

LEZIONI DI ASTROFISICA

Prof. Paolo Paolicchi

Prefazione

Gli appunti relativi alle lezioni del corso di Astrofisica si articolano in diverse parti.

Nella 1^a parte (capitoli da 1 a 6) viene presentato il quadro osservativo generale dell'Astrofisica, con lo scopo di mettere in grado il lettore di poter consultare con profitto la letteratura scientifica. Non vengono invece analizzate in dettaglio le tecniche e le tecnologie astronomiche, e le nozioni elementari di astronomia (moto dei corpi sulla sfera celeste, coordinate astronomiche ecc.) vengono date per note. Per oggetti di tipo diverso (stelle, pianeti, galassie) vengono identificate e discusse le grandezze osservabili di maggior interesse. Vengono anche brevemente presentate le tecniche di analisi della distribuzione di materia nell'Universo su larga scala.

Nella 2^a parte (da 7 a 11) vengono analizzate le condizioni di equilibrio idrostatico ed energetico di una struttura autogravitante; le considerazioni fatte si applicano immediatamente al caso di una stella, ma sono per la maggior parte utilizzabili (con le opportune modifiche) anche per lo studio di astri diversi.

Nella 3^a parte (da 12 a 14) vengono richiamate le principali problematiche fisiche necessarie per lo studio delle proprietà della materia nelle condizioni tipiche di una stella o di un oggetto astronomico: l'equazione di stato della materia, le proprietà di assorbimento della radiazione da parte della materia, la produzione di energia da parte del campo gravitazionale o mediante reazioni di fusione nucleare.

Si noti che alcune parti sono scritte in caratteri più piccoli. Si tratta di dettagli o di sviluppi formali che possono essere omessi.

Infine voglio ringraziare i colleghi Scilla Degl'Innocenti, Aldo Dell'Oro e Umberto Penco per la lettura preliminare di alcuni capitoli e per utili consigli in merito.

Indice

0.1	Introduzione alla prima parte	6
1	Gli osservabili dell'astrofisica stellare	7
1.1	La magnitudine	7
1.2	Il colore di una stella.	11
2	Il diagramma di HR e le caratteristiche fisiche delle stelle.	17
2.1	Misure di distanza; la parallasse.	17
2.2	Interpretazione del diagramma HR; diagrammi di ammasso.	23
2.3	Passaggio a raggi e luminosità.	25
2.4	Subnane e nane bianche.	27
2.5	Masse e raggi.	27
2.6	Le stelle doppie.	28
2.7	Le stelle doppie per la determinazione di masse e raggi.	30
3	Composizione chimica e popolazioni stellari.	35
3.1	Popolazioni.	35
3.1.1	Il colore delle stelle più luminose di un ammasso stellare.	35
3.1.2	Comportamento cinematico.	36
3.1.3	Differenze spettroscopiche.	37
3.2	Composizione chimica.	38
4	Il Sistema Solare.	42
4.1	Riconoscimento di un pianeta.	42
4.2	Luminosità di un pianeta; emissione nel visibile e nell'infrarosso.	43
4.3	I pianeti maggiori.	47
4.4	Corpi minori del sistema solare.	50
4.4.1	Gli asteroidi; classificazione spettroscopica e dinamica	50
4.4.2	Caratteristiche fotometriche degli asteroidi.	51
4.4.3	Le comete	52
4.4.4	La fascia di Kuiper-Edgeworth	52
5	Sistemi planetari extrasolari.	55
5.1	Introduzione.	55
5.2	Caratteristiche dei sistemi planetari extrasolari e problemi interpretativi	60

6	L'universo extragalattico.	64
6.1	Nubi interstellari e galassie.	64
6.2	Classificazione delle galassie.	67
6.3	Spettroscopia delle galassie.	69
6.4	Distribuzione spaziale della luminosità.	71
6.4.1	Il profilo delle ellittiche.	73
6.4.2	Il profilo delle galassie a spirale.	75
6.5	Radiogalassie e quasars.	75
6.6	Struttura dell'Universo su grande scala	76
6.6.1	La funzione di correlazione	78
6.6.2	Il test di percolazione	79
7	Strutture autogravitanti: equazioni costitutive e caratteristiche dell'equilibrio.	82
7.1	L'equilibrio idrostatico.	82
7.2	I tempi dell'evoluzione dinamica.	83
7.3	Le equazioni di Eulero e di Navier-Stokes.	85
7.4	Limitazioni sulla pressione centrale.	87
7.5	Modelli politropici.	88
7.6	Cenni sull'equazione di stato; l'equazione di Eddington.	90
7.7	Corpi autogravitanti in rotazione.	91
8	Strutture autogravitanti: energia e stabilità.	95
8.1	Il teorema del viriale.	95
8.2	Il tempo di Kelvin.	97
8.3	Energia di una struttura autogravitante.	98
8.4	Il criterio di stabilità.	100
8.5	Gli indici adiabatici.	102
8.6	Il problema delle pulsazioni (cenni).	103
9	Il trasporto dell'energia.	106
9.1	Intensità e flusso di energia.	106
9.2	Trasporto radiativo: il gradiente di T	108
9.3	Il limite di Eddington; deduzione della relazione massa-luminosità.	110
10	Il trasporto convettivo.	112
10.1	Il criterio di Schwarzschild.	112
10.2	Efficienza del trasporto convettivo; convezione "adiabatica".	114
10.3	Convezione superadiabatica.	115
11	Integrazione delle equazioni di equilibrio.	118
11.1	Le equazioni dell'equilibrio.	118
11.2	Condizioni al contorno.	120
11.3	Sviluppi superficiali.	121
11.4	Metodi di integrazione.	123
11.4.1	Metodo del fitting.	123

11.4.2 Il metodo di Henyey.	123
12 L'equazione di stato.	126
12.1 Introduzione.	126
12.2 La depressione coulombiana.	126
12.3 Effetti quantistici.	127
12.4 Gas degenere di elettroni.	129
12.5 Le nane bianche.	131
12.6 Le stelle di neutroni.	132
12.7 Equazioni di stato in casi di ionizzazione parziale.	135
13 L'opacità e la formazione di righe.	138
13.1 Principali meccanismi di opacità; la media di Rosseland.	138
13.2 Scattering, processi b-f e f-f.	140
13.2.1 Lo scattering.	141
13.2.2 Processi f-f e b-f.	141
13.3 Assorbimento b-b e formazione di righe.	142
13.4 Allargamento delle righe spettrali.	144
13.5 Larghezza equivalente e curve di crescita.	145
13.6 Rotazione ed effetto Doppler globale.	145
13.6.1 La rotazione.	146
13.6.2 Moto radiale.	146
14 Produzione di energia.	149
14.1 Introduzione: ϵ_g e ϵ_ν	149
14.2 Produzione di energia nucleare.	150
14.3 Le principali reazioni nell'evoluzione stellare.	154

PARTE PRIMA

0.1 Introduzione alla prima parte

Le stelle e gli altri oggetti celesti ci inviano continuamente *segnali* di diversa natura: particelle il cui flusso continuo determina, su tempi lunghi, la diminuzione della massa stellare, neutrini prodotti nelle zone interne e che, a causa della bassissima sezione d'urto, riescono a trapassare l'intera struttura e a sfuggire nello spazio interstellare, probabilmente onde gravitazionali e, soprattutto, radiazione elettromagnetica. Lo studio del flusso di particelle e dei neutrini è ancora in buona parte limitato alla stella più vicina, il Sole, e lo studio delle onde gravitazionali, che richiede strumenti di altissima complessità, può comunque coinvolgere solo un numero limitato e selezionato di sorgenti (quali quelle caratterizzate da una rapida variazione del momento di quadrupolo della distribuzione di materia). Al contrario, l'analisi della radiazione elettromagnetica proveniente dalle stelle rappresenta l'unico metodo sperimentale con caratteristiche di generalità, ed è quindi la via principale da percorrere per conoscerne la natura. Per la precisione dobbiamo però parlare non di studio sperimentale ma di osservazioni: l'astronomia infatti si caratterizza per la pratica impossibilità di organizzare esperimenti di laboratorio, sostituiti dalla osservazione di eventi lontani, grandiosi ma non programmabili né almeno in linea di principio riproducibili. La "riproducibilità" dell'esperimento, solitamente richiesta nella fisica, viene qui surrogata dalla disponibilità di un campione ampio di oggetti da osservare, tra cui vanno però definite, talvolta con un certo margine di arbitrarietà, delle similarità. Anche all'interno di questo generale percorso, la strategia osservativa si differenzia in base alle caratteristiche degli oggetti da studiare, siano essi stelle (capitoli 1–3), corpi planetari (capitoli 4 e 5), ed oggetti extragalattici (capitolo 6). La discussione relativa alle stelle, che sarà svolta per prima, permetterà la introduzione e definizione di alcuni concetti generali, che saranno utilizzati anche per lo studio degli altri oggetti.

Capitolo 1

Gli osservabili dell'astrofisica stellare

1.1 La magnitudine

In generale una sorgente astronomica ci invia un segnale luminoso caratterizzato da una certa intensità complessiva e da un certo spettro. I più naturali “osservabili” di una stella saranno quindi la **quantità della radiazione** ed il **colore** della stessa. Naturalmente la radiazione che una stella ci manda verrà alterata dal lungo viaggio attraverso lo spazio interstellare e (a parte le osservazioni dallo spazio) nell'atmosfera terrestre.

Cominciamo con alcune definizioni.

Il **Flusso** ϕ_λ alla lunghezza d'onda λ è la quantità di energia emessa, a quella lunghezza d'onda, per unità di tempo e di superficie. Per una sorgente a simmetria sferica, come una stella, possiamo di conseguenza definire la **luminosità monocromatica** L_λ come:

$$L_\lambda = 4\pi R^2 \phi_\lambda \quad (1.1)$$

dove R è il raggio della stella.

L'ipotesi di simmetria sferica è di solito una buona approssimazione per l'emissione delle stelle dovuta ad irraggiamento termico, anche se, per esempio, una stella rapidamente rotante non ha forma sferica e non ha neppure una emissione uniforme su tutta la sua superficie. L'ipotesi è meno facilmente trasferibile ai corpi planetari, per i quali parte della emissione luminosa è dovuta a luce direttamente riflessa (e quindi non in modo isotropo, essendo ben definita la direzione della sorgente); anche l'emissione termica, dovuta al rilascio dell'energia assorbita, è spesso parzialmente anisotropa. L'ipotesi di simmetria sferica è infine completamente falsa quando si ha a che fare con tipi di emissione non termica (per esempio l'emissione di fotoni dovuta al moto di particelle cariche in un campo elettromagnetico).

Integrando su tutte le lunghezze d'onda si ha la **luminosità totale**:

$$L = \int_0^\infty L_\lambda d\lambda = 4\pi R^2 \int_0^\infty \phi_\lambda d\lambda \quad (1.2)$$

Se la distanza della sorgente dell'osservatore è r , questa energia si distribuirà sulla superficie di una sfera di raggio r , ed avremo quindi per il flusso raccolto da un rivelatore di superficie unitaria:

$$f_\lambda = \frac{L_\lambda}{4\pi r^2}; \quad f = \frac{L}{4\pi r^2} \quad (1.3)$$

Nella realtà il discorso è più complesso: parte della radiazione viene assorbita dal mezzo interstellare, con efficacia ovviamente dipendente ancora da λ :

$$f'_\lambda = A_\lambda f_\lambda \quad (1.4)$$

Se poi l'osservatore è posto sulla superficie della Terra, dovrà essere tenuto in conto anche l'assorbimento dovuto all'atmosfera terrestre; il relativo coefficiente dipenderà, oltre che da λ , anche dallo spessore dell'atmosfera attraversata e quindi dall'altezza dell'astro sull'orizzonte:

$$f''_\lambda = D_\lambda(\theta) A_\lambda f_\lambda \quad (1.5)$$

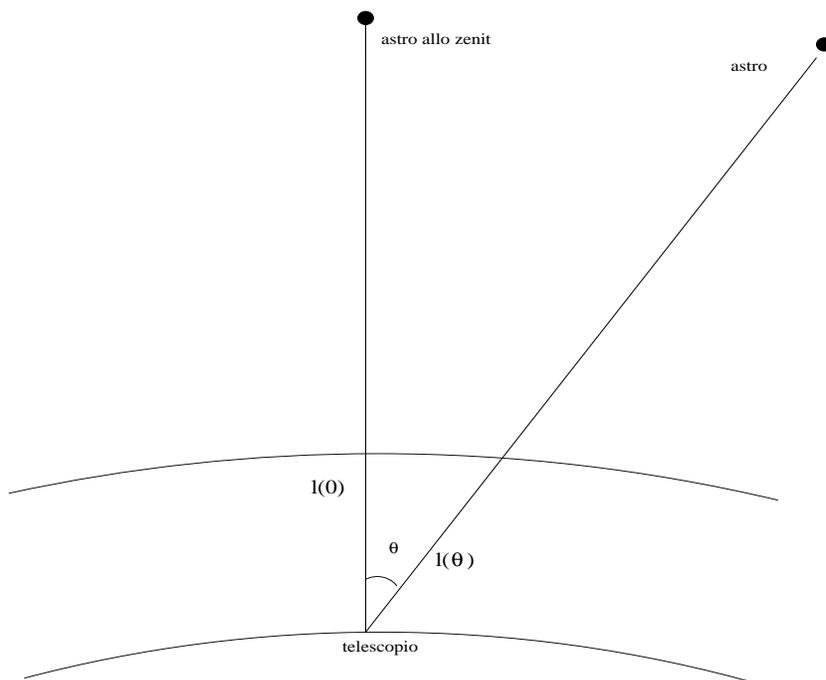


Figura 1.1: Il diverso percorso nell'atmosfera in dipendenza della **distanza zenitale** (definita come l'angolo θ) con $l(\theta) = l(0)/\cos \theta$.

L'assorbimento operato dall'atmosfera è determinante per diverse lunghezze d'onda che vengono totalmente "cancellate". Nella Figura 1.2 riportiamo in ascissa le varie lunghezze d'onda ed in ordinata l'altezza sopra il livello del mare.

La curva delimita le altezze **al di sopra delle quali** è possibile, per una data lunghezza d'onda, fare osservazioni astronomiche. La figura chiarisce sufficientemente perchè l'astronomia, nata ovviamente con osservazioni nel **visibile** (la banda tra 3900 e 7600Å, dove 1Å = 10⁻⁸cm, si sia poi sviluppata nel **radio**, mentre l'astronomia γ , X, od ultravioletta (UV) è diventata possibile solo in presenza di osservatori orbitanti nello spazio; intermedia è la situazione dell'infrarosso, che consente, per alcune **finestre** di lunghezza d'onda, osservazioni e misure anche da terra.

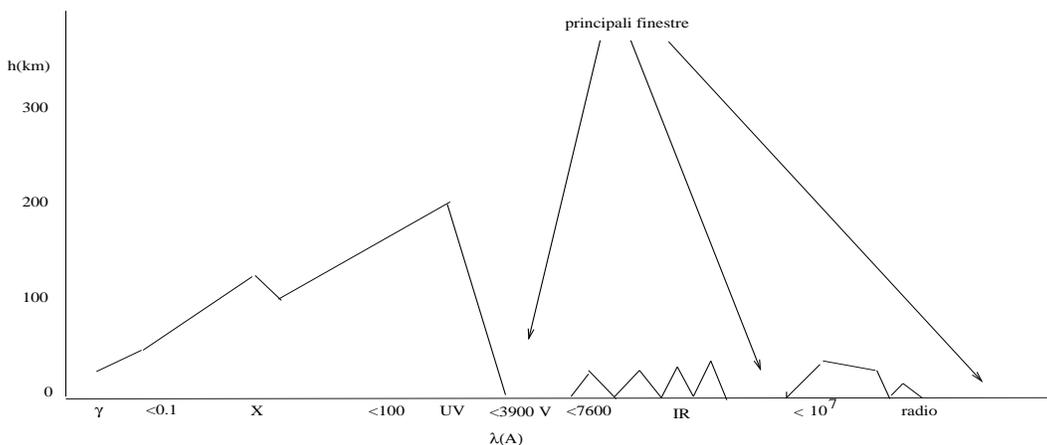


Figura 1.2: A diverse lunghezze d'onda (in ascissa con l'indicazione dei nomi usuali date alle varie bande) è diversa l'altezza minima (rappresentata schematicamente in ordinata) al disopra della quale sono possibili osservazioni e misure.

Dopo l'attraversamento dello spazio interstellare e dell'atmosfera, la radiazione superstite entra nel rivelatore; anche quest'ultimo sarà, ovviamente, caratterizzato da una sensibilità dipendente dalla lunghezza d'onda, e quindi da una *curva di sensibilità*. Le più tipiche curve di sensibilità sono:

1. la curva visuale, propria dell'occhio umano, soprattutto sensibile alla radiazione fra 5500 e 6000 Å;
2. la curva fotografica, tipica di una lastra fotografica, centrata tra 4000 e i 4500 Å (è possibile naturalmente anche ottenere lastre fotografiche con una diversa risposta);
3. quella fotovisuale, che permette di riprodurre approssimativamente il caso 1 mediante un filtro giallo posto fra la sorgente e la lastra fotografica;
4. le curve dei sistemi fotoelettrici, dipendenti in larga misura dai filtri adottati; lo stesso rivelatore permette, con filtraggi diversi, di fare misure con curve di sensibilità diverse.

Tra i numerosi *sistemi fotometrici*, che permettono di osservare gli astri in diversi colori, mediante l'uso di filtri a banda passante larga (parecchie centinaia di Å), media (qualche centinaio di Å) e stretta (non più di 100 Å), il più usato è certamente il sistema di Johnson e Morgan *UBV*, basato su due filtri le cui curve di risposta corrispondono qualitativamente a quella visuale (*V*) fotografica (*B*) ed un terzo (*U*) centrato sui 3600Å, nell'ultravioletto vicino (e quindi osservabile anche da osservatori in alta montagna), in corrispondenza del "salto di Balmer" (una regione di lunghezze d'onda in cui le osservazioni sono estremamente importanti ai fini dell'interpretazione fisica). Le relative **semilarghezze di banda** sono rispettivamente di 900, 1000 e 700Å. In tempi più recenti i sistemi fotometrici si sono arricchiti e completati: il sistema *UBV* ha acquisito due nuovi "colori" (*R* -rosso, centrato sui 7000Å, e *I* -infrarosso,

centrato intorno ai 9000\AA , anche se ci sono varianti). Si sono diffusi anche altri sistemi, come quello detto **di Ginevra** comprendente il classico UBV piú altri quattro filtri a banda piú stretta nel visibile, o il sistema **di Stromgren** con tre filtri (ubv) a banda piú stretta (intorno ai 200\AA) centrati nelle zone dell' UBV , un quarto filtro (y) intorno ai 4700\AA ed un quinto β centrato sulla riga dell'idrogeno $H\beta$ (quella legata alla transizione fra i livelli 2 e 4).

Ad esempio, un fotometro equipaggiato con un filtro V riceverà un flusso effettivo di radiazione:

$$\underline{f}(\lambda) = S_V(\lambda)D_\lambda(\theta)A_\lambda f_\lambda \quad (1.6)$$

Integrando su λ si ottiene:

$$\begin{aligned} I_V &= \int_0^\infty \underline{f}(\lambda)d\lambda = \int_0^\infty S_V(\lambda)D_\lambda(\theta)A_\lambda L_\lambda \frac{1}{4\pi r^2}d\lambda = \\ &= \int_0^\infty S_V(\lambda)D_\lambda(\theta)A_\lambda f_\lambda d\lambda \end{aligned} \quad (1.7)$$

Possiamo a questo punto introdurre la definizione di **magnitudine** di un astro, mediante la cosiddetta formula di Pogson:

$$m_V = -2.5 \log I_V + \text{cost.} \quad (1.8)$$

La definizione assume questa forma in base alla sensibilità dell'occhio all'intensità luminosa, che viene valutata in modo logaritmico: l'antica scala delle grandezze stellari, puramente empirica, aveva lo stesso tipo di andamento; la scelta del coefficiente 2.5 e del logaritmo in base 10, invece del logaritmo naturale, è pura convenzione (ricordiamo che la costante di conversione tra base 10 e base e è 2.303). La **magnitudine apparente** così definita impone di fissare uno "zero" di riferimento, cioè una sorgente stellare per cui:

$$-2.5 \log I_V^* + \text{cost.} = 0 \quad (1.9)$$

La stella Vega (α Lyr) è una tipica sorgente di magnitudine $\simeq 0$. È possibile anche introdurre, mediante la (1.8), il concetto di **magnitudine assoluta**:

$$M_V = m_V + 5 \log \frac{10pc}{r} - A \quad (1.10)$$

dove r è la distanza della stella, si fissa per convenzione $10pc$ (v. cap. 2) come unità di distanza, ed A rappresenta la correzione dovuta all'assorbimento interstellare, calcolato in pratica facendo una media di $\log A_\lambda$. A dipende dalla distanza ed anche, in minor misura, dalla direzione, ed è massimo nel piano galattico, dove può essere in media stimato $\sim r/2000pc$.

Si definisce **magnitudine bolometrica** la magnitudine che otterremmo raccogliendo **tutta** la radiazione che arriva alla Terra, vale a dire se fosse $S(\lambda)D_\lambda(\theta) = 1$. Questa quantità, che come vedremo è estremamente utile quando si confrontano osservazioni e teoria, non è purtroppo effettivamente osservabile. In astratto potremmo definire la **correzione bolometrica** $B.C.$ come la differenza fra la magnitudine bolometrica e quella visuale:

$$m_{bol} = m_V + B.C. \quad (1.11)$$

Ovviamente $B.C.$ è sempre negativa; per evitare comunque di avere per uno stesso astro valutazioni di magnitudine inutilmente differenti, si aggiustano le costanti additive insite nella definizione di m_V , in modo che per le stelle che di più emettono nel V la correzione bolometrica sia vicina a zero.

Ovviamente le correzioni bolometriche non sono osservabili, ma possono essere stimate anche sulla base di modelli teorici di stelle e di atmosfere stellari. Secondo le tabelle pubblicate su Allen (2000) $B.C. = 0$ per stelle **supergiganti di Classe I e tipo F2** (v.seguito).

In analogia con la (1.9), possiamo anche definire, in termine della **luminosità solare** L_\odot ($L_\odot = 3.845 \cdot 10^{33} \text{erg/s}$) la **magnitudine bolometrica assoluta**:

$$M_{bol} = -2.5 \log \frac{L}{L_\odot} + 4.74 \quad (1.12)$$

dove 4.74 rappresenta la magnitudine bolometrica assoluta del Sole, quella cioè che sarebbe la sua magnitudine bolometrica se fosse a 10pc di distanza. Nel dettaglio il valore numerico della costante dipende anche dalla taratura delle correzioni bolometriche, e può essere anche leggermente diverso.

La fotometria in più colori (come la UBV) rende anche possibile la definizione degli indici di colore: è necessario per questo definire le magnitudini nel blu m_B e nell'ultravioletto m_U , con le stesse modalità definite per il V , e fissando le costanti additive in modo da avere una approssimativa coincidenza delle tre per una stella di tipo spettrale $A0$. Gli indici di colore saranno definiti come:

$$U - B = m_U - m_B$$

$$B - V = m_B - m_V$$

In conseguenza delle definizioni, una stella blu ha $B - V$ più basso di una stella rossa. La distanza della sorgente può provocare un arrossamento $E(B - V)$ di cui occorre tener conto. In generale E è connesso con A ; $E(B - V) \sim 0.3A$, mentre nell'ultravioletto la correzione sul colore risulta meno rilevante ed A/E può avvicinarsi a 10.

1.2 Il colore di una stella.

La conoscenza degli indici di colore permette di valutare la seconda grandezza osservabile essenziale, oltre alla luminosità, vale a dire il colore dell'astro.

In realtà la definizione del "colore" di una stella non è del tutto ovvia ed univoca. Lo spettro della radiazione emessa da essa non è infatti direttamente assimilabile ad uno spettro di ben definita **temperatura di colore**, quale per esempio quello del *corpo nero*.

In generale uno spettro stellare sarà caratterizzato da una struttura in grande (il "continuo") che pur non essendo troppo simile ad uno spettro di corpo nero, permette almeno di definire una lunghezza d'onda di massima emissione, e da numerose strutture locali (le "righe") che danno preziose informazioni sulle proprietà chimico-fisiche della atmosfera, ma rendono molto meno immediata la valutazione del continuo. Fisicamente lo spettro risulterà dalla somma dei fotoni emessi dagli strati esterni dell'atmosfera stellare (e per i quali si possono definire temperature

diverse), fino ad una certa **profondità ottica** (v. Cap.11) e dall'effetto dell'assorbimento da parte degli stessi strati dei fotoni provenienti più dall'interno. Tale assorbimento privilegia le lunghezze d'onda tipiche di alcune transizioni atomiche.

Per il momento ci occuperemo solo del continuo, cercando, pur con le dovute cautele, di assimilare lo spettro stellare a quello di un corpo nero, di cui andiamo a riassumere le principali proprietà.

L'energia irraggiata, nell'unità di tempo, dall'unità di superficie, nell'angolo solido 2π , da un corpo nero di temperatura T , negli intervalli di frequenza $\nu + d\nu$ o di lunghezza d'onda $\lambda + d\lambda$ sarà rispettivamente:

$$\frac{dS}{d\nu} = S_\nu = \frac{2\pi h\nu^3}{c^2} \frac{1}{\exp(h\nu/kT) - 1} \quad (1.13)$$

$$\frac{dS}{d\lambda} = S_\lambda = \frac{2\pi hc^2}{\lambda^5} \frac{1}{\exp(hc/\lambda kT) - 1} \quad (1.14)$$

Integrando su λ o su ν si ricava la *legge di Stephan-Boltzmann*:

$$W = \sigma T^4 \quad \left(\text{dove } \sigma \sim \int \frac{x^3}{e^x - 1} dx \right) \quad (1.15)$$

È facile verificare che il massimo di S_λ corrisponde ad un valore $\lambda = \lambda_{max}$ per il quale vale la *legge di Wien*:

$$\lambda_{max} T = \text{cost.} \quad (1.16)$$

A varie temperature, l'emissività di un corpo nero presenta quindi un massimo per una lunghezza d'onda (o frequenza) dipendente da T ; va però sottolineato che le curve S di due corpi neri corrispondenti a due temperature diverse non si incrociano mai, essendo sempre più in alto quella corrispondente alla temperatura maggiore.

Il fatto che il Sole, e con esso tutte le stelle, non si comporti esattamente come un corpo nero (anche tenendo conto solo del continuo) rende non immediata ed univoca la definizione di temperatura di colore: in letteratura sono diffuse diverse definizioni, tra cui ricordiamo:

- a) La **temperatura efficace o effettiva**, che è la temperatura del corpo nero di uguali luminosità e dimensioni:

$$L = 4\pi R^2 \sigma T_{eff}^4 \quad (1.17)$$

(Ricordiamo che la temperatura efficace del Sole è di circa $5777^\circ K$).

- b) La **temperatura di brillantezza**: corrisponde allo stesso tipo di definizione ma applicata alla luminosità ad una data lunghezza d'onda L_λ :

$$L_\lambda = 4\pi R^2 \frac{2\pi hc^2}{\lambda^5} \frac{1}{\exp(hc/\lambda k\underline{T}) - 1} \quad (1.18)$$

(La definizione richiede di fissare una λ di riferimento; il valore di \underline{T} dipenderà da λ ; per esempio per il Sole $\underline{T}(UV) \sim 5000^\circ K$, mentre $\underline{T}(V) \sim 6000^\circ K$)

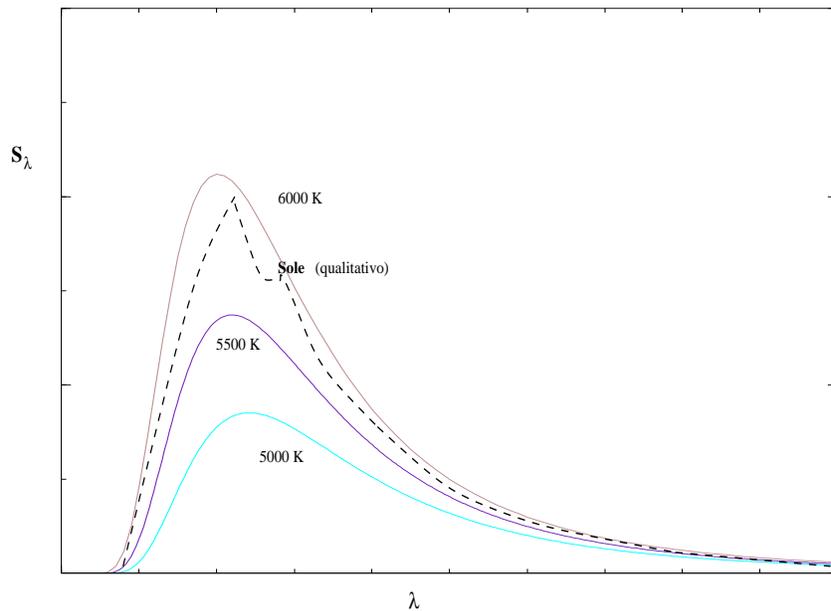


Figura 1.3: La curva di emissione di corpi neri di diversa temperatura, confrontata con quella del Sole (tratteggiata).

c) Diverse possibili **temperature di colore**, definite per coppie di lunghezze d'onda λ_1 e λ_2 :

$$\frac{L_1}{L_2} = \frac{S\lambda_1(Tc)}{S\lambda_2(Tc)} \quad (1.19)$$

La deviazione dal corpo nero dello spettro di emissione di una stella può essere analizzata anche mediante gli indici di colore $U - B$ e $B - V$. Infatti su un piano $U - B / B - V$ è possibile tracciare una curva (approssimativamente una retta) corrispondente ad una successione di corpi neri di temperatura variabile, e confrontarla con l'andamento medio di un campione di stelle vicine (non arrossate in misura significativa); la Fig. 1.4 permette di effettuare tale confronto.

La classificazione delle stelle per colore viene comunque fatta, più che con la enunciazione di un dato numerico di temperatura, mediante una scala empirica, legata ad un esame morfologico dello spettro stellare. Il codice di classificazione di uno spettro stellare è il seguente:

temperatura(K)	energia eq. (ev)	$\lambda_{eq}(A)$	$\nu_{eq}(10^{14}/s)$	$F_{\lambda_{max}}$	$F_{\nu_{max}}(\lambda)$
[$1ev = 11604.45K$]	1.	12398	2.418	12398	
JM-I				9700	
3000	0.258	47955	0.625	9658	16996
JM-R				7100	
H_{α} (*)				6563	
5000	0.431	28774	1.042	5795	10198
JM-V				5500	
5777 (Sole)	0.498	24904	1.204	5016	8826
JM-B				4400	
Limite di Balmer				3646	
JM-U				3600 (**)	
10000	0.862	14387	2.084	2898	5099
20000	1.724	7194	4.168	1449	2550
Ly_{α} (***)				1216	
50000	4.308	2877	10.420	580	1020

Tabella 1.1: Tabella di corrispondenza temperatura/energia/lunghezza d'onda/frequenza. I simboli "JM-*" corrispondono alle diverse bande del sistema di Johnson e Morgan. Le quantità $F_{\lambda_{max}}$ e $F_{\nu_{max}}$ indicano le due diverse lunghezze d'onda alle quali le corrispondenti curve di corpo nero raggiungono il massimo di emissione per unità –rispettivamente– di lunghezza d'onda e di frequenza. Si noti che $1ev$ corrisponde ad una temperatura piuttosto alta (in confronto con quelle tipiche delle stelle) ma ad una lunghezza d'onda grande rispetto ai tipici valori di picco corrispondenti anche alle temperature stellari piu' basse (come $3000K$). (*) Transizione dell'idrogeno da $n = 2$ a $n = 3$. (**)La vicinanza del "Salto di Balmer" ossia dell'addensamento di righe di assorbimento vicino al limite di Balmer (corrispondente all'energia di legame del livello dell'idrogeno $n = 2$) fa sì che il flusso rilevato in questa banda sia di solito nettamente inferiore a quello previsto dalla legge del corpo nero. (***) Transizione dell'idrogeno da $n = 1$ a $n = 2$

Il Sole è una stella G2V.

Il tipo spettrale viene prevalentemente individuato dalla distribuzione spettrale del continuo e dalla presenza di alcune righe. Nell'ambito dei vari tipi spettrali le classi di luminosità vengono empiricamente individuate soprattutto dalle caratteristiche delle righe, la cui larghezza può essere collegata alla pressione superficiale e quindi alle dimensioni della stella (si veda la discussione nel capitolo 13). Per diverse classi di luminosità stelle dello stesso tipo spettrale hanno magnitudini assolute diverse, come illustrato dalla figura 1.5.

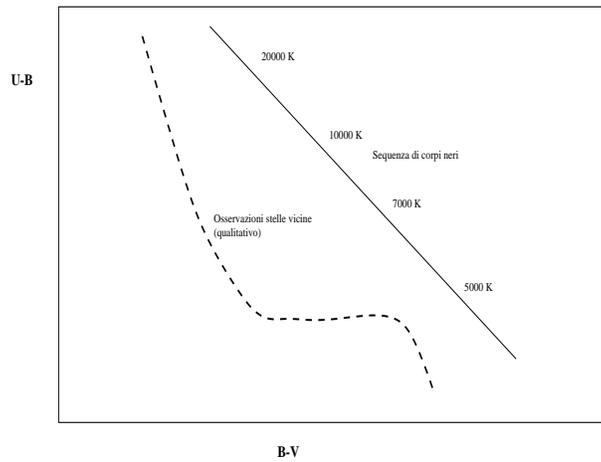


Figura 1.4: Confronto nel piano $U - B$ $B - V$ tra una sequenza di corpi neri di diverse temperature ed una sequenza di stelle reali.

(tipo spettrale) una lettera	(sottotipo) da 0 a 9	(classe luminosità) numero romano I-V	(note) lettera
---------------------------------	-------------------------	--	-------------------

Tabella 1.2: codice di classificazione di uno spettro stellare.

tipo	temperatura eff.	caratteristiche spettro	colore
O	40000K	righe di He ionizzato	blu
B	20000K	He neutro; H	
A	9000K	H	bianco
F	7000K	Ca (ion.), Fe, Ti	giallo
G	6300K	Ca (ion.), metalli	come ☉
K	4500K	Metalli neutri	rosso
R,N		+ carbonio	
M	3100K	TiO, molecole	
S		ZrO	

Tabella 1.3: tipi spettrali principali. Le caratteristiche dello spettro fanno riferimento a righe o bande particolarmente visibili

Ia	supergiganti
Ib	
II	
III	giganti
IV	subgiganti
V	nane

Tabella 1.4: classi di luminosità.

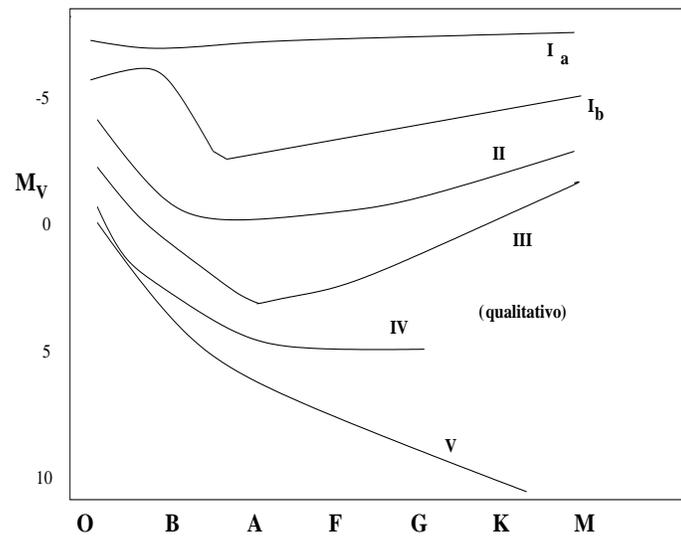


Figura 1.5: Sequenze M_V tipo spettrale per diverse classi di luminosità

Capitolo 2

Il diagramma di HR e le caratteristiche fisiche delle stelle.

2.1 Misure di distanza; la parallasse.

Le considerazioni svolte nella parte finale del Cap. I (ed in particolare l'esame della Fig. 1.5) confermano e chiariscono che l'utilizzazione delle osservazioni per l'interpretazione fisica dei processi di formazione ed evoluzione stellare deve passare attraverso la messa a punto di una rappresentazione bidimensionale che esprima da un lato la quantità di energia radiante emessa (e quindi L o la magnitudine M), dall'altro il suo colore (la temperatura superficiale con le sue diverse possibili definizioni, il tipo spettrale, $B-V$ ecc.). Mentre il colore della sorgente, seppur con gli errori dovuti all'arrossamento progressivamente crescente con la distanza degli astri, è un dato immediatamente desumibile dalle osservazioni, lo stesso non si può dire della luminosità. La quantità effettivamente misurabile, la **magnitudine apparente**, necessita di una stima della distanza per permettere di valutare la reale luminosità dell'astro. La misura delle distanze stellari è quindi preliminare ad ogni fondato tentativo di interpretazione astrofisica.

Per le stelle più vicine è possibile basare le misure di distanza sulla **parallasse**. Per parallasse si intende lo spostamento apparente che subisce un astro sulla sfera celeste rispetto a una direzione di riferimento, per effetto della mutata posizione dell'osservatore.

In generale, nella pratica, tale spostamento non viene misurato tanto in relazione ad un sistema fisso di coordinate, identificato sulla sfera celeste da un cerchio massimo e da un punto su di esso, quanto in relazione ad oggetti la cui distanza si suppone molto maggiore di quella dell'astro osservato, dimodoché il loro spostamento risulta trascurabile e la **parallasse relativa**, così misurata, coincide con buona accuratezza con quella assoluta.

Il tempo T intercorrente tra le due (o più) misure è ovviamente legato al movimento dell'osservatore di cui si trae profitto: in particolare si usano il moto di rotazione giornaliera dell'osservatore, solidale con la superficie, intorno all'asse terrestre ($T = 12$ ore al più; in tal caso si parla di **parallasse diurna**), ed il moto annuo di rivoluzione della Terra intorno al Sole ($T = 6$ mesi; **parallasse annua**). La Fig. 2.2 chiarisce il legame tra parallasse π e la distanza D , nel caso della parallasse diurna. Nel caso della parallasse annua basta sostituire il raggio dell'orbita giornaliera $r_T \cos \phi$ con il raggio dell'orbita terrestre (o, più precisamente, con il semiasse maggiore).

È evidente che, a parità di minima parallasse misurabile, il metodo delle parallasse annue

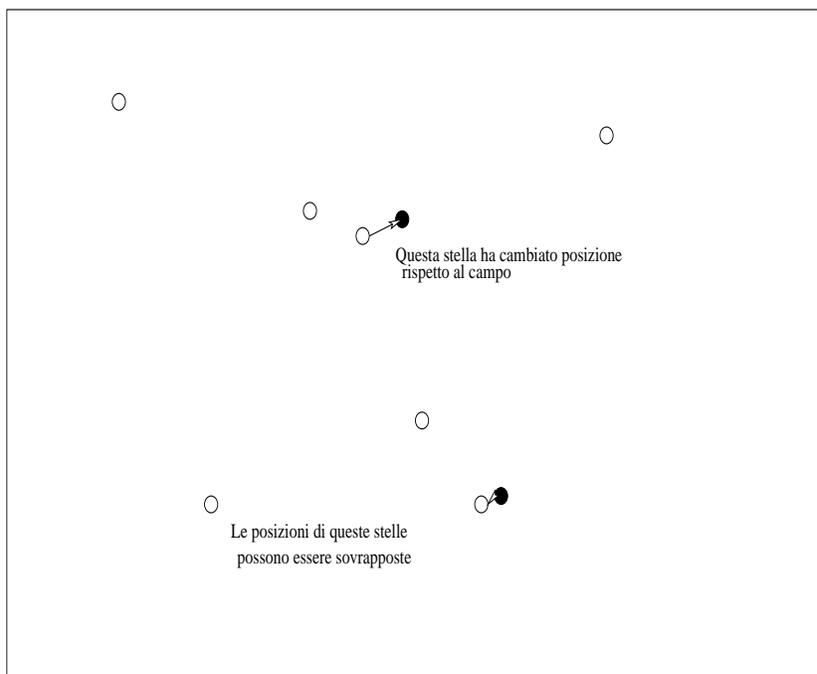


Figura 2.1: Parallassi relative. Nella figura vengono rappresentate due immagini dello stesso campo stellare riprese in due momenti diversi, separati da una differenza di tempo T ; la maggioranza delle stelle (cerchietti vuoti) vengono sovrapposte (entro il limite di risoluzione) sovrapponendo le due immagini; per poche invece le due immagini hanno incontrovertibilmente cambiato posizione (cerchietti vuoti + freccia verso i cerchietti pieni)

permette di spingersi a distanze molto maggiori; in effetti solo essa permette di valutare la distanza di oggetti esterni al Sistema Solare, quali le altre stelle. Naturalmente se si possono ripetere più osservazioni nell'arco di un anno, la stella sotto esame sarà vista disegnare sulla sfera celeste un'ellisse, il cui semiasse maggiore equivale all'angolo che sottenderebbe, visto dalla stella, il raggio dell'orbita terrestre (v.fig. 2.3).

L'uso del metodo delle parallassi annue per la determinazione delle distanze stellari ha anche comportato la scelta della classica unità di misura delle distanze stellari: il **parsec**, definito come la distanza alla quale il semiasse maggiore dell'orbita terrestre sottende un angolo di un secondo d'arco. La distanza delle stelle a noi più vicine è di qualche parsec: ciò ci chiarisce che misure di parallassi stellari significative richiedono una precisione superiore al secondo d'arco).

In linea di principio il potere risolutivo di un telescopio dovrebbe essere dell'ordine di D/λ dove D è il diametro del telescopio e λ la lunghezza d'onda della luce utilizzata. Per un telescopio di $1m$ di diametro e per $\lambda = 5000\text{Å} = 5 \cdot 10^{-7}m$ il potere risolutivo risultante sarebbe di circa $0.1''$, migliorabile di oltre un ordine di grandezza con luce blu e telescopi di grosse dimensioni. Tenendo conto che una stima di parallasse si ottiene mediante numerose misure di posizione, tramite un *best-fit* dell'ellisse teorica con le osservazioni, sembrerebbe facilmente raggiungibile una precisione anche superiore al millesimo di secondo d'arco. In realtà una simile precisione è raggiungibile solo mediante misure effettuate dallo spazio. Per le osservazioni da Terra, il limite

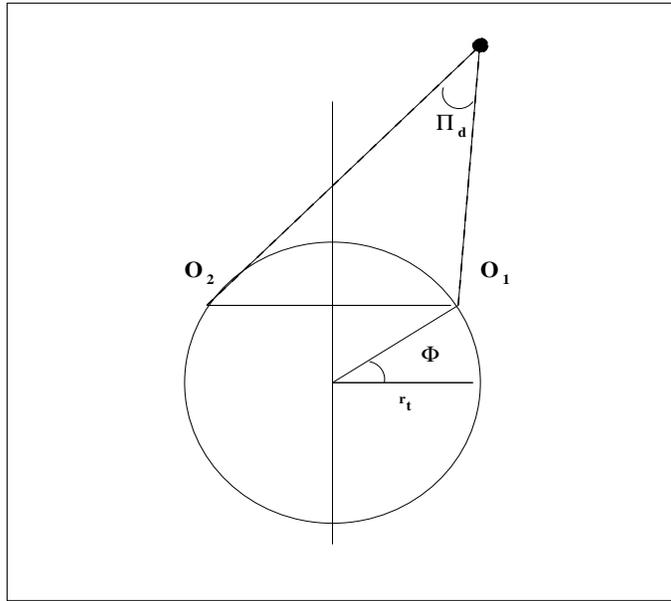


Figura 2.2: Parallasse diurna dell'astro S: $\pi_d \sim \frac{O_1 O_2}{r} = (2r_T \cos \phi)/r$, dove r è la distanza dell'astro.

è dato in effetti dal cosiddetto "seeing" atmosferico (conseguenza della microturbolenza presente nell'atmosfera) che rende le immagini stellari non più puntiformi e fisse ma scintillanti ed estese (con dimensioni di solito dell'ordine del secondo d'arco). Anche con sofisticate tecniche di elaborazione dati (quale la "speckle-interferometry") non è possibile eliminare completamente il rumore indotto dal seeing, e recuperare il potere risolutivo teorico.

Le stelle vicine non si limitano a descrivere delle ellissi, ma hanno anche un loro **moto proprio**, che si manifesta con uno spostamento progressivo rispetto ad un sistema fisso o rispetto a corpi celesti molto lontani, supposti fissi sulla sfera celeste. Il riconoscimento di stelle dotate di un moto proprio osservabile avviene mediante la sovrapposizione di immagini di campi stellari prese ad una adeguata distanza di tempo (tecnica del blinking, simile a quella usata per le parallasse relative). A differenza delle parallasse, in questo caso non c'è nessun legame con il moto della Terra e lo spostamento non è periodico ma aumenta regolarmente nel tempo (a meno che il moto proprio della stella non sia anch'esso, per qualche motivo, periodico).

Il moto proprio di una stella può essere utilizzato per stime di distanza, essendo inversamente proporzionale alla stessa, anche se questo presuppone, ovviamente, la conoscenza a priori della velocità relativa della stella rispetto al Sole (V).

Se si fa l'ipotesi che V sia la stessa per tutte le stelle vicine, e quindi uguale, a meno del segno, alla velocità del Sole rispetto all'ambiente "locale", è facile collegare moto proprio μ , parallasse π (in genere espressi ambedue in secondi d'arco) con la velocità $V_o \sin \lambda$ dove l'angolo λ è quello formato dalla direzione del moto solare con la congiungente stella-Sole:

$$\mu = \frac{V_o \sin \lambda}{4.74} \pi \quad (V_o \text{ è in } km/s) \quad (2.1)$$

dove il fattore 4.74 è dovuto alla conversione fra unità di misura non omogenee (*u.a./anno*

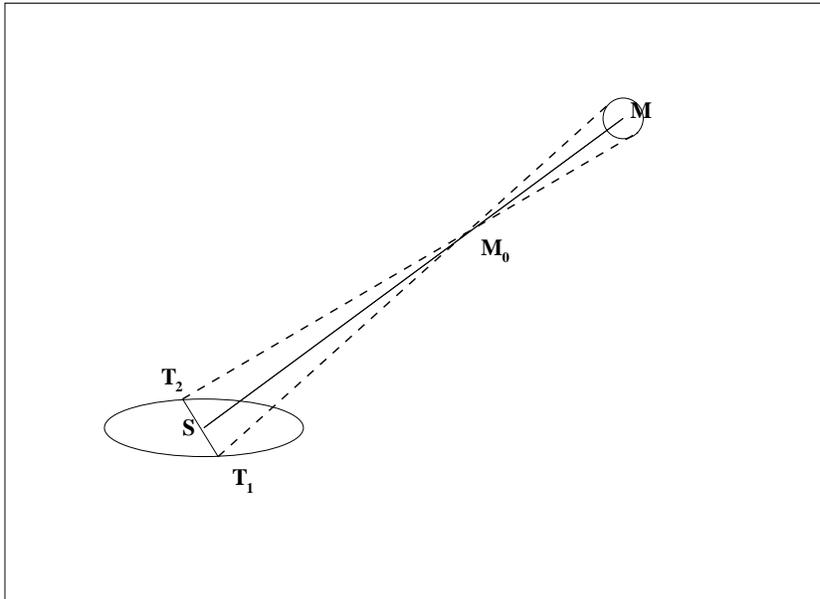


Figura 2.3: adattata da [1]; le posizioni dell'osservatore terrestre a distanza di sei mesi sono T_1 e T_2 ; $ST_1 = ST_2$ che sono uguali all'unità astronomica di distanza. M_0 è una stella vicina, fissa in posizione M sulla sfera celeste, mentre l'osservatore la vede descrivere un'ellisse di semiasse maggiore a e di semiasse minore $a \sin b$, dove b è la latitudine celeste di M , definita come l'angolo rispetto al piano dell'eclittica.

e Km/s).

La quantità:

$$H = \frac{\pi V_{\odot}}{4.74} \quad (2.2)$$

prende il nome di **parallasse secolare**. La stima della distanza mediante le parallasse secolari si presenta più potente di quello delle parallasse usuali, essendo il moto proprio progressivo, e valendo inoltre V_{\odot} circa 4 volte 4.74. Purtroppo l'ipotesi di $V = cost = V_{\odot}$ è molto drastica, e si può applicare proficuamente a gruppi di stelle più che a singoli oggetti.

Per N stelle è così possibile definire la **parallasse media**:

$$\pi_{media} = \frac{4.74 \sum \mu}{V_{\odot} \langle \sin \lambda \rangle N} \quad (2.3)$$

Se le stelle fanno parte di una associazione fisica si può fare l'ipotesi che abbiano tutte la stessa velocità relativa al Sole; essa può essere scomposta in una componente radiale V_r osservabile mediante l'effetto Doppler ed in una trasversale legata al moto proprio; si potrà definire allora la **parallasse di gruppo** (v. Fig. 2.4):

$$\pi_{gr.} = \frac{4.74 \mu}{V_r \tan \theta} \quad (2.4)$$

Analogo è il metodo delle **parallasse statistiche**, che si applica ad ammassi trattati come

gas di stelle, con distribuzione di velocità isotropa. Il confronto fra le misure Doppler e quelle di moto proprio permette di stimare la distanza dell'ammasso, mediante un best fit.

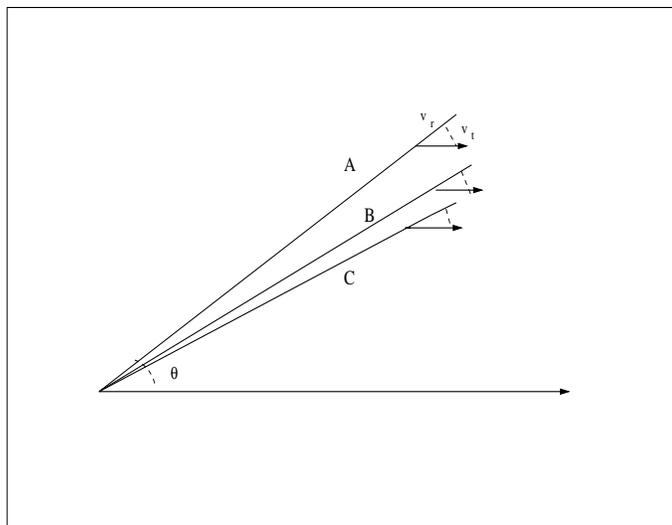


Figura 2.4: adattata da [1]; $A, B, C...$ appartengono allo stesso gruppo fisico e si muovono con velocità V scomponibile in una componente radiale V_r ed in una tangenziale V_t proporzionale al moto proprio.

Gli altri metodi di misura delle distanze usano delle informazioni che non abbiamo ancora dato, e non possono essere quindi considerati come “primari” (**parallassi spettroscopiche, variabili pulsanti**, ecc.).

Le scale di distanza così valutate permettono di ricostruire, almeno per le stelle più vicine, la magnitudine assoluta M ; dalla (1.10) si ricaverà però che (i logaritmi vanno messi in base e):

$$\Delta M_V \simeq 2 \frac{\Delta \pi}{\pi} \quad (2.5)$$

L'errore sulla parallasse si riflette sull'errore in magnitudine con un fattore 2; le misure di distanza sono quindi abbastanza critiche.

Pur con tutte queste difficoltà, possiamo disegnare un diagramma $M_V/B - V$ (o $M_{bol}/$ tipo spettrale ecc.) per le stelle vicine.

La Figura mostra il **diagramma di Hertzsprung Russell** per le stelle vicine.

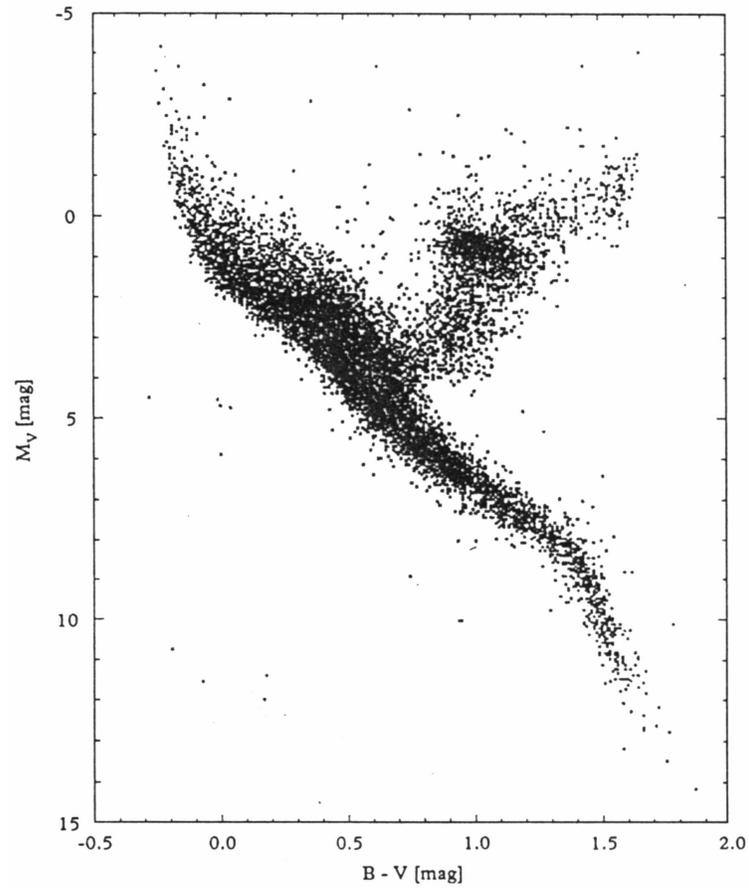


Figura 2.5: adattato da Kovalevsky J., 1998, Ann. Rev. Astron. Astrophys. 36,99: magnitudini visuali in funzione del colore $B - V$ per 16630 stelle osservate con il satellite astrometrico Hypparcos. Cortesia S.Petroni

2.2 Interpretazione del diagramma HR; diagrammi di ammasso.

La figura 2.5 risulta interessante e identifica una struttura abbastanza ben definita: una sequenza uniparametrica netta anche se fortemente perturbata; la situazione è migliore di quanto non ci saremmo attesi, essendo le stelle vicine al Sole un coacervo di masse, composizioni chimiche ed età diverse.

Molto più facile si presenta però l'interpretazione del Diagramma HR se ci limitiamo, volta per volta, ad associazioni fisiche di stelle (ammassi aperti sul piano galattico, ammassi globulari in alone). I diagrammi di ammasso, infatti, dovrebbero contenere stelle tutte della stessa età e composizione, almeno nella misura in cui diamo come acquisito che negli ammassi le stelle si siano formate tutte all'incirca nello stesso periodo da una unica nube di materia interstellare.

In effetti le figure 2.6/2.8 confermano le nostre aspettative: le stelle si distribuiscono in una sequenza uniparametrica ben più netta.

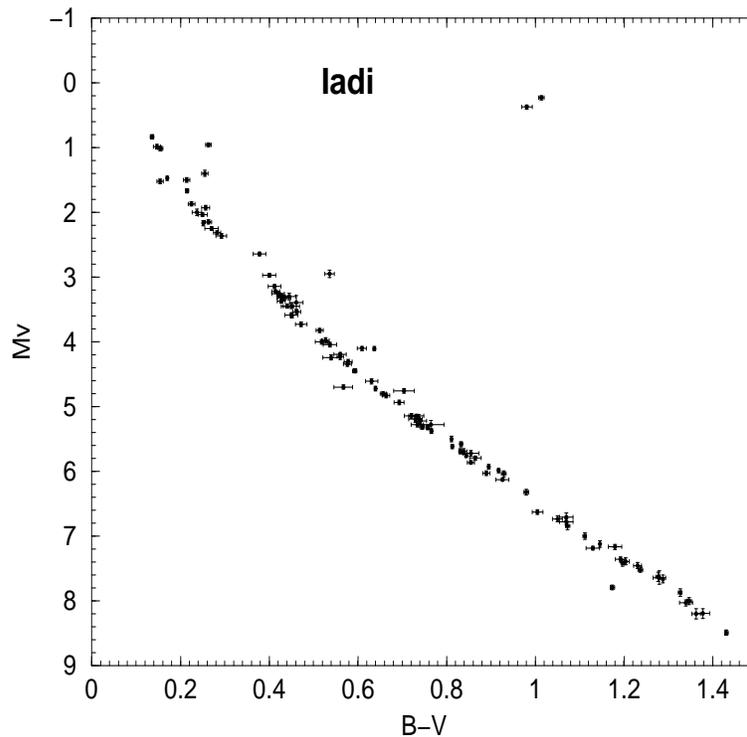


Figura 2.6: Iadi: diagramma colore magnitudine costruito usando i valori di parallasse di Madsen S., Dravins D., Lindegren L., 2001, A&A, in pubblicazione, ed i colori dalla pagina web del gruppo Hipparcos: <http://astro.estec.esa.nl/Hipparcos/HIPcataloguesearch.html>. La figura apparirà in Castellani, Degl'Innocenti, Prada Moroni, Tordiglione, spedito ad MNRAS. Cortesia S. Degl'Innocenti

Poiché la struttura di una stella è univocamente definita da massa, composizione chimica iniziale ed età (come discuteremo meglio in seguito) le considerazioni sopra svolte ci inducono

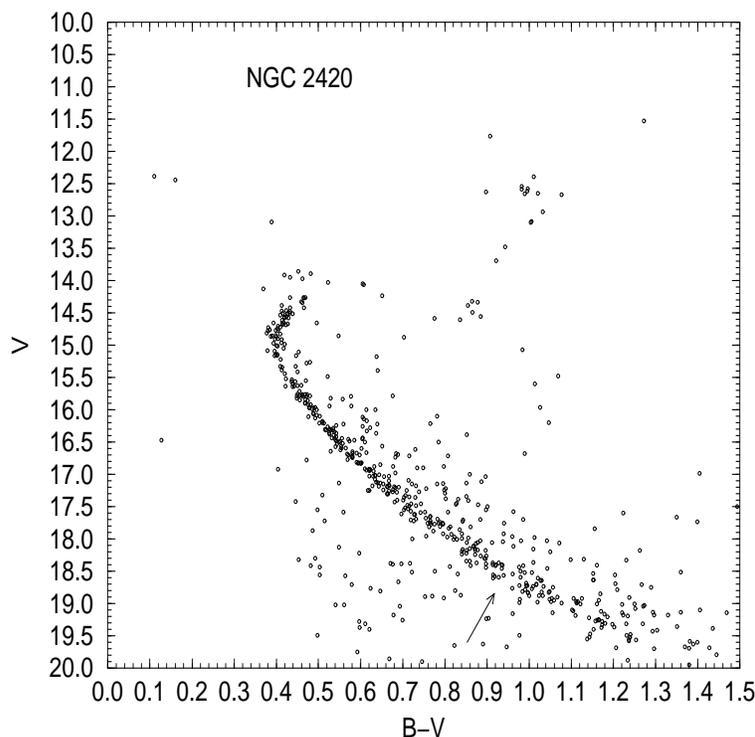


Figura 2.7: Diagramma di H-R per l'ammasso NGC2420, da Anthony-Twarog, B. J., Twarog, B. A., Kaluzny, J., Shara, M. M. 1990 AJ, 99, 1504

ad identificare i diagrammi di ammasso come sequenze di stelle di diversa **massa**. Anche se chiariremo ciò più oltre, è anche lecito aspettarci che le stelle più luminose siano anche quelle di maggiore massa.

L'interpretazione dei diagrammi HR dei vari ammassi diventa ancora più interessante se facciamo una ulteriore ipotesi: che, almeno in prima approssimazione, le varie linee (**sequenze principali**) che ci appaiono come approssimativamente parallele nel piano $m_V/B - V$, siano in effetti coincidenti sul piano $M_V/B - V$ (come vedremo questa ipotesi, che trascura tra l'altro possibili differenze di composizione chimica, non è sempre accettabile); ciò permette, tra l'altro, di stimare, a meno di una correzione, generalmente modesta, dovuta all'arrossamento interstellare, la distanza dell'ammasso.

Anche con questa normalizzazione, tuttavia, i vari diagrammi di ammasso presentano delle differenze; in particolare si trova, ad alta luminosità, una svolta verso destra della sequenza (**turn-off**) a colori diversi per i vari ammassi, e che ci sembra naturale interpretare come un fatto evolutivo. Ciò ci impone di classificare i vari diagrammi in una sequenza di $(B - V)_{turn-off}$ crescenti che, come vedremo in seguito, corrisponde fisicamente ad una **sequenza d'età**.

Due casi estremi di turn-off a $B - V$ molto piccolo (stelle al turn-off molto blu = ammasso molto giovane) o piuttosto grande (turn-off giallo = ammasso molto vecchio) sono mostrati nelle figure 2.6 e 2.8.

Gli ammassi globulari, collocati nell'alone galattico, hanno regolarmente dei diagrammi di HR simili a quello rappresentato nella figura 2.8; tali caratteristiche sono invece rare negli

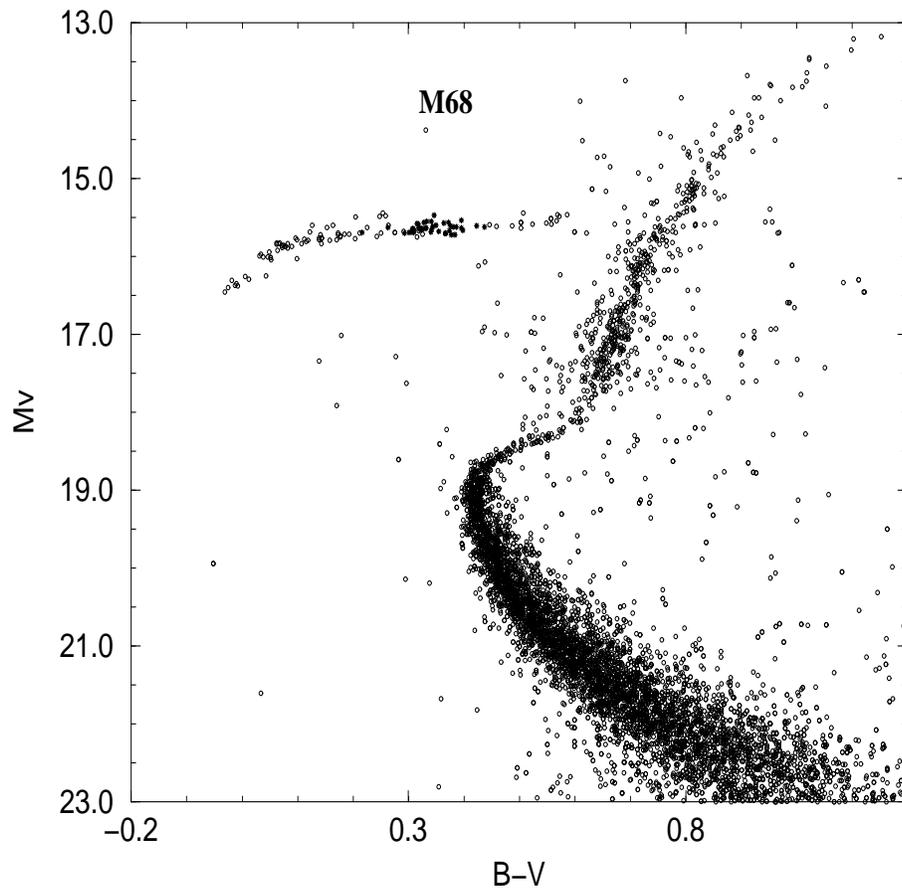


Figura 2.8: L'ammasso globulare M68: da Walker A.R., 1994, AJ 108, 555

ammassi aperti.

La valutazione delle distanze e gli ammassi globulari può essere fatta con il solito metodo di “normalizzare” le sequenze principali; vedremo più oltre che ciò introduce però un errore sistematico.

2.3 Passaggio a raggi e luminosità.

È possibile passare dalla rappresentazione delle stelle in diagrammi con in ordinata m_V o M_V , all'utilizzo della più fisica M_{bol} , o anche della luminosità L , ricordando che:

$$\log_{10} \left(\frac{L}{L_{\odot}} \right) = \frac{1}{2.5} (M_{bol\odot} - M_{bol}) \quad (2.6)$$

dove $L_{\odot} = 3.845 \cdot 10^{33} \text{ erg/s}$.

Inoltre possiamo mettere in ascissa, invece di $B - V$ o del tipo spettrale, la temperatura efficace, in precedenza definita (Cap.1).

Il passaggio è possibile mediante l'analisi delle proprietà delle stelle meglio conosciute e anche con l'ausilio di modelli teorici.

Essendo:

$$\log_{10} \left(\frac{L}{L_{\odot}} \right) = 4 \log_{10} \left(\frac{T_{eff}}{T_{eff\odot}} \right) + 2 \log_{10} \left(\frac{R}{R_{\odot}} \right) \quad (2.7)$$

con $T_{eff\odot} = 5777^{\circ} K$ e $R_{\odot} = 6.96 \cdot 10^{10} cm$.

Possiamo rappresentare sul piano $\log L / \log T_{eff}$ i luoghi di raggio costante come delle rette trasversali (Fig. 2.12).

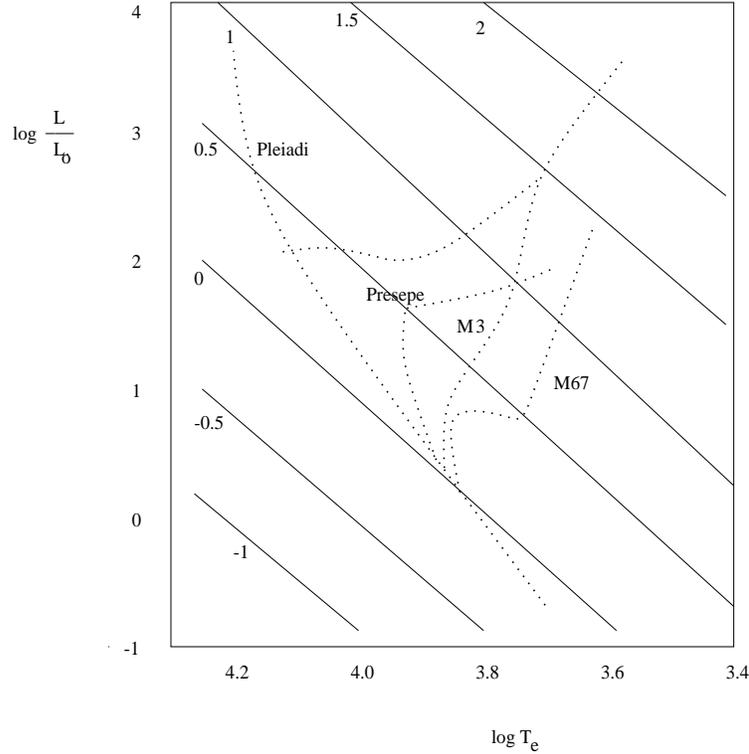


Figura 2.9: ad. da [7]; diagramma di HR ($\log L / \log T_e$) per diversi ammassi; le diagonali si riferiscono a luoghi di uguale raggio (i numeri danno $\log R / R_{\odot}$).

Si vede dalla figura, sulla quale sono rappresentati schematicamente i diagrammi di alcuni ammassi ($M3$ è un ammasso globulare, non dissimile da $M68$ di Fig. 2.8), che la sequenza principale comprende stelle di raggio non molto diverso da quello solare, anche se crescente con la massa, mentre le stelle a destra, oltre il *turn-off*, hanno raggi ben maggiori. Il diagramma di HR, in quest'ultima versione, permette evidentemente una più agevole interpretazione in termini delle caratteristiche fisiche fondamentali.

2.4 Subnane e nane bianche.

Nella zona in basso a sinistra del diagramma di HR si trovano due tipi di stelle di cui è opportuno discutere le caratteristiche: le cosiddette **subnane** e le **nane bianche**.

Le prime si presentano di non facile interpretazione: solo di poche si conosce la parallasse trigonometrica; i loro spettri sono caratterizzati da deboli righe di assorbimento, per cui è difficile darne una accurata classificazione spettrale e valutarne, di conseguenza, la temperatura efficace.

Pur con queste difficoltà, possiamo comunque affermare che le subnane si distribuiscono in una striscia parallela alla sequenza principale ma con una magnitudine maggiore di circa $1mag$; in termini di luminosità, per pari temperatura efficace, vale:

$$\log \left(\frac{L_{sn}}{L_{sp}} \right) = -0.4 \quad (2.8)$$

Come vedremo le differenze di caratteristiche spettrali e di luminosità sono entrambi attribuibili alla diversa composizione chimica; come vedremo ciò implicherà anche una ritardatura delle stime di distanza degli ammassi globulari la cui sequenza principale coincide con quella delle subnane e non con quella ordinaria delle stelle a noi più vicine.

L'interpretazione delle nane bianche presenta, in partenza, le stesse difficoltà: gli spettri ora hanno una natura alquanto peculiare; per motivi che discuteremo nel Cap.13, le righe sono molto allargate (a volte fino a fondersi l'una con l'altra e a risultare inosservabili) nondimeno il quadro che si riesce a costruire permette di collocarle in una striscia di raggio quasi costante e dell'ordine di circa un centesimo di quello solare; ciò apre la via ad una interpretazione fisica delle nane bianche come oggetti estremamente densi, appartenenti alle fasi finali dell'evoluzione stellare.

2.5 Masse e raggi.

Il problema della determinazione diretta dei raggi e delle masse stellari è molto complesso. La massa di una stella può essere misurata solo mediante effetti gravitazionali, come, per esempio, il **red shift** della radiazione emessa; tale effetto risulta però, per la gran parte delle stelle, troppo piccolo per essere osservato.

Fa caso a sè, ovviamente, il Sole.

Per il Sole si ha:

$$\frac{GM_{\odot}}{d_{T\odot}^2} = \frac{v_T^2}{d_{T\odot}} \quad (2.9)$$

(T indica, ovviamente, Terra), dove $d_{T\odot} = 1u.a. = 1.496 \cdot 10^{13}cm$, $v_T = 2.978 \cdot 10^6cm/s$ (in media su un anno) e M_{\odot} risulta quindi:

$$M_{\odot} = \frac{v_T^2 d_{T\odot}}{G} = 1.99 \cdot 10^{33}g$$

Per il raggio, essendo il raggio apparente del Sole (un angolo): $\rho_{\odot} = 15'59''63$ si ottiene:

$$R_{\odot} \simeq 6.96 \cdot 10^{10} \text{ cm}$$

Favorevole si presenta anche la situazione per le stelle doppie, in cui gli effetti gravitazionali di un corpo sono osservabili sull'altro.

Naturalmente, se le due stelle sono molto vicine, ogni tentativo di interpretazione evolutiva deve tener conto la possibile incidenza di **scambi di massa**. A parte il Sole le stelle doppie sono praticamente l'unica fonte di dati diretti sui raggi, cui si aggiungono pochi casi di misure dirette effettuate mediante tecniche interferometriche (interferometro di Hanbury-Brown).

2.6 Le stelle doppie.

Le stelle doppie sono, per vari motivi, uno dei campioni osservativi più interessanti dell'astrofisica stellare.

In generale circa metà delle stelle fanno parte di un sistema di due o più oggetti legati dalla mutua gravitazione. I più frequenti sistemi multipli sono quelli doppi (o binari), formati da due stelle orbitanti l'una intorno all'altra. Nei sistemi di maggiore molteplicità sono anche frequenti sottosistemi a due corpi, il cui moto relativo è solo modestamente perturbato dalle altre masse presenti; questo è ovviamente anche il caso dei sistemi binari all'interno di ammassi o associazioni stellari.

Le stelle doppie sono caratterizzate da una grande escursione di caratteristiche fisiche; a parte le proprietà delle singole componenti, che sono quelle proprie di ogni stella, sono proprietà tipiche del sistema la somma delle masse (che determina le leggi del moto orbitale), il rapporto delle masse (che è ovviamente legato anche alla luminosità delle due componenti), e il periodo (o la separazione) orbitale. A seconda di queste proprietà le stelle doppie possono essere più o meno facilmente osservabili, con diverse tecniche e modalità di osservazione. Le modalità di osservazione determinano tre grandi campioni, che prendono il nome di binarie visuali, di binarie spettroscopiche e di binarie fotometriche o ad eclisse.

Le **binarie visuali** sono quelle che vengono risolte come tali dall'osservatore a terra (o dallo spazio). La risoluzione delle due componenti richiede soprattutto una discreta separazione angolare, non troppo inferiore ad un secondo d'arco (per le osservazioni fatte da Terra; per le osservazioni dallo spazio il potere risolutivo non è limitato dalla turbolenza atmosferica ma dalle dimensioni del telescopio; è possibile così guadagnare anche un paio di ordini di grandezza). Queste richieste sulla separazione fanno sì che le binarie visuali siano tipicamente sistemi a lungo periodo (= grande separazione) e non troppo distanti; per esempio un sistema a $100pc$ ha una separazione di $1''$ d'arco se la sua separazione è di $100u.a.$, il che, se le masse non sono troppo diverse da quella del Sole, implica un periodo orbitale di alcune centinaia d'anni. Ovviamente se il periodo è troppo lungo si ha una ulteriore difficoltà osservativa (il moto relativo delle due stelle non è osservabile neppure a distanza di qualche anno). Si capisce quindi come nel campione delle binarie visuali abbondino sistemi vicini e di periodo lungo ma non lunghissimo (diversi anni); inoltre la risoluzione e la separazione delle componenti è facilitata da un ragionevole equilibrio nelle luminosità (è difficile vedere un sistema con due componenti delle quali una molto più luminosa); le binarie gemelle sono quindi molto frequenti tra le visuali.

Per cataloghi recenti delle binarie visuali si vedano per esempio: Catalogue of the Components of Double, Multiple stars (CCDM) first edition [Dommanget J., Nys O., Comm. Obs. R. Belgique,

Ser. A, N. 115 (1994); <http://cdsweb.u-strasbg.fr/viz-bin/Cat?I/211>] oppure The visual double stars observed by the Hipparcos satellite [Dommanget J., Nys O., *Astron. Astrophys.* 363, 991 (2000); <http://cdsweb.u-strasbg.fr/viz-bin/Cat?I/260>].

Le **binarie spettroscopiche** vengono scoperte mediante la variazione periodica delle velocità radiali, misurate con l'effetto Doppler. L'osservabilità richiede oggetti non troppo deboli in modo da poterne prendere uno spettro di media dispersione (v.Cap. 13), e una componente periodica nelle velocità radiali almeno di qualche chilometro al secondo; questo implica periodi non troppo lunghi; un periodo di cento anni, sempre con masse di tipo solare, implica velocità di pochi chilometri al secondo, non facili da osservare con sufficiente accuratezza, mentre un periodo dell'ordine di un anno (o meno) corrisponde a velocità quasi un ordine di grandezza più alte, ben visibili. A seconda del rapporto di luminosità sono riconoscibili, nell'osservazione, uno solo o ambedue gli spettri delle componenti; ovviamente il secondo caso è più frequente per sistemi binari formati da componenti molto simili.

Un catalogo delle binarie spettroscopiche è l'Eighth catalogue of the orbital elements of spectroscopic binary systems. [Batten A.H., Fletcher J.M., MacCarthy D.G., *Publ. Dominion Astrophys. Obs.* 17 (1989); <http://cdsweb.u-strasbg.fr/viz-bin/Cat?V/64>] anche se dati più generali sulle velocità radiali possono essere per esempio trovati nel Bibliographic catalogue of stellar radial velocities, 1991-1998 [Malaroda S., Levato H., Galliani S.; Complejo Astronomico El Leoncito (CASLEO), San Juan, Argentina (2001); <http://cdsweb.u-strasbg.fr/viz-bin/Cat?III/216>].

Le **binarie ad eclisse** vengono invece osservate con tecniche fotometriche; condizione necessaria per la scoperta di un sistema binario con questa tecnica è la presenza dell'eclisse (parziale o totale) tra le due componenti.

L'eclisse viene osservata da terra solo se il piano dell'orbita non forma un angolo troppo grande con la linea di vista; il valore massimo consentito dipende ovviamente dal rapporto fra dimensioni degli astri e loro separazione.

Ne consegue che le binarie ad eclisse non avranno in genere periodi troppo grandi; tra quelle a grande periodo saranno ovviamente frequenti le stelle giganti. Grosso modo un periodo di un anno, fra due Soli, permette una eclisse visibile solo se il piano dell'orbita e la linea di vista formano un angolo minore di circa un grado (quindi la probabilità di osservazione è assai piccola); inoltre, se l'orbita ha periodo troppo lungo, anche la durata dell'eclisse diventa piccola rispetto al periodo orbitale, rendendo così ancora più improbabile la scoperta. In conclusione: le binarie ad eclisse più facili da osservare hanno una separazione corrispondente a pochi raggi stellari il che, almeno per stelle non giganti, corrisponde a periodi molto brevi (uno o pochi giorni); a parte questa limitazione, che è peraltro di tipo statistico, le binarie ad eclisse sono le più facili da scoprire ed osservare, con la loro tipica "curva di luce" (luminosità in funzione del tempo).

Le binarie ad eclisse sono catalogate nell'ambito di più generali cataloghi di stelle variabili, quali: The Combined General Catalogue of Variable Stars, 4.1 Edition. [General Catalogue of Variable Stars 4th Edition, Volumes I-III, Kholopov P.N., Samus N.N., Frolov M.S., Goranskij V.P., Gorynya N.A., Karitskaya E.A., Kazarovets E.V., Kireeva N.N., Kukarkina N.P., Kurochkin N.E., Medvedeva G.I., Pastukhova E.N., Perova N.B., Rastorguev A.S., Shugarov S.Yu.; General Catalogue of Variable Stars Volume IV, 4th ed. The cross-identification tables. Kholopov P.N., Samus N.N., Durlevich O.V., Kazarovets E.V., Kireeva N.N., Tsvetkova T.M.; Institute of Astronomy of Russian Academy of Sciences and Sternberg State Astronomical Institute of the Moscow State University, Nauka, Moscow, (1990); General Catalogue of Variable Stars, 4rd ed., vol.V. Extragalactic Variable Stars Artiukhina N.M., Durlevich O.V., Frolov M.S., Goranskij V.P., Gorynya N.A., Karitskaya E.A., Kazarovets E.V.,

Kholopov P.N., Kireeva N.N., Kurochkin N.E., Lipunova N.A., Medvedeva G.I., Pastukhova E.N., Samus N.N., Tsvetkova T.M.; Kosmosinform, Moscow, (1995); New Catalogue of Suspected Variable Stars, Kukarkin B.V., Kholopov P.N., Artiukhina N.M., Fedorovich V.P., Frolov M.S., Goranskij V.P., Gorynya N.A., Karitskaya E.A., Kireeva N.N., Kukarkina N.P., Kurochkin N.E., Medvedeva G.I., Perova N.B., Ponomareva G.A., Samus N.N., Shugarov S.Yu.; <http://cdsweb.u-strasbg.fr/viz-bin/Cat?II/214A>].

2.7 Le stelle doppie per la determinazione di masse e raggi.

a) Le binarie visuali.

La terza legge di Keplero può essere scritta nella forma:

$$M_1 + M_2 = \frac{4\pi^2 a^3}{GP^2} \quad (2.10)$$

dove M_1 ed M_2 sono le masse delle due componenti, a e P sono semiasse e periodo dell'orbita. Prendendo come unità di misura l'unità astronomica (*u.a.*, definita in precedenza), l'anno e la massa solare, si ottiene, in termini della parallasse π e dell'apertura angolare del semiasse maggiore, misurata in secondi d'arco, a'' :

$$M_1 + M_2 = \frac{1}{P^2} \left(\frac{a''}{\pi} \right)^3 \quad (2.11)$$

Nota la parallasse, osservati a'' e P , è facile ricavare la somma delle masse; mediante l'analisi del moto delle due componenti relativamente al centro di massa, essendo:

$$\frac{M_1}{a_2} = \frac{M_2}{a_1} \quad (2.12)$$

dove a_1 e a_2 sono due semiasse dell'orbita delle due componenti, si ricavano infine M_1 e M_2 . La ricostruzione dell'orbita richiede ovviamente l'analisi del moto proprio delle due componenti e la sottrazione del moto del centro di massa (cfr.fig. 2.10).

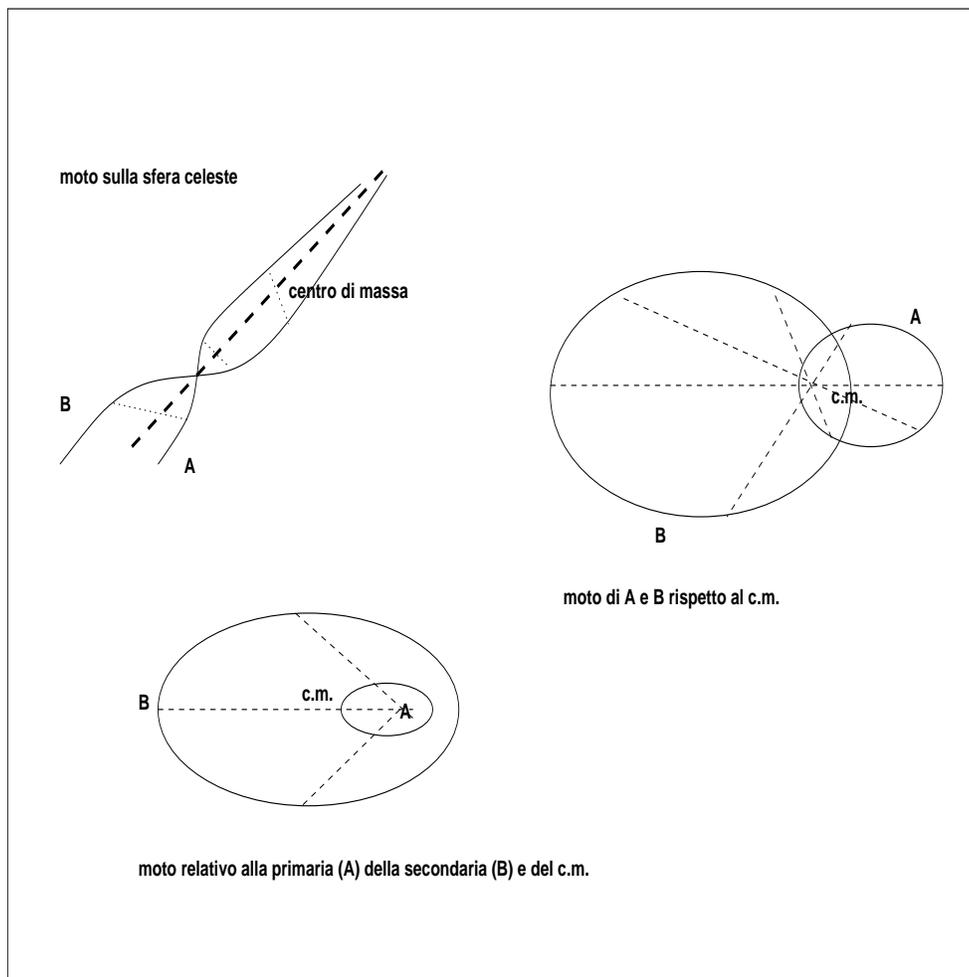


Figura 2.10: ad. da [8]; moto delle componenti di una binaria visuale rispetto alle stelle fisse di campo; la retta tratteggiata lunga corrisponde al moto del centro di massa; orbite dello stesso sistema, intorno alla primaria A (della secondaria B e del c.m.; a sinistra) ed al centro di massa (a destra)

b) Binarie spettroscopiche.

La terza legge di Keplero (eq.2.10) può essere applicata anche una binaria spettroscopica; moltiplicando ambo i membri per il cubo del $\sin i$ (i è l'inclinazione dell'orbita) si ottiene:

$$(M_1 + M_2) \sin^3 i = \frac{4\pi^2 a^3 \sin^3 i}{GP^2} \quad (2.13)$$

Se la binaria presenta entrambi gli spettri visibili, è possibile calcolare dalle velocità radiali $a_1 \sin i$ e $a_2 \sin i$, e di conseguenza anche $(M_1 + M_2) \sin^3 i$ inoltre

$$\frac{a_1 \sin i}{a_2 \sin i} = \frac{M_2}{M_1}$$

e si ottengono quindi:

$$M_1 \sin^3 i; \quad M_2 \sin^3 i \quad (2.14)$$

Se, invece, è visibile soltanto uno spettro, possiamo seguire il seguente ragionamento:

$$a = a_1 + a_2 = a_1(1 + a_2/a_1) = a_1(1 + M_1/M_2) = a_1(M_2 + M_1)/M_2$$

e quindi:

$$a^3 \sin^3 i = a_1^3 \sin^3 i \left(\frac{M_2 + M_1}{M_2} \right)^3$$

Si può quindi calcolare la funzione delle masse:

$$(M_1 + M_2) \sin^3 i \frac{M_2^3}{(M_1 + M_2)^3} = \frac{4\pi^2}{GP^2} a_1^3 \sin^3 i \quad (2.15)$$

ossia

$$f(M_1, M_2) = \frac{M_2^3 \sin^3 i}{(M_1 + M_2)^2} \quad (2.16)$$

Se il sistema è anche fotometrico (si ha cioè una eclissi del sistema quando una delle due componenti transita davanti all'altra) è possibile valutare l'inclinazione e quindi risalire alle masse; altrimenti, ponendo $i = \pi/2$ si ha una limitazione inferiore alle stesse.

c) Binarie ad eclisse (o fotometriche).

Per un sistema fotometrico, l'analisi della curva di luce ci permette anche di calcolare i raggi delle due componenti (Fig. 2.11).

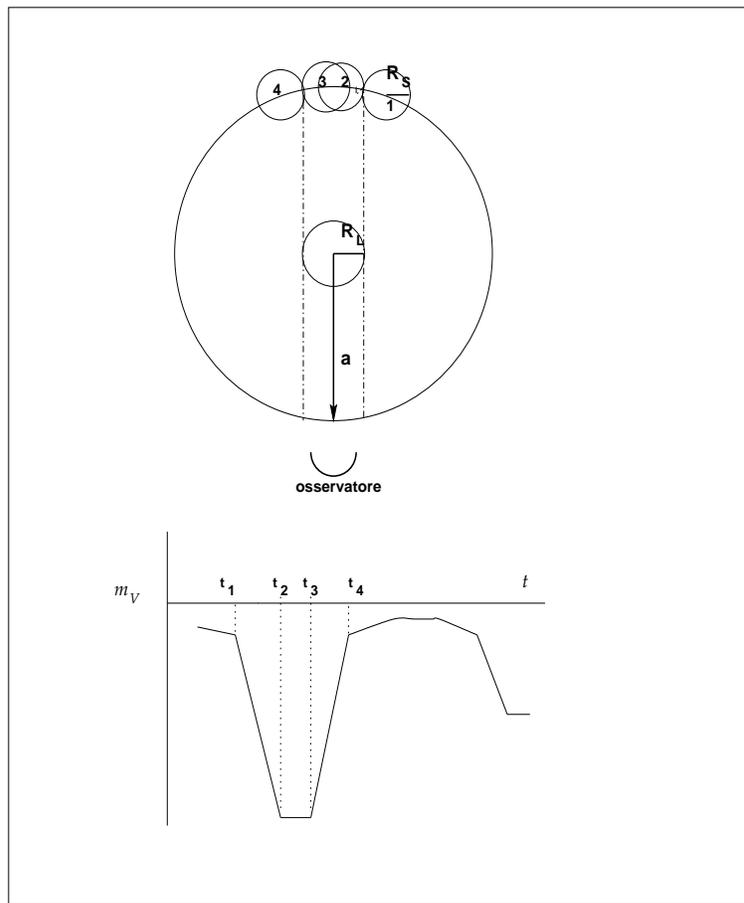


Figura 2.11: adattata da [8]; sistema binario ad eclisse. Sopra: rappresentazione in scala delle stelle e dell'orbita; sotto: curva di luce.

Dalla Fig. 2.11 risulta immediatamente che:

$$\frac{t_4 - t_1}{P} = \frac{2(R_L + R_S)}{2\pi a} \quad (2.17)$$

$$\frac{t_3 - t_2}{P} = \frac{2(R_L - R_S)}{2\pi a} \quad (2.18)$$

e ciò permette di calcolare R_L/a e R_S/a ed anche R_L ed R_S , essendo a dato dalla terza legge di Keplero, note le masse ed il periodo.

Le misure compiute con questi metodi permettono di rappresentare una relazione massa-raggio (crescente, come già confermato nel diagramma di HR; tipicamente $R \propto M^{1/2}$) e la importantissima relazione massa-luminosità.

L'andamento della relazione massa-luminosità può essere approssimato con una doppia legge di potenza:

$$\begin{aligned} L &\propto M^4 && \text{per } M < 0.8M_{\odot} \\ L &\propto M^3 && \text{per } M > 0.8M_{\odot} \end{aligned} \quad (2.19)$$

L'andamento sopra citato vale ovviamente per stelle di sequenza principale; per le stelle fuori dalla sequenza principale la situazione è più articolata.

Capitolo 3

Composizione chimica e popolazioni stellari.

3.1 Popolazioni.

La struttura di una stella è determinata in primo luogo dalla sua massa e dalla sua età. Sarebbe utile per confermare le teorie evolutive poter misurare l'età di una stella prescindendo dall'analisi teorica e dai modelli, ma questo è possibile, in prima istanza, solo per il Sole, cui possiamo attribuire, ragionevolmente, un'età simile a quella della Terra, che indicazioni geologiche ci fanno stimare in circa 4.5 miliardi di anni.

Anche se non possiamo classificare direttamente le stelle per età, possiamo classificarle in **popolazioni** diverse, che non sono altro, come vedremo, che diverse generazioni. Per far ciò possiamo fare uso di tre fondamentali criteri:

1. le caratteristiche delle stelle più brillanti in ciascun sistema;
2. il comportamento cinematico dei gruppi di stelle;
3. le peculiarità spettroscopiche.

3.1.1 Il colore delle stelle più luminose di un ammasso stellare.

In gran parte degli ammassi galattici le stelle più luminose sono blu, ma negli ammassi globulari sono giganti rosse; la stessa differenza si rivela, in grande, fra le galassie ellittiche, in cui le stelle più luminose sono rosse. Il contrasto nel colore corrisponde ad una differenza d'età. Per le supergiganti blu abbiamo due indizi osservativi a favore della giovane età: il fatto che si trovano immerse o vicine a nubi interstellari, da cui sembrano essere state originate; l'espansione di alcuni ammassi e associazioni vicine contenenti supergiganti blu permette una ricostruzione all'indietro nel tempo del loro moto che limita superiormente la loro età a valori dell'ordine dei cento milioni di anni, 50 volte meno del Sole (fig. 3.1).

D'altro canto, anche se non possiamo stimare direttamente l'età delle giganti rosse negli ammassi globulari e nelle galassie ellittiche, è significativo il fatto che sia gli ammassi globulari sia le galassie ellittiche appaiono completamente privi di gas interstellare e di polvere (il che

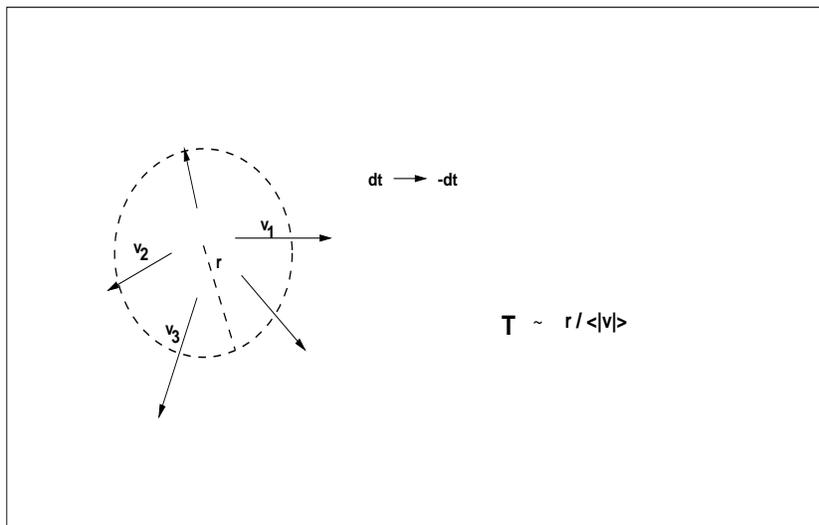


Figura 3.1: L'età di un ammasso in espansione può essere stimata in eccesso calcolando il tempo che avrebbe impiegato ad espandersi, a velocità costante, partendo da dimensioni puntiformi.

è segno di evoluzione); inoltre, da un punto di vista teorico, gli ammassi globulari sembrano essere sistemi dinamici di lunga vita.

3.1.2 Comportamento cinematico.

La distribuzione della velocità delle stelle vicine presenta una netta bimodalità: è possibile così separare le *stelle ad alta velocità* caratterizzate da una velocità relativa, sul piano galattico, superiore a circa 60km/h e le *stelle a bassa velocità* (ovviamente le altre). Le stelle ad alta velocità comprendono numerose giganti rosse, ed il loro diagramma di HR ricorda abbastanza quello degli ammassi globulari. Le stelle a bassa velocità comprendono invece tutte le O e B e producono un diagramma di HR simile a quello degli ammassi galattici. Questi ultimi, d'altro canto, presentano in media un moto d'insieme caratterizzato da una moderata velocità, a differenza degli ammassi globulari.

Altre coincidenze significative: le nubi interstellari hanno bassa velocità; le subnane hanno alta velocità. La prima ci conferma che le stelle O e B sono state originate in tempi recenti da nubi cosmiche, la seconda ci costringe a sospettare che le sequenze degli ammassi globulari debbano essere confrontate, per una opportuna taratura, con le subnane e non con le nane ordinarie. Ne consegue che la scala di distanza degli ammassi globulari (derivata dal confronto magnitudini apparenti-magnitudini bolometriche assolute) deve essere rivista (gli ammassi globulari risultano meno distanti di quanto non si fosse stimato in precedenza per un fattore dell'ordine di 1.5) (fig. 3.2).

L'analisi dinamica delle stelle permette poi di identificare, tra gli estremi, popolazioni intermedie. L'alta velocità sul piano galattico è di norma collegata anche ad alte velocità perpendicolari allo stesso, e quindi ad una distribuzione spaziale non piatta ma sempre più sferica. Un semplice argomento geometrico permette di spiegare quanto sopra detto e anche di capi-

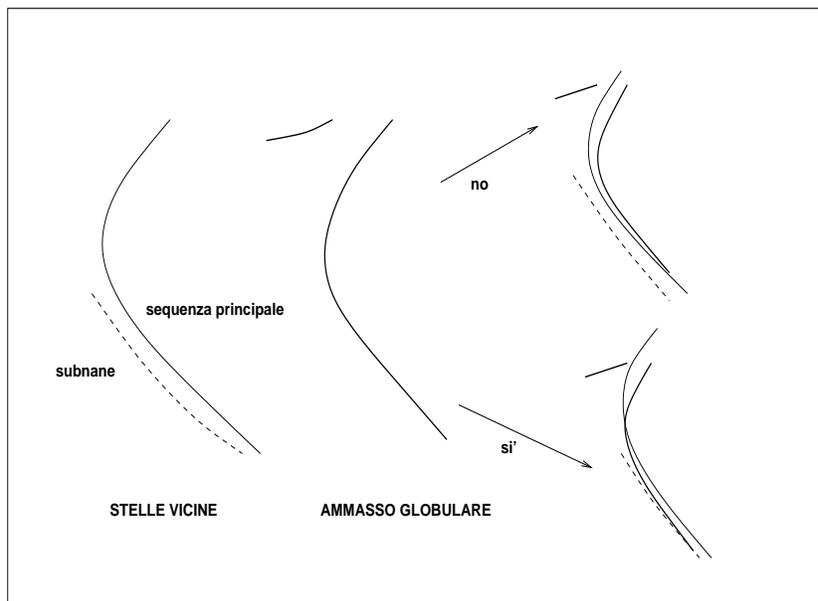


Figura 3.2: Ritaratura del diagramma di HR degli ammassi globulari.

re perchè le stelle ad alta velocità hanno tipicamente un moto *retrogrado* sul piano galattico (fig.3.3)

È anche possibile, tenendo conto della maggiore età che caratterizza gli ammassi globulari, tentare una interpretazione evolutiva, in termini della progressiva trasformazione della galassia da una struttura quasi sferica ad un disco relativamente sottile accompagnato da un rarefatto alone, in cui restano appunto gli ammassi globulari (fig.3.4)

3.1.3 Differenze spettroscopiche.

L'analisi spettroscopica permette l'identificazione di diversi sottotipi delle popolazioni principali: all'interno della **POPOLAZIONE I** (quella cui appartiene il Sole, e che corrisponde al disco galattico) le stelle con righe "forti" (più lente) e quelle con righe "deboli" (più veloci), e altrettanto per la **POPOLAZIONE II** (stelle ad alta velocità ed ammassi globulari). E' anche possibile scoprire come le subnane veloci e le giganti rosse degli ammassi globulari siano caratterizzate da righe metalliche molto deboli.

In definitiva le analisi condotte con i vari metodi permettono di costruire uno schema sufficientemente articolato di popolazioni stellari, quale quello qui riportato in tabella 3.1 (organizzato come in [9] ma aggiornato secondo [Allen]). Naturalmente anche uno schema simile non pretende di identificare delle vere e proprie "generazioni stellari" rigidamente distinte, ma vuole suggerire la progressiva variazione delle caratteristiche fisiche e dinamiche delle stelle appartenenti a gruppi diversi o, come risulterà sempre più chiaro nel seguito del discorso, formatesi in epoche differenti. La classificazione è leggermente diversa alla luce delle più recenti osservazioni extragalattiche e della migliore conoscenza della dinamica galattica e della chimica. Si veda [Allen, tab.19.3, in basso].

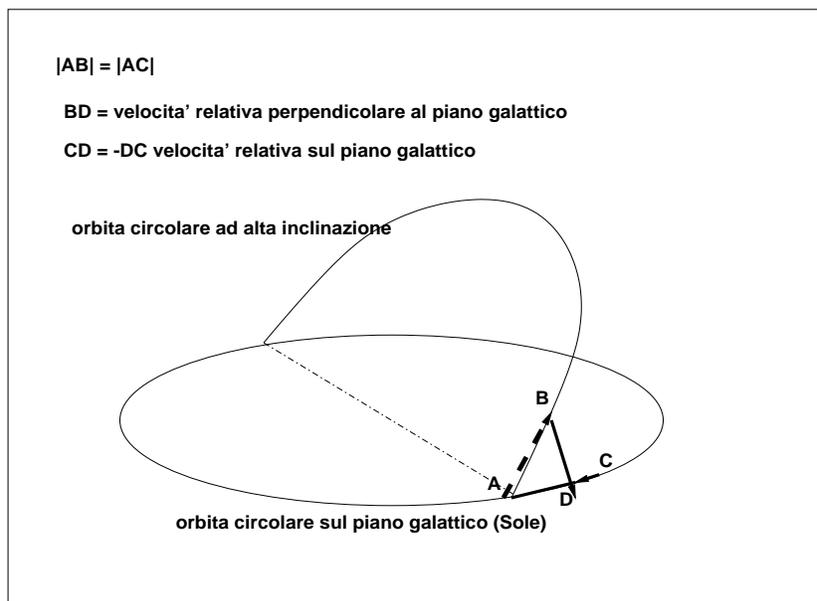


Figura 3.3: Velocità relative tra due corpi in orbita circolare, una sul piano galattico e l'altra fortemente inclinata

Nella tabella 3.1 poniamo:

V = velocità media perpendicolare al piano galattico (in Km/s);

d = distanza media dal piano galattico (in *parsecs*);

Z/Z_{\odot} = abbondanza in massa degli elementi *pesanti* (numero atomico maggiore di 2) v.seguito;

τ = età (in unità dell'età dell'universo).

3.2 Composizione chimica.

Non è banale l'analisi della composizione chimica di una stella; essa viene in prima istanza valutata mediante lo studio degli spettri stellari, ed in particolari delle righe di assorbimento in essi presenti. A rigore le abbondanze dei vari elementi, che così possono essere, sia pure non senza difficoltà, adeguatamente stimate, si riferiscono alla sola composizione degli strati esterni della stella. E' comunque generalmente ritenuto che la mancanza di processi di fusione nucleare in atmosfera renda attendibile l'ipotesi che la composizione superficiale resti durante l'evoluzione quella iniziale, e possa essere quindi usata per dedurre la **composizione chimica iniziale** della stella nel suo complesso.

La presenza di fenomeni di **dredge up** e di sedimentazione, durante l'evoluzione, è stata rilevata e complica alquanto la situazione, impedendo una applicazione ingenua della proprietà sopra enunciata. Per quanto riguarda sia il Sole, sia le stelle sufficientemente luminose da permettere osservazioni spettroscopiche ad alta dispersione, la composizione chimica può essere valutata con notevole accuratezza. Fa eccezione l'elio, le cui righe sono presenti a frequenze molto alte, fuori dalla banda visibile, e la cui abbondanza, almeno per stelle come il Sole, non è misurabile direttamente dallo spettro.

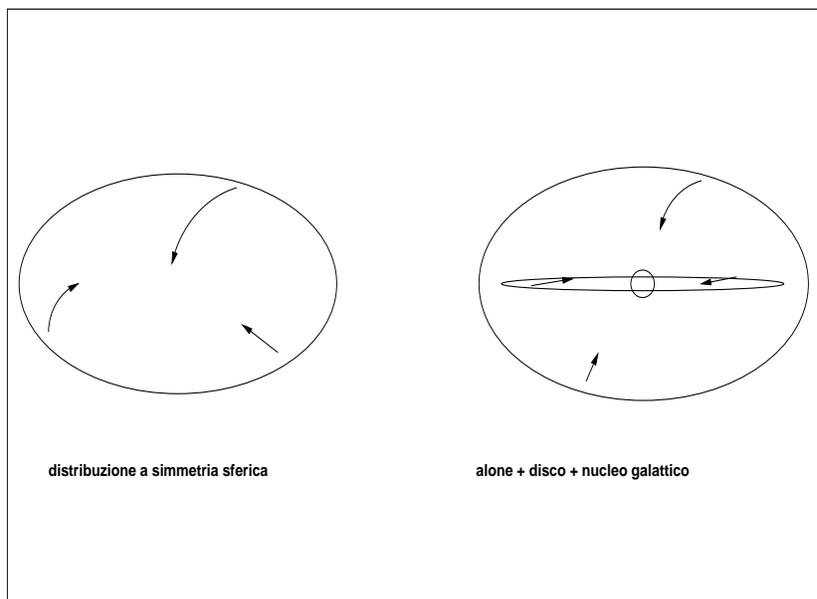


Figura 3.4: Schema di evoluzione galattica.

Si usa definire sinteticamente la composizione chimica di una stella mediante due parametri fra i tre: X , Y , e Z , corrispondenti, relativamente, all'abbondanza relativa in massa di idrogeno, elio e tutti gli elementi più pesanti dell'elio, genericamente chiamati metalli. Ovviamente $X + Y + Z = 1$.

Importante dal punto di vista evolutivo è l'abbondanza di carbonio e azoto che, combinati, giocano un ruolo determinante nell'attivazione di uno dei principali cicli di reazioni nucleari (CNO); per il Sole $Z_{CN} \geq Z/4$. In genere si fa l'ipotesi che le **abbondanze relative** dei metalli siano ovunque le stesse che nel Sole. Tale ipotesi è ragionevole, ma sembra in parte da rivedere sulla base di recenti risultati relativi agli ammassi globulari.

Sinteticamente le abbondanze solari possono essere rappresentate secondo la tabella 3.2 (dati da [Allen]):

Le popolazioni si contraddistinguono per valori diversi di Y e Z ; soprattutto importante è il ruolo della **metallicità** (la somma delle abbondanze dei gruppi 3 e 4 nella tabella 3.2, che vale circa 0.02 nel Sole), che cresce nettamente passando dalla popolazione II alla I (v.tab.3.1).

La formazione degli elementi costituisce uno dei problemi più importanti ed appassionanti dell'astrofisica. Si pensa oggi che i "metalli" siano per lo più formati nelle reazioni nucleari che avvengono all'interno delle stelle; le stelle più giovani sarebbero così più ricche di metalli (come testimoniato dalle righe spettrali) in virtù di un arricchimento chimico della materia interstellare, investita da materia nuclearmente evoluta espulsa nelle fasi finali ed esplosive dell'evoluzione stellare. Si ha così un aumento continuo di Z con il tempo, fino a valori che potrebbero anche, per le popolazioni più recenti, superare il 3%. Come vedremo la metallicità influisce anche sulla pendenza della *sequenza principale* (che risulta più ripida per grandi Z). L'elio presente nelle stelle sarebbe invece, in buona parte, di origine cosmologica.

Resta aperto, ed irrisolto, il problema della formazione dei primi metalli: i modelli cosmologici non consentono infatti di superare uno Z dell'ordine $\sim 10^{-6}$, mentre le più vecchie stelle

POPOLAZ.	COLLOCAZIONE	TIPO STELLE	V	d	Z/Z_{\odot}	τ	GALASSIE ESTERNE
I estrema	Ammassi aperti, braccia a spirale di galassie	Supergiganti blu, variabili T Tauri, Cefeidi.	8	60	≥ 1	0.–0.005	Spirali, irr.
I vecchia		Stelle a forti righe metalliche, supernovae II.	10	160	≥ 0.75	0.05–0.25	Spirali, irr.
I di disco	Disco e nucleo galattico	Nebulose planetarie, novae, RR Lyrae $P < 0^{d.4}$	16	300	≥ 0.5	0.25–0.8	Bulges gal.
II intermedia		Stelle ad alta velocità, variabili a lungo periodo.	25	500	0.25	0.8–1	galassie ell.
II di alone	Ammassi globulari;	Subnane, RR Lyrae con $P > 0^{d.4}$, stelle di ramo orizzontale.	75	2000	0.1	~ 1 .	galassie ell.

Tabella 3.1: caratteristiche delle popolazioni stellari.

Gruppo di elementi	Abbondanza (numero)	Abb. (massa)	Numero di elettroni	Abb. (perc.massa)
Idrogeno	100	100	100	70.7
Elio	9.8	39	20	27.4
C,N,O,Ne	0.145	2.19	1.1	0.0155
Altri elementi	0.013	0.44	0.21	0.0031

Tabella 3.2: Ad. da [Allen]; abbondanze degli elementi nel Sole.

osservate si mantengono ad un livello superiore di circa tre ordini di grandezza.

Il problema del raccordo fra la materia cosmologica e quella originaria della popolazione II è stato affrontato con diverse ipotesi, ma nessuna soluzione certa è finora emersa.

In dettaglio le abbondanze relative degli elementi pesanti saranno discusse nel Cap.14.

Capitolo 4

Il Sistema Solare.

4.1 Riconoscimento di un pianeta.

Due sono le differenze evidenti fra stelle e pianeti: questi ultimi, essendo enormemente più vicini, non sono talvolta assimilabili ad oggetti puntiformi, e possono essere parzialmente risolti. L'estensione apparente dell'immagine di un pianeta non è quindi solo dovuta alla diffrazione e, soprattutto, al *seeing*. A titolo di esempio, consideriamo il caso di Giove all'opposizione (v. la definizione nel seguito). Il diametro di Giove è dell'ordine di $10^5 km$; essendo la distanza dalla Terra di circa $6 \cdot 10^8 km$, Giove sottende un angolo $\alpha \simeq 1.5 \cdot 10^{-4} rad$ ossia circa $30''$ d'arco. Al telescopio Giove appare quindi come un oggetto esteso. Ad occhio nudo Giove appare sostanzialmente ancora come un punto, ma, essendo l'immagine ben più grande del normale *seeing* l'effetto visibile di scintillazione è più ridotto: i pianeti maggiori (Venere, Marte, Giove, Saturno) sono riconoscibili ad occhio nudo dall'immagine **più ferma**. Il discorso non vale ovviamente per i corpi minori (satelliti, pianetini, comete lontane dal Sole), la cui estensione angolare torna sotto il secondo d'arco.

In secondo luogo il *moto proprio* e la *parallasse* dei corpi planetari sono enormemente più grandi degli equivalenti stellari. Peraltro per i corpi del Sistema Solare questi concetti, pur tecnicamente corretti, non sono di solito neppure usati: il moto di un pianeta è la risultante dei moti della Terra e del pianeta stesso intorno al Sole, ed è l'effetto combinato ad essere studiato.

Per esempio, visto dal Sole, rispetto alle stelle Giove descrive un angolo giro in circa 12 anni, ossia un grado ogni circa 10 giorni, o $15''$ all'ora. Enorme è quindi il suo *moto proprio*, misurabile, ovviamente, anche su scale di tempo molto inferiori all'anno (il moto proprio annuo è di oltre 30 deg). Per quanto riguarda la parallasse, essendo Giove a circa $5u.a.$ dal Sole, si ha $\pi \simeq 12$ deg. La parallasse risulta minore del moto proprio in virtù della definizione, pur essendo la velocità orbitale della Terra più che doppia di quello di Giove: ricordiamo che la velocità equivalente associata alla parallasse (si veda il Cap.2) è di circa $5km/s$, molto inferiore ai $30km/s$ con cui la Terra percorre la sua orbita. L'effetto combinato dei due moti rende il moto di Giove effettivamente osservato sulla sfera celeste un po' più complesso (si veda la Fig.4.1). Anche la distanza del pianeta dalla Terra aumenta di quasi il 50% dalla **opposizione** (quando Giove si trova dalla parte opposta del Sole) alla **congiunzione**. Il moto apparente è così caratterizzato da sensibili disuniformità e perfino da una fase retrograda.

La natura planetaria di un corpo come Giove discende naturalmente dall'osservazione di simili moti, e potrebbe essere riconosciuta perfino da misure di *parallasse diurna* (qualche

secondo d'arco). In pratica la scoperta di un **nuovo** corpo planetario (i pianeti maggiori sono stati identificati ormai da molto tempo, con l'eccezione della scoperta relativamente recente di Plutone) può avvenire semplicemente osservando una zona di cielo, o confrontando due immagini prese successivamente, con la stessa tecnica del **blinking** usata per le misure di parallasse - ma ora le due immagini possono -anzi debbono- essere prese a distanza di poche ore. Ancora più semplicemente, una immagine di una porzione di sfera celeste ottenuta con una esposizione sufficientemente lunga rivela la presenza di un corpo planetario che non viene rappresentato da una immagine puntiforme, ma da una striscia corrispondente alle sue diverse posizioni durante la ripresa (Fig.4.2).

Mentre i pianeti maggiori erano noti fin dall'antichità, gli ultimi due secoli hanno permesso di scoprire un grande numero di corpi più piccoli, dalla scoperta (1/1/1801) del primo e più grande asteroide (*1 Ceres*) (oggi ne sono note e catalogate decine di migliaia, ed il numero cresce con rapidità quasi esponenziale), a quelle di Plutone, vecchia di non molti decenni, e di innumerevoli comete e satelliti. Più recentemente anche i corpi della cosiddetta **Fascia di Kuiper-Edgeworth** si sono aggiunti all'inventario del Sistema Solare. Sia sistematiche osservazioni da Terra sia le imprese spaziali hanno permesso di acquisire dati qualitativamente e quantitativamente incomparabili con quelli posseduti fino a qualche decennio or sono.

4.2 Luminosità di un pianeta; emissione nel visibile e nell'infrarosso.

A differenza delle stelle i pianeti non hanno sorgenti di energia propria (almeno in prima approssimazione), ma sono in gran parte riscaldati dal Sole. Dell'energia radiante che ricevono dal Sole parte viene riflessa, parte assorbita e -in condizioni di regime, quali le presenti- riemessa nell'infrarosso.

Se $L_{\lambda,\odot}$ è la luminosità monocromatica del Sole, un pianeta di raggio R_p a distanza $r_{p\odot}$ dal Sole riceve in quella lunghezza d'onda una energia:

$$\Lambda_{\lambda,p} = \frac{\pi L_{\lambda,\odot} R_p^2}{4\pi r_{p\odot}^2} = 0.25 L_{\lambda,\odot} R_p^2 / r_{p\odot}^2 \quad (4.1)$$

Ne riflette una percentuale A_λ ; la sua luminosità monocromatica (relativamente, come è ovvio, all'emisfero illuminato) sarà quindi

$$L_{\lambda,p} = A_\lambda \Lambda_{\lambda,p} \quad (4.2)$$

Integrando su tutte le lunghezze d'onda del visibile, si ottiene:

$$L_p = \int_{vis} A_\lambda \Lambda_{\lambda,p} d\lambda \stackrel{def}{=} A \int_{vis} \Lambda_{\lambda,p} d\lambda \quad (4.3)$$

dove A prende il nome di **albedo**.

Usando le definizioni del Cap.1 si ottiene quindi, per esempio all'opposizione (concetto ovviamente usabile solo per i pianeti esterni alla Terra), quando vediamo l'intero emisfero illuminato:

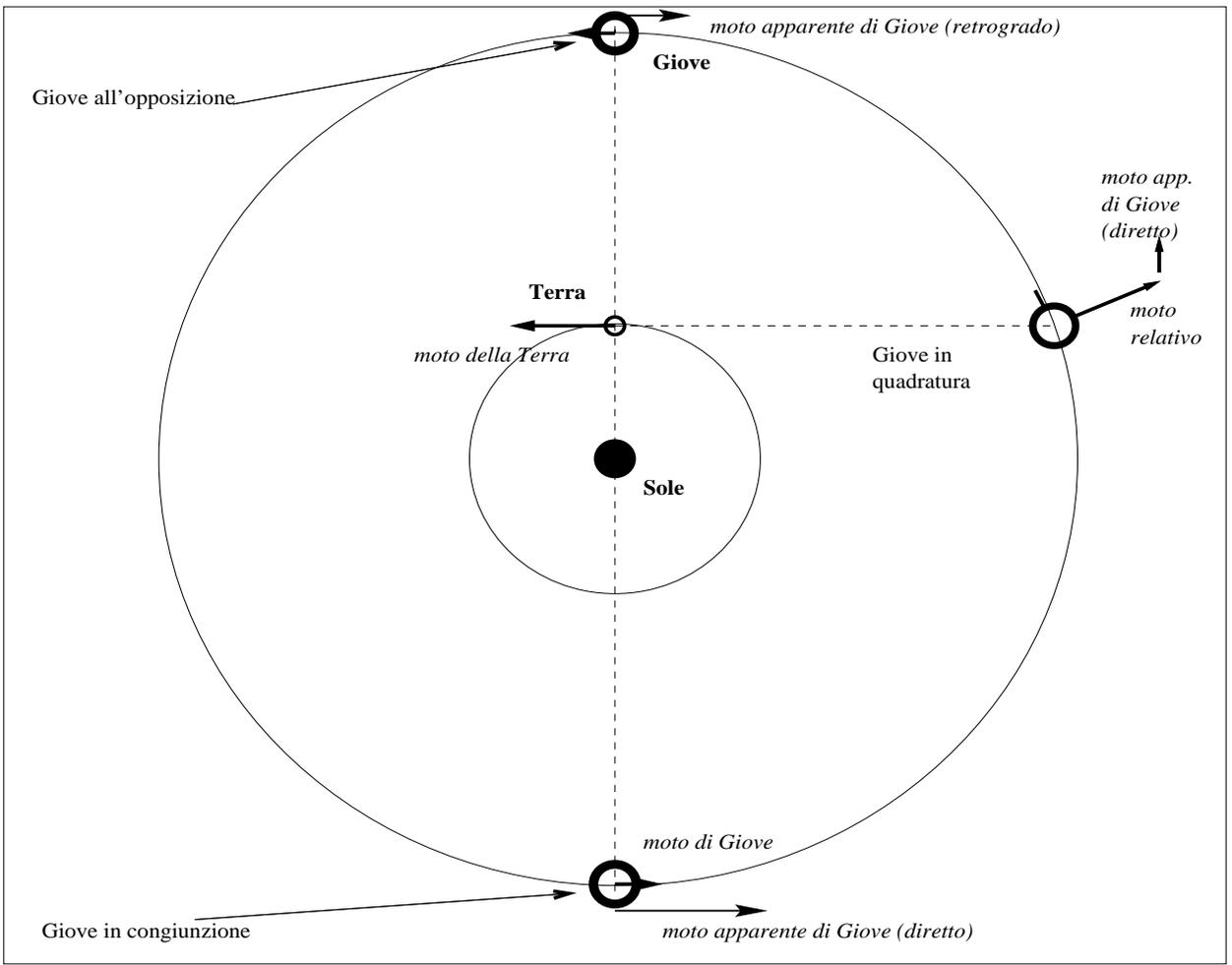


Figura 4.1: Posizioni e moto relativo del sistema Sole-Terra-Giove

$$I_V = \int \frac{S_V(\lambda) D_\lambda(\theta) L_{\lambda,p}}{4\pi r_{pT}^2} d\lambda = \int \frac{S_V(\lambda) D_\lambda(\theta) A_\lambda L_{\lambda,\odot} R_p^2}{16\pi r_{pT}^2 r_{p\odot}^2} d\lambda \quad (4.4)$$

dove r_{pT} è la distanza Terra-pianeta.

Fissate le unità di misura, è possibile trasformare la (4.4), con semplici passaggi:

$$\begin{aligned} m_V &= -2.5 \log I_V + \text{cost.} \\ &= -2.5 \log \left(\int S_V(\lambda) D_\lambda(\theta) A_\lambda L_{\lambda,\odot} d\lambda \right) - 5 \log R_p + 5 \log r_{pT} + 5 \log r_{p\odot} + C. \end{aligned} \quad (4.5)$$

Si può anche scrivere:

$$\begin{aligned} m_V &= -2.5 \log I_V + \text{cost.} \\ &= -2.5 \log \left(\int S_V(\lambda) D_\lambda(\theta) L_{\lambda,\odot} d\lambda \right) - 5 \log \sqrt{A'} R_p + 5 \log r_{pT} + 5 \log r_{p\odot} + C. \end{aligned} \quad (4.6)$$

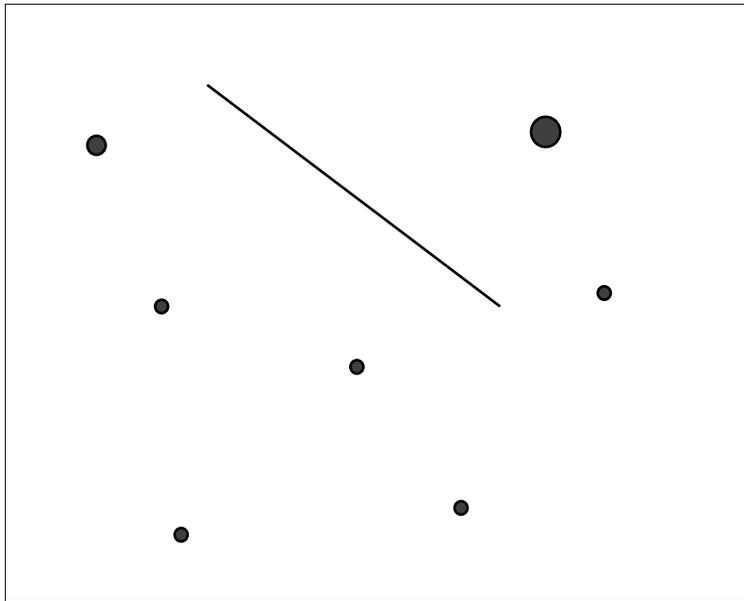


Figura 4.2: Un corpo planetario descrive su una immagine una striscia di lunghezza proporzionale alla sua velocità di spostamento sulla sfera celeste

(con A' si indica il valor medio dell'albedo). Come si vede la magnitudine m_V è determinata essenzialmente da quattro diversi contributi: uno combina insieme luminosità solare e fattori filtro, il secondo è il raggio del pianeta scalato con un coefficiente che è sostanzialmente la radice quadrata dell'albedo (in altri termini abbiamo il **raggio efficace** del pianeta, il terzo e il quarto sono rispettivamente la distanza Terra-pianeta e la distanza pianeta-Sole. Se consideriamo la situazione all'opposizione di fase (il momento migliore per studiare un pianeta esterno alla Terra), quando $r_{pT} = r_{p\odot} - r_{T\odot}$, il terzo e quarto termine della (4.5) diventano:

$$5 \log r_{p\odot}(r_{p\odot} - r_{T\odot}) \quad (4.7)$$

Per un pianeta molto lontano dal Sole, per cui valga la relazione $r_{T\odot} \ll r_{p\odot}$, si ha approssimativamente:

$$m_V = m_{V_0} + 10 \log r_{pT} \quad (4.8)$$

in cui m_{V_0} non dipende dalla distanza e gioca quindi il ruolo della magnitudine assoluta. Si vede quindi che la luminosità di un pianeta decresce all'incirca con la quarta potenza della distanza. Questo spiega, tra l'altro, la lentezza con cui si sono susseguite le scoperte di corpi nel Sistema Solare esterno (Plutone stesso è stato scoperto nel XX secolo).

Abbiamo fin qui parlato della luce solare che viene riflessa, ed il cui spettro, se A_λ non dipende dalla lunghezza d'onda, coinciderà ovviamente con quello solare. In realtà questa ipotesi è abbastanza drastica, e le proprietà di riflessione rendono piuttosto diversi gli spettri dei corpi planetari (non a caso, per esempio, Marte è stato tradizionalmente chiamato "il pianeta rosso"). Parte della luce viene invece assorbita e riemessa. Possiamo ipotizzare una situazione *a regime*, in cui il pianeta non si scaldi o raffreddi in media nel tempo, per concludere che in media

l'energia assorbita sarà uguale a quella successivamente riemessa. L'energia sarà però riemessa ad una diversa lunghezza d'onda, secondo uno spettro legato alla temperatura del pianeta. Tale temperatura resterà sempre molto inferiore a quella solare, e lo spettro in questione sarà centrato nel lontano infrarosso.

Un'analisi più dettagliata del problema richiede la definizione del cosiddetto **modello termico** del pianeta. L'argomento è complesso e articolato. Per una comprensione di massima, possiamo immaginare due casi estremi. Nel primo l'energia ricevuta si distribuisce uniformemente su tutta la superficie del pianeta, che si assesta quindi ad una ben precisa temperatura. Possiamo in questo caso definire la *temperatura efficace* del pianeta, nella usuale ipotesi di corpo nero. Sarà:

$$4\pi R_p^2 \sigma T_{eff,p}^4 = (1 - A) \frac{L_\odot R_p^2}{4r_{p\odot}^2} = (1 - A) \frac{\pi R_\odot^2 \sigma T_{eff,\odot}^4}{r_{p\odot}^2} R_p^2 \quad (4.9)$$

da cui:

$$T_{eff,p}^4 = 0.25(1 - A) R_\odot^2 T_{eff,\odot}^4 / r_{p\odot}^2 \quad (4.10)$$

ossia

$$T_{eff,p} = \left(\frac{1 - A}{4} \right)^{1/4} \left(\frac{R_\odot}{r_{p\odot}} \right)^{1/2} T_{eff,\odot} \quad (4.11)$$

Ovviamente la realtà è più complessa di questo modello schematico. Effetti diversi e complessi determinano la temperatura superficiale e lo spettro di emissione nell'infrarosso di un pianeta. La temperatura $T_{eff,p}$ così calcolata costituisce comunque una prima importante e significativa indicazione, ma, per come è stata calcolata, tende certamente a sottovalutare la reale temperatura superficiale, almeno delle zone illuminate dal Sole. Una prima correzione è legata all'ipotesi fatta di emissione di corpo nero. Essa è ovviamente in contraddizione con l'assunto precedente, per il quale parte dell'energia viene immediatamente riflessa (un **corpo nero** è tra l'altro un perfetto assorbitore. Una stima più realistica della temperatura può essere ottenuta con il modello di *corpo grigio* ammettendo una distribuzione uguale a quella di un corpo nero ma con una diversa normalizzazione, corretta per tener conto degli effetti di riflessione. In sostanza la temperatura ($T'_{eff,p}$) sarebbe la stessa calcolata in precedenza ma senza il coefficiente $(1 - A)^{1/4}$. Una stima ancora più accurata richiederebbe lo studio di un vero e proprio modello termico del pianeta. Certamente le zone polari sono sistematicamente meno illuminate e quindi restano più fredde (ciò almeno è vero per pianeti il cui asse di rotazione è quasi perpendicolare al piano dell'orbita; non vale, ad esempio, per Urano). Il problema più complesso è quello della escursione termica *diurna* nelle zone in cui si alternano le fasi di luce e di ombra. Per corpi velocemente rotanti o in presenza di una atmosfera l'escursione termica può essere relativamente modesta (sulla Terra è di regola ben sotto al 10%). In caso contrario la zona illuminata può avere una temperatura molto più alta. Al limite si può pensare ad una temperatura legata ad un equilibrio termico **locale**. Ripercorrendo i calcoli discussi in precedenza, è possibile stimare allora una nuova temperatura, funzione della posizione. Nel *punto sub-solare*, vale a dire nel punto che vede il Sole allo zenit, si può allora ottenere una nuova stima della temperatura (T_{ss}) che può essere calcolata come $T'_{eff,p}$ ma togliendo il coefficiente iniziale $4^{-1/4}$:

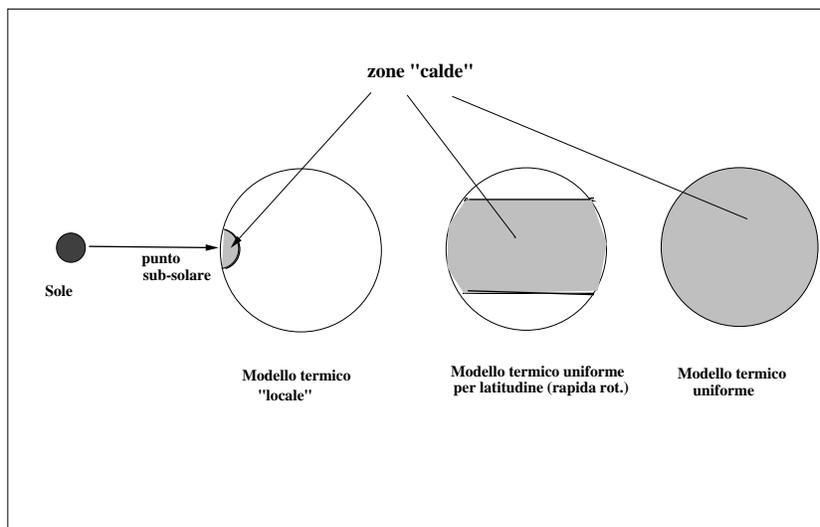


Figura 4.3: Schema dei modelli termici; a sinistra modello “a spot” in cui il riscaldamento solare resta confinato alla zona direttamente illuminata; al centro il caso (realistico per corpi rapidamente rotanti) in cui il calore solare si distribuisce uniformemente nelle zone di uguale latitudine; a destra il caso estremo di riscaldamento uniforme

$$T_{ss} = \left(\frac{R_{\odot}}{r_{p\odot}} \right)^{1/2} T_{eff,\odot} \quad (4.12)$$

Naturalmente la temperatura superficiale effettiva può essere ancora diversa in presenza di una atmosfera sufficientemente consistente. In tal caso infatti le considerazioni precedenti si applicherebbero non alla superficie ma alle zone esterne dell’atmosfera, con le stesse problematiche di cui abbiamo discusso per le stelle: quello che conta è la parte “visibile” dall’esterno. Per molti pianeti in realtà si ha spesso un mix dell’atmosfera in senso stretto e della superficie solida: si pensi anche alle immagine della Terra dallo spazio: in parte nubi, in parte continenti e mari. In generale, comunque, la temperatura superficiale non è calcolabile con un modello elementare, e può essere anche più alta di quanto non ci si aspetti (**effetto serra**).

4.3 I pianeti maggiori.

Non è qui il caso di entrare nei dettagli relativamente alle caratteristiche dei singoli pianeti e dei loro satelliti, la conoscenza dei quali è stata enormemente arricchita dalle esplorazioni condotte, negli ultimi anni, dalle sonde planetarie. I pianeti sono ovviamente i corpi più interessanti del Sistema Solare. Nondimeno il loro modesto numero non permette di compiere un vero e proprio studio comparativo e di classificarli, a parte la banale e nota divisione in *pianeti terrestri* (da Mercurio a Marte) ed *esterni* (da Giove in poi). Alcune proprietà generali saranno discusse nel contesto delle teorie di formazione del Sistema Solare. Ci limitiamo a riprodurre in tabella alcuni dati relativi alle generali caratteristiche discusse nel paragrafo precedente.

pianeta	$r_{p\odot} (\cdot 10^8 km)$	$R_p (\cdot 10^3 km)$	albedo	$T_{eff,p}$	$T'_{eff,p}$	T_{ss}	m_V (opposiz.)	H
Mercurio	0.58	2.44	0.11	435	447	633	—	-0.42
Venere	1.08	6.05	0.65	252	328	464	—	-4.40
Terra	1.50	6.38	0.37	248	278	393	—	-3.86
Marte	2.28	3.40	0.15	217	226	319	-2.01	-1.52
Giove	7.78	71.5	0.52	102	122	173	-2.70	-9.4
Saturno	14.3	60.0	0.47	77	90	127	+0.67	-8.88
Urano	28.7	25.6	0.90	36	64	90	+5.52	-7.19
Nettuno	45	24.8	0.82	33	51	72	+7.84	-6.87
Plutone	59	1.2	varia	—	44	63	+15.12	-0.81

Tabella 4.1: i pianeti maggiori. Oltre ai dati relativi al semiasse maggiore, alle dimensioni e all'albedo, sono riportate le tre stime di temperatura superficiale discusse nel testo. Si hanno inoltre, ovviamente per i soli pianeti esterni, la magnitudine all'opposizione e H , che per i corpi planetari svolge il ruolo di magnitudine assoluta, essendo calcolata eliminando la dipendenza dalla distanza (è tipicamente la magnitudine all'opposizione -per i pianeti esterni alla Terra- a distanza di 1 U.A.)

Per immagini dei pianeti maggiori, ottenute dallo spazio, si consulti per esempio l'indirizzo <http://photojournal.jpl.nasa.gov/> da cui è tratta, a titolo di esempio, la Figura 4.4, rappresentante un fotomosaico di Mercurio.

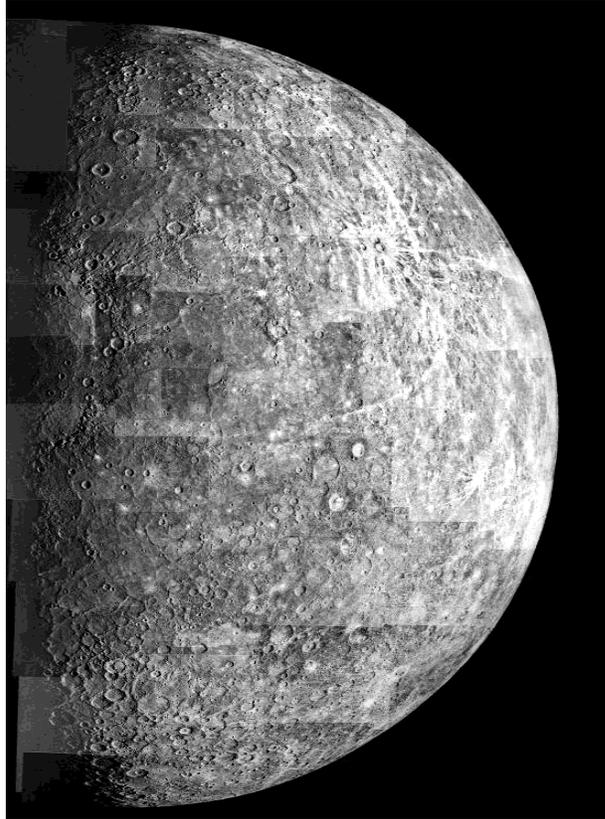


Figura 4.4: Fotomosaico parziale di Mercurio (dall'archivio immagini della NASA)

4.4 Corpi minori del sistema solare.

Prendono il nome di *corpi minori* tutti quegli oggetti che non rientrano tra i pianeti veri e propri, indipendentemente dalle loro dimensioni (alcuni corpi minori sono più grandi di alcuni dei pianeti). La classificazione *per esclusione* mette insieme oggetti molto diversi fra di loro, quali i **satelliti**, che differiscono dai pianeti dal punto di vista dinamico, essendo vincolati ad orbitare intorno ad un pianeta (per estensione, possono essere inclusi nella categoria anche gli anelli planetari, presenti intorno a tutti i maggiori pianeti esterni, da Giove a Nettuno) e diversi gruppi di oggetti che sono da un punto di vista dinamico pianeti a tutti gli effetti, ma che non rientrano in questa categoria per ragioni di dimensioni e, in qualche misura, per convenzione. Tra questi gruppi segnaliamo gli **asteroidi**, le **comete**, gli oggetti detti **TNO** (“transnettuniani”) o anche della **fascia di Kuiper-Edgeworth**. Dinamicamente rientrerebbero tra i corpi minori anche le **meteoriti** e gran parte delle **polveri interplanetarie**. Questi ultimi oggetti non sono però di diretto interesse astrofisico, in quanto non vengono di solito osservati da distanza, come succede per tutti gli astri, ma rivelati mediante misure *in situ* (nell’ambito di missioni spaziali) o raccolti e studiati quando cadono sulla Terra (come succede per le meteoriti).

Da un punto di vista scientifico l’importanza dei corpi minori è molto grande. Da un lato essi forniscono informazioni essenziali sui processi di formazione (anche se sarebbe semplicistico vederli come quello che resta dei “mattoni” originari); dall’altro il loro grande numero permette un approccio di tipo sistematico e statistico, che non è possibile per i pianeti, dominati dalle specifiche peculiarità. Sempre per lo stesso motivo (il grande numero) lo studio dei corpi minori permette di affrontare con abbondanza di dati e in tutta generalità le principali problematiche che riguardano l’**evoluzione** del Sistema Solare, vale a dire i processi collisionali e dinamici.

In questa sede ci limiteremo solo ad alcuni limitati cenni, rimandando per ulteriori informazioni a testi (o a corsi) specialistici.

4.4.1 Gli asteroidi; classificazione spettroscopica e dinamica

Gli asteroidi hanno orbite per lo più comprese fra quella di Marte e quella di Giove. Date le loro dimensioni (il più grande, 1 Ceres, ha un diametro di circa 1000 km) essi vengono visti da terra come sorgenti puntiformi, anche se studi di fenomeni di occultazione di stelle o particolari tecniche (*speckle interferometry*) consentono talora stime delle loro dimensioni e forme e caratteristiche superficiali di massima. Lo spettro di riflessione risulta abbastanza diverso tra i vari oggetti e le sue caratteristiche sono, almeno in linea di principio, utilizzabili per ottenere informazioni sulle caratteristiche fisiche e chimiche della superficie (anche se di fatto l’interpretazione dei dati risulta non sempre agevole). Poichè gli asteroidi sono anche la principale sorgente delle meteoriti, si cerca anche di stabilire una correlazione tra la classificazione degli uni e delle altre. Sulla base dell’analisi delle caratteristiche spettrali, e prevalentemente utilizzando degli indici di colore ottenibili da una fotometria multibanda (a sette o otto colori) è possibile distinguere vari gruppi; diverse classificazioni sono state fatte, e sono stati identificate 14 classi diverse. Tra queste i gruppi più importanti sono il **C** (originariamente da *condriti carbonacee*: meteoriti con alcune caratteristiche spettrali analoghe; sono asteroidi scuri (= bassa albedo)), il gruppo **S** (in realtà molto articolato, e la cui controparte meteoritica non è del tutto chiara). Più chiara e consolidata invece è la classificazione dinamica. Buona parte degli asteroidi, come detto, ha orbite comprese tra quella di Marte e quella di Giove. Per ragioni dinamiche, dovute

alla grande massa di Giove e quindi alla sua capacità di perturbare il moto dei corpi minori, la **Fascia Principale** si spopola abbastanza prima di arrivare a Giove, e presenta anche lacune (dette **Lacune di Kirkwood**) per valori del semiasse maggiore *risonanti* con quello di Giove (si ha una risonanza importante quando i periodi sono in un rapporto razionale esprimibile con una frazione in cui sia numeratore che denominatore sono non troppo maggiori di uno; es. 1:3). Sono inoltre presenti alcuni gruppi speciali. Tra di essi si distinguono i **Troiani** collocati allo stesso semiasse di Giove, spostati nell'orbita di $+/- 60^\circ$ (*punti lagrangiani*) ed i cosiddetti **NEA** (Near Earth Asteroids, a volte chiamati anche NEO, dove O sta per objects), la cui orbita è più interna ed incrocia a volte anche l'orbita della Terra. Ovviamente i NEO sono i progenitori diretti delle meteoriti, che possono anzi essere considerate, prima che cadano sulla Terra, come micro-NEO (o frammenti di essi).

4.4.2 Caratteristiche fotometriche degli asteroidi.

Gli asteroidi sono corpi spesso irregolari sia come forma che come albedo superficiale; la loro luminosità dipende quindi in modo complesso dalla loro posizione e dal loro orientamento rispetto al Sole ed alla Terra; la posizione rispetto alla congiungente Terra-Sole, detta **fase**, fa variare la percentuale di superficie illuminata visibile da terra, ed anche l'angolo di incidenza e riflessione della luce solare che arriva all'osservatore. E' evidente come l'opposizione di fase, cioè il momento in cui il pianetino si trova allineato (o quasi) alla detta congiungente, dalla parte opposta del Sole rispetto alla Terra, è quello in cui viene raggiunta la massima luminosità. Il modo in cui questa luminosità diminuisce allontanandosi dall'opposizione definisce la **curva di fase** e ci fornisce informazioni anche sulle caratteristiche della superficie.

Ma la luminosità del pianetino varia, di solito, anche su un periodo diverso (e generalmente molto più breve, a volte anche di poche ore) a causa della rotazione intorno al proprio asse che, data l'irregolarità della forma e dell'albedo, fa variare la quantità di luce riflessa sulla Terra. E' possibile quindi studiare la **curva di luce** fotometrica di un asteroide, e dedurne in primo luogo il periodo di rotazione, un dato di estrema importanza per la comprensione dei processi evolutivi, ed in particolare dell'evoluzione collisionale; le informazioni sull'ampiezza, prese a fasi e ad "aspetti" diversi (ricordiamo che di solito l'orbita dell'asteroide non giacerà sul piano dell'eclittica, ed avremo quindi la possibilità di vedere parti diverse dell'asteroide in vari momenti), permettono di tentare ricostruzioni della forma e delle eventuali macchie di albedo diversa da quella media sulla superficie. Le eventuali irregolarità di forma e di albedo influiscono in modo simile sulla curva di luce, e non è facile discriminarle in modo del tutto convincente. Ciò nonostante, le osservazioni forniscono una discreta evidenza sull'esistenza di macchie di albedo e sul fatto che gran parte degli asteroidi, esclusi al limite i più grandi, sono caratterizzati da una forma abbastanza irregolare; le recentissime immagini di alcuni asteroidi, prese dallo spazio, ed alcune ricostruzioni di forma fatte con tecniche radar, confermano queste valutazioni generali almeno in alcuni casi specifici. Nella morfogenesi hanno sicuramente un ruolo determinante i processi collisionali, e la formazione di grossi crateri da impatto. Non è invece del tutto chiaro se e in che misura la loro forma irregolare dimostri che sono fisicamente dominati dalle forze di stato solido e non da quelle gravitazionali. Il dibattito scientifico è estremamente aperto in proposito, ed è molto popolare il modello detto **rubble piles** secondo il quale quasi tutti gli asteroidi sarebbero costituiti da agglomerati di frammenti solidi più piccoli, tenuti insieme dalla gravitazione. Asteroidi molto grandi, come **1 Cerere** (il più grande degli asteroidi, nonché il

primo ad essere stato scoperto, ha un diametro di quasi 1000 km) tendono invece ad essere più regolari, e ad avvicinarsi alle forme di equilibrio previste dalla teoria per i corpi autogravitanti (ved. cap. 7). Le figure 4.5 e 4.6 rappresentano due asteroidi, in immagini prese dalla sonda spaziale NEAR.

4.4.3 Le comete

Un altro interessante campione osservativo è costituito dalle comete, pianetini ricchi di sostanze volatili immessi per lo più in orbite estremamente eccentriche, e le cui proprietà variano drammaticamente nel processo di avvicinamento al Sole. Tale argomento esula tuttavia dalle problematiche astrofisiche di nostro prevalente interesse. Dal punto di vista dinamico e fisico le comete sono probabilmente originarie di una fascia esterna di corpi minori, compresa fra quella asteroidale e quella dei TNO (v. il prossimo paragrafo), anche se molte, nella successiva evoluzione dovuta prevalentemente a passaggi ravvicinati con i pianeti maggiori, si sono spostate su orbite più interne o, più spesso, in orbite che escono, all'afelio, dalla zona dei pianeti conosciuti e si spingono ai confini del Sistema Solare (dinamicamente il Sistema Solare finisce quando diventa prevalente l'attrazione delle stelle vicine. Ciò succede a circa $10^5 A.U.$, ossia a distanze dell'ordine dell'anno luce).

Tale zona esterna del Sistema prende anche il nome di **nube di Oort**.

4.4.4 La fascia di Kuiper-Edgeworth

Nel Sistema Solare esterno, oltre Giove, ci sono molti altri interessanti corpi minori, anche se per ovvie ragioni osservative la loro scoperta è cominciata negli ultimi venti anni circa. I **Centauroi** sono corpi in orbite comprese fra Giove e Nettuno. La zona è dinamicamente instabile e porta spesso in orbite cometarie. Oltre Nettuno si hanno invece i **TNO** (Trans-Neptunian Objects) che costituiscono anche la cosiddetta *Fascia di Kuiper-Edgeworth* (dal nome dei due scienziati che ne avevano suggerito l'esistenza alcuni decenni prima della sua effettiva scoperta). Sono a loro volta distinti in alcuni sottogruppi, il più interessante dei quali è forse quello dei **Plutinos**, che sono in risonanza orbitale 3:2 con Nettuno, esattamente come Plutone (che ne è, in un certo senso, il reale capofila).

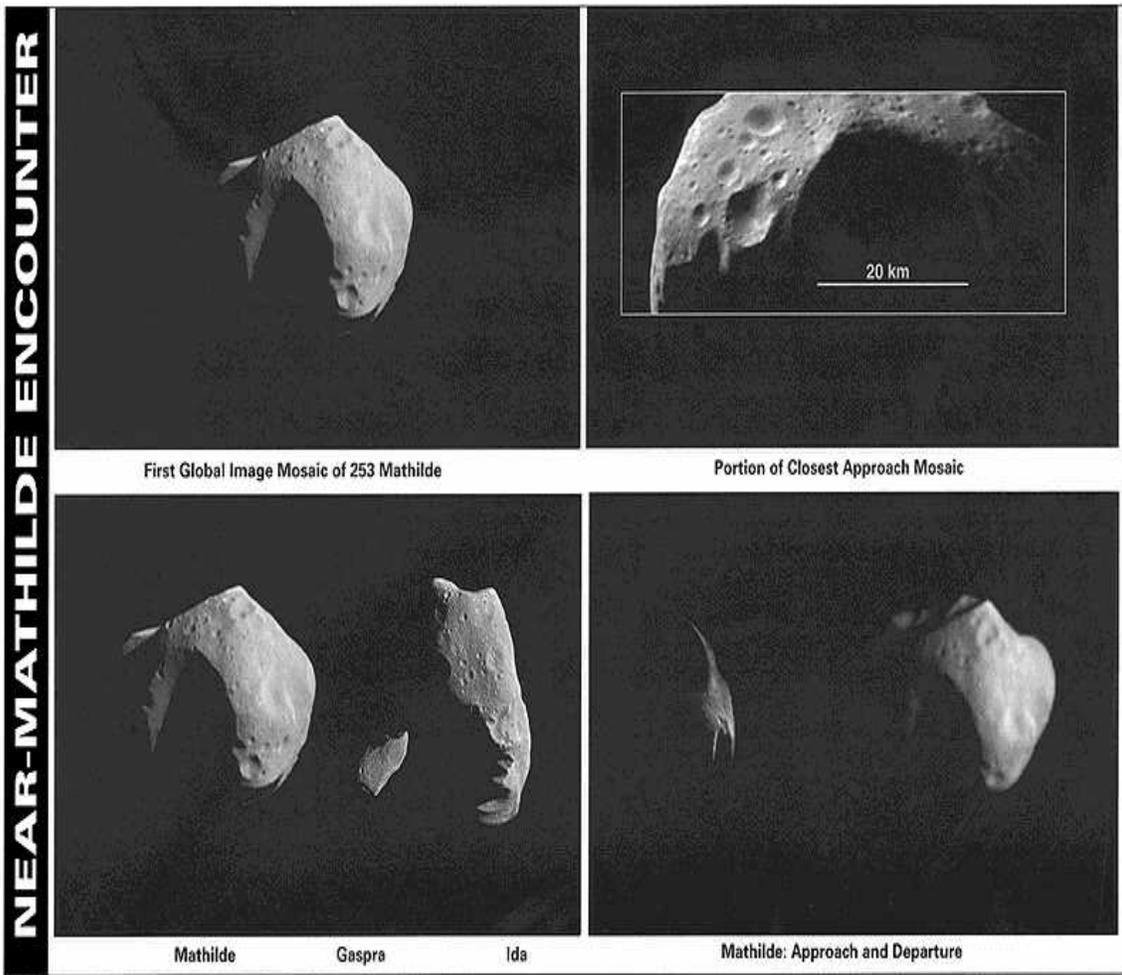


Figura 4.5: 243 Mathilde (dall'archivio immagini della NASA)

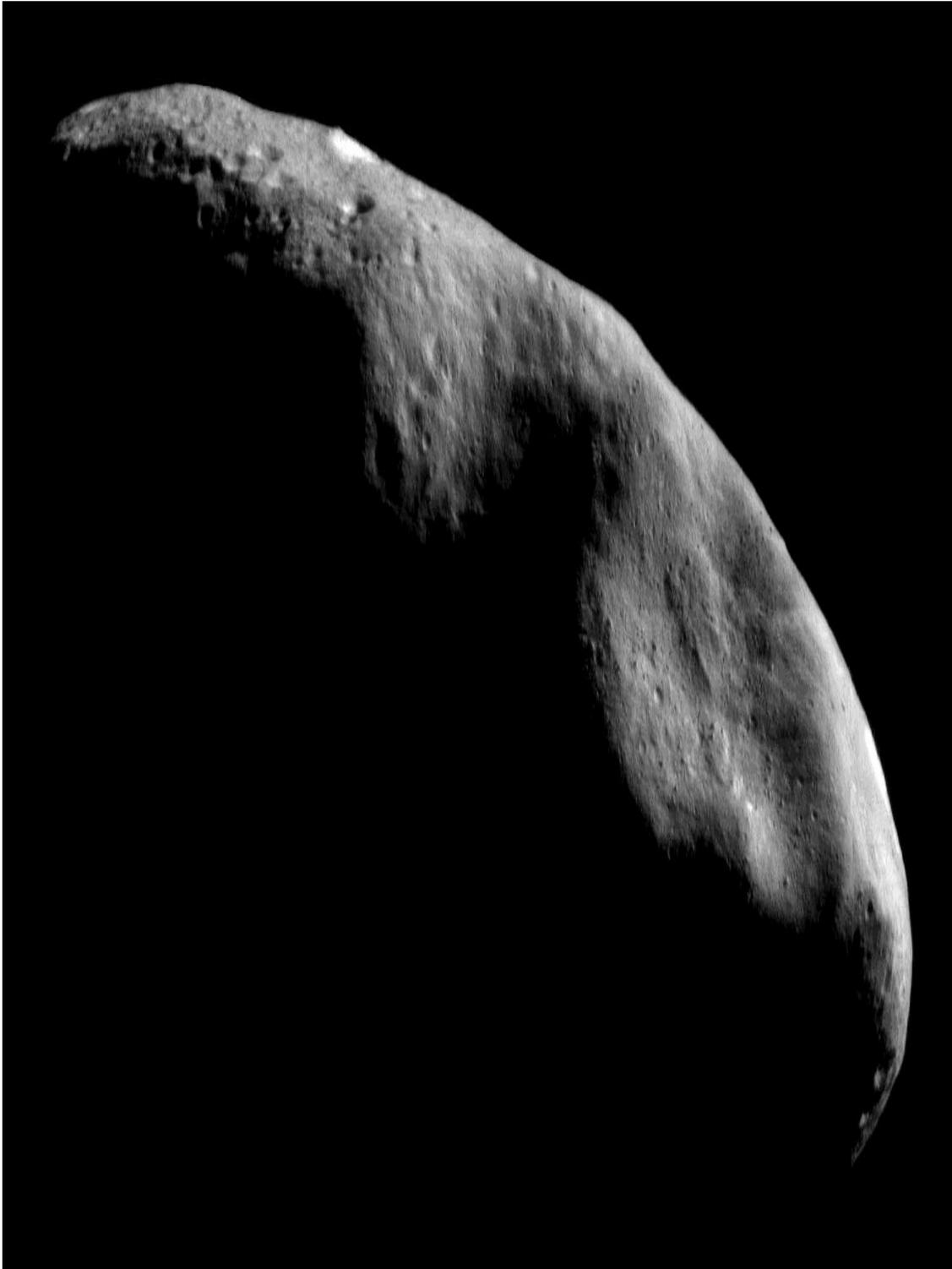


Figura 4.6: L'asteroide NEO 433 Eros (dall'archivio immagini della NASA)

Capitolo 5

Sistemi planetari extrasolari.

5.1 Introduzione.

Il problema della esistenza di altri sistemi planetari, oltre al Sistema Solare, è evidentemente un problema tra i più importanti dell'astrofisica, anche per le ovvie implicazioni su problemi di grande interesse culturale, come quello della diffusione della vita nell'universo. Fino a pochi anni fa questo problema era rimasto sostanzialmente irrisolto: nessuna evidenza era stata trovata in favore della esistenza di altri sistemi planetari, ma questa mancata evidenza poteva essere ragionevolmente attribuita all'estrema difficoltà di osservazione.

Da circa un decennio la situazione è drasticamente cambiata. Prima (nel 1992) sono arrivate le prime evidenze relative all'esistenza di corpi planetari intorno a stelle di tipo *pulsar*. Successivamente (dal 1995) sono cominciate le scoperte di pianeti orbitanti intorno a stelle normali, come il Sole. A tutt'oggi risultano scoperti oltre cento pianeti extrasolari, pur con i problemi di cui parleremo.

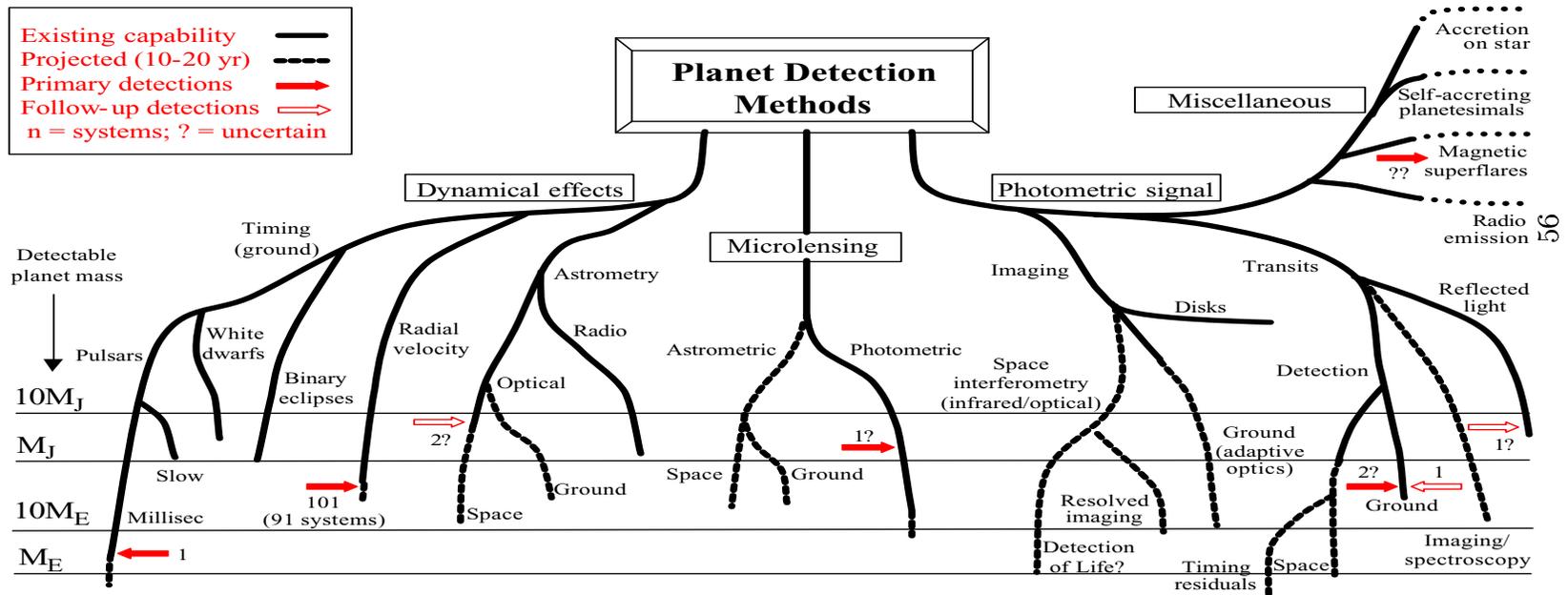
Ci sono sostanzialmente diversi tipi di approccio al problema della scoperta dei sistemi extrasolari, sia di tipo diretto, consistente nel cercare di osservare qualche pianeta (ovviamente cominciando dai più grandi), sia di tipo indiretto, consistente nell'osservare gli eventuali effetti di un sistema planetario sulla stella centrale.

Nella figura seguente, adattata da Perryman (2000) e ricavata dal link

<http://www.obspm.fr/encycl/pictures.html> vengono sintetizzate le diverse tecniche di scoperta usate e usabili per la scoperta di pianeti extrasolari. Ovviamente M_E e M_J sono la massa della Terra e di Giove, e i numeri messi al termine di alcuni rami si riferiscono alle scoperte fatte con il metodo corrispondente (i punti interrogativi sottolineano i casi dubbi).

Planet Detection Methods

Michael Perryman: Rep. Prog. Phys, 2000, 63, 1209 (updated Aug 2002)



La scoperta diretta di un sistema planetario è estremamente difficile; in primo luogo per un problema di risoluzione: la separazione angolare tra il Sole e Giove sarebbe al più di un secondo d'arco già da $5 pc$, che è una distanza interstellare molto piccola; ma questo non è il vero problema, che risiede invece nella spaventosa differenza di luminosità fra la stella centrale e i pianeti. Tale rapporto può essere espresso dalla relazione:

$$L_p/L_* = p(\lambda, \alpha)(R_p/a)^2 \quad (5.1)$$

dove i suffissi p e $*$ si riferiscono, qui e nel seguito, al pianeta e alla stella centrale, a è la semiasse maggiore dell'orbita e la funzione p dipende sostanzialmente dall'albedo e dalla fase alla quale si osserva il pianeta. Per osservazioni nel visibile del sistema Sole-Giove il rapporto definito nella (5.1) è dell'ordine di 10^{-9} . Il rapporto cresce un po' nell'infrarosso, centrato sullo spettro di emissione termica del pianeta, ma resta sempre estremamente piccolo.

La stella centrale disperde i suoi fotoni intorno al centro della propria immagine di diffrazione, e, data l'enorme differenza di luminosità, ciò basta a mascherare completamente l'immagine dell'eventuale pianeta. Il problema può essere parzialmente affrontato con tecniche di mascheramento, quali quelle adottate nei coronografi, e significativi miglioramenti possono essere realizzati mediante osservazioni spaziali (con le quali l'immagine della stella non è più quella allargata dal *seeing* ma quella definita dall'ottica (figure di diffrazione)), metodi di ottica adattiva e soprattutto tecniche interferometriche (*"nulling"*). Al momento però possiamo registrare all'attivo non osservazioni dirette di pianeti, ma di dischi di polvere (potenziali strutture protoplanetarie), e di possibili *debris disks*, ossia di dischi circumstellari in cui già parte della materia si è condensata in corpi planetari.

La scoperta di un sistema planetario con tecniche *indirette* si avvale di diversi metodi. Alcuni di questi sono piuttosto peculiari e di rara applicazione, e ne parleremo per primi, altri invece sono più classici e simili a quelli usati per lo studio delle stelle doppie.

Tra i primi va citata la tecnica basata sulle osservazioni di *microlensing* gravitazionale. La luce proveniente da una sorgente lontana viene deflessa e focalizzata dalla presenza di una sorgente di campo gravitazionale lungo il cammino ottico. Osservativamente si vede un aumento temporaneo della luce registrata dall'osservatore, con un caratteristico picco. Se la "lente" è costituita da una stella corredata di pianeti, è possibile osservare un picco secondario nella curva di luce. È possibile per questa via rivelare la presenza di pianeti moderatamente massicci (poco più della Terra) in sistemi molto lontani (distanze dell'ordine di $10 kpc$). D'altro canto le possibili scoperte sono casuali e sporadiche. Al momento è stato registrato un episodio sospetto, che potrebbe implicare la scoperta di un pianeta extrasolare, ma non c'è una completa certezza della significatività della osservazione.

Un'altra tecnica piuttosto peculiare, che però è stata storicamente la prima a consentire la scoperta di un pianeta extrasolare, è basata sulle osservazioni delle *pulsars*, stelle compatte (tipicamente resti di supernovae) che emettono un segnale con periodicità molto regolare, e con periodi dell'ordine dei secondi o dei millisecondi (il fenomeno è legato a processi di *alta energia*, connessi con la presenza di intensi campi magnetici). Se questi oggetti hanno un pianeta, il moto del sistema intorno al comune centro di massa provoca uno spostamento periodico della stella e quindi il segnale pulsante arriva all'osservatore in anticipo o in ritardo, a causa della variazione del cammino ottico. Già in un sistema tipo Sole-Terra il Sole percorre una ellisse di semiasse $\simeq m_E/m_\odot a_E \simeq 500 km$, e questo provoca un ritardo o un anticipo del segnale dell'ordine del millisecondo, ben misurabile per pulsars di corto periodo. Il metodo è quindi efficiente, ed ha

in effetti portato alla prima scoperta, nel 1992. Va però rilevato che sistemi planetari intorno a pulsars sono completamente diversi dal Sistema Solare; è anche probabile che non siano sistemi planetari nati con la stella ma conseguenza dei processi legati alla fase di supernova. Non rispondono quindi alle fondamentali domande: quanto è frequente la formazione di sistemi planetari all'atto della formazione stellare, quanto è frequente la formazione di pianeti terrestri, quanto può essere frequente la nascita della vita.

I metodi più naturali per la scoperta di sistemi planetari sono invece quelli legati a tecniche simili a quelle usate per le stelle doppie. Abbiamo già detto che l'osservazione diretta (analoga a quella delle *binarie visuali*) è sostanzialmente impossibile, al momento. Ma le stelle binarie visuali vengono studiate anche da un punto di vista **astrometrico**: la loro posizione sulla sfera celeste varia periodicamente in virtù del moto orbitale. Per sistemi stellari composti da componenti abbastanza simili è tutt'uno osservare tali moti e *vedere* le due stelle; per i sistemi planetari invece l'osservazione del pianeta è impossibile, ma può essere misurato il moto kepleriano ellittico della stella centrale sotto l'effetto gravitazionale del pianeta. E' facile dimostrare che il semiasse maggiore dell'ellisse sottende un angolo:

$$\theta = \frac{m_p}{r} \left(\frac{P}{M_*} \right)^{\frac{2}{3}} \quad (5.2)$$

dove m_p e M_* sono massa del pianeta e della stella in unità solari, il periodo è in anni e la distanza r è in parsec. Nel ricavare la (5.2) abbiamo utilizzato le leggi di Keplero e trascurato m_p nell'espressione della massa totale.

Come è evidente, l'angolo diventa tanto più piccolo quanto la distanza aumenta; il metodo è quindi promettente per scoprire eventuali sistemi vicini. Il problema è che anche a pochi parsecs di distanza un sistema Sole–Giove provoca uno spostamento della stella dell'ordine del millisecondo d'arco, troppo piccolo per essere rivelato da Terra e al limite delle potenzialità attuali delle migliori misure spaziali. Impensabile, anche in un futuro non troppo remoto, vedere l'effetto di un pianeta come la Terra.

Le metodologie spettroscopiche usano la osservazione di una componente periodica nella velocità radiale di una stella, dovuta al moto di cui sopra. L'ampiezza di questa componente è data dalla espressione:

$$v = \frac{30m_p \sin i}{M_*^{2/3} P^{1/3}} \quad (5.3)$$

dove v è in km/s e i è l'inclinazione dell'orbita sulla superficie della sfera celeste.

Sempre nel caso del sistema Sole–Giove ciò corrisponde, almeno per un angolo i non troppo sfortunato, a poco più di $12m/s$, che scende a $10cm/s$ per il sistema Sole–Terra.

Fino a pochi anni fa entrambi questi limiti erano fuori dalla portata degli strumenti esistenti. La situazione è cambiata drasticamente nell'ultimo decennio. La predisposizione di spettrografi particolari, basati su principi innovativi (quali la copresenza sullo spettro delle righe dello spettro astronomico e di quelle di un gas presente nello strumento) ha permesso di raggiungere la sensibilità di pochi metri al secondo. Sembra però intrinsecamente esclusa la possibilità di scendere sotto al m/s , essendo a questo livello presente un rumore dovuto alle macchie stellari e agli eventuali fenomeni convettivi superficiali (usualmente presenti in stelle di sequenza di piccola o media massa).

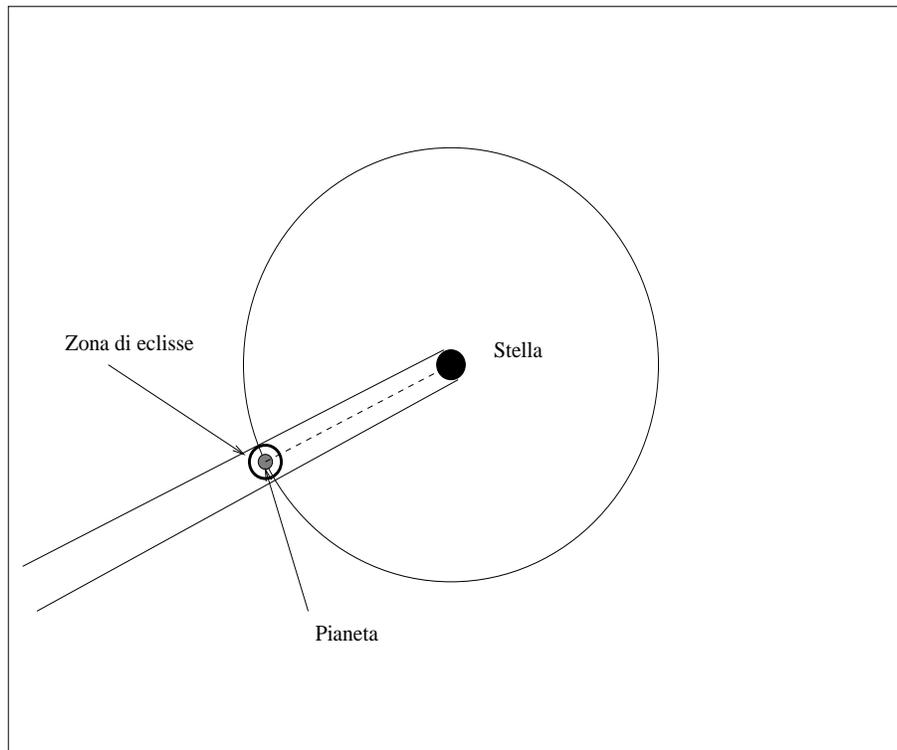


Figura 5.1: La zona in cui una eclisse può essere osservata è definita dal dischetto intorno al pianeta; la probabilità di osservare una eclisse è quindi data dal rapporto tra la superficie di tale dischetto e quella della sfera centrata sulla stella e passante per il pianeta (si trascura per semplicità il raggio del pianeta rispetto a quello stellare e non si considerano quindi le possibilità di eclissi parziali).

Per questa via sono stati scoperti, negli ultimi anni, circa 100 pianeti, per lo più in sistemi diversi, che hanno permesso l'avvio di un lavoro sistematico di analisi.

Una ulteriore possibilità di scoperta di sistemi planetari potrebbe, in linea di principio, essere la via fotometrica; un pianeta come Giove, transitando davanti ad una stella come il Sole o meno luminosa, dà luogo ad una diminuzione di luce facilmente osservabile. Purtroppo l'angolo solido entro cui l'eclisse è visibile, sempre per una configurazione Sole-Giove, è dell'ordine di 10^{-6} (fig. 5.1); la via fotometrica, per essere praticabile, richiede l'elaborazione di un programma di osservazioni routinarie completamente automatizzato, che permetta di compiere ed elaborare i milioni di misure necessarie per avere qualche probabilità di vedere un'eclisse. Ciò è previsto per future imprese spaziali. Al momento la via fotometrica è stata fruttuosamente seguita in un paio di casi per *riscoprire* un pianeta già rivelato per via spettroscopica e per migliorare, incrociando i dati ottenuti con tecniche diverse, la conoscenza delle sue caratteristiche fisiche (massa) e orbitali.

5.2 Caratteristiche dei sistemi planetari extrasolari e problemi interpretativi

Non è questo il luogo per una discussione sistematica dei risultati e delle problematiche connesse. Nella figura 5.2 (da Marcy et al., reperibile al sito Web precedentemente citato) vengono rappresentati i semiassi maggiori e le masse di tutti i pianeti scoperti finora.

Come si vede i semiassi maggiori sono spesso piuttosto piccoli rispetto al termine di confronto (quello di Giove, visto che tutti i pianeti scoperti hanno masse del tipo di quella di quest'ultimo). Questo fatto può essere desunto meglio dalla figura 5.3 (ibidem), dalla quale risulta evidente la clusterizzazione delle masse intorno a valori simili a quella di Giove. La rapida diminuzione dei sistemi all'aumentare della massa dimostra anche la separazione, probabilmente anche genetica, fra questi sistemi e i sistemi stellari doppi; non c'è infatti continuità tra le compagne stellari di massa piccola, le "stelle mancate per poco" (*brown dwarfs*) e i pianeti.

Le caratteristiche dei sistemi visti finora creano delle difficoltà teoriche: negli ultimi anni si è consolidato un modello di formazione del Sistema Solare, basato sulla formazione dei pianeti partendo da nuclei solidi, costituiti dall'aggregazione di polveri e ghiacci presenti nella nebulosa protosolare. Per diversi motivi questo modello prevede la formazione di pianeti giganti ad una certa distanza dalla stella (dove cioè alcuni composti volatili possono essere allo stato gassoso; per il Sistema Solare tale limite è ben oltre l'orbita di Marte). La presenza di pianeti grossi e vicini crea quindi dei problemi. Tali pianeti sono d'altro canto i meglio osservabili, e quindi potrebbero giocare un ruolo decisivo gli *effetti di selezione*. In sintesi, si può pensare che le osservazioni preannuncino una drastica revisione dei modelli di formazione oppure che debbano essere fatti degli aggiustamenti e delle generalizzazioni che consentano di spostare dei pianeti giganti in regioni più interne rispetto a quella di formazione. In questa seconda ipotesi ci aspettiamo peraltro che il progredire delle tecniche osservative porti alla scoperta di un numero crescente di sistemi planetari più *tradizionali*. I meccanismi che potrebbero causare questo spostamento potrebbero essere legati all'interazione mareale del disco protoplanetario con i pianeti in formazione oppure a processi dinamici a più corpi, legati alla presenza di almeno tre pianeti massicci nel sistema ed alle conseguenti perturbazioni gravitazionali (*Jumping Jupiters*). Un ruolo decisivo per la comprensione dei fatti potrebbe esser giocato dall'eccentricità delle orbite. Peraltro, al momento, anche quest'ultima presenta una distribuzione di non facile interpretazione (si veda la fig. 5.4, ibidem). Sarà compito di studi futuri dare una risposta chiara alle domande tuttora aperte.

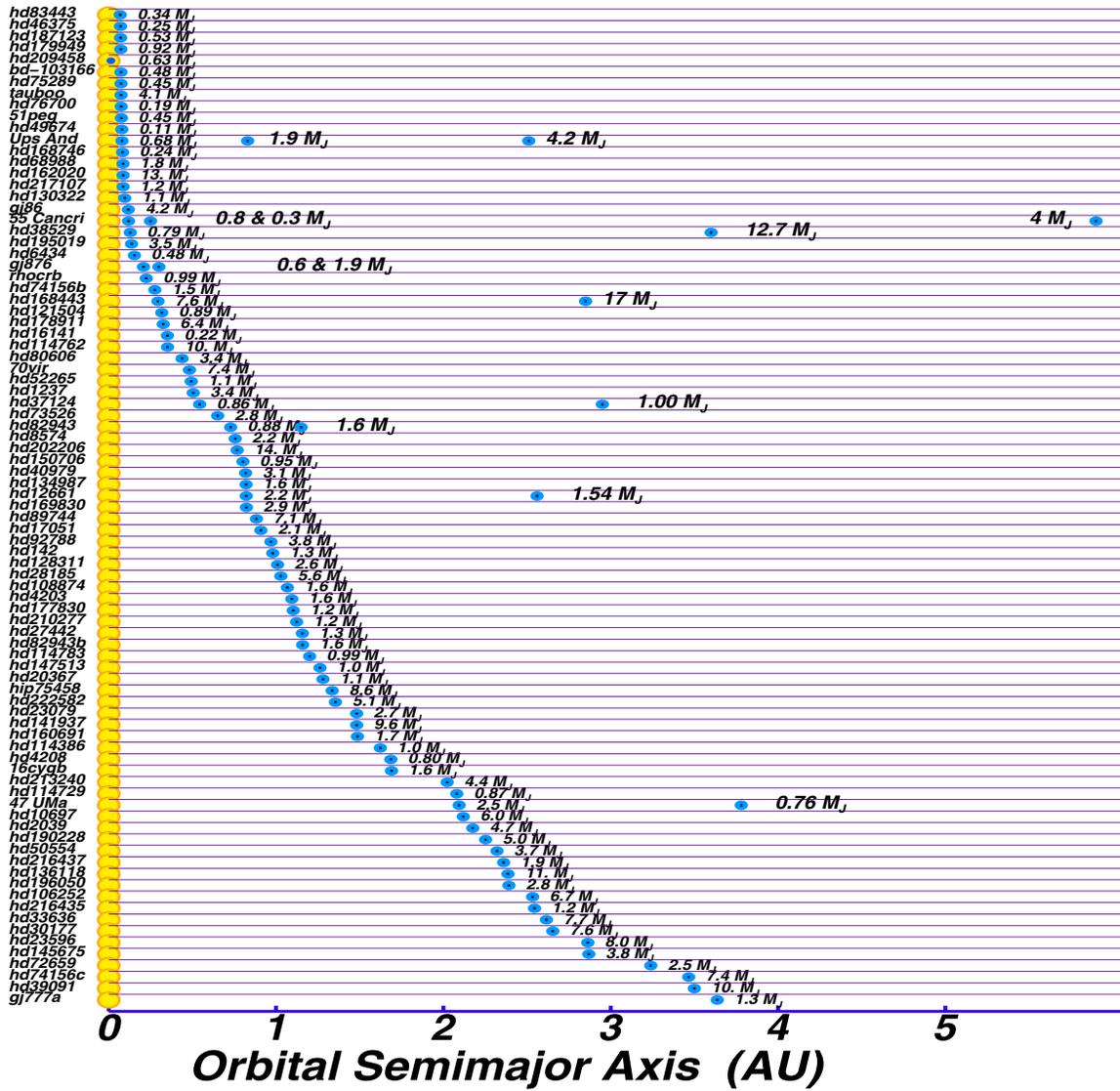
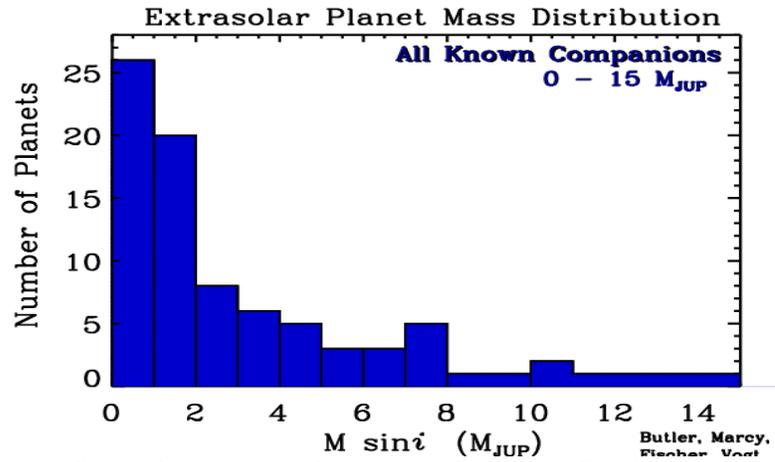


Figura 5.2:

The Search for Extrasolar Planets



Distribuzione di massa dei pianeti extrasolari conosciuti. Sono state studiate circa 1000 stelle: molte fra quelle di tipo solare entro 30 pc. La frequenza varia piu' o meno con l'inverso della massa.

Figura 5.3:

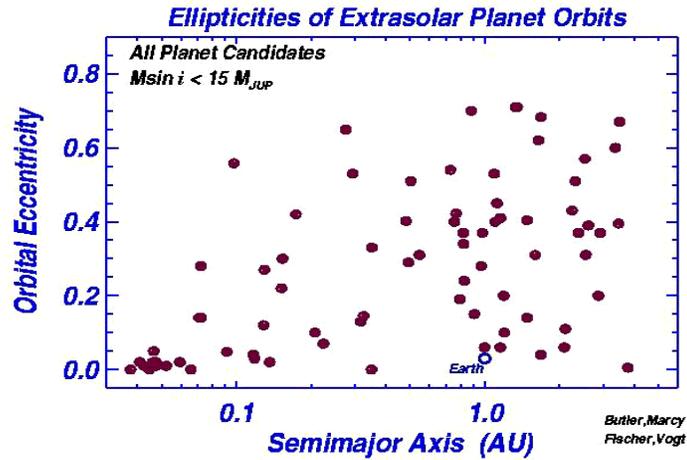


Figura 5.4: Vengono rappresentate le orbite dei pianeti extrasolari in un piano semiassie-eccentricità. Come si vede i valori di quest'ultima sono abbastanza dispersi e scorrelati dal semiassie maggiore; orbite strette molto eccentriche sarebbero un elemento a favore del modello dei Jumping Jupiters, mentre orbite circolari potrebbero essere meglio spiegate con processi di tipo mareale

Capitolo 6

L'universo extragalattico.

6.1 Nubi interstellari e galassie.

Le osservazioni astronomiche hanno rivelato da molto tempo l'esistenza di numerosi oggetti *nebulari*, non puntiformi ma estesi. L'inizio di questo secolo fu segnato da un acceso dibattito sulla loro natura di oggetti appartenenti alla nostra Galassia o di altri *universi isola*. Il dibattito continuò per un paio di decenni nel nostro secolo fino a quando Hubble, scoprendo variabili di tipo Cefeidi in Andromeda ed in altre galassie a spirale, dimostrò incontrovertibilmente che almeno parte degli oggetti estesi erano galassie esterne, situate a grande distanza. Esse si possono confondere, in quanto a dimensioni apparenti, con le nubi di gas interstellare che appartengono invece alla nostra Galassia. Quest'ultime sono infatti tipicamente caratterizzate da dimensioni dell'ordine dei parsecs e da distanze dell'ordine dei kiloparsecs, mentre le galassie hanno dimensioni che sono dell'ordine dei kiloparsecs (anche alcune decine) e distanze in genere da alcuni megaparsecs in su. Nubi e galassie hanno quindi a volte dimensioni angolari di alcuni minuti d'arco, se non di oltre un grado. Solo le osservazioni degli ultimi anni (specie dallo spazio) hanno permesso di risolvere numerose stelle all'interno delle galassie esterne (v. la discussione nel seguito). Nella classificazione pre-Hubble nebulose e galassie erano distinte solo sulla base di caratteristiche morfologiche, ma senza alcuna valutazione delle dimensioni reali. La scoperta di Hubble, oltre a chiarire la controversia nebulose-galassie, aprì anche la strada a stime di distanza, basate sull'applicazione della già nota relazione periodo-luminosità delle Cefeidi, come in generale dei vari tipi di stelle pulsanti. La relazione periodo luminosità per le Cefeidi, che risulta da considerazioni teoriche generali (si veda la discussione nel Cap.8), può essere usata, conoscendo il periodo e la magnitudine apparente, per stimare la distanza (DG1). Si noti che, per una sorgente astronomica variabile nel tempo, la stima del periodo è immediata dalla curva di luce. Se il periodo è regolare la "fasatura" delle osservazioni relative a numerosi periodi permette di raggiungere una elevata precisione anche in presenza di un numero di osservazioni non troppo grande. Ciò ovviamente a condizione che il periodo non sia troppo lungo e che quindi uno studio con punti osservativi dispersi in parecchi anni permetta di comprendere un grande numero di periodi. I periodi delle stelle pulsanti sono spesso dell'ordine dei giorni; le Cefeidi più luminose, in base alla relazione periodo-luminosità, hanno periodi più lunghi della media, ma sempre ben misurabili.

L'osservabilità di una stella variabile in una galassia esterna non è comunque molto facile, per due motivi, l'uno legato alla ovvia diminuzione della luminosità con la distanza e l'altro

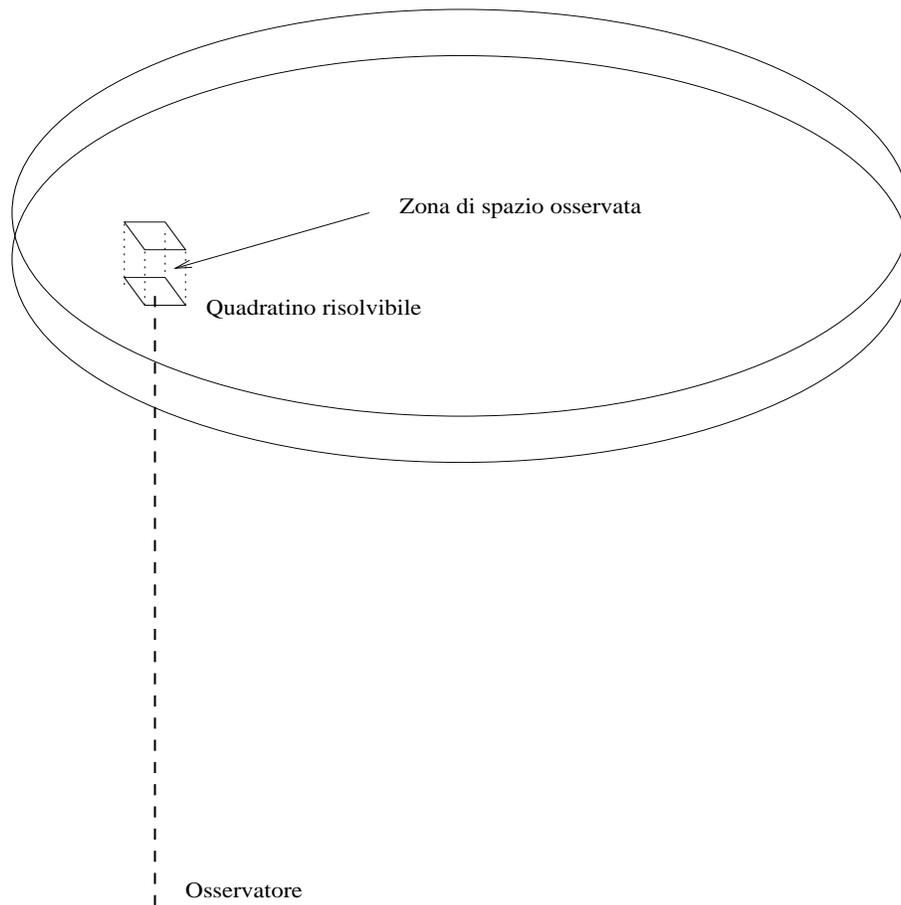


Figura 6.1: *Toy model* di galassia e risolubilità per osservazioni astronomiche da grande distanza

connesso invece al confondersi della stella nel background delle altre stelle che compongono la galassia. Per capire questo aspetto anticipiamo qui alcune considerazioni che saranno riprese in seguito. Come abbiamo già detto più volte l'effetto combinato del potere risolutivo ottico del telescopio (tipicamente legato al rapporto λ/D , rispettivamente lunghezza d'onda della luce e diametro del telescopio) e del *seeing* atmosferico (prevalente) limita la capacità di risolvere una immagine a circa un secondo d'arco per osservazioni da Terra. Nello spazio, dove il *seeing* non c'è, si possono raggiungere valori migliori di oltre un ordine di grandezza. Se osserviamo una galassia, ossia un insieme di stelle, nel quadratino di 1" di lato saranno comprese tutte le stelle che stanno in quella direzione – con appunto una tolleranza del secondo – e nei vari strati che vediamo dalla nostra posizione come sovrapposti (Fig. 6.1). Mentre la profondità della zona interessata non dipende dalla distanza, le sue dimensioni trasversali aumentano, ovviamente, con il quadrato della distanza. La luminosità assoluta della *sorgente risultante* dalla somma di tutti i contributi individuali delle stelle nel quadratino osservato aumenterà quindi, a pari condizioni, con il quadrato della distanza. Ciò ovviamente bilancia esattamente (a parte effetti minori, come quelli legati all'estinzione della luce) la diminuzione della luminosità apparente con il quadrato della distanza. Ne consegue che ci possiamo aspettare una **brillanza** della galassia (ossia una magnitudine apparente della minima superficie risolta: in effetti la brillanza

viene spesso misurata in magnitudini per secondo quadrato) sostanzialmente indipendente dalla distanza. Possiamo fare una stima quantitativa dei valori che possiamo aspettarci mediante un **toy model** di galassia (ossia un modellino molto semplificato). Ammettiamo di osservare da una direzione parallela all'asse polare una galassia costituita da 10^{10} stelle tutte uguali al Sole, distribuite uniformemente su un disco di $10kpc$ di raggio. Ammettiamo, per fissare le idee, di essere ad una distanza di $1Mpc$. In un quadratino di un secondo di lato osserviamo allora le stelle comprese nel parallelepipedo avente come altezza lo spessore del disco e un lato di base di $1Mpc(1''/1rad) \simeq 5pc$ che comprende una frazione $25/(\pi 10^8) \simeq 10^{-7}$ delle stelle totali, ossia circa 10^3 stelle. A questa distanza la magnitudine apparente del Sole sarebbe $M_{V\odot} + 5\log(1Mpc/10pc) \simeq 29.7$ e quindi la magnitudine apparente di mille stelle sarebbe di circa $29.7 - 2.5\log(1000) \simeq 22$. Per inciso questo valore di brillantezza è abbastanza realistico per le zone non troppo centrali o periferiche delle galassie. In questo quadratino di magnitudine 22 dovremmo allora distinguere la variabilità (di solito inferiore ad un fattore 2 tra il massimo e il minimo) di una singola stella luminosa, che deve quindi avere una magnitudine non troppo inferiore. Ripercorrendo le considerazioni precedenti, una stella di magnitudine apparente 22 deve avere una magnitudine assoluta di -3 alla distanza di $1Mpc$, di -8 a $10Mpc$ ecc.. Anche se le Cefeidi possono essere stelle molto luminose (anche con $M_V \simeq -5$), si capisce come, almeno per osservazioni da Terra, si possa arrivare con le osservazioni di Cefeidi nelle galassie a pochi Megaparsecs di distanza. Le cose possono migliorare se si osservano variabili in zone meno popolate di stelle o se si compiono osservazioni dallo spazio, diminuendo così le dimensioni del quadratino risolvibile (un fattore 10 nella risoluzione permette di guadagnare un fattore 100 nella luminosità, ossia cinque magnitudini). In questo modo diventa così possibile anche “risolvere” le stelle più luminose. In ogni caso la luce proveniente da stelle lontane è sempre molto debole: da una stella come il Sole a $1Mpc$ di distanza un telescopio di normali dimensioni ($\simeq 1m$ di diametro) riceve nelle bande del visibile molto meno di un fotone al secondo.

Per distanze maggiori vengono introdotti metodi di stima delle distanze via via meno affidabili, ma che permettono di raggiungere zone sempre più remote:

- DG2: in ogni galassia la stella variabile più luminosa ha la stessa luminosità assoluta M_V . Questo criterio, se applicato alle variabili “normali” non porta grossi vantaggi rispetto al metodo delle Cefeidi. Un caso completamente diverso è invece quello dell'uso delle **supernovae** (di *Tipo I*) come candele campione. Una supernova ha tipicamente una magnitudine paragonabile con quella di una intera galassia ed è quindi identificabile anche a grandissime distanze. Il limite di quest'ultimo metodo sta nella rarità del fenomeno supernova (molto meno di un evento all'anno per galassia).
- DG3: in ogni galassia la stella più luminosa ha la stessa luminosità assoluta M_V .

I criteri DG2 e DG3 non permettono un grande progresso nelle distanze valutabili (a parte il discorso delle supernovae), essendo le Cefeidi già stelle piuttosto luminose. Si arriva a distanze dell'ordine delle decine di Mpc . Un salto di ordini di grandezza può essere compiuto mediante la ipotesi, molto arbitraria:

- DG4: tutte le galassie hanno la stessa luminosità.

Una variante di DG4 altrettanto potente ma meno inaffidabile usa la usuale clusterizzazione delle galassie, adottando una ipotesi che sembra ragionevolmente verificata:

- DG4bis: le galassie più luminose di ciascun cluster hanno la stessa luminosità. In realtà questo criterio non funziona molto bene, a causa della presenza, specie nelle zone centrali degli ammassi più grandi, di fenomeni di *merging* fra galassie che danno vita a oggetti eccezionalmente massicci e luminosi. Sulla base di criteri puramente empirici, ma basati su questo problema, si usa come candela campione una delle galassie più luminose dell'ammasso, ma non la prima.

Un metodo completamente diverso utilizza invece delle proprietà complessive delle galassie, quali la dispersione di velocità delle stelle. Le velocità delle stelle in una galassia sono in generale, tramite il viriale (v. cap. 8) legate al potenziale gravitazionale, che è a sua volta legato alla massa totale; quest'ultima è a sua volta correlata con la luminosità totale; di conseguenza esistono delle relazioni empiriche tra velocità e luminosità (tipo la relazione di *Tully-Fisher*).

Le distanze stimate con DG1 dovettero venir corrette quando fu scoperto, da Baade nel 1952, che le Cefeidi osservate in Andromeda erano di tipo I, mentre quelle conosciute nella nostra Galassia, in precedenza, erano di tipo II, con due diverse anche se qualitativamente simili relazioni periodo-luminosità.

La correzione delle distanze, rivalutando le dimensioni assolute delle galassie più vicine, dimostrò che le dimensioni della nostra erano nella media, distruggendo così l'ultimo residuo di visione antropocentrica.

Infine, la figura 6.2 ci mostra la distribuzione di massa nella nostra galassia.

6.2 Classificazione delle galassie.

Le prime classificazioni delle galassie avevano carattere puramente fenomenologico, e mescolavano ancora galassie e nubi galattiche. Solo gli studi di Hubble permisero di definire una classificazione, ancora puramente fenomenologica, ma sufficientemente chiara e razionale. Il diagramma di Hubble, anche se più volte perfezionato e completato, è tuttora la base per le classificazioni moderne (fig.6.3). Le galassie vengono suddivise in ellittiche (caratterizzate dalla lettera E), lenticolari (caratterizzati da S0) e spirali (caratterizzate da S). Le denominazioni sono evidentemente corrispondenti ad una morfologia di massima. Le ellittiche hanno forma ellissoidale (ed appaiono quindi ellittiche se proiettate sulla sfera celeste). Esse vengono ulteriormente ordinate e caratterizzate da un numero n legato al rapporto fra gli assi apparenti dell'ellisse proiezione, secondo la relazione:

$$n = 10(1 - b/a) \tag{6.1}$$

in modo che, per esempio, E0 = galassia di apparente forma circolare, E5 implica $b = a/2$ ecc.. Le S0 si distinguono dalle ellittiche per una più lenta decrescita della luminosità al difuori della zona centrale, il che suggerisce una struttura esterna relativamente appiattita. Esse si distinguono in *normali* e *barrate* (S0 e SB0). Successivamente le lenticolari sono state suddivise in più sottotipi.

Infine le spirali e spirali barrate (S e SB) sono caratterizzate dalla presenza di una struttura a disco articolata in braccia di maggiore addensamento stellare. Le spirali vengono divise in a , b , c in una progressione di decrescente importanza del nucleo centrale e crescente apertura delle braccia, nelle quali si riescono via via ad individuare meglio singole stelle e regioni HII.

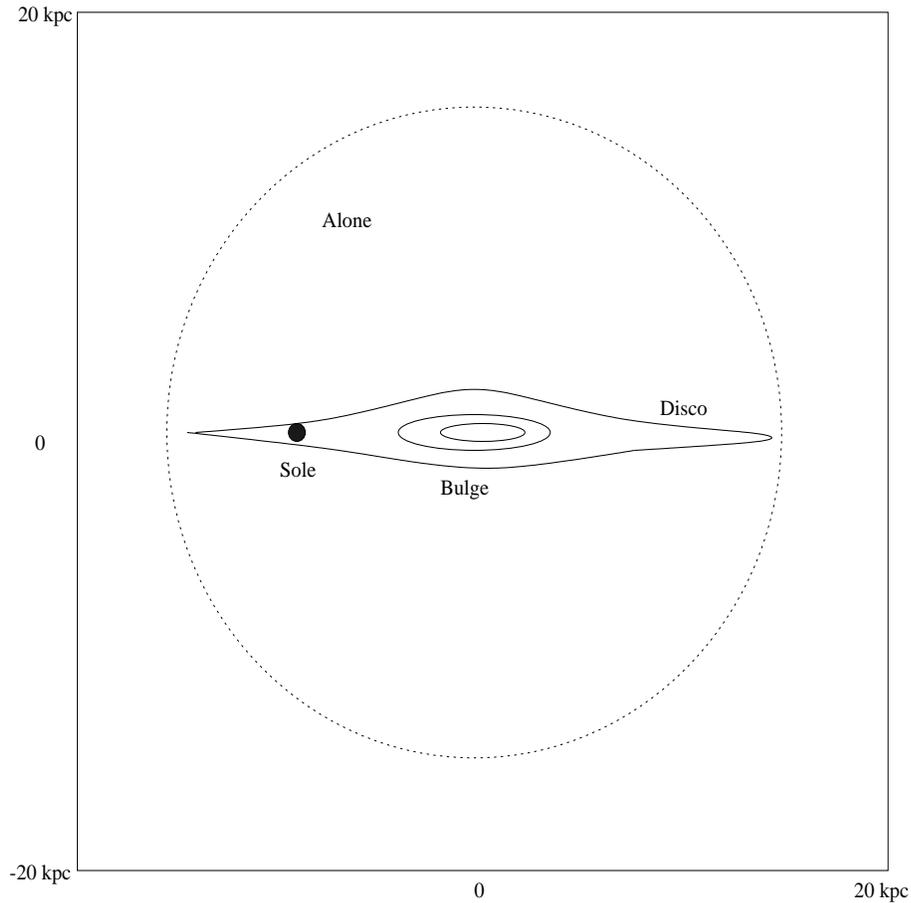


Figura 6.2: Modello di distribuzione di massa nella nostra Galassia. I contorni corrispondono a isodense.

E' importante rilevare che la classificazione non è sempre facile, anche perchè la morfologia può dipendere criticamente dal tipo di lastra e dall'esposizione. Nelle figure 6.4 - 6.8 viene riprodotta una serie di immagini di galassie di vario tipo (ottenute dallo Space Telescope, e scaricate dal relativo sito Web).

La classificazione di Hubble fu successivamente ampliata, per far posto anche alle galassie irregolari (I o Ir) e a spirali di transizione (Sd, Sm).

Sono state anche introdotte classificazioni più complesse, che tenevano conto della possibile presenza di anelli intorno ai nuclei delle spirali e permettevano anche una migliore trattazione dei casi intermedi. Le spirali ordinarie e barrate possono essere ulteriormente divise in tipi r ed s, a seconda che le braccia partano da un anello circumnucleare (ring, da cui r) o meno (s). Secondo la classificazione del David Dunlap Observatory (*DDO*) vengono anche introdotte le *spirali anemiche* come tipo intermedio tra le lenticolari e le spirali vere e proprie.

Un diverso criterio di classificazione è quello di Yerkes, che attribuisce come primo indicatore del tipo galattico una lettera minuscola corrispondente al tipo spettrale integrato, correlato, come vedremo, al grado di concentrazione nel nucleo, ovvero con la sequenza di Hubble: *E* = massima concentrazione, tipo spettrale integrato *K*, classificazione di Yerkes *k*; *Sc* = piccola concentrazione, tipo spettrale integrato *F*, classificazione *f*; *Irr*, tipo spettrale integrato *A*, classificazione *a*. Questa

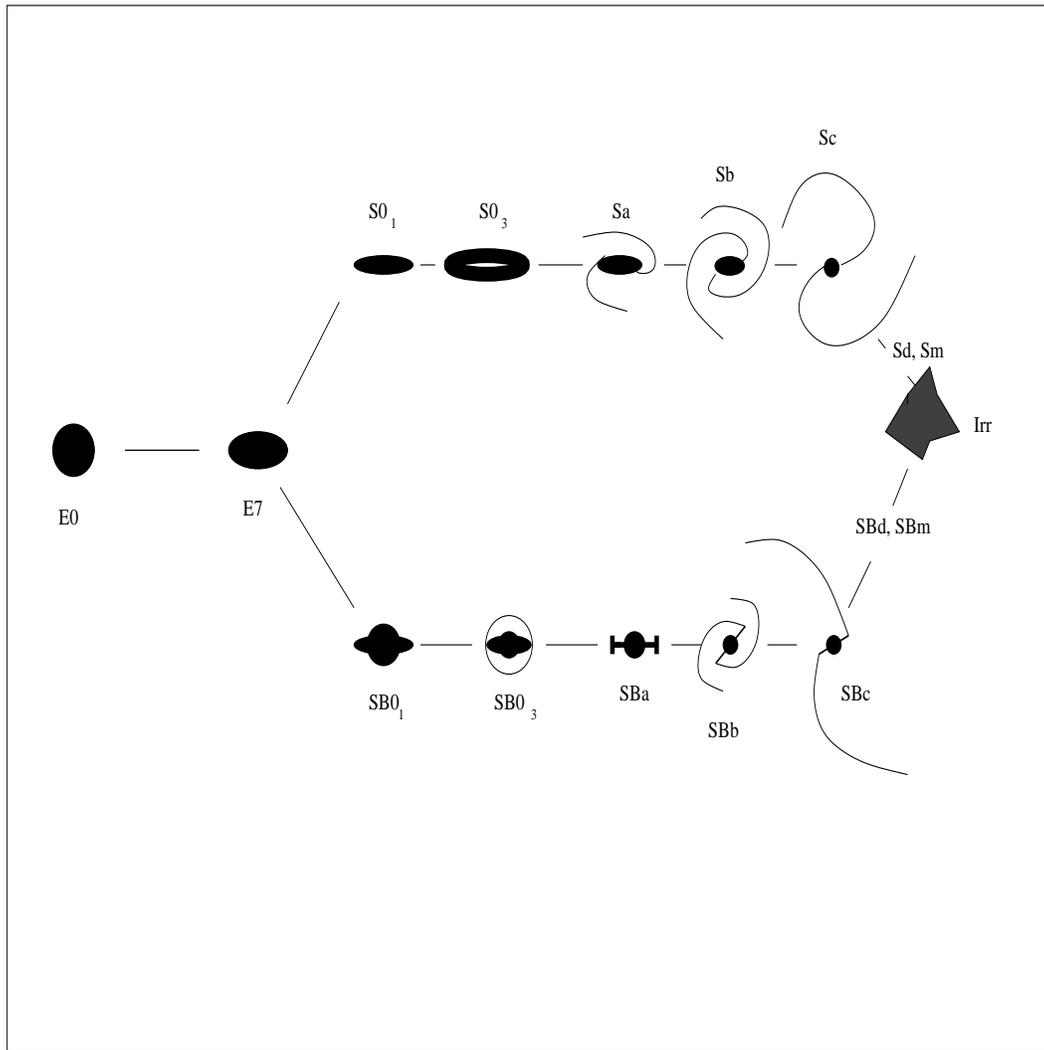


Figura 6.3: il diagramma di Hubble, raffinato nella suddivisione delle S0 e aggiornato includendo anche le galassie irregolari

prima lettera è poi chiarita da un indicatore di forma (S, B, E, I, R = a simmetria rotazionale, D = nucleo di ellittica con involuppo) e da un numero 1-7 collegato con il rapporto degli assi.

6.3 Spettroscopia delle galassie.

Il tipo spettrale integrato di una galassia è ovviamente il tipo spettrale medio delle stelle e degli altri oggetti che ne fanno parte. Il colore risultante dipende dal colore tipico delle stelle di una certa massa pesato con la luminosità e con la distribuzione di massa e mediato su tutte le masse, più contributi dovuti alla materia diffusa, all'arrossamento interstellare ecc.. Il problema non è semplice. Si può comunque notare che in generale le stelle più massicce hanno una luminosità molto più alta della media, ma sono assai meno numerose e caratterizzate da tempi evolutivi molto più brevi. Si deve inoltre notare che sostanzialmente le stelle blu sono stelle di grande

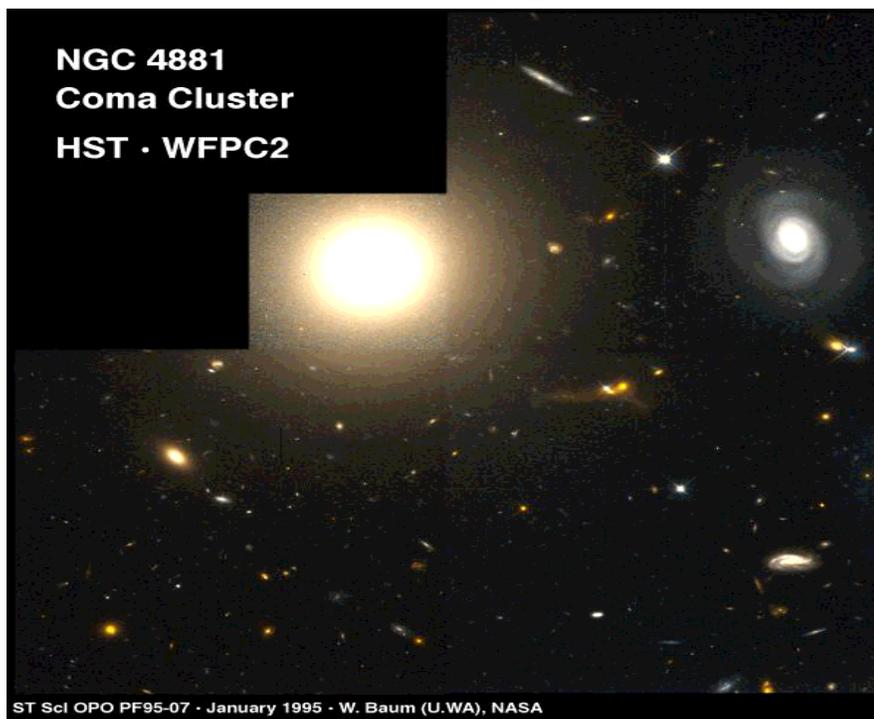


Figura 6.4: La galassia ellittica gigante NGC4881 nel Coma Cluster - Foto da <http://hubble.stsci.edu/gallery/>

massa e giovani (anche se questa regola ammette qualche eccezione). Anche per masse piccole sovente le stelle evolute sono più rosse di quelle di sequenza (l'evoluzione stellare avviene quasi tutta a destra della sequenza principale, secondo l'usuale rappresentazione del diagramma di HR). Nel diagramma di Hubble le ellittiche hanno un colore integrato che corrisponde più o meno a quello di stelle di tipo K ($(B - V)$ vicino ad 1), mentre le spirali sono intorno al tipo F e le irregolari all'A (come già detto parlando della classificazione di Yerkes).

La spiegazione di queste differenze sta essenzialmente nella diversa presenza di processi **recenti** di formazione stellare, abbondante nelle irregolari e scarsa nelle ellittiche: le galassie più vicine al blu sono essenzialmente quelle ricche di stelle blu luminose.

Per chiarezza notiamo che tradizionalmente sono chiamate *early* le galassie ellittiche, anche se abbondano di stelle vecchie, mentre le stelle giovani sono presenti in tipi galattici più *late*. Ciò deriva da una vecchia e superata idea sull'evoluzione delle galassie e non ha oggi alcun significato fisico.

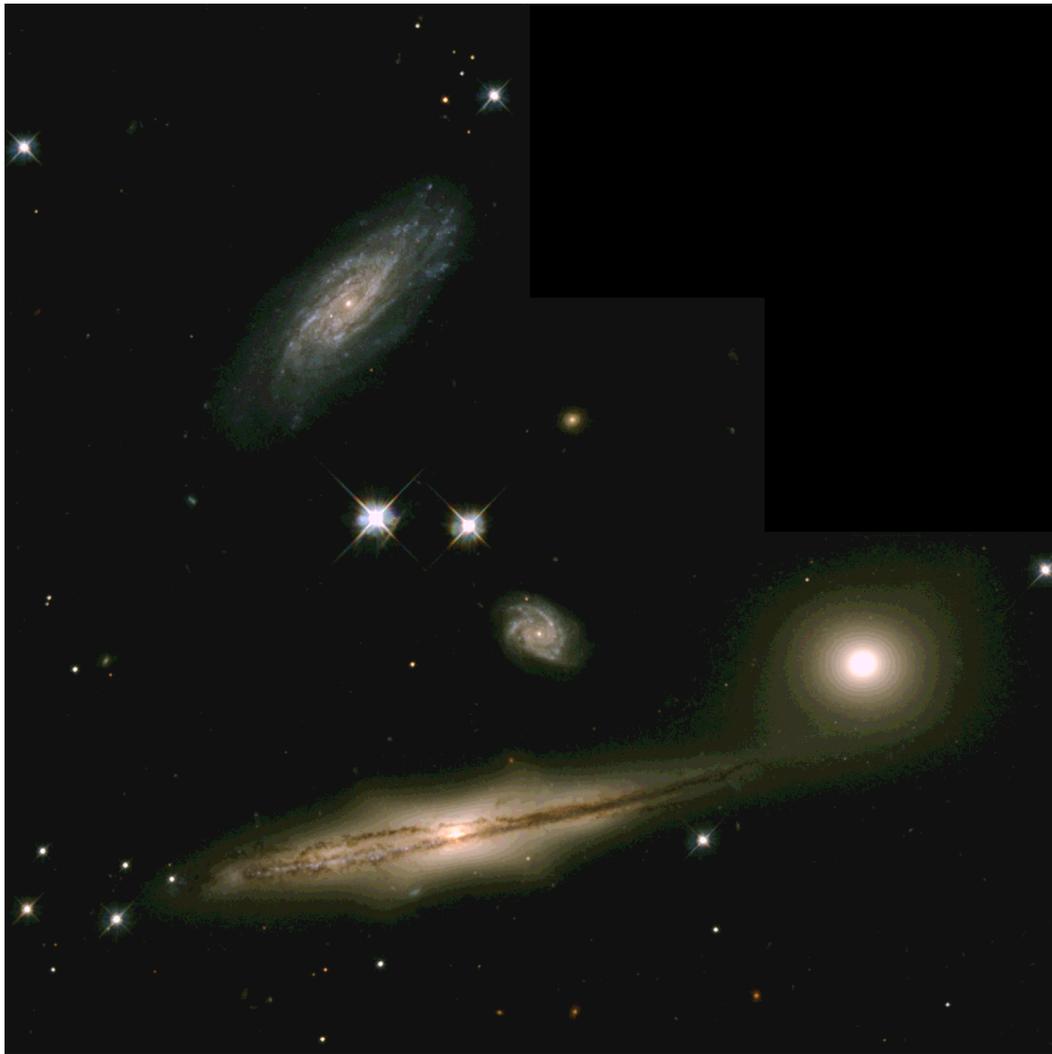


Figura 6.5: Galassie nell' Hickson Galactic Cluster HCG87; per la fonte. v. Fig.6.4

6.4 Distribuzione spaziale della luminosità.

La natura di sorgenti estese permette di studiare le galassie da un ulteriore punto di vista (se confrontato con gli studi stellari), analizzando quantitativamente la distribuzione spaziale della luminosità. Ciò permette di studiare le caratteristiche di struttura e di evoluzione delle galassie, viste ora come formate da un gas di stelle.

Lo studio è poi reso più proficuo dalla parallela conoscenza, mediante tecniche Doppler, della distribuzione spaziale di velocità (con i conseguenti problemi di *massa mancante*, importanti anche per gli aspetti cosmologici).

La distribuzione spaziale della luminosità, il **profilo di brillantezza**, è definita mediante la brillantezza superficiale, ovvero la luminosità osservata per unità di angolo solido. Come già detto la brillantezza, a parte effetti di estinzione, non dipende dalla distanza. La brillantezza è definita in unità $mag/arcsec^2$, ed indicata con il simbolo μ (μ_B , la brillantezza misurata nel blu, è la più usata). Nelle zone centrali le galassie giganti arrivano a $\mu_B \sim 17$, mentre una tipica brillantezza

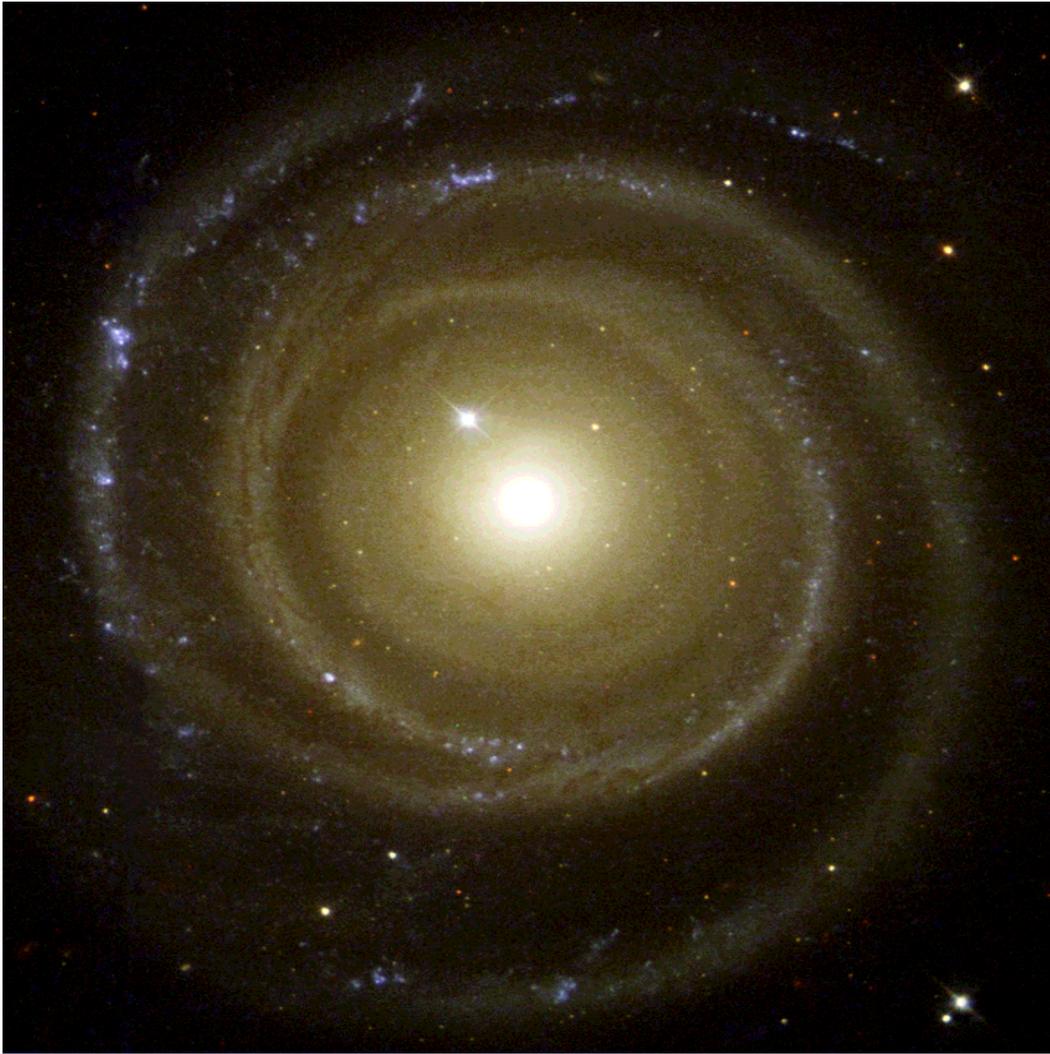


Figura 6.6: La galassia a spirale NGC4622; per la fonte. v. Fig.6.4

media può essere 22. A $\mu_B \geq 26$ le galassie si immergono, da un punto di vista osservativo, nel fondo cielo. La sottrazione del fondo cielo, illuminato da effetti diversi (tra i quali si segnalano la luce zodiacale, luce solare diffusa nel Sistema Solare, e fenomeni legati all'atmosfera terrestre e all'inquinamento luminoso) costituisce un problema serio, la cui risoluzione è però essenziale per stimare il giusto profilo di brillantezza di una galassia.

La magnitudine totale della galassia viene valutata integrando il profilo di brillantezza, fino all'isofota in cui esso si confonde con il fondo cielo. La stima della magnitudine assoluta passa ovviamente da una misura della distanza, effettuata con le tecniche sopra descritte e, soprattutto, con misure di effetto Doppler (significative a causa della legge di Hubble, che collega distanza e velocità di recessione).

Le magnitudini assolute stimate M_v vanno da -10 a -15 per le galassie nane (milioni di volte la luminosità solare) a $-20/ -25$ per le giganti (miliardi di volte la luminosità solare). Il raggio viene anch'esso stimato arrivando ad una isofota "critica". Sovente si adotta il cosiddetto *raggio di Holmberg (RH)*, definito dall'isofota di $26.5 \text{ mag/arcsec}^2$.

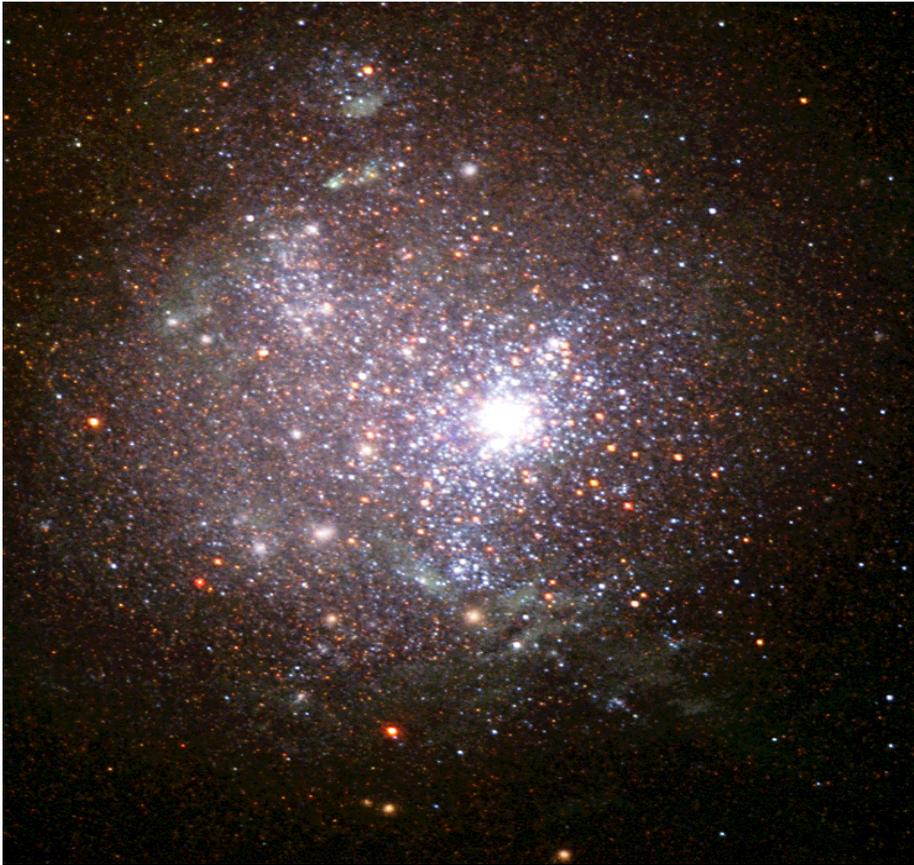


Figura 6.7: La galassia nana irregolare NGC1705; per la fonte. v. Fig.6.4

Discutiamo ora in sintesi alcuni risultati relativi al profilo di brillantezza delle galassie ellittiche e spirali.

6.4.1 Il profilo delle ellittiche.

Il profilo delle galassie ellittiche nane ha un andamento generale simile a quello degli ammassi globulari, e descritto abbastanza bene dalle *curve di King*. Queste sono curve teoriche, ottenute mediante ipotesi generali sulla distribuzione di densità del *gas di stelle*, e valutando poi, dalla distribuzione spaziale di stelle, il profilo di brillantezza risultante da una proiezione dell'ammasso sulla sfera celeste. Le curve di King costituiscono una famiglia a tre parametri:

- la *brillantezza centrale* Σ_0 ;
- il *raggio del nucleo* r_c , definito dalla relazione $\Sigma(r_c) = \Sigma_0/2$;

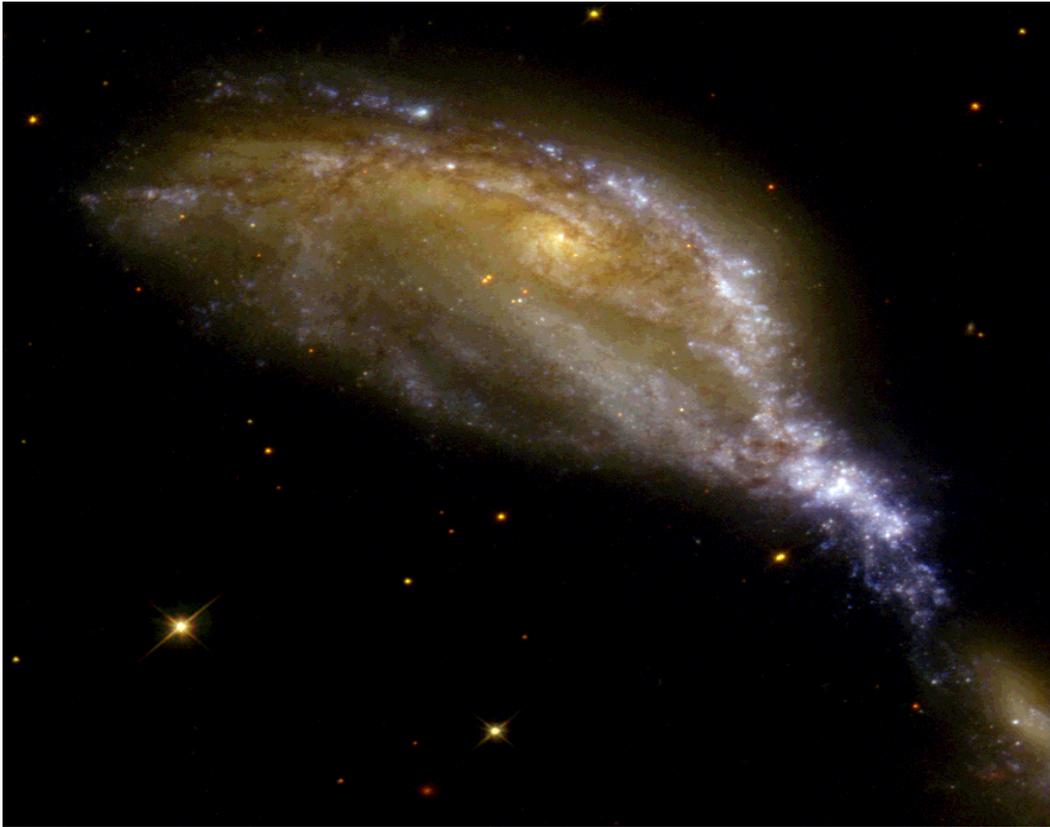


Figura 6.8: Collisione fra due galassie; per la fonte. v. Fig.6.4

- $c = \log(r_T/r_c)$ dove r_T è definito come il raggio per cui $\Sigma(r_T) = 0$: c piccolo corrisponde ad una distribuzione rapidamente troncata, mentre c infinitamente grande corrisponde ad una distribuzione di massa che va a zero asintoticamente, come in una sfera isoterma (v. cap.7).

Σ_0 ed r_c possono essere fissati osservativamente, e c viene scelto mediante tecniche di best-fit.

La situazione è più complessa per quanto riguarda le ellittiche giganti.

Per le galassie ellittiche un buon fit è stato ottenuto mediante la formula empirica di De Vaucouleurs:

$$\Sigma(r) = \Sigma_e 10^{-3.33[(r/r_e)^{1/4}-1]} \quad (6.2)$$

dove r_e è il **raggio efficace**, definito come la mediana della distribuzione di brillantezza:

$$2 \int_0^{r_e} \Sigma(r) 2\pi r dr = \int_0^\infty \Sigma(r) 2\pi r dr = 7.22\pi r_e^2 \Sigma_e \quad (6.3)$$

ed evidentemente $\Sigma_e = \Sigma(r_e)$.

Si ha anche:

$$\Sigma_0 = 10^{3.33} \Sigma_e \sim 2 \cdot 10^3 \Sigma_e \quad (6.4)$$

Alcune delle galassie meglio studiate mostrano un eccellente accordo con la formula di De Vaucouleurs, ma non è ancora molto chiaro il suo significato fisico. In anni recenti la formula è stata generalizzata, sostituendo l'esponente $1/4$ con un più generico $1/n$ (con n diverso da galassia a galassia).

6.4.2 Il profilo delle galassie a spirale.

Sembra possibile vedere il profilo delle galassie a spirale come dovuto alla somma di due contributi diversi, uno del nucleo (o *bulge*) che segue un andamento alla De Vaucouleurs, ed un contributo del disco, con andamento esponenziale:

$$\Sigma(r) = \Sigma(r_s) e^{-\frac{r}{r_s}} \quad (6.5)$$

E' interessante anche definire il parametro D/B (rapporto fra emissione complessiva del disco e del bulge):

$$\frac{D}{B} = 0.28 \left(\frac{r_s}{r_e} \right)^2 \frac{\Sigma(r_s)}{\Sigma_e} \quad (6.6)$$

6.5 Radiogalassie e quasars.

Alcuni oggetti extragalattici si caratterizzano per la peculiarità del nucleo: ad es. le Galassie di Seyfert sono distinguibili per la presenza di forti righe di emissione nel nucleo, le Galassie N hanno un nucleo molto più brillante del resto, delle QSO o delle BL Lacertae sono visibili solo i nuclei. Le QSO (quasi stellar objects) sono caratterizzate dalla presenza di righe di emissione.

Esse si inquadrano nel gruppo degli oggetti extragalattici studiati radioastronomicamente (questo spiega anche la alternativa denominazione di **quasars**). La radioastronomia, sviluppata nel dopoguerra, ha avuto per anni un ruolo centrale nella astrofisica extragalattica, favorita come è dalla ben maggiore facilità di costruzione di telescopi di grandi dimensioni, pur con il limite, almeno fino ad anni recenti, in cui si sono sviluppate tecniche interferometriche a lunga base ($VLBI$), di un molto minore potere risolutivo. Tale limite ha creato il problema della identificazione delle controparti ottiche delle sorgenti radioastronomiche, aggravato anche dalla diversa geometria delle zone di emissione ottica e radio all'interno dello stesso oggetto.

In generale infatti l'emissione radio non è di tipo termico, ma dovuta a processi fisici diversi (come la *radiazione di sincrotrone*), spesso legati alla presenza di intensi campi elettromagnetici. Ne consegue che le zone di emissione radio sono spesso strutture anche estese circostanti il nucleo galattico, e la brillantezza radio non è correlata con quella ottica, dovuta prevalentemente alle sorgenti stellari. Le caratteristiche nel visibile solo a volte permettono di prevedere se un certo oggetto di rango galattico sia –o meno– una intensa sorgente radio (*radiogalassia*).

Le *Quasars* sono forse i più interessanti oggetti osservabili nel radio e nel visibile, con la loro apparenza di oggetti compatti, apparentemente non distinguibili dalle stelle, ma in realtà rispetto a queste enormemente più luminose e lontane. L'identificazione ottica delle

quasars non è immediata; a livello fotometrico, esse si distinguono dalle stelle di sequenza, mediante un vistoso eccesso ultravioletto, che però non basterebbe, da solo, a distinguerle da oggetti come le nane bianche o certe variabili irregolari. Fortunatamente le quasars sono anche caratterizzate, a differenza dei suddetti oggetti stellari, da un ulteriore eccesso infrarosso, che ne permette quindi il riconoscimento. A livello spettroscopico, le quasars sono invece caratterizzate dall'alto (a volte altissimo) redshift. Tra le quasars si trovano infatti le sorgenti con redshift più alto. A suo tempo c'è stato un intenso dibattito scientifico sulla natura di questo redshift. Nessun modello soddisfacente ne ha dato conto in termini di un redshift intrinseco, di origine gravitazionale. La spiegazione cinematica (ossia di un redshift di tipo Doppler) ha quindi prevalso. Varie ragioni osservative (tra cui la mancanza di alcun caso di blue-shift) hanno portato ad escludere l'ipotesi di sorgenti galattiche espulse ad altissima velocità dal centro della nostra Galassia. È così sopravvissuta solo la spiegazione del redshift come legato all'espansione dell'Universo. La legge di Hubble permette quindi di stimare dal redshift la distanza e quindi la luminosità assoluta delle sorgenti. Sulla base di queste stime le quasars sono sorgenti tra le più intense dell'Universo. Anche a causa della loro natura relativamente compatta risultano quindi osservabili a grandissime distanze. Qualitativamente si ritiene che le quasars siano essenzialmente assimilabili a dei nuclei galattici, e si possano assimilare ai cosiddetti **nuclei galattici attivi** (caratterizzati dall'emissione radio, ma anche da altri fenomeni rilevanti, quali ad esempio i *jets* di materia).

6.6 Struttura dell'Universo su grande scala

Nella **Cosmologia** le galassie (e gli oggetti dello stesso rango) diventano invece le particelle elementari (o, se si preferisce, i mattoni) che costituiscono l'Universo. Mentre diventano meno rilevanti le caratteristiche peculiari dei singoli oggetti, assume un ruolo centrale la geometria spazio-temporale dell'Universo e la distribuzione di materia nello spazio.

La prima e più importante proprietà dell'Universo è la sua espansione, espressa dalla legge di Hubble. Lasciamo da parte le complicazioni che dovremmo introdurre all'interno di un corretto modello relativistico, nel quale anche il concetto di distanza assume caratteristiche problematiche (si veda, per questo e per le altre tematiche cosmologiche, anche il testo di F. Lucchin, *Introduzione alla Cosmologia*, Zanichelli ed., in particolare i capitoli 2 e 3). Ragionando in termini "classici (cioè euclidei, newtoniani ecc.) la legge di Hubble prende la forma:

$$\vec{v} = H\vec{r} + \vec{\Phi} \quad (6.7)$$

con H (**costante di Hubble**), dimensionalmente l'inverso di un tempo (sulla base dei modelli teorici non troppo diverso dall'età dell'Universo, di circa 10^{10} *anni*) ma usualmente misurato in $km/(sMpc)$, una contorta unità di misura che però ben si attaglia all'utilizzo dei dati osservativi. Il suo valore stimato più recentemente è intorno a $60 - 70 km/sMpc$. I vettori \vec{v} e \vec{r} sono invece rappresentativi della velocità, relativa all'osservatore, della sorgente, e il suo vettore posizione. Si noti che la legge di Hubble, a causa della sua natura lineare, rende ugualmente ogni punto fungibile come *centro dell'Universo*. Il vettore $\vec{\Phi}$ rappresenta invece un termine di velocità peculiare della sorgente, sovrapposto al *flusso di Hubble* (ossia alla velocità risultante dal primo termine del secondo membro dell'equazione), e serve a tener conto del fatto che ogni sorgente, al di là del moto di espansione, ha un suo moto peculiare. Scritta in questa

forma generale la legge di Hubble può essere applicata a qualunque oggetto e risultare esatta. La legge mantiene ovviamente un senso solo se il termine peculiare risulta di entità limitata. Ciò è vero almeno quando si studia la dinamica su grande scala. I modelli dinamici desunti dalle osservazioni, ottenuti incrociando le stime di distanza ottenute con la legge di Hubble e quelle ottenute con altri metodi, limitano il moto peculiare al più a qualche migliaio di chilometri al secondo. Curiosamente passando dalla scala del Sistema Solare a quelle cosmologiche le velocità relative peculiari non variano più di un paio di ordini di grandezza. Per distanze superiori a qualche decina di Mpc il termine di espansione comincia a dominare su quello peculiare e la legge di Hubble diventa sempre più vicina ad una relazione di proporzionalità tra velocità di recessione e distanza (cosa che permette anche di usarla *all'inverso* come metodo per stimare la distanza).

Diventa così possibile costruire, sulla base delle osservazioni, un modello tridimensionale di distribuzione delle strutture extragalattiche nell'Universo. Due risultati appaiono da questa ricostruzione:

- L'Universo diviene via via più omogeneo all'aumentare della scala su cui lo si considera. In altri termini su piccola scala l'Universo non è –ovviamente– nè omogeneo nè isotropo. Ma andando a scale progressivamente crescenti il contrasto di densità fra le varie regioni tende progressivamente a diminuire, e si può ragionevolmente pensare che un Universo complessivamente omogeneo e isotropo possa costituire una ragionevole approssimazione, utile per la costruzione di un modello *globale*.
- Ci sono evidenze di una organizzazione *gerarchica* delle disomogeneità. Tipicamente la materia è concentrata in galassie, e le galassie sono per lo più organizzate in *clusters* (o ammassi) su una scala intorno al Mpc; gli ammassi sono poi spesso raggruppati in superammassi su una scala di alcune decine di Mpc. Altre evidenze suggeriscono la possibilità di strutture su grande scala tipo filamenti o superfici di densità superiore alla media, o di grandi *vuoti*.

La distribuzione di massa su grande scala è ovviamente uno degli aspetti più interessanti dell'Universo su scala globale. La struttura attuale, desumibile con le osservazioni, può essere combinata con le informazioni che sulla struttura passata possono essere ricavate dallo studio della **radiazione di fondo**, che descrive lo stato dell'Universo ad una epoca primordiale (quando era circa mille volte più piccolo di oggi) in cui le strutture avevano appena cominciato a formarsi. Questo studio combinato può produrre modelli evolutivi di universo da confrontare con le previsioni dei modelli teorici, nei quali le caratteristiche di formazione ed anche alcune ipotesi sulla fisica fondamentale (unificazione delle interazioni, *quantum gravity*, ecc.) vincolano le caratteristiche complessive della distribuzione di massa su grande scala.

Rimandiamo ai relativi corsi (o al libro sopra citato) per la discussione di questi aspetti. Da un punto di vista astrofisico notiamo come la descrizione delle caratteristiche dell'Universo su grande scala richieda la predisposizione di strumenti di analisi *ad hoc* che trasformino l'impressione soggettiva di una organizzazione non casuale della materia in una serie di parametri quantitativi, utilizzabili per un confronto teoria–osservazioni. Tali strumenti sono molteplici, anche perchè rispondono a esigenze diverse, come quella di valutare l'esistenza di clusterizzazioni tridimensionali, o di strutture di dimensione 1 (filamenti) o 2 (superfici). Tra gli strumenti più usati (e più semplici anche da descrivere) citiamo qui quello legato alle funzioni di correlazione e il test di percolazione.

6.6.1 La funzione di correlazione

In un volume (universo, o parte di esso) V ci sono N galassie (o simili). Se $n = N/V$ la probabilità di trovare una galassia nel volume dV sarà:

$$P = ndV. \quad (6.8)$$

Se le galassie sono distribuite in modo casuale, la probabilità di trovare due volumi dV_1 e dV_2 ambedue popolati sarà:

$$P_{12} = n^2 dV_1 dV_2. \quad (6.9)$$

Se invece la materia non è distribuita in modo casuale, la probabilità combinata potrà differire da quanto sopra previsto. In generale il termine di correlazione dovrebbe dipendere dai due vettori posizione caratterizzanti i due volumi in esame. Per invarianza traslazionale e rotazionale la correlazione deve però essere funzione solo della *distanza* fra essi. Si potrà allora scrivere:

$$P_{12} = n^2 [1 + \epsilon(r)] dV_1 dV_2. \quad (6.10)$$

dove $\epsilon(r)$ prende il nome di funzione di correlazione a due punti. Ovviamente se tale funzione è positiva per certi valori di r ciò certifica l'esistenza di clusters. Ciò può essere facilmente capito con un **toy model** di universo –bidimensionale, per comodità. Facciamo l'ipotesi di considerare uno spazio quadrato di lato L e che tutta la materia sia concentrata in un quadratino di lato $l = L/4$. Ho una probabilità uguale a $1/16$ di prendere un punto X_1 dentro il quadratino. Se prendo un altro punto X_2 a piccola distanza ($r \ll l$) è molto probabile che anche questo punto sia all'interno del quadratino se lo è il primo, e fuori se anche il primo è esterno. Nel quadratino la densità di galassie è sedici volte superiore alla media, e quindi la probabilità di trovare pieni due volumetti intorno a due punti interni è 256 volte superiore alla media. Quindi in un caso su sedici abbiamo una probabilità superiore di 256 volte, e in quindici su sedici una probabilità nulla. La funzione di correlazione per r piccolo tende quindi a $1/16(256 - 1) + 15/16(-1) = 15$. Per $r \gg l$, invece, se un punto è interno al quadratino l'altro è esterno: la probabilità combinata diventa zero e la funzione di correlazione tende a -1 (fig. 6.9).

Osservativamente, studiando la distribuzione della galassie, la funzione di correlazione è data dalla espressione, valida in un certo range di distanze:

$$\epsilon_{gal}(r) = (r/r_0)^{-\gamma} \quad (6.11)$$

con $r_0 \simeq 5Mpc$ e $\gamma \simeq 1.8$.

Tale relazione conferma le proprietà di clustering delle galassie e ne definisce la scala (*lunghezza di correlazione*) in alcuni megaparsecs.

A loro volta anche gli ammassi di galassie risultano clusterizzati, con una funzione di correlazione simile:

$$\epsilon_{cl}(r) = (r/r_1)^{-\gamma} \quad (6.12)$$

dove ora $r_1 \simeq 25Mpc$.

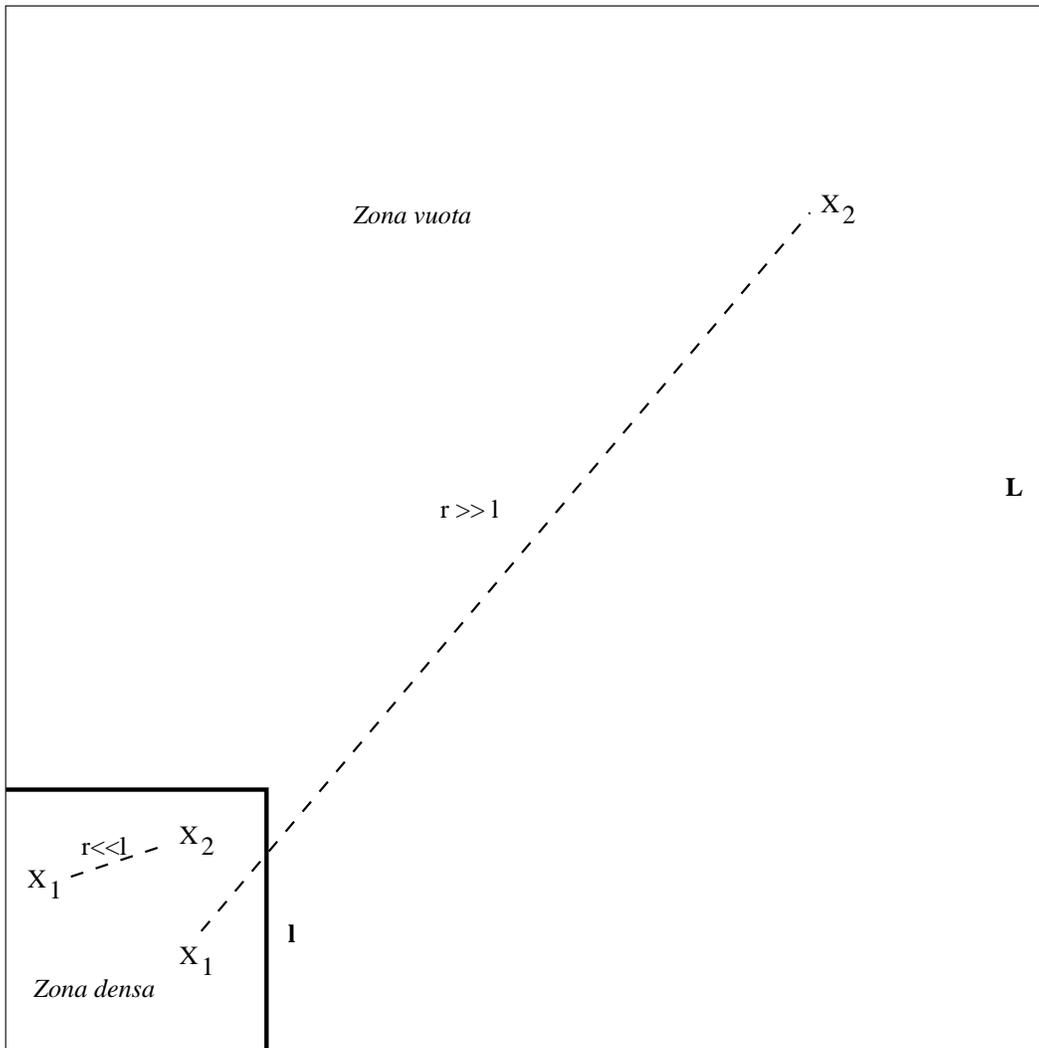


Figura 6.9: *Toy model* bidimensionale di universo (v.testo) per il calcolo della funzione di correlazione

6.6.2 Il test di percolazione

Il test di percolazione è invece utile per la ricerca di strutture tipo filamenti o simili. Il test opera considerando un volume dato, e circondando idealmente ogni galassia con una sfera di raggio r . Quando le sfere corrispondenti a due galassie diverse si toccano, le due galassie vengono definite *amici* e considerate collegate. Quando è possibile, per un certo raggio delle sfere, costruire un percorso passante per amici che permetta di attraversare il volume dato da una parte all'altra, si dice allora che si è raggiunta la **percolazione**. Il valore di r corrispondente (*raggio di percolazione*) dipende dalla distribuzione di massa. Per una distribuzione uniforme $r_{perc} \simeq n^{-1/3}$ (n è ancora la densità numerica di oggetti). Se gli oggetti sono fortemente clusterizzati r_{perc} diventa dell'ordine della distanza fra i clusters, e può quindi essere anche più grande di quello calcolato per una distribuzione uniforme. Se invece gli oggetti sono allineati in strutture uni o bidimensionali (filamenti, barre ecc.) allora è possibile costruire un percorso di percolazione interno alla zona densa e quindi caratterizzato da un valore di r_{perc} più basso.

Le osservazioni danno qualche elemento in questo senso.

I principi alla base del test di percolazione possono essere meglio capiti dalla Figura 6.10, dove sono rappresentati anche alcuni casi diversi.

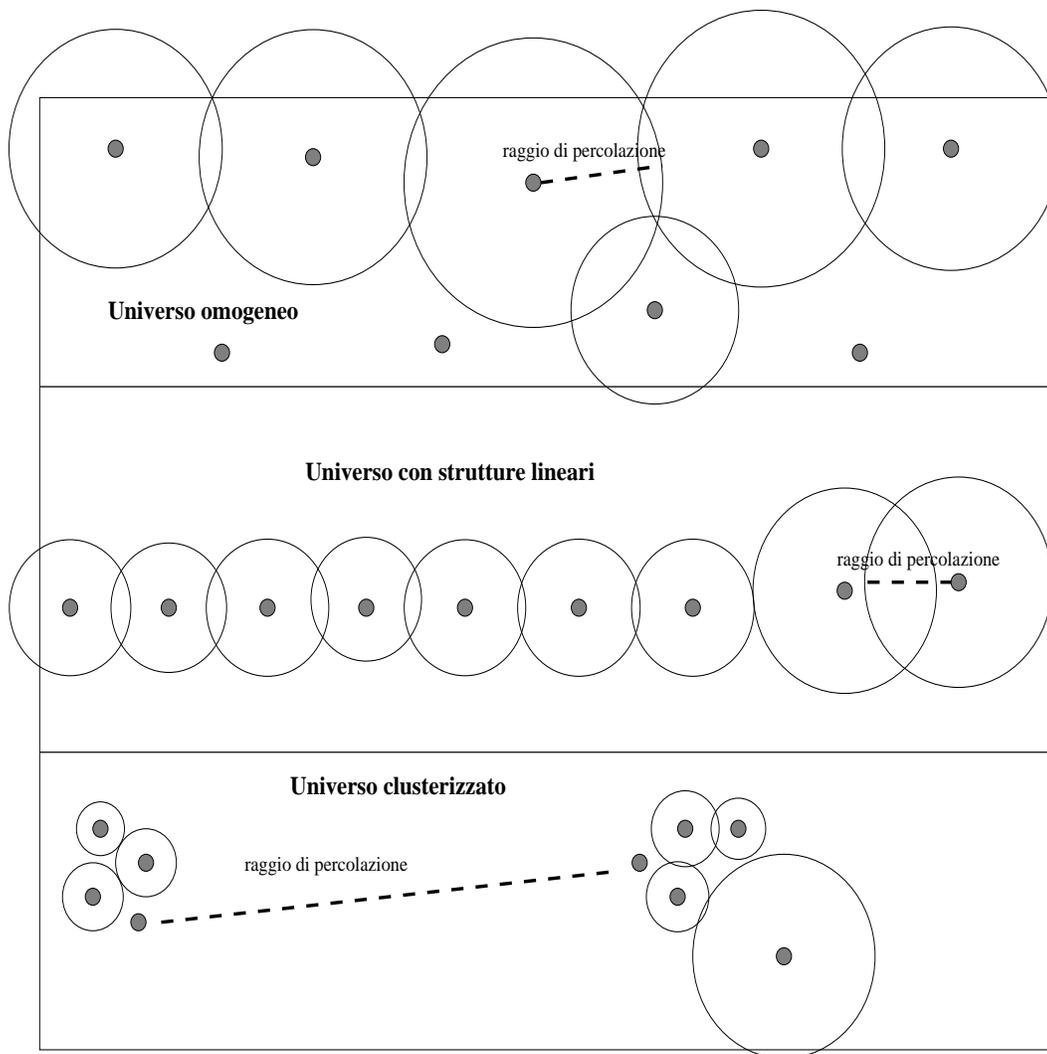


Figura 6.10: Esempi di percolazione per diversi casi (bidimensionali).

SECONDA PARTE

Capitolo 7

Strutture autogravitanti: equazioni costitutive e caratteristiche dell'equilibrio.

7.1 L'equilibrio idrostatico.

Studiamo ora la struttura di un oggetto autogravitante all'equilibrio. Per equilibrio intendiamo quello meccanico. Vedremo successivamente quali sono i problemi legati all'*equilibrio energetico*, vale a dire al possibile trovarsi in uno stato stazionario in cui l'energia prodotta dalle reazioni nucleari corrisponde istante per istante a quella emessa.

Trascuriamo, per il momento, rotazione e campi magnetici e facciamo l'ipotesi di simmetria sferica. L'equazione che descrive l'equilibrio può essere facilmente dedotta (v. fig. 7.1).

La pressione del gas dipende dalla composizione chimica (X e Y , data l'identità $X + Y + Z = 1$), dalla densità e dalla temperatura, mediante l'equazione di stato:

$$P = P(\rho, T, X, Y) \quad (7.1)$$

La differenza di pressione tra la parte interna e quella esterna di un guscio viene all'equilibrio bilanciata dalla forza di gravità; l'accelerazione è data dall'equazione:

$$g(r) = -\frac{GM(r)}{r^2} \quad (7.2)$$

La condizione di equilibrio, considerando un elemento di piccolo spessore δr e superficie unitaria, ha la forma:

$$P_+ - P_+ - g\rho\delta r = 0 = P_- - \frac{dP}{dr}\delta r - P_- - g\rho\delta r = \delta r \left[-\frac{dP}{dr} - \rho\frac{GM(r)}{r^2} \right]$$

ossia:

$$\frac{dP(r)}{dr} = -\frac{GM(r)}{r^2}\rho(r) \quad (7.3)$$

detta **equazione dell'equilibrio idrostatico**, dove ovviamente:

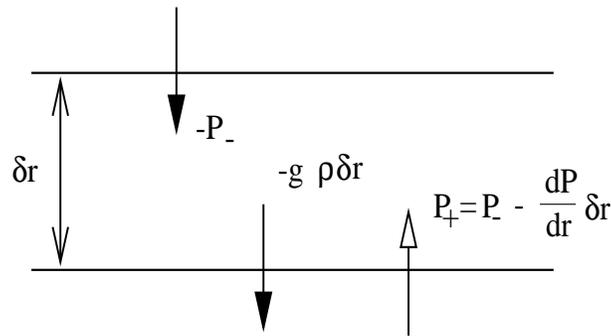


Figura 7.1: equilibrio idrostatico.

$$\frac{dP}{dr} = \frac{\partial P}{\partial \rho} \frac{d\rho}{dr} + \frac{\partial P}{\partial T} \frac{dT}{dr} + \frac{\partial P}{\partial X} \frac{dX}{dr} + \frac{\partial P}{\partial Y} \frac{dY}{dr} \quad (7.4)$$

La soluzione dell'equazione (7.3) richiede di legare fra di loro le tre funzioni P , ρ , ed M . In effetti M e ρ non sono indipendenti, ma legati dalla relazione:

$$\frac{dM(r)}{dr} = 4\pi r^2 \rho(r) \quad (7.5)$$

P e ρ sono legate tramite l'equazione di stato, che dipende però anche da T , X , Y , a loro volta funzioni della posizione. La conoscenza di queste funzioni implica evidentemente la simultanea risoluzione di altre equazioni, che esprimono la struttura termica ed anche la distribuzione delle abbondanze chimiche come –eventuale– risultato di processi evolutivi.

Si può evitare di risolvere simultaneamente l'intero sistema di equazioni solo sulla base di ipotesi a priori sulla funzione $P(\rho)$ (v. § 7.5).

7.2 I tempi dell'evoluzione dinamica.

Se la (7.3) non è rigorosamente valida, la materia sarà accelerata. Possiamo esprimere l'accelerazione di un dato elemento di materia mediante l'equazione:

$$\frac{dv}{dt} = \frac{d^2r}{dt^2} = -F \frac{GM(r)}{r^2} \quad (7.6)$$

dove v è radiale, ed $F = 0 \Rightarrow$ equilibrio, $F < 0 \Rightarrow$ espansione, $0 < F < 1 \Rightarrow$ collasso. $F = 1$ prende il nome di **condizione di libero collasso** o *free fall*.

Essendo

$$\frac{dv}{dt} = \frac{dv}{dr} \frac{dr}{dt} = v \frac{dv}{dr} = \frac{1}{2} \frac{d}{dr} v^2$$

ed approssimando $M(r)$ con $4/3\pi\bar{\rho}r^3$ dove $\bar{\rho}$ (densità media) è indipendente da r , si ottiene:

$$\frac{d}{dr} v^2 = -2FG \frac{4}{3}\pi\bar{\rho}r = -\frac{8}{3}\pi FG\bar{\rho}r \quad (7.7)$$

ed integrando fra r_0 (per cui la materia è in quiete) ed r si ricava:

$$v^2(r) = \frac{4}{3}\pi\bar{\rho}FG\left(r_0^2 - r^2\right) \quad (7.8)$$

Ragionando per il caso di collasso

$$\frac{dr}{dt} = -|v(r)|$$

e quindi

$$\frac{dr}{dt} = -\left(\frac{4}{3}\pi FG\bar{\rho}\right)^{\frac{1}{2}} r_0 \left(1 - \frac{r^2}{r_0^2}\right)^{\frac{1}{2}}$$

ossia:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{r}{r_0}\right) = -\left(1 - \frac{r^2}{r_0^2}\right)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{4}{3}\pi FG\bar{\rho}\right)^{\frac{1}{2}} \quad (7.9)$$

La (7.9) può essere integrata fra $r/r_0 = 1$ e $r/r_0 = 0$ (completo collasso) mediante la tecnica della separazione delle variabili

$$-\int_1^0 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \int_0^{t_f(F)} dt \left(\frac{4}{3}\pi FG\bar{\rho}\right)^{\frac{1}{2}}$$

e quindi

$$-\arccos x|_0^1 = \frac{\pi}{2} = t_f(F) \left(\frac{4}{3}\pi FG\bar{\rho}\right)^{\frac{1}{2}}$$

ovvero

$$t_f(F) = \left(\frac{3\pi}{16FG\bar{\rho}}\right)^{\frac{1}{2}} \quad (7.10)$$

$t_f(F)$ è il tempo impiegato per cadere al centro, per un dato valore di F ; per $F = 1$ si ottiene la definizione del **tempo di free fall**:

$$t_{ff} = \left(\frac{3\pi}{16G\bar{\rho}}\right)^{\frac{1}{2}} \quad (7.11)$$

Per un oggetto come il Sole ($\bar{\rho} \sim 1g/cm^3$) $t_{ff} \sim 1$ ora.

La condizione di equilibrio dinamico è sostanzialmente soddisfatta tutte le volte che i tempi di evoluzione dinamica di un corpo sono $\gg t_{ff}$ (ovviamente questo è vero per il Sole). Si noti che per $\bar{\rho} \sim 10^{-20}g/cm^3$ (nubi interstellari) $t_{ff} \sim 10^6$ anni, per $\bar{\rho} \sim 10^8g/cm^3$ (stelle negli stadi finali dell'evoluzione) $t_{ff} \sim 1s$.

A rigore le (7.10) e (7.11) sono valide per un oggetto che cade mentre $\bar{\rho}$ resta costante nel tempo. Il caso di un collasso simultaneo della struttura è più complesso; l'ordine di grandezza resta tuttavia lo stesso: si tenga conto infatti che $\bar{\rho}$ aumenta con il tempo, aumentando l'accelerazione.

L'errore su $\bar{\rho}$ diventa grosso nelle fasi avanzate del collasso, quando però i tempi evolutivi ($\propto \bar{\rho}^{-1/2}$) sono estremamente ridotti. Si può anche dimostrare che per qualunque valore costantemente positivo di F il collasso a densità infinita avviene in un tempo finito. Il risultato è ovviamente interessante solo sul piano formale; vari effetti fisici, compresi quelli relativistici, intervengono a stadi diversi.

7.3 Le equazioni di Eulero e di Navier-Stokes.

Più in generale il problema del moto di un fluido può essere studiato definendo un campo di velocità

$$\vec{v} = \vec{v}(\vec{r}, t) \quad (7.12)$$

L'equazione del moto (7.6), esplicitata e generalizzata

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = -\frac{1}{\rho}\vec{\nabla}p + \vec{g} \quad (7.13)$$

prende una forma diversa nella descrizione euleriana (la formulazione della meccanica dei fluidi che analizza il moto delle masse elementari in funzione del tempo, estendendo i metodi della meccanica del punto, prende invece il nome di lagrangiana; essendo

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{\partial\vec{v}}{\partial t} + \sum_i \frac{\partial\vec{v}}{\partial x_i} \frac{dx_i}{dt} = \frac{\partial\vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) \vec{v}$$

si ottiene infine **l'equazione di Eulero**:

$$\frac{\partial\vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) \vec{v} = -\frac{1}{\rho}\vec{\nabla}p + \vec{g} \quad (7.14)$$

Nella deduzione dell'equazione (7.14) non si è ovviamente considerata la possibilità di processi dissipativi che possono aver luogo in un fluido in movimento per effetto della viscosità e di scambi di calore. Per l'introduzione dei fenomeni viscosi è utile riscrivere l'equazione di Eulero in forma tensoriale, usando anche l'equazione di continuità (seguiamo qui lo sviluppo presentato in [14]):

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot (\rho\vec{v}) = 0 \quad (7.15)$$

A tale scopo calcoliamo la velocità di variazione della densità d'impulso:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho\vec{v})$$

Con le usuali notazioni e convenzioni per gli indici ripetuti:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho v_i) = \rho \frac{\partial v_i}{\partial t} + v_i \frac{\partial\rho}{\partial t} = \rho \frac{\partial v_i}{\partial t} - v_i \frac{\partial(\rho v_k)}{\partial x_k} \quad (7.16)$$

D'altro lato l'equazione di Eulero:

$$\frac{\partial v_i}{\partial t} = -v_k \frac{\partial v_i}{\partial x_k} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x_i} + g_i \quad (7.17)$$

può essere inserita nella (7.16) dando:

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t}(\rho v_i) &= -v_i \frac{\partial(\rho v_k)}{\partial x_k} - \rho v_k \frac{\partial v_i}{\partial x_k} - \frac{\partial P}{\partial x_i} + \rho g_i = \\ &= -\frac{\partial}{\partial x_k}(\rho v_i v_k) - \delta_{ik} \frac{\partial P}{\partial x_k} + \rho g_i\end{aligned}\quad (7.18)$$

E' possibile quindi definire il **tensore di flusso d'impulso**

$$\Pi_{ik} = P\delta_{ik} + \rho v_i v_k \quad (7.19)$$

La (7.18) prende la forma (che spiega anche il nome scelto per Π_{ik}):

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho v_i) = -\frac{\partial}{\partial x_k} \Pi_{ik} + \rho g_i \quad (7.20)$$

Se $\vec{g} = 0$, integrando sul volume:

$$\frac{\partial}{\partial t} \int (\rho v_i) dV = - \int \frac{\partial}{\partial x_k} (\Pi_{ik}) dV = \oint \Pi_{ik} df_k \quad (7.21)$$

La generalizzazione della (7.20) al caso viscoso può essere fatta aggiungendo al tensore Π_{ik} un termine $-\sigma'_{ik}$ che caratterizza il trasporto viscoso d'impulso, dovuto sostanzialmente ad attriti interni; σ'_{ik} deve essere nullo in presenza di moto uniforme di tutto il fluido; deve dipendere dalle derivate di v rispetto alla posizione, ed essere quindi formato da termini della forma $\partial v_i / \partial x_k$. Anche in caso di rotazione uniforme ($\vec{v} = \vec{\Omega} \wedge \vec{r}$) σ'_{ik} si deve annullare.

Il tensore più generale che soddisfa a queste condizioni è:

$$\sigma'_{ik} = a \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_k} + \frac{\partial v_k}{\partial x_i} \right) + b \frac{\partial v_l}{\partial x_l} \delta_{ik} \quad (7.22)$$

con a e b indipendenti dalla velocità. Si scrive però più frequentemente σ'_{ik} sotto la forma

$$\sigma'_{ik} = \eta \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_k} + \frac{\partial v_k}{\partial x_i} - \frac{2}{3} \delta_{ik} \frac{\partial v_l}{\partial x_l} \right) + \zeta \delta_{ik} \frac{\partial v_l}{\partial x_l} \quad (7.23)$$

dove il tensore fra parentesi ha traccia nulla. Le quantità η e ζ sono i **coefficienti di viscosità**, e sono sempre positivi.

L'equazione del moto in presenza di viscosità si ottiene aggiungendo un termine della forma $\partial \sigma'_{ik} / \partial x_k$: abbiamo quindi

$$\rho \frac{\partial v_i}{\partial t} = -\rho v_k \frac{\partial v_i}{\partial x_k} - \frac{\partial P}{\partial x_i} + \rho g_i + \frac{\partial \sigma'_{ik}}{\partial x_k} \quad (7.24)$$

Se i coefficienti di viscosità η e ζ sono costanti o variano comunque lentamente con la posizione, è possibile porre:

$$\frac{\partial \sigma'_{ik}}{\partial x_k} = \eta \left(\frac{\partial^2 v_i}{\partial x_k^2} + \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{\partial v_k}{\partial x_k} - \frac{2}{3} \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{\partial v_l}{\partial x_l} \right) + \zeta \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{\partial v_l}{\partial x_l} = \eta \frac{\partial^2 v_i}{\partial x_k^2} + \left(\zeta + \frac{\eta}{3} \right) \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{\partial v_k}{\partial x_k} \quad (7.25)$$

dove

$$\frac{\partial v_k}{\partial x_k} \equiv \vec{\nabla} \cdot \vec{v}, \quad \frac{\partial^2 v_i}{\partial x_k^2} = \Delta v_i$$

e quindi la (7.24) può essere riscritta nella notazione vettoriale:

$$\rho \left[\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) \vec{v} \right] = -\vec{\nabla} p + \rho \vec{g} + \eta \Delta \vec{v} + \left(\zeta + \frac{\eta}{3} \right) \vec{\nabla} (\vec{\nabla} \cdot \vec{v}) \quad (7.26)$$

Per un fluido incompressibile $\vec{\nabla} \cdot \vec{v} = 0$, e la (7.26) viene semplificata togliendo l'ultimo termine a destra, ed ottenendo l'**equazione di Navier-Stokes**; se $\vec{g} = 0$:

$$\rho \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = -\rho (\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) \vec{v} - \vec{\nabla} p + \eta \Delta \vec{v} \quad (7.27)$$

La risoluzione delle equazioni (7.26) o (7.27) richiede ovviamente una accurata analisi delle condizioni al contorno. Non approfondiremo l'argomento in questa sede, rimandando a dei testi di meccanica dei fluidi (ad es. [14]).

7.4 Limitazioni sulla pressione centrale.

L'equazione dell'equilibrio idrostatico (7.3) può essere scritta, mediante la (7.5) nella forma:

$$\frac{dP}{dr} = -\frac{G}{4\pi} \frac{M(r)}{r^4} \frac{dM(r)}{dr} \quad (7.28)$$

ossia

$$dP = -\frac{G}{4\pi} \frac{M dM}{r^4} \quad (7.29)$$

che può essere integrata ottenendo:

$$P_c - P_0 = \frac{G}{4\pi} \int_0^M \frac{M dM}{r^4} \quad (7.30)$$

Se, come è certamente vero per oggetti stellari, la pressione nelle zone esterne (P_0) è molto minore di P_c , possiamo avere

$$P_c \simeq \frac{G}{4\pi} \int_0^M \frac{M dM}{r^4} \quad (7.31)$$

Fin qui non abbiamo fatto alcuna ipotesi. Ammettiamo che ρ sia una funzione decrescente di r . Ha senso allora trasformare la (7.31) definendo

$$\bar{\rho}(r) = \frac{M(r)}{\frac{4}{3}\pi r^3} \quad (7.32)$$

da cui si ricava

$$r = \left[\frac{M(r)}{\frac{4}{3}\pi \bar{\rho}(r)} \right]^{\frac{1}{3}}$$

ottenendo infine

$$P_c \simeq \frac{G}{4\pi} \int_0^M \frac{M dM}{\left(\frac{M}{\frac{4}{3}\pi \bar{\rho}} \right)^{\frac{4}{3}}} \quad (7.33)$$

ossia:

$$P_c \simeq \frac{G}{4\pi} \left(\frac{4\pi}{3}\right)^{\frac{4}{3}} \int_0^M \bar{\rho}(r)^{4/3} M^{-1/3} dM \quad (7.34)$$

Sarà poi, $\forall r$

$$\rho_c \equiv \bar{\rho}(0) \geq \bar{\rho}(r) \geq \bar{\rho}(R)$$

per cui:

$$\frac{1}{2} \left(\frac{4\pi}{3}\right)^{\frac{1}{3}} G M^{2/3} \bar{\rho}(R)^{4/3} \leq P_c \leq \frac{1}{2} \left(\frac{4\pi}{3}\right)^{\frac{1}{3}} G M^{2/3} \rho_c^{4/3} \quad (7.35)$$

Si potrà anche porre, con semplici trasformazioni:

$$\frac{3}{8\pi} G \frac{M^2}{R^4} \leq P_c \leq \left[\frac{\rho_c}{\bar{\rho}(R)}\right]^{\frac{4}{3}} \frac{3}{8\pi} G \frac{M^2}{R^4} \quad (7.36)$$

La (7.35) e (7.36) permettono interessanti conclusioni. La pressione centrale, per dati raggio e massa, assume il valore minimo per una struttura omogenea. Negli altri casi, l'escursione in P_c consentita dalla (7.36) è relativamente grande; per il Sole, per es. $\frac{\rho_c}{\bar{\rho}(R)} \sim 10^2$, e questo causa una indeterminazione su P_c di oltre due ordini di grandezza (naturalmente in questo contesto).

7.5 Modelli politropici.

Con lo scopo di ottenere informazioni più accurate possiamo sviluppare ora una diversa approssimazione. Appliciamo ad ambo i membri della (7.3) l'operatore

$$\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} r^2$$

(se consideriamo che, nelle date condizioni di simmetria sferica, la (7.3) connette le due uniche componenti non nulle dei gradienti di pressione e del potenziale gravitazionale, l'operatore in questione è la divergenza in coordinate polari; ricordiamo che $\text{div grad} \equiv \Delta$);

$$\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left(\frac{r^2}{\rho} \frac{dP}{dr} \right) = -G \frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} M(r) \quad (7.37)$$

Mediante la (7.5) si ha quindi

$$\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left(\frac{r^2}{\rho} \frac{dP}{dr} \right) = -4\pi G \rho \quad (7.38)$$

Ammettiamo ora (v. le conclusioni del §7.1) che si possa ipotizzare l'esistenza di una **relazione politropica**:

$$P = C \rho^{\frac{n+1}{n}} \quad (7.39)$$

dove n prende il nome di **indice politropico**.

Ponendo $r = \xi \alpha$ e $\rho = \Theta^n \rho_c$ la (7.38) prende la forma adimensionale:

$$\frac{1}{\xi^2} \frac{d}{d\xi} \left(\xi^2 \frac{d\Theta}{d\xi} \right) = -\Theta^n \quad (7.40)$$

(**equazione di Lane-Emden**), dove

$$\alpha^2 = \frac{(n+1)C\rho_c^{\frac{1-n}{n}}}{4\pi G} \quad (7.41)$$

e dove le condizioni al contorno sulla $\Theta(\xi)$ sono:

$$\Theta(0) = 1 \quad \frac{d\Theta}{d\xi}(0) = 0 \quad (7.42)$$

(la densità è massima al centro).

La (7.40) viene integrata, per vari n , fino alla superficie definita per $\xi = \xi_1$, quando si trova per la prima volta

$$\Theta(\xi_1) = 0$$

Per $n \geq 5$ la configurazione non ha dimensioni finite; particolarmente interessante è questo risultato se si pensa ad una sfera isoterma di gas perfetto, retta dalla relazione politropica $P = C\rho$, con $n = \infty$; una sfera isoterma ha dimensioni infinite.

Dato n , la (7.40) ci dà la forma della funzione $\Theta(\xi)$. La conoscenza reale dell'oggetto studiato richiede anche di fissare due parametri liberi, per esempio ρ_c e C . Da essi è facile calcolare massa e raggio:

$$R = \xi_1 \alpha = \xi_1 \left[\frac{(n+1)C\rho_c^{\frac{1-n}{n}}}{4\pi G} \right]^{\frac{1}{2}} \propto C^{\frac{1}{2}} \rho_c^{\frac{1-n}{2n}} \quad (7.43)$$

$$M = 4\pi \int_0^R r^2 \rho dr = 4\pi \rho_c \alpha^3 \int_0^{\xi_1} \Theta^n \xi^2 d\xi \propto C^{\frac{3}{2}} \rho_c^{\frac{3-n}{2n}} \quad (7.44)$$

Inversamente possiamo anche ottenere ρ_c e C da massa e raggio:

$$\rho_c \propto \frac{M}{R^3} \quad (7.45)$$

$$C \propto \frac{M}{R} \rho_c^{\frac{-1}{n}} \propto M^{\frac{n-1}{n}} R^{\frac{3-n}{n}} \quad (7.46)$$

In conclusione un modello politropico di struttura autogravitante in equilibrio (per esempio una stella) dipende da due parametri, la massa e, per esempio, il raggio. Questo risultato non è in contrasto con la ben nota unicità della soluzione del sistema di equazioni dell'equilibrio di una struttura stellare (v. cap. 11). In esse infatti viene posto un ulteriore vincolo: che la produzione di energia nucleare della struttura bilanci esattamente l'energia che viene irradiata nello spazio esterno. Se questo non è vero, la struttura si espande o si contrae, assorbendo o liberando energia gravitazionale.

7.6 Cenni sull'equazione di stato; l'equazione di Eddington.

Per studiare qualche caso semplice di modello politropico apriamo una breve parentesi relativa all'equazione di stato (su cui ritorneremo nel cap. 12).

In prima approssimazione, in un interno stellare o nebulare, la pressione sarà data dalla somma di un termine di gas perfetto e di uno dovuto alla pressione di radiazione; il primo avrà la forma:

$$P_g = \frac{K}{\mu m_p} \rho T \quad (7.47)$$

dove K è la costante di Boltzmann, e μ è il **peso molecolare medio** definito come il numero medio di particelle che contribuiscono alla pressione per ogni unità di massa m_p . Per una miscela di elementi completamente ionizzati, come si hanno negli interni stellari, è:

$$\mu = \frac{1}{\sum_{i=1}^n \frac{X_i(Z_i+1)}{A_i}} \quad (7.48)$$

dove Z_i e A_i sono numero e peso atomico dell'elemento i -esimo, di abbondanza X_i ; Z_i è il contributo degli elettroni, e viene meno se il gas non è completamente ionizzato.

La (7.48) viene approssimata, in termini delle consuete definizioni delle abbondanze, X , Y e Z , con:

$$\mu \simeq \frac{1}{2X + \frac{3}{4}Y + \frac{1}{2}Z} \quad (7.49)$$

dove si pone per gli elementi pesanti $(Z+1)/A = 1/2$ (per $^{12}\text{C}_6 = 7/12$, per $^{56}\text{Fe}_{26} = 27/56\dots$).

Il secondo termine, quello dovuto alla radiazione, sarà

$$P_r = \frac{1}{3} a T^4 \quad (7.50)$$

La pressione totale sarà quindi:

$$P = \frac{K}{\mu m_p} \rho T + \frac{1}{3} a T^4 \quad (7.51)$$

E' possibile definire $\beta = P_g/P$ e quindi $1 - \beta = P_r/P$; si ha allora

$$T = \left[\frac{3(1 - \beta) K \rho}{a \beta \mu m_p} \right]^{\frac{1}{3}} \quad (7.52)$$

ossia:

$$P = \left[\frac{3}{a} (1 - \beta) \left(\frac{K}{\mu m_p \beta} \right)^4 \right]^{\frac{1}{3}} \rho^{4/3} \quad (7.53)$$

La (7.53) ci permette di introdurre il **modello standard di Eddington**, basato sull'ipotesi, non motivata fisicamente e che quindi costituisce una drastica approssimazione:

$$\frac{3}{a}(1 - \beta) \left(\frac{K}{\mu m_p \beta} \right)^4 = \text{cost.} = C^3 \quad (7.54)$$

Ma se $n = 3$, dalla (7.48) si ricava che $M^2 \propto C^3$, e ciò permette di ricavare l'**equazione di Eddington**:

$$F(\beta) = AM^2 \mu^4 \beta^4 + \beta - 1 = 0 \quad (7.55)$$

Se M è espressa in masse solari (M_\odot), $A = 0.00298$. Se $M \sim 1$, essendo $A \ll 1$ e $\mu \sim 1$ sarà $\beta \simeq 1$ e al primo ordine potremo scrivere:

$$1 - \beta \simeq A\mu^4 M^2 \propto M^2 \quad (7.56)$$

mentre, per $M \geq 10^2 M_\odot$, $\beta \ll 1$ e asintoticamente, per grandi masse

$$\beta \propto M^{-1/2} \quad (7.57)$$

Come si vede, il contributo della pressione di radiazione è prevalente per grandi masse in equilibrio. Ciò è ancora più vero per grandi masse in espansione. Infatti se, date M e ρ , $T > T_{eq}$, $P_g \rightarrow P_g(T/T_{eq})$, mentre $P_r \rightarrow P_r(T/T_{eq})^4$ ed il contributo della pressione di radiazione è ancora più rilevante. Il discorso resta ovviamente vero se radiazione e materia sono accoppiate termicamente, cioè se hanno la stessa temperatura.

7.7 Corpi autogravitanti in rotazione.

Un corpo in rotazione non avrà più forma sferica. Un corpo fluido in rotazione può essere caratterizzato dal parametro

$$u = \frac{\omega^2 R^3}{GM} \quad (7.58)$$

che sarebbe uguale al rapporto fra forza centrifuga equatoriale e forza peso se il corpo fosse sferico. Il valore di u esprime anche il rapporto fra energia rotazionale e gravitazionale.

Infatti per un corpo sferico omogeneo

$$E_{rot} = \frac{1}{5} MR^2 \omega^2$$

$$E_{grav} = \frac{3}{5} \frac{GM^2}{R}$$

e quindi

$$\frac{E_{rot}}{E_{grav}} = \frac{1}{3} \frac{\omega^2 R^3}{GM} = \frac{1}{3} u \quad (7.59)$$

Infine, se il corpo è omogeneo:

$$u = \frac{\omega^2}{\frac{4}{3}\pi G\rho} = \frac{3}{4} \frac{\omega^2}{\pi G\rho} \quad (7.60)$$

In effetti, per rotazione non eccessivamente rapida, la forma del corpo rotante è quella di un ellissoide biassiale, con l'asse minore lungo l'asse di rotazione, semiassi a e b ed eccentricità e (fig. 7.2):

$$b = a (1 - e^2)^{1/2} \quad (7.61)$$

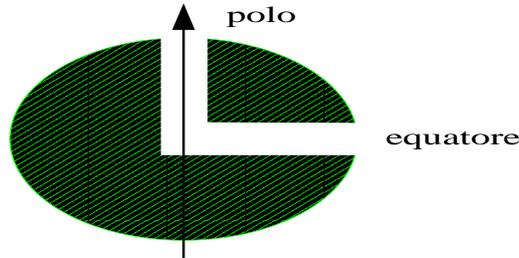


Figura 7.2: ellissoide di rotazione.

Per trovare la forma si può usare l'argomento classico di Newton basato sulla condizione di equilibrio di due colonne di fluido, una polare ed una equatoriale, connesse al centro della Terra, e sul fatto che $g \propto r$ lungo un raggio per un corpo omogeneo.

Si ottiene

$$\frac{1}{2} a g_{eq} (1 - u) = \frac{1}{2} b g_{polo} \quad (7.62)$$

ossia

$$a g_{eq} - a^2 \omega^2 = g_{polo} a \sqrt{(1 - e^2)}$$

e quindi:

$$\omega^2 = \frac{1}{a} \left[g_{eq} - g_{polo} \sqrt{(1 - e^2)} \right] \quad (7.63)$$

Per un ellissoide di rotazione omogeneo, come fu già dimostrato da Mc Laurin:

$$g_{eq} = 2\pi G\rho a \frac{\sqrt{(1 - e^2)}}{e^3} \left[\arcsin e - e \sqrt{(1 - e^2)} \right] \quad (7.64)$$

$$g_{polo} = 4\pi G\rho a \frac{\sqrt{(1 - e^2)}}{e^3} \left[e - \sqrt{(1 - e^2)} \arcsin e \right] \quad (7.65)$$

da cui:

$$\begin{aligned} \frac{\omega^2}{\pi G \rho} &= \left[2 \frac{\sqrt{(1-e^2)}}{e^3} \arcsin e - 2 \frac{1-e^2}{e^2} - \frac{4(1-e^2)}{e^2} + 4 \frac{\sqrt{(1-e^2)^3}}{e^3} \arcsin e \right] = \\ &= 2 \arcsin e \frac{\sqrt{(1-e^2)}(3-2e^2)}{e^3} - \frac{6}{e^2} (1-e^2) \end{aligned} \quad (7.66)$$

Sviluppando in serie, per piccoli valori di e :

$$\frac{\omega^2}{\pi G \rho} \sim \frac{5}{6} e^2 \quad (7.67)$$

Il comportamento per e qualsiasi è schematizzato nella fig. 7.3.

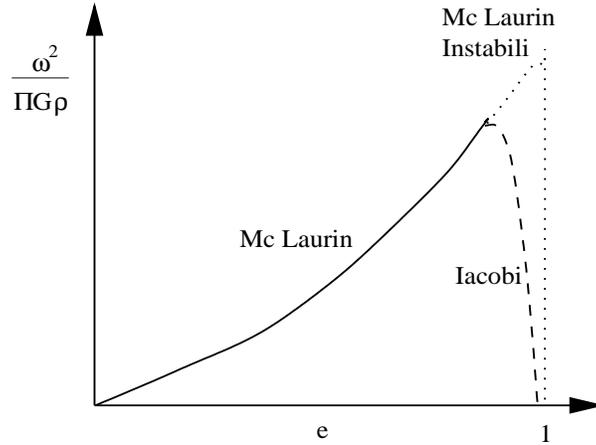


Figura 7.3: figure di equilibrio.

Definendo lo schiacciamento ai poli:

$$\epsilon \stackrel{\text{def}}{=} \frac{R_{eq} - R_{polo}}{R_{eq}} = 1 - \sqrt{(1-e^2)} \sim \frac{e^2}{2} \quad (7.68)$$

si ritrova la relazione di Newton, per rotazione non troppo veloce:

$$\epsilon \simeq \frac{4}{5} u \quad (7.69)$$

La sequenza si arresta a $\omega^2/\pi G \rho \simeq 0.449$ ed $e \simeq 0.93$; ma già per $\omega^2/\pi G \rho \simeq 0.374$ ed $e \simeq 0.8127$ la sequenza di *Mc Laurin* diventa instabile per deformazioni triassali. Le figure di equilibrio stabile diventano ora ellissoidi triassali (“ellissoidi di Iacobi”) di maggior momento di inerzia, per i quali all’aumentare del momento angolare ω diminuisce. Per rotazione ancora più veloce ($E_{rot}/E_{grav} \geq .25$) si arriva alla fissione.

I risultati sono qualitativamente generalizzabili in molti casi (es. sistemi non omogenei ecc.). La relazione fra ω e momento angolare per varie figure d’equilibrio è schematizzata in fig. 7.4. Maggiori dettagli possono essere trovati in [15].

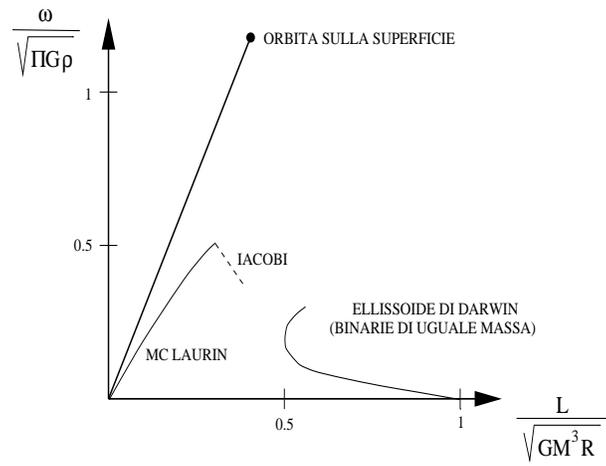


Figura 7.4: relazione $\omega - L$ per diverse figure di equilibrio.

Capitolo 8

Strutture autogravitanti: energia e stabilità.

8.1 Il teorema del viriale.

Consideriamo un sistema di particelle definito dalle coordinate di posizione q e dalle velocità \dot{q} ; si ha:

$$\sum_{i,j} \frac{1}{2} m_i \dot{q}_j^{(i)2} = \frac{d}{dt} \sum_{i,j} \frac{1}{2} m_i q_j^{(i)} \dot{q}_j^{(i)} - \sum_{i,j} \frac{1}{2} m_i q_j^{(i)} \ddot{q}_j^{(i)} \quad (8.1)$$

Se il sistema è costituito da un gas perfetto autogravitante:

$$\sum_{i,j} m_i q_j^{(i)} \ddot{q}_j^{(i)} = - \sum_{i,j} q_j^{(i)} \frac{\partial U}{\partial q_j^{(i)}} = U \quad (8.2)$$

D'altro canto è possibile scrivere:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} m_i q_j^{(i)2} \right) = m_i q_j^{(i)} \dot{q}_j^{(i)} \\ \sum_{i,j} m_i \dot{q}_j^{(i)2} = 2E_{KIN} \end{array} \right\} \quad (8.3)$$

La quantità $1/2 m_i q_j^{(i)2}$ è connessa con il momento d'inerzia; definiamo pertanto:

$$I = \sum_{i,j} m_i q_j^{(i)2} \quad (8.4)$$

e scriviamo quindi la prima (e più utile) formulazione del **teorema del viriale**:

$$2E_{KIN} + U = \frac{1}{2} \ddot{I} \quad (8.5)$$

Se velocità e dimensioni del sistema restano finite, sarà possibile fare una media temporale su di un lungo intervallo, e porre il termine a secondo membro uguale in media a zero:

$$\langle 2E_{KIN} + U \rangle = 0 \quad (8.6)$$

(teorema del viriale per l'equilibrio). Il discorso può essere generalizzato: se sul sistema si esercita una pressione esterna costante P ,

$$\begin{aligned} -\sum_{i,j} m_i q_j^{(i)} \ddot{q}_j^{(i)} &\simeq -U + \oint_S P \vec{r} \cdot d\vec{S} = -U + P \oint_S \vec{r} \cdot d\vec{S} = \\ &= -U + P \int_V (\vec{\nabla} \cdot \vec{r}) dV = -U + 3PV \end{aligned} \quad (8.7)$$

e quindi, all'equilibrio:

$$\langle 2E_{KIN} + U - 3PV \rangle = 0 \quad (8.8)$$

Ovviamente in presenza di una compressione esterna l'energia cinetica richiesta per l'equilibrio è maggiore. Consideriamo anche la pressione interna al sistema, non costante, e passiamo ad una descrizione continua. La particella i -esima avrà una massa m_i ripartita in un volume δV_i , con densità ρ_i . Il volume δV_i sarà chiuso da una superficie δS_i ; avremo allora, all'equilibrio:

$$\begin{aligned} -\sum_{i,j} m_i q_j^{(i)} \ddot{q}_j^{(i)} &= -U + \sum_i \oint_{\delta S_i} P_i \vec{r}_i \cdot d\vec{S}_i = -U + \sum_i \int_{\delta V_i} \vec{\nabla} (P_i \vec{r}_i) dV_i = \\ &= -U + \sum_i \int_{\delta V_i} 3P_i dV_i + \sum_i \int_{\delta V_i} (\vec{r} \cdot \vec{\nabla} P_i) dV_i = -U + 3 \int_V P dV + \sum_i \int_{\delta V_i} \vec{r}_i \cdot \vec{g}_i \rho_i dV_i = \\ &= -U + 3 \int_V P dV + \int_M \vec{r} \cdot (-\vec{\nabla} \phi) dm = 3 \int_V P dV \end{aligned} \quad (8.9)$$

Avremo quindi:

$$\langle E_{KIN} \rangle = \frac{3}{2} \left\langle \int P dV \right\rangle \quad (8.10)$$

e, se la pressione esterna è nulla

$$\langle U \rangle = -3 \left\langle \int P dV \right\rangle \quad (8.11)$$

Il teorema del viriale, nella sua formulazione (8.6) permette una interessante deduzione. Nel caso di una struttura che si contrae lentamente, passando tra stati di equilibrio quasi perfetto ($t_{ev} \gg t_{ff}$) sarà:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} (2E_{KIN} + U) &\sim 0 \Rightarrow \\ \Rightarrow \frac{d}{dt} (E_{KIN} + U) &= -\frac{d}{dt} E_{KIN} = \frac{d}{dt} \left(\frac{U}{2} \right) \end{aligned} \quad (8.12)$$

Se il sistema è costituito da un gas perfetto monoatomico, $E_{KIN} + U$ è l'energia totale. In termini della luminosità L :

$$\left\{ \begin{array}{l} L = -\frac{d}{dt} (E_{KIN} + U) = -\frac{d}{dt} \left(\frac{U}{2} \right) \\ \frac{3}{2} K N \frac{dT}{dt} = \frac{d}{dt} E_{KIN} = -\frac{d}{dt} \left(\frac{U}{2} \right) \end{array} \right\} \quad (8.13)$$

⇒ metà dell'energia gravitazionale liberata viene usata per aumentare l'energia termica e metà viene emessa.

Inoltre, se la pressione esterna è nulla,

$$dQ = -dE_{KIN} = -\frac{3}{2} KN dT \quad (8.14)$$

e quindi il calore specifico è negativo:

$$\left(\frac{\partial Q}{\partial T}\right)_{N,P} = -\frac{3}{2} KN \quad (8.15)$$

8.2 Il tempo di Kelvin.

Le considerazioni precedenti permettono un ulteriore sviluppo: la stima dell'età di una stella (per esempio il Sole) nell'ipotesi che essa non abbia altre fonti di energia che quella ottenibile per contrazione dalla propria autogravitazione.

Si faccia l'ipotesi che all'inizio il Sole fosse molto più freddo e rarefatto di oggi ($E_{KIN} \sim 0$, $U \sim 0$), e che da allora si sia lentamente contratto, emettendo una quantità di luce costante nel tempo.

Allora sarà

$$L_{\odot} t_k = \left| \frac{U}{2} \right| \quad (8.16)$$

dove il tempo t_k prende il nome di **tempo di Kelvin**.

Ora $|U/2| \sim GM^2/R$ (in generale sarà anche minore) e quindi

$$t_{k\odot} \sim \frac{GM_{\odot}^2}{R_{\odot} L_{\odot}} \sim \frac{7 \cdot 10^{-84} \cdot 10^{66}}{7 \cdot 10^{104} \cdot 10^{33}} s \sim 10^{15} s \sim 3 \cdot 10^7 \text{anni} \quad (8.17)$$

Per evidenze geologiche, l'età della Terra (e quindi, ragionevolmente, del Sole) risulta maggiore di $t_{k\odot}$ per almeno due ordini di grandezza.

Una delle ipotesi fatte è quindi da cambiare: è l'assenza di altre fonti di energia!

Storicamente questo argomento è stato importante per l'introduzione dei processi di nucleosintesi nell'evoluzione stellare.

Notiamo che, a parità di M e L ,

$$t_k \propto \bar{\rho}^{-\frac{1}{3}}$$

($\bar{\rho}$ è ovviamente la densità media).

Esso sarà quindi grande per strutture molto dense, quali nane bianche e stelle di neutroni. Notiamo anche che, in virtù della (8.6) t_k può essere anche definito come il tempo necessario per dissipare tutta l'energia termica di una struttura, a luminosità costante.

8.3 Energia di una struttura autogravitante.

L'energia di una struttura autogravitante può essere stimata sotto una serie di ipotesi.

Calcoliamo l'energia potenziale U nel caso politropico quando $P = C\rho^{(n+1)/n}$.

Si ha:

$$U = -G \int M(r) \frac{dM(r)}{r} = -\frac{GM^2}{2R} - G \int \frac{M^2(r)}{2r^2} dr \quad (8.18)$$

Dalla (7.3), ed essendo:

$$\frac{dP}{\rho} = (n+1) d\left(\frac{P}{\rho}\right)$$

$$U = -\frac{GM^2}{2R} + \frac{n+1}{2} \int M(r) d\left(\frac{P}{\rho}\right) = -\frac{GM^2}{2R} + \frac{n+1}{2} \int d\left(\frac{MP^*}{\rho}\right) - \frac{n+1}{2} \int \frac{P}{\rho} dM \quad (8.19)$$

Tenendo conto che il termine (*) è nullo, se prendiamo $P/\rho \propto T$ nullo alla periferia della struttura, ed essendo $dM/\rho = dV$ e, infine, sulla base della (8.9), si ottiene:

$$U = -\frac{GM^2}{2R} + \frac{n+1}{6} U \quad (8.20)$$

ossia

$$\frac{5-n}{6} U = -\frac{GM^2}{2R}$$

cioè infine

$$U = -\frac{3}{5-n} \frac{GM^2}{R} \quad (8.21)$$

Nel caso omogeneo ($n = 0$) si riottiene il ben noto valore dell'energia di legame per una sfera omogenea:

$$U = -\frac{3}{5} \frac{GM^2}{R} \quad (8.22)$$

Nel caso isoterma ($n = \infty$) il calcolo non ha evidentemente senso.

Il calcolo dell'energia interna (tutta termica nelle nostre ipotesi) generalizza il teorema del viriale. Sia in una adiabatica $P = \alpha\rho^{1+1/n_{AD}}$, sia poi e_I la densità di energia interna: $e_I \propto \rho^\delta P^\xi = \beta\rho^\theta$; la condizione di adiabaticità

$$dE + PdV = 0 \quad (8.23)$$

permette di scrivere

$$P = - \left(\frac{\partial E}{\partial V} \right)_s \quad (8.24)$$

ossia, essendo $V = Mv$ ($v =$ volume specifico $= 1/\rho$) ed $E = Me_I$:

$$P = - \left(\frac{\partial e_I}{\partial v} \right)_s = \rho^2 \left(\frac{\partial e_I}{\partial \rho} \right)_s = \theta \beta \rho^{\theta+1} \quad (8.25)$$

da cui si deduce:

$$\theta = \frac{1}{n_{AD}} \quad \beta = \frac{\alpha}{\theta} = \alpha n_{AD} \quad (8.26)$$

ossia

$$e_I = n_{AD} \frac{P}{\rho} \quad (8.27)$$

Per un gas perfetto monoatomico $n_{AD} = 3/2$; per un gas di radiazione $n_{AD} = 3$. Integrando la (8.27) sul volume si ottiene:

$$\int P dV = \frac{1}{n_{AD}} \int e_I \rho dV = \frac{1}{n_{AD}} \int e_I dM = \frac{1}{n_{AD}} E_{INT} \quad (8.28)$$

per cui, dalla (8.11):

$$E_{INT} = - \frac{n_{AD}}{3} U. \quad (8.29)$$

L'energia totale diviene:

$$E = E_{INT} + U = \frac{3 - n_{AD}}{3} U = - \frac{3 - n_{AD}}{3} \frac{3}{5 - n} \frac{GM^2}{R} = - \frac{3 - n_{AD}}{5 - n} \frac{GM^2}{R} \quad (8.30)$$

Notiamo che, nel caso particolare in cui $n = 3/2$ $E = U/2$ (si torna al teorema del viriale). Nel caso di una struttura in cui $n = n_{AD}$ (quale potrebbe essere una struttura convettiva; v. cap. 9):

$$E = - \frac{3 - n_{AD}}{5 - n} \frac{GM^2}{R} = - \frac{3}{7} \frac{GM^2}{R} \quad (8.31)$$

(se $n_{AD} = 3/2$).

8.4 Il criterio di stabilità.

In generale l'energia totale può essere scritta, dalla (8.30), nella forma:

$$E = \int dM \left[e_I - \frac{GM(r)}{r} \right] \quad (8.32)$$

Alteriamo ora una struttura di equilibrio con una perturbazione adiabatica. Si ha in tal caso, ricordando la definizione del volume specifico v :

$$\left\{ \begin{array}{l} -P = \left(\frac{\partial e_I}{\partial v} \right) \\ \Gamma_{AD} \frac{P}{v} \equiv - \left(\frac{\partial P}{\partial v} \right)_{AD} = \left(\frac{\partial^2 e_I}{\partial v^2} \right)_{AD} \end{array} \right\} \quad (8.33)$$

Studiamo ora il caso di una perturbazione omologa

$$r \rightarrow r + \delta r = (1 + \alpha)r \quad (8.34)$$

e calcoliamo la variazione dell'energia al secondo ordine in α .

Ovviamente

$$\left\{ \begin{array}{ll} v \rightarrow (1 + \alpha)^3 v & dv \rightarrow (1 + \alpha^3) dv \\ dv \simeq (3\alpha + 3\alpha^2)v & (\delta v)^2 \simeq (3\alpha)^2 v^2 \\ \rho \rightarrow (1 + \alpha)^{-3} \rho & M \rightarrow M \end{array} \right\} \quad (8.35)$$

per cui

$$\begin{aligned} e_I &\rightarrow e_I + \left(\frac{\partial e_I}{\partial v} \right)_{AD} \delta v + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 e_I}{\partial v^2} \right)_{AD} (\delta v)^2 \simeq \\ &\simeq e_I - Pv(3\alpha + 3\alpha^2) + \frac{1}{2} \Gamma_{AD} \frac{P}{v} (3\alpha^2)v^2 \end{aligned} \quad (8.36)$$

e quindi

$$E \rightarrow \int dM \left[e_I - Pv(3\alpha + 3\alpha^2) + \frac{1}{2} \Gamma_{AD} \frac{P}{v} (3\alpha^2)v^2 - \frac{1}{1 + \alpha} \frac{GM}{r} \right] \quad (8.37)$$

È ora:

$$\frac{1}{1 + \alpha} \approx 1 - \alpha + \alpha^2 + O(\alpha^3)$$

per cui, al secondo ordine in α

$$\delta E = \int dV \left[\alpha \left(-3P + \frac{GM\rho}{r} \right) + \alpha^2 \left(-3P + \frac{9}{2} \Gamma_{AD} P - \frac{GM\rho}{R} \right) \right] \quad (8.38)$$

La condizione di equilibrio è data dall'annullarsi della derivata prima, ossia del coefficiente lineare in α , ed è equivalente alla (8.10):

$$3 \int P dV = \int \frac{GM\rho}{r} dV = -U \quad (8.39)$$

La condizione di stabilità è data dalla positività della derivata seconda:

$$\int dV \left(-3P + \frac{9}{2}\Gamma_{AD}P - \frac{GM\rho}{R} \right) > 0$$

e mediante la (8.39):

$$\int dV \left(-6P + \frac{9}{2}\Gamma_{AD}P \right) > 0 \Rightarrow \int \left(\Gamma_{AD} - \frac{4}{3} \right) P dV > 0 \quad (8.40)$$

Se la perturbazione non è omologa, la stabilità è assicurata comunque se $\inf(\Gamma_{AD}) > 4/3$, l'instabilità se $\sup(\Gamma_{AD}) < 4/3$.

Prima di passare a discutere sui valori che Γ_{AD} assume in vari casi, cerchiamo una comprensione intuitiva della (8.40). La (7.35) ci permette di scrivere approssimativamente, per quantità medie P e ρ , e nell'ipotesi di equilibrio:

$$P \sim GM^{\frac{2}{3}}\rho^{\frac{4}{3}}. \quad (8.41)$$

Se si ha una perturbazione adiabatica:

$$\frac{\delta P}{P} \sim \Gamma_{AD} \frac{\delta \rho}{\rho}$$

la condizione di mantenimento dell'equilibrio sarà:

$$\frac{\delta P}{P} = \frac{AGM^{\frac{2}{3}}\frac{4}{3}\rho^{\frac{1}{3}}\delta\rho}{AGM^{\frac{2}{3}}\rho^{\frac{4}{3}}} = \frac{4}{3} \frac{\delta\rho}{\rho} \quad (8.42)$$

Se quindi $\Gamma_{AD} = \frac{4}{3}$ l'equilibrio sarà sempre mantenuto. Ovviamente se $\Gamma_{AD} > \frac{4}{3}$ la pressione crescerà troppo all'aumentare di ρ (o diminuirà troppo al diminuire), bloccando la contrazione (o l'espansione). Se $\Gamma_{AD} < \frac{4}{3}$ avremo invece una perturbazione destinata a crescere. Se Γ_{AD} è costante, si ha per una adiabatica $P = P_0(\rho/\rho_0)^{\Gamma_{AD}}$, e utilizzando il parametro F definito nella (7.6) si ha, da una situazione di equilibrio (P_0, ρ_0):

$$P_0 = AGM^{\frac{2}{3}}\rho_0^{\frac{4}{3}} \quad (8.43)$$

($A \sim 1$ dipende dalla struttura):

$$P(\rho) = P_0 \left(\frac{\rho}{\rho_0} \right)^{\Gamma_{AD}} = (1 - F)AGM^{\frac{2}{3}} \left(\frac{\rho}{\rho_0} \right)^{\frac{4}{3}} \rho_0^{\frac{4}{3}} = (1 - F) \left(\frac{\rho}{\rho_0} \right)^{\frac{4}{3}} P_0 \quad (8.44)$$

ossia

$$1 - F = \left(\frac{\rho}{\rho_0} \right)^{\Gamma_{AD} - \frac{4}{3}} \quad (8.45)$$

Se, ad es. F è diventato leggermente > 0 all'inizio della perturbazione:

$$\Gamma_{AD} > \frac{4}{3} \quad F(\rho > \rho_0) < 0 \Rightarrow \text{ritorno all'equilibrio}$$

$$\Gamma_{AD} < \frac{4}{3} \quad F(\rho > \rho_0) > 0 \Rightarrow \text{e aumenta sempre} \Rightarrow \text{aumenta l'instabilità}$$

8.5 Gli indici adiabatici.

La discussione del paragrafo precedente ha messo in rilievo l'importanza degli indici adiabatici, così definiti:

$$\left\{ \begin{array}{l} \Gamma_{AD} \equiv \Gamma_1 \equiv \left(\frac{\partial \log P}{\partial \log \rho} \right)_S \\ \Gamma_3 - 1 \equiv \left(\frac{\partial \log T}{\partial \log \rho} \right)_S \\ \frac{\Gamma_2}{\Gamma_2 - 1} \equiv \left(\frac{\partial \log P}{\partial \log T} \right)_S \end{array} \right\} \quad (8.46)$$

dove vale ovviamente

$$\frac{\Gamma_2}{\Gamma_2 - 1} = \frac{\Gamma_1}{\Gamma_3 - 1} \quad (8.47)$$

Per un gas perfetto monoatomico:

$$\Gamma_1 = \Gamma_2 = \Gamma_3 = \frac{5}{3} \quad (8.48)$$

mentre per pura radiazione:

$$\Gamma_1 = \Gamma_2 = \Gamma_3 = \frac{4}{3} \quad (8.49)$$

Per un miscuglio di gas perfetto e radiazione avremo ovviamente dei valori intermedi. Valori $< 4/3$ saranno invece raggiunti in casi particolari, come quelli di ionizzazione o di dissociazione molecolare parziali (cfr. Cap. 13). A scopo didattico esplicitiamo il calcolo di Γ_1 e Γ_3 per un miscuglio di gas (idrogeno atomico) e radiazione.

Si hanno le equazioni:

$$\left\{ \begin{array}{l} de_I + Pdv = 0 \quad (\text{adiabaticità}) \\ P = \frac{1}{3}aT^4 + \frac{K}{m_p}\rho T = (\text{eq. di stato; cfr. par. 7.6}) \\ = \frac{K}{m_p} \frac{\rho T}{\beta} \quad (\text{v. par. 7.6}) \\ e_I = \frac{aT^4}{\rho} + \frac{3}{2} \frac{K}{m_p} T \quad (\text{cfr. 8.27}) \end{array} \right\} \quad (8.50)$$

Si ha:

$$\begin{aligned} 0 &= de_I + Pdv = \\ &= \frac{aT^4}{\rho} \left(4 \frac{dT}{T} - \frac{d\rho}{\rho} \right) + \frac{3}{2} \frac{K}{m_p} T \frac{dT}{T} - \frac{1}{3} a \frac{T^4}{\rho} \frac{d\rho}{\rho} - \frac{K}{m_p} T \frac{d\rho}{\rho} = \\ &= -\frac{d\rho}{\rho} \left(\frac{4}{3} a \frac{T^4}{\rho} + \frac{K}{m_p} T \right) + \frac{dT}{T} \left(\frac{4aT^4}{\rho} + \frac{3}{2} \frac{K}{m_p} T \right) \end{aligned} \quad (8.51)$$

ossia

$$\begin{aligned}
\Gamma_3 - 1 &= \left(\frac{\partial \log T}{\partial \log \rho} \right)_S = \frac{\frac{4}{3} a \frac{T^4}{\rho} + \frac{K}{m_p} T}{\frac{4aT^4}{\rho} + \frac{3}{2} \frac{K}{m_p} T} = \\
&= \frac{\beta + 4(1 - \beta)}{\frac{3}{2}\beta + 12(1 - \beta)} \tag{8.52}
\end{aligned}$$

Facendo poi:

$$\begin{aligned}
dP &= \frac{4}{3} a T^4 \frac{dT}{T} + \frac{K}{m_p} \rho T \frac{dT}{T} + \frac{K}{m_p} \rho T \frac{d\rho}{\rho} = \\
&= 4(1 - \beta) P \frac{dT}{T} + \beta P \left(\frac{dT}{T} + \frac{d\rho}{\rho} \right) \tag{8.53}
\end{aligned}$$

ossia

$$\frac{dP}{P} = [4(1 - \beta) + \beta] \frac{dT}{T} + \beta \frac{d\rho}{\rho} \tag{8.54}$$

si ottiene, sostituendo:

$$\begin{aligned}
\Gamma_1 &= \frac{dP/P}{d\rho/\rho} = \\
&= \frac{\frac{5}{2}\beta^2 + 16(1 - \beta)^2 + 20\beta(1 - \beta)}{\frac{3}{2}\beta + 12(1 - \beta)} \tag{8.55}
\end{aligned}$$

Si può anche scrivere:

$$\Gamma_1 = \frac{5}{3}\beta + \frac{16(1 - \beta)^2}{\frac{3}{2}\beta + 12(1 - \beta)} \tag{8.56}$$

Per $\beta \sim 1$ si ha $\Gamma_1 \sim 5/3\beta$ (al primo ordine in $\epsilon = 1 - \beta$); mentre per $\beta \sim 0$ è $\Gamma_1 \sim 4/3 + 1/6\beta$ (sempre al primo ordine in $\epsilon = \beta$).

8.6 Il problema delle pulsazioni (cenni).

Ritornando ad analizzare il criterio di stabilità (8.40) è ovvio rilevare che, qualora $\Gamma_1 < 4/3$, una perturbazione qualsivoglia può essere amplificata con una crescita esponenziale. Il seguito dell'evoluzione non può essere ovviamente dedotto da criteri di stabilità, basati sulla piccolezza delle perturbazioni; certamente in alcuni casi si avrà l'avvio di una instabilità catastrofica.

Tipicamente di una struttura stellare sono presenti zone (quelle di ionizzazione parziale) in cui $\Gamma_1 < 4/3$. Tuttavia ciò non dà in genere luogo ad instabilità; ha nel caso un ruolo nell'avvio di fenomeni pulsatori osservabili.

Le pulsazioni sono un importante fenomeno presente nell'evoluzione stellare e la presenza di stelle pulsanti caratterizza una precisa zona del diagramma di HR.

Senza qui entrare nel problema, possiamo introdurre alcune considerazioni generali.

Come abbiamo visto, il termine quadratico in α dello sviluppo in serie dell'energia, delineato nel § 8.4, è:

$$\int dV \left(-6P + \frac{9}{2}\Gamma_{AD}P \right) = \frac{3}{2} \int (3\Gamma_{AD} - 4) P dV = -\frac{U}{2} \langle 3\Gamma_1 - 4 \rangle \quad (8.57)$$

Essendo

$$-U = \xi \frac{GM^2}{R}$$

dove ξ è un coefficiente dell'ordine dell'unità, e ricordando la definizione di $\alpha = \delta r/r$, potremo scrivere:

$$\delta E \simeq \frac{1}{2} \xi' \frac{GM^2}{R} \left\langle (3\Gamma_1 - 4) \left(\frac{\delta r}{r} \right)^2 \right\rangle \xi' \simeq \xi \quad (8.58)$$

Se, come già ipotizzato nella deduzione della (8.40), $\delta r/r$ è costante = $\delta R/R$, si potrà scrivere:

$$\delta E \simeq \frac{1}{2} \xi' \frac{GM^2}{R^3} \langle 3\Gamma_1 - 4 \rangle (\delta R)^2 \quad (8.59)$$

Se $\langle 3\Gamma_1 - 4 \rangle > 0$ eventuali perturbazioni adiabatiche non cresceranno ma daranno vita ad un movimento oscillatorio. Possiamo, in analogia con le usuali considerazioni fatte per l'oscillatore armonico, vedere il coefficiente di $\frac{1}{2}(\delta R)^2$ come la costante di richiamo K' , e quindi porre

$$\omega^2 = \frac{K'}{M} = \xi' \frac{GM}{R^3} \langle 3\Gamma_1 - 4 \rangle \quad (8.60)$$

In termini della densità media $\bar{\rho}$:

$$M = \frac{4}{3}\pi\bar{\rho}R^3$$

si ha quindi:

$$\omega^2 = \frac{4}{3}\xi'\pi G\bar{\rho}\langle 3\Gamma_1 - 4 \rangle \quad (8.61)$$

che ci permette di collegare periodo di pulsazione e densità media.

Rileviamo come $t_{puls.} = 2\pi/\omega$ è dello stesso ordine di grandezza di t_{ff} almeno se $\langle \Gamma_1 \rangle$ non è troppo vicino a $4/3$.

Si ricordi che per una stella vale la relazione:

$$L = 4\pi R^2 \sigma T_e^4 \quad (8.62)$$

ed essendo $\bar{\rho} = M/(4/3\pi R^3)$ ossia $R^2 = [M/(4/3\pi\bar{\rho})]^{2/3}$ si può, in base alla 8.61, scrivere:

$$L \propto M^{2/3} T_e^4 t_{puls}^{4/3} \quad (8.63)$$

che ci dà una relazione periodo–luminosità, anche tenendo conto della limitata variabilità della massa e, all’interno della regione di instabilità pulsazionale, della temperatura efficace T_e .

Le presenti considerazioni, che pur riproducono soddisfacentemente la relazione periodo–luminosità per le stelle variabili, non possono spiegare la causa delle pulsazioni osservate che, per essere osservabili, necessitano di una ampiezza non infinitesima ma sufficientemente grande.

L’avvio e il mantenimento di pulsazioni osservabili sono dovuti a particolari meccanismi legati a scambio di calore, e non possono essere spiegati nell’ambito di un modello adiabatico. Le teorie delle stelle pulsanti mettono in evidenza l’importanza delle zone di ionizzazione parziale.

Per maggiori dettagli, si veda il testo di Cox e Giuli.

Capitolo 9

Il trasporto dell'energia.

9.1 Intensità e flusso di energia.

Fino ad ora non abbiamo seriamente preso in esame il problema del trasporto dell'energia e del conseguente instaurarsi di un gradiente di temperatura; in realtà tale gradiente di temperatura è stato implicitamente ipotizzato, allorché si sono discussi i modelli politropici.

Per una struttura costituita da un gas perfetto, di equazione di stato $P \propto \rho T$, la condizione politropica

$$P \propto \rho^{\frac{n+1}{n}}$$

implica anche $T \propto \rho^{1/n}$ e quindi una temperatura diversa in regioni diverse della stessa.

L'esistenza di un gradiente di temperatura implica anche la presenza di meccanismi di trasporto dell'energia da una zona (per lo più centrale) ad un'altra (generalmente le parti esterne).

Lo studio del problema del trasporto richiede preliminarmente alcune definizioni. Consideriamo l'energia dE che fluisce nel tempo dt attraverso la superficie dS nell'angolo solido Ω' attorno ad \vec{n}' , che forma un angolo θ con la normale \vec{n} alla superficie (v.fig.9,1), potremo scrivere:

$$dE = I(\vec{n}') dS \cos \theta d\Omega' dt \quad (9.1)$$

dove $dS \cos \theta$ rappresenta la proiezione di dS sul piano normale ad \vec{n}' , e dove $I(\vec{n}')$ prende il nome di **intensità** ed è ovviamente anche funzione di \vec{P} .

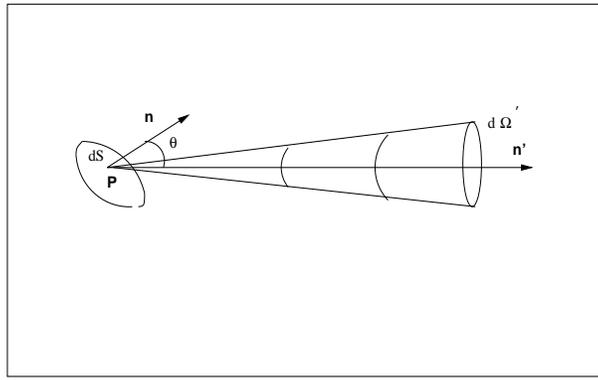


Figura 9.1:

Integrando su $d\Omega'$ si ottiene l'energia totale che fluisce da dS nell'unità di tempo:

$$\frac{dE}{dSdt} = \int I(\vec{n}') \cos \theta d\Omega' = \vec{n} \int I(\vec{n}') \vec{n}' d\Omega' = \vec{n} \cdot \vec{F}(\vec{P}) \quad (9.2)$$

Il vettore $\vec{F}(\vec{P})$ prende il nome di **flusso**.

Sia ora $\epsilon(\vec{P})$ l'energia prodotta per unità di tempo e di massa; in condizioni stazionarie, definendo un arbitrario volume V racchiuso dalla superficie S , avremo:

$$\int_S \vec{F}(\vec{P}) \cdot d\vec{S} = \int_V dV \rho(\vec{P}) \epsilon(\vec{P})$$

ossia

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{F} = \rho \epsilon \quad (9.3)$$

Nell'ipotesi di simmetria sferica, in coordinate polari si ha:

$$\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} [r^2 F(r)] = \rho(r) \epsilon(r) \quad (9.4)$$

Possiamo ora definire la **luminosità** $L(r)$:

$$L(r) = 4\pi r^2 F(r)$$

e ricavare quindi l'equazione:

$$\frac{dL}{dr} = 4\pi r^2 \rho \epsilon \quad (9.5)$$

o anche

$$L = \int_0^R 4\pi r^2 \rho(r) \epsilon(r) dr \quad (9.6)$$

che esprime la condizione di stazionarietà.

In generale l'energia sarà trasportata con diversi meccanismi fisici:

1. il trasporto radiativo, legato al moto dei fotoni, che si diffondono dalle zone più calde a quelle più fredde.
2. il trasporto convettivo (v. cap.10) legato a moti macroscopici della materia.
3. il trasporto conduttivo (importante soprattutto in strutture stellari di alta densità) legato al moto di particelle cariche (elettroni).
4. le perdite di massa (importanti nei sistemi binari stretti e nelle fasi avanzate dell'evoluzione stellare) consistenti nella evaporazione di particelle energetiche.
5. la perdita di energia dovuta ai neutrini, prodotti nelle reazioni nucleari e quasi mai riassorbiti dalla struttura, a causa della piccolezza delle sezioni d'urto.

Nelle stelle di sequenza principale hanno grosso rilievo i meccanismi 1 e 2 mentre l'importanza degli altri aumenta nelle fasi successive dell'evoluzione. Il meccanismo 5 gioca un ruolo determinante nelle fasi nucleari dinamiche, quali il *flash dell'elio* e l'esplosione delle supernovae.

9.2 Trasporto radiativo: il gradiente di T .

In generale la probabilità di assorbimento di un fotone mentre attraversa uno spessore di materia dr , in presenza di assorbitori caratterizzati da una densità numerica n , se σ è la sezione d'urto del processo stesso, sarà espressa dalla

$$d\Pi = n\sigma dr \quad (9.7)$$

In realtà avremo la contemporanea presenza di diversi meccanismi di assorbimento e di diversi tipi di assorbitori. È allora più conveniente definire il **coefficiente di opacità** k mediante la relazione:

$$d\Pi = \rho k dr \quad (9.8)$$

dove, ovviamente, ρ è la densità.

Con riferimento al flusso di fotoni uscente da una sfera di raggio r nell'intervallo di tempo dt , un elemento di volume $dSdr$ subisce per effetto dell'assorbimento delle radiazioni un impulso dq uguale al numero di fotoni per la probabilità di assorbimento per la quantità di moto di ogni fotone. Si noti che stiamo analizzando solo l'effetto dei fotoni *appartenenti* al flusso uscente. In generale, nell'ipotesi di *equilibrio termodinamico locale* (**LTE**) (valida quasi sempre nelle strutture stellari, fatta eccezione per alcune regioni atmosferiche) questi fotoni sono una piccola parte del campo di radiazione presente. Per ragioni di simmetria, però (ossia per l'isotropia del campo all'equilibrio) tutti gli altri fotoni non causano trasferimenti di quantità di moto.

Prendendo dei fotoni "medi" di frequenza ν e di densità numerica n_ν potremo scrivere:

$$dq = (n_\nu dS c dt) \cdot (k_\nu \rho dr) \cdot \frac{h\nu}{c} \quad (9.9)$$

In termini della pressione di radiazione P_r , è possibile scrivere

$$dP_r = -\frac{dF}{dS} = -\frac{dq}{dt dS} \quad (9.10)$$

ossia

$$dP_r = -n_\nu c k_\nu \rho dr \frac{h\nu}{c} \quad (9.11)$$

Ma $n_\nu c h\nu = F_{rad}$, e quindi

$$\frac{dP_r}{dr} = -\frac{F_{rad}}{c} k_\nu \rho \quad (9.12)$$

Se siamo in condizioni di equilibrio termodinamico locale P_r è collegata con T ; poniamo:

$$P_r = \frac{1}{3} a T^4$$

e quindi

$$\frac{dP_r}{dr} = \frac{4}{3} a T^3 \frac{dT}{dr} \quad (9.13)$$

da cui

$$\frac{dT}{dr} = -\frac{F_{rad}}{c} k_\nu \rho \frac{3}{4aT^3} = -\frac{3k_\nu \rho}{4acT^3} \frac{L(r)}{4\pi r^2} = -\frac{3k_\nu \rho L(r)}{16\pi acT^3 r^2} \quad (9.14)$$

L'equazione ci permette di collegare il gradiente di temperatura ad $L(r)$, a r e alle caratteristiche locali della materia (k_ν , T , ρ).

Essa è valida solo se il trasporto è solo radiativo. Il problema del trasporto convettivo sarà discusso nel cap. 10. In presenza di trasporto radiativo e conduttivo (1. e 3. di par. 9.1) l'equazione può essere facilmente generalizzata.

Se è:

$$F(r) = F_{rad} + F_{cond}$$

essendo anche:

$$F_{cond} = -\Lambda \frac{dT}{dr} \quad (9.15)$$

possiamo porre:

$$F = -\frac{dT}{dr} \left(\frac{4acT^3}{3k_\nu \rho} + \Lambda \right) \quad (9.16)$$

e definendo

$$k_c = \frac{4acT^3}{3\Lambda\rho} \quad (9.17)$$

e di qui

$$\frac{1}{k} = \frac{1}{k_\nu} + \frac{1}{k_c} \quad (9.18)$$

k_ν può anche essere vista, come k_r , una opacità “media” (vedremo poi i problemi legati all’operazione di media).

Si può infine scrivere:

$$F = -\frac{4acT^3}{3k\rho} \frac{dT}{dr}$$

ossia

$$\frac{dT}{dr} = -\frac{3k\rho}{4acT^3} \frac{L(r)}{4\pi r^2} \quad (9.19)$$

In caso di trasporto radiativo-conduttivo questa equazione, unitamente alla (9.5), definisce la struttura termica e permette, insieme con le equazioni che determinano l’equilibrio dinamico, di integrare completamente una struttura autogravitante di equilibrio.

9.3 Il limite di Eddington; deduzione della relazione massa-luminosità.

Ammettiamo che valgano le seguenti ipotesi:

- a) il trasporto in superficie è radiativo-conduttivo;
- b) k è approssimativamente costante;
- c) la pressione di radiazione fornisce un contributo dominante alla pressione totale.

La (9.12) può essere scritta nella forma:

$$\frac{dP_r}{dr} = -\frac{k_\nu}{c} \rho \frac{L(r)}{4\pi r^2} \quad (9.20)$$

mentre l’equazione dell’equilibrio idrostatico (v. cap. 7): $\frac{dP}{dr} = -\frac{GM}{r^2} \rho$ prende la forma:

$$\frac{dP}{dr} \simeq \frac{dP_r}{dr} \simeq -\frac{GM(r)\rho}{r^2} \quad (9.21)$$

Si ottiene, per $r = R$:

$$L = L(R) = GM \frac{4\pi c}{k} \quad (9.22)$$

Per condizioni corrispondenti a stelle massicce ($\beta \sim 0$) i valori risultanti di k (dovuti prevalentemente all’effetto Compton) permettono di stimare la costante di proporzionalità fra L ed M ; in unità solari

$$\frac{L}{L_\odot} \sim 10^4 \frac{M}{M_\odot} \quad (9.23)$$

Questa relazione asintoticamente lineare fra massa e luminosità di stelle massicce non sembra avere molte applicazioni pratiche, mentre è utilizzata per gli studi dei nuclei galattici.

Va anche rilevato che nell'ambito del modello di Eddington ($\beta = \text{cost.}$) il calcolo può essere generalizzato rinunciando alla ipotesi c), ed ottenendo, al posto della (9.21)

$$\frac{dP_r}{dr} = (1 - \beta) \frac{dP}{dr} = -(1 - \beta) \frac{GM(r)\rho}{r^2} \quad (9.24)$$

e quindi (se k non varia molto):

$$L \sim [1 - \beta(M)] 10^4 \left(\frac{M}{M_\odot} \right) L_\odot \quad (9.25)$$

La (9.25) ci conferma che quella della (9.23) è in realtà una limitazione superiore su $L(M)$; inoltre, dall'equazione di Eddington, per $\beta \sim 1$ (masse piccole), essendo $1 - \beta \propto M^2$ si ricava una relazione massa luminosità:

$$L \propto M^3 \quad (9.26)$$

valida ovviamente sotto le ipotesi a) e b) (stelle relativamente massicce).

Capitolo 10

Il trasporto convettivo.

10.1 Il criterio di Schwarzschild.

Studiamo ora, in un approccio semplificato, il problema del trasporto convettivo. Consideriamo lo spostamento di un elemento di materia in direzione radiale (sempre nell'ipotesi di simmetria sferica questi sono gli unici moti che contano) da r a $r + \delta r$ (v. fig. 10.1).

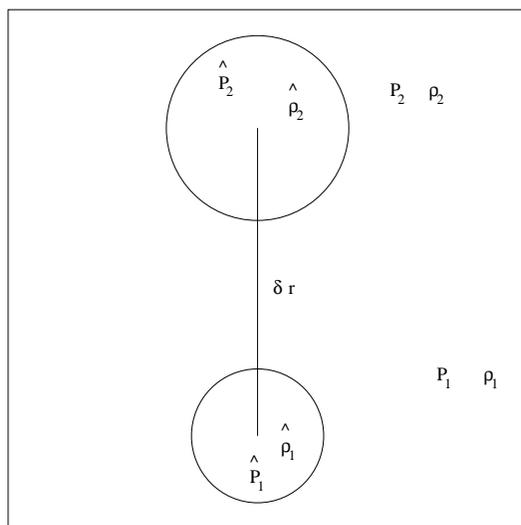


Figura 10.1:

ρ e P sono la densità e pressione nell'ambiente, $\hat{\rho}$ e \hat{P} quelli dell'elemento, mentre gli indici 1 e 2 si riferiscono alle posizioni r e $r + \delta r$.

All'inizio della perturbazione che avvia il moto ammettiamo che l'elemento differisca dall'ambiente in misura arbitrariamente piccola, e poniamo quindi

$$\rho_1 = \hat{\rho}_1$$

$$P_1 = \hat{P}_1$$

Se l'elemento sale velocemente, senza scambiare energia con l'ambiente, la variazione di $\hat{\rho}$ e \hat{P} sarà tipicamente adiabatica. Se inoltre la salita è abbastanza veloce da essere adiabatica ma

abbastanza lenta da essere quasistatica, mantenendo l'equilibrio con l'ambiente, avremo alla fine:

$$\hat{P}_2 = P_2$$

$$\hat{\rho}_2 = \hat{\rho}_1 \left(\frac{\hat{P}_2}{\hat{P}_1} \right)^{1/\Gamma_{AD}} = \rho_1 \left(\frac{P_2}{P_1} \right)^{1/\Gamma_{AD}} \quad (10.1)$$

Se $\hat{\rho}_2 > \rho_2$ la forza di gravità sull'elemento sarà maggiore della spinta di Archimede, e lo farà ricadere in basso; altrimenti avverrà il contrario, ed il processo tenderà ad essere amplificato. È questo il caso in cui la convezione diventa importante per trasportare il calore. La condizione di stabilità (in cui non c'è convezione), $\hat{\rho}_2 > \rho_2$ può anche essere scritta altrimenti:

$$\begin{aligned} \hat{\rho}_2 = \rho_1 (P_2/P_1)^{1/\Gamma_{AD}} > \rho_2 &\Rightarrow \rho_2/\rho_1 < (P_2/P_1)^{1/\Gamma_{AD}} \\ &\Rightarrow \frac{d \log \rho}{dr} < \frac{1}{\Gamma_{AD}} \frac{d \log P}{dr} \end{aligned} \quad (10.2)$$

ed essendo $d \log P/dr$, $d \log \rho/dr$ negativi,

$$\frac{d \log P}{d \log \rho} < \Gamma_{AD} \quad (10.3)$$

ossia la convezione non si sviluppa se nella struttura la pressione varia con la densità più lentamente che in una trasformazione adiabatica.

Se la pressione è sostanzialmente quella di un gas perfetto, la (10.3) può essere ulteriormente trasformata:

$$\frac{1}{\Gamma_{AD}} < \frac{d \log \rho}{d \log P} = \frac{d \log P}{d \log P} - \frac{d \log T}{d \log P} \stackrel{\text{def}}{=} 1 - \nabla$$

ossia

$$\nabla < 1 - \frac{1}{\Gamma_{AD}} \stackrel{\text{def}}{=} \nabla_{AD} \equiv \Gamma_2$$

In questo caso si ottiene il *criterio di Schwarzschild* per la zona dove la convezione è inibita:

$$\nabla < \nabla_{AD} \quad (10.4)$$

Il significato del criterio di Schwarzschild può anche essere compreso notando che $\nabla \propto dT/dP = \frac{dT}{dr} \frac{dr}{dP}$ e dr/dP è lo stesso fuori e dentro l'elemento convettivo. La (10.4) implica quindi che il **gradiente di temperatura** sia superadiabatico, e che quindi l'elemento convettivo divenga progressivamente più caldo dell'ambiente. Per un miscuglio di gas e radiazione, e in generale se il gas non è perfetto, vale la (10.3); per un miscuglio caratterizzato dal parametro β , avremo:

$$\left. \frac{d \log P}{d \log \rho} \right|_{lungor} < \frac{5/3\beta^2 + 16(1-\beta)^2 + 20\beta(1-\beta)}{3/2\beta + 12(1-\beta)} \quad (10.5)$$

Se poi β è costante lungo r , potremo anche porre:

$$\nabla < \frac{\beta + 4(1 - \beta)}{5/2\beta^2 + 16(1 - \beta)^2 + 20\beta(1 - \beta)} \quad (10.6)$$

Per $\beta \sim 0$ (grandi masse) i criteri (10.5) e (10.6) diventano più restrittivi e la convezione è favorita.

10.2 Efficienza del trasporto convettivo; convezione “adiabatica”.

È importante valutare il flusso di energia trasportato dalla convezione. Questa valutazione è estremamente complessa, e viene fatta attraverso una trattazione approssimata, la **teoria della mixing length**: si ammette che l’elemento convettivo si muova adiabaticamente per una certa altezza h , la *mixing length*, e ceda poi il suo calore in eccesso; si potrà scrivere quindi:

$$F_{conv.} \sim c_p \rho v \delta T \sim \frac{1}{2} c_p \rho v \left\langle \frac{dT}{dr} \Big|_{ad} - \frac{dT}{dr} \right\rangle h \quad (10.7)$$

dove c_p è il calore specifico a pressione costante, ρ e v sono densità e velocità tipiche, ed il trasporto convettivo è efficace se il gradiente di temperatura nella struttura è, in valore assoluto, maggiore di quello corrispondente ad una adiabatica. Il coefficiente 1/2 tiene conto del fatto che non tutti gli elementi convettivi sono contemporaneamente attivi nel cedere calore. Né v né h sono facilmente valutabili con precisione. Sono però possibili delle stime di massima (v. §10.3). Negli interni stellari, però, la situazione si semplifica considerevolmente. Con dei numeri “sensati” per v e h (10^3 , $R/10$), otteniamo

$$F_{conv.} \sim F_{tot} \sim \frac{L}{4\pi r^2}$$

già per

$$\frac{dT}{dr} \Big|_{ad} - \frac{dT}{dr} \sim 10^{-6} \text{ } ^\circ K/cm \quad (10.8)$$

Ciò vuol dire che, nell’ipotesi più pessimistica (tutto il calore è trasportato per via convettiva), la (10.8) dà una stima dell’errore commesso sostituendo al gradiente di temperatura reale quello adiabatico. Per una zona convettiva di 10^5 km, ossia 10^{10} cm, questo vuol dire sbagliare la variazione di temperatura di meno di 10^4 °K, incidendo quindi al più sulla terza cifra significativa. L’errore è modesto e inferiore ad altri che si possono introdurre per motivi vari, fisici e numerici.

Poiché, come si è visto, l’integrazione di un modello di equilibrio richiede una valutazione corretta dell’andamento di T e non, in genere, raffinate conoscenze sul trasporto di energia e sui moti turbolenti su scala non troppo grande (qualcosa di più sarà necessario conoscere per l’evoluzione della composizione chimica in presenza di relazioni nucleari che la modificano e di processi convettivi che mescolano la materia di zone diverse), potremo senz’altro assumere:

$$\frac{dT}{dr} \simeq \left. \frac{dT}{dr} \right|_{ad} \quad (10.9)$$

o, equivalentemente

$$\nabla = \nabla_{ad} \quad (10.10)$$

10.3 Convezione superadiabatica.

Le considerazioni del paragrafo precedente non sono sempre valide; non lo sono, in particolare, per le zone esterne delle stelle. Si dovrà quindi procedere ad una stima di v e di h . Quest'ultima sembra essere dello stesso ordine di:

$$H = -\frac{dr}{d \log P}, \quad (10.11)$$

distanza per cui P varia di un fattore e , e che è chiamata *altezza di scala* di P . È anche, per un gas perfetto;

$$H = -P \frac{dr}{dp} = \frac{P}{g\rho} = \frac{kT}{\mu m_p g} \quad (10.12)$$

Una stima recente dà -per il Sole (il modello di mixing length può cambiare leggermente tra stelle diverse) $h \simeq 1.9H$.

Per quanto riguarda la stima di v , ricordiamo che, per la legge di Archimede, la forza che si esercita su un elemento convettivo di volume V è:

$$F = -gV\delta\rho$$

È quindi, se m ne è la massa:

$$\frac{1}{2}mv^2(h) = -\int_0^h gV\Delta\rho dx \quad (10.13)$$

Se

$$\beta \sim 1 \frac{\Delta\rho}{\rho} \simeq -\frac{\Delta T}{T}$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}mv^2(h) &\sim \int_0^h gV\rho \frac{\Delta T}{T} dx = \\ &= \int_0^h mg(x) \frac{1}{T(x)} \Delta T(x) dx \sim \\ &\sim \frac{m\langle g \rangle}{\langle T \rangle} \int_0^h dx \int_0^x \left(\left. \frac{dT}{dr} \right|_{ad} - \frac{dT}{dr} \right) dx' \simeq \\ &\simeq m \frac{\langle g \rangle}{\langle T \rangle} \left\langle \left. \frac{dT}{dr} \right|_{ad} - \frac{dT}{dr} \right\rangle \frac{h^2}{2} \end{aligned} \quad (10.14)$$

ossia

$$v^2(h) \sim h^2 \frac{\langle g \rangle}{\langle T \rangle} \left\langle \frac{dT}{dr} \Big|_{ad} - \frac{dT}{dr} \right\rangle$$

Ponendo la velocità media $v \sim v(h)/2$,

$$\left\langle \frac{dT}{dr} \Big|_{ad} - \frac{dT}{dr} \right\rangle = \frac{1}{2} \left(\frac{dT}{dr} \Big|_{ad} - \frac{dT}{dr} \right)_h$$

e ricordando infine che vale

$$\frac{dT}{dr} = T \left(\frac{1}{T} \frac{dT}{dr} \right) = T \nabla \frac{1}{P} \frac{dP}{dr} = -\frac{T \nabla}{P} g \rho = -\frac{T \nabla g \rho \mu m_p}{k \rho T} = -\frac{\nabla g \mu m_p}{k} \quad (10.15)$$

si ottiene finalmente

$$v^2 \sim \frac{1}{8} g^2 h^2 \frac{\mu m_p}{KT} (\nabla_{(h)} - \nabla_{ad}^{(h)}) \quad (10.16)$$

dove i simboli di media sono stati soppressi per semplicità. Possiamo così scrivere:

$$v \simeq gh \left[\frac{\mu m_p}{8KT} (\nabla - \nabla_{ad}) \right]^{\frac{1}{2}} \quad (10.17)$$

Combinando (10.7) e (10.17) possiamo scrivere:

$$\begin{aligned} F_{conv.} &\sim \frac{1}{2} c_p \rho g h^2 \left\langle \frac{dT}{dr} \Big|_{ad} - \frac{dT}{dr} \right\rangle \left[\frac{\mu m_p}{8kT} (\nabla - \nabla_{ad}) \right]^{\frac{1}{2}} = \\ &= \frac{1}{4} c_p \rho g h^2 \frac{g \mu m_p}{k} \left(\frac{\mu m_p}{2kT} \right)^{\frac{1}{2}} (\nabla - \nabla_{ad})^{\frac{3}{2}} \end{aligned} \quad (10.18)$$

e, ricordando la (10.12):

$$F_{conv.} \sim c_p \rho \left(\frac{h}{2H} \right)^2 T \left(\frac{kT}{2\mu m_p} \right)^{\frac{1}{2}} (\nabla - \nabla_{ad})^{\frac{3}{2}} \quad (10.19)$$

La (10.19) può confermare, se ci mettiamo valori tipici di un interno stellare, che $(\nabla - \nabla_{ad}) \ll 1$; negli esterni stellari questo non sarà in generale vero. Sarà allora necessario risolvere una equazione avente come incognita ∇ :

$$F = F_{conv.} + F_{rad.} = 0.57 c_p \rho T \left(\frac{kT}{\mu m_p} \right)^{\frac{1}{2}} (\nabla - \nabla_{ad})^{\frac{3}{2}} + \frac{4ac}{3} \frac{\mu m_p g T^3}{k \rho \mathbf{k}} \nabla = \frac{L}{4\pi R^2} \quad (10.20)$$

Qui l'opacità \mathbf{k} è indicata in grassetto per non confonderla con la costante di Boltzmann. Va anche notato come la soluzione della (10.20) differisca nettamente sia da ∇_{ad} sia da ∇_{rad} , definito come il ∇ che permetterebbe di trasportare tutto il calore per via radiativa (fig.10.2).

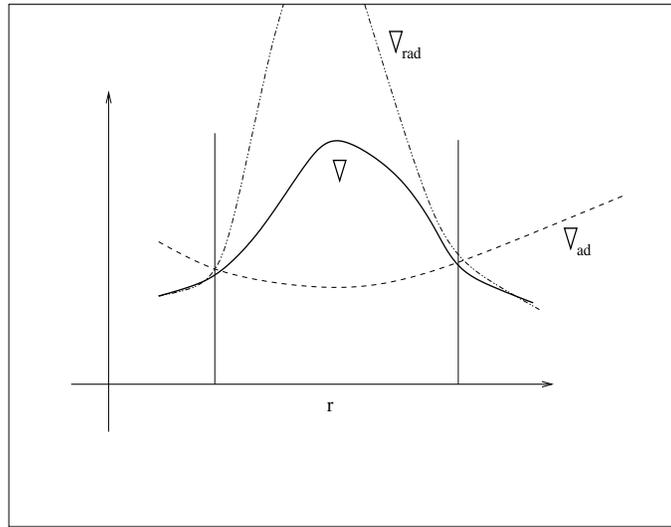


Figura 10.2: Esempio di andamento dei gradienti in una zona subatmosferica convettiva (∇_{ad} diminuisce nella zona convettiva a causa dei processi di ionizzazione parziale).

Possiamo concludere quindi schematicamente:

- $\nabla < \nabla_{ad}$: non c'è convezione
- $\nabla \geq \nabla_{ad}$: **convezione** (interni stellari); la struttura si calcola facilmente ed i risultati non dipendono dalla scelta di h
- $\nabla \gg \nabla_{ad}$: **convezione superadiabatica**; la struttura (astrofisica) dipende criticamente dalla scelta di h e dalle altre approssimazioni fatte.

Va anche sottolineato il ruolo della convezione nel mescolare la composizione chimica di zone diverse della stella (o della struttura in generale). In caso di convezione fra zone di diversa composizione chimica il criterio di Schwarzschild si modifica nel *criterio di Ledoux*:

$$\nabla < \nabla_{ad} + \frac{\beta}{4 - 3\beta} \frac{d \log \mu}{d \log P} \quad (10.21)$$

Va anche ricordata la criticità dei problemi di convezione in presenza di forti gradienti composizionali (problemi di overshooting, semiconvezione ecc.); qui le approssimazioni sulla teoria incidono soprattutto nel creare incertezze sulla distribuzione degli elementi nella struttura.

Capitolo 11

Integrazione delle equazioni di equilibrio.

11.1 Le equazioni dell'equilibrio.

La discussione condotta nei capitoli precedenti ci permette di affrontare ora il problema complessivo della struttura di un corpo autogravitante in equilibrio, quale una stella. Nei casi di deviazione dall'equilibrio diventerà necessario il ricorso ad una trattazione ben più complessa (basti pensare al passaggio dall'equilibrio idrostatico (eq. 7.3) all'equazione di Navier-Stokes (7.27) di cui al momento non ci occuperemo).

Nel caso di equilibrio, le equazioni da risolvere simultaneamente sono quella dell'equilibrio idrostatico, ora citata, la (7.7) (*equazione di continuità*), la (9.7) (che coincide in sostanza con la conservazione dell'energia) ed una quarta che descrive l'andamento di $T(r)$, e che varia a seconda che il trasporto del calore avvenga anche per convezione o meno. In sintesi:

$$\frac{dP(r)}{dr} = \frac{-GM(r)}{r^2} \rho(r) \quad (11.1)$$

$$\frac{dM(r)}{dr} = 4\pi r^2 \rho(r) \quad (11.2)$$

$$\frac{dL(r)}{dr} = 4\pi r^2 \rho(r) \epsilon \quad (11.3)$$

$$\frac{dT}{dr} = \begin{cases} -\frac{3k\rho(r)}{4acT^3} \frac{L(r)}{4\pi r^2} & \text{trasporto radiativo} \\ \nabla_{ad} \frac{T(r)}{P(r)} \frac{dP(r)}{dr} & \text{trasporto convettivo "adiabatico"} \\ \nabla \frac{T(r)}{P(r)} \frac{dP(r)}{dr} & \text{trasporto convettivo "superadiabatico"} \end{cases} \quad (11.4)$$

∇ è soluzione della (10.20)

L'integrazione di queste quattro equazioni richiede, oltre alla definizione di adeguate condizioni al contorno (v. §11.2), la conoscenza di altre tre relazioni funzionali, nelle quali è contenuta la "microfisica" di una struttura stellare.

Esse sono:

a) l'equazione di stato:

$$P = P(\rho, T, X, Y) \quad (11.5)$$

b) l'equazione che esprime la produzione di energia (per unità di tempo e di massa) in funzione delle grandezze fisiche locali (densità, temperatura ecc.) e quindi della posizione. Quando non si è in presenza di un perfetto equilibrio, si aggiunge anche un termine “gravitazionale” legato alla variazione temporale della struttura, e che dipende dalle derivate temporali delle stesse grandezze.

Per perfetto equilibrio:

$$\epsilon = \epsilon(\rho, T, X, Y) \quad (11.6)$$

c) l'equazione che esprime, per quanto riguarda il trasporto radiativo-conduttivo del calore, l'opacità della materia:

$$k = k(\rho, T, X, Y) \quad (11.7)$$

Come detto in precedenza, $k = k(\nu)$, si dovrebbe quindi definire una k per ogni frequenza; in pratica si useranno dei valori di k opportunamente mediati.

Lo studio di P , ϵ e k sarà completato nella Terza Parte.

11.2 Condizioni al contorno.

Non è del tutto banale la definizione delle condizioni al contorno; possiamo facilmente porre

$$r = 0 \quad M(r) = L(r) = 0 \quad (11.8)$$

mentre la definizione delle altre due condizioni non può essere fatta per $r = 0$.

Il modo più semplice consiste nell'assumere:

$$r = R \quad P(r) = T(r) = 0 \quad (11.9)$$

anche se sono possibili scelte più accurate.

Le (11.8) e (11.9) permettono di integrare le quattro equazioni, una volta fissato il raggio R e definiti i parametri relativi alla composizione chimica. In realtà questo tipo di soluzione non presenta grande interesse, in quanto il raggio R non è una quantità idonea per caratterizzare un certo tipo di oggetto, potendo variare nel corso dell'evoluzione. La massa invece, a parte fenomeni, importanti solo in ben definite fasi evolutive, di perdite di materia, è una costante durante l'evoluzione, e sembra opportuno usarla come variabile indipendente, invertendo la (11.2).

Si ha così:

$$\frac{dP}{dM_r} = -\frac{GM_r}{4\pi r^4} \quad (11.10)$$

$$\frac{dr}{dM_r} = \frac{1}{4\pi r^2 \rho} \quad (11.11)$$

$$\frac{dL}{dM_r} = \epsilon \quad (11.12)$$

$$\frac{dT}{dM_r} = \begin{cases} -\frac{3kL}{64\pi^2 a c r^4 T^3} & (\text{rad.}) \\ \nabla_{ad} \frac{GM_r T}{4\pi r^4 P} & (\text{conv.ad.}) \\ \nabla \frac{GM_r T}{4\pi r^4 P} & (\text{conv.superad.}) \end{cases} \quad (11.13)$$

e le corrispondenti condizioni al contorno sono:

$$M_r = 0 \quad r = L = 0 \quad (11.14)$$

$$M_r = M \quad P = T = 0 \quad (11.15)$$

Di regola, per dato M , e fissata la composizione chimica, le equazioni (11.10-11.13) hanno una unica soluzione. Questa proprietà prende il nome (improprio) di *teorema di Vogt e Russell*.

Notiamo che le equazioni (11.10, 11.11, 11.13) presentano una forma singolare per $r \rightarrow 0$. Questa singolarità può essere facilmente aggirata cominciando l'integrazione in un punto molto vicino al centro ($\sim 10^{-5}R$) e approssimando al primo ordine le varie grandezze fisiche (T e P sono definite sulla base dei valori centrali T_c e P_c , che vengono inseriti nei modelli come valori tentativi o approssimati, e poi calcolati con una procedura intuitiva.

Fissato r' si ha:

$$M_{r'} \simeq \frac{4}{3}\pi\rho_c r'^3 \quad (11.16)$$

e quindi

$$P_{r'} \simeq P_c - \frac{2}{3}\pi G\rho_c^2 r'^2 = P_c - \left(\frac{\pi}{6}\right)^{1/3} G\rho_c^{4/3} M_{r'}^{2/3} \quad (11.17)$$

$$L_{r'} = \frac{4}{3}\pi\rho_c\epsilon_c r'^3 = \epsilon_c M_{r'} \quad (11.18)$$

Per quanto riguarda $T_{r'}$, nel caso di trasporto radiativo è facile ottenere

$$T_{r'} = T_c - \frac{k_c\epsilon_c\rho_c^2}{8acT_c^3} r'^2 = T_c - \left(\frac{3}{4\pi}\right)^{2/3} \frac{k_c\epsilon_c}{8acT_c^3} \rho_c^{4/3} M_{r'}^{2/3} \quad (11.19)$$

Il caso convettivo è, in linea di principio, più complesso; ma nei casi realistici, per una stella, la convezione centrale è sempre “adiabatica” e $\nabla_{ad} \simeq 2/5$ (siamo in condizioni di ionizzazione totale). Si ha allora:

$$T_{r'} = T_c - \frac{4\pi GT_c\rho_c^2}{15P_c} r'^2 = T_c - \left(\frac{4\pi}{3}\right)^{1/3} \frac{GT_c}{5P_c} \rho_c^{4/3} M_{r'}^{2/3} \quad (11.20)$$

11.3 Sviluppi superficiali.

Nella zona atmosferica il modello deve essere studiato rinunciando ad alcune semplificazioni, ma facendo uso di altre; in sostanza L , R , M sono ormai fissi ai valori “osservabili”, non si può però più accettare l’ipotesi di *LTE* e il campo di radiazione non è neppure approssimativamente isotropo (all’estremo limite esterno la radiazione è solo uscente).

Si usa definire, per lo studio della zona superficiale, la profondità ottica:

$$d\tau = -k\rho dr \quad (11.21)$$

τ è la probabilità di subire un’interazione prima di sfuggire dalla struttura, quindi $\tau = 0$ sulla superficie, mentre $\tau = 1$ è un libero cammino medio di profondità.

L’equazione dell’equilibrio idrostatico prende la forma:

$$\frac{dP}{dr} = -\frac{GM}{r^2}\rho = \frac{GM}{r^2} \frac{1}{k} \frac{d\tau}{dr} \quad (11.22)$$

ossia

$$\frac{dP}{d\tau} = \frac{GM}{r^2} \frac{1}{k} \quad (11.23)$$

La (11.23) può essere integrata, pur di conoscere $k(\tau)$; tale conoscenza viene resa possibile se si conosce anche l’andamento con τ della temperatura. Tale obbiettivo può essere proseguito con raffinati calcoli astrofisici, integrando l’equazione del trasporto. Nella pratica dei modelli stellari si usano delle $T(\tau, T_e)$ ottenute per via di tabelle o di relazioni semiempiriche (usata quella di *Böhm-Vitense*); si può anche usare la semplice relazione

$$T^4 = \frac{1}{2}T_e^4 \left(1 + \frac{3}{2}\tau\right) \quad (11.24)$$

ottenuta mediante il *modello di Eddington* secondo il quale l'intensità $I(\theta, \varphi)$ ha una asimmetria tra gli emisferi uscenti ed entranti (v. fig. 11.1) e nell'approssimazione di *LTE* e di *atmosfera grigia* (k non dipende da ν).

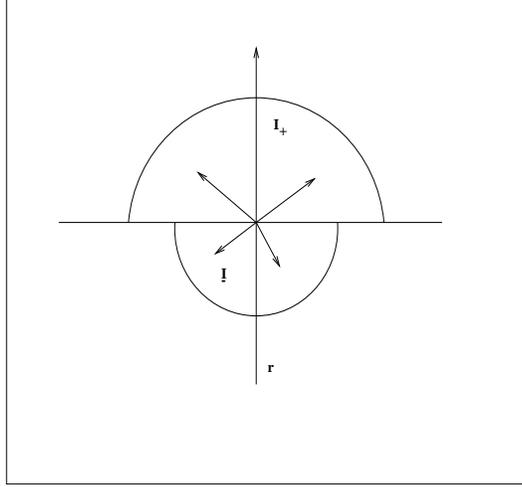


Figura 11.1:

La (11.24), o un'equazione simile, permette di ottenere $T(\tau)$, data T_e , e quindi la (11.23) può essere facilmente integrata.

Si ottengono, dati R , M , e T_e (due di queste sono variabili dipendenti, l'altra è quella indipendente), due funzioni

$$\left\{ \begin{array}{l} P(\tau, T_e) \\ T(\tau, T_e) \end{array} \right\} \quad (11.25)$$

ed è possibile quindi conoscere la struttura della stella alla base dell'atmosfera ($L = L_{tot}$, $R = R$, $P(\tau \sim 1)$, $T(\tau \sim 1)$).

11.4 Metodi di integrazione.

I metodi numerici più frequentemente usati per l'integrazione di un modello stellare usano la divisione dell'intervallo di integrazione in *mesh points* $M_r^{(i)}$, tra i quali le equazioni differenziali vengono approssimate con equazioni alle differenze finite.

Noi ci limiteremo a descrivere sommariamente le due tecniche più diffuse, quella del **raccordo** (o *fitting*; usata prevalentemente in un recente passato) e quella, più attuale, di **Henye**y.

11.4.1 Metodo del fitting.

Definiamo un certo valore $M_r^{[fitting]}$, intermedio, ed effettuiamo due integrazioni del modello, una dall'interno (scegliendo arbitrariamente, ma sensatamente, ρ_c e T_c , ed una dall'esterno (idem per L e R o L e T_e). Se la scelta dei quattro parametri arbitrari fosse esatta le due soluzioni dovrebbero raccordarsi (*to fit*) in M_r , ed il modello sarebbe già fatto. In genere questo non accadrà; indichiamo con Δy_i^F le differenze tra le funzioni i -esime interna ed esterna al punto di *fitting*

$$\Delta y_i^F = y_i^{F(int)} - y_i^{F(ext)} \quad i = 1, \dots, 4 \quad (11.26)$$

Dobbiamo variare i parametri arbitrari T_c , ρ_c , L , R in modo che i Δy_i^F siano uguali a zero. A questo scopo si calcolano, con delle ulteriori prove numeriche, le derivate

$$\left\{ \begin{array}{cc} \frac{\partial y_i^{F(ext)}}{\partial L} & \frac{\partial y_i^{F(ext)}}{\partial R} \\ \frac{\partial y_i^{F(int)}}{\partial \rho_c} & \frac{\partial y_i^{F(int)}}{\partial T_c} \end{array} \right\} \quad (11.27)$$

e, sotto l'ipotesi di linearità, cerchiamo i valori $\Delta \rho_c$, ΔT_c , ΔL , ΔR che permettano di azzerare i Δy_i^F risolvendo il sistema di quattro equazioni:

$$\left(\frac{\partial y_i^{F(ext)}}{\partial L} \right)_R \Delta L + \left(\frac{\partial y_i^{F(ext)}}{\partial R} \right)_L \Delta R - \left(\frac{\partial y_i^{F(int)}}{\partial \rho_c} \right)_{T_c} \Delta \rho_c - \left(\frac{\partial y_i^{F(int)}}{\partial T_c} \right)_{\rho_c} \Delta T_c + \Delta y_i^F = 0 \quad (11.28)$$

Il nuovo modello, con i valori di prova L , R , ρ_c , T_c così corretti, viene integrato; se gli andamenti non sono realmente lineari non si otterrà ancora un perfetto fit; ma dovremmo esserci avvicinati; il problema verrà risolto con un certo numero di iterazioni. Il metodo funziona se i valori iniziali non sono troppo sbagliati e per stelle che non abbiano la sorgente di energia concentrata in uno shell troppo sottile.

11.4.2 Il metodo di Henye

È nettamente il più usato, anche perché applicabile in un numero maggiore di casi e più veloce dal punto di vista del tempo di calcolo.

Con le notazioni precedenti, le equazioni dell'equilibrio possono essere scritte nella forma:

$$\frac{dy_i}{dM_r} - f_i(M_r, y_1, y_2, y_3, y_4) = 0 \quad i = 1, \dots, 4. \quad (11.29)$$

Alle differenze finite si ha allora:

$$dy_i(j)dM_r(j) = \frac{y_i(j+1) - y_i(j)}{M_r(j+1) - M_r(j)} \quad (11.30)$$

$$f_i(M_r(j), y_1, y_2, y_3, y_4) = f_i(M_r(j), M_r(j+1), y_k(j), y_k(j+1)), \quad k = 1, \dots, 4)$$

Se conoscessimo già le soluzioni y_i , sarebbe

$$F_i^y(j) = \frac{y_i(j+1) - y_i(j)}{M_r(j+1) - M_r(j)} - f_i(M_r(j), M_r(j+1), y_k(j), y_k(j+1)) = 0 \quad (11.31)$$

Se invece usiamo delle soluzioni di prova approssimate \bar{y}_i sarà

$$F_i^{\bar{y}}(j) \neq 0$$

La soluzione esatta potrà essere trovata modificando le $\bar{y}_k(j)$ in modo tale da rendere gli $F_i(j) = 0$

$$F_i'(j) = F_i(j) + \sum_{k=1}^4 \left[\frac{\partial F_i(j)}{\partial y_k(j)} \Delta y_k(j) + \frac{\partial F_i(j)}{\partial y_k(j+1)} \Delta y_k(j+1) \right] = 0 \quad (11.32)$$

Se i *mesh-points* sono m , abbiamo $4m - 4$ equazioni nelle $4m$ incognite $\Delta y_k(j)$.

Le quattro relazioni mancanti si ottengono dalle condizioni al contorno: al centro $r_c = 0$, $L_c = 0$; in superficie, all'interno della zona atmosferica, avremo:

$$(j = 1) : \quad y_1(1) = g_1(R, L), \quad y_2(1) = g_2(R, L), \quad y_3(1) = g_3(R, L), \quad y_4(1) = g_4(R, L)$$

Abbiamo altre 6 equazioni con le due sole incognite aggiuntive R, L . Il sistema può essere quindi risolto, calcolando le $\Delta y_k(i)$ e quindi nuove funzioni di prova \bar{y}'_k . Anche qui, evidentemente, dovremo applicare un procedimento iterativo.

Va infine notato che nella (11.32), come del resto nella (11.28), una stima imprecisa delle derivate non altera i risultati ma rende solamente più precaria (ed eventualmente lenta) la convergenza dell'iterazione; ciò semplifica nella pratica le procedure di calcolo.

TERZA PARTE

Capitolo 12

L'equazione di stato.

12.1 Introduzione.

La pressione in una stella è data essenzialmente dalla somma di tre componenti, dovute agli atomi (di solito ionizzati, e quindi = ioni), elettroni e radiazione:

$$P = P_i + P_e + P_r \quad (12.1)$$

Abbiamo già discusso il ruolo della pressione di radiazione e la sua importanza confrontata con quella del gas, ed abbiamo già definito la pressione del gas nell'approssimazione di gas perfetto, valutando il peso molecolare medio (μ) nelle condizioni di completa ionizzazione.

Vogliamo ora analizzare tre effetti correttivi:

- la *depressione coulombiana* dovuta al fatto che abbiamo a che fare con particelle cariche;
- la *pressione di degenerazione* legata ad effetti quantistici;
- le diverse proprietà della materia in caso di ionizzazione parziale.

12.2 La depressione coulombiana.

L'equazione di stato di gas perfetto è sufficientemente accurata se l'energia cinetica per particella prevale sull'energia coulombiana in misura rilevante. Studiamo l'interazione ione-ione, che è la più importante, come vedremo tra poco; essa sarà trascurabile per

$$kT \gg \frac{Z^2 e^2}{d_i} \left[\equiv E_{int(i,i)} \right] \quad (12.2)$$

(Z è il numero atomico e d la distanza media ione-ione, definibile anche come

$$n_i d_i^3 \sim 1 \quad (12.3)$$

(non sarà esattamente uguale ad 1 per ragioni statistiche); è anche

$$\rho = n_i \mu_i m_p \simeq n_i A m_p \quad (12.4)$$

da cui

$$d_i \sim n_i^{-1/3} \simeq \left[\frac{Am_p}{\rho} \right]^{1/3} \quad (12.5)$$

Il criterio (12.2) prende la forma:

$$\frac{kT}{Z^2 e^2} \left(\frac{Am_p}{\rho} \right)^{1/3} \gg 1 \quad (12.6)$$

ossia

$$\rho \ll \frac{k^3}{e^6} m_p \frac{A}{Z^6} T^3 \quad (12.7)$$

Per l'idrogeno ($Z = 1$, $A = 1$; $T \sim 10^7 K$ è la temperatura utile per la fusione) $\rho \ll 10^6 g/cm^3$ (secondo la 11.7); per l'elio ($Z = 2$, $A = 4$, $T \sim 10^8 K$) $\rho \ll 10^8 g/cm^3$.

Per stelle "normali", di sequenza principale o delle prime fasi successive queste condizioni sono largamente verificate; la correzione coulombiana diventa rilevante per stelle nelle fasi finali (grande densità) o, al limite, per interni di pianeti (bassa temperatura), dove comunque la fisica della materia e spesso la composizione chimica sono molto diverse.

Se possiamo trascurare le interazioni ione-ione possiamo farlo a maggior ragione con le altre:

$$E_{int(i,e)} \sim \frac{Ze^2}{d_{i,e}} \sim Z^{-2/3} E_{int(i,i)} \quad (12.8)$$

$$E_{int(e,e)} \sim \frac{e^2}{d_{e,e}} \sim Z^{-5/3} E_{int(i,i)} \quad (12.9)$$

(sotto l'ipotesi $d_{i,e} \sim d_{e,e} \sim 1/n_e^{1/3} \sim d_{i,i} Z^{-1/3}$).

Se l'energia di interazione coulombiana E_c supera KT gli ioni sono forzati in una struttura a lattice (*stato solido*). Per $E_c/KT \sim 1$ si ha uno stato semisolido e solo per $E/KT \ll 1$ gli ioni si comportano come un gas perfetto.

12.3 Effetti quantistici.

Possiamo similmente valutare la rilevanza degli effetti quantistici confrontando la *lunghezza d'onda* $\lambda = \hbar/p$ con le distanze medie d . Notiamo che, sotto l'ipotesi di equipartizione, $p_i^2/2m_i \sim p_e^2/2m_e$ e quindi $p_i = p_e(m_i/m_e)^{1/2} \gg p_e$, per cui $\lambda_i \ll \lambda_e$; gli effetti quantistici cominciano a divenire importanti a densità minori sia per gli elettroni che per gli ioni. Per i primi vale, in regime non relativistico (N.R.) ($v_e \ll c$):

$$p_e \sim (m_e KT)^{1/2} \quad (12.10)$$

Gli effetti quantistici non sono importanti quando

$$\lambda_e = \frac{\hbar}{p_e} \ll d_{e,e} \sim \left(\frac{\mu_e m_p}{\rho} \right)^{1/3}$$

sostituendo la (12.10) e riarrangiando si ottiene un criterio, analogo al (12.7):

$$\rho \ll \mu_e m_p \frac{(m_e K T)^{3/2}}{\hbar^3} \sim 10^{-10} T^{3/2} \text{ g/cm}^3 \quad (12.11)$$

Il criterio (12.11) è generalmente più stringente del (12.7):

$$T \sim 10^7 \text{ K } \rho \sim 1 \text{ g/cm}^3, \quad T \sim 10^8 \text{ K } \rho \sim 10^2 \text{ g/cm}^3$$

In molte strutture stellari la (12.11) non è soddisfatta; gli effetti quantistici sono non trascurabili ed il gas di elettroni tende a diventare “quantisticamente degenerare”. Per densità ancora un po’ maggiori di quelle identificate dalla (12.11), sostituendo alla disuguaglianza il segno di uguaglianza gli effetti quantistici contribuiscono infatti alla pressione in misura maggiore del termine di gas perfetto.

La figura seguente rappresenta le zone di densità e temperatura in cui gli effetti coulombiano e quantistico entrano in gioco.

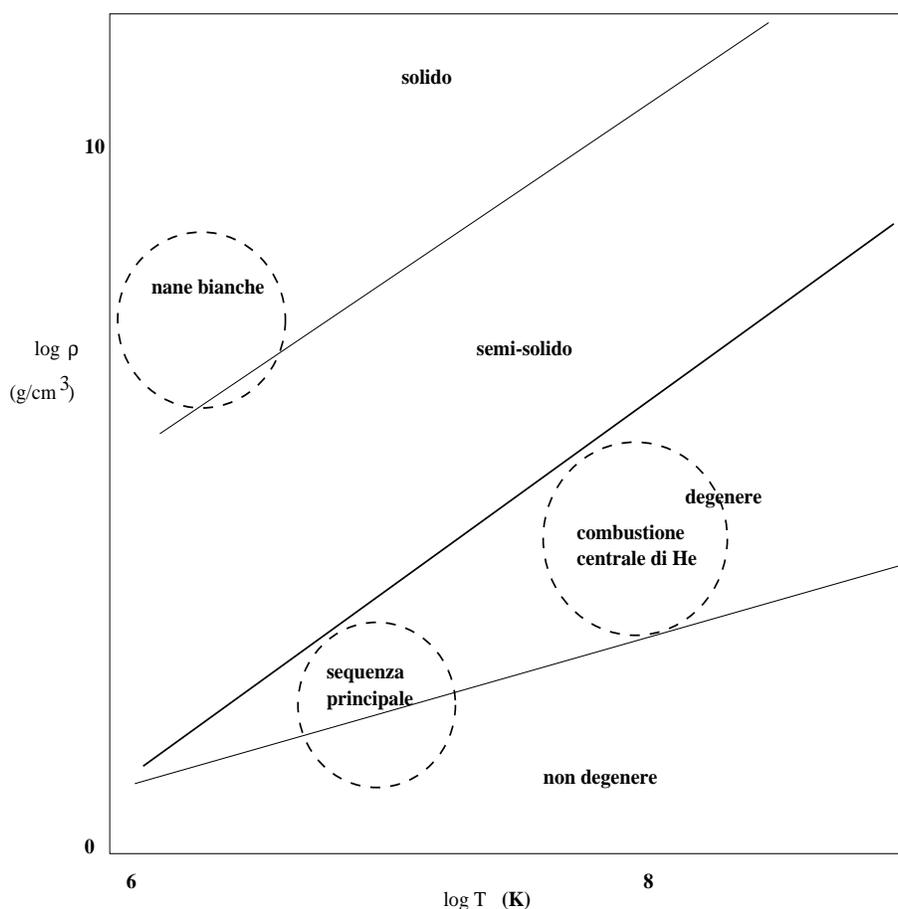


Figura 12.1: Adattata da Castellani, 1985. Sono identificate nel piano $\log \rho / \log T$ le regioni di predominio dei vari processi e le zone caratterizzanti il centro di strutture stellari in diverse tipiche fasi evolutive. Nella regione dei gas, la linea a tratti riporta la transizione tra gas elettronico e gas elettronico degenerare.

12.4 Gas degeneri di elettroni.

La teoria dei gas di Fermi (gli elettroni sono fermioni, ossia particelle di spin 1/2) parte dal principio di statistica quantistica della indistinguibilità delle particelle identiche; l'invarianza per scambio dell'osservabile $|\Psi|^2$ implica che la funzione d'onda Ψ può nelle stesse circostanze o restare immutata o cambiare di segno:

$$\Psi(\xi_i, \xi_j, \xi_k \dots) = \pm \Psi(\xi_j, \xi_i, \xi_k \dots) \quad (12.12)$$

Se vale il segno + abbiamo un gas di Bose, con funzione d'onda simmetrica, corrispondente a particelle di spin intero; se vale il segno - abbiamo un gas di Fermi e la funzione d'onda è antisimmetrica. Se abbiamo allora due particelle nello stesso stato quantico ($\xi_i = \xi_j$) si ottiene facilmente

$$\Psi(\xi_i, \xi_i \dots) = -\Psi(\xi_i, \xi_i, \dots) = 0 \quad (12.13)$$

Non è possibile avere due particelle nello stesso stato quantico (*principio di esclusione di Pauli*); poiché per gli elettroni sono comunque possibili due autostati indipendenti di spin, nella stessa celletta ($\int d^3p d^3x = (2\pi\hbar)^3$) dello spazio delle fasi potranno quindi essere contenuti due elettroni in stati di spin diversi.

Fin qui non abbiamo fatto ipotesi sulla temperatura; se la temperatura sarà alta, gli elettroni si distribuiranno in un ampio volume dello spazio delle fasi (anche le cellette ad alta energia, cioè ad alto p^2 saranno sufficientemente probabili) e gli effetti di degenerazione non entreranno in gioco. Se invece la temperatura sarà bassa ($\rightarrow 0$) sarà il principio di esclusione di Pauli a pilotare la distribuzione degli elettroni in cellette diverse, riempiendo una sfera (nello spazio degli impulsi) intorno a $p = 0$; in questo caso limite (degenerazione totale $\Leftrightarrow T = 0$) il numero di elettroni contenuti in un certo spazio V sarà:

$$N = \frac{2}{(2\pi\hbar)^3} \int^V d^3x \int^{p_F} d^3p \quad (12.14)$$

La (12.14) permette di calcolare la quantità p_F (*impulso di Fermi*) ossia il raggio della sfera sopra citata:

$$N = \frac{1}{3\pi\hbar} V p_F^3 \quad (12.15)$$

In termini della densità numerica $n = N/V$:

$$p_F = (3\pi^2)^{1/3} n^{1/3} \hbar \quad (12.16)$$

Anche per $T = 0$ gli elettroni conservano una certa energia cinetica; la densità (volumica) nel caso N.R. ($p_F \ll m_e c$) è

$$\begin{aligned} \epsilon_{cin} &= \int_0^{n_e} \frac{p^2}{2m_e} dn(p) = \frac{2}{(2\pi\hbar)^3} \int_0^{p_F} \frac{p^2}{2m_e} d^3p = \\ &= \frac{2}{(2\pi\hbar)^3} \frac{1}{2m_e} \frac{4}{5} \pi p_F^5 = \frac{1}{m_e} \frac{\hbar^5}{(2\pi\hbar)^3} \frac{4}{5} \pi (3\pi^2)^{5/3} n^{5/3} = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{3}{10} (3\pi^2)^{2/3} \frac{\hbar^2}{m_e} n_e^{5/3} = \frac{3}{10} (3\pi^2)^{2/3} \frac{\hbar^2}{m_e} \left(\frac{\rho}{\mu_e m_p} \right)^{5/3} \propto \\
&\propto \rho^{5/3}
\end{aligned} \tag{12.17}$$

mentre nel caso estremo-relativistico (E.R. $\equiv p_F \gg m_e c$) è

$$\begin{aligned}
\epsilon_{cin} &= \sqrt{p^2 c^2 + m_e^2 c^4} - m_e c^2 \rightarrow pc \quad \text{per } p \gg mc \\
\epsilon_{cin} &\sim \int_0^{n_e} pc \, dn(p) = \frac{2c\pi}{(2\pi\hbar)^3} p_F^4 = \\
&= \frac{3c\hbar}{4} (3\pi^2)^{1/3} n_e^{4/3} = \frac{3c\hbar}{4} (3\pi^2)^{1/3} \left(\frac{\rho}{\mu_e m_p} \right)^{4/3} \propto \\
&\propto \rho^{4/3}
\end{aligned} \tag{12.18}$$

I due casi si raccordano: sia ρ^* la densità per cui $p_F = m_e c$; si ha:

$$m_e c = (3\pi^2)^{1/3} \hbar (n^*)^{1/3} \tag{12.19}$$

ossia

$$\rho^* = n^* \mu_e m_p = \frac{1}{3\pi^2} \frac{c^3}{\hbar^3} \mu m_p m_e^3 \tag{12.20}$$

$$\epsilon_{NR}(\rho^*) = \frac{3}{10} \frac{1}{3\pi^2} c^5 m_e^4 \frac{1}{\hbar^3} \tag{12.21}$$

$$\epsilon_{ER}(\rho^*) = \frac{3}{4} \frac{1}{3\pi^2} c^5 m_e^4 \frac{1}{\hbar^3} = 2.5 \epsilon_{NR}(\rho^*) \tag{12.22}$$

Poiché

$$\frac{\epsilon_{NR}}{\epsilon_{ER}} \propto \rho^{1/3} \quad \text{per } \hat{\rho} = (2.5)^3 \rho^* \quad \epsilon_{ER} = \epsilon_{NR}$$

In realtà il raccordo fra i due andamenti asintotici sarà rappresentato da una curva passante sotto le due semirette asintotiche: infatti l'approssimazione $E_{cin} \sim pc$ è in eccesso rispetto al vero valore relativistico.

Tutte queste considerazioni sono valide per $T = 0$; ed in questo caso è anche facile da ϵ_{cin} calcolare la pressione, moltiplicando per $2/3$ (caso N.R.) o per $1/3$ (caso E.R.) (si veda il Cap.8).

Se $T \neq 0$ il problema si complica, e sia ϵ_{cin} che P sono funzioni complesse di ρ e T ; il contributo della degenerazione elettronica è comunque, a differenza degli effetti coulombiani, sempre positivo a ϵ_{cin} e a P . Nei calcoli reali di modelli stellari tale contributo è generalmente tenuto in conto tramite opportune tabelle numeriche.

12.5 Le nane bianche.

L'esaurimento delle ultime fonti di energia nucleare porta le stelle a collassare verso densità sempre più alte, prima riscaldandosi e poi, via via che il calore in eccesso viene riemesso, raffreddandosi e diventando sempre meno luminose, mentre il gas, la cui pressione le tiene in equilibrio, diviene completamente degenere. Si hanno così le cosiddette *nane bianche* (e poi, quando sono completamente fredde, *le nane nere*).

Studiamo ora l'equilibrio di una nana bianca sulla base di alcune ipotesi semplificatrici:

- la pressione è dovuta esclusivamente ad un gas di elettroni completamente degenere.
- il gas elettronico è dovunque non relativistico (N.R.) o estremo-relativistico (E.R.)
- si trascurano effetti coulombiani ed altre complicazioni.

Se queste ipotesi sono verificate, l'equazione di stato ha la forma:

$$P = C\rho^\gamma = C\rho^{1+\frac{1}{n}} \quad (12.23)$$

con $\gamma = 5/3$ (N.R.) o $\gamma = 4/3$ (E.R.).

Si ha in sostanza una politropica. Ricordiamo che, per strutture politropiche,

$$M \propto C^{3/2} \rho_c^{\frac{3-n}{2n}} \quad (12.24)$$

dove ρ_c è la densità centrale.

Si ha allora, nel caso N.R., $n = 3/2$

$$M \propto \rho_c^{1/2}$$

ossia

$$\rho_c \propto M^2 \quad (12.25)$$

mentre nel caso E.R. (valido per grandi densità)

$$M = \text{cost} \quad (12.26)$$

Data la massa, la densità centrale aumenta con M^2 fino all'instaurarsi del regime E.R.; a quel regime una ed una sola massa è all'equilibrio, che è anche la massima che può essere sorretta dalla pressione degli elettroni degeneri. Tale massa prende il nome di massa di Chandasekhar (M_{Cha} e vale circa $1.4M_\odot$ per $\mu_e = 2$ (vale a dire per puro elio, o carbonio...)).

Calcoliamo esplicitamente le (12.25) e (12.26) in un caso ulteriormente semplificato, in cui usiamo per l'equilibrio il teorema del viriale ammettendo che sia $\rho(r) = \text{cost}$.

L'ipotesi è rozza, ed i conseguenti risultati numerici inesatti; nondimeno saranno interessanti le dipendenze da alcune costanti fisiche (p.es. m_e) e da μ_e . Il teorema del viriale ci dice che:

$$2 \int \epsilon_{cin} dV = \frac{3}{5} \frac{GM^2}{R} = \frac{3}{5} G \left(\frac{4}{3} \pi \right)^{1/3} M^{5/3} \rho^{1/3} \quad (12.27)$$

Nel caso N.R., alla luce della (12.17), si ha:

$$2 \int \epsilon_{cin} dV = \frac{3}{5} (3\pi^2)^{2/3} \frac{\hbar^2}{m_e} \left(\frac{1}{\mu_e m_p} \right)^{5/3} M \rho^{2/3} \quad (12.28)$$

(si ricordi che $\int \rho dV = M$); mentre nel caso E.R., dalla (12.18) si ottiene:

$$2 \int \epsilon_{cin} dV = \frac{3}{2} c\hbar (3\pi^2)^{1/3} \left(\frac{1}{\mu_e m_p} \right)^{4/3} M \rho^{1/3} \quad (12.29)$$

La (12.28), con la (12.27), ci dà la relazione ρ/M del caso N.R.:

$$\rho = \frac{4}{27\pi^3} G^3 \frac{(\mu_e m_p)^5 m_e^3}{\hbar^6} M^2 \quad (12.30)$$

mentre la (12.29) e la (12.27) ci danno:

$$M = \left(\frac{5}{2} \right)^{3/2} \left(\frac{c\hbar}{G} \right)^{3/2} \frac{3}{2\sqrt{\pi}} \frac{1}{\mu_e^2 m_p^2} \sim M_{Cha} \quad (12.31)$$

I calcoli condotti rigorosamente, risolvendo l'equazione di Lane-Emden, modificano i coefficienti numerici nelle (12.30) e (12.31) (qui ora ρ diventa la densità centrale ρ_c) ma non la dipendenza analitica dalle varie costanti fisiche e dal parametro μ_e .

Notiamo infine che per $\mu_e = 1$ $M_{Cha} \sim 5.7 M_\odot$; tale risultato non è interessante in quanto una stella di tale massa evolve nuclearmente ben prima della fase degenerare ed esaurisce gran parte dell'idrogeno.

12.6 Le stelle di neutroni.

Quando la massa supera M_{Cha} non esistono soluzioni di equilibrio; ma già per masse leggermente minori la densità di equilibrio è così grande da dar luogo a processi fisici che cambiano la situazione; si va verso modelli stellari estremamente strani, gli stessi che ci permettono di interpretare quello che rimane dopo un'esplosione di supernova.

Il processo fisico più importante in questa fase è la *neutronizzazione* della materia.

In normali condizioni di laboratorio un neutrone libero decade in media in circa dieci minuti secondo la reazione:



Infatti essendo $m_n > m_p + m_e$ ($m_\nu \simeq 0$) la reazione è energeticamente possibile ed esiste una probabilità non nulla che avvenga; la reazione inversa invece non è, in condizioni di laboratorio, possibile: il gap di energia è di quasi un *Mev*, e richiederebbe quindi alte temperature ($1 \text{ Mev} \simeq 10^{10} K$).

Se la densità è grande l'elettrone non può però nascere a energia cinetica nulla, ma deve avere impulso $> p_F$ e l'energia corrispondente. La condizione perché la (12.32) sia possibile sarà:

$$m_n c^2 > m_p c^2 + \sqrt{m_e^2 c^4 + p_F^2 c^2} \quad (12.33)$$

reazione	$\rho > (g/cm^3)$
${}^3_2He \rightarrow T$	$2.8 \cdot 10^4$
$H \rightarrow n$	$2 \cdot 10^7$
${}^{56}_{26}Fe \rightarrow {}^{56}_{24}Cr$	10^9
${}^{12}_6C \rightarrow {}^{11}_5B + n$	$4.5 \cdot 10^{10}$
${}^4_2He \rightarrow 4n$	$1.3 \cdot 10^{11}$

Tabella 12.1: Reazioni picnonucleari.

Essendo $m_n - m_p \sim 2.5m_e$ il decadimento del neutrone sarà possibile solo quando

$$\sqrt{m_e^2 c^4 + p_F^2 c^2} \leq 2.5m_e c^2$$

essendo per la definizione di ρ^* (cfr. il precedente par.4) $p_F = m_e c (\rho/\rho^*)^{1/3}$ si ha:

$$\sqrt{1 + (\rho/\rho^*)^{2/3}} \leq 2.5 \quad (12.34)$$

ossia

$$\rho < \rho_N \sim 10\rho^* \sim 2 \cdot 10^7 g/cm^3 \quad (12.35)$$

Per $\rho > \rho_N$ non sarà più possibile il decadimento del neutrone, mentre diventerà attiva la reazione inversa, di *neutronizzazione*:



In generale nella stella saranno presenti anche nuclei pesanti; in conseguenza delle precedenti considerazioni la curva di stabilità (v. Cap. 14) si sposterà verso l'alto.

In queste condizioni potrà anche non essere il ferro il nucleo più legato; ad altissima densità ($4 \cdot 10^{11} g/cm^3$) saranno energeticamente favoriti i neutroni singoli; avremo reazioni diverse dovute alla aumentata densità elettronica ("reazioni picnonucleari"), quali quelle elencate a titolo d'esempio nella Tabella 12.1.

In sintesi avremo una progressiva trasformazione del gas normale in un gas di neutroni. Le varie transizioni corrispondenti alle reazioni picnonucleari avverranno alle corrispondenti densità di soglia. La transizione avverrà tipicamente a P costante mentre ρ aumenta; la $P(\rho)$ avrà dei "terrazzi" che corrisponderanno a configurazioni instabili; in generale la massa per cui è possibile l'equilibrio sarà minore -a data ρ - e diminuirà anche M_{Cha} . La fig. 12.2 rappresenta un tipico andamento della massima massa M che sta in equilibrio a diverse densità, nell'ipotesi di degenerazione totale: $M(\rho)$; le densità per cui $dM/d\rho < 0$ corrispondono a fasi di contrazione per stelle che abbiano raggiunto quella fase evolutiva a $T \simeq 0$.

Notiamo che per grandi densità il termine prevalente della pressione diventerà quello dei neutroni degeneri; se abbiamo Θ elettroni degeneri E.R. per ogni neutrone degenero N.R., avremo in sostanza:

$$\xi \equiv \frac{P_n}{P_{el}} = \frac{\frac{2}{3}E_n}{\frac{1}{3}\Theta E_{el}} = \frac{p_{Fn}^2/3m_n}{\frac{1}{3}\Theta p_{Fel}c}$$

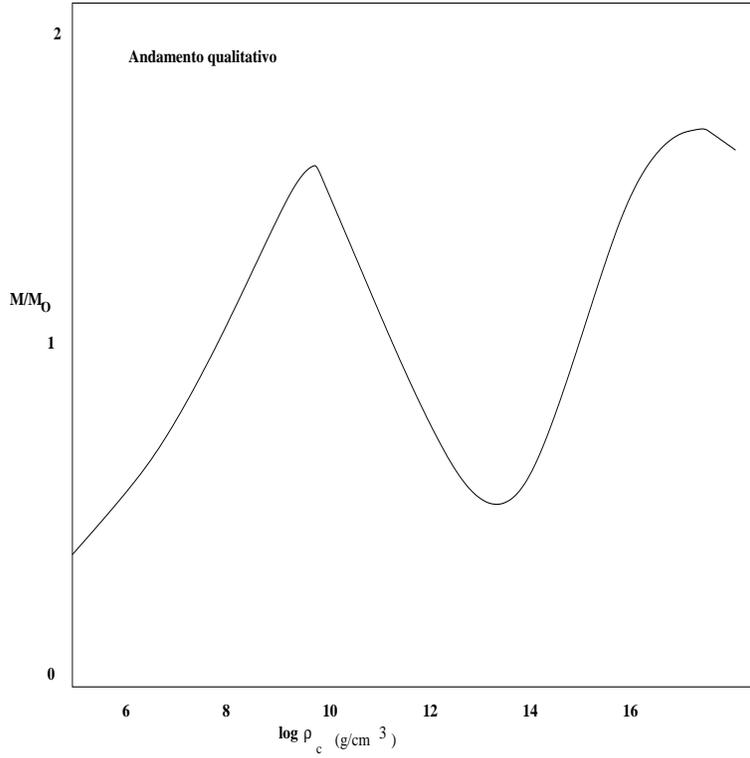


Figura 12.2: Tipico andamento della funzione $M(\rho)$ discussa nel testo.

$$\begin{aligned}
 &= \frac{(3\pi^2)^{2/3} n_n^{2/3} \hbar^2}{3m_n} \frac{3}{\Theta (3\pi^2)^{1/3} \Theta^{1/3} n_n^{1/3} \hbar c} = \\
 &= (3\pi^2)^{1/3} \frac{n_n^{1/3} \hbar}{m_n c \Theta^{4/3}} = \Theta^{-4/3} \frac{p_{Fn}}{m_n c}
 \end{aligned} \tag{12.37}$$

A $\Theta \sim 1$ si ha $\xi \sim 1$ per $p_{Fn} = m_n c$ e questo avviene per $\rho \sim \rho^* \left(\frac{m_n}{m_e}\right)^3 \sim 10^{15} g/cm^3$; ma già per $\Theta \sim 0.1$ la densità di transizione scende di circa 4 ordini di grandezza.

Possiamo quindi studiare, per densità nettamente superiori a $10^{10} g/cm^3$, un modello approssimato di *stella di neutroni*, tenendo in conto solo la pressione dei neutroni degeneri.

Il modello, precedentemente studiato, di nana bianca (WD = *white dwarf*, così come NS = *neutron star*) può essere riutilizzato con un opportuno scaling:

$$\left\{ \begin{array}{l} m_e \longrightarrow m_n \\ \mu_{WD} \longrightarrow \mu_{NS} \\ = 2 \qquad \qquad = 1 \end{array} \right\} \tag{12.38}$$

In regime N.R. si ha:

$$\begin{aligned}
 \rho^{NS}(M) &= \rho^{WD}(M) \left(\frac{m_n}{m_e}\right)^3 \left(\frac{\mu_{NS}}{\mu_{WD}}\right)^5 \simeq \\
 &\simeq 2.5 \cdot 10^8 \rho^{WD}(M)
 \end{aligned} \tag{12.39}$$

In regime E.R, si ha infine:

$$M_{Cha}^{NS} = M_{cha} \left(\frac{\mu_{WD}}{\mu_{NS}} \right)^2 = 4M_{cha} \sim 5.7M_{\odot} \quad (12.40)$$

Le stelle di massa $M < M_{Cha}^{NS}$ si collocano ad un livello di densità:

$$\rho^{NS}(M) \sim 2.5 \cdot 10^{14} \left(\frac{M}{M_{\odot}} \right)^2 g/cm^3 \quad (12.41)$$

Le stelle di massa superiore collassano indefinitamente, divenendo *black-holes* (buchi neri). Un black hole è definito dalla relazione massa-raggio

$$\frac{2GM}{r_S c^2} = 1 \quad (12.42)$$

dove r_S è detto *raggio di Schwarzschild*, e coincide con la distanza dal centro di una massa per la quale la velocità di fuga, calcolata classicamente, è uguale a c .

La (12.42) può anche essere scritta come una relazione ρ - M :

$$\rho_{crit} \sim 2 \cdot 10^{16} \left(\frac{M_{\odot}}{M} \right)^2 g/cm^3 \quad (12.43)$$

che ci conferma come per masse stellari il collasso relativistico avvenga a densità estremamente grandi; notiamo però che ciò non è vero per masse di altro ordine di grandezza; per una massa da nucleo galattico ($10^9 M_{\odot}$, p. es.) ρ_{crit} scende a valori relativamente modesti ($10^{-2} g/cm^3$).

Nella realtà il collasso finale non è limitato ad oggetti con massa di oltre $5M_{\odot}$ nella nostra derivazione abbiamo trascurato, oltre agli effetti relativistici, il fatto non secondario che i neutroni, a densità paragonabili a quelle dei nuclei atomici ($\sim 10^{14} g/cm^3$) sono fortemente interagenti. La massa critica diminuisce in misura dipendente dal modello fisico adottato; recenti calcoli sembrano ricondurre la massa critica delle NS a valori (casualmente) molto vicini alla M_{Cha} delle nane bianche di elio.

12.7 Equazioni di stato in casi di ionizzazione parziale.

Il problema della ionizzazione si inquadra nel generale problema dell'equilibrio di una reazione



(nel caso della ionizzazione dell'idrogeno $A \equiv H$, $B = p$, $C = e$; se la massa di A è minore della somma di B e C la grandezza

$$I = c^2(m_B + m_C - m_A) \quad (12.45)$$

prende il nome di *potenziale di ionizzazione*.

L'equilibrio statistico è espresso dall'uguaglianza dei potenziali chimici ai due lati della 12.44:

$$\eta_A = \eta_B + \eta_C \quad (12.46)$$

e la densità numerica delle particelle n_j è data, secondo i principi della meccanica statistica, in termini di una funzione di distribuzione h che dipende dalla statistica (di Boltzmann, o quantistiche):

$$n_j(T, \eta_j) = \frac{1}{(2\pi\hbar)^3} \int d^3p_j h\left(\frac{E_j - \eta_j}{T}\right) \quad (12.47)$$

dove E_j e p_j sono energia e impulso della particella.

Se le particelle hanno diversi stati di eccitazione l , con potenziali

$$\phi_{j,l} = E_{j,l} - E_{j,o} \quad (12.48)$$

risulta essere

$$E_j = m_j c^2 + \frac{p_j^2}{2m_j} + \phi_{j,l} \quad (12.49)$$

(nell'ipotesi N.R.), otteniamo infine:

$$n_j = \sum_l n_{j,l} = \sum_l \int \frac{d^3p_j}{(2\pi\hbar)^3} h\left[\frac{m_j c^2 + p_j^2/2m_j + \phi_{j,l} - \eta_j}{T}\right] \quad (12.50)$$

Data T , la (11.46) ci permette di calcolare la densità numerica di una particella in funzione delle altre due. Se si ha una legge di conservazione della carica allora resta libera una sola densità numerica. E' poi possibile definire un unico parametro adimensionale (grado di avanzamento della reazione) funzione solo delle condizioni fisiche locali (densità e temperatura). Per particelle non degeneri e N.R. si applica la statistica di Boltzmann, per cui:

$$n_j = \frac{1}{\hbar^3} e^{\eta_j/kT} D_j(T) \left(\frac{m_j kT}{4\pi}\right)^{3/2} e^{-m_j c^2/kT} \quad (12.51)$$

dove

$$D_j(T) = \sum_l g_l e^{-\phi_{j,l}/kT} \quad (12.52)$$

e g_l è il peso statistico del livello l -esimo.

Si ottiene:

$$\frac{n_B n_C}{n_A} = \frac{1}{\hbar^3} \frac{D_B(T) D_C(T)}{D_A(T)} \left(\frac{m_B m_C}{m_A} \cdot \frac{KT}{4\pi}\right)^{3/2} e^{-I/kT} \quad (12.53)$$

Definendo, per la ionizzazione dell'idrogeno (puro)

$$\left\{ \begin{array}{l} m_B = m_p \sim m_A = m_H \quad m_C = m_e \\ n_B = n_C = Xn \\ n_A = (1 - X)n \\ n = \frac{\rho}{m_p} \end{array} \right\} \quad (12.54)$$

Si può scrivere l'equazione di Saha:

$$\frac{x^2}{1-x} = \frac{m_p}{\rho \hbar^3} f(T) \left(\frac{m_e kT}{4\pi} \right)^{3/2} e^{-I/kT} \quad (12.55)$$

con

$$I \equiv Ry = 13.6 \text{ eV}$$

Il calcolo dettagliato di x passa attraverso la valutazione della f , rapporto fra le funzioni di partizione, complicato dalla presenza di livelli eccitati nell'atomo. Notiamo che una trattazione "naive" del problema condurrebbe ad un assurdo; è infatti:

$$\begin{aligned} D_H(T) &> \sum_l e^{-\phi_{H,l}/kT} = \sum_l e^{-Ry(1-\frac{1}{l^2})/kT} = e^{-\frac{Ry}{kT}} \sum_l e^{\frac{Ry}{l^2 kT}} \\ &> e^{-\frac{Ry}{kT}} \sum_l l > +\infty \end{aligned} \quad (12.56)$$

Il problema viene risolto tenendo conto del confondersi dei livelli più alti nel continuo specie in presenza di notevole densità di materie e quindi di alta pressione. La f è quindi una $f(T, \rho)$ che può essere calcolata con raffinate tecniche e che comunque cresce molto, facendo crescere x , per alte pressioni. In questo caso si parla di *ionizzazione da pressione*. Per pressioni più moderate il grado di ionizzazione dipende essenzialmente da T , per $I/kT \gg 1$ l'esponenziale taglia la ionizzazione; quando I/kT diventa più piccolo (anche dell'ordine di alcune decine, ossia per $T \sim 5000 \div 10000 \text{ K}$) x diventa considerevole e passa rapidamente a 1 all'aumentare della temperatura.

Il calcolo dei fenomeni di dissociazione molecolare, di ionizzazioni successive per atomi più pesanti dell'idrogeno, di equilibri simultanei per più componenti, ecc., può essere fatto seguendo le medesime linee, ma ovviamente con maggiori complicazioni.

Durante il processo di ionizzazione l'energia interna acquisita mediante la compressione va in gran parte ad aumentare x più che T ; tenendo conto che ogni elettrone aggiunto "costa" (almeno nel caso dell'idrogeno) $13.6 \text{ eV} \sim 150000 \text{ K}$ e "rende" in aumentata pressione in relazione alla temperatura dell'ambiente (~ 20 volte meno) non è difficile immaginarsi una decisa diminuzione degli indici adiabatici dai valori normali ($5/3$) verso l'unità o poco più (comunque sotto il valore di $4/3$ critico per l'instabilità; anche l'instabilità convettiva è facilitata).

Le zone di ionizzazione parziale nella regione atmosferica delle stelle ($T \sim 10^3 \div 10^4 \text{ K}$) hanno una notevole importanza in relazione al mantenimento dei fenomeni di pulsazione.

Capitolo 13

L'opacità e la formazione di righe.

13.1 Principali meccanismi di opacità; la media di Roseland.

I meccanismi di opacità estraggono fotoni dal flusso uscente rendendo più isotropo il campo di radiazione; ai fini della diminuzione del numero di fotoni di una data frequenza uscenti conterranno sia i meccanismi di assorbimento sia quelli di diffusione.

Essendo $k\rho$ l'inverso del libero cammino medio ossia la probabilità di assorbimento o scattering per unità di percorso, è chiaro che, una volta identificati i vari processi che contribuiscono all'opacità, la probabilità ossia l'opacità totale saranno ottenute sommando i vari contributi:

$$k = \sum_i k_i \quad (13.1)$$

Almeno per quanto riguarda le condizioni tipiche di un interno stellare, i principali meccanismi di interazione radiazione materia sono:

1. scattering elettronico (fig. 13.1): diffusione dei fotoni da parte degli elettroni liberi presenti nel plasma stellare
2. processi free-free (o *antibremmsstrahlung*): assorbimento di un fotone da parte di un elettrone libero ma interagente con un campo elettrico esterno (p.e. nucleo; v. Fig. 13.2). Il processo di assorbimento di un fotone non può avvenire da parte di un elettrone non interagente, per ragioni evidenti: infatti nel sistema in cui l'elettrone è inizialmente a riposo le leggi di conservazione di quantità di moto ed energia darebbero in questo caso:

$$\left\{ \begin{array}{l} h\nu = \frac{1}{2}m_e v_{ef}^2 \\ \frac{h\nu}{c} = m_e v_{ef} \end{array} \right\} \rightarrow v_{ef} = 2c \quad (13.2)$$

3. processi bound-free (fotoionizzazione): assorbimento di un fotone da parte di un elettrone legato che diventa libero.
4. processi bound-bound: assorbimento di un fotone da parte di un elettrone legato che passa ad un livello eccitato di energia superiore.

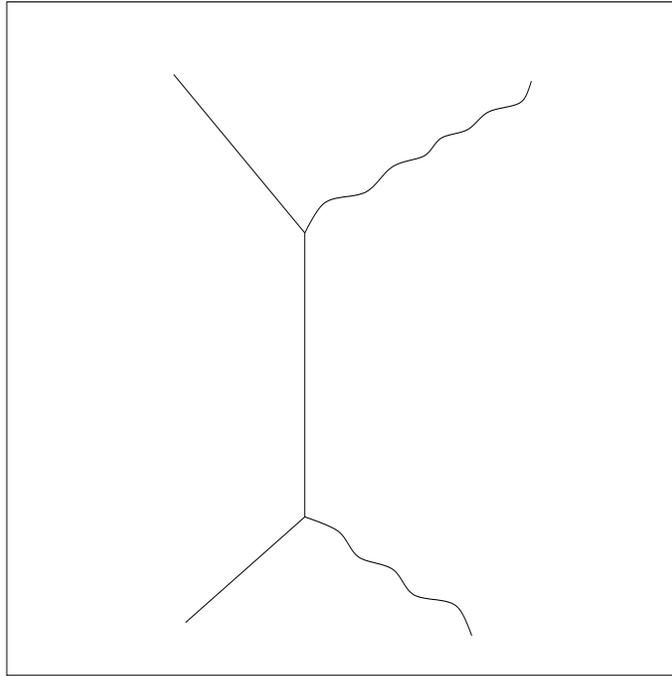


Figura 13.1: Il cosiddetto *diagramma di Feynman* relativo allo scattering elettronico.

Prima di passare ad analizzare in maggior dettaglio questi processi, dedichiamo attenzione al problema di come mediare correttamente k fra le varie frequenze. A suo tempo abbiamo posto, per un k “medio” dato:

$$\frac{dP_r}{dr} = -\frac{k_r \rho}{c} F_{rad} \quad (13.3)$$

Ma l’equazione che sappiamo realmente scrivere è quella per un flusso monocromatico:

$$\frac{1}{k(\nu)} \frac{dP_r(\nu)}{dr} = -\frac{\rho}{c} F_{rad}(\nu) \quad (13.4)$$

Essendo

$$P(\nu) = \frac{1}{3} E(\nu) \quad (13.5)$$

si ha

$$\frac{\rho}{c} F = \frac{\rho}{c} \int_0^\infty F(\nu) d\nu = -\frac{1}{3} \int_0^\infty \frac{1}{k(\nu)} \frac{dE(\nu)}{dr} d\nu \quad (13.6)$$

Essendo

$$\frac{dE}{dr} = \int_0^\infty \frac{dE(\nu)}{dr} d\nu \quad (13.7)$$

e definendo

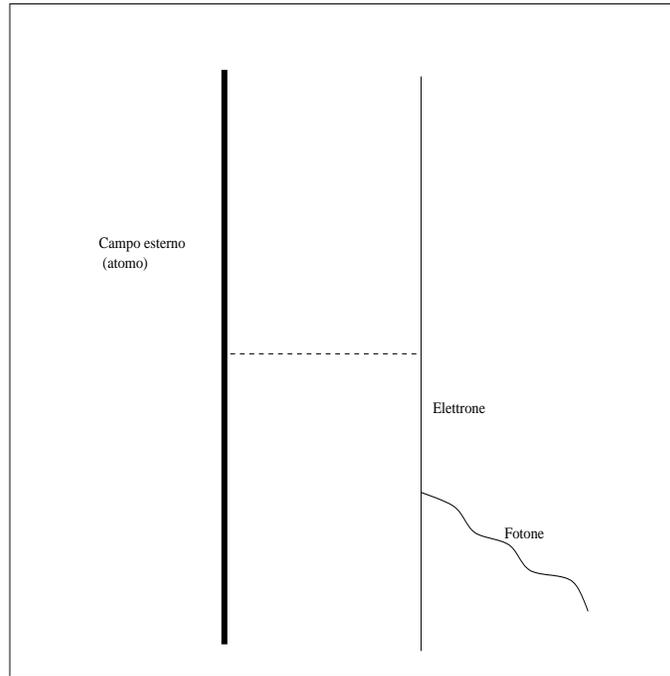


Figura 13.2: Diagramma relativo al processo di antibremsstrahlung.

$$\frac{1}{\bar{k}} = \frac{\int_0^\infty \frac{1}{k(\nu)} \frac{dE(\nu)}{dr} d\nu}{\int_0^\infty \frac{dE(\nu)}{dr} d\nu} \quad (13.8)$$

possiamo porre:

$$F = -\frac{c}{3\rho} \frac{1}{\bar{k}} \frac{dE}{dr} = -\frac{c}{\rho} \frac{1}{\bar{k}} \frac{dP_r}{dr} \quad (13.9)$$

Nell'ipotesi di equilibrio termodinamico:

$$\frac{dE(\nu)}{dr} = \frac{d}{dr} B(\nu, T) = \frac{dB(\nu, T)}{dT} \frac{dT}{dr} \quad (13.10)$$

ed allora

$$\frac{1}{\bar{k}} = \frac{\int_0^\infty \frac{1}{k(\nu)} \frac{d}{dT} B(\nu, T) d\nu}{\frac{dB(\nu, T)}{dT} d\nu} \quad (13.11)$$

\bar{k} così calcolato prende il nome di *media di Rosseland*.

Si noti che nel calcolo di k si deve anche tener conto della correzione per *emissione stimolata*.

13.2 Scattering, processi b-f e f-f.

Passiamo ora ad esaminare i processi che causano opacità.

13.2.1 Lo scattering.

Nella sua più generale formulazione (relativistica, anelastica) prende il nome di effetto Compton; al limite N.R. e classico prende il nome di effetto Thompson e può essere studiato in modo molto semplice.

Si abbia un elettrone a riposo in un campo sinusoidale:

$$E = E_0 \sin \omega t \quad (13.12)$$

Sull'elettrone agisce una forza eE ; si ha quindi:

$$\frac{dv_e}{dt} = \frac{1}{m_e} eE = \frac{eE_0}{m_e} \sin \omega t \quad (13.13)$$

L'elettrone accelerato irraggia una potenza W :

$$W = \frac{2}{3} \frac{e^2}{c^3} \left(\frac{dv_e}{dt} \right)^2 = \frac{2}{3} \frac{e^4 E_0^2 \sin^2 \omega t}{m_e^2 c^3} \quad (13.14)$$

mentre la potenza trasportata per unità d'area dall'onda incidente è data dal vettore di Poynting:

$$|S| = \left| \frac{c}{4\pi} \vec{E} \times \vec{B} \right| = \frac{c^2}{4\pi} E_0^2 \sin^2 \omega t \quad (13.15)$$

La frazione $W/|S|$ è la sezione d'urto Thompson:

$$\sigma_T = \frac{W}{|S|} = \frac{8\pi}{3} \left[\frac{e^2}{m_e c^2} \right]^2 = .66 \cdot 10^{-24} \text{ cm}^2 \quad (13.16)$$

L'opacità per scattering è dovuta agli elettroni (per gli ioni la sezione d'urto è minore a causa del fattore m_e^{-2} che diventa m_i^{-2}); si ha:

$$\begin{aligned} k_s &= \frac{n_e \sigma_T}{\rho} = \frac{\sigma_T}{\mu_e m_p} = \frac{\sigma_T}{m_p} \left(X + \frac{Y+2}{2} \right) = \\ &= \frac{\sigma_T}{2m_p} (1+X) \sim .2(1+X) \text{ cm}^2/g \end{aligned} \quad (13.17)$$

13.2.2 Processi f-f e b-f.

Il calcolo dei processi f-f e b-f è assai complesso; si tratta in effetti di combinare gli effetti di vari atomi, in vari stati di ionizzazione, sia come sorgenti di campo esterno (f-f) sia come stato iniziale da cui parte la ionizzazione. Sulla base di questi calcoli si usavano in passato delle equazioni approssimate (dette formule di Kramer); per il processo f-f:

$$k_{ff} \sim 3.7 \cdot 10^{22} g_{ff} (X+Y)(1+X) \frac{\rho}{T^{3.5}} \text{ cm}^2/g \quad (13.18)$$

dove g_{ff} (per lo più dell'ordine dell'unità) prende il nome di *fattore di Gaunt* o "fattore ghiottina".

Analogamente per il processo b–f si ha l'espressione:

$$k_{bf} \sim 4.3 \cdot 10^{25} g_{bf} Z(1 + X) \frac{\rho}{T^{3.5}} \text{ cm}^2/\text{g} \quad (13.19)$$

Se Z non è troppo piccolo $k_{bf} > k_{ff}$; il comparire di Z è legato al fatto che nelle tipiche condizioni stellari H e He sono quasi completamente ionizzati.

Si noti che nel processo b–f deve valere la relazione

$$h\nu > I \quad (13.20)$$

dove I è il potenziale di ionizzazione dipendente dall'atomo e dall'eventuale stato eccitato dell'elettrone; k_{bf} in funzione di ν (o di λ) ha quindi un caratteristico andamento a picchi.

In anni più recenti tali trattazioni semianalitiche sono state completamente superate dalla tabulazione numerica.

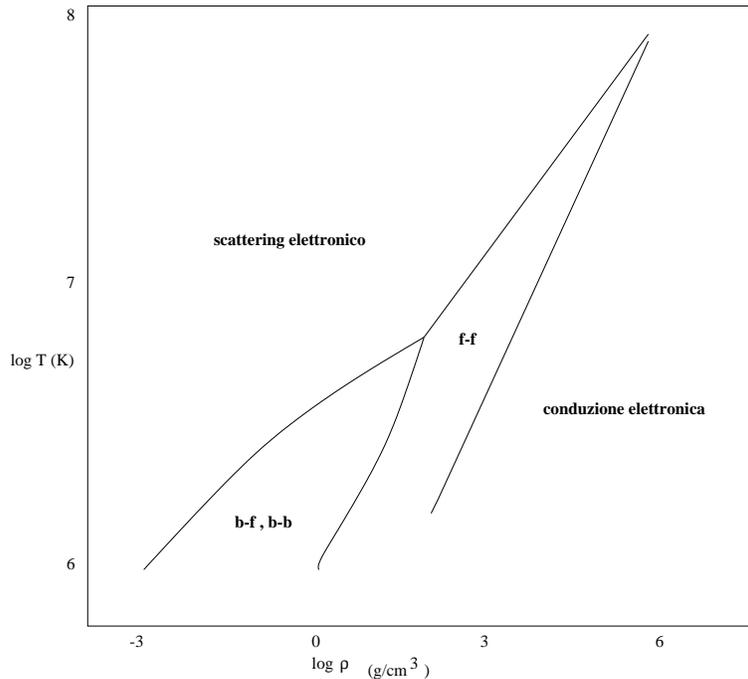


Figura 13.3: Adattata da Castellani, 1985, efficienza dei vari meccanismi di opacità al variare della densità ρ e della temperatura T .

13.3 Assorbimento b–b e formazione di righe.

L'assorbimento b–b è possibile solo intorno a certe frequenze caratteristiche della materia che compone la stella, quelle approssimativamente corrispondenti alle transizioni fra i diversi livelli degli atomi presenti; k_{bb} ha quindi un andamento irregolare, con picchi intorno alle frequenze caratteristiche.

Poiché si ha per l'intensità I_ν :

$$dI_\nu = I_\nu d\tau = -I_\nu k_\nu \rho dx \quad (13.21)$$

essendo k_{bb} dominante per le frequenze appropriate, lo spettro mostra a queste frequenze una intensità diminuita rispetto alle frequenze circostanti: si osservano delle *righe di assorbimento*; quando più righe si mescolano, come nel caso delle transizioni molecolari, si hanno delle strutture più complesse (*bande d'assorbimento*).

Discutiamo ora classicamente ed in modo semplificato il problema della formazione delle righe; la trattazione quantistica (più corretta) differisce nei risultati solo per l'introduzione di alcuni coefficienti moltiplicativi.

Trattiamo il sistema atomo-elettrone come un dipolo oscillante con frequenza propria ω_0 ($\frac{\hbar\omega_0}{2\pi} = E_i - E_f$) in presenza di un campo elettromagnetico esterno di frequenza ω , tenendo conto del frenaggio d'irraggiamento (v. ad es. Landau-Lifchitz, vol.II, eq.75.8), passando alla variabile complessa z di cui interessa la parte reale, scriviamo l'equazione del moto:

$$m_e \ddot{z} = \frac{2e^2}{3c^3} \ddot{z} - m_e \omega_0^2 z - eE_0 e^{i\omega t} \quad (13.22)$$

Le soluzioni della (13.22) presentano una parte smorzata che è la soluzione generale dell'equazione omogenea associata più una soluzione particolare non smorzata della forma:

$$z(t) = Ae^{i\omega t} \quad (13.23)$$

Sostituendo:

$$A = \frac{-eE_0}{m_e \left[\omega_0^2 - \omega^2 + i\omega^3 \frac{2e^2}{3m_e c^3} \right]} \quad (13.24)$$

Definiamo ora:

$$\gamma = \frac{2e^2 \omega^2}{3c^3 m_e} \quad (13.25)$$

che prende il nome di *larghezza naturale* ed è legata alla perdita di energia per unità di tempo (ricordiamo la relazione quantistica $\Delta E \Delta t \sim \hbar$).

Si ha allora:

$$A = \frac{-eE_0}{m_e [\omega_0^2 - \omega^2 + i\omega\gamma]} \quad (13.26)$$

A sarà grande quando $\omega \sim \omega_0$; in tal caso potremo approssimare:

$$\begin{aligned} A &= -\frac{eE_0}{m_e} \frac{1}{[(\omega + \omega_0)(\omega - \omega_0) + i\omega\gamma]} \sim -\frac{eE_0}{2m_e\omega_0} \frac{1}{\omega_0 - \omega + i\omega/2} = \\ &= -\frac{eE_0}{2m_e\omega_0} \frac{e^{i\phi}}{\sqrt{(\omega - \omega_0)^2 + \gamma^2/4}} \end{aligned} \quad (13.27)$$

ossia

$$x(t) = \text{Re}(z(t)) = -\frac{eE_0}{2m_e\omega_0} \frac{\cos(\omega t + \phi)}{\sqrt{(\omega - \omega_0)^2 + \gamma^2/4}} \quad (13.28)$$

Al solito:

$$\langle W \rangle = \frac{1}{3} \frac{e^2}{c^3} \ddot{x}^2 \propto \frac{1}{6} \frac{e^4}{m_e^2 c^3} \omega^2 E_0^2 \frac{1}{(\omega - \omega_0)^2 + \gamma^2/4} \quad (13.29)$$

$$\langle |S| \rangle = \frac{c^2}{8\pi} E_0^2 \quad (13.30)$$

per cui usando la (13.25) ed essendo $\sigma = \frac{\langle W \rangle}{\langle |S| \rangle}$, dove si considerano le medie temporali:

$$\sigma = \frac{\pi}{m_e c^2} \frac{\gamma}{(\omega - \omega_0)^2 + \gamma^2/4} = \frac{e^2}{m_e c^2} \frac{\gamma/4\pi}{(\nu - \nu_0)^2 + (\gamma/4\pi)^2} \quad (13.31)$$

e

$$k = \frac{\sigma n(\nu_0)}{\rho} \quad (13.32)$$

Definiamo ora la *semilarghezza della riga*:

$$\Delta\nu = |\nu_0 - \nu_{1/2}| \quad (13.33)$$

dove

$$\sigma(\nu_{1/2}) = \frac{1}{2} \sigma(\nu_0)$$

dalla (13.31) si ha:

$$\Delta\nu = \frac{\gamma}{4\pi} \quad (13.34)$$

In termini di λ

$$\Delta\lambda = \frac{c}{\nu^2} \Delta\nu = \frac{2\pi}{3} \frac{e^2}{m_e c^2} \sim 10^{-4} \text{ \AA} \quad (13.35)$$

La *larghezza naturale* di una riga, definita in termini di λ , non dipende dalla sua lunghezza d'onda. La trattazione quantistica porta ad un risultato simile, anche se cambiamo alcuni dati numerici.

13.4 Allargamento delle righe spettrali.

Una riga viene allargata anche per altri effetti; principalmente:

- a) l'allargamento Doppler, dovuto ai moti termici e turbolenti degli atomi. Lungo il raggio uscente gli atomi hanno una velocità distribuita gaussianamente

$$dn(v_e) \propto e^{-\frac{v_e^2}{\alpha}} dv_e \quad (13.36)$$

con

$$\alpha = \frac{2kT}{m} + v_{turb}^2 \quad (13.37)$$

La riga corrisponde ad una lunghezza d'onda diversa ($\Delta\lambda \sim \frac{v_e}{c}\lambda$) per ogni atomo. Per l'insieme degli atomi avremo una distribuzione di frequenze proprie; la $\sigma(\nu)$ avrà una forma del tipo:

$$\sigma(\nu) \propto \int d\nu^* e^{-A(\nu^* - \nu_0)^2} \frac{1}{(\nu - \nu^*)^2 + (\gamma/4\pi)^2} \quad (13.38)$$

Il profilo della riga, simile a $\sigma(\nu)$, dipenderà essenzialmente dalla *più larga* delle due curve, la “lorentziana” legata alla larghezza naturale e la gaussiana legata alla distribuzione delle velocità; quest'ultima è in generale più larga (per il Sole di circa un fattore 10^3 !).

- b) l'allargamento “da pressione”, dovuto alla vicinanza di altre particelle che perturbano i livelli atomici. Tale allargamento è soprattutto presente in atmosfere con alta P ; essendo $\frac{dP}{dr} = -g\rho$ alte pressioni sono anche legate ad alti valori di g ; stelle con alta g hanno righe larghe; nelle nane bianche l'osservazione delle righe è resa a volte impossibile.

13.5 Larghezza equivalente e curve di crescita.

L'analisi quantitativa degli spettri stellari passa attraverso la definizione della cosiddetta *larghezza equivalente* definita come la larghezza che avrebbe una riga corrispondente alla medesima sottrazione d'energia, ma con un profilo rettangolare e completamente nera:

$$W_\lambda = \int_{riga} d\lambda \left(1 - \frac{F(\lambda)}{F_{cont}(\lambda)} \right) \quad (13.39)$$

dove $F(\lambda)$ è il flusso reale e $F_{cont}(\lambda)$ è quello che si avrebbe in assenza della riga.

E'interessante studiare la relazione fra W_λ e l'abbondanza di assorbitori (curva di crescita).

La relazione presenta una prima fase lineare quando anche il centro della riga non è nero, una seconda più lenta quando il centro è saturo mentre all'aumento di W_λ contribuiscono le due ali, una terza di nuovo più rapida quando una grande abbondanza di assorbitori implica una alta pressione e quindi una riga allargata per pressione.

Le figg. 13.4 e 13.5 chiariscono il precedente discorso.

13.6 Rotazione ed effetto Doppler globale.

Dalle righe spettrali possono anche essere desunte informazioni relative alla rotazione della stella ed al suo moto radiale.

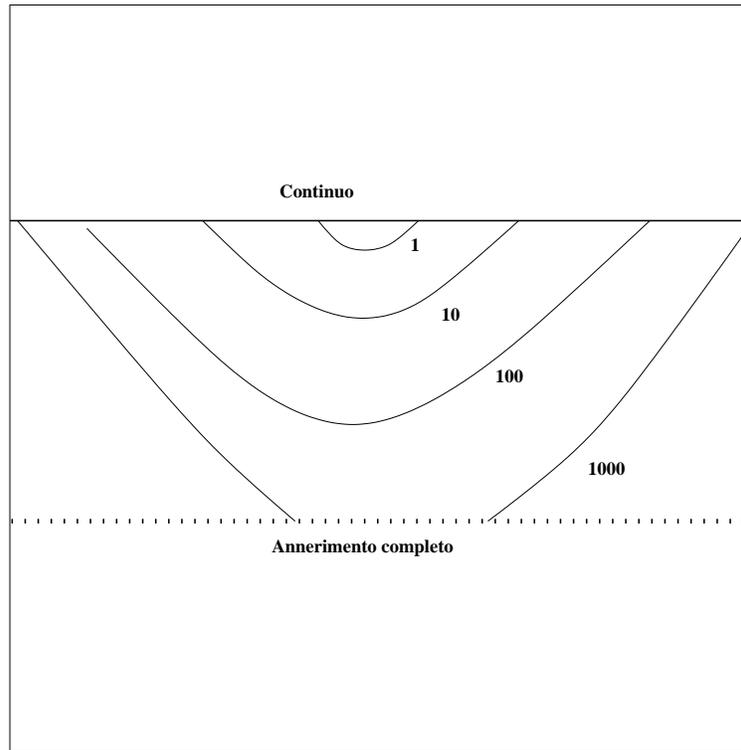


Figura 13.4: Saturazione progressiva di una riga all'aumentare della abbondanza di assorbitori (qualitativa).

13.6.1 La rotazione.

La rotazione causa un allargamento delle righe, per effetto Doppler di diverso segno nelle diverse zone della superficie (v. fig. 13.6)

Le righe provenienti dalle diverse zone sono spostate verso il rosso o verso il blu. L'allargamento sarà dell'ordine di:

$$\frac{\Delta\lambda}{\lambda} \sim \frac{\Delta v}{c} \sim 2 \frac{\omega R}{c} \quad (13.40)$$

Per stelle rapidamente rotanti (quelle dei primi tipi spettrali) ωR non è molto minore della velocità di fuga $v_f = \sqrt{\frac{2GM}{R}}$; v_f può essere anche 10^3 km/s ; Δ/λ può essere anche dell'ordine di 10^{-3} ossia nel visibile $\Delta\lambda$ (larghezza della riga) $\sim 10 \text{ \AA}$; per spettri a medio alta dispersione ($\sim 10 \text{ \AA/mm}$) le righe appaiono estremamente allargate; ciò rende difficile centrarle, misurarne il profilo, e vedere del tutto le righe più deboli. Si è infatti visto che le stelle dei primi tipi spettrali hanno spettri con poche righe.

13.6.2 Moto radiale.

Se la stella ha un moto radiale, le righe sono spostate verso il rosso o verso il blu, secondo la solita equazione

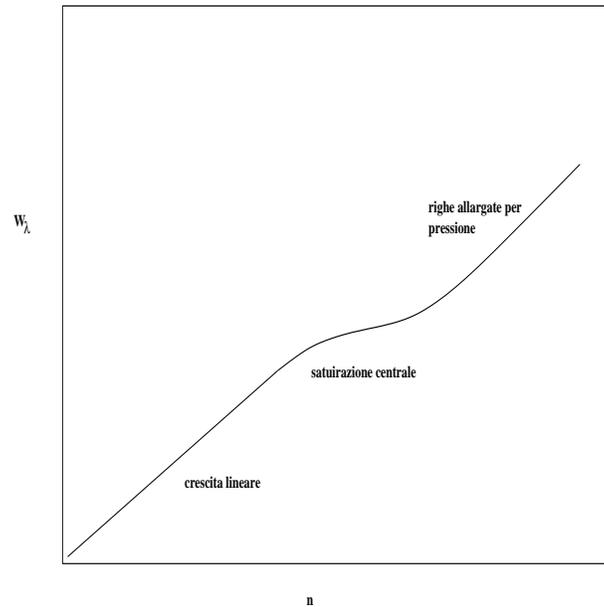


Figura 13.5: Curva di crescita W_λ in funzione della densità numerica di assorbitori (schematica).

$$\frac{\Delta\lambda}{\lambda} \sim \frac{v}{c} \quad (13.41)$$

Confrontando lo spettro con uno di laboratorio, ed identificando le corrispondenti frequenze, è possibile, mediante l'analisi di numerose righe di cui si riesce a stimare il centro (una rotazione veloce è causa di difficoltà difficilmente superabili), stimare la velocità radiale della stella:

$$v_{rad} = c \left\langle \frac{\Delta\lambda}{\lambda} \right\rangle_{\text{varie righe}} \quad (13.42)$$

Tale studio ci permette poi di riconoscere le *binarie spettroscopiche* ed anche alcuni tipi di stelle pulsanti, la cui atmosfera si contrae ed espande periodicamente.

Per oggetti extragalattici, la v_{rad} è dovuta principalmente alla legge di Hubble e può avvicinarsi a c , e la (13.41) va sostituita con l'equivalente relativistica; il riconoscimento delle righe, a lunghezze d'onda anche molto diverse, può essere molto difficile.

A varie dispersioni gli spettri stellari ci danno numerose informazioni:

- BASSA DISPERSIONE (10^2 \AA/mm) \rightarrow tipo spettrale.
- MEDIA DISPERSIONE ($10 \div 100 \text{ \AA/mm}$) $\rightarrow v_{rad}$, allargamento righe
 $\Rightarrow P, T$, righe peculiari.
- ALTA DISPERSIONE ($\leq 10 \text{ \AA/mm}$) $\rightarrow W_\lambda(n_\lambda)$; analisi quantitativa
 \Rightarrow ricostruzione dell'atmosfera.

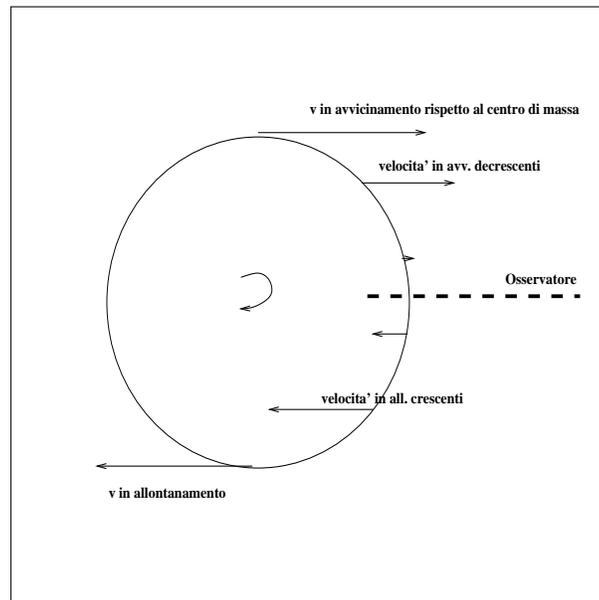


Figura 13.6: Effetto Doppler dovuto alla rotazione relativo alle diverse zone stellari

Capitolo 14

Produzione di energia.

14.1 Introduzione: ϵ_g e ϵ_ν .

Al bilancio energetico di una struttura autogravitante contribuiscono principalmente tre meccanismi, che intervengono nella definizione della funzione ϵ sopra citata:

- la produzione di energia per cambiamento della struttura (ϵ_g)
- l'assorbimento di energia che viene dispersa in neutrini (ϵ_ν)
- la produzione di energia per reazioni nucleari (ϵ_N).

In questo capitolo ci limiteremo a delineare molto sinteticamente il problema, rimandando per il secondo e il terzo meccanismo, i più importanti e complessi da un punto di vista fisico, ad un testo di astrofisica nucleare (v. p. es. Castellani, 1985). In realtà, nel complesso dell'evoluzione stellare (e a maggior ragione su scale maggiori) è il termine ϵ_g a produrre la maggior quantità di energia. Se pensiamo ad una struttura che nasce estremamente rarefatta ($R \rightarrow \infty$, $U \rightarrow 0$) e muore come stella di neutroni (se non come black hole), e quindi con $R < 10r_s$, $|U| \sim \frac{GM^2}{R} \sim 10^{-1} Mc^2$, possiamo concludere che tale struttura libera con tale meccanismo circa il 10% della sua energia di massa a riposo. Le reazioni nucleari nel loro complesso liberano al più 10 MeV/adrone , ossia circa l'1% dell'energia totale. Tuttavia la liberazione di energia gravitazionale è concentrata nelle fasi finali dell'evoluzione. Per lungo tempo prevale invece nettamente la produzione nucleare. In sintesi, ϵ_g comanda: nelle fasi iniziali, non nucleari (quando le reazioni di fusione non avvengono a causa della bassa temperatura), e nelle fasi finali (collasso finale), mentre in alcune fasi di transizione ha un ruolo importante; non esercita invece alcun ruolo rilevante nelle fasi di sequenza principale o in altre fasi importanti.

L'energia persa per produzione di neutrini, essendo questi prodotti nell'ambito delle reazioni nucleari, ed avendo gli stessi una sezione d'urto così piccola da farli liberamente sfuggire dalla stella (escluse alcune fasi durante il fenomeno SN), viene computata riducendo opportunamente quella prodotta nelle corrispondenti reazioni di fusione.

14.2 Produzione di energia nucleare.

La possibilità delle reazioni di fusione di produrre energia è legata al fatto che l'energia di legame per nucleone tende in media a crescere all'aumentare del peso atomico, almeno fino al ferro. Ne consegue che in una reazione di fusione



dove i pesi e i numeri atomici sono rispettivamente

$$\left\{ \begin{array}{l} A_B + A_C = A_D \\ Z_B + Z_C = Z_D \end{array} \right\} \quad (14.2)$$

si ha

$$\begin{aligned} m_B c^2 + m_C c^2 &= (A_B + A_C - Z_B - Z_C)m_n c^2 + (Z_B + Z_C)m_p c^2 + V_B A_B + V_C A_C = \\ &= (A_D - Z_D)m_n c^2 + Z_D m_p c^2 + V_B A_B + V_C (A_D - A_C) > \\ &> (A_D - Z_D)m_n c^2 + Z_D m_p c^2 + V_D A_D \end{aligned} \quad (14.3)$$

essendo V_B e V_C (negativi) maggiori (minori in valore assoluto) di V_D (V è l'energia di legame per nucleone).

La reazione è quindi esotermica almeno finché $|V_D| > |V_B|$ e $|V_D| > |V_C|$

La figura 14.1 rappresenta la *curva di stabilità* degli elementi, plottando Z in funzione di A . Gli elementi più stabili (e alcuni particolarmente importanti) sono rappresentati esplicitamente. La curva si sposta verso destra in presenza di elettroni fortemente degeneri. In figura sono anche rappresentati gli spostamenti dovuti a diversi tipi di reazione.

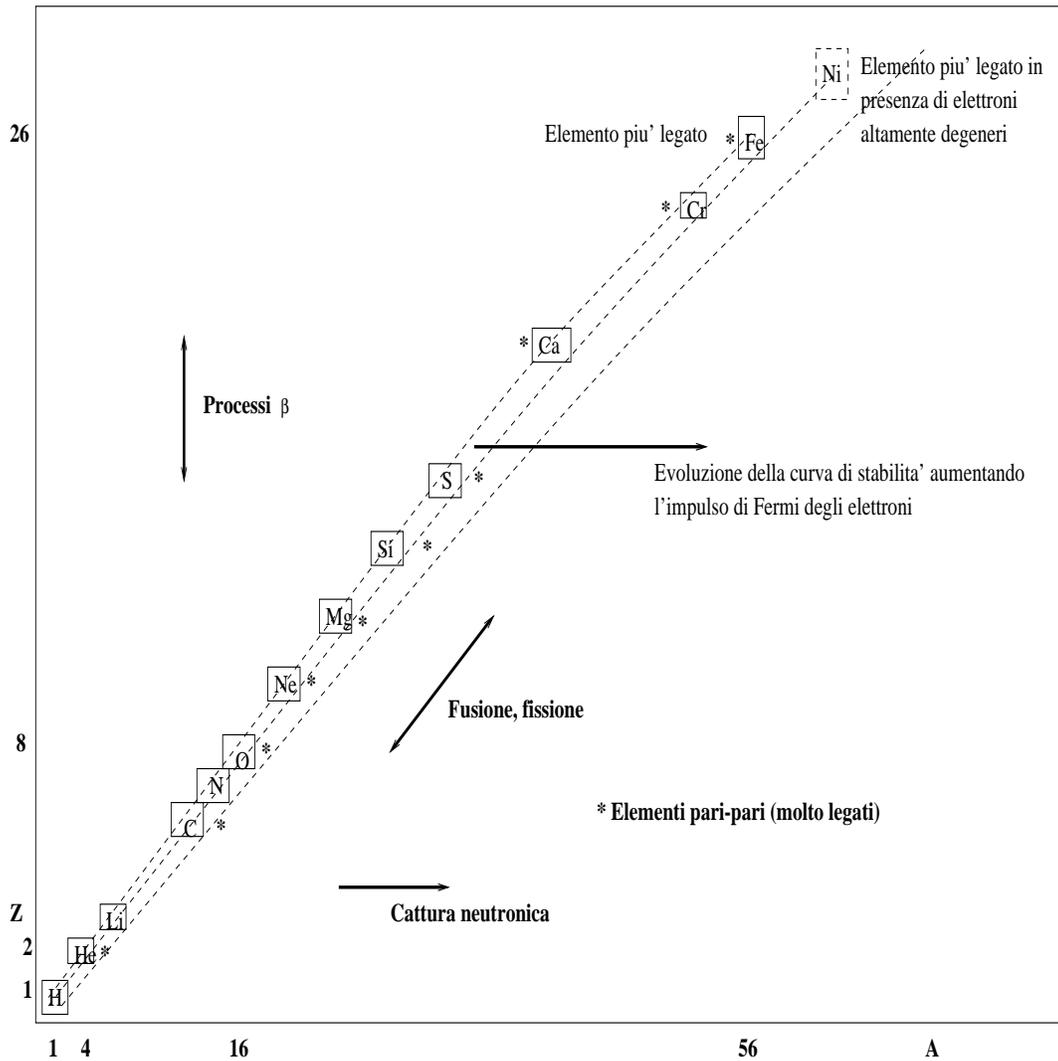


Figura 14.1: Plot Z–A degli elementi stabili; tra gli elementi più legati prevalgono i nuclei pari–pari. In presenza di elettroni degeneri l’elemento con la maggiore energia di legame per nucleone non è più Fe ma Ni.

Le reazioni di fusione non avvengono però a temperatura ambiente, a causa della barriera coulombiana che impedisce ai due nuclei, entrambi carichi positivamente, di avvicinarsi alla distanza ($1\text{fm} \sim 10^{-13}\text{cm}$) che permetterebbe loro di fondersi. L’energia coulombiana repulsiva, a questa distanza, è dell’ordine dei Mev, e richiederebbe quindi temperature dell’ordine dei 10^{10}K per un superamento diretto della barriera coulombiana.

In realtà le reazioni di fusione cominciano ad essere attive anche per temperature inferiori di circa tre ordini di grandezza, e ciò avviene per l’efficacia dell’effetto tunnel quantistico. Studiamo ora sommariamente le equazioni che permettono di analizzare le reazioni nucleari; la *velocità di reazione* (*reaction rate*) è definita come il numero di reazioni per unità di tempo e di volume:

$$r_{BC} = \int N(v)v\sigma(v)dv \quad (14.4)$$

dove v è la velocità relativa, $\sigma(v)$ è la sezione d'urto di reazione ($\sigma(v)v$ ha le dimensioni di un volume diviso un tempo) mentre $N(v)$ è la densità di reagenti con velocità relativa v ; se siamo in condizioni N.R. e non degeneri:

$$N(v) = 4\pi n_B n_C \left(\frac{m}{2\pi kT} \right)^{3/2} e^{-\frac{mv^2}{2kT}} v^2 \quad (14.5)$$

dove

$$m = \frac{m_B m_C}{m_B + m_C}$$

è la massa ridotta.

La (14.4) può anche essere scritta nella forma:

$$r_{BC} = n_B n_C \langle \sigma v \rangle \quad (14.6)$$

dove $\langle \sigma v \rangle$ è definita, sulla base delle 14.4 e 14.5, da:

$$\begin{aligned} \langle \sigma v \rangle &= 4\pi \left(\frac{m}{2\pi kT} \right)^{3/2} \int e^{-mv^2/2kT} \sigma(v) v^3 dv = \\ &= \left(\frac{8}{\pi m} \right)^{1/2} \frac{1}{(kT)^{3/2}} \int e^{-\frac{E}{kT}} E \sigma(E) dE \end{aligned} \quad (14.7)$$

Il problema è la valutazione di $\sigma(E)$. In realtà, a parte casi particolari (p.es. risonanze), la principale causa della dipendenza di $\sigma(E)$ da E è la differente probabilità dell'effetto tunnel a seconda dell'energia; ricordiamo che nelle zone energeticamente proibite la funzione d'onda ha un andamento esponenzialmente smorzato, e la rapidità di smorzamento dipende dall'altezza della barriera da superare (cfr. p.es. Landau Lifchitz, vol.3). È possibile dimostrare che la probabilità di effetto tunnel è data dall'espressione

$$W \sim e^{-bE^{-1/2}} \quad (14.8)$$

dove

$$b = \frac{\pi Z_B Z_C e^2 (2m)^{1/2}}{\hbar} \quad (14.9)$$

Si esprime spesso $\sigma(E)$ nella forma:

$$\sigma(E) = \frac{S(E)}{E} e^{-bE^{-1/2}} \quad (14.10)$$

dove $S(E)$ è una funzione di E con variazioni non troppo brusche.

La (14.7) può allora essere scritta nella forma:

$$\langle \sigma v \rangle = \left(\frac{8}{\pi m} \right)^{1/2} \frac{1}{(kT)^{3/2}} \int e^{-\frac{E}{kT}} e^{-bE^{-1/2}} S(E) dE \quad (14.11)$$

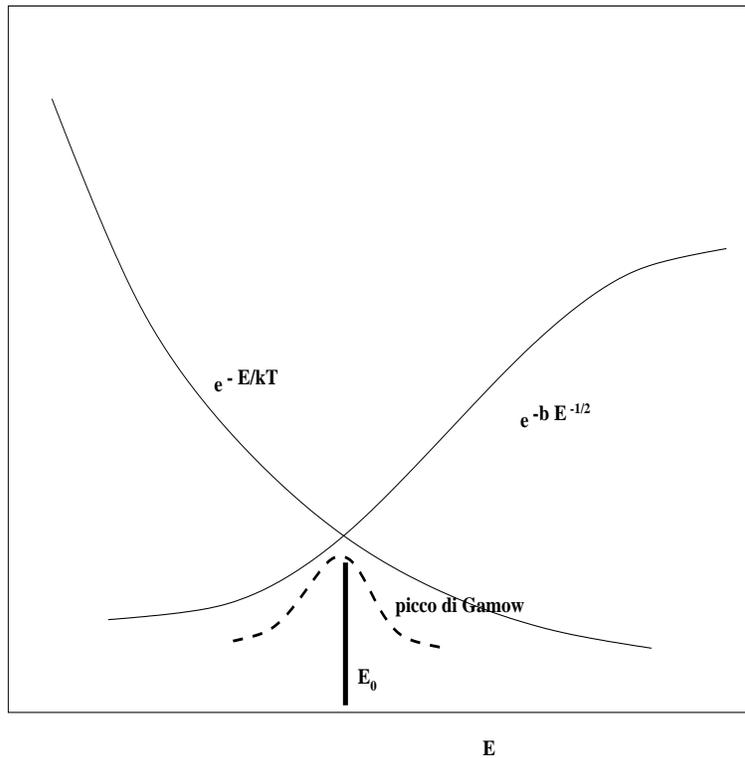


Figura 14.2: Dipendenza dei vari termini dalla energia e **picco di Gamow**

Nell'integrando della (14.11) compaiono due funzioni a moltiplicare, una fortemente crescente e una decrescente con E . L'integrale dipenderà essenzialmente da una zona intermedia di valori di E (il *picco di Gamow*); v. fig. 14.2

Il massimo della funzione sarà per un valore

$$E_0 = \left(\frac{bkT}{2} \right)^{2/3} \quad (14.12)$$

dipendente da b e quindi da Z_B e Z_C ; lo stesso varrà per l'integrale. La sezione d'urto dipende essenzialmente da un parametro in cui compare il prodotto:

$$\frac{A_B Z_B^2 A_C Z_C^2}{(A_B + A_C) T} \quad (14.13)$$

Variando Z dei reagenti un valore simile del prodotto (14.13), e quindi valori comparabili della sezione d'urto (il prodotto in questione compare all'esponente con il segno meno), viene raggiunto variando T ; passando da $z = 1$ a $z = 2$, T aumenta per esempio di circa un fattore 10. Le linee sopra enunciate di una teoria vanno ovviamente arricchite di numerose complicazioni, quali la presenza di risonanze, lo schermaggio dei nuclei da parte degli elettroni, ecc.; effetti che tendono ad aumentare la probabilità di reazione.

Nella pratica i *rates* delle principali reazioni di fusione sono tabulati per varie condizioni fisiche e i valori tabulati sono usati per l'integrazione dei modelli stellari.

14.3 Le principali reazioni nell'evoluzione stellare.

Le principali reazioni di cui parleremo permettono la progressiva nucleosintesi dell'idrogeno in elementi via via più pesanti. Il quadro è limitato alle reazioni essenziali per la produzione di energia. In generale tutti gli elementi, ad eccezione dell'elio, sono stati prodotti per una grandissima parte nei processi di nucleosintesi stellare.

$$H \longrightarrow He$$

<u>PP1</u>		E liberata (MeV)	Reazione
a)	$p + p \longrightarrow d + e^+ + \nu$ (due reazioni)	1.18×2	debole
b)	$p + d \longrightarrow He^3 + \gamma$ (due reazioni)	5.49×2	forte
c)	$He^3 + He^3 \longrightarrow He^4 + 2p$	12.86	forte

$$\Delta E \sim 26.2$$

$$\Delta E_\nu \sim .5 \tag{14.14}$$

La PP1a), essendo dovuta alle interazioni deboli, è di gran lunga la più lenta del ciclo; la scarsa abbondanza di deuterio prodotto limita la velocità di reazione complessiva. I protoni vengono consumati in tempi molto lunghi ($\sim 10^{10}$ anni).

<u>PP2</u>		E liberata (MeV)	Reazione
a)	$p + p \longrightarrow d + e^+ + \nu$	1.18	debole
b)	$p + d \longrightarrow He^3 + \gamma$	5.49	forte
c)	$He^3 + He^4 \longrightarrow Be^7 + \gamma$	1.59	forte
d)	$e^- + Be^7 \longrightarrow Li^7 + \nu$	0.06	debole
e)	$p + Li^7 \longrightarrow 2He^4$	17.34	forte

$$\Delta E \sim 25.7$$

$$\Delta E_\nu \sim 1 (\sim 4\%) \tag{14.15}$$

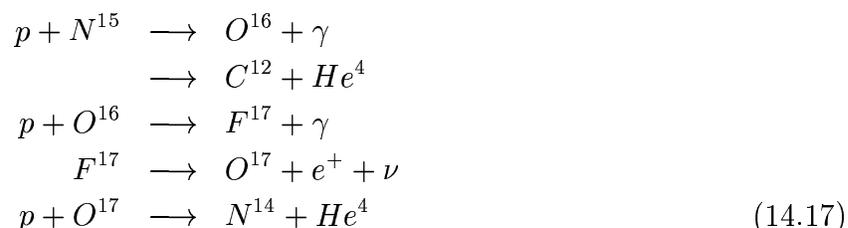
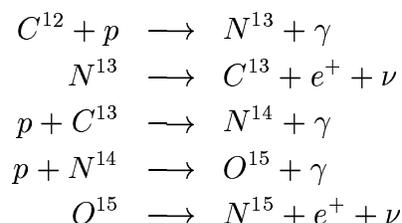
<u>PP3</u>		E liberata (MeV)	Reazione
a)	$p + p \longrightarrow d + e^+ + \nu$	1.18	debole
b)	$p + d \longrightarrow He^3 + \gamma$	5.49	forte
c)	$He^3 + He^4 \longrightarrow Be^7 + \gamma$	1.59	forte
d)	$p + Be^7 \longrightarrow B^8 + \gamma$	0.13	forte
e)	$B^8 \longrightarrow Be^8 + e^+ + \nu$	10.78	debole
f)	$Be^8 \longrightarrow 2He^4$	0.09	forte

$$\Delta E \sim 19.2$$

$$\Delta E_\nu \sim 7.5 (\sim 29\%) \tag{14.16}$$

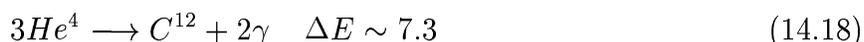
Queste due reazioni, coinvolgendo elementi più pesanti, diventano efficienti a temperature più alte; la PP3 è stata storicamente molto importante perché produce, al penultimo passo, neutrini energetici che sono i soli rilevabili con gli esperimenti possibili fino a non molti anni fa (quelli di Davis). I neutrini misurati erano sistematicamente meno di quelli previsti per un fattore > 2 . Anche misure più recenti, fatte per esempio al Gran sasso, con apparati più potenti e capaci di rilevare anche i neutrini delle altre reazioni, hanno confermato questa differenza fra teoria ed esperimenti, che viene oggi spiegato con l'ipotesi dell'*oscillazione* dei neutrini tra tipi diversi, a sua volta legata ad una massa diversa da zero.

CNO

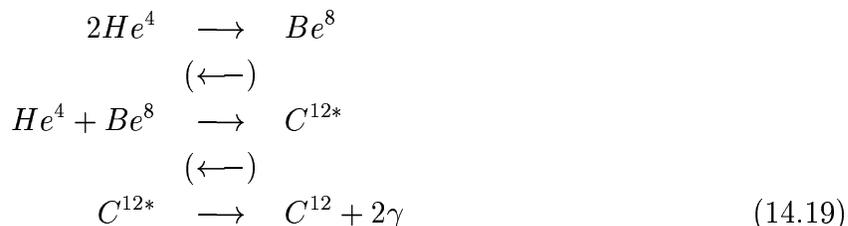


Il CNO ha importanza prevalente (avendo come reazioni deboli solo decadimenti di una particella) solo se l'abbondanza di elementi pesanti (C) è alta fin dall'inizio e se la temperatura è $> 25 \cdot 10^6 K$.

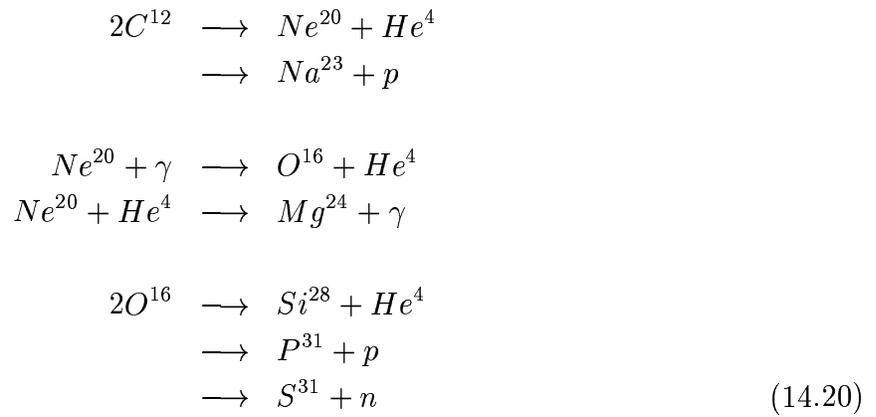
Successivamente la reazione di fusione dell'elio in carbonio è la cosiddetta 3α :



Nella realtà la 3α non è una improbabile reazione tre corpi, ma è dovuta al seguente ciclo:



Le prime due reazioni del ciclo comportano anche il decadimento inverso; C^{12*} è uno stato eccitato del nucleo del carbonio. La reazione 3α è efficiente per $T \geq 10^8 K$. Altre reazioni importanti nelle fasi successive dell'evoluzione stellare sono:



A temperature vicine ai $10^9 K$ le reazioni di nucleosintesi progrediscono ulteriormente fino ad arrivare al prodotto terminale della catena esotermica, Fe^{56} per $T \sim 5 \cdot 10^9 K$.