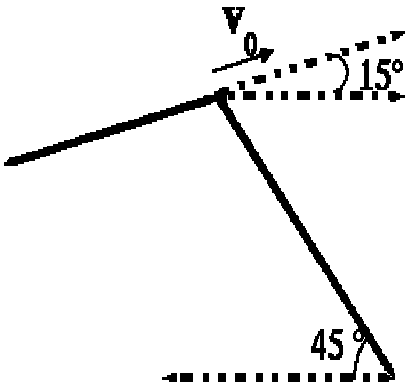
Università degli Studi di Roma "La Sapienza"
Facoltà di Ingegneria
Corso di Laurea in Ingegneria Civile
Prova scritta di Fisica I del 5 giugno 2001

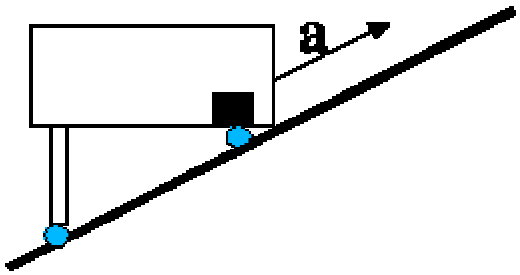
Esercizio n° 1.

Uuno sciatore compie un salto da una rampa inclinata di 15° rispetto all'orizzontale per poi ricadere lungo un piano inclinato di 45° come mostrato in figura. Sapendo che lo sciatore lascia la rampa con una velocita' in modulo pari a V_0=10 m/s e trascurando la resistenza dell'aria, calcolare a che distanza dal punto di lancio lo sciatore atterra e le componenti della velocita' nel punto di atterraggio.



Esercizio n° 2

Un punto materiale di massa **m** e' disposto sul pavimento della cabina di una funicolare che si muove con accelerazione costante **a** lungo un pendio di angolo α=30°. Sapendo che il coefficiente di attrito statico tra la massa e il pavimento e' μ_s=0.4, calcolare quanto puo' valere al massimo l'accelerazione della cabina affinche' il punto materiale rimanga fermo durante il moto.



Esercizio n° 3

Un cilindro di massa **m=**1kg e raggio **R,** in moto di puro rotolamento su un piano orizzontale scabro con velocita' $\mathbf{V_1}$=10 m/s, viene rallentato in modo costante mediante un freno fino a raggiungere la velocita' di $\mathbf{V_2}$= 2 m/s in t=10 s. Calcolare la potenza media dissipata.

Rispondere in modo esauriente e preciso ad almeno una delle seguenti domande

1) Definire la funzione energia potenziale per una forza conservativa qualsiasi; calcolare, inoltre, l'espressione della funzione energia potenziale per una forza elastica caratterizzata da una costante elastica nota.
2) Cos'e' una macchina termica? Calcolare il rendimento di una macchina termica di Carnot.

Università degli Studi di Roma "La Sapienza

Facoltà di Ingegneria
Corso di Laurea in Ingegneria Civile

Prova scritta di Fisica I del 5 giugno 2001

SOLUZIONI

Esercizio n°1

Fissando l'origine del sistema di riferimento nel punto di lancio dello sciatore si ottiene:

$$\begin{aligned} x(t) &= V_0 \cdot \cos(\alpha) \cdot t \\ y(t) &= V_0 \cdot \sin(\alpha) \cdot t - \frac{1}{2} \cdot g \cdot t^2 \end{aligned} \quad \text{da cui} \quad y = x \cdot \tan(\alpha) - \frac{1}{2} \cdot g \cdot \frac{x^2}{\cos^2(\alpha) \cdot V_0^2} \quad \text{dove} \quad \alpha = 15° \ .$$

L'equazione della traiettoria, insieme all'equazione del piano inclinato $y = -x$, consente di ricavare l'ascissa del punto di caduta dello sciatore $x_c = \frac{2 \cdot V_0^2 \cdot (\tan(\alpha) + 1) \cdot \cos^2(\alpha)}{g}$ da cui si ottiene $d = \frac{x_c}{\cos(\vartheta)} = 34.11\, m$ dove $\vartheta = 45°$.

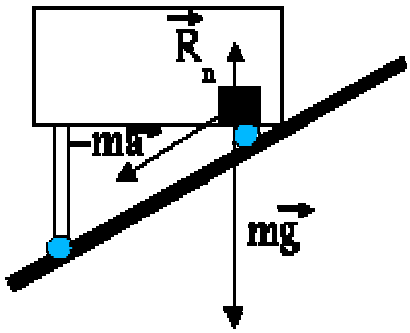
Per il calcolo delle componenti delle velocita' nel punto di atterraggio basta ricordare che

$$\begin{aligned} V_x(t) &= V_0 \cdot \cos(\alpha) = 9.66 \ \frac{m}{s} \\ V_y(t_c) &= V_0 \cdot \sin(\alpha) - g \cdot t_c \end{aligned}$$

dove t_c e' l'istante dell'atterraggio. Quest'ultimo si ricava imponendo $x(t_c)=x_c$ da cui si ottiene $t_c = \frac{2 \cdot V_0 \cdot (\tan(\alpha) + 1) \cdot \cos(\alpha)}{g} \simeq 2.5 \ s$,

$$V_y(t_c) = V_0 \cdot \sin(\alpha) - g \cdot t_c \simeq -21.9 \ \frac{m}{s}$$

Esercizio n° 2



Nel sistema di riferimento non inerziale della cabina, il corpo di massa m e' sottoposto a forze reali e fittizie come mostrato in

figura. La soluzione dell'equazione di Newton quando il corpo e' fermo conduce alla definizione della reazione normale e dell'attrito statico:

$\begin{matrix} R_n = m \cdot g + m \cdot a \cdot \sin(\alpha) \\ A = m \cdot a \cdot \cos(\alpha) \end{matrix}$. Imponendo la condizione $A \leqslant \mu_s \cdot R_n$ si ottiene

$$a \leqslant \frac{\mu_s \cdot g}{(\cos(\alpha) - \mu_s \cdot \sin(\alpha))} = 5.89 \ \frac{m}{s^2} \ .$$

Esercizio n° 3

L'energia cinetica di un cilindro in moto di puro rotolamento e':

$T = \frac{1}{2} \cdot m \cdot V_c^2 + \frac{1}{2} \cdot I_c \cdot \omega^2 = \frac{1}{2} \cdot V_c^2 \cdot (m + \frac{I_c}{R^2})$ in quanto $V_c = R \cdot \omega$. Il teorema del lavoro e dell'energia cinetica stabilisce che il lavoro fatto da tutte le forze presenti e' pari alla variazione di energia cinetica. Poiche' ne' la forza peso e ne' l'attrito statico compiono lavoro, il teorema del lavoro e dell'energia cinetica stabilisce che:

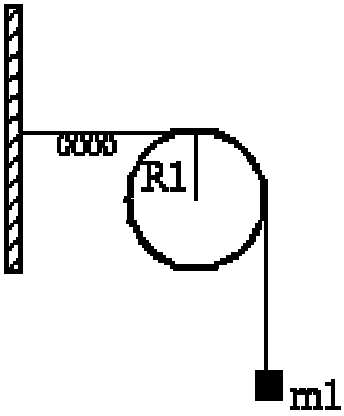
$L_{freno} = T_f - T_i = \frac{1}{2} \cdot V_{c,f}^2 \cdot (m + \frac{I_c}{R^2}) - \frac{1}{2} \cdot V_{c,i}^2 \cdot (m + \frac{I_c}{R^2}) = -72 \ J$ essendo $I_c = \frac{1}{2} \cdot m \cdot R^2$. La potenza media dissipata e' quindi $\bar{W} = \frac{|L|}{t} = 7.2 \ W$.

Università degli Studi di Roma "La Sapienza"
Facoltà di Ingegneria
Corso di Laurea in Ingegneria Civile
Prova scritta di Fisica I del 7 settembre 2001

Esercizio n° 1

Una slitta di massa **m** = 200 kg viene trainata da una muta di cani su un piano inclinato di angolo α=25°. Sapendo che la slitta percorre una lunghezza **l** alla velocita' costante **v**=10km/h e che il coefficiente di attrito dinamico tra la slitta e il piano inclinato e' μ_d=0.3, calcolare la forza e la potenza sviluppata dalla muta di cani. Calcolare, inoltre, lo spazio percorso dalla slitta prima di fermarsi nel caso in cui, ferma restando la forza esplicata dalla muta di cani, la massa della slitta venga improvvisamente raddoppiata.

Esercizio n° 2



Su una carrucola (raggio **R1** e massa **M**) vincolata a ruotare intorno al proprio asse passante per il centro, e' parzialmente avvolto un filo inestensibile e di massa trascurabile. Ad un estremo del filo e' sospesa una massa **m1** mentre l'altro estremo e' vincolato ad una parete fissa madiante una molla di costante elastica **k**. Calcolare la posizione di equilibrio e il periodo delle piccole oscillazioni della massa m1 nell'ipotesi che il filo non slitti saulla carrucola.

(**M**= 5kg, **m1**= 200 g, **k**=100 N/m)

Esercizio n° 3

In un recipiente adiabatico rigido è posta una mole di un gas perfetto monoatomico e una massa di ghiaccio (**m**=100 g) ed inizialmente il sistema e' all'equilibrio termodinamico alla temperatura di 0 °C. Mediante una resistenza elettrica, viene fornita al sistema una quantita' di energia pari a 40 kJ. Calcolare la variazione di energia interna del gas perfetto (trascurare la variazione di volume legata alla trasformazione ghiaccio−acqua). (λ=80 cal/g)

Rispondere in modo esauriente e preciso ad almeno una delle seguenti domande

1) Dare una definizione di trasformazione politropica di un gas perfetto e calcolarne il calore molare.
2) Dimostrare parzialmente le tre leggi di Keplero a partire dall'espressione della forza gravitazionale di Newton. Calcolare, inoltre, l'energia meccanica di un satellite in orbita geostazionaria.

Università degli Studi di Roma "La Sapienza

Facoltà di Ingegneria
Corso di Laurea in Ingegneria Civile

Prova scritta di Fisica I del 7 settembre 2001

SOLUZIONI

Esercizio n°1

Quando la slitta sale lungo il piano inclinato a velocita' costante si ha:

$$F_{cani}=m\cdot g\cdot(\sin(\vartheta)+\mu_d\cdot\cos(\vartheta))=1362.62\,N$$
$$P=F_{cani}\cdot v=m\cdot g\cdot v\cdot(\sin(\vartheta)+\mu_d\cdot\cos(\vartheta))=3.788\,kW$$

Nell'stante in cui la massa della slitta raddoppia si ha:

$$-2m\cdot g\cdot\sin(\vartheta)-\mu_d\cdot 2m\cdot g\cdot\cos(\vartheta)+F_{cani}=2m\cdot a$$
$$a=-g\cdot[\sin(\vartheta)+\mu_d\cdot\cos(\vartheta)]/2=-3.406\quad m/s^2$$

Si ricava quindi

$$t_2=\frac{v}{a}$$
$$d=v\cdot t_2-\frac{1}{2}\cdot a\cdot t_2^2=\frac{v^2}{2\cdot a}=1.13\quad m$$

Esercizio n° 2

In condizioni di equilibrio per la massa m1 si ha $\begin{matrix} m\cdot g-T=0 \\ T=k\cdot\Delta x_0 \end{matrix} \Rightarrow \Delta x_0=\frac{m\cdot g}{k}=1.96\,cm$.

In condizioni di oscillazione si ha:

$\begin{matrix} m\cdot g-T=m\cdot a \\ T\cdot R-k\cdot\Delta x\cdot R=I_c\cdot\dot{\omega} \end{matrix}$. Inoltre, poiche' il filo non striscia si ha anche $a=\frac{d(\Delta x)}{dt}=\dot{\omega}\cdot R$.

Ricavando T dalla prima e sostituendola nella seconda otteniamo:

$$\ddot{\Delta} x+\Delta x\cdot\frac{k\cdot R}{(\frac{I_c}{R}+m\cdot R)}-\frac{m\cdot g\cdot R}{(\frac{I_c}{R}+m\cdot R)}=0$$

. Il periodo che si ottiene vale

$$T=2\pi\cdot\sqrt{\frac{2m+M}{2k}}=1.032\quad s$$

Esercizio n° 3

Poichè il cilindro è adiabatico si ha $-L=\Delta U_{gas}+\Delta U_{ghiaccio}$. Poiche', inoltre, va trascurata la variazione di volume nella trasformazione ghiaccio−acqua, il primo principio applicato alla massa di ghiaccio che si trasforma in acqua e si riscalda si scrive come: $\Delta U_{ghiaccio}=Q_{ghiaccio}$ per cui $-L=\Delta U_{gas}+Q_{ghiaccio}=C_v\cdot(T_f-T_0)+m_{gh}\cdot\lambda+m_{gh}\cdot C_{H_2O}\cdot(T_f-T_0)$ da cui si ricava la temperatura finale di equilibrio $T_f\simeq 288\,K$ e la variazione di energia interna del gas $\Delta U_{gas}=C_v\cdot(T_f-T_0)=188.3\,J$.

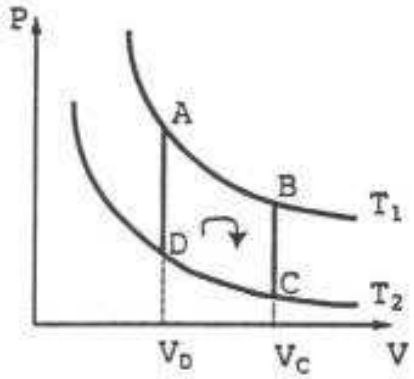
UNIVERSITA' DI ROMA "LA SAPIENZA"
FACOLTA' DI INGEGNERIA
Anno Accademico 2000-2001
Prova scritta di Fisica I del 13 ottobre 2001

1) Un punto materiale P si muove di moto uniformemente decelerato lungo una traiettoria circolare di raggio r: se la velocità iniziale del punto è $\omega_0=2\pi$ rad/s, esso si ferma dopo un tempo $t_0=2$s . Calcolare la decelerazione angolare e il numero di giri n fatti dal punto prima di fermarsi.

2) Una forza costante F=10N è applicata con una inclinazione $\alpha=30^o$ rispetto all'orizzontale a un blocco di massa m=2 kg in quiete su di un piano scabro orizzontale. Sapendo che per effetto della forza F il blocco raggiunge una velocità v=8 m/s in un tempo t=3,6 s, calcolare il coefficiente di attrito dinamico μ_d tra blocco e piano.

3) Un'asta omogenea di massa M=1 Kg e lunghezza l=1 m è appesa per un estremo O (vincolo senza attrito) in un piano verticale e, mentre si trova in equilibrio, viene colpita perpendicolarmente nell'estremo libero con impulso J. Determinare J sapendo che, in seguito al colpo, l'asta raggiunge la posizione orizzontale con velocità nulla.

4) Calcolare il rendimento del ciclo reversibile illustrato nella figura, svolto da un gas perfetto monoatomico. Il ciclo è composto da due trasformazioni isoterme (AB e CD) e da due trasformazioni isocore (BC e DA). (T_1=400 K, T_2=300K, V_C/V_D=2)



5) Una quantità di calore $Q=10^3$ J viene fornita, a pressione costante e reversibilmente, a 5 moli di gas perfetto biatomico termicamente isolate alla temperatura T_0=300 K. Calcolare la variazione di entropia subita dal gas.

Soluzioni prova scritta di Fisica I del 13 ottobre 2001

Esercizio 1)

$\omega_0(t) = \omega_0 - \gamma t$ essendo γ l'accelerazione angolare.

$$\omega(t) = 0 \Rightarrow 0 = \omega_0 - \gamma t_0 \Rightarrow \gamma = \frac{\omega_0}{t_0} = \pi \text{ rad s}^{-2}$$

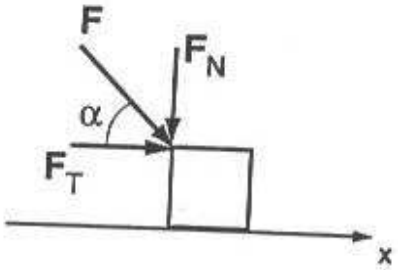
$\alpha(t) = \omega_0 t - \frac{1}{2}\gamma t^2$ essendo α l'angolo descritto dal punto

$$\alpha(t) = \omega_0 t_0 - \frac{1}{2}\gamma t_0^2 = \omega_0 t_0 - \frac{1}{2}\frac{\omega_0}{t_0}t_0^2 \Rightarrow \alpha_0(t_0) = \frac{1}{2}\omega_0 t_0 = 2\pi \text{ rad, pari ad un giro}$$

Esercizio 2)

$F_T = F \cos \alpha$ e $F_N = F \sin \alpha$

Il moto del blocco è uniformemente accelerato; infatti la sua accelerazione vale



$$a = \frac{F\cos\alpha}{m} - \mu_d\left(g + \frac{F \operatorname{sen}\alpha}{m}\right)$$

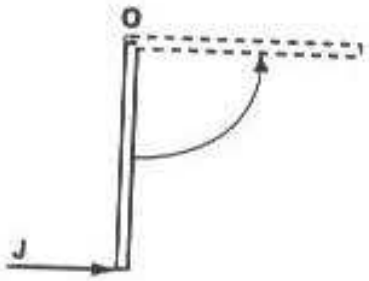
Poiché $v = v_0 + at \Rightarrow a = \frac{v}{t} = 2.2$ ms^{-2}. Pertanto:

$$\mu_d = \frac{\frac{F\cos\alpha}{m} - a}{g + \frac{F \operatorname{sen}\alpha}{m}} = 0.17$$

Esercizio 3)

Durante il colpo (urto) si conserva il momento della quantità di moto rispetto al punto O, quindi:

$$Jl = I_0\omega \Rightarrow J = \frac{I_0\omega}{l}$$



dove $I_0 = \frac{1}{3}ml^2$ e ω la velocità angolare dell'asta subito dopo il colpo. Quest'ultima può essere calcolata applicando il principio di conservazione dell'energia meccanica tra lo stato iniziale (asta verticale) e quello finale (asta orizzontale):

$$\frac{1}{2}I_0\omega^2 = mg\frac{l}{2} \Rightarrow \omega = \sqrt{\frac{3g}{l}} = 5.4 \text{ rad s}^{-1}$$

Pertanto J=1.8 N s

Esercizio 4)

$$\eta = \frac{L}{Q_{ASS}} = \frac{Q_{ASS} + Q_{CED}}{Q_{ASS}} = 1 + \frac{Q_{CED}}{Q_{ASS}}$$

$$Q_{AB} = nRT_1 \ln \frac{V_B}{V_A} = nRT_1 \ln 2 > 0$$

$$Q_{BC} = nc_V (T_2 - T_1) < 0$$

$$Q_{CD} = nrT_2 \ln \frac{V_D}{V_C} = nRT_2 \ln \frac{1}{2} < 0$$

$$Q_{DA} = nc_V (T_1 - T_2) > 0$$

Quindi: $\eta = 1 + \dfrac{T_2 \ln \frac{1}{2} + \frac{3}{2}(T_2 - T_1)}{T_1 \ln \frac{1}{2} + \frac{3}{2}(T_1 - T_2)} = 16.2\%$

Esercizio 5)

Indicando con T_F la temperatura finale del gas, si ha

$$Q = nc_P (T_F - T_0) \Rightarrow T_F = T_0 + \frac{Q}{nc_P} = 306.9 \text{ K}$$

essendo $c_P = \frac{7}{2} R$ il calore molare del gas a pressione costante.

$$\Delta S = \int_{T_0}^{T_F} \frac{dQ}{T} = nc_P \int_{T_0}^{T_F} \frac{dT}{T} = nc_P \ln \frac{T_F}{T_0} = 3.3 \text{ J/K}$$

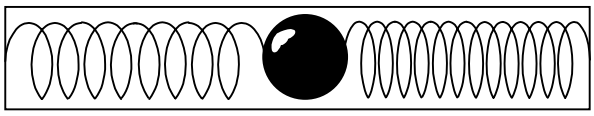
UNIVERSITA' DEGLI STUDI DI ROMA *LA SAPIENZA*

Esame di Fisica I vecchio ordinamento – 12 aprile 2002

1. Su un treno che si muove rettilineamente rispetto alla terra con accelerazione costante $a=0.25\ m/s^2$, un corpo, che si trovava inizialmente sul pavimento, viene lanciato verticalmente (rispetto al treno) con velocità $v_0=6$ m/s. Calcolare a quale distanza d dal punto di lancio ricadrà il corpo sul pavimento.

2. Su un piano inclinato possono rotolare senza strisciare due cilindri omogenei di raggio r ed R rispettivamente. Se i cilindri iniziano a scendere contemporaneamente dall'altezza h con velocità del baricentro inizialmente nulla, determinare quale cilindro arriverà prima.

3. Una pallina di massa m=0.1 kg è posta in un tubo orizzontale lungo il quale può muoversi senza attrito. Essa è tenuta ferma da due molle (vedi figura) in condizioni di equilibrio. Se alla pallina viene impresso un piccolo spostamento, essa oscilla con un periodo di T=3 s.
Sapendo che la costante di richiamo di una delle molle è $k_1=0.3$ N/m, calcolare la costante k_2 dell'altra molla.



4. Una barra di ghiaccio di sezione quadrata, con lato h=10 cm e di massa m=10 kg si trova a –23°C in un ambiente costituito da una sorgente termica a –23°C. Il tutto forma un sistema adiabatico. La sbarra viene quindi appoggiata su una rete metallica costituita da fili. A causa del peso, la sbarra attraversa la rete scendendo completamente al di sotto di essa (cioè di h=10 cm) senza che la sua massa vari.. Una volta attraversata la rete la sbarra viene rimessa sui fili della rete. Si calcoli la variazione di entropia dell'ambiente.

5. Una macchina refrigerante sottrae 20 cal/ciclo ad una sorgente a –20°C e cede calore ad una sorgente a 30°C utilizzando una energia elettrica di 600 J/ciclo. Trovare la variazione di entropia delle sorgenti dopo un funzionamento di 10 cicli.

UNIVERSITA' DEGLI STUDI DI ROMA *LA SAPIENZA*

Esame di Fisica I vecchio ordinamento – 12 aprile 2002

SOLUZIONI

1. Il treno costituisce un sistema di riferimento non inerziale. In tale sistema, il treno è da considerarsi fermo mentre il corpo è soggetto ad una accelerazione contraria a quella del treno. Considerando x la direzione di moto del treno e z la direzione verticale, le equazioni del moto sono:

$$x(t) = -\frac{1}{2}at^2$$

$$z(t) = v_0 t - \frac{1}{2}gt^2$$

Quando il corpo ricardrà, la sua componente z deve valere zero.

$$z = 0 = v_0 t - \frac{1}{2}gt^2$$

Questa equazioni ha due soluzioni per t: $t=0$ (lancio) e $t = \frac{2v_0}{g}$ (atterraggio).

Da cui la distanza x sarà: $x(t) = -\frac{1}{2}at^2 = -\frac{1}{2}a\left(\frac{2v_0}{g}\right)^2 = -\frac{2av_0^2}{g^2} = -0.187m = -18.7cm$

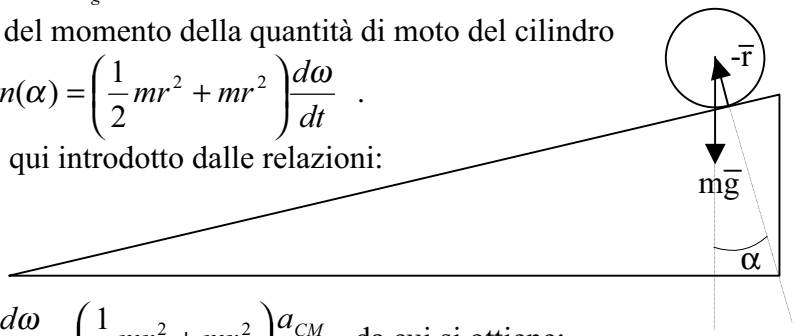
2. PRIMO METODO I cilindri sul piano inclinato ruotano poiché rispetto al punto di contatto la forza peso esercita un momento pari a: $\vec{M}_g = -\vec{r} \times m\vec{g} = mgr \cdot sin(\alpha)$

Tale momento produce una variazione del momento della quantità di moto del cilindro

$\vec{M}_g = -\vec{r} \times m\vec{g} = I\frac{d\vec{\omega}}{dt}$ cioè $mgr \cdot sin(\alpha) = \left(\frac{1}{2}mr^2 + mr^2\right)\frac{d\omega}{dt}$.

Il moto di puro rotolamento può essere qui introdotto dalle relazioni:

$v_{CM} = \omega r$ e $a_{CM} = \frac{d\omega}{dt}r$.



Per cui: $mgr \cdot \sin(\alpha) = \left(\frac{1}{2}mr^2 + mr^2\right)\frac{d\omega}{dt} = \left(\frac{1}{2}mr^2 + mr^2\right)\frac{a_{CM}}{r}$ da cui si ottiene:

$$a_{CM} = mgr \cdot sin(\alpha)\frac{r}{\left(\frac{1}{2}mr^2 + mr^2\right)} = g\frac{sin(\alpha)}{\frac{3}{2}} = \frac{2}{3}sin(\alpha) \cdot g$$

Si vede che l'accelerazione del centro di massa non dipende né dalla massa né dal raggio dei cilindri che quindi percorrono il piano inclinato insieme, sempre alla stessa velocità.

SECONDO METODO

Il problema può anche essere risolto utilizzando la conservazione dell'energia:

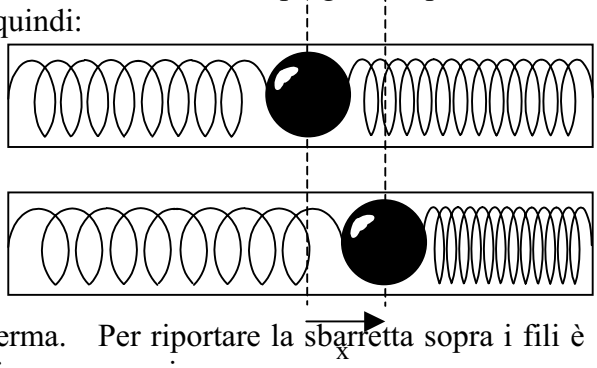
$$mgh = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}I\omega^2 = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}I\frac{v^2}{r^2} = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}mr^2 + mr^2\right)\frac{v^2}{r^2} = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}m + m\right)v^2$$

da cui si ottiene

$$gh = \frac{1}{2}v^2 + \frac{3}{4}v^2 = \frac{5}{4}v^2$$

Da ciò si vede che la velocità finale non dipende dalla massa o dal raggio ma soltanto dall'altezza del piano inclinato.

3. Imprimendo un piccolo spostamento alla pallina, tutte e due le molle spingono la pallina nella stessa direzione, cioè $-\vec{x}$. L'equazione del moto sarà quindi:



$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -k_1x - k_2x = -(k_1 + k_2)x$$

$$T = 2\pi \cdot \sqrt{\frac{m}{k_1 + k_2}}$$

da cui si calcola $k_2 = \frac{4\pi^2 m}{T^2} - k_1 = 0.14\frac{N}{m}$.

4. La trasformazione è una trasformazione isoterma. Per riportare la sbarretta sopra i fili è stato compiuto un lavoro meccanico contro la forza peso pari a

$$L = mgh$$

Poiché la trasformazione è stata ciclica, *ΔU=0*. Quindi possiamo scrivere, sfruttando il primo principio, per l'ambiente:

$$\Delta U = 0 = Q - L = T\Delta S - L$$

da cui

$$\Delta S_{ambiente} = \frac{mgh}{T} = 3.9 \cdot 10^{-2}\frac{J}{K}$$

5. Una macchina refrigerante è una macchina di Carnot non reversibile, che esegue il ciclo al contrario. Infatti l'integrale di Clausius, applicato al numero di cicli compiuti dalla macchina in un certo tempo, è negativo. Infatti:

$|L| = Q_C - Q_F$ da cui $|Q_C| = |L| + |Q_F|$

$$I.C._{totale} = n_{cicli} \cdot I.C._{ciclo} = n_{cicli} \cdot \left(\frac{|Q_F|}{T_F} - \frac{|Q_C|}{T_C}\right)$$

$$\Delta S_{totale} = -I.C._{totale} = n_{cicli} \cdot \left(\frac{|Q_C|}{T_C} - \frac{|Q_F|}{T_F}\right)$$

numericamente:

$|Q_F| = 20\frac{cal}{ciclo} = 83.6\frac{J}{ciclo}$.

$T_F = 253K$, $T_C = 303K$

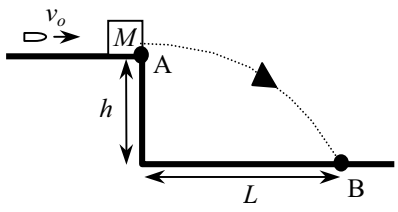
$|Q_C| = 683.6\frac{J}{ciclo}$

$$\Delta S_{sorgenti} = -I.C._{totale} = n_{cicli} \cdot \left(\frac{|Q_C|}{T_C} - \frac{|Q_F|}{T_F}\right) = 19.3\frac{J}{K} = 277\frac{cal}{K}$$

FISICA I

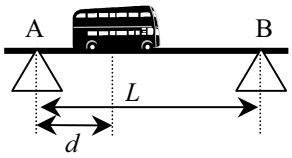
A.A. 2001-2002
Ingegneria Civile e Trasporti
1° appello del 17 Giugno 2002

1. Una pallottola di massa $m=10g$ viene sparata contro un blocco di massa $M=3kg$ inizialmente in quiete sul bordo di un tavolo alto $h=1m$ (vedi figura). Il proiettile si conficca nel blocco e, dopo l'urto, il blocco cade ad una distanza $L=2m$ dallo spigolo del tavolo. a) Determinare la velocità iniziale v_o del proiettile. b) Determinare l'energia trasformata in calore dopo l'urto, c) l'energia cinetica con cui il blocco cade dal punto A, d) l'energia cinetica con cui arriva nel punto B.

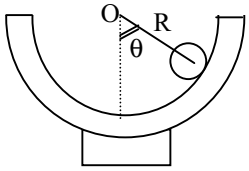


2. Un pendolo semplice di massa $m=3kg$, è fatto oscillare con ampiezza via via crescente. Quando l'ampiezza è di $\theta=60°$ il filo di spezza. Quale è stato il valore della tensione in corrispondenza della rottura?

3. Il ponte in figura è lungo $L=50m$ ed ha una massa M di 100 tonnellate poggiate sui due pilastri A e B. Sul ponte si trova ad una distanza $d=10m$ dal pilastro A un autobus di massa m di 20 tonnellate. Determinare le forze agenti sui punti di appoggio A e B necessarie perché il sistema sia stabile.



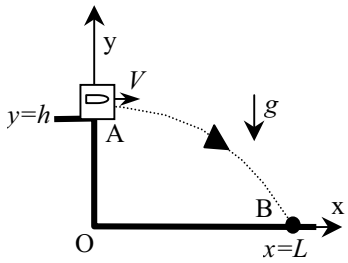
4. Una piccola sfera piena omogenea di massa m e di raggio r è posta sulla superficie interna scabra di una ciotola emisferica di centro O e raggio $R=10cm$. La sfera parte da ferma in un punto definito da un angolo $\theta=15°$ con la verticale e comincia a rotolare descrivendo un moto periodico non dissimile da quello del pendolo. Si determini il periodo di oscillazione T, ed il valore minimo del coefficiente di attrito statico μ_s che garantisce il puro rotolamento della sfera.(Il momento di inerzia della sfera omogenea rispetto al centro di massa sia $I_c=2mr^2/5$, si assuma inoltre $r«R$).



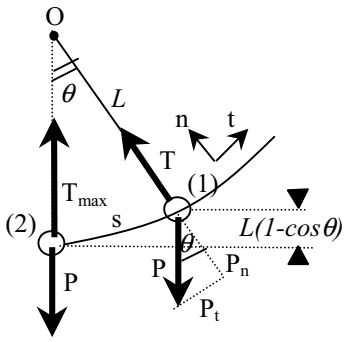
5. Un gas perfetto monoatomico è racchiuso in un recipiente munito di pistone, in modo che la pressione rimanga costante. Al gas viene somministrata una quantità di calore $Q=10^3$ *cal*. Calcolare il lavoro utile ottenuto durante la trsformazione

FISICA I

A.A. 2001-2002
Ingegneria Civile e Trasporti
Soluzioni del 17 Giugno 2002



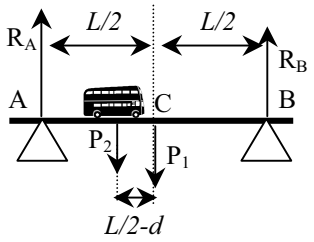
1. Nell'esercizio si succedono due processi: un urto perfettamente anelastico della pallottola con il blocco, ed una successiva caduta per gravità dell'insieme blocco-pallottola. *1ª parte*: nell'urto perfettamente anelastico della pallottola con il blocco la quantità di moto iniziale prima dell'urto $\vec{p}_i = m\vec{v}_o$ si conserva dopo l'urto quando i due corpi procedono insieme a velocità V con quantità di moto finale $\vec{p}_f = (m+M)\vec{V}$. Imponendo $\vec{p}_i = \vec{p}_f$ si ricava facilmente $v_o = V(1+M/m)$. *2ª parte*: dopo l'urto il blocco, ora di massa *M+m,* cade dal tavolo descrivendo un moto di tipo parabolico per effetto dell'accelerazione di gravità (vedi figura).
Scomponiamo ora le equazioni del moto lungo x ed y: lungo l'asse x non c'é accelerazione ed il moto risultante è rettilineo uniforme $x(t) = V \cdot t$, dove V è la velocità appena dopo l'urto. Lungo l'asse y il moto è uniformemente accelerato per gravità; $a_y = -g$, $v(t) = -g \cdot t$, $y(t) = h - gt^2/2$. Da quest'ultima imponendo $y(t^*)=0$ ricaviamo il tempo di volo $t^* = \sqrt{2h/g}$. La distanza del punto di caduta B dal tavolo si ottiene dall'espressione $x(t^*) = L = V\sqrt{2h/g}$ che invertita si riscrive $V = L\sqrt{g/2h}$. Combinando le espressioni finali delle due fasi del problema si ottiene $v_o = (1+M/m)\cdot L \cdot \sqrt{g/2h} =$ *1333 m/s*. L'energia cinetica iniziale del proiettile era $T_1 = mv_o^2/2 = m(1+M/m)^2\, gL^2/4h = 8.88$ *kJ*, l'energia cinetica con cui il blocco cade dal punto A è invece $T_2 = (m+M)V^2/2 = (m+M)gL^2/4h = 29.5$ *J*, per cui durante l'urto si è trasformata in calore la differenza $Q = T_1 - T_2 = M(1+M/m)gL^2/4h = 8.85$ *kJ*. Infine imponendo la conservazione dell'energia meccanica durante la caduta da A a B si ottiene l'energia cinetica in B che vale $T_3 = T_2 + U_2 = (m+M)gL^2/4h + (m+M)gh = (m+M)g\left(L^2+4h^2\right)/4h = 59$ *J*.



2. La massa appesa al filo subisce due forze: la sua forza peso $P=mg$ lungo la verticale, e la tensione T diretta lungo il filo. Applicando il II principio alla massa nella generica posizione (1), dopo la consueta scomposizione secondo gli assi n,t si ottiene il sistema $\begin{matrix}\hat{n}\\ \hat{t}\end{matrix}\begin{cases} T - P_n = ma_n \\ -P_t = ma_t \end{cases}$ dove $P_n = mg\cos\theta$, $P_t = mg\sin\theta$, l'accelerazione tangenziale vale $a_t = d^2s/dt^2$, quella normale vale $a_n = v^2/L$. La tensione del filo si ricava dalla prima equazione da cui $T(\theta) = mg\cos\theta + mv^2/L$, dove è stata evidenziata la dipendenza della tensione dall'angolo θ. In particolare il punto critico per la rottura del pendolo è il punto (2) per $\theta=0$ in cui la tensione è massima perché sono simultaneamente massimi tutti e due gli addendi per cui $T_{\max} = T(\theta=0) = mg + mv_2^2/L$. Per calcolare T_{max} occorre ora determinare la velocità massima v_2 che viene raggiunta nel punto (2). Per far questo non utilizziamo l'altra equazione sull'asse t, dalla quale si può derivare la legge oraria solo per piccoli angoli θ<15°. Applichiamo invece il principio di conservazione dell'energia meccanica fra il punto (1) relativo alla massima oscillazione $\theta_{max}=60°$ ed il punto (2) relativo a θ=0. L'energia meccanica nel punto (1) è esclusivamente potenziale e vale $E_{m1} = mgL(1-\cos\theta_{\max})$, mentre nel punto (2) è

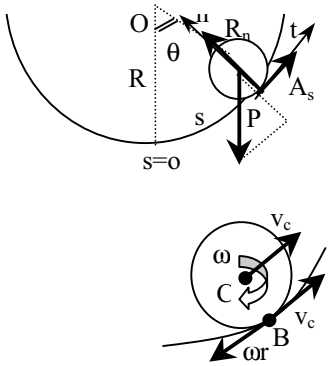
esclusivamente cinetica valendo $E_{m2} = m v_2^2 / 2$. Applicando il principio di conservazione si determina $v_2^2 = 2gL(1-\cos\theta_{\max})$, che sostituita nell'equazione della tensione massima fornisce il valore massimo di rottura $T_{\max} = mg(3-2\cos\theta_{\max}) = 58.8\ N$.

3. Le forze agenti sul ponte sono: la forza peso del ponte $P_1=Mg$ applicata nel suo baricentro C, la forza peso dell'autobus $P_2=mg$ applicata in un punto a distanza $L/2-d$ dal punto C, le reazioni dei due pilastri R_A ed R_B entrambe a distanza $L/2$ da C. Il sistema è in equilibrio quando sono nulle contemporaneamente la somma delle forze (1ª equazione cardinale) e la somma dei momenti (2ª equazione cardinale). Dalla prima proiettata lungo la verticale otteniamo $P_1 + P_2 - R_A - R_B = 0$, mentre dalla seconda applicata rispetto al punto C si ottiene $M_{R_A} + M_{R_B} + M_{P_2} + M_{P_1} = 0$



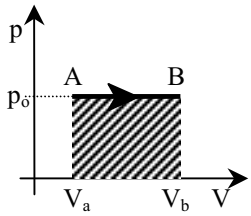
dove $M_{P1}=0$ perché P_1 è applicato in C, $M_{R_A} = -R_A(L/2)<0$ (termine negativo perché la forza tenderebbe a far ruotare il ponte in senso orario), mentre $M_{R_B} = R_B(L/2)$ ed $M_{P_2} = P_2(L/2-d)$. Combinando le equazioni si ottiene (1ª equazione cardinale) $R_A + R_B = (M+m)g$, e (2ª equazione cardinale) $R_A - R_B = mg[(L/2-d)/L/2] = mg(1-2d/L)$. Sommando e sottraendo si ottengono i valori $R_A = Mg/2 + mg(1-d/L) = 6.468\cdot 10^5$ N mentre $R_B = Mg/2 + mg(d/L) = 5.292\cdot 10^5$ N.

4. La sfera nella ciotola è soggetta alla sua forza peso $P=mg$ applicata nel baricentro C, la reazione normale della ciotola R_n e l'attrito A_s applicati entrambi sul punto di contatto B. La dinamica della sfera è ben descritta dalle *2* equazioni cardinali dei corpi rigidi. La prima equazione cardinale $\vec{P} + \vec{R}_n + \vec{A}_s = m\vec{a}_c$ quando è proiettata lungo gli assi normale *n,* e tangenziale t, fornisce le relazioni $\begin{matrix}\hat{n}\\ \hat{t}\end{matrix}\begin{cases} R_n - P\cos\theta = m v_c^2/R \\ A_s - P sin\theta = m a_c \end{cases}$ che danno informazione sul moto di traslazione del centro di massa. Ovviamente per determinare la dinamica è necessario applicare anche la seconda equazione cardinale che, proiettata ad esempio lungo l'asse per il centro di massa C, fornisce la relazione $M_C = M_P + M_{R_N} + M_{A_s} = I_c(d\omega/dt)$ che regola il moto di rotazione intorno al centro di massa. In particolare il momento della forza peso M_P è nullo perché è applicato in C, il momento della reazione normale M_{R_n} è nullo perché la linea d'azione di R_n passa per C, mentre il momento della forza di attrito vale $M_{A_s} = -A_s r = I_c(d\omega/dt)$ dove il segno meno è dovuto alla convenzione particolare scelta per ω (l'attrito tenderebbe a far ruotare la sfera in verso opposto a quello scelto). Inoltre la condizione di puro rotolamento implica l'annullamento della velocità del punto di contatto B che, per le convenzioni scelte per ω, si scrive $v_B=v_c-\omega r=0$ da cui $v_c(t) = \omega(t) r$, e per derivazione $a_c(t) = r(d\omega/dt)$. Alla luce di questa considerazione la seconda equazione cardinale diventa $A_s = -(I_c/r)(d\omega/dt) = -(I_c/mr^2)\cdot m a_c$. Sostituendo questa ultima espressione nella prima equazione cardinale si ottiene $a_c = -g sin\theta / (1 + I_c/mr^2)$. Ma per piccole oscillazioni vale $sin\theta \cong \theta = s/R$, dove s è l'arco percorso, mentre $a_c = d^2s/dt^2$. Da ciò deriva l'equazione differenziale $d^2s/dt^2 = -[g/R(1 + I_c/mr^2)]\cdot s$, lineare del secondo ordine che ha soluzione



armonica con periodo $T = 2\pi\sqrt{R/g}\cdot\sqrt{1+I_c/mr^2} = 2\pi\sqrt{0.1/9.8}\cdot\sqrt{7/5} = 0.751\ s$. Per garantire il moto di puro rotolamento bisogna verificare a posteriori che l'attrito richiesto sia sempre inferiore del massimo disponibile. In particolare nel punto critico di massima pendenza, quando cioè $\theta_{max}=15°$, *si* deve avere $A_s(\theta_{\max}) = \left(\frac{I_c}{I_c+mr^2}\right) mg sin\theta_{\max} \le \mu_s R_n = \mu_s mg\cos\theta_{\max}$ da cui $\mu_s \ge 2tg\theta_{\max}/7 = 0.077$.

5. Il lavoro utile ottenuto durante la trasformazione isobara da *A* a *B* è $L = \int_{V_a}^{V_b} pdV =$

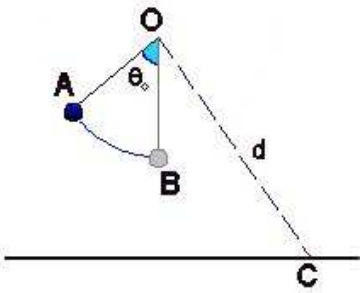


$= p_o(V_b - V_a) = p_o\Delta V$ che rappresenta l'area tratteggiata sul piano di Clapeyron. L'uso dell'equazione di stato dei gas perfetti consente di riscrivere questa stessa espressione in funzione della variazione di temperatura dei punti *A* e *B* $L = p_o\Delta V = nR\Delta T = nR(T_b - T_a)$. D'altra parte il calore fornito al gas è esprimibile nella forma $Q = c_p\Delta T = c_p(T_b - T_a)$ dove c_p rappresenta la capacità termica a pressione costante che, per un gas monoatomico, vale $c_p = 5nR/2$. Combinando le due espressioni si ottiene $L = Q(nR/c_p) = 2Q/5 = 400cal = 1.675kJ$. (Alternativamente si poteva applicare il 1° principio $L=Q-\Delta U$, dove $Q = c_p\Delta T$, e $\Delta U = c_v\Delta T = Q(c_v/c_p)$ da cui $L = Q(1 - c_v/c_p) = 2Q/5$.

UNIVERSITA' DI ROMA "LA SAPIENZA"
CORSO DI LAUREA IN INGEGNERIA CHIMICA
Anno Accademico 2001/2002
Prova scritta di Fisica I del 21 Giugno 2002

1. Due automobili A e B viaggiano lungo una strada rettilinea a distanza d l'una dall'altra e con la stessa velocità di modulo $v_0 = 72\,km/h$. Ad un certo istante il guidatore dell'automobile di testa A frena, l'automobile prosegue con accelerazione scalare costante a_A e si arresta dopo un tratto $\ell = 50\,m$. Per questione di riflessi il guidatore dell'automobile B inizia la frenata con un ritardo $\tau = 0.4\,s$ e l'automobile prosegue con accelerazione costante a_B. Si calcolino l'accelerazione a_A e il valore minimo di d affinché le automobili non si urtino se $a_A = a_B$.

2. Un oggetto puntiforme, di massa m, è sospeso ad un filo inestensibile, di massa trascurabile e di lunghezza $\ell = 10\,cm$. Il filo è vincolato ad un soffitto ad un'altezza $h = 2\ell$ dal suolo. L'oggetto viene lasciato cadere da fermo dalla posizione A (vedi figura) in cui il filo forma un angolo $\theta_0 = 56°$ rispetto alla direzione verticale. Quando la massa passa per il punto B il filo si spezza. Si calcoli la distanza d del punto C di impatto al suolo dell'oggetto dal punto O in cui è vincolato il filo. (Si trascuri l'attrito dell'aria)



3. Due oggetti puntiformi di ugual massa m sono rigidamente connessi ad una sottile sbarretta di massa $M = 3m$ e lunghezza $\ell = 8\,cm$. I due punti sono collocati in posizioni simmetriche rispetto al centro della sbarretta e ad una distanza $d = \ell/4$ da esso. Tutto il sistema può ruotare attorno ad un asse orizzontale passante per il centro della sbarretta ed ortogonale ad essa. Il sistema è inizialmente in quiete con la sbarretta in posizione orizzontale. Ad un certo istante, un corpo di massa m viene fatto cadere, da fermo, da un'altezza $h = 5\,cm$ ed urta in modo completamante analestico contro uno degli estremi della sbarretta. Si determini qual'è l'angolo massimo di cui ruoterà l'intero sistema dopo l'urto. (Si trascuri ogni forma d'attrito)

4. In una stanza chiusa di volume $V = 30\,m^3$, inizialmante alla pressione atmosferica ed alla temperatura $t_1 = 27\,°C$ è posto un blocco di ghiaccio di massa $m = 1\ kg$ alla temperatura $t_0 = 0\,°C$. Approssimando l'aria racchiusa nella stanza ad un gas perfetto biatomico e considerando nulle la conducibilità e la capacità termica delle pareti, si determini la temperatura finale a cui si porterà l'intero sistema. ($\lambda_f = 80\,cal/g$. Si considerino constanti la temperatura ed il calore latente di fusione del ghiaccio e si trascuri il suo volume rispetto a quello della stanza)

5. Un gas perfetto biatomico compie un ciclo costituito dalle seguenti trasformazioni: 1) un'isoterma reversibile alla temperatura T_A in cui il volume del gas raddoppia; 2) un'adiabatica reversibile in

cui la temperatura del gas si dimezza; 3) una compressione isoterma reversibile che porta il gas ad uno stato D; 4) un'isobara reversibile che riporta il gas dallo stato D allo stato iniziale. Si calcoli il rendimento del ciclo.

UNIVERSITA' DI ROMA "LA SAPIENZA"
CORSO DI LAUREA IN INGEGNERIA CHIMICA
Anno Accademico 2001/2002
Soluzioni della prova scritta di Fisica I del 21 Giugno 2002

1. Consideriamo come istante $t = 0$ quello in cui A inizia a decelerare e come origine dell'asse x la sua posizione in quell'istante.
   Per A:

   $v_A(t) = v_0 - a_A t \qquad x_A(t) = v_0 t - \frac{1}{2} a_A t^2$

   Per B :

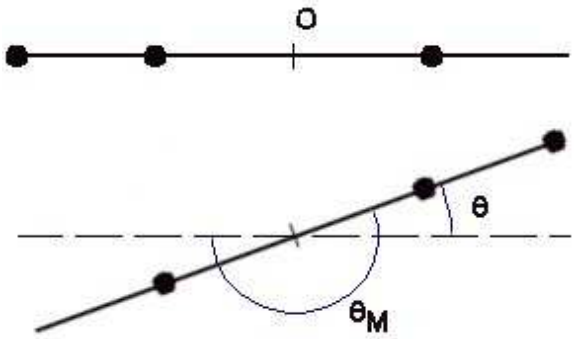
   $t \leq \tau \qquad v_B(t) = v_0 \qquad x_B(t) = -d + v_0 t$
   $t \geq \tau \qquad v_B(t) = v_0 - a_B(t-\tau) \qquad x_B(t) = -d + v_0\tau + v_0(t-\tau) - \frac{1}{2} a_A (t-\tau)^2$

   $v_A(t_1) = 0 \qquad t_1 = \dfrac{v_0}{a_A} \qquad x_A(t_1) = \ell \qquad \ell = \dfrac{v_0^2}{2a_A} \qquad a_A = \dfrac{v_0^2}{2\ell} = 4\,m/s^2$
   $v_B(t_2) = 0 \qquad (t_2 - \tau) = \dfrac{v_0}{a_B}$

   Affinché le due autombili non si urtino deve essere

   $x_B(t_2) \leq \ell \quad \Longrightarrow \quad -d + v_0\tau + v_0(t_2 - \tau) - \frac{1}{2} a_B (t_2 - \tau)^2 \leq \ell$

   Se $a_A = a_B = a \quad \Longrightarrow \quad -d + v_0\tau + \dfrac{v_0^2}{2a} \leq \dfrac{v_0^2}{2a} \qquad d \geq v_0\tau = 8\,m$



2. Per la conservazione dell' energia meccanica:

   $mg\ell(1-\cos\theta_0) = \frac{1}{2} m v_B^2 \quad \Longrightarrow \quad v_B = \sqrt{2g\ell(1 - cos\theta_0)}$

   Dopo la rottura del filo:

   $v_x(t) = v_B \qquad x(t) = v_B t$
   $v_z(t) = 0 \qquad z(t) = \ell - \frac{1}{2} g t^2$

   $z(\tau) = 0 \qquad \tau = \sqrt{\dfrac{2\ell}{g}} \qquad x(\tau) = v_B \sqrt{\dfrac{2\ell}{g}} = 2\ell\sqrt{1 - \cos\theta_0}$

   $d = \sqrt{(2\ell)^2 + x(\tau)^2} = 2\ell\sqrt{2 - cos\theta_0} = 24\,cm$

3. Per la conservazione dell' energia meccanica:

$mgh = \frac{1}{2}mv_0^2 \qquad v_0 = \sqrt{2gh}$

Nell'urto si conserva il momento della quantità di moto:

$mv_0\frac{\ell}{2} = I_0\omega \qquad \omega = \frac{mv_0\ell}{2I_0}$

$I_0 = \frac{1}{12}M\ell^2 + 2m\left(\frac{\ell}{4}\right)^2 + m\left(\frac{\ell}{2}\right)^2 = \frac{5}{8}m\ell^2$

Per la conservazione dell' energia meccanica:

$\frac{1}{2}I_0\omega^2 = mg\frac{\ell}{2}sin\theta \qquad sin\theta = \frac{4h}{5\ell} = 0.5$

$\theta = 30° \qquad \theta_M = 210°$

4. $n = \frac{pV}{RT} = 1218$

$Q = 0 \qquad L = 0 \qquad \Delta U = 0$

$\Delta U = m\lambda_f + mc_a(t_f - t_0) + nc_v(t_f - t_1) = 0 \qquad t_f = \frac{mc_at_0 + nc_vt_1 - m\lambda_f}{mc_a + nc_v} = 11.82°C$

5. $A)\, V_A \quad T_A \quad B)\, V_B = 2V_A \quad T_B = T_A \quad C)\, V_C = 2^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}V_A \quad T_C = \frac{T_A}{2} \quad D)\, V_D = \frac{V_A}{2} \quad T_D = \frac{T_A}{2}$

$Q_{AB} = L_{AB} = nRT_Aln\left(\frac{V_B}{V_A}\right) = nRT_Aln2 > 0$

$Q_{BC} = 0$

$Q_{CD} = L_{CD} = nRT_Cln\left(\frac{V_D}{V_C}\right) = -\frac{2\gamma - 1}{2(\gamma - 1)}nRT_Aln2 = -\frac{9}{4}RT_Aln2 < 0$

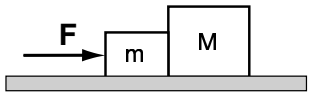
$Q_{DA} = nc_p(T_A - T_D) = \frac{7}{4}nRT_A > 0$

$\eta = 1 - \frac{\frac{9}{4}ln2}{ln2 + \frac{7}{4}} = 0.36$

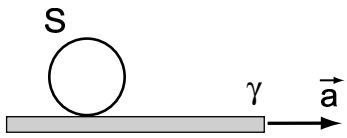
UNIVERSITA' DI ROMA "LA SAPIENZA"
FACOLTA' DI INGEGNERIA
Anno Accademico 2000-2001
Prova scritta di Fisica I del 20 settembre 2002

1. All'istante $t = 0$ un punto materiale, partendo da fermo, si mette in moto su una traiettoria circolare, giacente su un piano orizzonatale liscio, di raggio $R = 225$ m. Fino all'istante $t_1 = 10$ s, la velocità cresce linearmente con il tempo e lo spazio percorso è di 150 m. Determinare il modulo dell'accelerazione nell'istante t_1.

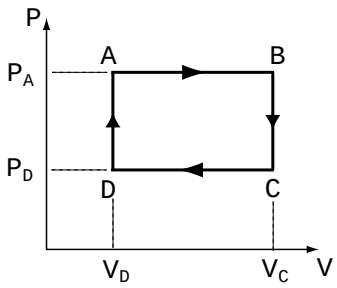
2. Due blocchi, di massa m ed M, si trovano fermi sopra un piano orizzontale liscio: i due blocchi sono in contatto tra loro. Una forza costante $\vec{F}$ orizzontale viene applicata alla massa m. Determinare la forza che il blocco di massa m esercita sul blocco di massa M. (I due blocchi sono schematizzabili come due punti materiali.)



3. Una sfera piena omogenea S si trova ferma su un piano orizzontale γ, anch'esso inizialmente fermo. All'istante $t = 0$ il piano γ inizia ad accelerare con accelerazione costante $\vec{a}$ in direzione orizzontale. Siano g e μ, rispettivamente, l'accelerazione di gravità e il coefficiente di attrito tra la sfera e il piano. Trovare il minimo valore che deve avere il coeffiente di attrito (μ_{min}) affinchè quando il piano accelera con accelerazione $\vec{a}$, la sfera rotoli senza strisciare relativamente al piano.



4. Una mole di gas perfetto biatomico compie il ciclo reversibile mostrato in figura, dove le trasformazioni AB e CD sono isobare e le trasformazioni BC e DA sono isocore. Calcolare il rendimento della macchina termica che esegue tale ciclo supponendo di conoscere i valori di P_A, P_D, V_C e V_D.



5. Due moli di gas perfetto all'interno di un recipiente termicamente isolato dall'ambiente esterno, si espandono liberamente da un volume iniziale V a un volume finale $5V$. Calcolare la variazione di entropia del gas e dell'ambiente.

SOLUZIONI DELLA PROVA SCRITTA DI FISICA I
DEL 20 SETTEMBRE 2002

Esercizio N. 1

Poichè la velocità cresce linearmente con il tempo, il moto è uniformemente accelerato:

$$s(t) = s(0) + \frac{1}{2} a_t\, t^2 \quad \Longrightarrow \quad a_t = 2\frac{s(t_1)}{t_1^2} = 3 \text{ m/s}^2.$$

Per quanto riguarda la velocità: $v(t_1) = a_t\, t_1 = 30$ m/s.
Pertanto, il valore dell'accelerazione normale nell'istante t_1 sarà:

$$a_n(t_1) = \frac{v(t_1)^2}{R} = 4 \text{ m/s}^2 \quad \Longrightarrow \quad a = \sqrt{a_t^2 + a_n^2} = 5 \text{ m/s}^2.$$

Esercizio N. 2

Applicando la I eq. cardinale della dinamica dei sistemi di punti materiali al sistema formato dalla massa m e dalla massa M, e considerando solo la componente orizzontale, si ha:

$$F = (m + M)\, a \quad \Longrightarrow \quad a = \frac{F}{m + M}$$

essendo a l'accelerazione del centro di massa uguale anche all'accelerazione delle due masse m ed M essendo esse in contatto tra loro.
Applicando il II principio della dinamica al blocco di massa M (considerando ancora la sola componente orizzontale) si ha:

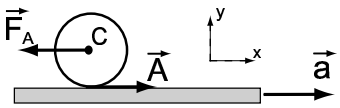
$$f = Ma$$

essendo f la forza che la massa m esercita sulla massa M. Dato il valore di a si ottiene:

$$f = \frac{M}{m + M}\, F.$$

Esercizio N. 3

La figura mostra le forze che agiscono sulla sfera in direzione orizzontale: $\vec{A}$ è l'attrito statico; $\vec{F}_A$ è la forza apparente agente sulla sfera. Quest'ultima esiste poichè, relativamente al piano, la sfera si trova in un sistema di riferimento non inerziale: tale forza ha modulo ma ed essendo una forza di volume è applicata nel centro di massa C della sfera. In direzione verticale agiscono la forza peso della sfera e la componente normale della reazione vincolare.



Usando le due equazioni cardinali della dinamica dei sistemi e la condizione di puro rotolamento si ha:

$-m\, a + A = -m\, a_C$	I eq. card. dinamica dei sistemi proiettata lungo l'asse x
$A\, r = I_C \dot{\omega}$	II eq. card. dinamica dei sistemi proiettata lungo l'asse z (Polo C)
$a_C = \dot{\omega} r$	Condizione di puro rotolamento della sfera.

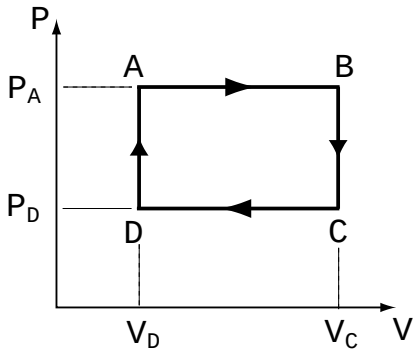
essendo r il raggio della sfera, $I_C = \frac{2}{5} m r^2$ il suo momento di inerzia rispetto a un asse orizzontale per C e a_C l'accelerazione del centro di massa. Per le condizioni date dal problema $A = \mu_{min}\, m\, g$. Risolvendo il sistema di equazioni rispetto a μ_{min} si ha:

$$\mu_{min} = \frac{2}{7}\frac{a}{g}$$

Esercizio N. 4

Il rendimento della macchina è:

$$\eta = \frac{L}{Q_{ASS}}$$



essendo Q_{ASS} ed L, rispettivamente, il calore assorbito e il lavoro fatto dal gas durante il ciclo . Quest'ultimo è facilmente calcolabile poichè nel piano PV esso è pari all'area racchiusa dal ciclo; quindi

$$L = \Big(P_A - P_D\big)\,\big(V_C - V_D\Big).$$

Come inoltre si può dedurre applicando il I principio della termodinamica e l'equazione di stato dei gas perfetti a ciascuna delle trasformazioni che compongono il ciclo, il calore è assorbito dal gas lungo l'isobara AB e lungo l'isocora DA.

$$Q_{AB} = n\,c_P\big(T_B - T_A\big) = n\,\frac{c_P}{R}\,\big(P_A V_C - P_A V_D\big)$$

$$Q_{DA} = n\,c_V\big(T_A - T_D\big) = n\,\frac{c_V}{R}\,\big(P_A V_D - P_D V_D\big).$$

Pertanto:

$$\eta = \frac{R\,\big(P_A - P_D\big)\,\big(V_C - V_D\big)}{c_P\,\big(P_A V_C - P_A V_D\big) + c_V\,\big(P_A V_D - P_D V_D\big)}.$$

Esercizio N. 5

Poichè l'espansione libera di un gas perfetto è un processo intrinsecamente isotermo, per il calcolo della variazione di entropia del gas si può scegliere una isoterma reversibile che abbia lo stesso stato iniziale (volume V) e finale (volume $5V$):

$$\Delta S_{GAS} = \int_I^F \frac{dQ}{T} = \int_I^F \frac{dU + dL}{T} = \frac{1}{T}\int_I^F p\,dV = n\,R\int_V^{5V}\frac{dV}{V} = n\,R\,\ln 5 = 26.7\ \mathrm{J/K}.$$

Essendo il gas termicamente isolato dall'ambiente esterno:

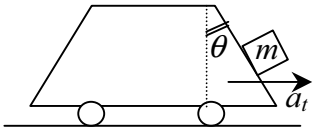
$$\Delta S_{UNIV.} = \Delta S_{GAS} + \Delta S_{AMB.} = \Delta S_{GAS}.$$

FISICA I

A.A. 2001-2002
Ingegneria Civile e Trasporti
2° appello del 17 Luglio 2002

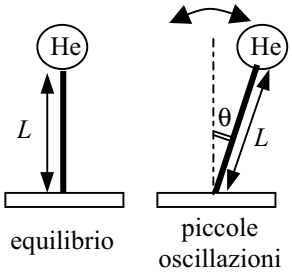
1. Due automobili A e B, partendo allo stesso istante e dallo stesso punto, si muovono in due direzioni formanti fra loro un angolo θ. L'automobile A, partendo da ferma, si muove di moto rettilineo con accelerazione $a=kt$ mentre l'automobile B si muove di moto rettilineo uniforme con velocità v_B. Determinare con quale velocità, in modulo, il guidatore di B vede muoversi l'automobile A dopo un tempo τ dalla partenza. (Dati $\theta=60°$, $k=0.1ms^{-3}$, $v_B=5m/s$, $\tau=10s$)

2. Il carrello a pareti oblique descritto in figura si muove su di un piano orizzontale con accelerazione a_t. Determinare il minimo valore di a_t affinchè la massa m, aderente alla parete frontale obliqua scabra del carrello, permanga in equilibrio senza scivolare. (Dati $\theta=30°$, $\mu_s=0.5$)



3. Un disco di massa m e raggio R rotola senza strisciare su un piano orizzontale scabro sotto l'azione di una forza F applicata al suo centro di massa e la cui direzione forma un angolo θ rispetto al piano orizzontale. Determinare l'accelerazione del centro di massa del disco (Dati $m=1kg$, $F=6N$, $\theta=60°$)

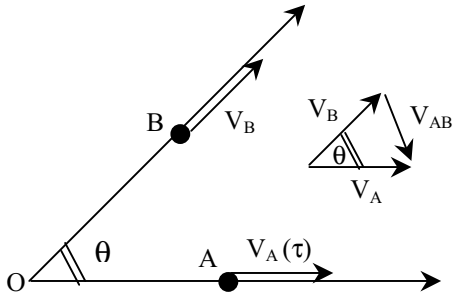
4. Un pallone leggero riempito di elio è legato tramite una fune di massa trascurabile e di lunghezza $L=4m$. La fune è legata al suolo formando un pendolo semplice "*invertito*". Quando il pallone viene spostato leggermente dall'equilibrio comincia ad oscillare rispetto alla posizione di equilibrio. Determinare il tipo di moto ed il periodo delle piccole oscillazioni (Si assuma per la densità dell'elio $\rho_{He}=0.180\ kg/m^3$ e dell'aria $\rho_{Aria}=1.29\ kg/m^3$)



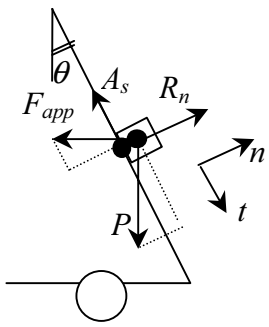
5. Una certa quantità di gas perfetto biatomico compie un'espansione adiabatica reversibile; la pressione ed il volume iniziale sono rispettivamente $p_1=10\ Atm$ e $V_1=10\ \ell$. Calcolare il lavoro ottenuto sapendo che la pressione finale è $p_2=2\ Atm$.

FISICA I

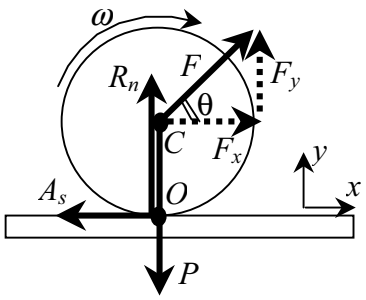
A.A. 2001-2002
Ingegneria Civile e Trasporti
Soluzioni del 17 Luglio 2002



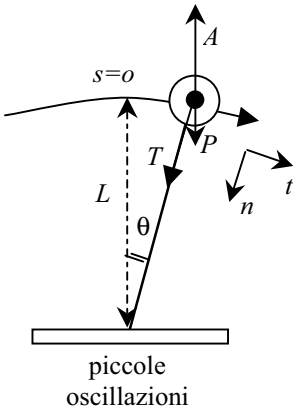
1. Il punto A si allontana dall'origine O di moto rettilineo con accelerazione $a(t)=kt$ e quindi velocità $V_A(t)=\int_0^t a(t)\cdot dt + V_o =$ $= k\int_0^t t\cdot dt = kt^2/2$ (dove $V_o=0$). La velocità assunta all'istante $t=\tau$ è quindi $V_A(\tau)=k\tau^2/2=0.1\cdot 10^2/2=5\,m/s$. Il punto B si allontana anch'esso dall'origine O ma con moto rettilineo e velocità costante $V_B=5\,m/s$ che incidentalmente coincide con la velocità di A al tempo τ. La velocità relativa con cui B vede muoversi il punto A è data dalla formula di cinematica relativa $\vec{V}_{AB}=\vec{V}_A-\vec{V}_B$ il cui modulo si ottiene semplicemente dalla seguente formula di geometria dei vettori $V_{AB}=\sqrt{\vec{V}_{AB}\bullet\vec{V}_{AB}}=\sqrt{(\vec{V}_A-\vec{V}_B)\bullet(\vec{V}_A-\vec{V}_B)}=\sqrt{V_A^2+V_B^2-2\vec{V}_A\bullet\vec{V}_B}=\sqrt{V_A^2+V_B^2-2V_AV_B\cos\theta}$ $=V_{AB}=\sqrt{5^2+5^2-2\cdot 5\cdot 5\cdot 1/2}=\sqrt{25}=5\,m/s$



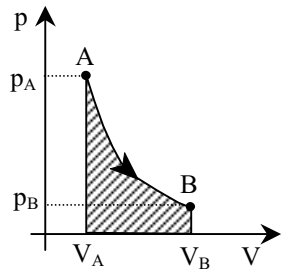
2. La massa m si trova in un sistema non inerziale ed è soggetta a *4* forze: la forza peso $P=mg$ lungo la verticale, la forza apparente $F_{app}=ma$, in direzione opposta all'accelerazione del carrello, la reazione normale R_n lungo l'asse n, e la forza di attrito statico A_s in direzione opposta all'asse t. Come sempre si applica il II principio della dinamica proiettando tutte le forze lungo i due assi n,t normale e tangenziale alla parete obliqua del carrello $\begin{matrix}\hat{n}\\ \hat{t}\end{matrix}\begin{cases}R_n - F_{app}\cos\theta - P sin\theta = ma_n = 0\\ P\cos\theta - F_{app} sin\theta - A_s = ma_t = 0\end{cases}$ ed imponendo lo stato di quiete. Dalla prima ricaviamo il valore della reazione normale $R_n = F_{app}\cos\theta + P sin\theta$, mentre dalla seconda ricaviamo l'attrito statico che deve essere inferiore a quello massimo disponibile $A_s = P\cos\theta - F_{app} sin\theta \le \mu_s R_n = \mu_s(F_{app}\cos\theta + P sin\theta)$. Risolvendo la disequazione in F_{app} ricaviamo $F_{app}(sin\theta+\mu_s\cos\theta)\ge P(\cos\theta-\mu_s sin\theta)$ da cui si ottiene il valore minimo $a_t \ge g\left(\frac{\cos\theta-\mu_s sin\theta}{sin\theta+\mu_s\cos\theta}\right)=g\frac{1-\mu_s tg\theta}{tg\theta+\mu_s}=0.66g=6.47\,m/s^2$.



3. Le forze agenti sul disco sono *4*: la forza peso $P=mg$, la forza motrice F applicate entrambe nel baricentro C, la reazione normale R_n e l'attrito statico A_s applicate entrambe nel centro istantaneo di rotazione O. Scomponendo la prima equazione cardinale lungo i due assi x,y si ottiene; lungo y) $R_n - P + F_y = ma_y = 0$; lungo x) $F_x - A_s = ma_x = ma_c$. Da quest'ultima si potrà ricavare l'accelerazione del centro di massa a_c una volta noto A_s dalla seconda equazione cardinale. Proiettando la seconda equazione cardinale sull'asse orizzontale per C si ottiene: $M_F + M_P + M_{Rn} + M_A = I_c(d\omega/dt)$ dove sono però nulli i momenti $M_F = M_P = M_{Rn} = 0$, mentre l'unico momento non nullo è quello della forza d'attrito $M_A = A_s \cdot R$ che tende a far ruotare il disco in senso orario (senso di rotazione assunto positivo). Applicando la condizione di rotolamento per la quale il centro istantaneo di rotazione O è fermo si ha $v_c = \omega R$ che derivata diventa $a_c = (d\omega/dt)\cdot R$. Combinando le espressioni si ottiene $M_A = A_s \cdot R = I_c(d\omega/dt) = I_c \cdot a_c / R$ da cui si ricava l'attrito che finalmente deve essere inserito nella 1ª equazione cardinale $F_x - A_s = F\cos\theta - \left(I_c / R^2\right)a_c = ma_c$ da cui $a_c = \dfrac{F\cos\theta}{m\left(1 + I_c / mR^2\right)} = \dfrac{6\cdot 1/2}{1+1/2} = 2\,m/s^2$



4. Il pallone di volume V è soggetto alla forza peso $P=mg=\rho_{He}Vg$ sempre diretta verso il basso e alla spinta di Archimede $A=\rho_{Aria}Vg$ sempre diretta verso l'alto. La somma di queste due forze applicate entrambe nel baricentro è equivalente ad un'unica forza differenza $F=A-P=(\rho_{Aria}-\rho_{He})Vg$ diretta verso l'alto. Il pallone è anche soggetto alla tensione della fune T che è una forza non costante che tende a riportarlo nella situazione di equilibrio. Applicando il II principio della dinamica e proiettando le forze sui due assi mobili n,t si ottiene: lungo n) $T - F\cos\theta = ma_n = mv^2/L$; lungo t) $-F\sin\theta = ma_t = m\ddot{s} = mL\ddot{\theta}$. Quest'ultima è una equazione differenziale analoga a quella del pendolo semplice che si riscrive come $\ddot{\theta} = -(F/mL)\sin\theta = -\left[\left(\dfrac{\rho_{Aria}-\rho_{He}}{\rho_{He}}\right)\dfrac{g}{L}\right]\sin\theta$ che per piccoli angoli (θ<15°) dà luogo ad oscillazioni di periodo $T_p = 2\pi\sqrt{\left(\dfrac{\rho_{He}}{\rho_{Aria}-\rho_{He}}\right)\dfrac{L}{g}} = 1.62s$



5. Il lavoro utile L_{AB} ottenuto durante l'espansione adiabatica reversibile da A a B è rappresentato dall'area tratteggiata riportata in figura sul piano di Clapeyron. Il punto A ha coordinate $p_A=10$ *Atm* e $V_A=10\ \ell$. Nel punto B la pressione vale $p_B=2$ *Atm* mentre il volume si ottiene imponendo l'equazione delle adiabatiche

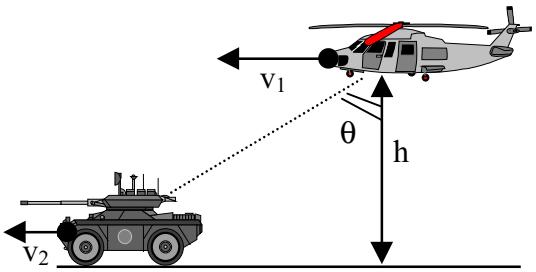
$p_A V_A^\gamma = p_B V_B^\gamma = \cos t$ da cui si ricava $V_B = (p_A / p_B)^{1/\gamma} \cdot V_A = 5^{5/7} \cdot 10 = 31.57 \ \ell$. Il lavoro utile è dato dall'integrale definito $L_{AB} = \int_{V_A}^{V_B} p(V) \cdot dV$ dove la pressione in funzione del volume si ottiene imponendo ancora l'equazione delle adiabatiche $p \cdot V^\gamma = p_A V_A^\gamma$ da cui $p(V) = \frac{p_A V_A^\gamma}{V^\gamma}$ che integrata nel volume fornisce $L_{AB} = p_A V_A^\gamma \cdot \int_{V_A}^{V_B} \frac{dV}{V^\gamma} = p_A V_A^\gamma \cdot \left[\frac{V^{1-\gamma}}{1-\gamma} \right]_{V_A}^{V_B} =$

$$= \frac{p_A V_A^\gamma}{\gamma - 1} \left(\frac{1}{V_A^{\gamma-1}} - \frac{1}{V_B^{\gamma-1}} \right) = \frac{p_A V_A}{\gamma - 1} \left(1 - \left(\frac{V_A}{V_B} \right)^{\gamma-1} \right) = \frac{100}{2/5} \left(1 - \frac{1}{3.157}^{2/5} \right) = 92.2 \ \ell Atm = 9.33 kJ .$$

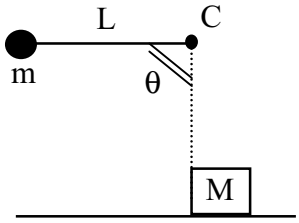
FISICA I

A.A. 2001-2002
Ingegneria Civile e Trasporti
4° appello del 24 Febbraio 2003

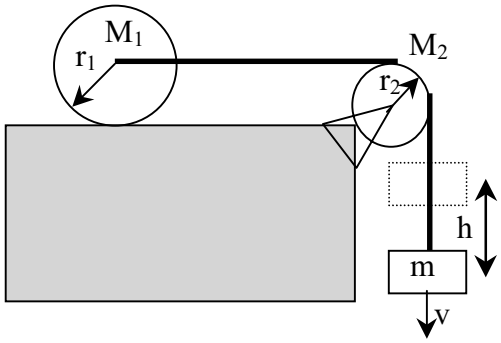
1. Un elicottero, volando a bassa quota ($h=200m$) alla velocità $v_1=200\ km/h$, lascia cadere sulla propria verticale una bomba in modo da colpire un carro armato che viaggia alla velocità $v_2=50\ km/h$. A quale angolo θ rispetto alla verticale il pilota deve vedere l'obiettivo al momento di sganciare la bomba?



2. Un pendolo semplice di lunghezza $L=1m$ e massa $m=1kg$, viene abbandonato con velocità iniziale nulla dalla posizione orizzontale mostrata in figura. Al termine della caduta la massa colpisce il blocco di massa $M=2kg$ ferma su un piano orizzontale privo di attrito. L'urto è centrale ed elastico. Calcolare la velocità acquistata dalla massa M ed il nuovo angolo di massima oscillazione del pendolo.



3. Un cilindro di massa $M_1=4kg$ e raggio r_1 è appoggiato su di un piano orizzontale. L'asse del cilindro è collegato ad una massa $m=3kg$ tramite un filo inestensibile di massa trascurabile che scorre su di una puleggia di massa $M_2=2kg$ e di raggio $r_2<r_1$ mettendola in rotazione. Supponendo il sistema inizialmente in quiete, calcolare la velocità della massa m quando è scesa di una quota $h=1m$. Si supponga che il cilindro rotoli senza strisciare sul piano.

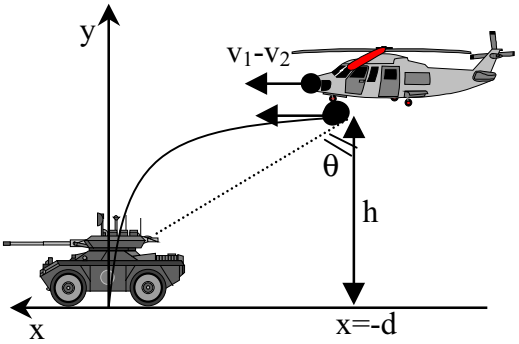


4. Per determinare la densità ρ di un solido lo si appende ad una molla ideale, dapprima in aria, risultando un allungamento $\Delta y_a=3cm$, quindi in acqua dove si misura un allungamento inferiore $\Delta y_b=2.5\ cm$. Assumendo $\rho_{H2O}=1000\ kg/m^3$ il valore per la densità dell'acqua, determinare ρ

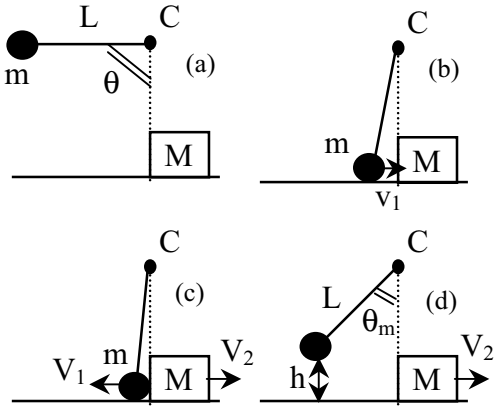
5. Un certo volume d'aria alla temperatura $T_1=20°C$ viene pompato in un pneumatico dove viene compresso ad ¼ del suo volume originario. Sapendo che la temperatura nel pneumatico sale a $T_2=40°C$ determinarne la sua pressione.

FISICA I

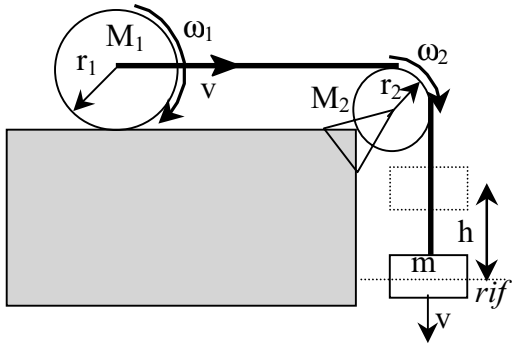
A.A. 2001-2002
Ingegneria Civile e Trasporti
Soluzioni del 24 Febbraio 2003



1. Nel sistema di riferimento di un osservatore nel carro armato l'elicottero vola alla velocità differenza v_1-v_2=150 km/h, che coincide anche con la velocità iniziale della bomba. Il moto parabolico della bomba può essere scomposto secondo gli assi $x\ \begin{cases} v_x = v_1 - v_2 \\ x(t) = (v_1 - v_2)t - d \end{cases}$ ed $y\ \begin{cases} v_y = -gt \\ y(t) = h - gt^2/2 \end{cases}$. La bomba tocca il suolo al tempo t^* che si ottiene dall'equazione $y(t^*)=0=h-g(t^*)^2/2$ da cui $t^* = \sqrt{2h/g}$. A quell'istante l'ascissa della bomba deve coincidere con quella del carro armato $x(t^*) = (v_1 - v_2)t^* - d = 0$, da cui si ricava la distanza $d = (v_1 - v_2)t^* = (v_1 - v_2)\sqrt{2h/g}$. La tangente dell'angolo di vista θ richiesto è proprio uguale al rapporto dei due cateti $\tan\theta = d/h = (v_1 - v_2)\sqrt{2/gh}$ =1.33 da cui $\theta = 53°05'$



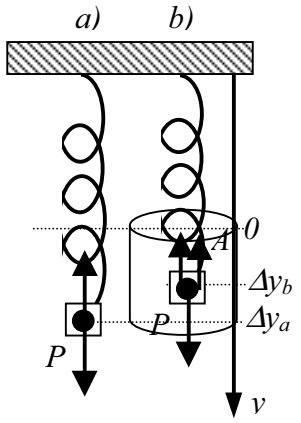
2. Il pendolo inizialmente in quiete nello stato *(a)* nel moto di caduta trasforma l'energia potenziale iniziale $U(a)=mgL$ in energia cinetica che nello stato *(b)* vale $T(b) = mv_1^2/2$, da cui il valore della velocità della massa *m* prima dell'urto risulta $v_1 = \sqrt{2gL}$. Essendo l'urto con la massa *M* normale centrale elastico le velocità appena dopo l'urto (stato(c)) si calcolano come $\begin{cases} V_1 = \left(\dfrac{m-M}{m+M}\right)v_1 = -\dfrac{v_1}{3} \\ V_2 = \left(\dfrac{2m}{m+M}\right)v_1 = \dfrac{2}{3}v_1 = \sqrt{\dfrac{8}{9}gL} = 2.95\,m/s \end{cases}$. Da queste espressioni si desume che la massa *m* inverte il suo moto e riparte con un nuovo valore di energia cinetica $T(c) = mV_1^2/2$. Quindi raggiunge lo stato di massima oscillazione (d) convertendo tutta l'energia cinetica in energia potenziale $U(d)=mgh=T(c) = mV_1^2/2$, da cui si ricava $h = V_1^2/2g = L/9$. D'altra parte $h = L(1-\cos\theta_m) = L/9$ e quindi $\cos\theta_m = 8/9$, da cui θ_m=27°16'



3. L'energia meccanica del sistema si conserva perché tutti gli attriti che intervengono sul cilindro e sulla puleggia non compiono lavoro. L'energia meccanica iniziale, quando il sistema è fermo, è costituita dalla sola energia potenziale della massa *m* posta ad altezza *h* rispetto alla quota di riferimento ($E_{m1}=mgh$). L'energia meccanica finale è invece costituita dalle 3 energie cinetiche delle masse *m*, M_2 ed M_1 ($E_{m2} = T_m + T_{M2} + T_{M1}$); il primo termine corrisponde ad una semplice traslazione verso il basso della massa *m* e si

scrive $T_m = \frac{1}{2}mv^2$; il secondo termine $T_{M2} = \frac{1}{2}I_{c2}\omega_2^2$ corrisponde ad una pura rotazione della puleggia intorno al suo centro di massa, ed essendo $I_{c2} = M_2 r_2^2/2$, e la velocità del sistema $v=\omega_2 r_2$, può scriversi con l'espressione compatta $T_{M2} = \frac{1}{4}M_2 v^2$; infine il terzo termine per il teorema di Konig si scrive come sovrapposizione di un termine traslazionale più un termine rotazionale intorno al centro di massa $T_{M1} = \frac{1}{2}M_1 v^2 + \frac{1}{2}I_{c1}\omega_1^2$. Posto $I_{c1} = M_1 r_1^2/2$ e la velocità del centro di massa $v=\omega_1 r_1$, il terzo termine si riduce a $T_{M1} = \frac{3}{4}M_1 v^2$. L'energia meccanica totale finale vale quindi $E_{m2} = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{4}M_2 v^2 + \frac{3}{4}M_1 v^2$. Imponendo la conservazione dell'energia meccanica si ricava infine il valore della velocità di traslazione del sistema $v = \sqrt{2gh\left(\frac{m}{m + M_2/2 + 3M_1/2}\right)} = \sqrt{\frac{3}{5}gh} = 2.42\,m/s$

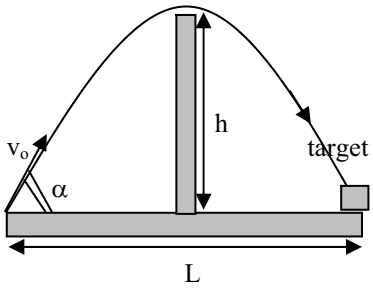
4. Nel primo esperimento la forza peso $P=mg=\rho Vg$ viene controbilanciata dalla forza elastica della molla $F_{el}=k\Delta y_a$; da ciò nasce la prima equazione $k\Delta y_a=\rho Vg$. Nel secondo esperimento entra in gioco la spinta di Archimede $A=\rho_{H20}Vg$ che si somma ad una forza elastica ridotta $F_{el}=k\Delta y_b$; da ciò nasce la seconda equazione $k\Delta y_b+\rho_{H20}Vg=\rho Vg$. Sottraendo la prima equazione dalla seconda ricaviamo $\rho_{H20}Vg=k(\Delta y_a-\Delta y_b)$ che divisa per la prima equazione permette di scrivere $\rho = \rho_{H20}\frac{\Delta y_a}{\Delta y_a - \Delta y_b} = 6\rho_{H20} = 6000 kg/m^3$



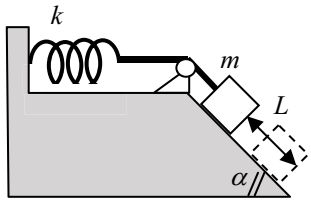
5. Consideriamo l'aria come un gas perfetto. Durante la trasformazione termodinamica il numero delle moli di gas rimane costante per cui possiamo scrivere $nR = \frac{p_1 V_1}{T_1} = \frac{p_2 V_2}{T_2}$, dove i pedici 1 e 2 si riferiscono allo stato iniziale e finale. Da questa equazione si ricava $p_2 = p_1\left(\frac{V_1}{V_2}\right)\left(\frac{T_2}{T_1}\right)$, dove la pressione iniziale vale $p_1=p_{Atm}$, le temperature assolute sono $T_1=293,15\ K$, e $T_2=313,15\ K$, mentre il rapporto dei volumi $V_1/V_2=4$. Da ciò si ottiene $p_2 = 4\cdot p_{Atm}\left(\frac{313,15}{293,15}\right) = 4.27\text{Atm} = 4.33*10^5$ Pa.

Università di Roma "La Sapienza"
Facoltà di Ingegneria
FISICA
A.A. 2004-2005
Ingegneria Gestionale (M-Z)
Esonero del 12 Aprile 2005

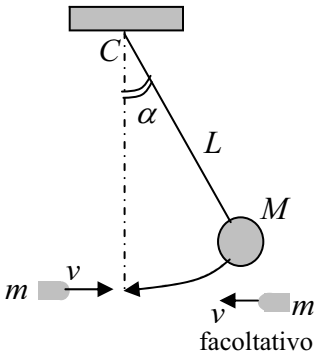
PROBLEMI



1. Una esercitazione di tiro prevede il lancio di proiettili in modo da colpire un bersaglio distante L=200m. Il bersaglio non è in visibilità diretta a causa di uno schermo alto h=100m e posto a metà distanza L/2. Determinare l'alzo minimo α richiesto per oltrepassare lo schermo e colpire il bersaglio. Calcolare la relativa velocità iniziale v_o.



2. Un blocco di massa m=2kg situato su di un piano inclinato scabro di inclinazione α=40° rispetto all'orizzontale è connesso ad una molla di massa trascurabile avente una costante elastica k=100N/m. Il blocco inizialmente in quiete è lasciato libero con la molla a riposo. Il blocco scende di L=10cm lungo un piano inclinato prima di fermarsi. Trovare il coefficiente di attrito dinamico tra il blocco ed il piano inclinato.



3. Un sacco di massa M=3kg è appeso ad un cardine C tramite un filo di lunghezza L=50cm, inestensibile e di massa trascurabile. Il sacco, inizialmente inclinato di un angolo α=30° rispetto alla verticale, viene lasciato oscillare liberamente. Quando il sacco raggiunge la posizione verticale, esso impatta con un proiettile di massa m=20g. A seguito dell'urto perfettamente anelastico il sacco si ferma istantaneamente e rimane fermo lungo la verticale. Determinare la velocità del proiettile prima dell'urto. Facoltativo: studiare anche il caso in cui lo stesso proiettile, dotato di velocità opposta al caso precedente, colpisca il sacco nello stesso punto. Determinare in questo nuovo caso l'angolo massimo raggiunto β dalle oscillazioni susseguenti all'urto.

QUESITI TEORICI

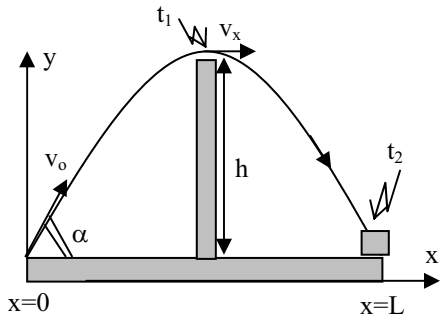
1. Discutere il modulo e la direzione del vettore accelerazione nel moto circolare uniforme. Come esempio di tale moto calcolare l'accelerazione di un punto materiale che descriva una circonferenza della lunghezza di 1 metro in 10 secondi.

2. Descrivere e dimostrare il teorema del lavoro e dell'energia cinetica. Calcolare il lavoro compiuto da tutte le forze su di un punto materiale di massa m=2kg che varia la velocità dal valore iniziale $\vec{v}_1 = 4\hat{i} + 2\hat{j} - 3\hat{k}$ al valore finale $\vec{v}_2 = 3\hat{i} - 3\hat{j} - 2\hat{k}$.

3. Derivare l'espressione della seconda equazione cardinale per i sistemi di punti.

Università di Roma "La Sapienza"
Facoltà di Ingegneria
FISICA
A.A. 2004-2005
Ingegneria Gestionale (M-Z)
Soluzioni esonero del 12 Aprile 2005

1. Equazioni del moto:



asse x $\begin{cases} x = v_o t \cos\alpha \\ v_x = v_o \cos\alpha \\ a_x = 0 \end{cases}$ asse y $\begin{cases} y = v_o t \sin\alpha - gt^2/2 \\ v_y = v_o \sin\alpha - gt \\ a_y = -g \end{cases}$

Il tempo t_1 al quale il proiettile si trova al vertice della parabola si ottiene annullando la componente verticale della velocità v_y

$v_y(t_1) = v_o \sin\alpha - gt_1 = 0$ da cui $t_1 = v_o \sin\alpha / g$

la quota massima raggiunta a quell'istante deve essere non inferiore all'altezza h dello schermo

$$y(t_1) = \frac{v_o^2 \sin^2\alpha}{2g} \geq h \qquad (1)$$

Il tempo t_2 al quale il proiettile colpisce il bersaglio è evidentemente doppio rispetto a t_1. Un modo equivalente per dimostrarlo è imporre $y(t_2)=0$ così da ottenere $t_2 = 2v_o \sin\alpha / g$.
La gittata del proiettile diviene quindi

$$x(t_2) = \frac{2v_o^2 \sin\alpha \cos\alpha}{g} = L \qquad (2)$$

Facendo il rapporto fra le equazioni (1) e (2) si ottiene una espressione nella sola α

$$\frac{y(t_1)}{x(t_2)} = \frac{\sin\alpha}{4\cos\alpha} \geq \frac{h}{L}$$

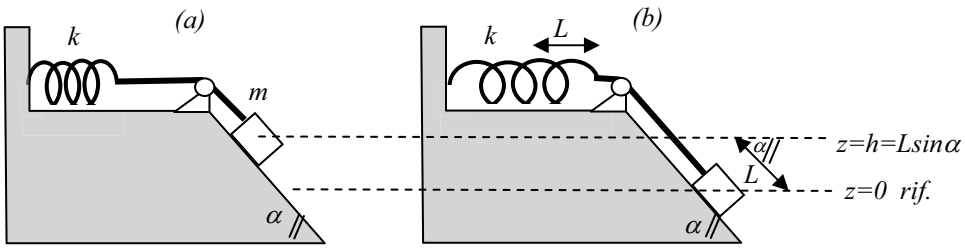
da cui si ricava l'alzo minimo

$$\alpha \geq \alpha_{\min} = \arctan(4h/L) = \mathbf{63° \ 26'}$$

che sostituito nella Eq.(2) restituisce la velocità iniziale (minima)

$$v_o = \sqrt{gL/\sin(2\alpha_{\min})} = \mathbf{49.5 \ m/s}$$

2



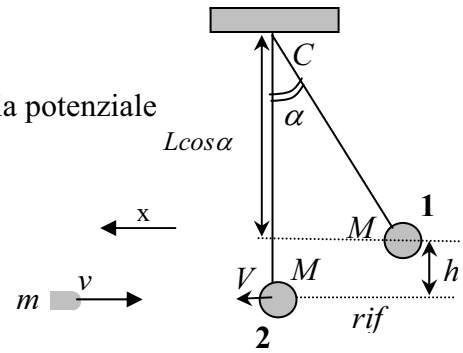
Energia cinetica nello stato (a) $T_a=0$
Energia potenziale nello stato (a) $U_a=mgh=mgL\sin\alpha$
Energia meccanica nello stato (a) $E_{ma}=mgL\sin\alpha$

Energia cinetica nello stato (b) $T_b=0$
Energia potenziale nello stato (b) $U_b=kL^2/2$
Energia meccanica nello stato (b) $E_{mb}=kL^2/2$

Lavoro delle forze non conservative (attrito) $L_{A_d} = \int_a^b \vec{A}_d \cdot d\vec{s} = -A_d L = -\mu_d mgL\cos\alpha$

Essendo $L_{A_d} = E_{mb} - E_{ma}$ si ottiene $-\mu_d mgL\cos\alpha = kL^2/2 - mgL\sin\alpha$
da cui si ricava il coefficiente di attrito dinamico

$$\mu_d = tg\alpha - \frac{kL}{2mg\cos\alpha} = \mathbf{0.506}$$



3. Il sacco lasciato cadere dalla posizione (1) ha inizialmente solo energia potenziale

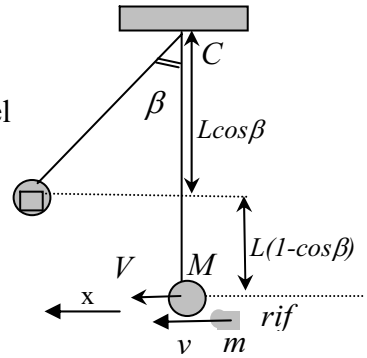
$E_{m1}=Mgh=MgL(1-\cos\alpha)$

Quando raggiunge la posizione di minima quota (2) avrà trasformato energia potenziale interamente in energia cinetica

$E_{m2}=MV^2/2$

Dalla conservazione dell'energia meccanica si ricava la velocità $V = \sqrt{2gL(1-\cos\alpha)}$
La quantità di moto (lungo x) del sistema proiettile+sacco prima dell'urto è $p_x = MV - mv$
Il sistema dopo l'urto rimane in quiete. La quantità di moto è quindi $p_x = 0$.
Dalla conservazione della quantità di moto si ottiene la velocità del proiettile

$$v = \frac{M}{m}\sqrt{2gL(1-\cos\alpha)} = \mathbf{171.9\ m/s}$$



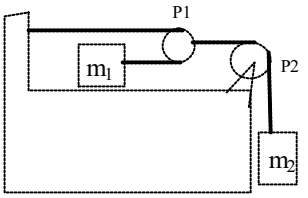
Facoltativo: se il proiettile è diretto in senso opposto la quantità di moto del sistema prima dell'urto è $p_x = MV + mv = 2MV$ (tenuto conto che mv=MV)
Questa quantità si conserva dopo l'urto $p_x = (M+m)V_c$
Imponendo l'uguaglianza dei termini si ottiene la velocità del c.d.m.
$V_c = V\left(\frac{2M}{M+m}\right)$ che è legata al massimo angolo β dalla $V_c = \sqrt{2gL(1-\cos\beta)}$

Combinando le equazioni si ottiene $\cos\beta = 1 - \left(\frac{2M}{M+m}\right)^2(1-\cos\alpha)$ da cui **β=61°53'**

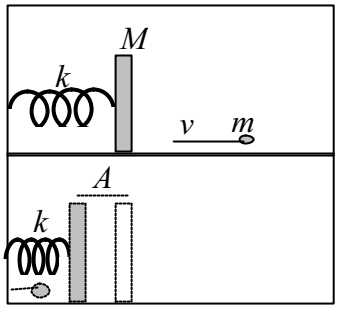
FISICA

A.A. 2004-2005
Ingegneria Gestionale Canale M-Z
1° appello del 25 Giugno 2005

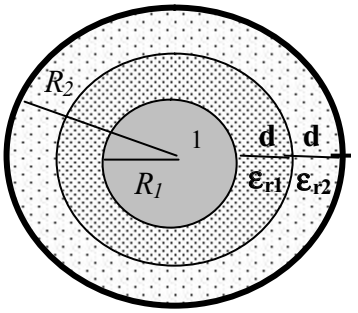
PROBLEMI



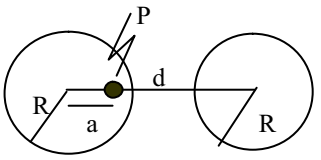
1. Una massa m_1=10kg posta su di un piano liscio orizzontale è collegata ad una massa m_2=3kg attraverso una puleggia mobile di massa trascurabile P_1 ed una puleggia fissa P_2 anch'essa di massa trascurabile. Se indichiamo con a_1 ed a_2 le due accelerazioni, determinare la relazione fra le due accelerazioni. Esprimere anche le tensioni di tutte le funi.



2. Una pallottola di m=10g, con velocità iniziale di v=300m/s attraversa completamente un blocco di massa M=1kg, come mostrato in figura. Il blocco, inizialmente in quiete su una piattaforma orizzontale, è connesso ad una molla di costante elastica k=500 N/m. Assumendo che il blocco proceda al massimo di un tratto di lunghezza A=4cm dopo l'impatto calcolare la velocità di uscita del proiettile e l'energia dissipata nell'urto.



3. Un condensatore è costituito da due conduttori sferici concentrici di raggi R_1=5mm e R_2=10mm. La parte interna è interamente riempita da due gusci dielettrici sferici concentrici di uguale spessore d=2.5mm e di costanti dielettriche relative e_{r1}=2.5 e e_{r2}=4. Conoscendo la differenza di potenziale ai capi del condensatore V_1-V_2=100V, determinare la carica libera Q_{lib} sui conduttori e la carica di polarizzazione Q_{pol} presente all'interfaccia fra i due dielettrici. Facoltativo: ripetere l'esercizio invertendo i due dielettrici, mantenendo la stessa differenza di potenziale.



4. Due conduttori cilindrici paralleli, infinitamente lunghi, di stesso raggio R=5cm sono disposti alla distanza d=20cm. Sapendo che il primo è percorso da una densità di corrente uniforme j_1=10A/m^2 e sapendo che non si registra alcun campo magnetico nel punto P posto a distanza a=3cm dall'asse del primo conduttore, determinare la densità di corrente j_2, supposta uniforme, che deve scorrere nel secondo conduttore.

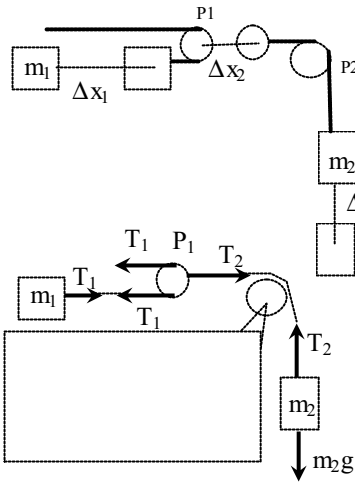
QUESITI TEORICI

1. Calcolate il valore minimo del coefficiente di attrito statico affinché un corpo giacente su un piano inclinato di un angolo α rispetto all'orizzontale rimanga in quiete.
2. Dimostrate il teorema di Koenig.
3. Illustrate le varie espressioni dell'energia elettrostatica dimostrandone l'equivalenza.
4. Dimostrate la legge di circuitazione di Ampere.

FISICA

A.A. 2004-2005
Ingegneria Gestionale Canale M-Z
1° appello del 25 Giugno 2005

1. Ad uno spostamento Δx_2 della massa m_2 corrisponde un ugual spostamento della puleggia P_1 ed uno spostamento doppio $\Delta x_1 = 2\Delta x_2$ della massa m_1. Derivando gli spostamenti nel tempo si ottengono facilmente **la relazione fra le accelerazioni**



$$a_1 = 2a_2$$

2° principio sulla massa m_2

$$m_2 g - T_2 = m_2 a_2$$

2° principio sulla massa m_1

$$T_1 = m_1 a_1$$

Equilibrio fra le tensioni applicate alla puleggia P_1

$$T_2 = 2T_1$$

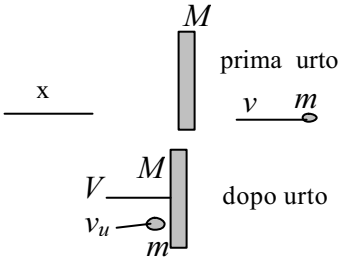
da cui si derivano le quantità:

$$a_2 = g\frac{m_2}{m_2 + 4m_1} = \mathbf{0.684\ m/s^2} \qquad a_1 = \mathbf{1.367\ m/s^2}$$

$$T_2 = \mathbf{27.3\ N} \qquad T_1 = \mathbf{13.7\ N}$$

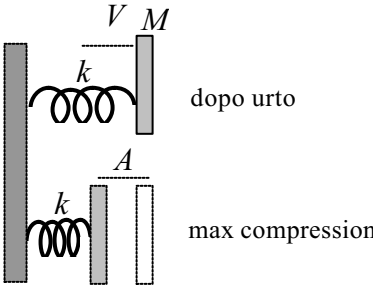
2. Il problema richiede l'analisi separata di due fenomeni fisici consecutivi:
a) il processo d'urto anelastico tra il proiettile ed il blocco in cui viene conservata la quantità di moto del sistema.
b) il susseguente fenomeno di compressione della molla in cui, in assenza di attriti, viene conservata l'energia meccanica.

a) **Conservazione della quantità di moto lungo l'asse x**.
v: velocità proiettile prima dell'urto
v_u: velocità proiettile dopo l'urto
V: velocità del blocco dopo l'urto



$$mv = mv_u + MV \qquad \text{da cui} \qquad v_u = v - \left(\frac{M}{m}\right)V$$

b) **Conservazione dell'energia meccanica**



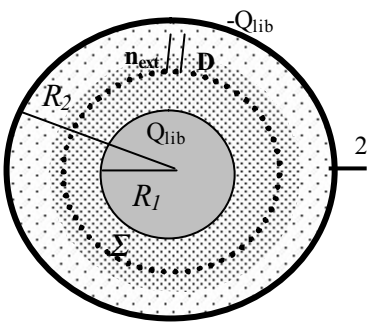
$$\frac{1}{2}MV^2 = \frac{1}{2}kA^2 \qquad \text{da cui} \qquad V = A\sqrt{k/M}$$

Combinando le espressioni si ottiene

$$v_u = v - A\frac{\sqrt{kM}}{m} = 210.6\ \text{m/s}$$

$$E_d = \frac{1}{2}mv^2 - \left(\frac{1}{2}kA^2 + \frac{1}{2}mv_u^2\right) = 228 \text{ J}$$

3. Vettore spostamento elettrico fra le armature

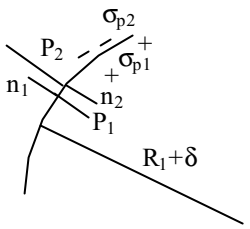


Applicando la legge di Gauss sulla superficie interna Σ di raggio $R_1<r<R_2$

$$\Phi_\Sigma\left(\vec{D}\right) = \int_\Sigma \vec{D} \bullet \hat{n}_{ext} dS = D\left(4\pi r^2\right) = Q_{lib} \qquad \text{da cui} \qquad D(r) = \frac{Q_{lib}}{4\pi r^2}$$

Il campo elettrico nei due dielettrici

$$\begin{cases} R_1 \le r \le R_1 + d \\ R_1 + d \le r \le R_2 \end{cases} \quad \begin{aligned} E_1 &= \frac{D}{\varepsilon_o \varepsilon_{r1}} = \frac{Q_{lib}}{4\pi\varepsilon_o\varepsilon_{r1}r^2} \\ E_2 &= \frac{D}{\varepsilon_o \varepsilon_{r2}} = \frac{Q_{lib}}{4\pi\varepsilon_o\varepsilon_{r2}r^2} \end{aligned}$$



La differenza di potenziale fra le due armature

$$V_1 - V_2 = \int_{R_1}^{R_2} E dr = \int_{R_1}^{R_1+d} E_1 dr + \int_{R_1+d}^{R_2} E_2 dr = \frac{Q_{lib}}{4\pi\varepsilon_o}\left[\frac{1}{\varepsilon_{r1}}\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_1+\delta}\right) + \frac{1}{\varepsilon_{r2}}\left(\frac{1}{R_1+\delta} - \frac{1}{R_2}\right)\right]$$

$$= \frac{Q_{lib}}{4\pi\varepsilon_o}\left[\left(\frac{1}{\varepsilon_{r1}R_1} + \frac{1}{\varepsilon_{r2}R_2}\right)\left(\frac{\delta}{R_1+\delta}\right)\right]$$

La **carica libera** quindi vale $Q_{lib} = \dfrac{4\pi\varepsilon_o\left(V_1 - V_2\right)}{\left(\dfrac{1}{\varepsilon_{r1}R_1} + \dfrac{1}{\varepsilon_{r2}R_2}\right)}\left(1 + \dfrac{R_1}{\delta}\right) = \mathbf{317\ pC}$

Il vettore intensità di polarizzazione vale

$$\begin{cases} R_1 \le r \le R_1 + d \\ R_1 + d \le r \le R_2 \end{cases} \quad \begin{aligned} P_1 &= \left(\frac{\varepsilon_{r1} - 1}{\varepsilon_{r1}}\right)D = \left(\frac{\varepsilon_{r1} - 1}{\varepsilon_{r1}}\right)\frac{Q_{lib}}{4\pi r^2} \\ P_2 &= \left(\frac{\varepsilon_{r2} - 1}{\varepsilon_{r2}}\right)D = \left(\frac{\varepsilon_{r2} - 1}{\varepsilon_{r2}}\right)\frac{Q_{lib}}{4\pi r^2} \end{aligned}$$

La densità di carica elettrica all'interfaccia $r=R_1+\delta$

$$\sigma_{pol} = \sigma_{pol1} + \sigma_{pol2} = \vec{P}_1 \cdot \hat{n}_1 + \vec{P}_2 \cdot \hat{n}_2 = P_1 - P_2$$

che integrata sulla superficie dell'interfaccia sferica

$$Q_{pol} = Q_{lib}\left(\frac{\varepsilon_{r1} - \varepsilon_{r2}}{\varepsilon_{r1}\varepsilon_{r2}}\right) = -0.15 \quad Q_{lib} = \mathbf{-47.6\ pC}$$

Nel caso di inversione dei dielettrici

Q_{lib}=370 pC, Q_{pol}=55.6 pC

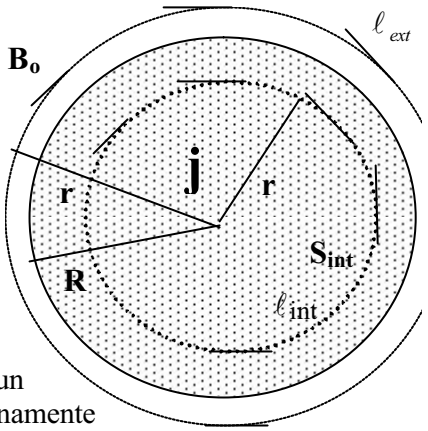
4. Il calcolo dell'induzione magnetica B_o per un singolo conduttore si ottiene a partire dalla legge di circuitazione di Ampere applicato ad una circonferenza ℓ di raggio r concentrica al cavo.

Per punti interni al cavo *r<R*

$$\oint_{\ell\,\mathrm{int}} \vec{B}_o \cdot d\vec{l} = B_o(2\pi r) = \mu_o \int_{S\mathrm{int}} \vec{j} \cdot \hat{n} dS = \mu_o j \pi r^2 \quad \text{da cui} \quad B_o(r) = \frac{\mu_o j r}{2}$$

Per punti esterni al cavo *r>R*

$$\oint_{\ell\,ext} \vec{B}_o \cdot d\vec{l} = B_o(2\pi r) = \mu_o \int_{S} \vec{j} \cdot \hat{n} dS = \mu_o j \pi R^2 \quad \text{da cui} \quad B_o(r) = \frac{\mu_o j R^2}{2r}$$

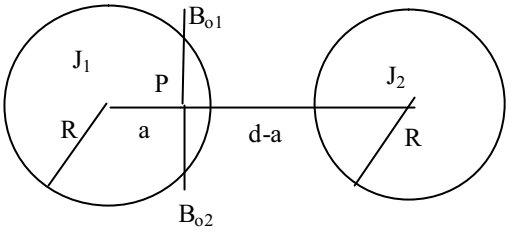


Il vettore induzione magnetica nel punto P risulta quindi dalla sovrapposizione di un vettore B_{o1} prodotto internamente al primo cavo e da un vettore B_{o2} prodotto esternamente al secondo cavo.

$$B_o = B_{o1} - B_{o2} = \frac{\mu_o j_1 a}{2} - \frac{\mu_o j_2 R^2}{2(d-a)}$$

Dalla condizione di annullamento della somma dei due si ottiene

$$j_2 = j_1 \frac{a(d-a)}{R^2} = 2.04 j_1 = 20.4 \text{ A/m}^2$$



5. Prima dell'apertura dell'interruttore per *t<0* il circuito è in condizione stazionaria, il condensatore è carico e si comporta come un circuito aperto. La corrente uscente dal generatore attraversa il parallelo $R_5=R_1//R_3$

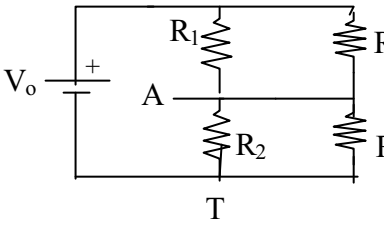
$R_5=R_1//R_3=\dfrac{R_1 \cdot R_3}{R_1+R_3}=1.33$ kΩ e successivamente (in serie) il parallelo

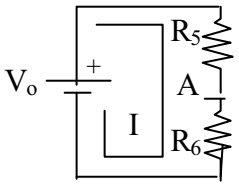
$R_6=R_2//R_4=\dfrac{R_2 \cdot R_4}{R_2+R_4}=2.4$ kΩ. La corrente di maglia è quindi $I=\dfrac{V_o}{R_5+R_6}$

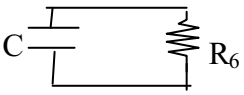
ed il condensatore si trova alla differenza di potenziale anteriore all'apertura

$$\Delta V_c(0) = V_A - V_T = IR_6 = V_o \frac{R_6}{R_5+R_6} = 5.14 \text{ V.}$$

All'apertura il generatore viene disattivato ed il condensatore si scarica solo sul parallelo $R_6=R_2//R_4$. La differenza di potenziale ai capi del condensatore segue per t>0 la legge $\Delta V_c(t) = \Delta V_c(0)\exp[-t/\tau]$ con $\tau = R_6 C = 2.4ms$ ed il tempo t^* si trova dalla relazione $t^* = \tau \ln(\Delta V_c(0)/\Delta V^*) = \tau \ln(5.14) = 3.93 \text{ ms}$.







FISICA

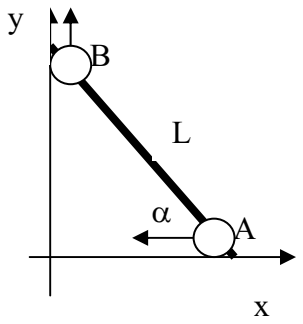
A.A. 2006-2007
Ingegneria Gestionale
1°prova del 24 Gennaio 2007

Lo studente descriva il procedimento e la soluzione degli esercizi proposti. Gli elaborati verranno ritirati Lunedì 29 Gennaio e saranno valutati ai fini del superamento dell'esame finale.

1. Un aereo atterra ad una velocità orizzontale di *400 km/h* e, per fermarsi, è costretto a decelerare bruscamente con accelerazione uniforme di valore assoluto $a_o=5m/s^2$. (a) Dall'istante in cui esso tocca il suolo, qual è l'intervallo di tempo necessario per fermarsi? (b) Può questo aereo atterrare su una piccola isola tropicale, il cui aeroporto ha una sola pista lunga *1.5Km*?

2. Un'auto ed un treno si muovono lungo percorsi paralleli alla medesima velocità v_o=120 *km/h*. Alla comparsa del segnale rosso di un semaforo, la macchina frena venendo così sottoposta ad una decelerazione uniforme di valore assoluto $a_o=2.5\ m/s^2$ fino all'arresto. L'auto rimane ferma per 45 secondi, quindi accelera uniformemente con $a_o=2.5\ m/s^2$ fino a riacquistare la velocità $v_o=120\ km/h$. Assumendo che il treno abbia sempre mantenuto la velocità v_o=120 *km/h* si determini a che distanza rimarranno definitivamente auto e treno dopo che l'auto raggiunge nuovamente la velocità di crociera v_o?

3. Due oggetti *A* e *B* sono collegati ad un'asta rigida che ha una lunghezza *L*. Gli oggetti sono vincolati a muoversi lungo la guida perpendicolare come mostrato in figura. Se A viene spostato verso sinistra con una velocità costante v_A, qual'è la corrispondente velocità di *B* quando $\alpha=50°$?



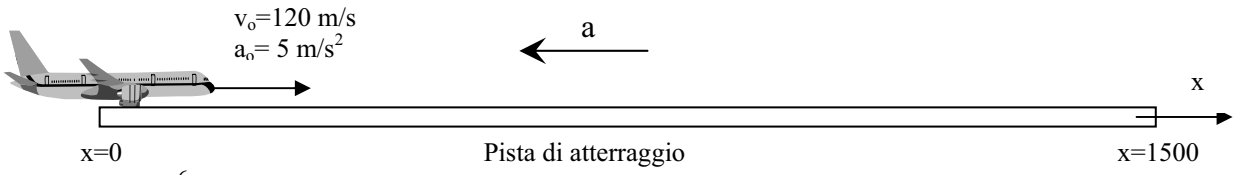
4. In un bar, un avventore lancia lungo il banco un boccale vuoto di birra perché venga riempito nuovamente. Il barista, momentaneamente distratto, non vede il boccale che cade al suolo ad una distanza di 1.4 m dalla base del banco. Se l'altezza del banco è di 0.8 m, calcolare (a) la velocità del boccale al momento del distacco dal banco, (b) la direzione della velocità (rispetto all'orizzontale) del boccale nell'istante precedente all'impatto con il suolo.

5. Un portiere rimette dal fondo il pallone con una velocità iniziale di $v_o=30m/s$ ed inclinazione di *20°* rispetto all'orizzontale. A quell'istante un giocatore avversario dista *d=20m* dalla porta e vede venirsi incontro la palla. Con quale accelerazione, supposta costante, dovrà muoversi tale giocatore per intercettare la palla al volo con il piede?

FISICA

A.A. 2006-2007
Ingegneria Gestionale
Soluzioni 1°prova

1. Il moto è rettilineo uniformemente ritardato con accelerazione costante negativa $a(t)=-a_o$ di valore assoluto $a_o=5m/s^2$. Il velivolo tocca il suolo all'istante iniziale $t=0$, in un punto che facciamo coincidere con l'origine del sistema di riferimento $x(t=0)=x_o=0$ con una velocità iniziale positiva $v(t=0)=v_o=400\,km/h$. Le equazioni della cinematica si ottengono integrando l'espressione dell'accelerazione come segue



$$\begin{cases} a(t) = -a_o \\ v(t) = v_o - a_o \cdot t \\ x(t) = x_o + v_o \cdot t - \dfrac{a_o}{2} \cdot t^2 \end{cases} \quad \text{con i seguenti valori iniziali} \quad \begin{cases} a_o = 5\,m/s^2 \\ v_o = 111\,m/s \\ x_o = 0 \end{cases}$$

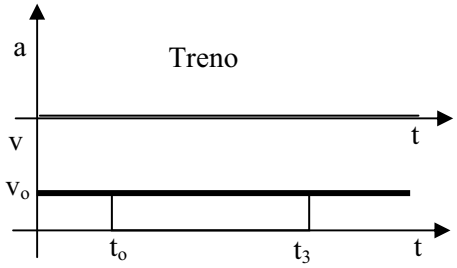
Il tempo di arresto t_{fin} si trova annullando l'equazione della velocità $v(t_{fin})=v_o - a_o t_{fin}=0$ da cui si ricava $t_{fin} = v_o/a_o = 111/5 = 22.2s$. Dall'equazione dello spazio si ricava lo spazio di frenata come $x(t_{fin}) = v_o t_{fin} - a_o t_{fin}^2/2 = v_o^2/a_o - v_o^2/2a_o = v_o^2/2a_o = 1235m$. Essendo la pista leggermente più lunga (1500m) dello spazio di frenata tale aereo potrebbe riuscire ad atterrare!

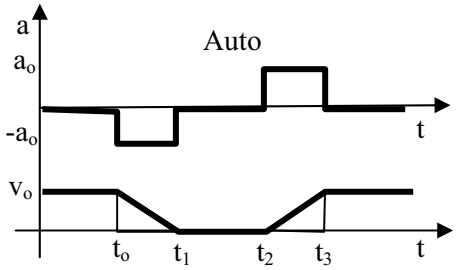
2. Il moto del treno è rettilineo uniforme mentre quello dell'autovettura è rettilineo vario. Se si indicano con t_o, t_1, t_2, t_3 gli istanti di tempo in cui l'auto rispettivamente comincia a decelerare (t_o), si ferma (t_1), comincia ad accelerare (t_2), riprende il moto rettilineo uniforme (t_3), si possono tracciare i grafici di accelerazione e velocità e scrivere le relazioni cinematiche

$$\begin{cases} \forall t & v_{treno}(t) = v_o \\ t < t_o, & v_{auto}(t) = v_o \\ t_o \le t < t_1, & v_{auto}(t) = v_o - a_o(t - t_o) \\ t_1 \le t < t_2, & v_{auto}(t) = 0 \\ t_2 \le t < t_3, & v_{auto}(t) = a_0(t - t_2) \\ t \ge t_3, & v_{auto}(t) = v_o \end{cases}$$

DATI

$$\begin{cases} v_o = 33.3\,m/s \\ a_o = 2.5\,m/s \\ \Delta T = t_2 - t_1 = 45s \end{cases}$$



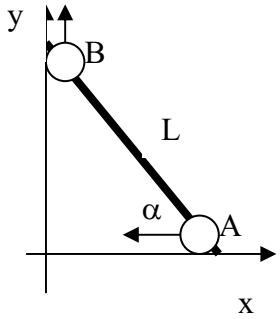


Gli intervalli di tempo si ricavano come segue:
l'intervallo di frenata t_1-t_o: dall'annullamento della velocità dell'auto in t_1 si ha $v(t_1)=v_o-a_o*(t_1-t_o)=0$ da cui $t_1 - t_o = v_o/a_o$
l'intervallo in cui accelera t_3-t_2: dal raggiungimento della velocità di regime in t_3 si ha $v(t_3)=v_o=a_o*(t_3-t_2)=0$ da cui $t_3 - t_2 = v_o/a_o$. Lo spazio percorso nell'intervallo da t_o a t_3, si ottiene dal grafico delle velocità misurando l'area tratteggiata.

L'auto percorre uno spazio pari ai due triangoli $\Delta s_{auto} = \frac{1}{2}(t_1 - t_o)v_o + \frac{1}{2}(t_3 - t_2)v_o = \frac{v_0^2}{a_o} = 444m$

Nel frattempo il treno ha percorso lo spazio pari al rettangolo tratteggiato $\Delta s_{treno} = (t_3 - t_0)v_o = \left(\frac{v_o}{a_0} + \Delta T + \frac{v_0}{a_0}\right)v_0 = 2389m$. La differenza degli spazi percorsi *è quindi* $x_{treno}(t_3) - x_{auto}(t_3) = 1944m$

3. Il moto dei due oggetti A e B è vincolato dall'asta rigida che li collega. In particolare i due moti rettilinei avvengono sugli assi x ed y con equazioni orarie

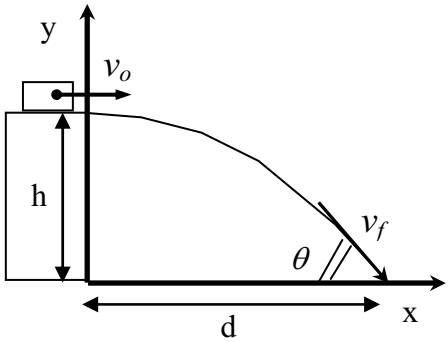


$$\begin{aligned} x(t) &= x_o - v_o t \\ y(t) &= \sqrt{L^2 - x^2(t)} \end{aligned}$$ da cui le velocità $$\begin{aligned} v_x(t) &= \dot{x}(t) = -v_o \\ v_y(t) &= \dot{y}(t) = \frac{-1}{2\sqrt{L^2 - x^2(t)}}\frac{dx^2(t)}{dt} \end{aligned}$$

svolgendo la derivata si ottiene $v_y(t) = -\frac{2}{2}\frac{x(t)\cdot\dot{x}(t)}{\sqrt{L^2 - x^2(t)}} = -\frac{x(t)}{y(t)}v_x(t) = -\frac{v_x(t)}{tg(\alpha(t))}$

che nel nostro caso, essendo $v_x=-v_o$, $t=0$, $\alpha(0)=50°$, dà luogo a $v_y(0) = 0.84v_o$.

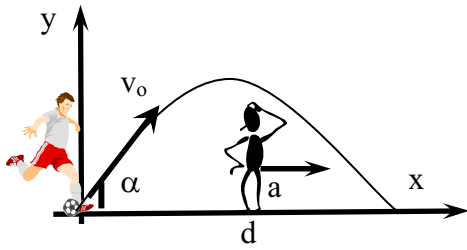
4. Il moto del boccale è di tipo parabolico. Fissando gli assi *x* ed *y* come in figura i due moti componenti sono rispettivamente rettilineo uniforme (x) ed uniformemente accelerato (y)



$$\begin{cases} x(t) = v_o t \\ v_x = v_o \\ a_x = 0 \end{cases} \text{ ed } \begin{cases} y(t) = h - gt^2/2 \\ v_y(t) = -gt \\ a_y = -g \end{cases}$$

Il tempo di volo t^* si ottiene dalla $y(t)$ imponendo $y(t^*)=0$ da cui $t^* = \sqrt{2h/g}$, mentre la distanza d si ottiene dalla $x(t)$ imponendo $x(t^*) = d = v_o t^*$ dalla quale si ricava la velocità $v_o = d/t^* = d\sqrt{g/2h} = 3.46\,m/s$. Per determinare la velocità finale dobbiamo calcolare le sue componenti al tempo t^* che sono $\begin{cases} v_x = v_o = d\sqrt{g/2h} \\ v_y(t^*) = -gt^* = -\sqrt{2hg} \end{cases}$ (si noti come $v_y<0$ vista l'orientazione dell'asse. L'angolo di caduta è $\theta = \arctan\left(\frac{|v_{y,fin}|}{v_x}\right) = \arctan\left(\frac{2h}{d}\right) = 0.85rad \equiv 48°49'$

5. Il moto della palla è parabolico a causa dell'accelerazione di gravità. Le equazioni del moto sono $\begin{cases} a_y = -g \\ a_x = 0 \end{cases}$ da cui le velocità $\begin{cases} v_y = v_o sin\alpha - gt \\ v_x = v_o \cos\alpha \end{cases}$ ed i moti componenti $\begin{cases} y_p = v_o t sin\alpha - gt^2/2 \\ x_p = v_o t \cos\alpha \end{cases}$ (la palla all'istante iniziale è



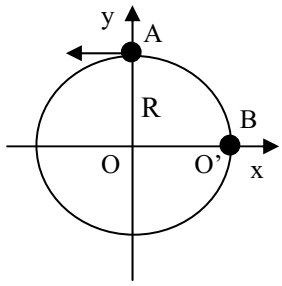
nell'origine). Il primo dato importante da ricavare è dove la palla andrà a finire (gittata) e quanto tempo impiega per arrivarci (t_{fin}).
L'informazione sul tempo t_{fin} si ricava imponendo y=0 nell'ultima equazione. L'equazione corrispondente di 2° grado ammette due soluzioni $\begin{cases} t_1 = 0 \\ t_2 = t_{fin} = \dfrac{2v_o \sin\alpha}{g} = 2.09 \quad s \end{cases}$ di cui è accettabile solo la seconda. La gittata è l'ascissa della palla nell'istante t_{fin} cioè $x_p(t_{fin}) = v_o t_{fin} \cos\alpha = 2v_o^2 \sin\alpha \cos\alpha / g = 59.0$ m. Il giocatore non appena vede come è stata lanciata la palla in *t=0*, prevedendo di essere scavalcato (d<59.0), si muove immediatamente di conseguenza nella direzione x con velocità iniziale nulla ed accelerazione uniforme *a*. Il moto del giocatore uniformemente accelerato è descritto da $x_g(t) = d + at^2/2$. Imponendo la coincidenza delle ascisse del giocatore e della palla al tempo t_{fin}, $x_g(t_{fin}) = x_p(t_{fin})$, si ottiene una accelerazione $a = 2\dfrac{x_p(t_{fin}) - d}{t_{fin}^{\ 2}} = 17.86\, m/s^2$ irrealistica anche per i migliori atleti.

FISICA I

A.A. 2006-2007
Ingegneria Gestionale
2°prova del 31 Gennaio 2007

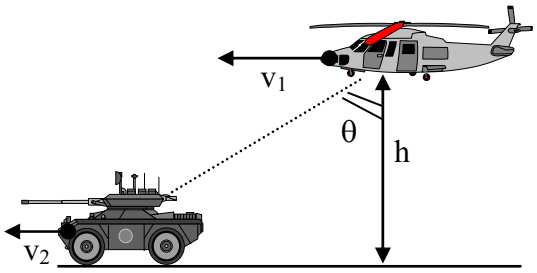
Lo studente descriva il procedimento e la soluzione degli esercizi proposti. Gli elaborati verranno ritirati Lunedì 5 Febbraio e saranno valutati ai fini del superamento dell'esame finale.

1. La macchina A si muove con velocità costante v_A=100Km/h su di una traiettoria circolare di raggio R=15Km. La macchina B, vincolata a percorrere la stessa traiettoria nella stessa direzione, parte da ferma con l'intento di raggiungere la macchina A. Nella prima fase B procede mantenendo l'accelerazione tangenziale costante a_t=1m/s^2 per 1Km raggiungendo così una velocità di crociera accettabile. Nella seconda fase B procede a velocità costante. Dopo quanto tempo B raggiunge A. Determinare anche i valori delle due accelerazioni normali.



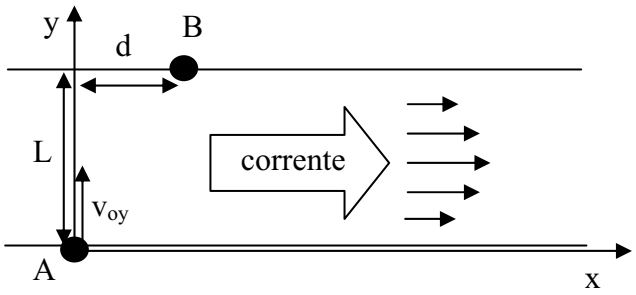
2. Un punto materiale descrive un moto armonico lungo l'asse delle x, oscillando tra x_{min}=3cm ed x_{max}=9cm. Sapendo che la posizione e la velocità all'istante iniziale sono rispettivamente x(t=0)=4cm, v(t=0)=1m/s determinare la posizione e la velocità dopo un tempo t_1=50ms.

3. Un elicottero, volando a bassa quota (*h=200m*) alla velocità v_1*=200 km/h,* lascia cadere sulla propria verticale una bomba in modo da colpire un carro armato che viaggia alla velocità v_2*=50 km/h.* A quale angolo θ rispetto alla verticale il pilota deve vedere l'obiettivo al momento di sganciare la bomba? Con quale velocità ed inclinazione la bomba arriva sul carro nel sistema di riferimento solidale al carro?



4. Un proiettile viene lanciato con velocità iniziale v_o*=200m/s* dalla sommità di un colle che domina una vallata pianeggiante. Si assuma *h=200m* l'altezza del colle rispetto alla vallata. Il lancio prevede che il proiettile cada nella vallata. Determinare l'alzo migliore (rispetto all'orizzontale) che garantisce la massima gittata (distanza dalla base della montagna). Determinare il raggio di curvatura della traiettoria dopo *t=1s*.

5. Dovendo attraversare un fiume largo *L=50m* e puntando ortogonalmente alla riva opposta, si ha che la velocità dell'acqua è data da $v_x(y) = ky(L-y)$ con $k=5\cdot 10^{-3}\ m^{-1}s^{-1}$. Partendo da A e volendo raggiungere B spostato a valle di *d=20m*, si determini con quale velocità costante v_{oy} occorre muoversi per raggiungere B ed il tempo impiegato.



FISICA

A.A. 2006-2007
Ingegneria Gestionale
Soluzioni 2°prova

1. La macchina A si muove di moto circolare uniforme alla velocità angolare costante $\omega_A = v_A/R = 1.85\ 10^{-3}$ rad/s, da cui si ottiene per la legge oraria $\varphi_A(t) = \omega_A t + \pi/2$ (rispetto all'asse x). La macchina B si muove inizialmente con accelerazione angolare $\alpha = a_t/R = 6.67\cdot 10^{-5}$ rad/s^2, velocità angolare $\omega_B(t) = \alpha t$ e legge oraria $\varphi_B(t) = \alpha t^2/2$. Il termine della prima fase della rincorsa avviene quando la macchina B ha percorso la distanza di 1Km che corrisponde all'angolo $\varphi_1 = 6.67\cdot 10^{-2}$rad. Imponendo $\varphi_B(t_1) = \alpha t^2/2 = \varphi_1$ si calcola il tempo al quale termina la prima fase $t_1 = \sqrt{2\varphi_1/\alpha} = 44.72$ s, la velocità angolare raggiunta $\omega_1 = \omega_B(t_1) = \alpha t_1 = \sqrt{2\alpha\varphi_1} = 2.98\ 10^{-3}$ rad/s, la quale risulta maggiore della velocità angolare della macchina A. Nella seconda fase, che ha inizio al tempo t_1, la macchina B procede alla velocità angolare acquisita ω_1 di moto circolare uniforme con legge oraria $\varphi_B(t) = \omega_1(t - t_1) + \varphi_1$. Per determinare il tempo t_{fin} al quale B raggiunge A basta imporre $\varphi_B(t_{fin}) = \varphi_A(t_{fin})$ e cioè $\omega_1 t_{fin} - \omega_1 t_1 + \varphi_1 = \omega_A t_{fin} + \pi/2$ da cui si ricava $t_{fin} = \dfrac{\omega_1 t_1 - \varphi_1 + \pi/2}{\omega_1 - \omega_A} = \dfrac{2\varphi_1 - \varphi_1 + \pi/2}{\sqrt{2\alpha\varphi_1} - \omega_A} = \dfrac{0.0667 + 1.571}{(2.98 - 1.85)\cdot 10^{-3}} = 1452$ s. A quell'istante le accelerazioni normali valgono rispettivamente $a_{nA} = \omega_A^2 R = 0.051$ m/s^2 e $a_{nB} = \omega_B^2 R = 0.133$ m/s^2

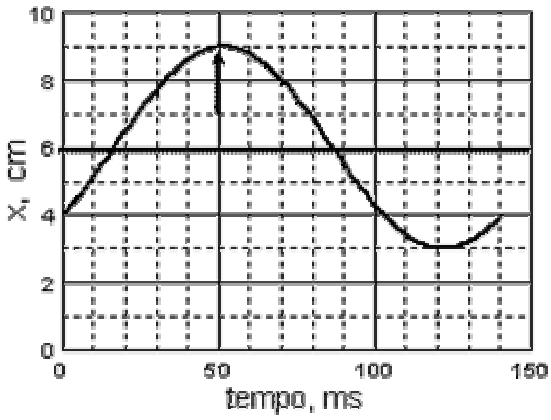
2. Il punto materiale descrive un moto armonico in accordo all'equazione $x(t) = x_{eq} + A\cos\left(\dfrac{2\pi}{T}t + \varphi\right)$ dove T rappresenta il periodo di oscillazione, ed x_{eq} il punto medio.

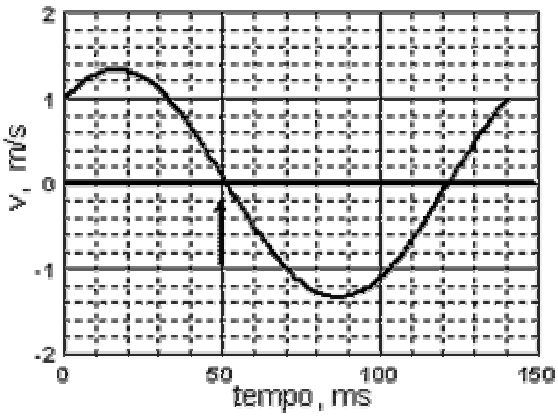
Gli estremi x_{max} e x_{min} sono $\begin{cases} x_{\max} = x_{eq} + A \\ x_{\min} = x_{eq} - A \end{cases}$ relazioni invertibili nelle $\begin{cases} x_{eq} = (x_{\max} + x_{\min})/2 = 6cm \\ A = (x_{\max} - x_{\min})/2 = 3cm \end{cases}$.

Dalle condizioni iniziali di posizione e velocità $\begin{cases} x(0) = x_{eq} + A\cos(\varphi) \\ v(0) = -\left(\dfrac{2\pi}{T}\right)A\sin(\varphi) \end{cases}$ si ricavano

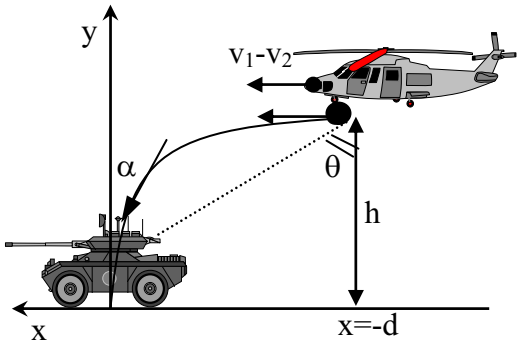
$\begin{cases} \varphi = \arccos\left(\dfrac{x(0) - x_{eq}}{A}\right) = \pm\ 131°49' \\ T = -2\pi A\sin(\varphi)/v(0) = \mp\ 140ms \end{cases}$ (la soluzione ϕ=131°49'porta all'assurdo di T<0)

Le grandezze cinematiche dopo t_1=50ms valgono $\begin{cases} x(t_1) = x_{eq} + A\cos\left(\dfrac{2\pi}{T}t_1 + \varphi\right) = 8.994\ \ cm \\ v(0) = -\left(\dfrac{2\pi}{T}\right)A\sin\left(\dfrac{2\pi}{T}t_1 + \varphi\right) = 0.086\ \ m/s \end{cases}$

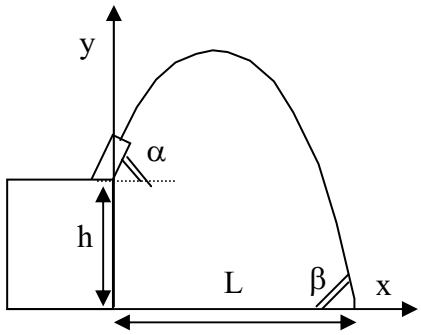




3. Nel sistema di riferimento di un osservatore nel carro armato l'elicottero vola alla velocità differenza v_1-v_2=150 km/h, che coincide anche con la velocità iniziale della bomba. Il moto parabolico della bomba può essere scomposto secondo gli assi x $\begin{cases} v_x = v_1 - v_2 \\ x(t) = (v_1 - v_2)t - d \end{cases}$ ed y $\begin{cases} v_y = -gt \\ y(t) = h - gt^2/2 \end{cases}$. La bomba tocca il suolo al tempo t^* che si ottiene dall'equazione $y(t^*)=0=h-g(t^*)^2/2$ da cui $t^* = \sqrt{2h/g}$. A quell'istante l'ascissa della bomba deve coincidere con quella del carro armato $x(t^*) = (v_1 - v_2)t^* - d = 0$, da cui si ricava la distanza $d = (v_1 - v_2)t^* = (v_1 - v_2)\sqrt{2h/g}$. La tangente dell'angolo di vista θ richiesto è proprio uguale al rapporto dei due cateti $\tan\theta = d/h = (v_1 - v_2)\sqrt{2/gh}$ =1.33 da cui $\theta = 53°05'$. La velocità finale con cui la bomba arriva sul carro, nel sistema di riferimento solidale al carro, è scomposta nelle due componenti $v_x = v_1 - v_2 = 41.7$ m/s e $v_y = -gt^* = -\sqrt{2gh} = 62.6$ m/s. La velocità finale è quindi $v_{fin} = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = 75.2$ m/s, con angolazione lungo la verticale $\alpha = arc\tan(|v_x/v_y|) = 33°40'$.



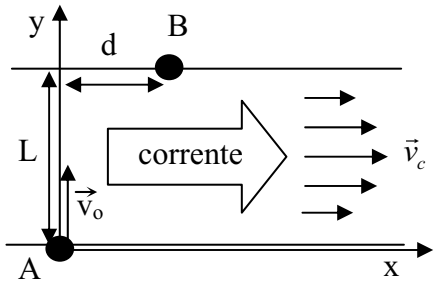
4. Il tempo di volo del proiettile t^* si ottiene imponendo $y(t^*)=0$ da cui si ottiene l'equazione di secondo grado $t^2 - [2v_o sin(\alpha)/g]\cdot t - 2h/g = 0$ che ha due soluzioni di cui quella accettabile è $t^* = \frac{v_o sin(\alpha)}{g} + \sqrt{\left(\frac{v_o sin(\alpha)}{g}\right)^2 + \frac{2gh}{v_o}} = v_o/g\left(sin(\alpha) + \sqrt{sin^2(\alpha) + 2gh/v_o^2}\right)$ da cui la gittata risulta $L=x(t^*)=v_o^2/g\left[\cos(\alpha)\left(sin(\alpha) + \sqrt{sin^2(\alpha) + 2gh/v_0^2}\right)\right]$. Per valutare la gittata massima basta imporre $\frac{dL}{d\alpha} = 0$ ottenendo una equazione $\cos^2(\alpha) - sin^2(\alpha) = sin(\alpha)\left[\sqrt{sin^2(\alpha) + b} - \frac{\cos^2(\alpha)}{\sqrt{sin^2(\alpha) + b}}\right]$ ove $b = 2gh/v_o^2$. Quadrando ambo i membri dopo qualche passaggio algebrico si ottiene $b\cos^4(\alpha) = b^2 sin^2(\alpha) + b sin^4(\alpha)$ e semplificando per b e sfruttando relazioni trigonometriche porta a $tg(\alpha) = \frac{1}{\sqrt{1+b}} = \frac{1}{\sqrt{1 + 2gh/v_o^2}}$ nel nostro caso $\alpha = 43°40'$. Per il calcolo del raggio di curvatura basta calcolare la velocità e l'accelerazione tangenziale al tempo t=1s. $v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \sqrt{v_o^2 + (gt)^2 - 2v_o gt sin(\alpha)} = 193.36\, m/s$ mentre l'accelerazione tangenziale è $a_t = \frac{dv}{dt} = \frac{g^2 t - v_o g sin(\alpha)}{\sqrt{v_o^2 + (gt)^2 - 2v_o gt sin(\alpha)}} = -6.5\, m/s^2$ da cui ricaviamo l'accelerazione normale $a_n = \sqrt{g^2 - a_t^2} = 7.33\, m/s^2$ da cui il raggio di curvatura $\rho = v^2/a_n = 5098m$.



$$\begin{cases} x(t) = v_o \cos(\alpha)\cdot t \\ v_x(t) = v_o \cos(\alpha) \\ a_x = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y(t) = h + v_o sin(\alpha)\cdot t - gt^2/2 \\ v_y(t) = v_o sin(\alpha) - gt \\ a_y = -g \end{cases}$$

5. La velocità del natante nel sistema fisso, solidale con la terra, è $\vec{v}_a = \vec{v}_o + \vec{v}_c$ dove $\vec{v}_o$ rappresenta la velocità che il natante ha nel sistema di riferimento solidale con l'acqua, mentre $\vec{v}_c$ è la velocità di trascinamento della corrente. La velocità del natante, decomposta secondo *x* e *y* è riportata nel riquadro. Il tempo impiegato a raggiungere l'altra sponda *t** si calcola dal moto lungo y imponendo *y(t*)=L* da cui *t*=L/v*$_o$ quantità al momento incognita! Dal moto lungo l'asse *x* ricaviamo invece la condizione per il raggiungimento al tempo *t** del punto B. Si deve quindi imporre *x(t*)=d* dove però *x(t)* è l'integrale nel tempo della velocità della corrente *v*$_x$*(y)*.Osserviamo come nel termine di velocità non compaia direttamente il tempo ma solo l'ordinata *y* che però è a sua volta funzione del tempo. Il risultato dell'integrazione riportato genericamente nel riquadro vale nel nostro caso (x_o=0)



$$\begin{cases} y(t) = v_o t \\ v_y = v_0 \end{cases} \quad \text{e} \quad \begin{cases} x(t) = x_o + \int_o^t v_x(y(t))dt \\ v_x(y(t)) = k \cdot y(t) \cdot (L - y(t)) \end{cases}$$

$$x(t) = \int_0^t k \cdot y(t) \cdot (L - y(t))dt = kv_o \int_0^t t(L - v_o t)dt = kv_o \left\{ L \left| \frac{t^2}{2} \right|_0^t - v_o \left| \frac{t^3}{3} \right|_0^t \right\} = kv_o t^2 \left(\frac{L}{2} - \frac{v_o t}{3} \right)$$ che al tempo *t*=L/v*$_o$ vale *x(t*)=d=* $kv_o \frac{L^2}{v_o^2}\left(\frac{L}{2} - \frac{L}{3}\right) = \frac{kL^3}{6v_o}$ da cui ricaviamo

$v_o = \frac{kL^3}{6d} = \frac{5 \cdot 10^{-3} \cdot (50)^3}{6 \cdot 20} = 5.2\ m/s$, da cui il tempo *t*=L/v*$_o$ $t^* = L / v_o = \frac{6d}{kL^2} = 9.6s$.

FISICA

A.A. 2006-2007
Ingegneria Gestionale
3° prova - 7 Febbraio 2007

Lo studente descriva il procedimento e la soluzione degli esercizi proposti. Gli elaborati verranno ritirati Martedì 13 Febbraio e saranno valutati ai fini del superamento dell'esame finale.

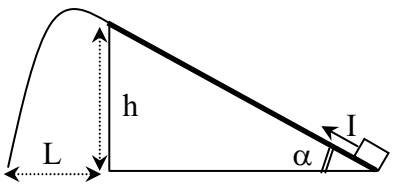
1. Un ascensore scende verso il piano terra con accelerazione diretta verso il basso di valore $a=3m/s^2$. Un osservatore posto all'interno dell'ascensore lancia una pallina di piombo alla velocità iniziale di $v_o=5m/s$. Ammettendo di poter considerare la pallina come un punto materiale, descrivere il suo moto nel sistema mobile solidale all'ascensore e nel sistema fisso. Calcolare il tempo impiegato dalla pallina per ritornare in mano all'osservatore. Ripetere l'esercizio facendo salire l'ascensore con la medesima accelerazione ma diretta verso l'alto.

2. Un treno si muove di moto rettilineo con accelerazione uniforme $a=0.25\ m/s^2$ (rispetto alla terra). Un corpo, sul pavimento del treno, viene lanciato con velocità iniziale verticale $v_o=5m/s$ (rispetto al treno). Calcolare a quale distanza dal punto di lancio ricadrà il corpo sul pavimento.

3. Una giostra partendo da ferma, comincia a girare con accelerazione angolare costante $\alpha=0.1\ rad/s^2$. Si chiede: a) in quanto tempo la giostra raggiunga la velocità di rotazione di 1/10 di giro al secondo. b) in quell'istante, il valore dell'accelerazione posseduta da un osservatore fermo sulla giostra ad una distanza di 3 metri dall'asse di rotazione. c) in quell'istante il valore dell' accelerazione dell'osservatore qualora non fosse fermo ma si spostasse radialmente verso l'asse di rotazione con velocità relativa $v_r=1m/s$.

4. Su di un piano inclinato liscio inclinato di 40° rispetto all'orizzontale, un corpo di massa m=5kg è trattenuto in equilibrio da una forza applicata parallelamente al piano inclinato. Calcolare il valore di tale forza e della reazione normale. Determinare inoltre, nel caso tale forza venga ridotta del 50%, il tempo necessario affinché il corpo discenda dalla quota h=2 m fino a terra ed il valore dell'accelerazione di discesa.

5. Un blocco di massa m=2kg è posto alla base di una rampa di lancio priva di attrito ed inclinata di un angolo $\alpha=30°$ rispetto all'orizzontale. Al tempo t=0 il blocco viene lanciato con un impulso I=10 Ns diretto lungo la rampa. Determinare in quanto tempo il blocco raggiunge la sommità alla quota h=30cm e a quale velocità. Nei tempi successivi il blocco si distacca dalla rampa descrivendo una traiettoria parabolica. Determinare la distanza L del punto di atterraggio dalla rampa.

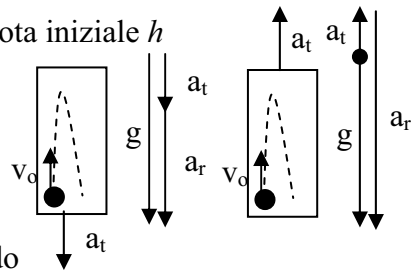


FISICA

A.A. 2006-2007
Ingegneria Gestionale
Soluzioni della 3° prova

1. Nel sistema fisso l'ascensore scende con accelerazione a_t a partire da una quota iniziale h

$\begin{cases} y = h - a_r t^2/2 \\ v_y = -a_r t \\ a_y = -a_r \end{cases}$ mentre la pallina descrive il moto $\begin{cases} y = h + v_o t - gt^2/2 \\ v_y = v_o - gt \\ a_y = -g \end{cases}$



imponendo $y_{ascensore}(t^*) = y_{pallina}(t^*)$ si trova il tempo $t^* = 2v_o/(g - a_t) = 1.47$ s

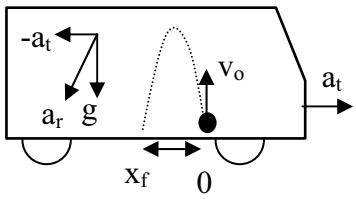
Nell'ascensore l'accelerazione relativa, avvertita all'interno, si ottiene sottraendo l'accelerazione di trascinamento (a_t) all'accelerazione assoluta (g) : $\vec{a}_r = \vec{a}_a - \vec{a}_t = \vec{g} - \vec{a}_t$

Le grandezze cinematiche nel mobile sono $\begin{cases} y = v_o t - a_r t^2/2 \\ v_y = v_o - a_r t \\ a_y = -(g - a_t) = -a_r \end{cases}$ con tempo di volo $t^* = \dfrac{2v_o}{g - a_t} = 1.47$ s

Rivoltando il verso dell'accelerazione di trascinamento il tempo diviene $t^* = 2v_o/(g + a_t) = 0.78$ s

2. L'accelerazione relativa avvertita all'interno del treno si ottiene sottraendo l'accelerazione di trascinamento del treno (a_t) all'accelerazione assoluta (g) :

$$\vec{a}_r = \vec{a}_a - \vec{a}_t = \vec{g} - \vec{a}_t$$

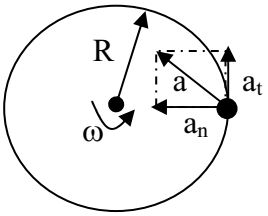


Proiettando l'accelerazione relativa lungo gli assi tangenziale (x) e normale (y) si ottengono le sue due componenti $a_{rx} = -a_t$ ed $a_{ry} = -g$ che integrate danno

lungo l'asse x e lungo l'asse y $\begin{cases} y = v_o t - gt^2/2 \\ v_{ry} = v_o - gt \\ a_{ry} = -g \end{cases}$. Il tempo di volo si ottiene imponendo y(t*)=0 da

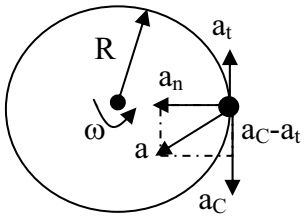
cui $t^*=2v_o/g$. Il punto di ricaduta del grave è quindi $x_f = x(t^*) = -2v_o^2 a_t/g^2 =$ -1.28 m ad una distanza di 1.28 m dal punto di lancio nella direzione opposta a quella dell'accelerazione del treno.

3. La giostra ruota con accelerazione angolare costante secondo le Eq. $\begin{cases} \varphi(t) = \alpha_0 t^2/2 \\ \omega(t) = \alpha_o t \\ \alpha = \alpha_o \end{cases}$



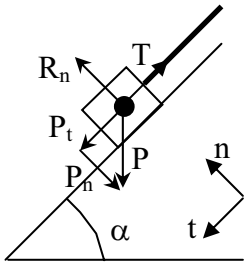
Il tempo al quale la velocità di rotazione raggiunge 0.1 giro al secondo è $\omega^* = \omega(t^*) = \alpha_o t^* = 0.1 \cdot 2\pi = 0.628\, rad/s$ ossia $t^* = 6.28$ s.

A quel tempo l'accelerazione tangenziale vale $a_t = \alpha_o R = 0.3$ m/s^2, l'accelerazione normale vale $a_n = \omega^{*2} R = \alpha_o^2 R t^{*2} = 1.184$ m/s^2, e quindi l'accelerazione totale è $a = \sqrt{a_n^2 + a_t^2} = 1.222$ m/s^2. Se l'osservatore si muove in direzione radiale subisce anche una accelerazione di Coriolis $\vec{a}_C = 2\vec{\omega} \times \vec{v}_r$ di intensità $a_C = 2\omega^* v_r = 2\alpha_o t^* v_r = 1.257$ m/s^2 nella direzione tangenziale ma in senso opposto ad $\vec{a}_t$ (come riportato in figura). La nuova accelerazione tangenziale a_t' complessiva si ottiene quindi per sottrazione $a_t' = a_C - a_t = 0.957$ m/s^2



che combinata insieme all'accelerazione normale precedente dà luogo a $a = \sqrt{a_n^2 + a_t'^2} = \sqrt{a_n^2 + (a_C - a_t)^2} = 1.522$ m/s^2.

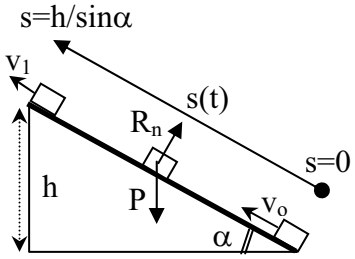
4. Le forze agenti sulla massa sono 3: la forza peso $P=mg$ diretta verticalmente, la reazione normale del piano inclinato R_n diretta lungo la normale n, e la tensione di sostegno della fune diretta lungo il piano inclinato opposta all'asse t.



Applicando il II principio e proiettando le forze sui due assi t ed n si ottiene il sistema $\begin{matrix}\hat{n}\\ \hat{t}\end{matrix}\begin{cases} R_n - P_N = ma_N = 0 \\ P_t - T = ma_t = 0 \end{cases}$ dove la forza peso viene decomposta secondo le sue proiezioni lungo gli assi t ($P_t=P\sin\alpha$) ed n ($P_n=P\cos\alpha$). Dalla seconda ricaviamo il valore della tensione $T = P_t = mg\sin\alpha = 31.5$ N.

Se la tensione viene ridotta del 50% al nuovo valore $T^* = P_t/2 = 15.7$ N, il blocco non può più rimanere in quiete e scivola a valle con accelerazione $a_t = \dfrac{P_t - T^*}{m} = \dfrac{P - T/2}{m} = \dfrac{P_t}{2m} = \dfrac{g}{2}\sin\alpha =$ 3.15 m/s^2

5. Il blocco è inizialmente fermo con quantità di moto nulla. Immediatamente dopo l'applicazione dell'impulso il blocco acqista una velocità inziale di lancio aumentando la propria quantità di moto $\Delta p = mv_o = I$ da cui si ricava la velocità iniziale $v_o = I/m = 5$m/s.



Nella salita il blocco è soggetto alla forza peso P ed alla reazione normale R_n. Proiettando le forze lungo la normale e la tangenziale si ottiene:

$\begin{matrix}\hat{n}\\ \hat{t}\end{matrix}\begin{cases} R_n - P\cos\alpha = 0 \\ -P\sin\alpha = ma \end{cases}$ da cui la **decelarazione** di salita $a = -g\sin\alpha$

per integrazione si ottiene la **velocità** $v(t) = v_o - gt\sin\alpha$

e per ulteriore integrazione lo **spazio percorso** $s(t) = v_o t - gt^2\sin\alpha/2$

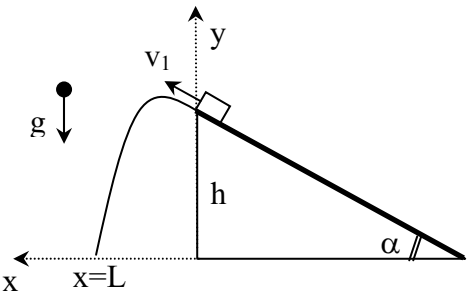
Il **tempo di salita t*** si ottiene imponendo $s(t^*) = v_o t - gt^2\sin\alpha/2 = h/\sin\alpha$ e risolvendo la relativa equazione di 2° grado che fornisce la soluzione $t^* = \left(\dfrac{v_o - \sqrt{v_o^2 - 2gh}}{g\sin\alpha}\right) = 128$ ms. Si noti che è stata scartata la seconda soluzione con il segno + davanti al radicale. Questa corrisponderebbe ad un tempo successivo t**. Infatti se la rampa fosse infinitamente lunga il blocco, raggiunta la quota h nell'istante t*, la oltrepasserebbe per poi ridiscendervi a questo istante successivo t**

La **velocità di uscita** dalla rampa è quindi $v_1 = v(t^*) = v_o - gt^*\sin\alpha = \sqrt{v_o^2 - 2gh} = 4.37$ m/s.

Moto parabolico successivo all'istante t*:

Assumiamo di azzerare nuovamente il cronometro cominciando a contare il tempo t a partire da t*. Le equazioni cinematiche divengono ora

lungo x $\begin{cases} x(t) = v_1 t\cos\alpha \\ v_x = v_1\cos\alpha \\ a_x = 0 \end{cases}$ lungo y $\begin{cases} y(t) = h + v_1 t\sin\alpha - gt^2/2 \\ v_y = v_1\sin\alpha - gt \\ a_y = -g \end{cases}$



il tempo di volo del grave si ottiene dall'equazione:

$$y(t_v) = h + v_1 t_v\sin\alpha - gt_v^2/2 = 0 \quad \text{da cui } t_v = \frac{v_1}{g}\left[\sin\alpha + \sqrt{\sin^2\alpha + \frac{2gh}{v_1^2}}\right]$$

da cui si ricava la gittata $L = \dfrac{v_1^2}{g}\left[\sin\alpha\cos\alpha + \cos\alpha\sqrt{\sin^2\alpha + \dfrac{2gh}{v_1^2}}\right] = 2.10$ m

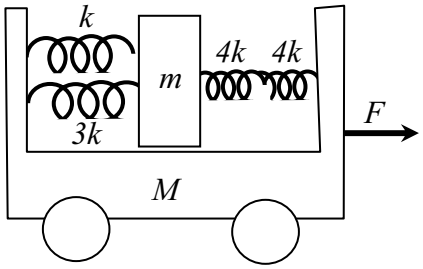
FISICA

A.A. 2006-2007
Ingegneria Gestionale
5° prova del 21 Febbraio 2007

Lo studente descriva il procedimento e la soluzione degli esercizi proposti. Gli elaborati verranno ritirati Mercoledì 28 Febbraio e saranno valutati ai fini del superamento dell'esame finale.

1. Un auto viaggia alla velocità costante di 120 km/h ed affronta una curva circolare di raggio di curvatura R=100 m ed inclinata rispetto all'orizzontale di un angolo θ=10°. Determinare quale debba essere il valore minimo del coefficiente di attrito statico fra piano stradale e pneumatici affinché l'auto non sbandi.

2. All'interno di un carrello di massa *M* è posta una seconda massa *m* collegata agli estremi del carrello tramite un sistema di molle come indicato in figura. Calcolare lo spostamento dalla posizione di equilibrio della massa *m* rispetto al carrello, quando al carrello viene applicata una forza esterna *F*. [Dati: M=4 kg, m=200 g, k=2 N/m, F=5 N]



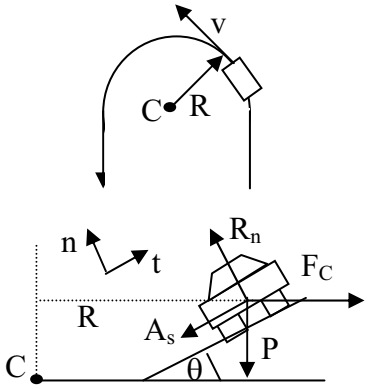
3. Se il giorno sulla terra durasse solo 1 ora quale sarebbe il valore dell'accelerazione di gravità all'equatore? [Dati: massa della Terra M_T=5.97 10^{24} kg, raggio terrestre R_T=6300 km, G=6.67 10^{-11} Nm^2kg^{-2}]

4. Un treno corre in curva a 130 km/h ed un pendolo semplice, che a terra oscillerebbe con un periodo T_o=1s, finisce per oscillare dentro il treno 121 volte in 2 minuti. Calcolare il raggio di curvatura della traiettoria circolare descritta dal treno. (si supponga di poter trascurare la forza di Coriolis)

5. Un dispositivo "*rotor*" di un luna park è costituito da un cilindro cavo di raggio R=4 m. Un uomo viene appoggiato alla parete laterale del cilindro che viene successivamente posto in rotazione intorno al proprio asse con velocità angolare ω. Conoscendo il coefficiente di attrito statico fra l'uomo e la parete (μ=0.4), determinare la minima velocità angolare da imprimere al *rotor* in grado di garantire l'equilibrio ossia la perfetta adesione dell'uomo alla parete anche quando viene tolta la piattaforma sulla quale l'uomo poggiava inizialmente i piedi.

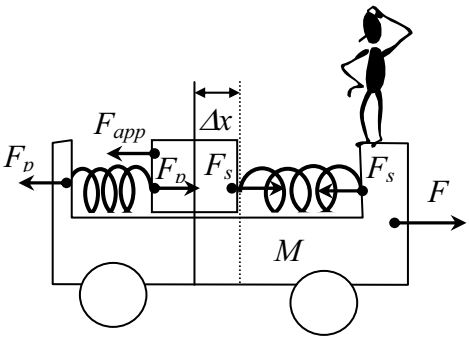
FISICA

A.A. 2006-2007
Ingegneria Gestionale
Soluzioni della 5°prova



1. Nel sistema di riferimento non inerziale solidale al guidatore, la macchina è soggetta a *4* forze: la forza peso $P=mg$ diretta lungo la verticale, la reazione normale R_n lungo la normale *n*, la forza centrifuga $F_c=mv^2/R$ lungo la radiale, la forza di attrito statico A_s lungo l'asse tangenziale *t*. Nel sistema solidale al guidatore l'auto è ferma e le 4 forze si equilibrano $\vec{P}+\vec{F}_c+\vec{R}_n+\vec{A}_s=0$. Proiettando l'equazione lungo gli assi *n*,*t* otteniamo: imponendo l'equilibrio lungo *n* si ottiene il valore di $R_n = P\cos\theta + F_c sin\theta$, mentre lungo *t* si ottiene l'attrito richiesto $A_s = F_c\cos\theta - Psin\theta$. A posteriori imponiamo che l'attrito richiesto sia inferiore a quello massimo $A_s \le A_{\max} = \mu_s R_n$ da cui

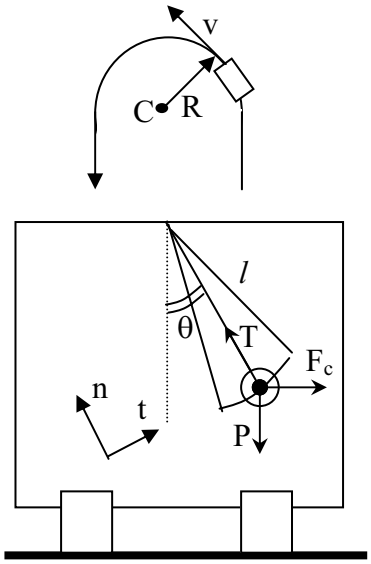
$\mu_s \ge A_s/R_n = (F_c\cos\theta - Psin\theta)/(F_c sin\theta + P\cos\theta) = \left(v^2/R - gtg\theta\right)/\left(v^2 tg\theta/R + g\right)$ ossia $\mu_s \ge 0.8$ valore molto elevato! Se la curva fosse stata inclinata di 30° il valore sarebbe stato $\mu_s \ge 0.336$



2. Le due molle in parallelo sulla sinistra sono equivalenti ad una unica molla di costante elastica k_p=k+3k=4k=8N/m, mentre le due molle in serie sulla destra sono equivalenti ad una unica molla k_s=(4k*4k)/(4k+4k)=2k=4N/m. La forza esterna *F* causa una accelerazione a_t del carrello. La massa interna si trova quindi in un sistema non inerziale. Un osservatore in tale riferimento vede la massa spostarsi indietro di una quantità Δx rispetto alla posizione di equilibrio. Per spiegarsi tale spostamento l'osservatore deve applicare il II principio aggiungendo alle forze reali una forza apparente $\vec{F}_{app} = -m\vec{a}_t$ contraria al moto. Le forze agenti sulla massa *m* sono: sulla verticale la reazione normale R_n che equilibra la forza peso *P;* sull'orizzontale le due forze elastiche entrambe dirette nel verso del moto e di valore $F_{p/s} = k_{p/s}\Delta x$ dipendente della costante elastica $k_{p/s}$, la forza apparente $F_{app} = ma_t$ contraria al moto. Queste forze si equilibrano e la massa *m* rimane in quiete. La condizione $F_p + F_s = F_{app}$ si scrive $(k_p + k_s)\Delta x = ma_t$ dalla quale non è però possibile ricavare Δx senza conoscere a_t. Si applichi ora il II principio al carrello. Lungo l'asse orizzontale c'è la forza *F* e le forze elastiche delle due molle agenti sulle pareti del carrello, questa volta entrambe contrarie al moto. Il II principio si scrive $F - F_p - F_s = Ma_t$. Riassumendo le due equazioni della massa e del carrello sono $\begin{cases} (k_p + k_s)\Delta x = ma_t \\ F - (k_p + k_s)\Delta x = Ma_t \end{cases}$ da cui si ricava $a_t = F/(m+M)$, e $\Delta x = Fm/\left[(k_p + k_s)(m+M)\right]$=2 cm

3. All'equatore la forza di attrazione gravitazionale $F_G = GM_T m/R_T^2$ viene contrastata dalla forza centrifuga $F_c=m\omega^2 R_T$. La risultante F_G-F_c dà luogo all'accelerazione di gravità avvertita all'equatore $g' = GM_T/R_T^2 - \omega^2 R_T \cong 9.78$ m/s^2 diretta verso il centro della Terra (essendo $\omega = 2\pi/86400$ rad/s, ed R_T=6370 km). Se il giorno durasse solo 1 ora la velocità angolare avrebbe un valore molto più alto $\omega = 2\pi/3600$ rad/s ed il conseguente valore dell'accelerazione di gravità sarebbe g'= 9.59 m/s^2 ma diretta verso l'esterno!!!

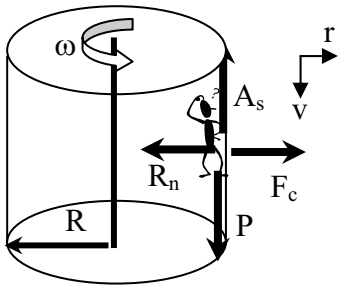
4. Nel sistema di riferimento non inerziale solidale al treno, il pendolo è soggetto a 3 forze: la forza peso $P=mg$ diretta lungo la verticale, la tensione del filo T lungo la normale n, la forza centrifuga $F_c=mv^2/R$ lungo l'orizzontale. Queste forze si equilibrano $\vec{P}+\vec{F}_c+\vec{T}=0$ per un determinato angolo θ_{eq}. Il valore di θ_{eq} si ricava proiettando le forze lungo l'asse tangenziale t ($F_c\cos\theta - Psin\theta = ma_t$) ed imponendo per la statica $a_t=0$ da cui $tg\theta_{eq} = F_c/P = v^2/gR$. Nel caso dinamico invece $a_t = l\cdot d^2\theta/dt^2$ e l'equazione per la dinamica può scriversi come segue



$$P\left(\frac{F_c}{P}\cos\theta - sin\theta\right) = P\left(\frac{sin\theta_{eq}}{\cos\theta_{eq}}\cos\theta - sin\theta\right) = -\frac{mg}{\cos\theta_{eq}}sin(\theta-\theta_{eq}) = ml\,d^2\theta/dt^2$$

Introducendo l'angolo differenza $\tilde{\theta} = \theta - \theta_{eq}$, per cui $d^2\tilde{\theta}/dt^2 = d^2\theta/dt^2$, possiamo ritrovare l'equazione differenziale del pendolo in $\tilde{\theta}$ che per piccole oscillazioni $sin\tilde{\theta} \cong \tilde{\theta}$, si riscrive $d^2\tilde{\theta}/dt^2 + \left(\frac{g}{l\cos\theta_{eq}}\right)\tilde{\theta}$, che dà luogo ad oscillazioni con periodo $\tilde{T} = 2\pi\sqrt{l\cos\theta_{eq}/g} = T_o\sqrt{\cos\theta_{eq}} = T_o\Big/\sqrt[4]{1+tg^2\theta_{eq}}$ dove sono dati $T_o=1s$ e $\tilde{T}=0.992s$ ossia i periodi rispettivamente senza e con forza centrifuga. Invertendo l'ultima relazione si ottiene $tg\theta_{eq} = \sqrt{(T/\tilde{T})^4 - 1}$ da cui si ottiene il valore del raggio di curvatura $R = v^2/(g\cdot tg\theta_{eq}) = v^2\Big/\left(g\cdot\sqrt{(T/\tilde{T})^4-1}\right) = 724$ m.

5. Quando il dispositivo *Rotor* è posto in rotazione a velocità angolare ω, il sistema solidale all'uomo appoggiato alla parete è non inerziale. Le forze che agiscono sull'uomo sono le seguenti: lungo l'asse radiale r la forza centrifuga $F_c=m\omega^2R$ che tende a schiacciare l'uomo sulla parete e la reazione della parete R_n a controbilanciare; lungo la verticale v la forza peso P diretta verso il basso, l'attrito statico A_s fornito dalla parete a contrastare il peso e la reazione del pavimento che però viene tolta dopo breve tempo.



L'uomo si trova in equilibrio se $\begin{matrix}\hat{r}\\ \hat{v}\end{matrix}\begin{cases}F_c - R_n = 0\\ P - A_s = 0\end{cases}$ da cui si ricava il valore $R_n=F_c= m\omega^2R$.

Dalla seconda si ricava invece l'attrito richiesto per impedire il moto $A_s = P = mg$ che deve essere inferiore o al limite uguale a quello massimo consentito $A_s = P = mg \le A_{\max} = \mu_s R_n = \mu_s m\omega^2 R$.
Da questa disequazione si ricava facilmente $\omega \ge \sqrt{g/\mu_s R}$ =2.47 rad/s.

FISICA

A.A. 2006-2007
Ingegneria Gestionale
6° prova del 2 Marzo 2007

Lo studente descriva il procedimento e la soluzione degli esercizi proposti. Gli elaborati verranno ritirati Mercoledì 7 Marzo e saranno valutati ai fini del superamento dell'esame finale.

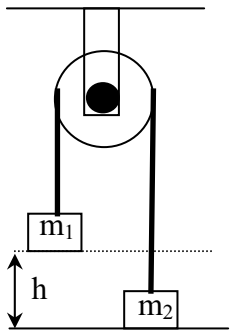
1. Determinare la velocità massima alla quale può viaggiare su una strada orizzontale una automobile che, a pieno carico, ha una massa $M=1100\ kg$, ed il cui motore trasmette alle ruote una potenza di $W=50\ kW$, sapendo che su di essa agisce una forza frenante dovuta ad attriti e resistenza del mezzo descritta da $\vec{R} = -b\vec{v}$, con $b=40\ kg/s$. Determinare la velocità massima nel caso che la strada sia in salita con una pendenza del *10%*.

2. Ad un oscillatore libero la cui ampiezza di oscillazione è $A_o=6cm$ viene conferito, quando l'oscillatore raggiunge la sua massima elongazione, un impulso istantaneo $I=1\ Ns$. Determinare i livelli di energia meccanica prima e dopo l'impulso, e la nuova ampiezza di oscillazione A_1. (Dati: massa dell'oscillatore $m=10kg$, costante elastica $k=50N/m$).

3. Un pendolo semplice di massa $m=3kg$, è fatto oscillare con ampiezza via via crescente. Conoscendo il valore massimo della tensione cui può essere sottoposto il filo T_{max}=60 N, determinare l'intervallo di angoli di inclinazione massima ammessi che garantiscono l'integrità del filo.

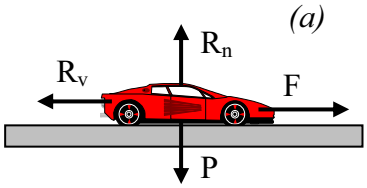
4. Un corpo di massa m=5Kg scivola lungo un piano avente coefficiente di attrito μ_d=0.20 ed inclinato di un angolo α=30° rispetto all'orizzontale. Il corpo possiede inizialmente una velocità v_o=1m/s diretta lungo la linea di massima pendenza. Dopo aver percorso L=1m lungo il piano, il corpo incontra l'estremo libero di una molla di costante elastica $k=5*10^3$ N/m che viene compressa nella direzione di v_o. Calcolare la massima compressione Δd subita dalla molla.

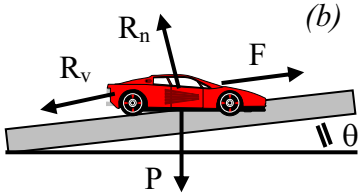
5. Una massa $m_1=4kg$ è appesa ad una estremità di una fune di massa trascurabile. All'altra estremità della fune è appesa una massa $m_2=3kg$. Si determini la velocità finale della prima massa quando scende, partendo da ferma da una altezza di $h=2m$.



FISICA

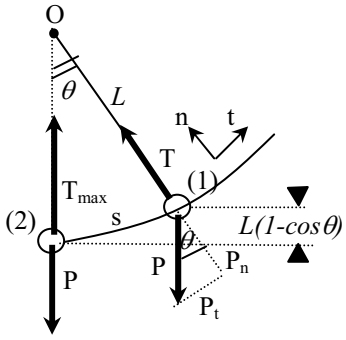
A.A. 2006-2007
Ingegneria Gestionale
Soluzioni della 6°prova





1. Nel caso *(a)* del moto in piano la forza motrice sviluppa una potenza $W=F\ v$. Il valore della forza motrice è quindi $F=W/v$. Ad essa si oppone una forza resistente $R_v=b\ v$. A regime, quando la velocità tende ad assumere un valore costante, queste due forze diventano uguali e contrarie da cui si ricava il valore della velocità limite $v=\sqrt{W/b}=35.4m/s$ (si noti come peso e reazione normale non intervengano nel problema). Quando invece l'auto si muove sul piano inclinato *(b),* sull'asse del moto oltre alla forza motrice $F=W/v$ ed alla forza resistente $R_v=b\ v$, interviene anche la componente tangenziale della forza peso $Mg\ sin\theta$ che ne ostacola il moto. A regime le tre forze si equilibrano per cui $W/v=bv+Mgsin\theta$. Si trova così una equazione di secondo grado $v^2+(Mgsin\theta/b)v-W/b=0$ che ha una sola soluzione accettabile $v=\sqrt{W/b+(Mgsin\theta/2b)^2}-(Mgsin\theta/2b)$. Sostituendo il valore di $\theta=arc\tan(0.1)=5°43'$ si ottiene il valore ridotto di velocità $v=22.14\ m/s$.

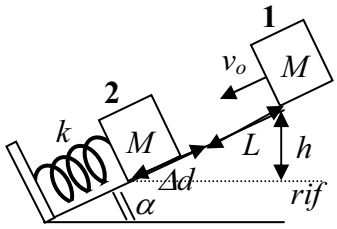
2. Nel moto armonico semplice l'energia potenziale vale $U(x)=kx^2/2$ dove x è la distanza dal punto di equilibrio. Il valore di energia meccanica prima dell'impulso coincide con il massimo valore di energia potenziale $E_o=U(A)=kA_o^2/2=90mJ$, quando cioè l'oscillatore raggiunge la massima elongazione, si ferma ed inverte il suo moto. In quell'istante viene conferito l'impulso I che causa una variazione di quantità di moto $I=\Delta p=p_{fin}-p_{in}=p_{fin}$ (essendo nullo $p_{in}=0$) facendo acquistare alla massa una energia cinetica $T=mv_{fin}^2/2=I^2/2m$ che sommata alla energia potenziale precedente porta ad un nuovo valore di energia meccanica maggiorato $E_1=kA_o^2/2+I^2/2m=140mJ$. Il moto armonico corrispondente a questo nuovo valore di energia meccanica raggiungerà la massima elongazione A_1 quando il punto materiale invertirà il suo moto, raggiungendo un massimo della nuova energia potenziale $U(A_1)=kA_1^2/2$. Per la conservazione dell'energia meccanica $U(A_1)=E_1$ da cui $kA_1^2/2=kA_o^2/2+I^2/2m$ e conseguentemente $A_1=\sqrt{A_o^2+I^2/mk}=7.5\ cm$.



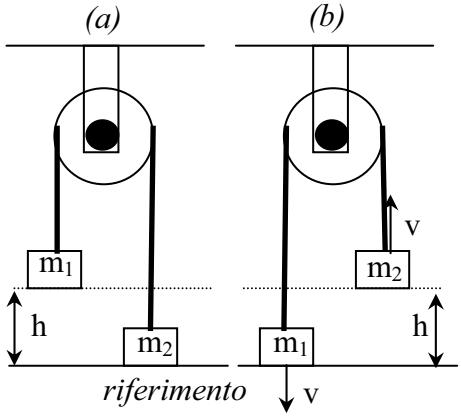
3. La massa appesa al filo subisce due forze: la sua forza peso $P=mg$ lungo la verticale, e la tensione T diretta lungo il filo. Applicando il II principio alla massa nella generica posizione (1), dopo la consueta scomposizione secondo gli assi n,t si ottiene il sistema $\begin{matrix}\hat{n}\\ \hat{t}\end{matrix}\begin{cases}T-P_n=ma_n\\ -P_t=ma_t\end{cases}$ dove $P_n=mgcos\theta$, $P_t=mgsin\theta$, l'accelerazione tangenziale vale $a_t=d^2s/dt^2$, quella normale vale $a_n=v^2/L$. La tensione del filo si ricava dalla prima equazione da cui $T(\theta)=mg\cos\theta+mv^2/L$, dove è stata evidenziata la dipendenza della tensione dall'angolo θ. In particolare il punto critico per la rottura del pendolo è il punto (2) per $\theta=0$ in cui la tensione è massima perché sono simultaneamente massimi tutti e due gli addendi per cui

$T_{\max} = T(\theta = 0) = mg + mv_2^2 / L$. Per calcolare T_{max} occorre ora determinare la velocità massima v_2 che viene raggiunta nel punto (2). Per far questo non utilizziamo l'altra equazione sull'asse *t*, dalla quale si può derivare la legge oraria solo per piccoli angoli θ<15°. Applichiamo invece il principio di conservazione dell'energia meccanica fra il punto (1) relativo alla massima oscillazione θ_{max} ed il punto (2) relativo a θ=0. L'energia meccanica nel punto (1) è esclusivamente potenziale e vale $E_{m1} = mgL(1 - \cos\theta_{\max})$, mentre nel punto (2) è esclusivamente cinetica valendo $E_{m2} = m v_2^2 / 2$. Applicando il principio di conservazione si determina $v_2^2 = 2gL(1 - \cos\theta_{\max})$, che sostituita nell'equazione della tensione massima fornisce il valore massimo di rottura $T_{\max} = mg(3 - 2\cos\theta_{\max})$, da cui ricaviamo l'angolo massimo $\theta_{\max} = \arccos\left(\frac{3mg - T_{\max}}{2mg}\right) = 61°20'$

4. L'esercizio si può risolvere con considerazioni puramente energetiche. L'energia meccanica E_m è qui data dalla somma dell'energia potenziale della forza peso U_P , dall'energia potenziale della forza elastica U_{el} e dell'energia cinetica *T*. Nello stato finale 2 la molla raggiunge la compressione massima *Δd*, la massa raggiunge la quota minima di riferimento per l'energia potenziale ($U_P=0$), si ferma un istante ($T=0$) prima di invertire il moto. Nel punto 2 quindi il valore dell'energia meccanica è $E_{m2} = k\Delta d^2/2$. Nel punto 1 invece la molla è ovviamente a riposo mentre la massa si trova ad una quota $h=(\Delta d+L)sin\alpha$ rispetto al riferimento possedendo pertanto l'energia meccanica $E_{m1} = mv_o^2/2 + mg(\Delta d + L)sin\alpha$. L'energia meccanica non si conserva tra lo stato iniziale 1 e finale 2, ma diminuisce a causa dell'attrito che compie un lavoro negativo $L_A = -A_d(\Delta d + L) = -\mu_d mg\cos\alpha(\Delta d + L)$. Imponendo quindi $L_A = E_{m2} - E_{m1}$ si ottiene $-\mu_d mg\cos\alpha(\Delta d + L) = k\Delta d^2/2 - mv_o^2/2 - mgsin\alpha(\Delta d + L)$ che ordinata in Δd dà luogo all'equazione $\Delta d^2 - [2mg\,sin\alpha(1 - \mu_d/tg\alpha)/k]\Delta d - [(2mgsin\alpha(1 - \mu_d/tg\alpha)L + mv_0^2)/k] = 0$ di 2°grado che ha l'unica soluzione accettabile positiva Δd=9.27 cm.



5. Nel sistema in esame si assume che gli attriti eventualmente presenti tra la puleggia e la fune non compiano lavoro. In questo caso l'energia meccanica del sistema fra lo stato iniziale *(a)* e quello finale *(b)* si conserva. Nello stato *(a)* entrambe le masse sono in quiete (assenza di energia cinetica); pertanto l'energia meccanica è data dalla sola energia potenziale della prima massa (calcolata rispetto al riferimento) $E_{ma}=U_{1a}=m_1gh$. Nello stato finale entrambe le masse si muovono alla velocità comune *v,* possedendo l'energia cinetica $T_b = \frac{1}{2}(m_1 + m_2)v^2$; il sistema possiede anche l'energia potenziale della seconda massa $U_b=m_2gh$ che è salita alla quota *h*. L'energia meccanica totale vale $E_{mb} = m_2gh + \frac{1}{2}(m_1 + m_2)v^2$. Eguagliando l'energia meccanica nei due stati si ricava il valore della velocità di traslazione del sistema $v = \sqrt{2gh\frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}} = 2.37 m/s$.



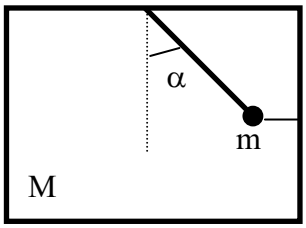
FISICA

A.A. 2006-2007
Ingegneria Gestionale
7° prova del 7 Marzo 2007

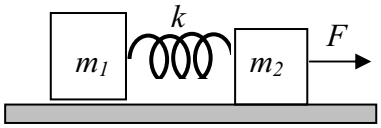
Lo studente descriva il procedimento e la soluzione degli esercizi proposti. Gli elaborati verranno ritirati Martedì 13 Marzo e saranno valutati ai fini del superamento dell'esame finale.

1. Un cannone di massa $M=300kg$, inizialmente in quiete è libero di muoversi senza attrito su un piano orizzontale. Esso ha due canne e spara in rapida successione due proiettili ciascuno di massa m=2kg orizzontalmente con velocità di uscita v=200m/s rispetto alla canna. Quanto vale la velocità acquistata dal cannone dopo aver esploso entrambi i colpi?

2. In una scatola di massa $M=1kg$, posta su di un piano orizzontale privo di attrito, è fissato un pendolo semplice di massa $m=0.5kg$ e lunghezza $l=1m$. Inizialmente il pendolo è trattenuto da un filo ad un angolo $\alpha=45°$ rispetto alla verticale ed entrambe le masse M ed m sono in quiete. Quando il filo viene tagliato il pendolo comincia ad oscillare e la scatola si muove. Determinare la velocità della scatola quando l'angolo del pendolo è $\beta=30°$.

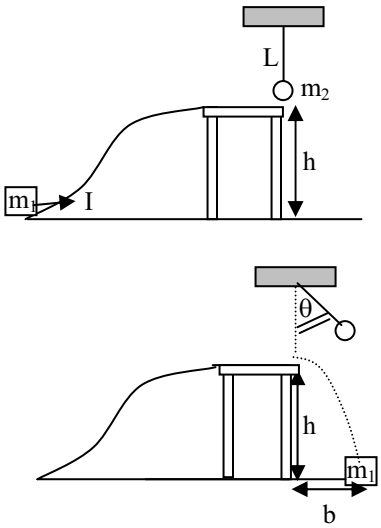


3. Due corpi di massa $m_1=3kg$ e $m_2=7kg$ collegati solidalmente da una molla di costante elastica $k=2*10^3 N/m$ e di massa trascurabile, poggiano su di un piano orizzontale privo di attrito. Essi vengono trascinati con accelerazione costante da una forza orizzontale $F=10N$ applicata ad m_2. Calcolare l'allungamento della molla.



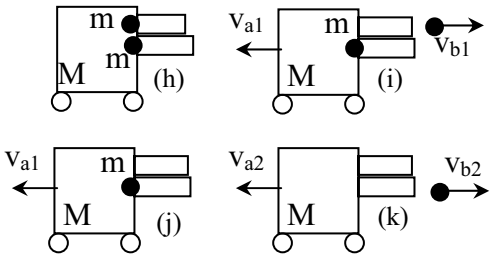
4. Un satellite artificiale si muove su di una orbita circolare "*equatoriale*" intorno alla terra (orbita complanare all'equatore terrestre). Esso si muove alla stessa velocità di rotazione della terra, in modo tale da apparire fermo per un qualunque osservatore terrestre (satellite geostazionario). Perché l'orbita sia stabile a quale quota h dalla superficie terrestre si deve trovare il satellite? (Raggio terrestre $R_T=6370\ km$, massa terrestre $M_T=5.98\ 10^{24}kg$, $G=6.67*\ 10^{-11}\ Nm^2kg^{-2}$).

5. Un blocco di massa m_1=2Kg viene lanciato lungo una guida liscia con un impulso I=10 $Kg\cdot m\cdot s^{-1}$. Il blocco raggiunge così la sommità della guida raccordata ad un tavolo liscio di altezza h=1m. Determinate la velocità assunta dal blocco sul tavolo. Successivamente il blocco, in corrispondenza dello spigolo del tavolo, urta contro un oggetto assimilabile ad un pendolo semplice, costituito quindi da una massa concentrata m_2=1Kg collegata ad un cardine tramite un filo inestensibile, di lunghezza L=50cm e di massa trascurabile. Assumendo che il pendolo sia inizialmente fermo nella posizione verticale, e che l'urto sia normale centrale ed elastico, determinate l'angolo massimo θ delle oscillazioni dopo l'urto, e la distanza b dalla base del tavolo cui cade il primo blocco.

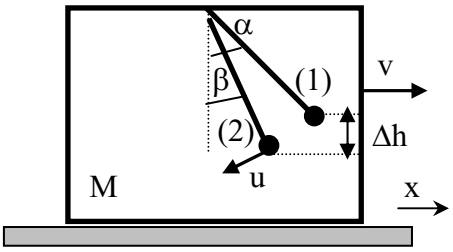


FISICA

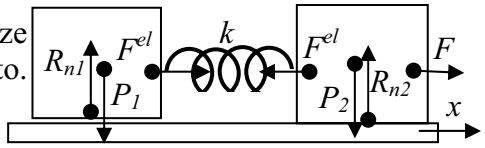
A.A. 2005-2006
Ingegneria Gestionale
Soluzioni della 7° prova



1. La quantità di moto del sistema si conserva tra l'istante *h* e l'istante *i* (prima e dopo la prima esplosione); infatti le forze esplosive sono forze interne e non danno contributo alla prima equazione cardinale. Si scrive quindi $\vec{p}_i = \vec{p}_h = 0$ perché il sistema inizialmente è in quiete. L'espressione diventa quindi $(M+m)\vec{v}_{a1} + m\vec{v}_{b1} = 0$. Il problema però non fornisce il valore della velocità assoluta del proiettile $\vec{v}_{b1}$ ma la sua velocità di uscita $\vec{v}_u$ relativa alla canna che non è ferma! Applicando le relazioni dei moti relativi si ha $\vec{v}_{b1} = \vec{v}_u + \vec{v}_{a1}$ che introdotta nell'altra equazione consente di trovare $\vec{v}_{a1} = -\vec{v}_u\left(\frac{m}{M+2m}\right)$. Dopo poco tempo si verifica una seconda esplosione dove si conserva ancora la quantità di moto tra gli istanti j e k. Possiamo pertanto scrivere $M\vec{v}_{a2} + m\vec{v}_{b2} = (M+m)\vec{v}_{a1}$ dove al solito $\vec{v}_{b2} = \vec{v}_u + \vec{v}_{a2}$. Combinando le espressioni si ottiene $\vec{v}_{a2} = -\vec{v}_u\left(\frac{m(2M+3m)}{(M+m)(M+2m)}\right)$ con valore $v_{a2} = -2.64 m/s$.

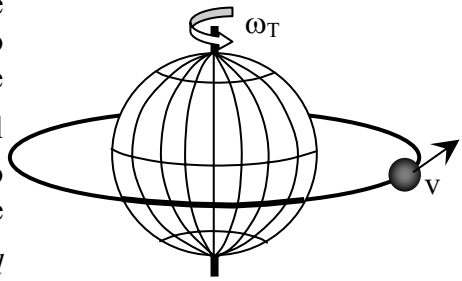


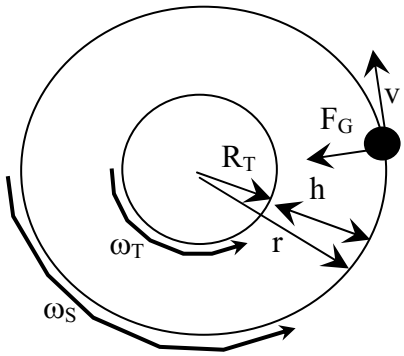
2. Al momento in cui viene rotto il filo di sostegno la massa *m* descrive un moto circolare partendo da fermo dal punto (1) ed arrivando al punto (2) con velocità $\vec{u}$ nel sistema relativo alla scatola. La scatola per reazione prende a muoversi con velocità $\vec{v}$ incognita. Il sistema scorre senza attrito sulla base di appoggio, quindi non ci sono forze esterne lungo l'asse delle *x* (cosa che non vale sull'asse verticale dove la reazione normale non è opposta alla forza peso!). Pertanto si conserva solo la componente x della quantità di moto del sistema tra (1) e (2). Pertanto $p_x^{(2)} = p_x^{(1)}$ e cioè $Mv_x + m(u_x + v_x) = 0$, dove $u_x = -u\cos(\beta)$ è negativa. Dal momento che non ci sono attriti si conserva anche l'energia meccanica del sistema e cioè $T^{(2)} + U^{(2)} = U^{(1)}$, quindi $\frac{1}{2}Mv^2 + \frac{1}{2}m\left[(v - u\cos(\beta))^2 + u^2 sin^2(\beta)\right] + mgl(1-\cos(\beta)) = mgl(1-\cos(\alpha))$, che combinate con le altre equazioni ed eliminando u si ottiene $v = \left[\sqrt{\frac{2m^2 gl(\cos\beta - \cos\alpha)\cos^2\beta}{(M+m)(M+msin^2\beta)}}\right] = 0.59$m/s.



3. Decidiamo di considerare solo le forze agenti lungo l'asse *x*. Le forze lungo *y* infatti si equilibrano banalmente senza effetti sul moto. Applicando il II principio sia per la massa n.1 che per la n.2 si ottiene $\begin{cases} F - F_{el} = m_2 a_2 \\ F_{el} = m_1 a_1 \end{cases}$ che sommando membro a membro dà luogo alla prima equazione cardinale del sistema $F = m_1 a_1 + m_2 a_2 = (m_1 + m_2)a_c$. Nel sistema le due masse viaggiano alla stessa velocità ed accelerazione per cui $a_1 = a_2 = a_c = F/(m_1 + m_2)$. Questa condizione riportata nell'equazione della forza elastica porta a $F_{el} = k\Delta l = m_1 a_1 = F(m_1/(m_1 + m_2))$ da cui $\Delta l = F/k\,(m_1/(m_1 + m_2)) = 1.5mm$.

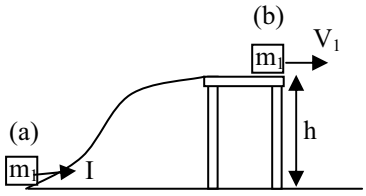
4. Affinché il satellite naturale si muova sull'orbita circolare "*equatoriale*" stabile rappresentata in figura (nello spazio e nel piano equatoriale), la forza di attrazione gravitazionale $F_G=GM_Tm/r^2$ deve poter fornire l'accelerazione normale $a_n=v^2/r=\omega_S^2\cdot r$ necessaria al satellite per descrivere l'orbita circolare. Applicando il II principio lungo la normale si ha $F_G=ma_n$ da cui si ottiene la velocità angolare del satellite $\omega_S=\sqrt{GM_T/r^3}$. La condizione di geostazionarietà del satellite (*"...il satellite appare fermo per un qualunque osservatore terrestre"*) si esprime imponendo che la velocità angolare del satellite ω_S sia uguale alla velocità angolare di rotazione terrestre $\omega_T=2\pi/T_{rot}$ dove il periodo di rotazione terrestre è $T_{rot}=24*3600\ s=86400s$. Da questa relazione $\omega_S=\omega_T$ si ottiene quindi $r=\sqrt[3]{GM_T/\omega_T^2}=\sqrt[3]{GM_TT_{rot}^2/(4\pi^2)}=42250\ km$ (distanza dal centro della terra). La quota h dalla superficie risulta quindi $h=r-R_T=35880\ km$.





5. Il blocco ha inizialmente energia cinetica $T_a=\frac{1}{2}m_1v_o^2=\frac{I^2}{2m_1}$

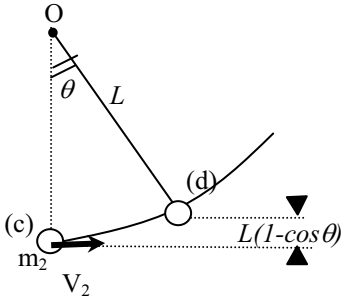
La velocità V_1 assunta dal blocco sul tavolo si calcola imponendo la conservazione dell'energia meccanica tra i punti (a) e (b).



$T_a=T_b+m_1gh$ da cui $V_1=\sqrt{(I/m_1)^2-2gh}=$ **2.32 m/s**

Assumendo l'urto elastico le velocità dopo l'urto sono $\begin{cases} V_{1f}=\left(\frac{m_1-m_2}{m_1+m_2}\right)V_1=\frac{1}{3}V_1=0.77\,m/s \\ V_2=\left(\frac{2m_1}{m_1+m_2}\right)V_1=\frac{4}{3}V_1=3.1\,m/s \end{cases}$

L'oscillazione massima del pendolo si ottiene imponendo la conservazione dell'energia meccanica tra i punti (c) e (d)

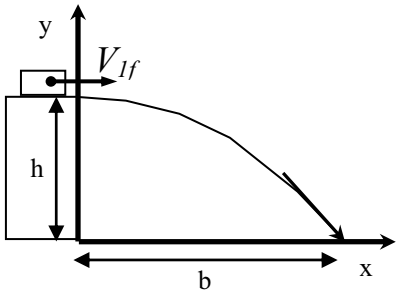


$T_c=\frac{1}{2}m_2V_2^2=U_d=m_2gL(1-\cos\theta)$ da cui

l'angolo massimo di oscillazione è dato da $\theta=\arccos\left(1-\frac{V_2^2}{2gL}\right)=$ **88° 49'**

Infine la distanza b dalla base del tavolo cui cade il primo blocco si ottiene studiando il moto parabolico del corpo di massa m_1 lanciato con velocità orizzontale V_{1f}

Lungo asse x $\begin{cases} x=V_{1f}t \\ v_x=V_{1f} \\ a_x=0 \end{cases}$, lungo asse y $\begin{cases} y=h-gt^2/2 \\ v_y=-gt \\ a_y=-g \end{cases}$



tempo di volo si ottiene imponendo $y(t_v)=0$ da cui $t_v=\sqrt{2h/g}$

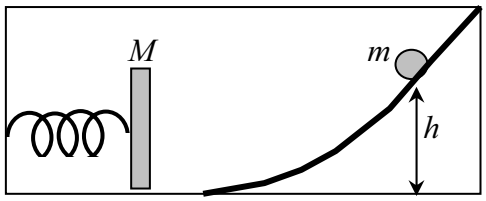
mentre **la distanza dal tavolo vale** $b=y(t_v)=V_{1f}t_v=V_{1f}\sqrt{2h/g}=$ **0.35 m**

FISICA

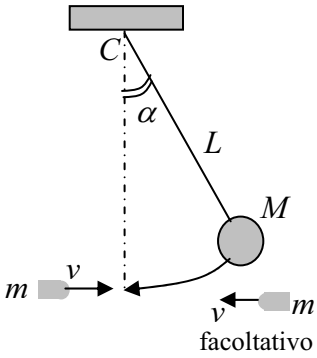
A.A. 2006-2007
Ingegneria Gestionale
8° prova del 13 Marzo 2007

Lo studente descriva il procedimento e la soluzione degli esercizi proposti. Gli elaborati verranno ritirati Venerdì 16 Marzo e saranno valutati ai fini del superamento dell'esame finale.

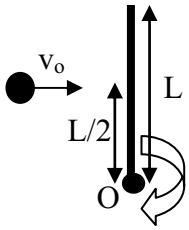
1. Un piattello di massa *M=3kg* è attaccato ad una molla di massa trascurabile. Una pallina di massa *m=200g* viene fatta scendere lungo un piano inclinato partendo da una quota *h=50cm*. Essa urta centralmente ed elasticamente il piattello, e quindi risale il piano inclinato mentre il piattello si mette ad oscillare orizzontalmente. Nell'ipotesi che sia assente ogni forma di attrito e sapendo che il piattello si mette ad oscillare con periodo *T=2ms* si determinino: a) la quota cui risale la massa *m* sul piano inclinato; b) l'ampiezza delle oscillazioni del piattello; c) l'impulso ceduto dalla pallina al piattello.



2. Un sacco di massa M=3kg è appeso ad un cardine C tramite un filo di lunghezza L=50cm, inestensibile e di massa trascurabile. Il sacco, inizialmente inclinato di un angolo α=30° rispetto alla verticale, viene lasciato oscillare liberamente. Quando il sacco raggiunge la posizione verticale, esso impatta con un proiettile di massa m=20g. A seguito dell'urto perfettamente anelastico il sacco si ferma istantaneamente e rimane fermo lungo la verticale. Determinare la velocità del proiettile prima dell'urto. Facoltativo: studiare anche il caso in cui lo stesso proiettile, dotato di velocità opposta al caso precedente, colpisca il sacco nello stesso punto. Determinare in questo nuovo caso l'angolo massimo raggiunto β dalle oscillazioni susseguenti all'urto.

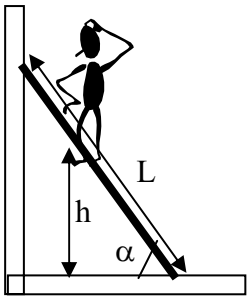


3. Una sottile barretta, omogenea di massa *M=1kg* e lunghezza *L=30cm* può ruotare senza attrito intorno ad un asse fisso orizzontale passante per *O*. Inizialmente si trova in quiete nella posizione di equilibrio instabile in figura. Essa viene colpita centralmente da un proiettile di massa *m=150g* a velocità v_o*=200m/s* come in figura. Nell'ipotesi che il proiettile rimanga conficcato nella barretta si calcoli la velocità del centro di massa quando transita nel punto più basso della sua traiettoria (nel punto di equilibrio stabile)



4. Un cilindro ed una sfera entrambi di raggio *R* e di massa *m*, posti sulla sommità *h=1m* di un piano inclinato di angolo θ=30°, rotolano senza strisciare sino a valle. Calcolare le rispettive velocità finali ed i tempi rispettivamente impiegati. (Si assuma $I_{cil} = mR^2/2$, $I_{sfera} = 2mR^2/5$)

5. Un operaio di massa *M=70kg* sale su di una scala di massa *m=10kg* e di lunghezza *L=3m* appoggiata ad una parete disposta come in figura. Considerando il pavimento scabro con coefficiente di attrito statico $\mu_s = 0.5$, si calcoli qual è l'altezza massima *h* cui può salire senza rischio di cadere insieme alla scala. Si assuma *α=60°*.

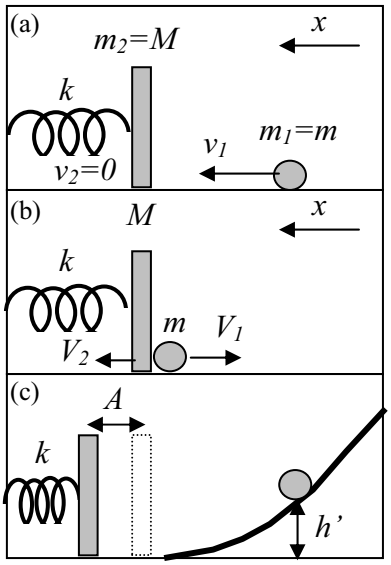


FISICA

A.A. 2006-2007
Ingegneria Gestionale
Soluzioni della 8° prova

.

1. La pallina (corpo n.1) scende senza attrito lungo il piano inclinato, trasformando la sua energia potenziale $U=m_1gh$ interamente in energia cinetica $T=m_1v_1^2/2$. La velocità prima dell'impatto con il piattello è quindi $v_1=\sqrt{2gh}$ diretta lungo l'asse delle x come in figura (a). Dopo l'urto elastico con il piattello fermo ($v_2=0$), le velocità dei due corpi V_1 e V_2 si calcolano imponendo la conservazione della quantità di moto e dell'energia cinetica del sistema. Dal sistema si ottengono le espressioni

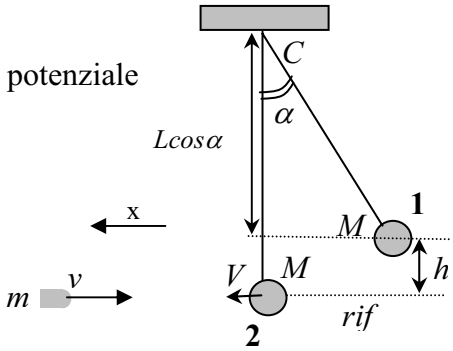


$$\begin{cases} V_1=\left(\dfrac{m_1-m_2}{m_1+m_2}\right)v_1+\left(\dfrac{2m_2}{m_1+m_2}\right)v_2=\left(\dfrac{m-M}{m+M}\right)\sqrt{2gh} \\ V_2=\left(\dfrac{2m_1}{m_1+m_2}\right)v_1+\left(\dfrac{m_2-m_1}{m_1+m_2}\right)v_2=\left(\dfrac{2m}{m+M}\right)\sqrt{2gh} \end{cases}$$

ove $m=m_1$ e $M=m_2$

La pallina quindi inverte la sua velocità ($V_1<0$) e risale il piano inclinato sino all'altezza h'. Questa altezza si ricava imponendo la conservazione dell'energia meccanica della pallina nell'istante immediatamente dopo l'urto $E_m=T=mV_1^2/2=mgh((M-m)/(M+m))^2$ (fig b), e nel punto di massima altezza $E_m=U=mgh'$ (fig c), da cui $h'=h((M-m)/(M+m))^2=0.383m$. Durante l'urto la pallina cede al piattello un impulso, lungo l'asse x, di valore $J_x=\int F_x dt=p_x^{dopo}-p_x^{prima}=MV_2=\sqrt{2gh}\,2mM/(M+m)=1.17Ns$ che mette in oscillazione il piattello ad $\omega=2\pi/T_{osc}$. Dalla conservazione dell'energia meccanica per il piattello, tra l'istante immediatamente dopo l'urto $E_m=T=MV_2^2/2$ e la posizione di massima elongazione $E_m=U^{el}=kA^2/2$ siottiene l'elongazione massima $A=V_2/\sqrt{k/M}=V_2T_{osc}/2\pi=0.125mm$

2 Il sacco lasciato cadere dalla posizione (1) ha inizialmente solo energia potenziale



$$E_{m1}=Mgh=MgL(1-\cos\alpha)$$

Quando raggiunge la posizione di minima quota (2) avrà trasformato energia potenziale interamente in energia cinetica

$$E_{m2}=MV^2/2$$

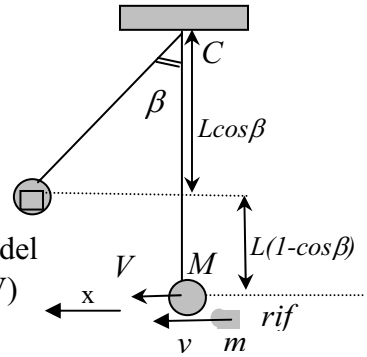
Dalla conservazione dell'energia meccanica si ricava la velocità $V=\sqrt{2gL(1-\cos\alpha)}$

La quantità di moto (lungo x) del sistema proiettile+sacco prima dell'urto è $p_x=MV-mv$

Il sistema dopo l'urto rimane in quiete. La quantità di moto è quindi $p_x=0$.

Dalla conservazione della quantità di moto si ottiene la velocità del proiettile

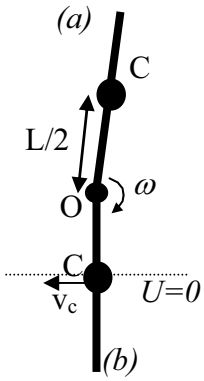
$$v=\frac{M}{m}\sqrt{2gL(1-\cos\alpha)}=\mathbf{171.9\ m/s}$$



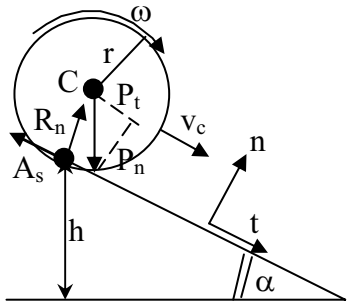
Facoltativo: se il proiettile è diretto in senso opposto la quantità di moto del sistema prima dell'urto è $p_x=MV+mv=2MV$ (tenuto conto che mv=MV)

Questa quantità si conserva dopo l'urto $p_x = (M+m)V_c$
Imponendo l'uguaglianza dei termini si ottiene la velocità del c.d.m.
$V_c = V\left(\frac{2M}{M+m}\right)$ che è legata al massimo angolo β dalla $V_c = \sqrt{2gL(1-\cos\beta)}$

Combinando le equazioni si ottiene $\cos\beta = 1 - \left(\frac{2M}{M+m}\right)^2 (1-\cos\alpha)$ da cui **β=61°53'**

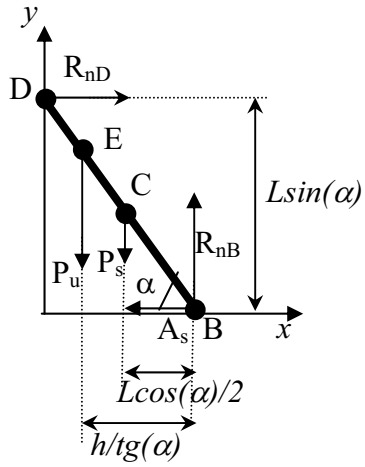


3. L'urto è anche in questo caso perfettamente anelastico. Ma il moto della barretta dopo l'urto è questa volta di pura rotazione intorno all'asse per il cardine *O*. Considerando il sistema complessivo, nell'urto si sviluppano solo forze interne e forze sul cardine *O*. Il momento di queste forze calcolato sull'asse per O è quindi nullo per cui si conserva il momento della quantità di moto del sistema. Prima dell'urto $b_o = mv_o L/2$ mentre dopo l'urto $b_o = I_o\omega$ dove $I_o = m(L/2)^2 + ML^2/3$ =0.033kgm^2. Dalla conservazione di b_o si ottiene la velocità angolare iniziale $\omega_o = mv_oL/2I_o = 6v_om/(3m+4M)L = 134.8$ *rad/s*. Appena dopo l'urto la barra si sposta dalla posizione di equilibrio instabile *(a)* e si rovescia oscillando intorno alla posizione di equilibrio stabile *(b)*. Durante la rotazione l'energia meccanica totale si conserva per cui $U_a+T_a=U_b+T_b$. Fissando come riferimento dell'energia potenziale quello dello stato *(b),* si ha ovviamente $U_b=0$ mentre $U_a=(m+M)gL$ (dopo l'urto nel centro di massa si concentra la massa complessiva *m+M)*. L'espressione dell'energia cinetica di pura rotazione intorno ad *O* è invece $T = I_o\omega^2/2$. Imponendo la conservazione dell'energia meccanica si ha quindi $I_o\omega_o^2/2 + (m+M)gL = I_o\omega_b^2/2$ da cui la velocità angolare in (b) vale $\omega_b = \sqrt{\omega_o^2 + 2(m+M)gL/I_o}$ =135.5 *rad/s.*



4. Le forze agenti sul corpo sono: la forza peso *P=mg* applicata nel baricentro *C*, che può pensarsi scomposta nelle due componenti lungo i due assi normale e tangenziale $P_t=P\sin\alpha$ e $P_n=P\cos\alpha$, la reazione normale R_n applicata sul punto di contatto e diretta lungo *n*, e la forza di attrito statico A_s applicata sul punto di contatto e contraria al moto lungo *t*. (si ricorda che l'attrito è statico perché nel puro rotolamento il punto di contatto è fermo!). La 1ª equazione cardinale proiettata lungo gli assi *n,t* si scrive $\begin{matrix}\hat{t}\\ \hat{n}\end{matrix}\begin{cases} P_t - A_s = ma_c \\ R_n - P_n = 0 \end{cases}$ da cui ricaviamo la reazione normale $R_n = P_n = mg\cos\alpha$. Per ricavare l'accelerazione del centro di massa a_c è però indispensabile applicare la 2ª equazione cardinale proiettata sull'asse orizzontale per il centro di massa *C*; l'unico momento non nullo è il momento della forza di attrito che mette in rotazione il corpo $M_C = A_s r = I_c\, d\omega/dt$ (si noti che per semplicità è stata adottata la convenzione per cui ω è positivo per rotazioni orarie) essendo I_c il momento di inerzia rispetto al centro di massa. La condizione di rotolamento impone che $v_c(t) = \omega(t)\cdot r$ che vale anche derivando nel tempo ambo i membri per cui $a_c(t) = \frac{d\omega}{dt}\cdot r$ da cui l'attrito vale $A_s = a_c\left(I_c/r^2\right)$. Sostituendo questa espressione nella 1ª equazione cardinale si ottiene $ma_c = mg\sin\alpha - a_c\left(I_c/r^2\right)$ da cui l'accelerazione del centro di massa è costante $a_c = g\sin\alpha/\left(1 + I_c/mr^2\right)$. Il moto è quindi uniformemente accelerato con $v_c(t) = a_c t$ e spazio percorso $s(t) = a_c t^2/2$. Il tempo t^* per

percorrere lo spazio fino alla base del piano $L=h/sin\alpha$ è quindi $t^* = \sqrt{2L/a_c} = \sqrt{2h/\left(gsin^2\alpha\left(1+I_c/mr^2\right)\right)} = \begin{cases} t_{cilindro} = 1.11s \\ t_{sfera} = 1.07s \end{cases}$ mentre le velocità finali sono $v_C = \sqrt{2gh\Big/\left(1+\frac{I_c}{mr^2}\right)} = \begin{cases} v_{cilindro} = 3.61\,m/s \\ v_{sfera} = 3.74\,m/s \end{cases}$. La sfera arriva prima perché ha un momento d'inerzia minore e l'energia cinetica della sfera viene ripartita più efficientemente nell'energia traslazionale del centro di massa più che nell'energia rotazionale intorno al centro di massa.



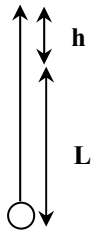
5. Le forze agenti sul sistema sono le seguenti: il peso della scala P_s applicato nel baricentro C (a metà della lunghezza della scala), il peso dell'uomo P_u applicato sulla scala nel punto E (ad altezza h dal suolo), la reazione del pavimento applicata nel punto di contatto B che si compone di una reazione normale R_{nB} e di una forza di attrito statico orizzontale A_s, ed infine la reazione della parete verticale R_{nD} applicata nel punto di contatto D. In condizioni statiche la somma vettoriale di tutte le forze deve annullarsi (1ª equazione cardinale) come anche la somma di tutti i momenti delle forze deve annullarsi (2ª equazione cardinale). Scomponiamo la 1ª equazione cardinale lungo x, y: $\begin{matrix} \hat{x} \\ \hat{y} \end{matrix}\begin{cases} R_{nD} - A_s = 0 \\ R_{nB} - \left(P_u + P_s\right) = 0 \end{cases}$ da cui ricaviamo il valore di $R_{nB}=P_u+P_s$ ed una condizione sull'attrito statico $A_s=R_{nD}$ insufficiente però per determinarlo (1 equazione in 2 incognite!). L'attrito A_s viene infatti determinato grazie alla 2ª equazione cardinale applicata per semplicità ad un asse orizzontale per B. In questo caso contribuiranno solo i momenti della reazione della parete verticale R_{nD} con braccio $Lsin\alpha$ da B, del peso della scala P_s con braccio $L/2\ cos\alpha$ da B, ed infine del peso dell'uomo P_u con braccio $hcotg\alpha$ da B (gli altri 2 momenti, di braccio nullo, sono nulli). La condizione statica impone che $M_B = P_u h\cot g\alpha + P_s L\cos\alpha/2 - R_{nD}Lsin\alpha = 0$ (si noti che il momento di R_{nD} è negativo perché tenderebbe a far ruotare la scala in senso orario) da cui si ricava $A_s = R_{nD} = P_u h/\left(Lsin\alpha \cdot tg\alpha\right) + P_s/2tg\alpha$. L'attrito trovato è quello richiesto dalla condizione di staticità. Esso può essere fornito solo se è inferiore al valore massimo $A_s \le A_{\max} = \mu_s R_{nB} = \mu_s\left(P_u + P_s\right)$. Il caso limite $A_s = A_{\max}$ corrisponde all'altezza h_{max} da cui si ricava $h_{\max} = L\frac{sin^2\alpha}{\cos\alpha}\left[\mu_s + \frac{P_s}{P_u}\left(\mu_s - \frac{1}{2tg\alpha}\right)\right] = 3\frac{3/4}{1/2}\left[\frac{1}{2} + \frac{10}{70}\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2\sqrt{3}}\right)\right] = 2.386\ m$

Università di Roma "La Sapienza"
Facoltà di Ingegneria

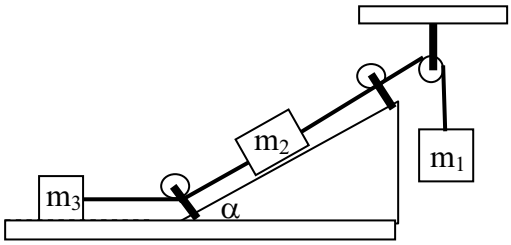
FISICA I

A.A. 2006-2007
Ingegneria Gestionale (M-Z)
1°appello del 26 Marzo 2007

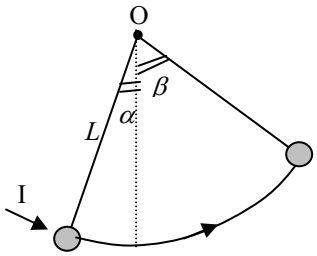
1. Un corpo di massa m=50g, sommerso sotto la superficie libera del mare, viene lasciato libero di emergere dalla profondità L senza cioè imprimere alcuna velocità iniziale. Sapendo che il corpo, quando immerso, riceve una spinta di Archimede diretta verso l'alto pari a 1.5 volte il proprio peso, e che a tale spinta si oppongono la forza peso ed una resistenza al moto in acqua di valore R_v=bv, ove b=0.02 kg/s. Determinare la velocità con cui il corpo emerge dopo un tempo t=0.5 s, e determinare quale altezza massima h il corpo raggiunga in aria prima di ricadere sulla superficie del mare, trascurando la resistenza al moto in aria. **Facoltativo**: calcolare la profondità L.



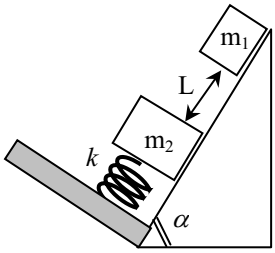
2. Un blocco di massa m_1=2kg disposto lungo la verticale trascina, grazie ad un sistema di pulegge di massa trascurabile, i blocchi m_2=2kg ed m_3=4kg come indicato in figura. In particolare il blocco m_2 è disposto su di un piano inclinato di α=30° rispetto all'orizzontale, mentre m_3 è disposto su di un piano orizzontale scabro caratterizzato da un coefficiente di attrito statico μ_s=0.2 e dinamico μ_d=0.15. Determinare l'accelerazione con cui si muove il sistema e le tensioni delle due funi. **Facoltativo:** per quali valori della massa m_1 il sistema sarebbe stato in equilibrio?



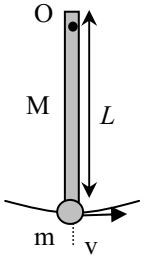
3. Un pendolo semplice è costituito da una massa m=1kg e da un filo di massa trascurabile e di lunghezza L=60cm. Esso è messo in oscillazione da un impulso diretto lungo il moto di intensità I=2 kg m/s che agisce quando il pendolo è fermo ed inclinato di un angolo α=10° rispetto alla verticale. Determinare l'angolo di oscillazione massima β del pendolo dopo l'impuso e la tensione massima del filo.



4. Un blocco di massa m_1=1kg viene lasciato cadere lungo un piano inclinato di un angolo α=60° rispetto all'orizzontale. Assumendo che il coefficiente di attrito dinamico fra blocco e piano sia μ_d=0.15, e che il blocco percorra una distanza L=1m prima di urtare elasticamente un secondo blocco di massa m_2=2kg, fermo e collegato ad una molla di costante elastica k=50 N/m, determinare la massima compressione della molla. **Facoltativo:** Quanto spazio deve ripercorre in salita il primo blocco prima di fermarsi?



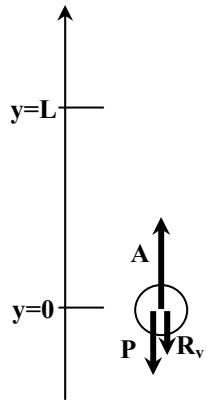
5. Un pendolo composto è formato da un'asta rigida omogenea di massa M=4kg, di lunghezza L=40cm, libera di ruotare intorno al cardine O. All'estremo della sbarra è anche alloggiata una piccola massa m=1kg. Supponendo di imprimere una piccola velocità v=0.5m/s all'estremo libero dell'asta, determinare l'angolo massimo di oscillazione del sistema e fornire una stima del tempo necessario per tornare nella posizione verticale di partenza. [Suggerimento: $I_{asta}=ML^2/3$]



Università di Roma "La Sapienza"
Facoltà di Ingegneria
FISICA I

A.A. 2006-2006
Ingegneria Gestionale (M-Z)
1°appello del 26 Marzo 2007

1. Nella fase in immersione il corpo subisce 3 forze: la forza peso **P=mg**, la spinta di Archimede **A=3mg/2**, e la resistenza del mezzo $\mathbf{R_v=bv_y}$.



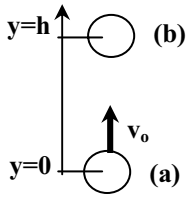
Proiettando le forze lungo l'asse y: $\frac{3}{2}mg - mg - bv_y = ma_y = m\frac{dv_y}{dt}$

da cui $\frac{dv_y}{dt} + \left(\frac{b}{m}\right)v_y = \frac{g}{2}$ con soluzione generale $v_y(t) = A\exp\left(-\frac{b}{m}t\right) + v_{\lim}$

dove $v_{\lim} = \frac{mg}{2b} = 12.25$ m/s. Infine dalla condizione $v_y(0) = 0$ si ottiene A= -$v_{\lim}$

L'espressione della **velocità** diviene quindi $v_y(t) = v_{\lim}\left[1 - \exp\left(-\frac{b}{m}t\right)\right]$

da cui si calcola la velocità all'emersione $v_o = v_y(t^* = 0.5s) = \mathbf{2.22\ m/s}$



Nella fase in emersione il corpo è soggetto solo alla forza peso che è conservativa. La quota massima si ottiene imponendo la conservazione dell'energia meccanica.

$U_A + T_A = U_B + T_B$ da cui $\frac{1}{2}mv_o^2 = mgh$ e quindi $h = \frac{v_o^2}{2g} = \mathbf{25.2\ cm}$

Facoltativo: lo spazio percorso prima della emersione si calcola integrando la velocità sino al tempo t*=0.5 s (per brevità si pone τ=m/b)

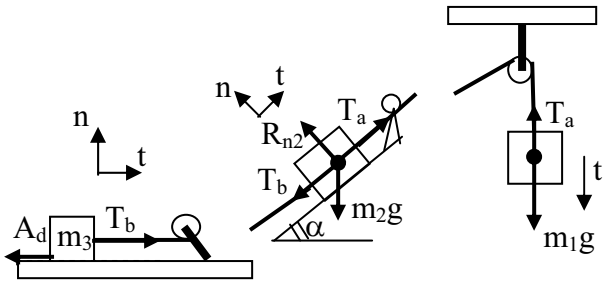
$$L = \int_0^{t^*} v_y(t)dt = \int_o^{t^*} v_{\lim}\left[1 - \exp(-t/\tau)\right]dt = v_{\lim}\left[t^* - \tau + \tau\exp(-t^*/\tau)\right] = \mathbf{57.4\ cm}$$

2. Applicando il secondo principio per ogni blocco si ottiene il sistema:

massa $\mathbf{m_1}$; $t)\ \ m_1 g - T_a = m_1 a$

massa $\mathbf{m_2}$; $\begin{cases} t)\ \ T_a - T_b - m_2 g\sin\alpha = m_2 a \\ n)\ \ R_{n2} - m_2 g\cos\alpha = 0 \end{cases}$

massa $\mathbf{m_3}$; $\begin{cases} t)\ \ T_b - A_d = m_3 a \\ n)\ \ R_{n3} = m_3 g \end{cases}$



sommando le equazioni lungo l'asse t per tutte le masse si ottiene

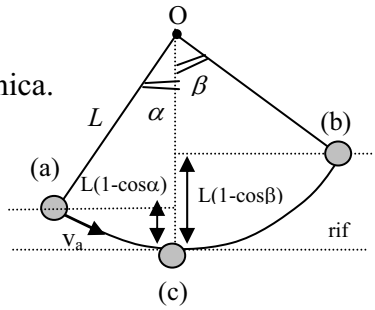
$$m_1 g - m_2 g\sin\alpha - A_d = (m_1 + m_2 + m_3)a$$

da cui l'**accelerazione del sistema** $a = g\dfrac{m_1 - m_2\sin\alpha - \mu_d m_3}{m_1 + m_2 + m_3} = \mathbf{0.49\ m/s^2}$

e le due **tensioni** $T_a = m_1(g-a) =$ **18.6 N** e $T_b = m_3(a + \mu_d g) =$ **7.8 N**

Facoltativo: se il sistema è in equilibrio l'attrito deve valere $A = (m_1 - m_2\sin\alpha)g \le A_{\max} = \mu_s m_3 g$ da cui si ottiene $m_1 \le m_2\sin\alpha + \mu_s m_3 =$ **1.8 kg. (**Questo risultato vale però quando la fune b è tesa ossia $m_1 \ge m_2\sin\alpha =$ **1 kg**).

3. L'impulso produce una variazione della quantità di moto nel punto (a)
$I = p_f - p_i = mv_a$ dove p_i=0 da cui si ricava $v_a = I/m$



L'angolo massimo si ottiene imponendo la conservazione dell'energia meccanica.

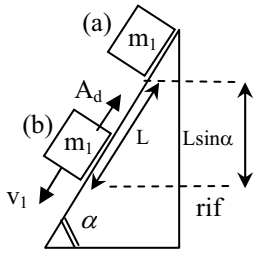
$U_A + T_A = U_B + T_B$ ossia $\dfrac{1}{2}mv_a^2 + mgL(1-\cos\alpha) = mgL(1-\cos\beta)$

da cui l'**oscillazione massima** è $\beta = \arccos\left[\cos\alpha - \dfrac{I^2}{2m^2gL}\right] =$ **49°52'**

La **tensione massima** si ottiene quando il pendolo è nella posizione verticale (c)

$T_{\max} = mg + \dfrac{mv_c^2}{L} = mg(3 - 2\cos\beta) =$ **16.8 N**

4. Calcolo della velocità di impatto della prima massa:



L'attrito è responsabile della diminuzione dell'energia meccanica

$$L_{Ad} = E_{mb} - E_{ma}$$

dove $L_{Ad} = -A_d L = -\mu_d m_1 gL\cos\alpha$, $E_{mb} = \dfrac{1}{2}m_1 v_1^2$, $E_{ma} = m_1 gh = m_1 gL\sin\alpha$

da cui si ricava la velocità prima dell'urto $v_1 = \sqrt{2gL}\sqrt{\sin\alpha - \mu_d\cos\alpha}$ **=3.94 m/s**

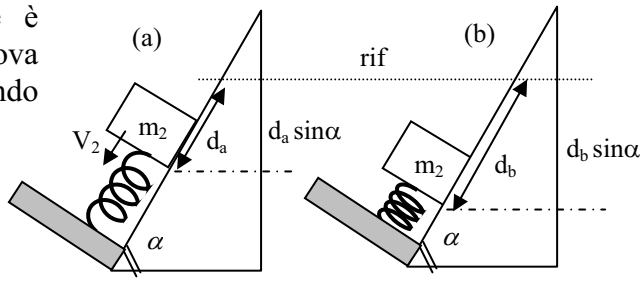
Urto normale centrale elastico fra le due masse

Dalla conservazione dell'energia cinetica e della quantità di moto si ottengono le velocità successive all'urto

$$\begin{cases} V_1 = \left(\dfrac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}\right)v_1 + \left(\dfrac{2m_2}{m_1 + m_2}\right)v_2 = -\dfrac{1}{3}v_1 = \mathbf{-1.31}\,m/s \\ V_2 = \left(\dfrac{2m_1}{m_1 + m_2}\right)v_1 + \left(\dfrac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2}\right)v_2 = \dfrac{2}{3}v_1 = \mathbf{2.62}\,m/s \end{cases}$$

Calcolo della compressione della molla

Prima di procedere al calcolo della compressione è importante notare che la molla già prima dell'urto si trova compressa di una quantità $\mathbf{d_a}$ calcolabile imponendo l'equilibrio delle forze lungo l'asse tangenziale



$$m_2 g \sin\alpha - k d_a = 0 \quad \text{da cui} \quad d_a = \frac{m_2 g \sin\alpha}{k} = \mathbf{34\ cm}$$

L'energia meccanica nello stato (a) vale quindi $E_{ma} = \frac{1}{2} k d_a^2 - m_2 g d_a \sin\alpha + \frac{1}{2} m_2 V_2^2 = \mathbf{4.01\ J}$

dove si conviene di fissare il riferimento dell'energia potenziale della forza peso nella posizione a riposo della molla.

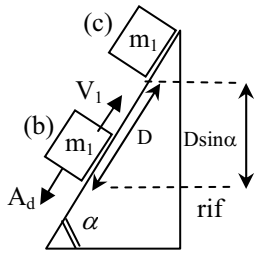
Per la conservazione dell'energia meccanica nello stato (b) si ha

$$E_{mb} = \frac{1}{2} k d_b^2 - m_2 g d_b \sin\alpha = E_{ma} \quad \text{da cui} \quad d_b = \frac{m_2 g \sin\alpha}{k} + \sqrt{\left(\frac{m_2 g \sin\alpha}{k}\right)^2 + \frac{2E_{ma}}{k}} = \mathbf{86\ cm}$$

Facoltativo: Calcolo dello spazio percorso dalla prima massa dopo l'urto

L'attrito è sempre responsabile della diminuzione dell'energia meccanica dopo l'urto

$$L_{Ad} = E_{mc} - E_{mb}$$



dove $L_{Ad} = -A_d D = -\mu_d m_1 g D \cos\alpha$, $E_{mb} = \frac{1}{2} m_1 V_1^2$, $E_{mc} = m_1 g D \sin\alpha$

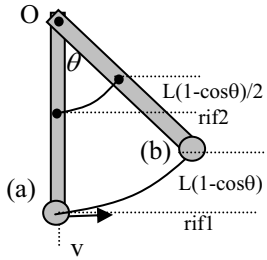
da cui si ricava lo spazio percorso dopo l'urto $D = \frac{V_1^2}{2g(\sin\alpha + \mu_d \cos\alpha)} = \mathbf{9.3\ cm}$

5. Calcolo energia meccanica nello stato (a)

Il sistema è dotato di un momento di inerzia complessivo dato da:

$$I_{tot} = I_{asta} + I_m = \frac{ML^2}{3} + mL^2 = \frac{L^2}{3}(M + 3m)$$

Assumendo nulla l'energia potenziale complessiva nello stato (a), l'energia meccanica coincide con l'energia cinetica di rotazione



$$E_{ma} = T_a = \frac{1}{2} I_{tot} \omega_a^2 = \frac{1}{2} I_{tot} \left(\frac{v}{L}\right)^2 = \frac{1}{6}(M + 3m) v^2$$

Calcolo energia meccanica nello stato (b)

Essendo nulla l'energia cinetica nello stato (b), l'energia meccanica diviene

$$E_{mb} = U_b = Mg\frac{L}{2}(1-\cos\theta) + mgL(1-\cos\theta) = \frac{gL}{2}(M+2m)(1-\cos\theta)$$

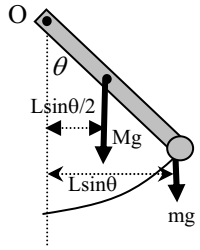
dove sono stati distinti i riferimenti per le masse m, M

Infine imponendo la conservazione dell'energia meccanica $E_{ma} = E_{mb}$

si può calcolare l'**angolo massimo di oscillazione** $\theta = \arccos\left[1 - \frac{v^2}{3gL}\left(\frac{M+3m}{M+2m}\right)\right] =$ **12° 47'**

Calcolo del periodo di oscillazione:

Quando il pendolo composto è fuori dalla sua posizione di equilibrio, il momento delle due forze peso tende a far ruotare il sistema verso la posizione di equilibrio



Applicando la seconda equazione cardinale $M_o^{ext} = \frac{db_o}{dt} = I_{tot}\frac{d^2\theta}{dt^2}$

dove $M_o^{ext} = -MgL\sin\theta/2 - mgL\sin\theta \cong -\frac{gL}{2}(M+2m)\theta$

L'equazione differenziale è quindi $\frac{d^2\theta}{dt^2} + \left(\frac{gL(M+2m)}{2I_{tot}}\right)\theta = 0$ che prevede oscillazioni di periodo

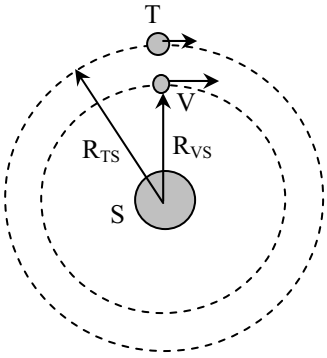
$$T = 2\pi\sqrt{\frac{2I_{tot}}{gL(M+2m)}} = 2\pi\sqrt{\frac{2L}{3g}\left(\frac{M+3m}{M+2m}\right)} = \mathbf{1.12\ s.}$$

Il tempo necessario per tornare in posizione verticale è quindi **T/2 = 0.56 s**

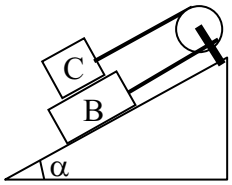
Università di Roma "La Sapienza"
Facoltà di Ingegneria

FISICA I

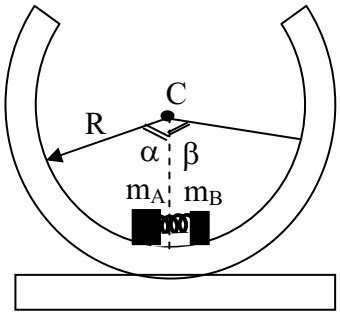
A.A. 2006-2007
Ingegneria Gestionale (M-Z)
2°appello del 16 Aprile 2007



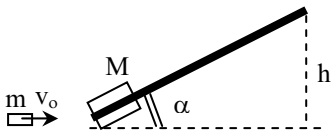
1. Nel sistema solare i due pianeti Terra e Venere descrivono un moto di rivoluzione intorno al Sole su traiettorie approssimabili a circonferenze di raggio rispettivamente $R_{TS}=150\cdot10^6$ km e $R_{VS}=108\cdot10^6$ km, che giacciono sul medesimo piano come descritto in figura (in realtà le due orbite sono inclinate di 3.4°). Sapendo che dalla Terra gli astronomi hanno osservato un transito di Venere sul disco solare il giorno 8 giugno 2004 (vedi figura), calcolare in quale giorno si è successivamente verificata una nuova congiunzione fra Venere e Terra (minima distanza fra i due pianeti). Dati [Periodo di rivoluzione terrestre T=365 giorni, $G=6.67\cdot10^{-11}$ Nm^2/kg^2]. **Facoltativo:** dare una stima della massa del Sole.



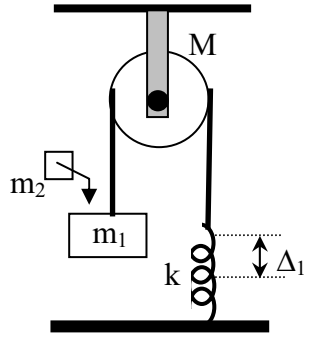
2. Nel sistema descritto in figura i blocchi B e C rispettivamente di massa m_B= 5kg ed m_C= 1kg sono disposti su di un piano liscio inclinato di un angolo α=10° rispetto all'orizzontale, e collegati tra loro con un filo inestensibile di massa trascurabile per mezzo di una carrucola anch'essa di massa trascurabile. Calcolare il valore minimo del coefficiente di attrito statico fra B e C che garantisce l'equilibrio del sistema. **Facoltativo:** nel caso che l'attrito non possa garantire l'equilibrio calcolare l'accelerazione del sistema, la tensione della fune e la sollecitazione cui è sottoposto il cardine della carrucola, assumendo μ_d=0.1



3. Due blocchi di massa m_A=30g e m_B=20g sono posizionati sul fondo di uno scivolo cilindrico liscio il cui profilo è una circonferenza di raggio R=2m. I due blocchi sono collegati ad una molla di costante elastica k=200 N/m che viene tenuta compressa di 10cm. Quando il sistema viene lasciato libero, la molla lancia i due blocchi che risalgono lo scivolo. Determinare gli angoli α e β raggiunti dai blocchi nei punti di inversione del moto e le relative reazioni normali fornite dallo scivolo.



4. Un proiettile di massa m=10g si conficca in un blocco di massa M=1kg alla velocità di v_o=100m/s diretta lungo l'orizzontale. Il blocco è libero di scorrere senza attrito lungo un'asta metallica inclinata rispetto all'orizzontale di un angolo α=40°. Determinare l'energia persa nell'urto, la massima quota raggiunta dal blocco, il tempo necessario per raggiungere tale quota.

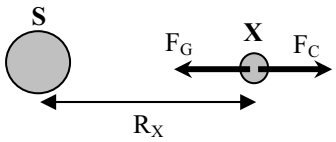


5. Una cinghia inestensibile di massa trascurabile è fissata ad una carrucola di massa M=2kg libera di ruotare intono ad un asse orizzontale per il suo centro. Agli estremi della cinghia sono posizionate una molla di costante elastica k=100 N/m collegata a sua volta al pavimento, ed un blocco di massa m_1=3kg che rimane sospeso. All'equilibrio la molla risulta allungata di una quantità Δ_1 rispetto alla sua lunghezza di riposo. In un secondo momento sul primo blocco viene appoggiato un secondo blocco di massa m_2=2kg causando delle oscillazioni di periodo T. Determinare il periodo T, e gli allungamenti della molla prima Δ_1 e dopo $\Delta_2(t)$.

Università di Roma "La Sapienza"
Facoltà di Ingegneria
FISICA I
A.A. 2006-2007
Ingegneria Gestionale (M-Z)
2°appello del 16 Aprile 2007

1. Calcolo del periodo di rivoluzione dei pianeti del sistema solare

Nel sistema di riferimento non inerziale solidale al generico pianeta X, la forza di attrazione gravitazionale esercitata dal Sole (F_G) equilibra la forza centrifuga (F_C) che tenderebbe a fare allontanare il pianeta dal Sole.

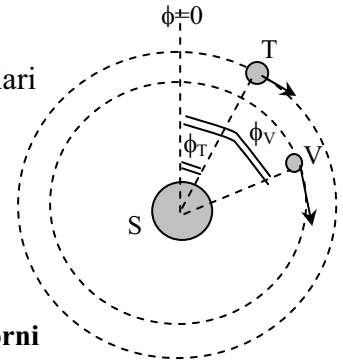


$$F_C = F_G \quad \text{ossia} \quad m_X \omega^2 R_x = G\frac{M_S m_X}{R_x^2}$$

da cui $\omega = \sqrt{\dfrac{GM_S}{R_x^3}}$ ed **il periodo di rivoluzione** $T = \dfrac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\dfrac{R_x^3}{GM_s}}$

Il rapporto fra i periodi di rivoluzione di Venere e Terra è $a = \dfrac{T_V}{T_T} = \dfrac{2\pi\sqrt{\dfrac{R_{VS}^3}{GM_s}}}{2\pi\sqrt{\dfrac{R_{TS}^3}{GM_S}}} = \sqrt{\dfrac{R_{VS}^3}{R_{TS}^3}} = \mathbf{0.611}$

Calcolo della nuova congiunzione



I moti di entrambi i pianeti sono circolari uniformi descritti dalle relazioni angolari

per la Terra: $\varphi_T(t) = \omega_T t$,

per Venere: $\varphi_V(t) = \omega_V t$ dove per entrambi si è assunto inizialmente ϕ=0 per t=0

I due pianeti sono di nuovo in congiunzione quando

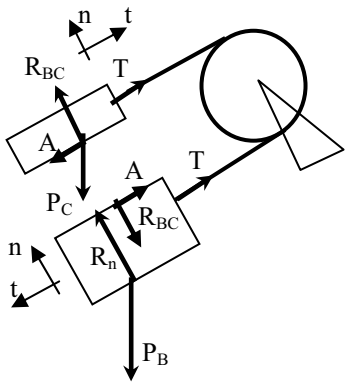
$$\varphi_V(t) - \varphi_T(t) = 2\pi \quad \text{ove} \quad t = \frac{2\pi}{\omega_V - \omega_T} = \frac{1}{\dfrac{1}{T_V} - \dfrac{1}{T_T}} = \frac{T_V T_T}{T_T - T_V} = \frac{a}{1-a}T_T = \mathbf{573\ giorni}$$

che corrisponde al **2 gennaio 2006**.

Facoltativo: dal periodo di rivoluzione della Terra $T_T = 2\pi\sqrt{\dfrac{R_{TS}^3}{GM_s}} = \mathbf{365\ giorni}$

si ottiene la stima della **massa del Sole** $M_S = \dfrac{4\pi^2 R_{TS}^3}{T_T^2 G} = \mathbf{2\cdot 10^{30}\ kg}$

2. CASO STATICO



blocco C $\begin{matrix}\hat{n}\\ \hat{t}\end{matrix}\begin{cases} R_{BC} - m_C g\cos\alpha = 0 \\ T - A - m_C g\sin\alpha = 0\end{cases}$; blocco B $\begin{matrix}\hat{n}\\ \hat{t}\end{matrix}\begin{cases} R_n - R_{BC} - m_B g\cos\alpha = 0 \\ -T - A + m_B g\sin\alpha = 0\end{cases}$

sommando le equazioni lungo l'asse t si ottiene l'attrito:

$$A = \frac{(m_B - m_C)}{2} g\sin\alpha \le A_{\max} = \mu_s R_{BC} = \mu_s m_C g\cos\alpha \quad \Rightarrow \quad \mu_s \ge \frac{m_B - m_C}{2m_C} tg\alpha = \mathbf{0.35}$$

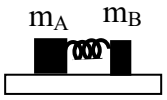
Facoltativo: CASO DINAMICO

blocco C $\begin{matrix}\hat{n}\\ \hat{t}\end{matrix}\begin{cases} R_{BC} - m_C g\cos\alpha = 0 \\ T - A_d - m_C g\sin\alpha = m_C a\end{cases}$; blocco B $\begin{matrix}\hat{n}\\ \hat{t}\end{matrix}\begin{cases} R_n - R_{BC} - m_B g\cos\alpha = 0 \\ -T - A_d + m_B g\sin\alpha = m_B a\end{cases}$

sommando le equazioni lungo l'asse t si ottiene l'accelerazione di caduta

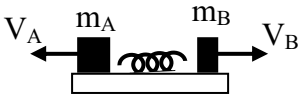
$$a = g\frac{(m_B - m_C)\sin\alpha - 2\mu_d m_C\cos\alpha}{m_B + m_C} = \mathbf{0.81\ m/s^2}$$

3. CALCOLO DELLA VELOCITA' INIZIALE



Conservazione dell'energia meccanica $\frac{1}{2}k\Delta l^2 = \frac{1}{2}m_A V_A^2 + \frac{1}{2}m_B V_B^2$

(l'energia potenziale elastica si trasforma in energia cinetica)

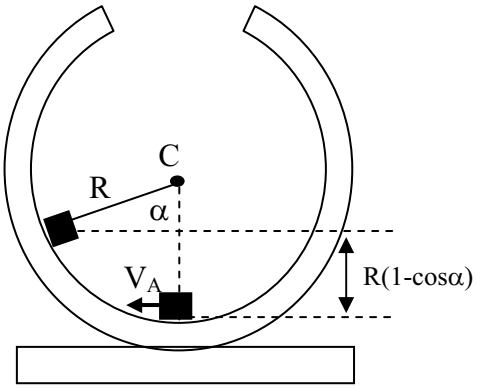


Conservazione della quantità di moto $0 = m_A V_A + m_B V_B$

(lungo l'asse del moto agisce solo la forza elastica che è una forza interna)

da cui $\begin{cases} |V_A| = \Delta l\sqrt{\dfrac{m_B k}{m_A(m_A + m_B)}} = 5.16\, m/s \\ |V_B| = \Delta l\sqrt{\dfrac{m_A k}{m_B(m_A + m_B)}} = 7.75\, m/s \end{cases}$

DETERMINAZIONE DEGLI ANGOLI MASSIMI



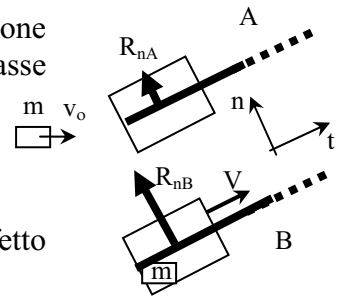
Conservazione dell'energia meccanica $\frac{1}{2}m_A V_A^2 = m_A g R(1 - \cos\alpha)$

da cui $\alpha = \arccos\left(1 - \frac{V_A^2}{2gR}\right) = \mathbf{71°\ 21'}$ e $\mathbf{R_{nA}} = m_A g\cos\alpha = \mathbf{0.094\ N}$

e per analogia $\beta = \arccos\left(1 - \frac{V_B^2}{2gR}\right) = 122°\ 03'$ $R_{nB} = m_B g\cos\beta < 0$ **!!**

(questo secondo risultato però non è accettabile. Il blocco si distacca dalla guida poco prima quando l'angolo $\beta = \arccos\left(\frac{2}{3} - \frac{V_B^2}{3gR}\right) = \mathbf{111°}$ quando cioè si annulla $\mathbf{R_{nB}=0}$

4. URTO PERFETTAMENTE ANELASTICO VINCOLATO



A causa della presenza del vincolo durante l'urto si sviluppa una reazione normale impulsiva che essendo esterna al sistema costituito dalle due masse impedisce la conservazione della quantità di moto.

$$\int_t^{t+\varepsilon} \vec{F}^{ext}\, dt = \vec{p}_{cB} - \vec{p}_{cA} \neq 0$$

Però l'impulso di tale reazione agisce solo lungo l'asse **n**, e non ha effetto lungo l'asse **t** dove invece si ha conservazione della quantità di moto

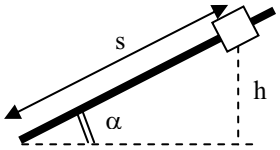
$p_{tA} = p_{tB}$ ossia $mv_o \cos\alpha = (m+M)V$ da cui $V = \dfrac{mv_o \cos\alpha}{m+M}$

le equazioni della cinematica durante la salita del sistema lungo l'asse **t** $\begin{cases} s(t) = Vt - at^2/2 \\ v(t) = V - at \\ a = g\sin\alpha \end{cases}$

il **tempo** necessario per raggiungere il punto più alto $t = V/a = \dfrac{mv_o \cot g\alpha}{g(m+M)} =$ **0.12 s**

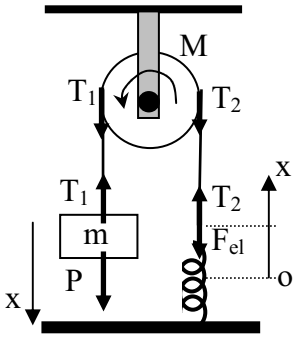
la **quota massima** raggiunta durante il moto diviene quindi

$$h = s \cdot \sin\alpha = \left(V^2/2a\right)\sin\alpha = \left(\frac{m}{m+M}\right)^2 \frac{(v_o \cos\alpha)^2}{2g} = \mathbf{2.9\ cm}$$



l'energia persa nell'urto $E_{persa} = T_A - T_B = \dfrac{1}{2}mv_o^2 - \dfrac{1}{2}(m+M)V^2 =$ **49.7 J**

5. STUDIO DELLE OSCILLAZIONI DELLA MACCHINA



Il moto della macchina è ben descritto dal sistema di equazioni:

a) sul grave $P - T_1 = ma_x$

b) sulla molla $T_2 - F_{el} = 0$ ossia $T_2 - kx = 0$

c) sulla puleggia (equazione dei momenti)

$T_1 R - T_2 R = I\dfrac{d\omega}{dt}$ ossia $T_1 - T_2 = \dfrac{I}{R^2}a_x$ essendo $a_x = \dfrac{d\omega}{dt}R$

sommando le 3 equazioni si ottiene $mg - kx = \left(m + \dfrac{I}{R^2}\right)\dfrac{d^2x}{dt^2}$

che dà luogo all'equazione differenziale $\dfrac{d^2x}{dt^2} + \left(\dfrac{k}{m+M/2}\right)x = \left(\dfrac{m}{m+M/2}\right)g$

con **posizione di equilibrio** $x_{eq} = \dfrac{mg}{k}$ e **periodo di oscillazione** $T = 2\pi\sqrt{\dfrac{m+M/2}{k}}$

Quindi l'**allungamento iniziale** è $\Delta_1 = \dfrac{m_1 g}{k} =$ **29 cm**

L'**allungamento statico** dopo l'aggiunta di m_2 è $\Delta_2 = \dfrac{(m_1+m_2)g}{k} =$ **49 cm**

ed **allungamento dinamico** $\Delta(t) = \Delta_2 - (\Delta_2 - \Delta_1)\cos\left(2\pi\dfrac{t}{T}\right)$

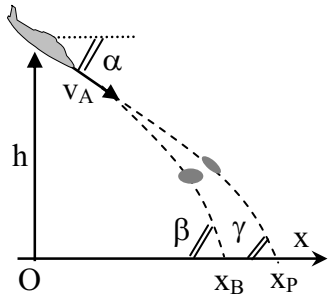
ove il **periodo** è $T = 2\pi\sqrt{\dfrac{m_1+m_2+M/2}{k}} =$ **1.54 s**

Università di Roma "La Sapienza"
Facoltà di Ingegneria

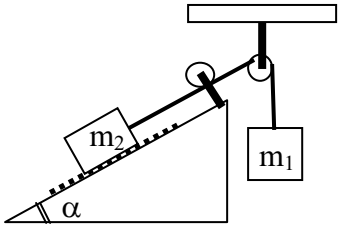
FISICA I

A.A. 2006-2007
Ingegneria Gestionale (M-Z)
3°appello del 2 Luglio 2007

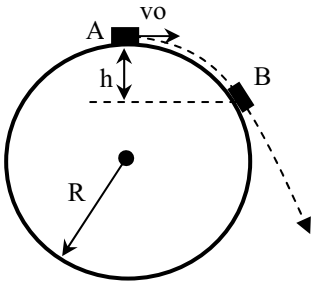
1. Un caccia bombardiere, dopo aver avvistato un bersaglio al suolo, esegue delle manovre per scendere in picchiata verso il bersaglio con una velocità v_A=150m/s e con un angolo di inclinazione rispetto all'orizzontale α=30°. Quando giunge alla quota di sicurezza h=500m il pilota decide immediatamente di sparare un proiettile che parte nella direzione di picchiata con una velocità relativa iniziale v_r=100m/s rispetto al velivolo. Per sicurezza nello stesso istante il pilota lascia cadere anche una bomba senza però imprimere alcuna velocità relativa. Determinare i punti di impatto della bomba e del proiettile, e l'intervallo di tempo che intercorre tra l'arrivo del proiettile e quello della bomba. **Facoltativo:** determinare gli angoli di impatto al suolo β e γ rispetto all'orizzontale.



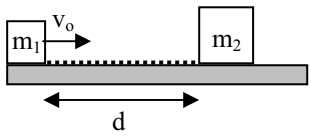
2. Nel sistema meccanico descritto in figura, una fune inestensibile e privo di massa collega il blocco m_1=10kg con il blocco m_2=5kg disposto su di un piano scabro ($\mu_d \neq 0$) inclinato di un angolo α=30° rispetto all'orizzontale. In un test preliminare effettuato in assenza del blocco m_1, la massa m_2 scivola a valle con una accelerazione a=3m/s^2 (questo test permette di valutare il coefficiente di attrito con il piano). Quindi il blocco m_1 viene ricollegato al resto del sistema. Determinare in questa nuova fase l'accelerazione di caduta e la tensione cui è sottoposta la fune.



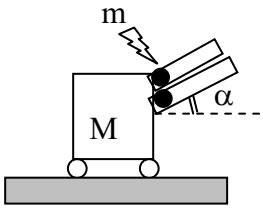
3. Un blocco di massa m viene collocato sulla sommità di un tubo cilindrico liscio di raggio R=1m in una posizione di equilibrio instabile A. Il blocco viene lanciato con una velocità iniziale orizzontale v_o=0.63m/s spostandosi inizialmente sulla superficie esterna del cilindro. Determinare la posizione del punto B in cui il blocco si distacca dal cilindro fornendo la differenza delle quote iniziale e finale h, nonché la velocità al distacco v_B
Facoltativo: per quale intervallo di valori della velocità iniziale il blocco si distacca immediatamente dal cilindro?



4. Un blocco di massa m_1=1kg viene lanciato con energia cinetica di 25 J lungo un piano orizzontale scabro contro un secondo blocco di massa m_2=3kg, fermo e a distanza iniziale dal primo d=80cm. L'urto susseguente è centrale ma non elastico ed ha come effetto quello di fermare la prima massa. Determinare la velocità acquisita dal secondo blocco e l'energia persa a causa dell'urto. Si assuma che il coefficiente di attrito dinamico con il piano valga μ_d=0.25.



5. Un cannone di massa M=250kg, inizialmente in quiete è libero di muoversi senza attrito su un piano orizzontale. Esso ha due canne dirette con un alzo di α=40° rispetto all'orizzontale e spara in rapida successione due proiettili ciascuno di massa m=1kg con velocità di uscita relativa alla canna v_r=250m/s diretta lungo la canna. Determinare la velocità acquistata dal cannone dopo aver esploso entrambi i colpi e l'impulso scaricato sul terreno.



Università di Roma "La Sapienza"
Facoltà di Ingegneria
FISICA I
A.A. 2006-2007
Ingegneria Gestionale (M-Z)
Soluzioni del 3°appello del 2 Luglio 2007

1. Studio della traiettoria parabolica di un proiettile

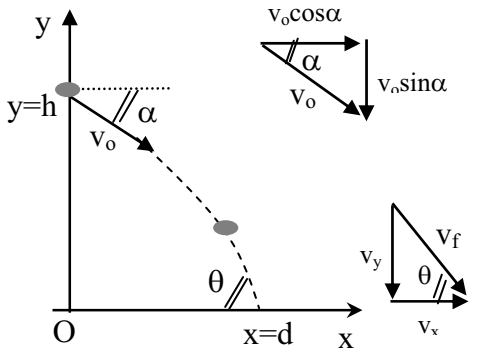
Quando un qualunque proiettile viene lanciato con una velocità iniziale $\mathbf{v_o}$ e con inclinazione $\boldsymbol{\alpha}$ rispetto all'orizzontale esso descrive una traiettoria parabolica secondo il sistema di equazioni:

lungo l'asse x $\begin{cases} x(t) = v_o t \cos\alpha \\ v_x = v_o \cos\alpha \\ a_x = 0 \end{cases}$ e lungo l'asse y $\begin{cases} y(t) = h - v_o t \sin\alpha - gt^2/2 \\ v_y(t) = -v_o \sin\alpha - gt \\ a_y = -g \end{cases}$

Il **tempo di volo** si ottiene imponendo $y(t_f) = h - v_o t \sin\alpha - gt^2/2 = 0$ da cui l'equazione di 2° grado $t^2 + \frac{2v_o \sin\alpha}{g} t - \frac{2h}{g} = 0$ di cui la soluzione accettabile è $t_f = \frac{-v_o \sin\alpha + \sqrt{(v_o \sin\alpha)^2 + 2gh}}{g}$

L'ascissa del punto di impatto infine si calcola dalla

$d = x(t_f) = v_o t_f \cos\alpha$



Mentre l'angolo di impatto si ottiene con le regole trigonometriche

$$\theta = \arctan\left(\frac{|v_y(t_f)|}{v_x}\right) = \arctan\left(\frac{v_o \sin\alpha + gt_f}{v_o \cos\alpha}\right) = \arctan\left(\frac{\sqrt{v_o^2 \sin^2\alpha + 2gh}}{v_o \cos\alpha}\right) = \arctan\left(tg\alpha\sqrt{1 + \frac{2gh}{v_o^2 \sin^2\alpha}}\right)$$

Nel caso particolare della bomba la velocità iniziale della bomba coincide con la velocità dell'aereo per cui $\mathbf{v_o = v_A}$

il **tempo di volo della bomba** è quindi $t_B = \frac{-v_A \sin\alpha + \sqrt{(v_A \sin\alpha)^2 + 2gh}}{g} = \mathbf{5.02\ s}$

l'ascissa del punto di impatto della bomba $x_B = v_A t_B \cos\alpha = \mathbf{652\ m}$

Nel caso particolare del proiettile la velocità iniziale nel sistema di riferimento fisso è data dalla somma della velocità dell'aereo e della velocità del proiettile relativa all'aereo per cui $\mathbf{v_o = v_A + v_r}$

il **tempo di volo del proiettile** è quindi $t_P = \frac{-(v_A + v_r)\sin\alpha + \sqrt{(v_A + v_r)^2 \sin^2\alpha + 2gh}}{g} = \mathbf{3.52\ s}$

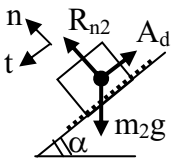
mentre **l'ascissa del punto di impatto del proiettile è** $x_P = (v_A + v_r) t_p \cos\alpha = \mathbf{761\ m}$

L'intervallo di tempo richiesto è quindi $\Delta t = t_B - t_p = \mathbf{1.5\ s}$

FACOLTATIVO: le inclinazioni dei punti di impatto rispetto all'orizzontale sono rispettivamente;

bomba $\beta = \arctan\left(tg\alpha + \dfrac{gt_B}{v_A \cos\alpha}\right) = \mathbf{43°43'}$ **; proiettile** $\gamma = \arctan\left(tg\alpha + \dfrac{gt_p}{(v_A + v_r)\cos\alpha}\right) = \mathbf{36°22'}$

2. Test preliminare: in questa fase la massa m_2 scende verso sinistra



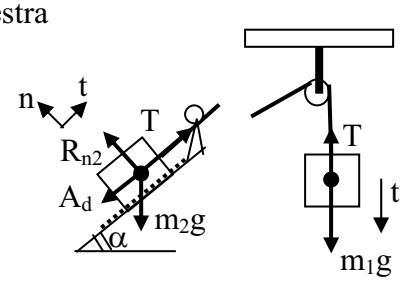
Applicando il secondo principio alla massa $\mathbf{m_2}$ $\begin{cases} t) & m_2 g \sin\alpha - \mu_d R_{n2} = m_2 a \\ n) & R_{n2} - m_2 g \cos\alpha = 0 \end{cases}$

da cui si ricava l'accelerazione di caduta $a = g(\sin\alpha - \mu_d \cos\alpha)$

Il coefficiente di attrito dinamico vale quindi $\mu_d = \tan\alpha - \dfrac{a}{g\cos\alpha} = \mathbf{0.22}$

Tale coefficiente rimane costante anche nella fase successiva in cui viene collegata la massa m_1

Fase successiva: in questa fase la massa m_1 trascina il sistema verso destra



Applicando il secondo principio ad entrambe le masse $\mathbf{m_1}$ ed $\mathbf{m_2}$

massa $\mathbf{m_1}$; $t)\ m_1 g - T = m_1 a$

massa $\mathbf{m_2}$; $\begin{cases} t) & T - m_2 g \sin\alpha - \mu_d R_{n2} = m_2 a \\ n) & R_{n2} - m_2 g \cos\alpha = 0 \end{cases}$

dove il verso del moto e quindi anche dell'attrito si è ovviamente invertito rispetto alla fase precedente. Sommando le equazioni lungo l'asse t per tutte le masse si ottiene

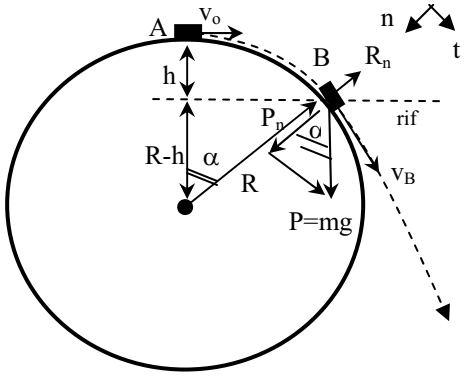
$m_1 g - m_2 g \sin\alpha - \mu_d m_2 g \cos\alpha = (m_1 + m_2)a$

da cui l'**accelerazione del sistema** $a = g\dfrac{m_1 - m_2 \sin\alpha - \mu_d m_2 \cos\alpha}{m_1 + m_2} = \mathbf{4.27\ m/s^2}$

e la **tensione della fune** $T = m_1(g - a) =$ **55 N**

3. Conservazione energia meccanica

In assenza di attriti (cilindro liscio) l'energia meccanica nel punto iniziale E_A deve mantenersi allo stesso livello dell'energia meccanica E_B nel punto del distacco B.



$E_A = E_B$ da cui $T_A + U_A = T_B + U_B$ e cioè $\dfrac{1}{2}mv_o^2 + mgh = \dfrac{1}{2}mv_B^2$

Le **forze agenti** quando il blocco si trova in B sono:

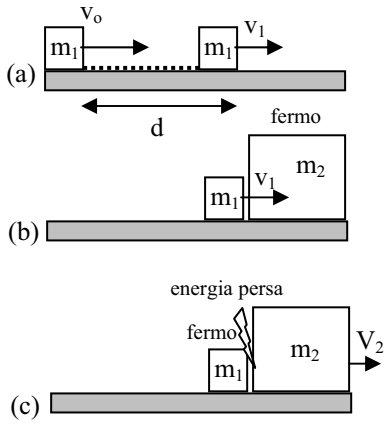
$\begin{matrix} \hat{n} \\ \hat{t} \end{matrix} \begin{cases} P_n - R_n = ma_n = mv_B^2/R \\ P_t = ma_t \end{cases}$ dove al distacco però $\mathbf{R_n=0}$

per cui deve valere la condizione $\frac{mv_B^2}{R} = P_n = mg\cos\alpha = mg\frac{R-h}{R}$

o equivalentemente $v_B = \sqrt{g(R-h)}$ che combinata con l'equazione energetica dà luogo alla soluzione del **dislivello** $h = \frac{R}{3} - \frac{v_o^2}{3g} = \mathbf{32cm}$ e della **velocità** $v_B = \sqrt{g(R-h)} = \mathbf{2.58\ m/s}$

FACOLTATIVO: è facile dimostrare che se $v_o \geq \sqrt{3gR}$ **=5.42 m/s** il dislivello h tende a zero, i punti A e B vanno a coincidere, ed il blocco di distacca immediatamente dal cilindro.

4. Il processo può essere suddiviso in **2 fasi**:



fase (a): moto rettilineo uniformemente decelerato
La forza di attrito dinamico $A_d = \mu_d m_1 g$ compie un lavoro negativo che riduce l'energia cinetica della massa m_1

$$L_A = -A_d d = -\mu_d m_1 g d = \frac{m_1 v_1^2}{2} - T_o$$

da cui si calcola la **velocità v_f della massa m_1 poco prima dell'urto**

$$v_1 = \sqrt{2T_o/m_1 - 2\mu_d g d} = \mathbf{6.79\ m/s}$$

fase (b,c): urto anelastico
durante l'urto è sempre conservata la quantità di moto. Quindi dal confronto delle quantità di moto prima e dopo l'urto si ottiene la relazione:

$m_1 v_1 = m_2 V_2$ da cui **la velocità dopo l'urto del secondo blocco** è $V_2 = \left(\frac{m_1}{m_2}\right)v_1 = \frac{v_1}{3} = \mathbf{2.26\ m/s}$

e l'energia persa durante l'urto è $\mathbf{\epsilon} = T_{prima} - T_{dopo} = T_b - T_c = \frac{1}{2}m_1 v_1^2 - \frac{1}{2}m_2 V_2^2 = \mathbf{15.36\ J}$

(alternativamente proseguendo i calcoli $\mathbf{\epsilon} = \frac{1}{2}m_1 v_1^2\left[1 - \left(\frac{m_1}{m_2}\right)\right] = \left[T_o - \mu_d m_1 g d\right]\left(\frac{m_2 - m_1}{m_2}\right) = \mathbf{15.36\ J}$

5. Durante l'esplosione del primo proiettile il cannone con il proiettile ancora inesploso rinculano con velocità orizzontale $\vec{V}_A$ mentre il proiettile parte con velocità assoluta $\vec{V}_{p1} = \vec{V}_{p,r} + \vec{V}_A$
La quantità di moto lungo l'asse orizzontale deve essere conservata per cui (figura A)

$(M+m)V_A + mV_{px} = (M+m)V_A + m(V_{p,r}\cos\alpha + V_A) = 0$ da cui $V_A = -\frac{mV_{p,r}\cos\alpha}{M+2m}$

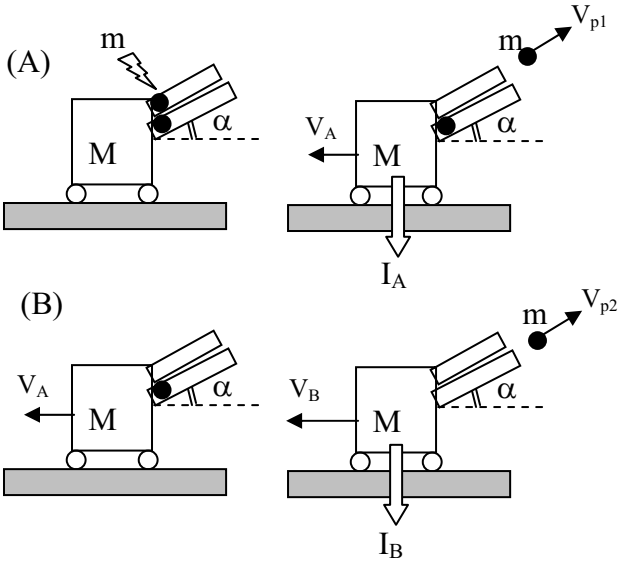
lungo l'asse verticale la quantità di moto non viene conservata ed il cannone scarica a terra un impulso $I_A = mV_{p,r}\sin\alpha$

Il conto può essere ripetuto per il secondo proiettile. Il cannone rincula con velocità orizzontale $\vec{V}_B$ mentre il proiettile parte con velocità assoluta $\vec{V}_{p2} = \vec{V}_{p,r} + \vec{V}_B$ La quantità di moto lungo l'asse orizzontale deve essere conservata per cui (figura B)

$MV_B + mV_{p2x} = MV_B + m(V_{p,r}\cos\alpha + V_B) = (M+m)V_A$ da cui

$$V_B = V_A - \frac{mV_{p,r}\cos\alpha}{M+2m} = -V_{p,r}\cos\alpha\left[\frac{m}{M+m} + \frac{m}{M+2m}\right] = \textbf{-1.52 m/s}$$

lungo l'asse verticale la quantità di moto non viene conservata ed il cannone scarica a terra ancora un impulso $I_B = mV_{p,r}\sin\alpha$ per un impulso totale $I_{tot} = I_A + I_B = 2mV_{p,r}\sin\alpha = \textbf{321 Ns}$



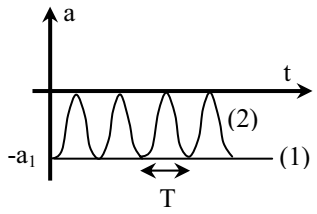
Università di Roma "La Sapienza"
Facoltà di Ingegneria
FISICA I

A.A. 2006-2007

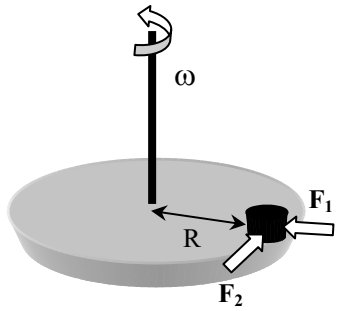
Ingegneria Gestionale (M-Z)

4°appello del 7 Settembre 2007

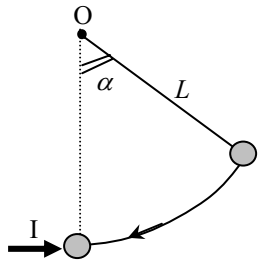
1. Durante un test svolto sugli impianti frenanti due autovetture vengono lanciate alla medesima velocità di v_o=200 km/h e sottoposte a due differenti tipi di frenata. La prima auto viene decelerata uniformemente dall'istante t=0 con accelerazione negativa di valore assoluto a_1=5m/s^2 fino a fermarsi completamente dopo un tempo Δt. La seconda auto viene invece sottoposta ad una frenata con un particolare sistema ABS, sempre dall'istante t=0, che realizza una accelerazione negativa di tipo armonico che varia con legge $a_2(t) = -a_1[1+\cos(\omega t)]/2$ di periodo $T = 2\pi/\omega = 2$s. In conclusione la seconda auto viene quindi sottoposta ad una decelerazione complessivamente meno efficace della prima auto (le due accelerazioni coincidono solo in particolari istanti), che ne ritarda il tempo di frenata e ne allunga il relativo spazio percorso. Determinare, nello stesso momento in cui la prima macchina si ferma, la velocità residua posseduta dalla seconda auto ed il relativo spazio percorso. **Facoltativo**: determinare il tempo richiesto per arrestare completamente la seconda auto e lo spazio percorso.



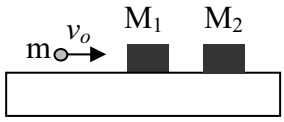
2. Una moneta di massa m=10g è collocata su un disco rotante ad una distanza R= 15 cm dall'asse. I coefficienti di attrito tra la moneta ed il disco sono 0.7 (statico) e 0.6 (dinamico). Determinare la velocità angolare massima consentita affinché la moneta non slitti sul disco. Determinare la nuova massima velocità angolare nel caso la monetina venisse sottoposta ad una forza costante F_1=0.1 N diretta lungo il raggio. **Facoltativo**: determinare la massima velocità angolare nel caso la monetina venisse sottoposta ad una forza costante F_2=0.03 N diretta tangenzialmente al bordo del disco



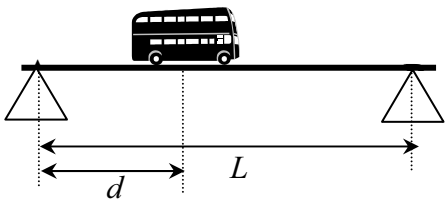
3. Un pendolo semplice è costituito da una massa m=0.5 kg e da un filo di massa trascurabile e di lunghezza L=50cm. Esso è inclinato di un angolo α=40° rispetto alla verticale quando viene lasciato cadere senza imprimere alcuna velocità iniziale. Quando il pendolo raggiunge la posizione in verticale viene contrastato da un impulso orizzontale contrario al moto di intensità I=1 kg m/s. Determinare il nuovo angolo di massima oscillazione β del pendolo dopo l'erogazione dell'impuso e la tensione massima del filo.



4. Due blocchi di massa rispettivamente M_1=0.5 kg ed M_2=1 kg giacciono in quiete lungo un piano orizzontale privo di attrito. Un proiettile di massa m=25g dotato di energia cinetica iniziale T_o=10J perfora entrambi i blocchi in rapida sequenza fuoriuscendone ogni volta con energia cinetica dimezzata. Determinare le velocità impresse ai due blocchi e l'energia persa dopo entrambi gli urti. **Facoltativo**: determinare se dopo la fuoriuscita del proiettile esistano le condizioni per un ulteriore urto fra i due blocchi. In questo caso, ipotizzando l'urto centrale ed elastico, determinare le velocità dei blocchi dopo l'urto.



5. Un ponte di lunghezza *L* e massa *M* di 80 tonnellate è poggiato sui due pilastri *A* e *B*. Sul ponte si trova ad una distanza *d=L/3* dal pilastro *A* un autobus di massa *m* di 10 tonnellate fermo assimilabile a un punto materiale. Determinare le reazioni vincolari esercitate dai pilastri nei punti di appoggio *A* e *B* del ponte.



Università di Roma "La Sapienza"
Facoltà di Ingegneria
FISICA I

A.A. 2006-2007

Ingegneria Gestionale (M-Z)

4°appello del 7 Settembre 2007

1. In un qualunque problema di cinematica una volta nota l'accelerazione a(t) in funzione del tempo, la velocità e lo spazio percorso sono facilmente trovati per successive integrazioni. Quindi per la velocità si ottiene $v(t)-v_o=\int_0^t a(t)dt$ e per lo spazio percorso $s(t)-s_o=\int_0^t v(t)dt$

In particolare la **prima auto** è sottoposta ad moto uniformemente decelerato ben descritto dalle eq.

per la **velocità** $v_1(t)-v_o=\int_0^t -a_1 dt$ da cui $v_1(t)=v_o-a_1 t$

e per lo **spazio percorso** $s_1(t)-s_o=\int_0^t (v_o-a_1 t)dt$ da cui $s_1(t)=v_o t-a_1 t^2/2$

La prima auto si arresta dopo un periodo $\Delta t=v_o/a_1=$ **11.1 s,** dopo un percorso $s_1(\Delta t)=\frac{v_o^2}{2a_1}=$ **309 m**

Invece la **seconda auto** è sottoposta ad moto decelerato ben descritto da $a_2(t)=-\frac{a_1}{2}(1+\cos(\omega t))$

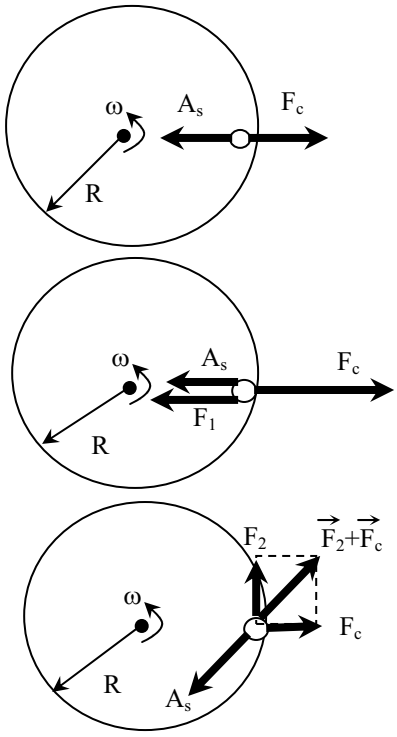
la **velocità** è quindi $v_2(t)-v_o=\int_0^t a_2(t)dt$ da cui $v_2(t)=v_o-\frac{a_1}{2}t-\frac{a_1}{2\omega}\sin(\omega t)$

e per lo **spazio percorso** $s_2(t)-s_o=\int_0^t v_2(t)dt$ da cui $s_2(t)=v_o t-\frac{a_1}{4}t^2-\frac{a_1}{2\omega^2}[1-\cos(\omega t)]$

All'arresto della prima auto $\Delta t=v_o/a_1$ la seconda auto ha $v_2(\Delta t)=\frac{v_o}{2}-\frac{a_1 T}{4\pi}\sin\left(\frac{2\pi v_o}{a_1 T}\right)$**=28.05 m/s**

mentre lo spazio $s_2(\Delta t)=v_o\Delta t-\frac{a_1}{4}\Delta t^2-\frac{a_1}{2\omega^2}[1-\cos(\omega\Delta t)]=\frac{3v_o^2}{4a_1}-\frac{a_1 T^2}{8\pi^2}\left[1-\cos\left(\frac{2\pi v_o}{a_1 T}\right)\right]=$ **462 m**

Facoltativo: l'equazione $v_2(t)=0$ ammette unica soluzione per t=**22.1 s** (circa il doppio del tempo!). In quell'istante l'auto ha percorso $\mathbf{s_2}$**=617 m**



2. Nel primo caso la moneta rimane fissa sul disco sin quando la forza centrifuga viene esattamente controbilanciata dall'attrito statico

$F_c=m\omega^2 R=A_s\le A_{\max}=\mu_s mg$ da cui $\omega\le\omega_{\max}=\sqrt{\frac{\mu_s g}{R}}=$ **6.76 rad/s**

Nel secondo caso compare anche la forza F_1 nel verso dell'attrito.
La forza centrifuga può quindi essere molto maggiore

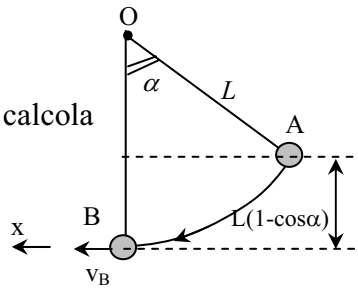
$F_c=m\omega^2 R=A_s+F_1\le\mu_s mg+F_1$ da cui

$\omega\le\omega_{\max}=\sqrt{\frac{\mu_s mg+F_1}{mR}}=$ **10.6 rad/s**

Facoltativo: in questo caso le forze non sono più collineari. Imponendo la condizione di equilibrio, si trova una relazione fra i moduli quadri delle forze

$$A_s^2 = F_c^2 + F_2^2 \le A_{\max}^2 \quad \text{da cui} \quad F_c \le \sqrt{A_{\max}^2 - F_2^2} \text{ da cui } \omega \le \omega_{\max} = \sqrt{\frac{\sqrt{(\mu_s mg)^2 - F_2^2}}{mR}} = \mathbf{6.41\ rad/s}$$

3. MOTO DI DISCESA DEL PENDOLO



Nel punto più basso della traiettoria il pendolo acquista la velocità v_B che si calcola imponendo la conservazione dell'energia meccanica tra i punti A e B

$$\begin{cases} E_{mA} = mgL(1-\cos\alpha) \\ E_{mB} = mv_B^2/2 \end{cases} \quad \text{da cui} \quad v_B = \sqrt{2gL(1-\cos\alpha)} = \mathbf{1.51\ m/s}$$

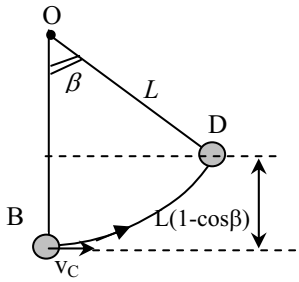
Dopo l'erogazione di un impulso contrario al moto si verifica un cambio istantaneo della velocità del pendolo da v_B a v_C in accordo con il teorema dell'impulso e dell'energia cinetica $\vec{I} = \Delta\vec{p} = \vec{p}_2 - \vec{p}_1$

Nel nostro caso proiettando l'equazione lungo l'asse del moto (x) si ottiene

$$-I = mv_C - mv_B \quad \text{da cui} \quad v_C = v_B - I/m = \sqrt{2gL(1-\cos\alpha)} - I/m = \mathbf{-0.486\ m/s}$$

(il pendolo inverte quindi il suo moto!)

MOTO DI SALITA DEL PENDOLO



Imponendo nuovamente la conservazione dell'energia meccanica tra i punti B e D dove il pendolo si arresta si può calcolare il nuovo angolo massimo di inclinazione

$$\begin{cases} E_{mD} = mgL(1-\cos\beta) \\ E_{mB} = mv_C^2/2 \end{cases} \quad \text{da cui} \quad \beta = ar\cos\left(1 - \frac{v_C^2}{2gL}\right) = \mathbf{12°\ 36'}$$

La tensione massima è nella posizione verticale $T_{\max} = m\left(g + \frac{v_C^2}{L}\right) = \mathbf{5.14\ N}$

4. Il proiettile è dotato inizialmente di velocità $v_{oA} = \sqrt{\frac{2T_0}{m}} = \mathbf{28.3\ m/s}$

il proiettile fuoriesce con energia cinetica dimezzata e con velocità $v_{oA} = \sqrt{\frac{2T_0}{m}} = \mathbf{20\ m/s}$

infine fuoriesce anche dal secondo blocco con velocità finale $v_{oC} = \frac{v_{oB}}{\sqrt{2}} = \sqrt{\frac{T_0}{2m}} = \mathbf{14.1\ m/s}$

Dalla conservazione della quantità di moto durante i due urti ricaviamo le velocità dei due blocchi

Blocco n. 1 $\quad mv_{oA} = mv_{oB} + M_1 v_1 \quad$ da cui $\quad v_1 = \frac{m}{M_1}(v_{oA} - v_{oB}) = \mathbf{0.41\ m/s}$

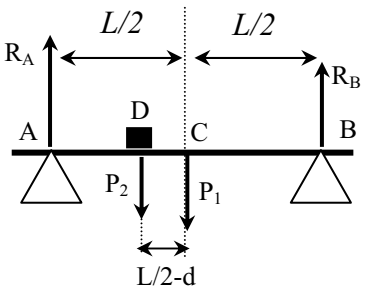
Blocco n. 2 $\quad mv_{oB} = mv_{oC} + M_2 v_2$ da cui $v_2 = \dfrac{m}{M_2}\left(v_{oB} - v_{oC}\right) = \mathbf{0.146\ m/s}$

L'energia persa è $E = T_o - \left(\dfrac{T_o}{4} + \dfrac{1}{2}M_1 v_1^2 + \dfrac{1}{2}M_2 v_2^2\right) = \mathbf{7.45\ J}$

Facoltativo: il risultato dell'urto elastico fra i due blocchi fornisce velocità di uscita dopo l'urto

$$\begin{cases} V_1 = \left(\dfrac{M_1 - M_2}{M_1 + M_2}\right)v_1 + \left(\dfrac{2M_2}{M_1 + M_2}\right)v_2 = -\dfrac{v_1}{3} + \dfrac{4}{3}v_2 = 0.057 m/s \\ V_2 = \left(\dfrac{2M_1}{M_1 + M_2}\right)v_1 + \left(\dfrac{M_2 - M_1}{M_1 + M_2}\right)v_2 = \dfrac{2}{3}v_1 + \dfrac{1}{3}v_2 = 0.325 m/s \end{cases}$$

5. Le forze agenti sul ponte sono:
la **forza peso del ponte P_1=Mg** (applicata in C)
la **forza peso dell'autobus P_2=mg** (applicata in D)
le **reazioni** dei due pilastri **R_A** ed **R_B** (applicate in A e B)



Il sistema è in equilibrio quando sono nulle contemporaneamente la 1ª equazione cardinale e la 2ª equazione cardinale.

In particolare dalla 2ª equazione cardinale applicata rispetto al punto C si ottiene

$M_{R_A} + M_{RB} + M_{P_2} + M_{P_1} = 0$ da cui $-R_A\dfrac{L}{2} + R_B\dfrac{L}{2} + P_2\left(\dfrac{L}{2} - d\right) = 0$ (M_{P1}=0 perché P_1 è in C)

Dalla 2ª equazione cardinale otteniamo $R_A + R_B - P_1 - P_2 = 0$,

Combinando le equazioni si ottiene

$$\begin{cases} R_A = \dfrac{Mg}{2} + mg\left(1 - \dfrac{d}{L}\right) = 4.57 \cdot 10^5\, N \\ R_B = \dfrac{Mg}{2} + mg\left(\dfrac{d}{L}\right) = 4.25 \cdot 10^5\, N \end{cases}$$

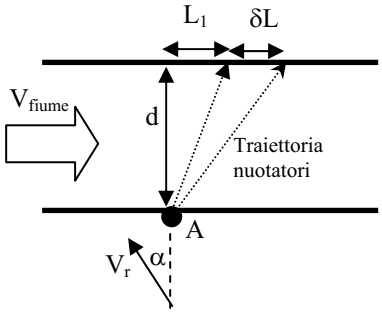
Università di Roma "La Sapienza"
Facoltà di Ingegneria
FISICA I

A.A. 2006-2007

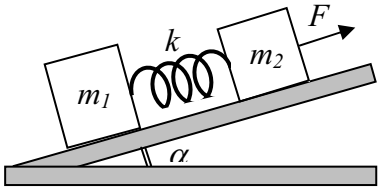
Ingegneria Gestionale (M-Z)

5°appello del 5 Dicembre 2007

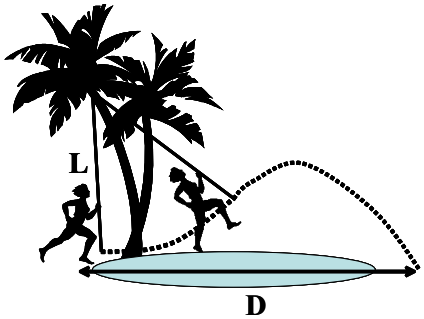
1. Due buoni nuotatori decidono di attraversare un fiume in una regione dove le due sponde sono distanti d=15m, partendo entrambi dal punto A. Per compensare gli effetti della corrente i due nuotatori nuotano con una velocità rispetto all'acqua inclinata di un angolo α=10° controcorrente (come riportato in figura). Sapendo che il primo nuotatore si muove con una velocità relativa V_{rA}=3m/s, mentre il secondo si muove con velocità ridotta V_{rB}=2m/s, e sapendo che i due nuotatori giungono in punti diversi a distanza δL=50m. **Facoltativo:** Determinare la posizione di arrivo L_1 del primo nuotatore.



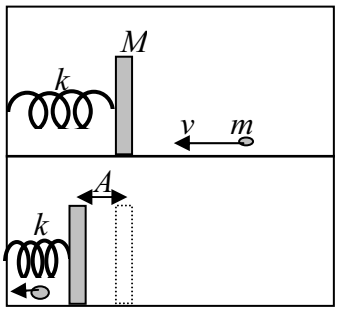
2. Due corpi di massa m_1=4kg e m_2=6kg collegati solidalmente da una molla di costante elastica k=$2\cdot10^3$N/m e di massa trascurabile, poggiano su di un piano privo di attrito inclinato di un angolo α=10° rispetto all'orizzontale. Essi vengono trascinati con accelerazione costante da una forza motrice parallela al piano inclinato di intensità F=20N applicata al blocco m_2. Calcolare l'accelerazione del sistema e l'allungamento della molla.



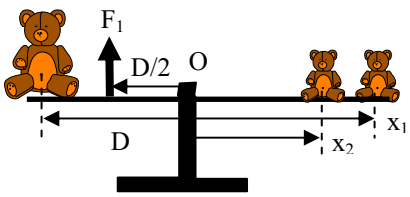
3. Un atleta corre ad una velocità di 5 m/s ed afferra una liana per oltrepassare uno specchio d'acqua. La liana, inizialmente disposta lungo la verticale, è di massa trascurabile e di lunghezza L=5m. L'atleta decide di staccarsi quando la liana si inclina di un angolo α=30° rispetto alla verticale. Al distacco segue un moto parabolico di caduta libera. Determinare lo spazio totale percorso D alla fine del salto (quando l'atleta atterra) ed il modulo e l'inclinazione della velocità di atterraggio.



4. Una pallottola di m=15g, con velocità iniziale di v=100m/s attraversa completamente un blocco di massa M=1kg, come mostrato in figura. Il blocco, inizialmente in quiete su una piattaforma orizzontale, è connesso ad una molla di costante elastica k=500 N/m. Assumendo che il blocco proceda al massimo di un tratto di lunghezza A=2cm dopo l'impatto calcolare la velocità di uscita del proiettile e l'energia dissipata nell'urto.

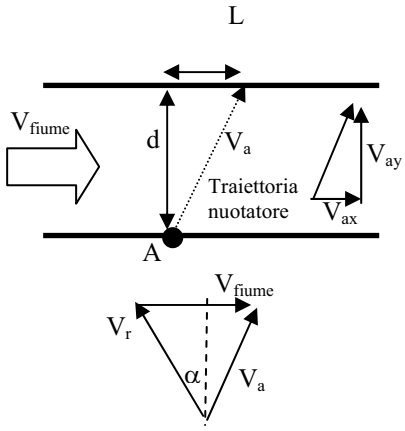


5. Un dondolo è costituito da una barra incernierata sul fulcro O. Due piccoli orsetti ciascuno di massa m=20 kg sono disposti sulla barra alle distanze x_1=2m, x_2=1.5m dal fulcro. Un orso di massa elevata M=60 kg è posizionato dalla parte opposta alla distanza D=1.2m dal fulcro O. Determinare la forza F_1 che è necessario applicare alla distanza D/2 dal fulcro per bilanciare completamente il dondolo. Calcolare infine la forza di reazione esercitata dal fulcro O.



Università di Roma "La Sapienza"
Facoltà di Ingegneria
FISICA I
A.A. 2006-2007
Ingegneria Gestionale (M-Z)
Soluzioni 5°appello del 5 Dicembre 2007

1. Traiettoria del singolo nuotatore



La velocità assoluta nel sistema fisso solidale alla terra è data dalla somma

$\vec{V}_a = \vec{V}_{fiume} + \vec{V}_r$ che scomposta lungo x,y dà luogo alle

$$\begin{matrix} x) \\ y) \end{matrix}\begin{cases} V_{ax} = V_{fiume} + V_{rx} = V_{fiume} - V_r \sin\alpha \\ V_{ay} = V_{ry} = V_r \cos\alpha \end{cases} \quad \text{e} \quad \begin{cases} x(t) = V_{ax} t = \left(V_{fiume} - V_r \sin\alpha\right) t \\ y(t) = V_{ay} t = V_r t \cos\alpha \end{cases}$$

il tempo di attraversamento si ottiene dalla $y(t^*) = d$ da cui $t^* = \dfrac{d}{V_r \cos\alpha}$

e la posizione di arrivo $L = x(t^*) = d\left(\dfrac{V_{fiume}}{V_r \cos\alpha} - tg\alpha\right)$

I due nuotatori hanno velocità diverse ed arrivano quindi in punti diversi:

$$\delta L = L_2 - L_1 = \frac{dV_{fiume}}{\cos\alpha}\left(\frac{1}{V_{rB}} - \frac{1}{V_{rA}}\right) \quad \text{da cui} \quad V_{fiume} = \frac{\delta L \cdot \cos\alpha}{d}\frac{V_{rA} \cdot V_{rB}}{V_{rA} - V_{rB}} = \mathbf{19.7\ m/s}$$

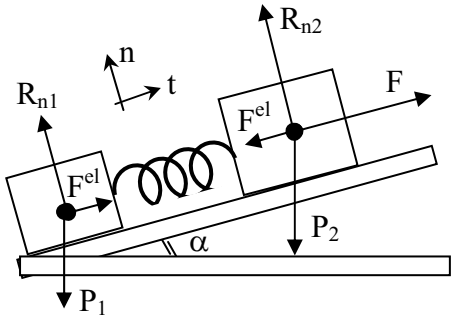
Facoltativo:

la posizione L_1 del primo nuotatore è $L_1 = d\left(\dfrac{V_{fiume}}{V_{rA}\cos\alpha} - tg\alpha\right) = \dfrac{\delta L \cdot V_{rB}}{V_{rA} - V_{rB}} - dtg\alpha = \mathbf{97.3\ m}$

2. Applicando il II principio sia per il blocco n.1 che per il n.2, e scomponendo le forze lungo gli assi n,t si ottiene:

blocco n.1 $\begin{matrix} t) \\ n) \end{matrix}\begin{cases} F^{el} - P_1 \sin\alpha = m_1 a \\ R_{n1} - P_1 \cos\alpha = 0 \end{cases}$

blocco n.2 $\begin{matrix} t) \\ n) \end{matrix}\begin{cases} F - F^{el} - P_2 \sin\alpha = m_2 a \\ R_{n2} - P_2 \cos\alpha = 0 \end{cases}$

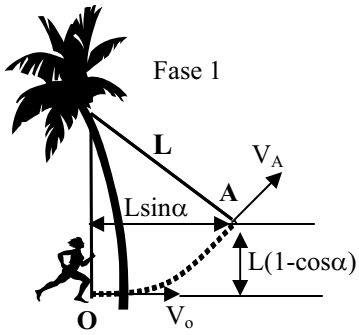


Sommando le due espressioni lungo l'asse t si ottiene **l'accelerazione del sistema**

$$a = \frac{F - (P_1 + P_2)\sin\alpha}{m_1 + m_2} = \frac{F}{m_1 + m_2} - g\sin\alpha = \mathbf{0.3\ m^2/s}$$

e **l'allungamento della molla** $\Delta l = \frac{F^{el}}{k} = \frac{m_1(a + g\sin\alpha)}{k} = \frac{F}{k}\frac{m_1}{m_1 + m_2} = \mathbf{4\ mm}$

3. La traiettoria complessiva è la risultante di un arco di circonferenza (fase 1) e di un arco di parabola (fase 2).

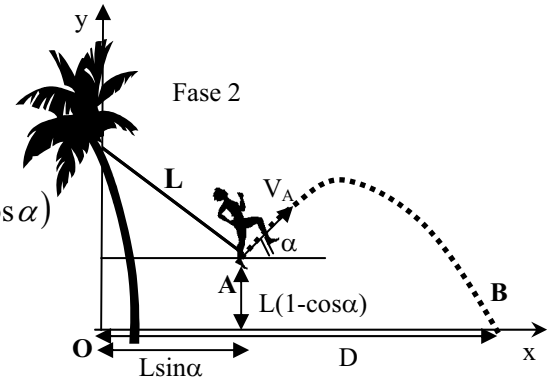


Fase 1: calcolo della velocità al distacco:

Dalla conservazione dell'energia meccanica fra i punti O ed A

$\frac{1}{2}mV_o^2 = \frac{1}{2}mV_A^2 + mgL(1-\cos\alpha)$ da cui

$V_A = \sqrt{V_o^2 - 2gL(1-\cos\alpha)}$ **=3.44 m/s**



Fase 2: calcolo della gittata

Lungo asse x

$$\begin{cases} x(t) = V_A t\cos\alpha + L\sin\alpha \\ v_x = V_A\cos\alpha \\ a_x = 0 \end{cases}$$

Lungo asse y

$$\begin{cases} y(t) = V_A t\sin\alpha - \frac{gt^2}{2} + L(1-\cos\alpha) \\ v_y = V_A\sin\alpha - gt \\ a_y = -g \end{cases}$$

tempo di volo: $y(t^*) = 0$ da cui $t^* = \frac{V_A\sin\alpha + \sqrt{V_A^2\sin^2\alpha + 2gL(1-\cos\alpha)}}{g}$ **=0.585 s**

lo spazio totale percorso $D = x(t^*) = V_A t^*\cos\alpha + L\sin\alpha = \mathbf{4.25\ m}$

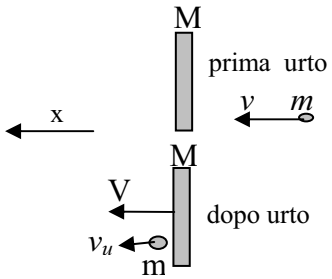
la velocità di atterraggio $V_B = \sqrt{V_{Bx}^2 + V_{By}^2} = \sqrt{V_A^2\cos^2\alpha + (V_A\sin\alpha - gt^*)^2} = \mathbf{5\ m/s}$

(in assenza di attriti si ha conservazione dell'energia cinetica iniziale!**)**

angolo di atterraggio rispetto all'orizzontale $\beta = \arctan\left(\frac{|V_{By}|}{V_{Bx}}\right) = \mathbf{53°22'}$

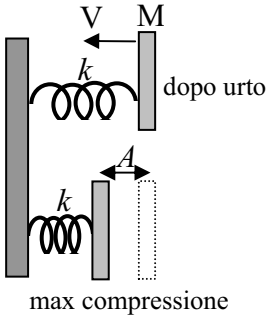
4. Il problema richiede l'analisi separata di due fenomeni fisici consecutivi:
a) il processo d'urto anelastico tra proiettile e blocco: si conserva della quantità di moto del sistema.
b) la susseguente compressione della molla: in assenza di attriti si conserva l'energia meccanica,

a) **Conservazione della quantità di moto lungo l'asse x**.
v: velocità del proiettile prima dell'urto
v_u: velocità del proiettile dopo l'urto
V: velocità del blocco dopo l'urto



$$mv = mv_u + MV \qquad \text{da cui} \qquad v_u = v - \left(\frac{M}{m}\right)V$$

b) **Conservazione dell'energia meccanica**



$$\frac{1}{2}MV^2 = \frac{1}{2}kA^2 \qquad \text{da cui} \qquad V = A\sqrt{k/M}$$

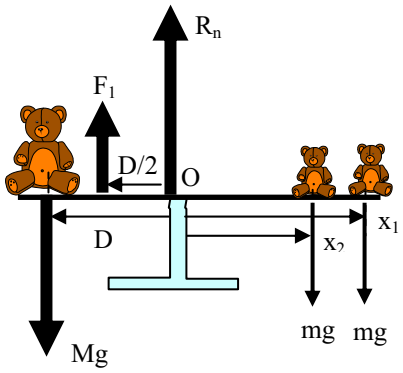
Combinando le espressioni si ottiene

$$v_u = v - A\frac{\sqrt{kM}}{m} = \mathbf{70.2\ m/s;} \qquad E_d = \frac{1}{2}mv^2 - \left(\frac{1}{2}kA^2 + \frac{1}{2}mv_u^2\right) = \mathbf{38\ J}$$

5. Per la statica del dondolo è necessario che siano contemporaneamente nulle le due equazioni cardinali $\begin{cases} F = 0 \\ M_O = 0 \end{cases}$ (il momento viene calcolato per semplicità rispetto ad un asse per il fulcro. La convenzione adottata è che hanno momento positivo le forze che produrrebbero rotazioni antiorarie rispetto al fulcro)

$$\begin{cases} R_n + F_1 - Mg - mg - mg = 0 \\ MgD - F_1 D/2 - mgx_1 - mgx_2 = 0 \end{cases}$$

da cui si ottiene $\begin{cases} F_1 = 2g\dfrac{MD - m(x_1 + x_2)}{D} = 32.7 \quad \mathbf{N} \\ R_n = (M + 2m)g - F_1 = 947 \quad \mathbf{N} \end{cases}$



Università degli Studi di Roma "La Sapienza"
Facoltà di Ingegneria
Esame di Fisica II - 28 Gennaio 2000

1. Si consideri una distribuzione di carica statica nel vuoto contenuta all'interno di un guscio sferica di raggi R e 2R. La densità di carica varia con la distanza r dal centro del guscio sferico secondo l'espressione $\rho = \rho_0 \ / \ r^2$, dove ρ_0 è una costante. Sapendo che V_0 è il valore del potenziale al centro del guscio, prendendo nullo il potenziale all'infinito, determinare la carica totale contenuta nel guscio.
   Soluzione:

$$V_0 = \int_0^\infty \vec{E} \cdot \vec{dl} = \int_R^{2R} E_1 \, dr + \int_{2R}^\infty E_2 \, dr =$$

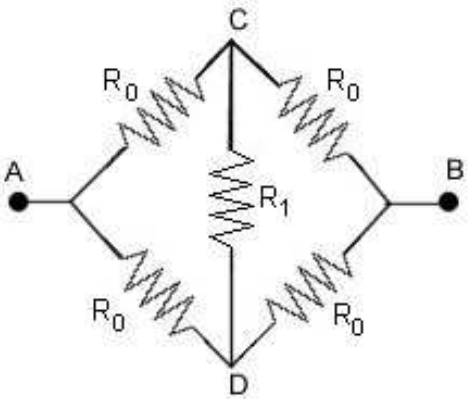
$$= \frac{\rho_0}{\epsilon_0} \, ln \, 2 \quad infatti \, per \, r < R \quad E = 0$$

$$R \leqslant r < 2R \quad : \quad 4\pi r^2 E_1 = \frac{1}{\epsilon_0} \int_R^r \frac{\rho_0}{r'^2} 4\pi r'^2 \, dr' \rightarrow E_1 = \frac{\rho_0}{\epsilon_0} \left(\frac{1}{r} - \frac{R}{r^2} \right)$$

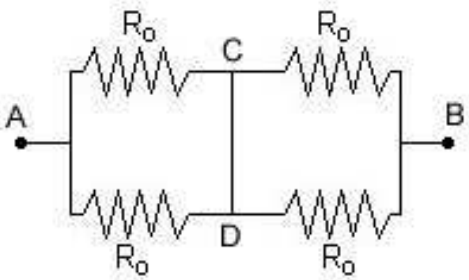
$$r \geqslant 2R \quad : \quad 4\pi r^2 E_2 = \frac{1}{\epsilon_0} \int_R^{2R} \frac{\rho_0}{r'^2} 4\pi r'^2 \, dr' \rightarrow E_2 = \frac{\rho_0 \, R}{\epsilon_0 \, r^2}$$

$$Q = \int_R^{2R} \frac{\rho_0}{r^2} 4\pi r^2 \, dr = \frac{4\pi\epsilon_0 \, R \, V_0}{ln \, 2}$$

2. Determinare il valore della resistenza equivalente tra i punti A e B del sistema di resistenze mostrato in figura. Calcolare anche la differenza di potenziale $V_C - V_D$, se tra A e B esistesse una differenza di potenziale ΔV.



   Soluzione:



Supponiamo di collegare tra i punti A e B un generatore di forza elettromotrice f di resistenza interna trascurabile. Per motivi di simmetria, la corrente I che fornisce il generatore si divide nelle 4 resistenze R_0 assumendo in ciascuna di esse lo stesso valore $I/2$. Pertanto, nella resistenza R_1 non scorre corrente: $V_C - V_D = 0$.
La resitenza equivalente del sistema, che può essere schematizzato come nella figura, è R_0.

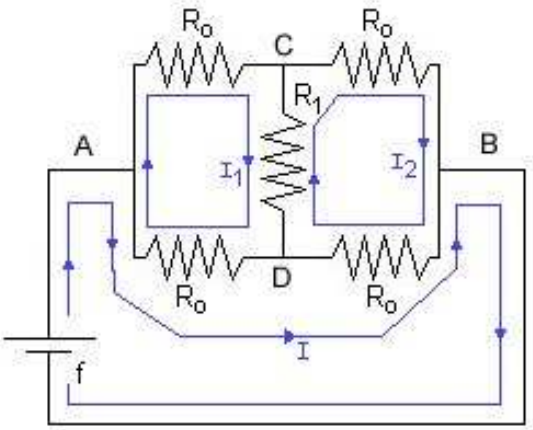
Agli stessi risultati si giunge anche con semplici calcoli. Considerando le tre maglie indicate, percorse dalle tre correnti I_1, I_2, I_3 rispettivamente, si possono scrivere le tre equazioni:

$f = 2R_0 I - R_0 I_1 - R_0 I_2$

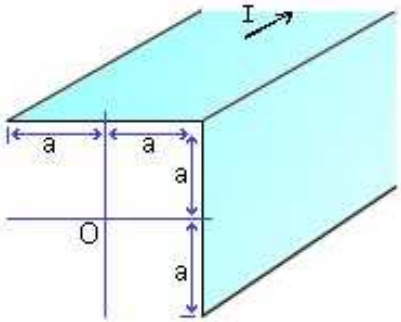
$0 = (2R_0 + R_1)I_1 - R_1 I_2 - R_0 I$

$0 = (2R_0 + R_1)I_2 - R_1 I_1 - R_0 I$

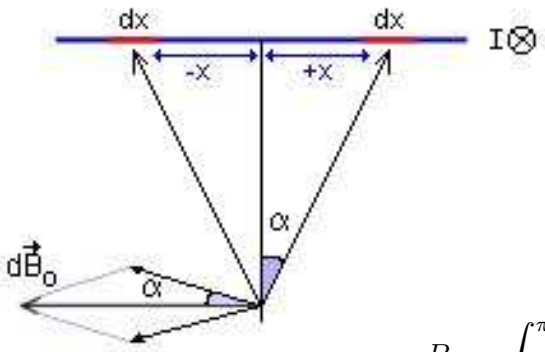
Combinando la seconda con la terza equazione si ricava $I_1 = I_2$, da cui in R_1 non scorre corrente e $V_C - V_D = 0$. Utilizzando questo risultato nella seconda o nella terza equazione si trova che $I_1 = I_2 = I/2$. Sostituendo nella prima equazione si ha $f = R_0 I$, da cui si vede che R_0 è la resistenza equivalente del sistema.



3. Un nastro conduttore infinitamente lungo, di larghezza 4a e spessore trascurabile, è piegato a metà per tutta la sua lunghezza ad angolo retto, come mostrato in figura. Il nastro è percorso da una corrente I distribuita uniformemente su tutta la sua superficie. Calcolare il campo magnetico nel punto O di intersezione di due assi ai due lati del nastro. Il nastro è nel vuoto.



Soluzione:



Il campo magnetico generato da una delle due mezze strisce è orientato come in figura; il suo modulo è dato da:

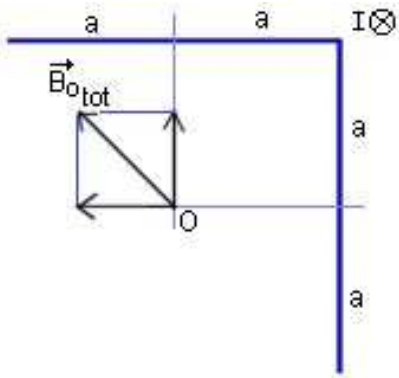
$$dB_0 = 2\frac{\mu_0\, cos\alpha\, di}{2\pi r} = \frac{\mu_0\, cos\alpha\, (I/4a)\, dx}{\pi\, (a\, /\, cos\alpha)} = \frac{\mu_0\, I}{4\pi a} d\alpha$$

$$\left(dx = \frac{a}{cos^2\alpha} d\alpha\right)$$

$$B_0 = \int_0^{\pi/4} \frac{\mu_0\, I}{4\pi a} d\alpha = \frac{\mu_0 I}{16\, a}$$

Sommando i campi magnetici generati dalle due mezze strisce, perpendicolarmente tra di loro, $\vec{B}_0$ forma un angolo di 45° rispetto ai due assi e ha modulo:

$$B_{0\,tot} = \frac{\sqrt{2}\mu_0 I}{16\, a}$$



4. Una spira circolare di raggio a e resistenza R, avvolta in aria, ruota senza attrito meccanico intorno ad un asse coincidente con un suo diametro con velocità angolare costante ω. La spira è

immersa in un campo di induzione magnetica $\vec{B}_0$ uniforme, costante nel tempo, perpendicolare all'asse di rotazione. Calcolare il momento meccanico che agisce sulla spira quando la normale $\vec{n}$ alla sua superficie forma un angolo di 90° rispetto a $\vec{B}_0$. Si trascuri l'autoinduzione.

Soluzione:

$$\vec{M} = \vec{m}_i \times \vec{B}_0$$
$$\vec{m}_i = I\pi a^2 \vec{n}$$

è il momento magnetico della spira generato dalla corrente indotta I:

$$I = \frac{f_i}{R} = -\frac{d\Phi(\vec{B}_0)}{R\ dt} = \frac{1}{R} B_0 \pi a^2 \omega\ sin\omega t$$

$\vec{M}$è parallelo all'asse di rotazione, orientato da opporsi alla rotazione della spira, e, per $\omega = \pi\ /\ 2$,

$$|\vec{M}| = \frac{\pi^2 a^4 \omega B_0^2}{R}$$

5. Calcolare, nell'origine di un sistema di riferiemnto, il vettore densità corrente di spostamento per un'onda elettromagnetica piana, monocromatica di frequenza $\nu = 10^4$ Hz, sinusoidale, polarizzata lineramente, che si propaga in un mezzo omogeneo ed isotropo ($\mu_r = 1$; $\epsilon_r = 2.5$) con intensità media $\zeta = 1\ mW/cm^2$.

Soluzione:
Ponendo $\vec{E} = A\ \hat{j}\ cos(kx - \omega t)$, si ha:

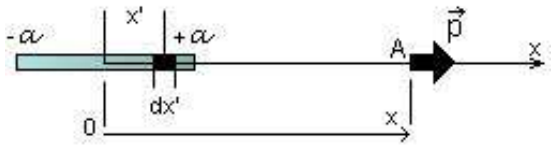
$$\vec{J}_s(x=0) = \epsilon_0 \epsilon_r \frac{d\vec{E}}{dt} = -\epsilon_0 \epsilon_r \omega A \hat{j}\ sen(\omega t)$$

$$\zeta = \frac{\sqrt{\epsilon_r} A^2}{2Z_0}$$

$$\vec{J} = -J_0\ \hat{j}\ sen(\omega t)\ con\ J_0 = \sqrt{\frac{2Z_0\zeta}{\sqrt{\epsilon_r}}} \epsilon_0 \epsilon_r \omega\ =\ 9.6 \cdot 10^5\ A/m^2$$

Università degli Studi di Roma "La Sapienza"
Facoltà di Ingegneria
Esame di Fisica II - 17 Febbraio 2000

1. Nel vuoto, su una sottile sbarretta rettilinea di lunghezza 2a, è distribuita uniformemente una carica Q. Sulla retta contenente la sbarretta,a distanza x dal suo centro O, si trova un dipolo elettrico molto corto di momento $\vec{p}$, disposto parallelamente alla sbarretta con il verso delle x crescenti. Ricavare l'espressione della forza che si esercita sul dipolo.
Soluzione:

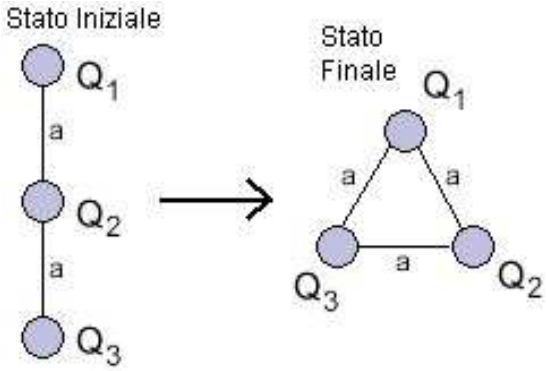


per $x > a$ si ha :

$$E(x) = E_x(x) = \int_{-a}^{a} \frac{\lambda\, dx'}{4\pi\epsilon_0\,(x-x')^2} = \frac{\lambda\, 2a}{4\pi\epsilon_0\,(x^2-a^2)} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{(x^2-a^2)}$$

$$F = F_x = p\frac{dE_x}{dx} = -\frac{pQ}{2\pi\epsilon_0}\frac{x}{(x^2-a^2)^2}$$

2. Un sistema costituito da 3 cariche elettriche puntiformi Q_1, Q_2 , Q_3, posto nel vuoto ed abbastanza lontano da altre sorgenti da potersi considerare isolato, sotto l'azione di ooportune forze sterne passa molto lentamente dalla configurazione iniziale a quella finale, come indicato in figura. Ricavare l'espressione del lavoro compiuto dalle forze esterne nella ipotesi che siano note la distanza a e la carica $Q = Q_1 = Q_2 = Q_3$.
Soluzione:



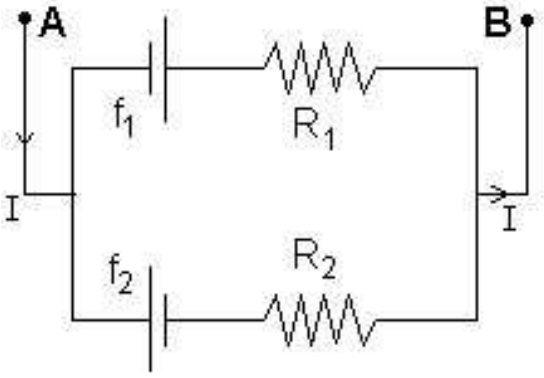
$$L^{est} = U_{FIN} - U_{IN}$$

$$U_{IN} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{Q_1Q_2}{a} + \frac{Q_1Q_3}{2a} + \frac{Q_2Q_3}{a}\right) = \frac{Q^2}{4\pi\epsilon_0}\frac{5}{2a}$$

$$U_{FIN} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{Q_1Q_2}{a} + \frac{Q_1Q_3}{a} + \frac{Q_2Q_3}{a}\right) = \frac{Q^2}{4\pi\epsilon_0}\frac{3}{a}$$

$$L^{est} = \frac{Q^2}{4\pi\epsilon_0\, a}\frac{1}{2}$$

3. Una parte di una rete complessa, in cui circolano correnti stazionarie, è compresa tra i punti A e B, come indicato in figura. Assumendo note le fem f_1 e f_2, le cui resistenze interne possono essere considerate trascurabili, la corrente entrante I e le resistenze R_1 e R_2, ricavare l'espressione della potenza erogata dal generatore f_1.
Soluzione:

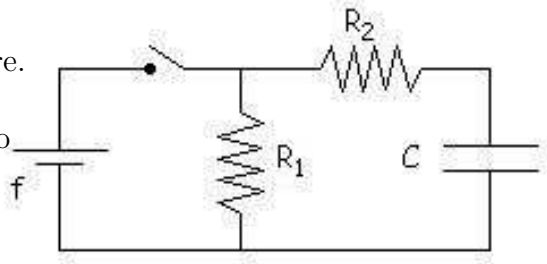


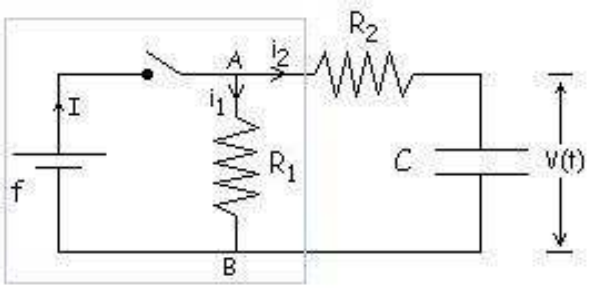
$$I = i_1 + i_2 \quad ; \quad (V_A - V_B) + f_1 = i_1 R_1 \quad ; \quad (V_A - V_B) - f_2 = i_2 R_2$$

$$da\ cui: \quad f_1 + f_2 = i_1 R_1 - i_2 R_2 = i_1 R_1 - I R_2 + i_1 R_2$$

$$i_1 = \frac{f_1 + f_2 + I R_2}{R_1 + R_2} \rightarrow P_{g1} = f_1 i_1 = f_1 \left(\frac{f_1 + f_2 + I R_2}{R_1 + R_2} \right)$$

4. Nel circuito mostrato in figura, il condensatore è scarico quando, al tempo t=0, viene chiuso l'interruttore. Assumendo trascurabile la resistenza interna del generatore, ricavare l'espressione dell'andamento nel tempo della potenza erogata dal generatore.
Soluzione:





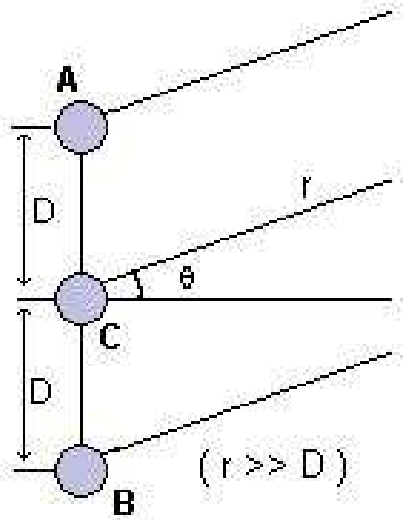
$$Teo.Thevenin: \quad f_{eq} = f \quad ; \quad r_{eq} = 0$$

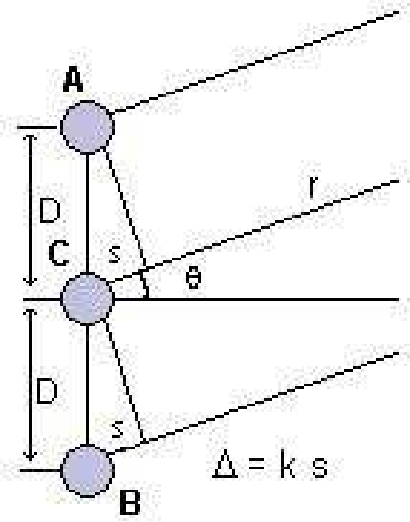
$$V(t) = f(1 - e^{-t/\tau}) \quad ; \quad \tau = R_2 C$$

$$Q(t) - = CV(t) \quad ; \quad i_2(t) = \frac{dQ}{dt} = \frac{f}{R_2} e^{-t/\tau}$$

$$I = i_1 + i_2 = \frac{f}{R_1} + \frac{f}{R_2} e^{-t/\tau} \rightarrow P_g = If = f^2 \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} e^{-t/\tau} \right)$$

5. Tre antenne uguali, disposte nel vuoto su una retta a distanza D l'una dalla sua prima vicina, emettono isotropicamente onde e.m. sferiche sinusoidali coerenti, aventi la stessa ampiezza, lunghezza d'onda λ e differnze di fase nulle all'emissione. Le onde sono polarizzate linearmente nella stessa direzione e la intensità media di ciascuna, a distanza r, vale $\overline{I}$. Ricavare la espressione dell'intensità media totale a distanza r, $\overline{I}(tot)$ in funzione dell'angolo θ mostrato in figura. (Nel calcolare il campo elettrico risultante, può essere conveniente sommare prima E_A con E_B, e poi aggiungere E_C).





Soluzione:

$$E_C = E_0\ cos(kr - \omega t)$$

$$E_A = E_0\ cos[k(r-s) - \omega t] = E_0\ cos(kr - \omega t - \Delta)$$

$$E_B = E_0\ cos[k(r+s) - \omega t] = E_0\ cos(kr - \omega t + \Delta)$$

$$E_B + E_A = 2E_0\ cos(kr - \omega t)\ cos\Delta = (2\ cos\Delta)E_C$$

$$E_{tot} = (E_B + E_A) + E_C = E_C(1 + 2cos\Delta)$$

$$\overline{I}_{tot} = \frac{E_0^2}{2Z}(1 + 2cos\Delta)^2 = \overline{I}(1 + 2cos\Delta)^2$$

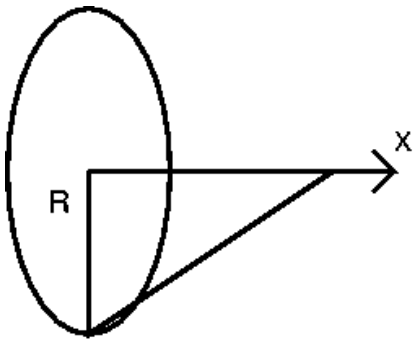
$$con\ \Delta = \frac{2\pi}{\lambda} D\ sin\theta$$

$$nota: cos\ \alpha\ + cos\ \beta = 2\ cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\ cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)$$

Università degli Studi di Roma "La Sapienza"
Facoltà di Ingegneria
Esame di Fisica II - 5 Giugno 2000

1. Su una circonferenza è distribuita con densità lineica uniforme una carica elettrica. Si chiede a quale valore del rapporto tra la distanza x sull'asse della circonferenza, a partire dal centro di questa, e il suo raggio R il campo elettrico assume il suo valore massimo.

   Soluzione:



$$V(x) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0(x^2+R^2)^{1/2}}$$

$$E_x(x) = -\frac{\partial V}{\partial x}$$

$$massimo \quad \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} = 0 \quad per \quad \frac{X_{max}}{R} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

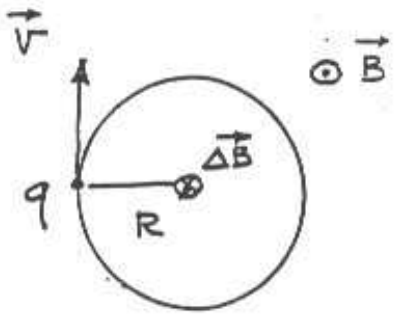
2. Una particella, con carica elettrica q e massa m, si muove di moto circolare uniforme su una traiettoria di raggio R in una regione di spazio dove è uniformemente presente un campo di induzione magnetica B. Si trovi l'espressione della variazione relativa $\Delta B/B$ del valore del campo di induzione nel centro della traiettoria, dovuto alla presenza della carica in moto.

   Soluzione:

$$da: \quad \frac{mv^2}{R} = qvB \;\rightarrow\; B = \frac{mv}{qR}$$

$$\Delta B = \frac{\mu_0}{4\pi} q \left|\frac{\vec{v}x\hat{r}}{r^2}\right| = \frac{\mu_0 q v}{4\pi R^2}$$

$$\frac{\Delta B}{B} = \frac{\mu_0 q^2}{4\pi m R}$$



3. In un solenoide rettilineo,da pensarsi infinitamente esteso, con un numero di spire per unità di lunghezza n=1000m^{-1},circola una corrente elettrica i=0.5A. La stessa corrente circola anche in un filo conduttore rettilineo indefinito posto sull'asse del solenoide. Si determini, in funzione della distanza R dall'asse del solenoide, il valore del passo delle linee, di forma elicoidale, che assumono le linee di forza del campo di induzione magnetica B all'interno del solenoide.

Soluzione:

$$Solenoide: \; B_s = \mu_0 n i$$

$$Filo: \quad B_f = \frac{\mu_0}{2\pi R} i$$

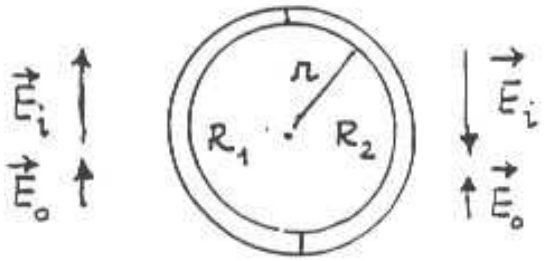
$$\frac{B_s}{B_f} = \frac{P}{2\pi R} \rightarrow p = (2\pi R)^2 n = 39.458 \; R^2$$

4. Un anello conduttore di raggio r=10cm è costituito per una metà della sua intera circonferenza da un sottilissimo filo omogeneo di resistenza $R_1 = 250\Omega$ e per l'altra metà da un analogo filo di resistenza $R_2 = 150\Omega$. Al variare continuo e costante del flusso di un campo di induzione elettromagnetica, a simmetria cilindrica attorno all'asse dell'anello, attraverso l'area del cerchio delimitato dall'anello, si genera una corrente continua i=0.5A. Si determini il valore del modulo del campo elettrostatico E_0 che si genera in ciascuna delle due semicirconferenze di cui è costituito l'anello.

Soluzione:

$$i = \frac{2\pi r E_i}{R_1 + R_2}$$

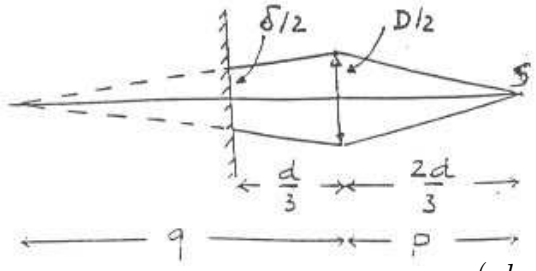
$$\pi r(E_i + E_0) = iR_1$$
$$\pi r(E_i - E_0) = iR_2$$



$$E_0 = \frac{R_1 - R_2}{2\pi r} i = 79.6 \; V/m$$

5. A distanza d=80cm da una parete piana è posta una sorgente puntiforme luminosa e a una distanza pari a d/3 dalla parete, centrata coassialmente con la perpendicolare dalla sorgente alla parete, è posta una lente sottile convergente di diametro D=20cm che rifrange i raggi uscenti dalla sorgente e incidenti sulla lente tutti all'interno di una circonferenza di raggio $\delta = 16,7cm$ tracciata sulla parete. Si determini la distanza focale f della lente

Soluzione:



$$\frac{1}{f} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q}$$

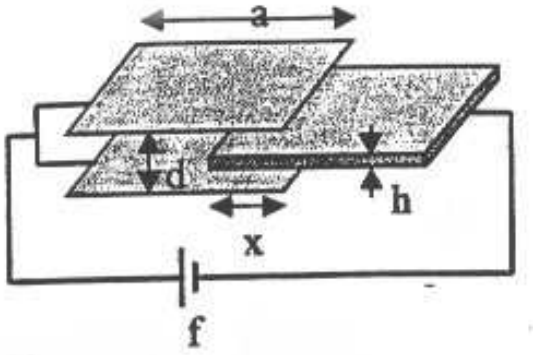
$$p = \frac{2d}{3}, q = \frac{Dd}{3(D-\delta)}$$

$$(\; da \; \frac{D}{q} = \frac{\delta}{q - d_0} \;)$$

$$f = \frac{2Dd}{9D - 6\delta} = 40cm$$

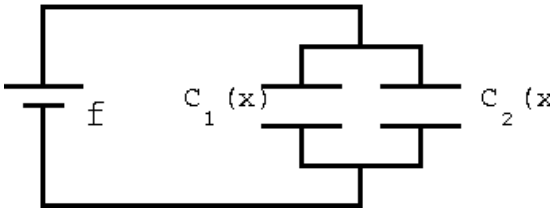
Università degli Studi di Roma "La Sapienza"
Facoltà di Ingegneria
Esame di Fisica II - 19 Giugno 2000

1. Due piastre metalliche quadrate parallele di lato a sono disposte a distanza $d << a$ e sono in contatto elettrico tra loro. Una terza piastra quadrata di lato a e di spessore h viene introdotta tra le precedenti, parallelamente ed equidistante da esse, di una quantità x. Determinare il valore della carica presente sui tre conduttori in funzione di x, se un generatore di f.e.m. f viene collegato fra essi come indicato in figura. Dare il valore numerico per x=a.
Dati: a=l cm, d=1 mm, h=0.8 mm, f=10 V



Soluzione:

$$C_1(x) = C_2(x) = \epsilon_0 \frac{ax}{(d-h)/2}$$
$$C_{TOT} = C_1(x) + C_2(x) = 4\epsilon_0 \frac{ax}{d-l}$$



$$Q_{TOT} = C_{TOT} f = \frac{4\epsilon_0 ax}{d-h} f$$

Lastre esterne

$$Q^{(1)} = Q^{(2)} = \frac{Q_{TOT}}{2} = \frac{2\epsilon_0 ax}{d-h} f$$

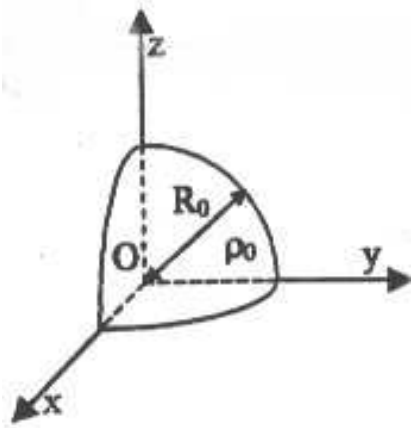
Lastra interna

$$Q^{(3)} = -Q_{TOT} = \frac{-4\epsilon_0 ax}{d-h} f$$

per x=a

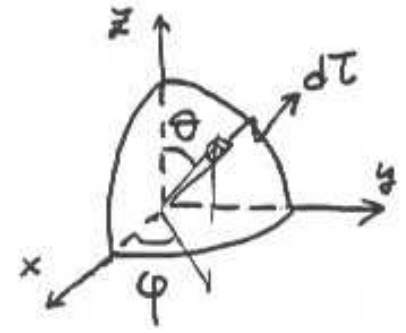
$$Q^{(1)} = Q^{(2)} = 8,854 \cdot 10^{-11}\ C$$
$$Q^{(3)} = -1,771 \cdot 10^{-10}\ C$$

2. Sia data una distribuzione di carica uniforme e costante ρ_0 all'interno di un volume pari ad un ottavo di una sfera di raggio R_0., come indicato in figura. Si determinino i valori del potenziale elettrostatico e del campo elettrico (modulo, direzione e verso) nell'origine O del sistema di riferimento indicato.



Soluzione:
Per simmetria il campo ha componenti $E_{0x} = E_{0y} = E_{0z}$

Calcoliamo E_{0z}



$$d\hat{E}_0 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{dq}{r^2}(-\hat{r})$$

$$dE_{0Z} = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{\rho_0(r^2\sin\vartheta\ d\vartheta\ d\phi\ dr)}{r^2}\cos\vartheta$$

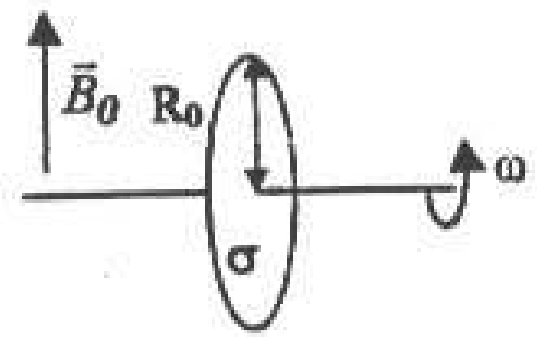
$$E_{0Z} = -\frac{\rho_0}{4\pi\epsilon_0}\int_0^{R_0} dr \int_0^{\pi/2} d\phi \int_0^{\pi/2} \frac{1}{2}d(sin^2\vartheta) = -\frac{\rho_0 R_0}{16\epsilon_0}$$

$$\vec{E_0} = -\frac{\rho_0 R_0}{16\epsilon_0}(1,1,1)$$

$$\mid \vec{E_0} \mid = \frac{\sqrt{3}}{16}\frac{\rho_0 R_0}{\epsilon_0}$$

$$V_0 = \frac{\rho_0}{4\pi\epsilon_0}\int_0^{R_0} r\ dr \int_0^{\pi/2} d\phi \int_0^{\pi/2} \sin\vartheta\ d\vartheta = \frac{\rho_0 R_0^2}{16\epsilon_0}$$

3. Un sottile disco di plastica di raggio R_0 è carico con densità di carica superficiale σ costante ed uniforme e viene mantenuto in rotazione intorno al proprio asse con velocità angolare ω. Esso è immerso in un campo B_0 costante e perpendicolare all'asse di rotazione. Si determini il modulo del momento meccanico che, in questa condizione, agisce sul disco.



Soluzione:
Il disco può essere schematizzato come infinite spire concentriche di momento magnetico:

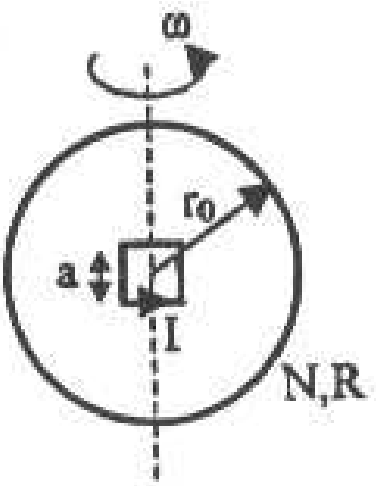
$$d\vec{m} = di \cdot S \cdot \hat{n} = \frac{2\pi r\ dr \cdot \sigma}{T} \cdot \pi r^2 \cdot \hat{n} = \pi\ r^3\ \sigma\ \omega\ dr\ \hat{n}$$

Il momento totale è:

$$\vec{m} = \int_0^{R_0} \pi\ r^3\ \sigma\ \omega\ dr\ \hat{n} = \frac{\pi\omega\sigma R_0^4}{4} \cdot \hat{n}$$

$$\mid \vec{r} \mid = \mid \vec{m} x \vec{B_0} \mid = \frac{\pi\omega\sigma R_0^4}{4} B_0$$

4. Un sistema costituito da una bobina chiusa composta da N spire circolari di raggio r_0 e da una spira quadrata di lato $a << r_0$ è disposto come in figura. La bobina viene mantenuta in rotazione con velocità angolore ω costante attorno ad un diametro ed ha resistenza totale R. Si calcoli la corrente indotta nella bobina se la spira quadrata è percorsa da una corrente I costante. Si trascuri l'autoinduzione nella bobina.



Soluzione:
Calcoliamo il coeff. di mutua induzione supponendo che in 1 scorra I_1:

$$\Phi_2(\vec{B_1}) = M_{21} I_1 = \int_{Z_2} \vec{B_1} \cdot \hat{n_2} \cdot dS = N \frac{\mu_0 I_1}{2r_0} \cos\vartheta \; q^2$$

$$M_{21} = \frac{N \mu_0 a^2 \; cos\vartheta}{2r_0}$$

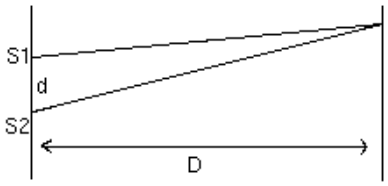
$\vartheta :=$ angolo fra le normali alle spire $\qquad \vartheta(t) = \omega t + \phi$
Se circola I in 2 si ha:

$$\phi_1 = M_{12} I_2 = M_{12} I \frac{N \mu_0 a^2}{2r_0} \cos\vartheta \; I$$

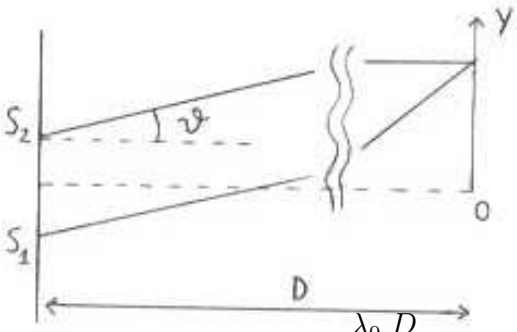
$$f_i = -\frac{d\phi_1}{dt} = -\frac{N \mu_0 a^2 I}{2r_0} \frac{d \; \cos(\omega t + \phi)}{dt} = \frac{N \mu_0 a^2 I \omega}{2r_0} \sin(\omega t + \phi)$$

$$I_1(t) = \frac{f_i}{t} = \frac{N \mu_0 a^2 I \omega}{2r_0 \; R} \sin(\omega t + \phi)$$

5. Due sorgenti puntiformi e coerenti sono a distanza d=1 mm ed emettono onde monocromatiche alla lunghezza d'onda $\lambda = 632.8 \; nm$. Si calcoli la distanza dal piano contenete le sorgenti alla quale è necessario disporre uno schermo di osservazione affinchè si osservi una figura di interferenza con interfrangia pari a $l_0 = 1 \; mm$. Dire quale dovrebbe essere l'indice di rifrazione del liquido nel quale si dovrebbe immergere l'esperimento se si volesse osservare un'interfrangia pari a due terzi di l_0.
(Nel corso della soluzione supporre inizialmente che $D >> d$ e poi verificare che tale approssimazione è valida)



Soluzione :



$$Massimi: \quad \sin\vartheta = \pm m \frac{\lambda_0}{n \; d} \Rightarrow \vartheta \simeq \pm m \frac{\lambda_0}{d \; n}$$

$$y_m = D \; tg\vartheta \simeq \pm m \frac{\lambda_0 \; D}{n \; d}$$

$$Aria: \quad n \simeq 1$$

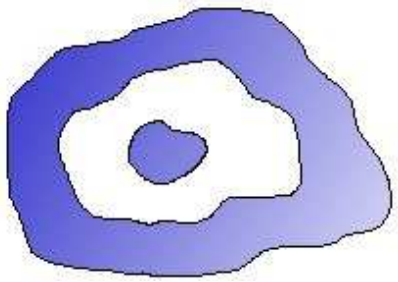
$$l_0 = \frac{\lambda_0 \; D}{d} \qquad D = \frac{d \; l_0}{\lambda_0} \simeq 1.58m \;\; (D >> d)$$

Università degli Studi di Roma "La Sapienza"
Facoltà di Ingegneria
Esame di Fisica II - 16 Luglio 2001

1. Lo spazio fra le piastre di un condensatore piano è riempito con un dielettrico la cui costante dielettrica ϵ varia linearmente con la distanza x da una piastra secondo la legge $\epsilon = \epsilon_1 + (\epsilon_2 - \epsilon_1)\frac{x}{d}$ dove d è la separazione fra le piastre, di area S. Trovare la capacità.

   Soluzione:
   Se σ è la densità superficiale di carica, il campo elettrico in un punto a distanza x da una piastra è:
   $$E = \frac{\sigma}{\epsilon} = \frac{\sigma}{\epsilon_1 + (\epsilon_2 - \epsilon_1)\frac{x}{d}}$$
   Il potenziale fra le due piastre è:
   $$V = \int_0^d E\, dx = \int_0^d \frac{\sigma\, dx}{\epsilon_1 + (\epsilon_2 - \epsilon_1)\frac{x}{d}} = \frac{\sigma\, d}{\epsilon_2 - \epsilon_1}\, ln\frac{\epsilon_2}{\epsilon_1}$$
   poichè $\sigma = Q\ /\ S$ si ha:
   $$C = \frac{Q}{V} = \frac{S(\epsilon_2 - \epsilon_1)}{d\, ln\, \frac{\epsilon_2}{\epsilon_1}}$$

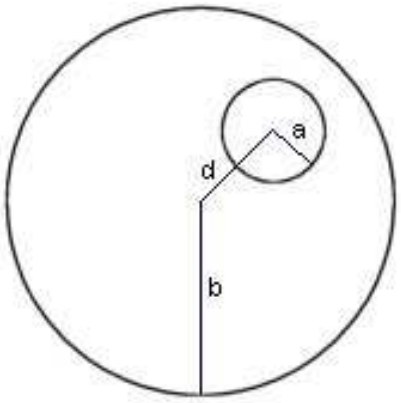
2. Un condensatore, che nel vuoto ha capacità C_0 è costituito da due conduttori di forma non regolare, l'uno interno all'altro (vedi figura). Lo spazio fra i due conduttori viene riempito con un mezzo omogeneo di resistività ρ. Calcolare la resistenza elettrica esistente fra i due conduttori. (Si supponga di poter trattare il campo elettrico come un campo elettrostatico).
   Dati: $C_0 = 1\ \mu F$, $\rho = 10^6\ \Omega m$



   Soluzione:
   Considerata una generica superficie chiusa nello spazio fra i due condensatori si ha per il teorema di Gauss:
   $$\int_S \vec{E} \cdot \hat{n}\, dS = \frac{Q}{\epsilon_0 \epsilon_r} \quad inoltre \quad Q = CV = \epsilon_r\, C_0\, V$$
   $$ma\ anche\ \vec{E} = \rho\, \vec{j}\ \ per\ cui \quad \int_S \vec{E} \cdot \hat{n}\, dS = \rho \int_S \vec{j} \cdot \hat{n}\, dS = \rho\, I$$
   $$Ne\ risulta\ \ \rho\, I = \frac{C_0\, V}{\epsilon_0}$$
   $$Ma\ per\ definizione \quad R = \frac{V}{I} = \frac{\rho\, \epsilon_0}{C_0}$$
   $$Numericamente: \quad R = 8.86\ \Omega$$

3. Un foro eccentrico di raggio a è praticato parallelamente all'asse di un cilindro conduttore di raggio b ($b > a$). I due assi distano d fra di loro. Una corrente I passa nel cilindro con densità uniforme entro il conduttore. Calcolare il campo magnetico al centro del foro.

Soluzione:



Il campo può essere pensato come prodotto dei contributi di due correnti:
Una di densità $j = \frac{I}{\pi\,(b^2-a^2)}$ che passa in tutto il cilindro di raggio b come se questo fosse tutto pieno, e
una di densità -j che passa nel cilindro di raggio a.
La somma delle due densità di corrente da la corrente nel cilindro forato.
La prima corrente produce al centro del foro un campo magnetico dato da

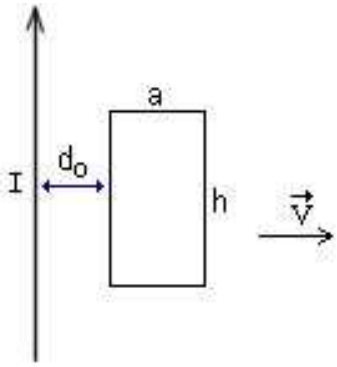
$$\int \vec{H}\cdot d\vec{l} = 2\pi d\ H = \int \vec{j}\cdot\hat{n}\ dS =$$

$$= \frac{I}{\pi\ (b^2-a^2)}\ \pi\ d^2$$

$$ossia \quad H = \frac{I\ d}{2\pi\ (b^2-a^2)}$$

La seconda non produce alcun campo al centro del foro, quindi il campo totale al centro del foro è proprio quello appena ricavato.

4. Una spira rigida rettanolare di lati a e b si muove con velocità $\vec{v}$ costante in un piano che contiene un filo rettilineo indefinito percorso da una corrente costante I. Un lato della spira resti parallelo al filo e la distanza al tempo t=0 della spira dal filo sia d_0. Trovare la f.e.m. indotta nella spira.



Soluzione:
Ad un istante generico t, sia $x(t)$ la distanza della spira dal filo.
Il flusso concatenato sarà:

$$\Phi(B) = \int \vec{B}\cdot\hat{n}\ ds = \int_x^{x+a} B\ b\ dx' =$$

$$= \frac{\mu_0\ I\ b}{2\ \pi}\int_x^{x+a}\frac{dx'}{x'} = \frac{\mu_0\ I\ b}{2\ \pi}\ ln\frac{x+a}{x}$$

dove $x(t) = d_0 + vt$, segue allora:

$$\Phi(B) = \frac{\mu_0\ I\ b}{2\ \pi}\ ln\frac{d_0+a+vt}{d_0+vt}$$

$$f = -\frac{d\Phi(b)}{dt} = \frac{\mu_0\ I\ a\ b\ v}{2\ \pi}\ \frac{1}{(d_0+a+vt)\ (d_0+vt)}$$

5. Un circuito RLC è in risonanza. Conoscendo R,C,L e la tensione massima V_M che si può applicare a C senza rischiare che il suo dielettrico si fori, si calcoli il valor massimo che può avere l'ampiezza f_M della f.e.m. del generatore sinusoidale che alimenta il circuito.
Dati: $R = 2\ \Omega$, L=10 mH, C=1 μF, V_M=1000 V.

Soluzione:

$$In\ generale\ V_C = \frac{i}{\omega\ C}$$

$$Alla\ risonanza\ inoltre\ i = \frac{f_M}{R}\ \ e\ \ \omega = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

$$Quindi\ \ V_C = \frac{f_M}{R}\sqrt{\frac{L}{C}} < V_M$$

$$ovvero:\ \ f_M < R\sqrt{\frac{C}{L}}\ V_M\ =\ 20\ V$$

Università degli Studi di Roma "La Sapienza"
Facoltà di Ingegneria
Esame di Fisica II - 17 Luglio 2000

1. Una superficie sferica di raggio a, posta nel vuoto e sulla quale è distribuita uniformemente una carica Q, subisce una dilatazione che la porta ad avere raggio $b > a$. Ricavare l'espressione del lavoro compiuto dalle forze elettriche.
   Soluzione:

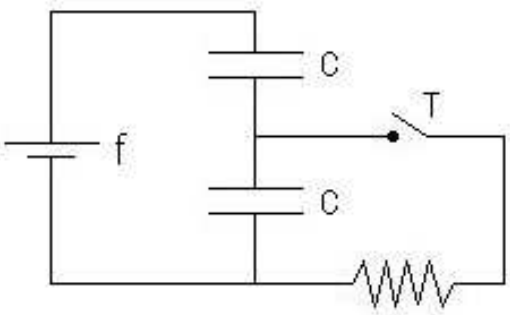
$$L^{est} = U_{FIN} - U_{IN} = -L^{el}$$

$$U_{IN} = \int (\frac{\varepsilon_0 E^2}{2}) d\tau \qquad in\ spazio\ esterno\ alla\ sfera\ di\ raggio\ a$$

$$U_{FIN} = \int (\frac{\varepsilon_0 E^2}{2}) d\tau \qquad in\ spazio\ esterno\ alla\ sfera\ di\ raggio\ b$$

$$L^{el} = \int_a^b \frac{\varepsilon_0}{2} (\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0\ r^2})^2\ 4\pi r^2\ dr = \frac{Q^2}{8\pi\varepsilon_0}(\frac{1}{a} - \frac{1}{b})$$

2. Nel circuito mostrato in figura, in cui il generatore ha resistenza interna trascurabile, si è in condizioni di equilibrio quando l'interruttore T è aperto. Ad un certo istante viene chiuso l'interruttore e, dopo un certo tempo, si raggiunge una nuova condizione di equilibrio. Ricavare l'espressione dell'energia erogata dal generatore nel passaggio dalla situazione iniziale a quella finale.
   Soluzione:



$$Situazione\ iniziale: \quad ; \quad C_S = \frac{C}{2} = \frac{Q_{IN}}{f} \rightarrow Q_{IN} = \frac{fC}{2}$$

$$Situazione\ finale: \quad ; \quad C = \frac{Q_{FIN}}{f} \rightarrow Q_{FIN} = fC$$

$$\Delta Q = Q_{FIN} - Q_{IN} = \frac{fC}{2}$$

$$L = f\ \Delta Q = f^2 \frac{C}{2}$$

3. L'avvolgimento di un solenoide rettilineo di sezione circolare di raggio R, nel vuoto, è percorso da una corrente alternata sinusoidale di pulsazione ω. determinare il rappporto tra i valori massimi delle energie elettrica e magnetica presenti all'interno del solenoide.
   Soluzione:

$$B = \mu_0 n i(t) = \mu_0 n I \; cos\omega t$$

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{l} = E(r)\; 2\pi r = -\frac{d}{dt}(\pi r^2 B)$$

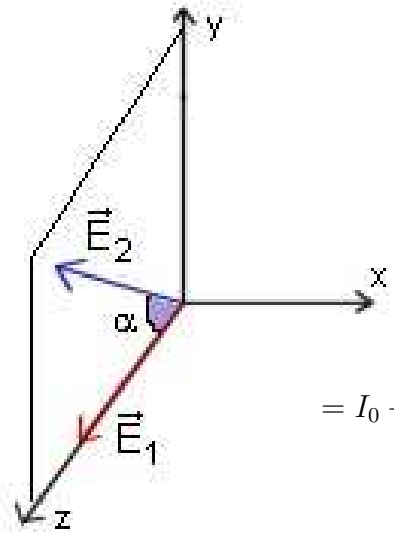
$$E(r,t) = \frac{\mu_0 n I \omega}{2} r \; sin\omega t$$

$$U_M = u_M \; \tau = \frac{\mu_0^2 n^2 I^2 \; cos^2\omega t}{2\mu_0}\pi R^2 h \quad (con\ h\ lunghezza\ del\ solenoide)$$

$$U_E = \int_0^R \frac{1}{2}\epsilon_0 E^2 \; 2\pi r h \; dr = \frac{\epsilon_0 \mu_0^2 \pi n^2 I^2 \omega^2 h R^4}{16} cos^2\omega t$$

$$\frac{U_E^{MAX}}{U_M^{MAX}} = \frac{\epsilon_0 \mu_0 R^2 \omega^2}{8}$$

4. Due onde elettromagnetiche piane, sinusoidali e di uguale pulsazione, uguale fase iniziale e uguale intensità media iniziale I_0, si propahgano, nel vuoto, nel verso positivo dell'assex. Le due onde sono polarizzate linearmente e l'angolo formato tra le direzioni dei campi elettrici è α. Ricavare l'espressione dell'intensità medi risultante in un punto dello spazio.



Soluzione:

$$E_Z = E_1 + E_2 \; cos\alpha$$

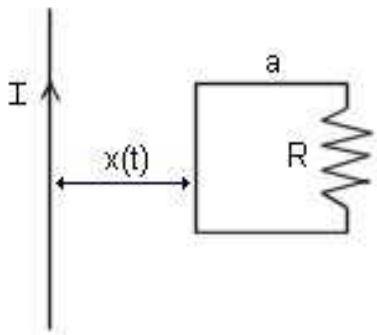
$$E_y = E_2 \; sin\alpha$$

$$E^2 = E_z^2 + E_y^2 = E_1^2 + E_2^2 + 2E_1E_2 \; cos\alpha$$

$$I = \frac{E^2}{2Z} = \frac{E_1^2}{2Z} + \frac{E_2^2}{2Z} + 2E_1E_2\frac{cos\ \alpha}{2Z} =$$

$$= I_0 + I_0 + 2\frac{2I_0 Z}{2Z} cos\ \alpha = 2I_0\ (1 + cos\ \alpha)$$

5. Una spira conduttrice quadrata di lato a e resistenza R si muove nel vuoto su un piano contenente un lungo filo rettilineo percorso da corrente stazionaria I. La spira si allontana dal filo con moto traslatorio con velocità costante v mantenendo uno dei suoi lati parallelo al filo stesso. Ricavare, in funzione della distanza x(t) mostrata in figura, l'espressione della corrente che circola nella spira.



Soluzione:

$$f_i = -\frac{d\Phi(B)}{dt}$$

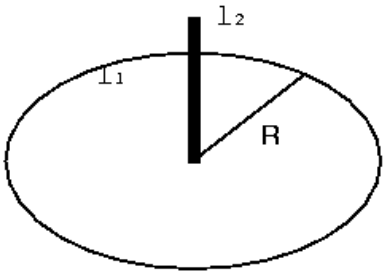
$$\Phi(B) = \int_x^{x+a} \frac{\mu_0 I}{2\pi r} a \; dr = \frac{\mu_0 I a}{2\pi} \; ln \left(1 + \frac{a}{x}\right)$$

$$f_i = -\frac{\mu_0 I a}{2\pi} \left(\frac{1}{1 + \; a/x} \cdot \left(-\frac{a}{x^2}\right) \cdot \frac{dx}{dt} \right) = \frac{\mu_0 I a^2 \; v}{2\pi \; (x^2 + ax)}$$

$$i = \frac{fi}{R} = \frac{\mu_0 I a^2 \; v}{2\pi \; R \; (x^2 + ax)}$$

Università degli Studi di Roma "La Sapienza"
Facoltà di Ingegneria
Esame di Fisica II - 14 Settembre 2000

1. Una spira circolare di raggio R, con densità di carica lineare λ_1 è centrata nell'origine sul piano z=0. Sull'asse di rotazione della spira, a partire da z=0 fino a z=h, è posta una bacchetta sottile carica con densità lineare λ_2. Ricavare l'espressione della forza che si esercita fra le due distribuzioni di carica.

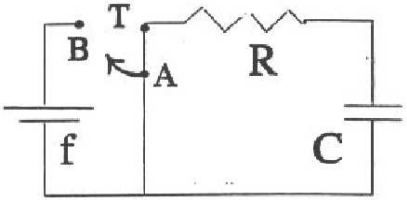


Soluzione :

$$F_z = \int_0^h E_z^1 dq_2 \qquad dq_2 = \lambda_2 dz \qquad E_z^1 = \frac{\lambda_1 R z}{2\epsilon_0 (z^2+R^2)^{3/2}}$$

$$F_z = \frac{\lambda_1\lambda_2 R}{2\epsilon_0}\int_0^h \frac{z dz}{(z^2+R^2)^{3/2}} = \frac{\lambda_1\lambda_2 R}{4\epsilon_0}\int_{R^2}^{R^2+h^2}\frac{dy}{y^{3/2}} = \frac{\lambda_1\lambda_2}{2\epsilon_0}\left(1-\frac{R}{\sqrt{h^2+R^2}}\right)$$

2. Nel circuito in figura il condensatore è scarico quando a t=0 il tasto T viene spostato dalla posizione A a quella B. Dopo un intervallo di tempo ΔT il tasto viene riportato in posizione A. Calcolare il valore della differenza di potenziale ai capi di C agli istanti $t = \Delta T/2$ e $t = 3\Delta T/2$. (C=$3\mu F$, R=$2k\Omega$, f=20V , ΔT=4 ms)



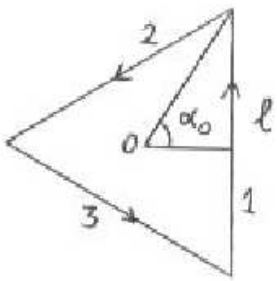
Soluzione :

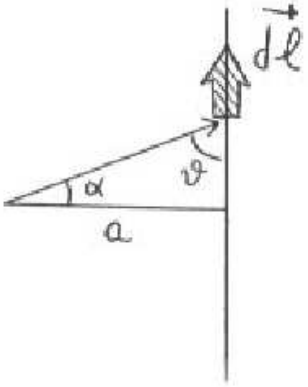
$$0 < t < \triangle T \qquad \tau = RC \qquad \triangle V_C(t) = f\left(1 - l^{-t/\tau}\right) \qquad \triangle V_C(t = \frac{\triangle T}{2}) = 5.7\ V$$

$$t > \triangle T \quad Q_C(t = \triangle T) = Cf\left(1 - l^{-\triangle T/\tau}\right) = Q_0' \quad Q(t) = Q_0' l^{-\frac{t-\triangle T}{\tau}}$$

$$\triangle V_C(t = \frac{3}{2}\triangle T) = f\left(1 - l^{-\triangle t/\tau}\right) l^{-\frac{\frac{3}{2}\triangle T - \triangle T}{\tau}} = 2.7\ V$$

3. Una corrente I=50mA scorre all'interno di un filo conduttore sagomato a forma di triangolo equilatero di lato l=20cm. Considerando che il circuito è contenuto nel piano z=0 ricavare la direzione e calcolare il valore del campo induzione magnetica al centro del triangolo.
Soluzione :





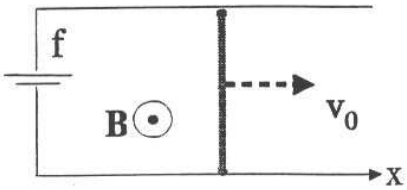
$$\vec{B}(0) \parallel \pm\hat{K} \quad B_z(0) = 3B_z^1(0)$$

$$l = 2atg\alpha_0 \quad \alpha_0 = 60^o \quad \Delta r = \frac{a}{cos\alpha} \quad \alpha = \frac{\pi}{2} - \vartheta$$

$$dl = \frac{a}{cos^2\alpha}\, d\alpha \qquad dB_z^1 = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\frac{dl}{\Delta r^2} sen\vartheta = \frac{\mu_0 I}{4\pi a} cos\alpha d\alpha$$

$$B_z(0) = 3B_z^1(0) = 3\int_{-\alpha_0}^{\alpha_0} \frac{\mu_0 I}{4\pi\ a} cos\alpha\ d\alpha = \frac{3\mu_0 I}{\pi l} tg\alpha_0\ sin\alpha_0 = 9 \cdot 10^{-3}\ Gauss$$

4. Nel circuito in figura la sbarretta di lunghezza l, massa m e resistenza R, si muove su due guide metalliche parallele con velocità iniziale v_0 verso destra. Il circuito è immerso in un campo B uniforme uscente dal foglio. Ricavare la quantità di tempo necessaria perchè la sbarretta si fermi.



Soluzione:

$$f = -Blv_x + RI \quad F_x = -IlB \quad m\frac{dv_x}{dt} = -IlB = -\frac{lB}{R}(f + Blv_x)$$

$$\alpha = \frac{f}{lB} \qquad \tau = \frac{mR}{B^2 l^2} \qquad \tau\frac{dv_x}{dt} = -(d + v_x) \quad v_n = Ae^{-t/\tau} - \alpha$$

$$v_x(t = 0) = v_0 \Rightarrow A = v_0 + \alpha \qquad v_x(t) = (v_0 + \alpha)e^{-t/\tau} - \alpha \qquad t_0 = \tau ln(1 + \frac{v_0}{\alpha})$$

5. Una sorgente di onde elettromagnetiche emette isotropicamente onde sferiche in aria con una potenza media di 10kW. Considerato un ricevitore radio sensibile ad un campo elettrico oscillante di ampiezza $E_0^{min} = 10^{-3} V/m$ calcolare la massima distanza tra il ricevitore e la sorgente utile per l'ascolto.

Soluzione:

$$< P >= 4\pi R_{max}^2 < I > \qquad < I >= \frac{E_{eff}^2}{Z_0} = \frac{E_{0_{MIN}}^2}{2Z_0}$$

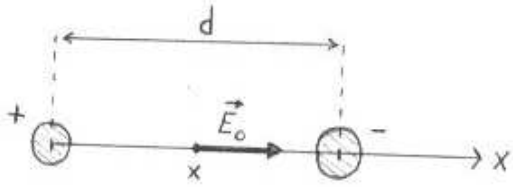
$$R_M = \sqrt{\frac{< P > Z_0}{2\pi E_{0_{MIN}}^2}} = 7.7 \cdot 10^5\ m$$

Università degli Studi di Roma "La Sapienza"
Facoltà di Ingegneria
Esame di Fisica II - 21 Ottobre 2000

1. Due conduttori cilindrici di raggio a, rettilienei, paralleli tra loro, di lunghezza infinita, posti nel vuoto, hanno carica uguale in modulo, ma di segno opposto. Se d è la distanza tra i due assi e V_0 è la differenza di potenziale tra i due conduttori, determinare il modulo della carica per unità di lunghezza presente su ciascuno dei due conduttori.
Soluzione:

λ : carica per unità di lunghezza dei conduttori

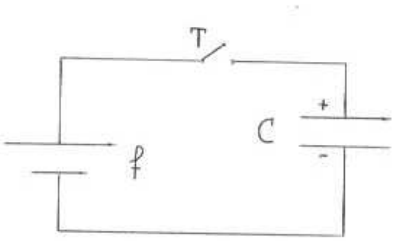
(da calcolare)



$$E_0(x) = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}(\frac{1}{x} + \frac{1}{d-x}) \qquad a < x < d - a$$

$$V_0 = \int_a^{d-a} E_0(x)dx = \frac{\lambda}{\pi\varepsilon_0} ln(\frac{d-a}{a})$$

2. La differenza di potenziale tra le armature di un condensatore di capacità C inizialmente è V_0. Ad un certo istante, chiudendo l'interruttore T, il condensatore viene collegato ad un generatore di forza elettromotrice $f > V_0$. Per raggiungere la nuova condizione di equilibrio il generatore compie un lavoro W. Calcolare la quantità di carica fornita dal generatore al condensatore ed il valore di V_0.

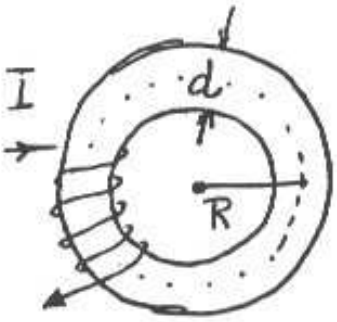


Soluzione:

$$\Delta Q : \quad \textit{variazione di carica del condensatore.}$$

$$W = f\ \Delta Q \qquad V_0 = \frac{Q_i}{C} = \frac{Q_f - \Delta Q}{C} = f - \frac{W}{fC}$$

3. Su un anello di ferro di raggio medio R=20cm (con $d << R$, vedi figura) sono avvolte $N = 100$ spire. Si determini la permeabilità magnetica relativa del ferro sapendo che l'intensità media di magnetizzazione nell'anello è M=2x10^5 A/m e che la corrente che scorre nelle spire è I=0.5A



Soluzione:

$$\vec{M} = \chi_m \vec{H} = (\mu_r - 1)\vec{H} \Rightarrow \mu_r - 1 = \frac{M}{H}$$

$$\oint \vec{H} \cdot \vec{dl} = NI \qquad \Rightarrow H = NI/2\pi R \Rightarrow \mu_r - 1 = \frac{2\pi RM}{NI} \Rightarrow \mu_r = 5 \cdot 10^3$$

4. Si abbia una bobina di N=100 spire di forma circolare (raggio a=10cm) avvolte in aria. La bobina ruota intorno ad un suo diametro con velocità angolare costante, compiendo 50 giri/s, ed è immersa in un campo magnetico uniforme perpendicolare all'asse di rotazione della bobina. Calcolare il modulo del vettore induzione magnetica affinchè il valore efficace della forza elettromotrice indotta sia f_0=220V.

   Soluzione:

$$f_i = -\frac{d\Phi(\vec{B_0})}{dt} \quad ; \quad \Phi(\vec{B_0}) = N\pi R^2 B_0 \, cos wt$$

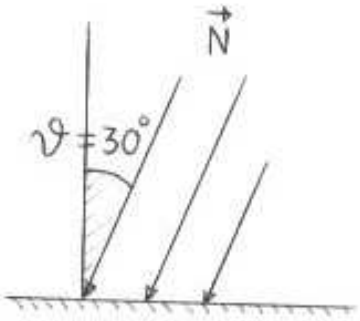
$$f_i = N \, \pi \, R^2 \, B_0 \, w \, sen wt \quad \Rightarrow f_0 = \frac{N \, \pi \, R^2 \, B_0 \, 2\pi w}{\sqrt{2}} \Rightarrow B_0 = 0.32T$$

5. Calcolare la potenza media assorbita dal pavimento di una terrazza di 20 m^2 di superficie, esposta al sole verso mezzogiorno di una giornata estiva sapendo che: 1) i raggi solari formano un angolo di 30 gradi con la verticale; 2) l'intensità media della luce solare sulla terra è cirxca 1.1 kW/m^2; 3) l'80% della luce solare incidente in queste condizioni non è assorbita dal pavimento della terrazza.

   Soluzione:

$\vec{N}$: *vettore di Poynting*

$\overline{W_{ass}} = 0.2 \, \overline{\Phi(\vec{N})} = 0.2 \, I \, S \, cos(\vartheta) = 3.8 \, kW$



Università degli Studi di Roma "La Sapienza"
Facoltà di Ingegneria
Esame di Fisica II - 1 Giugno 2001

1. Lungo l'asse di un sottile disco isolante di raggio R e ad una certa distanza d da esso è posta, nel vuoto, una particella di massa m e carica q. Sul disco è uniformemente distribuita una carica Q. Determinare la minima velocità che è necessario imprimere alla particella, nella direzione dell'asse, perchè questa possa raggiungere il disco.
   Si trascuri la forza peso. (R=3cm, d=4cm, q/m=$5 \cdot 10^7$C/Kg, Q=$10^{-9}C$)
   Soluzione:

$$\frac{mv^2}{2} = q(V(0) - V(d))$$

$$V(x) = \int_{disco} (\frac{\sigma\, dS}{4\pi\varepsilon_0 r}) = \int_0^R (\frac{Q}{\pi R^2} \frac{2\pi r'}{4\pi\varepsilon_0 (r'^2 + x^2)^{1/2}} dr') = \frac{Q}{2\pi\varepsilon_0 R^2}(\sqrt{R^2 + x^2} - x).$$

$$v^2 = \frac{q}{m} \frac{Q}{\pi\varepsilon_0 R^2}(R - \sqrt{R^2 + d^2} + d) \Rightarrow v = 2 \cdot 10^5 m/s$$

2. Un condensatore, costituito da due superfici sferiche di raggi R_1 ed R_2, è riempito con un materiale elettrico la cui costante varia in funzione della distaza r dal centro comune delle due sfere secondo la legge $\epsilon = \epsilon_0 \frac{R_2^2}{r^2}$. Tra le due armature esiste una differenza di potenziale V. Calcolare la carica Q distribuita sulle armature del condensatore e le cariche di polarizzazione Q_{P1} e Q_{P2} distribuite sulle superfici del dielettrico di raggio R_1 e R_2. (R_2=3cm, R_2-R_1=1mm, V=300volt).
   Soluzione:

$$\vec{E} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon r^2}\hat{r} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R_2^2}\hat{r}$$

$$V = \int_{R_1}^{R_2} \vec{E} \cdot d\vec{r} = \int_{R_1}^{R_2} \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R_2^2} dr = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R_2^2}(R_2 - R_1) \quad \Rightarrow Q = \frac{4\pi\varepsilon_0 R_2^2 V}{R_2 - R_1} = 3 \cdot 10^{-8} C$$

$$\vec{P} = \varepsilon_0(\varepsilon_r - 1)\vec{E} = \frac{R_2^2 - r^2}{4\pi R_2^2 r^2} Q\hat{r}$$

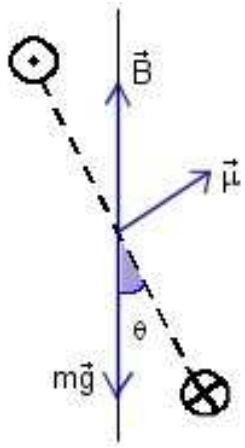
$$\sigma_{p1} = P_n(r = R_1) = -\frac{R_2^2 - R_1^2}{4\pi R_1^2 R_2^2} Q \qquad Q_{p1} = \sigma_{p1} 4\pi R_1^2 = -\frac{R_2^2 - R_1^2}{R_2^2} Q = -2 \cdot 10^{-9} C$$

$$\sigma_{p2} = P_n(r = R_2) = 0 \qquad Q_{p2} = 0$$

3. Una spira rettangolare rigida, di massa m e lati di lunghezza a e b, è vincolata a ruotare attorno ad un asse orizzontale passante per uno dei due lati di lunghezza a. Essa è percorsa da una corrente I e si trova in una regione dello spazio in cui è presente un campo di induzione $\vec{B}$, uniforme, diretto lungo la direzione verticale. Determinare l'angolo θ che il piano della spira

forma, all'equilibrio, con la direzione verticale.
(m=3g, a=10cm, I=3A, B=49mT)

Soluzione:



$$\vec{M}_m + \vec{M}_p = 0$$
$$\mu B\ sen\alpha\ = mg\frac{b}{2}sen\theta$$
$$\mu = Iab \quad ; \quad sen\alpha = cos\theta$$
$$tg\theta\ = \frac{2IaB}{mg} = 1 \quad ; \quad \theta = 45^o$$

4. Un solenoide cilindrico, di raggio r e lunghezza h, è costituito da N spire ottenuto avvolgendo in modo compatto un filo di rame a sezione circolare di diametro d. Esso è riempito per metà della sua lunghezza con un materiale di permeabilità magnetica relativa μ_r costante. Calcolare la costante di tempo τ del circuito ottenuto collegando, tramite fili conduttori di resistenza trascurabile, il solenoide ad un generatore di forza elettromotrice costante e resistenza interna R_i.
(r=1cm, h=55cm, N=550, $\rho = 1,7 \cdot 10^{-8}\Omega$ m, d=1mm, μ_r=900, $R_i = 1.25\ \Omega$)
Soluzione:

$$L = \mu_0\mu_r n^2\pi r^2\frac{h}{2} + \mu_0 n^2\pi r^2\frac{h}{2} = \mu_0(\mu_r+1)n^2\pi r^2\frac{h}{2} = 9.8 \cdot 10{-}2\ H \qquad n = \frac{N}{h} = 10^3 spire/m$$
$$R = \rho\frac{l}{\pi(\frac{d}{2})^2} = \rho\frac{N2\pi r}{\pi(\frac{d}{2})^2} = 0.75\Omega$$
$$\tau = \frac{L}{R+R_i} = 4.9 \cdot 10^{-2}\ s$$

5. Un'onda piana di intensità I e lunghezza λ si propaga in un mezzo di indice di rifrazione n impedenza caratteristica Z. Calcolare l'ampiezza del campo elettrico $\vec{E}$e di quello di induzione $\vec{B}$ associati all'onda sapendo che, se questa si propagasse nel vuoto, la sua lunghezza d'onda sarebbe λ_0.
(Z=290 Ω, I=10 W/m^2, λ=500nm, λ_0=650nm).
Soluzione:

$$I = \frac{E^2}{2Z} \qquad E = \sqrt{2ZI} = 76\ V/m$$
$$B = \frac{E}{v} = nEc \qquad n = \frac{\lambda_0}{\lambda} = 1.3 \qquad B = 3.3 \cdot 10^{-7}T$$

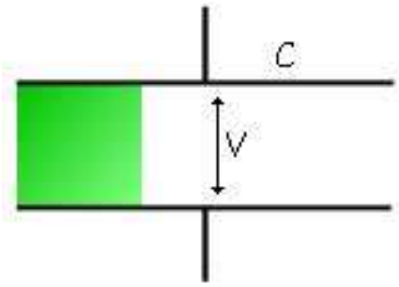
Università degli Studi di Roma "La Sapienza"
Facoltà di Ingegneria
Esame di Fisica II - 15 Giugno 2001

1. Un campo elettrostatico ha, in una regione dello spazio, le componenti $E_x = axr$, $E_y = ayr$, $E_z = azr$,dove r è la distanza dall'origine. Trovare la densità di carica e la carica totale contenuta in una sfera di raggio R con centro nell'origine.

   Soluzione:

$$\rho = \epsilon_0 \, div \, \vec{E}$$
$$Q = \int \rho \, d\tau = \epsilon_0 \int E_n \, dS = 4\pi a \epsilon_0 R^4$$

2. Un condensatore piano di capacità $C = 0.6 \, \mu F$ viene caricato a una d.d.p $V = 100 \, V$ e quindi isolato. Lo spazio tra le armature viene riempito pr 1/3 con un liquido isolante di costante dielettrica relativa $\epsilon_r = 25$. Calcolare la variazione di energia del condensatore.



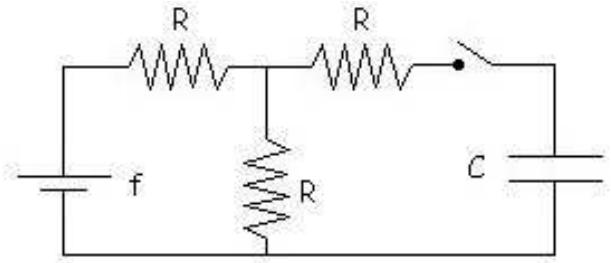
   Soluzione:

$$\Delta E = \frac{1}{2}\frac{Q^2}{C'} - \frac{1}{2}\frac{Q^2}{C}$$

   (Condensatore isolato $\rightarrow$ carica costante)

$$C' = C_1 + C_2 \; con \; C_1 = \epsilon_0 \frac{2}{3}\frac{S}{d} \; , \; C_2 = \epsilon_0 \epsilon_r \frac{1}{3}\frac{S}{d}$$
$$\Delta E = \frac{1-\epsilon_r}{2+\epsilon_r}\frac{1}{2}CV^2 = \; -2.67 \, mJ$$

3. Con riferimento alla figura si dia l'espressione della differenza di potenziale V(t) ai capi del condensatore.
   Nota: $Q_0 = 0$; interruttore aperto $\rightarrow$ chiuso.



   Soluzione:

$$f = 2I_1R - I_2R \quad ; \quad -V_C = 2I_2R - I_1R$$
$$V_C = \frac{Q(t)}{C} \quad ; \quad I_2 = \frac{dQ}{dt} \Rightarrow \frac{dQ}{dt} = -\frac{2}{3\,RC}Q + \frac{f}{3R}$$
$$Q(t) = \frac{fC}{2} + A\, e^{-\frac{2}{3RC}t}$$

in cui A è una costante che dipende della carica iniziale sul condensatore

$$V(t) = \frac{Q(t)}{C} = \frac{1}{2}f + \frac{A}{C}e^{-\frac{2}{3RC}t} = \frac{f}{2}(1 - e^{-t/\tau}) + \frac{Q_0}{C}e^{-t/\tau}$$

4. Un conduttore cilindrico di raggio R è percorso da una corrente stazionaria I=10 A di densità uniforme. Determinare l'energia magnetica per unità di lunghezza del conduttore.

   Soluzione:

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = 2\pi r\ B = \mu_0\ i = \mu_0\ I\frac{r^2}{R^2} \Rightarrow B = \frac{\mu_0\ I\ r}{2\pi R^2}$$

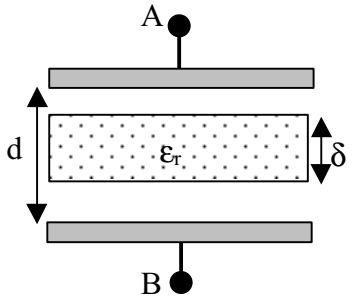
$$\frac{U}{l} = \frac{1}{l\ 2\ \mu_0}\int_0^R B^2 l 2\pi r\ dr = \frac{\mu_0 I^2}{16\ \pi} = \ 2.5\ \mu J/m$$

5. Una spira rettanolare di lati a=1.5 m e b=1 m posta nel vuoto, viene investita da un'onda piana monocromatica di lunghezza d'onda $\lambda = 2a$, di densità $10W/m^2$, polarizzata linarmente che si propaga parallelamente alla direzione del lato a della spira. Determinare la polarizzazione dell'onda affinchè sia massima la f.e.m. indotta nella spira e calcolarne il valore.

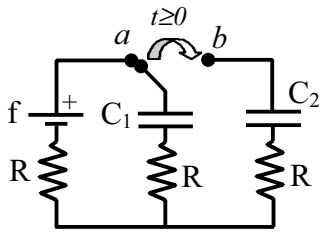
   Soluzione:
   Il piano di polarizzazione deve essere ortogonale al piano della spira

UNIVERSITA' DI ROMA "LA SAPIENZA" – FACOLTA' DI INGEGNERIA
ESAME DI FISICA GENERALE II – PROVA SCRITTA DEL 17/12/2001 – A.A. 2000-2001

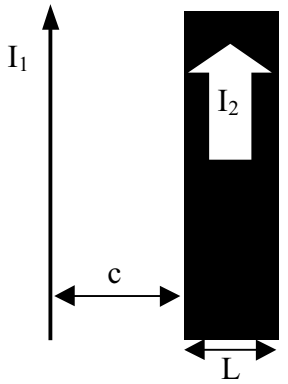
1) Un condensatore piano isolato è costituito da due piastre di sezione $S=10cm^2$, distanti d=0.1mm. Le due piastre si trovano inizialmente ad una differenza di potenziale $\Delta V_o=V_A-V_B=360\pi$ V, che diminuisce del 20% quando viene inserita una lastra omogenea di costante dielettrica relativa ε_r e di spessore $\delta=d/4$. Determinare i valori della costante ε_r, della carica libera Q_{lib} sulle piastre e di polarizzazione Q_{pol} sulla lastra.



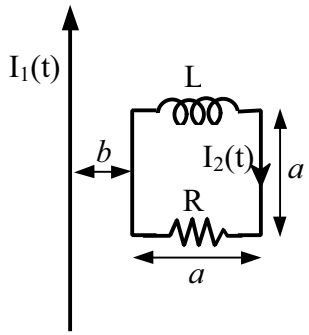
2) Nel circuito riportato in figura l'interruttore è lasciato per lungo tempo nella posizione *a*. Dall'istante t=0 l'interruttore viene spostato definitivamente nella posizione *b*. Determinare le energie iniziale U_{in} e finale U_{fin} immagazzinate in ciascun condensatore. [Dati del problema $C_1=1\mu F$, $C_2=2\mu F$, f=20 V]



3) Un sottile nastro conduttore, rettilineo, molto lungo è percorso uniformemente dalla corrente $I_2=1A$. Un filo rettilineo anch'esso molto lungo, parallelo al nastro, è percorso da una corrente $I_1=1A$. Determinare la forza agente per unità di lunghezza sul filo [c=1m, L=1cm]



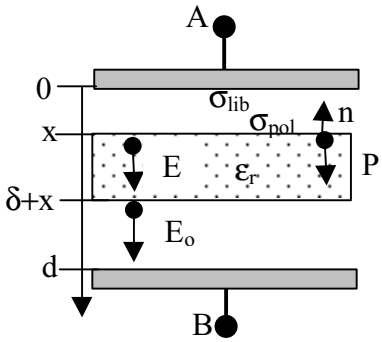
4) Un lungo filo rettilineo è percorso dalla corrente alternata $I_1(t)=I_{1max}\cos(\omega t)$. Una spira quadrata di lato *a,* di resistenza elettrica R ed induttanza L, è disposta come rappresentato in figura ad una distanza minima *b* dal filo. Determinare la corrente $I_2(t)$ indotta nella spira. [Dati del problema: $I_{1max}=1A$, $\omega=10^5$ rad/s, R=30Ω, L=0.4mH, *a*=1cm, *b*=*a*/(e-1), e=2.718282]



5) L'intensità media della radiazione solare è $I_T=1400$ W/m^2 alla distanza del raggio D dell'orbita di rivoluzione terrestre (distanza Sole-Terra $D=150x10^9$m). Ammettendo che tale radiazione venga prodotta omogeneamente sulla superficie sferica del Sole, di raggio $R_S=7x10^8$m, calcolare l'ampiezza massima del campo elettrico sulla superficie del Sole.

UNIVERSITA' DI ROMA "LA SAPIENZA" – FACOLTA' DI INGEGNERIA
ESAME DI FISICA GENERALE II – SOLUZIONI DEL 17/12/2001 – A.A. 2000-2001

1) In assenza del dielettrico il campo interno vale $E_o=\sigma_{lib}/\varepsilon_o$ da cui $\Delta V_o=V_A-V_B=\int_0^d E_0 dx = E_o d$. L'inserzione della lastra non modifica σ_{lib} ma causa la riduzione del campo elettrico nella lastra $E=E_o/\varepsilon_r$ e della differenza di potenziale $\Delta V=\int_0^x E_o dx + \int_x^{x+\delta} E dx + \int_{x+\delta}^d E_o dx = E_o(d-\delta)+E\delta = E_o\left[d-\delta\frac{\varepsilon_r-1}{\varepsilon_r}\right]$

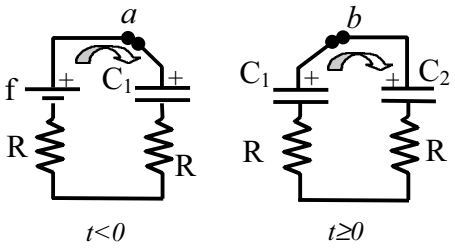


Dal rapporto fra le due differenze di potenziale abbiamo $\frac{\Delta V}{\Delta V_0}=1-\frac{\delta}{d}\frac{\varepsilon_r-1}{\varepsilon_r}$ da cui $\varepsilon_r=\frac{1}{1-\frac{d}{\delta}\left(1-\frac{\Delta V}{\Delta V_0}\right)}=5$.

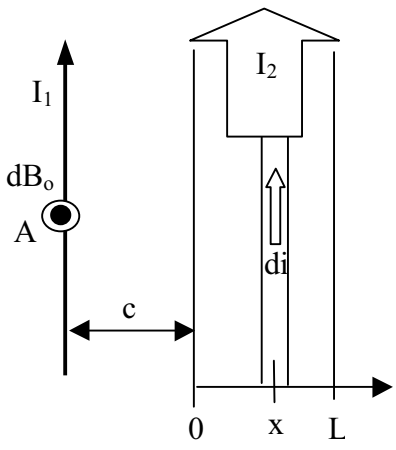
La carica libera sulla piastra A vale $Q = \Delta V_o\ C_o = \Delta V \cdot \frac{\varepsilon_o S}{d}$ $360\pi\cdot\frac{10^{-9}}{36\pi}\frac{10^{-3}}{10^{-4}}=0.1\mu C$, (opposta alla carica libera su B). Nella lastra dielettrica $P=D\frac{\varepsilon_r-1}{\varepsilon_r}$ ove $D=\sigma_{lib}$ da cui si può determinare la carica di polarizzazione sulla superficie superiore della lastra $Q_{pol}=S\sigma_{pol}=S\vec{P}\cdot\vec{n}=-S\sigma_{lib}\frac{\varepsilon_r-1}{\varepsilon_r}=-Q_{lib}\frac{\varepsilon_r-1}{\varepsilon_r}=-0.08\mu C$ (opposta alla carica di polarizzazione sulla faccia inferiore della lastra).

2) Al tempo iniziale t=0 il condensatore C_1 è carico: ai suoi capi c'è una differenza di potenziale ΔV_{C1}^{in} = f = 20V, con energia immagazzinata $U_{C1}^{in}=\frac{1}{2}f^2C_1=2\cdot10^{-4}$ J, e carica elettrica $Q_{C1}^{in}=f\,C_1$, mentre il condensatore C_2 è inizialmente scarico. Nel transitorio il condensatore C_1 carica C_2. All'equilibrio entrambi i condensatori si porteranno alla stessa differenza di potenziale $\Delta V_{C1}^{fin}=\Delta V_{C2}^{fin}=\Delta V^{fin}$, ripartendo la carica iniziale Q_{C1}^{in} opportunamente, a seconda delle loro capacità, essendo $Q_{C1}^{in}=Q_{C1}^{fin}+Q_{C2}^{fin}$, da cui $fC_1=\Delta V_{C1}^{fin}C_1+\Delta V_{C2}^{fin}C_2=\Delta V^{fin}(C_1+C_2)$. La differenza di potenziale finale si abbassa quindi a $\Delta V^{fin}=f\frac{C_1}{C_1+C_2}$, e l'energia immagazzinata finale

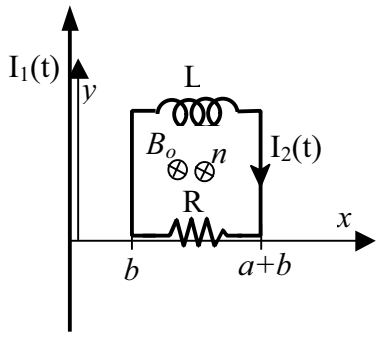
$$\begin{cases} U_{C1}^{fin}=\frac{(\Delta V^{fin})^2C_1}{2}=f^2\frac{C_1^3}{2(C_1+C_2)^2}=2.22\cdot10^{-5}J \\ U_{C2}^{fin}=\frac{(\Delta V^{fin})^2C_2}{2}=f^2\frac{C_1^2C_2}{2(C_1+C_2)^2}=4.44\cdot10^{-5}J \end{cases}$$



3) Il nastro può venire decomposto in fili di spessore infinitesimo dx percorsi dalla corrente infinitesima $di = I_2 \frac{dx}{L}$ che genera nel punto A un contributo dB_o che vale per Biot-Savart $dB_o = \frac{\mu_o di}{2\pi(c+x)}$. Il vettore induzione magnetica si ottiene integrando tutti i contributi prodotti nel punto A dal nastro come segue $B_o = \int dB_o = \frac{\mu_o I_2}{2\pi L}\int_0^L \frac{dx}{x+c} = \frac{\mu_o I_2}{2\pi L}\ln\left(1+\frac{L}{c}\right)$. La forza attrattiva che si esercita per unità di lunghezza sul filo vale $\frac{dF}{dl} = I_1 B_o = \frac{\mu_o I_2 I_1}{2\pi L}\ln\left(1+\frac{L}{c}\right)$=1.990 · 10^{-7} N/m



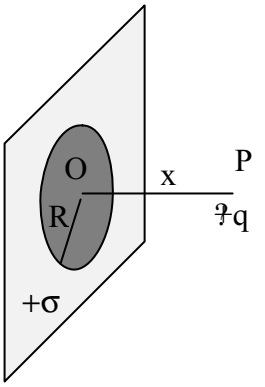
4) Il vettore induzione magnetica generato dal filo rettilineo è per Biot-Savart $B_o(x,t) = \frac{\mu_o I_1(t)}{2\pi x}$. Il flusso concatenato alla spira vale $\Phi = \int_S \vec{B}_o \cdot \hat{n} dS = \frac{\mu_o I_1(t)}{2\pi}\int_0^a dy \int_b^{a+b} \frac{dx}{x} = \frac{\mu_o I_1(t)}{2\pi} a \ln\left(1+\frac{a}{b}\right)$, avendo scelto un verso di percorrenza della spira per cui $\vec{B}_o$ ed $\hat{n}$ sono equiversi. La forza elettromotrice indotta nella spira $f_i = -\frac{d\Phi}{dt} = \frac{\mu_o \omega I_{1\max}}{2\pi} a \ln\left(1+\frac{a}{b}\right) sin(\omega t)$ è alternata e produce una corrente nel circuito RL esprimibile con il metodo dei numeri complessi come $\hat{I}_2 = \frac{\hat{f}_i}{R + j\omega L}$ e nel dominio del tempo $I_2(t) = I_{2\max} sin(\omega t + \varphi)$ dove $\begin{cases} I_{2\max} = \frac{\mu_o \omega I_{1\max}}{2\pi\sqrt{R^2+(\omega L)^2}} a \ln\left(1+\frac{a}{b}\right) = \frac{4\pi 10^{-7}\cdot 10^5 \cdot 1}{2\pi\sqrt{30^2+40^2}} 10^{-2}\cdot \ln(e) = 4\mu A \\ \varphi = -arc\tan(\omega L/R) = -53.1° \end{cases}$.



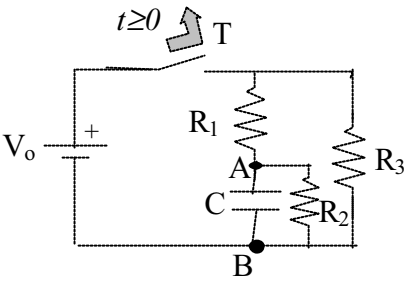
5) Chiamando I_S e I_T le intensità medie osservate rispettivamente sulla superficie del Sole ed in prossimità della Terra, poiché la potenza media P uscente da una qualunque superficie contenente la sorgente è costante, possiamo scrivere $P = 4\pi R_S^2 I_S = 4\pi D^2 I_T$ da cui $I_S = I_T (D/R_S)^2$. Valendo nel vuoto $I = E_{\max}{}^2 / 2Z_0$ possiamo trovare il valore di picco del campo elettrico sulla superficie solare $E_{\max,S} = \sqrt{2Z_o I_S} = \sqrt{2Z_o I_T}\frac{D}{R_S} =$ 2.2·10^5 V/m. (assumendo Z_o=377 Ω).

UNIVERSITA' DI ROMA "LA SAPIENZA" – FACOLTA' DI INGEGNERIA
ESAME DI FISICA GENERALE II
PROVA SCRITTA DEL 24/1/2003 – A.A. 2001-2002

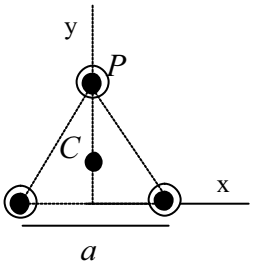
1. In un foglio isolante, piano, indefinito, carico con densità superficiale uniforme $+\sigma$, è praticato un foro circolare di raggio R. Sull'asse del foro in un punto P, distante $x=\sqrt{3}\,R$ dal centro O, è posta una sferetta di carica $+q$. Calcolare il lavoro che occorre spendere per spostare la sferetta, da P ad O. [Dati: $\sigma = 1\mu C/m^2$, $q=1\mu C$, $R = 10\ cm$]



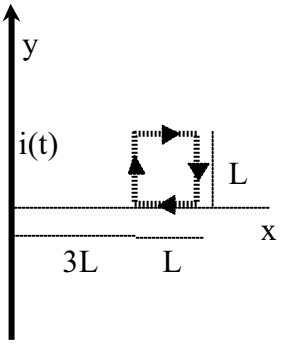
2. Il circuito mostrato in figura è in condizioni stazionarie quando, al tempo $t = 0$, viene aperto l'interruttore T. Si chiede in quale istante t^* la differenza di potenziale ΔV_{AB} ai capi del condensatore è pari a ΔV^*=1.5 V. [Dati: V_o = 8 V; R_1 = 2 kΩ; R_2 =6 kΩ; R_3 = 4 kΩ; C = 1μF]



3. Tre fili conduttori di lunghezza infinita sono tra loro paralleli e disposti ai vertici di un triangolo equilatero di lato a. Essi sono percorsi dalla medesima corrente I, concorde all'asse z (uscente dal piano del foglio). Calcolare il vettore induzione magnetica $\vec{B}_C$ nel punto centrale C del triangolo, e la forza per unità di lunghezza sul filo passante per il punto P. [Dati: $a = 10\ cm$, $I = 2A$]

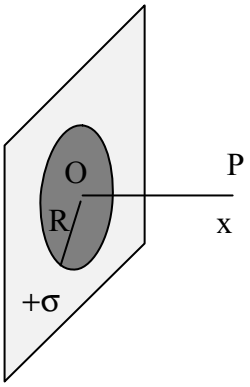


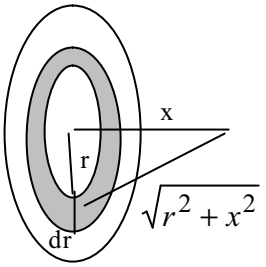
4. Una spira quadrata di lato L giace ad una distanza $d=3L$ da un filo rettilineo indefinito percorso dalla corrente sinusoidale $i(t)=i_{max}\cos(\omega t)$. Nota la resistenza elettrica R della spira, calcolare l'intensità della corrente massima indotta. Si trascuri l'autoinduzione presente nella spira [Dati: $L = 10\ cm$, $i_{max}= 2mA$, $\omega=314 rad/s$, $R=1\Omega$]



5. Una onda elettromagnetica piana polarizzata linearmente lungo l'asse x, di intensità media I, si propaga nel vuoto lungo l'asse z. Calcolare la massima forza elettromotrice indotta su di una sottile asta metallica di lunghezza L disposta lungo l'asse x. [Dati: $L = 10\ cm$, $I=10\mu W/m^2$]

UNIVERSITA' DI ROMA "LA SAPIENZA"
FACOLTA' DI INGEGNERIA - ESAME DI FISICA GENERALE II
SOLUZIONI DELLA PROVA SCRITTA DEL 24/1/2003 – A.A. 2001-2002



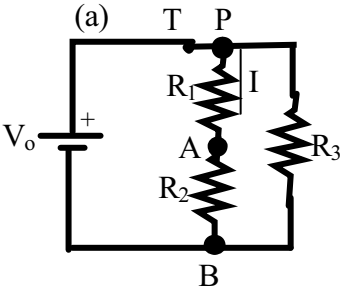


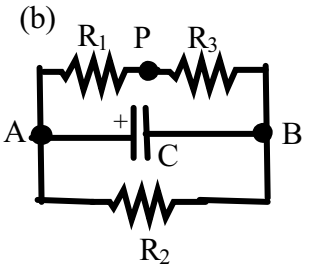
1. La distribuzione di carica indicata in figura può vedersi come la sovrapposizione di due distribuzioni di carica: quella di una lastra piana indefinita carica con densità superficiale σ, e quella di un disco conduttore di raggio R uniformemente carico con densità superficiale $-\sigma$. Conseguentemente la funzione potenziale potrà vedersi come somma dei due potenziali $V_1(x)$ e $V_2(x)$ prodotti dalle due distribuzioni. In particolare il potenziale di uno strato piano vale per x>0, $V_1(x) = -\frac{\sigma}{2\varepsilon_o}x$, mentre il potenziale del disco si può calcolare sommando nel generico punto P tutti i contributi dV_2 di anelli sottili di spessore dr (come in figura) sui quali c'è la carica negativa $dq = -2\pi r\sigma dr$. Il contributo elementare vale $dV_2 = \frac{dq}{4\pi\varepsilon_o\sqrt{r^2+x^2}} = \frac{-\sigma}{2\varepsilon_o}\frac{rdr}{\sqrt{r^2+x^2}}$, da cui

$$V_2(x) = \int dV_2 = \int_0^R \frac{-\sigma}{2\varepsilon_o}\frac{rdr}{\sqrt{r^2+x^2}} = \frac{-\sigma}{2\varepsilon_o}\left|\sqrt{r^2+x^2}\right|_0^R = \frac{\sigma}{2\varepsilon_o}\left(x-\sqrt{R^2+x^2}\right).$$

Il potenziale somma vale quindi $V(x) = V_1(x)+V_2(x) = -\frac{\sigma}{2\varepsilon_o}\sqrt{R^2+x^2}$. Il lavoro che il campo elettrico compie per spostare la carica dal punto P al punto O vale $L_{PO} = q(V_2(x)-V_2(0)) = -\frac{q\sigma}{2\varepsilon_o}\left(\sqrt{R^2+3R^2}-\sqrt{R^2}\right) = -\frac{q\sigma}{2\varepsilon_o}R$.
Esso è negativo e corrisponde ad una azione non spontanea. Il lavoro compiuto esternamente deve essere quindi opposto pari a

$$L_{est} = \frac{q\sigma}{2\varepsilon_o}R = \frac{10^{-6}\cdot 10^{-6}}{2\cdot\frac{1}{36\pi}10^{-9}}10^{-1} = 5.65mJ$$

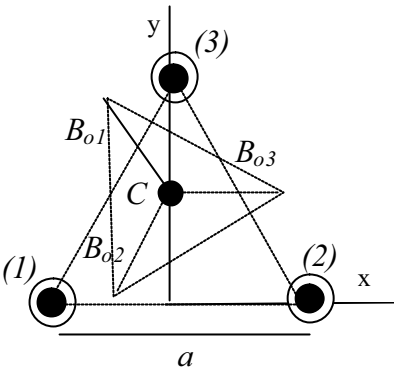


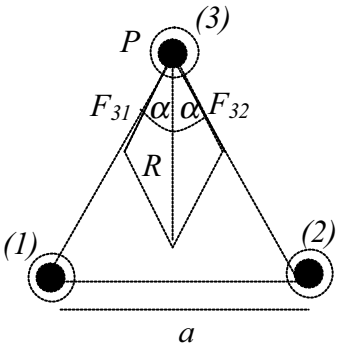


2. Prima dell'apertura dell'interruttore per t<0 il circuito è in condizione stazionaria, il condensatore è carico e si comporta come un circuito aperto (vedi fig.a). La corrente I vale $I = V_o/(R_1+R_2)=1mA$ mentre la differenza di potenziale ai capi del condensatore V_A-V_B vale $V_A - V_B = \Delta V_o = IR_2 = V_o\frac{R_2}{R_1+R_2} = 6V$ che rappresenta la tensione ai capi del condensatore all'apertura (t=0). Dopo l'apertura dell'interruttore la batteria V_o viene scollegata ed il condensatore si scarica sulle 3 resistenze (vedi figura b) che vengono viste dal condensatore come una resistenza equivalente $R_{eq} = (R_1+R_3)//R_2 = \frac{(R_1+R_3)R_2}{R_1+R_2+R_3} = 3k\Omega$. La tensione ai capi del condensatore per t>0 segue la legge $\Delta V_{AB}(t) = \Delta V_o \exp[-t/\tau]$ dove il

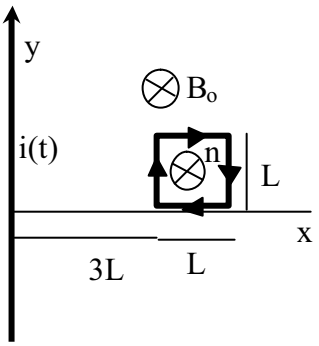
tempo di scarica $\tau = R_{eq}C = 3ms$ ed il tempo t^* si trova dalla relazione $t^* = \tau \ln(\Delta V_o / \Delta V^*) = \tau \ln(4) = 4.16$ ms

3. I vettori induzione magnetica prodotti dai tre fili conduttori nel centro C sono uguali in modulo $B_{o1}=B_{o2}=B_{o3}$ e disposti simmetricamente a formare un triangolo equilatero come in figura. La loro somma vettoriale è quindi nulla da cui la risposta al primo quesito è $\vec{B}_C = 0$. Per calcolare invece la forza per unità di lunghezza agente sul conduttore n°3, bisogna sommare la forza $\vec{F}_{31}$ con cui viene attratto dal conduttore n°1 e quella $\vec{F}_{32}$ con cui viene attratto dal conduttore n°2. Tali forze valgono in modulo: $F_{31} = I_3 B_{o1} L = \frac{\mu_o I_1 I_3}{2\pi a} L$, e $F_{32} = I_3 B_{o2} L = \frac{\mu_o I_1 I_2}{2\pi a} L$. Dal momento che $I_1 = I_2 = I_3 = I$ le due forze sono uguali in modulo e pari a $F = \frac{\mu_o I^2}{2\pi a} L$. La somma vettoriale di tali forze dà luogo ad un vettore risultante $\vec{R}$ diretto in verso opposto all'asse y. Il modulo di R sommando le due proiezioni lungo l'asse y da cui $R = F_{31}\cos\alpha + F_{32}\cos\alpha = 2F\cos(\pi/3) = \sqrt{3}F$. Infine la forza per unità di lunghezza si ottiene $\frac{R}{L} = \frac{\sqrt{3}\mu_o I^2}{2\pi a} = \frac{\sqrt{3}\cdot 4\pi 10^{-7}\cdot 4}{2\pi\cdot 10^{-1}} = 1.386*10^{-5}$ N/m





4. Il campo magnetico nonuniforme generato dal filo rettilineo vale, per la legge di Biot e Savart, $B_o(x,t) = \frac{\mu_o i(t)}{2\pi x}$ con direzione e verso indicati in figura. Dopo aver scelto una opportuna orientazione per la spira quadrata in modo che la normale alla spira $\hat{n}$ abbia la stessa direzione e verso di $\vec{B}_o$, procediamo al calcolo del flusso concatenato con la spira Φ_c:

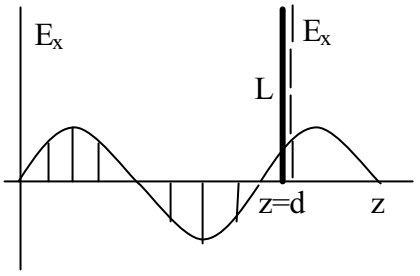


$$\Phi_c = \int \vec{B}_o \cdot \hat{n} dS = \int B_o dS = \frac{\mu_o i(t)}{2\pi}\int_o^L dy \int_{3L}^{4L} \frac{dx}{x} = \frac{\mu_o i(t) L}{2\pi}\ln(4/3).$$

Applicando la legge di Faraday-Neuman-Lenz possiamo calcolare la forza elettromotrice indotta nella spira con l'equazione $f_i = -\frac{d\Phi_c}{dt} = -\frac{\mu_o L}{2\pi}\ln\left(\frac{4}{3}\right)\frac{d}{dt}i(t) = \frac{\mu_o L i_{\max}\omega}{2\pi}\ln\left(\frac{4}{3}\right) sin(\omega t)$

Infine l'intensità di corrente indotta nel circuito si ottiene $i_2(t) = f_i / R$. Tale corrente è alternata ed ha valore massimo $i_{2,\max} = \frac{\mu_o L i_{\max}\omega}{2\pi R}\ln\left(\frac{4}{3}\right) = \frac{4\pi 10^{-7} 10^{-1}\cdot 2\cdot 10^{-3}\cdot 314}{2\pi\cdot 1}$ 0.288=3.61nA.

5. L'intensità istantanea dell'onda piana monocromatica in esame è legata al campo elettrico secondo l'equazione $I(z,t) = E_x^2(z,t)/Z_o = E_o^2 sin^2(\omega t - kz)/Z_o$, che mediata nel tempo dà luogo alla intensità media $I = E_o^2/2Z_o$. Questa formula può essere invertita per trovare l'ampiezza massima di campo elettrico $E_o = \sqrt{2Z_o I}$. La forza elettromotrice sull'antenna rettilinea si ottiene integrando il campo elettrico lungo l'antenna $f = \int \vec{E} \cdot d\vec{l} = \int_0^L E_x dx = E_o L sin(\omega t - kd)$ che ha valore massimo $f_{\max} = E_o L = L\sqrt{2Z_o I} = 0.1\sqrt{2 * 377 * 10^{-5}} = 8.68$ mV.

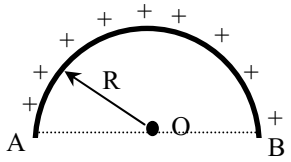


FISICA II

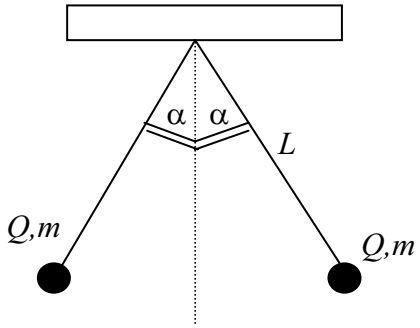
A.A. 2005-2006
Ingegneria Gestionale
1 prova del 5 Maggio 2006

Lo studente descriva il procedimento e la soluzione degli esercizi proposti. Gli elaborati verranno ritirati Martedì 9 Maggio e saranno valutati ai fini del superamento dell'esame finale.

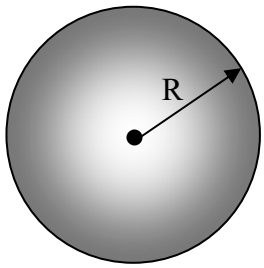
1. Si calcoli il vettore campo elettrico generato nel punto O da una carica Q distribuita uniformemente sulla semicirconferenza di raggio R indicata in figura.



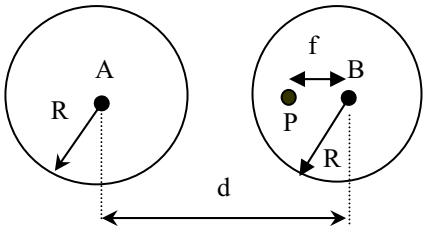
2. Due sfere aventi stessa massa $m=15g$ e stessa carica Q, sono sospese allo stesso punto C mediante due fili inestensibili di lunghezza $L=40cm$. Quando le sfere sono a riposo i due pendoli risultano inclinati dello stesso angolo $\alpha=25°$ rispetto alla verticale (vedi figura). Determinare la carica su ciascuna sferetta



3. Calcolare il campo elettrico $E_o(r)$ di una sfera di raggio R, in cui è disposta una carica con densità non uniforme dipendente dal raggio $\rho(r)=k*r^2$.



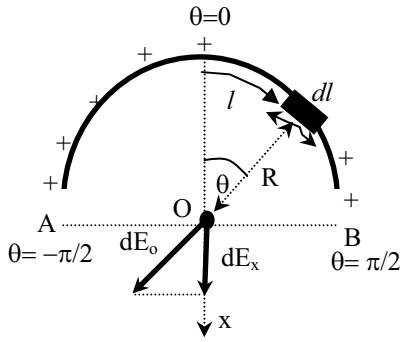
4. Due cilindri paralleli, infinitamente lunghi, di stesso raggio R=20cm sono disposti alla distanza d=60cm. Sapendo che sul primo è disposta una carica positiva distribuita uniformemente con densità volumetrica $\rho_1=10^{-6}C/m^3$ e sapendo che non si registra alcun campo elettrico nel punto P posto a distanza f=6cm dall'asse del secondo cilindro, determinare la densità di carica ρ_2, supposta uniforme, che deve essere disposta nel secondo cilindro.



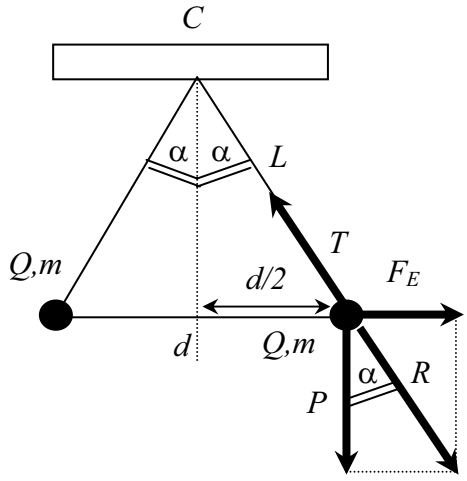
5. Data una sfera di raggio R, il campo elettrostatico interno risulta radiale di intensità $E_o = a\varepsilon_o r^3$, dove r è la distanza dal centro della sfera. Calcolare la carica totale contenuta nella sfera e la relativa densità $\rho(r)$.

FISICA II

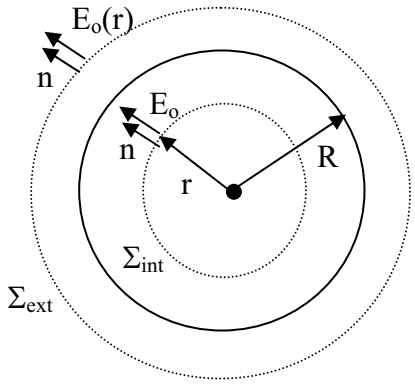
A.A. 2005-2006
Ingegneria Gestionale
Soluzioni della 1ª prova



1. La carica Q è distribuita uniformemente sulla semicirconferenza con densità lineare $\lambda = Q/\widehat{AB} = Q/\pi R$. La carica infinitesima $dq=\lambda dl$ disposta sull'elemento di lunghezza infinitesima dl, genera nel punto O (alla distanza R) un contributo di potenziale $dV_o = dq/(4\pi\varepsilon_o R)$ ed un contributo di campo elettrico $dE_o = dq/(4\pi\varepsilon_o R^2)$ diretto come in figura. Per ottenere i valori totali di potenziale e campo elettrico occorre sommare tutti i contributi infinitesimi integrando lungo tutta la distribuzione di carica. In particolare $V_o = \int dV_o = \int dq/(4\pi\varepsilon_o R) = Q/(4\pi\varepsilon_o R)$ essendo R costante, mentre per il calcolo del campo elettrico è necessario fare la difficile somma vettoriale di tutti i contributi elementari $\vec{E}_o = \int d\vec{E}_o$. Per ragioni di simmetria della distribuzione di carica, il vettore risultante $\vec{E}_o$ è tutto diretto lungo l'asse delle x ($E_o = E_{o,x}$) per cui solo le proiezioni dei contributi lungo l'asse x vanno integrati $dE_{o,x} = dE_o \cos\theta$. Combinando tutte le espressioni si ottiene $E_o = E_{o,x} = \int dE_{o,x} = \int \frac{dq\cos\theta}{4\pi\varepsilon_o R^2}$ dove purtroppo θ è variabile durante l'integrazione. Conviene quindi esprimere dq in funzione dell'angolo θ. Per la relazione fra archi ed angoli, l'ascissa curvilinea vale $l=R\theta$ che differenziata permette di scrivere $dl=R\,d\theta$, e quindi $dq=\lambda dl= \lambda R\ d\theta =(Q/\pi)\ d\theta$. che sostituito nell'espressione del campo permette di ottenere $E_o = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \left(\frac{Q}{\pi}\right)\frac{\cos\theta}{4\pi\varepsilon_o R^2} d\theta = \frac{Q}{4\pi^2\varepsilon_o R^2}\left[\sin\theta\right]_{-\pi/2}^{\pi/2} = \frac{Q}{2\pi^2\varepsilon_o R^2}$



2. Su ciascuna sferetta agiscono 3 forze: la forza peso $P=mg$, la forza elettrica repulsiva $F_E = \frac{Q^2}{4\pi\varepsilon_o d^2} = \frac{Q^2}{16\pi\varepsilon_o L^2 \sin^2\alpha}$ e la tensione del filo T. All'equilibrio la somma vettoriale delle tre forze deve annullarsi $\vec{P} + \vec{F}_E + \vec{T} = 0$ e quindi la risultante parziale di peso e forza elettrica deve essere opposta alla tensione del filo $\vec{R} = \vec{P} + \vec{F}_E = -\vec{T}$ ossia anch'essa inclinata di un angolo α rispetto alla verticale. Questo avviene solo se $F_E = Ptg\alpha$ da cui $Q = \sqrt{4(4\pi\varepsilon_o)L^2 mg \sin^3\alpha/\cos\alpha} = 0.93\mu C$

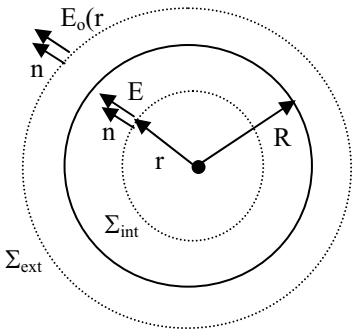


3. Per la simmetria del problema il campo elettrico $E_o(r)$ è radiale e può essere calcolato applicando la legge di Gauss. Per i punti interni che si trovano sulla superficie Σ_{int} di raggio $r<R$, il flusso uscente da Σ_{int} vale $\Phi_{\Sigma\,int} = \int_{\Sigma\,int} \vec{E}_o \bullet \hat{n} dS = 4\pi r^2 E_o(r)$ che per Gauss deve valere Q_{int}/ε_o, dove il valore della carica interna alla superficie Σ_{int} vale

$$Q_{int} = \int \rho dV = \int_0^r \rho(4\pi r^2 dr) = 4\pi k \int_0^r r^4 dr = \frac{4\pi}{5} k r^5$$

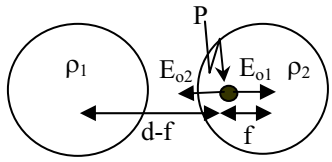
Combinando i due termini della legge di Gauss si ricava il campo interno $E_{\text{int}} = kr^3/5\varepsilon_0$. Per i punti esterni che si trovano sulla superficie Σ_{ext} di raggio $r>R$, il flusso uscente da Σ_{ext} vale $\Phi_{\Sigma ext} = \int_{\Sigma ext} \vec{E}_o \bullet \hat{n} dS = 4\pi r^2 E_o(r)$ che per Gauss deve valere ancora Q_{int}/ε_o. Ma questa volta la carica contenuta è tutta la carica $Q = \int \rho dV = \int_0^R \rho(4\pi r^2 dr) = 4\pi k \int_0^R r^4 dr = \frac{4\pi}{5} kR^5$. Combinando i due termini della legge di Gauss si ricava il campo esterno $E_{ext} = kR^5/5\varepsilon_0 r^2$.

4. Come primo passo conviene determinare, applicando la legge di Gauss, il campo elettrico generato da un cilindro infinitamente lungo uniformemente carico con densità ρ_1. Il flusso uscente dalla superficie cilindrica generica Σ di raggio r e di altezza L vale $\Phi_\Sigma = \int_\Sigma \vec{E}_o \cdot \hat{n} dS = 2\pi r L E_o(r) = Q_{\text{int}}/\varepsilon_o$ dove



$$Q_{\text{int}} = \begin{cases} \rho_1 \pi r^2 L & r < R \\ \rho_1 \pi R^2 L & r \geq R \end{cases} \text{ da cui il campo elettrico } \begin{cases} E_{o\,\text{int}} = \rho_1 r / 2\varepsilon_o & r < R \\ E_{oext} = \rho_1 R^2 / 2\varepsilon_o r & r \geq R \end{cases}$$

Le stesse formule possono essere applicate per la seconda distribuzione ρ_2.



La condizione di annullamento del campo elettrico nel punto P implica $E_{o1}(d-f)=E_{o2}(f)$ ossia $\frac{\rho_1 R^2}{2\varepsilon_o (d-f)} = \frac{\rho_2 f}{2\varepsilon_o}$ da cui $\rho_2 = \rho_1 \frac{R^2}{f(d-f)} = 1.23\ \mu\text{C/m}^3$

5. Il calcolo di ρ si può effettuare a partire dalla 1ª equazione di Maxwell $\nabla \bullet \vec{E}_o = \rho/\varepsilon_o$ che invertita dà luogo a $\rho = \varepsilon_o \nabla \bullet \vec{E}_o = \varepsilon_o \left(\frac{\partial E_{ox}}{\partial x} + \frac{\partial E_{oy}}{\partial y} + \frac{\partial E_{oz}}{\partial z} \right)$ dove $\begin{cases} E_{ox} = a\varepsilon_o x r^2 \\ E_{oy} = a\varepsilon_o y r^2 \\ E_{oz} = a\varepsilon_o z r^2 \end{cases}$. Il primo termine della divergenza vale $\frac{\partial E_{ox}}{\partial x} = \frac{\partial (a\varepsilon_o x r^2)}{\partial x} = a\varepsilon_o \frac{\partial (x r^2)}{\partial x} = a\varepsilon_o \left[\frac{\partial x}{\partial x} r^2 + 2xr \frac{\partial r}{\partial x} \right]$ dove ovviamente $\frac{\partial x}{\partial x} = 1$, mentre il valore $\frac{\partial r}{\partial x} = \frac{x}{r}$ si ricava differenziando l'espressione del raggio $r^2 = x^2 + y^2 + z^2$, tenendo costanti le variabili y,z così da ottenere $2r\partial r = 2x\partial x$ e quindi $\frac{\partial r}{\partial x} = \frac{x}{r}$.

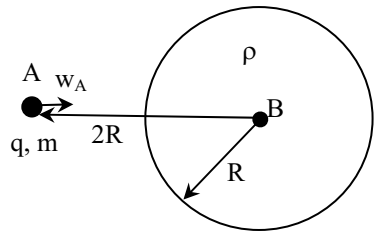
Il primo termine della divergenza si scrive quindi $\frac{\partial E_{ox}}{\partial x} = a\varepsilon_o [r^2 + 2x^2]$ mentre gli altri valgono $\frac{\partial E_{oy}}{\partial y} = a\varepsilon_o [r^2 + 2y^2]$, e $\frac{\partial E_{oz}}{\partial z} = a\varepsilon_o [r^2 + 2z^2]$. Da ciò possiamo calcolare la densità di carica $\rho = \varepsilon_o \left(\frac{\partial E_{ox}}{\partial x} + \frac{\partial E_{oy}}{\partial y} + \frac{\partial E_{oz}}{\partial z} \right) = a\varepsilon_o^2 (3r^2 + 2(x^2 + y^2 + z^2)) = 5a\varepsilon_o^2 r^2$. Questa densità di carica integrata nella sfera di raggio R (con il sistema dei gusci sferici di volume $d\tau = 4\pi r^2 dr$) dà luogo alla carica interna alla sfera $Q = \int \rho d\tau = \int_0^R \rho(4\pi r^2 dr) = 20a\pi\varepsilon_o^2 \int_0^R r^4 dr = 4a\pi\varepsilon_o^2 R^5$.

FISICA II

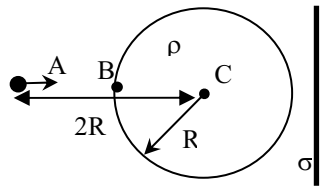
A.A. 2005-2006
Ingegneria Gestionale
3° prova del 5 Maggio 2006

Lo studente descriva il procedimento e la soluzione degli esercizi proposti. Gli elaborati verranno ritirati Venerdì 25 Maggio e saranno valutati ai fini del superamento dell'esame finale.

1. Data una sfera di raggio R=1m uniformemente carica con densità volumetrica $\rho=100\mu C/m^3$, determinate la velocità minima w_A con cui deve essere lanciata una particella di massa m=10g e di carica $q=1\mu C$ distante 2R dal centro della sfera (punto A) affinché possa raggiungere il centro della sfera (punto B).



2. Una carica puntiforme positiva deve essere lanciata contro una sfera di raggio R=10cm, carica con densità volumetrica uniforme $\rho=300\mu C/m^3$. Il lancio viene inizialmente pensato in modo che la carica parta dal punto A (distante 2R dal centro), penetri la sfera fino a raggiungere il centro C con velocità nulla. In un secondo momento si decide di porre uno schermo piano uniformemente carico con densità σ per evitare che la carica puntiforme penetri nella sfera. A parità di condizioni iniziali, quale dovrà essere il valore di σ minimo affinché essa possa al più toccare la superficie della sfera (punto B) ma non penetrarla?



3. Una sfera cava di raggio esterno R_2=1m e raggio interno R_1=0.5 m è uniformemente carica con densità volumetrica $\rho=10\mu C/m^3$ nella regione interna individuata dalla condizione $R_1 \le r \le R_2$. Determinare il lavoro necessario per trasportare una carica $q=1\mu C$ dall'infinito nel centro della sfera cava.

4. Date tre cariche ai vertici di un triangolo equilatero di lato *l*, calcolare il campo elettrico ed il potenziale al centro del triangolo. Dare il valore numerico per *l*=5cm, $q_1 = q_2 = -q_3 = 1\mu C$. Calcolare l'energia configurazionale del sistema.

5. Calcolare l'energia che si deve spendere per costruire un sistema di carica *Q* distribuito uniformemente all'interno di una sfera isolante di raggio *R*.

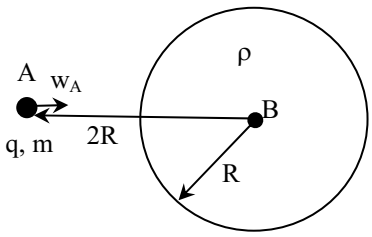
FISICA II

A.A. 2005-2006
Ingegneria Gestionale
Soluzioni 3° prova

1. Applicando la legge di Gauss, il flusso del campo elettrico uscente da una superficie sferica centrata in B e di raggio generico *r* assume l'espressione $\Phi(\vec{E}_o) = \int_\Sigma \vec{E}_o \cdot \hat{n}_{ext} dS = 4\pi r^2 E_o = Q_{\text{int}}/\varepsilon_o$

dove $Q_{int} = \begin{cases} r < R & = \rho(4\pi r^3/3) \\ r > R & = \rho(4\pi R^3/3) \end{cases}$ da cui si ottiene il campo elettrico $\begin{cases} r < R & E_o = \rho r/3\varepsilon_o \\ r > R & E_o = \rho R^3/3\varepsilon_o r^2 \end{cases}$

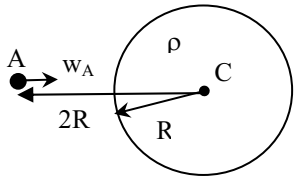
e, dopo integrazione, il potenziale $\begin{cases} r < R & V_o(r) = \int_r^R E_o dr + V_o(R) = \dfrac{\rho}{6\varepsilon_o}(3R^2 - r^2) \\ r > R & V_o(r) = \int_r^\infty E_o dr = \dfrac{\rho R^3}{3\varepsilon_o r} \end{cases}$ ove si è assunto nullo il potenziale all'infinito. La differenza di potenziale fra i punti B ed A assume quindi il valore $\Delta V_{BA} = V_o(0) - V_o(2R) = \dfrac{\rho R^2}{3\varepsilon_o} > 0$ valore che conferma la necessità di lanciare q alla velocità w_A



Dalla conservazione dell'energia meccanica nei punti A,B quindi $qV_A + T_A = qV_B + T_B$. In questo caso la velocità iniziale minima w_A corrisponde al caso ideale di una velocità finale nulla w_B=0, e quindi T_B=0.

Da questa condizione $w_A = \sqrt{2q\Delta V_{BA}/m} = \sqrt{2q\rho R^2/3m\varepsilon_o}$ =27.5 m/s.

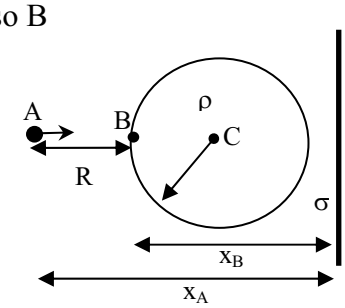
2. La prima parte del problema si imposta, come nel problema precedente, imponendo la conservazione dell'energia durante il tragitto da A verso C



$$T_A + qV_A^{sfera} = qV_C^{sfera}$$

dove T_A è l'energia cinetica della particella nel punto A, mentre V^{sfera} è il potenziale elettrostatico generato dalla distribuzione sferica. Nella seconda parte del problema compare una seconda distribuzione di carica (strato piano) che genera un potenziale elettrostatico V^{piano} da aggiungere al precedente. Imponendo la conservazione dell'energia durante il tragitto da A verso B

$$T_A + qV_A^{sfera} + qV_A^{piano} = qV_B^{sfera} + qV_B^{piano}$$



Combinando le espressioni ed eliminando i termini comuni T_A, V_A^{sfera} si ottiene

$V_B^{piano} - V_A^{piano} = V_C^{sfera} - V_B^{sfera}$ ossia $\int_{x_B}^{x_A} \dfrac{\sigma}{2\varepsilon_o} dx = \int_0^R \dfrac{\rho}{3\varepsilon_o} r dr$

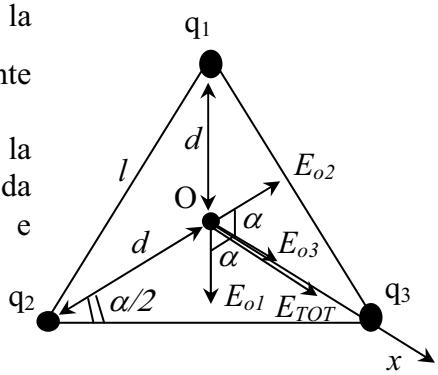
da cui $\dfrac{\sigma}{2\varepsilon_o} R = \dfrac{\rho}{3\varepsilon_o} \dfrac{R^2}{2}$ e quindi $\sigma = \rho R/3$ = **10μC/m²**

3. Applicando la legge di Gauss, il flusso del campo elettrico uscente da una superficie sferica di raggio generico *r* assume l'espressione $\Phi(\vec{E}_o) = 4\pi r^2 E_o$. Il campo elettrico $E_o(r)$ ed il potenziale $V_o(r)$ assumono le espressioni

$$\begin{cases} r < R_1 & E_o = 0 \\ R_1 < r < R_2 & E_o = \dfrac{\rho}{3\varepsilon_o}\left(r - \dfrac{R_1^3}{r^2}\right) \\ r > R_2 & E_o = \dfrac{\rho}{3\varepsilon_o}\left(\dfrac{R_2^3 - R_1^3}{r^2}\right) \end{cases} \quad \text{da cui} \quad \begin{cases} r < R_1 & V_o(r) = V_o(R_1) = \dfrac{\rho}{2\varepsilon_0}\left(R_2^2 - R_1^2\right) \\ R_1 < r < R_2 & V_o(r) = \displaystyle\int_r^{R_2} E_o dr + V_o(R_2) = \dfrac{\rho}{6\varepsilon_o}\left[3R_2^2 - r^2 - \dfrac{2R_1^3}{r}\right] \\ r > R_2 & V_o(r) = \displaystyle\int_r^{\infty} E_o dr = \dfrac{\rho}{3\varepsilon_o}\left(\dfrac{R_2^2 - R_1^2}{r}\right) \end{cases}$$

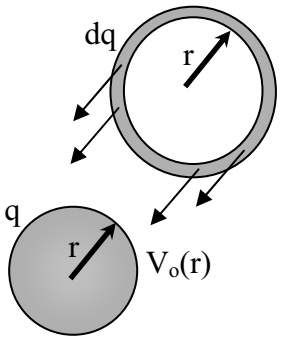
Il lavoro esterno per spostare la carica q nel centro vale $L_{ext} = q[V_o(0) - V_o(\infty)] = \dfrac{q\rho}{2\varepsilon_o}\left(R_2^2 - R_1^2\right) = 0.42$ J

4. Il campo elettrico totale nel punto *O* è dato dalla somma vettoriale dei tre campi elettrici generati da $q_1=q$, $q_2=q$, $q_3=-q$. Tutti e tre i vettori hanno la stessa intensità $E_{o1} = E_{o2} = E_{o3} = \dfrac{q}{4\pi\varepsilon_o d^2}$ perché il punto *O* è equidistante dalle tre cariche. Per la simmetria del sistema il campo totale E_{TOT} ha la direzione dell'asse *x*, e si ottiene proiettando i tre vettori lungo l'asse *x:* da ciò $E_{TOT} = E_{o1}\cos\alpha + E_{o2}\cos\alpha + E_{o3}$ dove $\alpha=\pi/3$ e per cui $\cos\alpha=1/2$ e $d = l/\sqrt{3}$. Da cui $E_{TOT} = \dfrac{2q}{4\pi\varepsilon_o d^2} = \dfrac{6q}{4\pi\varepsilon_o l^2} =$



$= \dfrac{6\cdot 10^{-6}}{5^2\cdot 10^{-4}} 9\cdot 10^9\, V/m = 2.16\cdot 10^7\, V/m$. Il potenziale totale si ottiene dalla somma algebrica dei tre potenziali $V(O) = \dfrac{q+q-q}{4\pi\varepsilon_o d} = \dfrac{q\sqrt{3}}{4\pi\varepsilon_o l} = \dfrac{9\cdot 10^9\cdot 10^{-6}\sqrt{3}}{5\cdot 10^{-2}} V = 3{,}12\cdot 10^5 V$. Per l'energia configurazionale $U = \dfrac{q_1 q_2}{4\pi\varepsilon_o l} + \dfrac{q_1 q_3}{4\pi\varepsilon_o l} + \dfrac{q_2 q_3}{4\pi\varepsilon_o l} = \dfrac{q^2 - q^2 - q^2}{4\pi\varepsilon_o l} = -\dfrac{9\cdot 10^9\cdot 10^{-12}}{5\cdot 10^{-2}} = -0.18 J$

5. Per calcolare l'energia configurazionale del sistema immaginiamo di costruire una sfera uniformemente carica con un raggio *r* via via crescente. Il lavoro dL^{ext} che dobbiamo compiere contro le forze del campo per accrescere il raggio da *r* a *r+dr* si calcola pensando di portare dall'infinito un guscio sferico di carica $dq = \rho dV = \rho(4\pi r^2 dr)$ e di depositarlo sulla superficie della sfera che già si trova al potenziale $V_o(r) = q\Big/4\pi\varepsilon_o r = \rho\left(\dfrac{4}{3}\pi r^3\right)\Big/4\pi\varepsilon_o r = \rho r^2/3\varepsilon_0$ dove *q* è la carica interna a tale sfera. Tale lavoro esterno contrario al lavoro elettrostatico andrà ad accrescere l'energia configurazionale del sistema della quantità $dU=dL^{ext}=-dL^{el}$ $=dqV_o(r)= \rho(4\pi r^2 dr)\rho r^2/3\varepsilon_0 = 4\pi\rho^2 r^4 dr/3\varepsilon_o$.



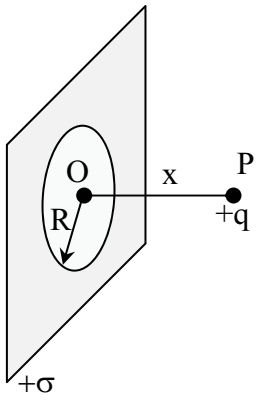
Integrando tutti questi contributi energetici accrescendo il raggio della sfera da *r=0* fino a raggiungere *r=R* (le dimensioni finali della sfera) si ottiene il valore finale dell'energia configurazionale $U = \displaystyle\int_0^R 4\pi\rho^2 r^4 dr/3\varepsilon_o = \dfrac{4\pi\rho^2 R^5}{15\varepsilon_o}$ o equivalentemente in termini della carica totale $Q_{tot} = \rho\dfrac{4}{3}\pi R^3$, si ottiene $U_o = \dfrac{3}{5}\cdot\dfrac{Q_{tot}^2}{4\pi\varepsilon_o R}$.

FISICA II

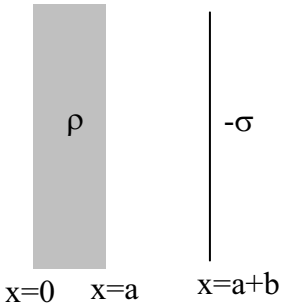
A.A. 2005-2006
Ingegneria Gestionale
2° prova del 12 Maggio 2006

Lo studente descriva il procedimento e la soluzione degli esercizi proposti. Gli elaborati verranno ritirati Mercoledì 17 Maggio e saranno valutati ai fini del superamento dell'esame finale.

1. In un foglio isolante, piano, indefinito, carico con densità superficiale uniforme +σ, è praticato un foro circolare di raggio *R*. Sull'asse del foro in un punto *P,* distante $x=\sqrt{3}\,R$ dal centro *O,* è posta una sferetta di carica +*q*. Calcolare il lavoro che occorre spendere per spostare la sferetta, da *P* ad *O*. [Dati: $\sigma = 100\mu C/m^2$, $q=2\mu C$, $R = 20\ cm$]



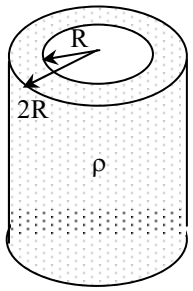
2. Una carica elettrica è distribuita, con densità volumetrica uniforme ρ, nella regione di spazio limitata dai piani x=0 e x=a. Una carica elettrica negativa è invece distribuita con densità superficiale uniforme -σ, sul piano x=a+b. Si calcoli la relazione fra σ e ρ affinché il campo elettrico sia nullo nelle regioni x<0 ed x>a+b e si calcoli l'andamento del campo elettrico e del potenziale in tutto lo spazio.



3. Descrivere la traiettoria di una carica puntiforme di massa *m=1g* e carica $q=-1\mu C$ che viaggia con velocità iniziale $v_o=1cm/s$ parallela ad uno strato piano con densità superficiale costante $\sigma = 100\mu C/m^2$. Se la carica inizialmente si trova ad una altezza *h=2cm*, dopo quanto tempo, a quale velocità e in quale posizione impatta sullo strato piano?

4. Due elettroni inizialmente a distanza $d_o=2cm$ prendono a muoversi sotto l'azione della mutua repulsione. Calcolare l'espressione della velocità quando la distanza tra loro diviene *d=10cm.* Calcolare inoltre la velocità limite di fuga verso l'infinito. *(*$e=1.6\ 10^{-19}\ C$, $m_e=9\ 10^{-31}\ kg$*)*

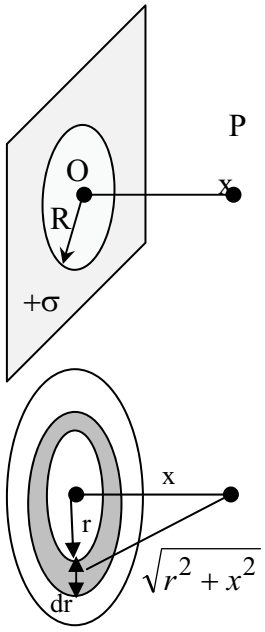
5. Determinate il campo elettrico $E_o(r)$ ed il potenziale elettrico $V_o(r)$, generato dal cilindro cavo infinitamente lungo riportato in figura. Si assuma che la carica sia distribuita con densità ρ uniforme solo nella regione di spazio compresa tra il cilindro interno di raggio R e quello esterno di raggio 2R. Calcolare infine la velocità minima *w* che deve essere fornita ad una carica positiva *q* di massa *m* per poter spostarsi dal cilindro esterno al cilindro interno.



FISICA

A.A. 2003-2004
Ingegneria Gestionale
Soluzioni della 8ª prova

1. La distribuzione di carica indicata in figura può vedersi come la sovrapposizione di due distribuzioni di carica: quella di una lastra piana indefinita carica con densità superficiale σ, e quella di un disco conduttore di raggio R uniformemente carico con densità superficiale $-\sigma$. Conseguentemente la funzione potenziale potrà vedersi come somma dei due potenziali $V_1(x)$ e $V_2(x)$ prodotti dalle due distribuzioni. In particolare il potenziale di uno strato piano vale per x>0, $V_1(x) = -\frac{\sigma}{2\varepsilon_o}x$, mentre il potenziale del disco si può calcolare sommando nel generico punto P tutti i contributi dV_2 di anelli sottili di spessore dr (come in figura) sui quali c'è la carica negativa $dq = -2\pi r\sigma dr$.



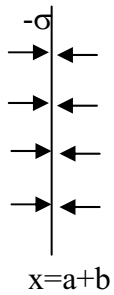
Il contributo elementare vale $dV_2 = \frac{dq}{4\pi\varepsilon_o\sqrt{r^2+x^2}} = \frac{-\sigma}{2\varepsilon_o}\frac{rdr}{\sqrt{r^2+x^2}}$, da cui

$$V_2(x) = \int dV_2 = \int_0^R \frac{-\sigma}{2\varepsilon_o}\frac{rdr}{\sqrt{r^2+x^2}} = \frac{-\sigma}{2\varepsilon_o}\left|\sqrt{r^2+x^2}\right|_0^R = \frac{\sigma}{2\varepsilon_o}\left(x-\sqrt{R^2+x^2}\right).$$

Il potenziale somma vale quindi $V(x) = V_1(x) + V_2(x) = -\frac{\sigma}{2\varepsilon_o}\sqrt{R^2+x^2}$.

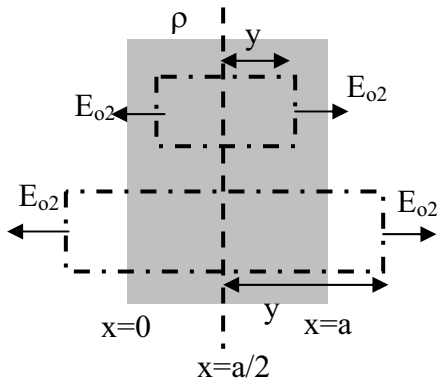
Il lavoro che il campo elettrico compie per spostare la carica dal punto P al punto O vale $L_{PO} = q(V_2(x) - V_2(0)) = -\frac{q\sigma}{2\varepsilon_o}\left(\sqrt{R^2+3R^2} - \sqrt{R^2}\right) = -\frac{q\sigma}{2\varepsilon_o}R$. Esso è negativo e corrisponde ad una azione non spontanea. Il lavoro compiuto esternamente deve essere quindi opposto pari a $L_{est} = \frac{q\sigma}{2\varepsilon_o}R = 2.26$ J.

2. Il problema può essere risolto applicando il principio di sovrapposizione degli effetti alle due distribuzioni di carica. Lo strato piano carico negativamente dà luogo ad un campo elettrico E_{o1} simmetrico rispetto al piano x=a+b che proiettato lungo l'asse x vale $\begin{cases} x < a+b & E_{o1} = \sigma/\varepsilon_o \\ x > a+b & E_{o1} = -\sigma/\varepsilon_o \end{cases}$

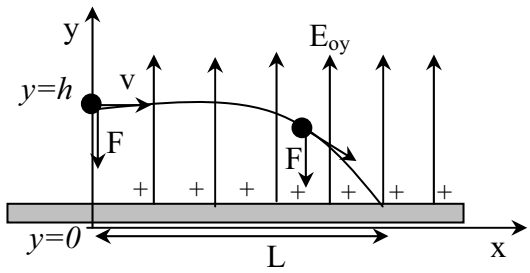


La carica positiva distribuita nel volume dà anch'essa un campo elettrico E_{o2} simmetrico rispetto alla mediana in x=a/2. Il valore dell'intensità viene calcolato applicando la legge di Gauss alla superficie laterale di un parallelepipedo, simmetrico rispetto alla mediana, di sezione S ed altezza 2y. Il flusso di campo elettrico uscente vale sempre $\Phi(E_{o2}) = 2SE_{o2}$. Ovviamente quando y<a/2 la carica interna è $Q_{\text{int}} = 2yS\rho$, mentre quando y>a/2 la carica interna è $Q_{\text{int}} = aS\rho$. Si ottiene il campo elettrico interno ed esterno $\begin{cases} \text{int} & |E_{o2}| = \rho|x-a/2|/\varepsilon_o \\ ext & |E_{o2}| = a\rho/2\varepsilon_o \end{cases}$ Sovrapponendo i campi E_{o1} ed E_{o2}, il campo complessivo per x<0 e per x>a+b si annulla solo quando $\sigma = a\rho$. Il campo elettrico complessivo nelle varie regioni

$$\begin{cases} x<0 & E_o=0 \\ 0<x<a/2 & E_o=\sigma x/a\varepsilon_o \\ a/2<x<a & E_o=\sigma x/a\varepsilon_o \\ a<x<a+b & E_o=\sigma/\varepsilon_o \\ x>a+b & E_o=0 \end{cases}$$

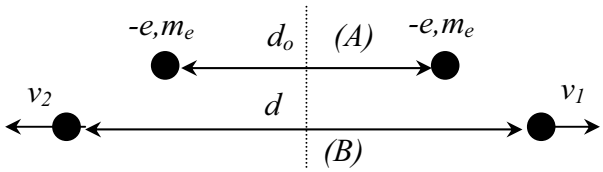


3. Il campo elettrico generato dallo strato piano è $E_o=\sigma/2\varepsilon_o$ uniforme, diretto lungo l'asse delle *y*. La forza elettrica subita dalla carica negativa –*q* vale $F_y=ma_y=-qE_{oy}=-q\sigma/2\varepsilon_o$ ed è diretta nel verso opposto dell'asse *y*. Tale forza elettrica essendo l'unica forza presente (la forza peso è trascurata) causa il moto parabolico della carica nel piano *xy*. Calcolando l'accelerazione secondo *x* ed *y* si ottiene

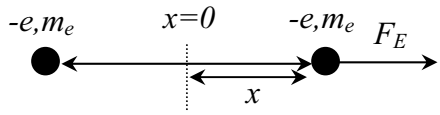


$\begin{cases} a_y=-q\sigma/2m\varepsilon_o \\ a_x=0 \end{cases}$ che corrisponde ad un moto rettilineo lungo l'asse *x*, e ad uno uniformemente accelerato lungo y. Integrando si ottiene $\begin{cases} v_y=-(q\sigma/2m\varepsilon_o)\cdot t \\ v_x=v_o \end{cases}$ e $\begin{cases} y(t)=h-(q\sigma/4m\varepsilon_o)\cdot t^2 \\ x(t)=v_o t \end{cases}$. Il tempo di volo della carica si ricava imponendo $y(t^*)=0$ da cui $t=\sqrt{4hm\varepsilon_o/q\sigma}=2.66m\sec$, la posizione dell'impatto $L=x(t^*)=v_o t=26.6\mu m$, e la velocità $v_y=-\sqrt{\frac{q\sigma h}{m\varepsilon_o}}=-15.04m/s$, per cui la velocità complessiva $v=\sqrt{v_o^2+\frac{q\sigma h}{m\varepsilon_o}}\cong 15{,}04m/s$ (la velocità di impatto è praticamente verticale)

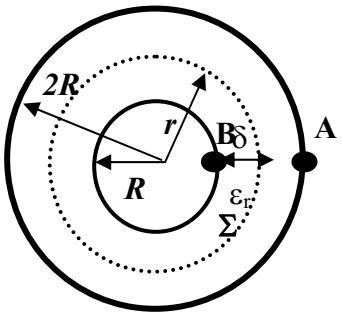
4 Quando i due elettroni sono inizialmente fermi a distanza $d_o=2cm$ (stato *A*) l'energia potenziale elettrostatica del sistema (energia configurazionale) vale $U_A^{el}=\frac{(-e)(-e)}{4\pi\varepsilon_o d_o}$. Quando cominciano ad allontanarsi l'energia elettrostatica diminuisce al valore finale (stato *B*) $U_B^{el}=\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_o d}$ (ciò corrisponde ad una azione spontanea tra le due cariche). Le due cariche hanno trasformato l'energia potenziale mancante nell'energia cinetica del sistema $T_B=\frac{1}{2}m_e v_1^2+\frac{1}{2}m_e v_2^2=m_e v_1^2$ visto che per ragioni di simmetria le velocità di fuga sono esattamente opposte. Dalla conservazione dell'energia meccanica $U_A^{el}=U_B^{el}+T_B$ si può ricavare l'energia cinetica $T_B=U_A^{el}-U_B^{el}=\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_o}\left(\frac{1}{d_o}-\frac{1}{d}\right)=\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_o}\frac{d-d_o}{dd_o}$, e la velocità di



fuga $v_1 = \sqrt{\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_o m_e}\frac{d-d_o}{dd_o}} = 101\ m/s$. Questa velocità cresce mano mano che le due cariche si allontanando sino a raggiungere il valore limite $v_{\lim} = \sqrt{\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_o m_e d_o}} = 113\ m/s$ quando $d \to \infty$.



Allo stesso risultato si deve pervenire con lo studio delle forze. Durante il moto quando le due cariche sono distanti *2x* (il centro di massa rimane in *x=0*) la forza di repulsione coulombiana vale $F_E = \frac{(-e)(-e)}{4\pi\varepsilon_o (2x)^2} = ma_x = m\frac{dv_x}{dt}$. La velocità di fuga $v_x(t)$ può pensarsi funzione del tempo per il tramite della posizione $v_x[x(t)]$. Allora il secondo membro dell'equazione si scrive come $m\frac{dv_x}{dt} = m\frac{dv_x}{dx}\frac{dx}{dt} = m\frac{dv_x}{dx}v_x$ e l'equazione differenziale può essere separata nelle due variabili x, v_x, così da poter scrivere $\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_o (2x)^2}dx = mv_x dv_x$, che integrata membro a membro $\int_{d_o/2}^{d/2} \frac{e^2}{16\pi\varepsilon_o x^2}dx = \int_0^{v_1} mv_x dv_x$ dà luogo all'espressione $\frac{e^2}{16\pi\varepsilon_o}\left(\frac{2}{d_o} - \frac{2}{d}\right) = \frac{1}{2}mv_1^2$ con cui si ritrovano i valori precedenti.



5. Il campo elettrico $E_o(r)$ viene calcolato applicando la legge di Gauss ad alla superficie cilindrica Σ di raggio r e di altezza L. Il flusso uscente dalla superficie laterale è $\Phi_\Sigma = \int_\Sigma \vec{E}_o \cdot \hat{n}dS = 2\pi rLE_o(r) = Q_{int}/\varepsilon_o$

dove Q_{int} assume le diverse espressioni

$$\begin{cases} r < R & Q_{int} = 0 \\ R < r < 2R & Q_{int} = \int \rho dV = \rho\pi(r^2 - R^2)L \\ r > 2R & Q_{int} = \int \rho dV = \rho\pi(4R^2 - R^2)L \end{cases}$$

da cui si desumono campo elettrico e potenziale

$$E_o(r) \begin{cases} r < R & E_o = 0 \\ R < r < 2R & E_o = \rho(r - R^2/r)/2\varepsilon_o \\ r > 2R & E_o = 3\rho R^2/2\varepsilon_o r \end{cases}, \quad \begin{cases} r < R & V_o(r) = V_o(R) = \frac{\rho R^2}{4\varepsilon_o}[3 - 2\ln(2)] \\ R < r < 2R & V_o = \int_r^{2R} E_o dr = \frac{\rho}{2\varepsilon_o}\left[\frac{4R^2 - r^2}{2} + R^2 \ln\left(\frac{r}{2R}\right)\right] \\ r > 2R & V_o = \int_r^{2R} E_o dr = -\frac{3\rho R^2}{2\varepsilon_o}\ln\left(\frac{r}{2R}\right) \end{cases}$$

ove si è assunto nullo il potenziale sulla superficie cilindrica esterna (r=2R). Dalla conservazione dell'energia meccanica nei punti A, B quindi $qV_A + T_A = qV_B + T_B$. In questo caso la velocità iniziale minima w_A corrisponde al caso ideale di una velocità finale nulla w_B=0, e quindi T_B=0. Da questa condizione $w_A = \sqrt{2q\Delta V_{BA}/m} = \sqrt{2q[V(R) - V(2R)]/m} = \sqrt{q\rho R^2[3 - 2\ln 2]/2m\varepsilon_o}$

FISICA

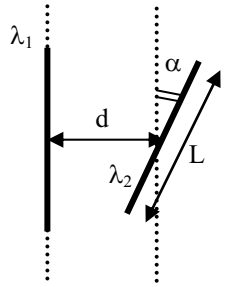
A.A. 2004-2005
Ingegneria Gestionale
9° prova del 19 Maggio 2005

Lo studente descriva il procedimento e la soluzione degli esercizi proposti. Gli elaborati verranno ritirati Martedì 24 Maggio e saranno valutati ai fini del superamento dell'esame finale.

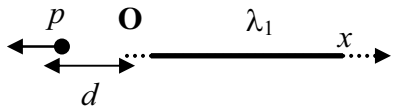
1. Date tre cariche ai vertici di un triangolo equilatero di lato l, calcolare il campo elettrico ed il potenziale al centro del triangolo. Dare il valore numerico per l=5cm, $q_1 = q_2 = -q_3 = 1\mu C$. Calcolare l'energia configurazionale del sistema.

2. Calcolare l'energia che si deve spendere per costruire un sistema di carica Q distribuito uniformemente all'interno di una sfera isolante di raggio R.

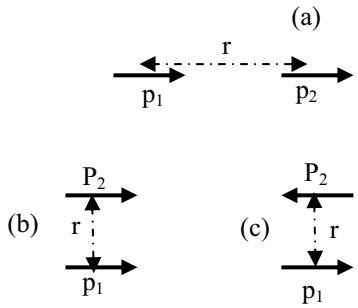
3. In un piano giacciono un filo rettilineo infinitamente lungo ed una barretta di lunghezza L, entrambi di sezione trascurabile, carichi con densità lineare di carica uniforme, rispettivamente pari a λ_1 e λ_2. La barretta, il cui centro si trova a distanza d dal filo, è inclinata rispetto al filo stesso di un angolo α (vedi figura). Calcolare la forza cui è sottoposta la barretta. [Dati: $\lambda_1 = 10$ nC/m, $\lambda_2 = 100$ nC/m, $L = 5$ cm, $d = 20$ cm, $\alpha = 30°$]



4. Sul semiasse positivo delle ascisse è distribuita una carica con densità lineare uniforme $\lambda_1>0$. Sul semiasse negativo invece a distanza d dall'origine è disposto un dipolo elettrico come in figura. Si determini il vettore campo elettrico prodotto dalla distribuzione lineare in prossimità del dipolo, e la conseguente forza attrattiva esercitata sul dipolo. [Dati: $\lambda_1 = 1\mu$C/m, $p=1nC*m$, $d=10$ cm].



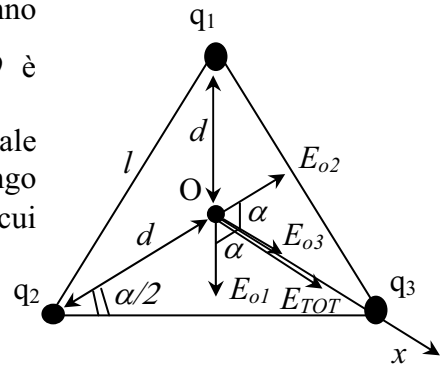
5. Fornire l'espressione dell'energia di interazione fra due dipoli elettrici p_1 e p_2 posti alla distanza r, ma nelle disposizioni differenti indicate in figura (a),(b),(c). Commentare il risultato indicando la configurazione energeticamente più vantaggiosa. (Per energia di interazione si intende l'energia elettrostatica di un dipolo immerso nel campo elettrico generato dall'altro).



FISICA

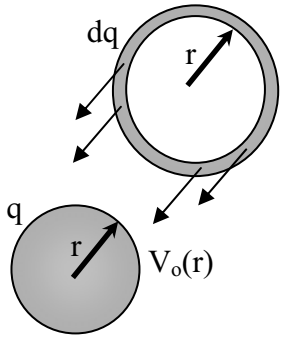
A.A. 2004-2005
Ingegneria Gestionale
Soluzioni della 9ª prova

1. Il campo elettrico totale nel punto O è dato dalla somma vettoriale dei tre campi elettrici generati da $q_1=q$, $q_2=q$, $q_3=-q$. Tutti e tre i vettori hanno la stessa intensità $E_{o1}=E_{o2}=E_{o3}=\dfrac{q}{4\pi\varepsilon_o d^2}$ perché il punto O è equidistante dalle tre cariche. Per la simmetria del sistema il campo totale E_{TOT} ha la direzione dell'asse x, e si ottiene proiettando i tre vettori lungo l'asse x: da ciò $E_{TOT}=E_{o1}\cos\alpha+E_{o2}\cos\alpha+E_{o3}$ dove $\alpha=\pi/3$ e per cui $\cos\alpha=1/2$ e $d=l/\sqrt{3}$. Da cui $E_{TOT}=\dfrac{2q}{4\pi\varepsilon_o d^2}=\dfrac{6q}{4\pi\varepsilon_o l^2}=$



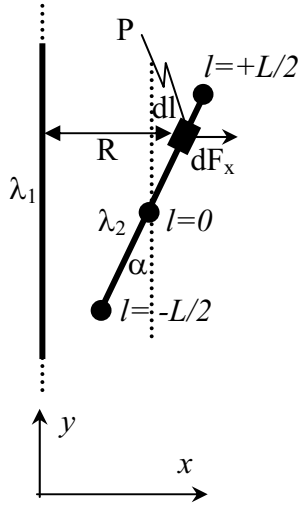
$=\dfrac{6\cdot10^{-6}}{5^2\cdot10^{-4}}9\cdot10^9\,V/m=2.16\cdot10^7\,V/m$. Il potenziale totale si ottiene dalla somma algebrica dei tre potenziali $V(O)=\dfrac{q+q-q}{4\pi\varepsilon_o d}=\dfrac{q\sqrt{3}}{4\pi\varepsilon_o l}=\dfrac{9\cdot10^9\cdot10^{-6}\sqrt{3}}{5\cdot10^{-2}}V=3{,}12\cdot10^5 V$. Per l'energia configurazionale $U=\dfrac{q_1q_2}{4\pi\varepsilon_o l}+\dfrac{q_1q_3}{4\pi\varepsilon_o l}+\dfrac{q_2q_3}{4\pi\varepsilon_o l}=\dfrac{q^2-q^2-q^2}{4\pi\varepsilon_o l}=-\dfrac{9\cdot10^9\cdot10^{-12}}{5\cdot10^{-2}}=-0.18J$

2. Per calcolare l'energia configurazionale del sistema immaginiamo di costruire una sfera uniformemente carica con un raggio r via via crescente. Il lavoro dL^{ext} che dobbiamo compiere contro le forze del campo per accrescere il raggio da r a $r+dr$ si calcola pensando di portare dall'infinito un guscio sferico di carica $dq=\rho dV=\rho\left(4\pi r^2dr\right)$ e di depositarlo sulla superficie della sfera che già si trova al potenziale $V_o(r)=q\Big/4\pi\varepsilon_o r=\rho\left(\dfrac{4}{3}\pi r^3\right)\Big/4\pi\varepsilon_o r=\rho r^2/3\varepsilon_0$ dove q è la carica interna a tale sfera. Tale lavoro esterno contrario al lavoro elettrostatico andrà ad accrescere l'energia configurazionale del sistema della quantità $dU=dL^{ext}=-dL^{el}=dqV_o(r)=\rho\left(4\pi r^2dr\right)\rho r^2/3\varepsilon_0=4\pi\rho^2r^4dr/3\varepsilon_o$.



Integrando tutti questi contributi energetici accrescendo il raggio della sfera da $r=0$ fino a raggiungere $r=R$ (le dimensioni finali della sfera) si ottiene il valore finale dell'energia configurazionale $U=\displaystyle\int_0^R 4\pi\rho^2r^4dr/3\varepsilon_o=\dfrac{4\pi\rho^2R^5}{15\varepsilon_o}$ o equivalentemente in termini della carica totale $Q_{tot}=\rho\dfrac{4}{3}\pi R^3$, si ottiene $U_o=\dfrac{3}{5}\cdot\dfrac{Q_{tot}^2}{4\pi\varepsilon_o R}$.

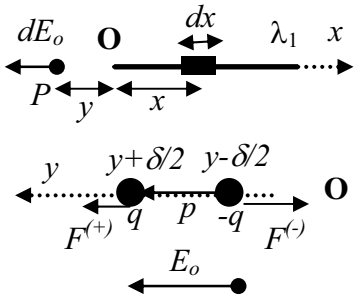
3. Il campo elettrico generato dal filo infinitamente lungo può essere facilmente determinato applicando la legge di Gauss. Nel punto generico P (sulla barretta), a distanza R dal filo, il campo vale $E_o(x=R)=\dfrac{\lambda_1}{2\pi\varepsilon_o R}$ con direzione lungo l'asse delle x. La forza elettrica cui è sottoposto l'elemento dl della barretta, sul quale è presente una carica $dq=\lambda_2 dl$, vale quindi $dF_x=E_o dq=E_o\lambda_2 dl=\dfrac{\lambda_1\lambda_2}{2\pi\varepsilon_o R}dl$ con



direzione lungo l'asse x. La forza totale, dovuta al filo, e agente sulla barretta si ottiene integrando i contributi infinitesimi dF_x su tutta la barretta. Si noti come R non sia costante ma vari con legge $R(l) = d + lsin(\alpha)$ dove l è l'ascissa introdotta sulla barretta che varia da $-L/2$ ad $L/2$. La forza totale risulta quindi

$$F_x = \int dF_x = \frac{\lambda_1\lambda_2}{2\pi\varepsilon_o}\int_{-L/2}^{L/2}\frac{dl}{d+lsin(\alpha)} = \frac{\lambda_1\lambda_2}{2\pi\varepsilon_o sin(\alpha)}\ln\left(\frac{d+Lsin(\alpha)/2}{d-Lsin(\alpha)/2}\right) = 4.5\times10^{-6}N$$

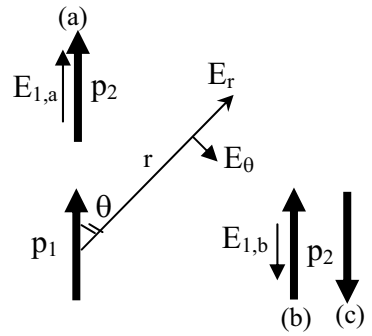
4. Alla distanza generica x dall'origine O si trova la carica $dq=\lambda_1 dx$ che genera il contributo di campo elettrico $dE_o = \lambda_1 dx / 4\pi\varepsilon_o (x+y)^2$ nel punto P a distanza y dall'origine. Tale contributo diretto lungo l'asse y (contrario all'asse x) quando integrato lungo tutto il semiasse positivo delle x fornisce un valore complessivo di campo elettrico pari a $E_o = \int dE_o = \frac{\lambda_1}{4\pi\varepsilon_o}\int_0^\infty dx/(x+y)^2 = \frac{\lambda_1}{4\pi\varepsilon_o y}$. La forza cui è sottoposto un dipolo p a distanza y dall'origine O si può determinare a partire dall'energia configurazionale del dipolo $U = -\vec{p}\cdot\vec{E}_o = -\frac{\lambda_1 p}{4\pi\varepsilon_o y}$, calcolandone il gradiente rispetto alla coordinata y libera del dipolo: $F_y = -grad_y U = \frac{d}{dy}\frac{\lambda_1 p}{4\pi\varepsilon_o y} = -\frac{\lambda_1 p}{4\pi\varepsilon_o y^2} = -\frac{9\cdot10^9\cdot10^{-6}10^{-9}}{(10^{-1})^2} = -9\cdot10^4 N$



La forza è quindi contraria all'asse y risultando quindi attrattiva diretta verso il filo uniformemente carico. Alternativamente tale forza può essere determinata come risultante della forza agente sulla carica positiva del dipolo $F^{(+)}$ posizionata in $y+\delta/2$ e della forza agente sulla carica negativa del dipolo $F^{(-)}$ posizionata in $y+\delta/2$. La risultante delle due forze vale quindi $F_y = F^{(+)} + F^{(-)} =$

$$= q\frac{\lambda_1}{4\pi\varepsilon_o(y+\delta/2)} - q\frac{\lambda_1}{4\pi\varepsilon_o(y-\delta/2)} = \frac{-q\lambda_1\delta}{4\pi\varepsilon_o\left(y^2-(\delta/2)^2\right)} \cong \frac{-\lambda_1 p}{4\pi\varepsilon_o y^2}$$

5. Il campo elettrico E_1 generato dal dipolo p_1 a grande distanza r si scompone nelle due componenti radiale e tangenziale $\begin{cases} E_r = 2p_1\cos\theta/4\pi\varepsilon r^3 \\ E_\theta = p_1\sin\theta/4\pi\varepsilon r^3 \end{cases}$ in particolare nella posizione in verticale (a) (θ=0) il campo è solamente radiale e vale $E_{1,a} = p_1/2\pi\varepsilon r^3$, mentre il campo nella posizione in orizzontale (b) è solamente tangenziale ($\theta=\pi/2$) e vale $E_{1,b} = p_1/4\pi\varepsilon r^3$. L'energia di interazione che nasce quando un secondo dipolo p_2 è immerso nel campo generato dal primo dipolo vale in generale $U_{12} = -\vec{p}_2\cdot\vec{E}_1$. Nella posizione (a) $E_{1,a}$ è equiverso con p_2 cosicché l'energia di interazione risulta minima $U_a = -p_1p_2/2\pi\varepsilon r^3$ (configurazione di minima energia, i dipoli si attraggono). Nella posizione (b) il campo $E_{1,b}$ è controverso con p_2 e l'energia di interazione risulta massima $U_b = p_1p_2/4\pi\varepsilon r^3$ (configurazione di massima energia, i dipoli si respingono). In questo secondo caso possiamo invertire il dipolo p_2 ottenendo (configurazione c) una energia di interazione $U_c = -p_1p_2/4\pi\varepsilon r^3$ negativa (attrazione) ma non minima possibile. Concludiamo quindi che la configurazione (a) è quella energeticamente più vantaggiosa per il sistema.

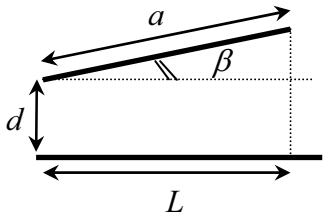


FISICA

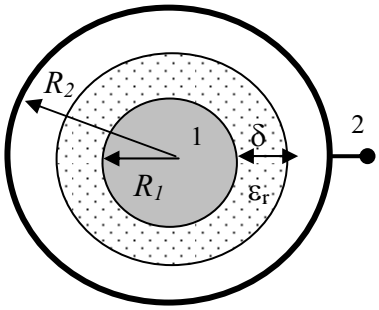
A.A. 2004-2005
Ingegneria Gestionale
10 prova del 1Giugno 2005

Lo studente descriva il procedimento e la soluzione degli esercizi proposti. Gli elaborati verranno ritirati Martedì 7 Giugno e saranno valutati ai fini del superamento dell'esame finale.

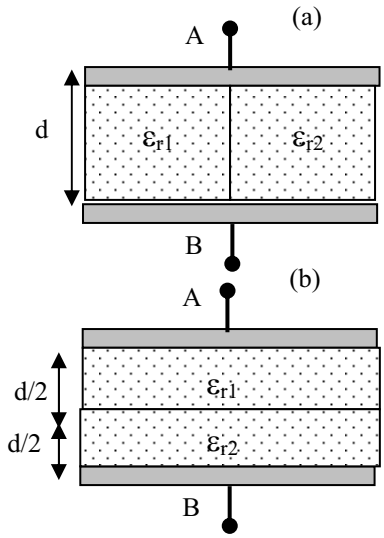
1. Calcolare la capacità del condensatore descritto in figura. Le due armature entrambe quadrate di lato *a*, ma non parallele, si trovano ad una distanza minima *d*. Indicando con β l'angolo fra le due armature, notiamo che esse non si affacciano perfettamente. In questo caso possiamo assumere che l'effetto di induzione completa tipico nei condensatori riguarda solo una parte dell'armatura inferiore corrispondente alla distanza $L=a\cos(\beta)$.



2. Un condensatore sferico è costituito da due conduttori sferici concentrici di raggi $R_1=2mm$ e $R_2=4mm$. Le due armature si trovano inizialmente ad una differenza di potenziale $\Delta V_o=V_1-V_2=360\pi$ V, che diminuisce del 20% quando viene inserita una lastra omogenea di costante dielettrica relativa ε_r e di spessore $\delta=1mm$. Determinare i valori della costante ε_r, della carica libera Q_{lib} sulle piastre e di polarizzazione Q_{pol} sulla lastra.

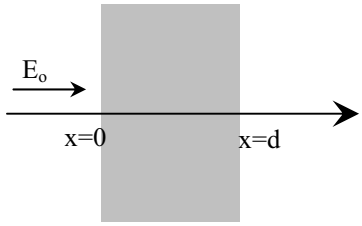


3. Un condensatore a facce piane e parallele ha nel vuoto una capacità di $C_o=10\mu F$. Successivamente viene riempito per metà superficie con un dielettrico di costante $\varepsilon_{r1}=1.4$ e per l'altra metà con un altro dielettrico di costante dielettrica relativa $\varepsilon_{r2}=1.6$ secondo lo schema in figura (a). Calcolare la nuova capacità ed il rapporto fra le cariche di polarizzazione sui due dielettrici. Ripetere l'esercizio per il caso (b) in cui i due dielettrici sono disposti uno sull'altro. Dimostrare che il rapporto fra le capacità dei due condensatori nei due casi vale sempre $C_a/C_b>1$ per qualunque valore delle costanti dielettriche.



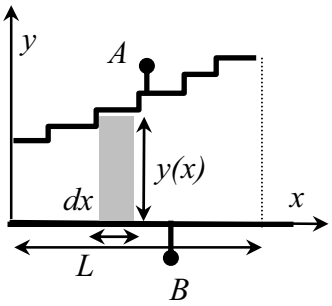
4. Sia dato un condensatore cilindrico di raggio interno R_1=1cm, esterno R_2=2.7cm e lunghezza L=10cm, riempito totalmente di dielettrico di costante dielettrica relativa ε_r=2. Si calcoli il campo elettrico in tutti i punti del dielettrico in funzione della carica libera Q sulle armature. Si calcoli inoltre la carica massima Q_{max} che è possibile allocare senza che il campo elettrico nel dielettrico ecceda il valore della rigidità E_r=30KV/cm. Calcolare l'energia massima immagazzinabile in questa situazione.

5. Una lastra dielettrica di spessore d ha una costante dielettrica relativa $\varepsilon_r=3d/(x+d)$ nell'intervallo (0<x<d) La lastra è immersa in un campo elettrostatico E_o, perpendicolare alla lastra. Si calcolino il vettore polarizzazione, la densità di carica sulla superficie del dielettrico e la densità volumetrica nel suo interno.



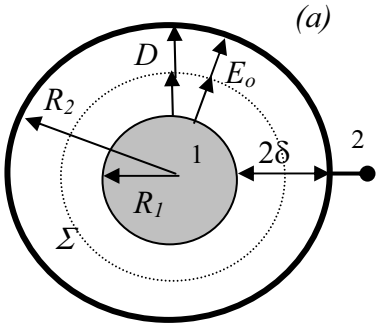
FISICA

A.A. 2004-2005
Ingegneria Gestionale
Soluzioni 10 prova

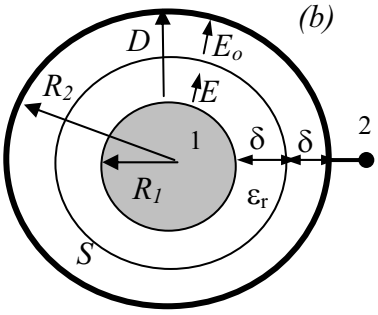


1. L'armatura obliqua superiore *A* può pensarsi scomponibile in una serie infinita di gradini di lunghezza *dx* ed altezza *dy*. Ciascun gradino forma con l'armatura inferiore *B* un condensatore piano (regione grigia) di sezione *adx,* e capacità $dC = \varepsilon_O\, adx/y$, dove la distanza fra le armature è variabile $y(x) = d + x \cdot tg\beta$. La capacità dell'intera struttura è data dalla somma di tutte le capacità *dC* di tutti gli infiniti condensatori piani in parallelo, da cui si ottiene

$$C = \int dC = \int_0^L \varepsilon_O \frac{a}{y} dx = \varepsilon_O a \int_0^{a\cos\beta} \frac{dx}{d + x \cdot tg\beta} = \frac{\varepsilon_O a}{tg\beta}\left[\ln\left|d + x \cdot tg\beta\right|\right]_0^{a\cos\beta} = \frac{\varepsilon_O a}{tg\beta}\ln\left(1 + \frac{a\sin\beta}{d}\right)$$



2. In un condensatore sferico in presenza o meno del dielettrico (casi *a,b*) le linee di forza del campo elettrico *E e* dello spostamento elettrico *D* sono sempre radiali dirette dalla carica positiva $+Q_{lib}$ verso la carica negativa $-Q_{lib}$. Di particolare interesse è il vettore spostamento elettrico *D*. Il suo flusso uscente dalla superficie sferica *Σ* di raggio $R_1<r<R_2$ dipende dalla sola carica libere interna $+Q_{lib}$ Quindi $\Phi_\Sigma\left(\vec{D}\right) = \int_\Sigma \vec{D} \bullet \hat{n}_{ext} dS = D\left(4\pi r^2\right) = Q_{lib}$, da cui si ricava l'espressione del vettore spostamento elettrico $D(r) = Q_{lib}/4\pi r^2$ valida per tutti i punti interni del condensatore ($R_1<r<R_2$). Si noti come l'espressione non risenta della presenza del dielettrico e sia valida in entrambi i casi *a,b*. Il campo elettrico invece ha due valori diversi: nel vuoto vale $E_o(r) = D(r)/\varepsilon_o = Q_{lib}/4\pi\varepsilon_o r^2$ mentre in presenza di dielettrico si abbassa al valore $E(r) = D(r)/\varepsilon_o\varepsilon_r = Q_{lib}/4\pi\varepsilon_o\varepsilon_r r^2$. In generale la differenza di potenziale fra i due conduttori si ottiene integrando il campo elettrico lungo un percorso radiale da R_1 ad R_2; nel caso *(a)* in assenza di dielettrico si ottiene



$$V_1 - V_2 = \int_{R_1}^{R_2} E_o dr = \frac{Q_{lib}}{4\pi\varepsilon_o}\int_{R_1}^{R_2}\frac{dr}{r^2} = \frac{Q_{lib}}{4\pi\varepsilon_o}\frac{R_2 - R_1}{R_1 \cdot R_2}$$

dove è stato integrato il campo elettrico nel vuoto E_o. Nel caso *(b)* invece il valore di *E* nel dielettrico si abbassa riducendo complessivamente la differenza di potenziale

$$V_1 - V_2 = \int_{R_1}^{R_1+\delta} E dr + \int_{R_1+\delta}^{R_2} E_0 dr = \frac{Q_{lib}}{4\pi\varepsilon_o}\left(\int_{R_1}^{R_1+\delta}\frac{1}{\varepsilon_r}\frac{dr}{r^2} + \int_{R_1+\delta}^{R_2}\frac{dr}{r^2}\right) = \frac{Q_{lib}}{4\pi\varepsilon_o}\left(\frac{1}{\varepsilon_r}\frac{\delta}{R_1 \cdot (R_1+\delta)} + \frac{R_2 - R_1 - \delta}{(R_1+\delta)\cdot R_2}\right).$$

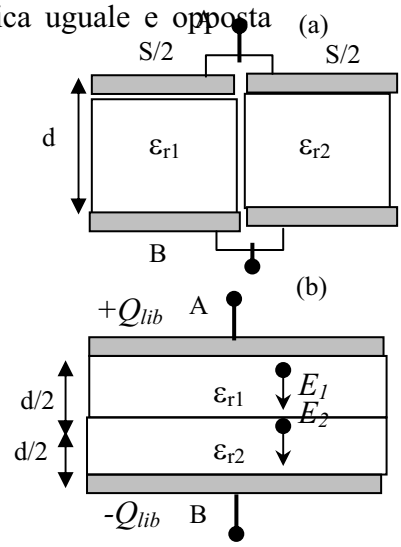
Imponendo che il rapporto fra le due differenze di potenziale (caso *b*/caso *a*) debba valere 0.8 si ricava il valore di ε_r: $\frac{1}{\varepsilon_r}\frac{\delta}{R_1 \cdot (R_1+\delta)} + \frac{\delta}{(R_1+\delta)\cdot R_2} = 0.8\frac{2\delta}{R_1 \cdot R_2}$ da cui semplificando per δ,

$$\frac{1}{\varepsilon_r} = R_1 \cdot (R_1+\delta)\left[\frac{1.6}{R_1 \cdot R_2} - \frac{1}{(R_1+\delta)\cdot R_2}\right] = R_1 \cdot (R_1+\delta)\left[\frac{0.6R_1 + 1.6\delta}{(R_1+\delta)\cdot R_2 \cdot R_1}\right] = 0.6\frac{R_1}{R_2} + 1.6\frac{\delta}{R_2} = 0.7$$

da cui si ricava $\varepsilon_r = 1.43$. La carica libera si ricava dal valore di $\Delta V_o = 360\pi$ nel caso *(a)* da cui $Q_{lib} = 4\pi\varepsilon_o \Delta V_o \frac{R_1 R_2}{2\delta} = 5.02\ 10^{-10}$ *C*. Per determinare la carica di polarizzazione bisogna prima ricavare l'espressione del vettore intensità di polarizzazione nel dielettrico $P = \frac{\varepsilon_r - 1}{\varepsilon_r}D = \frac{\varepsilon_r - 1}{\varepsilon_r}\frac{Q_{lib}}{4\pi r^2}$. La carica di polarizzazione Q_{pol} sulla superficie *S* esterna del dielettrico

si ottiene integrando su S la densità $\sigma_{pol} = \vec{P} \bullet \hat{n}_{ext} = \frac{\varepsilon_r - 1}{\varepsilon_r} D$ ossia calcolando il flusso di P uscente da S che vale $Q_{pol} = \int_S \vec{P} \bullet \hat{n}_{ext} dS = \frac{\varepsilon_r - 1}{\varepsilon_r} \int_S \vec{D} \bullet \hat{n}_{ext} dS = \frac{\varepsilon_r - 1}{\varepsilon_r} Q_{lib} = 0.3 Q_{lib} = 1.67 \quad 10^{-10} \quad C.$

Ovviamente sulla superficie interna del dielettrico sarà posizionata una carica uguale e opposta $-Q_{pol}$ che rende complessivamente neutro il dielettrico



3. Un condensatore a facce piane e parallele ha nel vuoto capacità $C_o = \varepsilon_o S/d$ dove S è la sua sezione e d la distanza fra le armature. Quando viene riempito con due dielettrici di costanti dielettriche relative ε_{r1} ε_{r2} come in figura *a*, la capacità complessiva può pensarsi come il parallelo delle due capacità che competono ai due condensatori di metà superficie *S/2*:

$$C_a = C_1 + C_2 = \varepsilon_o \varepsilon_{r1} \frac{S/2}{d} + \varepsilon_o \varepsilon_{r2} \frac{S/2}{d} = \varepsilon_o \frac{S}{d}\left(\frac{\varepsilon_{r1} + \varepsilon_{r2}}{2}\right) = C_o\left(\frac{\varepsilon_{r1} + \varepsilon_{r2}}{2}\right) =$$

$=1.5\ C_o = 15\mu F$. Nel caso (*b*), posta sul conduttore A la carica $Q_{lib,}$, i campi elettrici nei due dielettrici sono rispettivamente a $E_1 = \sigma_{lib}/\varepsilon_o \varepsilon_{r1} = Q_{lib}/S\varepsilon_o \varepsilon_{r1}$ e $E_2 = Q_{lib}/S\varepsilon_o \varepsilon_{r2}$ (campi uniformi). La differenza di potenziale che si instaura fra le due armature è $V_A - V_B = \int_A^B E dl = E_1 \frac{d}{2} + E_2 \frac{d}{2} = \frac{Q_{lib} d}{2S\varepsilon_o} \frac{\varepsilon_{r1} + \varepsilon_{r2}}{\varepsilon_{r1}\varepsilon_{r2}}$

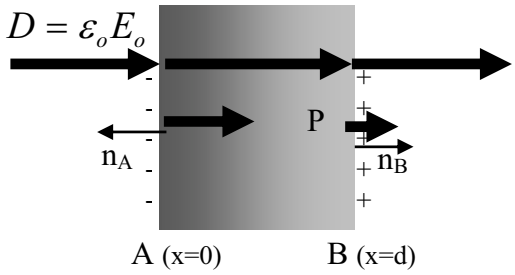
e quindi la capacità si calcola dal rapporto

$C_b = \frac{Q_{lib}}{V_A - V_B} = \varepsilon_o \frac{S}{d}\left(\frac{2\varepsilon_{r1}\varepsilon_{r2}}{\varepsilon_{r1} + \varepsilon_{r2}}\right) = C_o\left(\frac{2\varepsilon_{r1}\varepsilon_{r2}}{\varepsilon_{r1} + \varepsilon_{r2}}\right)$. Ovviamente $C_a > C_b$. Infatti ciò porta a $\left(\frac{\varepsilon_{r1} + \varepsilon_{r2}}{2}\right) > \left(\frac{2\varepsilon_{r1}\varepsilon_{r2}}{\varepsilon_{r1} + \varepsilon_{r2}}\right)$ ossia $(\varepsilon_{r1} - \varepsilon_{r2})^2 > 0$ (sempre vera se $\varepsilon_{r1} \neq \varepsilon_{r2}$).

4. Il campo elettrico è non nullo solo fra le armature per $R_1 \le r \le R_2$ e vale $E(r) = Q/2\pi\varepsilon_o \varepsilon_r r L$. Il suo valore massimo (per r=R_1) non deve eccedere la rigidità dielettrica da cui $E(R_1) \le E_r$. Questa disequazione porta a determinare la carica limite massima $Q \le Q_{\max} = 2\pi\varepsilon_o \varepsilon_r R_1 L E_r = 0.33\mu C$. Essendo la capacità C=11.2pF, l'energia massima immagazzinata diviene $U = Q_{\max}^2/2C = 5mJ$

5. Il vettore spostamento elettrico D è uniforme in tutto lo spazio, sia dentro che fuori il dielettrico. La sua espressione può essere calcolata facilmente fuori $D = \varepsilon_o E_o$. Il vettore intensità di polarizzazione P è non nullo solo all'interno con valore $P(x) = \frac{\varepsilon_r(x) - 1}{\varepsilon_r(x)} D = \frac{\varepsilon_r(x) - 1}{\varepsilon_r(x)} \varepsilon_o E_o$. Le densità di carica di polarizzazione di superficie e di volume sono (una volta calcolati $\varepsilon_{rA}=3$, $\varepsilon_{rB}=1.5$)

$$\begin{cases} \sigma_{pol}(x=0) = \vec{P}_A \cdot \hat{n}_A = -\frac{\varepsilon_{rA} - 1}{\varepsilon_{rA}} \varepsilon_o E_o = -\frac{2}{3} \varepsilon_o E_o \\ \sigma_{pol}(x=d) = \vec{P}_B \cdot \hat{n}_B = \frac{\varepsilon_{rB} - 1}{\varepsilon_{rB}} \varepsilon_o E_o = \frac{1}{3} \varepsilon_o E_o \\ \rho_{pol} = -div\vec{P} = -\frac{dP}{dx} = -\frac{d}{dx}\left(1 - \frac{x+d}{3d}\right) \varepsilon_o E_o = \frac{\varepsilon_o E_o}{3d} \end{cases}$$

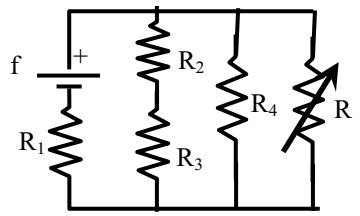


FISICA II

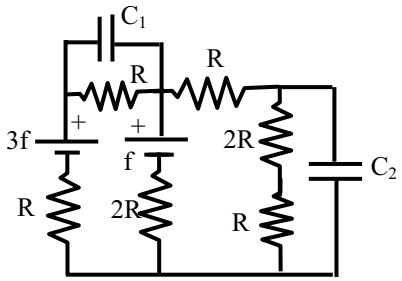
A.A. 2005-2006
Ingegneria Gestionale
5 prova del 8 Giugno 2006

Lo studente descriva il procedimento e la soluzione degli esercizi proposti. Gli elaborati verranno ritirati Mercoledì 14 Giugno e saranno valutati ai fini del superamento dell'esame finale.

1. Nel circuito elettrico rappresentato in figura è presente un resistore a resistenza variabile R. Si calcoli l'espressione della potenza dissipata su tale resistore, e si calcoli per quale valore di R essa sia massima. [f=10V, R_1=2kΩ, R_2=3kΩ, R_3=5kΩ, R_4=8kΩ]

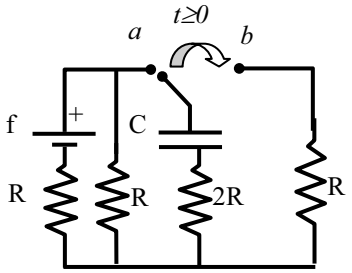


2. Supponendo che il circuito elettrico in figura sia lasciato in questa configurazione per un tempo sufficientemente lungo tale da far ritenere completato il processo di carica dei condensatori, determinare il rapporto fra la carica Q_1 e Q_2 dei due condensatori [f=5V, C_1=3μF, C_2=5μF]

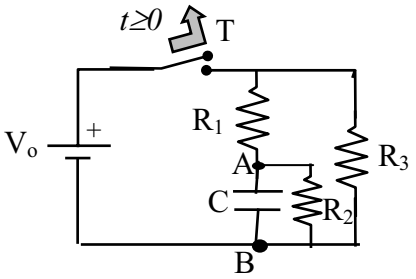


3. Un condensatore cilindrico di raggio interno R_1, raggio esterno R_2 ed altezza L è interamente riempito con un dielettrico omogeneo ed isotropo che ha costante dielettrica assoluta ε, ma anche una resistività elettrica non nulla ρ. Tale circostanza causa la presenza di una corrente di conduzione nel dielettrico rappresentabile con un opportuno resistore che scarica il condensatore . Calcolare il tempo caratteristico di scarica τ.

4. Nel circuito riportato in figura l'interruttore è lasciato per lungo tempo nella posizione *a*. Dal tempo t=0 l'interruttore viene spostato definitivamente nella posizione *b*. Determinare la tensione ai capi del condensatore $V_c(t)$ per t ≥0, le energie iniziale U_{in} e finale U_{fin} immagazzinate nel condensatore, il tempo t_o al quale il condensatore dimezza la sua energia immagazzinata [Dati del problema R=1kΩ, C=1μF, f=20 V]

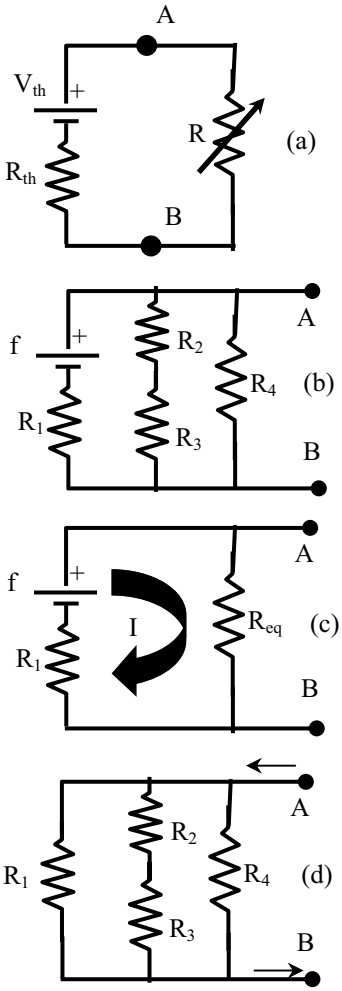


5. Il circuito mostrato in figura è in condizioni stazionarie quando, al tempo t = 0, viene aperto l'interruttore T. Si chiede in quale istante t^* la differenza di potenziale ΔV_{AB} ai capi del condensatore è pari a ΔV^*=1.5 V. [Dati: V_o = 8 V; R_1 = 2 kΩ; R_2 =6 kΩ; R_3 = 4 kΩ; C = 1μF]

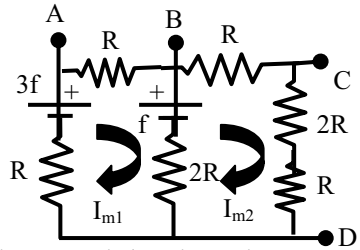


FISICA II

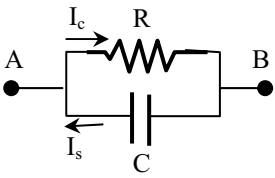
A.A. 2005-2006
Ingegneria Gestionale
Soluzioni della 5ª prova



1. Il teorema di Thevenin viene applicato ai capi del resistore R sul quale si vuole calcolare la potenza dissipata. La rete a monte del resistore viene quindi ridotta ad un generatore equivalente di Thevenin V_{th} con in serie una resistenza di Thevenin R_{th} (figura a). Il calcolo della tensione equivalente di Thevenin si ottiene dalla differenza V_A-V_B a vuoto quando cioè A e B sono scollegati come in figura b. Le resistenze R_4 ed R_2+R_3 sono in parallelo ed equivalgono alla resistenza complessiva $\frac{1}{R_{eq}} = \frac{1}{R_2 + R_3} + \frac{1}{R_4}$ da cui R_{eq}=4 kΩ. La corrente di questo circuito (figura c) costituito da una sola maglia è quindi $I = \frac{f}{R_1 + R_{eq}}$ da cui si ricava la tensione di Thevenin $V_{th} = V_A - V_B = IR_{eq} = 6.67$ V. Il calcolo della resistenza equivalente di Thevenin si ottiene invece cortocircuitando il generatore di tensione ed inviando una corrente di prova al capo A per vedere come attraversa il circuito uscendo infine da B (figura d). Si può notare come i tre rami di resistenze R_1, R_2+R_3, R_4 sono attraversati in parallelo da cui $\frac{1}{R_{th}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2 + R_3} + \frac{1}{R_4}$ e cioè R_{th}=1.33 kΩ. Dopo aver trovato i valori di V_{th} ed R_{th} ricolleghiamo tra A e B il resistore variabile R come in figura a. La corrente che attraversa il resistore è $I(R) = \frac{V_{th}}{R_{th} + R}$ che come è evidente è funzione di R. Conseguentemente anche la potenza dissipata sul resistore è funzione di R e vale $P(R) = I^2 R = V_{th}^2 \frac{R}{(R_{th} + R)^2}$. Dallo studio di funzione si ricava che la potenza è massima quando R=R_{th}=1.33 kΩ. Per questo valore la potenza vale $P = V_{th}^2 / 4R_{th} = 8.34$mW.

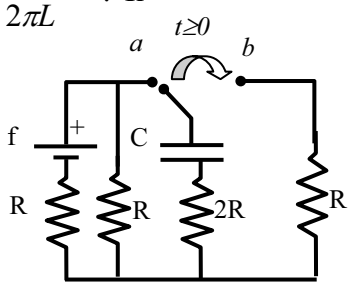


2. Il circuito è da lungo tempo nella configurazione in figura. Il processo di carica dei condensatori è da ritenersi completato; i condensatori possono essere assimilati a circuiti aperti dove non scorre corrente. Il circuito due maglie può essere risolto con il metodo delle correnti di maglia $\begin{pmatrix} 4R & -2R \\ -2R & 6R \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_{m1} \\ I_{m2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2f \\ f \end{pmatrix}$ da cui $I_{m1} = \frac{7}{10}\frac{f}{R}$, $I_{m2} = \frac{4}{10}\frac{f}{R}$. Le differenze di potenziale ai capi dei condensatori si ottengono calcolando la caduta ohmica sui resistori che si trovano in parallelo ad essi e valgono rispettivamente $V_A - V_B = I_{m1}R = 0.7f = 3.5V$ ai capi di C_1, mentre $V_C - V_D = I_{m2}3R = 1.2f = 6V$ ai capi di C_2. Il rapporto di carica $\frac{Q_1}{Q_2} = \frac{(V_A - V_B)C_1}{(V_C - V_D)C_2} = \frac{3.5 \cdot 3}{6 \cdot 5} = 0.35$.



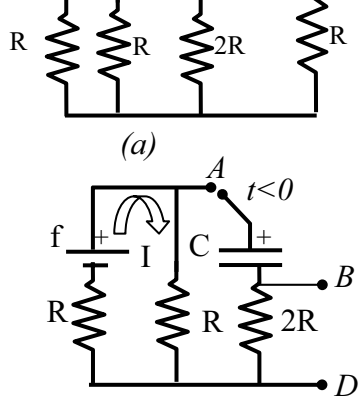
3. All'interno del condensatore considerato sono presenti due correnti: la corrente di conduzione ohmica a causa della resistività finita del dielettrico, e la corrente di spostamento che si avrebbe anche in un condensatore ideale. Il condensatore è quindi schematizzabile con un condensatore ideale con in parallelo un resistore a rappresentare le perdite ohmiche. Il circuito RC si scarica conun tempo caratteristico τ=RC dove per un condensatore cilindrico di lunghezza L e raggi delle armature R_1 (interno) ed R_2 (esterno)

la capacità vale $C = \varepsilon \dfrac{2\pi L}{\ln(R_2/R_1)}$, la resistenza $R = \rho \int_{R_1}^{R_2} \dfrac{dr}{S} = \rho \int_{R_1}^{R_2} \dfrac{dr}{2\pi r L} = \rho \dfrac{\ln(R_2/R_1)}{2\pi L}$. Il tempo caratteristico $\tau=\rho\varepsilon$ è quindi indipendente dai parametri geometrici.

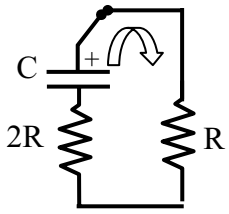


(a)

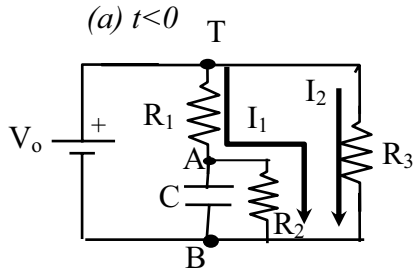
4. Per lungo tempo, prima di *t=0*, la topologia del circuito è quella della configurazione (*a)*. Il processo di carica nel condensatore procede con una corrente di carica che diminuisce gradualmente fino ad annullarsi dopo lungo tempo. Quindi poco prima di *t=0* non scorre corrente né nel condensatore né sulla resistenza *2R*. La corrente circola quindi solo nella prima maglia dove $I = f/(R+R)$. Tale corrente crea sul resistore del ramo centrale una caduta di tensione ohmica $V_A - V_D = RI = f/2$. D'altra parte sul terzo ramo l'assenza di corrente fa sì che siano uguali i due potenziali $V_B=V_D$. Conseguentemente la tensione ai capi del condensatore vale $\Delta V_c = V_A - V_B = V_A - V_D = f/2$ cui corrisponde il valore di energia immagazzinata $U = (\Delta V_c)^2 C/2 = f^2 C/8$. Quando per *t=0* la topologia del circuito diviene quella della configurazione (*b)* il condensatore subisce un processo di scarica che parte dal valore di energia immagazzinata del caso precedente $U_{in} = f^2 C/8$=50μJ e lo porta progressivamente a zero $U_{fin} = 0$ per $t \to \infty$. La dinamica del processo di scarica avviene con un tempo caratteristico $\tau = 3RC$ e con una legge di decadimento esponenziale della tensione sul condensatore $\Delta V_c(t) = (f/2)\cdot e^{-t/\tau}$ che partendo dal valore *f/2* tende progressivamente ad annullarsi. Al tempo t_o l'energia immagazzinata si dimezza divenendo $U(t_o) = f^2 C/16$ cui corrisponde la tensione $\Delta V_c(t_o) = f/\sqrt{8}$. Il tempo tempo t_o si ricava come segue: $\Delta V_c(t_o) = (f/2)\cdot e^{-t_o/\tau} = f/\sqrt{8}$, da cui $e^{-t_o/\tau} = 1/\sqrt{2}$, e quindi $t_o = \tau \ln\sqrt{2} = 3RC\ln\sqrt{2} = 1.04$ms.



(b) t>0



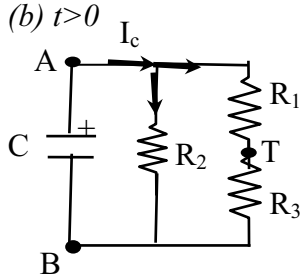
(a) t<0



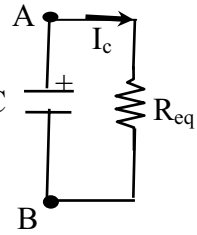
5. Prima dell'apertura dell'interruttore per *t<0* (figura *a*) il circuito è in condizione stazionaria, il condensatore è carico e si comporta come un circuito aperto. La batteria, posizionata fra i punti *T* e *B,* alimenta le due correnti $I_1 = V_o/(R_1+R_2) = 1mA$ ed $I_2 = V_o/R_3 = 2$mA. La differenza di potenziale ai capi del condensatore $\Delta V_c = V_A - V_B$ coincide con la caduta di potenziale ohmica ai capi della resistenza R_2 da cui $\Delta V_c = V_A - V_B = I_1 R_2 = V_o(R_2/(R_1+R_2)) = 3V_o/4 = 6V$ che rappresenta la tensione ai capi del condensatore all'apertura ΔV_o (*t=0*). Dopo l'apertura dell'interruttore la batteria V_o viene scollegata ed il condensatore si scarica sulle 3 resistenze (vedi figura *b*) che vengono viste dal condensatore come una resistenza equivalente $R_{eq} = (R_1+R_3)//R_2 = \dfrac{(R_1+R_3)R_2}{R_1+R_2+R_3} = 3k\Omega$

(Infatti la corrente del condensatore I_c si ripartisce in una corrente che attraversa R_2 ed un'altra che attraversa in serie R_1 ed R_3). La tensione ai capi del condensatore per t>0 segue la legge $\Delta V_c(t) = \Delta V_o \exp[-t/\tau]$ dove il tempo di scarica $\tau = R_{eq}C = 3ms$ ed il tempo *t** si trova dalla relazione $t^* = \tau \ln(\Delta V_o/\Delta V^*) = \tau \ln(4) = 4.16$ ms.

(b) t>0



(schema equivalente)

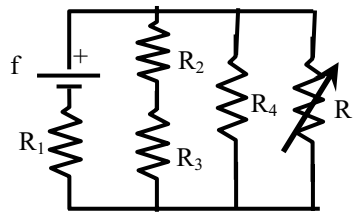


FISICA

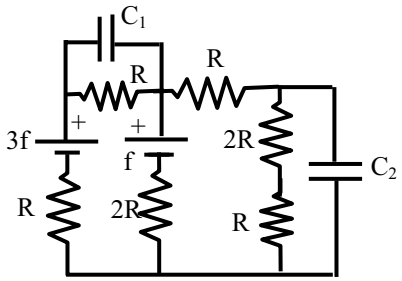
A.A. 2004-2005
Ingegneria Gestionale
11 prova del 10 Giugno 2005

Lo studente descriva il procedimento e la soluzione degli esercizi proposti. Gli elaborati verranno ritirati Martedì 14 Giugno e saranno valutati ai fini del superamento dell'esame finale.

1. Nel circuito elettrico rappresentato in figura è presente un resistore a resistenza variabile R. Si calcoli l'espressione della potenza dissipata su tale resistore, e si calcoli per quale valore di R essa sia massima. [f=10V, R_1=2kΩ, R_2=3kΩ, R_3=5kΩ, R_4=8kΩ]

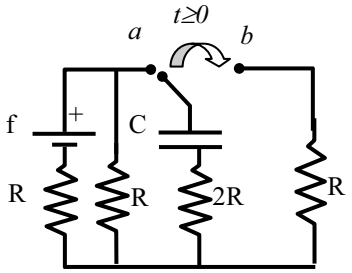


2. Supponendo che il circuito elettrico in figura sia lasciato in questa configurazione per un tempo sufficientemente lungo tale da far ritenere completato il processo di carica dei condensatori, determinare il rapporto fra la carica Q_1 e Q_2 dei due condensatori [f=5V, C_1=3μF, C_2=5μF]

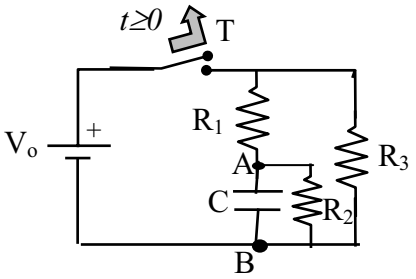


3. Un condensatore cilindrico di raggio interno R_1, raggio esterno R_2 ed altezza L è interamente riempito con un dielettrico omogeneo ed isotropo che ha costante dielettrica assoluta ε, ma anche una resistività elettrica non nulla ρ. Tale circostanza causa la presenza di una corrente di conduzione nel dielettrico rappresentabile con un opportuno resistore che scarica il condensatore . Calcolare il tempo caratteristico di scarica τ.

4. Nel circuito riportato in figura l'interruttore è lasciato per lungo tempo nella posizione *a*. Dal tempo t=0 l'interruttore viene spostato definitivamente nella posizione *b*. Determinare la tensione ai capi del condensatore $V_c(t)$ per t ≥0, le energie iniziale U_{in} e finale U_{fin} immagazzinate nel condensatore, il tempo t_o al quale il condensatore dimezza la sua energia immagazzinata [Dati del problema R=1kΩ, C=1μF, f=20 V]

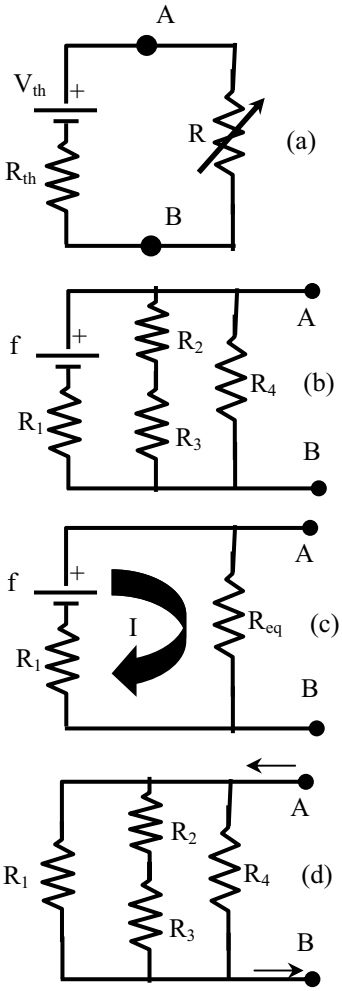


5. Il circuito mostrato in figura è in condizioni stazionarie quando, al tempo t = 0, viene aperto l'interruttore T. Si chiede in quale istante t^* la differenza di potenziale ΔV_{AB} ai capi del condensatore è pari a ΔV^*=1.5 V. [Dati: V_o = 8 V; R_1 = 2 kΩ; R_2 =6 kΩ; R_3 = 4 kΩ; C = 1μF]

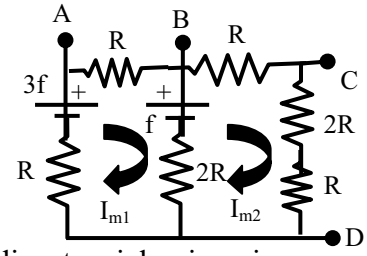


FISICA

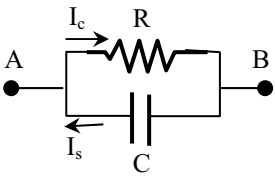
A.A. 2004-2005
Ingegneria Gestionale
Soluzioni della 11ª prova



1. Il teorema di Thevenin viene applicato ai capi del resistore R sul quale si vuole calcolare la potenza dissipata. La rete a monte del resistore viene quindi ridotta ad un generatore equivalente di Thevenin V_{th} con in serie una resistenza di Thevenin R_{th} (figura a). Il calcolo della tensione equivalente di Thevenin si ottiene dalla differenza V_A-V_B a vuoto quando cioè A e B sono scollegati come in figura b. Le resistenze R_4 ed R_2+R_3 sono in parallelo ed equivalgono alla resistenza complessiva $\frac{1}{R_{eq}} = \frac{1}{R_2 + R_3} + \frac{1}{R_4}$ da cui R_{eq}=4 kΩ. La corrente di questo circuito (figura c) costituito da una sola maglia è quindi $I = \frac{f}{R_1 + R_{eq}}$ da cui si ricava la tensione di Thevenin $V_{th} = V_A - V_B = IR_{eq} = 6.67$ V. Il calcolo della resistenza equivalente di Thevenin si ottiene invece cortocircuitando il generatore di tensione ed inviando una corrente di prova al capo A per vedere come attraversa il circuito uscendo infine da B (figura d). Si può notare come i tre rami di resistenze R_1, R_2+R_3, R_4 sono attraversati in parallelo da cui $\frac{1}{R_{th}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2 + R_3} + \frac{1}{R_4}$ e cioè R_{th}=1.33 kΩ. Dopo aver trovato i valori di V_{th} ed R_{th} ricolleghiamo tra A e B il resistore variabile R come in figura a. La corrente che attraversa il resistore è $I(R) = \frac{V_{th}}{R_{th} + R}$ che come è evidente è funzione di R. Conseguentemente anche la potenza dissipata sul resistore è funzione di R e vale $P(R) = I^2 R = V_{th}^2 \frac{R}{(R_{th} + R)^2}$. Dallo studio di funzione si ricava che la potenza è massima quando R=R_{th}=1.33 kΩ. Per questo valore la potenza vale $P = V_{th}^2 / 4R_{th} = 8.34$mW.

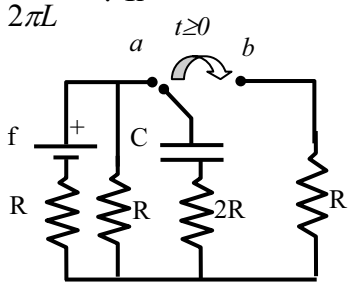


2. Il circuito è da lungo tempo nella configurazione in figura. Il processo di carica dei condensatori è da ritenersi completato; i condensatori possono essere assimilati a circuiti aperti dove non scorre corrente. Il circuito due maglie può essere risolto con il metodo delle correnti di maglia $\begin{pmatrix} 4R & -2R \\ -2R & 6R \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_{m1} \\ I_{m2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2f \\ f \end{pmatrix}$ da cui $I_{m1} = \frac{7}{10}\frac{f}{R}$, $I_{m2} = \frac{4}{10}\frac{f}{R}$. Le differenze di potenziale ai capi dei condensatori si ottengono calcolando la caduta ohmica sui resistori che si trovano in parallelo ad essi e valgono rispettivamente $V_A - V_B = I_{m1} R = 0.7 f = 3.5V$ ai capi di C_1, mentre $V_C - V_D = I_{m2} 3R = 1.2 f = 6V$ ai capi di C_2. Il rapporto di carica $\frac{Q_1}{Q_2} = \frac{(V_A - V_B)C_1}{(V_C - V_D)C_2} = \frac{3.5 \cdot 3}{6 \cdot 5} = 0.35$.



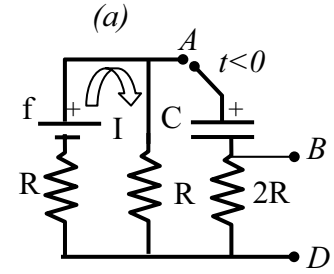
3. All'interno del condensatore considerato sono presenti due correnti: la corrente di conduzione ohmica a causa della resistività finita del dielettrico, e la corrente di spostamento che si avrebbe anche in un condensatore ideale. Il condensatore è quindi schematizzabile con un condensatore ideale con in parallelo un resistore a rappresentare le perdite ohmiche. Il circuito RC si scarica conun tempo caratteristico τ=RC dove per un condensatore cilindrico di lunghezza L e raggi delle armature R_1 (interno) ed R_2 (esterno)

la capacità vale $C = \varepsilon \dfrac{2\pi L}{\ln(R_2/R_1)}$, la resistenza $R = \rho \int_{R_1}^{R_2} \dfrac{dr}{S} = \rho \int_{R_1}^{R_2} \dfrac{dr}{2\pi r L} = \rho \dfrac{\ln(R_2/R_1)}{2\pi L}$. Il tempo caratteristico $\tau=\rho\varepsilon$ è quindi indipendente dai parametri geometrici.

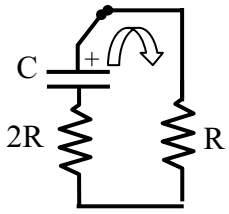


(a)

4. Per lungo tempo, prima di *t=0*, la topologia del circuito è quella della configurazione (*a)*. Il processo di carica nel condensatore procede con una corrente di carica che diminuisce gradualmente fino ad annullarsi dopo lungo tempo. Quindi poco prima di *t=0* non scorre corrente né nel condensatore né sulla resistenza *2R*. La corrente circola quindi solo nella prima maglia dove $I = f/(R+R)$. Tale corrente crea sul resistore del ramo centrale una caduta di tensione ohmica $V_A - V_D = RI = f/2$. D'altra parte sul terzo ramo l'assenza di corrente fa sì che siano uguali i due potenziali $V_B=V_D$. Conseguentemente la tensione ai capi del condensatore vale $\Delta V_c = V_A - V_B = V_A - V_D = f/2$ cui corrisponde il valore di energia immagazzinata $U = (\Delta V_c)^2 C/2 = f^2 C/8$. Quando per *t=0* la topologia del circuito diviene quella della configurazione (*b)* il condensatore subisce un processo di scarica che parte dal valore di energia immagazzinata del caso precedente $U_{in} = f^2 C/8$=50μJ e lo porta progressivamente a zero $U_{fin} = 0$ per $t \to \infty$. La dinamica del processo di scarica avviene con un tempo caratteristico $\tau = 3RC$ e con una legge di decadimento esponenziale della tensione sul condensatore $\Delta V_c(t) = (f/2)\cdot e^{-t/\tau}$ che partendo dal valore *f/2* tende progressivamente ad annullarsi. Al tempo t_o l'energia immagazzinata si dimezza divenendo $U(t_o) = f^2 C/16$ cui corrisponde la tensione $\Delta V_c(t_o) = f/\sqrt{8}$. Il tempo tempo t_o si ricava come segue: $\Delta V_c(t_o) = (f/2)\cdot e^{-t_o/\tau} = f/\sqrt{8}$, da cui $e^{-t_o/\tau} = 1/\sqrt{2}$, e quindi $t_o = \tau \ln\sqrt{2} = 3RC\ln\sqrt{2} = 1.04$ms.



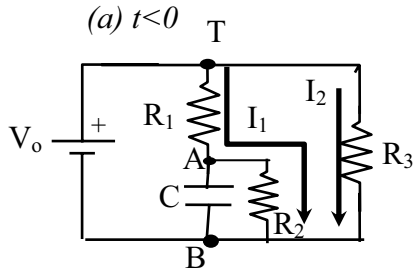
(b) t>0



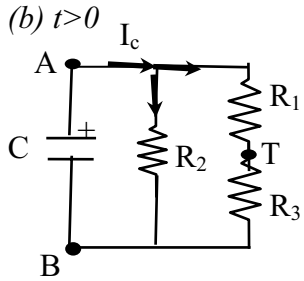
5. Prima dell'apertura dell'interruttore per *t<0* (figura *a*) il circuito è in condizione stazionaria, il condensatore è carico e si comporta come un circuito aperto. La batteria, posizionata fra i punti *T* e *B,* alimenta le due correnti $I_1 = V_o/(R_1+R_2)$=*1mA* ed $I_2 = V_o/R_3$ =2mA. La differenza di potenziale ai capi del condensatore $\Delta V_c = V_A - V_B$ coincide con la caduta di potenziale ohmica ai capi della resistenza R_2 da cui $\Delta V_c = V_A - V_B = I_1 R_2 = V_o(R_2/(R_1+R_2)) = 3V_o/4 = 6V$ che rappresenta la tensione ai capi del condensatore all'apertura ΔV_o (*t=0*). Dopo l'apertura dell'interruttore la batteria V_o viene scollegata ed il condensatore si scarica sulle 3 resistenze (vedi figura *b*) che vengono viste dal condensatore come una resistenza equivalente $R_{eq} = (R_1+R_3)//R_2 = \dfrac{(R_1+R_3)R_2}{R_1+R_2+R_3} = 3k\Omega$

(Infatti la corrente del condensatore I_c si ripartisce in una corrente che attraversa R_2 ed un'altra che attraversa in serie R_1 ed R_3). La tensione ai capi del condensatore per t>0 segue la legge $\Delta V_c(t) = \Delta V_o \exp[-t/\tau]$ dove il tempo di scarica $\tau = R_{eq}C = 3ms$ ed il tempo *t** si trova dalla relazione $t^* = \tau \ln(\Delta V_o/\Delta V^*) = \tau \ln(4) = 4.16$ ms.

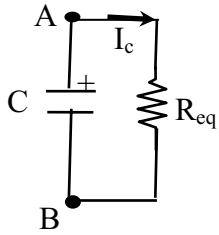
(a) t<0



(b) t>0



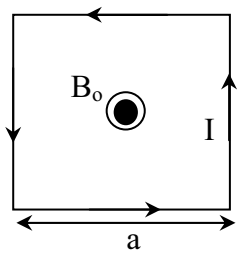
(schema equivalente)



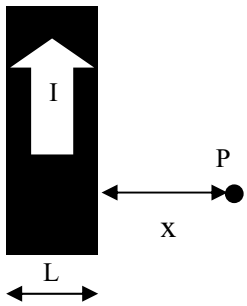
FISICA

A.A. 2004-2005
Ingegneria Gestionale
12 prova del 15 Giugno 2005

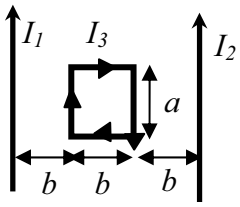
1. Calcolare il vettore induzione magnetica B_o nel centro della spira quadrata di lato a percorsa dalla corrente continua I. Confrontare il risultato con quello che si avrebbe nel caso di una spira circolare di raggio $R=a/2$



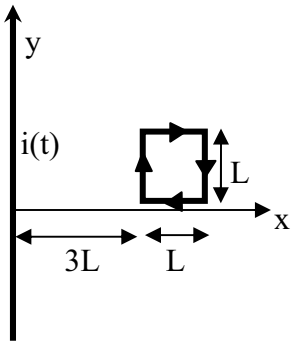
2. Un sottile nastro conduttore, rettilineo, infinito è percorso uniformemente dalla corrente I. Calcolare il vettore induzione magnetica B_o in un punto generico P a distanza x dal bordo del nastro.



3. Due fili infinitamente lunghi paralleli sono percorsi dalle correnti I_1 ed I_2 disegnate in figura. Una spira rettangolare di lati a,b giace nel piano formato dai due fili paralleli ed è percorsa dalla corrente I_3. Determinare la forza agente sulla spira.



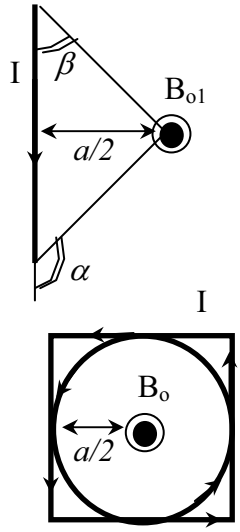
4. Una spira quadrata di lato L giace ad una distanza $d=3L$ da un filo rettilineo indefinito percorso dalla corrente sinusoidale $i(t)=i_{max}\cos(\omega t)$. Nota la resistenza elettrica R della spira, calcolare l'intensità della corrente massima indotta. Si trascuri l'autoinduzione presente nella spira [Dati: $L = 10$ cm, $i_{max}= 2$mA, $\omega=314$rad/s, $R=1\Omega$]



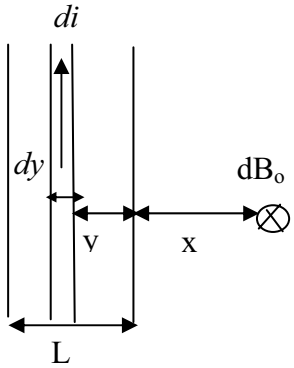
5. Siano date due spire metalliche concentriche rispettivamente di raggio a=1cm e b=1m. Sulla spira grande circola una corrente alternata $I_b(t)=i_{bmax}\cos(2\pi ft)$. Calcolare l'espressione della corrente indotta nella spira piccola fornendone il valore massimo. Si assuma $R=5\Omega$ la resistenza elettrica della spira piccola e si trascurino i fenomeni di autoinduzione. [$i_{bmax}= 2$mA, $f=50$Hz]

FISICA

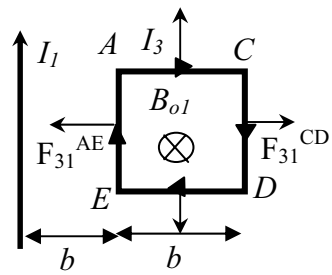
A.A. 2004-2005
Ingegneria Gestionale
Soluzioni della 12ª prova



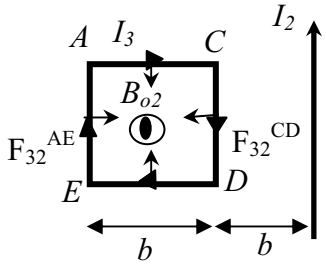
1. La spira quadrata è formata da 4 tratti rettilinei di lato *a* percorsi dalla comune corrente *I*. Ciascun lato genera nel centro della spira un contributo di vettore induzione magnetica uscente dal piano del foglio. In generale il contributo B_{o1} generato da un segmento rettilineo vale $B_{01} = \frac{\mu_o I}{4\pi}\frac{\cos\beta - \cos\alpha}{R}$ dove nel nostro caso essendo $\beta=\pi/4$, $\alpha=3\pi/4$, $R=a/2$ si ottiene $B_{01} = 2\sqrt{2}\frac{\mu_o I}{4\pi a}$. Anche gli altri tre lati generano singolarmente lo stesso contributo (in modulo, direzione e verso). Il valore complessivo è quindi $B_{quadrato} = 4B_{01} = \frac{2\sqrt{2}}{\pi}\frac{\mu_o I}{a}$. Esso è inferiore al campo generato da una spira circolare di raggio $R=a/2$, che vale $B_{cerchio} = \frac{\mu_o I}{a}$. Il loro rapporto infatti vale $B_{quadrato}/B_{cerchio} = 2\sqrt{2}/\pi = 0.9$



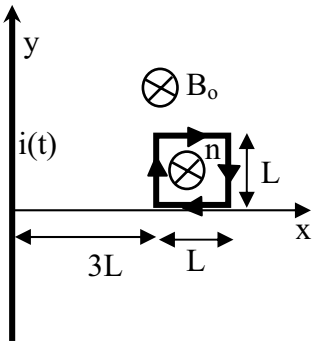
2. Il nastro conduttore può pensarsi formato da un numero infinito di fili rettilinei di spessore infinitesimo *dy* sui quali scorre la corrente infinitesima *di*. Il valore di questa corrente si ottiene dalla proporzione $di:I=dy:L$ da cui $di = (I/L)dy$. Il vettore induzione magnetica infinitesimo dB_o creato dal generico filo distante $(x+y)$ dal punto di osservazione vale per Biot-Savart $dB_o = \frac{\mu_o}{2\pi}\frac{di}{x+y} = \frac{\mu_o I}{2\pi L}\frac{dy}{x+y}$ con direzione entrante nel piano del foglio. Il vettore induzione complessivo B_o si ottiene integrando il contributo infinitesimo dB_o al variare della posizione del filo *y* nell'intervallo $0<y<L$, da cui: $B_o = \int dB_o = \frac{\mu_o I}{2\pi L}\int_0^L \frac{dy}{x+y} = \frac{\mu_o I}{2\pi L}\ln\left(\frac{x+L}{x}\right) = \frac{\mu_o I}{2\pi L}\ln\left(1+\frac{L}{x}\right)$ con il verso indicato in figura. Si noti come facendo tendere le dimensioni trasversali del nastro a zero ($L \to 0$), il termine logaritmico tenda al valore $\ln\left(1+\frac{L}{x}\right) \cong \frac{L}{x}$, ed il vettore induzione tenda correttamente al campo di Biot-Savart generato da un filo infinito $B_o = \frac{\mu_o I}{2\pi x}$.



3. La spira rettangolare ACDE è sottoposta a forze magnetiche interne ed esterne. Le forze magnetiche interne dovute al campo magnetico da essa stessa generato hanno risultante nulla e quindi nel caso di una spira rigida non danno alcun effetto. Le forze magnetiche esterne sono quelle dovute ai campi magnetici B_{o1} generato dalla corrente I_1 e B_{o2} dalla I_2. Tali forze esterne sono descritte in generale dalla 2ª formula di Laplace $\vec{F} = \vec{F}_{31} + \vec{F}_{32} = I_3\int d\vec{l}_3 \times \vec{B}_{o1} + I_3\int d\vec{l} \times \vec{B}_{o2}$. Calcoliamo prima la forza $\vec{F}_{31}$ che può pensarsi come somma la risultante delle 4 forze agenti sui 4 lati della spira rettangolar. Le 2 forze sui due lati AC ed ED sono uguali ed opposte e non danno alcun effetto, mentre sul lato AE c'è una forza attrattiva di valore



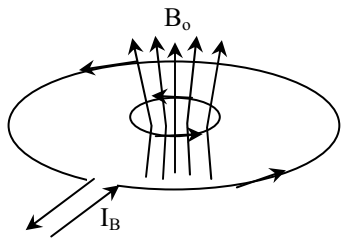
$F_{31}^{AE} = B_{o1} I_3 a = \frac{\mu_o}{2\pi b} I_1 I_3 a$ maggiore della forza repulsiva sul lato CD che vale $F_{31}^{CD} = B_{o1} I_3 a = \frac{\mu_o}{4\pi b} I_1 I_3 a = \frac{F_{31}^{AE}}{2}$. La risultante $F_{31} = \frac{\mu_o I_1 I_3 a}{4\pi b}$ è quindi attrattiva verso il primo filo. Ragionamento analogo deve essere fatto per trovare la forza risultante $\vec{F}_{32}$, dove le forze che non compensate sono sul lato CD $F_{32}^{CD} = B_{o2} I_3 a = \frac{\mu_o}{2\pi b} I_2 I_3 a$ repulsiva e doppia rispetto a quella attrattiva sul lato AE $F_{32}^{AE} = B_{o2} I_3 a = \frac{\mu_o}{4\pi b} I_2 I_3 a$. La risultante $F_{32} = \frac{\mu_o I_2 I_3 a}{4\pi b}$ è quindi repulsiva ed ha ho stesso verso della F_{31}. La risulatnte totale è quindi diretta verso il primo filo con intensità $F_3 = \frac{\mu_o a}{4\pi b}(I_1 I_3 + I_2 I_3)$



4. Il campo magnetico nonuniforme generato dal filo rettilineo vale, per la legge di Biot e Savart, $B_o(x,t) = \frac{\mu_o i(t)}{2\pi x}$ con direzione e verso indicati in figura. Dopo aver scelto una opportuna orientazione per la spira quadrata in modo che la normale alla spira $\hat{n}$ abbia la stessa direzione e verso di $\vec{B}_o$, procediamo al calcolo del flusso concatenato con la spira Φ_c:

$\Phi_c = \int \vec{B}_o \cdot \hat{n} dS = \int B_o dS = \frac{\mu_o i(t)}{2\pi} \int_o^L dy \int_{3L}^{4L} \frac{dx}{x} = \frac{\mu_o i(t) L}{2\pi} \ln(4/3)$. Applicando la legge di Faraday-Neuman-Lenz possiamo calcolare la forza elettromotrice indotta nella spira con l'equazione $f_i = -\frac{d\Phi_c}{dt} = -\frac{\mu_o L}{2\pi} \ln\left(\frac{4}{3}\right) \frac{d}{dt} i(t) = \frac{\mu_o L i_{\max} \omega}{2\pi} \ln\left(\frac{4}{3}\right) sin(\omega t)$. Infine l'intensità di corrente indotta nel circuito si ottiene $i_2(t) = f_i / R$. Tale corrente è alternata ed ha valore massimo

$i_{2,\max} = \frac{\mu_o L i_{\max} \omega}{2\pi R} \ln\left(\frac{4}{3}\right) = \frac{4\pi 10^{-7} 10^{-1} \cdot 2 \cdot 10^{-3} \cdot 314}{2\pi \cdot 1}$ 0.288=3.61nA.



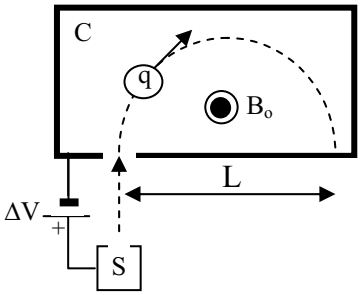
5. La spira esterna genera un vettore induzione magnetica che nella regione dove è posta la spira interna può essere considerato praticamente uniforme di intensità $B_o = \frac{\mu_o I_B}{2b}$ (campo al centro della spira). Il flusso concatenato è quindi $\Phi_c(t) = \int B_o dS = B_o \pi a^2 = \frac{\mu_o \pi a^2}{2b} I_B(t)$. La corrente indotta nella spira interna si calcola con la legge di Faraday-Neumann-Lenz $I_A(t) = -\frac{1}{R}\frac{d\Phi_c}{dt} = \left(\frac{\mu_o \pi^2 a^2 i_{b\max} f}{R \cdot b}\right) \sin(2\pi f t)$ ed ha valore massimo $i_{A\max} = \left(\frac{\mu_o \pi^2 a^2 i_{b\max} f}{R \cdot b}\right) = 2.48\ 10^{-11}$ A.

FISICA II

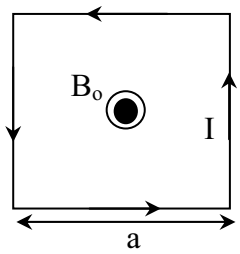
A.A. 2005-2006
Ingegneria Gestionale
6°prova del 16 Giugno 2006

Lo studente descriva il procedimento e la soluzione degli esercizi proposti. Gli elaborati verranno ritirati Mercoledì 21 Giugno e saranno valutati ai fini del superamento dell'esame finale.

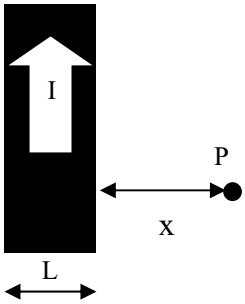
1. Per misurare le masse degli ioni, Dempster utilizzò il dispositivo in figura. Nella camera S viene prodotto uno ione di carica $+q$ e di massa m praticamente in quiete. Lo ione viene quindi accelerato dalla differenza di potenziale ΔV fino ad entrare, da una fenditura, nella camera C dove è presente solo un vettore di induzione magnetica B_o , uniforme e diretto come in figura. Nella camera C lo ione descrive un arco di circonferenza fino ad urtare la parete della camera a distanza L dalla fenditura. Note le quantità q, B_o, L, ΔV, trovare il valore della massa m dello ione.



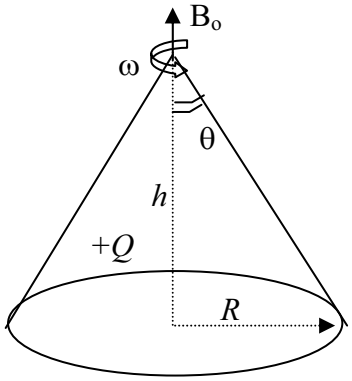
2. Calcolare il vettore induzione magnetica B_o nel centro della spira quadrata di lato a percorsa dalla corrente continua I. Confrontare il risultato con quello che si avrebbe nel caso di una spira circolare di raggio $R=a/2$



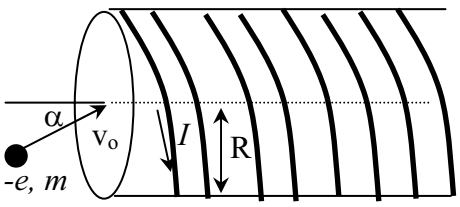
3. Un sottile nastro conduttore, rettilineo, infinito è percorso uniformemente dalla corrente I. Calcolare il vettore induzione magnetica B_o in un punto generico P a distanza x dal bordo del nastro.



4. Sulla superficie laterale di un cono di base circolare R ed altezza h, è disposta uniformemente la carica Q. Se il cono viene messo in rotazione intorno al suo asse di simmetria con velocità angolare costante ω, calcolare il campo di induzione magnetica nel vertice.



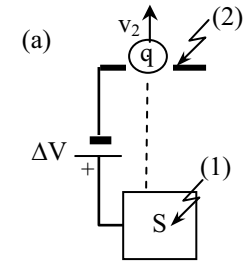
5. Una particella di carica $-e$, massa m incide al centro di una faccia piana di un solenoide molto lungo costituito da un filo conduttore avvolto in aria con densità di spire uniforme $n=N/L$ percorso da una corrente I. La velocità v_o forma un angolo θ con l'asse del solenoide. Calcolare il valore minimo della corrente I necessaria per far sì che la particella non urti la superficie laterale del solenoide una volta entrata in esso. Si trascurino gli effetti di bordo. [$e=1.6\ 10^{-19}$ C, $m=9\ 10^{-31}$ kg, $R=1$cm, $v_o= 3\ 10^5$ m/s, $n=1000\ m^{-1}$, $\theta=30°$]

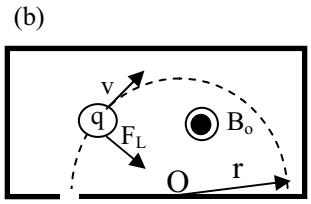


FISICA II

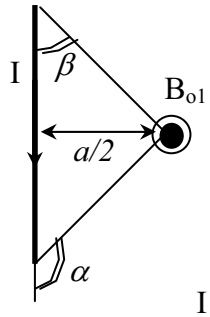
A.A. 2005-2006
Ingegneria Gestionale
Soluzioni della 6ª prova

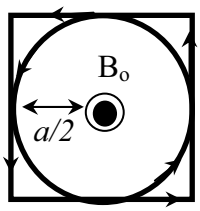
1. Lo ione prodotto nella camera *S* ed accelerato dalla differenza di potenziale *ΔV*, descrive inizialmente un moto rettilineo acquistando energia cinetica dalla posizione (1), alla posizione (2) di ingresso alla camera *C (fig.a)*. Applicando la legge di conservazione dell'energia nelle due posizioni si ottiene $T_1 + U_1 = T_2 + U_2$ dove $U=qV$ è l'energia potenziale dello ione. Essendo la sua energia cinetica iniziale nulla $T_1=0$, l'equazione diventa $T_2 = q(V_1 - V_2) = q\Delta V$ da cui si ricava la velocità di ingresso $v_2 = \sqrt{2T_2/m} = \sqrt{2q\Delta V/m}$. Una volta entrato nella camera *C* lo ione subisce una forza di Lorentz $\vec{F}_L = q\vec{v} \times \vec{B}_o$, centripeta, che gli fa descrivere un moto circolare uniforme (*fig.b*). Applicando il II principio la forza di Lorentz deve produrre l'accelerazione normale del moto $F_L = qvB_o = ma_n = mv^2/r$, da cui si ricava il diametro della circonferenza $L = 2r = 2mv/(qB_o)$. La velocità *v* all'interno della camera C è in modulo costante e pari alla velocità di ingresso v_2 da cui $L = \sqrt{\dfrac{8m\Delta V}{qB_o^2}}$ e $m = \dfrac{qB_o^2 L^2}{8\Delta V}$.



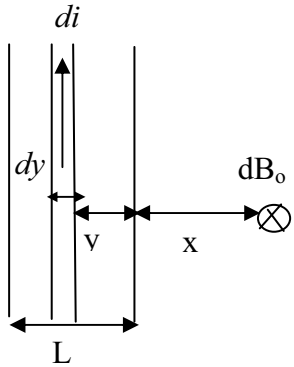


2. La spira quadrata è formata da 4 tratti rettilinei di lato *a* percorsi dalla comune corrente *I*. Ciascun lato genera nel centro della spira un contributo di vettore induzione magnetica uscente dal piano del foglio. In generale il contributo B_{o1} generato da un segmento rettilineo vale $B_{01} = \dfrac{\mu_o I}{4\pi}\dfrac{\cos\beta - \cos\alpha}{R}$ dove nel nostro caso essendo $\beta=\pi/4$, $\alpha=3\pi/4$, $R=a/2$ si ottiene $B_{01} = 2\sqrt{2}\dfrac{\mu_o I}{4\pi a}$. Anche gli altri tre lati generano singolarmente lo stesso contributo (in modulo, direzione e verso). Il valore complessivo è quindi $B_{quadrato} = 4B_{01} = \dfrac{2\sqrt{2}}{\pi}\dfrac{\mu_o I}{a}$. Esso è inferiore al campo generato da una spira circolare di raggio $R=a/2$, che vale $B_{cerchio} = \dfrac{\mu_o I}{a}$. Il loro rapporto infatti vale $B_{quadrato}/B_{cerchio} = 2\sqrt{2}/\pi = 0.9$



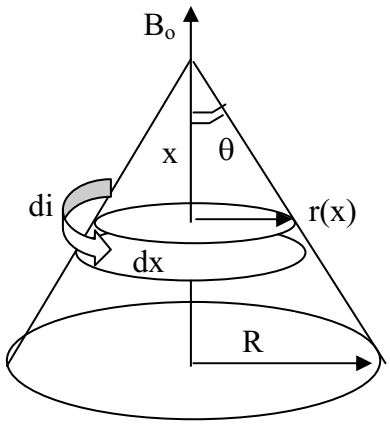


3. Il nastro conduttore può pensarsi formato da un numero infinito di fili rettilinei di spessore infinitesimo *dy* sui quali scorre la corrente infinitesima *di*. Il valore di questa corrente si ottiene dalla proporzione *di:I=dy:L* da cui $di = (I/L)dy$. Il vettore induzione magnetica infinitesimo dB_o creato dal generico filo distante *(x+y)* dal punto di osservazione vale per Biot-Savart $dB_o = \dfrac{\mu_o}{2\pi}\dfrac{di}{x+y} = \dfrac{\mu_o I}{2\pi L}\dfrac{dy}{x+y}$ con direzione entrante nel piano del foglio. Il vettore induzione complessivo B_o si ottiene integrando il contributo infinitesimo dB_o al variare della posizione del filo *y* nell'intervallo $0<y<L$, da

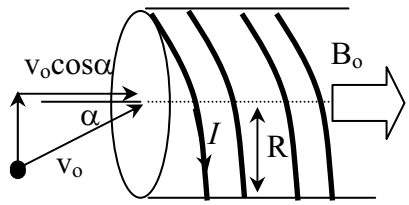


cui: $B_o = \int dB_o = \dfrac{\mu_o I}{2\pi L}\int_0^L \dfrac{dy}{x+y} = \dfrac{\mu_o I}{2\pi L}\ln\left(\dfrac{x+L}{x}\right) = \dfrac{\mu_o I}{2\pi L}\ln\left(1+\dfrac{L}{x}\right)$ con il verso indicato in figura. Si noti come facendo tendere le dimensioni trasversali del nastro a zero ($L \to 0$), il termine

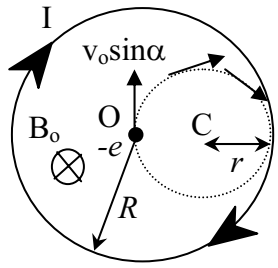
logaritmico tenda al valore $\ln\left(1+\frac{L}{x}\right) \cong \frac{L}{x}$, ed il vettore induzione tenda correttamente al campo di Biot-Savart generato da un filo infinito $B_o = \frac{\mu_o I}{2\pi x}$.



4. Sulla spira di altezza dx in figura 1, la carica in moto $dq = \sigma S = \sigma 2\pi r dx$ crea una corrente $di = dq/T = \omega dq/2\pi = \omega\sigma r dx$. Tale corrente genera un contributo al campo di induzione nel vertice pari a $dB_o = \frac{\mu_o}{2}\frac{r^2 di}{\left(r^2+x^2\right)^{3/2}} = \frac{\mu_o \omega\sigma r^3}{2\left(r^2+x^2\right)^{3/2}}dx$ diretto lungo l'asse. Sfruttando la relazione $r = x \cdot tg(\theta)$, si ottiene $dB_o = \frac{\mu_o \omega\sigma x^3 tg^3(\theta)}{2\left[x^2\left(1+tg^2(\theta)\right)\right]^{3/2}}dx = \frac{\mu_o \omega \cdot \sigma \cdot sin^3(\theta)}{2}dx$, che integrato su tutte le spire infinitesimi da 0 ad h dà luogo al campo $B_o = \frac{\mu_o \omega \cdot \sigma \cdot h \cdot}{2}\frac{R^3}{\left(R^2+h^2\right)^{3/2}}$ o equivalentemente in termini di $Q = \sigma\left(\frac{2\pi R \cdot \sqrt{R^2+h^2}}{2}\right)$ si ottiene $B_o = \frac{\mu_o \omega \cdot Q \cdot h \cdot}{2\pi}\frac{R^2}{\left(R^2+h^2\right)^2}$



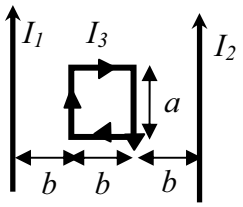
5. All'interno del solenoide è presente un vettore induzione magnetica uniforme di intensità $B_o = \mu_o nI$, diretto lungo l'asse del solenoide. L'elettrone entra nel solenoide con una velocità $\vec{v}_o$ che forma un angolo α con $\vec{B}_o$. Il moto elicoidale dell'elettrone può essere scomposto in un moto rettilineo uniforme lungo l'asse con velocità $v_o \cos\alpha$, ed un moto circolare uniforme nel piano ortogonale all'asse con velocità iniziale $v_o sin\alpha$. In questo piano l'elettrone a causa della forza di Lorenz $F_L = ev_o B_o sin\alpha$, responsabile dell'accelerazione normale, parte dal punto dell'asse *O* e descrive un moto circolare uniforme orario di raggio *r* intorno al centro *C*. Applicando il II principio $F_L = ma_n = m\frac{(v_o sin\alpha)^2}{r}$ si ricava il raggio di curvatura $r = \frac{mv_o sin\alpha}{eB_o} = \frac{mv_o sin\alpha}{e\mu_o nI}$. Affinchè l'elettrone non impatti con la superficie laterale del solenoide si deve avere $r < R/2$ che combinata con la precedente equazione fornisce il valore minimo della corrente $I \geq I_{\min} = \frac{2mv_o sin\alpha}{e\mu_o nR} = 0.134$ A



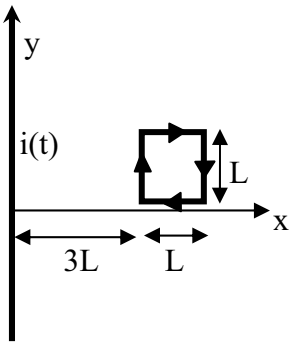
FISICA II

A.A. 2005-2006
Ingegneria Gestionale
7 prova del 23 Giugno 2006

1. Due fili infinitamente lunghi paralleli sono percorsi dalle correnti I_1 ed I_2 disegnate in figura. Una spira rettangolare di lati a,b giace nel piano formato dai due fili paralleli ed è percorsa dalla corrente I_3. Determinare la forza agente sulla spira.



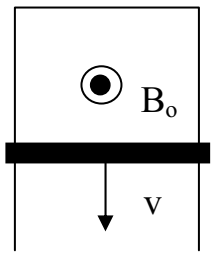
2. Una spira quadrata di lato L giace ad una distanza $d=3L$ da un filo rettilineo indefinito percorso dalla corrente sinusoidale $i(t)=i_{max}\cos(\omega t)$. Nota la resistenza elettrica R della spira, calcolare l'intensità della corrente massima indotta. Si trascuri l'autoinduzione presente nella spira [Dati: $L = 10$ cm, $i_{max}= 2$mA, $\omega=314$rad/s, $R=1\Omega$]



3. Siano date due spire metalliche concentriche rispettivamente di raggio a=1cm e b=1m. Sulla spira grande circola una corrente alternata $I_b(t)=i_{bmax}\cos(2\pi ft)$. Calcolare l'espressione della corrente indotta nella spira piccola fornendone il valore massimo. Si assuma $R=5\Omega$ la resistenza elettrica della spira piccola e si trascurino i fenomeni di autoinduzione. [$i_{bmax}= 2$mA, $f=50$Hz]

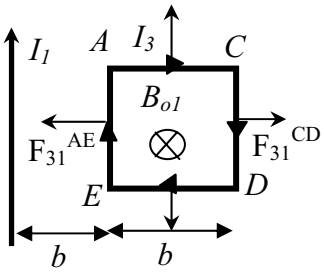
4. Una spira rigida quadrata di lato a e di resistenza elettrica R si muove nel vuoto su di un piano contenente un lungo filo rettilineo percorso dalla corrente I, con velocità costante v, mantenendo uno dei suoi lati parallelo al filo stesso. Ricavare in funzione della distanza L(t) l'espressione della forza esterna che occorre applicare alla spira per mantenere costante la velocità di traslazione.

5. Una barretta cilindrica di rame di resistività ρ e densità δ può scorrere mediante contatti striscianti su due guide metalliche verticali connesse elettricamente fra di loro (come in figura). Calcolare la velocità limite di caduta quando la barretta è lasciata cadere per gravità in un campo magnetico orizzontale uniforme B_o.

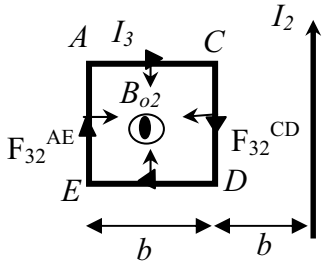


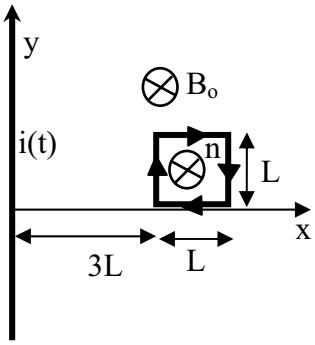
FISICA II

A.A. 2005-2006
Ingegneria Gestionale
Soluzioni della 7ª prova



1. La spira rettangolare ACDE è sottoposta a forze magnetiche interne ed esterne. Le forze magnetiche interne dovute al campo magnetico da essa stessa generato hanno risultante nulla e quindi nel caso di una spira rigida non danno alcun effetto. Le forze magnetiche esterne sono quelle dovute ai campi magnetici B_{o1} generato dalla corrente I_1 e B_{o2} dalla I_2. Tali forze esterne sono descritte in generale dalla 2ª formula di Laplace $\vec{F} = \vec{F}_{31} + \vec{F}_{32} = I_3 \int d\vec{l}_3 \times \vec{B}_{o1} + I_3 \int d\vec{l} \times \vec{B}_{o2}$. Calcoliamo prima la forza $\vec{F}_{31}$ che può pensarsi come somma la risultante delle 4 forze agenti sui 4 lati della spira rettangolar. Le 2 forze sui due lati AC ed ED sono uguali ed opposte e non danno alcun effetto, mentre sul lato AE c'è una forza attrattiva di valore $F_{31}^{AE} = B_{o1} I_3 a = \frac{\mu_o}{2\pi b} I_1 I_3 a$ maggiore della forza repulsiva sul lato CD che vale $F_{31}^{CD} = B_{o1} I_3 a = \frac{\mu_o}{4\pi b} I_1 I_3 a = \frac{F_{31}^{AE}}{2}$. La risultante $F_{31} = \frac{\mu_o I_1 I_3 a}{4\pi b}$ è quindi attrattiva verso il primo filo. Ragionamento analogo deve essere fatto per trovare la forza risultante $\vec{F}_{32}$, dove le forze che non compensate sono sul lato CD $F_{32}^{CD} = B_{o2} I_3 a = \frac{\mu_o}{2\pi b} I_2 I_3 a$ repulsiva e doppia rispetto a quella attrattiva sul lato AE $F_{32}^{AE} = B_{o2} I_3 a = \frac{\mu_o}{4\pi b} I_2 I_3 a$. La risultante $F_{32} = \frac{\mu_o I_2 I_3 a}{4\pi b}$ è quindi repulsiva ed ha ho stesso verso della F_{31}. La risulatnte totale è quindi diretta verso il primo filo con intensità $F_3 = \frac{\mu_o a}{4\pi b}(I_1 I_3 + I_2 I_3)$





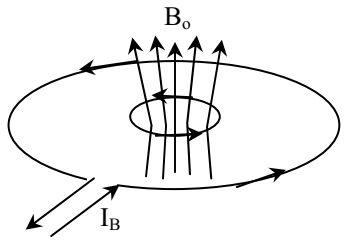
2. Il campo magnetico nonuniforme generato dal filo rettilineo vale, per la legge di Biot e Savart, $B_o(x,t) = \frac{\mu_o i(t)}{2\pi x}$ con direzione e verso indicati in figura. Dopo aver scelto una opportuna orientazione per la spira quadrata in modo che la normale alla spira $\hat{n}$ abbia la stessa direzione e verso di $\vec{B}_o$, procediamo al calcolo del flusso concatenato con la spira Φ_c:

$$\Phi_c = \int \vec{B}_o \cdot \hat{n} dS = \int B_o dS = \frac{\mu_o i(t)}{2\pi} \int_o^L dy \int_{3L}^{4L} \frac{dx}{x} = \frac{\mu_o i(t) L}{2\pi} \ln(4/3).$$

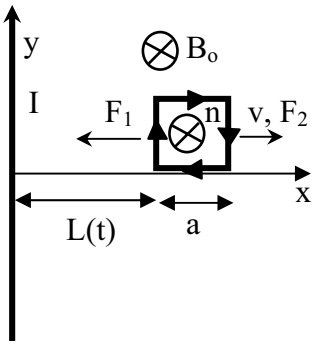
Applicando la legge di Faraday-Neuman-Lenz possiamo calcolare la forza elettromotrice indotta nella spira con l'equazione $f_i = -\frac{d\Phi_c}{dt} = -\frac{\mu_o L}{2\pi} \ln\left(\frac{4}{3}\right) \frac{d}{dt} i(t) = \frac{\mu_o L i_{\max} \omega}{2\pi} \ln\left(\frac{4}{3}\right) sin(\omega t)$. Infine l'intensità di corrente indotta nel circuito si ottiene $i_2(t) = f_i / R$. Tale corrente è alternata ed ha valore massimo

$$i_{2,\max} = \frac{\mu_o L i_{\max} \omega}{2\pi R} \ln\left(\frac{4}{3}\right) = \frac{4\pi 10^{-7} 10^{-1} \cdot 2 \cdot 10^{-3} \cdot 314}{2\pi \cdot 1} \; 0.288 = 3.61 \text{nA}.$$

3. La spira esterna genera un vettore induzione magnetica che nella regione dove è posta la spira interna può essere considerato praticamente uniforme di intensità $B_o = \frac{\mu_o I_B}{2b}$ (campo al centro della spira). Il flusso concatenato è quindi $\Phi_c(t) = \int B_o dS = B_o \pi a^2 = \frac{\mu_o \pi a^2}{2b} I_B(t)$. La corrente indotta nella spira interna si calcola con la legge di Faraday-Neumann-Lenz $I_A(t) = -\frac{1}{R}\frac{d\Phi_c}{dt} = \left(\frac{\mu_o \pi^2 a^2 i_{b\max} f}{R \cdot b}\right)\sin(2\pi f t)$ ed ha valore massimo $i_{A\max} = \left(\frac{\mu_o \pi^2 a^2 i_{b\max} f}{R \cdot b}\right) = 2.48\ 10^{-11}$ A.

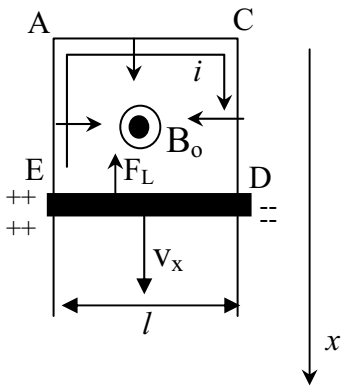


4. Il campo magnetico nonuniforme generato dal filo rettilineo vale, per la legge di Biot e Savart, $B_o(x) = \frac{\mu_o I}{2\pi x}$ con direzione e verso indicati in figura. Dopo aver scelto una opportuna orientazione per la spira quadrata in modo che la normale alla spira $\hat{n}$ abbia la stessa direzione e verso di $\vec{B}_o$, procediamo al calcolo del flusso concatenato con la spira Φ_c:



$\Phi_c(t) = \int \vec{B}_o \cdot \hat{n} dS = \int B_o dS = \frac{\mu_o I}{2\pi}\int_o^L dy \int_L^{L+a} \frac{dx}{x} = \frac{\mu_o I a}{2\pi}\ln\left(1 + \frac{a}{L(t)}\right)$. Applicando la legge di Faraday-Neumann-Lenz possiamo calcolare la corrente indotta nella spira $i = -\frac{1}{R}\frac{d\Phi_c}{dt} = \frac{\mu_o I a^2}{2\pi R}\frac{v}{L(L+a)}$. Infine applicando la 2 formula di Laplace si ottengono le forze $F_1 = aiB_{o1} = \frac{\mu_o^2 I^2 a^3}{(2\pi)^2 R}\frac{v}{L^2(L+a)}$ e $F_2 = aiB_{o2} = \frac{\mu_o^2 I^2 a^3}{(2\pi)^2 R}\frac{v}{L\ (L+a)^2}$. La risultante è quindi attrattiva $F_1 - F_2 = \frac{\mu_o^2 I^2 a^4}{(2\pi)^2 R}\frac{v}{L^2(L+a)^2}$ e tende a rallentare il movimento della spira. Per mantenere la spira a velocità uniforme è quindi necessario applicare una forza esterna uguale e contraria alla risultante.

5. Il movimento della barretta *DE* causa una variazione di flusso di B_o nel circuito *ACDE* generando una forza elettromotrice indotta $f_i = B_o l v_x$ in accordo alla legge di Faraday-Neumann-Lenz, dove *l* è la lunghezza della barretta e *v* la sua velocità di caduta. La corrente circola nel verso indicato in figura con valore $i = f_i/R = B_o l v_x / R$. In accordo alla seconda formula di Laplace, sui 4 lati del circuito si generano forze attrattive. In particolare sull'unico lato mobile *DE* si genera una forza $F_L = ilB_o = B_o^2 l^2 v_x / R$ proporzionale alla velocità di caduta e contraria al moto (asse *x*) ed alla forza peso *P=mg*. Proiettando il II principio sull'asse di caduta *x*, si ottiene $ma_x = mg - F_L$ che rappresenta un moto verticale in cui la velocità, inizialmente nulla, cresce tendendo ad un valore limite asintotico v_{lim}. Tale valore si ottiene equilibrando le forze $P = F_L$ da cui si ottiene $v_{\lim} = mgR/(B_o^2 l^2)$. Se esprimiamo la massa della barretta in funzione della sua densità $m = \delta(Sl)$ e la resistenza elettrica in funzione della resistività $R = \rho(l/S)$ si ottiene l'espressione finale $v_{\lim} = g(\delta\rho/B_o^2)$.

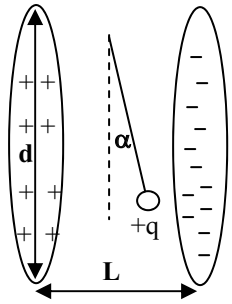


Università di Roma "La Sapienza"
Facoltà di Ingegneria

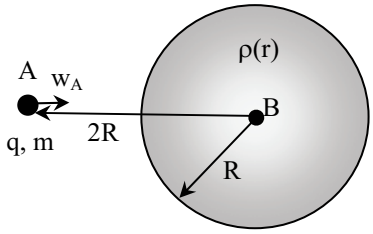
FISICA II

A.A. 2005-2006
Ingegneria Gestionale (M-Z)
5° appello del 20 Marzo 2007

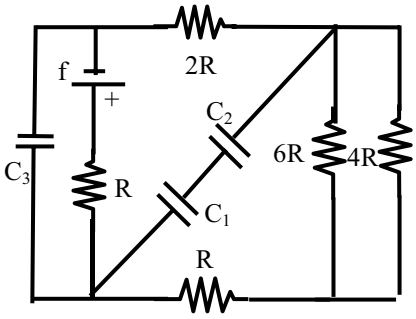
1. Una piccola sfera di massa **m**, dotata di carica positiva **q**, è sospesa mediante un filo inestensibile di massa trascurabile fra le due armature di un condensatore piano disposto in verticale. Dopo aver caricato il condensatore, il pendolo si dispone in una nuova posizione di equilibrio inclinata di un angolo α rispetto alla verticale. Conoscendo il diametro **d** delle sue armature circolari distanziate tra loro di **L**, determinare per quale valore della carica Q il pendolo si inclina di un angolo α**=15°**. **Facoltativo:** determinare il valore della tensione del filo. [**Dati: m**=10g, **d**=10cm, **q**=1nC]



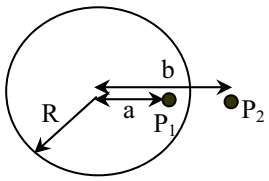
2. Sia data una sfera di centro in **B** e di raggio **R**=1m disposta nel vuoto. All'interno di tale sfera sia distrbuita una carica con densità volumetrica non uniforme in accordo alla legge $\rho(r) = \rho_o\left[1+\left(\frac{r}{R}\right)^2\right]$ dove r rappresenta la distanza del generico punto dal centro B, essendo ρ_o=10μC/m^3. Determinate la velocità minima $\mathbf{w_A}$ con cui deve essere lanciata una particella di massa **m**=10g e di carica **q**=1μC dal punto A distante **2R** dal centro della sfera affinché possa raggiungere il centro B.



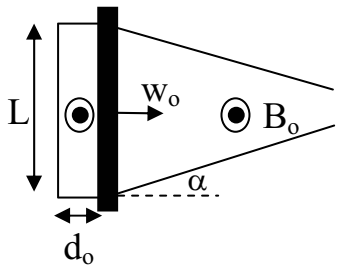
3. Il circuito elettrico si trova da lungo tempo nella configurazione riportata in figura. Determinate la carica presente sulle armature di ciascun condensatore. [Dati: f=8V, R=5kΩ, C_1,=4nF, C_2,=1nF, C_3,=10nF].



4. Un conduttore cilindrico infinitamente lungo di raggio R=5cm è percorso da una densità di corrente uniforme j=10A/m^2. Determinare il vettore induzione magnetica nel punto P_1 interno al cilindro e posto alla distanza a=3cm dall'asse del conduttore. Calcolare anche in quale altro punto P_2 esterno al cilindro si registra lo stesso vettore di induzione magnetica.

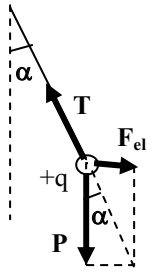


5. Una barretta cilindrica di resistenza elettrica R=20Ω può scorrere su contatti elettrici striscianti disposti, sul piano orizzontale, su due guide metalliche convergenti con inclinazione α come riportato in figura. Assumendo che il moto della barretta sia forzato ad essere rettilineo uniforme con velocità w_o=3m/s, e che sia presente un vettore induzione magnetica verticale uniforme di valore B_o=0.1 T, determinare il verso e l'andamento temporale della corrente indotta nel circuito e calcolare il suo valore dopo t=3ms [Dati: L=3cm, α=10°. Si trascurino i fenomeni di autoinduzione]



Università di Roma "La Sapienza"
Facoltà di Ingegneria
FISICA II
A.A. 2005-2006
Ingegneria Gestionale (M-Z)
5° appello del 20 Marzo 2007

1. Nell'ipotesi di distanza fra le armature molto inferiore rispetto al diametro di armatura ossia L«d, il campo elettrico interno al condensatore piano può essere assimilato ad un campo uniforme di valore $E_o = \dfrac{Q}{\varepsilon_o S} = \dfrac{Q}{\varepsilon_o \pi (d/2)^2}$



Il pendolo è soggetto alla forza peso **P=mg**, alla forza elettrica $\mathbf{F_{el}=qE_o}$ e alla sua tensione **T**

All'equilibrio vale $tg\alpha = \dfrac{F_{el}}{P} = \dfrac{qE_o}{mg} = \dfrac{4qQ}{\pi\varepsilon_o d^2 mg}$ da cui $Q = \dfrac{\pi\varepsilon_0 d^2 mg}{4q} tg\alpha = \mathbf{1.82\ \mu C}$

Facoltativo: la tensione è $T = P/\cos\alpha = \mathbf{0.1\ N}$

2. Applicando la legge di Gauss, il flusso del campo elettrico uscente da una superficie sferica centrata in B e di raggio generico r vale sempre $\Phi(\vec{E}_o) = \int_\Sigma \vec{E}_o \cdot \hat{n}_{ext} dS = 4\pi r^2 E_o = Q_{\text{int}}/\varepsilon_o$ dove

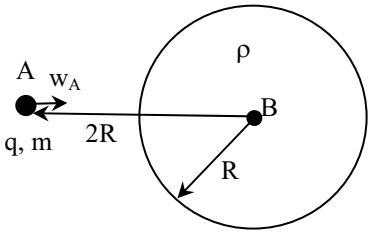
$$Q_{\text{int}} = \int \rho d\tau = \begin{cases} r < R & \int_0^r \rho(r) 4\pi r^2 dr = 4\pi\rho_o \left(\dfrac{r^3}{3} + \dfrac{r^5}{5R^2}\right) \\ r > R & \int_0^R \rho(r) 4\pi r^2 dr = 4\pi\rho_o \left(\dfrac{8}{15} R^3\right) \end{cases}$$

ed il **campo $\mathbf{E_o}$**

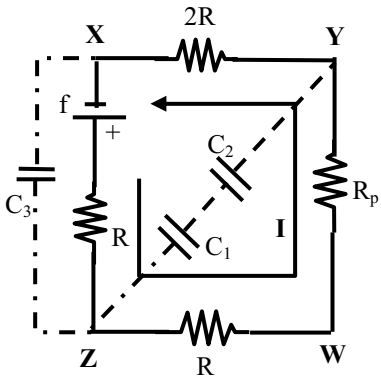
$$\begin{cases} r < R & E_{\text{int}} = \dfrac{\rho_o}{\varepsilon_o}\left(\dfrac{r}{3} + \dfrac{r^3}{5R^2}\right) \\ r > R & E_{ext} = \dfrac{\rho_o}{\varepsilon_o}\dfrac{8R^3}{15r^2} \end{cases}$$

da cui $V_B - V_A = \int_0^R E_{\text{int}} dr + \int_R^{2R} E_{ext} dr = \dfrac{\rho_o}{\varepsilon_o}\left\{\left[\dfrac{R^2}{6} + \dfrac{R^4}{20R^2}\right] + \dfrac{8R^3}{15}\left[\dfrac{1}{R} - \dfrac{1}{2R}\right]\right\} = \dfrac{29\rho_o R^2}{60\varepsilon_o}$

Dalla conservazione dell'energia nei punti A,B essendo nulla la velocità finale $\mathbf{w_B=0}$ si ha $qV_A + T_A = qV_B$ da cui la **velocità in A** $w_A = \sqrt{2q\Delta V_{BA}/m} = \sqrt{29 q\rho_o R^2 / 30 m\varepsilon_o}$ **=10.46 m/s**.



3. In condizioni stazionarie la corrente non scorre nei tre condensatori che in figura vengono pertanto tratteggiati. La corrente scorre solo nell'unica maglia secondo il percorso ZWYXZ (i due resistori in parallelo collegati nel ramo YW sono stati sostituiti da R_p=4R//6R=2.4R=12kΩ).



La **corrente di maglia** è $I = \dfrac{\sum f}{\sum R} = \dfrac{f}{R + R + 2.4R + 2R} = \mathbf{0.25mA}$

Le **cariche ai capi dei condensatori**

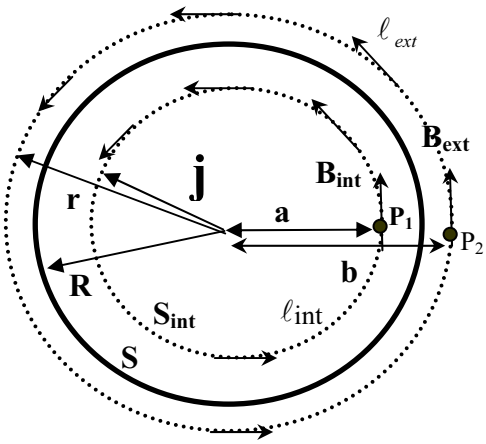
$$\begin{cases} Q_{c1} = Q_{c2} = (V_Z - V_Y)\dfrac{C_1 C_2}{C_1 + C_2} = \left[I(R + R_p)\right]\dfrac{C_1 C_2}{C_1 + C_2} = \mathbf{3.4nC} \\ Q_{C3} = (V_Z - V_X)C_3 = (f - IR)C_3 = \mathbf{67.5nC} \end{cases}$$

4. Il calcolo del vettore induzione magnetica $\mathbf{B_o}$ si ottiene a partire dalla legge di circuitazione di Ampere applicato ad una circonferenza ℓ di raggio r concentrica al conduttore.

Per punti interni al conduttore *r<R*

$$\oint_{\ell\,\text{int}} \vec{B}_o \cdot d\vec{l} = B_o(2\pi r) = \mu_o \int_{S\,\text{int}} \vec{j} \cdot \hat{n} dS = \mu_o j \pi r^2 \quad \text{da cui} \quad B_{\text{int}}(r) = \frac{\mu_o j r}{2}$$

Quindi nel punto P_1 si ha $B_{\text{int}}(a) = \dfrac{\mu_o j a}{2} = \mathbf{0.19\ \mu T}$

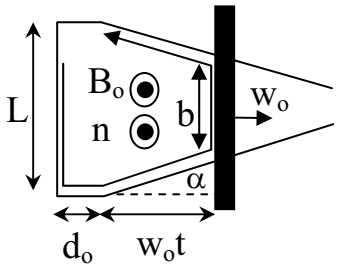


Per punti esterni al conduttore *r>R*

$$\oint_{\ell\,ext} \vec{B}_o \cdot d\vec{l} = B_o(2\pi r) = \mu_o \int_{S} \vec{j} \cdot \hat{n} dS = \mu_o j \pi R^2 \quad \text{da cui} \quad B_{ext}(r) = \frac{\mu_o j R^2}{2r}$$

Quindi dalla $B_{ext}(b) = B_{\text{int}}(a)$ si ottiene quando $b = R^2/a = \mathbf{8.3\ cm}$

5. Scelto il verso di percorrenza del circuito elettrico come indicato in figura, il vettore induzione magnetica $\mathbf{B_o}$ risulta equiverso alla normale **n** del dominio sul quale viene calcolato il flusso conacatenato. Il flusso vale quindi



$$\Phi_c = \iint \vec{B}_o \cdot \hat{n} dS = B_o \iint dS = B_o S$$

dove la superficie complessiva S si ottiene sommando l'area del rettangolo iniziale $\mathbf{S_o = d_o L}$, all'area del trapezio $\mathbf{S_{trap} = (L+b)w_o t/2}$ ove la base minore vale $\mathbf{b = L - 2\, w_o t\, tg\alpha}$
L'area totale è quindi data dalla relazione $\mathbf{S = S_o + S_{trap} = d_o L + (L - w_o t\, tg\alpha) w_o t}$

La **forza elettromotrice indotta** vale quindi $f_i = -\dfrac{d\Phi_c}{dt} = -B_o \dfrac{dS}{dt} = -B_o w_o (L - 2 w_o t \quad tg\alpha)$

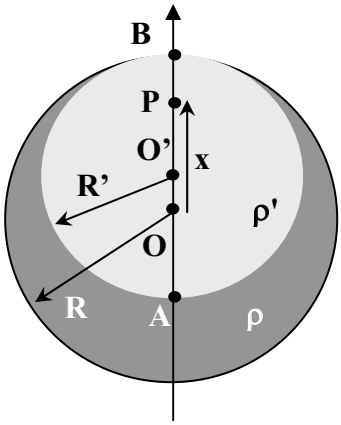
L'andamento temporale della **corrente indotta** è $i = \dfrac{f_i}{R} = \dfrac{-B_o w_o}{R}(L - 2 w_o t \quad tg\alpha)$

che calcolata al tempo t*=3ms dà luogo alla **corrente indotta i(t*)= - 0.402 mA** circolante quindi nel verso opposto a quello indicato in figura.

Università di Roma "La Sapienza"
Facoltà di Ingegneria

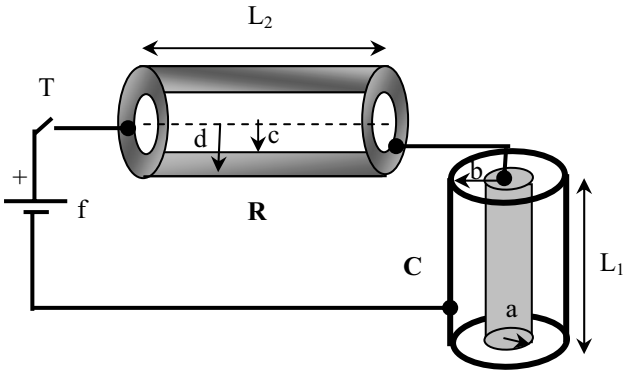
FISICA II

A.A. 2006-2007
Ingegneria Gestionale (M-Z)
1° appello del 6 Luglio 2007

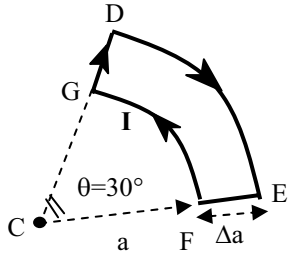


1. Una sfera di centro O' e di raggio R'=3cm è uniformemente carica con distribuzione volumetrica $\rho'=30\mu C/m^3$. Questa sfera si trova all'interno di una sfera più grande di centro O e di raggio R=4cm. Le due sfere si trovano in condizione di tangenza nel punto B. Lo spazio fra le due superfici sferiche è riempito con un a densità di carica volumetrica $\rho=10\mu C/m^3$. Determinare il campo elettrico in un punto P interno al segmento AB a distanza x=2cm da O come in figura . **Facoltativo**: calcolare la differenza di potenziale V_A-V_B

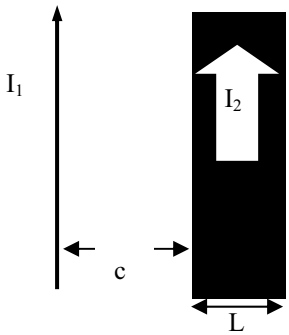
2. Calcolare l'energia che sarebbe necessaria per costruire un elettrone, ipotizzando che la carica negativa di valore assoluto $e=1.6\cdot10^{-19}$ C sia distribuita uniformemente all'interno di una sfera di raggio $R=2.8\cdot10^{-15}$ m. Dare inoltre una stima della massa a riposo dell'elettrone eguagliando l'energia elettrostatica precedentemente calcolata con la nota formula di Einstein $E=mc^2$ dove $c\cong300000$ km/s rappresenta la velocità della luce.



3. Il circuito RC in figura è costituito da un condensatore cilindrico di lunghezza L_1=1m le cui armature si trovano rispettivamente alle distanze a=9.95cm e b=10cm dall'asse. Il condensatore è completamente riempito con un dielettrico di costante dielettrica relativa ε_r=65. Il resistore è invece formato da un cilindro conduttore cavo di piombo di resistività $\rho=20.7\cdot10^{-8}\ \Omega m$, di lunghezza L_2=2m dove scorre una corrente uniforme attraverso la sezione metallica delimitata fra il cerchio interno di raggio c=0.45mm e quello esterno di raggio d=0.5mm. Sapendo che la batteria f=15V comincia a caricare il condensatore, inizialmente scarico, dopo la chiusura dell'interruttore al tempo t=0, determinare la carica sul condensatore dopo l'intervallo $\Delta t=3\mu s$. **Facoltativo**: determinare il lavoro compiuto dal generatore e l'energia persa per effetto Joule fino al tempo Δt.



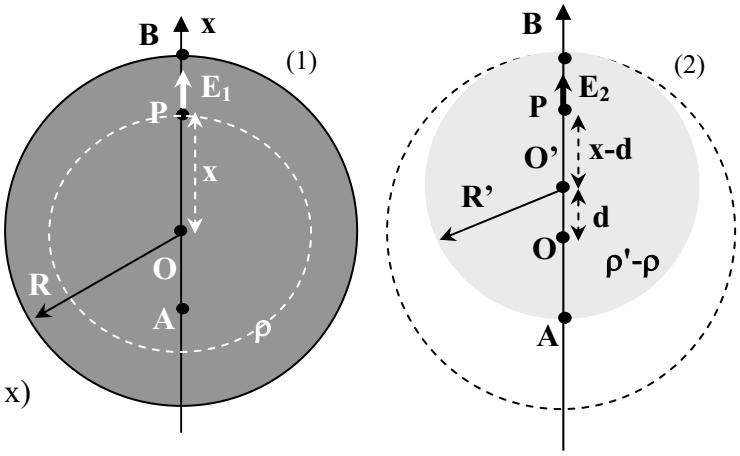
4. Il circuito elettrico mistilineo DEFG descritto in figura è percorso da una corrente I=25mA circolante in senso orario. Sapendo che i tratti DE ed FG sono archi di circonferenze concentriche di medesima apertura angolare θ=30° e di raggi rispettivamente a=3cm e a+Δa=5cm, calcolare il vettore induzione magnetica generato nel centro C



5. Un sottile nastro conduttore, rettilineo, molto lungo è percorso uniformemente dalla corrente I_2=1A. Un filo rettilineo anch'esso molto lungo, parallelo al nastro, è percorso da una corrente I_1=1A. Determinare la forza agente per unità di lunghezza sul filo [c=1m, L=10cm]

Università di Roma "La Sapienza"
Facoltà di Ingegneria
FISICA II
A.A. 2006-2007
Ingegneria Gestionale (M-Z)
Soluzione del 1° appello del 6 Luglio 2007

1. La distribuzione in esame può pensarsi come sovrapposizione di due distribuzioni sferiche uniformi: (1) una distribuzione sferica di raggio R e centro in O con densità uniforme ρ
(2) una distribuzione sferica di raggio R' e centro in O' con densità uniforme ρ'−ρ
Si noti che le due sfere sono eccentriche poiché OO'=d=R-R'=1cm e che il punto P richiesto si trova all'interno di entrambe le sfere.



Campo elettrico interno alla prima sfera (1):
Per calcolare il campo elettrico E_1 in P si applica la legge di Gauss alla sfera di raggio OP=x

$$\Phi(E_1) = 4\pi x^2 E_1 = \frac{Q_{\text{int}}}{\varepsilon_o} = \frac{\rho\left(\frac{4}{3}\pi x^3\right)}{\varepsilon_o}$$

da cui $E_1(x) = \frac{\rho}{3\varepsilon_o} x$

(se x<0 viene E_1<0 ossia in verso opposto all'asse x)

Campo elettrico interno alla seconda sfera (2):
Per calcolare il campo elettrico E_2 in P si applica a legge di Gauss alla sfera di raggio O'P=x-d
da cui $E_2(x) = \frac{\rho'-\rho}{3\varepsilon_o}(x-d)$. Il campo totale è quindi $E_{tot} = E_1 + E_2 = \frac{(\rho-\rho')d + \rho' x}{3\varepsilon_o}$

Il campo elettrico calcolato in P vale quindi $E_{tot}(P) = \frac{(\rho-\rho')d + \rho' x_P}{3\varepsilon_o}$ = **1.5 ·10⁴ V/m**

Facoltativo: il punto A si trova in x_A= d-R' = R-2R'. Il punto B si trova in x_B=R. La differenza di potenziale vale $V_A - V_B = \int_{xA}^{xB} E_{tot}\,dx = \frac{(\rho-\rho')d(x_B - x_A) + \rho'\left(\frac{x_B^2 - x_A^2}{2}\right)}{3\varepsilon_o} = \frac{2\rho(R-R')R'}{3\varepsilon_o}$ **=226 V**

2. L'energia spesa per costruire un elettrone, pensato come una sfera uniformemente carica, coincide con il calcolo dell'energia elettrostatica di una sfera di raggio R con una carica distribuita uniformemente nel volume $\rho = \frac{dq}{dV} = \frac{-e}{\frac{4}{3}\pi R^3}$. Applicando la legge di Gauss è possibile ottenere il modulo del campo elettrico interno $E_{o\,\text{int}} = \frac{|\rho|}{3\varepsilon_o} r = \frac{|e| r}{4\pi\varepsilon_o R^3}$, ed esterno $E_{oext} = \frac{|\rho|}{3\varepsilon_o}\frac{R^3}{r^2} = \frac{|e|}{4\pi\varepsilon_o r^2}$

La densità di energia elettrostatica $w_{\text{int}} = \frac{\varepsilon_o E_{o\,\text{int}}^2}{2} = \frac{\varepsilon_o e^2 r^2}{2(4\pi\varepsilon_o)^2 R^6}$, $w_{ext} = \frac{\varepsilon_o E_{oext}^2}{2} = \frac{\varepsilon_o e^2}{2(4\pi\varepsilon_o)^2 r^4}$

Che integrata da luogo alla energia elettrostatica

$U = \int_o^R w_{\text{int}}\left(4\pi r^2 dr\right) + \int_R^\infty w_{ext}\left(4\pi r^2 dr\right) = \left(\frac{3}{5}\right)\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_o R}$ **= 4.9· 10^{-14} J.** Una stima della massa dell'elettrone si ottiene quindi eguagliando U=E=m$_e$c^2 da cui $m_e = \frac{U}{c^2} = \left(\frac{3}{5}\right)\frac{e^2\mu_o}{4\pi R}$ **=5.5· 10^{-31} kg** che dà una idea dell'ordine di grandezza di tale massa.

3. Nel circuito elettrico descritto in figura la resistenza vale $R = \rho\frac{L_2}{S} = \rho\frac{L_2}{\pi\left(d^2 - c^2\right)}$ **=2.78 Ω,**

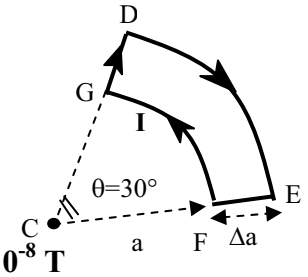
la capacità del condensatore cilindrico vale $C = 2\pi\varepsilon_o\varepsilon_r\frac{L_1}{\ln(b/a)}$ **=0.72μF ,**

ed il tempo di carica del condensatore, risultante dal loro prodotto è quindi $\tau = RC =$ **2μs**

L'espressione della carica sul condensatore è quindi $q(t) = fC\left(1 - \exp(-t/\tau)\right)$ con **fC=10.8 μC**

che calcolata in Δt=3μs fornisce il valore $q(\Delta t) = fC\left(1 - \exp(-\Delta t/\tau)\right) =$ **8.4 μC**

4. Guardando attentamente la 2° formula di Laplace per la generazione del vettore induzione magnetica $d\vec{B}_o = \left(\frac{\mu_o}{4\pi}\right)Id\vec{l} \times \frac{\vec{r}}{r^3}$ ci accorgiamo che i tratti EF e GD non contribuiscono al vettore induzione magnetica nel punto C poiché $d\vec{l} \,//\, \vec{r}$. Sui tratti FG e DE invece $d\vec{l} \perp \vec{r}$ ed i contributi elementari hanno valore massimo $dB_o = \left(\frac{\mu_o}{4\pi}\right)\frac{Idl}{r^2}$.I contributi degli interi tratti sono

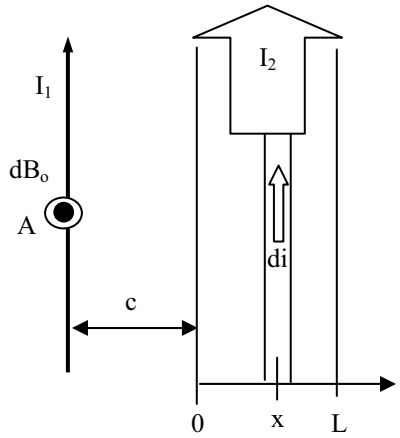


$B_{FG} = \int_F^G dB_o = \left(\frac{\mu_o}{4\pi}\right)\frac{I}{a^2}\int_F^G dl = \left(\frac{\mu_o}{4\pi}\right)\frac{I\theta}{a}$ con verso uscente dal piano del foglio

$B_{DE} = \int_D^E dB_o = \left(\frac{\mu_o}{4\pi}\right)\frac{I}{(a+\Delta a)^2}\int_D^E dl = \left(\frac{\mu_o}{4\pi}\right)\frac{I\theta}{a+\Delta a}$ entrante nel piano del foglio

il vettore totale in C vale quindi $B_o(C) = B_{FG} - B_{DE} = \left(\frac{\mu_o}{4\pi}\right)\left(\frac{I\theta\cdot\Delta a}{(a+\Delta a)a}\right)$ **= 1.75· 10^{-8} T**

con verso uscente dal piano del foglio



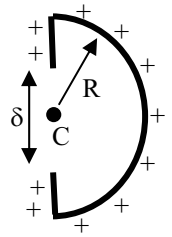
5. Il nastro può venire decomposto in fili di spessore infinitesimo dx percorsi dalla corrente infinitesima $di = I_2\frac{dx}{L}$ che genera nel punto A un contributo dB$_o$ che vale per Biot-Savart $dB_o = \frac{\mu_o di}{2\pi(c+x)}$. Il vettore induzione magnetica si ottiene integrando tutti i contributi prodotti nel punto A dal nastro come

segue $B_o = \int dB_o = \frac{\mu_o I_2}{2\pi L}\int_0^L \frac{dx}{x+c} = \frac{\mu_o I_2}{2\pi L}\ln\left(1+\frac{L}{c}\right)$. La forza attrattiva che si esercita per unità di lunghezza sul filo vale $\frac{dF}{dl} = I_1 B_o = \frac{\mu_o I_2 I_1}{2\pi L}\ln\left(1+\frac{L}{c}\right)$ **=1.9 · 10^{-7} N/m**

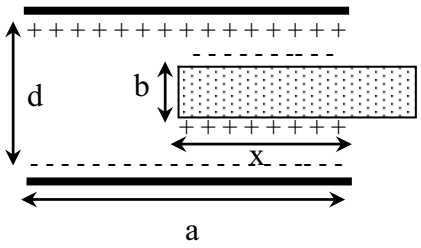
Università di Roma "La Sapienza"
Facoltà di Ingegneria

FISICA II

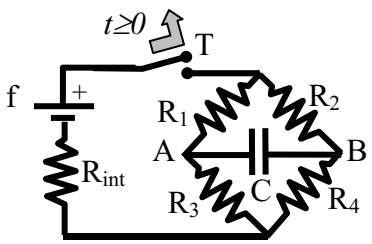
A.A. 2006-2007
Ingegneria Gestionale (M-Z)
2° appello del 20 Luglio 2007



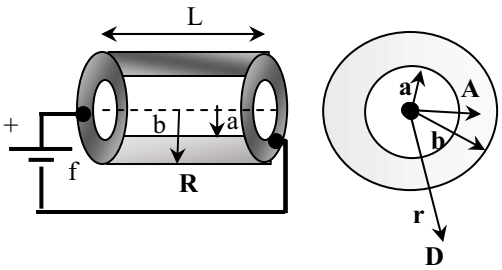
1. Una carica Q=10μC è distribuita uniformemente lungo la spezzata a forma di lettera D indicata in figura dove la semicirconferenza è di raggio R=10cm mentre il tratto rettilineo viene interrotto per una lunghezza δ=2cm. Determinare il lavoro necessario per portare una carica q=2μC nel centro C della distribuzione



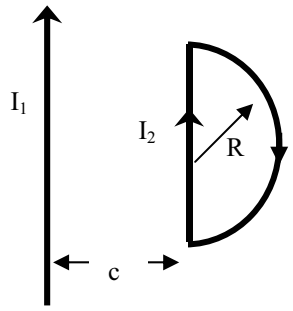
2. Calcolare la capacità del condensatore piano costituito da due armature quadrate di lato a=5cm poste alla distanza d=3mm come riportato in figura. All'interno del condensatore è inserito un dielettrico parallelepipedo di costante dielettrica relativa ε_r=5 spessore b=1mm inserito per una lunghezza x=2cm (la terza dimensione non evidenziata in figura è ancora a=5cm). **Facoltativo:** supponendo che la carica presente nel condensatore sia costante Q=30μC calcolare la forza di risucchio subita inizialmente dal dielettrico quando esso si trova inserito di x



3. Un ponte di Wheatstone è da lungo tempo alimentato da una batteria f=10V collegata con una resistenza interna R_{int}=1.8kΩ e con le quattro resistenze del ponte R_1=2kΩ, R_2=4kΩ, R_3=2kΩ, R_4=12kΩ come descritto in figura. A causa dello sbilanciamento del ponte il condensatore di capacità C=20μF sul ramo AB ha accumulato una energia elettrostatica E_o. Supponendo di aprire l'interrutore T al tempo t=0, determinare l'energia residua dopo un tempo Δt=5ms e le quote di energia dissipata per effetto Joule su ciascuna delle 4 resistenze del ponte.



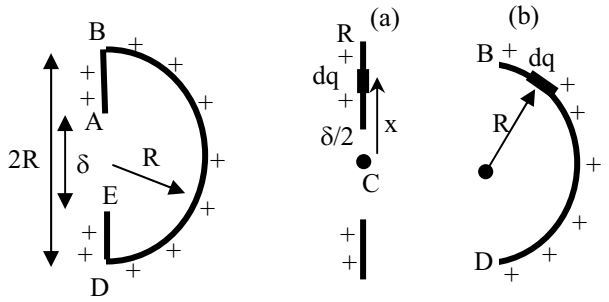
4. Il circuito in figura è costituito da una batteria di forza elettromotrice f=1V e da un cilindro conduttore cavo di piombo di resistività $\rho=20.7\cdot10^{-8}$ Ωm, di lunghezza L=5m dove scorre una corrente uniforme attraverso la sezione metallica delimitata fra il cerchio interno di raggio a=0.8mm e quello esterno di raggio b=1mm. Determinare il vettore induzione magnetica interna al cilindro in un punto A a distanza (a+b)/2 dall'asse. Si trascurino le cadure ohmiche sugli altri tratti di circuito ed i rispettivi contributi magnetici. **Facoltativo:** Determinare in quale punto D esterno al cilindro (a distanza r>b) si osserva la stessa intensità dell'induzione magnetica.



5. Un filo rettilineo, molto lungo è percorso uniformemente dalla corrente I_1=1A. Una spira a forma di lettera D con un tratto circolare di raggio R=1m ed un tratto rettilineo distante c=50cm dal primo filo è percorso dalla corrente I_2=0.5A. Determinare la forza agente su tutta la spira.

Università di Roma "La Sapienza"
Facoltà di Ingegneria
FISICA II
A.A. 2006-2007
Ingegneria Gestionale (M-Z)
2° appello del 20 Luglio 2007

1. Calcolo del potenziale elettrico nel punto C



La carica Q è distribuita con una densità lineare

$$\lambda = \frac{Q}{AB + BD + DE} = \frac{Q}{(\pi + 2)R - \delta} = 20.2\ \mu C/m$$

Il potenziale elettrico può scomporsi nei potenziali elettrici delle due distribuzioni (a) e (b)

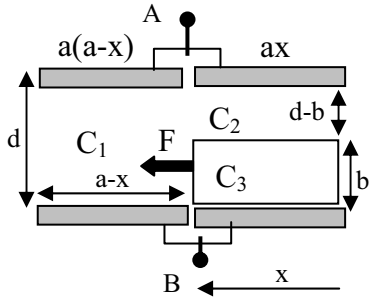
(a) $$V^a(C) = \int_{-R}^{-\delta/2} \frac{\lambda dx}{4\pi\varepsilon_o x} + \int_{\delta/2}^{R} \frac{\lambda dx}{4\pi\varepsilon_o x} = 2\frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_o}\int_{\delta/2}^{R}\frac{dx}{x} = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_o}\ln\left(\frac{2R}{\delta}\right)$$

(b) $$V^b(C) = \int_B^D dV^b = \int_B^D \frac{dq}{4\pi\varepsilon_o R} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_o R}\int_B^D \lambda dl = \frac{\lambda}{4\varepsilon_o}$$

da cui $V(C) = V^a(C) + V^b(C) = \frac{\lambda}{4\varepsilon_o}\left[1 + \frac{2}{\pi}\ln\left(\frac{2R}{\delta}\right)\right] = \mathbf{1.41 \cdot 10^6\ V}$

il **lavoro esterno** necessario per portare la carica q dall'infinito al punto C vale quindi

$$L^{ext} = -L^{el} = q(V(C) - V(\infty)) = qV(C) = \mathbf{2.82\ J}$$



2. Il dispositivo può essere visto come la composizione di un condensatore di capacità $C_1 = \varepsilon_o \frac{a(a-x)}{d}$ locato nel semispazio sinistro, in parallelo con la serie dei due condensatori del semispazio destro $C_2 = \varepsilon_o \frac{ax}{d-b}$ e quello relativo alla lastra dielettrica $C_3 = \varepsilon_o \varepsilon_r \frac{ax}{b}$.

La capacità complessiva dei condensatori in serie è $C_{serie} = \frac{C_3 C_2}{C_3 + C_2} = \varepsilon_o \varepsilon_r \frac{ax}{b + (d-b)\varepsilon_r}$.

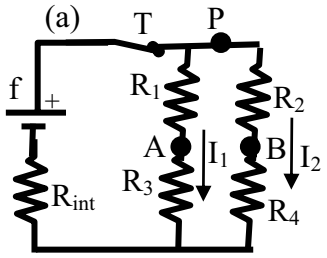
La capacità totale del dispositivo è invece data dal parallelo di C_1 e C_{serie}

$C_{tot}(x) = C_1 + C_{serie} = \varepsilon_o a \frac{a[b + (d-b)\varepsilon_r] + xb(\varepsilon_r - 1)}{d[b + (d-b)\varepsilon_r]}$ **=8.44 pF** e dipende dal grado di inserzione x

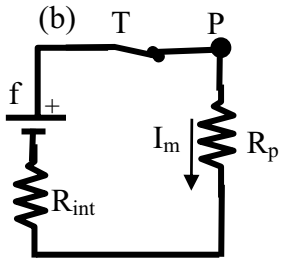
Facoltativo: La forza di risucchio può venire calcolata dal gradiente dell'energia elettrostatica U(x) che dipende dal grado di inserzione x

$$F_x = -\frac{dU}{dx} = -\frac{d}{dx}\frac{Q^2}{2C_{tot}(x)} = \frac{Q^2}{2C_{tot}^2}\frac{dC_{tot}}{dx} = \frac{Q^2}{2C_{tot}}\frac{\varepsilon_o ab(\varepsilon_r - 1)}{d[b + (d-b)\varepsilon_r]} = \mathbf{339\ N} \quad \text{(lungo asse x)}$$

3. Fase di carica del condensatore:
Prima dell'apertura dell'interruttore per t<0 il circuito è in condizione stazionaria. Il condensatore è carico e si comporta come un circuito aperto (vedi fig.a). Il circuito può essere riportato ad una maglia unica.



La corrente I_1 attraversa in serie R_1, R_3 riassunte in $R_{s1}=R_1+R_3=4k\Omega$
La corrente I_2 attraversa in serie R_2, R_4 riassunte in $R_{s2}=R_2+R_4=16k\Omega$.
Le due resistenze R_{s1} ed R_{s2} sono equivalenti ad una unica resistenza parallelo (fig.b) $R_p = \dfrac{R_{s1}R_{s2}}{R_{s1}+R_{s2}} = 3.2k\Omega$



La corrente di maglia erogata dal generatore è $I_m = \dfrac{f}{R_{\text{int}}+R_p} = \mathbf{2mA}$

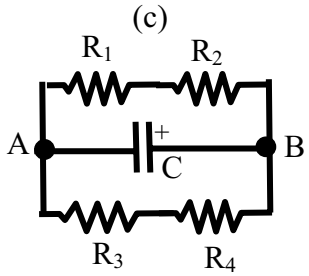
In fig.(a) le correnti nei due rami PA e PB si calcolano con il partitore di corrente:

$$I_1 = I_m \frac{R_p}{R_{s1}} = I_m \frac{R_{s2}}{R_{s1}+R_{s2}} = \frac{4}{5} I_m = \mathbf{1.6\ mA}, \quad I_2 = I_m \frac{R_p}{R_{s2}} = I_m \frac{R_{s1}}{R_{s1}+R_{s2}} = \frac{1}{5} I_m = \mathbf{0.4\ mA}$$

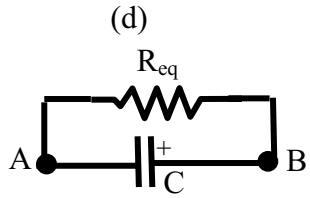
Tensione sul condensatore $\Delta V_C = V_A - V_B = (V_P - V_B) - (V_P - V_A) = I_2 R_2 - I_1 R_1 = \mathbf{-1.6\ V}$

Energia iniziale condensatore: $E_o = \dfrac{q_o^2}{2C} = \dfrac{\Delta V_c^2 C}{2} = \mathbf{25.6\mu J}$

Fase di scarica del condensatore:
quando l'interruttore viene aperto e la batteria disinserita il condensatore si scarica attraverso le quattro resistenze come riportato in figura (c). La resistenza equivalente di scarica si ottiene effettuando il parallelo $R_{eq} = (R_1+R_2)//(R_3+R_4) = \mathbf{6k\Omega//14k\Omega = 4.2\ k\Omega}$
da cui il tempo caratteristico di scarica $\tau_{sc} = R_{eq}C = \mathbf{84ms}$



La carica sul condensatore è quindi $q(t) = q_o \exp[-t/\tau_{sc}]$
e l' energia $E(t) = \dfrac{q(t)^2}{2C} = \dfrac{q_o^2}{2C}\exp[-2t/\tau_{sc}] = E_o \exp[-2t/\tau_{sc}] = \mathbf{22.7\mu J}$



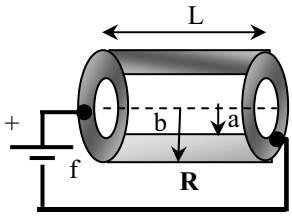
la corrente complessiva erogata da C è $i(t) = \dfrac{q_o}{\tau_{sc}}\exp[-t/\tau_{sc}]$

la corrente che attraversa R_1 ed R_2 è invece $i_{R1}(t) = \dfrac{R_3+R_4}{\sum_i R_i} i(t) = \dfrac{7}{10}\dfrac{q_o}{R_{eq}C}\exp[-t/\tau_{sc}]$

da cui l'energia dissipata su R1 è $P_{R1} = \int_o^t i_{R1}^2 R_1 dt = \dfrac{R_3+R_4}{\sum_i R_i}\dfrac{R_1}{R_1+R_2} E_o[1-\exp(-2t/\tau_{sc})] = \mathbf{0.67\mu J}$

analogamente per le altre resistenze si trova $P_{R2} = \mathbf{1.34\ \mu J}$, $P_{R3} = \mathbf{0.12\ \mu J}$, $P_{R2} = \mathbf{0.74\ \mu J}$

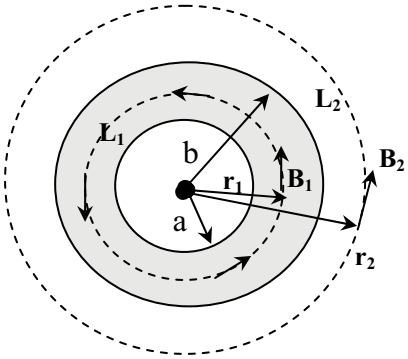
4. Calcolo della **resistenza elettrica**: $R = \rho \frac{L}{S} = \rho \frac{L}{\pi\left(b^2 - a^2\right)}$



Calcolo dell'**intensità di corrente** elettrica: $I = \frac{f}{R} = \left(\frac{f}{\rho L}\right)\pi\left(b^2 - a^2\right)$**=1.09 A**

Calcolo della **densità di corrente** elettrica: $j = \frac{I}{S} = \frac{f}{\rho L}$ **=9.66·10^5 A/m^2**

Calcolo **vettore induzione magnetica B_1** interno: applicando la legge di circuitazione di Ampere sulla circonferenza L_1 di raggio r_1=(a+b)/2



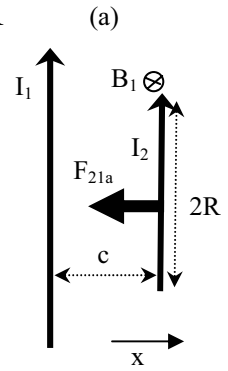
$$\oint_{L1} \vec{B}_1 \cdot d\vec{l} = B_1 \oint_{L1} dl = B_1\left(2\pi r_1\right) = \mu_o I_{\text{int}} = \mu_o j \pi\left(r_1^2 - a^2\right)$$

da cui $B_1 = \frac{\mu_o j}{2}\frac{r_1^2 - a^2}{r_1} = \frac{\mu_o f}{2\rho L}\left(r_1 - \frac{a^2}{r_1}\right)$ **=1.15·10^{-4} T**

Facoltativo: Calcolo **vettore induzione magnetica B_2** esterno: applicando la legge di circuitazione di Ampere sulla circonferenza L_2 di raggio r_2

$$\oint_{L2} \vec{B}_2 \cdot d\vec{l} = B_2 \oint_{L2} dl = B_2\left(2\pi r_2\right) = \mu_o I_{tot} = \mu_o j \pi\left(b^2 - a^2\right) \qquad \text{da cui} \qquad B_2 = \frac{\mu_o j}{2}\frac{b^2 - a^2}{r_2}$$

5. La spira può venire decomposta in un tratto rettilineo di lunghezza 2R (caso a in figura) ed una semicirconferenza di raggio R (caso b in figura)



Calcolo della forza agente F_{21a} sul tratto rettilineo (a)

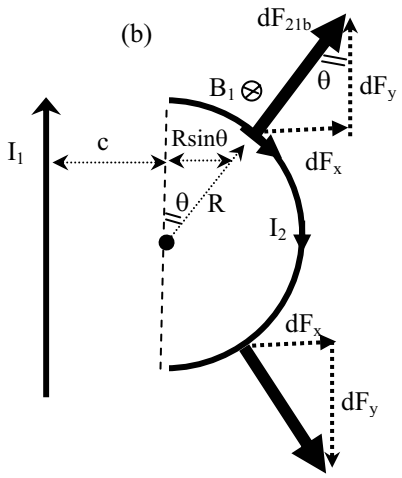
Applicando la 2 formula di Laplace $d\vec{F}_{21a} = I_2 d\vec{l} \times \vec{B}_1$

dalla legge di Biot-Savart, $B_1 = \frac{\mu_o I_1}{2\pi c}$ con verso entrante come in figura

quindi $dF_{21a} = \frac{\mu_o I_1 I_2}{2\pi c} dl$ con verso attrattivo (diretto nel verso -x)

La forza totale lungo x si ottiene integrando i contributi elementari $F_{21a} = -\frac{\mu_o I_1 I_2 R}{\pi c}$ **= -4·10^{-7} N**

Calcolo della forza agente F_{21b} sul tratto semicircolare (b)



Applicando la 2 formula di Laplace $d\vec{F}_{21b} = I_2 d\vec{l} \times \vec{B}_1$

$dF_{21b} = \frac{\mu_o I_1 I_2}{2\pi\left(c + R\sin\theta\right)} dl$ con verso radiale esterno, dove $dl = Rd\theta$

A causa della simmetria del problema la forza complessiva cui è soggetto il tratto semicircolare è solo lungo l'asse x poiché è sempre individuabile un elemento di corrente che subisce una forza complementare che annulla la componente y.

Quindi $F_{21b} = \int dF_x = \int dF_{21b} \sin\theta = \int_0^{\pi} \frac{\mu_o I_1 I_2}{2\pi} \frac{R\sin\theta}{(c + R\sin\theta)} d\theta$

Sapendo che l'integrale ha soluzione in forma chiusa

$$\int_0^{\pi} \frac{R\sin\theta}{c + R\sin\theta} d\theta = x\Big|_0^{\pi} - \frac{c}{\sqrt{R^2 - c^2}} \ln\left(\frac{ctg(x/2) + R - \sqrt{R^2 - c^2}}{ctg(x/2) + R + \sqrt{R^2 + c^2}} \right)\Bigg|_0^{\pi} = \pi + \frac{c}{\sqrt{R^2 - c^2}} \ln \frac{R - \sqrt{R^2 - c^2}}{R + \sqrt{R^2 - c^2}}$$

possiamo concludere $F_{21b} = \frac{\mu_o I_1 I_2}{2\pi} \left(\pi + \frac{c}{\sqrt{R^2 - c^2}} \ln \frac{R - \sqrt{R^2 - c^2}}{R + \sqrt{R^2 - c^2}} \right) = \mathbf{1.62 \cdot 10^{-7}\ N}$

La forza complessiva lungo x è $F_{tot,x} = F_{21a} + F_{21b} = \mathbf{-\ 2.38 \cdot 10^{-7}\ N}$ (attrattiva verso opposto asse x).

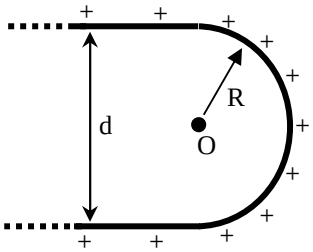
Università di Roma "La Sapienza"
Facoltà di Ingegneria
FISICA II

A.A. 2006-2007

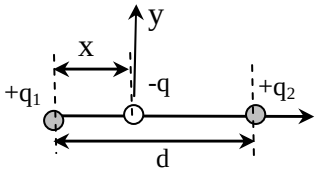
Ingegneria Gestionale (M-Z)

3° appello del 13 Settembre 2007

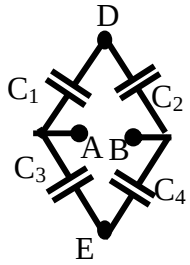
1. Una carica è distribuita uniformemente lungo la linea descritta in figura costituita da due semirette parallele distanti d=10cm raccordate esattamente ad una semicirconferenza di raggio R=d/2 con distribuzione lineare λ=15μC/m. Determinare il vettore campo elettrico nel centro O della semicirconferenza.



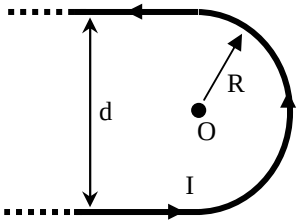
2. Un sistema di tre cariche è disposto lungo l'asse riportato in figura. Determinare l'espressione dell'energia elettrostatica che compete alla configurazione descritta. Al variare della posizione della carica negativa lungo l'asse x determinare il valore dell'energia configurazionale massima e far notare come esso corrisponda ad una posizione di equilibrio x_{eq} per la carica negativa. [Dati: d=5cm, q_1=1μC, q_2=3μC, q=2μC].
Facoltativo: dare l'espressione dell'energia configurazionale quando la carica negativa viene disposta nel punto P(x_{eq}, y=3cm)



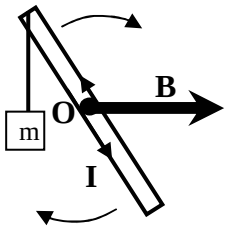
3. Un ponte elettrico formato da sole capacità è alimentato da una batteria che mantiene costante la differenza di potenziale V_D-V_E=10V. Calcolare la carica presente su ciascun condensatore e la differenza di potenziale V_A-V_B.
Facoltativo: determinare quale nuovo valore della capacità C_3 realizza un bilanciamento del ponte (V_A=V_B). [Dati: C_1=2μF C_2=6μF, C_3=10μF, C_4=8μF]



4. Il circuito descritto in figura è costituito da due fili conduttori, semi infiniti, paralleli, distanti d=15cm, raccordati esattamente ad un filo conduttore a forma di semicirconferenza di raggio R=d/2. Il circuito è percorso da una corrente costante I=3A. Determinare il vettore induzione magnetica ed il vettore campo magnetico nel centro O della semicirconferenza.

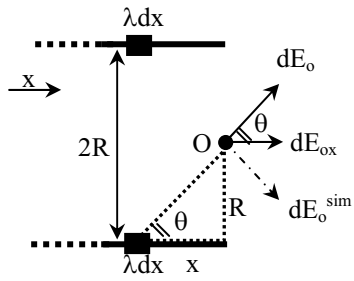


5. Una spira quadrata di lato *a* e di massa trascurabile è vincolata a ruotare senza attrito attorno all'asse passante per il punto O ortogonale al piano del foglio. La spira è immersa in un campo di induzione magnetica B uniforme diretto come in figura. Ad un estremo della spira è appeso un blocco di massa *m* che deve essere sollevato dalla macchina. Si stabilisca il minimo valore della corrente I_{min} che deve circolare nella spira per riuscire a far ruotare la spira in senso orario e sollevare così il blocco. [Dati: B=1T, m=200g, a=10cm]



Università di Roma "La Sapienza"
Facoltà di Ingegneria
FISICA II
A.A. 2006-2007
Ingegneria Gestionale (M-Z)
Soluzioni de 3° appello del 13 Settembre 2007

1a) campo elettrico generato dai due fili rettilinei:



Il contributo elementare al campo elettrico in O è $dE_o = \dfrac{\lambda dx}{4\pi\varepsilon_o\left(x^2+R^2\right)}$

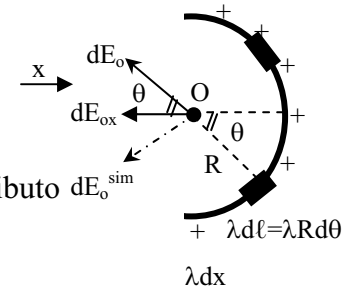
Per ragioni di simmetria il campo è diretto lungo l'asse x ed il contributo elementare utile è quindi $dE_{ox} = dE_o\cos\theta = \dfrac{\lambda dx}{4\pi\varepsilon_o\left(x^2+R^2\right)}\dfrac{x}{\sqrt{x^2+R^2}}$

Il campo totale si ottiene integrando in dx lungo tutto il filo e raddoppiando il risultato

$$E_{ox}^{fili} = 2\left(\frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_o}\right)\int_0^\infty \frac{xdx}{\left(x^2+R^2\right)^{3/2}} = 2\left(\frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_o}\right)\left[-\frac{1}{\sqrt{x^2+R^2}}\right]_0^\infty = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_o R} \quad \text{dove} \quad \int\left(x^2+R^2\right)^n xdx = \frac{\left(x^2+R^2\right)^{n+1}}{2(n+1)}$$

con n = -3/2 ≠ -1

1b) campo elettrico generato dalla semicirconferenza:



Il contributo elementare al campo elettrico in O è $dE_o = \dfrac{\lambda R d\theta}{4\pi\varepsilon_o R^2}$

Per ragioni di simmetria il campo è diretto lungo l'asse x ed il contributo elementare utile è quindi $dE_{ox} = -dE_o\cos\theta = -\dfrac{\lambda\cos\theta d\theta}{4\pi\varepsilon_o R}$

(il contributo è contrario asse x). Il campo totale si ottiene integrando in dθ

$$E_{ox}^{circ} = \int dE_{ox} = -\frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_o R}\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\cos\theta d\theta = -\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_o R} \quad \text{da cui } \textbf{il campo totale} \quad E_o^{tot} = E_{ox}^{fili} + E_{ox}^{circ} = 0$$

2. Energia configurazionale del sistema: $U^{config} = \left(\dfrac{1}{4\pi\varepsilon_o}\right)\left(\dfrac{q_1q_2}{d} - \dfrac{qq_1}{|x|} - \dfrac{qq_2}{|d-x|}\right)$

L'energia raggiunge il valore minimo -∞ quando x=0 o x=d. Entrambe sono posizioni di equilibrio stabile verso le quali la carica negativa è attratta. La ricerca sistematica di punti di massima energia configurazionale si effettua annullando la derivata prima:

per x<0 $\quad \dfrac{dU^{config}}{dx} = \left(\dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0}\right)\left(-\dfrac{q_1}{x^2} - \dfrac{q_2}{(d-x)^2}\right) = 0$ senza soluzione

per 0<x<d $\quad \dfrac{dU^{config}}{dx} = \left(\dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0}\right)\left(\dfrac{q_1}{x^2} - \dfrac{q_2}{(d-x)^2}\right) = 0$ da cui $(q_1-q_2)x^2 - 2q_1dx + q_1d^2 = 0$

per x>d $\quad \dfrac{dU^{config}}{dx} = \left(\dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0}\right)\left(\dfrac{q_1}{x^2} + \dfrac{q_2}{(d-x)^2}\right) = 0$ senza soluzione

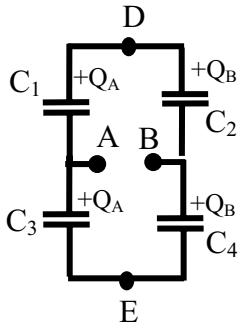
La soluzione dell'equazione di 2° grado porta $x_{1/2} = \left(\frac{q_1 \pm \sqrt{q_1 q_2}}{q_1 - q_2} \right) d$ di cui una non è accettabile

perché esterna all'intervallo ipotizzato. $x_{eq} = \frac{\sqrt{q_1 q_2} - q_1}{q_2 - q_1} d = \mathbf{1.83\ cm}$ per il quale $\mathbf{U^{el} = -2.15J}$

Tale punto è di equilibrio instabile, ossia in esso si annullano le forze sulla carica –q, ma nell'intorno di tale punto nascono forze che tendono a farla allontanare definitivamente.

Facoltativo: nel punto P(x_{eq}=1.83cm, y=3cm) l'energia elettrostatica vale

$$U^{config}(P) = \left(\frac{1}{4\pi\varepsilon_o} \right) \left(\frac{q_1 q_2}{d} - \frac{q q_1}{\sqrt{x^2 + y^2}} - \frac{q q_2}{\sqrt{(d-x)^2 + y^2}} \right) = \mathbf{-0.71\ J}$$



3. Lo stato di carica dei condensatori è determinato dal processo di carica che avviene dai capi D ed E del ponte. In questo caso la coppia di condensatori (C_1 , C_3) è in serie come anche la coppia (C_2 , C_4).
La carica su ciascuna coppia è quindi:

$$Q_A = (V_D - V_E) \frac{C_1 C_3}{C_1 + C_3} = \mathbf{16.7\ \mu C}\ , \quad Q_B = (V_D - V_E) \frac{C_2 C_4}{C_2 + C_4} = \mathbf{34.3 \mu C}$$

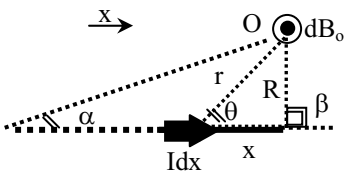
$$V_A - V_B = (V_D - V_B) - (V_D - V_A) = \frac{Q_B}{C_2} - \frac{Q_A}{C_1} = (V_D - V_E) \left(\frac{C_4}{C_2 + C_4} - \frac{C_3}{C_1 + C_3} \right) = \mathbf{-2.62\ V}$$

Facoltativo:

il ponte è in equilibrio quando $\frac{C_4}{C_2 + C_4} = \frac{C_3}{C_1 + C_3}$ ossia $C_3 = \frac{C_1 C_4}{C_2} = \mathbf{2.67\ \mu F}$

4a) Induzione magnetica generata dal filo rettilineo:

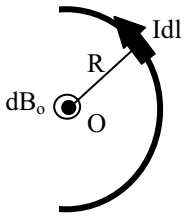
contributo infinitesimo $dB_o^{filo} = \frac{\mu_o I}{4\pi} \left| \frac{d\vec{l} \times \vec{r}}{r^3} \right| = \frac{\mu_o}{4\pi} \frac{I \sin\theta}{r^2} dx = \frac{\mu_o I}{4\pi R} \sin\theta d\theta$



induzione magnetica $B_o^{filo} = \int dB_o^{filo} = \frac{\mu_o I}{4\pi R} \int_0^{\pi/2} \sin\theta d\theta = \frac{\mu_o I}{4\pi R}$

Induzione magnetica generata dai due fili rettilinei: per simmetria $B_o^{fili} = 2B_o^{filo} = \frac{\mu_o I}{2\pi R}$

4b) Induzione magnetica generata dalla semicirconferenza:



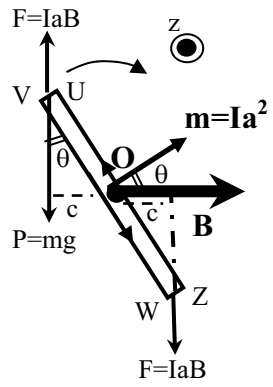
contributo infinitesimo $dB_o^{semi} = \frac{\mu_o I}{4\pi} \left| \frac{d\vec{l} \times \vec{r}}{r^3} \right| = \frac{\mu_o}{4\pi} \frac{I}{R^2} dl$

induzione magnetica $B_o^{semi} = \int dB_o^{semi} = \frac{\mu_o I}{4\pi R^2}\int dl = \frac{\mu_o I}{4R}$

Induzione magnetica complessivo: $B_o^{tot} = B_o^{semi} + B_o^{fili} = \frac{\mu_o I}{4\pi R}(2+\pi)$**=2.06·10^{-5} T**

Campo magnetico complessivo: $H = B_o^{tot}/\mu_o = \frac{I}{4\pi R}(2+\pi)$**=16.4 A/m**

5. Al passaggio della corrente si registra una forza magnetica su ciascun dei 4 lati della spira. La forza totale è complessivamente nulla (le forze sui lati opposti si controbilanciano), ma il momento meccanico generato dalle forze F=IaB sui lati UV e WZ tende a far ruotare la spira in senso orario sollevando il blocco m.



$\vec{M}_{mecc}^{(1)} = \vec{m}\times\vec{B}$ che proiettato lungo z $M_z^{(1)} = -mB\sin\theta = -Ia^2B\sin\theta$

o alternativamente $M_z^{(1)} = -Fc - Fc = -2Fc = -2(IaB)\left(\frac{a}{2}\sin\theta\right)$

(dove la distanza di O dalla linea di azione della forza è $c = \frac{a}{2}\sin\theta$)

Il peso del blocco di massa *m* genera però un momento meccanico resistente positivo che tenderebbe a far ruotare il sistema in senso antiorario $M_z^{(2)} = Pc = mg\frac{a}{2}\sin\theta$

La condizione di sollevamento si ha quando

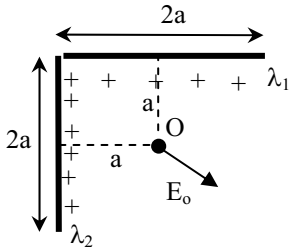
$M_z^{tot} = M_z^{(1)} + M_z^{(2)} \le 0$ (rotazione antioraria) ossia $I \ge \frac{mg}{2aB} =$ **9.8 A**

Università di Roma "La Sapienza"
Facoltà di Ingegneria

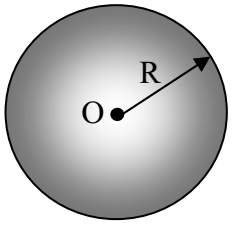
FISICA II

A.A. 2006-2007
Ingegneria Gestionale (M-Z)
4° appello del 17 Dicembre 2007

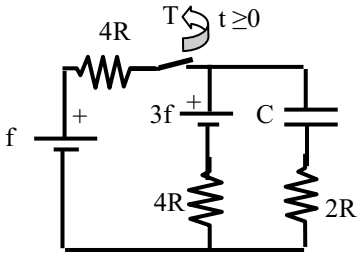
1. Della carica elettrica è distribuita lungo due segmenti contigui mutuamente ortogonali di medesima lunghezza 2a=10cm, ma con densità lineica differente λ_1=30μC/m e λ_2=40μC/m. Determinare il vettore campo elettrico (modulo, direzione e verso) generato dalla distribuzione nel punto O che si trova alla medesima distanza a=5cm dai due segmenti.



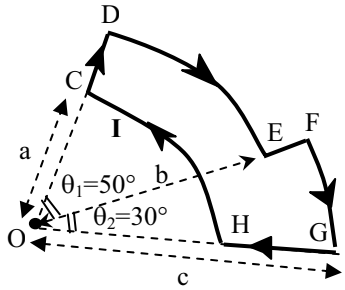
2. Sia data una sfera di centro in O e di raggio R disposta nel vuoto. All'interno di tale sfera sia distribuita una carica con densità volumetrica non uniforme in accordo alla legge $\rho(r) = A + Br$ dove r rappresenta la distanza del generico punto dal centro O. Calcolare il modulo del campo elettrico $E_o(r)$ in tutto lo spazio.



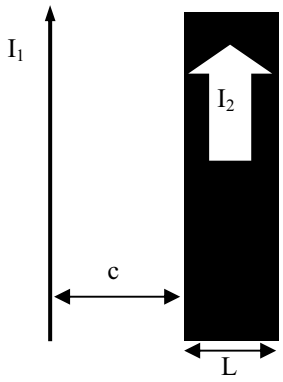
3. Il circuito in figura è da lungo tempo nella configurazione riportata con l'interruttore T chiuso. Determinate la carica presente sulle armature del condensatore. Nell'istante t=0 l'interruttore T viene aperto. Determinare il nuovo valore della carica che si instaurerà permanentemente fra le armature del condensatore dopo lungo tempo. **Facoltativo:** dare l'espressione della carica sul condensatore q(t) per t>0 e fornirne il valore dopo un tempo t=2ms [f=5V, R=2kΩ, C=2μF]



4. Il circuito elettrico mistilineo CDEFGH descritto in figura è percorso da una corrente I=25mA circolante in senso orario. Sapendo che i tratti DE, FG ed HC sono archi di circonferenze concentriche rispettivamente di aperture angolari θ_1=50°, θ_1=30°, $\theta_1+\theta_2$=80° e di raggi rispettivamente b=4cm, c=5cm, a=3cm, calcolare il vettore induzione magnetica generato nel centro O. Si noti come i tratti CD, EF, GH sono tutti radiali.



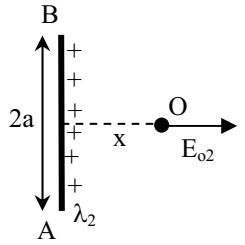
5 Un sottile nastro conduttore, rettilineo, molto lungo è percorso uniformemente dalla corrente I_2=1A. Un filo rettilineo anch'esso molto lungo, parallelo al nastro, è percorso da una corrente I_1=1A. Determinare la forza agente per unità di lunghezza sul filo [c=1m, L=15cm]



Università di Roma "La Sapienza"
Facoltà di Ingegneria
FISICA II
A.A. 2006-2007
Ingegneria Gestionale (M-Z)
Soluzioni 4° appello del 17 Dicembre 2007

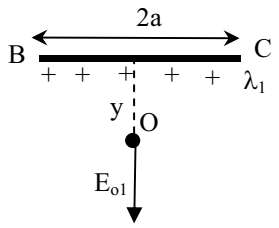
1. Calcolo del campo elettrico generato da una carica uniformemente distribuita lungo un segmento rettilineo. Calcolo lungo la mediana

Per ragioni di simmetria il campo elettrico generato dalla seconda distribuzione in tutti i punti della mediana del segmento AB risulta ortogonale al segmento stesso e con un modulo



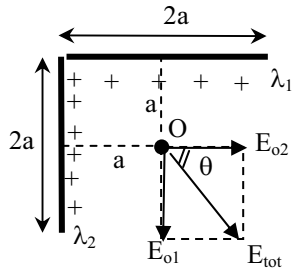
$$E_{o2}(x) = \frac{\lambda_2}{2\pi\varepsilon_o x}\frac{a}{\sqrt{a^2+x^2}} \quad \text{che per x=a} \quad E_{o2}(O) = \frac{\lambda_2}{2\sqrt{2}\pi\varepsilon_o a}$$

Calcolo analogo per la prima distribuzione lungo il segmento BC porta a



$$E_{o1}(y) = \frac{\lambda_1}{2\pi\varepsilon_o y}\frac{a}{\sqrt{a^2+y^2}} \quad \text{che per y=a} \quad E_{o1}(O) = \frac{\lambda_1}{2\sqrt{2}\pi\varepsilon_o a}$$

Componendo i due contributi di campo si ha

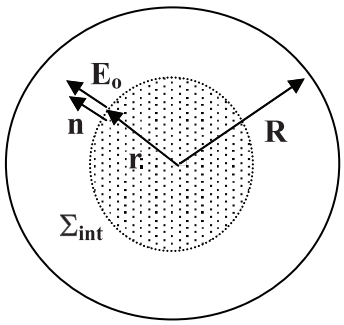


$$E_o^{tot} = \sqrt{E_{o1}^2 + E_{o2}^2} = \frac{\sqrt{\lambda_1^2+\lambda_2^2}}{2\sqrt{2}\pi\varepsilon_o a} = \mathbf{1.27\cdot 10^7 V/m}$$

con inclinazione (rispetto orizz.) $\theta = \arctan\left(\frac{E_{o1}}{E_{02}}\right) = \arctan\left(\frac{\lambda_1}{\lambda_2}\right) = \mathbf{36°52'}$

2. Per la simmetria del problema $E_o(r)$ è radiale e viene calcolato applicando la legge di Gauss.

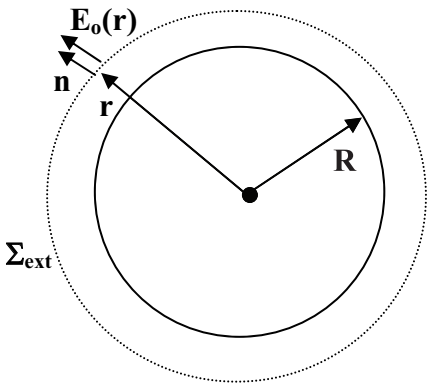
Per i punti interni r<R



il flusso uscente da Σ_{int} vale $\Phi_{\Sigma int} = \int_{\Sigma int} \vec{E}_o \bullet \hat{n} dS = 4\pi r^2 E_o(r) = \frac{Q_{int}}{\varepsilon_o}$

ove $Q_{int} = \int \rho dV = \int_0^r \rho(4\pi r^2 dr) = 4\pi \int_0^r (Ar^2 + Br^3) dr = 4\pi\left(\frac{Ar^3}{3} + \frac{Br^4}{4}\right)$

Combinando si ricava il **campo interno** $E_{o,int}(r) = \frac{Ar}{3\varepsilon_o} + \frac{Br^2}{4\varepsilon_o}$



Per i punti esterni r>R

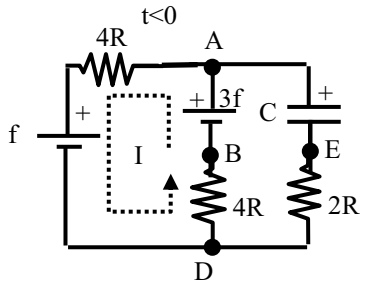
il flusso uscente da Σ_{ext} vale $\Phi_{\Sigma ext} = \int_{\Sigma ext} \vec{E}_o \bullet \hat{n} dS = 4\pi r^2 E_o(r) = \frac{Q_{tot}}{\varepsilon_o}$

ove $\quad Q_{tot} = \int \rho dV = \int_0^R \rho\left(4\pi r^2 dr\right) = 4\pi \int_0^R \left(Ar^2 + Br^3\right) dr = 4\pi\left(\frac{AR^3}{3} + \frac{BR^4}{4}\right)$.

Combinando si ricava il **campo esterno** $E_{o,ext}(r) = \frac{4AR^3 + 3BR^4}{12\varepsilon_o r^2}$

3. Analisi del circuito per t<0

Prima dell'apertura del circuito la carica nel condensatore ha raggiunto da lungo tempo il suo valore asintotico di regime Q_o. Per determinare tale valore è sufficiente ipotizzare che nel ramo contenente il condensatore e la resistenza R non scorra corrente. La corrente scorre solo nella prima maglia:



$$I = \frac{\sum_k f_k}{\sum_h R_h} = \frac{3f - f}{4R + 4R} = \frac{f}{4R}$$

La differenza di potenziale sul ramo AD vale:

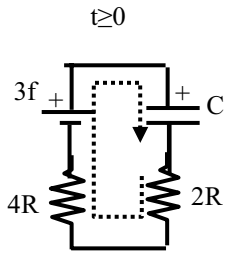
$$V_A - V_D = \left(V_A - V_B\right) + \left(V_B - V_D\right) = 3f - (4R)I = 2f$$

Tale differenza è anche quella che si instaura ai capi del condensatore ΔV_c, infatti

$$V_A - V_D = \left(V_A - V_E\right) + \left(V_E - V_D\right) = \Delta V_C - 0 = 2f \quad \text{da cui} \quad Q_o = C\Delta V_c = 2fC = \mathbf{20\mu C}$$

Analisi del circuito per t≥0

Dopo l'apertura dell'interruttore nel circuito si disattiva la prima maglia e si attiva la seconda. Il condensatore si carica ulteriormente fino a Q_f ossia fino a quando il flusso di corrente nel nuovo circuito RC non termini. A quel tempo il condensatore ha eguagliato la differenza di potenziale della batteria che lo carica



$$\Delta V_c = 3f \quad \text{da cui} \quad Q_f = C\Delta V_c = 3fC = \mathbf{30\mu C}$$

Facoltativo: il processo di carica di un condensatore già parzialmente carico si ottiene imponendo q(t=0)=Q_o alla soluzione dell'equazione differenziale di carica. L'espressione della carica diviene quindi

$$q(t) = Q_o \exp\left[-t/\tau\right] + Q_f \left\{1 - \exp\left[-t/\tau\right]\right\} \quad \text{dove} \quad \tau = 6RC = \mathbf{24ms}$$

La carica totale presente sul condensatore al tempo t*=2ms è quindi

$$q(t^*) = Q_o \exp\left[-1/12\right] + Q_f \left\{1 - \exp\left[-1/12\right]\right\} = \mathbf{20.8\mu C}$$

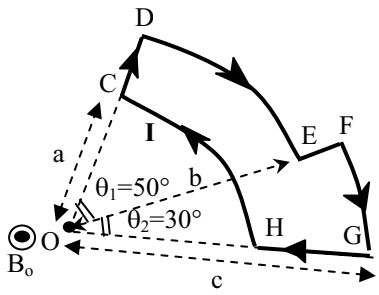
4. Applicando la 2° formula di Laplace $d\vec{B}_o = \left(\frac{\mu_o}{4\pi}\right) I d\vec{l} \times \frac{\vec{r}}{r^3}$ è subito evidente che i tratti radiali EF, GH, CD non contribuiscono al vettore induzione magnetica nel punto O poiché $d\vec{l} \,//\, \vec{r}$.

Sugli archi DE, FG, HC invece $d\vec{l} \perp \vec{r}$ ed i contributi elementari hanno valore massimo $dB_o = \left(\frac{\mu_o}{4\pi}\right)\frac{Idl}{r^2}$ con direzione ortogonale al piano del foglio e verso uscente se la corrente sull'arco gira in verso antiorario. I 3 contributi sono quindi:

$$B_{DE} = \int_D^E dB_o = -\left(\frac{\mu_o}{4\pi}\right)\frac{I}{b^2}\int_D^E dl = -\left(\frac{\mu_o}{4\pi}\right)\frac{I\theta_1}{b}$$

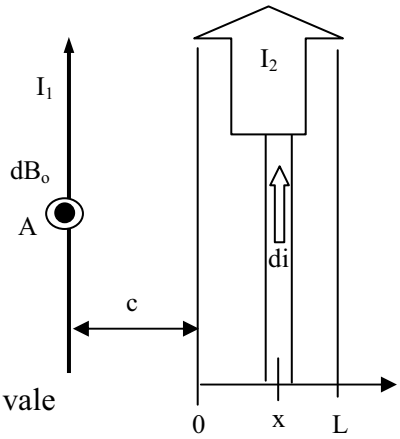
$$B_{FG} = \int_F^G dB_o = -\left(\frac{\mu_o}{4\pi}\right)\frac{I}{c^2}\int_F^G dl = -\left(\frac{\mu_o}{4\pi}\right)\frac{I\theta_2}{c}$$

$$B_{HC} = \int_H^C dB_o = +\left(\frac{\mu_o}{4\pi}\right)\frac{I}{a^2}\int_H^C dl = +\left(\frac{\mu_o}{4\pi}\right)\frac{I(\theta_1+\theta_2)}{a}$$



l'**induzione magnetica totale** è $B_o(O) = B_{DE} + B_{FG} + B_{HC} = \left(\frac{\mu_o I}{4\pi}\right)\left(\frac{\theta_1+\theta_2}{a} - \frac{\theta_1}{b} - \frac{\theta_2}{c}\right) =$ **3.56· 10^{-8} T**

5. Il nastro viene scomposto in fili di spessore infinitesimo dx percorsi dalla corrente infinitesima $di = I_2\frac{dx}{L}$ che genera nel punto A, in accordo alla legge di Biot-Savart, un contributo $dB_o = \frac{\mu_o di}{2\pi(c+x)}$.



Integrando tutti i contributi prodotti nel punto A dal nastro si ottiene il vettore induzione complessivo

$$B_o = \int dB_o = \frac{\mu_o I_2}{2\pi L}\int_0^L \frac{dx}{x+c} = \frac{\mu_o I_2}{2\pi L}\ln\left(1+\frac{L}{c}\right).$$

La forza attrattiva che si esercita per unità di lunghezza sul filo vale

$$\frac{dF}{dl} = I_1 B_o = \frac{\mu_o I_2 I_1}{2\pi L}\ln\left(1+\frac{L}{c}\right) = \mathbf{1.86 \cdot 10^{-7}\ N/m}$$