

Introduzione.

La fisica nucleare nasce nel 1896 con la scoperta di Becquerel della radioattività; diventa infatti da quel momento chiaro che lo studio della struttura della materia deve passare ad un livello più profondo di quello raggiunto dalla fisica atomica. Tra il 1940 e il 1960 diventerà poi evidente che esiste un livello ancora più profondo, di cui oggi si occupa quella branca della fisica oramai nota col nome di fisica delle particelle (o fisica delle alte energie). Sebbene dunque la fisica nucleare non rappresenti più la frontiera più avanzata nell'indagine sulla struttura della materia, tale disciplina fornisce ancora grandi contributi sia legati alla modellizzazione teorica della natura che al campo più squisitamente applicativo.

Terminologia.

Un po' di terminologia iniziale è quantomeno obbligatoria. Come è noto un atomo è una struttura che può essere indicata con il numero Z , detto numero atomico, che rappresenta il numero di cariche positive presenti nel nucleo o, indifferentemente, il numero di elettroni. La più classica esperienza con la quale si misura il numero atomico Z è l'esperienza di Moseley che sfrutta l'osservazione che l'energia di un determinato tipo di raggi X emessi da un elemento è proporzionale a Z tramite la seguente relazione:

$$E_{KX} \div (Z - 1)^2$$

dove l' l che bisogna sottrarre a Z prende il nome di termine di schermo. L'esperienza di Moseley fu una conferma dell'ipotesi di Bohr e fu in seguito utilizzata in maniera inversa per capire, a partire dall'emissione di raggi X, di che tipo di atomo ci si sta occupando. La carica elettrica dell'elettrone controbilancia in maniera perfetta la carica positiva del nucleo, tant'è che da osservazioni sperimentali si ha che, detta e_p la carica del singolo protone ed e_e la carica del singolo elettrone, si avrà:

$$|e_p - e_e| \leq 10^{-18} e$$

dove sia:

$$e = 1,6 \cdot 10^{-19} C$$

Storicamente l'atomo fu inizialmente modellizzato da Thompson come una distribuzione uniforme di cariche positive (dette protoni) e negative (dette elettroni). Anche a seguito della scoperta e dell'introduzione del nucleo nel modello atomico, questo era visto come un ammasso di protoni ed elettroni (questi detti, in particolare, elettroni nucleari) che furono introdotti per spiegare la differenza tra il numero atomico Z e il numero di massa A . Si supponeva infatti che in un nucleo atomico potessero essere presenti A protoni e $Z-A$ elettroni nucleari. Nel nucleo atomico, però, non era sperimentalmente accettabile la presenza di elettroni, per diversi motivi:

1. gli elettroni nucleari avrebbero dovuto essere legati ai protoni con una forza di enorme intensità, mai precedentemente rilevata;
2. elettroni confinati in un Δx adeguato per rappresentare un nucleo ($\sim 10^{-14}$ m) presenterebbero, per il principio di indeterminazione di Heisenberg, un Δp di circa 20 MeV/c; nessun elettrone espulso da un atomo per decadimento β presenta però energie superiori a 1 MeV;
3. lo spin dei nuclei per i quali $A-Z$ è dispari non torna con i dati sperimentali (nel caso del Deuterio, per esempio, che ha $A=2$ e $Z=1$, siccome sia i protoni che gli elettroni hanno spin pari ad $1/2$, lo spin totale dovrebbe essere pari ad $1/2$ o, al più, a $3/2$; sperimentalmente però lo spin del deuterio è pari ad 1);
4. nuclei contenenti elettroni nucleari spaiati dovrebbero presentare un momento di dipolo magnetico circa uguale a quello di un singolo elettrone, in realtà i momenti di dipolo magnetico misurati sono migliaia di volte più piccoli.

Per ottenere i giusti valori sperimentali relativi alla massa del nucleo fu dunque necessario introdurre una nuova particella, elettricamente neutra, che prese il nome di neutrone. Il nucleo diveniva così composto da diversi tipi di particelle, da ora in avanti chiamate genericamente nucleoni. Un nucleo con un determinato numero di nucleoni prende il nome di nuclide. Per quanto riguarda la rappresentazione simbolica è possibile fare riferimento alla figura 1.

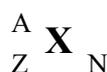


Figura 1

Se dunque X è il simbolo chimico dell'elemento in questione, A prende il nome di numero di massa e indica il numero dei nucleoni, Z è, come detto, il numero atomico (solitamente si considera che indichi il numero dei protoni) mentre N indica il numero di neutroni. Ovviamente, siccome vale la relazione:

$$A = Z + N$$

si deduce che Z è ridondante quando si conosce il tipo di nucleo coinvolto (è infatti noto, per esempio, che H ha un solo protone), N è invece ridondante una volta che conosco Z ed A. Il minimo modo per rappresentare in maniera completa un nuclide è dunque quello mostrato in figura 2.



Figura 2

Per quanto riguarda quindi i diversi isotopi dell'Idrogeno, si potrà parlare di Idrogeno normale ${}^1\text{H}$, di Idrogeno con un neutrone (detto Deuterio) ${}^2\text{H}$ e di Idrogeno con due neutroni (detto Trizio e non presente in natura) ${}^3\text{H}$. Quest'ultimo isotopo è instabile e radioattivo ed è quindi detto radioisotopo o radionuclide. Concludendo questa rapida carrellata sulla terminologia è possibile accennare ai nuclidi isotoni, ovvero caratterizzati dall'aver tutti la medesima N e, infine, ai nuclidi isobari, caratterizzati dall'aver invece tutti la medesima A.

Unità e dimensioni.

La misura della massa dei nuclei viene fatta con gli spettrometri di massa nei quali atomi fortemente ionizzati e poi fatti viaggiare attraverso campi elettrici e magnetici presentano particolari raggi di curvatura. Tali raggi di curvatura possono essere espressi nel modo seguente:

$$\begin{cases} r_E = \frac{m \cdot v^2}{q \cdot E} \\ r_M = \frac{m}{q \frac{v}{B}} \end{cases}$$

Regolando in maniera opportuna i campi è possibile focalizzare il fascio in un certo punto; la focalizzazione dipende però dal rapporto tra la massa e la carica e quindi, nota la carica, è possibile ricavare la massa. Per calibrare gli spettrometri di massa serve però ovviamente un riferimento e quindi si definisce l'unità di massa atomica (amu) come la dodicesima parte della massa atomica del ${}^{12}\text{C}$ (da notare che si parla di massa atomica perché si fa riferimento anche agli elettroni del carbonio). Nel sistema S.I. si ha allora:

$$1\text{amu} = 1,66057 \cdot 10^{-27} \text{Kg}$$

Ricordando la famosa relazione

$$E_{\text{tot}} = mc^2$$

è possibile esprimere la massa atomica anche in unità di energia divisa per il quadrato della velocità della luce; i valori nel S.I che si ricavano in questo modo sono piuttosto scomodi e quindi si utilizza l'eV, ricordando che 1 eV è l'energia cinetica di un elettrone che attraversa una differenza di potenziale di 1V, ovvero:

$$1\text{eV} = 1,602 \cdot 10^{-19} \text{J}$$

Multipli molto usati dell'eV sono i keV, i MeV e i GeV. Usando dunque gli eV si ha:

$$1\text{amu} = 931,5 \frac{\text{MeV}}{c^2}$$

Per quanto riguarda allora il neutrone e l'atomo di Idrogeno (molto più spesso usato rispetto al singolo protone) si può scrivere:

$$\begin{cases} m_N = 1,00866501\text{amu} = 939,571\text{MeV} \\ m_H = 1,00727647\text{amu} = 938,28\text{MeV} \end{cases}$$

Si nota che, come spesso accade, nell'espressione della massa non si fa riferimento alla velocità della luce che diventa implicita. Per quanto riguarda le dimensioni spaziali dei nuclei, un'unità comoda è il femtometro, detto anche Fermi (e a volte indicato con il simbolo F):

$$1\text{fm} = 10^{-15} \text{m}$$

Il raggio del nucleo.

È giunto ora il momento di analizzare con maggiore dettaglio il nucleo atomico; tale analisi avrà inizio con la ricerca di proprietà statiche come il raggio, la massa, la carica, etc... Il primo esperimento riguardante il nucleo atomico fu la famosa esperienza di Rutherford del 1911, nella quale era stato osservato che delle particelle cariche (che poi si riveleranno essere particelle α) sparate contro atomi d'oro, venivano diffuse elasticamente con angoli quasi pari a 180° . Per poter spiegare questi risultati fu necessario, appunto, introdurre il concetto di nucleo atomico, nel quale fosse

contenuta la massa e la carica positiva dell'atomo. Proprio partendo da questo esperimento è possibile dedurre qualche stima sulle dimensioni del nucleo: Rutherford utilizzò, come detto, proiettili costituiti da particelle α con carica $+2e$ e massa pari a circa $8000m_e$. La probabilità dp di ottenere particelle diffuse in un angolo solido $d\Omega$ è, facendo riferimento alla sola interazione elettromagnetica, la seguente:

$$\frac{dp}{d\Omega} = \left(\frac{zZe^2}{4\pi\epsilon_0} \right)^2 \left(\frac{1}{4E_\alpha} \right)^2 \frac{1}{\sin^4 \frac{\vartheta}{2}}$$

dove z sia il valore relativo alle particelle α , Z il valore relativo al bersaglio, θ sia l'angolo di scattering ed E_α l'energia del proiettile. Fissati allora tutti i rimanenti parametri, l'andamento della suddetta probabilità in funzione dell'angolo θ di scattering sarà, qualitativamente, quello mostrato in figura 3.

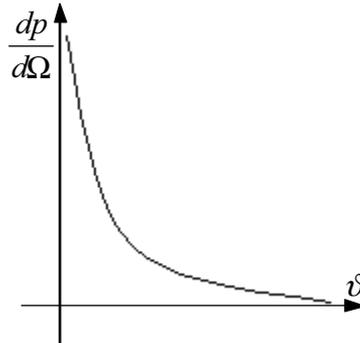


Figura 3

Un'ipotesi che potesse spiegare dei grossi angoli di diffusione e che mantenesse buona la visione di Thompson prevedeva che gli scattering a grande angolo non fossero altro che l'insieme di più scattering a piccolo angolo. Tale ipotesi non rimase però in piedi perché i risultati non variavano variando il numero di proiettili sparati e le dimensioni del target. L'esperienza di Rutherford permette quindi di definire la distanza di massimo avvicinamento:

$$d = \frac{zZe^2}{4\pi\epsilon_0 E_\alpha}$$

Aumentando molto l'energia E_α potrei avere delle distanze d piccole ma con campi troppo grandi l'interazione fondamentale non è più quella elettromagnetica e quindi cade tutto il discorso fatto. Rutherford usò come bersaglio l'Oro e come proiettili delle particelle α naturali e quindi con energia circa pari ad 8 MeV. Il rivelatore era una lastra fluorescente che si illuminava dove e quando arrivava la particella α diffusa. Ricordando dunque che:

$$\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0} = 1,44 \text{ MeV}$$

si ricava che, dall'esperienza di Rutherford:

$$d = 28 \text{ fm}$$

Aumentando l'energia si trova che, sotto un certo valore di d entrano in gioco delle forze diverse che sono molto intense ma con un range molto ridotto. Anche migliorando l'esperienza di Rutherford si arrivava a parlare, per i nuclei, di ordini di grandezza di circa 10 fm.

La distribuzione di carica elettrica nel nucleo.

Una volta individuate le dimensioni di massima del nucleo risulta naturale passare allo studio di come la carica elettrica sia distribuita al suo interno, supponendo che valga la simmetria sferica; per fare questo il giusto mezzo sono gli elettroni in quanto sono sensibili alla carica elettrica positiva del nucleo e possono essere accelerati fino ad avere la lunghezza d'onda di De Broglie adatta per esplorare un oggetto delle dimensioni, appunto, di 10 fm. Attorno agli anni '50 si utilizzavano elettroni con range di energia tra i 100 e i 500 MeV e bersagli tipo ^{12}C e ^{16}O . Tenendo conto degli aspetti relativistici e della dualità onda-particella sia del target che del proiettile, si avrà un grafico qualitativamente simile a quello mostrato in figura 4 che fa riferimento al caso specifico di un bersaglio di ^{12}C con elettroni da 420 MeV.

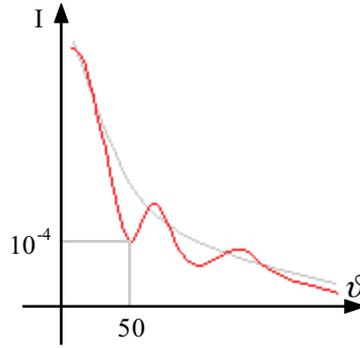


Figura 4

Nel grafico è mostrata l'intensità I degli arrivi che presenta un andamento generale (mostrato in grigio) lungo il quale sono rilevabili alcuni picchi. In corrispondenza del primo minimo si va a definire un raggio di circa 2,3 fm. L'interpretazione del dato sperimentale porta dunque alla seguente relazione:

$$\left(\frac{dp}{d\Omega} \right)_{sper} = \left(\frac{dp}{d\Omega} \right)_{scattering} [F(\vec{q})]^2$$

dove $F(\mathbf{q})$ è detto fattore di forma mentre \mathbf{q} è la grandezza cinematica che si misura, è chiamato momento trasferito ed è definito nel modo seguente:

$$\vec{q} = \vec{k}_i - \vec{k}_f$$

con \mathbf{k}_i e \mathbf{k}_f vettori d'onda legati all'elettrone rispettivamente prima e dopo lo scattering. Per quanto riguarda la forma analitica del fattore di forma, sono state nel tempo proposte diverse versioni in quanto sono state cercate quelle che rappresentavano al meglio i dati sperimentali. Detta allora $V(r)$ l'espressione dell'interazione tra l'elettrone e la carica bersaglio, si avrà:

$$F(\vec{q}) = \int e^{i\vec{q}\cdot\vec{r}} V(r) dV$$

Esplicitando poi in maniera classica l'espressione dell'interazione si ottiene:

$$F(\vec{q}) = \int e^{i\vec{q}\cdot\vec{r}} \rho(r) dV$$

dove $\rho(r)$ è la distribuzione di carica che permette di ricoprire al meglio i dati sperimentali ed ha la seguente forma:

$$\rho(r) = \frac{\rho_0}{1 + e^{\frac{r-R}{a}}}$$

dove R è un parametro definito in modo che la densità ρ valutata in R sia pari alla metà della densità ρ valutata nell'origine, a è invece un altro parametro, definito come segue:

$$a = \frac{t}{4,4}$$

dove t è detta skin thickness (ovvero spessore di pelle) ed è la distanza entro la quale la densità di carica passa dal 90 al 10%, ovvero:

$$t = R \left(\frac{\rho}{\rho_0} \Big|_{0,1} - \frac{\rho}{\rho_0} \Big|_{0,9} \right)$$

Il significato dello spessore di pelle si comprende meglio facendo riferimento alla figura 5, per la quale sia:

$$\begin{cases} r_1 = R \frac{\rho}{\rho_0} \Big|_{0,9} \\ r_2 = R \frac{\rho}{\rho_0} \Big|_{0,1} \end{cases}$$

e quindi:

$$t = r_2 - r_1$$

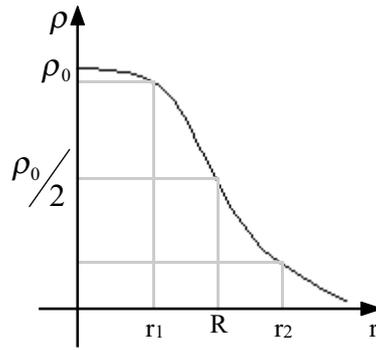


Figura 5

Con la distribuzione di carica fin qui trovata si ottiene una buona rappresentazione relativa ai nuclei medio-pesanti oltre il ^{12}C (mentre per i nuclei con A piccolo la distribuzione è praticamente di tipo gaussiano) con a circa uguale a $0,8\text{fm}$ ed R , che prende il nome di raggio del nucleo, legato ad A dalla relazione:

$$R = R_0 A^{1/3}$$

La densità di carica nel punto centrale, ρ_0 , è di circa 1e per ogni fermi al cubo.

La distribuzione di carica elettrica nel nucleo.

Dall'ultima relazione scritta nella lezione precedente si deduce che:

$$R_0 = \frac{R}{A^{1/3}}$$

nella tabella numero 1 sono dunque raccolti i dati relativi ad alcuni nuclidi.

Elemento	R sperimentale [fm]	R ₀ calcolato [fm]	t sperimentale [fm]
¹⁶ O	2,61	1,04	2,3
¹⁰³ Ag	5,33	1,12	2,3
²⁰⁸ Pb	6,65	1,12	2,3

Tabella 1

Dai dati forniti si evince che il parametro *t* è dunque una costante così come, a grandi linee, R₀. Sempre supponendo che il nucleo sia di forma sferica è a questo punto possibile esprimere nel modo seguente la densità dei nucleoni, che si rivela quindi una costante:

$$\frac{A}{\frac{4}{3}\pi R^3} = \frac{A}{\frac{4}{3}\pi \left(R_0 A^{1/3}\right)^3} = \text{costante}$$

La forma sferica non è però l'unica possibile forma dei nuclei; si possono avere anche delle deformazioni come quelle mostrate in figura 1.

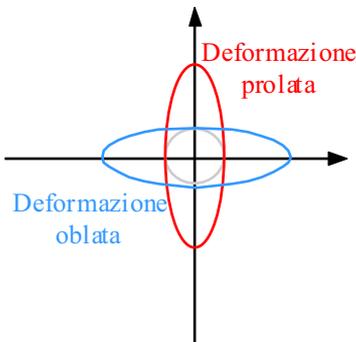


Figura 1

La deformazione può arrivare al punto che, detto R il raggio del nucleo e ΔR lo scostamento dalla situazione sferica, sia:

$$\frac{\Delta R}{R} = 0,2$$

Sono sottoposti a deformazioni alcuni nuclei leggeri, le terre rare e tanti nuclei con numero Z maggiore di quello dell'Uranio. Oltre ad essere calcolato, il termine R₀ può anche essere misurato studiando gli spettri atomici (in particolare gli spettri dei raggi X); si possono infatti studiare le energie degli spettri X legati alle transizioni dallo stato *l* allo stato *s* e valutare la differenza tra le energie di emissione, supponendo prima i nuclei puntiformi e poi considerando la distribuzione di carica. Un ulteriore metodo di misura del termine R₀ prevede l'utilizzo degli atomi muonici (atomi del tutto identici a quelli normali ma con muoni invece degli elettroni); i muoni hanno massa a riposo circa 200 volte più grande di quella degli elettroni e questa differenza si ripercuote sul raggio di Bohr, definito come:

$$a_0 = \frac{4\pi\epsilon_0\hbar^2}{e^2 m}$$

Il raggio di Bohr relativo agli atomi muonici sarà circa 200 volte più piccolo di quello relativo agli atomi normali; con Z pari a circa 50 si avrà allora:

$$a_0^\mu = 5 \text{ fm}$$

mentre il raggio del nucleo è:

$$R = 4,7 \text{ fm}$$

E' dunque evidente che il raggio del nucleo e il raggio dell'atomo sono molto simili e quindi gli elettroni proiettati sono meno disturbati dalla nube negativa attorno al nucleo. Anche le misure di R_0 fatte con gli atomi muonici confermano i valori visti in precedenza. Solitamente si pone quindi:

$$R_0 = 1,25 \text{ fm}$$

e quindi si avrà:

$$R = 1,25 A^{1/3}$$

La distribuzione di materia nel nucleo.

Per sondare la distribuzione di materia nel nucleo è necessario trovare una sonda adatta (se si vogliono utilizzare le particelle α si deve tarare bene l'energia); si dovranno infatti utilizzare particelle che risentono solo del legame nucleare. In un modo o nell'altro si trova una cosa molto simile a quanto visto per la carica, in particolare si ha che la densità di materia nel punto centrale è di $2,7 \cdot 10^{17}$ kg per ogni metro cubo.

La carta dei nuclidi.

I nuclidi fino ad ora conosciuti sono rappresentati sulla carta dei nuclidi (detta anche carta di Segrè) che ha una struttura simile a quella mostrata qualitativamente in figura 2.

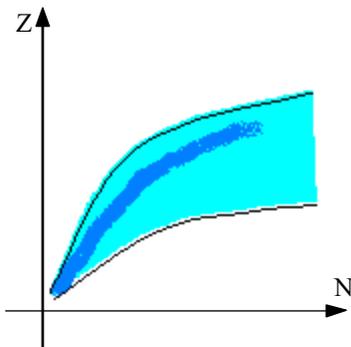


Figura 2

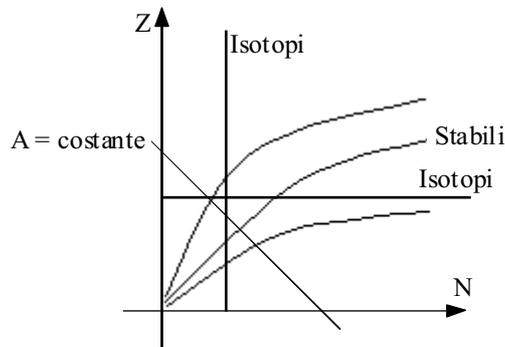


Figura 3

Si nota quindi che tutti i nuclidi si trovano nella zona colorata che, a grandi linee, è compresa tra la linea che individua l'assenza di energia necessaria per eliminare un neutrone (in basso) al di sotto della quale non troviamo nessun nuclide e la linea che indica l'assenza di energia necessaria per togliere un protone (in alto), al di sopra della quale ci sono solo pochi nuclidi detti emettitori di protoni. In figura 3 la carta dei nuclidi è mostrata in maniera maggiormente schematizzata; la retta con A costante prende, in questo grafico, il nome di retta isobara. I nuclidi stabili, che sono circa 300, sono disposti (fino circa ad A pari a 50) nella zona più scura del grafico, ovvero in prossimità della retta

$$N = Z$$

Quando A diventa grande i nuclidi stabili tendono invece ad avere N maggiore di Z. I nuclidi instabili conosciuti sono poi circa 2700 ma la ricerca è ancora aperta: risale infatti al 1996 la scoperta dell'elemento con Z pari a 112 e al 1999 quella relativa agli elementi con Z pari a 114 e 118. Per ogni nuclide con Z minore di 83 esiste almeno un isotopo stabile (fatta eccezione per Z nullo, che è il neutrone, Z pari a 43 che è il Tecnezio, Tc, e per Z pari a 61 che è il Promezio, Pm). Per Z maggiore di 83, invece, non esistono nuclidi stabili ma esistono delle previsioni teoriche secondo le quali potrebbe essere stabile l'elemento con $Z=114$ ed $N=184$. Per ottenere nuclidi con Z abbastanza grande bisogna fondere tra di loro i nuclei superando dunque la repulsione coulombiana. La maggioranza dei nuclidi stabili presenta sia Z che N pari e quindi si parla di nuclidi pari-pari, i restanti presentano N pari e Z dispari, o viceversa. Solamente 4 dei nuclidi stabili presentano N e Z dispari e quindi prendono il nome di dispari-dispari e sono: ${}^2_1\text{H}$, ${}^8_3\text{Li}$, ${}^{10}_5\text{B}$ e ${}^{14}_{17}\text{N}$. Nuclidi particolari sono quelli con N e Z particolare detti numeri magici, che sono: 2, 8, 28, 50, 82, 114 e, solo per il numero Z, 126 e 184.

L'energia di legame.

Ovviamente c'è un'importante differenza tra la massa di un nucleo e la massa dei suoi costituenti e si parla di difetto di massa per indicare la differenza tra la massa del nucleo e la massa dei nucleoni che lo compongono. Essendoci una differenza di massa ci sarà un'energia, detta energia di legame (BE = binding energy) che viene definita nel modo seguente:

$$B.E. = [Zm_H + (A - Z)m_N - M(Z, A)]c^2$$

dove m_H sia la massa dell'Idrogeno, m_N sia la massa di un neutrone mentre $M(Z,A)$ è la massa del nucleo caratterizzato da numero atomico Z e numero di massa A . In questa espressione si come non si tenga conto dell'energia di legame degli elettroni dell'atomo poiché queste sono dell'ordine di 1 eV. L'energia di legame di un nucleo si aggira attorno all'1% dell'energia complessiva. In figura numero 4 è rappresentato in maniera qualitativa l'andamento generale dell'energia di legame BE relativa ad ogni singolo nucleone in funzione del numero dei nucleoni.

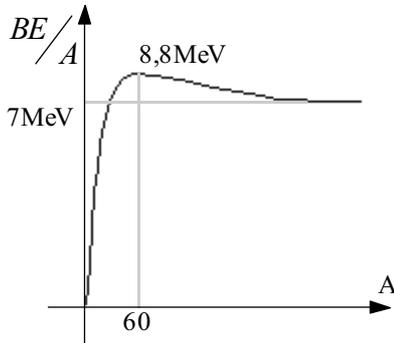


Figura 4

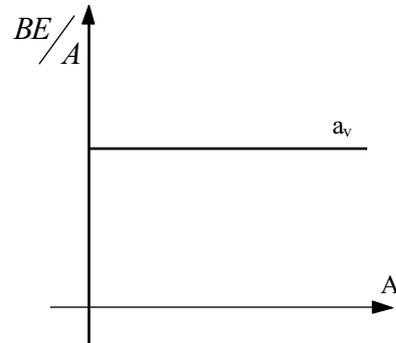


Figura 5

A parte il picco iniziale si può dunque osservare che:

$$\frac{BE}{A} = \text{costante}$$

e battezzando a_v tale costante si ottiene la seguente relazione:

$$BE = a_v A \quad (1)$$

Si può fare allora riferimento al grafico di figura 5. L'ultima relazione scritta non tiene però conto della differenza tra i nucleoni di superficie e i nucleoni interni al nucleo; il contributo di questi due gruppi all'energia di legame è infatti differente. Come conseguenza la relazione (1) sovrastima l'effettiva energia di legame ed è dunque necessario sottrarre un termine correttivo relativo alla superficie. Siccome poi la superficie dipende dal quadrato del raggio e il raggio è espresso dalla relazione:

$$R = R_0 A^{1/3}$$

si ottiene:

$$BE = a_v A - a_s R_0^2 A^{2/3}$$

dove a_s sia una costante moltiplicativa (la correzione sarà ovviamente tanto più significativa quanto più i nuclei sono piccoli). Per tenere invece in considerazione la repulsione coulombiana tra i protoni del nucleo che ovviamente si oppone al legame tra i nucleoni è necessario aggiungere un termine di correzione coulombiana che porta alla seguente espressione:

$$BE = a_v A - a_s R_0^2 A^{2/3} - \frac{3}{5} \cdot \frac{Z(Z-1)e^2}{4\pi\epsilon_0 R_0 A^{1/3}}$$

L'ultimo termine considerato viene solitamente approssimato ottenendo la seguente forma:

$$BE = a_v A - a_s R_0^2 A^{2/3} - \frac{3}{5} \cdot \frac{Z^2 e^2}{4\pi\epsilon_0 R_0 A^{1/3}}$$

e ancora, accorpare tutte le costanti in un'unica costante moltiplicativa a_c :

$$BE = a_v A - a_s R_0^2 A^{2/3} - a_c \cdot \frac{Z^2}{A^{1/3}}$$

Dai dati sperimentali appare che i nuclidi stabili sono caratterizzati dall'avere (almeno nel caso di A piuttosto piccolo):

$$A = 2Z$$

Senza per ora soffermarsi sul perché di questo fatto, è ovvio che, se si vuole modellizzare il nucleo in maniera realistica, si deve tener conto anche di questo aspetto e quindi si aggiunge un ulteriore termine correttivo detto termine di simmetria che porta alla seguente espressione:

$$BE = a_v A - a_s R_0^2 A^{2/3} - a_c \frac{Z^2}{A^{1/3}} - a_{sym} \frac{(A - 2Z)^2}{A}$$

Per tener poi conto del fatto che una variazione nell'energia di legame è anche data dal fatto che i nucleoni si possono appaiare in maniera parallela o antiparallela, si deve aggiungere un ulteriore termine, sperimentale, detto termine di pairing, grazie al quale si ottiene:

$$BE = a_v A - a_s R_0^2 A^{2/3} - a_c \frac{Z^2}{A^{1/3}} - a_{sym} \frac{(A - 2Z)^2}{A} + \delta$$

Il termine di accoppiamento dipende dai valori di A, N e Z: con A dispari (ovvero con N dispari e Z pari o viceversa) δ è nullo; se A, N e Z sono pari δ è positivo mentre se, con A pari, N e Z sono dispari, δ è negativo. Solitamente si ha:

$$\delta = a_p A^{-3/4}$$

Le costanti moltiplicative fin qui introdotte hanno i seguenti valori numerici:

$$\begin{cases} a_v = 15,5 \text{ MeV} \\ a_s = 16,8 \text{ MeV} \\ a_c = 0,72 \text{ MeV} \\ a_{sym} = 23 \text{ MeV} \\ a_p = 34 \text{ MeV} \end{cases}$$

La modellizzazione del nucleo che è stata usata prende il nome di modello a goccia e tratta il nucleo come una goccia di liquido carico elettricamente (in realtà la modellizzazione a goccia si ferma ai primi tre termini mentre gli altri due sono dovuti sostanzialmente a considerazioni empiriche. Questa formula semiempirica non riesce però a gestire la situazione con A composto da Z e/o N magici.

L'energia di legame.

In base a quanto visto nella lezione precedente la massa di un nucleo con assegnati il numero atomico Z e il numero di massa A sarà espressa dalla relazione seguente:

$$M(Z, A) = Zm_H + (A - Z)m_N - \frac{BE}{c^2}$$

Quando si sostituisce al termine BE l'espressione trovata sfruttando il modello a goccia, si ottiene la formula semiempirica della massa espressa di seguito:

$$M(Z, A) = Zm_H + (A - Z)m_N - \frac{1}{c^2} \left[a_v A - a_s R_0^2 A^{2/3} - a_c \frac{Z^2}{A^{1/3}} - a_{sym} \frac{(A - 2Z)^2}{A} + \delta \right] \quad (1)$$

Moltiplicando tutto per c^2 e conglobando nelle costanti moltiplicative tutto ciò che non sia z o A si ottiene:

$$M(Z, A)c^2 = Zm_H c^2 + (A - Z)m_N c^2 - a_v A + a_s A^{2/3} + a_c \frac{Z^2}{A^{1/3}} + a_{sym} \frac{(A - 2Z)^2}{A} + \delta$$

Per alleggerire la trattazione si suppone che A sia dispari in modo da non considerare il termine di pairing; rimane così:

$$M(Z, A)c^2 = Zm_H c^2 + (A - Z)m_N c^2 - a_v A + a_s A^{2/3} + a_c \frac{Z^2}{A^{1/3}} + a_{sym} \frac{(A - 2Z)^2}{A}$$

L'ultima espressione scritta si può riorganizzare in modo da ricavare un'equazione di secondo grado nell'incognita Z:

$$\left(4a_{sym} A^{-1} + a_c A^{-\frac{1}{3}} \right) Z^2 - (4a_{sym} - m_H c^2 + m_N c^2) Z + \left(Am_N c^2 - a_v A + a_s A^{2/3} + a_{sym} A \right) = M(Z, A)c^2$$

Questa equazione rappresenta, come mostrato in figura 1, una parabola, il cui vertice coincide con il punto in cui, per un dato A, Z sia minimo.

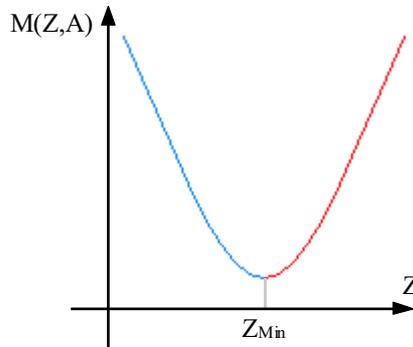


Figura 1

Tale minimo si ottiene ovviamente ponendo:

$$\frac{\partial M(Z, A)}{\partial Z} = 0$$

e trovando:

$$Z_{Min} = \frac{(m_N c^2 - m_H c^2 + 4a_{sym})A}{2 \left(4a_{sym} + a_c A^{2/3} \right)}$$

È importante notare che, siccome il neutrone ha una massa leggermente superiore rispetto a quella dell'atomo di Idrogeno, si avrà:

$$(m_N - m_H)c^2 = 0,78 MeV$$

si nota quindi come ci sia una differenza rispetto al caso in cui si considera la sola massa del protone, nel qual caso si avrebbe:

$$(m_N - m_p)c^2 = 1,25 \text{ MeV}$$

perché in questo secondo caso non bisogna tener conto dell'elettrone. Tenendo conto dei valori numerici è possibile fare la seguente approssimazione:

$$Z_{Min} \cong \frac{A}{2} \cdot \frac{1}{1 + \frac{1}{4} \cdot \frac{a_C}{a_{sym}} A^{2/3}}$$

Per A piccolo si ha dunque:

$$Z_{Min} \cong \frac{A}{2}$$

mentre quando A cresce la Z_{Min} diminuisce per arrivare ad attestarsi, per A maggiore di 200, sul valore di 0,39. Dalla parabola di figura 1 si osserva che per ogni A considerata esiste almeno un nuclide con massa minima e i nuclidi con massa maggiore possono diventare quello di massa minima. Sul ramo colorato in azzurro le trasformazioni per andare verso lo Z_{Min} saranno composte da passi del tipo:

$$\begin{cases} A \rightarrow A \\ Z \rightarrow Z + 1 \\ N \rightarrow N - 1 \end{cases}$$

e si parla quindi di decadimenti β^- nei quali, per soddisfare il principio di conservazione della carica, verrà emessa una carica negativa attraverso un elettrone. Sul ramo colorato di rosso, invece, le trasformazioni per andare verso Z_{Min} saranno passi del tipo:

$$\begin{cases} A \rightarrow A \\ Z \rightarrow Z - 1 \\ N \rightarrow N + 1 \end{cases}$$

e quindi si è in presenza di decadimenti β^+ nei quali, sempre per soddisfare il principio di conservazione della carica, verrà emessa una carica positiva attraverso un positrone. Il più semplice emettitore β^- è l' ^3H . Nell'immagine di figura 2 è mostrata la disposizione, sulla carta dei nuclidi, degli emettitori β^- (area in azzurro) e degli emettitori β^+ (area in rosso).

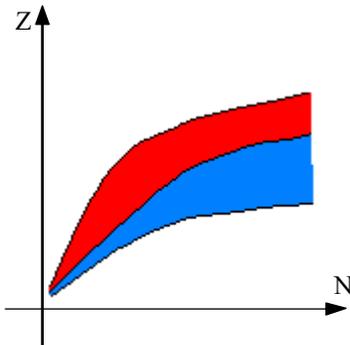


Figura 2

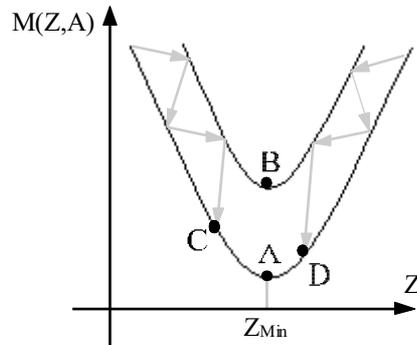


Figura 3

Scegliendo un nuclide con A pari, non è possibile trascurare, nell'equazione (1), il termine δ ; come conseguenza di questo si arriva ad ottenere non una ma due parabole, distanziate di un termine 2δ , come mostrato in figura 3. La parabola superiore è quella dei dispari-dispari mentre quella inferiore è quella dei pari-pari. Il decadimento avviene in questo caso seguendo le frecce indicate e si può notare che una volta giunti nei punti C e D non è più possibile andare in A perché si dovrebbe passare per B (il che, però, implicherebbe un aumento della massa); C e D sono dunque due punti stabili ovvero i due minimi di questa situazione. Il minimo della curva dispari-dispari (ovvero il punto B) non è necessariamente stabile e infatti può decadere β^- o β^+ . Esiste infine la possibilità che da C si passi direttamente a D attraverso quello che viene chiamato doppio decadimento β . Nuclidi stabili per il decadimento β non sono però necessariamente nuclidi stabili in assoluto in quanto esistono diversi altri tipi di decadimento.

La validità della formula semiempirica delle masse può essere testata con alcuni esempi numerici che ne metteranno in luce anche i limiti; si osserva dunque che, inserendo i valori numerici visti in precedenza, la formula assume la seguente forma:

$$BE = 15,5A - 16,8A^{2/3} - 0,72 \frac{Z^2}{A^{1/3}} - 23 \frac{(A-2Z)^2}{A} + \delta$$

dove sia

$$\delta = 34A^{-3/4}$$

Si consideri inizialmente un nuclide piccolo: $^{12}_6\text{C}$; in questo caso il valore teorico sarà il seguente:

$$BE = 91,92 \text{ MeV}$$

dal quale si ricava:

$$\frac{BE}{A} = 7,66 \text{ MeV}$$

Il valore sperimentale sarà invece il seguente:

$$BE = 6m_N + 6m_H - M(^{12}\text{C}) = 89,10 \text{ MeV}$$

dal quale si ricava:

$$\frac{BE}{A} = 7,43 \text{ MeV}$$

C'è dunque una buona concordanza. Volendo utilizzare un nuclide medio si può scegliere $^{56}_{26}\text{Fe}$, nel qual caso il valore teorico sarà il seguente:

$$BE = 489,9 \text{ MeV}$$

dal quale si ricava:

$$\frac{BE}{A} = 8,75 \text{ MeV}$$

Il valore sperimentale sarà invece il seguente:

$$BE = 26m_N + 26m_H - M(^{56}\text{Fe}) = 479 \text{ MeV}$$

dal quale si ricava:

$$\frac{BE}{A} = 8,55 \text{ MeV}$$

e quindi anche in questo caso c'è una buona concordanza. Si consideri infine il caso di un nuclide grosso con doppio magico: $^{208}_{82}\text{Pb}$. In questo caso il valore teorico sarà il seguente:

$$BE = 1603 \text{ MeV}$$

dal quale si ricava:

$$\frac{BE}{A} = 7,71 \text{ MeV}$$

Il valore sperimentale sarà invece il seguente:

$$BE = 82m_N + 82m_H - M(^{208}\text{Pb}) = 1712 \text{ MeV}$$

dal quale si ricava:

$$\frac{BE}{A} = 8,23 \text{ MeV}$$

Si nota allora che l'effetto della presenza dei numeri magici è quello di rendere poco confrontabili i risultati sperimentali e quelli teorici. Per comprendere il motivo di questo si faccia riferimento all'energia necessaria per separare un neutrone da un nucleo di $^{15}_7\text{N}_8$ e di $^{16}_7\text{N}_9$. Nel primo caso l'energia richiesta è data dalla relazione:

$$M(^{14}_7\text{N}_7)c^2 - M(^{15}_7\text{N}_8)c^2 + m_Nc^2 = 10,83 \text{ MeV}$$

nel secondo caso si ricava invece:

$$M(^{15}_7\text{N}_8)c^2 - M(^{16}_7\text{N}_9)c^2 + m_Nc^2 = 2,49 \text{ MeV}$$

e quindi si nota che c'è bisogno di una energia decisamente maggiore per togliere il neutrone relativo al primo caso, in quanto formerebbe un numero magico di neutroni. Si utilizza infine l'energia di legame per cercare una conferma della relazione secondo la quale:

$$R = R_0 A^{1/3}$$

e per fare questo si utilizzano i nuclei specchio ovvero quei nuclei nei quali Z ed N sono invertiti, per esempio il nucleo specchio di $^{15}_7\text{X}_8$ è $^{15}_8\text{X}_7$ ovvero, nel caso particolare relativo ai numeri scelti: $^{15}_7\text{N}_8$ e

$^{15}_8\text{O}_7$. Si valuta dunque la differenza nell'energia di legame ΔE relativa a questi due atomi e si osserva che tale differenza è imputabile al termine Coulombiano della formula della massa; dunque si avrà:

$$\Delta E = \frac{3}{5} \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 R} (2Z - 1)$$

Osservando poi che, nel caso dei nuclei specchio vale la relazione:

$$A = Z + Z - 1 = 2Z - 1$$

si ottiene:

$$\Delta E = \frac{3}{5} \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 R_0} A^{2/3}$$

e da quest'ultima relazione si può ricavare R_0 . Usando alcuni atomi specchio si ottengono i valori raccolti nella tabella 1.

A	ΔE (MeV)
11	0,97
15	1,74
17	1,74
19	2,22
23	3,03
27	3,85
31	4,42
35	4,94
39	5,49
43	5,8

Tabella 1

Con questo set di valori sperimentali si ricava:

$$R_0 = 1,24 \text{ fm}$$

molto simile dunque al valore trovato in precedenza.

Momento angolare nucleare.

Il momento angolare totale di un nucleo è la risultante dei momenti di spin e dei momenti angolari e si indica con il simbolo I . Generalmente, se A è dispari, I sarà sicuramente un semi-intero (in unità \hbar) mentre, se A è pari, I sarà un intero (in unità \hbar). Nuclei con A pari e Z pari (i pari-pari) avranno I nullo nello stato fondamentale. I valori massimi misurati per I sono $9/2$ e 7 , da questo si deduce che coppie di nucleoni identici accoppiano i propri momenti angolari in maniera antiparallela e quindi un grosso gruppo di nucleoni annullano il proprio I e un gruppo ristretto è responsabile dell' I complessivo del nucleo.

Parità.

La parità (+,-) si definisce come il fatto che non cambi niente o meno quando si inverte il segno delle coordinate spaziali. Complessivamente si indica il momento angolare e la parità con la seguente simbologia: I^π dove π è, appunto, + o -.

Momenti elettromagnetici nucleari.

Ci si sofferma ora sui momenti elettromagnetici nucleari che valutano le interazioni del nucleo con campi elettromagnetici esterni. Da ora in avanti si indicherà con L il numero di multipolo: $L=0$ sarà allora un monopolo, $L=1$ un dipolo, $L=2$ un quadripolo, $L=3$ un esapolo, $L=4$ un ottupolo e così via. I primi tre valori di L indicati sono molto importanti mentre i valori 3 e 4 sono molto rari ed oltre non c'è quasi niente. Ovviamente è possibile avere un monopolo elettrico ma non un monopolo magnetico e altrettanto ovviamente è possibile avere un dipolo magnetico ma non un dipolo elettrico e così via; in generale, considerando la relazione seguente:

$$\int \psi^* \mu \psi d\mu$$

dove μ è il momento di multipolo, si avrà che, se μ è dispari i multipoli dispari si annullano mentre avviene il contrario se μ è pari. Siccome momenti elettrici e magnetici hanno parità inversa, non ci saranno L elettrici dispari ed L magnetici pari. Il momento di monopolo elettrico non è altro che la carica netta posseduta dal nucleo e quindi sarà Ze ; il successivo momento non nullo sarà il momento di dipolo magnetico, che si può valutare pensando alla situazione classica di un elettrone che, nel compiere la sua orbita, genera un momento magnetico espresso dalla relazione:

$$|\mu| = \frac{e}{2m_e} |\vec{l}|$$

con

$$|\vec{l}| = mvr$$

che è il momento angolare classico dell'elettrone. Volendo estendere questa espressione all'ambito nucleare, nel quale ovviamente non ci sono elettroni, si definisce il momento magnetico nell'ambito della meccanica quantistica nel modo seguente:

$$\langle \mu \rangle = \frac{e\hbar}{2m_p} l$$

dove ora l è un numero quantico. Ricordando la definizione del magnetone di Bohr, secondo la quale:

$$\mu_B = \frac{e}{2m_e} \hbar = 5,7884 \cdot 10^{-5} \frac{eV}{T}$$

è possibile definire il magnetone nucleare come segue:

$$\mu_N = \frac{e\hbar}{2m_p} = 3,15 \cdot 10^{-8} \frac{eV}{T}$$

e si avrà così:

$$\langle \mu \rangle = \mu_N l$$

Quest'ultima espressione può essere riscritta in maniera più conveniente nel modo seguente:

$$\langle \mu \rangle = g_l \mu_N l$$

dove g_l prende il nome di fattore g nucleare (ed è un numero adimensionale); nel caso del protone si avrà:

$$g_l^p = 1$$

mentre per quanto riguarda il neutrone si avrà, data l'assenza di carica elettrica:

$$g_l^n = 0$$

Oltre al contributo relativo al moto orbitale, protoni e neutroni, esattamente come gli elettroni, presentano anche un momento magnetico di spin che non ha un analogo classico ma che viene indicato con una notazione simile a quella precedentemente vista per il caso orbitale:

$$\langle \mu \rangle = g_s \mu_N s$$

con

$$s = \frac{1}{2}$$

Il termine g_s , misurato per protoni e neutroni libero ha il valore riportato di seguito:

$$\begin{cases} g_s^p = 5,585 \\ g_s^n = -3,826 \end{cases}$$

prende il nome di fattore g di spin e mostra che anche il neutrone, pur non avendo carica, presenta comunque un momento di spin non nullo. Per la teoria di Dirac si potrebbe calcolare che il g_s dell'elettrone è pari a 2, trovando dunque qualcosa di diverso dai g_s^p e g_s^n . Questa è una prima evidenza del fatto che protoni e neutroni non sono elementi elementari; in effetti i nucleoni fanno parte della famiglia degli adroni (famiglia che si differenzia dall'altro importante gruppo: i leptoni). Gli adroni a loro volta si dividono in barioni (formati, come appunto il neutrone e il protone, da tre quark) e i mesoni (formati da un quark e da un antiquark). Alcuni valori numerici per μ sono riportati nella tabella 1.

Nuclide	μ [μ_N]
n	-1,913
p	2,793
2H	0,857
${}^{57}Fe$	0,091
${}^{57}Co$	4,74

Tabella 1

Dopo il momento di monopolio elettrico e il momento di dipolo magnetico, il successivo momento non nullo è il momento di quadrupolo elettrico; classicamente si ha:

$$Q = \int_V (3z^2 - r^2) \rho(\vec{r}) dV$$

Facendo riferimento ad un sistema di coordinate di tipo cilindrico si può osservare che, se la distribuzione di carica fosse sferica, il momento di quadrupolo sarebbe nullo in quanto sarebbe:

$$x^2 = y^2 = z^2 = \frac{r^2}{3}$$

Se invece la distribuzione fosse oblata o prolata si avrebbe un momento di quadrupolo maggiore o minore di zero (dunque a partire dal momento di quadrupolo si può capire qualcosa su come è distribuita la carica). Passando al caso quantistico si avrà invece:

$$e\langle Q \rangle = e \int \psi^* (3z^2 - r^2) \psi dV$$

Questa espressione è relativa al singolo protone in quanto, per un neutrone, il momento di quadrupolo elettrico è nullo. Relativamente ai tre casi esaminati nel caso classico (simmetria sferica o deformazione oblata o prolata, che nel caso quantistico si riferirà alla $|\psi|^2$) si avranno i tre seguenti risultati:

$$\begin{cases} Q = 0 \\ Q \div -\langle r^2 \rangle \\ Q \div 2\langle r^2 \rangle \end{cases}$$

Definendo il barn come segue:

$$1b = 10^{-28} m^2 = 100 fm^2$$

si possono considerare i valori numerici listati nella tabella 2.

Nuclide	Q [b]
2H	0,00288
${}^{17}O$	-0,02578

^{59}Co	0,40
^{63}Cu	-0,209
^{176}Lu	8

Tabella 2

Da tale tabella si osserva che, nel caso di ^2H , è possibile pensare ad un eccesso di carica lungo l'asse Z in quanto Q è positivo; un medesimo discorso può essere fatto per la terra rara ^{176}Lu . Al variare di A, i valori numerici citatisi ottengono sfruttando la seguente regola:

$$eQ \leq R_0^2 A^{2/3}$$

che discende dal supporre che sia sempre l'ultimo protone (detto anche protone di valenza) a dare contributo al momento di quadrupolo elettrico.

Il Deutone.

Il Deutone (o Deuterone) altro non è che il nucleo dell'atomo di Deuterio ovvero ^2H e cioè un nuclide formato solo da un protone ed un neutrone; tale nuclide è caratterizzato dal non ammettere stati eccitati e quindi si può parlare solo di stato legato o di stato non legato. Per iniziare la trattazione è possibile utilizzare la formula relativa all'energia di legame ed ottenere:

$$BE = -2,22 \text{ MeV}$$

che da ora in avanti verrà indicata come E_B . Per studiare il Deutone è necessario ricavare la forma analitica della sua funzione d'onda; per fare questo è per prima cosa necessario stimare la forma del potenziale che, essendo attrattivo si potrà indicare (supponendo di essere nel caso di un campo di forze centrali) come $V(r)$. Si può imporre, in analogia con quanto si vede per gli atomi, che lo stato di minima energia del Deutone sia caratterizzato da

$$l = 0$$

Si suppone dunque che il potenziale abbia la forma mostrata in figura 1 e che sia definito nel modo seguente:

$$V(r) = \begin{cases} -V_0 & \forall r < b \\ 0 & \forall r > b \end{cases}$$

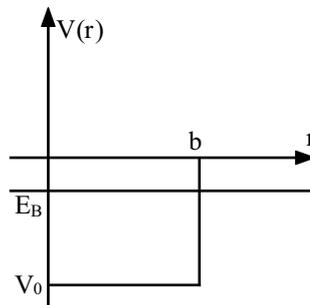


Figura 1

Definendo nel modo seguente la parte radiale della funzione d'onda:

$$\psi(\vec{r}) = \frac{1}{\sqrt{4\pi}} \cdot \frac{u(r)}{r}$$

è possibile arrivare a scrivere la seguente equazione radiale:

$$-\frac{\hbar}{2m} \cdot \frac{d^2 u}{dr^2} + V(r)u(r) = Eu(r)$$

dove m è da intendersi come massa ridotta che, come è noto, è definita nel modo seguente:

$$m = \frac{m_p m_n}{m_p + m_n} \approx \frac{m_p}{2}$$

in quanto la massa del protone e del neutrone vengono considerate praticamente identiche. L'equazione radiale può ovviamente essere analizzata in due intervalli distinti; nella zona in cui:

$$0 < r < b$$

si avrà:

$$\frac{d^2 u}{dr^2} + \frac{2m}{\hbar^2} (V_0 - E_B)u = 0$$

Nella zona 2, invece, ovvero quella con

$$r > b$$

si avrà:

$$\frac{d^2u}{dr^2} - \frac{2m}{\hbar^2} E_B u = 0$$

La soluzione in zona 1 è la seguente:

$$u(r) = A \sin(Kr)$$

con

$$K = \frac{1}{\hbar} \sqrt{2m(V_0 - E_B)}$$

In zona 2 invece si ha:

$$u(r) = B e^{-\kappa r}$$

con

$$\kappa = \frac{1}{\hbar} \sqrt{2mE_B}$$

Ovviamente è necessario raccordare le due soluzioni nel punto in cui

$$r = b$$

e questo permette di ottenere la seguente equazione trascendente:

$$K \cot g(Kb) = \kappa$$

L'unica soluzione possibile ha allora una struttura come quella mostrata in figura 2.

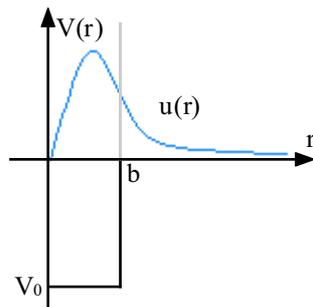


Figura 2



Figura 3

Da esperimenti di scattering elettronico si arriva a dedurre che:

$$b = 2,1 \text{ fm}$$

Risolvendo dunque numericamente l'equazione trascendente trovata si trova:

$$|V_0| = 35 \text{ MeV}$$

Facendo poi i conti con lo ψ^2 si vede che per il 60% del tempo si sta fuori dalla buca; dunque si tende ad utilizzare solo l'equazione radiale nella forma relativa alla zona 2. Il momento I misurato per il Deutone è pari ad 1 e quindi, facendo riferimento alla relazione:

$$I = s_p + s_n + l$$

con s_p ed s_n spin del protone e del neutrone, si deduce che, avendo in precedenza posto nullo il numero quantico l , i due spin si devono sommare (essendo entrambi pari ad $\frac{1}{2}$) e quindi si è in presenza di una situazione con due spin paralleli come quella mostrata in figura 3. Un'altra caratteristica del Deutone che può essere misurata è la parità e si può sperimentalmente arrivare ad affermare che la parità del Deutone è pari; complessivamente si ha dunque:

$$I^\pi = 1^+$$

Dalla meccanica quantistica è noto che vale la relazione:

$$\pi = (-1)^l$$

e si parla dunque di parità pari per l nullo (stati s) e per $l=2$ (stati d) e di parità dispari per $l=1$ (stati p). I risultati che sono stati fino ad ora trovati sono dunque compatibili con la scelta precedentemente fatta di considerare l nullo ma non escludono il caso con $l=2$. Le discrepanze con il modello che prevede l nullo emergono quando si considerano i valori di μ e di Q ; i valori misurati sono infatti i seguenti:

$$\begin{cases} \mu = 0,857\mu_N \\ Q = 0,00288b \end{cases}$$

mentre i valori che deriverebbero dal modello con l nullo sarebbero:

$$\begin{cases} \mu = 0,879\mu_N \\ Q = 0 \end{cases}$$

Per arrivare ad ottenere i valori sperimentali è necessario supporre che lo stato fondamentale del Deutone non sia uno stato puro; invece dunque di considerare lo stato s imposto dall'aver posto l nullo è necessario considerare anche lo stato d dovuto ad $l=2$ e quindi si avrà:

$$\psi = a_s \psi(l=0) + a_d \psi(l=2)$$

dove a_s e a_d sono dei pesi e quindi si deve avere che:

$$a_s^2 + a_d^2 = 1$$

Per arrivare ai giusti valori, soprattutto per quanto riguarda Q , bisogna porre:

$$\begin{cases} 4\% < a_d^2 < 6\% \\ 94\% < a_s^2 < 96\% \end{cases}$$

Si nota dunque che appare un termine non centrale importante.

Scattering fra nucleoni.

Si consideri un fascio di neutroni che incide su Idrogeno molecolare; se l'energia dei neutroni è molto superiore rispetto all'energia di legame si può approssimare tutto il discorso come se si trattasse dell'interazione tra due nucleoni liberi e, per iniziare, si faccia riferimento all'interazione di scattering elastico. Nel sistema di riferimento del laboratorio la situazione mostrata in figura 1 descrive in modo soddisfacente quanto accade.

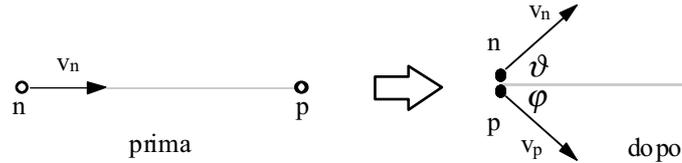


Figura 1

Nel sistema di riferimento del centro di massa si ha invece quanto mostrato in figura 2.

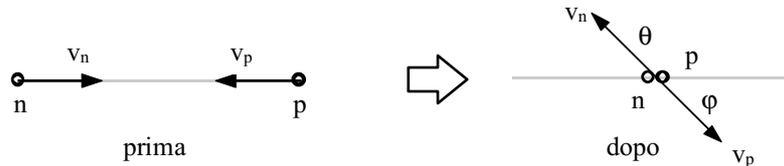


Figura 2

In questa seconda situazione si avrà ovviamente:

$$v_p = \frac{v_0}{2} = v_n$$

I due sistemi di riferimento sono tra loro legati dalle seguenti relazioni:

$$\left\{ \begin{array}{l} \vartheta_{CM} = 2\vartheta_{Lab} \\ \varphi_{CM} = 2\varphi_{Lab} \\ \varphi_{CM} + \vartheta_{CM} = 180^\circ \\ \varphi_{Lab} + \vartheta_{Lab} = 90^\circ \\ T_{Lab} = \frac{1}{2}mv^2 \\ T_{CM} = 2 \left[\frac{1}{2}m \left(\frac{v_0}{2} \right)^2 \right] = \frac{1}{4}mv^2 = \frac{1}{2}T_{Lab} \end{array} \right.$$

Il parametro di impatto b tra il neutrone e il bordo del protone (essendo il raggio R della particella bersaglio circa 1fm) sarà:

$$b = R = 1fm$$

Il momento angolare relativo tra i nucleoni deve essere quantizzato in unità \hbar e quindi si considera la seguente equazione semiclassica:

$$m v b = l \hbar$$

Quando sia:

$$m v b \ll \hbar$$

(1)

è possibile supporre che:

$$l = 0$$

Dalla relazione (1) è quindi possibile ricavare:

$$v \ll \frac{\hbar}{mb}$$

alla quale è possibile associare la seguente energia cinetica:

$$T = \frac{1}{2}mv^2 \ll \frac{\hbar}{2mb^2} \cdot \frac{c^2}{c^2} \cong 20 \text{ MeV}$$

Come conseguenza si avrà:

$$T_{CM} = 10 \text{ MeV}$$

È stato dunque trovato un limite superiore per quanto riguarda l'energia al di sotto della quale si hanno interazioni con momento angolare principale nullo. Da ora in poi si farà dunque riferimento ai soli scattering di bassa energia, per i quali è valida l'ipotesi secondo la quale l è nulla. Si calcola ora la probabilità che lo scattering avvenga, ovvero la sezione d'urto; per fare questo si considerano sia il neutrone che il protone come particelle senza spin e, messo il protone nell'origine del sistema, si faccia riferimento ad un fascio incidente con la seguente funzione d'onda:

$$\psi_{inc} = e^{iKz}$$

con:

$$K = \frac{1}{\hbar} \sqrt{2mE}$$

dove m sia ancora la massa ridotta. Scomponendo ora in serie di armoniche e limitandosi al primo termine (infatti il termine l è nullo) si ha:

$$\psi_{inc} = \frac{\sin Kr}{Kr}$$

ovvero, esplicitando il seno in somme di esponenziali:

$$\psi_{inc} = \frac{1}{2iKr} (e^{iKr} - e^{-iKr})$$

in questo modo risultano evidenziate un'onda entrante e un'onda uscente. Tutto ciò che può avvenire in uno scattering elastico è un cambiamento nella fase dell'onda uscente e quindi, definendo lo shift di fase δ_0 , si ha, ad una certa distanza dall'evento di scattering:

$$\psi(r) = \frac{1}{2iKr} (e^{i(Kr+2\delta_0)} - e^{-iKr})$$

La ψ di scattering (differenza tra quella incidente e quella scatterata) è dunque:

$$\psi_{Sca} = \psi - \psi_{inc} = \frac{1}{2iK} (e^{i\delta_0} - 1) \frac{e^{iKr}}{r}$$

La densità di corrente di scattering sarà:

$$j_{Sca} = \frac{\hbar}{2mi} \left(\psi^* \frac{\partial \psi}{\partial r} - \frac{\partial \psi^*}{\partial r} \psi \right) = \frac{\hbar}{mKr^2} \sin^2 \delta_0$$

mentre per le particelle incidenti si ha:

$$j_{inc} = \frac{\hbar K}{m}$$

La corrente j_{Sca} è uniformemente distribuita su una sfera di raggio r e dunque l'elemento di area $r^2 d\Omega$ sottende, sulla sfera, all'angolo solido

$$d\Omega = \sin \vartheta d\vartheta d\varphi$$

a partire dal punto di scattering. La probabilità $d\sigma$ che una particella scatterata arrivi dunque in $d\Omega$ sarà:

$$d\sigma = \frac{j_{Sca} r^2 d\Omega}{j_{inc}}$$

dalla quale si ottiene la sezione d'urto differenziale:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{\sin^2 \delta_0}{K^2}$$

Si nota dunque come non ci sia dipendenza angolare ma solo dallo sfasamento e quindi lo scattering è isotropo. La sezione d'urto complessiva sarà ovviamente:

$$\sigma = \int \frac{d\sigma}{d\Omega} d\Omega$$

ovvero, essendo la sezione d'urto differenziale una costante con il variare dell'angolo (in quanto l è stata ipotizzata nulla):

$$\sigma = \frac{d\sigma}{d\Omega} \int d\Omega = 4\pi \frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{4\pi \sin^2 \delta_0}{K^2} \quad (2)$$

Tutto questo, ovviamente, vale nel sistema del centro di massa. I risultati sperimentali sottolineano la costanza della sezione d'urto σ in quanto si mantiene costante su un valore di circa $20b$ per un intervallo energetico che va dai 10 eV ai 10 keV, dopodiché ha un andamento discendente. Si consideri ora il caso specifico del potenziale mostrato in figura 3; siccome l è stato imposto nullo si può fare riferimento alla sola componente radiale e quindi nella zona 1 si avrà:

$$\frac{d^2 u(r)}{dr^2} + \frac{2m}{\hbar} (V_0 - E) u = 0$$

dalla quale si ricava

$$u(r) = A \sin(Kr)$$

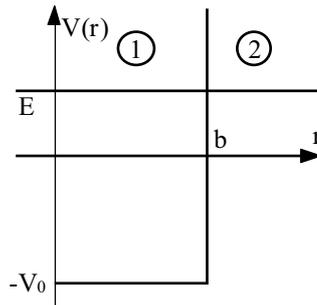


Figura 3

Nella zona 2 si avrà invece:

$$\frac{d^2 u(r)}{dr^2} + \frac{2m}{\hbar} E u(r) = 0$$

Dall'ultima relazione scritta si ricava:

$$u(r) = C \sin(\kappa r) + D \cos(\kappa r)$$

Ponendo poi:

$$\begin{cases} C = B \cos \delta_0 \\ D = B \sin \delta_0 \end{cases}$$

si ricava:

$$u(r) = B \sin(\kappa r + \delta_0) \quad (3)$$

Dal raccordo di u in corrispondenza di b si ottiene:

$$B \sin(\kappa b + \delta_0) = A \sin(Kb)$$

mentre dal raccordo di du/dr nel medesimo punto si ricava:

$$\kappa B \cos(\kappa b + \delta_0) = K A \sin(Kb)$$

Dividendo allora l'ultima relazione scritta per quella precedente si ottiene:

$$K \cot g(Kb) = \kappa \cot g(\kappa b + \delta_0)$$

Utilizzando a questo punto il metodo generale visto in precedenza si arriverebbe, in questo caso, alla seguente espressione della sezione d'urto:

$$\sigma = \frac{4\pi}{\kappa^2 + \alpha^2} \left[\cos(\kappa b) + \frac{\alpha}{\kappa} \sin(\kappa b) \right]$$

dove sia:

$$\alpha = -K \cot g(Kb)$$

L'espressione di σ così trovata presenta effettivamente un plateau in corrispondenza delle basse energie per poi decrescere con l'aumentare dell'energia, non tornano però i valori numerici in quanto, a fronte dei valori sperimentali pari a $20b$, i calcoli portano solo a $4b$. Per risolvere questa discrepanza è necessario fare riferimento agli spin; gli spin dei protoni e dei neutroni (entrambi pari ad $\frac{1}{2}$) si possono combinare per dare uno spin complessivo:

$$S = s_p + s_n$$

A seconda degli orientamenti degli spin dei nucleoni, S può essere pari a zero o all'unità; la soluzione con S=1 ha tre possibili orientamenti e quindi si parla di stato di tripletto; la soluzione con S nullo ha invece un solo possibile orientamento e quindi si parla di stato di singoletto. Dei quattro possibili orientamenti, dunque, tre si riferiscono allo stato di tripletto ed uno allo stato di singoletto; complessivamente è allora possibile avere:

$$\sigma = \frac{3}{4}\sigma_t + \frac{1}{4}\sigma_s$$

Usando i valori numerici si ha allora:

$$20 = \frac{3}{4}4 + \frac{1}{4}\sigma_s$$

da cui:

$$\sigma_{s,0} = 60b$$

Questo valore è ovviamente stato trovato mischiando, come mostrato, dati sperimentali e dati teorici. Da tutto questo discorso si evince che le forze nucleari sono dunque spin-dipendenti. Studiando lo scattering a bassa energia con l'ortoidrogeno o il paraidrogeno, ovvero le due forme molecolari dell'Idrogeno che presentano, rispettivamente, i due protoni paralleli piuttosto che antiparalleli (si ricordi che l'Idrogeno molecolare è infatti biatomico) si riesce effettivamente a misurare la dipendenza dallo spin. Nel caso dell'Idrogeno molecolare bisogna però tener conto di un ulteriore parametro; quando infatti i neutroni incidenti sull'Idrogeno molecolare hanno basse energie, la loro lunghezza d'onda di De Broglie è talmente grande da portarli ad interferire con le funzioni d'onda di entrambi i protoni. Per analizzare gli effetti di interferenza in problemi di questo tipo si introduce una lunghezza di diffusione a definita in modo che sia:

$$\lim_{k \rightarrow 0} \sigma = 4\pi a^2$$

Si avrà, allora, combinando quest'ultima relazione con la relazione (2):

$$a = -\lim_{k \rightarrow 0} \frac{\sin \delta_0}{k}$$

Da questa relazione si comprende come δ_0 debba tendere a zero a basse energie per garantire che a rimanga finito; a basse energie si può dunque scrivere:

$$a \cong -\frac{\delta_0}{k}$$

dalla quale si ricava che l'equazione dell'onda scatterata, ovvero l'equazione (3), diventa:

$$u(r) = B \sin[\kappa(r - a)]$$

Se a è maggiore di zero si ha stato di tripletto (stato legato) e quindi si fa riferimento al grafico di figura 4; se invece a è negativo si ha stato di singoletto (stato non legato) e quindi fa riferimento al grafico di figura 5.

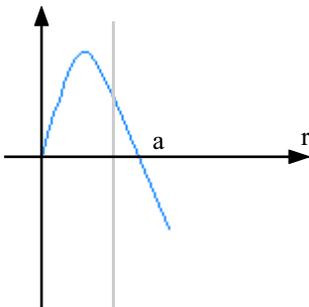


Figura 4

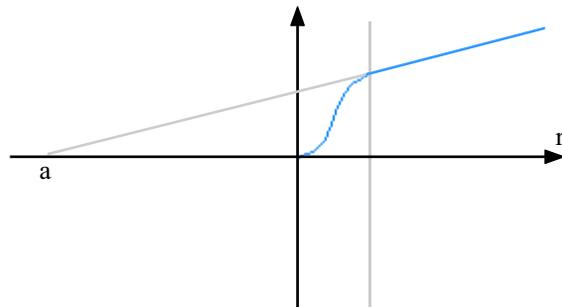


Figura 5

Dalle misure in orto e para idrogeno si ricavano le misure di a:

$$\begin{cases} a_t = 5,35 \text{ fm} \\ a_s = -23,6 \text{ fm} \end{cases}$$

Interazione protone-protone e neutrone-neutrone.

Quando i due nucleoni sono uguali la loro interazione presenta una maggiore complessità, soprattutto in quanto, essendo i nucleoni dei fermioni, si avrà:

$$\psi_{12} = -\psi_{21}$$

Essendo inoltre le due particelle uguali, bisogna tener conto dell'indistinguibilità degli scattering avvenuti ad angolo θ e ad angolo $\pi-\theta$. Si consideri inizialmente l'interazione del tipo p-p (più facile da ottenere) per la quale si otterrà la sezione d'urto differenziale con l'andamento mostrato in figura 6.

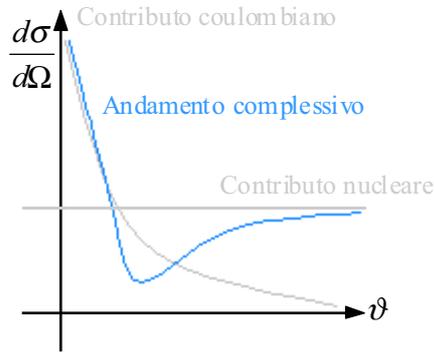


Figura 6

Per ottenere questo risultato è necessario utilizzare un potenziale composto da diversi contributi; ci sarà infatti un termine coulombiano, che sarà proporzionale a

$$V_{coul} \div \sin^{-4} \frac{\vartheta}{2}$$

e un termine nucleare, proporzionale a

$$V_{nuc} \div \sin^2 \delta_0$$

Per tener conto anche dell'indistinguibilità tra θ e $\pi-\theta$ si introduce invece un termine, simile a quello coulombiano, proporzionale a:

$$V_{int} \div \sin^{-4} \left(\pi - \frac{\vartheta}{2} \right) = \cos^{-4} \frac{\vartheta}{2}$$

Ci sono poi altri termini come ad esempio un termine di interferenza tra i due termini coulombiani e poi altri termini dovuti all'interferenza tra lo scattering nucleare e il coulombiano a θ e $\pi-\theta$.

Il modello a scambio di forze.

All'aumentare dell'energia i dati sperimentali portano ad un andamento con l'angolo della sezione d'urto differenziale come quello mostrato in figura 7.

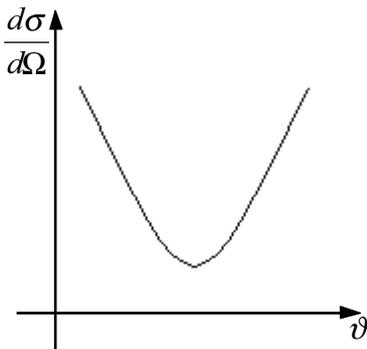


Figura 7

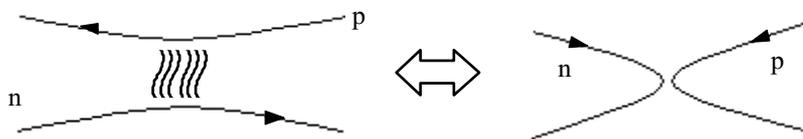


Figura 8

Per spiegare questo si suppone che ci possa essere lo scambio di qualche cosa tra le particelle, come mostrato in figura 8. Si tratta allora di un'interazione tra campi: per due elettroni i due campi elettromagnetici devono scambiarsi un bosone di massa nulla, il fotone; per le forze nucleari (di range finito) la particella deve essere un bosone con una massa di circa $140 \text{ MeV}/c^2$, detta mesone (teoria OPEP). La particella virtuale scambiata deve soddisfare il principio di indeterminazione di Heisemberg secondo il quale:

$$\Delta mc^2 \Delta t \leq \hbar$$

dalla quale si ricava:

$$\Delta t \leq \frac{\hbar}{\Delta mc^2}$$

Tenendo poi conto che:

$$R = c\Delta t$$

è il raggio d'azione della forza nucleare, si ricava:

$$R \approx \frac{\hbar c}{\Delta mc^2}$$

Conoscendo R (circa 1,5 fm) si ritrova il valore limite di massa prima vista. La relazione complessiva di scattering tra due nucleoni identici è dunque la seguente:

$$n_1 \rightarrow n_1 + \pi^0 \dots \pi^0 + n_2 \rightarrow n_2$$

$$p_1 \rightarrow p_1 + \pi^0 \dots \pi^0 + p_2 \rightarrow p_2$$

$$n_1 \rightarrow n_1 + \pi^0 \dots \pi^0 + p_2 \rightarrow p_2$$

$$n_1 \rightarrow p_1 + \pi^{-1} \dots \pi^{-1} + p_2 \rightarrow n_2$$

Questa ipotesi è stata proposta negli anni '30 ed è stata in seguito verificata sfruttando i raggi cosmici (nel 1947). La scoperta di π ha dato origine alla famiglia dei mesoni (tra i quali i mesoni π sono quelli con massa inferiore). Per i mesoni si sono effettivamente misurate le seguenti masse:

$$\begin{cases} m_{\pi^{\pm 1}} c^2 = 139 \frac{MeV}{c^2} \\ m_{\pi^0} c^2 = 134 \frac{MeV}{c^2} \end{cases}$$

I mesoni sono composti da quark e antiquark e i mesoni π sono anche noti come pioni che vengono attualmente utilizzati per trovare il modo di produrre neutrini dal loro decadimento.

Il modello a shell.

L'analisi fino ad ora fatta del nucleo con le caratteristiche di tutti i nucleoni diventa ovviamente ingestibile con l'aumentare del numero dei nucleoni, è dunque opportuno cercare dei modelli nucleari che permettano di ottenere i dati fin qui visti e che siano gestibili. Un primo modello prevede di considerare il nucleo come un gas di nucleoni debolmente attrattivi. Per quanto riguarda i neutroni si avrà una situazione come quella mostrata in figura 9, dove il termine E_F^n indica l'energia di fermi per il neutrone.

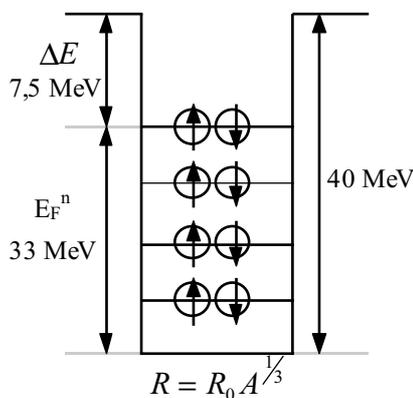


Figura 9

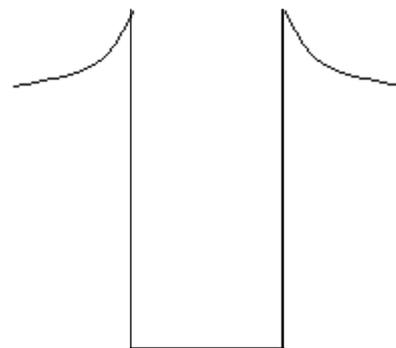


Figura 10

Sfruttando una geometria sferica per il volume nucleare si ricava il momento:

$$P_F \approx 250 \frac{MeV}{c}$$

L'energia cinetica media di un singolo nucleone è di circa 20 MeV che corrisponde ad una velocità piccola rispetto a c , ciò permette di fare riferimento ai calcoli classici. Il libero cammino medio è molto alto (molto più grande delle dimensioni del nucleo stesso). Per i protoni si può ripetere un discorso analogo con una buca di potenziale che abbia però un andamento come quello mostrato in figura 10. Facendo riferimento alla carta di Segre e ricordando che al crescere di A il numero dei neutroni cresce più del numero dei protoni il modello proposto porterebbe a livelli pieni di neutroni e vuoti di protoni; siccome poi i neutroni si possono trasformare in protoni e cadere verso livelli più interni non si avrebbero più nuclei stabili. Per tener conto dunque del fatto che i protoni sentono anche l'interazione coulombiana, i livelli dei protoni sono un po' più alti, e questo risolve il problema. Un altro modello, più evoluto, è il modello a shell che prevede ancora una serie di livelli energetici con livelli eccitati raggiungibili fornendo energia ai nucleoni; il modello a shell modella bene alcuni fattori in precedenza causa di perplessità. Per esempio, infatti, il modello a shell

permette di comprendere il comportamento anomalo dei nuclei con numeri magici supponendo che i numeri magici si abbiano quando gli shell vengono riempiti. Un esempio semplice di modello a shell è quello a particella indipendente; in questo caso si sostituisce l'interazione di un nucleone con tutti gli altri tramite la presenza di un potenziale di campo medio. La prima cosa da fare è ricercare la forma del potenziale in questione con il quale si valuterà poi la funzione d'onda

$$\psi(r, \vartheta, \varphi) = R_{n,l}(r) Y_{l,m}(\vartheta, \varphi)$$

dove n è il numero dei nodi della $R(r)$ mentre l è il momento angolare ed m è la proiezione di l sull'asse z . La sequenza dei livelli relativi ad $l=0,1,2,\dots$ è detta s,p,d,f,g,\dots . Siccome deve sempre essere verificato il principio di esclusione di Pauli, i livelli energetici sono $2(2l+1)$ degeneri perché in ogni sottolivello si possono mettere due nucleoni con spin antiparalleli. Per quanto riguarda la scelta del potenziale, questo deve sostanzialmente seguire la distribuzione di materia nucleare:

- per nuclei leggeri ($A < 10$) si usa il potenziale dell'oscillatore armonico tridimensionale;
- quando non interessa particolarmente la situazione di superficie si utilizza solo un potenziale a buca quadrata (che però non riesce ad esprimere i numeri magici);
- solitamente si usa un potenziale che ricalca la distribuzione di carica nel nucleo.

Un esempio è il potenziale di Woods-Saxon, mostrato in figura 11 ed espresso nel modo seguente:

$$V(r) = -\frac{V_0}{1 + e^{\frac{r-R}{a}}}$$

dove a è un valore costante pari a 0,5fm mentre un valor medio di V_0 usato per i nuclei mediopesanti è 40MeV.

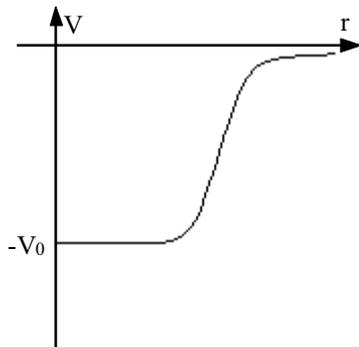


Figura 11

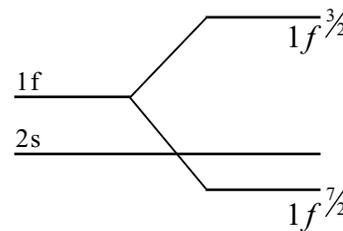


Figura 12

La sequenza dei livelli energetici è di questo tipo:

$$1s, 1p, 1d, 2s, 1f, 1g, \dots$$

Per ciascuno di questi livelli la degenerazione è $(2l+1)$ e quindi si ha:

$$2, 6, 10, 14, 18, \dots$$

Il numero di stati inferiori è allora:

$$2, 8, 18, 20, 34, 40, 58, \dots$$

Considerando solo la dipendenza da r si possono ricavare solo i numeri magici 2, 8 e 20 e quindi è necessario introdurre un termine spi-orbita, ottenendo:

$$V(r) = V_{centrale}(r) + V_{sp}(\vec{r}) \cdot \vec{s}$$

Definito un momento:

$$\vec{j} = \vec{l} + \vec{s}$$

con proiezioni

$$m_j = \pm j$$

si comprende come i numeri quantici importanti siano n, j, m_j ed s . Il livello $1p$ si splitta dunque in due sottolivelli, quello con energia minore è quello con il segno positivo; la differenza ΔE tra questi due sottolivelli non è costante ma cresce al crescere di l (altrimenti cambierebbe ben poco). La sequenza dei livelli è ora mutata e si ha, per esempio, la situazione mostrata in figura 12. In questo modo i livelli energetici si mischiano e si ottiene la sequenza corretta di numeri magici. Facendo riferimento al caso con A nucleoni; $A-1$ formano il core (ovvero shell pieno) generatore del potenziale e un solo nucleone esterno è quello che permette di ricavare tutte le caratteristiche che servono, ovvero da quest'ultimo nucleone si ricaverà l'espressione di I^π . Un discorso simile è quello in cui manca un solo nucleone per avere uno shell pieno; in questo caso i valori di I^π si ricaveranno in base ai valori della lacuna. Per ricavare I si deve utilizzare la j del nucleone esterno, l invece determinerà la parità. Quando ci sono due nucleoni esterni al core, I si

ricava combinando i due j dei due nucleoni; quando poi ci sono tanti nucleoni oltre lo shell chiuso, se ne accoppia un numero pari e quelli che rimangono forniscono le caratteristiche che servono. Quando ci sono due livelli vicini con l molto diverso l'uno dall'altro, si tende, prima di finire il livello energetico inferiore, a riempire con una coppia di nucleoni il livello superiore, questo prende il nome di effetto di pairing. Un esempio di questo tipo si può avere con l' $^{17}_8\text{O}_9$ che presenta 8 nucleoni del core ed un solo nucleone (un neutrone) esterno. Per quanto riguarda i protoni si osserva infatti che, essendo 8, questi occupano completamente i livelli $1s$ ed $1p$ (ed in effetti 8 un numero magico); per quanto riguarda i neutroni, invece, è possibile fare riferimento alla sequenza di livelli mostrata in figura 12.

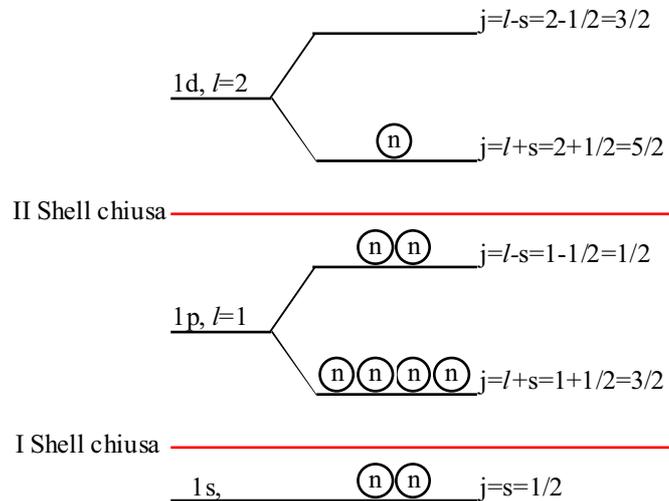


Figura 12

La configurazione dei neutroni è dunque la seguente:

$$\left(1s_{1/2}\right)^2 \left(1p_{3/2}\right)^4 \left(1p_{1/2}\right)^2 1d_{5/2}$$

Dal nucleone esterno si ricaverà:

$$\begin{cases} j = \frac{5}{2} \\ l = 2 \end{cases}$$

Siccome dall'ultimo nucleone si ricavano i dati relativi all'intero nucleo si avrà:

$$\begin{cases} I = j = \frac{5}{2} \\ \pi = (-1)^l = (-1)^2 = 1 \Rightarrow + \end{cases}$$

e quindi si avrà.

$$I^\pi = \frac{5}{2}^+$$

Il modello a shell.

Il modello a shell a particella indipendente riesce a descrivere in maniera abbastanza soddisfacente la situazione in cui un solo nucleone rimane al di fuori di una shell chiusa ma se già ci si trova a dover affrontare la situazione in cui due nucleoni rimangono fuori dall'ultima shell chiusa il modello sarà in grado solo di fornire delle stime; siccome poi ai livelli eccitati contribuiscono ai infatti tutti i nucleoni esterni (e si parla infatti di nucleoni di valenza), il modello in questione non riesce a descrivere tutti i livelli eccitati ma solo quelli minori. Per quanto riguarda il momento di dipolo magnetico sono importanti i termini l ed s del nucleone più esterno; naturalmente è anche importante definire se il nucleone esterno è un protone oppure un neutrone in quanto per il protone si deve tener conto di g_l e di g_s mentre per quanto riguarda il neutrone si deve tener conto solo di g_s . Tenendo conto che sia per il neutrone che per il protone si avranno le due possibilità seguenti:

$$\begin{cases} j = l - \frac{1}{2} \\ j = l + \frac{1}{2} \end{cases}$$

si potranno ottenere quattro curve (due per il protone e due per il neutrone) dette curve di Schmidt che approssimano sul piano (j, μ) l'andamento dei punti sperimentali relativi ai nucleoni pari e ai nucleoni dispari. Chiamando poi g_s^f il fattore g di spin relativo ai nucleoni liberi, si nota che, usando:

$$g_s \cong 0,6 g_s^f$$

dove 0,6 utilizzato è un valore sperimentale semiempirico, si ottiene un fit migliore tra il modello e i dati sperimentali. Per quanto riguarda, infine, il momento di quadrupolo elettrico si osserva che utilizzando il modello a particella indipendente i valori sperimentali e quelli teorici sono differenti e quindi bisogna tener conto di tutti i nucleoni.

Decadimenti radioattivi.

Come è stato accennato in precedenza, la fisica nucleare è nata per spiegare l'effetto osservato nei decadimenti radioattivi. Il decadimento è un fenomeno statistico e quindi non si può sapere quale e quando il singolo atomo andrà a decadere. Il parametro più importante che caratterizza il decadimento è la costante di decadimento λ . Che si misura in s^{-1} ; solitamente si preferisce utilizzare la vita media τ definita come:

$$\tau = \frac{1}{\lambda}$$

La costante λ è una caratteristica peculiare del tipo di nuclide e non dipende da altro; per taluni tipi di trasformazioni (casi comunque particolarissimi) λ può essere influenzato dall'habitat atomico nel quale si trova il nuclide. La legge del decadimento radioattivo ci dice che il numero di nuclei che decadono nel tempo dt è:

$$dN = -\lambda N dt$$

Integrando questa espressione si ricava:

$$N(t) = N_0 e^{-\lambda t} \quad (1)$$

dove si è supposto che:

$$N(t=0) = N_0$$

A questo punto è possibile definire il tempo di dimezzamento, indicato come $T_{1/2}$ e definito come il tempo necessario perché si abbia:

$$N\left(t = T_{1/2}\right) = \frac{N_0}{2}$$

Combinando allora quest'ultima relazione con l'espressione (1) si ricava:

$$\frac{N_0}{2} = N_0 e^{-\lambda T_{1/2}}$$

e quindi:

$$T_{1/2} = \frac{\ln 2}{\lambda} \cong \frac{0,693}{\lambda}$$

Il legame tra il tempo di dimezzamento e la vita media sarà allora il seguente:

$$T_{1/2} \cong 0,693\tau$$

Solitamente il dato che si trova tabulato con maggior facilità è proprio il tempo di dimezzamento. Un'altra grandezza importante è l'attività, ovvero la varianza istantanea del numero di atomi; con questa grandezza si misurano, dunque, i decadimenti nell'unità di tempo e quindi si avrà:

$$A = \left| \frac{dN}{dt} \right| = \lambda N(t) = \lambda N_0 e^{-\lambda t}$$

ovvero:

$$A(t) = A_0 e^{-\lambda t}$$

dove si è posto:

$$A_0 = \lambda N_0$$

L'attività si misura in decadimenti al secondo e un decadimento al secondo prende il nome di Becquerel (Bq); storicamente si usava come unità di misura l'attività di 1 g di ^{226}Ra che era pari a $3,7 \cdot 10^{10}$ Bq; definendo però il Curie (Ci) come appunto pari a $3,7 \cdot 10^{10}$ Bq è possibile usare il Curie come unità di misura. Solitamente un nuclide può decadere in diversi modi; la probabilità che un nuclide decada in un modo piuttosto che nell'altro è data dal rapporto tra i decadimenti che interessano ed i decadimenti totali. Supponendo che ci siano solo due possibili modi di decadere (1 e 2), varrà la seguente relazione:

$$\left| \frac{dN}{dt} \right|_{Tot} = \left| \frac{dN}{dt} \right|_1 + \left| \frac{dN}{dt} \right|_2 = \lambda_1 N + \lambda_2 N = \lambda_{Tot} N$$

dove λ_1 e λ_2 prendono il nome di costanti di decadimento parziali. L'evoluzione temporale di A si ottiene utilizzando la λ_{Tot} . Le probabilità di decadere in un modo o nell'altro sono anche dette branching ratio e vengono espresse nel modo seguente:

$$\begin{cases} \beta_1 = \frac{\lambda_1}{\lambda_{Tot}} \\ \beta_2 = \frac{\lambda_2}{\lambda_{Tot}} \end{cases}$$

Siccome i decadimenti sono fenomeni spontanei, l'energia a disposizione, ovvero il ΔE tra l'energia del sistema di partenza e quella del sistema di arrivo, deve essere positiva. Facendo dunque riferimento allo schema di figura 1, si ha che condizione necessaria perché sia abbia il decadimento è che Q sia positivo.

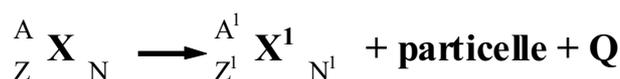


Figura 1

Per "particelle" si intendono particelle α , elettroni, fotoni, altri nuclidi, etc.... Una volta emessa l'energia Q, questa deve essere ridistribuita tra il sistema finale e le particelle e tale ridistribuzione si basa sul fatto che i decadimenti radioattivi sono caratterizzati dalle seguenti proprietà:

- conservazione del numero di nucleoni (A);
- conservazione del momento lineare;
- conservazione del momento angolare totale;
- conservazione della parità.

Per qualunque decadimento, la costante di decadimento definita è quella parziale, non totale perché si ha uno stato iniziale ed uno stato finale. Se lo stato iniziale e lo stato finale coincidono allora la λ parziale e la λ totale coincidono. Per la maggior parte dei casi il sistema iniziale si trova nello stesso stato fondamentale, se ciò non fosse sarebbe anche necessario sommare la relativa energia di eccitazione. Nella maggior parte dei casi, inoltre, il sistema di arrivo è in uno stato eccitato e quindi Q deve essere piccolo.

Il decadimento α .

Uno dei più importanti tipi di decadimento radioattivo è il decadimento α che viene genericamente espresso tramite la schematizzazione di figura 2.

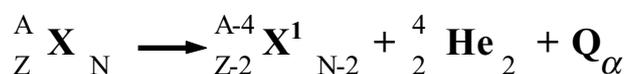


Figura 2

In tale trasformazione l'energia liberata deve essere positiva, ovvero si deve avere:

$$Q_\alpha > 0 \quad (2)$$

questo avviene quando A è maggiore di 150 il termine ma il decadimento α diventa veramente importante solo quando A tende a superare il valore di 200. Il termine Q_α può essere definito nel modo seguente:

$$Q_\alpha = (m_X - m_{X'} - m_\alpha)c^2 \quad (3)$$

e dunque, avendo un nuclide di massa $M(A,Z)$ che porterà ad un nuclide di massa $M(A-4, Z-2)$, si dovrà avere:

$$Q_\alpha = [M(A,Z) - M(A-4, Z-2) - m_\alpha]c^2$$

questo ovviamente nel caso in cui il nucleo genitore X fosse nello stato fondamentale. In funzione dell'energia di legame si avrebbe invece:

$$Q_\alpha = B_{X'} - B_X + B_\alpha$$

ovvero, nel caso in analisi:

$$Q_\alpha = BE(A-4, Z-2) - BE(A, Z) + 28 \text{ MeV}$$

dove 28 MeV rappresenta l'energia di legame della particella α . Combinando l'ultima relazione scritta con l'espressione (2) si ottiene che:

$$BE(A-4, Z-2) - BE(A, Z) + 28 \text{ MeV} > 0$$

che è verificata solo con nuclidi piuttosto pesanti. Per i nuclidi leggeri il decadimento α è visto più come una rottura (di nuclidi composti da diverse particelle α) che come un vero e proprio decadimento. In effetti, anche se per avere qualche probabilità di decadimento α è sufficiente avere

$$Q_\alpha = 2 \text{ MeV}$$

il decadimento avviene bene solo se si ha:

$$Q_\alpha > 4 \text{ MeV}$$

Graficamente si può considerare allora la figura 3.

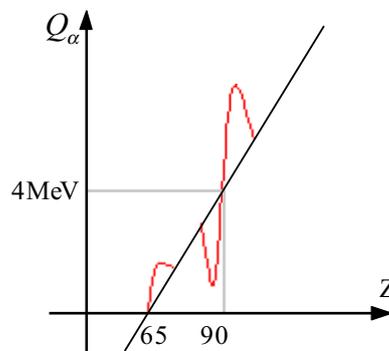


Figura 3

Come si può notare il Q_α diventa positivo in prossimità di Z pari a 65, ovvero nella zona delle terre rare e poi supera i 4 MeV in prossimità di Z pari a 90 (il Piombo), si nota però che l'andamento reale calcolato si discosta in alcuni punti dall'andamento calcolato lineare e, in particolare, si vede una profonda depressione nella zona del Piombo e un piccolo nella zona di Uranio e Torio; tali differenze sono dovute alla presenza di strutture con numeri magici. Per vedere ora come si ripartisce il termine Q_α si deve fare riferimento alla relazione seguente:

$$m_X c^2 = m_{X'} c^2 + m_\alpha c^2 + T_{X'} + T_\alpha$$

che vale nel caso in cui il nuclide X^1 sia nello stato fondamentale. Combinando l'ultima relazione scritta con l'espressione (3) si ricava:

$$Q_\alpha = T_{X'} + T_\alpha \quad (4)$$

Supponendo che il nucleo padre X sia a riposo e che quindi la sua quantità di moto sia nulla, si avrà, per il teorema della quantità di moto applicato al nucleo figlio X^1 e alla particella α si avrà:

$$|P_{X^1}| = |P_\alpha|$$

Siccome poi nei decadimenti α l'energia emessa è di circa 5 MeV, è possibile fare riferimento alla meccanica classica e quindi le ultime due equazioni scritte possono essere espresse nel modo seguente:

$$\begin{cases} Q_\alpha = \frac{1}{2} m_{X^1} v_{X^1}^2 + \frac{1}{2} m_\alpha v_\alpha^2 \\ m_{X^1} v_{X^1} = m_\alpha v_\alpha \end{cases}$$

Dal sistema scritto si ricava dunque:

$$T_\alpha = \frac{Q_\alpha}{1 + \frac{m_\alpha}{m_{X^1}}}$$

ovvero, nel caso in cui A sia circa pari a 200 (caso nel quale tale decadimento è molto importante):

$$T_\alpha \cong \frac{Q_\alpha}{1 + 0,02}$$

dunque per qualunque valore di Q_α , T_α sarà il 98% di Q_α , essendo allora:

$$T_{X^1} = Q_\alpha - T_\alpha$$

si ricava, per complemento che T_{X^1} sarà circa il 2% di Q_α . Nel caso in cui quindi, per esempio, si abbia:

$$Q_\alpha = 10 \text{ MeV}$$

si avrà:

$$\begin{cases} T_\alpha = 9,8 \text{ MeV} \\ T_{X^1} = 200 \text{ keV} \end{cases}$$

Anche se T_{X^1} rappresenta solo il 2% di Q_α non può comunque essere trascurato perché ha la sua importanza nel confronto con le altre energie di legame. Se il nucleo X^1 non è nello stato fondamentale al posto della semplice T_{X^1} è necessario aggiungere l'energia di eccitazione del nucleo X^1 e quindi si avrà:

$$m_X c^2 = m_{X^1} c^2 + m_\alpha c^2 + E_{X^1} + T_{X^1} + T_\alpha$$

e la relazione (4) si modifica fino al punto di ottenere:

$$Q_\alpha - E_{X^1} = T_{X^1} + T_\alpha$$

Sarà allora solo il termine presente al primo membro di quest'ultima relazione che viene spartito tra la particella α e il nucleo figlio X^1 . Ovviamente anche il nucleo figlio può nascere nello stato fondamentale oppure in uno stato eccitato. Considerando i decadimenti che legano lo stato fondamentale del genitore e lo stato fondamentale del figlio si riesce a definire, nel caso dei pari-pari, una relazione tra $T_{1/2}$ ed E_α . Nel caso in cui dunque si abbia una transizione del tipo:

$$0^+ \rightarrow 0^+$$

Le osservazioni sperimentali hanno portato ad una relazione del tipo:

$$\text{Log}\left(T_{1/2}\right) = C_1 + \frac{C_2}{\sqrt{E_\alpha}}$$

dove C_1 e C_2 sono costanti fortemente dipendenti da Z. Facendo per esempio riferimento ai nuclei di ^{232}Th e ^{218}Th (è importante scegliere due isotopi di uno stesso elemento proprio per quanto detto a proposito delle costanti C_1 e C_2) si ha che i tempi di dimezzamento sono, rispettivamente pari a $1,4 \cdot 10^{10}$ giorni e 10^7 secondi e quindi presentano una differenza di circa 10^{24} volte; per quanto riguarda invece il termine E_α si ha, nei due casi 4,08 MeV e 9,8 MeV con un rapporto che è quindi quasi uguale a 2.

Teoria dell'emissione α .

È ora necessario cercare la probabilità del decadimento α . Pensando alla particella α che viene emessa e si trova subito nelle vicinanze di un nucleo positivo; già solo per interazione coulombiana si dovrebbe avere un'energia variabile tra i 4 e i 10 MeV; le osservazioni sperimentali riportano però particelle α con energia non superiore ai 3 MeV che non si capisce quindi come possano aver oltrepassato la buca di potenziale rappresentata dal nucleo. Questa incompatibilità tra i valori è stata risolta pensando all'effetto tunnel. Si consideri dunque l'ipotesi di Gamow, secondo la quale le particelle α sono già formate all'interno del nucleo X (si parla dunque di effetto di clustering) e che tentino per un numero di volte abbastanza alto di uscire; in questo modo è appunto possibile configurare la loro fuoriuscita per effetto tunnel. Il parametro λ relativo al decadimento α si può dunque definire nel modo seguente:

$$\lambda = fP$$

dove f sia il numero di tentativi che la particella fa per tentare di oltrepassare la barriera di potenziale mentre P sia la probabilità di attraversare la barriera. Tale probabilità viene ottenuta sfruttando un calcolo di meccanica quantistica che porta ad avere:

$$P = e^{-2G}$$

dove G prende il nome di fattore di Gamow ed è espresso come:

$$G = 2\sqrt{\frac{2m}{\hbar^2}} \int_{R_1}^{R_2} [V(r) - E_\alpha]^{1/2} dr$$

Supponendo di essere nel sistema di riferimento del centro di massa (e considerando la massa ridotta m) è possibile sfruttare il diagramma di figura 1 nel quale si individuano due zone importanti: la prima è quella con r compreso tra 0 ed R_1 (nella quale la particella α e il nucleo sono la stessa cosa), la seconda è la zona con r maggiore di R_2 dove la particella α è considerata all'infinito.

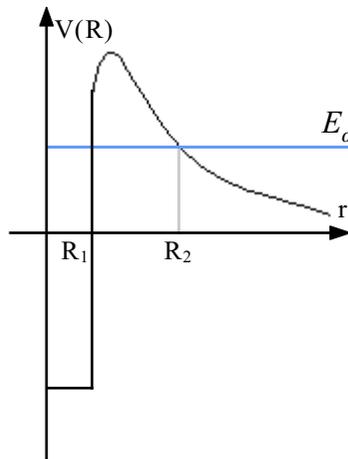


Figura 1

L'energia E_α potrà ovviamente essere espressa in base al valore del potenziale in corrispondenza di R_2 e quindi si avrà:

$$E_\alpha = V(R_2)$$

Il potenziale V è a sua volta la somma di un termine coulombiano e di un termine centrifugo espresso come:

$$V_{Cent} = \frac{l(l+1)\hbar^2}{2mr^2}$$

Siccome, però, la particella α , passando da 0^+ a 0^+ , deve avere un contributo l_α nullo, non ci sarà il termine centrifugo; il fattore di Gamow sarà dunque esprimibile nel modo seguente:

$$G = 2 \int_{R_1}^{R_2} \sqrt{\frac{2m}{\hbar^2} \left(\frac{zZe^2}{4\pi\epsilon_0 r} - \frac{zZe^2}{4\pi\epsilon_0 R_2} \right)} dr = 2\sqrt{\frac{2m}{\hbar^2}} \cdot \frac{zZe^2}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{1}{\sqrt{R_2}} \int_{R_1}^{R_2} \left(\frac{R_2}{r} - 1 \right)^{1/2} dr$$

Integrando con una sostituzione di variabili si ottiene:

$$G = 2 \sqrt{\frac{2m}{\hbar^2} \cdot \frac{zZe^2}{4\pi\epsilon_0}} \cdot \frac{1}{\sqrt{R_2}} \sqrt{R_2} \left[\cos^{-1} \sqrt{\frac{R_1}{R_2}} - \sqrt{\frac{R_1}{R_2}} \cdot \sqrt{1 - \frac{R_1}{R_2}} \right]$$

Nell'ipotesi che sia:

$$\frac{R_1}{R_2} \ll 1$$

si può sviluppare in serie ed ottenere:

$$G = 2 \sqrt{\frac{2m}{\hbar^2} \cdot \frac{zZe^2}{4\pi\epsilon_0}} \cdot \frac{1}{\sqrt{R_2}} \sqrt{R_2} \left[\frac{\pi}{2} - 2 \sqrt{\frac{R_1}{R_2}} \right]$$

Si ottiene così:

$$G = 2 \sqrt{\frac{2m}{\hbar^2} \cdot \frac{zZe^2}{4\pi\epsilon_0}} \cdot \sqrt{\frac{zZe^2}{4\pi\epsilon_0 E}} \cdot \left[\frac{\pi}{2} - 2 \sqrt{\frac{R_1}{R_2}} \right] = 2 \frac{zZe^2}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{1}{\hbar c} \sqrt{\frac{2mc^2}{E_\alpha}} \cdot \left[\frac{\pi}{2} - 2 \sqrt{\frac{R_1}{R_2}} \right]$$

G, che presenta solo due variabili che sono Z e l'inverso della radice di E_α , è l'esponente di un esponenziale e quindi una piccola variazione di E_α si ripresenta in maniera pesante su λ . Quando l_α non è nullo l'espressione di G è diversa e porta ad una probabilità di decadimento molto minore rispetto alla rispettiva probabilità con l_α nullo; ciò è dovuto al fatto che si deve aggiungere anche un potenziale centrifugo.

Con un rapido esempio numerico è possibile capire come varia la probabilità P con il variare di l_α . Dai calcoli svolti nel caso del Th (e quindi con $Z=90$) e utilizzando:

$$E_\alpha = 4,5 \text{ MeV}$$

si otterrà (essendo ovviamente $z=2$):

$$\begin{cases} P_{l=0} = 10^{-34} \\ P_{l=1} = 0,84 P_{l=0} \\ P_{l=2} = 0,6 P_{l=0} \\ P_{l=5} = 0,08 P_{l=0} \end{cases}$$

Quando quindi l è nullo si ha la massima probabilità di osservare un decadimento. Il parametro λ era composto da P e da f , dopo aver visto cosa si può dire sulla probabilità P bisogna ora concentrarsi sul fattore f ; questa frequenza può essere indicata come:

$$f = \frac{1}{\tau} = \frac{v}{R} = \sqrt{\frac{2(E_\alpha + V_0)}{mc^2}} \cdot \frac{c}{R}$$

Usando i seguenti valori numerici

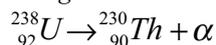
$$\begin{cases} A = 200 \\ V_0 = 3,5 \text{ MeV} \\ E_\alpha = 5 \text{ MeV} \end{cases}$$

si ottiene:

$$f \cong 6 \cdot 10^{21}$$

Il valore di f trovato dipende però solo leggermente da R e da E_α e quindi è abbastanza costante. L'inverso di f è τ , il tempo di transito nucleare (nel caso in esame vale circa $1,6 \cdot 10^{-22}$ secondi) ed è il tempo necessario per viaggiare all'interno del nucleo.

Si vede ora un esempio numerico relativo al seguente decadimento del tipo $0^+ \rightarrow 0^+$:



che ha un branching ratio di 0,77 e nel quale sia noto il termine:

$$E_\alpha = 4,3 \text{ MeV}$$

Essendo:

$$E_\alpha = V(R_2) = \frac{zZe^2}{4\pi\epsilon_0 R_2}$$

si può ricavare:

$$R_2 = \frac{zZe^2}{4\pi\epsilon_0 E_\alpha} = 60,28 \text{ fm}$$

Ricordando poi la regola secondo la quale:

$$R = R_0 A^{1/3}$$

si possono ricavare R_α ed R_{Th} grazie ai quali si ottiene:

$$R_1 = R_{Th} + R_\alpha = 9,7 \text{ fm}$$

e quindi si avrà:

$$\frac{R_1}{R_2} = 0,16$$

Il fattore di Gamow sarà quindi:

$$G = 2 \frac{zZe^2}{4\pi\epsilon_0 \hbar c} \sqrt{\frac{2mc^2}{E_\alpha}} \cdot \left[\frac{\pi}{2} - 2 \sqrt{\frac{R_1}{R_2}} \right] = 84,7$$

Conoscendo G si può ricavare molto semplicemente la probabilità P . Siccome poi si è detto che f è piuttosto costante si può usare il valore trovato in precedenza e quindi si avrà, complessivamente:

$$\lambda = fP = 9,456 \cdot 10^{-16} \text{ s}^{-1}$$

Dal dato sul branching ratio si ha:

$$\beta = \frac{\lambda}{\lambda_{Tot}} = 0,77$$

da cui è possibile ricavare:

$$\lambda_{Tot}^{Gamow} = \frac{9,456 \cdot 10^{-16} \text{ s}^{-1}}{0,77}$$

Sfruttando allora la relazione secondo la quale:

$$\lambda = \frac{\ln 2}{T_{1/2}}$$

si ottiene:

$$T_{1/2}^{Gamow} = \frac{\ln 2}{\lambda_{Tot}^{Gamow}} = 5,64 \cdot 10^{14} \text{ s} = 1,79 \cdot 10^7 \text{ anni}$$

Dalle tabelle si ricava invece che:

$$T_{1/2}^{238} = 4,47 \cdot 10^9 \text{ anni}$$

Si osserva dunque una differenza di un fattore 100 che è dovuta al fatto di non aver utilizzato una forma perfetta del potenziale; solitamente i valori di $T_{1/2}$ di Gamow differiscono da quelli sperimentali di un fattore che va da 10 a 100 proprio a causa delle approssimazioni che vengono fatte.

Momento angolare e parità nel decadimento α .

Il momento angolare e la parità stabiliscono delle regole di selezione che possono favorire o inibire il decadimento α . Per quanto riguarda il momento angolare totale si deve avere:

$$|I_{in} - I_{fin}| \leq I_\alpha \leq I_{in} + I_{fin}$$

Le particelle α sono però composte da due protoni e due neutroni entrambi nello stato 1s e accoppiati in modo da dare uno spin complessivo nullo. Come conseguenza il momento angolare sarà dato esclusivamente da un contributo orbitale che verrà indicato con l_α ovvero:

$$I_\alpha = l_\alpha$$

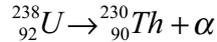
Combinando allora le ultime due relazioni scritte si ottiene:

$$|I_{in} - I_{fin}| \leq l_\alpha \leq I_{in} + I_{fin}$$

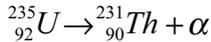
Per quanto riguarda la parità si avrà dunque:

$$\pi = (-1)^{l_\alpha}$$

Si osserva dunque che una variazione di parità $\Delta\pi$ implica che l_α sia dispari mentre quando la variazione di parità non c'è si ha l_α pari. Quest'ultima osservazione, combinata con il principio di conservazione della parità e con la relazione (1) porta ad una serie di regole di selezione che permettono di capire quali transizioni siano possibili e quali no. Facendo allora riferimento alla transizione:



che, come accennato, è una transizione $0^+ \rightarrow 0^+$ con peso del 77%, è possibile dedurre l'esistenza di altre transizioni che portano a livelli eccitati (di I e II livello) del Th. Tali transizioni saranno $0^+ \rightarrow 2^+$ e $0^+ \rightarrow 4^+$. La prima transizione è compatibile con $l_\alpha=2$ mentre la seconda con $l_\alpha=4$ dunque la prima di queste due è la seconda più probabile (circa il 22%) mentre la seconda è la meno probabile (meno dell'1%). La particella α emessa dalla transizione $0^+ \rightarrow 0^+$ ha la massima energia possibile, la transizione $0^+ \rightarrow 2^+$ ha un'energia minore e la transizione $0^+ \rightarrow 4^+$ ancora più piccola. Facendo riferimento al nuclide ${}^{235}\text{U}$ (che è un pari-dispari) le cose sarebbero cambiate perché in questo caso il termine s non è nullo. La trasformazione sarebbe stata la seguente:



con:

$$7/2^- \rightarrow 5/2^+$$

Il termine l_α , tenendo conto delle varie regole di selezione, potrà essere solo pari a 1, 3 o 5. Il livello popolato con la massima probabilità non è però il $5/2^+$, che è quello fondamentale, ma il $7/2^-$ che è uno stato eccitato (le probabilità sono rispettivamente del 4% e del 56%). Dunque il decadimento preferito non è quello allo stato fondamentale ma è quello con l_α nullo, anche se è uno stato eccitato e quindi porta ad energie del tipo

$$E_\alpha = E_0 - 200\text{keV}$$

Spettroscopia del decadimento α .

Il discorso sulle regole di selezione fatto per ${}^{238}\text{U}$, vale, con numeri anche abbastanza simili, per altri nuclidi e porta a dei diagrammi come quello mostrato in figura 2: gli spettri energetici dei decadimenti α .

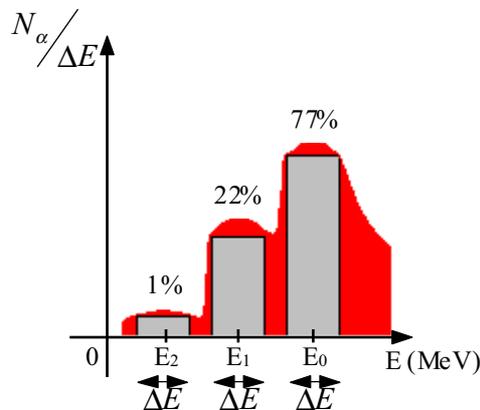


Figura 2

In tale figura è mostrato, in funzione dell'energia, il numero di particelle α presenti nell'intervallo energetico ΔE . In grigio si vede l'andamento ideale mentre in rosso è mostrato l'andamento reale, molto più uniforme in quanto deve fare i conti anche con il potere risolutivo dello strumento.

Decadimento β .

Un secondo importante tipo di decadimento è il decadimento β (inteso come β^+ o anche β^-); questo decadimento porta ad osservare particelle e^- oppure e^+ e lo spettro energetico sarà come quello mostrato in figura 3.

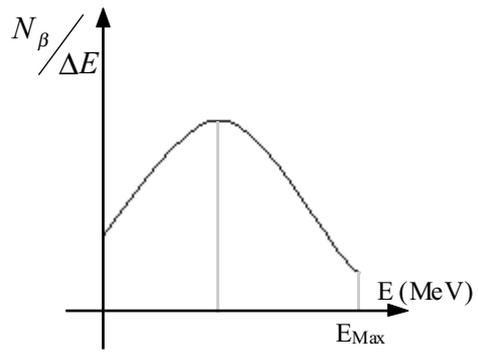


Figura 3

Si nota dunque che c'è uno spettro continuo e non a righe come quello del decadimento α . Questa distribuzione non è compatibile con l'idea del decadimento da "nucleo singolo" a "nucleo singolo con particella". Intorno al 1925 Pauli suppose che nel decadimento β ci fosse una ulteriore particella incognita che doveva essere un fermione ed essere priva di carica. Questa particella, poi chiamata neutrino, fu scoperta solo nel 1953.

Energetica del decadimento β .

Sia nel caso di decadimento β^- che nel caso di decadimento β^+ il termine A rimane costante mentre Z diminuisce o aumenta di 1; si avranno allora espressioni come quelle mostrate di seguito:

$$\begin{cases} {}^A_Z X_N \rightarrow {}^A_{Z+1} X_{N-1}^1 + e^- + \bar{\nu}_e \\ {}^A_Z X_N \rightarrow {}^A_{Z-1} X_{N+1}^1 + e^+ + \nu_e \end{cases}$$

Le particelle indicate con il simbolo ν sono i neutrini, che appartengono alla famiglia dei leptoni e che possono essere catalogati come mostrato nella tabella 1.

Particelle	Antiparticelle	Neutrini associati	Antiparticelle
e^-	e^+	ν_e	$\bar{\nu}_e$
τ^-	τ^+	ν_τ	$\bar{\nu}_\tau$
μ^-	μ^+	ν_μ	$\bar{\nu}_\mu$

Tabella 1

I leptoni non si creano mai da soli ma sempre in coppia (per conservare il numero leptonico): bisogna infatti associare un valore di numero leptonico pari a +1 ad ogni particella ed un valore di numero leptonico pari a -1 per ogni antiparticella. La conservazione del numero leptonico è osservata sperimentalmente e questo implica l'accoppiamento di particelle e antiparticelle come quello mostrato nelle relazioni prima viste. Il decadimento più semplice è quello del neutrone libero, che decade (con un $T_{1/2}$ di circa 10 minuti) secondo l'espressione seguente:

$$n \rightarrow p + e^- + \bar{\nu}_e \quad (1)$$

Ovviamente si osserva la conservazione del numero leptonico, si ha infatti:

$$0 \rightarrow 0 + 1 - 1$$

Quando si considera dunque il decadimento di un nucleo si potrà pensare che al suo interno decada un nucleone, ovvero un neutrone tramite la reazione (1) oppure un protone tramite la reazione seguente:

$$p \rightarrow n + e^+ + \nu_e$$

Il decadimento del neutrone non presenta problemi perché la massa del neutrone è maggiore delle altre particelle presenti nella relazione mentre il decadimento del protone può avvenire solo a spese dell'energia di legame. Supponendo che la massa del neutrino sia nulla si avranno infatti le seguenti espressioni relative al termine Q_β :

$$\begin{cases} Q_{\beta^-} = [M(X) - M(X^1)]c^2 \\ Q_{\beta^+} = [M(X) - M(X^1) - 2m_e]c^2 \end{cases}$$

Affinché allora il Q_β sia positivo nel primo caso si nota che la massa del nucleo figlio deve essere minore della massa del nucleo genitore mentre nel secondo caso si osserva che la differenza tra le masse dei due nuclei deve essere maggiore di almeno due masse elettroniche (e quindi deve essere superiore a 1,022 MeV). Si deduce da ciò che il decadimento β^+ è un fenomeno a soglia. Quando la differenza tra le masse è inferiore rispetto alla soglia c'è comunque un decadimento alternativo detto Electron Capture (EC). La EC si ha quando un nucleo assorbe un elettrone, arriva in questo modo a soddisfare la condizione limite e quindi decade; il processo completo sarà allora il seguente:

$${}^A_Z X_N + e^- \rightarrow {}^A_{Z-1} X_{N+1}^1 + \nu_e$$

ovvero, dal punto di vista dei nucleoni:

$$p + e^- \rightarrow n + \nu_e$$

La relazione energetica sarà allora la seguente:

$$Q_{EC} = [M(X) - M(X^1)]c^2 - BE_e$$

dove BE_e è l'energia di legame dell'elettrone catturato. Ovviamente, se il nucleo genitore è eccitato bisogna aggiungere nel bilancio energetico l'energia di eccitazione; stesso discorso per quanto riguarda l'eventuale eccitazione del nucleo figlio. Come è stato accennato in precedenza, la spettrometria dell'energia del decadimento β è notevolmente differente da quella del caso α perché lo spettro è continuo e non discreto come appunto nel caso del decadimento α ; una ulteriore

differenza con il decadimento α è data dal fatto che gli elettroni non possono essere visti come preformati all'interno del nucleo come si faceva invece per le particelle α . Per quanto riguarda l'energia, solitamente viene considerato come riferimento l'energia massima del grafico (che può variare tra i 18 keV e i 2,2 MeV ai quali corrispondono, rispettivamente, tempi di dimezzamento di 12 anni e di 300 ore). I tempi di decadimento β hanno una grande variabilità: da 10^{-3} secondi a 10^{15} anni e questo è invece un punto in comune con quanto avviene nel decadimento α ; la grande variabilità nei tempi di dimezzamento del decadimento α dipende però dalla barriera di potenziale, nel caso del decadimento β , invece, tale variabilità dipende dalla differenza di energia tra lo stato iniziale e quello finale. La perturbazione che dà origine al decadimento β è detta forza debole (in antagonismo con la forza forte) con la quale è possibile completare la lista di forze presenti in natura che troviamo nella tabella 2.

<i>Forza</i>	<i>Range d'azione</i>
<i>Gravitazionale</i>	<i>Lungo</i>
<i>Elettromagnetica</i>	<i>Lungo</i>
<i>Forte</i>	<i>Breve</i>
<i>Debole</i>	<i>Breve</i>

Tabella 2

Facendo riferimento al decadimento del neutrone libero si arriva ad ottenere:

$$Q_{\beta} = 0,782 \text{ MeV}$$

Misurando lo spettro β e cercando l'energia massima degli elettroni emessi si trova il seguente valore (con il suo errore intrinseco):

$$T_e^{Max} = 0,782 \text{ MeV} \pm 13 \text{ keV}$$

Il limite per cui la massa del neutrino sia nulla è l'errore sperimentale e quindi è possibile affermare che il neutrino non può avere una massa superiore di 13 keV. Trascurando il rinculo del nucleo si può poi dire che:

$$Q_{\beta} \cong T_e + T_{\nu}$$

e quindi, valutando la massima energia cinetica raggiungibile dall'elettrone si possono avere ulteriori informazioni sulla massa del neutrino (quando infatti l'energia cinetica dell'elettrone è massima l'energia cinetica del neutrino sarà minima e si potrebbero in questa situazione vedere eventuali contributi dovuti alla massa che prima erano celati).

Teoria di Fermi sul decadimento β .

Nel 1934 Fermi sviluppò una teoria sul decadimento β basata sulle ipotesi di Pauli a proposito del neutrino; partendo dalla supposizione che la massa del neutrino e il suo spin fossero nulli, Fermi propose che n, p, e^- e ν_e si trovassero nel medesimo punto fisico; in questo modo potevano tutti essere identificati da un unico vettore \mathbf{r} . Usando la regola d'oro di Fermi si ottiene:

$$\lambda = \frac{2\pi}{\hbar} |V_{fi}|^2 \rho(E_f) \quad (2)$$

dove $\rho(E_f)$ sia la densità degli stati finali nell'intorno dell'energia E_f mentre l'elemento di matrice V_{fi} è l'integrale del potenziale di interazione debole tra lo stato iniziale e lo stato finale del sistema:

$$V_{fi} = \int \psi_f^* \theta \psi_i d\mathbf{v}$$

dove θ sia l'operatore dell'interazione. Lo stato iniziale e finale sono caratterizzati nel modo seguente:

$$\begin{cases} \psi_{fin}^* = \psi_e^* \psi_{\nu}^* \psi^* \\ \psi_{in} = \psi \end{cases}$$

dove il simbolo ψ (senza alcun pedice) è da intendersi relativo al nucleo. Tutte le funzioni d'onda dipendono da \mathbf{r} : le funzioni d'onda relative al neutrino e all'elettrone si ottengono dalla teoria della particella libera; si avrà dunque:

$$\begin{cases} \psi_e(\vec{r}) = \frac{1}{\sqrt{V}} e^{\frac{i}{\hbar} \vec{p} \cdot \vec{r}} \\ \psi_{\nu}(\vec{r}) = \frac{1}{\sqrt{V}} e^{\frac{i}{\hbar} \vec{q} \cdot \vec{r}} \end{cases}$$

dove V è il volume di normalizzazione. Imponendo che l'energia cinetica dell'elettrone sia circa pari ad 1 MeV si ricava:

$$p = \frac{1,4 \text{ MeV}}{c}$$

e quindi:

$$\frac{P}{\hbar} = 7 \cdot 10^{-3} \text{ fm}^{-1} \quad (3)$$

I valori di r cambiano ma devono ovviamente mantenersi all'interno del range relativo alle dimensioni del nucleo, ovvero si deve avere:

$$pr \ll 1$$

Un discorso analogo può essere fatto anche per il neutrino ed è quindi possibile operare uno sviluppo in serie degli esponenziali che appaiono nelle espressioni delle funzioni d'onda, ottenendo:

$$\begin{cases} e^{\frac{i \vec{p} \cdot \vec{r}}{\hbar}} = 1 + \frac{i \vec{p} \cdot \vec{r}}{\hbar} + \dots \\ e^{\frac{i \vec{q} \cdot \vec{r}}{\hbar}} = 1 + \frac{i \vec{q} \cdot \vec{r}}{\hbar} + \dots \end{cases}$$

Limitandosi allora al solo primo termine si otterrà:

$$\begin{cases} \psi_e(\vec{r}) = \frac{1}{\sqrt{V}} \\ \psi_\nu(\vec{r}) = \frac{1}{\sqrt{V}} \end{cases}$$

Con questa approssimazione si arriva ad affermare che l'unico fattore che dipende dall'energia dell'elettrone o del neutrino sarà legato alla densità degli stati finali in quanto si ha:

$$|V_{fi}|^2 = g_F \frac{1}{V^2} \int_V \psi_f^* \vartheta \psi_i dv = g_F^2 \frac{1}{V^2} |M_{fi}|^2 \quad (4)$$

dove M_{fi} è l'elemento di matrice nucleare. Per quanto riguarda allora proprio la densità degli stati finali, si avrà:

$$\rho(E_f) = \frac{dn}{dE_f} \quad (5)$$

dove però sia:

$$dn = dn_e dn_\nu$$

Essendo poi:

$$\begin{cases} dn_e = \frac{4\pi p^2}{h^3} dp V \\ dn_\nu = \frac{4\pi q^2}{h^3} dq V \end{cases}$$

si avrà, complessivamente:

$$dn = \frac{(4\pi)^2 p^2 q^2}{h^6} V^2 dp dq$$

e quindi, sostituendo nella relazione (5):

$$\rho(E_f) = \frac{(4\pi)^2 p^2 q^2}{h^6} V^2 \frac{dp dq}{dE_f}$$

Combinando allora quest'ultima espressione con le relazioni (2) e (4) si ottiene:

$$d\lambda = \frac{2\pi}{\hbar} g_F^2 |M_{f-i}|^2 \frac{(4\pi)^2 p^2 q^2}{h^6} dp \frac{dq}{dE_f} \quad (6)$$

L'energia finale è ovviamente la somma dell'energia dell'elettrone e dell'energia del neutrino, ovvero:

$$E_f = E_e + E_\nu$$

Non avendo massa, l'energia del neutrino sarà esprimibile come:

$$E_\nu = qc$$

e quindi, combinando le ultime due relazioni scritte:

$$E_f = E_e + qc$$

Si avrà allora:

$$dE_f = cdq$$

e quindi:

$$\frac{dq}{dE_f} = \frac{1}{c}$$

Sostituendo dunque quest'ultima espressione nella relazione (6) si ottiene, complessivamente:

$$d\lambda = \frac{2\pi}{\hbar} g_F^2 |M_{f-i}|^2 \frac{(4\pi)^2 p^2 q^2}{h^6 c} dp$$

Combinando allora tutto ciò che non dipende dal momento p in una costante C che risulterà definita come:

$$C = \frac{2\pi}{\hbar} g_F^2 |M_{f-i}|^2 \frac{(4\pi)^2}{h^6 c}$$

è possibile esprimere nel modo seguente il numero di elettroni con momento compreso tra p e p+dp:

$$N(p)dp = Cp^2 q^2 dp$$

Trascurando il rinculo del nucleo si può scrivere:

$$q = \frac{E_f - T_e}{c} = \frac{Q - T_e}{c}$$

e quindi, combinando le ultime due relazioni scritte:

$$N(p) = \frac{C}{c^2} p^2 (Q - T_e)^2$$

Ovviamente varranno le due seguenti implicazioni:

$$\begin{cases} p = 0 \Rightarrow N(p) = 0 \\ Q = T_e \Rightarrow N(p) = 0 \end{cases}$$

e quindi si otterrà un andamento come quello mostrato in nero in figura 1.

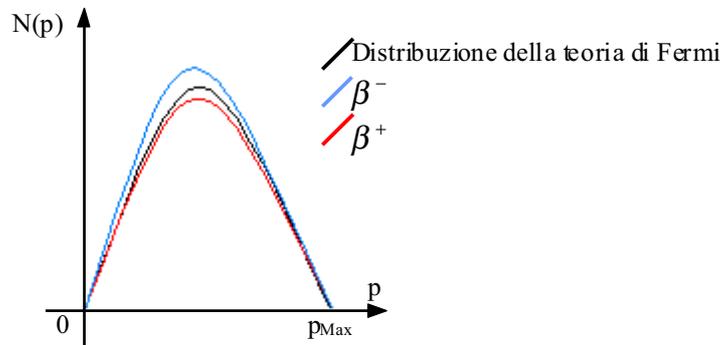


Figura 1

La differenza nei comportamenti tra i due decadimenti effettivi e la teoria di Fermi è dovuta al fatto che non si è tenuto conto della carica dell'elettrone; bisogna dunque aggiungere una funzione $F(z,p)$ di correzione ed ottenere:

$$N(p) = \frac{C}{c^2} p^2 (Q - T_e)^2 F(z, p) \quad (7)$$

Tutto questo discorso vale poi per $l_{e,\nu}$ nullo (che è il caso più comune). Quando l è nullo si parla infatti di transizione permessa (nel senso di probabilità, e quindi di λ , grande) mentre quando l non è nullo si ha transizione proibita (nel senso di probabilità, e quindi di λ , piccola). Quando l non è nulla (si ricordi che maggiore è il valore di l e maggiore è il numero di termini dello sviluppo in serie che bisogna considerare) è necessario moltiplicare il tutto per un ulteriore termine, detto termine spettrografico $S(p,q)$, che dipende nella forma analitica proprio dal valore di l . Con queste correzioni si ottiene:

$$N(p) = \frac{C}{c^2} p^2 (Q - T_e)^2 F(z, p) S(p, q)$$

e l'andamento sperimentale viene ricalcato molto bene. Molto spesso risulta più comodo esprimere il tutto in funzione dell'energia e quindi si può operare una conversione del tipo:

$$N(p)dp \rightarrow N(T_e)dT_e$$

La forma della curva, comunque, non cambia.

I test sperimentali classici della teoria di Fermi.

È importante fare ora un confronto con i dati reali dovuti alla sperimentazione; dalla relazione (7) è possibile arrivare a scrivere la seguente espressione:

$$Q - T_e \div \sqrt{\frac{N(p)}{F(z, p)p^2}} = K(T_e)$$

Facendo dunque un confronto con i punti sperimentali (rappresentati in azzurro) e quanto previsto dalla teoria di Fermi, si ottiene il grafico di figura 2, detto Kurie-plot.

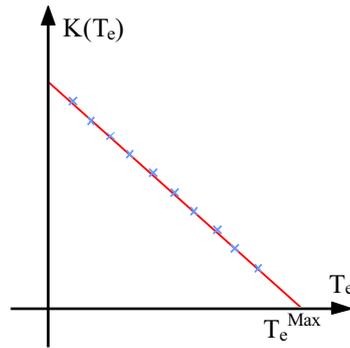


Figura 2

Se fosse stato $l \neq 0$, dalla teoria di Fermi non si sarebbe ottenuto un andamento rettilineo allineato con i punti sperimentali; tale andamento sarebbe però stato recuperato introducendo anche il termine spettrografico S visto in precedenza e ottenendo quindi:

$$Q - T_e \div \sqrt{\frac{N(p)}{F(z, p)p^2 S(p, q)}}$$

Si calcola ora la costante complessiva di decadimento λ e, per fare ciò, è necessario integrare la relazione (6)

$$\lambda = \int_0^{p_{Max}} N(p) dp = C \int_0^{p_{Max}} p^2 (Q - T_e)^2 F(z, p) dp$$

L'ultimo integrale può essere espresso in funzione dell'energia totale dell'elettrone (sarà necessario utilizzare una diversa funzione correttiva $f(z, E)$ e quindi si otterrà:

$$\lambda \div f(z, E_0)$$

dove E_0 sia l'energia totale massima (ovvero la Q). La funzione f è nota come l'integrale di Fermi. Per questioni di dimensionalità si preferisce esprimere l'integrale di Fermi come un numero puro; per ottenere l'adimensionalizzazione si può dividere per una appropriata costante:

$$C^1 = (mc)^3 (mc^2)^2$$

Ricordando poi il legame:

$$T_{1/2} = \frac{\ln 2}{\lambda}$$

si può arrivare a scrivere la seguente relazione:

$$fT_{1/2} = \ln 2 \frac{2\pi^3 \hbar^7}{g_F^2 m^5 c^4 |M_{fi}|^2}$$

Il prodotto a primo membro è dunque indipendente da tante grandezze relative all'elettrone e vi possiamo ricavare gli stati dalla $|M_{fi}|^2$; questo prodotto prende il nome di vita media comparativa ed è misurata in secondi. Solitamente si considera il logaritmo della vita media comparativa e si vede che è:

$$3,5 < \log fT_{1/2} < 6$$

Le transizioni con i valori più piccoli sono dette super-permesse (e sono le transizioni $0^+ \rightarrow 0^+$). Ci si sofferma infine sulla costante g_F (che vale per le transizioni di tipo Fermi) che vale:

$$g_F = 0,9 \cdot 10^{-4} \text{ MeVfm}^3$$

La costante di Fermi è una costante universale: altre costanti universali sono invece la costante g_{OPEP} , che vale 1, nonché quella relativa alla forza elettromagnetica, che prevede un rapporto di 10^{-2} , quella relativa alla forza gravitazionale, che prevede un rapporto di 10^{-39} e quella relativa alla forza debole che prevede un rapporto di 10^{-5} .

Regole di selezione dovute al momento angolare e alla parità.

Ci sono situazioni nelle quali il troncamento del primo termine dello sviluppo in serie non è sufficiente in quanto l'elemento di matrice nucleare si annulla (l'annullamento dell'elemento di matrice si ha per esempio quando c'è una variazione di parità); è quindi necessario considerare un ulteriore termine dello sviluppo (ovvero considerare il caso $l=1$). L'esponenziale avrà dunque la seguente forma:

$$e^{\frac{i}{\hbar} \vec{p} \cdot \vec{r}} = 1 + \frac{i}{\hbar} (\vec{p} \cdot \vec{r})$$

Per ogni termine in più che si considera nello sviluppo in serie si introduce un ulteriore termine quadratico di p ; ricordando però quanto espresso dalla relazione (3) si osserva che tale termine quadratico è dell'ordine di 10^{-4} e quindi ogni volta che si aggiunge un l si diminuisce di 10^4 la probabilità (considerando $l=2$ si diminuisce la probabilità di 10^{-8} , etc.). Al crescere di l , dunque, la probabilità scende pesantemente e quindi il tempo di dimezzamento aumenta. Per quanto riguarda la vita media comparativa, ogni volta che si sale di un termine l , si deve aggiungere un 3,5. Si avrà dunque la situazione mostrata in tabella 3.

l	Intervallo	Tipologia
0	[3,5;6]	Permessa
1	[6;9,5]	Prima proibita
2	[9,5;12]	Seconda proibita
...

Tabella 3

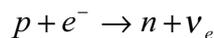
La teoria di Fermi non prende in considerazione lo spin (che comunque non è molto importante se non si è in presenza di un campo che polarizza gli spin), sia e^- che ν hanno però spin e possono complessivamente dare $s=0$ oppure $s=1$. Nel primo caso si ha la transizione di Fermi del tipo $0^+ \rightarrow 0^+$ che ha quindi ΔI nullo, nel secondo caso si ha la transizione di Gamow-Teller. Con $l=1$ si ha transizione di Fermi con $\Delta I=0,1$ e transizione di Gamow-Teller con $\Delta I=0,1,2$ ovvero con cambio di parità, la regola di selezione per il decadimento di tipo primo proibito sarà dunque la seguente:

$$\Delta I = 0,1,2$$

con cambio di parità. Forti variazioni di parità implicano l abbastanza grandi e quindi λ poco probabile e $T_{1/2}$ molto alti.

Reazione di Electron Capture.

In precedenza si è accennato al fatto che, oltre al decadimento β^+ e β^- , c'è anche la EC che era rappresentata nel modo seguente:



Esisterà dunque una λ_{EC} . Lo spettro dei neutrini emessi è discreto (come dovrebbe essere essendo in presenza di un fenomeno a due corpi) ed è possibile ricostruirlo a partire dall'elettrone che viene assorbito (e quindi dai raggi X caratteristici) per questo motivo la λ_{EC} viene anche indicata nel modo seguente: $\lambda_{\text{EC}}^{(\kappa)}$ dove κ è lo shell dell'elettrone coinvolto. Soffermandosi sul caso con l nullo sarà necessario rifare il discorso prima visto dove però non si ha più a che fare con una particella libera perché questa volta è stata catturata dal nucleo; si otterrà allora:

$$\lambda_{\text{EC}}^{(\kappa)} = \frac{g_F^2 |M_{fi}|^2 E_\nu^2}{\pi^2 \hbar^4 c^2} \left(\frac{Z}{a_0} \right)^3$$

dove a_0 è ovviamente il raggio di Bohr. Un valore importante è (nel caso in cui sia possibile anche il decadimento β^+) il rapporto tra λ_{EC} e λ_β ; tale rapporto dipende da Z e dall'energia massima. Alcuni valori numerici sono riportati nella tabella numero 4.

Z	E_{Max}	$\lambda_{\text{EC}}/\lambda_\beta$
15	300 keV	2
40	300 keV	150
80	300 keV	$\sim 10^4$
15	1 MeV	0,04
40	1 MeV	2
80	1 MeV	~ 60

Tabella 4

Decadimento γ

Un terzo tipo di decadimento radioattivo è il decadimento γ , detto anche diseccitazione nucleare, dovuta, ovviamente, alla presenza nel nucleo di livelli eccitati raggiunti per esempio in seguito a decadimenti α o β . Oltre allo stato fondamentale, infatti, ogni nucleone ha degli stati eccitati instabili che hanno una certa vita media τ legata all'ampiezza ΔE dell'indeterminazione del livello energetico (solitamente pari a qualche eV) dalla relazione di Heisenberg:

$$\tau \Delta E = \hbar$$

nella quale si ricordi che:

$$\hbar = 6,6 \cdot 10^{-16} \text{ eVs}$$

Con A piccolo l'intervallo energetico tra i vari livelli eccitati è molto marcato; tale differenziazione va diminuendo con l'aumentare di A (tutti i nuclei con A grande hanno una differenza tra lo stato fondamentale e il livello eccitato molto piccola e circa pari a 0,1 MeV). Il tempo τ è solitamente dell'ordine dei 10^{-12} s quando la diseccitazione è di tipo elettromagnetico ma è molto più piccolo se la diseccitazione è di tipo diverso (nel caso del decadimento elettromagnetico τ varia tra 10^{-16} secondi e 10^4 anni). Quando τ è almeno superiore al μs (in modo che si possa riconoscere di essere in un livello diverso da quello fondamentale) si parla di livello metastabile e si ha un isomero del nuclide di partenza, come mostrato in figura 3.



Figura 3

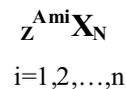


Figura 4

Quando più di un livello è metastabile si avrà la situazione mostrata in figura 4.

Decadimento γ .

In figura 1 sono riportati i primi livelli eccitati dell' ^{17}O .

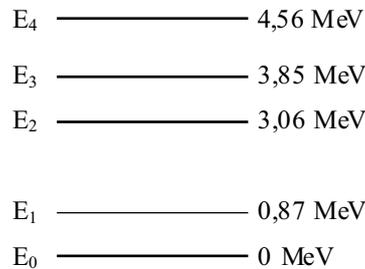


Figura 1

Dal livello numero 3 in giù è possibile osservare solo emissione di fotoni e quindi si hanno le cascate γ . Nella tabella 1 sono mostrati tre possibili decadimenti con le rispettive energie minime necessarie per emettere le singole particelle n, p o α .

Decadimento	Energia Minima per l'emissione della particella indicata
$^{17}\text{O} \rightarrow ^{16}\text{O} + n$	$E_n = 4,15 \text{ MeV}$
$^{17}\text{O} \rightarrow ^{16}\text{N} + p$	$E_p = 13,78 \text{ MeV}$
$^{17}\text{O} \rightarrow ^{13}\text{C} + ^4_2\text{He}$	$E_\alpha = 6,36 \text{ MeV}$

Tabella 1

È opportuno concentrarsi un attimo sulla definizione di stato metastabile: uno stato metastabile è uno stato relativamente al quale il tempo di transizione è grande (solitamente maggiore di 10^{-16} s); si parla in questo caso di un isomero del nuclide di partenza. Il passaggio dal livello metastabile allo stato fondamentale prende il nome di transizione interna (IT). Il decadimento elettromagnetico può allora avvenire per decadimento γ oppure per transizione interna; nel caso di decadimento γ la transizione dalla situazione energetica E_1 alla situazione energetica E_2 è accompagnata dall'emissione di un fotone γ ; nel caso del processo di transizione interna la transizione è accompagnata dall'emissione di elettroni atomici espulsi dall'atomo (il fatto che si tratti di elettroni atomici è mostrato dal fatto che la loro energia è discreta).

Energetica del decadimento γ .

Si supponga dunque che un nucleo di massa M a riposo vada incontro ad una transizione da uno stato iniziale di energia E_i ad uno stato finale di energia E_f , accompagnato da un fotone. Per la conservazione della quantità di moto si dovrà avere:

$$\vec{p}_r + \vec{p}_R = 0$$

dove il pedice R si riferisce al nucleo diseccitato che acquisterà quantità di moto a causa del rinculo. Si avrà allora:

$$p_R = p_\gamma \quad (1)$$

Per la conservazione dell'energia si potrà invece affermare che:

$$E_i = E_f + E_\gamma + T_R$$

con:

$$E_\gamma = cp_\gamma \quad (2)$$

Definendo allora come segue il salto energetico dallo stato iniziale allo stato finale

$$\Delta E = E_i - E_f$$

si avrà:

$$E_i - E_f = E_\gamma + T_R$$

Essendo poi, dalla meccanica classica:

$$T_R = \frac{p_R^2}{2M}$$

si può scrivere:

$$\Delta E = E_\gamma + \frac{p_R^2}{2M}$$

Moltiplicando e dividendo per c^2 il rapporto che si trova a secondo membro si ricava:

$$\Delta E = E_\gamma + \frac{p_R^2 c^2}{2Mc^2}$$

Sfruttando la relazione (1) si ottiene allora:

$$\Delta E = E_\gamma + \frac{p_\gamma^2 c^2}{2Mc^2}$$

e quindi:, facendo infine riferimento alla relazione (2):

$$\Delta E = E_\gamma + \frac{E_r^2}{2Mc^2} \quad (3)$$

detta energia del fotone emesso. Per $A=100$ e transizione di 1 MeV si ha:

$$\frac{E_r^2}{2Mc^2} \cong 10^{-5} eV$$

e quindi, normalmente, il ΔE viene identificato come l'energia del fotone emesso trascurando il secondo addendo del secondo membro della relazione (3). Nel caso dell'emissione si avrà quindi:

$$\Delta E \cong E_\gamma$$

Nel caso dell'assorbimento è invece necessario considerare anche il termine che prima trascurato per poter avere la transizione:

$$E_\gamma + \frac{E_r^2}{2Mc^2} \rightarrow E_f \rightarrow E_i$$

Analisi quantistica del decadimento γ

Per la probabilità di emissione di un fotone nella transizione da E_i ad E_f , si farà una stima ideale attraverso la quale si troverà un valore di riferimento dal quale poi tutti gli altri valori della probabilità saranno calcolati; si parla allora di una $\lambda_{\gamma L}(E, M)$ di Weisskopf (il pedice L indica l'ordine di multipolo). Tale stima considera:

- La funzione in termini di particella singola:

$$\psi_i = R_i(r) \phi_{l,m}(\vartheta, \varphi)$$

- Il protone esterno come unico responsabile della transizione.

- Lo stadio finale della transizione caratterizzato da $s(l=0)$:

$$\psi_f = R_f(r) = \text{costante}$$

- R_i ed R_f definite costanti per r minore di R (raggio nucleare) e nulle per r maggiore di R .

Tenendo conto di queste considerazioni si otterrà una $\lambda(E, L)$ e una $\lambda(M, L)$ espressi come:

$$\left\{ \begin{array}{l} \lambda(E, L) \div \left(\frac{E}{\hbar c} \right)^{2L+1} R^{2L} \\ \lambda(M, L) \div \left(\frac{E}{\hbar c} \right)^{2L+1} R^{2L-2} \end{array} \right.$$

Come prima cosa è importante notare che maggiore è l'ordine di multipolo L e maggiore è anche λ , inoltre, essendo:

$$R = R_0 A^{1/3}$$

il termine λ dipende dalle dimensioni nucleari. I termini λ si misurano in s^{-1} con E misurato in MeV ed R in Fermi. Nella tabella 2 sono riportati i valori numerici relativi ad alcuni tipi di transizioni.

Tipo di transizione	Valore di λ
E1	$10^{14} A^{2/3} E^3$
E2	$7,3 \cdot 10^7 A^{4/3} E^5$
E3	$34 A^2 E^7$

$E4$	$1,1 \cdot 10^{-3} A^{8/3} E^9$
$M1$	$5,6 \cdot 10^{13} E^3$
$M2$	$3,5 \cdot 10^7 A^{2/3} E^5$
$M3$	$16 A^{4/3} E^7$
$M4$	$4,5 \cdot 10^{-6} A^2 E^9$

Tabella 2

I coefficienti di decadimento, osservati con la teoria di Weisskoff, permettono di capire che la probabilità di transizione dipende dall'ordine di multipolo; una transizione E_1 dominante sarà parzialmente rappresentata da un contributo M_2 mentre una transizione M_1 dominante sarà molto meglio rappresentata da un contributo E_2 . In generale un λ piccolo è dominante.

Regole di selezione per momento angolare e parità.

L'ordine di multipolo L viene stabilito dalla parità e dalla conservazione del momento angolare totale, dati dunque I_i ed I_f bisogna considerare la seguente relazione vettoriale:

$$\vec{I}_i = \vec{L} + \vec{I}_f$$

dalla quale si potrà ricavare:

$$|I_f - I_i| \leq L \leq I_f + I_i$$

Se I_i oppure I_f sono nulli la transizione è di puro multipolo. Se non c'è differenza di parità il contributo di E sarà relativo agli L pari e quello di M dagli L dispari mentre se c'è differenza di parità il contributo di E sarà relativo agli L dispari e il contributo di M sarà relativo agli L pari. Il valore L nullo non è possibile in quanto non sarebbe una situazione compatibile con la transizione elettronica. Se però:

$$I_i = I_f = 0$$

allora non c'è emissione di fotoni e L è nullo.

Conversione interna.

Quando L è nullo il livello finale è un livello metastabile e quindi esiste una modalità differente di diseccitazione rispetto al decadimento γ che prende il nome di conversione interna (a volte indicato IT). Come è stato accennato in precedenza, la transizione interna è accompagnata dall'emissione di elettroni atomici espulsi dall'atomo; dal punto di vista energetico varrà allora la seguente relazione:

$$\Delta E = T_{e^-} + B_{at}$$

dove B_{at} è detta energia di legame atomica. Si avrà allora un'espressione della probabilità $\lambda_{CI}^{(k)}$ dove è importante specificare sempre il livello. In generale, per la costante di decadimento vale la relazione:

$$\lambda_{Tot} = \lambda_\gamma + \lambda_{IT}$$

Si definisce inoltre coefficiente di conversione interna la seguente grandezza:

$$\alpha = \frac{\lambda_{IT}}{\lambda_\gamma}$$

e quindi si può scrivere:

$$\lambda_{Tot} = \lambda_\gamma (1 + \alpha)$$

Naturalmente, quando le possibili transizioni interne sono diverse, anche il coefficiente α sarà composito, ovvero si avrà:

$$\alpha_{Tot} = (\alpha_K + \alpha_L + \dots)$$

così come poi ci possono essere delle differenziazioni legate ai vari sottolivelli e quindi si potrebbe avere:

$$\alpha_L = \alpha_{L_i} + \alpha_{L_{ii}} + \dots$$

Nella maggior parte dei casi si potrà però semplicemente scrivere:

$$\alpha_{Tot} \cong \alpha_K$$

Il calcolo del coefficiente α è particolarmente complesso e tiene conto che:

$$\begin{cases} \psi_i = \psi_{Ni} \psi_e^{(k)} \\ \psi_f = \psi_{Nf} \psi_e^{(libero)} \end{cases}$$

e tiene inoltre conto del rapporto tra Z^3 ed n^3 . Un calcolo non relativistico porta ai due seguenti risultati:

$$\begin{cases} \alpha(E, L) = \frac{\lambda_{CI}}{\lambda_\gamma} = \frac{Z^3}{n^3} \left(\frac{L}{L+1} \right) \left(\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0\hbar c} \right)^4 \left(\frac{2m_e c^2}{E} \right)^{L+\frac{5}{2}} \\ \alpha(M, L) = \frac{\lambda_{CI}}{\lambda_\gamma} = \frac{Z^3}{n^3} \left(\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0\hbar c} \right)^4 \left(\frac{2m_e c^2}{E} \right)^{L+\frac{3}{2}} \end{cases}$$

Si nota dunque che c'è una forte dipendenza dal tipo di transizione (magnetica o elettrica). Per transizioni in cui sono importanti sia i contributi di M che quelli di E la conversione interna è dominante per piccoli valori di E e per alti valori di Z. Quando, come si è accennato prima, si ha:

$$I_i = I_f = 0$$

si parla di conversione interna pura e non si calcola il termine α poiché λ_γ è nulla; α viene utilizzato solo per valori almeno superiori all'1%.

Spettroscopia del decadimento γ .

La spettroscopia del decadimento γ è molto complessa; si può comprendere questo osservando gli schemi di decadimento. In tali schemi vengono indicati, per ogni nuclide, il livello fondamentale e i livelli eccitati e si fa risaltare la differenza di massa tra due nuclidi vicini. Nella seguente immagine di figura 3 viene mostrato un esempio di schema di decadimento relativo al nuclide $^{40}_{19}\text{K}_{21}$. Come si vede nel diagramma è mostrato il tipo di transizione (in azzurro è indicata l'emissione di fotoni), i livelli energetici, la parità e la probabilità che una certa transizione si realizzi (branching ratio)

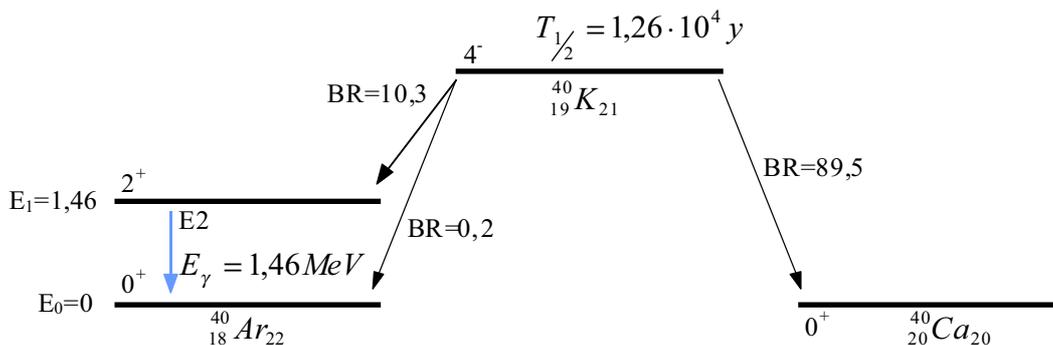


Figura 3

Ovviamente la somma dei branching ratio deve essere pari all'unità. La transizione più favorita è la β^- in quanto si ha:

$$Q_{\beta^-} = (M_K - M_{Ca})c^2 = 1,314 \text{ MeV}$$

Osservando la differenza di parità si ha un ΔI di quattro unità che può avvenire per:

$$\begin{cases} l_{disp} = 3 \\ s = 1 \end{cases}$$

La transizione β al terzo ordine è proibita. Dall'altra parte si ha, per quanto riguarda il livello più basso:

$$Q_o = (M_K - M_{Ar})c^2 = 1,505 \text{ MeV}$$

dunque la Q disponibile è maggiore di 1,022 MeV. Lo 0,2% indicato nel diagramma sarà frazionato tra la cattura elettronica (EC) e il decadimento β^+ dove però il primo tipo di transizione è altamente favorita. Per quanto riguarda invece le transizioni verso il livello di energia E_1 si avrà:

$$Q_o = (1,505 \text{ MeV}) - (1,46 \text{ MeV}) < 1,022 \text{ MeV}$$

Dunque il branching del 10,3% è solo relativo alla EC in quanto non c'è la possibilità di creare il positrone. La grossa differenza nei branching ratio (10,3 contro 0,2) è dovuta al fatto che è avvenuto uno scambio di parità del tipo $\Delta I=2$ e quindi sarà:

$$\begin{cases} l = 1 \\ s = 1 \end{cases}$$

Siccome ^{40}K ha un tempo di dimezzamento molto elevato è possibile arrivare a comprendere come lo 0,0117% del K sia ^{40}K . Tutti i corpi che contengono K hanno dunque una piccola percentuale di radioattività. È perciò importante

conoscere l'attività in decadimenti al secondo ovvero in Becquerel (Bq) ma sarà altrettanto importante conoscere l'attività specifica, che si misura in Bq/kg.

Qualche esempio numerico per comprendere l'importanza dei valori in gioco. Si faccia innanzitutto riferimento ad un corpo umano, che ha una massa standard m di 70 kg. Di questi, lo 0,35% è K . Si valuti dunque l'attività (complessiva e specifica) di questo. L'attività si misura come:

$$A = \lambda N$$

e quindi, nel caso in analisi, si avrà:

$$A = \lambda N = \left(0,0035 \frac{\ln 2}{T_{1/2}} \cdot \frac{N_{Av}}{PA} m \right) = 7293 Bq$$

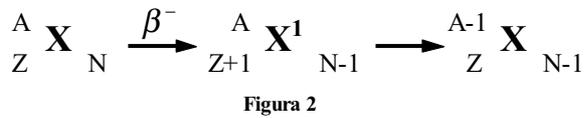
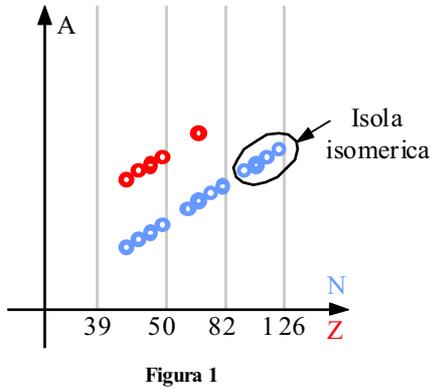
mentre l'attività specifica sarà:

$$a = \frac{A}{m} = 104 \frac{Bq}{kg}$$

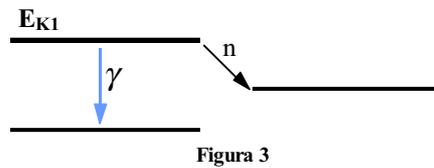
Un altro esempio particolarmente significativo può essere quello della banana, al cui attività specifica è pari a 127 Bq/kg; per una banana priva di buccia, e quindi del peso approssimativo di 100g, si ingeriscono quindi 12,7 Bq di ^{40}K . Le noccioline tostate prive di acqua (le arachidi) hanno una attività specifica di 700 Bq/kg e quindi una decina di grammi di arachidi porta 12 Bq di ^{40}K . Per quanto riguarda, infine, i funghi secchi, anch'essi hanno una attività specifica di 700 Bq/kg e quindi una tipica bustina da due porzioni (equivalente a circa 40 g di funghi secchi) porta 70 Bq di ^{40}K e quindi una singola porzione presenta circa 35 Bq di ^{40}K .

Spettroscopia del decadimento γ .

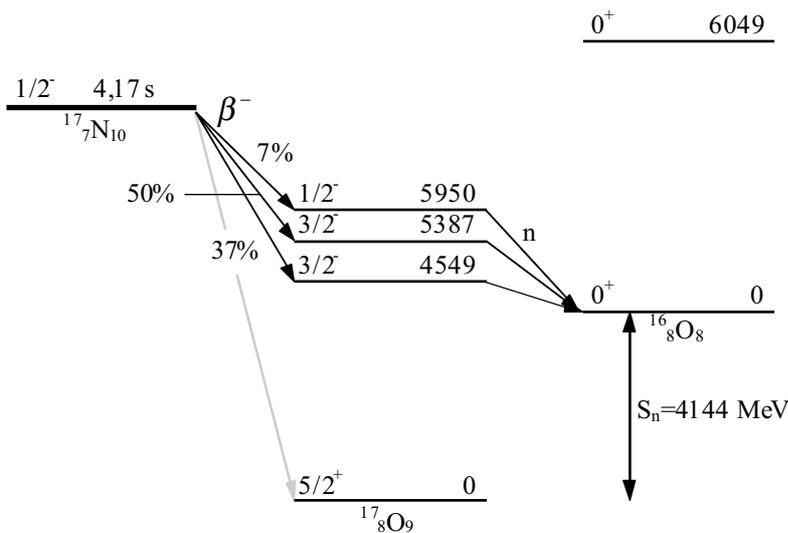
È stato in precedenza affermato che il decadimento γ si ha quando un nuclide presenta uno o più isomeri eccitati; i nuclei che presentano isomeri sono distribuiti, come mostrato in figura 1, in zone particolari della carta dei nuclidi.



Quando si è in presenza di livelli altamente eccitati di un nuclide si assiste all'emissione di neutroni o protoni ritardati; questo avviene in quanto si può assistere a decadimento diretto oppure a decadimento tramite il passaggio per un diverso nucleo; si avrà quindi una sequenza del tipo: nucleo precursore \rightarrow nucleo emettitore \rightarrow nucleo figlio come quella schematizzata in figura 2 che, ovviamente, introduce nella reazione un certo ritardo. Supponendo allora che il livello eccitato abbia un'energia E_{K1} si potrà costruire uno schema di decadimento come quello mostrato in figura 3.



Un esempio numerico può essere quello relativo al ${}^{17}\text{N}$ di cui si vede lo schema di decadimento in figura 4.



Si può dunque osservare che saranno rilevati dei neutroni emessi con ritardo, in effetti lo spettro dei neutroni emessi nel decadimento appena mostrato è quello rappresentato in figura 5.

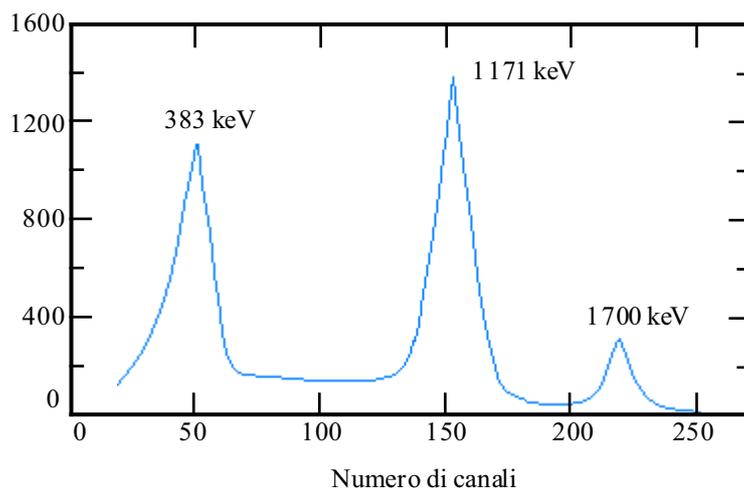


Figura 5

Per quanto riguarda l'energia, si avrà:

$$T_n = 5950 - 4144$$

L'energia ceduta va poi al neutrone secondo la relazione:

$$E_n = T_n \frac{A}{A-1}$$

In figura 6 è mostrato l'andamento temporale dell'attività e si nota l'andamento costante dei neutroni di background (in azzurro), l'andamento sperimentale (in rosso) che è quello ottenuto tramite un fit dei punti sperimentali) e l'andamento tendenziale (in grigio). Quest'ultimo non è altro che una retta, la cui pendenza dipende sostanzialmente dal tempo di dimezzamento.

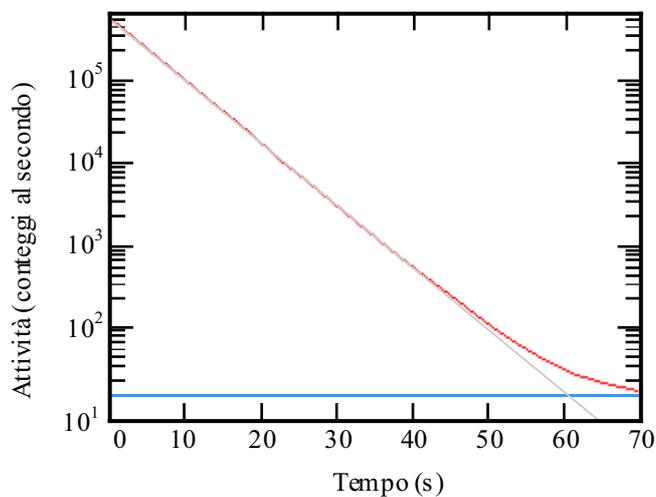
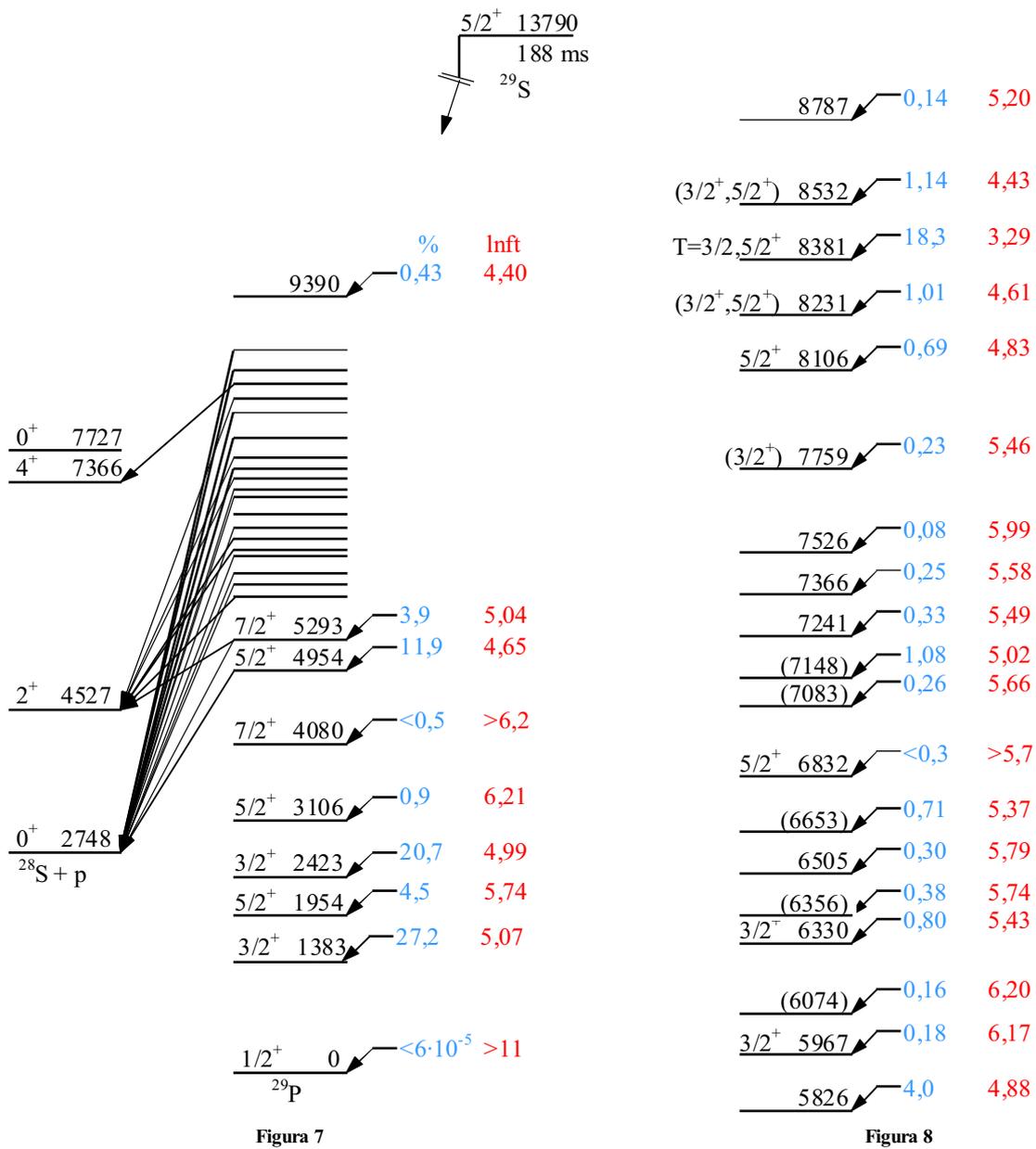


Figura 6

In figura 7 si vede un altro schema di decadimento che presenta, questa volta, dei protoni ritardati e che, ancora una volta, parte da un evento di decadimento β , relativo però a ^{29}S .



La parte non numerata è mostrata ingrandita in figura 8. In figura 9 è invece mostrato lo spettro energetico dei protoni emessi durante il decadimento di ^{29}S nel quale possono essere individuati circa una trentina di picchi.

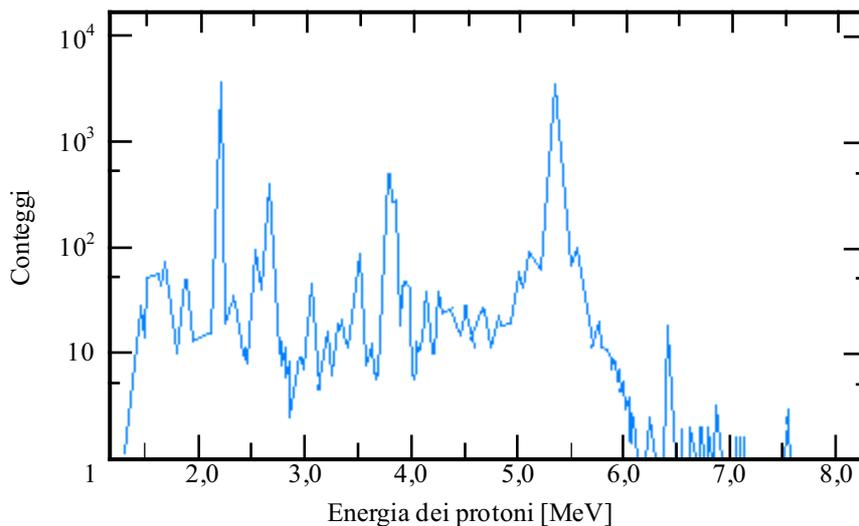


Figura 9

In figura 10 viene preso in considerazione il decadimento di $^{137}_{55}\text{Cs}$.

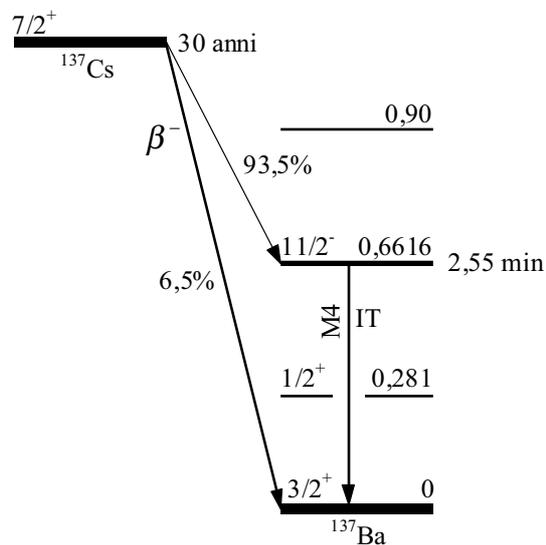


Figura 10

Il Cesio emette dunque un fotone da 0,6616 MeV e questo lo rende un pericoloso contaminante ambientale; si nota inoltre che entrambe le trasformazioni evidenziate in questo schema presentano un ΔI di 2 ma la prima presenta anche un cambio di parità e questo la rende più probabile. Giunti allora al secondo livello eccitato del Ba troviamo un tempo di dimezzamento piuttosto grande dovuto al forte ΔI ; il grande ΔI è anche il motivo per cui, a questo punto, la transizione interna sia preferita al decadimento γ . Il coefficiente di conversione interna IT è dell'11% (ed equivale alla probabilità che fra tutti i decadimenti possibili avvenga proprio la IT). In effetti esistono due possibili transizioni interne: quella mostrata, che porta allo stato fondamentale del Ba e che presenta un multipolo magnetico M4, e quella che porterebbe al primo stato eccitato del Ba (non mostrata in figura in quanto implicherebbe un ΔI piuttosto grande e quindi praticamente non si vede). Per quanto riguarda lo spettro energetico delle particelle emesse si vedrà, per quanto riguarda lo spettro β , uno spettro continuo e poi dei valori precisi dovuti al decadimento monocromatico, ovvero agli elettroni monocromatici dovuti alla internal transition. Un discorso analogo potrebbe essere ripetuto per i fotoni. In figura 11, infine, è mostrato un ultimo esempio di schema di decadimento legato al decadimento di ^{176}Lu .

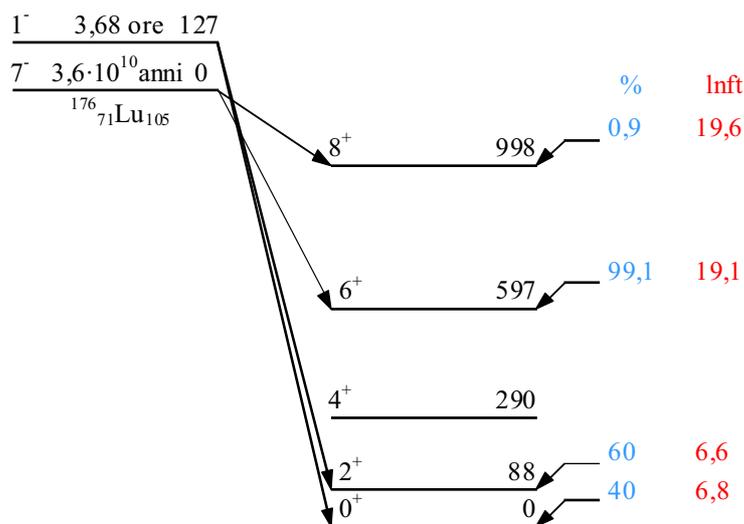


Figura 11

Si nota che il livello 4^+ non viene mai raggiunto perché gli vengono preferiti livelli che permettono il minimo ΔI ; in effetti gli altri quattro livelli vengono raggiunti dai due di partenza con un ΔI pari a ± 1 . Si nota inoltre che tanto più è alto il Q e tanto più alto è il logft; in effetti dei livelli attorno al 19 sono caratteristici per le transizioni β proibite (in questo caso sono le prime proibite).

Reazioni nucleari.

L'emissione ritardata è molto spesso legata agli eventi di fissione per i quali si conoscono più di 100 precursori che vengono solitamente raccolti in 6 gruppi in base al valore medio del tempo di dimezzamento. In natura, però, esistono anche nuclidi naturalmente radioattivi che vanno a formare famiglie radioattive naturali; tali famiglie non sono altro che l'insieme di nuclidi che derivano dai decadimenti di ^{235}U , ^{238}U e ^{232}Th . I decadimenti che danno origine, a partire dai precursori, agli elementi della famiglia sono decadimenti del tipo α e β per poi arrivare, dopo diversi decadimenti, all'elemento $^{206}_{82}\text{Pb}$, che è stabile. Si definisce dunque il fondo radioattivo naturale come la radioattività dovuta alla presenza in natura di nuclidi radioattivi; ^{14}C e ^3H contribuiscono al fondo naturale con tempi di dimezzamento di 5000 e 9000 anni e vengono da reazioni dei raggi cosmici. Anche ^{40}K fa parte del fondo naturale, rappresenta un decimillesimo del potassio presente in natura ed è presente anche nel corpo umano. Quando esiste un precursore con un tempo di dimezzamento molto maggiore rispetto al tempo di dimezzamento di qualunque altro elemento della sua catena si parla di equilibrio secolare, espresso dalla relazione:

$$\lambda_1 N_1 = \lambda_2 N_2 = \dots = \lambda_N N_N$$

Facendo per esempio riferimento alla catena relativo al ^{238}U si trovano gli elementi mostrati, con il rispettivo tempo di dimezzamento, nella tabella 1.

Nuclide	Tempo di dimezzamento [anni]
^{238}U	$4,5 \cdot 10^9$
^{234}U	$2,5 \cdot 10^5$
^{230}Th	$8 \cdot 10^4$
^{226}Ra	1620

Tabella 1

Si nota dunque che, a parte il nuclide precursore, tutti gli altri nuclidi della catena hanno tempi di dimezzamento molto più piccoli e dunque dall'equilibrio secolare si deduce che:

$$\lambda_{238} N_{238} = \lambda_{234} N_{234} = \lambda_{230} N_{230} = \lambda_{226} N_{226}$$

In particolare ci si sofferma sui primi due termini dell'uguaglianza, ovvero sulla seguente espressione:

$$\lambda_{238} N_{238} = \lambda_{234} N_{234}$$

dalla quale si ricava:

$$\frac{N_{234}}{N_{238}} = \frac{\left(T_{1/2}\right)_{234}}{\left(T_{1/2}\right)_{238}} = 5 \cdot 10^{-4}$$

Prendendo poi il ^{226}Ra e separandolo dal resto della catena si osserva che tale nuclide andrà a sua volta a creare una ulteriore catena di decadimenti che conterrà anche ^{222}Rn , quest'ultimo nuclide ha un tempo di dimezzamento di circa 3 giorni e quindi si può nuovamente osservare il formarsi di un nuovo equilibrio secolare tra questi due elementi.

Soffermandosi ora sulla λ_{Tot} e sulla λ_{Parz} si può fare riferimento ad un grammo di Uranio naturale; da questo campione si potranno osservare i decadimenti α dovuti alla presenza di ^{235}U , ^{238}U e ^{234}U e poi si avrà anche la fissione spontanea; quest'ultima reazione avviene infatti quando si ha:

$$16 < \frac{Z^2}{A} < 50$$

e, per l'Uranio si ha:

$$\frac{Z^2}{A} = 35,6$$

Il tempo di decadimento dovuto alla fissione (dal quale poi si ricava la rispettiva λ) è di circa 10^{15} anni mentre il tempo di dimezzamento complessivo (dovuto quasi completamente all'apporto relativo ai decadimenti α) è di $4,5 \cdot 10^9$ anni. L'attività di fissione spontanea dell'Uranio porta a circa 24 fissioni in un anno per ogni grammo di Uranio; come raffronto si osserva che ^{238}U va incontro a 12450 disintegrazioni al secondo, stesso valore per ^{234}U , per quanto riguarda invece ^{235}U si hanno 570 disintegrazioni al secondo.

Alcuni rapidi esempi numerici conclusivi. Il ^{252}Cf è caratterizzato dal seguente rapporto:

$$\frac{Z^2}{A} = 38$$

e dai seguenti tempi di dimezzamento relativi ai fenomeni di fissione e di decadimento α :

$$\begin{cases} T_{1/2}^{FS} = 85,4 \text{anni} \\ T_{1/2}^{\alpha} = 2,70 \text{anni} \end{cases}$$

e quindi, complessivamente:

$$T_{1/2}^{Tot} = 2,70 \text{anni}$$

Un ulteriore dato numerico interessante è la potenza fornita da un grammo di ^{239}Pu pensando all'emissione di particelle α con energia di 5,6 MeV. Il numero di decadimenti per secondo e per grammo sarà:

$$N = \frac{N_{Av}}{A} m \frac{\ln 2}{T_{1/2}} = 6 \cdot 10^{11}$$

Per valutare la potenza è ora necessario moltiplicare quanto trovato per l'energia emessa da ogni singola particella α ; si avrà dunque:

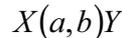
$$P = NE_{\alpha} = 3,6 \cdot 10^{12} \frac{\text{MeV}}{\text{sg}} = 0,573 \frac{\text{Watt}}{\text{g}}$$

Reazioni nucleari e leggi di conservazione.

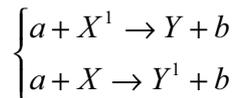
È giunto ora il momento di parlare delle reazioni nucleari, ovvero di quelle reazioni che si hanno quando due nuclei si avvicinano abbastanza da entrare nel range di azione delle forze nucleari. Le reazioni nucleari sono prima di tutto caratterizzate dall'energia alla quale avvengono: si parla allora di basse energie quando si è nell'ordine del MeV, di medie energie quando si è nell'ordine delle centinaia di MeV (o comunque ad energie superiori alla soglia di produzione dei pioni) e di alte energie quando si è nell'ordine delle centinaia di GeV (il limite odierno per le macchine acceleratrici è di circa 200 GeV). In questo corso si farà riferimento solo alle basse energie. La reazione nucleare si ha quando una particella proiettile colpisce un target per dare origine alla reazione



indicata anche, a volte, nel modo seguente:



Nell'ambito delle basse energie le particelle indicate come a e b sono molto più leggere delle particelle X e Y . Ovviamente X e Y possono coincidere (e quindi anche a e b coincideranno) e si parla di scattering (che è elastico o anelastico a seconda che X rimanga o meno, dopo la reazione, nello stato fondamentale). Se X ed Y sono tra di loro diverse allora lo saranno anche a e b che possono essere per esempio fotoni (nel qual caso si parla di reazione fotonucleare). Quando X rimane e b è un fotone si parla di cattura radiativa, che è utile per la realizzazione di isotopi più pesanti che solitamente saranno emettitori β . La relazione (1) esprime uno dei possibili canali della reazione, altri due possibili canali della reazione sono i seguenti:



dove X^1 ed Y^1 sono ovviamente degli stati eccitati di X e Y . Il primo membro della relazione (1) prende il nome di canale di entrata (oppure canale α) mentre il secondo membro prende il nome di canale di uscita (o canale β). Un canale può essere aperto o chiuso a seconda che la reazione possa avvenire o meno. Il fatto che una reazione possa avvenire dipende ovviamente dalla seguente serie di leggi:

- legge della conservazione dell'energia totale;
- legge della conservazione del momento;
- legge della conservazione del momento angolare;
- legge della conservazione della parità;
- legge della conservazione del numero totale di nucleoni (ad energie superiori alla soglia di produzione dei mesoni);
- legge della conservazione del numero dei vari nucleoni (a basse energie).

La reazione nucleare avviene in tempi variabili tra i 10^{-16} o 10^{-22} secondi e quindi si trascura tutto ciò che dipende in seguito dalla forza debole in quanto questa agisce in tempi dell'ordine di 10^{-3} secondi.

Energetica delle reazioni nucleari.

Siccome solitamente vengono viste le particelle b , in quanto sono solitamente le più facili da fermare e quindi da rivelare, è conveniente cercare una relazione che leghi tali particelle alle particelle a e all'angolo esplorato dal rivelatore. Si consideri dunque la reazione espressa dalla relazione (1) e si supponga che X ed Y siano nello stato fondamentale. Si farà riferimento all'energia nella sua forma classica ovvero:

$$T = \frac{1}{2}mv^2$$

dove m sia la massa a riposo. Anche per le reazioni nucleari si può definire il Q value che sarà:

$$Q = (m_i - m_f)c^2 = (m_X + m_a - m_Y - m_b)c^2$$

oppure anche:

$$Q = T_{Out} - T_{In}$$

Si parlerà allora di reazione esotermica quando:

$$Q > 0 \Leftrightarrow T_Y + T_b > T_X + T_a$$

mentre si dirà endotermica una reazione tale per cui:

$$Q < 0 \Leftrightarrow T_Y + T_b < T_X + T_a$$

Facendo ora riferimento alla conservazione della quantità di moto si avrà:

$$m_X v_X + m_a v_a = m_Y v_Y + m_b v_b$$

(spesso, tra l'altro, nel sistema del laboratorio si pone v_X nulla mentre v_a è solitamente nota), fissato dunque l'angolo θ di emissione di b , si può considerare il piano di reazione e si ricaveranno le due seguenti espressioni:

$$\begin{cases} p_a = p_b \cos \vartheta + p_Y \cos \varphi \\ 0 = p_b \sin \vartheta - p_Y \sin \varphi \end{cases}$$

Supponendo che X sia ferma si ha, inoltre:

$$Q = T_Y + T_b - T_a$$

Ricordando allora l'espressione:

$$T = \frac{p^2}{2m}$$

si può esprimere il Q nel modo seguente:

$$Q = T_b \left(1 + \frac{m_b}{m_Y} \right) - T_a \left(1 - \frac{m_a}{m_Y} \right) - \frac{2\sqrt{m_a m_b T_a T_b}}{m_Y} \cos \vartheta$$

Riscrivendo quest'ultima espressione in funzione di T_b si ottiene la relazione seguente:

$$\sqrt{T_b} = A \pm \sqrt{A^2 + B} \quad (2)$$

dove siano:

$$\begin{cases} A = \frac{\sqrt{m_a m_b T_a}}{m_b + m_Y} \cos \vartheta \\ B = \frac{m_Y Q + T_a (m_Y - m_a)}{m_Y + m_b} \end{cases}$$

Quando allora Q è positivo si sceglie la soluzione positiva e si avrà un andamento come quello mostrato in figura 1.

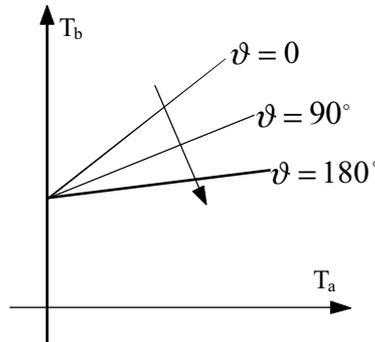


Figura 1

Quando invece il termine Q è negativo, siccome comunque il radicando che appare nella relazione (2) deve essere positivo, si deve avere:

$$T_a \geq |Q| \frac{m_Y}{\frac{m_a m_b \cos^2 \vartheta}{m_Y + m_b} + m_Y - m_a}$$

Dunque T_a deve superare un certo limite e questo limite dipende dall'angolo θ . Il più piccolo valore di T_a che soddisfi la disuguaglianza (che si ha per il massimo valore del coseno) prende il nome di energia di soglia T_S che sarà dunque definita come segue:

$$T_S = |Q| \left(1 + \frac{m_a}{m_Y + m_b - m_a} \right)$$

Quando poi sia:

$$m_Y + m_b \cong m_X + m_a$$

esiste una formula semplificata per l'energia di soglia, secondo la quale:

$$T_S = |Q| \left(1 + \frac{m_a}{m_X} \right)$$

Nelle reazioni a soglia la rappresentazione grafica è quella mostrata in figura 2.

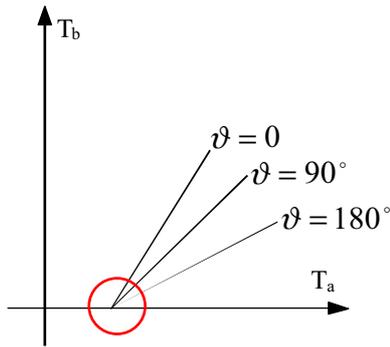


Figura 2

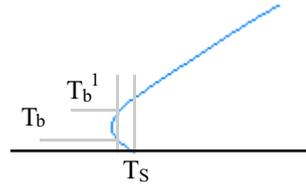


Figura 3

In figura 3 è invece mostrato un ingrandimento della zona cerchiata in rosso nella figura 2; quanto mostrato avviene solo con T_s piccolo e per angoli inferiori a 90° . Quando si è nello stato fondamentale si ha Q_0 , quando si è invece in uno stato eccitato si avrà Q_1, Q_2, \dots . Si scriverà allora:

$$T_a + T_X = T_b + T_Y + E_Y^* - Q$$

dalla quale si ricava:

$$(T_b + T_Y)_{Max} - (T_b + T_Y)_l = E_Y^*$$

Sezione d'urto delle reazioni nucleari.

Si considera ora la sezione d'urto di una reazione nucleare e per far questo si faccia riferimento la situazione mostrata in figura 4 nella quale si vede un fascio di particelle che vanno a colpire un bersaglio composto idealmente da un unico strato atomico.

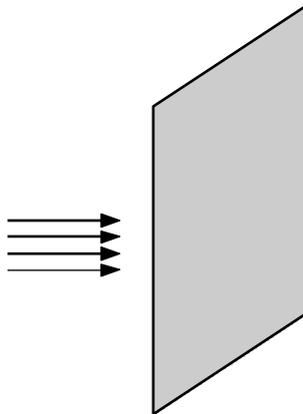


Figura 4

Dall'acceleratore arriva una certa intensità di particelle a che verrà indicata con il simbolo I_a ; il bersaglio presenta ovviamente una certa densità di nuclei e quindi il numero di particelle viste dal rivelatore quando è posto ad una certa distanza e sottende ad un certo angolo solido è:

$$R_b = \frac{N_b}{s} \div I_a N_X$$

È dunque possibile definire la sezione d'urto totale nel modo seguente:

$$\sigma = \frac{R_b}{I_a N_X}$$

Quando le particelle a altro non sono che neutroni non si parla di una corrente di particelle I_a ma di un flusso Φ . La sezione d'urto non ha solo un significato geometrico ma dipende dalla probabilità che l'evento si verifichi. Ovviamente la sezione d'urto si può riferire non a tutte le reazioni ma solo ad alcune. Solitamente si indica nel modo seguente:

$$\sigma_{Tot}(\alpha) = \sigma_{Sc}(\alpha) + \sigma_{Com}(\alpha)$$

dove con α si indica il canale, con Sc si fa riferimento allo scattering elastico e con Com si indica la sezione d'urto complementare a quella relativa allo scattering elastico e quindi la sezione d'urto relativa a tutte le altre possibili reazioni. Se non si integra rispetto all'intero 4π si ottiene la sezione d'urto differenziale:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{f(\vartheta, \varphi)}{I_a N_X 4\pi}$$

Ovviamente si avrà:

$$\sigma = \int \frac{d\sigma}{d\Omega} d\Omega = \int_0^\pi \sin\vartheta d\vartheta \int_0^{2\pi} d\varphi \frac{d\sigma}{d\Omega}$$

Se poi la funzione f dipende solo da θ si avrà:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{f(\vartheta)}{I_a N_X 4\pi}$$

e quindi:

$$\sigma = 2\pi \int_0^\pi \frac{d\sigma}{d\Omega} \sin\vartheta d\vartheta = 4\pi \left(\frac{d\sigma}{d\Omega} \right)$$

Ovviamente l'ultima uguaglianza vale solo se si è in presenza di una sezione d'urto differenziale costante. Se il rivelatore riconosce anche l'energia del nucleo prodotto si dovrà considerare un doppio differenziale del tipo $dEd\Omega$, mentre invece, se interessa solo l'energia si avrà dE . La sezione d'urto differenziale dipende dal sistema di riferimento; mettendosi nel caso in cui sia:

$$\frac{m_a}{m_X} \approx 1$$

si avrà:

$$\begin{cases} \vartheta_{C.M.} = 2\vartheta_{Lab} \\ \varphi_{C.M.} = 2\varphi_{Lab} \end{cases}$$

e quindi si avrà:

$$\begin{cases} d\Omega = 2\pi \sin\vartheta d\vartheta \\ d\Omega_{Lab} = 2\pi \sin\vartheta_{Lab} d\vartheta_{Lab} \end{cases}$$

Ricordando allora la relazione tra il sistema del laboratorio e il sistema dal centro di massa si avrà:

$$d\Omega = 8\pi \sin\vartheta_{Lab} \cos\vartheta_{Lab} d\vartheta_{Lab}$$

inoltre:

$$\frac{d\sigma_0}{d\Omega_{Lab}} = \frac{d\sigma_0}{d\Omega} \cdot \frac{d\Omega}{d\Omega_{Lab}} = \frac{\sigma_0}{4\pi} \cos\vartheta_{Lab}$$

con

$$0 \leq \vartheta_{Lab} \leq \frac{\pi}{2}$$

Dunque, nel sistema del centro di massa, lo scattering è isotropo mentre nel sistema del laboratorio e c'è una dipendenza da θ .

Sezioni d'urto di scattering e di reazione.

Si ricordi ora la definizione di parametro d'impatto b , che era la minima distanza tra le due particelle; facendo allora riferimento alla figura 5 si avrà:

$$b \leq R_1 + R_2$$

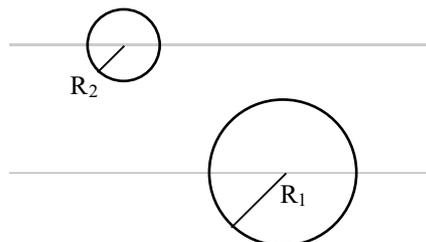


Figura 5

Da un punto di vista geometrico si avrebbe:

$$b \div \pi(R_1 + R_2)^2$$

ma i valori numerici in questo modo non tornano. L'andamento della σ_α in funzione della T_a prende il nome di funzione di eccitazione; tale funzione è diversa a seconda che a sia un neutrone o una particella carica. La relazione semiclassica relativa alla quantizzazione del prodotto pb è la seguente:

$$pb = \sqrt{l(l+1)}\hbar \approx l\hbar$$

da cui si ricava:

$$b = \frac{l\hbar}{p} = l\tilde{\lambda}$$

Da questa relazione si comprende come al salire del numero quantico l il parametro d'urto salga anch'esso; per un certo l_{Max} espresso allora dalla relazione:

$$l_{Max} = \frac{b_{Max}}{\tilde{\lambda}} = \frac{R}{\tilde{\lambda}}$$

in corrispondenza del quale si avrà area massima espressa come:

$$A_{Max} = \pi(l_{Max} + 1)^2 \tilde{\lambda}^2 = \pi\left(\frac{R}{\tilde{\lambda}} + 1\right)^2 \tilde{\lambda}^2 = \pi(R + \tilde{\lambda})^2$$

si parla di relazione semiclassica per la sezione d'urto. Si definisce ora la sezione d'urto di scattering e di assorbimento; considerando un fascio di particelle incidenti con funzione d'onda:

$$\psi_i = A \sum_{l=0}^{\infty} i^l j_l(Kr) P_l(\cos \vartheta)$$

quando r è abbastanza grande (dell'ordine dei centimetri) si possono scrivere le funzioni di Bessel nella loro forma asintotica, ottenendo:

$$\psi_i = \frac{A}{2Kr} \sum_{l=0}^{\infty} i^{l+1} (2l+1) \left[e^{-i\left(Kr - l\frac{\pi}{2}\right)} - e^{i\left(Kr - l\frac{\pi}{2}\right)} \right] P_l(\cos \vartheta)$$

Si avrà dunque, complessivamente:

$$\psi(r) = \frac{A}{2Kr} \sum_{l=0}^{\infty} i^{l+1} (2l+1) \left[e^{-i\left(Kr - l\frac{\pi}{2}\right)} - \eta_l e^{i\left(Kr - l\frac{\pi}{2}\right)} \right] P_l(\cos \vartheta)$$

e quindi l'equazione d'onda dell'onda diffusa sarà:

$$\psi_{Sc} = \frac{A}{2Kr} e^{iKr} \sum_{l=0}^{\infty} i(2l+1)(1 - \eta_l) P_l(\cos \vartheta)$$

Il termine η_l sarà dunque semplicemente uno shift di fase. Si calcola ora la sezione d'urto differenziale di scattering elastico:

$$\frac{d\sigma_{Sc}}{d\Omega} = \frac{1}{4K^2} \left| \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) i (1 - \eta_l) P_l(\cos \vartheta) \right|^2$$

Complessivamente si avrà allora:

$$\sigma_{Sc} = \int \frac{d\sigma_{Sc}}{d\Omega} d\Omega = \frac{1}{4K^2} \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1)^2 \frac{4\pi}{2l+1} |1 - \eta_l|^2 = \sum_{l=0}^{\infty} \pi \tilde{\lambda}^2 (2l+1) |1 - \eta_l|^2$$

Si esprime poi:

$$\eta_l = e^{2i\delta_l}$$

dove δ_l è lo shift di fase e si ottiene:

$$\sigma_{Sc} = \sum_{l=0}^{\infty} 4\pi \tilde{\lambda}^2 (2l+1) \sin^2 \delta_l$$

Quando l è nullo si torna ad avere:

$$\sigma_{Sc} = 4\pi \frac{\sin^2 \delta_0}{K^2}$$

Quando non si è in presenza di scattering elastico (e quindi si cerca quella che prima è stata chiamata sezione d'urto complementare e che più propriamente si può chiamare sezione d'urto di reazione) si devono valutare i casi in cui sia:

$$|\eta_l| < 1$$

Dal bilancio tra la corrente entrante e quella uscente e poi normalizzando il tutto per la corrente incidente, si avrà dunque:

$$\sigma_R = \sum_{l=0}^{\infty} \pi \lambda^2 (2l+1) (1 - |\eta_l|^2)$$

La σ totale, data dalla somma di quella di scattering e di quella di reazione sarà:

$$\sigma_{Tot} = \sigma_{Sc} + \sigma_R = \sum_{l=0}^{\infty} 2\pi \lambda^2 (2l+1) (1 - \text{Re} \eta_l)$$

Complessivamente si avrà:

$$|\eta_l|^2 \leq 1$$

Le condizioni limite sono ovviamente le seguenti:

$$\begin{cases} \eta_l = -1 \\ \eta_l = 0 \end{cases}$$

alle quali corrispondono le due seguenti situazioni:

$$\begin{cases} \sigma_R = 0 \\ \sigma_R = \sigma_R^{Max} = \sigma_{Sc} \end{cases}$$

Come conseguenza è possibile affermare che:

$$\sigma_{Tot}^{Max} = 2\sigma_R^{Max}$$

e quindi si può fare riferimento al grafico di figura 6.

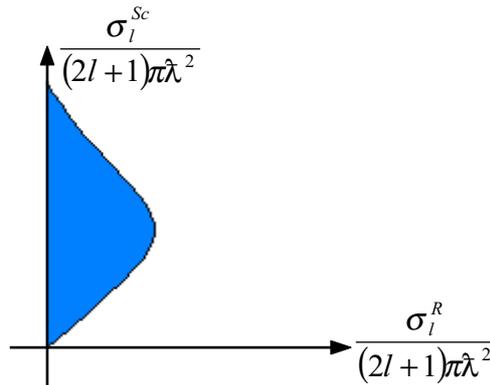


Figura 6

Nel caso massimo si avranno dunque i seguenti valori:

$$\begin{cases} \sigma_{Sc} = \pi (R + \lambda)^2 \\ \sigma_R = \pi (R + \lambda)^2 \\ \sigma_{Tot} = 2\pi (R + \lambda)^2 \end{cases}$$

È quindi come se le dimensioni del nucleo raddoppiassero.

Il modello ottico e il modello a nucleo composto.

I modelli interpretativi che permettono di comprendere le reazioni nucleari sono fondamentalmente due:

- il modello ottico;
- il modello a nucleo composto.

Il modello ottico prevede l'interazione tra ben determinati nucleoni mentre il modello composto è molto più complesso in quanto si suppone che il proiettile venga assorbito, che questo assorbimento dia origine ad una struttura instabile e che quindi ci sia un decadimento (si ha dunque un procedimento a due step); nel caso del nucleo composto il canale di ingresso e di uscita sono assolutamente scorrelati. A volte un procedimento è ben descritto dal modello del nucleo composto fino a quando l'energia del proiettile è piccola, quando poi l'energia aumenta è il modello diretto ad essere più soddisfacente. Il modello a nucleo composto descrive molto bene anche la presenza delle risonanze nell'andamento delle sezioni d'urto in funzione dell'energia cinetica.

Reazioni dirette. Reazioni di risonanza.

Quando si considera lo scattering con particelle cariche si deve tener presente che ci può essere scattering elastico oppure scattering anelastico; fino ad una certa distanza le due particelle interagiscono in maniera coulombiana mentre oltre una certa distanza si ha interazione nucleare. Nell'interazione coulombiana classica, per lo scattering c'è una dipendenza forte di σ da θ . Per quanto riguarda invece lo scattering visto come interazione nucleare è possibile fare riferimento al grafico di figura 1.

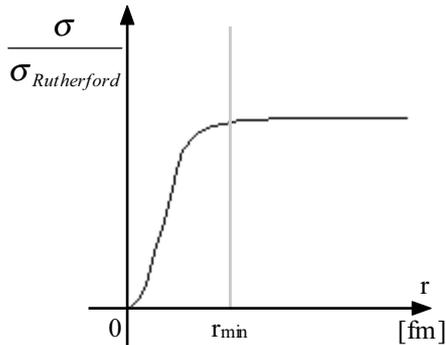


Figura 1

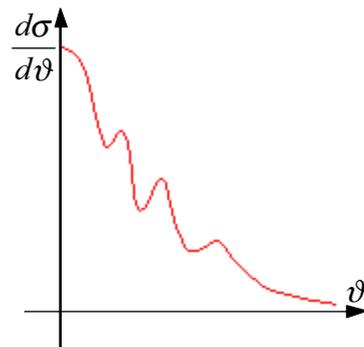


Figura 2

Ovviamente lo scattering di tipo nucleare diventa predominante solamente per raggi inferiori al raggio minimo r_{min} che ovviamente dipenderà dal parametro d'urto b e dall'angolo θ . Per vedere lo scattering nucleare si lavora con alte energie, grossi angoli θ e Z medio-piccoli. Lo scattering nucleare è un fenomeno assimilabile alla diffrazione e si ha dunque un insieme di massimi e minimi come quelli mostrati nel grafico di figura 2. Quando si fa riferimento allo scattering anelastico bisogna anche fare riferimento all'energia dei fotoni emessi durante il processo di diseccitamento. Si fa inizialmente riferimento alle reazioni dirette: interazione tra il proiettile e pochi nucleoni (in genere quelli alla superficie del nucleo, ovvero i nucleoni di valenza). Si tratta sempre di reazioni rapide e la distribuzione angolare delle particelle emesse presenta una forte dipendenza da θ . Le reazioni modellizzate in questo modo sono:

- gli scattering anelastici con energie sostenute;
- le reazioni di stripping;
- le reazioni di pick-up;
- le reazioni di knock-out.

Nelle reazioni di stripping, come mostrato in figura 3, il proiettile perde un nucleone a favore del bersaglio.

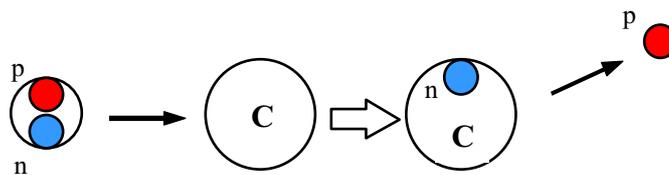


Figura 3

Una reazione di pick-up si ha quando il proiettile strappa e assorbe un nucleone dal bersaglio, come mostrato in figura 4.

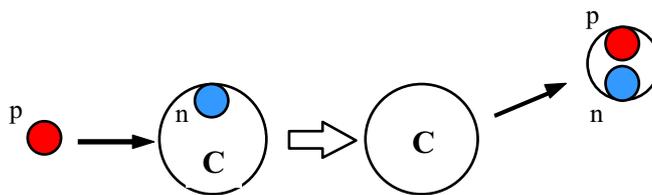


Figura 4

Una reazione di knock-out, infine, si ha quando il proiettile strappa un nucleone dal bersaglio ma non lo assorbe, come mostrato in figura 5.

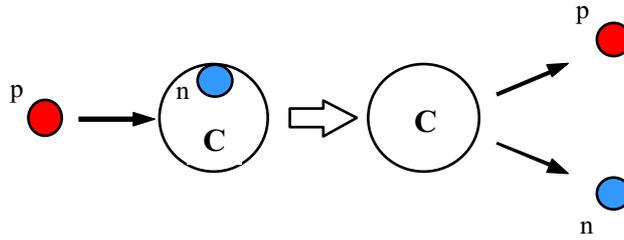


Figura 5

Si faccia dunque riferimento allo stripping del Deutone, per il quale (supponendo che il bersaglio C sia molto grosso) varrà la seguente relazione:

$$\vec{p}_{Rimanente} = \vec{p}_{Deutone} - \vec{p}_{protone}$$

da cui:

$$p^2 = p_D^2 + p_p^2 - 2p_D p_p \cos \vartheta$$

Supponendo che:

$$b \approx R$$

e che il protone assorba tutta l'energia di rinculo; il neutrone sarà accettato dal nucleo bersaglio con:

$$l_n \div \hbar KR$$

dove sia:

$$\vec{K} = \vec{K}_D - \vec{K}_P$$

Si avrà allora:

$$R \left| \vec{K}_D - \vec{K}_P \right| \approx l$$

dove l dipenderà da θ . Il nucleo residuo avrà un I_{Re} ben definito (che verrà chiamato I_T in quanto si riferisce al target) e tale per cui:

$$\left| I_T - l_n - \frac{1}{2} \right| \leq I_{Re} \leq \left| I_T + l_n + \frac{1}{2} \right|$$

La parità sarà poi determinata dal valore positivo o negativo di l_n .

Reazioni di risonanza.

Il modello a nucleo composto è molto utile per descrivere le risonanze nei grafici delle sezioni d'urto. In questo modello è previsto che l'energia portata dal proiettile si distribuisca su tutti i nucleoni del target. Il tempo di reazione è ovviamente grande (fino a 10^{-16} secondi). La distribuzione angolare dei prodotti è pressochè uniforme (in quanto la dipendenza da θ è molto leggera). Si può allora scrivere:

$$\sigma_{\alpha\beta} = \sigma_c(E_c, \alpha) G_c(E_c, \beta)$$

dove σ_c è relativa alla formazione del nucleo composto mentre G_c riguarda la probabilità di decadere in modo da ottenere ciò che interessa. Una verifica importante di questo modello è stata l'osservazione sperimentale della completa indipendenza del decadimento da quello che ha dato origine al nucleo composto. In funzione dell'energia di eccitazione del nucleo composto si ha il grafico di figura 6.

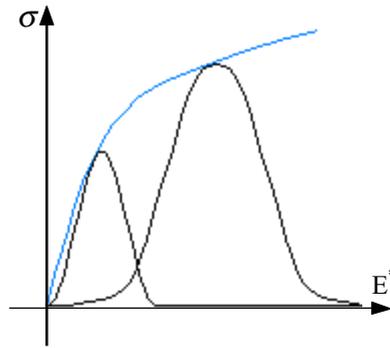


Figura 6

In azzurro viene mostrato l'andamento complessivo mentre i due picchi si riferiscono alla situazione con il decadimento di una o due particelle. La prova sperimentale alla quale si accennava è quella esplicitata nello schema di figura 7.

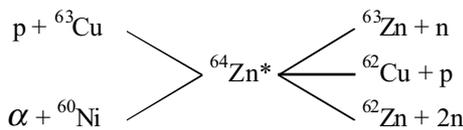


Figura 7

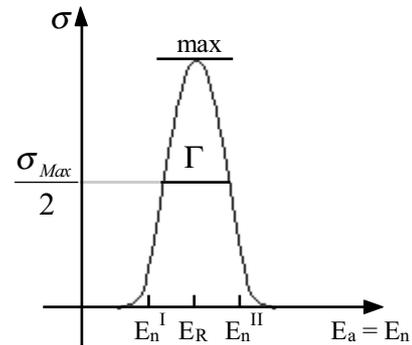


Figura 8

Sono state provate tutte le probabili combinazioni e, con le opportune correzioni (per avere il medesimo valore di energia di eccitazione) le sezioni d'urto relative alla partenza da un caso o da un altro si sovrappongono e quindi la probabilità di emissione è indipendente dalla partenza. Il nucleo eccitato C avrà una vita media τ diversa a seconda dei canali di decadimento possibili; ovviamente deve essere:

$$\tau_{\beta} \Gamma_{\beta} = \hbar$$

e anche che:

$$\Gamma_{Tot} = \sum_{\beta} \Gamma_{\beta}$$

dove Γ_{β} è la larghezza parziale di ogni singolo canale β . Sarà dunque possibile scrivere che:

$$\sigma_{\alpha\beta} = \sigma_c(E_c, \alpha) \frac{\Gamma_{\beta}}{\sum_{\beta} \Gamma_{\beta}}$$

Si consideri ora una particolare reazione del tipo $X(a,b)Y$ dove X sia un nucleo pesante ed a sia un neutrone e si supponga che l'andamento della sezione d'urto possa essere espresso come mostrato in figura 8. Da tale immagine si nota che, nell'intervallo di valori energetici compreso tra E_n^I ed E_n^{II} (quindi, nel caso in esame, per neutroni molto lenti) la sezione d'urto assume valori diversi dal resto dello spettro energetico, a volte anche molto più grandi; si parla in questo caso di risonanza e solitamente la si associa ad un particolare valore di energia (in corrispondenza del quale si trova il picco) detta energia di risonanza E_R . Per quanto riguarda la sezione d'urto, l'effetto di risonanza è espresso dal termine proporzionale a

$$\sigma_{Scat} \div \sin^2 \delta_l$$

Considerando che l sia definito si avrà:

$$\delta = \frac{\pi}{2}$$

Per valori di energia simili all'energia di risonanza E_R si può espandere in serie la cotangente di $\delta(E)$:

$$\cot g[\delta_l(E)] = \cot g[\delta(E_R)] + (E - E_R) \left\{ \frac{\partial \cot g[\delta_l(E)]}{\partial E} \right\}_{E=E_R} + \dots$$

Si definisce poi come segue la larghezza a media altezza:

$$\Gamma = 2 \left(\frac{\partial \delta_l}{\partial E} \right)_{E=E_R}^{-1}$$

Si avrà quindi:

$$\cot g[\delta_l(E)] = - \frac{(E - E_R)}{\Gamma/2}$$

Si nota allora che sarà:

$$\sigma = \frac{\sigma_{Max}}{2}$$

quando

$$E - E_R = \pm \frac{\Gamma}{2}$$

e quindi:

$$\cot g \delta_l = \pm 1$$

ovvero:

$$\delta_l = \frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}, \dots$$

Ma essendo:

$$\left\{ \begin{array}{l} \sigma_{Scat} \div \sin^2 \delta_l \\ \sigma = \frac{\sigma_{Max}}{2} \end{array} \right.$$

dovrà essere:

$$\delta_l = \frac{\pi}{4}$$

La funzione cotangente nell'intorno di una situazione di risonanza ben rappresenta la sezione d'urto. Si consideri ora la relazione:

$$\sin^2 \delta_l = \frac{\Gamma^2/4}{(E - E_R)^2 + \frac{\Gamma^2}{4}}$$

essendo poi:

$$\sigma_{Scat} = 4\pi\lambda^2 (2l + 1) \sin^2 \delta_l$$

si otterrà:

$$\sigma_{Scat} = 4\pi\lambda^2 \frac{\Gamma^2/4}{(E - E_R)^2 + \frac{\Gamma^2}{4}} = \pi\lambda^2 \frac{\Gamma^2}{(E - E_R)^2 + \frac{\Gamma^2}{4}}$$

dove Γ^2 dipende dai canali mentre il rapporto $\Gamma^2/4$ rappresenta la probabilità totale di decadimento dei nuclei. Se i canali fossero diversi bisognerebbe considerare il rapporto tra $\Gamma_\alpha \Gamma_\beta$ e Γ_{Tot} e quindi si avrebbe:

$$\sigma_{Scat} = \pi\lambda^2 \frac{\Gamma_\alpha \Gamma_\beta}{(E - E_R)^2 + \frac{\Gamma^2}{4}} \gamma$$

dove γ è un fattore di peso necessario in quanto non tutte le combinazioni fra il valore del momento angolare e del momento intrinseco di spin sono adatti per un determinato l . Le combinazioni sraanno del tipo espresso dal seguente rapporto:

$$\frac{2I_C + 1}{(2s_x + 1)(2s_a + 1)}$$

dove sia:

$$I_C = \vec{l} + \vec{s}_a + \vec{s}_x$$

I Γ hanno solitamente valori dell'ordine dell'eV. All'ampiezza di scattering contribuiscono la cattura della particella da parte del nucleo e lo scattering del nucleo intero (e quindi senza cattura di particella). In figura 9 è mostrata la forma reale della sezione d'urto che è dovuta all'interferenza dei due fattori mostrati in grigio e in azzurro e che riguardano, rispettivamente, la forma dello scattering (che ha un andamento proporzionale a $1/K^2$) e il contributo relativo alla superficie (che, ovviamente va come $4\pi R^2$).

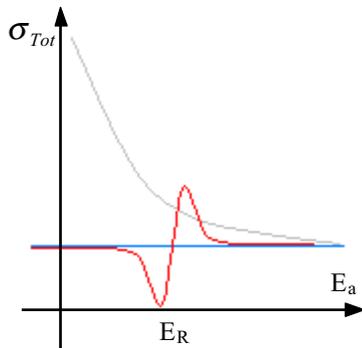


Figura 9

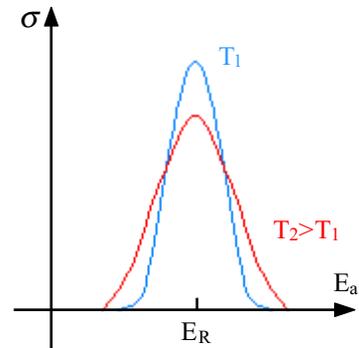


Figura 10

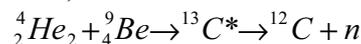
Ricordando quanto visto anche a proposito della formula di Breit-Wigner, è possibile battezzare il Γ che è stato trovato come Γ intrinseco. Per quanto riguarda l'influenza della temperatura si avrà che questa porta ad una agitazione termica del nucleo X e quindi agisce sulla sezione d'urto. La Γ è dunque diversa da quella valutata fino ad ora in quanto si avrà:

$$\Gamma_{Eff} = \Gamma_{Int} + 2\sqrt{\frac{m}{M} E_R K T}$$

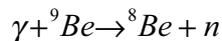
dove i pedici Eff e Int si riferiscono alla situazione effettiva e alla situazione intrinseca mentre m è la massa della particella incidente mentre M è la massa del bersaglio. In figura 10 è mostrato dunque come si modifica l'andamento della sezione d'urto in prossimità di una risonanza quando c'è una variazione di temperatura (si noti che nel grafico relativo alla temperatura più alta il massimo si è abbassato perché le aree devono comunque essere uguali). Questo effetto è anche chiamato effetto Doppler della risonanza.

Sorgenti di neutroni.

Alcune importanti reazioni nucleari sono indotte da neutroni ed è opportuno introdurre le sorgenti di neutroni: i neutroni sono classificati in base alla loro energia e si parla allora di neutroni freddi (circa 300m/s), di neutroni termici (0,025 eV), di neutroni epitermici (circa 100 keV) di neutroni veloci (da 1 a 10 MeV) e di neutroni ad alta energia (oltre i 30 MeV). Quasi tutte le sorgenti sono tali da produrre neutroni veloci; (esistono sorgenti radioattive che sfruttano la fissione spontanea) come il ^{235}Cf che ha un tempo di dimezzamento di 2,65 anni e un β di fissione spontanea del 3%; si tratta di un emettitore α che produce neutroni con un'intensità I di circa 10^{12} n/sg (solitamente si creano sorgenti di circa 10^6 neutroni al secondo). La distribuzione energetica dei neutroni emessi assomiglia a quella della fissione in reattore. L'aspetto negativo è il tempo di dimezzamento che, alla lunga, ammazza il flusso emesso. Un secondo tipo di sorgente di neutroni è rappresentato dalle sorgenti (α,n); una sorgente di questo tipo si ottiene quando un emettitore α viene immerso in un materiale del tipo Be, B o Li; si sfrutta allora una relazione del tipo:



che presenta un Q di 5,7 MeV. Anche in questo caso l'energia massima è simile a quella in reattore, non c'è il problema legato al tempo di dimezzamento in quanto si scelgono solitamente emettitori con un tempo di dimezzamento molto elevato (tipicamente si utilizza ^{226}Ra che ha un tempo di dimezzamento di 1200 anni). Nel caso in cui si usi il Radio (si parlerà allora di sorgente Ra-Be) si avrà una resa di circa 270 neutroni per secondo per 1MBq di attività α . Nel caso in cui la sorgente sia Americio si parlerà di sorgenti (Am-Be), il tempo di dimezzamento è in questo caso di 241 anni e la resa è di 70 neutroni per secondo per 1MBq di attività α . In questo tipo di sorgenti lo svantaggio è dovuto all'alta attività α richiesta. La distribuzione in energia dei neutroni emessi è un'insieme di picchi legati in quanto si tratta della deformazione di una distribuzione ideale a picchi stretti. Un terzo tipo di sorgente è la sorgente (γ,n) che prende anche il nome di fotoproduzione di neutroni. In questo caso si usano emettitori γ mischiati a Be o D (con un'energia di soglia di 2,22 MeV). Un esempio di emettitore γ è ^{124}Sb (con energia caratteristica di circa 600 keV) che viene accoppiato al Be per una reazione del tipo:



Questa reazione è molto efficace in quanto il ${}^8\text{Be}$ è un doppio magico e dunque è portato alla perdita di neutroni; i neutroni prodotti hanno un'energia media di circa 24 keV (e quindi si tratta di neutroni epitermici) e l'intensità è piuttosto bassa; bisogna quindi avere alte attività. Altri tipi di sorgenti sono i reattori e gli acceleratori; con i reattori si arriva, tramite la fissione, a flussi anche di 10^4 n/cm²s (il flusso è alto ma lo spettro è piuttosto largo); gli acceleratori permettono di scegliere la reazione adatta per avere i neutroni con l'energia che serve (in questo caso il flusso è basso ma lo spettro è molto concentrato (al limite si hanno neutroni monoenergetici).

Sezione d'urto per le reazioni indotte dai neutroni.

Si può ora dunque iniziare a vedere alcune importanti reazioni indotte da neutroni. Supponendo che i neutroni vengano completamente assorbiti se

$$l < \frac{R}{\lambda}$$

e che vengono lasciati stare se le cose sono diverse si avrà:

$$\sigma_R = \pi(R + \lambda)^2$$

ovvero:

$$\sigma_R = \sigma_0 T = \pi(R + \lambda)^2 \frac{4\kappa K}{(\kappa + K)^2}$$

con

$$\begin{cases} \kappa = \frac{1}{\hbar} \sqrt{2mE} \\ K = \frac{1}{\hbar} \sqrt{2m(E + V_0)} \end{cases}$$

dove V_0 si aggira tra i 35 e i 40 MeV. I neutroni sono epitermici; con

$$E \ll V_0$$

si ha:

$$\kappa \ll K$$

e quindi:

$$\lambda \gg R$$

Si avrà allora:

$$\sigma_R = \pi \hat{\lambda}^2 \frac{4\kappa K}{K^2} = 4\pi \frac{1}{K^2} \cdot \frac{K}{\kappa} \cong \frac{4\pi}{\kappa K} \div \frac{1}{v}$$

Siccome c'è proporzionalità rispetto alla velocità si potrà scrivere:

$$\sigma = \sigma_0 \frac{v_0}{v}$$

con:

$$v_0 = 2200 \frac{m}{s}$$

corrispondente all'energia di 0,025 eV. Questo discorso vale al di fuori della zona delle risonanze; nella zona delle risonanze il nucleo composto si forma in uno stato quasi stazionario con un certo Γ e un certo τ .

Cattura neutronica.

La reazione più importante è la cattura neutronica (n, γ) che è una reazione sempre esotermica che può essere schematizzata come mostrato in figura 1.

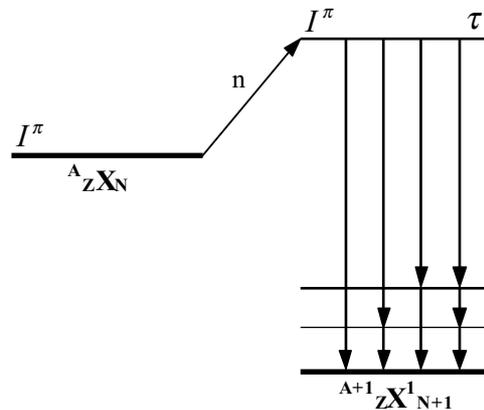


Figura 1

L'energia di eccitazione di X^1 sarà la somma di S_n e di E_n (ed è circa pari a 5-10 MeV). In genere la diseccitazione del livello eccitato avviene per emissione γ e ci saranno dei γ primari e dei γ secondari a seconda dell'ampiezza del salto e se si salta subito al livello fondamentale o meno. Si avrà:

$$\begin{cases} I^1 = I + l + s \\ \pi^1 = \pi(-1)^l \end{cases}$$

Se l è nullo l'energia è piccola. Si avranno transizioni del tipo Ex se c'è cambio di parità in base ad $l=x$ mentre si avranno transizioni del tipo Mx se non c'è cambio di parità. La reazione di cattura (n, γ) modifica un nucleo X aumentando di un neutrone il suo numero di massa; se dunque X è stabile si passa ad un nucleo prodotto con eccesso di neutroni e quindi, nella maggior parte dei casi, si ha un nucleo X^1 radioattivo ed emettitore β^- . La sezione d'urto $\sigma_{n\gamma}$ prende il nome di sezione d'urto di attivazione. Se X^1 decade β^- in Y e questo è in uno stato eccitato, ci sarà una ulteriore produzione di fotoni che però non vanno confusi con quelli di partenza. Supponendo di avere N_0 atomi di X, conoscendo $\sigma(E_n)$, E_n e $\Phi(E_n)$, la produzione di nuclei X^1 sarà retta dalla seguente relazione:

$$N_{X^1}(t) = N_0^X \sigma \Phi \frac{(1 - e^{-\lambda t})}{\lambda}$$

Dove il prodotto $\sigma\Phi$ è detta velocità di produzione totale. Graficamente si potrà fare riferimento al diagramma di figura 2 nella quale si è arrivati al valore asintotico osservando che l'attività massima sarà:

$$\frac{N_0^X \sigma \Phi}{\lambda} \lambda = N_0^X \sigma \Phi$$

e che:

$$T \cong 2T_{1/2}$$

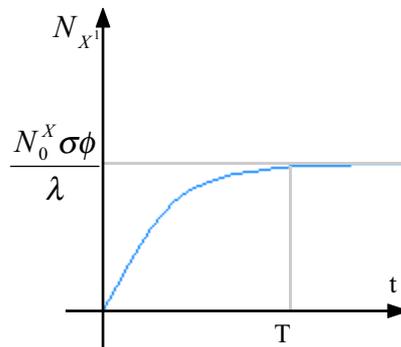


Figura 2

Si osserva dunque che dopo un paio di tempi di dimezzamento non è più conveniente l'irraggiamento se si vuole avere il massimo numero di X^1 ; questo ovviamente se il prodotto è stabile o quantomeno se non decade troppo velocemente.

La fissione nucleare spontanea.

Ci si sofferma ora sulla reazione di fissione e parlando di fissione si potrà parlare sia di fissione indotta che di fissione spontanea; questo tipo di decadimento avviene con un nucleo molto deformato che può essere gestito con l'analogia della goccia di liquido, come mostrato nella sequenza di figura 3.



Figura 3

Considerando dunque la goccia di liquido si supponga che una eccitazione ϵ porti dalla situazione iniziale (mostrata in figura 4) alla situazione mostrata in figura 5.

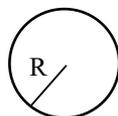


Figura 4

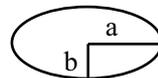


Figura 5

Si noti che il volume rimane in entrambi i casi lo stesso; si avrà inoltre:

$$\begin{cases} a = R(1 + \epsilon) \\ b = \frac{R}{(1 + \epsilon)^{1/2}} \end{cases}$$

Nella formula della massa i termini che esprimono la stabilità sono il termine di volume, il termine di superficie e il termine di interazione coulombiana; passando dalla situazione iniziale (stato A) alla situazione finale (stato B) il termine di volume non cambia mentre cambiano gli altri due. La superficie dell'ellissoide di rotazione è:

$$S = 4\pi R^2 \left(1 + \frac{2}{5} \epsilon^2 \right)^{1/2}$$

e dunque è come se si avesse una sfera con un raggio che passa da R ad R_1 con:

$$R_1 = R \left(1 + \frac{2}{5} \epsilon^2 \right)^{1/4}$$

Per quanto riguarda allora il termine di superficie si avrà al seguente evoluzione:

$$a_s A^{2/3} \rightarrow a_s A^{2/3} \left(1 + \frac{2}{5} \epsilon^2 \right)$$

mentre per il termine coulombiano si avrà:

$$a_c \frac{Z^2}{A^{1/3}} \rightarrow a_c \frac{Z^2}{A^{1/3} \left(1 + \frac{2}{5} \epsilon^2\right)^{1/2}} = a_c \frac{Z^2}{A^{1/3}} \left(1 + \frac{2}{5} \epsilon^2\right)^{-1/2}$$

Sviluppando dunque in serie di potenze si ricava:

$$a_c \frac{Z^2}{A^{1/3}} \left(1 + \frac{2}{5} \epsilon^2\right)^{-1/2} = a_c \frac{Z^2}{A^{1/3}} \left(1 - \frac{1}{5} \epsilon^2\right)$$

Nella formula della massa si avrà allora che la stabilità è data dalla competizione tra il termine di superficie e quello coulombiano:

$$\Delta E = BE_B - BE_A = -a_s A^{2/3} \left(1 + \frac{2}{5} \epsilon^2\right) - a_c \frac{Z^2}{A^{1/3}} \left(1 - \frac{1}{5} \epsilon^2\right) + a_s A^{2/3} + a_c \frac{Z^2}{A^{1/3}}$$

ovvero:

$$\Delta E = \left(-\frac{2}{5} a_s A^{2/3} + \frac{1}{5} a_c \frac{Z^2}{A^{1/3}} \right) \epsilon^2$$

È allora possibile aumentare il ΔE aumentando ϵ fino a quando la goccia si divide in due parti; ciò avviene quando:

$$\frac{1}{5} a_c \frac{Z^2}{A^{1/3}} > \frac{2}{5} a_s A^{2/3}$$

ovvero:

$$\frac{Z^2}{A} > 47$$

Quando si ha:

$$\frac{Z^2}{A} < 16$$

si ricava che:

$$Q < 0$$

Il range nel quale è possibile la fissione spontanea è dunque il seguente:

$$16 < \frac{Z^2}{A} < 47$$

Si consideri inoltre il grafico di figura 6.

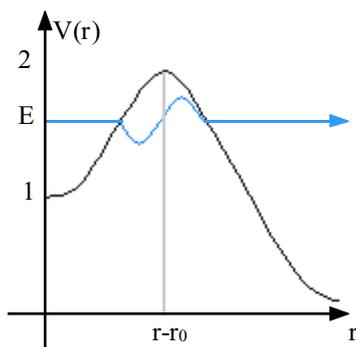


Figura 6

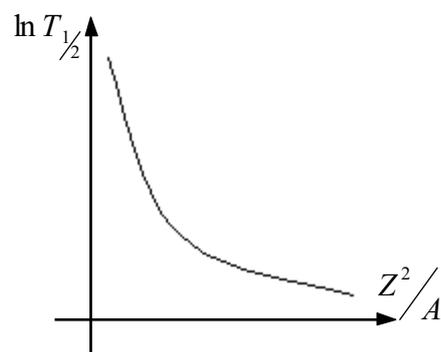


Figura 7

La zona compresa tra r nullo e $r-r_0$ è detta zona di deformazione. I due frammenti si toccano ad una distanza corrispondente al massimo della curva del potenziale, da quel punto in avanti si ha repulsione coulombiana. Quando sono all'interno del range si ha energia compresa tra 1 e 2; quando sono oltre il valore di 47 ci si trova con un'energia sopra il massimo del potenziale e non c'è più nessun ostacolo. Il rapporto Z^2/A è dunque un termine legato alla probabilità di fissione spontanea e si può considerare il grafico di figura 7. Per colmare il gap necessario per superare la buca (con un'energia che prenderà allora il nome di energia di attivazione) si può fornire energia tramite una opportuna particella. Se l'energia di attivazione non è troppo grande si può pensare di indurre fissione.

Fissione indotta.

Il procedimento che porta alla fissione indotta è assolutamente identico a quello visto nel caso della fissione spontanea, si usa però una particella (fotone o neutrone che sia) per fornire l'energia necessaria per attraversare la barriera di potenziale. Ricordando allora il grafico di figura 1, già visto in precedenza, passando da A a B si va da 7,6 MeV per nucleone a 8,5 MeV per nucleone.

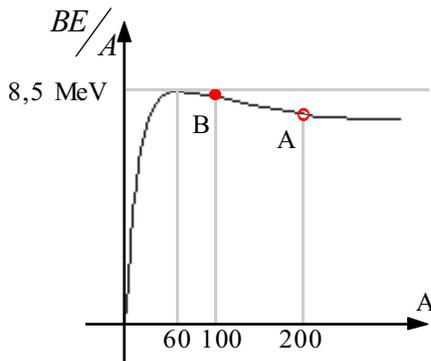


Figura 1

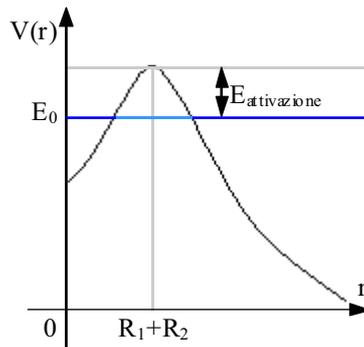


Figura 2

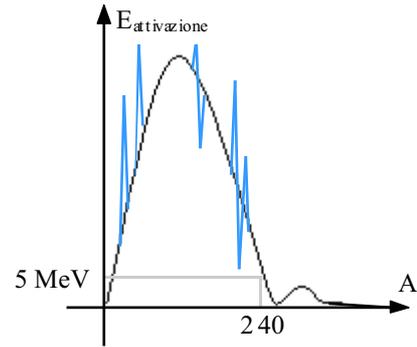
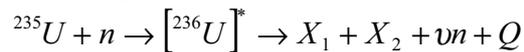


Figura 3

C'è allora una differenza energetica di 0,9 MeV per nucleone; con A=240 vengono dunque emessi circa 200 MeV per ogni fissione. Considerati due frammenti con Z circa uguale a 40 è possibile ricavare i raggi R₁ ed R₂ e poi ricavare il valore del potenziale nel punto R₁+R₂; si troveranno circa 250 MeV. La barriera di potenziale è dunque maggiore dell'energia che si libera con la fissione. Si faccia dunque riferimento all'andamento del potenziale e all'andamento dell'energia di attivazione, che dipende da A ma anche da Z (per l'Uranio, che ha Z=92, si hanno circa 6 MeV) e quindi si faccia riferimento ai grafici di figura 2 e 3. Le discontinuità rappresentate in azzurro sul grafico di figura 3 sono dovute alla presenza dei numeri magici. Per l'Uranio l'energia di attivazione è molto simile al guadagno energetico dell'ultimo neutrone legato.

Considerando l'energetica completa per l'²³⁵U si ha che le reazioni possibili sono lo scattering elastico, le catture γ e la fissione. Per quanto riguarda la fissione si avrà:



dove ν è il numero medio di neutroni emessi per ogni fissione mentre Q raccoglie tutti i termini energetici. Si può approssimare dicendo che Q è pari a 200 MeV; di questi, 180 MeV vanno in energia cinetica dei frammenti pesanti (si parla dunque di energia diretta o pronta), un'altra parte dell'energia fa ai fotoni e ai neutroni prodotti. Altra energia arriva poi in seguito perché il rapporto Z/A dei due frammenti è tale da rendere i due frammenti degli emettitori β.; questa frazione si prende 15 MeV. Si deve poi considerare l'energia che si porta via il neutrino (circa 12 MeV); quest'ultima frazione è energia non recuperabile (a differenza dei valori precedenti) perché non è facile far interagire i neutrini.

Prodotti di fissione.

Ci si concentra ora sui prodotti di fissione X₁ ed X₂; si inizia col dire che la fissione simmetrica (ovvero X₁=X₂) è molto poco probabile (a meno di non usare neutroni ad alta energia e fissili molto più pesanti di ²³⁵U). Solitamente si ha A₁=95 e A₂=140; in realtà si può costruire una curva di resa di massa come quella mostrata in figura 4.

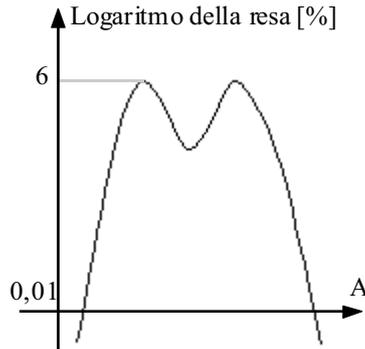


Figura 4

I due frammenti prendono il nome di frammento pesante e frammento leggero ; la probabilità di fissione simmetrica è circa 600 volte inferiore rispetto a quella che si ha in prossimità dei due picchi del grafico di figura 4. Cambiando il fissile si vede ingrossare il frammento leggero mentre il frammento pesante rimane praticamente inalterato (e dunque il rapporto picco-valle diminuisce). Usando il medesimo fissile ma aumentando l'energia dei neutroni i due picchi rimangono abbastanza stabili ma aumenta la probabilità della fissione simmetrica. L'energia che spetta ai prodotti di fissione viene suddivisa in funzione della loro massa, si deve avere:

$$\frac{\frac{1}{2} m_1 v_1^2}{\frac{1}{2} m_2 v_2^2} = \frac{m_2}{m_1}$$

Per quanto riguarda l'evoluzione della A dei frammenti di fissione con il crescere della A del fissile di partenza. Si può fare riferimento ai casi esposti nelle figure 5 e 6.

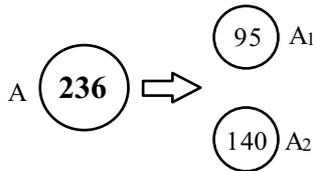


Figura 5

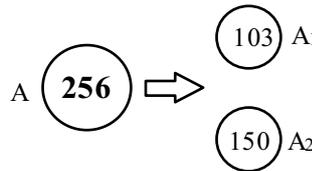


Figura 6

Il fatto che cambi di più A_1 rispetto ad A_2 è dovuto al fatto che attorno ad A_2 (esattamente per il valore di 132) c'è una doppia chiusura di shell (doppio magico) che è una situazione molto conveniente e quindi difficilmente viene abbandonata.

Per $l^{235}\text{U}$ i due picchi di energia dei frammenti sono 66 MeV e 98 MeV (con un rapporto tra i due di circa 0,67 più o meno 95/140). Per i due frammenti con $A_1=95$ e $A_2=140$ ci sono 92 protoni da ripartire, anch'essi proporzionalmente con il numero di massa; si usa allora il sistema:

$$\begin{cases} Z_1 + Z_2 = 92 \\ \frac{Z_1}{Z_2} = \frac{A_1}{A_2} = 0,68 \end{cases}$$

Si arriva così ad avere:

$$\begin{cases} \frac{Z_1}{A_1} = 0,43 \\ \frac{Z_2}{A_2} = 0,41 \end{cases}$$

Il rapporto ideale di stabilità è 0,39 e quindi entrambi i frammenti sono instabili.

Molto spesso i prodotti di fissione sono instabili, la prima cosa che possono fare è emettere direttamente neutroni; per ognuno dei due prodotti di fissione si avrà allora una catena di decadimento β che porta, in 4 o 5 passi, ad elementi stabili.

Due prodotti di fissione particolarmente lunghi a decadere sono ^{90}Sr e ^{137}Cs per i quali si possono considerare i frammenti di catena schematizzati nelle figure 7 e 8.

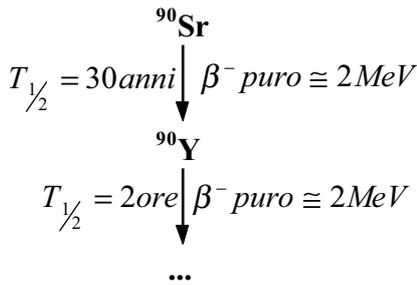


Figura 7

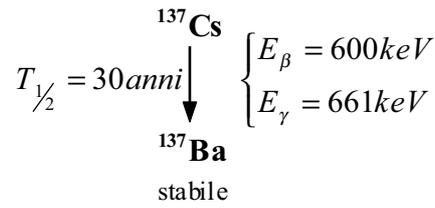


Figura 8

Prodotti di fissione noti sono lo Iodio (dannoso perché particolarmente volatile) e lo Zirconio. I prodotti di fissione sono responsabili della radioattività a breve e medio termine; la radioattività a lungo termine è invece data dai transuranici. I neutroni emessi durante il decadimento β dei frammenti vengono detti neutroni ritardati; quelli prodotti per fissione si chiamano neutroni pronti (praticamente tutti veloci). Il numero medio ν di neutroni emessi in seguito alla fissione varia di nuclide in nuclide; in tabella 1 sono mostrati alcuni casi particolari:

Nuclide	Numero medio di neutroni
${}^{235}\text{U}$	2,42
${}^{239}\text{Pu}$	2,86
${}^{256}\text{Cf}$ (fissione spontanea)	3,5

Tabella 1

La distribuzione del numero di neutroni emessi attorno al valore medio è quella mostrata in figura 9.

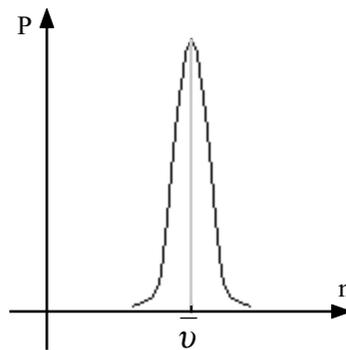


Figura 9

Dal punto di vista energetico, il valor medio dell'energia dei neutroni pronti emessi è 2 MeV, con distribuzione maxwelliana praticamente esaurita a 15 MeV che prende il nome di rappresentazione di Watt ed è esprimibile nel modo seguente:

$$N(E) \div e^{-E/0,97} \sinh(\sqrt{2,229E})$$

I neutroni ritardati vengono emessi dopo il processo di fissione tramite i decadimenti; per ${}^{235}\text{U}$ con un neutrone termico c' è un neutrone ritardato ogni 100; mediamente vengono prodotti 10-12 secondi dopo.

Energia di fissione.

Soffermandosi ora sulle sezioni d'urto si ricorda che in natura l'Uranio è formato al 99,7% di ${}^{238}\text{U}$ e dallo 0,3% di ${}^{235}\text{U}$; sia per ${}^{235}\text{U}$ che per ${}^{238}\text{U}$ si formano i nuclei composti $[{}^{236}\text{U}]^*$ e $[{}^{239}\text{U}]^*$; nel caso dell' ${}^{236}\text{U}$ l'energia di eccitazione sarà:

$$E_{Ecc} = m^{236}\text{U}^* c^2 - m^{236}\text{U} c^2 = m^{235}\text{U} c^2 + m_n c^2 - m^{236}\text{U} c^2 = 6,5 \text{MeV}$$

La cattura di un neutrone da parte dell' ${}^{235}\text{U}$ porta dunque 6,5 MeV; l'energia di attivazione è 6,2 MeV e quindi il solo assorbimento basta per arrivare alla fissione; si dice allora che ${}^{235}\text{U}$ è un fissile termico. Nel caso di ${}^{239}\text{U}$ l'energia di eccitazione sarà:

$$E_{Ecc} = m^{239}\text{U}^* c^2 - m^{239}\text{U} c^2 = m^{238}\text{U} c^2 + m_n c^2 - m^{239}\text{U} c^2 = 4,8 \text{MeV}$$

L'energia di attivazione è 6,6 MeV e quindi il semplice assorbimento non basta per fissionare l' ${}^{238}\text{U}$, i neutroni devono infatti anche avere 1,2 MeV di energia cinetica per dare fissione (circa 2 MeV se si tiene conto di una probabilità sensibile). Si parla allora di fissione veloce di ${}^{238}\text{U}$. La grossa differenza tra queste due situazioni è mostrata nelle figure 10 e 11 ed è dovuta al termine di pairing.

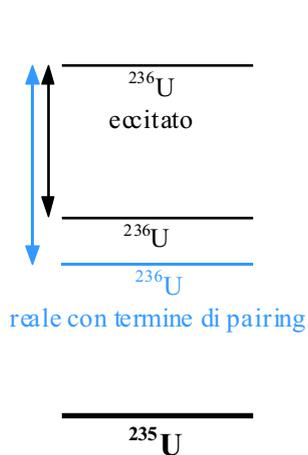


Figura 10

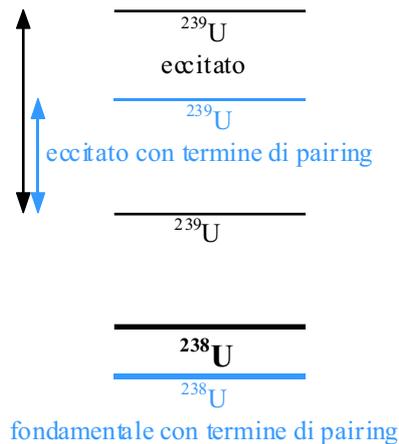


Figura 11

Si vede dunque che se il nucleo di partenza ha N pari, l'assorbimento di un neutrone porta da una riduzione dell'energia di eccitazione (è il caso appunto dell' ^{238}U) mentre se N è dispari l'energia di eccitazione viene incrementata (è il caso dell' ^{235}U). Quando dunque N è dispari la fissione termica risulta favorita.

In figura 12 è mostrato l'andamento delle sezioni d'urto totale e di fissione per ^{235}U nella quale si nota allora che, per una velocità di circa 2200 m/s (che equivale a neutroni termici) si avranno i seguenti valori di sezione d'urto:

$$\begin{cases} \sigma_{Fiss} = 584b \\ \sigma_{\gamma} = 97b \end{cases}$$

ed è quindi evidente che la fissione è la reazione primaria.

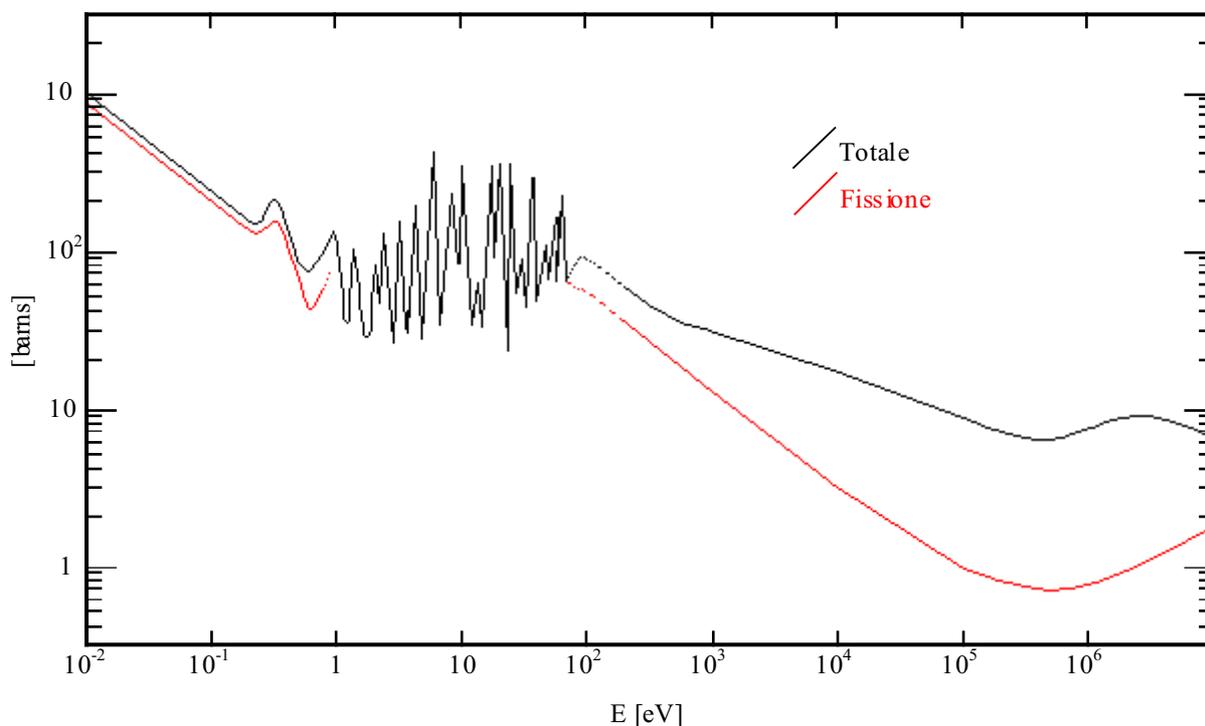


Figura 12

In figura 13 è invece mostrata la sezione d'urto totale e la sezione d'urto di fissione di ^{238}U .

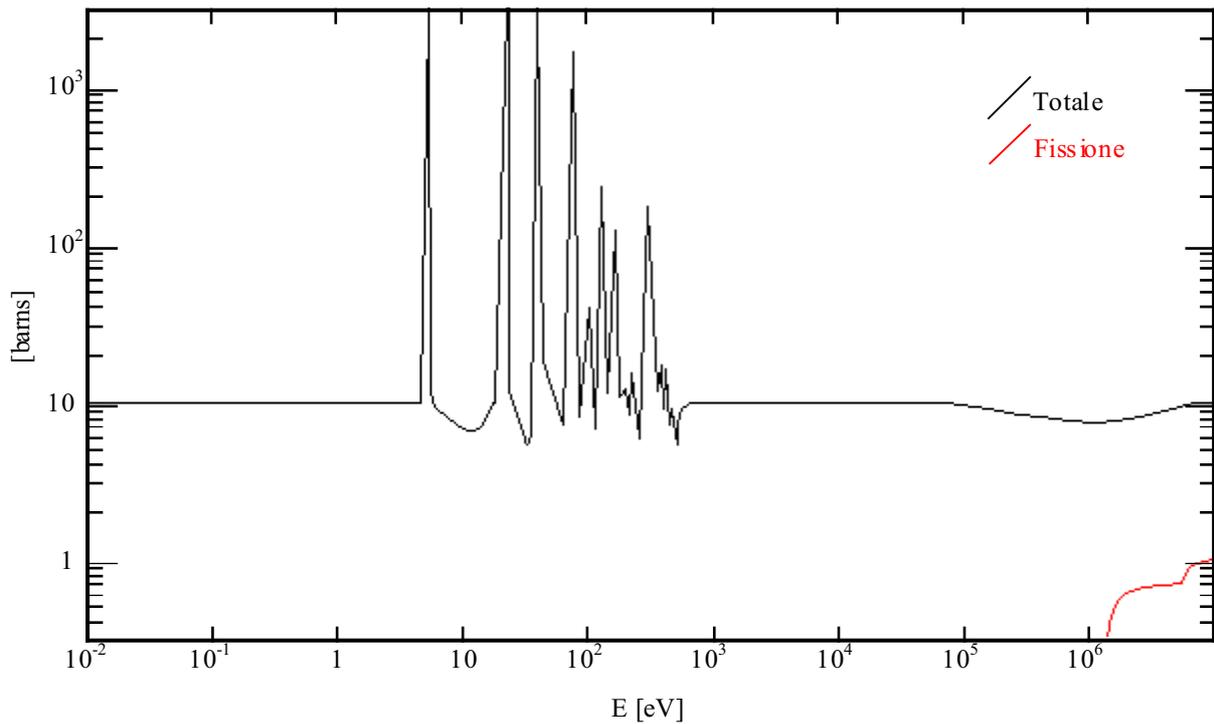


Figura 13

In questa situazione con neutroni termici si avrà:

$$\begin{cases} \sigma_{Tot} = 10b \\ \sigma_{\gamma} = 2,7b \\ \sigma_{Scat} = 8b \end{cases}$$

e si nota come la fissione non sia assolutamente rilevante. L'energia di 1,1 MeV è il limite oltre il quale inizia anche la fissione. Nella zona centrale del grafico si vede una zona detta zona delle risonanze che sono prevalentemente risonanze di cattura.

L'andamento del potenziale mostrato in figura 2, tenendo conto del fatto che c'è una deformazione iniziale, diventerà quello mostrato in figura 14.

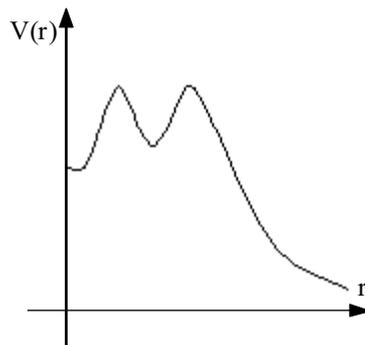


Figura 14

Si definiscono allora diversi isomeri di fissione a seconda che, con una certa energia, si sia nella buca principale o in quella secondaria. La presenza della doppia buca spiega la presenza dei valori non nulli per la sezione d'urto anche sotto la soglia. In figura 15 è mostrata la sezione d'urto di fissione relativa all' ^{238}U .

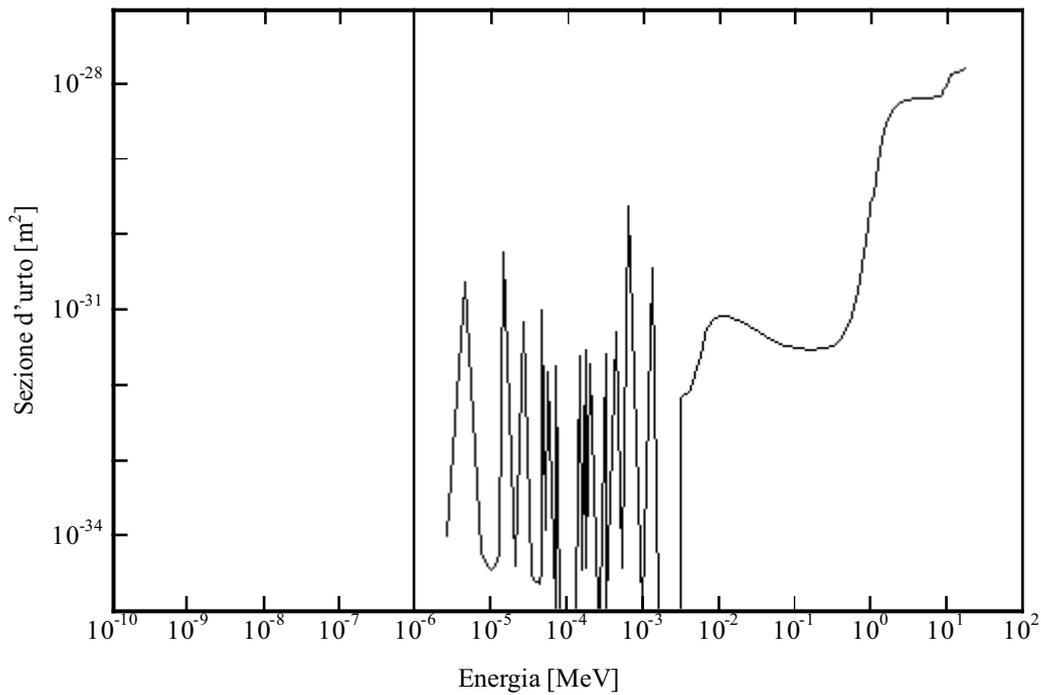


Figura 15

In figura 16 è invece mostrato l'andamento della sezione d'urto di fissione per ^{237}Np .

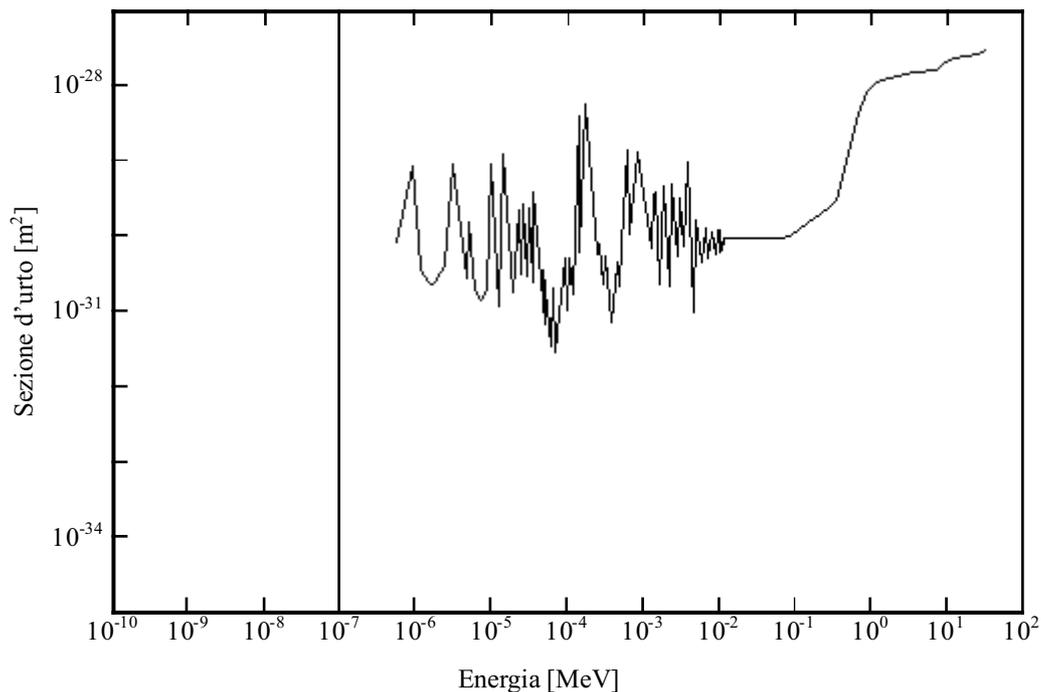


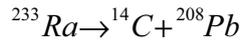
Figura 16

In questo secondo caso è possibile notare come il contributo sottosoglia della sezione d'urto di fissione sia molto più importante e accentuato rispetto al caso della figura 15 dove ci sono diversi ordini di grandezza di differenza tra la situazione sottosoglia e la situazione sovrastoglia.

Decadimenti esotici.

Oltre alla fissione ci sono i decadimenti esotici; questi ultimi possono in realtà essere anche visti come emissioni α generalizzate oppure come fissioni spontanee generalizzate. I decadimenti esotici sono molto difficili da rilevare perché sono solitamente schermati da molte emissioni α ; i nuclei emessi nei decadimenti esotici sono C, Si, Ne, Mg. La modellizzazione che è stata trovata per questi fenomeni prevede la formazione di cluster con numero maggiore di 4 che

hanno una loro probabilità di attraversare la barriera. Un esempio di decadimento esotico è il seguente (scoperto nel 1984):



dove il ${}^{14}\text{C}$ viene considerato il nuclide leggero emesso mentre ${}^{208}\text{Pb}$ viene considerato il nuclide di arrivo. I decadimenti esotici hanno piccola probabilità di avvenire e sono sommersi dai decadimenti α tanto che si ha:

$$\frac{P_{\text{esot}}}{P_{\alpha}} = 10^{-10}$$

Un decadimento esotico può anche essere scambiato per un evento di fissione spontanea (fortemente sbilanciato e quindi non simmetrico).

La fusione.

Nella fusione si segue il percorso inverso nel grafico dell'energia di legame per nucleone rispetto al discorso fatto per la fissione. La grossa differenza è riposta nel fatto che bisogna far interagire un nucleo con una particella carica e non con qualcosa di neutro come il neutrone; si deve dunque superare una barriera di potenziale. Si faccia allora riferimento al grafico di figura 17.

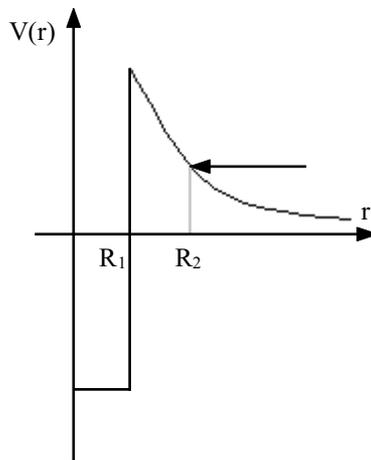


Figura 17

A bassa energia l'andamento della sezione d'urto dipende da un coefficiente di trasmissione del tipo:

$$T = e^{-G(E)}$$

dove G è il fattore di Gamow

$$G = \frac{2}{\hbar c} \cdot \frac{Z_1 Z_2 e^2}{4\pi\epsilon_0} \sqrt{\frac{2mc^2}{E}} \left[\frac{\pi}{2} - 2\sqrt{\frac{R_2}{R_1}} \right] \cong \frac{2}{\hbar c} \cdot \frac{Z_1 Z_2 e^2}{4\pi\epsilon_0} \sqrt{\frac{2mc^2}{E}}$$

Si avrà allora:

$$T = e^{-\sqrt{\frac{E_G}{E}}}$$

con:

$$E_G = 2mc^2 \left(\frac{\pi Z_1 Z_2 e^2}{\hbar c 4\pi\epsilon_0} \right)^2$$

Considerando allora la relazione:

$$\sigma(E) = S(E) \frac{1}{E} e^{-\sqrt{\frac{E_G}{E}}}$$

L'andamento della sezione d'urto sarà quello mostrato in figura 18.

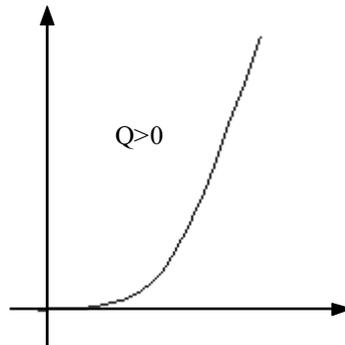
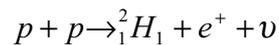


Figura 18

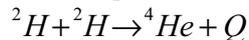
Il termine $S(E)$ prende il nome di termine spettrografico.

Energetica della fusione.

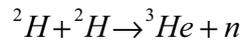
Nel caso della fissione la variazione di B/A è piuttosto costante mentre nel caso della fusione B/A varia molto e quindi bisogna soffermarsi su ogni singolo caso. Un modo per aumentare l'energia della particella incidente consiste nell'accelerazione; questo viene fatto nei laboratori di ricerca. Un modo meno svantaggioso consiste nell'aumentare la temperatura; a temperatura ambiente abbiamo circa 0,025 eV, sono invece necessari circa 1 MeV e questo implica temperature di 10^9 volte superiori!! Considerando la fusione più semplice (H+H) si ha che, a temperature elevate, si è in presenza di un gas completamente ionizzato: il plasma. Le reazioni utilizzabili per la fusione sono la reazione H+H (ovvero anche p+p); si creerebbe così un nucleo ${}^2_2\text{He}$ che però è altamente instabile. Un diverso canale della reazione è il seguente:



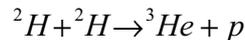
con Q circa pari a 0,42 MeV. Questa è la prima delle reazioni del Sole. Le reazioni pensate sulla Terra sono le reazioni di tipo D-D oppure D-T; la prima ha tre canali possibili. Il primo è:



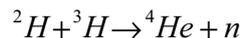
con Q pari a circa 0,8 MeV per nucleone per un totale di 23,8 MeV. Questo canale ha probabilità praticamente nulla. Il secondo canale è:



con un Q complessivo pari a circa 2,2 MeV e con probabilità 42%. Il terzo canale è invece il seguente:



con un Q complessivo di circa 4 MeV e con probabilità del 58%. La reazione D-T prevede invece un unico canale che è:



che ha un Q complessivo di 17,6 MeV che si ripartiscono tra n (che prende 14 MeV) e ${}^4\text{He}$. Per la fusione diventa importante la grandezza $\langle \sigma v \rangle$ che prende il nome di velocità di reazione. Nel Sole, oltre alla reazione p-p, abbiamo tutta la catena dell'Idrogeno, il cui scopo è quello di arrivare ad ${}^4\text{He}$; parte poi un secondo ciclo di fusioni di He che porta a ${}^{12}\text{C}$; a questo punto parte la catena delle fusioni di ${}^{12}\text{C}$ e si va così verso nuclei sempre più pesanti. La tipologia di fusione stabilisce anche la temperatura media della stella.

Fusione controllata.

Il grosso problema della fusione è la necessità di superare la barriera di potenziale del tipo:

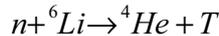
$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{Z_1 Z_2 e^2}{R_1 + R_2}$$

La resa energetica della fusione (ovvero l'energia ottenuta bruciando un grammo di combustibile) è riportata nella tabella 1 e va confrontata con la resa della fissione che è di 23000 kWh.

Tipo di fusione	Resa energetica [kWh]
$D-D \rightarrow {}^3\text{He}$	22000
$D-D \rightarrow {}^3\text{H}$	27000
$D-T$	94000

Tabella 1

È evidente che la reazione più redditizia è l'ultima. Il Trizio non esiste in natura, è un materiale radioattivo con un $T_{1/2}$ di circa 12 anni; si è dunque pensato di utilizzare un materiale che racchiude il combustibile D-T e che usa il neutrone prodotto per creare altro Trizio. Per fare questo si può sfruttare la reazione:



Il Trizio viene poi usato come combustibile e l'unica scoria è ${}^4\text{He}$ che però non è radioattivo. Un problema è però dato dal fatto che il Trizio, oltre ad essere molto radioattivo, è anche volatile. Bisogna poi gestire il problema del neutrone veloce prodotto che è molto più energetico dei neutroni prodotti nella fissione e che quindi danneggia ed attiva le strutture di servizio. La reazione di fusione D-T è quella che ha maggiori probabilità di avvenire a minor energia; si considera dunque la sezione d'urto. Ovviamente, per passare dall'energia termica di 0,025 eV ai circa 700 keV è necessario scaldare fino ad arrivare al plasma. Osservando in figura 1 l'andamento della sezione d'urto σ con la velocità v e la distribuzione di particelle con v si vede come sia necessario valutare il valor medio $\langle \sigma v \rangle$. Occorre dunque tener conto della densità delle particelle nel plasma.

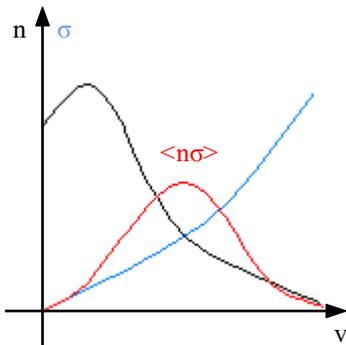


Figura 1

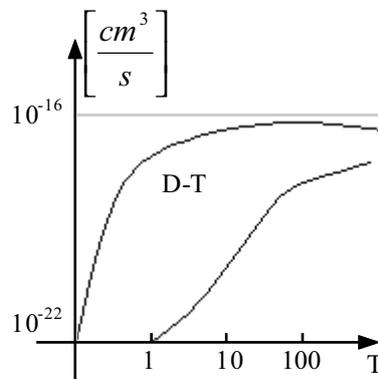


Figura 2

Si consideri ora il diagramma mostrato in figura 2 nel quale appare che la fusione di tipo D-T è anche quella più comoda per quanto riguarda la temperatura di innesco. Si cerca ora il parametro che permette di valutare la produzione di energia; si esprime l'energia emessa nel modo seguente:

$$E_{Em} = \frac{1}{2} n_i \cdot \frac{1}{2} n_e \langle \sigma v \rangle Q \tau$$

dove n è la densità delle particelle mentre τ è il tempo di sconfinamento. Si è così espresso l'energia emessa per unità di volume. L'energia da spendere è invece la seguente:

$$E_{Th} = \frac{3}{2} n_i K T + \frac{3}{2} n_e K T = 3 n k T$$

Si deve dunque avere:

$$E_{Em} > E_{Th}$$

ovvero:

$$n\tau > \frac{12KT}{Q\langle\sigma v\rangle}$$

Questa relazione prende il nome di criterio di Lawson. Nel caso di fusione del tipo D-T (con un appropriato valore di Q sui 17,6 MeV) la temperatura di innesco è quella che mi permette di avere 10 keV di energia. In figura 3 si vede l'andamento sperimentale legato al criterio di Lawson.

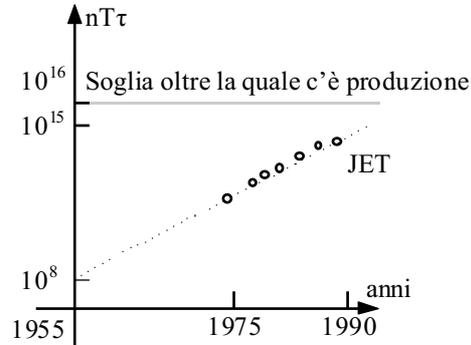


Figura 3

Per far crescere il tutto si può lavorare facendo crescere τ oppure n ; se si aumenta τ si parla di confinamento magnetico (idea in voga fin dal 1955), se invece si fa crescere n si parla di confinamento inerziale (idea resa di pubblico dominio nel 1975 dopo che è stato tolto il segreto militare). Il confinamento magnetico sfrutta i Tokamak mentre per quanto riguarda il confinamento inerziale si deve partire da una sfera di D-T con densità di circa 10^{25} particelle per cm^3 tenute insieme con tempo di sconfinamento di circa 10^{-10} secondi. Tali sferette sono composte da un nucleo in D-T circondato da un materiale con Z decisamente alto; quando inizia il bombardamento il guscio si scioglie e l'onda d'urto crea delle palline D-T molto dense. Per fornire l'energia necessaria si usano metodologie che sfruttano laser di potenza oppure acceleratori. Oltre ai due procedimenti citati c'è anche un procedimento che non richiede altissime temperature: si chiama fusione muonica ed è stata scoperta nel 1956. Si è già detto che gli atomi muonici sono ottenuti sostituendo agli elettroni i muoni che sono più pesanti (circa 200 volte) e instabili (con un $T_{1/2}$ di circa 10^{-6} secondi). Usando i muoni invece che gli elettroni il raggio di Bohr è 200 volte più piccolo e quindi una molecola di H formata da atomi muonici presenterà i due nuclei molto più piccoli. Quando allora i due nuclei si fondono il muone viene espulso e va ad attivare un'altra molecola (un unico muone può dare origine a circa 500 reazioni di fusione). I muoni non sono però facilmente ottenibili in quanto arrivano dal decadimento dei pioni che a loro volta vengono dalle reazioni p-p. Per la produzione di muoni sono necessari 18 GeV e per ogni fusione ricevo 17 MeV: il bilancio energetico è dunque sfavorevole.

Fisica dei neutrini.

Nel Sole c'è anche una grossa produzione di neutrini dovuti al decadimento β^+ oppure alla cattura elettronica. I neutrini che vengono dai decadimenti β^+ hanno spettro continuo mentre i neutrini emessi a causa della cattura elettronica sono monoenergetici. Complessivamente, dunque, lo spettro dei neutrini solari è uno spettro composto, come quello mostrato in figura 1.

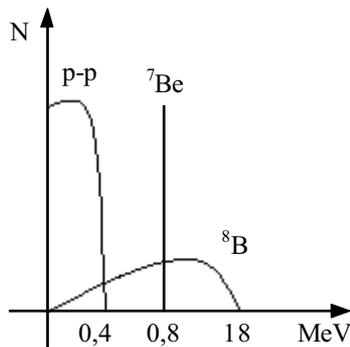


Figura 1

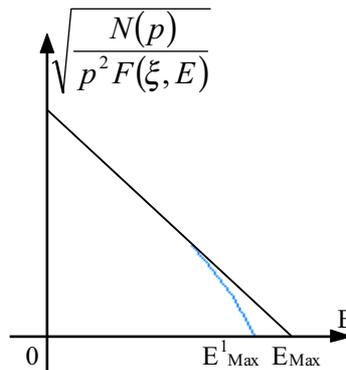
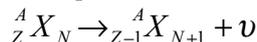
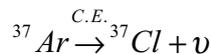


Figura 2

Il primo studio sui neutrini è stato fatto studiando i neutrini dal Sole e gli antineutrini da impianti nucleari; sfruttando lo Standard Solar Model si è ottenuto un valore molto diverso rispetto al numero di neutrini che effettivamente arrivano (se ne è misurato infatti solo un terzo di quelli aspettati). Il problema ora è quello di stabilire se è sbagliato lo Standard Solar Model (cosa che sembra piuttosto improbabile) oppure se il neutrino ha massa non nulla e quindi si trasforma in qualcosa d'altro, oppure ancora se il neutrino interagisce con la materia di cui è composto il Sole stesso. La presenza dei neutrini è confermata dallo spettro continuo degli elettroni emessi nel decadimento β . Facendo riferimento al grafico di figura 2 notiamo una differenza teorica a seconda che si pensi che il neutrino abbia massa nulla o meno. Per valutare una eventuale differenza tra E_{Max} ed E_{Max}^1 si usano energie piccole (ad esempio si fa riferimento allo spettro di 3H che presenta una E_{Max} attorno ai 18 keV). Gli errori sperimentali dovuti alla statistica rendono però difficile vedere la differenza tra i due andamenti; se il neutrino ha massa questa deve essere circa di 30 eV/c². Si può pensare di utilizzare un altro procedimento sfruttando una reazione a due corpi come la cattura elettronica del tipo:



L'energia di ν è ben definita in quanto studiando i raggi X si può valutare l'energia di eccitazione atomica e quindi, per differenza, l'energia del neutrino. Un esempio considera la relazione:



con:

$$Q = (m_{Ar} - m_{Cl})c^2 = 816 \pm 2keV$$

L'energia assorbita dai raggi X è di 2,8 keV e quindi Cl e il neutrino si spartiscono circa 813 keV. Tramite le misure sperimentali si arriva a misurare la T_R di Cl che è di $9,58 \pm 0,18$ eV e quindi:

$$p_R = \sqrt{2mT_R} = 812 \frac{keV}{c}$$

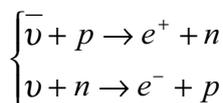
Se ν avesse massa nulla si dovrebbe avere:

$$|p_R| = |p_\nu|$$

da cui:

$$E_\nu = cp_\nu$$

Anche in questo caso si ha però un limite e non una misura effettiva. Si deve dunque studiare la massa in modo diverso. Con un reattore nucleare da 1000 MW si possono ottenere fino a $4,8 \cdot 10^{20}$ neutrini al secondo. Ad una distanza di circa 10 m si trovano circa 10^{13} neutrini per cm²s. Le reazioni indotte dal neutrino sono le seguenti:



dette anche reazioni inverse del decadimento β . Soffermandosi sulla prima reazione (che è stata quella effettivamente utilizzata) si ha, per quanto riguarda la sezione d'urto, che:

$$Q < 0$$

e quindi l'energia del neutrino deve essere maggiore di una soglia di circa 1,8 MeV. Si esprime allora la sezione d'urto come il rapporto tra la velocità di reazione per atomo bersaglio e il flusso di particelle incidenti:

$$\sigma = \frac{2\pi}{\hbar} g^2 |M_R|^2 \frac{4\pi E p}{c^2 c (2\pi\hbar)^3}$$

Essendo una transizione permessa si ha:

$$|M_{fi}|^2 = 2$$

si ottiene:

$$\sigma = \frac{2g_F E p}{\pi\hbar^4 c^3}$$

Siccome si è detto che la soglia è di circa 1,8 MeV, si può scegliere un'energia di 2,5 MeV che porta ai seguenti valori:

$$\begin{cases} T_e = 0,7 \text{ MeV} \\ E_e = 1,211 \text{ MeV} \\ p_e = 1,098 \frac{\text{MeV}}{c} \end{cases}$$

dai quali si ricava:

$$\sigma = 4,99 \cdot 10^{-20} \text{ b}$$

Il libero cammino medio in acqua per ν da 2,5 MeV è di circa $1,5 \cdot 10^{21}$ cm ovvero 1500 anni luce e quindi i neutrini sono molto difficili da rilevare.