

# DISPENSE PER IL CORSO DI MECCANICA RAZIONALE

Corso di studio in Ingegneria Meccanica  
**Nuovo Ordinamento**

Ing. Umberto Iemma

Dip. di Ingegneria Meccanica e Industriale  
via della vasca navale 79, 00146 Roma  
e-mail [u.iemma@uniroma3.it](mailto:u.iemma@uniroma3.it)

Roma, 11 ottobre 2001

# Capitolo 1

## Richiami di meccanica del punto materiale.

### 1.1 Caratteri fondamentali del moto di un elemento

La rappresentazione del moto di un corpo, ossia la definizione delle leggi che governano il cambiamento nel tempo della sua posizione rispetto ad un sistema di riferimento, è quella parte della meccanica che viene chiamata **cinematica**. Essa si avvale di alcuni concetti e strumenti fondamentali che presentiamo in questa sezione introduttiva nel caso che il corpo in questione sia un elemento materiale puntiforme. Definito un sistema di riferimento  $R(O, x, y, z)$ , il **vettore posizione**  $\vec{OP}$  individua il punto  $P$  occupato dall'elemento istante per istante (nel seguito indicheremo indifferentemente la posizione con  $\vec{OP}$  o  $\vec{x}$ ). La variazione di  $\vec{OP}$  rispetto al tempo è una delle possibili rappresentazioni del moto di  $E$  nel sistema di riferimento scelto. Si definisce **traiettoria** di  $E$  il luogo dei punti occupati da  $E$  durante il moto. La posizione dell'elemento lungo la traiettoria può essere individuata mediante un'ascissa curvilinea  $s$ . La  $s = s(t)$  viene detta equazione oraria. È in generale possibile fornire una rappresentazione parametrica del moto di  $E$  in funzione di  $s$ , ossia

$$\vec{x} = \vec{x}(s) \Rightarrow \begin{cases} x = x(s) \\ y = y(s) \\ z = z(s) \end{cases} \quad (1.1)$$

da dove si evince che il moto di  $E$  può essere descritto completamente dalla conoscenza di  $s(t)$ . Definiamo **vettore spostamento** il vettore differenza  $P\vec{P}' = \vec{OP}' - \vec{OP}$  tra le posizioni occupate da  $E$  in due istanti successivi  $t$  e  $t'$ . La **velocità globale** di  $E$  nell'intervallo di tempo  $(t, t')$  è data da  $P\vec{P}'/(t' - t)$ . La **velocità** di  $E$  all'istante  $t$  è definita come

$$\vec{v}(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{P\vec{P}'}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{OP}}{\Delta t} = \frac{d\vec{OP}}{dt} \quad (1.2)$$

Analogamente, l'**accelerazione** istantanea di  $E$  viene definita come

$$\vec{a}(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\vec{v}(t') - \vec{v}(t)}{\Delta t} = \frac{d\vec{v}}{dt} \quad (1.3)$$

#### 1.1.1 Versore tangente

Partiamo dalla rappresentazione parametrica in funzione della lunghezza d'arco  $s$ ,  $\vec{x} = \vec{x}(s)$ . Definiamo il **versore tangente**  $\hat{t}$  come il limite del vettore secante alla traiettoria

per  $\Delta s$  che tende a 0

$$\hat{t} = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{\vec{x}(s + \Delta s) - \vec{x}(s)}{\Delta s} = \frac{d\vec{x}}{ds} \quad (1.4)$$

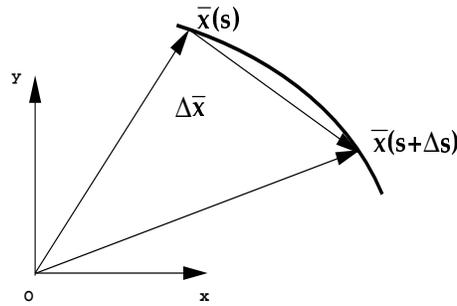


Figura 1.1:

Essendo  $s$  la lunghezza d'arco lungo la curva che descrive la traiettoria, per definizione si ha  $ds = ||d\vec{x}||$  e quindi il modulo di  $\hat{t}$  è dato da

$$||\hat{t}|| = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{||\Delta \vec{x}||}{|\Delta s|} = 1 \quad (1.5)$$

che dimostra che  $\hat{t}$  è un versore.

### 1.1.2 Versore normale

Consideriamo la derivata di  $\hat{t}$  rispetto ad  $s$

$$\frac{d\hat{t}}{ds} = \frac{d^2\vec{x}}{ds^2} = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{\hat{t}(s + \Delta s) - \hat{t}(s)}{\Delta s} = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{\vec{x}(s + 2\Delta s) - 2\vec{x}(s + \Delta s) + \vec{x}(s)}{\Delta s^2} \quad (1.6)$$

I tre punti della traiettoria  $\vec{x}(s + 2\Delta s)$ ,  $\vec{x}(s + \Delta s)$ ,  $\vec{x}(s)$  individuano nello spazio un piano ed un cerchio. Questi ultimi, al limite per  $\Delta s \rightarrow 0$ , individuano il piano osculatore ed il cerchio osculatore. Il cerchio osculatore è il cerchio tangente alla curva, avente come centro il centro di curvatura  $C$  della traiettoria.

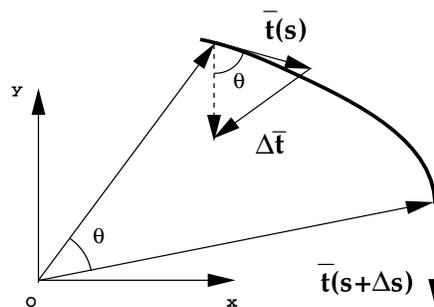


Figura 1.2:

Dalla figura si nota che, al limite,  $\Delta \hat{t}$  è parallelo alla normale alla curva giacente nel piano osculatore, diretto verso  $C$ . Inoltre, sempre al limite,  $||d\hat{t}|| = d\theta = ds/R$ , essendo  $R$  il raggio di curvatura alla traiettoria. Si ottiene quindi

$$\frac{d\hat{t}}{ds} = \frac{1}{R}\hat{n} \quad (1.7)$$

che definisce il versore normale.

### 1.1.3 Versore binormale

Definiamo il versore **binormale**  $\hat{b}$  alla traiettoria il versore ortogonale al piano formato da  $\hat{t}$  ed  $\hat{n}$ , orientato in modo che  $\hat{t}, \hat{n}, \hat{b}$  sia una terna destra.

$$\hat{b} = \hat{t} \times \hat{n} \quad (1.8)$$

$\hat{t}, \hat{n}, \hat{b}$  è definita **terna intrinseca** della traiettoria.

### 1.1.4 Velocità

Utilizzando le regole di derivazione di funzioni composte otteniamo

$$\vec{v} = \frac{d\vec{x}}{dt} = \frac{d}{dt}\vec{x}(s(t)) = \frac{d\vec{x}}{ds} \frac{ds}{dt} = \dot{s}\hat{t} \quad (1.9)$$

da cui si evince che  $\vec{v}$  è sempre tangente alla traiettoria e che  $v = \dot{s}$ .  $\dot{s}$  viene chiamata velocità scalare del punto.

### 1.1.5 Accelerazione

Dall'equazione 1.9 otteniamo facilmente

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \ddot{s}\hat{t} + \dot{s} \frac{d\hat{t}}{ds} \frac{ds}{dt} \quad (1.10)$$

Quindi, per la 1.7,

$$\vec{a} = \ddot{s}\hat{t} + \frac{\dot{s}^2}{R}\hat{n} \quad (1.11)$$

Se ne deduce che l'accelerazione è composta da due componenti:  $\ddot{s}$  è la componente *tangenziale* dell'accelerazione, mentre la  $\frac{\dot{s}^2}{R}$  è la componente normale alla traiettoria (*centripeta*).

### 1.1.6 Moti particolari

- **Moto rettilineo.** Il moto di un elemento  $E$  si definisce *rettilineo* se

$$\vec{a} \times \vec{v} = 0 \quad (1.12)$$

in ogni istante;

- **Moto piano.** definiamo moto *piano* quello per il quale il vettore

$$\vec{a} \times \vec{v} \quad (1.13)$$

ha direzione costante;

- **Moto centrale.** un moto viene definito *centrale* con centro nel punto  $C$  se, in ogni istante,

$$\vec{a} \times \vec{CP} = 0 \quad (1.14)$$

ossia se l'accelerazione risulta sempre parallela a  $\vec{CP}$ ;

- **Moto circolare.** il moto lungo una traiettoria circolare di centro  $O$  (vedi figura) può essere in generale descritto in funzione del parametro  $\theta$  come

$$x(t) = R \cos[\theta(t)] \quad (1.15)$$

$$y(t) = R \sin[\theta(t)] \quad (1.16)$$

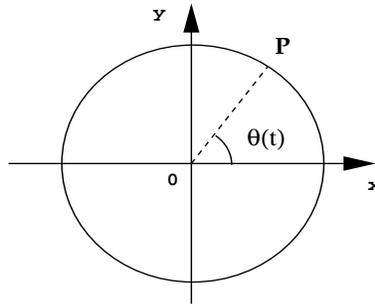


Figura 1.3:

che nel caso di moto uniforme si riduce a

$$x(t) = R \cos[\dot{\theta}_0 t + \theta_0] \quad (1.17)$$

$$y(t) = R \sin[\dot{\theta}_0 t + \theta_0] \quad (1.18)$$

In tal caso il moto ha carattere periodico con periodo  $T = 2\pi R/\dot{s}_0 = 2\pi/\dot{\theta}_0$ . Si noti che un moto circolare uniforme è un moto centrale con centro  $O$ , mentre un moto circolare non uniforme in generale non lo è.

- **Moto armonico.** La posizione delle proiezioni del punto  $P$  del caso precedente lungo gli assi  $x$  ed  $y$  varia con legge, rispettivamente, cosinusoidale e sinusoidale. Tale tipo di moto si definisce *armonico*. La forma generale di tali moti è del tipo

$$x(t) = A \cos(\omega t) \quad \text{o} \quad x(t) = A \sin(\omega t) \quad (1.19)$$

Tali leggi del moto soddisfano l'equazione differenziale

$$\ddot{x} = -\omega^2 x \quad (1.20)$$

I moti armonici sono periodici di periodo  $T = 2\pi/\omega$ . Definiamo  $\omega$  pulsazione del moto (si misura in rad/sec) e  $f = \omega/2\pi = 1/T$  la frequenza (si misura in  $\text{sec}^{-1}$ ). Si noti che, invertendo il ragionamento fatto all'inizio di questo caso, il moto circolare uniforme a velocità  $\dot{s} = R\dot{\theta}$  si può considerare come la composizione di due moti armonici di ampiezza  $R$  e pulsazione  $\dot{\theta}$ .

## 1.2 Dinamica del punto materiale

Lo studio della dinamica di un punto materiale, qualunque sia il sistema di riferimento adottato, prende le mosse dalla seconda equazione di Newton, la quale afferma che il prodotto della massa  $m$  dell'elemento per la sua accelerazione  $\vec{a}$  uguaglia la forza totale agente sull'elemento stesso  $\vec{f}$

$$m\vec{a} = \vec{f} \quad (1.21)$$

Si tratta di un'equazione vettoriale che, nel caso sia nota la  $\vec{f}$ , assume la forma di equazione differenziale del secondo ordine per la funzione  $\vec{x}(t)$ . Quest'ultima, detta legge del moto, rappresenta la posizione del punto nel sistema di riferimento adottato in funzione del tempo. Nel caso che sia nota la legge del moto del punto  $\vec{x}(t)$ , e sia richiesta la determinazione di  $f$  si parla di problema dinamico inverso. Viceversa, la determinazione di  $\vec{x}(t)$  dalla 1.21 a partire dalla conoscenza di  $\vec{f}$  si definisce problema dinamico diretto. Tale classe di problemi richiede quindi la soluzione di un'equazione differenziale del secondo ordine. In generale, la dipendenza da  $\vec{x}$  delle forze agenti sul punto può avere una forma tale (presenza di termini non lineari, coefficienti non costanti, ecc...) da rendere impossibile la soluzione analitica della 1.21. Tuttavia, per una larga classe di problemi della meccanica (che sono proprio quelli dei quali ci occuperemo in questo corso) le equazioni differenziali con le quali si ha a che fare sono lineari (ossia,  $\vec{x}(t)$  e le sue derivate compaiono solamente con esponente unitario) ed a coefficienti costanti. Per tali problemi differenziali è possibile trovare una soluzione in forma analitica. Vediamo alcuni semplici esempi.

### 1. Sistema massa–molla

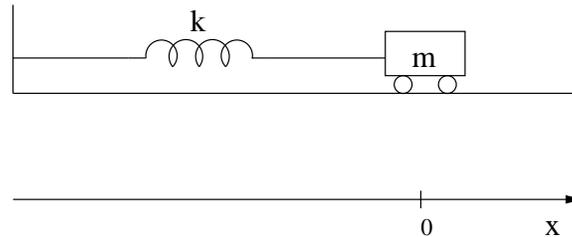


Figura 1.4:

Si consideri il sistema in figura 1.4 costituito da un elemento di massa  $m$  vincolato a muoversi lungo una traiettoria rettilinea e collegato ad una molla di costante elastica  $k$ . L'asse delle  $x$  sia scelto in modo che l'origine coincida con la posizione corrispondente alla lunghezza a riposo della molla. La forza di richiamo esercitata dalla molla è pari a  $\vec{f} = -k\vec{x}$ . In tal caso il vincolo imposto alla massa rende il problema unidimensionale e quindi descrivibile con una sola equazione scalare

$$m\ddot{x} + kx = 0 \quad (1.22)$$

L'equazione precedente è un'equazione differenziale lineare, omogenea, a coefficienti costanti.

### 2. Pendolo

Si consideri un elemento di massa  $m$  vincolato ad un estremo di un'asta rigida di massa nulla. L'asta sia vincolata all'altro estremo ad una cerniera priva di attriti

che le consenta di oscillare in un piano verticale. La massa è soggetta all'azione della forza peso ed alla reazione dell'asta, ed è costretta a muoversi lungo una circonferenza di centro  $O$  e raggio  $l$ .

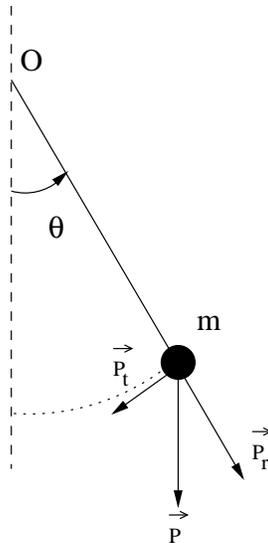


Figura 1.5:

La componente  $P_r$  della forza peso nella direzione dell'asta è bilanciata dalla reazione vincolare e non influenza il moto di  $m$ . L'equazione che governa la dinamica di  $m$  lungo l'arco di circonferenza  $s = l\theta$  è

$$ml\ddot{\theta} = -mgsin(\theta) \quad (1.23)$$

La 1.23 è un'equazione differenziale non lineare a coefficienti costanti. Se però ipotizziamo che l'angolo  $\theta$  rimanga piccolo (ipotesi di **piccole oscillazioni**) possiamo porre  $sin(\theta) \simeq \theta$  ed ottenere

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{l}\theta = 0 \quad (1.24)$$

che è di nuovo un'equazione lineare a coefficienti costanti, omogenea.

- **Nota 1:** in generale, la dinamica di un sistema meccanico dotato di  $N$  **gradi di libertà** (tale cioè da richiedere  $N$  variabili per descrivere la sua *configurazione*) è governata da  $N$  equazioni differenziali. In presenza di  $M$  vincoli il numero delle equazioni si riduce ad  $N - M$ . Un punto materiale libero di muoversi nel piano ha 2 gradi di libertà (due traslazioni). In entrambi i casi esaminati è presente un vincolo: nel primo esempio viene impedita la traslazione verticale, mentre nel secondo si vincola il punto su di un arco di cerchio. Ne segue che una sola equazione differenziale è sufficiente a descrivere la dinamica del problema.
- **Nota 2:** le equazioni 1.22 e 1.24 sono formalmente identiche. Ne segue che la dinamica dei due sistemi sarà simile. Si tratta infatti di due sistemi oscillanti non smorzati che, come vedremo in appendice 1.6, a partire da condizioni iniziali non nulle oscilleranno indefinitamente alla loro frequenza propria. La similitudine formale di 1.22 con 1.24 è conseguenza del fatto che la molla fornisce una risposta elastica lineare. Tutte le molle che considereremo in questo corso godranno di tale caratteristica. Si noti, tuttavia, che le molle reali utilizzate in molti sistemi

meccanici hanno spesso una risposta non lineare (ad es., le molle montate nelle sospensioni automobilistiche o motociclistiche). In quei casi l'equazione differenziale conseguente è di tipo non lineare e risulta necessario introdurre un'ipotesi di piccoli spostamenti per poter studiare il sistema con equazione simile alla 1.22.

In generale, definito un sistema di riferimento cartesiano  $R[0, x, y, z]$  è possibile proiettare l'equazione vettoriale 1.21 nelle tre direzioni degli assi, identificate dai versori  $\hat{i}$ ,  $\hat{j}$ ,  $\hat{k}$ , per ottenere un sistema di 3 equazioni differenziali scalari nelle funzioni  $x(t)$ ,  $y(t)$ ,  $z(t)$ , che rappresentano le componenti del vettore posizione nel sistema di riferimento scelto:

$$m\ddot{x} = f_x(x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}, t) \quad (1.25)$$

$$m\ddot{y} = f_y(x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}, t) \quad (1.26)$$

$$m\ddot{z} = f_z(x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}, t) \quad (1.27)$$

Le 1.27 costituiscono un sistema di equazioni differenziali. Il sistema si dice disaccoppiato se in ognuna delle equazioni compare solo una delle funzioni incognite. In tal caso le equazioni possono essere risolte indipendentemente le une dalle altre.

Ogni problema diretto può essere ricondotto ai seguenti casi particolari:

1. le forze agenti sull'elemento dipendono solo dal tempo  $\vec{f} = \vec{f}(t)$ ;
2. le forze agenti sull'elemento dipendono solo dalla posizione  $\vec{f} = \vec{f}(\vec{x})$ ;
3. le forze agenti sull'elemento dipendono linearmente da  $\vec{x}$  e  $\dot{\vec{x}}$ ,  $\vec{f} = A\vec{x} + B\dot{\vec{x}} + C$ ;
4. caso generale  $\vec{f} = \vec{f}(\vec{x}, \dot{\vec{x}}, t)$ ;
5. l'esistenza di vincoli impone all'elemento di appartenere ad una traiettoria assegnata od ad una superficie assegnata (moto *parzialmente noto*).

I problemi differenziali che si ottengono possono essere risolti con le metodologie espone in appendice 1.6 ove applicabili, ossia se è possibile ridurli ad equazioni differenziali ordinarie lineari a coefficienti costanti. Tuttavia, è possibile individuare per tali classi di problemi alcune metodologie alternative di soluzione.

**CASO 1** In questo caso le equazioni sono disaccoppiate e possono essere risolte indipendentemente le une dalle altre. In generale possiamo integrare rispetto al tempo

$$m \int_{t_0}^t \ddot{x}(t') dt' = \int_{t_0}^t \vec{f}_x(t') dt' \quad (1.28)$$

che, una volta scelto un sistema di riferimento, si traduce in tre equazioni scalari

$$\begin{aligned} m \int_{t_0}^t \ddot{x}(t') dt' &= \int_{t_0}^t f_x(t') dt' \\ m \int_{t_0}^t \ddot{y}(t') dt' &= \int_{t_0}^t f_y(t') dt' \\ m \int_{t_0}^t \ddot{z}(t') dt' &= \int_{t_0}^t f_z(t') dt' \end{aligned}$$

da cui otteniamo (limitandoci, per brevità di scrittura, alla prima equazione)

$$m[\dot{x}(t) - \dot{x}_0] = \int_{t_0}^t f_x(t') dt' \quad (1.29)$$

dove  $\dot{x}_0$  è noto dalle condizioni iniziali del problema per la velocità. Il primo termine della 1.29 rappresenta il salto di quantità di moto che l'elemento subisce tra gli istanti  $t_0$  e  $t$ . Possiamo ottenere direttamente l'evoluzione temporale della velocità

$$v_x(t) = v_x(t_0) + \frac{1}{m} \int_{t_0}^t f_x(t') dt' \quad (1.30)$$

Integrando ancora otteniamo la legge del moto

$$x(t) = x(t_0) + \frac{1}{m} \int_{t_0}^t v_x(t') dt' \quad (1.31)$$

Consideriamo, per esempio, il problema della caduta libera di un grave. L'equazione della dinamica è

$$m\ddot{\vec{x}} = m\vec{g}, \quad \vec{x}(0) = 0, \quad \dot{\vec{x}}(0) = \vec{v}_0. \quad (1.32)$$

Scegliendo gli assi in modo opportuno otteniamo

$$m\ddot{x} = 0, \quad x(0) = 0, \quad \dot{x}(0) = u_0; \quad (1.33)$$

$$m\ddot{y} = 0, \quad y(0) = 0, \quad \dot{y}(0) = v_0; \quad (1.34)$$

$$m\ddot{z} = mg, \quad z(0) = 0, \quad \dot{z}(0) = w_0; \quad (1.35)$$

la cui soluzione è

$$x(t) = u_0 t; \quad (1.36)$$

$$y(t) = v_0 t; \quad (1.37)$$

$$z(t) = w_0 t - g \frac{t^2}{2} \quad (1.38)$$

**CASO 2** In questo caso possiamo moltiplicare scalarmente l'equazione per  $\vec{v} = d\vec{x}/dt$ , per ottenere

$$m \frac{d\vec{v}}{dt} \cdot \frac{d\vec{x}}{dt} = m \frac{d}{dt} \left( \frac{v^2}{2} \right) = \vec{f} \cdot \frac{d\vec{x}}{dt} \quad (1.39)$$

ossia, definendo l'energia cinetica  $T = \frac{1}{2}mv^2$ ,

$$\frac{dT}{dt} = \vec{f} \cdot \frac{d\vec{x}}{dt} \quad (1.40)$$

da cui, integrando, otteniamo

$$T_2 - T_1 = \int_{t_1}^{t_2} \vec{f} \cdot \frac{d\vec{x}}{dt} dt = L_{12} \quad (1.41)$$

essendo

$$L_{12} = \int_{\mathcal{C}(\vec{x}_1, \vec{x}_2)} \vec{f} \cdot d\vec{x} \quad (1.42)$$

il lavoro compiuto dalla forza  $\vec{f}$  quando il punto si muove lungo il percorso  $\mathcal{C}(\vec{x}_1, \vec{x}_2)$ . Quando  $L_{12}$  non dipende da  $\mathcal{C}$  ma solo dai punti iniziale e finale  $\vec{x}_1, \vec{x}_2$ , si dice che la  $\vec{f}$  è una **forza conservativa**, ed è possibile introdurre l'**energia potenziale**, definita come

$$U(\vec{x}) = - \int_{\vec{x}_0}^{\vec{x}} \vec{f} \cdot d\vec{x} \quad (1.43)$$

per la quale vale quindi la relazione

$$L_{12} = U(\vec{x}_1) - U(\vec{x}_2) \quad (1.44)$$

Dalle eqq. 1.41 e 1.44 segue che

$$T_2 + U_2 = T_1 + U_1 \Rightarrow T + U = \text{costante} \quad (1.45)$$

ossia che per un punto materiale soggetto all'azione di sole forze conservative la somma dell'energia cinetica e dell'energia potenziale rimane costante.

**CASO 3** In questo caso abbiamo, in generale,

$$\begin{cases} m \ddot{x} + g_{xx} \dot{x} + g_{xy} \dot{y} + g_{xz} \dot{z} + k_{xx} x + k_{xy} y + k_{xz} z = f_x(t) \\ m \ddot{y} + g_{yx} \dot{x} + g_{yy} \dot{y} + g_{yz} \dot{z} + k_{yx} x + k_{yy} y + k_{yz} z = f_y(t) \\ m \ddot{z} + g_{zx} \dot{x} + g_{zy} \dot{y} + g_{zz} \dot{z} + k_{zx} x + k_{zy} y + k_{zz} z = f_z(t) \end{cases} \quad (1.46)$$

che rappresenta un sistema di equazioni differenziali lineari del secondo ordine accoppiate, della cui soluzione non ci occuperemo nell'ambito di questo corso.

**CASO 4** Nel caso più generale di dipendenza di  $\vec{f}$  da  $\vec{x}$  e dalle sue derivate, non è possibile ottenere una soluzione analitica del problema differenziale. È possibile, tuttavia, risolvere numericamente il sistema di equazioni utilizzando schemi di integrazione al passo, sfruttando il fatto che una qualsiasi equazione differenziale di ordine  $n$  può essere riscritta in forma di sistema di  $n$  equazioni differenziali del primo ordine.

**CASO 5** La presenza di vincoli può imporre all'elemento materiale di appartenere ad una particolare traiettoria o superficie delle quali si conoscono le caratteristiche geometriche. In questo caso, risulta vantaggioso riformulare il problema in modo da ottenere come incognite i gradi di libertà dell'elemento (ridotti dalla presenza del vincolo) e le reazioni vincolari. Dedicheremo a tale classe di problemi il paragrafo 1.3.

### 1.3 Dinamica dell'elemento vincolato

È possibile che la presenza di vincoli costringa il punto materiale a muoversi lungo traiettorie definite, o gli impedisca di occupare un certo insieme di posizioni dello spazio. Ammettiamo, per esempio, che il punto sia obbligato a muoversi lungo una linea curva  $\mathcal{L}$  dello spazio; se l'equazione della curva è nota, la posizione del punto nello spazio può essere determinata mediante la sola conoscenza del valore di un'ascissa curvilinea scelta lungo  $\mathcal{L}$ . La presenza del vincolo ha quindi ridotto i **gradi di libertà** del punto da tre (= gradi di libertà dell'elemento libero) ad uno solo. La presenza del vincolo ci permette di scrivere la 1.21 nella forma

$$m\vec{a} = \vec{f}_a + \vec{r} \quad (1.47)$$

dove la  $\vec{f}_a$  è la forza attiva agenti sull'elemento e la  $\vec{r}$  è la **reazione vincolare** esercitata dal vincolo che è, in generale, incognita. L'introduzione del vincolo elimina quindi delle incognite di tipo cinematico (i gradi di libertà che inibisce), ma introduce delle nuove incognite, dette ausiliarie, rappresentate dalle reazioni vincolari.

### 1.3.1 Vincoli lisci

Un **vincolo liscio**, ossia privo di attrito, esercita reazioni che sono punto per punto ortogonali alla geometria del vincolo stesso.

**Appartenenza ad una curva** Come abbiamo anticipato, il punto ha un solo grado di libertà, la reazione giace nel piano individuato da  $\hat{n}$  e  $\hat{b}$ , e quindi le due incognite ausiliarie sono  $r_n$  ed  $r_b$ ;

**Appartenenza ad una superficie** Il vincolo elimina un solo grado di libertà e la posizione del punto può quindi essere determinata mediante una coppia di parametri che fissi univocamente un punto della superficie (ad esempio, un sistema di ascisse curvilinee legate a due famiglie di curve definite sulla superficie). L'unica incognita ausiliaria è la reazione normale alla superficie  $r_n$  che, essendo il vincolo di appartenenza (vincolo bilaterale), può assumere un verso qualsiasi.

**Appoggio su di una superficie** In questo caso la superficie impedisce che l'elemento occupi una particolare zona dello spazio (*semispazio di moto non ammissibile*) e si tratta quindi di un vincolo unilaterale. Tale vincolo non diminuisce il numero dei gradi di libertà del sistema. Tuttavia, negli intervalli di tempo durante i quali il punto resta in contatto con la superficie del vincolo sono sufficienti due variabili per individuare la sua posizione, e l'unica incognita ausiliaria è data dalla reazione normale  $r_n$ , con la differenza (rispetto al vincolo di appartenenza) che il verso sia quello che dalla superficie va verso l'elemento.

### 1.3.2 Moto su traiettoria assegnata

Consideriamo un elemento materiale  $E$  in moto lungo una curva  $\mathcal{L}$ . La geometria della traiettoria sia descritta dalla funzione  $\vec{x}(s)$ , dove il parametro  $s$  rappresenta l'ascissa curvilinea definita su  $\mathcal{L}$ . Ipotizziamo che il vincolo che lega  $E$  ad  $\mathcal{L}$  sia privo di attrito e scegliamo di proiettare la 1.47 sulla terna intrinseca  $\hat{t}$ ,  $\hat{n}$ ,  $\hat{b}$  della traiettoria. Tenendo conto del fatto che  $\vec{r}$  è ortogonale ad  $\mathcal{L}$  e quindi  $\vec{r} = r_n \hat{n} + r_b \hat{b}$ , ed utilizzando la 1.11, otteniamo

$$m\ddot{s} = \vec{f}_a \cdot \hat{t} \quad (1.48)$$

$$m \frac{\dot{s}^2}{2} = \vec{f}_a \cdot \hat{n} + r_n \quad (1.49)$$

$$0 = \vec{f}_a \cdot \hat{b} + r_b \quad (1.50)$$

Le incognite del sistema precedente sono la  $s(t)$  e le due componenti della reazione vincolare  $r_n$  ed  $r_b$ . L'equazione 1.48 è un'equazione differenziale in  $s$  che può essere risolta a partire dalla conoscenza della  $\vec{f}_a$ . La conoscenza di  $s(t)$  ci permette di ricavare il valore delle reazioni vincolari dalle 1.49 ed 1.50.

### 1.3.3 Vincoli scabri

Se il vincolo che agisce sull'elemento è scabro, la reazione vincolare non è più diretta solo in direzione normale alla geometria del vincolo stesso, ma ha anche una componente tangenziale. L'intensità di tale componente tangenziale è comunque legata a quella delle componenti  $r_n$  ed  $r_b$  attraverso un coefficiente di attrito, per il quale è necessario distinguere i casi in cui il punto materiale sia in moto o fermo.

- **Attrito statico.** Nel caso in cui il punto sia fermo rispetto al vincolo, la componente tangenziale della reazione vincolare  $\vec{r}_{as} = r_{as}\hat{t}$  ha un'intensità proporzionale al modulo della reazione ortogonale al vincolo attraverso il *coefficiente di attrito statico*  $\Phi_s$

$$r_{as} = \Phi_s \sqrt{r_n^2 + r_b^2} \quad (1.51)$$

La  $\vec{r}_{as}$  può essere concorde o discorde con  $\hat{t}$ , e agisce sul punto sino a che  $\vec{f}_a \cdot \hat{t} \leq r_{as}$ , condizione nella quale il punto comincia a muoversi lungo la traiettoria imposta dal vincolo.

- **Attrito dinamico.** Nel caso in cui il punto sia in moto rispetto al vincolo, la componente tangenziale della reazione vincolare ha un'intensità proporzionale al modulo della reazione ortogonale al vincolo attraverso il *coefficiente di attrito dinamico*  $\Phi_d$ , ed è diretta come la velocità del punto, con verso contrario

$$\vec{r}_{ad} = -\Phi_d \sqrt{r_n^2 + r_b^2} \frac{\vec{v}}{v} \quad (1.52)$$

Si noti che la reazione esercitata dal vincolo scabro dipende in entrambi i casi da  $r_n$  e  $r_b$ , e quindi la presenza di una reazione tangenziale diversa da zero non introduce in realtà incognite ausiliarie aggiuntive.

## 1.4 Lavoro ed energia

### 1.4.1 Campi vettoriali conservativi, potenziali, irrotazionali

Si consideri una funzione vettoriale,  $\vec{v}(\vec{x})$ , di dominio  $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^3$  e codominio lo spazio vettoriale  $\mathbf{V}$ , ovvero tale che  $\vec{w} = \vec{v}(\vec{x}) \in \mathbf{V}$ , per  $\forall \vec{x} \in \mathcal{D}^1$ .

La funzione vettoriale  $\vec{v}(\vec{x})$  appena descritta è un **campo vettoriale** definito in  $\mathcal{D}$ .

**A Campo vettoriale conservativo.** Il campo vettoriale  $\vec{v}(\vec{x})$  è conservativo in  $\mathcal{D}$  se

$$\oint_{\mathcal{C}} \vec{v} \cdot d\vec{x} = 0, \quad \forall \mathcal{C}(\vec{x}) \in \mathcal{D}, \quad (1.53)$$

con  $\mathcal{C}$  circuito arbitrario chiuso (la 1.53 equivale chiaramente all'indipendenza dal percorso seguito dell'integrale esteso ad un cammino aperto);

**B Campo vettoriale potenziale.** Il campo vettoriale  $\vec{v}(\vec{x})$  è potenziale in  $\mathcal{D}$ , se ivi esiste una funzione scalare  $\varphi(\vec{x})$  tale che

$$\vec{v}(\vec{x}) = \nabla\varphi, \quad \forall \vec{x} \in \mathcal{D}; \quad (1.54)$$

---

<sup>1</sup>Definiamo **spazio vettoriale**  $\mathbf{V}$  l'insieme di vettori che soddisfa la condizione  $\vec{c} = \alpha\vec{a} + \beta\vec{b} \in \mathbf{V}$ , per ogni coppia  $\vec{a}, \vec{b} \in \mathbf{V}$  e  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ . Gli elementi di  $\mathbf{V}$  devono soddisfare le seguenti proprietà:

$$\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}, \quad (\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c})$$

$$\vec{a} + \vec{0} = \vec{a}, \quad \vec{a} + (-\vec{a}) = \vec{0}$$

$$c(\vec{a} + \vec{b}) = c\vec{a} + c\vec{b}, \quad (c + k)\vec{a} = c\vec{a} + k\vec{a}$$

$$c(k\vec{a}) = (ck)\vec{a}, \quad 1\vec{a} = \vec{a}$$

Il numero massimo di elementi di  $\mathbf{V}$  linearmente indipendenti rappresenta la dimensione dello spazio.

**C Campo vettoriale irrotazionale.** Il campo vettoriale  $\vec{v}(\vec{x})$  è irrotazionale in  $\mathcal{D}$  se

$$\nabla \times \vec{v} = \vec{0}, \quad \forall \vec{x} \in \mathcal{D}. \quad (1.55)$$

È possibile dimostrare che:

**Teorema 1:** Dato un campo vettoriale  $\vec{v}(\vec{x})$  definito in  $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^3$ , la condizione **B** implica la **C**, la condizione **C** implica la **A** (se  $\mathcal{D}$  è semplicemente connesso) e la condizione **A** implica la **B**.

e, in definitiva,

**Teorema 2:** Se  $\mathcal{D}$  è semplicemente connesso, **A**, **B** e **C** sono equivalenti.

### 1.4.2 Lavoro, potenza ed energia

Si consideri la legge fondamentale della dinamica, scritta in termini di variazione della quantità di moto del punto

$$m \frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{f} \quad (1.56)$$

Moltiplicando scalarmente per  $\vec{v}$  l'equazione precedente otteniamo

$$m \frac{d\vec{v}}{dt} \cdot \vec{v} = m \frac{d}{dt} \frac{v^2}{2} = \vec{f} \cdot \vec{v} \quad (1.57)$$

Introducendo l'energia cinetica  $\mathcal{T}$

$$\mathcal{T} = \frac{1}{2} m v^2 \quad (1.58)$$

da 1.39 e 1.40 si ottiene

$$\frac{d\mathcal{T}}{dt} = \vec{f} \cdot \vec{v} = \mathcal{P}(t) \quad (1.59)$$

**Teorema 3:** – La derivata temporale dell'energia cinetica  $\mathcal{T}$  del punto materiale eguaglia la potenza  $\mathcal{P}$  sviluppata istante per istante dalla sollecitazione totale agente su di esso.

Dalla 1.41 risulta immediatamente che

$$d\mathcal{T} = \vec{f} \cdot \vec{v} dt = \vec{f} \cdot d\vec{x} \quad (1.60)$$

dove  $d\vec{x}$  rappresenta lo spostamento infinitesimo del punto materiale (deve essere, ovviamente, compatibile con i vincoli). Il termine  $\vec{f} \cdot d\vec{x}$  rappresenta il lavoro elementare  $d\mathcal{L}$  compiuto dalla sollecitazione agente su P durante lo spostamento  $d\vec{x}$ . Il lavoro compiuto dalla sollecitazione quando il punto materiale si sposta lungo la curva  $\mathcal{C}$  è

$$\mathcal{L}_{\mathcal{C}} = \int_{\mathcal{C}} \vec{f} \cdot d\vec{x} \quad (1.61)$$

Quindi, se il punto materiale si sposta dal punto  $\vec{x}_1$  al punto  $\vec{x}_2$  seguendo la curva  $\mathcal{C}_{1,2}$ , integrando la tra i due stati assunti dal punto materiale nelle due posizioni successive, otteniamo

$$\int_{\mathcal{T}_1}^{\mathcal{T}_2} d\mathcal{T} = \int_{\mathcal{C}_{1,2}} \vec{f} \cdot d\vec{x} \quad \Rightarrow \quad \mathcal{T}_2 - \mathcal{T}_1 = \mathcal{L}_{\mathcal{C}_{1,2}} \quad (1.62)$$

**Teorema 4** – La variazione di energia cinetica che il punto materiale  $P$  subisce durante il moto da  $\vec{x}_1$  ad  $\vec{x}_2$ , lungo la curva  $\mathcal{C}_{1,2}$ , eguaglia il lavoro compiuto dalla forza agente su di esso lungo  $\mathcal{C}_{1,2}$ . Tale lavoro è, in generale, dipendente dal percorso  $\mathcal{C}_{1,2}$ .

Consideriamo ora il caso in cui tra le forze agenti sul punto materiale siano presenti **forze conservative** (ossia forze descritte da un campo vettoriale conservativo, vedi 1.4.1). In tal caso si ha

$$\vec{f}(\vec{x}, \dot{\vec{x}}, t) = \vec{f}_c(\vec{x}) + \vec{f}_{nc}(\vec{x}, \dot{\vec{x}}, t) = \nabla\phi(\vec{x}) + \vec{f}_{nc}(\vec{x}, \dot{\vec{x}}, t) \quad (1.63)$$

essendo  $\phi(\vec{x})$  la funzione scalare **potenziale** di  $\vec{f}_c$ . Sotto tali ipotesi, il lavoro compiuto dalla forza agente su  $P$  può essere decomposto nella somma dei contributi conservativo e non conservativo

$$\mathcal{L}_{\mathcal{C}_{1,2}} = \int_{\mathcal{C}_{1,2}} \nabla\phi(\vec{x}) \cdot d\vec{x} + \int_{\mathcal{C}_{1,2}} \vec{f}_{nc} \cdot d\vec{x} = \int_{\vec{x}_1}^{\vec{x}_2} d\phi + \int_{\mathcal{C}_{1,2}} \vec{f}_{nc} \cdot d\vec{x} \quad (1.64)$$

Il primo integrale al secondo membro, che rappresenta il lavoro delle forze conservative agenti sul punto materiale, non dipende dal percorso  $\mathcal{C}_{1,2}$  (sotto l'ipotesi che il dominio  $\mathcal{D}$  sia semplicemente connesso), e quindi si ottiene

$$\mathcal{L}_{\mathcal{C}_{1,2}} = \phi(\vec{x}_2) - \phi(\vec{x}_1) + \mathcal{L}_{\mathcal{C}_{1,2}}^{nc} = \mathcal{L}_{\mathcal{C}_{1,2}}^c + \mathcal{L}_{\mathcal{C}_{1,2}}^{nc} \quad (1.65)$$

con  $\mathcal{L}_{\mathcal{C}_{1,2}}^{nc}$  = lavoro delle forze non conservative. Definiamo ora la funzione **energia potenziale**  $\mathcal{U}(\vec{x})$  come

$$\mathcal{U}(\vec{x}) = -\phi(\vec{x}) \quad (1.66)$$

Per definizione del lavoro delle forze conservative otteniamo

$$\mathcal{L}_{\mathcal{C}_{1,2}}^c = \mathcal{U}(\vec{x}_1) - \mathcal{U}(\vec{x}_2) \quad (1.67)$$

Combinando le 1.62, 1.65 e 1.67 otteniamo

$$(\mathcal{T}_2 + \mathcal{U}_2) - (\mathcal{T}_1 + \mathcal{U}_1) = \mathcal{L}_{\mathcal{C}_{1,2}}^{nc} \quad (1.68)$$

Definendo l'**energia meccanica** del sistema come

$$\mathcal{E} = \mathcal{T} + \mathcal{U} \quad (1.69)$$

possiamo riscrivere la 1.68 nella forma

$$\mathcal{E}_2 - \mathcal{E}_1 = \mathcal{L}_{\mathcal{C}_{1,2}}^{nc} \quad (1.70)$$

**Teorema 5** – La variazione di energia meccanica subita da un punto materiale durante il moto tra i punti  $\vec{x}_1$  e  $\vec{x}_2$ , eguaglia il lavoro compiuto dalle forze non conservative lungo il cammino  $\mathcal{C}_{1,2}$  seguito durante il moto. Nel caso che siano presenti solo forze di tipo conservativo l'energia meccanica si conserva,  $\mathcal{E}_2 - \mathcal{E}_1 = 0$ .

Condizione necessaria (ma non sufficiente) affinché una forza sia conservativa è che sia *posizionale*, ossia dipendente solo da  $\vec{x}$  (vedi paragrafo 1.4.1). Vediamo qualche esempio di forza di tipo conservativo ricorrente in problemi di meccanica.

## 1. Forza peso

Se scegliamo un sistema di riferimento con asse  $z$  verticale positivo verso il basso, l'energia potenziale legata alla forza peso  $m\vec{g}$  ha la forma

$$\mathcal{U}_p(z) = -mgz + c$$

Ponendo  $\mathcal{U}_p(0) = 0$  si ottiene  $c = 0$ .  $\mathcal{U}_p$  rimane costante sui piani orizzontali ( $z = \text{costante}$ ) che rappresentano quindi le superficie **equipotenziali** per la forza peso. Si noti che dalla definizione di energia potenziale, eq.1.66, segue l'ortogonalità della forza alle superficie equipotenziali (questo vale per ogni forza conservativa).

## 2. Campo di forza uniforme

Quanto detto per la forza peso vale per ogni campo di forza uniforme. Infatti, il campo di forza

$$\vec{F} = \alpha \hat{w}$$

diretto come il versore  $\hat{w}$  e di intensità  $\alpha$  in ogni punto dello spazio, può essere descritto in termini di energia potenziale  $\mathcal{U}_F$ . Associando un'ascissa  $\zeta$  alla direzione individuata dal versore  $\hat{w}$ , possiamo dare per l'energia potenziale  $\mathcal{U}_F$  l'espressione

$$\mathcal{U}_F(\zeta) = -\alpha \zeta + c$$

Ponendo  $\mathcal{U}_F(0) = 0$  si ottiene  $c = 0$ . Le superficie equipotenziali sono i piani ortogonali alla direzione  $\hat{w}$ .

## 3. Forze centrali

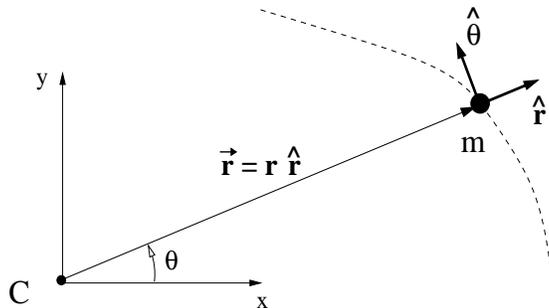
Di questa importante classe di forze ci occuperemo nel prossimo paragrafo.

### 1.4.3 Campi di forza centrali

Un paragrafo a parte merita l'analisi del moto di elementi materiali soggetti ad un campo di forza centrale. Definiamo campo di forza centrale di centro  $C$ , il campo vettoriale in  $\mathcal{R}^3$

$$\vec{F} = \psi(r) \hat{r} = \psi(r) \frac{\vec{r}}{|\vec{r}|} \quad (1.71)$$

essendo  $\vec{r} = -\vec{PC}$  il vettore che individua la posizione del punto  $P$ , occupato istante per istante dal punto materiale, rispetto al centro della sollecitazione  $C$  (vedi figura). La



dipendenza da  $r$  della funzione  $\psi$  caratterizza il tipo di forza centrale. In particolare, campi di forza centrali di particolare interesse in meccanica sono:

- **Attrazione gravitazionale.** Se nel punto  $C$  è presente una massa  $M$ , la massa  $m$  subisce in  $P$  una forza che la attrae verso  $C$ . Per tale campo di forza centrale si ha

$$\psi(r) = -G \frac{mM}{r^2} \quad (1.72)$$

dove  $G$  è la costante di gravitazione universale, ed il segno dipende dal verso scelto per  $\hat{r}$ .

- Formalmente analoga alla precedente è la forza di **attrazione coulombiana** esistente tra due cariche  $q$  e  $Q$ , per la quale si ha

$$\psi(r) = K_c \frac{qQ}{r^2} \quad (1.73)$$

$K_c$  è la costante di attrazione coulombiana ed il segno positivo deriva dalla natura repulsiva della forza per cariche dello stesso segno.

- Un'altra forza di tipo centrale è la forza **elastica**, per la quale si ha

$$\psi(r) = -K_e(r - r_0) \quad (1.74)$$

Questa è la forza che viene esercitata da una molla con estremi vincolati nei punti  $P$  e  $C$  caratterizzata da una lunghezza a riposo  $r_0$  e da una costante elastica  $K_e$ .

L'espressione dell'energia potenziale legata a tali campi di forza è

$$\mathcal{U}(r) = - \int \psi(r) dr \quad (1.75)$$

La costante di integrazione può essere determinata imponendo il valore della  $\mathcal{U}$  in corrispondenza a particolari valori di  $r$ . Ad esempio, l'energia potenziale legata al campo di forza gravitazionale è data da

$$\mathcal{U}(r) = \int G \frac{mM}{r^2} dr = -G \frac{mM}{r} + c \quad (1.76)$$

dove la costante  $c$  può essere determinata imponendo che  $\mathcal{U}(r) \rightarrow 0$  per  $r \rightarrow \infty$ .

Un elemento materiale soggetto ad una forza centrale assume un moto dotato delle seguenti caratteristiche:

1. la traiettoria, chiamata *orbita*, è una curva piana nello spazio;
2. il raggio vettore  $\vec{r}$  spazza, durante il moto del punto materiale, aree uguali in tempi uguali

È possibile introdurre un sistema di riferimento vantaggioso per lo studio di tali moti introducendo le coordinate polari  $(r, \theta)$  che individuano, nel piano dell'orbita, la posizione del punto. A tali coordinate possiamo associare i versori  $\hat{r}, \hat{\theta}$  diretti, rispettivamente, come il vettore  $\vec{r}$  ed ortogonalmente ad esso nel verso crescente di  $\theta$ . Con riferimento alle scelte rappresentate in figura, otteniamo

$$\hat{r} = \cos \theta \hat{i} + \sin \theta \hat{j} \quad (1.77)$$

$$\hat{\theta} = -\sin \theta \hat{i} + \cos \theta \hat{j} \quad (1.78)$$

## 1.5 Stabilità dell'equilibrio

### 1.5.1 Definizioni fondamentali

Consideriamo un elemento materiale  $E$  soggetto all'azione di una serie di forze esterne di risultante pari a  $\vec{f}(\vec{x}, \dot{\vec{x}}, t)$ . Definiamo posizione di equilibrio statico  $\vec{x}_e$  ogni posizione per la quale

$$\vec{f}(\vec{x}_e, 0, t) = 0, \quad \forall t \quad (1.79)$$

L'equazione che governa la dinamica di  $E$

$$m\ddot{\vec{x}} = \vec{f}(\vec{x}, \dot{\vec{x}}, t) \quad (1.80)$$

ci permette di concludere che, qualora il punto materiale occupi la posizione  $\vec{x}_e$  con velocità nulla, vi rimane indefinitamente, essendo ivi nulla la risultante delle forze agenti su di esso.

La posizione di equilibrio  $\vec{x}_e$  è definita **stabile** se, in seguito ad una perturbazione in posizione o velocità, il punto materiale si muove rimanendo in un intorno di  $\vec{x}_e$ . Al contrario,  $\vec{x}_e$  viene definita posizione di equilibrio **instabile** se, una volta perturbato, il punto materiale si allontana indefinitamente da essa. Tra le posizioni di equilibrio stabili è necessario distinguere due tipologie principali:

- sono posizioni di equilibrio **asintoticamente stabile** quelle posizioni per le quali, in seguito ad una perturbazione, il punto materiale tende, per  $t \rightarrow \infty$ , a tornare in  $\vec{x}_e$  con velocità nulla;
- sono posizioni di equilibrio **stabile** quelle posizioni in cui l'elemento perturbato non torna in  $\vec{x}_e$  con velocità nulla, ma rimane comunque confinato, per  $t \rightarrow \infty$ , in un suo intorno limitato.

Dalle affermazioni precedenti si può intuire come la determinazione delle caratteristiche di stabilità di una posizione di equilibrio sia legata all'analisi del comportamento dinamico del punto materiale nell'intorno di  $\vec{x}_e$ . In particolare, è necessario studiare la stabilità delle soluzioni dell'equazione differenziale che governa la dinamica delle piccole perturbazioni rispetto alla posizione  $\vec{x}_e$ .

Limitiamo la nostra attenzione, per semplicità, ad un problema ad un grado di libertà ed indichiamo con  $s$  la variabile scalare che individua univocamente la posizione del punto materiale nello spazio (se, ad esempio, l'elemento è vincolato a scorrere lungo una guida liscia,  $s$  può rappresentare l'ascissa curvilinea definita lungo di essa, sufficiente a determinare univocamente la posizione del punto nello spazio attraverso le equazioni che descrivono la forma del vincolo). In tal caso, la dinamica del punto è governata dall'equazione

$$m\ddot{s} = f(s, \dot{s}, t) \quad (1.81)$$

dove  $f$  rappresenta la risultante delle forze agenti in direzione tangente al vincolo. In corrispondenza alla posizione di equilibrio  $s_e$ , si ha  $f(s_e, 0, t) = 0$ . Imponendo  $s(t) = s_e + s'(t)$  ed espandendo in serie di Taylor la  $f$  attorno alla posizione  $s_e$ , otteniamo

$$f(s, \dot{s}, t) = f(s_e, 0, t) + \left. \frac{\partial f}{\partial s} \right|_{EQ} s' + \left. \frac{\partial f}{\partial \dot{s}} \right|_{EQ} \dot{s}' + \mathcal{O}(s'^2, \dot{s}'^2) \quad (1.82)$$

Trascurando termini superiori al primo, ricordando che  $f(s_e, 0, t) = 0$ ,  $\ddot{s} = \ddot{s}'$ ,  $\dot{s} = \dot{s}'$ , e sostituendo nell'equazione differenziale della dinamica dell'elemento, otteniamo l'equazione che governa la dinamica delle piccole perturbazioni attorno a  $s_e$

$$m\ddot{s}' - \left. \frac{\partial f}{\partial \dot{s}} \right|_{EQ} \dot{s}' - \left. \frac{\partial f}{\partial s} \right|_{EQ} s' = 0 \quad (1.83)$$

L'andamento temporale della soluzione della 1.83 ci permette di determinare se la posizione di equilibrio  $s_e$  è stabile oppure no.

Per semplificare la notazione, poniamo

$$- \left. \frac{\partial f}{\partial \dot{s}} \right|_{EQ} = G \quad (1.84)$$

$$- \left. \frac{\partial f}{\partial s} \right|_{EQ} = K \quad (1.85)$$

ed eliminiamo l'apice da  $s'$ . La 1.83 diventa

$$m\ddot{s} + G\dot{s} + Ks = 0 \quad (1.86)$$

Le soluzioni dell'equazione precedente hanno la forma

$$s(t) = C_1 e^{\alpha_1 t} + C_2 e^{\alpha_2 t}, \quad (1.87)$$

e quindi la loro stabilità può essere studiata esaminando le radici dell'equazione caratteristica associata

$$\alpha^2 + \frac{G}{m}\alpha + \frac{K}{m} = 0 \quad (1.88)$$

che sono

$$\alpha_{1,2} = \frac{-\frac{G}{m} \pm \sqrt{\frac{G^2}{m^2} - 4\frac{K}{m}}}{2} \quad (1.89)$$

Tali soluzioni ci permettono di affermare che possono sussistere i seguenti casi:

#### **G=0**

- $K > 0 \Rightarrow$  le radici sono immaginarie coniugate, quindi  $s(t)$  ha ampiezza limitata e la posizione di equilibrio è **stabile**;
- $K < 0 \Rightarrow$  le radici sono entrambe reali ed una delle due è positiva, quindi  $s(t)$  ha ampiezza esponenzialmente crescente e la posizione di equilibrio è **instabile**;

#### **G>0**

- $K > 0 \Rightarrow$  le radici sono immaginarie coniugate o reali e distinte, ma, in ogni caso hanno parte reale negativa e, quindi, la posizione di equilibrio è **stabile**;
- $K < 0 \Rightarrow$  le radici sono entrambe reali ed una delle due è positiva, quindi  $s(t)$  ha ampiezza esponenzialmente crescente e la posizione di equilibrio è **instabile**;

#### **G<0**

- la posizione di equilibrio è **instabile** per ogni valore di  $K$ .

Un discorso a parte meritano i casi corrispondenti a  $K = 0$ . Assumendo che le perturbazioni dello stato di equilibrio siano  $s(0) = s_0$ ,  $\dot{s}(0) = \dot{s}_0$ , si possono distinguere due tipi di dinamica conseguente ad una perturbazione della configurazione di equilibrio.

- **$K=0$ ,  $G=0$**

In tal caso l'equazione differenziale linearizzata assume la forma

$$m\ddot{s} = 0$$

che ammette soluzioni del tipo

$$s(t) = c_1 + c_2 t = s_0 + \dot{s}_0 t$$

È interessante notare che, a seguito di una perturbazione in posizione, l'elemento materiale rimane in quiete e, di conseguenza, rimane in un intorno limitato di  $s_e$ ,  $\forall t$ . Tuttavia, a seguito di una perturbazione in velocità assume uno stato di moto rettilineo uniforme, allontanandosi indefinitamente dalla posizione di equilibrio.

- **$K=0$ ,  $G > 0$**

L'equazione differenziale è

$$m\ddot{s} + G\dot{s} = 0$$

con soluzione

$$s(t) = \frac{s_0\alpha + \dot{s}_0}{\alpha} - \frac{\dot{s}_0}{\alpha}e^{-\alpha t}$$

essendo  $\alpha = G/m > 0$ . In questo caso la massa rimane in quiete se perturbata in posizione, mentre assume un moto esponenzialmente decelerato se perturbato in velocità, tendendo, per  $t \rightarrow \infty$ , al valor limite

$$s_\infty = \frac{s_0\alpha + \dot{s}_0}{\alpha}.$$

Tale particolare comportamento corrisponde alla situazione spesso definita di equilibrio *indifferente*. La condizione  $K = 0$  significa

$$\left. \frac{\partial f}{\partial s} \right|_e = 0,$$

ossia variazione nulla della risultante delle forze in seguito a variazioni di posizione del punto. È possibile perciò affermare che esiste un intorno  $\mathcal{I}$  della posizione  $s_e$  tale da soddisfare la condizione

$$f(\check{s}, 0, t) = 0, \quad \forall \check{s} \in \mathcal{I}.$$

### 1.5.2 Elemento materiale con più gradi di libertà

Senza voler entrare in dettagli applicativi, si vuole ora brevemente affrontare il problema generico a 3 gradi di libertà, con l'unico scopo di evidenziare il collegamento tra il problema della determinazione della stabilità di un sistema dinamico con un problema di **autovalori**.

Introducendo il vettore colonna

$$\mathbf{x} = \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{Bmatrix} \quad (1.90)$$

L'equazione vettoriale 1.80 può essere linearizzata con un procedimento analogo a quello visto nel paragrafo precedente per essere riscritta nella forma

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{x}} + \mathbf{G}\dot{\mathbf{x}} + \mathbf{K}\mathbf{x} = \mathbf{0} \quad (1.91)$$

dove le matrici  $3 \times 3$   $\mathbf{M}$ ,  $\mathbf{G}$ ,  $\mathbf{K}$  hanno componenti definite come

$$m_{ij} = m \delta_{ij}, \quad k_{ij} = - \left. \frac{\partial f_i}{\partial x_j} \right|_e, \quad g_{ij} = - \left. \frac{\partial f_i}{\partial \dot{x}_j} \right|_e. \quad (1.92)$$

dove  $\delta_{ij}$  rappresenta la funzione di Kronecker. Le matrici  $\mathbf{G}$  e  $\mathbf{K}$  sono, in generale, piene. Di conseguenza le equazioni differenziali che descrivono la dinamica del punto in seguito alla perturbazione sono accoppiate. La soluzione di un sistema di tale tipo viene affrontata nel capitolo dedicato alla soluzione di sistemi di equazioni differenziali. In questa sede si vogliono introdurre sommariamente alcuni concetti di base per mostrare come sia possibile conoscere, anche in questi casi, le caratteristiche di stabilità della configurazione di equilibrio mediante l'esame del segno della parte reale delle radici di una *equazione caratteristica*.

Introducendo il vettore colonna  $\mathbf{y} = \dot{\mathbf{x}}$ , ponendo

$$\mathbf{w} = \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{y} \end{Bmatrix} \quad (1.93)$$

riscriviamo il sistema di equazioni nella forma

$$\mathbf{A}\dot{\mathbf{w}} = \mathbf{C}\mathbf{w} \quad (1.94)$$

dove le matrici  $\mathbf{A}$  e  $\mathbf{C}$  sono ottenute assemblando le matrici del sistema nel modo seguente

$$\mathbf{A} = \begin{Bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{G} & \mathbf{M} \end{Bmatrix} \quad \mathbf{C} = \begin{Bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{I} \\ \mathbf{K} & \mathbf{0} \end{Bmatrix} \quad (1.95)$$

Sotto l'ipotesi che  $\mathbf{A}$  sia invertibile, introduciamo la matrice  $\mathbf{S} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{C}$ , e cerchiamo soluzioni del tipo  $\mathbf{w} = \mathbf{z}e^{\lambda t}$ . Il sistema assume la forma

$$(\lambda\mathbf{I} - \mathbf{S})\mathbf{z}e^{\lambda t} = \mathbf{0} \quad (1.96)$$

Sotto opportune ipotesi per la matrice  $\mathbf{S}$  è possibile determinare tutti gli **autovettori**  $\mathbf{z}^{(k)}$  ed i corrispondenti **autovalori**  $\lambda_k$  che soddisfano tale equazione (vedi richiami di algebra lineare per dettagli). Gli autovalori sono le radici dell'*equazione caratteristica* del sistema

$$\det(\lambda\mathbf{I} - \mathbf{S}) = 0 \quad (1.97)$$

La soluzione può essere scritta nella forma

$$\mathbf{w}(t) = \sum_k \mathbf{z}^{(k)} e^{\lambda_k t} \quad (1.98)$$

Appare evidente come la dinamica del punto, rappresentata dalle prime tre componenti del vettore colonna  $\mathbf{w}$ , sarà di tipo instabile se almeno uno degli autovalori di  $\mathbf{S}$  avrà parte reale positiva.

### 1.5.3 Esempio applicativo

È utile a questo punto fare due considerazioni sul procedimento descritto:

- l'equazione 1.86 rappresenta l'equazione della dinamica *linearizzata* attorno alla posizione di equilibrio, che fornisce tutte le informazioni necessarie allo studio della stabilità del sistema in esame, quale che sia la dipendenza dalle variabili spaziali della risultante delle forze agenti sul sistema;
- il segno delle grandezze  $G$  e  $K$  che, come abbiamo visto, determina le caratteristiche di stabilità del sistema, ha un significato meccanico ben preciso: il segno positivo per le  $G$  e  $K$  corrisponde all'insorgere, in corrispondenza ad una perturbazione dello stato di equilibrio, di forze di reazione di segno contrario alla perturbazione stessa, che tendono a riportare la massa verso la posizione di equilibrio perturbata, o, in caso di segno negativo, ad allontanarla ulteriormente, con un effetto stabilizzante nel primo caso e destabilizzante nel secondo.

Applichiamo i concetti appena introdotti al semplice caso del pendolo ideale. La dinamica della massa  $m$  può essere descritta dall'unico grado di libertà  $\theta$ , che individua univocamente la configurazione del pendolo ad ogni istante. L'equazione differenziale che governa il moto è

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{l} \sin \theta = 0 \quad (1.99)$$

Qualora l'unica forza agente sia la forza peso, possiamo individuare due posizioni di equilibrio, corrispondenti a  $\theta = 0$  e  $\theta = \pi$  (posizioni A e B in figura). Procediamo, quindi, alla valutazione delle caratteristiche di stabilità delle due posizioni.

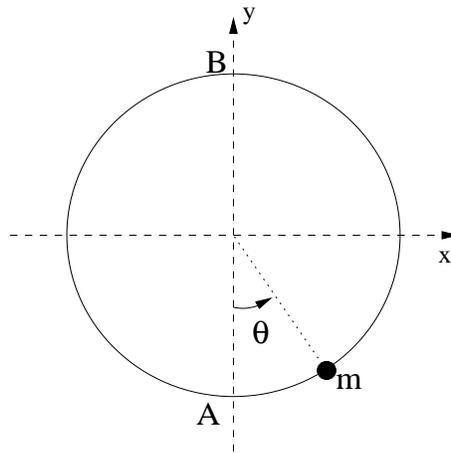


Figura 1.6:

#### Posizione A

Esprimiamo il moto della massa  $m$  intorno alla posizione A come la sovrapposizione della perturbazione  $\theta'$  a  $\theta_A = 0$

$$\theta(t) = \theta_A + \theta'(t) \quad (1.100)$$

L'espansione in serie di Taylor attorno a  $\theta_A$  della risultante delle forze è

$$f(\theta, \dot{\theta}, t) = \frac{g}{l} \sin \theta = \frac{g}{l} \left[ \sin \theta_A + \cos \theta_A \theta' + \mathcal{O}(\theta'^2) \right] \quad (1.101)$$

Ma  $\cos \theta_A = 1$  e  $\sin \theta_A = 0$ , quindi

$$\frac{g}{l} \sin \theta = \frac{g}{l} \theta' + \mathcal{O}(\theta'^2) \simeq \frac{g}{l} \theta' \quad (1.102)$$

e l'equazione che governa la dinamica delle piccole perturbazioni del pendolo attorno alla posizione A è

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{l} \theta' = 0 \quad (1.103)$$

Confrontando l'ultima relazione con la 1.86 notiamo che, in questo caso,  $G = 0$  e  $K > 0$ , che significa che la posizione A è di equilibrio stabile.

### Posizione B

In questo caso

$$\theta(t) = \theta_B + \theta'(t) = \pi + \theta'(t) \quad (1.104)$$

L'espansione in serie di Taylor attorno a  $\theta_B$  della risultante delle forze è

$$\frac{g}{l} \sin \theta = \frac{g}{l} \left[ \sin \theta_B + \cos \theta_B \theta' + \mathcal{O}(\theta'^2) \right] \quad (1.105)$$

Ma  $\cos \theta_B = -1$  e  $\sin \theta_B = 0$ , quindi

$$\frac{g}{l} \sin \theta = -\frac{g}{l} \theta' + \mathcal{O}(\theta'^2) \simeq -\frac{g}{l} \theta' \quad (1.106)$$

e l'equazione che governa la dinamica delle piccole perturbazioni del pendolo attorno alla posizione B è

$$\ddot{\theta} - \frac{g}{l} \theta' = 0 \quad (1.107)$$

da cui concludiamo che  $G = 0$  e  $K < 0$ , che significa che la posizione B è di equilibrio instabile.

### 1.5.4 Metodi energetici per lo studio della stabilità dell'equilibrio

Sempre con riferimento al problema ad un grado di libertà descritto nel precedente paragrafo, ipotizziamo che i vincoli presenti siano privi di attrito e che le forze agenti sul punto materiale siano di tipo conservativo (o, per lo meno, siano tali le forze che compiono lavoro durante uno spostamento compatibile con i vincoli) ed indipendenti dal tempo. Sotto quest'ipotesi, possiamo definire la funzione scalare *energia potenziale*, tale che la componente della forza in direzione tangente al vincolo (l'unica direzione lungo la quale può muoversi l'elemento materiale) possa scriversi come

$$f = f(s) = \vec{f} \cdot \hat{t} = -\nabla \mathcal{U}(\vec{x}) \cdot \hat{t} = -\frac{\partial \mathcal{U}}{\partial s} \quad (1.108)$$

La condizione che la posizione individuata da  $s_e$  sia di equilibrio, ossia che  $f(s_e) = 0$ , si traduce nella

$$\frac{\partial}{\partial s} \mathcal{U}[\vec{x}(s_e)] = 0 \quad (1.109)$$

Tale condizione corrisponde a dire che la posizione dello spazio corrispondente a  $s_e$  è posizione di equilibrio *statico* se rappresenta un **massimo** o un **minimo** relativo per la funzione energia potenziale. Procediamo adesso nello studio della stabilità, sviluppando in serie di Taylor attorno alla posizione  $s_e$  l'espressione delle forze agenti scritta in termini di energia potenziale

$$f(s) = f(s_e) + \left. \frac{\partial f}{\partial s} \right|_{EQ} s' + \mathcal{O}(s'^2) = - \left. \frac{\partial \mathcal{U}}{\partial s} \right|_{EQ} - \left. \frac{\partial^2 \mathcal{U}}{\partial s^2} \right|_{EQ} s' + \mathcal{O}(s'^2) \quad (1.110)$$

Trascurando i termini quadratici, ricordando la 1.109 e sostituendo nell'equazione differenziale del problema ottengo

$$m \ddot{s}' + \left. \frac{\partial^2 \mathcal{U}}{\partial s^2} \right|_{EQ} s' = 0 \quad (1.111)$$

Confrontando questa equazione con i risultati del paragrafo precedente, possiamo concludere:

- la posizione dello spazio individuata da  $s_e$  è di equilibrio stabile se

$$\left. \frac{\partial^2}{\partial s^2} \mathcal{U}[\vec{x}(s_e)] \right| > 0 \quad (1.112)$$

- la posizione dello spazio individuata da  $s_e$  è di equilibrio instabile se

$$\left. \frac{\partial^2}{\partial s^2} \mathcal{U}[\vec{x}(s_e)] \right| < 0 \quad (1.113)$$

- la posizione dello spazio individuata da  $s_e$  è di equilibrio indifferente se

$$\left. \frac{\partial^2}{\partial s^2} \mathcal{U}[\vec{x}(s_e)] \right| = 0 \quad (1.114)$$

In definitiva, se il punto materiale **P** è soggetto a sole forze conservative, le sue posizioni di equilibrio stabile corrispondono a punti di minimo relativo per la funzione energia potenziale  $\mathcal{U}$ , mentre quelle di equilibrio instabile corrispondono a punti di massimo; si hanno posizioni di equilibrio indifferente in corrispondenza a zone dello spazio nelle quali la  $\mathcal{U}$  è costante.

## 1.6 Soluzione di equazioni differenziali lineari a coefficienti costanti

Si definisce equazione differenziale ordinaria di ordine 2 a coeff. costanti nell'incognita  $x(t)$ , una forma del tipo

$$\alpha_2 \frac{d^2 x}{dt^2} + \alpha_1 \frac{dx}{dt} + \alpha_0 x = 0 \quad (1.115)$$

dove le  $\alpha_2, \alpha_1$  e  $\alpha_0$  sono costanti. Cerchiamo soluzioni del tipo

$$x(t) = ce^{\gamma t} \quad (1.116)$$

Sostituendo nella 1.115, notiamo che la 1.116 è soluzione dell'equazione differenziale sse

$$\alpha_2 \gamma^2 + \alpha_1 \gamma + \alpha_0 = 0 \quad (1.117)$$

per  $c$  arbitrario. La 1.117 è l'equazione caratteristica associata alla 1.115. Si tratta di un'equazione algebrica di grado 2 che ammette 2 radici. Ad ognuna di queste radici è associata una soluzione di tipo 1.116 e quindi, per la linearità la soluzione generale ha l'espressione

$$x(t) = c_1 e^{\gamma_1 t} + c_2 e^{\gamma_2 t} \quad (1.118)$$

Delle  $\infty^2$  funzioni 1.118 possiamo ottenere una soluzione unica per il nostro problema associando alla 1.115 condizioni iniziali su  $x(t)$  e  $\dot{x}(t)$  in modo da poter individuare il valore delle costanti  $c_1$  e  $c_2$ .

Se esiste una sola radice  $\hat{\gamma}$  di molteplicità 2, la soluzione assume la forma

$$x(t) = c_1 e^{\hat{\gamma} t} + c_2 t e^{\hat{\gamma} t} \quad (1.119)$$

Se esistono 2 radici complesse coniugate  $\tilde{\gamma} = \beta \pm j\delta$  la soluzione può essere scritta nella forma:

$$x(t) = e^{\beta t} [a \cos(\delta t) + b \sin(\delta t)] \quad (1.120)$$

### 1.6.1 Esempio: sistema massa-molla

Troviamo ora la soluzione del problema 1.22

$$m\ddot{x} + kx = 0 \quad (1.121)$$

completato dalle condizioni iniziali

$$x(0) = x_0, \quad \dot{x}(0) = v_0 \quad (1.122)$$

L'equazione caratteristica è  $\gamma^2 + \omega^2 = 0$ , con  $\omega = \sqrt{k/m}$ . Le sue radici sono  $\gamma_{1,2} = \pm j\omega$  e la soluzione è

$$x(t) = a \cos(\omega t) + b \sin(\omega t) \quad (1.123)$$

che in virtù della condizioni iniziali diventa

$$x(t) = x_0 \cos(\omega t) + \frac{v_0}{\omega} \sin(\omega t) \quad (1.124)$$

Il sistema in questione, se lasciato libero di muoversi a partire da certe condizioni iniziali, oscilla indefinitamente alla frequenza  $\omega$  che viene chiamata frequenza propria del sistema. Notare che il pendolo governato dalla 1.23 avrà una soluzione formalmente identica alla 1.124, ma con frequenza propria  $\omega = \sqrt{g/l}$ .

### 1.6.2 Equazioni differenziali ordinarie a coefficienti costanti non omogenee

Un'equazione diff. ordinaria a coefficienti costanti non omogenea di ordine 2 ha la forma

$$\alpha_2 \frac{d^2 x}{dt^2} + \alpha_1 \frac{dx}{dt} + \alpha_0 x = f(t) \quad (1.125)$$

dove  $f(t)$  è il termine *forzante* che dipende solo dalla variabile  $t$ . La soluzione generale  $x_{GN}$  della 1.125 si può ottenere come sovrapposizione della soluzione dell'equazione omogenea associata ed un integrale particolare della non omogenea

$$x_{GN}(t) = x_{G0}(t) + x_{PN}(t) \alpha_0 x = f(t) \quad (1.126)$$

Nella sezione precedente abbiamo visto come determinare la soluzione generale della omogenea associata alla 1.125. Cerchiamo ora un criterio per definire la forma della  $x_{PN}$ . Se la forzante è del tipo

$$f(t) = F_1 \cos(\delta t) + F_2 \sin(\delta t) \quad (1.127)$$

dove  $F_1$  e  $F_2$  sono costanti. In tal caso è possibile scrivere la soluzione nella forma

$$x_{PN}(t) = t^\nu [A \cos(\delta t) + B \sin(\delta t)] \quad (1.128)$$

essendo  $\nu$  la molteplicità della radice  $\pm j\delta$  per l'equazione caratteristica dell'omogenea associata e  $A, B$  due costanti da determinare imponendo che la 1.128 soddisfi l'equazione differenziale. Le costanti della  $x_{G0}$  si determinano imponendo che  $x_{GN} = x_{G0} + x_{PN}$  soddisfi le condizioni iniziali del problema. **NB: le condizioni iniziali devono essere soddisfatte dalla soluzione globale  $x_{GN}$ .**

### 1.6.3 Esempio: sistema massa-molla forzato

Ipotizziamo che alla massa  $m$  sia ora applicata una forza di intensità periodica con frequenza  $\Omega$

$$m\ddot{x} + kx = F \cos(\Omega t) \quad (1.129)$$

In tal caso,  $\beta = 0$ ,  $n = 0$ ,  $\gamma = \Omega$  e  $\nu = 0$ . Ne segue che la soluzione particolare avrà la forma

$$x_{PN}(t) = A \cos(\Omega t) + B \sin(\Omega t) \quad (1.130)$$

Imponendo che 1.130 sia soluzione della 1.129 otteniamo il valore delle costanti  $A$  e  $B$ ,

$$x_{PN}(t) = \frac{F/m}{\omega^2 - \Omega^2} \cos(\Omega t) \quad (1.131)$$

La soluzione generale dell'equazione forzata sarà quindi ottenuta combinando la 1.131 con la 1.123

$$x_{GN}(t) = a \cos(\omega t) + b \sin(\omega t) + \frac{F/m}{\omega^2 - \Omega^2} \cos(\Omega t) \quad (1.132)$$

Applicando le condizioni iniziali alla  $x_{GN}(t)$  otteniamo il valore delle costanti  $a$  e  $b$

$$\begin{aligned} x_{GN}(t) &= \frac{F/m}{\omega^2 - \Omega^2} [\cos(\Omega t) - \cos(\omega t)] \\ &+ x_0 \cos(\omega t) + \frac{v_0}{\omega} \sin(\omega t) \end{aligned} \quad (1.133)$$

## 1.7 Oscillatore smorzato

Analizziamo ora un semplice sistema meccanico governato da un'equazione differenziale che rappresenta il caso più generale di equazione differenziale ordinaria del secondo ordine a coefficienti costanti. Al sistema massa-molla di fig. 1.4 si aggiunga uno smorzamento di tipo viscoso, ossia proporzionale alla velocità della massa  $m$ . Si noti che nelle applicazioni pratiche della meccanica tutti i sistemi di ammortizzazione sono costituiti dall'accoppiamento di un elemento elastico (necessario ad assorbire, deformandosi, le sollecitazioni esterne) e da uno smorzatore (necessario a limitare od eliminare del tutto le oscillazioni del sistema prima del ritorno alla configurazione di equilibrio).

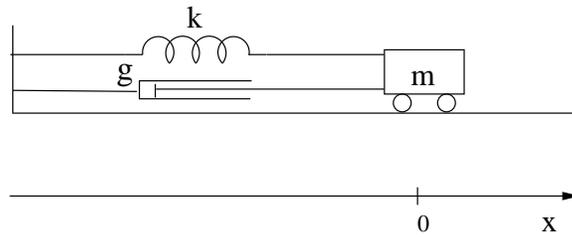


Figura 1.7:

### 1.7.1 Dinamica libera, stabilità

L'equazione che governa la dinamica del sistema non forzato è

$$m\ddot{x} + g\dot{x} + kx = 0 \quad (1.134)$$

L'equazione caratteristica è

$$m\gamma^2 + g\gamma + k = 0 \quad (1.135)$$

le cui radici sono

$$\gamma_{1,2} = \frac{-g \pm \sqrt{g^2 - 4mk}}{2m} \quad (1.136)$$

Dall'esame delle radici dell'equazione caratteristica possiamo studiare la **stabilità** del sistema. Possiamo, cioè, sapere se il sistema, lasciato libero di evolversi dopo una perturbazione comunque piccola, torna al suo stato di equilibrio (sistema stabile) o abbia una risposta di ampiezza indefinitamente crescente (sistema instabile). Possono verificarsi i tre casi seguenti

1.  $|g| > \sqrt{4mk} \Rightarrow$  due radici reali distinte
2.  $|g| = \sqrt{4mk} \Rightarrow$  due radici reali coincidenti
3.  $|g| < \sqrt{4mk} \Rightarrow$  due radici complesse coniugate

Nei primi due casi otteniamo soluzioni del tipo

1.  $x(t) = Ke^{\gamma_1 t} + He^{\gamma_2 t}$
2.  $x(t) = (J + Yt)e^{\gamma t}$

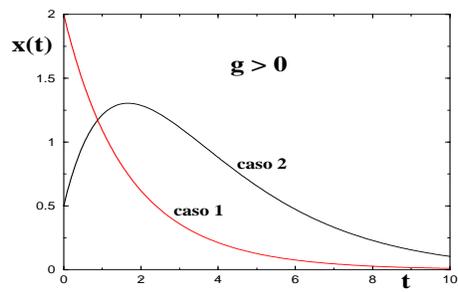
dove  $K, H, J, Y$  sono costanti che si ottengono dalle condizioni iniziali. Ne segue che la massa  $m$ , soggetta a condizioni iniziali non nulle si muoverà di moto aperiodico con ampiezza crescente o decrescente, in dipendenza del segno di  $g$ . Se  $g > 0$  abbiamo due radici negative e l'andamento è quello mostrato in figura (sistema stabile).

Nel caso 3 avremo, in generale,

$$\gamma_{1,2} = \beta + j\omega, \quad \text{con} \quad \beta = \frac{-g}{2m}, \quad \omega^2 = \frac{k}{m} \left( 1 - \frac{g^2}{4km} \right)$$

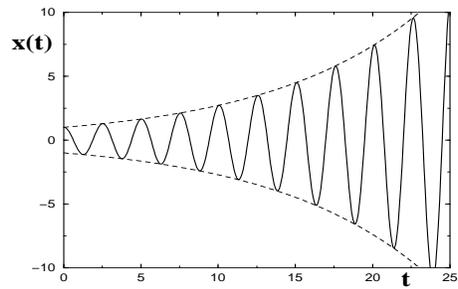
e quindi la soluzione dell'omogenea avrà la forma

$$x_{G0}(t) = ae^{\beta t} \cos(\omega t) + be^{\beta t} \sin(\omega t) \quad (1.137)$$

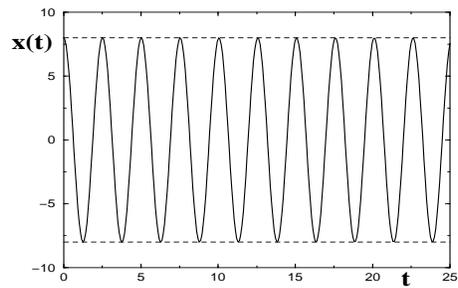


La stabilità del sistema dipende dal segno della parte reale  $\beta$ . In particolare avremo i seguenti casi:

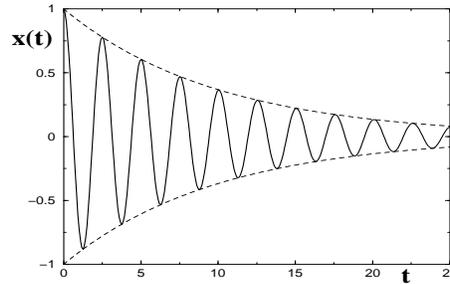
A)  $\beta > 0$  l'ampiezza della soluzione cresce esponenzialmente ed il sistema è instabile;



B)  $\beta = 0$  il sistema è al limite di stabilità ;



C)  $\beta < 0$  l'ampiezza della soluzione decresce esponenzialmente ed il sistema è stabile;



### 1.7.2 Risposta in frequenza del sistema forzato

Consideriamo ora il comportamento del sistema smorzato sottoposto ad una forzante di ampiezza oscillante a frequenza  $\Omega$

$$m\ddot{x} + g\dot{x} + kx = F \cos(\Omega t) \quad (1.138)$$

Riscriviamo l'equazione nella forma

$$\ddot{x} + 2\zeta\omega\dot{x} + \omega^2x = \frac{F}{m} \cos(\Omega t) \quad (1.139)$$

dove abbiamo posto  $2\zeta\omega = g/m$  e  $\omega = \sqrt{k/m}$ . La soluzione generale della 1.138 è data dalla somma della  $x_{G0}$ , vista nel paragrafo precedente, e della soluzione particolare della 1.138, che ha la forma  $x_{PN}(t) = C \cos(\Omega t) + D \sin(\Omega t)$ . Sostituendo otteniamo

$$C = \frac{F(\omega^2 - \Omega^2)}{m[(\omega^2 - \Omega^2)^2 + 4\zeta^2\omega^2\Omega^2]} \quad D = \frac{2F\zeta\omega\Omega}{m[(\omega^2 - \Omega^2)^2 + 4\zeta^2\omega^2\Omega^2]} \quad (1.140)$$

È quindi possibile scrivere la soluzione generale della 1.138 nella forma (verificare per esercizio)

$$x_{GN}(t) = x_{G0}(t) + \frac{F/k}{\sqrt{\left(1 - \frac{\Omega^2}{\omega^2}\right)^2 + 4\zeta^2\frac{\Omega^2}{\omega^2}}} \cos(\Omega t + \phi) \quad (1.141)$$

Come abbiamo notato nel precedente paragrafo, se  $g > 0$  allora

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x_{G0}(t) = 0$$

La soluzione asintotica (**a regime**) dell'equazione è quindi costituita dalla sola soluzione particolare della non omogenea

$$x_r(t) = \frac{F/k}{\sqrt{\left(1 - \frac{\Omega^2}{\omega^2}\right)^2 + 4\zeta^2\frac{\Omega^2}{\omega^2}}} \cos(\Omega t + \phi) \quad (1.142)$$

Quindi, il regime di oscillazione della massa, dopo un transitorio dipendente anche dalle condizioni (tramite la  $x_{G0}$ ), ha frequenza pari a quella della forzante, ed ampiezza e fase che dipendono dal valore di  $\sigma = \Omega/\omega$  e da  $g$  attraverso  $\zeta$ . In figura 8 è riportato, in funzione di  $\sigma$  l'andamento di

$$A(\sigma, \zeta) = \frac{\text{ampiezza}}{F/k} = \frac{1}{\sqrt{(1 - \sigma^2)^2 + 4\zeta^2\sigma^2}} \quad (1.143)$$

con  $\zeta$  a parametro. Si noti che  $A(0, \zeta) = 1$ , ossia che a frequenza nulla (soluzione statica) l'ampiezza è pari a  $F/k$  per qualsiasi valore dello smorzamento  $g$ , e che per  $\sigma \rightarrow \infty \Rightarrow A \rightarrow 0$ . Inoltre,  $A$  ha un massimo la cui posizione dipende da  $\zeta$ . La curva dei massimi può essere ottenuta annullando la derivata di  $A$

$$\frac{\partial A}{\partial \sigma} = 0 \Rightarrow \frac{\partial}{\partial \sigma} \left[ (1 - \sigma^2)^2 + 4\zeta^2 \sigma^2 \right] = 0 \quad (1.144)$$

ossia

$$2\sigma \left[ -2(1 - \sigma^2) + 4\zeta^2 \right] = 0 \quad (1.145)$$

le cui soluzioni sono:

$$\sigma = 0, \quad \sigma = \sqrt{1 - 2\zeta} \quad (1.146)$$

Notare che:

- per  $\zeta = \frac{1}{\sqrt{2}}$  la curva dei massimi sparisce ( $\sigma_{max} = 0$ );
- riscrivendo l'omogenea associata nella forma 1.139 si osserva che le radici dell'equazione caratteristica diventano immaginarie se  $\zeta < 1$ . Ne segue che per  $\zeta > \zeta_{critico} = 1$ , la soluzione dell'omogenea non oscilla.

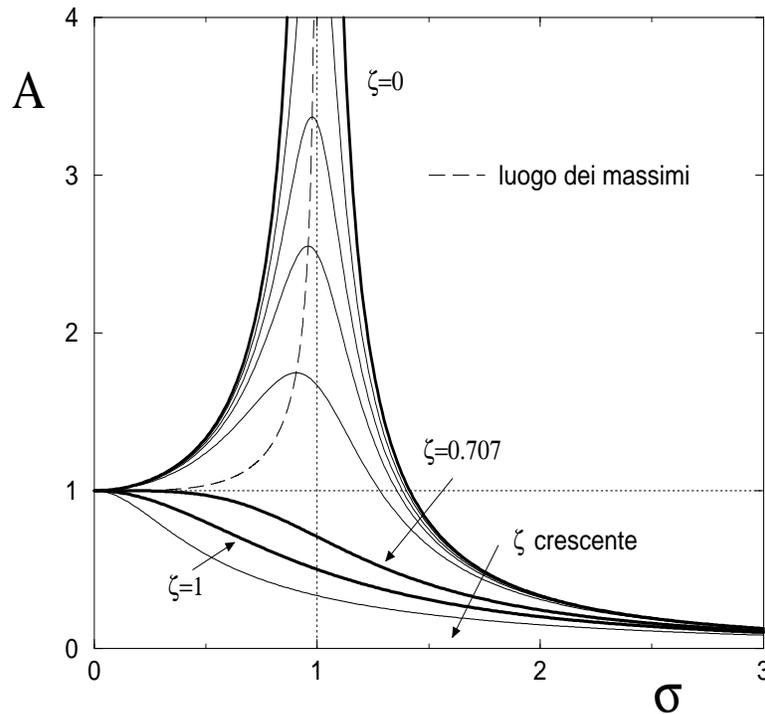


Figura 1.8: Diagramma di risposta in frequenza. Ampiezza.

Per quanto riguarda la fase (figura 1.9), notiamo che per  $\zeta = 0$  la risposta del sistema è in fase con la forzante per  $\sigma < 1$ , ed in opposizione di fase per  $\sigma > 1$ . Se  $\sigma = 1$  (condizioni di risonanza) la  $x(t)$  è in quadratura in ritardo rispetto  $f(t)$  (ossia,  $\phi = -\pi/2$ ). Per valori di  $\zeta$  crescenti, notiamo che per  $\sigma = 1$  si ha sempre  $\phi = -\pi/2$ . Inoltre, per ogni altro valore di  $\sigma$ , si ha sempre  $\phi < 0$ , ossia, la  $x(t)$  è sempre in ritardo rispetto alla forzante  $f(t)$ .

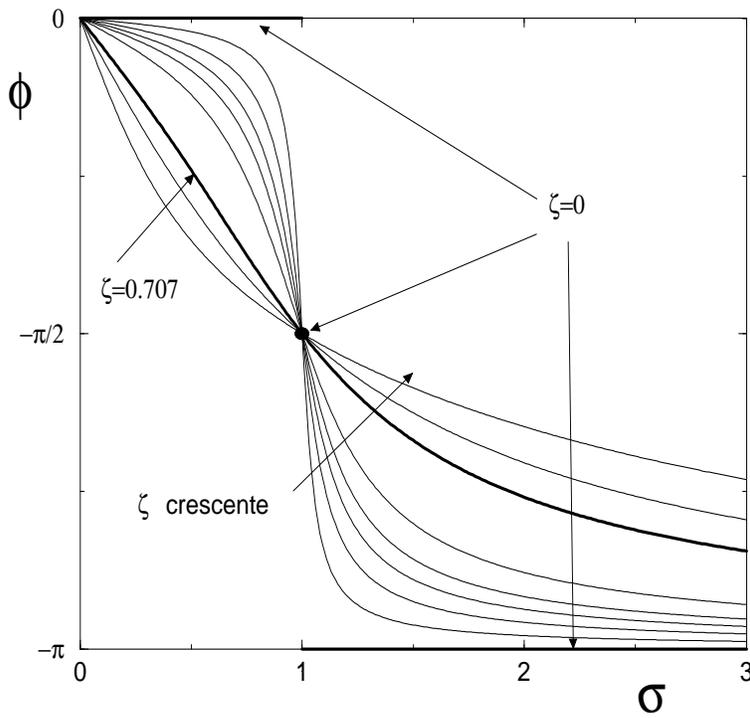


Figura 1.9: Diagramma di risposta in frequenza. Fase.

### 1.7.3 Risonanza

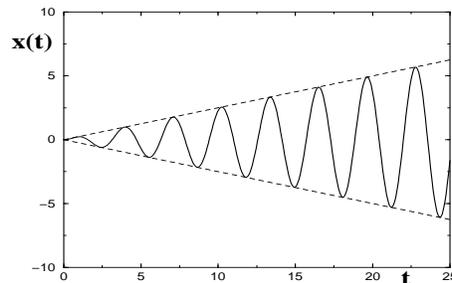
Nel caso in cui  $g = 0$ , la soluzione del sistema si riduce alla 1.133

$$x(t) = x_0 \cos(\omega t) + \frac{v_0}{\omega} \sin(\omega t) + \frac{F}{\omega^2 - \Omega^2} [\cos(\Omega t) - \cos(\omega t)] \quad (1.147)$$

Per  $\sigma = 1$  (ossia, se la frequenza di eccitazione  $\Omega$  eguaglia la frequenza propria del sistema  $\omega$ ) avviene il fenomeno della risonanza. Il terzo termine della 1.147 per  $\sigma = 1$  è una forma indeterminata. L'applicazione della regola di de l'Hospital fornisce

$$\lim_{\Omega \rightarrow \omega} \frac{\cos(\Omega t) - \cos(\omega t)}{\omega^2 - \Omega^2} = \frac{t}{2\omega} \sin(\omega t) \quad (1.148)$$

Quindi, se  $g = 0$  e  $\Omega = \omega$ , la massa  $m$  oscilla con un'ampiezza crescente linearmente con  $t$ .



## Capitolo 2

# Sistemi particellari

Si consideri un insieme  $\mathcal{S}$  di  $N$  particelle materiali nello spazio  $\mathcal{R}^3$ . In questa sezione si vogliono determinare le equazioni del moto di un tale sistema particellare ed i relativi teoremi energetici.

### 2.1 Forze interne e terza legge di Newton

Per ogni singolo elemento  $k$  del sistema particellare  $\mathcal{S}$  vale la seguente legge che ne governa il moto (seconda legge di Newton)

$$m_k \frac{d\vec{v}_k}{dt} = \vec{f}_k^E + \vec{f}_k^I, \quad (2.1)$$

dove  $m_k$  è la massa di tale elemento (assunta costante, per il momento),  $\vec{v}_k$  è la sua velocità,  $\vec{f}_k^E$  è la risultante delle forze esterne (attive e, eventualmente, vincolari) agenti su esso, mentre  $\vec{f}_k^I$  è la risultante delle forze interne agenti su esso, cioè di quelle dovute alla presenza delle altre particelle appartenenti al sistema in esame. Quindi per la  $\vec{f}_k^I$  si può scrivere

$$\vec{f}_k^I = \sum_{j=1}^N \vec{f}_{kj}^I, \quad (2.2)$$

dove  $\vec{f}_{kj}^I$  rappresenta la forza interna agente sull'elemento  $k$ -esimo del sistema dovuta alla presenza del  $j$ -esimo elemento, e si assume  $\vec{f}_{kk}^I = \vec{0}$  (in realtà  $\vec{f}_{kk}^I$  è privo di significato). Per caratterizzare le mutue forze interne tra le particelle, si ricorre alla terza legge di Newton per la quale *le forze di azione e reazione tra corpi (particelle) in contatto hanno la stessa intensità, la stessa linea di azione e verso opposto*, e alla sua estensione a corpi (particelle) agenti a distanza (legge di gravitazione universale di Newton) che, tra le altre cose, stabilisce che la linea di azione delle forze coincide con la linea congiungente i punti. Pertanto, considerando le forze interne scambiate tra il  $k$ -esimo e il  $j$ -esimo elemento di  $\mathcal{S}$ ,  $\vec{f}_{kj}^I$  e  $\vec{f}_{jk}^I$ , queste sono

(i) uguali ed opposte, ovvero

$$\vec{f}_{kj}^I + \vec{f}_{jk}^I = \vec{0}, \quad \forall k, j \quad (2.3)$$

ed inoltre

(ii) hanno la stessa linea di azione, ovvero

$$(\vec{x}_k - \vec{x}_0) \times \vec{f}_{kj}^I + (\vec{x}_j - \vec{x}_0) \times \vec{f}_{jk}^I = \vec{0}, \quad \forall k, j \quad (2.4)$$

dove  $\vec{x}_k$  e  $\vec{x}_j$  sono i vettori posizione che individuano i due elementi in esame, mentre  $\vec{x}_0$  è un arbitrario polo nello spazio  $\mathcal{R}^3$  rispetto a cui valutare i momenti delle forze interne relative (si osservi che la (2.4) si ricava riscrivendo il membro a sinistra nel seguente modo

$$(\vec{x}_k - \vec{x}_0) \times \vec{f}_{kj}^I + (\vec{x}_j - \vec{x}_0) \times \vec{f}_{jk}^I = (\vec{x}_k - \vec{x}_0) \times (\vec{f}_{kj}^I + \vec{f}_{jk}^I) + (\vec{x}_j - \vec{x}_k) \times \vec{f}_{jk}^I, \quad (2.5)$$

applicando la (2.3), ed osservando che l'ultimo termine è nullo essendo  $\vec{f}_{jk}^I$  parallelo al vettore  $(\vec{x}_j - \vec{x}_k)$ .

Infine, per la risultante,  $\vec{f}^I$ , delle forze interne e per il momento,  $\vec{m}_0^I$ , delle stesse rispetto ad un arbitrario polo  $\vec{x}_0$ , applicando le equazioni (2.3) e (2.4), si ottiene:

$$\vec{f}^I = \sum_{k=1}^N \vec{f}_k^I = \sum_{k=1}^N \sum_{j=1}^N \vec{f}_{kj}^I = \vec{0} \quad (2.6)$$

$$\vec{m}_0^I = \sum_{k=1}^N (\vec{x}_k - \vec{x}_0) \times \vec{f}_k^I = \sum_{k=1}^N \sum_{j=1}^N (\vec{x}_k - \vec{x}_0) \times \vec{f}_{kj}^I = \vec{0}, \quad (2.7)$$

da cui si evince che l'insieme delle forze interne agenti in un sistema particellare costituisce una sollecitazione a risultante e momento totale nulli.

## 2.2 Equazione di conservazione della quantità di moto

Sommando le equazioni della dinamica (2.1) di ogni elemento di  $\mathcal{S}$ , ricordando che si è assunto  $m_k$  costante, e in base alla (2.6) si ottiene

$$\sum_{k=1}^N m_k \frac{d\vec{v}_k}{dt} = \frac{d}{dt} \sum_{k=1}^N m_k \vec{v}_k = \sum_{k=1}^N (\vec{f}_k^E + \vec{f}_k^I) = \vec{f}^E \quad (2.8)$$

dove  $\vec{f}^E$  è la risultante della sollecitazione esterna (attiva e vincolare). Quindi, definendo con

$$\vec{q} = \sum_{k=1}^N \vec{q}_k = \sum_{k=1}^N m_k \vec{v}_k \quad (2.9)$$

la quantità di moto totale di  $\mathcal{S}$ , si ottiene la seguente equazione di conservazione della quantità di moto per sistemi particellari

$$\frac{d\vec{q}}{dt} = \vec{f}^E, \quad (2.10)$$

secondo cui la derivata temporale della quantità di moto di  $\mathcal{S}$  è pari alla risultante delle forze esterne agenti su  $\mathcal{S}$  stesso. Se la risultante delle forze esterne è nulla, la quantità di moto di  $\mathcal{S}$  si mantiene costante nel tempo.

## 2.3 Moto del centro di massa di un sistema particellare

Definendo centro di massa di  $\mathcal{S}$  quel punto dello spazio  $\vec{x}_G \in \mathcal{R}^3$  tale che

$$\vec{x}_G = \frac{1}{m} \sum_{k=1}^N m_k \vec{x}_k, \quad (2.11)$$

con

$$m = \sum_{k=1}^N m_k \quad (2.12)$$

massa totale del sistema, ed osservando che (per  $m_k$  costante)

$$\vec{q} = \frac{d}{dt} \sum_{k=1}^N m_k \vec{x}_k, \quad (2.13)$$

combinando la (2.13) con la (2.11) si ricava che la quantità di moto di  $\mathcal{S}$  è anche data da

$$\vec{q} = m \vec{v}_G. \quad (2.14)$$

Inoltre, combinando la (2.14) con la (2.10) si ottiene la seguente ulteriore espressione per la conservazione della quantità di moto di un sistema particellare:

$$m \frac{d\vec{v}_G}{dt} = \vec{f}^E. \quad (2.15)$$

Quindi:

(i) la quantità di moto di un sistema particellare è la stessa che si avrebbe concentrando tutta la sua massa nel suo centro di massa;

(ii) il centro di massa di un sistema particellare si muove come se l'intera massa del sistema e tutte le forze esterne fossero concentrate in quel punto.

Osservazioni. Si noti che dalla definizione di centro di massa si ha che

$$\sum_{k=1}^N m_k (\vec{x}_k - \vec{x}_G) = \vec{0}. \quad (2.16)$$

Inoltre, se su  $\mathcal{S}$  agisce un sistema di forze esterne di massa, ovvero tali che la forza agente sul  $k$ -esimo elemento è pari a  $\vec{f}_k^E = m_k \vec{a}$ , con  $\vec{a}$  costante, allora, per la (2.16), il momento totale rispetto al centro di massa di un tale sistema di forze è nullo; infatti:

$$\vec{m}_G^E = \sum_{k=1}^N (\vec{x}_k - \vec{x}_G) \times m_k \vec{a} = \left[ \sum_{k=1}^N m_k (\vec{x}_k - \vec{x}_G) \right] \times \vec{a} = \vec{0}. \quad (2.17)$$

Quindi il centro di massa può essere considerato come il punto di applicazione delle forze di massa. Pertanto, se il sistema particellare ha estensione tale che si possa assumere costante l'accelerazione di gravità,  $\vec{g}$ , agente sui suoi elementi, il momento delle singole forze peso,  $m_k \vec{g}$ , rispetto a  $\vec{x}_G$  è nullo, e quindi il centro di massa di  $\mathcal{S}$  coincide con il suo baricentro (punto di applicazione della risultante delle forze peso).

## 2.4 Equazione di conservazione del momento della quantità di moto

Assegnato un polo arbitrario,  $\vec{x}_0$ , si premoltiplichino vettorialmente la (2.1) per  $(\vec{x}_k - \vec{x}_0)$  e si sommi il contributo di tutti gli elementi che costituiscono  $\mathcal{S}$ ; tenendo conto della equazione (2.7) si ottiene

$$\sum_{k=1}^N (\vec{x}_k - \vec{x}_0) \times m_k \frac{d\vec{v}_k}{dt} = \sum_{k=1}^N (\vec{x}_k - \vec{x}_0) \times \vec{f}_k^E = \vec{m}_0^E, \quad (2.18)$$

dove  $\vec{m}_0^E$  è il momento totale delle forze esterne rispetto al polo  $\vec{x}_0$ .  
Per il termine a primo membro della (2.18) si osservi che

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \sum_{k=1}^N (\vec{x}_k - \vec{x}_0) \times m_k \vec{v}_k &= \sum_{k=1}^N (\vec{v}_k - \vec{v}_0) \times m_k \vec{v}_k + \sum_{k=1}^N (\vec{x}_k - \vec{x}_0) \times m_k \frac{d\vec{v}_k}{dt} \\ &= -m\vec{v}_0 \times \vec{v}_G + \sum_{k=1}^N (\vec{x}_k - \vec{x}_0) \times m_k \frac{d\vec{v}_k}{dt}; \end{aligned} \quad (2.19)$$

quindi, definendo con

$$\vec{h}_0 = \sum_{k=1}^N (\vec{x}_k - \vec{x}_0) \times m_k \vec{v}_k \quad (2.20)$$

il momento della quantità di moto del sistema particellare rispetto al polo  $\vec{x}_0$ , dalla (2.19) si ha

$$\sum_{k=1}^N (\vec{x}_k - \vec{x}_0) \times m_k \frac{d\vec{v}_k}{dt} = \frac{d\vec{h}_0}{dt} + m\vec{v}_0 \times \vec{v}_G, \quad (2.21)$$

che combinata con l'equazione (2.18) fornisce la seguente equazione di conservazione del momento della quantità di moto per sistemi particellari

$$\frac{d\vec{h}_0}{dt} = \vec{m}_0^E - m\vec{v}_0 \times \vec{v}_G. \quad (2.22)$$

Si osservi che:

- se  $\vec{x}_0$  è fisso [ $\vec{v}_0 = \vec{0}$ ], oppure
- se  $\vec{x}_0 \equiv \vec{x}_G$  [ $\vec{v}_G \times \vec{v}_G = \vec{0}$ ], oppure
- se  $\vec{x}_0$  è tale che  $\vec{v}_0$  è parallelo a  $\vec{v}_G$  [ $\vec{v}_0 \times \vec{v}_G = \vec{0}$ ],

allora l'equazione (2.22) si riduce alla più semplice

$$\frac{d\vec{h}_0}{dt} = \vec{m}_0^E. \quad (2.23)$$

## 2.5 Momento della quantità di moto: moto di $\mathcal{S}$ attorno al suo centro di massa

Dall'esame della equazione della conservazione della quantità di moto, si nota che questa descrive essenzialmente il moto del centro di massa del sistema particellare in esame, ma non tiene conto del moto che le particelle del sistema hanno attorno al centro di massa stesso. Il moto delle particelle attorno al centro di massa appare come elemento essenziale nella equazione della conservazione del momento della quantità di moto.

Si consideri il seguente sviluppo per il momento della quantità di moto rispetto al generico polo mobile  $\vec{x}_0$ :

$$\begin{aligned} \vec{h}_0 &= \sum_{k=1}^N (\vec{x}_k - \vec{x}_0) \times m_k \vec{v}_k = \sum_{k=1}^N (\vec{x}_k - \vec{x}_G + \vec{x}_G - \vec{x}_0) \times m_k (\vec{v}_k - \vec{v}_G + \vec{v}_G) \\ &= \sum_{k=1}^N m_k (\vec{x}_k - \vec{x}_G) \times (\vec{v}_k - \vec{v}_G) + \sum_{k=1}^N m_k (\vec{x}_k - \vec{x}_G) \times \vec{v}_G \\ &\quad + (\vec{x}_G - \vec{x}_0) \times \sum_{k=1}^N m_k (\vec{v}_k - \vec{v}_G) + (\vec{x}_G - \vec{x}_0) \times m\vec{v}_G \end{aligned} \quad (2.24)$$

dove, per l'equazione (2.16) e la sua derivata rispetto al tempo, il secondo e terzo termine dell'espressione finale sono identicamente nulli. Quindi, osservando che  $\vec{q} = m \vec{v}_G$  e che, sempre per la (2.16),

$$\vec{h}_G = \sum_{k=1}^N m_k (\vec{x}_k - \vec{x}_G) \times \vec{v}_k = \sum_{k=1}^N m_k (\vec{x}_k - \vec{x}_G) \times (\vec{v}_k - \vec{v}_G), \quad (2.25)$$

dalla (2.24) si ricava che, per il momento della quantità di moto rispetto ad un polo generico,  $\vec{x}_0$ , vale la relazione

$$\vec{h}_0 = \vec{h}_G + (\vec{x}_G - \vec{x}_0) \times \vec{q}. \quad (2.26)$$

Pertanto, il momento della quantità di moto di  $\mathcal{S}$  rispetto ad un generico polo,  $\vec{x}_0$ , è dovuto alla somma di due contributi: (i) il momento della quantità di moto che avrebbe il centro di massa se l'intera massa del sistema fosse concentrata in quel punto e (ii) il momento della quantità di moto rispetto al centro di massa che dipende (vedi seconda espressione in equazione (2.25)) dal moto delle singole particelle relativo (*attorno*) al centro di massa di  $\mathcal{S}$ .

Da questo esame della equazione (2.26), ed osservando l'espressione della (2.22), si evince quindi che il moto delle particelle attorno al centro di massa appare come elemento caratterizzante l'equazione (2.22) di conservazione del momento della quantità di moto di  $\mathcal{S}$ .

## 2.6 Teoremi energetici per sistemi particellari

Moltiplicando scalarmente l'equazione (2.1) che governa il moto del  $k$ -esimo elemento di  $\mathcal{S}$  per la sua velocità,  $\vec{v}_k$ , e sommando si ottiene

$$\sum_{k=1}^N m_k \frac{d\vec{v}_k}{dt} \cdot \vec{v}_k = \sum_{k=1}^N \vec{f}_k^E \cdot \vec{v}_k + \sum_{k=1}^N \vec{f}_k^I \cdot \vec{v}_k, \quad (2.27)$$

dove, se l'energia cinetica è definita da

$$\mathcal{T} = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^N m_k v_k^2, \quad (2.28)$$

si ha

$$\sum_{k=1}^N m_k \frac{d\vec{v}_k}{dt} \cdot \vec{v}_k = \frac{d\mathcal{T}}{dt}, \quad (2.29)$$

mentre, se con  $\mathcal{P}^E$  e  $\mathcal{P}^I$  si indicano rispettivamente la potenza sviluppata dalle forze esterne e quella sviluppata dalle forze interne, risulta

$$\sum_{k=1}^N \vec{f}_k^E \cdot \vec{v}_k = \mathcal{P}^E, \quad \sum_{k=1}^N \vec{f}_k^I \cdot \vec{v}_k = \mathcal{P}^I. \quad (2.30)$$

Combinando la (2.27) con la (2.29) e la (2.30) si ottiene, analogamente a quanto visto per il punto materiale, la seguente relazione

$$\frac{d\mathcal{T}}{dt} = \mathcal{P}^E + \mathcal{P}^I, \quad (2.31)$$

che può essere enunciata nel seguente

**Teorema # 1:** la derivata temporale dell'energia cinetica di un sistema particellare  $\mathcal{S}$  è pari, istante per istante, alla potenza sviluppata da tutte le forze (esterne ed interne) agenti sugli elementi di  $\mathcal{S}$ .

Sempre in analogia con quanto fatto per i teoremi energetici relativi al punto materiale, consideriamo gli spostamenti infinitesimi degli elementi del sistema particellare,  $d\vec{x}_k = \vec{v}_k dt$ , compatibili con i vincoli eventualmente presenti. Combinando la (2.31) con le espressioni riportate nelle (2.30) si ottiene

$$d\mathcal{T} = d\mathcal{L}^E + d\mathcal{L}^I, \quad (2.32)$$

dove

$$d\mathcal{L}^E = \sum_{k=1}^N \vec{f}_k^E \cdot d\vec{x}_k \quad \text{e} \quad d\mathcal{L}^I = \sum_{k=1}^N \vec{f}_k^I \cdot d\vec{x}_k \quad (2.33)$$

sono il lavoro compiuto, rispettivamente dalle forze esterne e da quelle interne, associato all'insieme ( $d\vec{x}_k$ ,  $k = 1, \dots, N$ ) degli spostamenti infinitesimali ammissibili per gli elementi di  $\mathcal{S}$ . Considerando, quindi, un intervallo di tempo finito ( $t_2 - t_1$ ) durante il quale il  $k$ -esimo elemento di  $\mathcal{S}$  segue un percorso  $\mathcal{C}_k$  tra la posizione  $\vec{x}_{1_k} = \vec{x}_k(t_1)$  e la posizione  $\vec{x}_{2_k} = \vec{x}_k(t_2)$ , integrando la (2.32) si ottiene

$$\int_{\mathcal{T}_1}^{\mathcal{T}_2} d\mathcal{T} = \sum_{k=1}^N \int_{\mathcal{C}_k(\vec{x}_{1_k} \rightarrow \vec{x}_{2_k})} \vec{f}_k^E \cdot d\vec{x} + \sum_{k=1}^N \int_{\mathcal{C}_k(\vec{x}_{1_k} \rightarrow \vec{x}_{2_k})} \vec{f}_k^I \cdot d\vec{x} \quad (2.34)$$

cioè la seguente relazione di bilancio tra variazione di energia cinetica e lavoro:

$$\mathcal{T}_2 - \mathcal{T}_1 = \mathcal{L}_{\mathcal{C}(1 \rightarrow 2)}^E + \mathcal{L}_{\mathcal{C}(1 \rightarrow 2)}^I, \quad (2.35)$$

dove  $\mathcal{C}(1 \rightarrow 2)$  rappresenta l'insieme dei percorsi  $\mathcal{C}_k$  seguiti dalle particelle durante l'evoluzione di  $\mathcal{S}$  dalla configurazione all'istante  $t_1$  a quella all'istante  $t_2$ . La relazione (2.35) può essere enunciata nel seguente

**Teorema # 2:** la variazione dell'energia cinetica di un sistema particellare in un intervallo di tempo finito, è pari al lavoro compiuto, in quell'intervallo di tempo, da tutte le forze agenti (esterne ed interne) sugli elementi del sistema particellare, durante il moto dalle posizioni iniziali  $\vec{x}_{1_k}$  alle finali  $\vec{x}_{2_k}$ .

### 2.6.1 Forze conservative ed energia meccanica

Tra le forze agenti sulle particelle di  $\mathcal{S}$ , distinguiamo ora quelle conservative eventualmente presenti, da quelle non conservative; poniamo, cioè

$$\vec{f}_k^E = \vec{f}_k^{E,c} + \vec{f}_k^{E,nc} \quad (2.36)$$

$$\vec{f}_k^I = \sum_{j=1}^N \left( \vec{f}_{kj}^{I,c} + \vec{f}_{kj}^{I,nc} \right), \quad (2.37)$$

ed includiamo nella nostra analisi le funzioni di energia potenziale associate alle forze conservative.

In tal caso

$$\vec{f}_k^{E,c}(t) = -\nabla \hat{U}_k^E(\vec{x}) \Big|_{\vec{x}=\vec{x}_k(t)}, \quad \vec{f}_k^{I,c}(t) = -\nabla \hat{U}_k^I(\vec{x}) \Big|_{\vec{x}=\vec{x}_k(t)} \quad (2.38)$$

dove  $\hat{U}_k^E(\vec{x})$  e  $\hat{U}_k^I(\vec{x})$  è la funzione energia potenziale associata alle forze esterne conservative che agiscono sul  $k$ -esimo elemento di  $\mathcal{S}$  (si osservi che le  $\hat{U}_k^E(\vec{x})$  possono essere le stesse per diversi  $k$ : ad esempio, se l'unica forza esterna cui  $\mathcal{S}$  è soggetto è il campo gravitazionale terrestre, allora le  $\hat{U}_k^E(\vec{x})$  sono tutte uguali tra loro e pari al campo di energia potenziale gravitazionale terrestre).

<sup>1</sup>

A questo punto, determiniamo l'espressione del lavoro eseguito dalle forze esterne ed interne sul sistema particellare in termini delle energie potenziali introdotte. Per il lavoro delle forze esterne, combinando la prima delle (2.33), la (2.36) e la (2.38), si ottiene

$$\mathcal{L}^E = \mathcal{L}_{C(1 \rightarrow 2)}^{E,c} + \mathcal{L}_{C(1 \rightarrow 2)}^{E,nc} = \mathcal{U}_1^E - \mathcal{U}_2^E + \mathcal{L}_{C(1 \rightarrow 2)}^{E,nc} \quad (2.39)$$

$$\mathcal{L}^I = \mathcal{L}_{C(1 \rightarrow 2)}^{I,c} + \mathcal{L}_{C(1 \rightarrow 2)}^{I,nc} = \mathcal{U}_1^I - \mathcal{U}_2^I + \mathcal{L}_{C(1 \rightarrow 2)}^{I,nc} \quad (2.40)$$

dove, avendo definito con

$$\mathcal{U}^E = \sum_{k=1}^N \hat{U}_k^E(\vec{x}_k(t)) \quad (2.41)$$

$$\mathcal{U}^I = \sum_{k=1}^N \hat{U}_k^I(\vec{x}_k(t)) \quad (2.42)$$

l'energia potenziale dell'intero sistema particellare relativa alle forze esterne ed interne conservative, ed i pedici 1, 2 indicano i valori assunti agli istanti iniziale e finale.

Definendo l'energia meccanica del sistema come

$$\mathcal{E} = \mathcal{T} + \mathcal{U}^E + \mathcal{U}^I \quad (2.43)$$

si ottiene la relazione

$$\mathcal{E}_2 - \mathcal{E}_1 = \mathcal{L}_{C(1 \rightarrow 2)}^{E,nc} + \mathcal{L}_{C(1 \rightarrow 2)}^{I,nc}, \quad (2.44)$$

che può essere enunciata nel seguente

**Teorema # 3:** la variazione in un intervallo di tempo dell'energia meccanica associata ad un sistema particellare (somma di quella cinetica, potenziale esterna e potenziale interna), è pari al lavoro compiuto dalle forze non conservative (esterne ed interne) agenti sugli elementi del sistema particellare stesso, seguendo le loro traiettorie durante la evoluzione di  $\mathcal{S}$  dalla configurazione iniziale a quella finale.

---

<sup>1</sup>Si noti che l'energia potenziale associata alle forze conservative interne, è necessariamente funzione di due variabili spaziali. Infatti, data una  $\vec{f}_{kj}^{I,c}$ , questa dipende, istante per istante, sia dalla posizione,  $\vec{x}_k$ , occupata dal  $k$ -esimo elemento su cui essa agisce, che dalla posizione,  $\vec{x}_j$ , occupata dal  $j$ -esimo elemento. È possibile tener conto di ciò considerando il  $k$ -esimo elemento soggetto ad un campo di energia potenziale  $\bar{U}_k^I(\vec{x}_k, t)$  variabile nel tempo a causa del moto del  $j$ -esimo elemento, generatore di tale campo.

In conclusione, ricordando che anche per l'energia potenziale delle forze esterne associata al  $k$ -esimo elemento vale la relazione

$$\frac{d\mathcal{U}_k^E}{dt} = \nabla \hat{\mathcal{U}}_k^E \Big|_{\vec{x}=\vec{x}_k} \cdot \frac{d\vec{x}_k}{dt} = -\vec{f}_k^{E,c} \cdot \vec{v}_k, \quad (2.45)$$

combinando la (2.31) con le (2.30),(2.36),(2.37), (2.45) e (2.41), si ottiene

$$\frac{d\mathcal{E}}{dt} = \mathcal{P}^{E,nc} + \mathcal{P}^{I,nc}, \quad (2.46)$$

ovvero il

**Teorema # 4:** la derivata temporale in un certo istante, dell'energia meccanica di un sistema particellare  $\mathcal{S}$ , è pari alla potenza sviluppata in quell'istante da tutte le forze non conservative (esterne ed interne) agenti sugli elementi di  $\mathcal{S}$ .

## 2.7 Energia cinetica di sistemi particellari: teorema di Koenig

Si vuole derivare una espressione significativa per l'energia cinetica dell'intero sistema particellare  $\mathcal{S}$ . Ponendo  $\vec{v}'_k = \vec{v}_k - \vec{v}_G$ , si ha

$$\begin{aligned} \mathcal{T} &= \sum_{k=1}^N \frac{1}{2} m_k v_k^2 = \sum_{k=1}^N \frac{1}{2} m_k \vec{v}_k \cdot \vec{v}_k \\ &= \sum_{k=1}^N \frac{1}{2} m_k (\vec{v}'_k + \vec{v}_G) \cdot (\vec{v}'_k + \vec{v}_G) = \frac{1}{2} m v_G^2 + \sum_{k=1}^N m_k \vec{v}'_k \cdot \vec{v}_G + \sum_{k=1}^N \frac{1}{2} m_k v_k'^2 \end{aligned} \quad (2.47)$$

ma essendo

$$\sum_{k=1}^N m_k (\vec{v}_k - \vec{v}_G) = \vec{0}, \quad (2.48)$$

che si ottiene derivando la (2.16), si ricava che

$$\mathcal{T} = \frac{1}{2} m v_G^2 + \sum_{k=1}^N \frac{1}{2} m_k v_k'^2 \quad (2.49)$$

ovvero il seguente

**Teorema di Koenig:** l'energia cinetica di un sistema particellare in corrispondenza ad un qualsiasi atto di moto, si ottiene sommando l'energia cinetica del centro di massa (assumendo ivi concentrata la massa dell'intero sistema) e l'energia cinetica delle particelle relativa al moto attorno al centro di massa.

### 2.7.1 Teoremi energetici relativi al moto attorno al centro di massa

Dal teorema di Koenig deriva l'ultima osservazione relativa alla dinamica dei sistemi particellari, che riguarda la derivata temporale dell'energia cinetica del moto attorno al

centro di massa. Ricordando l'equazione che esprime la conservazione della quantità di moto di  $\mathcal{S}$ , si ottiene che

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{1}{2} m v_G^2 \right) = m \frac{d\vec{v}_G}{dt} \cdot \vec{v}_G = \vec{f}^E \cdot \vec{v}_G. \quad (2.50)$$

La combinazione della (2.31) con la (2.49) e la (2.50), fornisce allora

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{1}{2} \sum_{k=1}^N m_k v_k^2 \right) = \mathcal{P}^E + \mathcal{P}^I - \vec{f}^E \cdot \vec{v}_G, \quad (2.51)$$

che ricordando le (2.30) e la (2.3), ed ossevando che  $\vec{v}_k - \vec{v}_j = \vec{v}'_k - \vec{v}'_j$  diventa

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{1}{2} \sum_{k=1}^N m_k v_k^2 \right) = \sum_{k=1}^N \vec{f}_k^E \cdot \vec{v}'_k + \sum_{k=1}^N \sum_{j=k+1}^N \vec{f}_{kj}^I \cdot (\vec{v}'_k - \vec{v}'_j) \quad (2.52)$$

$$= \sum_{k=1}^N \vec{f}_k^E \cdot \vec{v}'_k + \sum_{k=1}^N \sum_{j=1}^N \vec{f}_{kj}^I \cdot \vec{v}'_k, \quad (2.53)$$

che definendo  $\mathcal{T}'$  l'energia cinetica del moto attorno al centro di massa può essere riscritta come

$$\frac{d\mathcal{T}'}{dt} = \mathcal{P}^{E'} + \mathcal{P}^{I'}, \quad (2.54)$$

dove  $\mathcal{P}^{E'}$  e  $\mathcal{P}^{I'}$  rappresentano, rispettivamente, la potenza relativa (al moto attorno al centro di massa) sviluppata dalle forze esterne e la potenza relativa (al moto attorno al centro di massa) sviluppata dalle forze interne. Tale risultato è enunciato nel seguente

**Teorema # 1bis:** la derivata temporale in un certo istante, dell'energia cinetica del moto attorno al centro di massa di un sistema particellare  $\mathcal{S}$ , è pari alla potenza relativa (al moto attorno al centro di massa) sviluppata in quell'istante da tutte le forze (esterne ed interne) agenti sugli elementi di  $\mathcal{S}$ .

Infine, consideriamo gli spostamenti infinitesimi degli elementi del sistema particellare,  $d\vec{x}'_k = \vec{v}'_k dt$ , relativi al moto attorno al centro di massa e compatibili con i vincoli eventualmente presenti. Combinando la (2.54) con le espressioni delle potenze relative che appaiono nella (2.52), si ottiene

$$d\mathcal{T}' = d\mathcal{L}^{E'} + d\mathcal{L}^{I'}, \quad (2.55)$$

dove

$$d\mathcal{L}^{E'} = \sum_{k=1}^N \vec{f}_k^E \cdot d\vec{x}'_k \quad \text{e} \quad d\mathcal{L}^{I'} = \sum_{k=1}^N \vec{f}_k^I \cdot d\vec{x}'_k \quad (2.56)$$

sono il lavoro compiuto, rispettivamente dalle forze esterne e da quelle interne, associato all'insieme ( $d\vec{x}'_k$ ,  $k = 1, \dots, N$ ) degli spostamenti infinitesimali relativi (al moto attorno al centro di massa) ammissibili per gli elementi di  $\mathcal{S}$ . Di nuovo, considerando un intervallo di tempo finito ( $t_2 - t_1$ ) durante il quale ogni  $k$ -esimo elemento di  $\mathcal{S}$  segue un percorso

$\mathcal{C}'_k$  tra la posizione  $\vec{x}'_{1_k} = \vec{x}'_k(t_1)$  e la posizione  $\vec{x}'_{2_k} = \vec{x}'_k(t_2)$  nel moto attorno al centro di massa ( $\vec{x}'_k = \vec{x}_k - \vec{x}_G$ ), integrando la (2.55) si ottiene

$$\int_{\mathcal{T}'_1}^{\mathcal{T}'_2} d\mathcal{T}' = \sum_{k=1}^N \int_{\mathcal{C}'_k(\vec{x}'_{1_k} \rightarrow \vec{x}'_{2_k})} \vec{f}_k^E \cdot d\vec{x}' + \sum_{k=1}^N \int_{\mathcal{C}'_k(\vec{x}'_{1_k} \rightarrow \vec{x}'_{2_k})} \vec{f}_k^I \cdot d\vec{x}' \quad (2.57)$$

cioè la seguente relazione di bilancio tra variazione di energia cinetica del moto attorno al centro di massa e il lavoro compiuto durante gli spostamenti nel moto attorno allo stesso:

$$\mathcal{T}'_2 - \mathcal{T}'_1 = \mathcal{L}_{\mathcal{C}'(1 \rightarrow 2)}^{E'} + \mathcal{L}_{\mathcal{C}'(1 \rightarrow 2)}^{I'}, \quad (2.58)$$

dove  $\mathcal{C}'(1 \rightarrow 2)$  rappresenta l'insieme dei percorsi  $\mathcal{C}'_k$  seguiti dalle particelle durante il loro moto attorno al centro di massa tra l'istante  $t_1$  e l'istante  $t_2$ . La relazione (2.58) può essere enunciata nel seguente

**Teorema # 2bis:** per un sistema particellare, la variazione in un intervallo di tempo finito, dell'energia cinetica del moto attorno al centro di massa, è pari al lavoro compiuto, in quell'intervallo di tempo, da tutte le forze agenti (esterne ed interne) sugli elementi del sistema particellare stesso, nel loro moto attorno al centro di massa, dalle posizioni iniziali  $\vec{x}'_{1_k}$  alle finali  $\vec{x}'_{2_k}$ .

## Capitolo 3

# Cinematica del corpo rigido

In questo capitolo esamineremo il problema della rappresentazione del generico atto di moto cui può essere soggetto un corpo rigido, libero di muoversi nello spazio. Definiamo *corpo rigido* una distribuzione continua di massa costituita da  $\infty^3$  punti materiali le cui distanze relative sono immutabili nel tempo. Ciò significa che tale corpo è capace di modificare la sua posizione ed il suo orientamento rispetto ad un sistema di riferimento fisso nello spazio, ma non può modificare la sua forma. Se, oltre al generico sistema di riferimento fisso  $\mathcal{R}(O, \hat{i}_1, \hat{i}_2, \hat{i}_3)$ , introduciamo un sistema di riferimento mobile,  $\mathcal{R}_m(\Omega, \hat{e}_1, \hat{e}_2, \hat{e}_3)$ , solidale con il corpo rigido (tale, quindi, da essere soggetto allo stesso tipo di moto che anima il corpo), possiamo affermare che la posizione rispetto a  $\mathcal{R}_m$  dei punti materiali che costituiscono il corpo, è immutabile nel tempo.

### 3.1 Cinematica 2D: moti piani di un corpo rigido

Definiamo *moto piano* di un corpo rigido  $\mathcal{C}$ , un atto di moto per il quale il vettore velocità di uno qualsiasi dei suoi punti è sempre parallelo ad uno stesso piano.

#### 3.1.1 Moto traslatorio

Definiamo moto **traslatorio** del corpo rigido un atto di moto per il quale risulta indipendente dal tempo l'orientamento di un arbitrario segmento materiale definito sul corpo rigido stesso.

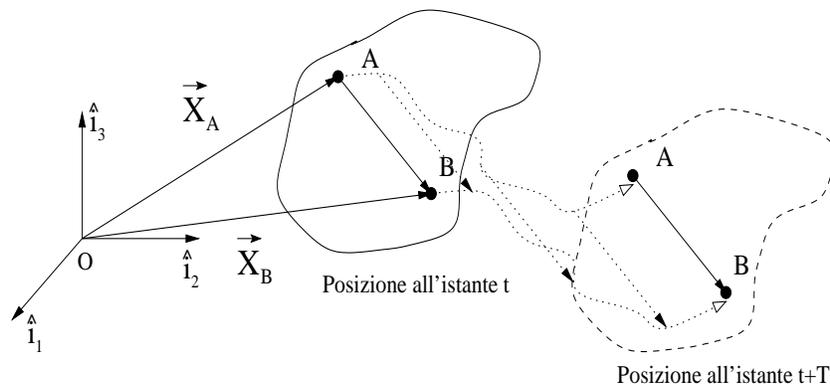


Figura 3.1: Traslazione di un corpo rigido.

Se chiamiamo  $A$  e  $B$  i punti estremi di tale segmento, ed indichiamo con  $\vec{AB}$  il vettore che porta dal primo al secondo punto, per definizione di moto traslatorio, esso sarà invariante nel tempo. Ne segue che, posto

$$\vec{x}_B = \vec{x}_A + \vec{AB} \quad (3.1)$$

per la velocità di  $B$  risulta, necessariamente,

$$\vec{v}_B = \frac{d\vec{x}_B}{dt} = \frac{d}{dt} (\vec{x}_A + \vec{AB}) = \vec{v}_A \quad (3.2)$$

relazione valida per un'arbitraria scelta dei punti  $A$  e  $B$ . Analogamente, per l'accelerazione di  $B$  otteniamo

$$\vec{a}_B = \vec{a}_A \quad (3.3)$$

in definitiva, l'atto di moto traslatorio piano è descritto dalle relazioni

$$\vec{v}_B = \vec{v}_A, \quad \vec{a}_B = \vec{a}_A \quad \forall A, B \in \mathcal{C} \quad (3.4)$$

Ossia, un atto di moto rigido di traslazione corrisponde ad una distribuzione spaziale uniforme di velocità ed accelerazione.

### 3.1.2 Moto rotatorio

Il moto rotatorio piano di un corpo rigido  $\mathcal{C}$  corrisponde ad una rotazione attorno ad un asse perpendicolare al piano del moto (ossia, al piano  $\Pi$  parallelo al vettore velocità di ogni punto di  $\mathcal{C}$ ). Per descrivere tale atto di moto, consideriamo (vedi figura 3.2) il piano  $\Pi$  coincidente con il piano del foglio e scegliamo l'intersezione dell'asse di rotazione con tale piano come origine  $O$  del sistema di riferimento fisso  $\mathcal{R}(O, \hat{i}_1, \hat{i}_2, \hat{i}_3)$ .

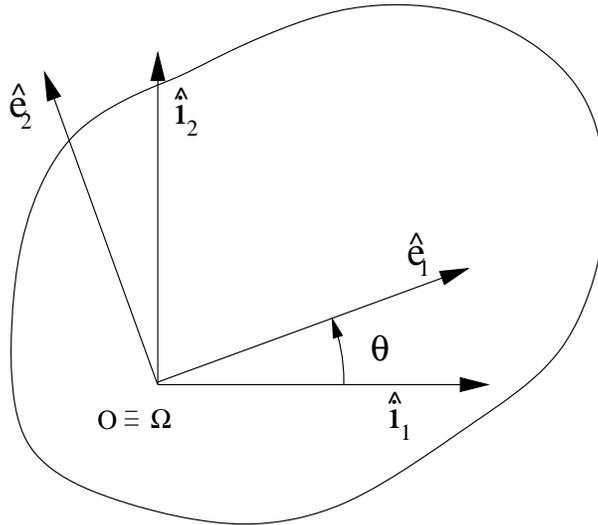


Figura 3.2: Rotazione di un corpo rigido.

Inoltre, il sistema di riferimento mobile  $\mathcal{R}_m(\Omega, \hat{e}_1, \hat{e}_2, \hat{e}_3)$  solidale con  $\mathcal{C}$  venga scelto in maniera che  $\Omega \equiv O$ . Sotto queste ipotesi, la posizione del sistema mobile  $\mathcal{R}_m$  rispetto a quello fisso è determinata univocamente dall'angolo  $\theta$ , funzione del tempo attraverso il moto di  $\mathcal{C}$ . Indichiamo con  $\vec{x}_P$  il vettore posizione del generico punto  $P$  appartenente

al corpo rispetto al sistema di riferimento fisso. Tale vettore può essere rappresentato, indifferentemente, mediante le sue componenti in  $\mathcal{R}$  o in  $\mathcal{R}_m$

$$\vec{x}_P(t) = x_1(t)\hat{i}_1 + x_2(t)\hat{i}_2 = y_1\hat{e}_1(t) + y_2\hat{e}_2(t) \quad (3.5)$$

dove

$$\begin{aligned} x_1 &= \vec{x}_P \cdot \hat{i}_1, & x_2 &= \vec{x}_P \cdot \hat{i}_2 \\ y_1 &= \vec{x}_P \cdot \hat{e}_1, & y_2 &= \vec{x}_P \cdot \hat{e}_2. \end{aligned} \quad (3.6)$$

L'equazione precedente implica che la velocità del punto  $P$  si possa rappresentare, nei due sistemi di riferimento scelti, come

$$\vec{v}_P(t) = \frac{d\vec{x}_P}{dt} = \frac{dx_1}{dt} \hat{i}_1 + \frac{dx_2}{dt} \hat{i}_2 = y_1 \frac{d\hat{e}_1}{dt} + y_2 \frac{d\hat{e}_2}{dt} \quad (3.7)$$

Nel seguito, l'espressione della velocità per un atto di moto piano rotatorio viene derivata sia a partire dalle derivate delle componenti di  $\vec{x}_P$  nel sistema di riferimento fisso  $\mathcal{R}$ , che in termini di derivate dei versori  $\hat{e}_k$  di  $\mathcal{R}_m$ , viste nel riferimento fisso  $\mathcal{R}$ . Come vedremo, tali rappresentazioni portano a risultati del tutto equivalenti.

Cominciamo col moltiplicare scalarmente la 3.5 per i versori di  $\mathcal{R}$ ,  $\hat{i}_1$  ed  $\hat{i}_2$ , ricordando che

$$\begin{aligned} \hat{e}_1 \cdot \hat{i}_1 &= \hat{e}_2 \cdot \hat{i}_2 = \cos \theta \\ \hat{e}_2 \cdot \hat{i}_1 &= -\hat{e}_1 \cdot \hat{i}_2 = -\sin \theta. \end{aligned} \quad (3.8)$$

Otteniamo

$$\begin{aligned} x_1 &= y_1 \cos \theta - y_2 \sin \theta \\ x_2 &= y_1 \sin \theta + y_2 \cos \theta \end{aligned} \quad (3.9)$$

Derivando le relazioni precedenti rispetto al tempo, si ottiene

$$\begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= -\dot{\theta}y_1 \sin \theta - \dot{\theta}y_2 \cos \theta = -\dot{\theta}x_2 \\ \frac{dx_2}{dt} &= \dot{\theta}y_1 \cos \theta - \dot{\theta}y_2 \sin \theta = \dot{\theta}x_1 \end{aligned} \quad (3.10)$$

Possiamo ora introdurre il vettore **velocità angolare**  $\vec{\omega}$

$$\vec{\omega} := \dot{\theta} \hat{i}_3 = \dot{\theta} \hat{e}_3 \quad (3.11)$$

ed ottenere dalla 3.7, tenendo conto delle 3.9 e 3.10,

$$\vec{v}_P = \vec{\omega} \times \vec{x}_P \quad (3.12)$$

e è l'espressione della velocità per un atto di moto rigido piano rotatorio. Tale espressione vale solo se l'origine del sistema fisso  $\mathcal{R}$  coincide con il punto attorno al quale ruota  $\mathcal{C}$ . La relazione 3.12 è stata ottenuta dalle derivate delle componenti di  $\vec{x}_P$  rispetto al riferimento fisso  $\mathcal{R}$ . Possiamo però ottenere la stessa relazione a partire dall'espressione della velocità in termini di derivate dei versori di base (vedi eq. 3.7). La rappresentazione dei versori di base attraverso le loro componenti nella base fissa  $\mathcal{R}$  è

$$\begin{aligned} \hat{e}_1 &= (\hat{e}_1 \cdot \hat{i}_1) \hat{i}_1 + (\hat{e}_1 \cdot \hat{i}_2) \hat{i}_2 = \cos \theta \hat{i}_1 + \sin \theta \hat{i}_2 \\ \hat{e}_2 &= (\hat{e}_2 \cdot \hat{i}_1) \hat{i}_1 + (\hat{e}_2 \cdot \hat{i}_2) \hat{i}_2 = -\sin \theta \hat{i}_1 + \cos \theta \hat{i}_2 \end{aligned} \quad (3.13)$$

che derivata fornisce

$$\begin{aligned}\frac{d\hat{e}_1}{dt} &= \dot{\theta} \left( -\sin\theta\hat{i}_1 + \cos\theta\hat{i}_2 \right) = \dot{\theta}\hat{e}_2 \\ \frac{d\hat{e}_2}{dt} &= \dot{\theta} \left( -\cos\theta\hat{i}_1 - \sin\theta\hat{i}_2 \right) = -\dot{\theta}\hat{e}_1\end{aligned}\quad (3.14)$$

Ricordando la definizione 3.11, e le relazioni che intercorrono tra i versori della base mobile, ed il fatto che il terzo vettore della base mobile è invariante rispetto al tempo, possiamo riscrivere le 3.15 nella forma

$$\begin{aligned}\frac{d\hat{e}_1}{dt} &= \vec{\omega} \times \hat{e}_1 \\ \frac{d\hat{e}_2}{dt} &= \vec{\omega} \times \hat{e}_2 \\ \frac{d\hat{e}_3}{dt} &= 0\end{aligned}\quad (3.15)$$

Le equazioni precedenti sono le **formule di Poisson** per il moto rigido bidimensionale. Esse legano la variazione temporale dei versori di base mobile alla velocità angolare  $\vec{\omega}$ , definita dalla 3.11. Sostituendo le 3.15 nella 3.7, e tenendo conto della 3.6, otteniamo nuovamente

$$\vec{v}_P = \vec{\omega} \times \vec{x}_P \quad (3.16)$$

Si noti che l'espressione precedente è stata ottenuta per un punto del corpo rigido appartenente al piano  $X_1X_2$  del sistema di riferimento fisso, scelto, quest'ultimo, parallelo al piano del moto. In generale è possibile derivare la 3.16 anche per i punti del corpo rigido che non appartengono al piano  $X_1X_2$ . Si lascia al lettore la dimostrazione di tale relazione, suggerendo per la scelta dell'origine del riferimento fisso  $\mathcal{R}$  un punto appartenente all'asse di rotazione (retta alla quale appartiene il vettore  $\vec{\omega}$ ), e ricordando che un qualsiasi punto del corpo rigido si muoverà lungo una traiettoria circolare con una velocità  $\vec{v}_P = \dot{s}\hat{t}$ .

La determinazione dell'accelerazione del punto  $P$  del corpo rigido animato da moto rotatorio, si ottiene derivando l'espressione ottenuta per la velocità

$$\vec{a}_P = \frac{d\vec{v}_P}{dt} = \frac{d\vec{\omega}}{dt} \times \vec{x}_P + \vec{\omega} \times \frac{d\vec{x}_P}{dt} = \frac{d\vec{\omega}}{dt} \times \vec{x}_P + \vec{\omega} \times \vec{v}_P. \quad (3.17)$$

Ricordando l'espressione ottenuta in precedenza per la velocità del punto  $P$ , e sostituendo nell'equazione precedente, otteniamo

$$\vec{a}_P = \frac{d\vec{\omega}}{dt} \times \vec{x}_P + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{x}_P) \quad (3.18)$$

Tale relazione può essere ulteriormente modificata tenendo conto della regola di calcolo vettoriale

$$\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = \vec{b}(\vec{a} \cdot \vec{c}) - \vec{c}(\vec{a} \cdot \vec{b}) \quad (3.19)$$

che applicata alla 3.18 fornisce

$$\vec{a}_P = \frac{d\vec{\omega}}{dt} \times \vec{x}_P - \omega^2 \vec{x}_P \quad (3.20)$$

dove  $\vec{x}_P$  è la componente del vettore  $\vec{x}_P$  parallela al vettore  $\vec{\omega}$ . È facilmente dimostrabile come, in questo caso, le due componenti dell'accelerazione date dalla 3.18 rappresentino, rispettivamente, le componenti di accelerazione tangenziale e normale (centripeta) dei punti materiali di  $\mathcal{C}$  che si muovono tutti di lungo traiettorie circolari.

**In definitiva**, l'atto di moto di un corpo rigido che ruoti attorno ad un asse fisso, è rappresentato, rispetto ad un sistema di riferimento fisso  $\mathcal{R}(O, \hat{i}_1, \hat{i}_2, \hat{i}_3)$  (con  $O \in$  all'asse di rotazione), dai seguenti campi di velocità ed accelerazione

$$\vec{v}_P = \vec{\omega} \times \vec{x}_P \quad \forall \vec{x} \in \mathcal{C}, \quad \forall t \quad (3.21)$$

$$\vec{a}_P = \frac{d\vec{\omega}}{dt} \times \vec{x}_P - \omega^2 \vec{x}_P$$

con velocità angolare definita dalla

$$\vec{\omega} = \dot{\theta} \hat{i}_3. \quad (3.22)$$

### 3.1.3 Moto generico di roto-traslazione

Un generico moto piano di un corpo rigido può essere sempre decomposto nella sovrapposizione di un moto di traslazione più un moto di rotazione. Con riferimento alla figura 3.3, è possibile osservare come, scelto arbitrariamente un punto  $\Omega \in \mathcal{C}$ , è possibile esprimere lo spostamento del corpo come la sovrapposizione di un moto di traslazione, nel quale tutti i punti si muovono come  $\Omega$ , e di una rotazione attorno a  $\Omega$  stesso. Si noti che, in realtà, la condizione  $\Omega \in \mathcal{C}$  è eccessivamente restrittiva, è può essere sostituita con la condizione che il punto  $\Omega$  sia un punto dello spazio rigidamente connesso al corpo rigido (ossia,  $\Omega$  può non essere un punto materiale del corpo, basta che sia legato rigidamente ad esso).

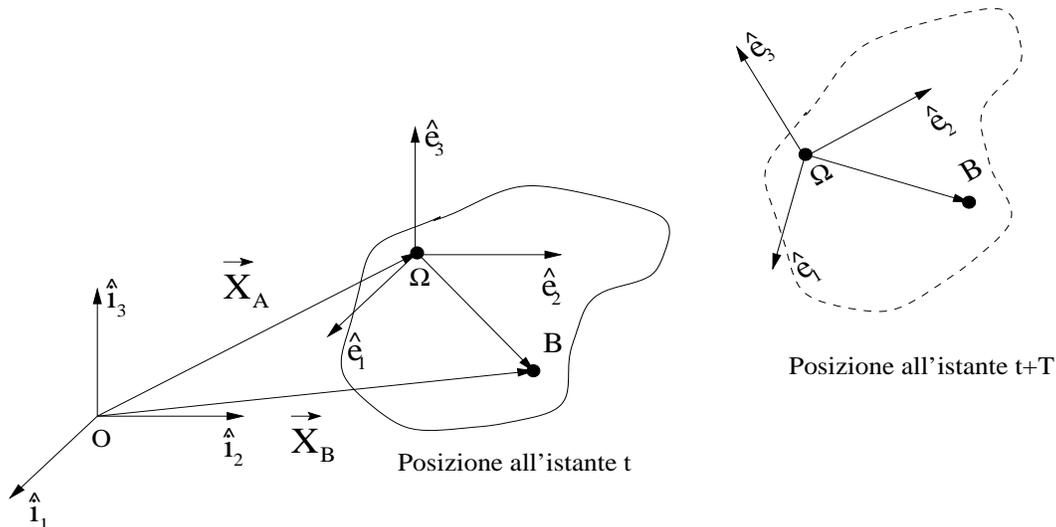


Figura 3.3: Roto-traslazione di un corpo rigido.

Da queste premesse, possiamo dedurre che i risultati ottenuti nei precedenti paragrafi ci permettono di esprimere la velocità di un generico punto  $P$  del corpo, a partire dalla

conoscenza della velocità di un punto arbitrario appartenente allo spazio connesso a  $\mathcal{C}$ , e della velocità angolare di  $\mathcal{C}$  attorno ad esso

$$\vec{v}_P = \vec{v}_\Omega + \vec{\omega} \times (\vec{x}_P - \vec{x}_\Omega) \quad (3.23)$$

Per derivare analiticamente tale risultato possiamo esprimere il vettore posizione del punto  $P$  nel sistema fisso,  $\vec{x}_P$ , in funzione del vettore posizione dell'origine del sistema mobile,  $\vec{x}_\Omega$  e del vettore posizione del punto  $P$  rispetto al sistema mobile,  $\vec{y}_P$ , ossia

$$\vec{x}_P(t) = \vec{x}_\Omega(t) + \vec{y}_P(t) \quad (3.24)$$

dove il vettore  $\vec{y}_P$  può essere espresso in termini delle sue componenti nel sistema mobile

$$\vec{y}_P(t) = y_1 \hat{e}_1(t) + y_2 \hat{e}_2(t) \quad (3.25)$$

Si noti che le componenti di  $\vec{y}_P$  rispetto alla terna mobile sono indipendenti dal tempo, mentre i versori  $\hat{e}_k$  variano a causa del moto del corpo a cui sono legati. Derivando la 3.24 ottengo

$$\vec{v}_P = \frac{d\vec{x}_P(t)}{dt} = \vec{v}_\Omega(t) + \frac{d\vec{y}_P(t)}{dt} = \vec{v}_\Omega(t) + y_1 \frac{d\hat{e}_1(t)}{dt} + y_2 \frac{d\hat{e}_2(t)}{dt} \quad (3.26)$$

Ricordando le formule di Poisson per i problemi bidimensionali (eq. 3.15), otteniamo

$$\vec{v}_P = \vec{v}_\Omega(t) + \sum_{k=1}^3 y_k (\vec{\omega} \times \hat{e}_k) = \vec{v}_\Omega(t) + \vec{\omega} \times \vec{y}_P \quad (3.27)$$

che, in virtù della 3.24, è equivalente alla 3.23. L'accelerazione si ottiene, naturalmente, derivando l'equazione precedente

$$\vec{a}_P = \frac{d\vec{v}_P}{dt} = \vec{a}_\Omega + \frac{d}{dt}(\vec{\omega} \times \vec{y}_P) = \vec{a}_\Omega + \dot{\vec{\omega}} \times \vec{y}_P + \vec{\omega} \times \frac{d\vec{y}_P}{dt}. \quad (3.28)$$

Utilizzando le eqq. 3.24 e 3.27, ottengo

$$\begin{aligned} \vec{a}_P &= \vec{a}_\Omega + \dot{\vec{\omega}} \times (\vec{x}_P - \vec{x}_\Omega) + \vec{\omega} \times (\vec{v}_P - \vec{v}_\Omega) \\ &= \vec{a}_\Omega + \dot{\vec{\omega}} \times (\vec{x}_P - \vec{x}_\Omega) + \vec{\omega} \times [\vec{\omega} \times (\vec{x}_P - \vec{x}_\Omega)] \end{aligned} \quad (3.29)$$

Notando che, necessariamente,  $\vec{\omega} \times \vec{y}_P = 0$  e  $\vec{\omega} \cdot \vec{y}_P = 0$ , otteniamo

$$\vec{a}_P = \vec{a}_\Omega + \dot{\vec{\omega}} \times (\vec{x}_P - \vec{x}_\Omega) - \omega^2 \vec{y}_P \quad (3.30)$$

In questo caso, essendo presente il termine di traslazione, la componente di accelerazione  $\dot{\vec{\omega}} \times \vec{y}_P$  non rappresenta la componente tangenziale e  $-\omega^2 \vec{y}_P$  non rappresenta la componente normale alla traiettoria del punto.

### 3.1.4 Centro istantaneo di rotazione

Si consideri lo spazio connesso ad un corpo rigido animato da un moto di roto-traslazione. Esiste sempre un punto di tale spazio caratterizzato dall'aver velocità nulla ad un dato istante. Tale punto, che può essere a distanza finita o infinita dal corpo e, in generale, varia istante per istante, viene chiamato **centro istantaneo di rotazione** del corpo rigido  $\mathcal{C}$ . La sua posizione può essere determinata risolvendo l'equazione

$$\vec{v}_C = \vec{v}_\Omega + \vec{\omega} \times (\vec{x}_C - \vec{x}_\Omega) = 0 \quad (3.31)$$

nell'incognita  $\vec{x}_C$ . Trattandosi di moto piano, l'equazione precedente equivale alla condizione

$$\vec{\omega} \times \vec{v}_C = \vec{\omega} \times \vec{v}_\Omega + \vec{\omega} \times [\vec{\omega} \times (\vec{x}_C - \vec{x}_\Omega)] = 0 \quad (3.32)$$

Operando sul triplo prodotto come nel paragrafo precedente, otteniamo

$$\vec{\omega} \times \vec{v}_\Omega - \omega^2 (\vec{x}_C - \vec{x}_\Omega) = 0 \quad (3.33)$$

che ci permette di trovare la soluzione

$$\vec{x}_C = \frac{\vec{\omega} \times \vec{v}_\Omega}{\omega^2} + \vec{x}_\Omega \quad (3.34)$$

Se ora scegliamo il punto  $C$  come polo rispetto al quale esprimere l'atto di moto del corpo rigido  $\mathcal{C}$ , essendo, per definizione,  $\vec{v}_C = 0$ , otteniamo

$$\vec{v}_P = \vec{\omega} \times \vec{C}P \quad (3.35)$$

dove  $\vec{C}P$  è il vettore che porta dal centro istantaneo di rotazione al punto in esame. Da tale relazione si evince che la velocità di un qualsiasi punto del corpo è, istante per istante, ortogonale alla retta che unisce il punto stesso al c.i.r. Da tale proprietà possiamo derivare un metodo per la determinazione della posizione del c.i.r. a partire dalla conoscenza della velocità di almeno due punti del corpo. Infatti, dalla 3.35 segue che il c.i.r. deve necessariamente corrispondere all'intersezione delle rette ortogonali al vettore velocità in due (o più) punti di  $\mathcal{C}$  (è il caso dei punti  $F$  e  $G$  in figura 3.4).

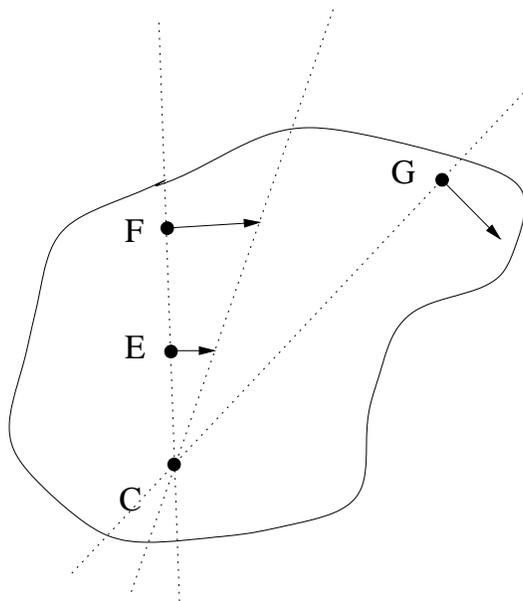


Figura 3.4: Determinazione per via grafica del centro istantaneo di rotazione.

Inoltre, se due punti hanno vettori velocità paralleli e sono situati lungo la retta ortogonale a tali vettori (vedi punti  $F$  e  $E$  in figura 3.4) è possibile dimostrare, partendo dalla 3.35, che il c.i.r. si trova nell'intersezione tra la retta passante per gli estremi liberi dei vettori velocità e la retta passante per i due punti.<sup>1</sup>

<sup>1</sup>dimostrare per esercizio, con riferimento a quanto detto a lezione, partendo dalle relazioni

$$\vec{v}_E = \vec{\omega} \times \vec{C}E = v_E \hat{i} \quad (3.36)$$

Abbiamo visto che il centro istantaneo di rotazione varia durante il moto del corpo. È possibile individuare due curve dello spazio definite come il luogo dei punti occupati dal c.i.r. durante il moto, nel riferimento fisso  $\mathcal{R}$  ed in quello mobile  $\mathcal{R}_m$ . Tali curve vengono chiamate **base** e **rulletta**. È possibile dimostrare che qualsiasi atto di moto rigido può essere ottenuto attraverso il puro rotolamento della rulletta sulla base.

### 3.2 Moti tridimensionali di un corpo rigido

Nel caso più generale di moto tridimensionale di un corpo rigido, possiamo, in analogia con quanto fatto per i moti piani, decomporre l'atto di moto in una traslazione di un punto arbitrario dello spazio connesso con il corpo, più un moto sferico attorno a tale punto. Definiamo *moto sferico* un moto rigido attorno ad un punto fisso. Il teorema di Eulero ci assicura che un generico atto di moto attorno ad un punto fisso equivale ad una rotazione attorno ad un asse passante per quel punto. Ciò significa che qualsiasi moto sferico può essere considerato una sequenza di rotazioni attorno ad un asse passante per il centro del moto, con direzione variabile nel tempo. Da queste considerazioni possiamo evincere che la velocità di un punto  $P$ , in un generico atto di moto rigido tridimensionale, può essere considerato come la sovrapposizione di una traslazione con velocità pari a quella di un secondo punto  $Q$ , più una rotazione attorno ad un asse passante per  $Q$  con velocità angolare  $\vec{\omega}$  diretta lungo tale asse.

È possibile dimostrare che, anche in  $3D$  valgono le **formule di Poisson**

$$\frac{d\hat{e}_k}{dt} = \vec{\omega} \times \hat{e}_k, \quad \text{per } k = 1, 2, 3 \quad (3.37)$$

dove  $\vec{\omega}$  è definita come

$$\omega_1 := \frac{d\hat{e}_2}{dt} \cdot \hat{e}_3 = -\frac{d\hat{e}_3}{dt} \cdot \hat{e}_2 \quad (3.38)$$

$$\omega_2 := \frac{d\hat{e}_3}{dt} \cdot \hat{e}_1 = -\frac{d\hat{e}_1}{dt} \cdot \hat{e}_3 \quad (3.39)$$

$$\omega_3 := \frac{d\hat{e}_1}{dt} \cdot \hat{e}_2 = -\frac{d\hat{e}_2}{dt} \cdot \hat{e}_1 \quad (3.40)$$

ed ha, in generale, direzione variabile nel tempo, a differenza di quanto avviene nel caso bidimensionale.

Partendo dall'espressione della posizione del generico punto  $P$  dello spazio connesso a  $\mathcal{C}$  rispetto ad un riferimento fisso  $\mathcal{R}$ , in funzione del vettore posizione  $\vec{y}_P$  dello stesso punto rispetto ad un terna mobile  $\mathcal{R}_m(\Omega, \hat{e}_1, \hat{e}_2, \hat{e}_3)$  solidale con il corpo rigido,

$$\vec{x}_P = \vec{x}_\Omega + \sum_{k=1}^3 y_k \hat{e}_k \quad (3.41)$$

derivando rispetto al tempo, e tenendo conto dei risultati ottenuti nei paragrafi precedenti, otteniamo, per la velocità e l'accelerazione di un generico atto di moto rigido tridimensionale,

$$\vec{v}_P = \vec{v}_\Omega(t) + \vec{\omega} \times (\vec{x}_P - \vec{x}_\Omega) \quad (3.42)$$

---


$$\vec{v}_F = \vec{\omega} \times \vec{CF} = v_F \hat{i}$$

$$\begin{aligned}
\vec{a}_P &= \vec{a}_\Omega + \dot{\vec{\omega}} \times (\vec{x}_P - \vec{x}_\Omega) + \vec{\omega} \times [\vec{\omega} \times (\vec{x}_P - \vec{x}_\Omega)] \\
&= \vec{a}_\Omega + \dot{\vec{\omega}} \times (\vec{x}_P - \vec{x}_\Omega) - \omega^2 \vec{y}_P^{(N)}
\end{aligned} \tag{3.43}$$

dove  $\vec{y}_P^{(N)}$  rappresenta il vettore componente di  $\vec{y}_P$  in direzione normale ad  $\vec{\omega}$ .

Possiamo definire:

- **moto traslatorio** - atto di moto rigido nel quale una generica terna solidale al corpo in moto mantiene orientamento invariante nel tempo;
- **moto rototraslatorio** - atto di moto rigido nel quale la direzione del vettore  $\vec{\omega}$  ha direzione invariante nel tempo;
- **moto elicoidale** - atto di moto rigido nel quale tutti i punti di una retta solidale al corpo hanno velocità parallela alla retta stessa;
- **moto di precessione** - se in un atto di moto rigido tridimensionale, con un punto fisso  $P$ , esiste una retta  $r_m$  solidale al corpo in moto che forma un angolo costante nel tempo con una retta  $r_f$  solidale con un sistema di riferimento fisso, allora il moto è detto di precessione.

Il **teorema di Mozzi** afferma che un atto di moto rigido tridimensionale generico possiede istante per istante *carattere elicoidale*. Ciò significa che esiste un atto di moto elicoidale (chiamato moto elicoidale *tangente*), variabile istante per istante, corrispondente ad una distribuzione di velocità coincidente con quella propria dell'atto di moto dato, all'istante considerato.

## Capitolo 4

# Moti relativi

In generale, un osservatore solidale con un sistema di riferimento  $\mathcal{R}_1$  vede un corpo muoversi in maniera differente rispetto ad un osservatore che sia solidale con un secondo sistema di riferimento  $\mathcal{R}_2$ , in moto rispetto al primo. Pensate, ad esempio, ad un automobilista che osservi un oggetto poggiato sul cruscotto della propria auto. Egli è istintivamente portato a valutare la posizione (e l'eventuale variazione temporale di questa) rispetto allo spazio connesso con l'abitacolo. Se la posizione dell'oggetto sul cruscotto non varia nel tempo, questo osservatore particolare potrebbe concludere che l'oggetto è fermo. Ciò è vero solo rispetto al sistema di riferimento solidale con l'abitacolo di quella autovettura. Infatti, un secondo osservatore fermo sul ciglio della strada vede l'oggetto muoversi con la velocità e l'accelerazione possedute dalla macchina, rispetto al sistema al quale è solidale (in tal caso, il sistema solidale con la superficie terrestre). Lo scopo della teoria dei moti relativi è determinare la relazione che intercorre tra i due diversi punti di vista.

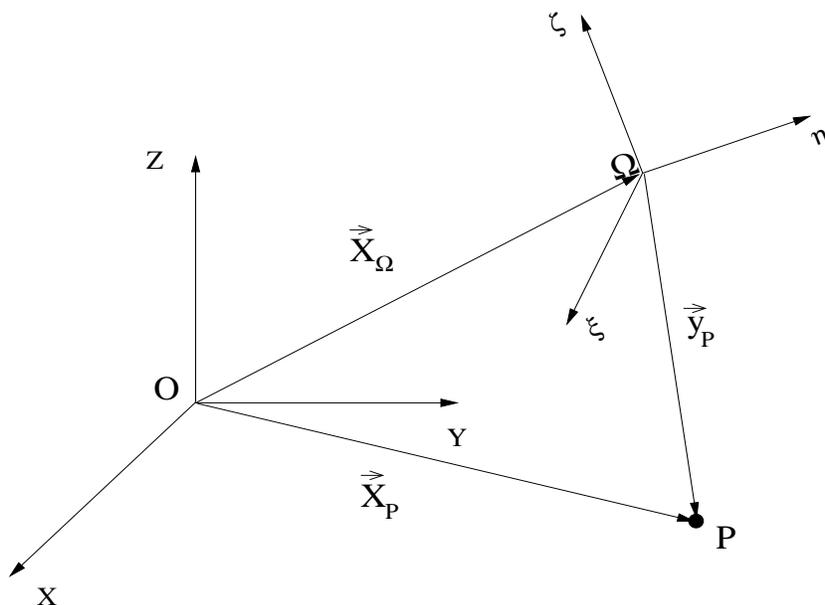


Figura 4.1: Sistemi di riferimento assoluto e relativo.

Nel seguito, identificheremo uno dei due sistemi di riferimento come sistema **assoluto**,  $\mathcal{R}_a(O, \hat{i}_1, \hat{i}_2, \hat{i}_3)$ , e velocità ed accelerazioni rispetto ad esso verranno chiamate *assolute*; il secondo sistema di riferimento verrà chiamato riferimento **relativo**,  $\mathcal{R}_r(\Omega, \hat{e}_1, \hat{e}_2, \hat{e}_3)$ ,

e velocità ed accelerazioni rispetto ad esso verranno chiamate *relative*. Le velocità e le accelerazioni dei punti dello spazio connesso con il riferimento  $\mathcal{R}_r$ , rispetto al riferimento assoluto  $\mathcal{R}_a$ , verranno chiamate di **trascinamento**.

Consideriamo, quindi, un punto materiale  $P$  in moto nello spazio tridimensionale. La sua posizione rispetto al sistema di riferimento  $\mathcal{R}_a$  sia individuata dal vettore  $\vec{x}_P$ , mentre quella rispetto al sistema  $\mathcal{R}_r$  sia individuata dal vettore  $\vec{y}_P$ . In generale, durante il moto di  $P$ , avremo

$$\vec{x}_P(t) = \vec{x}_\Omega(t) + \vec{y}_P(t) \quad (4.1)$$

dove  $\vec{x}_\Omega$  rappresenta la posizione, rispetto ad  $\mathcal{R}_a$ , dell'origine  $\Omega$  del riferimento relativo. La rappresentazione di  $\vec{y}_P$  rispetto a  $\mathcal{R}_r$  è

$$\vec{y}_P(t) = y_1(t) \hat{e}_1(t) + y_2(t) \hat{e}_2(t) + y_3(t) \hat{e}_3(t) \quad (4.2)$$

nella quale viene evidenziata la dipendenza dal tempo anche dei versori  $\hat{e}_k$ . Tale caratteristica deve essere tenuta in conto nel momento in cui si voglia derivare la relazione tra le velocità assolute e relative del punto  $P$ . Derivando rispetto al tempo la 4.1, otteniamo

$$\vec{v}_{P_a} = \frac{d\vec{x}_P(t)}{dt} = \vec{v}_\Omega + \sum_{k=1}^3 \dot{y}_k \hat{e}_k + \sum_{k=1}^3 y_k \frac{d\hat{e}_k}{dt} \quad (4.3)$$

Ricordando le formule di Poisson, essendo  $\vec{\omega} = \vec{\omega}_{tr}$  la velocità angolare di  $\mathcal{R}_r$  rispetto a  $\mathcal{R}_a$ , otteniamo immediatamente

$$\vec{v}_{P_a} = \vec{v}_\Omega + \vec{\omega} \times \vec{y}_P + \sum_{k=1}^3 \dot{y}_k \hat{e}_k \quad (4.4)$$

L'equazione precedente rappresenta il legame che intercorre tra velocità assoluta e relativa di  $P$ . I primi due termini della 4.4 sono le velocità del punto dello spazio connesso a  $\mathcal{R}_r$  occupato da  $P$ , dovute, rispettivamente alla traslazione ed alla rotazione di  $\mathcal{R}_r$  rispetto a  $\mathcal{R}_a$ . La loro somma rappresenta la velocità di trascinamento di  $P$ . L'ultimo termine è proprio la velocità di  $P$  osservata da un osservatore solidale con il riferimento relativo e rappresenta quindi la velocità relativa del punto. Definiamo quindi

$$\vec{v}_{P_r} = \sum_{k=1}^3 \dot{y}_k \hat{e}_k, \quad \vec{v}_{P_{tr}} = \vec{v}_\Omega + \vec{\omega} \times \vec{y}_P. \quad (4.5)$$

In definitiva, la velocità di un punto materiale  $P$  rispetto al sistema  $\mathcal{R}_a$  è sempre uguale alla somma della velocità del punto stesso rispetto al riferimento relativo  $\mathcal{R}_r$  e la velocità del punto dello spazio connesso con  $\mathcal{R}_r$  per il quale transita  $P$ , ossia

$$\vec{v}_{P_a} = \vec{v}_{P_r} + \vec{v}_{P_{tr}}. \quad (4.6)$$

L'accelerazione assoluta di  $P$ ,  $\vec{a}_P$ , può essere ottenuta derivando l'espressione della velocità, per ottenere

$$\vec{a}_{P_a} = \frac{d\vec{v}_{P_a}}{dt} = \vec{a}_\Omega + \dot{\vec{\omega}}_{tr} \times \vec{y}_P + \vec{\omega}_{tr} \times \frac{d\vec{y}_P}{dt} + \sum_{k=1}^3 \dot{y}_k \frac{d\hat{e}_k}{dt} + \sum_{k=1}^3 \ddot{y}_k \hat{e}_k \quad (4.7)$$

dove  $\dot{\vec{\omega}}_{tr}$  rappresenta l'accelerazione angolare di  $\mathcal{R}_r$  rispetto a  $\mathcal{R}_a$ . D'altro canto,

$$\frac{d\vec{y}_P}{dt} = \sum_{k=1}^3 \left( \dot{y}_k \hat{e}_k + y_k \frac{d\hat{e}_k}{dt} \right) \quad (4.8)$$

e quindi, utilizzando le formule di Poisson, possiamo scrivere l'accelerazione assoluta del punto  $P$  nella forma

$$\vec{a}_{P_a} = \vec{a}_\Omega + \dot{\vec{\omega}}_{tr} \times \vec{y}_P + \vec{\omega}_{tr} \times (\vec{\omega}_{tr} \times \vec{y}_P) + 2 \vec{\omega}_{tr} \times \vec{v}_{P_r} + \sum_{k=1}^3 \ddot{y}_k \hat{e}_k \quad (4.9)$$

Il significato dei termini contenuti nell'equazione precedente è:

$\vec{a}_\Omega + \dot{\vec{\omega}}_{tr} \times \vec{y}_P + \vec{\omega}_{tr} \times (\vec{\omega}_{tr} \times \vec{y}_P)$	Rappresenta l'accelerazione del punto dello spazio connesso con il riferimento relativo $\mathcal{R}_r$ che transita per il punto $P$ . È l'accelerazione di <b>trascinamento</b> , $\vec{a}_{P_{tr}}$ .
$\sum_{k=1}^3 \ddot{y}_k \hat{e}_k$	Rappresenta l'accelerazione del punto $P$ osservata dal riferimento relativo $\mathcal{R}_r$ . È l'accelerazione <b>relativa</b> di $P$ , $\vec{a}_{P_r}$ .
$2 \vec{\omega}_{tr} \times \vec{v}_{P_r}$	È una componente di accelerazione che esiste solo il punto $P$ ha velocità relativa $\vec{v}_{P_r}$ non nulla e non parallela ad $\vec{\omega}_{tr}$ . Viene chiamata accelerazione <b>complementare</b> o di <b>Coriolis</b> , $\vec{a}_{P_c}$ .

Quindi, in definitiva, l'accelerazione assoluta di  $P$  può essere espressa come la sovrapposizione di accelerazione di trascinamento, accelerazione relativa ed accelerazione di Coriolis

$$\vec{a}_{P_a} = \vec{a}_{P_{tr}} + \vec{a}_{P_r} + \vec{a}_{P_c}. \quad (4.10)$$

Le relazioni precedenti valgono, ovviamente, anche per i punti di un corpo rigido  $\mathcal{C}$  in moto, quando osservato dai riferimenti  $\mathcal{R}_a$  e  $\mathcal{R}_r$ . In particolare, scelti due generici punti  $P$  e  $Q$  appartenenti a  $\mathcal{C}$ , possiamo scrivere (ricordando la relazione che descrive l'atto di moto rigido):

$$\begin{aligned} \vec{v}_{P_a} &= \vec{v}_{Q_a} + \vec{\omega}_a \times \vec{QP} && \text{atto di moto rigido di } \mathcal{C} \text{ in } \mathcal{R}_a \\ \vec{v}_{P_r} &= \vec{v}_{Q_r} + \vec{\omega}_r \times \vec{QP} && \text{atto di moto rigido di } \mathcal{C} \text{ in } \mathcal{R}_r \\ \vec{v}_{P_{tr}} &= \vec{v}_{Q_{tr}} + \vec{\omega}_{tr} \times \vec{QP} && \text{atto di moto rigido di } \mathcal{R}_r \text{ in } \mathcal{R}_a \end{aligned}$$

Si noti che le  $\vec{v}_{P_{tr}}$  e  $\vec{v}_{Q_{tr}}$  rappresentano le velocità rispetto a  $\mathcal{R}_a$  dei punti dello spazio connesso con  $\mathcal{R}_r$  nei quali transitano  $P$  e  $Q$ . Applicando la 4.6 ad entrambi i punti, otteniamo

$$\vec{\omega}_a \times \vec{QP} = \vec{\omega}_r \times \vec{QP} + \vec{\omega}_{tr} \times \vec{QP} \quad (4.11)$$

Data l'arbitrarietà della scelta di  $P$  e  $Q$ , segue necessariamente che

$$\vec{\omega}_a = \vec{\omega}_r + \vec{\omega}_{tr} \quad (4.12)$$

che stabilisce la relazione (formalmente identica alla 4.6) che lega le velocità angolari osservate nei due sistemi di riferimento.

## 4.1 Equazione della dinamica in sistemi non inerziali

Lo studio della dinamica di un punto materiale  $P$  in un sistema inerziale  $\mathcal{R}_i$  prende le mosse dalla seconda legge di Newton, secondo la quale il prodotto di massa per accelerazione eguaglia la risultante di forze attive e vincolari

$$m \vec{a}_P = \vec{f} + \vec{r} \quad (4.13)$$

Se tuttavia, vogliamo osservare il moto del punto  $P$  da un sistema  $\mathcal{R}_r$ , in moto arbitrario rispetto ad  $\mathcal{R}_i$ , dobbiamo tener conto della relazione che intercorre tra l'accelerazione assoluta osservata in  $\mathcal{R}_i$  (che è quella che deve essere utilizzata nella 4.13) e quella relativa, osservata in  $\mathcal{R}_r$ . Utilizzando la 4.10, la 4.13 diventa

$$m (\vec{a}_{P_{tr}} + \vec{a}_{P_r} + \vec{a}_{P_c}) = \vec{f} + \vec{r} \quad (4.14)$$

che può essere riscritta nella forma

$$m \vec{a}_{P_r} = \vec{f} + \vec{r} - m \vec{a}_{P_{tr}} - m \vec{a}_{P_c} = \vec{f} + \vec{r} + \vec{f}_{app} \quad (4.15)$$

dove sono state introdotte le **forze apparenti**,  $\vec{f}_{app}$ , costituite da forze apparenti di trascinamento  $-m \vec{a}_{P_{tr}}$ , e forza di Coriolis  $-m \vec{a}_{P_c}$

$$\vec{f}_{app} = -m \vec{a}_{P_{tr}} - m \vec{a}_{P_c}. \quad (4.16)$$

Tali forze vengono chiamate apparenti perchè rappresentano le sollecitazioni alle quali *sembra* essere sottoposto il corpo quando osservato dal sistema di riferimento relativo. Supponiamo, ad esempio, di trovarci all'interno di un'automobile in accelerazioni lungo un rettilineo. Tutti sappiamo bene che, in tali condizioni, avvertiamo una forza che ci schiaccia contro il sedile, tanto più forte quanto più è elevata l'accelerazione. In realtà non esiste alcun corpo che eserciti su di noi questa forza, ma è semplicemente il risultato della nostra inerzia a subire una modifica del nostro stato di quiete o moto rettilineo uniforme.

Si noti che tra le forze apparenti di trascinamento compare un termine pari a  $m \omega^2 \vec{y}_P^{(N)}$ , essendo  $\vec{y}_P^{(N)}$  la componente del vettore posizione nel sistema di riferimento relativo ortogonale alla direzione di  $\vec{\omega}$ . Tale forza è del tipo

$$\vec{f}_{cent} = \psi(r) \hat{r}, \quad \text{con} \quad \vec{r} = \vec{y}_P^{(N)},$$

dipende solo dalla posizione del punto  $P$  ed è, quindi, conservativa. Essa è diretta ortogonalmente all'asse di rotazione lungo la congiungente tale asse con  $P$ , nel verso che si allontana dall'asse stesso e per questo viene chiamata *centrifuga*. Definendo come verso positivo in direzione radiale quello concorde con la forza, l'energia potenziale ad essa associata è  $\mathcal{U}_{cent} = -1/2 m \omega^2 r^2$ , essendo  $r$  la distanza di  $P$  dall'asse.

La forza apparente di Coriolis è per definizione ortogonale alla velocità relativa del punto  $P$ . Di conseguenza, nel moto rispetto al sistema di riferimento relativo essa non compie lavoro (è sempre ortogonale allo spostamento di  $P$ ), e l'energia meccanica si conserva anche se la forza non è conservativa.

## 4.2 Esempio applicativo

Cerchiamo ora di capire come la scelta del riferimento nel quale studiamo un fenomeno meccanico modifichi la rappresentazione del fenomeno stesso ma non la sua essenza.

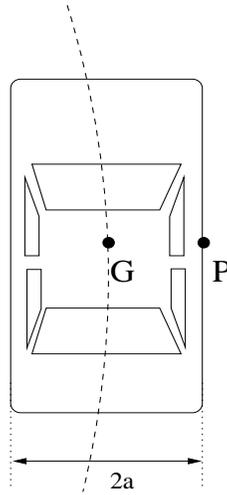


Figura 4.2:

Consideriamo un'automobile che si muova lungo una traiettoria circolare di raggio  $R$ , con accelerazione diversa da zero. Supponiamo di voler esaminare l'accelerazione di un punto  $P$  appartenente all'auto situato in corrispondenza della posizione del centro geometrico  $G$  della sua pianta, sul lato esterno alla curva (vedi fig. 4.2).

Scelto un sistema di riferimento inerziale  $\mathcal{R}(O, \hat{i}, \hat{j}, \hat{k})$ , abbiamo diverse possibilità di scelta per il sistema relativo. Esaminiamo le seguenti tre possibilità :

1. l'origine  $\Omega$  del sistema di riferimento mobile coincide con l'origine  $O$  di quello fisso, e l'asse  $\hat{e}_1$  passa per  $G \Rightarrow \vec{x}_\Omega = 0, \vec{y}_P = (R + a)\hat{e}_1$ ;

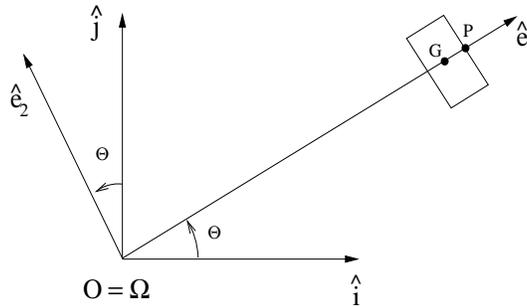


Figura 4.3:

2. l'origine  $\Omega$  del sistema di riferimento mobile coincide con  $G$  e gli assi del sistema mobile sono solidali con il corpo (ruotano e traslano con esso)  $\Rightarrow \vec{x}_\Omega = R \cos \theta \hat{i} + R \sin \theta \hat{j}$  e  $\vec{y}_P = a \hat{e}_1$ ;
3. l'origine  $\Omega$  del sistema di riferimento mobile coincide con  $G$  e gli assi del sistema mobile sono sempre paralleli a quelli del sistema fisso (il sistema mobile non è solidale con il corpo, ma trasla con il suo centro geometrico)  $\Rightarrow \vec{y}_P = a \cos \theta \hat{e}_1 + a \sin \theta \hat{e}_2, \vec{x}_\Omega = R \cos \theta \hat{i} + R \sin \theta \hat{j}, \vec{\omega}_{tr} = 0$

Osservando il fenomeno in ognuno dei tre riferimenti relativi descritti, otterremo differenti rappresentazioni per l'accelerazione assoluta del punto  $P$ . Tuttavia, ognuna di queste rappresentazioni (nonchè tutte quelle ottenute utilizzando altri possibili riferimenti relativi) deve fornire lo stesso risultato finale, in quanto la scelta del riferimento relativo non

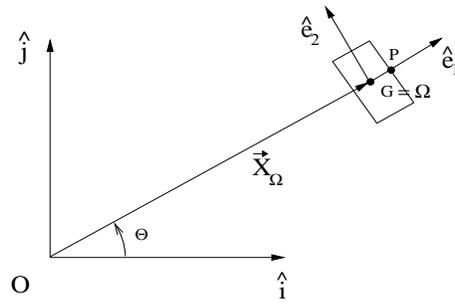


Figura 4.4:

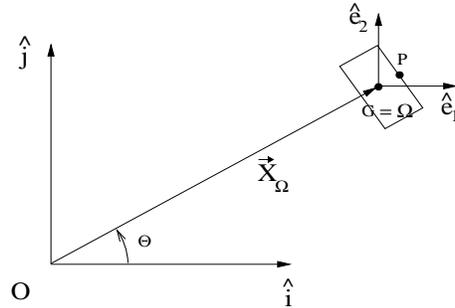


Figura 4.5:

influenza il valore dell'accelerazione assoluta di  $P$ . Per le componenti dell'accelerazione nei vari casi si ha:

	$\vec{a}_\Omega$	$\vec{\omega} \times \vec{y}_P$	$\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{y}_P)$	$2\vec{\omega} \times \vec{v}_r$	$\vec{a}_r$
caso 1	0	$\dot{\omega}(R+a)\hat{e}_2$	$-\omega^2(R+a)\hat{e}_1$	0	0
caso 2	$\dot{\omega}R\hat{e}_2 - \omega^2R\hat{e}_1$	$\dot{\omega}a\hat{e}_2$	$-\omega^2a\hat{e}_1$	0	0
caso 3	$\dot{\omega}R\hat{t} - \omega^2R\hat{n}$	0	0	0	$\dot{\omega}a\hat{t} + \omega^2a\hat{n}$

dove con  $\hat{t}$  e  $\hat{n}$  indichiamo i versori tangente e normale alla traiettoria del centro geometrico  $G$ . Considerando che, per le scelte fatte, il versore  $\hat{t}$  corrisponde al versore  $\hat{e}_2$  dei primi due sistemi di riferimento, e che  $\hat{n}$  corrisponde a  $-\hat{e}_1$ , è immediato verificare che le tre diverse rappresentazioni sono del tutto equivalenti.

## Capitolo 5

# Dinamica del corpo rigido

### 5.1 Equazioni cardinali della dinamica.

In questo capitolo affrontiamo lo studio della dinamica di un corpo rigido, definito come una distribuzione spaziale di massa i cui punti materiali devono mantenere invariate le loro distanze relative durante il moto. Ci occuperemo, in particolare, di corpi bidimensionali piani (o *lamine*) animati da moti  $2D$ . Sotto queste ipotesi, la configurazione spaziale di un tale corpo può essere individuata conoscendo la posizione di un qualsiasi suo punto e l'orientamento di una generica retta passante per esso. Ciò significa che un corpo rigido nel piano possiede **3 gradi di libertà**. È quindi necessario, per conoscere il moto del corpo, conoscere l'andamento temporale di tre parametri indipendenti. Le equazioni che governano la dinamica del corpo sono le equazioni di *conservazione della quantità di moto*  $\vec{q}$  e del *momento della quantità di moto*  $\vec{h}_o$ , rispetto ad un generico polo  $O$

$$\frac{d\vec{q}}{dt} = \vec{f}^E, \quad (5.1)$$

$$\frac{d\vec{h}_o}{dt} = \vec{m}^E - m \vec{v}_o \times \vec{v}_G. \quad (5.2)$$

essendo  $\vec{v}_G$  e  $\vec{v}_o$  le velocità, rispettivamente, di centro di massa e polo dei momenti. Le precedenti equazioni rappresentano le **equazioni cardinali** della dinamica. Nella forma 5.1 e 5.2 sono valide per un generico moto tridimensionale di un corpo ed hanno un significato analogo a quello descritto nel capitolo 2.

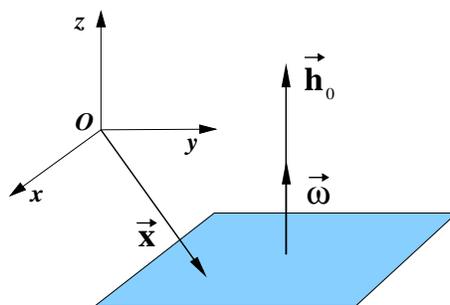


Figura 5.1:

Tuttavia, nel caso di moto bidimensionale di una lamina, le 5.1 e 5.2 corrispondono a tre equazioni scalari in quanto, definita una terna  $\mathcal{R}(O, \hat{i}, \hat{j}, \hat{k})$  con versori  $\hat{i}$  e  $\hat{j}$  nel piano

della lamina, si ha, necessariamente,

$$\vec{q} = q_x \hat{i} + q_y \hat{j}, \quad \vec{h}_o = h_o \hat{k} \quad (5.3)$$

Per poter utilizzare le equazioni 5.1 e 5.2 nell'analisi dinamica di corpi rigidi è necessario estendere le definizioni viste nel Cap. 2 a distribuzioni continue di massa ed imporre che il moto dei punti materiali sia compatibile con l'atto di moto descritto nel Cap. 3. Per quanto riguarda il primo punto possiamo considerare un solido continuo come un sistema particellare costituito dall'unione di  $N$  volumi elementari  $\Delta\mathcal{V}_k$  di massa  $\Delta m_k = \rho \Delta\mathcal{V}_k$ , essendo  $\rho$  l'intensità volumetrica. Le definizioni introdotte nel capitolo 2 possono estese mediante l'operazione di limite per  $N \rightarrow \infty$ .

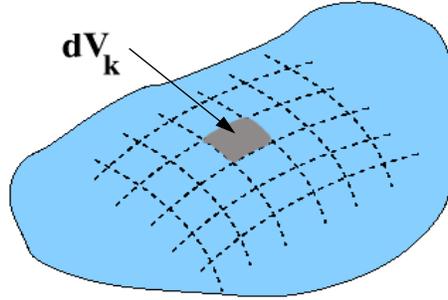


Figura 5.2:

La tabella 5.1 riassume le definizioni delle principali grandezze introdotte nel Cap. 2 per il caso di distribuzioni continue di massa.

<b>massa</b>	$m = \lim_{N \rightarrow \infty} \left[ \sum_{k=1}^N \rho \Delta\mathcal{V}_k \right] = \iiint_{\mathcal{V}} \rho \, d\mathcal{V}$
<b>centro di massa</b>	$\vec{x}_G = \frac{1}{m} \lim_{N \rightarrow \infty} \left[ \sum_{k=1}^N \vec{x}_k \rho \Delta\mathcal{V}_k \right] = \frac{1}{m} \iiint_{\mathcal{V}} \rho \, \vec{x} \, d\mathcal{V}$
<b>quantità di moto</b>	$\vec{q} = \lim_{N \rightarrow \infty} \left[ \sum_{k=1}^N \vec{v}_k \rho \Delta\mathcal{V}_k \right] = \iiint_{\mathcal{V}} \rho \, \vec{v} \, d\mathcal{V}$
<b>momento della quantità di moto</b>	$\vec{h}_o = \lim_{N \rightarrow \infty} \left[ \sum_{k=1}^N (\vec{x}_k - \vec{x}_o) \times \vec{v}_k \rho \Delta\mathcal{V}_k \right] = \iiint_{\mathcal{V}} \rho (\vec{x} - \vec{x}_o) \times \vec{v} \, d\mathcal{V}$
<b>energia cinetica</b>	$\mathcal{T} = \lim_{N \rightarrow \infty} \left[ \sum_{k=1}^N \frac{1}{2} (\vec{v}_k \cdot \vec{v}_k) \rho \Delta\mathcal{V}_k \right] = \iiint_{\mathcal{V}} \frac{1}{2} \rho v^2 \, d\mathcal{V}$

Valgono, inoltre, le relazioni

$$\iiint_{\mathcal{V}} \rho (\vec{x} - \vec{x}_G) d\mathcal{V} = 0, \quad \vec{q} = m\vec{v}_G \quad (5.4)$$

Le relazioni in tabella 5.1 sono valide per ogni corpo continuo (solido, fluido, gas). L'ulteriore vincolo di corpo rigido impone che i punti del corpo si muovano compatibilmente con l'atto di moto descritto nel Cap. 3. Quindi, per il generico punto materiale  $P$  appartenente al corpo si ha

$$\vec{v}_P = \vec{v}_o + \vec{\omega} \times \vec{r} \quad (5.5)$$

con  $\vec{r} = \vec{x} - \vec{x}_o$ . Sostituendo nell'espressione del momento della quantità di moto rispetto al polo  $O$ , ottengo

$$\begin{aligned} \vec{h}_o &= \iiint_{\mathcal{V}} \rho \vec{r} \times \vec{v} d\mathcal{V} = \iiint_{\mathcal{V}} \rho \vec{r} \times (\vec{v}_o + \vec{\omega} \times \vec{r}) d\mathcal{V} \\ &= \iiint_{\mathcal{V}} \rho \vec{r} \times \vec{v}_o d\mathcal{V} + \iiint_{\mathcal{V}} \rho \vec{r} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}) d\mathcal{V} \end{aligned} \quad (5.6)$$

Tenendo conto dell'indipendenza di  $\vec{v}_o$  dalla variabile di integrazione, applicando la decomposizione  $\vec{r} = \vec{r}_{OG} + \vec{r}_G$ , con  $\vec{r}_{OG} = \vec{x}_o - \vec{x}_G$ , e ricordando la 5.4, il primo integrale dell'equazione 5.6 porta alla definizione della

$$\vec{g}_o = m \vec{r}_{OG} \times \vec{v}_o \quad (5.7)$$

che rappresenta il momento della quantità di moto rispetto a  $G$  di un ipotetico punto materiale di massa coincidente con la massa del corpo coincidente con il polo  $O$ . Il secondo integrale della 5.6, ricordando che  $\vec{r} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}) = \vec{\omega}(\vec{r} \cdot \vec{r}) - \vec{r}(\vec{r} \cdot \vec{\omega})$  e che in moti bidimensionali di lamine  $\vec{r} \cdot \vec{\omega} = 0$ , otteniamo

$$\vec{h}'_o = \iiint_{\mathcal{V}} \rho \vec{\omega} r^2 d\mathcal{V} = \iiint_{\mathcal{V}} \rho r^2 d\mathcal{V} \vec{\omega} = \mathcal{J}_o \vec{\omega} \quad (5.8)$$

ove è stata definito il **momento di inerzia**  $\mathcal{J}_o$  del corpo attorno ad un asse ortogonale al piano della lamina passante per  $O$ . Tale grandezza dipende esclusivamente dalle caratteristiche geometriche del corpo e dalla sua distribuzione di massa. Nel caso di corpi omogenei ( $\rho$  costante in  $\mathcal{V}$ ) posso scrivere

$$\mathcal{J}_o = \rho \iiint_{\mathcal{V}} r^2 d\mathcal{V} = \rho \mathcal{I}_o \quad (5.9)$$

in cui viene introdotto il **momento di figura**  $\mathcal{I}_o$ , dipendente solo dalla geometria del corpo. Definiamo, inoltre, il **raggio giratore**  $\mathcal{R}^2 = \mathcal{J}_o/m$ .

In definitiva, la 5.6 diventa

$$\vec{h}_o = \vec{h}'_o + \vec{g}_o = \mathcal{J}_o \vec{\omega} + m \vec{r}_{OG} \times \vec{v}_o \quad (5.10)$$

Si noti che l'ultimo termine dell'equazione precedente è nullo se il polo  $O$  ha velocità nulla o se il polo scelto coincide con il baricentro. In quest'ultimo caso si ottiene

$$\vec{h}_G = \mathcal{J}_G \vec{\omega} \quad (5.11)$$

ed il momento d'inerzia rispetto al baricentro  $\mathcal{J}_G$  viene chiamato **momento d'inerzia centrale** del corpo.

**Teorema di Huyghens:**<sup>1</sup> il momento di inerzia di una lamina rispetto al polo  $O$  è uguale al momento di inerzia rispetto al centro di massa  $G$ , più il prodotto della massa della lamina per il quadrato della distanza tra il polo  $O$  e  $G$

$$\mathcal{J}_o = \mathcal{J}_G + m r_{OG}^2 \quad (5.12)$$

**Dim:** ricordando che  $\vec{r} = \vec{r}_{OG} + \vec{r}_G$  e la definizione di centro di massa, dalla definizione di momento d'inerzia  $\mathcal{J}_o$  otteniamo

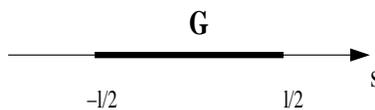
$$\mathcal{J}_o = \iiint_{\mathcal{V}} \rho r^2 dV = \iiint_{\mathcal{V}} \rho r_{OG}^2 dV + \iiint_{\mathcal{V}} \rho r_G^2 dV. \quad (5.13)$$

Tenendo conto dell'indipendenza di  $r_{OG}$  dalla variabile di integrazione e dalla definizione di  $\mathcal{J}$ , segue immediatamente la 5.12.

Conseguenza del teorema di Huyghens è che *il momento di inerzia di una corpo bidimensionale rispetto al baricentro rappresenta il minimo momento di inerzia.*

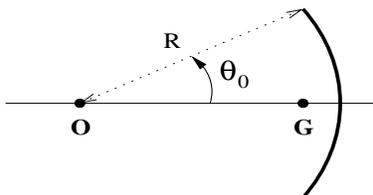
Nel seguito sono elencati i momenti centrali di figura di corpi bidimensionali omogenei di geometria semplice, frequentemente utilizzati nelle applicazioni.

- **segmento** di lunghezza  $l$



$$\mathcal{I}_G = \int_{-l/2}^{l/2} s^2 ds = \frac{l^3}{12}$$

- **arco di circonferenza** di apertura  $\theta_0$

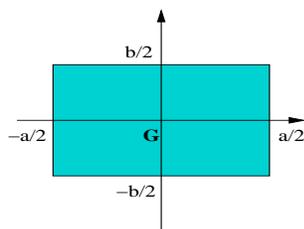


Essendo  $|\vec{OG}| = R \sin \theta_0 / \theta_0$  ed il raggio giratore rispetto ad  $O$  pari ad  $R$ , risulta

$$\mathcal{I}_G = 2\theta_0 R \left[ R^2 - R^2 \frac{\sin^2 \theta_0}{\theta_0^2} \right]$$

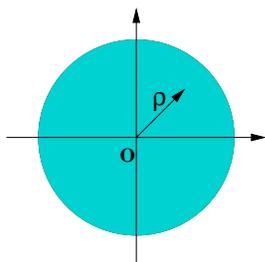
<sup>1</sup>L'enunciato riportato e la relativa dimostrazione rappresentano la forma semplificata che il teorema di Huyghens assume nel caso particolare di momenti di inerzia di corpi bidimensionali rispetto ad assi ortogonali al loro piano. La forma generale, valida per distribuzioni tridimensionali di massa rispetto ad assi comunque orientati, verrà affrontata nella seconda parte del corso. Si noti che, sotto l'ipotesi corrente, con la denominazione *momento d'inerzia rispetto al polo O* si intende *momento d'inerzia rispetto ad un asse ortogonale al piano della lamina, passante per O*.

- rettangolo di lati  $a, b$



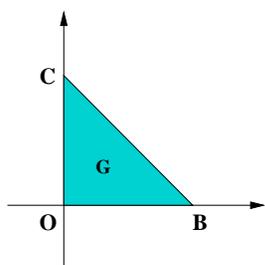
$$\mathcal{I}_G = \int_{-a/2}^{a/2} \int_{-b/2}^{b/2} (x^2 + y^2) \, dy \, dx = ab \frac{a^2 + b^2}{12}$$

- cerchio di raggio  $R$



$$\mathcal{I}_G = 2\pi \int_0^R \varrho^3 \, d\varrho = \pi R^2 \frac{R^2}{2}$$

- triangolo rettangolo isoscele

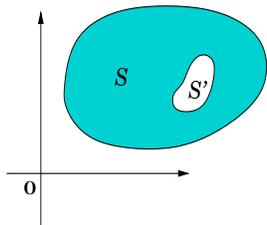


Posto  $OB = a$ , il momento rispetto al polo  $O$  è

$$\mathcal{I}_O = \int_0^a \int_0^{a-x} (x^2 + y^2) \, dy \, dx = \frac{a^4}{6}$$

Il teorema di Huyghens, essendo  $x_G = y_G = a/3$ , fornisce  $\mathcal{I}_G$ .

Si noti che nel caso in cui il corpo presenti delle lacune è possibile calcolare il momento rispetto ad un qualsiasi polo  $O$  come la differenza tra il momento di inerzia del corpo privo di lacune ed il momento di inerzia di ogni lacuna calcolato come se ivi fosse presente una distribuzione di massa di densità pari a quella del corpo, ossia



$$\mathcal{J}_O = \int_{S \cup S'} \rho d^2 \, dS - \int_{S'} \rho d^2 \, dS \quad (5.14)$$

## 5.2 Statica del corpo rigido.

Consideriamo un corpo rigido che occupi una posizione nello spazio che indicheremo sinteticamente con  $\vec{x}_e$ . Se, all'istante  $t_0$ , l'atto di moto  $\vec{v}_e$  del corpo è nullo, definiamo la posizione  $\vec{x}_e$  di **equilibrio statico** per il corpo se il corpo rimane in quiete per ogni  $t > t_0$ . Condizione necessaria e sufficiente affinché ciò avvenga è che forza e momento risultante della sollecitazione siano identicamente nulli in corrispondenza alla configurazione considerata per il corpo (posizione  $\vec{x}_e$  ed atto di moto nullo), per ogni scelta del polo 0 dei momenti, ossia

$$\begin{aligned}\vec{F}(\vec{x}, \dot{\vec{x}}, t)|_e &= \vec{F}(\vec{x}_e, \vec{0}, t) = \vec{0} \\ \vec{M}_0(\vec{x}, \dot{\vec{x}}, t)|_e &= \vec{M}_0(\vec{x}_e, \vec{0}, t) = \vec{0}\end{aligned}\tag{5.15}$$

Le equazioni precedenti rappresentano le equazioni cardinali della statica del corpo rigido. Lo stato di sollecitazione agente sul corpo comprende l'insieme di tutte le *forze attive e vincolari*. Le forze attive a loro volta comprendono forze effettive ed apparenti. Le risultanti  $\vec{F}$  e  $\vec{M}_0$  nelle 5.16 possono essere sostituite con una qualsiasi sollecitazione **equivalente** a quella effettivamente agente sul corpo.

### 5.2.1 Sollecitazioni equivalenti

Definiamo due sollecitazioni equivalenti se

$$\begin{aligned}\vec{F}(\vec{x}, \dot{\vec{x}}, t) &= \vec{F}'(\vec{x}, \dot{\vec{x}}, t) \\ \vec{M}_0(\vec{x}, \dot{\vec{x}}, t) &= \vec{M}'_0(\vec{x}, \dot{\vec{x}}, t) \quad \forall \vec{x}_0\end{aligned}\tag{5.16}$$

ossia se possiedono le stesse risultanti per ogni possibile scelta del polo dei momenti. È possibile trasformare uno stato di sollecitazione in uno equivalente a se stesso mediante le operazioni

- aggiunta di una coppia di braccio nullo,
- sostituzione di più forze applicate in un medesimo punto con la loro somma applicata nello stesso punto,
- spostamento del punto di applicazione di una o più forze lungo la loro retta d'azione.

Definiamo **trinomio invariante** della sollecitazione la quantità scalare  $\vec{F} \cdot \vec{M}_0$ , che non dipende dalla scelta del polo. Tale grandezza risulta nulla per

- sollecitazioni costituite da 1 sola forza poichè per tutti i poli scelti lungo la retta d'azione il momento risultante è nullo;
- per un'unica coppia, poichè è nulla la forza risultante;
- per stati di sollecitazione piana, poichè  $\vec{F}$  e  $\vec{M}_0$  sono ortogonali.

Se  $\vec{F} \neq 0$  allora esiste una retta, detta **asse centrale della sollecitazione**, parallela ad  $\vec{F}$  tale che, scegliendo un suo punto qualsiasi come polo dei momenti, il momento risultante è parallelo a  $\vec{F}$  ed ha intensità minima. Se il trinomio invariante è diverso da zero, esiste sempre una sollecitazione equivalente costituita da una forza applicata all'asse centrale più una coppia di momento pari a quello rispetto ad un qualsiasi polo scelto lungo l'asse centrale.

### 5.2.2 Stati di sollecitazione piana

In questa parte del corso ci occuperemo esclusivamente di problemi bidimensionali, nei quali la sollecitazione applicata è costituita da forze appartenenti ad uno stesso piano e, quindi, caratterizzata dall'aver sempre trinomio invariante nullo. Una tale sollecitazione è sempre riducibile ad un'unica forza, se  $\vec{F} \neq 0$ , o ad un'unica coppia, se  $\vec{F} = 0$ .

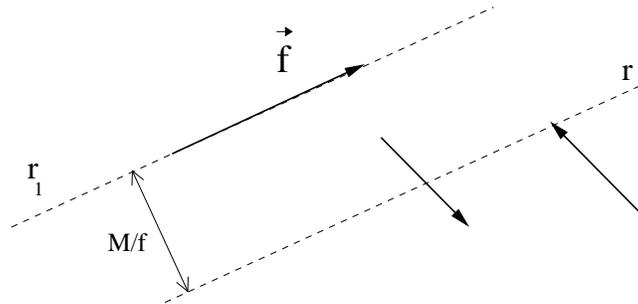


Figura 5.3:

Si consideri, a titolo esemplificativo, una sollecitazione piana costituita da un'unica forza  $\vec{f}$  ed una coppia di momento  $\vec{M}$ . Possiamo determinare l'asse centrale, anch'esso appartenente al piano della sollecitazione, imponendo la condizione che il momento rispetto ad un punto  $P$  appartenente ad esso sia nullo, in quanto si ha  $\vec{F} \neq 0$ . Indichiamo con  $r_1$  la retta d'azione di  $\vec{f}$  e con  $r$  l'asse centrale. Se  $B$  è il punto di applicazione di  $\vec{f}$  otteniamo

$$\vec{M}_P = (\vec{x}_B - \vec{x}_C) \times \vec{f} + \vec{M} \quad (5.17)$$

dalla quale risulta che l'asse centrale è a distanza  $M/f$  da  $r_1$ .

### 5.2.3 Reazioni vincolari

In presenza di vincoli che inibiscano  $m$  gradi di libertà del corpo è necessario inserire nelle 5.16 le  $m$  reazioni vincolari, o una sollecitazione ad esse equivalente. Nei problemi di statica  $2D$  che affronteremo in questo corso, possiamo identificare alcune tipologie di vincolo:

- **cerniera** - sottrae 2 g.d.l. al corpo che rimane libero di ruotare attorno al punto geometrico sede della cerniera. Tale vincolo è capace di esercitare una forza di reazione comunque diretta nel piano (2 componenti  $\Rightarrow$  2 inc. ausiliarie) ma non può esercitare momenti di reazione.
- **collare** - un segmento materiale appartenente al corpo è vincolato ad una retta dello spazio. Sottrae una traslazione ed una rotazione. È capace di esercitare una forza diretta ortogonalmente al suo asse ed un momento di reazione (2 inc. ausiliarie).

- **collare sottile** - Rispetto al collare non è capace di esercitare un momento di reazione ma solo una forza ortogonale al suo asse (1 inc. ausiliaria). Sottrae, quindi, il solo grado di libertà di traslazione.
- **appoggio** - esiste una retta nel piano che impedisce ai punti del corpo di occupare uno dei due semipiani nei quali divide lo spazio  $2D$ . Si tratta di un vincolo **unilaterale** capace di esercitare, nei punti di contatto, una forza diretta ortogonalmente ad esso **esclusivamente nel verso che va dal vincolo verso il corpo**.

Nel caso in cui il vincolo sia **scabro** esistono componenti della reazione vincolare tangenti alla geometria del vincolo. Tuttavia, tali componenti non implicano un aumento del numero delle incognite ausiliarie del problema, in quanto componenti normale e tangenziale delle forze di reazione sono legate dai coefficienti di attrito statico e dinamico

$$\vec{r}_t = \Phi_S r_N \hat{k} \quad \hat{k} = \text{generico versore tang. al vincolo} \quad (5.18)$$

$$\vec{r}_t = -\Phi_D r_N \hat{v} \quad \hat{v} = \text{versore della vel. del punto} \quad (5.19)$$

$$(5.20)$$

Le relazioni precedenti permettono quindi di esprimere la  $\vec{r}_t$  in funzione del modulo della reazione normale  $r_N$  e, quindi, di mantenere inalterato il numero delle incognite ausiliarie rispetto al caso di vincoli lisci.

#### 5.2.4 Metodi grafici di analisi statica

In generale, le Eqq. 5.16 costituiscono un sistema di equazioni nelle incognite ausiliarie e permettono di ricavare queste ultime a partire dalla conoscenza delle forze attive agenti sul sistema. Tuttavia, per certe applicazioni può risultare preferibile adottare dei metodi grafici di risoluzione dei problemi di statica. Tale approccio si basa essenzialmente sulle seguenti proprietà di equivalenza:

1. affinché una sollecitazione costituita da due forze sia equivalente a zero è necessario e sufficiente che essa costituisca una coppia di braccio nullo;
2. affinché una sollecitazione costituita da tre forze non parallele sia equivalente a zero è necessario e sufficiente che le forze siano parallele ad un medesimo piano, le loro rette d'azione abbiano un punto in comune e che sia possibile formare, con i vettori rappresentanti delle forze un triangolo chiuso.

#### Esempi applicativi

##### 1. Vincoli senza attrito

Si consideri il sistema vincolato in figura ??, costituito da una lamina rettangolare vincolata per mezzo di un'asta ideale priva di massa ad una cerniera nel punto  $O$  ed un collare sottile nel punto  $K$ . L'asta sia allineata lungo la verticale. La cerniera inibisce ogni traslazione del corpo. Il grado di libertà residuo, corrispondente alla rotazione attorno a  $O$ , viene impedito dalla presenza del collare sottile in  $K$ . Di conseguenza il corpo non ha gradi di libertà residui. Ne segue che le reazioni vincolari  $\vec{r}_O$  e  $\vec{r}_K$  dovranno essere tali da bilanciare la sollecitazione complessiva (costituita solo dalla forza peso). Si noti che la sollecitazione dovuta al peso può essere considerata equivalente ad una forza pari a  $\mathcal{M} \vec{g}$ , applicata nel centro di

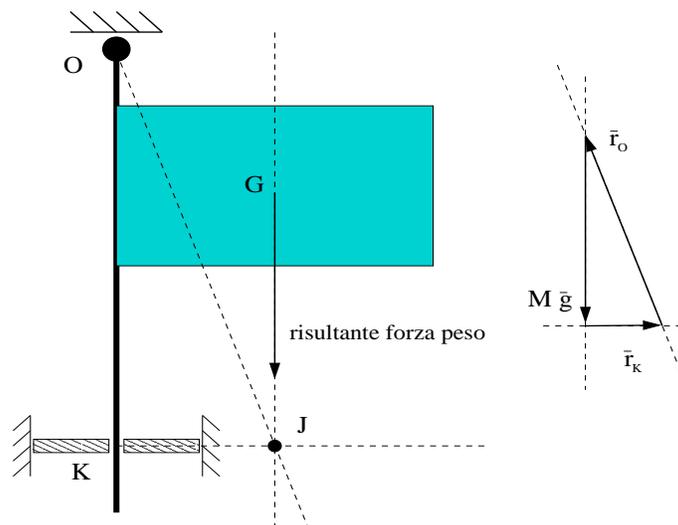


Figura 5.4:

massa.<sup>2</sup> Sotto queste ipotesi, ci si chiede quali siano le reazioni vincolari esercitate da cerniera in  $O$  e dal collare in  $K$ . Essendo la forza peso diretta verticalmente e  $\vec{r}_K$  diretta orizzontalmente (vincolo privo di attrito),  $\vec{r}_O$  dovrà necessariamente essere diretta come il segmento  $OJ$ , per la seconda delle condizioni viste. Conoscendo le direzioni di ogni forza è possibile tracciare il diagramma vettoriale che, stabilita una scala di rappresentazione delle forze, ci fornisce il verso e le intensità delle reazioni vincolari.

## 2. Vincoli scabri

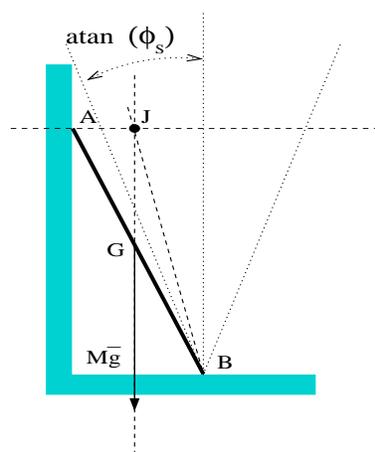


Figura 5.5:

Consideriamo una sbarra omogenea pesante appoggiata in  $A$  e  $B$  rispettivamente ad una parete verticale ed ad un piano orizzontale. Come al solito la forza peso si considera applicata in  $G$ , situato sulla mezzieria del segmento pesante. In assenza

<sup>2</sup>In generale, ogni forza di massa del tipo  $\vec{f} = \mathcal{M}\vec{q}$ , con  $\vec{q}$  uniforme nel dominio occupato dal corpo, si può considerare applicata nel centro di massa. Ciò avviene, per esempio, alla forza apparente di trascinamento nel caso in cui si studi il fenomeno in un sistema di riferimento non inerziale animato da moto traslatorio.

di attrito le reazioni vincolari saranno dirette orizzontalmente in  $A$  e verticalmente in  $B$ . Appare chiaro che la condizione di esistenza di un punto di intersezione per le tre rette d'azione delle forze è verificata solo nel caso in cui il baricentro giaccia sulla verticale passante per  $B$  (verificare tale condizione a partire dalle equazioni della statica, usando  $B$  come polo dei momenti).

Nel caso in cui solo la parete verticale sia liscia, nasce una componente orizzontale della reazione  $\vec{r}_B$ . In condizioni statiche vale la 5.18 e quindi la reazione vincolare in  $B$  sarà inclinata rispetto alla verticale di un angolo  $\alpha \leq \tan^{-1}(\Phi_S)$ . Ne segue che il vincolo di appoggio in  $B$  sarà capace di impedire il moto, bilanciando il resto della sollecitazione, esclusivamente nel caso in cui il punto di intersezione  $J$  tra le rette d'azione di  $M\vec{g}$  e  $\vec{r}_A$  cada all'interno dell'angolo acuto di ampiezza  $2 \tan^{-1}(\Phi_S)$  con vertice in  $B$ . Ne segue che esisteranno, oltre alla configurazione a sbarra verticale, infinite posizioni di equilibrio corrispondenti alle infinite inclinazioni della sbarra che verificano la condizione suddetta.

È facile verificare, con ragionamento analogo, che l'esistenza di attrito solo nel punto  $A$  è incompatibile con posizioni di equilibrio diverse dalla verticale in quanto peso e  $\vec{r}_B$  rimangono parallele indipendentemente dalla posizione della sbarra.

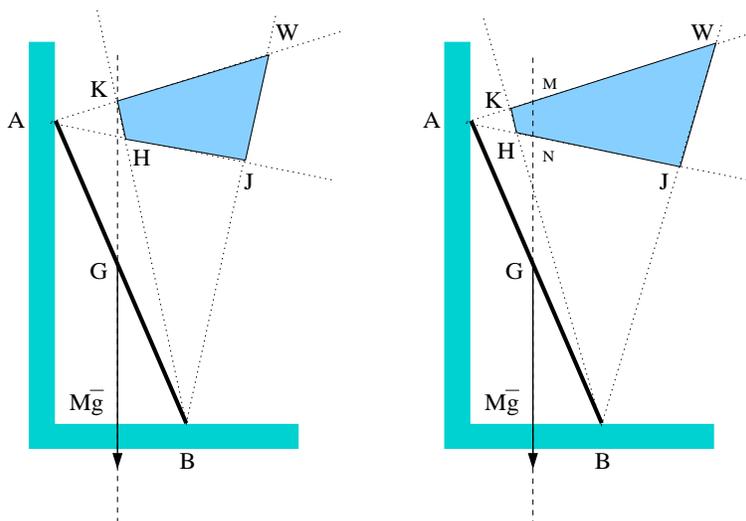


Figura 5.6:

Diverso è il caso in cui esista attrito in entrambi i punti di appoggio. In tal caso, esiste un quadrilatero costituito dall'intersezione dei due coni di attrito che rappresenta la zona dello spazio nella quale deve cadere l'intersezione delle rette d'azione per avere equilibrio. Se la verticale per  $G$  passa per uno dei vertici  $K, H, J, W$  è possibile tracciare il triangolo delle forze a partire dalle direzioni trovate per le reazioni vincolari (corrispondenti in tal caso alle rette limite dei coni di attrito) e individuare così le reazioni vincolari. Tuttavia, se la retta d'azione del peso passa all'interno del poligono  $KHWJ$ , allora è possibile tracciare un triangolo delle forze compatibile con l'equilibrio per ogni punto  $P$  appartenente al segmento  $MN$ . L'arbitrarietà della scelta di  $P$  implica che in tal caso le reazioni risultano indeterminate.

### 5.3 Teoremi energetici per il corpo rigido.

Partendo dai principi esposti nel capitolo dedicato all'analisi di sistemi di  $n$  particelle è possibile estendere all'analisi di corpi rigidi i teoremi di conservazione dell'energia. Tuttavia, è necessario fare alcune osservazioni sul significato che assumono le grandezze in gioco sotto l'ipotesi di rigidità del corpo. Nell'equazione 2.31 compare la potenza  $\mathcal{P}^I$  sviluppata dalle forze interne durante il moto del corpo. La sua espressione è

$$\mathcal{P}^I = \sum_{k=1}^N \vec{f}_k^I \cdot \vec{v}_k = \sum_{k=1}^N \sum_{j=1}^N \vec{f}_{kj}^I \cdot \vec{v}_k = \sum_{k=1}^N \sum_{j=k+1}^N \vec{f}_{kj}^I \cdot (\vec{v}_k - \vec{v}_j) \quad (5.21)$$

Nel caso in cui venga introdotto il vincolo di rigidità del corpo, la distribuzione di velocità dei punti del sistema deve soddisfare le relazioni viste nel capitolo 3, che implica

$$\vec{v}_k - \vec{v}_j = \vec{\omega} \times \vec{r}_{kj} \quad (5.22)$$

Ma, essendo  $\vec{f}_{kj}^I$  parallela a  $\vec{r}_{kj}$ , la 5.22 afferma che la differenza di velocità tra due punti del sistema con vincolo di rigidità è sempre ortogonale alle forze interne scambiate dai punti stessi. Portando al limite per  $N \rightarrow \infty$  la 5.21 concludiamo che la potenza sviluppata dalle forze interne in un corpo rigido è sempre nulla.

Per il contributo alla potenza sviluppato dalle forze esterne otteniamo, scegliendo il centro di massa come polo dell'atto di moto,

$$\begin{aligned} \mathcal{P}^E &= \lim_{N \rightarrow \infty} \left[ \sum_{k=1}^N \vec{f}_k^E \cdot \vec{v}_k \right] = \lim_{N \rightarrow \infty} \left[ \sum_{k=1}^N \vec{f}_k^E \cdot (\vec{v}_G + \vec{\omega} \times \vec{r}_{kG}) \right] \\ &= \vec{f}^E \cdot \vec{v}_G + \int_{\mathcal{V}} \vec{f}(\vec{x}) \cdot [\vec{\omega} \times \vec{r}_G(\vec{x})] d\mathcal{V} \\ &= \vec{f}^E \cdot \vec{v}_G + \vec{\omega} \cdot \int_{\mathcal{V}} \vec{r}_G(\vec{x}) \times \vec{f}(\vec{x}) d\mathcal{V} = \vec{f}^E \cdot \vec{v}_G + \vec{m}_G^E \cdot \vec{\omega} \end{aligned} \quad (5.23)$$

ove è stata usata la relazione  $\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) = \vec{b} \cdot (\vec{c} \times \vec{a}) = \vec{c} \cdot (\vec{a} \times \vec{b})$ . Di conseguenza, il lavoro elementare compiuto dalle forze esterne in un intervallo  $dt$  è

$$d\mathcal{L}^E = \vec{f}^E \cdot \vec{v}_G dt + \vec{m}_G^E \cdot \vec{\omega} dt \quad (5.24)$$

nel quale compaiono ora esplicitamente i contributi dovuti al moto del baricentro e del moto attorno ad esso. Sotto queste ipotesi, è possibile estendere tutte le relazioni energetiche viste nel capitolo 2. In particolare

$$\mathcal{T}_2 - \mathcal{T}_1 = \mathcal{L}_{\mathcal{C}(1 \rightarrow 2)}^E \quad (5.25)$$

$$\frac{d\mathcal{E}}{dt} = \mathcal{P}^{E,nc} \quad (5.26)$$

$$\mathcal{E}_2 - \mathcal{E}_1 = \mathcal{L}_{\mathcal{C}(1 \rightarrow 2)}^{E,nc} \quad (5.27)$$

ove è stata definita l'energia meccanica  $\mathcal{E} = \mathcal{T} + \mathcal{U}$ , essendo  $\mathcal{U}$  l'energia potenziale associata ad eventuali forze conservative agenti sul corpo ed l'apice  $nc$  indica il contributo della componente non conservativa delle forze.

### 5.3.1 Teorema di Koenig

Nelle equazioni precedenti è necessario specificare la forma assunta dall'energia cinetica associata al corpo in moto nel caso di atto di moto rigido. Partendo dalla definizione di  $\mathcal{T}$ , sotto ipotesi di densità uniforme, otteniamo

$$\begin{aligned}\mathcal{T} &= \frac{1}{2} \rho \int_{\mathcal{V}} v^2 d\mathcal{V} = \frac{1}{2} \rho \int_{\mathcal{V}} |\vec{v}_G + \vec{\omega} \times \vec{r}_G|^2 d\mathcal{V} \\ &= \frac{1}{2} \rho \int_{\mathcal{V}} v_G^2 d\mathcal{V} + \frac{1}{2} \rho \int_{\mathcal{V}} |\vec{\omega} \times \vec{r}_G|^2 d\mathcal{V} + \frac{1}{2} \rho \int_{\mathcal{V}} \vec{v}_G \cdot (\vec{v} - \vec{v}_G) d\mathcal{V}\end{aligned}\quad (5.28)$$

L'ultimo integrale dell'equazione precedente è nullo per definizione di centro di massa. tenendo conto dell'indipendenza di  $\vec{v}_G$  e  $\vec{\omega}$  dalla variabile di integrazione e limitandoci al caso di problemi di dinamica bidimensionale, per i quali  $\vec{\omega} \perp \vec{r}_G$ , otteniamo

$$\mathcal{T} = \frac{1}{2} \mathcal{M} v_G^2 + \frac{1}{2} \mathcal{J}_G \omega^2 \quad (5.29)$$

L'espressione precedente rappresenta la forma che il teorema di Koenig assume nel caso di corpi rigidi bidimensionali. Il contributo al contenuto di energia cinetica dovuto al moto del corpo attorno al baricentro appare proporzionale al quadrato della velocità angolare in quanto, il vincolo di rigidità dell'atto di moto esclude dalla classe dei possibili moti attorno al centro di massa tutti i moti che non rappresentino una rotazione pura (ossia espansioni e/o contrazioni).