

# Fisica Teorica

## **Capitolo 1 . Operatori di campo**

Fisica delle particelle, Spazio degli stati, Rappresentazione di interazione, Operatori di campo, Decadimento particella scalare.

## **Capitolo 2 . Principio d'azione**

Campo scalare reale, Campo scalare complesso, Campo vettoriale massivo, Campo vettoriale reale di massa nulla, Campo spinoriale massivo, Aspetti generali del formalismo lagrangiano.

## **Capitolo 3 . Fermioni chirali**

Gruppo di Lorentz, Spinori di Dirac e spinori di Weyl, Rappresentazione chirale, Operatore di campo per neutrini, Parità, Coniugazione di carica, Inversione temporale.

## **Capitolo 4 . Sviluppo perturbativo**

Ampiezze e probabilità, Decadimento in due fotoni di mesone pseudoscalare, Diffusione di elettroni in potenziale coulombiano, Propagatore, Struttura analitica del propagatore, Diffusione Compton.

## **Capitolo 5 . Teorie di campo e grafici di Feynman**

Ampiezze e sviluppo perturbativo, Funzionale generatore, Combinatoria dei sottodiagrammi, Propagatore vestito e vertici propri, Azione efficace, Sviluppo nel numero di loop, Condizioni di normalizzazione, Regolarizzazione e rinormalizzazione.

## **Capitolo 6 . Elettrodinamica**

Scelta della gauge e trasformazioni di BRS, Propagatore del campo vettoriale, Diffusione elettrone-elettrone, Annichilazione in due fotoni, Annichilazione e produzione di coppie, Correzioni radiative al momento magnetico.

## **Capitolo 7 . Invarianza di gauge**

Identità di Ward-Takahashi, Polarizzazione del vuoto, Costante di accoppiamento running, Self-energia dell'elettrone, Accoppiamento minimale.

## Capitolo 1

### Operatori di campo

In natura si osserva che i costituenti elementari della materia si comportano come particelle. In base ai dati sperimentali attualmente disponibili, la dinamica di queste particelle risulta essere in accordo coi principi della meccanica quantistica e le leggi che governano tale dinamica sono relativisticamente covarianti. Per descrivere la dinamica delle particelle elementari è conveniente usare il formalismo della teoria quantistica dei campi [1,2,3,4]. In questo capitolo verranno definiti gli operatori di campo e saranno discussi alcuni aspetti introduttivi delle teorie di campo.

**1A. Fisica delle particelle.** I fenomeni che la teoria di campo si propone di descrivere sono i processi di diffusione e di decadimento delle particelle. L'esistenza di particelle identiche e la località delle interazioni rappresentano due aspetti fondamentali della fisica delle particelle.

- **Particelle identiche.** Due particelle sono identiche se non esiste alcun esperimento capace di distinguere una particella dall'altra. Per ogni assegnato tipo di particella, caratterizzato da un opportuno insieme di numeri quantici (come il valore della massa, dello spin e della carica elettrica), risulta sempre possibile produrre sperimentalmente un numero arbitrario di tali particelle; inoltre, tutte queste particelle sono identiche ovvero sono tra loro indistinguibili.

Il concetto di particelle identiche è del tutto indipendente dalla struttura della dinamica e non è connesso col principio di indeterminazione o con la meccanica quantistica. L'assenza di entropia di mescolamento per due gas costituiti dallo stesso tipo di molecole, per esempio, è una delle numerose conseguenze dell'esistenza di particelle identiche.

- **Località.** La località delle interazioni tra particelle è facilmente riscontrabile in natura. Quando si studiano i processi di collisione tra particelle, si osserva che i centri di diffusione coincidono coi punti di intersezione dei fasci di particelle. Similmente, analizzando la cinematica delle particelle prodotte in un decadimento, si può verificare la località dell'evento di decadimento. I limiti sperimentali sulla località delle interazioni sono determinati essenzialmente dalla struttura dei rivelatori. La conseguenza più importante di questa localizzazione, anche soltanto "macroscopica", delle interazioni è che *particelle sufficientemente distanti tra loro si comportano come particelle libere.*

- **Costituenti elementari.** In relazione alle diverse condizioni fisiche in cui avvengono i vari processi, certe particelle possono essere considerate "elementari" oppure "composte". Ad energie sufficientemente basse, l'eventuale struttura interna di una particella si può generalmente trascurare; in questo caso, la particella si comporta approssimativamente come una particella elementare. Rispetto alle energie attualmente raggiunte negli esperimenti, i leptoni non mostrano una struttura interna e si comportano come particelle elementari mentre gli adroni risultano essere particelle composte ed i loro componenti elementari sono stati chiamati quark. I vari tipi di particelle elementari, che sono stati osservati direttamente od indirettamente in natura, ammontano a poche decine: **sei leptoni, sei quark** (ciascuno dei quali possiede

tre possibili stati di colore), il **fotone** e **tre bosoni vettoriali massivi**. A queste particelle occorre aggiungere una eventuale particella scalare (**Higgs**) e otto bosoni vettoriali (**gluoni**). L'esistenza della particella di Higgs e la possibilità di una sua diretta osservazione sperimentale sono previste su basi teoriche; ci si aspetta che la conferma sperimentale dell'esistenza della particella di Higgs rappresenti uno dei probabili risultati dei prossimi esperimenti. L'esistenza dei gluoni come responsabili delle interazioni forti è basata principalmente su argomenti teorici. Inoltre, la corrispondente teoria delle interazioni forti esclude la possibilità di una diretta osservazione sperimentale dei gluoni e propone verifiche indirette della loro esistenza; gli attuali dati sperimentali al riguardo sono in accordo con le previsioni teoriche.

• **Cinematica e dinamica.** Nella descrizione di ogni processo di decadimento o di diffusione tra particelle, è utile distinguere due aspetti: il primo aspetto riguarda la cinematica dell'evento mentre il secondo è propriamente connesso con la dinamica e la struttura dell'interazione.

Le varie relazioni cinematiche che risultano essere verificate nei diversi processi, come la conservazione del quadrimpulso e del momento angolare totale, sono conseguenze della covarianza relativistica. La **cinematica relativistica** determina anche la regione dello spazio delle fasi accessibile per un dato processo e permette di calcolare, per esempio, la distribuzione angolare delle probabilità di transizione e la loro dipendenza dagli impulsi e dallo spin delle particelle. La **dinamica** dei processi tra le particelle riguarda invece la struttura generale delle interazioni, la loro universalità e la loro interpretazione per mezzo di principi di simmetria relativi a numeri quantici interni. I problemi che si studiano in questo contesto sono, per esempio, le leggi di conservazione della carica elettrica e del numero leptonico e barionico, l'invarianza di gauge, la simmetria di spin isotopico, le violazioni alla conservazione dell'ipercarica, ecc.

*Siccome la covarianza relativistica è assunta essere comunque valida, il problema principale della fisica delle particelle elementari consiste nello studiare la dinamica ovvero la forma delle interazioni osservate in natura.*

**1B. Spazio degli stati.** Nei processi di interazione tra le particelle, il numero totale di particelle od il numero di particelle di un certo tipo possono cambiare. Conseguentemente, è necessario introdurre come spazio degli stati uno spazio che contenga tutti i possibili stati relativi a tutte le possibili combinazioni dei vari numeri di particelle. Per illustrare la costruzione di questo spazio degli stati, cominciamo col considerare un solo tipo di particelle; successivamente introdurremo tutti gli altri tipi.

• **Stati di singola particella.** Avendo fissato il tipo di particelle che vogliamo analizzare, consideriamo lo spazio  $\mathcal{H}^{(1)}$  degli stati di una singola particella di questo tipo. Nello spazio lineare  $\mathcal{H}^{(1)}$  che ha generalmente dimensione infinita, è sempre possibile introdurre una base ortonormale di vettori  $\{|\alpha\rangle\}$  in cui l'indice  $\alpha$  assume valori interi a partire dall'unità  $\alpha = 1, 2, 3, \dots$ .

• **Stati di molte particelle.** Lo spazio degli stati a due particelle  $\mathcal{H}^{(2)}$  è contenuto nel prodotto tensoriale  $\mathcal{H}^{(1)} \otimes \mathcal{H}^{(1)}$ . Siccome le particelle sono identiche, dobbiamo tener conto della statistica. Nel caso della statistica di Bose-Einstein,  $\mathcal{H}^{(2)}$  contiene i vettori di  $\mathcal{H}^{(1)} \otimes \mathcal{H}^{(1)}$  che sono simmetrici per scambio delle variabili relative alle due particelle. Mentre nel caso della statistica di Fermi-Dirac,  $\mathcal{H}^{(2)}$  contiene i vettori di  $\mathcal{H}^{(1)} \otimes \mathcal{H}^{(1)}$  che sono antisimmetrici per scambio delle due particelle. In maniera analoga, si può procedere a costruire lo spazio  $\mathcal{H}^{(n)}$  relativo agli stati di  $n$  particelle identiche. Le particelle che

hanno spin nullo o spin intero seguono la statistica di Bose-Einstein; conseguentemente, i corrispondenti vettori di stato devono essere completamente simmetrici per scambio di due particelle qualunque. Le particelle che hanno spin semintero seguono invece la statistica di Fermi-Dirac ed i corrispondenti vettori di stato devono essere completamente antisimmetrici. Infine, la somma diretta degli spazi  $\mathcal{H}^{(n)}$  al variare di  $n$  rappresenta lo spazio degli stati in cui il numero  $n$  di particelle può variare come  $n = 1, 2, 3, \dots$ .

L'uso diretto di questa presentazione dello spazio degli stati risulta essere poco conveniente per discutere i processi di interazione tra le particelle. Per mettere in evidenza gli aspetti fondamentali connessi con l'esistenza di particelle identiche, è utile introdurre opportuni operatori di creazione e di annichilazione per le particelle.

• **Osservazione.** *Per un sistema di particelle identiche, ciascun vettore di una base completa nello spazio degli stati risulta essere univocamente caratterizzato specificando, per ogni valore dell'indice  $\alpha$ , il numero  $n_\alpha$  di particelle si trovano nello stato  $|\alpha\rangle$ .*

Questa osservazione è alla base della costruzione dello spazio di Fock che ora descriveremo nei due casi in cui si abbia statistica di Bose-Einstein o statistica di Fermi-Dirac.

• **Statistica di Bose-Einstein.** Quando le particelle identiche obbediscono alla statistica di Bose-Einstein, il numero  $n_\alpha$  di particelle che si trovano nello stato  $|\alpha\rangle$  può assumere valori interi arbitrari od il valore nullo,  $n_\alpha = 0, 1, 2, 3, \dots$ . Questi possibili valori di  $n_\alpha$  si possono interpretare come gli autovalori di un operatore  $N_\alpha$  che agisce in un opportuno spazio vettoriale  $V_\alpha$ . Il modo più semplice di rappresentare  $N_\alpha$  consiste nell'utilizzare l'analogia esistente tra gli autovalori di  $N_\alpha$  ed i livelli in energia di un oscillatore armonico unidimensionale. Si introducono quindi due operatori  $a_\alpha$  ed  $a_\alpha^+$  definiti in  $V_\alpha$  che soddisfano le seguenti regole di commutazione

$$[a_\alpha, a_\alpha^+] = a_\alpha a_\alpha^+ - a_\alpha^+ a_\alpha = 1 \quad . \quad (1.1)$$

Si assume inoltre che esista uno stato  $|0\rangle_\alpha \in V_\alpha$ , che sarà chiamato lo **stato fondamentale**, con la seguente proprietà

$$a_\alpha |0\rangle_\alpha = 0 \quad . \quad (1.2)$$

Allora, posto

$$|n_\alpha\rangle_\alpha = (a_\alpha^+)^{n_\alpha} |0\rangle_\alpha \quad , \quad (1.3)$$

e

$$N_\alpha = a_\alpha^+ a_\alpha \quad , \quad (1.4)$$

si ha

$$N_\alpha |n_\alpha\rangle_\alpha = n_\alpha |n_\alpha\rangle_\alpha \quad . \quad (1.5)$$

Lo stato  $|n_\alpha\rangle_\alpha$  può essere interpretato come lo stato in cui  $n_\alpha$  particelle si trovano nello stato  $|\alpha\rangle$ . Gli operatori  $a_\alpha$  ed  $a_\alpha^+$  rappresentano rispettivamente l'operatore di **annichilazione** e di **creazione** di una particella nello stato  $|\alpha\rangle$ .

Chiaramente, lo stesso procedimento può essere ripetuto per ogni possibile valore dell'indice  $\alpha$  che labella gli stati ad una particella. Conseguentemente, per ogni stato  $|\alpha\rangle$  di una singola particella, si

introduce un opportuno “oscillatore armonico”; più precisamente, si introduce uno spazio vettoriale  $V_\alpha$  in cui sono definiti gli operatori di annichilazione e di creazione  $a_\alpha$  ed  $a_\alpha^+$  che soddisfano le regole di commutazione (1.1). Consideriamo ora lo spazio  $\mathcal{H}$  che si ottiene prendendo il prodotto tensoriale degli spazi  $V_\alpha$  per tutti i possibili valori di  $\alpha$

$$\mathcal{H} = V_{\alpha=1} \otimes V_{\alpha=2} \otimes V_{\alpha=3} \otimes \cdots \quad . \quad (1.6)$$

Gli operatori  $\{a_\alpha\}$  ed  $\{a_\alpha^+\}$ , che sono definiti in  $\mathcal{H}$ , verificano le relazioni

$$[a_\alpha, a_\beta^+] = \delta_{\alpha\beta} \quad , \quad [a_\alpha, a_\beta] = 0 = [a_\alpha^+, a_\beta^+] \quad . \quad (1.7)$$

Il vettore  $|0\rangle$  corrispondente allo stato fondamentale in  $\mathcal{H}$ ,

$$|0\rangle = |0\rangle_{\alpha=1} \otimes |0\rangle_{\alpha=2} \otimes |0\rangle_{\alpha=3} \otimes \cdots \quad , \quad (1.8)$$

è anche chiamato il **vettore di vuoto** perché descrive lo stato in cui non ci sono particelle. Uno stato che contiene, per esempio,  $n_\alpha$  particelle nello stato  $|\alpha\rangle$ ,  $n_\beta$  particelle nello stato  $|\beta\rangle$  ed  $n_\gamma$  particelle nello stato  $|\gamma\rangle$  è rappresentato da

$$|n_\alpha, n_\beta, n_\gamma\rangle = (a_\alpha^+)^{n_\alpha} (a_\beta^+)^{n_\beta} (a_\gamma^+)^{n_\gamma} |0\rangle \quad . \quad (1.9)$$

Il vettore (1.9) è completamente simmetrico per scambio di due qualunque operatori di creazione poiché gli operatori di creazione commutano tra loro,  $[a_\alpha^+, a_\beta^+] = 0$ . Questa proprietà si traduce nella proprietà di simmetria dei vettori di stato per scambio delle variabili di due particelle qualunque.

Infine, l'operatore  $N$  corrispondente al numero totale di particelle è dato da

$$N = \sum_\alpha N_\alpha = \sum_\alpha a_\alpha^+ a_\alpha \quad . \quad (1.10)$$

• **Statistica di Fermi-Dirac.** Quando le particelle identiche obbediscono alla statistica di Fermi-Dirac, il numero  $n_\alpha$  di particelle che si trovano nello stato  $|\alpha\rangle$  può assumere solamente i valori  $n_\alpha = 0$  oppure  $n_\alpha = 1$ . In questo caso, per ogni valore di  $\alpha$  si introducono uno spazio vettoriale bidimensionale  $V_\alpha$  ed una base ortonormale  $\{|0\rangle_\alpha, |1\rangle_\alpha\}$  dove  $|0\rangle_\alpha$  corrisponde allo stato in cui nessuna particella si trova nello stato  $|\alpha\rangle$ , mentre  $|1\rangle_\alpha$  corrisponde allo stato in cui una particella si trova nello stato  $|\alpha\rangle$ . Questi vettori si possono rappresentare nel modo seguente

$$|0\rangle_\alpha = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}_\alpha \quad , \quad |1\rangle_\alpha = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}_\alpha \quad . \quad (1.11)$$

Gli operatori  $a_\alpha$  e  $a_\alpha^+$  corrispondenti alle seguenti matrici

$$a_\alpha = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}_\alpha \quad , \quad a_\alpha^+ = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}_\alpha \quad , \quad (1.12)$$

verificano le relazioni

$$\{a_\alpha, a_\alpha^+\} = a_\alpha a_\alpha^+ + a_\alpha^+ a_\alpha = 1 \quad , \quad (1.13)$$

$$\{a_\alpha, a_\alpha\} = 0 = \{a_\alpha^+, a_\alpha^+\} \quad . \quad (1.14)$$

L'operatore numero di particelle nello stato  $|\alpha\rangle$  vale

$$N_\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}_\alpha = a_\alpha^+ a_\alpha \quad . \quad (1.15)$$

Si consideri ora lo spazio  $\mathcal{H}$  che si ottiene prendendo il prodotto tensoriale degli spazi  $V_\alpha$  per tutti i possibili valori di  $\alpha$

$$\mathcal{H} = V_{\alpha=1} \otimes V_{\alpha=2} \otimes V_{\alpha=3} \otimes \cdots \quad ; \quad (1.16)$$

il **vettore di vuoto**  $|0\rangle \in \mathcal{H}$  è dato da

$$|0\rangle = |0\rangle_{\alpha=1} \otimes |0\rangle_{\alpha=2} \otimes |0\rangle_{\alpha=3} \otimes \cdots \quad . \quad (1.17)$$

Differentemente dal caso della statistica di Bose-Einstein, gli stati che si ottengono applicando i vari prodotti degli operatori  $\{a_\alpha^+\}$  al vettore di vuoto non possiedono le giuste proprietà di simmetria. Infatti, nel caso della statistica di Fermi-Dirac, i vettori di stato devono essere completamente antisimmetrici per scambio di variabili relative a due particelle qualunque. D'altra parte, il vettore  $a_\alpha^+ a_\beta^+ |0\rangle$  con  $\alpha \neq \beta$ , per esempio, è simmetrico per lo scambio  $\alpha \leftrightarrow \beta$  perché gli operatori  $a_\alpha^+$  e  $a_\beta^+$  commutano tra loro,  $[a_\alpha^+, a_\beta^+] = 0$ . Per ovviare a questo inconveniente è sufficiente modificare gli operatori  $\{a_\alpha\}$  e  $\{a_\alpha^+\}$  in modo opportuno [4]. Gli operatori di annichilazione e di creazione per le particelle che obbediscono alla statistica di Fermi-Dirac saranno indicati con  $\{b_\alpha\}$  e  $\{b_\alpha^+\}$  e sono definiti da

$$b_\alpha = \eta_\alpha a_\alpha = a_\alpha \eta_\alpha \quad , \quad b_\alpha^+ = \eta_\alpha a_\alpha^+ = a_\alpha^+ \eta_\alpha \quad ; \quad (1.18)$$

dove

$$\eta_\alpha = \prod_{\beta=1}^{\alpha-1} \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}_\beta \quad . \quad (1.19)$$

È facile verificare [4] che gli operatori  $\{b_\alpha\}$  e  $\{b_\alpha^+\}$  soddisfano le seguenti relazioni

$$\{b_\alpha, b_\beta^+\} = \delta_{\alpha\beta} \quad , \quad \{b_\alpha, b_\beta\} = 0 = \{b_\alpha^+, b_\beta^+\} \quad . \quad (1.20)$$

Gli stati a molte particelle si ottengono applicando prodotti degli operatori di creazione  $\{b_\alpha^+\}$  allo stato di vuoto. Per esempio, lo stato che contiene una particella nello stato  $|\alpha\rangle$ , una particella nello stato  $|\beta\rangle$  ed una particella nello stato  $|\gamma\rangle$  è rappresentato da

$$|\alpha, \beta, \gamma\rangle = b_\alpha^+ b_\beta^+ b_\gamma^+ |0\rangle \quad . \quad (1.21)$$

Il vettore (1.21) è antisimmetrico per lo scambio  $\alpha \leftrightarrow \beta$ , come pure per lo scambio  $\alpha \leftrightarrow \gamma$  oppure  $\beta \leftrightarrow \gamma$ , perché gli operatori di creazione anticommutano tra loro,  $\{b_\alpha^+, b_\beta^+\} = 0$ . L'operatore  $N$  corrispondente al numero totale di particelle è

$$N = \sum_{\alpha} N_{\alpha} = \sum_{\alpha} a_{\alpha}^+ a_{\alpha} = \sum_{\alpha} b_{\alpha}^+ b_{\alpha} \quad . \quad (1.22)$$

Riassumendo, per ogni fissato tipo di particella, gli stati con un numero non nullo di particelle si ottengono applicando gli operatori di creazione ad uno stato fondamentale, lo stato di vuoto, che descrive la situazione fisica in cui non vi sono particelle. Il tipo di statistica associato alle particelle è univocamente determinato dalle relazioni di commutazione o di anticommuteazione dei corrispondenti operatori di annichilazione e di creazione. La statistica di Bose-Einstein richiede le regole di commutazione (1.7), mentre la statistica di Fermi-Dirac richiede le regole di anticommuteazione (1.20).

Chiaramente, la particolare scelta della base  $\{|\alpha\rangle\}$  per gli stati ad una particella è totalmente arbitraria. Se si effettua un cambiamento di base mediante una matrice unitaria  $U$ ,

$$|z\rangle = \sum_{\alpha} U_{z\alpha} |\alpha\rangle \quad , \quad (1.23)$$

gli operatori di creazione e di annichilazione nella nuova base  $\{|z\rangle\}$  sono dati dalle seguenti combinazioni lineari

$$a_z^+ = \sum_{\alpha} U_{z\alpha} a_{\alpha}^+ \quad , \quad a_z = \sum_{\alpha} U_{z\alpha}^* a_{\alpha} \quad , \quad (\text{Bose} - \text{Einstein}) \quad (1.24)$$

$$b_z^+ = \sum_{\alpha} U_{z\alpha} b_{\alpha}^+ \quad , \quad b_z = \sum_{\alpha} U_{z\alpha}^* b_{\alpha} \quad . \quad (\text{Fermi} - \text{Dirac}) \quad (1.25)$$

È facile verificare che le regole di commutazione (1.7) oppure le regole di anticommuteazione (1.20) restano immutate. Lo stato di vuoto resta invariato mentre gli stati a molte particelle vengono trasformati in accordo con le leggi di trasformazione (1.24) oppure (1.25).

Consideriamo ora il caso realistico in cui vari tipi di particelle devono essere descritti simultaneamente.

• **Osservazione.** *Tutti i diversi tipi di particelle che seguono la stessa statistica si possono sempre interpretare, mediante l'introduzione di opportuni numeri quantici, come stati distinti di un solo tipo di particelle.*

Conseguentemente, la struttura delle regole di commutazione e di anticommuteazione risulta valida anche per gli operatori di annichilazione e di creazione relativi a diversi tipi di particelle. Più precisamente, consideriamo tutti gli stati di singola particella per i due tipi di statistica; sia

- $\{|\alpha\rangle\}$  una base ortonormale per tutti gli stati con statistica di Bose-Einstein;
- $\{|i\rangle\}$  una base ortonormale per tutti gli stati con statistica di Fermi-Dirac.

I corrispondenti operatori di annichilazione e di creazione soddisfano le seguenti relazioni

$$[a_{\alpha}, a_{\beta}^+] = \delta_{\alpha\beta} \quad , \quad [a_{\alpha}, a_{\beta}] = 0 = [a_{\alpha}^+, a_{\beta}^+] \quad ,$$

$$\begin{aligned} \{b_i, b_j^+\} &= \delta_{ij} \quad , \quad \{b_i, b_j\} = 0 = \{b_i^+, b_j^+\} \quad , \\ [a_\alpha, b_i] &= 0 = [a_\alpha, b_i^+] \quad , \quad [a_\alpha^+, b_i] = 0 = [a_\alpha^+, b_i^+] \quad . \end{aligned} \quad (1.26)$$

Lo spazio degli stati contiene uno stato di vuoto  $|0\rangle$  che verifica  $a_\alpha|0\rangle = 0 = b_i|0\rangle$ . Tutti gli stati con particelle si ottengono applicando ripetutamente gli operatori di creazione  $a_\alpha^+$  o  $b_i^+$  al vettore  $|0\rangle$ .

**1C. Rappresentazione di interazione.** Utilizzando gli operatori di annichilazione e di creazione, si possono definire gli operatori di campo associati ai vari tipi di particelle. Prima di presentare i dettagli della costruzione di tali operatori, è utile discutere alcuni aspetti qualitativi della fisica delle particelle che giustificano l'introduzione degli operatori di campo.

• **Notazioni relativistiche.** Il primo aspetto riguarda la località dei processi tra particelle. Per tener conto della località delle interazioni, è utile definire degli **operatori locali** ovvero degli operatori che descrivono l'annichilazione o la creazione di particelle in un determinato punto dello spazio-tempo. Indicheremo con  $x$  l'insieme delle coordinate  $x^\mu$  dei vari punti dello spazio-tempo; useremo le notazioni relativistiche

$$x^\mu = (t, \vec{x}) \quad , \quad x_\mu = g_{\mu\nu} x^\nu \quad , \quad \partial_\mu = \frac{\partial}{\partial x^\mu} \quad , \quad \partial^\mu = \frac{\partial}{\partial x_\mu} \quad , \quad (1.27)$$

dove la metrica di Lorentz  $g_{\mu\nu}$  è data da

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = g^{\mu\nu} \quad . \quad (1.28)$$

Supponiamo di dover considerare vari tipi di particelle che denotiamo per mezzo di un indice  $i$  (con  $i = 1, 2, \dots$ ). Per ogni tipo di particella vorremmo definire un operatore locale, od operatore di campo, che indichiamo genericamente con  $\phi_i(x)$ . Se l'operatore  $\phi_i(x)$  annichila o crea una particella di tipo  $i$  nel punto  $x$ , i processi locali tra le particelle potrebbero venir descritti per mezzo di prodotti degli operatori  $\{\phi_i(x)\}$ . Per esempio, il decadimento nel punto  $x$  di una particella di tipo 1 in una particella di tipo 2 ed una di tipo 3 si potrebbe descrivere per mezzo dell'operatore composto  $\phi_1(x)\phi_2(x)\phi_3(x)$ . Questo esempio verrà discusso in dettaglio nella Sezione 1.E. Concentriamoci quindi sulla possibile definizione degli operatori di campo.

• **Dipendenza dal tempo.** Siccome una delle componenti di  $x^\mu$  rappresenta la coordinata temporale,  $x^0 = t$ , gli operatori locali  $\{\phi_i(x)\}$  devono essere operatori che dipendono esplicitamente dal tempo. Come è noto, in meccanica quantistica si può usare la **rappresentazione di Heisenberg** in cui l'evoluzione temporale riguarda esclusivamente gli operatori mentre gli stati del sistema non hanno evoluzione temporale. Se si utilizza la rappresentazione di Heisenberg per gli operatori di campo, si ottiene

$$\phi_i(x) = \phi_i(t, \vec{x}) = e^{itH} \phi_i(0, \vec{x}) e^{-itH} \quad , \quad (\text{rappres. di Heisenberg}) \quad (1.29)$$

dove  $H$  rappresenta l'operatore Hamiltoniano del sistema. Per determinare la forma esplicita degli operatori di campo in rappresentazione di Heisenberg, occorrerebbe quindi risolvere le equazione del

moto per i vari operatori di annichilazione e creazione di particelle. Sfortunatamente, in presenza di interazioni tra le particelle, costruire la soluzione esplicita delle equazioni del moto per questi operatori rappresenta un problema estremamente complicato di cui, in generale, non si conosce soluzione. In effetti, trovare la soluzione esplicita delle equazioni del moto significa risolvere esattamente il modello. Anche in meccanica quantistica ordinaria, in cui il numero dei gradi di libertà è finito, i modelli esattamente risolvibili sono molto rari e, per studiare la fisica di un dato sistema, generalmente si utilizza la teoria delle perturbazioni. In teoria dei campi, il problema di risolvere esattamente le equazioni del moto risulta ancor più complicato a causa del fatto che il sistema contiene un numero infinito di gradi di libertà.

Per superare le difficoltà connesse con l'equazione (1.29), è necessario abbandonare la rappresentazione di Heisenberg e utilizzare la cosiddetta **rappresentazione di interazione**. L'Hamiltoniana totale del sistema è generalmente la somma di due termini,

$$H = H_0 + V \quad , \quad (1.30)$$

in cui  $H_0$  rappresenta l'Hamiltoniana per particelle libere, cioè l'Hamiltoniana in assenza di interazioni, e  $V$  descrive le interazioni tra le particelle. Nella rappresentazione di interazione, l'evoluzione temporale è distribuita in maniera opportuna tra operatori e vettori di stato e riguarda sia gli operatori che gli stati del sistema.

• **Rappresentazione d'interazione.** La connessione tra la rappresentazione di Heisenberg e la rappresentazione di interazione si può illustrare considerando l'elemento di matrice di un generico operatore  $\mathcal{O}$  al tempo  $t$  tra gli stati  $|A\rangle$  e  $|B\rangle$ . Se denotiamo con  $\mathcal{O}_H(t)$  l'operatore in rappresentazione di Heisenberg e con  $\mathcal{O}_I(t)$  l'operatore in rappresentazione di interazione, si ha

$$\begin{aligned} \langle B | \mathcal{O}_H(t) | A \rangle &= \langle B | e^{itH} \mathcal{O} e^{-itH} | A \rangle = \langle B | e^{itH} e^{-itH_0} \left( e^{itH_0} \mathcal{O} e^{-itH_0} \right) e^{itH_0} e^{-itH} | A \rangle \\ &= \langle B(t) | \mathcal{O}_I(t) | A(t) \rangle \quad , \end{aligned} \quad (1.31)$$

dove si è posto

$$\mathcal{O}_I(t) = e^{itH_0} \mathcal{O} e^{-itH_0} \quad , \quad (1.32)$$

$$|A(t)\rangle = e^{itH_0} e^{-itH} |A\rangle = U(t,0) |A\rangle \quad . \quad (1.33)$$

Come mostrato nelle equazioni (1.32) e (1.33), nella rappresentazione di interazione sia gli operatori che i vettori di stato dipendono dal tempo. Per quanto riguarda gli operatori, la loro dipendenza dal tempo coincide con la dipendenza dal tempo nella rappresentazione di Heisenberg nel caso in cui l'Hamiltoniana è quella libera. Consideriamo ora l'operatore  $U(t,0)$  che appare in equazione (1.33) e che determina l'evoluzione temporale dei vettori di stato.

• **Ordinamento cronologico.** Derivando  $U(t,0)$  rispetto al parametro  $t$ , si ottiene

$$\begin{aligned} \frac{dU(t,0)}{dt} &= i e^{itH_0} \left( H_0 - H \right) e^{-itH} = -i e^{itH_0} V e^{-itH} = -i \left( e^{itH_0} V e^{-itH_0} \right) e^{itH_0} e^{-itH} \\ &= -i V_I(t) U(t,0) \quad . \end{aligned} \quad (1.34)$$

Si ha inoltre

$$U(0, 0) = 1 \quad . \quad (1.35)$$

Le equazioni (1.34) e (1.35) determinano univocamente  $U(t, 0)$ ; infatti,  $U(t, 0)$  si può ottenere integrando direttamente la (1.34) tenendo conto della condizione iniziale (1.35). Il risultato è

$$U(t, 0) = T \exp \left( -i \int_0^t d\tau V_I(\tau) \right) \quad , \quad (1.36)$$

dove il simbolo  $T$  denota l'ordinamento cronologico, ovvero l'ordinamento nel parametro temporale, degli operatori che compaiono nell'espressione (1.36). Nell'ordinamento cronologico, all'aumentare del parametro temporale gli operatori vanno posti a sinistra, in accordo con la (1.34). Per esempio, nel caso di due operatori si ha

$$T (V_I(\tau_1) V_I(\tau_2)) = \theta(\tau_1 - \tau_2) V_I(\tau_1) V_I(\tau_2) + \theta(\tau_2 - \tau_1) V_I(\tau_2) V_I(\tau_1) \quad . \quad (1.37)$$

L'ordinamento cronologico è assunto agire in maniera banale sugli operatori definiti a tempi uguali. Riassumendo, utilizzando la rappresentazione di interazione, la dipendenza dal tempo degli operatori di campo è data da

$$\phi_i(x) = \phi_i(t, \vec{x}) = e^{itH_0} \phi_i(0, \vec{x}) e^{-itH_0} \quad , \quad (\text{rappres. di interazione}) \quad (1.38)$$

dove  $H_0$  rappresenta l'Hamiltoniana per particelle libere. In questo caso, le equazioni del moto per gli operatori di annichilazione e di creazione si sanno risolvere ed è quindi possibile determinare l'espressione esatta degli operatori di campo. La loro costruzione esplicita verrà presentata nella prossima sezione. Consideriamo ora il problema di descrivere la dinamica dei processi tra le particelle utilizzando il formalismo della teoria dei campi in rappresentazione di interazione.

• **Matrice-S.** Come mostrato in equazione (1.33), l'evoluzione temporale degli stati del sistema è implementata dall'operatore (1.36). Le quantità che vengono effettivamente misurate negli esperimenti sono le probabilità di transizione tra gli stati iniziali e quelli finali. Siccome i processi di misura degli apparati sperimentali coinvolgono intervalli temporali molto maggiori dei tempi di interazione tra le particelle (località delle interazioni), le ampiezze di transizione che occorre calcolare, per poter effettuare un confronto significativo coi dati sperimentali, sono date dalle seguenti quantità

$$S_{BA} = \langle B(t = +\infty) | A(t = -\infty) \rangle = \langle B | U(+\infty, -\infty) | A \rangle \quad . \quad (1.39)$$

Le ampiezze (1.39) rappresentano gli elementi di matrice di un operatore, chiamato matrice- $S$ , tra gli stati iniziale e finale. Perciò, la matrice- $S$  risulta essere

$$S = U(+\infty, -\infty) = T \exp \left( -i \int_{-\infty}^{+\infty} dt V_I(t) \right) \quad . \quad (1.40)$$

Il problema di descrivere la dinamica delle particelle elementari consiste quindi nel determinare l'Hamiltoniana d'interazione  $V_I(t)$  che descrive le varie interazioni tra le particelle. L'operatore  $V_I(t)$ , che deve

essere espresso in rappresentazione di interazione, è una funzione o, più propriamente, un funzionale degli operatori di campo (in rappresentazione di interazione) associati ai vari tipi di particelle

$$V_I(t) = V[\{\phi_i\}] \quad . \quad (1.41)$$

**1D. Operatori di campo.** Gli operatori di campo che verranno considerati saranno generalmente definiti in rappresentazione di interazione. L'operatore di campo associato ad un determinato tipo di particella è un operatore locale che descrive l'annichilazione o la creazione di una particella (del tipo considerato) in un punto dello spazio-tempo. In accordo con l'equazione (1.38), l'evoluzione temporale di un operatore di campo è specificata dall'Hamiltoniana libera  $H_0$ . Dobbiamo quindi considerare la struttura dei livelli energetici nel caso di particelle libere.

• **Particelle libere.** Per una singola particella di massa  $m$ , l'energia è funzione dell'impulso spaziale  $\vec{p}$  della particella ed assume la forma

$$E = E(\vec{p}) = \sqrt{m^2 + (\vec{p})^2} \quad . \quad (1.42)$$

Se si usano notazioni relativisticamente covarianti, le componenti del quadrimpulso sono date da

$$p^\mu = (E, \vec{p}) \quad . \quad (1.43)$$

Gli stati di una singola particella di massa  $m$  e spin definito si possono classificare specificando i valori dell'impulso  $\vec{p}$  della particella ed il suo stato di polarizzazione; i possibili stati di polarizzazione saranno denotati mediante un indice discreto  $r$ . Le corrispondenti funzioni d'onda sono

$$|\vec{p}, r\rangle \rightarrow f_{r,\vec{p}}(\vec{x}) = \varepsilon(\vec{p}, r) e^{i\vec{x}\cdot\vec{p}} \quad , \quad (1.44)$$

dove  $\varepsilon(\vec{p}, r)$  rappresenta lo stato di polarizzazione della particella.

• **Regole di commutazione fondamentali.** Consideriamo gli operatori di annichilazione e di creazione per una particella nello stato  $|\vec{p}, r\rangle$ . Nel caso di statistica di Bose-Einstein, si ha

$$\begin{aligned} [a(\vec{p}, r), a^+(\vec{q}, s)] &= \delta^3(\vec{p} - \vec{q}) \delta_{rs} \quad , \\ [a(\vec{p}, r), a(\vec{q}, s)] &= 0 = [a^+(\vec{p}, r), a^+(\vec{q}, s)] \quad . \end{aligned} \quad (1.45)$$

Mentre nel caso di statistica di Fermi-Dirac, le regole di anticommutazione sono

$$\begin{aligned} \{b(\vec{p}, r), b^+(\vec{q}, s)\} &= \delta^3(\vec{p} - \vec{q}) \delta_{rs} \quad , \\ \{b(\vec{p}, r), b(\vec{q}, s)\} &= 0 = \{b^+(\vec{p}, r), b^+(\vec{q}, s)\} \quad . \end{aligned} \quad (1.46)$$

Per particelle libere l'energia è semplicemente la somma delle energie delle singole particelle e non dipende dagli stati di polarizzazione; quindi, l'Hamiltoniana  $H_0$  che definisce l'energia degli stati con molte particelle risulta essere

$$H_0 = \sum_r \int d^3p \ E(\vec{p}) a^+(\vec{p}, r) a(\vec{p}, r) \quad , \quad (\text{Bose} - \text{Einstein}) \quad (1.47)$$

oppure

$$H_0 = \sum_r \int d^3p E(\vec{p}) b^+(\vec{p}, r) b(\vec{p}, r) \quad . \quad (\text{Fermi - Dirac}) \quad (1.48)$$

Utilizzando le relazioni (1.45) e (1.46), la dipendenza esplicita dal tempo degli operatori di annichilazione e di creazione (in rappresentazione di interazione) risulta essere

$$a(t; \vec{p}, r) = e^{itH_0} a(\vec{p}, r) e^{-itH_0} = e^{-iEt} a(\vec{p}, r) \quad , \quad (1.49)$$

$$a^+(t; \vec{p}, r) = e^{itH_0} a^+(\vec{p}, r) e^{-itH_0} = e^{iEt} a^+(\vec{p}, r) \quad , \quad (1.50)$$

$$b(t; \vec{p}, r) = e^{itH_0} b(\vec{p}, r) e^{-itH_0} = e^{-iEt} b(\vec{p}, r) \quad , \quad (1.51)$$

$$b^+(t; \vec{p}, r) = e^{itH_0} b^+(\vec{p}, r) e^{-itH_0} = e^{iEt} b^+(\vec{p}, r) \quad . \quad (1.52)$$

Si ottiene perciò

$$f_{r, \vec{p}}(\vec{x}) a(t; \vec{p}, r) = \varepsilon(\vec{p}, r) e^{-ipx} a(\vec{p}, r) \quad , \quad (1.53)$$

$$f_{r, \vec{p}}^*(\vec{x}) a^+(t; \vec{p}, r) = \varepsilon^*(\vec{p}, r) e^{ipx} a^+(\vec{p}, r) \quad , \quad (1.54)$$

$$f_{r, \vec{p}}(\vec{x}) b(t; \vec{p}, r) = \varepsilon(\vec{p}, r) e^{-ipx} b(\vec{p}, r) \quad , \quad (1.55)$$

$$f_{r, \vec{p}}^*(\vec{x}) b^+(t; \vec{p}, r) = \varepsilon^*(\vec{p}, r) e^{ipx} b^+(\vec{p}, r) \quad , \quad (1.56)$$

dove si è posto

$$px = p^\mu x_\mu = E(\vec{p})t - \vec{p} \cdot \vec{x} \quad . \quad (1.57)$$

• **Operatori di campo.** Gli operatori di campo si ottengono prendendo combinazioni lineari degli operatori (1.53) e (1.54) oppure (1.55) e (1.56). La struttura generale di un operatore di campo è la seguente: nel caso della statistica di Bose-Einstein

$$\phi(x) \sim \sum_r \int d^3p K(\vec{p}) \left\{ a(\vec{p}, r) \varepsilon(\vec{p}, r) e^{-ipx} + a^+(\vec{p}, r) \varepsilon^*(\vec{p}, r) e^{ipx} \right\} \quad , \quad (1.58)$$

mentre per la statistica di Fermi-Dirac

$$\psi(x) \sim \sum_r \int d^3p K'(\vec{p}) \left\{ b(\vec{p}, r) \varepsilon(\vec{p}, r) e^{-ipx} + b^+(\vec{p}, r) \varepsilon^*(\vec{p}, r) e^{ipx} \right\} \quad , \quad (1.59)$$

dove  $K(\vec{p})$  e  $K'(\vec{p})$  sono opportuni fattori di normalizzazione delle funzioni d'onda che determinano anche le dimensioni degli operatori di campo. Elenchiamo ora gli operatori che risulteranno utili nel seguito.

• **Campo scalare reale.** Il campo  $\varphi(x)$  associato ad una particella senza spin è dato dalla seguente espressione

$$\varphi(x) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^{3/2}} \frac{1}{\sqrt{2E(\vec{p})}} \left\{ a(\vec{p}) e^{-ipx} + a^+(\vec{p}) e^{ipx} \right\} \quad . \quad (1.60)$$

• **Campo scalare complesso.** Per particelle senza spin con carica (elettrica) non banale, è conveniente introdurre un campo scalare complesso  $\phi(x)$  che è dato dalla combinazione lineare di due campi scalari reali

$$\phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2}} (\varphi_1(x) + i\varphi_2(x)) \quad . \quad (1.61)$$

Gli operatori

$$a_{(+)}(\vec{p}) = \frac{a_1(\vec{p}) + i a_2(\vec{p})}{\sqrt{2}} \quad , \quad a_{(+)}^+(\vec{p}) = \frac{a_1^+(\vec{p}) - i a_2^+(\vec{p})}{\sqrt{2}} \quad , \quad (1.62)$$

corrispondono agli operatori di annichilazione e di creazione di una particella con carica (elettrica) positiva, mentre i corrispondenti operatori per la “stessa particella” con carica negativa (antiparticella) sono

$$a_{(-)}(\vec{p}) = \frac{a_1(\vec{p}) - i a_2(\vec{p})}{\sqrt{2}} \quad , \quad a_{(-)}^+(\vec{p}) = \frac{a_1^+(\vec{p}) + i a_2^+(\vec{p})}{\sqrt{2}} \quad . \quad (1.63)$$

La forma operatoriale di un campo scalare complesso  $\phi(x)$  risulta pertanto

$$\phi(x) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^{3/2}} \frac{1}{\sqrt{2E(\vec{p})}} \left\{ a_{(+)}(\vec{p}) e^{-ipx} + a_{(-)}^+(\vec{p}) e^{ipx} \right\} \quad , \quad (1.64)$$

$$\phi^*(x) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^{3/2}} \frac{1}{\sqrt{2E(\vec{p})}} \left\{ a_{(+)}^+(\vec{p}) e^{ipx} + a_{(-)}(\vec{p}) e^{-ipx} \right\} \quad . \quad (1.65)$$

• **Campo spinoriale.** Per una particella di massa  $m$  e spin  $1/2$ , l’operatore di campo  $\psi_\alpha(x)$  è

$$\psi_\alpha(x) = \sum_{r=1}^2 \int \frac{d^3p}{(2\pi)^{3/2}} \sqrt{\frac{m}{E(\vec{p})}} \left\{ b(\vec{p}, r) u_\alpha(\vec{p}, r) e^{-ipx} + d^+(\vec{p}, r) v_\alpha(\vec{p}, r) e^{ipx} \right\} \quad , \quad (1.66)$$

$$\psi_\alpha^\dagger(x) = \sum_{r=1}^2 \int \frac{d^3p}{(2\pi)^{3/2}} \sqrt{\frac{m}{E(\vec{p})}} \left\{ b^+(\vec{p}, r) u_\alpha^+(\vec{p}, r) e^{ipx} + d(\vec{p}, r) v_\alpha^+(\vec{p}, r) e^{-ipx} \right\} \quad , \quad (1.67)$$

dove  $\{b, b^+\}$  sono gli operatori di annichilazione e di creazione per le particelle,  $\{d, d^+\}$  sono i corrispondenti operatori per le antiparticelle, mentre  $u_\alpha(\vec{p}, r)$  e  $v_\alpha^+(\vec{p}, r)$  (in cui l’indice  $\alpha$  assume valori interi da 1 a 4) sono le componenti degli spinori che descrivono gli stati di polarizzazione per le particelle e le antiparticelle.

• **Campo vettoriale reale.** Il campo associato ad una particella con massa non nulla e spin unitario è

$$B_\mu(x) = \sum_{r=1}^3 \int \frac{d^3p}{(2\pi)^{3/2}} \frac{1}{\sqrt{2E(\vec{p})}} \left\{ a(\vec{p}, r) \varepsilon_\mu(\vec{p}, r) e^{-ipx} + a^+(\vec{p}, r) \varepsilon_\mu^*(\vec{p}, r) e^{ipx} \right\} \quad , \quad (1.68)$$

in cui  $\varepsilon_\mu(\vec{p}, r)$  descrive gli stati di polarizzazione. Il caso di particelle con massa nulla e spin unitario verrà trattato nei prossimi capitoli.

• **Campo vettoriale complesso.** Similmente al caso di particelle cariche di spin nullo, anche per particelle con spin unitario e carica (elettrica) non banale è utile introdurre un campo vettoriale complesso  $U_\mu(x)$

$$U_\mu(x) = \sum_{r=1}^3 \int \frac{d^3p}{(2\pi)^{3/2}} \frac{1}{\sqrt{2E(\vec{p})}} \left\{ a_{(+)}(\vec{p}, r) \varepsilon_\mu(\vec{p}, r) e^{-ipx} + a_{(-)}^+(\vec{p}, r) \varepsilon_\mu^*(\vec{p}, r) e^{ipx} \right\} \quad , \quad (1.69)$$

$$U_\mu^*(x) = \sum_{r=1}^3 \int \frac{d^3p}{(2\pi)^{3/2}} \frac{1}{\sqrt{2E(\vec{p})}} \left\{ a_{(+)}^+(\vec{p}, r) \varepsilon_\mu^*(\vec{p}, r) e^{ipx} + a_{(-)}(\vec{p}, r) \varepsilon_\mu(\vec{p}, r) e^{-ipx} \right\} \quad , \quad (1.70)$$

in cui  $a_{(+)}(\vec{p}, r)$  e  $a_{(+)}^+(\vec{p}, r)$  sono gli operatori di annichilazione e di creazione per una particella con carica (elettrica) positiva, mentre i corrispondenti operatori per l'antiparticella sono  $a_{(-)}(\vec{p}, r)$  e  $a_{(-)}^+(\vec{p}, r)$ .

**1E. Decadimento particella scalare.** Per illustrare l'uso degli operatori di campo nella descrizione delle interazioni tra le particelle, consideriamo il decadimento a due corpi di una particella. Supponiamo di avere tre particelle scalari (senza spin) diverse tra loro e di massa  $m_1$ ,  $m_2$  ed  $m_3$ ; il processo che vogliamo studiare è il decadimento descritto schematicamente da

$$m_1 \rightarrow m_2 + m_3 \quad .$$

Denotiamo con  $\varphi_i(x)$ , dove  $i = 1, 2, 3$ , gli operatori di campo scalari associati alle tre particelle e supponiamo che l'Hamiltoniana di interazione  $V_I(t)$  sia data dalla seguente espressione

$$V_I(t) = g \int d^3x \varphi_1(x) \varphi_2(x) \varphi_3(x) \quad . \quad (1.71)$$

Il parametro  $g$  che appare nella (1.71) è la **costante di accoppiamento** che determina, nel caso particolare che stiamo considerando, l'intensità della interazione tra le particelle. Utilizzando le unità di misura naturali  $\hbar = c = 1$ ,  $g$  deve avere le dimensioni di una massa. Facendo uno sviluppo di Taylor in potenze di  $g$  della matrice- $S$  e limitandoci al primo ordine nella costante di accoppiamento si ottiene

$$S = \text{T exp} \left( -i \int_{-\infty}^{+\infty} dt V_I(t) \right) = 1 - ig \int d^4x \varphi_1(x) \varphi_2(x) \varphi_3(x) + \text{O}(g^2) \quad . \quad (1.72)$$

Prima di procedere al calcolo della probabilità di decadimento, è utile discutere la normalizzazione dei vettori di stato. Il vettore  $|\vec{p}\rangle = a^+(\vec{p})|0\rangle$ , che descrive uno stato di singola particella, ha norma

$$\langle \vec{p} | \vec{p} \rangle = \int \frac{d^3x}{(2\pi)^3} e^{-i\vec{p}\vec{x}} e^{i\vec{p}\vec{x}} = \delta^3(0) = \frac{V}{(2\pi)^3} \quad , \quad (1.73)$$

dove  $V$  rappresenta il volume spaziale. Quindi il vettore  $|\vec{p}\rangle_N$ , che è normalizzato in modo tale da descrivere una particella per volume  $V$ , è dato da

$$|\vec{p}\rangle_N = \frac{(2\pi)^{3/2}}{V^{1/2}} |\vec{p}\rangle = \frac{(2\pi)^{3/2}}{V^{1/2}} a^+(\vec{p})|0\rangle \quad . \quad (1.74)$$

Ricordiamo inoltre che la densità di stati per singola particella vale

$$\frac{V}{(2\pi)^3} d^3p \quad . \quad (1.75)$$

Denotiamo con  $k_1$  il quadrimpulso della particella che decade e con  $k_2$  e  $k_3$  i quadrimpulsi delle particelle prodotte. In accordo con la normalizzazione (1.74), i vettori normalizzati corrispondenti agli stati iniziale e finale sono

$$|\vec{k}_1\rangle_N = \frac{(2\pi)^{3/2}}{V^{1/2}} a_1^\dagger(\vec{k}_1) |0\rangle \quad , \quad (1.76)$$

$${}_N\langle \vec{k}_2, \vec{k}_3 | = \frac{(2\pi)^3}{V} \langle 0 | a_2(\vec{k}_2) a_3(\vec{k}_3) \quad . \quad (1.77)$$

Pertanto l'ampiezza di decadimento  $A(k_2, k_3; k_1)$ , al primo ordine nella costante di accoppiamento, risulta essere

$$\begin{aligned} A(k_2, k_3; k_1) &= {}_N\langle \vec{k}_2, \vec{k}_3 | S | \vec{k}_1 \rangle_N = -i g \frac{(2\pi)^{9/2}}{V^{3/2}} \int d^4x \langle \vec{k}_2, \vec{k}_3 | \varphi_1(x) \varphi_2(x) \varphi_3(x) | \vec{k}_1 \rangle \\ &= -i g \frac{(2\pi)^{9/2}}{V^{3/2}} \int d^4x \langle 0 | a_2(\vec{k}_2) a_3(\vec{k}_3) \varphi_1(x) \varphi_2(x) \varphi_3(x) a_1^\dagger(\vec{k}_1) | 0 \rangle \quad . \end{aligned} \quad (1.78)$$

Utilizzando la forma esplicita (1.60) dell'operatore di campo scalare e le regole di commutazione degli operatori di annichilazione e di creazione, si ottiene

$$A(k_2, k_3; k_1) = -i \frac{g}{V^{3/2}} (2\pi)^4 \delta^4(k_1 - k_2 - k_3) \frac{1}{\sqrt{2E_1} \sqrt{2E_2} \sqrt{2E_3}} \quad . \quad (1.79)$$

La probabilità di transizione è data dal modulo quadro dell'ampiezza. Ricordiamo che vale la seguente relazione

$$\left[ (2\pi)^4 \delta^4(k_1 - k_2 - k_3) \right]^2 = (2\pi)^4 \delta^4(k_1 - k_2 - k_3) (2\pi)^4 \delta^4(0) = (2\pi)^4 \delta^4(k_1 - k_2 - k_3) V T \quad , \quad (1.80)$$

dove  $V T$  denota il quadrivolume (volume spaziale per intervallo temporale). La somma sugli stati finali del modulo quadro dell'ampiezza va effettuata rispetto alla misura (1.75); quindi

• **la probabilità di decadimento  $d\Gamma$  per unità di tempo**, nel sistema di riposo della particella che decade, assume la forma

$$\begin{aligned} d\Gamma &= \frac{1}{T} |A(k_2, k_3; k_1)|^2 \frac{V^2}{(2\pi)^6} d^3k_2 d^3k_3 \\ &= (2\pi)^4 \delta(m_1 - E_2 - E_3) \delta^3(\vec{k}_2 + \vec{k}_3) \frac{g^2}{2m_1} \frac{d^3k_2}{(2\pi)^3 2E_2} \frac{d^3k_3}{(2\pi)^3 2E_3} \quad . \end{aligned} \quad (1.81)$$

Integrando la (1.81) nello spazio delle fasi delle due particelle prodotte nel decadimento si ricava

$$\Gamma = \int d\Gamma = \frac{g^2}{32\pi^2 m_1} \int \frac{d^3k_2}{E_2 E_3} \delta(m_1 - E_2 - E_3) \quad . \quad (1.82)$$

Sia  $\vec{k}$  il valore dell'impulso della particella di massa  $m_2$  prodotta nel decadimento. Naturalmente, la conservazione dell'impulso implica che  $-\vec{k}$  è il valore dell'impulso della particella di massa  $m_3$  prodotta nel decadimento. La funzione delta di conservazione dell'energia si può esprimere come

$$\delta(m_1 - E_2 - E_3) = \frac{E_2 E_3}{m_1 |\vec{k}|} \delta(|\vec{k}_2| - |\vec{k}|) \quad , \quad (1.83)$$

per cui l'espressione (1.82) conduce al risultato finale [2]

$$\Gamma = \frac{g^2 |\vec{k}|}{8 \pi m_1^2} \quad , \quad (1.84)$$

dove  $|\vec{k}|$  è il modulo dell'impulso di uno dei prodotti di decadimento

$$|\vec{k}| = \frac{1}{2m_1} \left( m_1^4 + m_2^4 + m_3^4 - 2m_1^2 m_2^2 - 2m_1^2 m_3^2 - 2m_2^2 m_3^2 \right)^{1/2} \quad . \quad (1.85)$$

## Capitolo 2

### Principio d'azione

Il formalismo Lagrangiano basato sul principio di minima azione è particolarmente utile per descrivere la corrispondenza tra le leggi di conservazione e le proprietà di simmetria di un sistema dinamico. Il funzionale d'azione ha un ruolo fondamentale in meccanica quantistica; esso permette di interpretare [5] il comportamento quantistico della materia in termini del principio di sovrapposizione. In questo capitolo verrà introdotto il formalismo Lagrangiano per le teorie di campo. Le proprietà cinematiche dei campi saranno messe in corrispondenza con le proprietà delle Lagrangiane libere e si illustrerà il metodo della quantizzazione canonica. Infine, si presenterà una dimostrazione del teorema di Noether.

• **Campi.** Un campo  $\Phi(x)$  è caratterizzato dalla legge di trasformazione che specifica come esso viene modificato per effetto di un cambiamento del sistema di coordinate. Per trasformazioni del gruppo di Poincaré, le coordinate trasformano come

$$x^\mu \rightarrow x'^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu x^\nu + a^\mu \quad , \quad (2.1)$$

dove  $\{a^\mu\}$  sono i parametri di traslazione e  $\Lambda^\mu{}_\nu$  è la matrice che rappresenta una trasformazione di Lorentz. Un campo  $\Phi(x)$  ha in genere varie componenti che saranno denotate con  $\{\Phi_\alpha(x)\}$ . Per effetto della trasformazione (2.1), il campo viene modificato nel modo seguente

$$\Phi(x) \rightarrow \Phi'(x') \quad , \quad (2.2)$$

dove

$$\Phi'_\alpha(x') = R(\Lambda)_\alpha{}^\beta \Phi_\beta(x(x')) \quad , \quad x^\mu(x') = [\Lambda^{-1}]^\mu{}_\nu (x'^\nu - a^\nu) \quad , \quad (2.3)$$

e le matrici  $\{R(\Lambda)_\alpha{}^\beta\}$  corrispondono ad una rappresentazione lineare (generalmente di dimensione finita) del gruppo di Lorentz. Le componenti irriducibili di questa rappresentazione descrivono le componenti irriducibili dei campi. Per esempio, un campo scalare  $\varphi(x)$  trasforma come

$$\varphi(x) \rightarrow \varphi'(x') = \varphi(x(x')) \quad , \quad (2.4)$$

mentre per un campo vettoriale  $B_\mu(x)$  si ha

$$B_\mu(x) \rightarrow B'_\mu(x') = \Lambda_\mu{}^\nu B_\nu(x(x')) \quad . \quad (2.5)$$

• **Quantizzazione.** Nel processo di quantizzazione in meccanica quantistica, alla coordinata classica  $x$  corrisponde l'operatore posizione  $q$ . Similmente in teoria quantistica dei campi, ai campi classici corrispondono gli operatori di campo e le coordinate spazio-temporali  $x^\mu$  rappresentano semplicemente degli indici da cui gli operatori di campo dipendono. Il passaggio da campi classici ad operatori di campo

può essere interpretato come effetto di una procedura di quantizzazione. Se questa procedura è basata sul formalismo Lagrangiano essa è detta canonica. Le derivate della Lagrangiana rispetto alle derivate temporali delle variabili definiscono i corrispondenti momenti coniugati; la procedura di quantizzazione consiste semplicemente nell'imporre le usuali regole di commutazione canoniche tra le variabili dinamiche ed i loro momenti coniugati. Un esempio di quantizzazione canonica verrà discusso in Sezione 2A. La cosiddetta "quantizzazione canonica" rappresenta solamente un metodo per introdurre e definire la teoria quantistica e non ha un significato intrinseco assoluto.

Gli operatori di campo che sono stati introdotti nel Capitolo 1 sono definiti in rappresentazione di interazione e si riferiscono a particelle libere. Questi operatori di campo si possono ottenere mediante quantizzazione canonica da campi classici le cui Lagrangiane sono dette *Lagrangiane libere*. Le proprietà delle componenti irriducibili dei campi sono determinate dalla struttura delle corrispondenti Lagrangiane libere, che verranno descritte nelle sezioni seguenti.

**2A. Campo scalare reale.** L'azione libera per un campo scalare reale di massa  $m$  è data dalla seguente espressione

$$S_0 = \int d^4x \frac{1}{2} \left( \partial_\mu \varphi(x) \partial^\mu \varphi(x) - m^2 \varphi^2(x) \right) \quad , \quad (2.6)$$

e le corrispondenti equazioni del moto sono

$$\left( \partial^\mu \partial_\mu + m^2 \right) \varphi(x) = 0 \quad . \quad (2.7)$$

• **Quantizzazione canonica.** La quantizzazione canonica del sistema classico definito dall'azione (2.6) permette di determinare la forma esplicita (1.60) dell'operatore di campo. Infatti, il campo reale classico  $\varphi(x)$  si può scrivere come

$$\varphi(x) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^{3/2}} e^{i\vec{p}\cdot\vec{x}} \tilde{\varphi}(t; \vec{p}) \quad , \quad \text{con} \quad \tilde{\varphi}^*(t; \vec{p}) = \tilde{\varphi}(t; -\vec{p}) \quad . \quad (2.8)$$

Ponendo

$$\tilde{\varphi}(t; \vec{p}) = u(t; \vec{p}) - i v(t; \vec{p}) \quad , \quad (2.9)$$

in cui le funzioni reali  $u$  e  $v$  soddisfano

$$u(t; \vec{p}) = u(t; -\vec{p}) \quad , \quad v(t; \vec{p}) = -v(t; -\vec{p}) \quad , \quad (2.10)$$

l'azione (2.6) assume la forma

$$S_0 = \int dt d^3p \frac{1}{2} \left( \dot{u}^2(t; \vec{p}) - (|\vec{p}|^2 + m^2) u^2(t; \vec{p}) + \dot{v}^2(t; \vec{p}) - (|\vec{p}|^2 + m^2) v^2(t; \vec{p}) \right) \quad . \quad (2.11)$$

Utilizzando le componenti  $u$  e  $v$  che verificano le condizioni (2.10), è possibile definire una funzione reale  $X$  che non è soggetta a nessun vincolo

$$X(t; \vec{p}) = u(t; \vec{p}) + v(t; \vec{p}) \quad , \quad (2.12)$$

e la (2.11) si può riscrivere come

$$S_0 = \int dt \int d^3p \frac{1}{2} \left( \dot{X}^2(t; \vec{p}) - (|\vec{p}|^2 + m^2) X^2(t; \vec{p}) \right) . \quad (2.13)$$

Ricordiamo che per un oscillatore armonico di frequenza  $\omega$ , l'azione è

$$S_{\text{osc}} = \int dt \frac{1}{2} \left( \dot{x}^2(t) - \omega^2 x^2(t) \right) . \quad (2.14)$$

Confrontando le espressioni (2.13) e (2.14) risulta evidente che, a ciascun modo del campo con impulso  $\vec{p}$ , è associato un oscillatore armonico di frequenza  $\omega(\vec{p}) = \sqrt{|\vec{p}|^2 + m^2}$ ; questa frequenza coincide con l'energia  $E(\vec{p})$  di una particella di massa  $m$  ed impulso  $\vec{p}$ . La quantizzazione canonica di questi oscillatori armonici riproduce quindi la struttura dello spazio di Fock introdotto nel Capitolo 1. Siano  $a(\vec{p})$  e  $a^+(\vec{p})$  gli operatori di annichilazione e di creazione per l'oscillatore armonico associato al valore  $\vec{p}$  dell'impulso, si ha

$$a(t; \vec{p}) = e^{-iEt} a(\vec{p}) \quad , \quad a^+(t; \vec{p}) = e^{iEt} a^+(\vec{p}) . \quad (2.15)$$

Le ampiezze  $u$  e  $v$  degli oscillatori, interpretate come operatori Hermitiani, si possono esprimere in funzione degli operatori  $a$  ed  $a^+$ . Si noti che la dipendenza di  $u$  e  $v$  da  $a$  ed  $a^+$  non è univoca. Questo è in accordo col fatto che, per un oscillatore armonico unidimensionale, la dipendenza dell'operatore posizione  $q$  da  $a$  ed  $a^+$  non è univoca. Infatti, indicando con  $p$  e  $q$  le variabili canonicamente coniugate di un oscillatore, si può porre

$$a = \frac{i}{\sqrt{2\omega}} p + \sqrt{\frac{\omega}{2}} q \quad , \quad a^+ = \frac{-i}{\sqrt{2\omega}} p + \sqrt{\frac{\omega}{2}} q \quad ; \quad (2.16)$$

in questo caso si ha

$$q = \frac{1}{\sqrt{2\omega}} (a + a^+) . \quad (2.17)$$

Oppure, si può definire

$$a = \frac{1}{\sqrt{2\omega}} p - i \sqrt{\frac{\omega}{2}} q \quad , \quad a^+ = \frac{1}{\sqrt{2\omega}} p + i \sqrt{\frac{\omega}{2}} q \quad ; \quad (2.18)$$

da cui risulta che

$$q = i \frac{1}{\sqrt{2\omega}} (a - a^+) . \quad (2.19)$$

La condizione di realtà per  $\varphi(x)$  è espressa dalle relazioni (2.10) per le componenti  $u$  e  $v$ . Siccome le ampiezze  $u$  e  $v$  sono indipendenti, possiamo usare per  $u$  la relazione (2.17) mentre per  $v$  possiamo utilizzare la relazione (2.19). Questa scelta permette di rappresentare in maniera semplice la condizione di hermiticità dell'operatore di campo  $\varphi(x)$ . Poniamo quindi

$$u(t; \vec{p}) = \frac{1}{\sqrt{2E}} \frac{1}{2} \left( a(t; \vec{p}) + a(t; -\vec{p}) + a^+(t; \vec{p}) + a^+(t; -\vec{p}) \right) , \quad (2.20)$$

$$v(t; \vec{p}) = \frac{i}{\sqrt{2E}} \frac{1}{2} (a(t; \vec{p}) - a(t; -\vec{p}) - a^+(t; \vec{p}) + a^+(t; -\vec{p})) \quad . \quad (2.21)$$

Sostituendo gli operatori (2.20) e (2.21) nella (2.8), si ottiene la forma (1.60) dell'operatore di campo

$$\varphi(x) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^{3/2}} \frac{1}{\sqrt{2E(\vec{p})}} \left\{ a(\vec{p}) e^{-ipx} + a^+(\vec{p}) e^{ipx} \right\} \quad . \quad (2.22)$$

La costruzione che è stata illustrata nel caso di un campo scalare reale si può ripetere per tutti i vari tipi di campo. In generale, le Lagrangiane libere sono *quadratiche* nei campi; le *soluzioni classiche* delle corrispondenti equazioni del moto rappresentano le *funzioni d'onda* che moltiplicano gli operatori di annichilazione e di creazione che appaiono nell'espressione degli operatori di campo.

• **Leggi di conservazione.** Il formalismo Lagrangiano è utile perché rende manifesto il legame tra le leggi di conservazione e le proprietà di invarianza del funzionale d'azione. Infatti, utilizzando il teorema di Noether, per ogni trasformazione che lascia invariante l'azione si può determinare [1] una corrispondente carica conservata. La validità del teorema di Noether non è limitata al caso di Lagrangiane libere ma si estende anche al caso generale di Lagrangiane che descrivono interazioni tra i campi. Una semplice dimostrazione del teorema di Noether verrà presentata in Sezione 2F.

Nel caso di un campo scalare reale, il funzionale (2.6) è invariante per una traslazione infinitesima nello spazio-tempo,  $x^\mu \rightarrow x^\mu + \delta x^\mu = x^\mu + \epsilon^\mu$ , che corrisponde alle seguente variazione del campo

$$\delta \varphi(x) = -\epsilon^\mu \partial_\mu \varphi(x) \quad . \quad (2.23)$$

L'invarianza dell'azione implica che il tensore energia momento  $\theta^{\mu\nu}$  ha divergenza nulla

$$\partial_\mu \theta^{\mu\nu} = 0 \quad , \quad (2.24)$$

$$\theta^{\mu\nu}(x) = \partial^\mu \varphi(x) \partial^\nu \varphi(x) - \frac{1}{2} g^{\mu\nu} \left( \partial_\sigma \varphi(x) \partial^\sigma \varphi(x) - m^2 \varphi^2(x) \right) \quad . \quad (2.25)$$

Le corrispondenti cariche conservate si ottengono integrando su una ipersuperficie di tipo spaziale le componenti temporali  $\theta^{0\mu}(x)$

$$P^\mu = \int d^3x \theta^{0\mu}(x) \quad . \quad (2.26)$$

Gli operatori  $P^\mu$  sono i generatori delle traslazioni spazio-temporali nello spazio degli stati ed i loro autovalori corrispondono ai valori del quadrimpulso totale. In effetti, sostituendo nella (2.26) la forma esplicita (2.22) dell'operatore di campo, si ottiene

$$P^\mu = \frac{1}{2} \int d^3p p^\mu \left\{ a(\vec{p}) a^+(\vec{p}) + a^+(\vec{p}) a(\vec{p}) \right\} \quad . \quad (2.27)$$

Utilizzando le regole di commutazione, la (2.27) si può scrivere

$$P^\mu = \int d^3p p^\mu \left\{ a^+(\vec{p}) a(\vec{p}) \right\} + \text{costante} \quad . \quad (2.28)$$

Nel caso dell'operatore  $P^0$ , il valore della costante additiva che appare nella (2.28) è divergente e corrisponde all'energia dello stato di vuoto. Questa energia risulta infinita perché corrisponde alla somma di tutte le energie degli stati fondamentali degli oscillatori armonici associati ai vari modi del campo. Fortunatamente, la presenza di questa divergenza nell'espressione (2.28) non ha conseguenze fisiche osservabili; infatti, le quantità che si misurano sono solamente le differenze di energie tra i vari stati e queste differenze sono finite. Siccome il valore dell'energia è sempre definito a meno di una costante additiva, si può convenire di porre uguale a zero l'energia del vuoto; questo equivale ad eliminare la costante che appare nella (2.28).

La presenza di costanti additive divergenti nelle espressioni delle varie cariche conservate è un fenomeno frequente in teorie di campo; queste divergenze non corrispondono a quantità osservabili e non hanno pertanto alcun significato fisico. In genere, si conviene di normalizzare le varie quantità in modo tale da rendere nulli i loro valori medi sul vuoto. Questa convenzione equivale ad introdurre, nelle varie espressioni degli operatori, l'**ordinamento normale** secondo il quale gli operatori di creazione delle particelle devono apparire a sinistra degli operatori di annichilazione.

L'invarianza dell'azione (2.6) per trasformazioni di Lorentz infinitesime implica

$$\partial_\sigma \mathcal{M}^\sigma_{\mu\nu} = 0 \quad , \quad (2.29)$$

dove il tensore del momento angolare orbitale  $\mathcal{M}^\sigma_{\mu\nu}$  è dato da

$$\mathcal{M}^\sigma_{\mu\nu} = \partial^\sigma \varphi (x_\nu \partial_\mu \varphi - x_\mu \partial_\nu \varphi) + \frac{1}{2} (\delta^\sigma_\nu x_\mu - \delta^\sigma_\mu x_\nu) (\partial_\tau \varphi \partial^\tau \varphi - m^2 \varphi^2) \quad . \quad (2.30)$$

Conseguentemente, gli operatori  $M_{\mu\nu}$  che rappresentano i generatori delle trasformazioni di Lorentz nello spazio degli stati sono

$$M_{\mu\nu} = \int d^3x \mathcal{M}^0_{\mu\nu} \quad . \quad (2.31)$$

• **Dimensione canonica del campo scalare.** Utilizzando le notazioni naturali in cui  $\hbar = 1$ , l'azione deve essere adimensionale. Per compensare il volume di integrazione, la densità Lagrangiana deve avere le dimensioni di una massa alla quarta potenza. La densità Lagrangiana (2.6) è quadratica nei campi ed ogni termine Lagrangiano contiene esplicitamente un fattore con le dimensioni di una massa al quadrato: il termine  $m^2$  oppure le due derivate che agiscono sui campi. Quindi, il campo scalare  $\varphi(x)$  deve avere dimensione di una massa. L'espressione (2.22) è in accordo con questa conclusione. Infatti, gli operatori di annichilazione e di creazione, che verificano le regole di commutazione  $[a(\vec{p}), a^\dagger(\vec{q})] = \delta^3(\vec{p}-\vec{q})$ , hanno dimensione di una massa elevata alla potenza  $-3/2$ . Quindi la dimensione di  $\varphi(x)$ , che si ottiene dalla formula (2.22), in unità di massa vale  $3 - 1/2 - 3/2 = 1$ .

**2B. Campo scalare complesso.** L'azione libera per un campo scalare complesso di massa  $m$  è data dalla seguente espressione

$$S_0 = \int d^4x \left( \partial_\mu \phi^*(x) \partial^\mu \phi(x) - m^2 \phi^*(x) \phi(x) \right) \quad , \quad (2.32)$$

e le corrispondenti equazioni del moto sono

$$\left( \partial^\mu \partial_\mu + m^2 \right) \phi(x) = 0 = \left( \partial^\mu \partial_\mu + m^2 \right) \phi^*(x) \quad . \quad (2.33)$$

Mediante quantizzazione canonica si determina la forma operatoriale del campo scalare complesso

$$\phi(x) = \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^{3/2}} \frac{1}{\sqrt{2E(\vec{p})}} \left\{ a_{(+)}(\vec{p}) e^{-ipx} + a_{(-)}^+(\vec{p}) e^{ipx} \right\} \quad , \quad (2.34)$$

$$\phi^*(x) = \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^{3/2}} \frac{1}{\sqrt{2E(\vec{p})}} \left\{ a_{(+)}^+(\vec{p}) e^{ipx} + a_{(-)}(\vec{p}) e^{-ipx} \right\} \quad . \quad (2.35)$$

• **Simmetria interna.** Oltre alle usuali proprietà di invarianza per trasformazioni del gruppo di Poincaré, l'azione (2.32) è invariante per le seguenti trasformazioni dei campi

$$\phi(x) \rightarrow \phi^\theta(x) = e^{i\theta} \phi(x) \quad , \quad \phi^*(x) \rightarrow \phi^{*\theta}(x) = e^{-i\theta} \phi^*(x) \quad . \quad (2.36)$$

Nelle equazioni (2.36),  $\theta$  è un parametro reale che assume i valori  $0 \leq \theta < 2\pi$ . Le trasformazioni (2.36) formano un gruppo Abeliano che è isomorfo ad  $U(1) \simeq SO(2)$ ; poiché queste trasformazioni commutano con le trasformazioni del gruppo di Poincaré, il corrispondente gruppo  $U(1)$  rappresenta un gruppo interno di trasformazioni di simmetria. In accordo col teorema di Noether, l'invarianza dell'azione per trasformazioni (2.36) implica

$$\partial_\mu J^\mu(x) = 0 \quad , \quad (2.37)$$

dove

$$J^\mu(x) = i \left( \phi^*(x) \partial^\mu \phi(x) - \partial^\mu \phi^*(x) \phi(x) \right) \quad . \quad (2.38)$$

Integrando la componente temporale della corrente conservata  $J^\mu$ , si ottiene la carica

$$\begin{aligned} Q &= \int d^3 x J^0(x) = i \int d^3 x \left( \phi^*(x) \partial^0 \phi(x) - \partial^0 \phi^*(x) \phi(x) \right) \\ &= \int d^3 p \left\{ a_{(+)}^+(\vec{p}) a_{(+)}(\vec{p}) - a_{(-)}(\vec{p}) a_{(-)}^+(\vec{p}) \right\} \quad . \end{aligned} \quad (2.39)$$

L'operatore di carica  $Q$  è il generatore delle trasformazioni  $U(1)$  nello spazio degli stati. Infatti, utilizzando le regole di commutazione degli operatori di annichilazione e di creazione, è facile verificare che

$$\delta \phi(x) = i\theta \phi(x) = -i\theta [Q, \phi(x)] \quad , \quad \delta \phi^*(x) = -i\theta \phi^*(x) = -i\theta [Q, \phi^*(x)] \quad . \quad (2.40)$$

**2C. Campo vettoriale massivo.** L'azione libera per un campo vettoriale reale  $B_\mu(x)$  di massa  $m$  è data dalla seguente espressione

$$S_0 = \int d^4 x \left( -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + \frac{m^2}{2} B_\mu B^\mu \right) \quad , \quad (2.41)$$

dove

$$F_{\mu\nu}(x) = \partial_\mu B_\nu(x) - \partial_\nu B_\mu(x) \quad . \quad (2.42)$$

Il campo reale  $B_\mu$ , che è soggetto al vincolo  $\partial^\mu B_\mu = 0$ , soddisfa le equazioni del moto

$$\left( \partial^\nu \partial_\nu + m^2 \right) B_\mu(x) = 0 \quad . \quad (2.43)$$

Il vincolo  $\partial^\mu B_\mu = 0$  assicura che le componenti di  $B_\mu$  sono irriducibili e implica che gli stati di polarizzazione per una singola particella sono trasversi  $p^\mu \varepsilon_\mu(r; \vec{p}) = 0$ . Se questo vincolo non è soddisfatto, allora  $B_\mu$  si può sempre decomporre come  $B_\mu = C_\mu + \partial_\mu \varphi$ , dove  $\varphi$  è un campo scalare e  $C_\mu$  soddisfa il vincolo  $\partial^\mu C_\mu = 0$ . L'operatore di campo  $B_\mu(x)$  assume la forma

$$B_\mu(x) = \sum_{r=1}^3 \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^{3/2}} \frac{1}{\sqrt{2E(\vec{p})}} \left\{ a(\vec{p}, r) \varepsilon_\mu(\vec{p}, r) e^{-ipx} + a^+(\vec{p}, r) \varepsilon_\mu^*(\vec{p}, r) e^{ipx} \right\} \quad . \quad (2.44)$$

• **Stati di polarizzazione.** Siano  $\vec{p} = (p^1, p^2, p^3)$  le componenti dell'impulso spaziale, allora gli stati di polarizzazione rettilinea  $\varepsilon_\mu(r; \vec{p})$  (con  $r = 1, 2, 3$ ) sono dati da

$$\varepsilon_0(r; \vec{p}) = -\frac{p^r}{m} \quad , \quad \varepsilon_i(r; \vec{p}) = \delta_{ir} + \frac{p^i p^r}{m(m + E(\vec{p}))} \quad . \quad (2.45)$$

Per qualunque scelta della base nello spazio delle polarizzazioni, le funzioni di polarizzazione soddisfano le relazioni

$$p^\mu \varepsilon_\mu(r; \vec{p}) = 0 \quad , \quad \sum_{r=1}^3 \varepsilon_\mu^*(r; \vec{p}) \varepsilon_\nu(r; \vec{p}) = - \left( g_{\mu\nu} - \frac{p_\mu p_\nu}{m^2} \right) \quad . \quad (2.46)$$

Le componenti  $U_\mu(x)$  e  $U_\mu^*(x)$  di un campo vettoriale complesso massivo si possono sempre interpretare come combinazioni lineari di due campi vettoriali reali massivi

$$U_\mu(x) = \frac{1}{\sqrt{2}} \left( B_\mu^{(1)}(x) + i B_\mu^{(2)}(x) \right) \quad , \quad U_\mu^*(x) = \frac{1}{\sqrt{2}} \left( B_\mu^{(1)}(x) - i B_\mu^{(2)}(x) \right) \quad . \quad (2.47)$$

In questo caso gli operatori di campo sono

$$U_\mu(x) = \sum_{r=1}^3 \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^{3/2}} \frac{1}{\sqrt{2E(\vec{p})}} \left\{ a_{(+)}(\vec{p}, r) \varepsilon_\mu(\vec{p}, r) e^{-ipx} + a_{(-)}^+(\vec{p}, r) \varepsilon_\mu^*(\vec{p}, r) e^{ipx} \right\} \quad , \quad (2.48)$$

$$U_\mu^*(x) = \sum_{r=1}^3 \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^{3/2}} \frac{1}{\sqrt{2E(\vec{p})}} \left\{ a_{(+)}^+(\vec{p}, r) \varepsilon_\mu^*(\vec{p}, r) e^{ipx} + a_{(-)}(\vec{p}, r) \varepsilon_\mu(\vec{p}, r) e^{-ipx} \right\} \quad . \quad (2.49)$$

Le proprietà cinematiche di un campo vettoriale per trasformazioni del gruppo di Poincaré si possono ricavare facilmente dalla forma della Lagrangiana.

**2D. Campo vettoriale reale di massa nulla.** L'azione libera per un campo vettoriale reale  $A_\mu(x)$  di massa nulla è data dalla seguente espressione

$$S_0 = \int d^4x \left( -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} \right) = -\frac{1}{4} \int d^4x (\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu) (\partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu) \quad , \quad (2.50)$$

e le corrispondenti equazioni del moto sono

$$\partial_\nu \partial^\nu A_\mu(x) - \partial_\mu \partial^\nu A_\nu(x) = 0 \quad . \quad (2.51)$$

In natura si osserva che un campo vettoriale reale di massa nulla descrive le proprietà dei campi elettrici e magnetici; per questo motivo, il campo  $A_\mu(x)$  può essere identificato con il potenziale vettore dell'elettromagnetismo. L'azione (2.50) è invariante per **trasformazioni di gauge**

$$A_\mu(x) \rightarrow A'_\mu(x) = A_\mu(x) - \partial_\mu \Lambda(x) \quad , \quad (2.52)$$

dove  $\Lambda(x)$  è un campo scalare arbitrario. L'invarianza per trasformazioni di gauge (2.52) (e le loro generalizzazioni non-Abeliane) ha un ruolo fondamentale in natura. La prima conseguenza dell'invarianza di gauge è che il campo  $A_\mu(x)$  non rappresenta una variabile direttamente osservabile. Infatti, in elettromagnetismo si possono misurare i campi elettrici e magnetici ma non si può determinare sperimentalmente il valore del potenziale vettore in maniera univoca. I campi elettrici e magnetici rappresentano le componenti della **curvatura**  $F_{\mu\nu}$ ,

$$F_{\mu\nu}(x) = \partial_\mu A_\nu(x) - \partial_\nu A_\mu(x) \quad . \quad (2.53)$$

La curvatura  $F_{\mu\nu}$  è una quantità gauge-invariante mentre il campo  $A_\mu$  non è gauge-invariante; in generale, le osservabili delle teorie di gauge devono essere quantità gauge-invarianti.

• **Nota.** Invece di utilizzare il campo vettore  $A_\mu$  per descrivere le leggi dell'elettromagnetismo, sembrerebbe più opportuno usare esclusivamente variabili gauge-invarianti. Sfortunatamente, risulta impossibile dare una formulazione locale e relativisticamente covariante dell'elettromagnetismo usando solamente variabili gauge-invarianti. Per questo motivo, è conveniente utilizzare campi che non sono gauge-invarianti. Questo è il tipico esempio di un fenomeno che si osserva frequentemente in natura. Molto spesso i processi elementari tra le particelle ammettono una descrizione semplice in termini di certi campi fondamentali; questi campi non necessariamente rappresentano quantità direttamente osservabili. Le osservabili risultano essere opportune funzioni dei campi fondamentali.

Siccome le trasformazioni di gauge (2.52) coinvolgono solamente le componenti longitudinali del campo  $A_\mu$ , si potrebbe pensare di eliminare i gradi di libertà non fisici di  $A_\mu$  imponendo il vincolo di Lorentz  $\partial^\mu A_\mu = 0$ . A differenza del caso massivo, la condizione di Lorentz  $\partial^\mu A_\mu = 0$  non può [1] essere utilizzata per eliminare tutte le polarizzazioni non fisiche perché il quadrimpulso  $p^\mu$  soddisfa  $p^\mu p_\mu = 0$ . In altri termini, la rappresentazione del gruppo di Poincaré, che è definita sugli stati ad una particella vettoriale di massa nulla, risulta riducibile ma non decomponibile. La condizione di Lorentz  $\partial^\mu A_\mu = 0$  si può imporre solamente in forma debole sugli stati del sistema. In questo senso, sugli stati del sistema le equazioni del moto diventano

$$\partial_\nu \partial^\nu A_\mu(x) = 0 \quad . \quad (2.54)$$

• **Polarizzazioni rettilinee.** Siano gli stati di polarizzazione descritti da  $\varepsilon_\mu^{(\nu)}(\vec{p})$  al variare di  $\nu = 0, 1, 2, 3$ . Di questi stati, solo  $\varepsilon_\mu^{(1)}(\vec{p})$  e  $\varepsilon_\mu^{(2)}(\vec{p})$  corrispondono alle due polarizzazioni fisiche del fotone. Le rimanenti componenti non fisiche vanno tenute per mantenere la covarianza manifesta e la località ma non hanno nessuna influenza sulla dinamica dei fotoni. Nella base delle polarizzazioni rettilinee, le funzioni di polarizzazione si possono prendere reali e le loro componenti sono

(i) per  $\nu = 0$

$$\varepsilon_\mu^{(0)}(\vec{p}) = (1, 0, 0, 0) \quad ; \quad (2.55)$$

(ii) mentre per  $\nu = j = 1, 2, 3$  si ha

$$\varepsilon_0^{(j)}(\vec{p}) = 0 \quad , \quad \varepsilon_i^{(3)}(\vec{p}) = \frac{p_i}{|\vec{p}|} \quad , \quad (2.56)$$

$$\sum_{i=1}^3 \varepsilon_i^{(j)}(\vec{p}) \varepsilon_i^{(k)}(\vec{p}) = \delta_{jk} \quad , \quad \sum_{ij} \varepsilon^{ijk} \varepsilon_i^{(m)}(\vec{p}) \varepsilon_j^{(n)}(\vec{p}) = \varepsilon^{mnq} \varepsilon_k^{(q)}(\vec{p}) \quad . \quad (2.57)$$

L'operatore di campo assume la forma

$$A_\mu(x) = \sum_{\nu=0}^3 \int \frac{d^3p}{(2\pi)^{3/2}} \frac{1}{\sqrt{2|\vec{p}|}} \left\{ a_\nu(\vec{p}) \varepsilon_\mu^{(\nu)}(\vec{p}) e^{-ipx} + a_\nu^\dagger(\vec{p}) \varepsilon_\mu^{(\nu)*}(\vec{p}) e^{ipx} \right\} \quad , \quad (2.58)$$

dove gli operatori di annichilazione e di creazione soddisfano le regole di commutazione

$$[a_\mu(\vec{p}), a_\nu^\dagger(\vec{q})] = -g_{\mu\nu} \delta^3(\vec{p} - \vec{q}) \quad , \quad [a_\mu(\vec{p}), a_\nu(\vec{q})] = 0 = [a_\mu^\dagger(\vec{p}), a_\nu^\dagger(\vec{q})] \quad . \quad (2.59)$$

**2E. Campo spinoriale massivo.** L'azione libera per un campo spinoriale massivo  $\psi_\alpha(x)$  è

$$S_0 = \int d^4x \bar{\psi}_\alpha(x) \left( i \gamma_{\alpha\beta}^\mu \partial_\mu - m \delta_{\alpha\beta} \right) \psi_\beta(x) = \int d^4x \bar{\psi}(x) \left( i \gamma^\mu \partial_\mu - m \right) \psi(x) \quad , \quad (2.60)$$

in cui

$$\bar{\psi}_\alpha(x) = \psi_\beta^\dagger(x) \gamma_{\beta\alpha}^0 \quad , \quad (2.61)$$

e le matrici di Dirac  $\{\gamma^\mu\}$  soddisfano  $\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2g^{\mu\nu}$ . Le equazioni del moto che seguono dalla (2.60) sono

$$(i \gamma^\mu \partial_\mu - m) \psi(x) = 0 \quad . \quad (2.62)$$

L'indice spinoriale  $\alpha$  assume i valori  $\alpha = 1, 2, 3, 4$  e le matrici  $\{\gamma^\mu\}$  sono quindi matrici  $4 \times 4$ . Una rappresentazione esplicita delle matrici di Dirac è quella utilizzata da Bjorken e Drell [3,4]

$$\gamma^0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \quad , \quad \gamma^i = \begin{bmatrix} 0 & \sigma^i \\ -\sigma^i & 0 \end{bmatrix} \quad , \quad (2.63)$$

dove le matrici di Pauli  $\{\sigma^i\}$  sono

$$\sigma^1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad , \quad \sigma^2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \quad , \quad \sigma^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad . \quad (2.64)$$

• **Covarianza relativistica.** Consideriamo una trasformazione di Lorentz  $x \rightarrow x' = \Lambda x$  in cui la matrice  $\Lambda$  è data da  $\Lambda(\omega) = \exp(\frac{i}{2} \omega_{\mu\nu} J^{\mu\nu})$ . Il campo spinoriale trasforma come

$$\psi(x) \rightarrow \psi'(x') = R(\omega) \psi(\Lambda^{-1} x') \quad , \quad (2.65)$$

dove

$$R(\omega) = \exp\left(\frac{i}{4} \omega_{\mu\nu} \Sigma^{\mu\nu}\right) \quad , \quad \Sigma^{\mu\nu} = \frac{i}{2} [\gamma^\mu, \gamma^\nu] \quad . \quad (2.66)$$

La covarianza relativistica dell'equazione di Dirac (2.62) è garantita dalla relazione

$$R^{-1}(\omega) \gamma^\mu R(\omega) = \Lambda^\mu{}_\nu \gamma^\nu \quad . \quad (2.67)$$

Le matrici  $\{R(\omega)\}$  forniscono una rappresentazione di dimensione quattro del gruppo di Lorentz e verificano

$$R^{-1}(\omega) = \gamma^0 R^+(\omega) \gamma^0 \quad . \quad (2.68)$$

• **Polarizzazioni.** Una particella di spin 1/2 possiede due stati di polarizzazione; questi stati sono descritti da due spinori  $u_\alpha(\vec{p}, r)$ , in cui  $r = 1, 2$ , che soddisfano

$$(\hat{p} - m) u(\vec{p}, r) = 0 \quad , \quad \bar{u}(\vec{p}, r) (\hat{p} - m) = 0 \quad , \quad (2.69)$$

dove  $\hat{p} = \gamma^\mu p_\mu$ . Gli stati di polarizzazione per l'antiparticella sono denotati con  $\bar{v}_\alpha(\vec{p}, r)$  e si ha

$$(\hat{p} + m) v(\vec{p}, r) = 0 \quad , \quad \bar{v}(\vec{p}, r) (\hat{p} + m) = 0 \quad , \quad (2.70)$$

Le **relazioni di ortogonalità** assumono la forma

$$\bar{u}(\vec{p}, r) u(\vec{p}, s) = \delta_{rs} = -\bar{v}(\vec{p}, r) v(\vec{p}, s) \quad , \quad (2.71)$$

$$u^+(\vec{p}, r) u(\vec{p}, s) = \frac{E(\vec{p})}{m} \delta_{rs} = v^+(\vec{p}, r) v(\vec{p}, s) \quad , \quad (2.72)$$

$$\bar{v}(\vec{p}, r) u(\vec{p}, s) = \bar{u}(\vec{p}, r) v(\vec{p}, s) = 0 = v^+(\vec{p}, r) u(-\vec{p}, s) = u^+(\vec{p}, s) v(-\vec{p}, r) \quad ; \quad (2.73)$$

e le **relazioni di completezza** sono

$$\sum_{r=1}^2 (u_\alpha(\vec{p}, r) \bar{u}_\beta(\vec{p}, r) - v_\alpha(\vec{p}, r) \bar{v}_\beta(\vec{p}, r)) = \delta_{\alpha\beta} \quad , \quad (2.74)$$

$$\sum_{r=1}^2 (u_\alpha(\vec{p}, r) \bar{u}_\beta(\vec{p}, r)) = \left(\frac{\hat{p} + m}{2m}\right)_{\alpha\beta} \quad , \quad \sum_{r=1}^2 (v_\alpha(\vec{p}, r) \bar{v}_\beta(\vec{p}, r)) = \left(\frac{\hat{p} - m}{2m}\right)_{\alpha\beta} \quad . \quad (2.75)$$

Gli operatori di annichilazione e di creazione per una particella sono  $b(\vec{p}, r)$  e  $b^+(\vec{p}, r)$ , mentre i corrispondenti operatori per una antiparticella sono  $d(\vec{p}, r)$  e  $d^+(\vec{p}, r)$ . L'operatore di campo vale

$$\psi(x) = \sum_{r=1}^2 \int \frac{d^3p}{(2\pi)^{3/2}} \sqrt{\frac{m}{E(\vec{p})}} \left\{ b(\vec{p}, r) u(\vec{p}, r) e^{-ipx} + d^+(\vec{p}, r) v(\vec{p}, r) e^{ipx} \right\} \quad , \quad (2.76)$$

$$\bar{\psi}(x) = \sum_{r=1}^2 \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^{3/2}} \sqrt{\frac{m}{E(\vec{p})}} \left\{ b^+(\vec{p}, r) \bar{u}(\vec{p}, r) e^{ipx} + d(\vec{p}, r) \bar{v}(\vec{p}, r) e^{-ipx} \right\} . \quad (2.77)$$

Il tensore energia momento  $\theta^{\mu\nu}$  risulta essere

$$\theta^{\mu\nu}(x) = i \bar{\psi}(x) \gamma^\mu \partial^\nu \psi(x) . \quad (2.78)$$

Conseguentemente, le componenti dell'operatore impulso  $P^\mu$  sono date da

$$P^\mu = \int d^3 x \theta^{0\mu}(x) = \int d^3 x \psi^+(x) (i \partial^\mu) \psi(x) . \quad (2.79)$$

Utilizzando la forma esplicita dell'operatore di campo e le relazioni di ortogonalità per gli spinori, si ottiene

$$P^\mu = \sum_{r=1}^2 \int d^3 p p^\mu (b^+(\vec{p}, r) b(\vec{p}, r) - d(\vec{p}, r) d^+(\vec{p}, r)) . \quad (2.80)$$

Il tensore del momento angolare totale

$$\mathcal{M}^{\mu\nu\lambda}(x) = i \bar{\psi}(x) \gamma^\mu \left( x^\nu \partial^\lambda - x^\lambda \partial^\nu + \frac{1}{4} [\gamma^\nu, \gamma^\lambda] \right) \psi(x) \quad (2.81)$$

è la somma di due contributi; la parte orbitale e la parte dovuta allo spin intrinseco del campo. I generatori delle rotazioni spaziali nello spazio degli stati, per esempio, assumono la forma

$$M_i = \frac{1}{2} \epsilon_{ijk} \int d^3 x \mathcal{M}^{0jk}(x) = \int d^3 x \psi^+(x) \left( i \epsilon_{ijk} x^j \partial^k + \frac{1}{2} \sigma^i \right) \psi(x) = L_i + S_i . \quad (2.82)$$

• **Simmetria interna.** L'azione (2.60) è invariante per trasformazioni del gruppo  $U(1)$  definite da

$$\psi(x) \rightarrow \psi^\theta(x) = e^{i\theta} \psi(x) , \quad \bar{\psi}(x) \rightarrow \bar{\psi}^\theta(x) = e^{-i\theta} \bar{\psi}(x) , \quad (2.83)$$

dove  $\theta$  è un parametro reale. La corrispondente corrente conservata è

$$J^\mu(x) = \bar{\psi}(x) \gamma^\mu \psi(x) , \quad (2.84)$$

e l'operatore di carica risulta essere

$$Q = \int d^3 x J^0(x) = \sum_{r=1}^2 \int d^3 p (b^+(\vec{p}, r) b(\vec{p}, r) + d(\vec{p}, r) d^+(\vec{p}, r)) . \quad (2.85)$$

• **Algebra delle matrici di Dirac.** Consideriamo ora alcune proprietà [3] delle matrici  $\{\gamma^\mu\}$ . Definendo

$$\gamma^5 = \gamma_5 = i \gamma^0 \gamma^1 \gamma^2 \gamma^3 , \quad (2.86)$$

si ottiene

$$\{\gamma^5, \gamma^\mu\} = 0 , \quad [\gamma^5, \Sigma_{\mu\nu}] = 0 , \quad \text{Tr}(\gamma^5) = 0 . \quad (2.87)$$

Utilizzando le notazioni  $\widehat{p} = \gamma^\mu p_\mu$ ,  $p \cdot q = p^\mu q_\mu$ , valgono le seguenti relazioni

$$\begin{aligned} \widehat{p}\widehat{q} &= p \cdot q - i \Sigma_{\mu\nu} p^\mu q^\nu & , & & \gamma_\mu \widehat{p} \gamma^\mu &= -2\widehat{p} & , \\ \gamma_\mu \widehat{p} \widehat{q} \widehat{k} \gamma^\mu &= -2\widehat{k} \widehat{q} \widehat{p} & , & & \gamma_\mu \widehat{p} \widehat{q} \gamma^\mu &= 4p \cdot q & . \end{aligned} \quad (2.88)$$

La traccia di un numero dispari di matrici- $\gamma$  si annulla; inoltre

$$\begin{aligned} \text{Tr} \gamma^5 \widehat{p} \widehat{q} &= 0 & , & & \text{Tr} \widehat{p} \widehat{q} &= 4p \cdot q & , \\ \text{Tr} \gamma^5 \widehat{p} \widehat{q} \widehat{k} \widehat{\ell} &= 4i \epsilon_{\mu\nu\rho\sigma} p^\mu q^\nu k^\rho \ell^\sigma & , & & & & (2.89) \\ \text{Tr} \widehat{p} \widehat{q} \widehat{k} \widehat{\ell} &= 4(p \cdot q k \cdot \ell - p \cdot k q \cdot \ell + p \cdot \ell q \cdot k) & . & & & & \end{aligned}$$

Ogni base nello spazio lineare delle matrici  $4 \times 4$  deve contenere 16 elementi; una base particolare è la seguente

$$\{ \mathbb{1} , \gamma_5 , \gamma_\mu , \gamma_\mu \gamma_5 , \Sigma_{\mu\nu} \} . \quad (2.90)$$

• **Bilineari covarianti.** I bilineari covarianti sono i campi composti che si ottengono utilizzando i campi  $\overline{\psi}(x)$  e  $\psi(x)$ ; questi campi composti e le loro proprietà di trasformazione sono

$$\begin{aligned} \overline{\psi}(x) \psi(x) &\sim \text{scalare} & , & & \overline{\psi}(x) \gamma_5 \psi(x) &\sim \text{pseudo - scalare} & , \\ \overline{\psi}(x) \gamma_\mu \psi(x) &\sim \text{vettore} & , & & \overline{\psi}(x) \gamma_\mu \gamma_5 \psi(x) &\sim \text{vettore assiale} & , \\ \overline{\psi}(x) \Sigma_{\mu\nu} \psi(x) &\sim \text{tensore} & . & & & & (2.91) \end{aligned}$$

Le proprietà dei campi per trasformazioni discrete (come la parità) verranno discusse nel Capitolo 3. In unità naturali, il campo spinoriale  $\psi(x)$  deve avere dimensione canonica di una massa elevata alla potenza  $3/2$ . In effetti, gli operatori di annichilazione e di creazione hanno dimensione di una massa elevata alla potenza  $-3/2$  mentre gli spinori  $u_\alpha$  e  $v_\alpha$  che descrivono gli stati di polarizzazione sono adimensionali. Quindi, utilizzando la forma esplicita (2.76) dell'operatore di campo, risulta che  $\psi(x)$  ha le dimensioni di una massa elevata alla potenza  $3 - 3/2 = 3/2$ .

**2F. Aspetti generali del formalismo Lagrangiano.** Il formalismo Lagrangiano è utile per descrivere non solamente le proprietà cinematiche delle particelle ma anche la loro dinamica. Per tener conto delle interazioni tra le particelle elementari, occorre modificare le Lagrangiane libere descritte nelle sezioni precedenti. Questa sezione contiene alcune definizioni generali e la dimostrazione del teorema di Noether.

• **Teoria di campo.** Un modello di teoria di campo è un sistema fisico le cui variabili sono descritte da un insieme di campi che saranno denotati semplicemente con  $\Phi(x)$ . Generalmente si assume che la dinamica sia locale e relativisticamente covariante. Per un modello Lagrangiano, la dinamica è descritta dall'azione  $S$  che è un funzionale dei campi,  $S = S[\Phi]$ . Il principio di azione stazionaria determina le equazioni del moto

$$\frac{\delta S[\Phi]}{\delta \Phi(x)} = 0 \quad , \quad (\text{equazioni del moto}) \quad . \quad (2.92)$$

La **località** della dinamica significa che le equazioni del moto (2.92) sono locali, cioè coinvolgono i campi definiti in un solo punto  $\Phi(x)$  e le loro derivate di ordine finito. Ad eccezione di alcuni casi piuttosto particolari, la località implica che l'azione ha la forma

$$S = \int d^4x \mathcal{L}(x) = \int d^4x \mathcal{L}(\Phi(x)) \quad , \quad (2.93)$$

in cui la densità Lagrangiana  $\mathcal{L}(x)$  è una funzione locale dei campi e delle loro derivate di ordine finito. In molte situazioni,  $\mathcal{L}(x)$  è un polinomio dei campi e delle loro derivate prime. Nel derivare le equazioni del moto (2.92), generalmente si assume che i campi tendano a zero all'infinito in maniera sufficientemente rapida in modo tale che qualunque derivata parziale si possa integrare per parti. *L'aspetto fondamentale del principio d'azione è la dipendenza funzionale di  $S$  dai campi.* La **covarianza relativistica** significa che le equazioni del moto (2.92) sono covarianti per trasformazioni del gruppo di Poincaré. Questo implica che la densità Lagrangiana  $\mathcal{L}(x)$  deve essere uno scalare per trasformazioni di Lorentz.

In teoria dei campi si distinguono solitamente due aspetti; quello classico e quello quantistico. Inizialmente l'azione è definita per campi classici. Successivamente, utilizzando la quantizzazione canonica, si costruiscono gli operatori di campo in rappresentazione di interazione e si cerca di definire la teoria quantistica. Questo modo di procedere non ha un significato intrinseco assoluto ma può risultare conveniente. *Non tutte le teorie classiche di campo ammettono una versione quantistica consistente.* In molti casi, la teoria quantistica viene costruita utilizzando la teoria delle perturbazioni. I modelli che ammettono uno sviluppo perturbativo consistente a livello quantistico, ed in cui tutte le ampiezze di transizione sono funzioni di un numero finito di parametri, sono chiamati modelli rinormalizzabili.

• **Lagrangiana di interazione.** Per studiare la dinamica del sistema mediante gli operatori di campo in rappresentazione di interazione, occorre scomporre l'azione nella somma di due termini

$$S = S_0 + S_I = \int d^4x \mathcal{L}_0(x) + \int d^4x \mathcal{L}_I(x) \quad . \quad (2.94)$$

L'azione  $S_0$  è la somma delle Lagrangiane libere per le singole componenti dei campi. L'azione libera  $S_0$  è quadratica nei campi e, come abbiamo visto negli esempi precedenti, determina le proprietà degli operatori di campo in rappresentazione di interazione. La parte rimanente della Lagrangiana  $\mathcal{L}_I(x)$  è chiamata la Lagrangiana di interazione. Generalmente,  $\mathcal{L}_I(x)$  è un polinomio nei campi e descrive i processi di interazione tra le particelle.

• Utilizzando la Lagrangiana libera  $\mathcal{L}_0(x)$ , si definiscono gli operatori di campo e si introducono gli operatori di annichilazione e di creazione delle particelle.

• La Lagrangiana di interazione  $\mathcal{L}_I(x)$ , intesa come funzione degli operatori di campo in rappresentazione di interazione, si utilizza per calcolare le ampiezze di transizione nei vari processi tra le particelle.

• **Matrice-S.** Nel precedente capitolo, la matrice-S è stata definita mediante l'Hamiltoniana di interazione. Per mantenere manifesta la covarianza relativistica, tuttavia, risulta conveniente utilizzare la Lagrangiana di interazione per definire la matrice-S. In effetti, avendo introdotto gli operatori di campo

in rappresentazione di interazione mediante gli operatori di annichilazione e di creazione delle particelle, la matrice- $S$  assume la forma

$$\text{matrice-}S = U(+\infty, -\infty) = \text{T exp} \left( +i \int_{-\infty}^{+\infty} d^4x \mathcal{L}_I(x) \right) . \quad (2.95)$$

• **Simmetrie.** In teoria dei campi le variabili dinamiche sono rappresentate dai campi  $\Phi(x)$ . Conseguentemente, tutte le trasformazioni di simmetria si possono esprimere esclusivamente in termini di modificazioni dei campi. Si consideri per esempio una trasformazione infinitesima

$$\Phi(x) \rightarrow \Phi(x) + \theta \Delta\Phi(x) , \quad (2.96)$$

in cui  $\Delta\Phi(x)$  è una funzione locale dei campi e delle loro derivate di ordine finito ed il parametro infinitesimo  $\theta$  è una **variabile globale**, ovvero  $\theta$  non dipende dalle coordinate  $x^\mu$  dei punti dello spazio-tempo.

**Teorema di Noether.** *Se il funzionale d'azione  $S[\Phi]$  è invariante per le trasformazioni (2.96) solo nel caso in cui  $\theta$  sia una variabile globale, allora tra le variabili del sistema esiste una corrente conservata  $J^\mu(x)$ ,*

$$\partial_\mu J^\mu(x) = 0 . \quad (2.97)$$

*La corrente  $J^\mu(x)$  è un campo locale che è funzione degli operatori di campo  $\Phi(x)$  e delle loro derivate; inoltre,  $J^\mu(x)$  è un campo vettoriale rispetto all'indice  $\mu$ .*

**Dimostrazione.** L'affermazione che il funzionale d'azione è invariante per le trasformazioni (2.96) significa che, senza far uso delle equazioni del moto, lo sviluppo di  $S[\Phi + \theta\Delta\Phi]$  in potenze di  $\theta$  non contiene il termine lineare in  $\theta$

$$S[\Phi + \theta\Delta\Phi] = S[\Phi] + \text{O}(\theta^2) . \quad (2.98)$$

Come al solito, nella derivazione della (2.98) si assume che i campi tendano a zero all'infinito in maniera sufficientemente rapida in modo tale che qualunque derivata parziale si possa integrare per parti. Si consideri ora una *nuova trasformazione* dei campi che si ottiene dalla (2.96) sostituendo il parametro globale  $\theta$  con una funzione arbitraria  $\theta(x)$  delle coordinate dello spazio-tempo

$$\Phi(x) \rightarrow \Phi(x) + \theta(x) \Delta\Phi(x) . \quad (2.99)$$

Al primo ordine in  $\theta(x)$ , la variazione dell'azione vale

$$\Delta S = \int d^4x \theta(x) \Delta\Phi(x) \frac{\delta S}{\delta\Phi(x)} , \quad (2.100)$$

e si ha  $\Delta S \neq 0$  per ipotesi. Si consideri il calcolo esplicito di  $\Delta S$ ; se si trascurassero tutte le derivate che agiscono sulla funzione  $\theta(x)$  allora, in accordo con l'equazione (2.98), si otterrebbe il risultato

nullo  $\Delta S = 0$ . Questo significa che  $\Delta S$  deve dipendere dalle derivate della funzione  $\theta(x)$ . In effetti, almeno una derivata deve agire sulla funzione  $\theta(x)$ ; se compaiono derivate di ordine superiore al primo, esse possono essere integrate per parti fino a lasciare una sola derivata su  $\theta(x)$ . Pertanto,  $\Delta S$  assume necessariamente la forma seguente

$$\Delta S = - \int d^4x \partial_\mu \theta(x) J^\mu(x) = \int d^4x \theta(x) \partial_\mu J^\mu(x) \quad , \quad (2.101)$$

dove  $J^\mu(x)$  è una funzione locale dei campi  $\Phi(x)$  e delle loro derivate. Per covarianza relativistica,  $J^\mu(x)$  deve trasformarsi come un campo vettoriale rispetto all'indice  $\mu$ .

Le variabili del sistema quantistico sono definite tramite gli operatori di campo  $\Phi(x)$  che soddisfano le equazioni del moto. Quando valgono le equazioni del moto (2.92), l'equazione (2.100) mostra che la quantità  $\Delta S$  deve annullarsi per qualunque scelta della funzione  $\theta(x)$ . D'altra parte,  $\Delta S$  è data dall'espressione (2.101); pertanto, quando valgono le equazioni del moto, la corrente  $J^\mu(x)$  è conservata. Questo conclude la dimostrazione. ■

• **Carica conservata.** La carica globale  $Q$ , che è associata alla corrente definita dal teorema di Noether, si ottiene integrando nello spazio la componente temporale della corrente

$$Q = \int d^3x J^0(x) \quad , \quad (2.102)$$

e rappresenta una quantità conservata. Il segno della corrente, che appare nell'equazione (2.101), è stato scelto in modo tale che l'operatore  $Q$  sia il generatore delle trasformazioni (2.96) sui campi,

$$-i [Q, \Phi(x)] = \Delta \Phi(x) \quad . \quad (2.103)$$

• **Esempi di correnti conservate.** Per illustrare il teorema di Noether, consideriamo alcuni esempi. L'azione libera (2.6) per un campo scalare reale è invariante per trasformazioni

$$\varphi(x) \rightarrow \varphi(x) + \epsilon^\nu \partial_\nu \varphi(x) \quad , \quad (2.104)$$

dove  $\epsilon^\nu$  sono quattro parametri globali infinitesimi della trasformazione. Promuovendo  $\epsilon^\nu$  a parametri locali, la variazione dell'azione, al primo ordine in  $\epsilon^\nu$ , risulta essere

$$\Delta S_0 = \int d^4x \epsilon^\nu \partial_\mu \left\{ \partial^\mu \varphi \partial_\nu \varphi - \frac{1}{2} \delta_\nu^\mu \left( \partial_\sigma \varphi \partial^\sigma \varphi - m^2 \varphi^2 \right) \right\} \quad , \quad (2.105)$$

da cui si ottiene l'espressione (2.25) del tensore energia-impulso.

L'azione libera (2.32) per un campo scalare complesso è invariante per trasformazioni infinitesime

$$\phi(x) \rightarrow \phi(x) + i\theta \phi(x) \quad , \quad \phi^*(x) \rightarrow \phi^*(x) - i\theta \phi^*(x) \quad . \quad (2.106)$$

Sostituendo il parametro globale  $\theta$  con una funzione arbitraria  $\theta(x)$ , si ottiene

$$\Delta S_0 = i \int d^4x \theta \partial_\mu \{ \phi^* \partial^\mu \phi - \partial^\mu \phi^* \phi \} \quad , \quad (2.107)$$

in cui si riconosce la forma della corrente (2.38).

Consideriamo infine un modello di teoria di campo definito in termini di  $N$  campi scalari reali  $\{ \varphi_i(x) \}$  in cui  $i = 1, 2, 3, \dots, N$ . Supponiamo che l'azione abbia la forma seguente

$$S = \int d^4x \left\{ \frac{1}{2} \partial^\mu \varphi_i(x) \partial_\mu \varphi_i(x) - V(\varphi_i(x) \varphi_i(x)) \right\} \quad , \quad (2.108)$$

dove la somma sugli indici ripetuti è sottintesa e  $V$  è una funzione arbitraria nell'argomento  $\varphi_i \varphi_i = \sum_i \varphi_i \varphi_i$ . Il funzionale (2.108) è invariante per trasformazioni

$$\varphi_i(x) \rightarrow \varphi'_i(x) = O_{ij} \varphi_j(x) \quad , \quad (2.109)$$

dove  $O_{ij}$  è una matrice ortogonale  $N \times N$ . Le trasformazioni continue di questo tipo che sono connesse all'identità formano il gruppo  $SO(N)$ . Se indichiamo con  $\{ T^a \}$  i generatori del gruppo  $SO(N)$  in cui l'indice  $a$  assume i valori  $a = 1, 2, 3, \dots, N(N-1)/2$ , le trasformazioni infinitesime dei campi sono

$$\varphi_j(x) \rightarrow \varphi_j(x) + i \theta_a [T^a]_{jk} \varphi_k(x) \quad , \quad (2.110)$$

dove  $\{ \theta_a \}$  denotano i parametri del gruppo. Le corrispondenti correnti conservate risultano essere

$$J_\mu^a(x) = -i \partial_\mu \varphi_j(x) [T^a]_{jk} \varphi_k(x) \quad . \quad (2.111)$$

## Capitolo 3

### Fermioni chirali

Le particelle di spin  $1/2$  sono descritte da campi spinoriali; per molte di queste particelle il valore della massa è non nullo ed i corrispondenti operatori di campo sono campi spinoriali massivi. In natura esistono anche particelle con spin  $1/2$  e con massa nulla; queste particelle sono i neutrini. In questo capitolo verranno costruiti gli operatori di campo che corrispondono a particelle di massa nulla con spin  $1/2$  e si studieranno le proprietà di simmetria degli stati con chiralità definita. Verranno introdotti gli spinori di Weyl, che corrispondono a spinori con chiralità definita, e si produrrà la decomposizione degli spinori di Dirac in termini di spinori di Weyl. Verranno quindi considerate le simmetrie discrete che corrispondono alle operazioni di inversione spaziale, di inversione temporale e di coniugazione di carica. *Gli stati descritti dagli spinori a chiralità definita hanno un ruolo fondamentale in natura; essi intervengono in maniera essenziale nella struttura delle interazioni elettrodeboli e nella interpretazione delle simmetrie dinamiche delle interazioni forti.*

**3A. Gruppo di Lorentz.** Le trasformazioni del gruppo di Lorentz proprio  $SO(3, 1)^+$  comprendono le rotazioni spaziali e i boost che descrivono le trasformazioni delle coordinate nel passaggio tra due sistemi di riferimento in moto relativo uniforme. Le matrici di Lorentz si possono parametrizzare nel modo seguente

$$\Lambda = \exp \left[ \frac{i}{2} \omega_{\mu\nu} J^{\mu\nu} \right] \quad , \quad (3.1)$$

dove  $\{\omega_{\mu\nu}\}$  sono variabili reali e le sei matrici  $\{J^{\mu\nu} = -J^{\nu\mu}\}$  sono i generatori del gruppo,

$$J^{01} = \begin{pmatrix} 0 & i & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad , \quad J^{02} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad , \quad J^{03} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & i \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$J^{12} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i & 0 \\ 0 & i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad , \quad J^{31} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & i \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -i & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad , \quad J^{23} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & i & 0 \end{pmatrix}$$

Definendo i parametri  $\{\theta_a\}$  ed  $\{\eta_a\}$ , in cui  $a = 1, 2, 3$ , tramite le relazioni

$$\theta_a = \frac{1}{2} \epsilon_{abc} \omega_{bc} \quad , \quad \eta_a = \omega_{0a} \quad , \quad (3.2)$$

un generico elemento di  $SO(3, 1)^+$  si può scrivere come

$$\Lambda^\mu{}_\nu = \Lambda(\theta, \eta)^\mu{}_\nu = \left[ e^{i(\theta_a J^a + \eta_a K^a)} \right]^\mu{}_\nu \quad , \quad (3.3)$$

dove si è posto

$$J^a = \frac{1}{2} \epsilon^{abc} J^{bc} \quad , \quad K^a = J^{0a} \quad . \quad (3.4)$$

I generatori  $\{J^a, K^a\}$  del gruppo soddisfano le relazioni

$$[J^a, J^b] = i \epsilon_{abc} J^c \quad , \quad [J^a, K^b] = i \epsilon_{abc} K^c \quad , \quad [K^a, K^b] = -i \epsilon_{abc} J^c \quad . \quad (3.5)$$

Le rappresentazioni dell'algebra (3.5) forniscono le rappresentazioni dell'algebra di  $SL(2, C)$  che è il ricoprimento universale del gruppo di Lorentz. Introducendo le combinazioni

$$J_R^a = \frac{1}{2} (J^a - i K^a) \quad , \quad J_L^a = \frac{1}{2} (J^a + i K^a) \quad , \quad (3.6)$$

l'algebra (3.5) assume la forma seguente

$$[J_R^a, J_R^b] = i \epsilon_{abc} J_R^c \quad , \quad [J_L^a, J_L^b] = i \epsilon_{abc} J_L^c \quad , \quad [J_R^a, J_L^b] = 0 \quad , \quad (3.7)$$

in cui gli operatori  $\{J_R^a\}$  e  $\{J_L^a\}$  sono Hermitiani. La (3.7) mostra che l'algebra di  $SL(2, C)$  è la somma diretta di due algebre semplici ciascuna delle quali è isomorfa all'algebra di  $SU(2)$ . Le rappresentazioni unitarie irriducibili di  $SU(2)$  si possono classificare per mezzo del valore dello spin  $j$  che determina la dimensione  $d$  della rappresentazione tramite la relazione  $d = 2j + 1$ . Le rappresentazioni irriducibili di dimensione finita dell'algebra di  $SL(2, C)$  si possono quindi classificare per mezzo di una coppia ordinata di numeri interi o seminteri  $(m, n)$ , che si riferiscono rispettivamente alle rappresentazioni di  $\{J_R^a\}$  e di  $\{J_L^a\}$ .

• **Rappresentazioni chirali fondamentali.** La rappresentazione  $(1/2, 0)$  è data da

$$J_R^a = \frac{1}{2} \sigma^a \quad , \quad J_L^a = 0 \quad \text{rappr. } (1/2, 0) \quad , \quad (3.8)$$

da cui segue che

$$J^a = \frac{1}{2} \sigma^a \quad , \quad K^a = \frac{i}{2} \sigma^a \quad \text{rappr. } (1/2, 0) \quad . \quad (3.9)$$

Mentre la rappresentazione  $(0, 1/2)$  è data da

$$J_R^a = 0 \quad , \quad J_L^a = \frac{1}{2} \sigma^a \quad \text{rappr. } (0, 1/2) \quad , \quad (3.10)$$

da cui si ottiene

$$J^a = \frac{1}{2} \sigma^a \quad , \quad K^a = -\frac{i}{2} \sigma^a \quad \text{rappr. } (0, 1/2) \quad . \quad (3.11)$$

Le matrici che rappresentano gli elementi del gruppo nelle rappresentazioni  $(1/2, 0)$  e  $(0, 1/2)$  sono quindi

$$R_{(1/2,0)} = \exp \left( \frac{i}{2} \theta_a \sigma^a - \frac{1}{2} \eta_a \sigma^a \right) \quad , \quad R_{(0,1/2)} = \exp \left( \frac{i}{2} \theta_a \sigma^a + \frac{1}{2} \eta_a \sigma^a \right) \quad . \quad (3.12)$$

I tre parametri reali  $\{\theta_a\}$  si riferiscono al sottogruppo delle rotazioni nello spazio, mentre i tre parametri reali  $\{\eta_a\}$  rappresentano le rapidità associate ai boost.

• **Spinori chirali.** I vettori bidimensionali su cui agiscono le due rappresentazioni chirali fondamentali di  $SL(2, C)$  sono chiamati spinori di Weyl. Lo spinore con chiralità positiva  $\xi$ , chiamato anche spinore destrorso o **spinore right**, trasforma come

$$\xi \rightarrow \xi' = R_{(1/2,0)} \xi = \exp\left(\frac{i}{2}\theta_a \sigma^a - \frac{1}{2}\eta_a \sigma^a\right) \xi \quad . \quad (3.13)$$

Mentre lo spinore con chiralità negativa  $\chi$ , chiamato anche spinore sinistrorso o **spinore left**, trasforma come

$$\chi \rightarrow \chi' = R_{(0,1/2)} \chi = \exp\left(\frac{i}{2}\theta_a \sigma^a + \frac{1}{2}\eta_a \sigma^a\right) \chi \quad . \quad (3.14)$$

Se gli spinori  $\xi$  e  $\chi$  sono dei campi, cioè dipendono dalle coordinate  $x$  dei punti dello spazio-tempo, le leggi di trasformazione coinvolgono le componenti degli spinori, come mostrato in equazioni (3.13) e (3.14), e contemporaneamente la dipendenza funzionale dalle coordinate. Tutte le rappresentazioni irriducibili dell'algebra di  $SU(2)$  si ottengono decomponendo il prodotto tensore di varie rappresentazioni fondamentali ( $j = 1/2$ ). Similmente, tutte le rappresentazioni finito dimensionali di  $SL(2, C)$  sono contenute [2] nei vari prodotti tensoriali delle rappresentazioni  $(1/2, 0)$  e  $(0, 1/2)$ .

• **Proprietà di coniugazione.** Consideriamo ora le connessioni esistenti tra le rappresentazioni  $(1/2, 0)$  e  $(0, 1/2)$ . La trasformazione di **parità** corrisponde a modificare il verso degli assi cartesiani spaziali; quindi, posto  $x^\mu = (x^0, x^i)$ , per trasformazione di parità si ha

$$x^0 \rightarrow x^0 \quad , \quad x^i \rightarrow -x^i \quad . \quad (3.15)$$

In accordo con la (3.15), i generatori del gruppo di Lorentz trasformano come

$$J^a \rightarrow J^a \quad , \quad K^a \rightarrow -K^a \quad . \quad (3.16)$$

Conseguentemente, la trasformazione di parità scambia tra loro le rappresentazioni  $(1/2, 0)$  e  $(0, 1/2)$ . Dati due spinori  $\xi$  e  $\chi$ , di cui il primo è uno spinore right ed il secondo è uno spinore left, la trasformazione di parità può essere realizzata nel modo seguente

$$\xi \rightarrow \chi \quad , \quad \chi \rightarrow \xi \quad . \quad (3.17)$$

Le matrici  $R_{(1/2,0)}$  e  $R_{(0,1/2)}$  verificano le relazioni

$$R_{(1/2,0)}^\dagger = R_{(0,1/2)}^{-1} \quad , \quad R_{(0,1/2)}^\dagger = R_{(1/2,0)}^{-1} \quad . \quad (3.18)$$

Pertanto, utilizzando gli spinori  $\xi$  e  $\chi$ , si possono formare gli scalari di Lorentz

$$\xi^\dagger \chi \quad , \quad \chi^\dagger \xi \quad . \quad (3.19)$$

Le matrici di Pauli (2.64) godono delle seguenti proprietà

$$\left(\sigma^1\right)^* = \sigma^1 \quad , \quad \left(\sigma^2\right)^* = -\sigma^2 \quad , \quad \left(\sigma^3\right)^* = \sigma^3 \quad . \quad (3.20)$$

Introducendo la matrice unitaria  $(i\sigma^2)$ ,

$$(i\sigma^2) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \quad , \quad (i\sigma^2)^{-1} = -(i\sigma^2) \quad , \quad (3.21)$$

si ottiene, per  $a = 1, 2, 3$ ,

$$(i\sigma^2) (\sigma^a)^* (i\sigma^2)^{-1} = -\sigma^a = (i\sigma^2)^{-1} (\sigma^a)^* (i\sigma^2) \quad , \quad (3.22)$$

da cui segue che

$$(i\sigma^2) R_{(1/2,0)}^* (i\sigma^2)^{-1} = R_{(0,1/2)} \quad , \quad (i\sigma^2) R_{(0,1/2)}^* (i\sigma^2)^{-1} = R_{(1/2,0)} \quad . \quad (3.23)$$

Le proprietà (3.23) implicano che, dato uno spinore right  $\xi$ , possiamo costruire uno spinore left, usualmente denotato con  $\xi^c$ ,

$$\xi^c = (-i\sigma^2)\xi^* = (i\sigma^2)^{-1}\xi^* \quad . \quad (3.24)$$

Similmente, dato uno spinore left  $\chi$ , possiamo costruire uno spinore right  $\chi^c$

$$\chi^c = (-i\sigma^2)\chi^* = (i\sigma^2)^{-1}\chi^* \quad . \quad (3.25)$$

Gli spinori  $\xi^c$  e  $\chi^c$  sono detti gli **spinori C-coniugati** di  $\xi$  e  $\chi$ . Siccome le equazioni (3.18) si possono riscrivere nella forma

$$R_{(1/2,0)}^T = \left(R_{(0,1/2)}^*\right)^{-1} \quad , \quad R_{(0,1/2)}^T = \left(R_{(1/2,0)}^*\right)^{-1} \quad , \quad (3.26)$$

è facile dimostrare che per mezzo degli spinori  $\xi$  e  $\chi$  si possono formare gli scalari di Lorentz

$$\xi^T (i\sigma^2)\xi \quad , \quad \chi^T (i\sigma^2)\chi \quad . \quad (3.27)$$

**3B. Spinori di Dirac e spinori di Weyl.** Uno spinore di Dirac  $\psi_\alpha$  possiede quattro componenti. Dimostriamo ora che  $\psi$  si decompone nella somma di due spinori di Weyl; più precisamente,  $\psi$  è somma di uno spinore right e di uno spinore left. Utilizzando la rappresentazione (2.63) delle matrici gamma, la matrice  $\gamma_5$  definita in equazione (2.86) assume la forma

$$\gamma_5 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = (\gamma_5)^\dagger \quad . \quad (3.28)$$

Si introducano i proiettori  $p_R$  e  $p_L$  tramite le relazioni

$$p_R = \frac{1 + \gamma_5}{2} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \quad , \quad p_L = \frac{1 - \gamma_5}{2} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \quad . \quad (3.29)$$

Dalla relazione di completezza

$$\mathbb{1} = p_R + p_L \quad , \quad (3.30)$$

segue che lo spinore  $\psi$  a quattro componenti si può decomporre nella somma di due spinori, ciascuno dei quali ha due componenti indipendenti,

$$\psi = \psi_R + \psi_L \quad , \quad (3.31)$$

dove si è posto

$$\psi_R = p_R \psi \quad , \quad \psi_L = p_L \psi \quad . \quad (3.32)$$

Utilizzando la forma esplicita dei proiettori, si ricava

$$\psi_R = \begin{bmatrix} \xi \\ \xi \end{bmatrix} \quad , \quad \psi_L = \begin{bmatrix} \chi \\ -\chi \end{bmatrix} \quad , \quad (3.33)$$

dove

$$\xi = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \psi_1 + \psi_3 \\ \psi_2 + \psi_4 \end{pmatrix} \quad , \quad \chi = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \psi_1 - \psi_3 \\ \psi_2 - \psi_4 \end{pmatrix} \quad . \quad (3.34)$$

Resta da dimostrare che gli spinori a due componenti  $\xi$  e  $\chi$ , dati in equazione (3.34), possiedono le giuste proprietà di trasformazione (3.13) e (3.14). L'azione di una trasformazione di Lorentz sulle componenti dello spinore di Dirac è mostrata in equazione (2.65). Per trasformazioni *infinitesime* si ottiene

$$\psi \rightarrow \psi' = \psi + \frac{i}{4} \omega_{\mu\nu} \Sigma^{\mu\nu} \psi \quad , \quad (3.35)$$

dove i generatori  $\{\Sigma^{\mu\nu}\}$  sono dati in equazione (2.66). Nella rappresentazione (2.63), si ha

$$\Sigma^{0a} = i \begin{bmatrix} 0 & \sigma^a \\ \sigma^a & 0 \end{bmatrix} \quad , \quad \Sigma^{ab} = \epsilon^{abc} \begin{bmatrix} \sigma^c & 0 \\ 0 & \sigma^c \end{bmatrix} \quad , \quad (3.36)$$

e quindi

$$\frac{i}{4} \omega_{\mu\nu} \Sigma^{\mu\nu} = \begin{bmatrix} i\theta_a \sigma^a / 2 & -\eta_a \sigma^a / 2 \\ -\eta_a \sigma^a / 2 & i\theta_a \sigma^a / 2 \end{bmatrix} \quad . \quad (3.37)$$

Pertanto, il calcolo esplicito della (3.35) conduce al risultato

$$\xi \rightarrow \xi' = \xi + \left( \frac{i}{2} \theta_a \sigma^a - \frac{1}{2} \eta_a \sigma^a \right) \xi \quad , \quad (3.38)$$

$$\chi \rightarrow \chi' = \chi + \left( \frac{i}{2} \theta_a \sigma^a + \frac{1}{2} \eta_a \sigma^a \right) \chi \quad . \quad (3.39)$$

Le equazioni (3.38) e (3.39) sono in accordo con le leggi di trasformazione (3.13) e (3.14) e mostrano che  $\xi$  è uno spinore right mentre  $\chi$  è uno spinore left. Usualmente, si dice che  $\psi_R$  rappresenta la componente right di  $\psi$  mentre  $\psi_L$  rappresenta la componente left; tali componenti corrispondono a stati fermionici con chiralità definita.

• **Massa e chiralità.** L'azione libera per uno spinore di Dirac massivo assume la forma

$$S_0 = \int d^4x \psi^\dagger \left( i \gamma^0 \gamma^\mu \partial_\mu - m \gamma^0 \right) \psi \quad . \quad (3.40)$$

Utilizzando le componenti right e left dello spinore  $\psi$  e ricordando che la matrice  $\gamma^5$  anticommute con le matrici gamma, si ottiene

$$S_0 = \int d^4x \left( \psi_R^\dagger i \gamma^0 \gamma^\mu \partial_\mu \psi_R + \psi_L^\dagger i \gamma^0 \gamma^\mu \partial_\mu \psi_L - m \psi_L^\dagger \gamma^0 \psi_R - m \psi_R^\dagger \gamma^0 \psi_L \right) \quad . \quad (3.41)$$

L'equazione (3.41) mostra che, nella Lagrangiana per uno spinore di Dirac libero, *il termine cinetico derivativo, che contiene le derivate del campo  $\psi$ , preserva la chiralità mentre il termine di massa di Dirac non preserva la chiralità.*

**3C. Rappresentazione chirale.** Per evidenziare le diverse componenti chirali dei fermioni, è conveniente introdurre una rappresentazione delle matrici gamma di Dirac in cui  $\gamma^5$  risulti diagonale. Questa nuova rappresentazione, che sarà chiamata la rappresentazione chirale, è definita da

$$\gamma^0 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad , \quad \gamma^i = \begin{bmatrix} 0 & -\sigma^i \\ \sigma^i & 0 \end{bmatrix} \quad , \quad (3.42)$$

dove  $\{\sigma^i\}$  sono le matrici di Pauli che verificano le relazioni

$$\{\sigma^i, \sigma^j\} = 2\delta^{ij} \quad , \quad [\sigma^i, \sigma^j] = 2i\epsilon^{ijk}\sigma^k \quad . \quad (3.43)$$

Nella rappresentazione (3.42) si ottiene

$$\gamma^5 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \quad , \quad (3.44)$$

e, conseguentemente, i proiettori sulle componenti right e left degli spinori di Dirac assumono la forma seguente

$$p_R = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad , \quad p_L = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad . \quad (3.45)$$

Lo spinore di Dirac  $\psi$  si decompone quindi nelle sue due componenti chirali secondo la relazione

$$\psi = \begin{pmatrix} \psi_R \\ \psi_L \end{pmatrix} \quad , \quad \psi^\dagger = \left( \psi_R^\dagger, \psi_L^\dagger \right) \quad . \quad (3.46)$$

Valgono inoltre le seguenti relazioni

$$\gamma^0 \gamma^\mu = \begin{bmatrix} \sigma^\mu & 0 \\ 0 & \bar{\sigma}^\mu \end{bmatrix} \quad , \quad (3.47)$$

in cui

$$\sigma^\mu = (1, \sigma^i) \quad , \quad \bar{\sigma}^\mu = (1, -\sigma^i) \quad . \quad (3.48)$$

L'azione per il fermione libero  $\psi$  assume la forma

$$S_0 = \int d^4x \left\{ \psi_R^\dagger i \sigma^\mu \partial_\mu \psi_R + \psi_L^\dagger i \bar{\sigma}^\mu \partial_\mu \psi_L - m \psi_L^\dagger \psi_R - m \psi_R^\dagger \psi_L \right\} \quad . \quad (3.49)$$

Utilizzando le definizioni (3.48) si ottiene

$$\frac{1}{2} (\bar{\sigma}^\mu \sigma^\nu + \bar{\sigma}^\nu \sigma^\mu) = g^{\mu\nu} = \frac{1}{2} (\sigma^\mu \bar{\sigma}^\nu + \sigma^\nu \bar{\sigma}^\mu) \quad , \quad (3.50)$$

$$\bar{\sigma}^\mu \sigma^\nu \bar{\sigma}_\mu = -2 \bar{\sigma}^\nu \quad , \quad \sigma^\mu \bar{\sigma}^\nu \sigma_\mu = -2 \sigma^\nu \quad . \quad (3.51)$$

Definendo

$$\sigma^{\mu\nu} = \frac{i}{2} (\bar{\sigma}^\mu \sigma^\nu - \bar{\sigma}^\nu \sigma^\mu) \quad , \quad \bar{\sigma}^{\mu\nu} = \frac{i}{2} (\sigma^\mu \bar{\sigma}^\nu - \sigma^\nu \bar{\sigma}^\mu) \quad , \quad (3.52)$$

si ricava

$$\sigma^{0j} = i \sigma^j \quad , \quad \bar{\sigma}^{0j} = -i \sigma^j \quad , \quad \sigma^{ij} = \epsilon^{ijk} \sigma^k = \bar{\sigma}^{ij} \quad . \quad (3.53)$$

Dalle equazioni (3.53) segue che

$$\bar{\sigma}^{\mu\nu} = -\frac{1}{2} \epsilon^{\mu\nu\tau\lambda} \sigma^{\tau\lambda} \quad . \quad (3.54)$$

Le seguenti relazioni ci saranno utili in seguito

$$\text{tr} (\bar{\sigma}^\mu \sigma^\nu) = 2 g^{\mu\nu} \quad , \quad (3.55)$$

$$\text{tr} (\bar{\sigma}^\mu \sigma^\nu \bar{\sigma}^\tau \sigma^\lambda) = 2 (g^{\mu\nu} g^{\tau\lambda} - g^{\mu\tau} g^{\nu\lambda} + g^{\mu\lambda} g^{\nu\tau} - i \epsilon^{\mu\nu\tau\lambda}) \quad . \quad (3.56)$$

I generatori  $\{\Sigma^{\mu\nu}\}$  del gruppo di Lorentz, che agiscono sulle componenti dello spinore, risultano essere

$$\Sigma^{\mu\nu} = \begin{bmatrix} \sigma^{\mu\nu} & 0 \\ 0 & \bar{\sigma}^{\mu\nu} \end{bmatrix} \quad . \quad (3.57)$$

La rappresentazione chirale delle matrici gamma è legata alla rappresentazione (2.63), che è usata nel libro di Bjorken e Drell [3,4], tramite una trasformazione unitaria. Se indichiamo con  $\gamma_{BD}^\mu$  le matrici gamma di Bjorken-Drell, si ha

$$\gamma^\mu = W^{-1} \gamma_{BD}^\mu W \quad , \quad \text{dove} \quad W = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \quad . \quad (3.58)$$

In alcune circostanze, come nel calcolo delle anomalie chirali di gauge, risulta conveniente utilizzare la rappresentazione chirale delle matrici gamma. Naturalmente, i risultati finali e tutte le conseguenze fisiche non dipendono dalla particolare rappresentazione che viene usata.

**3D. Operatore di campo per neutrini.** Gli stati con chiralità definita di una particella di massa nulla e spin  $1/2$  possono essere descritti da uno spinore di Weyl; più precisamente, questi stati possono essere descritti da un campo spinoriale right  $\xi(x)$  oppure da un campo spinoriale left  $\chi(x)$ . Siccome in natura i neutrini possiedono esclusivamente chiralità sinistrorsa, ci limiteremo a considerare il campo spinoriale left  $\chi(x)$ .

L'azione libera per  $\chi(x)$  è data dalla seguente espressione

$$S_0 = \int d^4x \chi^\dagger(x) i \bar{\sigma}^\mu \partial_\mu \chi(x) \quad , \quad (3.59)$$

e le corrispondenti equazioni del moto sono

$$i \bar{\sigma}^\mu \partial_\mu \chi(x) = 0 \quad . \quad (3.60)$$

La (3.60) implica che  $\chi(x)$  soddisfa anche la seguente equazione

$$\partial^\mu \partial_\mu \chi(x) = 0 \quad ; \quad (3.61)$$

quindi,  $\chi(x)$  descrive particelle a massa nulla per le quali l'energia è data da  $E(\vec{p}) = |\vec{p}|$ . L'operatore di campo assume la forma

$$\chi(x) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^{3/2}} \frac{1}{\sqrt{2E(\vec{p})}} \left\{ b(\vec{p}) u(\vec{p}) e^{-ipx} + d^+(\vec{p}) v(-\vec{p}) e^{ipx} \right\} \quad , \quad (3.62)$$

$$\chi^\dagger(x) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^{3/2}} \frac{1}{\sqrt{2E(\vec{p})}} \left\{ b^+(\vec{p}) u^+(\vec{p}) e^{ipx} + d(\vec{p}) v^+(-\vec{p}) e^{-ipx} \right\} \quad . \quad (3.63)$$

Gli operatori di annichilazione e di creazione per il neutrino sono  $b(\vec{p})$  e  $b^+(\vec{p})$ , mentre i corrispondenti operatori per l'antineutrino sono  $d(\vec{p})$  e  $d^+(\vec{p})$ . Gli spinori  $u(\vec{p})$  e  $v(\vec{p})$  soddisfano le equazioni

$$\frac{\sigma^i p^i}{|\vec{p}|} u(\vec{p}) = -u(\vec{p}) \quad , \quad \frac{\sigma^i p^i}{|\vec{p}|} v(\vec{p}) = v(\vec{p}) \quad . \quad (3.64)$$

Lo stato di polarizzazione del neutrino, rappresentato da  $u(\vec{p})$ , descrive una particella con elicità negativa. Lo stato di polarizzazione dell'antineutrino è rappresentato dallo spinore  $v^c(-\vec{p})$  che descrive una particella con elicità positiva. Le relazioni di ortogonalità sono

$$u^+(\vec{p}) v(\vec{p}) = 0 = v^+(\vec{p}) u(\vec{p}) \quad , \quad (3.65)$$

$$u^+(\vec{p}) u(\vec{p}) = 2 E(\vec{p}) = v^+(\vec{p}) v(\vec{p}) \quad . \quad (3.66)$$

Più in generale, si ha

$$u^+(\vec{p}) \bar{\sigma}^\mu u(\vec{p}) = 2 p^\mu = v^+(\vec{p}) \sigma^\mu v(\vec{p}) \quad , \quad (3.67)$$

da cui segue che

$$u_{\alpha}^{+}(\vec{p}) u_{\beta}(\vec{p}) = (\sigma^{\mu} p_{\mu})_{\alpha\beta} \quad , \quad v_{\alpha}^{+}(\vec{p}) v_{\beta}(\vec{p}) = (\bar{\sigma}^{\mu} p_{\mu})_{\alpha\beta} \quad . \quad (3.68)$$

Un modo equivalente di descrivere il neutrino consiste nell'utilizzare uno spinore di Dirac massivo e, dopo aver calcolato le ampiezze di transizione, considerare il limite di massa nulla. Naturalmente, per selezionare gli stati con chiralità sinistrorsa, occorre sempre introdurre nelle varie espressioni il corrispondente proiettore  $p_L$ .

**3E. Parità.** La trasformazione di parità, che denotiamo con  $P$ , modifica il verso degli assi cartesiani spaziali e pertanto si ha

$$P : (x^0, x^i) \rightarrow (x'^0, x'^i) = (x^0, -x^i) \quad . \quad (3.69)$$

Un campo scalare  $\phi_S(x)$  ed un campo pseudo scalare  $\phi_{PS}(x)$  trasformano come

$$P : \phi_S(x^0, x^i) \rightarrow \phi_S(x^0, -x^i) \quad , \quad P : \phi_{PS}(x^0, x^i) \rightarrow -\phi_{PS}(x^0, -x^i) \quad . \quad (3.70)$$

Le componenti di un campo vettoriale  $A_{\mu}(x) = \{A_0(x), A_j(x)\}$  soddisfano

$$P : A_0(x^0, x^i) \rightarrow A_0(x^0, -x^i) \quad , \quad P : A_j(x^0, x^i) \rightarrow -A_j(x^0, -x^i) \quad , \quad (3.71)$$

mentre per un campo vettoriale assiale  $B_{\mu}(x) = \{B_0(x), B_j(x)\}$  si ha

$$P : B_0(x^0, x^i) \rightarrow -B_0(x^0, -x^i) \quad , \quad P : B_j(x^0, x^i) \rightarrow B_j(x^0, -x^i) \quad . \quad (3.72)$$

La trasformazione di parità agisce [3] sul campo spinoriale di Dirac  $\psi(x)$  nel modo seguente

$$P : \psi(x^0, x^i) \rightarrow \gamma_0 \psi(x^0, -x^i) \quad . \quad (3.73)$$

In termini delle componenti right  $\psi_R(x)$  e left  $\psi_L(x)$  di  $\psi(x)$ , la trasformazione di parità assume la forma

$$P : \psi_R(x^0, x^i) \rightarrow \psi_L(x^0, -x^i) \quad , \quad P : \psi_L(x^0, x^i) \rightarrow \psi_R(x^0, -x^i) \quad . \quad (3.74)$$

L'equazione (3.73) determina il comportamento dei bilineari covarianti (2.91) per trasformazioni di parità. Il  $P$ -trasformato di un campo spinoriale left (right) si comporta come un campo spinoriale right (left). L'azione libera di un singolo fermione chirale non è invariante per una trasformazione di parità a meno di non combinarla anche con la coniugazione di carica.

**3F. Coniugazione di carica.** L'operazione di coniugazione di carica, denotata con  $C$ , equivale a scambiare tra loro il ruolo delle particelle e delle antiparticelle. Questo significa modificare i segni dei numeri quantici interni di un sistema fisico senza modificare i numeri quantici orbitali associati alle

proprietà cinematiche. I numeri quantici interni sono determinati dall'azione di opportune simmetrie che agiscono sui campi. Per ogni rappresentazione unitaria  $R$  di un gruppo compatto, è possibile definire la rappresentazione complessa coniugata  $R^*$ ; gli autovalori dei generatori di  $R^*$  si ottengono dagli autovalori dei generatori di  $R$  mediante un semplice cambiamento di segno. Quindi, effettuare la trasformazione di coniugazione di carica corrisponde “essenzialmente” a sostituire ogni campo col suo complesso coniugato. Per un campo scalare complesso  $\phi(x)$ , si può porre

$$C : \phi(x) \rightarrow \phi^*(x) \quad . \quad (3.75)$$

Un campo complesso si può decomporre nella somma di due campi reali; quindi, diagonalizzando l'azione della trasformazione (3.75), è possibile definire l'azione della coniugazione di carica anche su campi reali. Un campo reale può essere pari per  $C$ -coniugazione oppure il campo reale può cambiare segno per  $C$ -coniugazione. Siccome il campo elettromagnetico  $A_\mu(x)$  accoppia alla corrente che definisce la carica elettrica, si ha

$$C : A_\mu(x) \rightarrow -A_\mu(x) \quad . \quad (3.76)$$

Per uno spinore di Dirac  $\psi(x)$  la coniugazione di carica agisce [4] come

$$C : \psi_\alpha(x) \rightarrow (i\gamma^2)_{\alpha\beta} \psi_\beta^\dagger(x) \quad , \quad C : \bar{\psi}_\alpha(x) \rightarrow -\psi_\beta(x) (i\gamma^2)_{\beta\alpha}^{-1} \quad , \quad (3.77)$$

dove la matrice  $\gamma^2$  è definita nella base (2.63). Sulle componenti chirali di  $\psi(x)$ , la trasformazione (3.77) assume la forma

$$C : \psi_R(x) \rightarrow (-i\sigma^2) \psi_L^*(x) = \psi_L^c(x) \quad , \quad C : \psi_L(x) \rightarrow (-i\sigma^2) \psi_R^*(x) = \psi_R^c(x) \quad . \quad (3.78)$$

L'azione combinata della parità e della  $C$ -coniugazione sulle componenti con chiralità definita dello spinore di Dirac risulta essere

$$CP : \psi_R(x^0, x^i) \rightarrow \psi_R^c(x^0, -x^i) \quad , \quad CP : \psi_L(x^0, x^i) \rightarrow \psi_L^c(x^0, -x^i) \quad . \quad (3.79)$$

Come nel caso della trasformazione di parità, l'azione libera per un singolo campo spinoriale left, o right, non è invariante per  $C$ -coniugazione; essa risulta invariante per una trasformazione di  $CP$  che è composta dalla trasformazione di parità e dalla coniugazione di carica.

**3G. Inversione temporale.** La trasformazione di inversione temporale, che è usualmente denotata con  $T$ , cambia il segno della coordinata temporale

$$T : (x^0, x^i) \rightarrow (x'^0, x'^i) = (-x^0, x^i) \quad . \quad (3.80)$$

L'effetto di una trasformazione di inversione temporale consiste nel modificare il verso dell'evoluzione temporale in modo tale che, dopo  $T$ -coniugazione, ogni processo appare svolgersi come nella proiezione di un film girato a rovescio. L'inversione temporale è implementata da un operatore antiunitario [4].

Questo significa che, nell'effettuare la  $T$ -coniugazione di una variabile operatoriale, occorre prendere il complesso coniugato di tutti i coefficienti numerici che appaiono nella composizione della variabile stessa. Nel caso del potenziale vettore  $A_\mu(x)$  dell'elettromagnetismo, si ha [4]

$$T : A_0(x^0, x^i) \rightarrow A_0(-x^0, x^i) \quad , \quad T : A_i(x^0, x^i) \rightarrow -A_i(-x^0, x^i) \quad . \quad (3.81)$$

Consideriamo uno spinore di Dirac  $\psi(x)$ ; utilizzando la base (2.63) delle matrici gamma, la trasformazione  $T$  agisce come [4]

$$T : \psi(x^0, x^i) \rightarrow \left( i \gamma^1 \gamma^3 \right) \psi(-x^0, x^i) \quad . \quad (3.82)$$

Per campi scalari, la  $T$ -coniugazione diagonalizzata agisce come

$$T : \phi(x^0, x^i) \rightarrow \pm \phi(-x^0, x^i) \quad . \quad (3.83)$$

La scelta del segno nella (3.83) è fissata [4] dal richiedere che la densità Lagrangiana  $\mathcal{L}(x)$  e ogni corrente vettoriale conservata  $J_\mu(x)$  trasformino come

$$T : \mathcal{L}(x^0, x^i) \rightarrow \mathcal{L}(-x^0, x^i) \quad , \quad T : J_\mu(x^0, x^i) \rightarrow J^\mu(-x^0, x^i) \quad . \quad (3.84)$$

In generale, per ogni modello di teoria di campo la cui dinamica è locale, causale, relativisticamente covariante ed è descritta da una densità lagrangiana  $\mathcal{L}(x)$ , vale il **Teorema CPT**. Questo teorema afferma che è possibile [2,4,6,7] fissare i segni (ovvero le fasi) associati alle singole trasformazioni  $C$ ,  $P$  e  $T$  in modo tale che

$$CPT : \mathcal{L}(x^0, x^i) \rightarrow \mathcal{L}(-x^0, -x^i) \quad . \quad (3.85)$$

L'invarianza della fisica per una trasformazione di  $CPT$  significa che, dato un qualunque processo fisico elementare, esso è indistinguibile dal processo che si ottiene modificando il verso degli assi spaziali, sostituendo ogni particella con la propria antiparticella e osservando il fenomeno come se si svolgesse a ritroso nel tempo.

• **CPT e prolungamento analitico.** I valori assunti dall'energia nei fenomeni fisici sono limitati inferiormente; questa proprietà è sovente chiamata **positività dell'energia**. In effetti, scegliendo in maniera opportuna lo zero dell'energia, è possibile rendere positivi tutti i valori assunti dall'energia. Conseguentemente, nelle teorie di campo che si riferiscono ai fenomeni naturali è possibile effettuare un prolungamento analitico nella dipendenza dei vari campi dalla coordinata temporale. Infatti, l'evoluzione temporale per gli stati di singola particella introduce il tipico fattore di fase

$$\exp(-i t E) = \exp(-i(t_2 - t_1) E) \quad ,$$

dove  $t = t_2 - t_1$  rappresenta l'intervallo di tempo trascorso tra l'istante  $t_1$  di creazione della particella e l'istante  $t_2$  di una sua possibile osservazione. Siccome ogni particella evolve nel tempo solo dopo

essere stata creata, si ha necessariamente  $t = t_2 - t_1 > 0$ . Essendo l'energia  $E$  positiva e  $t > 0$ , il prolungamento analitico assume la forma  $t \rightarrow -i\tau$  e le teorie definite in questo modo prendono il nome di teorie Euclidee. L'utilità del prolungamento analitico nella regione Euclidea per il calcolo delle ampiezze di transizione verrà illustrata nei prossimi capitoli.

In una teoria di campo Euclidea, il gruppo di Lorentz  $SO(3, 1)$  deve essere rimpiazzato dal gruppo compatto  $SO(4)$ , che è isomorfo al gruppo delle trasformazioni lineari e connesse all'identità che sono isometrie dello spazio quadrimensionale Euclideo. La matrice  $4 \times 4$  che differisce dalla matrice identica unicamente per il segno appartiene ad  $SO(4)$ ; quindi la trasformazione (3.85) può essere interpretata nella regione Euclidea come rappresentante di un particolare elemento di  $SO(4)$ . In questo senso, la validità del teorema  $CPT$  nella regione Minkowskiana può essere intesa [2] come un effetto dovuto alla simmetria  $SO(4)$  nella regione Euclidea.

Ricordiamo infine che, nell'ambito delle teorie quantistiche di campo, la connessione [4,6,7] tra spin e statistica è determinata dalla richiesta di località, di covarianza relativistica e di causalità. Questo significa che, utilizzando operatori di campo locali ed imponendo la covarianza relativistica, la causalità è verificata quando i campi che descrivono particelle di spin intero soddisfano le regole di commutazione canoniche ed i campi associati a particelle di spin semintero soddisfano le regole di anticommutazione.

## Capitolo 4

### Sviluppo perturbativo

Si consideri un modello Lagrangiano di teoria di campo la cui azione è data da

$$S = S_0 + S_I = \int d^4x \mathcal{L}_0(x) + \int d^4x \mathcal{L}_I(x) \quad . \quad (4.1)$$

L'ampiezza di transizione tra uno stato iniziale  $|\text{in}\rangle$  ed uno stato finale  $|\text{out}\rangle$  si può calcolare utilizzando la matrice- $S$  che è definita in termini della Lagrangiana di interazione

$$A(\text{out}; \text{in}) = \langle \text{out} | U(+\infty, -\infty) | \text{in} \rangle = \langle \text{out} | T \exp \left( +i \int_{-\infty}^{+\infty} d^4x \mathcal{L}_I(x) \right) | \text{in} \rangle \quad . \quad (4.2)$$

Per calcolare l'ampiezza (4.2) si può utilizzare uno sviluppo di Taylor di  $U(+\infty, -\infty)$  in potenze della Lagrangiana di interazione,

$$A(\text{out}; \text{in}) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{i^n}{n!} \langle \text{out} | T \left( \int d^4x \mathcal{L}_I(x) \right)^n | \text{in} \rangle \quad . \quad (4.3)$$

La Lagrangiana di interazione è in generale la somma di vari termini; ogni termine è proporzionale alla costante di accoppiamento relativa al tipo di interazione che si considera. Il calcolo dell'ampiezza  $A(\text{out}; \text{in})$  mediante lo sviluppo in potenze di  $\mathcal{L}_I$  equivale pertanto ad uno sviluppo di  $A(\text{out}; \text{in})$  in potenze delle costanti di accoppiamento. Tale metodo di calcolo si chiama **sviluppo perturbativo**.

In questo capitolo verranno espone le regole del calcolo perturbativo e si mostrerà che lo sviluppo perturbativo in potenze delle costanti d'accoppiamento ammette una rappresentazione diagrammatica in termini di grafici di Feynman. Prima di considerare le regole di corrispondenza tra i grafici di Feynman e i processi di interazione, è conveniente discutere il legame tra le ampiezze di transizione ed il calcolo delle sezioni d'urto e delle probabilità di decadimento.

**4A. Ampiezze e probabilità.** Si consideri un sistema costituito da vari tipi di particelle che denotiamo con un indice  $\beta$ . Ad ogni tipo di particella è associato un operatore di campo  $\phi_\beta(x)$  che è definito in termini degli operatori di annichilazione e di creazione  $a_\beta$  e  $a_\beta^+$ . Ogni stato di singola particella di tipo  $\beta$  è caratterizzato dal valore dell'impulso spaziale  $\vec{k}$  ed, eventualmente, da altri numeri quantici. Per semplificare le notazioni, questi ulteriori numeri quantici non verranno denotati in maniera esplicita ma saranno sottintesi.

• **Formulazione del problema.** Gli **stati a molte particelle** si ottengono applicando gli operatori di creazione allo stato di vuoto

$$|\vec{k}_1, \vec{k}_2, \dots, \vec{k}_n\rangle = a_{\beta_1}^+(\vec{k}_1) a_{\beta_2}^+(\vec{k}_2) \dots a_{\beta_n}^+(\vec{k}_n) |0\rangle \quad . \quad (4.4)$$

Consideriamo il caso in cui lo stato iniziale contiene  $n$  particelle di impulsi  $\{\vec{k}_1, \dots, \vec{k}_n\}$  mentre lo stato finale contiene  $m$  particelle con impulsi  $\{\vec{k}'_1, \dots, \vec{k}'_m\}$ . I valori degli impulsi iniziali (e di quelli finali) siano tutti diversi tra loro. Si supponga di aver calcolato l'ampiezza di transizione

$$A(\vec{k}'_j; \vec{k}_i) = \langle \vec{k}'_1, \vec{k}'_2, \dots, \vec{k}'_m | U(+\infty, -\infty) | \vec{k}_1, \vec{k}_2, \dots, \vec{k}_n \rangle \quad . \quad (4.5)$$

Il problema che si vuol risolvere è quello di *connettere l'ampiezza (4.5) con l'espressione della sezione d'urto o della probabilità di decadimento delle particelle.*

• **Normalizzazione degli stati.** Come mostrato nel Capitolo 1, la normalizzazione corrispondente ad una particella per unità di volume spaziale  $V$  è data da

$$(2\pi)^{3/2} V^{-1/2} |\vec{k}\rangle \quad , \quad (4.6)$$

quindi il vettore normalizzato che descrive uno stato con molte particelle è

$$(2\pi)^{3n/2} V^{-n/2} |\vec{k}_1, \vec{k}_2, \dots, \vec{k}_n\rangle \quad . \quad (4.7)$$

• **Densità di stati nello spazio degli impulsi.** Per una singola particella vincolata a muoversi entro una scatola cubica di lato  $L$ , i valori permessi per ogni componente dell'impulso sono  $k_i = 2\pi n_i/L$  dove  $n_i$  con  $i = 1, 2, 3$  sono interi. Conseguentemente, nel limite continuo la somma sui numeri quantici  $\{n_i\}$  determina la seguente densità di stati nello spazio degli impulsi

$$\sum_{n_1} \sum_{n_2} \sum_{n_3} \longrightarrow \frac{d^3k}{(2\pi)^3} V \quad . \quad (4.8)$$

• **Probabilità di transizione.** La probabilità di transizione si ottiene prendendo il modulo quadro dell'ampiezza (4.5), introducendo i fattori dovuti alla normalizzazione dei vettori e moltiplicando il risultato ottenuto per la densità degli stati finali. Siano  $K_i$  e  $K_f$  i quadrimpulsi totali corrispondenti rispettivamente allo stato iniziale e finale. L'invarianza per traslazioni spazio-temporali della dinamica implica che l'ampiezza (4.5) assume necessariamente la forma seguente

$$A(\vec{k}'_j; \vec{k}_i) = (2\pi)^4 \delta^4(K_f - K_i) F(\vec{k}'_j; \vec{k}_i) \quad . \quad (4.9)$$

Pertanto, il modulo quadro dell'ampiezza vale

$$|A(\vec{k}'_j; \vec{k}_i)|^2 = (2\pi)^4 \delta^4(K_f - K_i) |F(\vec{k}'_j; \vec{k}_i)|^2 V T \quad , \quad (4.10)$$

e la probabilità di transizione risulta essere

$$\frac{(2\pi)^{3n+3m}}{V^{n+m-1}} T (2\pi)^4 \delta^4(K_f - K_i) |F(\vec{k}'_j; \vec{k}_i)|^2 \prod_{j=1}^m \left( \frac{d^3k'_j}{(2\pi)^3} V \right) \quad . \quad (4.11)$$

Conseguentemente, la *probabilità di transizione per unità di tempo*, chiamata anche “rate”  $dw$ , è data da

$$dw = \frac{(2\pi)^{3n}}{V^{n-1}} (2\pi)^4 \delta^4(K_f - K_i) |F(\vec{k}'_j; \vec{k}_i)|^2 \prod_{j=1}^m d^3 k'_j \quad . \quad (4.12)$$

L'espressione (4.12) mostra che la normalizzazione degli stati finali si elimina con la normalizzazione della densità di stati finali lasciando semplicemente il differenziale degli impulsi finali.

• **Decadimento.** Nel caso del decadimento di una particella, si ha  $n = 1$  e la *larghezza parziale* di decadimento  $d\Gamma$  assume la forma

$$d\Gamma = dw = (2\pi)^3 \prod_{j=1}^m d^3 k'_j (2\pi)^4 \delta^4(K_f - K_i) |F(\vec{k}'_j; \vec{k})|^2 \quad . \quad (4.13)$$

• **Diffusione.** Si consideri ora il processo di diffusione di due particelle incidenti di impulsi  $\vec{k}_1$  e  $\vec{k}_2$  e velocità  $\vec{v}_1 = \vec{k}_1/E_1$  e  $\vec{v}_2 = \vec{k}_2/E_2$ . In questo caso,  $n = 2$  ed il **flusso incidente**  $\Phi_{in}$  è dato da

$$\Phi_{in} = |\vec{v}_1 - \vec{v}_2| V^{-1} \quad . \quad (4.14)$$

La *sezione d'urto differenziale*  $d\sigma$  per il processo di diffusione si ottiene dividendo la *probabilità di transizione per unità di tempo*  $dw$  per il *flusso incidente*

$$d\sigma = \frac{(2\pi)^6}{|\vec{v}_1 - \vec{v}_2|} \prod_{j=1}^m d^3 k'_j (2\pi)^4 \delta^4(K_f - K_i) |F(\vec{k}'_j; \vec{k}_1, \vec{k}_2)|^2 \quad . \quad (4.15)$$

• **Spazio delle fasi.** Le espressioni (4.13) e (4.15) si riferiscono alla situazione in cui tutti gli impulsi e gli stati di spin delle particelle sono fissati. Per ottenere la larghezza totale di decadimento o la sezione d'urto totale di un processo, occorre integrare le espressioni (4.13) oppure (4.15) nello spazio delle fasi associato alle particelle dello stato finale. A questo punto occorre distinguere due possibilità:

- (1) Nel caso in cui ogni particella dello stato finale sia distinguibile dalle altre, lo spazio delle fasi comprende tutti i possibili valori degli impulsi finali  $\{\vec{k}'_j\}$  e tutti i possibili valori degli spin.
- (2) Consideriamo ora il caso in cui l'insieme delle  $m$  particelle finali sia l'unione di vari sottoinsiemi di particelle identiche. Supponiamo che il sottoinsieme  $b$ -esimo contenga  $y_b$  particelle identiche, si ha  $\sum_b y_b = m$ . Scambiando tutte le variabili relative a due particelle identiche *non* si ottiene un nuovo punto dello spazio delle fasi. Conseguentemente, lo spazio delle fasi comprende tutti i possibili valori degli impulsi e degli spin finali *a meno di permutazioni* tra gli insiemi di particelle identiche. Siccome il modulo quadro dell'ampiezza di transizione è invariante per scambio delle variabili relative a due particelle identiche, si può convenire di integrare su tutti i possibili valori degli impulsi e sommare su tutti gli stati di spin purché si introduca il fattore correttivo  $1/\prod_b (y_b!)$ .

Infine, se non si osservano le polarizzazioni delle particelle, occorre *mediare sugli stati iniziali e sommare sugli stati finali di spin*. In conclusione, la *larghezza totale*  $\Gamma$  di decadimento assume la forma

$$\Gamma = \frac{(2\pi)^3}{\prod_b (y_b!)} \int \prod_{j=1}^m d^3 k'_j (2\pi)^4 \delta^4(K_f - K_i) |F(\vec{k}'_j; \vec{k})|^2 \quad . \quad (4.16)$$

Mentre la *sezione d'urto totale*  $\sigma$  per un processo di diffusione vale

$$\sigma = \frac{(2\pi)^6}{\prod_b (y_b!)} \frac{1}{|\vec{v}_1 - \vec{v}_2|} \int \prod_{j=1}^m d^3 k'_j (2\pi)^4 \delta^4(K_f - K_i) |F(\vec{k}'_j; \vec{k}_1, \vec{k}_2)|^2 \quad . \quad (4.17)$$

• **Covarianza relativistica.** In presenza di campi esterni, l'invarianza per traslazioni spazio-temporali può essere violata; conseguentemente, il quadrimpulso totale finale non necessariamente coincide col quadrimpulso iniziale poiché parte dell'impulso è fornito il campo esterno. Per quanto riguarda la struttura della funzione  $F(\vec{k}'_j; \vec{k}_i)$ , supponiamo di utilizzare un campo spinoriale di Dirac massivo anche per i neutrini, con la convenzione di introdurre il proiettore left che agisce sul campo spinoriale e di considerare poi il limite di massa nulla. Allora, nel calcolo di  $F(\vec{k}'_j; \vec{k}_i)$ , per ogni particella nello stato finale od iniziale compare un fattore moltiplicativo

$$\frac{1}{(2\pi)^{(3/2)} \sqrt{E}} \quad \text{per bosoni} \quad ; \quad \frac{1}{(2\pi)^{(3/2)} \sqrt{\frac{m}{E}}} \quad \text{per fermioni} \quad . \quad (4.18)$$

Pertanto, nel sistema di riposo di una particella di massa  $M$  che decade, la larghezza di decadimento è data dalla seguente espressione

$$\Gamma = \frac{1}{2M} \frac{1}{\prod_b (y_b!)} \int \prod_{j=1}^m \frac{d^3 k'_j}{(2\pi)^3 2E(\vec{k}'_j)} |\mathcal{M}|^2 (2\pi)^4 \delta^4(K_f - K_i) \quad . \quad (4.19)$$

Per covarianza relativistica, l'ampiezza  $\mathcal{M}$  che appare nella (4.19) deve essere uno scalare di Lorentz. Per ogni fermione nello stato finale il fattore  $1/2E$  va sostituito con  $m/E$ , mentre il fattore  $1/2M$  va eliminato nel caso in cui la particella che decade è un fermione. Per un processo di diffusione di due particelle, la sezione d'urto  $\sigma$  vale

$$\sigma = \frac{1}{2E(\vec{k}_1)} \frac{1}{2E(\vec{k}_2)} \frac{1}{|\vec{v}_1 - \vec{v}_2|} \frac{1}{\prod_b (y_b!)} \int \prod_{j=1}^m \frac{d^3 k'_j}{(2\pi)^3 2E(\vec{k}'_j)} |\mathcal{M}|^2 (2\pi)^4 \delta^4(K_f - K_i) \quad , \quad (4.20)$$

dove  $\mathcal{M}$  è l'ampiezza invariante di Lorentz e, per ogni fermione, il corrispondente fattore  $1/2E$  va sostituito con la quantità  $m/E$ .

• **Spinori e matrici gamma.** Quando campi spinoriali intervengono nel calcolo dell'ampiezza (4.5), la funzione  $F(\vec{k}'_j; \vec{k}_i)$  che è definita in (4.9) contiene termini del tipo

$$\bar{u}(\vec{k}, s) \Gamma v(\vec{p}, r) = u_\sigma^*(\vec{k}, s) \gamma_{\sigma\alpha}^0 \Gamma_{\alpha\beta} v_\beta(\vec{p}, r) \quad , \quad (4.21)$$

in cui  $\Gamma$  denota un prodotto di matrici gamma,  $\Gamma = \gamma_{\mu_1} \gamma_{\mu_2} \cdots \gamma_{\mu_n}$ . Quindi, nel calcolo del modulo quadro dell'ampiezza di transizione, si ottiene il fattore

$$\begin{aligned} |\bar{u}(\vec{k}, s) \Gamma v(\vec{p}, r)|^2 &= u_\sigma^*(\vec{k}, s) \gamma_{\sigma\alpha}^0 \Gamma_{\alpha\beta} v_\beta(\vec{p}, r) v_\delta^*(\vec{p}, r) \Gamma_{\delta\tau}^+ \gamma_{\tau\rho}^0 u_\rho(\vec{k}, s) \\ &= \bar{u}_\alpha(\vec{k}, s) \Gamma_{\alpha\beta} v_\beta(\vec{p}, r) \bar{v}_\nu(\vec{p}, r) \bar{\Gamma}_{\nu\rho} u_\rho(\vec{k}, s) \quad , \quad (4.22) \end{aligned}$$

in cui si è utilizzata la proprietà  $\gamma^0 \gamma^0 = \mathbb{1}$  e si è posto

$$\bar{\Gamma} \equiv \gamma^0 \Gamma^+ \gamma^0 = \overline{(\gamma_{\mu_1} \gamma_{\mu_2} \cdots \gamma_{\mu_n})} = \bar{\gamma}_{\mu_n} \cdots \bar{\gamma}_{\mu_2} \bar{\gamma}_{\mu_1} \quad . \quad (4.23)$$

Un semplice calcolo mostra che

$$\bar{\gamma}_\mu = \gamma^0 \gamma_\mu^+ \gamma^0 = \gamma_\mu \quad , \quad \bar{\gamma}_5 = \gamma^0 \gamma_5^+ \gamma^0 = -\gamma_5 \quad . \quad (4.24)$$

Nel caso in cui si debba sommare la (4.22) sugli stati di polarizzazione, le relazioni di completezza (2.75) conducono al risultato

$$\sum_{r,s} |\bar{u}(\vec{k}, s) \Gamma v(\vec{p}, r)|^2 = \text{Tr} \left( \frac{\hat{k} + m}{2m} \Gamma \frac{\hat{p} - m}{2m} \bar{\Gamma} \right) \quad . \quad (4.25)$$

Espressioni analoghe alla (4.25) si ottengono combinando gli spinori  $u$  e  $v$  nelle quattro combinazioni possibili. Per illustrare il calcolo dell'ampiezza di transizione (4.5) mediante l'uso degli operatori di campo è utile considerare alcuni esempi. Il primo esempio riguarda il decadimento della particella  $\pi^0$  in due fotoni.

**4B. Decadimento in due fotoni di mesone pseudoscalare.** Il mesone  $\pi^0$  è una particella elettricamente scarica di spin nullo; inoltre,  $\pi^0$  ha parità intrinseca negativa ed è pari per coniugazione di carica. Circa il 99% di tutti i possibili decadimenti del  $\pi^0$  sono dovuti alla reazione

$$\pi^0 \rightarrow \gamma + \gamma$$

quindi l'inverso della larghezza di questo decadimento determina essenzialmente la vita media del  $\pi^0$ . Pur essendo una particella neutra,  $\pi^0$  deve interagire necessariamente col potenziale elettromagnetico  $A_\mu$  perché  $\pi^0$  decade in due fotoni. In effetti, il pione è una particella composta ed i suoi costituenti elementari possiedono cariche elettriche non banali. Pur non conoscendo in dettaglio la struttura interna del  $\pi^0$  in termini dei suoi costituenti, è possibile descrivere la struttura cinematica del decadimento  $\pi^0 \rightarrow \gamma \gamma$  mediante l'introduzione di una Lagrangiana di interazione fenomenologica  $\mathcal{L}_I$ .

• **Lagrangiana fenomenologica.** Siccome le interazioni elettromagnetiche conservano la parità e la coniugazione di carica,  $\mathcal{L}_I$  deve essere invariante per trasformazioni  $P$  e  $C$ . La struttura interna di una qualunque particella composta si manifesta in maniera sempre più rilevante all'aumentare dell'energia; *ad energie sufficientemente basse, una particella composta si comporta approssimativamente come una particella elementare e può essere descritta da un operatore di campo locale.* La Lagrangiana fenomenologica deve riprodurre gli aspetti essenziali dell'interazione dello stato composto  $\pi^0$  col campo elettromagnetico a bassa energia. Questa Lagrangiana è costruita col campo pseudoscalare del  $\pi^0$ , che denotiamo con  $\pi^0(x)$ , e col campo vettoriale  $A_\mu(x)$  e deve essere invariante di gauge. *In generale,  $\mathcal{L}_I$  è la somma di vari termini ed occorre trovare un criterio per ordinare questi termini rispetto all'importanza che essi hanno per la fisica delle basse energie. Questo criterio*

è basato sull'analisi dimensionale e consiste semplicemente nel conteggio del numero di derivate che agiscono sui campi. Siccome ogni derivata sui campi rappresenta un impulso, a bassa energia i termini dominanti sono quelli che contengono il minor numero di derivate. Quindi, il termine Lagrangiano dominante per il decadimento  $\pi^0 \rightarrow \gamma\gamma$  è il seguente

$$S_I = \int d^4x \mathcal{L}_I(x) = g \int d^4x \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \partial_\mu A_\nu(x) \partial_\rho A_\sigma(x) \pi^0(x) \quad , \quad (4.26)$$

dove  $g$  rappresenta una costante di accoppiamento fenomenologica che ha le dimensioni dell'inverso di una massa. Siccome il campo  $\pi^0(x)$  è pseudoscalare, la presenza in (4.26) del tensore completamente antisimmetrico assicura l'invarianza di  $\mathcal{L}_I(x)$  per parità. Denotiamo con  $c(\vec{p})$  e  $c^+(\vec{p})$  gli operatori di annichilazione e di creazione per il  $\pi^0$  mentre i corrispondenti operatori per il fotone sono  $a_\mu(\vec{p})$  e  $a_\mu^+(\vec{p})$ .

• **Calcolo larghezza di decadimento.** Lo stato iniziale corrispondente ad un  $\pi^0$  con impulso  $\vec{p}$  è dato da

$$|\vec{p}\rangle = c^+(\vec{p}) |0\rangle \quad , \quad (4.27)$$

mentre lo stato finale di due fotoni con impulsi  $\vec{p}_1$  e  $\vec{p}_2$  e stati di polarizzazione  $\alpha$  e  $\beta$  è

$$|\vec{p}_1, \alpha; \vec{p}_2, \beta\rangle = a_\alpha^+(\vec{p}_1) a_\beta^+(\vec{p}_2) |0\rangle \quad . \quad (4.28)$$

L'ampiezza di transizione (4.5), al primo ordine in  $g$ , è data da

$$A = i g \int d^4x \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \langle 0 | a_\alpha(\vec{p}_1) a_\beta(\vec{p}_2) \partial_\mu A_\nu(x) \partial_\rho A_\sigma(x) \pi^0(x) c^+(\vec{p}) |0\rangle \quad . \quad (4.29)$$

In questo caso, tutti gli operatori di campo sono definiti nello stesso punto e l'ordinamento cronologico agisce in maniera banale. Utilizzando le regole di commutazione, gli operatori di annichilazione vengono spostati a destra e quelli di creazione vengono spostati a sinistra fino a raggiungere lo stato di vuoto. Pertanto, la quantità (4.29) risulta non nulla quando tutti gli operatori di annichilazione e di creazione vengono eliminati a coppie mediante le regole di commutazione. Per esempio, l'operatore  $c^+(\vec{p})$  che appare nella (4.29) viene eliminato mediante il commutatore con un operatore di annichilazione  $c(\vec{k})$  contenuto nello sviluppo dell'operatore di campo  $\pi^0(x)$ . Utilizzando la forma esplicita degli operatori di campo, l'ampiezza (4.29) risulta essere

$$A = -i \frac{2g(2\pi)^4 \delta^4(p - p_1 - p_2)}{(2\pi)^{9/2} \sqrt{2E(\vec{p})} \sqrt{2|\vec{p}_1|} \sqrt{2|\vec{p}_2|}} g_{\alpha\lambda} g_{\beta\tau} \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} (p_1)_\mu (p_2)_\rho \epsilon_\nu^{(\lambda)*}(\vec{p}_1) \epsilon_\sigma^{(\tau)*}(\vec{p}_2) \quad . \quad (4.30)$$

Per polarizzazioni fisiche dei fotoni, nella base delle polarizzazioni rettilinee si ha  $\alpha = 1, 2$  e  $\beta = 1, 2$ ; utilizzando la conservazione del quadrimpulso nel sistema di riposo del  $\pi^0$ , l'ampiezza (4.30) si può scrivere come

$$A = -i \frac{2g(2\pi)^4 \delta^4(p - p_1 - p_2)}{(2\pi)^{9/2} \sqrt{2m_\pi}} \epsilon^{ijk} (p_1)_i \epsilon_j^{(\alpha)}(\vec{p}_1) \epsilon_k^{(\beta)}(\vec{p}_2) \quad , \quad (4.31)$$

dove  $m_\pi$  è la massa del  $\pi^0$ . Sommando sugli stati di polarizzazione dei due fotoni nello stato finale, si ottiene la larghezza di decadimento

$$\Gamma = g^2 \frac{m_\pi^3}{16\pi} \quad . \quad (4.32)$$

• **Valore della costante di accoppiamento.** Utilizzando il dato sperimentale sulla vita media del  $\pi^0$ , che risulta essere  $\tau = 8.4 \times 10^{-17}$  secondi, si può determinare il valore della costante fenomenologica  $g$ , il risultato è

$$g \simeq 1.23 \times 10^{-5} \text{ MeV}^{-1} \quad . \quad (4.33)$$

Per il momento, non sappiamo collegare il valore di questa costante di accoppiamento con quello di altre costanti che appaiono in processi diversi. Torneremo su questo argomento in seguito; nel Capitolo 21, calcoleremo il valore di  $g$  utilizzando l'espressione della anomalia chirale di flavour. La predizione teorica risulterà essere

$$g = \frac{\alpha N_c}{6\pi f_\pi} \quad , \quad (4.34)$$

dove  $\alpha$  è la costante di struttura fine elettromagnetica,  $N_c$  è il numero di colori dei quark ed  $f_\pi$  è la costante di decadimento dei pioni per le interazioni deboli.

**4C. Diffusione di elettroni in potenziale Coulombiano.** La Lagrangiana di interazione tra particelle di spin 1/2 con carica elettrica  $e$  ed il campo elettromagnetico  $A_\mu(x)$  è data da

$$S_I = \int d^4x \mathcal{L}_I(x) = -e \int d^4x J^\mu(x) A_\mu(x) = -e \int d^4x \bar{\psi}(x) \gamma^\mu \psi(x) A_\mu(x) \quad . \quad (4.35)$$

Si consideri la diffusione [3] di un elettrone nel campo elettrostatico generato da un nucleo pesante posto nell'origine delle coordinate. Il potenziale generato del nucleo di carica  $Ze$  è dato da

$$A_0(x) = \frac{Ze}{4\pi |\vec{x}|} \quad , \quad A_i(x) = 0 \quad . \quad (4.36)$$

Il processo di diffusione a cui siamo interessati riguarda un elettrone nello stato iniziale  $|\vec{p}, r\rangle$  e nello stato finale  $|\vec{k}, s\rangle$ . In questo processo non si ha produzione od annichilazione di fotoni, pertanto il campo elettromagnetico  $A_\mu(x)$  può essere considerato, in prima approssimazione, un campo classico il cui valore è dato in equazione (4.36). Se indichiamo con  $b^+(\vec{p}, r)$  l'operatore di creazione di un elettrone di impulso  $\vec{p}$  e stato di polarizzazione descritto dall'indice  $r$ , al primo ordine nella Lagrangiana di interazione, l'ampiezza (4.5) risulta essere

$$\begin{aligned} A &= \langle 0 | b(\vec{k}, s) i S_I b^+(\vec{p}, r) | 0 \rangle = -ie \int d^4x A_0(x) \langle 0 | b(\vec{k}, s) \bar{\psi}(x) \gamma^0 \psi(x) b^+(\vec{p}, r) | 0 \rangle \\ &= -\frac{ie}{(2\pi)^3} \sqrt{\frac{m}{E(\vec{p})}} \sqrt{\frac{m}{E(\vec{k})}} 2\pi \delta(E(\vec{p}) - E(\vec{k})) \bar{u}(\vec{k}, s) \gamma^0 u(\vec{p}, r) \int d^3x A_0(\vec{x}) e^{i\vec{x}\cdot(\vec{p}-\vec{k})} \quad . \end{aligned} \quad (4.37)$$

Siccome il campo esterno classico (4.36) rompe l'invarianza per traslazioni spaziali, nell'ampiezza (4.37) appare solamente la delta di conservazione dell'energia. La trasformata di Fourier del campo esterno rispetto all'impulso trasferito ( $\vec{k} - \vec{p}$ ) vale

$$\int d^3x A_0(\vec{x}) e^{i\vec{x}\cdot(\vec{p}-\vec{k})} = \frac{Ze}{|\vec{p}-\vec{k}|^2} . \quad (4.38)$$

Quindi, l'espressione (4.37) diventa

$$A = -\frac{iZe^2}{(2\pi)^3 |\vec{p}-\vec{k}|^2} \sqrt{\frac{m}{E(\vec{p})}} \sqrt{\frac{m}{E(\vec{k})}} 2\pi \delta(E(\vec{p}) - E(\vec{k})) \bar{u}(\vec{k}, s) \gamma^0 u(\vec{p}, r) . \quad (4.39)$$

Dividendo la probabilità di transizione per unità di tempo rispetto al flusso incidente che vale  $|\vec{v}|$ , dove  $\vec{v}$  è la velocità dell'elettrone incidente, si ottiene la sezione d'urto

$$d\sigma = \frac{4Z^2 \alpha^2 m^2}{E(\vec{p}) |\vec{v}|} \frac{|\bar{u}(\vec{k}, s) \gamma^0 u(\vec{p}, r)|^2}{|\vec{p}-\vec{k}|^4} \frac{d^3k}{E(\vec{k})} \delta(E(\vec{p}) - E(\vec{k})) , \quad (4.40)$$

dove è stata introdotta la **costante di struttura fine**

$$\alpha = \frac{e^2}{4\pi} \simeq \frac{1}{137} . \quad (4.41)$$

Utilizzando la relazione

$$d^3k = d\Omega |\vec{k}|^2 d|\vec{k}| = d\Omega |\vec{k}| E(\vec{k}) dE(\vec{k}) , \quad (4.42)$$

dalla (4.40) segue che

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{4Z^2 \alpha^2 m^2}{|\vec{p}-\vec{k}|^4} |\bar{u}(\vec{k}, s) \gamma^0 u(\vec{p}, r)|^2 . \quad (4.43)$$

A questo punto, prendendo la media degli stati iniziali e la somma sugli stati finali di polarizzazione, si ricava

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{2Z^2 \alpha^2 m^2}{|\vec{p}-\vec{k}|^4} \sum_{r,s} |\bar{u}(\vec{k}, s) \gamma^0 u(\vec{p}, r)|^2 . \quad (4.44)$$

Le proprietà degli spinori implicano

$$\sum_{r,s} |\bar{u}(\vec{k}, s) \gamma^0 u(\vec{p}, r)|^2 = \text{Tr} \left[ \frac{\hat{k} + m}{2m} \gamma^0 \frac{\hat{p} + m}{2m} \gamma^0 \right] = \frac{1}{m^2} \left( 2E(\vec{p})E(\vec{k}) - p \cdot k + m^2 \right) . \quad (4.45)$$

Sia  $\theta$  l'angolo di diffusione dell'elettrone e  $\beta$  il fattore relativistico corrispondente al modulo della velocità dell'elettrone,  $|\vec{p}| = \beta E$ . Allora, si ottiene

$$E(\vec{p}) = E = E(\vec{k}) , \quad |\vec{p}| = |\vec{k}| = \beta E , \quad |\vec{p}-\vec{k}|^4 = 16\beta^4 E^4 \sin^4 \theta/2 , \quad (4.46)$$

$$p \cdot k = m^2 + \beta^2 E^2 (1 - \cos\theta) = m^2 + 2\beta^2 E^2 \sin^2 \theta/2 ,$$

e la sezione d'urto (4.44) assume la forma [3]

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{Z^2 \alpha^2}{4 \beta^4 E^2 \sin^4 \theta/2} \left( 1 - \beta^2 \sin^2 \theta/2 \right) . \quad (4.47)$$

**4D. Propagatore.** Gli esempi precedenti hanno illustrato come calcolare l'ampiezza di transizione (4.5) in casi molto semplici. Vorremmo ora considerare gli aspetti generali del problema. Come mostrato in (4.3), l'ampiezza (4.5) viene calcolata facendo uno sviluppo in potenze della Lagrangiana di interazione

$$A(\vec{k}'_j; \vec{k}_i) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{i^n}{n!} \int d^4 x_1 \cdots d^4 x_n \langle 0 | a_{\beta_1}(\vec{k}'_1) a_{\beta_2}(\vec{k}'_2) \cdots \text{T} [\mathcal{L}_I(x_1) \mathcal{L}_I(x_2) \cdots \mathcal{L}_I(x_n)] a_{\alpha_1}^+(\vec{k}_1) a_{\alpha_2}^+(\vec{k}_2) \cdots | 0 \rangle . \quad (4.48)$$

La Lagrangiana di interazione è in generale la somma di vari termini ciascuno dei quali è un polinomio dei campi e delle loro derivate. Ogni termine

$$\langle 0 | a_{\beta_1}(\vec{k}'_1) a_{\beta_2}(\vec{k}'_2) \cdots \text{T} [\mathcal{L}_I(x_1) \mathcal{L}_I(x_2) \cdots \mathcal{L}_I(x_n)] a_{\alpha_1}^+(\vec{k}_1) a_{\alpha_2}^+(\vec{k}_2) \cdots | 0 \rangle \quad (4.49)$$

risulta non nullo quando, muovendo a destra gli operatori di annichilazione e a sinistra gli operatori di creazione fino ad applicarli sul vuoto, tutti gli operatori di annichilazione e di creazione vengono eliminati a coppie mediante le regole di commutazione. L'operatore  $a_{\alpha_1}^+(\vec{k}_1)$  per esempio, può eliminare un operatore di annichilazione associato ad una particella nello stato finale; in questo caso, la particella in questione non partecipa al processo di interazione. Oppure, lo stesso operatore può eliminare un operatore di annichilazione contenuto nello sviluppo di un operatore di campo contenuto in  $\mathcal{L}_I(x_i)$ . In questo caso, si ottiene un fattore moltiplicativo proporzionale alla funzione d'onda della particella nello stato iniziale. Procedendo in maniera ricorsiva, tutti gli operatori

$$\left\{ a_{\beta_1}(\vec{k}'_1), a_{\beta_2}(\vec{k}'_2), \cdots \right\} \quad \text{e} \quad \left\{ a_{\alpha_1}^+(\vec{k}_1), a_{\alpha_2}^+(\vec{k}_2), \cdots \right\} ,$$

che appaiono in (4.49), possono venir eliminati e quello che resta da calcolare è il valor medio sul vuoto del prodotto di un certo numero di operatori di campo, o delle loro derivate, ordinati cronologicamente

$$\langle 0 | \text{T} [\phi_{\sigma_i}(x_i) \phi_{\sigma_j}(x_j) \cdots \phi_{\sigma_k}(x_k)] | 0 \rangle . \quad (4.50)$$

Per valutare l'espressione (4.50), è sufficiente conoscere i valori medi delle coppie di operatori.

• **Propagatore.** Si consideri il valor medio sul vuoto del prodotto  $t$ -ordinato di due campi

$$\langle 0 | \text{T} [\phi_{\alpha}(x) \phi_{\beta}(y)] | 0 \rangle . \quad (4.51)$$

Se gli operatori di annichilazione e di distruzione contenuti nei campi  $\phi_{\alpha}(x)$  e  $\phi_{\beta}(y)$  si riferiscono a particelle diverse tra loro, la quantità (4.51) assume il valore nullo. Mentre, se i campi  $\phi_{\alpha}(x)$  e  $\phi_{\beta}(y)$

si riferiscono allo stesso tipo di particelle, allora la quantità (4.51) risulta non nulla ed è chiamata il propagatore di Feynman (o propagatore causale) o, più semplicemente, il propagatore.

- Il propagatore di un **campo scalare reale** è

$$\langle 0 | T [ \varphi(x) \varphi(y) ] | 0 \rangle = \overline{\varphi(x) \varphi(y)} = i \Delta(x - y) \quad , \quad (4.52)$$

dove

$$\Delta(x - y) = \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{e^{-i k \cdot (x-y)}}{k^2 - m^2 + i\epsilon} \quad . \quad (4.53)$$

- La componente non nulla del propagatore di un **campo scalare complesso** è

$$\langle 0 | T [ \phi(x) \phi^*(y) ] | 0 \rangle = \overline{\phi(x) \phi^*(y)} = i \Delta(x - y) \quad . \quad (4.54)$$

- Il propagatore di un **campo vettoriale reale massivo** è

$$\langle 0 | T [ B_\mu(x) B_\nu(y) ] | 0 \rangle = \overline{B_\mu(x) B_\nu(y)} = i D_{\mu\nu}(x - y) \quad , \quad (4.55)$$

dove

$$D_{\mu\nu}(x - y) = \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} e^{-i k \cdot (x-y)} \frac{-g_{\mu\nu} + k_\mu k_\nu / m^2}{k^2 - m^2 + i\epsilon} \quad . \quad (4.56)$$

- Il propagatore di un **campo vettoriale complesso massivo** è

$$\langle 0 | T [ U_\mu(x) U_\nu^*(y) ] | 0 \rangle = \overline{U_\mu(x) U_\nu^*(y)} = i D_{\mu\nu}(x - y) \quad . \quad (4.57)$$

- Per un **campo vettoriale reale a massa nulla**, il propagatore è

$$\langle 0 | T [ A_\mu(x) A_\nu(y) ] | 0 \rangle = \overline{A_\mu(x) A_\nu(y)} = -i g_{\mu\nu} \Delta_0(x - y) + \text{termini di gauge} \quad , \quad (4.58)$$

dove

$$\Delta_0(x - y) = \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{e^{-i k \cdot (x-y)}}{k^2 + i\epsilon} \quad . \quad (4.59)$$

L'espressione (4.58) contiene una parte non esplicita che è determinata dalla particolare scelta della gauge; questo argomento verrà discusso nel Capitolo 6.

- Il propagatore di un **campo spinoriale** è

$$\langle 0 | T [ \psi_\alpha(x) \bar{\psi}_\beta(y) ] | 0 \rangle = \overline{\psi_\alpha(x) \bar{\psi}_\beta(y)} = i S_{\alpha\beta}(x - y) \quad , \quad (4.60)$$

dove

$$S_{\alpha\beta}(x - y) = \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} e^{-i k \cdot (x-y)} \frac{(\widehat{k} + m)_{\alpha\beta}}{k^2 - m^2 + i\epsilon} \quad . \quad (4.61)$$

La struttura dei propagatori si ottiene [1,2,4,8] utilizzando la forma esplicita degli operatori di campo e le regole di commutazione o di anticommutazione degli operatori di annichilazione e di creazione. Le espressioni dei propagatori nello spazio degli impulsi contengono al denominatore il parametro reale positivo  $\epsilon$  ed è sottinteso che, dopo aver calcolato le ampiezze di interesse, questo parametro deve essere mandato a zero. Questa prescrizione, chiamata *prescrizione- $\epsilon$  di Feynman*, garantisce che il risultato finale che si ottiene è consistente con la proprietà di causalità e di positività dell'energia. Quando alcune derivate agiscono sui campi, il propagatore corrispondente si ottiene semplicemente derivando il propagatore per campi liberi.

• **Funzione di Green.** Il propagatore rappresenta la funzione di Green *causale* associata alle equazioni del moto per campi liberi; equivalentemente, *il propagatore corrisponde all'inverso dell'operatore differenziale che interviene nella Lagrangiana libera*. Consideriamo, per esempio, la Lagrangiana libera per un campo scalare reale

$$S_0 = \int d^4x \frac{1}{2} \left( \partial_\mu \varphi(x) \partial^\mu \varphi(x) - m^2 \varphi^2(x) \right) = \int d^4x \frac{1}{2} \varphi(x) \left( -\partial_\mu \partial^\mu - m^2 \right) \varphi(x) \quad . \quad (4.62)$$

L'operatore differenziale  $\mathcal{Q}$  che interviene nella Lagrangiana quadratica (4.62) è

$$\mathcal{Q} = \left( -\partial_\mu \partial^\mu - m^2 \right) \quad . \quad (4.63)$$

L'operatore  $\mathcal{Q}$  determina la forma delle equazioni del moto per il campo libero  $\varphi(x)$ ,

$$\mathcal{Q} \varphi(x) = \left( -\partial_\mu \partial^\mu - m^2 \right) \varphi(x) = 0 \quad . \quad (4.64)$$

Il propagatore per il campo  $\varphi(x)$  soddisfa la relazione

$$\mathcal{Q} \overline{\varphi(x) \varphi(y)} = i \delta^4(x - y) \quad . \quad (4.65)$$

Siccome la funzione  $\delta^4(x - y)$  rappresenta la matrice unità nello spazio delle  $x$ , l'equazione (4.65) mostra in che senso  $\overline{\varphi(x) \varphi(y)}$  può essere considerato l'inverso dell'operatore  $\mathcal{Q}$ . Più precisamente, dalla (4.65) segue che  $\overline{\varphi(x) \varphi(y)}$  è la funzione di Green associata all'equazione del moto per il campo  $\varphi(x)$ . L'introduzione della prescrizione- $\epsilon$  di Feynman assicura che la funzione di Green  $\overline{\varphi(x) \varphi(y)}$  è causale. Utilizzando l'operatore differenziale appropriato, la struttura dell'equazione (4.65) risulta valida per ogni propagatore.

• **Teorema di Wick.** Per calcolare una generica ampiezza del tipo mostrato in equazione (4.50), si utilizza il Teorema di Wick [1,2,4,8] secondo il quale si ha

$$\begin{aligned} \langle 0 | \mathbf{T} \left[ \phi_{\beta_1}(x_1) \phi_{\beta_2}(x_2) \cdots \phi_{\beta_n}(x_n) \right] | 0 \rangle &= \\ &= \sum_{i=2}^n \delta_i \overline{\phi_{\beta_1}(x_1) \phi_{\beta_i}(x_i)} \langle 0 | \mathbf{T} \left[ \phi_{\beta_2}(x_2) \cdots \hat{\phi}_{\beta_i}(x_i) \cdots \phi_{\beta_n}(x_n) \right] | 0 \rangle \quad , \end{aligned} \quad (4.66)$$

dove il simbolo  $\widehat{\phi}_{\beta_i}(x_i)$  indica che il campo  $\phi_{\beta_i}(x_i)$  è stato eliminato. Il fattore moltiplicativo  $\delta_i$  è uguale all'unità quando i campi  $\phi_{\beta_1}$  e  $\phi_{\beta_i}$  seguono la statistica di Bose; mentre, se questi campi sono fermionici, si ha  $\delta_i = (-1)^{f_i}$  dove  $f_i$  è il numero di campi fermionici compresi tra  $\phi_{\beta_1}$  e  $\phi_{\beta_i}$  nell'espressione di partenza.

Utilizzando in maniera ricorsiva il Teorema di Wick, il valor medio sul vuoto del prodotto  $t$ -ordinato di un numero di campi maggiore di due si decompone nella somma di vari contributi ognuno dei quali è un prodotto di propagatori. Chiaramente, per un numero dispari di campi l'ampiezza risultante è nulla. Per illustrare il teorema di Wick, consideriamo due esempi. Nel caso di un campo scalare reale, si ha

$$\begin{aligned} \langle 0 | T [\varphi(1) \varphi(2) \varphi(3) \varphi(4)] | 0 \rangle &= \overbrace{\varphi(1) \varphi(2)} \overbrace{\varphi(3) \varphi(4)} + \overbrace{\varphi(1) \varphi(3)} \overbrace{\varphi(2) \varphi(4)} \\ &+ \overbrace{\varphi(1) \varphi(4)} \overbrace{\varphi(2) \varphi(3)} . \end{aligned} \quad (4.67)$$

Nel caso di un campo spinoriale, si ottiene

$$\langle 0 | T [\psi(1) \psi(2) \bar{\psi}(3) \bar{\psi}(4)] | 0 \rangle = - \overbrace{\psi(1) \bar{\psi}(3)} \overbrace{\psi(2) \bar{\psi}(4)} + \overbrace{\psi(1) \bar{\psi}(4)} \overbrace{\psi(2) \bar{\psi}(3)} . \quad (4.68)$$

L'operazione di sostituire due campi mediante il propagatore corrispondente si chiama anche **contrazione di Wick**. Una semplice regola permette di ottenere i prodotti di propagatori col giusto segno; quando si effettua una contrazione di Wick tra due campi occorre modificare, se necessario, l'ordinamento di questi operatori in modo tale da disporli in posizioni consecutive. Nel modificare la posizione degli operatori, occorre ricordare che gli operatori di campo che seguono la statistica di Bose commutano con tutti gli altri operatori, mentre gli operatori che seguono la statistica di Fermi anticommutano tra loro.

Nel caso in cui la contrazione di Wick coinvolga due campi definiti nello stesso punto, il risultato può contenere delle divergenze. In effetti, tali divergenze devono essere eliminate mediante una procedura di regolarizzazione e di rinormalizzazione. In alcuni casi, può risultare conveniente eliminare fin dall'inizio tutte le contrazioni di Wick dei campi che sono definiti nello stesso punto. Per le teorie quantistiche di campo definite nello spazio-tempo quadridimensionale, questa regola è consistente e definisce una particolare procedura di regolarizzazione per questo tipo di divergenze.

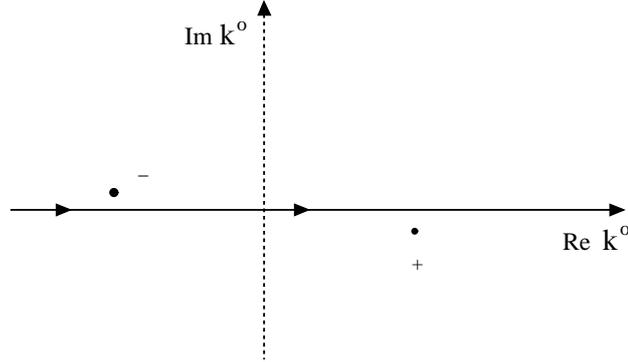
**4E. Struttura analitica del propagatore.** In questa sezione analizzeremo il significato fisico del propagatore e della corrispondente prescrizione- $\epsilon$  di Feynman. Per semplificare la discussione, consideriamo il propagatore di un campo scalare reale

$$\overbrace{\varphi(x) \varphi(y)} = i \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{e^{-i k \cdot (x-y)}}{k^2 - m^2 + i\epsilon} . \quad (4.69)$$

Per ogni valore fissato dell'impulso spaziale  $\vec{k}$ , l'integrando che appare nella (4.69) possiede due poli nel piano complesso della variabile di integrazione  $k^0$ . Al primo ordine in  $\epsilon > 0$ , le posizioni di questi due poli nel piano complesso di  $k^0$  sono dati da

$$\omega_{\pm} = \pm \sqrt{(\vec{k})^2 + m^2} \mp i \frac{\epsilon}{2 \sqrt{(\vec{k})^2 + m^2}} = \pm E(\vec{k}) \mp i \frac{\epsilon}{2 E(\vec{k})} , \quad (4.70)$$

dove  $E(\vec{k}) = \sqrt{(\vec{k})^2 + m^2} > 0$ . L'integrale nella variabile reale  $k^0$ , che appare in (4.69), corrisponde al cammino di integrazione lungo l'asse reale nel piano complesso  $k^0$ ; questo cammino e le posizioni dei poli (4.70) sono mostrati in Figura 4.1.



**Figura 4.1** Piano complesso dell'energia.

Nel limite  $\epsilon \rightarrow 0$ , i poli si posizionano sull'asse reale; quindi, la prescrizione- $\epsilon$  di Feynman rappresenta semplicemente una ricetta che determina univocamente il modo di contornare i poli sull'asse reale. Questa prescrizione è in accordo col fatto che, a causa della positività dell'energia, non si devono incontrare singolarità nel prolungamento analitico Euclideo  $t \rightarrow -i\tau$ . Infatti, per mantenere la dipendenza funzionale corretta nelle trasformate di Fourier, quando si effettua il prolungamento analitico  $t \rightarrow -i\tau$  nelle coordinate occorre simultaneamente effettuare la sostituzione  $k^0 \rightarrow i\kappa$  negli impulsi. In base alla prescrizione- $\epsilon$ , i poli vengono contornati in modo tale che il cammino di integrazione può essere trasformato con continuità (mediante una rotazione di 90 gradi in senso antiorario) in un nuovo cammino diretto lungo l'asse immaginario nel piano complesso  $k^0$  senza incontrare singolarità. Conseguentemente, la prescrizione- $\epsilon$  è in perfetto accordo con l'esistenza del prolungamento analitico Euclideo.

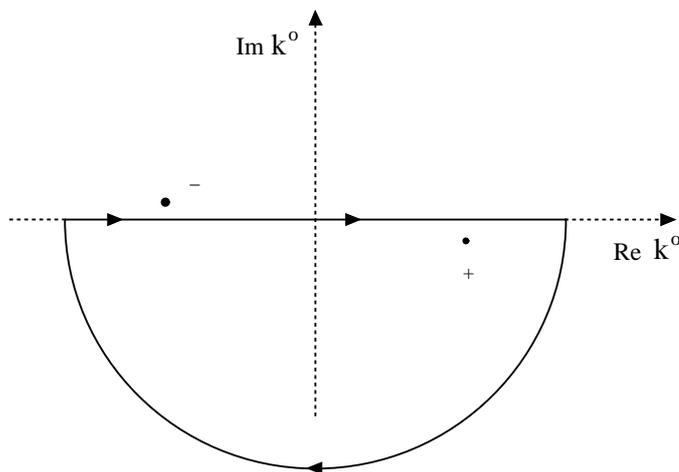
Consideriamo ora il calcolo esplicito dell'integrale nella variabile  $k^0$  che appare nell'espressione del propagatore. Quando l'intervallo temporale  $x^0 - y^0$  è positivo, l'integrale (4.69) può essere effettuato utilizzando il cammino mostrato in Figura 4.2 nel limite in cui il raggio del semicerchio nel semipiano complesso tende all'infinito. In base al teorema dei residui, si ottiene

$$\overline{\varphi(x) \varphi(y)} = \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3 2E(\vec{k})} e^{i\vec{k}(\vec{x}-\vec{y})} e^{-i(x^0-y^0)E(\vec{k})} \quad \text{per } x^0 - y^0 > 0 \quad . \quad (4.71)$$

In maniera analoga si calcola l'integrale quando l'intervallo temporale  $x^0 - y^0$  è negativo. Sommando i due contributi, si ottiene infine

$$\overline{\varphi(x) \varphi(y)} = \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3 2E(\vec{k})} e^{i\vec{k}(\vec{x}-\vec{y})} \left[ \theta(x^0 - y^0) e^{-i(x^0-y^0)E(\vec{k})} + \theta(y^0 - x^0) e^{-i(y^0-x^0)E(\vec{k})} \right] . \quad (4.72)$$

La (4.72) mostra che il propagatore  $\overline{\varphi(x)\varphi(y)}$  rappresenta l'ampiezza di transizione per una particella che è creata ed annichilata in corrispondenza dei punti  $x$  ed  $y$  dello spazio di Minkowski. Più precisamente, quando  $\Delta t = x^0 - y^0 > 0$ , una particella viene creata nel punto di coordinate  $y$  e viene annichilata nel punto  $x$ ; similmente, quando  $\Delta t = y^0 - x^0 > 0$ , una particella viene creata nel punto di coordinate  $x$  e viene annichilata nel punto  $y$ . L'integrale sui valori dell'impulso spaziale, che appare in (4.72), è dovuto al fatto che una particella localizzata in un punto si trova in uno stato la cui funzione d'onda contiene tutti i possibili valori dell'impulso. La dipendenza dal tempo dell'espressione (4.72) riproduce correttamente il valore positivo dell'energia. Infine, il fattore di normalizzazione  $2E(\vec{k})$  al denominatore dell'integrando nella (4.72) garantisce l'invarianza relativistica della misura di integrazione  $d^3k/2E(\vec{k})$ . La contrazione di Wick  $\overline{\varphi(x)\varphi(y)}$  corrisponde quindi alla propagazione causale di una particella tra i punti di coordinate  $x$  ed  $y$ ; per questo motivo  $\overline{\varphi(x)\varphi(y)}$  è chiamato il propagatore.



**Figura 4.2** Cammino di integrazione.

**4F. Diffusione Compton.** Per illustrare l'uso del Teorema di Wick nel calcolo delle ampiezze, consideriamo il processo di diffusione elettromagnetica in cui si ha un elettrone ed un fotone nello stato iniziale ed un elettrone ed un fotone nello stato finale. Lo stato iniziale è dato da

$$|\text{in}\rangle = b^+(\vec{p}_1, r) a_\alpha^+(\vec{k}_1) |0\rangle \quad , \quad (4.73)$$

dove l'elettrone si trova nello stato di polarizzazione descritto dall'indice  $r$  mentre il fotone si trova nello stato di polarizzazione rettilinea corrispondente all'indice  $\alpha$ . Lo stato finale è descritto da

$$|\text{out}\rangle = b^+(\vec{p}_2, s) a_\beta^+(\vec{k}_2) |0\rangle \quad . \quad (4.74)$$

La Lagrangiana di interazione è mostrata in equazione (4.35); quindi, al secondo ordine nella costante di

accoppiamento, l'ampiezza risulta essere

$$A = -\frac{e^2}{2} \int d^4x \int d^4y \langle 0 | b(\vec{p}_2, s) a_\beta(\vec{k}_2) \times \quad (4.75)$$

$$\times T \{ \bar{\psi}(x) \gamma^\mu \psi(x) A_\mu(x) \bar{\psi}(y) \gamma^\nu \psi(y) A_\nu(y) \} b^+(\vec{p}_1, r) a_\alpha^+(\vec{k}_1) | 0 \rangle .$$

Eliminiamo ora gli operatori di annichilazione e di creazione, relativi agli stati iniziale e finale, che appaiono nella (4.75). L'operatore  $a_\beta(\vec{k}_2)$  può eliminare un operatore di creazione contenuto in  $A_\mu(x)$  oppure in  $A_\nu(y)$ . Queste due possibilità danno origine a due contributi tra loro identici; quindi, è sufficiente considerare uno solo di essi e moltiplicare per un fattore due. Per esempio, assumiamo che  $a_\beta(\vec{k}_2)$  elimini un operatore di creazione contenuto in  $A_\mu(x)$ . Allora, l'operatore  $a_\alpha^+(\vec{k}_1)$  deve eliminare un operatore di annichilazione contenuto necessariamente in  $A_\nu(y)$ . Pertanto si ottiene

$$A = -e^2 \int d^4x \int d^4y \frac{e^{ik_2x}}{(2\pi)^{3/2} \sqrt{2|\vec{k}_2|}} \frac{e^{-ik_1y}}{(2\pi)^{3/2} \sqrt{2|\vec{k}_1|}} \varepsilon_\mu^{(\beta)}(\vec{k}_2) \varepsilon_\nu^{(\alpha)}(\vec{k}_1) \times \quad (4.76)$$

$$\times \langle 0 | b(\vec{p}_2, s) T \{ \bar{\psi}(x) \gamma^\mu \psi(x) \bar{\psi}(y) \gamma^\nu \psi(y) \} b^+(\vec{p}_1, r) | 0 \rangle .$$

L'operatore  $b(\vec{p}_2, s)$  può eliminare un operatore di creazione contenuto in  $\bar{\psi}(x)$  oppure in  $\bar{\psi}(y)$ . Nel primo caso, l'operatore  $b^+(\vec{p}_1, r)$  deve eliminare un operatore di annichilazione contenuto in  $\psi(y)$  mentre, nel secondo caso,  $b^+(\vec{p}_1, r)$  deve eliminare un operatore di annichilazione contenuto in  $\psi(x)$ . Questi due contributi non sono equivalenti e vanno sommati. Avendo eliminato  $b(\vec{p}_2, s)$  e  $b^+(\vec{p}_1, r)$ , restano due operatori di campo fermionici su cui effettuare la contrazione di Wick. In conclusione, l'ampiezza (4.76) assume la forma [3]

$$A = \frac{-i e^2 m}{8 \pi^2} \frac{1}{\sqrt{E(\vec{p}_1) E(\vec{p}_2) |\vec{k}_1| |\vec{k}_2|}} \delta^4(p_1 + k_1 - p_2 - k_2) \times$$

$$\times \left\{ \bar{u}(\vec{p}_2, s) \hat{\varepsilon}^{(\beta)}(\vec{k}_2) \frac{\hat{p}_1 + \hat{k}_1 + m}{(p_1 + k_1)^2 - m^2 + i\epsilon} \hat{\varepsilon}^{(\alpha)}(\vec{k}_1) u(\vec{p}_1, r) + \right.$$

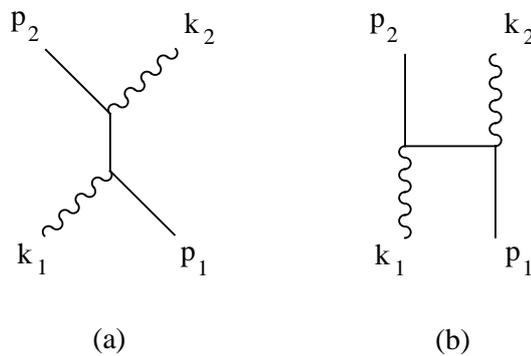
$$\left. + \bar{u}(\vec{p}_2, s) \hat{\varepsilon}^{(\alpha)}(\vec{k}_1) \frac{\hat{p}_1 - \hat{k}_2 + m}{(p_1 - k_2)^2 - m^2 + i\epsilon} \hat{\varepsilon}^{(\beta)}(\vec{k}_2) u(\vec{p}_1, r) \right\} . \quad (4.77)$$

• **Grafici di Feynman.** Si consideri il calcolo delle ampiezze di transizione mediante il metodo perturbativo. Ad ogni ordine perturbativo fissato, cioè ad ogni ordine fissato delle potenze delle costanti di accoppiamento, il contributo all'ampiezza può essere descritto mediante opportuni diagrammi chiamati grafici di Feynman in cui

- ogni propagatore è rappresentato da una linea che unisce due vertici di interazione,
- le funzioni d'onda degli stati iniziali e finali sono rappresentate da linee esterne del diagramma.

Nel caso del risultato (4.77), utilizzando una linea continua per il fermione ed una linea ondulata per il campo vettoriale, i due contributi all'ampiezza (4.77) sono descritti dai diagrammi di Figura 4.3(a) e Figura 4.3(b).

I grafici di Feynman risultano particolarmente convenienti per comprendere la dinamica dei processi di interazione tra particelle. Le linee esterne dei diagrammi corrispondono alle particelle degli stati iniziale e finale mentre le linee interne dei grafici, che rappresentano i propagatori, corrispondono a *processi virtuali* di creazione e di annichilazione di particelle nelle fasi intermedie dell'interazione. Una linea interna rappresenta la propagazione di una particella "virtuale" perché tale particella non compare negli stati asintotici iniziale e finale.



**Figura 4.3** Diffusione elettrone-fotone.

Il diagramma di Figura 4.3(a), per esempio, descrive il processo di diffusione in cui l'elettrone ed il fotone passano dallo stato iniziale a quello finale tramite la propagazione nello stato intermedio di un elettrone virtuale con quadrimpulso  $(p_1 + k_1)$ . Il processo descritto dal grafico di Figura 4.3(b), invece, corrisponde allo scambio di un elettrone virtuale con quadrimpulso  $(p_1 - k_2)$ .

## Capitolo 5

### Teorie di campo e grafici di Feynman

Gli esempi dei capitoli precedenti hanno mostrato come si possono descrivere i processi di interazione tra le particelle utilizzando il formalismo della teoria quantistica dei campi. In questo capitolo considereremo alcune proprietà generali delle teorie di campo. In particolare, verranno analizzate le caratteristiche della dinamica che sono definite dallo sviluppo perturbativo delle ampiezze di transizione in somme di grafici di Feynman.

• **Il modello.** Per semplificare la discussione, considereremo a scopo illustrativo un modello di teoria di campo che contiene un solo campo scalare reale  $\varphi(x)$ . Il cosiddetto modello  $\varphi^4$  è definito dall'azione

$$S[\varphi] = \int d^4x \left\{ \frac{1}{2} \partial_\mu \varphi(x) \partial^\mu \varphi(x) - \frac{1}{2} m^2 \varphi^2(x) - \frac{g}{4!} \varphi^4(x) \right\} \quad , \quad (5.1)$$

in cui la costante di accoppiamento  $g$  è adimensionale. Come al solito, il funzionale (5.1) si può decomporre nella somma di due termini; il primo termine coincide con la parte quadratica nei campi dell'espressione (5.1) e rappresenta l'azione libera per il campo  $\varphi(x)$ . Il secondo termine è dato dall'integrale della Lagrangiana di interazione

$$S_I[\varphi] = -\frac{g}{4!} \int d^4x \varphi^4(x) \quad . \quad (5.2)$$

Lo sviluppo perturbativo di una ampiezza di transizione, o di una generica variabile a cui siamo interessati, è definito tramite una serie formale in potenze della costante di accoppiamento. Ad ogni ordine finito nelle potenze della costante di accoppiamento, lo sviluppo perturbativo del modello (5.1) ammette una interpretazione fisica consistente; il modello (5.1) è rinormalizzabile.

**5A. Ampiezze e sviluppo perturbativo.** In rappresentazione di interazione, una generica ampiezza di transizione è data dalla seguente espressione

$$A(\vec{k}'_j; \vec{k}_i) = \langle 0 | a(\vec{k}'_1) a(\vec{k}'_2) \cdots \text{T exp}(+i S_I[\varphi]) a^+(\vec{k}_1) a^+(\vec{k}_2) \cdots | 0 \rangle \quad . \quad (5.3)$$

Si vuole ora determinare la precisa normalizzazione delle ampiezze e descrivere in maniera sistematica i contributi perturbativi mediante somme di grafici di Feynman. Dalla (5.3) segue che, quando lo stato iniziale e lo stato finale non contengono particelle, la corrispondente **ampiezza vuoto-vuoto** è data da

$$A_0 = \langle 0 | \text{T exp}(+i S_I[\varphi]) | 0 \rangle \quad . \quad (5.4)$$

Quindi, l'ampiezza correttamente normalizzata assume la forma

$$A_N(\vec{k}'_j; \vec{k}_i) = (A_0)^{-1} \langle 0 | a(\vec{k}'_1) a(\vec{k}'_2) \cdots \text{T exp}(+i S_I[\varphi]) a^+(\vec{k}_1) a^+(\vec{k}_2) \cdots | 0 \rangle \quad . \quad (5.5)$$

Nel calcolo esplicito della (5.3), gli operatori di annichilazione e di creazione relativi agli stati finale ed iniziale delle particelle vanno eliminati tramite le regole di commutazione. Durante questa operazione, ciascun operatore di annichilazione  $a(\vec{k}'_j)$  elimina un campo  $\varphi(y)$ , che è contenuto nello sviluppo dell'operatore

$$U(+\infty, -\infty) = T \exp(+i S_I[\varphi]) \quad , \quad (5.6)$$

e lo sostituisce con la corrispondente funzione d'onda di una particella nello stato finale. Similmente, ciascun operatore di creazione  $a^+(\vec{k}'_i)$  elimina un campo  $\varphi(z)$  e lo sostituisce con la corrispondente funzione d'onda di una particella nello stato iniziale. Gli operatori di campo  $\varphi(x)$  che rimangono nello sviluppo dell'operatore (5.6) vengono eliminati mediante contrazioni di Wick.

• **Osservazione.** *Nel calcolo dell'ampiezza (5.3), ogni operatore  $\varphi(x)$  che compare nello sviluppo dell'operatore (5.6) può subire una contrazione di Wick con un altro operatore di campo, oppure può generare una funzione d'onda corrispondente ad una particella nello stato iniziale o finale.* Per tener conto di queste due possibilità mutualmente esclusive, è conveniente sostituire ogni operatore di campo  $\varphi(x)$  mediante la somma

$$\varphi(x) \rightarrow \varphi(x) + \Phi(x) \quad , \quad (5.7)$$

dove  $\Phi(x)$  non è soggetto a contrazioni di Wick e rappresenta la funzione d'onda di una eventuale particella in uno stato iniziale o finale. Siccome  $\Phi(x)$  non deve subire contrazioni di Wick con l'operatore di campo  $\varphi(y)$ , la componente  $\Phi(x)$  può essere considerata come un campo classico.

• **Funzionale  $U$ .** Effettuando la sostituzione (5.7) nella (5.6), l'insieme di *tutte* le ampiezze di transizione (5.3), al variare di tutti i possibili stati iniziali e finali, è descritto semplicemente dal funzionale

$$U[\Phi] = \langle 0 | T \exp(+i S_I[\varphi + \Phi]) | 0 \rangle \quad . \quad (5.8)$$

Nel calcolo di  $U[\Phi]$ , tutti gli operatori di campo  $\varphi(x)$  vengono eliminati mediante contrazioni di Wick ed i corrispondenti propagatori sono rappresentati dalle linee interne dei grafici di Feynman. I campi classici  $\Phi(x)$  corrispondono alle linee esterne dei grafici. Il funzionale  $U[\Phi]$  contiene tutta l'informazione sulla dinamica della teoria.

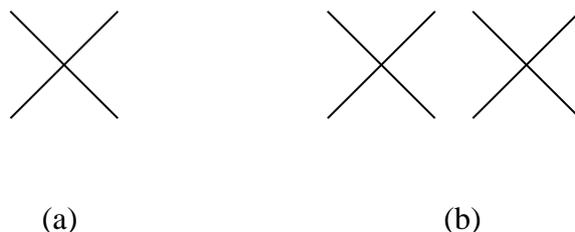
• **Calcolo al second'ordine.** Nel modello  $\varphi^4$  che stiamo considerando, la Lagrangiana di interazione è mostrata in equazione (5.2) e si ottiene

$$S_I[\varphi + \Phi] = -\frac{g}{4!} \int d^4x \left\{ \varphi^4(x) + 4\varphi^3(x)\Phi(x) + 6\varphi^2(x)\Phi^2(x) + 4\varphi(x)\Phi^3(x) + \Phi^4(x) \right\} \quad . \quad (5.9)$$

Il funzionale (5.8) ammette uno sviluppo in potenze della costante di accoppiamento; trascurando le contrazioni di Wick dei campi definiti nello stesso punto, i primi tre termini di tale sviluppo sono

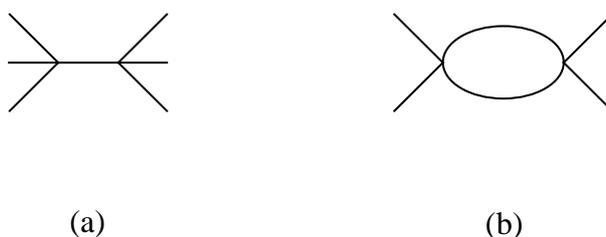
$$\begin{aligned} U[\Phi] = & 1 - i \frac{g}{4!} \int d^4x \Phi^4(x) - \left(\frac{g}{4!}\right)^2 \left\{ \frac{1}{2} \int d^4x d^4y \Phi^4(x) \Phi^4(y) \right. \\ & + 8i \int d^4x d^4y \Phi^3(x) \Delta(x-y) \Phi^3(y) - 36 \int d^4x d^4y \Phi^2(x) \Delta^2(x-y) \Phi^2(y) \\ & \left. - 48i \int d^4x d^4y \Phi(x) \Delta^3(x-y) \Phi(y) + 12 \int d^4x d^4y \Delta^4(x-y) \right\} + O(g^3) \end{aligned} \quad (5.10)$$

• **Primo ordine.** Il termine lineare nella costante di accoppiamento corrisponde al diagramma di Figura 5.1(a) e rappresenta l'ampiezza di transizione per un processo di diffusione tra due particelle nello stato iniziale e due particelle nello stato finale. Lo stesso diagramma potrebbe anche rappresentare l'ampiezza di decadimento di una sola particella in tre particelle nello stato finale; questo processo in realtà non avviene a causa della conservazione del quadrimpulso.



**Figura 5.1** Vertici elementari.

• **Secondo ordine.** Al secondo ordine nella costante di accoppiamento, l'espressione (5.10) contiene cinque termini; il primo di essi è descritto dal grafico di Feynman di Figura 5.1(b) e corrisponde alla possibilità che due processi di diffusione al primo ordine si verifichino contemporaneamente. Chiaramente, l'ampiezza risultante è il prodotto delle ampiezze dei singoli processi. Il secondo ed il terzo termine di ordine  $g^2$  dell'espressione (5.10) sono descritti rispettivamente dai diagrammi di Figura 5.2(a) e Figura 5.2(b).

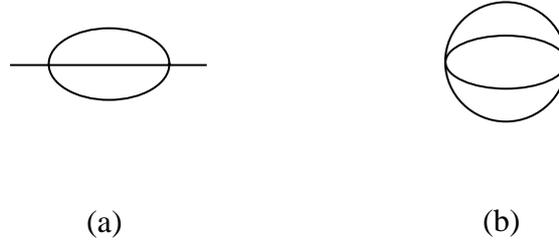


**Figura 5.2** Processo ad albero (a) e correzione al vertice (b).

Si noti che ogni vertice dei grafici (o vertice di interazione) è il punto di incontro di quattro linee; questo è dovuto al fatto che la Lagrangiana di interazione (5.2) è il prodotto di quattro operatori di campo  $\mathcal{L}_I = -(g/4!) \varphi^4(x)$ .

Gli ultimi due termini di ordine  $g^2$  della (5.10) corrispondono ai grafici di Figura 5.3(a) e Figura 5.3(b). Il diagramma di Figura 5.3(a) contiene solo due linee esterne; questo grafico non rappresenta una ampiezza di diffusione vera e propria ma corrisponde ad un contributo della interazione tra particelle che può modificare la funzione d'onda degli stati iniziale e finale ed il valore della massa delle particelle. In

effetti, questo contributo è quadratico nel campo esterno  $\Phi(x)$  e può quindi essere interpretato come una modifica della parte quadratica della Lagrangiana. Infine, il diagramma di Figura 5.3(b) non ha linee esterne e contribuisce all'ampiezza vuoto-vuoto.



**Figura 5.3** Self-energia (a) e grafico vuoto-vuoto (b).

• **Funzioni d'onda.** Per ottenere l'espressione dell'ampiezza (5.3) utilizzando il funzionale  $U[\Phi]$  occorre sostituire  $\Phi(x)$  con le appropriate funzioni d'onda delle particelle negli stati iniziale e finale. Per far questo, è sufficiente rappresentare in maniera opportuna gli operatori di annichilazione e di creazione. Ogni operatore  $a(\vec{k}'_j)$ , corrispondente ad una particella nello stato finale, si rappresenta come

$$a(\vec{k}'_j) \rightarrow \hat{a}(\vec{k}'_j) = \int \frac{d^4x}{(2\pi)^{3/2}} \frac{e^{i\vec{k}'_j x}}{\sqrt{2E(\vec{k}'_j)}} \frac{\delta}{\delta \Phi(x)} \quad . \quad (5.11)$$

Similmente, ogni operatore  $a^+(\vec{k}_i)$  si rappresenta come

$$a^+(\vec{k}_i) \rightarrow \hat{a}^+(\vec{k}_i) = \int \frac{d^4x}{(2\pi)^{3/2}} \frac{e^{-i\vec{k}_i x}}{\sqrt{2E(\vec{k}_i)}} \frac{\delta}{\delta \Phi(x)} \quad . \quad (5.12)$$

Allora, l'ampiezza normalizzata (5.5) si può scrivere semplicemente come

$$A_N(\vec{k}'_j; \vec{k}_i) = U^{-1}[0] \prod_j \hat{a}(\vec{k}'_j) \prod_i \hat{a}^+(\vec{k}_i) U[\Phi] \Big|_{\Phi=0} \quad . \quad (5.13)$$

• **Nota.** La struttura algebrica associata all'interpretazione dei campi come operatori nello spazio di Hilbert è conveniente per introdurre il formalismo della teoria di campo. Tuttavia, per quanto riguarda il calcolo delle ampiezze di transizione ed il loro confronto coi dati sperimentali, tale struttura risulta in gran parte superflua. Come mostrato nella (5.13), la fisica di una teoria di campo è descritta dalla dipendenza funzionale di  $U[\Phi]$  dai campi classici  $\Phi(x)$ . La quantizzazione dei campi in un opportuno spazio di Hilbert non è essenziale. Infatti, il funzionale  $U[\Phi]$  si può ottenere anche utilizzando l'approccio funzionale di Feynman [5] che non è basato sull'esistenza di operatori di campo.

• **Nota.** Nel calcolo dei grafici di Feynman, si incontrano generalmente delle divergenze. Questo non significa necessariamente che la teoria di campo non ammette una interpretazione fisica consistente. Infatti, occorre identificare i parametri fisici che vengono effettivamente osservati ed introdurre per essi delle condizioni di normalizzazione. Le procedure di regolarizzazione e di rinormalizzazione verranno discusse nelle prossime sezioni.

**5B. Funzionale generatore.** Per comprendere il ruolo dei diversi grafici di Feynman, è necessario classificare i diagrammi attraverso l'introduzione di alcune definizioni. Un diagramma che non è la somma disgiunta di due o più sottodiagrammi si dice **connesso**. Il grafico di Figura 5.1(a), per esempio, è connesso mentre il grafico di Figura 5.1(b) non è connesso. Ogni diagramma rappresenta una certa ampiezza; se un diagramma non è connesso, l'ampiezza corrispondente è semplicemente il prodotto delle ampiezze associate ai sottodiagrammi connessi. Quindi i grafici di Feynman che richiedono di essere calcolati sono solamente quelli connessi. Le linee interne di un diagramma possono formare dei circuiti chiusi che vengono chiamati **loop**. Il grafico di Figura 5.2(b) contiene un loop e, per questo motivo, è detto essere un grafico ad un loop. Un grafico a due loop è mostrato in Figura 5.3(a) mentre la Figura 5.3(b) rappresenta un grafico a tre loop. I diagrammi che non contengono loop sono detti **diagrammi ad albero**; la Figura 5.2(a) mostra un esempio di diagramma ad albero.

Per descrivere in maniera semplice l'insieme dei grafici di Feynman si introduce [8,9,10] generalmente il **funzionale generatore**  $Z[J]$  definito da

$$Z[J] = \langle 0 | T \exp \left( i S_I[\varphi] + i \int d^4x J(x) \varphi(x) \right) | 0 \rangle, \quad (5.14)$$

dove  $J(x)$  è una sorgente classica. Dalla definizione di  $Z[J]$  segue che

$$\left. \frac{\delta^n Z[J]}{\delta J(x_1) \cdots \delta J(x_n)} \right|_{J=0} = i^n \langle 0 | T e^{i S_I[\varphi]} \varphi(x_1) \cdots \varphi(x_n) | 0 \rangle. \quad (5.15)$$

Quindi, il coefficiente  $n$ -esimo dello sviluppo di  $Z[J]$  in potenze di  $J(x)$  è dato dalla somma dei grafici di Feynman con  $n$  linee esterne in cui anche ogni linea esterna corrisponde ad un propagatore.

• **Funzioni di correlazione.** L'ampiezza vuoto-vuoto coincide con  $Z[0]$  e rappresenta la norma del vettore di vuoto in rappresentazione di interazione. Per normalizzare il vettore di vuoto all'unità, è sufficiente introdurre il fattore moltiplicativo  $Z^{-1}[0]$ . Utilizzando questa normalizzazione, l'ampiezza che appare nel secondo membro dell'equazione (5.15) si chiama la funzione di correlazione ad  $n$  punti

$$G(x_1, \dots, x_n) = \frac{\langle 0 | T e^{i S_I[\varphi]} \varphi(x_1) \cdots \varphi(x_n) | 0 \rangle}{\langle 0 | T e^{i S_I[\varphi]} | 0 \rangle}. \quad (5.16)$$

$Z[J]$  è detto il funzionale generatore delle funzioni di correlazione perché vale la relazione

$$G(x_1, \dots, x_n) = Z^{-1}[0] \left. \frac{(-i)^n \delta^n}{\delta J(x_1) \cdots \delta J(x_n)} Z[J] \right|_{J=0}. \quad (5.17)$$

• **Teoria libera.** Consideriamo una teoria libera in cui  $S_I = 0$ ; in questo caso, il funzionale generatore  $Z_0[J]$  si può calcolare in maniera esatta. Infatti

$$\begin{aligned} Z_0[J] &= \langle 0 | \text{T exp} \left( i \int d^4x J(x) \varphi(x) \right) | 0 \rangle \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{i^n}{n!} \int d^4x_1 J(x_1) \cdots \int d^4x_n J(x_n) \langle 0 | \text{T} \varphi(x_1) \cdots \varphi(x_n) | 0 \rangle \end{aligned} \quad (5.18)$$

Il valor medio  $\langle 0 | \text{T} \varphi(x_1) \cdots \varphi(x_n) | 0 \rangle$  è diverso da zero solamente quando  $n$  è un numero pari,  $n = 2p$ . Le contrazioni di Wick col primo campo  $\varphi(x_1)$  consistono di  $n - 1 = 2p - 1$  termini uguali tra loro. Operando in maniera ricorsiva, il fattore combinatorico risulta essere  $(2p - 1)!! = (2p - 1)(2p - 3)(2p - 5) \cdots 3 \cdot 1$ . Si ottiene quindi

$$Z_0[J] = \sum_{p=0}^{\infty} \frac{i^{2p} (2p - 1)!!}{(2p)!} \left( i \int d^4x d^4y J(x) \Delta(x - y) J(y) \right)^p \quad (5.19)$$

Utilizzando la relazione  $(2p - 1)!!/(2p)! = 1/(2^p p!)$ , l'espressione (5.19) si può riscrivere nella forma

$$Z_0[J] = \exp \left( -\frac{i}{2} \int d^4x d^4y J(x) \Delta(x - y) J(y) \right) \quad (5.20)$$

Dalla (5.20) segue che, per una teoria libera,  $Z_0[0] = 1$ . Siccome  $Z_0[J]$  soddisfa la relazione

$$\left. \frac{\delta^n Z_0[J]}{\delta J(x_1) \cdots \delta J(x_n)} \right|_{J=0} = i^n \langle 0 | \text{T} \varphi(x_1) \cdots \varphi(x_n) | 0 \rangle \quad (5.21)$$

la funzione di correlazione libera ad  $n$  punti  $G_0(x_1, \dots, x_n)$  si può rappresentare nel modo seguente

$$G_0(x_1, \dots, x_n) = \left. \frac{(-i)^n \delta^n}{\delta J(x_1) \cdots \delta J(x_n)} e^{-\frac{i}{2} \int d^4x d^4y J(x) \Delta(x-y) J(y)} \right|_{J=0} \quad (5.22)$$

L'equazione (5.22) esprime, in maniera funzionale, il contenuto del teorema di Wick. La (5.22) ammette anche una rappresentazione alternativa che risulta particolarmente utile. Questa nuova rappresentazione è basata sulla seguente proprietà.

• **Proprietà di scambio delle derivate.** Siano  $F(x_j)$  e  $G(x_k)$  due funzioni di  $n$  variabili reali  $x = x_i = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ . Allora vale [10] la seguente relazione

$$F\left(-i \frac{\partial}{\partial x_j}\right) G(x_k) = G\left(-i \frac{\partial}{\partial y_k}\right) F(y_j) e^{i x \cdot y} \Big|_{y=0} \quad (5.23)$$

dove  $x \cdot y = \sum_i x_i y_i$ .

Dimostrazione. Le funzioni  $F$  e  $G$  si possono rappresentare mediante integrali di Fourier; pertanto, è sufficiente verificare la validità della (5.23) nel caso di generiche onde piane in cui

$$F(x) = e^{i b \cdot x} \quad , \quad G(x) = e^{i c \cdot x} \quad . \quad (5.24)$$

Il primo membro della (5.23) vale

$$e^{i b \cdot (-i\partial/\partial x)} e^{i c \cdot x} = e^{b \cdot (\partial/\partial x)} e^{i c \cdot x} = e^{i c \cdot (x+b)} \quad . \quad (5.25)$$

Il secondo membro della (5.23) risulta essere

$$e^{i c \cdot (-i\partial/\partial y)} e^{i b \cdot y} e^{i x \cdot y} \Big|_{y=0} = e^{c \cdot (\partial/\partial y)} e^{i b \cdot y} e^{i x \cdot y} \Big|_{y=0} = e^{i(x+b) \cdot (y+c)} \Big|_{y=0} = e^{i c \cdot (x+b)} \quad . \quad (5.26)$$

Siccome le quantità (5.25) e (5.26) coincidono per qualunque scelta dei vettori  $b$  e  $c$ , la relazione (5.23) è valida per qualunque funzione  $F$  e  $G$ . ■

Utilizzando la proprietà (5.23) nel caso particolare (5.22), il valor medio sul vuoto del prodotto  $t$ -ordinato di  $n$  campi si può scrivere come

$$\langle 0 | T \varphi(x_1) \cdots \varphi(x_n) | 0 \rangle = e^{\frac{i}{2} \int d^4 x d^4 y \frac{\delta}{\delta \phi(x)} \Delta(x-y) \frac{\delta}{\delta \phi(y)} \phi(x_1) \cdots \phi(x_n)} \Big|_{\phi=0} \quad . \quad (5.27)$$

Nella (5.27) appare esplicitamente l'espressione del propagatore ed è facilmente riconoscibile la struttura combinatorica delle contrazioni dei campi come risulta dal Teorema di Wick.

• **Teoria interagente.** Riconsideriamo ora la teoria interagente ed il funzionale generatore (5.14); in base alla relazione (5.27) il funzionale  $Z[J]$  risulta essere

$$Z[J] = e^{\frac{i}{2} \int d^4 x d^4 y \frac{\delta}{\delta \phi(x)} \Delta(x-y) \frac{\delta}{\delta \phi(y)} \exp \left( i S_I[\phi] + i \int d^4 w J(w) \phi(w) \right)} \Big|_{\phi=0} \quad . \quad (5.28)$$

Nell'espressione (5.28) appaiono tutte le contrazioni di Wick possibili, anche quelle che si riferiscono ad operatori definiti nello stesso punto. L'equazione (5.28) può essere ulteriormente elaborata notando che

$$\begin{aligned} e^{\frac{i}{2} \int d^4 x d^4 y \frac{\delta}{\delta \phi(x)} \Delta(x-y) \frac{\delta}{\delta \phi(y)} e^{i \int d^4 w J(w) \phi(w)}} &= e^{i \int d^4 w J(w) \phi(w)} \times \\ \times e^{-\frac{i}{2} \int d^4 x d^4 y J(x) \Delta(x-y) J(y)} e^{\frac{i}{2} \int d^4 x d^4 y \frac{\delta}{\delta \phi(x)} \Delta(x-y) \frac{\delta}{\delta \phi(y)} e^{-\int d^4 x d^4 y \frac{\delta}{\delta \phi(x)} \Delta(x-y) J(y)}} & . \end{aligned} \quad (5.29)$$

Utilizzando la (5.29), l'espressione (5.28) assume la forma

$$Z[J] = e^{-\frac{i}{2} \int d^4 x d^4 y J(x) \Delta(x-y) J(y)} e^{\frac{i}{2} \int d^4 x d^4 y \frac{\delta}{\delta \phi(x)} \Delta(x-y) \frac{\delta}{\delta \phi(y)} e^{i S_I[\phi - \Delta J]} \Big|_{\phi=0} \quad , \quad (5.30)$$

dove si è posto

$$\Delta J(x) = \int d^4 y \Delta(x-y) J(y) \quad . \quad (5.31)$$

In base alla rappresentazione (5.27) del Teorema di Wick, il funzionale  $U[\Phi]$  definito dalla (5.8) si può esprimere come

$$U[\Phi] = e^{\frac{i}{2} \int d^4 x d^4 y \frac{\delta}{\delta \phi(x)} \Delta(x-y) \frac{\delta}{\delta \phi(y)} e^{i S_I[\phi + \Phi]} \Big|_{\phi=0}} \quad ; \quad (5.32)$$

pertanto, il funzionale generatore  $Z[J]$  delle funzioni di correlazione risulta essere

$$Z[J] = Z_0[J] U[-\Delta J] \quad . \quad (5.33)$$

La (5.33) mostra che tutti gli effetti delle interazioni tra le particelle sono descritti dal funzionale  $U[\Phi]$ .

• **Grafici connessi.** Tenendo conto della combinatorica dei diagrammi non è difficile dimostrare [8] che, ponendo

$$Z[J] = \exp(iW[J]) \quad , \quad (5.34)$$

$iW[J]$  risulta essere il funzionale generatore dei grafici di Feynman connessi. Nel caso di una teoria libera,  $Z_0[J]$  è mostrato in equazione (5.20) ed il suo logaritmo contiene solamente la funzione di correlazione a due punti; questo è in accordo col fatto che la funzione a due punti corrisponde all'unico grafico di Feynman connesso di una teoria libera. L'ampiezza vuoto-vuoto corrisponde a  $Z[0]$ ; quindi,  $W[0]$  descrive tutti i grafici vuoto-vuoto connessi. Mettendo in evidenza la parte costante  $W[0]$  di  $W$ , ovvero la parte di  $W$  che non dipende dalla sorgente  $J(x)$ ,

$$W[J] = W[0] + \widehat{W}[J] \quad , \quad \text{dove} \quad \widehat{W}[J=0] = 0 \quad , \quad (5.35)$$

si ottiene

$$Z[J] = e^{iW[0]} \exp\left(i\widehat{W}[J]\right) \quad . \quad (5.36)$$

L'equazione (5.36) mostra che la somma di tutti i grafici vuoto-vuoto fattorizza; conseguentemente, nel calcolo delle funzioni di correlazione (5.16), (5.17) o delle ampiezze normalizzate (5.5), (5.13) la somma dei grafici vuoto-vuoto si elimina. Questo significa che non è necessario calcolare i grafici vuoto-vuoto, questi grafici si possono semplicemente trascurare.

**5C. Combinatorica dei sottodiagrammi.** Una delle proprietà più importanti dei grafici di Feynman riguarda la combinatorica dei sottodiagrammi. Consideriamo un grafico che contribuisce ad  $U[\Phi]$ ; questo grafico, mostrato schematicamente in Figura 5.4(a), verrà denotato con  $F$ . Assumiamo che  $F$  contenga  $n$  linee interne ed  $m$  linee esterne; l'ampiezza descritta da  $F$  è della forma

$$F[\Phi] = \int d^4 x_1 \cdots d^4 x_m F(x_1, \cdots, x_m) \Phi(x_1) \cdots \Phi(x_m) \quad . \quad (5.37)$$

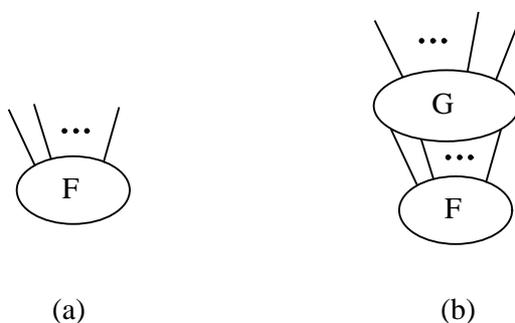
Consideriamo il calcolo dell'ampiezza (5.37). In base alla (5.32),  $F[\Phi]$  si ottiene selezionando dall'espressione

$$\frac{1}{n!} \left( \frac{i}{2} \int \frac{\delta}{\delta\phi} \Delta \frac{\delta}{\delta\phi} \right)^n e^{iS_I[\phi+\Phi]} \Big|_{\phi=0}$$

il contributo associato al grafico  $F$ ,

$$F[\Phi] = \left[ \frac{1}{n!} \left( \frac{i}{2} \int \frac{\delta}{\delta\phi} \Delta \frac{\delta}{\delta\phi} \right)^n e^{iS_I[\phi+\Phi]} \right]_F \Big|_{\phi=0} = F[\phi+\Phi] \Big|_{\phi=0} . \quad (5.38)$$

Supponiamo ora che il diagramma  $F$  appaia come sottodiagramma di un altro grafico di Feynman che indicheremo con  $F\#G$ , come mostrato in Figura 5.4(b).



**Figura 5.4** Sottodiagramma  $F$  di  $F\#G$ .

Il problema consiste nel determinare come la combinatorica di  $F\#G$  è connessa con quella di  $F$ .

• **Proprietà di vertice efficace.** *L'ampiezza associata al grafico di Figura 5.4(b) coincide con l'ampiezza che si otterrebbe assumendo che  $F$  rappresenti un vertice di interazione efficace.*

Dimostrazione. Supponiamo che il grafico  $F\#G$  contenga  $N$  linee interne; ovviamente, si ha  $N > n$ . L'ampiezza associata a  $F\#G$  si ottiene selezionando dall'espressione

$$\frac{1}{N!} \left( \frac{i}{2} \int \frac{\delta}{\delta\phi} \Delta \frac{\delta}{\delta\phi} \right)^N e^{iS_I[\phi+\Phi]} \Big|_{\phi=0} \quad (5.39)$$

il contributo associato al grafico  $F\#G$ . Facendo agire le derivate funzionali, ogni possibile coppia di campi  $\phi$  viene sostituita da un propagatore. Consideriamo inizialmente le contrazioni di Wick che ricostruiscono il grafico  $F$  e, successivamente, quelle che completano l'intero grafico  $F\#G$ . Le  $n$  linee interne di  $F$  si ottengono partendo da un insieme iniziale di  $N$  possibili contrazioni; il fattore combinatorico associato è quindi il numero di modi in cui  $n$  oggetti possono essere scelti da un insieme che ne contiene  $N$

$$\binom{N}{n} = \frac{N!}{n!(N-n)!} . \quad (5.40)$$

Nel ricostruire inizialmente il sottodiagramma  $F$  dalla (5.39) si ottiene pertanto

$$\begin{aligned} & \frac{1}{(N-n)!} \left( \frac{i}{2} \int \frac{\delta}{\delta\phi} \Delta \frac{\delta}{\delta\phi} \right)^{(N-n)} \left[ \frac{1}{n!} \left( \frac{i}{2} \int \frac{\delta}{\delta\phi} \Delta \frac{\delta}{\delta\phi} \right)^n e^{i S_I[\phi+\Phi]} \right] \Big|_{F \subset F \# G} \Big|_{\phi=0} = \\ & = \frac{1}{(N-n)!} \left( \frac{i}{2} \int \frac{\delta}{\delta\phi} \Delta \frac{\delta}{\delta\phi} \right)^{(N-n)} F[\phi+\Phi] e^{i S_I[\phi+\Phi]} \Big|_{\phi=0}. \end{aligned} \quad (5.41)$$

A questo punto, il calcolo di  $F \# G$  procede esattamente come se si dovesse calcolare un grafico con  $(N-n)$  linee interne in cui, oltre ai vertici di interazione usuali, fosse presente un vertice di interazione efficace descritto da  $F[\Phi]$ ; questo conclude la dimostrazione. ■

La proprietà di vertice efficace continua a valere anche nel caso in cui  $F$  rappresenti una somma di diagrammi di Feynman con lo stesso numero di linee esterne. Infatti, la validità della relazione per ciascuno di questi grafici estende, per linearità, all'intera somma.

• **Nota.** Si supponga di aggiungere al funzionale d'azione un termine addizionale di modo che

$$i S_I[\phi] \rightarrow i S_I[\phi] + F[\phi] \quad . \quad (5.42)$$

In questo caso, i diagrammi di Feynman che dipendono in maniera *lineare* dal funzionale  $F$  sono descritti da

$$e^{\frac{i}{2} \int d^4x d^4y \frac{\delta}{\delta\phi(x)} \Delta(x-y) \frac{\delta}{\delta\phi(y)} F[\phi+\Phi]} e^{i S_I[\phi+\Phi]} \Big|_{\phi=0} \quad . \quad (5.43)$$

Il confronto della (5.43) con la (5.41) illustra il significato di vertice efficace.

**5D. Propagatore vestito e vertici propri.** La funzione di correlazione a due punti definisce il cosiddetto **propagatore vestito** o propagatore esatto  $\Delta_E(x-y)$

$$G(x, y) = i \Delta_E(x-y) = i \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} e^{-ik \cdot (x-y)} \Delta_E(k^2) \quad . \quad (5.44)$$

Dalla definizione (5.17) e dalla (5.33) segue che

$$i \Delta_E(x-y) = i \Delta(x-y) - U^{-1}[0] \frac{\delta^2 U[-\Delta J]}{\delta J(x) \delta J(y)} \Big|_{J=0} \quad . \quad (5.45)$$

Come ci si doveva aspettare, il propagatore esatto ammette uno sviluppo in potenze della costante di accoppiamento ed il primo termine di tale sviluppo è il propagatore di Feynman  $i \Delta(x-y)$  che è anche chiamato il **propagatore nudo**.

Nelle somme dei grafici di Feynman, il propagatore vestito assume il ruolo di propagatore efficace. Per chiarire questo punto, occorre introdurre una nuova definizione.

• **Grafici una-particella-irriducibili.** Un grafico connesso è detto essere una-particella-irriducibile, e sarà denotato con la sigla 1PI, se tagliando (o dividendo in due parti) una qualunque linea interna del grafico, il grafico risultante è ancora connesso.

Per esempio, il grafico di Figura 5.2(b) è 1PI mentre il grafico di Figura 5.2(a) non è 1PI. Consideriamo ora la struttura del propagatore vestito; denotiamo con  $i \Pi(x-y)$  la somma dei diagrammi 1PI contenuti nella derivata seconda di  $U[\Phi]$

$$i \Pi(x-y) = \left( \frac{\delta^2 U[\Phi]}{\delta \Phi(x) \delta \Phi(y)} \Big|_{\Phi=0} \right)_{1PI} = i \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} e^{-i k \cdot (x-y)} \Pi(k^2) \quad . \quad (5.46)$$

Come conseguenza della definizione di grafici 1PI, lo sviluppo perturbativo del propagatore vestito assume la forma mostrata in Figura 5.5 in cui  $i \Pi(x-y)$  è indicato con un cerchietto.



**Figura 5.5** Correzioni al propagatore.

La combinatorica dei vari diagrammi mostrati in Figura 5.5 è determinata dalla proprietà di vertice efficace considerata nella precedente sezione; si ottiene quindi

$$i \Delta_E = i \Delta + i^3 \Delta \cdot \Pi \cdot \Delta + i^5 \Delta \cdot \Pi \cdot \Delta \cdot \Pi \cdot \Delta + \dots \quad . \quad (5.47)$$

Nello spazio degli impulsi, l'equazione (5.47) corrisponde alla serie geometrica

$$\begin{aligned} i \Delta_E(k^2) &= i \Delta(k^2) \sum_{n=0}^{\infty} \left( -\Pi(k^2) \Delta(k^2) \right)^n = \frac{i \Delta(k^2)}{1 + \Pi(k^2) \Delta(k^2)} \\ &= \frac{i}{\Delta^{-1}(k^2) + \Pi(k^2)} = \frac{i}{k^2 - m^2 + \Pi(k^2) + i\epsilon} \quad . \end{aligned} \quad (5.48)$$

• **Vertici propri.** Consideriamo ora le derivate di ordine superiore a due del funzionale  $U[\Phi]$ . La somma dei grafici di Feynman 1PI che possiedono un numero fissato  $n$  di linee esterne, con  $n \geq 3$ , si chiama il **vertice proprio** ad  $n$  punti  $\Gamma^{(n)}(x_1, \dots, x_n)$ ,

$$i \Gamma^{(n)}(x_1, \dots, x_n) = \left( \frac{\delta^n U[\Phi]}{\delta \Phi(x_1) \dots \delta \Phi(x_n)} \Big|_{\Phi=0} \right)_{1PI} \quad . \quad (5.49)$$

Le definizioni di propagatore vestito e di vertici propri sono utili per il seguente motivo.

• **Proprietà di riduzione ai diagrammi ad albero.** La serie perturbativa che definisce ciascuna funzione di correlazione coincide formalmente con la serie perturbativa consistente di soli diagrammi ad albero di una teoria efficace in cui il propagatore efficace è il propagatore vestito ed i vertici di interazione efficaci sono i vertici propri.

Dimostrazione. Ciascun sottografico di un diagramma rappresenta un contributo alla costruzione di un propagatore vestito oppure di un vertice proprio; in base alla definizione di grafico 1PI, non ci sono ambiguità nel distinguere tra loro queste due possibilità. Conseguentemente, ogni diagramma assume necessariamente la struttura di un diagramma ad albero in cui i propagatori efficaci ed i vertici efficaci rappresentano contributi al propagatore vestito ed ai vertici propri. Per ogni fissata struttura ad albero, la serie perturbativa contiene allora tutti i contributi che completano la costruzione dei propagatori vestiti e dei vertici propri.

Si consideri ora una nuova teoria, la cosiddetta teoria efficace; per definizione, i diagrammi della teoria efficace si costruiscono utilizzando come propagatore il propagatore vestito e come vertici di interazione i vertici propri della teoria originale. I diagrammi ad albero di questa teoria efficace coincidono con le somme dei diagrammi della teoria originale perché, come segue dalla proprietà di vertice efficace, la combinatorica dei diagrammi risulta essere corretta. ■

La proprietà dello sviluppo perturbativo di riduzione ai diagrammi ad albero ha un ruolo importante per comprendere le caratteristiche della dinamica associata ad ogni modello Lagrangiano di teoria di campo. Questa proprietà si utilizza anche per fissare le condizioni di normalizzazione.

**5E. Azione efficace.** Nella sezione precedente abbiamo introdotto una teoria efficace i cui diagrammi ad albero riproducono lo sviluppo perturbativo della teoria di campo originale. Vorremmo ora costruire un funzionale che rappresenta l'azione per questa teoria efficace. Il punto di partenza è il funzionale generatore  $W [ J ]$  delle funzioni di correlazione connesse definito in equazione (5.34). Il campo classico  $\Phi(x)$  si introduce tramite la relazione

$$\frac{\delta W [ J ]}{\delta J(x)} = \Phi(x) \quad . \quad (5.50)$$

La (5.50) può essere risolta determinando  $J(x)$  in funzione del campo classico  $\Phi(x)$ ,

$$J(x) = \hat{J} [ \Phi ](x) \quad . \quad (5.51)$$

Mediante una trasformazione di Legendre, si può definire un nuovo funzionale  $\Gamma [ \Phi ]$  generalmente denotato col nome di **azione efficace**

$$\Gamma [ \Phi ] = W [ \hat{J} [ \Phi ] ] - \int d^4x \Phi(x) \hat{J} [ \Phi ](x) \quad . \quad (5.52)$$

Dalla definizione (5.52) segue che

$$\frac{\delta \Gamma [ \Phi ]}{\delta \Phi(x)} = - J(x) \quad . \quad (5.53)$$

La derivata prima di  $W [ J ]$  rispetto alla sorgente per  $J(x) = 0$  rappresenta la funzione di correlazione connessa ad un punto. Siccome l'intera funzione di correlazione ad un punto è connessa, si ha

$$\left. \frac{\delta W [ J ]}{\delta J(x)} \right|_{J=0} = \frac{\langle 0 | \mathbf{T} e^{i S_I [ \varphi ]} \varphi(x) | 0 \rangle}{\langle 0 | \mathbf{T} e^{i S_I [ \varphi ]} | 0 \rangle} = v \quad , \quad (5.54)$$

dove  $v$  rappresenta il valore di aspettazione sul vuoto del campo  $\varphi(x)$  per la teoria interagente. Le equazioni (5.53) e (5.54) implicano che

$$\left. \frac{\delta \Gamma [\Phi]}{\delta \Phi(x)} \right|_{\Phi=v} = 0 \quad . \quad (5.55)$$

La relazione (5.55) significa che  $\Phi = v$  rappresenta un punto stazionario per l'azione efficace  $\Gamma [\Phi]$ .

• **Nota.** Generalmente, il funzionale  $\Gamma [\Phi]$  possiede molti punti stazionari tra loro inequivalenti. La scelta del particolare valore di aspettazione sul vuoto degli operatori di campo è usualmente chiamata la scelta del vuoto della teoria; il motivo di questa denominazione è che lo sviluppo di  $\Gamma [\Phi]$  in potenze di  $(\Phi(x) - v)$  attorno al punto stazionario  $\Phi = v$  determina, come vedremo, la forma esplicita del propagatore vestito e le espressioni dei vertici propri nelle particolari condizioni fisiche determinate dalla scelta di  $v$ . La ricerca di un vuoto stabile per la teoria è un problema dinamico che va risolto basandosi su argomenti di consistenza fisica. Il formalismo basato sui vari funzionali generatori non determina di per sé il vuoto della teoria, esso determina semplicemente l'insieme dei punti stazionari. Per un sistema isolato (ovvero in assenza di campi esterni), si richiede che lo stato di vuoto sia invariante per trasformazioni di Poincaré; in questo caso, il valore di aspettazione deve essere un numero cioè  $v$  non può dipendere dalle coordinate  $x$  in maniera non banale. Inoltre, per un campo non scalare, il corrispondente valore di aspettazione sul vuoto deve essere nullo. Per un campo scalare,  $v$  può risultare non nullo a seconda del modello che si considera. In certi casi,  $v$  può rappresentare un parametro d'ordine che caratterizza una eventuale rottura spontanea di simmetria; questo argomento verrà discusso in seguito.

La costruzione del funzionale  $\Gamma [\Phi]$  mediante la serie formale dello sviluppo perturbativo è indipendente dal problema di determinare il vuoto stabile della teoria. In effetti, è sempre possibile definire lo sviluppo perturbativo nella situazione in cui i valori medi sul vuoto dei campi sono nulli; questo corrisponde esattamente alla prescrizione seguita precedentemente per il modello  $\varphi^4$  definito dalla (5.1), come risulta dalle equazioni (5.8) e (5.13).

Consideriamo quindi il caso in cui  $v = 0$ ; lo sviluppo di  $\Gamma [\Phi]$  in potenze di  $\Phi(x)$  assume la forma

$$\Gamma [\Phi] = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n!} \int d^4x_1 \cdots d^4x_n \Gamma^{(n)}(x_1, \dots, x_n) \Phi(x_1) \cdots \Phi(x_n) \quad . \quad (5.56)$$

Nella (5.56) il termine lineare in  $\Phi(x)$  è assente perché  $\Phi(x) = 0$  deve essere un punto stazionario per  $\Gamma$ ; inoltre, un eventuale termine costante in  $\Gamma$  è stato ommesso perché, non dipendendo da  $\Phi(x)$ , esso è totalmente irrilevante.

• **Propagatore vestito e vertici propri.** Il significato dei coefficienti  $\{\Gamma^{(n)}(x_1, \dots, x_n)\}$  dello sviluppo (5.56) si può comprendere derivando in maniera ricorsiva la relazione (5.50),

$$\frac{\delta}{\delta \Phi(y)} \frac{\delta W [J]}{\delta J(x)} = \delta^4(x - y) \quad . \quad (5.57)$$

Poiché

$$\frac{\delta}{\delta \Phi(y)} = \int d^4w \frac{\delta J(w)}{\delta \Phi(y)} \frac{\delta}{\delta J(w)} \quad , \quad (5.58)$$

dalla (5.57) si ottiene

$$\int d^4w \frac{\delta J(w)}{\delta \Phi(y)} \frac{\delta^2 W[J]}{\delta J(w) \delta J(x)} = \delta^4(x-y) \quad . \quad (5.59)$$

La (5.53) mostra che la derivata di  $J$  rispetto a  $\Phi$  coincide con l'opposto della derivata seconda di  $\Gamma$  rispetto a  $\Phi$ ; pertanto la (5.59) diventa

$$\int d^4w \frac{\delta^2 \Gamma[\Phi]}{\delta \Phi(y) \delta \Phi(w)} \frac{\delta^2 W[J]}{\delta J(w) \delta J(x)} = -\delta^4(x-y) \quad . \quad (5.60)$$

Valutiamo ora la (5.60) nel punto stazionario in cui  $\Phi(x) = 0$  e  $J(x) = 0$ . La derivata seconda di  $iW$  rappresenta l'opposto della funzione di correlazione a due punti connessa la quale, in assenza di un valore di aspettazione non nullo per i campi, coincide con il propagatore vestito

$$i \frac{\delta^2 W[J]}{\delta J(w) \delta J(x)} \Big|_{J=0} = i^2 G(w, x) = -i \Delta_E(w-x) \quad . \quad (5.61)$$

Si ottiene perciò l'equazione

$$\int d^4w \Gamma^{(2)}(y, w) \Delta_E(w-x) = \delta^4(x-y) \quad , \quad (5.62)$$

da cui risulta che *il propagatore vestito coincide col propagatore di una teoria efficace di cui  $\Gamma[\Phi]$  rappresenta il funzionale d'azione*. Derivando la (5.60) rispetto a  $J(z)$  si ottiene

$$\begin{aligned} & \int d^4w \frac{\delta^2 \Gamma[\Phi]}{\delta \Phi(y) \delta \Phi(w)} \frac{\delta^3 W[J]}{\delta J(w) \delta J(x) \delta J(z)} \\ & + \int d^4w d^4u \frac{\delta^3 \Gamma[\Phi]}{\delta \Phi(y) \delta \Phi(w) \delta \Phi(u)} \frac{\delta^2 W[J]}{\delta J(u) \delta J(z)} \frac{\delta^2 W[J]}{\delta J(w) \delta J(x)} = 0 \quad . \end{aligned} \quad (5.63)$$

Come nel caso precedente, valutiamo la (5.63) nel punto stazionario in cui  $\Phi(x) = 0$  e  $J(x) = 0$ . La derivata terza di  $W$  è legata alla funzione di correlazione connessa a tre punti tramite la relazione

$$i \frac{\delta^3 W[J]}{\delta J(w) \delta J(x) \delta J(z)} \Big|_{J=0} = i^3 G^c(w, x, z) \quad . \quad (5.64)$$

Pertanto dalla (5.63) segue che

$$G^c(x, y, z) = \int d^4w d^4u d^4v i \Delta_E(x-w) i \Delta_E(y-u) i \Delta_E(z-v) i \Gamma^{(3)}(w, u, v) \quad . \quad (5.65)$$

L'equazione (5.65) mostra che  $\Gamma^{(3)}(w, u, v)$  coincide col vertice proprio a tre punti. Procedendo in maniera ricorsiva, è facile dimostrare [8,9] che  $\{\Gamma^{(n)}(x_1, \dots, x_n)\}$  con  $n \geq 3$  sono i vertici propri della teoria.

• In conclusione, il funzionale  $\Gamma[\Phi]$  rappresenta esattamente il funzionale d'azione per la teoria efficace; questo giustifica il nome di azione efficace per  $\Gamma[\Phi]$ . Inoltre, i diagrammi ad albero

definiti per mezzo dell'azione efficace riproducono l'intero sviluppo perturbativo della teoria di campo originale.

**5F. Sviluppo nel numero di loop.** Per ciascuna funzione di correlazione, lo sviluppo perturbativo corrisponde ad uno sviluppo nel numero di loop dei corrispondenti grafici di Feynman. Più in generale, ogni funzionale dei campi, come l'azione efficace  $\Gamma$ , può essere calcolato mediante uno sviluppo nel numero di loop; per definizione, ogni termine di questo sviluppo è un insieme di grafici di Feynman con lo stesso numero di loop.

• **Numero di loop.** Consideriamo un diagramma con  $N$  linee interne e con  $V$  vertici di interazione; il numero  $L$  di loop di questo grafico è dato da [10]

$$L = N - V + 1 \quad . \quad (5.66)$$

Infatti, il numero di loop coincide col numero di integrazioni indipendenti nello spazio degli impulsi che si devono effettuare nel calcolo dell'ampiezza associata al diagramma avendo fissato i valori degli impulsi esterni. Ogni propagatore interno rappresenta un integrale; ogni vertice possiede una delta di conservazione che elimina un integrale eccettuata una funzione delta che rimane e che corrisponde alla conservazione totale del quadrimpulso.

• **Loop e costante di Planck.** Lo sviluppo dell'azione efficace nel numero di loop è particolarmente significativo per studiare le proprietà di simmetria del modello. Dimostriamo ora che tale sviluppo coincide con lo sviluppo in potenze della costante di Planck  $\hbar$ . In unità naturali, il valore di  $\hbar$  è posto uguale all'unità; nella presentazione dell'argomento seguente, la presenza della costante  $\hbar$  verrà esplicitata. Siccome  $\hbar$  rappresenta l'unità di misura fondamentale per l'azione, il funzionale d'azione per i campi deve essere valutato in unità di  $\hbar$

$$S[\varphi] \rightarrow \frac{1}{\hbar} S[\varphi] \quad . \quad (5.67)$$

La (5.67) mostra che ciascun vertice di interazione porta un fattore  $\hbar^{-1}$  mentre ciascun propagatore, essendo l'inverso della parte quadratica della Lagrangiana, porta un fattore  $\hbar$ . In ogni grafico che contribuisce al calcolo dell'azione efficace, le linee esterne sono rappresentate da campi classici mentre le linee interne corrispondono a propagatori. Pertanto, la potenza di  $\hbar$  associata ad un grafico con  $N$  linee interne e  $V$  vertici vale

$$\hbar^P \quad , \quad \text{dove} \quad P = N - V \quad . \quad (5.68)$$

Confrontando la (5.66) con la (5.68), si ottiene che il contributo di un grafico con  $L$  loop è di ordine  $\hbar^{(L-1)}$  e quindi lo sviluppo in potenze del numero di loop corrisponde allo sviluppo in potenze di  $\hbar$ .

• **Simmetrie.** Ogni termine dello sviluppo di un funzionale dei campi in potenze di  $\hbar$  corrisponde ad un insieme di grafici di Feynman; siccome il parametro dello sviluppo moltiplica l'intera Lagrangiana, vedi equazione (5.67), questo insieme di grafici deve avere le stesse proprietà di simmetria dell'azione. Inoltre, ogni termine dello sviluppo è intrinsecamente definito e non dipende dalle possibili ridefinizioni dei campi o dalla particolare divisione dell'azione in parte libera e parte interagente. Per questi motivi, lo

sviluppo nel numero di loop rappresenta lo sviluppo rilevante per studiare le proprietà di simmetria delle teorie di campo.

Per quanto riguarda l'azione efficace  $\Gamma$ , esplicitando le potenze di  $\hbar$  si ottiene

$$\Gamma[\Phi] = \frac{1}{\hbar} \sum_{n=0}^{\infty} \hbar^n \Gamma_{(n)}[\Phi] \quad , \quad (5.69)$$

dove  $\Gamma_{(n)}[\Phi]$  rappresenta il contributo all'azione efficace dei diagrammi con  $n$  loop.

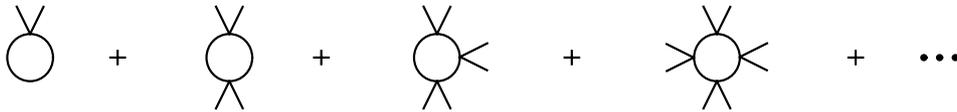
• **Ordine zero loop.** Consideriamo l'azione efficace a zero loop  $\Gamma_{(0)}[\Phi]$ ; in questo caso, il propagatore vestito coincide col propagatore di Feynman ed i vertici propri coincidono coi vertici Lagrangiani di interazione. Conseguentemente,  $\Gamma_{(0)}[\Phi]$  coincide con l'azione della teoria

$$\Gamma_{(0)}[\Phi] = S[\Phi] \quad . \quad (5.70)$$

• **Ordine un loop.** L'azione efficace ad un loop  $\Gamma_{(1)}[\Phi]$  si ottiene sommando tutti i grafici di Feynman 1PI ad un loop in cui le linee esterne sono rappresentate dal campo classico  $\Phi$

$$i\Gamma_{(1)}[\Phi] = \left( U[\Phi] \Big|_{1\text{PI}} \right)_{1 \text{ loop}} \quad . \quad (5.71)$$

Il funzionale  $U[\Phi]$  è definito in equazione (5.8) e l'azione del modello  $\varphi^4$  è mostrata in (5.1). Se teniamo conto anche delle contrazioni di Wick per i campi definiti nello stesso punto,  $\Gamma_{(1)}[\Phi]$  è la somma dei diagrammi rappresentati in Figura 5.6.



**Figura 5.6** Diagrammi 1PI ad un loop.

Utilizzando l'espressione (5.9), si ottiene

$$\begin{aligned} i\Gamma_{(1)}[\Phi] &= \left( \langle 0 | T \exp \left( -i \frac{g}{4} \int \varphi^2 \Phi^2 \right) | 0 \rangle \Big|_{1\text{PI}} \right)_{1 \text{ loop}} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-ig/4)^n}{n!} \left( \langle 0 | T \left( \int \varphi^2 \Phi^2 \right)^n | 0 \rangle \Big|_{1\text{PI}} \right)_{1 \text{ loop}} \quad . \end{aligned} \quad (5.72)$$

La combinatorica associata alle contrazioni di Wick di  $n$  coppie di campi  $\varphi(x)$  che riproducono i diagrammi di Figura 5.6 vale  $2^{n-1} (n-1)!$ . Per tener conto in maniera semplice degli indici spaziali, ovvero delle coordinate dei punti, è conveniente utilizzare la seguente notazione per il propagatore [11]

$$i\Delta(x-y) = \langle x | \frac{i}{-\partial^2 - m^2 + i\epsilon} | y \rangle \quad . \quad (5.73)$$

Con queste notazioni si ha

$$\int d^4x |x\rangle\langle x| = \mathbb{1} = \int d^4k |k\rangle\langle k| \quad , \quad (5.74)$$

$$\langle x|k\rangle = \frac{1}{(2\pi)^2} e^{-ik \cdot x} \quad , \quad \langle k|x\rangle = \frac{1}{(2\pi)^2} e^{ik \cdot x} \quad ,$$

inoltre,  $\Phi|x\rangle = \Phi(x)|x\rangle$  e la traccia di un operatore  $Q$  indica la traccia sugli indici spaziali

$$\text{Tr}(Q) = \int d^4x \langle x|Q|x\rangle = \int d^4k \langle k|Q|k\rangle \quad . \quad (5.75)$$

In base alla combinatorica delle contrazioni di Wick, l'espressione (5.72) risulta essere

$$i\Gamma_{(1)}[\Phi] = \frac{1}{2} \text{Tr} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \left( \frac{1}{-\partial^2 - m^2 + i\epsilon} \frac{g}{2} \Phi^2 \right)^n \quad . \quad (5.76)$$

Siccome la funzione logaritmo possiede il seguente sviluppo di Taylor

$$\ln(1-x) = - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} x^n \quad , \quad (5.77)$$

la (5.76) assume la forma

$$i\Gamma_{(1)}[\Phi] = -\frac{1}{2} \text{Tr} \ln \left( 1 - \frac{1}{-\partial^2 - m^2 + i\epsilon} \frac{g}{2} \Phi^2 \right) \quad . \quad (5.78)$$

Il termine  $i\epsilon$  si riferisce alla prescrizione del propagatore causale. Il risultato (5.78) descrive in maniera compatta l'azione efficace ad un loop per il modello  $\varphi^4$ . Per costruzione, ogni termine dello sviluppo della (5.78) in potenze di  $\Phi^2$  corrisponde ad un diagramma della serie mostrata in Figura 5.6.

Ricordiamo che la parte rilevante del funzionale  $\Gamma[\Phi]$  è quella che dipende esplicitamente dal campo  $\Phi$ ; ovvero, possiamo sempre aggiungere o sottrarre termini costanti a  $\Gamma[\Phi]$  senza modificare in alcun modo l'informazione fisica contenuta in  $\Gamma$ . L'azione efficace ad un loop si può dunque esprimere nel modo seguente

$$i\Gamma_{(1)}[\Phi] = -\frac{1}{2} \text{Tr} \ln \left( -\partial^2 - m^2 + i\epsilon - \frac{g}{2} \Phi^2 \right) \quad . \quad (5.79)$$

L'espressione (5.79) differisce dalla (5.78) per una costante. Siccome la traccia del logaritmo di un operatore coincide con il logaritmo del determinante dello stesso operatore, la (5.79) si può anche riscrivere nel modo seguente

$$e^{i\Gamma_{(1)}[\Phi]} = \text{Det}^{-1/2} \left( -\partial^2 - m^2 + i\epsilon - \frac{g}{2} \Phi^2 \right) \quad . \quad (5.80)$$

L'operatore che appare nella (5.80) è determinato dalla Lagrangiana (5.1); in effetti, si ha

$$\frac{\delta^2 S[\Phi]}{\delta\Phi(y)\delta\Phi(x)} = \left( -\partial^2 - m^2 - \frac{g}{2} \Phi^2(x) \right) \delta^4(x-y) \quad . \quad (5.81)$$

Conseguentemente, il risultato (5.80) si può descrivere in maniera semplice tramite la relazione

$$e^{i\Gamma_{(1)}[\Phi]} = \text{Det}^{-1/2} (S''[\Phi] + i\epsilon) \quad . \quad (5.82)$$

**5G. Condizioni di normalizzazione.** Nelle sezioni precedenti abbiamo visto che, ad ogni ordine finito nel numero di loop, tutta l'informazione di un modello Lagrangiano di teoria di campo è contenuta nell'azione efficace. Supponiamo di aver calcolato il funzionale  $\Gamma$  ad un certo ordine dello sviluppo perturbativo; il problema che ora si pone è quello di dare una interpretazione fisica dei risultati ottenuti. Più precisamente, occorre determinare le convenzioni e le regole per mezzo delle quali è possibile confrontare le previsioni teoriche coi dati sperimentali. La soluzione di questo problema consiste nel definire la teoria rinormalizzata. La rinormalizzazione si compone di due parti:

- (1) occorre fissare le cosiddette condizioni di normalizzazione che definiscono i parametri fisici del modello, ovvero i parametri che vengono effettivamente misurati negli esperimenti;
- (2) occorre esprimere tutte le ampiezze di transizione a cui siamo interessati in termini dei parametri fisici specificati nel punto (1).

Generalmente, la procedura di rinormalizzazione rimuove anche le eventuali divergenze ultraviolette che appaiono nel calcolo dei grafici di Feynman. Prima di affrontare il caso generico, è utile considerare la situazione al livello ad albero.

• **Livello ad albero.** All'ordine più basso nello sviluppo nel numero di loop, tutte le ampiezze di transizione sono rappresentate da diagrammi ad albero. In questa approssimazione, l'azione efficace coincide con l'azione del modello. Al livello ad albero, i parametri Lagrangiani coincidono coi parametri fisici e la rinormalizzazione è banale poiché le ampiezze sono già espresse in termini dei parametri fisici. Tuttavia, in previsione della discussione del caso generale, è conveniente introdurre opportune condizioni che definiscono in maniera non ambigua i valori dei parametri fisici. Il funzionale d'azione (5.1) si può riscrivere nello spazio degli impulsi nel modo seguente

$$S[\Phi] = \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{1}{2} \Phi(k) \Phi(-k) S^{(2)}(k^2) + \int \frac{d^4k_1 d^4k_2 d^4k_3}{(2\pi)^{12}} \frac{1}{4!} \Phi(k_1) \Phi(k_2) \Phi(k_3) \Phi(-k_1 - k_2 - k_3) S^{(4)}(k_1, k_2, k_3) \quad , \quad (5.83)$$

dove

$$S^{(2)}(k^2) = k^2 - m^2 \quad , \quad S^{(4)}(k_1, k_2, k_3) = -g \quad . \quad (5.84)$$

Le condizioni di normalizzazione sono:

• **Massa.** La massa delle particelle è determinata dal polo del propagatore, ovvero dallo zero dell'inverso del propagatore che coincide con  $S^{(2)}(k^2)$

$$S^{(2)}(k^2) \Big|_{k^2=m^2} = 0 \quad . \quad (5.85)$$

• **Funzione d'onda.** La parte quadratica della Lagrangiana deve essere normalizzata in modo standard (altrimenti si potrebbero riscaldare i campi modificando i valori di tutte le altre costanti) e deve avere uno zero semplice per  $k^2 = m^2$ ; questo si traduce nella condizione

$$\left. \frac{\partial S^{(2)}(k^2)}{\partial k^2} \right|_{k^2=m^2} = 1 \quad . \quad (5.86)$$

• **Costante di accoppiamento.** Infine, il valore della costante di accoppiamento può essere identificato col valore del vertice a quattro particelle nel limite di impulso nullo

$$\lim_{\{k_i\} \rightarrow 0} S^{(4)}(k_1, k_2, k_3) = S^{(4)}(0) = -g \quad . \quad (5.87)$$

Al livello ad albero, le condizioni (5.85)-(5.87) sono ovviamente soddisfatte; tutte le ampiezze di transizione calcolate mediante i grafici di Feynman sono già espresse in funzione dei parametri fisici che sono: la massa  $m$  e la costante di accoppiamento  $g$ .

Le condizioni di normalizzazione acquistano un significato non banale agli ordini successivi dello sviluppo nel numero di loop. Il primo problema che si presenta nei diagrammi con loop è che, generalmente, nel calcolo di  $\Gamma$  si incontrano divergenze. Per dare un significato alle espressioni ottenute è necessario introdurre una procedura di **regolarizzazione**. Per ogni loop di un diagramma, occorre integrare sui valori dell'impulso che fluisce nel loop; quando un tale integrale diverge per grandi valori dell'impulso, si ottengono divergenze ultraviolette. Un esempio di regolarizzazione consiste nel limitare gli integrali sui valori degli impulsi associati ai loop fino ad un certo valore massimo  $\Lambda$  chiamato il cutoff. Successivamente, si considera il limite in cui il cutoff viene eliminato. Quindi, per definire una teoria di campo rinormalizzata, generalmente occorre prima regolarizzare e poi rinormalizzare.

• **Nota.** Rinormalizzare la teoria equivale a identificare i parametri fisici del modello. L'aspetto fondamentale della rinormalizzazione consiste nel riconoscere che i parametri che entrano nella Lagrangiana non necessariamente coincidono coi parametri sperimentalmente osservati.

Assumiamo per il momento una qualche procedura di regolarizzazione sia stata introdotta e che, conseguentemente, l'ampiezza associata a ciascun grafico di Feynman sia finita. Se il funzionale  $\Gamma$  è noto, si possono calcolare le ampiezze di transizione per vari processi di diffusione o di decadimento. Ciascuna ampiezza  $A$  dipende dai parametri che appaiono nella Lagrangiana della teoria ed eventualmente da ulteriori parametri, denotati con  $\Lambda$ , che sono usati nella regolarizzazione. Si ha quindi  $A = A(\lambda_i^0, \Lambda)$  dove abbiamo indicato con  $\{\lambda_i^0\}$  i parametri Lagrangiani, che sono anche chiamati i **parametri nudi**, e  $\Lambda$  è il cutoff ultravioletto. Per confrontare le previsioni teoriche coi dati sperimentali, occorre precisare in quale modo i parametri realmente osservati  $\{\lambda_i\}$  dipendono dai parametri nudi  $\{\lambda_i^0\}$  e dal cutoff  $\Lambda$ ; le condizioni di normalizzazione determinano precisamente questa dipendenza.

Consideriamo per concretezza il modello  $\varphi^4$  la cui azione è mostrata in equazione (5.1); denotiamo con  $m_0$  e  $g_0$  i parametri nudi, ovvero il parametro di massa e la costante di accoppiamento che appaiono nell'espressione (5.1). I parametri nudi non necessariamente coincidono con la massa  $m$  delle particelle

e con la costante di accoppiamento  $g$  osservati negli esperimenti. Analizziamo il termine quadratico  $\Gamma^{(2)}$  dell'azione efficace,

$$\Gamma^{(2)}[\Phi] = \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{1}{2} \Phi(k) \Phi(-k) \Gamma^{(2)}(k^2) \quad . \quad (5.88)$$

Dalle equazioni (5.62) e (5.48) segue che

$$\Gamma^{(2)}(k^2) = k^2 - m_0^2 + \Pi(k^2; g_0, m_0, \Lambda) \quad . \quad (5.89)$$

Le condizioni di normalizzazione per  $\Gamma^{(2)}$  sono:

- **Massa.**

$$\Gamma^{(2)}(k^2) \Big|_{k^2=m^2} = 0 \quad , \quad (5.90)$$

- **Funzione d'onda.**

$$\frac{\partial \Gamma^{(2)}(k^2)}{\partial k^2} \Big|_{k^2=m^2} = 1 \quad . \quad (5.91)$$

La prima equazione specifica la **condizione di mass-shell** ovvero determina la massa  $m$  sperimentalmente osservata delle particelle. Il propagatore vestito ha quindi un polo per quei valori dell'impulso che soddisfano  $k^2 = m^2$ . La seconda equazione implica che, per valori dell'impulso in un intorno del mass-shell, si ha  $\Gamma^{(2)}(k^2) \simeq k^2 - m^2$ . Questo assicura che il residuo al polo del propagatore vestito  $\Delta_E(k^2)$  assuma il valore unitario. La (5.91) deve essere soddisfatta affinché lo sviluppo degli operatori di campo in termini degli operatori di annichilazione e di creazione abbia la giusta normalizzazione per quanto riguarda le **funzioni d'onda** degli stati ad una particella.

Consideriamo infine il valore della costante di accoppiamento  $g$ . All'ordine più basso dello sviluppo nel numero di loop, il parametro nudo  $g_0$  determina il valore dell'ampiezza per un processo di interazione di quattro particelle. La costante di accoppiamento sperimentalmente misurata è quindi connessa col valore del vertice proprio  $\Gamma^{(4)}$ . Agli ordini successivi dello sviluppo perturbativo, questo vertice proprio dipende in maniera non banale dagli impulsi delle particelle,

$$\Gamma^{(4)}[\Phi] = \int \frac{d^4k_1 d^4k_2 d^4k_3}{(2\pi)^{12}} \frac{1}{4!} \Phi(k_1) \Phi(k_2) \Phi(k_3) \Phi(-k_1 - k_2 - k_3) \Gamma^{(4)}(k_1, k_2, k_3) \quad . \quad (5.92)$$

Possiamo convenire di chiamare costante di accoppiamento il valore assunto da  $\Gamma^{(4)}$  per determinati valori degli impulsi delle particelle. Generalmente si considera il limite in cui gli impulsi delle particelle tendono ad annullarsi:

- **Costante di accoppiamento.**

$$\lim_{\{k_i\} \rightarrow 0} \Gamma^{(4)}(k_1, k_2, k_3; g_0, m_0, \Lambda) = \Gamma^{(4)}(0; g_0, m_0, \Lambda) = -g \quad . \quad (5.93)$$

La (5.93) rappresenta la condizione di normalizzazione per la costante di accoppiamento  $g$ . I valori di  $m$  e di  $g$  devono essere finiti e devono coincidere coi valori sperimentalmente osservati;  $m$  è anche chiamata

la **massa rinormalizzata** e  $g$  la **costante di accoppiamento rinormalizzata**. Questi parametri sono i parametri fisici che si misurano nei laboratori e tutte le ampiezze di transizione, espresse in funzione di  $m$  e di  $g$ , devono essere finite affinché la teoria di campo sia significativa e risulti fisicamente consistente.

I parametri nudi generalmente non coincidono coi parametri fisici. Non essendo quantità direttamente osservabili, i parametri nudi possono anche essere divergenti nel limite in cui il cutoff viene eliminato. In effetti, nella maggioranza dei casi i valori dei parametri nudi divergono nel limite in cui il cutoff ultravioletto viene eliminato; tuttavia, siccome i parametri fisici restano finiti, le osservabili del sistema sono significative e la teoria di campo ammette una interpretazione fisica consistente. Questa distinzione tra parametri nudi e parametri fisici è alla base della teoria della rinormalizzazione.

• **Nota.** Il problema della rinormalizzazione è del tutto indipendente dal problema delle divergenze; infatti, le condizioni di normalizzazione vanno fissate anche per una teoria finita, cioè priva di divergenze.

Riassumendo, ad ogni ordine finito dello sviluppo perturbativo, occorre imporre le condizioni di normalizzazione (5.90), (5.91) e (5.93) in cui i valori di  $m$  e di  $g$  sono fissati e finiti. Lo sviluppo perturbativo nel modello  $\varphi^4$  presenta delle divergenze; si introduce allora una regolarizzazione che rende finiti tutti i grafici di Feynman. Questa regolarizzazione dipende da un parametro  $\Lambda$  che ha le dimensioni di una massa e che è chiamato il cutoff ultravioletto. Nel limite in cui  $\Lambda \rightarrow \infty$  il cutoff viene eliminato e si riottengono i grafici non regolarizzati. Per soddisfare la relazione (5.91) può essere necessario riscalarare i campi secondo la relazione

$$\varphi(x) \rightarrow \sqrt{Z} \varphi(x) \quad , \quad (5.94)$$

dove  $\sqrt{Z}$  è una costante numerica; la sostituzione (5.94) corrisponde ad una normalizzazione di funzione d'onda. Supponiamo ora di calcolare i diagrammi di Feynman partendo dalla Lagrangiana

$$S[\varphi] = \int d^4x \left\{ \frac{1}{2} Z \partial_\mu \varphi(x) \partial^\mu \varphi(x) - \frac{1}{2} Z m_0^2 \varphi^2(x) - Z^2 \frac{g_0}{4!} \varphi^4(x) \right\} \quad . \quad (5.95)$$

• **Rinormalizzazione.** Ad ogni ordine dello sviluppo perturbativo, i parametri nudi  $m_0$ ,  $g_0$  ed il valore della costante  $Z$  vengono scelti in modo tale che, nel limite in cui il cutoff ultravioletto viene rimosso, le condizioni di normalizzazione siano verificate.

In questo modo, i parametri Lagrangiani dipendono dai parametri fisici e dal cutoff

$$Z = Z(g, m, \Lambda) \quad , \quad m_0 = m_0(g, m, \Lambda) \quad , \quad g_0 = g_0(g, m, \Lambda) \quad . \quad (5.96)$$

Tutte le ampiezze di transizione dipendono da  $Z$ ,  $m_0$  e  $g_0$  e quindi, per effetto della (5.96), dipendono dai parametri fisici e dal cutoff. Se nel limite in cui il cutoff viene eliminato tutte le ampiezze risultano finite, il modello è detto rinormalizzabile. In effetti, il modello  $\varphi^4$  è rinormalizzabile.

**5H. Regolarizzazione e rinormalizzazione.** Come esempio di rinormalizzazione ad un loop, consideriamo il modello  $\varphi^4$ . L'azione efficace all'ordine zero e al primo ordine nel numero dei loop, consiste nella somma del funzionale d'azione e dei grafici ad un loop mostrati in Figura 5.6. Il primo ed il secondo diagramma di Figura 5.6 sono divergenti, occorre quindi introdurre una procedura di regolarizzazione.

• **Nota.** Esistono vari modi di regolarizzare i grafici divergenti; ovviamente, tutti i risultati e le conclusioni fisiche non dipendono dalla particolare scelta della regolarizzazione. Utilizzando regolarizzazioni diverse i passaggi algebrici intermedi della rinormalizzazione risultano diversi, ma tutti i risultati finali espressi in termini dei parametri fisici coincidono.

Partendo dal funzionale d'azione (5.95), il primo grafico di Figura 5.6 risulta essere

$$i \Gamma_{(1)}^{(2)} [\Phi] = -i Z \frac{g_0}{4} \int d^4x \Phi^2(x) i \Delta(x-x) = Z \frac{g_0}{4} \int d^4x \Phi^2(x) \Delta(0) \quad , \quad (5.97)$$

dove

$$\Delta(0) = \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \frac{1}{p^2 - m_0^2 + i\epsilon} \quad . \quad (5.98)$$

La presenza del termine  $i\epsilon$  nell'integrando (5.98) garantisce la possibilità di effettuare una continuazione analitica nella regione Euclidea. In pratica, la componente temporale dell'impulso va sostituita tramite la relazione  $p_0 \rightarrow i(k_E)_4$  e si ottiene

$$\Delta(0) = -i \int \frac{d^4k_E}{(2\pi)^4} \frac{1}{k_E^2 + m_0^2} \quad , \quad (5.99)$$

dove  $k_E$  denota le componenti dell'impulso nella regione Euclidea. Introducendo un cutoff  $\Lambda$  per il modulo dell'impulso, si ricava

$$\Delta(0) = -\frac{i}{16\pi^2} \int_0^\Lambda \frac{k_E^2 dk_E^2}{k_E^2 + m_0^2} = -\frac{i}{16\pi^2} M^2 \quad , \quad (5.100)$$

dove

$$M^2 = \Lambda^2 - m_0^2 \ln \frac{\Lambda^2 + m_0^2}{m_0^2} \quad . \quad (5.101)$$

Quindi, l'intera parte quadratica dell'azione efficace ad un loop risulta essere

$$\Gamma^{(2)} [\Phi] = \int d^4x \left\{ \frac{1}{2} Z \partial_\mu \Phi(x) \partial^\mu \Phi(x) - \frac{1}{2} Z \left( m_0^2 + \frac{g_0}{32\pi^2} M^2 \right) \Phi^2(x) \right\} \quad . \quad (5.102)$$

Le condizioni di normalizzazione (5.90) e (5.91) implicano che, a quest'ordine, deve essere

$$Z = 1 \quad , \quad m^2 = m_0^2 + \frac{g_0}{32\pi^2} M^2 \quad . \quad (5.103)$$

Consideriamo ora il secondo diagramma di Figura 5.6 che rappresenta il contributo ad un loop al vertice proprio a quattro punti

$$\begin{aligned} i \Gamma_{(1)}^{(4)} [\Phi] &= \frac{g_0^2}{16} \int d^4x d^4y \Phi^2(x) \Delta^2(x-y) \Phi^2(y) \\ &= \frac{g_0^2}{16} \int d^4x d^4y \frac{d^4q}{(2\pi)^4} e^{iq \cdot (y-x)} F(q) \Phi^2(x) \Phi^2(y) \quad , \end{aligned} \quad (5.104)$$

dove

$$F(q) = \frac{1}{(2\pi)^4} \int \frac{d^4p}{[p^2 - m_0^2 + i\epsilon][(p-q)^2 - m_0^2 + i\epsilon]} \quad . \quad (5.105)$$

L'integrale (5.105) è divergente; come nel caso precedente, la regolarizzazione consiste nell'effettuare il prolungamento analitico nell'Euclideo e nell'introdurre il cutoff  $\Lambda$  per il modulo dell'impulso su cui si integra. In questo modo si ottiene una funzione regolarizzata  $F_R(q; \Lambda)$ ; questa funzione è finita ed ammette uno sviluppo di Taylor in potenze dell'impulso  $q$ . Nel limite  $\Lambda \rightarrow \infty$ , il primo termine dello sviluppo di Taylor è divergente mentre tutti i termini successivi al primo sono convergenti. Si ottiene pertanto

$$F(q) = F(0) + \tilde{F}(q) \quad , \quad (5.106)$$

in cui

$$\tilde{F}(q) = \text{finita e indipendente da } \Lambda \quad , \quad \text{con } \tilde{F}(q=0) = 0 \quad , \quad (5.107)$$

mentre

$$F(0) = \frac{i}{16\pi^2} \int_0^\Lambda \frac{k_E^2 dk_E^2}{[k_E^2 + m_0^2]^2} = \frac{i f_0}{16\pi^2} \quad , \quad (5.108)$$

in cui

$$f_0 = \ln \left( 1 + \frac{\Lambda^2}{m_0^2} \right) - 1 \quad . \quad (5.109)$$

Dalla (5.104) segue che

$$i \Gamma_{(1)}^{(4)}[\Phi] = \frac{i}{256\pi^2} g_0^2 f_0 \int d^4x \Phi^4(x) + \frac{g_0^2}{16} \int d^4x d^4y \Phi^2(x) \tilde{F}(x-y) \Phi^2(y) \quad , \quad (5.110)$$

dove il secondo termine del membro di destra è finito, non dipende dal cutoff, e si annulla nel limite in cui gli impulsi associati ai campi  $\Phi$  vanno a zero. Quindi, questo termine non interviene nella condizione di normalizzazione (5.93). Riassumendo, la parte di  $\Gamma^{(4)}[\Phi]$  che è rilevante per rinormalizzare la costante di accoppiamento è data da

$$\Gamma^{(4)}[\Phi] \Big|_{\text{rilevante}} = \int d^4x \left\{ -\frac{g_0}{4!} \left( 1 - \frac{3}{32\pi^2} g_0 f_0 \right) \Phi^4(x) \right\} \quad . \quad (5.111)$$

La condizione di normalizzazione (5.93) implica che, a quest'ordine, deve essere

$$g_0 \left( 1 - \frac{3}{32\pi^2} g_0 f_0 \right) = g \quad . \quad (5.112)$$

Le equazioni (5.103) e (5.112) si possono risolvere esprimendo i parametri nudi in funzione delle quantità rinormalizzate

$$Z = 1 + O(g^2) \quad , \quad (5.113)$$

$$m_0^2 = m^2 - \frac{g}{32\pi^2} \left[ \Lambda^2 - m^2 \ln \frac{\Lambda^2 + m^2}{m^2} \right] + O(g^2) \quad , \quad (5.114)$$

$$g_0 = g \left\{ 1 + \frac{3g}{32\pi^2} \left[ \ln \left( 1 + \frac{\Lambda^2}{m_0^2} \right) - 1 \right] + O(g^2) \right\} . \quad (5.115)$$

Siccome i valori di  $m$  e di  $g$  sono finiti, le equazioni (5.114) e (5.115) mostrano che i parametri nudi  $m_0$  e  $g_0$  divergono nel limite  $\Lambda \rightarrow \infty$ . Questo fatto non rappresenta un problema perché i parametri nudi non sono quantità osservabili. Utilizzando i valori mostrati in equazioni (5.113)-(5.115), ogni ampiezza viene espressa in funzione dei parametri fisici  $m$  e  $g$  e, per costruzione, ogni ampiezza calcolata fino all'ordine di un loop incluso risulta finita nel limite  $\Lambda \rightarrow \infty$ . Pertanto, le osservabili ovvero le quantità fisicamente misurabili, definite dallo sviluppo perturbativo, risultano significative.

• **Controtermini Lagrangiani.** La costante di normalizzazione per la funzione d'onda  $Z$  ed i parametri nudi  $m_0$  e  $g_0$  dipendono dai parametri fisici per mezzo di uno sviluppo in potenze della costante di accoppiamento. Come mostrato nelle equazioni (5.113)-(5.115), al primo ordine di tale sviluppo  $Z$  è banale mentre  $m_0$  e  $g_0$  coincidono coi parametri fisici. La presenza dei termini successivi negli sviluppi (5.113)-(5.115) corrisponde di fatto alla introduzione di opportuni termini Lagrangiani che, ordine per ordine, assicurano la validità delle condizioni di normalizzazione. Quindi, la rinormalizzazione può essere interpretata anche nel modo seguente:

- i parametri nudi si possono identificare direttamente coi parametri fisici;
- ad ogni ordine nel numero di loop, si introducono gli opportuni termini Lagrangiani locali, chiamati anche **controtermini**, per cancellare eventuali contributi (finiti o infiniti) che tendono a modificare le condizioni di normalizzazione.

## Capitolo 6

### Elettrodinamica

L'elettrodinamica quantistica è la teoria di campo che descrive le interazioni tra la radiazione elettromagnetica e particelle di spin  $1/2$  con carica elettrica non banale come gli elettroni. L'azione della teoria è data da

$$S = \int d^4x \bar{\psi}(x) \{ i \gamma^\mu [ \partial_\mu + i e A_\mu(x) ] - m \} \psi(x) - \frac{1}{4} \int d^4x ( \partial_\mu A_\nu(x) - \partial_\nu A_\mu(x) ) ( \partial^\mu A^\nu(x) - \partial^\nu A^\mu(x) ) , \quad (6.1)$$

dove  $\psi(x)$  è il campo spinoriale di Dirac a quattro componenti che descrive gli elettroni,  $A_\mu(x)$  è il campo vettoriale associato al fotone e la costante di accoppiamento, denotata con  $e$ , è adimensionale. Tra le varie teorie di campo, l'elettrodinamica quantistica ha un ruolo speciale; in effetti, la teoria quantistica dei campi è nata con lo studio dell'elettrodinamica [12,13,14]. In questo capitolo verranno discussi alcuni aspetti fondamentali dell'elettrodinamica quantistica.

**6A. Scelta della gauge e trasformazioni di BRS.** La proprietà più importante dell'elettrodinamica è l'invarianza dell'azione (6.1) per trasformazioni locali di gauge

$$\psi(x) \rightarrow \psi^{\theta(x)}(x) = e^{i e \theta(x)} \psi(x) \quad , \quad \bar{\psi}(x) \rightarrow \bar{\psi}^{\theta(x)}(x) = \bar{\psi}(x) e^{-i e \theta(x)} \quad , \quad (6.2)$$

$$A_\mu(x) \rightarrow A_\mu^{\theta(x)}(x) = A_\mu(x) - \partial_\mu \theta(x) \quad ,$$

dove il parametro reale  $\theta(x)$  delle trasformazioni di gauge è una funzione arbitraria delle coordinate. La parte quadratica dell'azione che si riferisce ai campi commutanti, ovvero alle componenti del campo vettoriale, si può scrivere come

$$S^{(2)} = \int d^4x \frac{1}{2} A_\mu(x) \mathcal{Q}^\mu{}_\nu A^\nu(x) \quad , \quad (6.3)$$

dove l'operatore differenziale  $\mathcal{Q}^\mu{}_\nu$  è dato da

$$\mathcal{Q}^\mu{}_\nu = \delta_\nu^\mu \partial_\lambda \partial^\lambda - \partial^\mu \partial_\nu \quad . \quad (6.4)$$

A causa della invarianza di gauge dell'azione, l'operatore  $\mathcal{Q}^\mu{}_\nu$  possiede autovalori nulli e quindi non è invertibile, ovvero non esiste una funzione di Green causale associata all'operatore  $\mathcal{Q}^\mu{}_\nu$ . Pertanto, non è evidente come definire il propagatore per il campo  $A_\mu(x)$ .

• **Nota.** L'invarianza di gauge ha un ruolo importante nella teoria; in accordo con quanto si osserva in natura, essa implica che le componenti longitudinali del campo vettoriale non corrispondono a gradi di

libertà fisici, cioè a gradi di libertà “propaganti”. D’altra parte, l’invarianza di gauge pone un problema nella definizione del propagatore per il campo vettoriale.

La soluzione di questo problema è basata sul fatto che le osservabili del sistema sono descritte esclusivamente da quantità *invarianti di gauge*. Quindi, se si cambia la Lagrangiana in modo tale che la dinamica corrispondente ai gradi di libertà associati alle osservabili non venga modificata, il contenuto fisico della teoria rimane inalterato. La procedura di gauge fixing, o scelta della gauge, viene introdotta per definire il propagatore del campo  $A_\mu(x)$ . Esistono vari metodi per fissare la gauge; pur essendo algebricamente inequivalenti, tutti questi metodi sono tra loro fisicamente equivalenti cioè i valori delle osservabili non dipendono dalla particolare scelta del gauge fixing. L’aspetto cruciale della procedura di gauge fixing consiste nell’introdurre nuovi campi e nel modificare la Lagrangiana in modo tale che

- (i) le componenti non fisiche, ovvero longitudinali, di  $A_\mu(x)$  possano propagare,
- (ii) la dinamica dei gradi di libertà fisici della teoria non venga modificata.

In altri termini, le componenti non fisiche dei campi devono rimanere completamente disaccoppiate dalle componenti fisiche. Questo disaccoppiamento tra i gradi di libertà fisici e quelli non fisici è assicurato dall’invarianza della Lagrangiana per opportune trasformazioni di simmetria [15,16,17] chiamate trasformazioni di Becchi-Rouet-Stora o, più semplicemente, trasformazioni di BRS.

• **Trasformazioni di BRS.** Oltre al campo vettoriale  $A_\mu(x)$  e ai campi di materia  $\psi(x)$  e  $\bar{\psi}(x)$ , le trasformazioni di BRS coinvolgono tre nuovi campi scalari: un campo commutante  $B(x)$  chiamato **campo ausiliario** e due campi anticommutanti  $c(x)$  e  $\bar{c}(x)$  chiamati rispettivamente il **campo di ghost** e di **antighost**. Le trasformazioni di BRS sono

$$\delta A_\mu(x) = -\partial_\mu c(x) \quad , \quad \delta \psi(x) = i e c(x) \psi(x) \quad , \quad \delta \bar{\psi}(x) = -i e \bar{\psi}(x) c(x) \quad , \quad (6.5)$$

$$\delta B(x) = 0 \quad , \quad \delta c(x) = 0 \quad , \quad \delta \bar{c}(x) = -B(x) \quad . \quad (6.6)$$

Le trasformazioni di BRS rappresentano una generalizzazione delle trasformazioni di gauge usuali; dalle equazioni (6.5) risulta che le trasformazioni di BRS agiscono sui campi originali della teoria  $A_\mu(x)$ ,  $\psi(x)$  e  $\bar{\psi}(x)$  come trasformazioni infinitesime di gauge in cui il campo del ghost  $c(x)$  ha un ruolo simile a quello del parametro locale  $\theta(x)$ . Le trasformazioni (6.5) e (6.6) hanno la fondamentale proprietà di essere nilpotenti, ovvero vale la seguente relazione

$$\delta^2 = \delta \delta = 0 \quad . \quad (6.7)$$

Essendo invariante per trasformazioni di gauge, l’azione (6.1) è necessariamente invariante anche per trasformazioni di BRS.

• **Gauge fixing.** La procedura di gauge fixing consiste nel modificare l’azione (6.1) mediante l’aggiunta di un termine  $S_{\phi\pi}$  che è la variazione di BRS di un funzionale locale,

$$\begin{aligned} S_{\phi\pi} &= \delta \left[ - \int d^4x \bar{c}(x) \left( \partial^\mu A_\mu(x) + \frac{\beta}{2} B(x) \right) \right] \\ &= \int d^4x \left\{ B(x) \partial^\mu A_\mu(x) + \frac{\beta}{2} B^2(x) + \bar{c}(x) \partial^\mu \partial_\mu c(x) \right\} \quad , \end{aligned} \quad (6.8)$$

dove  $\beta$  è un parametro reale denominato parametro di gauge. L'azione totale è quindi

$$S_{TOT} = \int d^4x \bar{\psi}(x) \{ i \gamma^\mu [ \partial_\mu + i e A_\mu(x) ] - m \} \psi(x) + \int d^4x \frac{1}{2} A_\mu(x) \mathcal{Q}^\mu_\nu A^\nu(x) + \int d^4x \left\{ B(x) \partial^\mu A_\mu(x) + \frac{\beta}{2} B^2(x) + \bar{c}(x) \partial^\mu \partial_\mu c(x) \right\} . \quad (6.9)$$

Per costruzione, il funzionale (6.9) non è invariante per trasformazioni di gauge (6.2); come conseguenza della nilpotenza dell'operatore  $\delta$ , il funzionale (6.9) è BRS invariante. A causa dell'introduzione del termine di gauge fixing, l'invarianza di gauge dell'azione totale è violata ed è quindi possibile determinare il propagatore per il campo  $A_\mu(x)$ . Nonostante la rottura esplicita dell'invarianza di gauge, le conseguenze fisiche dell'invarianza di gauge sono mantenute. Infatti, *l'invarianza di gauge viene semplicemente rimpiazzata dall'invarianza di  $S_{TOT}$  per trasformazioni di BRS che agiscono sui campi  $A_\mu(x)$ ,  $\psi(x)$  e  $\bar{\psi}(x)$  come le usuali trasformazioni di gauge. Per questo motivo, la dinamica dei gradi di libertà fisici non viene modificata.*

Le variabili che sono BRS invarianti e che non dipendono dal campo ausiliario e dai campi di ghost e antighost sono definite essere le osservabili del sistema. Pertanto, le osservabili coincidono precisamente con le usuali quantità invarianti di gauge. La consistenza della procedura di gauge-fixing impone che le osservabili debbano essere *gauge-independent*, ovvero, non devono dipendere dal particolare valore del parametro di gauge.

• **Nota.** In elettrodinamica, il problema del gauge fixing può essere discusso anche senza introdurre le trasformazioni di BRS. Similmente, la soluzione corretta del problema del gauge fixing in teorie di gauge non-Abeliane è stata ottenuta per la prima volta da Fadeev e Popov [18] utilizzando metodi funzionali senza far uso delle trasformazioni di BRS. Il vantaggio di usare le trasformazioni di BRS consiste nel fatto che il problema del gauge fixing viene risolto mediante l'introduzione di un principio di simmetria. Questo permette di controllare in maniera sistematica gli effetti del gauge fixing sulla dinamica del sistema. Nella rinormalizzazione delle teorie di campo, inoltre, le simmetrie hanno un ruolo fondamentale e la simmetria di BRS risulta particolarmente utile. L'espressione (6.8) del termine di gauge fixing si riferisce ad una scelta covariante della gauge; in linea di principio, si possono introdurre forme più generali di gauge fixing.

Le dimensioni dei campi ed il loro numero di ghost sono mostrati nella seguente tabella.

campo	$A_\mu$	$\psi$	$B$	$c$	$\bar{c}$
dimensione	1	3/2	2	0	2
numero di ghost	0	0	0	1	-1

L'operatore  $\delta$  aumenta di una unità il numero di ghost che rappresenta un numero quantico conservato. Tra le equazioni del moto, che si ottengono dalla azione totale (6.9), compare la relazione

$$\partial^\mu A_\mu(x) + \beta B(x) = 0 .$$

Quindi, la modifica Lagrangiana dovuta al gauge fixing coinvolge esclusivamente la parte longitudinale del campo vettoriale.

**6B. Propagatore del campo vettoriale.** Si consideri lo sviluppo perturbativo definito dall'azione (6.9). I campi di ghost e di antighost contribuiscono all'azione totale mediante un termine quadratico (o libero); essendo completamente disaccoppiati dai campi rimanenti, i campi  $c(x)$  e  $\bar{c}(x)$  si possono semplicemente ignorare. La parte quadratica di  $S_{TOT}$  che contiene i campi  $\psi(x)$  e  $\bar{\psi}(x)$  coincide con la corrispondente parte quadratica dell'azione (6.1); quindi, il propagatore per il campo spinoriale coincide col propagatore di Feynman mostrato in equazione (4.60). Il vertice di interazione  $\bar{\psi}\gamma^\mu\psi A_\mu$  non è modificato dalla presenza del termine di gauge fixing. In conclusione, il termine di gauge fixing modifica esclusivamente la parte quadratica dell'azione che si riferisce ai campi commutanti; infatti, dalla (6.9) si ottiene

$$S_{TOT}^{(2)} = \int d^4x \frac{1}{2} (A_\mu, B) \begin{pmatrix} \mathcal{Q}^\mu{}_\nu & -\partial^\mu \\ \partial_\nu & \beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A^\nu \\ B \end{pmatrix} . \quad (6.10)$$

Conseguentemente, le varie componenti dei propagatori per i campi  $A_\mu$  e  $B$  devono soddisfare le seguenti relazioni

$$\begin{pmatrix} \mathcal{Q}^\mu{}_\nu & -\partial^\mu \\ \partial_\nu & \beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \overline{A^\nu(x) A_\sigma(y)} & \overline{A^\nu(x) B(y)} \\ \overline{B(x) A_\sigma(y)} & \overline{B(x) B(y)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} i\delta^\mu_\sigma \delta^4(x-y) & 0 \\ 0 & i\delta^4(x-y) \end{pmatrix} . \quad (6.11)$$

La soluzione del sistema di equazioni (6.11) è data da

$$\overline{A_\mu(x) A_\nu(y)} = -i \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{e^{-ik \cdot (x-y)}}{k^2 + i\epsilon} \left( g_{\mu\nu} + (\beta - 1) \frac{k_\mu k_\nu}{k^2 + i\epsilon} \right) , \quad (6.12)$$

$$\overline{A_\mu(x) B(y)} = - \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} e^{-ik \cdot (x-y)} \frac{k_\mu}{k^2 + i\epsilon} , \quad \overline{B(x) B(y)} = 0 . \quad (6.13)$$

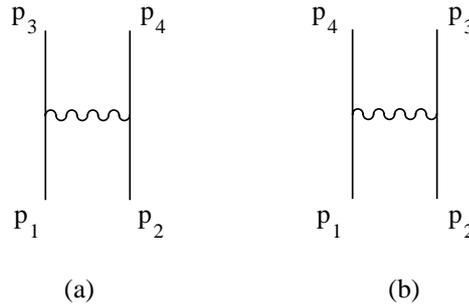
Siccome il vertice di interazione è dato da  $\bar{\psi}\gamma^\mu\psi A_\mu$ , l'espressione (6.12) rappresenta la componente rilevante del propagatore nel calcolo dei diagrammi di Feynman. Il valore del parametro di gauge  $\beta$  può essere scelto in maniera arbitraria; quindi, la (6.12) mostra che la componente longitudinale del propagatore, cioè la componente proporzionale a  $k_\mu k_\nu$ , non contribuisce al calcolo delle ampiezze fisiche. La *gauge di Landau* si ottiene ponendo  $\beta = 0$ , mentre la scelta  $\beta = 1$  corrisponde alla *gauge di Feynman*.

**6C. Diffusione elettrone-elettrone.** Come prima applicazione del propagatore (6.12) nella gauge di Feynman, consideriamo il calcolo della sezione d'urto per un processo di diffusione tra due elettroni. Denotiamo con  $p_1$  e  $p_2$  gli impulsi degli elettroni nello stato iniziale e con  $p_3$  e  $p_4$  gli impulsi nello stato finale. Avendo fissato gli stati di polarizzazione, il primo contributo perturbativo all'ampiezza  $A$  di transizione si ottiene dall'espressione

$$A = -\frac{e^2}{2} \int d^4x \int d^4y \langle 0 | b(\vec{p}_3, r_3) b(\vec{p}_4, r_4) \times \quad (6.14)$$

$$\times \text{T} \{ \bar{\psi}(x) \gamma^\mu \psi(x) A_\mu(x) \bar{\psi}(y) \gamma^\nu \psi(y) A_\nu(y) \} b^+(\vec{p}_1, r_1) b^+(\vec{p}_2, r_2) | 0 \rangle .$$

I campi vettoriali sono soggetti ad una contrazione di Wick, mentre i campi spinoriali determinano le funzioni d'onda degli stati iniziale e finale. La combinatorica consiste in un fattore due dovuto alla simmetria dei due vertici di interazione; inoltre, l'ampiezza è la somma coerente di due contributi corrispondenti ai diagrammi di Figura 6.1.



**Figura 6.1** Diffusione elettrone-elettrone.

Si ottiene

$$A = (2\pi)^4 \delta^4(p_3 + p_4 - p_1 - p_2) F \quad , \quad (6.15)$$

dove

$$F = \frac{-ie^2}{(2\pi)^6} \frac{m^2}{\sqrt{E_1 E_2 E_3 E_4}} \left\{ \bar{u}(4) \gamma^\mu u(2) \frac{1}{(p_1 - p_3)^2} \bar{u}(3) \gamma_\mu u(1) \right. \\ \left. - \bar{u}(4) \gamma^\mu u(1) \frac{1}{(p_1 - p_4)^2} \bar{u}(3) \gamma_\mu u(2) \right\} . \quad (6.16)$$

Per elettroni non polarizzati, la sezione d'urto si ottiene prendendo la somma sugli stati finali di polarizzazione e mediando su quelli iniziali. Introducendo la costante di struttura fine elettromagnetica  $\alpha$ , la sezione di diffusione assume la forma

$$d\sigma = \frac{m^4 \alpha^2}{E_1 E_2} \frac{\delta^4(p_3 + p_4 - p_1 - p_2)}{|\vec{v}_1 - \vec{v}_2|} \frac{d^3 p_3}{E_3} \frac{d^3 p_4}{E_4} \\ \left\{ \frac{1}{(p_1 - p_3)^4} \text{Tr} \left[ \gamma^\mu \frac{\hat{p}_1 + m}{2m} \gamma^\nu \frac{\hat{p}_3 + m}{2m} \right] \text{Tr} \left[ \gamma_\mu \frac{\hat{p}_2 + m}{2m} \gamma_\nu \frac{\hat{p}_4 + m}{2m} \right] \right. \\ \left. - \frac{1}{(p_1 - p_3)^2 (p_1 - p_4)^2} \text{Tr} \left[ \gamma^\mu \frac{\hat{p}_1 + m}{2m} \gamma^\nu \frac{\hat{p}_3 + m}{2m} \gamma_\mu \frac{\hat{p}_2 + m}{2m} \gamma_\nu \frac{\hat{p}_4 + m}{2m} \right] + (p_3 \leftrightarrow p_4) \right\} . \quad (6.17)$$

La traccia dei vari prodotti di matrici gamma si può effettuare utilizzando le relazioni (2.88) e (2.89). Nel sistema del centro di massa e per elettroni relativistici con energia  $E$  che soddisfa la relazione  $E \gg m$

si ottiene [3]

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{\alpha^2}{8E^2} \left\{ \frac{1 + \cos^4(\theta/2)}{\sin^4(\theta/2)} + \frac{2}{\sin^2(\theta/2) \cos^2(\theta/2)} + \frac{1 + \sin^4(\theta/2)}{\cos^4(\theta/2)} \right\}, \quad (6.18)$$

dove  $\theta$  rappresenta l'angolo di diffusione.

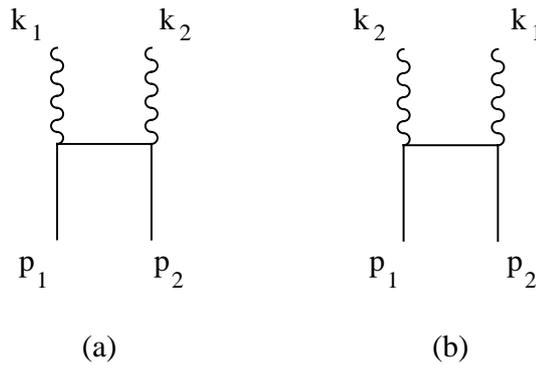
**6D. Annichilazione in due fotoni.** Una coppia di particelle composta da un elettrone ed un positrone può annichilarsi producendo due fotoni. Avendo fissato gli stati di polarizzazione, il primo contributo all'ampiezza dello sviluppo perturbativo si ottiene da

$$A = -\frac{e^2}{2} \int d^4x \int d^4y \langle 0 | a_\sigma(\vec{k}_1) a_\lambda(\vec{k}_2) \times \times \text{T} \{ \bar{\psi}(x) \gamma^\mu \psi(x) A_\mu(x) \bar{\psi}(y) \gamma^\nu \psi(y) A_\nu(y) \} b^+(\vec{p}_1, r_1) d^+(\vec{p}_2, r_2) | 0 \rangle. \quad (6.19)$$

Utilizzando gli operatori di annichilazione e di creazione, si ottengono due termini che sono descritti dai diagrammi di Figura 6.2. La corrispondente ampiezza di transizione risulta essere

$$A = -i \frac{e^2 m}{8\pi^2} \frac{\delta^4(k_1 + k_2 - p_1 - p_2)}{\sqrt{E_1 E_2 |\vec{k}_1| |\vec{k}_2|}} \left\{ \bar{v}(2) \hat{\varepsilon}_2 \frac{\hat{p}_1 - \hat{k}_1 + m}{(p_1 - k_1)^2 - m^2} \hat{\varepsilon}_1 u(1) + \bar{v}(2) \hat{\varepsilon}_1 \frac{\hat{p}_1 - \hat{k}_2 + m}{(p_1 - k_2)^2 - m^2} \hat{\varepsilon}_2 u(1) \right\}. \quad (6.20)$$

Le polarizzazioni fisiche dei due fotoni sono descritte da  $\varepsilon_1$  ed  $\varepsilon_2$ . L'elettrone ha impulso  $p_1$  ed energia  $E_1$  mentre il positrone ha impulso  $p_2$  ed energia  $E_2$ .



**Figura 6.2** Annichilazione in due fotoni.

Si consideri il sistema di riferimento in cui l'elettrone ha velocità nulla; in questo caso, si ha  $E_1 = m$  e le polarizzazioni fisiche dei due fotoni soddisfano  $\varepsilon_1 \cdot p_1 = 0 = \varepsilon_2 \cdot p_1$ ; inoltre, si ottiene  $(p_1 - k_1)^2 - m^2 =$

$-2m|\vec{k}_1|$  e  $(p_1 - k_2)^2 - m^2 = -2m|\vec{k}_2|$ . L'espressione (6.20) può essere ulteriormente semplificata utilizzando la relazione  $\hat{a}\hat{b} = -\hat{b}\hat{a} + 2a \cdot b$ . Siccome  $\varepsilon_1 \cdot p_1 = 0$ , si ricava  $(\hat{p}_1 + m)\hat{\varepsilon}_1 u(1) = \hat{\varepsilon}_1(-\hat{p}_1 + m)u(1) = 0$  dove l'ultima uguaglianza segue dalla (2.69). Similmente, si ottiene  $(\hat{p}_1 + m)\hat{\varepsilon}_2 u(1) = \hat{\varepsilon}_2(-\hat{p}_1 + m)u(1) = 0$ . L'ampiezza (6.20) assume quindi la forma

$$A = -i \frac{e^2}{16\pi^2} \frac{\delta^4(k_1 + k_2 - p_1 - p_2)}{\sqrt{m E_2 |\vec{k}_1| |\vec{k}_2|}} \left\{ \bar{v}(2) \hat{\varepsilon}_2 \frac{\hat{k}_1}{|\vec{k}_1|} \hat{\varepsilon}_1 u(1) + \bar{v}(2) \hat{\varepsilon}_1 \frac{\hat{k}_2}{|\vec{k}_2|} \hat{\varepsilon}_2 u(1) \right\} . \quad (6.21)$$

La sezione d'urto associata al processo di annichilazione, per elettrone e positrone non polarizzati, si ottiene mediando sugli stati di polarizzazione iniziali

$$\begin{aligned} d\sigma = & \frac{\alpha^2 \delta^4(k_1 + k_2 - p_1 - p_2)}{16m E_2 |\vec{v}_2|} \frac{d^3k_1}{|\vec{k}_1|} \frac{d^3k_2}{|\vec{k}_2|} \left\{ \text{Tr} \left[ \hat{\varepsilon}_2 \frac{\hat{k}_1}{|\vec{k}_1|} \hat{\varepsilon}_1 \frac{\hat{p}_1 + m}{2m} \hat{\varepsilon}_1 \frac{\hat{k}_1}{|\vec{k}_1|} \hat{\varepsilon}_2 \frac{\hat{p}_2 - m}{2m} \right] \right. \\ & + \text{Tr} \left[ \hat{\varepsilon}_2 \frac{\hat{k}_1}{|\vec{k}_1|} \hat{\varepsilon}_1 \frac{\hat{p}_1 + m}{2m} \hat{\varepsilon}_2 \frac{\hat{k}_2}{|\vec{k}_2|} \hat{\varepsilon}_1 \frac{\hat{p}_2 - m}{2m} \right] + \text{Tr} \left[ \hat{\varepsilon}_1 \frac{\hat{k}_2}{|\vec{k}_2|} \hat{\varepsilon}_2 \frac{\hat{p}_1 + m}{2m} \hat{\varepsilon}_1 \frac{\hat{k}_1}{|\vec{k}_1|} \hat{\varepsilon}_2 \frac{\hat{p}_2 - m}{2m} \right] \\ & \left. + \text{Tr} \left[ \hat{\varepsilon}_1 \frac{\hat{k}_2}{|\vec{k}_2|} \hat{\varepsilon}_2 \frac{\hat{p}_1 + m}{2m} \hat{\varepsilon}_2 \frac{\hat{k}_2}{|\vec{k}_2|} \hat{\varepsilon}_1 \frac{\hat{p}_2 - m}{2m} \right] \right\} . \end{aligned} \quad (6.22)$$

Il calcolo esplicito delle tracce delle matrici gamma è riportato in [3].

**6E. Annichilazione e produzione di coppie.** Un elettrone ed un positrone possono annichilarsi e produrre, tramite la propagazione di un fotone virtuale, una nuova coppia particella-antiparticella dotate di carica elettrica non banale. Per illustrare le caratteristiche di questo processo, consideriamo come esempio la reazione

$$e^+ + e^- \rightarrow \mu^+ + \mu^-$$

Il leptone  $\mu$  è una particella del tutto simile all'elettrone; essa possiede spin  $1/2$ , ha la stessa carica elettrica dell'elettrone ed una massa di circa 105.6 MeV. Se si denotano con  $\psi_1$  e  $\psi_2$  i campi spinoriali associati rispettivamente all'elettrone ed al muone, le interazioni elettromagnetiche degli elettroni e dei muoni sono descritte dall'azione

$$\begin{aligned} S = & \int d^4x \bar{\psi}_1 \{ i \gamma^\mu [\partial_\mu + i e A_\mu(x)] - m \} \psi_1 + \bar{\psi}_2 \{ i \gamma^\mu [\partial_\mu + i e A_\mu(x)] - M \} \psi_2 \\ & - \frac{1}{4} \int d^4x (\partial_\mu A_\nu(x) - \partial_\nu A_\mu(x)) (\partial^\mu A^\nu(x) - \partial^\nu A^\mu(x)) , \end{aligned} \quad (6.23)$$

dove i parametri  $m$  ed  $M$  rappresentano le masse dell'elettrone e del muone. L'ampiezza per il processo illustrato in Figura 6.3 risulta essere

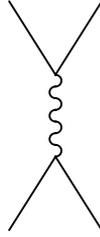
$$\begin{aligned} A = & -e^2 \int d^4x \int d^4y \langle 0 | d_2(\vec{k}_2, s_2) b_2(\vec{k}_1, s_1) T \left\{ \bar{\psi}_2(x) \gamma^\mu \psi_2(x) A_\mu(x) \times \right. \\ & \left. \times \bar{\psi}_1(y) \gamma^\nu \psi_1(y) A_\nu(y) \right\} b_1^+(\vec{p}_1, r_1) d_1^+(\vec{p}_2, r_2) | 0 \rangle . \end{aligned} \quad (6.24)$$

Effettuando le contrazioni dei vari operatori si ottiene

$$A = i \frac{e^2 m M}{4 \pi^2} \frac{\delta^4(k_1 + k_2 - p_1 - p_2)}{\sqrt{E_1 E_2 \mathcal{E}_1 \mathcal{E}_2}} \bar{u}_2(1) \gamma^\mu v_2(2) \frac{1}{(p_1 + p_2)^2} \bar{v}_1(2) \gamma_\mu u_1(1) \quad , \quad (6.25)$$

dove  $E_1$  ed  $E_2$  rappresentano i valori dell'energia dell'elettrone e del positrone, mentre  $\mathcal{E}_1$  ed  $\mathcal{E}_2$  sono le energie del  $\mu^-$  e del  $\mu^+$ . Per particelle non polarizzate, la sezione di diffusione assume la forma

$$d\sigma = \frac{\alpha^2 m^2 M^2}{E_1 E_2 |\vec{v}_1 - \vec{v}_2|} \frac{d^3 k_1}{\mathcal{E}_1} \frac{d^3 k_2}{\mathcal{E}_2} \frac{\delta^4(k_1 + k_2 - p_1 - p_2)}{[(p_1 - p_2)^2]^2} \times \text{Tr} \left[ \gamma^\mu \frac{\hat{k}_2 - M}{2M} \gamma^\nu \frac{\hat{k}_1 + M}{2M} \right] \text{Tr} \left[ \gamma_\mu \frac{\hat{p}_1 + m}{2m} \gamma_\nu \frac{\hat{p}_2 - m}{2m} \right] \quad . \quad (6.26)$$



**Figura 6.3** Processo  $e^+ e^- \rightarrow \mu^+ \mu^-$ .

Calcolando le tracce delle matrici gamma, si deriva

$$d\sigma = \frac{2 \alpha^2}{E_1 E_2 |\vec{v}_1 - \vec{v}_2|} \frac{d^3 k_1}{\mathcal{E}_1} \frac{d^3 k_2}{\mathcal{E}_2} \frac{\delta^4(k_1 + k_2 - p_1 - p_2)}{[(p_1 - p_2)^2]^2} \times \left[ (p_1 k_2)(p_2 k_1) + (p_1 k_1)(p_2 k_2) + m^2 (k_1 k_2) + M^2 (p_1 p_2) + 2 M^2 m^2 \right] \quad . \quad (6.27)$$

Nel sistema del centro di massa della coppia  $e^+ e^-$ , si ha  $p_1 = (E, \vec{p})$ ,  $p_2 = (E, -\vec{p})$ ,  $(p_1 + p_2)^2 = 4E^2$ . Dalla (6.27) segue allora che

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{\alpha^2}{16 E^2} \frac{|\vec{k}_1|}{|\vec{p}|} \left[ 1 + \frac{m^2 + M^2}{E^2} + \frac{(\vec{p} \cdot \vec{k}_1)^2}{E^4} \right] \quad . \quad (6.28)$$

Utilizzando le relazioni

$$|\vec{p}| = E \sqrt{1 - \frac{m^2}{E^2}} \quad , \quad |\vec{k}_1| = E \sqrt{1 - \frac{M^2}{E^2}} \quad , \quad (6.29)$$

$$\vec{p} \cdot \vec{k}_1 = |\vec{p}| |\vec{k}_1| \cos \theta \quad , \quad (6.30)$$

si ottiene il risultato finale

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{\alpha^2}{16 E^2} \sqrt{\frac{1 - \frac{M^2}{E^2}}{1 - \frac{m^2}{E^2}}} \left[ 1 + \frac{m^2 + M^2}{E^2} + \left( 1 - \frac{m^2}{E^2} \right) \left( 1 - \frac{M^2}{E^2} \right) \cos^2 \theta \right] \quad . \quad (6.31)$$

Quando l'energia nel centro di massa è molto maggiore delle masse delle particelle,  $E \gg M$  e quindi  $E \gg m$ , la sezione d'urto differenziale si può approssimare mediante l'espressione

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} \simeq \frac{\alpha^2}{16 E^2} \left[ 1 + \cos^2 \theta \right] \quad , \quad (6.32)$$

a cui corrisponde una sezione totale di diffusione

$$(\sigma)_{e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-} \simeq \frac{\pi}{3} \frac{\alpha^2}{E^2} \quad . \quad (6.33)$$

**6F. Correzioni radiative al momento magnetico.** Le particelle elementari di spin  $1/2$  e con carica elettrica non banale, il cui operatore di campo è uno spinore di Dirac a quattro componenti, possiedono un momento magnetico non nullo. Consideriamo per esempio un elettrone in presenza di un campo elettromagnetico *esterno* descritto da  $A_\mu(x)$ ; l'azione è

$$S = \int d^4x \bar{\psi} \{ i \gamma^\mu [\partial_\mu + i e A_\mu(x)] - m \} \psi \quad , \quad (6.34)$$

e le corrispondenti equazioni del moto sono

$$\{ i \gamma^\mu [\partial_\mu + i e A_\mu(x)] - m \} \psi(x) = 0 \quad . \quad (6.35)$$

La riduzione non relativistica della (6.35) per l'elettrone si ottiene [3] ponendo

$$\psi(x) \simeq e^{-imt} \begin{bmatrix} \varphi(x) \\ \chi(x) \end{bmatrix} \quad . \quad (6.36)$$

Eliminando algebricamente le componenti "piccole"  $\chi(x)$  dello spinore, la (6.35) dà origine alla seguente equazione per le componenti "grandi"  $\varphi(x)$

$$i \frac{\partial \varphi}{\partial t} = \left[ \frac{(\vec{p} - e\vec{A})^2}{2m} + e A_0 - \frac{e}{2m} \vec{\sigma} \cdot \vec{B} \right] \varphi \quad , \quad (6.37)$$

dove  $\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}$  rappresenta il campo magnetico. Introducendo le costanti  $\hbar$  e  $c$ , la (6.37) mostra che l'elettrone possiede un momento magnetico dato da

$$\vec{\mu} = \mu_0 \vec{\sigma} \quad , \quad \mu_0 = \frac{e\hbar}{2m c} \simeq 0.927 \cdot 10^{-20} \text{ erg / gauss} \quad . \quad (6.38)$$

Il valore di  $\mu_0$  riportato in (6.38) è anche chiamato il **magnetone di Bohr**. Per un sistema di cariche in moto, che possiedono lo stesso rapporto di carica su massa, il momento magnetico dovuto al moto orbitale  $\vec{\mu}_{orb}$  risulta proporzionale al momento angolare

$$\vec{\mu}_{orb} = \frac{e}{2mc} \vec{L} \quad . \quad (6.39)$$

In analogia con la (6.39), per una particella di spin  $\vec{S}$  il momento magnetico si pone uguale a

$$\vec{\mu} = g \frac{e}{2mc} \vec{S} \quad , \quad (6.40)$$

dove  $g$  è il *fattore di Landé*. Nel caso di una particella con spin  $1/2$ , l'operatore di spin è dato da  $\vec{S} = \hbar \vec{\sigma}/2$ . Pertanto, confrontando la (6.38) con la (6.40), risulta che per l'elettrone si ha  $g = 2$ . In realtà, il risultato  $g = 2$  corrisponde al valore "semiclassico" (o "esatto") del fattore di Landé perché nel derivare la (6.37) non si sono tenute in conto le correzioni radiative dovute alla quantizzazione del campo elettromagnetico. Mediante lo sviluppo perturbativo, in questa sezione calcoleremo la prima correzione radiativa al momento magnetico dell'elettrone.

• **Parte di spin dell'interazione elettromagnetica.** Per evitare le inutili complicazioni del limite non relativistico, è opportuno utilizzare un formalismo manifestamente covariante e separare, nell'accoppiamento elettromagnetico, la parte orbitale dalla parte che coinvolge i gradi di libertà di spin. Usando le equazioni del moto (6.35), si ottiene

$$i \gamma^\nu \partial_\nu \psi - e A_\nu \gamma^\nu \psi - m \psi = 0 \quad , \quad i \partial_\nu \bar{\psi} \gamma^\nu + e \bar{\psi} \gamma^\nu A_\nu + m \bar{\psi} = 0 \quad . \quad (6.41)$$

Vale quindi la seguente relazione

$$(i \partial_\nu \bar{\psi} \gamma^\nu + e \bar{\psi} \gamma^\nu A_\nu + m \bar{\psi}) \gamma^\mu \psi - \bar{\psi} \gamma^\mu (i \gamma^\nu \partial_\nu \psi - e A_\nu \gamma^\nu \psi - m \psi) = 0 \quad , \quad (6.42)$$

che si può scrivere come

$$2m \bar{\psi} \gamma^\mu \psi = i (\bar{\psi} \gamma^\mu \gamma^\nu \partial_\nu \psi - \partial_\nu \bar{\psi} \gamma^\nu \gamma^\mu \psi) - e \bar{\psi} (\gamma^\mu \gamma^\nu + \gamma^\nu \gamma^\mu) \psi A_\nu \quad . \quad (6.43)$$

Utilizzando l'identità

$$\gamma^\mu \gamma^\nu = g^{\mu\nu} - i \Sigma^{\mu\nu} \quad , \quad (6.44)$$

dalla (6.43) si ricava

$$\bar{\psi} \gamma^\mu \psi = \frac{i}{2m} (\bar{\psi} \partial^\mu \psi - \partial^\mu \bar{\psi} \psi) - \frac{e}{m} \bar{\psi} \psi A^\mu + \frac{1}{2m} \partial_\nu (\bar{\psi} \Sigma^{\mu\nu} \psi) \quad . \quad (6.45)$$

Pertanto, il termine dell'azione che descrive l'interazione tra gli elettroni ed il campo elettromagnetico assume la forma

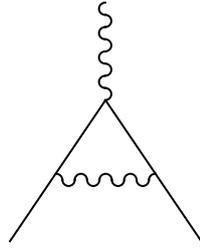
$$\begin{aligned} -e \int d^4x \bar{\psi} \gamma^\mu \psi A_\mu &= \int d^4x \left\{ -\frac{ie}{2m} (\bar{\psi} \partial^\mu \psi - \partial^\mu \bar{\psi} \psi) A_\mu + \frac{e^2}{m} \bar{\psi} \psi A^\mu A_\mu \right\} \\ &\quad - \frac{e}{4m} \int d^4x F_{\mu\nu} \bar{\psi} \Sigma^{\mu\nu} \psi \quad , \end{aligned} \quad (6.46)$$

dove  $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$ . I primi due termini del secondo membro della (6.46) coinvolgono esclusivamente le variabili orbitali degli elettroni mentre l'ultimo termine descrive l'accoppiamento del campo elettromagnetico coi generatori del gruppo di Lorentz che agiscono sulle componenti degli spinori. Essendo interessati al momento magnetico, ci concentreremo su quest'ultimo termine di interazione che si può riscrivere come

$$S_{spin} = -\frac{\mu_0}{2} \int d^4x F_{\mu\nu} \bar{\psi} \Sigma^{\mu\nu} \psi \quad . \quad (6.47)$$

• **Nota.** L'identità (6.46) è conseguenza delle equazioni del moto per il campo spinoriale; pertanto, la decomposizione (6.46) vale per fermioni "on-shell" in campo esterno.

Consideriamo ora le correzioni al vertice di interazione elettromagnetica che sono rappresentate, all'ordine perturbativo di un loop, dal grafico di Figura 6.4.



**Figura 6.4** Correzione al vertice.

Il vertice proprio a cui siamo interessati è descritto da

$$i\Gamma = -e^3 \int d^4x d^4y d^4z A_\mu(y) \Delta_0(x-z) \bar{\psi}(x) \gamma^\tau S(x-y) \gamma^\mu S(y-z) \gamma_\tau \psi(z) \quad , \quad (6.48)$$

che si può riscrivere come

$$\begin{aligned} i\Gamma &= -e^3 \int d^4x d^4y d^4z A_\mu(y) \frac{d^4p_1}{(2\pi)^4} \frac{d^4p_2}{(2\pi)^4} e^{-ip_1(x-y)} e^{-ip_2(y-z)} \bar{\psi}(x) \Lambda^\mu(p_1, p_2) \psi(z) \\ &= -e^3 \int d^4y \frac{d^4p_1}{(2\pi)^4} \frac{d^4p_2}{(2\pi)^4} e^{iy(p_1-p_2)} A_\mu(y) \bar{\psi}(p_1) \Lambda^\mu(p_1, p_2) \psi(p_2) \quad , \end{aligned} \quad (6.49)$$

dove

$$\Lambda^\mu(p_1, p_2) = \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{\gamma^\tau (\hat{p}_1 - \hat{k} + m) \gamma^\mu (\hat{p}_2 - \hat{k} + m) \gamma_\tau}{(k^2 + i\epsilon) [(p_1 - k)^2 - m^2 + i\epsilon] [(p_2 - k)^2 - m^2 + i\epsilon]} \quad . \quad (6.50)$$

Per elettroni esterni sul mass-shell, si ha  $p_1^2 = m^2 = p_2^2$ ; inoltre

$$\hat{p}_2 \psi(p_2) = m \psi(p_2) + \mathcal{O}(e) \quad , \quad \bar{\psi}(p_1) \hat{p}_1 = m \bar{\psi}(p_1) + \mathcal{O}(e) \quad . \quad (6.51)$$

L'algebra delle matrici gamma e le condizioni di mass-shell implicano che

$$\Lambda^\mu = 4 \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{[p_1 \cdot p_2 - (p_1 + p_2) \cdot k + k^2/2] \gamma^\mu - m k^\mu + (p_1 + p_2 - k)^\mu \widehat{k}}{(k^2 + i\epsilon)[k^2 - 2p_1 \cdot k + i\epsilon][k^2 - 2p_2 \cdot k + i\epsilon]} \quad . \quad (6.52)$$

La (6.52) mostra che  $\Lambda^\mu$  è una funzione simmetrica nelle variabili  $p_1^\nu$  e  $p_2^\nu$  che assume la forma

$$\Lambda^\mu = G(q^2) \gamma^\mu + (p_1^\mu + p_2^\mu) H(q^2) \quad , \quad (6.53)$$

dove  $q^\nu = p_1^\nu - p_2^\nu$  denota l'impulso trasferito che è portato dal campo elettromagnetico esterno. D'altra parte, utilizzando le proprietà degli spinori, la funzione di vertice si può sempre decomporre nel modo seguente

$$\bar{\psi}(p_1) \Lambda^\mu \psi(p_2) = \bar{\psi}(p_1) \gamma^\mu \psi(p_2) F_1(q^2) - i \bar{\psi}(p_1) \Sigma^{\mu\nu} \psi(p_2) q_\nu F_2(q^2) \quad , \quad (6.54)$$

in cui  $F_1(q^2)$  ed  $F_2(q^2)$  sono chiamati i fattori di forma. La funzione  $F_1(q^2)$  contiene divergenze ultraviolette ed infrarosse; ad  $F_1$  vanno imposte opportune condizioni di normalizzazione che discuteremo in seguito. Insieme alla polarizzazione di vuoto ed alla rinormalizzazione di funzione d'onda per l'elettrone, il termine proporzionale ad  $F_1(q^2)$  definisce, nel limite  $q^2 \rightarrow 0$ , la costante di accoppiamento rinormalizzata. Pertanto, tale termine non modifica il fattore giromagnetico delle particelle. Il fattore di forma  $F_2(q^2)$  risulta finito e privo di divergenze infrarosse;  $F_2(0)$  determina la correzione al momento magnetico dell'elettrone. Per passare dalla (6.53) alla (6.54) si utilizza la relazione (6.45) che, nello spazio degli impulsi, assume la forma (*decomposizione di Gordon generalizzata*)

$$\bar{\psi}(p_1) \gamma^\mu \psi(p_2) = \frac{1}{2m} (p_1^\mu + p_2^\mu) \bar{\psi}(p_1) \psi(p_2) + \frac{i}{2m} \bar{\psi}(p_1) \Sigma^{\mu\nu} \psi(p_2) q_\nu + O(e) \quad . \quad (6.55)$$

Si ottiene quindi

$$F_1(q^2) = G(q^2) + 2m H(q^2) \quad , \quad F_2(q^2) = H(q^2) \quad . \quad (6.56)$$

Per determinare il valore di  $F_2(0)$ , occorre perciò calcolare  $H(0)$  che, in base alla (6.53), risulta essere fissato dalla parte di  $\Lambda^\mu(p_1, p_1)$  che non dipende dalle matrici gamma

$$\Lambda^\mu(p_1, p_1) \Big|_{\text{no } \gamma} = 2p_1^\mu H(0) \quad . \quad (6.57)$$

Dalla (6.52) si ricava

$$\Lambda^\mu(p_1, p_1) = 4 \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{[m^2 - 2p_1 \cdot k + k^2/2] \gamma^\mu - m k^\mu + (2p_1 - k)^\mu \widehat{k}}{(k^2 + i\epsilon)[k^2 - 2p_1 \cdot k + i\epsilon]^2} \quad . \quad (6.58)$$

Il primo termine del numeratore nella (6.58) è proporzionale a  $\gamma^\mu$  e si può dunque trascurare; il secondo termine è rilevante per il calcolo di  $H(0)$ , mentre l'ultimo termine contiene una parte rilevante che,

per il momento, non è manifestamente individuabile. Occorre quindi procedere al calcolo esplicito dell'integrale sugli impulsi. Utilizziamo l'identità

$$\begin{aligned} \frac{1}{(k^2 + i\epsilon)[k^2 - 2p_1 \cdot k + i\epsilon]^2} &= 2 \int_0^1 d\alpha \frac{(1-\alpha)}{[\alpha k^2 + (1-\alpha)(k^2 - 2p_1 \cdot k) + i\epsilon]^3} \\ &= 2 \int_0^1 d\alpha \frac{(1-\alpha)}{[(k - (1-\alpha)p_1)^2 - (1-\alpha)^2 m^2 + i\epsilon]^3} \end{aligned} \quad (6.59)$$

Si ha perciò

$$\Lambda^\mu(p_1, p_1) \Big|_{\text{no } \gamma} = 8 \int_0^1 d\alpha (1-\alpha) \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{-m k^\mu + (2p_1 - k)^\mu \widehat{k}}{[(k - (1-\alpha)p_1)^2 - (1-\alpha)^2 m^2 + i\epsilon]^3} \Big|_{\text{no } \gamma} \quad (6.60)$$

Cambiando variabili di integrazione  $k^\mu \rightarrow k^\mu + (1-\alpha)p_1^\mu$ , si ottiene

$$\Lambda^\mu(p_1, p_1) \Big|_{\text{no } \gamma} = 8 \int_0^1 d\alpha (1-\alpha) \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{B^\mu}{[k^2 - (1-\alpha)^2 m^2 + i\epsilon]^3} \Big|_{\text{no } \gamma}, \quad (6.61)$$

dove

$$\begin{aligned} B^\mu &= -m(k^\mu + (1-\alpha)p_1^\mu) + (2p_1 - k - (1-\alpha)p_1)^\mu (\widehat{k} + (1-\alpha)\widehat{p}_1) \\ &= -m(1-\alpha)p_1^\mu - m(1-\alpha)k^\mu + (1-\alpha^2)p_1^\mu \widehat{p}_1 \\ &\quad + (1+\alpha)p_1^\mu \widehat{k} - (1-\alpha)k^\mu \widehat{p}_1 - k^\mu \widehat{k} \end{aligned} \quad (6.62)$$

Tra i vari termini della (6.62), quelli lineari in  $k$  non contribuiscono all'integrale (6.61); il termine quadratico in  $k$ , inserito nell'integrale, può essere sostituito con  $k^\mu \widehat{k} = k^\mu k^\nu \gamma_\nu \rightarrow k^2 \gamma^\mu / 4$  ed è quindi irrilevante perché proporzionale a  $\gamma^\mu$ . Inoltre, in base alla (6.51), il fattore  $\widehat{p}_1$  può essere sostituito con  $m$ . In definitiva, si ha

$$\Lambda^\mu(p_1, p_1) \Big|_{\text{no } \gamma} = 8m p_1^\mu \int_0^1 d\alpha \alpha (1-\alpha)^2 \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{1}{[k^2 - (1-\alpha)^2 m^2 + i\epsilon]^3} \quad (6.63)$$

Mediante continuazione analitica nell'Euclideo, si ottiene

$$\begin{aligned} \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{1}{[k^2 - (1-\alpha)^2 m^2 + i\epsilon]^3} &= -i \int \frac{d^4 k_E}{(2\pi)^4} \frac{1}{[k_E^2 + (1-\alpha)^2 m^2]^3} \\ &= \frac{-i}{32\pi^2} \frac{1}{(1-\alpha)^2 m^2} \end{aligned} \quad (6.64)$$

La (6.63) diventa

$$\Lambda^\mu(p_1, p_1) \Big|_{\text{no } \gamma} = \frac{-i}{4m\pi^2} p_1^\mu \int_0^1 d\alpha \alpha = \frac{-i}{8m\pi^2} p_1^\mu, \quad (6.65)$$

da cui risulta che

$$F_2(0) = H(0) = \frac{-i}{16 m \pi^2} \quad . \quad (6.66)$$

Riconsideriamo ora il vertice proprio (6.49); utilizzando la decomposizione (6.54) e limitandoci alla parte di spin, che risulta finita, si ottiene

$$i \Gamma_{\text{spin}} = i e^3 \int d^4 y \frac{d^4 p_1}{(2\pi)^4} \frac{d^4 p_2}{(2\pi)^4} e^{iy(p_1-p_2)} A_\mu(y) \bar{\psi}(p_1) \Sigma^{\mu\nu} \psi(p_2) (p_1 - p_2)_\nu F_2(q^2) \quad . \quad (6.67)$$

Ponendo

$$A_\mu(y) = \frac{1}{2} y^\sigma F_{\sigma\mu} \quad , \quad (6.68)$$

la (6.67) diventa

$$i \Gamma_{\text{spin}} = \frac{e^3}{2} \int d^4 y \frac{d^4 p_1}{(2\pi)^4} \frac{d^4 p_2}{(2\pi)^4} \left( \frac{\partial}{\partial (p_1)_\sigma} e^{iy(p_1-p_2)} \right) F_{\sigma\mu} \bar{\psi}(p_1) \Sigma^{\mu\nu} \psi(p_2) (p_1 - p_2)_\nu F_2(q^2) \quad . \quad (6.69)$$

Nel limite di campo esterno  $F_{\mu\nu}$  costante, la (6.69) assume la forma

$$\Gamma_{\text{spin}} = -i \frac{e^3}{2} \int \frac{d^4 p_1}{(2\pi)^4} F_{\mu\nu} \bar{\psi}(p_1) \Sigma^{\mu\nu} \psi(p_1) F_2(0) = -\frac{\mu_0}{2} \frac{\alpha}{2\pi} \int d^4 x F_{\mu\nu} \bar{\psi}(x) \Sigma^{\mu\nu} \psi(x) \quad . \quad (6.70)$$

In conclusione, sommando il contributo (6.47) del livello ad albero con il contributo (6.70) ad un loop, il vertice elettromagnetico che coinvolge la parte di spin dell'elettrone diventa

$$\Gamma_{\text{spin}} \Big|_{\text{TOT-1-LOOP}} = -\frac{\mu_0}{2} \left( 1 + \frac{\alpha}{2\pi} \right) \int d^4 x F_{\mu\nu} \bar{\psi}(x) \Sigma^{\mu\nu} \psi(x) \quad . \quad (6.71)$$

La (6.71) mostra che, ad un loop, la correzione radiativa al momento magnetico dell'elettrone vale  $\alpha/2\pi$  in unità del magnetone di Bohr [19,20].

Il confronto tra le previsioni teoriche ed i dati sperimentali sul momento magnetico rappresenta una delle verifiche più importanti dell'elettrodinamica. I dati sperimentali attualmente disponibili sono in accordo con le previsioni teoriche, basate sul calcolo a tre loop, con una precisione più accurata di una parte per milione. Questo notevole accordo tra teoria ed esperimento conferma la validità dell'elettrodinamica quantistica e, più in generale, della teoria quantistica dei campi nella descrizione delle particelle elementari.

## Capitolo 7

### Invarianza di gauge

Quando l'invarianza dell'azione classica per trasformazioni di gauge (di BRS) è mantenuta a livello quantistico, l'azione efficace rinormalizzata deve essere invariante di gauge (di BRS). Conseguentemente, i vertici propri soddisfano un certo numero di relazioni chiamate identità di Ward-Takahashi [21,22]. In questo capitolo considereremo alcune identità di Ward-Takahashi associate alle trasformazioni di gauge Abeliane ed illustreremo la loro utilità nella rinormalizzazione ad un loop dell'elettrodinamica quantistica. Introduciamo poi il metodo generale dell'accoppiamento minimale per costruire teorie di campo invarianti di gauge.

**7A. Identità di Ward-Takahashi.** Nella procedura di rinormalizzazione dell'elettrodinamica quantistica occorre considerare quattro quantità apparentemente distinte: le due costanti di funzione d'onda dei campi spinoriale e vettoriale, il valore della carica elettrica ed il valore della massa. In realtà, l'invarianza di gauge determina una relazione tra queste costanti per cui solamente tre quantità risultano effettivamente indipendenti.

• **Universalità della carica elettrica.** Poiché nella Lagrangiana di interazione il campo vettoriale  $A_\mu$  appare moltiplicato per la costante di accoppiamento, è conveniente riscalarlo il campo vettoriale tramite la sostituzione  $A_\mu \rightarrow (1/e) A_\mu$ . Si ottiene perciò

$$S = \int d^4x \bar{\psi}(x) \{ i \gamma^\mu [\partial_\mu + i A_\mu(x)] - m \} \psi(x) - \frac{1}{4e^2} \int d^4x F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} \quad . \quad (7.1)$$

La (7.1) mostra che la costante di normalizzazione della funzione d'onda per il campo  $A_\mu$  definisce semplicemente la rinormalizzazione della costante di accoppiamento, mentre la struttura del vertice di interazione è univocamente fissata dall'invarianza di gauge. Nel caso in cui si considerino vari campi di materia accoppiati al campo elettromagnetico, la forma (7.1) della Lagrangiana assicura l'universalità del valore della carica elettrica.

La teoria quantistica rinormalizzata è definita dall'azione efficace a cui vanno imposte le opportune condizioni di normalizzazione. Per distinguere i parametri fisici da quelli Lagrangiani, questi ultimi (o parametri nudi) verranno denotati con  $m_0$  ed  $e_0$ . Introducendo una costante  $Z$  di normalizzazione per la funzione d'onda dello spinore, l'azione totale dell'elettrodinamica risulta essere

$$S_{TOT} = \int d^4x Z \bar{\psi} \{ i \gamma^\mu [\partial_\mu + i A_\mu] - m_0 \} \psi + \frac{1}{2e_0^2} \int d^4x A_\mu \left( \delta_\nu^\mu \partial_\lambda \partial^\lambda - \partial^\mu \partial_\nu \right) A^\nu \\ + \int d^4x \left\{ B \partial^\mu A_\mu + \frac{\beta}{2} B^2 + \bar{c} \partial^\mu \partial_\mu c \right\} \quad . \quad (7.2)$$

I corrispondenti propagatori sono

$$\overline{\psi(x)\psi(y)} = \frac{i}{Z} \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} e^{-ik \cdot (x-y)} \frac{(\widehat{k} + m_0)}{k^2 - m_0^2 + i\epsilon} \quad , \quad (7.3)$$

$$\overline{A_\mu(x)A_\nu(y)} = -i \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{e^{-ik \cdot (x-y)}}{k^2 + i\epsilon} \left\{ \left( g_{\mu\nu} - \frac{k_\mu k_\nu}{k^2 + i\epsilon} \right) e_0^2 + \beta \frac{k_\mu k_\nu}{k^2 + i\epsilon} \right\} \quad , \quad (7.4)$$

$$\overline{A_\mu(x)B(y)} = - \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} e^{-ik \cdot (x-y)} \frac{k_\mu}{k^2 + i\epsilon} \quad , \quad \overline{B(x)B(y)} = 0 \quad . \quad (7.5)$$

Siccome il vertice di interazione contiene solamente i campi spinoriale e vettoriale, nel calcolo dell'azione efficace si utilizzano esclusivamente i propagatori (7.3) e (7.4). Il campo ausiliario ed i campi di ghost ed antighost compaiono solamente nella parte quadratica della Lagrangiana; pertanto il loro contributo all'azione efficace totale, che indicheremo con  $\Gamma_{tot}$ , è banale e coincide col termine Lagrangiano che si ottiene all'ordine zero nel numero di loop. Si ha quindi

$$\Gamma_{tot} = \Gamma[A_\mu, \bar{\psi}, \psi] + \int d^4x \left\{ B \partial^\mu A_\mu + \frac{\beta}{2} B^2 + \bar{c} \partial^\mu \partial_\mu c \right\} \quad , \quad (7.6)$$

dove  $\Gamma$  rappresenta la parte non banale dell'azione efficace totale  $\Gamma_{tot}$ . Consideriamo ora le proprietà di simmetria dell'azione efficace. Il funzionale (7.2) è invariante per trasformazioni di BRS definite da

$$\delta A_\mu(x) = -\partial_\mu c(x) \quad , \quad \delta \psi(x) = i c(x) \psi(x) \quad , \quad \delta \bar{\psi}(x) = -i \bar{\psi}(x) c(x) \quad , \quad (7.7)$$

$$\delta B(x) = 0 \quad , \quad \delta c(x) = 0 \quad , \quad \delta \bar{c}(x) = -B(x) \quad . \quad (7.8)$$

Conseguentemente, se esiste una procedura di rinormalizzazione che conserva tutte le proprietà di simmetria dell'azione (ovvero della teoria classica), l'azione efficace deve essere invariante per trasformazioni di BRS ad ogni ordine dello sviluppo nel numero di loop. Siccome il termine di gauge fixing è BRS invariante, dalla (7.6) segue che

$$\int d^4x \left( i \partial_\mu c(x) \frac{\delta}{\delta A_\mu(x)} + c(x) \psi(x) \frac{\delta}{\delta \psi(x)} - \bar{\psi}(x) c(x) \frac{\delta}{\delta \bar{\psi}(x)} \right) \Gamma = 0 \quad . \quad (7.9)$$

La (7.9) esprime l'invarianza di gauge dell'azione efficace; in effetti, nella (7.9) il campo di ghost può essere semplicemente sostituito dal parametro locale delle trasformazioni di gauge usuali. Siccome tale parametro locale è una funzione arbitraria delle coordinate, dalla (7.9) segue che

$$i \partial_\mu \frac{\delta \Gamma}{\delta A_\mu(x)} = \psi(x) \frac{\delta \Gamma}{\delta \psi(x)} - \bar{\psi}(x) \frac{\delta \Gamma}{\delta \bar{\psi}(x)} \quad . \quad (7.10)$$

Le relazioni tra i vertici propri che seguono dalla (7.9) o dalla (7.10) si chiamano **identità di Ward-Takahashi**. I grafici di Feynman che risultano finiti, cioè privi di divergenze ultraviolette, soddisfano

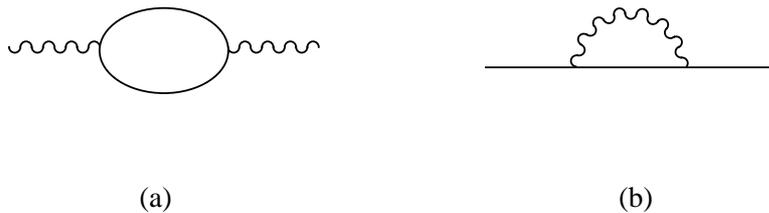
certamente tutte le relazioni che seguono dalle proprietà di simmetria dell'azione. I grafici di Feynman divergenti non sono intrinsecamente ben definiti; in questo caso, la validità delle identità di Ward-Takahashi non è garantita a priori e la loro verifica richiede una discussione particolare.

• **Nota.** Generalmente, una simmetria del sistema è detta *classica* se corrisponde all'invarianza dell'azione per certe trasformazioni che agiscono sui campi. Il motivo di questa denominazione è che l'azione coincide con l'azione efficace solamente all'ordine zero dello sviluppo nel numero di loop, cioè all'ordine zero nello sviluppo in potenze di  $\hbar$ . Per verificare se tale simmetria è realizzata a livello quantistico occorre considerare l'azione efficace. La simmetria si dice *non anomala* se è possibile definire una azione efficace rinormalizzata che è invariante per le assegnate trasformazioni dei campi. In caso contrario, la simmetria è detta *anomala*. La simmetria di gauge dell'elettrodinamica è non anomala (discuteremo questo argomento nel Capitolo 20); quindi, è possibile definire l'azione efficace  $\Gamma$  rinormalizzata in modo tale che le identità di Ward-Takahashi (7.10) siano soddisfatte.

I grafici ad un loop divergenti sono mostrati in Figura 6.4 ed in Figura 7.1. Ci limiteremo quindi a studiare i termini dell'azione efficace  $\Gamma$  che sono quadratici nel campo vettoriale o nei campi spinoriali e che contengono due campi spinoriali ed un campo vettoriale. Poniamo

$$\begin{aligned} \Gamma = & \frac{1}{2} \int d^4x d^4y A_\mu(x) \Gamma^{\mu\nu}(x-y) A_\nu(y) + \int d^4x d^4y \bar{\psi}(x) \Pi(x-y) \psi(y) \\ & + \int d^4x d^4y d^4z \bar{\psi}(x) \Gamma^\mu(x-z, z-y) \psi(y) A_\mu(z) + \dots \end{aligned} \quad (7.11)$$

I termini di  $\Gamma$  non esplicitamente mostrati nella (7.11) corrispondono ai termini successivi dello sviluppo di  $\Gamma$  in potenze dei campi; tali contributi sono finiti e soddisfano quindi le identità di Ward-Takahashi.



**Figura 7.1** Polarizzazione di vuoto e self-energia dell'elettrone.

Passando nello spazio degli impulsi mediante le definizioni

$$\psi(x) = \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} e^{-ipx} \psi(p) \quad , \quad \bar{\psi}(x) = \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} e^{ipx} \bar{\psi}(p) \quad , \quad (7.12)$$

$$A_\mu(x) = \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} e^{-ikx} A_\mu(k) \quad , \quad (7.13)$$

dalla (7.11) si ottiene

$$\begin{aligned} \Gamma = & \frac{1}{2} \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} A_\mu(-k) \Gamma^{\mu\nu}(k) A_\nu(k) + \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \bar{\psi}(p) \Pi(p) \psi(p) \\ & + \int \frac{d^4 p_1}{(2\pi)^4} \frac{d^4 p_2}{(2\pi)^4} \bar{\psi}(p_1) \Gamma^\mu(p_1, p_2) \psi(p_2) A_\mu(p_1 - p_2) + \dots \end{aligned} \quad (7.14)$$

La prima identità di Ward-Takahashi che si ottiene dalla relazione (7.10) è data da

$$k_\mu \Gamma^{\mu\nu}(k) = 0 \quad . \quad (7.15)$$

La (7.15) ammette una ovvia generalizzazione nel caso in cui si consideri un numero arbitrario di campi vettoriali: ciascun vertice proprio che dipende solamente dal campo vettoriale deve essere invariante di gauge. Siccome  $\Gamma^{\mu\nu}$  è simmetrico, esso deve essere trasverso ed assume necessariamente la forma

$$\Gamma^{\mu\nu}(k) = -(g^{\mu\nu} k^2 - k^\mu k^\nu) \Gamma(k^2) \quad . \quad (7.16)$$

L'identità di Ward-Takahashi successiva che segue dalla (7.10) coinvolge la funzione a due punti del campo spinoriale ed il vertice di interazione vestito

$$(p_2 - p_1)_\mu \Gamma^\mu(p_1, p_2) = \Pi(p_1) - \Pi(p_2) \quad . \quad (7.17)$$

Nel limite in cui  $p_2 \rightarrow p$  con  $p_1 = p$ , dalla (7.17) si ottiene

$$\Gamma^\mu(p, p) = -\frac{\partial}{\partial p_\mu} \Pi(p) \quad . \quad (7.18)$$

La (7.18) è nota col nome di **identità di Ward** ed è stata la prima delle identità di Ward-Takahashi ad essere scoperta. Siccome  $\Gamma^\mu(p, p)$  rappresenta il vertice di interazione vestito nel limite in cui il campo  $A_\mu$  porta impulso nullo, la relazione (7.18) si può esprimere dicendo che l'inserzione di un fotone a impulso nullo equivale all'opposto della derivata prima della funzione a due punti del campo spinoriale rispetto all'impulso. L'equazione (7.18) fissa la forma dell'accoppiamento della materia col campo elettromagnetico e rappresenta un caso particolare del principio di accoppiamento minimale per le teorie di gauge che discuteremo nella Sezione 7.E. La relazione (7.18) ha un ruolo importante nella rinormalizzazione, essa mostra infatti che la rinormalizzazione del vertice è univocamente fissata dalla funzione a due punti  $\Pi(p)$  rinormalizzata.

• **Condizioni di normalizzazione.** Il valore  $e$  della carica elettrica è fissato da

$$\Gamma(k^2) \Big|_{k^2=0} = \frac{1}{e^2} \quad . \quad (7.19)$$

Il valore  $m$  della massa è determinato da

$$\Pi(p) \Big|_{\hat{p}=m} = 0 \quad . \quad (7.20)$$

Infine, la normalizzazione della funzione d'onda per il campo spinoriale è data da

$$\left. \frac{\partial}{\partial p_\mu} \Pi(p) \right|_{\widehat{p}=m} = \gamma^\mu \quad . \quad (7.21)$$

All'ordine zero nel numero di loop, l'azione efficace coincide con l'azione della teoria. Pertanto le condizioni (7.19)-(7.21) implicano che, a questo ordine dello sviluppo perturbativo, deve essere

$$e_0^2 = e^2 \left( 1 + \mathcal{O}(e^2) \right) \quad , \quad m_0 = m \left( 1 + \mathcal{O}(e^2) \right) \quad , \quad Z = 1 + \mathcal{O}(e^2) \quad . \quad (7.22)$$

Nelle prossime sezioni calcoleremo le correzioni di ordine  $e^2$  ai parametri nudi.

**7B. Polarizzazione del vuoto.** Esplicitando il contributo del livello ad albero, la funzione  $\Gamma^{\mu\nu}(k)$  si può scrivere come

$$\Gamma^{\mu\nu}(k) = -\frac{1}{e_0^2} (g^{\mu\nu} k^2 - k^\mu k^\nu) + \mathcal{P}^{\mu\nu}(k) \quad , \quad (7.23)$$

dove  $\mathcal{P}^{\mu\nu}(k)$  è chiamata la **polarizzazione del vuoto**. Ponendo

$$\mathcal{P}^{\mu\nu}(k) = -(g^{\mu\nu} k^2 - k^\mu k^\nu) \mathcal{P}(k^2) \quad , \quad (7.24)$$

si ottiene

$$\Gamma^{\mu\nu}(k) = -\frac{1}{e_0^2} (g^{\mu\nu} k^2 - k^\mu k^\nu) \left( 1 + e_0^2 \mathcal{P}(k^2) \right) \quad . \quad (7.25)$$

Il contributo ad un loop alla polarizzazione di vuoto è descritto dal grafico di Figura 7.1(a); il corrispondente termine di azione efficace è

$$\begin{aligned} i\Gamma_{AA} &= \frac{Z^2}{2} \int d^4x d^4y A_\mu(x) A_\nu(y) \text{Tr} \gamma^\mu \overbrace{\psi(x) \bar{\psi}(y)} \gamma^\nu \overbrace{\psi(y) \bar{\psi}(x)} \\ &= \frac{i}{2} \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} A_\mu(-k) \mathcal{P}^{\mu\nu}(k) A_\nu(k) \quad , \end{aligned} \quad (7.26)$$

dove

$$\mathcal{P}^{\mu\nu}(k) = i \int \frac{d^4q}{(2\pi)^4} \frac{\text{Tr} \gamma^\mu (\widehat{q} + m_0) \gamma^\nu (\widehat{q} - \widehat{k} + m_0)}{[q^2 - m_0^2 + i\epsilon][(q-k)^2 - m_0^2 + i\epsilon]} \quad . \quad (7.27)$$

L'integrale (7.27) è potenzialmente quadraticamente divergente e va regolarizzato. La regolarizzazione può essere effettuata in modo da preservare manifestamente l'invarianza di gauge. Oppure, si può introdurre una regolarizzazione arbitraria (che rompe eventualmente l'invarianza di gauge) e, successivamente, si introduce un opportuno controtermine locale per mantenere, nel limite in cui il cutoff ultravioletto viene eliminato, l'invarianza di gauge. I due metodi sono del tutto equivalenti. Per chiarire il significato della regolarizzazione, noi useremo la seconda possibilità.

• **Divergenze.** Un grafico di Feynman divergente possiede divergenze *primitive* quando ogni suo sottografico è finito. Per esempio, i due grafici di Figura 7.1 possiedono entrambi divergenze primitive.

Consideriamo i grafici di Feynman che intervengono nel calcolo dell'azione efficace; ogni sottografico proprio 1PI di un diagramma con  $L$  loop possiede necessariamente un numero di loop inferiore ad  $L$ . Conseguentemente, se tutte le divergenze fino all'ordine di  $(L - 1)$  loop sono state eliminate, le divergenze che si incontrano all'ordine di  $L$  loop sono "primitive". Quindi, procedendo per induzione a partire dal caso dei diagrammi ad un loop, si deduce che eliminando le divergenze primitive a ciascun ordine dello sviluppo nel numero di loop, tutte le divergenze dell'azione efficace vengono rimosse.

Consideriamo per semplicità il caso di teorie di campo con particelle dotate di massa non nulla; ogni ampiezza ammette allora uno sviluppo in potenze degli impulsi esterni attorno allo zero. È un fatto generale che, quando una ampiezza possiede divergenze ultraviolette primitive, queste divergenze riguardano solamente i primi termini dello sviluppo dell'ampiezza in potenze degli impulsi esterni. In altre parole, tutta l'ambiguità di un grafico 1PI divergente (con divergenze primitive) consiste nei primi termini del suo sviluppo in potenze degli impulsi esterni. Una divergenza logaritmica, per esempio, coinvolge soltanto il termine di ordine zero dello sviluppo. Siccome ogni potenza dell'impulso esterno rappresenta una derivata che agisce sui campi esterni, *le divergenze di un grafico con divergenze primitive si possono sempre eliminare mediante l'introduzione di controtermini locali*. Quest'ultima proprietà vale anche in presenza di particelle a massa nulla. Un termine locale è l'integrale di un polinomio (finito) dei campi definiti nello stesso punto e delle loro derivate di ordine finito. La procedura di regolarizzazione consiste nell'assegnare un valore finito a termini potenzialmente divergenti; attribuire valori finiti a termini intrinsecamente infiniti comporta necessariamente delle ambiguità. Per esempio, due regolarizzazioni diverse possono differire tra loro (solamente) per termini locali. Nelle teorie rinormalizzabili, queste ambiguità vengono rimosse imponendo le condizioni di normalizzazione e richiedendo che tutte le simmetrie del sistema classico (o alcune di esse) siano preservate a livello quantistico.

Riconsideriamo ora l'elettrodinamica e la polarizzazione di vuoto (7.27); per rendere finito l'integrale (7.27) introdurremo un semplice cutoff sul modulo degli impulsi. Per il momento, consideriamo la traccia delle matrici gamma che risulta essere

$$\text{Tr } \gamma^\mu (\hat{q} + m_0) \gamma^\nu (\hat{q} - \hat{k} + m_0) = 4 \left\{ q^\mu (q - k)^\nu + q^\nu (q - k)^\mu + m_0^2 g^{\mu\nu} - q \cdot (q - k) g^{\mu\nu} \right\}. \quad (7.28)$$

Utilizzando la relazione

$$\frac{1}{AB} = \int_0^1 d\beta \frac{1}{[\beta A + (1 - \beta) B]^2}, \quad (7.29)$$

l'espressione (7.27) diventa

$$\mathcal{P}^{\mu\nu}(k) = i 4 \int_0^1 d\beta \int \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} \frac{q^\mu (q - k)^\nu + q^\nu (q - k)^\mu + m_0^2 g^{\mu\nu} - q \cdot (q - k) g^{\mu\nu}}{[(q - (1 - \beta)k)^2 - (m_0^2 - \beta(1 - \beta)k^2) + i\epsilon]^2}. \quad (7.30)$$

Effettuando il cambio di variabili  $q^\mu \rightarrow q^\mu + (1 - \beta)k^\mu$  si ottiene

$$\mathcal{P}^{\mu\nu}(k) = i 4 \int_0^1 d\beta \int \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} \frac{b^{\mu\nu}}{[q^2 - (m_0^2 - \beta(1 - \beta)k^2) + i\epsilon]^2}, \quad (7.31)$$

dove, trascurando termini lineari in  $q^\mu$  che sono irrilevanti e ponendo  $q^\mu q^\nu = \frac{1}{4} g^{\mu\nu} q^2$ , si ha

$$b^{\mu\nu} = 2\beta(1-\beta)[g^{\mu\nu} k^2 - k^\mu k^\nu] - g^{\mu\nu} [q^2 - (m_0^2 - \beta(1-\beta)k^2)] + \frac{1}{2} g^{\mu\nu} q^2 \quad . \quad (7.32)$$

A questo punto si effettua l'integrale nello spazio degli impulsi mediante prolungamento analitico; introducendo un cutoff  $\Lambda$  per il modulo quadro dell'impulso, si ottiene

$$\int \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} \frac{1}{[q^2 - C + i\epsilon]^2} = \frac{i}{16\pi^2} \left[ -1 + \ln \frac{\Lambda}{C} \right] \quad , \quad (7.33)$$

$$\int \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} \frac{1}{[q^2 - C + i\epsilon]} = \frac{-i}{16\pi^2} \left[ \Lambda - C \ln \frac{\Lambda}{C} \right] \quad , \quad (7.34)$$

in cui tutti i termini che vanno a zero nel limite in cui  $\Lambda \rightarrow \infty$  sono stati omessi. Dalla (7.31) si ricava allora

$$\mathcal{P}^{\mu\nu}(k) \Big|_{\Lambda} = -\frac{1}{4\pi^2} \int_0^1 d\beta \left\{ 2\beta(1-\beta)[g^{\mu\nu} k^2 - k^\mu k^\nu] \ln \frac{\Lambda}{m_0^2 - \beta(1-\beta)k^2} + \frac{1}{2} g^{\mu\nu} \Lambda - \frac{1}{2} g^{\mu\nu} [m_0^2 - \beta(1-\beta)k^2] \right\} \quad . \quad (7.35)$$

• **Controtermini finiti.** Per completare la regolarizzazione, si sottraggono i termini proporzionali a  $g^{\mu\nu}$  che non sono invarianti di gauge. Questo equivale ad introdurre due controtermini locali; uno di essi è del tipo

$$\Delta S_1 \propto \int d^4 x A_\mu(x) A^\mu(x) \quad ,$$

mentre il secondo ha la seguente struttura

$$\Delta S_2 \propto \int d^4 x \partial_\nu A_\mu(x) \partial^\nu A^\mu(x) \quad .$$

• **Nota.** La presenza nella (7.35) di termini che violano l'invarianza di gauge è dovuta al fatto che l'introduzione del cutoff  $\Lambda$  nella (7.33) non è compatibile con l'invarianza di gauge. Se si utilizza una diversa prescrizione di regolarizzazione che mantiene manifestamente l'invarianza di gauge, tali termini non appaiono. Come abbiamo menzionato precedentemente, regolarizzazioni diverse differiscono al più per termini locali; infatti, abbiamo trovato che i termini che violano l'invarianza di gauge sono locali. Tali termini possono allora essere eliminati in maniera esplicita, poiché l'operazione di introdurre il cutoff  $\Lambda$  nella (7.33) e contemporaneamente di eliminare i termini locali non voluti rappresenta precisamente una nuova regolarizzazione che preserva l'invarianza di gauge.

La polarizzazione di vuoto *regolarizzata* vale quindi

$$\mathcal{P}^{\mu\nu}(k) \Big|_{\text{reg}} = -\frac{[g^{\mu\nu} k^2 - k^\mu k^\nu]}{12\pi^2} \left\{ \ln \frac{\Lambda}{m_0^2} - 6 \int_0^1 d\beta \beta(1-\beta) \ln \left( 1 - \beta(1-\beta)k^2/m_0^2 \right) \right\} \quad , \quad (7.36)$$

da cui segue che

$$\mathcal{P}(k^2) \Big|_{\text{reg}} = \frac{1}{12\pi^2} \left\{ \ln \frac{\Lambda}{m_0^2} - 6 \int_0^1 d\beta \beta(1-\beta) \ln \left( 1 - \beta(1-\beta)k^2/m_0^2 \right) \right\} , \quad (7.37)$$

$$\mathcal{P}(0) \Big|_{\text{reg}} = \frac{1}{12\pi^2} \ln \frac{\Lambda}{m_0^2} . \quad (7.38)$$

La condizione di normalizzazione (7.19) diventa perciò

$$\frac{1}{e_0^2} \left( 1 + \frac{e_0^2}{12\pi^2} \ln \frac{\Lambda}{m_0^2} \right) = \frac{1}{e^2} , \quad (7.39)$$

da cui si deduce

$$e_0^2 = e^2 \left( 1 + \frac{\alpha}{3\pi} \ln \frac{\Lambda}{m^2} + \mathcal{O}(e^4) \right) . \quad (7.40)$$

Riassumendo, nella approssimazione di un loop incluso, il vertice proprio  $\Gamma^{\mu\nu}(k)$  rinormalizzato vale

$$\Gamma^{\mu\nu}(k) = -\frac{1}{e^2} (g^{\mu\nu} k^2 - k^\mu k^\nu) \left\{ 1 - \frac{2\alpha}{\pi} \int_0^1 d\beta \beta(1-\beta) \ln \left( 1 - \beta(1-\beta)k^2/m^2 \right) \right\} . \quad (7.41)$$

Nel limite in cui  $k^2/m^2 \ll 1$  si ha

$$\Gamma^{\mu\nu}(k) \simeq -\frac{1}{e^2} (g^{\mu\nu} k^2 - k^\mu k^\nu) \left[ 1 + \frac{\alpha}{15\pi} \frac{k^2}{m^2} \right] . \quad (7.42)$$

Mentre nella regione asintotica in cui  $k^2/m^2 \gg 1$  si ottiene

$$\Gamma^{\mu\nu}(k) \approx -\frac{1}{e^2} (g^{\mu\nu} k^2 - k^\mu k^\nu) \left[ 1 - \frac{\alpha}{3\pi} \ln \frac{k^2}{m^2} \right] . \quad (7.43)$$

**7C. Costante di accoppiamento running.** Consideriamo ora la struttura del propagatore esatto del campo vettoriale. In base alla definizione (7.16) ed alla forma (7.6) dell'azione efficace, le varie componenti del propagatore che coinvolgono il campo vettoriale ed il campo ausiliario risultano essere

$$\langle 0 | \mathbf{T} [A_\mu(x) A_\nu(y)] | 0 \rangle = -i \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{e^{-i k \cdot (x-y)}}{k^2 + i\epsilon} \left\{ \left( g_{\mu\nu} - \frac{k_\mu k_\nu}{k^2 + i\epsilon} \right) \frac{1}{\Gamma(k^2)} + \beta \frac{k_\mu k_\nu}{k^2 + i\epsilon} \right\} , \quad (7.44)$$

$$\langle 0 | \mathbf{T} [A_\mu(x) B(y)] | 0 \rangle = - \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} e^{-i k \cdot (x-y)} \frac{k_\mu}{k^2 + i\epsilon} , \quad (7.45)$$

$$\langle 0 | \mathbf{T} [B(x) B(y)] | 0 \rangle = 0 .$$

Come mostrato nelle equazioni (7.44) e (7.45), l'interazione modifica solamente la parte trasversa del propagatore per il campo vettoriale. Dalla (7.43) segue che, nella approssimazione ad un loop e trascurando termini di gauge, nella regione in cui  $k^2/m^2 \gg 1$  si ha

$$\langle 0 | T [A_\mu(x) A_\nu(y)] | 0 \rangle \approx -i g_{\mu\nu} \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{e^{-i k \cdot (x-y)}}{k^2 + i\epsilon} \frac{e^2}{\left(1 - \frac{\alpha}{3\pi} \ln \frac{k^2}{m^2}\right)}. \quad (7.46)$$

Siccome il propagatore del campo vettoriale determina la forma delle interazioni tra le correnti elettromagnetiche, l'espressione (7.46) ha conseguenze fisiche importanti. Notiamo che la (7.46) possiede una struttura simile a quella del propagatore di Feynman in cui la costante di accoppiamento "efficace", che indicheremo con  $\alpha(k^2)$ , dipende dall'impulso

$$\langle 0 | T [A_\mu(x) A_\nu(y)] | 0 \rangle \approx -i 4\pi g_{\mu\nu} \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} e^{-i k \cdot (x-y)} \frac{\alpha(k^2)}{k^2 + i\epsilon}, \quad (7.47)$$

dove

$$\alpha(k^2) = \frac{\alpha}{1 - \frac{\alpha}{3\pi} \ln \frac{k^2}{m^2}}. \quad (7.48)$$

La costante di accoppiamento "efficace" (7.48) è anche chiamata la **costante di accoppiamento running**. Per piccoli valori di  $k^2$ , ovvero a grandi distanze, la funzione  $\alpha(k^2)$  decresce e tende al valore usuale

$$\lim_{k^2 \rightarrow m^2} \alpha(k^2) = \frac{1}{137}. \quad (7.49)$$

In realtà, le condizioni di normalizzazione sono valide per impulso esterno nullo e sono verificate dalla espressione esatta (7.41).

• **Polo di Landau.** All'aumentare di  $k^2$ , la funzione  $\alpha(k^2)$  tende a crescere fino a divergere nel punto in cui

$$k^2 = \mu_L^2 = m^2 e^{3\pi/\alpha} \simeq m^2 10^{560}. \quad (7.50)$$

Il significato fisico della costante di accoppiamento running può essere illustrato considerando la forza elettrostatica che si esercita tra due sorgenti cariche poste a distanza relativa  $L$ . Il limite in cui  $L \rightarrow \infty$  corrisponde al limite  $k^2 \rightarrow 0$ . A grandi distanze, l'interazione elettrostatica è quella Coulombiana ed è determinata dal valore standard  $\alpha = 1/137$  della carica elettrica; in effetti, le condizioni di normalizzazione (7.19) fissano il valore  $\alpha = 1/137$  della carica elettrica precisamente nel limite  $k^2 \rightarrow 0$ . Al diminuire di  $L$ , la forza che si esercita fra le sorgenti cariche tende ad aumentare sempre più rispetto a quella Coulombiana perché il valore della carica "efficace"  $\alpha(k^2)$  aumenta all'aumentare di  $k^2$  (al diminuire della distanza). Questo effetto è dovuto alla polarizzazione del vuoto. Le coppie virtuali di elettroni tendono a schermare le cariche elettriche; pertanto, se il valore della carica rinormalizzata è fissata a grandi distanze, al diminuire della distanza relativa tra le sorgenti la carica effettivamente osservata tende inevitabilmente ad aumentare.

• **Validità dello sviluppo perturbativo.** Lo sviluppo perturbativo è significativo quando la costante di accoppiamento è molto minore dell'unità. La polarizzazione di vuoto determina le condizioni cinematiche in cui lo sviluppo perturbativo è affidabile. La funzione (7.48) individua infatti una scala propria della teoria: quella in cui la costante di accoppiamento running è dell'ordine dell'unità. Per l'elettrodinamica, questa scala è approssimativamente data da  $k^2 \approx \mu_L^2$ . Pertanto, nei processi elettromagnetici in cui l'impulso trasferito è piccolo rispetto a  $\mu_L$ , la teoria perturbativa è significativa. Siccome  $\mu_L$  è molto maggiore delle scale di energia raggiungibili negli esperimenti, lo sviluppo perturbativo dell'elettrodinamica è in ottimo accordo coi dati sperimentali. Quando  $k^2$  si avvicina al valore  $k^2 \approx \mu_L^2$ , la teoria perturbativa non è più affidabile e, di fatto, la dinamica della teoria a queste scale di energia non è nota.

**7D. Self-energia dell'elettrone.** Per completare la rinormalizzazione dell'elettrodinamica ad un loop, occorre considerare il grafico mostrato in Figura 7.1(b) a cui corrisponde un termine di azione efficace

$$i \Gamma_{\bar{\psi}\psi} = -Z^2 \int d^4x d^4y \overline{A_\mu(x)} A_\nu(y) \bar{\psi}(x) \gamma^\mu \overline{\psi(x) \bar{\psi}(y)} \gamma^\nu \psi(y) \quad . \quad (7.51)$$

Utilizzando il propagatore per il campo vettoriale in gauge di Feynman, si ottiene

$$i \Gamma_{\bar{\psi}\psi} = i \alpha \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \bar{\psi}(p) \Sigma(p) \psi(p) \quad , \quad (7.52)$$

dove

$$\Sigma(p) = i 4 \pi Z \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{\gamma^\mu (\hat{p} - \hat{k} + m_0) \gamma_\mu}{(k^2 - \lambda^2 + i\epsilon) [(p-k)^2 - m_0^2 + i\epsilon]} \quad . \quad (7.53)$$

Nella (7.53) è stato introdotto un termine di massa quadra  $\lambda^2$  per il fotone per controllare eventuali divergenze infrarosse [3]. Per le quantità rinormalizzate considereremo poi il limite  $\lambda^2 \rightarrow 0$ . La funzione  $\alpha \Sigma(p)$  è chiamata la **self-energia dell'elettrone** perché nel processo considerato un elettrone interagisce con un fotone virtuale emesso dall'elettrone stesso. All'ordine di un loop incluso, il termine di azione efficace che è quadratico nel campo spinoriale vale

$$\int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \bar{\psi}(p) \Pi(p) \psi(p) = \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \bar{\psi}(p) \{ Z (\hat{p} - m_0) + \alpha \Sigma(p) \} \psi(p) \quad . \quad (7.54)$$

Siccome la correzione al termine Lagrangiano è di ordine  $\alpha$ , nella funzione  $\Sigma(p)$  possiamo sostituire i parametri nudi  $Z$  ed  $m_0$  coi loro rispettivi valori di ordine zero che, in base alla (7.22), sono  $Z = 1$  ed  $m_0 = m$ . Effettuando la traccia delle matrici gamma e riunendo i termini al denominatore, si ottiene pertanto

$$\Sigma(p) = -i 8 \pi \int_0^1 d\beta \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{\beta \hat{p} - 2m}{\{ k^2 - [\beta \lambda^2 + (1-\beta)m^2 - \beta(1-\beta)p^2] + i\epsilon \}^2} \quad . \quad (7.55)$$

L'integrale (7.55) è logicamente divergente e verrà regolarizzato introducendo un cutoff  $\Lambda$  per il modulo quadro dell'impulso nella regione Euclidea. Siccome le condizioni di normalizzazione (7.20)

e (7.21) riguardano il comportamento di  $\Sigma(p)$  nel punto di mass-shell, risulta conveniente decomporre  $\Sigma(p)$  nel modo seguente

$$\Sigma(p) = m A(\Lambda) + (\hat{p} - m) B(\Lambda) + (\hat{p} - m)^2 \Sigma_0(p) \quad , \quad (7.56)$$

dove le costanti  $A(\Lambda)$  e  $B(\Lambda)$  possiedono divergenze mentre la funzione  $\Sigma_0(p)$  è finita. Infatti, le condizioni di normalizzazione diventano

$$Z(m - m_0) + \alpha m A(\Lambda) = 0 \quad , \quad (7.57)$$

$$\gamma^\mu (Z + \alpha B(\Lambda)) = \gamma^\mu \quad , \quad (7.58)$$

la cui soluzione è data da

$$m_0 = m \left( 1 + \alpha A(\Lambda) + \mathcal{O}(e^4) \right) \quad , \quad Z = 1 - \alpha B(\Lambda) + \mathcal{O}(e^4) \quad . \quad (7.59)$$

Il calcolo esplicito delle costanti  $A(\Lambda)$  e  $B(\Lambda)$  non presenta particolare interesse dal punto di vista concettuale. Si ottiene

$$A(\Lambda) = \frac{1}{2\pi} \int_0^1 d\beta (2 - \beta) \left[ 1 - \ln \frac{\Lambda}{\beta\lambda^2 + (1 - \beta)^2 m^2} \right] \quad , \quad (7.60)$$

$$B(\Lambda) = \frac{1}{2\pi} \int_0^1 d\beta \beta \left[ -1 + \ln \frac{\Lambda}{\beta\lambda^2 + (1 - \beta)^2 m^2} - \frac{2(1 - \beta)(\beta - 2)m^2}{\beta\lambda^2 + (1 - \beta)^2 m^2} \right] \quad . \quad (7.61)$$

In conclusione, le equazioni (7.40) e (7.59) determinano le correzioni ad un loop per i valori dei parametri nudi dell'elettrodinamica quantistica.

**7E. Accoppiamento minimale.** Esiste un metodo standard per costruire dei funzionali d'azione con la proprietà di essere invarianti di gauge, tale metodo si chiama accoppiamento minimale. In questa sezione considereremo trasformazioni di gauge Abelian.

• **Invarianza  $U(1)$  globale.** Il punto di partenza consiste nel considerare una teoria definita per mezzo di una densità Lagrangiana  $\mathcal{L}_1(\Phi(x), \partial_\mu \Phi(x))$  in cui le componenti di  $\Phi(x)$  rappresentano i cosiddetti campi di materia. Supponiamo che  $\mathcal{L}_1$  sia invariante per trasformazioni interne  $U(1)$  globali che agiscono linearmente sui campi di materia nel modo seguente

$$\Phi(x) \rightarrow \Phi^\theta(x) = R(\theta) \Phi(x) \quad , \quad (7.62)$$

dove  $\theta$  è il parametro globale delle trasformazioni,  $0 \leq \theta \leq 2\pi$ . Le matrici  $\{R(\theta)\}$  forniscono una rappresentazione del gruppo  $U(1)$

$$R(\theta) = e^{i\theta Q} \quad , \quad (7.63)$$

dove la matrice Hermitiana  $Q$ , usualmente chiamata matrice di carica, ha autovalori interi. Dalla (7.62) segue che

$$\partial_\mu \Phi(x) \rightarrow \partial_\mu \Phi^\theta(x) = R(\theta) \partial_\mu \Phi(x) \quad , \quad (7.64)$$

e l'invarianza della Lagrangiana significa che

$$\mathcal{L}_1(R(\theta)\Phi(x), R(\theta)\partial_\mu\Phi(x)) = \mathcal{L}_1(\Phi(x), \partial_\mu\Phi(x)) \quad . \quad (7.65)$$

• **Invarianza  $U(1)$  locale.** La fisica del sistema definito da  $\mathcal{L}_1$  è invariante per “rotazioni” globali (7.62) dei campi. Costruire la corrispondente teoria di gauge  $U(1)$  significa imporre che la fisica resti invariante per “rotazioni” non solo globali ma anche locali dei campi;

$$U(1)|_{\text{globale}} \longrightarrow U(1)|_{\text{locale}} \quad .$$

Le trasformazioni di gauge agiscono sui campi di materia come

$$\Phi(x) \rightarrow \Phi^{\theta(x)}(x) = R(\theta(x))\Phi(x) \quad , \quad (7.66)$$

dove  $\theta(x)$  è il parametro locale delle trasformazioni ed è una funzione arbitraria delle coordinate. Le matrici  $\{R(\theta(x))\}$  forniscono una rappresentazione di  $U(1)$  in ogni punto dello spazio-tempo. Sia  $\mathcal{B}(x)$  una variabile funzione locale dei campi;  $\mathcal{B}(x)$  si dice **covariante** se, per trasformazioni di gauge, essa trasforma come

$$\mathcal{B}(x) \rightarrow \mathcal{B}^{\theta(x)}(x) = R'(\theta(x))\mathcal{B}(x) \quad , \quad (7.67)$$

dove le matrici  $\{R'(\theta(x))\}$  costituiscono una rappresentazione locale di  $U(1)$ . Per definizione, i campi di materia trasformano in maniera covariante. Due campi definiti in punti diversi dello spazio-tempo possono venir trasformati in modo totalmente scorrelato l'uno dall'altro; conseguentemente, le derivate spazio-temporali dei campi risultano mal definite. In effetti, se si considerano le proprietà di trasformazione delle derivate  $\partial_\mu\Phi(x)$  dei campi si ottiene

$$\begin{aligned} \partial_\mu\Phi(x) \rightarrow \partial_\mu\Phi^{\theta(x)}(x) &= R(\theta(x))\partial_\mu\Phi(x) + i\partial_\mu\theta(x)R(\theta(x))Q\Phi(x) \\ &= R(\theta(x))\left[\partial_\mu\Phi(x) + iQ\partial_\mu\theta(x)\Phi(x)\right] \quad . \end{aligned} \quad (7.68)$$

Le derivate dei campi non trasformano in maniera covariante. Per ovviare a questo inconveniente occorre introdurre un nuovo campo chiamato **connessione**, ovvero un campo vettoriale  $A_\mu(x)$ , che permetta di collegare punti diversi dello spazio-tempo. In pratica, la connessione deve essere un campo vettoriale col quale costruire una **derivata covariante**  $D_\mu$ . Definendo

$$D_\mu\Phi(x) \equiv \left[\partial_\mu + iA_\mu(x)Q\right]\Phi(x) \quad , \quad (7.69)$$

si ottiene che  $D_\mu\Phi(x)$  trasforma in maniera covariante,

$$D_\mu\Phi(x) \rightarrow \left[D_\mu\Phi(x)\right]^{\theta(x)} = R(\theta(x))D_\mu\Phi(x) \quad , \quad (7.70)$$

qualora la connessione trasformi come

$$A_\mu(x) \rightarrow A_\mu^{\theta(x)}(x) = A_\mu(x) - \partial_\mu\theta(x) \quad . \quad (7.71)$$

Avendo introdotto il nuovo campo vettoriale  $A_\mu(x)$  con la legge di trasformazione (7.71), possiamo sostituire nella funzione  $\mathcal{L}_1$  tutte le derivate dei campi con le derivate covarianti dei campi

$$\partial_\mu \Phi(x) \rightarrow D_\mu \Phi(x) \quad .$$

In questo modo, la densità Lagrangiana che si ottiene è invariante per trasformazioni locali di gauge. Infatti dalla (7.65) segue che, per trasformazioni di gauge locali, si ha

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_1(\Phi(x), D_\mu \Phi(x)) &\rightarrow \mathcal{L}_1(R(\theta(x))\Phi(x), R(\theta(x))D_\mu \Phi(x)) \\ &= \mathcal{L}_1(\Phi(x), D_\mu \Phi(x)) \quad . \end{aligned} \quad (7.72)$$

Questa procedura di sostituzione delle derivate con le derivate covarianti nella Lagrangiana di materia è denotata col nome di **accoppiamento minimale**. Per completare la costruzione della teoria di gauge, occorre introdurre nella Lagrangiana anche un termine cinetico per la connessione  $A_\mu$ ; altrimenti, il campo  $A_\mu$  non sarebbe propagante ed avrebbe il ruolo di un semplice moltiplicatore di Lagrange (nel qual caso, la teoria di gauge risultante potrebbe essere di scarso interesse). Il nuovo termine da aggiungere alla Lagrangiana deve preservare l'invarianza di gauge ed un modo standard di costruirlo consiste nell'utilizzare la curvatura. Il commutatore di due derivate covarianti definisce la **curvatura**  $F_{\mu\nu}(x)$  associata alla connessione

$$\begin{aligned} [D_\mu, D_\nu] &\equiv i F_{\mu\nu}(x) Q \\ &= (\partial_\mu + i A_\mu(x) Q) (\partial_\nu + i A_\nu(x) Q) - (\partial_\nu + i A_\nu(x) Q) (\partial_\mu + i A_\mu(x) Q) \\ &= \partial_\mu \partial_\nu + i \partial_\mu A_\nu(x) Q + i A_\nu(x) Q \partial_\mu + i A_\mu(x) Q \partial_\nu - A_\mu(x) A_\nu(x) Q^2 \\ &\quad - \partial_\nu \partial_\mu - i \partial_\nu A_\mu(x) Q - i A_\mu(x) Q \partial_\nu - i A_\nu(x) Q \partial_\mu + A_\nu(x) A_\mu(x) Q^2 \\ &= i (\partial_\mu A_\nu(x) - \partial_\nu A_\mu(x)) Q \quad . \end{aligned} \quad (7.73)$$

La curvatura è covariante per trasformazioni di gauge; in particolare, nel caso di un gruppo di gauge Abeliano, la curvatura è invariante per trasformazioni di gauge,

$$F_{\mu\nu}(x) = \partial_\mu A_\nu(x) - \partial_\nu A_\mu(x) \rightarrow F_{\mu\nu}^{\theta(x)}(x) = F_{\mu\nu}(x) \quad . \quad (7.74)$$

Il più semplice invariante di gauge che dà origine ad una dinamica non banale per la connessione è il termine  $F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}$ ; questo termine è invariante di Lorentz ed ha dimensione quattro. Possiamo quindi definire la densità Lagrangiana  $\mathcal{L}$  della teoria di gauge  $U(1)$  essere la seguente funzione

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_1(\Phi(x), D_\mu \Phi(x)) - \frac{1}{4g^2} F_{\mu\nu}(x) F^{\mu\nu}(x) \quad , \quad (7.75)$$

dove è stata introdotta la costante di accoppiamento  $g^2$  che deve essere adimensionale. Partendo dalla Lagrangiana libera di uno spinore di Dirac ed utilizzando il metodo dell'accoppiamento minimale, si ottiene la Lagrangiana (7.1) dell'elettrodinamica in cui la costante di accoppiamento coincide col valore della carica elettrica  $g = e$ .

• **Elettrodinamica scalare.** Come ulteriore esempio di teoria di gauge, consideriamo l'elettrodinamica scalare. Partiamo dall'azione  $S_1$  di un campo scalare complesso  $\phi(x)$

$$S_1 = \int d^4x \left( \partial_\mu \phi^*(x) \partial^\mu \phi(x) - m^2 \phi^*(x) \phi(x) - V(\phi^*(x)\phi(x)) \right) \quad , \quad (7.76)$$

dove  $V(\phi^*\phi)$  rappresenta un termine di interazione per le particelle scalari. Introducendo la connessione  $A_\mu(x)$ , si possono definire le derivate covarianti dei campi

$$D_\mu \phi(x) = (\partial_\mu + i A_\mu(x)) \phi(x) \quad , \quad D_\mu \phi^*(x) = (\partial_\mu - i A_\mu(x)) \phi^*(x) \quad . \quad (7.77)$$

Le trasformazioni di gauge agiscono sul campo vettoriale come mostrato in (7.71) mentre per i campi di materia di ha

$$\phi(x) \rightarrow \phi^{\theta(x)}(x) = e^{i\theta(x)} \phi(x) \quad , \quad \phi^*(x) \rightarrow \phi^{*\theta(x)}(x) = e^{-i\theta(x)} \phi^*(x) \quad . \quad (7.78)$$

Utilizzando il metodo dell'accoppiamento minimale, l'azione invariante di gauge  $U(1)$  risulta essere

$$S = \int d^4x \left( D_\mu \phi^*(x) D^\mu \phi(x) - m^2 \phi^*(x) \phi(x) - V(\phi^*(x)\phi(x)) \right) - \frac{1}{4e^2} \int d^4x F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} \quad . \quad (7.79)$$

I termini di interazione tra la materia ed il campo elettromagnetico  $A_\mu$  contenuti in (7.79) sono

$$\int d^4x \left\{ i A_\mu(x) (\partial^\mu \phi^*(x) \phi(x) - \phi^*(x) \partial^\mu \phi(x)) - A^\mu(x) A_\mu(x) \phi^*(x) \phi(x) \right\} \quad . \quad (7.80)$$