{zx} + 2\sigma_{xy}d\epsilon_{xy}. \quad (19)$$

Supponendo che tale lavoro sia adiabatico, la prima legge della Termodinamica afferma che la precedente è il differenziale di una funzione $U = U(\epsilon_{ij})$, energia elastica; dunque possiamo scrivere:

$$dU = \frac{\partial U}{\partial \epsilon_{xx}}d\epsilon_{xx} + \frac{\partial U}{\partial \epsilon_{yy}}d\epsilon_{yy} + \frac{\partial U}{\partial \epsilon_{zz}}d\epsilon_{zz} + \frac{\partial U}{\partial \epsilon_{yz}}d\epsilon_{yz} + \frac{\partial U}{\partial \epsilon_{zx}}d\epsilon_{zx} + \frac{\partial U}{\partial \epsilon_{xy}}d\epsilon_{xy},$$

che confrontata con la (19) implica

$$\sigma_{ij} = \left(\frac{\partial U}{\partial \epsilon_{ij}} \right),$$

dove si ritengono costanti tutte le deformazioni tranne quelle di indice i , j . Dalle (17) si ricava che

$$\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial \epsilon_{yy}} = C_{12}, \quad \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial \epsilon_{xx}} = C_{21}.$$

Ma la condizione cui deve soddisfare una funzione che ammette differenziale totale è

$$\frac{\partial U}{\partial \epsilon_{yy}} = \frac{\partial U}{\partial \epsilon_{xx}}, \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial \epsilon_{yy}} = \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial \epsilon_{xx}};$$

pertanto $C_{12} = C_{21}$. In generale $C_{ij} = C_{ji}$.

Tenendo conto che la (19) risulta un differenziale totale e del legame lineare tra sforzi e deformazioni, integrando, si ottiene il lavoro per unità di volume, *densità di energia elastica*, corrispondente ad una deformazione finita:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\sigma_{xx}\epsilon_{xx} + \sigma_{yy}\epsilon_{yy} + \sigma_{zz}\epsilon_{zz} + 2\sigma_{yz}\epsilon_{yz} + 2\sigma_{zx}\epsilon_{zx} + 2\sigma_{xy}\epsilon_{xy}). \quad (20)$$

Le considerazioni fatte riguardano il caso più generale di un corpo anisotropo. Se il corpo ammette particolari simmetrie i 21 coefficienti si riducono notevolmente; per esempio, nei cristalli a simmetria cubica, le costanti elastiche sono soltanto tre, nei cristalli a simmetria esagonale sono cinque†.

Per quanto riguarda la ricerca degli assi principali delle deformazioni, cioè la diagonalizzazione del tensore delle deformazioni, vale un procedimento analogo a quello descritto per gli sforzi.

†Il lettore può consultare: S.M. Edlglass, Engineering Materials Science, The Ronald Press Company, New York.

5. Elasticità dei corpi omogenei e isotropi

I corpi e i mezzi omogenei e isotropi non presentano struttura cristallina ordinata. Tali sono, per esempio, sbarre, lastre, fili metallici policristallini o materiali amorfi, come vetri plastiche, ecc; un asse di legno non è isotropo perchè le sue proprietà meccaniche dipendono dalla direzione delle fibre. Si troverà che per caratterizzare lo stato elastico dei corpi isotropi, in definitiva, occorrono solo due moduli elastici indipendenti.

Consideriamo un cubo infinitesimo, con gli spigoli disposti secondo gli assi di una terna x, y, z , sulle cui facce agiscono soltanto sforzi normali di trazione $\sigma_{xx}, \sigma_{yy}, \sigma_{zz}$, figura 15. Supponiamo, in un primo momento, di applicare lo sforzo σ_{xx} ; $\sigma_{yy} = \sigma_{zz} = 0$. Per la (1), la corrispondente deformazione di allungamento è

$$\epsilon_{xx} = \frac{1}{E} \sigma_{xx},$$

con E modulo di Young. Poiché, in generale, gli sforzi normali σ_{yy} e σ_{zz} sono diversi da zero, nella direzione di σ_{xx} si verificano deformazioni di contrazione. Tali deformazioni sono proporzionali alle deformazioni di allungamento, ϵ_{yy} e ϵ_{zz} , equazione (2). La deformazione di contrazione causata da σ_{yy} è

$$-\mu \epsilon_{yy} = -\mu \frac{\sigma_{yy}}{E};$$

quella causata da σ_{zz} :

$$-\mu \epsilon_{zz} = -\mu \frac{\sigma_{zz}}{E}.$$

Pertanto la deformazione secondo x è minore di σ_{xx}/E ; risulta:

$$\epsilon_{xx} = \frac{\sigma_{xx}}{E} - \mu \frac{\sigma_{yy}}{E} - \mu \frac{\sigma_{zz}}{E} = \frac{1}{E} [\sigma_{xx} - \mu(\sigma_{yy} + \sigma_{zz})].$$

Con ragionamento analogo si ha:

$$\epsilon_{yy} = \frac{\sigma_{yy}}{E} - \mu \frac{\sigma_{xx}}{E} - \mu \frac{\sigma_{zz}}{E} = \frac{1}{E} [\sigma_{yy} - \mu(\sigma_{xx} + \sigma_{zz})],$$

e

$$\epsilon_{zz} = \frac{\sigma_{zz}}{E} - \mu \frac{\sigma_{xx}}{E} - \mu \frac{\sigma_{yy}}{E} = \frac{1}{E} [\sigma_{zz} - \mu(\sigma_{xx} + \sigma_{yy})].$$

Si è dunque ottenuto il sistema:

$$\begin{aligned} \epsilon_{xx} &= \frac{1}{E} \sigma_{xx} - \frac{\mu}{E} \sigma_{yy} - \frac{\mu}{E} \sigma_{zz} \\ \epsilon_{yy} &= -\frac{\mu}{E} \sigma_{xx} + \frac{1}{E} \sigma_{yy} - \frac{\mu}{E} \sigma_{zz} \\ \epsilon_{zz} &= -\frac{\mu}{E} \sigma_{xx} - \frac{\mu}{E} \sigma_{yy} + \frac{1}{E} \sigma_{zz}. \end{aligned} \quad (21)$$

in cui i coefficienti degli sforzi sono i coefficienti di elasticità S_{ij} .

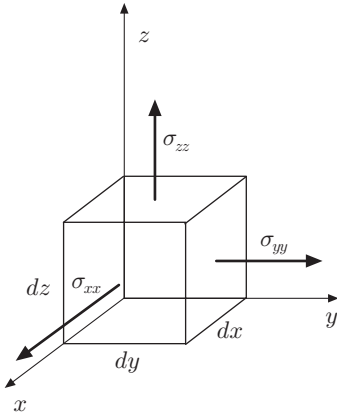


Fig. 15.15

Si osservi che se viene applicato soltanto lo sforzo σ_{xx} , si ha

$$\epsilon_{xx} = \frac{1}{E}\sigma_{xx}, \quad \epsilon_{yy} = -\frac{\mu}{E}\sigma_{xx}, \quad \epsilon_{zz} = -\frac{\mu}{E}\sigma_{xx}.$$

Queste relazioni mostrano che accanto alla deformazione di allungamento nella direzione x , compaiono le contrazioni laterali del cubetto. Analogo ragionamento vale se viene applicato solo σ_{yy} oppure σ_{zz} . Se oltre agli sforzi normali, il cubetto è soggetto a sforzi tangenziali, accanto alle deformazioni normali, compaiono deformazioni di scorrimento. Occorre dunque stabilire le relazioni tra tali deformazioni e i corrispondenti sforzi. Si è riconosciuto che gli elementi non diagonali della matrice delle deformazioni rappresentano deformazioni angolari, relazioni (14), (15). Consideriamo la sezione, nel piano x - y , di un cubo elementare sollecitato come in figura 16; nell'ambito di deformazioni elastiche, si può scrivere

$$\sigma_{xy} = G\gamma_{xy} = 2G\epsilon_{xy},$$

dove G è il *modulo di scorrimento o modulo di rigidità*. Esso, come il modulo di Young, si misura in N/m^2 , ha analogo significato fisico e, per i solidi, lo stesso ordine di grandezza. Analogamente per le altre sezioni del cubo elementare, si ha

$$\begin{aligned} \sigma_{xz} &= G\gamma_{xz} = 2G\epsilon_{xz} \\ \sigma_{yz} &= G\gamma_{yz} = 2G\epsilon_{yz}. \end{aligned}$$

Da queste relazioni si ottengono le corrispondenti deformazioni. In definitiva, l'insieme delle deformazioni di un corpo omogeneo e isotropo, è dato dalle (21) e dalle:

$$\epsilon_{xy} = \frac{1}{2G}\sigma_{xy}, \quad \epsilon_{xz} = \frac{1}{2G}\sigma_{xz}, \quad \epsilon_{yz} = \frac{1}{2G}\sigma_{yz}. \quad (22)$$

Si riconosce subito che i coefficienti di elasticità risultano:

$$\begin{aligned} S_{11} &= S_{22} = S_{33} = \frac{1}{E} \\ S_{12} &= S_{13} = S_{21} = S_{23} = S_{31} = S_{32} = -\frac{\mu}{E} \\ S_{44} &= S_{55} = S_{66} = \frac{1}{2G}. \end{aligned}$$

Il sistema (21) può essere risolto rispetto agli sforzi; ad esempio, per σ_{xx} si ottiene

$$\sigma_{xx} = \frac{1}{D} \begin{vmatrix} \epsilon_{xx} & -\frac{\mu}{E} & -\frac{\mu}{E} \\ \epsilon_{yy} & \frac{1}{E} & -\frac{\mu}{E} \\ \epsilon_{zz} & -\frac{\mu}{E} & \frac{1}{E} \end{vmatrix},$$

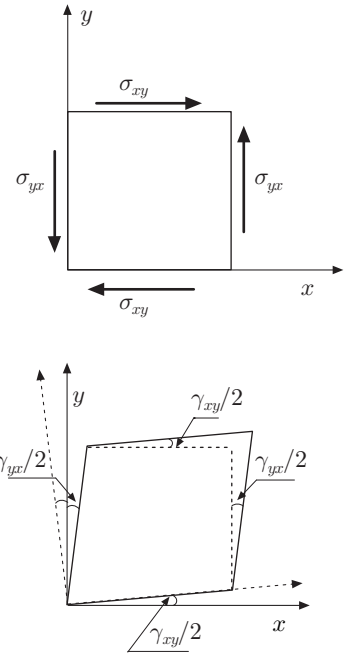


Fig. 15.16

dove

$$D = \frac{1}{E^3}(1 - 2\mu^3 - 3\mu^2) = \frac{1}{E^3}(1 + \mu)^2(1 - 2\mu).$$

Poiché

$$\begin{vmatrix} \epsilon_{xx} & -\frac{\mu}{E} & -\frac{\mu}{E} \\ \epsilon_{yy} & \frac{1}{E} & -\frac{\mu}{E} \\ \epsilon_{zz} & -\frac{\mu}{E} & \frac{1}{E} \end{vmatrix} = \\ = \frac{1}{E^2}(1 - \mu)^2\epsilon_{xx} + \frac{\mu}{E^2}(\mu + 1)\epsilon_{yy} + \frac{\mu}{E^2}(\mu + 1)\epsilon_{zz},$$

risulta:

$$C_{11} = \frac{(1 - \mu^2)/E^2}{(1 + \mu)^2(1 - 2\mu)/E^3} = \frac{E(1 - \mu)}{(1 + \mu)(1 - 2\mu)} \\ C_{12} = \frac{(\mu + 1)\mu/E^2}{(1 + \mu)^2(1 - 2\mu)/E^3} = \frac{\mu E}{(1 + \mu)(1 - 2\mu)}.$$

Si ha dunque

$$C_{11} = C_{22} = C_{33}, \quad C_{21} = C_{13} = C_{21} = C_{23} = C_{13} = C_{32} = 0.$$

Pertanto gli sforzi normali risultano:

$$\begin{aligned} \sigma_{xx} &= \frac{E(1 - \mu)}{(1 + \mu)(1 - 2\mu)}\epsilon_{xx} + \frac{E\mu}{(1 + \mu)(1 - 2\mu)}\epsilon_{yy} + \frac{E\mu}{(1 + \mu)(1 - 2\mu)}\epsilon_{zz} \\ \sigma_{yy} &= \frac{E\mu}{(1 + \mu)(1 - 2\mu)}\epsilon_{xx} + \frac{E(1 - \mu)}{(1 + \mu)(1 - 2\mu)}\epsilon_{yy} + \frac{E\mu}{(1 + \mu)(1 - 2\mu)}\epsilon_{zz} \\ \sigma_{zz} &= \frac{E\mu}{(1 + \mu)(1 - 2\mu)}\epsilon_{xx} + \frac{E\mu}{(1 + \mu)(1 - 2\mu)}\epsilon_{yy} + \frac{E(1 - \mu)}{(1 + \mu)(1 - 2\mu)}\epsilon_{zz}. \end{aligned} \quad (23)$$

Dalla (22) si ottengono gli sforzi di taglio:

$$\sigma_{xy} = 2G\epsilon_{xy}, \quad \sigma_{xz} = 2G\epsilon_{xz}, \quad \sigma_{yz} = 2G\epsilon_{yz}, \quad (24)$$

È utile introdurre la quantità:

$$\sigma_{xx} + \sigma_{yy} + \sigma_{zz} = 3\sigma, \quad (25)$$

che indica lo sforzo normale medio; in tal caso le (21) diventano

$$\begin{aligned} \epsilon_{xx} &= \frac{1}{E} [(1 + \mu)\sigma_{xx} - 3\mu\sigma] \\ \epsilon_{yy} &= \frac{1}{E} [(1 + \mu)\sigma_{yy} - 3\mu\sigma] \\ \epsilon_{zz} &= \frac{1}{E} [(1 + \mu)\sigma_{zz} - 3\mu\sigma]. \end{aligned} \quad (26)$$

Da queste si ricava:

$$\begin{aligned}\sigma_{xx} &= \frac{E}{1+\mu}\epsilon_{xx} + \frac{3\mu\sigma}{1+\mu} \\ \sigma_{yy} &= \frac{E}{1+\mu}\epsilon_{yy} + \frac{3\mu\sigma}{1+\mu} \\ \sigma_{zz} &= \frac{E}{1+\mu}\epsilon_{zz} + \frac{3\mu\sigma}{1+\mu}.\end{aligned}\quad (27)$$

Si osservi che i tensori degli sforzi e delle deformazioni (6) e (16), si possono scrivere rispettivamente come segue:

$$\mathcal{T}_\sigma = \begin{pmatrix} \sigma_{xx} & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{zz} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{yx} & 0 & \sigma_{yz} \\ \sigma_{zx} & \sigma_{zy} & 0 \end{pmatrix},$$

e

$$\mathcal{T}_\epsilon = \begin{pmatrix} \epsilon_{xx} & 0 & 0 \\ 0 & \epsilon_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & \epsilon_{zz} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & \epsilon_{xy} & \epsilon_{xz} \\ \epsilon_{yx} & 0 & \epsilon_{yz} \\ \epsilon_{zx} & \epsilon_{zy} & 0 \end{pmatrix}.$$

Pertanto le (27) si possono esprimere nella forma:

$$\begin{pmatrix} \sigma_{xx} & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{zz} \end{pmatrix} = \frac{E}{1+\mu} \begin{pmatrix} \epsilon_{xx} & 0 & 0 \\ 0 & \epsilon_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & \epsilon_{zz} \end{pmatrix} + \frac{3\mu\sigma}{1+\mu} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (28)$$

Analogamente le (25):

$$\begin{pmatrix} 0 & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{yx} & 0 & \sigma_{yz} \\ \sigma_{zx} & \sigma_{zy} & 0 \end{pmatrix} = 2G \begin{pmatrix} 0 & \epsilon_{xy} & \epsilon_{xz} \\ \epsilon_{yx} & 0 & \epsilon_{yz} \\ \epsilon_{zx} & \epsilon_{zy} & 0 \end{pmatrix}. \quad (29)$$

Introducendo la quantità

$$\epsilon_{xx} + \epsilon_{yy} + \epsilon_{zz} = 3\epsilon = \theta, \quad (30)$$

che chiamiamo *dilatazione cubica*, e sommando le (26), si ottiene:

$$\theta = 3\epsilon = 3\sigma \frac{1+\mu}{E} - 3\sigma \frac{3\mu}{E} = \frac{3\sigma}{E}(1-2\mu),$$

cioè:

$$\sigma = \frac{E}{1-2\mu}\epsilon.$$

Questa equazione esprime lo sforzo normale medio in funzione della deformazione normale media. Introducendo questa quantità nella (28), si ha

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix} \sigma_{xx} & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{zz} \end{pmatrix} &= \frac{E}{1+\mu} \left\{ \begin{pmatrix} \epsilon_{xx} & 0 & 0 \\ 0 & \epsilon_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & \epsilon_{zz} \end{pmatrix} \right. \\ &\quad \left. + \frac{3\mu\epsilon}{1-2\mu} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}. \end{aligned} \quad (31)$$

Esempi

4. Una sbarra d'acciaio di sezione $S = 10 \text{ cm}^2$, modulo di Young $E = 2 \cdot 10^{11} \text{ N/m}^2$ e coefficiente di Poisson $\mu = 0,3$ è sollecitata da una forza assiale $F = 10^4 \text{ N}$. Determinare il tensore degli sforzi e quello delle deformazioni, trascurando il peso proprio della sbarra.

Fissato un riferimento alla base della sbarra, con l'asse z volto in alto, l'unico sforzo è:

$$\sigma_{zz} = \frac{F}{S} = 10^7 \text{ Pa}.$$

Dalle (18) si ha:

$$\epsilon_{xx} = \epsilon_{yy} = -\frac{\mu}{E}\sigma_{zz}, \quad \epsilon_{zz} = \frac{1}{E}\sigma_{zz}, \quad \epsilon_{xy} = \epsilon_{xz} = \epsilon_{yz} = 0.$$

Pertanto:

$$\epsilon_{xx} = \epsilon_{yy} = |0,15 \cdot 10^{-4}|, \quad \epsilon_{zz} = |0,5 \cdot 10^{-4}|, \quad \epsilon_{xy} = \epsilon_{xz} = \epsilon_{yz} = 0.$$

Per le (20) e (21), si verifica inoltre:

$$\sigma_{xx} = \sigma_{yy} = 0, \quad \sigma_{zz} = 10^7 \text{ Pa}, \quad \sigma_{xy} = \sigma_{xz} = \sigma_{yz} = 0,$$

5. Una colonna cilindrica omogenea, di altezza h e densità ρ , regge soltanto il proprio peso. Determinare il tensore degli sforzi e delle deformazioni.

Stabilito il riferimento sulla base di appoggio con l'asse z verso l'alto, l'equazione indefinita dell'equilibrio (10), comporta:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial z} &= 0 \\ \frac{\partial \sigma_{yz}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{yz}}{\partial z} &= 0 \\ \frac{\partial \sigma_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{zy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} &= -\rho g. \end{aligned}$$

La colonna è sollecitata solo dal proprio peso, quindi:

$$\sigma_{xx} = \sigma_{yy} = 0, \quad \sigma_{xy} = \sigma_{xz} = \sigma_{yz} = 0.$$

Dall'ultima equazione si ha

$$\sigma_{zz} = C - \rho g z,$$

dove C è una costante. Ma per $z = h$, è $\sigma_{zz} = 0$. Segue che:

$$\sigma_{zz} = \rho g(h - z).$$

Il tensore delle deformazioni, di compressione, ha componenti:

$$\epsilon_{xx} = \epsilon_{yy} = \frac{\mu}{E}\rho g(h - z), \quad \epsilon_{zz} = -\frac{1}{E}\rho g(h - z), \quad \epsilon_{xy} = \epsilon_{xz} = \epsilon_{yz} = 0.$$

Il valore medio dello sforzo lungo la colonna è

$$\bar{\sigma} = \frac{1}{h} \int_0^h \sigma_{zz}(z) dz = \frac{1}{h} \rho g \int_0^h (h - z) dz = \frac{1}{2} \rho g h.$$

5.1. Modulo di compressibilità

Si definisce coefficiente di compressibilità isoterma κ_T , la grandezza

$$\kappa_T = -\frac{1}{V} \left(\frac{\partial V}{\partial p} \right)_T; \quad (32)$$

il suo inverso si chiama modulo di compressibilità isoterma:

$$K_T = \frac{1}{\kappa_T} = -V \left(\frac{\partial p}{\partial V} \right)_T. \quad (33)$$

Esso può essere determinato, nota l'equazione di stato del corpo. Presupponendo che la compressione avvenga lentamente, in modo che la temperatura rimanga costante, il modulo di compressibilità medio in un piccolo intervallo Δp , cui corrisponde una variazione di volume ΔV , è dato dall'espressione:

$$K = \frac{\Delta p}{\Delta V/V} = \frac{\sigma}{\Delta V/V},$$

rapporto tra lo sforzo uniforme e la variazione relativa di volume.

Consideriamo un cubetto elementare di spigoli dx , dy , dz ; in seguito alla compressione uniforme, lo spigolo dx diventa

$$dx - \frac{\partial s_x}{\partial x} dx = (1 - \epsilon_{xx}) dx,$$

analogamente gli altri spigoli. Si ha dunque:

$$\begin{aligned} \frac{\Delta V}{V} &= \frac{dx dy dz - (1 - \epsilon_{xx}) dx (1 - \epsilon_{yy}) dy (1 - \epsilon_{zz}) dz}{dx dy dz} \\ &= 1 - (1 - \epsilon_{xx})(1 - \epsilon_{yy})(1 - \epsilon_{zz}). \end{aligned}$$

Trascurando gli infinitesimi di ordine superiore al primo, si ottiene:

$$\frac{\Delta V}{V} = \theta = \epsilon_{xx} + \epsilon_{yy} + \epsilon_{zz}. \quad (34)$$

Poiché, nel caso di sforzo uniforme, dalle (26), si ha

$$\epsilon_{xx} = \epsilon_{yy} = \epsilon_{zz} = \frac{1}{E}(1 - 2\mu)\sigma,$$

si ottiene:

$$\frac{\Delta V}{V} = \epsilon_{xx} + \epsilon_{yy} + \epsilon_{zz} = \frac{3}{E}(1 - 2\mu)\sigma.$$

Pertanto

$$K = \frac{\sigma}{\Delta V/V} = \frac{E}{3(1 - 2\mu)}. \quad (35)$$

Questa relazione stabilisce uno dei legami tra i moduli elastici introdotti.

5.2. Relazione tra il modulo di rigidità e il modulo di Young

Consideriamo un elemento cubico, di lato a , soggetto agli sforzi σ_{xx} e σ_{yy} , uniformemente distribuiti sulle facce dell'elemento, figura 17, e sia

$$|\sigma_{xx}| = |\sigma_{yy}| = \sigma.$$

Dalle (21), si ricavano le deformazioni corrispondenti:

$$\epsilon_{xx} = \frac{1 + \mu}{E} \sigma, \quad \epsilon_{yy} = -\frac{1 + \mu}{E} \sigma,$$

ossia

$$|\epsilon_{xx}| = |\epsilon_{yy}| = \epsilon.$$

Si sezioni il cubo nel modo mostrato in figura 18; il prisma di sezione triangolare ABC è in equilibrio sotto l'azione delle forze, di modulo

$$F_t = \sigma_t \frac{a^2}{\sqrt{2}}, \quad F_n = \sigma \frac{a^2}{2}, \quad F_n = \sigma \frac{a^2}{2},$$

agenti, rispettivamente, sulle facce che hanno come traccia AC , AB , BC . Risulta:

$$F_t = \sqrt{\left(\sigma \frac{a^2}{2}\right)^2 + \left(\sigma \frac{a^2}{2}\right)^2} = \sigma \frac{a^2}{\sqrt{2}}.$$

Come si è visto nell'esempio 3, la faccia di traccia AB , è soggetta al solo sforzo di taglio uguale, in modulo, allo sforzo normale, $\sigma_t = \sigma$. Lo stesso si verifica per gli altri prismi a sezione triangolare.

Il prisma di sezione quadrata è dunque soggetto esclusivamente a sforzi di taglio. Per questo motivo i suoi angoli subiscono una deformazione:

$$\gamma = \frac{\sigma}{G}. \quad (36)$$

La deformazione della diagonale è data da:

$$\epsilon = \frac{1 + \mu}{E} \sigma. \quad (37)$$

Dalla figura 19, si osserva che, in seguito alla deformazione, la diagonale si è allungata di un tratto CB e si è spostata dalla sua primitiva orientazione di un tratto AC . Il triangolo ABC è approssimativamente rettangolo ed isoscele, perciò si ha

$$BC = \epsilon a, \quad AB = \gamma \frac{a}{\sqrt{2}}.$$

Poiché $CB \approx AC$, risulta:

$$AB = \gamma \frac{a}{\sqrt{2}} = \sqrt{(\epsilon a)^2 + (\epsilon a)^2} = \epsilon a \sqrt{2}, \quad \Rightarrow \quad \gamma = 2\epsilon.$$

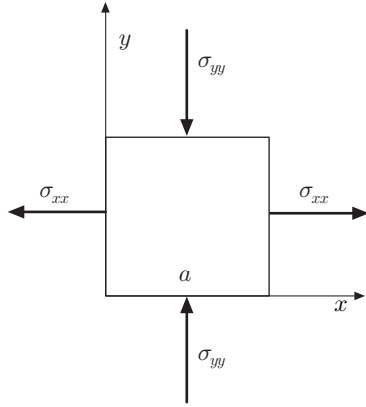


Fig. 15.17

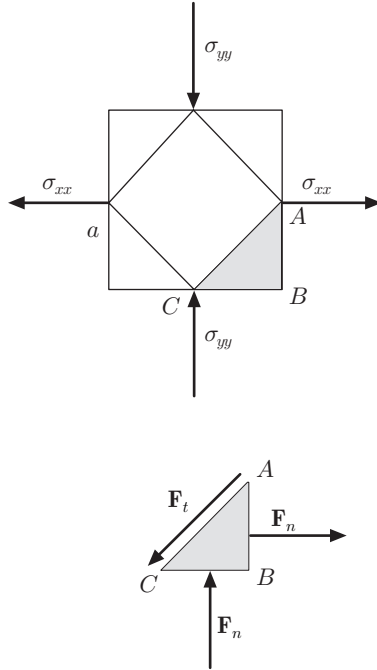


Fig. 15.18

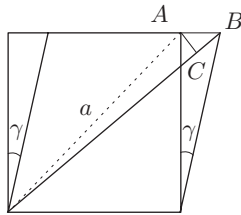


Fig. 15.19

Infine, tenendo conto delle (36) e (37), si ottiene

$$\frac{\sigma}{G} = 2 \frac{1 + \mu}{E} \sigma,$$

cioè:

$$G = \frac{E}{2(1 + \mu)}, \quad (38)$$

che è la relazione cercata.

Combinando le (35) e (36), si trova una ulteriore relazione:

$$E = \frac{9KG}{3K + G}. \quad (39)$$

Si deduce subito che basta la conoscenza di due moduli elastici per determinare gli altri due.

In elasticità spesso vengono assunte come grandezze indipendenti i coefficienti di Lamé, λ e ν ; il primo è dato dal modulo di elasticità C_{12} ; il secondo coincide col modulo di rigidità:

$$\lambda \equiv C_{12} = \frac{\mu E}{(1 + \mu)(1 - 2\mu)}, \quad \nu \equiv G. \quad (40)$$

In base a questa scelta si ottiene:

$$E = \frac{G(2G + 3\lambda)}{G + \lambda}, \quad \mu = \frac{\lambda}{2(\lambda + G)}, \quad \dots$$

La prima relazione si ricava dalla (40) sostituendovi μ , ottenuto dalla (38); la seconda ancora dalla (40) sostituendovi E , ottenuto dalla (39).

In tabella sono dati i valori dei moduli elastici di alcuni materiali.

Moduli di elasticità ($\times 10^{10} Pa$)					
Materiale	E	G	μ	Carico di rottura σ_{max}	K
Acciaio	20	8,1	0,29	0,06	17,6
Alluminio	7	2,6	0,34	0,01	7
Rame	13	4	0,34	0,03	14,3
Vetro	6	3	0,25	0,05	4

16. Statica dei fluidi

1. Sforzi nei fluidi in equilibrio

Col nome generico di fluidi si indicano le sostanze allo stato liquido e gassoso. Un fluido si dice *ideale* se non oppone resistenza agli sforzi di taglio; in tal caso parti di fluido possono scorrere senza attrito le une rispetto alle altre e si hanno deformazioni di scorrimento. Tali deformazioni ovviamente non richiedono lavoro. Un liquido è ideale se, oltre a godere della proprietà suddetta, non presenta variazione di volume, $dV = 0$, quando è soggetto a variazioni di temperatura e di pressione. Ciò implica che i coefficienti di espansione termica e di compressibilità isoterma sono nulli. In realtà nei liquidi reali, tali coefficienti sono così piccoli che in molti casi è possibile trascurarne l'effetto (liquidi incompressibili). Per quanto riguarda la definizione di gas ideale o perfetto, si rimanda alla Termodinamica. Per il momento basta osservare che il gas ideale, come il liquido ideale, non oppone resistenza agli sforzi di taglio, ma al contrario di questo, presenta coefficienti di espansione e di compressibilità isoterma diversi da zero.

In Dinamica si è già accennato al fenomeno della viscosità o attrito interno, con particolare riguardo al moto di un corpo in fluido reale. Si è trovato che la forza d'attrito viscoso e idraulico, e quindi lo sforzo di taglio corrispondente, è sempre opposta al moto, dipende dalla velocità e si manifesta appena il corpo viene posto in movimento. Analogo fenomeno si verifica in un fluido reale in moto, nel senso che parti del fluido possono trascinare altre parti dello stesso fluido in quiete che, dunque, acquistano una velocità relativa diversa da zero.

I fluidi reali sono tutti più o meno viscosi, ma non possono sostenere sforzi di taglio statici, contrariamente a quanto avviene nel caso in cui è presente l'attrito di contatto. Infatti corpi a contatto possono rimanere in equilibrio, purché la retta d'azione della forza sollecitante si trovi all'interno del cono d'attrito; il tal caso si destina una forza di attrito statico e dunque uno sforzo tangenziale in corrispondenza alla superficie di contatto. Le proprietà fondamentali dei fluidi in equilibrio derivano essenzialmente dalla scor-

revolezza delle loro parti, ed essendo questa proprietà comune ai liquidi e ai gas, le leggi dell'equilibrio sono le stesse per entrambi. L'esperienza conferma che, all'equilibrio, lo sforzo esercitato su ogni elemento di superficie del fluido è normale all'elemento stesso. Detta $\hat{\mathbf{n}}$ la normale orientata alla superficie dell'elemento, si ha

$$\boldsymbol{\sigma} = p\hat{\mathbf{n}},$$

dove p è una grandezza scalare che chiamiamo *pressione*. La pressione, nel *SI*, si misura in *pasca* (*Pa*) o N/m^2 . Esistono varie unità di pressione ancora in uso:

- *atmosfera*

È la pressione esercitata dall'atmosfera al livello del mare, uguale a quella di una colonna di mercurio alta 760 mm , assumendo per l'accelerazione di gravità il valore normale $9,8066\text{ m/s}^2$ e per la densità del mercurio il valore normale $1,395\text{ kg/m}^3$;

$$1\text{ atm} = \rho gh = 1,013 \cdot 10^5\text{ N/m}^2.$$

- *millimetro di mercurio*, *mm Hg* o *torr*, in onore a Torricelli;

$$1\text{ mm Hg} = 1\text{ torr} = 1/760\text{ atm}.$$

- *millibar*

$$1\text{ mbar} = 10^2\text{ N/m}^2 = 0,750\text{ mm Hg}.$$

Oltre a queste unità, va menzionata una unità usata nella tecnica: il kg_f/cm^2 (kilogrammo-forza per centimetro quadrato).

Omettiamo di riportare quelle in uso nel sistema anglosassone; per esempio la *libbra-forza/pollice*² o simili.

La pressione non dipende dall'orientazione dell'elemento di superficie. Infatti, ricordando la relazione di Cauchy, equazione (3)-XV:

$$\boldsymbol{\sigma} = \sigma_x \cos \alpha + \sigma_y \cos \beta + \sigma_z \cos \gamma,$$

e tenendo presente che nel caso di un fluido in equilibrio si ha

$$\sigma_x = \sigma_{xx} \mathbf{i}, \quad \sigma_y = \sigma_{yy} \mathbf{j}, \quad \sigma_z = \sigma_{zz} \mathbf{k},$$

la precedente diventa:

$$\boldsymbol{\sigma} \hat{\mathbf{n}} = \sigma_{xx} \cos \alpha \mathbf{i} + \sigma_{yy} \cos \beta \mathbf{j} + \sigma_{zz} \cos \gamma \mathbf{k}.$$

Ma il versore della normale è espresso da

$$\hat{\mathbf{n}} = \cos \alpha \mathbf{i} + \cos \beta \mathbf{j} + \cos \gamma \mathbf{k};$$

pertanto:

$$\begin{aligned} & \sigma(\cos \alpha \mathbf{i} + \cos \beta \mathbf{j} + \cos \gamma \mathbf{k}) \\ &= \sigma_{xx} \cos \alpha \mathbf{i} + \sigma_{yy} \cos \beta \mathbf{j} + \sigma_{zz} \cos \gamma \mathbf{k}. \end{aligned}$$

Poiché questa uguaglianza sia verificata, si deve avere

$$\sigma = \sigma_{xx} = \sigma_{yy} = \sigma_{zz}.$$

In un punto di un fluido in equilibrio, lo sforzo è normale e non dipende dall'orientazione dell'elemento di superficie su cui viene esercitato. Si ha dunque

$$\boldsymbol{\sigma} = \sigma \hat{\mathbf{n}}, \quad \Rightarrow \quad \mathbf{p} = p \hat{\mathbf{n}}; \quad (1)$$

dove p è la pressione dipendente dal punto, ma indipendente da $\hat{\mathbf{n}}$.

Il tensore degli sforzi, in un fluido in equilibrio, è caratterizzato dalla sola pressione, pertanto è isotropo e può essere rappresentato dalla matrice:

$$\begin{pmatrix} p & 0 & 0 \\ 0 & p & 0 \\ 0 & 0 & p \end{pmatrix}.$$

2. Equilibrio dei fluidi

In accordo con le conclusioni del paragrafo precedente, l'equazione indefinita dell'equilibrio (10)-XV, nel caso dei fluidi, assume la forma

$$\mathbf{F} = \frac{\partial p}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial p}{\partial y} \mathbf{j} + \frac{\partial p}{\partial z} \mathbf{k}, \quad (2)$$

che si scrive:

$$\mathbf{F} = \nabla p. \quad (3)$$

Si tenga presente che \mathbf{F} è stata definita come forza per unità di volume.

La (2) equivale alle seguenti equazioni scalari:

$$F_x = \frac{\partial p}{\partial x}, \quad F_y = \frac{\partial p}{\partial y}, \quad F_z = \frac{\partial p}{\partial z}. \quad (4)$$

Affinché la (3) sia verificata, \mathbf{F} non può essere arbitraria, ma deve soddisfare la relazione

$$\nabla \times \mathbf{F} = 0, \quad (5)$$

deve perciò esistere uno scalare di cui \mathbf{F} è il gradiente, scalare che, a meno di una costante, è uguale alla pressione del fluido in equilibrio.

In particolare, se $\mathbf{F} = 0$, dalla (3), si deduce che $p = \text{cost}$ in tutti i punti del fluido. Se la (3) è verificata e $\mathbf{F} \neq 0$, considerato un percorso qualsiasi che va da un punto P_0 , comunque prefissato, ad un punto P , la pressione in P è data dall'integrale di linea

$$p = \int_{P_0(l)}^P \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} + p_0,$$

essendo p_0 la pressione in P_0 ed l la linea, arbitraria, che congiunge i due punti.

Il luogo dei punti in cui la pressione è costante è una superficie di equazione $p(x, y, z) = \text{cost}$, che si chiama *superficie isobarica*.

Poiché \mathbf{F} è il gradiente di p , il vettore \mathbf{F} risulta ortogonale, in ogni punto, alla superficie isobarica. Per l'equilibrio del fluido, occorre aggiungere alla (3) l'equazione (1), formulata come condizione al contorno

$$\boldsymbol{\sigma} = p \hat{\mathbf{n}}, \quad (6)$$

la quale impone che, sulla superficie limite del fluido in equilibrio, lo sforzo deve essere normale. Se la superficie limite del fluido è in contatto con un corpo rigido, come il recipiente che lo contiene completamente, allora il fluido assume la forma del contenitore e le forze esercitate dalle pareti, sono conformi alla (6), cioè ortogonali alla superficie limite.

Se il fluido presenta una parte di superficie in contatto con un altro fluido, per esempio l'aria o un altro fluido non miscibile, lungo una così detta superficie libera, la configurazione di equilibrio del fluido non è prefissabile ad arbitrio, ma deve risultare tale da verificare la (6).

Riferendo le componenti della forza all'unità di massa e indicando con ρ la densità del fluido, le (4), danno luogo alle seguenti equazioni scalari:

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \rho F_x, \quad \frac{\partial p}{\partial y} = \rho F_y, \quad \frac{\partial p}{\partial z} = \rho F_z. \quad (7)$$

Se \mathbf{F} soddisfa la (5), indicando con U l'energia potenziale per unità di massa, le (7) diventano:

$$\begin{aligned} \frac{\partial p}{\partial x} &= -\rho \frac{\partial U}{\partial x} \\ \frac{\partial p}{\partial y} &= -\rho \frac{\partial U}{\partial y} \\ \frac{\partial p}{\partial z} &= -\rho \frac{\partial U}{\partial z}. \end{aligned} \quad (8)$$

Moltiplicando le precedenti, rispettivamente per dx , dy , dz , sommando e tenendo presente che

$$dp = \frac{\partial p}{\partial x} dx + \frac{\partial p}{\partial y} dy + \frac{\partial p}{\partial z} dz,$$

si ottiene:

$$dp = -\rho dU. \quad (9)$$

Se il fluido è omogeneo, $\rho = \text{cost}$, integrando si ha:

$$p = -\rho U + \text{cost}. \quad (10)$$

In un fluido omogeneo, in equilibrio, se U è costante, la pressione è costante. In altri termini le superfici equipotenziali coincidono con le superfici isobariche.

III 3. Equilibrio dei fluidi soggetti alla gravità

Supponiamo che l'unica forza di volume che agisce su un fluido in equilibrio, sia la gravità. Assunto come riferimento, un asse z volto verso l'alto, la componente di tale forza è $-\rho g$, dove ρ , in genere è una funzione del punto e g , se l'estensione del fluido è piuttosto limitata, si può supporre costante. Allora la (5) dà luogo alle due relazioni

$$g \frac{\partial \rho}{\partial y} = 0, \quad g \frac{\partial \rho}{\partial x} = 0.$$

Da queste si deduce che ρ dipende soltanto da z ; sullo stesso piano orizzontale la densità del fluido non varia. Dunque le (7) danno luogo all'unica relazione

$$\frac{dp}{dz} = -g\rho(z),$$

dalla quale si ricava:

$$p = - \int_{z_0}^z g\rho(z)dz + p_0, \quad (11)$$

che si estende al caso di un fluido omogeneo e incompressibile, $\rho = \text{cost}$. D'altra parte, nel riferimento adottato, l'energia potenziale per unità di massa è

$$U = gz + U_0,$$

dunque dalla (10) si ottiene:

$$p = -\rho gz + \text{cost}. \quad (12)$$

Se il fluido è incompressibile, la relazione tra p e z è lineare; inoltre in conformità con la (9), si ha

$$dp = -\rho g dz.$$

Le superfici isobariche ed equipotenziali sono piani orizzontali; su di esse anche ρ è costante.

Dalla (11), qualunque sia la funzione $\rho(z)$, e in particolare dalla (12) se $\rho = \text{cost}$, si deduce che se due punti del fluido pesante, hanno la stessa quota, in essi la pressione è la stessa e, viceversa, se la pressione è uguale anche la quota è la stessa.

Ciò si verifica, per esempio, alla superficie di contatto di un liquido con l'atmosfera; tutti i punti di tale superficie sono allo stesso livello; lo sono anche le superfici libere di un fluido pesante in vasi comunicanti. La superficie di separazione di due fluidi non miscibili, in equilibrio, caratterizzata da una brusca variazione di densità, è una superficie isobarica ed equipotenziale orizzontale.

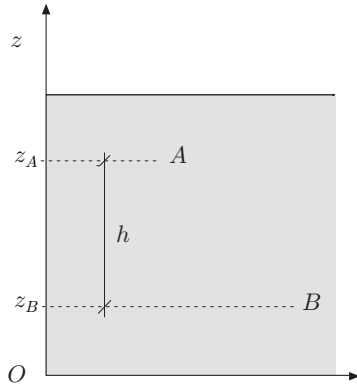


Fig. 16.1

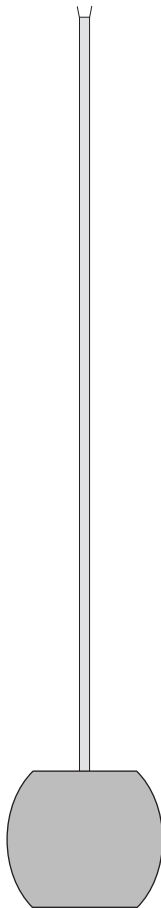


Fig. 16.2

3.1. Pressione all'interno di un fluido omogeneo

Dalla (12) possiamo dedurre la pressione in un punto all'interno di un fluido omogeneo e incompressibile, soggetto all'azione della gravità, figura 1. Le pressioni, alle quote z_A e z_B sono:

$$p_A = -\rho g z_A + \text{cost}, \quad p_B = -\rho g z_B + \text{cost}.$$

Sottraendo, si ottiene

$$p_B - p_A = \rho g(z_A - z_B) = \rho g h,$$

dove h è la differenza di quota. Si ha

$$p_B = p_A + \rho g h. \quad (13)$$

La precedente esprime la *legge di Stevino* o legge fondamentale dell'idrostatica: *la differenza di pressione tra due punti di un fluido omogeneo e incompressibile è uguale al "peso" della colonna di fluido di sezione unitaria e altezza $h = z_A - z_B$.*

In particolare A può appartenere alla superficie libera del fluido. Che la pressione dipenda dall'altezza del liquido contenuto in un recipiente, è dimostrato dalla famosa esperienza di Pascal. Un tubo verticale, è collegato con la parete superiore di una botte completamente piena di liquido, figura 2. Versando una modesta quantità di liquido nel tubo, che ha sezione piccola rispetto a quella della botte, si osserva che, raggiunta una certa altezza, questa si rompe. Infatti la forza che si esercita sulle pareti della botte dipende dalla pressione che, a sua volta, è solo funzione dell'altezza della colonna di liquido. Se, per esempio, il tubo verticale è alto 10 m ed ha sezione di 1 cm^2 , lo si può riempire con un litro di acqua; la sovrappressione che viene esercitata sulla botte è di circa 10^5 Pa , sufficiente a causarne la rottura.

3.2. Principio di Pascal

Se in un fluido è lecito trascurare le differenze di pressione dovute alla gravità, la (12) dà $p = \text{cost}$ in tutti i punti del fluido. Nei gas, in recipienti non molto grandi, ciò si verifica con buona approssimazione; è perciò corretto definire la pressione di un gas in equilibrio. Se non si trascura l'azione della gravità, $dp = 0$, solo se $dz = 0$. Condizione necessaria e sufficiente perché p sia costante è che i punti considerati appartengano ad una stessa superficie orizzontale. Si deduce il seguente enunciato del principio di Pascal:

La pressione in un punto P di un fluido pesante, in equilibrio, è costante in tutti i punti della superficie orizzontale passante per P .

Supponendo $\rho = \text{cost}$, dalla (13) si trae che la differenza di pressione è indipendente dai valori di p_A e p_B . Se la pressione

in A viene aumentata o diminuita per qualche motivo, lo stesso aumento o diminuzione si verifica in un punto B qualsiasi. Ne discende un altro enunciato del principio di Pascal:

In un fluido incompressibile in equilibrio, una variazione di pressione si trasmette integralmente al suo interno.

|| 3.3. Torchio idraulico

L'applicazione più diretta del principio di Pascal è il torchio idraulico, figura 3. Due cilindri comunicanti, di sezione S_1 e S_2 , contenenti un liquido incompressibile, sono chiusi alla superficie libera mediante due pistoni scorrevoli. Supponendo che il sistema sia inizialmente in quiete, sul pistone di sezione S_1 si eserciti una forza normale F_1 ; ne segue un aumento di pressione $\Delta p = F_1/S_1$. Poiché la variazione di pressione si trasmette inalterata, la forza F_2 che va esercitata sull'altro pistone per mantenere l'equilibrio, deve essere tale che $\Delta p = F_2/S_2$. Si deduce

$$\frac{F_1}{F_2} = \frac{S_1}{S_2}, \quad F_1 = F_2 \frac{S_1}{S_2}.$$

Il sistema permette, quando S_2 è molto grande rispetto a S_1 , di equilibrare una forza F_2 rilevante con una forza modesta.

Sistemi siffatti vengono frequentemente impiegati in sollevatori, martinetti e servomeccanismi idraulici. Naturalmente vale la regola d'oro delle macchine, stabilita nel capitolo XIII.

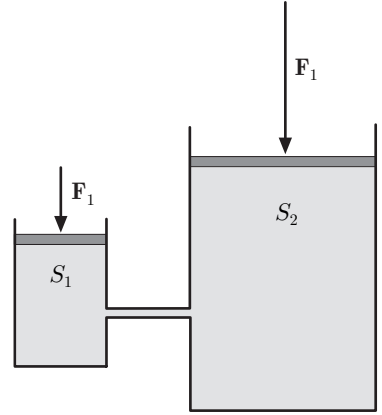


Fig. 16.3

|| 3.4. Liquidi in vasi comunicanti

È noto dalla Fisica elementare che le superfici libere di un liquido pesante, contenuto in vasi comunicanti, hanno lo stesso livello rispetto al fondo. In generale, un recipiente, nel campo della gravità ha forma di vasi comunicanti se le superfici orizzontali, isobare ed equipotenziali, tagliano il recipiente lungo una sezione che costituisce un'area non connessa, cioè somma di parti distinte: S_A, S_B, \dots . È sufficiente considerare un tipico tubo ad U contenente un liquido omogeneo, come in figura 4. Assunto come riferimento un asse z , verticale discendente, con origine in O , detta p_C la pressione sul fondo, per i due rami del tubo si ha:

$$p_C - p_A = \rho g(z_C - z_A) = \rho g h_A, \quad p_C - p_B = \rho g h_B; \quad (14)$$

ma, per l'equilibrio, la pressione in C deve essere la stessa, dunque:

$$h_A + \frac{p_A}{\rho g} = h_B + \frac{p_B}{\rho g}.$$

Se le pressioni p_A e p_B sono uguali, per esempio i due rami sono in comunicazione con l'atmosfera, si ha

$$h_A = h_B = h.$$

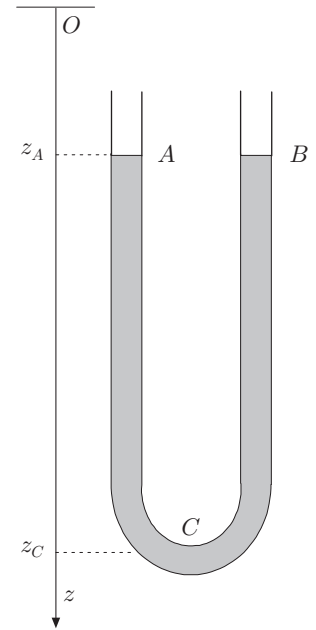


Fig. 16.4

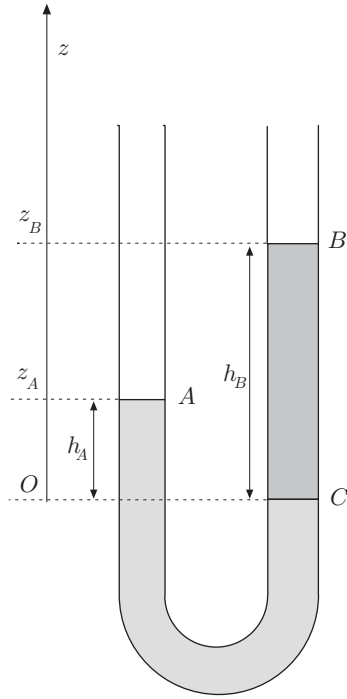


Fig. 16.5

Nel caso in cui un ramo del tubo è collegato ad un recipiente contenente un fluido a pressione p_B ignota, maggiore o minore della pressione atmosferica, e l'altro ramo comunica con l'atmosfera, si ha:

$$p_B = (h_A - h_B)\rho g + p_A.$$

In questo modo funzionano i manometri ad *aria libera*. La scelta del liquido manometrico dipende dall'intervallo di pressioni che si desidera misurare; per pressioni dell'ordine di grandezza di quella atmosferica, in genere si usa mercurio, $\rho = 13,6 \cdot 10^3 \text{ kg/m}^3$, che presenta il vantaggio di avere una tensione di vapore, a temperatura ambiente, trascurabile. Inoltre, data l'elevata densità, le dimensioni lineari del manometro non risultano eccessive. Un manometro ad acqua avrebbe dimensioni lineari circa 13 volte maggiori.

Se si usano le unità del *SI*, la (13) dà le pressioni in *pascal*. Se p_A e p_B vengono misurate in millimetri di mercurio, bisogna tener conto che $1 \text{ mm Hg} = \rho_{Hg} g 10^{-3} \text{ Pa}$, dunque, detta ρ la densità del liquido manometrico, si ha

$$p_B = (h_A - h_B) \frac{\rho}{\rho_{Hg}} + p_A,$$

e, se il liquido manometrico è mercurio:

$$p_B = (h_A - h_B) + p_A.$$

Supponiamo ora che i due rami del tubo ad *U* contengano liquidi differenti non miscibili, figura 5, e comunichino con l'atmosfera. Siano ρ_A e ρ_B le densità dei liquidi; si può ripetere il ragionamento precedente, pur di assumere come quota di riferimento la superficie di separazione *C* tra i due liquidi. Siccome, all'equilibrio, la pressione in *C* è la stessa e, per ipotesi, le superfici libere sono alla stessa pressione, dalle (14) si ottiene:

$$\rho_A g h_A = \rho_B g h_B, \quad \Rightarrow \quad \frac{h_A}{h_B} = \frac{\rho_A}{\rho_B}.$$

Le altezze delle colonne liquide, riferite a *C*, sono inversamente proporzionali alle densità. Segue un metodo molto semplice per la misura della densità relativa di un liquido, figura 6. I rami del tubo ad *U* capovolto, pescano in due bicchieri *A* e *B* contenenti i liquidi in esame. Aspirando in *C*, i liquidi salgono nei rami del tubo; una volta chiuso il rubinetto, si attende l'equilibrio, avendo cura che il livello nei due bicchieri sia lo stesso. Per la legge di Stevino si ha

$$p_A - p_C = \rho_A g h_A, \quad p_B - p_C = \rho_B g h_B;$$

ma le pressioni p_A e p_B sono uguali perché coincidono con la

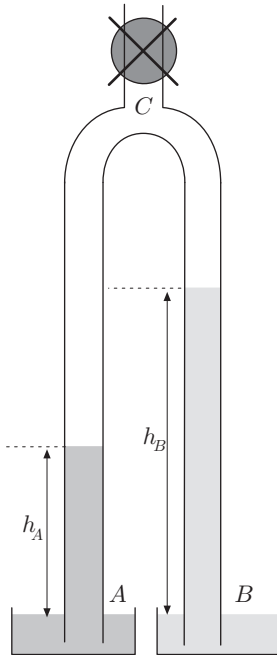


Fig. 16.6

pressione atmosferica, pertanto:

$$\rho_A g h_A = \rho_B g h_B, \quad \Rightarrow \quad \frac{\rho_A}{\rho_B} = \frac{h_B}{h_A}.$$

Dalla misura delle altezze, si ottiene la densità del liquido A relativa al liquido B ; di solito il liquido B è l'acqua.

|| 3.5. Forze di pressione, peso di un liquido

La (1) stabilisce che in un fluido in equilibrio lo sforzo non dipende dall'orientazione dell'elemento di superficie dS ed è sempre normale ad esso; in particolare dS può appartenere alla superficie di contorno del fluido e alle pareti del recipiente che lo contiene. Si consideri un liquido pesante, omogeneo, contenuto in un recipiente con pareti rigide. Disposto l'asse di riferimento z verticale discendente, con origine sulla superficie libera del liquido, la pressione in un generico punto delle pareti è

$$p = \rho g z + p_0,$$

dove p_0 è la pressione alla superficie del liquido, ovvero quella atmosferica. Poiché quest'ultima agisce su entrambe le facce delle pareti, la corrispondente forza di pressione ha risultante nulla; perciò la precedente diventa

$$p = \rho g z, \quad (15)$$

Dunque la forza di pressione esercitata dal liquido su un elemento dS di parete, ad una profondità z rispetto alla superficie libera, è in modulo

$$dF_p = \rho g z dS. \quad (16)$$

Un elemento di parete dS è soggetto ad una forza di pressione ortogonale e diretta verso l'esterno, uguale al peso della colonna liquida di sezione normale dS e di altezza uguale alla profondità z dell'elemento rispetto alla superficie libera.

Se l'elemento dS appartiene al fondo orizzontale di un vaso cilindrico, figura 7a), il peso della colonna liquida è quello che effettivamente grava su di esso e la forza totale, F_p , alla quale è soggetto il fondo è uguale al peso del liquido in esso contenuto. È evidente che le forze di pressione agenti sulle coppie di superfici laterali elementari simmetriche, danno un contributo nullo.

Ma la forza di pressione è indipendente dalla forma del vaso; si deduce che la forza F_p è la stessa per i vasi di figura 7b) e c), a condizione che il livello del liquido in essi contenuto sia lo stesso. Essa dunque è minore del peso del liquido contenuto in b), maggiore del peso del liquido contenuto in c); sul fondo dei tre recipienti, grava apparentemente lo stesso peso di liquido (*paradosso idrostatico*). La forza F_p può essere misurata in qualche maniera; per

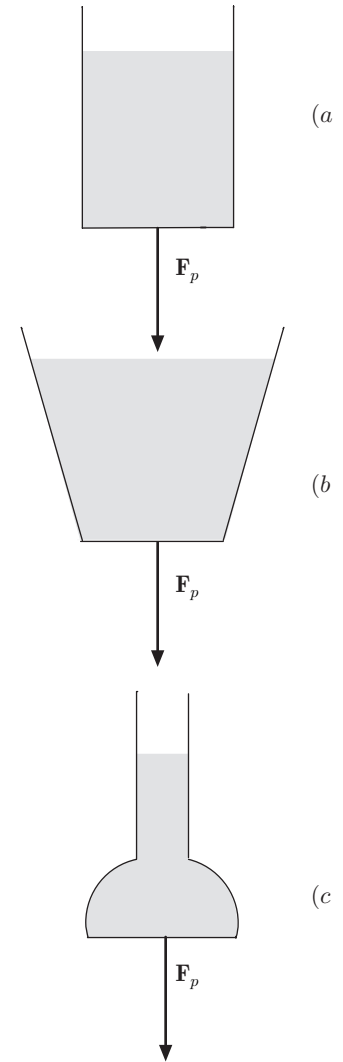


Fig. 16.7

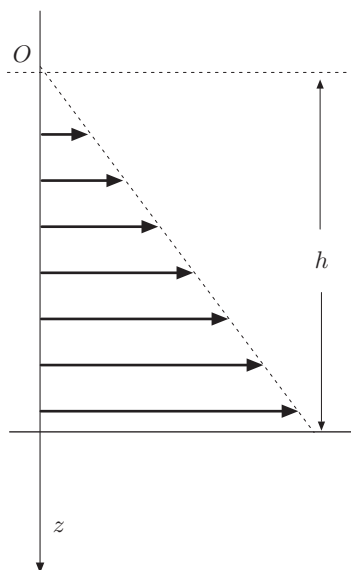


Fig. 16.8

esempio, si può fissare la parete del vaso ad un supporto rigido, mentre il fondo costituisce uno dei piatti di una bilancia che lo chiude perfettamente. In questo modo non viene misurato il peso del liquido, ma solo la forza di pressione che agisce sul fondo. Si verifica che il peso F_p , posto sull'altro piatto, è lo stesso qualunque sia la forma del vaso.

Se dS appartiene ad una parete laterale verticale, il diagramma delle forze elementari di pressione è quello mostrato in figura 8 ed ha un andamento lineare, crescente con la profondità. Consideriamo ora un elemento di parete la cui normale forma un angolo θ con la verticale, figura 9. Nel caso a) la componente verticale di $d\mathbf{F}_p$ è uguale al peso della colonna liquida $ABCD$ che grava su dS , ed ha modulo $\rho g z dS'$, dove z è la profondità rispetto alla superficie libera e $dS' = dS \cos \theta$ la sua sezione normale. Nel caso b) la componente verticale è negativa, verso l'alto, e rappresenta la reazione dell'elemento di parete al peso della colonna fittizia di liquido $ABCD$, in modo che la somma della forza $\rho g h dS$, che si esercita sull'elemento EF , proiezione di AB sul fondo, e della componente $-\rho g z dS'$ sia uguale al peso della colonna liquida reale $ABEF$.

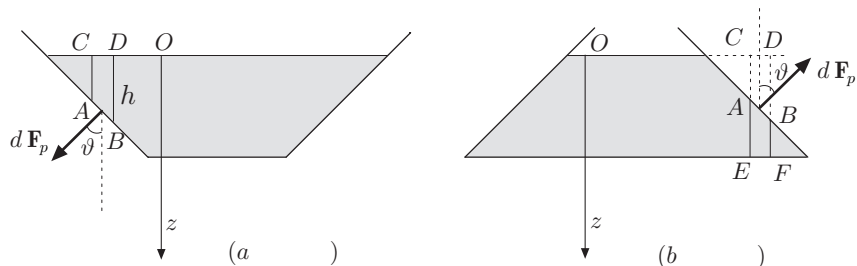


Fig. 16.9

Si comprende ora perché la forza che viene esercitata sul fondo non è uguale al peso del liquido contenuto nel vaso. Il liquido è in equilibrio sotto l'azione del suo peso e della risultante delle reazioni esercitate dalle pareti.

4. Calcolo delle forze di pressione

PARETE PIANA VERTICALE

Si consideri un liquido pesante, omogeneo, contenuto in un recipiente con pareti rigide, piane e verticali. Detta L la larghezza di una parete e disposto l'asse di riferimento z verticale discendente, con origine in $L/2$ sulla superficie libera del liquido, la pressione in un generico punto della parete ad una profondità z rispetto alla superficie libera, è data dalla (15) e il modulo della forza di pressione sull'elemento di superficie dS , nell'intorno di z , dalla (16).

Suddivisa la parete in elementi di superficie $dS = Ldz$, la forza di pressione elementare è, in modulo, $dF_p = \rho g L z dz$. Il diagramma di tali forze è quello di figura 8. Detta h l'altezza della superficie libera dal fondo, la risultante delle forze di pressione è

$$F_p = \int dF_p(z) = \rho g L \int_0^h z dz = \frac{1}{2} \rho g L h^2.$$

Il punto di applicazione di tale forza, centro delle forze parallele, ha coordinate

$$z_C = \frac{\int_0^h dF_p(z) z}{\int_0^h dF_p(z)} = \frac{\rho g L \int_0^h z^2 dz}{\rho g L \int_0^h z dz} = \frac{h^3/3}{h^2/2} = \frac{2}{3} h, \quad y_C = \frac{L}{2}.$$

PARETE PIANA OBLIQUA

Se la parete forma un angolo θ con la verticale, come in figura 10, fissata una terna con origine sulla superficie libera, asse z discendente e asse x come in figura, la forza di pressione agente sull'elemento dS , data dalla (16), ha componenti:

$$dF_{px} = \rho g z dS \cos \theta, \quad dF_{pz} = \rho g z dS \sin \theta.$$

Essendo $dS \cos \theta = Ldz$, si ha

$$dF_{px} = \rho g L z dz, \quad dF_{pz} = \rho g z dS \cos \theta \frac{\sin \theta}{\cos \theta} = \rho g L \tan \theta z dz.$$

Pertanto:

$$dF_p = \sqrt{(dF_{px})^2 + (dF_{pz})^2} = \frac{\rho g L}{\cos \theta} z dz.$$

La risultante è:

$$F_p = \frac{\rho g L}{\cos \theta} \int_0^h z dz = \frac{\rho g L}{\cos \theta} \frac{h^2}{2}.$$

Indicando con b la lunghezza del lato obliquo, ed essendo $\cos \theta = h/b$, si ha anche:

$$F_p = \frac{1}{2} \rho g L b h.$$

Il punto di applicazione della risultante ha coordinate

$$x_C = \frac{\int x dF_p}{F_p}, \quad y_C = \frac{L}{2}, \quad z_C = \frac{\int z dF_p}{F_p}.$$

Detta a la distanza dell'estremo della parete obliqua dall'origine, è $x = a(h - z)/h$, dunque

$$x_C = \frac{\rho g L}{\cos \theta} \frac{a}{h} \frac{\int_0^h (hz - z^2) dz}{F_p} = \frac{2}{3} a$$

$$z_C = \frac{\rho g L}{\cos \theta} \frac{\int_0^h z^2 dz}{F_p} = \frac{2}{3} h.$$

PARETE VERTICALE SEMICIRCOLARE

Nel caso che la parete verticale sia costituita da un semicerchio di raggio R , col diametro coincidente con la superficie libera, figura 11, detta $2r$ la base della striscia orizzontale di altezza dz , alla profondità z , si ha

$$z = R \sin \theta, \quad dz = R \cos \theta d\theta,$$

$$dS = 2r dz = 2R \cos \theta R \cos \theta d\theta = 2R^2 \cos^2 \theta \sin \theta d\theta.$$

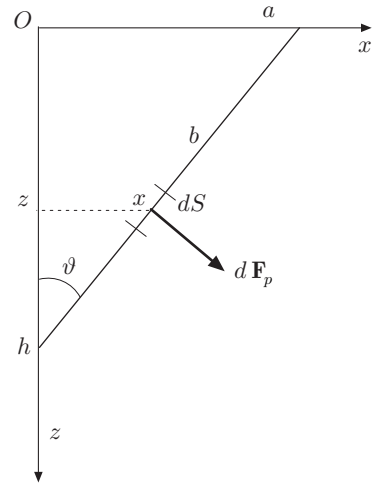


Fig. 16.10

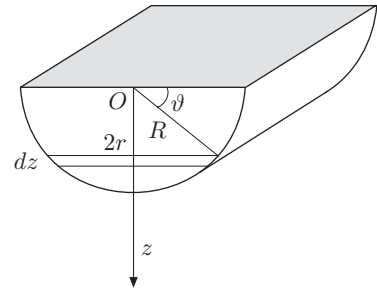


Fig. 16.11

Pertanto la (16) diventa:

$$dF_p = \rho g z dS = 2\rho g R^3 \cos^2 \theta \sin \theta d\theta,$$

da cui si ricava la risultante:

$$F_p = 2\rho g R^3 \int_0^{\pi/2} \cos^2 \theta \sin \theta d\theta.$$

Posto:

$$x = \cos \theta, \quad dx = -\sin \theta d\theta,$$

si ottiene

$$F_p = -2\rho g R^3 \int_1^0 x^2 dx = \frac{2}{3} \rho g R^3.$$

Per quanto riguarda le coordinate del punto di applicazione, si ha

$$z_C = \frac{\int_0^h z dF_p(z)}{\int_0^h dF_p(z)} = \frac{2\rho g R^4 \int_0^{\pi/2} \sin^2 \theta \cos^2 \theta d\theta}{2\rho g R^3/3},$$

che diventa:

$$z_C = 3R \int_0^{\pi/2} (1 - \sin^2 \theta) \sin^2 \theta d\theta.$$

Integrando, si ottiene

$$z_C = \frac{3}{16} \pi R.$$

PARETE VERTICALE TRIANGOLARE

Consideriamo una parete costituita da un triangolo equilatero di lato l e altezza $h = l\sqrt{3}/2$, con un lato che limita la superficie libera, figura 12. Suddivisa la parete in elementi di superficie di base x e altezza dz , si ha

$$dF_p = p dS = \rho g z x dz.$$

Essendo $x = l(h - z)/h$, si ottiene

$$dF_p = \rho g z \left(l - \frac{l}{h} z \right) dz;$$

dunque:

$$F_p = \rho g l \left[\int_0^h z dz - \frac{l}{h} \int_0^h z^2 dz \right] = \frac{1}{6} \rho g l h^2.$$

Tale forza è applicata alla profondità

$$z_C = \frac{\rho g l \left[\int_0^h z^2 dz - \frac{l}{h} \int_0^h z^3 dz \right]}{\rho g l h^2/6} = \frac{1}{2} h.$$

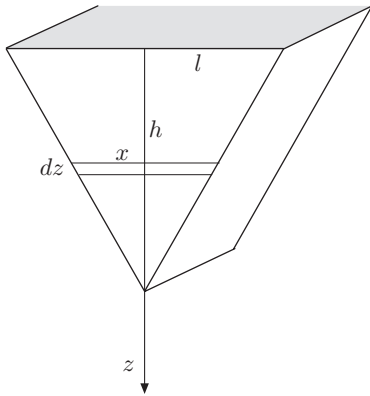


Fig. 16.12

$$\dagger \int_0^{\pi/2} \sin^2 \theta d\theta = \left[\frac{\theta}{2} - \frac{1}{4} \sin 2\theta \right]_0^{\pi/2} = \frac{\pi}{4}$$

$$\int_0^{\pi/2} \sin^4 \theta d\theta = \left[\frac{3}{8} \theta - \frac{3}{16} \sin 2\theta - \frac{1}{4} \sin^2 \theta \cos^2 \theta \right]_0^{\pi/2} = \frac{3}{8} \frac{\pi}{2}$$

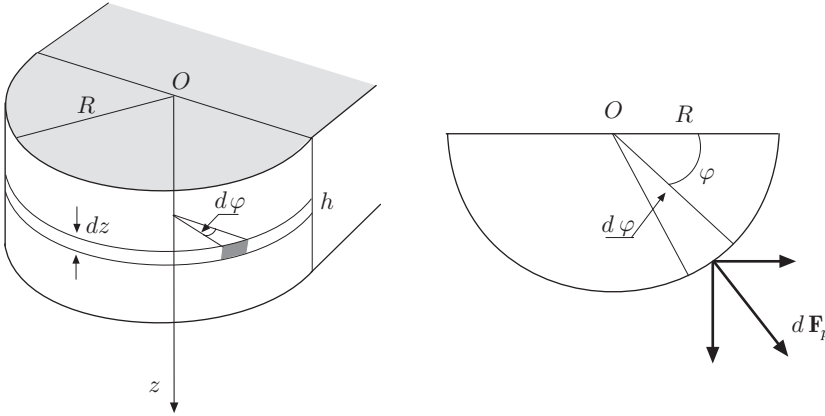


Fig. 16.13

PARETE VERTICALE CILINDRICA

Esaminiamo il caso in cui la parete sia costituita da un semicilindro di raggio R e altezza h , figura 13. Le forze di pressione hanno tutte rette d'azione concorrenti sull'asse del cilindro. Consideriamo, alla profondità z , un elemento della parete di superficie $dS = R d\varphi dz$, in cui dz è l'altezza e $R d\varphi$ la base. La forza elementare di pressione è

$$dF_p = \rho g z R d\varphi dz.$$

Si verifica facilmente che le componenti simmetriche, parallele al diametro

$$dF_{p\parallel} = \rho g z R d\varphi dz \cos \varphi,$$

danno un contributo nullo, cioè

$$\delta F_{p\parallel} = \rho g z R dz \int_0^\pi \cos \varphi d\varphi = 0,$$

mentre le componenti ortogonali

$$dF_{p\perp} = \rho g z R d\varphi dz \sin \varphi,$$

danno

$$\delta F_{p\perp} = R \rho g z dz \int_0^\pi \sin \varphi d\varphi = 2 R \rho g z dz.$$

Si osservi che $2Rdz$ è la proiezione piana dell'elemento di superficie del semicilindro. Integrando tra 0 e h , si ottiene la risultante delle forze di pressione:

$$F_p = 2 R \rho g \int_0^h z dz = 2 R \rho g \frac{h^2}{2},$$

uguale a quella relativa alla parete piana. Analogamente, si verifica facilmente che la coordinata z_C del punto di applicazione della forza, come per la parete piana, è $2h/3$.

RECIPIENTE SFERICO

Si consideri ora un recipiente sferico pieno d'acqua, di raggio R e si determini la risultante delle forze di pressione su tutta la sfera.

Si osservi anzitutto che le forze esercitate da un fluido in quiete su una parete rigida curva, non sono, in generale, equipollenti ad un'unica forza; lo sono però se la parete è sferica, poiché in questo caso le rette d'azione delle forze di pressione concorrono nel centro della sfera, analogamente a come si è verificato per la parete cilindrica, dove concorrono sull'asse.

Stabiliamo l'origine della terna di riferimento nel centro della sfera, con l'asse z positivo ascendente, figura 14. La (12) si scrive:

$$p = -\rho g z + p_0 + \rho g R = \rho g (R - z) + p_0,$$

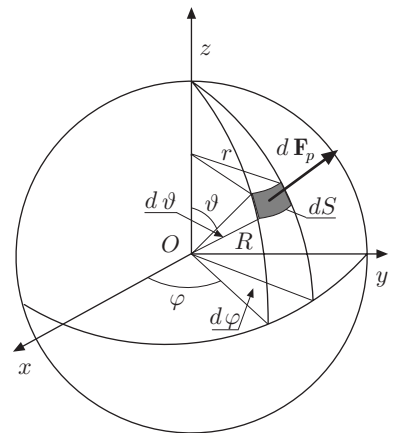


Fig. 16.14

perché, supponendo che sulla superficie della sfera agisca la pressione atmosferica p_0 , la costante della (12) risulta $cost = p_0 + \rho g R$, e omettendo, per il motivo già detto p_0 , si ha

$$p = \rho g(R - z).$$

Le forze di pressione, distribuite sulla superficie sferica, sono radiali e ortogonali all'elemento dS . La superficie di tale elemento, in coordinate sferiche, è

$$dS = r d\varphi R d\theta = R^2 \sin \theta d\theta d\varphi;$$

dunque la forza elementare di pressione, in modulo, risulta:

$$dF_p = p dS = \rho g(R - z) R^2 \sin \theta d\theta d\varphi.$$

Ma $z = R(1 - \cos \theta)$, dunque:

$$dF_p = \rho g[R - R(1 - \cos \theta)] R^2 \sin \theta d\theta d\varphi = \rho g R^3 \cos \theta \sin \theta d\theta d\varphi.$$

Le componenti secondo gli assi coordinati di tale forza sono:

$$dF_{px} = \rho g R^3 \cos \theta \sin^2 \theta \cos \varphi d\theta d\varphi$$

$$dF_{py} = \rho g R^3 \cos \theta \sin^2 \theta \sin \varphi d\theta d\varphi$$

$$dF_{pz} = \rho g R^3 \cos^2 \theta \sin \theta d\theta d\varphi.$$

Il contributo alla risultante delle forze di pressione delle componenti x e y è nullo; infatti

$$F_{px} = \rho g R^3 \int_0^\pi \cos \theta \sin^2 \theta d\theta \int_0^{2\pi} \cos \varphi d\varphi = 0$$

$$F_{py} = \rho g R^3 \int_0^\pi \cos \theta \sin^2 \theta d\theta \int_0^{2\pi} \sin \varphi d\varphi = 0.$$

a causa della simmetria di cui godono.

Integrando le componenti lungo z , si ha

$$\begin{aligned} F_{pz} &= \rho g R^3 \int_0^\pi \cos^2 \theta \sin \theta d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi \\ &= 2\pi \rho g R^3 \int_0^\pi \cos^2 \theta \sin \theta d\theta. \end{aligned}$$

Pertanto si ottiene:

$$F_p = 2\pi \rho g R^3 \int_0^\pi \cos^2 \theta \sin \theta d\theta = -2\pi \rho g R^3 \left[\frac{1}{3} \cos^3 \theta \right]_0^\pi = \frac{4}{3} \pi \rho g R^3.$$

Questo risultato era prevedibile; infatti per un fluido in equilibrio, la risultante delle forze di pressione (di superficie) è uguale, in modulo, alla risultante delle forze di volume; nel nostro caso, al peso del liquido contenuto nella sfera.

Il peso di un liquido può essere determinato con le normali procedure di pesata. Si osservi che la misura, in effetti, è indiretta; il liquido contenuto in un recipiente di volume V , a causa della gravità, genera forze di pressione $p dS \hat{n}$, normali ad ogni elemento di superficie del recipiente, e regolate dalla leggi di Stevino e di Pascal. La risultante di tali forze è uguale alla risultante delle forze di volume; nel nostro caso al peso. Si rammenti che per l'equilibrio deve essere

$$\int_V \mathbf{F}_V dV + \int_S \mathbf{F}_S dS = 0.$$

Che la risultante delle forze di pressione sia uguale, in modulo, al peso del liquido, si può dedurre osservando che le forze di pressione elementari $p dS \hat{n}$, rimangono inalterate qualora il volume del liquido considerato si trovasse all'interno di un liquido di ugual natura, la cui superficie libera giunga allo stesso livello del liquido contenuto in V . Tale liquido è in equilibrio sotto l'azione del proprio peso e della risultante delle forze di pressione $\int p dS \hat{n}$ esercitate dal fluido circostante. Questa risultante è diversa da zero, è opposta al peso del liquido ed è applicata al suo centro di massa.

RECIPIENTE TRONCOCONICO

Come ulteriore esempio, consideriamo un liquido che riempie un recipiente che ha la forma di un tronco di cono. Chiamiamo R_1 e R_2 i raggi della base maggiore e di quella minore, h l'altezza e θ l'angolo che la superficie laterale forma con quest'ultima, figura 15. Stabiliamo una terna di riferimento con origine sulla superficie libera del liquido e asse z discendente. Suddividendo la superficie laterale del tronco di cono in anelli di raggio r e altezza dl , l'elemento di superficie dS della parete che occorre considerare, risulta $dS = r d\varphi dl$. Essendo $dl = dz / \cos \theta$, si ha

$$dS = r d\varphi dl = \frac{r}{\cos \theta} dz d\varphi;$$

pertanto il modulo della forza di pressione elementare è

$$dF_p = \rho g z dS = \frac{r}{\cos \theta} \rho g z dz d\varphi.$$

Poiché

$$r = R_2 + \frac{R_1 - R_2}{h} z,$$

si ottiene:

$$dF_p = \frac{1}{\cos \theta} \rho g \left(R_2 + \frac{R_1 - R_2}{h} z \right) z dz d\varphi.$$

La forza di pressione, ortogonale all'elemento dS , ha componenti:

$$dF_{px} = \frac{1}{\cos \theta} \rho g \left(R_2 + \frac{R_1 - R_2}{h} z \right) z dz \cos \theta \cos \varphi d\varphi$$

$$dF_{py} = \frac{1}{\cos \theta} \rho g \left(R_2 + \frac{R_1 - R_2}{h} z \right) z dz \cos \theta \sin \varphi d\varphi$$

$$dF_{pz} = -\frac{1}{\cos \theta} \rho g \left(R_2 + \frac{R_1 - R_2}{h} z \right) z dz \sin \theta d\varphi.$$

Il contributo delle prime due, integrando rispetto a φ tra 0 e 2π , analogamente a quanto visto prima, è nullo. Per quanto riguarda le componenti verticali, osservando che il rapporto $\sin \theta / \cos \theta$ è uguale a $(R_1 - R_2)/h$, l'integrazione rispetto a φ fornisce

$$\delta F_{pz} = -2\pi \rho g \frac{R_1 - R_2}{h} \left(R_2 z + \frac{R_1 - R_2}{h} z^2 \right) dz;$$

si noti il segno negativo della componente. Da questa si ottiene la risultante delle forze di pressione:

$$\begin{aligned} F_{pz} &= -2\pi \rho g \frac{R_1 - R_2}{h} \left(R_2 \int_0^h z dz + \frac{R_1 - R_2}{h} \int_0^h z^2 dz \right) \\ &= \frac{1}{3} \pi \rho g h (R_2^2 - 2R_1^2 + R_1 R_2). \end{aligned}$$

Sommando a questa la forza di pressione sul fondo, $\pi R_1^2 \rho g h$, si ottiene la forza totale di pressione:

$$F_S = \frac{1}{3} \pi \rho g h (R_1^2 + R_2^2 + R_1 R_2).$$

Questa non è altro che la risultante delle forze di volume, cioè il peso del liquido contenuto nel tronco di cono. Se questo viene pesato, poggiando sul piatto di una bilancia prima una base e successivamente l'altra, si ha ovviamente lo stesso peso.

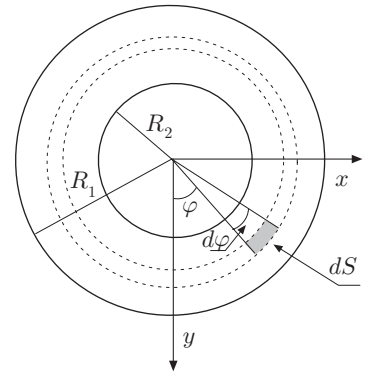
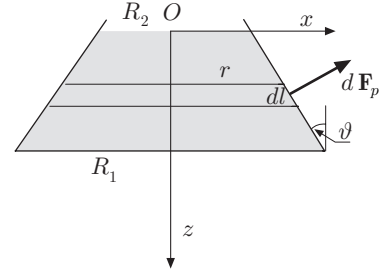


Fig. 16.15

5. Misura delle pressioni

Gli apparecchi per la misura delle pressioni sono svariati e il loro principio di funzionamento dipende dall'intervallo di pressioni che si desidera misurare. In pratica si possono presentare fenomeni in cui la pressione può avere valori di molte migliaia di atmosfere, $1 \text{ atm} \approx 10^5 \text{ Pa}$, e valori di circa 10^{-12} mm Hg , $1 \text{ mm Hg} \approx 1,3 \cdot 10^2 \text{ Pa}$. Si pensi che la pressione al centro del Sole è $2 \cdot 10^{16} \text{ Pa}$, mentre nel vuoto più spinto ottenuto in laboratorio è dell'ordine di grandezza del limite inferiore sopra indicato.

Nel campo delle alte pressioni la misura può essere ottenuta con metodi indiretti o con manometri particolari; in quello delle basse pressioni per mezzo di vacuometri il cui funzionamento si fonda su fenomeni di conduzione termica o di ionizzazione; la descrizione di tali manometri è argomento di testi specializzati. Ci limitiamo alla descrizione di alcuni manometri per gas che, con qualche variante, possono essere impiegati anche per i liquidi.

5.1. Barometro

Il barometro è un manometro assoluto che viene impiegato per la misura della pressione atmosferica (Torricelli). In figura 16 è mostrato il suo schema: la pressione atmosferica è equilibrata dalla pressione della colonna di mercurio contenuto nella canna barometrica, alla cui sommità la pressione è nulla; in effetti ivi è presente la tensione del vapore di mercurio che, a temperatura ambiente, è trascurabile. In pratica, un tubo di vetro, chiuso ad un estremo, viene riempito di mercurio e quindi capovolto in un pozzetto anch'esso contenente mercurio. La pressione atmosferica, per la legge di Stevino, è data da

$$p = \rho gh.$$

Assegnate la densità del mercurio a 0°C , l'accelerazione di gravità nel luogo della misura e supponendo nulla la tensione di vapore del mercurio, la pressione è misurata nelle unità del *SI* oppure, leggendo direttamente l'altezza h su una scala graduata, in *mm Hg*. A questa misura vanno apportate alcune correzioni, che non descriviamo in dettaglio, dovute ai seguenti motivi:

- variazione della densità del mercurio alla temperatura dell'esperienza.
- tensione del vapore di mercurio nella parte superiore della canna barometrica.
- dilatazione termica della scala che, in genere, è incisa a 0°C .
- variazione di g per la latitudine e la quota.

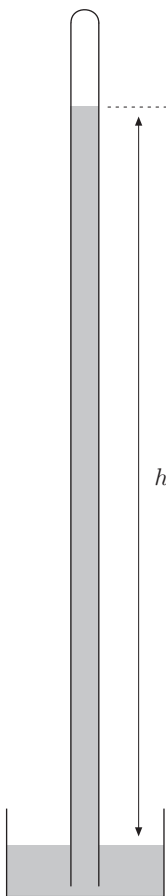


Fig. 16.16

5.2. Manometri metallici

I manometri metallici sono utilizzati per la misura della pressione atmosferica e per la misura di pressioni nell'ambito tecnico e industriale. Essi essenzialmente sono costituiti da una scatola metallica con pareti di conveniente spessore che vengono deformate dalla forza di pressione; la deformazione viene opportunamente amplificata, mediante un sistema di leve, collegate a un indice che può scorrere su una scala graduata. Nella versione utilizzata per la misura della pressione atmosferica la scatola è ondulata, per aumentarne la superficie, ed in essa è praticato il vuoto. La pressione schiaccerebbe la scatola se la sua parete non fosse collegata ad una robusta molla di contrasto che la tiene in equilibrio. La variazione di pressione causa lo spostamento della parete dall'equilibrio e la deformazione che ne segue viene segnalata da un indice.

In figura 17 è mostrato lo schema di principio del manometro di Bourdon. La pressione incognita agisce all'interno di un tubo metallico elastico, opportunamente sagomato. Anche in questo dispositivo, la deformazione del tubo, indicata dall'indice, è legata alla pressione da misurare.

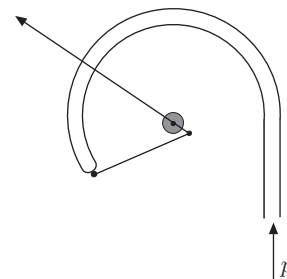


Fig. 16.17

5.3. Manometro di MacLeod

Serve a misurare pressioni fino a circa 10^{-5} mm Hg , in recipienti in cui è stato praticato il vuoto. In figura 18 è mostrato lo schema dell'apparecchio; l'ampolla A di volume V , sormontata da un capillare C_1 chiuso all'estremo, è collegata, alla biforcazione B , al recipiente in cui la pressione è incognita e al serbatoio di mercurio M , il quale può essere spostato lungo la verticale mediante un tubo flessibile. Accanto al capillare C_1 è disposto un capillare identico C_2 , connesso col recipiente, in modo che gli effetti di capillarità siano compensati. Quando il mercurio è al di sotto della biforcazione, tutto l'apparecchio si trova alla pressione da misurare; il dislivello tra B e la superficie libera del mercurio è pari alla pressione atmosferica. Ora si sollevi M finché il mercurio, riempiendo A , giunga nel capillare C_1 , ad un livello prefissato h_1 , mentre in C_2 giunge in h_2 . Il volume del gas residuo in A è così ridotto ad una frazione molto piccola di V . Detta V_1 tale frazione e p_x la pressione incognita, per la legge di Boyle, si ha

$$p_x V = p V_1, \quad \Rightarrow \quad p_x = p \frac{V_1}{V},$$

essendo $p = h_2 - h_1$ la pressione in V_1 , misurata in mm . Se, per esempio, il volume V è 500 cm^3 e il volume V_1 1 mm^3 , si possono misurare pressioni fino a circa 10^{-5} mm Hg .

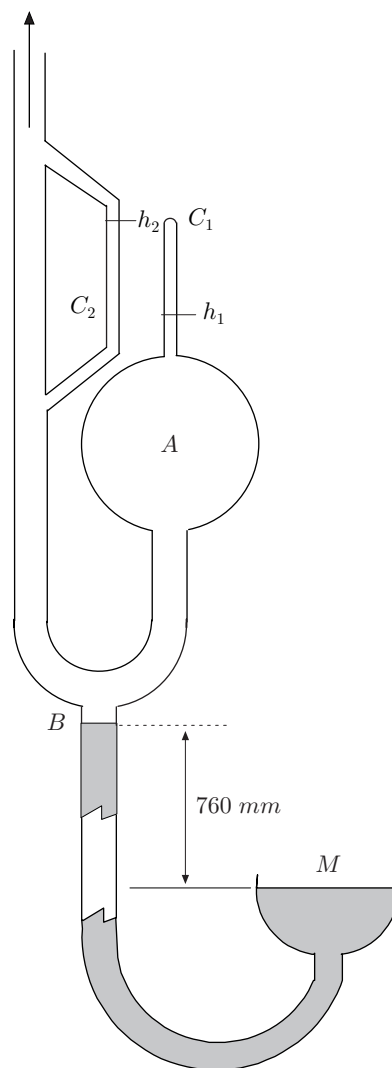


Fig. 16.18

Esempi

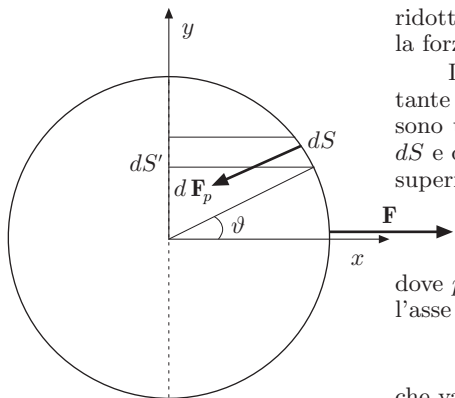


Fig. 16.19

- III 1. All'interno di due emisferi rigidi, a perfetta tenuta, la pressione viene ridotta a $1/4$ di quella atmosferica. Se R è il raggio degli emisferi, determinare la forza \mathbf{F} che occorre applicare a ognuno di essi per staccarli, figura 19.

La forza \mathbf{F} , nel nostro caso parallela all'asse x , deve equilibrare la risultante delle componenti, in questa direzione, delle forze di pressione. Queste sono uniformemente distribuite sulla superficie, ortogonali ad ogni elemento dS e dirette lungo il raggio, verso l'interno degli emisferi. In ogni punto della superficie la forza elementare di pressione è in modulo

$$dF_p = \left(p - \frac{1}{4}p\right) dS = \frac{3}{4}pdS,$$

dove p è la pressione atmosferica esterna. La componente di tale forza lungo l'asse x è

$$-\frac{3}{4}pdS \cos \theta,$$

che va integrata su tutta la superficie dell'emisfero:

$$F_p = -\frac{3}{4}p \int_S \cos \theta dS;$$

ma $dS \cos \theta = dS'$, è la proiezione dell'elemento di superficie della sfera sul cerchio massimo, pertanto:

$$F_p = -\frac{3}{4}p\pi R^2.$$

La forza minima da applicare è $F = -F_p$. Ponendo nella precedente $R = 0,3 \text{ m}$, si trova che essa è notevole; si rammenti l'esperienza degli emisferi di Magdeburgo, illustrata nei testi di Fisica elementare.

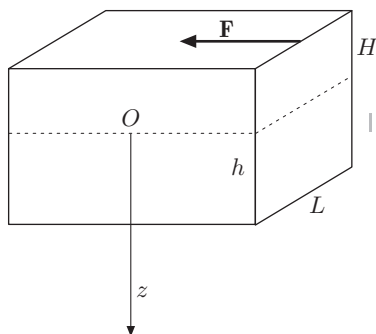


Fig. 16.20

- III 2. Un recipiente, contenente acqua, è costituito da un parallelepipedo rettangolo. Una parete, alta H , è incernierata ad uno spigolo della base di lunghezza L . Essa è sostenuta in posizione verticale per mezzo di una forza \mathbf{F} orizzontale applicata alla sommità, in modo da chiudere perfettamente il recipiente. Trovare il valore minimo di \mathbf{F} per l'equilibrio, se il livello dell'acqua dal fondo è h , figura 20.

Assunto come riferimento un asse z , volto in basso, con origine in corrispondenza alla superficie libera dell'acqua, la coordinata z_C del centro delle forze di pressione, come s'è visto al paragrafo 4, è $z_C = 2h/3$; si trova cioè a $1/3$ dal fondo. In esso è applicata la risultante delle forze di pressione:

$$F_p = \rho g L \int_0^h z dz = \frac{1}{2} \rho g L h^2.$$

Per l'equilibrio, la somma dei momenti di tale forza e della forza applicata, rispetto allo spigolo di base, dev'essere nulla, ossia:

$$F_p z_C = FH, \quad \Rightarrow \quad F = \frac{1}{6} \rho g L \frac{h^3}{H}.$$

- III 3. Due liquidi non miscibili, di densità ρ_1 e ρ_2 , sono in equilibrio in un tubo ad U, sotto l'azione della gravità. Determinare l'altezza della colonna del liquido 1 sapendo che il dislivello tra le superfici libere dei liquidi è h , figura 21.

Le superfici libere A, B , liquidi-aria, dove agisce la pressione atmosferica p_0 , e la superficie di separazione C , tra i due liquidi, sono superfici isobare. Assumendo un asse di riferimento ascendente con origine in C , si ha:

$$p_C = -\rho_1 g z_A + p_0, \quad p_C = -\rho_2 g z_B + p_0,$$

da cui

$$\rho_1 g z_A = \rho_2 g z_B, \quad \rho_1 z_A = \rho_2 (z_A - h), \quad \Rightarrow \quad z_A = \frac{\rho_2 h}{\rho_2 - \rho_1}.$$

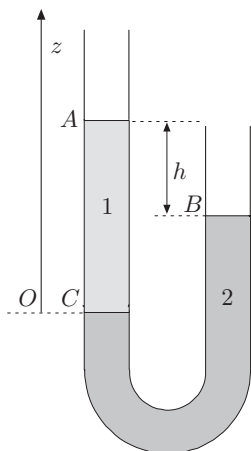


Fig. 16.21

- III 4. Un tubo ad U di sezione costante contiene un liquido che, all'equilibrio, si trova allo stesso livello nei due rami. Se il liquido viene perturbato e quindi abbandonato a se stesso, compie oscillazioni; determinarne il periodo, assumendo la lunghezza della colonna di fluido uguale a $2l$ e trascurando l'attrito.

La colonna di fluido può essere spostata dall'equilibrio per mezzo di una pressione esercitata su uno dei rami del tubo, alla quale corrisponde una forza $\rho g 2zS$, dove $2z$ è lo spostamento e S la sezione del tubo. Rimossa la pressione, hanno inizio le oscillazioni; la forza di richiamo $F = -\rho g 2zS = -kz$ agisce sulla massa di fluido, $m = \rho S 2l$. Dall'equazione della dinamica, si ha

$$ma = -kz, \quad \rho S 2l \ddot{z} = -\rho g S 2z;$$

cioè

$$\ddot{z} + \frac{g}{l} z = 0, \quad \Rightarrow \quad T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}}.$$

Il periodo è uguale a quello di un pendolo semplice.

III 6. Principio di Archimede

Limitandosi ai campi uniformi, come quello della gravità in una regione non molto estesa, consideriamo un corpo omogeneo che abbia forma di parallelepipedo rettangolo, immerso in fluido anch'esso omogeneo, figura 22. La risultante delle forze di pressione, applicate al parallelepipedo, si riduce alla forze agenti sulle basi AB e CD ; infatti le forze di pressione sulle facce laterali hanno risultante nulla, perché costituite da forze elementari $d\mathbf{F}$ e $d\mathbf{F}'$ a due a due opposte. Detta S l'area delle basi e assunto un asse z di riferimento, positivo verso l'alto, il modulo della risultante delle forze di pressione è

$$F_A = p_1 S - p_2 S = S(p_1 - p_2);$$

che, per la (12), si scrive

$$F_A = S \rho_L g (z_2 - z_1), \quad (17)$$

essendo ρ_L la densità del fluido. Ma $S \rho_L (z_2 - z_1)$ è la massa di fluido occupato dal corpo; pertanto la forza risultante, verso l'alto *spinta*, è uguale al peso di fluido spostato, applicato al centro di massa.

Se il fluido non è omogeneo, si ha

$$F_A = -S \int_{z_1}^{z_2} g \rho_L(z) dz.$$

La dimostrazione si estende ad un corpo di forma qualsiasi, figura 23; infatti si supponga il corpo completamente immerso, e lo si sostituisca con il fluido spostato. Quest'ultimo, all'interno di un mezzo di ugual natura, è in equilibrio indifferente, sotto l'azione delle forze di volume, gravità, la cui risultante è applicata al centro di massa, e delle forze di superficie, esercitate dal fluido circostante. Poiché queste ultime non sono influenzate dalla natura

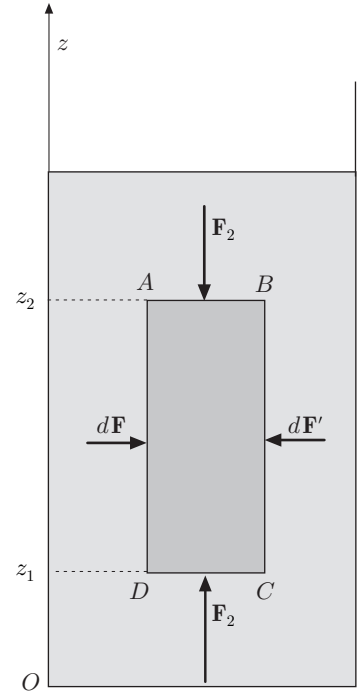


Fig. 16.22

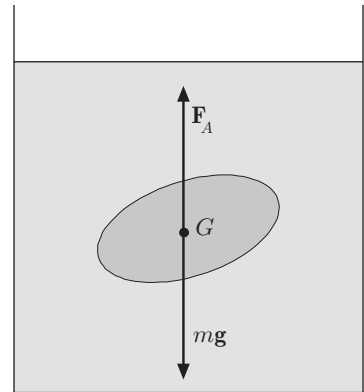


Fig. 16.23

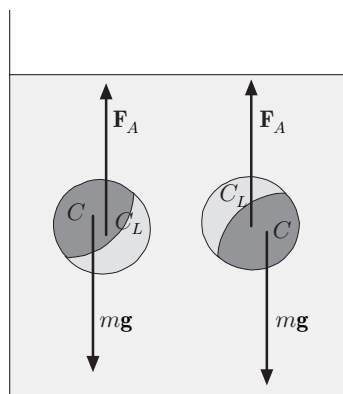


Fig. 16.24

del corpo immerso, è evidente che la loro risultante è opposta alla risultante delle forze di volume.

Un corpo immerso in un fluido, nel campo della gravità, è dunque soggetto a due forze verticali opposte: il peso proprio, mg , e la spinta di Archimede, \mathbf{F}_A ; il primo applicato al centro di massa del corpo, l'altra al centro di massa del fluido spostato. I due punti coincidono se il corpo è omogeneo, densità ρ_C costante, e se esso è completamente immerso nel fluido, supponendo quest'ultimo incompressibile, omogeneo, anch'esso di densità ρ_L costante. Detto V il volume del corpo, la forza risultante alla quale è soggetto il corpo immerso, rispetto ad un asse z orientato verso l'alto, in valore e segno, risulta:

$$F = F_A - mg = V(\rho_L - \rho_C)g, \quad (18)$$

che è verticale, volta in alto o in basso secondo che $\rho_L > \rho_C$ oppure $\rho_L < \rho_C$.

In generale, i punti di applicazione della spinta e del peso non coincidono; la prima è applicata al centro di massa del fluido spostato, il secondo al centro di massa del corpo. Il corpo risulta soggetto ad una forza verticale data dalla (18) e ad una coppia. Il corpo di figura 24, costituito da due parti di densità diversa, ha peso uguale al peso del liquido spostato e può disporsi in equilibrio all'interno del liquido, dunque $F_A = mg$. Le posizioni del corpo, in figura, non sono di equilibrio, perché su di esso agisce la coppia costituita da mg ed \mathbf{F}_A . L'equilibrio è realizzato solo se il centro di massa C del corpo ed il centro di massa C_L del liquido spostato si trovano sulla stessa verticale; inoltre sarà stabile o instabile secondo che C si disponga sotto o sopra C_L .

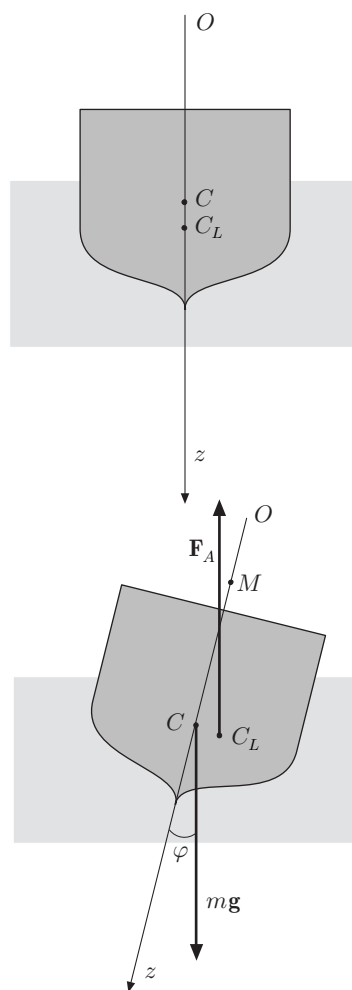


Fig. 16.25

6.1. Natanti

Dalla (18) si deduce che un corpo immerso in acqua viene a galla, se la densità del liquido è maggiore della densità del corpo; esso è dunque un *galleggiante*. Si ha equilibrio quando il peso del galleggiante è uguale al peso del liquido spostato dalla porzione immersa, e se il centro di massa C del galleggiante e il centro di massa C_L del liquido spostato si trovano sulla stessa verticale, figura 25. Le forze agenti, spinta di Archimede \mathbf{F}_A e peso del corpo mg , applicate rispettivamente a C_L e C , in generale costituiscono una coppia che, per l'equilibrio, deve avere momento nullo.

L'equilibrio è stabile nei riguardi degli spostamenti verticali; infatti, essendo il peso del natante costante, uno spostamento verso l'alto diminuisce il liquido spostato e quindi la spinta; viceversa uno spostamento verso il basso aumenta la spinta. In entrambi i casi il natante è ricondotto all'equilibrio dalla risultante delle forze $\mathbf{F}_A + mg$. Nei riguardi delle rotazioni, si noti che al

ruotare del natante, a parità di volume immerso, cambia la forma del liquido spostato, quindi la posizione di C_L . L'asse z , solidale col natante e passante per C , ruota di un angolo φ rispetto alla verticale e incide sulla verticale passante per C_L in un punto, che varia al variare di φ , cioè con l'inclinazione del natante. Per φ piccolo, questo punto di incidenza tende a un punto limite M che si chiama *metacentro* del natante. Se M è più alto di C , la coppia, costituita da \mathbf{F}_A e $m\mathbf{g}$ e generata dal rullo, tende a riportare il natante nella posizione di equilibrio stabile. Si hanno oscillazioni il cui periodo dipende dal momento d'inerzia e dal momento impresso e quindi dalla distanza MC .

Ogni natante ha un periodo proprio di oscillazione; in mare mosso, il natante tende a oscillare col periodo dell'onda; se il periodo di questa coincide col periodo proprio del natante, si ha risonanza e l'ampiezza delle oscillazioni può risultare pericolosa. Per questo motivo si tende ad aumentare il periodo proprio, diminuendo la distanza MC . Su grandi navi tale distanza è dell'ordine di alcune decine di centimetri e il periodo proprio di circa 20 s. Il periodo del moto ondoso raramente raggiunge valori di 10 s; perciò di solito si è lontani dalla risonanza.

6.2. Sommergibili, Aerostati

Il sommergibile è un natante il cui volume si può ritenere costante e il suo peso variabile, perché in esso sono disposti dei serbatoi che possono essere riempiti di acqua per determinare l'immersione. Il sommergibile in immersione è in equilibrio se il suo peso e la spinta di Archimede sono uguali in modulo. In pratica, quando esso è immerso, la sua compressibilità è maggiore di quella dell'acqua circostante, perciò, essendo costante il peso, tende ad affondare. Tuttavia la quota di immersione può essere resa stabile mediante i timoni di profondità che, però, funzionano solo durante il moto.

In modo analogo si comporta un aerostato; la forza *ascensionale* è data dalla differenza tra il peso dell'aria spostata dall'involucro e quello del gas in esso racchiuso (elio, idrogeno, aria riscaldata). All'equilibrio tale forza è, in modulo, uguale al peso dell'involucro, navicella, equipaggio e materiali. In condizioni normali, cioè a 0°C e 1 atmosfera, la densità dell'aria è $1,29\text{ kg/m}^3$; quella dell'idrogeno $\rho_H = 0,069\text{ kg/m}^3$. Pertanto la forza ascensionale per unità di volume di un aerostato pieno di idrogeno, risulta

$$g(\rho_{aria} - \rho_H) \approx 12\text{ N/m}^3.$$

Se si trascura la tensione dell'involucro e si suppone che questo non sia completamente gonfio alla partenza, in modo da permettere l'espansione del gas durante l'ascensione, ammettendo valida

la legge di Boyle, la forza ascensionale si può ritenere costante al variare della quota. Infatti se l'aerostato sale, per esempio, dove la pressione è la metà, il suo volume viene raddoppiato; intanto la densità dell'aria e del gas nell'involucro si sono dimezzati; si è dimezzata a sua volta la forza ascensionale per unità di volume, cosicché la forza ascensionale totale rimane invariata. In pratica il volume dell'involucro non può crescere al di sopra di un certo limite perché questo si strapperebbe; ciò viene impedito da opportune valvole che lasciano sfuggire gas, determinando una diminuzione della forza ascensionale. Si potrebbe in tal modo raggiungere una certa quota di equilibrio, forza ascensionale uguale al carico, ma questo è instabile perché l'aerostato vi perviene con velocità non nulla; altro gas esce dall'involucro e la forza ascensionale diventa minore del carico, cosicché inizia la discesa. Intanto l'involucro si affloscia, ma la forza ascensionale, avendo assunto un valore minore, non è in grado di sostenere il carico. L'Aeronauta, per arrestare la discesa, può eventualmente rifornire l'involucro di altro gas di riserva, oppure lanciare zavorra; l'aerostato sale fino ad una nuova quota, che viene oltrepassata, quindi ricomincia la discesa e così via. La possibilità di percorrere distanze notevoli dipende, oltre che dai venti, dall'uso appropriato di gas e zavorra.

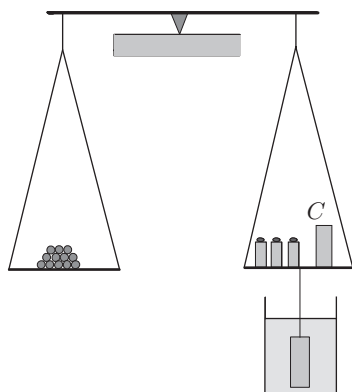


Fig. 16.26

7. Misure di densità

Tra vari metodi, per misurare con buona precisione la densità di un solido, si può usare la bilancia idrostatica (Archimede), schematizzata in figura 26. Come in ogni pesata di precisione, per eliminare gli errori derivanti dalla disuguaglianza dei bracci e dalla dipendenza della sensibilità della bilancia dal carico, va usato il metodo detto a carico costante. Su uno dei piatti si pongono un certo numero di masse tarate, la cui somma sia maggiore della massa più grande da determinare, e si cerca l'equilibrio ponendo sull'altro piatto della zavorra, per esempio pallini di piombo o altro. Ponendo il corpo C accanto alle masse tarate, la bilancia trabocca; si ristabilisce l'equilibrio togliendo un certo numero di masse tarate che danno dunque la massa del corpo. Quindi si lega il corpo ad un filo sottile e si immerge completamente in acqua. L'equilibrio della bilancia viene turbato; lo si ristabilisce aggiungendo delle masse tarate che misurano la spinta dell'acqua. Detta m_A la massa dell'acqua spostata e m la massa del corpo, essendo uguali i corrispondenti volumi, si ha

$$\frac{\rho}{\rho_A} = \frac{m}{m_A}, \quad \rho = \rho_A \frac{m}{m_A}$$

che dà la densità del corpo relativa all'acqua; naturalmente il corpo non dev'essere solubile. Si noti che la bilancia misura forze, peso del corpo e spinta di Archimede nei luoghi in cui l'accele-

razione di gravità ha il valore normale, ma il rapporto trovato è indipendente dal posto. Con la bilancia idrostatica di figura 26, si possono misurare le densità di liquidi relative ad un liquido di riferimento, di solito acqua.

Un corpo, comunemente un cilindro di vetro, viene sospeso, mediante un filo sottile, ad un piatto della bilancia, equilibrando con della zavorra. Si immerge completamente il cilindro in acqua e successivamente nel liquido di densità incognita, determinando le rispettive spinte con masse tarate. Essendo uguali g e il volume del corpo immerso nelle due misure, dette m_A e m_L le masse che equilibrano le spinte, il rapporto m_L/m_A fornisce la densità del liquido relativa all'acqua; anzi m_A è una costante che, ad una certa temperatura, va determinata una volta per tutte. Si tenga presente che la densità dipende dalla temperatura.

Esempi

- III 5. Un cilindro omogeneo di raggio r , altezza h e densità ρ , galleggia su una base in uno specchio d'acqua, immerso per metà del suo volume. Determinare il minimo lavoro perché venga immerso per tutta la sua altezza, figura 27.

Poiché il cilindro galleggia su una vasta superficie, si può ritenere che, a causa dell'immersione, il livello dell'acqua non vari; inoltre poiché si richiede il lavoro minimo, si deve supporre che il cilindro venga immerso molto lentamente, velocità $v \approx 0$, in modo che non acquisti energia cinetica e che, inoltre, il lavoro della forza resistente, dipendente dalla velocità, sia nullo.

Sul cilindro agiscono la forza necessaria per immergerlo, il peso e le forze di pressione, distribuite sulla superficie immersa. Indicando con \mathcal{L} il lavoro della forza applicata, con \mathcal{L}_g il lavoro della forza peso, con \mathcal{L}_p quello delle forze di pressione, per il teorema dell'energia cinetica si ha

$$\mathcal{L} + \mathcal{L}_g + \mathcal{L}_p = \Delta T = 0;$$

pertanto:

$$\mathcal{L} = -\mathcal{L}_g - \mathcal{L}_p.$$

Assumendo un asse di riferimento z volto in basso e con origine sulla superficie libera dell'acqua, il lavoro della forza peso è uguale alla variazione di energia potenziale U_C del cilindro, cambiata di segno

$$\mathcal{L}_g = -\Delta U_C = \rho \pi r^2 g h \frac{h}{2}.$$

Per calcolare il lavoro della forza di pressione si deve tenere conto che la pressione cresce con l'aumentare della parte immersa del cilindro. Pertanto la forza di pressione, funzione di z , risulta $F_p(z) = \rho_A \pi r^2 g z$, essendo ρ_A la densità dell'acqua. Si ottiene:

$$\mathcal{L}_p = -\rho_A \pi r^2 g \int_{h/2}^h z dz = -\frac{3}{8} \rho_A \pi r^2 g h^2 = -\Delta U_A.$$

Il lavoro della forza applicata, necessario per immergere il cilindro risulta:

$$\mathcal{L} = \frac{3}{8} \rho_A \pi r^2 g h^2 - \frac{1}{2} \rho \pi r^2 g h^2.$$

Avendo supposto che all'equilibrio, il cilindro emerga per metà, si deduce che $\rho = \rho_A/2$, perciò:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{8} \rho_A \pi r^2 g h^2.$$

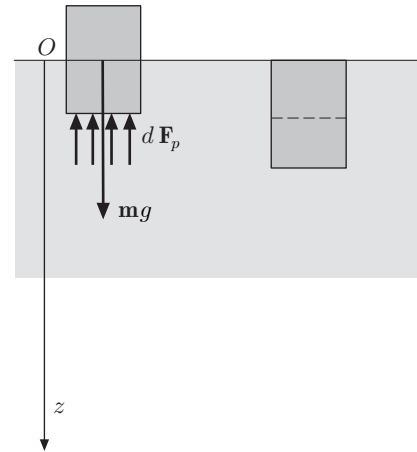


Fig. 16.27

Si osservi che il lavoro \mathcal{L}_p della forza di pressione, è uguale al lavoro del peso dell'acqua spostata dal cilindro, quando questa risale alla superficie libera. Infatti il suo peso è $\rho_A \pi r^2 g h/2$ e l'innalzamento del suo centro di massa $3h/4$; (si è supposto che lo specchio d'acqua sia vasto). Dunque tale lavoro è uguale alla variazione dell'energia potenziale U_A della massa di acqua spostata oppure, se si vuole, poiché il resto dell'acqua non interviene nel processo, alla variazione dell'energia potenziale U_T dell'intero specchio d'acqua, cambiata di segno:

$$\mathcal{L}_p = -\Delta U_A = -\Delta U_T.$$

Perciò il lavoro che occorre effettuare è uguale alla somma delle variazioni di energia potenziale del cilindro e dell'acqua spostata:

$$\mathcal{L} = \Delta U_C + \Delta U_A.$$

Si supponga ora che il cilindro galleggi nell'acqua contenuta in un recipiente, di dimensioni finite, anch'esso cilindrico di raggio $R > r$ e che, come prima, venga immerso molto lentamente. Poiché il recipiente ha dimensioni finite, quando il cilindro viene immerso, il livello dell'acqua aumenta di una quantità h_1 . Infatti il volume dell'acqua che sale in superficie è uguale al volume di acqua spostata:

$$\pi(R^2 - r^2)h_1 = \pi r^2 \left(\frac{h}{2} - h_1 \right),$$

da cui

$$h_1 = \frac{r^2}{R^2} \frac{h}{2},$$

dunque la superficie libera assunta dall'acqua si trova alla quota $z_0 + h_1$. La variazione di quota del centro di massa dell'acqua spostata in superficie, durante l'immersione del cilindro, risulta

$$\frac{3}{4}h - \frac{h_1}{2} + \frac{h_1}{2} = \frac{3}{4}h,$$

(il cilindro viene immerso di una quantità $h/2 - h_1$), pertanto la corrispondente variazione di energia potenziale risulta

$$\begin{aligned} \Delta U_A &= \rho_A \pi r^2 g \left(\frac{h}{2} - h_1 \right) \frac{3}{4}h = \rho_A \pi r^2 g \left(\frac{h}{2} - \frac{r^2}{R^2} \frac{h}{2} \right) \frac{3}{4}h \\ &= \frac{3}{8} \rho_A \pi r^2 g h^2 \left(1 - \frac{r^2}{R^2} \right). \end{aligned}$$

La variazione di energia potenziale del cilindro è data da:

$$\begin{aligned} \Delta U_C &= -\frac{1}{2} \rho_A \pi r^2 g h \left(\frac{h}{2} - h_1 \right) = -\frac{1}{2} \rho_A \pi r^2 g h \left(\frac{h}{2} - \frac{r^2}{R^2} \frac{h}{2} \right) \\ &= -\frac{1}{4} \rho_A \pi r^2 g h^2 \left(1 - \frac{r^2}{R^2} \right). \end{aligned}$$

Il lavoro minimo necessario per immergere il cilindro, come prima, è uguale alla variazione dell'energia potenziale totale, $\Delta U_A + \Delta U_C$, ossia:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{8} \rho_A \pi r^2 g h^2 \left(1 - \frac{r^2}{R^2} \right).$$

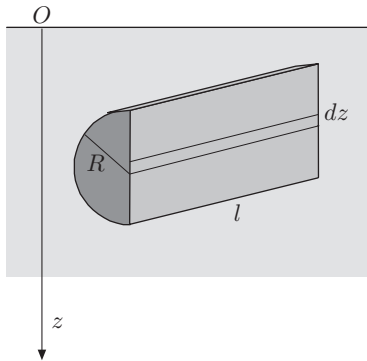


Fig. 16.28

- ||| 6. Un semicilindro omogeneo, di raggio R e lunghezza l , è immerso in acqua con l'asse disposto orizzontalmente, ed è bloccato come in figura 28. Si determini il momento risultante delle forze di pressione rispetto al suo asse.

Poiché il corpo è omogeneo, il centro di spinta coincide col centro di massa; quindi la spinta d'Archimede F_A , è applicata in esso. Essendo $F_A = \pi R^2 l \rho_A g/2$ e $b = 4R/(3\pi)$ la distanza dall'asse, baricentro di una semicirconferenza di raggio R , il momento della spinta è

$$M = F_A b = \frac{2}{3} \rho_A g l R^3.$$

Tale momento può essere calcolato direttamente come somma dei momenti elementari delle forze di pressione. Osserviamo che le forze di pressione che agiscono sulla superficie curva e sulle basi hanno momento nullo; le prime perché concorrenti sull'asse, le seconde perché parallele ad esso. Resta da determinare il momento delle forze di pressione che agiscono sulla superficie piana.

Assunto come riferimento un asse z verticale discendente, con origine sulla superficie libera, per la legge di Stevino

$$p(z) = \rho_A g z + p_0,$$

la forza che agisce sull'elemento dz è $dF = p(z)l dz$, ed essendo $z - R$ il braccio, risulta

$$dM = p(z)l(z - R)dz.$$

Dunque:

$$M = \int_0^{2R} p(z)l(z - R)dz = \frac{2}{3}\rho_A g l R^3.$$

8. Fluidi compressibili

In natura non esistono fluidi incompressibili anche se, con buona approssimazione, i liquidi possono essere considerati tali. Un volume V di fluido su cui viene esercitata una sovrappressione dp , a temperatura costante, subisce una variazione di volume dV , proporzionale alla quantità di fluido considerato, cioè al volume V . Tale variazione di volume può essere determinata attraverso il coefficiente di compressibilità isoterma, definito al paragrafo 5.1-XV,

$$\kappa_T = -\frac{1}{V} \left(\frac{\partial V}{\partial p} \right)_T. \quad (19)$$

Il coefficiente di compressibilità isoterma indica la diminuzione relativa di volume per un aumento unitario di pressione; esso si misura in Pa^{-1} . Per i liquidi il suo ordine di grandezza è di 10^{-10}Pa^{-1} ; si capisce che esso determina una variazione talmente piccola da poter essere, in genere, trascurata.

In corrispondenza alla variazione di volume, si ha una variazione di densità che può essere valutata per mezzo della (19). Supponendo che κ_T sia circa costante nell'intervallo di pressioni considerato e detto V_0 il volume alla pressione atmosferica, si ha

$$dV = -\kappa_T V_0 dp.$$

Integrando:

$$V = -\kappa_T V_0 p + C,$$

dove $C = V_0 + \kappa_T V_0 p_0$; quindi

$$V = V_0 - \kappa_T V_0 (p - p_0).$$

Da questa relazione si trae:

$$\rho = \frac{m}{V} = \frac{\rho_0}{1 - \kappa_T (p - p_0)}, \quad (20)$$

che mostra come aumenta la densità al crescere della pressione.

Nel gas ideale $pV = \text{cost}$, (legge di Boyle). Differenziando, si ha

$$pdV + Vdp = 0, \quad \frac{dV}{dp} = -\frac{V}{p};$$

pertanto:

$$\kappa_T = \frac{1}{p}. \quad (21)$$

Alla pressione atmosferica si ha $\kappa_T \approx 10^{-5} \text{ Pa}^{-1}$; si deduce che, come ordine di grandezza, esso è 10^5 volte più elevato di quello dei liquidi. Va osservato che la compressione non è mai sufficientemente lenta da risultare isoterma.

Si definisce, in modo analogo, il coefficiente di compressibilità adiabatica κ_S . In Termodinamica si dimostra che

$$\kappa_S = \frac{\kappa_T}{\gamma}, \quad (22)$$

dove γ è il rapporto tra il calore molare a pressione costante e il calore molare a volume costante del gas.

8.1. Pressione in un liquido compressibile

Assumendo l'asse di riferimento z discendente, con origine sulla superficie libera del liquido, dalla (12), si ha

$$\frac{dp}{dz} = \rho g;$$

sostituendo a ρ la (20), si ottiene:

$$\frac{dp}{dz} = \frac{\rho_0 g}{1 - \kappa_T(p - p_0)}, \quad \Rightarrow \quad [1 - \kappa_T(p - p_0)]dp = \rho_0 g dz.$$

Integrando:

$$(p - p_0) - \frac{1}{2}\kappa_T(p - p_0)^2 = \rho_0 g z.$$

Il secondo termine del primo membro è piccolo rispetto al primo in quanto, come s'è detto, per i liquidi $\kappa_T \approx 10^{-10} \text{ Pa}$. Quindi con buona approssimazione si può porre $(p - p_0)^2 \approx (\rho_0 g z)^2$; si ottiene:

$$p - p_0 = \rho_0 g z + \frac{1}{2}\kappa_T(\rho_0 g z)^2 = \rho_0 g z \left(1 + \frac{1}{2}\kappa_T \rho_0 g z\right).$$

Si deduce comunque che, a parte casi eccezionali, per il liquidi la correzione è trascurabile; per esempio, a 1000 m di profondità sotto il livello del mare, il termine correttivo è dell'ordine di grandezza di 10^{-3} .

|| 8.2. Variazione della pressione atmosferica con l'altezza

Supponiamo che il campo della gravità sia uniforme, \mathbf{g} costante, l'asse di riferimento z orientato verso l'alto. Per la (12), la variazione di pressione è

$$dp = -g\rho(p)dz,$$

dove $\rho(p)$ è la densità dell'aria, funzione della pressione e dunque dell'altezza z . Dalla precedente si ha

$$dz = -\frac{1}{\rho(p)g}dp,$$

e integrando da $z = 0$, dove la pressione è p_0 , a z , si ottiene la *formula ipsometrica*:

$$z = -\frac{1}{g} \int_{p_0}^p \frac{1}{\rho(p)} dp. \quad (23)$$

Occorre stabilire come varia la densità dell'aria con la pressione; per piccoli dislivelli, dell'ordine di alcune centinaia di metri, si può supporre che l'atmosfera sia isoterma. Allora per la legge di Boyle:

$$p_0 V_0 = pV, \quad \frac{p}{\rho} = \frac{p_0}{\rho_0},$$

la (23) dà:

$$z = -\frac{1}{g} \int_{p_0}^p \frac{p_0}{\rho_0} \frac{1}{p} dp = \frac{p_0}{g\rho_0} \ln \frac{p_0}{p}. \quad (24)$$

Per dislivelli superiori a quelli considerati, l'ipotesi isoterma non è più ammissibile. Per l'integrazione della precedente, occorre stabilire una legge che dia la variazione di temperatura e dello stato igrometrico con l'altezza. Questa legge è di solito empirica e si riferisce ad una *atmosfera tipo* media della regione, su cui non insistiamo. Pertanto una legge empirica che esprime l'altezza, $z = z(p)$, relativa all'atmosfera convenzionale, può dare indicazioni notevolmente diverse da quelle reali. Dalla (24) si ottiene:

$$p = p_0 e^{-(g\rho_0/p_0)z}, \quad (25)$$

dove ρ_0 e p_0 sono rispettivamente la densità e la pressione dell'aria al livello del mare. Si può verificare che la pressione si dimezza a circa 5,4 km di altezza e si riduce a 1/4 a circa 11 km.

||| 9. Equilibrio relativo di masse fluide

L'equilibrio relativo di un fluido è stabilito dall'equazione (2), nella quale le forze di volume comprendono quelle reali e quelle di trascinamento. La (3) dunque si scrive:

$$\mathbf{F} + \mathbf{F}_t = \nabla p.$$

Consideriamo un recipiente cilindrico, contenente un liquido, $\rho = \text{cost}$, ruotante attorno al suo asse con velocità angolare costante. Nel riferimento solidale col recipiente, l'equilibrio è soddisfatto dall'equazione

$$\rho \mathbf{g} + \rho \omega^2 \mathbf{r} = \nabla p, \quad (26)$$

dove i termini al primo membro sono la forza peso per unità di volume, reale, e la forza centrifuga per unità di volume, di trascinamento.

Assunto un riferimento cartesiano ortogonale con asse z positivo ascendente e coincidente con l'asse del recipiente, si ha

$$-\rho g \mathbf{k} = -\nabla(\rho g z), \quad \rho \omega^2 \mathbf{r} = -\nabla \left[-\frac{1}{2} \rho \omega^2 (x^2 + y^2) \right].$$

Pertanto la (26) diventa:

$$\nabla \left[p + \rho g z - \frac{1}{2} \rho \omega^2 (x^2 + y^2) \right] = 0, \quad (27)$$

dove si può porre

$$U = \rho g z - \frac{1}{2} \rho \omega^2 (x^2 + y^2),$$

che rappresenta l'energia potenziale per unità di volume del fluido. Dalla (27) si deduce che la funzione

$$p + \rho g z - \frac{1}{2} \rho \omega^2 (x^2 + y^2),$$

è costante. Pertanto per tutti i punti di una superficie isobarica $p = \text{cost}$, superficie equipotenziale, si ha

$$\rho g z - \frac{1}{2} \rho \omega^2 (x^2 + y^2) = \text{cost}.$$

Le superfici equipotenziali e isobariche sono paraboloide di rotazione attorno all'asse z , figura 29. In particolare la superficie libera, costituita dal paraboloide con vertice in z_0 , ha equazione:

$$g(z - z_0) = \frac{1}{2} \omega^2 (x^2 + y^2) \quad (28)$$

essendo, in tal caso, $\text{cost} = \rho g z_0$.

Il valore di z_0 va determinato imponendo che il volume del paraboloide sia uguale a quello del liquido contenuto nel recipiente. La differenza di pressione tra due punti B e A del liquido è data da

$$\Delta p = -\Delta U, \quad p_B - p_A = \rho g(z_A - z_B) - \frac{1}{2} \rho \omega^2 (r_A^2 - r_B^2),$$

essendo $r^2 = x^2 + y^2$ il quadrato della distanza del punto dall'asse di rotazione.

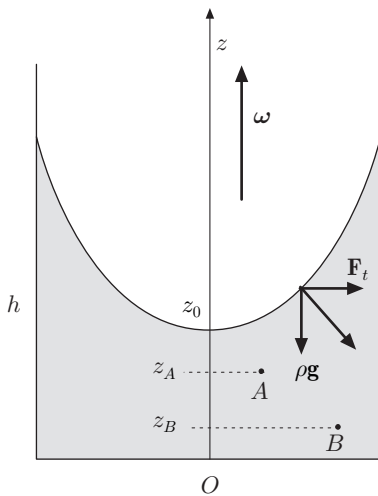


Fig. 16.29

La pressione in un punto si può ottenere anche dalla:

$$\frac{\partial p}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial p}{\partial y} \mathbf{j} + \frac{\partial p}{\partial z} \mathbf{k} = \rho \omega^2 x \mathbf{i} + \rho \omega^2 y \mathbf{j} - \rho g \mathbf{k}.$$

Si ha:

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \rho \omega^2 x, \quad \frac{\partial p}{\partial y} = \rho \omega^2 y, \quad \frac{\partial p}{\partial z} = -\rho g,$$

che integrate danno la pressione nel punto desiderato.

La forza risultante $\rho \mathbf{g} + \rho \omega^2 \mathbf{r}$ è ovviamente normale alla superficie equipotenziale. Si noti inoltre che la pressione sul fondo del recipiente, in corrispondenza all'asse, è

$$p = \rho g z_0 + p_0.$$

In corrispondenza alla parete, detta h l'altezza della colonna liquida,

$$p = p_0 + \rho g h = p_0 + \rho g \left(z_0 + \frac{1}{2} \frac{R^2}{g} \omega^2 \right),$$

dove R è il raggio del recipiente. Perciò è

$$p = p_0 + \rho g z_0 + \frac{1}{2} \rho \omega^2 R^2,$$

somma della pressione della colonna liquida di altezza z_0 e di quella dovuta alla forza centrifuga.

Esempi

- ||| 7. Un serbatoio a forma di parallelepipedo, contenente acqua, si muove su una superficie orizzontale con accelerazione costante, figura 30. Determinare le superfici isobariche.

Sull'acqua, agiscono la gravità e la forza di trascinamento, entrambe di volume. Nel riferimento mobile è dunque

$$\nabla p = \rho \mathbf{g} + \mathbf{F}_t = -\rho g \mathbf{k} - \rho \mathbf{a}_t;$$

avendo assunto gli assi di riferimento come in figura. Essendo

$$-\rho g \mathbf{k} = -\nabla(\rho g z), \quad -\rho \mathbf{a}_t = -\nabla(\rho a_t x),$$

la precedente diventa:

$$\nabla(p + \rho g z + \rho a_t x) = 0.$$

Ciò implica

$$p + \rho g z + \rho a_t x = \text{cost},$$

che, per una superficie isobarica, diventa

$$\rho g z + \rho a_t x = \text{cost}.$$

In particolare, l'equazione della superficie libera è

$$\rho g z + \rho a_t x = \rho g z_0;$$

che rappresenta, come tutte le altre superfici isobariche, un piano inclinato rispetto a quello orizzontale, di un angolo fornito da

$$\tan \varphi = \frac{z_0 - z}{x} = \frac{a_t}{g}.$$

Naturalmente la forza per unità di volume, risultante di $\rho \mathbf{g}$ e \mathbf{F}_t , è ortogonale alle superfici isobariche.

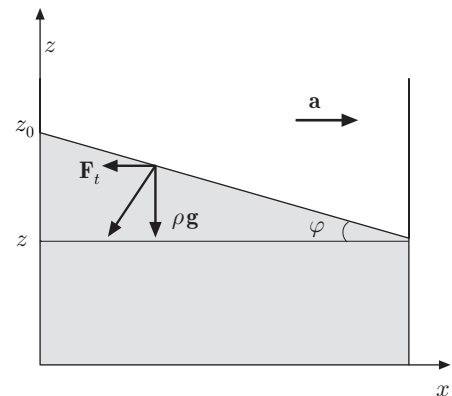


Fig. 16.30

- ||| 8. Nel serbatoio dell'esempio precedente, è immerso un corpo omogeneo, di massa m che, se il serbatoio non si muovesse di moto accelerato, verrebbe a galla. Determinate l'accelerazione del serbatoio, costante, per la quale il corpo è in equilibrio indifferente.

Nel riferimento solidale col serbatoio si ha equilibrio se

$$m\mathbf{g} + \mathbf{F}_t + \mathbf{F}_A = 0,$$

dove $\mathbf{F}_t = -m\mathbf{a}_t$ è la forza di trascinamento e \mathbf{F}_A la spinta di Archimede. Essendo \mathbf{F}_t e $m\mathbf{g}$ ortogonali, segue che

$$F_A^2 = m^2(g^2 + a_t^2), \quad \Rightarrow \quad a_t = \sqrt{\frac{F_A^2}{m^2} - g^2}.$$

9. Un recipiente contenente acqua scivola su un piano senza attrito, inclinato di un angolo φ rispetto all'orizzontale. Determinare l'angolo di inclinazione della superficie libera dell'acqua rispetto al piano.

La situazione è analoga a quella degli esempi precedenti. Nel riferimento solidale col recipiente, la risultante delle forze reali e della forza di trascinamento deve essere ortogonale alla superficie libera dell'acqua, superficie isobarica. L'unica forza reale è il peso per unità di volume, intensità $-\rho g$. La forza di trascinamento per unità di volume, opposta alla forza motrice, ha intensità $-\rho a_t = -\rho g \sin \theta$, con θ angolo di inclinazione del piano. La risultante di tali forze è ortogonale al piano inclinato, dunque la superficie libera dell'acqua è parallela a quest'ultimo.

||| 10. Tensione superficiale

Ogni parte omogenea di un sistema di sostanze in equilibrio costituisce una fase. In una sostanza pura come l'acqua, in presenza del suo vapore, sono presenti due fasi: l'acqua liquida ed il vapore. La superficie di contatto tra le due fasi è la superficie di separazione tra le parti del sistema, ciascuna omogenea. Il sistema costituito da una lastra di vetro su cui è posta una goccia di mercurio in aria, è un sistema costituito da tre fasi. Esiste una linea di contatto comune alle tre fasi; questa linea è il contorno comune delle superfici di contatto vetro-mercurio, vetro-aria, aria-mercurio. Per una definizione più precisa di fase, si rimanda alla Termodinamica.

I fenomeni di superficie più semplici si presentano al contatto tra le fasi di una sostanza pura; ci limiteremo perciò a considerare il sistema costituito da lamine liquide, in cui è lecito trascurare la forza peso e la forza di pressione idrostatica.

Nella materia esistono forze di coesione molecolari attrattive che, nel caso di interazione binaria, sono descritte con buona approssimazione dal potenziale di Lennard-Jones, considerato al paragrafo 6-VIII. Tali forze sono molto intense nei solidi, meno intense nei liquidi e diminuiscono fino ad annullarsi, passando dai gas reali al gas ideale. Dall'andamento del potenziale di Lennard-Jones, si deduce che la forza di interazione tende a zero all'aumentare della distanza tra le molecole e che, per ogni tipo di molecola,

si può definire un raggio di interazione molecolare r_m , pari a due o tre volte la distanza di equilibrio. Consideriamo una molecola M_1 all'interno del liquido, figura 31; essa è soggetta, da parte delle molecole che si trovano all'interno della sua sfera di interazione, a forze di attrazione in tutte le direzioni che statisticamente si equilibrano. Diversa è la situazione di una molecola M_2 che si trova a una distanza dalla superficie libera minore del raggio di interazione molecolare. Le molecole "mancanti" nella parte ABC , non sono equilibrate da quelle che effettivamente si trovano nella parte simmetrica DEF . La molecola è soggetta a una forza netta attrattiva verso l'interno del liquido; ne segue che per portare una molecola dall'interno del liquido sulla superficie libera, cioè per accrescere le dimensioni di tale superficie, occorre effettuare lavoro. Ciò significa che la superficie libera del liquido possiede una energia potenziale, proporzionale alla sua area, che all'equilibrio, deve essere minima. In effetti si osserva che i liquidi, in piccole quantità, tendono ad assumere la forma di gocce sferiche, che corrisponde alla minima superficie di contorno.

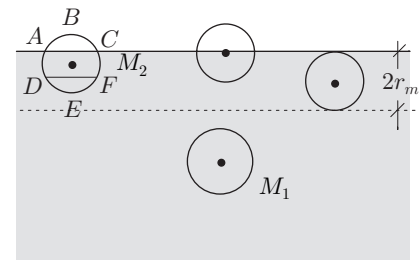


Fig. 16.31

Se immaginiamo di volere aumentare la superficie libera del liquido, esercitando una trazione ortogonale a una linea appartenente ad essa, occorre effettuare il lavoro corrispondente all'aumento dell'energia potenziale di superficie, come se si volesse aumentare la superficie di una membrana di gomma. Qualitativamente la contrattilità delle lamine superficiali si può dimostrare con lamine persistenti, per esempio di acqua saponata, adagiate su contorni di fili rigidi. La forma della lamina è sempre quella di area minima compatibile con la forma del contorno, figura 32. Un cappio di cotone, fissato ad una circonferenza rigida su cui si adagia una lamina liquida, si apre a cerchio quando viene rotta la lamina al suo interno. Infatti il cerchio ha l'area massima a parità di perimetro; ciò significa area minima della lamina ancora esistente tra il filo e il contorno esterno rigido. Questa proprietà può essere sfruttata per studiare la superficie di area minima che ha un contorno rigido prefissato, figura 33.

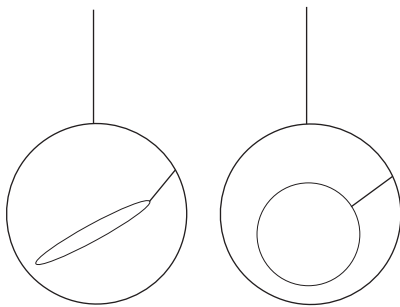


Fig. 16.32

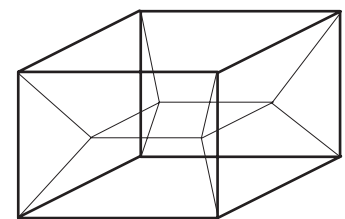
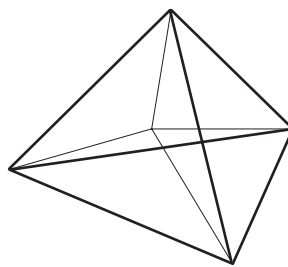


Fig. 16.33

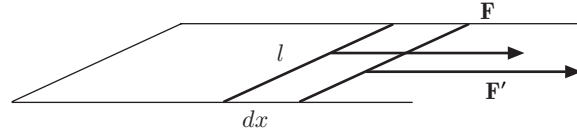


Fig. 16.34

Si consideri una lamina liquida adagiata su un contorno rigido a forma di U , con il lato di chiusura l che può scorrere senza attrito sugli altri due, figura 34. La lamina si contrae in modo da assumere la superficie minima; per tenerla in equilibrio, occorre applicare al lato l una forza $F = 2\tau l$, dove τ è la tensione superficiale, definita dalla relazione

$$\tau = \frac{F}{2l}; \quad (29)$$

il fattore 2 tiene conto del fatto che la lamina ha due facce. Se si applica una forza F' leggermente superiore, la superficie della lamina aumenta e, per uno spostamento dx , il lavoro elementare della forza risulta

$$d\mathcal{L} = F'dx = 2\tau ldx = \tau dS,$$

da cui:

$$\tau = \frac{d\mathcal{L}}{dS}. \quad (30)$$

La tensione superficiale si misura in newton per metro (N/m) oppure in joule per metro quadrato (J/m^2). La tensione superficiale dipende dalla natura del liquido, se il gas circostante è inerte, dalla temperatura, diminuendo al crescere di questa e dipende fortemente da eventuali contaminazioni della superficie.

In accordo col teorema di conservazione dell'energia, la (30) esprime che il lavoro effettuato per estendere la lamina isotermicamente, corrisponde all'aumento dell'energia superficiale che viene restituito quando la sua superficie si contrae. La tendenza della lamina a contrarsi può essere attribuita anche ad una sorta di pressione interna o di coesione. Essa è piuttosto elevata. Una stima può essere fatta con le seguenti considerazioni.

Riferendosi alla figura 31, si deduce che la forza attrattiva è nulla quando la distanza x della molecola dalla superficie è uguale al raggio di azione molecolare r_m , e cresce quando x diminuisce fino a zero. Supponendo che F_m ne sia il valore medio, $F_m r$ è il lavoro per portare una molecola dall'interno del liquido alla superficie. Per aumentare dell'unità di area la superficie libera del liquido, per ogni molecola occorre un lavoro uguale a circa $F_m r/2$, perché delle molecole costituenti la pellicola superficiale, una parte andrà a costituire la superficie esterna, l'altra quella interna. Le molecole formanti la lamina giungono nell'unità di area creata, vincendo la pressione di coesione p_C che è la risultante per unità

di area delle forze di coesione F_m . Dunque il lavoro occorrente è $p_C r_m/2$, ed essendo τ definita dalla (30), si ha

$$p_C = 2 \frac{\tau}{r_m}.$$

Ne risulta una pressione interna piuttosto elevata; per l'acqua, assumendo $\tau = 73 \cdot 10^{-3} \text{ N/m}$ e $r_m \approx 10^{-8} \text{ m}$, si ottiene $p_C \approx 15 \cdot 10^6 \text{ N/m}^2$. In effetti, non si è tenuto conto del calore che bisogna fornire al liquido perché il processo sia isoterma; per questo motivo i valori reali sono ben più elevati.

Il dispositivo di figura 35 (Terquem), permette, in linea di principio, la misura di τ . Una lamina liquida verticale viene formata tra due asticelle orizzontali, di lunghezza a e due fili AC e BD di lunghezza l ; i fili all'equilibrio assumono la forma di archi di circonferenza di raggio R . L'asticella CD , di peso mg , è soggetta alla forza di tensione superficiale $F = 2\tau a$ e alle componenti verticali $2T \cos \theta$ delle tensioni T dei fili. Questi sono soggetti a forze normali, dovute alla tensione superficiale, distribuite su ogni elemento ds , $dF_\tau = 2\tau ds$, ed essendo la tensione T legata al raggio di curvatura dalla relazione $T = 2\tau R$, paragrafo 8-VII, la condizione di equilibrio è data da

$$2\tau(a + 2R \cos \theta) = mg.$$

Osservando la figura si ha:

$$l = 2R\theta, \quad h = 2R \sin \theta, \quad \Rightarrow \quad \frac{\sin \theta}{\theta} = \frac{h}{l}.$$

Quest'ultima relazione, una volta misurata l'altezza h che assume la lamina, permette di ricavare graficamente θ . Ricavando R e sostituendo nell'equazione di equilibrio, si ottiene il valore di τ . Naturalmente, esperienze del genere implicano una lamina persistente costituita, per esempio, da acqua saponata.

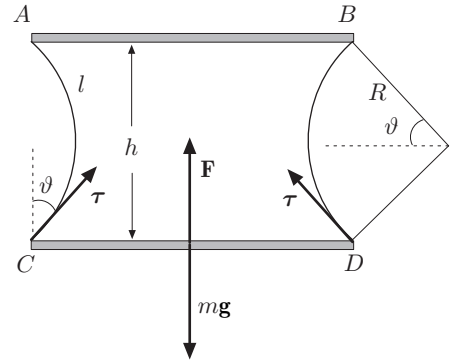


Fig. 16.35

10.1. Bolle di sapone

Una lamina liquida formata da una bolla di sapone, è in equilibrio sotto l'azione di forze causate dalla tensione superficiale, che tendono a contrarre la bolla e di forze di pressione che vengono esercitate sulle due superfici, interna ed esterna. Pertanto, per l'equilibrio, occorre che la pressione interna p sia maggiore di quella esterna, p_0 . Per determinare la differenza di pressione $p - p_0$, si può applicare il principio dei lavori virtuali. In uno spostamento virtuale il raggio della bolla passa da R a $R + \delta R$; la superficie totale, $S = 8\pi R^2$, aumenta di $\delta S = 16\pi R \delta R$ ed il

volume, $4\pi R^3/3$, aumenta di $\delta V = 4\pi R^2 \delta R$. Il lavoro della tensione superficiale è

$$\delta \mathcal{L}_1 = -\tau \delta S = -16\pi R \tau \delta R,$$

quello delle forze di pressione:

$$\delta \mathcal{L}_2 = (p - p_0) \delta V = 4\pi R^2 (p - p_0) \delta R.$$

Poiché dev'essere

$$\delta \mathcal{L}_1 + \delta \mathcal{L}_2 = 0,$$

segue:

$$p - p_0 = 4 \frac{\tau}{R}. \quad (3)$$

La differenza di pressione tra l'interno e l'esterno della bolla è inversamente proporzionale al raggio. Se, per esempio, due bolle di sapone di raggio differente vengono soffiate agli estremi del tubo di figura 36, chiuso il rubinetto, si osserva che la bolla più piccola viene assorbita da quella più grande.

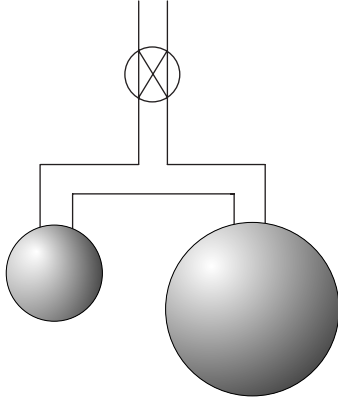


Fig. 16.36

10.2. Formula di Laplace

Nell'intorno di un punto P della superficie libera di un liquido, di tensione superficiale τ , si consideri un elemento d'area $MNPQ$, di lati dx e dy , figura 37. Siano AB e A_1B_1 due archi elementari dell'elemento, appartenenti alle circonferenze osculatrici principali in P , di raggi R_1 e R_2 . L'elemento $MNPQ$, di peso trascurabile, è in equilibrio sotto l'azione delle forze di pressione derivanti dalla differenza $p - p_0$, che viene esercitata sulle due facce e l'azione delle forze di contatto con gli elementi contigui. Le forze di contatto sul lato MN ammettono una risultante τdy , applicata nel punto di mezzo A , tangente in questo punto all'elemento di curva AB . La stessa risultante è applicata nel punto di mezzo B di PQ . Tali risultanti agiscono come se fossero applicate a un elemento di filo AB , soggetto a una tensione di modulo $dT = \tau dy$, pertanto, paragrafo 8-VII, ammettono una forza normale, volta verso il centro di curvatura, espressa da

$$dF_n dx = \frac{dT}{R_1} dx = \frac{\tau}{R_1} dy dx.$$

Analogo ragionamento vale per le tensioni agenti sull'elemento d'arco A_1B_1 ; si ha

$$dF_n dy = \frac{dT}{R_2} dy = \frac{\tau}{R_2} dx dy.$$

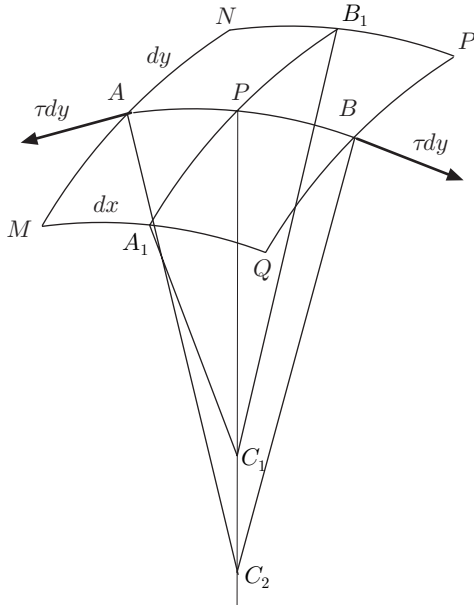


Fig. 16.37

Imponendo l'equilibrio di queste forze e delle forze di pressione, si ha

$$(p - p_0)dxdy = \tau \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) dxdy,$$

da cui si ottiene la formula di Laplace:

$$(p - p_0) = \tau \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right). \quad (32)$$

Se la superficie è sferica, $R_1 = R_2$, le curvature principali sono uguali, perciò $p - p_0 = 2\tau/R$. Si deve osservare che, nel caso di una bolla, questa differenza di pressione è quella che si ha tra il punto C dell'atmosfera interna alla bolla e il punto B della parte liquida, figura 38. La differenza di pressione tra i punti C ed A è doppia, $4\tau/R$, come si è trovato prima. In generale, la differenza di pressione tra le facce di una lamina sottile è

$$p - p_0 = 2\tau \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right).$$

Se le due facce sono alla stessa pressione, si ha

$$\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} = 0;$$

le curvature sono opposte. Ciò è verificato, ad esempio, in una lamina adagiata ai bordi di due circonferenze coassiali, che assume la forma di una superficie di rotazione attorno all'asse, figura 39.

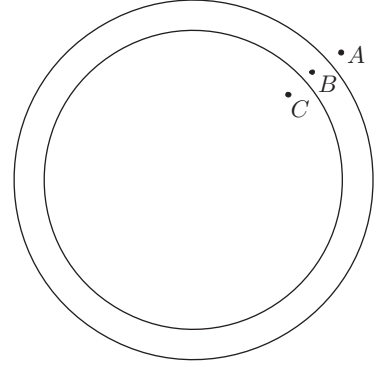


Fig. 16.38

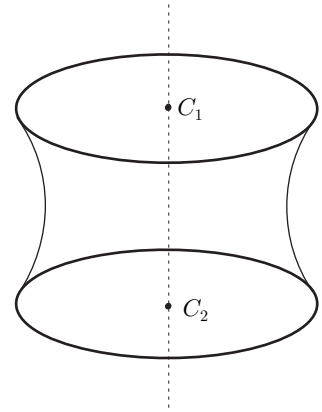


Fig. 16.39

10.3. Linee di contatto

Come s'è detto, una linea di contatto è costituita dai punti comuni a tre fasi; esaminiamo alcuni casi:

GOCCIA NON MISCIBILE SU LIQUIDO

La linea di contatto della goccia è comune alle fasi, aeriforme a), liquida b) e liquida c), figura 40. Su ogni elemento dl della linea sono applicate tre forze:

$$d\mathbf{F}_{ab} = \tau_{ab}dl, \quad d\mathbf{F}_{ac} = \tau_{ac}dl, \quad d\mathbf{F}_{bc} = \tau_{bc}dl.$$

Per l'equilibrio:

$$d\mathbf{F}_{ab} + d\mathbf{F}_{ac} + d\mathbf{F}_{bc} = 0,$$

dunque:

$$\tau_{ab} + \tau_{ac} + \tau_{bc} = 0.$$

Se il liquido è l'acqua, τ_{ac} è, di solito, molto elevata rispetto ai liquidi che su di essa possono galleggiare; grassi, idrocarburi ecc; la goccia tende ad allargarsi, fino a formare strati molto sottili, il cui spessore può raggiungere addirittura quello molecolare.

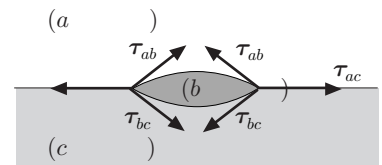


Fig. 16.40

LIQUIDO IN CONTATTO CON UNA PARETE SOLIDA

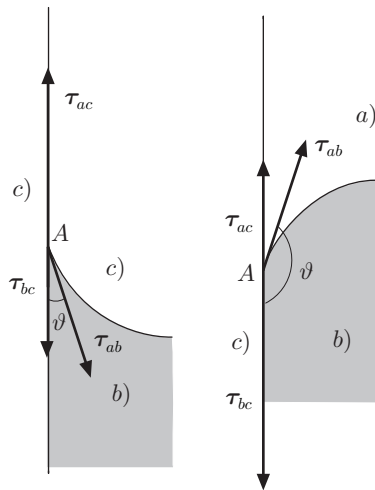


Fig. 16.41

La linea di contatto, come prima, è quella comune alle tre fasi, aeriforme a), liquida b) e solida c). Si consideri un liquido pesante a contatto con una parete verticale; la sezione verticale del liquido ha una delle due forme mostrate in figura 41, secondo che il liquido bagni o meno la parete. Questa configurazione può essere spiegata attribuendo una tensione superficiale al contatto solido aeriforme. Nel punto di contatto A , appartenente ad un elemento della linea di contatto, sono presenti tre tensioni superficiali, τ_{ab} , τ_{ac} e τ_{bc} . Per l'equilibrio la risultante

$$\mathbf{R} = \tau_{ab} + \tau_{ac} + \tau_{bc},$$

è normale alla parete. Infatti \mathbf{R} tenderebbe a staccare A dalla parete che, per il vincolo imposto, è escluso. Proiettando sulla parete, si ha

$$\tau_{ac} = \tau_{bc} + \tau_{ab} \cos \theta,$$

essendo θ l'angolo di raccordo tra la parete e il liquido. Il $\cos \theta$ risulta positivo o negativo se $\theta < \pi/2$ oppure $\theta > \pi/2$. Nel primo caso il liquido bagna la parete, nel secondo, come il mercurio, il liquido non la bagna; solo se $\theta = 0$ il liquido bagna perfettamente la parete.

SOLIDO A CONTATTO CON DUE LIQUIDI

In figura 41, l'aeriforme sia sostituito da un liquido a) non miscibile con b); poiché di solito è $\theta \neq \pi/2$, si verifica che a) bagna o meno la parete se $\theta > \pi/2$, oppure $\theta < \pi/2$; il contrario per il liquido b).

Il caso è molto interessante se, invece di considerare la parete, il solido, sotto forma di polvere, viene mescolato con una emulsione dei due liquidi. Le particelle solide che aderiscono a uno dei liquidi, cioè sono bagnate da questo, possono essere facilmente separate. È questo, in linea di principio, il metodo della *flottazione*, che serve a separare, in una prima fase, i minerali utili dagli altri prodotti dell'estrazione. Per esempio, certi solfuri metallici sono misti a composti di quarzo. Ridotto in polvere il minerale, si mescoli con una emulsione di acqua e olio. I composti di quarzo, "idrofili" sono imprigionati dall'acqua e affondano, mentre i solfuri, insieme all'olio, galleggiano.

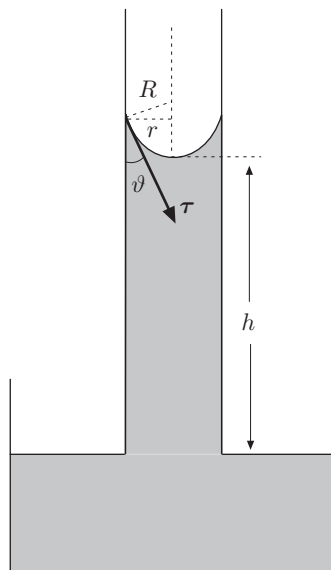


Fig. 16.42

|| 10.4. Capillarità

Immergendo un tubo di vetro capillare, di diametro interno ordinariamente inferiore al millimetro, in una vaschetta contenente un liquido che "bagna" il vetro, si osserva che il livello del liquido nel capillare è più alto di quello della vaschetta, figura 42. La tensione superficiale dà luogo ad una pressione che spinge

verso l'alto il liquido, finché non viene equilibrata dalla pressione idrostatica della colonna h di liquido. Data l'esiguità del raggio r del capillare, possiamo supporre che il menisco che si forma sia una calotta sferica ed assumere, con buona approssimazione, come altezza h della colonna liquida, la distanza tra il punto più basso di questo e la superficie libera nella vaschetta.

Detto r il raggio del capillare, θ l'angolo di raccordo con la parete, il raggio R del menisco risulta

$$R = \frac{r}{\cos \theta}.$$

Quindi, per la formula di Laplace, essendo $R_1 = R_2 = R$, si ha:

$$p = 2\tau \frac{\cos \theta}{r}.$$

Questa pressione equilibra la pressione idrostatica ρgh , pertanto:

$$\rho gh = 2\tau \frac{\cos \theta}{r}, \quad \Rightarrow \quad h = 2\tau \frac{\cos \theta}{\rho gr}. \quad (33)$$

L'altezza della colonna di un liquido, di tensione superficiale τ , che ascende in un capillare è inversamente proporzionale al suo raggio; (legge di Jurin).

Nella (33) si è trascurata la pressione che la colonna d'aria, di altezza h , esercita in aggiunta alla pressione dovuta alla tensione superficiale. Pertanto, detta ρ_A la densità dell'aria e ρ_L quella del liquido, la (33) andrebbe scritta:

$$\rho_L gh - \rho_A gh = 2\tau \frac{\cos \theta}{r}.$$

Ma il termine correttivo al primo membro è talmente piccolo che può essere quasi sempre trascurato. Analogo ragionamento vale per un liquido, come il mercurio, che non bagna la parete. In questo caso nel capillare si ha un abbassamento della colonna di liquido, figura 43; si ottiene una espressione identica alla (33). Da questa formula si può ricavare il valore di τ con una precisione migliore dell'1%.

Va osservato che la (33) è stata stabilita nell'ipotesi che h sia molto maggiore del diametro del tubo, in modo che la forma del menisco possa essere assimilata ad una calotta sferica. Se il diametro del tubo supera il centimetro, il menisco presenta una parte centrale quasi orizzontale, figura 44, di curvatura assai piccola, R molto grande, perciò la pressione $2\tau/R$ in questa parte è molto piccola, inferiore a 1/100 di mm di mercurio. Tuttavia, in corrispondenza alla parete è presente una depressione o un innalzamento del liquido. La determinazione analitica della forma di tali superfici, come quella di una grossa goccia soggetta alla gravità va effettuata applicando la formula di Laplace.

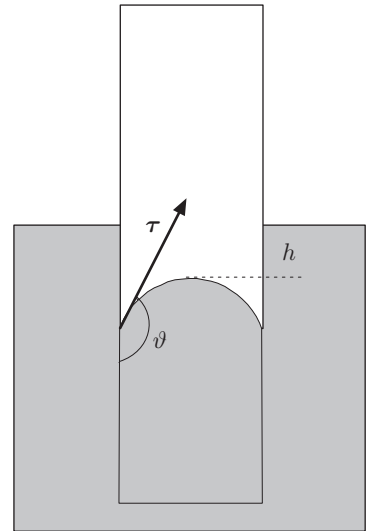


Fig. 16.43



Fig. 16.44

10.5. Contagocce

In un buon contagocce l'estremo è costituito da un tubo capillare a pareti spesse, in modo che le gocce si formino sul contorno ben preciso della sua sezione circolare AA' , figura 45. Premendo sul cappuccio di gomma, la goccia si ingrandisce assumendo le forme mostrate in figura, finché non cade, staccandosi in corrispondenza alla strozzatura BB' . La superficie della goccia in una configurazione di equilibrio, è di rotazione attorno all'asse del contagocce, asse z discendente del riferimento. In figura 46 è mostrata una sezione meridiana della goccia.

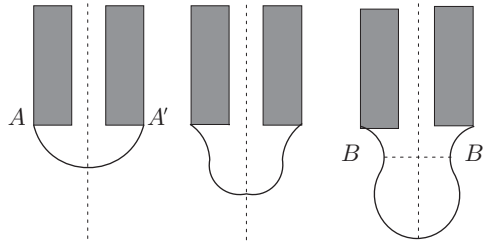


Fig. 16.45

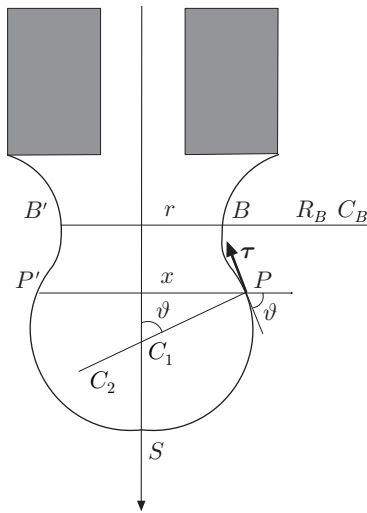


Fig. 16.46

Consideriamo la sezione trasversale PP' ; la massa di liquido al di sotto di questa sezione è in equilibrio sotto l'azione del suo peso e delle forze di contatto esercitate sulla sezione stessa; queste ultime comprendono le forze di tensione superficiale τdl , agenti sugli elementi della circonferenza di contorno, di raggio x , che ammettono una risultante verticale $2\pi\tau x \sin \theta$, e le forze di pressione $(p_0 + p)\pi x^2$, agenti sulla sezione. Il termine $p_0\pi x^2$, dovuto alla pressione atmosferica, è equilibrato dalle stesse forze agenti sulla superficie PSP' . Il termine $p\pi x^2$ si riferisce alla pressione interna. Tenendo presente la (32), per l'equilibrio della massa si ha:

$$mg = 2\pi\tau x \sin \theta - \pi x^2 \tau \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right).$$

Poiché la superficie della goccia è di rotazione attorno all'asse z , dalla figura si osserva che uno dei centri principali di curvatura, che chiamiamo C_1 , si trova su tale asse e il corrispondente raggio di curvatura è $R_1 = x / \sin \theta$; perciò la precedente si scrive:

$$mg = 2\pi\tau x \sin \theta - \pi x^2 \tau \left(\frac{\sin \theta}{x} + \frac{1}{R_2} \right) = \pi\tau x \left(\sin \theta - \frac{x}{R_2} \right).$$

In particolare, in corrispondenza alla strozzatura, si ha

$$mg = \pi\tau r \left(1 + \frac{r}{R_B} \right), \quad (34)$$

dove r è il raggio della sezione ed R_B il raggio di curvatura in B , negativo, perché ivi la superficie presenta una concavità. La (34)

dà la massa della goccia che cade; il termine r/R_B dipende dalla natura del liquido, tuttavia poiché R_B è sempre molto grande rispetto ad r , è trascurabile; pertanto si può scrivere

$$mg \approx \pi\tau r.$$

Essendo inoltre r circa uguale al raggio esterno a del capillare, si ottiene la formula approssimata:

$$mg = \pi\tau a. \quad (35)$$

Il peso della goccia che cade è proporzionale alla tensione superficiale e al raggio esterno del capillare (legge di Tate).

La tensione superficiale di un liquido, rispetto ad un altro di riferimento, può essere rapidamente determinata contando il numero di gocce N_1 e N_2 , prodotte dallo stesso volume V dei due liquidi. Infatti, poichè $m_1 = V/N_1$ e $m_2 = V/N_2$; sostituendo nella (35) si ottiene

$$\frac{N_1}{N_2} = \frac{\tau_1}{\tau_2}.$$

17. Dinamica dei fluidi

1. Introduzione

L'atto di moto di un sistema continuo può essere studiato assegnando, in ogni istante, la velocità posseduta da una generica particella del sistema, intendendo per particella un elemento che comprenda un numero di molecole sufficientemente grande, in modo che la risultante delle velocità "termiche" sia nulla, ma tale da potere ritenere che le forze agenti siano applicate in un unico punto. Per individuare una tale particella, si può assumere la posizione P_0 che essa occupa all'istante t_0 ; allora l'atto di moto del sistema, note le posizioni iniziali \mathbf{r}_0 di ogni particella, è dato dal vettore velocità, funzione di \mathbf{r}_0 e del tempo t :

$$\mathbf{v}(\mathbf{r}_0, t).$$

Il punto di vista assunto è forse il più spontaneo e viene chiamato *punto di vista lagrangiano*. Peraltro, trattandosi di un sistema a molte particelle, è praticamente impossibile formulare e risolvere il problema in questi termini. Tuttavia, l'atto di moto di un sistema continuo può essere assegnato, ponendosi da un altro punto di vista: il *punto di vista euleriano*. Esso consiste nell'assegnare, in ogni istante t , la velocità \mathbf{v} che possiede una particella imprecisata, la quale, in quell'istante, transita per un determinato punto P del campo del moto, individuato dal vettore posizione \mathbf{r} , figura 1. Perciò l'atto di moto è dato dal vettore velocità:

$$\mathbf{v}(\mathbf{r}, t).$$

Il punto di vista lagrangiano implica la descrizione "storica" della velocità di ogni particella; viceversa il punto di vista euleriano descrive, in ogni istante, la *distribuzione delle velocità* nei punti del campo di movimento. L'equazione precedente fornisce dunque la velocità, a un certo istante, della particella che transita per P e definisce così l'atto di moto all'istante considerato. Se, in particolare, l'atto di moto non dipende dal tempo, cioè la velocità di ogni particella che transita per P è la stessa, il moto si dice *stazionario*. Nel seguito adotteremo sempre il punto di vista euleriano.

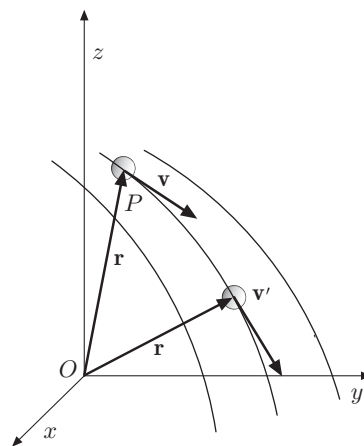


Fig. 17.1

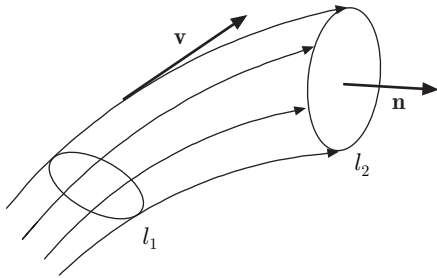


Fig. 17.2

In conformità con le proprietà dei campi vettoriali, descritte nel paragrafo 7-IV, nel campo euleriano delle velocità, definiamo *linea di flusso* una linea che, in ogni suo punto e ad ogni istante, ha per tangente il vettore velocità della particella di fluido che transita in tale punto. La linea di flusso si riferisce a un certo istante e può cambiare col tempo. Se il moto è stazionario le linee di flusso

sono chiamate *linee di corrente* o, se non sussistono ambiguità, ancora linee di flusso. La loro configurazione evidentemente non muta nel tempo. L'insieme delle linee di flusso passanti per i punti di una linea chiusa, determina un *tubo di flusso* il quale, nel caso di moto stazionario, è fermo ed assume lo stesso ruolo di un tubo reale all'interno del quale scorre il fluido, figura 2.

Prenderemo in considerazione essenzialmente fluidi privi di viscosità, il cui effetto complica notevolmente il formalismo matematico e sarà esaminato in alcuni casi specifici. In particolare, per quanto riguarda i gas, assumendo che il moto si svolga in condizioni isoterme o adiabatiche e sia sufficientemente lento, occorre tener conto della legge di compressibilità, facilmente ricavabile dall'equazione di stato. Per i liquidi, essendo molto piccolo il coefficiente di compressibilità, con buona approssimazione, si assumerà costante la densità.

2. Equazione di continuità

Nella Meccanica classica la massa non varia durante il moto; se il sistema è isolato l'invariabilità della massa è in accordo con l'intuizione; se non è isolato la massa può variare, come si è descritto in alcuni problemi del capitolo IX. In questi casi, considerato un sistema più esteso, si verifica solo un trasferimento di massa da una parte all'altra del sistema complessivo; la conservazione della massa è sempre verificata e costituisce una legge fondamentale della Meccanica classica.

Nel caso di un sistema continuo, detta ρ la densità, la massa del sistema sarà

$$m = \int_V \rho dV,$$

e l'invariabilità della massa, principio di conservazione della massa, si traduce nell'equazione

$$\frac{dm}{dt} = 0.$$

Da questa equazione discende che detto V il volume occupato ad un certo istante da una porzione di fluido, sempre formato dagli stessi elementi materiali, vale la relazione:

$$\frac{d}{dt} \int_V \rho dV = 0.$$

Durante il moto, in generale possono variare sia V che ρ , ma non varia l'integrale precedente, che esprime l'invariabilità della massa della porzione di fluido. Ne segue che la variazione di densità è legata alla variazione di volume del corpo.

Consideriamo, nell'intorno di un punto del fluido, un elemento di volume dV ; si ha

$$\frac{d}{dt}(\rho dV) = 0, \quad \Rightarrow \quad \frac{d\rho}{dt}dV + \rho \frac{d}{dt}(dV), \quad (1)$$

in cui il secondo termine rappresenta la velocità di deformazione dell'elemento considerato. Ma la variazione relativa di volume dell'elemento, equazione (34)-XV, è uguale alla somma degli elementi diagonali del tensore delle deformazioni,

$$\epsilon_{xx} + \epsilon_{yy} + \epsilon_{zz} = \frac{\partial s_x}{\partial x} + \frac{\partial s_y}{\partial y} + \frac{\partial s_z}{\partial z}$$

dunque la velocità di deformazione dell'elemento considerato è data da

$$\frac{d}{dt}(dV) = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial s_x}{\partial x} + \frac{\partial s_y}{\partial y} + \frac{\partial s_z}{\partial z} \right) dV = \left(\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} \right) dV.$$

Pertanto la (1) diventa:

$$\frac{d\rho}{dt}dV + \rho \left(\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} \right) dV = 0,$$

ovvero

$$\frac{d\rho}{dt} + \rho \nabla \cdot \mathbf{v} = 0. \quad (2)$$

Nella precedente la derivata di ρ rispetto al tempo è relativa allo stesso elemento materiale che viene seguito nei vari istanti. Ciò significa che, ponendosi dal punto di vista lagrangiano e ritenendo ρ funzione del vettore \mathbf{r}_0 e del tempo, la derivata di ρ che compare nella (2), è semplicemente la derivata rispetto a t , mantenendo fisso \mathbf{r}_0 . Se invece ci si pone dal punto di vista euleriano e si considera la densità come funzione della posizione \mathbf{r} e del tempo t , la densità dipende dal tempo sia direttamente che indirettamente, attraverso le coordinate cartesiane x, y, z , che variano col tempo nel moto dell'elemento materiale al quale si riferiscono. Perciò la derivata della densità rispetto al tempo, equazione (2), è:

$$\frac{d\rho}{dt} = \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho}{\partial x}v_x + \frac{\partial \rho}{\partial y}v_y + \frac{\partial \rho}{\partial z}v_z.$$

Sostituendo nella (2) si ottiene:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho}{\partial x}v_x + \frac{\partial \rho}{\partial y}v_y + \frac{\partial \rho}{\partial z}v_z + \rho \left(\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} \right) = 0,$$

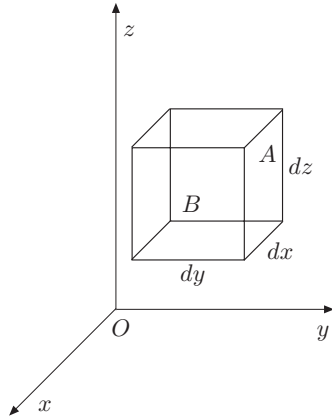


Fig. 17.3

che in termini più concisi si scrive†:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) = 0, \quad \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) = -\frac{\partial \rho}{\partial t}, \quad (3)$$

più adatta a rappresentare il principio di conservazione della massa, dal punto di vista euleriano. La (3) costituisce l'equazione di continuità in termini *locali* ed esprime il principio di conservazione della massa.

L'equazione di continuità, dal punto di vista euleriano, può essere ricavata con considerazioni più intuitive, attraverso il bilancio di materia che attraversa un elemento di volume del fluido. Si consideri, figura 3, un cubo elementare $dV = dx dy dz$ e siano v_x, v_y, v_z, ρ le componenti della velocità e la densità del fluido, funzioni di x, y, z e del tempo t . Il volume di fluido che entra attraverso la faccia A , ortogonale all'asse x , nel tempo dt , è $v_x(A) dy dz dt$, quindi la sua massa è $\rho(A) v_x(A) dy dz dt$. Analogamente, la massa elementare che esce attraverso la faccia opposta B , è data da $\rho(B) v_x(B) dy dz dt$. Limitandosi a variazioni del primo ordine si ha

$$\rho(B) = \rho(A) + \frac{\partial \rho}{\partial x} dx, \quad v_x(B) = v_x(A) + \frac{\partial v_x}{\partial x} dx;$$

quindi

$$\rho(B) v_x(B) = \left(\rho(A) + \frac{\partial \rho}{\partial x} dx \right) \left(v_x(A) + \frac{\partial v_x}{\partial x} dx \right).$$

Trascurando gli infinitesimi del secondo ordine, si ha:

$$\begin{aligned} \rho(B) v_x(B) &= \rho(A) v_x(A) + \left(\rho(A) \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_x(A) \frac{\partial \rho}{\partial x} \right) dx \\ &= \rho(A) v_x(A) + \frac{\partial(\rho v_x)}{\partial x} dx. \end{aligned}$$

Pertanto la massa netta che esce dal cubo elementare risulta

$$\rho(B) v_x(B) dy dz dt - \rho(A) v_x(A) dy dz dt = \frac{\partial(\rho v_x)}{\partial x} dx dy dz dt.$$

Considerando le altre due coppie di facce, la massa totale dm che esce dal cubo elementare risulta:

$$dm = \left(\frac{\partial(\rho v_x)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v_y)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho v_z)}{\partial z} \right) dx dy dz dt.$$

Ma la massa elementare contenuta nel cubo, all'istante t è $\rho dx dy dz$, quindi la sua diminuzione nell'intervallo dt è

$$dm = -\frac{\partial \rho}{\partial t} dt dx dy dz.$$

†Si osservi che la divergenza del prodotto di uno scalare per un vettore è data da $\nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) = \nabla \rho \cdot \mathbf{v} + \rho (\nabla \cdot \mathbf{v})$.

Uguagliando le due espressioni, si ottiene:

$$\frac{\partial(\rho v_x)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v_y)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho v_z)}{\partial z} = -\frac{\partial \rho}{\partial t},$$

ossia:

$$\nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) = -\frac{\partial \rho}{\partial t}.$$

Se il moto è stazionario \mathbf{v} e ρ variano col punto, ma nello stesso posto non variano nel tempo, $\partial \rho / \partial t = 0$, quindi l'equazione di continuità diventa:

$$\nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) = 0.$$

Questa equazione indica che il flusso entrante nell'elemento è uguale al flusso uscente. Infatti, per il teorema della divergenza, paragrafo 7-VI, in termini finiti si ha

$$\int_V \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) dV = \int_S \rho \mathbf{v} \cdot \hat{\mathbf{n}} dS = 0,$$

dove S è la superficie chiusa che racchiude una porzione di fluido di volume V ed $\hat{\mathbf{n}}$ la normale all'elemento di superficie dS , orientata verso l'esterno.

Consideriamo un tubo di flusso di un fluido in moto stazionario. Una porzione di fluido sia delimitata da due sezioni normali S_1 , S_2 e dalla parete laterale del tubo di flusso. Supponendo che tali sezioni siano sufficientemente piccole, in modo che le velocità v_1 e v_2 possano essere ritenute uniformi, si ha

$$\rho_1 v_1 S_1 - \rho_2 v_2 S_2 = 0, \quad \rho_1 v_1 S_1 = \rho_2 v_2 S_2.$$

Il flusso attraverso la superficie laterale è nullo poiché la velocità è ortogonale alla normale orientata. Questa relazione esprime ancora l'equazione di continuità relativamente al caso particolare esaminato. Se inoltre il fluido è incompressibile, $\rho = \text{cost}$, si ha

$$v_1 S_1 = v_2 S_2.$$

Si definisce portata P il volume di fluido che attraversa la sezione S nell'unità di tempo:

$$P = Sv; \quad (4)$$

essa si misura in m^3/s . Nel moto stazionario la portata è costante.

3. Distribuzione delle velocità

In un sistema continuo, come un mezzo elastico o un fluido, paragrafo 4-XV, lo spostamento di ogni particella è funzione delle sue coordinate. Consideriamo un elemento di fluido nell'intorno di un punto P_0 ; lo spostamento elementare di una particella in questo intorno, limitandosi a variazioni del primo ordine, è dato

dal vettore infinitesimo

$$\mathbf{s} = \mathbf{s}_0 + d\mathbf{s},$$

dove \mathbf{s}_0 è lo spostamento elementare di P_0 . Ricordando le conclusioni conseguite al paragrafo citato, tale spostamento si esprime nel modo seguente:

$$\mathbf{s} = \mathbf{s}_0 + \frac{1}{2}\nabla \times \mathbf{s} \times \mathbf{r} + \mathcal{T}_S \mathbf{r}, \quad (5)$$

dove \mathbf{r} è il vettore infinitesimo che individua la posizione della particella rispetto a P_0 e \mathcal{T}_S il tensore delle deformazioni. In altri termini lo spostamento infinitesimo è costituito da un termine di traslazione, un termine di rotazione e un termine di deformazione dell'elemento di fluido considerato.

Dividendo per l'intervallo di tempo dt la (5), operazione legittima poiché gli spostamenti considerati sono infinitesimi, si ottiene la velocità della particella:

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_0 + \frac{1}{2}\nabla \times \mathbf{v} \times \mathbf{r} + \mathcal{T} \mathbf{r}, \quad (6)$$

dove \mathcal{T} è il tensore che si ottiene dividendo ogni termine di \mathcal{T}_S per dt ; ossia:

$$\mathcal{T} = \begin{pmatrix} \frac{\partial v_x}{\partial x} & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_x}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial x} \right) & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_x}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial x} \right) \\ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_y}{\partial x} + \frac{\partial v_x}{\partial y} \right) & \frac{\partial v_y}{\partial y} & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_y}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial y} \right) \\ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_z}{\partial x} + \frac{\partial v_x}{\partial z} \right) & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_z}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial z} \right) & \frac{\partial v_z}{\partial z} \end{pmatrix},$$

simile a quello delle deformazioni.

In analogia a quest'ultimo, i suoi termini rappresentano le velocità di deformazione del fluido, lineari e di scorrimento. Infatti, consideriamo una qualsiasi deformazione: per esempio

$$\epsilon_{xx} = \frac{\partial s_x}{\partial x}, \quad \dot{\epsilon}_{xx} = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial s_x}{\partial x} \right) = \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial s_x}{\partial t} \right) = \frac{\partial v_x}{\partial x}.$$

La somma dei termini diagonali del tensore \mathcal{T} ,

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = \nabla \cdot \mathbf{v} = \chi, \quad (7)$$

rappresenta la velocità di dilatazione del fluido. I termini non diagonali rappresentano le velocità delle deformazioni di scorrimento.

Ricordando che

$$\frac{1}{2}\nabla \times \mathbf{v} = \boldsymbol{\omega},$$

la (6) si scrive:

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_0 + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r} + \mathcal{T} \mathbf{r}, \quad (8)$$

dove il primo termine è la velocità comune a tutti i punti dell'elemento, il secondo è la velocità di rotazione dell'elemento attorno ad un asse passante per P_0 e rappresenta un moto vorticoso, il terzo, come s'è detto, rappresenta la velocità di deformazione.

Se il moto è irrotazionale, assenza di vortici, $\nabla \times \mathbf{v} = 0$, il vettore velocità deriva da una funzione scalare $\varphi(x, y, z)$ chiamato *potenziale della velocità*, tale che

$$v_x = \frac{\partial \varphi}{\partial x}, \quad v_y = \frac{\partial \varphi}{\partial y}, \quad v_z = \frac{\partial \varphi}{\partial z}, \quad (9)$$

ovvero:

$$\mathbf{v} = \nabla \varphi.$$

La divergenza di \mathbf{v} diventa:

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = \nabla \cdot (\nabla \varphi) = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = \nabla^2 \varphi.$$

Se il fluido è incompressibile, $\rho = \text{cost}$, si ha $\nabla \cdot \mathbf{v} = 0$. Pertanto si ottiene *l'equazione di Laplace*:

$$\nabla^2 \varphi = 0. \quad (10)$$

Questa equazione assume il ruolo di equazione di continuità. Se dunque sono verificate contemporaneamente le condizioni

$$\nabla \times \mathbf{v} = 0, \quad \nabla \cdot \mathbf{v} = 0,$$

il moto è irrotazionale e solenoidale e il campo delle velocità si dice *armonico*.

Complementi ed esempi

1. Campi vettoriali armonici.

Come si è detto prima, il moto si svolge senza vortici e il flusso entrante attraverso una qualsiasi sezione di un generico tubo di flusso, è uguale al flusso uscente. Nel seguito avremo occasione di considerare situazioni simili. L'analogia idrodinamica è molto utile in altri argomenti di Fisica, in particolare nell'Elettromagnetismo.

Tra le funzioni armoniche ha particolare interesse la funzione $\varphi = 1/r$. Tale funzione è detta *funzione armonica elementare*, e caratterizza, come s'è visto, l'energia potenziale gravitazionale. La verifica della sua armonicità è immediata:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(\frac{1}{r} \right) &= \frac{1}{r^5} (2x^2 - y^2 - z^2), & \frac{\partial^2}{\partial y^2} \left(\frac{1}{r} \right) &= \frac{1}{r^5} (2y^2 - x^2 - z^2), \\ \frac{\partial^2}{\partial z^2} \left(\frac{1}{r} \right) &= \frac{1}{r^5} (2z^2 - x^2 - y^2). \end{aligned}$$

Sommando queste relazioni si ottiene

$$\nabla^2 \left(\frac{1}{r} \right) = 0.$$

2. Moto irrotazionale.

Poiché $\nabla \times \mathbf{v} = 0$, le componenti della velocità sono date dalle (9). Le superfici equipotenziali sono ortogonali alle linee di flusso. Per una linea qualsiasi congiungente due punti P_1, P_2 , l'integrale

$$\int_{P_1}^{P_2} \mathbf{v} \cdot d\mathbf{l} = \varphi_2 - \varphi_1$$

è indipendente dalla linea. Per una linea chiusa,

$$\oint \mathbf{v} \cdot d\mathbf{l} = 0;$$

la circuitazione è nulla. In generale le superfici equipotenziali $\varphi(x, y, z) = \text{cost}$ sono superfici isobariche. Per esempio, in un condotto in cui scorre un fluido ideale in regime stazionario, il campo delle velocità è costante e parallelo all'asse del condotto; le superfici equipotenziali sono ortogonali a quest'asse. Se il condotto è orizzontale le superfici $\varphi = \text{cost}$ sono piani verticali.

Supponiamo che il fluido ruoti con moto stazionario attorno a un cilindro C , il cui asse coincide con l'asse z di una terna cartesiana, figura 4. Le linee di flusso, in ogni piano parallelo al piano $x-y$, siano cerchi concentrici e la velocità, tangente in ogni istante a dette linee, sia inversamente proporzionale alla distanza r dall'asse secondo la relazione $v = k/r$, con k costante. Si ha:

$$v_x = -\frac{k}{r} \sin(\theta), \quad v_y = \frac{k}{r} \cos(\theta), \quad v_z = 0,$$

ovvero:

$$v_x = -\frac{ky}{x^2 + y^2}, \quad v_y = \frac{kx}{x^2 + y^2}, \quad v_z = 0.$$

Si verifica immediatamente che il moto è irrotazionale. Tuttavia la circuitazione di \mathbf{v} è nulla,

$$\oint_{l_1} \mathbf{v} \cdot d\mathbf{l} = 0,$$

solo se calcolata lungo una linea chiusa l_1 , non concatenata col cilindro, figura 5. Infatti:

$$\mathbf{v} \cdot d\mathbf{l} = v AB = \frac{k}{r} r d\theta = k d\theta,$$

dove AB è la proiezione infinitesima di $d\mathbf{l}$ secondo \mathbf{v} e $d\theta$ l'angolo elementare sotteso da AB . Poiché ad ogni elemento di linea AD corrisponde un elemento $A'D'$ che dà un contributo esattamente opposto, l'integrale considerato è nullo. Analogamente si verifica che, fissati due punti P_1, P_2 su l_1 , l'integrale lungo l'arco di linea compreso tra i due punti,

$$\int_{P_1}^{P_2} k d\theta = k(\theta_2 - \theta_1),$$

dipende solo dagli estremi. Il potenziale delle velocità è dunque

$$\varphi = k\theta + C,$$

dove C è una costante. Supponendo che φ si annulli per $\theta = 0$, le superfici equipotenziali sono tutti i semipiani uscenti dall'asse z , su ciascuno dei quali θ è costante, ortogonali appunto alle linee di flusso. Osservando che

$$\theta = \sin^{-1} \frac{y}{r} = \sin^{-1} \left(\frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \right),$$

per mezzo delle (9), si ottengono immediatamente le componenti della velocità.

Se la linea l_2 lungo la quale si calcola la circuitazione è concatenata col cilindro, si ha

$$\oint_{l_2} \mathbf{v} \cdot d\mathbf{l} = k \oint_{l_2} d\theta = 2k\pi,$$

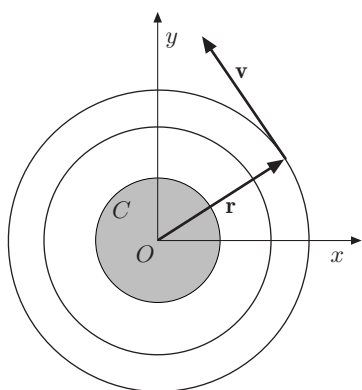


Fig. 17.4

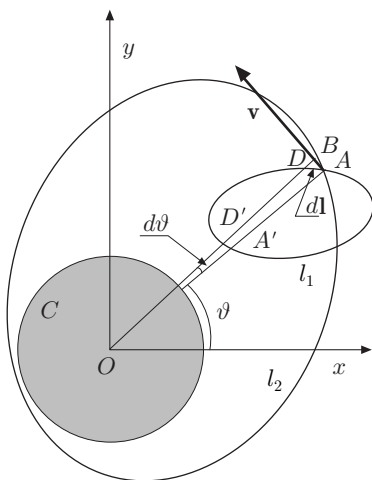


Fig. 17.5

e se è concatenata n volte:

$$\oint_{l_2} \mathbf{v} \cdot d\mathbf{l} = k \oint_{l_2} d\theta = 2nk\pi.$$

Il potenziale si dice *polidromo*, e gli infiniti valori che può assumere sono

$$\varphi = k\theta + 2nk\pi.$$

In questo caso il potenziale scalare φ non è atto a determinare univocamente la velocità. Si dimostra che l'introduzione di una funzione vettoriale, potenziale vettore, elimina questo inconveniente.

È rilevante l'analogia con la circuitazione del campo di induzione magnetica, prodotto da un filo rettilineo indefinito percorso da corrente.

III 3. Vortici.

L'esperienza mostra che i vortici, una volta formati, tendono a conservarsi e, in un fluido ideale, si manterrebbero indefinitamente se non intervenissero gli attriti. Solo nei fluidi poco viscosi, come l'aria o l'acqua, alcune esperienze mostrano quale forte individualità abbiano le parti di fluido in moto vorticoso, $\nabla \times \mathbf{v} \neq 0$.

I vortici che si prestano bene all'esperienza sono quelli anulari, cioè quelli nei quali l'asse del vortice si chiude su se stesso, figura 6. Molti fumatori sanno produrre questi vortici col fumo emesso bruscamente ed in piccole quantità dalla bocca. Un recipiente pieno di fumo, con un foro di qualche centimetro di diametro, percorso sulla parete opposta al foro, emette anelli di fumo ben distinti. Questi anelli, in aria calma, si propagano per molti metri prima di distruggersi; si osserva inoltre che urtandosi tra loro, due anelli rimbalzano quasi elasticamente. Una esperienza molto istruttiva consiste nel far cadere in un vaso pieno d'acqua delle gocce di inchiostro, da un'altezza di circa 4 centimetri dalla superficie dell'acqua. Ogni goccia cadendo dà luogo ad un perfetto vortice che si propaga fino ad una profondità di circa 20 centimetri senza che si distrugga.

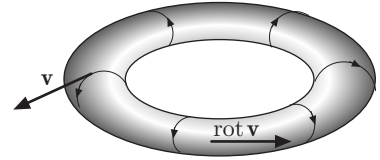


Fig. 17.6

III 4. Dinamica dei fluidi ideali

Si è detto che, dal punto di vista euleriano, la velocità di una particella di fluido è funzione del punto e del tempo, $\mathbf{v} = \mathbf{v}(x, y, z, t)$. Per determinare l'accelerazione basta derivare la velocità rispetto al tempo, osservando che \mathbf{v} dipende dal tempo sia esplicitamente che implicitamente, attraverso le coordinate della particella. Dunque si avrà:

$$\mathbf{a} = \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial x} \dot{x} + \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial y} \dot{y} + \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial z} \dot{z} + \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t}.$$

Essendo

$$\mathbf{v} = v_x \mathbf{i} + v_y \mathbf{j} + v_z \mathbf{k},$$

si ottiene

$$\begin{aligned} \mathbf{a} = & \left(\frac{\partial v_x}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial v_y}{\partial x} \mathbf{j} + \frac{\partial v_z}{\partial x} \mathbf{k} \right) \dot{x} + \left(\frac{\partial v_x}{\partial y} \mathbf{i} + \frac{\partial v_y}{\partial y} \mathbf{j} + \frac{\partial v_z}{\partial y} \mathbf{k} \right) \dot{y} \\ & + \left(\frac{\partial v_x}{\partial z} \mathbf{i} + \frac{\partial v_y}{\partial z} \mathbf{j} + \frac{\partial v_z}{\partial z} \mathbf{k} \right) \dot{z} + \frac{\partial v_x}{\partial t} \mathbf{i} + \frac{\partial v_y}{\partial t} \mathbf{j} + \frac{\partial v_z}{\partial t} \mathbf{k}. \end{aligned} \quad (11)$$

La componente dell'accelerazione secondo x risulta:

$$\frac{dv_x}{dt} = v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_x}{\partial z} + \frac{\partial v_x}{\partial t}; \quad (12)$$

le altre hanno espressioni simili.

La (11) rappresenta l'accelerazione *totale o materiale*; i primi tre termini rappresentano l'*accelerazione locale*. L'accelerazione locale esprime la variazione di velocità, nell'unità di tempo, in un determinato punto del fluido. Per chiarire il significato dell'accelerazione locale, basta pensare al flusso di un fluido in un condotto orizzontale, di sezione variabile, in regime stazionario, $\partial v_x / \partial t = 0$. Siccome la portata, equazione (4), è costante, la velocità del fluido diminuisce all'aumentare della sezione e viceversa; si capisce come questo termine dell'accelerazione tenga conto di questa circostanza. La (12) può essere scritta:

$$\begin{aligned} \frac{dv_x}{dt} = & \frac{\partial v_x}{\partial t} \\ & + \left(v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_y}{\partial x} + v_z \frac{\partial v_z}{\partial x} \right) \\ & + \left[v_z \left(\frac{\partial v_x}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial x} \right) - v_y \left(\frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y} \right) \right]. \end{aligned}$$

La prima parentesi del secondo membro è la metà della derivata, rispetto a x , del quadrato del modulo della velocità,

$$v^2 = v_x^2 + v_y^2 + v_z^2,$$

la parentesi quadra è la componente secondo x del prodotto vettoriale $(\nabla \times \mathbf{v}) \times \mathbf{v}$. Ad analoga conclusione si perviene per le altre componenti; in definitiva l'accelerazione è data dall'espressione vettoriale

$$\mathbf{a} = \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \frac{1}{2} \nabla(v^2) + (\nabla \times \mathbf{v}) \times \mathbf{v}. \quad (13)$$

Siamo ora in grado di scrivere l'equazione della dinamica del fluido ideale.

Tenuto conto che sul fluido agiscono forze di volume e di pressione e che all'equilibrio, $\mathbf{v} = 0$,

$$\mathbf{F} = \nabla p,$$

dove \mathbf{F} è la forza per unità di volume e p la pressione statica, in genere diversa da quella dinamica, indicando ancora con \mathbf{F} la forza per unità di massa, l'equazione della dinamica dei fluidi ideali si scrive:

$$\mathbf{F} - \frac{1}{\rho} \nabla p = \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \frac{1}{2} \nabla(v^2) + (\nabla \times \mathbf{v}) \times \mathbf{v}. \quad (14)$$

Detto X, Y, Z le componenti di \mathbf{F} e tenuto conto della (12), la (14)

dà luogo alle seguenti equazioni

$$\begin{aligned}\frac{\partial v_x}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_x}{\partial z} &= X - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} \\ \frac{\partial v_y}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_y}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_y}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_y}{\partial z} &= Y - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} \\ \frac{\partial v_z}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_z}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_z}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_z}{\partial z} &= Z - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z}.\end{aligned}\quad (15)$$

Queste relazioni costituiscono le *equazioni di Eulero*. Esse, insieme all'equazione di continuità, legano tra loro cinque grandezze v_x, v_y, v_z, p e ρ . Per ricavare tali grandezze, occorre ancora una relazione. Poiché, in genere, il moto avviene in condizioni isoterme o adiabatiche, la densità del fluido è funzione della sola pressione; perciò la relazione complementare che va presa in considerazione è la legge di compressibilità

$$\rho = f(p).$$

Per esempio, nel caso di un flusso isoterma e sufficientemente lento di un gas ideale, dalla legge di Boyle si ha

$$\frac{p}{\rho} = \frac{p_0}{\rho_0} = \text{cost.}$$

Se invece il flusso è adiabatico

$$\frac{p}{\rho^\gamma} = \text{cost.},$$

dove γ è il rapporto tra i calori molari a pressione ed a volume costante.

Va notato che le equazioni di Eulero non sono lineari, perché contengono i termini $\nabla(v^2)$ e $\nabla \times \mathbf{v}$. L'integrazione è difficoltosa in quanto l'integrale generale non si può ottenere come combinazione lineare di integrali particolari, tuttavia nel moto stazionario del fluido ideale, l'integrale richiesto è immediato.

Prendiamo in esame un fluido ideale in moto stazionario; \mathbf{v} , p e ρ variano, in generale, col punto, ma nello stesso posto non variano col tempo; sarà dunque:

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = 0, \quad \frac{\partial p}{\partial t} = 0, \quad \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) = -\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0.$$

Supponendo che la forza di volume sia conservativa, $\mathbf{F} = -\nabla U$, dalla (14) si ottiene:

$$\nabla \left(\frac{1}{2} v^2 + U + \frac{p}{\rho} \right) + (\nabla \times \mathbf{v}) \times \mathbf{v} = 0.$$

Consideriamo una linea di flusso; se $d\mathbf{l}$ è un elemento di tale linea, moltiplicando la precedente scalarmente per $d\mathbf{l}$, si ha

$$\nabla \left(\frac{1}{2} v^2 + U + \frac{p}{\rho} \right) \cdot d\mathbf{l} = 0,$$

poiché $(\nabla \times \mathbf{v}) \times \mathbf{v} \cdot d\mathbf{l} = 0$. Ma il primo membro non è altro che la proiezione del gradiente del trinomio in parentesi, lungo la linea di corrente considerata. Essendo nulla tale proiezione, il trinomio è costante lungo detta linea:

$$\frac{1}{2}v^2 + U + \frac{p}{\rho} = \text{cost.} \quad (15)$$

La relazione precedente esprime il *teorema di Bernoulli*:

Nel moto stazionario di un fluido ideale è costante, lungo una linea di corrente, la somma dell'energia cinetica per unità di massa, dell'energia potenziale per unità di massa e del contenuto energetico per unità di massa è costante.

In particolare, per un liquido soggetto alla gravità, essendo l'energia potenziale per unità di massa $U = gz$ e $\rho = \text{cost}$, la (15) diventa:

$$\frac{1}{2}v^2 + gz + \frac{p}{\rho} = \text{cost}, \quad (16)$$

oppure, dividendo per g ,

$$\frac{v^2}{2g} + z + \frac{p}{\rho g} = \text{cost.} \quad (17)$$

Ogni termine di questa equazione, dimensionalmente è una lunghezza: il primo si chiama altezza di arresto, o di velocità o cinetica; essa è infatti l'altezza alla quale il liquido salirebbe se lanciato verso l'alto con velocità v ; il secondo altezza geometrica; il terzo altezza piezometrica.

La (16) può essere espressa in termini di pressioni; infatti

$$\frac{1}{2}\rho v^2 + \rho gz + p = \text{cost.} \quad (18)$$

Queste pressioni sono dette pressioni piezometriche dinamiche o semplicemente pressioni dinamiche.

4.1. Moti irrotazionali

Una soluzione molto importante della equazione fondamentale della dinamica dei fluidi ideali è relativa ai moti irrotazionali, $\nabla \times \mathbf{v} = 0$. Esiste, come si è detto, uno scalare φ , potenziale della velocità tale che, a meno di una costante, risulta

$$\mathbf{v} = \nabla \varphi.$$

Allora la (14) diventa

$$\mathbf{F} - \frac{1}{\rho} \nabla p = \nabla \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{1}{2} \nabla (v^2),$$

ossia:

$$\mathbf{F} = \nabla \left(\frac{p}{\rho} + \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{1}{2} v^2 \right).$$

Dunque \mathbf{F} è conservativa e pertanto $\mathbf{F} = -\nabla U$. L'equazione precedente diventa

$$\nabla \left(U + \frac{p}{\rho} + \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{1}{2}v^2 \right) = 0.$$

Ciò significa:

$$\left(U + \frac{p}{\rho} + \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{1}{2}v^2 \right) = \text{cost},$$

indipendente dal punto del campo del moto. Se inoltre il moto è stazionario, $\partial \varphi / \partial t = 0$, il trinomio

$$U + \frac{p}{\rho} + \frac{1}{2}v^2,$$

non varia col punto né col tempo. Si noti che mentre per un generico moto stazionario di un fluido ideale, il trinomio precedente non varia lungo una linea di corrente, per i moti stazionari irrotazionali non varia in tutto il campo del moto.

5. Deduzione elementare del teorema di Bernoulli

Si tratta di una diretta applicazione del principio di conservazione dell'energia, già espressa dal teorema di Bernoulli stabilito nel paragrafo precedente. Si consideri un tubo di flusso in un fluido in moto stazionario e irrotazionale; per questo motivo si può ritenere che il tubo di flusso costituisca effettivamente una conduttura ideale. La sezione di tale tubo sia ovunque sufficientemente piccola in modo che velocità e pressione si possano ritenere uniformi su di essa, figura 7. Indichiamo con l'indice 1 velocità, pressione, densità e sezione del tubo di flusso alla quota z_1 e con l'indice 2 le stesse grandezze alla quota z_2 . Il lavoro della forza di pressione, in corrispondenza alla sezione S_1 è dato da

$$d\mathcal{L}_1 = p_1 S_1 dl_1;$$

analogamente, in corrispondenza alla sezione S_2 , si ha

$$d\mathcal{L}_2 = -p_2 S_2 dl_2.$$

Complessivamente:

$$d\mathcal{L} = d\mathcal{L}_1 + d\mathcal{L}_2 = p_1 S_1 dl_1 - p_2 S_2 dl_2 :$$

La variazione di energia cinetica e potenziale del fluido è dovuta alla massa dm di fluido che transita agli estremi del tubo di flusso, compreso tra le sezioni S_1 e S_2 ; in tutti gli altri punti, lo spostamento di fluido sostituisce altro fluido avente esattamente la stessa energia cinetica e potenziale. La variazione agli estremi implica che la massa dm passa dalla quota z_1 , dove ha velocità v_1 , alla quota z_2 , dove ha velocità v_2 . Pertanto la variazione di energia

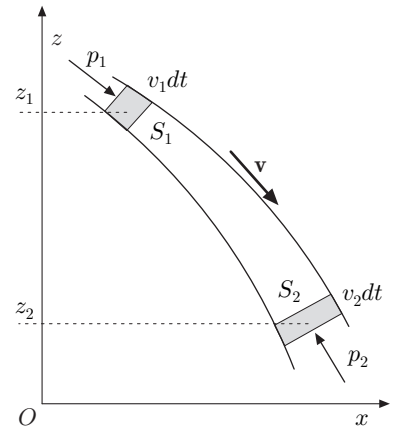


Fig. 17.7

cinetica è

$$dT = \frac{1}{2} dm (v_2^2 - v_1^2);$$

e la variazione di energia potenziale:

$$dU = dm g(z_1 - z_2).$$

Per il teorema dell'energia cinetica

$$p_1 S_1 dl_1 - p_2 S_2 dl_2 + dm g(z_1 - z_2) = \frac{1}{2} dm (v_2^2 - v_1^2).$$

Ma l'equazione di continuità, applicata al tubo di flusso considerato, impone che

$$dm = \rho_1 S_1 dl_1 = \rho_2 S_2 dl_2;$$

quindi l'equazione precedente si scrive

$$dm \frac{p_1}{\rho_1} - dm \frac{p_2}{\rho_2} + dm g(z_1 - z_2) = \frac{1}{2} dm (v_2^2 - v_1^2),$$

ossia

$$\frac{p_1}{\rho_1} + gz_1 + \frac{1}{2} v_1^2 = \frac{p_2}{\rho_2} + gz_2 + \frac{1}{2} v_2^2. \quad (19)$$

Lungo un tubo di flusso di un fluido ideale in moto stazionario non vorticoso, è costante il trinomio di Bernoulli. Per un fluido incompressibile $\rho_1 = \rho_2$. La (19), in conformità con le (17) e (18), può essere espressa in termini di altezze o di pressioni.

È notevole osservare che per un fluido in quiete, $v = 0$, la pressione è quella statica $\Delta p = \rho g \Delta z$; inoltre, a parità di quota, la velocità diminuisce all'aumentare della pressione e viceversa. Se il tubo di flusso è orizzontale ed ha sezione costante, la pressione è la stessa in qualunque sua sezione. La pressione, uniforme, è quella statica.

Esempi ed applicazioni

- ||| 4. Un recipiente contenente acqua ha un piccolo foro praticato vicino al fondo, alla profondità h rispetto alla superficie libera, attraverso il quale defluisce l'acqua, figura 8. Supponendo che il livello della superficie libera venga mantenuto costante, determinare la velocità di efflusso.

Dette z_1 e z_2 le quote della superficie libera e del foro, rispetto ad un asse di riferimento, positivo ascendente, ed essendo $v_1 = 0$, per il teorema di Bernoulli, si ha

$$z_1 + \frac{p_0}{\rho g} = z_2 + \frac{p_0}{\rho g} + \frac{v^2}{2g},$$

essendo p_0 la pressione atmosferica. Si trae:

$$z_1 - z_2 = h = \frac{v^2}{2g}, \quad \Rightarrow \quad v = \sqrt{2gh}. \quad (20)$$

La velocità dell'acqua che defluisce è uguale a quella che avrebbe se cadesse liberamente da un'altezza h (teorema di Torricelli). La verifica della (20) si

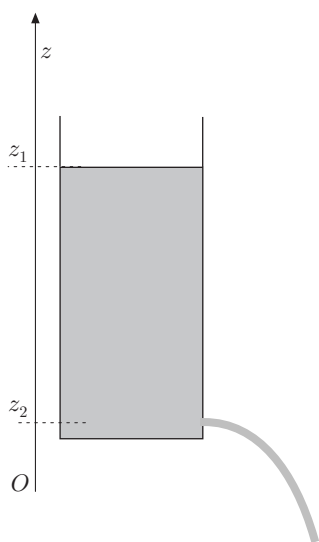


Fig. 17.8

effettua facilmente, osservando la forma parabolica del getto di liquido; infatti, se il foro è sulla parete, le equazioni del moto sono:

$$z = -\frac{1}{2}gt^2 + z_1, \quad x = vt, \quad z = -\frac{1}{2}g\frac{x^2}{v^2} + z_1.$$

Dalla misura di una coppia di valori di x e z , si può dedurre v . D'accordo con la (20), due recipienti uguali, pieni l'uno di mercurio, l'altro d'acqua, con fori uguali, si vuotano con la stessa legge, figura 9.

Si supponga ora che sulla parete del recipiente considerato siano praticati due fori, dai quali l'acqua fuoriesca con velocità iniziale orizzontale. Sapendo che i due getti incidono nello stesso punto della superficie orizzontale dove è poggiato il recipiente, determinare l'altezza in cui sono praticati i fori.

Dette z_1, z_2 le quote dei fori ed h l'altezza dell'acqua, le equazioni del moto del primo getto sono

$$x = \sqrt{2g(h - z_1)}t, \quad z = -\frac{1}{2}gt^2 + z_1,$$

che, come detto, danno luogo ad una traiettoria parabolica. Per ottenere il punto di incidenza col piano orizzontale fissato, posto $z = 0$, si ottiene il tempo di caduta:

$$t = \sqrt{\frac{2z_1}{g}},$$

che sostituito nell'espressione di x , come per il moto di un proiettile, dà la gittata:

$$x_1 = 2\sqrt{z_1(h - z_1)},$$

Analoga espressione si ottiene per l'acqua che fuoriesce dal secondo foro:

$$x_2 = 2\sqrt{z_2(h - z_2)}.$$

Uguagliando le due espressioni, si ottiene:

$$z_1(h - z_1) = z_2(h - z_2)$$

da cui

$$z_1 = \frac{h}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{(h - 2z_2)^2}, \quad \Rightarrow \quad z_1 = h - z_2, \quad z_1 = z_2.$$

La soluzione $z_1 = z_2$ è ovvia; l'altra dà $z_1 + z_2 = h$. Affinché i due getti incidano nello stesso punto, la somma delle quote dei fori deve essere uguale all'altezza del liquido.

Supponiamo ora che il livello diminuisca al defluire del liquido. Indicando con $z(t)$ il livello del liquido all'istante t , per il teorema di Torricelli:

$$v(t) = \sqrt{2gz(t)}, \quad \Rightarrow \quad v^2 = 2gz.$$

Derivando rispetto al tempo si ha:

$$2v \frac{dv}{dt} = 2g \frac{dz}{dt}. \quad (21)$$

La quantità dz/dt rappresenta la velocità con cui diminuisce il livello del liquido. Poiché si deve presupporre che la portata, all'istante t , sia la stessa, detta S_1 la sezione del recipiente e S_2 la sezione del foro, si ha

$$-S_1 \frac{dz}{dt} = S_2 v, \quad \frac{dz}{dt} = -\frac{S_2}{S_1} v,$$

dove il segno negativo indica la diminuzione di livello. Sostituendo nella (21), si ha

$$2v \frac{dv}{dt} = -2g \frac{S_2}{S_1} v, \quad \Rightarrow \quad \frac{dv}{dt} = -g \frac{S_2}{S_1}.$$

Integrando si ottiene

$$v = v_0 - g \frac{S_2}{S_1} t = \sqrt{2gz_0} - g \frac{S_2}{S_1} t,$$

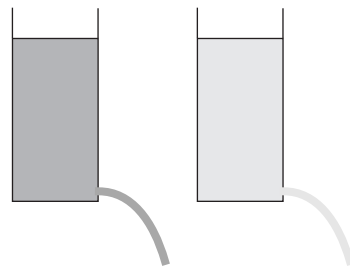


Fig. 17.9

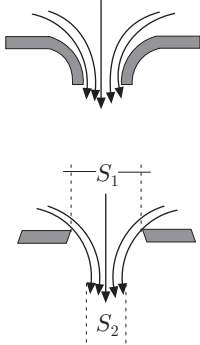


Fig. 17.10

dove v_0 è la velocità del liquido alla quota iniziale z_0 . Poiché in qualunque istante la velocità è proporzionale a \sqrt{z} , il recipiente si vuoterà quando $z = 0$, dove $v = 0$.

Dalla precedente si ottiene il tempo necessario perché il recipiente si vuoti.

$$t = \frac{S_1}{S_2} \sqrt{\frac{2z_0}{g}}.$$

L'efflusso da un recipiente è influenzato da un ulteriore fattore. Se il foro di uscita, supposto sul fondo del recipiente, non è accompagnato da una conveniente imboccatura, ma è tagliato a bordi vivi, la vena liquida subisce una contrazione, figura 10. Il rapporto S_2/S_1 tra la sezione contratta e quella effettiva può giungere fino a 0,6. La velocità di efflusso, data dalla (20), si riferisce alla sezione contratta. Questo fenomeno si osserva comunemente nell'efflusso dell'acqua da un rubinetto.

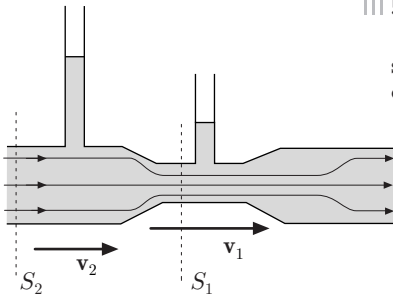


Fig. 17.11

5. Tubo di Venturi

È costituito da un condotto orizzontale con due sezioni S_1 e S_2 , in cui scorre un fluido ideale in regime stazionario, figura 11. In corrispondenza alle due sezioni, dalla (19) si ha

$$p_2 - p_1 = \frac{1}{2} \rho (v_1^2 - v_2^2),$$

e tenendo presente l'equazione di continuità $S_1 v_1 = S_2 v_2$:

$$p_2 - p_1 = \frac{1}{2} \rho v_1^2 \left(1 - \frac{S_1^2}{S_2^2} \right).$$

Se viene misurata la differenza di pressione in corrispondenza alle due sezioni, si può dedurre v_1 e quindi la portata P espressa in m^3/s :

$$P = \frac{dV}{dt} = S_1 v_1 = \sqrt{\frac{2(p_2 - p_1)}{\rho(1 - S_1^2/S_2^2)}}.$$

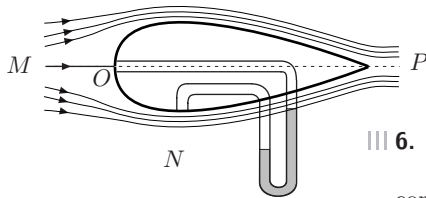


Fig. 17.12

6. Tubo di Pitot

Un corpo la cui forma è la più adatta per farsi lambire dalle linee di corrente, senza dar luogo a moti vorticosi, è in moto relativo in un fluido, figura 12.

Il tubo di flusso $MONP$ infinitesimo, in O ha una sezione molto più grande che in N ; il fluido in O ha un punto di arresto, dove la velocità è praticamente nulla; in N la velocità ha ripreso il valore che assumeva prima dell'introduzione del corpo. Per la (19), si ha

$$p_O = p_N + \frac{1}{2} \rho v_N^2, \quad v = v_N = \sqrt{\frac{2(p_O - p_N)}{\rho}}.$$

Il tubo di Pitot permette, mediante la misura della differenza di pressione nei punti indicati, di ricavare la velocità relativa del fluido. Per esempio, in questo modo, è possibile misurare la velocità di un aereo relativa all'aria.

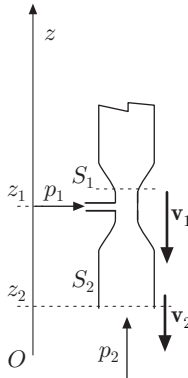


Fig. 17.13

7. Aspiratori

Consideriamo un tubo verticale, in cui scorre un liquido, che ad un estremo comunica con l'atmosfera e presenta una strozzatura di sezione S_1 , figura 13. Detta S_2 la sezione del tubo, e supponendo con buona approssimazione, che la pressione all'estremo sia quella atmosferica, dalla (19) si ha

$$p_1 = p_2 - \rho g(z_1 - z_2) - \rho \frac{v_2^2}{2} \left(\frac{S_2^2}{S_1^2} - 1 \right).$$

Se $S_1 < S_2$, è ovviamente $p_1 < p_2$; praticando un foro in corrispondenza a S_1 , l'aria viene aspirata; il sistema funziona da pompa aspirante, non molto efficace ma semplice e utile in molti casi. In questo modo funzionano i bruciatori, gli spruzzatori, gli inalatori ecc.

6. Teorema della quantità di moto

Si supponga che, nelle condizioni stazionarie di un fluido ideale, il tubo di flusso sia costituito effettivamente da un condotto e si consideri il fluido compreso tra le sezioni S_1 e S_2 . Le forze applicate, forze di pressione e di volume, ammettono una risultante \mathbf{F} . Le variazioni di quantità di moto del liquido entrante e di quello uscente attraverso le sezioni del tratto di condotto considerato, sono

$$d\mathbf{p}_1 = dm_1 \mathbf{v}_1, \quad d\mathbf{p}_2 = dm_2 \mathbf{v}_2,$$

ed essendo

$$dm_1 = dm_2 = \rho S_1 v_1 dt = \rho S_2 v_2 dt,$$

le corrispondenti variazioni di quantità di moto, nell'unità di tempo, risultano

$$\frac{d\mathbf{p}_1}{dt} = \rho S_1 v_1 \mathbf{v}_1, \quad \frac{d\mathbf{p}_2}{dt} = \rho S_2 v_2 \mathbf{v}_2.$$

La risultante delle forze è dunque

$$\mathbf{F} = \frac{d\mathbf{p}_2}{dt} - \frac{d\mathbf{p}_1}{dt} = \rho(S_2 v_2 \mathbf{v}_2 - S_1 v_1 \mathbf{v}_1). \quad (22)$$

Se nel tratto di condotto considerato il liquido è fermo, questa risultante è nulla; ossia è la somma del peso del liquido compreso tra sezioni considerate, delle forze di reazione esercitate dalle pareti del condotto e delle forze di pressione dovute al liquido esterno a dette sezioni.

Esempi

8. Condotto orizzontale curvo di sezione costante.

Dalla (22) i vettori di modulo

$$\frac{dp_1}{dt} = \rho S_1 v_1^2, \quad \frac{dp_2}{dt} = \rho S_2 v_2^2 = \frac{dp_1}{dt},$$

sono orientati come in figura 14 e giacciono nel piano orizzontale del condotto. La loro risultante è indicata in figura. Non si confonda la quantità di moto con la pressione, indicate con lo stesso simbolo.

Affinché il gomito del condotto imponga al liquido la variazione di quantità di moto nell'unità di tempo data dalla (22), oltre che reagire, insieme col liquido in arrivo e in partenza, alla risultante delle pressioni statiche, deve reagire con la forza \mathbf{F} contro l'azione dinamica del liquido che cambia direzione. Essendo la sezione costante e dunque $v_1 = v_2$, si ha immediatamente

$$F = 2\rho S v^2 \cos \theta.$$

Il gomito non fissato saldamente, sfuggirebbe nella direzione della forza risultante.

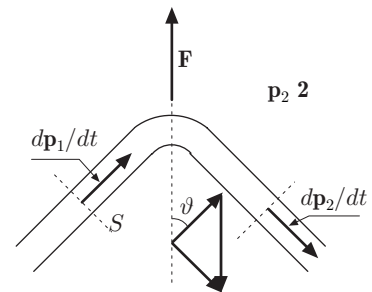


Fig. 17.14

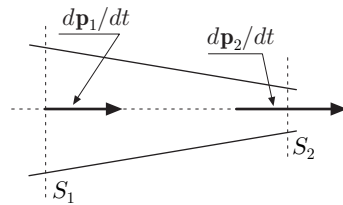


Fig. 17.15

- ||| 9. Condotto orizzontale rettilineo di sezione variabile.
I vettori di modulo

$$\frac{dp_1}{dt} = \rho S_1 v_1^2, \quad \frac{dp_2}{dt} = \rho S_2 v_2^2,$$

sono ora paralleli, figura 15. Poiché la portata è costante:

$$S_1 v_1 = S_2 v_2,$$

dalla precedente si ha

$$\frac{dp_1/dt}{dp_2/dt} = \frac{v_1}{v_2} = \frac{S_2}{S_1}.$$

La risultante \mathbf{F} delle forze che la parete laterale del condotto, il liquido in arrivo in S_1 e quello in uscita in S_2 , devono esercitare sul liquido è diretta in avanti. Il sistema formato dal liquido in arrivo e dal condotto che si restringe, come in figura, subisce da parte del liquido uscente, che accelera il suo moto, una spinta $-\mathbf{F}$. Questa spinta, reazione, nelle lance antincendio, è così violenta da richiedere lo sforzo di parecchi uomini, perché la lancia venga tenuta ferma.

||| 7. Viscosità

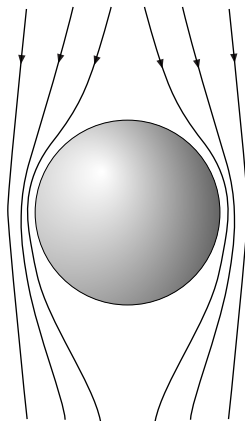


Fig. 17.16

In Dinamica sono state definite le forze viscosi; esse si manifestano ogni volta che un corpo è in moto relativo in un fluido reale o quando le parti del fluido scorrono le une rispetto alle altre. Tali forze dipendono dalla velocità e si annullano con essa; dunque nel fluido si destano sforzi di taglio, dipendenti dal coefficiente di viscosità caratteristico del fluido. Un corpo fermo, investito dalla corrente di un fluido ideale in moto non vorticoso, rimane in quiete e alle linee di flusso che lambiscono il corpo è applicabile il teorema di Bernoulli. Per un corpo sferico, figura 16, è facile dedurre che le pressioni agenti si distribuiscono simmetricamente a monte e a valle del corpo. La risultante delle forze di pressione è nulla o, più precisamente, nei fluidi pesanti, si riduce alla spinta di Archimede. Il corpo inizialmente in quiete, continua a restare in quiete e non è trascinato dal fluido che lo investe (*paradosso di D'Alembert*). Ma la conclusione è tanto "paradossale" quanto la legge di inerzia; essa sarebbe valida se si realizzassero corpi che si muovono senza attrito e svincolati dall'azione di altri corpi.

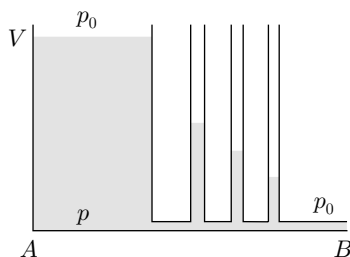


Fig. 17.17

Un liquido contenuto in vaso cilindrico, ruotante attorno al proprio asse, si dispone secondo un paraboloide di rotazione grazie all'attrito interno, ruotando insieme al vaso come un sistema rigido. Il campo delle velocità è rotazionale e in ogni punto del liquido è $\nabla \times \mathbf{v} = 2\boldsymbol{\omega}$. Se il liquido fosse ideale la rotazione del vaso non sarebbe in grado di trascinare in rotazione il liquido il quale, se soggetto alla sola forza di gravità, si disporrebbe secondo superfici isobariche orizzontali. Ancora, si consideri il sistema mostrato in figura 17; il teorema di Bernoulli, per qualunque sezione del tubo orizzontale AB darebbe $p = p_0 = \text{cost}$. Supposto che il livello nel recipiente V rimanga costante e che il tubo sbocchi nell'atmosfera, in tutte le sezioni di A , B si dovrebbe avere la stessa

pressione, atmosferica, ed i manometri dovrebbero dare la stessa indicazione. In altri termini il liquido si muoverebbe per inerzia perché la pressione passa bruscamente dal valore p , richiesto dalla legge di Stevino, sul fondo del recipiente in A , laddove il liquido all'inizio del condotto acquista la sua velocità, al valore della pressione atmosferica. In realtà, raggiunto il regime stazionario, la pressione cresce spostandosi da B verso A . Poiché la velocità è costante in tutto il condotto, si deduce che si è verificata una *perdita di carico*, definita dalla differenza di pressione $p - p_0$, denunciata dai manometri agli estremi A , B . Questa differenza di pressione è necessaria per vincere la resistenza viscosa e mantenere costante il flusso. Prendiamo ora in considerazione il moto di un fluido viscoso in particolari condizioni.

7.1. Moto laminare

L'esperienza mostra che un fluido reale in qualche modo aderisce alle pareti con le quali è a contatto, dove si stabilisce uno strato di fluido in quiete di alcuni spessori molecolari, detto strato limite; quindi il fluido in effetti si muove rispetto a tale strato. Se la velocità del fluido non raggiunge un certo valore critico, paragrafo 9, il moto o il flusso si dice laminare; esso è stazionario, ma $\nabla \times \mathbf{v} \neq 0$. Il flusso laminare è detto anche *flusso o regime di Poiseuille* ed avviene in modo che gli strati di fluido si muovano mantenendo la loro individualità. Questo comportamento può essere evidenziato inserendo piccole quantità di colorante in alcuni punti di un liquido in moto laminare; si osserva che le linee di corrente colorate procedono per un tratto sufficientemente lungo senza mescolarsi col resto del liquido.

Consideriamo un liquido compreso tra due piani; uno fisso, di equazione $y = 0$, l'altro di equazione $y = h$, mobile con velocità v_0 costante, parallela all'asse x , figura 18. Il piano mobile può essere realizzato mediante una lamina convenientemente estesa, in modo che non introduca sensibili effetti di bordo, galleggiante sul liquido. Se il liquido fosse ideale, applicando alla lamina una forza costante, il moto sarebbe uniformemente accelerato; tuttavia si osserva che per mantenere il moto uniforme occorre applicare una certa forza, atta ad equilibrare dinamicamente la forza viscosa. In altri termini il fluido esercita una forza tangenziale tendente ad ostacolare il moto della lamina. Poiché si verifica adesione completa del liquido in $y = 0$ e in $y = h$, dove le velocità assumono rispettivamente i valori zero e v_0 , si deduce che gli strati intermedi hanno velocità comprese in questo intervallo. Esiste dunque un gradiente di velocità $\partial v / \partial y \neq 0$; ciò implica che un generico strato di fluido esercita uno sforzo tangenziale sullo strato di fluido immediatamente sovrastante tendente a rallentarne il moto. Dunque lo sforzo deve essere funzione di tale gradiente, in modo che

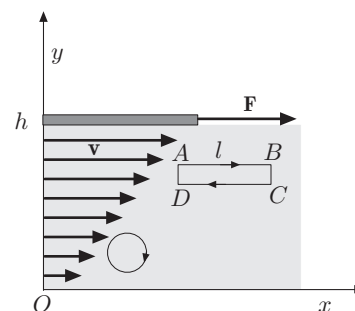


Fig. 17.18

si annulli con esso, cioè quando v è indipendente da y . Quindi si ha una relazione lineare del tipo

$$\sigma_t = -\eta \frac{\partial v}{\partial y}, \quad (23)$$

dove η è il coefficiente di viscosità. Si osservi che $\partial v / \partial y$ non è altro che la derivata rispetto al tempo della deformazione di scorrimento. Lo sforzo di taglio ha verso opposto alla direzione del moto, essendo η e il gradiente della velocità quantità positive.

Poiché lo sforzo si misura in N/m^2 e il gradiente di velocità in s^{-1} , le unità del coefficiente di viscosità, nel SI , sono $N \cdot s/m^2$. Questa unità è il *decapoise*; in pratica viene usato il *poise* (P) dieci volte minore, il quale, come si può facilmente verificare, è l'unità di misura espressa nel sistema cgs . Il coefficiente di viscosità dipende dalla temperatura. Il campo delle velocità è rotazionale; non esistono vortici visibili, bensì microvortici che si compongono con un moto di insieme, irrotazionale, che determina il moto del liquido così come si è descritto. Infatti l'unico componente del vettore $\nabla \times \mathbf{v}$ è $-(\partial v / \partial y)\mathbf{k}$, diretto nel verso negativo dell'asse z ; le linee vorticosi sono cerchi ed hanno verso orario per chi guarda la figura 18. Naturalmente la circuitazione di \mathbf{v} è diversa da zero; infatti scelta la linea chiusa $ABCD$ di figura, $AB = CD = l$, si ha

$$\oint \mathbf{v} \cdot d\mathbf{l} = l(v_1 - v_2).$$

Allo scopo di ottenere l'equazione della dinamica del moto laminare, possiamo introdurre le seguenti considerazioni semiquantitative. La teoria più completa verrà svolta più avanti.

Le particelle di fluido non possiedono velocità esclusivamente convettiva nella direzione x , ma anche velocità dovuta all'agitazione termica, molto maggiore di quella convettiva, e collidono tra loro scambiando quantità di moto. Un piano generico, $y = cost$, viene attraversato continuamente dalle particelle sovrastanti e da quelle sottostanti; le prime possiedono una componente della quantità di moto convettiva, nella direzione del movimento, maggiore delle altre. Pertanto, come risultato netto si ha un aumento della quantità di moto media delle molecole sottostanti al piano e una diminuzione di quantità di moto media di quelle sovrastanti. Lo sforzo di taglio al primo membro dell'equazione (23) può essere dunque interpretato come quantità di moto media convettiva, parallela all'asse x , trasferita nell'unità di tempo attraverso la superficie unitaria, che chiamiamo flusso della quantità di moto J_p ; ossia

$$\sigma_t = \frac{1}{\Delta S} \frac{\partial p}{\partial t} = J_p.$$

Consideriamo ora un elemento piano di fluido di spessore dy e superficie S . Le particelle incidenti sulla superficie superiore de-

terminano un aumento della quantità di moto media convettiva, nell'unità di tempo e per unità di superficie di tale elemento, flusso di quantità di moto incidente. D'altra parte, le particelle uscenti dalla superficie inferiore producono una perdita di tale quantità di moto, flusso di quantità di moto uscente. Pertanto, assumendo positiva la normale alla superficie volta verso l'esterno, il guadagno medio di quantità di moto nell'unità di tempo, nella direzione del moto convettivo, dell'elemento è dato da

$$\begin{aligned} [-J_p(y + dy) + J_p(y)]S &= - \left(J_p(y) + \frac{\partial J_p}{\partial y} dy \right) S + J_p(y)S \\ &= - \frac{\partial J_p}{\partial y} S dy. \end{aligned}$$

Ma, se si indica con p la quantità di moto convettiva per unità di volume del fluido, il guadagno di quantità di moto per unità di tempo dell'elemento considerato può essere scritto anche nella forma

$$\frac{\partial p}{\partial t} S dy.$$

Uguagliando le due espressioni precedenti, si ha

$$\frac{\partial p}{\partial t} = - \frac{\partial J_p}{\partial y}.$$

Il termine al primo membro è una forza per unità di volume, quindi il secondo membro può essere interpretato come forza viscosa per unità di volume. Tenuto conto che la quantità di moto per unità di volume è $p = \rho v$, dove ρ è la densità del fluido, la (23) si scrive:

$$\frac{\partial v}{\partial t} = \frac{\eta}{\rho} \frac{\partial^2 v}{\partial y^2}. \quad (24)$$

Nelle equazioni precedenti non si è tenuto conto di altre forze di volume; per esempio, nel caso esaminato la gravità non influenza il moto orizzontale.

Le considerazioni precedenti possono essere chiarite meglio con la seguente analogia. Due treni viaggiano nella stessa direzione su binari paralleli, con velocità diverse. Da ciascun treno vengono lanciati sull'altro sacchetti di sabbia, a ritmo costante. Si verifica un trasferimento di quantità di moto tra i due treni, cosicché il treno più lento viene accelerato mentre il treno più veloce viene rallentato.

Tenendo conto delle condizioni al contorno: adesione completa del fluido con i piani $y = 0$ e $y = h$, dove le velocità sono rispettivamente 0 e v_0 , e che il moto è stazionario $\partial v / \partial t = 0$, dalla (24) si ha

$$\frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 0.$$

Integrando questa equazione si ottiene

$$v = C_1 y + C_2,$$

dove le costanti di integrazione vanno determinate in accordo con le condizioni al contorno fissate. Per $y = 0$, $v = 0$, dunque $C_2 = 0$; per $y = h$, $v = v_0$ e $C_1 = v_0/h$. Pertanto

$$v = \frac{v_0}{h} y.$$

Questo risultato indica che la velocità varia linearmente con l'altezza.

7.2. Moto in regime di Poiseuille in un tubo di sezione circolare

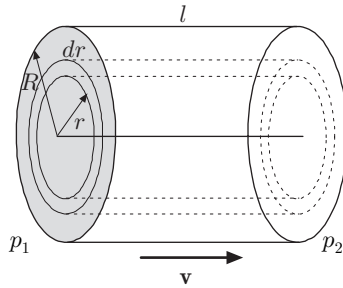


Fig. 17.19

Se si assumono condizioni al contorno di completa adesione del liquido alla parete del tubo e di moto stazionario, la distribuzione delle velocità è decrescente dall'asse del tubo verso la parete. Sia R il raggio del tubo, l la sua lunghezza e $\Delta p = p_1 - p_2$ la differenza di pressione agli estremi, che spinge il liquido a fluire, figura 19. Si divida il liquido in strati concentrici coassiali di raggio r e spessore dr ; ogni strato, in moto stazionario, è in equilibrio dinamico sotto l'azione delle forze di pressione e delle forze viscose; dunque la risultante di queste forze è nulla. Le forze di pressione agenti sulle facce estreme dello strato hanno risultante

$$(p_1 - p_2)2\pi r dr.$$

La forza viscosa agente sulla parete laterale interna, proporzionale al gradiente della velocità conformemente alla (23), in valore e segno rispetto alla direzione del moto, è data da

$$-\eta \left(2\pi l r \frac{\partial v}{\partial r} \right)_r,$$

positiva perché il gradiente della velocità è negativo; la velocità decresce verso la parete. Infatti tale forza è dovuta al liquido interno che è più veloce e tende a ritardare lo strato considerato. La forza viscosa agente sulla parete laterale esterna è ritardante ed è data da

$$\eta \left(2\pi l r \frac{\partial v}{\partial r} \right)_{r+dr}.$$

La forza viscosa risulta:

$$2\pi \eta l \frac{d}{dr} \left(r \frac{\partial v}{\partial r} \right) dr.$$

Si ha dunque

$$2\pi r(p_1 - p_2) + 2\pi \eta l \frac{d}{dr} \left(r \frac{\partial v}{\partial r} \right) = 0.$$

Integrando:

$$r \frac{\partial v}{\partial r} = -\frac{p_1 - p_2}{\eta l} \frac{r^2}{2} + C_1, \quad \frac{\partial v}{\partial r} = -\frac{p_1 - p_2}{2\eta l} r + \frac{C_1}{r}.$$

Integrando ancora:

$$v = -\frac{p_1 - p_2}{4\eta l} r^2 + C_1 \ln r + C_2.$$

Per $r = 0$ la precedente diverge, dunque è necessariamente $C_1 = 0$; per $r = R$ deve essere $v = 0$. Risulta pertanto

$$C_2 = \frac{p_1 - p_2}{4\eta l} R^2.$$

Sostituendo si ottiene:

$$v(r) = \frac{p_1 - p_2}{4\eta l} (R^2 - r^2).$$

La distribuzione delle velocità, per un tubo di raggio sufficientemente piccolo, capillare, ha un profilo parabolico, come mostrato in figura 20.

La portata del tubo è data da

$$P = \int_0^R 2\pi r v(r) dr;$$

sostituendo l'espressione della velocità e integrando, si ottiene:

$$P = \frac{p_1 - p_2}{8\eta l} \pi R^4.$$

Il volume di liquido che defluisce nel tempo t è dato da

$$V = Pt = \frac{p_1 - p_2}{8\eta l} \pi R^4 t, \quad (25)$$

che è la formula di Hagen-Poiseuille. Essa permette, nota la differenza di pressione, il raggio e la lunghezza del tubo, di misurare il coefficiente di viscosità. In pratica la misura di η , ad una certa temperatura, viene effettuata rispetto ad un liquido di cui è noto il coefficiente di viscosità. Sotto la stessa differenza di pressione, si misurano i tempi necessari perché dallo stesso tubo defluiscano uguali volumi dei liquidi; si ha

$$\eta_1 = \frac{\pi \Delta p R^4}{8Vl} t_1, \quad \eta_2 = \frac{\pi \Delta p R^4}{8Vl} t_2,$$

da cui:

$$\frac{\eta_2}{\eta_1} = \frac{t_2}{t_1}.$$

Un viscosimetro, Ostwald, usato per tale misura è mostrato in figura 21. Comprimendo in C si fa risalire il liquido di riferimento, in genere acqua, di cui è noto il coefficiente di viscosità, lungo il

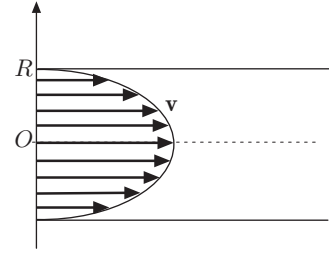


Fig. 17.20

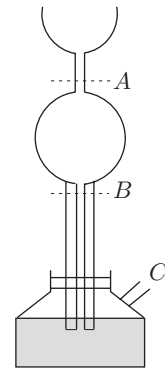


Fig. 17.21

tubo capillare fino alla sommità dell'apparecchio. Indi si misura il tempo impiegato dal liquido perché scenda dal livello A al livello B . Si ripete la misura con il liquido in esame.

8. Equazione della dinamica dei fluidi viscosi

L'equazione della dinamica dei fluidi viscosi può essere dedotta dalla teoria dell'elasticità, tenuto conto, come nell'equazione indefinita dell'equilibrio (10)-XV, dell'azione delle forze di superficie e delle forze di volume. Detta \mathbf{F} per unità di massa, l'accelerazione dell'elemento di fluido è data da:

$$\mathbf{a} = \mathbf{F} - \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} \right), \quad (26)$$

la quale, in termini di componenti cartesiane, dà luogo ad equazioni:

$$a_x = X - \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial z} \right), \quad (27)$$

e simili.

Nel paragrafo 5-XV si è riconosciuto che i tensori degli sforzi e delle deformazioni si possono rispettivamente scomporre in due tensori; uno costituito dai termini diagonali, sforzi e deformazioni normali, l'altro costituito dai termini non diagonali, sforzi e deformazioni di scorrimento. Dunque per il tensore degli sforzi si ha

$$\mathcal{T}_\sigma = \begin{pmatrix} \sigma_{xx} & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{zz} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{yx} & 0 & \sigma_{yz} \\ \sigma_{zx} & \sigma_{zy} & 0 \end{pmatrix}. \quad (28)$$

Il primo, a sua volta, può essere scomposto in un tensore isotropo, che in un fluido rappresenta la pressione, e in un tensore anisotropo; ossia

$$\begin{pmatrix} \sigma_{xx} & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{zz} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p & 0 & 0 \\ 0 & p & 0 \\ 0 & 0 & p \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \sigma_{xx} - p & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_{yy} - p & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{zz} - p \end{pmatrix}. \quad (29)$$

Poiché i tensori

$$\begin{pmatrix} \sigma_{xx} - p & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_{yy} - p & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{zz} - p \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{yx} & 0 & \sigma_{yz} \\ \sigma_{zx} & \sigma_{zy} & 0 \end{pmatrix}, \quad (30)$$

si devono annullare se il fluido è in quiete, si deduce che devono essere proporzionali al tensore che rappresenta le velocità di deformazione del fluido, che scriviamo:

$$\mathcal{T} = \begin{pmatrix} \dot{\epsilon}_{xx} & \dot{\epsilon}_{xy} & \dot{\epsilon}_{xz} \\ \dot{\epsilon}_{yx} & \dot{\epsilon}_{yy} & \dot{\epsilon}_{yz} \\ \dot{\epsilon}_{zx} & \dot{\epsilon}_{zy} & \dot{\epsilon}_{zz} \end{pmatrix}.$$

Si tenga presente che nei fluidi non possono sussistere sforzi di taglio statici.

Osserviamo che, introducendo i coefficienti di Lamè, l'equazione (31)-XV, diventa:

$$\begin{pmatrix} \sigma_{xx} & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{zz} \end{pmatrix} = 2G \begin{pmatrix} \epsilon_{xx} & 0 & 0 \\ 0 & \epsilon_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & \epsilon_{zz} \end{pmatrix} + \lambda\theta \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

In analogia, il secondo tensore della (29) può essere espresso:

$$\begin{pmatrix} \sigma_{xx} - p & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_{yy} - p & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{zz} - p \end{pmatrix} = 2\eta \begin{pmatrix} \dot{\epsilon}_{xx} & 0 & 0 \\ 0 & \dot{\epsilon}_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & \dot{\epsilon}_{zz} \end{pmatrix} + \beta\chi \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (31)$$

dove η è il coefficiente di viscosità, β un coefficiente che ha le stesse dimensioni di η e χ è dato dalla (7). Dalla (31) si deduce

$$\begin{aligned}\sigma_{xx} - p &= 2\eta \dot{\epsilon}_{xx} + \beta \chi \\ \sigma_{yy} - p &= 2\eta \dot{\epsilon}_{yy} + \beta \chi \\ \sigma_{zz} - p &= 2\eta \dot{\epsilon}_{zz} + \beta \chi.\end{aligned}\quad (32)$$

Sommando e tenendo conto della (24)-XV, si ha

$$2\eta(\dot{\epsilon}_{xx} + \dot{\epsilon}_{yy} + \dot{\epsilon}_{zz}) + 3\beta \chi = 0, \quad (2\eta + 3\beta)\chi = 0,$$

ed essendo $\chi = \nabla \cdot \mathbf{v} \neq 0$, risulta

$$\beta = -\frac{2}{3}\eta.$$

Pertanto le (32) si scrivono

$$\begin{aligned}\sigma_{xx} &= p + 2\eta \dot{\epsilon}_{xx} - \frac{2}{3}\eta \chi \\ \sigma_{yy} &= p + 2\eta \dot{\epsilon}_{yy} - \frac{2}{3}\eta \chi \\ \sigma_{zz} &= p + 2\eta \dot{\epsilon}_{zz} - \frac{2}{3}\eta \chi.\end{aligned}\quad (33)$$

Inoltre si ha:

$$\begin{pmatrix} 0 & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{yx} & 0 & \sigma_{yz} \\ \sigma_{zx} & \sigma_{zy} & 0 \end{pmatrix} = 2\eta \begin{pmatrix} 0 & \dot{\epsilon}_{xy} & \dot{\epsilon}_{xz} \\ \dot{\epsilon}_{yx} & 0 & \dot{\epsilon}_{yz} \\ \dot{\epsilon}_{zx} & \dot{\epsilon}_{zy} & 0 \end{pmatrix},$$

da cui:

$$\sigma_{xy} = 2\eta \dot{\epsilon}_{xy}, \quad \sigma_{xz} = 2\eta \dot{\epsilon}_{xz}, \quad \sigma_{yz} = 2\eta \dot{\epsilon}_{yz}. \quad (34)$$

Tenendo conto delle (33) e (34), si ricava

$$\begin{aligned}\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} &= \frac{\partial p}{\partial x} + 2\eta \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial v_x}{\partial x} \right) - \frac{2}{3}\eta \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} \right) \\ \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial y} &= \eta \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial v_x}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial x} \right) \\ \frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial z} &= \eta \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial v_x}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial x} \right).\end{aligned}$$

Sostituendo nella (27) e tenendo presente che l'ordine di derivazione può essere scambiato, si ottiene

$$a_x = X - \frac{1}{\rho} \left[\frac{\partial p}{\partial x} + \eta \nabla^2 v_x + \frac{1}{3}\eta \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} \right) \right],$$

dove a_x è data dalla (12). Analoghe espressioni si ottengono per le altre componenti. In termini vettoriali:

$$\mathbf{a} = \mathbf{F} - \frac{1}{\rho} \left[\nabla p + \eta \nabla^2 \mathbf{v} + \frac{1}{3}\eta \nabla (\nabla \cdot \mathbf{v}) \right], \quad (35)$$

dove $\nabla^2 \mathbf{v}$ è un vettore che ha per componenti $\nabla^2 v_x, \nabla^2 v_y, \nabla^2 v_z$. Si riconosce immediatamente che la (35) si riduce all'equazione della dinamica dei fluidi ideali se η è uguale a zero. È evidente che lo studio del moto di un fluido viscoso è molto complesso.

Ci limitiamo a riconsiderare i due casi di moto stazionario, rettilineo e laminare di un liquido, studiati al paragrafo 7. Poiché $\mathbf{F} = 0$ ed il moto è stazionario, $\nabla \cdot \mathbf{v} = 0$ e $\partial v / \partial t = 0$, fissato l'asse x nella direzione del moto, l'unica componente dell'equazione indefinita del moto (35) è

$$v \frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} - \frac{\eta}{\rho} \nabla^2 v; \quad (36)$$

inoltre:

$$\frac{\partial p}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial p}{\partial z} = 0, \quad \frac{\partial v}{\partial x} = 0, \quad \rho = \text{cost.}$$

Si deduce che p dipende solo da x e la velocità v soltanto da y e da z . Dalla (36) si trae:

$$\frac{\partial p}{\partial x} = -\eta \left(\frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \right),$$

ed essendo i due membri funzioni di variabili diverse, devono essere uguali ad una stessa costante C ; ossia

$$\frac{\partial p}{\partial x} = C, \quad \eta \left(\frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \right) = C.$$

Dalla prima si deduce che la pressione varia linearmente con l'ascissa x ; quindi detta p_0 la pressione in $x = 0$ e p_l la pressione in $x = l$, si ha

$$p = \frac{p_l - p_0}{l} x + p_0.$$

La seconda equazione diventa

$$\frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} = \frac{p_l - p_0}{\eta l}. \quad (37)$$

Questa equazione permette il calcolo di v , una volta assegnate le condizioni al contorno. Nel caso di un liquido di superficie indefinita, compreso tra i piani $y = 0$, fisso, e $y = h$, mobile con velocità costante v_0 , la pressione in $x = 0$ e $x = l$ è la pressione atmosferica, costante. Pertanto, essendo v funzione della sola y , la (36) diventa

$$\frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 0,$$

Imponendo la condizione di completa aderenza del fluido con i piani $y = 0$ e $y = h$, deve essere:

$$v(0) = 0, \quad v(h) = v_0.$$

Ne segue che in ogni punto del campo del movimento risulta:

$$\frac{\partial v}{\partial y} = C_1, \quad \Rightarrow \quad v = C_1 y + C_2,$$

in cui, per le condizioni di aderenza, $C_1 = v_0/h$, $C_2 = 0$. Pertanto:

$$v(y) = \frac{v_0}{h} y.$$

La velocità aumenta linearmente con y . Inoltre, essendo

$$|\sigma_t| = \eta \epsilon_t = \eta \frac{\partial v}{\partial y} = \eta \frac{v_0}{h},$$

segue che il coefficiente di viscosità, definito come rapporto tra lo sforzo di taglio e la velocità di deformazione di scorrimento, in conformità all'equazione (34), risulta

$$\eta = \frac{\sigma_t}{v_0/h}.$$

Consideriamo ora il deflusso di un liquido viscoso lungo un tubo rettilineo, di sezione circolare e lunghezza l , ai cui estremi agisce la differenza di pressione $p_l - p_0$. L'asse del tubo costituisce l'asse x . Detta $v(r)$ la velocità, funzione della distanza r dall'asse, si ha

$$\frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} = \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{dv}{dr} \right). \quad (38)$$

Infatti essendo $r = \sqrt{y^2 + z^2}$, risulta

$$\frac{\partial v}{\partial y} = \frac{dv}{dr} \frac{y}{r}, \quad \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = \frac{d^2 v}{dr^2} \frac{y^2}{r^2} + \frac{dv}{dr} \left(\frac{1}{r} - \frac{y^2}{r^3} \right).$$

Analogamente:

$$\frac{\partial^2 v}{\partial z^2} = \frac{d^2 v}{dr^2} \frac{z^2}{r^2} + \frac{dv}{dr} \left(\frac{1}{r} - \frac{z^2}{r^2} \right).$$

Sommando le precedenti, segue la (38). Pertanto la (37) diventa:

$$\frac{d}{dr} \left(r \frac{dv}{dr} \right) = \frac{p_1 - p_0}{\eta l} r.$$

Integrando questa equazione si ottiene il risultato trovato al paragrafo 7.

9. Moto vorticoso, numero di Reynolds

Lo studio generale del moto di un fluido reale è estremamente complicato, a parte il caso del moto laminare descritto. Questo argomento esula dai nostri limiti e va affrontato in discipline specializzate; pertanto daremo una descrizione qualitativa di alcuni suoi interessanti aspetti. Limitandoci a considerare il moto di un fluido reale in un tubo di raggio sufficientemente piccolo, in modo che il moto sia laminare, si osserva che per un certo tubo e un dato liquido, al crescere della differenza di pressione agli estremi del tubo, cresce la portata e quindi la velocità del liquido. Definendo velocità media il rapporto tra la portata e la sezione del tubo,

$$v_m = \frac{P}{\pi R^2},$$

dove R è il raggio, si osserva che se v_m raggiunge un valore critico v_c , in corrispondenza al quale il regime del moto cambia bruscamente e diventa turbolento, con vortici ben visibili. Se in queste condizioni venisse applicata la (25) il valore di η sarebbe maggiore di quello reale ed errato. La velocità critica v_c dipende dal raggio del tubo, dalla natura del liquido, cioè dalla sua densità e dal suo coefficiente di viscosità. Per tutti i tubi a sezione circolare, il rapporto:

$$N = \frac{v_c R \rho}{\eta},$$

si dice *numero di Reynolds* ed ha un valore costante di circa 1200. Questo valore dipende sensibilmente dallo stato della parete interna del tubo; con pareti ben levigate si possono raggiungere valori notevolmente maggiori di 1200. Il numero di Reynolds ha un notevole significato energetico se si considera una porzione di fluido lunga quanto il raggio R ; la sua energia cinetica è proporzionale a

$$\rho R^3 v_m^2.$$

D'altra parte, per la (23), la quantità

$$\eta v_m R^2$$

è proporzionale al lavoro delle forze di attrito. Il rapporto tra le

due precedenti espressioni

$$\frac{\rho R^3 v_m^2}{\eta v_m R^2} = \frac{\rho R v_m}{\eta},$$

è proprio uguale al numero di Reynolds. Più in generale nel moto relativo di un corpo e di un fluido viscoso, il numero di Reynolds ha l'espressione

$$N = \frac{v_m l \rho}{\eta}, \quad (39)$$

dove l è una lunghezza caratteristica del corpo; nel caso della sfera, tale lunghezza coincide col raggio.

10. Cenni sull'attrito nel mezzo

È indifferente supporre che il fluido in moto investa il corpo o che il corpo sia in moto nel fluido in quiete, purché si assuma che il fluido sia indefinito in modo da poter trascurare le condizioni al contorno. In realtà le esperienze volte a determinare il comportamento dinamico dei corpi, investiti da una corrente, vengono effettuate nei tunnel aerodinamici, dove si ha particolare cura che la corrente di fluido sia regolare. Nell'acqua le esperienze vengono effettuate su modelli in scala ridotta, trascinati in vasche molto grandi, in modo che il moto non perturbi la quiete esistente al contorno.

Le esperienze hanno lo scopo di determinare la resistenza del mezzo, in funzione della velocità del fluido, ossia la forza risultante e la coppia risultante equivalenti alle infinite forze elementari di superficie applicate al corpo da parte del fluido in moto. Solo in casi particolari la coppia risultante è nulla ed agisce la sola risultante delle forze d'attrito. È il caso, per esempio, di un corpo che presenta simmetria di rotazione attorno ad un asse quando la direzione della velocità del fluido coincide con esso. Allora il problema è piano, ossia può essere studiato in qualsiasi sezione del corpo in cui l'asse è contenuto. Si tenga presente, capitolo XIII, che in un problema piano l'insieme delle forze può essere rappresentato dalla sola risultante, applicata nel punto rispetto al quale il momento risultante del sistema di forze è nullo. A parte il paradosso di D'Alembert, relativo ai fluidi ideali, al quale abbiamo già accennato, prenderemo in considerazione i seguenti casi.

10.1. Regime a resistenza di attrito

Consideriamo un corpo che possiede un asse di simmetria di rotazione, orientato secondo la corrente; in particolare per la sfera, ogni asse è di simmetria. Lo strato di fluido aderente al corpo è

trascinato da quest'ultimo e si ha scorrimento degli strati adiacenti come in figura 15; la risultante delle forze di pressione è nulla. Come si è visto in Dinamica, si può presumere che la forza di resistenza del mezzo sia proporzionale al coefficiente di viscosità e alla velocità v . L'esperienza conferma questa ipotesi per valori piuttosto piccoli della velocità; inoltre stabilisce che per corpi simili ed ugualmente orientati rispetto alla velocità, la forza d'attrito è proporzionale ad una dimensione lineare del corpo. Nel caso particolare della sfera è possibile, con calcoli piuttosto laboriosi che omettiamo, ricavare la forza di attrito per mezzo dell'equazione generale della dinamica dei fluidi viscosi; si ottiene la *formula di Stokes*:

$$F_A = 6\pi\eta v r.$$

La forza d'attrito, per un dato fluido, è proporzionale alla velocità e al raggio della sfera. Una sferetta che cade in un fluido viscoso, come una goccia d'acqua molto piccola che cade nell'atmosfera, dopo un transitorio più o meno rapido, come s'è visto in Dinamica, raggiunge una velocità limite v_L costante. Nella situazione di equilibrio dinamico, tenendo conto della spinta di Archimede, detta ρ la densità della sfera e ρ_l la densità del fluido, si ha

$$\frac{4}{3}\pi r^3 \rho g - \frac{4}{3}\pi r^3 \rho_l g - 6\pi r v_L \eta = 0,$$

Da questa espressione, formula di Stokes, è possibile ricavare il coefficiente di viscosità del fluido, osservando il moto di una sferetta nota e avendo cura che la velocità limite sia inferiore alla velocità critica.

|| 10.2. Regime a resistenza di pressione

Consideriamo corpi che godono della simmetria di cui al punto precedente, per i quali cioè la forza di attrito è parallela ed opposta alla velocità, che in questo caso è maggiore di un certo valore critico. Il corpo in moto in un fluido, trascina dietro di sé un certo volume di fluido che si può ritenere fermo rispetto al corpo, costituendone una coda. In realtà questo volume è sorgente di vortici che, appena si formano, accompagnano il corpo o se ne distaccano, se la velocità è molto maggiore di quella critica. Questi vortici costituiscono la scia vorticoso, figura 22.

La resistenza di pressione è molto maggiore della resistenza di attrito, ed è essenzialmente dovuta alla risultante delle forze di pressione, diverse a monte e a valle del corpo, dove la pressione è minore perché, come s'è detto, il fluido adiacente è fermo rispetto al corpo. Infatti, tenendo presente il teorema di Bernoulli, con buona approssimazione, possiamo ritenere che la pressione a

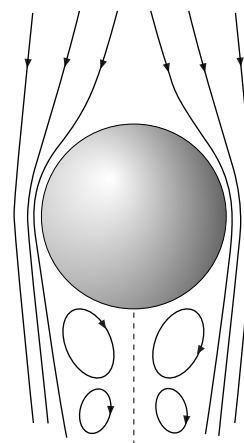


Fig. 17.22

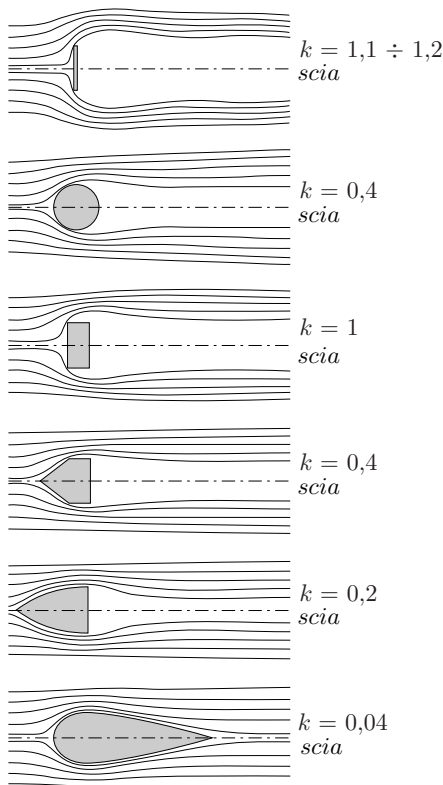


Fig. 17.23

monte del corpo sia

$$p + \frac{1}{2}\rho v^2,$$

mentre quella a valle, nel fluido in quiete rispetto al corpo, è semplicemente la pressione statica p . La differenza tra queste pressioni è proprio $\rho v^2/2$. L'esperienza di fatto indica che la forza di resistenza di pressione è proporzionale al quadrato della velocità, secondo una formula del tipo:

$$F_A = \frac{1}{2}k\rho v^2 S, \quad (40)$$

dove k è una quantità adimensionata che rappresenta il coefficiente di forma ed S la sezione trasversale massima del corpo.

Ancora una giustificazione approssimata della (40), dovuta a Newton, consiste nell'osservare che la forza che il corpo deve vincere nello spostarsi, imprime al mezzo una quantità di moto nell'unità di tempo, che si può ritenere uguale al prodotto della massa di fluido spostato nell'unità di tempo, $Sv\rho$, e della velocità che assume tale massa. Se si ammette che questa velocità sia proporzionale alla velocità v del corpo, si ottiene la (40). In questa relazione si ritiene opportuno far comparire il fattore $1/2$ per mettere in evidenza l'energia cinetica dell'unità di volume del fluido. La forza d'attrito dipende dal coefficiente di forma; in figura 23 è mostrato l'andamento della scia vorticoso, rilevata sperimentalmente mediante spettri aerodinamici. A parità di velocità e di sezione massima trasversale del corpo, la resistenza nel mezzo risulta proporzionale al coefficiente di forma. Da qui la necessità di studiare per i mezzi veloci, opportuni profili aerodinamici.

10.3. Resistenza del mezzo non parallela alla velocità

Nell'ipotesi che il problema sia piano, ossia che l'insieme delle forze d'attrito si riduca alla sola risultante \mathbf{R} , tale risultante può essere scomposta in una componente parallela alla velocità R_t e in una componente ortogonale R_n . La prima, comprendente la resistenza di pressione e la resistenza di attrito, quest'ultima di solito trascurabile, rappresenta propriamente l'attrito del mezzo, la seconda la portanza. Consideriamo due casi molto interessanti.

PIANO INCLINATO RISPETTO ALLA VELOCITÀ

Consideriamo un piano in moto in un fluido, inclinato di un angolo θ rispetto alla velocità \mathbf{v} . Nell'ipotesi che la velocità sia maggiore della velocità critica, si ha scia vorticoso, asimmetrica rispetto alla direzione della velocità, figura 24. Il problema può

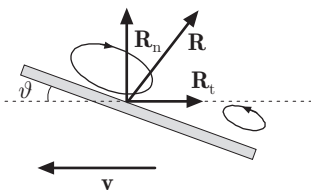


Fig. 17.24

considerarsi “piano” se il piano considerato è indefinito nella direzione normale alla figura, dunque la resistenza del mezzo è rappresentata dalla risultante. Tale risultante, comprendendo la resistenza d'attrito, è leggermente inclinata rispetto alla normale al piano ed il suo punto di applicazione è più vicino al bordo colpito per prima dal fluido. Il problema potrebbe avere scarsa rilevanza se non fosse legato allo studio del profilo delle ali di aerei, figura 25. L'angolo θ formato dalla retta r con la direzione della velocità, si chiama angolo di incidenza; per valori piccoli di θ la scia vorticoso è quasi inesistente e si ottiene la minima resistenza del mezzo. Viceversa se l'incidenza è eccessiva la scia vorticoso che si forma sulla parte superiore dell'ala, è molto ampia. Una errata manovra in volo può portare alla rottura dell'ala.

Le componenti di \mathbf{R} possono essere espresse nella forma

$$R_n = \frac{1}{2}k_n\rho v^2 S, \quad R_t = \frac{1}{2}k_t\rho v^2 S.$$

I coefficienti k_n e k_t , per un profilo assegnato, dipendono essenzialmente dall'angolo di incidenza; S è la sezione dell'ala perpendicolare al profilo e passante per la retta r . Il rapporto R_n/R_t si chiama *finezza*; in pratica si tende a rendere massimo questo rapporto. Con buoni profili di ali di aereo, si raggiunge il valore di circa 27, mentre per il piano inclinato di figura 23, la finezza non è mai superiore a 7.

EFFETTO MAGNUS

Un cilindro C è posto in rapida rotazione attorno al suo asse in presenza di una corrente di fluido, figura 26. Il teorema di Bernoulli giustifica l'esistenza di una risultante \mathbf{R}_n delle forze di pressione, trasversale alla direzione del moto del fluido. Infatti il cilindro trascina nella sua rotazione gli strati di fluido immediatamente contigui; in P la velocità del fluido e quella di trascinamento, di rotazione, si sottraggono, mentre in Q si sommano. In effetti esiste anche la risultante dell'attrito del mezzo \mathbf{R}_t , parallela alla velocità del fluido; pertanto sul cilindro agisce la somma di queste due forze.

L'effetto Magnus è responsabile delle traiettorie anomale delle palle da tennis, “tagliate” dalla racchetta o, in genere, di corpi in rapida rotazione. Dell'effetto Magnus si è tentata l'applicazione per la propulsione delle navi, rotore di Flettner, ma i risultati non sono stati incoraggianti.

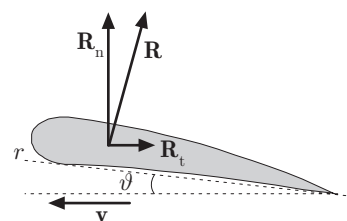


Fig. 17.25

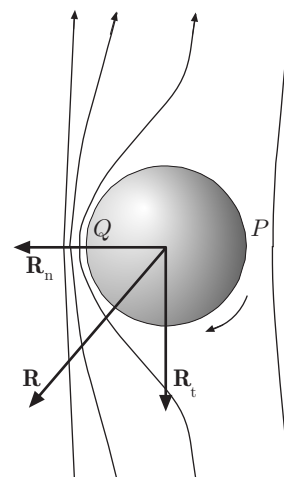


Fig. 17.26

18. Onde elastiche

1. Considerazioni preliminari

Nell'ambito della dinamica dei mezzi elastici ci limiteremo ad esaminare la propagazione delle perturbazioni di piccola ampiezza, impresse ad un mezzo *continuo ed isotropo*, rientrando quindi nei limiti di elasticità. L'esperienza mostra che se una particella del mezzo considerato, intesa nel senso più volte specificato, viene spostata dalla sua posizione di equilibrio, le altre particelle del mezzo subiscono spostamenti che si propagano con un ritardo proporzionale alla distanza dal punto in cui lo spostamento iniziale è stato provocato. Lo spostamento si propaga nel mezzo con una velocità caratteristica; se è periodico, la propagazione avviene con lo stesso periodo.

Lo studio di tale propagazione è piuttosto semplice se si suppone che tutte le particelle contenute in un piano π_0 , ad un certo istante t subiscano lo stesso spostamento rappresentato dal vettore ψ_0 , non necessariamente giacente su di esso. Allora se si considera un piano π generico parallelo al precedente, tutte le particelle di questo piano subiranno, allo stesso istante, uno spostamento ψ , in generale diverso da ψ_0 .

Fissato un riferimento cartesiano ortogonale in cui i piani anzidetti risultano ortogonali all'asse x , gli spostamenti dipendono soltanto dalla coordinata x e dal tempo. In tal caso gli spostamenti si propagano per *onde piane*; tutti i piani, tra loro paralleli, luogo dei punti di uguale spostamento, si chiamano *fronti d'onda o superfici d'onda*; l'asse x orientato stabilisce la direzione di propagazione, figura 1. Lo spostamento si può sempre scomporre nei vettori componenti, paralleli agli assi del riferimento. Se esiste il solo componente parallelo ad x , l'onda si dice *longitudinale*; se esiste soltanto il componente ortogonale, l'onda si dice *trasversale*. Lo spostamento trasversale avviene in un determinato piano, *piano di vibrazione*, che in particolare può coincidere con uno dei piani coordinati x - y e x - z . Il piano ad esso ortogonale è detto *piano di polarizzazione*; l'onda si dice *polarizzata linearmente*.

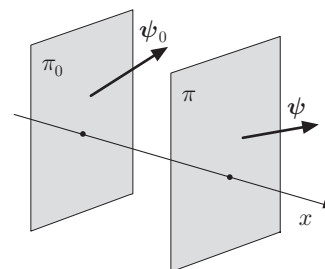


Fig. 18.1

Per chiarire meglio questi concetti, consideriamo una corda elastica seminfinita al cui estremo, che fissiamo come origine di un sistema di ascisse x , venga impartito uno spostamento trasversale ψ sinusoidale

$$\psi(0, t) = A \sin \omega t.$$

Lo spostamento, realizzato in modo che avvenga nel piano $x-y$, si propaga lungo la corda e in corrispondenza alla generica coordinata x , giungerà con certo ritardo τ cosicché in quel punto si potrà scrivere

$$\psi(x, t) = A \sin \omega(t - \tau).$$

Chiamando con v la velocità di propagazione, risulta $\tau = x/v$, perciò la precedente diventa

$$\psi(x, t) = A \sin \omega \left(t - \frac{x}{v} \right). \quad (1)$$

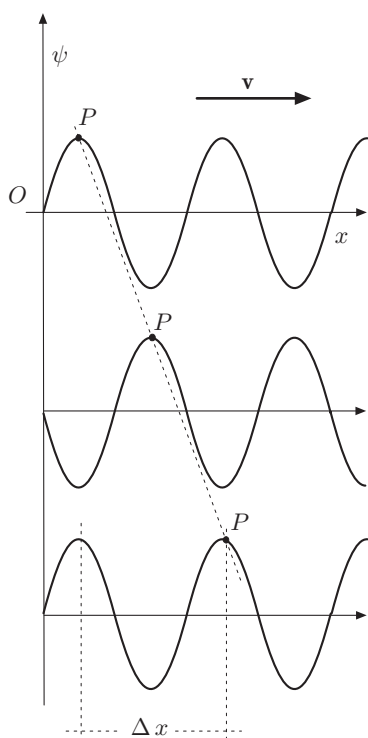


Fig. 18.2

La (1) descrive un'onda armonica piana e polarizzata linearmente. In figura 2 è mostrato il percorso Δx del massimo dello spostamento in un periodo. L'osservatore fisso col riferimento, vede una sinusoide che trasla rigidamente nel verso positivo dell'asse x , mentre un osservatore che si muove con la velocità v di propagazione dell'onda, vede l'elemento di corda oscillare di moto armonico; basta operare il cambiamento di coordinata $x = x' + vt$. Analoghe considerazioni possono essere fatte nel caso di un'onda longitudinale; questa può essere realizzata supponendo che una membrana impartisca vibrazioni, per esempio sinusoidali, al mezzo elastico circostante. Assumendo come origine del riferimento la posizione della membrana, le particelle del mezzo, come nel caso della corda, subiscono spostamenti governati dalla equazione (1).

Si osservi che, fissata l'origine del riferimento in un punto generico del mezzo elastico, la vibrazione si propaga sia nel verso fissato come positivo che nel verso negativo. Si ha dunque un'onda progressiva e un'onda regressiva. L'equazione di quest'ultima si scrive

$$\psi(x, t) = A \sin \omega \left(t + \frac{x}{v} \right).$$

Infatti un osservatore che trasla con velocità $-v$, vede ancora l'elemento oscillare di moto armonico; basta effettuare nella precedente il cambiamento di coordinata $x = x' - vt$. Nella propagazione ondosa energia meccanica fluisce attraverso il mezzo elastico, analogamente a quanto avviene nella collisione elastica di una sfera rigida contro una fila di sfere identiche in quiete. L'energia posseduta dalla sfera incidente viene trasferita progressivamente da una sfera all'altra e alla fine, l'ultima sfera della fila si muove con la stessa quantità di moto di quella incidente. L'energia si propaga attraverso la fila di sfere come se si trattasse di

un'onda che si propaga in un mezzo continuo. Va osservato che un solido continuo può trasmettere onde trasversali e longitudinali, mentre un fluido soltanto onde longitudinali; ciò dipende, come vedremo, dai moduli elastici caratteristici del mezzo.

2. Propagazione nei mezzi elastici isotropi e indefiniti

Come più volte si è detto, in un mezzo elastico isotropo e indefinito le forze agenti vanno distinte tra forze di volume e forze di superficie, che all'equilibrio danno luogo all'equazione (10)-XV. Individuata la generica particella o elemento di un tale corpo, mediante il vettore \mathbf{r} che ne dà la posizione, e indicando con

$$\psi(\mathbf{r}, t),$$

lo spostamento, funzione della posizione e del tempo, l'equazione fondamentale della dinamica si scrive:

$$\rho \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = \mathbf{F} - \left(\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} \right), \quad (2)$$

dove ρ è la densità del mezzo, \mathbf{F} la forza per unità di volume e σ sono gli sforzi.

Esprimendo gli sforzi in termini di componenti cartesiane, la (2) dà luogo alle equazioni scalari:

$$\begin{aligned} \rho \frac{\partial^2 \psi_x}{\partial t^2} &= F_x - \left(\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial z} \right) \\ \rho \frac{\partial^2 \psi_y}{\partial t^2} &= F_y - \left(\frac{\partial \sigma_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{yz}}{\partial z} \right) \\ \rho \frac{\partial^2 \psi_z}{\partial t^2} &= F_z - \left(\frac{\partial \sigma_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{zy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} \right). \end{aligned} \quad (3)$$

Per ricavare le derivate degli sforzi, si ricordi l'equazione (29)-XV, che lega gli sforzi di taglio alle corrispondenti deformazioni,

$$\begin{pmatrix} 0 & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{yx} & 0 & \sigma_{yz} \\ \sigma_{zx} & \sigma_{zy} & 0 \end{pmatrix} = 2G \begin{pmatrix} 0 & \epsilon_{xy} & \epsilon_{xz} \\ \epsilon_{yx} & 0 & \epsilon_{yz} \\ \epsilon_{zx} & \epsilon_{zy} & 0 \end{pmatrix},$$

e l'equazione (31)-XV relativa agli sforzi e alle deformazioni normali:

$$\begin{pmatrix} \sigma_{xx} & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{zz} \end{pmatrix} = \frac{E}{1+\mu} \left\{ \begin{pmatrix} \epsilon_{xx} & 0 & 0 \\ 0 & \epsilon_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & \epsilon_{zz} \end{pmatrix} + \frac{\mu\theta}{1-2\mu} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

Introducendo in quest'ultima i coefficienti di Lamè, equazione

(40)-XV, si ha:

$$\begin{pmatrix} \sigma_{xx} & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{zz} \end{pmatrix} = 2G \begin{pmatrix} \epsilon_{xx} & 0 & 0 \\ 0 & \epsilon_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & \epsilon_{zz} \end{pmatrix} + \lambda \theta \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

dove θ è la dilatazione cubica,

$$\theta = \frac{\partial \psi_x}{\partial x} + \frac{\partial \psi_y}{\partial y} + \frac{\partial \psi_z}{\partial z}.$$

Dalle equazioni precedenti si trae:

$$\begin{aligned} \sigma_{xx} &= 2G \epsilon_{xx} + \lambda \theta & \sigma_{yy} &= 2G \epsilon_{yy} + \lambda \theta & \sigma_{zz} &= 2G \epsilon_{zz} + \lambda \theta, \\ \sigma_{xy} &= 2G \epsilon_{xy} & \sigma_{xz} &= 2G \epsilon_{xz} & \sigma_{yz} &= 2G \epsilon_{yz}. \end{aligned}$$

Tenuto conto che

$$\begin{aligned} \epsilon_{xx} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \psi_x}{\partial x} + \frac{\partial \psi_x}{\partial x} \right), \\ \epsilon_{xy} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \psi_x}{\partial y} + \frac{\partial \psi_y}{\partial x} \right), \\ \epsilon_{xz} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \psi_x}{\partial z} + \frac{\partial \psi_z}{\partial x} \right), \end{aligned}$$

e che è lecito scambiare l'ordine di derivazione, la prima delle (3) dà luogo all'equazione:

$$\begin{aligned} \rho \frac{\partial^2 \psi_x}{\partial t^2} &= F_x - (\lambda + G) \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \psi_x}{\partial x} + \frac{\partial \psi_y}{\partial y} + \frac{\partial \psi_z}{\partial z} \right) \right] - G \nabla^2 \psi_x \\ &= F_x - (\lambda + G) \frac{\partial}{\partial x} (\nabla \cdot \boldsymbol{\psi}) - G \nabla^2 \psi_x, \end{aligned}$$

in cui l'operatore ∇^2 in coordinate cartesiane, ha l'espressione più volte ricordata. Analoghe equazioni si ottengono per le altre componenti. Esprimendo le relazioni ottenute in forma vettoriale, si ha:

$$\rho \frac{\partial^2 \boldsymbol{\psi}}{\partial t^2} = \mathbf{F} - (\lambda + G) \nabla (\nabla \cdot \boldsymbol{\psi}) - G \nabla^2 \boldsymbol{\psi},$$

essendo $\nabla^2 \boldsymbol{\psi}$ un vettore di componenti $\nabla^2 \psi_x$, $\nabla^2 \psi_y$ e $\nabla^2 \psi_z$.

Poiché lo spostamento è causato da forze di superficie, è possibile trascurare le forze di volume \mathbf{F} le quali, se non variano nel tempo, come per esempio la forza di gravità, possono determinare una nuova configurazione del sistema, diversa da quella naturale. In ogni caso, assumendo come origine degli spostamenti tale configurazione, come d'uso, si può scrivere:

$$\rho \frac{\partial^2 \boldsymbol{\psi}}{\partial t^2} = (\lambda + G) \nabla (\nabla \cdot \boldsymbol{\psi}) + G \nabla^2 \boldsymbol{\psi}. \quad (4)$$

Se lo spostamento è irrotazionale ($\nabla \times \boldsymbol{\psi} = 0$) allora esiste una funzione scalare φ tale che $\boldsymbol{\psi} = \nabla \varphi$; perciò la (4) diventa

$$\rho \frac{\partial^2 \boldsymbol{\psi}}{\partial t^2} = (\lambda + G) \nabla [\nabla \cdot (\nabla \varphi)] + G \nabla^2 \boldsymbol{\psi}.$$

Ma essendo:

$$\nabla[\nabla \cdot (\nabla \varphi)] = \nabla(\nabla^2 \varphi) = \nabla^2(\nabla \varphi);$$

si ha

$$\begin{aligned} \rho \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} &= (\lambda + G) \nabla^2(\nabla \varphi) + G \nabla^2 \psi \\ &= (\lambda + G) \nabla^2 \psi + G \nabla^2 \psi = (\lambda + 2G) \nabla^2 \psi. \end{aligned}$$

Dunque:

$$\rho \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = (\lambda + 2G) \nabla^2 \psi, \quad \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = \frac{(\lambda + 2G)}{\rho} \nabla^2 \psi.$$

Ponendo

$$v^2 = \frac{\lambda + 2G}{\rho},$$

la precedente diventa:

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = v^2 \nabla^2 \psi. \quad (5)$$

La grandezza

$$v = \sqrt{\frac{\lambda + 2G}{\rho}}, \quad (6)$$

come facilmente si può verificare, ha le dimensioni della velocità; essa rappresenta la velocità di propagazione dello spostamento.

Ogni componente di ψ soddisfa equazioni del tipo

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = v^2 \nabla^2 \psi,$$

le quali, come la (5), sono *equazioni di D'Alembert*.

Se dunque in un punto del mezzo elastico considerato, viene provocato uno spostamento irrotazionale, tale spostamento si propaga per onde, in modo che il fronte d'onda o superficie d'onda, luogo dei punti in cui lo spostamento, ad un certo istante ha un certo valore, avanza con velocità data dalla (6). Inoltre poiché $\nabla \cdot \psi = \theta$ e l'operatore divergenza è commutabile nelle derivazioni, prendendo la divergenza di ambo i membri della (5), si ottiene

$$\rho \frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2} = (\lambda + 2G) \nabla^2 \theta. \quad (7)$$

La dilatazione soddisfa all'equazione di D'Alembert e si propaga per onde che, per questo motivo, sono chiamate anche *onde di dilatazione*.

Se $\nabla \cdot \psi = 0$, lo spostamento si dice *solenoidale*; la (4) diventa

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = \frac{G}{\rho} \nabla^2 \psi. \quad (8)$$

Si riconosce che

$$v = \sqrt{\frac{G}{\rho}}, \quad (9)$$

rappresenta la velocità di propagazione, minore di quella espressa dall'equazione (6). In tal caso non si ha dilatazione o condensazione del mezzo, dunque lo spostamento è di scorrimento, che in quanto tale non implica variazioni di volume. La propagazione avviene per *onde trasversali*. Anche in questo caso ogni componente di ψ soddisfa un'equazione di D'Alembert. Nell'ipotesi che $\nabla \times \psi \neq 0$, lo spostamento è sempre solenoidale perché, come facilmente si può verificare, $\nabla \cdot (\nabla \times \psi) = 0$; pertanto prendendo il rotore di ambo i membri della (8) e indicando con \mathbf{R} il vettore rotazione, si ottiene

$$\rho \frac{\partial^2 \mathbf{R}}{\partial t^2} = G \nabla^2 \mathbf{R}. \quad (10)$$

Si tenga presente che il rotore dello spostamento è il doppio della rotazione di ogni elemento del mezzo elastico, $2\mathbf{R} = \nabla \times \psi$. Dunque le rotazioni degli elementi si propagano con la velocità $\sqrt{G/\rho}$; per questo motivo le onde trasversali si chiamano anche *onde di rotazione*. Va rilevato che l'equazione di D'Alembert, chiamata anche *equazione delle onde*, equazioni (5), (8), (10), comprese le rispettive componenti, è una equazione *lineare* del secondo ordine alle derivate parziali; essa, oltre i casi considerati, governa tutti i fenomeni di propagazione ondosa in Elettromagnetismo, in Ottica e in Sismologia.

La (6) può essere espressa in altra forma, ricordando le relazioni esistenti tra i moduli elastici, stabiliti nel capitolo XV; in particolare:

$$\frac{1}{1+\mu} = \frac{2G}{E}, \quad \frac{1}{1-2\mu} = \frac{3K}{E}, \quad \mu = \frac{E}{2G} - 1.$$

Sostituendo queste grandezze nell'espressione di λ e tenendo presente la (40)-XV, si ottiene

$$\lambda = 3K - \frac{6KG}{E} = K - \frac{2}{3}G.$$

Pertanto la (6) diventa

$$v = \sqrt{\frac{K + 4G/3}{\rho}}.$$

Poiché la variazione degli spostamenti nel tempo è sempre molto rapida rispetto ai tempi di diffusione termica, le espansioni e le compressioni del mezzo vanno considerate adiabatiche. Il corrispondente modulo di compressibilità va indicato con K_S , perciò

$$v = \sqrt{\frac{K_S + 4G/3}{\rho}}. \quad (11)$$

III 3. Onde piane

Se, come si è detto in premessa, lo spostamento ψ dipende dalla sola coordinata x e dal tempo, esprimendo ψ mediante i vettori componenti ψ_x , ψ_y e ψ_z , si riconosce che

$$\begin{aligned}\nabla \times \psi_x &= 0 & \nabla \times \psi_y &\neq 0 & \nabla \times \psi_z &\neq 0 \\ \nabla \cdot \psi_x &\neq 0 & \nabla \cdot \psi_y &= 0 & \nabla \cdot \psi_z &= 0.\end{aligned}$$

Lo spostamento ψ_x si propaga per onde longitudinali che sono *onde di dilatazione*, equazione (7), mentre gli spostamenti ψ_y e ψ_z si propagano per *onde trasversali*, equazione (8). Tenuto conto che detti spostamenti sono funzioni della sola x e del tempo, omettendo la notazione vettoriale, in tutti i casi l'equazione di D'Alembert diventa:

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = v^2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2},$$

dove la velocità di propagazione v è data dalla (9) o dalla (11) o da espressioni simili. Poiché l'equazione di D'Alembert è lineare, soluzioni della precedente, come dimostreremo in seguito, sono funzioni del tipo:

$$\psi = \psi_1(vt - x) + \psi_2(vt + x).$$

La prima rappresenta un'onda che si propaga nel verso positivo dell'asse x , mentre l'altra si propaga in verso opposto.

Prendendo in considerazione l'onda progressiva $\psi_1(vt - x)$, questa non va pensata come localizzata sull'asse x , essendo estesa a tutto lo spazio; dunque, ad un certo istante, lo spostamento assume lo stesso valore in tutti i punti che hanno la stessa x . Ma $x = cost$ è un piano ortogonale all'asse x e costituisce una superficie d'onda; perciò $\psi_1(vt - x)$ rappresenta un'onda piana che si propaga parallelamente a detto asse. Più propriamente, detto $\hat{\mathbf{u}}$ il versore perpendicolare alla superficie d'onda ed \mathbf{r} la posizione di un generico punto su di essa, è $x = \hat{\mathbf{u}} \cdot \mathbf{r}$; dunque tale onda può essere rappresentata dall'equazione

$$\psi_1(vt - \hat{\mathbf{u}} \cdot \mathbf{r}).$$

In figura 3 è rappresentata una superficie d'onda piana che si propaga lungo x e gli spostamenti componenti ψ_x , ψ_y e ψ_z . Se $\hat{\mathbf{u}}$ definisce una generica direzione e \mathbf{r} la posizione di un punto della superficie d'onda, il prodotto scalare $\hat{\mathbf{u}} \cdot \mathbf{r}$ è la distanza della superficie d'onda, misurata da un'origine O nella direzione di propagazione.

In figura 4 è mostrata la superficie d'onda piana che si propaga in una direzione generica. L'equazione di D'Alembert alla quale soddisfa tale onda è ancora la (5) ovvero la (8), le cui proiezioni

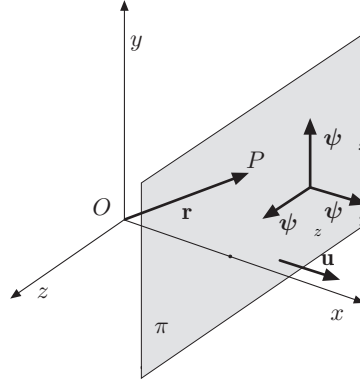


Fig. 18.3

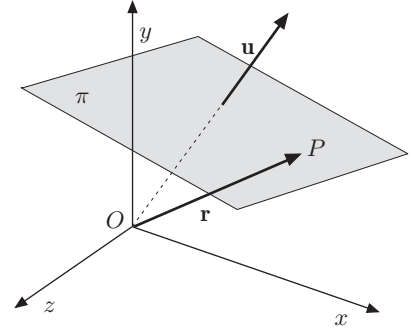


Fig. 18.4

sugli assi coordinati sono:

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 \psi_x}{\partial t^2} &= v^2 \nabla^2 \psi_x = v^2 \left(\frac{\partial^2 \psi_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \psi_x}{\partial z^2} \right) \\ \frac{\partial^2 \psi_y}{\partial t^2} &= v^2 \nabla^2 \psi_y = v^2 \left(\frac{\partial^2 \psi_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \psi_y}{\partial z^2} \right) \\ \frac{\partial^2 \psi_z}{\partial t^2} &= v^2 \nabla^2 \psi_z = v^2 \left(\frac{\partial^2 \psi_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \psi_z}{\partial z^2} \right).\end{aligned}$$

Detta ψ la componente dello spostamento parallela alla direzione di propagazione nel caso di un'onda longitudinale (ovvero perpendicolare ad essa per un'onda trasversale), e $\cos \alpha$, $\cos \beta$, $\cos \gamma$ i coseni direttori di detta componente, risulta

$$\psi_x = \psi \cos \alpha, \quad \psi_y = \psi \cos \beta, \quad \psi_z = \psi \cos \gamma.$$

Sostituendo nel sistema di equazioni precedenti, si ottiene

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = v^2 \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} \right), \quad (12)$$

la quale è l'equazione di D'Alembert per un'onda piana in tre dimensioni. Soluzioni della (12) sono onde del tipo

$$\begin{aligned}\psi(vt - \hat{\mathbf{u}} \cdot \mathbf{r}) &= \psi[vt - (x + y + z)] \\ \psi(vt + \hat{\mathbf{u}} \cdot \mathbf{r}) &= \psi[vt + (x + y + z)],\end{aligned} \quad (13)$$

oppure la loro combinazione lineare.

Va sottolineato che lo spostamento di un'onda trasversale può essere espresso dalla sovrapposizione di due spostamenti mutuamente ortogonali. Se, per esempio, l'onda si propaga lungo l'asse x , gli spostamenti componenti sono rispettivamente paralleli all'asse y e all'asse z del riferimento, come indicato in figura 3. Ciascuno di questi spostamenti si propaga per onde piane trasversali, polarizzate linearmente in direzioni perpendicolari. La composizione di tali spostamenti dà luogo ad un vettore spostamento

risultante il cui estremo descrive una traiettoria curva nello spazio. Il significato di tale propagazione si può capire rammentando che la composizione di due vibrazioni armoniche su assi ortogonali, in generale, dà luogo a un movimento ellittico dipendente dalle ampiezze e dalle relazioni di fase dei moti. Se tale moto è inizialmente provocato in una regione del mezzo elastico, esso si propaga per onde piane *polarizzate ellitticamente*. In figura 5 è rappresentata un'onda armonica piana *polarizzata circolarmente* che si propaga lungo una corda. In questo caso la corda, in ogni istante, assume la configurazione di un'elica cilindrica. In particolare, la polarizzazione lineare può essere ottenuta quando i moti componenti hanno una differenza di fase di $\pi/2$.

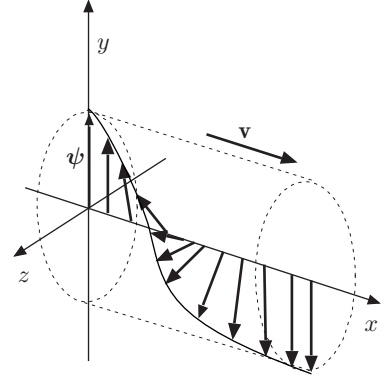


Fig. 18.5

4. Deduzione elementare dell'equazione di D'Alembert

4.1. Onde piane nei fluidi

Nei fluidi il tensore degli sforzi è isotropo e coincide con la pressione; la dilatazione θ dell'elemento di volume causata dall'onda, è uguale alla variazione relativa di volume:

$$\theta = 3\epsilon = \frac{\Delta V}{V}.$$

Pertanto, nell'ambito di piccole deformazioni, la variazione di pressione è proporzionale alla dilatazione attraverso il coefficiente o il modulo di compressibilità adiabatica, definito da

$$\kappa_S = \frac{1}{K_S} = -\frac{1}{V} \left(\frac{\partial V}{\partial p} \right)_S.$$

L'indice S indica, come d'uso in Termodinamica, che la compressione avviene ad entropia S costante, cioè senza scambio di calore col mezzo circostante all'elemento, considerando che le variazioni di volume, conseguenti alla propagazione dell'onda, come si è detto nel paragrafo precedente, sono talmente rapide da potere escludere scambi di calore. Nell'ambito di piccole variazioni di volume, possiamo scrivere

$$\kappa_S = -\frac{1}{V_0} \frac{V - V_0}{p - p_0}, \quad \Rightarrow \quad \Delta p = p - p_0 = -\frac{\theta}{\kappa_S} = -K_S \theta, \quad (14)$$

dove p_0 è la pressione statica del mezzo.

Consideriamo due superfici d'onda, piani ortogonali alla direzione di propagazione x , di coordinate x e $x + dx$, figura 6. Gli spostamenti corrispondenti, ad un certo istante t , sono

$$\psi(x), \quad \psi(x + dx) = \psi(x) + \frac{\partial \psi}{\partial x} dx.$$

La variazione relativa di volume di un elemento di sezione S ,

risulta

$$\frac{\Delta V}{V} = \theta = \frac{1}{Sdx} \left(\psi(x) + \frac{\partial \psi}{\partial x} dx - \psi(x) \right) S = \frac{\partial \psi}{\partial x}.$$

Dunque la (14) si può scrivere:

$$\Delta p = -\frac{1}{\kappa_S} \frac{\partial \psi}{\partial x}. \quad (15)$$

Consideriamo ora la dinamica dell'elemento in esame. Le variazioni di pressione in corrispondenza a x e $x + dx$ sono rispettivamente

$$\Delta p(x), \quad \Delta p(x + dx) = \Delta p(x) + \frac{\partial(\Delta p)}{\partial x} dx;$$

quindi, detta $dm = \rho S dx$ la massa dell'elemento, l'equazione della dinamica è

$$\rho S dx \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = S \Delta p(x) - S \left(\Delta p(x) + \frac{\partial(\Delta p)}{\partial x} dx \right) = -S \frac{\partial(\Delta p)}{\partial x} dx,$$

ossia:

$$\rho \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = -\frac{\partial(\Delta p)}{\partial x},$$

che, per la (15), diventa:

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = \frac{1}{\rho \kappa_S} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2}. \quad (16)$$

La precedente è l'equazione di D'Alembert (5), soddisfatta da un'onda piana longitudinale, che si propaga con velocità

$$v = \sqrt{\frac{1}{\rho \kappa_S}} = \sqrt{\frac{K_S}{\rho}}. \quad (17)$$

Questa relazione si può ottenere direttamente dalla (11), ponendo $G = 0$, dal momento che nei fluidi non sussistono sforzi di taglio.

|| 4.2. Velocità di propagazione delle onde nei gas ideali

Anticipando quanto verrà stabilito in Termodinamica, l'equazione di stato di una adiabatca reversibile del gas ideale è

$$pV^\gamma = p_0 V_0^\gamma = \text{cost},$$

essendo γ il rapporto tra i calori molari a pressione e a volume costanti. Poiché

$$V = \left(\frac{\text{cost}}{p} \right)^{1/\gamma},$$

si ha:

$$\frac{\partial V}{\partial p} = -\frac{1}{\gamma} \frac{\text{cost}^{1/\gamma}}{p^{(1+\gamma)/\gamma}}.$$

Pertanto

$$\kappa_S = \frac{1}{\gamma p}.$$

La velocità di propagazione risulta

$$v = \sqrt{\frac{\gamma p}{\rho}}. \quad (18)$$

Per ottenere la velocità di propagazione in funzione della temperatura, va tenuto conto dell'equazione di stato dei gas ideali:

$$\frac{p}{\rho} = \frac{R}{M}T, \quad \frac{p_0}{\rho_0} = \frac{R}{M}T_0, \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{\rho} = \frac{p_0}{\rho_0 T_0} \frac{T}{p},$$

dove R è la costante dei gas, T la temperatura assoluta, M il peso molecolare. Sostituendo nella (18), si ottiene

$$v = \sqrt{\frac{\gamma p}{\rho}} = \sqrt{\frac{p_0}{\rho_0 T_0} \gamma T} = v_0 \sqrt{\frac{T}{T_0}}. \quad (19)$$

Per esempio, la velocità di propagazione del suono in aria secca, a $0^\circ C$ e alla pressione normale di una atmosfera, è $v = 331,4 \text{ m/s}$; a $20^\circ C$ risulta $v = 342,9 \text{ m/s}$.

|| 4.3. Onde piane longitudinali in una sbarra indefinita

Consideriamo una sottile sbarra indefinita di sezione S , non soggetta a vincoli, e supponiamo che lo sforzo prodotto da un'onda piana longitudinale, in qualunque sua sezione, sia esclusivamente normale, poiché sulla superficie laterale non agiscono sforzi. Supponiamo inoltre che lo sforzo normale non induca contrazioni laterali della sbarra.

Detto $\psi(x)$ lo spostamento, a un certo istante, della superficie d'onda in x e $\psi(x+dx)$ lo spostamento corrispondente all'ascissa $x+dx$, nello stesso istante, come in figura 6, la deformazione longitudinale risulta

$$\frac{\psi(x+dx) - \psi(x)}{dx} = \frac{\psi(x) + (\partial\psi/\partial x)dx - \psi(x)}{dx} = \frac{\partial\psi}{\partial x}.$$

Per la legge di Hooke si ha

$$\sigma_x = E \frac{\partial\psi}{\partial x}, \quad (20)$$

Lo sforzo ha una espressione analoga a quella della variazione di pressione, equazione (15).

L'equazione della dinamica dell'elemento è

$$\rho S dx \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = S \sigma_x(x) - S \left(\sigma_x(x) + \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} dx \right) = -S \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} dx,$$

ossia:

$$\rho \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = -\frac{\partial \sigma_x}{\partial x},$$

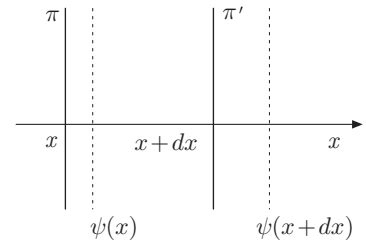


Fig. 18.6

che, per la (20), si scrive:

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = \frac{E}{\rho} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2}. \quad (21)$$

La precedente è l'equazione di D'Alembert di cui è soluzione un'onda che si propaga con velocità

$$v = \sqrt{\frac{E}{\rho}},$$

analoga a quella trovata per le onde che si propagano in un fluido. Si osservi che il risultato è approssimato poiché si è trascurata la deformazione trasversale $\epsilon_t = -\mu\sigma_x/E$ che, in realtà, è sempre molto piccola.

4.4. Onde trasversali

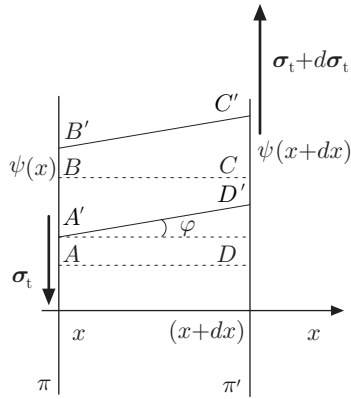


Fig. 18.7

Prendiamo in considerazione due piani π, π' del mezzo elastico, ortogonali alla direzione di propagazione, di coordinate x e $x+dx$, figura 7. Un elemento $ABCD$ inizialmente in equilibrio, se soggetto a sforzi taglio σ_t , ad un certo istante t assume la configurazione $A'B'C'D'$. Gli spostamenti trasversali, in corrispondenza ad x e ad $x+dx$, sono

$$\psi(x), \quad \psi(x+dx) = \psi(x) + \frac{\partial \psi}{\partial x} dx,$$

Lo spostamento risultante sarà

$$\psi(x+dx) - \psi(x) = \frac{\partial \psi}{\partial x} dx;$$

pertanto la deformazione di scorrimento, la quale non implica variazioni di volume, risulta

$$\tan \varphi \approx \varphi = \frac{\partial \psi}{\partial x},$$

e lo sforzo di taglio:

$$\sigma_t = G \frac{\partial \psi}{\partial x},$$

dove G è il modulo di scorrimento.

Le facce AB e $A'B'$ dell'elemento sono soggette agli sforzi

$$\sigma_t, \quad \sigma_t + d\sigma_t,$$

dunque lo sforzo risultante è

$$d\sigma_t = G \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} dx.$$

Con ragionamento analogo ai precedenti, l'equazione della dinamica dell'elemento si scrive:

$$G \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} \Delta S dx = \rho \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} \Delta S dx,$$

dove ΔS è la superficie delle facce considerate. Si ottiene ancora l'equazione delle onde

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = \frac{G}{\rho} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2}.$$

Tali onde si dicono anche di rotazione perché dx , in seguito alla deformazione di scorrimento, subisce la rotazione dell'angolo φ di figura 7.

5. Piccole vibrazioni trasversali di un filo indefinito

Un filo flessibile e inestendibile, disposto lungo l'orizzontale, sia soggetto ad una tensione \mathbf{T} di modulo costante, mentre la forza esterna \mathbf{F} , per unità di lunghezza, sia trascurabile. Se al filo viene impresso uno spostamento ψ trasversale, un elemento ds del filo assume la configurazione mostrata in figura 8. Dette

$$\mathbf{T}(s), \quad \mathbf{T}(s+ds) = \mathbf{T}(s) + \frac{\partial \mathbf{T}}{\partial s} ds,$$

le tensioni che agiscono agli estremi dell'elemento, su di esso la tensione risultante è

$$\mathbf{T}(s+ds) - \mathbf{T}(s) = \frac{\partial \mathbf{T}}{\partial s} ds.$$

Pertanto indicando con μ la densità lineica, l'equazione della dinamica dell'elemento ds si scrive:

$$\mu ds \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = \frac{\partial \mathbf{T}}{\partial s} ds, \quad \mu \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = \frac{\partial \mathbf{T}}{\partial s}. \quad (22)$$

Detti $\partial x / \partial s$ e $\partial \psi / \partial s$ i coseni direttori dell'elemento, e tenendo presente che la componente dell'accelerazione secondo x è nulla, le componenti della (22) sono:

$$\frac{\partial}{\partial s} \left(T \frac{\partial x}{\partial s} \right) = 0, \quad \mu \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial s} \left(T \frac{\partial \psi}{\partial s} \right). \quad (23)$$

La lunghezza dell'elemento di filo, come è noto, è data da

$$ds = dx \sqrt{1 + \left(\frac{\partial \psi}{\partial x} \right)^2}.$$

Poiché gli spostamenti sono piccoli e la quantità $\partial \psi / \partial x$ rappresenta il valore numerico della tangente al filo, piccola rispetto all'unità, e dunque tale da poterne trascurare il quadrato, possiamo assumere $ds \approx dx$. Sotto queste condizioni le (23), diventano:

$$\frac{\partial T}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = \frac{T}{\mu} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2}. \quad (24)$$

La prima mostra che il modulo della tensione è costante lungo x ; la seconda è l'equazione di D'Alembert alla quale soddisfa la

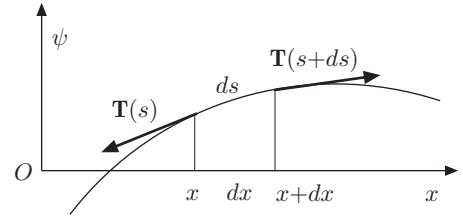


Fig. 18.8

vibrazione, che si propaga con velocità

$$v = \sqrt{\frac{T}{\mu}}. \quad (25)$$

6. Generalità sulla equazione delle onde piane

Le (16), (21) e (24), sono tipiche di qualsiasi propagazione ondosa piana che viaggia con velocità v , dipendente esclusivamente dalle caratteristiche elastiche del mezzo. Analoga equazione governa la propagazione delle onde elettromagnetiche che, come noto, viaggiano con la velocità della luce. Pertanto, in generale, si può scrivere

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = v^2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2}. \quad (26)$$

Questa relazione, come s'è detto, è una equazione differenziale lineare alle derivate parziali, di cui si riporta la soluzione dovuta a D'Alembert. Introducendo nella (26) le variabili ausiliarie

$$\eta = vt + x, \quad \zeta = vt - x,$$

si ha:

$$\frac{\partial \psi}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial t} + \frac{\partial \psi}{\partial \zeta} \frac{\partial \zeta}{\partial t} = \left(\frac{\partial \psi}{\partial \eta} \right) v;$$

in quanto

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} = \frac{\partial \zeta}{\partial t} = v.$$

Derivando ancora:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} &= v \left[\frac{\partial}{\partial \eta} \left(\frac{\partial \psi}{\partial \eta} + \frac{\partial \psi}{\partial \zeta} \right) \frac{\partial \eta}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial \zeta} \left(\frac{\partial \psi}{\partial \eta} + \frac{\partial \psi}{\partial \zeta} \right) \frac{\partial \zeta}{\partial t} \right] \\ &= v^2 \left[\frac{\partial^2 \psi}{\partial \eta^2} + 2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial \eta \partial \zeta} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial \zeta^2} \right] \end{aligned}$$

Analogamente, derivando rispetto ad x e tenendo presente che $\frac{\partial \eta}{\partial x} = 1$ e $\frac{\partial \zeta}{\partial x} = -1$, si ha

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} = v^2 \left[\frac{\partial^2 \psi}{\partial \eta^2} - 2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial \eta \partial \zeta} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial \zeta^2} \right].$$

Sostituendo nella (26), si ottiene

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial \eta \partial \zeta} = \frac{\partial}{\partial \zeta} \left(\frac{\partial \psi}{\partial \eta} \right) = \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\frac{\partial \psi}{\partial \zeta} \right) = 0.$$

Ciò significa che $\partial \psi / \partial \eta$ e $\partial \psi / \partial \zeta$, dipendono rispettivamente solo da η e solo da ζ . Ossia

$$\frac{\partial \psi}{\partial \eta} = \xi(\eta) \quad \frac{\partial \psi}{\partial \zeta} = \varphi(\zeta),$$

dove $\xi(\eta)$ e $\varphi(\zeta)$ sono funzioni arbitrarie. Integrando le precedenti rispettivamente ad η e a ζ , si ottiene:

$$\psi_1 = \int \xi(\eta) d\eta, \quad \psi_2 = \int \varphi(\zeta) d\zeta.$$

Pertanto la soluzione cercata ha la forma:

$$\psi = \psi_1(\zeta) + \psi_2(\eta).$$

Ricordando le variabili introdotte:

$$\psi = \psi_1(vt - x) + \psi_2(vt + x). \quad (27)$$

Poiché la (26) è lineare e vale il principio di sovrapposizione, funzioni del tipo

$$\psi_1(vt - x), \quad \psi_2(vt + x),$$

la soddisfano separatamente.

La verifica che la (27) è soluzione della (26) è immediata: basta derivare successivamente rispetto a x e rispetto al tempo. Indicando con l'apice la derivata della funzione rispetto all'argomento, si ha

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} = -\psi'_1(vt - x) + \psi'_2(vt + x), \quad \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} = \psi''_1(vt - x) + \psi''_2(vt + x);$$

ed inoltre

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} = v[\psi'_1(vt - x) + \psi'_2(vt + x)], \quad \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = v^2[\psi''_1(vt - x) + \psi''_2(vt + x)].$$

Sostituendo, nella (26) si ottiene una identità.

Analogamente si verifica che le funzioni

$$\psi_1(x - vt), \quad \psi_2(x + vt), \quad (28)$$

e la loro combinazione lineare

$$\psi = \psi_1(x - vt) + \psi_2(x + vt), \quad (29)$$

soddisfano la (26).

Le funzioni ψ_1 e ψ_2 , rappresentano rispettivamente *onde progressive* che avanzano nel verso positivo di x e *onde regressive* che si propagano nel verso opposto. La forma dell'onda progressiva rimane fissa rispetto ad un osservatore che si muove lungo l'asse x , con la velocità v dell'onda; analogamente la forma dell'onda regressiva rimane fissa, rispetto ad un osservatore che si muove con velocità $-v$. Basta ricordare le formule di relatività galileana

$$x = x' + vt, \quad x = x' - vt,$$

e sostituire nelle (28) e (29).

Mostriamo ora che le onde, in assenza di fenomeni dissipativi, si propagano indistorte sia rispetto al tempo che rispetto a x .

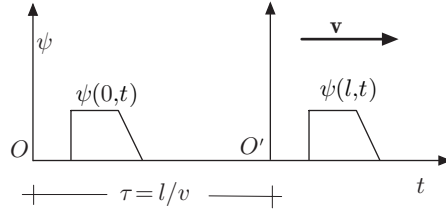


Fig. 18.9

Consideriamo un'onda progressiva, rappresentata in figura 9 con un impulso trapezoidale, che per $x = 0$ e $x = l$, ha equazioni

$$\psi(0, t) = \psi(vt), \quad \psi(l, t) = \psi(vt - l),$$

Assumiamo, nella seconda equazione, come origine dei tempi $\tau = l/v$; operiamo quindi il cambiamento di variabile $t = t' + \tau$. Nelle nuova coordinata temporale l'equazione dell'onda diventa

$$\psi(l, t) = \psi[v(t' + \tau) - l] = \psi(vt' + v\tau - l) = \psi(vt').$$

L'onda, nel propagarsi, non è mutata rispetto alla configurazione assunta in $x = 0$, ma presenta, rispetto a questa un ritardo $\tau = l/v$; essa si è propagata senza deformarsi con una velocità caratteristica, indipendente dalla sua forma.

Lo studio dell'evoluzione dell'onda rispetto ad x , conduce alla stessa conclusione. In corrispondenza agli istanti $t = 0$ e $t = \tau$, l'equazione dell'onda risulta

$$\psi(x, 0) = \psi(-x), \quad \psi(x, \tau) = \psi(v\tau - x).$$

Operando il cambiamento di coordinata $x = x' + v\tau$, la seconda equazione diventa

$$\psi(x, \tau) = \psi[v\tau - (x' + v\tau)] = \psi(-x').$$

Quest'ultima è identica alla prima equazione; nell'intervallo di tempo τ , l'onda si è spostata rigidamente, senza mutare di forma, di una lunghezza $l = v\tau$, figura 10. Stabiliamo ora le proprietà di tutte le grandezze che contengono il termine di deformazione $\partial\psi/\partial x$.

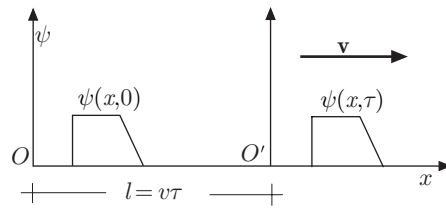


Fig. 18.10

DILATAZIONE

La dilatazione, chiamata anche *rarefazione*, equazione (15), è definita da

$$\theta = \frac{\partial \psi}{\partial x} = \frac{V - V_0}{V_0} = \frac{\rho_0 - \rho}{\rho}.$$

Considerando un'onda progressiva, si ha

$$\theta = \frac{\partial \psi}{\partial x} = -\psi'(vt - x).$$

La rarefazione si propaga con la stessa velocità dell'onda di spostamento, ma ha segno opposto.

Si definisce *condensazione* la grandezza

$$\theta_c = -\theta = \frac{V_0 - V}{V_0} = \frac{\rho - \rho_0}{\rho}.$$

Pertanto

$$\theta_c = -\frac{\partial \psi}{\partial x} = \psi'(vt - x).$$

La condensazione si propaga con la stessa velocità dell'onda di spostamento ed ha segno opposto alla rarefazione.

VARIAZIONE DI PRESSIONE

variazione di pressione

Dalla (15) si ha

$$\Delta p = \frac{1}{\kappa_S} \psi'(vt - x).$$

L'onda di pressione si propaga con velocità v ed ha lo stesso segno dell'onda di spostamento.

SFORZO

Lo sforzo normale si propaga secondo la (20). Per le onde trasversali, come s'è detto, la quantità $\partial \psi / \partial x$ rappresenta la deformazione di scorrimento; lo sforzo di taglio si propaga secondo la relazione

$$\sigma_t = G \frac{\partial \psi}{\partial x}.$$

Lo stesso si verifica per la componente trasversale della tensione di un filo vibrante:

$$T_t = T \frac{\partial \psi}{\partial x}.$$

VELOCITÀ DELLE PARTICELLE DEL MEZZO

velocità delle particelle del mezzo

La velocità che le particelle del mezzo assumono a causa della propagazione di un'onda, da non confondere con la velocità di propagazione, è definita da

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} = \dot{\psi} = v\psi'(vt - x). \quad (30)$$

Essa si propaga con la stessa velocità dell'onda. Si verifica immediatamente che il rapporto tra la velocità delle particelle e la rarefazione,

$$\frac{\dot{\psi}}{\theta} = -v, \quad (31)$$

è costante ed uguale alla velocità di propagazione, cambiata di segno; mentre se si considera la condensazione, si ottiene

$$\frac{\dot{\psi}}{\theta_c} = v.$$

7. Riflessione delle onde piane per incidenza normale

La riflessione delle onde piane incidenti su una superficie che delimita due mezzi va esaminata tenendo presente la soluzione generale dell'equazione delle onde. Si prenderanno in considerazione i casi di discontinuità perfettamente rigida e di discontinuità perfettamente cedevole.

7.1. Discontinuità rigida

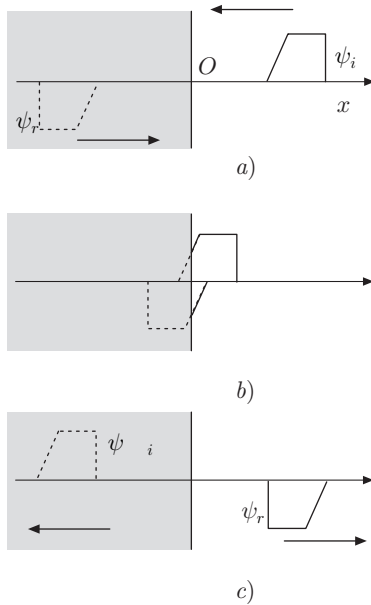


Fig. 18.11

Il mezzo sia limitato da una parete rigida piana, ortogonale all'asse x , lungo il quale avviene la propagazione, figura 11. Assumendo come origine la parete, lo spostamento nel semispazio da essa delimitato verrà espresso da

$$\psi(x, t) = \psi_1(vt + x) + \Psi(vt - x),$$

dove ψ_1 rappresenta l'onda incidente, che in figura si propaga nel verso negativo dell'asse x , e Ψ la perturbazione riflessa. Essendo la parete fissa, in $x = 0$ lo spostamento è nullo, dunque si ha

$$\psi_1(vt) + \Psi(vt) = 0, \quad \Psi(vt) = -\psi_1(vt).$$

Pertanto, per ogni valore di x :

$$\Psi(vt - x) = -\psi_1(vt - x). \quad (32)$$

In altri termini nel semispazio limitato dalla parete si ha sovrapposizione dell'onda incidente e di un'onda riflessa, uguale alla prima ma cambiata di segno. Pertanto:

$$\psi(x, t) = \psi_1(vt + x) - \psi_1(vt - x),$$

e posto

$$\psi_i = \psi_1(vt + x), \quad \psi_r = -\psi_1(vt - x),$$

si ha:

$$\psi(x, t) = \psi_i(vt + x) + \psi_r(vt - x),$$

Per chiarire questa formulazione, supponiamo che l'onda sia costituita da una vibrazione impulsiva di ampiezza ovunque nulla,

tranne che nell'intervallo Δx , figura 11. All'istante $t = 0$ ψ_i si trova in una certa posizione rispetto all'origine O ; nello stesso istante, la vibrazione riflessa può essere rappresentata nella posizione simmetrica, rispetto ad O , cambiata di segno, figura 11a). Evidentemente ψ_r non ha significato fisico perché al di là della parete non può verificarsi propagazione. Al crescere del tempo ψ_i e ψ_r si propagano verso O ; la prima nel verso negativo, la seconda nel verso positivo. Nell'intervallo di tempo durante il quale ψ_i attraversa l'origine O , la configurazione delle due vibrazioni deve essere tale che la loro somma sia nulla, perché, essendo la parete rigida, ivi lo spostamento è nullo, figura 11b). Successivamente la vibrazione ψ_r procede nel verso positivo, riflessa, e ψ_i nel verso negativo; quest'ultima situazione, come s'è detto, non è reale, figura 11c).

Per quanto riguarda le rarefazioni, si ha:

$$\theta_i = \frac{\partial \psi_i}{\partial x} = \psi'_1(vt + x), \quad \theta_r = \frac{\partial \psi_r}{\partial x} = -\frac{\partial \psi_1}{\partial x} = \psi'_1(vt - x).$$

Per $x = 0$:

$$\frac{\partial \psi_i}{\partial x} = \psi'_1(vt), \quad \frac{\partial \psi_r}{\partial x} = \psi'_1(vt).$$

Analogo comportamento hanno le condensazioni. Rarefazioni e condensazioni, in seguito alla riflessione, non mutano. Poiché inoltre la variazione di pressione è $\Delta p = -\theta/\kappa_S$, equazione (15), si deduce che la variazione di pressione, in seguito alla riflessione, resta immutata.

Analogo ragionamento vale per la velocità delle particelle del mezzo:

$$\frac{\partial \psi_i}{\partial t} = v\psi'_1(vt + x), \quad \frac{\partial \psi_r}{\partial t} = -v\psi'_1(vt - x).$$

Per $x = 0$:

$$\dot{\psi}_i = v\psi'_1(vt), \quad \dot{\psi}_r = -v\psi'_1(vt).$$

Le velocità delle particelle del mezzo, in seguito alla riflessione, sono opposte.

Va notato che il rapporto tra la velocità delle particelle e la rarefazione è costante ed uguale alla velocità di propagazione, equazione (31). Nel riferimento adottato, per le vibrazioni incidente e riflessa si ha

$$\frac{\dot{\psi}_i}{\theta} = v, \quad \frac{\dot{\psi}_r}{\theta} = -v. \quad (33)$$

|| 7.2. Discontinuità cedevole

Le estremità aperte di una canna d'organo, l'estremo libero di una corda o sistemi simili, possono realizzare discontinuità perfettamente cedevoli. Nel caso di onde longitudinali, si suppone che

la discontinuità delimiti un mezzo circostante indefinito perfettamente cedevole ove la pressione è costante; la canna d'organo, ad esempio, ha le estremità aperte nell'aria libera, dove la rarefazione è nulla.

Assumendo come origine del riferimento la discontinuità, come nel caso precedente, lo spostamento nello spazio da essa delimitato è

$$\psi(x, t) = \psi_1(vt + x) + \Psi(vt - x),$$

con analogo significato delle grandezze. La rarefazione risulta:

$$\theta = \frac{\partial \psi}{\partial x} = \psi'_1(vt + x) - \Psi'(vt - x). \quad (34)$$

Per $x = 0$, la rarefazione è nulla:

$$\psi'_1(vt) - \Psi'(vt) = 0,$$

quindi

$$\Psi'(vt) = \psi'_1(vt)$$

e, per ogni valore di x :

$$\Psi'(vt - x) = \psi'_1(vt - x).$$

Integrando:

$$\Psi(vt - x) = \psi_1(vt - x) + C,$$

dove C è una costante; pertanto

$$\psi(x, t) = \psi_1(vt + x) + \psi_1(vt - x),$$

dove la costante si è posta uguale a zero, in quanto rappresenta lo spostamento complessivo del mezzo. In seguito alla riflessione, onda incidente e onda riflessa hanno lo stesso segno.

Indicando, come prima, con $\psi_i = \psi_1(vt + x)$ l'onda incidente e con $\psi_r = \psi_1(vt - x)$ quella riflessa, le rarefazioni risultano:

$$\theta_i = \psi'_1(vt + x), \quad \theta_r = -\psi'_1(vt - x).$$

In seguito alla riflessione su una discontinuità cedevole, le rarefazioni cambiano di segno. Lo stesso avviene per le condensazioni e, ricordando la (15), per le variazioni di pressione. Viceversa, le velocità delle particelle:

$$\dot{\psi}_i = v\psi'_1(vt + x), \quad \dot{\psi}_r = v\psi'_1(vt - x),$$

restano immutate.

Ricapitolando, per l'onda riflessa, si ha

DISCONTINUITÀ RIGIDA

Spostamento invertito

Velocità delle particelle invertita

Condensazione e rarefazione invariate

Differenza di pressione invariata

DISCONTINUITÀ CEDEVOLLE

Spostamento invariato

Velocità delle particelle invariata

Condensazione e rarefazione invertite

Differenza di pressione invertita

Tutte queste grandezze assumono il loro segno rispetto al riferimento fissato. Le precedenti considerazioni valgono per le onde trasversali; va osservato che la grandezza $\partial\psi/\partial x$, assume il significato di deformazione di scorrimento. Per le onde che si propagano lungo un filo ha anche il significato geometrico di pendenza, la quale ovviamente dipende dall'equazione dell'onda.

|| 7.3. Riflessione parziale delle onde piane per incidenza normale

Indichiamo con gli indici i, r, t le onde incidente, riflessa e trasmessa o rifratta, figura 12. Poiché ogni proprietà fisica, spostamento, velocità delle particelle, pressione, deve mantenere il suo valore alla superficie di separazione dei due mezzi, da qualunque parte venga osservato, si potrà assumere la continuità delle velocità delle particelle:

$$\frac{\partial\psi_i}{\partial t} + \frac{\partial\psi_r}{\partial t} = \frac{\partial\psi_t}{\partial t}, \quad (35)$$

e la continuità della variazione di pressione:

$$M_1\theta_i + M_1\theta_r = M_2\theta_t, \quad (36)$$

dove M è il modulo elastico del mezzo e θ la rarefazione. Assumendo i segni delle velocità di propagazione conformi al riferimento di figura 11, per la (31) si ha

$$\dot{\psi}_i = v_1\theta_i, \quad \dot{\psi}_r = -v_1\theta_r, \quad \dot{\psi}_t = v_2\theta_t,$$

essendo v_1, v_2 le velocità di propagazione nei due mezzi. Dalle (35) e (36) si ottiene:

$$v_1(\theta_i - \theta_r) = v_2\theta_t, \quad M_1(\theta_i + \theta_r) = M_2\theta_t, \quad (37)$$

Dividendo membro a membro:

$$\frac{\theta_i - \theta_r}{\theta_i + \theta_r} = \frac{M_1v_2}{M_2v_1},$$

si ottiene

$$\frac{\theta_r}{\theta_i} = \frac{v_1M_2 - v_2M_1}{v_1M_2 + v_2M_1}. \quad (38)$$

Nel caso della discontinuità rigida, $M_2 \gg M_1$, risulta $\theta_r = \theta_i$; l'onda è completamente riflessa; il segno della rarefazione non muta. Se la discontinuità è cedevole, $M_1 \ll M_2$, la rarefazione cambia segno, $\theta_r = -\theta_i$.

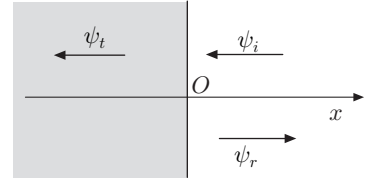


Fig. 18.12

Dalle (37) si ottiene:

$$\frac{\theta_t}{\theta_i} = \frac{2v_1M_1}{v_1M_2 + v_2M_1}. \quad (39)$$

Le (38) e (39) definiscono rispettivamente il coefficiente di riflessione r e il coefficiente di trasmissione t . Si noti che t è sempre positivo e che $-1 < r < 1$. Inoltre poiché

$$M_1 = \rho_1 v_1^2, \quad M_2 = \rho_2 v_2^2,$$

si ha

$$\frac{\theta_r}{\theta_i} = \frac{v_2\rho_2 - v_1\rho_1}{v_2\rho_2 + v_1\rho_1} = \frac{Z_2 - Z_1}{Z_2 + Z_1}, \quad (40)$$

dove con $Z = \rho v$ si indicata l'impedenza caratteristica del mezzo. L'impedenza caratteristica è definita anche dalle relazioni

$$Z = \frac{M}{v}, \quad Z = \sqrt{M\rho};$$

essa si misura in $\text{Pa}/(\text{m/s})$. Perchè si verifichi la trasmissione completa della rarefazione dev'essere $Z_2 = Z_1$. Si colga l'analogia con un trasduttore o un dispositivo elettrico.

ONDE TRASVERSALI

Per le onde trasversali valgono le considerazioni precedenti, assumendo alla superficie di separazione dei due mezzi, la continuità degli spostamenti e la continuità degli sforzi di taglio. Per una corda vibrante si ha continuità degli spostamenti e delle componenti trasversali della tensione:

$$\psi_i + \psi_r = \psi_t, \quad T \left(\frac{\partial \psi_i}{\partial x} + \frac{\partial \psi_r}{\partial x} \right)_0 = T \left(\frac{\partial \psi_t}{\partial x} \right)_0 \quad (41)$$

8. Onde armoniche piane

Si è accennato alle onde armoniche progressive, equazione (1), che riscriviamo:

$$\psi(x, t) = A \sin \omega \left(t - \frac{x}{v} \right) = A \sin 2\pi\nu \left(t - \frac{x}{v} \right).$$

Questa equazione può essere posta nella forma:

$$\psi(x, t) = A \sin \frac{\omega}{v} (vt - x).$$

Tenendo presente che $\omega = 2\pi/T$, dove T è il periodo temporale dell'onda, si ha

$$\frac{\omega}{v} = \frac{2\pi}{Tv} = \frac{2\pi}{\lambda} = k. \quad (42)$$

Chiamiamo *lunghezza d'onda* $\lambda = Tv$ lo spazio percorso dall'onda nell'intervallo di tempo uguale a un periodo; essa rappresenta

anche il *periodo spaziale*. Poiché nell'intervallo di un periodo gli spostamenti hanno la stessa ampiezza, possiamo definire la lunghezza d'onda come lo spazio percorso dall'onda dal punto x_1 al punto x_2 , in cui l'onda ha la stessa ampiezza che, in particolare, può coincidere con due massimi oppure due minimi, figura 13.

La grandezza $k = 2\pi/\lambda$ si chiama *numero d'onde angolare* e si misura in radianti per metro (rad/m); questa quantità è l'analoga nello spazio, della pulsazione o frequenza angolare ω . Si definisce inoltre *numero d'onde* la grandezza $k' = 1/\lambda$ che si misura in m^{-1} ; essa è l'analoga nello spazio della frequenza ν delle oscillazioni nel tempo. Dalla (42) si ha

$$\frac{\omega}{k} = \frac{\lambda}{T} = v, \quad \Rightarrow \quad \lambda\nu = v.$$

Il prodotto tra la lunghezza d'onda e la frequenza è costante e pari alla velocità di propagazione. Poiché quest'ultima dipende esclusivamente dalle caratteristiche elastiche del mezzo, l'equazione

$$\omega(k) = vk, \quad (43)$$

che si chiama *relazione di dispersione*, è lineare con k . Tale relazione caratterizza la propagazione delle onde nel mezzo. Se è valida la (43), il mezzo si dice *non dispersivo*. Se la relazione di dispersione non è lineare, come in certi casi che esamineremo in seguito, il mezzo si dice *dispersivo*; la velocità di propagazione dipende dalla frequenza.

L'equazione di un'onda armonica progressiva si può esprimere in una delle seguenti forme alternative

$$\begin{aligned} \psi(x, t) &= A \sin \frac{2\pi}{\lambda}(vt - x) = A \sin 2\pi \left(\frac{vt}{\lambda} - \frac{x}{\lambda} \right) \\ &= A \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda} \right) = A \sin 2\pi\nu \left(t - \frac{x}{v} \right). \end{aligned} \quad (44)$$

Oppure:

$$\psi(x, t) = A \sin(\omega t - kx), \quad (45)$$

e, tenendo conto delle (28),

$$\psi(x, t) = A \sin(kx - \omega t). \quad (46)$$

Quest'ultima si può ottenere dalla (45) aggiungendo una fase uguale a π , che corrisponde a $T/2$ nel periodo temporale oppure a $\lambda/2$ nel periodo spaziale. Le equazioni (44), (45) e (46) rappresentano un'onda armonica piana progressiva di periodo T e lunghezza d'onda λ .

Le stesse considerazioni valgono per le onde armoniche regressive, rappresentate, per esempio, dall'equazione

$$\psi(x, t) = A \sin(\omega t + kx).$$

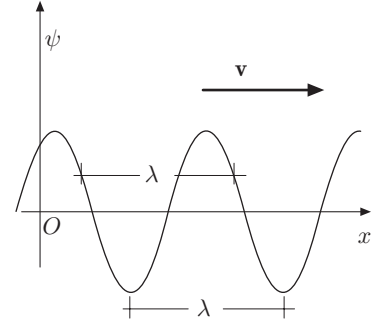


Fig. 18.13

Si noti che la stessa onda, come ogni funzione armonica, può essere espressa da una funzione coseno, introducendo semplicemente un fattore di fase pari a $\pi/2$. Può essere indifferente a questo scopo introdurre un anticipo di fase uguale a $T/4$ nel periodo temporale, oppure uguale a $\lambda/4$ nel periodo spaziale.

In generale scriveremo:

$$\psi(x, t) = A \sin(\omega t - kx + \varphi), \quad \psi(x, t) = A \sin(kx - \omega t + \varphi).$$

Un'onda armonica che si propaga in una direzione generica rispetto al riferimento fissato, ha una equazione analoga alla (13). Infatti detto \mathbf{k} il vettore ortogonale alla superficie d'onda ed \mathbf{r} il vettore che individua la posizione di un punto qualsiasi di detta superficie, si ha:

$$\psi(\mathbf{r}, t) = A \sin(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r}) = A \sin[\omega t - (k_x x + k_y y + k_z z)]. \quad (47)$$

Il vettore \mathbf{k} , che individua la direzione di propagazione, è detto *vettore di propagazione o vettore d'onda*. Essendo $k = \omega/v$, le componenti di \mathbf{k} soddisfano la relazione:

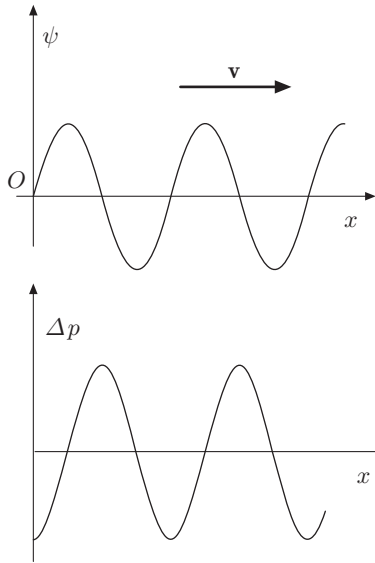
$$k_x^2 + k_y^2 + k_z^2 = \frac{\omega^2}{v^2}. \quad (48)$$

RAREFAZIONE O DILATAZIONE

Per un'onda armonica longitudinale si ottiene

$$\theta = \frac{\partial \psi}{\partial x} = -Ak \cos(\omega t - kx) = -\theta_0 \cos(\omega t - kx), \quad (49)$$

dove $\theta_0 = Ak$ è il valore massimo. La condensazione risulta di segno opposto e in quadratura.



VARIAZIONE DI PRESSIONE

Per la (15):

$$\begin{aligned} \Delta p &= -\frac{1}{\kappa_S} \frac{\partial \psi}{\partial x} = \frac{Ak}{\kappa_S} \cos(\omega t - kx) \\ &= kK_S \cos(\omega t - kx) = \Delta p_0 \cos(\omega t - kx), \end{aligned} \quad (50)$$

dove $\Delta p_0 = AkK_S$ è l'ampiezza massima. L'onda di pressione si propaga come l'onda di spostamento, ma sfasata di $\pi/2$, figura 14. In corrispondenza ai massimi dello spostamento la variazione di pressione è nulla e nei minimi di spostamento, massima.

SFORZO IN UNA SBARRA INDEFINITA

Per un'onda longitudinale che si propaga in una sbarra, si è trovato che lo sforzo ha andamento analogo all'onda di pressione, equazione (20), perciò

$$\sigma = E \frac{\partial \psi}{\partial x} = -E Ak \cos(\omega t - kx) = -\sigma_0 \cos(\omega t - kx), \quad (51)$$

Fig. 18.14

Lo sforzo massimo, $\sigma_0 = E Ak$, è notevole; infatti assumendo, per una sbarra metallica, $E = 10^{11} \text{ Pa}$, $\lambda = 1 \text{ m}$, $A = 10^{-6} \text{ m}$, il suo ordine di grandezza risulta 10^6 Pa .

VELOCITÀ DELLE PARTICELLE

Si ha:

$$\dot{\psi} = \frac{\partial \psi}{\partial t} = A\omega \cos(\omega t - kx) = \dot{\psi}_0 \cos(\omega t - kx). \quad (52)$$

L'onda di velocità ha lo stesso andamento dell'onda di pressione. Va ricordato che le equazioni (44) e (45), descrivono anche onde trasversali polarizzate linearmente. Inoltre tenendo presente quanto si è detto alla fine del paragrafo 3, descrivono le onde componenti in un'onda polarizzata ellitticamente.

9. Intensità di un'onda piana

Un elemento del mezzo in cui si propaga l'onda possiede, a causa del moto che gli è stato impresso, energia cinetica ed energia potenziale elastica, la cui somma dà l'energia totale. Questa energia si propaga con la velocità v dell'onda ed è indipendente dalla forma dell'onda.

In generale, ricordando la (17)-XV, la densità di energia totale, misurata in J/m^3 , si può esprimere con l'equazione:

$$u = \frac{1}{2}\rho \left(\frac{\partial \psi}{\partial t} \right)^2 + \frac{1}{2}M \left(\frac{\partial \psi}{\partial x} \right)^2,$$

dove M è l'opportuno modulo elastico. Per un'onda armonica, equazione (45), la densità di energia, all'istante t , risulta

$$u = \frac{1}{2}\rho A^2 \omega^2 \cos^2(\omega t - kx) + \frac{1}{2}K_S A^2 k^2 \cos^2(\omega t - kx).$$

Tenuto conto che $K_S = \rho v^2$ e che $v = \omega/k$, la densità di energia cinetica risulta uguale alla densità di energia potenziale elastica, perciò si ottiene

$$u = \rho A^2 \omega^2 \cos^2(\omega t - kx).$$

L'energia si propaga con la stessa velocità dell'onda. La densità media di energia è data da

$$\bar{u} = \rho A^2 \omega^2 \frac{1}{T} \int_0^T \cos^2(\omega t - kx) dt.$$

Poiché l'integrale è uguale a $T/2$, si ha

$$\bar{u} = \frac{1}{2}\rho A^2 \omega^2. \quad (53)$$

Tenendo presente la (50), in cui $\Delta p_0 = AkK_S$, e tenuto conto che

$k = \omega/v$, $K_S = \rho v^2$, per un'onda longitudinale si trova anche:

$$\bar{u} = \frac{1}{2} \frac{(\Delta p_0)^2}{\rho v^2}. \quad (54)$$

Definiamo *intensità J dell'onda*, l'energia che fluisce attraverso la sezione unitaria del mezzo, ortogonale alla direzione di propagazione, nell'unità di tempo; dunque moltiplicando la (53) per la velocità di propagazione v , si ha

$$J = \frac{1}{2} \rho v A^2 \omega^2 = \frac{1}{2} Z A^2 \omega^2, \quad (55)$$

dove $Z = \rho v$ è l'impedenza caratteristica del mezzo. Per un'onda piana longitudinale l'intensità si può esprimere come:

$$J = \frac{1}{2} \frac{(\Delta p_0)^2}{\rho v}. \quad (56)$$

L'intensità si misura in W/m^2 .

Complementi ed esempi

- III 1. *Riflessione di un'onda piana per incidenza obliqua.*
Siano rispettivamente

$$\begin{aligned} \psi_i &= A_i \sin(\omega t - \mathbf{k}_i \cdot \mathbf{r}), \\ \psi_r &= A_r \sin(\omega t - \mathbf{k}_r \cdot \mathbf{r}) \\ \psi_t &= A_t \sin(\omega t - \mathbf{k}_t \cdot \mathbf{r}), \end{aligned} \quad (57)$$

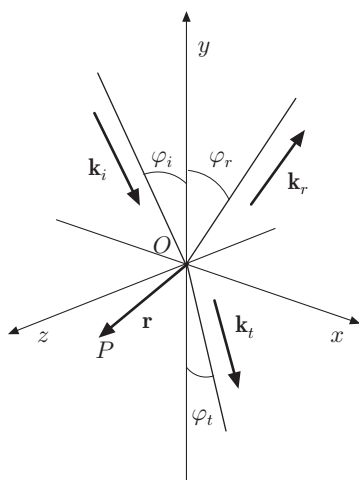


Fig. 18.15

l'onda incidente, riflessa e trasmessa. L'esperienza mostra che alla discontinuità la frequenza delle onde non muta. Rappresentiamo le onde piane, come d'uso, mediante "raggi", cioè con le rette orientate ortogonali alle superfici d'onda. Supponiamo, come in figura 15, che il raggio/onda giaccia nel piano $x-y$ e incida nell'origine del riferimento; il piano $x-z$ costituisca la superficie di separazione dei due mezzi. Per tutti i punti di questo piano, individuati dal vettore \mathbf{r} di componenti x e z , deve essere rispettata la continuità degli spostamenti:

$$\psi_i + \psi_r = \psi_t.$$

Perché questa condizione sia soddisfatta, è necessario che gli argomenti delle (57) siano uguali

$$\omega t - \mathbf{k}_i \cdot \mathbf{r} = \omega t - \mathbf{k}_r \cdot \mathbf{r} = \omega t - \mathbf{k}_t \cdot \mathbf{r},$$

da cui

$$\mathbf{k}_i \cdot \mathbf{r} = \mathbf{k}_r \cdot \mathbf{r} = \mathbf{k}_t \cdot \mathbf{r}. \quad (58)$$

Poiché

$$\mathbf{k}_i = k_{ix} \mathbf{i} + k_{iy} \mathbf{j}, \quad \mathbf{k}_r = k_{rx} \mathbf{i} + k_{ry} \mathbf{j} + k_{rz} \mathbf{k}, \quad \mathbf{k}_t = k_{tx} \mathbf{i} + k_{ty} \mathbf{j} + k_{tz} \mathbf{k},$$

sostituendo nella (58),

$$k_{ix} x = k_{rx} x + k_{rz} z = k_{tx} x + k_{tz} z.$$

Questa relazione deve essere valida per tutti i punti del piano $x-z$; ne segue:

$$k_{ix} = k_{rx} = k_{tx}, \quad k_{rz} = k_{tz} = 0.$$

si deduce che \mathbf{k}_r e \mathbf{k}_t non hanno componenti lungo l'asse z , perciò tali vettori giacciono nel piano $x-y$.

Indicando con φ_i , φ_r e φ_t gli angoli di incidenza, riflessione e rifrazione che le onde formano con la normale al piano x - z , figura 15, si ha

$$k_{ix} = k_i \sin \varphi_i, \quad k_{rx} = k_r \sin \varphi_r, \quad k_{tx} = k_t \sin \varphi_t,$$

ed essendo

$$k_i = k_r = \frac{\omega}{v_1}, \quad k_t = \frac{\omega}{v_2},$$

si ottiene:

$$k_{ix} = \frac{\omega}{v_1} \sin \varphi_i, \quad k_{rx} = \frac{\omega}{v_1} \sin \varphi_r, \quad k_{tx} = \frac{\omega}{v_2} \sin \varphi_t.$$

Dunque

$$\frac{1}{v_1} \sin \varphi_i = \frac{1}{v_1} \sin \varphi_r = \frac{1}{v_2} \sin \varphi_t;$$

ne segue:

$$\sin \varphi_i = \sin \varphi_r, \quad \Rightarrow \quad \varphi_i = \varphi_r, \quad \frac{\sin \varphi_i}{\sin \varphi_t} = \frac{v_1}{v_2}. \quad (59)$$

L'angolo di incidenza è uguale all'angolo di riflessione e il rapporto tra il seno dell'angolo di incidenza e il seno dell'angolo di rifrazione è uguale al rapporto tra le velocità di propagazione nei due mezzi (legge di Snell).

Consideriamo ora le ampiezze delle onde A_i , A_r , A_t ; poiché dev'essere rispettata la continuità delle loro componenti normali alla superficie di separazione, si ha

$$(A_i + A_r) \cos \varphi_i = A_t \cos \varphi_t.$$

Introducendo il coefficiente di riflessione r , tale che $A_r = rA_i$, la precedente diventa

$$A_i(1 + r) \cos \varphi_i = A_t \cos \varphi_t. \quad (60)$$

Per determinare il coefficiente di riflessione occorre un'altra relazione, fornita dalla conservazione dell'energia; infatti l'intensità dell'onda incidente va ripartita tra l'onda riflessa e quella trasmessa. Tenuto conto, figura 16, che i fronti d'onda incidente, AB e riflesso BC , sul tratto AC della discontinuità, hanno sezione $AC \cos \varphi_i$, mentre quello rifratto ha sezione $AC \cos \varphi_t$, il bilancio delle potenze incidente, riflessa e rifratta, equazione (55), si scrive:

$$\omega^2 \rho_1 v_1 A_i^2 AC \cos \varphi_i = \omega^2 \rho_1 v_1 r^2 A_i^2 AC \cos \varphi_i + \omega^2 \rho_2 v_2 A_t^2 AC \cos \varphi_t, \quad (61)$$

Dividendo membro a membro per il quadrato della (60), si ha

$$\frac{\rho_1 v_1 A_i^2 \cos \varphi_i (1 - r^2)}{(1 + r)^2 A_i^2 \cos^2 \varphi_i} = \frac{\rho_2 v_2 A_t^2 \cos \varphi_t}{A_t^2 \cos^2 \varphi_t},$$

ossia

$$\frac{\rho_1 v_1 (1 - r^2)}{(1 + r)^2 \cos \varphi_i} = \frac{\rho_2 v_2}{\cos \varphi_t}.$$

Da questa relazione si ricava

$$\frac{1 - r}{1 + r} = \frac{\rho_2 v_2 \cos \varphi_i}{\rho_1 v_1 \cos \varphi_t}, \quad (62)$$

che per la legge di Snell, possiamo scrivere

$$\frac{1 - r}{1 + r} = \frac{\rho_2 \cot \varphi_i}{\rho_1 \cot \varphi_t}.$$

Si ottiene:

$$r = \frac{\rho_1 \cot \varphi_t - \rho_2 \cot \varphi_i}{\rho_1 \cot \varphi_t + \rho_2 \cot \varphi_i}. \quad (63)$$

Per incidenza normale la (62), a parte il segno, si riduce alla (40).

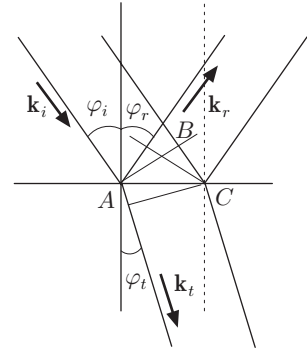


Fig. 18.16

III 2. *Riflessione alla discontinuità aria-acqua.*

Assegnate le velocità di propagazione nell'aria, $v_1 = 343 \text{ m/s}$, e nell'acqua, $v_2 = 1450 \text{ m/s}$; note le rispettive densità $\rho_1 = 1,2 \text{ kg/m}^3$ e $\rho_2 = 10^3 \text{ kg/m}^3$, si ha

$$Z_1 = 412 \text{ Pa/(m/s)}, \quad Z_2 = 1,45 \cdot 10^6 \text{ Pa/(m/s)}.$$

Dalla (40) si ottiene

$$\frac{\theta_r}{\theta_i} = \frac{Z_2 - Z_1}{Z_2 + Z_1} = 0,9994.$$

L'acqua è praticamente un riflettore perfetto, sia che l'onda venga generata in aria o nell'acqua. Viceversa la trasmissione tra liquidi e solidi è più favorevole; per esempio alla discontinuità acqua-acciaio, essendo le impedenze caratteristiche rispettivamente $Z_1 = 1,45 \cdot 10^6 \text{ Pa/(m/s)}$, $Z_2 = 3,9 \cdot 10^6 \text{ Pa/(m/s)}$, si ha

$$\frac{\theta_r}{\theta_i} = 0,46.$$

III 3. *Riflessione parziale alla saldatura di due fili di materiali diversi, soggetti alla tensione T .*

Supponiamo che l'onda sia armonica e fissiamo l'origine del riferimento in corrispondenza alla saldatura, figura 17. Siano

$$\psi_i = A_i \sin(\omega t - kx), \quad \psi_r = A_r \sin(\omega t + kx), \quad \psi_t = A_t \sin(\omega t - k_t x),$$

rispettivamente le onde incidente, riflessa e trasmessa. Quest'ultima si propaga con velocità diversa a causa della differente natura dei fili.

Poiché per $x = 0$ si ha continuità degli spostamenti, dalle precedenti si ottiene

$$A_i \sin \omega t + A_r \sin \omega t = A_t \sin \omega t, \quad A_i + A_r = A_t. \quad (64)$$

Inoltre dev'essere rispettata la continuità delle componenti trasversali della tensione:

$$T \left(\frac{\partial \psi_i}{\partial x} + \frac{\partial \psi_r}{\partial x} \right)_0 = T \left(\frac{\partial \psi_t}{\partial x} \right)_0. \quad (65)$$

Essendo:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \psi_i}{\partial x} &= -A_i k \cos(\omega t - kx) \\ \frac{\partial \psi_r}{\partial x} &= A_r k \cos(\omega t + kx) \\ \frac{\partial \psi_t}{\partial x} &= -A_t k_t \cos(\omega t - k_t x) \end{aligned}$$

sostituendo nella (65), per $x = 0$ si ha

$$-A_i k \cos \omega t + A_r k \cos \omega t = -A_t k_t \cos \omega t,$$

da cui:

$$k(A_i - A_r) = A_t k_t. \quad (66)$$

Dividendo membro a membro le (64) e (66), si ottiene

$$\frac{A_i + A_r}{A_i - A_r} = \frac{k}{k_t},$$

quindi:

$$A_r = A_i \frac{k - k_t}{k + k_t}.$$

Poiché $k/k_t = v_2/v_1$, rapporto tra le velocità di propagazione nei due fili, si ha

$$A_r = A_i \frac{v_2 - v_1}{v_2 + v_1}.$$

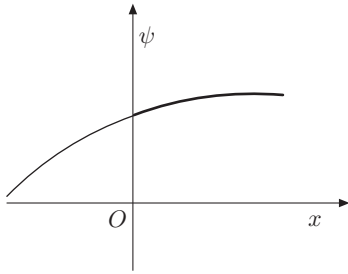


Fig. 18.17

Essendo:

$$v_1 = \sqrt{\frac{T}{\mu_1}}, \quad v_2 = \sqrt{\frac{T}{\mu_2}}, \quad \frac{v_2}{v_1} = \sqrt{\frac{\mu_1}{\mu_2}},$$

dove μ è la densità lineica, si ottiene

$$A_r = A_i \frac{\sqrt{\mu_1} - \sqrt{\mu_2}}{\sqrt{\mu_1} + \sqrt{\mu_2}}.$$

Il coefficiente di riflessione risulta:

$$r = \frac{A_r}{A_i} = \frac{\sqrt{\mu_1} - \sqrt{\mu_2}}{\sqrt{\mu_1} + \sqrt{\mu_2}},$$

che si può scrivere:

$$r = \frac{Z_1 - Z_2}{Z_1 + Z_2},$$

con $Z = \sqrt{T\mu}$, impedenza caratteristica, che questa volta si misura in $N/(m/s)$.

Se $\mu_1 > \mu_2$, A_i ed A_r hanno lo stesso segno; l'onda riflessa non subisce variazione di fase. Se $\mu_1 < \mu_2$, A_i e A_r hanno segno opposto; l'onda riflessa subisce una variazione di fase di π . L'ampiezza dell'onda trasmessa risulta

$$A_t = A_i + A_r = A_i(1 + r) = A_i \frac{2\sqrt{\mu_1}}{\sqrt{\mu_1} + \sqrt{\mu_2}}, \quad t = \frac{2\sqrt{\mu_1}}{\sqrt{\mu_1} + \sqrt{\mu_2}}.$$

Si osservi che $t = 1 + r$; t è sempre positivo, mentre r è positivo o negativo secondo che $\sqrt{\mu_1}$ sia maggiore o minore di $\sqrt{\mu_2}$.

4. Intensità delle onde sonore.

L'intensità delle onde di pressione è espressa dalla (56). La sensibilità dell'orecchio umano varia in funzione della frequenza ed è tale che per ciascuna frequenza esiste un minimo di intensità, detta *soglia della sensazione sonora*, al di sotto della quale il suono non è percepibile, e un massimo di intensità, *soglia della sensazione dolorosa*, al di sopra della quale si ha disagio o dolore.

In figura 18 è illustrato il diagramma uditivo medio dell'orecchio umano; la curva superiore descrive l'andamento della sensazione dolorosa; quella inferiore la soglia di sensazione sonora in funzione della frequenza. In ordinate sono riportate l'intensità e l'ampiezza di pressione; si noti che l'orecchio è un

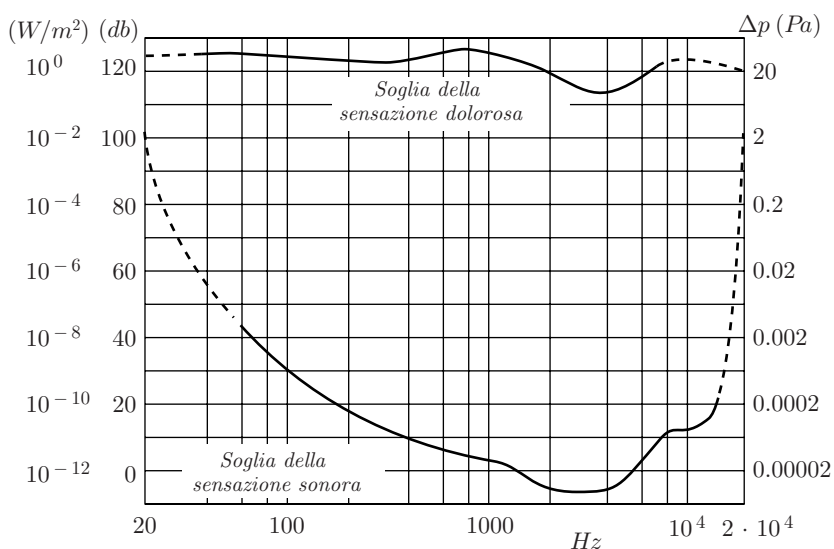


Fig. 18.18

rivelatore quadratico. L'orecchio, tra le soglie suddette, è caratterizzato da un rapporto tra le intensità enorme, 10^{12} ; per questo motivo l'intensità è espressa anche da un'altra unità, il *decibel* (*db*). Il livello d'intensità del suono, come di ogni altro fenomeno ondulatorio, è indicato con B ed è espresso in *db*:

$$B = 10 \log \frac{J}{J_0},$$

dove J_0 è una intensità di riferimento. Nel caso del suono in aria il riferimento corrisponde convenzionalmente a 10^{-12} W/m^2 . Per esempio, l'ampiezza di pressione del suono percepibile a 400 Hz , equazione (56), corrisponde all'intensità di $7,2 \cdot 10^{-12} \text{ W/m}^2$ e ad un livello sonoro di $8,57 \text{ db}$.

10. Onde sferiche

Per lo studio della propagazione di un'onda prodotta da una sorgente puntiforme, va presa in considerazione l'equazione generale dell'idrodinamica dei fluidi perfetti, supponendo che spostamenti, velocità, variazioni di volume e di pressione siano piccoli e tali da poter trascurare ogni termine contenente il loro quadrato o il loro prodotto. Per quanto riguarda l'equazione complementare che esprime la densità in funzione della pressione, ricordiamo l'espressione della dilatazione

$$\theta = \frac{V - V_0}{V_0} = \frac{\rho_0 - \rho}{\rho},$$

dalla quale otteniamo il volume specifico:

$$\frac{1}{\rho} = \frac{1}{\rho_0}(1 + \theta). \quad (67)$$

In conformità alle ipotesi assunte, indicando con \mathbf{u} la velocità delle particelle, nell'equazione (14)-XVII,

$$\mathbf{F} - \frac{1}{\rho} \nabla p = \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \frac{1}{2} \nabla \cdot (u^2) + (\nabla \times \mathbf{u}) \times \mathbf{u},$$

possiamo trascurare, al secondo membro, i fattori che contengono termini quadratici, e scrivere

$$\mathbf{F} - \frac{1}{\rho_0}(1 + \theta) \nabla p = \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t}.$$

Trascurando il termine

$$\frac{\theta}{\rho_0} \nabla p,$$

del secondo ordine, perché prodotto tra la dilatazione e il gradiente della pressione, si ha

$$\mathbf{F} - \frac{1}{\rho_0} \nabla p = \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t}.$$

Essendo la variazione di pressione

$$\Delta p = -\frac{\theta}{\kappa_S}, \quad p = p_0 - \frac{\theta}{\kappa_S},$$

equazione (14), si ha:

$$\mathbf{F} - \frac{1}{\rho_0} \nabla p_0 + \frac{1}{\rho_0 \kappa_S} \nabla \theta = \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t}.$$

Se inizialmente il fluido è in quiete, $\mathbf{u} = 0$ e $\theta = 0$, la precedente implica

$$\mathbf{F} - \frac{1}{\rho_0} \nabla p_0 = 0.$$

Pertanto:

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} = \frac{1}{\rho_0 \kappa_S} \nabla \theta. \quad (68)$$

Si deduce che esiste un potenziale delle velocità $\varphi(x, y, z, t)$, tale che:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} = \frac{\theta}{\rho_0 \kappa_S}. \quad (69)$$

Dunque la (68) diventa

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} = \nabla \left(\frac{\partial \varphi}{\partial t} \right).$$

L'eventuale velocità iniziale, costante rispetto al tempo, implica un moto stazionario del fluido che non influisce sulla propagazione delle onde. Possiamo concludere quindi che *i moti di piccola ampiezza del fluido ammettono un potenziale delle velocità*. Si deduce inoltre che tali moti sono irrotazionali, $\nabla \times \nabla \varphi = 0$, pertanto devono essere longitudinali.

Dall'equazione di continuità:

$$\frac{\partial(\rho u_x)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho u_y)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho u_z)}{\partial z} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0,$$

tenendo presente la (67) che, con buona approssimazione, si può scrivere

$$\rho = \rho_0(1 + \theta)^{-1} \approx \rho_0(1 - \theta),$$

e trascurando, per le ipotesi fatte, i termini di secondo ordine, ossia $\rho_0 \theta u_x$ rispetto a $\rho_0 u_x$, si ottiene

$$\rho_0 \left(\frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{\partial u_z}{\partial z} \right) - \rho_0 \frac{\partial \theta}{\partial t} = 0. \quad (70)$$

Ma:

$$u_x = \frac{\partial \varphi}{\partial x}, \quad u_y = \frac{\partial \varphi}{\partial y}, \quad u_z = \frac{\partial \varphi}{\partial z},$$

dunque il primo termine della (70) è il laplaciano di φ , pertanto:

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = \nabla^2 \varphi. \quad (71)$$

Ponendo nella (69) $v^2 = 1/\rho_0 \kappa_S$, con v velocità di propagazione, tale equazione si scrive

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} = v^2 \theta. \quad (72)$$

Derivando rispetto al tempo e tenendo conto della (71), si ottiene

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = v^2 \nabla^2 \varphi. \quad (73)$$

La precedente costituisce l'equazione di propagazione del potenziale delle velocità. Si osservi che v rappresenta la velocità di propagazione, da non confondere con la velocità delle particelle.

La funzione $\varphi(x, y, z, t)$ che soddisfa la (73), permette di ricavare per derivazione rispetto alle coordinate, le componenti delle velocità delle particelle e per derivazione rispetto al tempo, equazione (69), la rarefazione. Sia le une che l'altra soddisfano l'equazione di D'Alembert; infatti derivando la (73) rispetto ad x si ha

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \right) = v^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \right), \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial^2 u_x}{\partial t^2} = v^2 \frac{\partial^2 u_x}{\partial x^2}.$$

Così per le altre componenti.

Analogamente derivando rispetto al tempo:

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial t} \right) = v^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial t} \right), \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2} = v^2 \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2}.$$

Le componenti delle velocità e la rarefazione obbediscono all'equazione delle onde.

|| 10.1. Propagazione per onde sferiche

Consideriamo una piccola sfera pulsante che trasmette al mezzo circostante il suo movimento che chiaramente ha simmetria sferica. Se r è la distanza di un punto del mezzo dal centro della sfera, possiamo ritenere che la rarefazione sia funzione soltanto di r e del tempo t . Occorre dunque esprimere il laplaciano di θ in funzione della variabile r . Fissata l'origine del riferimento nel centro della sfera ed essendo $x^2 + y^2 + z^2 = r^2$, si ha

$$\frac{\partial r}{\partial x} = \frac{x}{r}.$$

Risulta pertanto:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \theta}{\partial x} &= \frac{\partial \theta}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial x} = \frac{x}{r} \frac{\partial \theta}{\partial r} \\ \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} &= \left(\frac{1}{r} - \frac{x^2}{r^3} \right) \frac{\partial \theta}{\partial r} + \frac{x^2}{r^2} \frac{\partial^2 \theta}{\partial r^2}. \end{aligned}$$

Lo stesso procedimento vale per le altre variabili. Pertanto il laplaciano di θ diventa

$$\begin{aligned} \nabla^2 \theta &= \left(\frac{3}{r} - \frac{x^2 + y^2 + z^2}{r^3} \right) \frac{\partial \theta}{\partial r} + \frac{x^2 + y^2 + z^2}{r^2} \frac{\partial^2 \theta}{\partial r^2} \\ &= \frac{\partial^2 \theta}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial \theta}{\partial r}. \end{aligned}$$

Dunque l'equazione di propagazione della rarefazione è:

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2} = v^2 \left(\frac{\partial^2 \theta}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial \theta}{\partial r} \right). \quad (74)$$

Trasformiamo questa equazione, ponendo

$$\xi(r, t) = r\theta, \quad (75)$$

le cui derivate sono:

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = r \frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2}, \quad \frac{\partial \xi}{\partial r} = r \frac{\partial \theta}{\partial r} + \theta, \quad \frac{\partial^2 \xi}{\partial r^2} = r \frac{\partial^2 \theta}{\partial r^2} + 2 \frac{\partial \theta}{\partial r}.$$

In questo modo la (74) assume la forma

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = v^2 \frac{\partial^2 \xi}{\partial r^2}, \quad (76)$$

identica all'equazione di propagazione delle onde piane. L'integrale generale della (76) è del tipo già noto:

$$\xi(r, t) = f(vt - r) + g(vt + r).$$

La grandezza rappresentata da ξ contiene la somma di due quantità che si propagano per onde sferiche; la prima nel verso delle r crescenti, progressiva, l'altra in verso opposto.

Prendiamo in considerazione l'onda progressiva; dalla (75) si ottiene la rarefazione,

$$\theta = \frac{\xi}{r} = \frac{1}{r} f(vt - r), \quad (77)$$

che si propaga con velocità v , riducendosi in ragione di $1/r$.

Siamo ora in grado di ricavare la velocità delle particelle del mezzo e lo spostamento. Introduciamo, per comodità, una funzione $\zeta(vt - r)$, la cui derivata seconda rispetto ad r sia uguale a $-f$; perciò la (77) diventa:

$$\theta = -\frac{1}{r} \zeta''(vt - r), \quad (78)$$

Tenuto conto della (72), si ottiene:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} = v^2 \theta = -\frac{v^2}{r} \zeta''(vt - r),$$

e integrando rispetto al tempo

$$\varphi = -\frac{v}{r} \zeta'(vt - r).$$

A causa della simmetria sferica, le velocità delle particelle sono radiali, pertanto nel punto r e all'istante t , si ha

$$u(r, t) = \frac{\partial \varphi}{\partial r} = \frac{v}{r^2} \zeta'(vt - r) + \frac{v}{r} \zeta''(vt - r). \quad (79)$$

Indicando, come di consueto, lo spostamento con ψ , è anche

$$u(r, t) = \frac{\partial \psi}{\partial t} = \frac{v}{r^2} \zeta'(vt - r) + \frac{v}{r} \zeta''(vt - r),$$

dunque integrando rispetto al tempo:

$$\psi(r, t) = \frac{1}{r^2} \zeta(vt - r) + \frac{1}{r} \zeta'(vt - r). \quad (80)$$

L'onda sferica è costituita da due termini; uno decresce come $1/r^2$, l'altro come $1/r$. Il loro contributo dipende dalla distanza r ; per r sufficientemente piccolo $1/r$ è trascurabile rispetto a $1/r^2$ e, con buona approssimazione si ha

$$\psi(r, t) = \frac{1}{r^2} \zeta(vt - r).$$

Per r sufficientemente grande, al contrario, l'onda sferica è rappresentata dall'equazione:

$$\psi(r, t) = \frac{1}{r} \zeta'(vt - r),$$

e la sua ampiezza decresce in ragione inversa alla distanza r dalla sorgente. Per valutare con maggiore precisione la distanza r per la quale prevale l'uno o l'altro termine dell'onda, conviene prendere in considerazione le onde sferiche armoniche.

10.2. Onde sferiche armoniche

Nell'ipotesi che la soluzione $f(vt - r)$ sia armonica, la rarefazione, equazione (77), si può esprimere come

$$\theta = \frac{\theta_0}{r} \cos(\omega t - kr), \quad (81)$$

dove θ_0 è l'ampiezza. In conformità con la (78), si ha

$$\zeta'' = -r\theta = -\theta_0 \cos(\omega t - kr).$$

Integrando successivamente rispetto ad r , si ha

$$\zeta' = \frac{\theta_0}{k} \sin(\omega t - kr), \quad \zeta = \frac{\theta_0}{k^2} \cos(\omega t - kr).$$

Ponendo $A = \theta_0/k$, per la (80), si ottiene

$$\psi(r, t) = \frac{\zeta}{r^2} + \frac{\zeta'}{r} = \frac{A}{kr^2} \cos(\omega t - kr) + \frac{A}{r} \sin(\omega t - kr),$$

che scriviamo:

$$\psi(r, t) = \frac{A}{kr^2} \sin\left(\omega t - kr + \frac{\pi}{2}\right) + \frac{A}{r} \sin(\omega t - kr). \quad (82)$$

La somma di queste onde risulta

$$\psi(r, t) = \left(\frac{A}{r} \sqrt{\frac{\lambda^2}{4\pi^2 r^2} + 1} \right) \sin(\omega t - kr + \varphi), \quad (83)$$

in cui ampiezza e fase sono state ottenute per mezzo delle formule (7) e (8) del capitolo IV. La fase è data dalla relazione:

$$\tan \varphi = \frac{\lambda}{2\pi r}.$$

Al crescere di r , in pratica per r uguale ad alcune volte λ , φ tende a zero e l'ampiezza tende al valore A/r . Nella (82) sopravvive soltanto l'onda

$$\psi(r, t) = \frac{A}{r} \sin(\omega t - kr).$$

PRESSIONE

Ricordando la (14), si ha

$$\begin{aligned} \Delta p &= -K_S \theta = -K_S \frac{\theta_0}{r} \cos(\omega t - kr) \\ &= \frac{\Delta p_0}{r} \sin\left(\omega t - kr - \frac{\pi}{2}\right), \end{aligned} \quad (84)$$

dove $\Delta p_0 = K_S \theta_0$ è l'ampiezza di pressione. La pressione si propaga con una differenza di fase di $-\pi/2$ rispetto all'onda di spostamento, con ampiezza che decresce come $1/r$.

DENSITÀ MEDIA DI ENERGIA E INTENSITÀ

La densità media di energia, a distanze sufficientemente grandi rispetto a λ , è ancora data dalla (53) o dalla (54), ossia:

$$\bar{u} = \frac{1}{2} \rho \frac{A^2}{r^2} \omega^2 = \frac{1}{2} \frac{(\Delta p_0)^2}{r^2 \rho v^2}. \quad (85)$$

L'intensità risulta:

$$J = v \bar{u} = \frac{1}{2} \rho v \frac{A^2}{r^2} \omega^2 = \frac{1}{2} \frac{(\Delta p_0)^2}{r^2 \rho v}. \quad (86)$$

In un'onda sferica, la densità media di energia e l'intensità decrescono come $1/r^2$.

Se consideriamo le intensità corrispondenti alle distanze r_1 e r_2 :

$$J_1 = \frac{1}{2} \frac{(\Delta p_0)^2}{r_1^2 \rho v}, \quad J_2 = \frac{1}{2} \frac{(\Delta p_0)^2}{r_2^2 \rho v},$$

si ottiene

$$\frac{J_2}{J_1} = \frac{r_1^2}{r_2^2}.$$

Le intensità sono inversamente proporzionali ai quadrati delle distanze dalla sorgente. Viceversa la potenza che attraversa una qualsiasi superficie d'onda, è indipendente da r :

$$W = \frac{1}{2} 4\pi r^2 \frac{(\Delta p_0)^2}{r^2 \rho v} = \frac{2\pi}{\rho v} (\Delta p_0)^2. \quad (87)$$

Questo risultato è conseguenza del principio di conservazione dell'energia il quale, in assenza di effetti dissipativi, richiede che la

stessa potenza media attraversi qualsiasi superficie sferica, concentrica con la sorgente.

11. Effetto Doppler

È opportuno ricordare che la velocità di propagazione di un'onda è misurata rispetto al riferimento che si suppone fisso, in un mezzo in quiete.

L'effetto Doppler è un fenomeno che si manifesta quando sorgente e osservatore sono in moto relativo; la frequenza delle onde osservata risulta diversa dalla frequenza delle onde emesse dalla sorgente.

Sono utili per il proseguimento le seguenti considerazioni preliminari. Consideriamo una sorgente di onde sferiche S e un ricevitore R , entrambi in quiete; indichiamo con N il numero di onde emesse nell'intervallo di tempo Δt , sarà:

$$N = \nu_0 \Delta t,$$

dove ν_0 è la frequenza, ossia il numero di onde emesse nell'unità di tempo. Se v è la velocità di propagazione rispetto al mezzo, in quiete, tali onde sono comprese in uno spazio $v\Delta t$ e la lunghezza d'onda risulta

$$\lambda = \frac{v\Delta t}{N} = \frac{v\Delta t}{\nu_0 \Delta t} = \frac{v}{\nu_0} = \lambda_0.$$

La frequenza osservata dal ricevitore è il numero d'onde che lo oltrepassa nell'unità di tempo. Poiché il numero d'onde contenute nello spazio $v\Delta t$ è $v\Delta t/\lambda_0$, la frequenza osservata dal ricevitore è

$$\nu_R = \frac{v\Delta t/\lambda_0}{\Delta t} = \frac{v}{\lambda_0} = \nu_0.$$

Tutto ciò appare ovvio, ma è utile per il ragionamento che faremo.

11.1. Mezzo in moto rispetto alla sorgente e all'osservatore

Supponiamo che un vento soffi nella direzione che va dalla sorgente all'osservatore, detta u la velocità del vento, la velocità di propagazione rispetto alla sorgente e all'osservatore, fissi, è

$$v' = v + u.$$

La velocità del vento è evidentemente la velocità di trascinamento del mezzo. La lunghezza d'onda λ' osservata è maggiore di quella in assenza di vento, perché lo stesso numero di onde emesse, $N = \nu_0 \Delta t$, è contenuto nella lunghezza $v'\Delta t = (v + u)\Delta t$; infatti:

$$\lambda' = \frac{v'\Delta t}{N} = \frac{(v + u)\Delta t}{\nu_0 \Delta t} = \frac{v + u}{\nu_0} = \frac{v + u}{v} \lambda_0, \quad (88)$$

dove λ_0 è la lunghezza d'onda in assenza di vento. Però il numero di onde emesse nell'intervallo di tempo Δt , sono ora contenute nella lunghezza $(v + u)\Delta t$, ma il loro numero è sempre $\nu_0\Delta t$, pertanto la frequenza osservata è

$$\nu_R = \frac{v'}{\lambda'} = \frac{v + u}{v + u} \frac{v}{\lambda_0} = \nu_0, \quad (89)$$

uguale a quella emessa dalla sorgente. Mentre la lunghezza d'onda varia, la frequenza osservata non muta. L'effetto che si percepisce quando si ascolta il suono di una campana in presenza di vento è dovuto alle variazioni di densità del mezzo.

11.2. Sorgente in moto

Sia v_S la velocità della sorgente rispetto al mezzo. Davanti alla sorgente i fronti d'onda si infittiscono, mentre dietro sono più distanziati, figura 19. La sorgente nell'intervallo di tempo Δt emette $N = \nu_0\Delta t$ onde. Il primo fronte d'onda percorre la distanza $v\Delta t$, mentre la sorgente percorre il tratto $v_S\Delta t$.

Davanti alla sorgente gli N fronti d'onda occupano una lunghezza $v\Delta t - v_S\Delta t$, mentre dietro occupano la lunghezza $v\Delta t + v_S\Delta t$. La lunghezza d'onda davanti è

$$\lambda_1 = \frac{(v - v_S)\Delta t}{\nu_0\Delta t} = \frac{v}{\nu_0} \left(1 - \frac{v_S}{v}\right).$$

Quella dietro:

$$\lambda_2 = \frac{(v + v_S)\Delta t}{\nu_0\Delta t} = \frac{v}{\nu_0} \left(1 + \frac{v_S}{v}\right).$$

In una unica notazione si ha

$$\lambda' = \lambda_0 \left(1 \pm \frac{v_S}{v}\right).$$

Poiché la velocità di propagazione dipende dalle proprietà del mezzo, la frequenza osservata nel caso che la sorgente si avvicini al ricevitore, risulta:

$$\nu' = \frac{v}{\lambda_1} = \nu_0 \left(1 - \frac{v_S}{v}\right)^{-1}, \quad (\nu' > \nu_0). \quad (90)$$

Se la sorgente si allontana dal ricevitore:

$$\nu' = \frac{v}{\lambda_2} = \nu_0 \left(1 + \frac{v_S}{v}\right)^{-1}, \quad (\nu' < \nu_0). \quad (91)$$

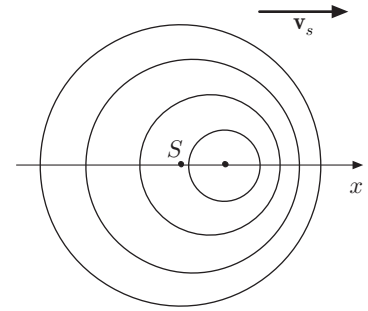


Fig. 18.19

11.3. Ricevitore in moto

Poichè la sorgente è ferma, la lunghezza d'onda delle onde emesse resta invariata. Se il ricevitore si avvicina alla sorgente con velocità v_R , oltrepassa un numero di fronti d'onda aggiuntivo $v_R \Delta t / \lambda_0$. Dunque il numero di onde complessivo incontrato risulta

$$N = \frac{(v + v_R) \Delta t}{\lambda_0},$$

la frequenza osservata sarà:

$$\nu' = \frac{N}{\Delta t} = \frac{v + v_R}{\lambda_0} = \frac{v + v_R}{v} \frac{v}{\lambda_0} = \nu_0 \left(1 + \frac{v_R}{v} \right). \quad (92)$$

Con ragionamento analogo, se il ricevitore si allontana dalla sorgente, si ottiene:

$$\nu' = \nu_0 \left(1 - \frac{v_R}{v} \right). \quad (93)$$

Se il mezzo è in moto con velocità u , la velocità di propagazione va sostituita con $v' = v \pm u$.

È interessante considerare le variazioni di frequenza Doppler quando la velocità della sorgente o del ricevitore è molto minore della velocità di propagazione. L'espressione (92), ricevitore che si avvicina alla sorgente, non è equivalente alla (90), sorgente che si avvicina al ricevitore. Quest'ultima si può scrivere

$$\nu' = \nu_0 \left(1 - \frac{v_R}{v} \right)^{-1} = \nu_0 \left(1 + \frac{v_S}{v} + \frac{v_S^2}{v^2} + \dots \right).$$

Tuttavia se $v_S \ll v$, è possibile trascurare i termini successivi a quello lineare e le due espressioni coincidono. In ogni caso, per decidere se il ricevitore si avvicina alla sorgente oppure la sorgente al ricevitore, occorre considerare il contributo del termine $(v_S/v)^2$.

Esempi

5. Una sorgente sonora emette un suono di frequenza $\nu_0 = 870 \text{ Hz}$, mentre un vento costante soffia alla velocità $u = 100 \text{ km/h}$ nel verso che va dalla sorgente al ricevitore. Si determini la frequenza percepita dal ricevitore fermo e quando si avvicina alla sorgente, alla velocità di $v_R = 50 \text{ km/h}$; (velocità del suono in aria $v = 340 \text{ m/s}$).

Se il ricevitore è fermo la frequenza percepita è la stessa; varia la lunghezza d'onda, equazione (88). Se il ricevitore si avvicina alla sorgente, dalla (92) si ha

$$\nu' = \nu_0 \left(1 + \frac{v_R}{v + u} \right) = 903 \text{ Hz}.$$

6. Una sorgente in moto con velocità $v_S = 7 \text{ m/s}$, emette un suono di frequenza $\nu_0 = 100 \text{ Hz}$, allontanandosi da un ricevitore fermo, e avvicinandosi ad una parete, ortogonale alla direzione del moto. Determinare la frequenza dei battimenti rivelati dal ricevitore.

Il ricevitore rivelerà l'onda emessa dalla sorgente che si allontana e l'onda riflessa dalla parete. La frequenza della prima onda osservata dal ricevitore,

per la (91), risulta

$$\nu' = \frac{v}{v + v_S} \nu_0 = 979 \text{ Hz}.$$

La parete costituisce, rispetto all'onda incidente, un ricevitore, perciò l'onda riflessa, per la (90), ha frequenza:

$$\nu'' = \frac{v}{v - v_S} \nu_0 = 1021 \text{ Hz}$$

La frequenza del battimento osservato dal ricevitore fisso risulta

$$\nu_B = \nu'' - \nu' = 421 \text{ Hz}$$

- ||| **7.** Una automobile viaggia a velocità costante u ed emette un segnale acustico di frequenza ν . Un ricevitore fermo misura una frequenza ν_1 quando l'automobile si avvicina e una frequenza ν_2 quando si allontana. Noto il rapporto ν_1/ν_2 , determinare la velocità dell'automobile; (velocità del suono 340 m/s).

Si ha

$$\nu_1 = \frac{v}{v + u} \nu_0, \quad \nu_2 = \frac{v}{v - u} \nu_0.$$

Dunque:

$$\frac{\nu_1}{\nu_2} = \frac{v + u}{v - u}, \quad u = \frac{\nu_1/\nu_2 - 1}{\nu_1/\nu_2 + 1} v = 23,8 \text{ m/s}.$$

.....

19. Interferenza e diffrazione

1. Sovrapposizione di onde armoniche piane

Si è riconosciuto che l'equazione di D'Alembert è soddisfatta da una combinazione lineare di soluzioni particolari. Ciò implica, entro i limiti di elasticità del mezzo, la validità del principio di sovrapposizione. La somma di due o più onde può dar luogo a fenomeni di *interferenza* che risultano distintamente osservabili se le onde sono armoniche e differiscono per una delle grandezze che le caratterizzano (fase, frequenza, direzione di propagazione).

1.1. Onde progressive

Consideriamo due onde armoniche piane progressive, di ampiezza e frequenza uguali, ma differenti per la fase, che si propagano in un mezzo indefinito:

$$\psi_1 = A \sin(\omega t - kx), \quad \psi_2 = A \sin(\omega t - kx + \varphi).$$

Supporremo inoltre, nel caso di onde trasversali, che la polarizzazione sia lineare e nella stessa direzione, in modo che la sovrapposizione delle onde sia data semplicemente dalla loro somma scalare:

$$\psi = \psi_1 + \psi_2 = A \sin(\omega t - kx) + A \sin(\omega t - kx + \varphi).$$

Applicando le formule di prostaferesi, si ottiene

$$\psi = \psi_1 + \psi_2 = 2A \sin\left(\omega t - kx + \frac{\varphi}{2}\right) \cos \frac{\varphi}{2}. \quad (1)$$

L'onda risultante è progressiva ma sfasata, rispetto alla prima, di $\varphi/2$. La sua ampiezza

$$2A \cos \frac{\varphi}{2},$$

dipende dalla fase. Essa è massima se $\varphi/2 = n\pi$, cioè per $\varphi = 2n\pi$; nulla se $\varphi/2 = (2n+1)\pi/2$, ossia per $\varphi = (2n+1)\pi$. In particolare lo sfasamento φ può riguardare la coordinata temporale, $\varphi = \omega\tau$, oppure quella spaziale, $\varphi = kd$. Il primo va attribuito alle onde piane emesse da due sorgenti nella stessa posizione, con un ritardo/anticipo iniziale τ ; il secondo va attribuito alle onde

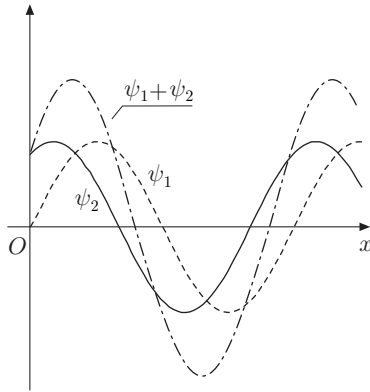


Fig. 19.1

piane emesse da due sorgenti sincrone, poste in punti differenti, distanti d . In figura 1 è mostrata l'interferenza di due onde siffatte emesse da sorgenti sincrone, poste alla distanza $d = \lambda/6$, lungo la direzione di propagazione.

Ampiezza e fase dell'onda risultante possono essere ricavate col metodo dei vettori ruotanti, particolarmente utile se le ampiezze sono diverse; formule (7)-IV e (8)-IV. L'intensità sarà espressa ancora dalla (53)-XVIII, dove si porrà il quadrato dell'ampiezza dell'onda risultante.

1.2. Onde progressive di frequenze diverse

Consideriamo, per semplicità, due onde armoniche piane, progressive, di ampiezze uguali ma di frequenze diverse, che si propagano in un mezzo indefinito:

$$\psi_1 = A \sin 2\pi\nu_1 \left(t - \frac{x}{v} \right), \quad \psi_2 = A \sin 2\pi\nu_2 \left(t - \frac{x}{v} \right).$$

La loro somma, come prima, dà luogo all'onda:

$$\psi = 2A \cos 2\pi \frac{\nu_1 - \nu_2}{2} \left(t - \frac{x}{v} \right) \sin 2\pi \frac{\nu_1 + \nu_2}{2} \left(t - \frac{x}{v} \right), \quad (2)$$

la quale si propaga con ampiezza $2A$ modulata dal termine

$$\cos 2\pi \frac{\nu_1 - \nu_2}{2} \left(t - \frac{x}{v} \right).$$

Se le frequenze sono quasi uguali, si ottengono battimenti di frequenza $\nu_1 - \nu_2$, come è stato descritto nel paragrafo 2-IV. In figura 2 sono mostrati, ad un certo istante, i profili di un'onda modulata al 100%, ampiezze delle onde componenti uguali, e di un'onda modulata al 50%.

La modulazione ha un ruolo fondamentale nelle telecomunicazioni. Infatti va tenuto presente che un'onda elettromagnetica di data frequenza, non contiene informazioni, a parte l'ampiezza, la frequenza e la fase che la caratterizzano. Solo la modulazione di tali grandezze, costituita da segnali elettrici prodotti da parole, musica, ecc..., opportunamente demodulate al ricevitore, permette la ricezione di comunicazioni.

È opportuno riscrivere la (2) nella forma

$$\psi = 2A \cos \frac{1}{2}[(\omega_1 - \omega_2)t - (k_1 - k_2)x] \sin \frac{1}{2}[(\omega_1 + \omega_2)t - (k_1 + k_2)x].$$

I rapporti

$$v_g = \frac{\omega_1 - \omega_2}{k_1 - k_2}, \quad v_f = \frac{\omega_1 + \omega_2}{k_1 + k_2}, \quad (3)$$

possono rispettivamente, essere interpretati come la velocità con cui si propaga l'involuppo delle ampiezze, chiamata *velocità di*

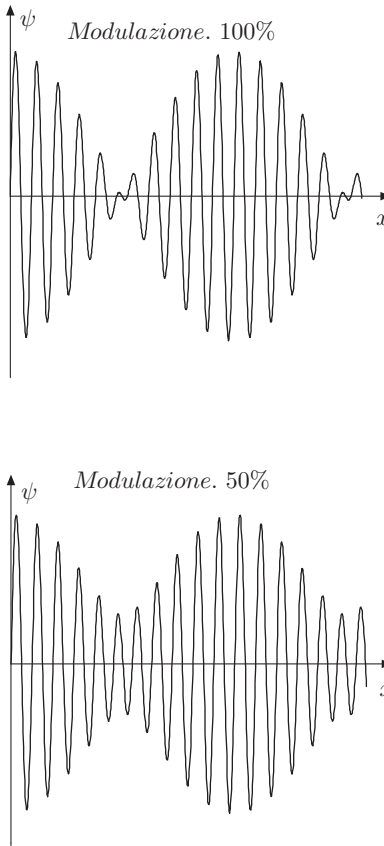


Fig. 19.2

gruppo, e la velocità con cui si propaga l'onda risultante, *velocità di fase*. Nel mezzo non dispersivo considerato, per il quale vale la (43)-XVIII, come si può facilmente verificare, queste velocità sono uguali. Risultano diverse, come vedremo, nei mezzi dispersivi.

1.3. Onde che si propagano in verso opposto

Consideriamo due onde armoniche piane, di ampiezza e frequenza uguali, che si propagano in verso opposto in un mezzo indefinito:

$$\psi_1 = A \sin(\omega t - kx), \quad \psi_2 = A \sin(\omega t + kx).$$

La loro somma, come nei casi precedenti, dà luogo all'onda

$$\psi = \psi_1 + \psi_2 = 2A \cos kx \sin \omega t. \quad (4)$$

In effetti la precedente non descrive un'onda, perché gli argomenti delle funzioni trigonometriche contengono separatamente la variabile spaziale e quella temporale, bensì una *vibrazione armonica stazionaria*.

L'ampiezza di vibrazione nel punto di ascissa x , è

$$A' = 2A \cos kx = 2A \cos \frac{2\pi}{\lambda} x, \quad (5)$$

funzione armonica di x . Essa è massima, in valore assoluto, per

$$kx = n\pi, \quad \Rightarrow \quad x = n \frac{\lambda}{2}, \quad (n = 0, 1, 2, \dots),$$

nulla per

$$kx = (2n + 1) \frac{\pi}{2}, \quad \Rightarrow \quad x = (2n + 1) \frac{\lambda}{4}, \quad (n = 0, 1, 2, \dots).$$

I punti di massima ampiezza si dicono *ventri di vibrazione*; i punti in cui la vibrazione è costantemente nulla, *nodi di vibrazione*. La distanza tra due ventri o tra due nodi è $\lambda/2$.

La vibrazione, all'istante t , è rappresentata dall'equazione

$$\psi = 2A \cos \frac{2\pi}{\lambda} x \sin \frac{2\pi}{T} t = 2A \cos kx \sin \omega t.$$

La configurazione da essa assunta agli istanti $t = T/8$, $t = T/4$, ..., è mostrata in figura 3. La velocità delle particelle del mezzo è data da

$$\dot{\psi} = 2A\omega \cos kx \cos \omega t;$$

la rarefazione o, nel caso di onde trasversali, la deformazione di scorrimento, dall'espressione:

$$\theta = \frac{\partial \psi}{\partial x} = -2Ak \sin kx \sin \omega t.$$

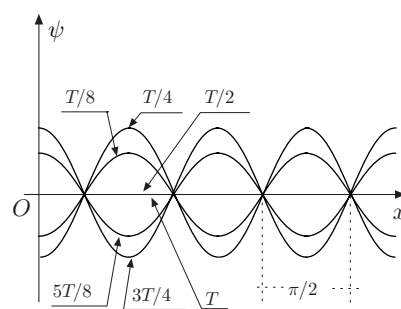


Fig. 19.3

Entrambe le grandezze risultano stazionarie; hanno segno opposto e sono in quadratura, cioè differiscono di $\pi/2$.

Il rapporto $\dot{\psi}/\theta$ assume tutti i valori possibili compresi tra $-\infty$ e $+\infty$. Questo comportamento è diverso rispetto a quello delle onde progressive, nelle quali velocità delle particelle e deformazione sono in fase o in opposizione di fase, mentre il loro rapporto è costante ed uguale a $\pm v$. In corrispondenza alla generica ascissa x , le ampiezze della velocità e della rarefazione sono:

$$\dot{\psi}_0 = 2A \cos kx, \quad \theta_0 = -2Ak \sin kx.$$

Nei punti in cui una si annulla, l'altra è massima e viceversa. La densità media di energia delle vibrazioni stazionarie prodotte da due onde di uguale ampiezza, è il doppio di quella che compete alle singole onde.

1.4. Vibrazioni stazionarie in sistemi finiti

È stata finora presa in considerazione la propagazione in un mezzo indefinito; nel caso di un sistema vibrante di dimensioni finite, bisogna tener conto delle condizioni al contorno che fissano velocità delle particelle, dilatazioni e variazioni di pressione e, per le onde trasversali, le deformazioni di scorrimento. In effetti l'osservazione sperimentale di tali fenomeni viene sempre condotta in mezzi limitati. Va premesso che una vibrazione stazionaria, come si può facilmente verificare, soddisfa l'equazione delle onde. In generale, se ψ ha una espressione della forma

$$\psi(x, t) = \chi(x) \sin \omega t, \quad (6)$$

in cui $\chi(x)$ rappresenta l'ampiezza, funzione di x , si ha:

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} = \frac{d^2 \chi}{dx^2} \sin \omega t, \quad \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = -\omega^2 \chi(x) \sin \omega t.$$

Sostituendo nell'equazione di D'Alembert,

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = v^2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2},$$

si ha

$$\frac{d^2 \chi}{dx^2} = -\frac{\omega^2}{v^2} \chi, \quad \Rightarrow \quad \frac{d^2 \chi}{dx^2} + k^2 \chi = 0.$$

La soluzione generale di questa equazione, come è noto, è

$$\chi(x) = A \sin kx + B \cos kx,$$

dove A e B sono costanti arbitrarie, determinate dalle condizioni al contorno. Sostituendo nella (6) si ottiene

$$\psi = (A \sin kx + B \cos kx) \sin \omega t. \quad (7)$$

CORDA FISSATA AGLI ESTREMI; TUBO CHIUSO

Indichiamo con l la lunghezza della corda o del tubo e assumiamo l'origine delle x in un estremo. Tenuto conto, paragrafo 7-XVIII, che per una discontinuità rigida, lo spostamento è nullo, ponendo nella (7) $x = 0$, si ha

$$\psi(0, t) = B \sin \omega t = 0;$$

perciò $B = 0$, e la (6) diventa

$$\psi = A \sin kx \sin \omega t.$$

Ponendo $x = l$ ed essendo $B = 0$, la (7) dà

$$\psi(l, t) = A \sin kl \sin \omega t = 0.$$

Poiché deve essere $A \neq 0$, altrimenti la vibrazione sarebbe ovunque nulla, si ha necessariamente:

$$kl = n\pi, \quad \Rightarrow \quad l = n \frac{\lambda}{2}, \quad \nu_n = n \frac{v}{2l},$$

con n intero, compreso lo zero. Questa relazione esprime la legge di Bernoulli:

le frequenze possibili di una corda tesa e fissata agli estremi sono discrete e multiple della fondamentale $\nu_1 = v/2l$.

Le frequenze di vibrazione multiple della fondamentale sono chiamate *armoniche superiori*. Le vibrazioni sono stazionarie; pertanto esistono n nodi, di cui due agli estremi, e $n - 1$ ventri, le cui distanze relative sono uguali a $\lambda/2$; in figura 4 è mostrata la vibrazione per $n = 4$.

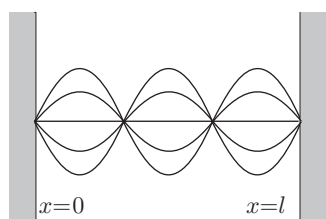


Fig. 19.4

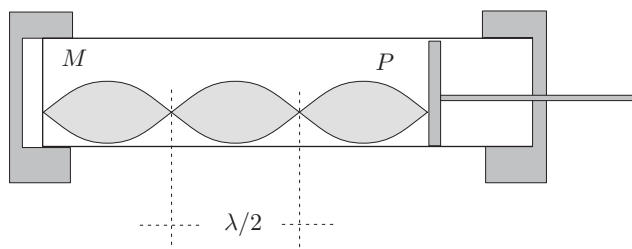


Fig. 19.5

Un dispositivo che permette di visualizzare vibrazioni stazionarie longitudinali è il tubo di Kundt, figura 5. Ad un estremo del tubo è disposta una membrana piana, posta in vibrazione mediante un oscillatore, di cui può essere variata la frequenza; si pensi per esempio ad un ricevitore telefonico. All'interno del tubo è posta della polvere di sughero. Stabilita una certa frequenza di eccitazione e regolata la lunghezza del tubo mediante il pistone mobile all'altro estremo, si osserva che la polvere si dispone secondo nodi e ventri di vibrazione. Poiché la distanza

tra due nodi o tra due ventri è $\lambda/2$, nota la frequenza, è possibile ricavare la velocità di propagazione o viceversa.

TUBO APERTO AI DUE ESTREMI

In questo caso l'eccitazione delle vibrazioni stazionarie può essere causata soffiando aria a una estremità, come in una canna d'organo. Ricordando le conclusioni conseguite a proposito di una discontinuità cedevole, alle estremità la pressione è costante, uguale a quella esterna, quindi la rarefazione è nulla $\partial\psi/\partial x = 0$. Dalla (7):

$$\frac{\partial\psi}{\partial x} = k(A \cos kx - B \sin kx) \sin \omega t. \quad (8)$$

Ponendo $x = 0$, si ha

$$\left(\frac{\partial\psi}{\partial x}\right)_0 = kA \sin \omega t = 0,$$

perciò $A = 0$. La (8) diventa:

$$\frac{\partial\psi}{\partial x} = -kB \sin kx \sin \omega t.$$

Ponendo $x = l$ si ha

$$\left(\frac{\partial\psi}{\partial x}\right)_l = -kB \sin kl \sin \omega t = 0.$$

Come nel caso precedente, dev'essere $B \neq 0$, altrimenti non si avrebbero vibrazioni, pertanto si deve avere

$$kl = n\pi, \quad \Rightarrow \quad l = n\frac{\lambda}{2}, \quad \nu_n = \frac{v}{2l}.$$

In figura 6 è mostrata la vibrazione fondamentale, $n = 1$.

TUBO APERTO AD UN SOLO ESTREMO

Supponendo che l'estremità aperta sia in $x = 0$, in questo punto dev'essere $\partial\psi/\partial x = 0$, mentre per $x = l$ si ha $\psi = 0$. La prima condizione richiede che sia $A = 0$, pertanto la (8) diventa

$$\psi = B \cos kx \sin \omega t.$$

La seconda condizione impone

$$\psi(l) = B \cos kl \sin \omega t = 0.$$

Questa relazione è soddisfatta per

$$kl = (2n + 1)\frac{\pi}{2}, \quad l = (2n + 1)\frac{\lambda}{4}, \quad (n = 0, 1, 2, \dots).$$

Le corrispondenti frequenze risultano

$$\nu_n = (2n + 1)\frac{v}{4l}.$$

Un tubo chiuso ad un estremo, può vibrare solo con armoniche dispari della fondamentale; in figura 7 è mostrata la vibrazione fondamentale.

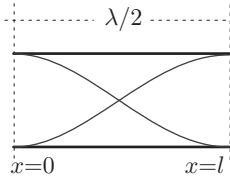


Fig. 19.6

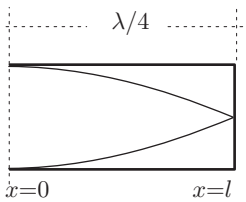


Fig. 19.7

2. Sviluppo in serie di Fourier

Si è detto che l'equazione di D'Alembert è lineare, quindi una qualsiasi combinazione lineare di soluzioni particolari è ancora soluzione dell'equazione delle onde. Viceversa una generica onda piana periodica, si può esprimere come somma di onde armoniche, per mezzo dell'analisi di Fourier. Poiché l'equazione dell'onda è funzione del tempo e dello spazio, tale analisi può essere effettuata per ognuna di tali variabili; il procedimento è analogo.

Più in generale, consideriamo una funzione periodica $f(x) = f(x + 2\pi)$, in cui 2π è il periodo; il teorema di Fourier afferma che la funzione può essere espressa per mezzo della serie:

$$f(t) = A_0/2 + A_1 \cos x + A_2 \cos 2x + \cdots + A_n \cos nx + \cdots \\ + B_1 \sin x + B_2 \sin 2x + \cdots + B_n \sin nx + \cdots \quad (9)$$

dove A_0 , A_n , B_n sono i coefficienti dello sviluppo e, per convenienza, si è introdotto il fattore $1/2$ nel termine costante. La (9) si può scrivere:

$$f(x) = \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos nx + \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin nx, \quad (-\pi \leq x \leq \pi) \quad (10)$$

Il termine A_0 va ricavato integrando la (9) tra $-\pi$ e π :

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx = \frac{A_0}{2} \int_{-\pi}^{\pi} dx + \cdots + A_n \int_{-\pi}^{\pi} \cos nx dx + \cdots \\ + B_n \int_{-\pi}^{\pi} \sin nx dx + \cdots$$

Si ottiene

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx = 2\pi \frac{A_0}{2}, \quad \Rightarrow \quad A_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx,$$

che rappresenta il valore medio della funzione. Gli altri termini sono nulli; infatti posto $nx = u$, si ha:

$$A_n \int_{-\pi}^{\pi} \cos nx dx = \frac{A_n}{n} \int_{-n\pi}^{n\pi} \cos u du = 0 \\ B_n \int_{-\pi}^{\pi} \sin nx dt = \frac{B_n}{n} \int_{-n\pi}^{n\pi} \sin u du = 0.$$

Per ricavare A_n , si moltiplichino ciascun termine della (9) per $\cos nx$ e si integri tra $-\pi$ e π :

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx dx = A_0 \int_{-\pi}^{\pi} \cos nx dx + \cdots \\ + A_m \int_{-\pi}^{\pi} \cos mx \cos nx dx + \cdots + A_n \int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 nx dx + \cdots \\ + B_m \int_{-\pi}^{\pi} \sin mx \cos nx dx + \cdots + B_n \int_{-\pi}^{\pi} \sin nx \cos nx dx + \cdots$$

Gli integrali del tipo

$$A_m \int_{-\pi}^{\pi} \cos m x \cos n x dx, \quad B_m \int_{-\pi}^{\pi} \sin m x \cos n x dx,$$

sono nulli. Infatti si ha

$$\begin{aligned} \cos(m x + n x) &= \cos m x \cos n x - \sin m x \sin n x \\ \cos(m x - n x) &= \cos m x \cos n x + \sin m x \sin n x. \end{aligned}$$

Sommando

$$\cos(m x + n x) + \cos(m x - n x) = 2 \cos m x \cos n x.$$

da cui:

$$\begin{aligned} \cos m x \cos n x &= \frac{1}{2} [\cos(m x + n x) + \cos(m x - n x)] \\ &= \frac{1}{2} [\cos(m + n) x + \cos(m - n) x]. \end{aligned}$$

Essendo m ed n interi, gli integrali di questi termini, tra $-\pi$ e π sono nulli. Analogamente

$$\begin{aligned} \sin(m x + n x) &= \sin m x \cos n x + \cos m x \sin n x \\ \sin(m x - n x) &= \sin m x \cos n x - \cos m x \sin n x. \end{aligned}$$

Come prima, si ha

$$\sin m x \cos n x = \frac{1}{2} [\sin(m + n) x + \sin(m - n) x],$$

i cui integrali tra i limiti $-\pi$ e π , per il motivo già detto, sono nulli. Resta dunque

$$\begin{aligned} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos n x dx &= A_n \int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 n x dx \\ &= \frac{A_n}{2} \int_{-\pi}^{\pi} (1 + \cos 2n x) dx = \pi A_n; \end{aligned}$$

pertanto:

$$A_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos n x dx.$$

Lo stesso procedimento vale per il calcolo di B_n ; si ottiene:

$$B_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin n x dx.$$

Infine:

$$\begin{aligned} A_0 &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx \\ A_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos n x dx \\ B_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin n x dx. \end{aligned} \tag{10}$$

Si osservi che includendo il valore $n = 0$, le (10) si scrivono:

$$A_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx \, dx, \quad B_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx \, dx.$$

Se f è funzione periodica del tempo, con periodo T , $f(t) = f(t+T)$, posto $x = \omega t$, dalle (10) si ricava:

$$\begin{aligned} A_0 &= \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) dt \\ A_n &= \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) \cos n\omega t \, dt \\ B_n &= \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) \sin n\omega t \, dt. \end{aligned} \quad (11)$$

Se $f(x)$ è periodica con periodo $2l$, ($-l \leq x \leq l$), dalle (10) si deduce:

$$\begin{aligned} A_0 &= \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) dx \\ A_n &= \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) \cos \frac{n\pi}{l} x \, dx \\ B_n &= \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) \sin \frac{n\pi}{l} x \, dx. \end{aligned} \quad (12)$$

Dalle (12) si deduce immediatamente che per una funzione periodica $f(x) = f(x + \lambda)$, dove λ è la lunghezza d'onda, l'espressione della serie diventa:

$$f(x) = \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos n k x + \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin n k x.$$

Con lo stesso metodo usato prima si ottengono i coefficienti:

$$\begin{aligned} A_0 &= \frac{2}{\lambda} \int_{-\lambda/2}^{\lambda/2} f(x) dx \\ A_n &= \frac{2}{\lambda} \int_{-\lambda/2}^{\lambda/2} f(x) \cos n k x \, dx \\ B_n &= \frac{2}{\lambda} \int_{-\lambda/2}^{\lambda/2} f(x) \sin n k x \, dx. \end{aligned} \quad (13)$$

SERIE DI FOURIER IN FORMA COMPLESSA

Spesso è più conveniente esprimere la serie di Fourier in forma complessa. Sostituendo nella (9) le formule di Eulero,

$$\cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}, \quad \sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i},$$

si ottiene

$$f(x) = C_0 + C_1 e^{ix} + C_{-1} e^{-ix} + \dots + C_n e^{inx} + C_{-n} e^{-inx} + \dots$$

dove

$$C_n = \frac{1}{2}(A_n - iB_n), \quad C_{-n} = \frac{1}{2}(A_n + iB_n).$$

Pertanto

$$f(x) = C_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} C_n e^{inx} + \sum_{n=1}^{+\infty} C_{-n} e^{-inx},$$

oppure, includendo il valore $n = 0$:

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} C_n e^{inx}. \quad (14)$$

Integrando ogni termine della (14) nell'intervallo $(-\pi \leq x \leq \pi)$, si ottiene

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx = C_0 \int_{-\pi}^{\pi} dx, \quad \Rightarrow \quad C_0 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx.$$

Infatti ogni integrale del tipo

$$\int_{-\pi}^{\pi} e^{\pm inx} dx,$$

è nullo. Moltiplicando ambo i membri della (14) per $\exp[-inx]$ e integrando ogni termine nell'intervallo $-\pi, \pi$, si ottiene

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-inx} dx = C_n \int_{-\pi}^{\pi} e^{inx} e^{-inx} dx,$$

da cui:

$$C_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-inx} dx. \quad (15)$$

Infatti gli integrali dei termini che contengono $\exp[\pm i(m \pm n)\omega t]$, con $m \neq n$, nell'intervallo considerato sono nulli.

L'analisi di Fourier può essere estesa a funzioni $f(x)$ non periodiche ritenendo che il periodo tenda ad infinito, come avviene per un impulso limitato in un intervallo Δx , all'esterno del quale l'ampiezza è costantemente nulla. Si pensi ad una sorgente che emette un'onda solo in un intervallo di tempo $\Delta t = \Delta x/v$. Senza entrare in dettagli che esulano dai nostri limiti, si dimostra che ora è necessario introdurre un insieme continuo di valori di ω o di k . Ciò è dovuto al fatto che le ampiezze dei termini di Fourier devono risultare nulli all'esterno dell'intervallo in cui l'impulso ha ampiezza diversa da zero. Considerando una funzione non periodica del tempo, le formule equivalenti alle (14) e (15) hanno la seguente forma:

$$f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} C(\omega) e^{i\omega t} d\omega, \quad (16)$$

con

$$C(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt. \quad (17)$$

$f(t)$ è chiamata trasformata di Fourier di $C(\omega)$, mentre $C(\omega)$ è la trasformata inversa di Fourier di $f(t)$.

Esempi

- ||| 1. Si consideri la funzione $f(t)$ periodica di figura 8, la quale assume i valori $f(t) = -A$, per $-T/2 < t < 0$ e $f(t) = A$, per $0 < t < T/2$.

Applicando le (11), si ottiene:

$$A_0 = \frac{2}{T} \left[- \int_{-T/2}^0 A dt + \int_0^{T/2} A dt \right] = 0;$$

infatti la funzione è simmetrica rispetto allo zero.

$$\begin{aligned} A_n &= \frac{2}{T} \left[- \int_{-T/2}^0 A \cos n\omega t dt + \int_0^{T/2} A \cos n\omega t dt \right] \\ &= \frac{2}{T} A \left\{ \left[-\frac{1}{n\omega} \sin n\omega t \right]_{-T/2}^0 + \left[\frac{1}{n\omega} \sin n\omega t \right]_0^{T/2} \right\} = 0. \end{aligned}$$

Lo sviluppo della funzione non contiene termini coseno. Per quanto riguarda i coefficienti B_n , si ha

$$\begin{aligned} B_n &= \frac{2}{T} \left[- \int_{-T/2}^0 A \sin n\omega t dt + \int_0^{T/2} A \sin n\omega t dt \right] \\ &= \frac{2}{T} A \left\{ \left[\frac{1}{n\omega} \cos n\omega t \right]_{-T/2}^0 - \left[\frac{1}{n\omega} \cos n\omega t \right]_0^{T/2} \right\} = \frac{2A}{n\pi} (1 - \cos n\pi). \end{aligned}$$

Si trova che per n pari i coefficienti sono nulli, mentre per n dispari si ha $B_n = 4A/n\pi$. Le ampiezze dei termini dello sviluppo decrescono al crescere di n . Lo sviluppo della funzione assegnata risulta

$$f(t) = 4 \frac{A}{\pi} \left(\sin \omega t + \frac{1}{3} \sin 3\omega t + \frac{1}{5} \sin 5\omega t + \dots \right).$$

In figura 9 sono mostrati i primi tre termini dello sviluppo. Si osserva l'esistenza delle sole armoniche dispari.

- ||| 2. *Analisi di Fourier di un impulso.*

L'impulso di figura 10 è rappresentato dalla funzione

$$f(t) = A \cos \omega_0 t,$$

diversa da zero nell'intervallo $-\Delta t/2, \Delta t/2$, nulla altrove. Esprimiamo tale funzione con l'esponenziale:

$$f(t) = A e^{i\omega_0 t}, \quad (18)$$

con la convenzione di considerare soltanto la sua parte reale. Poiché la (18) è diversa da zero nell'intervallo considerato, la (17) diventa

$$\begin{aligned} C(\omega) &= \frac{A}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\Delta t/2}^{\Delta t/2} e^{i(\omega_0 - \omega)t} dt \\ &= \frac{A}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{i(\omega_0 - \omega)} \left[e^{i(\omega_0 - \omega)t} \right]_{-\Delta t/2}^{\Delta t/2} \\ &= \frac{A}{\sqrt{2\pi}} \frac{2}{\omega_0 - \omega} \frac{e^{i(\omega_0 - \omega)\Delta t/2} - e^{-i(\omega_0 - \omega)\Delta t/2}}{2i} \\ &= \frac{2A}{\sqrt{2\pi}} \frac{\sin[(\omega_0 - \omega)\Delta t/2]}{\omega_0 - \omega}. \end{aligned} \quad (19)$$

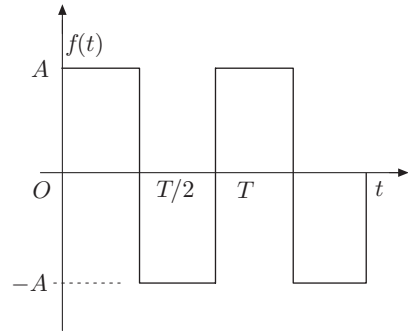


Fig. 19.8

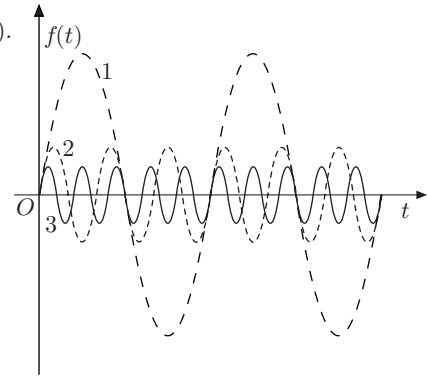


Fig. 19.9

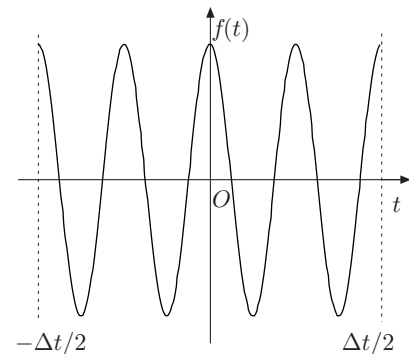


Fig. 19.10

Questa equazione fornisce l'ampiezza, densità spettrale, delle infinite componenti del segnale.

Sostituendo nella (16) si ottiene:

$$f(t) = \frac{A}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin[(\omega_0 - \omega)\Delta t/2]}{\omega_0 - \omega} e^{i\omega t} d\omega. \quad (20)$$

Essendo il segnale rappresentato dalla parte reale, la precedente diventa

$$f(t) = \frac{A}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin[(\omega_0 - \omega)\Delta t/2]}{\omega_0 - \omega} \cos \omega t d\omega. \quad (21)$$

La funzione ora stabilita è la trasformata di Fourier di $C(\omega)$; essa rappresenta il segnale per tutti i valori di t , compresi tra meno infinito e più infinito; in realtà essa è nulla all'esterno dell'intervallo $-\Delta t/2, \Delta t/2$. In altri termini la (21) descrive, mediante una funzione continua, un segnale finito.

La (19) può essere posta nella forma

$$C(\omega) = \frac{A}{\sqrt{2\pi}} \Delta t \frac{\sin(\Delta\omega\Delta t/2)}{(\Delta\omega\Delta t/2)},$$

oppure, se si considera il numero d'onde angolare:

$$C(k) = \frac{A}{\sqrt{2\pi}} \Delta x \frac{\sin(\Delta k\Delta x/2)}{(\Delta k\Delta x/2)}.$$

In figura 11 è mostrato l'andamento di $C(\omega)$; l'ampiezza è massima per $\Delta\omega \rightarrow 0$, ossia per $\omega \rightarrow \omega_0$ perché il rapporto tra il seno e l'argomento tende ad uno. Inoltre poiché il seno non può essere maggiore di uno, quando ω aumenta in valore assoluto, $C(\omega)$ diminuisce con andamento oscillatorio e si annulla nei punti

$$\omega = \omega_0 - \frac{2n\pi}{T_0}, \quad (n = \pm 1, \pm 2, \dots)$$

Si riconosce che il campo di valori per i quali $C(\omega)$ è maggiore del 50% del massimo centrale, è dato approssimativamente dalla condizione

$$\left| \frac{1}{2} \Delta\omega\Delta t \right| < \frac{\pi}{2}, \quad -\frac{\pi}{\Delta t} < \Delta\omega < \frac{\pi}{\Delta t}.$$

Dunque le frequenze angolari le cui ampiezze non sono trascurabili, sono quelli che si trovano nell'intorno di ω_0 per i quali è soddisfatta la condizione

$$\Delta\omega\Delta t \approx 2\pi.$$

Questa relazione mostra che quanto più breve è la durata dell'impulso, tanto più grande è il campo di frequenze necessario per rappresentarlo accuratamente.

Analoga relazione si ottiene tra la lunghezza dell'impulso e l'intervallo dei numeri d'onda:

$$\Delta x \Delta k \approx 2\pi.$$

Dalle precedenti relazioni si deduce inoltre che per Δt molto grande, $\Delta\omega$ tende a zero; ossia il segnale diventa armonico e si estende tra $-\infty$ e $+\infty$; in esso è presente una sola frequenza.

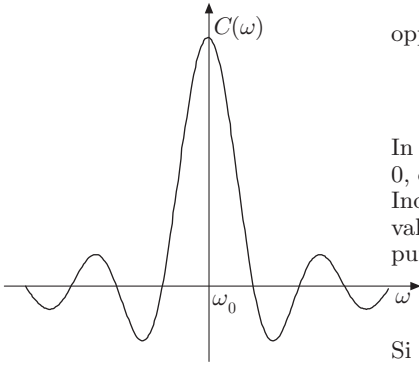


Fig. 19.11

3. Soluzione dell'equazione di D'Alembert con assegnate condizioni al contorno; piccole vibrazioni di un filo fissato agli estremi

Vogliamo ora studiare con maggior dettaglio le vibrazioni stazionarie di un filo limitato. Si consideri un filo flessibile e inestendibile di lunghezza l , soggetto alla sola tensione \mathbf{T} di modulo

costante, i cui estremi siano fissati a supporti rigidi e si assuma come origine del riferimento l'estremo di ascissa $x = 0$. Le forze applicate agli estremi hanno valore invariabile, così come avviene in uno strumento musicale a corde.

Per determinare il moto del filo occorre integrare l'equazione di D'Alembert, con le condizioni al contorno:

$$x = 0, \quad \psi(0) = 0; \quad x = l, \quad \psi(l) = 0; \quad (t \geq 0),$$

che impongono spostamento sempre nullo nei punti in cui è fissato il filo. A queste vanno aggiunte le condizioni iniziali

$$\psi = \psi(x), \quad \frac{\partial \psi}{\partial t} = \dot{\psi}(x); \quad (t = 0, \quad 0 \leq x \leq l),$$

ossia posizione e velocità di tutti i punti del filo per $t = 0$. Le funzioni ψ e $\dot{\psi}$ devono soddisfare le condizioni al contorno imposte:

$$\psi(0) = \psi(l) = 0, \quad \dot{\psi}(0) = \dot{\psi}(l) = 0.$$

Sotto queste condizioni, è possibile trovare integrali particolari dell'equazione di D'Alembert del tipo

$$\psi = \chi(x)\zeta(t).$$

Indicando con gli apici le derivate prime e seconde rispetto a x e rispetto a t e sostituendo nella

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = v^2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2},$$

si ottiene

$$\frac{\chi''}{\chi} = \frac{1}{v^2} \frac{\zeta''}{\zeta}.$$

Questa equazione sarà soddisfatta ponendo

$$\frac{\chi''}{\chi} = -k^2, \quad \frac{1}{v^2} \frac{\zeta''}{\zeta} = -k^2.$$

dove k è una costante, a priori, arbitraria. Poste le precedenti nella forma

$$\chi'' + k^2 \chi = 0, \quad \zeta'' + v^2 k^2 \zeta = 0,$$

si riconosce che gli integrali generali sono:

$$\chi = A \cos kx + B \sin kx, \quad \zeta = C \cos vkt + D \sin vkt,$$

dove A, B, C, D sono costanti e k assume il significato di numero d'onda angolare.

Imponendo a ψ le condizioni al contorno fissate, si ottiene

$$A = 0, \quad A \cos kl + B \sin kl = 0, \quad \Rightarrow \quad B \sin kl = 0.$$

Poiché ψ non può essere identicamente nulla e la costante B dev'essere diversa da zero, si deduce che kl deve essere un multiplo intero di π , cioè

$$k = \frac{n\pi}{l}.$$

Pertanto χ deve avere la forma

$$\chi = B \sin \frac{n\pi}{l} x.$$

Ponendo la costante B uguale ad uno, in corrispondenza ad ogni intero n si ottiene una soluzione dell'equazione di D'Alembert del tipo $\psi_n = \chi_n(x)\zeta_n(t)$:

$$\psi_n = \sin \frac{n\pi}{l} x \left(C_n \cos \frac{vn\pi}{l} t + D_n \sin \frac{vn\pi}{l} t \right), \quad (22)$$

oppure, ponendo $C_n = A_n \cos \gamma$ e $D_n = -A_n \sin \gamma$,

$$\psi_n = A_n \sin \frac{n\pi}{l} x \cos \left(\frac{vn\pi}{l} t + \gamma \right). \quad (23)$$

A causa della linearità dell'equazione di D'Alembert, la serie formata da tali soluzioni

$$\psi = \sum_{n=1}^{\infty} \psi_n = \sum_{n=1}^{\infty} \sin \frac{n\pi}{l} x \left(C_n \cos \frac{vn\pi}{l} t + D_n \sin \frac{vn\pi}{l} t \right), \quad (24)$$

è soluzione di tale equazione.

Le vibrazioni espresse dalle (22) e (23) sono *vibrazioni stazionarie*. Poiché inoltre devono essere soddisfatte le condizioni al contorno, la lunghezza del filo deve contenere un numero intero di semilunghezze d'onda

$$l = n \frac{\lambda_n}{2}, \quad \lambda_n = \frac{2l}{n}.$$

Inoltre poiché per qualunque n dev'essere $v = \lambda_n \nu_n$, si trae che le frequenze possibili sono

$$\nu_n = n \frac{v}{2l}.$$

Pertanto la (23) diventa

$$\psi_n = A_n \sin \frac{2\pi}{\lambda_n} x \cos(2\pi \nu_n t + \gamma).$$

Il moto di ogni punto del filo è armonico con frequenza ν_n , fase iniziale γ e ampiezza

$$A_n \sin \frac{2\pi}{\lambda_n} x,$$

funzione armonica di x . L'ampiezza si annulla per

$$\frac{2\pi}{\lambda_n} x = n\pi, \quad x = n \frac{\lambda_n}{2}, \quad (n = 0, 1, 2, \dots).$$

Oppure, essendo $l/n = \lambda_n/2$, per

$$x = 0, \quad x = \frac{l}{n}, \quad x = \frac{2l}{n}, \quad \dots \quad x = \frac{nl}{n} = l.$$

Tali punti sono sempre in quiete e sono i *nodi* di vibrazione. La distanza tra un nodo e l'altro è ovviamente $\lambda_n/2$. I punti in cui è massima l'ampiezza di vibrazione, ventri di vibrazione, si hanno per

$$\frac{2\pi}{\lambda_n}x = (2n+1)\frac{\pi}{2}, \quad x = (2n+1)\frac{\lambda_n}{4}.$$

Per $n = 1$ si ha la soluzione ψ_1 , più semplice, corrispondente alla vibrazione fondamentale, di frequenza

$$\nu_1 = \frac{v}{2l} = \frac{1}{2l} \sqrt{\frac{T}{\mu}},$$

e lunghezza d'onda

$$\lambda_1 = 2l.$$

Essa presenta due nodi in $x = 0$ e $x = l$, e un ventre nel punto $x = l/2$. Per $n = 2$ si ha la soluzione ψ_2 , detta *prima armonica*, corrispondente alla frequenza $\nu_2 = 2\nu_1$ e alla lunghezza d'onda $\lambda_2 = \lambda_1/2$. Essa presenta tre nodi, nei punti $x = 0$, $x = l/2$, $x = l$, e due ventri nei punti $x = l/4$, $x = 3l/4$. Per n qualsiasi, armoniche superiori, si hanno n nodi e $n - 1$ ventri. La vibrazione, per $n = 4$, è mostrata in figura 4. In corrispondenza ad ogni armonica si ha una frequenza che, nel campo di udibilità, corrisponde all'altezza del suono, e una intensità proporzionale ad A_n^2 .

Per trovare le costanti C_n e D_n si possono utilizzare le condizioni iniziali fissate. Per $t = 0$, dalla (24) si ha

$$\begin{aligned} \psi(x) &= \sum_{n=1}^{\infty} C_n \sin \frac{n\pi}{l} x, \\ \frac{\partial \psi}{\partial t} &= \sum_{n=1}^{\infty} D_n \frac{n\pi v}{l} \sin \frac{n\pi}{l} x. \end{aligned} \quad (0 \leq x \leq l)$$

Per mezzo delle (13) si ottiene

$$C_n = \frac{2}{l} \int_0^l \psi(x) \sin \frac{n\pi}{l} x dx, \quad (25)$$

$$D_n = \frac{2}{n\pi v} \int_0^l \frac{\partial \psi}{\partial t} \sin \frac{n\pi}{l} x dx. \quad (26)$$

Le condizioni iniziali caratterizzano le intensità delle armoniche che compongono la vibrazione del filo. Nel campo di udibilità esse determinano l'intensità del suono e il suo *timbro*, dato dai rapporti delle intensità delle armoniche con l'intensità della fondamentale.

Esempi

Calcolo dei coefficienti C_n .

III 3. *Corda pizzicata.*

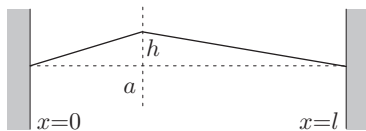


Fig. 19.12

Una corda tesa di lunghezza l , fissata agli estremi, viene spostata di h dalla posizione di equilibrio, orizzontale, nel punto di ascissa a e quindi abbandonata con velocità iniziale nulla figura 12. Le condizioni al contorno sono

$$\begin{aligned} \frac{\partial \psi}{\partial t} &= 0, & \psi(x) &= \frac{h}{a}x & (0 < x < a); \\ \psi(x) &= \frac{l-x}{l-a}h, & & & (a < x < l). \end{aligned}$$

I coefficienti D_n sono nulli, mentre

$$C_n = \frac{2}{l} \frac{h}{a} \int_0^a x \sin \frac{n\pi}{l} x dx + \frac{2}{l} \frac{h}{l-a} \int_a^l (l-x) \sin \frac{n\pi}{l} x dx.$$

Integrando per parti, si ottiene:

$$\begin{aligned} \int_0^a x \sin \frac{n\pi}{l} x dx &= \left[-\frac{lx}{n\pi} \cos \frac{n\pi}{l} x \right]_0^a + \frac{l}{n\pi} \int_0^a \cos \frac{n\pi}{l} x dx \\ &= -\frac{la}{n\pi} \cos \frac{n\pi}{l} a + \frac{l^2}{n^2 \pi^2} \sin \frac{n\pi}{l} a. \end{aligned}$$

Analogamente:

$$\begin{aligned} \int_a^l (l-x) \sin \frac{n\pi}{l} x dx &= \left[-\frac{l(l-x)}{n\pi} \cos \frac{n\pi}{l} x \right]_a^l + \frac{l}{n\pi} \int_a^l \cos \frac{n\pi}{l} x dx \\ &= \frac{l(l-a)}{n\pi} \cos \frac{n\pi}{l} a + \frac{l^2}{n^2 \pi^2} \sin \frac{n\pi}{l} a. \end{aligned}$$

Pertanto

$$C_n = 2h \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{l-a} \right) \frac{l}{n^2 \pi^2} \sin \frac{n\pi}{l} a = \frac{2hl^2}{a(l-a)\pi^2} \frac{1}{n^2} \sin \frac{n\pi}{l} a.$$

Tale coefficiente rappresenta l'ampiezza di oscillazione del ventre dell'armonica di ordine n ; si osservi che essa dipenda da $1/n^2$. Si capisce qualitativamente che gli strumenti musicali come l'arpa, la chitarra,... hanno un timbro particolarmente dolce.

Infine la vibrazione della corda è data da

$$\psi(x) = \frac{2hl^2}{a(l-a)\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \sin \frac{n\pi}{l} a \sin \frac{n\pi}{l} x \cos \frac{n\pi v}{l} t.$$

III 4. *Corda percossa.*

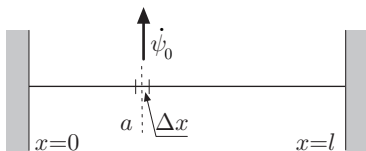


Fig. 19.13

Supponiamo che un elemento Δx della corda, distante a dall'origine, venga eccitato per mezzo di una percussione istantanea, che ha l'effetto di porre in vibrazione l'elemento di corda con una velocità iniziale $\dot{\psi}_0$ diversa da zero, figura 13. Le condizioni al contorno sono: spostamento nullo per tutti i valori di x , velocità $\dot{\psi}_0$ nell'intervallo Δx , nulla altrove.

Per quanto detto prima, i coefficienti della serie di Fourier risultano:

$$C_n = 0, \quad D_n = \frac{2}{n\pi v} \int_0^l \frac{\partial \psi}{\partial t} \sin \frac{n\pi}{l} x dx.$$

Ma l'integrale è nullo in tutto l'intervallo, $\partial \psi / \partial t = 0$, tranne in corrispondenza all'elemento Δx . Perciò il suo valore è semplicemente

$$D_n = \frac{2\dot{\psi}_0}{n\pi v} \Delta x \sin \frac{n\pi}{l} a.$$

La vibrazione complessiva della corda risulta

$$\psi(x) = \frac{2\dot{\psi}_0 \Delta x}{\pi v} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \sin \frac{n\pi}{l} a \sin \frac{n\pi}{l} x \sin \frac{n\pi v}{l} t.$$

Questa volta l'ampiezza delle armoniche decresce come $1/n$, dunque la vibrazione è più ricca di armoniche. Senza entrare nei dettagli che in realtà possono modificare in qualche modo il risultato conseguito, si può concludere che il timbro di uno strumento musicale, come il pianoforte, è più squillante.

.....

4. Vibrazioni di una membrana rettangolare fissata al contorno

Consideriamo una membrana omogenea, rettangolare di lati a e b , fissata al contorno in modo che la tensione T per unità di lunghezza, applicata al contorno, abbia valore costante, figura 14. In questo caso, lo spostamento ψ di ogni elemento della membrana è ortogonale al piano x - y , che la contiene. Detta σ la densità areica e T la tensione, l'equazione di D'Alembert (12)-XVIII, in due dimensioni, si scrive

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = \frac{T}{\sigma} \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} \right), \quad (27)$$

dove la velocità di propagazione è data da

$$v = \sqrt{\frac{T}{\sigma}}.$$

Le condizioni al contorno impongono $\psi = 0$ per $t \geq 0$, nei punti dei segmenti che delimitano la membrana, ossia

$$\begin{aligned} x = 0, & \quad x = a; & (0 \leq y \leq b) \\ y = 0, & \quad y = b; & (0 \leq x \leq a). \end{aligned}$$

Le condizioni iniziali impongono:

$$t = 0, \quad \psi = \psi(x, y), \quad \frac{\partial \psi}{\partial t} = \dot{\psi}(x, y),$$

vale a dire posizione e velocità iniziali per $t = 0$. Soluzioni particolari della (27), soddisfacenti alle condizioni assegnate, sono del tipo

$$\psi = \xi(x)\chi(y)\zeta(t).$$

Sostituendo nella (27) si ottiene

$$\frac{\zeta''}{\zeta} - v^2 \left(\frac{\xi''}{\xi} + \frac{\chi''}{\chi} \right) = 0, \quad (28)$$

alla quale si soddisfa ponendo

$$\frac{\zeta''}{\zeta} = -\omega^2, \quad \frac{\xi''}{\xi} = -k_x^2, \quad \frac{\chi''}{\chi} = -k_y^2, \quad (29)$$

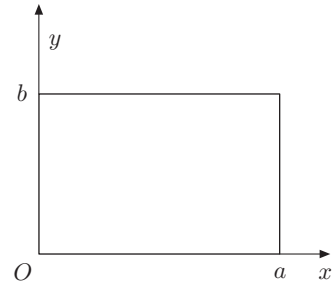


Fig. 19.14

con ω^2 , k_x^2 , k_y^2 , costanti legate dalla relazione

$$k_x^2 + k_y^2 = \frac{\omega^2}{v^2}.$$

Gli integrali generali delle (29) sono notoriamente:

$$\begin{aligned}\xi &= A_1 \cos k_x x + A_2 \sin k_x x \\ \chi &= B_1 \cos k_y y + B_2 \sin k_y y \\ \zeta &= C_1 \cos \omega t + C_2 \sin \omega t,\end{aligned}$$

dove A_1 , A_2 , B_1 , B_2 , C_1 , C_2 sono costanti da determinare. Impo-
nendo alla funzione $\xi(x)\chi(y)\zeta(t)$, le condizioni al contorno, si
deduce:

$$A_1 = B_1 = 0, \quad k_x a = m\pi, \quad k_y b = n\pi,$$

essendo m ed n interi. Pertanto:

$$k_x = m\frac{\pi}{a}, \quad k_y = n\frac{\pi}{b}, \quad \omega = \pi v \sqrt{\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2}}. \quad (30)$$

In corrispondenza ad ogni coppia di interi m ed n , si ha una solu-
zione ψ che ha la seguente forma

$$\psi_{mn} = \sin m\frac{\pi}{a}x \sin n\frac{\pi}{b}y (A_{mn} \cos \omega_{mn}t + B_{mn} \sin \omega_{mn}t).$$

La serie:

$$\psi = \sum_{m,n=1}^{\infty} \sin m\frac{\pi}{a}x \sin n\frac{\pi}{b}y (A_{mn} \cos \omega_{mn}t + B_{mn} \sin \omega_{mn}t),$$

data la linearità dell'equazione di D'Alembert, è soluzione della
(27).

Come nel caso della corda fissata agli estremi, la soluzione
trovata è somma di infinite soluzioni semplici, corrispondenti a
vibrazioni stazionarie. Le frequenze possibili sono date da

$$\nu_{mn} = \frac{v}{2} \sqrt{\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2}}.$$

Si hanno dunque rette nodali di equazioni

$$\begin{array}{lll} x = 0 & x = \frac{a}{m} & x = \frac{2a}{m}, \dots \\ y = 0 & y = \frac{b}{n} & y = \frac{2b}{n}, \dots \end{array}$$

e ventri di vibrazione nei centri dei rettangoli delimitati dalle rette
precedenti. Per $m = 1$ e $n = 1$ si ha la frequenza fondamentale:

$$\nu_{11} = \frac{v}{2} \sqrt{\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}} = \sqrt{\frac{T}{4\sigma} \left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} \right)}.$$

Le altre frequenze, a differenza di quanto avviene per la corda, non sono multiple della fondamentale, poichè lo stesso valore della frequenza si può ottenere per varie combinazioni di m ed n ; tali valori si dicono *degeneri*.

Il calcolo delle costanti A e B si esegue tenendo conto delle condizioni iniziali, che diventano:

$$\begin{aligned}\psi(x, y) &= \sum_{m,n=1}^{\infty} A_{mn} \sin m \frac{\pi}{a} x \sin n \frac{\pi}{b} y \\ \dot{\psi} &= \sum_{m,n=1}^{\infty} \omega_{mn} A_{mn} \sin m \frac{\pi}{a} x \sin n \frac{\pi}{b} y.\end{aligned}$$

I coefficienti A_{mn} e $\omega_{mn} B_{mn}$ degli sviluppi in doppia serie di Fourier, si calcolano nel modo già visto. Data la ricchezza di armoniche presenti, dovuta al fatto che le frequenze dipendono da coppie di numeri interi, vi è la possibilità, eccitando convenientemente la membrana, di riprodurre quasi ogni suono. In virtù di questa proprietà, non goduta dalle corde, le membrane trovano un ampio impiego acustico, nei microfoni, negli altoparlanti e la collocazione naturale nell'orecchio umano.

Il problema relativo ad una membrana circolare è matematicamente più complesso; si trova ancora che le frequenze possibili sono discrete. La simmetria suggerisce che le linee nodali e antinodali sono circonferenze e linee radiali.

5. Vibrazioni di un parallelepipedo rettangolo fissato al contorno

In maniera analoga a quanto avviene per la membrana, le vibrazioni stazionarie di un parallelepipedo di spigoli a , b , c , risultano discrete, qualora si ricerchino soluzioni del tipo

$$\psi = \xi(x)\chi(y)\eta(z)\zeta(t),$$

che soddisfano all'equazione di D'Alembert:

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = v^2 \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} \right),$$

dove ψ è lo spostamento dell'onda che si propaga in una direzione generica rispetto al riferimento costituito dagli spigoli del parallelepipedo. Con un procedimento analogo a quello descritto per la membrana, si trova che le frequenze possibili sono

$$\nu_{lmn} = \frac{v}{2} \sqrt{\frac{l^2}{a^2} + \frac{m^2}{b^2} + \frac{n^2}{c^2}}. \quad (31)$$

Anche in questo caso le frequenze delle armoniche superiori alla fondamentale sono degeneri, poichè la stessa frequenza può essere ottenuta mediante combinazioni diverse degli interi l, m, n . Il

parallelepipedo considerato costituisce un risuonatore per le frequenze permesse, come altresì accade per una sfera o un cilindro. In tali casi il problema risulta matematicamente più complesso, ma le frequenze permesse risultano in ogni caso discrete. In particolare si possono studiare cavità adatte, in acustica, all'analisi del suono. Cavità risonanti per le onde elettromagnetiche, con pareti perfettamente riflettenti, sono usate per immagazzinare energia elettromagnetica, per l'analisi o il controllo delle frequenze di circuiti oscillanti e in moltissime altre applicazioni.

|| 5.1. Numero dei modi di vibrazione con frequenza minore o uguale a ν

Questo problema è molto importante nell'analisi dei modi di oscillazione delle cavità risonanti e nelle oscillazioni dei reticoli atomici, in Fisica della Materia. Supponiamo, per semplicità, che il sistema sia costituito da un cubo di un mezzo continuo isotropo di lato a ; le frequenze possibili sono

$$\nu = \frac{v}{2a} \sqrt{l^2 + m^2 + n^2};$$

da cui si ottiene

$$l^2 + m^2 + n^2 = \frac{4a^2\nu^2}{v^2}.$$

In una terna cartesiana, sugli assi della quale sono riportati gli interi l, m, n , ogni frequenza è rappresentata da un punto che costituisce il vertice di un cubo elementare di lato $v/2a$ e volume $(v/2a)^3$. Nello spazio l, m, n , la relazione precedente rappresenta una sfera di raggio $2a\nu/v$, entro cui sono contenuti i cubi suddetti; pertanto il problema consiste nel trovare le combinazioni possibili dei numeri l, m, n , che soddisfino la disuguaglianza:

$$l^2 + m^2 + n^2 \leq \frac{4a^2\nu^2}{v^2}.$$

Se i numeri l, m, n sono sufficientemente grandi, l'insieme discreto dei cubetti può essere approssimato ad un continuo ed essendo gli interi l, m, n positivi, il numero dei modi di vibrazione cercato sarà contenuto nell'ottante della sfera suddetta; dunque il numero dei modi di vibrazione di frequenza minore o uguale a ν , è dato da

$$N_\nu = \frac{1}{8} \frac{4}{3} \pi \left(\frac{2a\nu}{v} \right)^3 = \frac{4\pi\nu^3 a^3}{3v^3}.$$

Poiché il volume della cavità è a^3 , il numero dei modi per unità di volume è

$$n_\nu = \frac{4\pi\nu^3}{3v^3}.$$

Questa espressione è valida per i modi longitudinali. Se le onde sono trasversali, si deve tenere presente che esistono due possibili stati di polarizzazione, perciò in questo caso si avrà

$$n_\nu = \frac{8\pi\nu^3}{3v^3}.$$

Il numero dei modi compresi nell'intervallo infinitesimo $d\nu$, si ricava differenziando le espressioni precedenti; così per i modi longitudinali, si avrà

$$dn_\nu = \frac{8\pi\nu^2}{v^3} d\nu.$$

6. Interferenza di onde sferiche

Consideriamo due onde sferiche sincrone, di uguale frequenza, emesse dalle sorgenti puntiformi S_1 , S_2 , poste alla distanza a . L'interferenza in un punto dello spazio distante r_1 e r_2 dalle sorgenti, come per le onde piane, è descritta dalla somma delle due onde in quel punto. Supporremo che tale somma possa essere effettuata scalarmente, ossia che i vettori spostamento ψ_1 e ψ_2 siano paralleli, come accade per le onde trasversali polarizzate linearmente e nella stessa direzione, mentre se le onde sono longitudinali assumeremo che la propagazione avvenga nella stessa direzione, oppure che r_1 e r_2 siano molto grandi rispetto alla distanza a tra le sorgenti, figura 15.

Sotto queste ipotesi, dette $A_1 = A_0/r_1$ e $A_2 = A_0/r_2$ le ampiezze delle onde in P , dove A_0 è l'ampiezza ad una distanza prefissata dalla sorgente, l'onda risultante sarà

$$\psi = A_1 \sin(\omega t - kr_1) + A_2 \sin(\omega t - kr_2).$$

Essendo le sorgenti sincrone, le quantità kr_1 e kr_2 hanno il ruolo di fasi iniziali φ_1 , φ_2 nel punto considerato; dunque la differenza di fase risulta

$$\varphi = kr_1 - kr_2 = \frac{2\pi}{\lambda}(r_1 - r_2).$$

Ricordando le formule (7)-IV e (8)-IV, l'ampiezza dell'onda risultante è data da:

$$A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2 \cos \varphi}. \quad (32)$$

Pertanto essa assume valori compresi tra

$$A_1 + A_2, \quad (\cos \varphi = 1, \Rightarrow \varphi = 2n\pi)$$

e

$$|A_1 - A_2|, \quad [\cos \varphi = -1, \Rightarrow \varphi = (2n + 1)\pi]$$

dove n un intero positivo o negativo. Nel primo caso si ha un rinforzo dell'onda risultante, o *interferenza costruttiva*, mentre nel secondo caso si ha la massima attenuazione, *interferenza distruttiva*. Pertanto nei due casi si ha

$$\frac{2\pi}{\lambda}(r_1 - r_2) = 2n\pi, \quad \frac{2\pi}{\lambda}(r_1 - r_2) = (2n + 1)\pi,$$

dalle quali si ricava

$$(r_1 - r_2) = n\lambda, \quad (r_1 - r_2) = (2n + 1)\frac{\lambda}{2}.$$

L'equazione $r_1 - r_2 = \text{cost}$, definisce iperboloidi di rotazione attorno all'asse congiungente le due sorgenti, con fuochi in S_1 e S_2 . Le intersezioni con un piano passante per tale asse sono le

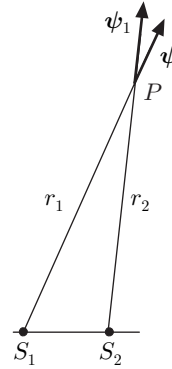


Fig. 19.15

iperboli di figura 16. Sulle superfici degli iperboloidi di equazione

$$r_1 - r_2 = \pm\lambda, \pm 2\lambda, \dots$$

le due onde interferiscono costruttivamente. Tali superfici sono dette *superfici ventrali o antinodali*. Sugli iperboloidi di equazione

$$r_1 - r_2 = \pm\frac{1}{2}\lambda, \pm\frac{3}{2}\lambda, \dots$$

le onde interferiscono distruttivamente. Tali superfici sono dette *superfici nodali*.

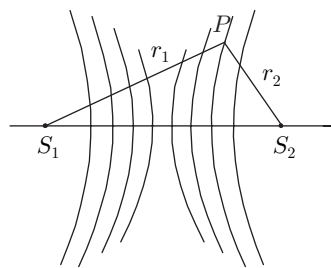


Fig. 19.16

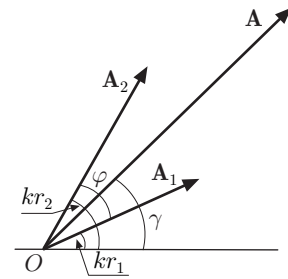


Fig. 19.17

In un punto dello spazio ampiezza e fase dell'onda risultante possono essere rappresentate per mezzo dello schema vettoriale di figura 17 e dall'equazione

$$\psi = A \sin(\omega t - \gamma).$$

Perciò l'onda risultante, in ogni punto dello spazio, non ha l'aspetto di un'onda progressiva, bensì di una vibrazione stazionaria di determinata ampiezza. Questo comportamento è dovuto al fatto che le sorgenti delle onde sono sincrone e mantengono una differenza di fase costante, ossia sono *coerenti*.

La coerenza è dunque il requisito fondamentale per evidenziare il fenomeno descritto. L'analogo ottico è l'interferenza di Young, per la quale rimandiamo all'argomento specifico. Va tuttavia osservato che, in generale, due sorgenti luminose distinte non sono coerenti perchè gli atti elementari di emissione della radiazione elettromagnetica sono completamente casuali; quindi vanno usati particolari accorgimenti che omettiamo di descrivere.

L'interferenza può essere osservata su un piano parallelo all'asse congiungente le sorgenti, dove sono disposti opportuni rivelatori. Nel caso della luce, su uno schermo piano, appare una serie di frange chiare alternate a frange scure, determinate dall'intersezione delle superfici antinodali e nodali con lo schermo. Nell'ipotesi che la distanza a tra le sorgenti sia piccola rispetto alla distanza D delle sorgenti dal piano, la piccola differenza tra r_1 e r_2 può essere trascurata e possiamo assumere $A_1 \approx A_2$; pertanto

la (32) può essere riscritta come

$$A = A_1 \sqrt{2(1 + \cos \varphi)} = 2A_1 \cos \frac{\varphi}{2}.$$

Dalla figura 18, osservando che l'angolo θ è piccolo, si ottiene $\sin \theta \approx \tan \theta = x/D$ e $r_1 - r_2 = a \sin \theta = ax/D$; pertanto la differenza di fase diventa

$$\varphi = \frac{2\pi}{\lambda}(r_1 - r_2) = \frac{2\pi}{\lambda}a \sin \theta = \frac{2\pi ax}{D\lambda}.$$

Quindi l'intensità dell'onda risultante è:

$$J = 4A_1 \cos^2 \frac{\varphi}{2} = J_0 \cos^2 \left(\frac{\pi ax}{D\lambda} \right),$$

dove J_0 è l'intensità corrispondente a $\varphi = 0$. Il suo andamento in funzione di x è mostrato in figura 19; i punti di massima intensità si ottengono per

$$\frac{\pi ax}{D\lambda} = n\pi, \quad \Rightarrow \quad x = n \frac{D\lambda}{a},$$

dove n è un intero positivo o negativo. La distanza tra due punti di massima intensità, $n+1, n$, è $\Delta x = D\lambda/a$. Dunque la misura di questa distanza, noti D ed a , permette di ricavare la lunghezza d'onda. Questo è uno dei metodi standard usato in ottica.

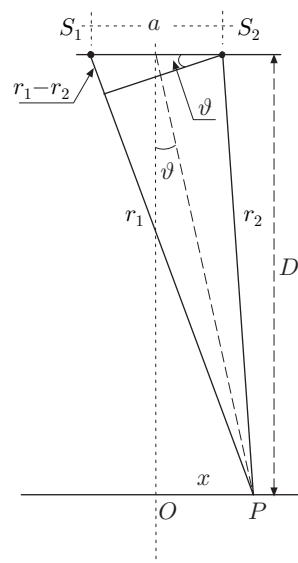


Fig. 19.18

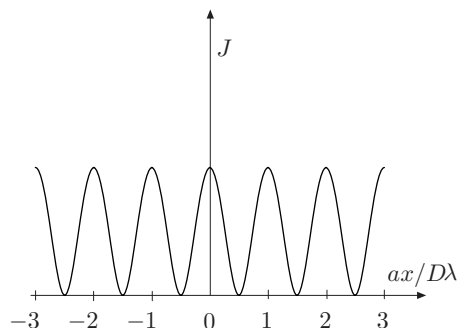


Fig. 19.19

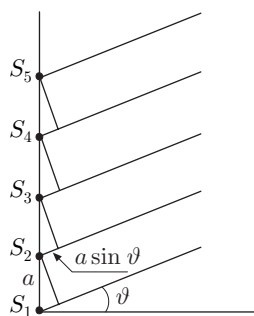


Fig. 19.20

Complementi ed esempi

5. Interferenza di N sorgenti sincrone di uguale frequenza.

Supponiamo che le sorgenti, distanti a l'una dall'altra, siano allineate e che l'interferenza venga osservata a distanza molto grande rispetto ad a , in modo che i raggi che interferiscono si possano ritenere paralleli, figura 20. Si riconosce, come nel paragrafo precedente, che la differenza di fase tra ogni coppia di raggi contigui è $\varphi = ka \sin \theta$, dove θ è l'angolo che un particolare insieme di raggi forma con la normale al piano delle sorgenti. L'ampiezza risultante nella direzione individuata dall'angolo θ , è la somma vettoriale dei vettori ruotanti relativi a ciascuna sorgente; poiché queste sono uguali tali vettori hanno tutti la stessa ampiezza A e ciascuno è ruotato rispetto al precedente dello stesso angolo φ , figura 21. Si ottiene un poligono di $N+1$ lati,

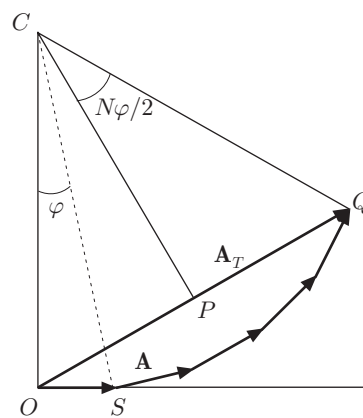


Fig. 19.21

in cui il lato di chiusura rappresenta l'ampiezza risultante A_T . I vettori ruotanti costituiscono le corde di archi uguali di una circonferenza di raggio R ; pertanto la corda che rappresenta l'ampiezza risultante, sottende un angolo uguale a $N\varphi$. Dalla figura 21 si deduce:

$$A_T = OP = 2PQ = 2R \sin \frac{N\varphi}{2},$$

e dal triangolo COS :

$$A = 2R \sin \frac{\varphi}{2}.$$

Dividendo membro a membro le due relazioni, si ottiene

$$A_T = A \frac{\sin N\varphi/2}{\sin \varphi/2}.$$

Per $N = 2$ si ha il risultato del paragrafo precedente, $A_T = 2A \cos \varphi/2$. L'intensità ha l'espressione

$$J = J_0 \left(\frac{\sin N\varphi/2}{\sin \varphi/2} \right)^2 = J_0 \left[\frac{\sin(N\pi a \sin \theta/\lambda)}{\sin(\pi a \sin \theta/\lambda)} \right]^2,$$

dove J_0 è l'intensità di ciascuna sorgente.

L'intensità ha massimi molto intensi per $\varphi = 2n\pi$, che sostituito nella precedente darebbe un valore indeterminato. Tuttavia, ponendo $x = \varphi/2$, si verifica che il limite di $\sin Nx/\sin x$, per $x \rightarrow \pi$, è N . Infatti scelto un angolo ϵ piccolo, di cui x differisce da π , si ha

$$\frac{\sin Nx}{\sin x} = \frac{\sin(N\pi - N\epsilon)}{\sin(\pi - \epsilon)} = (-1)^{N+1} \frac{\sin N\epsilon}{\sin \epsilon}.$$

Ma per $x \rightarrow 0$, possiamo scrivere:

$$\frac{\sin Nx}{\sin x} = \frac{Nx - (Nx)^3/6 + \dots}{x - x^3/6 + \dots} = N \frac{1 - (Nx)^2/6 + \dots}{1 - x^2/6 + \dots} = N,$$

pertanto:

$$\frac{\sin Nx}{\sin x} = (-1)^{N+1} N = \pm N.$$

Dunque si ottengono massimi principali per

$$a \sin \theta = n\pi,$$

dove n è un intero qualsiasi, incluso lo zero. Ogni volta che questa relazione è soddisfatta l'intensità risulta $J = N^2 J_0$. L'intensità è peraltro nulla ogni volta che

$$\frac{1}{2} N\varphi = n'\pi, \Rightarrow a \sin \theta = \frac{n'\lambda}{N},$$

dove n' è un intero, esclusi i valori $0, N, 2N, \dots$ che darebbero massimi di intensità. Poiché tra due minimi successivi deve esserci un massimo, possiamo concludere che tra due massimi principali si hanno anche $N-2$ massimi secondari. Tuttavia le loro ampiezze sono piccole rispetto a quelli principali, in particolare se N è molto grande. In figura 22 è illustrato l'andamento dell'intensità per alcuni valori di N . Si osserva che al crescere di N il sistema diventa fortemente direzionale, nel senso che l'intensità risulta notevole solo per bande ristrette di valori di θ . Questa proprietà viene sfruttata in radiotrasmissione e radiorecezione; per ottenere un effetto direzionale, le antenne trasmettenti e riceventi vengono disposte alla distanza a per la quale si ottiene il massimo dell'intensità.

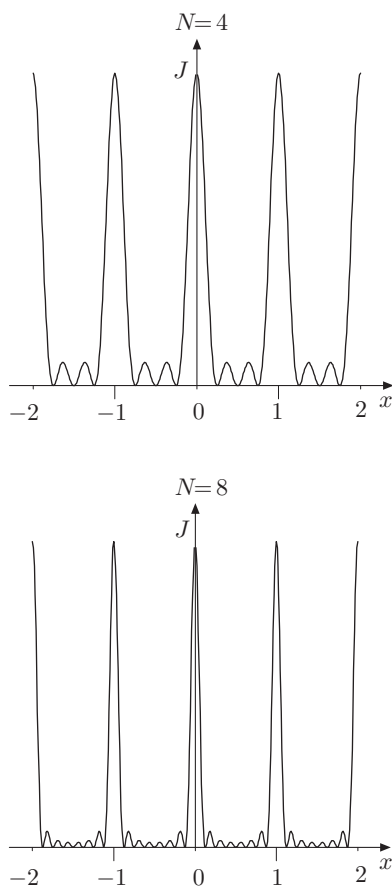


Fig. 19.22

6. Radiointerferometri.

Un radiointerferometro è costituito da vari radiotelescopi disposti a schiera, la cui mutua distanza viene stabilita tra qualche decina ed alcune centinaia

di metri. Esso viene usato in Astrofisica per lo studio della radiazione elettromagnetica emessa da corpi celesti e per individuare nell'Universo la posizione di tali sorgenti. Sfruttando l'invertibilità del percorso delle onde, le sorgenti di radioonde sono poste all'infinito, mentre le sorgenti considerate ai paragrafi precedenti costituiscono le antenne riceventi dei radiotelescopi. In figura 23 è schematizzato un radiointerferometro costituito da due radiotelescopi; le antenne rigorosamente allineate, sono orientate in una direzione che forma un angolo θ con la verticale. I segnali ricevuti, di lunghezza d'onda dell'ordine di qualche decina di centimetri, vengono analizzati da una stazione ricevente accordata, la quale rivela massimi di intensità quando è soddisfatta la condizione

$$a \sin \theta = n\lambda,$$

dove a è la distanza tra i radiotelescopi; naturalmente aumentando il numero di radiotelescopi si ottiene una direzionalità molto elevata. Il radiointerferometro di Sidney è costituito da 32 elementi.

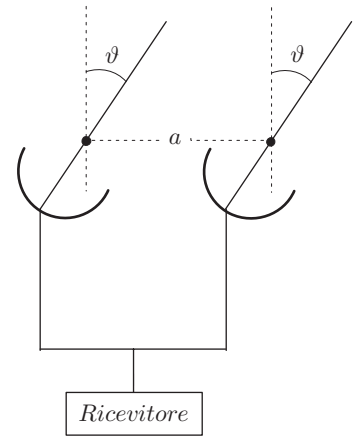


Fig. 19.23

7. Mezzi dispersivi

Nei mezzi dispersivi la relazione di dispersione (43)-XVIII *non è lineare*. Ci proponiamo di descrivere alcuni sistemi dispersivi molto interessanti in cui la velocità di propagazione delle onde elastiche dipende dalla frequenza. L'analogo ottico si fonda su presupposti simili.

7.1. Corda di massa trascurabile, fissata agli estremi, con masse distribuite

Nel paragrafo 5-X, abbiamo considerato un sistema di due particelle collegate ad una corda di massa trascurabile, fissata agli estremi e soggetta a tensione T . Essendo l la lunghezza della corda e $d = l/3$ la distanza tra le particelle, si è trovato che i modi normali di vibrazione hanno frequenze angolari che soddisfano le relazioni:

$$\omega_1^2 = \frac{T}{md}, \quad \omega_2^2 = 3 \frac{T}{md},$$

dove m è la massa delle particelle. Nel caso di n particelle uguali, disposte a distanza d l'una dall'altra, figura 24, detto ψ lo spostamento, l'equazione della dinamica per la particella n è

$$m \frac{d^2 \psi_n}{dt^2} = \frac{T}{d} (\psi_{n+1} - \psi_n) - \frac{T}{d} (\psi_n - \psi_{n-1}). \quad (33)$$

Risolvendo questa equazione, che è valida per un qualunque moto oscillatorio del sistema, è possibile ricavare la forma e la frequenza angolare ω dei modi normali di vibrazione.

Tuttavia poiché la forma di un modo normale è determinata dai rapporti delle ampiezze di oscillazione, considerando un modo di frequenza angolare ω , ciascuna particella oscilla con la stessa frequenza angolare e con la stessa fase. Dunque per il modo di

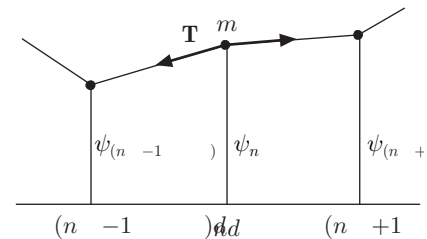


Fig. 19.24

vibrazione considerato, le oscillazioni saranno del tipo:

$$\begin{aligned}\psi_{n-1} &= A_{n-1} \cos(\omega t + \varphi) \\ \psi_n &= A_n \cos(\omega t + \varphi) \\ \psi_{n+1} &= A_{n+1} \cos(\omega t + \varphi).\end{aligned}\tag{34}$$

Dalla seconda si ha

$$\frac{d^2\psi_n}{dt^2} = -\omega^2\psi_n = -\omega^2 A_n \cos(\omega t + \varphi).\tag{35}$$

Sostituendo la (35) e le (34) nella (33), si ottiene:

$$-m\omega^2 A_n = \frac{T}{d}(A_{n+1} - 2A_n + A_{n-1}),$$

ossia

$$A_{n+1} + A_{n-1} = A_n \left(2 - \frac{md}{T}\omega^2\right).\tag{36}$$

Questa equazione, note la ampiezze, fornisce la forma del modo.

Possiamo risolverla con una ragionevole ipotesi. Sappiamo che per una corda continua di lunghezza l , fissata agli estremi, sede di vibrazioni stazionarie, l'ampiezza è data da

$$A(x) = A \sin \frac{2\pi}{\lambda} x.\tag{37}$$

A questa forma si deve ridurre l'ampiezza A_n del modo, nel limite in cui il numero di particelle è infinito, limite di continuità della corda. Ponendo nella (37) $x = nd$, si ha

$$A_n = A \sin \frac{2\pi}{\lambda} nd = A \sin k nd.$$

Inoltre:

$$\begin{aligned}A_{n+1} &= A \sin k(n+1)d = A \sin(k nd + kd) \\ &= A(\sin k nd \cos kd + \cos k nd \sin kd) \\ A_{n-1} &= A \sin k(n-1)d = A \sin(k nd - kd) \\ &= A(\sin k nd \cos kd - \cos k nd \sin kd).\end{aligned}$$

pertanto,

$$A_{n+1} + A_{n-1} = 2A \sin k nd \cos kd = 2A_n \cos kd.$$

Sostituendo la precedente nella (36), si ottiene

$$2A_n \cos kd = A_n \left(2 - \frac{md}{T}\omega^2\right).$$

Da questa equazione si ricava

$$\omega^2 = \frac{2T}{md}(1 - \cos kd) = \frac{2T}{md} \left[1 - \left(\cos^2 \frac{kd}{2} - \sin^2 \frac{kd}{2}\right)\right];$$

Ossia

$$\omega^2 = \frac{4T}{md} \sin^2 \frac{kd}{2}, \quad \Rightarrow \quad \omega(k) = \sqrt{\frac{4T}{md}} \sin \frac{kd}{2}, \quad (38)$$

che è la relazione di dispersione cercata.

In figura 25 sono mostrati i modi normali di vibrazione di cinque masse uguali, fissate ad un filo di massa trascurabile di lunghezza l e soggetto alla tensione T . Per ciascun modo si ha

$$\lambda_1 = 2l, \quad \lambda_2 = l, \quad \lambda_3 = \frac{2}{3}l, \quad \lambda_4 = \frac{l}{2}, \quad \lambda_5 = \frac{2}{5}l.$$

Per la (38):

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{4T}{md}} \sin \frac{\pi d}{\lambda_1} = \sqrt{\frac{4T}{md}} \sin \frac{\pi d}{2l}$$

$$\omega_2 = \sqrt{\frac{4T}{md}} \sin \frac{\pi d}{\lambda_2} = \sqrt{\frac{4T}{md}} \sin \frac{\pi d}{l}$$

$$\omega_3 = \sqrt{\frac{4T}{md}} \sin \frac{\pi d}{\lambda_3} = \sqrt{\frac{4T}{md}} \sin \frac{3\pi d}{2l}$$

$$\omega_4 = \sqrt{\frac{4T}{md}} \sin \frac{\pi d}{\lambda_4} = \sqrt{\frac{4T}{md}} \sin \frac{2\pi d}{l}$$

$$\omega_5 = \sqrt{\frac{4T}{md}} \sin \frac{\pi d}{\lambda_5} = \sqrt{\frac{4T}{md}} \sin \frac{5\pi d}{2l};$$

ed essendo $l = (n+1)d = 6d$, si ha

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{4T}{md}} \sin \frac{\pi}{12}, \quad \omega_2 = \sqrt{\frac{4T}{md}} \sin \frac{\pi}{6}, \quad \omega_3 = \sqrt{\frac{4T}{md}} \sin \frac{\pi}{4},$$

$$\omega_4 = \sqrt{\frac{4T}{md}} \sin \frac{\pi}{3}, \quad \omega_5 = \sqrt{\frac{4T}{md}} \sin \frac{5\pi}{12}.$$

L'andamento della legge di dispersione è mostrato in figura 26; si osservi che il valore ω_{max} si ha per $k = \pi/d$. Mostriamo ora che nel limite di continuità della corda, d piccola rispetto alla lunghezza d'onda, ossia per

$$kd = \frac{2\pi}{\lambda}d \ll 1,$$

la (38) si riduce ad una legge lineare. Poiché

$$\sin \theta = \theta - \frac{1}{6}\theta^3 + \dots$$

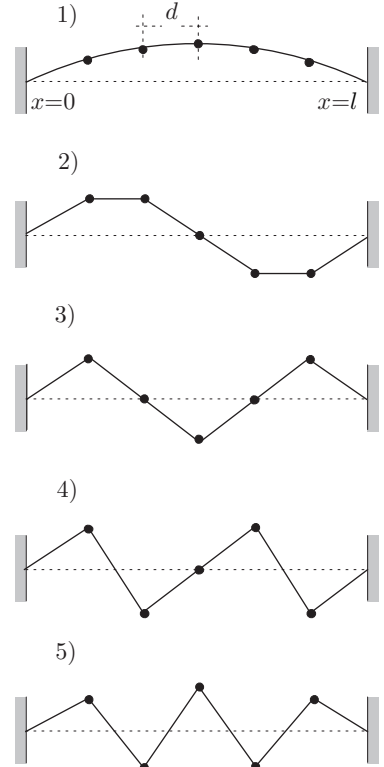


Fig. 19.25

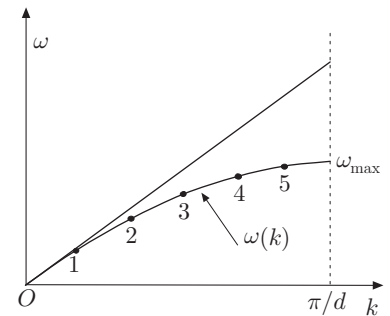


Fig. 19.26

sostituendo nella (38), si ottiene

$$\begin{aligned}\omega(k) &= \sqrt{\frac{4T}{md}} \left[\frac{1}{2}kd - \frac{1}{48}(kd)^3 \dots \right] \\ &= \sqrt{\frac{Td}{m}} k \left[1 - \frac{1}{24}(kd)^2 + \dots \right],\end{aligned}$$

ossia

$$\omega(k) \approx \sqrt{\frac{Td}{m}} k, \quad (39)$$

che è la relazione di dispersione, lineare, per la corda continua. Osservando che m/d non è altro che la massa lineica, la precedente diventa

$$\omega(k) = \sqrt{\frac{T}{\mu}} k.$$

In figura 22 la retta tangente nell'origine alla curva $\omega(k)$, equazione (38), rappresenta la legge di dispersione lineare. La formula (38) è molto importante in Fisica della Materia; essa dà la legge di dispersione delle vibrazioni di un insieme lineare di atomi, con una distanza interatomica d .

7.2. Onde sulla superficie di liquidi

Lo studio generale delle onde su uno specchio d'acqua (mare, laghi, ecc...) presenta qualche difficoltà matematica se si deve tenere conto di tutte le forze che intervengono nel fenomeno. Semplificheremo opportunamente il problema, considerando onde piane che si propagano in una direzione.

Uno specchio d'acqua in equilibrio sotto l'azione della gravità, presenta una superficie libera piana ed orizzontale. Una perturbazione impressa su tale superficie (lancio di un sasso, vento,...) imprime uno spostamento delle particelle vicine alla superficie, che si propaga per onde, mentre le particelle che si trovano in profondità restano praticamente in quiete e non hanno, in ogni caso, componenti verticali della velocità. Prendiamo in considerazione spostamenti piccoli rispetto alla profondità dello specchio d'acqua, e tali che, nell'equazione della dinamica dei fluidi ideali (14)-XVII, si possano trascurare i termini quadratici. Supponendo che agisca la sola forza di gravità, detta \mathbf{u} la velocità delle particelle, possiamo scrivere

$$\frac{d\mathbf{u}}{dt} = \mathbf{g} - \frac{1}{\rho} \nabla p.$$

Assunto un riferimento con asse z volto in alto, asse x orizzontale, coincidente con la superficie libera in condizioni statiche, essendo

$$\mathbf{g} = -\nabla(gz),$$

la precedente diventa

$$\frac{d\mathbf{u}}{dt} = \nabla \left(gz + \frac{p}{\rho} + C \right).$$

Esiste dunque una funzione potenziale delle velocità, tale che

$$\mathbf{u} = \nabla \varphi(x, y, z, t).$$

Pertanto:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t}(\nabla \varphi) &= -\nabla \left(gz + \frac{p}{\rho} + C \right) \\ \nabla \frac{\partial \varphi}{\partial t} &= -\nabla \left(gz + \frac{p}{\rho} + C \right), \end{aligned}$$

cioè

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} = - \left(gz + \frac{p}{\rho} + C \right). \quad (40)$$

Poiché possiamo considerare il liquido incompressibile, l'equazione di continuità, equazione (10)-XVII, è

$$\nabla^2 \varphi = 0. \quad (41)$$

Il problema è piano, ossia può essere studiato nel piano x - z , figura 27. Stabilito un riferimento con origine sulla superficie libera e detto ψ lo spostamento verticale delle particelle in tale riferimento, si tratta di determinare le due funzioni $\varphi(x, z, t)$ e $\psi(x, t)$, quando al liquido viene impressa una perturbazione. Nel caso in considerazione, la (41) diventa

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = 0, \quad (42)$$

e la (40):

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} + g\psi + \frac{p}{\rho} = C. \quad (43)$$

Ma sulla superficie libera la pressione è quella atmosferica; perciò includendo le costanti C e $p/\rho g$ nel potenziale φ , si ottiene

$$\psi = -\frac{1}{g} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial t} \right)_{z=\psi}.$$

In virtù dell'ipotesi che gli spostamenti siano piccoli rispetto alla profondità h dello specchio d'acqua, possiamo ammettere che la precedente si possa scrivere

$$\psi = -\frac{1}{g} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial t} \right)_{z=0}. \quad (44)$$

Poiché

$$u_z = \frac{\partial \varphi}{\partial z} = \frac{\partial \psi}{\partial t},$$

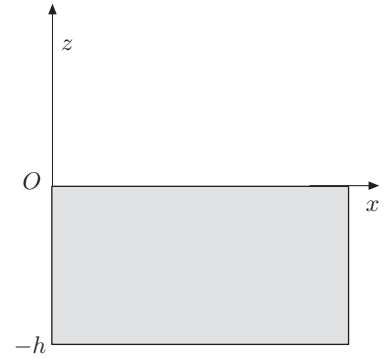


Fig. 19.27

derivando la (44) rispetto a z e tenendo conto della precedente, si ha

$$\left(\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)_{z=0} = -\frac{1}{g} \left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2}\right)_{z=0}. \quad (45)$$

Occorre ora determinare la funzione $\varphi(x, z, t)$, tale che soddisfi l'equazione di Laplace (42), in ogni punto del liquido compreso tra la superficie libera, $z = 0$, e il fondo, $z = -h$, assegnata la condizione al contorno (44) e la condizione, anch'essa al contorno, che le particelle sul fondo non abbiano componenti verticali della velocità:

$$\left(\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)_{z=-h} = 0. \quad (46)$$

Una eventuale componente orizzontale costante, indica che il liquido è in moto, come avviene in un canale o in un fiume.

È possibile soddisfare la (42) e le condizioni al contorno, ponendo

$$\varphi = \chi(x)\xi(z)\zeta(t).$$

Infatti derivando e sostituendo nella (42), si ottiene

$$\frac{\chi''}{\chi} = -\frac{\xi''}{\xi},$$

alle quali si soddisfa ponendo

$$\frac{\chi''}{\chi} = -k^2, \quad \frac{\xi''}{\xi} = k^2, \quad (47)$$

con k costante, a priori, arbitraria. Gli integrali generali delle (47) sono:

$$\chi = A \cos(kx + \alpha), \quad \xi = B \cosh(kz + \beta);$$

dove A , B , α , β sono costanti e k assume il significato di numero d'onda angolare.

Imponendo che la funzione $\chi(x)\xi(z)\zeta(t)$ soddisfi alla (46), dovrà essere

$$Bk \sinh(-kh + \beta) = 0,$$

da cui si trae:

$$\beta = kh.$$

Tenendo presente questo risultato, la condizione al contorno (45) si traduce nella seguente equazione in ζ :

$$k \sinh(kh)\zeta(t) = -\frac{1}{g} \cosh(kh)\zeta''(t),$$

ovvero:

$$\zeta''(t) + kg \tanh(kh)\zeta(t) = 0.$$

Questa equazione è soddisfatta dalla funzione:

$$\zeta(t) = C \cos(2\pi\nu t + \gamma);$$

essendo

$$\nu^2 = \frac{g}{2\pi\lambda} \tanh\left(\frac{2\pi}{\lambda}h\right), \quad (48)$$

C e γ costanti.

Infine ponendo $D = ABC$, l'equazione di Laplace (42), le condizioni al contorno (45) e (46) imposte, sono soddisfatte dal potenziale

$$\varphi = D \cos(kx + \alpha) \cosh(kz + kh) \cos(2\pi\nu t + \gamma). \quad (49)$$

Dalla (44), ponendo $z = 0$, si deduce facilmente l'equazione dell'onda:

$$\psi = \frac{2\pi\nu D}{g} \cosh(kh) \cos(kx + \alpha) \sin(2\pi\nu t + \gamma). \quad (50)$$

Questa equazione rappresenta vibrazioni stazionarie della superficie libera, con frequenza ν , lunghezza d'onda λ e ampiezza il cui massimo valore è dato da

$$\frac{2\pi\nu D}{g} \cosh(kh),$$

che cresce notevolmente con la profondità h . La vibrazione è dunque il risultato di due onde che si propagano in verso opposto, con velocità $v = \lambda\nu$, che si ricava immediatamente dalla (48):

$$v = \sqrt{\frac{g\lambda}{2\pi} \tanh\left(\frac{2\pi}{\lambda}h\right)}. \quad (51)$$

In particolare, se la profondità è grande rispetto alla lunghezza d'onda,

$$\tanh\left(\frac{2\pi}{\lambda}h\right) \approx 1,$$

la velocità di propagazione diventa

$$v \approx \sqrt{\frac{g\lambda}{2\pi}}; \quad (52)$$

oppure, sostituendo i valori delle costanti:

$$v = 1,25\sqrt{\lambda}.$$

Le onde in questo caso sono dette *onde di gravità*; la loro velocità di propagazione è proporzionale alla lunghezza d'onda.

Se viceversa λ è grande rispetto ad h , nella (51) è

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \left[\lambda \tanh\left(\frac{2\pi}{\lambda}h\right) \right] = 2\pi h;$$

perciò risulta:

$$v \approx \sqrt{gh}.$$

È questo il caso tipico delle maree che si svolgono in acqua poco profonda.

Essendo $v = \omega/k$, dalla (51) si ottiene la legge di dispersione

$$\omega(k) = \sqrt{kg \tanh(kh)}. \quad (53)$$

In acqua poco profonda, viceversa, la legge di dispersione è lineare.

Il fatto di avere ottenuto le vibrazioni stazionarie espresse dalla (50), non deve sorprendere. Infatti per verificare l'equazione di Laplace abbiamo scelto una soluzione del tipo $\chi(x)\xi(z)\zeta(t)$, in cui ogni termine è funzione di una sola variabile.

Poiché si è voluto essenzialmente stabilire la legge di dispersione, equazione (53), è irrilevante prendere in considerazione le vibrazioni stazionarie oppure le onde progressive, che effettivamente si propagano su uno specchio d'acqua molto vasto come il mare o un lago. D'altra parte l'onda progressiva si ricava immediatamente dalla (50) ed ha la forma:

$$\psi = \frac{2\pi\nu D}{g} \cosh(kh) \cos(\omega t - kx).$$

Per studiare il moto delle particelle di liquido, prendiamo in considerazione l'espressione (49) del potenziale delle velocità che, per un'onda progressiva, scriviamo

$$\varphi = D \cosh(kz + kh) \cos(\omega t - kx).$$

Nell'ipotesi che h sia molto grande rispetto alla lunghezza d'onda, si può scrivere

$$\cosh(kz + kh) = \frac{1}{2} \left(e^{(kz+kh)} + e^{-(kz+kh)} \right) \approx \frac{1}{2} e^{(kz+kh)} = \frac{1}{2} e^{kz} e^{kh}.$$

Includendo il termine $\exp(kh)/2$ nella costante, si ha

$$\varphi = A e^{kz} \cos(\omega t - kx).$$

Le componenti della velocità delle particelle nel punto x, z risultano

$$u_x = \frac{\partial \varphi}{\partial x} = k A e^{kz} \sin(\omega t - kx)$$

$$u_z = \frac{\partial \varphi}{\partial z} = k A e^{kz} \cos(\omega t - kx).$$

I punti del liquido, nel riferimento adottato, corrispondono a valori negativi di z , perciò l'ampiezza delle componenti della velocità diminuisce con la profondità. Ad una profondità λ è $\exp(-2\pi) = 1/500$, l'ampiezza diventa 1/500 di quella alla superficie e decresce rapidamente all'aumentare di z in valore assoluto. Dati sperimentali confermano sensibilmente tale comportamento.

Integrando rispetto al tempo le componenti della velocità, si ottengono le componenti dello spostamento delle particelle:

$$s_x = -\frac{kA}{\omega} e^{kz} \cos(\omega t - kx)$$

$$s_z = \frac{kA}{\omega} e^{kz} \sin(\omega t - kx).$$

Da queste relazioni si deduce che le particelle descrivono traiettorie circolari in senso orario, di raggio

$$\frac{kA}{\omega} e^{kz} = \frac{A}{v} e^{kz},$$

che decresce con la profondità. In figura 28 è mostrato un insieme di tali traiettorie e in grassetto, la configurazione ondosa che assume la superficie libera.

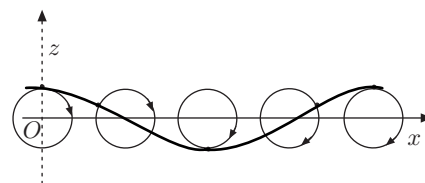


Fig. 19.28

8. Velocità di gruppo

La velocità di un'onda che si propaga in un mezzo non dispersivo, $v = \omega/k$, è chiamata *velocità di fase*. Essa dipende, come abbiamo constatato, dalle caratteristiche elastiche del mezzo.

Un'onda armonica di una certa frequenza si propaga dunque con una certa velocità caratteristica; tuttavia un'onda di questo tipo non è atta a trasmettere informazioni, quindi deve essere modulata in qualche modo. Abbiamo accennato a questa circostanza a proposito dell'interferenza di due onde progressive di diversa frequenza. Se il mezzo non è dispersivo le (3) danno proprio la velocità di fase, mentre se è dispersivo le relazioni citate danno valori diversi.

Trasmettere informazioni o un segnale implica modulazione del segnale stesso, il quale dunque risulta limitato nel tempo e nello spazio; in altri termini l'onda deve assumere una forma simile a quella mostrata in figura 29. Una tale onda è detta *impulso o pacchetto d'onda*. Mediante l'analisi di Fourier si è dimostrato che l'onda così rappresentata contiene, in dipendenza della sua durata o della sua estensione, un numero molto elevato di frequenze e lunghezze d'onda, pertanto in un mezzo dispersivo, ciascuna componente dell'onda ha una velocità di propagazione diversa. Nel caso citato di due onde di frequenze diverse, la prima delle (3), che dà la velocità di gruppo, si scrive

$$v_g = \frac{\omega_1 - \omega_2}{k_1 - k_2} = \frac{\Delta\omega}{\Delta k},$$

e, se il pacchetto d'onde contiene molte frequenze

$$v_g = \frac{d\omega}{dk},$$

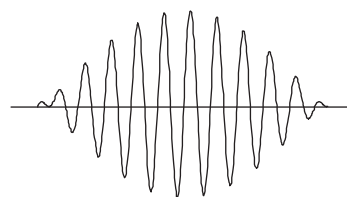


Fig. 19.29

dove la derivata è valutata nel punto medio di ω e di k . Poiché $\omega = kv$, sostituendo nella precedente, si ottiene

$$v_g = v + k \frac{dv}{dk}. \quad (54)$$

In un mezzo non dispersivo $dv/dk = 0$, e la velocità di gruppo coincide con la velocità di fase; solo in un mezzo dispersivo la velocità di gruppo può essere minore o maggiore di quella di fase.

Nel caso di onde superficiali di un liquido in acqua profonda, la velocità di fase è data dall'equazione (52), ossia

$$v = \sqrt{\frac{g\lambda}{2\pi}} = \sqrt{\frac{g}{k}}.$$

Dunque

$$\frac{dv}{dk} = -\frac{1}{2k} \sqrt{\frac{g}{k}} = -\frac{v}{2k}.$$

La velocità di gruppo, equazione (54), risulta

$$v_g = \frac{1}{2}v;$$

essa è metà della velocità di fase. Se un'onda è prodotta in mare aperto, essa risulta distorta in modo tale che le componenti di lunghezza d'onda maggiore sfuggono dall'onda (creste) muovendosi più velocemente dal resto dell'onda, che si propaga con la velocità di gruppo. Viceversa le componenti di un'onda di risacca su una spiaggia poco profonda, si muovono con la stessa velocità poiché, come si è dimostrato, il mezzo non è dispersivo.

9. Preliminari di meccanica ondulatoria

I risultati conseguiti nei precedenti paragrafi costituiscono il fondamento della meccanica ondulatoria, che per opera di Born, De Broglie, Heisenberg e Schrödinger, negli anni venti, permise di dare una soddisfacente descrizione della dinamica delle particelle elementari.

L'ipotesi fondamentale di De Broglie consiste nell'attribuire alle particelle un comportamento ondulatorio, associando ad esse una lunghezza d'onda e una energia date rispettivamente da

$$\lambda = \frac{h}{p}, \quad E = h\nu,$$

dove h è la costante di Planck, p la quantità di moto e ν la frequenza. Queste relazioni possono essere scritte anche:

$$p = \frac{h}{2\pi}k, \quad E = \frac{h}{2\pi}\omega,$$

oppure:

$$p = \hbar k, \quad E = \hbar\omega, \quad (55)$$

dove $\hbar = h/2\pi$.

Il comportamento ondulatorio è presente anche in situazioni ordinarie; tuttavia poiché la costante di Planck è estremamente piccola ($h = 6,6 \cdot 10^{-34} \text{ J}\cdot\text{s}$) tale comportamento è completamente trascurabile e sono valide le leggi della Meccanica classica. Viceversa nel caso di particelle atomiche o subatomiche, essendo le masse molto piccole, la lunghezza d'onda associata alla particella risulta dell'ordine di grandezza delle distanze atomiche. Infatti nel caso di un elettrone, massa $9,1 \cdot 10^{-31} \text{ kg}$, carica $1,6 \cdot 10^{-19} \text{ C}$, soggetto alla differenza di potenziale V , l'energia cinetica acquistata è $p^2/(2m) = eV$, dove e è la carica dell'elettrone; si ha dunque $p = \sqrt{2meV}$. Dalle relazioni di De Broglie si ottiene

$$\lambda = \frac{h}{\sqrt{2meV}} = \frac{1,23 \cdot 10^{-9}}{\sqrt{V}}.$$

Se la differenza di potenziale è di 100 V , la lunghezza d'onda associata all'elettrone risulta $\lambda = 1,23 \cdot 10^{-10} \text{ m}$. L'ipotesi ondulatoria è confortata da numerose conferme sperimentali; una delle quali è la diffrazione di un fascio di elettroni che avviene in maniera analoga a quella della radiazione elettromagnetica (1927). Pertanto, ad una particella che possiede velocità v ed energia cinetica $E = p^2/2m$, va associata un'onda ψ , che si propaga con velocità di fase

$$v_f = \lambda\nu = \frac{h}{p}\nu = \frac{E}{p} = \frac{p}{2m} = \frac{1}{2}v,$$

metà della velocità di cui la particella è animata. Tuttavia, poiché un'onda monocromatica, come s'è detto, non trasporta alcuna informazione, questo risultato non può fornire alcun dato sulla localizzazione della particella.

In conformità a quanto si è detto in precedenza, ad una particella localizzata in una certa regione dello spazio deve corrispondere un pacchetto d'onde, la cui ampiezza è diversa da zero nella regione anzidetta e nulla altrove. Essendo la velocità di gruppo del pacchetto d'onde

$$v_g = \frac{d\omega}{dk},$$

facendo uso delle relazioni di De Broglie (55) e dell'espressione $E = p^2/2m$, si ottiene

$$v_g = \frac{d\omega}{dk} = \frac{dE}{dp} = \frac{p}{m} = v.$$

In accordo con l'intuizione, si trova che la velocità di gruppo del pacchetto d'onde è proprio uguale alla velocità della particella.

Tuttavia finché la particella è libera, i risultati ottenuti non presentano rilevante significato fisico. Se viceversa la particella è confinata in una buca di potenziale o in generale, si trova in un sistema chiuso, l'onda associata dà luogo, per riflessione, a

vibrazioni stazionarie, che assumono un significato fondamentale nello studio di un sistema quantizzato.

Consideriamo infatti una particella confinata in una buca di potenziale lineare di lunghezza l , tale che l'energia potenziale $U(x)$ sia nulla per $0 < x < l$ ed infinita agli estremi. Ciò significa che in tali punti agiscono forze talmente intense da costringere la particella ad invertire il suo moto, perciò l'onda associata verrà riflessa. Questa situazione è formalmente identica a quella che si verifica per le vibrazioni stazionarie, in cui l'ampiezza delle armoniche è data da

$$\psi_n = A \sin \frac{n\pi x}{l},$$

che in meccanica ondulatoria sono dette *funzioni d'onda* o *autofunzioni*.

Supponendo che la particella abbia solo energia cinetica, per l'ipotesi di De Broglie, si ha

$$E = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{p^2}{2m} = \frac{1}{2m} \frac{h^2}{\lambda^2};$$

poiché $\lambda = 2l/n$, con n intero, si ottiene

$$E_n = \frac{1}{2m} \frac{h^2}{4l^2} n^2. \quad (56)$$

L'energia risulta quantizzata secondo l'intero n ; si ottengono cioè gli *autovalori* dell'energia. Il ragionamento può essere esteso ad una particella confinata in una scatola a forma di parallelepipedo; si ottengono autofunzioni ed autovalori corrispondenti alle vibrazioni descritte in proposito. Va sottolineato che l'energia minima della particella, $n = 1$, non è zero. Questo valore, energia di punto zero, ha un ruolo estremamente importante in molti sistemi quantizzati.

Le funzioni d'onda, opportunamente normalizzate, vanno interpretate in maniera probabilistica. Indichiamo con $\psi(x)$ la funzione d'onda di una particella confinata nella buca di potenziale considerata. Poiché l'intensità di tale onda è proporzionale a $|\psi(x)|^2$, che è la grandezza misurabile, si deduce che la probabilità di trovare la particella in una certa regione dello spazio, può essere espressa per mezzo dell'intensità. Siccome talvolta è opportuno esprimere la funzione d'onda con una grandezza complessa, indicando con ψ^* la coniugata di ψ , si avrà

$$|\psi(x)|^2 = \psi(x)\psi^*(x).$$

Questa relazione va interpretata come densità di probabilità nel senso che, nel caso della buca di potenziale unidimensionale, la quantità

$$P(x)dx = |\psi(x)|^2 dx,$$

dà la probabilità che la particella si trovi nell'intervallo compreso tra x e $x + dx$.

Vogliamo ora stabilire come ottenere le funzioni d'onda di una particella, che ovviamente dipendono dal suo stato dinamico. Tale stato dipende dalle forze agenti e dall'energia totale della particella

$$E = \frac{p^2}{2m} + U,$$

dove U è l'energia potenziale.

L'equazione alla quale devono soddisfare le funzioni d'onda è l'equazione differenziale formulata nel 1926 da Erwin Schrödinger, che nel caso unidimensionale si scrive:

$$\frac{d^2\psi}{dx^2} + \frac{8\pi^2m}{h^2}(E - U)\psi = 0, \quad (57)$$

in cui E ed U sono l'energia totale e l'energia potenziale della particella. Questa equazione, estesa in tre dimensioni, insieme alle opportune condizioni al contorno, permette di trovare le autofunzioni e gli autovalori dell'energia del sistema; essa in meccanica quantistica ha lo stesso ruolo dell'equazione di Newton della meccanica classica.

Possiamo chiarire la struttura dell'equazione di Schrödinger ricordando l'equazione d'onda per l'ampiezza delle vibrazioni stazionarie:

$$\frac{d^2\psi}{dx^2} + k^2\psi = 0.$$

Poiché per le relazioni di De Broglie, $k = 2\pi p/h$; la precedente diventa

$$\frac{d^2\psi}{dx^2} + \frac{4\pi^2}{h^2}p^2\psi = 0.$$

Se il moto si svolge in una regione in cui la particella ha energia totale E ed energia potenziale U , si ha

$$p^2 = 2m(E - U).$$

Si ottiene così l'equazione di Schrödinger nella forma (57). Consideriamo ora due casi semplici.

PARTICELLA LIBERA

In questo caso $U = 0$, pertanto l'equazione di Schrödinger (57) assume la forma

$$\frac{d^2\psi}{dx^2} + \frac{2mE}{h^2}\psi = 0. \quad (58)$$

Essendo

$$E = \frac{p^2}{2m}, \quad p = \hbar k,$$

risulta

$$E = \frac{\hbar^2 k^2}{2m},$$

e l'equazione (58) diventa:

$$\frac{d^2\psi}{dx^2} + k^2\psi = 0,$$

identica all'equazione per l'ampiezza delle vibrazioni stazionarie. Questa equazione è soddisfatta dalle funzioni d'onda:

$$\psi = e^{ikx}, \quad \psi = e^{-ikx}.$$

La prima rappresenta una particella che si muove nella direzione x , la seconda una particella che si muove nella direzione $-x$. Nella notazione complessa si è ommesso il termine temporale $\exp(\omega t)$. Si osservi che per entrambe le soluzioni si ha

$$|\psi(x)|^2 = \psi(x)\psi^*(x) = e^{ikx}e^{-ikx} = 1.$$

Ciò significa che la probabilità di trovare la particella è la stessa in tutti i punti.

PARTICELLA IN UNA BUCIA DI POTENZIALE DI LUNGHEZZA l

È il problema considerato all'inizio e che ora risolviamo facendo uso dell'equazione di Schrödinger. Poiché nell'intervallo $0 < x < l$, $U = 0$, l'equazione

$$\frac{d^2\psi}{dx^2} + k^2\psi = 0, \tag{59}$$

con $k^2 = 2mE/\hbar^2$, va risolta imponendo le condizioni al contorno

$$x = 0, \quad \psi(0) = 0; \quad x = l, \quad \psi(l) = 0.$$

Soluzione della (59) sarà la funzione d'onda

$$\psi(x) = Ae^{ikx} + Be^{-ikx},$$

dove A e B sono costanti. Imponendo le prima condizione al contorno, si ha

$$\psi(0) = A + B, \quad \Rightarrow \quad B = -A;$$

pertanto:

$$\psi(x) = A(e^{ikx} - e^{-ikx}) = 2iA \sin kx = C \sin kx. \tag{60}$$

La seconda condizione al contorno impone

$$\psi(l) = C \sin kl = 0,$$

ed essendo C diversa da zero, si deve avere

$$k = \frac{n\pi}{l}, \quad \Rightarrow \quad p = \hbar k = \frac{n\pi\hbar}{l},$$

che dà i possibili valori della quantità di moto.

Sostituendo il valore di k nella (60), si ottiene la funzione d'onda che rappresenta la particella:

$$\psi(x) = C \sin \frac{n\pi}{l} x,$$

e gli autovalori dell'energia

$$E_n = \frac{k^2 \hbar^2}{2m} = \frac{\hbar^2 \pi^2}{2ml^2} n^2,$$

come espresso dall'equazione (56). In figura 30 sono mostrate le funzioni d'onda, le densità di probabilità e le energie per $n = 1, 2, 3$.

10. Attenuazione

La propagazione delle onde elastiche nei mezzi reali è inevitabilmente soggetta a fenomeni dissipativi che, in generale, determinano conversione di energia meccanica in energia di altro genere. L'ampiezza dell'onda decresce al crescere della distanza dalla sorgente.

Consideriamo un'onda piana che si propaga lungo l'asse x e sia A l'ampiezza in corrispondenza ad una certa ascissa. Nell'intervallo $x, x+dx$, tale ampiezza si riduce di dA . Assumendo che la diminuzione relativa di A sia proporzionale allo spessore elementare dx , attraverso un coefficiente α , coefficiente di assorbimento, in formule si ha:

$$-\frac{dA}{A} = \alpha dx.$$

Fissata la condizione iniziale, $A = A_0$ per $x = 0$, e integrando la precedente si ha

$$\int \frac{dA}{A} = - \int \alpha dx, \quad \Rightarrow \quad \ln A = -\alpha x + C.$$

Essendo $C = \ln A_0$, si ottiene:

$$\ln \frac{A}{A_0} = -\alpha x, \quad \Rightarrow \quad A = A_0 e^{-\alpha x}. \quad (61)$$

Il coefficiente di assorbimento ha le dimensioni dell'inverso di una lunghezza. L'andamento della (61) è mostrato in figura 31.

La legge di attenuazione dell'intensità ovviamente risulta

$$J = J_0 e^{-2\alpha x}. \quad (62)$$

Le formule (61) e (62) sono simili a quelle che regolano l'attenuazione di altre grandezze; numero di particelle che attraversa un certo materiale, assorbimento di radiazione elettromagnetica, ecc. In ogni caso il coefficiente α dà informazioni sulle grandezze che

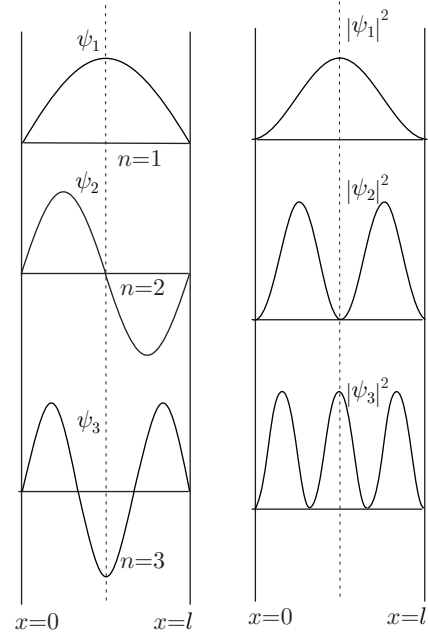


Fig. 19.30

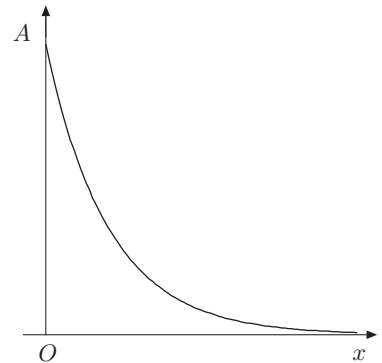


Fig. 19.31

determinano l'attenuazione e l'esperienza mostra che gli effetti dissipativi dipendono dalla frequenza dell'onda. Tra le cause che danno origine all'attenuazione, possiamo citare: la viscosità del mezzo, scambi termici tra le parti del mezzo, ossia condensazioni e rarefazioni non perfettamente adiabatiche, fenomeni di risonanza dell'assorbimento, che si possono verificare quando la frequenza dell'onda è dell'ordine dei MHz , e coincide con la frequenza di vibrazione propria delle molecole del mezzo. Si può pertanto affermare che lo studio dell'assorbimento della radiazione, in generale, costituisce un potente mezzo d'indagine della struttura della materia.

11. Principio di Huygens

La propagazione di un'onda è stata finora descritta in conformità al tipo di sorgente e alle proprietà del mezzo. È possibile tuttavia determinare l'onda in un punto del mezzo, ossia le sue grandezze caratteristiche: ampiezza, intensità e fase, senza un riferimento diretto alla sorgente. Questa possibilità è stabilita dal principio di Huygens e dalla successiva teoria di Kirchhoff.

Ricordiamo che la superficie d'onda è definita come il luogo dei punti in cui l'onda ha la stessa fase ad un determinato istante. Se l'onda è piana e la sua equazione è $\psi(vt - \hat{\mathbf{u}} \cdot \mathbf{r})$, la superficie d'onda avrà equazione

$$vt - \hat{\mathbf{u}} \cdot \mathbf{r} = \text{cost},$$

che corrisponde ad un piano perpendicolare al versore $\hat{\mathbf{u}}$; analogamente, le onde sferiche hanno superfici d'onda, anch'esse sferiche, espresse da $vt - r = \text{cost}$.

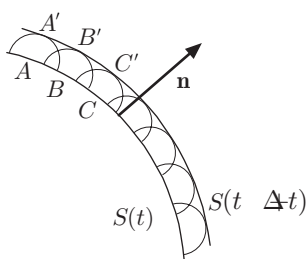


Fig. 19.32

Il principio o costruzione di Huygens (1624-1695) è fondato sulla caratteristica fondamentale della propagazione ondosa, ossia sul fatto che la superficie d'onda è costituita dal luogo dei punti in cui le particelle del mezzo hanno lo stesso spostamento. Precisamente, figura 32, consideriamo le particelle A, B, C, \dots , investite dalla superficie d'onda S , all'istante t ; ogni particella diventa sorgente di onde sferiche elementari o onde secondarie che, all'istante $t + \Delta t$ raggiungono le particelle immediatamente successive $A', B', C' \dots$; queste ultime subendo lo stesso spostamento, formano la nuova superficie d'onda S' , involuppo delle onde elementari. Il processo si ripete e dà luogo alla propagazione attraverso il mezzo. Si osservi che le onde elementari hanno due superfici involuppo; una interna e l'altra esterna che è quella atta a descrivere la propagazione. Nel caso delle onde elettromagnetiche questa costruzione è ancora valida, ma non ha il semplice significato meccanico che le abbiamo attribuito. Infatti le onde elettromagnetiche si propagano anche nel vuoto dove non esistono particelle che

vibrano; tuttavia esse soddisfano all'equazione delle onde, dove al posto dello spostamento va sostituito il campo elettromagnetico.

Nella seconda metà del secolo scorso la costruzione di Huygens fu rielaborata da Kirchhoff (1824-1887) in una teoria che comprende qualunque propagazione ondosa. Senza entrare in dettagli che vengono svolti più opportunamente in ottica, questa teoria stabilisce che, noti i valori di $\psi(\mathbf{r}, t)$ in tutti i punti di una generica superficie chiusa S che include le sorgenti σ , figura 33, è possibile ricavare l'onda risultante in un punto P dello spazio esterno alla superficie mediante l'equazione:

$$\psi(P, t) = \int_S f(\theta) \frac{\psi(vt - r)}{r} dS. \quad (63)$$

L'interpretazione della (63) è piuttosto semplice: il termine $\psi(vt - r)/r$ rappresenta un'onda sferica emessa dall'elemento di superficie dS all'istante $t - r/v$, che ha raggiunto P all'istante t ; il termine $f(\theta)$ è un fattore direzionale che indica come le onde elementari non abbiano la stessa ampiezza in tutte le direzioni. Infatti detto θ l'angolo tra la normale all'elemento dS ed il vettore che indica la posizione del punto rispetto a dS , è

$$f(\theta) = \frac{1}{2}(1 + \cos \theta).$$

L'ampiezza massima corrisponde a $\theta = 0$, propagazione in avanti; l'ampiezza minima a $\theta = \pi$, propagazione all'indietro. Pertanto l'onda in P è data dal contributo delle onde sferiche emesse da ogni elemento della superficie chiusa che contiene le sorgenti, alle quali dunque non è necessario fare alcun riferimento.

In realtà l'espressione di $\psi(P, t)$ è leggermente più complicata della (63), che in ogni caso risulta adatta alle considerazioni che verranno fatte; va inoltre detto che, svolgendo la teoria generale, si trova che occorre moltiplicare per il fattore $-i$, il quale indica che le onde elementari vengono emesse con una fase uguale a $-\pi/2$.

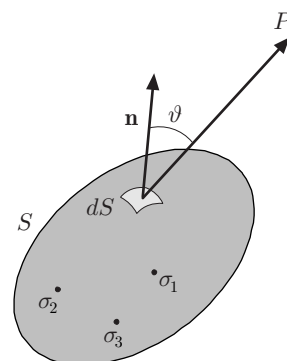


Fig. 19.33

12. Diffrazione

I fenomeni di diffrazione nella propagazione ondosa sono molto comuni. Sappiamo che è possibile udire suoni da una sorgente posta dietro un ostacolo che intercetta la propagazione diretta, per raggi, verso il nostro orecchio; un'onda in acqua si "sparpaglia" oltre una diga frangiflutti, ecc. In genere questi fenomeni si verificano quando un'onda, nel propagarsi, è distorta da un ostacolo che ha dimensioni confrontabili con la lunghezza d'onda. L'ostacolo può essere uno schermo con una apertura, di grandezza confrontabile con la lunghezza d'onda, che permette il passaggio di una piccola porzione del fronte d'onda incidente o viceversa un oggetto, di dimensioni che rispettano i criteri suddetti, che impe-

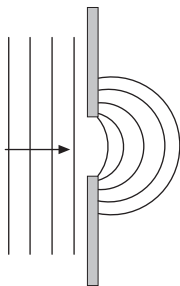


Fig. 19.34

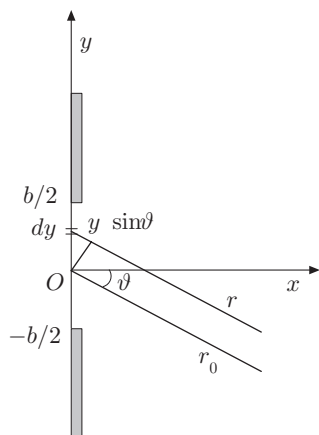


Fig. 19.35

disce la propagazione di una piccola porzione del fronte d'onda. In figura 34 è mostrata la diffrazione di un'onda piana, prodotta sulla superficie di un liquido, incidente su uno schermo in cui è praticata una piccola apertura.

I fenomeni di diffrazione danno luogo a massimi e minimi di intensità o meglio a una ridistribuzione dell'intensità, come avviene per l'interferenza. Anzi si può affermare che sostanzialmente interferenza e diffrazione sono la stessa cosa; solo che l'interferenza è determinata da due o più sorgenti, la diffrazione è il risultato dell'interferenza dell'onda con se stessa. Distinguiamo la diffrazione in due categorie: *diffrazione di Fraunhofer* e *diffrazione di Fresnel*. Nella prima l'onda incidente è piana; la figura di diffrazione viene osservata a distanza sufficientemente grande, così da poter assumere piana anche l'onda diffratta; nella seconda o l'onda incidente è sferica oppure l'onda diffratta viene osservata in un particolare punto dello spazio, ovvero sono verificate entrambe le condizioni. La sede più appropriata per studiare questi fenomeni, che hanno bisogno di una adeguata elaborazione matematica, è l'ottica. Ci limiteremo pertanto ad esaminare la diffrazione di Fraunhofer prodotta da una fenditura rettangolare, come tipico esempio di applicazione della formula di Kirchhoff.

Consideriamo un'onda piana che incide su una fenditura, di altezza b e lunghezza L , praticata su uno schermo. In conformità alla (63), possiamo scegliere una superficie chiusa, contenente la sorgente e di cui una parte sia costituita dalla fenditura. Con buona approssimazione si può assumere che solo questa parte della superficie costituisca il luogo dei punti sorgenti di onde sferiche elementari, mentre il resto sia perfettamente opaco. Stabilito un riferimento con origine nel centro della fenditura, come in figura 35, suddividiamo la fenditura in elementi di superficie $dS = Ldy$ paralleli. Tali elementi costituiscono le sorgenti di onde sferiche che, per maggiore semplicità nei calcoli, scriviamo con la notazione esponenziale:

$$\psi(r, t) = \frac{A}{r} e^{i(kr - \omega t)}, \quad (64)$$

dove A/r è l'ampiezza alla distanza r dalle sorgenti. Se non ci fossero effetti di diffrazione l'onda che attraversa la fenditura si propagherebbe solo attraverso la sezione da essa delimitata; l'intensità sarebbe diversa da zero solo per $\theta = 0$. Poiché viceversa sono presenti tali effetti, si avrà una distribuzione angolare dell'intensità, figura di diffrazione. Supponiamo che gli angoli θ siano piccoli e che la diffrazione venga osservata a una distanza grande dalla fenditura, come richiede la condizione di Fraunhofer. Allora possiamo ritenere che il fattore di obliquità $f(\theta)$ sia pressoché costante e che il termine A/r non vari sensibilmente rispetto all'e-

spenziale del numeratore. In conformità a queste ipotesi la (63) diventa

$$\psi = C \int_S e^{i(kr - \omega t)} dS, \quad (65)$$

dove C comprende i fattori costanti anzidetti. Dalla figura risulta

$$r = r_0 + y \sin \theta,$$

dove r_0 corrisponde ad $y = 0$; pertanto la (65) si scrive

$$\psi = CL e^{ikr_0} e^{-i\omega t} \int_{-b/2}^{+b/2} e^{iky \sin \theta} dy.$$

Omettendo il termine $\exp(-i\omega t)$ e integrando, si ottiene

$$\begin{aligned} \psi &= CL e^{ikr_0} \int_{-b/2}^{+b/2} e^{iky \sin \theta} dy = \frac{CL e^{ikr_0}}{ik \sin \theta} [e^{iky \sin \theta}]_{-b/2}^{+b/2} \\ &= \frac{2CL e^{ikr_0}}{2ik \sin \theta} [e^{i(kb \sin \theta)/2} - e^{-i(kb \sin \theta)/2}] \\ &= bCL e^{ikr_0} \frac{\sin[(kb \sin \theta)/2]}{(kb \sin \theta)/2}. \end{aligned}$$

Indicando con $\beta = (kb \sin \theta)/2$, l'intensità risulta

$$J = J_0 \frac{\sin^2 \beta}{\beta^2}.$$

In figura 36 è mostrato l'andamento dell'intensità relativa J/J_0 in funzione di $(b \sin \theta)/\lambda$; essa risulta massima per $\beta = 0$, nulla per $\beta = \pm n\pi$, oppure per $(b \sin \theta)/\lambda = \pm n$, ossia per

$$b \sin \theta = \pm n\lambda,$$

che è la formula elementare per la diffrazione prodotta da una fenditura.

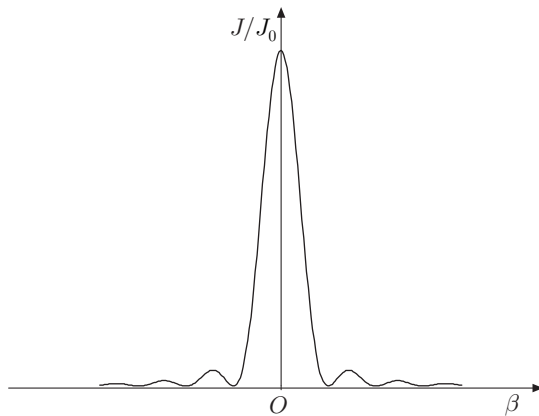


Fig. 19.36

||| 20. Simmetria Invarianza Relatività ristretta

||| 1. Simmetria

La simmetria, intesa anche come canone di bellezza nelle opere d'arte classiche, è una caratteristica fondamentale della Natura. In Biologia, a parte altre forme di simmetria più complesse, è quasi sempre presente la simmetria bilaterale; infatti è possibile dividere un essere vivente in due parti speculari mediante un piano longitudinale (simmetria destra-sinistra). In Cristallografia la cella elementare del reticolo resta inalterata per traslazioni e rotazioni attorno ad un punto o ad un asse. Si potrebbe procedere a lungo con queste considerazioni. Per fissare le idee, consideriamo un prisma di sezione quadrata; se facciamo ruotare il prisma attorno al suo asse longitudinale di un angolo di 90° , o multiplo di questo, la configurazione risultante è simmetrica rispetto a rotazioni multiple di 90° ; diciamo che il prisma è simmetrico per tali rotazioni. La rotazione di un cilindro attorno al suo asse lascia inalterata la sua configurazione per qualunque angolo di rotazione; diciamo che il cilindro è simmetrico per rotazioni di un qualunque angolo. Le rotazioni e le traslazioni costituiscono *operazioni di simmetria*. In seguito all'operazione di simmetria l'oggetto cambia la sua posizione effettiva mentre la sua immagine resta immutata. In altri termini l'immagine è invariante rispetto all'operazione di simmetria.

Una legge fisica è definita mediante un'equazione valida in un certo riferimento; se la legge possiede una proprietà di simmetria, l'equazione deve essere valida quando il riferimento viene trasformato secondo quella proprietà di simmetria; allora l'equazione si dice invariante per tale operazione. Per quanto detto più sopra, l'analogia che se ne trae è che la legge fisica corrisponde all'*oggetto* che possiede la simmetria, mentre l'immagine dell'oggetto, ossia la grandezza osservabile, corrisponde all'*equazione* che rappresenta la legge.

Va notato che, mantenendo fermo l'oggetto, avremmo potuto ruotare l'osservatore nel verso opposto. Questo significa che invece di applicare l'operazione di simmetria alle osservabili espresse

dalla legge fisica, è possibile applicare l'operazione di simmetria, o meglio la sua inversa, alle coordinate del riferimento in cui le osservabili sono espresse. Anche in tal caso l'equazione che rappresenta la legge deve restare invariata; dunque le operazioni di simmetria sono collegate alle trasformazioni delle coordinate delle grandezze osservabili. A queste ultime possono essere applicate gran parte delle operazioni di simmetria, ma non tutte le leggi fisiche presentano ogni proprietà di simmetria. Prenderemo in considerazione le simmetrie alle quali obbediscono le leggi della Meccanica, ossia le traslazioni, le rotazioni, l'inversione della coordinata temporale, l'inversione delle coordinate spaziali (simmetria destra-sinistra) e la simmetria per trasformazioni galileane.

In Fisica la simmetria ha un ruolo estremamente importante e l'esperienza ha confermato che le leggi fondamentali possiedono un alto grado di simmetria; infatti se questa circostanza non si verificasse si potrebbero avere molti dubbi sulla validità della legge stessa. Per esempio, con la scoperta dell'antiprotone è stata confermata sperimentalmente l'esistenza dell'antimateria; tuttavia, per quanto ne sappiamo, l'Universo è composto esclusivamente da materia. Se la simmetria deve rimanere salva, dobbiamo supporre che esista un Universo formato da antimateria; allora possiamo porci il problema se la natura mostra una spiccata preferenza per la materia, ossia una asimmetria, oppure se i nostri mezzi di indagine sono così poco raffinati da non permetterci un'indagine esauriente della questione.

2. Invarianza della equazione di Newton

I vettori, come è noto, godono della proprietà di invarianza per traslazioni e rotazioni delle coordinate. Dunque qualunque legge fisica espressa da relazioni vettoriali è invariante per tali operazioni. La seconda equazione di Newton è una equazione vettoriale

$$\mathbf{F} = m\mathbf{a},$$

pertanto è invariante per traslazioni e rotazioni. Può essere interessante verificare questa proprietà riferendoci alle componenti cartesiane.

INVARIANZA PER TRASLAZIONE

Consideriamo un sistema costituito da una massa collegata ad una molla ideale, figura 1. Operiamo una traslazione l del sistema dalla posizione iniziale (a) a quella finale (b). La traslazione è equivalente alla trasformazione della coordinata della massa dal riferimento con origine in O al riferimento con origine in O' :

$$x = x' + l, \quad x' = x - l.$$

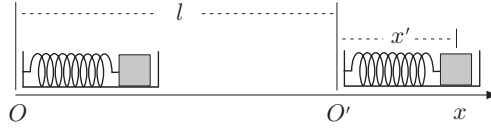


Fig. 20.1

Poiché la forza è interna al sistema, risulta anche

$$F_x = F_{x'};$$

infatti trattandosi di una forza elastica, è

$$F_x = -k(x - x_0),$$

dove x_0 è la posizione di equilibrio. Ma nel riferimento O' , si ha

$$F_{x'} = -k(x' - x'_0) = -k[(x - l) - (x_0 - l)] = -k(x - x_0).$$

Ossia $F_x = F_{x'}$. D'altra parte nel riferimento O l'equazione della dinamica è

$$F_x = m \frac{d^2 x}{dt^2},$$

nel riferimento O' :

$$F_{x'} = m \frac{d^2 x'}{dt^2} = m \frac{d^2 (x - l)}{dt^2} = m \frac{d^2 x}{dt^2}.$$

Otteniamo una espressione identica alla precedente: la seconda legge della dinamica è invariante per traslazioni. Se il sistema nella posizione (a) esegue oscillazioni armoniche, anche nella posizione (b) eseguirà identiche oscillazioni.

INVARIANZA PER ROTAZIONE

Per dimostrare che la seconda equazione della dinamica è invariante per rotazioni, consideriamo due riferimenti cartesiani ortogonali O e O' con le origini coincidenti e supponiamo di ruotare O' di un angolo φ . Le coordinate x', y' sono legate alle coordinate x, y dalle relazioni:

$$\begin{aligned} x' &= x \cos \varphi - y \sin \varphi \\ y' &= x \sin \varphi + y \cos \varphi. \end{aligned}$$

Moltiplichiamo per la massa m e deriviamo due volte rispetto al tempo; per φ costante, si ha:

$$\begin{aligned} m \frac{d^2 x'}{dt^2} &= m \frac{d^2 x}{dt^2} \cos \varphi - m \frac{d^2 y}{dt^2} \sin \varphi \\ m \frac{d^2 y'}{dt^2} &= m \frac{d^2 y}{dt^2} \cos \varphi + m \frac{d^2 x}{dt^2} \sin \varphi. \end{aligned}$$

Tenuto conto che nel riferimento O :

$$F_x = m \frac{d^2 x}{dt^2}, \quad F_y = m \frac{d^2 y}{dt^2},$$

le precedenti si scrivono:

$$F_{x'} = m \frac{d^2 x'}{dt^2} = F_x \cos \varphi - F_y \sin \varphi$$

$$F_{y'} = m \frac{d^2 y'}{dt^2} = F_x \sin \varphi + F_y \cos \varphi,$$

equivalenti alle corrispondenti relazioni del riferimento O . Riferendoci al sistema massa molla considerato, in un riferimento O' ruotato, cambiano le componenti della forza, ma le oscillazioni che compie la massa sono identiche. La forza peraltro può essere di qualsiasi altra natura, purché interna al sistema.

Se il sistema è soggetto ad una forza esterna come per esempio la gravità, per ottenere identiche oscillazioni, bisogna ruotare dello stesso angolo il sistema complessivo, costituito dalla massa soggetta alla forza elastica e dalla forza esterna. Nell'operazione di simmetria occorre sempre operare su tutte le variabili fisiche che intervengono nel fenomeno.

|| 2.1. Invarianza per inversione della coordinata temporale

In Meccanica classica il tempo è stato assunto come grandezza assoluta, ossia la coordinata temporale non muta in tutti i riferimenti in moto relativo. Resta da verificare se l'equazione fondamentale della dinamica sia ancora valida quando viene invertito il segno della variabile temporale e se dall'esame della soluzione dell'equazione sia possibile distinguere il passato e il futuro di un fenomeno. Consideriamo, per esempio, l'urto centrale elastico tra due masse uguali che procedono in verso opposto; dopo l'urto le masse invertono il loro moto e si allontanano l'una dall'altra con velocità opposte. Se filmiamo l'evento e successivamente proiettiamo il film al contrario, in modo da invertire la direzione del tempo, si osservano le due masse avvicinarsi, urtarsi e infine allontanarsi, esattamente come nella ripresa diretta. Solo se nel filmato viene visualizzato anche un orologio è possibile distinguere le successioni diretta ed inversa. Supponiamo, per semplicità, che in un riferimento O le coordinate siano x, t , mentre in un riferimento O' la coordinata temporale abbia segno opposto. Se all'istante $t = 0$ le scale dei tempi nei due riferimenti coincidono, le trasformazioni di coordinate dei riferimenti sono

$$x' = x, \quad t' = -t.$$

Se le forze sono interne al sistema, come nell'urto considerato, si ha

$$F_{x'} = F_x.$$

Tenuto conto che $dt' = -dt$, l'accelerazione nel riferimento O' è

$$\frac{d^2 x'}{dt'^2} = \frac{d^2 x}{dt^2} = \frac{d}{dt'} \left(\frac{dx}{dt'} \right) = \frac{d}{dt'} \left(-\frac{dx}{dt} \right) = -\frac{d}{dt} \left(-\frac{dx}{dt} \right) = \frac{d^2 x}{dt^2}.$$

Poiché le accelerazioni risultano uguali, l'equazione di Newton ha la stessa forma per inversione della variabile temporale. Nel caso in cui sia presente l'attrito, o qualunque processo dissipativo, non è possibile invertire il verso del tempo. Infatti nel riferimento O' , si ha

$$v' = \frac{dx'}{dt'} = \frac{dx}{dt} = -v.$$

Poiché, per esempio, la forza di attrito viscoso è del tipo

$$F_A = -bv,$$

nel riferimento O' è

$$F'_A = -bv' = bv = -F_A.$$

Ma si è verificato che, per inversione della variabile temporale,

$$\frac{d^2x'}{dt'^2} = \frac{d^2x}{dt^2},$$

dunque si ottiene

$$F'_A = -m \frac{d^2x'}{dt'^2}.$$

Un processo dissipativo non è invariante per inversione della variabile temporale. Questa conclusione è generale ed è legata a tutti i processi irreversibili. In tal modo si definisce la così detta *freccia del tempo*, secondo la quale nel fenomeno è possibile distinguere passato e futuro. In generale, un qualsiasi fenomeno che dipende dal verso della velocità, non è invariante per inversione della variabile temporale. L'energia cinetica, che dipende da v^2 è invariante per questa operazione di simmetria.

2.2. Inversione delle coordinate spaziali

L'inversione delle coordinate spaziali si chiama anche trasformazione di parità. Le equazioni di trasformazione sono

$$x' = -x, \quad y' = -y, \quad z' = -z, \quad t' = t,$$

$$F_{x'} = -F_x, \quad F_{y'} = -F_y, \quad F_{z'} = -F_z.$$

Come prima, è facile dimostrare l'invarianza della seconda equazione di Newton secondo tali trasformazioni. In figura 2 è mostrato come avviene l'inversione delle coordinate spaziali; l'immagine speculare del riferimento O viene ruotata di 180° attorno all'asse x . La trasformazione di parità è rilevante in Fisica nucleare. Tuttavia esistono molti processi fisici in cui la trasformazione di parità non è verificata: si pensi ad una vite destrorsa, che non conserva la sua caratteristica se vista allo specchio.

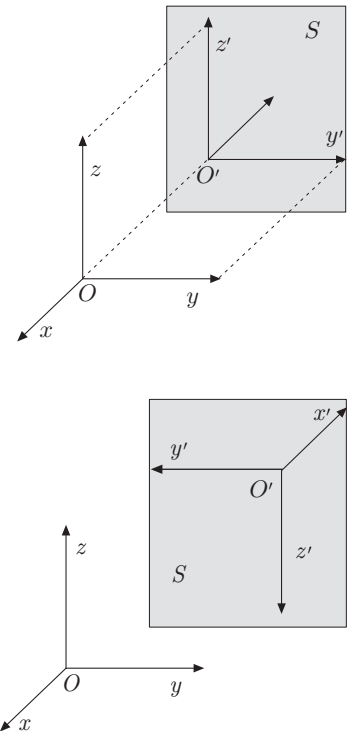


Fig. 20.2

III 3. Invarianza dell'energia potenziale

L'invarianza per traslazione e per rotazione dell'energia potenziale implica la conservazione della quantità di moto e del momento angolare. Consideriamo l'energia potenziale di due particelle di coordinate x_1, x_2 . Se l'energia potenziale delle particelle è invariante per traslazione, si deve avere

$$U(x_1, x_2) = U(x_1 + l, x_2 + l)$$

dove l è una traslazione lungo l'asse x . La verifica è particolarmente semplice per una forma di energia potenziale del tipo:

$$U(x_1, x_2) = (x_1 - x_2)^2.$$

Per una traslazione l , si ha

$$U(x_1 + l, x_2 + l) = [(x_1 + l) - (x_2 + l)]^2 = (x_1 - x_2)^2 \equiv U(x_1, x_2).$$

Poiché inoltre

$$F_1 = -\frac{\partial U}{\partial x_1}, \quad F_2 = -\frac{\partial U}{\partial x_2},$$

si trae immediatamente:

$$F_1 = -F_2.$$

Segue che la risultante delle forze di interazione tra le particelle è nulla, come vuole la terza legge della dinamica. Dunque la quantità di moto è costante. Questo risultato si estende immediatamente a tre dimensioni, ossia al caso in cui l'energia potenziale è funzione unicamente di $\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2$:

$$U(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = U(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2),$$

dove $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2$ sono i vettori che individuano le posizioni delle particelle.

Più in generale, se l'energia potenziale è funzione delle differenze tra i vettori che individuano le posizioni delle particelle $\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j$, l'energia potenziale è invariante per traslazioni ed è costante la quantità di moto. Dimostriamo ora l'invarianza dell'energia potenziale per rotazioni. Chiamiamo per brevità con \mathcal{R} l'operatore rotazione, costituito per esempio dalle equazioni di trasformazione di coordinate, e con \mathbf{r} il vettore posizione della particella. Sia $\mathcal{R}\mathbf{r}$ il vettore che si ottiene in seguito alla rotazione; l'energia potenziale è invariante per rotazioni, ossia

$$U(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \dots, \mathbf{r}_n) = U(\mathcal{R}\mathbf{r}_1, \mathcal{R}\mathbf{r}_2, \dots, \mathcal{R}\mathbf{r}_n),$$

se U dipende dalla mutua distanza tra le particelle $\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j$.

Se infatti consideriamo, come prima, l'energia potenziale di interazione tra due particelle:

$$U(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2);$$

in seguito alla rotazione i vettori $\mathcal{R}\mathbf{r}_1$, $\mathcal{R}\mathbf{r}_2$, mutano di direzione ma non muta il modulo della loro differenza $\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2$. L'energia potenziale risulta invariante se dipende dal modulo di tale distanza. Allora la forza è diretta lungo la congiungente $\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2$ ed è una forza di interazione, $\mathbf{F}_{12} = -\mathbf{F}_{21}$. Il momento risultante di tali forze è nullo qualunque sia il polo. Si ha come conseguenza la conservazione del momento angolare.

4. Invarianza per trasformazioni galileane

Nei capitoli dedicati alla cinematica (V) e alla dinamica relativa (XI), si è trovato che il movimento di un punto materiale dipende dal riferimento, ossia che è possibile descrivere il moto in un riferimento qualsiasi applicando semplicemente le leggi di trasformazione di coordinate; in altri termini, la stessa realtà fisica può essere descritta in maniera diversa da osservatori animati di moto relativo qualsiasi. In particolare si è trovato che l'accelerazione è invariante in tutti i riferimenti inerziali, ossia per trasformazioni galileane. Si è dunque dedotto che l'equazione fondamentale della dinamica risulta invariante per tali trasformazioni.

Questo risultato merita qualche commento: la convenzione universalmente accettata che un riferimento con assi orientati verso stelle fisse costituisca un campione di riferimento inerziale, e quindi tutti gli ∞^3 riferimenti in moto traslatorio uniforme costituiscano riferimenti inerziali, va oltre le nostre attuali possibilità di verifiche sperimentali. Non è possibile, con gli attuali mezzi, misurare l'accelerazione di stelle lontane, se questa è inferiore a 10^{-6} m/s^2 . Per esempio, l'accelerazione del Sole verso il centro della nostra galassia non è nota sperimentalmente, tuttavia osservazioni sullo spostamento delle righe spettrali per effetto Doppler, fanno ritenere che la velocità del Sole sia dell'ordine di $3 \cdot 10^5 \text{ m/s}$; se esso si muovesse di moto circolare uniforme rispetto al centro della galassia, stimando che la distanza R del Sole dal centro della galassia sia $3 \cdot 10^{20} \text{ m}$, l'accelerazione centripeta risulterebbe $a = v^2/R \approx 3 \cdot 10^{-10} \text{ m/s}^2$. Pertanto l'esperienza non ci permette di stabilire se l'accelerazione centripeta del Sole sia maggiore di questo valore, né che il centro della galassia risulti accelerato in maniera significativa.

Va ancora osservato che la legge di inerzia, nota come prima legge di Newton, stabilisce che un corpo non soggetto ad alcuna forza si muove con velocità costante. Essa presuppone un metodo indipendente per stabilire se in certo riferimento agiscano forze o meno; in realtà accertare l'assenza di forze comporta verificare assenza di accelerazioni, e ciò richiede un riferimento rispetto al quale sia possibile misurare queste ultime senza ambiguità. Il problema parrebbe senza soluzione, tuttavia l'esperienza mostra

che tutte le forze di interazione, come la forza gravitazionale e le forze elettromagnetiche, diminuiscono rapidamente al crescere della distanza, almeno con l'inverso del quadrato della distanza. Pertanto possiamo ragionevolmente ritenere che un corpo molto lontano da tutti gli altri non sia praticamente soggetto ad alcuna forza e quindi non venga accelerato. Per esempio, sappiamo che l'accelerazione cui è soggetto ogni corpo sulla terra è quella di gravità; l'accelerazione dovuta alla forza gravitazionale esercitata dal Sole è soltanto $0,006 m/s^2$, perciò quella dovuta ad una stella lontana è senza dubbio trascurabile. È questo il motivo che ci permette di stabilire come riferimento inerziale un qualunque riferimento con assi orientati verso stelle fisse.

|| 4.1. Legge di conservazione della quantità di moto

Postulata la conservazione della massa e dell'energia nella sua forma più generale, consideriamo l'urto tra due particelle in un riferimento O . Supponendo che dopo l'urto le particelle siano così lontane da poter trascurare la loro interazione, la conservazione dell'energia si scrive:

$$\frac{1}{2}m_1v_1^2 + \frac{1}{2}m_2v_2^2 = \frac{1}{2}m_1V_1^2 + \frac{1}{2}m_2V_2^2 + Q, \quad (1)$$

essendo V la velocità dopo l'urto e Q l'energia dissipata o energia propria del sistema, indipendente dal riferimento.

Sia O' un riferimento che trasla rispetto al primo con velocità \mathbf{v}_t costante. In questo riferimento la conservazione dell'energia è espressa da:

$$\frac{1}{2}m_1v_1'^2 + \frac{1}{2}m_2v_2'^2 = \frac{1}{2}m_1V_1'^2 + \frac{1}{2}m_2V_2'^2 + Q. \quad (2)$$

Essendo l'energia invariante, le (1) e (2) devono essere uguali. Poiché le velocità prima e dopo l'urto risultano

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_1' &= \mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_t & \mathbf{v}_2' &= \mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_t \\ \mathbf{V}_1' &= \mathbf{V}_1 - \mathbf{v}_t & \mathbf{V}_2' &= \mathbf{V}_2 - \mathbf{v}_t, \end{aligned}$$

si consideri la relazione:

$$\mathbf{v}_1' \cdot \mathbf{v}_1' = (\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_t) \cdot (\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_t) = v_1^2 + v_t^2 - 2\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_t,$$

e le altre simili. Sostituendo nella (2), si ottiene:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2}m_1(v_1^2 + v_t^2 - 2\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_t) + \frac{1}{2}m_2(v_2^2 + v_t^2 - 2\mathbf{v}_2 \cdot \mathbf{v}_t) \\ &= \frac{1}{2}m_1(V_1^2 + v_t^2 - 2\mathbf{V}_1 \cdot \mathbf{v}_t) + \frac{1}{2}m_2(V_2^2 + v_t^2 - 2\mathbf{V}_2 \cdot \mathbf{v}_t) + Q. \end{aligned}$$

Questa equazione è vera purchè si abbia

$$(m_1\mathbf{v}_1 + m_2\mathbf{v}_2) \cdot \mathbf{v}_t = (m_1\mathbf{V}_1 + m_2\mathbf{V}_2) \cdot \mathbf{v}_t,$$

la quale dovendo essere soddisfatta per qualunque valore di \mathbf{v}_t , implica:

$$m_1 \mathbf{v}_1 + m_2 \mathbf{v}_2 = m_1 \mathbf{V}_1 + m_2 \mathbf{V}_2,$$

che è proprio la legge di conservazione della quantità di moto. Per quanto riguarda la conservazione del momento angolare, valgono le conclusioni ottenute nel paragrafo precedente.

L'invarianza delle leggi fisiche per operazioni di simmetria è una caratteristica fondamentale della Natura e il suo studio meriterebbe maggiore approfondimento. Tuttavia, da quanto si è detto, si possono trarre conclusioni piuttosto generali. Se un fenomeno fisico obbedisce a certe leggi di simmetria, esiste sempre una grandezza che si conserva; in altri termini una simmetria implica una legge di conservazione. La conservazione della quantità di moto e del momento angolare sono conseguenza della simmetria per traslazioni e per rotazioni. La conservazione dell'energia è conseguenza della simmetria per traslazioni nel tempo; infatti si è dimostrato che l'energia totale di un sistema di particelle interagenti mediante forze che non dipendono esplicitamente dal tempo, è costante. Precisamente, la conservazione dell'energia implica l'esistenza di una grandezza, l'energia totale, che è invariante rispetto al tempo e rispetto alle coordinate; questa grandezza è dunque invariante per traslazioni spaziali e temporali. Le proprietà di simmetria sono mezzi estremamente potenti; infatti le leggi di conservazione sono indipendenti dalla particolare traiettoria e, spesso, dalla forza. Una legge di conservazione può fornire risultati generali, senza entrare nei dettagli delle equazioni del moto.

5. Velocità della luce

La velocità della luce nel vuoto è una delle costanti fondamentali della Fisica; essa è la velocità con cui si propagano le onde elettromagnetiche nel vuoto, indipendentemente dalla loro frequenza. Nel corso dei secoli la velocità della luce è stata misurata da molti scienziati, con metodi sempre più raffinati. Il valore della velocità della luce nel vuoto, ottenuto con i metodi più avanzati e oggi universalmente accettato, è

$$c = (2,997925 \pm 0,000003) \cdot 10^8 \text{ m/s}.$$

Dal punto di vista storico, appare opportuno ricordare due esperienze fondamentali. Già in epoche antecedenti al XVII secolo gli scienziati ritenevano che la velocità di propagazione dei segnali luminosi avesse un valore finito; tuttavia la conferma sperimentale venne solo nel 1676, quando Roemer ne misurò il valore osservando le anomalie delle eclissi di Io, la luna più vicina a Giove. L'eclisse di Io avviene ogni 42 ore, quando Giove si frappone tra

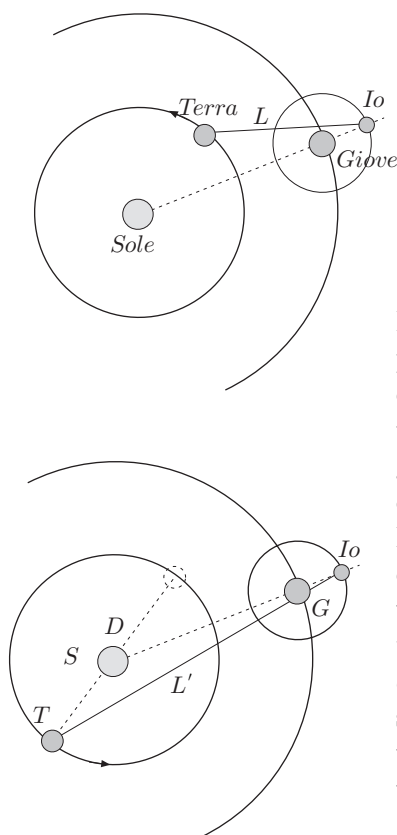


Fig. 20.3

il Sole e la sua luna. A causa della velocità finita della luce, questo fenomeno viene osservato dalla Terra con un ritardo $\Delta t = L/c$, dove L è la distanza Io-Terra, figura 3. Dopo sei mesi la Terra si trova nella posizione diametralmente opposta a quella iniziale, dove $L' \approx L + D$, dunque il ritardo del segnale luminoso diventa

$$\Delta t' \approx \frac{L}{c} + \frac{D}{c}, \quad \Rightarrow \quad \Delta t' - \Delta t = \frac{D}{c}.$$

Roemer durante sei mesi di osservazioni, misurò un ritardo complessivo $\Delta t' - \Delta t$ di circa 20 minuti, valore corrispondente al tempo che impiega la luce per attraversare una distanza uguale al diametro dell'orbita terrestre intorno al Sole. Poiché D non era noto con grande accuratezza, ricavò il valore $c = 214300 \text{ km/s}$. La misura di Bradley (1725), è basata sull'osservazione dell'aberrazione della luce di una stella lontana. Una stella allo zenit, ossia sulla verticale del luogo di osservazione, nel corso di un anno sembra muoversi lungo un'orbita quasi circolare. Questo moto apparente è una conseguenza diretta del valore finito della velocità della luce, $c = 3 \cdot 10^8 \text{ m/s}$, e del moto di rivoluzione della terra che avviene su un'orbita pressoché circolare, con velocità $v = 3 \cdot 10^4 \text{ m/s}$; la velocità della terra nella rotazione attorno al proprio asse è 100 volte minore, dunque trascurabile.

Per spiegare il fenomeno dell'aberrazione, di solito si adduce l'analogia di un uomo che cammina nella pioggia, che si suppone cada verticalmente; tanto più velocemente l'uomo procede, tanto più inclinato deve tenere l'ombrello per potersi riparare. La velocità della pioggia rispetto all'uomo in moto, è sempre maggiore della sua velocità effettiva. Tuttavia non è corretto interpretare il fenomeno in termini di velocità relativa, perché vedremo che la velocità della luce non dipende dal riferimento. È dunque più opportuno citare la spiegazione del fenomeno dovuta allo stesso Bradley.

La direzione di una stella, rispetto alla verticale terrestre, può essere stabilita osservando la stella attraverso un tubo sottile, agli estremi del quale sono disposti due traguardi, analogamente a quanto avviene negli ordinari telescopi. Si supponga che un raggio di luce proveniente da una stella si propaghi lungo CA , in direzione ortogonale al segmento AB , figura 4. Se l'osservatore è fermo in A , la stella, sia che la luce abbia velocità finita oppure infinita, appare lungo la direzione CA . Immaginando che la luce si propaghi da C ad A con velocità c finita e che l'osservatore si muova da B verso A con velocità v , il raggio di luce e l'osservatore giungeranno in A nello stesso istante, se il rapporto tra c e v è uguale al rapporto tra i segmenti CA e BA ; infatti essendo $CA = ct$ e $BA = vt$, si ha $CA/BA = c/v$. Supponendo che il segmento BC sia il tubo considerato sopra, la "particella" di luce

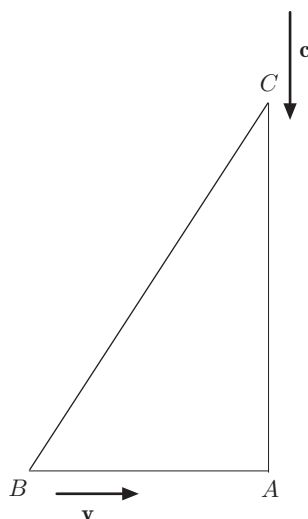


Fig. 20.4

che parte da C potrà colpire l'occhio dell'osservatore durante il suo moto da B ad A , solo se il tubo è inclinato di un angolo θ tale da rispettare i rapporti suddetti. Dunque il tubo o il telescopio non punta nella direzione vera della stella. L'angolo di inclinazione, o aberrazione della stella è dato dalla relazione

$$\tan \theta = \frac{v}{c}, \quad (3)$$

dove v è la velocità di rivoluzione della terra. Siccome quest'ultima è molto minore di c , sostituendo il valore sopra riportato, risulta $\tan \theta \approx \theta = 20,5''$. Poiché la velocità della terra cambia continuamente di direzione durante l'anno, l'aberrazione della stella cambia di conseguenza e il moto apparente di una stella allo zenit risulta pressoché circolare. Bradley progettò un telescopio che poteva essere inclinato con estrema precisione rispetto alla verticale e condusse una serie molto accurata di osservazioni dell'aberrazione della stella γ -Draconis, che si trova allo zenit alla latitudine di Londra. Da queste misure ricavò che il diametro angolare dell'orbita apparente di questa stella è uguale a $40,5''$ e dalla (3) ricavò il valore della velocità della luce. Va osservato che nell'astronomia di quell'epoca esisteva una notevole incertezza sulla misura della parallasse di una stella, descritta nel capitolo I, perché non era noto il fenomeno dell'aberrazione; fu merito di Bradley distinguere in maniera netta i due fenomeni. D'altra parte i valori trovati per la parallasse sono sempre molto minori di quelli dell'aberrazione.

6. Esperienza di Michelson-Morley

In conformità alle trasformazioni galileane, detta c la velocità della luce in un riferimento fisso e v_t la velocità di trascinamento di un riferimento inerziale, la velocità della luce rispetto a tale riferimento, dovrebbe essere:

$$v = c \pm v_t, \quad (4)$$

secondo che il moto avvenga verso la sorgente luminosa o in quello opposto. In Fisica classica la (4) è valida per le onde elastiche e nelle situazioni ordinarie. Se intervengono segnali luminosi l'esperienza mostra che si ha sempre

$$v = c,$$

per qualunque riferimento, indipendentemente dalla velocità di trascinamento. Questo risultato è il fondamento della teoria della relatività.

Nel XIX secolo, una volta riconosciuta la natura ondulatoria della luce, in analogia alle onde elastiche, si riteneva che esistesse un mezzo di caratteristiche straordinarie che permettesse la

propagazione delle onde luminose. Infatti, poiché tali onde sono trasversali, il mezzo avrebbe dovuto avere un modulo di rigidità elevatissimo e una densità estremamente piccola, in accordo con la formula che esprime la velocità della propagazione ondosa in un mezzo elastico; inoltre avrebbe dovuto essere perfettamente trasparente. Questo mezzo fu chiamato *etere cosmico*. Lo stesso Maxwell riteneva che *se viene trasmessa energia, in un certo tempo, da un corpo a un altro, deve esserci un mezzo che contiene l'energia dopo che essa ha lasciato il primo corpo e prima che abbia raggiunto il secondo*.

Dunque secondo le trasformazioni galileane la velocità della luce, in un riferimento in moto rispetto all'etere, dovrebbe essere diversa da quella misurata nel riferimento solidale con l'etere in quiete, in modo da verificare la (4). In particolare, se la terra si muovesse rispetto all'etere senza perturbarlo, la velocità della luce rispetto alla terra dovrebbe dipendere dalla direzione di propagazione. Infatti, nel riferimento solidale con la terra, la velocità di propagazione di un raggio luminoso dovrebbe essere $c - v_t$ oppure $c + v_t$ secondo che esso si propaghi nel verso concorde con la velocità orbitale v_t della terra, oppure in verso opposto. Se la luce si propagasse in direzione ortogonale a v_t , la velocità della luce rispetto all'osservatore terrestre dovrebbe essere $\sqrt{c^2 - v_t^2}$.

Poiché $v_t/c \approx 10^{-4}$, si capisce che la velocità della luce nel riferimento terrestre dovrebbe differire di molto poco da quella nel riferimento fisso con l'etere. Ammettendo dunque valide le trasformazioni galileane, una semplice esperienza che in linea di principio possa rivelare la dipendenza della velocità della luce dal moto della terra, potrebbe consistere nella misura dei tempi che impiega un impulso luminoso nel percorrere una distanza nota, una volta nel verso concorde a v_t , e successivamente in verso opposto. Nel primo caso la velocità della luce rispetto alla terra dovrebbe risultare $c + v_t$, nel secondo $c - v_t$. Tuttavia poiché $c \gg v_t$ la misura dei tempi con la necessaria precisione, può comportare seri problemi. Oggi, con gli impulsi laser estremamente brevi e con gli orologi atomici di cui si dispone, questo tipo di esperimento è possibile.

Nel 1881 A. Michelson, con altri collaboratori, iniziò una serie di famose esperienze volte a confermare queste ipotesi. Poiché, in quel tempo, le misure dirette dei tempi e della lunghezza di un impulso luminoso presentavano difficoltà notevoli, Michelson ideò un metodo interferometrico, col quale era possibile misurare differenze di percorso ottico molto piccole con una precisione molto elevata. L'interferometro di Michelson-Morley è schematizzato in figura 5. Un raggio di luce, proveniente da una sorgente monocromatica S , incide su una lamina semitrasparente A dove, in parte viene inviato sullo specchio B e in parte sullo specchio C . I raggi BA e CA riflessi dagli specchi, giunti in A , vengono uno parzial-

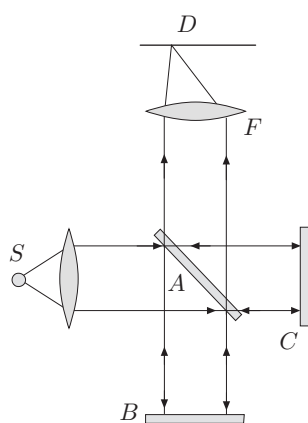


Fig. 20.5

mente trasmesso, l'altro parzialmente riflesso; questi ultimi infine si sovrappongono lungo AD , dove un sistema focalizzante F permette di osservare le frange di interferenza su uno schermo. Il percorso di tali raggi nella figura è relativo al riferimento solidale con la Terra, dove l'interferometro è in quiete. Nel riferimento fisso con l'etere, il raggio proveniente da A e incidente sullo specchio B , a causa del moto di trascinamento, inciderà sullo specchio quando questo si troverà in B' e giungerà sulla lamina semitrasparente quando questa si trova in A' , come mostrato in figura 6. Detta $v_t \Delta t_1$ la semidistanza AA' , si ha

$$(AB')^2 = (v_t \Delta t_1)^2 + (AB)^2, \quad c^2 \Delta t_1^2 = v_t^2 \Delta t_1^2 + (AB)^2,$$

da cui:

$$\Delta t_1 = \frac{AB}{\sqrt{c^2 - v_t^2}}, \quad \Delta t = 2\Delta t_1 = \frac{2AB}{\sqrt{c^2 - v_t^2}},$$

che è il tempo impiegato dalla luce per percorrere il tratto $AB'A'$. Più semplicemente, se si ammettono valide le trasformazioni galileiane, la velocità della luce nel riferimento solidale con l'interferometro è proprio $\sqrt{c^2 - v_t^2}$.

Analogamente, nel riferimento solidale con l'interferometro, il tempo che il raggio AC impiega nel percorso di andata e ritorno è dato da

$$\Delta t' = \frac{AC}{c - v_t} + \frac{AC}{c + v_t} = 2AC \frac{c}{c^2 - v_t^2}.$$

Supponendo che $AB = AC = L$, bracci dell'interferometro uguali, e trascurando i termini del quarto ordine, il tempo impiegato dal raggio AB si può scrivere

$$\Delta t = \frac{2L}{\sqrt{c^2 - v_t^2}} = \frac{2L}{c\sqrt{1 - v_t^2/c^2}} \approx \frac{2L}{c} \left(1 + \frac{1}{2} \frac{v_t^2}{c^2}\right).$$

Analogamente il tempo impiegato dal raggio AC si può esprimere come

$$\Delta t' = 2L \frac{c}{c^2 - v_t^2} \approx \frac{2L}{c} \left(1 + \frac{v_t^2}{c^2}\right).$$

Si trova che $\Delta t' > \Delta t$, ossia il raggio AC è più lento del raggio AB , pertanto la differenza tra i due tempi risulta

$$\Delta t' - \Delta t = \frac{L}{c} \frac{v_t^2}{c^2}.$$

A causa della differenza di cammino ottico che ne segue, si dovrebbero osservare frange di interferenza dovute al moto di trascinamento della Terra rispetto all'etere.

Tuttavia per poter evidenziare tale effetto occorreva introdurre un elemento aggiuntivo. In realtà è praticamente impossibile realizzare l'uguaglianza dei bracci dell'interferometro, perciò

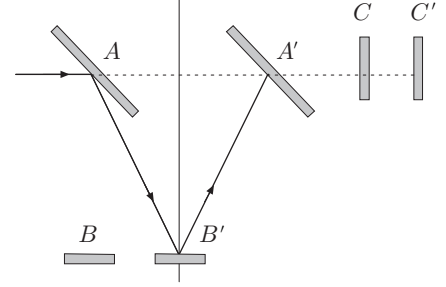


Fig. 20.6

inizialmente era presente una certa figura di interferenza. Ruotando l'interferometro di 90° il raggio AB diventa più lento ed AC più veloce. I cammini ottici vengono scambiati e di conseguenza si dovrebbe avere uno spostamento delle frange di interferenza uguale a

$$2L \frac{v_t^2}{c^2}.$$

Il numero di frange spostate è quindi

$$\Delta N = \frac{2L}{\lambda} \frac{v_t^2}{c^2},$$

dove λ è la lunghezza d'onda della luce impiegata.

Su un percorso $L = 11 \text{ m}$, corrispondente a $2 \cdot 10^7$ lunghezze d'onda della luce gialla del sodio, 5500 \AA , si avrebbe uno spostamento di 0,4 frange. Con sorpresa non fu osservato alcun spostamento che eccedesse in maniera significativa gli errori sperimentali. Omettiamo per brevità la descrizione dettagliata dell'esperienza che, a pieno titolo, può essere annoverata tra le esperienze fondamentali della Fisica classica. Essa è stata ripetuta nei decenni successivi dallo stesso Michelson e da altri ricercatori, nelle condizioni più svariate e usando radiazione di diversa natura; ad alte quote, sotto la superficie terrestre, in diversi continenti e in stagioni differenti; usando luce stellare, luce laser e raggi gamma. Il risultato è stato sempre concorde nell'escludere l'esistenza dell'etere come supporto atto alla propagazione della radiazione elettromagnetica. Con la fraseologia in uso all'inizio del secolo, non fu rivelato alcun *vento d'etere* che potesse essere percepito dall'osservatore terrestre, in moto rispetto all'etere in quiete.

6.1. Velocità limite

Il risultato negativo dell'esperienza di Michelson suggerisce che la velocità della luce è indipendente dal moto del riferimento in cui viene misurata. Se dunque c è invariante in tutti i riferimenti inerziali, il problema successivo è quello di verificare se in qualche fenomeno fisico si possano raggiungere velocità maggiori di c o se questa costituisce una velocità limite. L'opportunità di una verifica sperimentale di questo problema si trova nello studio del moto di particelle cariche in un acceleratore; infatti non esiste alcun principio classico che impedisca alle particelle, soggette a differenze di potenziale sempre più elevate, di raggiungere velocità arbitrariamente grandi.

L'esperienza della velocità limite è stata eseguita al M.I.T. (Massachusetts Institute of Technology) nei primi anni 60 da W. Bertotti. Essa consiste nell'osservare come varia la velocità di un fascio di elettroni, al variare dell'energia cinetica che assumono,

quando sono soggetti ad un campo elettrostatico. Classicamente, detta ΔV la differenza di potenziale, q la carica ed m la massa della particella, vale la relazione

$$T = \frac{1}{2}mv^2 = q\Delta V,$$

da cui si ricava

$$v^2 = \frac{2}{m}q\Delta V = \frac{2}{m}T;$$

la relazione tra v^2 e T è lineare. Schematicamente, gli elettroni provenienti da un acceleratore di Van de Graaff, venivano introdotti in un tubo sotto vuoto, lungo $8,4\text{ m}$, in cui non era presente campo elettrico; pertanto al suo interno la velocità degli elettroni risulta costante, figura 7. In realtà tale tubo era costituito da un acceleratore lineare, che permetteva di raggiungere una energia finale di 15 MeV ($1\text{ eV} = 1,6 \cdot 10^{-19}\text{ J}$). Il fascio di elettroni uscenti dal Van de Graaff era costituito da “pacchetti” di elettroni brevissimi emessi a frequenza costante che, colpendo due elettrodi disposti all’inizio e alla fine del tubo ne determinavano una variazione di tensione. Gli impulsi di tensione così ottenuti venivano visualizzati con un oscilloscopio, sincronizzato con la frequenza di ripetizione dei pacchetti, fornendo una misura diretta del tempo di transito e quindi della velocità degli elettroni. I risultati dell’esperienza sono mostrati in figura 8, dove è evidente che l’andamento di v^2 in funzione di T , non è lineare, ma tende ad assumere il valore asintotico c^2 . Va menzionato che inoltre l’energia cinetica degli elettroni era controllata in modo indipendente, con metodi calorimetrici.

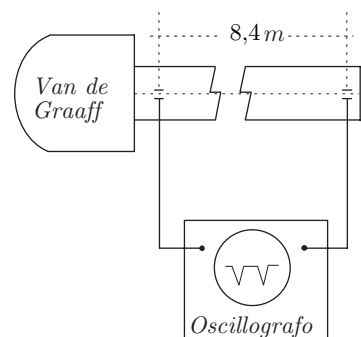


Fig. 20.7

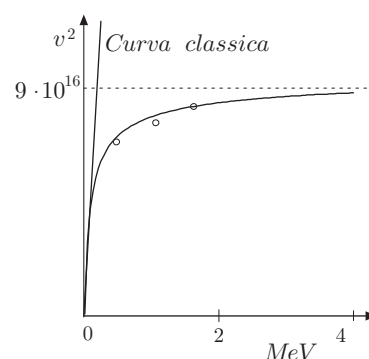


Fig. 20.8

7. Postulati della relatività ristretta

Come s’è visto nel corso dello studio della Meccanica, le leggi di Newton sono invarianti per trasformazioni galileane; pertanto nessuna esperienza di meccanica è in grado di rivelare differenze nei fenomeni che avvengono in ogni riferimento inerziale. Di conseguenza non è possibile rivelare il moto assoluto di un riferimento inerziale rispetto ad un riferimento privilegiato.

Le leggi fisiche devono restare invariate quando si passi da un osservatore O inerziale ad un altro O' in moto rettilineo e uniforme rispetto al primo. Ciò non vuol dire che le misure simultanee, fatte da O e da O' di uno stesso fenomeno, danno lo stesso risultato, ma significa che le relazioni tra le misure fatte da O coincidono con le relazioni tra le misure fatte da O' . È dunque spontaneo chiedersi se queste conclusioni siano valide anche per i fenomeni elettromagnetici o se qualcuno di questi fenomeni ci possa permettere di rivelare il moto assoluto di un riferimento rispetto ad un qualche riferimento privilegiato, ossia rispetto all’etere cosmico. Infatti le

leggi dell'elettromagnetismo, essendo dipendenti dalla velocità dei corpi carichi, non dovrebbero essere invarianti per trasformazioni galileane. In altri termini dobbiamo supporre che le leggi dell'elettromagnetismo non siano valide in ogni riferimento inerziale, oppure ritenere che le trasformazioni galileane non siano adatte e quindi abbandonare i concetti di tempo assoluto e di lunghezza assoluta, legati a tali trasformazioni. Se il fenomeno fisico dipende dalla velocità, la legge che lo descrive avrebbe espressioni diverse in ogni riferimento in moto.

Questa circostanza appare evidente se si considera una particella carica, in quiete nel riferimento O ; si osserva, come è noto, un campo elettrico radiale. In un riferimento O' , in moto rispetto al primo, con velocità v_t parallela all'asse delle x , la particella appare muoversi con velocità $-v_t$, e poiché una carica in moto equivale ad una corrente elettrica, l'osservatore solidale con O' osserva una corrente elettrica che, a sua volta, genera un campo magnetico. Pertanto nel riferimento O' si osservano sia un campo elettrico che un campo magnetico. Le leggi che descrivono il campo elettrico e il campo magnetico appaiono diverse nei due riferimenti. Analogamente la forza esercitata dal campo magnetico \mathbf{B} su una carica q in moto, in un riferimento O , è data dalla legge di Lorentz $\mathbf{F} = q\mathbf{v} \times \mathbf{B}$; nel riferimento O' , in moto con velocità \mathbf{v}_t , la velocità della carica risulta $\mathbf{v}' = \mathbf{v} - \mathbf{v}_t$, quindi la forza è diversa dalla precedente. Si potrebbe concludere che le leggi dell'elettromagnetismo non siano invarianti per trasformazioni galileane; di conseguenza la luce, che è un'onda elettromagnetica, si dovrebbe propagare con velocità diversa in ogni riferimento in moto relativo uniforme.

Poiché né le leggi della meccanica né l'esperienza di Michelson riescono a rivelare alcuna differenza della velocità della luce nei riferimenti inerziali, Einstein nel 1905 propose l'invarianza delle leggi fisiche in tutti i riferimenti in moto relativo uniforme, enunciando il seguente postulato:

a) Tutte le leggi della fisica sono le stesse in ogni riferimento inerziale.

D'altra parte le equazioni di Maxwell, da cui derivano le leggi di propagazione dei segnali elettromagnetici, appartengono alle leggi della Fisica, pertanto un secondo postulato è il seguente:

b) La velocità della luce nel vuoto è la stessa in ogni riferimento inerziale ed ha il valore $c = 3 \cdot 10^8$ m/s.

Se tali postulati sono veri, le trasformazioni di coordinate non possono essere quelle galileane. La ricerca di trasformazioni adatte porta alle trasformazioni di Lorentz le quali, come vedremo, per velocità piccole rispetto alla velocità della luce, si riducono a quelle di Galilei. L'invarianza della velocità della luce impone di abbandonare i concetti classici di spazio e di tempo assoluto; il fatto che un segnale luminoso abbia la stessa velo-

cità comunque ci allontaniamo o ci avviciniamo ad esso è al di fuori della nostra intuizione, ma ciò comporta che la misura degli intervalli di tempo e la misura delle lunghezze dipendano dal riferimento. Non è sufficiente dare le coordinate di una particella in funzione del tempo, uguale per tutti gli osservatori, come in fisica classica, ma considerare coordinata spaziale e coordinata temporale intimamente legate ad un *evento* che si verifica nello spazio-tempo. In relatività un riferimento è costituito dalle coordinate spaziali, ad ognuna delle quali è associato un orologio che fissa la coordinata temporale dell'evento nello spazio-tempo. Naturalmente tutti gli orologi del riferimento devono essere sincronizzati con un orologio, principale, situato nell'origine delle coordinate. Secondo questa nuova concezione, due eventi possono avvenire:

- 1) Nello stesso posto e nello stesso tempo. Questi eventi sono *simultanei*: nel tempo e nello spazio.
- 2) Nello stesso posto ma in tempi diversi.
- 3) In posti diversi ma nello stesso tempo; questo è il caso di eventi solo simultanei.
- 4) In posti diversi e in tempi diversi.

La sincronizzazione degli orologi di un riferimento si può ottenere mediante un segnale luminoso emesso nel punto medio del segmento che congiunge l'orologio principale con l'orologio legato all'evento. Poiché la velocità del segnale luminoso è costante, i due orologi risultano sincronizzati se entrambi registrano lo stesso tempo quando il segnale luminoso li raggiunge. Come conseguenza si deduce che la *simultaneità è relativa*; ossia due eventi simultanei in certo riferimento non sono tali in un riferimento in moto rispetto al primo.

|| 7.1. Sincronizzazione degli orologi

La sincronizzazione degli orologi di un riferimento va effettuata tenendo presente il caso 3) del paragrafo precedente. Il metodo sperimentale che, in linea di principio, permette di sincronizzare gli orologi, in quiete in un riferimento, discende dall'invarianza della velocità della luce. Come si è detto, due orologi in un certo riferimento, risultano sincronizzati, se segnano lo stesso tempo quando vengono raggiunti da un segnale luminoso che parte dal punto medio del segmento che li congiunge.

Per capire come orologi sincronizzati in dato riferimento non risultano più sincronizzati in un riferimento in moto rispetto al primo, consideriamo due orologi C_1, C_2 già sincronizzati sul marciapiedi di una stazione, accanto al quale sosta un vagone. Su questo sono disposti altri due orologi C'_1, C'_2 in esatta corrispondenza con i primi e sincronizzati allo stesso modo, figura 9. Supponiamo che il vagone si muova; è evidente che il segnale luminoso, emesso dal punto medio M del segmento che congiunge gli orologi sul

marciapiedi, raggiunge C'_1 prima che C_1 e C'_2 dopo di C_2 , figura 10. Segue che gli orologi sul vagone, sincronizzati tra loro, non possono segnare lo stesso tempo di quelli che si trovano sul marciapiedi. La sincronizzazione degli orologi dipende dal riferimento; ciò significa che due eventi che sono simultanei nel riferimento O' , non risultano simultanei se le misure di tempo vengono effettuate nel riferimento O .

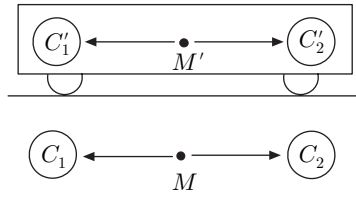


Fig. 20.9

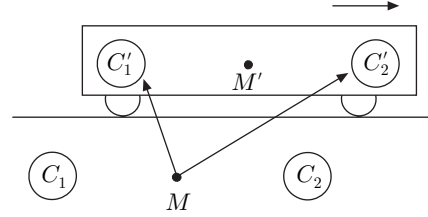


Fig. 20.10

7.2. Deduzione diretta della dilatazione dei tempi

Postulata l'invarianza della velocità della luce, consideriamo due osservatori O ed O' in moto relativo lungo l'asse x , con velocità v , con i rispettivi orologi sincronizzati. Nell'istante in cui le origini O ed O' dei riferimenti coincidono, viene emesso un segnale luminoso in direzione di uno specchio S solidale con O' , disposto sull'asse y' ed orientato ortogonalmente ad esso come in figura 11. Se L è la distanza dello specchio dall'origine, l'intervallo di tempo di andata e ritorno del segnale, nel riferimento O' è

$$\Delta t' = \frac{2L}{c}.$$

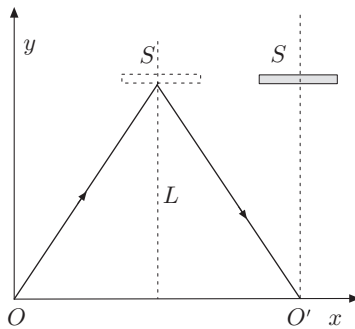
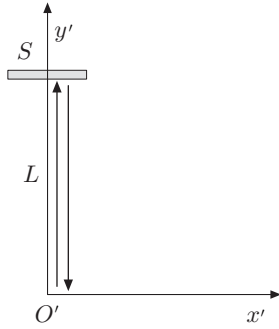


Fig. 20.11

Nel riferimento O , il segnale luminoso incontrerà l'asse delle x alla distanza $v\Delta t$ dall'origine, dopo aver percorso il cammino OSO' . Poiché anche per l'osservatore O la velocità della luce è invariante, si ha

$$\left(\frac{1}{2}c\Delta t\right)^2 = \left(\frac{1}{2}v\Delta t\right)^2 + L^2,$$

da cui si ricava:

$$\Delta t = \frac{2L}{c\sqrt{1-v^2/c^2}} = \frac{\Delta t'}{\sqrt{1-v^2/c^2}}.$$

L'osservatore O misura intervalli di tempo tanto più lunghi quanto più elevata è v ; si ha dunque una dilatazione dei tempi. Si osservi che per velocità ordinarie il termine v^2/c^2 è trascurabile e gli intervalli di tempo misurati dai due osservatori si possono considerare uguali.

8. Trasformazioni di Lorentz

Consideriamo un riferimento O fisso ed un riferimento O' mobile che trasla con velocità v uniforme, parallela all'asse x , come in figura 12. Le trasformazioni galileiane di coordinate diretta ed inversa, sono espresse dalle relazioni:

$$\begin{aligned} x &= x' + vt' & y &= y' & z &= z' & t &= t' \\ x' &= x - vt & y' &= y & z' &= z & t' &= t. \end{aligned}$$

Le equazioni di trasformazione da ricercare, valide nella relatività ristretta, devono rispettare i postulati di Einstein, ossia devono garantire l'invarianza delle leggi della Fisica e della velocità della luce in ogni riferimento inerziale. Esse possono essere stabilite in vari modi; in ogni caso devono essere lineari, ossia non devono contenere termini del tipo x'^2 , t'^2 , oppure $x't'$, Appare perciò ragionevole prendere in considerazione forme lineari del tipo

$$x = \gamma(x' + vt'), \quad x' = \gamma(x - vt), \quad (5)$$

dove γ è una funzione che può dipendere solo da v . Inoltre, poiché le precedenti devono essere simmetriche, γ deve essere la stessa in entrambe le equazioni e dunque una funzione *pari* di v . Va notato che si è indicato con t' il tempo misurato nel riferimento O' . Tenendo conto del fatto che la velocità della luce è invariante, consideriamo un segnale luminoso emesso nell'istante in cui le origini O , O' dei riferimenti coincidono. Disposto un rivelatore lungo l'asse di traslazione dei riferimenti, secondo l'osservatore O il segnale ha percorso, dall'origine al rivelatore, una distanza

$$x = ct.$$

Analogamente, per l'osservatore O' , il segnale ha percorso una distanza

$$x' = ct'.$$

Poiché le coordinate (x, t) , (x', t') si riferiscono allo stesso evento, arrivo del segnale luminoso al rivelatore, per le (5), devono sussistere le relazioni

$$\begin{aligned} ct &= \gamma(x' + vt') = \gamma(ct' + vt') \\ ct' &= \gamma(x - vt) = \gamma(ct - vt). \end{aligned}$$

Moltiplicando membro a membro, si ottiene:

$$c^2 = \gamma^2(c^2 - v^2),$$

da cui:

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}},$$

avendo posto, come di consueto, $\beta = v/c$.

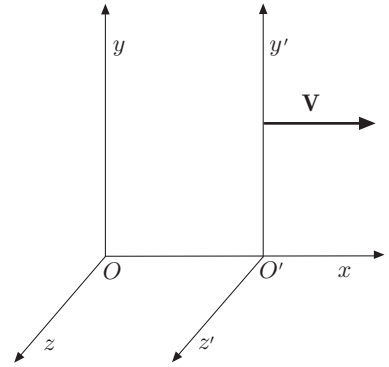


Fig. 20.12

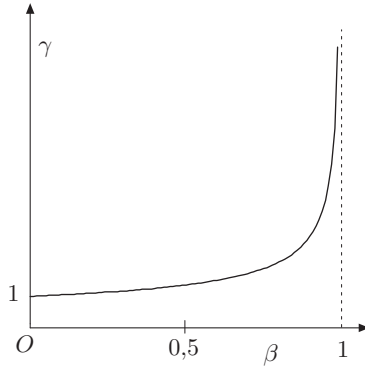


Fig. 20.13

In figura 13 è mostrato l'andamento di γ in funzione di β . Le (5) si possono scrivere:

$$x = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}(x' + vt'), \quad x' = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}(x - vt), \quad (6)$$

che per $v \ll c$ si identificano con le trasformazioni di Galilei.

Dalle (6) si ricavano le trasformazioni per i tempi; infatti dalla seconda si ha:

$$x = \frac{x'}{\gamma} + vt,$$

che sostituita nella prima, fornisce:

$$t = \frac{\gamma^2 - 1}{\gamma} \frac{x'}{v} + \gamma t' = \gamma \beta^2 \frac{x'}{v} + \gamma t',$$

da cui:

$$t = \gamma \left(t' + \frac{v}{c^2} x' \right).$$

Analogamente si ottiene la trasformazione inversa:

$$t' = \gamma \left(t - \frac{v}{c^2} x \right).$$

Allora le trasformazioni di Lorentz dirette sono:

$$x = \gamma(x' + vt'), \quad y = y', \quad z = z', \quad t = \gamma \left(t' + \frac{v}{c^2} x' \right), \quad (7)$$

quelle inverse:

$$x' = \gamma(x - vt), \quad y' = y, \quad z' = z, \quad t' = \gamma \left(t - \frac{v}{c^2} x \right). \quad (8)$$

Esse sono lineari in x e t e si riducono a quelle galileane per $v \ll c$.

Osserviamo che le trasformazioni dei tempi si possono scrivere:

$$ct = \gamma(ct' + \beta x'), \quad ct' = \gamma(ct - \beta x); \quad (9)$$

poiché ct , ct' sono spazi percorsi da un segnale luminoso, le precedenti mostrano l'intimo legame che sussiste tra spazio e tempo. Si noti che per ottenere le trasformazioni inverse, basta scambiare le variabili non accentate con quelle accentate e viceversa e cambiare il segno della velocità di trascinamento, in quanto O' vede traslare O in verso opposto.

Consideriamo due riferimenti O ed O' in moto relativo; nell'istante $t = t' = 0$ in cui le origini coincidono, una sorgente di luce puntiforme, posta nell'origine, emette un segnale il cui fronte d'onda è sferico, che per l'osservatore O ha equazione

$$x^2 + y^2 + z^2 = c^2 t^2.$$

L'osservatore O' vede anch'esso un fronte d'onda sferico, di equazione

$$x'^2 + y'^2 + z'^2 = c^2 t'^2.$$

I fronti d'onda, come si può facilmente verificare applicando le (7) o le (8), risultano invarianti per trasformazioni di Lorentz.

Dalle (7) e (8) si trae facilmente che gli orologi sincronizzati in un riferimento non sono sincronizzati con quelli di un altro riferimento in moto; due eventi simultanei in O non lo sono più in O' . Consideriamo infatti due eventi E_1, E_2 , di coordinate (x_1, t_1) e (x_2, t_2) in O . Supponendo che in O gli eventi siano simultanei, $t_1 = t_2$, ma che $x_1 \neq x_2$, la presenza nell'ultima delle (8) del termine vx/c^2 mostra che nel riferimento O' gli eventi non sono più simultanei; risulta infatti

$$\Delta t' = t'_2 - t'_1 = -\gamma \frac{v}{c^2} (x_2 - x_1).$$

Si dimostra ora facilmente la dilatazione dei tempi. Si consideri un orologio di coordinata x'_0 , fisso in O' e l'intervallo di tempo $\Delta t' = t'_2 - t'_1$, misurato da tale orologio. Nel riferimento O i tempi risultano

$$t_1 = \gamma \left(t'_1 + \frac{v}{c^2} x'_0 \right), \quad t_2 = \gamma \left(t'_2 + \frac{v}{c^2} x'_0 \right),$$

ossia:

$$\Delta t = t_2 - t_1 = \gamma (t'_2 - t'_1) = \frac{\Delta t'}{\sqrt{1 - \beta^2}}. \quad (10)$$

È importante notare che la proposizione è simmetrica per un orologio di coordinata x_0 , fisso in O . Con procedimento analogo si trova:

$$\Delta t' = \gamma (t_2 - t_1) = \frac{\Delta t}{\sqrt{1 - \beta^2}}. \quad (11)$$

Le relazioni (10) e (11) sono perfettamente coerenti; non esistono riferimenti privilegiati e dunque gli effetti sono simmetrici. Infatti l'intervallo di tempo $\Delta t'$ che compare nella (10) è misurato da un singolo orologio, in quiete in O' , ossia è l'intervallo di tempo proprio. Viceversa, per misurare l'intervallo di tempo Δt , occorrono due orologi in quiete in O , sincronizzati tra loro, e posti nelle posizioni che occupa O' all'inizio e alla fine dell'intervallo $\Delta t'$. Nella (11) la situazione è perfettamente simmetrica.

|| 8.1. Contrazione delle lunghezze

Consideriamo un'asta di lunghezza L' , disposta lungo l'asse x' , in quiete rispetto ad O' . Gli estremi dell'asta hanno coordinate x'_1 ed x'_2 , quindi si ha

$$L' = x'_2 - x'_1.$$

Nel riferimento O si deve aver cura di misurare le coordinate x_1 e x_2 degli estremi nel medesimo istante t^* ; infatti esse variano a

causa del moto di O' rispetto ad O . Si ha

$$x'_1 = \gamma(x_1 - vt^*), \quad x'_2 = \gamma(x_2 - vt^*),$$

e sottraendo:

$$x'_2 - x'_1 = \gamma(x_2 - x_1), \quad \Rightarrow \quad L' = \gamma L.$$

La lunghezza L misurata in O , è data da

$$L = \frac{L'}{\gamma} = L' \sqrt{1 - \beta^2}; \quad (12)$$

essa risulta minore della lunghezza propria L' , come determinata da misure in O' , dove l'asta è in quiete. Si verifica facilmente che la contrazione delle lunghezze è simmetrica rispetto ad O' .

8.2. Paradosso dei gemelli

La dilatazione dei tempi ha dato luogo al famoso paradosso dei gemelli. Due gemelli A e B celebrano il loro compleanno sulla Terra; poi B sale su un veicolo spaziale che lo trasporta, a una velocità $v = 0,99c$, fino ad una stella distante 4 anni luce. Il veicolo spaziale inverte subito la rotta e ritorna sulla Terra; secondo gli orologi della Terra questo viaggio ha la durata di 8 anni; quindi A sarà più vecchio di otto anni, quando incontra nuovamente B . Quest'ultimo ha tratto vantaggio della dilatazione dei tempi; infatti rispetto agli orologi solidali con la Terra, gli orologi del veicolo spaziale marciano più lentamente, secondo il fattore

$$\sqrt{1 - \beta^2} = \sqrt{1 - (0,99)^2} = 0,14.$$

Pertanto gli 8 anni registrati sulla Terra corrispondono soltanto a $8 \cdot 0,14 = 1,1$ anni registrati nel veicolo spaziale. A bordo è rallentato anche il ritmo biologico, pertanto B è invecchiato di soli 1,1 anni rispetto agli 8 di A . Il paradosso nasce se si prendono in considerazione gli intervalli di tempo rispetto al veicolo spaziale. Poiché le (10) e (11) sono perfettamente simmetriche, in questo riferimento la Terra è in moto e quindi gli orologi ad essa legati marciano più lentamente; A dovrebbe essere più giovane di B . La soluzione del paradosso va ricercata nel fatto che le equazioni di trasformazione dei tempi sono valide nei riferimenti inerziali. Il riferimento della Terra è con buona approssimazione inerziale, perciò il calcolo della dilatazione dei tempi nel veicolo spaziale si può ritenere valido. Ma il riferimento del veicolo non è inerziale; esso deve decelerare in prossimità della stella, arrestarsi e poi accelerare verso la Terra. Pertanto il paradosso deriva dall'uso improprio delle formule della dilatazione dei tempi. Una analisi più accurata stabilisce che gli orologi della Terra marciano più lentamente, finché il veicolo spaziale ha velocità costante, ma che

marciano più velocemente quando il veicolo spaziale rallenta o accelera in prossimità della stella. Comunque il risultato netto è che B risulta più giovane di A .

8.3. Esperimento di Hafele e Keating (1971)

Questo esperimento impiega orologi macroscopici e velocità di trascinamento molto minori della velocità della luce; tuttavia, grazie alla precisione degli orologi atomici, è possibile mettere in evidenza l'effetto relativistico. Si consideri un riferimento O con origine nel centro della Terra e due orologi A e B ; il primo fisso nel riferimento O , il secondo solidale con la Terra e quindi ruotante con essa, in corrispondenza all'equatore, figura 14. L'orologio A misura il periodo di rotazione della Terra di 24 ore, B compie ogni 24 ore un giro non inerziale; quindi è in ritardo rispetto ad A ogni volta che lo incontra. La velocità di trascinamento di B è piccolissima rispetto alla velocità della luce, $v \ll c$. Detta L la lunghezza dell'equatore, la durata di un giro misurata da A è

$$t = \frac{L}{v}.$$

La stessa durata misurata da B risulta

$$t' = t\sqrt{1 - \beta^2} \approx t \left(1 - \frac{1}{2}\beta^2 \right) = \frac{L}{v} - \frac{1}{2}\beta^2 \frac{L}{v},$$

dunque il ritardo di B rispetto ad A risulta

$$t - t' = \frac{L}{2} \frac{v}{c^2},$$

proporzionale a v . Se un orologio B_1 viaggia nel verso concorde con la rotazione terrestre, il suo ritardo sarà maggiore di quello di B ; analogamente un orologio B_2 che viaggia in senso contrario alla rotazione terrestre, avrà un ritardo inferiore a quello di B . Il ritardo complessivo di B_1 rispetto a B_2 è la somma dei due.

In pratica l'esperienza consiste nel misurare i tempi registrati da due orologi atomici, posti su aerei che viaggiano una volta verso est ed una volta verso ovest, e confrontarli con l'orologio standard del NBS (National Bureau of Standards) di Washington, che corrisponde all'orologio B . Il ritardo misurato dagli sperimentatori fu di $342 \pm 13 \text{ ns}$, in accordo con la previsione teorica.

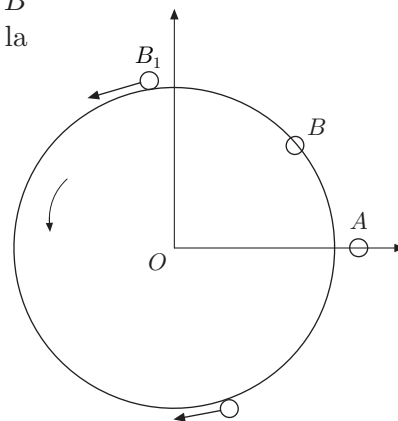


Fig. 20.14

8.4. Decadimento di particelle elementari instabili

Il decadimento delle particelle elementari instabili permette di evidenziare chiaramente la dilatazione del tempo. Proprietà intrinseca delle particelle instabili è la *vita media* τ , la quale rappresenta il tempo caratteristico del decadimento; essa è per convenzione definita nel riferimento in cui la particella è in quiete. Non è possibile predire quando una determinata particella decade;

quindi solo una vita mediata su un gran numero di particelle ha un significato riproducibile. La probabilità P che al tempo t , una particella decada nell'intervallo di tempo $\delta t \ll \tau$ successivo a t , è data da

$$P = \frac{\delta t}{\tau}.$$

Nel caso di un grande numero di particelle, la probabilità che nell'intervallo di tempo δt , ne decadano N è $NP = N\delta t/\tau$. Questo decadimento causa una diminuzione del numero di particelle uguale a

$$-\delta t \frac{dN}{dt};$$

perciò uguagliando

$$N \frac{\delta t}{\tau} = -\delta t \frac{dN}{dt}, \quad \Rightarrow \quad \frac{dN}{dt} = -\frac{N}{\tau},$$

ed integrando, si ottiene

$$N = N_0 e^{-t/\tau},$$

dove N_0 è il numero di particelle all'istante $t = 0$. Questa equazione rappresenta il numero di particelle che non hanno subito decadimento in un riferimento in quiete; il grafico di tale legge è un esponenziale decrescente, come si è già trovato in situazioni analoghe.

Il numero di particelle che decadono nell'intervallo di tempo Δt è dato da

$$\Delta N = N_0 - N = N_0(1 - e^{-\Delta t/\tau}).$$

Supponiamo di osservare un insieme di particelle che decadono, nel riferimento del laboratorio, mentre viaggiano con velocità v ; l'intervallo di tempo Δt è più lungo di quello misurato nel riferimento delle particelle, ossia $\Delta t = \gamma \Delta t'$, pertanto il numero di particelle che non sono decadute è dato dall'equazione

$$N = N_0 e^{-\Delta t'/\tau} = N_0 e^{-\Delta t/\gamma\tau}.$$

La vita media si è dilatata del fattore γ . Gli esperimenti di Farley e collaboratori (1972) mostrano chiaramente l'allungamento della vita media apparente dei muoni o mesoni μ . Queste particelle subatomiche possono essere generate nella collisione della radiazione cosmica con le particelle dell'alta atmosfera oppure mediante acceleratori nucleari; esse decadono spontaneamente generando un elettrone e due particelle neutre, dette neutrini. Un muone ha carica elettrica $\pm e = 1,6 \cdot 10^{-19} C$, massa 208 unità atomiche di massa, vita media propria $\tau = 1,5 \cdot 10^{-6} s$. Gli autori citati hanno sperimentato con un fascio di muoni prodotto dal sincrotrone del CERN a Ginevra; queste particelle erano costrette a muoversi, nell'anello di accumulazione del sincrotrone, di moto circolare con velocità prossima a quella della luce. La vita media misurata nel riferimento del laboratorio, è stata di $26,49 \mu s$, contro quella prevista dalla formula (10), di $26,69 \mu s$. Si osservi che la dilatazione del tempo è confermata anche se il riferimento del muone non è inerziale. Questo risultato è generale, come nel paradosso dei gemelli, nelle esperienze con orologi non inerziali e nelle esperienze su particelle cariche, animate di velocità relativistiche e deviate da campi magnetici.

9. Cronotopo

La cinematica relativistica mostra che nel passaggio da un riferimento ad un altro in moto relativo traslatorio uniforme, l'espressione:

$$x^2 + y^2 + z^2 - c^2 t^2 = x'^2 + y'^2 + z'^2 - c^2 t'^2,$$

o, se si vuole

$$c^2 t^2 - (x^2 + y^2 + z^2) = c^2 t'^2 - (x'^2 + y'^2 + z'^2),$$

è invariante per trasformazioni di Lorentz. Un evento caratterizzato dalle coordinate spaziali e da quella temporale, cioè che si verifica nel posto (x, y, z) e al tempo t , può essere rappresentato con un punto in uno spazio a quattro dimensioni, *spazio-tempo* o *cronotopo*. In questo spazio il quadrato della distanza tra due eventi infinitamente vicini, di coordinate (x, y, z, t) e $(x + dx, y + dy, z + dz, t + dt)$ è dato dalla seguente espressione differenziale

$$ds^2 = c^2 dt^2 - (dx^2 + dy^2 + dz^2), \quad (13)$$

anch'essa invariante per trasformazioni di Lorentz. Possiamo dunque dare un significato geometrico intrinseco allo spazio-tempo, di cui la (13) rappresenta la metrica, negandolo separatamente allo spazio e al tempo.

Se in un evento le coordinate x, y, z , che ne danno la posizione, sono costanti, mentre varia la coordinata temporale, nello spazio-tempo otteniamo una linea che si chiama *linea temporale*. Se invece è costante la coordinata temporale, otteniamo lo spazio geometrico euclideo. Si ottiene una linea dello spazio-tempo assegnando:

$$x = x(t), \quad y = y(t), \quad z = z(t),$$

equazioni che definiscono, in cinematica relativistica, la *linea di universo* dell'evento. In particolare, se la linea che congiunge due eventi è una *geodetica* dello spazio-tempo, il movimento della particella è rettilineo uniforme. Si tenga presente che nello spazio ordinario, la geodetica è definita come la linea di minimo percorso che congiunge due punti. Il percorso di una particella non soggetta a forze, nello spazio ordinario è rettilineo; la particella si muove lungo una geodetica. Se la particella è vincolata su un piano liscio, la geodetica è ancora una retta; se è vincolata su una sfera liscia la geodetica sarà un arco di circonferenza. In virtù del segno negativo che compare nella (13), nello spazio-tempo possono esserci linee reali a lunghezza nulla, circostanza che non è verificata nello spazio euclideo. In particolare possono esserci geodetiche, rette, di lunghezza nulla; in tal caso risulta

$$cdt = dl, \quad c = \frac{dl}{dt}.$$

In corrispondenza si ha un moto rettilineo uniforme con velocità della luce. Le geodetiche di lunghezza nulla del cronotopo danno la propagazione dei segnali luminosi.

Poiché nessun movimento avviene con velocità superiore a quella della luce, si deve avere $dl/dt \leq c$. Ne segue $c^2 dt^2 \geq dl^2$, ossia

$$ds^2 = c^2 dt^2 - dl \geq 0.$$

Il quadrato dell'elemento d'arco di una linea dello spazio-tempo,

congiungente due eventi reali, non è mai negativo.

Nello spazio-tempo vanno dunque distinte linee a ds^2 positivo, nullo oppure negativo. Le prime sono linee corrispondenti ad eventi che avvengono con velocità minore di quella della luce; tra esse vi sono le linee temporali. Le seconde sono linee a lunghezza nulla, segnali luminosi; le ultime non corrispondono ad alcun evento reale. Per chiarire il significato di spazio-tempo, consideriamo il moto unidimensionale di una particella in un diagramma spazio-temporale (*diagramma di Minkowski*). Tale diagramma è costituito dagli assi x e t , mutuamente ortogonali. La linea di universo di una particella è una successione di eventi tali che ognuno di essi, costituito dalla posizione x e dall'istante t , è legato al precedente da un rapporto di causalità; in cinematica classica, la linea di universo di una particella non è altro che la linea oraria del moto. Consideriamo tre punti A , B e C , equidistanti e in quiete, sull'asse x di un riferimento O , figura 15. Le linee di universo di questi punti sono rette parallele all'asse dei tempi, corrispondenti a $x = cost$. Supponiamo che all'istante $t = 0$, dal punto B venga lanciato un segnale luminoso che si propaga in entrambi i versi dell'asse x . Le linee di universo di questi segnali sono espresse dalle rette di equazioni $x = x_B \pm ct$, perciò l'arrivo dei segnali in A e C è rappresentato dalle intersezioni A_1 , C_1 di tali rette con le linee di universo di A e C . La simmetria del fenomeno assicura la simultaneità degli eventi A_1 , C_1 .

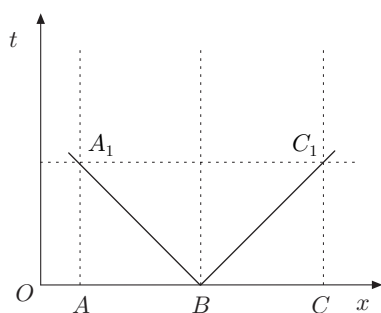


Fig. 20.15

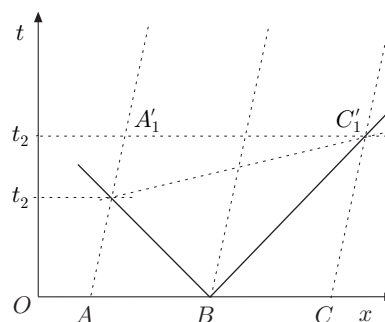


Fig. 20.16

Supponiamo ora che i punti A, B, C siano in quiete, in un riferimento O' che trasla lungo x con velocità v uniforme, rispetto ad O . In questo riferimento le linee di universo di A, B, C risultano inclinate, ed il segnale inviato da B all'istante $t = 0$, a causa dell'invarianza di c , è sempre rappresentato dalla coppia di rette $x = x_B \pm ct$. Però, come si può osservare dalla figura 16, le intersezioni di tali rette con le linee di universo di A e C , non sono su una parallela all'asse x , ossia gli eventi A'_1 , C'_1 non risultano simultanei per l'osservatore in O . In altri termini, il segnale giunge in A prima che in C perché, come giudica l'osservatore O ,

A si muove verso il segnale, mentre C si allontana da esso. Ma il riferimento O' è equivalente al riferimento O , perciò gli eventi A'_1 , C'_1 , data l'invarianza di c , devono risultare simultanei in O' . Questo requisito viene soddisfatto da una particolare scelta degli assi x', t' . L'asse t' rappresenta la linea $x' = 0$, ossia la linea di universo dell'origine di O' ; infatti questo riferimento trasla rispetto ad O con velocità v e la posizione della sua origine è rappresentata in O dall'equazione $x = vt$, supponendo che all'istante $t = 0$, le origini dei riferimenti coincidano. L'asse x' deve corrispondere all'equazione $t' = 0$, dunque ogni retta di equazione $t' = cost$ è parallela all'asse x' . Pertanto se, come in figura 17, gli eventi A'_1 , C'_1 simultanei in O' , devono appartenere ad una parallela all'asse x' . Quindi l'asse x' è individuato dalla parallela a questa retta, passante per l'origine. L'inclinazione degli assi x', t' rispetto agli assi x, t ovviamente non è reale, ma è una comoda rappresentazione bidimensionale della spazio-tempo quadridimensionale. Nel diagramma di Minkowski, un evento E è rappresentato dalle coordinate x, t di O e dalle coordinate x', t' di O' , come in figura 18.

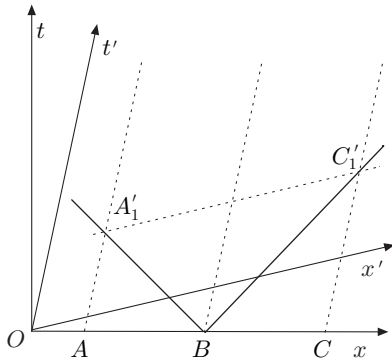


Fig. 20.17

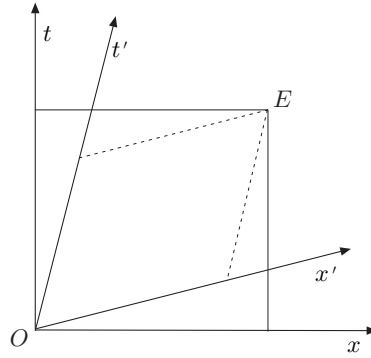


Fig. 20.18

Poiché il legame tra le coordinate deve essere lineare, come specificato nel paragrafo 8, porremo:

$$x = ax' + bt', \quad x' = ax - bt, \quad (14)$$

che, per $v \ll c$ devono coincidere con le trasformazioni galileane.

Osserviamo che il moto dell'origine del riferimento O , misurato in O' , si ottiene ponendo nella prima $x = 0$; analogamente il moto dell'origine di O' , misurato in O , si ottiene ponendo nella seconda $x' = 0$, cioè

$$x' = -\frac{b}{a}t', \quad x = \frac{b}{a}t.$$

Poiché le velocità dei riferimenti sono opposte, il rapporto b/a deve essere uguale alla velocità relativa v dei riferimenti. Se ora consideriamo un segnale luminoso, emesso all'istante $t = 0$,

quando le origini dei riferimenti coincidono, per l'invarianza di c , si ha

$$x = ct, \quad x' = ct';$$

e sostituendo nella (14):

$$ct = (ac + b)t', \quad ct' = (ac - b)t.$$

Moltiplicando membro a membro, eliminando il tempo e ricordando che $b/a = v$, si ottiene:

$$c^2 = a^2(c^2 - v^2), \quad \Rightarrow \quad a = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}.$$

Il coefficiente a coincide col fattore γ , e poiché $b = \gamma v$, sostituendo nelle (14), si ottengono le trasformazioni di Lorentz. Per mezzo del diagramma di Minkowski è semplice determinare la distanza spazio-temporale tra due eventi, figura 19. Si consideri l'evento E_1 di coordinate:

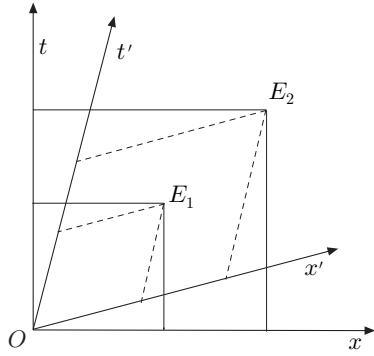


Fig. 20.19

$$\begin{aligned} x'_1 &= \gamma(x_1 - vt_1), & t'_1 &= \gamma\left(t_1 - \frac{v}{c^2}x_1\right) \\ x_1 &= \gamma(x'_1 - vt'_1), & t_1 &= \gamma\left(t'_1 - \frac{v}{c^2}x'_1\right), \end{aligned}$$

e l'evento E_2 di coordinate:

$$\begin{aligned} x'_2 &= \gamma(x_2 - vt_2), & t'_2 &= \gamma\left(t_2 - \frac{v}{c^2}x_2\right) \\ x_2 &= \gamma(x'_2 - vt'_2), & t_2 &= \gamma\left(t'_2 - \frac{v}{c^2}x'_2\right). \end{aligned}$$

Si ottiene:

$$\begin{aligned} x'_2 - x'_1 &= \gamma[(x_2 - x_1) - v(t_2 - t_1)] \\ t'_2 - t'_1 &= \gamma[(t_2 - t_1) - v(x_2 - x_1)/c^2], \end{aligned}$$

e le inverse. Si lascia al lettore la dimostrazione della dilatazione dei tempi e della contrazione delle lunghezze nel diagramma x - t .

È conveniente introdurre un altro diagramma in cui al posto dell'asse t si sostituisce l'asse ct ; pertanto su entrambi gli assi, x e ct rappresentano lunghezze. Se la scala di tali lunghezze è uguale, la linea di universo di un segnale luminoso, emesso in $x = 0$ e all'istante $t = 0$, a causa dell'invarianza di c , biseca sempre l'angolo formato dagli assi; nel riferimento O tale linea è inclinata di 45° rispetto agli assi. In figura 20 sono rappresentati i riferimenti O, O', O'' , le cui origini, agli istanti iniziali, coincidono. Le velocità di traslazione del secondo e del terzo riferimento sono rispettivamente positiva e negativa rispetto al primo. In virtù del fatto che

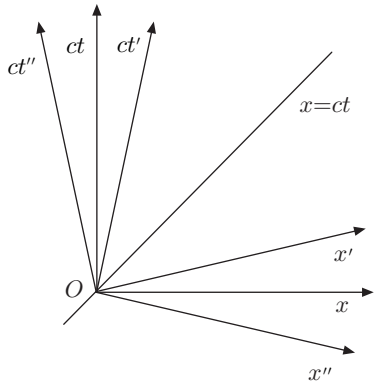


Fig. 20.20

$$(ct)^2 - x^2 = (ct')^2 - x'^2 = s^2,$$

è un invariante di Lorentz, in ogni riferimento in moto relativo uniforme, risulta invariante anche l'intervallo spazio-temporale Δs tra due eventi:

$$(c\Delta t)^2 - (\Delta x)^2 = (c\Delta t')^2 - (\Delta x')^2 = (\Delta s)^2.$$

Lo spazio-tempo del diagramma di Minkowski presenta zone distinte, delimitate dalle linee $x = \pm ct$, linee di universo di segnali luminosi che si propagano in verso opposto, figura 21. Nello spazio x, y, t tali linee si trovano sulla falda di un cono, detto *cono di luce*. Gli eventi rappresentati nelle zone indicate *passato* e *futuro* corrispondono ad eventi reali; gli eventi rappresentati nelle zone esterne al cono di luce, non corrispondono ad eventi reali.

Infatti la quantità $(\Delta s)^2$, come s'è detto, può essere positiva, nulla o negativa. Nel primo caso, $c\Delta t > \Delta x$ e $c\Delta t' > \Delta x'$, gli eventi E_1, E_2 di figura 21, si verificano con velocità minore di quella della luce e si trovano l'uno nel cono di luce dell'altro; è possibile disporre il riferimento O' in modo che l'asse ct' sia parallelo alla congiungente E_1, E_2 . Ciò significa che in O' gli eventi si verificano nello *stesso posto*, ma in tempi differenti; l'intervallo spazio-temporale tra gli eventi si dice *tipo-tempo* e si ha una possibile relazione di causalità.

Analogamente, se $c\Delta t < \Delta x$ e $c\Delta t' < \Delta x'$, gli eventi E_1, E_2 si verificano con velocità maggiore di quella della luce e si trovano l'uno al di fuori del cono di luce dell'altro; disponendo il riferimento O' in modo che l'asse x' sia parallelo all'intervallo spazio-temporale, gli eventi risultano simultanei in O' , ma avvengono in posti diversi. In tal caso l'intervallo spazio-temporale tra gli eventi si dice *tipo-spazio* ed è esclusa qualunque relazione di causalità. Si tenga presente però che la teoria della relatività non ammette eventi che si verificano con velocità maggiore di c . Infine, come si è detto, $\Delta s = 0$ corrisponde ad eventi che si propagano con velocità uguale a c ; tali eventi si dicono *tipo-luce*. Negli eventi tipo-tempo la quantità

$$(ct)^2 - x^2 = (ct')^2 - x'^2 = s^2,$$

è positiva; pertanto tutti gli eventi E separati da un evento E_0 che si verifica nell'origine, da una distanza spazio-temporale s^2 costante, sono rappresentati dall'iperbole mostrata in figura 22; si noti la diversità delle coordinate nei riferimenti O e O' . Analogo ragionamento si potrebbe fare per gli eventi tipo-spazio, considerando l'iperbole di equazione:

$$x^2 - (ct)^2 = s^2.$$

Questo tipo di ragionamento permette di fissare l'unità di misura dei riferimenti O ed O' che ovviamente non è la stessa. Per esem-

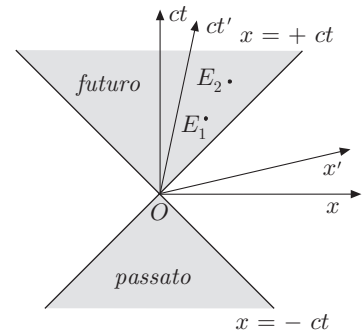


Fig. 20.21

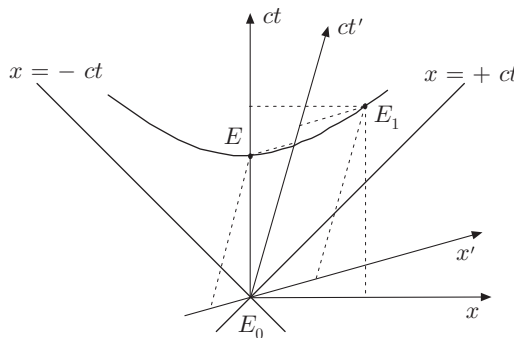


Fig. 20.22

pio, le intersezioni dell'iperbole di equazione

$$x^2 - (ct)^2 = 1,$$

con gli assi x, x' fissano univocamente l'unità di lunghezza.

9.1. Effetto Doppler relativistico

Quando sorgente o ricevitore si allontanano con velocità v , sorgente in quiete e ricevitore in moto, la frequenza Doppler classica di un segnale luminoso è data da

$$\nu' = \nu \left(1 - \frac{v}{c}\right);$$

mentre se la sorgente è in moto e il ricevitore in quiete, da:

$$\nu' = \nu \frac{1}{1 + v/c}.$$

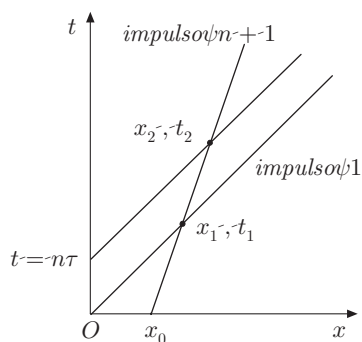


Fig. 20.23

Se sorgente e ricevitore si avvicinano, nelle precedenti, basta sostituire v con $-v$. Supponiamo che una sorgente, posta nell'origine di un riferimento O , invii impulsi luminosi di durata τ con frequenza costante, mentre il ricevitore solidale col riferimento O' si allontana con velocità v . Il primo impulso venga inviato all'istante $t = 0$, quando il ricevitore si trova nella posizione $x = x_0$ e l'impulso $n + 1$ all'istante $t = n\tau$. Nel diagramma spazio-temporale $x-t$ di figura 23, sono mostrate le linee di universo del primo impulso e dell'impulso n , le quali, trattandosi di segnali luminosi, sono inclinate di 45° rispetto agli assi. La linea di universo del ricevitore, $v < c$, è inclinata rispetto all'asse x di un angolo maggiore di 45° , perciò intersecherà le linee di universo dei segnali nei punti (x_1, t_1) e (x_2, t_2) . Tali punti rappresentano gli eventi registrati dal ricevitore, ossia l'arrivo del primo e dell'ultimo segnale, misurati nel riferimento O . Si ha

$$x_1 = ct_1 = x_0 + vt_1, \quad x_2 = c(t_2 - n\tau) = x_0 + vt_2.$$

Da cui

$$t_2 - t_1 = \frac{cn\tau}{c - v}, \quad x_2 - x_1 = \frac{vcn\tau}{c - v}.$$

Nel riferimento O' , per le trasformazioni di Lorentz, l'intervallo di tempo risulta

$$t'_2 - t'_1 = \gamma \left[(t_2 - t_1) - v \frac{x_2 - x_1}{c^2} \right] = \gamma \left(\frac{cn\tau}{c - v} - \frac{v}{c^2} \frac{vcn\tau}{c - v} \right).$$

Poiché questo intervallo di tempo comprende n periodi del segnale misurato dal ricevitore, il periodo τ' , è dato da

$$\tau' = \gamma \frac{c\tau}{c - v} \left(1 - \frac{v^2}{c^2} \right) = \gamma \frac{1 - \beta^2}{1 - \beta} \tau = \gamma(1 + \beta)\tau.$$

Sostituendo l'espressione di γ , si ottiene

$$\tau' = \tau \sqrt{\frac{1+\beta}{1-\beta}},$$

oppure, in termini di frequenza o lunghezza d'onda:

$$\nu' = \nu \sqrt{\frac{1-\beta}{1+\beta}}, \quad \lambda' = \sqrt{\frac{1+\beta}{1-\beta}} \lambda. \quad (15)$$

Se il ricevitore si muove verso la sorgente, i segni al numeratore e al denominatore vengono scambiati.

Si osservi che la (15) unifica le formule dell'effetto Doppler classico e non distingue se la sorgente si allontana dal ricevitore o viceversa; in relatività le situazioni sono perfettamente simmetriche. Si verifica immediatamente che, per $v \ll c$, la (15) si identifica con le formule classiche.

La più straordinaria manifestazione dell'effetto Doppler consiste nel fenomeno dello spostamento verso il rosso, *red shift*, dello spettro della luce emessa da galassie lontane. Lo spettro della luce di una galassia è uno spettro continuo; tuttavia sono state osservate alcune righe di assorbimento scure, dovute all'assorbimento dei gas più esterni, più freddi, della galassia. In particolare due di tali righe, le cosiddette righe *H* e *K* di assorbimento dell'atomo di calcio, si distinguono nettamente. Queste righe, se la sorgente è in quiete, si trovano nell'ultravioletto, ma risultano nettamente spostate verso il rosso se la galassia si allontana. È stato osservato che nello spettro della luce proveniente dalla galassia Hydra, la lunghezza d'onda della riga *H* risulta spostata da 3940 Å, corrispondente all'atomo in quiete, a 4750 Å. Dalla (15) si ottiene

$$\beta = \frac{v}{c} = \frac{(\lambda'/\lambda)^2 - 1}{(\lambda'/\lambda)^2 + 1},$$

e poiché $\lambda'/\lambda = 1,2$, risulta $\beta \approx 0,2$, da cui si ricava $v = \beta c \approx 6 \cdot 10^7 \text{ m/s}$, che è la velocità di allontanamento della galassia. Sistematiche osservazioni su numerose galassie, hanno condotto Hubble, nel 1919, a formulare la famosa teoria dell'Universo in espansione.

10. Trasformazioni della velocità

Dalle trasformazioni di Lorentz si ottengono facilmente le trasformazioni della velocità. Dalle (7), differenziando si ha

$$dx = \gamma(dx' + V dt'), \quad dt = \gamma\left(dt' + \frac{V}{c^2} dx'\right),$$

da cui:

$$\begin{aligned} v_x &= \frac{dx}{dt} = \frac{dx' + V dt'}{dt' + (V/c^2) dx'} = \frac{v'_x + V}{1 + (V/c^2) v'_x} \\ v_y &= \frac{dy}{dt} = \frac{dy'}{\gamma[dt' + (V/c^2) dx']} = \frac{v'_y}{1 + (V/c^2) v'_x} \sqrt{1 - \beta^2} \\ v_z &= \frac{dz}{dt} = \frac{v'_z}{1 + (V/c^2) v'_x} \sqrt{1 - \beta^2}. \end{aligned} \quad (16)$$

Le trasformazioni inverse si ottengono mediante le (8), oppure

dalle precedenti:

$$\begin{aligned} v'_x &= \frac{v_x - V}{1 - (V/c^2)v_x} \\ v'_y &= \frac{v_y}{1 - (V/c^2)v_x} \sqrt{1 - \beta^2} \\ v'_z &= \frac{v_z}{1 - (V/c^2)v_x} \sqrt{1 - \beta^2}. \end{aligned} \quad (17)$$

Si osservi che per velocità piccole rispetto alla velocità della luce, le precedenti si riducono alle trasformazioni galileane.

Se si considera un segnale luminoso che si propaga lungo x' , $v'_x = c$, si ottiene

$$v_x = \frac{c + V}{1 + (V/c^2)c} = c;$$

La velocità del segnale, nel riferimento O , è ancora c , in accordo col postulato di Einstein. Se $v_y = c$, $v_x = 0$, si ha

$$v'_x = -V, \quad v'_y = c\sqrt{1 - \beta^2},$$

e

$$\frac{v'_x}{v'_y} = \frac{V}{c\sqrt{1 - \beta^2}}.$$

Quest'ultimo risultato esprime la relazione relativistica dell'aberrazione di una stella allo zenit, data classicamente dalla (3). Infatti consideriamo il riferimento O in cui la stella è ferma, dove la luce emessa si osserva lungo l'asse z , $x = y = 0$, e il riferimento O' solidale con la terra, che si muove con velocità v_t nella direzione x . La traiettoria della luce si ricava dalle (8), ponendo $x = 0$:

$$x' = \gamma\beta ct, \quad z' = z = ct, \quad ct' = \gamma ct.$$

L'angolo di aberrazione o di inclinazione è allora dato da

$$\tan \theta = \frac{-x'}{z'} = \gamma\beta = \frac{v_t}{c\sqrt{1 - \beta^2}}.$$

11. Legge di inerzia

Si considerino due eventi E_1, E_2 , rappresentati nello spazio-tempo da due punti di coordinate x_1, y_1, z_1, t_1 e x_2, y_2, z_2, t_2 . Il moto per inerzia, in assenza di forze, di una particella che all'istante t_1 si trova nel posto di coordinate x_1, y_1, z_1 e all'istante t_2 nel luogo di coordinate x_2, y_2, z_2 è rappresentato dalla geodetica dello spazio-tempo che passa per i due eventi. Questa linea, come insegnano i principi variazionali della Meccanica, segna il percorso tra i due eventi per il quale si annulla la variazione del percorso stesso:

$$\delta \int ds = 0. \quad (18)$$

Le trasformazioni di Lorentz lasciano inalterato il valore di δs , dunque la precedente ha carattere invariante, come richiesto dalle leggi relativistiche. Poiché dalla (13) si ha

$$ds = \sqrt{c^2 - \left[\left(\frac{dx}{dt} \right)^2 + \left(\frac{dy}{dt} \right)^2 + \left(\frac{dz}{dt} \right)^2 \right]} dt = \sqrt{c^2 - v^2} dt,$$

la (18) si scrive:

$$\int_{t_1}^{t_2} \delta (\sqrt{1 - \beta^2}) dt = 0.$$

Ma:

$$\delta (\sqrt{c^2 - v^2}) = - \frac{v_x \delta v_x + v_y \delta v_y + v_z \delta v_z}{\sqrt{c^2 - v^2}},$$

ed essendo

$$\delta v_x = \delta \frac{dx}{dt} = \frac{d}{dt} \delta x, \quad \delta v_y = \delta \frac{dy}{dt} = \frac{d}{dt} \delta y, \quad \delta v_z = \delta \frac{dz}{dt} = \frac{d}{dt} \delta z,$$

risulta:

$$\delta (\sqrt{c^2 - v^2}) = - \frac{1}{\sqrt{c^2 - v^2}} \left[v_x \frac{d}{dt} \delta x + v_y \frac{d}{dt} \delta y + v_z \frac{d}{dt} \delta z \right].$$

Integrando per parti, si ricava:

$$\begin{aligned} & - \left[\frac{v_x}{\sqrt{c^2 - v^2}} \delta x + \frac{v_y}{\sqrt{c^2 - v^2}} \delta y + \frac{v_z}{\sqrt{c^2 - v^2}} \delta z \right]_{t_1}^{t_2} \\ & + \int_{t_1}^{t_2} \left[\left(\frac{d}{dt} \frac{v_x}{\sqrt{c^2 - v^2}} \right) \delta x + \left(\frac{d}{dt} \frac{v_y}{\sqrt{c^2 - v^2}} \right) \delta y \right. \\ & \quad \left. + \left(\frac{d}{dt} \frac{v_z}{\sqrt{c^2 - v^2}} \right) \delta z \right] dt = 0. \end{aligned}$$

Ma δx , δy , δz , sono nulli in corrispondenza agli eventi, perché la geodetica, per ipotesi, passa per E_1 , E_2 . Quindi affinché la precedente sia verificata, qualunque siano δx , δy , δz , che devono solo soddisfare le condizioni agli estremi, deve essere:

$$\frac{d}{dt} \frac{v_x}{\sqrt{c^2 - v^2}} = 0, \quad \frac{d}{dt} \frac{v_y}{\sqrt{c^2 - v^2}} = 0, \quad \frac{d}{dt} \frac{v_z}{\sqrt{c^2 - v^2}} = 0. \quad (19)$$

Da queste si trae:

$$\frac{v_x}{\sqrt{c^2 - v^2}} = cost, \quad \frac{v_y}{\sqrt{c^2 - v^2}} = cost, \quad \frac{v_z}{\sqrt{c^2 - v^2}} = cost.$$

Quadrando e sommando:

$$\frac{v^2}{\sqrt{c^2 - v^2}} = cost,$$

e quindi

$$v^2 = cost, \quad \Rightarrow \quad v_x = cost, \quad v_y = cost, \quad v_z = cost.$$

La particella, in assenza di forze, si muove di moto uniforme. Le equazioni (19) sono analoghe a quelle che si traggono dall'equazione della dinamica classica $\mathbf{F} = m\mathbf{a}$, qualora fosse $\mathbf{F} = 0$; infatti si avrebbe

$$\frac{d}{dt}(mv_x) = 0, \quad \frac{d}{dt}(mv_y) = 0, \quad \frac{d}{dt}(mv_z) = 0.$$

Confrontando le relazioni precedenti con le (19), possiamo affermare che, nell'ambito relativistico, la legge di inerzia è espressa formalmente dalla relazione classica

$$\frac{d}{dt}(m\mathbf{v}) = 0,$$

purché si assuma come massa una quantità m proporzionale a $1/\sqrt{c^2 - v^2}$. Indicando con m_0c il coefficiente di proporzionalità, possiamo porre

$$m = \frac{m_0c}{\sqrt{c^2 - v^2}},$$

ovvero:

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}, \quad (20)$$

che definisce la *massa relativistica*.

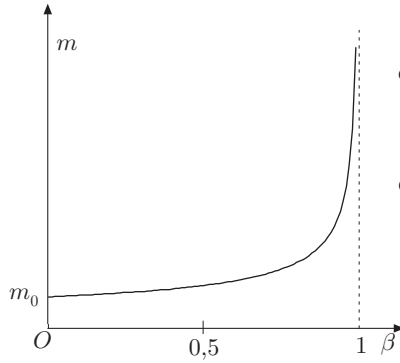


Fig. 20.24

La massa relativistica non è costante, ma cresce con la velocità dal valore m_0 , massa a riposo, al valore ∞ per $v \rightarrow c$, figura 24. Per velocità ordinarie m è praticamente costante e coincide con m_0 ; è però fondamentale sottolineare che la massa, invariante fondamentale della dinamica classica, nella dinamica relativistica è funzione della velocità.

Il comportamento della massa relativistica è conforme al postulato della velocità della luce; infatti, classicamente, una forza costante agente per un tempo sufficientemente lungo dovrebbe impartire ad un corpo una velocità illimitata, mentre l'esperienza della velocità limite mostra il contrario. La variazione della massa di una particella con la velocità, è stata verificata sperimentalmente in una grande varietà di fenomeni. Per esempio i raggi β di alcune sostanze radioattive hanno velocità dell'ordine di $2,97 \cdot 10^8 \text{ m/s}$ e quindi $v/c = 0,99$, da cui $m = 7,09 m_0$. Nelle macchine acceleratrici, appena le particelle raggiungono velocità prossime a quelle della luce, occorrono forze enormi per potere aumentare ulteriormente la loro energia cinetica, che peraltro deve sempre essere inferiore a quella corrispondente alla velocità limite.

Segue immediatamente la definizione di quantità di moto relativistica:

$$\mathbf{p} = m\mathbf{v} = \frac{m_0}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \mathbf{v}. \quad (21)$$

Si osservi che nella formula (21) v rappresenta il modulo della velocità della particella: $v^2 = v_x^2 + v_y^2 + v_z^2$, e non la velocità

del riferimento, come indicato in precedenza; si ritiene cioè che v sia la velocità del riferimento legato alla particella. Tuttavia, se non sussistono ambiguità, indicheremo ancora con γ il fattore $1/\sqrt{1-v^2/c^2}$.

In figura 25 è mostrato l'andamento della quantità di moto relativistica e della quantità di moto classica, in funzione di $\beta = v/c$. L'unità di misura delle ordinate è m_0c , perché la quantità di moto, in modulo, si può scrivere

$$p = m_0c \frac{\beta}{\sqrt{1-\beta^2}}.$$

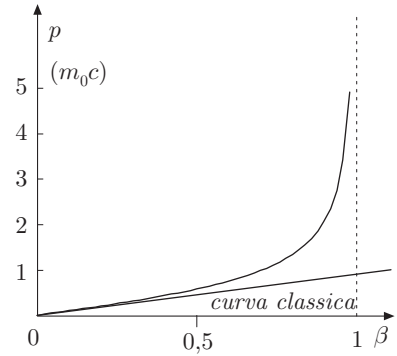


Fig. 20.25

12. Legge fondamentale della dinamica relativistica

Come conseguenza delle conclusioni del paragrafo precedente, si deduce che la legge della dinamica relativistica va espressa nella forma seguente:

$$\frac{d}{dt}(m\mathbf{v}) = \mathbf{F},$$

dove m è la massa relativistica. Derivando si ha:

$$\frac{dm}{dv} \frac{dv}{dt} \mathbf{v} + m\mathbf{a} = \mathbf{F}. \quad (22)$$

Moltiplicando scalarmente per il versore $\boldsymbol{\tau}$, tangente alla traiettoria e successivamente per il versore $\hat{\mathbf{n}}$ della normale principale alla traiettoria, ricordando che $dv/dt = a_t$, accelerazione tangenziale, si ricava:

$$\left(\frac{dm}{dv} + m \right) a_t = F_t, \quad ma_n = F_n.$$

Ponendo:

$$m_l = \frac{dm}{dv}v + m, \quad (23)$$

le precedenti si scrivono:

$$m_l a_t = F_t, \quad ma_n = F_n, \quad (24)$$

relazioni del tutto analoghe a quelle della meccanica classica. Nella seconda delle (24) compare la massa relativistica m , equazione (20), definita anche *massa trasversale*, e nella prima la *massa longitudinale*, che per la (23) risulta

$$m_l = \frac{m_0}{\sqrt{(1-v^2/c^2)^3}},$$

maggiore della massa relativistica.

13. Teorema dell'energia cinetica

Moltiplicando scalarmente per \mathbf{v} l'equazione (22), si ottiene:

$$\frac{dm}{dt}v^2 + \frac{1}{2}m \frac{d}{dt}v^2 = \mathbf{F} \cdot \mathbf{v}.$$

Moltiplicando per dt , si ottiene il lavoro elementare:

$$d\mathcal{L} = v^2 dm + \frac{1}{2} m d(v^2). \quad (25)$$

Dalla (20) si ha

$$1 - \frac{v^2}{c^2} = \frac{m_0^2}{m^2} \Rightarrow v^2 = c^2 \left(1 - \frac{m_0^2}{m^2}\right), \quad (26)$$

quindi

$$d(v^2) = 2c^2 m_0^2 \frac{dm}{m^3}. \quad (27)$$

Sostituendo le (26) e (27) nella (25), si ottiene:

$$d\mathcal{L} = c^2 dm = d(mc^2),$$

ovvero

$$\mathcal{L} = \Delta(mc^2) = \Delta mc^2. \quad (28)$$

Sappiamo che in dinamica classica il lavoro di una forza è uguale alla variazione di energia cinetica, $\mathcal{L} = \Delta T$; se è lecito estendere questo teorema alla dinamica relativistica, allora l'energia cinetica deve avere una espressione del tipo

$$T = mc^2 + k,$$

dove k è una costante, la quale, per il significato di T , deve essere nulla per $v = 0$. Tenendo presente l'espressione della massa relativistica, che per velocità nulla si riduce alla massa a riposo, scriveremo

$$T = (m - m_0)c^2. \quad (29)$$

Si osservi che per velocità modeste, la (20) diventa:

$$m = m_0 \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{-1/2} = m_0 \left(1 + \frac{1}{2} \frac{v^2}{c^2}\right),$$

e, sostituendo nella (29), l'energia cinetica assume la forma consueta $T = m_0 v^2/2$. Per $v \rightarrow c$ l'energia cinetica tende ad infinito; ne discende che per portare una particella dalla quiete alla velocità della luce, occorre compiere un lavoro infinito. Si riconosce ancora che la velocità della luce è una velocità limite, irraggiungibile dai corpi materiali. La (29) mostra che l'aumento di massa di un corpo, per effetto del moto, è proporzionale alla sua energia cinetica:

$$\Delta m = m - m_0 = \frac{T}{c^2}.$$

Viceversa è possibile attribuire una massa inerziale all'energia cinetica, data da T/c^2 e, in generale, una massa inerziale

$$\Delta m = \frac{E}{c^2},$$

ad ogni altra forma di energia E . Pertanto scriveremo:

$$E = \Delta mc^2.$$

Viceversa alla massa m può essere attribuita l'energia:

$$E = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - \beta^2}} = mc^2 = \gamma m_0 c^2. \quad (30)$$

In particolare, in condizioni di quiete, l'energia

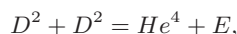
$$E = m_0 c^2, \quad (31)$$

è detta energia intrinseca o a riposo. L'energia cinetica allora risulta:

$$T = (m - m_0)c^2 = E - E_0. \quad (32)$$

Pertanto dobbiamo considerare massa ed energia come aspetti diversi di una medesima essenza; contrariamente a quanto avviene in meccanica classica, dove si ha separatamente conservazione della massa e dell'energia di un sistema isolato, in meccanica relativistica si conserva la somma della massa e dell'energia, espressa in termini di massa. L'esperienza conferma largamente queste deduzioni. In figura 26 è mostrato l'andamento di E e dell'energia cinetica classica in funzione di $\beta = v/c$, cosicché $T = (1/2)m_0 c^2 \beta^2$. L'unità di misura delle ordinate è $m_0 c^2$.

Nella reazione



che si pensa di impiegare nei reattori a fusione, viene liberata l'energia E . Le masse a riposo del deuterio e dell'elio sono rispettivamente $m_0^{(D)} = 2,0147 \text{ a.m.u.}$ e $m_0^{(He)} = 4,0039 \text{ a.m.u.}$; a.m.u. è l'unità di massa atomica, uguale a $1,660 \cdot 10^{-27} \text{ kg}$. La massa del deuterio, prima della reazione, è $4,0294 \text{ a.m.u.}$, mentre la massa dell'elio ottenuto, $4,0039 \text{ a.m.u.}$. La differenza di massa è $\Delta m = 0,0255 \text{ a.m.u.}$, quindi l'energia liberata nella reazione, risulta

$$E = \Delta mc^2 = 0,0255 \cdot 1,66 \cdot 10^{-27} \cdot 9 \cdot 10^{16} = 0,3809 \cdot 10^{-11} \text{ J}.$$

Per ogni mole di elio prodotto, si ha un'energia complessiva

$$E_T = N_A E,$$

essendo N_A il numero di Avogadro. Perciò:

$$E_T = 6,0225 \cdot 10^{23} \cdot 0,3809 \cdot 10^{-11} = 2,294 \cdot 10^{12} \text{ J}.$$

Poiché $1 \text{ kWh} = 3,6 \cdot 10^6 \text{ J}$, si ottiene anche:

$$E_T = 6,37 \cdot 10^5 \text{ kWh!!}$$

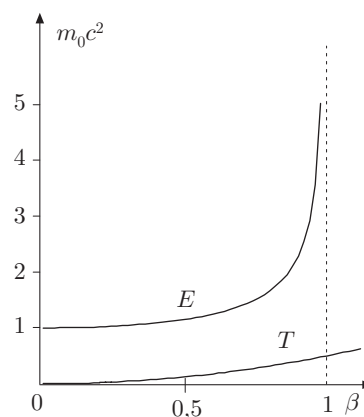


Fig. 20.26

|| 13.1. Altra deduzione della massa relativistica

È noto che la quantità di moto di un sistema si conserva per trasformazioni galileane; verificheremo la validità di tale principio nel caso in cui le velocità delle particelle interagenti siano prossime a quella della luce, velocità relativistiche, come di solito avviene nelle macchine acceleratrici: ciclotroni, sincrotroni...

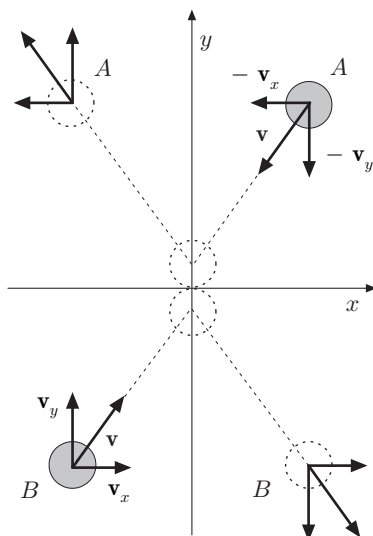


Fig. 20.27

Consideriamo l'urto obliquo elastico classico tra due particelle A e B di ugual massa e animate di velocità opposte, mostrato in figura 27, prima e dopo l'urto. È evidente che la quantità di moto \mathbf{p} del sistema è costante e pari a zero, prima e dopo l'urto. Classicamente la variazione della componente p_y di A, è uguale a $+2mv_y$ e la variazione della stessa componente di B è uguale a $-2mv_y$. La variazione totale è nulla; lo stesso si verifica per le variazioni delle componenti p_x .

Consideriamo ora un riferimento O' in moto lungo l'asse x , con velocità di trascinamento V uguale alla componente v_x della velocità della particella B, prima dell'urto. Un osservatore in tale riferimento vede l'urto come in figura 28, dove le componenti della velocità, formule (17), risultano:

$$\begin{aligned} v'_x(A) &= -\frac{2v_x}{1 + v_x^2/c^2} & -v'_y(A) &= -\frac{v_y}{1 + v_x^2/c^2} \sqrt{1 - v_x^2/c^2} \\ v'_x(B) &= 0 & v'_y(B) &= \frac{v_y}{1 - v_x^2/c^2} \sqrt{1 - v_x^2/c^2}. \end{aligned}$$

Ne segue che una definizione in cui la quantità di moto sia semplicemente proporzionale alla velocità, attraverso la massa inerziale, costante, non può soddisfare la conservazione della quantità di moto in ogni riferimento. Si potrebbe concludere che la conservazione della quantità di moto non sia invariante per trasformazioni di Lorentz, oppure che si debba ridefinire la quantità di moto; quest'ultima alternativa appare la più plausibile. Si è formalmente ammesso che la massa è funzione della velocità secondo l'equazione (20). Per giustificare questa proposizione esaminiamo il seguente esperimento concettuale (gedanken experiment), proposto da Lewis e Tolman.

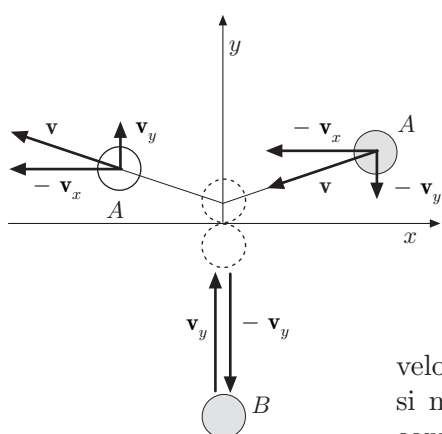


Fig. 20.28

Si considerino due riferimenti O ed O' in moto con velocità relativa v uniforme, parallela all'asse x . Un osservatore in O lancia una particella A con velocità v_0 parallela all'asse y , misurata in O . Un secondo osservatore nel riferimento O' , lancia una particella B identica, con velocità $-v_0$, parallela all'asse y' , misurata in O' , in modo tale che le particelle collidano elasticamente. Si supponga che v_0 sia molto minore della velocità dei riferimenti; ciascuno dei due osservatori vedrà la propria particella rimbalzare con la velocità esattamente invertita. Supponendo che il riferimento O' si muova verso destra, l'osservatore solidale con O vedrà l'urto come in figura 29, mentre l'osservatore solidale con O' vedrà l'urto come in figura 30.

Esaminiamo il fenomeno nel riferimento O : le componenti della velocità della particella A secondo x sono nulle, prima e dopo l'urto, mentre quelle secondo y sono rispettivamente v_0 e

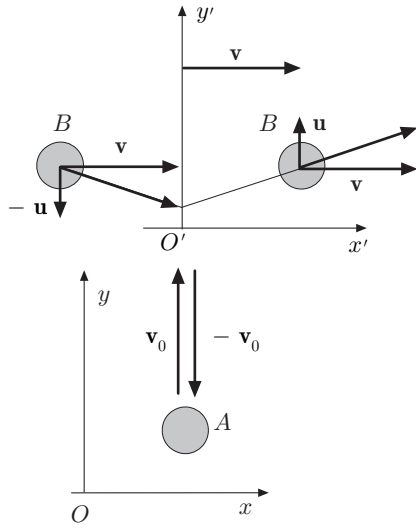


Fig. 20.29

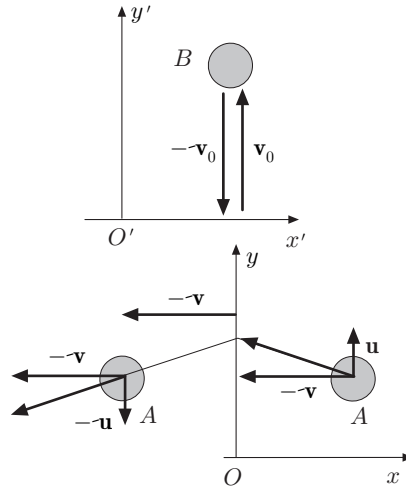


Fig. 20.30

$-v_0$. La componente della velocità secondo x della particella B si mantiene inalterata e uguale a v , prima e dopo l'urto, mentre le componenti secondo y sono rispettivamente $-v_y(B) = -u$ e $v_y(B) = u$. Inoltre dalla seconda delle (17), tenuto conto che $v'_y(B) = -v_0$ e $v'_x(B) = 0$, si ha

$$u = v_y(B) = -v_0 \sqrt{1 - v^2/c^2}, \quad (33)$$

Nel riferimento O' i ruoli di A e di B risultano scambiati e il segno di v è negativo; infatti la simmetria del fenomeno è completa ruotando la figura 29 di 180° . Si osserva inoltre che nell'uno o nell'altro riferimento, la velocità di ciascuna particella rimane immutata dopo l'urto ed è pari a v_0 oppure $w = \sqrt{u^2 + v^2}$. Pertanto, essendo le particelle identiche e, per ipotesi, le masse funzioni della velocità, la conservazione della componente della quantità di moto secondo y , prima e dopo l'urto, è data da:

$$m(v_0)v_0 - m(w)u = -m(v_0)v_0 + m(w)u,$$

da cui:

$$\frac{m(w)}{m(v_0)} = \frac{v_0}{u}. \quad (34)$$

Ma si è supposto che $v_0 \ll v$ e si può ritenere che v_0 possa essere piccola quanto si vuole, perciò la quantità inerziale $m(v_0)$ tende alla massa a riposo. Inoltre dalla (33) segue che $u \ll v$, e quindi $w \approx v$; dunque la (34), a meno del segno, diventa:

$$m(v) = \frac{m_0}{\sqrt{1 - v^2/c^2}},$$

e la quantità di moto:

$$\mathbf{p} = \frac{m_0 \mathbf{v}}{\sqrt{1 - v^2/c^2}},$$

che per $v \ll c$ si riduce alla quella classica $\mathbf{p} = m_0 \mathbf{v}$. Nell'urto considerato si è considerato la conservazione della componente della quantità di moto secondo x . Le componenti della quantità di moto secondo y , sono rispettivamente

$$p_y(A) = \frac{m_0 v_0}{\sqrt{1 - v_0^2/c^2}}, \quad p_y(B) = \frac{m_0 u}{\sqrt{1 - (u^2 + v^2)/c^2}}.$$

Tenuto conto della (33), si ha:

$$p_y(B) = \frac{m_0 v_0 \sqrt{1 - v^2/c^2}}{\sqrt{1 - [v_0^2(1 - v^2/c^2) + v^2]/c^2}} = -\frac{m_0 v_0}{\sqrt{1 - v_0^2/c^2}}.$$

Pertanto

$$p_y(A) = -p_y(B).$$

La quantità di moto è completamente conservata.

|| 13.2. Altra deduzione dell'energia relativistica

L'identità:

$$\frac{1}{1 - v^2/c^2} - \frac{v^2/c^2}{1 - v^2/c^2} = 1,$$

che si può scrivere:

$$\gamma^2 - \beta^2 \gamma^2 = 1,$$

è invariante per trasformazioni di Lorentz, essendo il secondo membro una costante. Moltiplicando ambo i membri per $m_0^2 c^4$, si ha

$$m_0^2 c^4 (\gamma^2 - \beta^2 \gamma^2) = m_0^2 c^4.$$

Osservando che il quadrato della quantità di moto, definita dalla (21), è

$$p^2 = m_0^2 c^2 \beta^2 \gamma^2,$$

la precedente diventa:

$$m_0^2 c^4 \gamma^2 - p^2 c^2 = m_0^2 c^4. \quad (35)$$

Poiché la massa a riposo è una costante anche la quantità $m_0^2 c^4$ è una costante, quindi invariante per trasformazioni di Lorentz.

Ma la grandezza $m_0^2 c^4 \gamma^2$ non è altro che l'energia totale relativistica, equazione (30); dunque la (35) diventa:

$$E^2 - p^2 c^2 = m_0^2 c^4. \quad (36)$$

Più semplicemente la relazione precedente può essere ricavata dalla

$$E = \gamma m_0 c^2,$$

equazione (30), tenendo presente che, per la (21), è

$$p^2 = \mathbf{p} \cdot \mathbf{p} = m_0^2 \gamma^2 v^2.$$

Moltiplicando quest'ultima per c^2 e sottraendo da E^2 , si ottiene

$$E^2 - p^2 c^2 = m_0 c^4 \gamma^2 \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) = m_0^2 c^4.$$

La (36), che lega l'energia e la quantità di moto, dipende solamente dalla massa a riposo del corpo ed è invariante per trasformazioni di Lorentz, essendo m_0 una quantità invariante per tali trasformazioni. Ciò significa che, se in un riferimento O' la quantità di moto è p' e l'energia E' , risulta sempre

$$E'^2 - p'^2 c^2 = E^2 - p^2 c^2 = m_0^2 c^4. \quad (37)$$

In particolare, per una particella in quiete, $p = 0$, si ottiene la relazione già stabilita $E = m_0 c^2$.

14. Trasformazione della quantità di moto e dell'energia

In un riferimento O , le componenti della quantità di moto e l'energia di una particella sono date dalle espressioni:

$$p_x = \frac{m_0 v_x}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}, \quad p_y = \frac{m_0 v_y}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}, \quad E = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}; \quad (38)$$

mentre in un riferimento O' che trasla con velocità V uniforme rispetto al primo, dalle:

$$p'_x = \frac{m_0 v'_x}{\sqrt{1 - v'^2/c^2}}, \quad p'_y = \frac{m_0 v'_y}{\sqrt{1 - v'^2/c^2}}, \quad E' = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - v'^2/c^2}}. \quad (39)$$

Inoltre:

$$v'_x = \frac{v_x - V}{1 - v_x V/c^2}, \quad v'_y = v'_z = \frac{v_y}{1 - v_x V/c^2} \sqrt{1 - V^2/c^2}. \quad (40)$$

Osserviamo che

$$\gamma(v') = \frac{1}{\sqrt{1 - v'^2/c^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 - (v'_x/c)^2 - (v'_y/c)^2}}, \quad (41)$$

e che, per la (40), i termini sotto radice si possono esprimere come segue:

$$\begin{aligned} 1 - \left(\frac{v'_x}{c}\right)^2 &= 1 - \frac{(v_x - V)^2/c^2}{(1 - v_x V/c^2)^2} = \frac{(1 - v_x V/c^2)^2 - (v_x - V)^2/c^2}{(1 - v_x V/c^2)^2} \\ &= \frac{(1 - v_x^2/c^2)(1 - V^2/c^2)}{(1 - v_x V/c^2)^2}, \end{aligned} \quad (42)$$

e

$$\left(\frac{v'_y}{c}\right)^2 = \frac{(1 - V^2/c^2)v_y^2/c^2}{(1 - v_x V/c^2)^2}.$$

Sottraendo la precedente dalla (42), si ottiene:

$$1 - \left(\frac{v'}{c}\right)^2 = \frac{(1 - v^2/c^2)(1 - V^2/c^2)}{(1 - v_x V/c^2)}.$$

Quindi la (41) diventa:

$$\gamma(v') = \gamma(V)\gamma(v)(1 - v_x V/c^2). \quad (43)$$

Siamo ora in grado di ricavare le trasformazioni di p'_x , p'_y ed E' , equazioni (39). Tenendo presente la (43) e la (40), si ha:

$$p'_x = \gamma(v')m_0 v'_x = \gamma(V)\gamma(v)m_0(v_x - V),$$

ossia:

$$p'_x = \gamma(V) \left(p_x - \frac{V}{c^2} E \right). \quad (44)$$

Analogamente si ottiene:

$$p'_y = \gamma(v)m_0 v_y,$$

ovvero:

$$p'_y = p_y; \quad (45)$$

lo stesso vale per p'_z .

L'energia E' assume la forma:

$$E' = \gamma(v')m_0 c^2 = \gamma(V)\gamma(v)(1 - v_x V/c^2)m_0 c^2,$$

e, per la (38),

$$E' = \gamma(V)(E - V p_x). \quad (46)$$

La quantità di moto nel riferimento O' risulta combinazione lineare della quantità di moto e dell'energia nel riferimento O . Se in quest'ultimo energia e quantità di moto si conservano, altrettanto avverrà in O' .

Va notato che la conservazione dell'energia relativistica totale, implica che il principio di conservazione può essere applicato in ogni processo, sia che si tratti di energia meccanica sia che intervengano altre forme di energia interna; per esempio nell'urto anelastico parte dell'energia cinetica è trasformata in energia di quiete. Si osservi che le trasformazioni ricavate sono analoghe alle trasformazioni delle coordinate spaziali e temporale, equazioni (8). Le trasformazioni inverse si ottengono cambiando $-V$ con $+V$:

$$\begin{aligned} p_x &= \gamma(V) \left(p'_x + \frac{V}{c^2} E' \right), & p_y &= p'_y, & p_z &= p'_z \\ E &= \gamma(V) \left(E' + \frac{V}{c^2} p'_x \right). \end{aligned} \quad (47)$$

Dalle

$$\mathbf{p} = \gamma m_0 \mathbf{v}, \quad E = \gamma m_0 c^2,$$

si ricava la relazione

$$\mathbf{p} = \frac{E}{c^2} \mathbf{v}. \quad (48)$$

Se nella (36) $m_0 = 0$, si ottiene

$$E = pc, \quad p = \frac{E}{c},$$

e la (48) dà $v = c$. Una particella con massa a riposo nulla, si muove con la velocità della luce, uguale per qualunque osservatore. In molti fenomeni, dove la natura quantistica della luce ha rilevanza, possiamo attribuire alla radiazione elettromagnetica un comportamento corpuscolare; tali corpuscoli sono chiamati *fotoni* o *quanti di luce*. Essi hanno energia $E = pc$, e poiché l'energia è legata alla frequenza dalla relazione di Planck, $E = h\nu$, si ha

$$E = h\nu = pc, \quad p = \frac{h\nu}{c}.$$

Ad un fotone di energia E è attribuita una quantità 'a di moto E/c che, per esempio, può essere trasferita nell'interazione con la materia, e massa inerziale

$$m = \frac{E}{c^2}.$$

15. Trasformazioni dell'accelerazione e della forza

Le trasformazioni delle componenti dell'accelerazione in riferimenti in moto relativo uniforme, si ricavano dalle trasformazioni della velocità, equazioni (16) e (17). Il procedimento, anche se laborioso, è elementare; per esempio, differenziando la prima delle (16) si ha

$$\begin{aligned} dv_x &= \frac{dv'_x}{1 + (V/c^2)v'_x} - \frac{v'_x + V}{[1 + (V/c^2)v'_x]^2} \frac{V dv'_x}{c^2} \\ &= \frac{dv'_x}{\gamma^2 [1 + (V/c^2)v'_x]^2}, \end{aligned}$$

ed essendo

$$dt = \gamma \left(dt' + \frac{V}{c^2} dx' \right) = \gamma \left(1 + \frac{V}{c^2} v'_x \right) dt',$$

si ricava

$$a_x = \frac{dv_x}{dt} = \frac{a'_x}{\gamma^3 [1 + (V/c^2)v'_x]^3}. \quad (49)$$

Analogamente per le altre componenti; il lettore può verificare che:

$$a_y = a_z = \frac{a'_y}{\gamma^2 [1 + (V/c^2)v'_x]^2} - \frac{(V/c^2)v'_y a'_x}{\gamma^2 [1 + (V/c^2)v'_x]^3}. \quad (50)$$

Come si può osservare le equazioni precedenti sono piuttosto complicate e non sono invarianti, come vuole la Meccanica classica, in riferimenti inerziali. Inoltre, poiché Einstein sviluppò la teoria della relatività generale sulla equivalenza tra un riferimento accelerato e un riferimento in un campo gravitazionale, hanno un interesse piuttosto limitato.

Esaminiamo ora il problema della trasformazione delle forze. Consideriamo una particella animata di velocità \mathbf{v} rispetto al riferimento del laboratorio, ma in quiete nel riferimento proprio. Poiché vale la (22), scriviamo le variazioni della quantità di moto e del tempo. Dalle (47) si ha:

$$\Delta p_x = \gamma \left(\Delta p'_x + \frac{v}{c^2} \Delta E' \right), \quad \Delta p_y = \Delta p'_y, \quad \Delta p_z = \Delta p'_z.$$

Ma dalla (37),

$$E' = \sqrt{m_0^2 c^4 + p'^2 c^2},$$

e tenendo presente che il riferimento mobile è il riferimento proprio della particella, in cui $p' = 0$, risulta $\Delta E' = 0$; dunque:

$$\Delta p_x = \gamma \Delta p'_x. \quad (51)$$

D'altra parte, gli intervalli di tempo sono legati dalla relazione

$$\Delta t' = \frac{\Delta t}{\gamma},$$

pertanto, dividendo la (51) per Δt , si ottiene

$$\frac{\Delta p_x}{\Delta t} = \frac{\Delta p'_x}{\Delta t'}, \quad \Rightarrow \quad \frac{dp_x}{dt} = \frac{dp'_x}{dt'}. \quad (52)$$

Malgrado la diversità delle misure della massa e dell'accelerazione nei due riferimenti, la misura della componente lungo x della forza è la stessa. La componente secondo y , uguale alla componente secondo z , tenuto conto della relazione tra i tempi, è data da:

$$\frac{\Delta p_y}{\Delta t} = \frac{1}{\gamma} \frac{\Delta p'_y}{\Delta t'}, \quad \Rightarrow \quad \frac{dp_y}{dt} = \frac{1}{\gamma} \frac{dp'_y}{dt'}. \quad (53)$$

Le componenti secondo y e secondo z della forza si trasformano secondo il fattore $1/\gamma$. Le (52) e (53) sono molto importanti in elettromagnetismo.

Per ottenere le espressioni più generali delle componenti della forza, si procede nel solito modo. Per la (44) e l'ultima delle (8):

$$F'_x = \frac{dp'_x}{dt'} = \frac{dp'_x/dt}{dt'/dt} = \frac{\gamma[dp_x/dt - (V/c^2)dE/dt]}{\gamma[1 - (V/c^2)dx/dt]},$$

ossia

$$F'_x = \frac{F_x - (V/c^2)dE/dt}{1 - (V/c^2)v_x}. \quad (54)$$

Ma per la (37):

$$E^2 = c^2 \mathbf{p} \cdot \mathbf{p} + m_0 c^4;$$

differenziando:

$$E \frac{dE}{dt} = c^2 \mathbf{p} \cdot \frac{d\mathbf{p}}{dt} = c^2 \mathbf{p} \cdot \mathbf{F},$$

ed essendo $E = mc^2$:

$$\frac{dE}{dt} = \mathbf{F} \cdot \frac{\mathbf{p}}{m} = \mathbf{F} \cdot \mathbf{v}.$$

Pertanto la (54) diventa:

$$F'_x = \frac{F_x - (V/c^2) \mathbf{F} \cdot \mathbf{v}}{1 - (V/c^2) v_x}. \quad (55)$$

Nello stesso modo si dimostra che:

$$F'_y = \frac{F_y}{\gamma(1 - v_x V/c^2)}. \quad (56)$$

16. Principio di equivalenza

In Dinamica si è considerato il problema dell'equivalenza tra massa inerziale e massa gravitazionale. Le esperienze di Galilei avevano indicato che, trascurando la resistenza dell'aria, tutti i corpi in prossimità della superficie terrestre, sono soggetti alla stessa accelerazione g . Questa esclusiva caratteristica della forza di gravità, comporta che la forza peso F_g dipende solamente dalla massa del corpo. Indicando con m_g la massa del corpo, si ha

$$\mathbf{F}_g = m_g \mathbf{g}.$$

D'altra parte, detta m_i la massa inerziale, per la seconda equazione della dinamica, si deve avere

$$\mathbf{F}_g = m_i \mathbf{a};$$

perciò, confrontando con la precedente, si ottiene:

$$\mathbf{a} = \frac{m_g}{m_i} \mathbf{g}.$$

Si potrebbe supporre che il rapporto m_g/m_i dipenda dalla composizione chimica e da altre caratteristiche fisiche del corpo; tuttavia l'esperienza mostra che l'accelerazione è la stessa per tutti i corpi, pertanto tale rapporto deve essere costante. Se si scelgono le unità di misura del SI, il rapporto m_i/m_g è uguale ad uno.

Tuttavia questo tipo di misura non è sufficientemente precisa; lo stesso Newton condusse una serie di esperienze con pendoli della stessa lunghezza ma con masse costituite da materiali diversi. Se le masse inerziale e gravitazionale fossero diverse, dall'equazione della dinamica del pendolo,

$$m_i \mathbf{a} = m_g \mathbf{g},$$

per il periodo di oscillazione si dedurrebbe:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{m_i l}{m_g g}}.$$

Le esperienze di Newton mostrarono, con la precisione di una parte su mille, che il periodo di tutti i pendoli di uguale lunghezza è sempre lo stesso ed è indipendente dalle masse e dal materiale di cui erano costituite.

Successivamente analoga esperienza fu ripetuta da Bessel, il quale trovò lo stesso risultato, con una precisione di una parte su $6 \cdot 10^6$. Eötvös nel 1890 iniziò una serie di misure che continuò per circa 25 anni, dimostrando l'equivalenza con una precisione di una parte su 10^8 . Nelle esperienze di Eötvös due sferette di materiale diverso, ma di uguale massa gravitazionale, sono disposte agli estremi di una sbarretta, sospesa per il centro ad un sottile filo di quarzo che può compiere torsioni elastiche. In sostanza l'apparato è analogo alla bilancia di torsione, descritta a proposito dell'esperienza di Cavendish. Il sistema è soggetto alla forza di gravità $m_g g$ e, a causa della rotazione terrestre, alla componente orizzontale della forza centrifuga $m_i \omega^2 R_T \cos \lambda$, dove λ è la latitudine, figura 31. Se le masse inerziali delle sferette fossero diverse, a causa dell'azione non equilibrata della forza centrifuga, il filo di sospensione si dovrebbe torcere di un certo angolo, che può essere misurato col metodo della leva ottica. Ruotando il sistema di 180° , la torsione dovrebbe avvenire in senso opposto. Si osserva che il sistema non si sposta dalla posizione di equilibrio iniziale, o almeno vi ritorna; infatti il conseguimento dell'equilibrio in una bilancia di torsione richiede molte ore; si conclude dunque che l'azione della forza centrifuga sulle due masse è esattamente uguale. Eötvös confrontò 8 diversi materiali con il platino e trovò che il rapporto

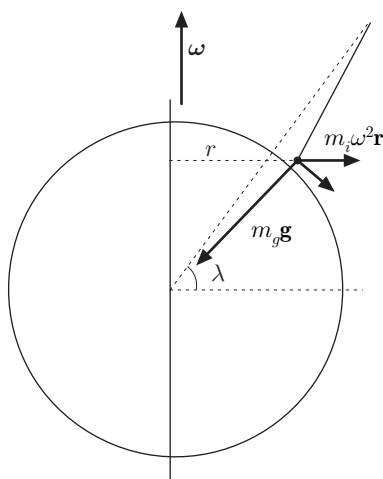


Fig. 20.31

$$\frac{m_i^{(Pt)}}{m_g^{(Pt)}} = \frac{m_i}{m_g},$$

era lo stesso per tutti i materiali esaminati. Il rapporto, come s'è detto, è uguale ad uno, qualora si scelgano le unità del SI. Recenti esperienze di Dicke hanno dimostrato l'uguaglianza della massa inerziale e della massa gravitazionale con una precisione di una parte su 10^{11} .

Il risultato di queste esperienze permette di affermare che: *un osservatore non può distinguere se il suo riferimento si trova in un campo gravitazionale uniforme, oppure se il riferimento è soggetto ad una accelerazione costante.*

Questa proposizione è nota come *principio di equivalenza*. La gravitazione e l'inerzia dunque non sono proprietà diverse della materia, ma sono due aspetti differenti di una caratteristica universale di tutta la materia.

Il fondamento della relatività generale, conseguenza di questo principio, è stato proposto da Einstein nel 1915, in questi termini: *le leggi della Fisica devono essere formulate in modo tale che sia impossibile distinguere tra un campo gravitazionale uniforme ed un riferimento soggetto ad accelerazione costante.*

Un osservatore e tutti gli oggetti in un ascensore chiuso in caduta libera, ascensore di Einstein, non risentono alcuna forza, a meno che nell'ascensore non agiscano altre forze diverse dalla gravità. Lo stesso accade in un satellite orbitante; i corpi all'interno del satellite appaiono privi di peso perché tutti soggetti alla stessa accelerazione.

17. Alcune conseguenze

Massa gravitazionale dei fotoni

Si è stabilito che la massa inerziale di un fotone risulta $h\nu/c^2$. L'esperienza permette di affermare che esso possiede anche massa gravitazionale. Consideriamo un fotone, di frequenza ν , ad una quota h dalla superficie della terra; dopo aver percorso tale quota, l'energia del fotone aumenta di mgh , quindi la sua energia diventa:

$$h\nu' = h\nu + \frac{h\nu}{c^2}gh.$$

Supponendo che la massa inerziale del fotone resti costante durante il percorso, quando raggiunge la superficie della terra, la frequenza diventa:

$$\nu' = \nu \left(1 + \frac{gh}{c^2} \right),$$

con una variazione percentuale

$$\frac{\Delta\nu}{\nu} = gh/c^2.$$

Questa variazione è estremamente piccola; il suo ordine di grandezza è 10^{-15} . Tuttavia è stata misurata da Pound e Rebka, usando una sorgente di raggi γ . Si deduce inoltre che un fotone emesso a distanza infinita, quando raggiunge la terra, ha frequenza:

$$\nu' = \nu \left(1 + G \frac{M_T}{R_T c^2} \right),$$

dove M_T , R_T sono la massa e il raggio della terra. Viceversa un fotone emesso da una stella, verrà osservato a distanza infinita con una frequenza:

$$\nu' = \nu \left(1 - GM_S/R_S c^2 \right),$$

con ovvio significato dei simboli. Il segno negativo discende dal fatto che nello sfuggire al campo gravitazionale della stella, il fotone perde energia. La frequenza osservata è minore di quella emessa; l'effetto è noto come *spostamento gravitazionale verso il rosso*, e non va confuso con lo spostamento Doppler.

Deflessione della luce dovuta al Sole

A causa della massa gravitazionale attribuita al fotone, un raggio di luce che passa in prossimità di un corpo celeste, è deviato dalla sua traiettoria dal campo gravitazionale esistente. L'angolo di deviazione può essere calcolato per mezzo della teoria della relatività, ma è possibile ottenerne l'ordine di grandezza con considerazioni classiche.

Supponiamo che il raggio di luce passi in prossimità della superficie del sole, alla distanza r_0 dal suo centro. Fissato un riferimento come in figura 32,

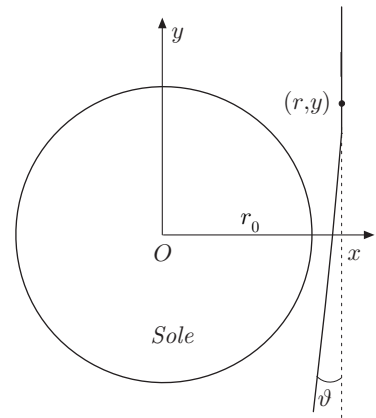


Fig. 20.32

la componente F_x della forza che agisce su un fotone, nel punto (r, y) è data da

$$F_x = -GM_S m_f \frac{r_0}{(r_0^2 + y^2)^{3/2}},$$

dove M_S , m_f sono le masse del sole e del fotone. Applicando il teorema dell'impulso, il valore finale della componente della velocità del fotone secondo x , è data da

$$m_f v_x = \int F_x dt = \frac{1}{c} \int F_x dy,$$

ossia:

$$v_x = -2G \frac{M_S r_0}{c} \int_0^\infty \frac{dy}{(r_0^2 + y^2)^{3/2}} = -2G \frac{M_S}{c r_0}.$$

Per $r_0 = R_S$, raggio del sole, si ottiene

$$\tan \theta \approx \theta = \frac{v_x}{c} = 2G \frac{M_S}{R_S c^2} = 0,87''.$$

L'esperienza è stata compiuta osservando la deviazione della luce di una stella che appare in prossimità del bordo del sole, durante una sua eclissi. Il valore della deflessione ottenuto è, come ordine di grandezza, in accordo con quello previsto dalla teoria della relatività.

||| A ■ Fattori di conversione

LUNGHEZZA

Unità fondamentale: *metro* (m)

1 centimetro = $10^{-2} m$

1 micron (μ) = $10^{-6} m$

1 Angstrom(\AA) = $10^{-10} m$

1 chilometro = $10^3 m$

1 pollice (in) = $0,0254 m$

1 miglio (mi) = $1609 m$

1 miglio marino = $1852 m$

1 mil = $10^{-3} in = 2,54 \cdot 10^{-5} m$

1 anno-luce = $9,46 \cdot 10^{15} m$

SUPERFICIE

Unità fondamentale: m^2

I fattori di conversione per le superfici si ottengono elevando al quadrato i corrispondenti fattori delle unità di lunghezza.

VOLUME

I fattori di conversione per i volumi si ottengono elevando al cubo i corrispondenti fattori delle unità di lunghezza.

1 litro (l) = $1,000028 \cdot 10^{-3} m^3$

MASSA

Unità fondamentale (kg)

1 grammo = $10^{-3} kg$

1 unità di massa atomica (a.m.u.) = $1,660 \cdot 10^{-27} kg$

1 eV/c^2 = $1,113 \cdot 10^{-17} kg$

TEMPO

Unità fondamentale: secondo (s)

1 minuto = $60 s$

1 ora (h) = $3600 s$

1 giorno (d) = $86400 s$

1 anno = $3,56 \cdot 10^7 s$

VELOCITÀ

Unità fondamentale: m/s

$$1\text{ cm/s} = 10^{-2}\text{ m/s}$$

$$1\text{ km/h} = 0,2778\text{ m/s}$$

$$1\text{ mi/h} , (mph) = 0,4470\text{ m/s}$$

FORZA

Unità fondamentale: newton (N)

$$1\text{ dina} = 10^{-5}\text{ N}$$

$$1\text{ kg-forza} = 9,807\text{ N}$$

PRESSIONE

Unità fondamentale: Pascal Pa ; $1Pa = 1\text{ N/m}^2$

$$1\text{ atmosfera} = 1,013 \cdot 10^5\text{ N/m}^2$$

$$1\text{ dina/cm}^2 = 10^{-1}\text{ N/m}^2$$

$$1\text{ mm Hg} (0^\circ\text{ C}) = 1,333 \cdot 10^2\text{ N/m}^2$$

$$1\text{ bar} = 10^5\text{ N/m}^2$$

ENERGIA

Unità fondamentale: *joule* (J)

$$1\text{ erg} = 10^{-7}\text{ J}$$

$$1\text{ kwatt-ora} = 3,6 \cdot 10^6\text{ J}$$

$$1\text{ eV} = 1,602 \cdot 10^{-19}\text{ J}$$

$$1\text{ kg} \cdot c^2 = 8,997 \cdot 10^{16}\text{ J} (E = mc^2)$$

POTENZA

Unità fondamentale: watt (W)

$$1\text{ kwatt} (kW) = 10^3\text{ W}$$

$$1\text{ Megawatt} (MW) = 10^6\text{ W}$$

$$1\text{ cavallo-vapore} = 745,7\text{ W}$$

||| B ■ Alcune costanti fisiche

Velocità della luce (c) = $2,998 \cdot 10^8 \text{ m/s}$

Costante di Planck (h) = $6,626 \cdot 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s}$

Carica elementare (e) = $1,602 \cdot 10^{-19} \text{ coulomb}$

Numero di Avogadro (N_A) = $6,022 \cdot 10^{23} \text{ molecole/mol}$

Costante dei gas (R) = $8,31 \text{ J/(mol} \cdot \text{K)}$

Costante di Boltzmann (k_B) = $1,381 \cdot 10^{-23} \text{ J/K}$

Costante gravitazionale (G) = $6,673 \cdot 10^{-11} \text{ N} \cdot \text{m}^2/\text{kg}^2$

Massa dell'elettrone = $0,911 \cdot 10^{-30} \text{ kg}$

Massa del protone = $1,673 \cdot 10^{-27} \text{ kg}$

Accelerazione di gravità media = $9,807 \text{ m/s}^2$

Raggio medio della Terra = $6,37 \cdot 10^6 \text{ m}$

Massa della Terra = $5,98 \cdot 10^{24} \text{ kg}$

Densità media della Terra = $5,52 \cdot 10^3 \text{ kg/m}^3$

Distanza media Terra-Sole = $1,49 \cdot 10^{11} \text{ m}$

Massa del Sole = $1,99 \cdot 10^{30} \text{ kg}$

Densità dell'aria a 0° C e 1 atmosfera = $1,293 \text{ kg/m}^3$

||| C. Formule matematiche

1. TRIGONOMETRIA

$$\sin \theta = \frac{y}{r}, \quad \cos \theta = \frac{x}{r}, \quad \tan \theta = \frac{y}{x} = \frac{\sin \theta}{\cos \theta},$$

$$\csc \theta = \frac{r}{y}, \quad \sec \theta = \frac{r}{x}, \quad \cot \theta = \frac{x}{y}$$

$$\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$$

Formule di addizione

$$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin \alpha \cos \beta \pm \cos \alpha \sin \beta$$

$$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos \alpha \cos \beta \mp \sin \alpha \sin \beta$$

$$\tan(\alpha \pm \beta) = \frac{\tan \alpha \pm \tan \beta}{1 \mp \tan \alpha \tan \beta}$$

Formule di prostaferesi

$$\sin \alpha \pm \sin \beta = 2 \sin \left(\frac{\alpha \pm \beta}{2} \right) \cos \left(\frac{\alpha \mp \beta}{2} \right)$$

$$\cos \alpha + \cos \beta = 2 \cos \left(\frac{\alpha + \beta}{2} \right) \cos \left(\frac{\alpha - \beta}{2} \right)$$

$$\cos \alpha - \cos \beta = -2 \sin \left(\frac{\alpha + \beta}{2} \right) \sin \left(\frac{\alpha - \beta}{2} \right)$$

$$\sin \alpha \sin \beta = \frac{1}{2} [\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta)]$$

$$\sin \alpha \cos \beta = \frac{1}{2} [\sin(\alpha - \beta) + \sin(\alpha + \beta)]$$

$$\cos \alpha \cos \beta = \frac{1}{2} [\cos(\alpha - \beta) + \cos(\alpha + \beta)]$$

Formule di duplicazione e bisezione

$$\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha, \quad \cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha$$

$$\sin^2 \frac{\alpha}{2} = \frac{1}{2}(1 - \cos \alpha), \quad \cos^2 \frac{\alpha}{2} = \frac{1}{2}(1 + \cos \alpha)$$

Legge dei seni

$$\frac{\sin \alpha}{a} = \frac{\sin \beta}{b} = \frac{\sin \gamma}{c}$$

teorema di Carnot

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma$$

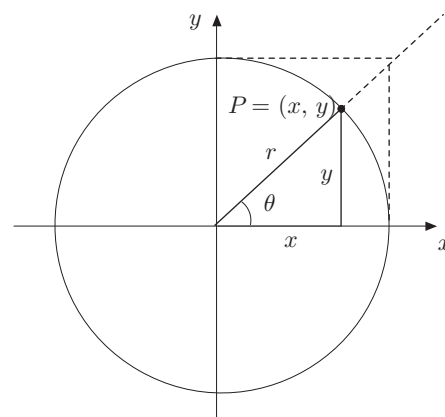


Fig. C.1

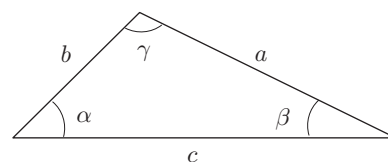


Fig. C.2

2. LOGARITMI

$$e = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = 2,7182818\dots$$

$$x = e^y, \quad \Rightarrow \quad y = \ln x$$

$$x = 10^y, \quad \Rightarrow \quad y = \log x$$

$$\ln x = 2,303 \log x, \quad \log x = 0,434 \ln x$$

3. NUMERI COMPLESSI

$$i^2 = -1, \quad i = \sqrt{-1}$$

$$e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta$$

$$\cos \theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} \quad \sin \theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}$$

4. FUNZIONI IPERBOLICHE

$$\sinh \theta = \frac{e^\theta - e^{-\theta}}{2} \quad \cosh \theta = \frac{e^\theta + e^{-\theta}}{2}$$

$$\cosh^2 \theta - \sinh^2 \theta = 1$$

5. DERIVATE DI FUNZIONI ELEMENTARI

$$y = f(x) \quad \Rightarrow \quad y' = df/dx$$

$$y = x^n \quad \Rightarrow \quad y' = nx^{n-1}$$

$$y = e^x \quad \Rightarrow \quad y' = e^x$$

$$y = e^{kx} \quad \Rightarrow \quad y' = ke^x$$

$$y = a^x \quad \Rightarrow \quad y' = (\ln a)a^x$$

$$y = \sin x \quad \Rightarrow \quad y' = \cos x$$

$$y = \cos x \quad \Rightarrow \quad y' = -\sin x$$

$$y = \ln x \quad \Rightarrow \quad y' = \frac{1}{x}$$

$$y = f(x)g(x) \quad \Rightarrow \quad y' = f(x)\frac{dg}{dx} + g(x)\frac{df}{dx}$$

$$y = \frac{f(x)}{g(x)} \quad \Rightarrow \quad y' = \frac{1}{[g(x)]^2} \left[f(x)\frac{dg}{dx} + g(x)\frac{df}{dx} \right]$$

$$y = \tan x = \frac{\sin x}{\cos x} \quad \Rightarrow \quad y' = \frac{1}{\cos^2 x}$$

$$y = \cot x = \frac{\cos x}{\sin x} \quad \Rightarrow \quad y' = -\frac{1}{\sin^2 x}$$

$$y = f[\varphi(x)] \quad \Rightarrow \quad y' = \frac{df}{d\varphi} \frac{d\varphi}{dx}$$

$$y = e^{\varphi(x)} \quad \Rightarrow \quad y' = e^{\varphi(x)} \frac{d\varphi}{dx}$$

$$y = \ln \varphi(x) \quad \Rightarrow \quad y' = \frac{1}{\varphi(x)} \frac{d\varphi}{dx}$$

$$x = \varphi(y) \quad \Rightarrow \quad y' = \frac{dy}{dx} = \frac{1}{d\varphi/dy}$$

$$y = \sin^{-1} x \quad \Rightarrow \quad y' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$y = \cos^{-1} x \quad \Rightarrow \quad y' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$y = \tan^{-1} x \quad \Rightarrow \quad y' = \frac{1}{1+x^2}$$

$$y = \sinh[u(x)] \quad \Rightarrow \quad y' = \cosh u \frac{du}{dx}$$

$$y = \cosh[u(x)] \quad \Rightarrow \quad y' = \sinh u \frac{du}{dx}$$

6. ALCUNI INTEGRALI INDEFINITI

(si omette la costante additiva)

$y = f(x)$	\Rightarrow	$Y = \int f(x)dx$
$y = \cos t$	\Rightarrow	$Y = \cos t \cdot x$
$y = x^n$	\Rightarrow	$Y = \frac{x^{n+1}}{n+1}$
$y = \frac{1}{x}$	\Rightarrow	$Y = \ln x$
$y = e^{\alpha x}$	\Rightarrow	$Y = \frac{1}{\alpha} e^{\alpha x}$
$y = a^x$	\Rightarrow	$Y = \frac{a^x}{\ln a}$
$y = \frac{1}{x^2 + a^2}$	\Rightarrow	$Y = \frac{1}{a} \tan^{-1} \frac{x}{a}$
$y = \frac{1}{x^2 - a^2}$	\Rightarrow	$Y = \frac{1}{2a} \ln \left(\frac{x-a}{x+a} \right) \quad (x > a)$
$y = \frac{1}{\sqrt{x^2 \pm a^2}}$	\Rightarrow	$Y = \ln \left(x + \sqrt{x^2 \pm a^2} \right) \quad (x^2 \pm a^2 > 0)$
$y = \frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}}$	\Rightarrow	$Y = \sin^{-1} \left(\frac{x}{a} \right) = \frac{\pi}{2} - \cos^{-1} \left(\frac{x}{a} \right)$
$y = \frac{1}{a + bx}$	\Rightarrow	$Y = \frac{1}{b} \ln(a + bx)$
$y = \frac{x}{a + bx}$	\Rightarrow	$Y = \frac{1}{b^2} [a + bx - a \ln(a + bx)]$
$y = \sin x$	\Rightarrow	$Y = -\cos x$
$y = \cos x$	\Rightarrow	$Y = \sin x$
$y = \tan x$	\Rightarrow	$Y = -\ln(\cos x)$
$y = \cot x$	\Rightarrow	$Y = \ln(\sin x)$
$y = \sinh x$	\Rightarrow	$Y = \cosh x$
$y = \cosh x$	\Rightarrow	$Y = \sinh x$
$y = \sin^2 x$	\Rightarrow	$Y = \frac{1}{2}x - \frac{1}{4}\sin 2x$
$y = \cos^2 x$	\Rightarrow	$Y = \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}\sin 2x$
$y = \frac{1}{\sin x}$	\Rightarrow	$Y = \ln \left(\tan \frac{x}{2} \right)$
$y = \frac{1}{\cos x}$	\Rightarrow	$Y = \ln \left[\tan \left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4} \right) \right]$
$y = \frac{1}{\sin^2 x}$	\Rightarrow	$Y = -\cot x$
$y = \ln x$	\Rightarrow	$Y = x \ln x - x$
$y = \frac{\ln x}{x}$	\Rightarrow	$Y = \frac{1}{2}(\ln x)^2$

Integrazione per parti

$$y = \int u(x)dv(x) \quad \Rightarrow \quad Y = u(x)v(x) - \int v(x)du(x)$$

7. ALCUNI INTEGRALI DEFINITI

$$\begin{aligned}\int_0^{2\pi} \sin^2 x dx &= \int_0^{2\pi} \cos^2 x dx = \pi \\ \int_0^\infty e^{-\lambda x} dx &= \frac{1}{\lambda} \\ \int_0^\infty e^{-\lambda x^2} dx &= \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{\lambda}}\end{aligned}$$

8. SVILUPPI IN SERIE DI POTENZE

Sviluppo in serie di Taylor

$$f(x) = f(x_0) + (x - x_0) \left(\frac{df}{dx} \right)_{x=x_0} + \frac{1}{2} (x - x_0)^2 \left(\frac{d^2 f}{dx^2} \right)_{x=x_0} + \cdots + \frac{1}{n!} (x - x_0)^n \left(\frac{d^n f}{dx^n} \right)_{x=x_0} + \cdots$$

Se $x - x_0 \ll 1$:

$$f(x) \approx f(x_0) + (x - x_0) \left(\frac{df}{dx} \right)_{x=x_0}$$

Sviluppo binomiale

$$(1+x)^n = 1 + nx + \frac{n(n-1)}{2!} x^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!} x^3 + \cdots$$

Altri sviluppi in serie

$$e^x = 1 + x + \frac{1}{2!} x^2 + \frac{1}{3!} x^3 + \cdots$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \cdots$$

$$\sin x = x - \frac{1}{3!} x^3 + \frac{1}{5!} x^5 - \cdots$$

$$\cos x = 1 - \frac{1}{2!} x^2 + \frac{1}{4!} x^4 - \cdots$$

$$\tan x = x + \frac{1}{3} x^3 + \frac{2}{15} x^5 + \cdots$$

Per $x \ll 1$, si ha

$$(1+x)^n \approx 1 + nx,$$

$$\sin x \approx x,$$

$$e^x \approx 1 + x,$$

$$\cos x \approx 1,$$

$$\ln(1+x) \approx x$$

$$\tan x \approx x.$$

Indice analitico

A

aberrazione della luce, 566
accelerazione, 57
— angolare, 61, 333
— centrifuga, 61, 101
— centripeta, 100
— di Coriolis, 101
— di deviazione, 101
— di gravità, dipendenza dalla latitudine, 267
— — variazione con l'altezza, 135
— di trascinamento, 100
— locale, 450
— materiale, 450
— media, 57
— nei moti relativi, 100
— relativa, 101
— tangenziale, 61, 100
— totale, 450
— , forma intrinseca della, 60
— , trasformazione della, 599
adesione superficiale, 149
aerostato, 421
altezza di scala dell'atmosfera, 254
ampère, 8
ampiezza, 70
analisi
— delle forze, 163
— di Fourier di un impulso, 523
angolo
— di incidenza, 297
— di riflessione, 297
— piano, 9
— solido, 9
— tra due vettori, 32
anticicloni, 253
armoniche superiori, 517
aspiratori, 456
asse
— centrale del sistema, 314
— di moto, 52
— istantaneo di rotazione, 52

assi
— permanenti di rotazione, 369
— principali d'inerzia, 338
— spontanei di rotazione, 343
atmosfera, 402
attenuazione, 551
atto di moto, 47
— polare, 49
— rotatorio, 49
— traslatorio, 48
attrito, 108
— cinetico, 149
— di giro, 358
— di rotolamento, 358
— nel mezzo, 152, 468
— statico, 149
autofunzione, 548
autovalore, 239, 548
autovettori, 239

B

baricentro, 315
barometro, 416
base del moto, 55
battimenti, 236
battimento, 75
braccio, 306
— della coppia, 307

C

caduta dei gravi, deviazione dalla verticale, 263
campo
— conservativo, 170
— delle velocità armonico, 447
— di forza, 117
— — uniforme, 175
— di forze centrali, 176
— di induzione magnetica, 140
— elettrico, 139
— gravitazionale, 118
— irrotazionale, 174
candela, 9
capillarità, 436

carica elettrica, 8
carrucola mobile, 161
catenaria, 161
centro
— delle forze parallele, 312
— di massa, 270
— istantaneo di rotazione, 53
cerchio osculatore, 58
cicloni, 253
cifre significative, 17
cinematica relativa, 93
circonferenza osculatrice, 58
circuitazione, 123
coefficiente
— d'attrito, 151
— — cinetico, 151
— — dinamico, 151
— — statico, 151
— di compressibilità, 397
— di forma, 470
— di Poisson, 379
— di restituzione, 294
— di riflessione, 499
coefficienti
— di elasticità, 391
— di Lamé, 399
coerenza, 534
collisione
— anelastica, 291
— elastica, 291
componente
— di un vettore, 24
— cartesiana di un vettore, 24
composizione di due moti armonici su assi ortogonali, 82
condensazione, 489
cono
— di attrito, 152
— di luce, 585
conservazione
— del momento angolare, 200, 276
— dell'energia, 179
— quantità di moto, 272, 564
contagocce, 438
contrazione delle lunghezze, 577

coordinate
 — lagrangiane, 38
 — libere, 38
 — normali, 238
 coppia, 304
 corpo rigido
 — con un punto fisso, 366
 — ruotante attorno ad un asse, 332
 — vincolato, 332
 coseni direttori, 20
 costante
 — di Planck, 546
 — elastica, 142
 — gravitazionale, 130
 coulomb, 8
 cronotopo, 580
 curva di risonanza, larghezza di banda, 230

D

De Broglie, ipotesi di, 546
 decadimento di particelle elementari, 579
 decibel (*db*), 502
 deflessione della luce dovuta al Sole, 603
 deformazione, 378
 deformazioni, 377, 387
 — anelastiche, 377
 — angolari, 390
 — elastiche, 377, 379
 — lineari, 390
 — plastiche, 379
 densità
 — di probabilità, 13
 — , misure di, 422
 derivata
 — di un vettore, 34
 — direzionale, 173
 deviazione standard, 13, 14
 diagramma
 — delle frequenze, 12
 — di corpo libero, 163
 — di Minkowski, 582
 differenza di vettori, 22
 diffrazione, 553
 — di Fraunhofer, 554
 — di Fresnel, 554
 dilatazione, 489
 — cubica, 395
 — dei tempi, 574
 dimensioni del nucleo, 220
 dinamica, 107
 dinamica
 — dei fluidi, 441
 — — ideali, 449
 — — viscosi, 464
 — dei sistemi, prima equazione cardinale della, 271

— dei sistemi, seconda equazione cardinale della, 274
 — relativa dei sistemi, 279
 — relativistica, legge fondamentale della, 591
 direzione, 19
 — di un vettore, 20
 discontinuità
 — cedevole, 491, 493
 — rigida, 490, 492
 dissipazione di energia, 225
 distribuzione
 — delle velocità, 445
 — di Gauss, 13
 divergenza, 122
 doppio prodotto vettoriale, 33

E

effetto
 — Doppler, 508
 — — relativistico, 586
 — —, mezzo in moto, 508
 — —, ricevitore in moto, 509
 — —, sorgente in moto, 509
 — Magnus, 471
 elasticità dei corpi omogenei e isotropi, 392
 ellissoide d'inerzia, 338
 energia
 — cinetica, 167, 201, 280, 343
 — —, teorema dell', 167
 — di interazione tra due particelle, 189
 — di un oscillatore quasi armonico, 183
 — gravitazionale, 212
 — intrinseca, 593
 — meccanica, 180
 — potenziale, 171
 — — efficace, 217
 — — gravitazionale, 209
 — media, 182
 — propria, 289
 — relativistica, altra deduzione della, 596
 — totale, 180
 equazione
 — algebrica caratteristica, 221
 — dell'equilibrio, 386
 — di continuità, 442
 — di D'Alembert, 477
 — di Laplace, 447
 — di Schrödinger, 549
 — —, in una buca di potenziale, 550
 — —, particella libera, 549
 — indefinita dell'equilibrio, 387
 equazioni
 — accoppiate, 233

— cardinali della dinamica dei corpi rigidi, 331
 — di Eulero, 367, 451
 — dimensionali, 5
 equilibrio, 319
 — dei fluidi, 403
 — del punto materiale, 155
 — di un sistema, 303
 — di una ruota soggetta a coppia motrice, 361
 — di una ruota soggetta a forza motrice, 360
 — relativo, 254
 — — di un fluido, 427
 errore, 11
 — casuale, 11
 — massimo, 15
 — relativo, 16
 — sistematico, 11
 esperienza
 — di Cavendish, 137
 — di Michelson e Morley, 102, 567
 — di Eötvös, 602
 esperimento di Hafele e Keating, 579
 etere, 99
 — cosmico, 94, 102, 568
 evento
 — , tipo-luce, 585
 — , tipo-spazio, 585
 — , tipo-tempo, 585

F

fase iniziale, 70
 fattore
 — di merito, 226
 — di qualità, 226
 — di conversione, 9
 figure di Lissajous, 84
 filo, 156
 finezza, 471
 fluido
 — compressibile, 425
 — ideale, 401
 — reale, 401
 — soggetto alla gravità, 405
 flusso del vettore campo, 121
 formula
 — di Hagen-Poiseuille, 463
 — di Stokes, 469
 formule di Poisson, 50, 100
 forza, 109
 — attiva, 147
 — centrifuga, 252, 280
 — centripeta, 174
 — conservativa, 170
 — coulombiana, 178

- di attrito, 149
- di Coriolis, 252
- di Lorentz, 166, 174
- di pressione, 409
- —, calcolo della, 410
- di superficie, 380
- di trascinamento, 252
- di volume, 380
- elastica, 141, 179
- gravitazionale, 130, 178
- forza posizionale, 130
- vincolare, 147
- , trasformazione della, 599
- forze
 - a distanza, 117
 - apparenti, 252
 - complanari, 309
 - concorrenti, 304
 - di contatto, 129
 - elettromagnetiche, 138
 - esterne, 269
 - fittizie, 129, 252
 - interne, 269
 - parallele, 311
 - — a risultante non nulla, 304
- fotone, 599
- freccia del tempo, 561
- frequenza, 71
 - angolare, 70
 - di battimento, 75
 - di ciclotrone, 141, 248
- fronti d'onda, 473
- funzione d'onda, 548

G

- gedanken experiment, 594
- girobussola, 374
- giroscopio, 370
- gradiente, 126
- grandezza
 - derivata, 4
 - fisica, 3
 - fondamentale, 4
 - vettoriale, 19
- gravità, accelerazione di, 111
- guscio sferico, 209

H

- hertz, 71
- Hubble, 587

I

- impulso, 195, 545
 - angolare, 200
- inerzia, 110
- integrale dell'energia, 216
- integrali del moto, 192

- intensità
 - del suono, 527
 - delle onde sonore, 501
 - di corrente, 8
 - luminosa, 9
- interazione, 107
 - elettromagnetica, 129
 - gravitazionale, 129
- interferenza, 513
 - costruttiva, 533
 - di onde sferiche, 533
 - distruttiva, 533
 - , onde in verso opposto, 515
 - , onde progressive, 513
 - — di frequenze diverse, 514
- invariante scalare, 309
- invarianza
 - dell'energia potenziale, 562
 - dell'equazione di Newton, 558
 - per inversione della coordinata temporale, 560
 - per rotazione, 559
 - per trasformazioni galileane, 563
 - per traslazione, 558
- inversione delle coordinate spaziali, 561
- istogramma delle frequenze, 12

J

- joule, 166

K

- kelvin, 8
- Keplero
 - , leggi di, 131
 - , prima legge di, 215
 - , seconda legge di, 213
 - , terza legge di, 216
- kilogrammo, 7

L

- laplaciano, 127
- lavori virtuali, 326
- lavoro, 165
 - delle forze non conservative, 185
 - di una forza
 - — costante, 168
 - — dipendente dal tempo, 169
 - — dissipativa, 169
 - — elastica, 168
 - — forza posizionale, 170
 - — ed energia cinetica, 288
- legge
 - di azione e reazione, 114, 131
 - di Bernoulli, 517

- di Coulomb, 119
- di dispersione, 544
- di Hooke, 379, 390
- di inerzia, 108, 588
- di Jurin, 437
- di Snell, 499
- di Stevino, 406
- di Stokes, 244
- di Tate, 439
- fondamentale della dinamica relativa, 251
- oraria, 44, 45
- , prima — di Keplero, 215
- , seconda — di Keplero, 213
- , terza — di Keplero, 216
- linea
 - di corrente, 442
 - di flusso, 121, 442
 - di forza, 121, 176
 - di universo, 581
 - funicolare, 157
- lunghezza, 6
 - d'onda, 494

M

- macchina di Atwood, 160
- macchine semplici, 327
- manometro
 - ad aria libera, 408
 - di Mac Leod, 417
- massa, 7, 110, 111
 - gravitazionale, 111
 - — dei fotoni, 603
 - inerziale, 112
 - longitudinale, 591
 - relativistica, 590
 - —, altra deduzione della, 593
 - ridotta, 190, 281
 - trasversale, 591
- matrice d'inerzia, 342
- meccanica ondulatoria, 546
- media, 12
- metacentro, 421
- metro, 6
- mezzi dispersivi, 495, 537
 - , corda con masse distribuite, 537
 - non dispersivi, 495
- millibar, 402
- misura, 11
 - assoluta, 11
 - diretta, 3, 11
 - indiretta, 3, 11
 - relativa, 11
- modi di vibrazione
 - numero dei, 532
 - normali, 234
- modulazione di ampiezza, 76

modulo

- della velocità, 46
- di compressibilità, 397
- di elasticità, 391
- di rigidità, 393, 398
- di scorrimento, 393
- di un vettore, 19
- di Young, 379, 392, 398

mole, 8

molla, 141

- , rigidità della, 142

molle

- in parallelo, 145
- in serie, 145

momenti d'inerzia, 334

- principali, 338

momento

- angolare, 198, 274, 275, 280, 282
- — di due particelle rispetto al loro centro di massa, 284
- — di un corpo rigido omogeneo, 342
- assiale, 306, 333
- d'inerzia, 201, 333
- — di un anello omogeneo, 336
- — di un disco omogeneo, 336
- — di una sbarra omogenea, 336
- — di una sfera omogenea, 337
- — rispetto ad assi concorrenti, 337
- della quantità di moto, 198
- di un sistema di forze, 308
- una coppia, 306
- una forza, 197, 305

moti

- armonici in fase, 74
- armonici, sovrapposizione di, 73
- centrali, 80
- in fase, 73
- in opposizione di fase, 74
- in quadratura, 74
- irrotazionali, 452
- piani, 77, 200

moto

- armonico, 70
- assoluto, 93
- dei gravi nell'aria, 246
- di nutazione, 374
- di un grave soggetto a forza viscosa, 244
- di un punto, 44
- di una particella carica in un campo di induzione magnetica, 248
- di una stella doppia, 286
- di una trottola pesante, 373
- elicoidale, 51

- in presenza di un momento esterno, 371
- irrotazionale, 448
- laminare, 459
- per inerzia, 367
- piano in coordinate polari, 77
- relativo, 93, 260
- rettilineo, 65
- — uniforme, 65
- — uniformemente accelerato, 66
- rigido piano, 53
- rototraslatorio, 50
- — uniforme, 51
- stazionario, 441
- vorticoso, 467

N

nabla, 123

natanti, 420

newton, 113

nodi di vibrazione, 515

numero

- d'onde, 495
- — angolare, 495
- di Reynolds, 467

O

onda

- longitudinale, 473

piana

- — polarizzata circolarmente, 481
- — polarizzata ellitticamente, 481
- — , intensità di, 497
- polarizzata linearmente, 473
- progressiva, 474
- regressiva, 474
- trasversale, 473

onde

- armoniche piane, 494
- di dilatazione, 477, 479
- di gravità, 543
- di rotazione, 478
- elastiche, 473
- nei gas ideali, velocità di propagazione delle, 482
- piane, 479
- — longitudinali in una sbarra indefinita, 483
- — nei fluidi, 481
- progressive, 487
- regressive, 487
- sferiche, 502
- — armoniche, 506
- — , densità media di energia, 507

- — — , intensità, 507
 - — — , pressione, 507
 - sulla superficie di liquidi, 540
 - trasversali, 478, 479, 484
- operazioni
- di simmetria, 557
 - invariantive, 304
- orbita chiusa, 215
- ordini di grandezza, 10
- oscillatore
- forzato, energia dissipata, 231
 - sovrasmorzato, 223
- oscillatori accoppiati, 231
- oscillazioni, 221
- anarmoniche, 244
 - forzate, 227
 - smorzate, 225
 - trasversali, 237

P

pacchetto d'onda, 545

paradosso

- dei gemelli, 578
- di D'Alembert, 458
- idrostatico, 409

parametro

- d'urto, 219, 292
- di attrito di giro, 358
- di attrito di rotolamento, 358

particelle soggette a mutua interazione, 285

pascal, 402

pendoli accoppiati, 235

pendolo

- balistico, 300
- composto, 347
- conico, 261
- di Foucault, 265
- , oscillazioni di grande ampiezza, 241

perdita di carico, 459

periodo, 71

- di battimento, 75
- spaziale, 495

peso, 111

piano

- di incidenza, 297
- di polarizzazione, 473
- di vibrazione, 473
- direttore, 43
- osculatore, 58

piccole vibrazioni

- di un filo fissato agli estremi, 524
 - di un filo indefinito, 485
- poise (*P*), 460
- polarizzazione
- circolare, 84

— ellittica, 84
 — rettilinea, 83
 portata, 445
 postulati
 — della relatività ristretta, 571
 — fondamentali della statica dei sistemi rigidi, 303
 potenza, 166
 potenziale, 174
 — della velocità, 447, 503
 — di Lennard-Jones, 189
 — polidromo, 449
 precessione
 — degli equinozi, 374
 — regolare, 368
 pressione, 402
 — atmosferica, variazione con l'altezza della, 427
 prima curvatura, 58
 prima legge di Keplero, 215
 principio
 — di Archimede, 419
 — di conservazione della massa, 442
 — di equivalenza, 601
 — di Huygens, 552
 — di Pascal, 406
 problema
 — balistico, 87
 — dei due corpi, 285
 prodotti d'inerzia, 338
 prodotto
 — misto, 33
 — scalare, 25
 — vettoriale, 26
 propagazione
 — nei mezzi elastici isotropi e indefiniti, 475
 — per onde sferiche, 504
 pulsazione, 70
 punto di vista
 — euleriano, 441
 — lagrangiano, 441

Q

quantità
 — di moto, 110, 112, 115, 195, 281
 — — relativistica, 590
 — di sostanza, 8
 quanto di luce, 599

R

radiante, 9
 rappresentazione vettoriale di una superficie, 27
 rarefazione, 489, 496
 razzo, 204
 reazione vincolare, 147

red shift, 587
 regime
 — a resistenza di attrito, 468
 — di Poiseuille, 459
 regola
 — d'oro delle macchine, 329
 — del parallelogramma, 21
 regolatore di Watt, 262
 relatività ristretta, 571
 relazione
 — di Cauchy, 381, 402
 — di dispersione, 495, 539
 resistenza
 — balistica, 152
 — idraulica, 152, 246
 — viscosa, 152
 reticolo
 — cristallino, 35
 — reciproco, 35
 riduzione di un sistema di forze, 309
 — generico, 312
 riferimenti non inerziali, equazione della dinamica, 251
 riferimento
 — C , 281
 — L , 281
 — assoluto, 94, 107
 — del centro di massa, 281
 — inerziale, 94
 riflessione, 490
 — di un'onda piana per incidenza obliqua, 498
 — parziale delle onde piane per incidenza normale, 493
 risonanza, 229
 rotazione, 41
 — rotazione infinitesima, 42
 rotolamento, 355
 — con coppia motrice, 357
 — con forza motrice, 355
 rotore, 123, 124
 rotovettore, 124
 ruletta del moto, 55

S

scarto quadratico medio, 14
 seconda legge di Keplero, 213
 secondo, 7
 semidispersione massima, 12
 sensibilità
 — della misura, 15
 — di lettura, 12
 serie di Fourier in forma complessa, 521
 sforzo, 378, 380, 489
 — di taglio, 381, 382, 394
 — in una sbarra indefinita, 496
 — normale, 380, 382, 394
 — — medio, 394

— tangenziale, 381, 382
 simmetria, 557
 sincronizzazione degli orologi, 573
 sistema, 38
 — di punti, 38, 269
 — forza-coppia, 307
 — Internazionale di unità di misura, 6
 — masse-molle, 234
 sistemi
 — a massa variabile, 204
 — di forze equipollenti, 304
 — di punti materiali, 303
 — rigidi, 39, 303
 slinky, 232
 smorzamento critico, 224
 soglia
 — della sensazione dolorosa, 501
 — della sensazione sonora, 501
 somma di vettori, 20
 sommergibile, 421
 spazio-tempo, 581
 — , geodetica, 581
 spinta, 205
 — di Archimede, 420
 spostamento, 40
 — irrotazionale, 476
 — piano, 43
 — rigido, 41
 — — polare, 43
 — rotatorio, 41
 — rototraslatorio, 43
 — solenoidale, 477
 — traslatorio, 41
 statica dei fluidi, 401
 steradiante, 9
 struttura giroscopica, 367
 superfici
 — antinodali, 534
 — d'onda, 473
 — nodali, 534
 — ventrali, 534
 superficie
 — equipotenziale, 172
 — isobarica, 403
 sviluppo in serie di Fourier, 519

T

temperatura, 8
 tempo, 7
 — assoluto, 107
 — delle effemeridi, 7
 — sidereo, 7
 — solare medio, 7
 tensione, 156
 — nei fili, 156
 — superficiale, 430
 tensore
 — degli sforzi, 383
 — di deformazione, 388

teorema

- degli assi paralleli, 335
- del momento angolare, 199
- dell'energia cinetica, 333, 591
- dell'impulso, 195
- della quantità di moto, 270, 457
- di Bernoulli, 452, 453
- di Huygens, 335
- di König, 283
- di Pappo-Guldino, 316
- di Stokes, 125
- di Torricelli, 454
- di Varignon, 308

teoria di Kirchhoff, 552

termalizzazione dei neutroni, 298

terna

- fissa, 93
- inerziale, 94
- mobile, 93

terza legge

- della dinamica, 114
- di Keplero, 216

timbro, 527

torchio idraulico, 407

torr, 402

traiettoria, 44

trasformazione

- dell'energia, 597
- della quantità di moto, 597

trasformazioni

- della velocità, 587
- di Galilei, 96
- di Lorentz, 575
- ortogonali, 30

triedro principale, 58

trinomio invariante, 53, 309

tubo

- di flusso, 121, 442
- di Kundt, 517
- di Pitot, 456
- di Venturi, 456

U

unità

- di misura, 6
- astronomica, 134
- di angolo piano, 9
- di angolo solido, 9
- di forza, 113
- di intensità luminosa, 8
- di intervallo di tempo, 7
- di lunghezza, 6
- di massa, 7
- di quantità di sostanza, 8
- di temperatura, 8

Universo in espansione, 587

urto, 290

- centrale anelastico, 294, 295
- centrale elastico, 292
- obliquo elastico, 295
- , energia dissipata, 291

V

valori degeneri, 531

variazione di pressione, 489

variazione di pressione, 496

vasi comunicanti, 407

velocità, 45

- angolare, 48
- — di precessione, 369
- areolare, 80, 199
- assoluta, 96
- della luce, 565
- delle particelle, 497
- — del mezzo, 489
- di dilatazione del fluido, 446
- di fase, 515, 545
- di gruppo, 514, 545
- di propagazione dello spostamento, 477
- di trascinamento, 96
- istantanea, 45
- limite, 570

— media, 45

— relativa, 96

— , forma cartesiana della, 46

— , forma intrinseca della, 46

venti geostrofici, 253

vento d'etere, 570

ventri di vibrazione, 515

versore, 19

vettore, 19

— applicato, 19

— componente, 23

— d'onda, 496

— di propagazione, 496

— libero, 19

— ruotante, 71

— traslazione, 41

vibrazione

— armonica stazionaria, 515

— di una molecola biatomica, 286

vibrazioni

— di un parallelepipedo rettangolo
vibrazioni di un parallelepipedo rettangolo, 531

— di una membrana rettangolare, 529

— stazionarie, 526

— — in sistemi finiti, 516

— — —, corda fissata agli estremi, 517

— — —, tubo aperto ad un solo estremo, 518

— — —, tubo aperto ai due estremi, 518

— — —, tubo chiuso, 517

vincolo, 37

— bilatero, 37

— liscio, 148

— unilatero, 37

viscosimetro, Ostwald, 463

viscosità, 458

vortici, 449