Capitolo 1

Formazione di strutture cosmiche

Dispense per il corso di Cosmologia Modulo A
G.Tormen, Dipartimento di Astronomia, Università di Padova
(15 novembre 2002)

1.1 Introduzione

Osservando l'universo con i più grandi telescopi scopriamo che sulle scale di interesse cosmologico (cioè su scale extragalattiche, grosso modo dal Mpc in su) la materia è distribuita in maniera irregolare: ci sono galassie ed ammassi di galassie che contengono grandi quantità di materia visibile ed oscura, e si dispongono nello spazio in strutture mono e bidimensionali (filamenti e sheets) e ci sono regioni praticamente senza galassie, detti *vuoti*, di 50-100 Mpc; la distribuzione spaziale di questi filamenti e vuoti ricorda quella di una rete neuronale.

Se però consideriamo l'universo su grande scala, cioè su scale R molto maggiori delle più grandi strutture osservate nel cielo: $R \gg 100$ Mpc, le sue proprietà osservative risultano più o meno le stesse in ogni regione e in ogni direzione. Questa osservazione è una importante verifica a posteriori del Principio Cosmologico, che fu usato inizialmente come ipotesi per poter scrivere le equazioni di Einstein in forma semplificata attraverso la metrica di Robertson-Walker, ed ottenere così le equazioni di Friedmann.

L'isotropia del fondo cosmico di microonde (CMB) fornisce un'evidenza osservativa ancora più importante del fatto che l'universo, all'epoca della ricombinazione dell'idrogeno ($t \approx 300000$ yrs dopo il Big Bang), fosse omogeneo ed isotropo con una precisione di circa una parte su centomila:

$$\langle \left(\frac{\delta T}{T}\right)^2 \rangle^{1/2} \equiv \langle \left(\frac{T(\theta,\phi) - \langle T \rangle}{\langle T \rangle}\right)^2 \rangle \approx 10^{-5}$$

in quanto le fluttuazioni di densità erano dello stesso ordine di quelle di temperatura (come vedremo in dettaglio nella lezione sulle anisotropie del CMB).

Possiamo quindi dire che l'universo che noi conosciamo è con buona approssimazione omogeneo ed isotropo su grandi scale e a tempi remoti.

In questo corso studieremo come l'universo alla ricombinazione, quasi perfettamente omogeneo ed isotropo, si sia evoluto per diventare come oggi lo osserviamo. Cercheremo di capire, e poi formalizzare, i meccanismi fisici che hanno portato le piccole fluttuazioni presenti nel CMB a diventare le galassie e le strutture cosmiche di oggi.

1.2 Scenario standard per la formazione delle strutture cosmiche

Per cominciare vediamo gli ingredienti principali su cui si basa il modello standard che descrive la formazione delle strutture cosmiche. La terminologia e i dettagli verranno presentati in seguito, per ora

cerchiamo solo di avere uno sguardo di sintesi. Le ipotesi di questo scenario sono le seguenti:

1. **L'universo è dominato dalla presenza di materia oscura fredda (CDM o cold dark matter), non collisionale e di origine non barionica.**

   Fredda in sostanza significa che le particelle che la compongono sono non relativistiche a tutte le epoche di interesse. Non collisionale significa che il moto di queste particelle è determinato solo dal campo gravitazionale medio, e che quindi la sezione d'urto per collisioni elastiche tra particelle è praticamente zero (a differenza di quel che avviene per un gas perfetto, il cui moto microscopico è invece dominato dalle collisioni). Non barionica significa che le particelle che la compongono sono di origine esotica ed appartengono alla fauna di particelle elementari previste dalle teorie supersimmetriche di campo. Ultimamente il candidato più probabile sembra essere il neutralino, una particella di massa dell'ordine di 100 GeV. La materia oscura interagisce con sé stessa e con la materia barionica solo attraverso la gravità, e non partecipa quindi a processi radiativi.

2. **la materia ordinaria o barionica (protoni, neutroni, elettroni...) è presente nella quantità predetta dalla nucleosintesi del Big Bang (e verificata osservativamente): $0.01 \leq \Omega_b h^2 \leq 0.029$.**

   Poiché la costante adimensionale di Hubble $h = H_0/(100 \text{ km/s/Mpc})$ ha un valore osservativo conservativamente compreso nell'intervallo $0.5 < h < 0.8$, il vincolo della nucleosintesi primordiale si traduce in un limite superiore stretto $\Omega_b < 0.12$. Di questa quantità, solo una piccola parte è sotto forma di stelle e galassie: $\Omega_g \approx 0.03$, mentre il resto è distribuito in maniera più diffusa nel mezzo interstellare, intergalattico e intracluster (ISM, IGM, ICM).

3. **Il modello di universo inflazionario ci fa preferire un universo in cui il valore totale del parametro di densità è molto vicino all'unità: $\Omega_0 \simeq 1$.**

   A proposito di queste prime ipotesi, è importante sottolineare che l'esistenza della materia oscura viene invocata prima di tutto per riconciliare il basso valore di $\Omega_b < 0.12$ con quello *dinamico* $\Omega_m \approx 0.3$ ottenuto dalle stime di massa delle galassie spirali e degli ammassi di galassie; infatti, le alte velocità di rotazione delle spirali e le alte velocità orbitali delle galassie negli ammassi di galassie presuppongono per questi sistemi campi gravitazionali (e quindi masse totali) molto maggiori di quelle ottenute sommando soltanto i contributi dovuti alla materia visibile barionica: $\Omega_g \approx 0.03$. Poichè i barioni da soli non possono dare $\Omega \approx 0.3$, a causa del vincolo superiore dato dalla nucleosintesi, si assume che la differenza tra le due sia fornita da una componente oscura non barionica; poiché questa componente è maggiore di quella barionica, è gravitazionalmente dominante.

   Il fatto che l'inflazione preveda $\Omega = 1$ è soltanto un'ulteriore motivo per assumere l'esistenza della materia oscura, che dovrebbe riempire anche il contributo mancante per arrivare all'unità. Una recente alternativa a questo universo è data dalla densità del vuoto o *costante cosmologica*, che colma la differenza tra il valore dinamico e quello inflazionario: $\Omega_\Lambda = 1 - \Omega_m \approx 0.7$.

4. **All'epoca della ricombinazione dell'idrogeno ($z \approx 10^3$) l'universo è ben descritto da una metrica di Robertson-Walker, ed è quindi praticamente omogeneo ed isotropo.**

   Esistono tuttavia piccole fluttuazioni di materia ed energia: $\delta\varrho/\varrho \approx 10^{-5}$ generate dall'amplificazione di fluttuazioni quantistiche avvenuta durante un'epoca inflazionaria subito dopo il Big Bang.

5. **Le strutture cosmiche si formano per instabilità gravitazionale.**

   Per cosmiche intendiamo dalle scale protogalattiche in su. L'instabilità gravitazionale porta al collasso dei primi sistemi in equilibrio, che chiamiamo *aloni di materia oscura.*

   Un minimo di teminologia: le fluttuazioni di densità δ sono dette lineari finché sono molto minori di uno: $\delta \ll 1$; in tale limite infatti vedremo che è possibile studiare la loro evoluzione usando una teoria perturbativa al prim'ordine. Quando la crescita gravitazionale porta $\delta \to 1$, si parla di regime non lineare. In tale limite la teoria lineare non è più applicabile, nel senso che le soluzioni delle equazioni lineari non sono più una buona approssimazione delle soluzioni esatte. Come vedremo in seguito, vari modelli analitici e le simulazioni numeriche mostrano che in questo limite - e a certe condizioni - il sistema subisce un collasso gravitazionale e forma una struttura molto densa: $\delta \approx 10^2$

che raggiunge un equilibrio viriale e stabile tra energia potenziale e cinetica. Questa struttura è quella che chiamiamo alone di materia oscura. In questo contesto e per questi motivi parleremo in modo intercambiabile di aloni di materia oscura, sistemi virializzati, sistemi in equilibrio, sistemi collassati, sistemi non lineari.

6. **Le galassie si formano in seguito, quando la materia barionica (il gas) sente la gravità degli aloni di materia oscura e cade nelle loro buche di potenziale.**

   Poiché il gas è collisionale, l'energia cinetica della caduta viene convertita in energia termica dagli shock e dalla compressione adiabatica; il gas si surriscalda e raggiunge la temperatura di equilibrio viriale del sistema, quindi si raffredda per perdite radiative. Il raffreddamento ne permette la condensazione, che porta a sua volta alla formazione di nubi molecolari e quindi di stelle. Le stelle evolvono e producono metalli, alcune esplodono come supernovae e in tal modo ridistribuiscono nel mezzo interstellare i metalli prodotti; l'energia rilasciata riscalda ulteriore gas, che può di nuovo raffreddarsi e dare origine a nuove popolazioni stellari. Il ciclo si ripete finché c'è disponibilità di gas nel mezzo interstellare. Quest'ultimo punto descrive, in estrema sintesi, il campo detto di *galaxy formation*.

1.3 Derivazione qualitativa della scala di Jeans

Per capire come funziona qualitativamente il processo di instabilità gravitazionale immaginiamo una distribuzione uniforme di fluido (per esempio di materia oscura), in cui esistano piccole fluttuazioni di densità su tutte le scale. Consideriamo una regione dove la materia oscura è sovradensa rispetto alla media: supponiamo che sia sferica, con raggio R, densità media ϱ, massa $M \propto \varrho R^3$, e che la velocità tipica delle particelle sia v. Per capire cosa succederà al sistema occorre considerare due processi: da una parte la gravità tra le particelle tende a condensare la regione, facendola diventare sempre più piccola e densa; dall'altra il moto delle particelle tende a diffondere e a cancellare la sovradensità. Il bilancio tra questi due effetti si può esprimere in diversi modi:

1.3.1 Bilancio di energie

L'energia cinetica (dovuta al moto delle particelle) e quella potenziale gravitazionale del sistema si scrivono rispettivamente:

$$E_k \simeq \frac{1}{2}Mv^2 \tag{1.1}$$

$$E_p \simeq -\frac{GM^2}{R} \approx -\frac{GM}{R}\varrho R^3 \simeq -GM\varrho R^2. \tag{1.2}$$

Eguagliare le due energie corrisponde a considerara un sistema con energia totale uguale a zero:

$$E_t = E_k + E_p = 0 \quad \Rightarrow \quad E_k = -E_p \quad \Rightarrow \tag{1.3}$$

$$\frac{v^2}{2} = G\varrho R^2 \quad \Rightarrow \tag{1.4}$$

$$R \equiv R_J = v\sqrt{\frac{1}{2G\varrho}} \tag{1.5}$$

Il raggio corrispondente è detto *raggio di Jeans*. Poichè al crescere di R cresce l'importanza della gravità rispetto all'energia cinetica, in una fluttuazione di densità di raggio $R > R_J$ vince la prima, e la fluttuazione collassa sotto la propria gravità. Se invece $R < R_J$, vince la diffusione dovuta al moto della particelle, e la perturbazione viene cancellata.

Nel caso di una perturbazione di materia barionica, il processo fisico della diffusione è sostituito dalla pulsazione del gas come onda sonora, e al posto della velocità v delle particelle si considera la velocità del suono v_s, definita dalla relazione $v_s^2 \sim p/\varrho$, dove p è la pressione del gas (più sotto vedremo una definizione più rigorosa di v_s).

1.3.2 Bilancio di forze

Un altro modo di derivare la scala di Jeans è fare il bilancio tra forza di gravità e forza di pressione. Ricordando che la pressione è una forza per unità di superficie, la forza di pressione per unità di massa è:

$$F_p \approx \frac{pR^2}{M} = \frac{v_s^2}{R} \tag{1.6}$$

dove abbiamo usato la definizione appena data per la velocità del suono; la forza di gravità per unità di massa è invece:

$$F_g \approx \frac{GM}{R^2} = \frac{G\varrho R^3}{R^2} = G\varrho R. \tag{1.7}$$

Eguagliando le due otteniamo:

$$\frac{v_s^2}{R} = G\varrho R \quad \Rightarrow \tag{1.8}$$

$$R \equiv R_J = v_s\sqrt{\frac{1}{G\varrho}} \tag{1.9}$$

Anche qui, come nel caso precedente, se $R < R_J$ la pressione vince sulla gravità e la fluttuazione si rilassa propagandosi come onda acustica; se invece $R > R_J$ la gravità vince sulla pressione e la perturbazione può crescere per instabilità gravitazionale.

1.3.3 Bilancio di tempi

La scala di Jeans si può ottenere anche facendo il bilancio tra il tempo di free-fall gravitazionale τ_{ff} (il tempo che la perturbazione impiegherebbe a collassare sotto la propria gravità) ed il tempo idrodinamico τ_h (il tempo che la perturbazione impiegherebbe a riaggiustare le differenze di pressione e densità):

$$\tau_{ff} \sim \frac{1}{\sqrt{G\varrho}} \tag{1.10}$$

$$\tau_h \sim \frac{\lambda}{v_s} = \frac{2R}{v_s} \tag{1.11}$$

ed uguagliando:

$$\frac{1}{\sqrt{G\varrho}} = \frac{2R}{v_s} \quad \Rightarrow \tag{1.12}$$

$$R \equiv R_J = \frac{v_s}{2}\sqrt{\frac{1}{G\varrho}} \tag{1.13}$$

Capitolo 2

Instabilità di Jeans: universi statici

Dispense per il corso di Cosmologia Modulo A
G.Tormen, Dipartimento di Astronomia, Università di Padova
(15 novembre 2002)

In questo capitolo introdurremo la matematica necessaria per trattare l'evoluzione lineare di perturbazioni in un fluido autogravitante Newtoniano. Nel prossimo capitolo estenderemo la trattazione al caso di interesse pratico di un universo in espansione.

2.0 Derivata totale

Dato un generico campo vettoriale $\vec{w}$ funzione della posizione $\vec{r}$ e del tempo t, la derivata temporale totale (o materiale) di $\vec{w}$ è la somma di due termini:

$$\frac{d\vec{w}}{dt} \equiv \frac{D\vec{w}}{Dt} = \left.\frac{\partial \vec{w}}{\partial t}\right|_r + \frac{\partial \vec{w}}{\partial \vec{r}}\frac{\partial \vec{r}}{\partial t} = \left.\frac{\partial \vec{w}}{\partial t}\right|_r + \left(\vec{u}\cdot\vec{\nabla}\right)\vec{w} \tag{2.1}$$

dove $\vec{u} = \partial\vec{r}/\partial t$.

Come esempio si consideri un generico campo elettrico $\vec{E}$ definito in un fluido. Se il campo elettrico è statico, ma il fluido è in moto, il valore del campo nella posizione di un dato elemento di fluido cambierà solo perchè l'elemento si sposta da una posizione ad un'altra. Questa è la variazione descritta dal secondo termine, che è detto termine convettivo e ovviamente dipende dalla velocità $\vec{u}$ di spostamento dell'elemento di fluido.

Viceversa, se il campo elettrico non è statico, ma consideriamo una data posizione $\vec{r}$ fissata, $\vec{E}$ cambierà solo per la sua variazione intrinseca in $\vec{r}$, che è data dal primo termine. Nel caso generale, in cui si voglia misurare la variazione temporale di un campo non statico nella posizione di un elemento di fluido in moto, saranno presenti entrambi i termini.

La derivata intrinseca viene anche detta derivata Euleriana, e quella totale Lagrangiana. In sostanza la derivata Euleriana si riferisce ad una posizione fissata, mentre quella Lagrangiana è la derivata fatta seguendo il fluido.

Si noti la posizione delle parentesi nella notazione del termine convettivo: la derivata convettiva è un operatore:

$$\vec{u}\cdot\vec{\nabla} = u_x\frac{\partial}{\partial x} + u_y\frac{\partial}{\partial y} + u_z\frac{\partial}{\partial z} \tag{2.2}$$

che applicato al campo $\vec{w}$ fornisce il vettore

$$\left(\vec{u}\cdot\vec{\nabla}\right)\vec{w} = u_x\frac{\partial \vec{w}}{\partial x} + u_y\frac{\partial \vec{w}}{\partial y} + u_z\frac{\partial \vec{w}}{\partial z}. \tag{2.3}$$

Questa espressione non va confusa con l'altra:

$$\vec{u}\left(\vec{\nabla}\cdot\vec{w}\right) \equiv \vec{u}\ \mathrm{div}\vec{w} = u_x\ \mathrm{div}\vec{w} + u_y\ \mathrm{div}\vec{w} + u_z\ \mathrm{div}\vec{w}. \tag{2.4}$$

Si noti infine che, nel caso di un campo scalare f i due operatori (2.3) e (2.4) danno invece lo stesso risultato:

$$\left(\vec{u}\cdot\vec{\nabla}\right) f \equiv \vec{u}\left(\vec{\nabla}\cdot f\right) = \vec{u}\,\mathrm{grad} f, \tag{2.5}$$

e che quindi in tal caso il problema delle parentesi non si pone.

2.1 Equazioni di un fluido perfetto. Trattazione Newtoniana

Per descrivere l'evoluzione temporale di un fluido perfetto occorre scrivere le equazioni che legano tra loro i vari campi del fluido. Nel caso più generale questi sono: densità, velocità, pressione ed entropia, più il potenziale gravitazionale (necessario perché stiamo considerando un fluido soggetto anche alla propria forza di gravità, cioè autogravitante).

Poiché i campi sono cinque, ci servono cinque equazioni per chiudere il sistema:

i: l'**equazione di Continuità**, che esprime la conservazione della massa:

$$\boxed{\frac{\partial\rho}{\partial t} + \vec{\nabla}\cdot(\rho\vec{v}) \equiv \frac{D\rho}{Dt} + \rho\vec{\nabla}\cdot\vec{v} = 0 \qquad (2.6)}$$

ii: l'**equazione di Eulero**, che esprime la conservazione del momento, ed equivale alla seconda legge della dinamica: $\vec{f} = m\vec{a}$:

$$\boxed{\frac{\partial\vec{v}}{\partial t} + (\vec{v}\cdot\vec{\nabla})\vec{v} \equiv \frac{D\vec{v}}{Dt} = -\frac{1}{\rho}\vec{\nabla}p - \vec{\nabla}\phi \qquad (2.7)}$$

iii: l'**equazione di Poisson**, che lega il campo gravitazionale alla sua sorgente.

$$\boxed{\nabla^2\phi = 4\pi G\rho, \qquad (2.8)}$$

dove la relazione tra potenziale e accelerazione di gravità è $\vec{g} = -\vec{\nabla}\phi$.

iv: un'**equazione di stato** del fluido, che che lega tra loro pressione, densità ed entropia:

$$\boxed{p = p(\rho, S), \qquad (2.9)}$$

v: un'equazione che descriva l'**evoluzione temporale dell'entropia**.

$$\boxed{\frac{dS}{dt} = ... \qquad (2.10)}$$

Nella nostra trattazione ci limiteremo a considerare sistemi *adiabatici*. Questa scelta, oltre a semplificare i conti, è anche quella più standard e consistente con i risultati osservativi. L'equazione di evoluzione dell'entropia ùquindi semplicemente:

$$\frac{dS}{dt} = 0.$$

Di conseguenza, l'equazione di stato, che normalmente è del tipo $p = p(\rho, S)$ si riduce alla più semplice $p = p(\rho)$, che specificheremo in seguito.

Notiamo che questo è un sistema di 5 equazioni differenziali lineari, miste di primo e second'ordine nel tempo e nello spazio.

2.2 Soluzioni imperturbate

Il sistema di equazioni scritto sopra ammette come soluzione un universo *statico, omogeneo ed isotropo*:

$$\rho = \rho_b = cost \tag{2.11}$$
$$p = p_b = const \tag{2.12}$$
$$\vec{v} = \vec{0} \tag{2.13}$$
$$\phi = \phi_b = cost, \tag{2.14}$$

insieme all'ovvia $S = cost$ che d'ora in poi tralasceremo.

Si noti però che una tale soluzione è in realtà inconsistente, perchè un potenziale costante contraddice lèquazione di Poisson se $\rho \neq 0$. Equivalentemente, possiamo dire che una distribuzione infinita e omogenea di ρ non ammette soluzioni statiche (perchè tramite l'equazione di Poisson implicherebbe un potenziale non uniforme).

Si può verificare l'inconsistenza di un universo statico e infinito descritto dalla sola gravità Newtoniana anche con l'esempio seguente. Consideriamo una sfera di gas e mettiamoci al centro. La forza di gravità è nulla e il sistema è isotropo. Aumentando il raggio della sfera fino all'infinito, la forza al centro resta nulla. Se però, invece di considerare una sfera, partiamo da un'ellissoide, la forza nel centro sarà diversa da zero ed il sistema anisotropo. Aumentando le dimensioni dell'ellissoide (ma mantenendone la forma) fino all'infinito, la forza resta diversa da zero. La situazione finale dei due sistemi è la stessa: uno spazio uniformemente riempito di gas, ma la forza nel punto zero è diversa nei due casi. Questo è un paradosso.

Nonostante l'inconsistenza di una soluzione statica imperturbata, è lo stesso utile studiare l'esistenza di soluzioni che costituiscono piccole perturbazioni intorno alla soluzione imperturbata.

2.3 Soluzioni lineari perturbate

Cerchiamo ora delle soluzioni del tipo:

$$\rho = \rho_b(1+\delta) = \rho_b + \delta\rho \tag{2.15}$$
$$p = p_b + \delta p \tag{2.16}$$
$$v = \delta v \tag{2.17}$$
$$\phi = \phi_b + \delta\phi \tag{2.18}$$

dove abbiamo definito la fluttuazione di densità come:

$$\delta \equiv \delta(\vec{r},t) \equiv \frac{\rho(\vec{r},t) - \rho_b}{\rho_b} = \frac{\delta\rho(\vec{r},t)}{\rho_b}. \tag{2.19}$$

e dove assumiamo che le fluttuazioni siano $\ll 1$. Inserendo queste soluzoni nel sistema precedente otteniamo:

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t}(\rho_b + \delta\rho) + \vec{\nabla}\cdot[(\rho_b+\delta\rho)\delta\vec{v}] = 0 \\ \frac{\partial \delta\vec{v}}{\partial t} + (\delta\vec{v}\cdot\vec{\nabla})\delta\vec{v} = -\frac{1}{(\rho_b+\delta\rho)}\vec{\nabla}(p_b+\delta p) - \vec{\nabla}(\phi_b+\delta\phi) \\ \nabla^2(\phi_b+\delta\phi) = 4\pi G(\rho_b+\delta\rho). \end{cases}$$

Linearizziamo ora le equazioni, cioè teniamo solo i termini lineari nelle perturbazioni, trascurando tutti i termini del second'ordine, ovvero prodotti di fluttuazioni) e sottraiamo le soluzioni imperturbate.

L'equazione di Continuità si riscrive:

$$\boxed{\frac{\partial \delta\rho}{\partial t} + \rho_b \vec{\nabla}\delta\vec{v} = 0 \qquad (2.20)}$$

dove abbiamo preso $\vec{\nabla}\rho_b = 0$ in quanto $\rho_b = cost$.

Per l'equazione di Eulero notiamo che

$$\frac{1}{(\rho_b + \delta\rho)} = \frac{1}{\rho_b(1+\delta)} \simeq \frac{1}{\rho_b}(1-\delta)$$

perchè al prim'ordine $(1+x)^n \simeq 1 + nx$, per $x \ll 1$. Di conseguenza avremo:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \delta\vec{v}}{\partial t} &= -\frac{1}{\rho_b}(1-\delta)\vec{\nabla}(p_b + \delta p) - \vec{\nabla}(\phi_b + \delta\phi) \\
&= -\frac{1}{\rho_b}\vec{\nabla}p_b + \frac{\delta}{\rho_b}\vec{\nabla}p_b - \frac{1}{\rho_b}\vec{\nabla}\delta p + \frac{\delta}{\rho_b}\vec{\nabla}\delta p - \vec{\nabla}\phi_b - \vec{\nabla}\delta\phi \\
&= -\frac{1}{\rho_b}\vec{\nabla}\delta p - \vec{\nabla}\delta\phi \qquad (2.21)
\end{aligned}$$

dove il primo e quinto termine a DX dell'uguale si sottraggono perché costituiscono la soluzione imperturbata, il secondo termine è zero in quanto $p_b = cost$ ed il quarto si ignora perché del second'ordine.

Siccome ci interessa studiare le soluzioni del campo di densità ρ, eliminiamo la pressione facendo uso dell'equazione di stato; in generale, se la pressione è funzione della sola densità: $p = p(\rho)$, allora la velocità del suono nel fluido è $v_s^2 \equiv \partial p/\partial\rho$; possiamo quindi scrivere

$$\delta p = \left.\frac{\partial p}{\partial \rho}\right|_S \delta\rho = v_s^2 \delta\rho. \qquad (2.22)$$

In totale l'equazione di Eulero nelle fluttuazioni diventa quindi:

$$\boxed{\frac{\partial \delta\vec{v}}{\partial t} = -\frac{v_s^2}{\rho_b}\vec{\nabla}\delta\rho - \vec{\nabla}\delta\phi, \qquad (2.23)}$$

mentre quella di Poisson è semplicemente

$$\boxed{\nabla^2\delta\phi = 4\pi G\delta\rho. \qquad (2.24)}$$

Dato il sistema di queste tre equazioni, cerchiamo soluzioni che siano onde piane; questo equivale a fare la trasformata di Fourier del sistema (cioè ad "andare nello spazio di Fourier").

Un'onda piana è una soluzione del tipo:

$$f(\vec{r}, t) = f_k \cdot \exp(i\vec{k}\cdot\vec{r} + i\omega t) \qquad (2.25)$$

dove $k = 2\pi/\lambda$ è il numero d'onda, che determina la lunghezza d'onda dell'oscillazione, la pulsazione $\omega = 2\pi\nu$ determina la frequenza temporale dell'oscillazione e f_k è l'ampiezza dell'onda piana, che non dipende dal tempo né da $\vec{r}$.

Siccome cerchiamo soluzioni ad onda piana per le perturbazioni, le scriveremo:

$$\begin{aligned}
\delta\rho(\vec{r}, t) &= \delta\rho_k \exp(i\vec{k}\cdot\vec{r} + i\omega t) \\
\delta\vec{v}(\vec{r}, t) &= \delta\vec{v}_k \exp(i\vec{k}\cdot\vec{r} + i\omega t) \\
\delta\phi(\vec{r}, t) &= \delta\phi_k \exp(i\vec{k}\cdot\vec{r} + i\omega t)
\end{aligned}$$

Il sistema, che nello spazio delle configurazioni è un sistema di equazioni differenziali lineari in δ, $\delta\vec{v}$ e $\delta\phi$, diventa, nello spazio di Fourier, un sistema di equazioni algebriche nei coefficienti ω e k, perché

le derivate (temporali o spaziali) nello spazio delle configurazioni ($\vec{x}$) diventano prodotti nello spazio di Fourier. Infatti:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial t} = f_k i\omega \exp(i\vec{k}\cdot\vec{r} + i\omega t) = i\omega f \\ \vec{\nabla} f = i\vec{k} f_k \exp(i\vec{k}\cdot\vec{r} + i\omega t) = i\vec{k}\cdot f \\ \vec{\nabla}\vec{f} = i\vec{k}\cdot\vec{f} \end{cases}$$

Sostituendo queste soluzioni nel sistema di equazioni otteniamo per l'equazione di Continuità:

$$i\omega\delta\rho + \rho_b i\vec{k}\delta\vec{v} \equiv (i\omega\delta\rho_k + \rho_b i\vec{k}\delta\vec{v}_k)\exp(i\omega t + i\vec{k}\cdot\vec{r}) = 0 \tag{2.26}$$

cioè

$$\omega\delta\rho_k + \rho_b\vec{k}\delta\vec{v}_k = 0 \quad \Rightarrow \quad \omega\delta_k + \vec{k}\delta\vec{v}_k = 0, \qquad \text{dove} \qquad \delta_k \equiv \frac{\delta\rho_k}{\rho_b} \tag{2.27}$$

L'equazione di Eulero si scrive invece:

$$\omega\delta v_k = -\frac{v_s^2}{\rho_b}\vec{k}\delta\rho_k - \vec{k}\delta\phi_k = -\vec{k}(v_s^2\delta_k + \delta\phi_k) \tag{2.28}$$

mentre quella di Poisson:

$$-k^2\delta\phi_k = 4\pi G\delta\rho_k \quad \Rightarrow \quad \delta\phi_k = -\frac{4\pi G\delta_k\varrho_b}{k^2} \tag{2.29}$$

Questo sistema di tre equazioni è riconducibile ad una sola equazione algebrica di secondo grado in ω. Inserendo Poisson dentro Eulero avremo

$$\delta v_k = -\frac{\vec{k}}{\omega}\left(v_s^2\delta_k - \frac{4\pi G\delta_k\varrho_b}{k^2}\right) \tag{2.30}$$

che sostituita a sua volta nell'equazione di Continuità fornisce:

$$\omega\delta_k + \vec{k}\left[-\frac{\vec{k}}{\omega}\left(v_s^2\delta_k - \frac{4\pi G\delta_k\varrho_b}{k^2}\right)\right] = 0 \tag{2.31}$$

cioè

$$\delta_k\left(\omega - \frac{k^2 v_s^2}{\omega} + \frac{4\pi G\varrho_b}{\omega}\right) = 0 \tag{2.32}$$

semplificando δ_k e moltiplicando per ω otteniamo l'equazione cercata, detta *relazione di dispersione del sistema*:

$$\omega^2 - k^2 v_s^2 + 4\pi G\varrho_b = 0 \tag{2.33}$$

cioè

$$\boxed{\omega^2 = k^2 v_s^2 - 4\pi G\varrho_b. \qquad (2.34)}$$

Notiamo che la stessa relazione si poteva ottenere imponendo che lo Jacobiano della matrice del sistema fosse zero:

$$\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} \delta_k & \delta v_k & \delta\phi_k \end{array} \\ det\begin{pmatrix} \omega & \vec{k} & 0 \\ v_s^2\vec{k} & \omega & \vec{k} \\ 4\pi G\varrho_b & 0 & k^2 \end{pmatrix} = \omega\cdot\omega k^2 - \vec{k}(v_s^2\vec{k}\cdot k^2 - 4\pi G\varrho_b\vec{k}) = 0 \end{array}$$

A questo punto occorre distinguere il caso $\omega^2 > 0$ da quello $\omega^2 < 0$. Il valore che li divide, per $\omega^2 = 0$, definisce il numero d'onda di Jeans, k_J e la lunghezza d'onda di Jeans $\lambda_J = 2\pi/k_J$ che, come abbiamo visto nella discussione qualitativa, separa due regimi opposti per le soluzioni:

$$\omega^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad k^2 = \frac{4\pi G\varrho_b}{v_s^2} \equiv k_{Jeans}^2 \tag{2.35}$$

$$\boxed{\begin{aligned} k_J &= \sqrt{\frac{4\pi G\varrho_b}{v_s^2}} \equiv \frac{2\pi}{\lambda_J} \quad \Rightarrow && (2.36) \\ \lambda_J &\equiv \frac{2\pi}{k_J} = v_S\sqrt{\frac{\pi}{G\varrho_b}}. && (2.37) \end{aligned}}$$

Cosa succede all'onda piana in questi due casi? Ricordiamo che:

$$\delta\varrho(\vec{r},t) = \delta\varrho_k \exp(i\vec{k}\cdot\vec{r} + i\omega t) \tag{2.38}$$

e riscriviamo la pulsazione come:

$$\omega^2 = k^2 v_s^2\left[1 - \frac{4\pi G\varrho_b}{k^2 v_s^2}\right] = k^2 v_s^2\left[1 - \left(\frac{k_J}{k}\right)^2\right] = k^2 v_s^2\left[1 - \left(\frac{\lambda}{\lambda_J}\right)^2\right] \tag{2.39}$$

Osserviamo che, se $\lambda < \lambda_J$ (cioè se $k > k_J$), allora $\omega^2 > 0$ e la pulsazione è reale:

$$\omega = \pm k v_s\left[1 - \left(\frac{\lambda}{\lambda_J}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}}. \tag{2.40}$$

In questo caso $\delta\varrho$ è rappresentata da una coppia di *onde sonore progressive*, di ampiezza $\delta\varrho_k$ costante, che si propagano nelle direzioni $\pm\,\vec{k}$ con velocità di fase c_s:

$$c_s = v_s\left[1 - \left(\frac{\lambda}{\lambda_J}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}} \tag{2.41}$$

Nel limite $\lambda \to 0$ (cioè $k \to \infty$) la velocità di propagazione dell'onda tende a quella del suono del fluido: $c_s \to v_s$ cioè l'onda tende ad una pura onda sonora. Viceversa, nel limite $\lambda \to \lambda_J$ (cioè $k \to k_J$) la velocità di propagazione tende a zero: $c_s \to 0$ e si ha un'onda stazionaria.

Se invece $\lambda > \lambda_J$ (cioè se $k < k_J$), allora $\omega^2 < 0$; riscriviamo la pulsazione in modo un po' diverso:

$$\omega^2 = -4\pi G\varrho_b\left(1 - \frac{k^2 v_s^2}{4\pi G\varrho_b}\right) = -4\pi G\varrho_b\left[1 - \left(\frac{k}{k_J}\right)^2\right] = -4\pi G\varrho_b\left[1 - \left(\frac{\lambda_J}{\lambda}\right)^2\right] \tag{2.42}$$

ovvero la pulsazione è immaginaria:

$$\omega = \pm i(4\pi G\varrho_b)^{\frac{1}{2}}\left[1 - \left(\frac{\lambda_J}{\lambda}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}} \tag{2.43}$$

Poiché solo la parte reale di un'onda piana ha significato fisico, in questo caso l'onda non si propaga, ma è *stazionaria*, cioé l'argomento dell'esponenziale non dipende dal tempo; l'onda è del tipo:

$$\delta\varrho(\vec{r},t) = \underbrace{\delta\varrho_k \exp(\pm\mid\omega\mid t)}_{ampiezza}\exp(i\vec{k}\cdot\vec{r}) \tag{2.44}$$

Queste onde stazionarie hanno ampiezza che cresce (o decresce) nel tempo in modo *esponenziale*. Questo è il fenomeno detto **instabilità gravitazionale**.

Il tempo caratteristico di crescita è dato da:

$$\tau \equiv \frac{1}{\mid \omega \mid} = (4\pi G \varrho_b)^{-1/2} \left[1 - \left(\frac{\lambda_J}{\lambda} \right)^2 \right]^{-\frac{1}{2}} \tag{2.45}$$

Nel limite $\lambda \gg \lambda_J$ il tempo di crescita tende al tempo di caduta libera (free-fall):

$$\tau \to (4\pi G \varrho_b)^{-1/2} \propto \sqrt{\frac{1}{G \ \varrho}} \sim \tau_{ff}$$

mentre nel limite $\lambda \to \lambda_J$ si tende al bilancio tra pressione e gravità, e quindi $\tau \to +\infty$.

Capitolo 3

Instabilità di Jeans: universi in espansione

Dispense per il corso di Cosmologia Modulo A
G.Tormen, Dipartimento di Astronomia, Università di Padova
(25 novembre 2002)

3.1 Introduzione

L'instabilità gravitazionale in un universo in espansione si può riferire a diversi regimi spaziali ed epoche temporali. Le scale rilevanti sono:

- la scala dell'orizzonte cosmologico,

$$\boxed{R_H(t) = a(t)\int_0^t \frac{cdt'}{a(t')} \equiv a(t)\int_0^t cd\tau \qquad (3.1)}$$

  dove $d\tau = dt/a(t)$ è il tempo conforme. Su scale maggiori dell'orizzonte: $\lambda > R_H$ i processi microfisici, che sono causali, non funzionano, ed è in azione soltanto la gravità.

- la scala di Jeans λ_J, già introdotta nel capitolo precedente; per $\lambda_J < \lambda < R_H$ la pressione è via via sempre più trascurabile rispetto alla gravità;

- la scala di dissipazione λ_D (che vedremo più avanti), che separa scale $\lambda_D < \lambda < \lambda_J$ in cui le perturbazioni si propagano come onde acustiche da quelle $\lambda < \lambda_D$ sotto cui un'onda viene cancellata da processi irreversibili (che dipendono dal tipo di materia e dal regime relativistico o no) che trasformano l'energia ordinata dell'onda in energia disordinata.

Le epoche rilevanti sono invece quelle in cui l'universo o alcune sue componenti passano da un regime relativistico ad uno non relativistico. Un esempio è l'equivalenza t_{eq} che separa la dominazione della radiazione da quella della materia.

Una trattazione generale e completa dell'evoluzione lineare delle perturbazioni in un universo in espansione richiede l'uso della Relatività Generale. Esistono infatti regimi spaziali e temporali in cui la semplice gravità Newtoniana è insufficiente, in particolare:

- ogniqualvolta si tratti l'evoluzione di una specie relativistica (e.g. neutrini, oppure radiazione);

- su scale maggiori dell'orizzonte cosmologico R_H.

In questo corso noi considereremo in dettaglio soltanto la più semplice trattazione Newtoniana delle perturbazioni; potremo quindi studiare solo le perturbazioni (i) nelle specie non relativistiche e (ii) su

scale entro l'orizzonte cosmologico. Occasionalmente risolveremo anche equazioni *quasi* Newtoniane in regimi diversi da questi elencati, introducendo però dei termini relativistici senza dimostrazione.

3.2 Una soluzione qualitativa ma generale

Prima di iniziare la trattazione delle soluzioni Newtoniane vediamo un modo qualitativo ma molto generale di ricavare l'evoluzione temporale di perturbazioni su scale dove conta solo la gravità, usando le equazioni di Friedmann. Queste sono equazioni pienamente General Relativistiche, e quindi sono applicabili ad ogni epoca e su ogni scala purché, lo ripetiamo, la gravità sia la sola forza in azione. Questo ne limita l'uso a scale $\lambda > R_H$ oppure $\lambda_J << \lambda < R_H$.

Possiamo pensare ad una perturbazione di densità come ad un universo localmente più denso immerso in un altro universo meno denso. Consideriamo allora una sfera di raggio $\lambda > R_H$ (o almeno di raggio $\lambda >> \lambda_J$), con densità media $\varrho_1 > \varrho_{cr}$, inclusa in un universo imperturbato di Einstein-de Sitter ($\varrho_b = \varrho_{cr}$, cioè $\Omega \equiv 1$).

Le equazioni di Friedmann per i due universi (trattando la sfera perturbata come un universo chiuso) sono:

$$\begin{cases} H_b^2 = \dfrac{8\pi G}{3}\varrho_b & k = 0 \\ H_1^2 = \dfrac{8\pi G}{3}\varrho_1 - \dfrac{c^2}{a^2} & k = 1 \end{cases}$$

Scegliamo - senza perdita di generalità - di guardare questa perturbazione nel momento in cui le due costanti di Hubble si equivalgono, $H_1 = H_b$:

$$\frac{8\pi G}{3}\varrho_1 - \frac{c^2}{a^2} = \frac{8\pi G}{3}\varrho_b.$$

Definendo $\delta(t) = (\varrho_1 - \varrho_b)/\varrho_b$ con facili passaggi arriviamo a scrivere la nostra soluzione come

$$\boxed{\delta(t) = \frac{3c^2}{8\pi G \varrho_b a^2} \qquad (3.2)}$$

che vale nel limite $\delta \ll 1$ per rispettare l'ipotesi di omogeneità dell'universo imperturbato.

L'andamento temporale della perturbazione nelle varie epoche si ottiene ricordando che un universo di EdS con equazione di stato del tipo $p = \omega\varrho c^2$ ha come soluzione $\varrho_b \propto a^{-3(1+\omega)}$; di conseguenza

$$\delta(t) \propto a^{3(1+\omega)-2} \propto a^{1+3\omega}.$$

Quindi:

1. per $t < t_{eq}$ avremo

$$\varrho \approx \varrho_{rad} \quad \Rightarrow \quad \omega = \frac{1}{3} \quad \Rightarrow \tag{3.3}$$

$$\delta(t) \approx \delta_R(t) \propto a^2 \propto t \qquad [a \propto t^{\frac{1}{2}}] \tag{3.4}$$

2. per $t > t_{eq}$ avremo

$$\varrho \approx \varrho_M \quad \Rightarrow \quad \omega = 0 \quad \Rightarrow \tag{3.5}$$

$$\delta(t) \approx \delta_{DM}(t) \propto a \propto t^{\frac{2}{3}}. \tag{3.6}$$

Ricordiamo che, per costruzione, questo andamento vale per le perturbazioni nella componente dominante, su scale sia maggiori che minori dell'orizzonte, purché maggiori della scala di Jeans.

Su scale maggiori dell'orizzonte le perturbazioni nelle altre componenti sono accoppiate a quelle nella componente dominante dalla forza di gravità con quest'ultima. Di conseguenza per $\lambda > R_H$; $t < t_{eq}$ possiamo scrivere:

$$\begin{aligned} \delta_R &\propto a^2 \\ \delta_{DM} &\propto \delta_B \propto \delta_R \end{aligned} \tag{3.7}$$

mentre per $\lambda > R_H$; $t > t_{eq}$:

$$\begin{aligned} \delta_{DM} &\propto a \\ \delta_R &\propto \delta_B \propto \delta_{DM} \end{aligned} \tag{3.8}$$

Su scale minori dell'orizzonte, ma maggiori della scala di Jeans, le perturbazioni nelle componenti non dominanti si comportano in maniera diversa a seconda del tipo di interazione che esiste tra esse e la componente dominante. Per esempio, fino alla ricombinazione dell'idrogeno ($t < t_{rec}$) le fluttuazioni nei barioni sono legati a quelle nella radiazione perchè gli ioni di idrogeno sono accoppiati agli elettroni dalle forze Coulombiane, e questi ultimi sono accoppiati alla radiazione dallo scattering Thomson. Dopo la ricombinazione i barioni seguono invece la gravità della componente dominante (la materia oscura). Vedremo in seguito i dettagli di questi comportamenti.

3.3 Equazioni Newtoniane

Le equazioni da cui partiamo sono le stesse del capitolo precedente. Iniziamo specificando la nostra notazione: chiameremo $\vec{r}$ la coordinata spaziale nel sistema di riferimento propro (fisico) ed $\vec{x}$ quella comovente. Ricordiamo che il legame tra le due è $\vec{r} = a\vec{x}$ dove a è il fattore di espansione o fattore di scala. Derivando rispetto al tempo avremo:

$$\frac{d\vec{r}}{dt} \equiv \dot{\vec{r}} = \dot{a}\vec{x} + a\dot{\vec{x}} \tag{3.9}$$

$$= \frac{\dot{a}}{a}a\vec{x} + a\dot{\vec{x}} \tag{3.10}$$

$$= H\vec{r} + \vec{v} = \vec{u} \tag{3.11}$$

La velocità $\vec{u}$ di un elemento di fluido è quindi la somma di due termini: $H\vec{r}$ è la velocità causata dall'espansione dell'universo, mentre $\vec{v}$ è la velocità intrinseca (o Euleriana) del fluido, dovuta alla mutua attrazione gravitazionale della materia e chiamata *velocità peculiare*. Nel sistema di riferimento comovente il termine di espansione si annulla e resta il secondo, che è quello che ci interessa.

Il sistema di equazioni del fluido nel sistema di riferimento proprio è quindi

$$\begin{cases} \left.\frac{\partial \varrho}{\partial t}\right|_r + \vec{\nabla}_r(\varrho\vec{u}) = 0 \\ \frac{D\vec{u}}{Dt} \equiv \left.\frac{\partial \vec{u}}{\partial t}\right|_r + (\vec{u}\cdot\vec{\nabla}_r)\vec{u} = -\frac{1}{\varrho}\vec{\nabla}_r p - \vec{\nabla}_r\Phi \\ \nabla_r^2\Phi = 4\pi G\varrho \end{cases}$$

3.3.1 Universi di materia: entro l'orizzonte

Il precedente sistema di equazioni descrive l'evoluzione Newtoniana nel sistema di coordinate proprie (o fisiche) di un fluido generico.

Specializziamolo al caso di interesse, in cui i campi sono la somma di una soluzione imperturbata (la soluzione degli universi di Friedmann) e di una perturbazione di cui considereremo l'evoluzione lineare:

$$\begin{cases} \varrho = \varrho_b(1+\delta) \\ \vec{u} = H\vec{r} + \vec{v} \\ p = p_b + \delta p \\ \Phi = \Phi_0 + \phi \end{cases}$$

La perturbazione di densità: $\varrho_b\delta \equiv \delta\varrho$ è la sorgente della perturbazione ϕ al potenziale; la perturbazione nelle velocità è il termine di velocità peculiare $\vec{v}$.

Inserendo queste espressioni nel sistema di equazioni (3.3) si ha

$$\begin{cases} \left.\frac{\partial}{\partial t}(\varrho_b + \delta\varrho)\right|_r + \vec{\nabla}_r\left[\left(\varrho_b + \delta\varrho\right)(H\vec{r} + \vec{v})\right] = 0 \\ \left.\frac{\partial}{\partial t}\right|_r (H\vec{r} + \vec{v}) + \left[(H\vec{r} + \vec{v})\cdot\vec{\nabla}_r\right](H\vec{r} + \vec{v}) = -\frac{1}{(\varrho_b + \delta\varrho)}\vec{\nabla}_r(p_b + \delta p) - \vec{\nabla}_r(\Phi_0 + \phi) \\ \nabla_r^2(\Phi_0 + \phi) = 4\pi G(\varrho_b + \delta\varrho) \end{cases}$$

Ora si tratta di sviluppare i termini, sottrarre le equazioni corrispondenti alla soluzione imperturbata (l'universo di Friedmann), e mettersi nel regime lineare, trascurando i termini di ordine superiore al primo.

Per l'equazione di Continuità, sviluppando avremo

$$\left.\frac{\partial\varrho_b}{\partial t}\right|_r + \left.\frac{\partial\delta\varrho}{\partial t}\right|_r + \vec{\nabla}_r\varrho_b H\vec{r} + \vec{\nabla}_r\varrho_b\vec{v} + \vec{\nabla}_r\delta\varrho H\vec{r} + \vec{\nabla}_r\delta\varrho\vec{v} = 0$$

Il primo e terzo termine a SX si sommano a zero perché costituiscono la soluzione imperturbata; il sesto termine a SX si trascura perché del second'ordine (è il prodotto di due termini del primo); resta quindi

$$\left.\frac{\partial\delta\varrho}{\partial t}\right|_r + \vec{\nabla}_r(\varrho_b\vec{v} + \delta\varrho H\vec{r}) = 0$$

Notiamo che ϱ_b ed H sono spazialmente omogenei e quindi si possono portare fuori dal ∇; inoltre, poiché $\vec{\nabla}_r\vec{r} = 3$, risistemando otteniamo

$$\boxed{\left.\frac{\partial}{\partial t}\right|_r \delta\varrho + \varrho_b\vec{\nabla}_r\vec{v} + 3H\delta\varrho + H\vec{r}\vec{\nabla}_r\delta\varrho = 0. \qquad (3.12)}$$

Analogamente, sviluppando l'equazione di Eulero e ricordando che $1/(\varrho_b+\delta\varrho) = 1/[\varrho_b(1+\delta)] \simeq (1-\delta)/\varrho_b$, abbiamo:

$$\begin{aligned} &\left.\frac{\partial}{\partial t}\right|_r H\vec{r} + \left.\frac{\partial}{\partial t}\right|_r \vec{v} + (H\vec{r}\vec{\nabla}_r)H\vec{r} + (\vec{v}\vec{\nabla}_r)H\vec{r} + (H\vec{r}\vec{\nabla}_r)\vec{v} + (\vec{v}\vec{\nabla}_r)\vec{v} = \\ = \; & -\frac{1}{\varrho_b}\vec{\nabla}_r p_b - \frac{1}{\varrho_b}\vec{\nabla}_r\delta p + \frac{\delta}{\varrho_b}\vec{\nabla}_r p_b + \frac{\delta}{\varrho_b}\vec{\nabla}_r\delta p - \vec{\nabla}_r\Phi_0 - \vec{\nabla}_r\phi. \end{aligned} \qquad (3.13)$$

Il primo e terzo termine a SX dell'uguale, insieme al primo e quinto a DX, costituiscono la soluzione imperturbata e danno quindi zero; l'ultimo termine a SX e il quarto a DX si trascurano perché del second'ordine; il quarto termine a SX è $H\vec{v}$ (lo si verifichi come esercizio). Rimane quindi

$$\boxed{\left.\frac{\partial}{\partial t}\right|_r \vec{v} + H\vec{v} + (H\vec{r}\vec{\nabla}_r)\vec{v} = -\frac{1}{\varrho b}\vec{\nabla}_r\delta p - \vec{\nabla}_r\phi. \qquad (3.14)}$$

Infine nell'equazione di Poisson la perturbazione si separa banalmente dalla parte imperturbata, dando

$$\boxed{\nabla_r^2 \phi = 4\pi G \delta\varrho. \qquad (3.15)}$$

Ora vogliamo riscrivere queste equazioni passando al sistema di riferimento comovente; notiamo che

$$\vec{\nabla}_r = \frac{\partial}{\partial \vec{r}} = \frac{1}{a}\frac{\partial}{\partial \vec{x}} = \frac{1}{a}\vec{\nabla}_x. \tag{3.16}$$

Pure, per una generica $\vec{f}$ funzione della posizione e del tempo, possiamo scrivere il differenziale nel sistema di riferimento proprio:

$$d\vec{f} \equiv d\vec{f}(\vec{r},t) = \left(\frac{\partial \vec{f}}{\partial t}\right)_r dt + \left(\frac{\partial \vec{f}}{\partial \vec{r}}\right)_t d\vec{r}.$$

Ora, poiché

$$d\vec{r} = a d\vec{x} + H\vec{r}dt$$

ed usando anche la eq.(3.16) sostituendo avremo

$$\begin{aligned} d\vec{f} &= \left(\frac{\partial \vec{f}}{\partial t}\right)_r dt + \frac{1}{a}\left(\frac{\partial \vec{f}}{\partial \vec{x}}\right)_t (a d\vec{x} + H\vec{r}dt) \\ &= dt\left[\left(\frac{\partial \vec{f}}{\partial t}\right)_r + H\vec{r}\left(\frac{\partial \vec{f}}{\partial \vec{r}}\right)_t\right] + \left(\frac{\partial \vec{f}}{\partial \vec{x}}\right)_t d\vec{x}. \end{aligned} \tag{3.17}$$

Nel sistema di riferimento comovente il differenziale si scrive invece

$$d\vec{f} \equiv d\vec{f}(\vec{x},t) = \left(\frac{\partial \vec{f}}{\partial t}\right)_x dt + \left(\frac{\partial \vec{f}}{\partial \vec{x}}\right)_t d\vec{x}.$$

Eguagliando le ultime due espressioni, vediamo che le derivata temporali nei due sistemi di riferimento sono legate dalla relazione

$$\left(\frac{\partial \vec{f}}{\partial t}\right)_x = \left(\frac{\partial \vec{f}}{\partial t}\right)_r + H\left(\vec{r}\cdot\vec{\nabla}_{\vec{r}}\right)\vec{f}.$$

Con queste definizioni possiamo riscrivere l'equazione di Continuità (3.12) come

$$\left.\frac{\partial}{\partial t}\right|_x \delta\varrho + \frac{\varrho_b}{a}\vec{\nabla}_x\vec{v} + 3H\delta\varrho = 0. \tag{3.18}$$

L'equazione di Eulero (3.14) si riscrive invece

$$\left.\frac{\partial}{\partial t}\right|_x \vec{v} + H\vec{v} = -\frac{1}{a\varrho_b}\vec{\nabla}_x\delta p - \frac{1}{a}\vec{\nabla}_x\phi;$$

eliminando la pressione tramite la definizione di velocità del suono:

$$v_s^2 \equiv \left(\frac{\partial p}{\partial \varrho}\right)_{S=const} \quad \Rightarrow \quad \delta p = v_s^2\delta\varrho$$

otteniamo infine

$$\left.\frac{\partial}{\partial t}\right|_x \vec{v} + H\vec{v} = -\frac{v_s^2}{a}\vec{\nabla}_x\delta - \frac{1}{a}\vec{\nabla}_x\phi. \tag{3.19}$$

L'equazione di Poisson è semplicemente

$$\frac{1}{a^2}\nabla_x^2\phi = 4\pi G\varrho_b\delta. \tag{3.20}$$

Per semplicità di notazione, d'ora in poi ometteremo la x al pedice degli operatori, scrivendo

$$\begin{aligned} \vec{\nabla}_x &\rightarrow \vec{\nabla} \\ \left.\frac{\partial}{\partial t}\right|_x &\rightarrow \frac{\partial}{\partial t} \end{aligned}$$

e riscriviamo per compattezza il sistema di tre equazioni:

$$\boxed{\begin{aligned} &\frac{\partial}{\partial t}\delta\varrho + \frac{\varrho_b}{a}\vec{\nabla}\vec{v} + 3H\delta\varrho = 0 \\ &\frac{\partial}{\partial t}\vec{v} + H\vec{v} = -\frac{v_s^2}{a}\vec{\nabla}\delta - \frac{1}{a}\vec{\nabla}\phi \\ &\frac{1}{a^2}\nabla^2\phi = 4\pi G\varrho_b\delta. \end{aligned} \qquad (3.21)}$$

Come già fatto nello scorso capitolo, per la soluzione del sistema **passiamo allo spazio di Fourier, cioè cerchiamo soluzioni del tipo onde piane**:

$$f(\vec{x},t) = f_k(t)\exp(i\vec{k}\vec{x}); \qquad k = \frac{2\pi}{\lambda}_{com}$$

dove omettiamo per semplicità di notazione il ˆ dalle trasformate di Fourier. Si noti come ora l'ampiezza $f_k(t)$ dell'onda dipenda dal tempo, e quindi anche la dipendenza dal tempo $\exp(i\omega t)$ sia stata inglobata nell'ampiezza. Le derivate temporali e spaziali di quest'onda sono rispettivamente

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial t} &= \dot{f}_k(t)\exp(i\vec{k}\vec{x}) \\ \vec{\nabla}_x f &= i\vec{k}f_k(t)\exp(i\vec{k}\vec{x}) = i\vec{k}f(\vec{x},t) \end{aligned} \qquad (3.22)$$

La perturbazione di densità si scrive

$$\delta\varrho = \delta\varrho_k(t)\exp(i\vec{k}\vec{x}) \qquad (3.23)$$

per cui l'equazione (3.18) nello spazio di Fourier diventa (semplificando gli exp(...))

$$(\delta\dot{\varrho}_k) + \frac{i\varrho_b}{a}\vec{k}\vec{v}_k + 3\frac{\dot{a}}{a}\delta\varrho_k = 0. \qquad (3.24)$$

Ora, poiché

$$\delta\dot{\varrho}_k = (\varrho_b\dot{\delta}_k) = \dot{\varrho}_b\delta_k + \varrho_b\dot{\delta}_k$$

e ricordando che

$$\varrho_b \propto a^{-3} \quad \Rightarrow \quad \frac{\dot{\varrho}_b}{\varrho_b} = -3\frac{\dot{a}}{a}$$

ne segue

$$\delta\dot{\varrho}_k = -3\frac{\dot{a}}{a}\varrho_b\delta_k + \varrho_b\dot{\delta}_k$$

che inserita nell'equazione (3.24) fornisce infine l'equazione di Continuità:

$$\boxed{\dot{\delta}_k + \frac{i\vec{k}\vec{v}_k}{a} = 0 \qquad (3.25)}$$

L'equazione di Eulero (3.19) nello spazio di Fourier si scrive facilmente utilizzando le eq. (3.22), e fornisce

$$\boxed{\dot{\vec{v}}_k + \frac{\dot{a}}{a}\vec{v}_k = -\frac{i\vec{k}}{a}(v_s^2\delta_k + \phi_k). \qquad (3.26)}$$

L'equazione di Poisson nello spazio di Fourier diventa immediatamente

$$\frac{1}{a^2}(-k^2\phi_k) = 4\pi G\varrho_b\delta_k$$

ovvero ricavando il potenziale

$$\boxed{\phi_k = -\frac{4\pi G\varrho_b\delta_k a^2}{k^2} \qquad (3.27)}$$

Abbiamo scritto il nostro sistema di equazioni in coordinate comoventi e nello spazio di Fourier. Come nel capitolo precedente, ci interessano le soluzioni relative al campo di densità. **Vogliamo allora ridurre il sistema ad una singola equazione differenziale nella quantità δ_k.**

Prima di fare questo però, facciamo una breve considerazione sul campo di velocità. **E' utile scomporre il campo $\vec{v}_k$ in due componenti, una parallela al vettore d'onda $\vec{k}$ ed una perpendicolare**:

$$\vec{v}_k = \vec{v}_{k\|} + \vec{v}_{k\perp}.$$

Questo corrisponde a scomporre il campo antitrasformato $\vec{v}(\vec{x})$ nella somma di due componenti, una a divergenza nulla ed una irrotazionale:

$$\begin{aligned} \vec{\nabla}\cdot\vec{v}_\perp = 0 \quad &\Longleftrightarrow \quad \vec{k}\cdot\vec{v}_{k\perp} = 0 \\ \vec{\nabla}\times\vec{v}_\| = 0 \quad &\Longleftrightarrow \quad \vec{k}\cdot\vec{v}_{k\|} = |\vec{k}|\cdot|\vec{v}_\|(\vec{k})| \end{aligned}$$

come si vede utilizzando le relazioni (3.22).

Applicando questa scomposizione all'equazione di Eulero (3.26) e considerando la parte ortogonale a $\vec{k}$ abbiamo

$$\dot{v}_{k\perp} + \frac{\dot{a}}{a}v_{k\perp} = 0$$

ovvero

$$\frac{\dot{v}_{k\perp}}{v_{k\perp}} = -\frac{\dot{a}}{a}$$

che implica il semplice andamento per $v_{k\perp}$:

$$v_{k\perp} \propto a^{-1}$$

Vediamo quindi come **la parte rotazionale del campo di velocità peculiari non sia accoppiata a δ e decada**; ai fini dell'evoluzione delle perturbazioni di densità possiamo quindi tenere soltanto la componente parallela del nostro sistema di equazioni.

Vogliamo ridurre il sistema ad una sola equazione in δ: derivando l'equazione di continuità rispetto al tempo abbiamo

$$\ddot{\delta}_k + \frac{ik}{a}\dot{v}_{k\|} - ik\frac{\dot{a}}{a^2}v_{k\|} = 0. \qquad (3.28)$$

Dall'equazione di Eulero abbiamo

$$\dot{v}_{k\|} = -\frac{\dot{a}}{a}v_{k\|} - \frac{ik}{a}(v_s^2\delta_k + \phi_k)$$

che sostituita in (3.28) dà

$$\ddot{\delta}_k + \frac{ik}{a}\left[-\frac{\dot{a}}{a}v_{k\|} - \frac{ik}{a}(v_s^2\delta_k + \phi_k)\right] - ik\frac{\dot{a}}{a^2}v_{k\|} = 0. \qquad (3.29)$$

Dall'equazione di Continuità

$$v_{k\|} = \frac{ia\dot{\delta}_k}{k}$$

mentre da quella di Poisson

$$\phi_k = -\frac{4\pi G \varrho_b \delta_k a^2}{k^2}$$

che, sostituite in (3.29) danno

$$\ddot{\delta}_k + \frac{ik}{a}\left[-\frac{\dot{a}}{a}\frac{ia}{k}\dot{\delta}_k - \frac{ik}{a}v_s^2\delta_k - \frac{ik}{a}\left(-\frac{4\pi G\varrho_b\delta_k a^2}{k^2}\right)\right] - ik\frac{\dot{a}}{a^2}\cdot ia\frac{\dot{\delta}_k}{k} = 0$$

ovvero

$$\ddot{\delta}_k + \frac{\dot{a}}{a}\dot{\delta}_k + \frac{k^2}{a^2}v_s^2\delta_k - 4\pi G\varrho_b\delta_k + \frac{\dot{a}}{a}\dot{\delta}_k = 0$$

che si può anche riscrivere

$$\boxed{\ddot{\delta}_k + 2\frac{\dot{a}}{a}\dot{\delta}_k + \delta_k\left[\frac{k^2 v_s^2}{a^2} - 4\pi G\varrho_b\right] = 0. \qquad (3.30)}$$

Questa è l'equazione di evoluzione delle fluttuazioni di densità che ci serve; si trova anche nel Lucchin (eq. (2.13) p.164), nel Coles e Lucchin I ed. a p.207, II ed. a p.218, e nel Kolb and Turner a p.346.

Ricordiamo che k per noi ha finora rappresentato il numero d'onda comovente: questa scelta è stata fatta per consistenza di notazione. **D'ora in poi considereremo invece il numero d'onda fisico** k_{com}/a (usato anche nel Lucchin), perché è quello effettivamente rappresentativo della lunghezza d'onda di Jeans fisica, λ_J; assorbiremo quindi il fattore di scala a denominatore in eq.(3.30) nella definizione di k, quindi porremo $k/a \to k$.

Notiamo anche che, se consideriamo il numero d'onda fisico e imponiamo $a = cost$, ritroviamo l'equazione (2.28) relativa ad un universo statico.

Nei prossimi paragrafi cercheremo le soluzioni di questa equazione nei diversi regimi (spaziali e temporali) di interesse.

3.3.2 Universo di materia: soluzioni per $\Omega = 1$

CAMPO: δ_M
REGIME SPAZIALE: $\lambda < R_H$
REGIME TEMPORALE: $t > t_{eq}$

Per risolvere l'equazione (3.30) dobbiamo esplicitare la dipendenza temporale di $a(t)$ e $\varrho_b(t)$. Per un universo di Einstein-de Sitter queste sono:

$$\begin{cases} \varrho_b(t) = \dfrac{1}{6\pi G t^2} \\ \\ a(t) = a_0\left[\dfrac{3H_0 t}{2}\right]^{2/3} \end{cases}$$

Poiché $a \propto t^{2/3}$, segue che $\frac{\dot{a}}{a} = \frac{2}{3t}$. Sostituendo questi andamenti in (3.30) otteniamo

$$\ddot{\delta}_k + \frac{4}{3t}\dot{\delta}_k + \frac{2}{3t^2}\delta_k\left(\frac{k^2 v_s^2}{4\pi G\varrho_b} - 1\right) = 0 \qquad (3.31)$$

con k numero d'onda fisico e non piú comovente.

Quest'equazione ha una soluzione a legge di potenza per l'ampiezza delle fluttuazioni, cioè per la parte dell'onda piana che è funzione del tempo nelle espressioni del tipo eq. (3.23):

$$\delta_k(t) \propto t^\alpha; \quad \dot{\delta}_k = \alpha t^{\alpha-1} = \frac{\alpha}{t}\delta_k; \quad \ddot{\delta}_k = \frac{\alpha(\alpha-1)}{t^2}\delta_k;$$

sostituendo nell'equazione (3.31) avremo:

$$\frac{\alpha(\alpha-1)}{t^2}\delta_k + \frac{4}{3t^2}\alpha\delta_k + \frac{2}{3t^2}\delta_k\left(\frac{k^2v_s^2}{4\pi G\varrho_b} - 1\right) = 0.$$

Moltiplicando per t^2, dividendo per $\delta_k \neq 0$ ed ordinando i termini otteniamo infine la seguente relazione di dispersione:

$$\boxed{3\alpha^2 + \alpha + 2\left(\frac{k^2v_s^2}{4\pi G\varrho_b} - 1\right) = 0, \qquad (3.32)}$$

che è l'analogo della (2.33) trovata nello scorso capitolo. Le differenze sono ovviamente dovute al fatto che qui l'universo è in espansione.

I coefficienti di questa equazione algebrica di secondo grado in α sono:

$$\begin{cases} a = 3 \\ b = 1 \\ c = 2\left(\frac{k^2v_s^2}{4\pi G\varrho_b} - 1\right) \end{cases}$$

e il determinante vale

$$\Delta = (b^2 - 4ac) = 1 - 24\left(\frac{k^2v_s^2}{4\pi G\varrho_b} - 1\right) = 25 - \frac{6k^2v_s^2}{\pi G\varrho_b}$$

Il tipo di soluzioni dipende dal segno di Δ; il valore di k che annulla Δ corrisponde alla scala di Jeans, che separa i due regimi di soluzione:

$$\Delta = 0 \qquad \Longrightarrow \qquad k_J(t) = \frac{5}{v_s}\sqrt{\frac{\pi G\varrho_b(t)}{6}}; \quad \lambda_J(t) \equiv \frac{2\pi}{k_J(t)} = \frac{v_s}{5}\sqrt{\frac{24\pi}{G\varrho_b(t)}}$$

Se $\lambda < \lambda_J$ (cioè $k > k_J$), allora $\Delta < 0$ e le soluzioni sono immaginarie e corrispondono ad onde acustiche progressive:

$$\alpha_{1,2} = \frac{-b \pm i\sqrt{-\Delta}}{2a} = \frac{-1 \pm i\sqrt{\frac{6k^2v_s^2}{\pi G\varrho_b} - 25}}{6} = \frac{-1 \pm 5i\sqrt{\left(\frac{\lambda_J}{\lambda}\right)^2 - 1}}{6}.$$

La corrispondente soluzione per la fluttuazione di densità è quindi

$$\delta_\pm(\vec{r},t) = \delta_{\pm;k}(t)\exp(i\vec{k}\cdot\vec{r}) \propto \exp(i\vec{k}\cdot\vec{r})t^{-1/6}t^{\left[\pm\frac{5i}{6}\sqrt{\left(\frac{\lambda_J}{\lambda}\right)^2-1}\right]}$$

che si riscrive in modo più compatto sostituendo $t = \exp\ln t$

$$\delta_\pm(\vec{x},t) \propto t^{-1/6}\exp\left[i\vec{k}\vec{r} \pm \frac{5i}{6}\ln t\sqrt{\left(\frac{\lambda_J}{\lambda}\right)^2 - 1.}\right]$$

Si noti come il termine dopo il $\pm$ dentro l'esponenziale è l'equivalente della pulsazione $i\omega t$ che avevamo nel caso di universo statico.

Se invece $\lambda > \lambda_J$ (cioè $k < k_J$), allora $\Delta > 0$, le soluzioni sono reali e si ha il fenomeno di instabilità gravitazionale:

$$\delta_\pm(\vec{x},t) = \delta_k(t)_\pm\exp(i\vec{k}\cdot\vec{r}) \propto \exp(i\vec{k}\cdot\vec{r})t^{\left[\frac{-1\pm5\sqrt{1-(\lambda_J/\lambda)^2}}{6}\right]}.$$

Nel limite $\lambda \gg \lambda_J$, cioè su scale per le quali la pressione è trascurabile rispetto alla gravità, gli andamenti delle soluzioni si semplificano notevolmente:

$$\boxed{\delta_{\pm}(\vec{x},t) \propto \exp(i\vec{k}\cdot\vec{r})t^{\frac{-1\pm5}{6}} \qquad (3.33)}$$

ovvero le due soluzioni sono una crescente ed una decrescente nel tempo. La soluzione decrescente non ci interessa perché decade da sola, mentre quella crescente è la soluzione che determina la crescita delle fluttuazioni:

$$\delta_{k;+}(t) \propto t^{2/3} \propto a; \qquad \delta_{k;-}(t) \propto t^{-1} \propto a^{-3/2}.$$

Questo risultato vale sia per universi dominati da barioni che per universi dominati da materia oscura non collisionale. L'unica differenza tra i due casi è nell'interpretazione del termine di velocità del suono, ovvero di pressione, che entra nell'equazione di Jeans. Nel caso dei barioni, che sono un gas collisionale (essenzialmente idrogeno ed elio), v_s è la velocità del suono propriamente detta, cioè la velocità con cui le forze idrodinamiche rispondono alle differenze di pressione. Al contrario del gas, la materia oscura non barionica è non collisionale, quindi non ha pressione né velocità del suono. Il termine v_s in tal caso è una stima della dispersione di velocità tipica: σ_v della materia oscura; questa velocità si oppone alla gravità perché il moto di diversi elementi di fluido di materia oscura dentro una perturbazione di densità ne causa la diffusione stocastica e la cancellazione.

3.3.3 Universo di materia: soluzioni $\forall\Omega$

CAMPO: δ_M
REGIME SPAZIALE: $\lambda \gg \lambda_J$
REGIME TEMPORALE: $t > t_{eq}$

Consideriamo ora una soluzione alternativa, che sfrutta il fatto che il parametro di Hubble $H(t)$, la cui evoluzione discende dalle equazioni di Friedmann, è anche (casualmente!) soluzione dell'equazione di Jeans nel caso di universo di materia e nel limite $\lambda \gg \lambda_J$.

Questa soluzione è allo stesso tempo più ristretta e più generale di quelle viste finora. E' più ristretta perché vale solo nel limite in cui la pressione (cioè il termine v_s) è trascurabile, cioè quando la gravità domina. E' però più generale perché: (i) vale in tutti i regimi in cui valgono le equazioni di Friedmann, perciò su tutte le scale, minori e maggiori dell'orizzonte, purché ci si limiti, come detto, ad universi dominati da materia, cioè ad epoche con $t > t_{eq}$; (ii) perché vale per ogni tipo di universo: aperto, piatto o chiuso, cioè per ogni Ω.

Vediamola. Dalla definizione $H(t) = \dot{a}/a$, derivando rispetto al tempo avremo

$$\dot{H} = \frac{\ddot{a}}{a} - \frac{\dot{a}^2}{a^2} = \frac{\ddot{a}}{a} - H^2$$

ovvero

$$\dot{H} + H^2 = \frac{\ddot{a}}{a}; \qquad (3.34)$$

ma dalle Equazioni di Friedmann sappiamo che

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi G}{3}\varrho_b$$

che ci permette di riscrivere

$$\dot{H} + H^2 = -\frac{4\pi G}{3}\varrho_b.$$

Derivando ulteriormente rispetto a t otteniamo

$$\ddot{H} + 2H\dot{H} = -\frac{4\pi G}{3}\dot{\varrho}_b. \qquad (3.35)$$

Ora, sappiamo che per un universo di materia $\varrho_b \propto a^{-3}$, per cui

$$\frac{\dot{\varrho}_b}{\varrho_b} = -3\frac{\dot{a}}{a} = -3H$$

ovvero

$$\dot{\varrho}_b = -3H\varrho_b$$

che sostituita in (3.35) dà

$$\boxed{\ddot{H} + 2H\dot{H} - 4\pi G\varrho_b H = 0. \qquad (3.36)}$$

Questa equazione è formalmente identica - nel limite $k << k_J$ - all'equazione (3.30) che descrive l'evoluzione temporale di $\delta_k(t)$. Dal confronto tra le due possiamo quindi affermare che $H(t) \propto \delta_k(t)$.

Ora, negli universi dominati da materia (e non per esempio da una costante cosmologica) l'espansione è sempre decelerata, cioè $H(t)$ decresce nel tempo, come si vede ricavando $\dot{H}$ dall'equazione (3.34):

$$\dot{H} = -H^2 - \frac{4\pi G}{3}\varrho_b < 0.$$

Da questo capiamo che $H(t)$ fornisce la soluzione decrescente:

$$H(t) \propto \delta_-(t).$$

Per trovare la soluzione crescente, che è quella che maggiormente ci interessa, occorre sfruttare alcune proprietà delle soluzioni dei sistemi di equazioni differenziali.

Se $\delta_+(t)$ e $\delta_-(t)$ sono soluzioni linearmente indipendenti dell'equazione (3.36), allora il loro Wronskiano (definito come segue) è diverso da zero:

$$W \equiv \delta_-\dot{\delta}_+ - \delta_+\dot{\delta}_- \neq 0. \qquad (3.37)$$

Inoltre, data un'equazione del tipo $y'' + P(x)y' + Q(x)y = 0$, si prova che $W' = -P(x)W$ (e.g. Arfken 2nd edition, eq.(8.76) p.478).

Nel nostro caso l'equazione è la (3.36), quindi $x = t$; $y = H$ e $P(t) = 2H(t)$, da cui ricaviamo facilmente che

$$\frac{\dot{W}}{W} = -P(t) = -2\frac{\dot{a}}{a}$$

ovvero $W \propto a^{-2}$. Questo andamento, sostituito nella relazione che definisce lo Wronskiano eq.(3.37), ci permette di scrivere

$$\delta_-\dot{\delta}_+ - \delta_+\dot{\delta}_- = \frac{cost}{a^2}. \qquad (3.38)$$

Questa è la relazione che utilizzeremo per ottenere δ_+ a partire da δ_-. Per farlo notiamo che

$$d\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{vdu - udv}{v^2}$$

e che quindi integrando

$$u = v\int \frac{vdu - udv}{v^2}.$$

Se prendiamo $u = \delta_+$ e $v = \delta_-$ possiamo scrivere immediatamente

$$\delta_+(t) = \delta_-(t)\int \frac{\delta_-(t)\dot{\delta}_+(t) - \delta_+(t)\dot{\delta}_-(t)}{\delta_-^2(t)}dt = \delta_-(t)\int \frac{dt}{a^2\delta_-^2(t)} = H(t)\int \frac{dt}{a^2H^2(t)}$$

dove abbiamo fatto sparire la costante moltiplicativa in (3.38) perché ci interessa l'andamento temporale delle soluzioni e non la loro normalizzazione.

A questo punto conviene cambiare variabile di integrazione: dal tempo t al redshift z. Intanto, dalla definizione di redshift: $(1+z) = a_0/a$ segue che

$$a^{-2} = \frac{(1+z)^2}{a_0^2}.$$

La dipendenza temporale della costante di Hubble è (cfr. Lucchin, eq.(2.3) a p.59):

$$H^2(t) = H_0^2 \left(\frac{a_0}{a}\right)^2 \left[\Omega_0 \left(\frac{a_0}{a}\right) + 1 - \Omega_0\right]$$

che scritta in funzione del redshift diventa

$$\begin{aligned} H(z) &= H_0(1+z)[\Omega_0(1+z) + 1 - \Omega_0]^{1/2} \\ &= H_0(1+z)[1+\Omega_0 z]^{1/2}. \end{aligned} \tag{3.39}$$

Infine ci serve dt/dz; differenziando la definizione di redshift otteniamo subito

$$dz = -\frac{a_0}{a^2}\dot{a}dt = -\frac{a_0}{a}\frac{\dot{a}}{a}dt = -(1+z)H(z)dt$$

da cui

$$\frac{dt}{dz} = \frac{-1}{(1+z)H(z)}.$$

Sostituendo nell'integrale avremo quindi:

$$\delta_+(z) = H(z)\int_0^t dz \frac{dt}{dz}\frac{(1+z)^2}{a_0^2 H^2(z)} = -H(z)\int_\infty^z \frac{dz(1+z)}{a_0^2 H^3(z)}$$

che sostituendo anche la definizione di $H(z)$ da (3.39) diventa infine

$$\boxed{\begin{aligned} \delta_+(z) &= \frac{H_0}{a_0^2}(1+z)(1+\Omega_0 z)^{1/2}\int_z^\infty \frac{dz(1+z)}{H_0^3(1+z)^3(1+\Omega_0 z)^{3/2}} \\ &= (H_0 a_0)^{-2}(1+z)(1+\Omega_0 z)^{1/2}\int_z^\infty \frac{dz}{(1+z)^2(1+\Omega_0 z)^{3/2}} \end{aligned} \quad (3.40)}$$

che ricordiamo vale per ogni valore di Ω e per $t > t_{eq.}$, purché sia $\lambda >> \lambda_J$.

Questo integrale ammette sempre una soluzione analitica che però dipende dal valore di Ω_0. Come al solito i casi distinti sono tre:

(i) $\Omega_0 = 1$:

la soluzione (non normalizzata!) è immediata:

$$\delta_+(z) = (1+z)^{3/2}\int_z^\infty \frac{dz}{(1+z)^{7/2}} \propto (1+z)^{-1} \propto t^{2/3} \tag{3.41}$$

che ritrova il risultato già visto nel paragrafo precedente.

(ii) $\Omega_0 < 1$:

In tal caso l'integrale ha soluzione non normalizzata (cfr. Peebles 1980 eq. (11.16) p. 53):

$$\boxed{\delta_+(z) = 1 + \frac{3}{x} + \frac{3(1+x)^{1/2}}{x^{3/2}}\ \ln[(1+x)^{1/2} - x^{1/2}]; \qquad x = \left|\frac{\Omega_0^{-1} - 1}{(1+z)}\right| \equiv \left|\Omega(z)^{-1} - 1\right|. \quad (3.42)}$$

(ii) $\Omega_0 > 1$:

La soluzione, sempre a meno di un termine moltiplicativo, è (cfr. Peebles 1980 eq. (4.165) p. 162):

$$\boxed{\begin{aligned} \delta_+(z) &= -1 + \frac{3}{x} - \frac{3(1-x)^{1/2}}{x^{3/2}}\tan^{-1}\left[\left(\frac{x}{1-x}\right)^{1/2}\right]; \qquad 0 < \theta < \pi \quad (3.43) \\ \delta_+(z) &= -1 + \frac{3}{x} - \frac{3(1-x)^{1/2}}{x^{3/2}}\left\{\tan^{-1}\left[\left(\frac{x}{1-x}\right)^{1/2}\right] - \pi\right\}; \qquad \pi < \theta < 2\pi \quad (3.44) \end{aligned}}$$

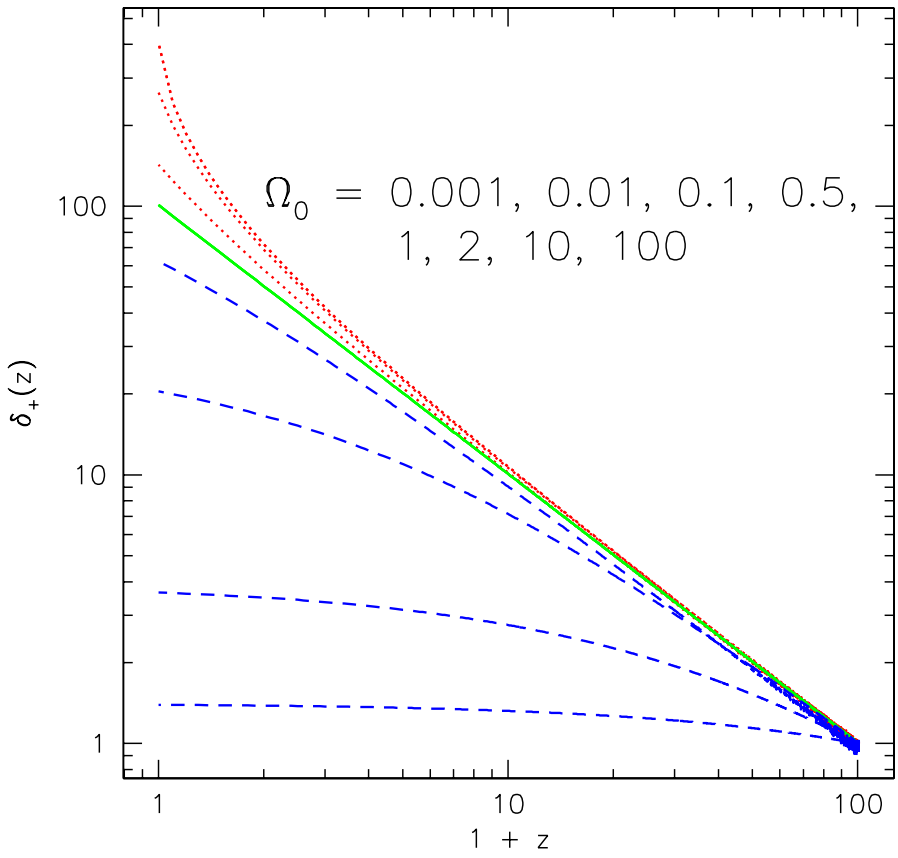

Figura 3.1: Crescita delle fluttuazioni di densità in universi dominati da materia, per diversi valori di Ω_0.

3.3.4 Soluzioni per un universo di radiazione

CAMPO: δ_R
REGIME SPAZIALE: $\lambda < \lambda_J; \lambda > \lambda_J$
REGIME TEMPORALE: $t < t_{eq}$

Dalle equazioni della Relatività Generale si ricava l'equazione corrispondente alla (3.30) nel caso di un universo dominato da radiazione. L'equazione è simile:

$$\boxed{\ddot{\delta}_k + 2\frac{\dot{a}}{a}\dot{\delta}_k + \delta_k\left(k^2 v_s^2 - \frac{32}{3}\pi G\varrho_b\right) = 0; \qquad (3.45)}$$

dove ricordiamo che **ora k è il numero d'onda fisico**; il diverso coefficiente numerico davanti al termine gravitazionale è essenzialmente dovuto al contributo della pressione alla gravità, contributo che nel caso non relativistico si può trascurare. La velocità del suono è prossima a quella della luce:

$$v_s = \frac{c}{\sqrt{3}} \qquad (3.46)$$

perché per un universo di radiazione è $p = \omega c^2 \varrho = \frac{1}{3}\varrho c^2$.

Come fatto nei paragrafi precedenti, consideriamo gli andamenti temporali di densità e fattore di scala del caso imperturbato:

$$\begin{cases} \varrho_b(t) = \dfrac{3}{32\pi G t^2} \\ a \propto t^{1/2} \quad \text{da cui} \quad \dfrac{\dot{a}}{a} = \dfrac{1}{2t} \end{cases}$$

che inserite in eq. (3.45) danno:

$$\ddot{\delta}_k + \frac{\dot{\delta}_k}{t} + \delta_k\left(k^2 v_s^2 - \frac{1}{t^2}\right) = 0.$$

Come nel caso precedente, cerchiamo una soluzione a legge di potenza per la dipendenza temporale di δ:

$$\delta_k(t) = t^\alpha; \qquad \dot{\delta}_k = \frac{\alpha}{t}\delta_k; \qquad \ddot{\delta}_k = \frac{\alpha(\alpha-1)}{t^2}\delta_k$$

dove ignoriamo la normalizzazione perché quel che ci interessa è l'andamento temporale. Inserendo la soluzione nell'equazione otteniamo la relazione di dispersione

$$\frac{\alpha(\alpha-1)}{t^2} + \frac{\alpha}{t^2} + k^2 v_s^2 - \frac{1}{t^2} = 0$$

ovvero, moltiplicando per $t^2 \neq 0$:

$$\begin{aligned} \alpha(\alpha-1) + \alpha + t^2 k^2 v_s^2 - 1 &= 0 \\ \alpha^2 &= 1 - k^2 v_s^2 t^2; \end{aligned} \qquad (3.47)$$

infine, esprimendo t^2 in funzione di $\varrho_b(t)$ possiamo riscrivere

$$\boxed{\alpha^2 = 1 - \frac{3k^2 v_s^2}{32\pi G\varrho_b(t)}. \qquad (3.48)}$$

Come al solito, ci sono due tipi di soluzioni per α, a seconda del segno di α^2. Il valore $\alpha^2 = 0$ separa i due regimi e definisce numero e lunghezza d'onda di Jeans:

$$\alpha^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad k_J(t) = \sqrt{\frac{32\pi G\varrho_b(t)}{3v_s^2}}; \qquad (3.49)$$

$$\lambda_J(t) \equiv \frac{2\pi}{k_J(t)} = \sqrt{\frac{3v_s^2\pi}{8G\varrho_b(t)}} \qquad (3.50)$$

Possiamo riscrivere la relazione di dispersione (3.48) utilizzando la definizione di scala di Jeans

$$\alpha^2 = 1 - \left(\frac{\lambda_J}{\lambda}\right)^2. \tag{3.51}$$

Il regime di instabilità gravitazionale corrisponde ad una soluzione reale:

$$\begin{aligned} \alpha^2 > 0 \quad &\Rightarrow \quad \lambda > \lambda_J \quad (k < k_J) \\ \delta(\vec{x}, t) \quad &\propto \quad t^{\pm\alpha} \exp(i\vec{k} \cdot \vec{r}); \end{aligned} \tag{3.52}$$

che nel limite $\lambda \gg \lambda_J$ dà per la soluzione crescente

$$\boxed{\alpha = 1 \quad \Rightarrow \quad \delta_k(t) \propto t \propto a^2; \qquad (3.53)}$$

Il regime di oscillazione acustica corrisponde invece ad una soluzione immaginaria:

$$\begin{aligned} \alpha^2 < 0 \quad &\Rightarrow \quad \lambda < \lambda_J \quad (k > k_J) \\ \delta(\vec{x}, t) \quad &\propto \quad t^{\pm i\alpha} \exp(i\vec{k} \cdot \vec{r}) \propto \exp(\pm i\alpha \ln t + i\vec{k} \cdot \vec{r}). \end{aligned} \tag{3.54}$$

E' utile commentare questo risultato: inserendo in eq. (3.47) la definizione di velocità del suono eq.(3.46) possiamo riscrivere la scala di Jeans come

$$\lambda_J(t) = 2\pi v_s t = 2ct\frac{\pi}{\sqrt{3}}. \tag{3.55}$$

D'altra parte, la scala dell'orizzonte cosmologico prima dell'equivalenza tra materia e radiazione si ottiene facilmente dall'eq. (3.1) ponendo $a \propto t^{1/2}$, e dà

$$R_H(t < t_{eq}) = 2ct.$$

Confrontando le due espressioni vediamo che prima dell'equivalenza la scala di Jeans della radiazione è maggiore della scala dell'orizzonte:

$$\boxed{t < t_{eq} \quad \Rightarrow \quad \lambda_J(t) > R_H(t); \qquad (3.56)}$$

questo significa che, **prima dell'equivalenza, per la radiazione non esiste instabilità gravitazionale entro l'orizzonte**. Poiché l'equazione (3.45) da cui siamo partiti è General Relativistica, la soluzione di instabilità gravitazionale trovata in eq.(3.53) è applicabile anche a scale maggiori dell'orizzonte. Infatti è la stessa soluzione che avevamo trovato con argomenti più qualitativi nel Paragrafo 3.2.

La non esistenza di instabilità gravitazionale entro l'orizzonte durante quest'epoca è dovuta al fatto che la velocità del suono è prossima a quella della luce. Questo fatto ha anche un'altra conseguenza pratica: poiché le onde acustiche si propagano a velocità così alta, la pressione è estremamente efficiente nel cancellare le fluttuazioni di densità, e quindi l'universo si può considerare con buona approssimazione come imperturbato: $\delta \approx \delta_R \approx 0$. Un modo equivalente di esprimere lo stesso concetto è il seguente: poiché la velocità di propagazione delle onde sonore è molto alta, in una qualsiasi posizione $\vec{x}$ dell'universo passano, in ogni istante, un gran numero di onde acustiche di lunghezza d'onda, ampiezza e fase diverse, che in media si cancellano tra loro, dando $\langle \delta_R(\vec{x}) \rangle \approx 0$.

3.3.5 Effetto di stagnazione

CAMPO: δ_{DM}
REGIME SPAZIALE: $\lambda_{J;DM} < \lambda < R_H$
REGIME TEMPORALE: $t < t_{eq}$

Le equazioni che abbiamo visto nei paragrafi precedenti sono approssimate non solo perché linearizzate, ma anche perché assumono che nell'universo esista un solo fluido, quello che domina il campo di gravità ad ogni epoca (quindi la radiazione prima dell'equivalenza, la materia oscura o barionica dopo l'equivalenza), mentre trascurano il contributo gravitazionale delle altre componenti, minori.

In questo paragrafo vogliamo studiare l'andamento delle fluttuazioni di materia oscura *sopra la scala di Jeans*, durante il periodo dominato dalla radiazione (quindi per $t < t_{eq}$), quando la materia oscura non è la componente dominante.

In generale, l'equazione che descrive l'evoluzione temporale delle fluttuazioni in una componente *non relativistica* X (sia essa dominante oppure no) in un universo composto da più fluidi è sempre la (3.30), dove però: (i) nel termine di sorgente del campo gravitazionale vanno ora considerate tutte le componenti, relativistiche e non relativistiche, dominanti e non dominanti, perché tutte queste contribuiscono alla gravità; (ii) nel termine di pressione (o velocità) va usata la velocità del suono (o la dispersione di velocità, nel caso non collisionale) della componente X di cui si studia l'evoluzione:

$$\boxed{\ddot{\delta}_{k;X} + 2\frac{\dot{a}}{a}\dot{\delta}_{k;X} + k^2 v_s^2 \delta_{k;X} - 4\pi G \sum_i \varrho_{b_i}\delta_{k;i} = 0} \qquad (3.57)$$

dove la sommatoria è estesa a tutte le specie i presenti nell'universo.

Nel nostro caso δ_X è δ_{DM}, e trascureremo il contributo della pressione perché ci interessano le scale $\lambda > \lambda_J$. Inoltre, utilizzando il risultato del paragrafo precedente: $\langle\delta_R(\vec{x})\rangle = 0$ possiamo porre a zero il contributo per $i = R$. Infine, trascuriamo anche il contributo dei barioni perché molto minore di quello della materia oscura. Con queste informazioni la sommatoria si può quindi scrivere

$$\sum_i \varrho_{b_i}\delta_{k;i} = \varrho_{DM}\delta_{k;DM} + \varrho_R\delta_{k;R} + \varrho_B\delta_{k;B} \simeq \varrho_{DM}\delta_{k;DM}$$

per cui l'equazione precedente diventa

$$\ddot{\delta}_{k;DM} + 2\frac{\dot{a}}{a}\dot{\delta}_{k;DM} - 4\pi G\varrho_{DM}\delta_{k;DM} = 0. \qquad (3.58)$$

Conviene riscrivere quest'equazione nella nuova variabile: $x = a/a_{eq}$. Intanto

$$\frac{d}{dt} = \frac{dx}{dt}\frac{d}{dx} = \frac{\dot{a}}{a_{eq}}\frac{d}{dx} \qquad (3.59)$$

e quindi

$$\frac{d^2}{dt^2} = \frac{d}{dt}\left(\frac{\dot{a}}{a_{eq}}\frac{d}{dx}\right) = \frac{\ddot{a}}{a_{eq}}\frac{d}{dx} + \frac{\dot{a}}{a_{eq}}\frac{d}{dt}\left(\frac{d}{dx}\right).$$

Il secondo termine a DX dell'uguale è

$$\left(\frac{\dot{a}}{a_{eq}}\right)^2 \frac{d^2}{dx^2}$$

per cui

$$\frac{d^2}{dt^2} = \frac{\ddot{a}}{a_{eq}}\frac{d}{dx} + \left(\frac{\dot{a}}{a_{eq}}\right)^2 \frac{d^2}{dx^2}. \qquad (3.60)$$

Sostituendo le (3.59) e (3.60) in eq (3.58), quest'ultima diventa

$$\frac{\ddot{a}}{a_{eq}}\delta_k' + \left(\frac{\dot{a}}{a_{eq}}\right)^2 \delta_k'' + 2\frac{\dot{a}}{a}\frac{\dot{a}}{a_{eq}}\delta_k' - 4\pi G\varrho_{DM}\delta_k = 0 \qquad (3.61)$$

dove $\delta_k = \delta_{k;DM}$, ed il $'$ indica la derivata rispetto ad x.

Ora dobbiamo esprimere a, $\dot{a}$, $\ddot{a}$ e ϱ_{DM} in funzione della nuova variabile x; intanto notiamo che

$$\varrho_{DM}(a) \propto a^{-3}, \quad \varrho_R(a) \propto a^{-4}$$

e che per definizione all'equivalenza le due densità si equivalgono: $\varrho_R(a_{eq}) = \varrho_{DM}(a_{eq})$; ne consegue che

$$\frac{\varrho_{DM}(a)}{\varrho_R(a)} = \frac{a}{a_{eq}} \equiv x.$$

Per esprimere $\varrho_{DM}(a)$ in funzione di x utilizziamo le equazioni di Friedmann per $\Omega = 1$, che vale con ottima approssimazione prima dell'equivalenza:

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 \equiv H^2 = \frac{8\pi G}{3}(\varrho_{DM} + \varrho_R) = \frac{8\pi G}{3}\varrho_{DM}\left(\frac{x+1}{x}\right)$$

da cui

$$\varrho_{DM} = \frac{3H^2 x}{8\pi G(x+1)}.$$

Per la derivata prima invece:

$$\frac{\dot{a}}{a_{eq}} = \frac{\dot{a}}{a}\frac{a}{a_{eq}} = Hx;$$

per la derivata seconda usiamo l'altra equazione di Friedmann:

$$\ddot{a} = -\frac{4\pi G}{3}\left(\varrho + \frac{3p}{c^2}\right)a$$

con $\varrho = \varrho_{DM} + \varrho_R$. La pressione di radiazione è $p = \varrho_R c^2/3$, e contribuisce per un altro ϱ_R; perciò

$$\ddot{a} = -\frac{4\pi G}{3}\left(\varrho_{DM} + 2\varrho_R\right)a = -\frac{4\pi G}{3}a\varrho_{DM}\left(\frac{x+2}{x}\right); \tag{3.62}$$

sostituendo ϱ_{DM} da sopra e dividendo tutto per a_{eq} possiamo scrivere

$$\frac{\ddot{a}}{a_{eq}} = \frac{-H^2 x(x+2)}{2(x+1)}.$$

Inserendo tutte queste espressioni in eq.(3.61), dopo facili passaggi si arriva a scrivere:

$$\boxed{\delta_k'' + \frac{(2+3x)}{2x(1+x)}\delta_k' - \frac{3}{2x(1+x)}\delta_k = 0.} \tag{3.63}$$

Questa è un'equazione ipergeometrica che ammette la seguente soluzione crescente (Meszaros, 1974):

$$\boxed{\delta_{k;DM_+} = 1 + \frac{3}{2}x} \tag{3.64}$$

verificabile per sostituzione nell'equazione (3.63). Ricordando la definizione di x possiamo riscrivere

$$\delta_{k;DM_+}(a < a_{eq.}) \propto 1 + \frac{3}{2}\frac{a}{a_{eq}};$$

la crescita totale (detta *fattore di crescita*) della perturbazione dall'ingresso all'orizzonte a_H fino all'equivalenza è data dal rapporto

$$\frac{\delta(a_{eq})}{\delta(a_H)} = \frac{1+3/2}{1+3a_H/2a_{eq}} \leq \frac{5}{2}$$

che vale al più 5/2, quando $a_H \to 0$. Questo ci mostra che le fluttuazioni di materia oscura prima dell'equivalenza non crescono quasi dentro l'orizzonte.

Fisicamente, il termine di espansione ($2\dot{a}/a$) in equazione (3.58) inibisce la crescita delle perturbazioni δ_{DM} perché prima dell'equivalenza il tempo di espansione è minore del tempo di free-fall gravitazionale. Infatti quest'ultimo è dato da

$$t_{ff} \sim \sqrt{\frac{1}{G\varrho_{DM}(t)}};$$

mentre il tempo caratteristico di espansione (cioè l'età dell'universo) si ricava dalla relazione

$$\varrho(t) \approx \varrho_R(t) = \frac{3}{32\pi G t^2} \propto \frac{1}{Gt^2} \quad \Rightarrow \quad t_H \sim \sqrt{\frac{1}{G\varrho_R}};$$

Poiché prima dell'equivalenza $\varrho_R > \varrho_{DM}$, ne consegue $t_{ff} > t_H$, cioè le perturbazioni di materia oscura non riescono a crescere in un tempo di Hubble. Per questo si parla di *stagnazione* delle perturbazioni di materia oscura, o di effetto Meszaros (Meszaros, 1974) dal nome del primo che fece questo calcolo.

Ricordiamo che la soluzione da noi trovata è quella crescente. Quella decrescente si potrebbe trovare usando le proprietà dello Wronskiano come abbiamo fatto nel paragrafo 3.3.3. (si veda e.g. Padmanabhan p. 165-166). La soluzione generale è una combinazione lineare delle due.

3.3.6 Andamento dei barioni dopo la ricombinazione

CAMPO: δ_B
REGIME SPAZIALE: $\lambda_{J;DM} < \lambda < R_H$
REGIME TEMPORALE: $t > t_{dis}$

Il modello eq. (3.57), che descrive l'evoluzione delle perturbazioni in una componente non relativistica anche non dominante, torna utile anche per vedere l'andamento delle fluttuazioni barioniche per $a > a_{dis} \approx a_{rec}$, dopo che i barioni si sono liberati dall'accoppiamento con la radiazione. In questo caso l'unico termine non trascurabile nella sommatoria è quello relativo alla materia oscura, e l'equazione si riscrive

$$\ddot{\delta}_{k;B} + 2\frac{\dot{a}}{a}\dot{\delta}_{k;B} - 4\pi G\varrho_{DM}\delta_{k;DM} = 0. \tag{3.65}$$

Mettiamoci nel caso più semplice di un universo con $\Omega = 1$, che vale con ottima approssimazione per questi redshift. L'andamento delle fluttuazioni di materia oscura è stato più volte ricavato ed è $\delta_{DM} = Aa$, con A una costante appropriata. Come nel paragrafo precedente, conviene passare alla nuova variabile a; ricordando che

$$\frac{d}{dt} = \dot{a}\frac{d}{da}; \quad \frac{d^2}{dt^2} = \ddot{a}\frac{d}{da} + \dot{a}^2\frac{d^2}{da^2}$$

possiamo riscrivere l'eq.(3.65) come

$$\ddot{a}\delta_k' + \dot{a}^2\delta_k'' + 2\frac{\dot{a}^2}{a}\delta_k' - 4\pi G\varrho_{DM}Aa = 0 \tag{3.66}$$

dove $\delta_k = \delta_{k;B}$, ed il $'$ indica la derivata rispetto ad a.

Anche qui usiamo le equazioni di Friedmann:

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{8\pi G}{3}\varrho_{DM} \tag{3.67}$$

$$\ddot{a} = -\frac{4\pi a G}{3}\varrho_{DM}; \tag{3.68}$$

inserendole in eq.(3.66) e semplificando otteniamo

$$\frac{2}{3}a\delta_k'' + \delta_k' - A = 0. \tag{3.69}$$

Questa equazione ammette per ispezione una soluzione del tipo $\delta_B \propto a$. Sia allora $\delta_B(a) = Ba + C$ con B e C costanti opportune. Inserendo questa soluzione nell'equazione vediamo subito che dev'essere $B = A$.

Imponiamo inoltre la condizione al contorno $\delta_B(a_{dis}) \approx 0$, perché fino al disaccoppiamento le perturbazioni nei barioni oscillano con la radiazione e non crescono, quindi sono ancora piccole come quando entrarono dentro l'orizzonte cosmologico. Questa condizione permette di ricavare il valore di C:

$$\delta_B(a_{dis}) \equiv Aa_{dis} + C = 0 \quad \Rightarrow C = -Aa_{dis}$$

e quindi di ottenere la soluzione finale

$$\delta_B(a) = Aa - Aa_{dis} = \delta_{DM}\,(1 - a_{dis}/a)\,.$$

Questa ci mostra che dopo la ricombinazione e il disaccoppiamento δ_B ha un periodo di crescita accelerata dovuta al fatto che i barioni, una volta disaccoppiati dalla radiazione, subiscono l'attrazione delle perturbazioni nella componente di materia oscura (sentono le buche di potenziale della materia oscura). Questa attrazione accelera la crescita di δ_B e la porta presto a regime con quella di δ_{DM}. Questo fenomeno è chiamato in inglese *catch up* dei barioni.

3.4 Ricapitolo delle soluzioni:

Facciamo un breve schema per riassumere l'andamento delle perturbazioni nelle varie specie durante le varie ere cosmologiche.

- **Prima dell'equivalenza:** Per $a < a_{eq}$ è $\varrho \approx \varrho_R$ e quindi le fluttuazioni dominanti sono quelle nella radiazione: δ_R.

  Fuori dell'orizzonte (par.3.2): Su scale maggiori dell'orizzonte le fluttuazioni nella radiazione guidano l'andamento per tutte le componenti:

  $$\lambda > R_H : \quad \delta_R \propto \delta_{DM} \propto \delta_B \propto a^2$$

  nell'ottima approssimazione $\Omega = 1$.

  Entro l'orizzonte (par.3.3.4, 3.3.5): Poiché, come abbiamo visto, la scala di Jeans della radiazione è maggiore di quella dell'orizzonte, le perturbazioni nel fluido barioni-radiazione oscillano; quelle nella materia oscura sono praticamente congelate dall'effetto di stagnazione:

  $$\begin{aligned} \lambda < R_H : \quad \delta_R &\propto \delta_B \propto \text{ oscilla} \\ \delta_{DM} &\propto \text{ quasicostante} \end{aligned}$$

- **tra l'equivalenza e la ricombinazione:** Per $a_{eq} < a < a_{rec}$ è $\varrho \approx \varrho_{DM}$ e quindi le fluttuazioni dominanti sono quelle nella materia oscura: δ_{DM}.

  Fuori dell'orizzonte (par.3.2, 3.3.3): Su scale maggiori dell'orizzonte le fluttuazioni nella materia oscura guidano l'andamento per tutte le componenti:

  $$\begin{aligned} \lambda > R_H : \quad \delta_{DM} \propto \delta_R \propto \delta_B &\propto a \quad (\Omega = 1)) \\ &< a \quad (\Omega < 1)) \\ &> a \quad (\Omega > 1)) \end{aligned}$$

  Entro l'orizzonte, sopra la scala di Jeans (par.3.3.2, 3.3.3): Le perturbazioni nella componente oscura crescono, mentre quelle nel fluido barioni-radiazione oscillano (questa soluzione non l'abbiamo dimostrata); infatti, sebbene a sia δ_{DM} a dominare, la pressione della radiazione supera l'attrazione gravitazionale della materia oscura, e l'accoppiamento tra barioni e radiazione è anch'esso più forte dell'attrazione gravitazionale della materia oscura:

  $$\begin{aligned} \delta_{DM} &\propto a \quad (\Omega = 1)) \\ \delta_{DM} &< a \quad (\Omega < 1)) \\ \delta_{DM} &> a \quad (\Omega > 1)) \\ \delta_R &\propto \delta_B \propto \text{ oscilla} \end{aligned}$$

  Entro l'orizzonte, sotto la scala di Jeans: come vedremo nel prossimo capitolo, in questo caso le perturbazioni nella materia oscura sono cancellate dalla diffusione (free streaming).

- **Dopo la ricombinazione:** Per $a > a_{rec}$ è ancora $\varrho \approx \varrho_{DM}$ e quindi le fluttuazioni dominanti sono sempre quelle nella materia oscura: δ_{DM}.

  Fuori dell'orizzonte (par.3.2, 3.3.3): Tutto uguale al caso precedente:

$$\begin{aligned} \lambda > R_H : \quad \delta_{DM} \propto \delta_R \propto \delta_B &\propto a \quad (\Omega = 1)) \\ &< a \quad (\Omega < 1)) \\ &> a \quad (\Omega > 1)) \end{aligned}$$

  Entro l'orizzonte, sopra la scala di Jeans (par.3.3.2, 3.3.3, 3.3.6): Le perturbazioni nella componente oscura crescono come prima. La radiazione si è disaccoppiata dai barioni e quindi oscilla e decade. Le perturbazioni barioniche sono perciò libere di reagire alla gravità delle perturbazioni di materia oscura, e subiscono una crescita accelerata che le porta al livello di quelle di materia oscura (cioè i barioni cadono nelle buche di potenziale della materia oscura). Una volta raggiunte le perturbazioni di materia oscura, entrambe crescono con l'andamento previsto dal tipo di universo:

$$\begin{aligned} \delta_{DM} &\propto a \quad (\Omega = 1)) \\ \delta_{DM} &< a \quad (\Omega < 1)) \\ \delta_{DM} &> a \quad (\Omega > 1)) \\ \delta_R &\propto \text{oscilla e decade} \\ \delta_B &\propto \text{crescita accelerata e poi} \propto \delta_{DM} \end{aligned}$$

  Entro l'orizzonte, sotto la scala di Jeans: Anche in questo caso le perturbazioni nella materia oscura sono cancellate dalla diffusione (free streaming), e i barioni seguono. Come però vedremo, nel caso di maggior interesse pratico (materia oscura fredda) la scala di Jeans della materia oscura dopo l'equivalenza è piccola e quindi questo regime in pratica non esiste.

Capitolo 4

Massa di Jeans e di dissipazione

Dispense per il corso di Cosmologia Modulo A
G.Tormen, Dipartimento di Astronomia, Università di Padova
(9 dicembre 2002)

4.1 Introduzione

Nello scenario standard di formazione delle strutture cosmiche la componente di materia dominante è oscura e non barionica. La materia oscura è stata introdotta in modo puramente teorico agli inizi degli anni '80 per superare la contraddizione tra l'ampiezza delle fluttuazioni di temperatura del CMB previste per un universo dominato da barioni: $\Delta T/T \approx 10^{-3}$ e i vincoli osservativi sull'ampiezza effettivamente osservata: $\Delta T/T < 10^{-4}$ (la misura è un limite superiore perché l'ampiezza delle fluttuazioni del CMB fu misurata solo 10 anni dopo, nel 1992).

Come candidati per la materia oscura, non barionica per non contravvenire ai vincoli su Ω_b imposti dalla nucleosintesi cosmologica, vennero proposti diversi tipi di particelle elementari esotiche, previste nelle teorie di Supersimmetria e GUT, in particolare neutrini con massa e assioni.

Nel 2000 un esperimento ha tentativamente identificato una particella prevista da queste teorie, il neutralino con massa $m \approx 100$ Gev, che potrebbe essere il vero candidato per la materia oscura. Rimane però il fatto che, anche oggi, la materia oscura è uno stratagemma teorico e non ancora una particella con un nome.

Le particelle esotiche - candidate ad essere materia oscura - hanno una sezione d'urto trascurabile nelle interazioni con le particelle comuni e tra loro, e possono quindi essere considerate non collisionali. Questo significa che il loro moto non è determinato da urti con particelle vicine (come invece avviene per un gas), ma dalla curvatura dell'intero spazio-tempo, attraverso le fluttuazioni di materia ed energia presenti in tutto l'universo. Il moto avviene quindi lungo geodetiche dello spazio-tempo.

Ai fini del nostro corso la caratteristica che differenzia i diversi candidati di materia oscura è solo la loro massa, come vedremo tra breve.

4.2 Hot e Cold dark matter

Consideriamo un universo composto da materia barionica, radiazione e materia oscura. Ricordiamo che la radiazione è dominante se $t < t_{eq}$, mentre per $t > t_{eq}$ domina la materia oscura.

Consideriamo ora una perturbazione di scala propria λ, relativa ad una massa $M \propto \lambda^3$, che entri nell'orizzonte all'epoca a_H. A tale epoca sarà per definizione $M = M_H$ con M_H la massa contenuta entro l'orizzonte. Definiamo anche l'istante a_{NR} in cui la velocità tipica delle particelle di materia oscura diventano non relativistiche, e l'istante a_{DX} in cui la materia oscura X si disaccoppia dal resto della materia e radiazione dell'universo.

L'epoca di de-relativizzazione dipende essenzialmente dalla massa m_X della particella, perché corrisponde rozzamente all'epoca in cui la temperatura dell'universo è uguale all'energia a riposo della particella:

$$kT(a_{NR;X}) \approx m_X c^2;$$

poiché la temperatura dell'universo diminuisce all'aumentare del tempo, questo mostra come le particelle pesanti si de-relativizzino prima di quelle leggere.

Ci sono allora due ovvi casi: il primo è quello in cui m_X è abbastanza piccola da permettere il disaccoppiamento della materia oscura quando essa è ancora relativistica: $a_{DX} < a_{NR}$; il secondo è quello in cui m_X è più grande, per cui la materia oscura prima si de-relativizza ed in seguito si disaccoppia: $a_{NR} < a_{DX}$. Nel primo caso (particelle leggere) si parla di materia oscura *calda o hot dark matter: HDM*, nel secondo (particelle pesanti) di materia oscura *fredda o cold dark matter: CDM*. I neutrini massivi ($m_\nu \approx 10 - 30$ eV) sono il principale candidato di HDM, mentre i neutralini appartengono alla famiglia della CDM.

4.3 Andamento della velocità per la materia oscura

Prima dell'epoca di de-relativizzazione, le particelle di materia oscura hanno una velocità dell'ordine di quella della luce; dopo quest'epoca la velocità diminuisce:

1. per $a < a_{NR}$ avremo $v \approx c/\sqrt{3}$;
2. per $a > a_{NR}$ avremo invece $v < c/\sqrt{3}$; In quest'ultimo caso possono verificarsi due differenti situazioni.
   - se $a_{NR} < a < a_{DX}$ (intervallo che esiste solo nel caso CDM) la materia oscura è accoppiata alla radiazione e la velocità tipica delle particelle è legata alla temperatura:
   $$v_{DM}^2 \approx T_R \propto a^{-1} \quad \Rightarrow \quad v \propto a^{-1/2};$$
   - quando invece $a > a_{DX}$ la velocità tipica della materia oscura decade come $v \propto a^{-1}$. Infatti, la velocità totale di una particella di materia oscura è
   $$u = \dot{r} = Hr + v_p;$$
   dopo che materia oscura e radiazione si sono disaccoppiate, la particella si muove con moto uniforme: $u = cost$ e quindi in un intervallo di tempo δt avremo che
   $$\delta u = H\delta r + \delta v_p = 0;$$
   ma scrivendo $\delta r = v_p \delta t$ otteniamo
   $$\delta v_p = -H\delta r = -\frac{\dot{a}}{a} v_p \delta t$$
   ovvero
   $$\frac{\delta v_p}{v_p} = -\frac{\dot{a}\delta t}{a} = -\frac{\delta a}{a}$$
   da cui
   $$v_p \propto a^{-1}.$$

Ricordiamo che la scala di Jeans di una specie X è determinata dalla velocità v_X della specie perturbata (che determina la pressione) e dalla densità ϱ_{DOM} della specie dominante:

$$\lambda_{J;X} \propto \frac{v_X}{\sqrt{G\varrho_{DOM}}} \tag{4.1}$$

Definiamo la massa di Jeans $M_{J;X}$ per la specie X come la massa *nella specie* X contenuta entro una sfera di raggio $R = \lambda_J/2$; M_J va dunque determinata utilizzando la densità della specie perturbata:

$$M_{J;X} = \frac{4\pi}{3} \varrho_X \lambda_{J;X}^3. \tag{4.2}$$

Assumiamo infine che l'epoca di de-relativizzazione della materia oscura avvenga sempre prima dell'equivalenza, come avviene in tutti i casi di interesse: $a_{NR} < a_{eq}$.

4.4 Calcolo dell'equivalenza

Calcoliamo innanzitutto l'epoca dell'equivalenza tra materia oscura e radiazione, che chiameremo a_{eq} per consistenza con il resto del corso. Poiché

$$\frac{\varrho_R}{\varrho_{0cr}} \equiv \Omega_{0R}(1+z)^4 \quad ; \quad \frac{\varrho_X}{\varrho_{0cr}} \equiv \Omega_{0X}(1+z)^3 \tag{4.3}$$

per $a = a_{eq}$ avremo

$$\varrho_R(a_{eq}) = \varrho_X(a_{eq}) \quad \Rightarrow \quad \Omega_{0R}(1+z)^4 = \Omega_{0X}(1+z)^3. \tag{4.4}$$

Ricordando che $\Omega_{0R} = 2.56 \times 10^{-5} h^2$, sostituendo ricaviamo subito che

$$(1+z_{eq}) = \frac{\Omega_{0X}}{\Omega_{0R}} = 3.9 \times 10^4 \Omega_{0X} h^2; \tag{4.5}$$

tipicamente quindi l'equivalenza avviene ad un redshift dell'ordine di 10^4.

4.5 Andamento della massa di Jeans per la materia oscura

Calcoliamo ora come varia nel tempo la massa di Jeans per la materia oscura (calda e fredda). Dobbiamo considerari gli intervalli fra le diverse epoche e per ciascuno calcolare la scala λ_J e M_J.

1. per $a < a_{NR}$ (caso sia CDM che HDM) avremo

$$\begin{aligned} v &\sim \frac{c}{\sqrt{3}}; && (4.6)\\ \varrho_{DOM} &\sim \varrho_R \propto a^{-4}; \quad \varrho_{DM} \propto a^{-3}; && (4.7)\\ \lambda_J &\propto v\varrho_{DOM}^{-1/2} \propto a^2; && (4.8)\\ M_J &\propto \lambda_J^3 \varrho_{DM} \propto a^6 a^{-3}; \propto a^3 && (4.9) \end{aligned}$$

2. per $a_{NR} < a < a_{DX}$ (caso solo CDM) avremo

$$\begin{aligned} v &\propto a^{-1/2}; && (4.10)\\ \varrho_{DOM} &\sim \varrho_R \propto a^{-4}; \quad \varrho_{DM} \propto a^{-3} && (4.11)\\ \lambda_J &\propto a^2 a^{-1/2} \propto a^{3/2}; && (4.12)\\ M_J &\propto a^{9/2} a^{-3} \propto a^{3/2}; && (4.13) \end{aligned}$$

3. per $a_{NR} < a < a_{eq}$ (caso HDM) oppure $a_{DX} < a < a_{eq}$ (caso CDM) avremo

$$\begin{aligned} v &\propto a^{-1}; && (4.14)\\ \varrho_{DOM} &\sim \varrho_R \propto a^{-4}; \quad \varrho_{DM} \propto a^{-3}; && (4.15)\\ \lambda_J &\propto a^2 a^{-1} \propto a; && (4.16)\\ M_J &\propto a^3 a^{-3} \sim cost; && (4.17) \end{aligned}$$

4. infine per $a > a_{eq}$ avremo

$$\begin{aligned} v &\propto a^{-1}; && (4.18)\\ \varrho_{DOM} &\sim \varrho_{DM} \propto a^{-3}; && (4.19)\\ \lambda_J &\propto a^{-1} a^{3/2} \propto a^{1/2}; && (4.20)\\ M_J &\propto a^{3/2} a^{-3} \propto a^{-3/2}. && (4.21) \end{aligned}$$

4.6 Massa entro l'orizzonte cosmologico.

Si definisce la massa (di materia oscura) entro l'orizzonte R_H come

$$M_H \propto \varrho_{DM} R_H^3; \tag{4.22}$$

In questo caso basta distinguere tra prima e dopo l'equivalenza:

1. per $a < a_{eq}$ avremo

$$R_H \propto a^2; \tag{4.23}$$
$$M_H \propto R_H^3 \varrho_{DM} \propto a^6 a^{-3} \propto a^3; \tag{4.24}$$

2. per $a > a_{eq}$ avremo invece

$$R_H \propto a^{3/2}; \tag{4.25}$$
$$M_H \propto R_H^3 \varrho_{DM} \propto a^{9/2} a^{-3} \propto a^{3/2}. \tag{4.26}$$

Notiamo che per $a < a_{NR}$ abbiamo $M_J \sim M_H$ in quanto $v \sim c/\sqrt{3}$. Questo vale per entrambi i modelli di materia oscura presi in considerazione (HDM e CDM). In questo caso M_J non ha effettiva rilevanza fisica.

4.7 Equivalenza dei barioni

Ragioniamo allo stesso modo per determinare gli andamenti delle analoghe grandezze relative questa volta ai barioni.

Calcoliamo intanto l'epoca a_{Beq} in cui $\varrho_R = \varrho_B$; con lo stesso argomento usato in precedenza possiamo scrivere

$$(1 + z_{Beq}) = \frac{\Omega_{0B}}{\Omega_{0R}} = 3.9 \times 10^4 \Omega_{0B} h^2. \tag{4.27}$$

Ricordiamo che il disaccoppiamento tra barioni e radiazione avviene circa a $z_{DB} \approx 1100$. La condizione $z_{DB} < z_{Beq}$ si traduce in una condizione su Ω_{0B}:

$$\begin{aligned} (1 + z_{DB}) &\approx 1100 < 3.9 \times 10^4 \Omega_{0B} h^2 \quad \Rightarrow \\ \Omega_{0B} h^2 &> \frac{1100}{3.9 \times 10^4} \approx 0.028. \end{aligned} \tag{4.28}$$

4.8 Andamento della velocità del suono per i barioni

Anche qui esaminiamo i vari casi possibili:

1. Per $a < a_{Beq}$ avremo

$$v_s^2 \sim \frac{p_B + p_R}{\varrho_B + \varrho_R} \approx \frac{p_R}{\varrho_R} = \frac{c^2}{3} \quad \Rightarrow \quad v_s = \frac{c}{\sqrt{3}} \tag{4.29}$$

   in quanto sia la pressione che la densità sono dominate dal contributo della radiazione;

2. Per $a_{Beq} < a < a_{DB}$ (periodo che esiste solo se $\Omega_{0B} h^2 > 0.028$) avremo

$$v_s^2 \sim \frac{p_B + p_R}{\varrho_B + \varrho_R} \approx \frac{p_R}{\varrho_B} \propto \frac{\varrho_R}{\varrho_B} \propto \frac{a^{-4}}{a^{-3}} \propto a^{-1} \quad \Rightarrow \quad v_s \propto a^{-1/2} \tag{4.30}$$

3. Per $a > a_{DB}$ avremo infine

$$v_s^2 \sim \frac{p_B}{\varrho_B} \propto \frac{\varrho_B k T}{\varrho_B} \propto T \propto a^{-2} \quad \Rightarrow \quad v_s \propto a^{-1} \tag{4.31}$$

4.9 Andamento della massa di Jeans per i barioni

Da questi casi ricaviamo gli andamenti per la massa e la lunghezza d'onda di Jeans nel caso della materia barionica, allo stesso modo di prima; ora tra le varie epoche dobbiamo anche considerare l'equivalenza tra materia oscura e radiazione: a_{eq} perché discrimina l'andamento della densità della specie dominante.

1. per $a < a_{eq}$ avremo

$$v_s \sim \frac{c}{\sqrt{3}}; \tag{4.32}$$
$$\varrho_{DOM} \sim \varrho_R \propto a^{-4}; \quad \varrho_B \propto a^{-3}; \tag{4.33}$$
$$\lambda_{JB} \propto v_s \varrho_{DOM}^{-1/2} \propto a^2; \tag{4.34}$$
$$M_{JB} \propto \lambda_{JB}^3 \varrho_B \propto a^6 a^{-3} \propto a^3; \tag{4.35}$$

2. per $a_{eq} < a < a_{Beq}$ avremo

$$v_s \sim \frac{c}{\sqrt{3}}; \tag{4.36}$$
$$\varrho_{DOM} \sim \varrho_{DM} \propto a^{-3}; \quad \varrho_B \propto a^{-3}; \tag{4.37}$$
$$\lambda_{JB} \propto a^{3/2}; \tag{4.38}$$
$$M_{JB} \propto a^{9/2} a^{-3} \propto a^{3/2}; \tag{4.39}$$

3. per $a_{Beq} < a < a_{DB}$ (periodo che esiste solo se $\Omega_{0B} h^2 > 0.028$) avremo

$$v_s \propto a^{-1/2}; \tag{4.40}$$
$$\varrho_{DOM} \sim \varrho_{DM} \propto a^{-3}; \quad \varrho_B \propto a^{-3}; \tag{4.41}$$
$$\lambda_{JB} \propto a^{-1/2} a^{3/2} \propto a; \tag{4.42}$$
$$M_{JB} \propto a^3 a^{-3} \sim cost. \tag{4.43}$$

4. per $a > a_{DB}$ avremo infine

$$v \propto a^{-1}; \tag{4.44}$$
$$\varrho_{DOM} \sim \varrho_{DM} \propto a^{-3}; \quad \varrho_B \propto a^{-3}; \tag{4.45}$$
$$\lambda_{JB} \propto a^{-1} a^{3/2} \propto a^{1/2}; \tag{4.46}$$
$$M_{JB} \propto a^{3/2} a^{-3} \propto a^{-3/2}. \tag{4.47}$$

In quest'ultimo caso, alla ricombinazione dell'idrogeno la velocità del suono crolla perché viene a mancare il supporto della pressione di radiazione, e resta solo la pressione del gas perfetto, molto minore. Questo si traduce, oltre che in un diverso andamento temporale per M_{JB}, anche in una sua discontinuità: dopo il disaccoppiamento la massa di Jeans crolla a valori molto piccoli.

4.10 Storia delle perturbazioni

I valori numerici per la massa di Jeans della materia oscura e dei barioni si ottengono normalizzando le relazioni ad un certo redshift, che di solito è z_{eq}. Poiché la massa M_J della materia oscura dipende dalla velocità tipica delle particelle, possiamo immaginare che M_J nel caso HDM sia maggiore rispetto al caso CDM.

Il caso estremo è quello dei neutrini massivi, che hanno una massa di Jeans massima (raggiunta ad a_{eq}) dell'ordine di

$$M_{J;\nu}(a_e q) \simeq 3.5 \times 10^{15} (\Omega_\nu h^2)^2 M_\odot.$$

Nel caso di HDM meno estrema la massa di Jeans è minore, con un valore massimo dell'ordine di

$$M_{J;HDM}(a_{eq}) \approx 10^{12} - 10^{14} M_\odot;$$

Nel caso del modello di CDM la massa di Jeans ha un valore massimo cosmologicamente trascurabile, dell'ordine di

$$M_{J;CDM}(a_{eq}) \approx 10^5 - 10^6 M_\odot;$$

questo significa che in un universo di CDM tutte le perturbazioni di interesse cosmologico possono crescere.

Per i barioni invece il massimo della massa di Jeans viene raggiunto all'epoca a_{DB} e vale circa

$$M_{JB}(z_{dec}) \approx 3.1 \times 10^{16} M_\odot \left(\frac{\Omega_{0B}}{\Omega_0}\right) (\Omega_0 h^2)^{-1/2}.$$

che per valori realistici di Ω_{0B} assume valori dell'ordine della massa di gruppi o ammassi di galassie.

4.11 Dissipazione e free-streaming.

L'universo non è un fluido ideale. Ciò diventa evidente in particolare quando si va a descrivere il comportamento delle fluttuazioni a scale relativamente piccole, alle quali i fenomeni microfisici hanno un'influenza rilevante. Nel caso della materia oscura la dissipazione va sotto il nome di *free-streaming*. In pratica particelle di DM si diffondono da regioni sovradense a regioni sottodense, livellando le disomogeneità δ. Questo avviene perché, dopo che la DM si è disaccoppiata dalla radiazione all'epoca a_{DX}, i moti delle particelle (che hanno natura non collisionale) risentono esclusivamente del campo medio, totale, $\vec{g}$, dell'universo, non di quello dovuto alle disomogeneità locali. Esse si muovono, allora, lungo geodetiche dello spazio-tempo; in questo modo distruggono le perturbazioni al di sotto della scala da loro percorsa entro il tempo t.

La scala di free-streaming è lo spazio percorso dalle particelle di materia oscura in un tempo t; la definizione è simile alla scala dell'orizzonte cosmologico; la differenza sta solo nell'uso della velocità v_X al posto della velocità della luce:

$$\lambda_{FS}(t) = a(t) \int_0^t \frac{v(t')}{a(t')} dt'; \tag{4.48}$$

inoltre si definisce una massa di free-streaming nel modo consueto:

$$M_{FS} \propto \lambda_{FS}^3 \varrho_{DM}. \tag{4.49}$$

Prendiamo ora in considerazione l'andamento di λ_{FS} e M_{FS} nelle varie epoche:

1. per $a < a_{NR}$ avremo:

$$v \sim \frac{c}{\sqrt{3}}; \quad a \propto t^{1/2} \quad \Rightarrow \quad t \propto a^2; \quad dt \propto a da; \tag{4.50}$$

$$\lambda_{FS} \propto a \int_0^t \frac{a da}{a} \propto a^2; \tag{4.51}$$

$$M_{FS} \propto \lambda_{FS}^3 \varrho_{DM} \propto a^6 a^{-3} \propto a^3; \tag{4.52}$$

2. per $a_{NR} < a < a_{DX}$ (solo nel caso CDM) avremo:

$$v_s \propto a^{-1/2}; \quad a \propto t^{1/2} \quad \Rightarrow \quad dt \propto a da; \tag{4.53}$$

$$\lambda_{FS} \propto a \left[\int_0^{t_{NR}} da + \int_{t_{NR}}^t a^{-1/2} da\right] \propto a \left[a_{NR} + \int_{t_{NR}}^t a^{-1/2} da\right] \tag{4.54}$$

$$\propto a \left[a_{NR} + a^{1/2}\right]; \tag{4.55}$$

$$M_{FS} \propto a^3 [a_{NR} + a^{1/2}]^3 a^{-3} \propto a^{3/2} \tag{4.56}$$

come andamento dominante;

3. per $a_{NR} < a < a_{eq}$ (caso HDM) oppure $a_{DX} < a < a_{eq}$ (caso CDM) avremo

$$v \propto a^{-1}; \quad a \propto t^{1/2} \quad \Rightarrow \quad dt \propto a da; \tag{4.57}$$

$$\lambda_{FS} \propto a \left[\int_0^{t_{NR}} da + \int_{t_{NR}}^{t} a^{-1} da \right] \propto a \left[c_1 + \ln a \right] \propto a \ln a; \tag{4.58}$$

$$M_{FS} \propto a^3 (\ln a)^3 a^{-3} \propto (\ln a)^3; \tag{4.59}$$

sempre come andamento dominante;

4. per $a > a_{eq}$ avremo infine

$$v \propto a^{-1}; \quad a \propto t^{2/3} \quad \Rightarrow \quad dt \propto a^{1/2} da; \tag{4.60}$$

$$\lambda_{FS} \propto a \left[c_1 + \ln c_2 + \int_{t_{eq}}^{t} a^{-1} a^{1/2} \frac{da}{a} \right] \propto ac + a^{1/2} \propto a; \tag{4.61}$$

$$M_{FS} \propto \lambda_{FS}^3 \varrho_{DM} \propto a^3 a^{-3} \propto cost; \tag{4.62}$$

sempre come andamento dominante.

Una nota: per la DM la scala di free-streaming e quella di Jeans sono entrambe determinate dalla stessa fisica: la libera diffusione delle particelle, e quindi dipendono essenzialmente dalla stessa velocità media delle particelle. La differenza nelle due definizioni è più che altro formale; infatti la scala di Jeans λ_J è definita istantaneamente, ad ogni tempo t, come valore discriminante del tipo di soluzioni dell'equazione di evoluzione dei contrasti di densità δ. Al contrario, la scala di free-streaming λ_{FS} ha una definizione più fisica, come distanza totale percorsa dalle particelle da $t = 0$ al tempo t. Per questo, mentre M_J può decrescere (se v decresce), M_{FS} è sempre una funzione crescente del tempo, o al più costante.

Il fatto che però alla base delle due definizioni ci sia la stessa fisica fa sì che $\lambda_J \simeq \lambda_{FS}$ e $M_J \simeq M_{FS}$ a tutti i tempi, fuorché per $a > a_{eq}$ dove M_J decresce, mentre M_{FS} resta costante.

4.11.1 Dissipazione nei barioni.

Ricordiamo che, fino alla ricombinazione dell'idrogeno, barioni e radiazione sono strettamente accoppiati dallo scattering Thomson: $(e^- + \gamma \to e^- + \gamma)$. Questo significa che elettroni e fotoni subiscono continuamente delle collisioni che mantengono le due specie strettamente legate. Ricordiamo anche che fino alla ricombinazione il fluido di barioni e radiazione oscilla e si propaga sotto forma di onde acustiche.

La distanza media *propria* percorsa da un fotone tra un urto ed il successivo è detto libero cammino medio $l(t)$, e vale

$$l(t) = \frac{1}{X_e n_e \sigma} \approx 1.3 \times 10^{29} \mathrm{cm} X_e^{-1} (1+z)^{-3} (\Omega_b h^2)^{-1} \propto \varrho_B^{-1} \propto a^3; \tag{4.63}$$

dove $X_e \in [0, 1]$ è la frazione di elettroni liberi, qui assunta costante nel tempo, σ è la sezione d'urto Thomson, ϱ_e è la densità numerica in elettroni, ovviamente proporzionale alla densità barionica ϱ_B. Ovviamente il libero cammino medio comovente è $l(t)/a(t)$.

Nel caso ideale di un perfetto accoppiamento, il libero cammino medio dei fotoni è zero. Nella realtà è molto piccolo ma non nullo; la diffuzione dei fotoni causa, nel tempo, la diminuzione dell'ampiezza delle oscillazioni e quindi la loro dissipazione.

La diffusione dei fotoni può essere distinta in due regimi;

- su scale $\lambda < l(t)$ la distribuzione fotoni-barioni si disgrega in un solo cammino medio, e le oscillazioni vengono cancellate quasi istantaneamente per un fenomeno equivalente al free-streaming.
- Su scale $\lambda >> l(t)$ la lenta diffuzione dei fotoni dalle creste delle oscillazioni (regioni sovradense) alle valli (regioni sottodense) tende a scomporre la coerenza dell'oscillazione; poiché i fotoni si trascinano dietro i barioni, a lungo andare l'oscillazione viene cancellata.

La scala di diffusione al tempo t si calcola nel modo seguente. Nel tempo dt il fotone subisce in media $N \propto cdt/l(t)$ collisioni. Lo spostamento quadratico medio comovente di questo percorso casuale è:

$$< dx^2 >_{com} = N \left[\frac{l(t)}{a(t)}\right]^2 \propto \frac{cdt}{l(t)} \frac{l^2(t)}{a^2(t)} = \frac{cdtl(t)}{a^2(t)}; \tag{4.64}$$

lo spostamento totale al tempo t è l'integrale:

$$X_S^2(t) = \int_0^t \langle dx^2 \rangle = c \int_0^t \frac{dt' l(t')}{a(t')^2} \propto c \int_0^t \frac{dt' a^3}{a^2} = c \int_0^t a dt'. \tag{4.65}$$

Il valore di questo integrale dipende dall'andamento di $a(t)$; si presentano quindi due casi:

1. per $a < a_{eq}$ avremo

$$a \propto t^{1/2}; \quad dt \propto a da; \tag{4.66}$$

$$X_S^2 \propto \int_0^t a^2 da \propto a^3 \quad \Rightarrow \tag{4.67}$$

$$X_S \propto a^{3/2}. \tag{4.68}$$

2. per $a > a_{eq}$ avremo

$$a \propto t^{2/3}; \quad dt \propto a^{1/2} da; \tag{4.69}$$

$$X_S^2 \propto \int_0^t a^{3/2} da \propto a^{5/2} \quad \Rightarrow \tag{4.70}$$

$$X_S \propto a^{5/4}. \tag{4.71}$$

La scala propria corrispondente: $\lambda_S(t) = a(t) X_S(t)$ è detta scala di dissipazione o scala di Silk (Silk, 1968); la massa $M_S(t)$ ad essa relativa è la massa di Silk. Nelle due epoche sopra descritte i rispettivi andamenti sono:

1. per $a < a_{eq}$:

$$\lambda_S \propto a X_S \propto a a^{3/2} \propto a^{5/2}; \tag{4.72}$$

$$M_S \propto \lambda_S^3 \varrho_B \propto a^{15/2} a^{-3} \propto a^{9/2}; \tag{4.73}$$

2. per $a > a_{eq}$:

$$\lambda_S \propto a X_S \propto a a^{5/4} \propto a^{9/4}; \tag{4.74}$$

$$M_S \propto \lambda_S^3 \varrho_B \propto a^{27/4} a^{-3} \propto a^{15/4}. \tag{4.75}$$

La massa di Silk cresce fino al disaccoppiamento a_{DB}, quando barioni e radiazione smettono di muoversi insieme. Il valore massimo di M_S viene quindi raggiunto all'epoca del disaccoppiamento. Numericamente esso vale

$$M_S(max) = M_S(a_{DB}) \approx 6.2 \times 10^{12} M_\odot \left(\frac{\Omega_0}{\Omega_{B0}}\right)^{3/2} (\Omega_0 h^2)^{-5/4}.$$

Capitolo 5

Varianza e spettro delle perturbazioni

Dispense per il corso di Cosmologia Modulo A
G.Tormen, Dipartimento di Astronomia, Università di Padova
(19 dicembre 2002)

5.1 Introduzione ai metodi statistici

5.1.1 Campi Stocastici

Nell'universo sono presenti fenomeni non deterministici o *casuali o stocastici*; questi fenomeni vengono comunemente descritti da modelli anch'essi stocastici. Sebbene tali modelli possono a volte nascondere la nostra ignoranza di un processo fisico, la ragione ultima dei processi casuali risiede nel principio di indeterminazione quantistico.

La presenza nell'universo di fenomeni casuali fa sì che non sia possibile, neppure con una perfetta conoscenza delle condizioni iniziali dell'universo, riprodurre esattamente la ricchezza dell'universo osservato. Per questo motivo, i modelli di formazione delle strutture cosmiche sono teorie stocastiche. Esse non si propongono di predire, ad esempio, l'esatta posizione di tutte le galassie dell'ammasso di Virgo. Il loro scopo è invece dare una corretta descrizione *statistica* dell'universo.

I modelli teorici che studiano i fenomeni di instabilità gravitazionale sono spesso specificati dalla conoscenza di un solo campo scalare. Nel caso di perturbazioni adiabatiche tale campo è il potenziale gravitazionale peculiare Newtoniano $\phi(\vec{x})$ che, come abbiamo visto nei capitoli precedenti, caratterizza univocamente la crescita lineare delle perturbazioni nell'universo, almeno dopo la ricombinazione dell'idrogeno. L'equazione di Poisson ci dice che una descrizione equivalente, a meno di vincoli sulle condizioni al contorno, è data dal campo di fluttuazione di densità $\delta(\vec{x})$,

$$\delta(\vec{x}) = \frac{\varrho(\vec{x}) - \varrho_b}{\varrho_b} \tag{5.1}$$

dove ϱ_b rappresenta il valore imperturbato della densità dell'universo. Lo studio della struttura su grande scala dell'universo è quindi lo studio delle proprietà statistiche del campo $\delta(\vec{x})$.

L'ipotesi di partenza che faremo su $\delta(\vec{x})$ è una riformulazione statistica del Principio Cosmologico: $\delta(\vec{x})$ **è un campo stocastico omogeneo ed isotropo**. Ciò significa che ad ogni posizione $\vec{x}_i$ è associata una variabile stocastica $\delta(\vec{x}_i)$, con $i = 1, 2, \ldots, N$ ed $N \to \infty$, e che tutte le densità di probabilità congiunta su un numero finito di punti $p_{\vec{x}_1\vec{x}_2\ldots\vec{x}_N}(\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_N)$, sono invarianti per traslazioni, rotazioni e riflessioni dell'insieme dei punti $\vec{x}_1$, $\vec{x}_2$, $\ldots \vec{x}_N$. **L'universo che osserviamo è quindi il prodotto di una realizzazione statistica del campo stocastico** $\delta(\vec{x})$. Come ogni variabile stocastica δ è caratterizzata dalla propria funzione di densità di probabilità $p(\delta)$, un campo stocastico è pienamente

caratterizzato dal funzionale $p[\delta(\vec{x})]$ definito dalla relazione

$$p[\hat{\delta}(\vec{x})]d\delta(\vec{x}) = \lim_{N\to\infty} p(\hat{\delta}(\vec{x}_1), \hat{\delta}(\vec{x}_2), \ldots, \hat{\delta}(\vec{x}_N)) \prod_{j=1}^{N} d\delta(\vec{x}_j) \tag{5.2}$$

che dà la probabilità congiunta infinito dimensionale che il campo $\delta(\vec{x})$ assuma in ciascun punto dello spazio $\vec{x}$ il valore $\hat{\delta}(\vec{x})$. In questo linguaggio statistico, la densità imperturbata dell'universo corrisponde alla media fatta sull'insieme statistico - che indichiamo con le parentesi $\langle ... \rangle$: $\varrho_b \equiv \langle \varrho(\vec{x}) \rangle$ in una qualsiasi posizione $\vec{x}$.

5.1.2 Ipotesi Ergodica

Un'altra osservazione riguarda i metodi di indagine. Ovviamente la nascita ed evoluzione delle strutture cosmiche non sono un processo riproducibile in laboratorio, perciò le osservazioni permettono soltanto la (parziale) conoscenza di una sola realizzazione statistica del campo $\delta(\vec{x})$. La teoria d'altra parte fornisce la distribuzione di probabilità su un insieme statistico. Per poter dedurre le proprietà del campo stocastico $\delta(\vec{x})$ da una sola sua realizzazione occorre fare un'ipotesi, spesso implicita, detta *Ipotesi Ergodica*: le medie di un campo stocastico prese sull'insieme statistico (denotate dal simbolo $\langle \ldots \rangle$), sono equivalenti alle medie spaziali di ogni sua realizzazione. L'ergodicità di un campo stocastico è in realtà un teorema dimostrato nel caso di campi stocastici Gaussiani con spettro di potenza continuo (Adler, 1981). In sostanza, l'ipotesi ergodica accetta l'idea che la distribuzione della materia nell'universo sia stata determinata da processi fisici che hanno coinvolto una complessa sequenza di eventi. cosicché ciò che noi osserviamo in un determinato punto è il risultato di molte piccole variazioni dei parametri entro tale sequenza. In tal modo, regioni di universo sufficientemente separate sono tra loro statisticamente indipendenti e quindi sono equivalenti a realizzazioni statistiche diverse dello stesso processo stocastico. In tale accezione l'Ipotesi Ergodica, unita al Principio Cosmologico, prende il nome di *Ipotesi di Fair Sample* (Peebles, 1980).

5.1.3 Campi Gaussiani

Nel modello di instabilità gravitazionale le fluttuazioni di temperatura presenti nel fondo cosmico di microonde (CMB) hanno dato origine alle strutture cosmiche oggi esistenti. Nel modello standard di formazione delle galassie si ritiene che queste fluttuazioni siano state originate dall'amplificazione di fluttuazioni quantistiche durante l'espansione inflazionaria. In questo contesto, le fluttuazioni di densità su qualsiasi scala $\vec{k}$ costituiscono un campo stocastico scalare Gaussiano. Ciò significa che, se potessimo fare un numero molto grande (idealmente infinito) di realizzazioni stocastiche di universo, per ogni k fissato il valore dell'ampiezza $\hat{\delta}(\vec{k})$ in tutti questi universi si distribuirebbe in modo Gaussiano intorno allo zero e con ampiezza quadratica media che, come vedremo, è legato allo spettro di potenza delle fluttuazioni $P(k)$.

Poiché il valore della fluttuazione di densità nello spazio delle configurazioni: $\delta(\vec{x})$ è una somma di onde piane, nel limite di fluttuazioni lineari anche $\delta(\vec{x})$ è un campo stocastico Gaussiano, perché somma di campi stocastici Gaussiani. Possiamo quindi immaginare di effettuare infinite realizzazioni di universo in un dato punto $\vec{x}$: la distribuzione del valore misurato per $\delta(\vec{x})$ in tutti questi universi sarà Gaussiana, con media ovviamente zero. Poiché una distribuzione Gaussiana è univocamente descritta dalla sua media e dalla sua varianza, nel nostro caso **la conoscenza della varianza del campo $\delta(\vec{x})$ è tutto ciò che ci serve per descrivere in maniera completa il campo stesso**. Di questo, e del legame tra varianza e spettro, ci occuperemo in questo capitolo.

5.2 Alcune definizioni.

Scomponiamo il campo (reale) di fluttuazioni di densità $\delta(\vec{x})$ in somma di onde piane. Nel caso continuo possiamo scrivere:

$$\delta(\vec{x}) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int \hat{\delta}(\vec{k}) \exp(i\vec{k}\cdot\vec{x}) d^3k \tag{5.3}$$

ricordiamo che il campo di fluttuazioni nello spazio delle configurazioni è adimensionale: $[\delta(\vec{x})] = 1$. La sua trasformata di Fourier è un campo complesso:

$$\hat{\delta}(\vec{k}) = \int \delta(\vec{x}) \exp(-i\vec{k}\cdot\vec{x}) d^3x \tag{5.4}$$

ed ha le dimensioni di un volume: $[\hat{\delta}(\vec{k})] = L^3$. Definiamo anche la Delta di Dirac 3-dimensionale come:

$$\delta_D^{(3)}(k) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int \exp(i\vec{k}\cdot\vec{x}) d^3x \tag{5.5}$$

anch'essa con le dimensioni di un volume: $[\delta_D^{(3)}] = L^3$. Ricordiamo che la Delta di Dirac, applicata ad una funzione f, agisce nel modo seguente:

$$\int d^3z' f(\vec{z'}) \delta_D^{(3)}(\vec{z} - \vec{z'}) = f(\vec{z}) \tag{5.6}$$

con z qualsiasi complesso.

Infine ricordiamo che, poiché il campo di fluttuazioni $\delta(\vec{x})$ è reale, la sua trasformata di Fourier (che è complessa) gode della seguente proprietà:

$$\delta^*(\vec{k}) = \delta(-\vec{k}). \tag{5.7}$$

5.3 Funzione di correlazione: teorema di Wiener-Khintchine.

Si definisce funzione di correlazione la seguente:

$$\xi(r) \equiv \langle \delta(\vec{x}) \delta(\vec{x} + \vec{r}) \rangle; \tag{5.8}$$

il significato fisico di $\xi(r)$ verrà approfondito nel cap.6. Sviluppando l'integrando in base alle definizioni precedenti, avremo:

$$\xi(r) = \frac{1}{(2\pi)^6} \int d^3k \int d^3k' \langle \hat{\delta}(\vec{k}) \hat{\delta}(\vec{k'}) \rangle \exp[i\vec{k}\cdot(\vec{x} + \vec{r})] \exp(i\vec{k'}\cdot\vec{x}). \tag{5.9}$$

Definiamo lo *spettro di potenza* delle fluttuazioni densità con la relazione:

$$\langle \hat{\delta}(\vec{k}) \hat{\delta}(\vec{k'}) \rangle \equiv (2\pi)^3 P(k) \delta_D^{(3)}(\vec{k} + \vec{k'}), \tag{5.10}$$

equivalente alla

$$\langle \hat{\delta}(\vec{k}) \hat{\delta}^*(\vec{k'}) \rangle \equiv (2\pi)^3 P(k) \delta_D^{(3)}(\vec{k} - \vec{k'}). \tag{5.11}$$

Ricordiamo che il simbolo $\langle ... \rangle$ indica il valore di aspettazione del campo stocastico, ovvero il valore idealmente ottenuto se potessimo fare la media su un numero infinito di realizzazioni.

Sostituendo questa definizione abbiamo

$$\begin{aligned} \xi(r) &= \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^3k \int d^3k' P(k) \delta_D^{(3)}(\vec{k} + \vec{k'}) \exp[i\vec{x}\cdot(\vec{k} + \vec{k'})] \exp(i\vec{k}\cdot\vec{r}) \\ &= \frac{1}{(2\pi)^3} \int P(k) \exp(i\vec{k}\cdot\vec{r}) d^3k, \end{aligned} \tag{5.12}$$

dove in quest'ultimo passaggio abbiamo fatto agire la Delta di Dirac.

Questo ci mostra che lo spettro di potenza delle fluttuazioni di densità (o brevemente spettro di potenza) è la trasformata di Fourier della funzione di correlazione, e viceversa, la funzione di correlazione è l'antitrasformata dello spettro di potenza. Questo risultato è noto come Teorema di Wiener-Khintchine.

Si noti, dalla definizione di $\xi(r)$ e $P(k)$, che la prima è una funzione adimensionale, mentre lo spettro ha le dimensioni di un volume. Il significato fisico di quest'ultimo è il seguente: poiché $P(k) \propto |\hat{\delta}(\vec{k})|^2$ - ampiezza delle onde piane di lunghezza d'onda $\lambda = 2\pi/k$ - il valore dello spettro in ogni k mi dice quanto è importante, nell'integrale di Fourier, il contributo delle fluttuazioni su scala k per formare la fluttuazione generica $\delta(\vec{x})$ nello spazio delle configurazioni. $P(k)$ è quindi una misura della potenza delle fluttuazioni di scala k. Per essere precisi $P(k)$ è una densità di potenza; per avere la potenza delle fluttuazioni su scala k occorre moltiplicarlo per l'elemento di volume nello spazio di Fourier: $P(k)d^3k$. Infatti la potenza è una quantità adimensionale, mentre lo spettro ha le dimensioni di un volume.

Come esempio prendiamo il caso più semplice possibile in cui il campo di fluttuazioni $\delta(\vec{x})$ sia una singola onda piana di lunghezza d'onda λ_1. La sua trasformata di Fourier sarà zero ovunque fuorché per $k = k_1 = 2\pi/\lambda_1$, e $P(k)$ sarà una Delta di Dirac centrata in $k = k_1$. Nel caso generico in cui $\delta(\vec{x})$ sia composta da onde piane di tutte le possibili lunghezze d'onda, $P(k)$ avrà valore maggiore in corrispondenza dei numeri d'onda che maggiormente contribuiscono a $\delta(\vec{x})$.

La relazione tra $\xi(r)$ e $P(k)$ si può semplificare sfruttando il fatto che entrambe le funzioni per definizione dipendono solo dal modulo del loro argomento, ma non dalla direzione. Per farlo riscriviamo

$$\exp(i\vec{k}\cdot\vec{r}) = \exp(ikr\cos\theta_k) \tag{5.13}$$

e notiamo che possiamo scomporre in coordinate sferiche l'integrale:

$$\int d^3k = \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^{\pi} \sin\theta_k d\theta_k \int_0^{\infty} k^2 dk; \tag{5.14}$$

l'equazione (5.12) si può allora riscrivere

$$\xi(r) = \frac{1}{(2\pi)^3}\int_0^{2\pi} d\phi \int_0^{\infty} k^2 dk P(k) \int_0^{\pi} \sin\theta_k d\theta_k \exp ikr\cos\theta_k. \tag{5.15}$$

Ponendo $y = ikr\cos\theta_k$ l'integrale diventa

$$\xi(r) = \frac{1}{(2\pi)^2}\int_0^{\infty} k^2 dk P(k)\frac{1}{kr}\int_{-ikr}^{ikr} dy \exp y = \frac{1}{2\pi^2}\int_0^{\infty} k^2 dk P(k)\frac{\sin kr}{kr} \tag{5.16}$$

dove nell'ultimo passaggio si è sfruttata la definizione $\exp ikr = \cos kr + i\sin kr$.

Notiamo infine che, se $\vec{k} = \vec{k'}$, la definizione dello spettro diventa:

$$\langle\hat{\delta}(\vec{k})\hat{\delta}^*(\vec{k})\rangle \equiv \langle|\hat{\delta}(\vec{k})|^2\rangle = (2\pi)^3 P(k)\delta_D^{(3)}(0). \tag{5.17}$$

Ma dalla definizione eq.(5.5) abbiamo

$$\delta_D^{(3)}(0) = \frac{1}{(2\pi)^3}\int \exp(0) d^3x = \frac{V_\infty}{(2\pi)^3} \tag{5.18}$$

dove V_∞ rappresenta il volume di tutto lo spazio (detto a volte "volume dell'universo"); ne segue che

$$\langle|\hat{\delta}(\vec{k})|^2\rangle = V_\infty P(k). \tag{5.19}$$

5.4 Relazione di Parseval - caso 1-dim

Siano f, g due generiche funzioni complesse; usando la scomposizione in integrale di Fourier possiamo scrivere:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)g^*(x)dx = \frac{1}{(2\pi)^2}\int_{-\infty}^{+\infty} dk dk' \hat{f}(k)\hat{g}^*(k')\int_{-\infty}^{+\infty} dx \exp[ix(k-k')] \tag{5.20}$$

dove il segno meno davanti a k' discende dall'integrale di Fourier del campo complesso coniugato g^*, che ha un $\exp(-ikx)$ al posto di un $\exp(ikx)$. Dato che

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dx \exp\left[ix(k-k')\right] = 2\pi\delta_D^{(1)}(k-k'),$$

fecendo agire la δ_D possiamo riscrivere la relazione (5.20) come

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)g^*(x)dx = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} dk\hat{f}(k)\hat{g}^*(k). \tag{5.21}$$

ovvero l'integrale del prodotto di due funzioni esteso a tutto lo spazio delle configurazioni è uguale all'integrale delle loro trasformate di Fourier esteso a tutto lo spazio dei numeri d'onda. Questa eguaglianza è detta relazione di Parseval.

5.5 Varianza del campo puntuale

Consideriamo ora il campo reale 3-dimensionale Gaussiano $\delta(\vec{x})$. La varianza del campo, ossia il suo valore quadratico di aspettazione, è

$$\sigma^2 \equiv \langle\delta^2(\vec{x})\rangle$$

Usando l'ipotesi ergodica, possiamo pensare di dividere l'universo in un gran numero di volumi V_∞ che consideriamo come realizzazioni indipendenti e di calcolare σ^2 come media (spaziale) entro ciascun volume e poi anche come media (statistica) tra i volumi. Per correttezza di notazione scriveremo quindi la varianza come una doppia media, su ciascun volume e sulle realizzazioni:

$$\sigma^2 \equiv \left\langle \frac{1}{V_\infty}\int d^3x\delta^2(\vec{x})\right\rangle = \frac{1}{V_\infty}\int d^3x\langle\delta^2(\vec{x})\rangle; \tag{5.22}$$

applicando la versione 3-dimensionale dell'eguaglianza di Parseval eq. (5.21) ai due campi reali:

$$f \equiv g \equiv \delta(\vec{x}); \quad \delta(x)\delta^*(x) = \delta^2(x),$$

e ricordando la definizione (5.19), possiamo immediatamente riscrivere la (5.22) come

$$\sigma^2 = \frac{1}{(2\pi)^3 V_\infty}\int d^3k\langle\delta(\vec{k})\delta^*(\vec{k})\rangle = \frac{1}{(2\pi)^3}\int d^3kP(k)$$

Cioè σ^2, varianza del campo $\delta(x)$, è l'integrale in d^3k dello spettro di potenza, cioè è dato dalla somma della potenza $d^3kP(k)$ delle fluttuazioni su tutte le scale k.

5.6 La convoluzione (1-Dim)

Date due funzioni reali $f(x)$ e $g(x)$, si definisce la loro convoluzione $h(x)$ nel modo seguente:

$$C[f,g](x) \equiv f(x) * g(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x-y)g(y)dy = h(x) \tag{5.23}$$

La convoluzione gode della seguente proprietà:

$$f(x) * g(x) = g(x) * f(x) \tag{5.24}$$

infatti posto $z = x - y$, $y = x - z$, $dy = -dz$ e considerando z una variabile muta (per cui è possibile porre $z \to y$) si ottiene:

$$f(x) * g(x) = \int_{+\infty}^{-\infty}(-dz)f(z)g(x-z) = \int_{-\infty}^{+\infty} dyf(y)g(x-y) = g(x) * f(x). \tag{5.25}$$

Dimostriamo ora il seguente

Teorema di convoluzione 5.6.1 *Una convoluzione nello spazio delle posizioni equivale ad un prodotto nello spazio di Fourier.*

$$h(x) = f(x) * g(x) \Rightarrow \hat{h}(k) = \hat{f}(k)\hat{g}(k) \tag{5.26}$$

Infatti scomponendo f e g in integrali di Fourier

$$f(y) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} dk\hat{f}(k)e^{iky}; \quad g(x-y) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} dk'\hat{g}(k')e^{ik'(x-y)} \tag{5.27}$$

possiamo riscrivere

$$f(x) * g(x) = \frac{1}{(2\pi)^2}\int_{-\infty}^{+\infty} dkdk'\hat{f}(k)\hat{g}(k')e^{ik'x}\int_{-\infty}^{+\infty} dye^{iy(k-k')};$$

poiché l'ultimo integrale è uguale a $2\pi\delta_D^{(1)}(k-k')$, facendo agire la Delta di Dirac si ottiene

$$f(x) * g(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} dk\hat{f}(k)\hat{g}(k)e^{ikx}.$$

Ma poiché possiamo sempre scrivere $h(x)$ come integrale di Fourier:

$$h(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} dk\hat{h}(k)e^{ikx}$$

confrontando quest'espressione con la precedente ed eguagliando abbiamo la dimostrazione:

$$\hat{h}(k) = \hat{f}(k)\hat{g}(k).$$

5.6.1 Significato geometrico della convoluzione

Ricordando la definizione:

$$h(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x-y)g(y)dy$$

consideriamo tre esempi che ci aiuteranno a capire il significato pratico di questa operazione:

Caso 1

$\forall f$; $g \equiv \delta_D^{(1)}$; avremo allora

$$h(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} dyf(y)\delta_D^{(1)}(x-y) = f(x)$$

In questo esempio, illustrato in fig.5.1, la convoluzione di una funzione generica con una Delta di Dirac corrisponde semplicemente a selezionare il valore di f nel punto in cui viene applicata la δ_D.

Caso 2

$f = g$ =funzione a gradino, di lunghezza $2R$ e altezza $1/(2R)$ (e quindi area unitaria):

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2R} & |x| < R \\ 0 & |x| \geq R \end{cases} \tag{5.28}$$

f è centrata in $y = 0$, mentre $g(x-y)$ è centrata in $x - y = 0$, cioè in $y = x$. Ci sono ovviamente due possibilità:

1. $f \cap g = 0 \Rightarrow f(x)g(y-x) = 0 \Rightarrow h(x) = 0$

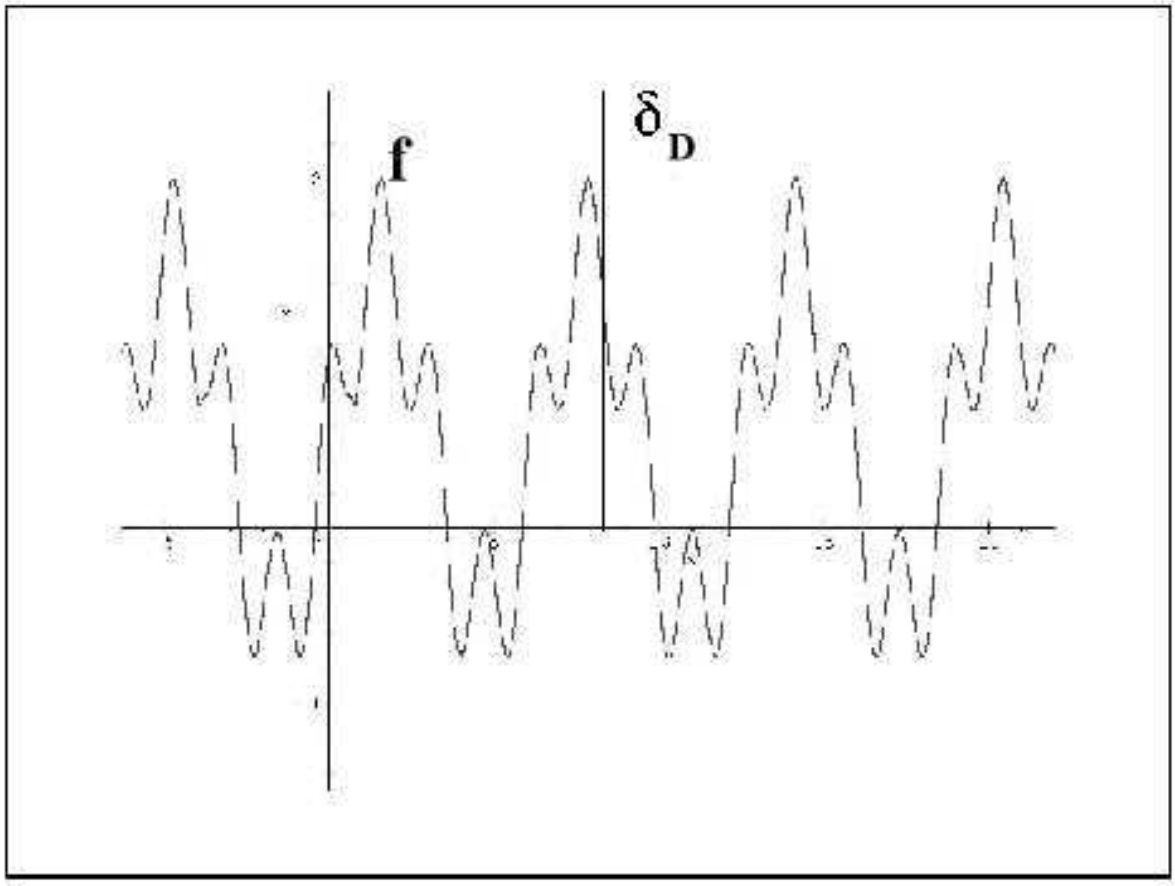

Figura 5.1: Convoluzione di una funzione generica f con una δ_D

2. $f \cap g \neq 0 \Rightarrow f(x)g(y-x) \neq 0 \Rightarrow h(x) \neq 0$

In questo secondo caso $h(x)$ è l'area sotto la funzione prodotto di f,g. Come mostrato in fig.5.2, l'area (e cioè $h(x)$), cresce all'aumentare della sovrapposizione delle due funzioni a gradino, per tornare nuovamente a zero quando si separano.

Se consideriamo $f(x)$ come funzione data e $g(x)$ come filtro, la funzione $h(x)$ è una versione di f *filtrata, spalmata, smussata, mediata* su scala $2R$, cioè sulla scala data dalla larghezza del filtro. Rispetto alla funzione f di partenza, la funzione filtrata h è quindi più estesa di f (infatti è diversa da zero nell'intervallo $[-2R, 2R]$) ed ha anche proprietà analitiche migliori (infatti f è discontinua, mentre la versione filtrata h è resa continua, anche se non derivabile). Se iterassimo l'esercizio, prendendo come nuova f la funzione h e come filtro g lo stesso di prima, otterremmo una nuova funzione $h_2(x) = h(x) * g(x)$ ancora più estesa di $h(x)$ (non zero nell'intervallo $[-3R, 3R]$), continua ed anzi derivabile. Iterando all'infinito il processo di convoluzione otterremmo una funzione $h_\infty(x)$ non zero su tutto l'asse reale. Si può dimostrare che tale funzione non è nient'altro che una Gaussiana centrata in $x = 0$.

Caso 3

$\forall f$; g =funzione a gradino.
Generalizzando quanto visto nell'esempio precedente, capiamo che in questo caso la funzione $h(x)$ è una versione filtrata di f, come qualitativamente mostrato in fig.5.3.

Al crescere della larghezza R del filtro, la funzione convoluta h diventa sempre più "smussata", si appiat-

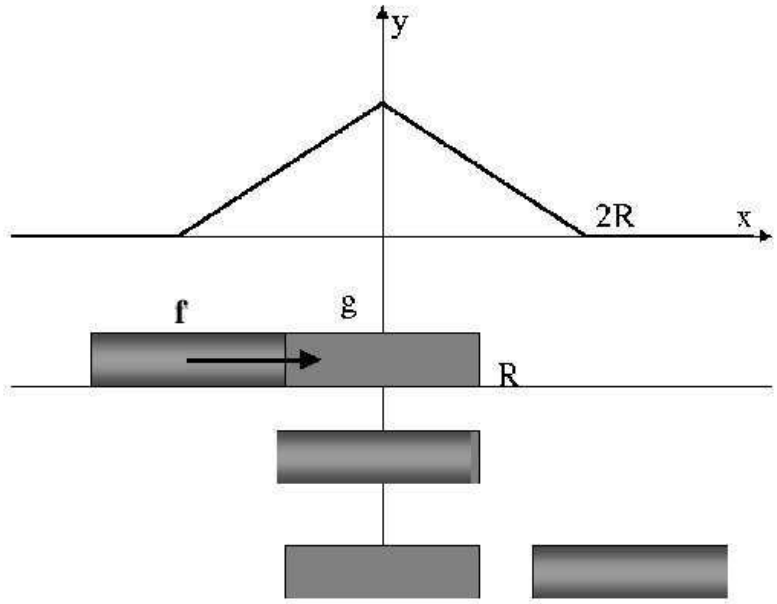

Figura 5.2: Convoluzione di due funzioni a gradino f e g

tisce sempre più fino ad assumere un valore costante per $R = \infty$. Questo fa capire che la convoluzione taglia le fluttuazioni ad alte frequenze, ed agisce quindi come un filtro passa-basso.

5.7 Varianza di massa

La varianza σ^2 del campo $\delta(\vec{x})$ caratterizza l'ampiezza quadratica media delle fluttuazioni di densità *puntuali*. Nella realtà invece si hanno a disposizione campioni di oggetti, per es. galassie, ammassi di galassie, QSO o altro, di cui si conosce in qualche modo la posizione e basta. Per poter confrontare questi dati con la teoria occorre fare due operazioni distinte: (i) legare in qualche modo la distribuzione della materia luminosa delle galassie a quella globale della materia; (ii) mediare i campi su volumi finiti.

La prima operazione richiede delle ipotesi abbastanza drastiche sulla distribuzione della materia nell'universo, ad esempio l'assumere che dove ci sono più galassie ci sia anche più massa e quindi esista una sovradensità $\delta > 0$, e viceversa. L'ipotesi che la distribuzione di materia luminosa tracci in qualche modo la distribuzione globale di materia (e quindi di massa) sottostante è legata alla definizione del *parametro di bias* b, che verrà introdotto qui di seguito, e ci permette di collegare una collezione discreta di galassie (od altro) ad una collezione di masse. Per poter confrontare una distribuzione discreta (le galassie) con una continua (la materia) occorre però effettuare anche la seconda operazione, ossia prendere in qualche modo dei valori medi su volumi finiti; infatti non ha senso un'affermazione del tipo "conto N galassie in un dato punto $\vec{x}$", quanto invece "conto N galassie entro un dato volume V". Questa media su volumi finiti equivale a filtrare il campo di fluttuazioni su una data scala R.

Facendo questi due passaggi possiamo legare la fluttuazione nel numero di galassie entro un generico

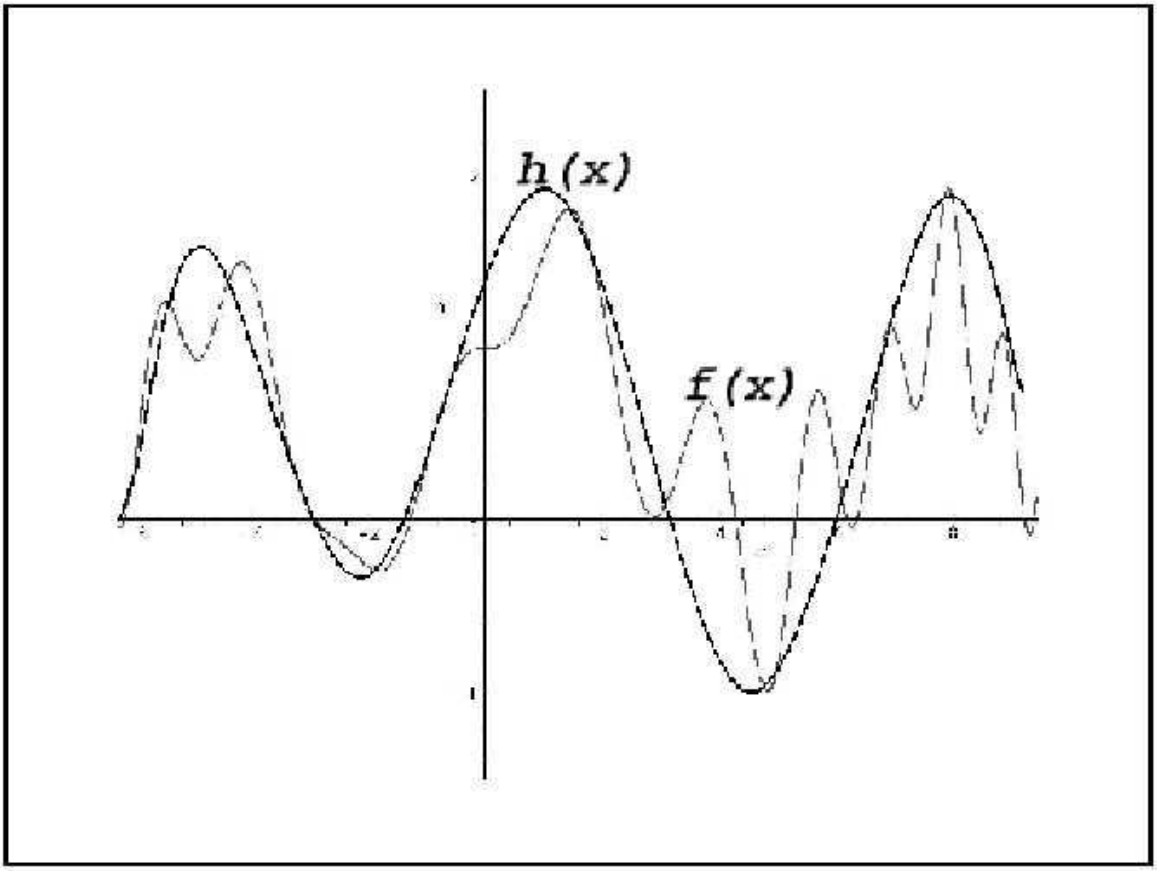

Figura 5.3: Convoluzione di una funzione generica con una funzione a gradino

volume $V = 4\pi R^3/3$ alla corrispondente fluttuazione di massa nello stesso volume:

$$\delta_g \equiv \frac{\delta N_g(V)}{\bar{N}_g} = b\frac{\delta M(V)}{\bar{M}} \equiv b\delta_M$$

dove abbiamo assunto che le due fluttuazioni siano legate da un fattore di proporzionalità b (detto fattore di bias) che non dipende dalla posizione o dalle dimensioni del volume, e dove i valori $\bar{N}_g$ e $\bar{M}$ rappresentano rispettivamente il numero medio di galassie entro un qualsiasi volume V e la massa media contenuta nello stesso volume.

Il campo δ_M è la convoluzione del campo puntuale di fluttuazioni $\delta(\vec{x})$ con un filtro W di raggio R:

$$\delta_M(\vec{x}) \equiv \frac{\delta M(\vec{x})}{\bar{M}} = \delta(\vec{x}) * W(\vec{x}; R)$$

dove $\vec{x}$ è il centro della sfera. Equivalentemente, δ_M è la fluttuazione media di densità entro il volume V. La funzione W è detta anche *funzione finestra* perché, come filtro passa basso, fa passare alcune fluttuazioni e ne taglia fuori altre. La forma del filtro W può variare; gli esempi più usati sono la funzione a gradino 3-dimensionale (detta *top-hat sferico*) e la funzione Gaussiana 3-dimensionale.

Poiché prendere la media di un campo è farne una somma (divisa per un opportuno peso), se $\delta(\vec{x})$ è un campo stocastico Gaussiano, anche δ_M lo sarà. Quindi la sua varianza ha altrettanto interesse di quella del campo puntuale; in analogia con σ^2 scriveremo quindi

$$\sigma_M^2 \equiv \langle \left(\frac{\delta M}{M}\right)^2 \rangle \equiv \langle \delta_M^2 \rangle = \frac{1}{V_\infty} \int d^3x \langle \delta_M^2(\vec{x}) \rangle;$$

applicando la relazione di Parseval riscriviamo

$$\sigma_M^2 = \frac{1}{(2\pi)^3 V_\infty} \int d^3k \langle |\hat{\delta}_M(k)|^2 \rangle.$$

Ora, dal teorema di convoluzione (5.6.1) sappiamo che

$$\delta_M(\vec{x}) = \delta(\vec{x}) * W(\vec{x}; R) \quad \Rightarrow \quad \hat{\delta}_M(\vec{k}) = \hat{\delta}(\vec{k})\hat{W}(kR)$$

dove $\hat{W}(kR)$ è la trasformata di Fourier della funzione filtro $W(\vec{x}; R)$; sostituendo avremo

$$\sigma_M^2 = \frac{1}{(2\pi)^3 V_\infty} \int d^3k \langle |\hat{\delta}(k)|^2 \rangle \hat{W}^2(kR)$$

ed usando ancora la relazione (5.19) scriveremo infine

$$\sigma_M^2 = \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^3k P(k) \hat{W}^2(kR). \tag{5.29}$$

Questo risultato ci mostra come la varianza di massa, o varianza del campo di fluttuazioni filtrato su scala R, sia simile alla varianza σ^2, ma con in più la funzione finestra $\hat{W}(kR)$ che fa da passa basso e filtra i contributi di $P(k)$ per k diversi.

Notiamo infine che se il raggio di filtraggio tende a zero, ossia la funzione finestra W tende ad una Delta di Dirac, la varianza di massa tende alla varianza puntuale:

$$R \to 0 \quad \Rightarrow \quad \sigma_M^2 \to \sigma^2.$$

5.8 Spettri di potenza scale-free

Abbiamo visto come la funzione di correlazione $\xi(r)$, la varianza σ^2 e la varianza del campo filtrato σ_M^2 siano tutte quantità legate allo spettro di potenza $P(k)$. Se assumiamo per $P(k)$ una forma funzionale semplice, del tipo $P(k) \propto k^n$, possiamo fare utili considerazioni sui vari campi. Spettri di potenza di questo tipo sono detti spettri di potenza *a legge di potenza*; sono anche detti spettri di potenza *scale-free*, perché la loro pendenza logaritmica è la stessa su tutte le scale, e quindi non sono caratterizzati da alcuna scala fisica particolare (come mostrato in fig. 5.4). L'esponente n è detto *indice spettrale*.

Tra i motivi per i quali conviene utilizzare spettri scale-free diamo i seguenti:

- $P(k) \propto k^n$ è una forma funzionale semplice, che permette di risolvere analiticamente molti tra gli integrali introdotti;
- gli spettri scale-free hanno proprietà interessanti (in particolare lo spettro detto di Zeldovich);
- l'inflazione normalmente produce fluttuazioni con uno spettro di potenza scale-free.

Gli spettri scale-free sono usati sia per descrivere lo spettro primordiale che per approssimare localmente (in k) uno spettro finale, processato dalla microfisica (come vedremo di seguito). In questo secondo caso l'indice spettrale è soltanto una misura della pendenza locale, *effettiva* dello spettro finale, e non va confuso con l'indice spettrale primordiale.

Per es., lo spettro di materia oscura fredda (CDM) ha una pendenza locale $n_{eff} \sim -1.5$ sulla scala k delle fluttuazioni responsabili della formazione degli ammassi di galassie; ha invece una pendenza $n_{eff} \sim -2.5$ sulla scala delle galassie.

5.8.1 Leggi di scala non lineari

Partendo dai risultati della teoria lineare per l'instabilità gravitazionale sviluppati nel cap.3, con semplici argomenti dimensionali è possibile ricavare delle utili leggi di scala *non lineari* che descrivono le proprietà

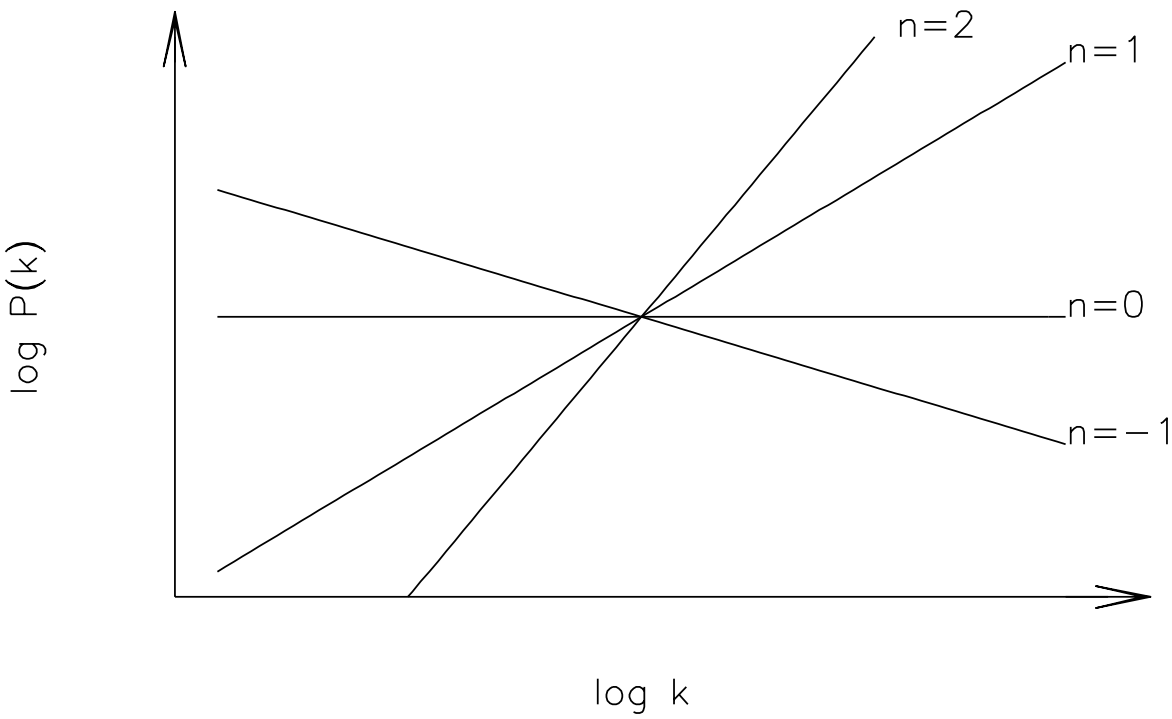

Figura 5.4: Spettri di potenza scale-free

evolutive dei sistemi virializzati (gli aloni di materia oscura). L'assunzione che ci permette di legare i due regimi è che il limite $\delta(\vec{x}) \to 1$ corrisponde a un sistema collassato e in equilibrio dinamico. Questa assunzione è giustificata dal modello di collasso di una perturbazione sferica in un universo in espansione, e convalidata da numerose simulazioni numeriche.

Un commento sulla notazione: nel cap.3 abbiamo indicato con $\delta_k(t)$ la dipendenza temporale dell'ampiezza delle fluttuazioni su scala $\lambda = 2\pi/k$; poiché nel regime che ci interessa: $\lambda >> \lambda_J$ questa dipendenza non dipende più da k (si vedano le varie soluzioni), rinominiamo quest'ampiezza: $\delta_k(t) \to D(t)$ togliendo la indicazione del numero d'onda.

I risultati della teoria lineare ci dicono che $\delta(\vec{x}, t)$ cresce nel tempo in modo autosimile: $\delta(\vec{x}, t) = \delta(\vec{x})D(t)$. In un universo di Einstein-de Sitter, il fattore di crescita lineare $D(t)$ è proporzionale al fattore di scala dell'espansione dell'universo: $D(t) \propto a(t)$. L'evoluzione temporale lineare dello spettro $P(k)$ segue da quella di δ: $P(k, t) \propto D^2(t)$.

Assumendo uno spettro scale-free, la fluttuazione quadratica media di massa su scala comovente R si scrive quindi

$$\sigma_M^2 = \int d^3k P(k) \hat{W}^2(kR) \propto D^2(t) k^{n+3}; \tag{5.30}$$

poiché $k \propto 1/R$, ed $M \propto R^3$, avremo anche

$$\sigma_M^2 \propto D^2(t) R^{-(n+3)} \propto D^2(t) M^{-(n+3)/3} \qquad \Rightarrow \sigma_M \propto D(t) M^{-(n+3)/6}. \tag{5.31}$$

Nel limite $\delta_M \to 1$, questa relazione definisce la massa non-lineare tipica M_* che sta collassando al tempo t:

$$1 \propto D^2(t) M_*^{-(3+n)/3} \tag{5.32}$$

ovvero

$$M_*(t) \propto D(t)^{6/(3+n)} \tag{5.33}$$

che in un universo di Eistein-de Sitter di materia, dove $D(t) \propto a(t)$, diventa semplicemente

$$M_*(t) \propto a^{6/(3+n)} \propto (1+z)^{-6/(3+n)} \tag{5.34}$$

con z il redshift.

Da questa relazione è immediato derivare altre leggi di scala per l'epoca tipica t_* di formazione della struttura di massa M_*, per la sua dimensione R_*, densità ϱ_*, dispersione di velocità v_*^2 e temperatura T_* all'equilibrio dinamico:

$$t_* \propto t \propto D^{3/2}(t) \propto M_*^{(3+n)/4} \propto \quad (\text{se EdS}) \quad (1+z)^{-3/2} \tag{5.35}$$

$$\varrho_* \propto \varrho_b(t) \propto \quad (\text{se EdS}) \quad (1+z)^3 \tag{5.36}$$

$$R_* \propto \left(\frac{M_*}{\varrho_*}\right)^{1/3} \propto \quad (\text{se EdS}) \quad M_*^{1/3}(1+z)^{-1} \tag{5.37}$$

$$\langle v^2 \rangle \propto kT_{vir} \propto \frac{GM_*}{R_*} \tag{5.38}$$

$$\propto M_*^{2/3}\varrho_*^{1/3} \propto M_*^{(1-n)/6} \propto \quad (\text{se EdS}) \quad M_*^{2/3}(1+z) \tag{5.39}$$

Queste relazioni mostrano che esistono dei valori critici per l'indice spettrale n. Intanto per avere clustering gerarchico (che è quello che vogliamo) occorre che t_* sia una funzione crescente del tempo (sia minore per masse piu' piccole), quindi che sia

$$3+n>0 \quad \Rightarrow \quad n>-3;$$

occorre anche che l'energia di legame $E \propto v^2$ del sistema cresca con la sua massa M, in modo che l'energetica di un sistema sia determinata dal proprio collasso e non da quello dei suoi progenitori; questo implica

$$1-n>0 \quad \Rightarrow \quad n<1.$$

5.9 Entrata delle Perturbazioni nell'Orizzonte

Vogliamo calcolare l'ampiezza delle fluttuazioni di massa M (ovvero di scala R) nel momento in cui queste entrano dentro l'orizzonte cosmologico. Ricordiamo che la massa entro l'orizzonte evolve come

$$M_H \propto a^3 \tag{5.40}$$

per $a < a_{eq}$; mentre per $a > a_{eq}$ va come

$$M_H \propto a^{3/2}. \tag{5.41}$$

Una perturbazione di massa M entra nell'orizzonte ad un valore di a_H calcolato ponendo $M = M_H$, ovvero:

$$a_H \propto M_H^{-1/3} \tag{5.42}$$

se l'entrata è ad $a < a_{eq}$; viceversa:

$$a_H) \propto M_H^{-2/3} \tag{5.43}$$

se l'entrata avviene a $a > a_{eq}$.

Ricordiamo che la dipendenza temporale della varianza eq. (5.31) è $\sigma_M(t) \propto D(t)$. Ricordiamo anche come evolve nel tempo l'ampiezza delle fluttuazioni fuori dell'orizzonte (cap.3):

$$D(t) \propto \sigma_M(t) \propto a^2 \quad a < a_{eq};$$
$$D(t) \propto \sigma_M(t) \propto a \quad a > a_{eq}.$$

Quindi, data una fluttuazione di ampiezza iniziale $\sigma(a_{in})$ - determinata per esempio dall'inflazione - l'ampiezza di σ_M all'ingresso nell'orizzonte sarà

$$\sigma_M(a_H < a_{eq}) = \sigma_M(a_{in}) \left(\frac{a_H}{a_{in}}\right)^2 \propto \sigma_M(a_{in}) M_H^{2/3} \tag{5.44}$$

se l'ingresso avviene ad $a_H < a_{eq}$; oppure

$$\sigma_M(a_H > a_{eq}) = \sigma_M(a_{in}) \left(\frac{a_{eq}}{a_{in}}\right)^2 \left(\frac{a_H}{a_{eq}}\right) \propto \sigma_M(a_{in}) M_H^{2/3} \tag{5.45}$$

se $a_H > a_{eq}$. Troviamo quindi che, *indipendentemente dal valore di* a_H, all'entrata nell'orizzonte si ha:

$$\sigma_M(a_H) \propto \sigma_M(a_{in}) M_H^{2/3}. \tag{5.46}$$

Ora, a qualsiasi tempo fissato, la dipendenza di $\sigma_M(a_{in})$ dalla scala è data da eq. (5.31):

$$\sigma_M(a_{in}) \propto M^{\frac{-(3+n)}{6}} \tag{5.47}$$

per cui in totale possiamo scrivere:

$$\sigma_M(a_H) \propto M_H^{\frac{2}{3}-\frac{3+n}{6}}. \propto M_H^{\frac{1-n}{6}}. \tag{5.48}$$

Notiamo che anche qui, se $n = 1$ l'ampiezza $\sigma_M(a_H)$ delle fluttuazioni di massa M, nell'istante a_H in cui entrano nell'orizzonte, è indipendente da M. Quindi se lo spettro primordiale è quello di Zeldovich tutte le perturbazioni entrano nell'orizzonte con la stessa ampiezza. In tal caso l'universo è sempre uguale (autosimile) se guardato alla scala dell'orizzonte. Se invece $n \neq 1$ avremo i due casi:

- per $n > 1$ le perturabazioni di massa minore hanno ampiezza maggiore all'istante del loro ingresso nell'orizzonte; questo anticipa la formazione di strutture più piccole rispetto a quelle più grandi;
- per $n < 1$ le perturabazioni di massa maggiore hanno invece maggiore ampiezza; questo ritarda la formazione delle strutture più piccole.

5.10 Funzione di trasferimento

Abbiamo visto come l'inflazione produca uno spettro *primordiale* scale-free: $P_{in}(k) \propto k^n$ (*in* sta per *iniziale*). Al di fuori dell'orizzonte le fluttuazioni di densità $\delta_k(t)$ evolvono come studiato nel cap.3, in un modo che dipende dal valore dei parametri cosmologici (Ω_0, H_0,...) e con una distribuzione di ampiezze che dipende solo dalla forma dello spettro primordiale. Di conseguenza, le perturbazioni su qualsiasi scala entrano nell'orizzonte "intatte", cioè non modificate da eventi causali (della fisica microscopica).

Al crescere di t la crescita dell'orizzonte R_H fa entrare in contatto causale perturbazioni su scale sempre maggiori e permette ai vari processi microfisici di iniziare ad operare su tali scale. Questo porta ad una modificazione dello spettro primordiale in un modo che dipende dal tipo di processo e quindi dal tipo di particelle e di perturbazioni dell'Universo.

Ricordiamo che esistono due modi per cambiare lo spettro primordiale:

1. Effetti legati alla scala di Jeans
2. Effetti di dissipazione

Consideriamo il caso più interessante di Universo dominato da CDM (per esempio da neutralini): la massa prevista per queste particelle è dell'ordine di $m_p \approx 100$ GeV; la velocità tipica di queste particelle è non relativistica e la massa di Jeans è trascurabile, e in particolare $M_J \ll M_{H,eq}$. Anche il valore massimo della massi di free-streaming, sotto la quale le fluttuazioni di CDM vengono disperse, è trascurabile.

Da quanto visto nel cap.3 sappiamo che le perturbazioni che entrano nell'orizzonte prima di a_{eq} sono congelate dall'effetto di *stagnazione*, fino all'equivalenza. Poiché le prime perturbazioni ad entrare nell'orizzonte sono di piccola scala, per esse il periodo di stagnazione sarà più lungo di quanto non lo sia per fluttuazioni su scale maggiori. Le fluttuazioni su scala abbastanza grande da entrare nell'orizzonte dopo l'equivalenza non subiscono invece stagnazione. La diversa crescita delle perturbazioni a seconda della scala modifica lo spettro primordiale.

Ricaviamo quindi l'andamento dello spettro finale o processato, $P_{fin}(k)$, in funzione di k. Per farlo dobbiamo calcolare di quanto cresce una data fluttuazione $\delta(k)$ da un certo istante iniziale, t_{in} – in cui si assume che lo spettro sia ancora quello primordiale – ad un certo istante finale t_{fin}. Per noi t_{fin} è l'equivalenza tra materia e radiazione, perché dopo l'equivalenza le fluttuazioni di materia oscura non sono più modificate dalla microfisica e quindi non succede più nulla di rilevante allo spettro (a parte la crescita non lineare, che però qui non ci interessa). Per quanto appena detto, abbiamo due regimi:

1. se k è tale che $a_H < a_{eq}$, si ha una crescita sino ad a_H, seguita dalla fase di stagnazione che dura fino all'equivalenza. Durante la stagnazione le fluttuazioni crescono in modo indipendente dalla scala (il fattore 5/2) e comunque in modo trascurabile. Perciò la crescita tra un istante iniziale t_{in} (in cui lo spettro è ancora quello primordiale) e l'equivalenza è solo quella che avviene prima dell'ingresso nell'orizzonte:

$$\delta(k; a_{eq}) = \delta(k; a_{in}) \left(\frac{a_H}{a_{in}}\right)^2 \propto \delta(k; a_{in}) a_H^2 \tag{5.49}$$

   intesa come funzione di k.

2. se k è tale che $a_H > a_{eq}$, si ha invece una crescita ininterrotta della perturbazione fino ad a_{eq}. In tal caso la crescita della fluttuazione tra l'istante iniziale t_{in} e l'equivalenza è

$$\delta(k; a_{eq}) = \delta(k; a_{in}) \left(\frac{a_{eq}}{a_{in}}\right)^2 \propto \delta(k; a_{in}) \tag{5.50}$$

   come funzione di k (perché il fattore $(a_{eq}/a_{in})^2$ è una costante che non dipende da k).

Per calcolare la crescita delle $\delta(k)$ in funzione di k ci manca ancora di esprimere il fattore di scala a_H in funzione di k; ricordiamo che per $a_H < a_{eq}$ è

$$M_H \propto a^3 \quad \Rightarrow \quad a_H^2 \propto M^{2/3}$$

e poiché $M \propto R^3 \propto k^{-3}$ avremo

$$a_H^2 \propto k^{-2}.$$

Inserendo questo nell'eq. (5.49) e quadrando avremo

$$P_{fin}(k) \sim \delta^2(k; a_{eq}) \propto \delta^2(k; a_{in}) a_H^4 \sim P_{in}(k) k^{-4} \propto k^{n-4}, \tag{5.51}$$

ovvero sulle scale più piccole ($k \to \infty$) lo spettro iniziale viene modificato di un fattore k^{-4}.

Se invece $a_H > a_{eq}$, da eq. (5.50) avremo semplicemente

$$P_{fin}(k) \sim \delta^2(k; a_{eq}) \propto \delta^2(k; a_{in}) \sim P_{in}(k) \propto k^n \tag{5.52}$$

ovvero sulle scale più grandi ($k \to 0$) lo spettro iniziale rimane intatto fino all'equivalenza (e ovviamente anche dopo).

Il valore di k che corrisponde alla transizione fra i due regimi è la scala dell'orizzonte cosmologico dell'equivalenza, che vale circa $\lambda_H \sim 16(\Omega h^2)^{-1}$ Mpc.

Ricordiamo che la potenza associata al numero d'onda k è data non dallo spettro, ma dalla quantità

$$d^3k P_{fin}(k) \propto k^3 P_{fin}(k);$$

nel caso standard di universo dominato da CDM e spettro di Zeldovich (indice spettrale primordiale $n = 1$), la potenza è una funzione crescente di k, che si appiattisce sempre più per $k \to \infty$ dove diventa una costante; infatti utilizzando le relazioni (5.51) (5.52) riscriviamo

$$k \to 0 \quad \Rightarrow \quad k^3 P(k) \quad \propto k^{n+3} \propto k^4 \tag{5.53}$$

$$k \to \infty \quad \Rightarrow \quad k^3 P(k) \quad \propto k^{n-4+3} \propto cost; \tag{5.54}$$

il modello di CDM ha quindi più potenza su piccola scala, e porta ad un *clustering gerarchico.*

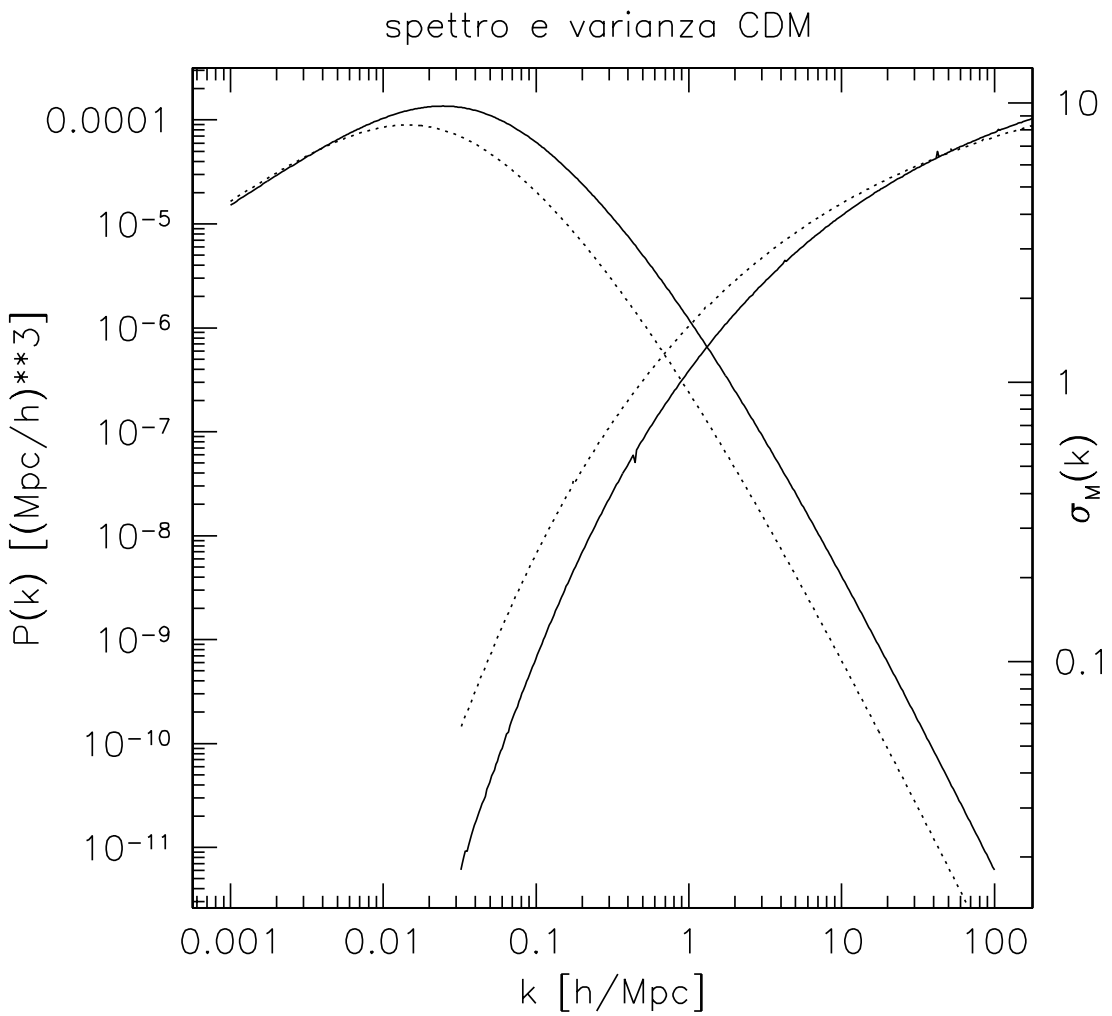

Figura 5.5: Spettri di potenza e varianze CDM. La linea continua si riferisce ad un modello (detto di standard CDM) con $\Omega_m = 1$, $h = 0.5$ e $\sigma_8 = 0.5$; la linea tratteggiata si riferisce ad un modello con $\Omega_m = 0.3$, $h = 0.7$ e $\sigma_8 = 0.9$, quale ad esempio un modello di CDM in universo aperto o piatto ma dominato da costante cosmologica. In entrambi i casi lo spettro primordiale è di Zeldovich.

La modificazione globale di P(k) si può scrivere in modo sintetico e parametrico definendo una *funzione di Trasferimento T(k)* che dice quanta parte della fluttuazione primordiale $\delta(k)$ sopravvive indenne alla microfisica. Per separare l'effetto della microfisica (che è quello che ci interessa) dalla contemporanea crescita lineare delle perturbazioni (che non ci interessa perché è uguale per tutti i k) nella definizione di $T(k)$ dobbiamo anche dividere le ampiezze $\delta(k)$ per il fattore di crescita $D(t)$ ai due istanti:

$$T(k; z_{fin}) \equiv \frac{\delta(k; z_{fin})}{\delta(k; z_{in})} \frac{D(z_{in})}{D(z_{fin})} \tag{5.55}$$

e quindi:

$$\delta(k; z_{fin}) = \delta(k; z_{in}) T(k; z_{fin}) \frac{D(z_{fin})}{D(z_{in})} \tag{5.56}$$

ovvero

$$P_{fin}(k) \sim \delta^2(k; z_{fin}) = P_{in}(k) T^2(k; z_{fin}) \left[\frac{D(z_{fin})}{D(z_{in})}\right]^2 = k^n T^2(k) \left[\frac{D(z_{fin})}{D(z_{in})}\right]^2 . \tag{5.57}$$

Per come è definita, la funzione di trasferimento è un filtro passa basso, ed ha quindi i seguenti andamenti asintotici:

$$\begin{aligned} k \to 0 \quad &\Rightarrow \quad T(k) \to 1 \\ k \to \infty \quad &\Rightarrow \quad T(k) \propto k^{-2} \to 0. \end{aligned} \tag{5.58}$$

Capitolo 6

Proprietà di clustering dell'universo

Dispense per il corso di Cosmologia Modulo A
G.Tormen, Dipartimento di Astronomia, Università di Padova
(7 gennaio 2002)

6.1 Introduzione

Dato un catalogo bi o tri-dimensionale di oggetti astronomici (galassie, QSO, ammassi di galassie, AGN, sistemi di assorbimento ad alto redshift,...) quali statistiche possiamo usare per descriverne le proprietà? Il numero medio (o quadratico medio) di galassie per unità di volume, $\langle n \rangle$; $\langle n^2 \rangle$; queste due misure sono collegate ai conteggi in celle. Funzioni di correlazione ad N punti: misurano la probabilità che esistano N oggetti a distanza r_{ij} tra loro, con $i, j = 1, ..., N$. Funzioni spaziali, angolari. Misure della topologia. Percolazione...

6.2 Funzione di correlazione spaziale a due punti

6.2.1 Osservazioni

Osservativamente, $\xi(r)$ si misura da un catalogo tridimensionale di oggetti (per es. galassie, ammassi, QSO, ecc...). Per questo occorre una stima del redshift. Misure recenti mostrano che la funzione di correlazione di galassie e di ammassi è ben descritta da una legge di potenza:

$$\xi(r) = \left(\frac{r}{r_0}\right)^{-\gamma} \tag{6.1}$$

dove $\gamma \sim 1.8$; r_0 è detta lunghezza di correlazione, perché per definizione $\xi(r_0) = 1$. Per le galassie si misura $r_0 = 5.5$ Mpc/h; per gli ammassi di Abell $r_0 = 15 - 25$ Mpc/h. La maggior lunghezza di correlazione degli ammassi si capisce se si assume che questi si formano solo in corrispondenza dei picchi del campo di densità di materia dell'universo.

6.2.2 Modello discreto

E' utile pensare alla distribuzione della materia nell'universo come ad una distribuzione di oggetti puntiformi, per esempio di galassie. Sia n il numero medio di galassie per unità di volume. La probabilità di trovare una galassia nel volume infinitesimo dV è semplicemente

$$dP = ndV \tag{6.2}$$

nel senso di media sull'insieme statistico. Se dV raddoppia, raddoppia anche dP. Il numero medio di galassie nel volume finito V è ovviamente

$$\langle N \rangle = nV. \tag{6.3}$$

La correlazione a due punti di questa distribuzione è definita dalla probabilità congiunta di trovare due galassie a distanza r tra loro:

$$d^2P = n^2 dV_1 dV_2[1 + \xi(r)]; \tag{6.4}$$

$\xi(r)$ dipende solo dal modulo di r per l'ipotesi di omogeneità e isotropia dell'universo.

La probabilità Eq. (6.4) è proporzionale a dV_1 e dV_2 perché se si raddoppia dV_1 o dV_2 raddoppia anche dP. Nel caso di un processo Poissoniano su di una distribuzione casuale uniforme, le due probabilità sono indipendenti e quindi

$$d^2P = n^2 dV_1 dV_2 \tag{6.5}$$

cioè $\xi(r) \equiv 0$. Quindi $\xi(r)$ è l'eccesso (o il difetto) di clustering di una distribuzione rispetto ad una distribuzione Poissoniana uniforme. $\xi(r) > 0 \rightarrow$ correlazione positiva; $-1 < \xi(r) < 0 \rightarrow$ anticorrelazione. Si noti che $\xi(r)$ non può assumere valori minori di -1.

6.2.3 Modello continuo

La funzione di correlazione spaziale si puo' definire anche usando una distribuzione continua di materia. Consideriamo un campo stocastico di densità

$$\varrho(x) = n(x)m \tag{6.6}$$

dove $\varrho(x)$ è la densità in massa, $n(x)$ è la densità in numero, e m è la massa di ogni particella. Adesso $n(x)$ e $\varrho(x)$ sono quantità locali e non piu' globali come in Eq. (6.2). Sia $\varrho_b = nm$ la densità media (sull'insieme statistico). Possiamo riscrivere

$$\varrho(x) = \frac{n(x)}{n}\varrho_b \quad \text{da cui} \quad n(x) = \frac{\varrho(x)}{\varrho_b}n. \tag{6.7}$$

La probabilità locale di trovare un oggetto nel volumetto dV intorno ad x è

$$dP(x) = n(x)dV = n\frac{\varrho(x)}{\varrho_b}dV. \tag{6.8}$$

la probabilità Eq. (6.4) (che è media sull'insieme) si scrive

$$d^2P = dV_1 dV_2 \langle n(x+r)n(x)\rangle = n^2 dV_1 dV_2 \frac{\langle \varrho(x+r)\varrho(x)\rangle}{\varrho_b^2} \tag{6.9}$$

che confrontata con Eq. (6.4) dà

$$1 + \xi(r) = \frac{\langle \varrho(x+r)\varrho(x)\rangle}{\varrho_b^2} \tag{6.10}$$

cioè

$$\xi(r) = \langle \delta(x+r)\delta(x)\rangle \tag{6.11}$$

dove

$$\delta(x) = \frac{\varrho(x) - \varrho_b}{\varrho_b} \equiv \delta\varrho(x)/\varrho_b \tag{6.12}$$

è il contrasto di densità (si verifichi al contrario, andando da Eq. (6.11) a Eq. (6.10).

6.3 Conteggi in celle

Osservativamente, la funzione di correlazione è una statistica che va a zero rapidamente. Tipicamente, per le galassie

$$\xi(r) << 1 \quad \text{per} \quad r > 15 \text{ Mpc/h} \tag{6.13}$$

e a tali separazioni la correlazione è dominata dal rumore. Per misurare le proprietà di clustering su scale maggiori occorre definire delle quantità piu' robuste. Un modo è considerare quantità che coinvolgono l'**integrale** della funzione di correlazione; un esempio è il conteggio in celle. Questo si puo' fare in due modi: contando galassie in sfere centrate su una galassia data (conteggio dei vicini), oppure contando galassie in sfere centrate a caso.

6.3.1 Conteggio in celle intorno a una galassia data

La probabilità congiunta di due variabili casuali $1, 2$ si puo' riscrivere usando la definizione di probabilità condizionata:

$$dP(1,2) = dP(1) \times dP(2|1) \tag{6.14}$$

in questo modo possiamo riscrivere Eq. (6.4) come

$$dP(1,2) \equiv d^2P = ndV_1 \times ndV_2[1 + \xi(r)]; \tag{6.15}$$

il secondo fattore è $dP(2|1)$, la probabilità di trovare una galassia in dV_2 **dato** che ce n'è già una in dV_1, ovvero la probabilità che, mettendosi sopra una galassia a caso in dV_1, ce ne sia un'altra a distanza r in dV_2.

Con questo possiamo facilmente calcolare il numero medio di galassie vicine, entro una distanza r da una galassia data; sarà l'integrale di $dP(2|1)$ esteso alla sfera di raggio r centrata sulla galassia:

$$\langle N(<r)\rangle = \int_V dP(2|1) = \int_V ndV[1 + \xi(r)] = \frac{4\pi}{3}nr^3 + 4\pi n \int_0^r \xi(r')r'^2 dr'. \tag{6.16}$$

Il primo termine è il contributo dato da una distribuzione uniforme; il secondo è l'eccesso/difetto dovuto al clustering delle galassie.

6.3.2 Conteggi in celle intorno ad una posizione casuale

Un altro modo di fare conteggi in celle è considerare il numero di galassie entro una sfera di raggio dato, centrata a caso, cioè non necessariamente su una galassia. Consideriamo dei volumi infinitesimi dV, abbastanza piccoli da contenere al massimo una galassia. Quindi dato un volume dV_1, Eq. (6.2) ci dice che

$$\langle n_1\rangle = ndV_1 \tag{6.17}$$

ma poiché per definizione n_1 è 0 oppure 1, segue che anche

$$\langle n_1\rangle = \langle n_1^2\rangle = \langle n_1^3\rangle ... \tag{6.18}$$

Possiamo considerare diversi momenti dei conteggi entro un volume V:

ordine 1:

$$\langle N\rangle_V = \int_V ndV_1 = (\text{discreto}) \sum_i \langle n_i\rangle = nV \tag{6.19}$$

ovvero il numero di galassie intorno ad un punto qualunque è semplicemente il valore dato da una distribuzione Poissoniana.

ordine 2:

$$\langle N^2\rangle_V = \langle \sum_i n_i \sum_j n_j\rangle = \sum_i \langle n_i^2\rangle + \sum_{i\neq j} \langle n_i n_j\rangle. \tag{6.20}$$

Ora, per definizione

$$\sum_i \langle n_i^2\rangle = \sum_i \langle n_i\rangle = nV \tag{6.21}$$

e dalla def. in Eq. (6.4):

$$\sum_{i\neq j} \langle n_i n_j\rangle = n^2 \int dV_1 dV_2[1 + \xi_{12}] = n^2V^2 + n^2 \int dV_1 dV_2 \xi_{12} \tag{6.22}$$

per cui

$$\langle N^2\rangle = nV + n^2V^2 + n^2 \int dV_1 dV_2 \xi_{12} = \langle N\rangle + \langle N\rangle^2 + n^2 \int dV_1 dV_2 \xi_{12}. \tag{6.23}$$

Il momento centrale di ordine due, cioè la varianza del conteggio in celle di volume V è:

$$\mu_2 \equiv \langle (N - \langle N\rangle)^2\rangle \equiv \langle N^2\rangle - \langle N\rangle^2 = nV + n^2 \int dV_1 dV_2 \xi_{12}. \tag{6.24}$$

Possiamo riscrivere Eq. (6.19) e (6.24) in termini del **contrasto**:

$$\Delta \equiv \frac{\delta N}{\langle N \rangle} = \frac{(N - \langle N \rangle)}{\langle N \rangle} = \frac{N}{\langle N \rangle} - 1. \tag{6.25}$$

Il constrasto medio è zero per definizione:

$$\langle \Delta \rangle \equiv 0 \tag{6.26}$$

e il valore quadratico medio (da Eq. (6.24)) è:

$$\langle \Delta^2 \rangle = \frac{\mu_2}{\langle N \rangle^2} = \frac{1}{nV} + \frac{1}{V^2} \int dV_1 dV_2 \xi_{12}. \tag{6.27}$$

Questa relazione mostra come la varianza $\langle \Delta^2 \rangle$ del conteggio in celle sia la somma di due termini: uno dato dall'integrale della funzione di correlazione, dovuto quindi al clustering della materia e legato alla varianza di massa σ_M nel volume V; ed un termine $1/nV$ di *shot noise* dovuto puramente alla discretezza della distribuzione. Il termine di discretezza corrisponde alla varianza di una distribuzione Poissoniana, che esiste a prescindere dall'esistenza di correlazione tra i punti e non dipende dalla scala ma solo dal numero totale N di punti distribuiti; infatti nel limite $N \to \infty$ il campo discreto diventa continuo e lo shot noise tende a zero.

Per grandi valori di r, anche se $\xi(r)$ è piccola, il contributo all'integrale va come $r^2\xi(r)$ e quindi è non trascurabile. In tal modo è possibile "misurare" il contributo di $\xi(r)$ a grandi scale.

6.4 Correlazioni spaziali di ordine superiore

In generale, puo' essere interessante andare a vedere la funzione di correlazione a tre, quattro,...,N punti. Queste si definiscono formalmente come quella a due. Per es. per la tre punti, la probabilità di trovare tre punti a distanze relative r_{12}, r_{13}, r_{23} è:

$$d^3P = n^3 dV_1 dV_2 dV_3 [1 + \xi_3(r_{12}, r_{13}, r_{23})]. \tag{6.28}$$

I tripletti di galassie che contribuiscono a ξ_3 sono di vario tipo. Alcuni dipendono puramente da un eccesso o difetto di coppie a distanza r_{12}, r_{13}, r_{23} (cioè dipendono dal valore della correlazione a due punti); altri sono un genuino eccesso o difetto di tripletti, indipendente dal valore della correlazione a due punti. Per separare questi contributi, ξ_3 si scrive come somma di piu' contributi:

$$\xi_3(r_{12}, r_{13}, r_{23}) = \xi(r_{12}) + \xi(r_{13}) + \xi(r_{23}) + \zeta(r_{12}, r_{13}, r_{23}) \tag{6.29}$$

dove $\zeta(r_{12}, r_{13}, r_{23})$ è detta funzione a tre punti *ridotta* o *connessa*, ed è la parte di ξ_3 indipendente dalla corralazione a due punti.

Il formalismo è uguale a quello sviluppato per la due punti. In particolare, Per un campo stocastico Gaussiano, le correlazioni di ordine dispari sono zero, e quelle di ordine pari sono esprimibili in termini di quella di ordine due, senza parte connessa.

6.5 Funzione di correlazione angolare a due punti

Molti cataloghi di oggetti astronomici contengono solo la posizione angolare degli oggetti, e per esempio la loro magnitudine, ma non il redshift. Per esempio, il catalogo di Lick, con $\sim$ 800.000 galassie; l'APM con $\sim$ 2.000.000 galassie. Allora che si fa? Si costruisce un modello bidimensionale per le varie correlazioni, allo stesso modo di quello usato per la correlazione spaziale. Con le seguenti sostituzioni:

$$r \to \theta \quad \text{separazione angolare} \tag{6.30}$$

$$n \to n_\Omega \quad \text{densita}' \text{ superficiale} \tag{6.31}$$

$$dV \to d\Omega \quad \text{angolo solido} \tag{6.32}$$

$$\xi(r) \to w(\theta) \quad \text{correlazione angolare} \tag{6.33}$$

possiamo scrivere l'analogo di Eq. (6.4):

$$d^2P = n_\Omega^2 [1 + w(\theta)] d\Omega_1 d\Omega_2 \tag{6.34}$$

6.5.1 Osservazioni

Osservativamente, $w(\theta)$ si misura da un catalogo bidimensionale di oggetti (per es. galassie, ammassi, QSO, ecc...). Viene descritta da una legge di potenza:

$$w(\theta) = A_* \theta^{-\delta} \tag{6.35}$$

con $\delta \sim 0.8$. L'ampiezza A_* dipende dalla profondità tipica del catalogo, cioè dalla sua magnitudine limite. Domanda: è possibile, con ipotesi opportune sulla distribuzione angolare delle galassie, stimare $\xi(r)$ a partire da $w(\theta)$? La risposta è si' ed è data dall' equazione di Limber.

6.5.2 Equazione di Limber

Consideriamo un catalogo di galassie, di cui conosciamo posizione angolare e magnitudine apparente. Fenomenologicamente, conosciamo la funzione di luminosità delle galassie, $\Phi(L)$, che dice che il numero di galassie con luminosità tra L e $L + dL$ è $\phi(L)dL$. $\Phi(L)$ è parametrizzato da una legge di potenza con un cutoff esponenziale:

$$\Phi(L) = \left(\frac{L}{L_*}\right)^{-\alpha} \exp(-L/L_*) \tag{6.36}$$

Da questa possiamo ricavare facilmente il numero di galassie di magnitudine assoluta tra M ed $M + dM$:

$$\Psi(M)dM = \Phi(L)dL \tag{6.37}$$

che definisce $\Psi(M)$.

La probabilità di trovare una galassia in dV con magnitudine M è quindi

$$dP = \Psi(M)dMdV. \tag{6.38}$$

In analogia con la correlazione spaziale a due punti, scriviamo la probabilità che due galassie di magnitudine M_1 ed M_2 stiano in dV_1 e dV_2:

$$d^2P = dM_1 dM_2 dV_1 dV_2 [\Psi(M_1)\Psi(M_2) + G(M_1, M_2, r_{12})] \tag{6.39}$$

IPOTESI 1: luminosità e posizione delle galassie non sono correlate; possiamo allora scrivere:

$$G(M_1, M_2, r_{12}) = \Psi(M_1)\Psi(M_2)\xi(r_{12}) \tag{6.40}$$

e quindi Eq. (6.39) si riscrive:

$$d^2P = dM_1 dM_2 dV_1 dV_2 \Psi(M_1)\Psi(M_2)[1 + \xi(r_{12})]. \tag{6.41}$$

La magnitudine apparente m di una galassia, la sua magnitudine assoluta M e la distanza D sono legate dalla relazione:

$$D = 10^{[0.2(m-M)-5]} \text{ Mpc} \tag{6.42}$$

[che arriva da $m = M + 5\log(\mathrm{D/Mpc}) + 25$]. La luminosità emessa da una distribuzione di galassie con funzione di luminosità $\Phi(L)$ è $L\Phi(L)$. Se osservativamente in Eq. (6.36) $\alpha < 1$, $L\Phi(L)$ ha un massimo per $L \sim L_*$. Cio' significa che la maggior parte della luce arriva da galassie di magnitudine M_* poste a distanza D_*.

IPOTESI 2: tutte le galassie del catalogo hanno magnitudine assoluta M_*; questa ipotesi, chiaramente falsa in realtà, ma sufficientemente accurata nella pratica, permette di assegnare ad ogni galassia una distanza tipica

$$D_* = 10^{[0.2(m-M_*)-5]} \quad \text{Mpc} \tag{6.43}$$

IPOTESI 3: ci limitiamo a considerare separazioni angolari piccole, $\theta << 1$; in questa ipotesi ad una separazione angolare θ corrisponde con buona approssimazione una separazione fisica $r = D_*\theta$.

Utilizzando queste tre ipotesi, è possibile scrivere un'equazione integrale dove la correlazione angolare $w(\theta)$ è espressa in funzione della correlazione spaziale $\xi(r)$:

$$w(\theta) = F\left[\int (\xi(r); m; D_*)\right]. \tag{6.44}$$

Questa equazione, detta equazione di Limber, permette di fare due cose: (i) Calcolare, data $\xi(r)$, la $w(\theta)$ attesa per un dato catalogo. (ii) Invertire l'equazione e ricavare $\xi(r)$ a partire da $w(\theta)$. La seconda operazione è evidentemente piu' complessa.

L'equazione di Limber dimostra che la parametrizzazione Eq. (6.35) è consistente con quella usata per la correlazione spaziale Eq. (6.1) se $\gamma = 1 + \delta$. Il fatto che osservativamente $\gamma \sim 1.8$, $\delta \sim 0.8$, mostra che le ipotesi fatte per derivare l'equazione di Limber sono piu' o meno giustificate.

6.6 Dimensione frattale

Nell'Eq. (6.16) si vede che ci sono due contributi al numero medio di vicini entro un raggio r intorno ad un punto dato. Se $\xi(r) >> 1$, il secondo termine (integrale) domina sul primo, e

$$\langle N(<r)\rangle \propto \int_0^r \xi(r) r^2 dr. \tag{6.45}$$

Se $\xi(r) \propto r^{-\gamma}$, allora

$$\langle N(<r)\rangle \propto r^D \tag{6.46}$$

con $D = 3 - \gamma$. D è detta dimensione frattale di $\xi(r)$.

ESEMPIO:

filamenti (spaghetti) : $M(<r) \propto R \quad \rightarrow D = 1$

sheets (lasagne) : $M(<r) \propto R^2 \quad \rightarrow D = 2$

distribuzione omogenea (zuppa) : $M(<r) \propto R^3 \quad \rightarrow D = 3$

Il fatto che sia $\gamma \sim 1.8$, cioè $D \sim 1.2$, indica che le galassie nell'universo sono tipicamente distribuite in strutture simili ai filamenti.

6.7 Percolazione (friends of friends)

E' una statistica per identificare strutture delimitate da superfici circa isodense. E' soprattutto una tecnica pratica per identificare oggetti (per esempio galassie) nelle simulazioni numeriche.

Consideriamo $N >> 1$ punti (galassie) in un cubo di lato L. La densità media è

$$n = \frac{N}{L^3} \tag{6.47}$$

e la distanza interparticellare media è tipicamente

$$d = \frac{L}{N^{1/3}} = n^{-1/3}. \tag{6.48}$$

Ora tracciamo intorno ad ogni galassia una sfera di raggio $r = bd$, e riuniamo tra loro tutte le galassie le cui sfere si intersecano. Consideriamo, al variare di b, l'insieme di questi 'gruppi' di galassie. Per $b << 1$ tutte le galassie sono singole, ed esistono N gruppi di una galassia ciascuno. Al crescere di b, le galassie piu' vicine tra loro si uniscono via via in gruppi, e il numero totale di gruppi diminuisce, ma il numero medio di galassie per gruppo aumenta. Per b sufficientemente grande, c'è un solo gruppo di N galassie.

Il parametro b è detto *linking length*, e identifica, tipicamente, galassie raggruppate in gruppi la cui densità al bordo è $\sim nb^{-3}$.

Oltre che per definire gruppi in una simulazione, la percolazione si puo' usare come statistica della distribuzione dei punti. Possiamo definire un valore critico b_*, come il valore minimo di b che permette ad un gruppo di prolungarsi da una parte all'altra del volume $V = L^3$. Per es., per una distribuzione uniforme è chiaramente $b_* = 1$. Per una distribuzione casuale si prova che $b_* \sim 0.86$.

6.8 Fattore di bias

Le statistiche definite finora legano la distribuzione (discreta) di galassie dei cataloghi a quella (continua) di un campo di fluttuazioni (Eq. (6.11)) della materia. In particolare, abbiamo implicitamente assunto che sia

$$\delta(x; \text{galassie}) = \delta(x; \text{materia}). \tag{6.49}$$

In realtà la distribuzione delle galassie non necessariamente segue quella della materia sottostante, ma è determinata dall'insieme dei complessi processi fisici che regolano la formazione delle galassie. Questi processi possono, ad esempio, favorire la formazione di galassie in regioni particolarmente dense, o calde, o fredde, o..., e inibirla invece in altre regioni.

In assenza di un modello fisico completo e dettagliato per la formazione delle galassie, la prima cosa che si puo' fare per distinguere il clustering della materia da quello delle galassie è introdurre altri gradi di libertà nella relazione Eq. (6.49):

$$\delta(x; \text{galassie}) = b\delta(x; \text{materia}). \tag{6.50}$$

il fattore di proporzionalità b è detto fattore di bias (questo b non ha nulla a che vedere con il parametro di percolazione!). In pratica, b viene utilizzato come un ulteriore parametro libero nella descrizione delle proprietà di clustering delle galassie.

In generale b può essere una complicata funzione della densità e di molti altri processi fisici. Nel caso più semplice possibile, da noi assunto, b è invece un numero, cioè una funzione costante. Modelli più complessi possono assumere che b sia funzione per es. della scala considerata, o della separazione tra le strutture.

Capitolo 7

Anisotropie del Fondo Cosmico di Microonde

Dispense per il corso di Cosmologia Modulo A
G.Tormen, Dipartimento di Astronomia, Università di Padova
G.Giudice, Dipartimento di Costruzione di Macchine, Università di Napoli
(19 dicembre 2002)

7.1 Introduzione

L'universo osservato si sta espandendo e raffreddando. Il fondo cosmico di microonde (Cosmic Microwave Background, CMB) è il residuo della radiazione di corpo nero (= termica) del Big Bang caldo.

Il CMB è un bagno termico di fotoni proveniente da tutte le direzioni, con $\lambda \approx 1$ mm. La loro densità è di $\approx$ 415 mm^{-3}. Questi fotoni provengono - tipicamente - dalla superficie di ultimo scattering, al momento della ricombinazione e disaccoppiamento dell'idrogeno a $z_{LS} \approx 1000$ (LS = last scattering), e quindi hanno percorso circa il 99.9% della dimensione dell'universo, durante un tempo (assumendo per semplicità $\Omega = 1$)

$$t \propto a^{3/2} \propto (1+z)^{-3/2}$$

pari al 99.997% dell'età dell'universo. L'epoca la ricombinazione, avvenuta circa 300000 anni dopo il Big Bang, l'universo era 1000 volte più piccolo ($a \propto 1/(1+z)$) e 1000 volte più caldo ($T_r \propto (1+z)$) di oggi.

Poiché fino alla ricombinazione la radiazione era strettamente accoppiata alla materia barionica, il CMB contiene un'impronta delle fluttuazioni della materia-energia ad un'epoca in cui le fluttuazioni di densità $\delta = \mathrm{d}\rho/\rho$ erano piccole: $\delta \ll 1$, per cui possiamo applicare la teoria lineare.

In prima approssimazione il CMB è un perfetto corpo nero, con una temperatura di

$$T_{CMB} = 2.726 \pm 0.010 \text{ K}$$

in ogni direzione del cielo. Nel 1976 venne misurato il dipolo, interpretato come effetto Doppler dovuto al moto della nostra Galassia rispetto al sistema di riferimento in cui il CMB è isotropo.

$$\langle \left(\frac{\delta T}{T}\right)^2_{dip} \rangle^{1/2} \approx 10^{-3}.$$

Un dipolo di questa ampiezza corrisponde ad una velocità per il Gruppo Locale di galassie di $v = 627 \pm 22$ km/s.

Nel 1992 il satellite COBE misurò le anisotropie su scale angolari $\theta > 7°$, cin pratica fino al quadrupolo (si veda in seguito), trovando

$$\langle \left(\frac{\delta T}{T}\right)^2_{Q} \rangle^{1/2} \approx 1.1 \times 10^{-5}.$$

7.2 Spettro di potenza del CMB

Come seni e coseni si usano per scomporre nello spazio di Fourier arbitrarie funzioni definite in uno spazio Cartesiano, così le armoniche sferiche servono a scomporre funzioni arbitrarie definite sulla superficie di una sfera. Se la funzione è la temperatura $T(\theta, \phi)$ della radiazione di fondo nella direzione del cielo identificata dagli angoli θ e ϕ, allora scriviamo

$$\delta T(\theta, \phi) \equiv T(\theta, \phi) - \langle T \rangle = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^{l} a_{lm} Y_{lm}(\theta, \phi)$$

dove

$$Y_{lm}(\theta, \phi) = \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi} \frac{(l-m)!}{(l+m)!}} P_l^m(\cos\theta) \exp(i\phi)$$

con $P_l^m(\cos\theta)$ polinomi di Legendre. Le funzioni $Y_{lm}(\theta, \phi)$ sono ortogonali, anzi ortonormali

$$\int_0^{2\pi} \mathrm{d}\phi \int_0^{\pi} Y^*_{l'm'}(\theta, \phi) Y_{lm}(\theta, \phi) = \delta_{ll'} \delta_{mm'}$$

dove l'asterisco indica il complesso coniugato e le delta sono di Krönecker. La densità di potenza dell'armonica di ordine l è detta

$$C_l = \frac{1}{2l+1} \sum_m a_{lm}^2 = \langle |a_{lm}^2| \rangle$$

ed è l'analogo sferico dello spettro di potenza delle fluttuazioni, $P(k)$. Per $l = 1$ si ha il termine di dipolo ($\theta = 180°$), quando $l = 2$ si ha il termine di quadrupolo ($\theta = 90°$), per i termini superiori si ha $\theta \approx 60°/l$.

7.3 Meccanismi di anisotropia in un universo FRW

La temperatura dei fotoni del CMB è influenzata da ogni altro campo accoppiato coi fotoni stessi. Nel nostro caso:

1. Gravità: $\phi(r)$ per red e blue shift gravitazionale
2. Densità: $\delta(r)$ per riscaldamento da compressione e raffreddamento da espansione.
3. Velocità: $\mathbf{v}(\mathbf{r})$ per effetto Doppler (diffusione dei fotoni da parte di particelle in moto)

Gli effetti di queste interazioni sono dominanti sulla superficie di ultimo scattering, a distanza $r \approx 3000$ Mpc$/h$ lungo la linea di vista. La fluttuazione globale di T nella direzione $\mathbf{r}$ del cielo è la somma dei vari contributi. Poiché tali contributi sono indipendenti dalla frequenza, si possono distinguere dalle contaminazioni di foreground (galattiche ed extragalattiche).

7.3.1 Anisotropie primarie

Sono quelle che si originano sulla superficie di ultimo scattering, a $z \approx 10^3$. Interessano scale sia maggiori che minori dell'orizzonte cosmologico (ricordiamo che l'orizzonte cosmologico R_H alla ricombinazione corrisponde ad una scala angolare di circa un grado). I fotoni diffusi recano con sè l'impronta delle condizioni in cui la diffusione e' avvenuta.

$R > R_H$: Velocità

La velocità si scompone nel contributo del moto della Terra e in quello proprio dei fotoni a $z = z_{dec}$:

$$\mathbf{v}(\mathbf{r}) = \mathbf{v}_\odot + \mathbf{v}_{dec}(\mathbf{r})$$

Su scale $R > R_H$ il secondo termine (fluttuazione di temperatura indotta da velocità peculiari sulla superficie di ultimo scattering) è trascurabile e resta solo il termine di effetto Doppler causato dal fatto che la Terra si muove (intorno al Sole, nella Galassia, nel Gruppo Locale) rispetto al sistema di riferimento *assoluto* in cui il CMB è perfettamente isotropo. Questo moto è la causa del termine di anisotropia di dipolo discusso all'inizio: come tale non ha origine primaria e non verrà discusso ulteriormente. Restano quindi le fluttuazioni di temperature dovute al potenziale gravitazionale e al campo di densità.

$R > R_H$: Gravità

i fotoni che sono subiscono il loro ultimo scattering dentro una buca di potenziale perdono energia per uscire dalla buca; quelli che sono diffusi da una cresta di potenziale uscendone acquistano energia; nel primo caso si ha un redshift, nel secondo un blueshift *gravitazionale*. Poiché temperatura, velocità quadratica e potenziale sono tutte forme di energia: $T \propto v^2 \propto \Phi$, si avrà

$$\frac{\delta T}{T} = \frac{\delta \Phi}{\Phi} = \frac{\phi}{c^2}$$

(ove Φ è il potenziale totale e ϕ la fluttuazione di potenziale); il fattore c^2 fa tornare le dimensioni.

$R > R_H$: Densità

Assumiamo per semplicità che le perturbazioni siano adiabatiche; allora le regioni sovradense sono più calde rispetto alla media ed i fotoni emessi sono spostati verso il blu. Il contrario (redshift) avviene invece per fotoni diffusi da regioni sottodense.

La relazione tra fluttuazioni di densità e di temperatura si ha ricordando che a $z \approx z_{dec}$ la densità di materia è molto superiore a quella della radiazione, e usando le seguenti relazioni tra i campi:

$$\rho \approx \rho_m \quad \propto \quad \lambda^{-3} \tag{7.1}$$
$$T \quad \propto \quad \lambda^{-1} \tag{7.2}$$

per cui

$$\rho \propto T^3 \quad \Rightarrow \quad \delta = \frac{3\delta T}{T}.$$

Considerando poi che una perturbazione di densità δ corrisponde ad una perturbazione nel potenziale:

$$\delta = -2\frac{\phi}{c^2}$$

(relazione che compare nel limite Newtoniano della metrica della Relatività Generale) possiamo infine scrivere la perturbazione nel potenziale che corrisponde ad una data fluttuazione di densità:

$$\frac{3\delta T}{T} = -\frac{2\phi}{c^2} \quad \Rightarrow \quad \frac{\delta T}{T} = -\frac{2\phi}{3c^2}.$$

Poiché nel caso di perturbazioni adiabatiche le regioni sovradense sono anche minimi di potenziale e quelle sottodense sono creste di potenziale, gli effetti di red e blue-shift di gravità e densità tendono a cancellarsi, e la loro somma risulta:

$$\frac{\delta T(\phi + \delta)}{T} = \frac{\phi}{c^2} - \frac{2\phi}{3c^2} = \frac{\phi}{3c^2}.$$

Ovvero, la gravità vince sulla densità. Questo effetto combinato di gravità e densità è detto *effetto Sachs-Wolfe* o SW.

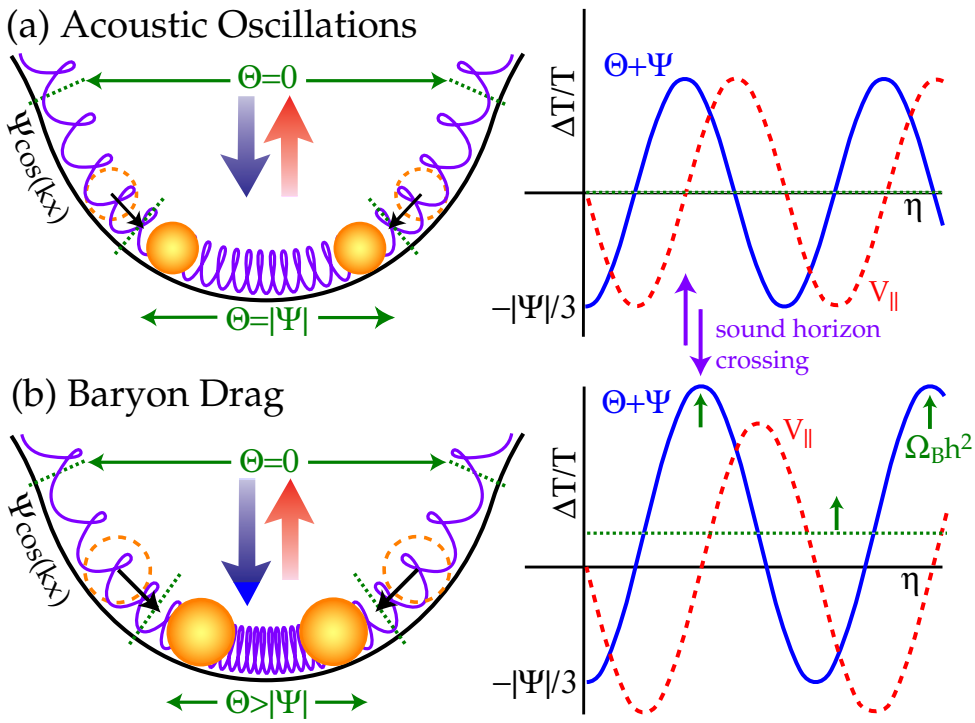

Figura 7.1: Oscillazioni acustiche (da Hu 1995). Il pannello superiore si riferisce al caso in cui $\Omega_b = 0$. Il pannello inferiore al caso realistico $\Omega_b \neq 0$.

$R < R_H$: Oscillazioni acustiche

Su scale dell'ordine o minori dell'orizzonte alla ricombinazione le fluttuazioni di ϕ, $\mathbf{v}$ e δ hanno tempo di oscillare e questo dà luogo ai cosiddetti picchi acustici ad alte frequenze angolari ($l \gg 1$).

Il fluido di barioni e radiazione (BR) (accoppiato dallo scattering Thomson) sente l'attrazione delle perturbazioni di materia oscura (che già esistono perché la loro scala di Jeans è trascurabile). Da una parte l'attrazione gravitazionale della materia oscura (il termine ϕ) fa cadere il fluido BR nelle sue buche di potenziale; dall'altra il fluido cadendo diventa a sua volta sovradenso, e la sua pressione di radiazione crea una forza opposta che tende a respingerlo fuori dalla buca.

Questo processo è qualitativamente descritto da un oscillatore armonico. Le oscillazioni avvengono su tutte le scale entro l'orizzonte, e si traducono in variazioni di densità e quindi in variazioni di temperatura. Poiché la velocità di oscillazione è quella del suono, circa eguale per tutte le scale, all'istante fissato $z = z_{rec}$ oscillazioni su scale via via minori avranno compiuto un numero via via maggiore di oscillazioni dentro e fuori dalle buche di potenziale della materia oscura.

Consideriamo dapprima il comportamento del campo di densità. Andando dalle scale più grandi ($R \approx R_H$) verso le più piccole si giunge ad una prima scala che ha avuto tempo di compiere una mezza oscillazione e che a $z = z_{rec}$ si trova in fase di massima compressione nelle buche di potenziale (e quindi di massima rarefazione nelle creste di potenziale). Questa scala, corrispondente ad un massimo di $\delta T/T|_{RMS}$, è di poco minore alla scala dell'orizzonte alla ricombinazione, e corrisponde al primo picco nel contributo di δ allo spettro di potenza del CMB.

Ad una scala circa la metà di questa ci saranno fluttuazioni che hanno avuto il tempo di compiere un'oscillazione completa, e che quindi si trovano in fase di massima rarefazione nelle buche di potenziale, e di massima compressione nelle creste. Questa scala corrisponde al secondo picco acustico dovuto al campo δ.

I picchi successivi corrispondono a perturbazioni che hanno fatto un numero intero di mezze oscillazioni; in particolare, i picchi di ordine dispari corrispondono a fasi di massima compressione nelle buche di

potenziale, mentre i pari a fasi di massima rarefazione nella buche di potenziale.

Oltre alle oscillazioni della densità, vi sono anche oscillazioni di velocità, il cui effetto su $\delta T/T$ si somma in quadratura con le precedenti. Nel modello di oscillatore armonico (mostrato in Fig.7.1) il campo di velocità è sfasato di $\pi/2$ nel tempo rispetto a quello di densità; in particolare, gli istanti di minima e massima densità corrispondono a velocità nulle, mentre gli istanti di massima velocità corrispondono a densità uguali alla media, cioè a $\delta = 0$.

Se nel modello dell'oscillatore armonico ignorassimo il contributo gravitazionale dei barioni, allora gli effetti di densità e velocità su $\delta T/T$ sarebbero di egual ampiezza, e la loro somma in quadratura sarebbe un semplice $cos^2(\theta) + cos^2(\theta + \pi/2) =$ costante: non ci sarebbero quindi picchi acustici (pannello in alto). In sostanza questa esprime il fatto che la somma di energia cinetica (dovuta alla velocità del fluido) e potenziale (dovuta alla compressione del fluido) è costante.

Il fatto che anche i barioni contribuiscano alla profondità della buca di potenziale (perchè il loro contributo gravitazionale non è trascurabile) sposta questo bilancio di energie a favore di quella potenziale. Nella realtà quindi l'oscillatore armonico subirà una compressione maggiore (effetto di *baryon drag*) rispetto al caso precedente, e la somma in quadratura delle fluttuazioni di temperatura non sarà più costante (pannello in basso). I picchi acustici sono quindi la somma in quadratura dei picchi dovuti alle fluttuazioni di densità e di quelli dovuti alla velocità, di minore ampiezza e sfasati di $\pi/2$ rispetto ai primi.

7.3.2 Anisotropie secondarie

Sono quelle che si originano mentre i fotoni viaggiano dalla superficie di ultimo scattering fino a noi, quindi a $0 \leq z \leq 10^3$.

Dopo la ricombinazione i fotoni non interagiscono più con la materia per mezzo della diffusione Thomson, ma solo attraverso la gravità. L'insieme degli effetti gravitazionali si può descrivere con una variazione temporale del potenziale detto effetto ISW (Integrated Sachs-Wolfe):

$$\frac{\delta T}{T} = \int \dot{\phi}[r(t), T]\mathrm{d}t$$

in cui $\dot{\phi}$ è la derivata di ϕ rispetto al tempo conforme $d\eta = dt/a(t)$ a posizione fissata, data da

$$\dot{\phi} = \frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}\eta}.$$

Quando un fotone entra in una buca di potenziale acquista energia, quando ne esce la cede. Nel caso di un potenziale statico, il bilancio energetico netto è zero ed il fotone esce con la stessa energia con la quale è entrato. Se però durante l'attraversamento della buca il potenziale cambia ($\rightarrow \dot{\phi} \neq 0$), il bilancio non si chiude più a zero, ma può dare un red- o blue-shift netto.

Ora, finché siamo in regime lineare il potenziale gravitazionale peculiare rimane costante nel tempo; questo accade perché la crescita delle sovradensità è esattamente bilanciata, nel potenziale, dall'espansione dell'universo; vediamolo scrivendo l'eq. di Poisson:

$$\nabla^2\phi = 4\pi G a^2 \rho_b \delta$$

poiché $\rho_b \propto a^{-3}$, mentre $\delta \propto a$ (in quanto ad alto redshift è sempre $\Omega \approx 1$), l'andamento temporale globale è

$$\nabla^2\phi \propto a^2 a^{-3} a \propto \text{cost};$$

come conseguenza l'ISW è zero finchè le fluttuazioni di potenziale sono piccole ($\phi \ll 1$).

Ci sono invece tre casi in cui $\dot{\phi} \neq 0$:

1. **Early ISW**. Appena dopo la ricombinazione l'universo non è ancora completamente dominato dalla materia, quindi la radiazione fornisce un contributo non trascurabile al potenziale delle fluttuazioni di materia oscura: $\phi = \phi_{DM} + \phi_B + \phi_R$. La diffusione dei fotoni non più trattenuti dallo scattering Thomson provoca un decadimento netto di ϕ, per cui $\dot{\phi} < 0$, che a sua volta provoca un $\delta T/T < 0$

detto Early ISW. Qui il potenziale varia anche se siamo in regime lineare, perché la relazione sopra ottenuta non tiene conto della fuga dei fotoni. Poiché interessa scale dell'orgine dell'orizzonte alla ricombinazione, l'effetto early ISW presenta un picco a valori di l dell'ordine di quelli del primo picco acustico.

2. **Late ISW**. Si verifica a $z \ll z_{rec}$ in universi con costante cosmologica. Se infatti $\Lambda > 0$, a basso redshift l'universo è dominato dall'energia del vuoto, quindi $\dot{\phi} \neq 0$. Tale effetto, detto late ISW, interessa grandi scale angolari ($l \to 0$) perché si riferisce a tutto l'universo a basso z. Qui il potenziale varia per la presenza di effetti non gravitazionali (quale appunto la costante cosmologica).

3. **Effetto Rees-Sciama**. Si verifica a $z \ll z_{rec}$. I fotoni che stanno entrando in una buca di potenziale che sta crescendo in modo non lineare (per esempio un protoammasso di galassie), escono con meno energia di quella di ingresso, e quindi subiscono un redshift netto. Se invece il potenziale sta decrescendo (come in un proto-vuoto), si ha un blueshift netto. Tale effetto è pero' molto più piccolo delle anisotropie primarie.

Gravitational lensing

L'effetto ISW è causato dalla spinta gravitazionale data ai fotoni in direzione parallela al loro moto. Ciò ne cambia l'energia ma non la direzione. Se invece la spinta viene data in senso perpendicolare al moto si ha una cambiamento di direzione, mentre al prim'ordine l'energia del fotone rimane invariata. Se una coppia di fotoni si muove verso l'osservatore formando inizialmente un angolo θ, a causa di questo effetto la coppia arriverà all'osservatore formando un angolo $\theta + \delta\theta$, con $\delta\theta/\theta \approx 0.1 - 0.2$. Questo è un effetto di gravitational lensing debole. L'effetto sullo spettro delle anisotropie del CMB è quello di "sfocare" le fluttuazioni, cioè di smussare sia i picchi sia le valli. Quantitativamente ci si aspetta che sia piccolo (poche unità per cento).

Effetti della reionizzazione

Dopo la ricombinazione l'universo rimane essenzialmente neutro. Tuttavia le osservazioni del mezzo intergalattico (IGM) ad alto redshift, fatte attraverso le righe di assorbimento dei QSO, ci mostrano che l'IGM a $z \approx 5$ è completamente ionizzato (assenza dell'effetto Gunn-Peterson). Questo dimostra che ad un'epoca compresa tra $z = 1000$ e $z = 5$ l'universo ha subito una nuova re-ionizzazione globale. Oltre a ciò, il fenomeno della reionizzazione può avvenire anche su scala locale, interessando regioni limitate dell'universo (per esempio un ammasso di galassie). In un universo di nuovo ionizzato i fotoni possono essere di nuovo influenzati dalla velocità e dalla sovradensità dei barioni, e cancellare le anisotropie di temperatura o crearne di nuove.

Effetti della reionizzazione locale I due principali effetti di reionizzazione locale avvengono negli ammassi di galassie; entrambi vanno sotto il nome di Effetto Sunyaev-Zeldovich (SZ).

1. Il primo di essi è dovuto alla velocità peculiare dell'ammasso e va sotto il nome di *effetto SZ cinematico*; se l'ammasso ha una velocità peculiare netta rispetto alla nostra linea di vista, la diffusione Thomson dei fotoni del CMB da parte degli elettroni liberi del plasma dell'ammasso produce un effetto Doppler che causa uno spostamento verso il blu o il rosso dei fotoni, a seconda che l'ammasso si avvicini o allontani da noi.

2. Indipendentemente dalla velocità peculiare dell'ammasso, l'alta temperatura degli elettroni liberi distorce lo spettro del CMB cedendo energia ai fotoni. Lo spostamento dello spettro di corpo nero del CMB verso energie maggiori appare come un'abbassamento di temperatura dei fotoni se osservato alle basse frequenze (microonde), e come un innalzamento di temperatura se osservato alle alte frequenze. Questo va sotto il nome di *Effetto SZ termico*.

L'importanza degli effetti SZ sullo spettro delle anisotropie del CMB non è stata ancora determinata, anche se ci si aspetta che sia piccola. L'effetto SZ ha invece applicazione nella misura della temperatura del gas intracluster (ICM) e della sua velocità peculiare.

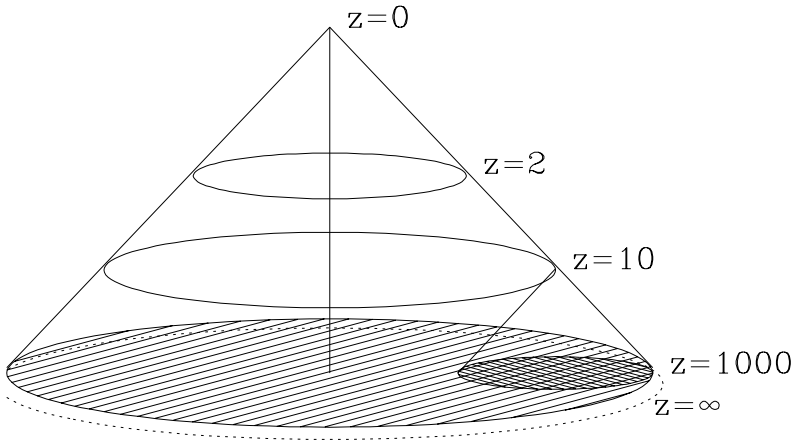

Figura 7.2: Cono luce (da Tegmark 1996): in assenza di reionizzazione un fotone del CMB diffuso sulla superficie di ultimo scattering, a $z = 1000$, ha una direzione di provenienza ben precisa (nell'esempio, il punto in basso a DX del cono luce). Se invece c'e' una reionizzazione con conseguente ri-diffusione ad es. a $z = 10$, la direzione di provenienza originale viene cambiata, cosicché il fotone osservato a $z = 0$ potrebbe provenire da un qualsiasi punto della regione ombreggiata, che sottende un angolo θ_D. Questo corrisponde ad un rimescolamento delle fluttuazioni $\delta T/T$ su tutte le scale angolari $\theta < \theta_D$. Si noti come al variare del redshift di ri-diffusione varia la scala angolare sottesa dalla regione ombreggiata.

Effetti della reionizzazione globale Se l'universo è stato re-ionizzato ad un certo z_{re}, i fotoni del CMB avranno subito nuove diffusioni a $z < z_{re}$ prima di giungere all'osservatore. A causa di ciò, vedremo arrivare il fotone da una direzione diversa rispetto alla direzione originaria da cui era partito sulla superficie di ultima diffusione. Questo rimescolamento dei fotoni del CMB avviene su scale angolari pari a quella dell'orizzonte nel momento della diffusione.

Poichè la scala angolare sottesa dall'orizzonte cosmologico cresce al diminuire del redshift (oggi per es. l'orizzonte corrisponde a 360 gradi!), le scale coinvolte saranno tanto maggiori quanto minore è il redshift di diffusione. D'altra parte, la densità di materia e radiazione nell' universo diminuisce al passare del tempo, cosicché la probabilità di diffusione tra un fotone ed un elettrone a basso redshift è molto minore che ad alto redshift. Questo secondo vincolo pone un limite al minimo redshift possibile affinché una reionizzazione globale sia efficace nel cancellare le anisotropie del CMB: $z > 30 - 50$, corrispondente ad una scala angolare per l'orizzonte di circa 8 gradi. L'effetto della reionizzazione è quindi di diminuire o dissipare la potenza al massimo per $l > 10$, mentre quella su grandi scale rimane invariata in ogni caso.

7.4 Dipendenza dai parametri cosmologici

Il calcolo esatto dello spettro di potenza del CMB viene fatto costruendo un modello di universo (con parametri fissati) e seguendo in esso l'evoluzione della funzione di distribuzione dei fotoni (cioè integrando l'equazione di Boltzmann). Vi sono molti spettri disponibili in letteratura per ogni variazione dei parametri cosmologici.

In tutti i casi esistono però alcune caratteristiche fondamentali (mostrate in Fig.7.3), la cui determinazione permette di stimare il valore dei parametri cosmologici. Le dipendenze principali sono le seguenti:

- Se Ω_0 diminuisce, la scala angolare corrispondente ad una data scala fisica decresce e perciò si sposta verso l maggiori.
- Se H_0 diminuisce, la distanza di ultimo scattering cresce, e l'angolo sotteso decresce (fig. 7.5) e si sposta ad l maggiori.

Perciò le caratteristiche di $(\delta T/T)^2$ vanno verso l maggiori (scale minori) in universi aperti e per piccoli H_0.

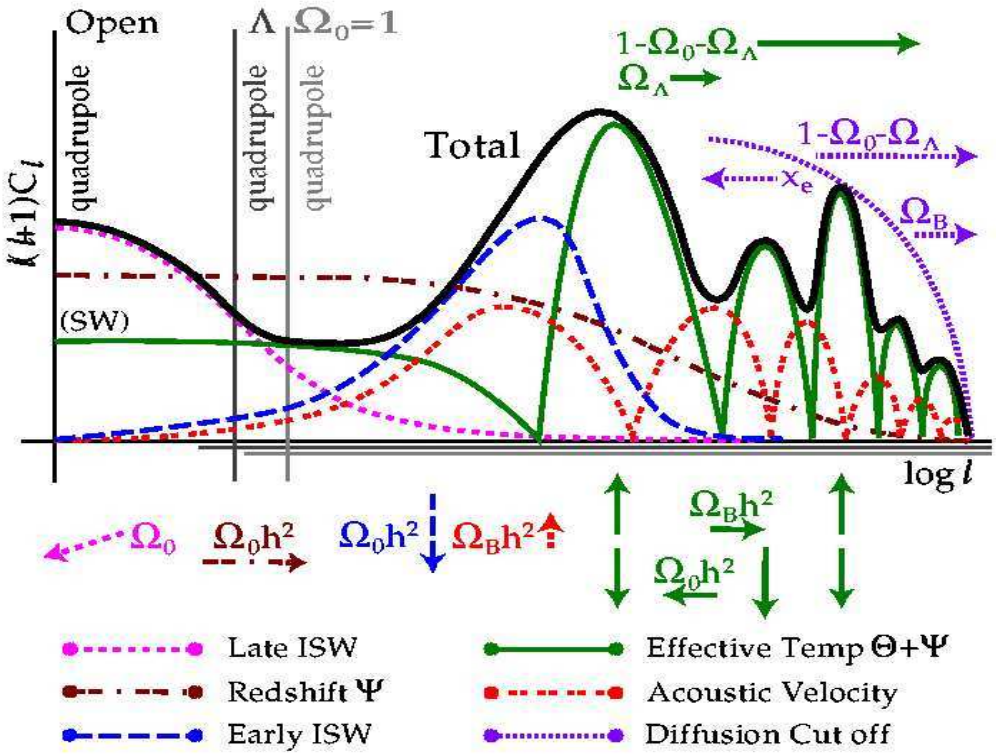

Figura 7.3: Spettro totale delle anisotropie del CMB (da Hu 1995).

- Abbiamo visto come nel caso $\Omega_b = 0$ non ci sia baryon drag e quindi manchino i picchi acustici. Se invece $\Omega_b \neq 0$, al crescere di Ω_b cresce anche la massa effettiva della perturbazione (cioè del fluido BR); questo contribuisce ad aumentare il potenziale totale ϕ, aumentando il $\delta T/T$ dovuto alle compressioni e diminuendo quello dovuto alle rarefazioni nelle buche di potenziale (come spiegato in precedenza). Di conseguenza al crescere di Ω_b aumenta l'ampiezza dei picchi dispari e diminuisce quella relativa dei picchi pari nello spettro (Fig.7.4).
- Se $\Lambda \neq 0$ aumenta il $\delta T/T$ a $l \to 0$ (late ISW).
- Se n (indice spettrale di $P(n)$) cresce, esiste più potenza su piccole scale e quindi aumenta il $\delta T/T$ per l grandi (piccole scale).

7.5 Bibliografia

Home Page di W.Hu: http://background.uchicago.edu/ whu/physics/physics.html

N.J. Cornish, 2001 PhRvD, 63, 7302

W.Hu, N.Sugiyama, J.Silk, Nature 386 37-43 (1997)

W.Hu e M.White, ApJ 471, 30 (1996)

C.H.Lineweaver, in Proceedings of the International School in Astrophysics: "From Quantum Fluctuations to Cosmological Structures", Casablanca, Morocco, December 1 - 10, 1996. (astro-ph 9702042)

D.Scott, J.Silk & M.White, S., Nature, 1995 vol 268, p. 829

M.Tegmark, in Proceeding of the Enrico Fermi School, Course CXXXII, Varenna, 1995. (astro-ph 9511148)

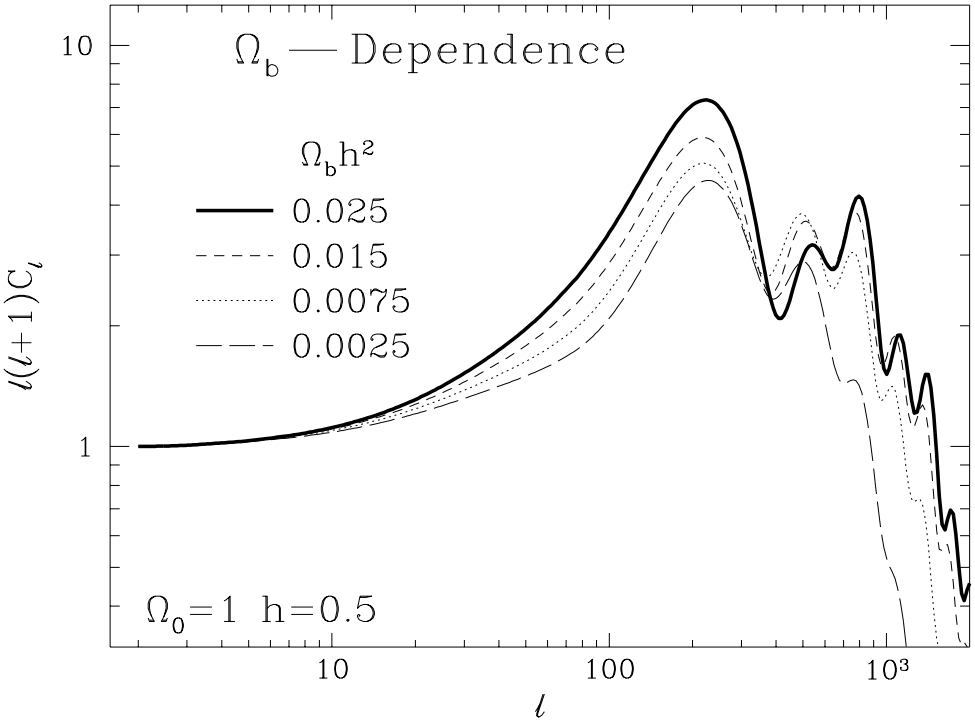

Figura 7.4: Variazione dello spettro al variare di Ω_b (da Hu 1995).

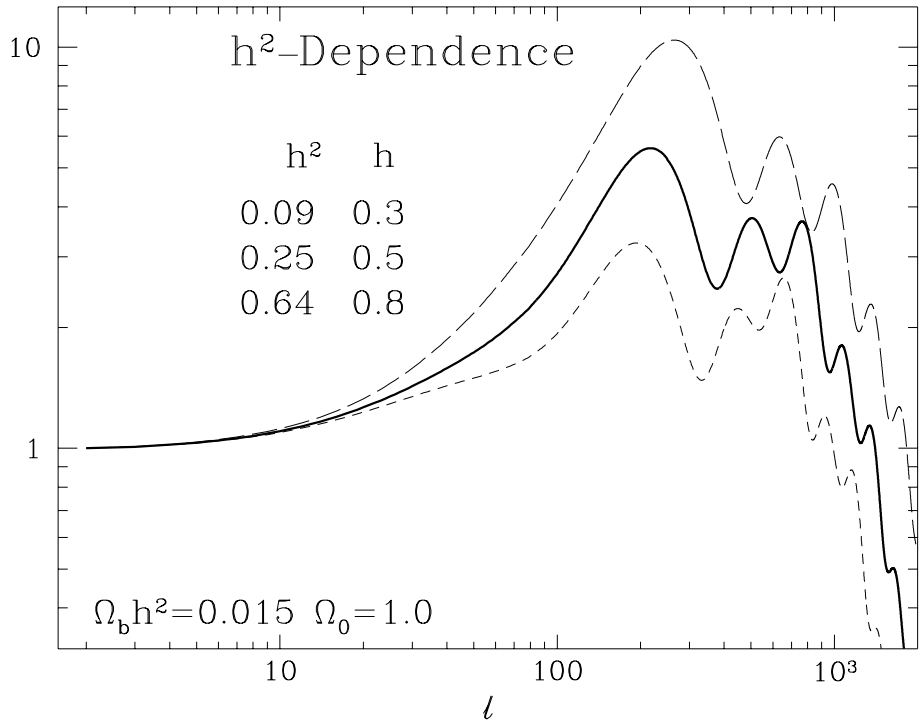

Figura 7.5: Variazione dello spettro al variare di H_0. Le curve dall'alto verso il basso corrispondono ai valori di h dall'alto verso il basso. (da Hu 1995).

Capitolo 8

Formation of Dark Matter haloes and Galaxy Clusters

Dispense per il corso di Cosmologia Modulo A
G.Tormen, Dipartimento di Astronomia, Università di Padova
(24 gennaio 2002)

8.1 Paradigm for Cosmological Structure Formation

- The universe is composed mainly by *non-baryonic dark matter (DM)*. Baryons are present in the amount predicted by Big-Bang Nucleosynthesis: $\Omega_b \sim 0.023\ h^{-2}$ (but the CMB experiment Boomerang measured $\Omega_b \sim 0.032\ h^{-2}$...)
- At recombination (redshift $z \sim 1000$) the universe is well described by a FRW metric. Small deviations from homogeneity and isotropy: $\delta\rho/\rho \sim 10^{-5}$ were produced by quantum effects during an inflationary period in the early universe.
- Cosmic structures form by *gravitational instability*. This process is driven by the gravity of the DM component of the universe. The first non-linear systems to form, by *collisionless collapse*, are dark matter halos.
- Galaxies and luminous systems form later by the *dissipative collapse* of gas in the potential wells of DM halos.
- The structure formation process is *hierarchical*, with larger systems forming later by the assembly of pre-existing smaller units.

8.2 DM haloes: Analytical models

The gravitational collapse of collisionless dark matter halos has been modeled using two very different ideas: Violent Relaxation (Lynden-Bell 1967) and Secondary Infall (Gunn & Gott 1972).

8.2.1 VIOLENT RELAXATION

In this model, the collapse is *chaotic*, and the rapidly time varying potential changes the energy of individual particles. This spreads the (single particle) phase-space density all over phase space (phase mixing) (Binney & Tremaine 1987). Consequently, VR makes a system *lose memory* of its initial conditions, and leads to *equipartition of specific energy* $\rightarrow$ (there is no mass segregation).

VR should be effective only on particles whose orbital period is short compared to the collapse time of the system.

8.2.2 SECONDARY INFALL

In this model an initial nonlinear structure is the seed causing the collapse, which is spherical and happens along purely radial orbits, is **gentle** and **preserves the memory** of its initial conditions.

Example: a points mass seed m surrounded by a homogeneous, uniformly expanding universe. Shells of matter will slow their expansion due to the attraction of the point mass, then collapse back onto it.

The binding energy of a shell at distance R, enclosing a mass M, is due only to the point mass: $E_b \propto Gm/R \propto M^{-1/3}$. At turnaround, the energy of the shell is $E \propto GM/R_{ta}$ so $R_{ta} \propto M/E \propto M^{4/3}$ hence $M \propto R_{ta}^{3/4}$.

Assuming that the shell will oscillate reaching a final radius which is proportional to its turnaround: $r \propto R_{ta}$, the density profile of the final system is

$$\boxed{\rho(r) \propto M/r^3 \propto r^{3/4}/r^3 \propto r^{-9/4}. \qquad (8.1)}$$

The Secondary Infall model has been incorporated in the framework of gravitational instability by Hoffman & Shaham (1985). They assumed an initial power spectrum $P(k) \propto k^n$, and an initial Gaussian density peak as a nonlinear seed, and derived the final density profile of halos as

$$\boxed{\rho(r) \propto r^{-\alpha}; \quad \alpha = 3(3+n)/(4+n) \qquad (8.2)}$$

for $n \geq -1$, and $\alpha = -2$ for $n < -1$. For example, $n = -1$ gives $\rho \propto r^{-2}$.

According to the SI model, the collapse leads to a system conserving the initial distance rank of different shells of matter.

The SI model has been widely used in many studies to describe and understand the density profile of self-similar halo collapse.

8.3 DM haloes: N-body simulations

The formation of DM halos in N-body simulations is something in-between the two extremes of VR and SI.

- The collapse of N-body dark matter halos is not spherical. The existence of preferential directions for infall (e.g. sheets and filaments) makes the process very anisotropic (Fig.8.3)
- The collapse involves more mass than the one actually ending up in the final system; the extra mass is redistributed around the halo (Tormen 1998).
- Halo shapes are caused by the anisotropy of the merging history; the final mass and velocity distributions are both aligned with the preferential infall direction of satellites (Tormen 1997, 1998).
- The infall pattern of matter is correlated with the surrounding large-scale structure of the universe (Colberg et al. 1999). Cluster halos are aligned with each other out to 15-30 Mpc/h (Onuora & Thomas 2000).
- Halos themselves are not spherical, but preferentially triaxial or prolate (eg Cole & Lacey 1996). Shapes are more elongated in the inner part of halos (Warren et al. 1992; Tormen 1998).
- there is no evident mass dependence of shapes (Cole & Lacey 1996)
- Shapes at the virial radius are poorly dependent on cosmology; small differences are caused by the dynamical age of the systems (Thomas et al. 1998).

- The relaxation is incomplete, and is least effective in the center of the halos, were the final phase-space density is almost as high as the initial one.
- There is no correlation between initial and final distance from the halo center, but for the very central regions (e.g. White 1996). However, particles that were in the centres of progenitor halos end up in the centre of the final halo; therefore there is a good overall correlation between the initial and final particle binding energy. Thus the SI model holds if it is interpreted as a conservation of energy rank (Quinn & Zurek 1988; Zaroubi et al 1996; Tormen 1997).

8.3.1 NFW PROFILE

- The final density profile is curved and singular in the centre. A good fitting formula for **relaxed** halos is a double power law profile first proposed by (Navarro, Frenk & White 1996,1997, or NFW):

$$\rho(x) = \frac{\rho_0}{x(x+x_s)^2}; \quad x = r/r_v; x_s = r_s/r_v; \tag{8.3}$$

r_s is called scale radius, and is the scale where the two power laws join, and the profile has a slope of -2. The asymptotical behaviour of the NFW profile is

$$r \to 0 \Rightarrow \rho(r) \propto r^{-1}; \tag{8.4}$$
$$r \to \infty \Rightarrow \rho(r) \propto r^{-3}. \tag{8.5}$$

- Some authors (e.g. Moore et al 1998; Jing & Suto 2000, Fukushige & Makino 2000) find a steeper density profile in the center:

$$r \to 0 \Rightarrow \rho(r) \propto r^{-1.1} - r^{-1.5}. \tag{8.6}$$

They claim that the NWF result is due to insufficient mass resolutions, and is an effect of two-body relaxation. No agreement yet has been reached on this point.

8.3.2 MASS-DENSITY RELATION

For the same cosmology, smaller halos form earlier, so they are more centrally concentrated (have a smaller x_s) than bigger halos (Navarro et al. 1997).

8.3.3 DEPENDENCE ON COSMOLOGY

For the same value of M/M_*, halos formed in cosmologies with more small scale power (less negative spectral index n) are more centrally concentrated (Cole & Lacey 1996; Subramanian et al. 2000).

The dependence of concentration on mass is as big, or bigger, than that on cosmology. However **both are small**.

8.3.4 SCATTER

In a cosmological environment, the scatter in the mass-density relation is large: halos best fitted by the same model profile (same x_s) can differ in mass by a factor of 4 at a 2σ level; The scatter of density profiles around the NFW fit is also large! (Tormen 1998; Jing 2000).

The scatter is correlated with the presence of substructure; the distribution of concentrations is approximately lognormal (Jing 2000).

8.4 DM haloes: Interpretation

Syer & White (1998): the inner cusp in halo density profiles is determined by the mass-density relation and to the hierarchical merging which forms the halo: small satellites accreting on a proto-halo are denser than the main halo, so they survive and sink intact to the halo centre.

The slope of the inner cusp should depend on the cosmology, being steeper for less negative spectral indexes (because there is more small-scale structure).

Nusser & Sheth (1999): The final density profiles depends mainly on the rate of the matter infall on the halo. This in turn depends on the initial fluctuations and on the cosmological model.

Huss et al. (1999): the inner curvature of the density profile is due to acquisition of angular momentum by infalling matter, and not to hierarchical merging. They obtain curved profiles in simulations without hierarchical clustering, while their simulations with purely radial infall don't show curved profiles.

Moore et al. (1999): If a low-pass-band cutoff is imposed to the power-spectrum of initial fluctuations, halos form by a monolithic collapse but the final density profile barely changes, demonstrating that the merger history does not play a role in determining the halo structure.

Subramanian et al. (2000): in a self-similar collapse tangential velocities flatten the central density cusp.

The latter 3 results questions the mass-density relation itself.

8.5 DM haloes: Collisional dark matter?

Simulations of collisionless cold dark matter produce halos which seem to be inconsistent with two important observations: the rotation curves of dwarf galaxies (simulated halos have too steep a density core); and the number of satellites observed in the Milky Way (simulated halos have too much substructure).

Spergel & Steinhardt (2000) suggested that if dark matter is weakly self-interacting (collisional but non dissipative) then this could produce flatter inner cusps and less substructure, possibily alleviating the abovementioned problems.

Following this idea, many groups performed dark matter N-body simulations where the particles scatter each other with some probability

$$P_i = \rho_i \sigma^* V_{rel} \Delta t \tag{8.7}$$

with ρ_i the local density, V_{rel} the relative velocity between neighbour particles and σ^* the collision cross-section.

Yoshida et al (2000,2001) have shown that collisional dark matter cannot produce dwarf galaxy halos compatible with observations with-out simultaneously producing cluster cores which are too large and too round to be consistent with observations.

A more specific study on the strong gravitational lensing properties of collisional dark matter clusters by Meneghetti et al. (2001) has confirmed that even a small collision cross-sections causes the clusters to become sub-critical, preventing the formation of giant thin arcs and of radial arcs.

8.6 DM haloes: Summary and Open Issues

- The formation dark matter halos is a very anisotropic process, reflecting the distribution of matter on large-scale. This anisotropy is largely responsible for the final mass and velocity structure of the system.
- Virialized halos are generally prolate or triaxial, and they become more so in the inner part. Halo shapes are almost independent on mass and on cosmology.

- The final structure bears some memory of the initial particle binding energy. Therefore the relaxation is only incomplete.
- The radial density profile of **relaxed** dark matter halos appears to be well described by the NFW fit: $\rho(r) \propto 1/[r(r+r_s)^2]$, for many cosmological models, but the very inner slope is still uncertain.
- The scatter around this average profile is large; the distribution is approximately log-normal.
- The formation of a curved profile does not have a clear explanation yet. Is it due to hierarchical clustering, tangential motions, initial conditions, or...?
- Collisional dark matter, in its simplest formulation, does not solve the problems of CDM on small scales. Perhaps some variation will?

8.7 Galaxy Clusters: Introduction

Galaxy clusters are very bright systems, and can be studied out to large distances.

1. **They are the largest gravitationally-bound systems in the universe**: $N_{gal} \sim 1000$; $M_{ICM} \approx 10^{14} M_\odot$; $M_{DM} \sim 10^{15} M_\odot$. Dark matter (DM) dominates the cluster dynamics:
   - Assuming dynamical equilibrium, $v_{gal} \sim 10^3 kms^{-1}$;
   - Assuming dynamical equilibrium, the Intra Cluster Medium (ICM) is highly ionized: $T_{ICM} \sim 5 - 10keV (1keV = 1.16 \times 10^7 K)$. This makes galaxy clusters strong sources of X-rays via thermal bremmstrahlung. They are among the brightest X-ray objects in the sky: $L_x \approx 10^{45} erg\ s^{-1}$;
   - Gravity dominates over other processes, so they are easier to study;
   - GC may be strong gravitational lenses, and this allows measures of mass with no further assumption on their dynamical equilibrium;
2. **They are dynamically young**: $t_{dyn} \sim t_{Hubble}$. Therefore:
   - they may retain memory of the initial conditions (= cosmological parameters) of the Universe;
   - We can actually observe their evolution.

All these properties suggest many lines of investigations: CG can be observed at *many wavelengths*, from radio to optical to X. One can study the *distribution of galaxies, gas and DM.*

GC are important to *tests cosmological models*: their abundance depends on the amplitude of the power spectrum of fluctuations $P(k)$ and on the density parameter Ω_0. Finally, GC can be used to *map the large-scale structure* and the *peculiar velocity field* of the universe.

GC form earlier in an open universe: when $\Omega(z) < 1$ the expansion of the universe tends to overcome the gravitational attraction of matter. Thus if $\Omega_0 < 1$ little structures are forming today, and most of the GC we observe must have formed in the past, when $\Omega(z)$ was closer to one. Viceversa, if $\Omega_0 = 1$ there is enough matter to overcome the expansion and form GC even today, therefore *on average* the GC we observe are younger than in the previous case.

8.8 Dynamical equilibrium of GC

Because the DM dominates the gravitational field of CG, to first order we may regard them as *collisionless systems.* This applies to the smooth DM distribution, but also to the galaxy distribution everywhere but in the cluster core, where galaxy collisions are more likely. The ICM requires instead a collisional description.

8.8.1 Dynamical equilibrium of DM haloes

The dynamical equilibrium of a collisionless system is described by the Jeans equation. For a static, spherical system this can be written as follows:

$$M(<r) = -\frac{r\sigma_r^2(r)}{G}\left[\frac{d\log\rho(r)}{d\log r} + \frac{d\log\sigma_r^2(r)}{d\log r} + 2\beta(r)\right]. \tag{8.8}$$

In this equation $M(<r)$ is the mass generating the gravitation field, while all the fields on the right hand-side may refer to any distribution of tracers (e.g. *galaxies*) in dynamical equilibrium within the global potential. The velocity anisotropy: $\beta(r) = 1 - \sigma_t^2(r)/\sigma_r^2(r)$ describes the relative importance of radial and tangential motions; for purely radial orbits $\beta = 1$, while for purely circular ones $\beta = -\infty$.

The equation shows how the *local* density and velocity field of a population of tracers are not independent, but they must balance to equate the left hand-side. For example, for a simple isothermal system with isotropic velocity field (for which the last two terms inside brackets are zero), it must be that coldest tracers (lower σ_r) have a steeper density profile (larger $d\log\rho/d\log r$).

8.8.2 Dynamical equilibrium of the ICM

The analogous of the Jeans equation for a collisional gas is the equation of hydrostatic equilibrium. For a static, spherical system this is:

$$M(<r) = -\frac{rkT(r)}{G\mu m_p}\left[\frac{d\log\rho_g}{d\log r} + \frac{d\log T(r)}{d\log r}\right] \tag{8.9}$$

where $M(<r)$ is the total (DM plus gas) mass and the the fields on the right hand-side refer to the gas distribution.

Capitolo 9

Struttura ed evoluzione degli ammassi di galassie

Dispense per il corso di Cosmologia Modulo A
G.Tormen, Dipartimento di Astronomia, Università di Padova
(24 gennaio 2002)

9.1 Introduzione

Gli ammassi di galassie sono una fonte primaria di informazione cosmologica. Sono sistemi molto luminosi, e quindi e' possibile identificarli e studiarli anche a grandi distanze. Sono delle strutture eccezionali in molti sensi.

Sono i sistemi gravitazionalmente legati piu' grandi *dell'universo.* Un ammasso ricco, contiene diverse centinaia di galassie, una massa in gas intergalattico alcune volte piu' grande della massa totale in galassie, e.g. $M_{ICM} \approx 10^{14} M_\odot$, ed ha una massa totale superiore a $10^{15} M_\odot$, costituita principalmente da materia oscura. La presenza di una componente di materia oscura che domina la dinamica del sistema fu osservata gia' da Zwicky (1933) per il Coma cluster. Questa proprieta' ha diverse conseguenze:

1. gli ammassi hanno delle buche di potenziale molto profonde. Assumendo un equilibrio approssimativamente viriale, le velocita' tipiche delle galassie sono molto elevate, dell'ordine di 1000 km/s.

2. Il gas presente nell'ICM, se in equilibrio termodinamico col potenziale dell'ammasso, e' completamente ionizzato, con una temperatura tipica dell' ordine di $\approx 10^8 K$. Un gas a questa temperatura e' una forte sorgente di raggi X per emissione free-free. Di conseguenza, gli ammassi di galassie sono anche tra gli oggetti X piu' luminosi del cielo, con luminosita' tipiche $L_x \approx 10^{45}$ erg s^{-1}.

3. il processo di formazione degli ammassi e' determinato principalmente dalla forza di gravita'. Forze idrodinamiche, processi radiativi, formazione stellare e feedback energetici sono, in prima approssimazione, trascurabili, con grandi facilitazioni per la loro modellistica teorica.

4. gli ammassi sono delle importanti lenti gravitazionali. Questa ulteriore proprieta' puo' essere sfruttata per studiare la distribuzione di materia nell'ammasso in modo piu' diretto di come sia possibile fare con altre tecniche.

Sono strutture dinamicamente giovani:

1. Le osservazioni suggeriscono che gli ammassi sono piu' giovani delle galassie che li compongono. Per questo essi ritengono piu' informazioni su diversi parametri cosmologici che determinano la formazione delle strutture cosmiche, quali il parametro di densita' Ω, la frazione barionica Ω_b, l'ampiezza dello spettro primordiale di fluttuazioni $P(k)$ ed altri.

2. E' relativamente facile osservarne direttamente l'evoluzione, gia' a redshift intermedi $z \approx 0.5$.

Tutte queste proprieta' indicano altrettante ricette per il loro studio. Gli ammassi di galassie possono essere osservati e studiati in diverse bande spettrali, dalla banda radio all'IR, all'ottico, alla banda X. E' possibile studiare la distribuzione delle galassie nell'ammasso, quella del gas, e quella della materia oscura.

Gli ammassi di galassie sono anche un banco di prova importante per le teorie cosmologiche. La loro massa ed abbondanza sono molto sensibili all'ampiezza σ_8 dello spettro primordiale delle fluttuazioni, $P(k)$, ed al parametro di densita' Ω_0, mentre sono quasi indipendenti dalla forma dello spettro. Il redshift di formazione e l'evoluzione degli ammassi invece dipendono quasi solo dal valore di σ_8, cioe' dall'evoluzione dinamica dell'universo. Infine gli ammassi di galassie possono essere usati con successo per mappare il campo di densita' e di velocita' della materia nell'universo.

In questo tema presentero' alcuni aspetti, teorici ed osservativi, che sviluppano le proprieta' degli ammassi di galassie, evidenziando la loro rilevanza nello studio della formazione delle galassie e piu' in generale in cosmologia.

9.2 Formazione di strutture cosmiche

9.2.1 Lo scenario standard

Lo scenario standard per la formazione delle strutture cosmiche, accettato dalla maggior parte dei cosmologi, consiste dei seguenti elementi principali:

1. L'universo e' dominato da materia oscura non barionica. Evidenze che questa materia sia oscura, cioe' non produca radiazione elettromagnetica, ma interagisca solo con la gravita', provengono dalla dinamica degli ammassi di galassie e degli aloni di galassie. Tale materia deve essere di origine non barionica perche' la densita' dell'universo, misurata con studi dinamici e di lenti gravitazionali, e' in eccesso rispetto a quanto permesso dai diversi modelli di nucleosintesi primordiale (BBN).

2. La materia barionica e' presente nella quantita' predetta dalla BBN, tipicamente qualche percento della densita' richiesta per chiudere l'universo. Solo una piccola frazione di questa materia e' associata a stelle e galassie.

3. Alla ricombinazione dell'idrogeno ($z \approx 1000$) l'universo e' praticamente omogeneo ed isotropo. Piccole deviazioni da questa uniformita' sono generate nei primi istanti dopo il Big Bang, probabilmente da effetti quantistici durante un periodo inflazionario. Il campo di fluttuazioni di densita' cosi' generato e' Gaussiano e non esistono scale caratteristiche per la formazione di strutture.

4. Le strutture cosmiche si formano per instabilita' gravitazionale. Dopo la ricombinazione, la loro evoluzione e' determinata dalla gravita' della materia oscura, fino alla formazione dei primi oggetti non lineari, gli aloni di materia oscura.

5. Le galassie si formano in seguito, per il collasso dissipativo del gas nelle buche di potenziale degli aloni di materia oscura.

I dettagli di questo processo sono determinati dal valore dei vari parameteri cosmologici: la velocita' di espansione dell'universo H_0, la densita' totale e in barioni Ω_0, Ω_b, il tipo di materia oscura (calda, fredda o tiepida), l'ampiezza delle fluttuazioni iniziali di densita', la presenza o meno di una costante cosmologica, ecc...

All'interno di questo scenario, il modello di maggior successo consistente con le osservazioni e' quello del *clustering gerarchico*, in cui la materia oscura dominante e' non relativistica (cold dark matter), e lo spettro delle fluttuazioni di densita' $P(k)$ e' tale per cui le prime strutture a formarsi sono quelle piu' piccole. Strutture piu' grandi si formano in seguito per aggregazione gerarchica di masse piu' piccole.

9.2.2 Modellistica teorica

Le tecniche sviluppate per modellare i dettagli dello scenario descritto sopra possono essere divise in tre gruppi: (i) tecniche analitiche (ii) simulazioni numeriche (iii) metodi semi-analitici. Ognuna ha pregi e difetti, ed e' piu' adatta ad affrontare una data classe di problemi.

Lo scopo di queste tecniche e' predire come le perturbazioni di materia nell'universo primordiale si sono trasformate nelle galassie che osserviamo al presente. Per portare avanti questo programma di studio occorre modellare un numero di processi: (i) la crescita degli aloni di materia oscura per accrescimento e merging; (ii) la dinamica di raffreddamento del gas; (iii) la trasformazione del gas freddo in stelle; (iv) l'evoluzione spettrofotometrica e chimica della risultante popolazione stellare; (v) i processi di feedback energetico associati alle stelle e l'evoluzione delle proprieta' del mezzo interstellare; (vi) la costruzione delle galassie attraverso mergers successivi.

Le tecniche analitiche, sviluppatesi dagli anni '70, hanno posto le fondamenta fisiche agli attuali modelli di formazione delle galassie (White & Rees, 1978; Fall & Efstathiou 1980). La semplicita' dei modelli analitici e' il loro vantaggio ma anche il loro limite. Infatti essa facilita la comprensione fisica dei problemi trattati, a scapito pero' della generalita' della trattazione.

Al contrario, le tecniche numeriche, dalle simulazioni ad N-corpi (Davis et al. 1985) alle piu' recenti simulazioni ad N-corpi con idrodinamica (Steinmetz & Mueller 1995; Katz, Weinberg & Hernquist 1996) permettono di modellare in modo piu' realistico i processi fisici rilevanti, e di studiare in dettaglio ciascuno dei processi elencati sopra, senza dover fare le approssimazioni semplificative necessarie ai metodi analitici (e.g. la simmetria sferica di un collasso gravitazionale). Tuttavia, anche l'approccio numerico necessita di varie approssimazioni ed ipotesi ad hoc. Per esempio, la dinamica del gas puo' essere trattata con metodi Lagrangiani (come la smoothed-particle hydrodynamics, o SPH; Katz & Gunn 1991; Navarro & White 1993) o Euleriani (Cen & Ostriker 1993). Ci sono diverse scelte riguardo i processi di raffreddamento del gas da includere, le tecniche per porre le condizioni iniziali alle simulazioni, la risoluzione spaziale e in massa delle simulazioni... Una trattazione piu' realistica della formazione delle galassie richiede anche delle ricette ad hoc per la formazione stellare a partire dal gas freddo, e per accoppiare il gas con il feedback energetico liberato da venti stellari e supernovae.

Le tecniche semi-analitiche considerano invece l'insieme dei processi che portano alla formazione delle galassie, e li semplificano producendo un modello globale parametrico, giustificato dai modelli analitici e calibrato dai risultati delle simulazioni numeriche. Questi modelli (Cole 1991; White & Frenk 1991; Kauffmann et al. 1993; Cole et al. 1994) sono fondati sul modello di clustering gravitazionale di Press e Schechter (1974) ed estensioni (Bower 1991; Bond et al. 1991; Lacey e Cole 1993). Questo formalismo viene usato per produrre con metodi Monte Carlo una popolazione di aloni di materia oscura che evolve nel tempo tramite il merging ed il clustering gerarchico. A questa popolazione viene associata un'analoga popolazione di galassie, le cui proprieta' ed evoluzione sono determinate da una ricetta che comprende i processi sopra elencati. I parametri liberi richiesti dal modello sono essenzialmente: (i) l'efficienza del processo di formazione stellare; (ii) l'efficienza con cui l'energia liberata dalle esplosioni di SN e dai venti stellari riscalda il gas residuo; (iii) una IMF per le stelle; (iv) il tempo scala che determina l'efficienza della frizione dinamica nel far coalescere sistemi che mergono insieme; (v) una soglia nel rapporto di massa tra due sistemi che mergono per formare una galassia ellittica o uno sferoide. In assenza di una comprensione fisica completa dei processi fisici che determinano questi parametri, essi vengono fissati imponendo che il modello riproduca le caratteristiche osservate nella popolazione locale delle galassie (e.g. la funzione di luminosita' in piu' bande, Cole et al. 1994) oppure le proprieta' principali della nostra Galassia (luminosita', velocita' di rotazione, massa del gas ecc.., Kauffmann et al. 1993).

9.2.3 Test osservativi

Il confronto tra le osservazioni ed i vari modelli di formazione delle strutture si sviluppa su diversi fronti, che vanno dalle proprieta' globali della struttura su grande scala dell'universo a quelle specifiche di diverse categorie di oggetti astronomici. Una lista incompleta di test osservativi e' la seguente.

1. *Il fondo cosmico di microonde (CMB)*: lo spettro delle anisotropie del CMB e' una miniera di informazioni sui principali parametri cosmologici, dal parametro di densita' Ω al contributo in

barioni Ω_b, allo spettro primordiale n delle perturbazioni, alla sua ampiezza σ_8, al valore della costante di Hubble H_0. Misure di questi parametri con un errore relativo di qualche percento sono alla portata della prossima generazione di satelliti per lo studio del CMB, come MAP e PLANCK. Anche le misure delle deviazioni dallo spettro di Corpo Nero del CMB pongono dei vincoli alla quantita' di polveri presenti ad alto redshift, ed al redshift massimo di un'eventuale reionizzazione.

2. *La struttura su grande scala*: la distribuzione spaziale delle galassie e degli ammassi di galassie nell'universo costituisce un campo di fluttuazioni che e' caratterizzabile statisticamente, con momenti e correlazioni di diverso ordine, conteggi in celle, statistica dei vuoti, morfologia e topologia dell'universo. Per ciascuna di queste misure esistono predizioni teoriche che dipendono dai vari parametri cosmologici e permettono quindi di selezionare i modelli che meglio riproducono le osservazioni. Usando surveys profonde e' anche possibile osservare l'evoluzione in redshift del clustering (e.g. Brainerd et al. 1995; Villumsen et al. 1996, Matarrese et al. 1998). In tal caso e' pero' importante tener conto della possibile evoluzione in numero, luminosita' e morfologia delle galassie, e del fatto che in un survey limitato in magnitudine la correzione K seleziona galassie diverse a redshft diversi.

3. *Le velocita' peculiari delle galassie*: la gravita' della distribuzione su grande scale della materia nell'universo provoca deviazioni dal flusso di Hubble, dette velocita' peculiari. Queste velocita' sono generate da ogni forma di materia, sia oscura che visibile, e il loro studio non presenta problemi di 'bias' come nella distribuzione spaziale delle galassie. Anche qui e' possibile costruire diverse statistiche del campo di velocita', e confrontarle con le predizioni modellistiche.

4. *Le proprieta' di lensing gravitazionale della struttura su grande scala*: la distribuzione di materia su grande scala distorce e magnifica le immagini di deboli galassie di background. Lo shearing gravitazionale di queste immagini induce una polarizzazione a livello di qualche percento (Brainerd et al. 1996). La magnificazione produce un clustering apparente che si somma a quello vero. Misure di questo tipo richiedono osservazioni di imaging di ottima qualita', ma permettono di vincolare l'ampiezza, forma ed evoluzione dello spettro delle perturbazioni e la geometria dell'universo.

5. *La struttura degli aloni di materia oscura*: anche per sistemi singoli, quali ammassi di galassie e galassie, la gravita' dominante e' quella della materia oscura. La struttura interna degli aloni di materia oscura e' legata a quella della materia luminosa, per es. determina l'andamento delle curve di rotazione delle spirali, o le proprieta' di lensing gravitazionale di galassie ed ammassi. Numerose simulazioni numeriche mostrano che la struttura degli aloni di materia oscura e' anche sensibile al modello cosmologico scelto. Questo studio rappresenta quindi un altro banco di prova per le teorie sulla formazione di strutture.

6. *La struttura dei sistemi in assorbimento ad alto redshift*: I sistemi di assorbimento ad alto redshift, illuminati da un quasar nel loro background, mostrano diverse caratteristiche. La loro distribuzione spaziale, in densita', in redshift, la presenza di metalli, impongono diversi vincoli alle teorie di formazione delle galassie.

I modelli semi-analitici, che includono una ricetta per l'evoluzione morfologica, spettrofotometrica e chimica permettono di estendere il confronto fra teoria ed osservazioni ad altre proprieta' delle galassie, come oggetti singoli e come popolazione. Ad esempio:

7. *I conteggi delle galassie*: i conteggi di galassie deboli in funzione della loro magnitudine apparente o del redshift, in diverse bande fotometriche e per diverse classi morfologiche, pongono importanti vincoli sui modelli per la formazione di strutture, in quanto sono indici dell'evoluzione delle galassie, e non solo delle loro proprieta' locali.

8. *La forma ed evoluzione della funzione di luminosita'*: usando cataloghi di galassie con redshift e' possibile confrontare la distribuzione in luminosita' degli oggetti osservati con quella prevista da vari modelli, e la sua evoluzione.

9. *Leggi di scala per le galassie:* la relazione colore-magnitudine delle galassie ellittiche negli ammassi di galassie, il Piano Fondamentale delle galassie ellittiche, la relazione di Tully Fisher $L \propto V_c^{\alpha}$ per le spirali, sono altre relazioni la cui comprensione richiede una dettagliata modellistica delle proprieta' spettrali e dinamiche delle galassie, nonche' un modello per la loro formazione.

10. *Le osservazioni di galassie ad alto redshift*: la tecnica recentemente proposta ed usata da Steidel e collaboratori, ha permesso di identificare, per la prima volta in maniera sistematica, numerose galassie a redshift 3-3.5 usando filtri opportuni che osservano il Lyman break a 912$\AA$ nel loro spettro. Tale tecnica fornisce anche un accurato redshift fotometrico. Queste galassie rappresentano forse i primi oggetti con apprezzabile formazione stellare. Per questo, la loro abbondanza, le proprieta' spettrali, la star formation rate ed evoluzione in redshift sono dei test critici per le teorie correnti di formazione di galassie.

9.2.4 Leggi di scala non lineari

Consideriamo il campo lineare di fluttuazioni di densita' $\delta(\vec{x}) = (\rho(\vec{x}) - \rho_b)/\rho_b$. Partendo dalla teoria lineare per l'instabilita' gravitazionale, con semplici argomenti dimensionali e' possibile ricavare delle utili leggi di scala *non lineari* che descrivono le proprieta' evolutive degli aloni di materia oscura. L'assunzione che ci permette di legare i due regimi e' che il limite $\delta(\vec{x}) \to 1$ corrisponde ad ad un sistema collassato ed in equilibrio dinamico. Questa assunzione e' supportata dal modello di collasso di una perturbazione sferica in un universo in espansione, e convalidata da numerose simulazioni numeriche.

I risultati della teoria lineare ci dicono che $\delta(\vec{x}, t)$ cresce in modo autosimile: $\delta(\vec{x}, t) = \delta(\vec{x})D(t)$. In un universo di Einstein-de Sitter, il fattore di crescita lineare $D(t)$ e' proporzionale al fattore di scala dell'espansione dell'universo: $D(t) \propto a(t)$. E' conveniente rappresentare il campo δ come un integrale di Fourier, evidenziando il contributo $\delta(k)$ dato a $\delta(\vec{x})$ da fluttuazioni su diverse scale $\lambda = 2\pi/k$. L'ampiezza quadratica media di queste fluttuazioni definisce lo spettro delle perturbazioni $P(k) \propto \delta(k)^2$. $P(k)$ puo' essere rappresentato, almeno localmente, da una legge di potenza in k; l'evoluzione lineare di $P(k)$ segue da quella di δ: $P(k, t) \propto k^n D^2(t)$.

La fluttuazione quadratica media di massa, su scala fisica aR (con R la scala comovente all'espansione), e' quindi

$$\delta_M^2 \equiv \langle \left(\frac{\delta M}{M}\right)^2 \rangle = \int d^3k P(k) W^2(kR) \propto k^{n+3} D^2(k) \tag{9.1}$$

(dove $W(kR)$ e' un filtro passa basso poiche' δ_M^2 e' determinata solo da fluttuazioni su scala maggiore di $2\pi/k$). Quindi

$$\delta_M^2 \propto D^2(t) R^{-(n+3)} \propto D^2(t) M^{-(n+3)/3} \tag{9.2}$$

Nel limite $\delta \to 1$, questa relazione definisce la massa tipica non-lineare M_* al tempo t come

$$1 \propto M_*^{-(3+n)/3} D^2(t) \tag{9.3}$$

ovvero

$$M_*(t) \propto D(t)^{6/(3+n)} \tag{9.4}$$

che in un universo di Eistein-de Sitter ($\Omega = 1$) diventa semplicemente

$$M_*(t) \propto a^{6/(3+n)} \propto (1+z)^{-6/(3+n)} \tag{9.5}$$

in funzione del redshift z. Da questa relazione e' immediato derivare altre leggi di scala per l'epoca di formazione della struttura di massa M_*, per le sue dimensioni, densita', dispersione di velocita' e temperatura all'equilibrio dinamico:

$$t_* \propto t \propto D(t)^{3/2} \propto M_*^{(3+n)/4} \propto (1+z)^{-3/2} \tag{9.6}$$

$$\rho_* \propto \rho_b(t) \propto (1+z)^3 \tag{9.7}$$

$$R_* \propto \left(\frac{M_*}{\rho_*}\right)^{1/3} \propto M_*^{1/3}(1+z)^{-1} = R(M, z) \tag{9.8}$$

$$\langle v^2 \rangle \propto kT_{vir} \propto \frac{GM_*}{R_*} \tag{9.9}$$

$$\propto M_*^{2/3} \rho_*^{1/3} \propto M_*^{(1-n)/6} \propto M_*^{2/3}(1+z) = v^2(M, z) \tag{9.10}$$

Queste relazioni mostrano quali sono i valori critici dell'indice spettrale n. Per avere clustering gerarchico occorre che t_* sia minore per masse piu' piccole, quindi quindi che il suo esponente sia positivo, o $n > -3$. Occorre anche che sia $n < 1$ affinche' l'energia di legame ($E \propto v^2$) di un sistema di massa M cresca con M, e sia quindi dominata dal collasso dell'oggetto stesso e non da quello dei suoi progenitori.

Nel contesto specifico degli ammassi di galassie, e' possibile estendere queste relazioni, per es., alle proprieta' X dei sistemi. Nel caso di un universo di E.-de Sitter, un gas in equilibrio termodinamico col potenziale dell'ammasso avra' una temperatura:

$$T_X^* \propto \langle v^2 \rangle \propto M_*^{2/3}(1+z) \tag{9.11}$$

ed una luminosita' dovuta a bremsstralhung termico:

$$\begin{aligned} L_X^* &\propto \int d^3r L(T_X) \propto R_*^3 n^2 T_X^{1/2} \propto M_* \rho T_X^{1/2} && (9.12)\\ &\propto M^{4/3}(1+z)^{7/2} && (9.13)\\ &\propto T_X^2(1+z)^{3/2} && (9.14) \end{aligned}$$

Queste leggi di scala descrivono l'evoluzione temporale di un sistema non-lineare tipico, che e' rappresentato da oggetti diversi a redshift diversi. Se pero' si assume che la struttura interna (profili) degli aloni sia auto-simile per aloni di massa diversa, allora e' possibile fissare la massa ad un valore dato, e considerare l'evoluzione in redshift di un sistema di quella massa, per es. di un ammasso di $M = 10^{15} M_\odot$.

9.3 Equilibrio dinamico

In questa sezione discutero' l'equilibrio dinamico delle componenti principali di un ammasso di galassie: galassie, ICM e materia oscura,

9.3.1 Materia non collisionale: dark matter

Il campo gravitazionale degli ammassi di galassie e' determinato principalmente da una distribuzione continua di materia oscura. Di conseguenza, gli ammassi possono essere considerati, in prima approssimazione, dei sistemi non collisionali. Questo significa che la dinamica dei singoli punti massa e' determinata dal campo gravitazionale medio del sistema, e che l'influenza gravitazionale reciproca dei singoli elementi di materia oscura e' trascurabile. Come vedremo piu' avanti, l'approssimazione non collisionale puo' essere applicata anche alla descrizione della dinamica delle galassie nell'ammasso. Al contrario, la dinamica dell'ICM richiede una trattazione collisionale, presentata nella prossima sezione. In questo contesto quindi, un ammasso di galassie e' rappresentato da un alone di materia oscura.

La completa descrizione dinamica di un sistema non collisionale e' contenuta nell'equazione di Boltzmann non collisionale (eq. di Vlasov). Per la sua difficolta', e poiche' quest'equazione contiene molta piu' informazione del necessario allo studio (macroscopico) della dinamica del sistema, di solito se ne studiano i vari momenti rispetto al campo di velocita'. In particolare, il momento di ordine zero fornisce l'equazione di continuita', o conservazione della massa, mentre il momento di ordine 1 fornisce l'equazione di Jeans, o conservazione del momento. L'equazione di Jeans e' quindi l'analogo non collisionale dell'equazione di Eulero, e descrive la relazione tra il gradiente del potenziale gravitazionale e il campo di densita' e velocita' del sistema. Per un sistema sferico e statico, poiche' il gradiente del potenziale e' radiale e proporzionale ad $M(<r)/r^2$, l'equazione di Jeans lega la massa del sistema $M(<r)$ alle variazioni radiali di densita' $\rho(r)$ e di dispersione di velocita' radiali $\sigma_r^2(r)$, e all'anisotropia del campo di velocita' $\beta(r) = 1 - \sigma_t^2(r)/\sigma_r^2(r)$, definita dal rapporto tra le dispersioni tangenziale e radiale del campo di velocita' $\sigma_t^2(r)$ e $\sigma_r^2(r)$. Per la presente trattazione, e' conveniente scrivere l'equazione esplicitando la massa del sistema in funzione degli altri campi dinamici. :

$$M(<r) = -\frac{r\sigma_r^2(r)}{G}\left[\frac{d\log\rho}{d\log r} + \frac{d\log\sigma_r^2}{d\log r} + 2\beta(r)\right]. \tag{9.15}$$

Si noti che densita' e dispersione di velocita' sono misurate localmente in r, e non sono dei valori medii entro il raggio r. In questa equazione, $M(< r)$ e' la massa totale del sistema, cioe' la massa che determina il campo gravitazionale, mentre $\rho(r)$, $\sigma_r^2(r)$, $\sigma_t^2(r)$ e $\beta(r)$ possono riferirsi a qualsiasi distribuzione di punti massa che siano in equilibrio dinamico col potenziale, che ricordiamo e' sferico e statico.

Per capire il senso fisico di questa equazione consideriamo per semplicita' un sistema isotermo con campo di velocita' isotropo: il secondo e terzo termine tra parentesi sono quindi zero. L'equazione mostra come, ad ogni raggio r, la dispersione di velocita' (temperatura) e la distribuzione radiale (densita') di una popolazione di traccianti non sono grandezze indipendenti, ma devono bilanciarsi per fornire la corretta massa del sistema. Distribuzioni con minore velocita' devono avere profili di densita' piu' ripidi, mentre distribuzioni piu' estese devono essere piu' calde. Se il sistema non e' isotermo, e se il campo di velocita' non e' isotropo, il bilancio va fatto tenendo conto di tutti i termini. Ignorare uno o piu' termini porta a degli errori nella stima della dinamica dei traccianti, e conseguentemente della massa del sistema.

Moltiplicando questa equazione per la coordinata spaziale (nel nostro caso radiale) ed integrando in d^3r si ottiene una relazione integrale che, se estesa a tutto il sistema, corrisponde al teorema del viriale:

$$\langle v^2 \rangle = \frac{GM}{r} \tag{9.16}$$

Si noti che il teorema del viriale, com'e' scritto sopra, e' valido solo se M e' la massa *totale* del sistema, cioe' se l'integrazione dell'equazione di Jeans e' estesa a tutto lo spazio. Se si vuole applicare il teorema del viriale solo ad una regione di raggio r_0 (per es. quella centrale dell'ammasso), l'integrale va esteso solo fino ad r_0, e il risultato contiene un ulteriore termine di pressione superficiale (The e White 1986; Carlberg et al. 1997). Dimenticare questo termine porta a sovrastimare la massa del sistema, perche' la pressione superficiale riduce la quantita' di massa richiesta per mantenere il sistema in equilibrio. Questo termine e' proporzionale alla densita' $\rho(r_0)$.

Una maggiore comprensione dei dettagli della dinamica del collasso e del successivo equilibrio di sistemi non collisionali si puo' soltanto ottenere facendo uso di simulazioni numeriche ad N-body. L'equilibrio dinamico degli aloni di materia oscura e' stato studiato di recente da Navarro, Frenk e White (1995, 1996, 1997), Cole e Lacey (1996) e Tormen, Bouchet e White (1997). I risultati delle loro simulazioni mostrano che, per i modelli cosmologici considerati, gli aloni di materia oscura sono sistemi triassiali o prolati. Nonostante cio', la loro dinamica e' ben descritta dal modello sferico. In particolare, essi risultano in equilibrio dinamico all'interno del raggio viriale, definito come il raggio entro cui la densita' media del cluster e' circa 200 volte la densita' di background. Il profilo di densita' e' ben descritto dal profilo: $\rho(r) = \rho_0/r(r + r_s)^2$ (Navarro, Frenk e White 1995 (NFW)). Tale profilo e' quindi curvo, singolare al centro, piu' piatto di un profilo isotermo a piccoli raggi e piu' ripido di un profilo isotermo a grandi raggi. La dispersione delle velocita' non e' costante con il raggio, ma la sua variazione tipica, meno del 30 per cento entro il raggio viriale, permette di considerare il sistema come quasi isotermo. Il campo di velocita' e' quasi isotropo nel centro dell'alone, ma orbite radiali prevalgono via via che ci si allontana dal centro. Fenomeni di merging con sottostrutture possono temporaneamente alterare l'equilibrio dinamico, in modo che la stima di massa dall'equazione di Jeans puo' scostarsi notevolmente (di un fattore ≥ 2) dal valore corretto. In assenza di eventi recenti di questo tipo, comunque, l'equazione di Jeans provvede un'ottima descrizione del sistema se tutte le incognite sono conosciute.

9.3.2 Materia non collisionale: galassie

L'importanza dinamica di collisioni tra galassie in un tempo di Hubble e' trascurabile ovunque fuorche' nel centro dell'ammasso. Di conseguenza, l'equazione di Jeans e' una buona descrizione della dinamica delle galassie in un ammasso, ovunque fuorche' nel centro.

Argomenti teorici e simulazioni numeriche (White 1984, Carlberg 1994, Frenk et al. 1996) mostrano che le "galassie" in un ammasso tendono ad avere una dispersione di velocita' minore di quella della materia oscura (velocity bias), principalmente a causa della frizione dinamica. Corrispondentemente, la loro distribuzione e' piu' concentrata di quella della massa, con fenomeni di segregazione dovuti all'equipartizione dell' energia.

La recente analisi del campione di ammassi di galassie del CNOC (Carlberg et al. 1996; 1997; 1998) ha permesso di confrontare queste predizioni con un dettagliato campione osservativo. Questo campione

contiene circa 2600 redshift in 16 ammassi ad un redshift medio $z = 0.3$. Gli ammassi sono stati scelti dall'Eistein Medium Sensitivity Survey, ed hanno una luminosita' X $L_X \geq 10^{44}$ erg s^{-1}, quindi sono probabilmente ammassi ricchi e ragionevolmente virializati.

Lo studio della dinamica della popolazione di galassie in questi ammassi (Carlberg et al. 1996, 1997) mostra che:

1. la distribuzione media delle galassie negli ammassi e' ben descritta da un profilo di NFW $\rho(r) \propto 1/r(r+r_c)^2$; o di Hernquist: $\rho(r) \propto 1/r(r+r_c)^3$;
2. La distribuzione della massa totale dell'ammasso e' ben descritta dallo stesso profilo; quindi la distribuzione media delle galassie traccia la distribuzione della materia oscura.
3. Il rapporto medio M/L per gli ammassi e' $M/L \approx (213 \pm 59)$h. Tale valore, tra parentesi, corrisponde ad un parametro di densita' cosmologica $\Omega_0 \simeq 0.2$.
4. La dispersione delle velocita' delle galassie decresce verso l'esterno. I dati non sono sufficienti per determinare l'andamento per $r \to 0$.
5. la popolazione di galassie negli ammassi e' divisa in due gruppi con caratteristiche fisiche e dinamiche diverse: galassie con $(g-r) \geq 0.7$ (o galassie rosse, dominate dal bulge), e galassie con $(g-r) \leq 0.7$ (o galassie blu, dominate dal disco). Le galassie rosse possiedono una distribuzione piu' concentrata ed una dispersione di velocita' minore rispetto alle blu. La media delle due distribuzioni parallele la distribuzione della massa. Entrambe le popolazioni sono in equilibrio dinamico col potenziale, cioe' obbediscono all'equazione di Jeans. Se pero' si applica il teorema del viriale, senza tener conto del termine di superficie, si ottengono delle stime diverse per i due campioni, ed inconsistenti con la massa reale.

Queste conclusioni sono in accordo con le aspettative teoriche. Le galassie rosse sono piu' vecchie, e probabilmente sono nell'ammasso da piu' tempo che non le blu. Di conseguenza la frizione dinamica ha rallentato le loro velocita' e ha favorito la loro segregazione morfologica.

9.3.3 Materia collisionale: hot ICM

L'equilibrio di un gas collisionale e' descritto dall' equazione dell' equilibrio idrostatico. Assumendo, come fatto sopra, che il potenziale gravitazionale sia statico e sferico, questa equazione e' formalmente identica all' equazione di Jeans vista sopra, sostituendo alla dispersione delle velocita' la temperatura viriale: $kT/\mu m_p = \sigma^2$ (con k la costante di Boltzmann e μm_p il peso molecolare medio del gas), e ponendo l'anisotropia delle velocita' a zero: $\beta \equiv 0$ (perche' il gas e' collisionale e quindi il suo campo di velocita' e' isotropo). L'equazione dell'equilibrio idrostatico si scrive quindi:

$$M(<r) = -\frac{rkT(r)}{G\mu m_p}\left[\frac{d\log\rho_g}{d\log r} + \frac{d\log T(r)}{d\log r}\right]. \tag{9.17}$$

Anche in questo caso il contributo delle simulazioni numeriche alla comprensione della dinamica del gas e' notevole. In particolare, il potere di calcolo raggiunto negli ultimi anni ha permesso di simulare il collasso gravitazionale di un sistema di materia oscura e gas con risoluzioni ed accuratezze molto elevate.

Un sunto dei risultati principali di queste analisi e' il seguente (Navarro e White 1993, Navarro, Frenk e White 1995, Evrard, Metzler e Navarro 1997, Bartelmann & Steinmetz 1996, Frenk et al. 1998):

1. Il profilo di densita' del gas in un sistema in equilibrio segue approssimativamente quello della materia oscura. Il gas presenta comunque una distribuzione un po' piu' estesa, a causa di un trasferimento di energia e momento angolare da parte della materia oscura durante il collasso. Questo trasferimento avviene nel modo seguente. Consideriamo un elemento di materia oscura δm che cade in un ammasso di massa M lungo un'orbita radiale. Esso passera' diritto attraverso il centro del sistema, per la sua natura non collisionale. Un elemento di gas inizialmente associato all'elemento δm viene invece rallentato dallo shock adiabatico con il gas gia' presente nel sistema. Questo ritardo

di fase fa si' che, mentre l'elemento di materia oscura sente, cadendo, la gravita' dovuta alla massa M, l'elemento di gas senta una gravita' maggiore, dovuta alla massa $M + \delta m$, e quindi acquisti piu' energia nel collasso. Allo stesso modo, lo shock devia l'elemento di gas accelerandolo tangenzialmente ed aumentando il suo momento angolare, rispetto a quello eventualmente posseduto dall'elemento di materia oscura. La differenza di distribuzione spaziale di gas e materia oscura si traduce in una frazione barionica che cresce linearmente con la distanza dal centro.

2. Entro una sfera di raggio r_{500} con densita' media $\rho \approx 500$ volte la densita' del background cosmologico, gli ammassi simulati sono in buon equilibrio idrostatico: l'energia cinetica del gas (che misura la sua non-termalizzazione) e' meno del 10 percento dell'energia termica del gas. Quindi il gas e' supportato principalmente dalla sua pressione termica, e non dalla sua dispersione di velocita'. Fenomeni di merging con sottostrutture possono alzare il rapporto tra le due energie fino al 20 percento. Il raggio r_{500} corrisponde rozzamente a 60 percento del raggio viriale dell'ammasso, ovvero circa 1 Mpc/h per il Coma cluster.

3. il gas ha una distribuzione approssimativamente isoterma. La sua temperatura decresce lentamente verso l'esterno, e ad r_{500} e' circa il 20-30 percento piu' bassa che al centro. Al raggio viriale la temperatura e' piu' bassa di un fattore 2-5.

4. La temperatura del gas e' in media uguale a quella della materia oscura: $kT/(\mu m_p) \simeq \sigma_r^2$. Questo e' consistente con l'affermazione precedente che il gas ha piu' energia della materia oscura, in quanto per la materia oscura $\sigma_r^2 \geq \sigma_t^2$.

Questi risultati sono particolarmente rilevanti al problema della stima di massa degli ammassi a partire da dati X, come vedremo in seguito.

9.4 Stime di massa in ammassi di galassie

In questa sezione descrivero' brevemente le principali tecniche per la stima della massa di ammassi di galassie. Le prime due si basano sull'ipotesi di validita' dell'equilibrio dinamico dell'ammasso, e quindi sui risultati della sezione precedente. La terza invece, basata sulle proprieta' di lensing gravitazionale degli ammassi, prescinde da questo ed e' quindi piu' generale.

9.4.1 Stime da dati ottici

Abbiamo visto come, conoscendo la distribuzione radiale 3dim delle galassie in un ammasso, e la distribuzione del loro campo di velocita', ed assumendo che queste siano in equilibrio dinamico nel potenziale sferico e statico dell'ammasso, sia possibile risalire ad una stima della massa dell' ammasso entro un dato raggio r. La stima viriale puo' essere vista come un'approssimazione integrale della piu' dettagliata stima data dall'equazione di Jeans. In pratica, cio' che noi osserviamo e' la distribuzione proiettata delle galassie, e una qualche stima della dispersione di velocita' lungo la linea di vista, il piu' delle volte mediata su tutte le galassie entro una distanza proiettata b dal centro dell'ammasso. In linea di principio e' possibile invertire la densita' proiettata ed ottenere una stima del profilo 3dim $\rho_{gal}(r)$, ma non e' possibile determinare indipendentemente le due componenti $\sigma_r(r)$ e $\sigma_t(r)$ della dispersione di velocita'. Quindi l'equazione ha due incognite, ed e' impossibile stimare la massa $M(< r)$ senza fare ulteriori assunzioni che ne permettano la chiusura, oltre a quelle gia' fatte sull'equilibrio del sistema. Ipotesi che vengono fatte comunemente sono che il campo di velocita' e' isotropo: $\sigma_r(r) = \sigma_t(r)$ per ogni r, oppure che la distribuzione di galassie segua quella della materia oscura: $\rho_{gal} \propto \rho$. Queste due assunzioni non sono equivalenti, ne' hanno una giustificazione fisica a priori. The e White (1986) e Merritt (1987) hanno usato dati del Coma cluster per studiare questo problema, e gli errori nella conseguente stima di massa. I loro risultati mostrano che esistono diverse distribuzioni di densita' e velocita' consistenti con i dati. In particolare, modelli con orbite predominantemente radiali richiedono una distribuzione di massa meno concentrata nel centro, mentre modelli con orbite soprattutto circolari richiedono una distribuzione di massa piu' concentrata. Questo risultato e' facilmente intuibile se si pensa a due galassie, g1 e g2, con la stessa energia, g1 in un'orbita circolare di raggio $r1$ e g2 in un'orbita radiale. Quando g2 raggiunge

il raggio $r1$, avra' una velocita' radiale uguale alla velocita' circolare di g1 (poiche' g1 e g2 hanno la stessa energia). Quindi l'apocentro della sua orbita sara' ad una distanza r2 maggiore di r1. Poiche' g1 spende la maggior parte del suo tempo in prossimita' dell'apocentro, dove la sua velocita' e' minore, la distribuzione media di galassie in orbite radiali e' meno concentrata di una distribuzione con eguale energia ma in orbite circolari.

La massa di Coma stimata entro il raggio di Abell ($1.5/h$ Mpc) con questo metodo risulta $M = 6.7 \pm 1.0 \times 10^{14} M_\odot/h$ nell'ipotesi $\rho_{gal} \propto \rho$. Il caso generale in cui non si facciano ulteriori assunzioni per risolvere l'equazione di Jeans pone invece dei limiti di massa di un fattore 2 intorno al valore $M = 6.6 \times 10^{14} M_\odot/h$.

Purtroppo per la maggior parte degli ammassi non esistono altrettanti dati che per Coma, quindi le corrispondenti stime di massa vengono di solito effettuate usando diversi tipi di stime viriali. Il problema maggiore in questo caso e' ottenere una stima accurata della dispersione di velocita' dell'ammassi lungo la linea di vista. Frenk et al. (1990) e recentemente Van Harlem, Frenk e White (1997), hanno usato dei set di grandi simulazioni N-body cosmologiche per studiare gli effetti di proiezione nella stima della dispersione di velocita' di cataloghi di ammassi con le caratteristiche del catalogo di Abell (1958). Questo catalogo consiste di circa 2700 ammassi di galassie, con $\delta > -20°$, identificati ad occhio nudo dal Palomar Observatory Sky Survey (POSS). La ricchezza degli ammassi e' definita dal numero di galassie di mag compresa tra la magnitudine m_3 della terza galassia piu' brillante dell'ammasso ed $m_3 + 2$, che si trovano entro un raggio di $1.5 Mpc/h$ dal centro dell'ammasso. Van Harlem et al. (1997) hanno mostrato che, usando il criterio di Abell per ricercare gli ammassi presenti nelle loro simulazioni, circa un terzo degli ammassi di Abell che in proiezione hanno ricchezza $R \geq 1$ sono misclassificazioni dovute alla sovrapposizione di piu' sistemi lungo la linea di vista, mentre un terzo degli ammassi di ricchezza $R \geq 1$ in tre dimensioni non vengono considerati tali in proiezione a causa di fluttuazioni verso il basso nel numero medio di galassie nel background dell'ammasso. Inoltre, gli effetti di proiezione e la presenza di sottostrutture possono determinare una notevole sovrastima di σ_r, anche facendo uso di varie tecniche per la rimozione di interlopers. Una stima piu' accurata della dispersione delle velocita' degli ammassi, che minimizza gli effetti di proiezione, richiede che sia la definizione degli ammassi che la misura di σ^2 vengano fatte usando un raggio sostanzialmente piu' piccolo del $1.5/h$ Mpc usato nel catalogo di Abell. Il valore suggerito e' circa $0.5/h$ Mpc.

La selezione degli ammassi da un campione X, come nel caso del survey CNOC, riduce molto il problema, in quanto la luminosita' L_X di un ammasso e' molto meno prona ad effetti di proiezione.

9.4.2 Stime da dati X

Lo studio dell'ICM caldo degli ammassi ricchi e' un altro approccio per determinare la distribuzione di materia nell'ammasso. Assumendo che il gas sia in equilibrio idrostatico nel potenziale dell' ammasso, si utilizza l'equazione dell'equilibrio idrostatico scritta in precedenza. Come l'equazione di Jeans, anche questa e' una relazione locale per la massa totale entro r. Come nell'equazione di Jeans, anche per il gas non ci sono abbastanza osservabili per chiudere l'equazione, e quindi per stimare $M(r)$ occorre eliminare alcune incognite facendo ulteriori assunzioni sul sistema.

La grandezza osservata e' il profilo 2dim $S_X(b)$ di brillanza superficiale (SB) in una certa banda energetica (e.g. 0.1-2.4 keV per ROSAT). Un vantaggio dall'emissione X rispetto all'osservazione ottica e' che, aumentando il tempo di integrazione dell'imagine, od usando telescopi piu' grandi, e' possibile ottenere un rapporto S/N arbitrariamente alto. Nei dati ottici invece il numero di galassie pone un limite all'accuratezza delle misure; inoltre gli effetti di proiezione non vengono ridotti osservando piu' galassie in un ammasso. Uno svantaggio dello studio nell'X e' invece che il campo di vista e' limitato alla regione centrale: $\approx 0.5 - 1/h$ Mpc, dell'ammasso. A raggi maggiori la brillanza superficiale dell'ammasso e' dominata da quella del background. Stime di massa da dati X si riferiscono quindi a raggi generalmente minori del raggio viriale, e confronti con masse viriali sono pericolosi perche' richiedono estrapolazioni dei dati X al di fuori della regione osservata.

Il problema maggiore in questo caso e' invertire $S_X(b)$ per ottenere $\rho_g(r)$. Questo richiede un modello per la temperatura in funzione di r, in quanto $L_X \propto \rho^2 T^{1/2}$. Poiche' nella maggior parte dei casi manca tale informazione, quel che si fa e' assumere un gas isotermo: $T(r) = cost$. L'approssimazione analitica ad una sfera isoterma che viene solitamente usata per la densita' del gas e' il cosiddetto β model (Cavaliere

e Fusco-Fermiano, 1976), dato da

$$\rho_g(r) = \rho_0 \left[1 + \left(\frac{r}{r_c}\right)^2\right]^{-3\beta/2} \tag{9.18}$$

cui corrisponde la SB

$$S_X(b) \propto \int \rho^2 d(\sqrt(\rho)) = S_{X,0} \left[1 + \left(\frac{b}{r_c}\right)^2\right]^{-3\beta+1/2} \tag{9.19}$$

Poiche' la distribuzione delle galassie negli ammassi e' ragionevolmente modellata da un profilo di King (un β model con $\beta = 1$), nel β model la distribuzione del gas e delle galassie sono legate dalla relazione: $\rho_g \propto \rho_{gal}^{\beta}$. Sostituendo queste due distribuzioni nell'equazione di Jeans (per ρ_{gal}) e nell'equazione dell'equilibrio idrostatico (per ρ_g) ed eguagliando le masse totali, si vede che β e' il rapporto fra la temperatura delle galassie e quella del gas: $\beta = \mu m_p \sigma^2/kT$.

Il valore di β puo' essere stimato in due modi indipendenti. Il primo e' un fit della SB, che fornisce una stima detta β_{fit}. Il secondo misura direttamente T dallo spettro di bremsstrahlung del gas, e confronta questa temperatura con la dispersione di velocita' misurata per le galassie. Il valore che si ottiene e' detto β_{spec}.

Le osservazioni di SB forniscono in media $\beta_{fit} \simeq 0.6 - 0.7$, mentre le stime spettrali danno $\beta_{spec} \simeq 1 - 1.2$. Questa discrepanza nelle osservazioni e' detta 'β problem'. (Si noti pero' che i due β misurano cose diverse. β_{fit} confronta la temperatura del gas con quella della materia oscura, mentre β_{spec} confronta la temperatura del gas con quella delle galassie).

Anche in questo caso l'utilizzazione di simulazioni con idrodinamica permette sia uno studio accurato della dinamica del gas durante il processo di formazione degli ammassi, sia la valutazione dei possibili effetti sistematici causati dalle caratteristiche osservative degli strumenti. Per quel che riguarda la stima di massa in particolare, i risultati delle simulazioni (Evrard et al. 1997; Bartelmann e Steinmetz 1996) mostrano che la temperatura del gas e quella della materia oscura sono approssimativamente eguali: quindi $\beta \simeq 1$. Se pero' si impone alla densita' del gas di seguire un β-model, il fit del profilo di SB fornisce effettivamente un valore $\beta \simeq 0.65 - 0.8$, crescente in modo proporzionale al valore del raggio massimo usato per il fit. Nelle osservazioni questo raggio e' determinato dal rumore di fondo del rilevatore, e quindi anche il valore di β_{fit} ottenuto.

Il motivo per cui il fit della SB fornisce un valore di β minore di uno anche negli ammassi simulati e' che il β-model non e' un buon modello per la distribuzione del gas. Questo si puo' capire ripensando alla distribuzione della materia oscura che determina il potenziale gravitazionale totale. Le simulazioni mostrano che il fit $\rho(r) \propto 1/r(r + r_c)^2$ e' un modello appropriato. In questo profilo la densita' della materia oscura va come $\rho \propto r^{-3}$ per $r \to \infty$. Il β-model invece implica un profilo di densita' per la materia oscura del tipo $\rho(x) \propto (3 + x^2)/3(1 + x^2)^2$, (con $x = r/r_c$), come si vede inserendo il β-model nell'equazione dell'equilibrio idrostatico, e ricavando la densita' dalla definizione di massa. Questo profilo per la materia oscura va come $\rho \propto r^{-2}$ per $r \to \infty$, ed e' quindi, a grandi raggi, meno ripido del profilo effettivo. La conseguenza nell'equazione dell'equilibrio idrostatico e' che la massa determinata dal β-model e' una sottostima di quella reale, e che il rapporto tra massa stimata e massa reale cresce con il raggio, ma non riesce a raggiungere l'unita'. Questo risultato suggerisce che la stima di massa data dal β-model e' biassata verso il basso rispetto alla massa reale; nelle simulazioni di Bartelmann e Steinmetz la massa derivata dal β-model e' piu' bassa di quella reale di un fattore 1.5-2.

Un altro effetto che contribuisce a far sottostimare la massa ricavata con dati X e' l'incompleta termalizzazione del gas in ammassi che hanno subito recenti eventi di merging. La temperatura media del gas risulta quindi minore di quella viriale. In questo caso comunque l'effetto non e' mai superiore al 15-20 per cento della massa totale (Schindler 1995).

Infine, la stima $\beta_{spec} > 1$ e' forse riconducibile ad effetti di proiezione che portano a sovrastimare la dispersione di velocita' dell'ammasso (van Harlem et al. 1997, Dantas et al. 1997). (Un velocity bias per le galassie darebbe $\beta_{spec} < 1$).

9.4.3 Stime da dati di gravitational lensing

Anche la luce e' soggetta alla forza di gravita'. In particolare, le immagini di deboli galassie nel background di un ammasso vengono distorte ed amplificate dal potenziale dell'ammasso, che agisce quindi come una lente gravitazionale. Studiando queste distorsioni e' possibile risalire alla forma del potenziale che le causa, e quindi alla massa. Questa tecnica, sviluppatasi negli ultimi anni grazie ai progressi tecnologici dei telescopi e a nuove idee teoriche, permette di mappare direttamente la distribuzione di materia oscura dell'ammasso, in maniera indipendente dall'equilibrio dinamico dello stesso e da ipotesi di simmetria.

Nell'approssimazione standard di gravita' Newtoniana e di lente sottile, la deflessione della luce che attraversa l'ammasso e' univocamente determinata dal potenziale gravitazionale bidimensionale della lente. In particolare, le proprieta' della lente sono contenute nella matrice (simmetrica) di curvatura del potenziale, cioe' nelle derivate seconde del potenziale rispetto alle coord. spaziali proiettate (la matrice Hessiana). L'effetto della lente gravitazionale e' di due tipi: (i) una distorsione, causata dalla parte trace-free della matrice, detta shear, e (ii) una magnificazione, causata dalla traccia, detta convergenza.

La convergenza magnifica o demagnifica l'immagine di una galassia, lasciandone invariata la forma. Lo shear invece e' una misura dell' astigmatismo della lente, e quindi distorce le immagini curvandole, oltre a magnificarle.

Il lensing gravitazionale si divide naturalmente in due regimi estremi: lensing debole e lensing forte, a seconda della densita' superficiale della lente. In regioni ove la densita' superficiale e' approssimativamente inferiore al valore $\Sigma_{crit} \approx 0.35$ g cm$^{-2}(Gpc/D)$, (dove $D = D_l D_s / D_{ls}$, con D_l distanza tra noi e la lente, D_s distanza tra noi e la sorgente e D_{ls} distanza tra lente e sorgente), la deflessione dei raggi luminosi e' moderata, e le immagini di galassie di background sono distorte e magnificate solo lievemente (lensing debole). Per densita' sovra-critiche invece le immagini sono fortemente distorte e magnificate (archi giganti), e si hanno immagini multiple (lensing forte). Il luogo dei punti corrispondente alla singolarita' della matrice Hessiana nel piano della lente viene detto *curva critica*. Il corrispondente luogo dei punti nel piano della sorgente e' detto *caustica*. Quando la sorgente interseca una caustica nel piano sorgente, la corrispondente magnificazione nel piano della lente e' formalmente infinita. In particolare, se la caustica ha forma di cuspe, gli archi corrispondenti sono i piu' spettacolari. I due regime di lesing forte e debole sono di solito trattati separatamente.

Lensing Forte

Nel caso di lensing forte un solo arco gravitazionale permette di stimare la massa contenuta entro il raggio r_A dell'arco. La stima piu' semplice nel caso di una lente circolare e'

$$M(r_A) \approx 1.1 \times 10^{14} M_\odot \left(\frac{\theta_A}{30 arcsec}\right)^2 \left(\frac{D}{1 \mathrm{G}pc}\right) \tag{9.20}$$

dove θ_A e' la distanza angolare dell'arco rispetto al centro della lente.

L'asfericita' dell'ammasso, e soprattutto la presenza di sottostrutture, aumentano sostanzialmente (fino oltre un fattore 10) la probabilita' di produrre archi giganti. Questo avviene perche' una distribuzione asferica crea multipoli di ordine superiore nel potenziale gravitazionale, aumentando il numero di cuspi nelle caustiche della lente.

Il semplice modello di lente circolare e' quindi, di solito, inadatto per descrivere il potenziale di un ammasso, e occorre usare modelli piu' complessi (per es. un sistema di due ellissi) che richiedono a loro volta l'osservazione di piu' di un solo arco per poter determinare i parametri del modello (e.g. Kneib et al. 1995 per A2218). Simulazioni ad N-body di ammassi di galassie (Bartelmann 1995) mostrano come il modello di lente circolare fa sovrastimare la massa entro r_A del 60 per cento in media, e fino al 100 per cento. La causa di questa sovrastima e' proprio l'asfericita' dell'ammasso e la presenza di sottostrutture.

La frequenza e geometria degli archi gravitazionali osservati in molti ammassi sono consistenti con un profilo di materia oscura debolmente singolare: $\rho(r) \propto r^{-1}$ verso il centro. Modelli isotermi con core radius richiedono che questo sia minore di $\approx$ 60 kpc (Wu & Hammer 1993). I profili ricavati dalle distorsioni gravitazionali di alcuni ammassi (Kneib et al. 1995, Smail et a. 1995) sono consistenti con un profilo curvo alla NFW (Tormen et al. 1997, Bartelmann 1996).

Quali ammassi di galassie sono delle buone lenti gravitazionali? Le osservazioni indicano una certa correlazione tra la luminosita' X dell'ammasso e la sua efficienza nel produrre archi giganti. Con eccezioni: A2163, tra i piu' luminosi ammassi del cielo, e' povero di archi, mentre A2218 ed A1689, che non sono molto luminosi nell'X, hanno notevoli archi giganti. Bartelmann e Steinmetz (1996) hanno studiato il problema con delle simulazioni ad N-body con idrodinamica. I loro risultati confermano che la presenza di sottostruttura e' molto rilevante per la produzione di archi giganti. Inoltre, essi trovano che le lenti gravitazionali piu' efficienti sono quelle di ammassi (i) molto luminosi in X (che hanno quindi una massa sufficiente a produrre archi a prescindere dalla loro geometria) oppure (ii) moderatamente luminosi in X, ma osservati ad un redshift z in cui sono presenti importanti fenomeni di merging, cioe' vicino al redshift di formazione: $z \approx z_{for}$. Infine gli ammassi con archi giganti sono piu' perturbati dinamicamente della media, per cui il gas e' piu' lontano dall'equilibrio idrostatico, con shock e disomogeneita' nella sua temperatura.

Lensing Debole

Kaiser e Squires (1993) hanno derivato un metodo per misurare il potenziale della lente (cioe' il valore di shear e convergenza in ogni punto nel piano della lente) usando in modo statistico l'informazione sullo shear contenuta nel gran numero di deboli galassie di background la cui immagine non forma degli archi, ma e' soltanto debolmente distorta. La convergenza della lente e' ricavata dallo shear sfruttando una relazione che li lega, essendo entrambi derivate seconde del potenziale, ed usando tecniche di inversione. Con questo metodo si ricava l'intera distribuzione bidimensionale della massa nel piano della lente. Ci sono pero' diversi problemi tecnici legati a questo metodo. I principali sono: (i) L'inversione da' una soluzione degenere a meno di un termine di convergenza costante, cioe' a meno di una distribuzione uniforme di massa (mass sheet degeneracy). Quindi la stima di massa ottenuta e' solamente un limite inferiore alla massa reale. (ii) l'inversione per ottenere la convergenza andrebbe fatta sull'intero piano della lente. Le osservazioni invece sono limitate ad un dato campo di vista. Cio' che si fa di solito e' porre uguale a zero lo shear al di fuori del campo osservato. (iii) Infine, anche conoscendo convergenza e shear, per ricavare la distribuzione di massa dell'ammasso occorre conoscere il redshift delle sorgenti, z_s. La distorsione provocata da una lente cresce infatti con z_s. Di solito per gli ammassi di galassie questo problema e' il minore, poiche' $z_s \gg z_{lente}$, e in questo limite la distorsione e' quasi indipendente da z_s.

Diverse soluzioni sono state proposte ad ognuno di questi problemi, tra cui: (i) Rompere la degenerazione misurando anche la magnificazione della lente (che fornisce una relazione diretta tra shear e convergenza). Questo puo' essere fatto in due maniere: o confrontando i conteggi medii delle galassie di background nel campo dell'ammasso e appena fuori del campo dell'ammasso (Broadhurst 1995), o confrontando la loro dimensione media (Bartelmann e Narayan 1995). (ii) Usare per l'inversione dei kernel ottimizzati per la geometria incompleta dell'osservazione (Schneider 1995). (iii) Stimare il redshift medio delle sorgenti sfruttando contemporaneamente la dipendenza di convergenza e shear da z_s e dalla SB della galassia. Questo metodo (Bartelmann e Narayan 1995) risolve contemporaneamente i problemi (i) e (iii). **Qui sarebbe da rispiegare meglio...**

Misure della distribuzione di massa degli ammassi con lensing debole suggeriscono un rapporto molto alto per M/L, dell'ordine di $400h$ o piu'. Contrariamente a quanto risulta dall'analisi dei campioni ottici, e da quanto ci si attende teoricamente, in alcuni casi la distribuzione di materia oscura appare piu' concentrata di quella delle galassie. Chiaramente ulteriori studi, sistamatici su un gran numero di ammassi, sono necessari per chiarire questi aspetti.

9.4.4 Stime di massa: confronto delle diverse tecniche

In generale le stime di massa degli ammassi di galassie, ottenute da osservazioni nell'ottico, nell'X o da lenti gravitazionali, forniscono risultati in accordo entro un fattore $\approx 2-3$. Le discrepanze maggiori riguardano spesso le regioni interne dell'ammasso, come in A2218, dove la massa determinata da lensing forte entro l'arco gravitazionale eccede di un fattore 3 quella stimata da dati X. E' probabile che queste discrepanze siano dovute a sottostrutture (Markevich, 1997). Conseguentemente il gas non e' in equilibrio idrostatico, e la massa ricavata dall'equazione sopra e' una sottostima di quella vera. Le stesse sottostrutture possono causare una sovrastima della massa da lenti gravitazionali come spiegato sopra.

Di recente Wu e Fang (1997) hanno fatto un confronto statistico delle masse ricavate con i tre metodi (viriale, X e lensing) usando un campione di 29 ammassi e dati da letteratura. Secondo questo lavoro le masse dinamiche ricavate dalle dispersioni di velocita' sono in buon accordo con quelle derivate da lensing forte e debole. Le masse dall'X risultano invece sistematicamente minori, di un fattore 2-3, rispetto alle altre due stime. Gli autori concludono che non c'e' bias di velocita' tra le galassie e la materia oscura, e che l'incongruenza delle stime X e' dovuta alla semplificazione del modello idrostatico usato per la stima di massa. Sebbene un confronto tra le diverse stime sia auspicabile, questo deve essere probabilmente fatto in modo piu' accurato di quanto fatto in Wu e Fang. In particolare, gli autori assumono un modello di lente circolare che sovrastima la lensing mass, estrapolano la massa stimata dal β-model ad una distanza $r = 3$ Mpc maggiore di quanto sia affidabile fare, e non tengono conto di possibili effetti di proiezione che aumentano la massa derivata dal teorema del viriale.

Allen (1998) ha usato un campione di 13 ammassi per confrontare le stime di massa da lensing gravitazionale con quelle derivate dall'emissione X. Egli ha mostrato che le stime di lensing forte (riferite alle regioni centrali degli ammassi) sono in buon accordo con quelle X per gli ammassi con cooling flow, indicando che in tali ammassi il gas e' in equilibrio termodinamico con il potenziale gravitazionale. In ammassi senza cooling flow, le stime da lensing forte danno masse 2-4 volte maggiori di quelle X. La spiegazione e' che tali ammassi sono spesso in fase di merging. Per questo, il gas non e' in equilibrio idrostatico (il che fa sottostimare la massa X) e sono possibili effetti di proiezione (che fa sovrastimare la massa da lensing forte). Inoltre, il centro dell'emissione X non coincide con quello della massa, e quindi le due stime sondano linee di vista diverse, cioe' regioni diverse dell'ammasso, per cui un confronto diretto tra le due masse non e' appropriato. Le stime da lensing debole (riferite a raggi maggiori) sono invece in buon accordo con le stime X per tutti gli ammassi.

In conclusione, un confronto tra questi metodi richiede probabilmente uno sforzo osservativo massiccio, con la costruzione di un catalogo omogeneo di ammassi per i quali le tre masse vengano calcolate in modo accurato, e la stima venga effettuata a raggi ove i metodi sono affidabili. Questo progetto, di indubbio interesse, sara' probabilmente realizzato nel prossimo futuro.

9.5 Test Cosmologici

In questa sezione presento due argomenti in cui si vede come lo studio degli ammassi di galassie ha importanti conseguenze sulla determinazione dei parametri cosmologici. Il primo e' la stima dell'ampiezza dello spettro promordiale delle perturbazioni $P(k)$ per mezzo dell'abbondanza locale di ammassi ricchi. Il secondo e' il problema della frazione barionica negli ammassi di galassie.

9.5.1 L'abbondanza degli ammassi

In questa sezione vedremo come l'abbondanza locale di ammassi ricchi di galassie e' incompatibile con il modello standard di formazione delle strutture cosmiche se si assume che il parametro di densita' dell'universo sia $\Omega_0 = 1$ e la normalizzazione dello spettro delle fluttuazioni di densita' $P(k)$, data dalle osservazioni del satellite COBE: $\sigma_8 \simeq 1$ (σ_8 e' la fluttuazione rms della materia su una scala di 8 Mpc/h, normalmente utilizzata per normalizzare l'ampiezza dello spettro delle pertiurbazioni $P(k)$. Poiche' la fluttuazione rms nel numero delle galassie e' circa 1 su questa scala (Davis e Peebles 1983), in un universo con $\sigma_8 < 1$ la distribuzione delle galassie e' piu' clusterata rispetto a quella della materia, di un fattore di *bias* $b = 1/\sigma_8$).

[In base al modello del collasso di una perturbazione sferica in un universo in espansione (Gunn e Gott 1972), la densita' media di un sistema in equilibrio dinamico, detta densita' viriale, e' circa 178 volte la densita' media del background. Il corrispondente *raggio viriale* R_v divide la parte virializzata del sistema da quella che e' ancora in fase di infall, come confermato anche da simulazioni numeriche (e.g. Cole e Lacey 1996). Per questo si assume normalmente che la materia dell'ammasso entro questo raggio sia in equilibrio dinamico nel potenziale gravitazionale.]

Un tipico ammasso di galassie ricco ha una massa dell'ordine di $M \sim 7. \times 10^{14} M_\odot/h$ ed un raggio $R \sim 1.5$ Mpc/h. La scala comovente caratteristica $\lambda_{lin} = 2R_{lin}$ delle perturbazioni primordiali di densita' che

hanno originato l'ammasso di massa M si ottiene richiedendo che tale massa fosse racchiusa inizialmente in una sfera di raggio R_{lin} nell'universo imperturbato con densita' cosmologica ρ_b:

$$M_v = \frac{4\pi}{3} R_{lin}^3 \rho_b \tag{9.21}$$

che fornisce $R_{lin} \simeq 8.4/h$ Mpc. L'abbondanza degli ammassi di galassie in un modello cosmologico e' determinata dall'ampiezza σ_{lin} delle fluttuazioni di massa su scala $\approx \lambda_{lin}$. Questa scala e' molto simile alla scala comunemente usata per normalizzare l'ampiezza dello spettro primordiale delle fluttuazioni di densita': $R_8 = 8$ Mpc/h. La coincidenza $R_{lin} \approx R_8$ fa si' che l'abbondanza degli ammassi di galassie in un dato modello cosmologico dipenda soprattutto dall'*ampiezza* dello spettro delle perturbazioni, cioe' da σ_8, e sia invece quasi indipendente dalla *forma* dello spettro. Inoltre, poiche' $n(> M)$ e' una funzione molto ripida per masse dell'ordine di quelle degli ammassi, una grande incertezza nell' abbondanza osservata cambia di poco la stima di σ_8 corrispondente.

Il valore teorico di σ_8 corrispondente ad una data abbondanza di ammassi ricchi si puo' stimare usando il formalismo di Press e Schecther (1974) e/o risultati di simulazioni cosmologiche ad N-body. Il confronto con l'abbondanza osservata nell'universo permette quindi di determinare il valore di σ_8 compatibile con le osservazioni, per un dato modello cosmologico. White, Efstathiou e Frenk (1993) hanno fatto questo confronto utilizzando come dato osservativo l'abbondanza di ammassi di Abell di ricchezza $R \geq 1$. La σ_v mediana stimata per questi ammassi e' circa 800 km/s (Girardi et al. 1993). La massa corrispondente, ricavata dal teorema del viriale e da simulazioni numeriche e' di circa $5.5 \times 10^{14} M_\odot/h$. Usando queste stime White et al. ottengono il seguente vincolo: $\sigma_8 \Omega_0^{0.5} \simeq 0.57 \pm 0.07$. Questo implica $\sigma_8 \simeq 0.6$ per un modello di Einstein-de Sitter (un universo di materia con $\Omega_0 = 1$), e $\sigma_8 \simeq 1$ per un universo aperto con $\Omega_0 = 0.3$.

Il trend di questo risultato si capisce nel modo seguente: modelli con $\Omega = 1$ hanno piu' materia rispetto ad universi aperti, e quindi e' sufficiente una minore ampiezza delle fluttuazioni di densita', cioe' un minore σ_8, per ottenere la stessa abbondanza di ammassi. Alla luce di questo risultato, il modello di Cold Dark Matter standard ($\Omega_0 = 1$) normalizzato da COBE: $\sigma_8 = 1$ risulta incompatibile con l'abbondanza osservata ad un livello di confidenza di 2.5σ perche' produce un numero di ammassi 10 volte superiore a quello osservato.

Piu' recentemente, Viana e Liddle (1996; 1998) ed Eke, Cole e Frenk (1996; 1998) hanno rianalizzato il soggetto utilizzando, anziche' l'abbondanza degli ammassi di Abell, l'abbondanza di ammassi X al di sopra di una data temperatura T_X. Come abbiamo visto in precedenza, la temperatura T_X e' legata alla dispersione di velocita' dell'ammasso, ed alla sua massa, ma e' molto meno prona ad effetti di proiezione che non la stima di σ_v. Assumendo che il gas sia in equilibrio nel potenziale dell'ammasso, e che la sua temperatura sia uguale alla dispersione di velocita' delle galassie: $kT/\mu m \sim \sigma_v^2$, gli autori hanno confrontato la distribuzione $N(> kT)$ ottenuta dalle loro simulazioni ad N-body con la stessa distribuzione osservata per i 25 ammassi X del campione di Henry e Arnaud (1991), limitato in flusso e completo. Il confronto da' $\sigma_8 \Omega_0^{0.5} \simeq 0.5$, ossia $\sigma_8 = 0.5$ per $\Omega_0 = 1$, e $\sigma_8 \sim 0.8 - 0.9$ per $\Omega_0 = 0.2 - 0.3$.

Il contrasto tra la normalizzazione dello spettro proposta da COBE e quella suggerita dall'abbondanza locale degli ammassi per $\Omega_0 = 1$ rimane tuttora un problema. La soluzione piu' naturale e' che l'universo sia effettivamente aperto: $\Omega < 1$; alternativamente, sia le osservazioni che le simulazioni devono contenere grossi errori sistematici nella stima di σ_v e T_X, oppure mancano di qualche ingrediente fisico fondamentale per la dinamica degli ammassi che finora non e' stato considerato.

9.5.2 Il problema della frazione barionica

Uno dei maggiori successi del modello standard di Big Bang caldo e' la capacita' di predire l'abbondanza primordiale di alcuni elementi leggeri: ^1H, ^2H, ^3He, ^4He, ^7Li. Il confronto con le abbondanze osservate per questi elementi pone limiti molto stretti al contributo barionico alla densita' totale dell' universo: $0.005 < \Omega_b h^2 < 0.023$, al 95% CL (Olive, 1997). Un valore maggiore per Ω_b implicherebbe una superproduzione di ^4He, ^7Li, mentre un valore minore porterebbe ad una superproduzione della combinazione di ^2H, ^3He, rispetto alle osservazioni.

D'altra parte, la dinamica di galassie e di ammassi ha dimostrato che la massa totale di questi sistemi eccede la massa barionica totale permessa dalla nucleosintesi, e suggerisce che sia $\Omega \simeq 0.2 - 0.3$ (e.g.

Trimble 1987). La massa in eccesso dev'essere quindi non barionica. Il fatto che non sia possibile osservarla se non attraverso la sua interazione gravitazionale mostra che e' anche debolmente interagente, percio' oscura. Un ulteriore pregiudizio teorico, il modello inflazionario, porta a pensare che la densita' dell'universo sia esattamente quella richiesta per renderlo spazialmente piatto: $\Omega_0 = 1$.

Recenti analisi sul contenuto barionico totale degli ammassi di galassie, in stelle, ISM e ICM mostrano che gli ammassi contengono piu' barioni di quanto ci si aspetterebbe se $\Omega_0 = 1$. Un bilancio dettagliato di questa *frazione barionica*: $f_B = M_B/M_T = \Omega_b/\Omega_0$ e' stato fatto per la prima volta da White, Navarro, Evrard e Frenk (1993) per il Coma cluster. Questo ammasso e' rappresentativo di un tipico ammasso ricco, percio' i risultati ottenuti sono anch'essi rappresentativi. Stime della massa barionica in Coma sono state ottenute da varie osservazioni, mentre la stima di massa totale e' ottenuta dalla cinematica delle galassie e da stime da dati X, calibrate con risultati di simulazioni ad N-body ed idrodinamiche. Il risultato finale fornisce $f_b \geq 0.009 + 0.05h^{-3/2}$ (corrispondente al 6% se $h = 1$, al 15% se $h = 0.5$), dove il primo termine proviene dalle galassie e il secondo dal gas.

Assumendo che $\Omega_0 = 1$, questo risultato implica un eccesso di barioni di un fattore 3-5 rispetto alle predizioni della nucleosintesi primordiale, a seconda del valore della costante di Hubble. Gli autori hanno poi investigato diversi possibili effetti che possono favorire la concentrazione di barioni nelle buche di potenziale degli ammassi. Da questo studio, fatto sia con argomenti analitici che con simulazioni numeriche, essi concludono che tutti i meccanismi fisici conosciuti sono inefficaci nel produrre una concentrazione paragonabile a quella osservata.

L'analisi di White et al. (1993) e' stata in seguito estesa a due campioni di ammassi: uno di 19 ammassi selezionati dall'EMSS (White e Fabian 1995), ed uno di 7 ammassi ROSAT (David et al. 1995). I due campioni sembrano avere frazioni barioniche medie differenti: $f_b = 0.057h^{-3/2}$ per il campione di White e Fabian, $f_b = 0.077h^{-3/2}$ per quello di David et al. Siccome gli ammassi dell'EMSS sono identificati ad energie piu' elevate, e sono quindi probabilmente piu' massicci, questo risultato, se reale, suggerirebbe che la frazione barionica decresce con la massa dell'ammasso. Un'analisi congiunta di questi due campioni (Evrard 1997), dove vengono studiati possibili effetti sistematici nella determinazione di f_b, e dove le due stime vengono rinormalizzate sulla base di risultati di simulazioni idrodinamiche, porta alla stessa conclusione di White et al. Possibili soluzioni a questo problema includono le seguenti:

1. Anche qui, come nel caso dell'abbondanza degli ammassi, la soluzione piu' naturale e' assumere che $\Omega_0 = 0.2 - 0.3$.

2. Nucleosintesi primordiale non-standard: questa spiegazione richiede che, prima dell'epoca inflazionaria, si siano formate delle disomogeneita' locali nella frazione barionica, associate alle fluttuazioni di densita' primordiali. Non si conoscono pero' meccanismi che giustifichino una tale associazione.

3. Frazione di materia oscura calda: se esiste un contributo di e.g. neutrini massivi: $\Omega_{HOT} \leq 0.3$, questo potrebbe favorire l'evacuazione di materia oscura dagli ammassi. Recenti simulazioni (Kofman et al. 1996) mostrano pero' che l'effetto e' trascurabile per modelli accettabili.

4. Incertezze nelle stime di massa: dovute a non-equilibrio dinamico delle galassie o del gas, asimmetrie dell'ammasso, effetti di proiezione, forma non nota del profilo della materia oscura. I risultati delle simulazioni correnti mostrano comunque che l'effetto di queste incertezze non e' sufficiente per spiegare completamente la discrepanza (si veda le sezioni precedenti).

5. disomogeneita' nella distribuzione del gas: poiche' $\Omega_b \propto \rho_{gas}$, ma $L_X \propto \rho_{gas}^2$, una massa M di gas distribuita in modo inomogeneo produce una luminosita' maggiore che se la massa fosse distribuita omogeneamente. Stime della massa totale del gas dalla SB e T_X dell'ammasso sono quindi sovrastime se il gas nell'ammasso non e' omogeneo. Osservazioni dell'effetto SZ in Coma pongono comunque limiti al grado di inomogeneita'. [L'effetto SZ e' proporzionale a ρ_{gas}, la SB e' proporzionale a ρ_{gas}^2, da cui si deduce la non omogeneita' del gas come $\langle\rho_{gas}^2\rangle/\langle\rho_{gas}\rangle$]. Questi limiti non permettono la spiegazione della discrepanza in questi termini. Ulteriori osservazioni sono comunque necessarie per avere delle stime piu' definitive.

6. Gas multi-fase: se il gas e' sostenuto in modo significativo da pressioni non termiche (per es. dalla sua dispersione di velocita', o da campi magnetici), come abbiamo visto in precedenza la massa stimata da osservazioni X e' una sottostima della massa reale dell'ammasso. Pero' i risultati delle

simulazioni, per cui $\beta \simeq 1$, tendono ad escludere che tale effetto possa essere cosi' rilevante. Anche qui e' necessario attendere nuovi dati da satelliti X, come AXAF ed XMM, per poter misurare in modo piu' accurato la distribuzione di temperatura nel gas.

Infine, un altro modo di usare la frazione barionica f_b degli ammassi come test cosmologico e' il seguente (Danos e Pen (1998); Rines et al. (1998)). Assumendo che f_b sia la stessa per ammassi a redshift diversi, f_b e' funzione solo della distanza angolare d_A dell'ammasso e del suo redshift: $f_b(d_A; z)$. Poiche' a sua volta d_A dipende dalla geometria dell'universo, $d_A(\Omega_0; z)$, imporre $f_b = cost$ permette di ricavare il valore di Ω_0. Risultati preliminari su un campione di 8 ammassi a redshift $z = 0.3 - 0.55$ indicano $\Omega_0 \sim 0.2$. Future osservazioni X con AXAF ed XMM permetteranno un'applicazione piu' precisa di questo test.

9.6 Evoluzione in redshift degli ammassi di galassie

Come visto in precedenza, il fatto che gli ammassi di galassie siano sistemi dinamici giovani e molto luminosi permette di osservarne direttamente l'evoluzione in redshift. Le diverse proprieta' evolutive di un ammasso forniscono importanti test per la determinazione dei parameteri cosmologici fondamentali, e.g. Ω_0, Ω_b, $P(k)$, e sono anche importanti banchi di prova per i modelli di formazione delle galassie. In questa sezione e nella prossima faro' una rivista di alcuni recenti sviluppi osservativi e teorici sull'argomento.

9.6.1 Evoluzione dell'abbondanza degli ammassi

Abbiamo visto come la misura dell'abbondanza locale degli ammassi ponga un forte vincolo alla cosmologia: $\sigma_8 \Omega_0^{0.5} \simeq 0.5 \pm 0.05$ (White et al. 1993; Eke et al. 1996, Viana e Liddle 1996). Come si vede, questo vincolo e' degenere in $\sigma_8 - \Omega_0$. Lo studio dell'evoluzione dell'abbondanza degli ammassi ricchi con il redshift permette di rompere questa degenerazione e di misurare univocamente σ_8 ed Ω_0.

Il ruolo di questi parametri si capisce nel modo seguente. Abbondanza locale: fissato σ_8 il numero di ammassi ricchi cresce con Ω_0, perche' universi con Ω_0 maggiore hanno piu' materia. Quindi per produrre la stessa abbondanza di ammassi, universi con $\Omega_0 < 1$ devono avere un σ_8 maggiore. Evoluzione dell'abbondanza: fissato Ω_0, oggetti di una data massa (e.g. $M \simeq 10^{15} M_\odot$) sono sono via via piu' rari al diminuire di σ_8. Come tali risiedono nella coda esponenziale della distribuzione di masse virializzate, e la loro abbondanza evolve piu' rapidamente con il redshift. Quindi, per una stessa abbondanza a $z = 0$, gli ammassi formati in un universo con $\Omega_0 < 1$ (che ha σ_8 piu' alto) evolvono piu' lentamente con il redshift.

Ad esempio, il numero di ammassi tipo Coma, con $M(1.5\mathrm{M}pc/h) \simeq 6 \times 10^{14} M_\odot/\mathrm{h}$, diminuisce di un fattore 1000 da $z = 0$ a $z = 0.5$ per $\Omega = 1$, $\sigma_8 = 0.5$ e solo di un fattore 10 per $\Omega = 0.3$, $\sigma_8 = 0.9$ (Bahcall, Fan e Cen 1997).

Tuttavia, una misura affidabile dell'evoluzione nel numero di ammassi con il redshift richiede un campione di ammassi statisticamente completo fino a $z = 0.5$ o piu'. Campioni del genere stanno iniziando ad essere raccolti solo oggi. Operativamente, l'abbondanza di ammassi ricchi e' stimata misurando la densita' cumulativa di ammassi in funzione della loro dispersione di velocita': $n(> \sigma_v^2)$ (che ad un raggio fissato e' una stima della loro massa: $\sigma_v^2 \propto M/R$) o equivalentemente della loro temperatura $n(> T_x)$. Carlberg et al. (1997) hanno stimato questa densita' per diversi campioni di ammassi, X ed ottici, a diversi redshift. I dati X sono stati convertiti in $n(> \sigma_v^2)$ usando la legge di scala nonlineare $L_X \propto \sigma_v^\alpha$, calibrata con alcuni ammassi CNOC ed Einstein (Edge e Stewart 1991). Le abbondanze dei diversi campioni, ciascuna riferita ad un valore diverso di σ_v e ad un range diverso di redshift, sono state confrontate con le predizioni del formalismo di Press e Schechter (1974).

Uno studio simile e' stato fatto da Bahcall, Fan e Cen (1997), usando gli stessi dati osservativi piu' altri provenienti da un survey di ammassi lontani ($0.3 < z < 1$, PDCS, Postman et al. 1996), e confrontando queste osservazioni con i risultati di simulazioni cosmologiche ad N-body. Entrambi gli studi portano allo stesso risultato: l'evoluzione nell'abbondanza degli ammassi e' molto debole e negativa: circa un fattore 10 da $z = 0$ a $z = 0.5$. Confrontando questo vincolo con quello proveniente dalle abbondanze locali, si ottiene $\Omega_0 \approx 0.3$. Modelli con $\Omega = 1$ sono esclusi con un alto livello di confidenza. Questo risultato e' anche consistente con la normalizzazione del satellite COBE (Bunn e White 1996).

Infine, Ecke et al. (1998) hanno analizzato l'evoluzione in redshift dell'abbondanza di ammassi nell'X: $n(> T_x)$, trovando $\Omega_0 = 0.45 \pm 0.2$ (ad 1σ), ed escludendo il valore $\Omega_0 = 1$ al 98 % CL.

Sebbene queste misure sembrino favorire un universo aperto, il fatto che Ω_0 derivato dall'evoluzione delle abbondanze degli ammassi ($\Omega_0 \sim 0.4$, Carlberg et al. 1997) sia un po' diverso da quello dinamico ($\Omega_0 \sim 0.2$, Carlberg et al. 1997), e che quest'ultimo sia quasi inconciliabile con le stime di Ω_0 da velocita' peculiari su grande scala (e.g. Dekel 1995), mostra come ci devono essere ancora errori sistematici che non sono considerati e che biassano il risultato. Inoltre, lo studio della morfologia degli ammassi e la presenza di sottostrutture favorisce invece modelli con $\Omega_0 = 1$ (e.g. Mohr et al. 1995).

Uno studio piu' accurato dell'evoluzione delle abbondanze degli ammassi richiede quindi campioni omogeni e piu' estesi, completi fino almeno $z = 0.5$.

9.6.2 Evoluzione nell'X

Recentemente l'evoluzione in redshift delle proprieta' globali degli ammassi di galassie nell'X e' stata studiata da diversi gruppi.

Funzione di Luminosita'

Ebeling et al. (1997) hanno studiato la funzione di luminosita' X per il ROSAT BCS, un sample contenente i 199 ammassi ROSAT piu' luminosi del cielo con $\delta > 20°$. Il campione e' completo al 90%, flux limited, e si estende fino a $z < 0.3$. Questo campione e' particolarmente affidabile perche' non solo e' limitato in flusso, ma anche selezionato in banda X. La funzione di luminosita' e' stata modellata con un Schechter fit (1976):

$$\phi(L_X) = A \left(\frac{L_X}{L_X^*}\right)^{-\alpha} \exp\left(-\frac{L_X}{L_X^*}\right) \tag{9.22}$$

Il risultato principale di questa analisi e' l'assenza di evoluzione in $\phi(L_X)$ entro $z < 0.3$: il confronto di sottocampioni del BCS a diversi intervalli di redshift non mostrano un'evoluzione significativa ne' dell'ampiezza A ne' della luminosita' tipica L_X^*.

Rosati et al. (1998) ha usato un campione (flux limited) di 70 ammassi serendipeti di ROSAT PSPC per uno studio simile. I risultati indicano la non evoluzione di $\phi(L_X)$ fino a $z = 0.8$, per luminosita' $L_x < 3 \times 10^{44}$ erg/s. Un'evoluzione a luminosita' maggiori, in particolare per $L_x > L_X^* = 4 \times 10^{44}$ erg/s, non e' esclusa.

Conteggi

Collins et al. (1997) hanno raccolto un campione di 35 ammassi ROSAT, identificati come oggetti serendipeti da deep pointings di Rosat, con $0.3 < z < 0.7$ (SHARC = Serendipitous High-redshift Archival Rosat Clusters). Per stimare l'evoluzione in redshift dei conteggi gli autori hanno confrontato il numero di ammassi da loro trovati in diversi intervalli di redshift con il numero predetto estrapolando i conteggi locali ottenuti dalla $\phi(L_X)$ misurata per diversi campioni di ammassi vicini (De Grandi 1997; Ebeling et al. 1997). La compatibilita' tra i conteggi osservati e quelli predetti dalla $\phi(L_X)$ locale mostra che non esiste una'evoluzione significativa nella popolazione degli ammassi X per $z = 0.3 - 0.7$.

Leggi di Scala

Un confronto tra le relazioni $L_x - T_X$, $T_X - \sigma_v$ e $\sigma_v - L_X$ a diversi redshift e' stato fatto da Mushotzky e Scharf (1997). Gli autori hanno ricavato dall'archivio di ASCA le T_X medie per 38 ammassi di galassie con $z = 0.14 - 0.4$. Le luminosita' L_X per questi ammassi sono state prese da dati ROSAT o EINSTEIN. La relazione $L_X - T_X$ per questi ammassi risulta statisticamente identica a quella per gli ammassi a $z < 0.1$ di David et al. (1993). Dai dati non appare alcuna evoluzione nella $\langle T_X(z) \rangle$ per ammassi con $\log L_x \in [45.2, 45.7]$ erg s^{-1}. Gli autori hanno poi raccolto da letteratura stime della σ_v per questi ammassi, ed hanno confrontato le relazioni $\sigma_v - T_X$ e $\sigma_v - L_X$. Anche in questo caso non hanno trovato

alcuna differenza apprezzabile fra le relazioni locali e quelle a $z \approx 0.4$. Questi risultati suggeriscono che gli ammassi a $z = 0.4$ sono gia' evoluti, e che quindi $\Omega_0 < 1$, oppure che l'hot ICM sia stato pre-riscaldato ad alto redshift (Evrard & Henry 1991).

9.7 Evoluzione in redshift delle galassie di ammasso

9.7.1 Evoluzione in colore: effetto Butcher-Oemler

L'effetto piu' noto di evoluzione negli ammassi di galassie e' l'effetto Butcher-Oemler (BO) (Butcher & Oemler 1976; 1984): la frazione f_{BLUE} di galassie blu (definite come le galassie con colore $B - V$ piu' blu di almeno 0.2 rispetto al colore medio delle E/S0 alla stessa magnitudine assoluta), aumenta rapidamente con il redshift degli ammassi, passando da $f_{BLUE} \simeq 0.02$ a $z \simeq 0$ a $f_{BLUE} \simeq 0.20$ a $z \simeq 0.5$. Questo criterio identifica approssimativamente le galassie con significativa e recente formazione stellare. Osservazioni successive (Dressler et al. 1994) hanno infatti mostrato che le galassie blu sono perloppiu' normali spirali, con una frazione di morfologie perturbata ed evidenza spettrale di recente starburst.

I meccanismi fisici proposti per il BO effect sono due. Il primo e' il modello di infall (Dressler & Gunn 1983), dove la formazione stellare e' azionata dalla ram-pressure dell'ICM sulle galassie durante la loro prima caduta nel potenziale dell'ammasso. Il secondo e' il modello delle collisioni (Lavery & Henry 1988), in cui i burst di formazione stellare sono causati da effetti mareali in incontri tra le galassie nell'ammasso. Tuttora non e' chiaro quale meccanismo sia responsabile per questo effetto.

A prescindere dal meccanismo in se', l'aumento di galassie con formazione stellare attiva in ammassi ad alto redshift trova una spiegazione naturale nel modello di clustering gerarchico della formazione di strutture cosmiche (e.g. Kauffmann 1995; White 1995). In questo modello le strutture si formano per aggregazione gerarchica di unita' piu' piccole gia' esistenti, e quindi sistemi piu' massicci sono anche dinamicamente piu' giovani. Un ammasso di massa data, e.g. $M = 10^{15} M_\odot$, osservato ad alto redshift e' quindi un sistema piu' raro e massiccio che non uno stesso ammasso a $z = 0$, e come tale si e' formato ad un *look-back time* piu' piccolo. In questo contesto, l'effetto BO e' il segno che la frazione di massa accresciuta dall'ammasso nel suo passato recente ($\approx 1 - 2$ Gyr) e' maggiore per l'ammasso osservato ad alto redshift, da cui la maggior attivita' di formazione stellare, causata dall'interazione della massa accresciuta con l'ambiente e/o con le altre galassie nell'ammasso.

Le osservazioni dell'effetto BO sono tuttavia sensibili ad errori sistematici, perche' non sono di solito riferite ad un campione statisticamente completo di ammassi, e perche' effetti di proiezione possono contaminare f_{BLUE}. Per questo lo studio di questo effetto in un campione di ammassi selezionati nell'X sarebbe di grande interesse.

Le proprieta' di 10 ammassi ROSAT con $z \in [0.17, 0.3]$ sono state correlate con con la frazione f_{BLUE} da Wand & Ulmer (1997). Essi hanno trovato che f_{BLUE} e' fortemente correlata con l'ellitticita' delle isofote X: ammassi piu' ellittici hanno piu' galassie blu. Nell'ipotesi che ammassi piu' ellittici siano dinamicamente piu' giovani e stiano accrescendo materia, questo risultato suggerisce che il BO effect e' legato all'infall delle galassie nell'ammasso, favorendo cosi' il modello di infall di Dressler & Gunn.

9.7.2 Evoluzione morfologica

Lo studio morfologico delle galassie in ammassi a diversi redshift e' un altra maniera di studiarne l'evoluzione. Smail et al. (1996) hanno usato osservazioni HST per ottenere la classificazione morfologica di 1857 galassie in 11 ammassi con $z \simeq 0.5$. Gli autori hanno confrontato questa classificazione con quella delle galassie in ammassi locali osservate da Dressler (1980). I risultati di questa analisi mostrano che, rispetto al campione a $z = 0$, nel campione a $z = 0.5$ le spirali sono sovrabbondanti di un fattore 2, le S0 sono in deficit di un fattore 2-3, e le ellittiche sono sovrabbondanti di un fattore 1.5. Questo risultato sembra differenziare l'origine delle ellittiche da quella delle S0: almeno 50 % delle S0 osservate a $z = 0$ si sono formate a $z < 0.5$, e quindi sembrano originare da un'evoluzione delle spirali nell'ambiente dell'ammasso, a causa di uno o piu' dei meccanismi descritti sopra (o altri: ram pressure, interazioni, accretion,

stripping...). Al contrario, le ellittiche apparentemente si formano in modo indipendente dall'ambiente, e quindi potrebbero essere preesistenti all'epoca di virializzazione dell'ammasso stesso.

9.7.3 Evoluzione chimica e spettro-fotometrica

Lo studio della popolazione stellare delle galassie ellittiche (EG) negli ammassi costituisce un'altra fonte di informazione sui processi fisici importanti durante la loro formazione. Le proprieta' osservate in galassie ellittiche in ammassi locali includono, in particolare, le seguenti:

1. Eta' delle EG: la popolazione stellare delle EG luminose e' sostanzialmente *vecchia*, dove il significato del termine verra' specificato in seguito;
2. Piano Fondamentale (FP): esiste una relazione molto stretta tra raggio effettivo R_e delle galassie (i.e. il raggio che include meta' della magnitudine totale), brillanza superficiale μ_e entro tale raggio e dispersione delle velocita' stellari σ_e entro tale raggio (Dressler et al. 1987; Djorgovski e Davis 1987). La relazione: $R_e \propto \sigma_e^{1.25}\mu_e^{-0.82}$ viene solitamente interpretata come l'applicazione del teorema del viriale, con un tilt dovuto alla variazione del rapporto M/L con la massa.
3. Relazione colore-magnitudine (C-M): EG piu' luminose sono piu' rosse di quelle meno luminose; la dispersione in questa relazione e' molto piccola, $\simeq 0.05$ mag (e.g. Bower, Lucy e Ellis 1992 per Virgo e Coma);
4. Relazione $Mg - \sigma$: le linee metalliche in assorbimento sono piu' intense in EG luminose (e.g. relazione $Mg - \sigma$ tra l'indice di assorbimento del Mg e la dispersione centrale di velocita' σ); anche qui la dispersione e' molto piccola, $\simeq 0.025$ mag (Bender, Burstein e Faber 1993);

Le variazioni di colore nelle EG possono essere interpretate in termini di *(i) eta':* una popolazione stellare piu' vecchia ha un colore piu' rosso; *(ii) metallicita':* a parita' di massa, una stella con metallicita' piu' alta ha una fotosfera piu' rossa. [brucia ad una temperatura minore, quindi e' piu' rossa e dura di piu'?] La combinazione di questi due processi porta alla cosiddetta *degenerazione tra eta' e metallicita'*, per cui una popolazione stellare con piu' di 2 Gyr, ha sostanzialmente gli stessi colori nel visibile e nel vicino IR di un'altra popolazione con metallicita' piu' grande di un fattore 2, ma piu' giovane di un fattore 3; cioe' $\Delta age/\Delta Z \approx 3/2$ (Worthey 1994). La piccola dispersione nelle relazioni C-M e Mg-σ porta a concludere che la popolazione stellare di queste galassie dev'essere molto simile in eta' o in metallicita'.

L'avvento di telescopi di classe 8m e dell'HST ha permesso di misurare le corrispondenti relazioni in ammassi lontani fino a redshift $z = 0.9$ (Bender, Ziegel & Bruzual 1996; Ellis, Smail, Dressler, Couch, Oemler, Butcher & Sharples 1997; Dickinson 1996; Stanford, Eisenhardt & Dickinson 1997). In sunto, i risultati di questi studi mostrano che:

1. il colore medio delle EG negli ammassi diventa gradualmente e monotonicamente piu' blu all'aumentare del redshift, in maniera approssimativamente consistente con modelli di evoluzione passiva (e.g. Bruzual e Charlot 1993; Charlot 1995).
2. la dispersione nelle relazioni C-M e Mg-σ ad alto redshift e' simile a quella misurata localmente;
3. la slope nella relazione C-M non cambia andando ad alto redshift;

Il modello tradizionalmente invocato per spiegare la regolarita' e la strettezzza di queste correlazioni e' quello 'classico', in cui le galassie si sono formate ad un redshift $z > 3$ con un collasso monolitico ed un burst di formazione stellare, con successiva evoluzione passiva (Eggen, Lynden-Bell & Sandage 1962; Larson 1975). Uno scenario alternativo, in accordo con le piu' recenti osservazioni, e' quello del clustering gerarchico, che va accoppiato con un modello per l'evoluzione chimica delle galassie e con un modello di sintesi della popolazione stellare (e.g. Charlot e Bruzual 1991; Bruzual & Charlot 1993; Worthey 1994; Charlot 1995; Kauffmann & Charlot 1998).

In sunto, lo schema di formazione delle galassie in questi modelli e' il seguente (White e Frenk 1991; Kauffman, White & Guiderdoni 1994; Cole et al. 1994; Baugh, Cole e Frenk 1996; Kauffmann & Charlot 1998):

1. usando il formalismo di Press&Schechter si generano delle realizzazioni Monte Carlo della merging history di una popolazione di aloni di materia oscura da un alto redshift al tempo presente.

2. dato un universo con frazione barionica Ω_b, il gas cade nelle buche di potenziale degli aloni di materia oscura, lo shock lo riscalda alla temperatura viriale dell'alone e, se il tempo di cooling e' sufficientemente piccolo, il gas puo' raffreddarsi ed addensarsi al centro dell'alone in un disco supportato dalla propria rotazione. Le dimensione del disco e' solo una frazione (e.g. 10%) della dimensione dell'alone di materia oscura che lo ospita.

3. quando il gas ha una densita' sufficiente, viene trasformato in stelle con un rate:

$$\dot{M}_{stars} = \alpha M_{cold\ gas}/t_{dyn} \tag{9.23}$$

   simile a quello osservato in galassie spirali locali. Una frazione della massa in stelle, determinata dalla IMF, viene fatta esplodere come SN e una frazione dell'energia rilasciata E_{SN} viene re-immessa nel mezzo interstellare; questa energia riscalda parte del gas freddo del disco:

$$\Delta M_{reheat} = \eta \dot{M}_{stars} \Delta t \frac{E_{SN}}{V_c^2} \tag{9.24}$$

   e lo re-immette in circolo nell'alone, insieme ai metalli prodotti dall'esplosione. V_c e' la velocita' circolare dell'alone, che misura la profondita' della sua buca di potenziale.

4. con l'andare del tempo, aloni piu' piccoli coalescono insieme e formano strutture piu' massiccie. Questi fenomeni di merging provocano nuovo riscaldamento da shock e successivo raffreddamento del gas residuo nel centro del nuovo alone, e nuova formazione stellare e feedback da SN. Merging tra masse simili porta alla formazione di galassie ellittiche, e il gas residuo e' convertito in stelle con uno starburst. Merging tra masse dissimili porta ad un sistema con una galassia centrale e dei satelliti; la formazione stellare e'permessa solo nella galassia centrale, che e' al centro della buca di potenziale del nuovo alone;

In aloni piu' piccoli le buche di potenziale sono meno profonde; per questo Eq.(9.24) va come $1/V_c^2$, ed il feedback da SN e' piu' efficace nell'evacuare i metalli prodotti dalla galassia ospite, e nel ridistribuirli nell'alone di materia oscura. Galassie in aloni piu' massicci si comportano invece come closed boxes, e quindi ritengono piu' metalli.

Poiche' la maggior parte delle stelle che formano una EG si sono formate in dischi subgalattici prima del merging che ha originato la galassia, la popolazione stellare delle EG e' naturalmente vecchia, con un'eta' che ad ogni redshift e' proporzionale al tempo di Hubble. Le relazioni C-M e Mg-σ sono dovute principalmente alla diversa metallicita' in funzione della massa; la dispersione delle relazioni e' dovuta a piccole differenze in eta' e metallicita', e risulta molto piccola e consistente con le osservazioni. Queste relazioni si producono allo stesso modo a basso ed alto redshift, quindi la loro slope e dispersione sono molto simili per tutti i $z < 1$. Per questo l'unica differenza tra le proprieta' di EG in un ammasso a $z \simeq 0.8$ e quelle in un ammasso a $z = 0$ e' data dall'evoluzione passiva delle rispettive popolazioni.

Tuttavia, un ammasso ricco a $z = 1$ non e' il progenitore di un ammasso ricco a $z = 0$, ma rappresenta una struttura molto piu' rara che si e' formata ad un redshift molto maggiore della media. Quindi osservare le EG in ammassi ricchi seleziona sistematicamente le galassie piu' vecchie ad ogni redshift. Questo bias osservativo non permette di trarre conclusioni estendibili alla popolazione totale delle EG. In particolare, e' incorretto determinare l'eta' di EG di un ammasso a $z = 0$ da osservazioni di un ammasso a e.g. $z = 0.8$.

Affermazioni sulle proprieta' medie delle EG richiedono dei redshift surveys statisticamente completi. Un test statistico sulle EG del Canada-France Redshift Survey (CFRS; Lilly et al. 1995) ha mostrato che la popolazione delle EG nel campione ha evoluto in modo significativo tra $z = 1$ e $z = 0$, e che a $z = 1$ la popolazione di EG e' ridotta ad un terzo di quella a $z = 0$ (Kauffmann, Charlot e White 1996). Nel modello di clustering gerarchico gli altri due terzi possono essere galassie che hanno ancora attiva star formation, e quindi non hanno il colore delle EG, oppure sono sub-unita' meno luminose che per $z = 0$ saranno incorporate in EG.

9.8 Ricerca di ammassi ad alto redshift

In questa sezione discutero' alcune tecniche osservative per l'identificazione di ammassi di galassie ad alto redshift ($z > 0.5$).

L'osservazione e lo studio di questi sistemi sono motivati da diversi interessi. Tra questi: (1) la ricerca dell'epoca di formazione delle galassie ellittiche, che si trovano principalmente negli ammassi e che costituiscono forse i sistemi stellari di dimensione galattica piu' vecchi dell'universo; (2) l'evoluzione della popolazione di galassie blu che produce l'effetto "Butcher-Oemler"; (3) l' evidenza di massicci sistemi collassati ad alto redshift come importante vincolo per i modelli cosmologici e per le teorie di formazione delle strutture cosmiche.

Il problema osservativo principale in questa ricerca e' dato dal fatto che al crescere del redshift diminuisce il contrasto con cui gli ammassi si evidenziano contro il background. Infatti, la densita' superficiale in galassie nel core di un ammasso diminuisce drammaticamente per $z > 1$, per l'effetto combinato dei seguenti motivi: (1) l'indebolimento delle galassie a causa della maggior distanza; (2) l'ulteriore indebolimento per la correzione K che e' drammatica nell'ottico per galassie ellittiche a $z > 0.5$; (3) questi due effetti non sono controbilanciati dall'aumento della SB in galassie per la diminuzione della scala angolare dell'ammasso, che diminuisce piu' lentamente per $z > 0.5$. Questo fa si' che la ricerca di ammassi a $z > 1$ richieda osservazioni molto profonde, e quindi telescopi di grande apertura e lunghi tempi di esposizione.

A seconda del tipo di osservazione richiesto, le tecniche per la ricerca di ammassi lontani si dividono in: (1) imaging e wide field imaging; (2) fotometria in una o piu' bande. E' chiaro comunque che, una volta identificato un candidato ammasso con una di queste tecniche, la conferma puo' solo venire dalla misura spettroscopica del redshift delle galassie che lo compongono.

9.8.1 Tecniche basate sull'imaging

Sono la piu' semplice estensione delle tecniche usate per identificare gli ammassi locali.

1. Un esempio e' la tecnica proposta ed utilizzata da Postman et al (1996) per la costruzione del Palomar Distant Clusters Survey (PDCS). Partendo da un imaging survey a grande campo, gli ammassi sono identificati da un algoritmo che misura le fluttuazioni nel numero di galassie rispetto al background, usando tecniche di massima verosimiglianza basate su un modello della distribuzione spaziale e in luminosita' delle galassie di un ammasso. Questa tecnica, che fornisce anche una stima del redshift e della ricchezza dell'ammasso, ha portato all'identificazione di 179 ammassi di galassie con redshift stimato $0.3 < z < 0.9$ in un survey di 5 gradi quadrati.

2. Un'altro metodo (Dalcanton (1996)) sfrutta il fatto che la SB media di un ammasso emerge dal background se viene osservato su scale sufficientemente grandi. Consideriamo un'esposizione in cui la magnitudine limite non permette di risolvere individualmente le galassie di un ammasso lontano, in quanto la loro SB e' minore di quella del background. Se l'immagine viene filtrata su una scala simile all'estensione del core dell'ammasso (tipicamente ~ 10 arcsec), il pixel-to-pixel noise diminuisce drammaticamente, e diventa possibile identificare l'ammasso come fluttuazione di SB nel background. Con questa tecnica e' possibile usare esposizioni relativamente corte per identificare ammassi a redshift $z > 1$. In questo modo Dalcanton (1996) e Dalcanton et al. (1997) hanno identificato, partendo da esposizioni di meno di un minuto sul telescopio Palomar di 5m, ammassi di galassie spettroscopicamente confermat a $z = 0.6 - 1.2$. Questa tecnica puo' essere usata in modo estensivo per ottenere, da immagini piu' profonde e a largo campo, un campione di ammassi statisticamente completo fino a $z = 1$ od oltre.

9.8.2 Tecniche fotometriche e di multicolor

In mancanza di un survey profondo ad ampio campo, e' possibile concentrare la ricerca di ammassi nelle vicinanze di altri oggetti identificati ad alto redshift. Ad esempio, le radiogalassie sono spesso associate

a fenomeni di clustering (e.g. Hill & Lilly 1991). La presenza o meno di un ammasso si puo' verificare con le seguenti tecniche:

1. *imaging IR*: Un modo per aumentare il contrasto in SB di un ammasso lontano e' cercarlo nel near IR, dove l'aumento del numero di galassie di background con il redshift e' meno rapido, e la correzione K per le galassie ellittiche e' piu' piccola.

2. *colori ottico-IR*: E' possibile sfruttare il diverso colore delle galassie ellittiche rispetto a quelle del background: immagini in multiplexing (osservazione simultanea in piu' bande, ottenuta dividendo il segnale con dei filtri dicroici), prese in bande fotometriche scelte accuratamente (e.g. R e K), permettono di evidenziare piu' facilmente galassie in ammassi lontani che non usando singole bande.

   Usando queste due tecniche insieme, Dickinson & Eisenhardt (1997) hanno effettuato una ricerca sistematica di ammassi lontani intorno a radiogalassie a $0.8 < z < 1.4$, trovando diversi candidati ammassi.

3. *colori IR*: Come il contrasto ottico-IR permette di evidenziare galassie ellittiche a $z \geq 1$, cosi' contrasti IR-IR possono evidenziare galassie in ammassi a $z > 2$. Sebbene queste tecniche non siano ancora state utilizzate in pratica, modelli di sintesi di popolazione mostrano che le galassie ellittiche a tale redshift hanno dei colori IR che permetterebbero facilmente la loro separazione rispetto alle galassie blu del campo.

4. *Lyman dropouts*: A redshift ancora maggiore: $z > 3$ il Lyman limit ($912\AA$) passa nel visibile (banda U). L'osservazione di questo break spettrale con un set opportuno di filtri permette di identificare galassie con $3 < z < 3.5$ (e.g. Steidel et al. 1995, 1996, 1997). Il Lyman break e' pero' visibile in ogni tipo di galassia, e quindi questo metodo non e' forse ottimale per ricercare galassie in ammassi, anche se ha portato ad identificare un eccesso di galassie intorno a due radiogalassie a $z = 3.6$ e $z = 3.8$ (Giavalisco et al. 1997; Lacy & Rawlings 1996).

5. *narrow band photometry*: Sempre a $z > 2$, si puo' utilizzare fotometria a banda stretta per identificare linee in emissione (e.g. Lyman α, Balmer lines, [OII]), presenti in AGN o in galassie con attiva formazione stellare. A tali redshift e' infatti possibile che molte galassie, anche in ammassi, siano attive nella formazione stellare. Anche lo studio di linee in assorbimento nell'IR potra' in futuro essere utilizzato (e.g. con VIRMOS/NIRMOS su VLT) per studiare le proprieta' della popolazione stellare piu' vecchia nelle galassie in ammassi e nel campo.

Capitolo 10

Excursion sets e funzioni di massa

Dispense per il corso di Cosmologia Modulo A
G.Tormen, Dipartimento di Astronomia, Università di Padova
(31 gennaio 2002)

10.1 Introduzione

Partiamo dalla solita ipotesi che a tempi remoti le fluttuazioni di densità siano molto piccole: $\delta \ll 1$ e formino un campo stocastico Gaussiano omogeneo ed isotropo $\delta(\vec{x}, t) = \delta(\vec{x}, t_0)D(t)/D(t_0)$, dove $D(t)$ è il fattore di crescita lineare delle perturbazioni, $\vec{x}$ è la coordinata comovente e t_0 è un tempo di riferimento, per esempio il tempo attuale. In tal caso il campo $\delta(\vec{x}, t)$ è unicamente specificato dalla conoscenza dello spettro di potenza delle fluttuazioni: $P(k, t)$.

La crescita lineare vale finché l'ampiezza delle fluttuazioni non si avvicina all'unità; a quel punto gli effetti non lineari diventano importanti e la regione si separa dalla generale espansione dell'universo e collassa formando un alone virializzato. All'epoca della formazione dell'alone virializzato il contrasto di densità predetto dalla teoria lineare avrà raggiunto un dato valore critico δ_c che viene calcolato dal modello del collasso sferico. Il valore di δ_c dipende debolmente dal modello cosmologico attraverso i parametri Ω_m ed Ω_Λ: come valore di riferimento si può ricordare

$$\delta_c = 1.686. \tag{10.1}$$

La crescita delle fluttuazioni si può vedere anche nel modo seguente: anziché pensare ad un campo δ che evolve nel tempo e ad una soglia critica δ_c statica, possiamo trasferire la dipendenza temporale alla soglia, moltiplicando tutto per $D(t_0)/D(t)$. Questo equivale a considerare il campo di fluttuazioni lineari $\delta(\vec{x}) \equiv \delta(\vec{x}, t_0)$ riscalato al tempo t_0, e una soglia critica $\delta_c(t) = \delta_c D(t_0)/D(t)$ che si abbassa al crescere del tempo t. Come esempio, ricordiamo che per universi di Einstein-de Sitter ($\Omega = 1$) il fattore di crescita in funzione del redshift z va come: $D(z) \propto (1 + z)$ e che quindi $\delta_c(z) = \delta_c(1 + z)$.

In questo contesto, fondiamo il nostro modello di collasso sulla seguente ipotesi (che specificheremo meglio nel seguito): l'elemento infinitesimo di massa in $\vec{x}$ farà parte di un alone di massa maggiore od uguale ad M al tempo t se la fluttuazione lineare $\delta_f(\vec{x}; R)$, centrata in $\vec{x}$ e filtrata su una sfera di raggio $R \propto M^{1/3}$ ha un valore uguale o al di sopra della soglia richiesta:

$$\vec{x} \in M \quad \Longrightarrow \quad \delta_f(\vec{x}; R) \geq \delta_c(t). \tag{10.2}$$

Questa idea fu proposta per la prima volta da Press e Schechter (1974). Per questo il modello per la funzione di massa viene anche detto modello di Press-Schechter.

10.2 Cammini Browniani

Per esprimere in modo più preciso questo concetto ricordiamo che il campo di densità $\delta_f(\vec{x}; R)$ filtrato su una data scala R è la convoluzione del campo puntuale $\delta(\vec{x})$ con una funzione finestra $W(\vec{x}, R)$ di

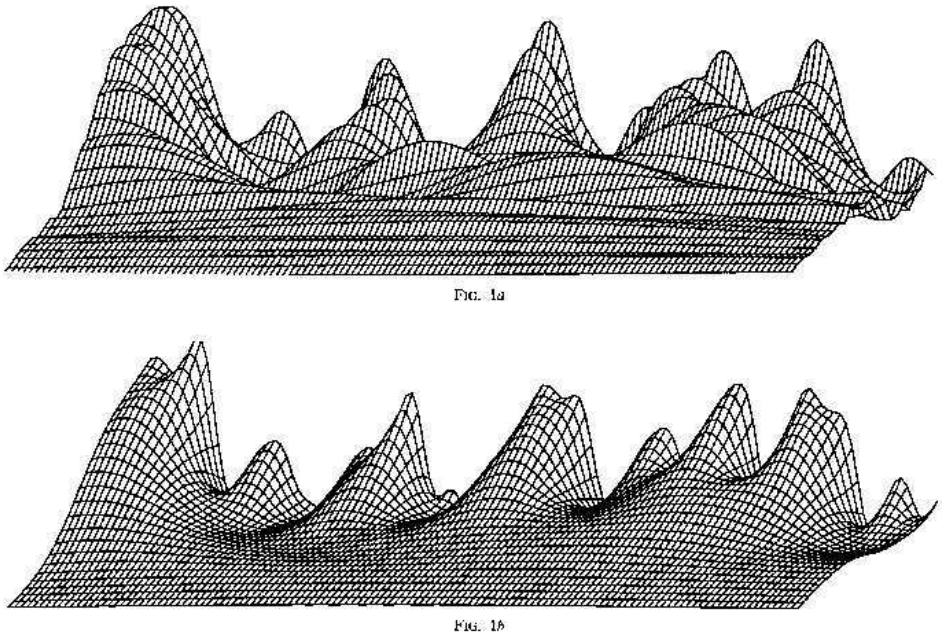

Figura 10.1: Realizzazione di un campo stocastico Gaussiano 1-dimensionale filtrato su scala k_f; in ascissa la posizione x; in profondità il raggio di filtraggio (piccoli k davanti); in ordinata l'ampiezza del campo $\delta_f(x, k_f)$. Nel pannello superiore il filtro è un top-hat nello spazio di Fourier; in quello inferiore è un filtro Gaussiano nello spazio reale (da Bond et al., 1991).

ampiezza tipica R. Un esempio di tale campo filtrato è dato in Fig. 10.1. Scomponendo $\delta_f(\vec{x}; R)$ in integrale di Fourier otteniamo un'espressione del tipo

$$\delta_f(\vec{x}; R) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^3k \hat{\delta}(k) \hat{W}(kR) = \frac{1}{2\pi^2} \int_0^\infty dk k^2 \hat{\delta}(k) \hat{W}(kR) \approx \frac{1}{2\pi^2} \int_0^{k_f} dk k^2 \hat{\delta}(k) \equiv \delta_f(\vec{x}; k_f) \tag{10.3}$$

dove $k_f \propto 1/R$ è il numero d'onda corrispondente al raggio di filtraggio R, e dove non compare l'esponenziale perché per semplicità ci mettiamo in $\vec{x} = 0$. Dall'integrale si vede come $\delta_f(\vec{x}; R)$ sia la somma di tutte le fluttuazioni ad onda piana con $k <\approx k_f$ - ricordiamo che la funzione finestra agisce come filtro passa-basso e quindi elimina il contributo delle onde con $k >\approx k_f$. Possiamo allora considerare, per ogni punto $\vec{x}$, il cammino tracciato nello spazio bidimensionale $(k_f, \delta_f(\vec{x}; k_f))$ dalla fluttuazione δ_f centrata in $\vec{x}$ e filtrata su una scala corrispondente al numero d'onda k_f.

In realtà, come vedremo di seguito, la coordinata appropriata da usare per la scala di filtraggio è la varianza di massa filtrata su scala k_f:

$$\sigma_R^2 = \frac{1}{2\pi^2} \int_0^\infty dk k^2 P(k) \hat{W}^2(kR) \approx \frac{1}{2\pi^2} \int_0^{k_f} dk k^2 P(k) \equiv S(k_f); \tag{10.4}$$

in tutti i casi di interesse $S(k_f)$ è una funzione monotona crescente di k_f, tale che $S(k_f = 0) = 0$ e $S(k_f \to \infty) \to \infty$. Ogni traiettoria inizierà nel punto $(S, \delta_f) = (0, 0)$, corrispondente ad una fluttuazione nulla e ad un raggio di filtraggio infinito, e si allontanerà dall'origine in maniera stocastica, a seconda della distribuzione di materia intorno al punto $\vec{x}$, come illustrato in Figg. 10.2 e 10.3.

Se prendiamo come funzione finestra una funzione a gradino 3-dimensionale nello spazio di Fourier (un filtro top-hat in k), allora i contributi dei diversi k al campo $\delta_f(\vec{x}; k_f)$ sono tra loro scorrelati. In questo caso si dimostra che la traiettoria percorsa da δ_f è un moto Browniano nello spazio bidimensionale (S, δ_f),

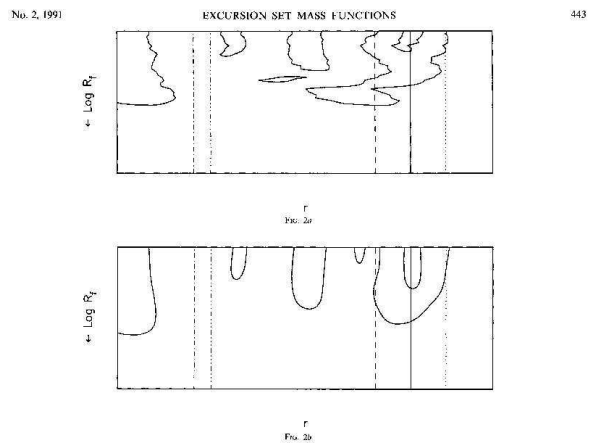

Figura 10.2: Linee di isodensità corrispondenti ad una stessa soglia δ_c nei due casi di filtro top-hat in k (sopra) e Gaussiano (sotto) (da Bond et al., 1991).

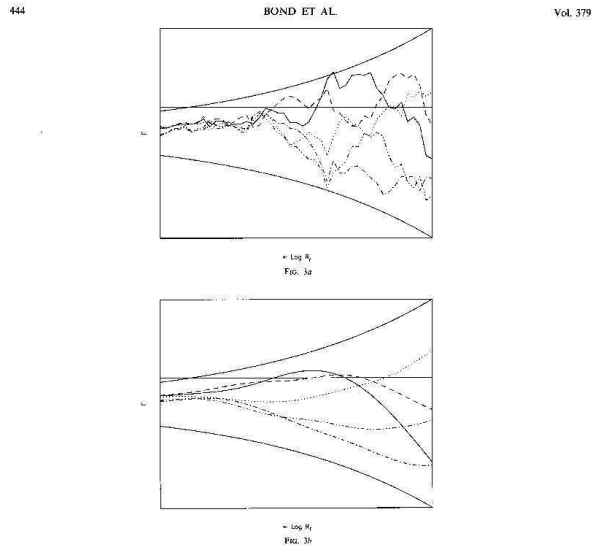

Figura 10.3: Traiettorie nello spazio (S, δ_f) corrispondenti alle 5 posizioni indicate da lineee verticali nella figura precedente. Solo se il filtro è un top-hat in k (pannello superiore) le traiettorie corrispondono a cammini Browniani. Nel caso in basso (filtro Gaussiano) il moto delle traiettorie è invece correlato in k (da Bond et al., 1991).

descritto dall'equazione di diffusione

$$\frac{\partial Q}{\partial S} = \frac{1}{2}\frac{\partial^2 Q}{\partial \delta_f^2} \tag{10.5}$$

dove $Q(\delta_f, S)$ è la distribuzione di probabilità nella variabile stocastica δ_f per le traiettorie che hanno un dato valore di $\sigma^2(k_f) = S$.

Nel caso generico di un cammino Browniano libero, la soluzione dell'equazione di diffusione è una semplice distribuzione di probabilità Gaussiana:

$$Q(\delta_f, S) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} S^{1/2}} \exp\left(-\frac{\delta_f^2}{2S}\right) \tag{10.6}$$

Questa distribuzione ci dice qual è, per ogni valore di S fissato, la densità numerica di traiettorie nell'intervallo $[\delta_f, \delta_f + d\delta]$, come esemplificato in Fig. 10.4. In pratica S ha il ruolo che ha la variabile temporale t in un moto Browniano classico, ed il cammino Browniano delle traiettorie che si allontanano dall'origine al sommarsi dei numeri d'onda k corrisponde al moto Browniano classico di una particella che si allontana dall'origine all'aumentare di t.

10.3 Modello degli excursion sets

L'uso dei cammini Browniani nello spazio (S, δ_f) permette di formulare il modello detto degli *excursion sets*, proposto da Bond et al. (1991) come reinterpretazione del modello di Press-Schechter. L'idea fondamentale di questo modello è la seguente: le traiettorie che - partendo dall'origine e all'aumentare di S - toccano per la prima volta un'ordinata $\delta_f = \delta_c(t)$ in corrispondenza dell'ascissa S corrispondono ad elementi di fluido che al tempo t appartengono ad aloni di massa $M(S)$. Visto in altra maniera, ogni tempo t determina una soglia - o barriera - orizzontale $\delta_c(t)$ che sarà attraversata da una data traiettoria Browniana per la prima volta in corrispondenza di una qualche ascissa S. Allora, al tempo t l'elemento

di massa associato a questa traiettoria farà parte di una alone di massa $M(S)$. Ricordiamo che il legame tra S ed M è dato implicitamente dall'eq. (10.4) tramite $k_f \propto 1/R \propto M^{-1/3}$.

La richiesta che la traiettoria tocchi la soglia $\delta_c(t)$ per la prima volta corrisponde a prendere il massimo raggio di filtraggio $R = R_{max}$ (cioè il minimo valore di k_f o S) per il quale la sfera di raggio R al tempo t ha una sovradensità maggiore o uguale a $\delta_c(t)$. Anche se per raggi $R < R_{max}$ la sfera non è sopra la densità critica necessaria al collasso (e quindi ha $\delta_f(R < R_{max}) < \delta_c(t)$), l'elemento di massa associato al centro della sfera farà parte di un alone di massa $M(R_{max})$ perchè la regione è invece collassata su una scala R_{max}.

Per calcolare la funzione di massa degli aloni di materia oscura, ovvero la distribuzione in massa delle strutture virializzate a ciascun tempo t, dobbiamo saper contare i vari tipi di traiettoria in riferimento al valore della soglia $\delta_c(t)$. Consideriamo quindi una scala critica k_0, corrispondente ad una varianza S_0, ed un tempo t. In questa situazione ci sono tre tipi di traiettorie possibili:

(i) traiettorie che sono passate sopra la barriera per qualche valore $k_f < k_0$ e che si trovano ancora sopra la barriera:

$$\delta_f(k_0) \geq \delta_c(t); \tag{10.7}$$

(ii) traiettorie che si trovano sotto la barriera per $k_f = k_0$ ma che l'hanno oltrepassata ad un valore minore dell'ascissa:

$$\delta_f(k_0) < \delta_c(t) \quad \text{ma} \quad \exists\, k_f < k_0 \quad \text{tale che} \quad \delta_f(k_f) > \delta_c(t); \tag{10.8}$$

(iii) traiettorie che sono sempre state sotto la barriera:

$$\delta_f(k_f) < \delta_c(t) \quad \forall k_f \leq k_0. \tag{10.9}$$

In particolare, vogliamo contare le traiettorie di tipo (iii), che corrispondono ad elementi di fluido che al tempo t appartengono ad aloni di massa $M < M(S_0)$. Per farlo dobbiamo sottrarre dal numero totale di traiettorie che al tempo t stanno sotto la soglia $\delta_c(t)$ - dato da eq. (10.6) - quelle che ad un tempo precedente l'avevano superata, cioè le traiettorie di tipo (ii).

Poiché il cammino delle traiettorie è determinato dall'aggiunta di modi di Fourier indipendenti (ricordiamo che ci siamo messi nel caso di un filtro top-hat nello spazio k), in qualsiasi istante una traiettoria ha egual probabilità di muoversi verso l'alto o verso il basso. In particolare, questo vuol dire che per ogni traiettoria di tipo (ii) ce n'è una virtuale - altrettanto probabile - che incrocia la soglia nello stesso punto $(S, \delta_c(t))$ provenendo dall'alto anziché dal basso, e che si ottiene riflettendo intorno all'asse $\delta_c(t)$ la parte di traiettoria che precede il primo incrocio con la soglia.

Questa traiettoria virtuale corrisponde ad un cammino Browniano che parte da $(S, \delta_f) = (0, 2\delta_c(t))$, ma a parte la differenza di origine è una traiettoria come le altre, soddisfa alla stessa equazione di diffusione ed ammette la stessa soluzione Eq. (10.6), con l'accortezza di traslare il centro della distribuzione Gaussiana dallo zero a $2\delta_c(t)$. La probabilità associata alle traiettorie di tipo (ii) è perciò

$$Q_1(\delta_f, S, \delta_c(t))d\delta_f = \frac{1}{\sqrt{2\pi S}} \exp\left[-\frac{(\delta_f - 2\delta_c(t))^2}{2S}\right] d\delta_f; \tag{10.10}$$

la probabilità associata alle traiettorie che al tempo t non hanno mai ancora toccato la barriera $\delta_c(t)$ sarà quindi la differenza

$$\begin{aligned} Q_2(\delta_f, S, \delta_c(t))d\delta_f &= [Q(\delta_f, S) - Q_1(\delta_f, S, \delta_c(t))]\, d\delta_f \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi S}} \left\{ \exp\left(-\frac{\delta_f^2}{2S}\right) - \exp\left[-\frac{(\delta_f - 2\delta_c(t))^2}{2S}\right] \right\} d\delta_f \end{aligned} \tag{10.11}$$

Si può dimostrare (Chandrasekhar, 1943) che questa è proprio la soluzione dell'equazione di diffusione delle traiettorie stocastiche percorse dagli elementi di fluido - eq. (10.5) - ora però con la speciale condizione al contorno che le traiettorie che incontrano la soglia $\delta_c(t)$ vengano assorbite.

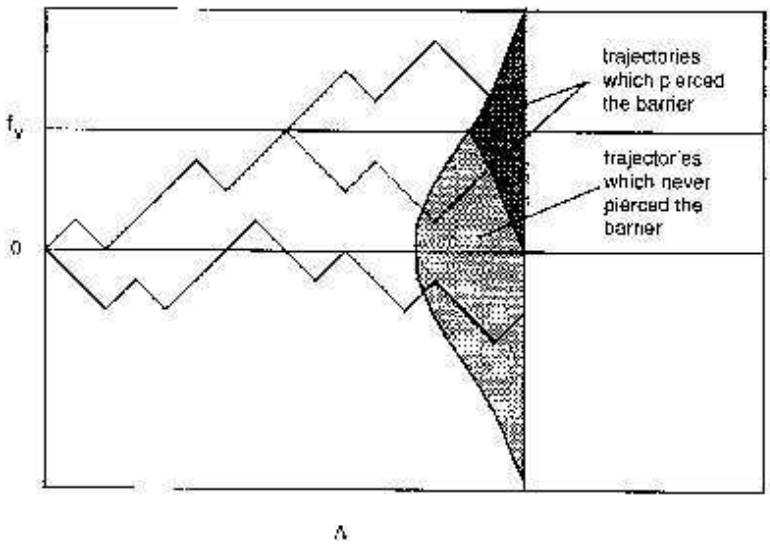

Figura 10.4: Esempio schematico di cammini stocastici e delle probabilità Q, Q_1 e Q_2 associate al dato valore di S (da Bond et al., 1991).

La frazione di traiettorie che entro un tempo t non hanno ancora superato la barriera $\delta_c(t)$ è la probabilità cumulativa ottenuta integrando l'espressione precedente da $-\infty$ a $\delta_c(t)$:

$$P_2(S, \delta_c(t)) = \int_{-\infty}^{\delta_c(t)} Q_2(\delta_f, S, \delta_c(t)) d\delta_f. \tag{10.12}$$

La frazione di traiettorie che hanno già incontrato la barriera ad un tempo minore di t è la complementare:

$$\bar{P}_2(S, \delta_c(t)) = 1 - P_2(S, \delta_c(t)); \tag{10.13}$$

quest'ultima espressione rappresenta la frazione numerica di elementi di fluido che al tempo t appartengono ad aloni di massa M associata ad una varianza $< S$, ovvero la frazione di massa che al tempo t è in aloni di varianza $< S$. Ma questa è la definizione di funzione di massa cumulativa al tempo t, espressa nella variabile S:

$$\bar{P}_2(S, \delta_c(t)) = P(< S, t). \tag{10.14}$$

10.4 Funzione di massa

La funzione di massa differenziale, ovvero la probabilità che al tempo t un elemento di fluido appartenga ad un alone di massa intorno ad M, è la distribuzione di probabilità delle traiettorie che incontrano la barriera per la prima volta al tempo t e nel punto S, e si ottiene differenziando la distribuzione cumulativa rispetto alla varianza S:

$$p(S, \delta_c(t)) \equiv \frac{\partial \bar{P}_2(S, \delta_c(t))}{\partial S} = -\frac{\partial P_2(S, \delta_c(t))}{\partial S} = -\frac{\partial}{\partial S} \int_{-\infty}^{\delta_c(t)} Q_2(\delta_f, S, \delta_c(t)) d\delta_f. \tag{10.15}$$

Portiamo la derivata sotto il segno di integrale e sfruttiamo l'equazione di diffusione (10.5) per sostituire la derivata rispetto ad S con la derivata seconda rispetto a δ_f; avremo

$$p(S, \delta_c(t)) = -\frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\delta_c(t)} \frac{\partial^2 Q_2}{\partial \delta_f^2} d\delta_f = -\frac{1}{2} \frac{\partial Q_2}{\partial \delta_f} \Big|_{-\infty}^{\delta_c(t)}. \tag{10.16}$$

Differenziando l'eq. (10.11) si ottiene

$$\frac{\partial Q_2}{\partial \delta_f} = \frac{1}{\sqrt{2\pi S}} \left\{ \frac{-\delta_f}{S} \exp\left[-\frac{\delta_f^2}{2S}\right] + \frac{(\delta_f - 2\delta_c(t))}{S} \exp\left[-\frac{(\delta_f - 2\delta_c(t))^2}{2S}\right] \right\}. \tag{10.17}$$

Questa funzione in $-\infty$ è nulla perché contiene termini del tipo $\exp(-\infty)$ che dominano possibili divergenze. In eq. (10.16) rimane quindi solo il termine calcolato in $\delta_c(t)$, per cui

$$\begin{aligned} p(S, \delta_c(t)) \equiv \frac{df(S)}{dS} &= -\frac{1}{2}\frac{\partial Q_2}{\partial \delta_f}\Big|^{\delta_c(t)} = \frac{-1}{\sqrt{2\pi S}} \frac{(-2\delta_c(t))}{S} \exp\left[-\frac{\delta_c^2(t)}{2S}\right] \\ &= \frac{\delta_c(t)}{\sqrt{2\pi} S^{3/2}} \exp\left[-\frac{\delta_c^2(t)}{2S}\right]. \end{aligned} \tag{10.18}$$

Quest'espressione fornisce la frazione di massa in aloni con varianza intorno ad S. La frazione di massa in aloni di massa intorno ad M si ottiene cambiando variabile da S ad M tramite la legge di conservazione della probabilità:

$$p(x)dx = p(y)dy \quad \Rightarrow \quad p(x) = p(y) \left|\frac{dy}{dx}\right| \tag{10.19}$$

per cui

$$\frac{df(M)}{dM} = \frac{df(S)}{dS} \left|\frac{dS}{dM}\right|. \tag{10.20}$$

Ora,

$$\left|\frac{dS}{dM}\right| = \frac{S}{M} \left|\frac{d\ln S}{d\ln M}\right| = \frac{2S}{M} \left|\frac{d\ln \sigma}{d\ln M}\right| \tag{10.21}$$

da cui segue

$$\frac{df(M)}{dM} = \left(\frac{2}{\pi}\right)^{1/2} \frac{\delta_c(t)}{M\sigma(k_f)} \left|\frac{d\ln\sigma}{d\ln M}\right| \exp\left[-\frac{\delta_c^2(t)}{2\sigma^2(k_f)}\right]. \tag{10.22}$$

Data questa espressione, il numero di aloni di massa M in un volume V contenente una massa totale M_V è ovviamente

$$\frac{df(M)}{dM}\frac{M_V}{M}; \tag{10.23}$$

se prendiamo un volume unitario (per cui $V = 1$ e $M_V = \varrho_0$) otterremo la densità numerica di aloni di massa M:

$$\frac{dn(M)}{dM} = \frac{df(M)}{dM}\frac{\varrho_0}{M} = \left(\frac{2}{\pi}\right)^{1/2} \frac{\varrho_0}{M^2} \frac{\delta_c(t)}{\sigma(k_f)} \left|\frac{d\ln\sigma}{d\ln M}\right| \exp\left[-\frac{\delta_c^2(t)}{2\sigma^2(k_f)}\right]. \tag{10.24}$$

Questa è l'espressione classica della funzione di massa di Press-Schechter, i quali la ricavarono però in modo diverso, senza usare gli excursion sets (si veda ad esempio il Lucchin, cap.17).

Notiamo che è possibile riscrivere l'espressione Eq. (10.24) in modo che diventi indipendente dalla forma dello spettro delle fluttuazioni: introduciamo la nuova variabile $\nu = \delta_c(t)/\sigma(M)$ ed applichiamo ancora la regola eq. (10.19); si ottiene

$$\frac{df}{d\ln\nu} = \left(\frac{2}{\pi}\right)^{1/2} \nu \exp(-\nu^2/2). \tag{10.25}$$

la cui forma è mostrata in Fig. 10.5.

10.5 Funzione di massa condizionale

La prospettiva degli excursion set, oltre a fornire un'espressione per la funzione di massa degli aloni virializzati, permette anche di derivare molte altre espressioni che descrivono le proprietà della merging history degli aloni stessi. Questi altri risultati, di cui qui vedremo solo la funzione di massa condizionale, vengono solitamente descritti con il termine *modello di Press-Schechter esteso*.

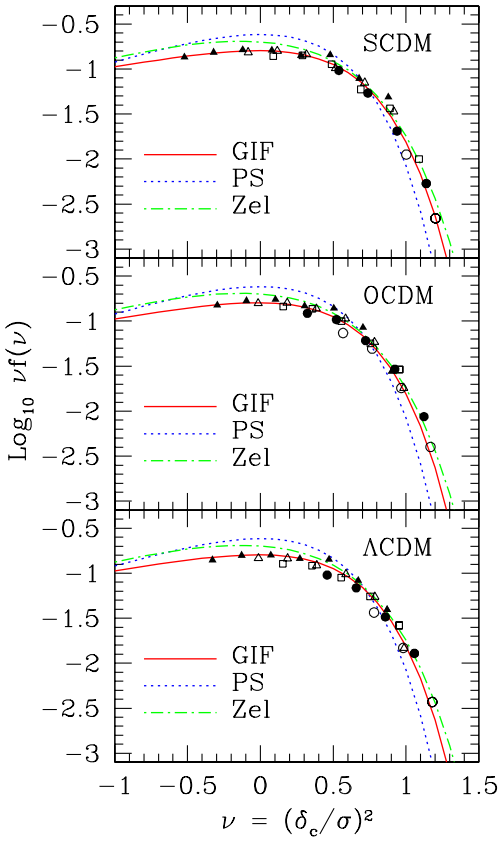

Figura 10.5: Funzione di massa per tre diversi modelli cosmologici: SCDM ($\Omega_m = 1$), OCDM ($\Omega_m = 0.3$), LCDM ($\Omega_m = 0.3$, $\Omega_\Lambda = 0.7$). La curva continua è l'eq. (10.25) ed è la stessa nei tre casi; i dati (triangoli, quadrati e cerchietti) provengono da simulazioni ad N-corpi e sono ben interpolati dalla stessa curva teorica (da Sheth e Tormen, 1999).

Ciascuna traiettoria $\delta_f(S)$ descrive la storia di merging di una particella: il processo di clustering gerarchico - per il quale un dato elemento di fluido appartiene ad aloni di massa M via via maggiore al crescere del tempo t - corrisponde al partire a grandi valori di S e di $\delta_c(t)$ e seguire la traiettoria verso il basso e verso sinistra, cioè verso l'origine degli assi.

Ricordiamo che per ciascun valore della soglia $\delta_c(t)$ si assume che l'elemento di fluido associato alla traiettoria sia inglobato in un alone la cui massa corrisponde al più piccolo valore di S - ovvero al pià grande valore di M - in cui la traiettoria incrocia la soglia. Questo significa che - al crescere di t e all'abbassarsi della soglia critica $\delta_c(t)$ - la massa associata ad una traiettoria seguirà la traiettoria stessa finché questa è di tipo (i); quando invece la traiettoria diventa di tipo (ii) la massa salterà orizzontalmente verso sinistra fino al valore corrispondente al primo incontro con la soglia, e così via, come rappresentato in Fig. 10.6. Questo moto corrisponde ad aumenti della massa dell'alone che contiene la data particella; nel contesto del clustering gerarchico tali aumenti sono interpretati come il risultato di eventi di merger fra aloni diversi.

In questo senso, la richiesta che un alone abbia massa M_1 al tempo t_1 e massa $M_2 > M_1$ al tempo successivo $t_2 > t_1$ corrisponde a selezionare, tra tutte le traiettorie possibili, quelle che transitano per entrambi i punti $(S_1, \delta_c(t_1))$ che $(S_2, \delta_c(t_2))$ con $S_1 > S_2$ - si veda l'esempio di Fig 10.7.

La distribuzione di probabilità condizionale $p(S_1, \delta_c(t_1)|S_2, \delta_c(t_2))$ delle traiettorie si ottiene direttamente da quella ricavata in precedenza - eq. (10.18) - notando che questa condizione corrisponde a richiedere che le traiettorie non partano più dal punto $(0, 0)$, ma dal punto $(S_2, \delta_c(t_2))$. Possiamo allora scrivere immediatamente la distribuzione cercata effettuando la sostituzione $S \to (S_1 - S_2)$ e $\delta_c(t) \to (\delta_c(t_1) - \delta_c(t_2))$ in eq. (10.18), ottenendo

$$p(S_1, \delta_c(t_1)|S_2, \delta_c(t_2)) = \frac{df}{dS}(S_1, t_1|S_2, t_2) = \frac{(\delta_c(t_1) - \delta_c(t_2))}{\sqrt{2\pi}(S_1 - S_2)^{3/2}} \exp\left[-\frac{(\delta_c(t_1) - \delta_c(t_2))^2}{2(S_1 - S_2)}\right]. \tag{10.26}$$

Infine, per riscrivere la stessa distribuzione in funzione della massa usiamo sempre la relazione eq. (10.19), che fornisce

$$p(M_1, t_1|M_2, t_2) = p(S_1, t_1|S_2, t_2) \left|\frac{dS_1}{dM_1}\right|; \tag{10.27}$$

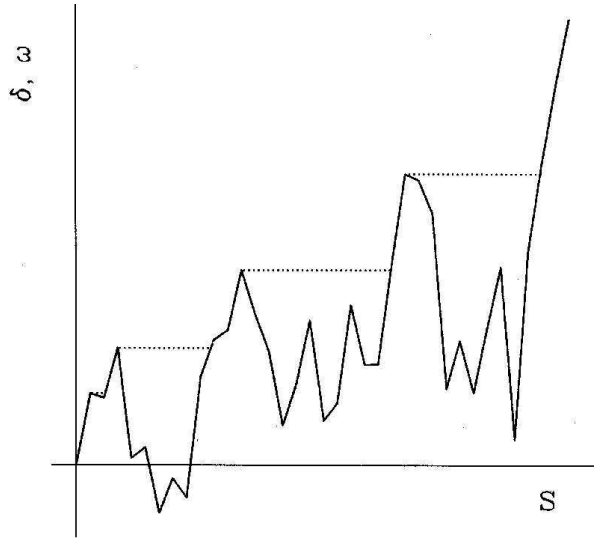

Figura 10.6: Traiettoria $\delta_f(S)$ per una particella, e corrispondente merging history (da Lacey e Cole, 1993).

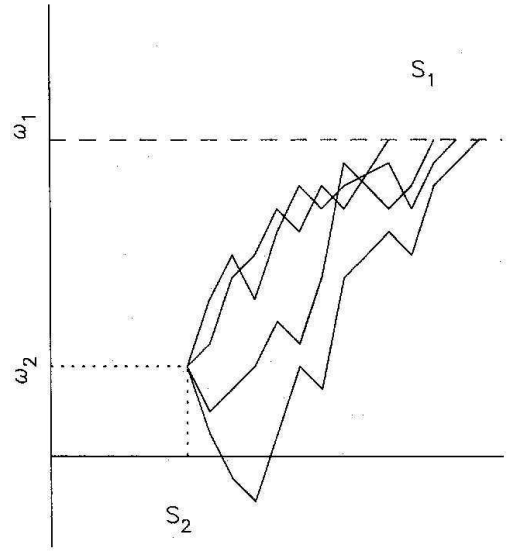

Figura 10.7: Come la figura precedente, nel caso di traiettorie condizionate (da Lacey e Cole, 1993).

questa espressione è detta funzione di massa dei progenitori perché, dato un alone di massa M_2 al tempo t_2, determina come la massa di questo alone sia distribuita in aloni di masse $M_1 < M_2$ a qualsiasi tempo precedente $t_1 < t_2$.

10.6 Applicazione a modelli con spettro scale-free

Le espressioni ricavate nella sezione precedente, quando espresse in funzione della massa M degli aloni, contengono un termine di derivata della varianza fatta rispetto alla massa. Questo termine non ha un'espressione analitica esatta, a meno che lo spettro non sia autosimile, cioè del tipo $P(k) \propto k^n$. Ricordiamo la relazione tra varianza comovente e massa ricavata nel Cap.5 per tali spettri:

$$\sigma(M) \propto M^{-(n+3)/6}; \tag{10.28}$$

nello stesso capitolo abbiamo anche definito la massa tipica non lineare M_* come la massa corrispondente ad una sovradensità lineare dell'ordine dell'unità: $\sigma(M_*) \approx 1$. Ora che abbiamo sviluppato il modello del collasso sferico, sappiamo che il valore appropriato da assegnare alla sovradensità lineare corrispondente ad un alone di massa tipica $M_*(t)$ che si formi al tempo $t < t_0$ è $\delta_c(t)$:

$$\sigma(M_*(t)) = \delta_c(t) = \delta_c \frac{D(t_0)}{D(t)}. \tag{10.29}$$

Ricordiamo che la sovradensità lineare è riscalata al tempo t_0 perché abbiamo definito $\sigma^2(M)$ come la varianza del campo *comovente*, ossia riscalato al tempo presente t_0. Questa definizione di M_* ci permette di normalizzare la relazione tra varianza e massa scritta sopra:

$$\frac{\sigma(M)}{\sigma(M_*)} = \left(\frac{M}{M_*}\right)^{-(n+3)/6} \tag{10.30}$$

ovvero

$$\sigma(M) = \delta_c(t) \left(\frac{M}{M_*}\right)^{-(n+3)/6}. \tag{10.31}$$

Da queste espressioni ricaviamo immediatamente il termine di derivata logaritmica:

$$\left|\frac{d\ln\sigma}{d\ln M}\right| = \frac{-(n+3)}{6} \tag{10.32}$$

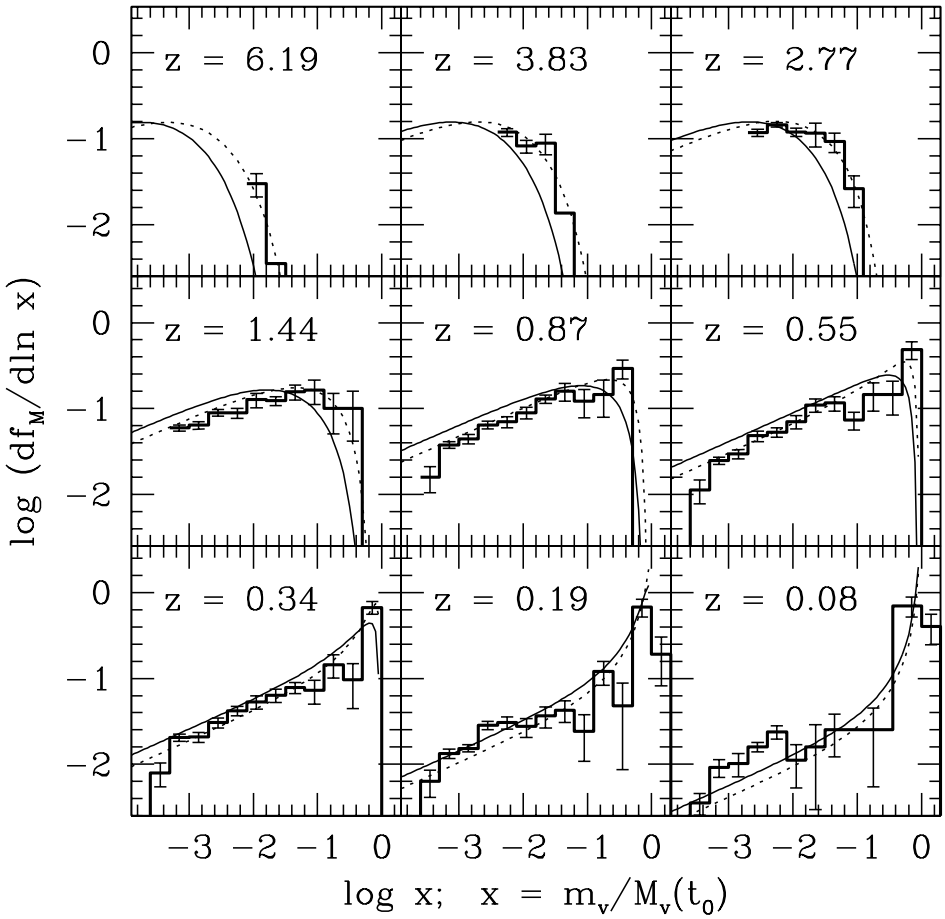

Figura 10.8: Distribuzione differenziale della frazione di massa in progenitori di massa M per un alone di massa finale $M_2 \approx 10^{15} M_\odot$ in un modello scale-free con indice spettrale $n = -1$. Ciascun pannello mostra la distribuzione ad un redshift diverso; le curve continue e tratteggiate sono il modello eq. (10.34), mentre l'istogramma corrisponde a risultati di una simulazione (da Tormen, 1998).

che ci permette di scrivere esplicitamente la Eq. (10.22) come

$$\frac{df}{d\ln M} = M\frac{df}{dM} = \left(\frac{2}{\pi}\right)^{1/2}\left(\frac{n+3}{6}\right)\left(\frac{M}{M_*}\right)^{(3+n)/6}\exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{M}{M_*}\right)^{(3+n)/3}\right]. \tag{10.33}$$

Questa espressione fornisce la frazione di massa in aloni di massa M al tempo t caratterizzato dalla massa tipica non lineare $M_* = M_*(t)$.

Analogamente si ricava la funzione di massa condizionata di cui qui riportiamo il risultato, lasciando come esercizio la derivazione:

$$\frac{df_M}{d\ln M}(M, z|M_2, z_2) = \frac{\alpha}{2}\left(\frac{2}{\pi}\right)^{1/2}\left(\frac{M}{M_*}\right)^{\alpha/2}\frac{(z-z_2)}{(1-x^\alpha)^{3/2}}\exp\left[-\frac{(z-z_2)^2}{2(1-x^\alpha)}\left(\frac{M}{M_*}\right)^\alpha\right] \tag{10.34}$$

dove $\alpha = (n+3)/3$ ed $x = M/M_2$ è il rapporto tra la massa M dei progenitori e la massa M_2 dell'alone finale. Un esempio di funzione di massa dei progenitori, a diversi redshift, è dato in Fig 10.8. Si noti come a tempi remoti (alti redshift) la funzione di massa dei progenitori assomigli molto a quella globale di Fig. 10.5, mentre al diminuire del redshift la distribuzione si sposti e divenga più piccata verso masse prossime a quella finale. La funzione di massa a $z = 0$ sarà una delta di Dirac in $x = 1$.