

# STRUTTURA ED EVOLUZIONE DELLE STELLE

Cesare Chiosi

*UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI PADOVA*

*Dipartimento di Astronomia*

*A Emma, Chiara, Emanuela*

In memoria di  
Oliver

# INDICE

<b>1</b>	<b>INTRODUZIONE</b>	<b>11</b>
<b>2</b>	<b>PANORAMA OSSERVATIVO</b>	<b>13</b>
2.1	Luminosità e Magnitudini . . . . .	13
2.2	Spettri, $T_{eff}$ , Indici di Colore . . . . .	15
2.3	Raggi . . . . .	18
2.4	Masse . . . . .	18
2.5	Distanze . . . . .	19
2.6	Abbondanze Chimiche . . . . .	20
2.7	Sistemi di stelle . . . . .	20
2.8	Il Diagramma di Hertzsprung-Russell . . . . .	21
2.9	Popolazioni Stellari . . . . .	26
<b>3</b>	<b>SCALE DI TEMPO</b>	<b>29</b>
<b>4</b>	<b>SIMMETRIA SFERICA</b>	<b>33</b>
4.1	Descrizione Euleriana . . . . .	33
4.2	Descrizione Lagrangiana . . . . .	34
4.3	Campo Gravitazionale . . . . .	35
<b>5</b>	<b>EQUILIBRIO MECCANICO</b>	<b>37</b>
5.1	Equilibrio Idrostatico . . . . .	37
5.2	Conservazione della Massa . . . . .	37
5.3	Pressione, temperatura e densità centrali . . . . .	38
5.4	Teorema del Viriale . . . . .	39
5.5	Necessità dell' equilibrio idrostatico . . . . .	41

<b>6</b>	<b>EQUILIBRIO TERMICO</b>	<b>43</b>
6.1	Equilibrio termico . . . . .	43
6.2	Bilancio energetico generale . . . . .	44
<b>7</b>	<b>STATO FISICO</b>	<b>47</b>
7.1	Equilibrio Termodinamico nelle Stelle . . . . .	47
7.2	Prima Legge della Termodinamica . . . . .	49
7.3	Seconda Legge della Termodinamica . . . . .	49
<b>8</b>	<b>MECCANICA STATISTICA</b>	<b>53</b>
8.1	Meccanica statistica classica . . . . .	53
8.1.1	Gas perfetto . . . . .	58
8.1.2	Equazione di stato di un gas ideale . . . . .	60
8.2	Meccanica statistica quantistica . . . . .	62
8.2.1	Peso statistico . . . . .	63
8.2.2	Distribuzione di Fermi-Dirac . . . . .	63
8.2.3	Distribuzione di Bose-Einstein . . . . .	66
8.3	Leggi di distribuzione: riassunto . . . . .	68
8.4	Leggi di Maxwell e di Boltzmann: riassunto . . . . .	70
8.5	Legge di Planck per il Corpo Nero: riassunto . . . . .	71
<b>9</b>	<b>EQUAZIONE DI STATO</b>	<b>73</b>
9.1	Pressione di un Gas . . . . .	73
9.2	Pressione di un Gas di fotoni . . . . .	75
9.3	Pressione di un Gas Perfetto . . . . .	76
9.4	Peso Molecolare . . . . .	76
9.5	Pressione di un Gas di Elettroni Degeneri . . . . .	79
9.5.1	Gas di elettroni totalmente degeneri non relativistici . . .	80
9.5.2	Gas di elettroni totalmente degeneri relativistico . . . . .	81
9.5.3	Gas di elettroni parzialmente degeneri non relativistico .	82
9.5.4	Pressioni parziali: confronto . . . . .	84
<b>10</b>	<b>RELAZIONI TERMODINAMICHE</b>	<b>87</b>
10.1	Energia Interna . . . . .	87
10.2	Calori Specifici . . . . .	88

INDICE	5
10.3 Effetti della radiazione . . . . .	89
10.4 Entropia . . . . .	91
10.5 Trasformazioni politropiche . . . . .	92
<b>11 IONIZZAZIONE</b>	<b>95</b>
11.1 Relazioni di Boltzmann e Saha . . . . .	95
11.2 Ionizzazione dell' Idrogeno . . . . .	99
11.3 Parziale ionizzazione: $\mu$ , $c_P$ , $\nabla_a$ . . . . .	100
11.4 Miscela Idrogeno-Elio . . . . .	102
<b>12 TRASPORTO DELL'ENERGIA</b>	<b>105</b>
12.1 Trasporto Radiativo ed Opacità . . . . .	105
12.2 Trasporto Convettivo . . . . .	109
12.2.1 Teoria della Mixing Length: versione semplice . . . . .	112
12.3 Trasporto Conduttivo . . . . .	116
12.4 Neutrini . . . . .	117
<b>13 TRASPORTO RADIATIVO</b>	<b>119</b>
13.1 Teoria elementare del trasporto radiativo . . . . .	119
13.2 Opacità della materia stellare . . . . .	127
<b>14 TRASPORTO CONVETTIVO</b>	<b>135</b>
14.1 Criteri di instabilità . . . . .	135
14.2 Teoria della mixing length . . . . .	139
<b>15 OPACITÀ</b>	<b>149</b>
15.1 Introduzione . . . . .	149
15.2 Equazione di Schroedinger . . . . .	150
15.3 Metodo risolutivo . . . . .	153
15.4 Trattazione semiclassica della radiazione . . . . .	159
15.5 Transizione di dipolo elettrico . . . . .	163
15.6 Regole di selezione . . . . .	164
15.7 Opacità della materia stellare . . . . .	166
<b>16 SORGENTI DI ENERGIA</b>	<b>179</b>
16.1 Energia potenziale gravitazionale . . . . .	179

16.2	Teorema del Viriale: Formulazione Generale . . . . .	180
16.3	Teorema del Viriale: Casi Particolari . . . . .	182
16.4	Energia interna ed energia totale . . . . .	183
16.5	Contrazione gravitazionale . . . . .	183
16.6	Condizioni per la contrazione gravitazionale . . . . .	185
16.7	Energia gravitazionale locale . . . . .	186
<b>17</b>	<b>ENERGIA NUCLEARE</b>	<b>189</b>
17.1	Velocità di una reazione . . . . .	191
17.2	Sezione d'Urto di una Reazione . . . . .	194
17.2.1	Modello di Bohr . . . . .	194
17.2.2	Risonanze . . . . .	195
17.2.3	Sezione d'Urto . . . . .	200
17.3	Schermaggio elettronico . . . . .	206
17.4	Principali Reazioni Termonucleari . . . . .	210
17.4.1	Il Bruciamento dell'Idrogeno . . . . .	210
17.5	Energia dei cicli CN-CNO e PP . . . . .	213
17.5.1	Ciclo CN . . . . .	214
17.5.2	Catene PP . . . . .	216
17.6	Il Bruciamento dell'Elio . . . . .	219
17.7	Bruciamenti del C, Ne, O e Si . . . . .	224
17.7.1	Carbonio . . . . .	224
17.7.2	Neon . . . . .	225
17.7.3	Ossigeno . . . . .	225
17.7.4	Silicio . . . . .	226
<b>18</b>	<b>NEUTRINI</b>	<b>229</b>
18.1	Teoria dell'interazione debole: cenni . . . . .	230
18.2	Processi neutrinici: termini misti di $H_{int}$ . . . . .	235
18.3	Processi neutrinici: termini quadratici di $H_{int}$ . . . . .	237
<b>19</b>	<b>METODI RISOLUTIVI</b>	<b>247</b>
19.1	Sistema Completo di Equazioni . . . . .	247
19.2	Condizioni al contorno. . . . .	248
19.3	Unicità delle Soluzioni . . . . .	250

19.4	Sequenze Evolutive . . . . .	251
19.5	Soluzioni Numeriche . . . . .	252
19.5.1	Metodo del raccordo . . . . .	253
19.5.2	Metodo delle shell o di Henyey . . . . .	254
<b>20</b>	<b>STABILITÀ</b>	<b>259</b>
20.1	Equazioni del Moto . . . . .	259
20.2	Il Modello a Pistone . . . . .	260
20.3	Ancora sul pistone: complicazioni . . . . .	266
20.4	Stabilità stellare: metodi semplici . . . . .	269
20.4.1	Stabilità dinamica . . . . .	271
20.4.2	Effetti non adiabatici . . . . .	272
20.4.3	Calore specifico gravo-termico . . . . .	272
20.4.4	Stabilità secolare e bruciamento nucleare . . . . .	275
20.5	Stabilità stellare: metodi variazionali . . . . .	277
<b>21</b>	<b>POLITROPI</b>	<b>283</b>
21.1	Modelli semplici nel piano U-V . . . . .	292
21.1.1	Inviluppi radiativi . . . . .	292
21.1.2	Nucleo convettivo e raccordo con inviluppo radiativo . . .	293
21.2	Collasso di un politropo . . . . .	295
21.3	Sfere isoterme . . . . .	299
<b>22</b>	<b>MODELLI SEMPLICI</b>	<b>301</b>
22.1	Modelli semplici . . . . .	301
22.2	Trasformazioni di omologia . . . . .	308
<b>23</b>	<b>PRESEQUENZA</b>	<b>315</b>
23.1	Formazione Stellare . . . . .	316
23.2	Collasso della Protostella . . . . .	319
23.3	Fase di Contrazione in Presequenza . . . . .	322
<b>24</b>	<b>FORMAZIONE STELLARE</b>	<b>327</b>
24.1	Criterio di Jeans e Frammentazione . . . . .	327
24.2	Formazione di protostelle . . . . .	334

<b>25 LIMITE DI HAYASHI</b>	<b>339</b>
25.1 Luminosità delle stelle totalmente convettive . . . . .	340
25.2 Descrizione semplice della linea di Hayashi . . . . .	341
25.3 Luminosità limite . . . . .	344
25.4 Stelle vicine alla linea di Hayashi . . . . .	347
<b>26 SEQUENZA PRINCIPALE</b>	<b>351</b>
26.1 Proprietà Generali . . . . .	351
26.2 Bruciamento dell'Idrogeno . . . . .	353
26.3 Stelle Nane Nere . . . . .	357
<b>27 FASI DI POST-SEQUENZA</b>	<b>359</b>
27.1 Caratteristiche Generali e Masse Critiche . . . . .	359
27.2 Diagramma delle condizioni centrali . . . . .	363
<b>28 STELLE DI PICCOLA MASSA</b>	<b>365</b>
28.1 Caratteristiche generali . . . . .	365
28.2 Proprietà fisiche . . . . .	375
28.3 Omologia di shell . . . . .	378
28.4 Flash dell'elio . . . . .	383
28.5 Instabilità termica della shell di elio . . . . .	384
<b>29 STELLE DI MASSA INTERMEDIA</b>	<b>389</b>
29.1 Evoluzione di Stelle di Massa Intermedia . . . . .	389
<b>30 DEFLAGRAZIONE-DETONAZIONE DEL CARBONIO</b>	<b>397</b>
30.1 Introduzione . . . . .	397
30.2 Nucleo C-O . . . . .	397
30.3 Flash del Carbonio . . . . .	401
30.4 Equilibrio statistico nucleare . . . . .	402
30.5 Convezione ed equilibrio idrostatico . . . . .	405
30.6 Fronti di combustione . . . . .	406
<b>31 STELLE QUASI MASSICCE E MASSICCE</b>	<b>409</b>
31.1 Stelle Quasi Massicce . . . . .	409
31.2 Stelle Massicce . . . . .	410



31.2.1	Evoluzione del Nucleo . . . . .	412
31.2.2	Evoluzione dell' involucro . . . . .	419
<b>32</b>	<b>VENTI STELLARI</b>	<b>423</b>
32.1	Introduzione . . . . .	423
32.2	Venti coronali . . . . .	424
32.2.1	Equilibrio idrostatico o idrodinamico? . . . . .	424
32.2.2	Equazioni generali . . . . .	427
32.2.3	Caso isoterma . . . . .	430
32.2.4	Caso generale . . . . .	434
32.2.5	Venti stellari . . . . .	434
32.2.6	Relazione fra venti stellari e corone . . . . .	436
32.3	Venti radiativi . . . . .	439
32.3.1	Dinamica di base . . . . .	439
32.3.2	Modelli a molte righe . . . . .	448
32.4	Osservazioni finali . . . . .	453
<b>33</b>	<b>COLLASSI ED ESPLOSIONI</b>	<b>455</b>
33.1	Collasso del nucleo in stelle massicce . . . . .	455
33.2	Trattazione politropica del collasso . . . . .	456
33.3	Riflessione della caduta libera . . . . .	459
33.4	Formazione dell'onda d'urto . . . . .	460
33.5	Bilancio energetico . . . . .	462
33.6	Effetto dei neutrini . . . . .	464
33.7	Instabilità di coppie . . . . .	468
<b>34</b>	<b>SUPERNOVE</b>	<b>471</b>
34.0.1	Supernove di Tipo I . . . . .	473
34.0.2	Supernove di Tipo II . . . . .	475
<b>35</b>	<b>OGGETTI COMPATTI</b>	<b>479</b>
35.1	Stelle Nane Bianche . . . . .	479
35.1.1	Interno Degenere . . . . .	480
35.1.2	Revisione della struttura meccanica . . . . .	485
35.1.3	Involuppo esterno . . . . .	489

35.2	Stelle di Neutroni . . . . .	492
35.3	Buchi Neri . . . . .	501
<b>36</b>	<b>STELLE VARIABILI</b>	<b>511</b>
36.1	Fondamenti della Teoria delle Pulsazioni . . . . .	512
36.1.1	Trattazione Adiabatica . . . . .	516
36.1.2	Trattazione Non Adiabatica . . . . .	519
36.2	Instabilità da Ionizzazione . . . . .	522
36.3	I Pulsatori Radiali . . . . .	528
36.4	I Pulsatori Non Radiali . . . . .	532
<b>37</b>	<b>IL DIAGRAMMA HR</b>	<b>535</b>
37.1	Introduzione . . . . .	535
37.2	Funzione iniziale di massa . . . . .	536
37.3	Isocrone . . . . .	538
37.4	Teoria delle SSP . . . . .	539
37.5	Ammassi Aperti ed Associazioni . . . . .	542
37.6	Ammassi Globulari Giovani . . . . .	547
37.7	Ammassi Globulari Classici . . . . .	550
37.7.1	Fasi in HRD . . . . .	552
37.7.2	Elio e Rapporti $R$ , $R'$ , $R_1$ e $R_2$ . . . . .	556
37.7.3	Secondo Parametro . . . . .	557
37.7.4	Età degli Ammassi Globulari . . . . .	559
37.7.5	Funzione di Luminosità delle Stelle $RGB$ . . . . .	560
37.7.6	Funzione di Luminosità della SP . . . . .	560
<b>38</b>	<b>CONCLUSIONI</b>	<b>565</b>

## Capitolo 1

# INTRODUZIONE

Lo studio della struttura ed evoluzione delle stelle, costituenti la frazione dominante della massa direttamente osservabile dell'Universo, è di fondamentale importanza nella comprensione di fenomeni diversi, che vanno dalla produzione degli elementi più pesanti dell'elio, alla struttura ed energetica del mezzo interstellare, all'evoluzione globale delle galassie.

La struttura di una stella è determinata dal gioco complesso di varie leggi e fenomeni fisici: equilibrio idrostatico, conservazione dell'energia, fusione nucleare, trasporto radiativo, convettivo e conduttivo dell'energia, interazione fra materia e radiazione, termodinamica ed equazione di stato dei gas.

Queste leggi opportunamente combinate fra di loro portano alla costruzione di modelli matematici della struttura stellare che permettono di determinare la temperatura, la densità, la pressione, la struttura chimica in funzione della distanza dal centro.

Una stella non è statica, bensì evolvente nel tempo a causa della perdita continua di energia dalla superficie soprattutto sotto forma di radiazione elettromagnetica. Questa energia è fornita da due sorgenti principali: reazioni nucleari di fusione di elementi leggeri in elementi più pesanti e contrazione gravitazionale. L'evoluzione temporale di una stella è infatti la conseguenza delle variazioni interne indotte dalla generazione dell'energia necessaria a bilanciare la perdita dalla superficie.

La struttura di una stella di data massa e composizione chimica e la sua evoluzione temporale dallo stadio di formazione dal mezzo interstellare allo stadio finale (nana bianca, stella di neutroni o buco nero a cui si accompagna emissione di materia sia in forma quieta che esplosiva) sono ottenibili dalla

soluzione di complessi sistemi di equazioni differenziali mediante tecniche numeriche altamente sofisticate.

Oltre che alla struttura interna, tali soluzioni danno il luogo nel diagramma di Hertzsprung-Russell (HR) occupato da una stella di data massa al variare del tempo, e le relazioni massa-luminosità- temperatura effettiva-composizione chimica superficiale in diversi stadi evolutivi. Il risultato del modello teorico può essere pertanto direttamente confrontato con le osservazioni.

## Capitolo 2

# PANORAMA OSSERVATIVO

La luminosità ( $L$ ), temperatura effettiva ( $T_{eff}$ ), massa ( $M$ ), raggio ( $R$ ) e composizione chimica di singole stelle sono ottenibili da misure dirette anche se con diverso grado di difficoltà ed incertezza. mentre l'età e la composizione chimica di insiemi di stelle (associazioni, ammassi aperti, ammassi globulari) sono derivabili dal diagramma H-R.

In ogni caso, la conoscenza di molti dei parametri fondamentali di una stella o di un insieme di stelle richiede che sia nota la distanza, una quantità difficile da misurare in quanto anche la stella più vicina al Sole dista  $2.6 \times 10^5$  unità astronomiche (AU), dove una AU è  $1.5 \times 10^{13}$  cm.

### 2.1 Luminosità e Magnitudini

Il valore standard della luminosità ( $L$ ) è quello del Sole. Esso è ottenuto dalla misura diretta della quantità di energia  $S_{\odot}$  ricevuta per centimetro quadrato e per secondo e su tutte le lunghezze d'onda al di sopra della atmosfera terrestre e alla distanza media della Terra dal Sole. Questa quantità, nota come la costante solare, è convertita in luminosità usando la relazione

$$L_{\odot} = 4\pi d_{\odot}^2 S_{\odot} = 3.86 \times 10^{33} \text{ erg s}^{-1} \quad (2.1)$$

dove  $d_{\odot} = 1$  AU. Per le altre stelle, il flusso  $S$  in  $\text{erg cm}^{-2} \text{ s}^{-1}$  ricevuto sulla Terra da un ricettore sensibile in una data banda di lunghezze d'onda è corretto per gli effetti dell'atmosfera, per l'assorbimento interstellare ed è esteso a tutte le lunghezze d'onda. Se la distanza della stella è nota, la luminosità è data da  $L = 4\pi d^2 S$ .

La luminosità delle stelle è spesso espressa mediante le magnitudini apparenti ed assolute in opportune bande spettrali. Esse sono legate dalla relazione di Pogson alle quantità di energia raccolta dallo strumento analizzatore

$$m_{\Delta\lambda} = -2.5 \log L_{\Delta\lambda} + \text{cost} \quad (2.2)$$

Tradizionalmente sono molto usate le magnitudini ottenute dalle bande U, B, V di Johnson, rispettivamente fra 3100 e 3900 Å, fra 3800 e 4800 Å, fra 4900 e 6100 Å ed i colori U-B e B-V ad esse associate.

Si definisce come magnitudine bolometrica ( $M_{bol}$ ) la magnitudine che avrebbe la stella qualora fosse possibile raccogliere l'intero spettro di energia, cioè anche quella parte che viene assorbita dall'atmosfera terrestre e quella che cade fuori dell'intervallo di sensibilità dello strumento. La luminosità  $L$  associata alla magnitudine bolometrica è quella che corrisponde alla quantità totale di energia emessa dalla superficie stellare.

Se sono note la distanza  $d$  e l'estinzione  $A_{\Delta\lambda}$ , è possibile passare da magnitudini apparenti a magnitudini assolute. Per convenzione si chiama magnitudine assoluta quella che una stella avrebbe se posta alla distanza di 10 pc. È facile verificare che vale la seguente relazione

$$M_{\Delta\lambda} = m_{\Delta\lambda} - A_{\Delta\lambda} + 5 - 5 \log d \quad (2.3)$$

dove  $m_{\Delta\lambda}$  è la magnitudine apparente,  $A_{\Delta\lambda}$  è l'assorbimento in magnitudini dovuto al materiale interstellare,  $M_{\Delta\lambda}$  è la magnitudine assoluta e  $d$  è la distanza espressa in pc.

Si usa considerare la magnitudine  $V$  come rappresentativa della luminosità della stella ed esprimere il legame fra magnitudine visuale e bolometrica con

$$m_{bol} - m_V = M_{bol} - M_V = BC \quad (2.4)$$

dove  $BC$  è la correzione bolometrica.

Infine la quantità  $(M - m + A)$  è detta modulo di distanza apparente e la quantità  $(M - m)_0$  modulo di distanza assoluto.

## 2.2 Spettri, $T_{eff}$ , Indici di Colore

**Spettri.** La maggior parte della radiazione emessa da una stella proviene da uno strato superficiale chiamato fotosfera, il cui spessore è pari ad un cammino libero medio di un fotone. Se la distribuzione di temperatura di questa regione fosse isoterma, la distribuzione spettrale dell'energia sarebbe quella del corpo nero. In realtà la distribuzione della temperatura non è isoterma, ed esistono assorbimenti selettivi di atomi e molecole che producono un caratteristico spettro di assorbimento sovrapposto ad uno spettro di continuo (corpo nero) proveniente dagli strati sottostanti. L'analisi dello spettro può dare indicazioni sulla temperatura, densità (gravità) e composizione chimica degli strati superficiali. Esistono vari sistemi di classificazione spettrale, il più noto fra tutti è il sistema di Morgan e Keenan (MK) che ordina gli spettri stellari essenzialmente in funzione della temperatura (classe spettrale indicata con le lettere O,B,A,F,G,K,M-C-S) e della densità superficiale (classe di luminosità indicata con numeri romani da I a V e ulteriori suddivisioni fin dove possibile) distinguendo fra stelle di sequenza principale, subgiganti, giganti, supergiganti, nane, sottonane e nane bianche a cui per data temperatura superficiale corrispondono gravità e densità superficiali crescenti.

**Temperature Effettive.** Poichè una stella non irradia esattamente come un corpo nero la definizione di temperatura superficiale non è univoca. Viene definita come temperatura effettiva ( $T_{eff}$ ) di una stella quella data dalla relazione

$$L = 4\pi \sigma R^2 T_{eff}^4 \quad (2.5)$$

dove  $R$  è il raggio,  $\sigma$  la costante di Stefan-Boltzmann e  $L$  la luminosità. Pertanto,  $T_{eff}$  è la temperatura di un corpo nero che abbia le stesse dimensioni e luminosità della stella.

La temperatura effettiva è alla base di tutti i sistemi di classificazione spettrali più moderni. Tuttavia l'uso di questa relazione per dedurre la temperatura superficiale delle stelle presuppone la conoscenza del raggio, che è noto solo per un numero molto limitato di oggetti. È molto più difficile ottenere il raggio che la temperatura di una stella. Conviene quindi dedurre  $T_{eff}$  da altri metodi e usare la relazione precedente per ottenere  $R$ . I metodi in uso sono:

- i) Misura dettagliata della distribuzione spettrale dell'energia e determinazione della temperatura del corpo nero che meglio la riproduce.
- ii) Determinazione della  $\lambda_{max}$  del massimo di intensità nello spettro e della temperatura dalla relazione  $\lambda_{max}T = 2.89 \times 10^7$  (se  $\lambda_{max}$  è espresso in angstrom).
- iii) Misura dell'indice di colore ottenuto dalla misura del flusso stellare in due diverse bande spettrali. Ad esempio il colore  $B - V$  è dato dal rapporto tra il flusso nel  $B$  e quello nel  $V$ . Conoscendo le proprietà dei filtri  $B$  e  $V$  e la distribuzione spettrale del corpo nero alle varie temperature, dal confronto si può determinare la  $T_{eff}$  della stella.

**Indici di colore.** La differenza fra le magnitudini assolute in due bande passanti qualunque è chiamata indice di colore intrinseco

$$C_{\Delta\lambda_1 - \Delta\lambda_2} = M_{\Delta\lambda_1} - M_{\Delta\lambda_2} \quad (2.6)$$

Lo stesso fra le magnitudini apparenti è detto colore apparente

$$c_{\Delta\lambda_1 - \Delta\lambda_2} = m_{\Delta\lambda_1} - m_{\Delta\lambda_2} \quad (2.7)$$

Fra i due tipi di colore valgono le seguenti relazioni

$$C_{\Delta\lambda_1 - \Delta\lambda_2} = c_{\Delta\lambda_1 - \Delta\lambda_2} - E_{\Delta\lambda_1 - \Delta\lambda_2} \quad (2.8)$$

dove

$$E_{\Delta\lambda_1 - \Delta\lambda_2} = A_{\Delta\lambda_1} - A_{\Delta\lambda_2} \quad (2.9)$$

La quantità  $E_{\Delta\lambda_1 - \Delta\lambda_2}$  è detta eccesso dei colori.

Esempio classico di un sistema di magnitudini, colori, eccessi di colore è quello di Johnson.

Infine ricordiamo che è stato possibile stabilire un legame fra tipo spettrale, indici di colore (ad esempio B-V e U-B), correzione bolometrica BC e  $T_{eff}$ . Queste relazioni non sono tuttavia le stesse per tutti i tipi di stella ma variano con la classe di luminosità. La Tabella 2.2 riassume queste relazioni per il sistema MK limitatamente alle stelle della sequenza principale (V classe di luminosità). La conversione da tipo spettrale e colore a  $T_{eff}$  è tuttavia incerta, anche se per ragioni diverse, per le stelle molto calde (O,B) e molto fredde (K,M).



Tabella 2.1: Relazioni fra (B-V),  $T_{eff}$  e BC per stelle di sequenza principale (classe di luminosità V)

MK	$T_{eff}$	B-V	BC	$M_V$
O8	36250	-0.33	-3.50	
O9	32750	-0.31	-3.25	
O9.5	31300	-0.30	-3.12	-4.7
B0	29590	-0.29	-2.99	-4.1
B0.5	25412	-0.26	-2.60	-3.6
B1.5	21825	-0.23	-2.22	-2.3
B3	18740	-0.20	-1.84	-1.7
B4	16930	-0.18	-1.58	-1.4
B5	15300	-0.16	-1.34	-1.1
B8	12200	-0.11	-0.72	-0.2
B9	11200	-0.08	-0.46	0.2
B9.5	10545	-0.05	-0.32	0.6
A0	9570	0.00	-0.19	1.2
A2	8995	0.05	-0.09	1.5
A3	8790	0.07	-0.06	1.7
A5	8200	0.14	-0.02	2.1
A7	7800	0.20	0.00	2.4
F0	7410	0.30	-0.08	2.7
F1	7100	0.33	0.01	2.8
F2	6900	0.38	-0.06	3.1
F4	6760	0.43	-0.04	3.3
F5	6700	0.45	-0.04	3.4
F6	6500	0.47	-0.04	3.7
F8	6200	0.53	-0.05	4.0
G0	6000	0.60	-0.06	4.4
G2	5740	0.64	-0.07	4.7
G5	5520	0.68	-0.10	5.2
G8	5320	0.72	-0.15	5.6
K0	5120	0.81	-0.19	5.9
K1	4920	0.82	-0.22	6.1
K2	4760	0.92	-0.25	6.3
K3	4600	0.98	-0.35	6.9
K5	4170	1.18	-0.71	8.1
K6	4000			8.5
M0	3750			9.2
M1	3600	1.48	-1.70	9.7
M2	3350		-2.03	10.1
M3	3100	1.49	-2.35	10.6

### 2.3 Raggi

La determinazione dei raggi stellari è per via diretta molto difficile, in quanto anche per le stelle molto vicine i diametri angolari sono sempre estremamente piccoli, ai limiti del potere risolutivo dei massimi telescopi, e fortemente limitata dalla presenza della turbolenza dell'aria. Per misurare il raggio (diametro) delle stelle vicine si è fatto ricorso a metodi interferometrici (di fase e di intensità), alle occultazioni lunari, alla speckle interferometry ed infine alle binarie spettroscopiche con entrambi gli spettri visibili. Il numero di stelle di noto diametro è tuttavia molto piccolo.

### 2.4 Masse

La massa di una stella può essere misurata direttamente solamente se essa appartiene ad un sistema binario, nel qual caso si può applicare la terza legge di Keplero. Se  $M_1$  e  $M_2$  sono le masse (in unità solari) delle due stelle componenti il sistema binario,  $P$  è il periodo orbitale del sistema (in anni) ed  $A$  è il semiasse maggiore dell'orbita relativa, la legge di Keplero afferma che  $(M_1 + M_2)P^2 = A^3$ . Nel caso del Sole possono essere utilizzati i periodi e le distanze orbitali dei pianeti per determinare la massa  $M_\odot$ . Se entrambe le componenti del sistema binario sono visibili (sistema binario visuale) e possono essere misurate le distanze angolari di queste dal baricentro del sistema ed il periodo, allora le singole masse sono determinabili ammesso che sia nota la distanza del sistema. Se il sistema binario ha una separazione angolare così piccola che le singole componenti non possono essere risolte visualmente, è tuttavia possibile risolverlo spettroscopicamente e misurare lo spostamento Doppler delle righe nello spettro delle singole componenti. Da ciò segue il periodo e la velocità orbitale delle singole stelle. Se in aggiunta il sistema mostra un'eclisse in modo tale da garantire che l'osservazione è fatta lungo il piano orbitale, allora è possibile determinare il semiasse maggiore, la somma delle masse ed infine le masse individuali dal rapporto delle velocità delle singole componenti. Con questi metodi si è determinata la massa di circa 100 stelle di nota magnitudine visuale assoluta situate nelle immediate vicinanze solari e da queste la relazione massa-luminosità (Fig. 2.1). La luminosità di una stella cresce con una certa potenza della sua massa:  $L = \text{cost} \times M^\nu$ , dove  $\nu$  è compreso fra 3.5 e 4 per stelle di

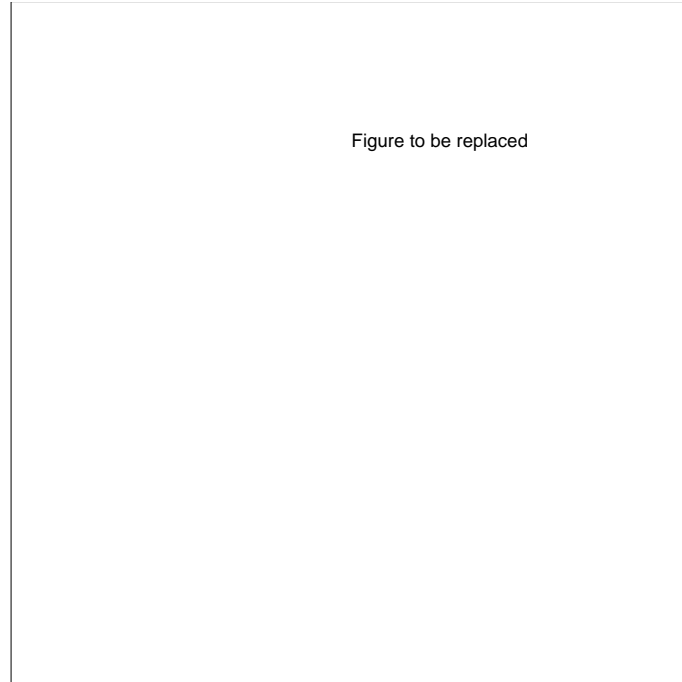


Figura 2.1: Relazione massa luminosita per stelle della sequenza principale

sequenza principale.

## 2.5 Distanze

La misura diretta della distanza con il metodo della parallasse trigonometrica è possibile solo per stelle molto vicine (al massimo fino a circa 100 pc). Per le altre si ricorre a metodi indiretti, quali le parallasse dinamiche per i sistemi binari visuali con elementi orbitali noti, le parallasse secolari e di gruppo, i metodi *fotometrici* i quali sfruttano il fatto che alcuni gruppi di stelle come le Cefeidi, le RR Lyrae, le Novae e le Supernovae hanno magnitudine assoluta caratteristica. Nelle Cefeidi, stelle variabili con periodo compreso fra 1 e 100 giorni (con massima frequenza fra 4 e 6 giorni), la magnitudine assoluta  $M_V$  è funzione del periodo. Nelle RR Lyrae, pure variabili con periodo minore di un giorno, la  $M_V$  è costante. Nelle Novae, stelle che subiscono più o meno ricorrenti episodi esplosivi superficiali, la magnitudine assoluta al massimo dell'esplosione è grosso modo costante. Lo stesso dicasi delle Supernovae, le quali subiscono un fenomeno esplosivo radicale che pone fine alla vita della stella stessa.

Tabella 2.2: Abbondanze degli Elementi nel Sistema Solare

Elemento		Abbondanza in Numero di Atomi (Si = $10^6$ )	Abbondanza in Massa $X$
H	(Idrogeno)	2.66(e10)	0.772
He	(Elio)	1.80(e9)	0.209
Li	(Litio)	6.00(e1)	1.210(e-8)
C	(Carbonio)	1.11(e7)	3.910(e-3)
N	(Azoto)	2.31(e6)	9.420(e-4)
O	(Ossigeno)	1.84(e7)	8.570(e-3)
Ne	(Neon)	2.60(e6)	1.520(e-3)
Mg	(Magnesio)	1.06(e6)	7.480(e-4)
Si	(Silicio)	1.00(e6)	8.160(e-4)
Ca	(Calcio)	6.25(e4)	7.280(e-5)
Fe	(Ferro)	9.00(e5)	1.460(e-3)
Ni	(Nichel)	4.78(e4)	8.140(e-5)

## 2.6 Abbondanze Chimiche

Le abbondanze relative degli elementi nel sistema solare sono state determinate da A.G.W. Cameron sulla base di dati forniti dalle vecchie meteoriti e dall'intensità delle righe di assorbimento nell'atmosfera solare. Esse sono riportate nella Tabella 2.6. Nelle stelle, le abbondanze sono determinate dall'intensità delle righe di assorbimento nello spettro assieme ad altri parametri delle atmosfere stellari e riferite ai valori solari. È prassi indicare con  $X$  l'abbondanza frazionaria in massa dell'idrogeno, con  $Y$  quella dell'elio e con  $Z$  quella di tutti gli altri elementi più pesanti. Si trova che nelle stelle, mentre  $X$  e  $Y$  sono essenzialmente simili a quelli solari, l'abbondanza  $Z$  degli elementi pesanti può variare notevolmente. Infatti, nelle stelle più vecchie e negli ammassi globulari essa può essere anche 100 volte inferiore a quella solare.

## 2.7 Sistemi di stelle

L'osservazione della distribuzione spaziale delle stelle mostra che esse tendono a presentarsi in aggregati di varia complessità dinamica e numero totale di oggetti. Il caso più semplice è costituito dai sistemi binari e multipli. Abbiamo poi le associazioni, gli ammassi aperti, gli ammassi globulari ed infine le galassie.

Le associazioni sono sistemi scarsamente legati composti da alcune decine di stelle e con densità di poco superiore a quella delle stelle di sfondo; esse si distinguono per la presenza di stelle con tipo spettrale O, B (calde e brillanti) e stelle T-Tauri dal caratteristico spettro con righe di emissione. In entrambi i casi, si tratta di stelle di recente formazione. Gli ammassi aperti sono aggregati scarsamente legati con numero totale di stelle variante da circa  $10^2$  a  $10^4$ . Gli ammassi globulari sono aggregati di stelle, il cui numero varia da circa  $10^4$  a  $10^6$ , aventi spiccata simmetria sferica. Si tratta di sistemi gravitazionalmente legati in cui sfericità e distribuzione radiale del numero di stelle indicano la avvenuta equipartizione della energia a seguito delle interazioni gravitazionali fra le stelle componenti. Le galassie sono i più grandi aggregati di stelle a noi noti con un numero totale di oggetti compreso fra  $10^8$  a  $10^{12}$ . In base all'aspetto morfologico, esse sono classificate in irregolari, spirali, lenticolari ed ellittiche.

## 2.8 Il Diagramma di Hertzsprung-Russell

Una delle più importanti scoperte astronomiche avvenne nel 1913, quando indipendentemente l'uno dall'altro, E. Hertzsprung e H. N. Russell trovarono che il tipo spettrale, o equivalentemente il colore ( $B - V$ ), è correlato alla magnitudine visuale assoluta e costruirono il diagramma H-R delle stelle vicine. Una moderna, schematica versione di questo diagramma è data in Fig. 2.2, dove sono anche indicate le classi di luminosità secondo la classificazione MK, i diversi gruppi di stelle e le relazioni fra tipo spettrale e  $T_{eff}$ . In questo diagramma sono presenti stelle di ogni massa, composizione chimica superficiale e verosimilmente età.

Maggiori informazioni possono essere ottenute esaminando i diagrammi H-R di singoli ammassi dove ragionevolmente tutte le stelle hanno la stessa età, composizione chimica e distanza. I diagrammi H-R di tre ammassi rappresentativi sono mostrati nella Figura 2.3, dove Pleiadi e M67 sono tipici ammassi aperti, mentre M5 è un tipico ammasso globulare. Questi diagrammi HR sono profondamente diversi fra loro e da quello di Fig. 2.2, con la sola comune caratteristica che la maggior parte delle stelle cade lungo la banda della sequenza principale. Nel diagramma H-R di un tipico ammasso aperto, quale  $h + \chi$  Persei mostrato in Figura 2.4(a), oltre alle stelle della sequenza principale si nota l'esistenza di

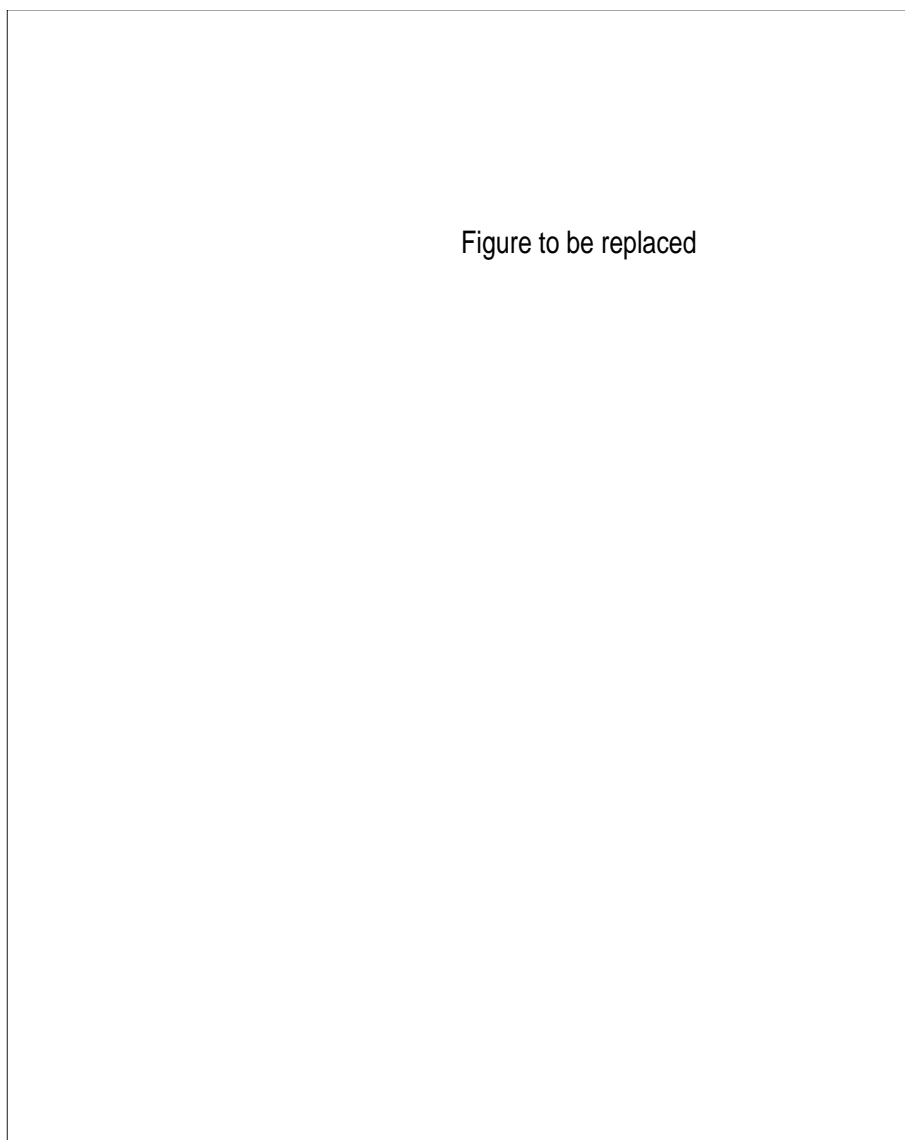


Figura 2.2: Diagramma di Hertzsprung-Russell

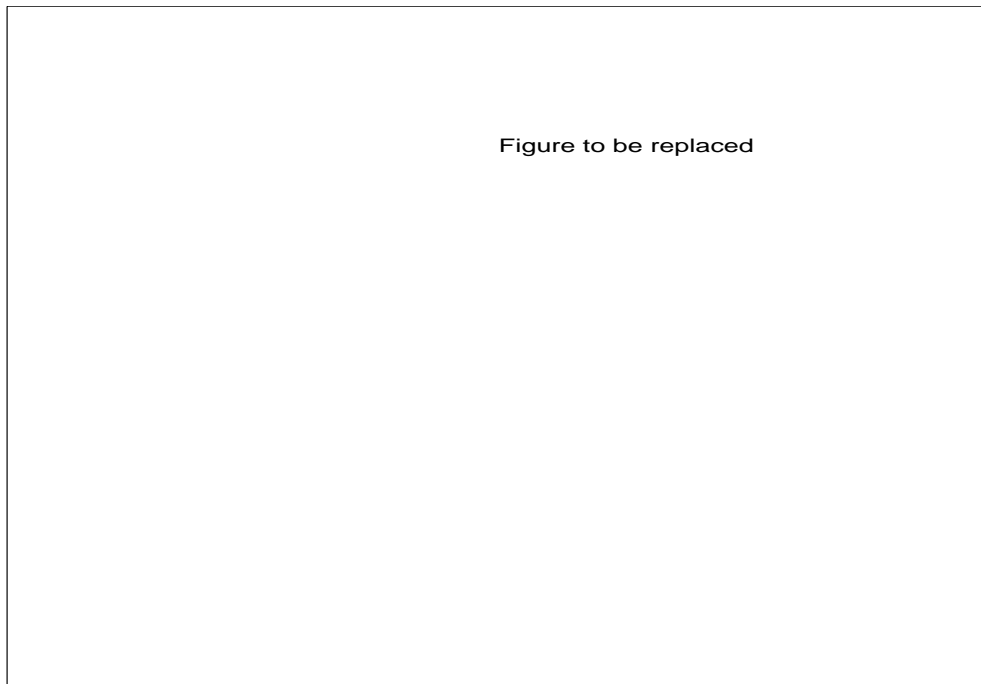


Figura 2.3: Diagramma HR di tre ammassi: Pleiadi, M67 e M5

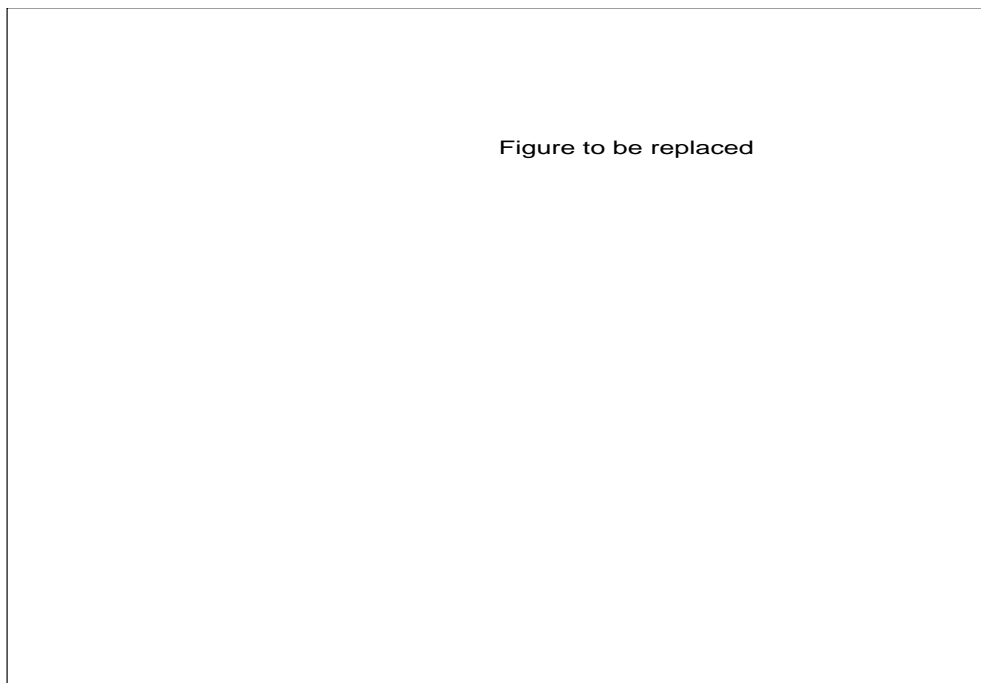


Figura 2.4: Diagramma HR degli ammassi stellari  $h\chi$ -Persei (pannello a) e M3 (pannello b)

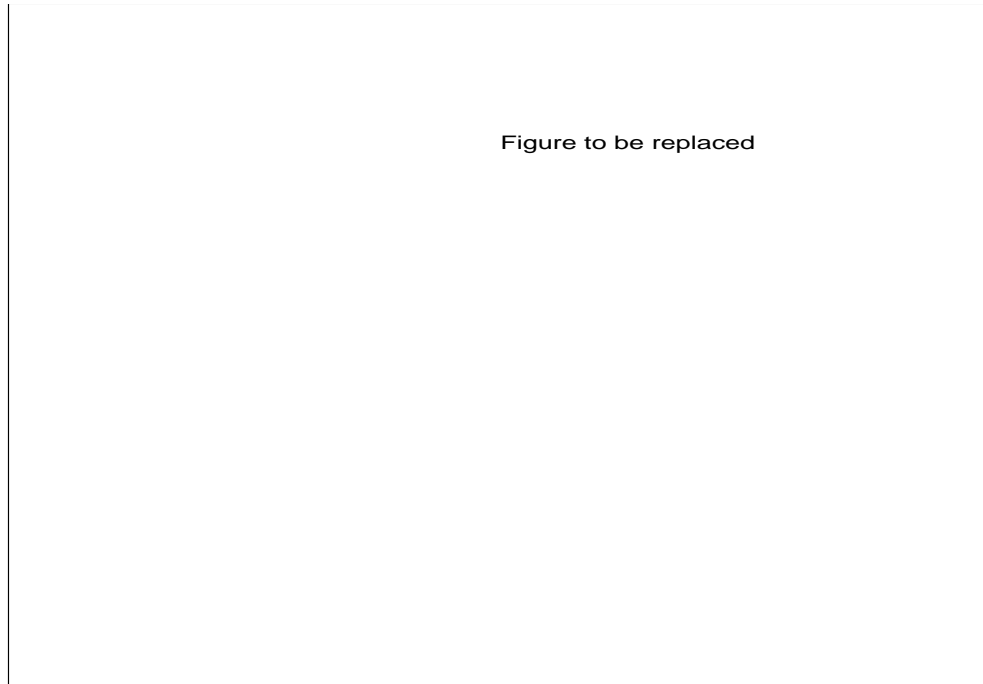


Figura 2.5: Diagrammi HR di tipici ammassi aperti (pannello a) e globulari (pannello b)

un gruppo di stelle giganti rosse. Al contrario la morfologia del diagramma H-R di un tipico ammasso globulare, quale M3 mostrato in Fig. 2.4(b) è molto più complessa. Oltre alle stelle della sequenza principale si osservano il ramo delle giganti rosse (red giant branch, RGB, secondo la terminologia corrente), il ramo orizzontale (horizontal branch, HB) circa 3.5 magnitudini più luminoso delle stelle più brillanti della sequenza principale, l'apparente assenza di stelle in una particolare regione del HB, la quale è al contrario popolata dalle stelle variabili RR Lyrae ed è nota come la regione di instabilità, ed infine il ramo *asintotico* delle giganti rosse (asymptotic giant branch, AGB). La morfologia dei rami orizzontali non è costante ma varia da ammasso ad ammasso, in particolare varia il numero di stelle situate alla destra o alla sinistra della regione di instabilità. Poichè gli ammassi sono a diversa distanza, il confronto fra i diagrammi H-R è fatto imponendo la coincidenza delle sequenze principali nell'ipotesi che stelle del colore del sole  $[(B - V) = 0.62]$  abbiano anche la stessa magnitudine visuale assoluta. Quantunque questo modo di procedere non sia completamente corretto, esso è sufficiente agli scopi presenti. Si vede che mentre le stelle meno luminose sono collocate lungo la sequenza principale, le stelle più brillanti via



via si discostano dalla questa popolando la regione delle giganti rosse, e che negli ammassi globulari si ha la comparsa dei RGB, HB ed AGB. La regione del diagramma H-R dove le stelle si discostano dalla sequenza principale viene detta "turning-point o turn-off" ed essa è caratterizzata da una luminosità ( $M_V$ ) ed indice di colore che variano da ammasso ad ammasso. Dall'esame dei diagrammi H-R di numerosi ammassi è evidente che questi possono essere ordinati in funzione di  $(B - V)$  crescente e crescente  $M_V$  ovvero in funzione di decrescente  $T_{eff}$  e  $L$  del turning point, passando dagli ammassi aperti agli ammassi globulari. Attesa la relazione massa - luminosità per stelle di sequenza principale, la massa delle stelle al turning-point decresce lungo la sequenza degli ammassi indicata. Si vedrà che questo equivale ad ordinare gli ammassi in funzione dell'età nel senso che questa cresce passando dagli ammassi aperti a quelli globulari.

La Figura 2.5(a) mostra i diagrammi H-R schematici di alcuni ammassi aperti ordinati in funzione della magnitudine al turning-point, mentre la Figura 2.5(b) mostra alcuni diagrammi H-R schematici di ammassi globulari. Si noti come i diagrammi H-R schematici degli ammassi globulari siano molto simili fra loro e mostrino turning-points e rami giganti che a parità di colore  $(B - V)$  sono più luminosi di quelli degli ammassi aperti più vecchi come M67 in contraddizione con quanto affermato in precedenza. In realtà la contraddizione è solo apparente e dovuta ad altre cause. Le stelle degli ammassi globulari sono gli oggetti più vecchi a noi noti. Questa discussione dei diagrammi H-R degli ammassi ci permette di formulare un certo numero di ipotesi: il tempo di vita di una stella è inversamente proporzionale alla sua massa, infatti le stelle di sequenza principale brillanti e quindi massicce sono presenti solo in ammassi giovani; la massa è uno dei parametri fondamentali; un ipotetico ammasso, in cui inizialmente fossero presenti stelle di ogni massa, invecchiando dovrebbe assumere nel diagramma H-R tutti gli stadi morfologici mostrati dalla sequenza discussa sopra; stelle di ogni massa sono caratterizzate nel diagramma H-R da un cammino evolutivo che dipende dalla massa iniziale composizione chimica e di cui l'età è il parametro corrente. La teoria dell'evoluzione stellare conferma che le ipotesi fatte sono corrette e permette di comprendere lo schema genetico che lega i vari tipi di stelle osservati nel diagramma H-R. Se potessimo determinare le età delle stelle indipendentemente dalla teoria dell'evoluzione stellare, allora

sarebbe possibile porre dei vincoli molto precisi alla teoria stessa. Sfortunatamente questo è possibile solo per il Sole nell'ipotesi che il sistema planetario sia quasi coevo. Evidenze geofisiche indicano che la Terra ha una età di circa 4.5 miliardi di anni. Il tentativo di assegnare l'età alle stelle diverse dal Sole ci permette di stimare le scale temporali tipiche della vita di una stella e di sviluppare il concetto di Popolazioni Stellari.

## 2.9 Popolazioni Stellari

Le differenze osservate nelle proprietà medie degli ammassi stellari di diversa età e composizione chimica hanno dato origine alla classificazione delle stelle in Popolazioni. Stelle di popolazione I sono quelle più giovani e ricche di metalli tipiche degli ammassi aperti ed associazioni, mentre all'estremo opposto sono le stelle di popolazione II molto vecchie e povere di metalli, tipiche degli ammassi globulari. La classificazione identifica altri gruppi con proprietà intermedie. Queste caratteristiche sono date in Tabella 2.9. È stato anche riconosciuto come le proprietà chimiche e le età delle stelle dei vari gruppi siano correlate alla loro distribuzione spaziale nella galassia ed alle loro proprietà cinematiche. Le stelle molto giovani sono confinate nel disco galattico, mentre all'aumentare dell'età esse tendono a distribuirsi in un volume via via più sferico il cui limite è rappresentato dalla distribuzione quasi sferica degli ammassi globulari. Un parametro fondamentale della classificazione è la velocità delle stelle rispetto alla velocità orbitale attorno al centro galattico. Ad esempio le stelle nelle vicinanze solari possono essere divise in un gruppo ad alta velocità ricco di giganti rosse ed il cui diagramma H-R assomiglia a quello degli ammassi globulari e quindi di età vecchia, ed in un gruppo a bassa velocità il cui diagramma H-R è simile a quello degli ammassi aperti ed associazioni e quindi di età giovane. Queste proprietà suggeriscono che debba esistere una causa profonda legata ai processi di formazione della galassia stessa.

Tabella 2.3: Sequenza di Popolazioni Stellari. *Note – Distribuzione: sferica (sferica), intermedia (interm.); disco (disco), piatta (piatta); molto piatta (m. piatta) – Oggetti tipici: GC (ammassi globulari); RRLy (stelle RRLyrae); VLP (variabili a lungo periodo); NP (nebulose planetarie) –  $\langle z \rangle$  (altezza sul piano galattico a cui la densità della popolazione si dimezza) –  $V_r$  velocità di rotazione attorno al centro galattico –  $\Delta V_r$  dispersione delle velocità in Km/s – Età tipica della popolazione –  $Z$  metallicità –  $M/M_G$  massa frazionaria della componente rispetto alla massa totale della galassia.*

Popolazione	II Estrema	II Interm.	Disco	I Vecchia	I Estrema
Distribuzione	Sferica	Interm.	Disco	Piatta	M. Piatta
Oggetti Tipici	GC-RRLy	VLP	NP	Cefeidi	Stelle O-B
$\langle z \rangle$ (in pc)	2000	700	400	150	<100
$V_r$ (km/s)	<100	200	240	250	250
$\Delta V_r$ (km/s)	250	80	25	15	12
Età ( $10^9$ anni)	10-15	10	2-10	0.2-2	<0.2
$Z$	0.0001-0.001	0.01	0.02	0.03	0.04
$M/M_G$	0.2	0.2	0.5	0.1	0.03



## Capitolo 3

# SCALE DI TEMPO STELLARI

Per il Sole, di cui conosciamo con precisione il raggio, la massa e la luminosità, possiamo vedere verificate due importanti condizioni fisiche: equilibrio idrostatico e quasi equilibrio termico su una scala di tempo molto lunga. Infatti, l'esistenza dei fossili sulla Terra, la cui datazione può essere fatta risalire a circa 3 miliardi di anni, richiede che la temperatura ambiente non possa essere variata di più di 20 K rispetto a quella attuale, il che implica che la luminosità del Sole è rimasta essenzialmente costante su questa scala di tempo.

La perdita di energia dal Sole ad un tasso di  $3.9 \times 10^{33}$  ergs s<sup>-1</sup> richiede una sorgente interna in grado di compensarla. In una descrizione semplificata della struttura del Sole, questo può essere pensato come un sistema gassoso auto-gravitante in cui vale la condizione di equilibrio idrostatico: forze gravitazionali bilanciate dalle forze di pressione. È facile verificare che anche una minima deviazione da questa condizione implica una variazione del raggio solare sulla scala di tempo di caduta libera

$$t_{ff} = 2\sqrt{\frac{R^3}{GM}} = 3.2 \times 10^3 \left(\frac{R}{R_\odot}\right)^{3/2} \left(\frac{M}{M_\odot}\right)^{1/2} \quad (3.1)$$

(circa un'ora). Il che non è osservato.

Una possibile sorgente di energia è l'energia termica  $E_T$ , la quale in base al teorema del viriale per un sistema in equilibrio idrostatico è  $E_T = -(1/2)\Omega$ , dove  $\Omega$  è l'energia potenziale  $\Omega = qGM^2/R$  ( $q$  è un fattore numerico dell'ordine dell'unità che tiene conto della distribuzione interna di massa e  $G$  è la costante di gravità). La massima durata di questa sorgente è quando tutta la energia

termica viene irradiata

$$t_K = \frac{3}{4} \frac{GM^2}{RL} = 2 \times 10^7 \left( \frac{M}{M_\odot} \right)^2 \frac{L_\odot}{L} \frac{R_\odot}{R} \quad \text{anni} \quad (3.2)$$

dove  $M$ ,  $L$  e  $R$  sono in unità solari. Nel caso del Sole si otterrebbe un'età di circa 20 milioni di anni che è chiaramente troppo breve rispetto a quella indicata dalle evidenze geologiche e biologiche sulla Terra.

Bethe e Weizsacher nel 1939 dimostrarono che reazioni termonucleari possono avvenire nell'interno delle stelle ed identificarono nei processi di fusione che trasformano quattro nuclei di  $H$  in un nucleo di  ${}^4He$  la sorgente di energia per le stelle della sequenza principale.

Affinchè possa avvenire la fusione fra nuclei di carica simile è necessario avvicinare le particelle interagenti fino a distanze dell'ordine di  $10^{-13}$  cm dove sono attive le forze nucleari, altamente attrattive. A ciò si oppone la repulsione coulombiana fra particelle di carica simile, la quale sommata al potenziale nucleare attrattivo dà luogo alla caratteristica barriera (si veda la discussione dettagliata nel capitolo 15). Secondo la meccanica classica se una particella ha energia cinetica inferiore all'altezza della barriera, essa non potrà mai attraversarla e la fusione aver luogo. Tuttavia, in base alla meccanica quantistica, per ogni energia cinetica delle particelle esiste sempre una certa probabilità non nulla di attraversare la barriera. La probabilità cresce con la energia cinetica (temperatura) delle particelle. Anche se le temperature, energie cinetiche delle particelle, nell'interno delle stelle non sono particolarmente alte, almeno rispetto alle tipiche barriere coulombiane, si vede che il processo di fusione avviene sufficientemente spesso.

Evidentemente le prime reazioni ad innescarsi saranno quelle per cui la barriera coulombiana è relativamente bassa e le particelle numerose, come nel caso dell'idrogeno.

L'energia liberata da ogni singolo processo di fusione di  ${}^1H$  in  ${}^4He$  è  $\Delta E = \Delta mc^2$  dove  $\Delta m$  è la differenza in massa fra i quattro nuclei di  ${}^1H$  e il nucleo di  ${}^4He$  e  $c$  la velocità della luce. È facile vedere che per grammo di materia si liberano  $6 \times 10^{18}$  ergs. Affinchè la fusione avvenga in maniera sufficiente da giustificare il fabbisogno energetico è necessaria una temperatura minima che si troverà esistere solamente nelle regioni più interne. Sia  $f$  la frazione di massa

in cui avviene la fusione e  $X$  la frazione di massa della stella (Sole) sotto forma di  $^1H$ , la durata di questa sorgente di energia è

$$t_N = 6 \times 10^{18} \frac{fXM}{L} = 10^{10} \frac{M}{M_\odot} \frac{L_\odot}{L} \quad \text{anni} \quad (3.3)$$

nella quale sono stati posti  $f = 0.1$  e  $X = 0.7$  (tipici valori) e  $M$  e  $L$  sono state espresse in unità solari. Nel caso del Sole la durata è di circa 10 miliardi di anni in accordo con le stime geologiche. In seguito, vedremo che in realtà il Sole ha speso circa metà della sua vita nucleare.

Chiaramente, gli argomenti sviluppati per il Sole possono essere estesi alle altre stelle di sequenza principale nell'ipotesi che a caratteristiche esterne simili debbano corrispondere condizioni interne simili. Anche se ciò non sarà rigorosamente vero, troveremo che tutte le stelle della sequenza principale hanno nel processo nucleare di conversione  $4\ ^1H$  in  $^4He$  la sorgente di energia che bilancia la luminosità irradiata.

Poiché le stelle della sequenza principale obbediscono ad una relazione massa-luminosità, è immediato constatare che, almeno in via qualitativa, il tempo nucleare dipende dalla massa della stella. Si trova che  $t_N$  decresce con la massa ( $t_N \propto M^{-n}$ ). Esso varia da alcuni milioni di anni per le stelle più massicce fino a decine di miliardi di anni per le stelle meno massicce del Sole.

Vedremo che simili considerazioni potranno essere applicate anche ad altri gruppi di stelle, ad esempio le stelle di HB negli ammassi globulari e le giganti o supergiganti blu e rosse degli ammassi aperti dove la sorgente di energia è primariamente nucleare ma dovuta ad altri processi di fusione, quali la conversione di 3 nuclei di  $^4He$  in un nucleo di  $^{12}C$  e per cattura di un ulteriore nucleo di  $^4He$  in  $^{16}O$ .

Traspare da ciò che la storia di una stella può essere schematizzata in una serie fasi in cui la sorgente primaria di energia è nucleare. Poiché i veri processi di fusione avvengono a temperature via via crescenti essi sono intervallati da fasi di inattività nucleare in cui il rilascio di energia per contrazione gravitazionale diventa importante e il conseguente aumento di energia termica (teorema del viriale) garantisce l'aumento di temperatura necessario per l'innescio della fase nucleare successiva. Nella realtà la struttura e l'evoluzione di una stella sono molto più complesse, ma questa schematizzazione è per ora sufficiente.

Alle scale di tempo  $t_K$  e  $t_N$  possiamo associare anche un altro significato oltre a quello di durata delle sorgenti termica e nucleare e cioè di tempi caratteristici durante i quali varia la struttura fisica delle stelle e quindi anche i parametri più direttamente osservabili, quali luminosità ed indice di colore. Si considera una stella essere in condizioni di quasi equilibrio termico quando la sorgente dominante di energia è quella nucleare e le sue caratteristiche fisiche  $(L, T_{eff}, R)$  variano su una scala di tempo molto lunga.



## Capitolo 4

# SIMMETRIA SFERICA

### 4.1 Descrizione Euleriana

Per stelle gassose, singole, non rotanti e senza campi magnetici, le sole forze agenti su un elemento di massa sono generate dalla pressione e gravità. *Il risultato di ciò è la simmetria sferica.* Pertanto tutte le funzioni sono costanti su superfici sferiche concentriche ed una sola variabile è sufficiente a descriverle. È naturale prendere la coordinata radiale  $r$  (distanza dal centro al punto in esame) come la variabile spaziale indipendente. Essa è confinata fra  $r = 0$  (centro) e  $r = R$  (superficie).

In aggiunta a ciò, è anche necessario introdurre la variabile *tempo*  $t$  per descrivere le possibili variazioni temporali delle funzioni.

Pertanto se assumiamo  $r$  e  $t$  come variabili indipendenti, abbiamo una tipica descrizione *Euleriana* del sistema nel senso dell'idrodinamica classica. Ogni altra variabile del problema ha una dipendenza del tipo  $f(r, t)$ .

Allo scopo di fornire una descrizione conveniente della distribuzione di massa dentro la stella, in particolare l'effetto di questa sul campo gravitazionale, definiamo come  $M(r, t)$  la massa contenuta entro il raggio  $r$  al tempo  $t$ . La variazione di  $M(r, t)$  rispetto ad  $r$  e  $t$  è data da

$$dM(r, t) = 4\pi r^2 \rho dr - 4\pi r^2 \rho v dt \quad (4.1)$$

Il primo termine è ovviamente la massa contenuta nella corona sferica di spessore  $dr$  al tempo  $t$ . Esso dà la variazione di  $M(r, t)$  dovuta a variazioni di  $r$  a tempo costante

$$\frac{\partial M(r, t)}{\partial r} = 4\pi r^2 \rho \quad (4.2)$$

Il secondo termine dà il flusso di massa verso l'esterno attraverso la sfera di raggio  $r$  dovuto al moto del gas con velocità  $v$  nell'intervallo di tempo  $dt$

$$\frac{\partial M(r, t)}{\partial t} = -4\pi r^2 \rho v \quad (4.3)$$

Differenziando la equazione (4.2) rispetto al tempo e la equazione (4.3) rispetto ad  $r$  ed eguagliando le due espressioni si ottiene

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\frac{1}{r^2} \frac{\partial \rho r^2 v}{\partial r} \quad (4.4)$$

Essa è la ben nota equazione di continuità dell'idrodinamica

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\nabla \cdot (\rho \bar{v}) \quad (4.5)$$

## 4.2 Descrizione Lagrangiana

Nel caso di simmetria sferica, è spesso molto più conveniente formulare il problema in una coordinata *Lagrangiana* invece che in  $r$ , ad esempio in funzione di una variabile legata alla massa  $M(r)$  contenuta dentro la sfera di raggio  $r$  ad un dato tempo  $t_0$ . La nuova variabile  $M(r)$  è confinata fra  $M(r) = 0$  (centro) e  $M(r) = M$  (superficie).

Ovviamente, non esiste alcuna difficoltà nel passare da una coordinata all'altra. Il legame operativo della trasformazione  $r, t \rightarrow m, t$  è dato da

$$\frac{\partial}{\partial M(r)} = \frac{\partial}{\partial r} \cdot \frac{\partial r}{\partial M(r, t)} \quad (4.6)$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)_{M(r, t)} = \frac{\partial}{\partial r} \cdot \left(\frac{\partial r}{\partial t}\right)_{M(r, t)} + \left(\frac{\partial}{\partial t}\right)_r \quad (4.7)$$

dove i pedici  $M(r, t)$  e/o  $r$  stanno ad indicare quale delle variabili spaziali ( $M(r, t)$  o  $r$ ) sia mantenuta costante durante il processo di derivazione.

A scopo illustrativo applichiamo la trasformazione di cui sopra alla massa  $M(r, t)$  stessa. Si ottiene

$$\frac{\partial}{\partial M(r)} = \frac{1}{4\pi r^2 \rho} \frac{\partial}{\partial r} \quad (4.8)$$

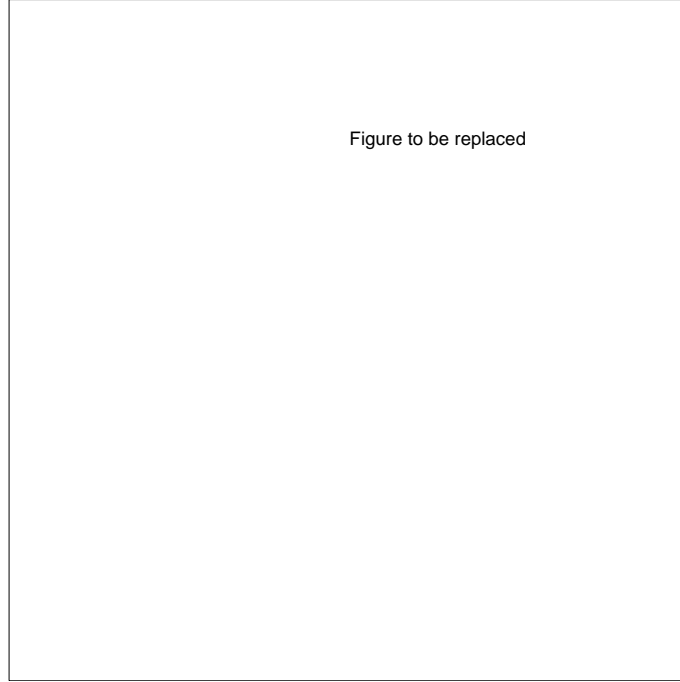


Figura 4.1: Potenziale gravitazionale e vettore accelerazione di gravità in funzione di  $r$  nel caso di simmetria sferica

### 4.3 Campo Gravitazionale

Dentro un corpo a simmetria sferica, il valore assoluto dell'accelerazione gravitazionale  $g$  ad una data distanza  $r$  dal centro non dipende dagli elementi di massa esterni ad  $r$ . Esso dipende solo dal raggio  $r$  e dalla massa contenuta entro la sfera di raggio  $r$

$$g = \frac{GM(r)}{r^2} \quad (4.9)$$

Il campo gravitazionale dentro la stella può essere descritto da un potenziale  $\Phi$  soluzione della equazione di Poisson

$$\nabla^2 = 4\pi G\rho \quad (4.10)$$

dove  $\nabla^2$  è l'operatore di Laplace. Nel caso di simmetria sferica essa diventa

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial \Phi}{\partial r} \right) = 4\pi G\rho \quad (4.11)$$

Il vettore dell'accelerazione gravitazionale è rivolto verso l'interno. Esso è ottenuto dal potenziale  $\Phi$  mediante la relazione vettoriale

$$\bar{g} = -\bar{\nabla}\Phi \quad (4.12)$$

Nel nostro caso essa diventa

$$g = \frac{\partial\Phi}{\partial r} \quad (4.13)$$

ovvero

$$\frac{\partial\Phi}{\partial r} = \frac{GM(r,t)}{r^2}. \quad (4.14)$$

Il potenziale è dato dalla relazione

$$\Phi = \int_0^r \frac{GM(r,t)}{r^2} dr + costante \quad (4.15)$$

A meno che non sia specificato in maniera diversa, assumiamo che la costante di integrazione sia tale che  $\Phi \rightarrow 0$  per  $r \rightarrow \infty$ . L'andamento del potenziale  $\Phi(r, t)$  ad un dato tempo  $t$  è mostrato in Figura 4.1.

## Capitolo 5

# EQUILIBRIO MECCANICO

### 5.1 Equilibrio Idrostatico

Durante la maggior parte della vita una stella si trova in condizioni di equilibrio idrostatico, il che significa che la forza di gravità agente su ogni elemento di materia è esattamente bilanciata dalla differenza di pressione esercitata sulle faccie inferiori e superiori dello stesso. In condizioni di simmetria sferica (approssimazione ovvia per una stella non rotante) la condizione si scrive (si veda la Figura 5.1)

$$\frac{1}{\rho} \frac{dP}{dr} = -\frac{GM(r)}{r^2} \quad (5.1)$$

dove  $M(r)$  è la massa contenuta entro la sfera di raggio  $r$ ,  $\rho$  è la densità,  $P$  la pressione e  $G$  la costante gravitazionale.

In certe fasi evolutive, quali il collasso di una protostella o del nucleo di ferro di una stella evoluta, l'equilibrio idrostatico non è soddisfatto e deve essere sostituito dalla corrispondente equazione del moto (in simmetria sferica)

$$\frac{Dv}{Dt} = -\frac{GM(r)}{r^2} - \frac{1}{\rho} \frac{dP}{dr} \quad (5.2)$$

dove  $v$  è la velocità dell' generico elemento di materia e  $D$  indica la derivata lungo il moto di questo.

### 5.2 Conservazione della Massa

Una seconda condizione di equilibrio applicabile in ogni circostanza, è quella di conservazione della massa, la quale semplicemente afferma che

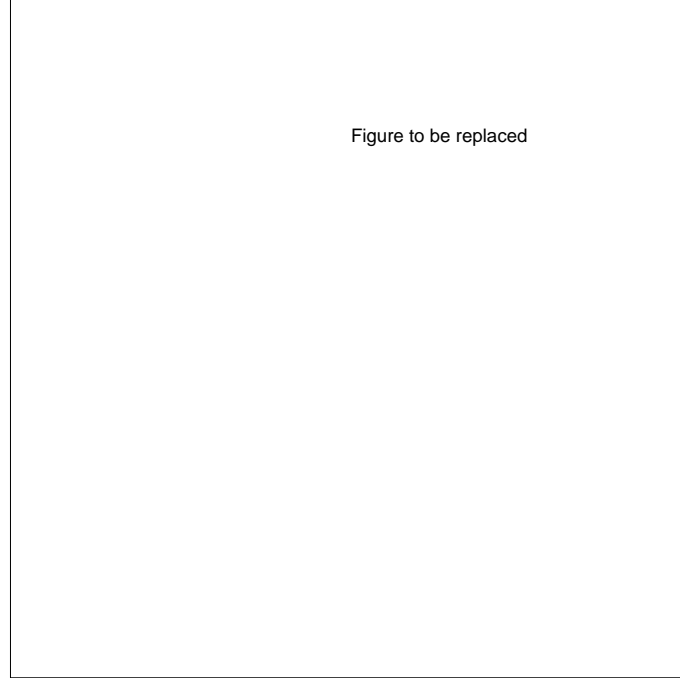


Figura 5.1: Equilibrio meccanico fra forze di pressione e di gravità

$$\frac{dM(r)}{dr} = 4\pi r^2 \rho \quad (5.3)$$

dove  $dM(r)$  è la massa contenuta in uno strato sferico di spessore  $dr$ .

In presenza di un moto radiale di materia con velocità  $v(r)$  essa diventa

$$\frac{dM(r)}{dt} = 4\pi r^2 \rho v(r) \quad (5.4)$$

### 5.3 Pressione, temperatura e densità centrali

La condizione di equilibrio idrostatico e di continuità della massa possono essere usate per ottenere una stima della densità, pressione e temperatura centrali. La densità media di una stella di massa  $M$  e raggio  $R$  è

$$\langle \rho \rangle = \frac{3M}{4\pi R^3} \quad (5.5)$$

Dalla equazione (5.1) e l'approssimazione  $dP/dr = (P_c - P_0)/R = P_c/R$ , dove  $P_c$  e  $P_0$  sono la pressione al centro e alla superficie rispettivamente, si ottiene

$$P_c = \frac{GM^2}{R^4} \quad (5.6)$$

La temperatura centrale  $T_c$  si ha dall'equazione di stato  $P = P(\mu, \rho, T)$ . Se assumiamo che in condizioni normali la materia stellare si comporti come un gas perfetto non degenero,

$$T_c = \mu \frac{HG}{K} \frac{M}{R} \quad (5.7)$$

Densità, pressione e temperatura centrali in cui massa e raggio sono espresse in unità solari diventano

$$\rho_c = 1.41 \left( \frac{M}{M_\odot} \right) \left( \frac{R_\odot}{R} \right)^3 \quad \text{g cm}^{-3} \quad (5.8)$$

$$P_c = 1.1 \times 10^{16} \left( \frac{M}{M_\odot} \right)^2 \left( \frac{R_\odot}{R} \right)^4 \quad \text{dyne cm}^{-2} \quad (5.9)$$

$$T_c = 2.3 \times 10^7 \mu \left( \frac{M}{M_\odot} \right) \left( \frac{R_\odot}{R} \right) \quad \text{K} \quad (5.10)$$

Nonostante le approssimazioni, la pressione e la temperatura derivate da queste relazioni sono in realtà molto vicine a quelle ottenute da calcoli numerici accurati. L'alta temperatura centrale rispetto a quella superficiale ci permette di trascurare quest'ultima nella stima del gradiente di temperatura in una stella, il quale è semplicemente

$$\frac{dT}{dr} = 3.3 \cdot 10^{-4} \mu \left( \frac{M}{M_\odot} \right) \quad \text{K cm}^{-1} \quad (5.11)$$

## 5.4 Teorema del Viriale

Il teorema del viriale è una rappresentazione integrale della condizione di equilibrio idrostatico e lega l'energia gravitazionale di una stella alla sua energia termica (termodinamica).

Moltiplichiamo entrambi i membri della equazione (5.1) per  $(4\pi r^3/3)dr$  ottenendo

$$\left( \frac{4\pi r^3}{3} \right) dP = - \left( \frac{4\pi}{3} \right) r^2 \rho \left( \frac{GM(r)}{r} \right) dr \quad (5.12)$$

da cui indicando con  $V(r) = 4\pi r^3/3$  ed usando l'equazione (5.3) si ha

$$V dP = - \left( \frac{1}{3} \right) \left( \frac{GM(r)}{r} \right) dM(r) \quad (5.13)$$

Integriamo questa equazione sull'intera stella ricordando che  $V$  si annulla al centro mentre  $P$  si annulla alla superficie. Si ottiene

$$-3 \int P dV = - \int \left( \frac{GM(r)}{r} \right) dM(r) = \Omega \quad (5.14)$$

$\Omega$  è la energia potenziale gravitazionale, mentre il termine di sinistra è legato alla energia termodinamica del sistema. Questa dipende dalla natura del materiale. Sappiamo dalle leggi della termodinamica e meccanica statistica che la pressione  $P$  è legata all'energia termodinamica per unità di volume (o energia interna)  $U$  da relazioni semplici che nei casi limite di gas non relativistico e relativistico sono

$$P = \left(\frac{2}{3}\right)U \quad \text{non relativistico}$$

$$P = \left(\frac{1}{3}\right)U \quad \text{relativistico}$$

Da queste segue che la energia totale termodinamica  $U_T$  è

$$U_T = -\left(\frac{1}{2}\right)\Omega \quad \text{non relativistico}$$

$$U_T = -\Omega \quad \text{relativistico}$$

L'energia totale  $E$  di una stella, definita come  $U_T + \Omega$ , è

$$E = \left(\frac{1}{2}\right)\Omega = -U_T \quad \text{non relativistico}$$

$$E = 0 \quad \text{relativistico}$$

Si ha l'importante risultato che una stella composta da un gas relativistico non è gravitazionalmente legata. Pertanto al tendere di una stella alle condizioni relativistiche si ha instabilità. Poichè un gas di fotoni può essere pensato come un gas di particelle relativistiche, ne segue che una stella diventa instabile quando la pressione di radiazione è dominante.



## 5.5 Necessità dell' equilibrio idrostatico

Il modo migliore per giustificare l'ipotesi ed assunzione di equilibrio idrostatico è quello di vedere che cosa succede se una stella si discosta anche di poco da questa condizione.

Consideriamo un punto alla distanza  $r$  dal centro e supponiamo che

$$\left| \frac{1}{\rho} \frac{dp}{dr} \right| < \frac{GM_r}{r^2} \quad (5.15)$$

Il materiale subirà una accelerazione verso l'interno data da

$$-\ddot{r} = \frac{GM_r}{r^2} - \frac{1}{\rho} \left| \frac{dp}{dr} \right| = \frac{GM_r}{r^2} \left[ 1 - \frac{\frac{1}{\rho} \left| \frac{dp}{dr} \right|}{\frac{GM_r}{r^2}} \right] \quad (5.16)$$

Supponiamo che  $\ddot{r}$  sia costante durante il tempo  $t$  e che il punto si sia spostato di  $\alpha R$  (una frazione del raggio totale  $R$ , con  $\alpha < 1$ ). Dalla legge del moto si ha

$$\alpha R = \frac{1}{2} (-\ddot{r}) t^2 \quad (5.17)$$

quindi

$$t = \left( \frac{2\alpha R}{-\ddot{r}} \right)^{1/2} = \left( \frac{2\alpha r^2 R}{GM_r [\dots]} \right)^{1/2} \quad (5.18)$$

Per avere una stima di  $t$  poniamo  $r = 0.5R$  e  $M_r = 0.5M$

$$t = \left( \frac{R^3}{GM} \right)^{1/2} \left( \frac{\alpha}{[\dots]} \right)^{1/2} \quad (5.19)$$

ovvero

$$t \simeq 1.6 \times 10^3 \left( \frac{\alpha}{[\dots]} \right) \left( \frac{R}{R_\odot} \right)^{3/2} \left( \frac{M}{M_\odot} \right)^{1/2} \quad \text{secondi} \quad (5.20)$$

Supponiamo ora che la condizione di equilibrio idrostatico non sia verificata per circa 1%, cioè che  $[\dots](GM_r/R^2) = 0.99$ , e che  $\alpha = 0.1$ . Nel caso del Sole si ottiene

$$t \simeq 5 \times 10^3 \quad \text{secondi} \simeq 1 \text{ ora.} \quad (5.21)$$

Una deviazione del 1% provocherebbe una variazione del raggio del 10% nel tempo di un'ora. Fortunatamente ciò non avviene ora nè è mai avvenuto nel passato.

Anche quando una stella si contrae sulla scala di tempo di Kelvin, la condizione di equilibrio idrostatico è verificata con grande precisione. Ricordando che  $t_K$  è il tempo con cui una stella si contrae su una scala lineare pari al suo raggio, possiamo scrivere

$$R \simeq \frac{1}{2} a t_K^2 \quad (5.22)$$

dove  $a$  è la accelerazione del moto di contrazione. Per il Sole  $R \simeq 7 \times 10^{10}$  cm  $t_K \simeq 6 \times 10^{14}$  s, ne segue

$$a \simeq 5 \times 10^{-19} \quad \text{cm s}^{-1} \quad (5.23)$$

che è molto più piccola dell' accelerazione indotta dal campo gravitazionale ad esempio a  $R/2$  e cioè circa  $10^5$  cm s<sup>-1</sup>.

## Capitolo 6

# EQUILIBRIO TERMICO

La condizione di equilibrio idrostatico non è sufficiente a garantire una stella costante, ma è necessario introdurre la condizione di equilibrio termico. Innanzi tutto è opportuno chiarire che un perfetto equilibrio termico, in base al quale tutte le parti del sistema hanno la stessa temperatura e non vi sono scambi di energia fra le parti, non è possibile. Infatti in una stella sono presenti un gradiente di temperatura e un flusso di energia dalla superficie. Quale sarà dunque il genere di equilibrio possibile in una stella ? Per rispondere a questa domanda consideriamo tutte le forme di energia da cui la stella può trarre sostegno per compensare il flusso di energia dalla superficie.

### 6.1 Equilibrio termico

L'energia totale di un elemento di materia di massa unitaria è

$$E = U + \Omega + K \quad (6.1)$$

dove  $U$  è la energia interna del gas,  $\Omega$  la energia potenziale e  $K$  la energia cinetica dei moti di massa su grande scala, che possiamo qui trascurare.

Consideriamo un elemento di materia di volume  $V$  racchiuso da una superficie arbitraria  $S$  e sia  $\epsilon$  il tasso netto di produzione di energia per grammo e per secondo all'interno dell' elemento di materia e  $\bar{F}$  il flusso netto di energia in una direzione arbitraria da un punto qualunque della superficie  $S$ . La conservazione dell'energia impone che

$$\oint_S \bar{F} \cdot d\bar{S} = \int_V \rho \epsilon dV \quad (6.2)$$

dove  $d\bar{S}$  è l'elemento di superficie con normale  $\bar{n}$ . Applicando il teorema della divergenza e tenendo conto che il volume  $V$  è arbitrario, si ha

$$\bar{\nabla} \cdot \bar{F} = \rho \epsilon \quad (6.3)$$

che rappresenta la condizione di *equilibrio termico*.

Nel caso di simmetria sferica, il flusso  $\bar{F}$  dipende solo dalla distanza  $r$  dal centro. Esprimendo il tutto in coordinte polari (e simmetria sferica) si ha

$$\bar{\nabla} \cdot \bar{F} = \frac{1}{r^2} \frac{d}{dr}(r^2 F) = \frac{1}{4\pi r^2} \frac{d}{dr}(4\pi r^2 F) = \rho \epsilon \quad (6.4)$$

Infine ponendo  $L(r) = 4\pi r^2 F(r)$ , cioè considerando la luminosità  $L(r)$  (energia emessa per secondo dall'intera superficie) si ha

$$\frac{dL(r)}{dr} = 4\pi r^2 \rho \epsilon \quad (6.5)$$

Da questa segue che la luminosità totale irradiata da una stella in equilibrio termico è

$$L = \int_0^R 4\pi r^2 \rho \epsilon dr \quad (6.6)$$

## 6.2 Bilancio energetico generale

Ritorniamo ora a considerare il problema da un punto di vista generale. La conservazione dell'energia totale di un elemento di materia richiede che sia soddisfatta la relazione

$$\frac{dE}{dt} = \left(\frac{dU}{dt}\right) + \left(\frac{d\Omega}{dt}\right) = \epsilon - \frac{1}{\rho} \text{div} F \quad \text{erg s}^{-1}. \quad (6.7)$$

Ogni variazione dell'energia totale di un elemento di materia è data dalla somma delle variazioni di energia interna  $U$  e potenziale  $\Omega$ .

La variazione di energia potenziale è espressa da

$$d\Omega = PdV = -\left(\frac{P}{\rho^2}\right)d\rho \quad (6.8)$$

mentre la variazione di energia interna  $U$  è più complessa da esprimere in quanto dipende dalle variabili fisiche temperatura, pressione e dalla natura del gas.

Con l'aiuto di quanto detto si può riscrivere la equazione (6.5) nella forma più generale

$$\frac{dL(r)}{dr} = 4\pi r^2 \rho \left[ \epsilon + \left( \frac{P}{\rho^2} \right) \left( \frac{d\rho}{dt} \right) - \left( \frac{dU}{dt} \right) \right] \quad (6.9)$$

Il termine  $(P/\rho^2) \frac{d\rho}{dt} - \frac{dU}{dt}$  viene anche chiamato la sorgente gravitazionale locale  $\epsilon_g$ . Si verifica facilmente che

$$\epsilon_g = - \left[ \left( \frac{P}{\rho^2} \right) \left( \frac{d\rho}{dt} \right) + \left( \frac{dU}{dt} \right) \right] = -T(dS/dt) \quad (6.10)$$

dove  $S$  è l'entropia per unità di massa.

Il tasso netto di produzione  $\epsilon$  ed il flusso  $F$  sono dati dalla somma di vari contributi. In generale possiamo scrivere

$$F = F_r + F_{cond} + F_{conv} + F_\nu \quad (6.11)$$

dove i vari termini rappresentano il contributo al flusso dato dalla radiazione, conduzione, convezione e neutrini, rispettivamente.

Parimenti, per  $\epsilon$  possiamo distinguere  $\epsilon = \epsilon_n + \epsilon_{vis}$ , dove  $\epsilon_n$  ed  $\epsilon_{vis}$  sono i tassi di produzione per unità di massa da sorgenti nucleari e dal riscaldamento per viscosità generato dai moti del fluido. In generale  $\epsilon_{vis}$  può essere trascurato nella maggior parte dei casi astrofisici.

Non tutti i tipi di trasporto dell'energia sono egualmente importanti in ogni porzione della stella e fase evolutiva.  $F_\nu$  è importante solamente in certe fasi avanzate dell'evoluzione, mentre  $F_{cond}$  è apprezzabile solamente in materiale estremamente degenere.

È importante anche notare che si conviene di escludere da  $\epsilon_n$  la parte di energia che appare sotto forma di neutrini eventualmente emessi dalle reazioni nucleari. Essa viene presa in considerazione modificando opportunamente la definizione di resa energetica della reazione nucleare in esame. Ne segue che  $F_\nu$  deve essere inteso come il flusso di neutrini non generati da reazioni nucleari. Inoltre il fatto che ogni energia emessa sotto forma di neutrini non sia in generale utilizzabile dal sistema permette di riscrivere la equazione (6.9) in una forma leggermente diversa

$$\frac{dL(r)}{dr} = 4\pi r^2 \rho \left( \epsilon_n - \epsilon_\nu + \epsilon_g \right) \quad (6.12)$$

avendo posto  $\text{div } F_\nu = -\rho \epsilon_\nu$  ed intendendo con  $L(r)$  la luminosità non neutrinica.

Un sistema in equilibrio idrostatico per il quale valga la condizione

$$\frac{dL(r)}{dr} = 4\pi r^2 \rho (\epsilon_n - \epsilon_\nu) \quad (6.13)$$

viene detto *in (quasi) equilibrio termico*.

Un sistema in equilibrio idrostatico ma senza sorgenti di energia nucleare ( $\epsilon_n = 0$  ovunque) e che emetta energia dalla superficie *non può essere in equilibrio termico*. In tale caso, la stella sarà in contrazione gravitazionale e la luminosità uscente da ogni sfera di raggio  $r$  sarà compensata dal rilascio di energia gravitazionale per contrazione il cui tasso netto per unità di massa e di tempo è data dal termine  $\epsilon_g$ .

L'equazione (6.13) assieme alle equazioni (5.1) e (5.3) ed alle relazioni per  $\epsilon_n$ ,  $\epsilon_\nu$  e  $U$ , tutte funzioni delle variabili fisiche del sistema, costituiscono tre equazioni fondamentali della struttura stellare, nelle incognite  $M(r)$ ,  $P(r)$ ,  $\rho(r)$  o  $T(r)$  e  $L(r)$ . Al fine di rendere il numero di incognite pari al numero di equazioni è necessaria una ulteriore equazione la quale legghi la luminosità  $L(r)$  al gradiente di temperatura ( $dT/dr$ ) oppure fissi il valore di quest'ultimo. Ciò è possibile studiando i meccanismi di trasporto dell'energia che saranno illustrati più avanti.

## Capitolo 7

# STATO FISICO DEGLI INTERNI STELLARI

### 7.1 Equilibrio Termodinamico nelle Stelle

Le proprietà macroscopiche di una stella sono intimamente legate ai fenomeni microscopici che avvengono nel suo interno, i quali a loro volta dipendono dallo stato termodinamico del sistema. Il concetto di equilibrio termodinamico (E.T.) è di fondamentale importanza nello studio delle strutture stellari.

La definizione classica di E.T. si riferisce ad una ipotetica cavità adiabatica isolata meccanicamente e termicamente dal resto dell'universo nella quale sia stato raggiunto l'equilibrio meccanico, termico e chimico e temperatura uniforme.

I tre tipi di equilibrio (meccanico, termico e chimico) sono raggiunti su scale di tempo diverse le quali in generale obbediscono alla disuguaglianza

$$t_{mec} \ll t_{chim} < t_{term} \quad (7.1)$$

L'applicazione del concetto di E.T. alla materia degli interni stellari richiede alcune cautele ed accorgimenti. Innanzi tutto una stella *non è un sistema in rigoroso E.T.* in quanto

- (a) perde energia dalla superficie,
- (b) non ha temperatura uniforme,
- (c) non ha composizione chimica costante nel tempo.

Tuttavia è facile constatare che il gradiente di temperatura esistente in una stella è molto piccolo ( $10^{-4}$  K cm<sup>-1</sup>) e che il cammino libero medio di un fotone nell'interno di una stella è dell'ordine di 1 cm. Questo assicura che *in ottima approssimazione ogni piccola porzione del materiale stellare può essere*

*considerato come una cavità adiabatica a temperatura uniforme.* Inoltre confrontati con le tipiche scale di tempo stellari, i tempi necessari alle reazioni chimiche fra molecole o ai processi di eccitazione ed ionizzazione coinvolgenti molecole, atomi, ioni, elettroni e fotoni risultano essere estremamente brevi per cui si può dire che ognuno di questi processi ha raggiunto uno stato di equilibrio. Vi è un'unica eccezione costituita dalle reazioni nucleari le quali cambiano continuamente la composizione chimica del gas. Tuttavia in questo caso le scale di tempo dei processi nucleari sono lunghe, anche confrontate con quelle stellari, per cui si può ritenere che entro intervalli di tempo ragionevoli la composizione chimica del gas sia costante.

*Pertanto lo stato fisico della materia nell'interno delle stelle può essere considerato in ottima approssimazione molto vicino alla condizione di E.T.*

È noto che un sistema in E.T. gode della proprietà del bilancio per cui ogni dettagliato processo è statisticamente bilanciato dal suo inverso. Questo porta al risultato che il campo di radiazione all'interno di una stella obbedisce alla legge di Planck, lo stato della materia è descritto dalla legge di Boltzmann e la interazione fra materia e radiazione è governata dalla legge di Kirchhoff.

Inoltre, per un sistema in E.T. è possibile l'uso dei principi della meccanica statistica per trattare le proprietà collettive dell'insieme di particelle (ioni, elettroni e fotoni) e derivare l'equazione di stato del gas in funzione di variabili macroscopiche quali pressione, volume, temperatura e numero di particelle  $P = P(V, T, N)$ .

Vicino alla superficie di una stella l'equazione di stato è molto complicata in quanto gli atomi sono in diversi stadi di ionizzazione e pertanto varia il numero di particelle. Tuttavia per temperature maggiori di circa  $10^5$  K gli atomi degli elementi dominanti la composizione chimica sono completamente ionizzati e il gas da questi costituito si comporta come un gas perfetto fino a densità molto elevate.

Si ricorda che un gas perfetto è definito come quello in cui non ci sono interazioni fra le particelle. Quantunque questo criterio non sia mai soddisfatto in un gas reale, esso costituisce una valida approssimazione fintanto che l'energia di interazione fra le particelle è trascurabile rispetto alla loro energia cinetica.



## 7.2 Prima Legge della Termodinamica

In base alla prima legge della termodinamica, l'energia interna di un gas può essere variata fornendo o sottraendo una certa quantità di calore ovvero compiendo lavoro sul gas per mezzo di espansioni o contrazioni

$$dU = dQ + dW \quad (7.2)$$

Se il processo è compiuto in maniera estremamente lenta, cosicchè il sistema ad ogni istante si trovi vicinissimo ad uno stato di equilibrio termodinamico, la trasformazione è detta *quasi-statica*. Poichè tutte le variabili del sistema assumono in ogni istante il valore di equilibrio è chiaro che il processo può essere condotto in maniera inversa. Pertanto ogni trasformazione quasi-statica è anche *reversibile*.

Un cambiamento infinitesimo di volume comporta un lavoro meccanico compiuto sul gas dato da  $dW = -PdV$  per cui la prima legge diventa

$$dQ = dU + PdV \quad (7.3)$$

Se l'energia interna del gas è supposta essere funzione di  $V$  e  $T$ ,  $U(V, T)$ , allora possiamo scrivere

$$dQ = \left[ \left( \frac{\partial U}{\partial V} \right)_T + P \right] dV + \left( \frac{\partial U}{\partial T} \right)_V dT \quad (7.4)$$

Si dice trasformazione infinitesima adiabatica quella per cui sia  $dQ = 0$ .

## 7.3 Seconda Legge della Termodinamica

Una concisa formulazione della seconda legge della termodinamica è la seguente: esiste una funzione termodinamica  $S$  delle variabili di stato, chiamata *entropia*, tale che per un cambiamento quasistatico infinitesimo

$$dS = dQ/T \quad (7.5)$$

dove  $dQ$  è il calore fornito al sistema e  $T$  la temperatura assoluta di questo durante la trasformazione.

In un sistema adiabatico, l'entropia non può mai diminuire,

$$\Delta S \geq 0 \quad (7.6)$$

dove  $\Delta S$  è la variazione di entropia durante una trasformazione adiabatica e dove il segno di uguaglianza si applica al caso dei processi reversibili, mentre quello di disuguaglianza a tutti gli altri.

Poichè l'entropia è una funzione delle variabili di stato essa può essere calcolata per un sistema in equilibrio termodinamico e dipende solo dallo stato presente del sistema e non dalla sua storia passata o in altre parole  $dS$  è un *differenziale esatto*.

Per un sistema eterogeneo composto di sottoinsiemi (fasi) non interagenti fra loro, come ad esempio in un gas composto di particelle diverse, l'entropia gode della proprietà additiva.

Assieme alla seconda legge della termodinamica si enuncia anche il *principio di crescita dell'entropia*. Il principio afferma che ogni sistema completamente isolato dal resto dell'universo (ad esempio una cavità adiabatica a pareti rigide e non soggetta a forze esterne variabili col tempo) tenderà spontaneamente a trasformarsi in maniera tale da aumentare la sua entropia.

Segue da quanto detto che la condizione di E.T. è quella in cui si ha la massima entropia possibile. Ogni cambiamento infinitesimo in un sistema in E.T. deve essere reversibile e pertanto  $dS = dQ/T$ . Poichè per un cambiamento infinitesimo adiabatico  $dQ = 0$ , ne segue che è  $dS = 0$  per ogni trasformazione di questo tipo in un sistema in E.T. Questa condizione è spesso usata come condizione di E.T.

Nel caso di trasformazioni infinitesime reversibili la variazione di entropia fra due stati è data da

$$TdS = dU + PdV \quad (7.7)$$

ovvero

$$dS = \frac{1}{T} \left[ \left( \frac{\partial U}{\partial V} \right)_T + P \right] dV + \frac{1}{T} \left( \frac{\partial U}{\partial T} \right)_V dT \quad (7.8)$$

Poichè  $S = S(V, T)$  si può porre

$$dS = \left( \frac{\partial S}{\partial V} \right)_T dV + \left( \frac{\partial S}{\partial T} \right)_V dT \quad (7.9)$$

Atteso che  $dS$  è un differenziale esatto ne segue che

$$\frac{\partial}{\partial T} \frac{1}{T} \left[ \left( \frac{\partial U}{\partial V} \right)_T + P \right] = \frac{\partial}{\partial V} \left[ \frac{1}{T} \left( \frac{\partial U}{\partial T} \right)_V \right] \quad (7.10)$$

dalle quali segue finalmente la relazione di reciprocità

$$\left( \frac{\partial U}{\partial V} \right)_T = T \left( \frac{\partial P}{\partial T} \right)_V - P \quad (7.11)$$

Essa dà la dipendenza dell'energia interna  $U$  dal volume  $V$  a temperatura costante  $T$ .



## Capitolo 8

# MECCANICA STATISTICA: ELEMENTI

### 8.1 Meccanica statistica classica

Consideriamo un sistema isolato composto da un grande numero di particelle  $N$  *non interagenti*, ognuna delle quali ha a disposizione  $E_1, E_2, E_3, \dots$  stati di energia. Gli stati energetici possono essere discreti o continui.

Ad un certo istante le particelle sono distribuite tra i diversi stati in modo tale che  $n_1$  particelle hanno energia  $E_1$ ,  $n_2$  particelle hanno energia  $E_2$ , etc. Il numero totale di particelle

$$N = n_1 + n_2 + \dots = \sum_i n_i \quad (8.1)$$

è assunto essere costante. L'energia totale del sistema è

$$U = n_1 E_1 + n_2 E_2 + \dots = \sum_i n_i E_i \quad (8.2)$$

Poichè si è assunto che le particelle non interagiscano fra loro, le energie delle singole particelle dipendono solo dalle loro coordinate. In presenza di interazioni reciproche non ha senso riferirsi alle energie delle singole particelle, ma è necessario considerare solo l'energia dell'intero sistema. Se vale l'ipotesi di non interazione reciproca ed il sistema è isolato, l'energia totale  $U$  è costante.

Tuttavia a causa delle collisioni fra particelle, la distribuzione delle stesse nei diversi stati energetici cambia continuamente, cioè gli  $n_i$  non sono costanti.

In altre parole, date le condizioni fisiche del sistema (numero di particelle, energia totale, natura delle particelle etc.), esiste una **partizione** (insieme delle

$n_i$ ) che è più probabile. Quando questa partizione viene raggiunta, il sistema è detto essere in **equilibrio statistico**. Un sistema in equilibrio statistico non si allontana dalla partizione più probabile a meno che non sia disturbato da azioni esterne. I valori di  $n_1, n_2, n_3, \dots$  possono tuttavia fluttuare attorno ai valori statistici corrispondenti alla partizione più probabile senza dar luogo ad effetti macroscopici osservabili.

Il problema chiave della meccanica statistica è quello di trovare la partizione più probabile e da questa derivare le proprietà macroscopiche del sistema. Al fine di ottenere la partizione sono necessarie alcune ipotesi che sono alla fine dettate dall'accordo con i dati sperimentali.

*Legge di Maxwell-Boltzmann.* Supponiamo di avere un sistema di  $N$  particelle **identiche** e **distinguibili**, cioè le particelle hanno tutte la stessa struttura, tuttavia possono essere in qualche modo distinguibili fra loro. Supponiamo inoltre di avere  $E_1, E_2, E_3, \dots$  stati energetici a disposizione ognuno con la **stessa** probabilità di essere occupato. Infine supponiamo che la probabilità di una particolare partizione sia proporzionale al numero di modi diversi in cui le particelle possono essere distribuite fra gli stati energetici.

Consideriamo lo stato  $E_1$ . La prima particella di  $n_1$  può essere scelta fra  $N$  particelle e ci sono  $N$  modi diversi (distinguibili) di sceglierla. La seconda particella può essere scelta fra  $N - 1$  particelle in  $N - 1$  modi diversi. In generale il numero di modi diversi e distinguibili di porre  $n_1$  particelle in  $E_1$  è dato da

$$\frac{N!}{n_1!(N - n_1)!} \quad (8.3)$$

Pertanto, il numero di modi diversi e distinguibili con cui la partizione  $n_1, n_2, n_3, \dots$  può essere realizzata è

$$P = \frac{N!}{n_1!n_2!n_3!\dots} \quad (8.4)$$

Assumiamo ora che la probabilità di realizzare la partizione sia proporzionale a  $P$ .

Fino ad ora abbiamo ipotizzato che tutti gli stati energetici abbiano la stessa probabilità di essere occupati. Tuttavia può accadere che ognuno degli stati

abbia una sua probabilità intrinseca  $g_i$  di occupazione. In questo caso la probabilità totale per una data partizione è

$$P = \frac{N! g_1^{n_1} g_2^{n_2} g_3^{n_3} \dots}{n_1! n_2! n_3! \dots} \quad (8.5)$$

Togliamo ora la condizione di distinguibilità delle particelle (in quanto non necessaria). In tal caso le  $N!$  permutazioni fra le particelle che occupano i diversi stati danno luogo alla stessa partizione. Dobbiamo dunque dividere per  $N!$ . La probabilità totale diventa

$$P = \frac{g_1^{n_1} g_2^{n_2} g_3^{n_3} \dots}{n_1! n_2! n_3! \dots} \quad (8.6)$$

cioè

$$P = \prod_{i=1} \frac{g_i^{n_i}}{n_i!} \quad (8.7)$$

La partizione più probabile è data dal massimo della funzione  $P$  compatibile con le condizioni

$$\sum_i n_i = N \quad (8.8)$$

$$\sum_i n_i E_i = U \quad (8.9)$$

con  $N$  e  $U$  costanti.

Passando al logaritmo di  $P$

$$\ln P = n_1 \ln g_1 + n_2 \ln g_2 + \dots - \ln n_1! - \ln n_2! - \dots \quad (8.10)$$

ora il logaritmo naturale del fattoriale di un numero grande è

$$\ln X! \simeq X \ln X - X \quad (8.11)$$

quindi

$$\ln P = n_1 \ln g_1 + n_2 \ln g_2 + \dots - (n_1 \ln n_1 - n_1) - (n_2 \ln n_2 - n_2) - \dots \quad (8.12)$$

cioè

$$\ln P = -n_1 \ln \frac{n_1}{g_1} - n_2 \ln \frac{n_2}{g_2} - \dots + (n_1 + n_2 + n_3 + \dots) \quad (8.13)$$

ovvero

$$\ln P = N - \sum_i n_i \ln \frac{n_i}{g_i} \quad (8.14)$$

differenziando

$$d \ln P = - \sum (dn_i) \ln \frac{n_i}{g_i} - \sum dn_i \quad (8.15)$$

Poichè  $N$  è costante  $dN = 0$  e anche  $\sum dn_i = 0$ . Con queste condizioni si cerca il massimo della funzione  $P$  cioè  $dP = d \ln P = 0$

$$-d \ln P = \sum \left( \ln \frac{n_i}{g_i} \right) dn_i = 0 \quad (8.16)$$

Se i  $dn_i$  fossero arbitrari il sistema di equazioni di cui sopra potrebbe essere risolto imponendo che ogni termine

$$\ln \left( \frac{n_i}{g_i} \right) = 0 \quad (8.17)$$

In realtà ciò non è vero perchè esistono le condizioni

$$\sum dn_i = 0 \quad \text{e} \quad \sum E_i dn_i = 0.$$

A tale scopo sono introdotti due parametri  $\eta$  e  $\beta$  detti *moltiplicatori di Lagrange* tali che

$$\sum \left( \ln \frac{n_i}{g_i} + \eta + \beta E_i \right) dn_i = 0 \quad (8.18)$$

La distribuzione di equilibrio è quella per cui vale

$$\ln \frac{n_i}{g_i} + \eta + \beta E_i = 0 \quad (8.19)$$

ovvero

$$n_i = g_i e^{-\eta - \beta E_i} \quad (8.20)$$

Il parametro  $\eta$  è legato al numero totale di particelle. Infatti è facile verificare che



$$N = e^{-\eta}(\sum g_i e^{-\beta E_i}) = e^{-\eta} Z \quad (8.21)$$

dove

$$Z = \sum g_i e^{-\beta E_i} \quad (8.22)$$

è chiamata la *funzione di partizione*. Dalla definizione di  $Z$  si ha  $e^{-\eta} = \frac{N}{Z}$  e

$$n_i = \frac{N}{Z} g_i e^{-\beta E_i} \quad (8.23)$$

Essa viene detta *legge di distribuzione di Maxwell-Boltzmann*. Il parametro  $\beta$  è legato all'energia del sistema o meglio all'energia media di una particella. Esso viene legato alla temperatura introdotta per altra via. Per dare consistenza dimensionale alle relazioni trovate

$$Z = \sum g_i e^{-\beta E_i} \quad \text{e} \quad n_i = \frac{N}{Z} g_i e^{-\beta E_i} \quad (8.24)$$

dobbiamo esprimere  $\beta$  come il reciproco di una energia (in opportune unità); si ricorre al seguente ragionamento. L'energia totale  $U$  di un sistema in equilibrio statistico è espressa da

$$U = \sum n_i E_i = \frac{N}{Z} (g_1 E_1 e^{-\beta E_1} + \dots) = \frac{N}{Z} (\sum g_i E_i e^{-\beta E_i}) \quad (8.25)$$

ovvero

$$U = -\frac{N}{Z} \frac{d}{d\beta} (\sum g_i e^{-\beta E_i}) = -\frac{N}{Z} \frac{dZ}{d\beta} = -N \frac{d \ln Z}{d\beta} \quad (8.26)$$

che è una relazione chiave fra l'energia totale di un sistema in equilibrio statistico e la funzione di partizione.

L'energia media di una particella è

$$E_m = \frac{U}{N} = -\frac{d \ln Z}{d\beta} \quad (8.27)$$

Si noti che dato un sistema fisico caratterizzato dalle  $E_i$  e  $g_i$ , la funzione di partizione, l'energia totale (*interna*)  $U$  e l'energia media per particella  $E_m$  sono tutte funzioni di  $\beta$  (più altri parametri come volume e pressione che determinano le caratteristiche macroscopiche del sistema). Il parametro  $\beta$  è scelto per descrivere l'energia del sistema. Di solito si usa un'altra grandezza legata

a  $\beta$  ma di senso fisico immediato cioè la temperatura assoluta  $T$  mediante la relazione

$$KT = \frac{1}{\beta} \quad (8.28)$$

dove  $K$  è la costante di Boltzmann e  $KT$  è espresso in erg (o simili unità di misura per l'energia). Si dimostra che la temperatura ora definita coincide con quella misurata da un termometro (a gas per esempio). Esprimendo  $T$  in gradi Kelvin, la costante  $K$  è determinata in valore assoluto. Questa definizione di  $T$  si applica solo a sistemi di particelle in equilibrio statistico e non a singole particelle.

Avendo introdotto la  $T$  in questo modo si possono riscrivere le varie relazioni come segue

$$Z = \sum g_i e^{\frac{-E_i}{KT}} \quad (8.29)$$

$$n_i = \frac{N}{Z} g_i e^{\frac{-E_i}{KT}} \quad (8.30)$$

$$U = KNT^2 \frac{d \ln Z}{dT} \quad (8.31)$$

$$E_m = KT^2 \frac{d \ln Z}{dT} \quad (8.32)$$

In generale il valore medio di una qualunque grandezza è espresso da

$$F_m = \frac{1}{Z} \sum g_i F(E_i) e^{\frac{-E_i}{KT}} \quad (8.33)$$

Infine si noti che l'occupazione degli stati ( $n_i$ ) decresce al crescere dell'energia ed anche che la funzione  $n_i$  decresce al crescere di  $E_i/KT$ .

### 8.1.1 Gas perfetto

Come classico esempio di applicazione della legge di Maxwell-Boltzmann facciamo vedere che la maggior parte dei gas in condizioni ordinarie obbediscono a questo tipo di statistica.

Supponiamo di avere un gas perfetto monoatomico (non è necessario pertanto introdurre termini di energia potenziale dovuti alle forze intra-molecolari, nè

energie associate a moti rotazionali o vibrazionali). La sola energia presa in considerazione è quella del moto traslazionale

$$E_i = \frac{1}{2} \frac{p_i^2}{m_i} \quad (8.34)$$

Sia questo gas confinato in un volume molto grande in modo tale che gli stati energetici possibili siano descrivibili come un continuo ottenibile dalla quantizzazione in una buca di potenziale cubica con pareti infinitamente lontane. In tale ipotesi la funzione di partizione è data da

$$Z = \int_0^\infty e^{\frac{-E}{KT}} g(E) dE \quad (8.35)$$

dove  $g(E)dE$  dà il numero di stati con energia fra  $E$  e  $E + dE$ . Esso è determinato da tutte le diverse orientazioni del momento  $p$  corrispondente ad un dato valore di  $E$

$$g(E)dE = \frac{4\pi V(2m^3)^{\frac{1}{2}}}{h^3} E^{\frac{1}{2}} dE \quad (8.36)$$

dove  $V$  è il volume e  $h$  la costante di Planck. Ne segue che

$$Z = \frac{4\pi V(2m^3)^{\frac{1}{2}}}{h^3} \int_0^\infty E^{\frac{1}{2}} e^{\frac{-E}{KT}} dE \quad (8.37)$$

Eseguita l'integrazione si ha

$$Z = \frac{V}{h^3} (2\pi mKT)^{\frac{3}{2}} \quad (8.38)$$

Segue immediatamente che l'energia media per particella  $E_m$  e l'energia totale  $U$  sono date da

$$E_m = \frac{3}{2} KT \quad \text{e} \quad U = \frac{3}{2} NKT$$

Se  $n$  è il numero di moli di un gas e  $N_A = 6.0225 \times 10^{23} \text{ moli}^{-1}$  è il numero di Avogadro, allora  $N = nN_A$  e quindi

$$U = \frac{3}{2} nN_A KT = \frac{3}{2} nRT \quad (8.39)$$

dove  $R = N_A K$  è la costante dei gas ( $R = 8.3143 \text{ J mole}^{-1} \text{ K}^{-1}$ ).

La legge di distribuzione fra le energie disponibili è

$$dn = \frac{N}{Z} g(E) e^{-\frac{E}{KT}} dE \quad (8.40)$$

ovvero

$$dn = \frac{2\pi N}{(\pi KT)^{3/2}} E^{\frac{1}{2}} e^{-\frac{E}{KT}} dE \quad (8.41)$$

Questa è la ben nota legge di Maxwell per la distribuzione delle energie delle particelle di un gas ideale monoatomico. È facile passare da questa legge alla corrispondente espressa in funzione delle velocità delle particelle e calcolare l'energia e la velocità più probabili, nonché la velocità media e la velocità quadratica media

### 8.1.2 Equazione di stato di un gas ideale

Il più semplice di tutti i sistemi di particelle è il gas perfetto. Incominciamo col derivare dalla formulazione statistica la legge fondamentale che lega la variazione di entropia al calore assorbito durante un processo reversibile

$$dS = \frac{dQ}{T} \quad (8.42)$$

Si ricordi che la partizione di equilibrio corrisponde alla distribuzione più probabile delle particelle fra gli stati energetici disponibili. In tali condizioni la funzione  $P$  è massima. Se il sistema quantunque isolato non è in condizioni di equilibrio significa che si trova in una partizione con più bassa probabilità rispetto a quella massima. In un certo tempo il sistema evolve verso la condizione di equilibrio, cioè la funzione  $P$  cresce. Per descrivere questa naturale tendenza del sistema si introduce il concetto di *entropia* definita come

$$S = K \ln P \quad (8.43)$$

dove  $K$  è la costante di Boltzmann. Introducendo l'espressione per  $P$  si ottiene

$$S = K \ln P = -K \sum n_i \ln \left( \frac{n_i}{g_i} \right) + KN \quad (8.44)$$

ovvero

$$S = K \left[ \sum n_i \frac{E_i}{KT} + \sum n_i \ln \frac{Z}{N} + \sum n_i \right] \quad (8.45)$$

$$S = \frac{1}{T}(\sum n_i E_i) + K(\sum n_i) \ln \frac{Z}{N} + KN \quad (8.46)$$

$$S = \frac{U}{T} + KN \ln \frac{Z}{N} + KN = \frac{U}{T} + K \ln \frac{Z^N}{N!} \quad (8.47)$$

Si esegua ora una variazione infinitesima reversibile mantenendo costante il numero totale di particelle

$$dS = \frac{dU}{T} - \frac{U}{T^2} dT + KN \frac{dZ}{Z} \quad (8.48)$$

Il termine  $KN \frac{dZ}{Z}$  è anche esprimibile come

$$KN \frac{dZ}{Z} = -\frac{1}{T} \sum \frac{N}{Z} g_i e^{\frac{-E_i}{KT}} dE_i + \frac{1}{T^2} \sum \frac{N}{Z} g_i e^{\frac{-E_i}{KT}} E_i dT \quad (8.49)$$

da cui

$$KN \frac{dZ}{Z} = -\frac{1}{T} \sum n_i dE_i + \frac{1}{T^2} \sum n_i E_i dT = \frac{dW}{T} + \frac{U}{T^2} dT \quad (8.50)$$

dove  $dW$  rappresenta l'elemento di lavoro compiuto dal sistema. In virtù del primo principio della termodinamica possiamo scrivere

$$dS = \frac{dU}{T} + \frac{dW}{T} = \frac{dU + dW}{T} = \frac{dQ}{T} \quad (8.51)$$

Riprendendo

$$KN \frac{dZ}{Z} = \frac{dW}{T} + \frac{U}{T^2} dT \quad (8.52)$$

si vede che essa lega la variazione della funzione di partizione al lavoro fatto dal sistema ed alla sua variazione di temperatura. Nel caso di un gas il lavoro è quello di espansione

$$dW = PdV \quad (8.53)$$

quindi

$$KN \frac{dZ}{Z} = \frac{PdV}{T} + \frac{U}{T^2} dT \quad (8.54)$$

Considerando per semplicità che la temperatura sia costante ( $dT = 0$ ) si ottiene

$$KNd(\ln Z) = KN \frac{dZ}{Z} = \frac{PdV}{T} \quad (8.55)$$

ovvero

$$P = KNT \left[ \frac{d \ln Z}{dV} \right]_T \quad (8.56)$$

Questa è una equazione del tipo  $F(P,V,T)=0$ . Essa è infatti *l'equazione di stato* del sistema. Per un gas perfetto la funzione di partizione è

$$Z = \frac{V}{h^3} (2\pi mKT)^{3/2} \quad (8.57)$$

da cui si deriva

$$P = KNT \frac{1}{V} \quad \text{ovvero} \quad PV = nRT \quad \text{con} \quad n = \frac{N}{N_A} \quad (8.58)$$

che è la stessa equazione di stato ottenuta dalla teoria cinetica dei gas o dal teorema del viriale.

## 8.2 Meccanica statistica quantistica

Nel derivare la funzione di partizione del sistema descritto dalla statistica classica abbiamo ignorato ogni effetto quantistico e cioè le possibili restrizioni sul numero di particelle assegnabili ad ogni stato energetico e sulla simmetria associata alla distribuzione delle particelle fra i diversi stati corrispondenti ad ogni livello energetico.

Sono possibili due tipi di statistiche:

*Fermi-Dirac*: le particelle obbediscono al principio di esclusione di Pauli e sono descritte da autofunzioni anti-simmetriche (elettroni, in generale particelle con spin semi-intero).

*Bose-Einstein*: le particelle non obbediscono al principio di Pauli e sono descritte da autofunzioni simmetriche (fotoni, in generale particelle con spin intero o nullo).

In entrambi i casi si assume che le particelle siano *identiche ed indistinguibili*.

Si vedrà che ad alte temperature e basse densità entrambi i tipi di statistiche si riducono a quella classica.

### 8.2.1 Peso statistico

Il peso statistico per sistemi con livelli discreti di energia (come gli atomi) è dato dal numero di stati quantici che corrispondono allo stesso valore dell'energia ed è noto dalla meccanica quantistica. Per sistemi con valori continui dell'energia, come ad esempio le particelle libere è ricavabile ricorrendo alla tecnica della pseudo quantizzazione. Il peso statistico di una particella libera in un volume  $V$ , corrispondente a momenti compresi fra  $p$  e  $p + dp$  e direzioni di moto entro l'angolo solido  $d\Omega$  è

$$dg(p) = g_s \frac{V p^2}{h^3} dp d\Omega \quad (8.59)$$

con  $h$  costante di Planck. Questo deve essere a sua volta moltiplicato per il numero degli stati di spin possibili  $g_s$ .

### 8.2.2 Distribuzione di Fermi-Dirac

Per calcolare i modi differenti e distinguibili in cui un sistema di fermioni può essere organizzato per una data partizione dobbiamo rivedere il significato di probabilità intrinseca  $g_i$ . In meccanica quantistica  $g_i$  corrisponde alla degenerazione del livello, cioè le  $g_i$  danno il numero massimo di fermioni che possono stare in un certo livello energetico ( $2$  per lo spin e  $2l+1$  per il momento angolare, in totale  $2 \times (2l+1)$  con  $l$  fissato dal numero quantico principale  $n$ ).

Pertanto le  $n_i$  di una data partizione sono vincolate dalla condizione

$$n_i \leq g_i \quad (8.60)$$

Per riempire il livello energetico  $E_i$  con  $n_i$  particelle possiamo porre la prima particella in ognuno dei  $g_i$  stati, la seconda particella in uno dei rimanenti  $g_i - 1$  stati e così via. Il numero totale di modi possibili di porre le  $n_i$  particelle nei  $g_i$  stati è

$$g_i(g_i - 1)(g_i - 2) \dots (g_i - n_i + 1) \quad (8.61)$$

cioè

$$\frac{g_i!}{(g_i - n_i)!} \quad (8.62)$$

Fino ad ora abbiamo usato il principio di Pauli, ora teniamo conto che le particelle devono essere indistinguibili, cioè dividiamo per  $n_i!$ . Il numero totale di modi distinguibili occupati è dato dalla probabilità totale della partizione

$$P = \prod_i \frac{g_i!}{n_i!(g_i - n_i)!} \quad (8.63)$$

Procediamo ora come nel caso classico a calcolare il massimo di  $P$  imponendo la conservazione del numero totale di particelle e della energia totale del sistema, ed infine introduciamo i moltiplicatori di Lagrange. Si ricava

$$n_i = \frac{g_i}{e^{\eta + \beta E_i} + 1} \quad (8.64)$$

Il parametro  $\beta$  ha lo stesso ruolo che nella statistica classica ( $KT = 1/\beta$ ), mentre  $\eta$  è ancora fissato dalla condizione  $\sum n_i = N$ .

È utile definire la quantità  $\epsilon_F$  con le dimensioni di una energia legata al parametro  $\eta$

$$\epsilon_F = -\eta KT \quad (8.65)$$

Ne segue che

$$n_i = \frac{g_i}{e^{\frac{(E_i - \epsilon_F)}{KT}} + 1} \quad (8.66)$$

L'energia  $\epsilon_F$  è in generale positiva ( $\eta < 0$  e ha un ruolo importante nelle applicazioni fisiche). Essa è in pratica indipendente da  $T$ .

Dalla relazione (8.66) si vede che per  $T = 0$  tutti gli stati fino ad  $E = \epsilon_F$  sono occupati  $n_i = g_i$ , mentre gli stati con  $E > \epsilon_F$  sono vuoti

$$\lim e^{\frac{(E_i - \epsilon_F)}{KT}} = 0 \quad \text{per} \quad E_i - \epsilon_F < 0 \quad (8.67)$$

$$\lim e^{\frac{(E_i - \epsilon_F)}{KT}} = \infty \quad \text{per} \quad E_i - \epsilon_F > 0 \quad (8.68)$$

Queste relazioni fanno vedere la maggior differenza rispetto alla statistica classica, secondo la quale a  $T = 0$  tutte le particelle sono al livello più basso di energia. Nella statistica di Fermi-Dirac ciò non è possibile a causa del principio di Pauli: a  $T = 0$  le particelle occupano tutti gli stati dal fondamentale fino



ad  $\epsilon_F$ . L'energia  $\epsilon_F$  dà dunque una indicazione della energia massima di un sistema di fermioni a  $T = 0$ .

Al crescere di  $T$ , incominciano a popolarsi gli stati con energia maggiore di  $\epsilon_F$  e a spopolarsi quelli con energia minore di  $\epsilon_F$ . Tuttavia per temperature tali che  $KT \leq \epsilon_F$  solamente gli stati vicini ad  $\epsilon_F$  cambiano il numero di particelle. Ciò è dovuto al principio di Pauli che impedisce di aggiungere ulteriori particelle a stati già saturi.

Il numero di fermioni (elettroni) in un intervallo di energia  $dE$  è dato da

$$dn = \frac{g(E)dE}{[e^{\frac{(E-\epsilon_F)}{KT}} + 1]} \quad (8.69)$$

dove  $g(E)$  rappresenta il numero di stati possibili per intervallo unitario di energia

$$g(E)dE = 2 \frac{4\pi V(2m^3)^{1/2}}{h^3} E^{1/2} dE \quad (8.70)$$

quindi

$$\frac{dn}{dE} = \frac{8\pi V(2m^3)^{1/2}}{h^3} \frac{E^{1/2}}{e^{(E-\epsilon_F)/KT} + 1} \quad (8.71)$$

L'energia  $\epsilon_F$  dipende da  $N$  e viene determinata dalla condizione

$$\int_0^\infty dn = \int_0^\infty \frac{dn}{dE} dE = N \quad (8.72)$$

equazione trascendente nella incognita  $e^{-\epsilon_F}$ . Essa può essere risolta per  $T = 0$  ottenendo

$$\epsilon_F = \frac{h^2}{8m} \left( \frac{3N}{\pi V} \right)^{2/3} \quad (8.73)$$

L'energia totale di un gruppo di fermioni a basse temperature è data da

$$U = \int_0^\infty E dn = \int_0^\infty E \frac{dn}{dE} dE \quad (8.74)$$

Nel caso di  $T = 0$  possiamo approssimare la

$$\frac{dn}{dE} = \frac{8\pi V(2m^3)^{1/2}}{h^3} E^{1/2} \quad (8.75)$$

ed integrando da 0 a  $\epsilon_F$

$$U = \frac{8\pi V(2m^3)^{1/2}}{h^3} \int_0^{\epsilon_F} E^{3/2} dE = \frac{16\pi V}{5h^3} (2m^3)^{1/2} \epsilon_F^{5/2} \quad (8.76)$$

$$U = \frac{3}{5} N \epsilon_F \quad (8.77)$$

usando la soluzione a  $T = 0$  per  $\epsilon_F$ . Essa è l'energia *minima* del sistema di fermioni a  $T = 0$ . *A differenza del caso classico l'energia minima è diversa da zero.*

L'energia media per particella è

$$E_m = \frac{3}{5} \epsilon_F \quad (8.78)$$

### 8.2.3 Distribuzione di Bose-Einstein

L'esperienza ha mostrato che esistono sistemi composti da particelle identiche ed indistinguibili che non sono vincolate dal principio di Pauli. In tali sistemi non esiste alcun limite al numero di particelle che possono stare nello stesso stato energetico. La funzione d'onda di tale sistema deve essere *simmetrica*. Le particelle che soddisfano questi requisiti vengono chiamate *bosoni*. Si trova sperimentalmente che tutte le particelle con spin intero o nullo sono *bosoni*.

Anche nella statistica di Bose le  $g_i$  danno la degenerazione dei livelli energetici. Per calcolare i differenti e distinguibili modi in cui un sistema di bosoni può essere distribuito per dar luogo ad una data partizione, dobbiamo trovare il numero di possibili arrangiamenti di  $n_i$  particelle fra  $g_i$  stati corrispondenti al livello energetico  $E_i$  che danno luogo ad una autofunzione simmetrica.

Il numero di arrangiamenti è uguale al numero di modi con cui  $n_i$  particelle identiche possono essere collocate in  $g_i$  gruppi senza limiti al numero di particelle per gruppo. Supponiamo di porre  $n_i$  particelle in una riga e di distribuirle fra  $g_i$  stati (suddivisioni). Il numero totale di possibili arrangiamenti e suddivisioni è uguale al numero di permutazioni di  $n_i + g_i - 1$  oggetti, cioè

$$(n_i + g_i - 1)! \quad (8.79)$$

Poichè le particelle sono identiche ed indistinguibili dobbiamo dividere per  $n_i!$ . Ancora poichè tutte le permutazioni delle suddivisioni danno lo stesso stato

fisico, dobbiamo dividere per  $(g_i - 1)!$ . Il numero completo di sistemazioni distinguibili di  $n_i$  particelle in  $g_i$  stati è

$$\frac{(n_i + g_i - 1)!}{n_i!(g_i - 1)!} \quad (8.80)$$

La partizione completa di  $n_1, n_2, \dots$  particelle in  $E_1, E_2, \dots$  livelli energetici è data dal prodotto

$$P = \prod_i \frac{(n_i + g_i - 1)!}{n_i!(g_i - 1)!} \quad (8.81)$$

Procedendo come al solito si ottiene la legge di distribuzione di Bose

$$n_i = \frac{g_i}{e^{\eta + E_i/KT} - 1} \quad (8.82)$$

dove il parametro  $\eta$  è vincolato dalla condizione  $\sum n_i = N$ .

*Gas di fotoni.* L'applicazione più importante della statistica di Bose è lo studio della radiazione elettromagnetica chiusa dentro una cavità adiabatica in equilibrio termodinamico (equilibrio meccanico e chimico, temperatura uniforme). Tale radiazione è detta di *corpo nero*. Le pareti della cavità e di ogni altro corpo in essa racchiuso emettono ed assorbono radiazione elettromagnetica in condizioni di equilibrio, cioè il tasso di emissione eguaglia quello di assorbimento. In tali condizioni lo spettro della radiazione elettromagnetica ha intensità variabile con la frequenza (lunghezza d'onda), ma la distribuzione delle intensità con la frequenza (lunghezza d'onda) dipende solo dalla temperatura.

Quando la radiazione elettromagnetica interagisce con le pareti della cavità (o con la materia in essa racchiusa) si comporta come se fosse composta da particelle con energia e momento

$$E_\nu = h\nu \quad \text{e} \quad p_\nu = \frac{h\nu}{c} \quad (8.83)$$

dette *fotoni*. A tutti gli effetti la radiazione elettromagnetica si comporta come un gas di particelle non interagenti fra loro. Poichè i fotoni della stessa frequenza sono indistinguibili e nulla vieta che esistano molti fotoni della stessa energia (frequenza), ed inoltre essi hanno spin intero, i fotoni possono essere considerati come bosoni. Tuttavia poichè i fotoni sono continuamente assorbiti ed emessi, il loro numero non è costante, pertanto la condizione  $\sum dn_i = 0$  può essere

lasciata cadere, il parametro  $\eta$  non è necessario e può essere posto uguale a zero. In questo caso la legge di distribuzione diventa

$$n_i = \frac{g_i}{e^{E_i/KT} - 1} \quad (8.84)$$

Infine se le dimensioni della cavità sono grandi rispetto alla lunghezza d'onda media dei fotoni, lo spettro energetico degli stessi può essere considerato continuo. In tali condizioni si ha

$$dn = \frac{g(E)dE}{e^{E/KT} - 1} \quad (8.85)$$

Ponendo  $E = h\nu$ , si può sostituire  $g(E)dE$  con  $g(\nu)d\nu$ , ovvero il numero di oscillatori con frequenza fra  $\nu$  e  $\nu + d\nu$ .

$$g(E)dE = g(\nu)d\nu = \frac{8\pi V}{c^3} \nu^2 d\nu \quad (8.86)$$

$$dn = \frac{8\pi V}{c^3} \frac{\nu^2 d\nu}{e^{h\nu/KT} - 1} \quad (8.87)$$

Si è moltiplicato per un fattore 2 per tener conto delle due possibili direzioni di polarizzazione della radiazione. L'energia corrispondente a  $dn$  fotoni nell'intervallo  $d\nu$  è  $h\nu dn$  e l'energia per unità di volume è

$$\frac{h\nu dn}{V} \quad (8.88)$$

La distribuzione di densità di energia è dunque

$$E_\nu = \frac{h\nu}{V} \frac{dn}{d\nu} = \frac{8\pi\nu^3}{c^3} \frac{1}{e^{h\nu/KT} - 1} \quad (8.89)$$

che è la famosa relazione di Planck.

### 8.3 Leggi di distribuzione: riassunto

In un insieme di particelle non interagenti in equilibrio statistico, dove  $n(\epsilon)$  sia il numero di particelle per unità di volume con energia  $\epsilon$  e  $g(\epsilon)$  sia il numero di possibili stati quantici associati ad  $\epsilon$ , la configurazione più probabile è data da

$$n(\epsilon) = \frac{g(\epsilon)}{e^{\eta + \frac{\epsilon}{KT}} \pm 1} \quad (8.90)$$

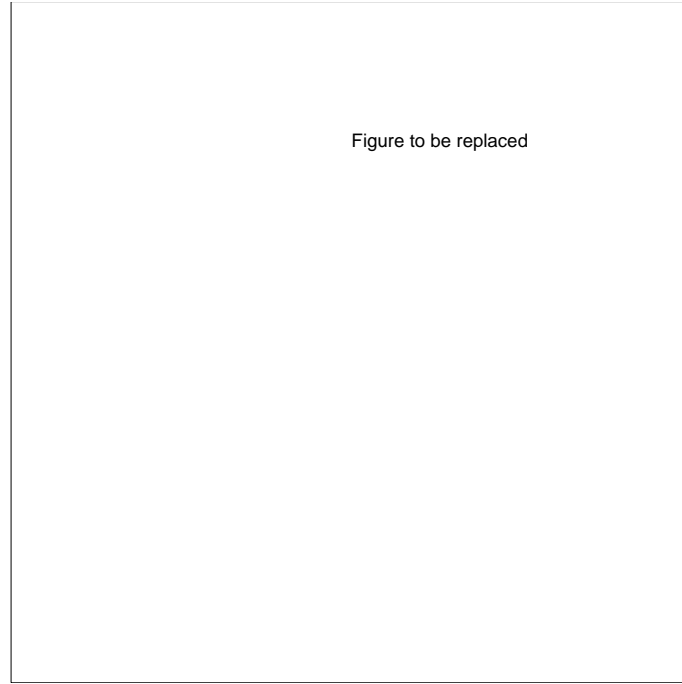


Figura 8.1: Comportamento matematico della funzione  $n(\epsilon)/g(\epsilon)$  al variare dell'energia per le tre statistiche

Il segno positivo è per particelle che obbediscono alla statistica di Fermi-Dirac, cioè particelle con spin semintero (elettroni, positroni, protoni, neutroni, ecc.), mentre il segno negativo è per particelle con spin intero o nullo (fotoni, q-mesoni ecc.) soggette alla statistica di Bose-Einstein. La quantità  $\eta$  (detta anche parametro di degenerazione) è formalmente fissata dalla condizione che

$$n = \int_0^\infty n(\epsilon) d\epsilon = \int_0^\infty \frac{g(\epsilon) d\epsilon}{[e^{\eta + \frac{\epsilon}{kT}} \pm 1]} \quad (8.91)$$

dove  $n$  è il numero totale di particelle per unità di volume o densità numerica. Nel caso di fotoni  $\eta = 0$  in quanto il loro numero non si conserva (continui assorbimenti ed emissioni). Per piccole densità  $\eta$  è un numero grande positivo mentre per densità molto alte  $\eta$  è un numero grande negativo. Ne segue che a seconda del valore di  $\eta$  il rapporto  $n(\epsilon)/g(\epsilon)$ , detto anche indice di occupazione, ha un diverso comportamento matematico a cui segue un diverso significato fisico. Le statistiche più interessanti in astrofisica stellare sono

$$\text{Maxwell - Boltzmann } (\eta \gg 0) \quad \frac{n(\epsilon)}{g(\epsilon)} = e^{-\eta} e^{-\frac{\epsilon}{kT}}$$

$$\text{Fermi} - \text{Dirac} \quad \frac{n(\epsilon)}{g(\epsilon)} = \frac{1}{[e^{\eta + \frac{\epsilon}{KT}} + 1]}$$

$$\text{Bose} - \text{Einstein} \quad \frac{n(\epsilon)}{g(\epsilon)} = \frac{1}{[e^{\frac{\epsilon}{KT}} - 1]}$$

La prima non è altri che la distribuzione classica di Maxwell-Boltzmann in cui l'indice di occupazione è puramente esponenziale per tutte le temperature e tutti i valori di  $\eta$ . In realtà la statistica di Maxwell-Boltzmann è valida solamente per  $\eta$  positivi e grandi cioè quando l'indice di occupazione è minore di uno. Il limite di questo per  $\epsilon$  tendente a zero è  $\exp(-\eta)$ . L'indice di occupazione per particelle che obbediscono alla statistica di Fermi-Dirac non supera mai l'unità in conseguenza del principio di esclusione di Pauli. Per un gas di particelle di tipo Bose-Einstein c'è la tendenza ad un grande indice di occupazione verso le energie più basse. Nel caso dei fotoni, l'indice di occupazione cresce senza limite per energie tendenti a zero. Il comportamento matematico della funzione  $n(\epsilon)/g(\epsilon)$  per i tre casi di interesse astrofisico è mostrato in Figura 8.1.

## 8.4 Leggi di Maxwell e di Boltzmann: riassunto

Particelle di un gas non degenere non relativistico, aventi massa  $m$  ed energia cinetica  $\epsilon = p^2/2m$  e confinate in un volume  $V$ , obbediscono alle legge di distribuzione dei momenti

$$n(p)dp = \frac{4\pi n}{(2\pi mKT)^{3/2}} e^{-\frac{p^2}{2mKT}} p^2 dp \quad (8.92)$$

dove  $n$  è la densità totale di particelle ed il parametro  $\eta$  è stato ottenuto dalla condizione

$$e^{-\eta} = \frac{nh^3}{g(2\pi mKT)^{3/2}} \quad (8.93)$$

Nel ricavare queste relazioni si è integrato il peso statistico  $g(\epsilon)$  su tutto l'angolo solido. Da queste relazioni si può passare facilmente a quelle per la distribuzione delle energie. Esse sono note come leggi di Maxwell. La densità numerica relativa di particelle in due stati energetici discreti  $i$  e  $j$  (ad esempio le popolazioni

di elettroni in due stati diversi di eccitazione di una data specie di ioni) è regolata da

$$\frac{n_i}{n_j} = \frac{g_i}{g_j} e^{-\frac{\chi_{ij}}{KT}} \quad (8.94)$$

dove

$$\chi_{ij} = \chi_i - \chi_j \quad (8.95)$$

è la differenza fra i due stati energetici considerati. Essa viene detta legge di Boltzmann.

## 8.5 Legge di Planck per il Corpo Nero: riassunto

Considerando i fotoni del campo di radiazione di corpo nero (isotropo e non polarizzato) come "particelle" di momento  $p = h\nu/c$ , il numero di stati quantici per unità di volume per fotone entro l'angolo solido  $d\Omega$  è dato da

$$dg = \frac{2p^2}{h^3} dp d\Omega = \frac{2\nu^3}{c^3} d\nu d\Omega \quad (8.96)$$

dove il fattore 2 sta per le due possibili direzioni di polarizzazione. Moltiplicando per  $h\nu$  entrambi i membri della eq.(8.96) si ottiene la densità specifica di energia della radiazione nell'intervallo di frequenza  $d\nu$  e nell'angolo solido  $d\Omega$  associata ai  $dg$  stati per fotone. L'intensità specifica della radiazione (energia per unità di area, di tempo, di angolo solido, di frequenza e per fotone) è

$$\frac{c}{d\nu d\Omega} \frac{2h\nu^3}{c^3} d\nu d\Omega = \frac{2h\nu^3}{c^2} \quad (8.97)$$

Infine moltiplicando per il fattore di occupazione si ha l'intensità specifica del campo di radiazione

$$I_\nu = \frac{2h\nu^3}{c^2} \frac{1}{e^{\frac{h\nu}{KT}} - 1} = B_\nu(T) \quad (8.98)$$

detta anche funzione di Planck. La densità di energia monocromatica  $U_\nu$  si ottiene integrando su tutto l'angolo solido  $4\pi$  e dividendo per il volume di base unitaria occupato dalla radiazione nell'unità di tempo e cioè  $c$

$$U_\nu = \frac{8\pi h\nu^3}{c^3} \frac{1}{e^{\frac{h\nu}{KT}} - 1} = \frac{4\pi}{c} B_\nu(T) \quad (8.99)$$

La funzione di Planck integrata su tutte le frequenze è

$$B(T) = \frac{2\pi^4 K^4 T^4}{15c^2 h^3} = \frac{\sigma}{\pi} T^4 \quad (8.100)$$

dove la costante di Stefan-Boltzman  $\sigma$  è di ovvia definizione. Infine la densità totale di energia è

$$U = \frac{4\pi}{c} B(T) = a T^4 \quad (8.101)$$

con immediata definizione di  $a = (8\pi^5 K^4 / 15c^3 h^3)$  detta costante della densità di radiazione e pari a  $7.56 \times 10^{-15} \text{ erg cm}^{-1} \text{ K}^{-4}$ .



## Capitolo 9

# EQUAZIONE DI STATO

Lo stato fisico della materia nell'interno delle stelle può essere considerato in ottima approssimazione molto vicino alla condizione di Equilibrio Termodinamico (E.T.) È noto che un sistema in E.T. gode della proprietà del bilancio per cui ogni dettagliato processo è statisticamente bilanciato dal suo inverso. Questo porta al risultato che il campo di radiazione all'interno di una stella obbedisce alla legge di Planck, lo stato della materia è descritto dalla legge di Boltzmann e la interazione fra materia e radiazione è governata dalla legge di Kirchhoff. Inoltre rende possibile l'uso dei principi della meccanica statistica per trattare le proprietà collettive dell'insieme di particelle (ioni, elettroni e fotoni) e per derivare l'equazione di stato del gas in funzione di variabili macroscopiche quali pressione, volume, temperatura e numero di particelle  $P = P(V, T, N)$ . Vicino alla superficie di una stella l'equazione di stato è molto complicata in quanto gli atomi sono in diversi stadi di ionizzazione e pertanto varia il numero di particelle. Tuttavia per temperature maggiori di circa  $10^5$  K gli atomi degli elementi dominanti la composizione chimica sono completamente ionizzati e il gas da questi costituito si comporta come un gas perfetto fino a densità molto elevate. Si ricorda che un gas perfetto è definito come quello in cui non ci sono interazioni fra le particelle. Quantunque questo criterio non sia mai soddisfatto in un gas reale, esso costituisce una valida approssimazione fintanto che l'energia di interazione fra le particelle è trascurabile rispetto alla loro energia cinetica.

### 9.1 Pressione di un Gas

La sorgente della pressione in un gas perfetto è l'urto delle particelle con superfici reali o ideali tracciate all'interno del sistema. La riflessione (o assorbimento)

delle particelle dalle superfici trasferisce momento a quest'ultime ed, in base alla seconda legge di Newton ( $F = dp/dt$ ), esercita una forza. La forza media per unità di area è chiamata pressione. Nella situazione di equilibrio termico esistente nel gas stellare, la distribuzione angolare dei momenti delle particelle è isotropa, cioè le particelle si muovono con uguali probabilità in tutte le direzioni. La teoria cinetica dei gas ci permette di esprimere la pressione esercitata da un gas isotropo come

$$P = \frac{1}{3} \int_0^\infty p v(p) n(p) dp \quad (9.1)$$

dove  $p$  è il momento,  $v(p)$  è la velocità di una particella di momento  $p$  ed  $n(p)$  è la funzione descrivente il numero di particelle per unità di volume con momento fra  $p$  e  $p + dp$  che dipende dal tipo di particelle e dalla statistica a cui obbediscono.

Per arrivare a questa relazione si procede nel modo seguente. Sia  $p$  il momento di una particella in moto verso una parete ideale con normale  $n$  lungo una direzione  $\theta$ . Il momento trasferito è

$$\Delta p_n = 2p \cos \theta \quad (9.2)$$

Indico con  $F(\theta, p) d\theta dp$  il numero di particelle con momento compreso fra  $p$  e  $p + dp$  incidenti sulla sua superficie per unità di area e di tempo e muoventesi lungo la direzione  $\theta$  e  $\theta + d\theta$ . La pressione esercitata dalle particelle è

$$P = \int_0^\infty \int_0^{\pi/2} F(\theta, p) 2p \cos \theta d\theta dp \quad (9.3)$$

La funzione  $F(\theta, p)$  è ottenuta come segue. Sia  $n(\theta, p) d\theta dp$  il numero di particelle per unità di volume incidenti con angolo fra  $\theta$  e  $\theta + d\theta$  e momento fra  $p$  e  $p + dp$ . Allora la funzione  $F(\theta, p)$  è data da

$$F(\theta, p) d\theta dp = n(\theta, p) v(p) \cos \theta d\theta dp \quad (9.4)$$

dove  $v(p)$  è la velocità delle particelle di momento  $p$ . Da questo segue che

$$P = \int_0^\infty \int_0^{\pi/2} 2p \cos^2 \theta n(\theta, p) v(p) d\theta dp \quad (9.5)$$

Se le particelle incidono sulla superficie in modo isotropo allora

$$\frac{n(\theta, p)d\theta dp}{n(p)dp} = \frac{2\pi \sin\theta d\theta}{4\pi} \quad (9.6)$$

Quindi

$$P = \int_0^\infty p v_p n(p) dp \int_0^{\pi/2} \cos^2\theta \sin\theta d\theta \quad (9.7)$$

L'integrazione sulla parte angolare dà il fattore  $1/3$ .

Rimane da fissare il legame fra momento e velocità. Nel caso non relativistico

$$v(p) = \frac{p}{m} \quad (9.8)$$

Nel caso relativistico

$$v(p) = \frac{p}{m} [1 - (\frac{v(p)}{c})^2]^{-\frac{1}{2}} \quad (9.9)$$

Se  $\epsilon(p)$  è la energia cinetica traslazionale di una particella allora l'energia cinetica totale per unità di volume è data da

$$U_K = \int_0^\infty \epsilon(p) n(p) dp \quad (9.10)$$

Si deriva un legame immediato fra  $P$  e  $U_K$  a seconda del tipo di particella. Per una particella non relativistica con  $\epsilon = p^2/2m$  si ottiene

$$P = \frac{2}{3} U_K \quad (9.11)$$

Per fotoni con  $\epsilon = pc$  e  $U_K = U$  (densità di energia del campo di radiazione) si ha

$$P = \frac{1}{3} U \quad (9.12)$$

Espressioni analoghe sono ottenibili per particelle relativistiche con massa a riposo  $m_0$ .

## 9.2 Pressione di un Gas di fotoni

Nel caso di un gas di fotoni possiamo assumere

$$p = h\nu/c \quad v(p) = c \quad (9.13)$$

e

$$n(p)dp = (8\pi/h^3)[e^{\frac{h\nu}{KT}} + 1]^{-1}p^2dp \quad (9.14)$$

e quindi ottenere dopo facili passaggi la pressione di radiazione  $P_r$

$$P_r = \frac{1}{3}aT^4 \quad (9.15)$$

La pressione di radiazione dipende solo dalla temperatura e diventa importante alle alte temperature e basse densità.

### 9.3 Pressione di un Gas Perfetto

Nel caso di gas perfetto non relativistico e non degenere la funzione  $n(p)$  è quella data dalla statistica di Boltzmann ed è facile vedere che la pressione esercitata da un tale gas obbedisce alla classica legge di Boyle

$$P_g = nKT \quad (9.16)$$

dove  $n$  è il numero di particelle libere per unità di volume e  $K$  è la costante di Boltzmann ( $1.380 \times 10^{-16} \text{ erg K}^{-1}$ ). Conviene separare la pressione gassosa nelle due componenti: ioni ed elettroni

$$P_g = (n_i + n_e)KT \quad (9.17)$$

### 9.4 Peso Molecolare

È possibile passare dalle densità numeriche a quelle di massa introducendo i pesi molecolari medi per gli ioni ed elettroni. Per calcolare correttamente i pesi molecolari è necessario stabilire il grado di ionizzazione del materiale. Nell'interno delle stelle, dove la temperatura varia dai 15 ai  $30 \times 10^6$  K ed oltre, la radiazione è composta da fotoni di energia  $KT = 10^3$  eV. Il potenziale di ionizzazione dell'idrogeno è 13.6 eV mentre quelli di prima e seconda ionizzazione dell'elio sono 24.49 eV e 57.17 eV. Quindi questi elementi, che fra l'altro sono anche i due più abbondanti, sono completamente ionizzati ovunque salvo che nelle regioni più esterne dove la temperatura scende a circa  $10^3 - 10^4$  K. Il potenziale di ionizzazione cresce con il numero atomico e si può facilmente vedere che nuclei pesanti come il ferro saranno in grado di conservare alcuni

degli elettroni più interni anche a temperature dell'ordine di  $10^7$  K. Il metodo più generale per definire il peso molecolare medio di una miscela di particelle di varia natura è quello di massa media in AMU per particella libera. Sia  $n_k$  il numero di particelle per unità di volume aventi massa  $m_k$  ed  $n = \sum_k n_k$  il numero totale di particelle per unità di volume. La densità della miscela è

$$\rho = \sum_k m_k n_k \quad (9.18)$$

Se  $A_k = m_k/H$  denota la massa in AMU della particella di tipo  $k$ ,  $H = 1/N_0$  è la massa dell'atomo di idrogeno in AMU e  $N_0$  è il numero di Avogadro, la definizione di peso molecolare  $\mu$  è

$$\mu = \frac{\rho}{nH} = \frac{\sum_k A_k n_k}{\sum_k n_k} \quad (9.19)$$

Possiamo anche esprimere gli  $n_k$  per mezzo dell'abbondanza relativa in massa  $X_k$  del tipo di particella ( $X_k$  indica il numero di grammi di particelle  $k$  in un grammo di materia)

$$n_k = \frac{\rho X_k}{H A_k} \quad (9.20)$$

assieme all'ovvia condizione che  $\sum_k X_k = 1$ . Ne segue che

$$\mu = \frac{1}{\sum_k \frac{X_k}{A_k}} \quad (9.21)$$

Nell'applicazione astrofisica è conveniente distinguere fra ioni ed elettroni. Poniamo

$$n = n_e + \sum_i n_i \quad (9.22)$$

ed indichiamo con  $\nu_i$  il numero di elettroni liberati da uno ione di tipo  $i$

$$n_e = \frac{\rho}{H} \sum_i \nu_i \frac{X_i}{A_i} \quad (9.23)$$

ne segue che

$$n = \frac{\rho}{H} \sum_i (1 + \nu_i) \frac{X_i}{A_i} \quad (9.24)$$

$$\mu = \frac{1}{\sum_i (1 + \nu_i) \frac{X_i}{A_i}} \quad (9.25)$$

$$\mu = \frac{1}{\sum_i \nu'_i X_i} \quad (9.26)$$

con  $\nu'_i = (1 + \nu_i)/A_i$ . Il calcolo degli  $\nu'_i$  è complesso nel caso di parziale ionizzazione e questi risultano funzione di  $\rho$  e  $T$  mentre è immediato nel caso di ionizzazione totale. Infatti in questo caso il numero di particelle libere generate da un atomo di numero atomico  $Z_i$  e peso atomico  $A_i$  è  $(Z_i + 1)$ . Si usa indicare con  $X$ ,  $Y$  e  $Z$  le abbondanze in massa di idrogeno, elio ed elementi più pesanti di questo rispettivamente. Facendo l'approssimazione che  $A_i = 2Z_i$  (non si commette un grande errore atteso che nelle condizioni usuali le abbondanze degli elementi pesanti sono piccole) è immediato ottenere

$$\mu = \frac{1}{2X + (3/4)Y + (1/2)Z} \quad (9.27)$$

che è la espressione corrente del peso molecolare medio di un miscela di ioni (privi di elettroni) ed elettroni liberi. Il numero di elettroni liberi  $n_e$  può essere scritto

$$n_e = \frac{\rho}{H} \sum_i \frac{X_i(A_i \nu'_i - 1)}{A_i} \quad (9.28)$$

Il massimo di  $n_e$  si ha in caso di totale ionizzazione quando

$$n_e = \frac{\rho}{H} \sum_i \frac{X_i Z_i}{A_i} \quad (9.29)$$

Prendendo  $A(^1H) = 1$ ,  $A(^4He) = 4$  e  $A_i = 2Z_i$  si ha l'approssimazione

$$n_e = \frac{1}{2} \frac{\rho}{H} (1 + X) \quad (9.30)$$

con  $X$  abbondanza in massa di idrogeno. Da questa segue che

$$\mu_e = \frac{2}{1 + X} \quad (9.31)$$

Con analoghi ragionamenti possiamo ottenere  $\mu_i$ .

Con l'aiuto di quanto esposto sopra possiamo scrivere

$$P_g = \left( \frac{1}{\mu_i} + \frac{1}{\mu_e} \right) \frac{K}{H} \rho T \quad (9.32)$$

Nel caso non si voglia distinguere fra ioni ed elettroni la pressione è semplicemente data da

$$P_g = \frac{K\rho T}{\mu H} \quad (9.33)$$

dove  $\mu$  è il peso molecolare della miscela ioni-elettroni.

## 9.5 Pressione di un Gas di Elettroni Degeneri

Poichè gli elettroni sono particelle con spin semintero essi obbediscono alla statistica di Fermi-Dirac la cui legge di distribuzione dei momenti è data da

$$n(p)dp = \frac{2}{h^3} \frac{4\pi p^2}{e^{\eta + \frac{(p^2/2m)}{KT}} + 1} dp \quad (9.34)$$

Quando l'indice di occupazione è al valore massimo di uno significa che tutti gli stati disponibili nello spazio delle fasi sono occupati e che la densità massima di elettroni in esso è

$$n_e(p)_{max} = \frac{2}{h^3} 4\pi p^2 \quad (9.35)$$

è questa restrizione sulla densità numerica di elettroni nello spazio delle fasi che dà origine alla pressione di degenerazione. Al crescere della densità numerica di elettroni nello spazio delle fasi (quindi anche delle coordinate) essi sono forzati a stati di maggior momento in quanto quelli inferiori sono occupati. Gli elettroni con momento elevato danno un grande contributo alla pressione. Per ogni data temperatura e densità numerica di elettroni, il valore del parametro  $\eta$  è fissato dalla condizione che

$$n_e = \int_0^\infty n_e(\epsilon) d\epsilon = n_e(\eta, T). \quad (9.36)$$

Questa relazione non può essere integrata facilmente come nel caso della statistica di Maxwell-Boltzmann. Tuttavia si può vedere dalla relazione che definisce l'indice di occupazione che per  $\eta$  grandi e positivi, l'indice di occupazione è  $\ll 1$  per tutte le energie (la statistica si riduce a quella classica), mentre si trova che al crescere della densità di elettroni a temperatura costante, il parametro decresce e diventa molto minore di zero per densità elevate. Nel limite di  $\eta$  negativo molto grande, l'indice di occupazione = 1 per  $\epsilon/KT < |\eta|$  e = 0 per  $\epsilon/KT > |\eta|$ . La transizione avviene gradualmente sopra un intervallo di alcuni  $KT$  vicino al valore dell'energia  $\epsilon = |\eta|KT$  detta energia di Fermi  $E_F$ . Se

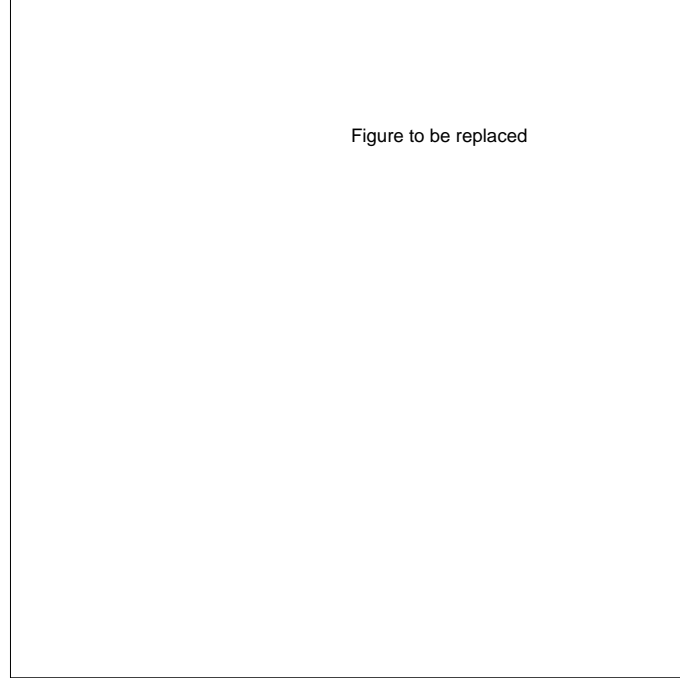


Figura 9.1: Indice di occupazione della statistica di Fermi-Dirac

l'energia  $-\eta KT$  è molto maggiore di  $KT$  l'indice di occupazione è una funzione a gradino (si veda la Figura 9.1). Questo limite è detto di completa degenerazione. Discuteremo qui tre casi di particolare interesse: totalmente degeneri non relativistici, totalmente degeneri relativistici, parzialmente degeneri non relativistici.

### 9.5.1 Gas di elettroni totalmente degeneri non relativistici

In questo caso tutti gli stati di momento minore di un valore massimo  $p_0$  sono occupati, mentre gli altri sono vuoti

$$n_e(p)dp = \frac{2}{h^3} 4\pi p^2 dp \quad p < p_0$$

$$n_e(p)dp = 0 \quad p > p_0 \quad (9.37)$$

Imponendo la conservazione della densità numerica totale di elettroni si ottiene

$$n_e = \frac{8\pi p_0^3}{3h^3} \quad (9.38)$$

$$p_0 = \left(\frac{3h^3}{8\pi}\right)^{1/3} n_e^{1/3}. \quad (9.39)$$



è facile dedurre la pressione esercitata dal gas di elettroni nel caso di velocità non relativistiche  $v(p) = p/m$

$$P_e = \frac{8\pi}{15mh^3} p_0^5 \quad (9.40)$$

oppure in funzione della densità elettronica

$$P_e = \frac{h^2}{20m} \left(\frac{3}{\pi}\right)^{2/3} n_e^{5/3} \quad (9.41)$$

ed infine in funzione della densità  $\rho$  e peso molecolare elettronico  $\mu_e$

$$P_e = 1.004 \times 10^{13} \left(\frac{\rho}{\mu_e}\right)^{5/3} \text{ dyne cm}^{-2}. \quad (9.42)$$

Si vede che per dato  $\mu_e$  la relazione fra  $P$  e  $\rho$  è di tipo politropico con indice  $3/2$  (si rimanda al capitolo 9 per una discussione dettagliata sui politropi) e che la equazione di stato di un gas di elettroni non relativistico e totalmente degenere non dipende dalla temperatura.

### 9.5.2 Gas di elettroni totalmente degenere relativistico

Si può dimostrare che a densità  $(\rho/\mu_e) > 7.3 \times 10^6 \text{ g cm}^{-3}$  gli elettroni totalmente degeneri diventano relativistici. Dalla relazione velocità momento per elettroni relativistici si ha

$$v = \frac{p}{m_0} \sqrt{1 + \left(\frac{p}{m_0 c}\right)^2} \quad (9.43)$$

che sostituita nella definizione di pressione porta a

$$P_e = \frac{8\pi}{3mh^3} \int_0^{p_0} \frac{p^4}{\sqrt{1 + \left(\frac{p}{mc}\right)^2}} dp. \quad (9.44)$$

Ponendo

$$x = p_0 mc = 1.009 \times 10^{-2} \sqrt{\frac{\rho}{\mu_e}} \quad (9.45)$$

e risolvendo l'integrale si deriva

$$P_e = \frac{\pi m^4 c^5}{3h^3} f(x) = 6.003 \times 10^{22} f(x) \text{ dyne cm}^{-2} \quad (9.46)$$

con  $f(x) = x(2x^2 - 3)(x^2 + 1)^{1/2} + 3 \sinh^{-1} x$ . Nel caso estremamente relativistico ( $x \rightarrow \infty$  ovvero semplicemente  $v(p) = c$ ) questa relazione si riduce a

$$P_e = \frac{c}{4} \left( \frac{3h^3}{8\pi} \right)^{1/3} n_e^{4/3} = 1.244 \times 10^{15} \left( \frac{\rho}{\mu_e} \right)^{4/3} \quad \text{dyne cm}^{-2} \quad (9.47)$$

che è ancora una relazione politropica di indice 3.

### 9.5.3 Gas di elettroni parzialmente degeneri non relativistico

Il caso del gas di elettroni parzialmente degeneri è di difficile trattazione matematica. Dallo studio dei casi precedenti si vede che affinché un gas degeneri diventi relativistico sono necessarie densità maggiori di  $10^6 \text{ g cm}^{-3}$  alle quali la degenerazione sarà completa a meno che le temperature siano maggiori di  $10^9 \text{ K}$ . Tali densità e temperature esistono solamente nelle fasi molto avanzate dell'evoluzione stellare. In tutti gli altri casi il gas diventa degeneri senza diventare relativistico. La pressione e densità numerica totale di elettroni sono date da

$$P_e = \frac{8\pi}{3h^3 m} \int_0^\infty \frac{p^4 dp}{e^{\eta + \frac{p^2}{2mKT}} + 1} \quad (9.48)$$

$$n_e = \frac{8\pi}{h^3} \int_0^\infty \frac{p^2 dp}{e^{\eta + \frac{p^2}{2mKT}} + 1}. \quad (9.49)$$

A differenza dei casi precedenti non possiamo risolvere le relazioni in  $\eta$ . Con l'aiuto della variabile adimensionale  $u = (p^2/2mKT)$  e la definizione delle due funzioni  $F_{1/2}(\eta)$  ed  $F_{3/2}(\eta)$  dette funzioni di Fermi-Dirac, possiamo scrivere

$$P_e = \frac{8\pi}{3h^3} \frac{KT}{(2mKT)^{3/2}} F_{3/2}(\eta) \quad (9.50)$$

$$n_e = \frac{4\pi}{h^3} (2mKT)^{3/2} F_{1/2}(\eta) \quad (9.51)$$

ovvero

$$P_e = n_e KT \left( \frac{2 F_{3/2}}{3 F_{1/2}} \right) \quad (9.52)$$

dove quest'ultima ricorda la legge del gas perfetto. Le funzioni  $F_{1/2}$  e  $F_{3/2}$  sono

$$F_{1/2} = \int_0^\infty \frac{u^{1/2} du}{e^{\eta+u} + 1} \quad (9.53)$$

$$F_{3/2} = \int_0^\infty \frac{u^{3/2} du}{e^{\eta+u} + 1} \quad (9.54)$$

Esse non sono calcolabili analiticamente ma solamente per via numerica. Il rapporto  $(\frac{2}{3}) \frac{F_{3/2}}{F_{1/2}}$  misura di quanto la pressione degli elettroni differisce da quella di un gas non degenere. Poichè il rapporto è funzione di  $\eta$ , è immediato vedere che la pressione è essenzialmente quella di gas non degenere per valori di  $\eta > 2$ . È di un certo interesse discutere le equazioni di stato per i casi di piccola degenerazione (gas quasi perfetto) e di degenerazione quasi completa. Nel caso di piccola degenerazione di un gas di fermioni (non necessariamente elettroni) di massa  $m$  e densità numerica  $n$ , tralasciando i passaggi intermedi, si arriva alla seguente relazione per la pressione

$$P = nKT(1 + \frac{nh^3}{2^{7/2}(2\pi mKT)^{3/2}} + \dots). \quad (9.55)$$

Il fattore che rappresenta la deviazione dalla legge di gas perfetto è proporzionale a  $n$  ed inversamente proporzionale a  $m$ . Questo ci permette di comprendere in maniera semplice che in un gas di elettroni e nuclei, essendo la massa di un elettrone almeno circa 2000 volte più piccola di quella di un protone, il fattore di degenerazione degli elettroni è molto maggiore di quello dei nuclei. Gli elettroni degenerano molto prima dei nuclei, mentre quest'ultimi possono essere considerati non degeneri almeno nella stragrande maggioranza delle situazioni di interesse. Nel caso di quasi totale degenerazione ( $\eta \ll 0$ ) le funzioni di Fermi-Dirac sono rappresentabili come somma di serie

$$F_{1/2}(\eta) = \frac{2}{3}(-\eta)^{3/2}(1 + \frac{\pi^2}{8\eta^2} + \dots) \quad (9.56)$$

$$F_{3/2}(\eta) = \frac{2}{5}(-\eta)^{5/2}(1 + \frac{5\pi^2}{8\eta^2} + \dots) \quad (9.57)$$

Da queste si ricava (arrestandoci al primo termine)

$$P = n^{5/3}(1 + \frac{K^2 T^2}{n^{4/3}} + \dots). \quad (9.58)$$

Poichè  $n = (4\pi/h^3)(2mKT)^{3/2}F_{1/2}$  si ritrova, utilizzando il primo termine dello sviluppo per  $F_{1/2}$ , il legame fra  $-\eta$  e l'energia di Fermi già visto in precedenza, il che chiarisce ulteriormente il significato fisico di  $\eta$ . Concludiamo questa sezione ricordando che la pressione totale è data dalla somma del termine gassoso più quello di radiazione

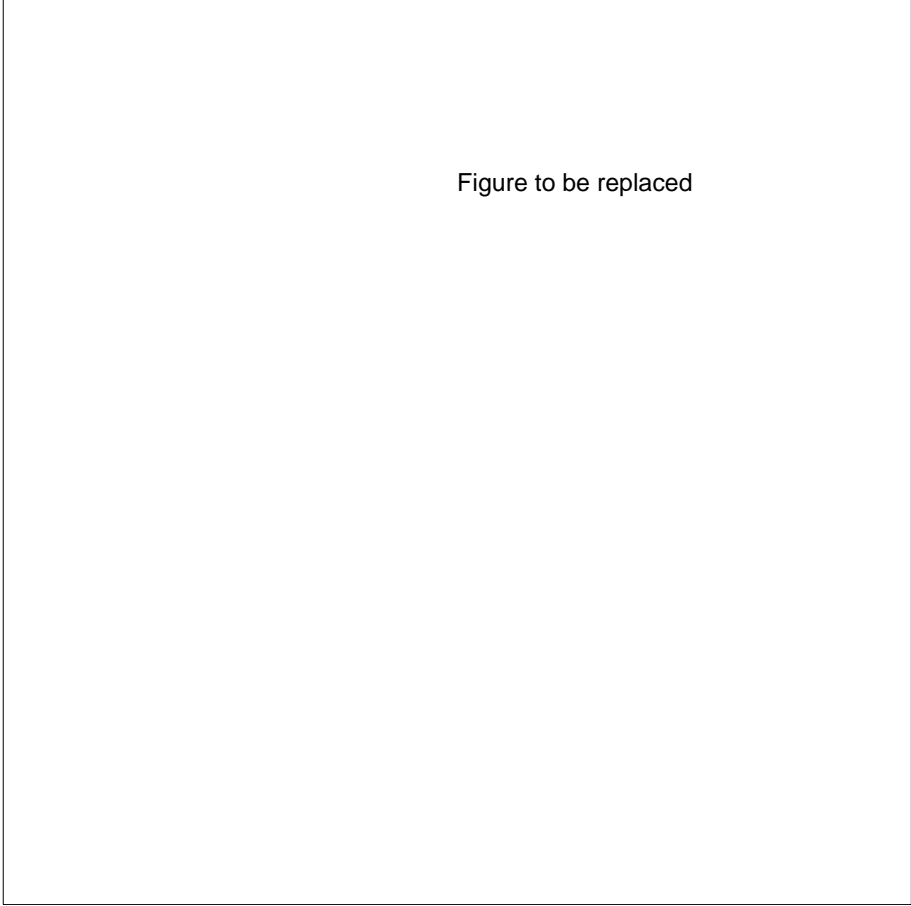


Figure to be replaced

Figura 9.2: L'equazione di stato nel piano temperatura - densità

$$P = P_g + P_r \quad (9.59)$$

dove a sua volta il termine  $P_g$  è dato dalla somma della parte ionica e quella elettronica. In generale si può scrivere

$$P_g = \frac{K\rho T}{\mu_i H} \left( 1 + \frac{\mu_i}{\mu_e} \frac{\frac{2}{3} F_{3/2}}{F_{1/2}} \right) \quad (9.60)$$

Infine ricordiamo che è utile introdurre il parametro  $\beta$  definito come il rapporto tra la pressione gassosa e quella totale:  $\beta P = P_g$  e ovviamente  $(1 - \beta)P = P_r$ .

#### 9.5.4 Pressioni parziali: confronto

La Figura 9.2 mostra nel piano  $\rho - T$  le regioni in cui i vari contributi alla pressione totale sono dominanti nonché le zone di separazione fra gas degenerare e non degenerare e fra gas relativistico e non relativistico. Le linee di demarcazione sono

ottenute semplicemente eguagliando le equazioni di stato nei vari domini. Nel concludere questa sezione è utile esaminare in quali circostanze sia necessario introdurre nell'equazione di stato gli effetti della radiazione e della degenerazione. In genere si assume che la equazione di stato sia quella di gas perfetto, trascurando altre sorgenti di pressione quali la radiazione, e trascurando effetti coulombiani e quantistici sulla equazione di stato. È possibile dimostrare che la equazione di gas perfetto sia in realtà una buona approssimazione nella maggior parte dei casi. Il rapporto  $(P_r/P_g)$  medio può essere espresso da

$$\overline{\left(\frac{P_r}{P_g}\right)} = 0.011\mu^4\left(\frac{M}{M_\odot}\right)^2 \quad (9.61)$$

nella quale si è fatto uso di una relazione temperatura del gas-massa totale della stella. Da questa si vede che nella maggior parte delle stelle, la pressione gassosa domina su quella della radiazione. Quest'ultima diventa un contributo importante alla pressione totale solamente per masse elevate ( $M > 50 - 100M_\odot$ ). Nell'approssimazione di gas perfetto, le singole particelle sono pensate come non interagenti fra loro. In realtà la materia stellare, che è in stato di completa ionizzazione ovunque, fuorchè negli strati superficiali, è composta di particelle cariche: nuclei ed elettroni liberi. Una stima dell'effetto dell'interazione coulombiana sulla pressione del gas può essere data dalle considerazioni seguenti: il contributo di una singola particella (nuclei di idrogeno) all'interazione coulombiana è  $e^2/r_0$ , dove  $r_0$  è la separazione media fra nuclei; in  $1 \text{ cm}^3$  di materia sono presenti  $\rho/\mu H$  particelle, quindi il volume specifico per ione è  $1/(\rho/\mu H)$  ovvero  $(4\pi/3)r_0^3$  da cui  $r_0 = (3/4\pi)^{-1/3}(\rho/\mu H)^{-1/3}$ ; l'energia d'interazione coulombiana per particella è  $E_{coul} = \alpha(\rho/\mu)^{1/3}$ , dove  $\alpha$  è una costante di proporzionalità. Infine, l'energia termica per particella è  $E_T = (3/2)KT$ . Una stima del contributo della interazione coulombiana alla pressione relativa a quella di gas perfetto è data dal rapporto

$$\frac{E_{coul}}{E_T} = \text{cost}\left(\frac{\rho}{\mu T^3}\right)^{1/3}. \quad (9.62)$$

Introducendo il valore numerico della costante, una grossolana dipendenza della temperatura del gas dalla massa totale della stella ed esprimendo in unità solari abbiamo

$$\frac{E_{coul}}{E_T} = 0.014\mu^{-4/3} \left( \frac{M}{M_\odot} \right)^{-2/3}. \quad (9.63)$$

La correzione coulombiana non supera nel caso del Sole 1% del valore dato dalla trattazione di gas perfetto. Valutiamo infine l'effetto imposto dalla trattazione quantistica. La meccanica quantistica ed il principio di Pauli richiedono che un elettrone confinato in una regione di dimensioni  $r_0$  abbia un'energia in eccesso di  $E_0 = h^2/(2mr_0^2)$  dove  $h$  è la costante di Planck,  $m$  la massa dell'elettrone. Si dimostra che a temperatura zero, l'energia media di un elettrone è vicina a  $E_0$ . Pertanto il contributo degenerare alla pressione da parte degli elettroni è dato da

$$\frac{P_{deg}}{P_g} = \frac{E_0}{E_T} = \text{cost} \left( \frac{\rho}{\mu T^{3/2}} \right)^{2/3} = 0.0114\mu^{-8/3} \left( \frac{M}{M_\odot} \right)^{-4/3} \frac{T}{10^6}. \quad (9.64)$$

Da questo si vede che per stelle di sequenza principale solamente quelle di massa molto piccola sono interessate dalla degenerazione elettronica. Questo non è vero per le fasi più avanzate, dove la degenerazione elettronica gioca un ruolo importante in stelle di massa qualunque.

## Capitolo 10

# RELAZIONI TERMODINAMICHE PER LA MATERIA STELLARE

Lo scopo di questo capitolo è quello di presentare alcune relazioni fondamentali della termodinamica nel caso specifico della situazione fisica esistente nell'interno delle stelle. In quanto segue avremo come riferimento la tipica situazione esistente in una stella e cioè un gas di particelle e radiazione in equilibrio termodinamico (almeno in senso locale), il quale sia soggetto a lenta espansione o contrazione.

### 10.1 Energia Interna

Dalla relazione (7.11) si vede che l'energia interna di una massa fissata di gas perfetto totalmente ionizzato dipende solo dalla temperatura e non dal volume:  $U = U(T)$ .

Poichè l'energia interna di questo tipo di gas è data dall'energia cinetica del moto traslazionale delle particelle,  $(3/2)kT$  per particella, ne segue che

$$U(T) = \left(\frac{3}{2}\right) \left(\frac{k}{\mu H}\right) T \quad (10.1)$$

per grammo di materia, dove  $k$  è la costante di Boltzmann,  $\mu$  il peso molecolare del gas e  $H$  la massa dell'atomo di  $H$  in unità di masse atomiche (si veda più avanti per la derivazione formale di queste quantità).

Nel caso di un gas perfetto di particelle e radiazione

$$U = aT^4 V + \left(\frac{3}{2}\right)\left(\frac{k}{\mu H}\right) T \quad (10.2)$$

dove  $V$  è il volume di un grammo di gas. L'energia interna di un gas non totalmente ionizzato dipende anche dal volume (densità) ed assume una forma molto più complicata.

## 10.2 Calori Specifici

I calori specifici di un gas sono definiti nel modo seguente. Sia  $\alpha$  una funzione delle variabili fisiche, allora la quantità di calore necessaria ad aumentare di un grado la temperatura del gas mantenendo  $\alpha$  costante è chiamata calore specifico

$$c_\alpha = \left(\frac{dQ}{dT}\right)_\alpha \quad (10.3)$$

Di uso corrente sono i calori specifici  $c_V$  e  $c_P$ .

È facile dimostare che

$$c_V = \frac{dU}{dT} \quad (10.4)$$

Nel caso di un gas perfetto di particelle totalmente ionizzato, non degenerare e con  $U = U(T)$ , il calore specifico  $c_V$  è costante.

Il calore specifico a pressione costante  $c_P$  per lo stesso gas ma con  $U = U(V, T)$  è

$$c_P = c_V + \left[\left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_T + P\right]\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_P \quad (10.5)$$

la quale nel caso di gas di particelle totalmente ionizzato non degenerare diventa semplicemente

$$c_P = c_V + \left(\frac{k}{\mu H}\right) \quad (10.6)$$

In molte applicazioni termodinamiche si fa uso del rapporto  $\gamma = c_P/c_V$ , il quale sempre per un gas perfetto di sole particelle, totalmente ionizzato e non degenerare è costante.

Questa circostanza porta all'esistenza delle ben note leggi di trasformazione adiabatica:



$$TV^{\gamma-1} = cost \quad PV^{\gamma} = cost \quad P^{1-\gamma}T^{\gamma} = cost. \quad (10.7)$$

Quando sono inclusi gli effetti della radiazione e/o ionizzazione si dimostra che gli esponenti delle tre leggi non sono uguali fra loro, non sono costanti lungo l'adiabatica e nessuno è uguale al rapporto dei calori specifici  $\gamma$ .

### 10.3 Effetti della radiazione

La pressione totale esercitata da un gas di particelle (ioni totalmente ionizzati ed elettroni) e dalla radiazione è data dalla relazione

$$P = \left(\frac{k}{\mu H}\right)\rho T + \frac{1}{3}aT^4 = \left(\frac{K}{\mu HV}\right)T + \frac{1}{3}aT^4 \quad (10.8)$$

$$U = aT^4V + \frac{3}{2}\left(\frac{k}{\mu H}\right)T \quad (10.9)$$

dove  $U$  è l'energia interna per grammo e  $V$  indica il volume per grammo.

Usando queste relazioni possiamo scrivere

$$dQ = \left(4aT^3V + \frac{3K}{2\mu H}\right)dT + \left(\frac{4aT^4}{3} + \frac{KT}{\mu HV}\right)dV \quad (10.10)$$

In analogia con il caso di un gas di particelle vengono definiti tre esponenti adiabatici  $\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3$  tali che valgano le seguenti equazioni

$$\frac{dP}{P} + \Gamma_1 \frac{dV}{V} = 0 \quad (10.11)$$

$$\frac{dP}{P} + \frac{\Gamma_2}{1 - \Gamma_2} \frac{dT}{T} = 0 \quad (10.12)$$

$$\frac{dT}{T} + (\Gamma_3 - 1) \frac{dV}{V} = 0 \quad (10.13)$$

dove le variazioni sono supposte adiabatiche. Queste definizioni richiedono che sia sempre verificata l'uguaglianza

$$\Gamma_3 - 1 = \frac{(\Gamma_2 - 1)\Gamma_1}{\Gamma_2} \quad (10.14)$$

Introducendo  $\beta = P_g/P$ , è facile dimostrare che

$$\Gamma_1 = \frac{32 - 24\beta - 3\beta^2}{24 - 21\beta} \quad (10.15)$$

$$\Gamma_2 = \frac{32 - 24\beta - 3\beta^2}{24 - 18\beta - 3\beta^2} \quad (10.16)$$

$$\Gamma_3 = \frac{32 - 27\beta}{24 - 21\beta}. \quad (10.17)$$

A scopo illustrativo facciamo vedere come si ricava  $\Gamma_3$ ; analoghe dimostrazioni possono essere ottenute facilmente per gli altri casi. Si parte dall'equazione (10.10) con  $dQ = 0$  e si ottiene

$$(4aT^4 + \frac{3KT}{2\mu HV})\frac{dT}{T} + (\frac{4aT^4}{3} + \frac{KT}{\mu HV})\frac{dV}{V} = 0 \quad (10.18)$$

$$(12P_r + \frac{3P_g}{2})\frac{dT}{T} + (4P_r + P_g)\frac{dV}{V} = 0 \quad (10.19)$$

da cui

$$\Gamma_3 = 1 + \frac{4P_r + P_g}{12P_r + \frac{3}{2}P_g} = \frac{32 - 27\beta}{24 - 21\beta} \quad (10.20)$$

Esaminando le relazioni ottenute per i  $\Gamma$ , si vede che ogni esponente adiabatico diminuisce monotonicamente dal valore  $5/3$  per  $\beta = 1$  al valore  $4/3$  per  $\beta = 0$ . È facile anche verificare che nel caso di sole particelle ( $\beta = 1$ )  $\Gamma_1 = \Gamma_2 = \Gamma_3 = \gamma$ . Nel caso di sola radiazione è vero che  $\Gamma_1 = \Gamma_2 = \Gamma_3 = 4/3$  ma nessuno di questi è uguale a  $\gamma$  in quanto atteso che  $c_P \rightarrow \infty$  (conseguenza del fatto che  $P$  non dipende da  $V$ )  $\gamma \rightarrow \infty$ . Il calcolo dei calori specifici è immediato. Per il calore specifico a volume costante si ottiene

$$C_V = \left(\frac{dU}{dT}\right)_V = 4aT^3V + \frac{3K}{2\mu H} = \frac{V}{T} \left(4aT^4 + \frac{3KT}{2\mu HV}\right) = \quad (10.21)$$

$$= \frac{V}{T} P_g \left(\frac{12P_r}{P_g} + \frac{3}{2}\right) = \frac{3K}{2\mu H} \frac{8 - 7\beta}{\beta} \quad (10.22)$$

e poichè nel caso del gas di sole di particelle  $c_V = (3K)/(2\mu H)$

$$C_V = c_V \frac{8 - 7\beta}{\beta} \quad (10.23)$$

Analogamente per  $C_P$  si ricava che

$$C_P = c_V \frac{32 - 24\beta - 3\beta^2}{3\beta^2} \quad (10.24)$$

e infine  $C_P/C_V = \Gamma_1/\beta$

Poichè tutti i  $\Gamma$  contengono  $\beta$  che è funzione di  $\rho$  e  $T$ , le espressioni integrate per le adiabatiche sono in generale molto complicate. I casi di gas degenere o di parziale ionizzazione sono pure complessi e non verranno trattati.

## 10.4 Entropia

Il calcolo dell'entropia viene dalla seconda legge della termodinamica  $dS = dQ/T$  e dal fatto che l'entropia è additiva. Nel caso di un gas di particelle e radiazione, partendo dalla espressione per  $dQ$  data dalla equazione (10.10) e dividendo per  $T$  si ottiene

$$dS = \left( \frac{3K}{2\mu H} + 4aT^3V \right) \frac{dT}{T} + \left( \frac{4aT^3V}{3} + \frac{K}{\mu H} \right) \frac{dV}{V} \quad (10.25)$$

introducendo la variabile  $W = T^3V = T^3/\rho$  con  $dW/W = 3dT/T + dV/V$

$$dS = \left( \frac{3K}{2\mu H} + 4aW \right) \frac{dT}{T} + \left( \frac{4aW}{3} + \frac{K}{\mu H} \right) \frac{dW}{W} - 3 \left( \frac{4aW}{3} + \frac{K}{\mu H} \right) \frac{dT}{T} \quad (10.26)$$

$$dS = -\frac{3K}{2\mu H} \frac{dT}{T} + \frac{4a}{3} \frac{dW}{W} + \frac{K}{\mu H} \frac{dW}{W} \quad (10.27)$$

da cui, integrando, abbiamo

$$S = \text{cost} + \frac{K}{\mu H} \ln(T^{-3/2}W) + \frac{4aW}{3} \quad (10.28)$$

e infine ritornando alle variabili  $T$  e  $\rho$  si ricava la seguente relazione dell'entropia per grammo di materiale

$$S = \text{cost} + \frac{K}{\mu H} \ln\left(\frac{T^{3/2}}{\rho}\right) + \frac{4a}{3} \frac{T^3}{\rho}. \quad (10.29)$$

Il primo termine dà l'entropia per grammo del gas non degenere di particelle, mentre il secondo dà l'entropia per grammo della componente fotonica. Se il gas di elettroni è degenere ma non relativistico si può includere l'entropia per

questa componente. La procedura si basa sul fatto che per ogni grado di degenerazione l'energia interna per grammo di gas non relativistico è  $U=(3/2)PV$ . Tralasciando i passaggi si arriva a

$$S = cost + \frac{K}{\mu_i H} \ln\left(\frac{T^{3/2}}{\rho}\right) + \frac{K}{\mu_e H} \left[ \frac{5}{3} \frac{F_{3/2}(\eta)}{F_{1/2}(\eta)} + \eta \right] + \frac{4a}{3} \frac{T^3}{\rho} \quad (10.30)$$

dove  $\mu_i$  e  $\mu_e$  sono i pesi molecolari per la componente ionica ed elettronica. I tre termini sono le entropie degli ioni, elettroni e radiazione rispettivamente.

## 10.5 Trasformazioni politropiche

In questa sezione prendiamo in esame le *trasformazioni politropiche* che costituiscono un caso più generale delle trasformazioni adiabatiche e che verranno utili nella discussione del trasporto convettivo dell'energia.

Si definisce trasformazione politropica un cambiamento quasi statico operato in maniera tale che la derivata

$$c = \frac{dQ}{dT} \quad (10.31)$$

*il calore specifico* vari in maniera assegnata. Ad esempio il caso adiabatico già discusso è quello per cui  $c = 0$ ; una trasformazione isoterma  $dT = 0$  quindi  $c = \infty$ . Infine se  $c = c_V$  la trasformazione è a volume costante (*isometrica*), e se  $c = c_P$  la trasformazione è a pressione costante (*isobarica*).

In analogia con il caso adiabatico definiamo tre  $\Gamma'$  nel modo seguente

$$\Gamma'_1 = \frac{d \ln P}{d \ln \rho} \quad \frac{\Gamma'_2}{\Gamma'_2 - 1} = \frac{d \ln P}{d \ln T} \quad \Gamma'_3 - 1 = \frac{d \ln T}{d \ln \rho} \quad (10.32)$$

da queste segue subito che

$$\frac{\Gamma'_2}{\Gamma'_2 - 1} = \frac{\Gamma'_1}{\Gamma'_3 - 1} \quad (10.33)$$

Usando la equazione di stato  $P = P(\rho, T)$  segue che

$$\Gamma'_1 = \chi_\rho + (\Gamma'_3 - 1)\chi_T \quad (10.34)$$

Ora vogliamo ottenere le espressioni per  $\Gamma'_1$ ,  $\Gamma'_2$  e  $\Gamma'_3$  in funzione dei loro corrispondenti adiabatici. Si parte dalla prima legge della termodinamica scritta per unità di massa

$$dQ = dE - \left(\frac{P}{\rho^2}\right)d\rho \quad (10.35)$$

dove  $E$  come  $E = E(\rho, T)$ . Si ottiene

$$dQ = \left[ \rho \left( \frac{\partial E}{\partial \rho} \right)_T - \frac{P}{\rho} \right] \frac{d\rho}{\rho} + c_V T \frac{dT}{T} = c T \frac{dT}{T} \quad (10.36)$$

Da questa si ricava

$$\Gamma'_3 - 1 = \frac{P/\rho - \rho(\partial E/\partial \rho)_T}{(c - c_V)T} \quad (10.37)$$

Il membro di destra di questa equazione diventa  $\Gamma_3 - 1$  quando  $c = 0$  per cui si deriva

$$\Gamma'_3 - 1 = \frac{\Gamma_3 - 1}{1 - (c/c_V)} \quad (10.38)$$

Si osservi che per  $c = 0$   $\Gamma'_3 = \Gamma_3$ , per  $c = c_V$   $\Gamma'_3 = \infty$ , per  $c = \infty$   $\Gamma'_3 = 1$ , e per il caso speciale  $\Gamma_3 = \gamma = c_P/c_V$

$$\Gamma'_3 = \frac{c_P - c}{c_V - c} \quad (10.39)$$

Analogamente si ottiene

$$\frac{\Gamma'_2}{\Gamma'_2 - 1} = \frac{(c_P - c)T}{(P^2/\rho^2)(\partial \rho/\partial P)_T - P(\partial E/\partial P)_T} \quad (10.40)$$

da cui

$$\frac{\Gamma'_2}{\Gamma'_2 - 1} = \left(1 - \frac{c}{c_P}\right) \frac{\Gamma_2}{\Gamma_2 - 1} \quad (10.41)$$

Si osservi che per  $c = 0$   $\Gamma'_2 = \Gamma_2$ , per  $c = c_P$   $\Gamma'_2 = 0$ , per  $c = \infty$   $\Gamma'_2 = 1$ , e per il caso speciale  $\Gamma_2 = \gamma = c_P/c_V$  si ottiene ancora

$$\Gamma'_2 = \frac{c_P - c}{c_V - c} \quad (10.42)$$



## Capitolo 11

# IONIZZAZIONE

Fino ad ora abbiamo sempre assunto la completa ionizzazione degli atomi. Questa approssimazione è sicuramente valida nell'interno delle stelle ma non verso la superficie dove il grado di ionizzazione deve necessariamente diminuire fino ad arrivare alla situazione di gas neutro.

Quando un gas è parzialmente ionizzato, il peso molecolare e molte altre variabili termodinamiche, come ad esempio i calori specifici, gli esponenti  $\Gamma$  etc., variano con il grado di ionizzazione che a sua volta dipende da pressione  $P$  e temperatura  $T$ .

### 11.1 Relazioni di Boltzmann e Saha

Consideriamo gli atomi di una certa specie chimica in stato di parziale ionizzazione contenuti in un volume unitario di gas in equilibrio termodinamico.

Essi sono distribuiti su molti livelli di eccitazione, indicati dal pedice  $s$ , e ognuno di questi stati è a sua volta degenere nel senso che è costituito da  $g_s$  sotto-stati. Il numero  $g_s$  è il *peso statistico* dello stato energetico.

Consideriamo in particolare gli atomi di un dato elemento che si trovano nello stato  $s$  e nello stato fondamentale  $s = 0$  separati da un salto energetico  $\psi_s$ . La transizione degli atomi fra i due stati si accompagna ad assorbimento ed emissione di fotoni. In condizioni di equilibrio il numero di transizioni dallo stato fondamentale a quello eccitato deve pareggiare il suo inverso. Pertanto il rapporto fra il numero di atomi nei due livelli è governato dalla legge di Boltzmann

$$\frac{n_s}{n_0} = \frac{g_s}{g_0} e^{-\psi_s/kT} \quad (11.1)$$

dove  $k$  è la costante di Boltzmann.

Invece di riferirci agli atomi nello stato fondamentale, confrontiamo gli atomi nello stato  $s$  con il numero  $n$  di *tutti gli atomi di quell'elemento*

$$n = \sum_s n_s \quad (11.2)$$

Partendo dalla 11.1, moltiplicando per  $g_0$  e sommando su tutti gli stati, otteniamo

$$g_0 \frac{n}{n_0} = g_0 \sum_{s=0}^{\infty} \frac{n_s}{n_0} = g_0 + g_1 e^{-\psi_1/kT} + g_1 e^{-\psi_1/kT} + \dots = u_p \quad (11.3)$$

dove  $u_p$  è la *funzione di partizione*. Dalla (11.3) otteniamo la legge di Boltzmann nella forma

$$\frac{n_s}{n} = \frac{g_s}{u_p} e^{-\psi_s/kT} \quad (11.4)$$

La relazione di Boltzmann può essere usata per determinare il grado di ionizzazione a patto di distinguere fra eccitazione e ionizzazione.

Nel caso dell'eccitazione si ha a che fare con ioni ed elettroni legati distribuiti su stati energetici *discreti*. Invece nel caso della ionizzazione lo stato di energia maggiore consiste di due particelle distinte: ione ed elettrone libero. Quest'ultimo ha una distribuzione continua di energie possibili. Infatti dopo la ionizzazione (ad esempio per assorbimento di un fotone), l'elettrone emesso ha un valore arbitrario di energia cinetica. Il processo inverso di ricombinazione può avvenire mediante cattura di un elettrone con energia qualunque.

Diciamo che un atomo è nello stato  $r$  di ionizzazione se ha già perso  $r$  elettroni. Indichiamo con  $\chi_r$  l'energia necessaria per strappare il prossimo elettrone dallo stato fondamentale. Subito la ionizzazione l'elettrone avrà un certo momento di valore assoluto  $p_e$  ed energia cinetica  $p_e^2/(2m_e)$ . Pertanto rispetto allo stato iniziale legato l'elettrone ha energia  $\chi_r + p_e^2/(2m_e)$ , mentre lo stato di ionizzazione dell'atomo è ora  $r + 1$ .

Consideriamo come livello inferiore quello di un atomo  $r$ -volte ionizzato nello stato fondamentale. Il livello superiore sia quello di un atomo  $(r + 1)$ -volte



ionizzato più un elettrone libero con momento nell'intervallo  $[p_e, p_e + dp_e]$ . Le densità numeriche di ioni in questi due stati siano  $n_r$  e  $dn_{r+1}$ . Il peso statistico del livello superiore è dato dal prodotto del peso statistico dello ione  $g_{r+1}$  per il peso statistico dell'elettrone libero  $dg(p_e)$ . In condizioni di equilibrio termodinamico i tassi di ionizzazione e di ricombinazione si pareggiano e pertanto si può usare la relazione di Boltzmann. In questo caso diventa

$$\frac{dn_{r+1}}{n_r} = \frac{g_{r+1}dg(p_e)}{g_r} \exp\left(-\frac{\chi_r + p_e^2/(2m_e)}{kT}\right) \quad (11.5)$$

Il peso statistico dell'elettrone libero è presto determinato dalla meccanica quantistica. In base al principio di Pauli un elemento di volume nello spazio delle fasi  $dV d^3p$  può contenere  $dV d^3p/h^3$  elettroni (si ricordi che  $h$  è la costante di Planck e  $V$  è il volume occupato dal gas). IL peso statistico è dunque

$$dg(p_e) = \frac{2dV d^3p_e}{h^3} \quad (11.6)$$

Se la densità numerica di elettroni è  $n_e$  allora  $dV = 1/n_e$  da cui

$$dg(p_e) = \frac{2\pi dV p_e^2 dp_e}{n_e h^3} \quad (11.7)$$

ed infine

$$\frac{dn_{r+1}}{n_r} = \frac{g_{r+1}}{g_r} \frac{8\pi p_e^2 dp_e}{n_e h^3} \exp\left(-\frac{\chi_r + p_e^2/(2m_e)}{kT}\right) \quad (11.8)$$

Integrando sopra tutti i valori di  $p_e$  otteniamo l'insieme completo di stati di energia superiore

$$\frac{dn_{r+1}}{n_r} = \frac{g_{r+1}}{g_r} \frac{8\pi}{n_e h^3} \exp^{-\chi_r} \int_0^\infty p_e^2 \exp\left(-\frac{p_e^2}{2m_e kT}\right) dp_e \quad (11.9)$$

Per  $a > 0$

$$\int_0^\infty x^2 e^{-a^2 x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{4a^3} \quad (11.10)$$

otteniamo

$$\frac{n_{r+1}}{n_r} n_e = \frac{g_{r+1}}{g_r} f_r(T) \quad (11.11)$$

con

$$f_r(T) = 2 \frac{(2\pi m_e kT)}{h^3} e^{-\chi_r/kT} \quad (11.12)$$

Questa è l'equazione di Saha (anche se non nella forma più generale in quanto abbiamo considerato solo stati fondamentali).

Allo scopo di essere più precisi facciamo ora uso delle quantità  $n_{r+1,0}$ ,  $n_{r,0}$ ,  $g_{r+1,0}$ ,  $g_{r,0}$ , dove il secondo pedice indica lo stato fondamentale per il quale queste quantità sono calcolate. Con  $n_{r+1}$ ,  $n_r$ ,  $g_{r+1}$ ,  $g_r$  indichiamo ora ci riferiamo alle densità numeriche di ioni e pesi statistici per *tutti gli stati di eccitazione*. Un particolare stato di eccitazione è indicato da un secondo pedice in modo tale che  $n_{i,k}$  indica la densità numerica di atomi nello stato di ionizzazione  $i$  e stato di eccitazione  $k$ , e  $g_{i,k}$  è il peso statistico corrispondente. L'equazione di Saha (11.11) diventa

$$\frac{n_{r+1,0}}{n_{r,0}} n_e = \frac{g_{r+1,0}}{g_{r,0}} f_r(T) \quad (11.13)$$

La densità numerica di ioni nello stato di ionizzazione  $r$  (tutti gli stati di eccitazione) è

$$n_r = \sum_s n_{r,s} \quad (11.14)$$

la quale corrisponde alla (11.13). Possiamo ora scrivere la relazione di Boltzmann (11.11) per gli ioni nello stato  $r$  come

$$\frac{n_{r,s}}{n_{r,0}} = \frac{g_{r,s}}{g_{r,0}} e^{-\psi_{r,s}/kT} \quad (11.15)$$

dove  $\psi_{r,s}$  è l'energia di eccitazione dello stato  $s$ . L'equazione (11.14) può essere scritta nella forma

$$\frac{g_{r,0}}{n_{r,0}} = g_{r,0} \sum_s \frac{n_{r,s}}{n_{r,0}} = g + ge + ge + \dots = u_r \quad (11.16)$$

dove  $u_r(T)$  è la funzione di partizione per lo ione nello stato  $r$ .

Con l'aiuto di  $n_r g_{r,0} = n_{r,0} u_r$ , l'equazione di Saha per tutti gli stati di eccitazione diventa

$$\frac{n_{r+1}}{n_r} n_e = \frac{u_{r+1}}{u_r} f_r(T) \quad (11.17)$$

Introducendo la pressione degli elettroni al posto di  $n_e$  si ottiene

$$\frac{n_{r+1}}{n_r} P_e = \frac{u_{r+1}}{u_r} 2 \frac{(2\pi m_e)^{3/2}}{h^3} (kT)^{5/2} e^{-\chi_r/kT} \quad (11.18)$$

## 11.2 Ionizzazione dell' Idrogeno

Applichiamo quanto sopra ad un gas composto di solo idrogeno e definiamo il grado di ionizzazione come

$$x = \frac{n_1}{n_0 + n_1} \quad \text{ovvero} \quad \frac{n_1}{n_0} = \frac{x}{(1-x)} \quad (11.19)$$

Se il gas è neutro  $x = 0$ , se è completamente ionizzato  $x = 1$ .

Il membro di sinistra dell'equazione (11.18) può essere sostituito da  $xP_e/(1-x)$  e se  $n = n_0 + n_1$  è la densità numerica totale di atomi di idrogeno, allora possiamo legare la pressione parziale degli elettroni a quella totale del gas  $P_g$

$$P_e = n_e kT = (n_e + n)kT \frac{n_e}{n + n_e} = P_g \frac{n_e}{n + n_e} \quad (11.20)$$

Per ogni atomo di idrogeno vi è un solo elettrone ( $n_e = n_1$ ), pertanto

$$P_e = \frac{x}{1+x} P_g \quad (11.21)$$

e la equazione (11.18) diventa

$$\frac{x^2}{1-x^2} = K_H \quad \text{con} \quad K_H = \frac{u_1}{u_0} \frac{2}{P_g} (2\pi m_e)^{3/2} (kT)^{5/2} e^{-\chi_H/kT} \quad (11.22)$$

Si noti che l'equazione (11.22) è quadratica in  $x$  una volta assegnati  $T$  e  $P_g$ . Se la pressione di radiazione è importante basta dare  $T$  e  $P$  totale e ricavare  $P_g$  da inserire nell'equazione (11.22). Il potenziale di ionizzazione dell'idrogeno è  $\chi_H = 13.6$  eV. Per calcolare il grado di ionizzazione bisogna conoscere i pesi statistici per derivare la funzione di partizione. Possiamo limitarci a considerare solo lo stato fondamentale e l'idrogeno ionizzato:  $u_0 \simeq g_{0,0} = 2$  e  $u_1 = 1$ . A scopo illustrativo ricaviamo il grado di ionizzazione nel Sole. Alla fotosfera con  $P_g = 6.83 \times 10^4$  in unità cgs,  $T = 5636$  K si ottiene  $x = 10^{-4}$ , mentre in strati più interni con  $P_g = 1.56 \times 10^{12}$ ,  $T = 7.15 \times 10^5$  K si ricava  $x = 0.993$ .

Si noti ancora che nella equazione (11.22) il termine  $K_H$  aumenta con  $T$  e diminuisce con  $P_g$ , cioè il grado di ionizzazione aumenta con la temperatura ma diminuisce con la pressione del gas. Questo è facile da capire: l'aumento di temperatura rende più frequenti ed energetiche le collisioni, i fotoni sono più energetici, è più facile ionizzare gli atomi. D'altra parte mantenendo costante la

temperatura ed aumentando la pressione diventa più facile per gli ioni catturare elettroni e ricombinarsi.

### 11.3 Parziale ionizzazione: $\mu$ , $c_P$ , $\nabla_a$

Vediamo come la ionizzazione parziale modifichi il calcolo del peso molecolare. Ci limitiamo al caso di un gas di solo idrogeno.

Sia  $x$  il grado di ionizzazione. Indichiamo con  $E$  il numero di elettroni liberi per atomo (neutro o ionizzato). Allora vale l'identità

$$E = \frac{n_e}{n} = x \quad (11.23)$$

Ricordiamo che  $\mu H$ ,  $\mu_i H$ ,  $\mu_e H$  sono stati definiti come le masse medie per particella libera, per ione, per elettrone libero rispettivamente. Quest significa che deve valere la relazione

$$\rho = (n + n_e)\mu H = n\mu_i H = n_e\mu_e H \quad (11.24)$$

Usando la (11.23) e  $n = n_0 + n_1$ , risolviamo la (11.24) per ricavare il peso molecolare e troviamo

$$\mu = \frac{\rho}{n H} \frac{1}{1 + E} = \frac{\mu_i}{1 + E} = \mu_e \frac{E}{1 + E} \quad (11.25)$$

Poichè non abbiamo sostituito  $\mu_i$  con il suo valore per l'idrogeno ( $\mu_i = 1$ ), nè  $E$  con  $x$ . la relazione ottenuta è valida anche per una miscela di gas.

Molte quantità termodinamiche dipendono dal grado di ionizzazione e spesso in maniera complicata. In quanto segue ci limiteremo a dare dei casi semplici per illustrare il metodo. Ancora una volta ci riferiremo al caso del solo idrogeno. Infine il gas è considerato ideale (senza effetti di degenerazione).

Consideriamo la derivata

$$\delta = -\left(\frac{\partial \ln \rho}{\partial \ln T}\right)_P \quad (11.26)$$

Nel caso di solo idrogeno e di gas perfetto abbiamo  $\delta = 1$  sia per  $x = 0$  che  $x = 1$  in quanto il peso molecolare è costante in entrambi i casi. Per parziale ionizzazione  $x$  varia con  $T$  e pertanto anche  $\delta$  deve variare. Usando l'equazione

di stato di un gas perfetto ( $\rho \propto \mu P/T$ ) e la relazione (11.25) è facile verificare che

$$\delta = 1 + \frac{1}{1+E} \left( \frac{\partial E}{\partial \ln T} \right)_P \quad (11.27)$$

Per il modo in cui è stata ottenuta, questa relazione è generale.

Nel caso di solo idrogeno  $E = x$ . Pertanto dobbiamo derivare  $x$  rispetto a  $T$ .

Questo viene fatto tramite l'equazione di Saha (11.22) ottenendo

$$\delta = 1 + \frac{1}{2}x(1-x) \left( \frac{5}{2} + \frac{\chi_H}{kT} \right) \quad (11.28)$$

Se la pressione di radiazione è importante bisogna sommare alla (11.28) il termine  $4(1-\beta)/\beta$ .

Dalla definizione di calore specifico a pressione costante  $c_P$  e l'equazione di stato di gas perfetto  $P = (k/\mu H)\rho T$  si ottiene

$$c_P = \left( \frac{\partial U}{\partial T} \right)_P + \frac{k}{\mu H} \delta \quad (11.29)$$

dove  $U$  è l'energia interna per unità di massa

$$U = \frac{3}{2} \frac{k}{\mu_i H} (1+E)T + u_{ion} \quad (11.30)$$

dove il primo termine dà l'energia cinetica di ioni ed elettroni, mentre il secondo termine sta ad indicare che l'energia usata per la ionizzazione ridiventa disponibile all'atto della ricombinazione. Anche queste relazioni sono di validità generale (miscele di elementi. Nel caso di solo idrogeno  $E = x$  e  $u = x\chi_H/(\mu_i H)$ ). Dopo lunghe manipolazioni algebriche si ottiene

$$c_P \frac{\mu_i H}{k} = \frac{5}{2}(1+x) + \frac{\Phi_H^2}{G(x)} \quad (11.31)$$

dove

$$\Phi_H = \frac{5}{2} + \frac{\chi_H}{kT} \quad e \quad G(x) = \frac{2}{x(1-x^2)} \quad (11.32)$$

In presenza di pressione di radiazione bisogna sostituire il fattore  $(5/2)$  con  $5/2 + 4(1-\beta)(4+\beta)/\beta^2$ .

Infine diamo l'espressione per  $\nabla_a$

$$\nabla_a = \frac{P\delta}{T\rho c_P} = \frac{2 + x(1-x)\Phi_H}{5 + x(1-x)\Phi_H^2} \quad (11.33)$$

## 11.4 Miscela Idrogeno-Elío

Si consideri ora il caso di un gas composto da idrogeno ed elio con abbondanze in massa  $X$  e  $Y$ . Lo scopo di questa sezione è quello di illustrare le difficoltà che sorgono in presenza di un gas con composizione chimica complessa.

Sono presenti ora sei tipi di particelle: idrogeno neutro e ionizzato, elio neutro, una volta ionizzato, due volte ionizzato, elettroni liberi. Esistono tre tipi di energia di ionizzazione:  $\chi_H^0$  per l'idrogeno,  $\chi_{He}^0$  e  $\chi_{He}^1$  per l'elio neutro e una volta ionizzato ( $\chi_H^0 = 13.6$  eV,  $\chi_{He}^0 = 24.587$  eV,  $\chi_{He}^1 = 54.416$  eV). Ogni atomo di idrogeno contribuisce all'energia interna con  $\chi_H^0$ , ogni atomo di elio nel primo stadio di ionizzazione con  $\chi_{He}^0$  e ogni atomo di elio completamente ionizzato con  $\chi_{He}^0 + \chi_{He}^1$ .

Indichiamo con  $x_H^0$ ,  $x_H^1$ ,  $x_{He}^0$ ,  $x_{He}^1$ ,  $x_{He}^2$  i gradi di ionizzazione, cioè  $x_i^r$  dà in numero di atomi di tipo  $i$  nello stato di ionizzazione  $r$  diviso il numero totale di atomi della specie  $i$ .

$$x_H^0 = \frac{n_H^0}{n_H}, \quad x_H^1 = \frac{n_H^1}{n_H}, \quad x_{He}^0 = \frac{n_{He}^0}{n_{He}}, \quad x_{He}^1 = \frac{n_{He}^1}{n_{He}}, \quad x_{He}^2 = \frac{n_{He}^2}{n_{He}} \quad (11.34)$$

dove  $n_H = n_H^0 + n_H^1$  e  $n_{He} = n_{He}^0 + n_{He}^1 + n_{He}^2$ .

Il contributo dell'energia di ionizzazione all'energia interna per unità di massa è

$$u_{ion} = \frac{1}{H} \left( X x_H^1 \chi_H^0 + \frac{1}{4} Y [x_{He}^1 \chi_{He}^0 + x_{He}^2 (\chi_{He}^0 + \chi_{He}^1)] \right) \quad (11.35)$$

in quanto  $X/H$  e  $Y/(4H)$  sono i numeri di atomi di idrogeno ed elio (neutri e ionizzati) per unità di massa. Ne segue che il numero di elettroni  $E$  per atomo è dato da

$$E = \left[ X x_H^1 + \frac{1}{4} Y (x_{He}^1 + 2x_{He}^2) \right] \mu_i \quad (11.36)$$

Abbiamo ora tre equazioni di Saha

$$\frac{x_H^1}{x_H^0} \frac{E}{E+1} = K_H^0, \quad \frac{x_{He}^1}{x_{He}^0} \frac{E}{E+1} = K_{He}^0, \quad \frac{x_{He}^2}{x_{He}^1} \frac{E}{E+1} = K_{He}^1 \quad (11.37)$$

con

$$K_i^r = \frac{u_{r+1}}{u_r} \frac{2}{P_g} (2\pi m_e)^{3/2} (kT)^{5/2} e^{-\chi_i^r/kT} \quad (11.38)$$

dove per definizione

$$x_H^0 + x_H^1 = 1 \quad x_{He}^0 + x_{He}^1 + x_{He}^2 = 1 \quad (11.39)$$

Supponiamo ora che  $X$ ,  $Y$ ,  $P_g$  e  $T$  siano dati e risolviamo il sistema di equazioni (11.36, 11.37, 11.39) nelle incognite  $x_H^0$ ,  $x_H^1$ ,  $x_{He}^0$ ,  $x_{He}^1$ ,  $x_{He}^2$  e  $E$ . Le equazioni sono accoppiate fra loro tramite  $E$  il che significa che il grado di ionizzazione dell'idrogeno dipende da quello dell'elio. Questo fatto si comprende facilmente ricordando che elettroni che si ricombinano con l'idrogeno possono essere stati emessi dall'elio. Soluzione analitica del sistema non è possibile e si deve ricorrere a metodi numerici (iterazioni su  $E$ ). Il problema è facilitato dal fatto che quando incomincia la ionizzazione dell'elio quella dell'idrogeno è quasi completa. Lo stesso per l'elio una volta e due volte ionizzato. In Figura 11.1 viene mostrato il grado di ionizzazione dell'idrogeno ed elio nonché il loro effetto su  $\nabla_a$  in funzione della pressione.

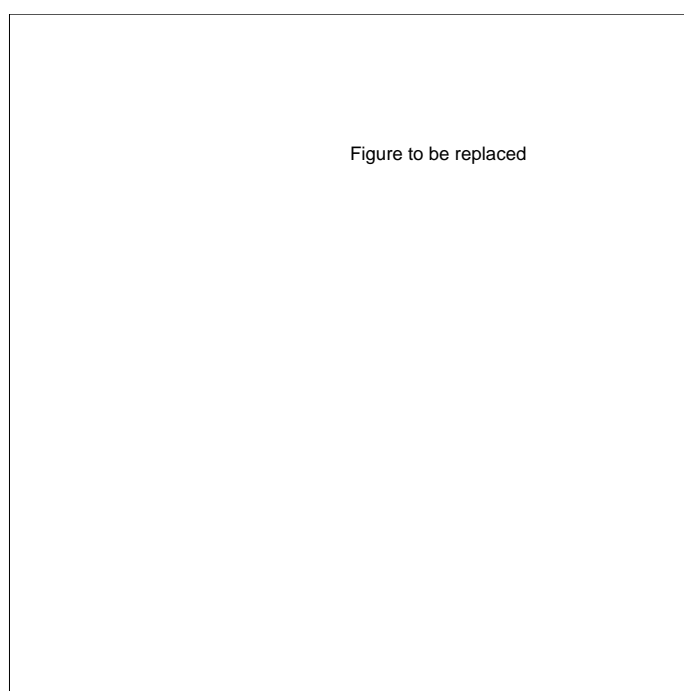


Figura 11.1: Ionizzazione dell'idrogeno ed elio negli strati esterni del Sole (A).  
Effetto su  $\nabla_a$  (B)



## Capitolo 12

# TRASPORTO DELL'ENERGIA

Nelle stelle il calore viene trasportato dalle regioni più calde a quelle più fredde mediante vari meccanismi: 1) trasporto per radiazione; 2) trasporto per convezione; 3) trasporto per conduzione. Il fluire dell'energia è essenzialmente dettato dal gradiente di temperatura, che per quanto piccolo (circa  $10^{-4}$  gradi  $\text{cm}^{-1}$ ) è tuttavia sufficiente.

In ognuno dei processi ricordati è necessario stabilire un legame fra il flusso locale di energia, definito come l'energia fluente per  $\text{cm}^2$  per sec alla distanza  $r$ , ed il gradiente locale di temperatura  $dT/dr$ .

A questi meccanismi se ne aggiunge un quarto dalle caratteristiche particolari e cioè l'emissione e perdita di energia per neutrini. Si vedrà che i neutrini hanno una piccolissima capacità di interagire con la materia (piccola sezione d'urto) al punto tale che una volta prodotti essi sfuggono dalla stella. La produzione di neutrini rappresenta dunque una perdita netta di energia ed indirettamente un meccanismo di trasporto della stessa di cui si deve tener conto. Questo comportamento dei neutrini è tipico di tutte le fasi cosiddette normali della evoluzione stellare. Ciò non sarà più vero solamente nei nuclei delle stelle massicce durante le fasi finali di collasso per i quali deve essere sviluppata una adeguata teoria del trasporto dei neutrini.

### 12.1 Trasporto Radiativo ed Opacità

Il trasporto di energia per radiazione dipende dall'emissione di fotoni in regioni relativamente più calde e dall'assorbimento di questi nelle regioni relativamente

più fredde. È opportuno definire un coefficiente di assorbimento di massa  $\kappa$  nel modo seguente: quando radiazione di intensità  $I$  fluisce attraverso uno strato di materia di densità  $\rho$  e spessore  $dx$ , l'intensità della radiazione viene diminuita della quantità  $\kappa\rho I dx$ . Il cammino libero medio di un fotone prima di essere assorbito è dunque  $1/(\kappa\rho)$ , che nelle tipiche condizioni fisiche degli interni stellari è dell'ordine di 1 cm o meno. Pertanto atteso il piccolo gradiente di temperatura, un fotone è emesso ed assorbito praticamente alla stessa temperatura. Inoltre un osservatore che misuri la radiazione ad un dato punto della stella vedrà una temperatura nella direzione verso l'esterno lievemente superiore a quella verso l'interno. Poichè la radiazione nell'interno di una stella è quasi identica a quella del corpo nero, l'osservatore misurerà un flusso netto dato da

$$\sigma \left[ (T + dT)^4 - T^4 \right] = 4\sigma T^3 dT \quad (12.1)$$

dove  $dT$  è la differenza locale in temperatura fra flusso uscente e flusso entrante. Introducendo il gradiente di temperatura  $dT/dx$  o  $dT/dr$  in simmetria sferica si ha

$$F_r = -4\sigma T^3 \left( \frac{dT}{dr} \right) dr \quad (12.2)$$

Sostituendo  $dr = 1/(\kappa\rho)$  si ottiene

$$F_r = -\frac{4\sigma T^3}{\kappa\rho} \left( \frac{dT}{dr} \right) \quad (12.3)$$

La trattazione rigorosa del problema presentata più avanti porta alla seguente relazione

$$F_r = -\frac{4acT^3}{3\kappa\rho} \left( \frac{dT}{dr} \right) \quad (12.4)$$

dove  $c$  è la velocità della luce e  $a$  la costante di densità di energia. Essa differisce dalla precedente solo per un fattore numerico. Questa relazione, nota come approssimazione diffusiva del trasporto radiativo, è valida nelle regioni stellari dove il cammino libero medio dei fotoni è piccolo rispetto alla distanza tipica delle variazioni di temperatura. Ad esclusione degli strati molto esterni di una stella dove è necessaria una diversa trattazione, questa condizione è sempre verificata. Il trasporto radiativo può essere visto come un processo di diffusione dei fotoni

in quanto essi sono assorbiti quasi subito dopo essere stati emessi. È immediato comprendere che un numero enorme di atti di assorbimento, riemissione e scattering sono necessari per trasferire l'energia elettromagnetica dal centro alla superficie con continuo degrado della distribuzione planckiana delle energie dei fotoni dal dominio dei  $\gamma$  deboli nel centro alle regioni dell'ultravioletto ed ottico alla superficie a seconda della temperatura superficiale della stella. Il tempo richiesto alla radiazione per diffondere dal centro alla superficie è dell'ordine di  $10^5$  anni. Il trasporto radiativo è essenzialmente controllato dal coefficiente di assorbimento di massa  $\kappa$  altresì noto come opacità. Numerosi processi atomici contribuiscono alla costruzione dell'opacità del materiale stellare. Partendo dalle regioni di temperatura più elevata e procedendo verso l'esterno, i principali meccanismi sono:

- 1) Scattering da parte di elettroni, noto come scattering Thomson, in cui un fotone subisce un cambio di direzione ma non di frequenza dopo aver interagito con un elettrone libero.
- 2) Assorbimento free-free in cui un fotone è assorbito da un elettrone in vicinanza di un nucleo con il risultato che l'elettrone aumenta la sua energia cinetica.
- 3) Assorbimento bound-free da parte di ioni pesanti (metalli), detto anche fotoionizzazione, in cui un fotone è assorbito da un atomo (ione) di un elemento pesante ed uno degli elettroni è rimosso.
- 4) Assorbimento bound-bound da parte di un atomo (ione) di elementi pesanti, in cui un fotone determina il passaggio di un elettrone legato da un livello energetico più basso ad uno più elevato.
- 5) Assorbimento bound-free da parte di H e He, che di solito avviene in prossimità della superficie dove questi elementi vengono ionizzati.
- 6) Assorbimento bound-free e free-free da parte dello ione  $H^-$  il quale si forma nelle regioni dove l'idrogeno incomincia ad essere ionizzato.
- 7) Assorbimenti bound-bound da parte di molecole che avvengono nelle atmosfere delle stelle più fredde e nelle protostelle (basse densità e basse temperature).
- 8) Assorbimento da parte di grani di polvere, il quale può avvenire nelle fasi di protostella quando le temperature sono inferiori al valore di evaporazione dei grani (1400-1800 °K).

L'opacità totale del materiale è data dalla somma delle opacità dovute ai singoli

processi elencati in precedenza corretta ove necessario per l'effetto dell'emissione indotta. Infatti è noto che un sistema atomico immerso in un campo di radiazione di frequenza  $\nu$  è stimolato ad emettere fotoni della stessa frequenza. Infine nel formulare la relazione per il trasporto radiativo si è implicitamente assunto che il cammino libero medio e quindi l'opacità non dipendano dalla frequenza dei fotoni, il che non è vero ad esclusione dello scattering Thomson. Al contrario, il coefficiente di assorbimento di massa relativo ad ogni processo è una funzione delle frequenza  $\nu$  dei fotoni. Limitando la discussione a pochi processi fondamentali (bound-bound, bound-free, free-free e scattering elettronico), il coefficiente di assorbimento di massa totale è dato da

$$\kappa_T(\nu) = [\kappa_{bb}(\nu) + \kappa_{bf}(\nu) + \kappa_{ff}(\nu)] [1 - \exp(-h\nu/kT)] + \kappa_s \quad (12.5)$$

dove il termine  $1 - \exp(-h\nu/kT)$  rappresenta l'effetto di emissione indotta. Atteso che il gradiente locale di temperatura è estremamente piccolo, che localmente possono essere verificate le condizioni di quasi equilibrio termodinamico e che il campo di radiazione obbedisce alla legge di Planck per il valore locale della temperatura, l'opacità totale mediata su tutte le frequenze è data dalla seguente espressione

$$\frac{1}{\kappa} = \frac{\int_0^\infty \frac{1}{\kappa_T(\nu)} \frac{dB(\nu, T)}{d\nu} d\nu}{\int_0^\infty \frac{dB(\nu, T)}{d\nu} d\nu} \quad (12.6)$$

dove  $B(\nu, T)$  è la funzione di Planck del campo di radiazione. La funzione  $\kappa$  data dalla relazione (12.6) prende il nome di opacità media di Rosseland o semplicemente opacità e sostituisce la  $\kappa$  nella relazione (12.4) per il flusso radiativo. Non tutti i processi sono egualmente importanti al variare della temperatura e densità. In Figura 12.1 vengono indicate le regioni dove sono dominanti alcuni dei processi discussi in precedenza. La demarcazione tra i vari domini viene ottenuta calcolando le medie di Rosseland dei singoli processi separatamente. Nel caso dello scattering elettronico Thomson, l'opacità è particolarmente semplice atteso che il coefficiente di assorbimento di massa non dipende dalla frequenza. L'opacità è  $\kappa = 0.2(1 + X)$ , dove  $X$  è l'abbondanza in massa di H. Nelle stelle tale opacità è importante alle temperature sopra  $10^8$  °K a meno che la densità sia bassa. Le medie di Rosseland del bound-free e free-free hanno dipendenze

approssimate del tipo  $\kappa = \kappa_0 \rho T^{-3.5}$  (dette anche leggi di Kramers). Muovendo verso l'esterno delle stelle a valori di  $T$  inferiori, il numero di elettroni legati per atomo aumenta e in corrispondenza cresce l'opacità. Un massimo in  $\kappa$  viene raggiunto a  $T = 3 \div 5 \times 10^5 \text{ }^\circ K$  dove H e He, gli elementi dominanti in abbondanza, subiscono la ionizzazione. A temperature inferiori, l'opacità diminuisce in modo considerevole. Nell'intervallo di temperatura da 3000 a 10000  $^\circ K$ , l'opacità può essere approssimata dalla legge  $\kappa = \kappa_0 \rho T^{10}$ , scendendo al valore minimo di  $10^{-2} \text{ cm}^2 \text{ g}^{-1}$  a  $T = 2000 \text{ }^\circ K$ . Infine a temperature ancora inferiori, dove esistono i grani, l'opacità aumenta ancora al valore di  $1 \text{ cm}^2 \text{ g}^{-1}$ . Il calcolo dettagliato dell'opacità in uso in astrofisica stellare è molto più complesso di quanto esposto sopra e porta alla compilazione di estese tabulazioni al variare della temperatura e densità per varie miscele chimiche. In conclusione l'equazione che regola la luminosità in presenza di solo trasporto radiativo è

$$L(r) = -\left(\frac{16\pi a c r^2 T^3}{3\kappa\rho}\right)\left(\frac{dT}{dr}\right) \quad (12.7)$$

la quale costituisce la quarta equazione fondamentale della struttura stellare.

## 12.2 Trasporto Convettivo

La relazione del trasporto radiativo ha un duplice significato: da una parte assegnato il gradiente di temperatura essa fissa il flusso trasportabile dalla radiazione, dall'altra dato un certo flusso di energia essa determina il gradiente di temperatura necessario in assenza di altri meccanismi di trasporto. Sotto opportune condizioni, questo gradiente diventa instabile dando luogo al nascere della convezione. Ciò può essere compreso in maniera semplice. Si supponga che a causa di una variazione infinitesima negativa della densità un piccolo elemento di materia venga spostato verso l'alto dalla sua posizione di equilibrio muovendosi sempre in equilibrio di pressione con il mezzo circostante. Se il materiale obbedisce all'equazione di stato di un gas ideale, uno spostamento verso l'alto, a densità del mezzo minori, implica una temperatura in eccesso rispetto a quella del mezzo circostante. Se durante il moto, la densità dell'elemento decresce più rapidamente di quella del mezzo, l'elemento continuerà a sentire la spinta di galleggiamento e quindi continuerà a salire. In questo caso lo strato in esame è instabile alla convezione ed il calore è trasportato verso l'esterno

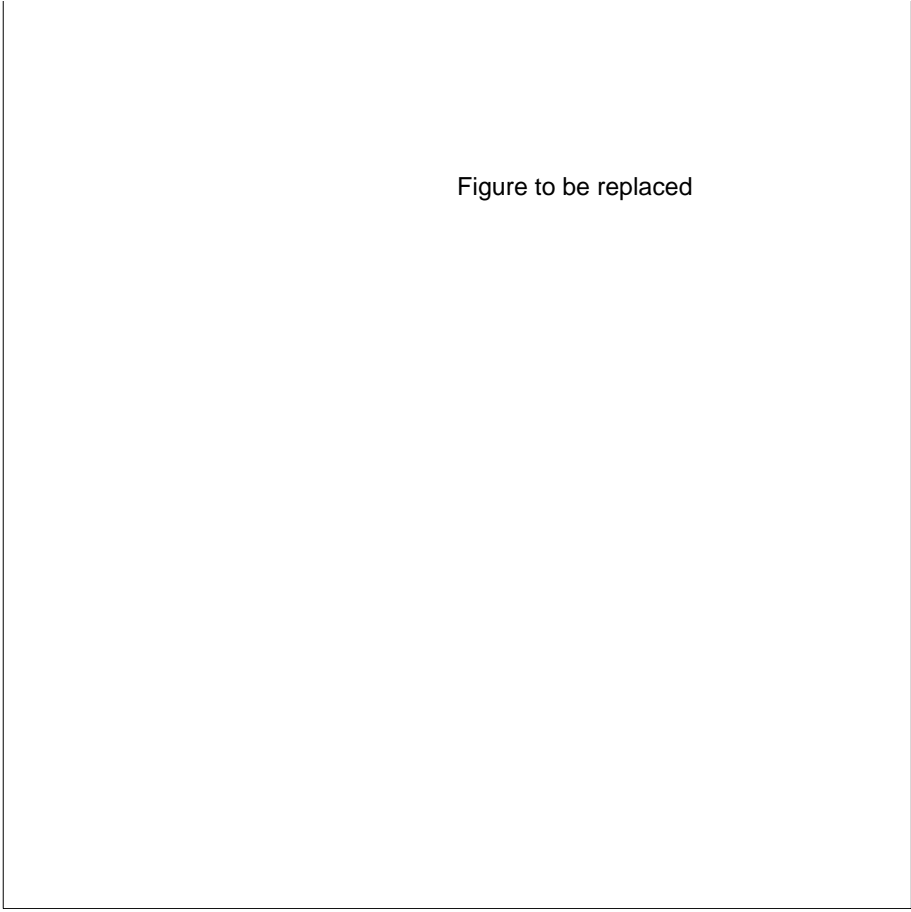


Figure to be replaced

Figura 12.1: Sorgenti di opacità nel piano densità temperatura

dagli elementi di materia in moto. Se invece, la densità dell'elemento in salita decresce meno rapidamente di quella del mezzo circostante, non c'è spinta di galleggiamento e lo strato in esame è stabile alla convezione. Se il mezzo è omogeneo, la condizione per l'instaurarsi della convezione può essere espressa dal confronto del gradiente di temperatura radiativo con il gradiente di temperatura adiabatico (determinabile a priori date le condizioni fisiche del mezzo). Si ha convezione se il gradiente di temperatura radiativo è più ripido di quello adiabatico

$$\left| \frac{dT}{dr} \right| = \frac{3\kappa\rho F_r}{4acT^3} > \left| \frac{dT}{dr} \right|_A \quad (12.8)$$

Una condizione simile può essere derivata anche nel caso di mezzo non omogeneo. Esaminando la relazione (12.8) si nota che uno strato con elevata opacità tende ad essere instabile alla convezione e similmente uno strato con elevata produzione di energia nucleare e/o gravitazionale. Quest'ultima situazione è tipica dei nuclei delle stelle più massicce del Sole dove l'energia nucleare è prodotta dal ciclo *CNO*. La prima situazione invece è tipica degli esterni stellari dove l'opacità è grande a causa della ionizzazione degli elementi. La convezione implica la presenza di moti turbolenti su scale di ogni dimensione. L'esistenza di regioni convettive negli interni stellari ha un ruolo importante nel determinarne la struttura in quanto, dato il rapido moto degli elementi convettivi, queste regioni risultano essere ben mescolate ed omogenee ad ogni istante. Inoltre in presenza di reazioni nucleari, la convezione continuamente rifornisce di materiale non processato nuclearmente le regioni di combustione prolungando la durata delle fasi dominate dalla generazione di energia nucleare. La convezione è anche importante dal punto di vista del trasporto dell'energia che viene effettuato soprattutto dagli elementi di dimensioni maggiori. A tutt'oggi non esiste una teoria completamente soddisfacente del trasporto di energia per convezione e si ricorre ad una formulazione semplice basata sul concetto di lunghezza di mescolamento (mixing length). Si assume che un elemento convettivo si formi con dimensioni pari ad una lunghezza caratteristica, detta di mescolamento, si sposti della stessa quantità ed infine si dissolva rilasciando il suo eccesso di energia al mezzo circostante. La lunghezza di mescolamento è posta uguale a  $\alpha H_p$ , dove  $\alpha$  è un parametro e  $H_p$  è la distanza sopra la quale la pressione varia di

un fattore  $e$ . Con l'aiuto di questa teoria si possono conoscere la velocità medie degli elementi convettivi, il loro eccesso di energia termica e il flusso convettivo (energia fluente per  $cm^2$  per sec alla distanza  $r$  dal centro).

### 12.2.1 Teoria della Mixing Length: versione semplice

Assumiamo che la convezione sia descrivibile dallo spostamento di elementi di materia che partendo dalla posizione di equilibrio, percorrano in *maniera adiabatica* una certa distanza  $\Lambda$  per cedere infine il loro eccesso di contenuto calorico all'ambiente circostante. L'eccesso di calore è dovuto al loro eccesso di temperatura. Per semplicità supponiamo che tutti gli elementi abbiano le stesse dimensioni e che queste siano pari al tragitto percorso.

Se  $dT/dr$  è il gradiente di temperatura del mezzo entro il quale si muove l'elemento convettivo, la differenza di temperatura  $\Delta T = \alpha H_p$  al termine del percorso è

$$\Delta T = \left[ \left( \frac{dT}{dr} \right)_A - \left( \frac{dT}{dr} \right) \right] \Lambda \quad (12.9)$$

ed il flusso convettivo  $F_c$  è espresso da

$$F_c = \left( \frac{1}{2} \right) c_p \rho v \Lambda \left[ \left( \frac{dT}{dr} \right)_A - \left( \frac{dT}{dr} \right) \right] \quad (12.10)$$

dove  $c_p$  è il calore specifico a pressione costante (in quanto il moto dell'elemento è supposto avvenire in equilibrio di pressione col mezzo circostante),  $v$  è la velocità degli elementi convettivi ed il fattore  $(1/2)$  tiene conto che il numero di elementi convettivi in salita è bilanciato da un pari numero in discesa.

L'esistenza di un gradiente di temperatura implica un certo flusso radiativo  $F_r$ . La somma  $F_c + F_r$  è uguale al flusso totale  $F$  che in assenza di sorgenti di energia nucleare e gravitazionale (come avviene negli strati esterni a causa della bassa temperatura la prima, a causa della bassa densità la seconda) è uguale alla luminosità totale della stella divisa la superficie

$$F = F_c + F_r = \frac{L}{4\pi r^2} = \sigma T_{eff}^4 \quad (12.11)$$

Introducendo i gradienti logaritmici di temperatura  $\nabla = d \ln T / d \ln P$ , si ha

$$F_r = - \left( \frac{4ac}{3} \right) \left( \frac{T^4}{P \kappa \rho} \right) \frac{dP}{dr} \nabla \quad (12.12)$$



$$F_c = \left(\frac{1}{2}\right)c_p\rho v\Lambda\left(\frac{T}{P}\right)\frac{dP}{dr}(\nabla_{ad} - \nabla) \quad (12.13)$$

$$F_c = F\left(1 - \frac{\nabla}{\nabla_R}\right) \quad (12.14)$$

dove  $\nabla_R$  il gradiente fittizio che esisterebbe se tutto il flusso di energia fosse trasportato dalla radiazione. Da queste relazioni può essere ricavato  $\nabla$

$$\nabla = \frac{\left[\sigma T^4 - \left(\frac{1}{2}\right)c_p\rho v\Lambda\left(\frac{T}{P}\right)\frac{dP}{dr}\nabla_A\right]}{\left[-\left(\frac{4ac}{3}\right)\left(\frac{T^4}{P\kappa\rho}\right)\frac{dP}{dr} - \left(\frac{1}{2}\right)c_p\rho v\Lambda\left(\frac{T}{P}\right)\frac{dP}{dr}\right]} \quad (12.15)$$

Il gradiente di temperatura convettivo dipende dunque dalla velocità  $v$ . Per  $v \rightarrow 0$  il trasporto convettivo è inibito e  $\nabla \rightarrow \nabla_R$  (gradiente dovuto al solo trasporto radiativo), mentre per  $v \rightarrow \infty$   $\nabla \rightarrow \nabla_A$ .

Per valutare la velocità degli elementi convettivi si fa ricorso al principio di Archimede. La forza netta agente sull'elemento di materia (forza gravitazionale meno la spinta archimedeana) è

$$F = -g\Delta\rho V \quad (12.16)$$

dove  $\Delta\rho$  è l'eccesso di densità e  $V$  il volume dell'elemento convettivo,  $g$  il valore locale della gravità. La variazione in densità può essere legata alla variazione in temperatura mediante l'equazione di stato ricordando che il moto avviene a pressione costante e trascurando variazioni in peso molecolare. Ne segue che

$$\Delta\rho = -\rho\frac{\Delta T}{T} \quad (12.17)$$

dove  $\Delta T = \left[\left(\frac{dT}{dr}\right)_A - \left(\frac{dT}{dr}\right)\right]dx$  con  $0 < dx < \Lambda$ . L'energia cinetica acquistata dall'elemento è pari al lavoro fatto dalla forza netta agente sull'elemento (trascurando gli effetti della viscosità del mezzo)

$$\left(\frac{1}{2}\right)mv^2(\Lambda) = -\int_0^\Lambda g\Delta\rho V dx = mg\int_0^\Lambda \left(\frac{\Delta T}{T}\right)dx \quad (12.18)$$

dove  $\rho V = m$  massa dell'elemento. Esprimo ora  $\Delta T$  mediante la relazione (12.9) si ottiene

$$\left(\frac{1}{2}\right)v^2 = -\frac{g}{T}\left[\left(\frac{dT}{dr}\right)_A - \left(\frac{dT}{dr}\right)\right]\frac{\Lambda^2}{2} \quad (12.19)$$

da cui facendo uso della equazione di stato per gas ideale ed operando opportune medie per la velocità  $v$  lungo il tragitto si ottiene

$$v = g\Lambda \left[ \left( \frac{\mu H}{8KT} \right) (\nabla - \nabla_A) \right]^{1/2} \quad (12.20)$$

relazione che assieme a quella per  $\nabla$  fornisce un sistema di equazioni che consente di ottenere  $v$  e  $\nabla$ .

La teoria della mixing length permette di ricavare il gradiente di temperatura valido nelle regioni convettive. Tuttavia essa è indispensabile solamente nelle regioni convettive esterne, mentre si può dimostrare che nelle regioni interne è pienamente sufficiente assumere che il gradiente di temperatura sia uguale a quello adiabatico. Infatti si dimostra che l'eccesso del gradiente di temperatura rispetto a quello adiabatico

$$\Delta \left| \left( \frac{dT}{dr} \right) - \left( \frac{dT}{dr} \right)_A \right| \simeq 10^{-8} \left| \left( \frac{dT}{dr} \right)_A \right| \quad (12.21)$$

Ciò è dovuto alla grande efficienza  $\Gamma$  della convezione in queste regioni, la quale assicura che sotto un gradiente  $(dT/dr)$  lievemente maggiore di  $(dT/dr)_A$  un flusso qualunque di energia possa essere trasportato dalla convezione.

L'efficienza della convezione viene misurata dal rapporto

$$\Gamma = \frac{\text{Eccesso di contenuto calorico dell'elemento}}{\text{Energia irradiata durante il moto}} \quad (12.22)$$

ovvero

$$\Gamma = \frac{3}{4ac} \frac{c_p \kappa \rho^2 v}{T^3} \frac{V}{A} \quad (12.23)$$

dove  $V$  è il volume ed  $A$  la superficie dell'elemento (per un ideale *elemento* sferico di raggio  $\Lambda$ ,  $V/A = \Lambda/6$ ).

In conclusione la teoria della mixing length è indispensabile nella trattazione delle convezione in regioni superficiali, mentre nelle regioni convettive interne basta dunque porre

$$dT/dr = dT/dr_A \quad (12.24)$$

Questa equazione costituisce una relazione di struttura e sostituisce l'equazione (12.4) del trasporto radiativo nelle regioni interne dove è attiva la convezione.

Il gradiente di temperatura è pertanto fissato dalla equazione

$$\frac{dT}{dr} = \frac{\Gamma_2 - 1}{\Gamma_2} \frac{T}{P} \frac{dP}{dr} \quad (12.25)$$

dove si è esplicitata la definizione di gradiente adiabatico. È facile verificare che l'equazione (12.25) è equivalente ad assumere in una regione convettiva l'entropia  $S$  si mantenga costante. Essa può pertanto essere sostituita da

$$\frac{dS}{dr} = 0 \quad (12.26)$$

Le incertezze relative alla teoria della mixing length si riflettono solamente nelle regioni esterne dove il gradiente di temperatura è significativamente maggiore del gradiente adiabatico. Nella Tabella 6.1 sono riportati gli ordini di grandezza attesi per alcune grandezze caratteristiche della convezione nelle regioni interne ed esterne delle stelle. In particolare sono indicati i valori per gli eccessi di gradiente e di temperatura, il rapporto della velocità convettiva alla velocità del suono, la velocità convettiva, il tempo di vita medio degli elementi convettivi e l'efficienza della convezione.

Rimane ora da fissare la dimensione-percorso  $\Lambda$  degli elementi che sono stati supposti essere proporzionale all'altezza di scala della pressione

$$\Lambda = \alpha H_p \quad (12.27)$$

L'altezza di scala  $H_p$  è subito determinabile dalla equazione di equilibrio idrostatico. Si trova

$$H_p = -\frac{dr}{d \ln P} = \frac{P}{\rho g} \quad (12.28)$$

Il parametro  $\alpha$  viene calibrato confrontando le dimensioni degli elementi previste dalla teoria con quelle della granulazione (evidenza di convezione) osservata sulla superficie del Sole. Modelli teorici del Sole devono riprodurre i valori osservati di  $L_\odot$  e di  $R_\odot$ . In questo modo si ottiene che  $\alpha$  è compreso fra 1 e 2. Uno studio accurato del problema indica che il valore  $\alpha = 1.5$  è una corretta assunzione. Infine è doveroso ricordare che la teoria della mixing length è applicabile fintanto che le velocità convettive sono inferiori alla velocità locale del suono in quanto si è richiesto che il moto degli elementi convettivi avvenga in condizioni di uguaglianza di pressione con il mezzo circostante.

Tabella 12.1: Grandezze Fondamentali della Convezione.

Grandezza	Interno		Esterno	
$\Delta \nabla T$	$10^{-12} — 10^{-10}$	K/cm	$10^{-5} — 10^{-4}$	K/cm
$\Delta T = \Lambda \Delta \nabla T$	$10^{-2} — 1$	K	$10^2 — 10^3$	K
$\frac{v}{v_s}$	$10^{-6} — 10^{-4}$		$10^{-1} — 1$	
$v$	$1 — 10^2$	m/s	$0.5 — 15$	km/s
$t = \Lambda/v$	$1 — 10^2$	giorni	$1 — 10^2$	min
$\Gamma$	$10^6 — 10^9$		$10^{-4} — 10^2$	

### 12.3 Trasporto Conduttivo

In generale il trasporto dell'energia per conduzione da parte di ioni non è efficiente quanto quelli radiativo e convettivo cosicchè esso può essere trascurato. Ciò è dovuto al fatto che in genere la densità è sufficientemente elevata da rendere il cammino libero medio di queste particelle piccolo rispetto a quello fotoni. Tuttavia ciò non è vero in un gas di elettroni degeneri (caso tipico dei nuclei delle nane bianche e delle stelle giganti rosse) dovuto al comportamento collettivo degli stessi che li rende buoni conduttori di calore. Infatti, poichè a causa della degenerazione elettronica la maggior parte degli stati di minore momento sono occupati, gli elettroni sono forzati a stati di momento via via crescenti, il che rende il cammino libero medio degli stessi molto lungo. Il flusso di energia associato alla conduzione è posto proporzionale al gradiente di temperatura  $F_{con} = -\Lambda \frac{dT}{dr}$  dove  $\Lambda$  è ottenuta da una complicata teoria che coinvolge la velocità, la sezione d'urto di collisione, il cammino libero medio e l'energia trasportata dagli elettroni degeneri. In analogia con il trasporto radiativo, si definisce il coefficiente di conduzione  $\kappa_c$  mediante la relazione

$$F_{cond} = -\Lambda \frac{dT}{dr} \quad (12.29)$$

dove  $\Lambda$  è determinato dalla teoria dei gas degeneri. È utile definire una opacità  $\kappa_c$  conduttiva tramite la relazione

$$\Lambda = \frac{4acT^3}{3\kappa_c\rho} \quad (12.30)$$

per cui si può scrivere

$$F_{cond} = -\frac{4acT^3}{3\kappa_c\rho} \frac{dT}{dr} \quad (12.31)$$

In generale quando la conduzione diventa importante si usa definire un flusso complessivo radiativo più conduttivo

$$F = F_r + F_{con} = -\frac{4ac}{3} \frac{\kappa}{\rho} T^3 \left( \frac{dT}{dr} \right) \quad (12.32)$$

dove  $\kappa = 1/\kappa_r + 1/\kappa_c$  con ovvio significato di  $\kappa_r$ .

## 12.4 Neutrini

I neutrini prodotti dalle reazioni nucleari, dai processi URCA e da quelli legati all'interazione universale di Fermi hanno scarsissima probabilità di essere assorbiti dalla materia all'interno delle stelle in cui sono generati. Alla densità di  $1 \text{ gr cm}^{-3}$  il cammino libero medio è dell'ordine di  $10^{20} \text{ cm}$  ovvero 30 pc. Solamente nei nuclei molto densi delle stelle evolute, quando la densità è dell'ordine di  $10^{10} \text{ g cm}^{-3}$  o più, il cammino libero medio diventa confrontabile o minore del raggio stellare. Pertanto nella maggior parte dei casi, il trasporto di energia per neutrini può essere ignorato e risolto sottraendo la parte di energia in neutrini alla produzione di energia per reazioni nucleari e contrazione gravitazionale.



## Capitolo 13

# TEORIA DEL TRASPORTO RADIATIVO

### 13.1 Teoria elementare del trasporto radiativo

In quanto segue daremo una versione semplificata della teoria del trasporto radiativo. Descriviamo il campo di radiazione mediante una funzione  $I(r, \theta)$ , che è definita come l'intensità (in ergs per centimetro quadrato per secondo per unità di angolo solido) della radiazione alla distanza  $r$  dal centro lungo la direzione inclinata dell'angolo  $\theta$  rispetto al raggio vettore.

Sia  $U(r, \theta)d\omega$  la densità di energia della radiazione fluente lungo la direzione  $\theta$  dentro l'angolo solido  $d\omega$ . Chiaramente il flusso  $I(r, \theta)d\omega$  che attraversa l'unità di area nell'unità di tempo è dato da

$$I(r, \theta)d\omega = cU(r, \theta)d\omega \quad (13.1)$$

dove  $c$  è la velocità della luce. Essendo la densità totale di energia data da

$$u(r) = \int_0^{4\pi} U(r, \theta)d\omega \quad (13.2)$$

avremo che

$$u = \left(\frac{1}{c}\right) \int_0^{4\pi} I(r, \theta)d\omega = \left(\frac{1}{c}\right) \int_0^\pi I(r, \theta)2\pi \sin\theta d\theta \quad (13.3)$$

in quanto  $I$  non dipende dall'angolo  $\phi$  del sistema di coordinate polari usato. Poichè il flusso attraverso una superficie unitaria perpendicolare a  $r$  è proprio  $I(r, \theta)\cos\theta$ , avremo

$$H = \int_0^{4\pi} I(r, \theta)\cos\theta d\omega = \int_0^\pi 2\pi I(r, \theta)\cos\theta \sin\theta d\theta \quad (13.4)$$

Se la radiazione è isotropa e  $I(r, \theta)$  indipendente da  $\theta$ , allora  $H = 0$ . Dalle relazioni fra energia e momento valide per un fotone  $E = h\nu$ ,  $p = h\nu/c$ , si vede che al flusso di radiazione  $I(r, \theta)$  corrisponde un flusso di momento  $I(r, \theta)/c$ . La pressione di radiazione risultante nella direzione radiale è data da

$$P_r = \left(\frac{1}{c}\right) \int_0^{4\pi} I(r, \theta) \cos\theta \cos\theta d\omega = \left(\frac{2\pi}{c}\right) \int_0^\pi I(r, \theta) \cos^2\theta \sin\theta d\theta \quad (13.5)$$

Atteso il piccolo gradiente di temperatura esistente nell'interno di una stella, il campo di radiazione è quasi isotropo per cui possiamo sviluppare il flusso di energia  $I(r, \theta)$  in serie di potenze di  $\cos\theta$

$$I = I_0 + I_1 \cos\theta + I_2 \cos^2\theta + \dots \quad (13.6)$$

dove  $I_0$  rappresenta la parte isotropa del campo di radiazione ed  $I_1$  l'anisotropia corrispondente ad un flusso di energia lungo la direzione  $r$ . Arrestando lo sviluppo al secondo termine, in quanto si troverà che  $I_1 \ll I_0$ , è facile vedere che si ottengono le relazioni seguenti

$$u(r) = \frac{4\pi}{c} I_0 \quad (13.7)$$

$$H(r) = \frac{4\pi}{3} I_1 \quad (13.8)$$

$$P_r(r) = \frac{4\pi}{3c} I_0 = \frac{1}{3} u(r) \quad (13.9)$$

Calcoliamo ora il flusso di energia uscente da un elemento di area di una superficie sferica

$$j = 2\pi \int_0^{\pi/4} (I_0 + I_1 \cos\theta) \cos\theta \sin\theta d\theta = \pi I_0 + \frac{2\pi}{3} I_1 \simeq \pi I_0 \quad (13.10)$$

Il problema è quello di conoscere  $I_0$  ed  $I_1$ . Questo può essere fatto tramite la soluzione dell'equazione del trasporto che formuleremo avanti e sfruttando il fatto che la radiazione e la materia negli interni stellari sono in condizioni di quasi equilibrio termodinamico. L'intensità di radiazione nella direzione  $\theta$  può essere decomposta in un integrale sulle intensità relative alle frequenze nell'intervallo  $d\nu$ . È necessario considerare ogni frequenza separatamente in quanto la densità numerica dei fotoni, l'energia di ogni fotone e la attenuazione



che la radiazione subisce nell'attraversare uno strato di materia dipendono dalla frequenza. Nell'attraversare uno strato di spessore  $ds$  e densità  $\rho$  la radiazione di intensità specifica  $I_\nu(r, \theta)$  subisce un'attenuazione data da

$$dI_\nu = -\kappa_\nu \rho I_\nu ds \quad (13.11)$$

dove  $\kappa_\nu$  è detto coefficiente di assorbimento di massa. Integrando si ha

$$I_\nu(s) = I_\nu(s_0) \exp\left(-\int_{s_0}^s \kappa_\nu \rho ds'\right) = I_\nu(s_0) \exp(-\tau_\nu) \quad (13.12)$$

avendo posto

$$\tau_\nu = \int_{s_0}^s \kappa_\nu \rho ds' \quad (13.13)$$

detta profondità ottica fra due punti qualunque del mezzo. Se  $\kappa_\nu$  e  $\rho$  sono costanti allora  $\tau_\nu = \kappa_\nu \rho l$  dove  $l$  è la distanza geometrica fra i due punti. La profondità ottica unitaria è definita come quella profondità ottica che riduce l'intensità della radiazione di un fattore  $1/e$ . La quantità  $l = \frac{1}{\rho \kappa_\nu}$  è spesso detta cammino libero medio dei fotoni. Nell'interno delle stelle valori tipici di  $\rho$  e  $\kappa_\nu$  sono  $100 \text{ g/cm}^3$  e  $100 \text{ cm}^2/\text{g}$  per cui  $l = 10^{-4} \text{ cm}$ . I fotoni emessi ad un dato punto vengono anche assorbiti nelle immediate vicinanze. La variazione  $dI_\nu$  può essere dovuta ad assorbimento vero, cioè interazione dei fotoni con la materia ed in cui il fotone è convertito in altre forme di energia, ionizzazione di un atomo etc, oppure può essere diffuso in un'altra direzione e quindi sottratto al fascio di radiazione in esame. Poichè i due fenomeni sono sostanzialmente diversi, introduciamo due coefficienti  $\kappa_{\nu,a}$  e  $\kappa_{\nu,s}$  separati tali che

$$\kappa_\nu = \kappa_{\nu,a} + \kappa_{\nu,s} \quad (13.14)$$

Avremo quindi per l'assorbimento vero

$$dI_\nu = -\kappa_{\nu,a} \rho I_\nu ds \quad (13.15)$$

mentre per la diffusione si ha

$$dI_\nu = -\int_{\omega'} \kappa_{\nu,s} \rho I_\nu p(\cos\theta') ds d\omega' / 4\pi \quad (13.16)$$

Abbiamo introdotto la funzione  $p(\cos\theta')$  detta funzione di fase, che rappresenta la probabilità che un fotone venga diffuso in una direzione  $\theta'$  (non necessariamente il processo di diffusione è isotropo). La funzione di fase è normalizzata ad 1. Può sembrare che la funzione di fase non sia qui necessaria, tuttavia essa sarà utile per calcolare l'energia diffusa nel fascio considerato da parte di altri fasci. La variazione totale per assorbimento è

$$dI_\nu = -(\kappa_{\nu,a} + \kappa_{\nu,s})\rho I_\nu ds \quad (13.17)$$

La radiazione non solo viene assorbita, ma può essere anche emessa. Distingueremo anche in questo caso fra emissione vera e diffusione. Indichiamo con  $J_\nu(\theta)$  il coefficiente di emissione spontaneo per unità di massa per frequenza  $\nu$  nella direzione  $\theta$ . L'intensità specifica lungo la direzione  $\theta$  verrà aumentata di

$$dI_\nu = J_\nu(\theta)\rho ds \quad (13.18)$$

Per calcolare  $J_\nu(\theta)$  possiamo ricordare che ogni piccolo volumetto di materia è in condizioni di quasi equilibrio termodinamico. Infatti il campo di radiazione è quasi isotropo ( $I_1 \ll I_0$ ), il gradiente di temperatura è molto piccolo e così pure il cammino libero medio dei fotoni. Ciò implica che radiazione e materia sono strettamente accoppiate, i fotoni vengono assorbiti quasi alla stessa temperatura di dove vengono emessi, il comportamento termodinamico della materia e radiazione è descritto dalla stessa temperatura. In condizioni di equilibrio termodinamico la radiazione è quella di corpo nero e vale la legge di Kirchhoff per la quale il coefficiente di emissione è legato a quello di assorbimento. Si consideri un volumetto di spessore  $dx$  e base unitaria orientato rispetto alla direzione di  $I_\nu(r, \theta)$  come in Figura 13.1.

La quantità di energia assorbita per unità di tempo è

$$dE_\nu(\theta) = -\kappa_{\nu,a}\rho dl[I_\nu(r, \theta)\cos\theta] = -\kappa_{\nu,a}\rho dx I_\nu(r, \theta) \quad (13.19)$$

L'energia totale si ottiene integrando su tutto l'angolo solido

$$dE_\nu = -\int_0^{4\pi} \kappa_{\nu,a}\rho dx I_\nu(r, \theta) d\omega \quad (13.20)$$

ovvero

$$dE_\nu = -\kappa_{\nu,a}\rho dx c U_\nu \quad (13.21)$$

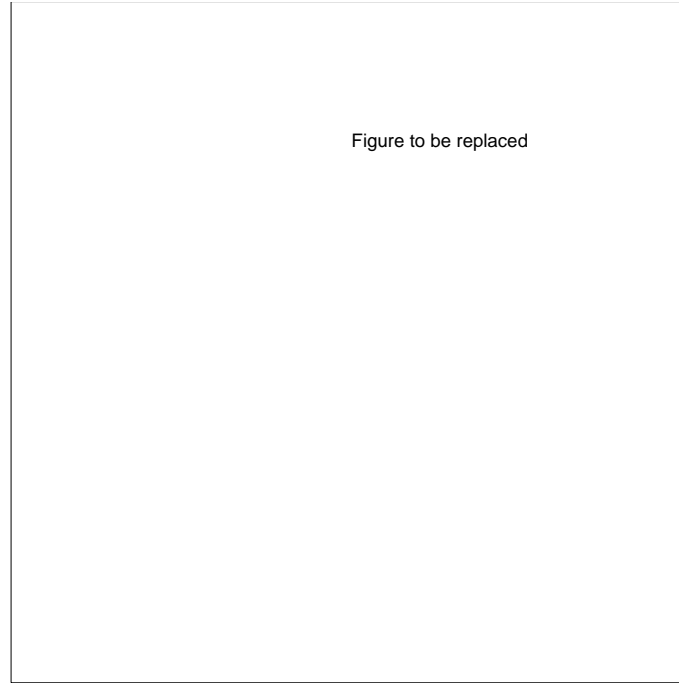


Figura 13.1: Fascio di radiazione

da cui atteso che  $dm = \rho dx$  si ha

$$dE_\nu/dm = -\kappa_{\nu,a}cU_\nu \quad (13.22)$$

ed infine attesa la legge di Kirchoff

$$4\pi J_\nu = \kappa_{\nu,a}cU_\nu \quad (13.23)$$

il fattore  $4\pi$  è dovuto all'integrazione su  $\theta$  essendo l' emissione isotropa in condizioni di equilibrio termodinamico. La quantità  $\frac{cU_\nu}{4\pi}$  è indicata con  $B_\nu(T)$  ed è data dalla legge di Planck. Si ottiene infine

$$J_\nu = \kappa_{\nu,a}B_\nu(T) = \kappa_{\nu,a}\left(\frac{2h\nu^3}{c^2}\right)\frac{1}{[\exp(h\nu/KT) - 1]} \quad (13.24)$$

Sono possibili due tipi di emissione: spontanea ed indotta. L' emissione spontanea si ha per transizione atomica da un livello energetico  $E_i$  ad uno  $E_j$  con emissione di un fotone con energia  $h\nu = E_i - E_j$ . L'emissione indotta si ha quando un atomo si trova in un campo di radiazione il quale stimola l'atomo a decadere emettendo un fotone con frequenza vicina a quella del campo induttore. La relazione che lega la probabilità di emissione spontanea a quella

indotta può essere ottenuta con le seguenti considerazioni. Il rapporto fra le probabilità  $P_i$  e  $P_j$  che un atomo si trovi nei livelli energetici  $E_i$  ed  $E_j$  ( $E_i - E_j = h\nu_{ij}$ ) è grazie alla legge di Boltzmann

$$\frac{P_i}{P_j} = \exp(E_j - E_i)/KT = \exp(-h\nu/KT) \quad (13.25)$$

con  $\nu = \nu_{ij}$ . Se  $U_\nu(T)$  è la densità di energia di un campo di radiazione alla frequenza  $\nu$  e temperatura  $T$ , la probabilità di assorbimento sarà proporzionale a  $P_i$  e  $U_\nu(T)$  mediante una costante  $C$  mentre la probabilità di emissione sarà proporzionale a  $P_j$  ed a  $[A + BU_\nu(T)]$  dove il coefficiente  $A$  si riferisce all'emissione spontanea [non dipende da  $U_\nu(T)$ ] e  $B$  a quella indotta. In condizioni di equilibrio deve essere

$$\frac{P_i}{P_j} = \frac{[A + BU_\nu(T)]}{CU_\nu(T)} = \exp(-h\nu/KT) \quad (13.26)$$

Sostituendo la legge di Planck per la  $U_\nu(T)$  si hanno le condizioni

$$B = C \quad (13.27)$$

$$A = \frac{8\pi h\nu^3 B}{c^3} \quad (13.28)$$

da cui segue che la frazione di emissione spontanea rispetto a quella totale è

$$\frac{Spont}{Tot} = 1 - \exp(-h\nu/KT) \quad (13.29)$$

e di conseguenza la frazione di emissione indotta rispetto a quella totale sarà

$$\frac{Ind}{Tot} = \exp(-h\nu/KT) \quad (13.30)$$

Infine il coefficiente di emissione vera totale è

$$J_{\nu,e} = \kappa_{\nu,a} B_\nu(T) [1 - \exp(-h\nu/KT)] + \kappa_{\nu,a} I_\nu(\theta) \exp(-h\nu/KT) \quad (13.31)$$

Questo non rappresenta ancora il coefficiente di emissione totale in quanto si deve considerare anche la emissione dovuta alla diffusione nel fascio di radiazione considerato di fotoni provenienti da altre direzioni. Possiamo scrivere che l'energia diffusa per unità di angolo solido nella direzione  $\theta, \nu$  da parte di un fascio nella direzione  $\theta', \nu'$  è

$$J_{\nu,s} = \kappa_{\nu,s} \left( \frac{1}{4\pi} \right) \int_0^\pi \int_0^{2\pi} p(\theta, \nu; \theta', \nu') I_\nu(\theta', \nu') \sin\theta' d\theta' d\nu' \quad (13.32)$$

Il coefficiente di emissione totale è

$$J_\nu = J_{\nu,e} + J_{\nu,s} \quad (13.33)$$

Possiamo infine scrivere l'equazione del trasporto dell'energia: si consideri un cilindretto allineato lungo la direzione  $\theta$  rispetto a quella del raggio polare, di lunghezza  $dl$  e di base unitaria, la radiazione uscente dalla base superiore sarà uguale alla somma della radiazione entrante dalla base inferiore, meno quella assorbita, più quella emessa. Tenendo conto che

$$dr = dl \cos\theta \quad (13.34)$$

e ponendo

$$\kappa'_{\nu,a} = \kappa_{\nu,a} [1 - \exp(-h\nu/KT)] \quad (13.35)$$

la conservazione dell'energia si scrive:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\rho} \frac{dI_\nu(r, \theta)}{dr} \cos\theta = \\ -(\kappa'_{\nu,a} + \kappa_{\nu,s}) I_\nu(r, \theta) + \kappa'_{\nu,a} B_\nu(T) + \kappa_{\nu,s} \left( \frac{1}{4\pi} \right) \int_{\omega'} p(\theta, \nu; \theta', \nu') I_\nu(r, \theta', \nu') d\omega' \end{aligned} \quad (13.36)$$

Questa relazione è valida solo per la frequenza  $\nu$ . Per avere il flusso totale di energia si moltiplica per  $\cos\theta$  e si integra su  $\omega'$ . I vari termini sono

$$\frac{1}{\rho} \frac{dI_\nu}{dr} \cos^2\theta d\omega = \frac{c}{\rho} \frac{dP_\nu}{dr} \quad (13.37)$$

$P_\nu$  rappresenta la pressione alla frequenza  $\nu$ . Ancora si ha

$$(\kappa'_{\nu,a} + \kappa_{\nu,s}) I_\nu \cos\theta d\omega = (\kappa'_{\nu,a} + \kappa_{\nu,s}) H_\nu \quad (13.38)$$

ed infine

$$\kappa'_{\nu,a} B_\nu(T) \cos\theta d\omega = 0 \quad (13.39)$$

attesa l'isotropia di  $B_\nu(T)$ . Il calcolo dell'ultimo termine

$$\frac{k_{\nu,s}}{4\pi} \int_{\omega} \int_{\omega'} \cos\theta p(\theta, \nu; \theta', \nu') I_{\nu}(r, \theta', \nu') d\omega d\omega' = 0 \quad (13.40)$$

atteso che la funzione di fase  $p$  è pari e cioè con la stessa probabilità di diffusione per  $\theta$  e  $\pi - \theta$ . Infine si ha la semplice equazione

$$\frac{c}{\rho} \frac{dP_{\nu}}{dr} = -(\kappa'_{\nu,a} + \kappa_{\nu,s}) H_{\nu}(r) \quad (13.41)$$

Integrata su tutte le frequenze essa diventa

$$H = -\frac{c}{\rho} \int_0^{\infty} \frac{1}{(\kappa'_{\nu,a} + \kappa_{\nu,s})} \frac{dP_{\nu}}{dr} d\nu \quad (13.42)$$

Poichè per un campo di radiazione quasi isotropo vale la  $P_r = 1/3u$ , l'equazione diventa

$$H = -\frac{c}{3\rho} \int_0^{\infty} \frac{1}{(\kappa'_{\nu,a} + \kappa_{\nu,s})} \frac{dU_{\nu}}{dr} d\nu \quad (13.43)$$

Nel caso di equilibrio termodinamico la densità di energia dipende solo dalla temperatura, pertanto

$$\frac{dU_{\nu}}{dr} = \frac{dU_{\nu}}{dT} \frac{dT}{dr} \quad (13.44)$$

dove la  $U_{\nu}$  differisce dalla  $B_{\nu}(T)$  solo per un fattore costante. Moltiplicando e dividendo per gli integrali

$$\int_0^{\infty} \frac{dU_{\nu}}{dT} d\nu = \frac{d}{dT} \int_0^{\infty} U_{\nu} d\nu = \frac{dB(T)}{dT} = 4aT^3 \quad (13.45)$$

si ottiene

$$H = -\left(\frac{4ac}{3\rho}\right) T^3 \frac{dT}{dr} \frac{\int_0^{\infty} [\kappa'_{\nu,a} + \kappa_{\nu,s}]^{-1} \frac{dU_{\nu}}{dT} d\nu}{\int_0^{\infty} \frac{dU_{\nu}}{dT} d\nu} \quad (13.46)$$

Infine ponendo

$$\kappa = \frac{\int_0^{\infty} \frac{dU_{\nu}}{dT} d\nu}{\int_0^{\infty} [\kappa'_{\nu,a} + \kappa_{\nu,s}]^{-1} \frac{dU_{\nu}}{dT} d\nu} \quad (13.47)$$

chiamata opacità media di Rosseland, si ha l'equazione finale dove il flusso  $H$  è sostituito dalla luminosità

$$L(r) = -4\pi r^2 \left(\frac{4ac}{3\kappa\rho}\right) T^3 \frac{dT}{dr} \quad (13.48)$$

Questa equazione assieme alla definizione dell'opacità media di Rosseland costituisce una delle equazioni fondamentali della struttura stellare. Si noti come questa equazione possa essere letta nei due sensi: un gradiente di temperatura genera un flusso di energia, ma anche un flusso di energia richiede un gradiente di temperatura.

## 13.2 Opacità della materia stellare

Il calcolo dell'opacità media di Rosseland si basa sulla conoscenza dei coefficienti di assorbimento  $\kappa'_{\nu,a} = k_{\nu,a}[1 - \exp(-h\nu/KT)]$  e  $\kappa_{\nu,s}$ . Il calcolo di queste quantità richiede la conoscenza della struttura atomica del materiale stellare e del modo in cui la materia interagisce con la radiazione. Il calcolo delle opacità è estremamente complesso e per molto tempo lo studio è stato concentrato verso quelle condizioni fisiche ritenute tipiche delle stelle e cioè  $10^4 < T < 30 \times 10^6$  °K e  $\rho < 10^4$  g/cm<sup>3</sup>. A queste temperature la funzione di Planck è centrata nel dominio dei raggi x non particolarmente duri e il materiale è quasi totalmente ionizzato. Gli assorbimenti tipici di queste condizioni sono:

i) assorbimenti veri da parte di atomi e ioni dovuti ai processi di bound-bound (assorbimento di righe); bound-free (transizione da stati legati a stati liberi); free-free (elettroni nel campo coulombiano di nuclei e ioni che assorbono una quantità arbitraria di energia e passano ad altri stati di energia e momento).

ii) Diffusione Thomson (elettroni liberi diffondono fotoni della stessa frequenza). Nelle regioni di bassa temperatura ( $T < 10^4$  °K) possono essere importanti: gli assorbimenti da parte di ioni negativi quando certi tipi di atomi o molecole, acquistando uno o più elettroni, diventano ioni negativi (il più importante in astrofisica è probabilmente lo ione H<sup>-</sup>); assorbimenti molecolari a causa di fotodissociazione o assorbimento di bande; la diffusione di tipo Rayleigh e Raman; l'eccitazione fotonica a stati di autoionizzazione in atomi a molti elettroni.

Nelle regioni di alta temperatura ( $T > 10^9$  °K) sono dominanti i processi di creazione di coppie; la diffusione Compton; l'assorbimento nucleare; la diffusione fotone-fotone; i processi fotoneutrini.

Finalmente a densità molto grandi ( $\rho > 10^4$  g/cm<sup>3</sup>) la conduzione da parte di elettroni degeneri diventa importante.

In tempi recenti lo studio dettagliato dei meccanismi di assorbimento della radi-

azione ha prodotto estese tabulazioni delle opacità in funzione di temperatura, densità e composizione chimica che sono di uso corrente. Nondimeno è interessante illustrare brevemente alcuni dei meccanismi fondamentali e le relative approssimazioni analitiche.

i) **Transizioni bound-free.** Poichè l'idrogeno e l'elio sono completamente ionizzati negli interni stellari, le transizioni bound-free riguardano solo gli elementi pesanti i quali a loro volta sono altamente ionizzati e pertanto possono essere descritti in approssimazione idrogenoide. In questa approssimazione il coefficiente di assorbimento per un elettrone legato in un atomo è dato da

$$a_{bf} = \left( \frac{64\pi^4 m e^{10}}{3\sqrt{3} c h^6} \right) \left( \frac{Z'^4 g}{n^5 \nu^3} \right) \quad (13.49)$$

dove  $Z'$  è la carica effettiva dello ione,  $n$  è il numero quantico principale degli elettroni,  $\nu$  la frequenza della radiazione assorbita e  $g$  è un fattore adimensionale dell'ordine dell'unità che varia lentamente con  $n$  e  $\nu$ . Chiaramente questa relazione vale solo per frequenze per le quali l'energia corrispondente supera l'energia di ionizzazione  $\chi_\nu$

$$h\nu > \chi_n = \frac{2\pi^2 m e^4}{h^2} \frac{Z'^2}{n^2} \quad (13.50)$$

Quindi una transizione bound-free produce un assorbimento continuo che è nullo alle frequenze basse, sale ad un valore massimo alla frequenza di soglia per poi decrescere secondo l'inverso del cubo della frequenza al crescere di questa. Il coefficiente di assorbimento relativo ad uno ione consiste dunque di una serie di continui corrispondenti ai diversi valori del numero quantico  $n$  con contributi importanti solo in corrispondenza dei valori più bassi di  $n$ . Il coefficiente di assorbimento di un dato elemento sarà dato dalla somma dei contributi dovuti agli stadi di ionizzazione che sono dominanti ad una data temperatura e densità. Infine il coefficiente di assorbimento per una data miscela di elementi consiste di un certo numero di assorbimenti individuali e quindi risulta essere una funzione complicata di temperatura, densità e frequenza.

ii) **Transizioni free-free.** Il coefficiente di assorbimento per un atomo ed un elettrone per centimetro cubo può essere scritto in approssimazione idrogenoide

$$a_{ff} = \left( \frac{4\pi e^6}{3\sqrt{3} c h m^2} \right) \left( \frac{Z'^2}{\nu} \right) \left( \frac{g_{ff}}{\nu^3} \right) \quad (13.51)$$



dove  $v$  è la velocità dell'elettrone e  $g_{ff}$  è il fattore di Gaunt. Esso dipende dallo stato iniziale dell'elettrone e varia poco con la frequenza. Questo coefficiente di assorbimento decresce dolcemente al crescere della frequenza e non ci sono restrizioni sulle frequenze in quanto nelle transizioni free-free possono essere assorbiti fotoni di qualunque energia. Di conseguenza, la somma su tutti i possibili stati di ionizzazione e tipi di atomi darà luogo ad una funzione che dipende in maniera regolare da frequenza, temperatura e densità.

iii) **Diffusione da parte di elettroni liberi (Thomson).** Questo è il caso più semplice di diffusione ed è ben noto che il coefficiente di assorbimento per elettrone è dato da

$$\sigma_e = \frac{8\pi e^4}{3c^4 m^2} \quad (13.52)$$

indipendente dalla frequenza.

Noto il coefficiente di assorbimento per singolo atomo si passa a quello totale per centimetro cubo di materiale. Essi sono dati nei tre casi discussi sopra dalle seguenti relazioni:

$$\kappa_{bf} = \left(\frac{1}{\rho}\right) \sum_{A,n} a_{bf} \frac{X_A}{AH} \rho N_{A,n} \quad (13.53)$$

dove  $A$  è il peso atomico,  $X_A$  è l'abbondanza in massa ed  $N_{A,n}$  il numero di elettroni legati nello stato energetico  $n$  di un atomo generico.

$$\kappa_{ff} = \left(\frac{1}{\rho}\right) \sum_A \int_0^\infty a_{ff} \frac{X_A}{AH} \rho N_e(v) dv \quad (13.54)$$

dove  $N_e(v)$  è il numero di elettroni liberi per centimetro cubo aventi velocità  $v$ .

$$\kappa_s = \left(\frac{1}{\rho}\right) \sigma_e N_e \quad (13.55)$$

dove  $N_e$  è la densità numerica di elettroni. Il caso bound-bound non viene qui considerato.

Il coefficiente di assorbimento totale è dato dalla somma dei vari contributi

$$\kappa'_{\nu,a} = (\kappa_{bb} + \kappa_{bf} + \kappa_{ff})[1 - \exp(-h\nu/KT)] + \kappa_s \quad (13.56)$$

che viene inserito nella media di Rosseland per avere l'opacità stellare. Attesa la natura del problema, è chiaro da quanto detto che il contributo degli altri

processi da noi ricordati ma non descritti può essere facilmente aggiunto alla  $\kappa'_{\nu,a}$  come e dove appropriato. Spesso le opacità sono state approssimate con leggi analitiche che offrono il vantaggio di un facile utilizzo nel calcolo delle strutture stellari. Ricordiamo qui le leggi di Kramers per le transizioni bound-free e free-free e la legge dell'electron scattering.

**Legge di Kramers per transizioni bound-free.** Dalla legge di Saha possiamo conoscere il grado medio di ionizzazione degli elettroni per atomo che sono nello stato legato  $n$ . È ovviamente necessario considerare solo gli elementi pesanti poichè idrogeno ed elio sono già ionizzati. Nel caso di grande ionizzazione si ottiene

$$N_{A,n} = N_e n^2 \frac{h^3}{2(2\pi m K T)^{3/2}} \exp(\chi_n / K T) \quad (13.57)$$

dove  $N_{A,n}$  è la densità numerica di elettroni nel livello  $n$  dell'atomo di peso atomico  $A$ ,  $N_e$  la densità numerica di elettroni liberi per centimetro cubo,  $n^2$  deriva dal peso statistico del livello  $n$  e  $\chi_n$  è il potenziale di ionizzazione. Introducendo questa nella espressione per  $\kappa_{bf}$  si ha

$$\kappa_{bf} = \frac{2}{3} \sqrt{\frac{2\pi}{3}} \frac{e^6 h^2}{c H^2 m^{1.5} K^{3.5}} \frac{Z'^2}{A} \times \left[ \frac{1}{n} \frac{\chi_n}{K T} e^{\chi_n / K T} \left( \frac{K T}{h \nu} \right) g \right] \times Z(1 + X) \rho T^{-3.5} \quad (13.58)$$

Prendendo  $Z'^2/A = 6$ ,  $\chi_n / K T = 1$  e  $h \nu / K T = 1$  si ottiene la relazione

$$\kappa_{bf} = 4.34 \times 10^{25} \frac{\tilde{g}}{t} Z(1 + X) \rho T^{-3.5} \quad (13.59)$$

Il fattore  $g$  è il fattore medio di Gaunt e  $t$  rappresenta una media opportuna delle quantità in parentesi quadrata; entrambi sono dell'ordine dell'unità.

**Legge di Kramers per transizioni free-free.** In questo caso consideriamo solo il contributo da idrogeno ed elio in quanto gli elementi pesanti sono molto meno abbondanti. Introduciamo l'espressione per  $a_{ff}$  nella definizione di  $\kappa_{ff}$ . L'integrazione sulle velocità degli elettroni può essere fatta prendendo il valore medio della distribuzione di Maxwell

$$\left\langle \frac{1}{v} \right\rangle = \left( \frac{2m}{\pi K T} \right)^{1/2} \quad (13.60)$$

ed esprimendo  $N_e$  in funzione  $\frac{\rho}{\mu_e H}$ . La dipendenza dalla frequenza è mediata attraverso la media di Rossland

$$\langle n^3 \rangle = 196.4 \left( \frac{KT}{h} \right)^3 \quad (13.61)$$

Si ottiene infine

$$\kappa_{ff} = 3.6810^{22} g_{ff} (X + Y) (1 + X) \rho T^{-3.5} \quad (13.62)$$

Si vede che in questa approssimazione l'opacità di free-free per l'idrogeno ed elio ha la stessa dipendenza dalla densità e temperatura di quella della bound-free per gli elementi pesanti.

**Legge di opacità per diffusione elettronica (Thomson).** Per la diffusione elettronica in approssimazione Thomson non relativistica si ottiene

$$\kappa_s = 0.22(1 + X) \quad (13.63)$$

dove  $X$  è l'abbondanza in massa di idrogeno. A temperature superiori a  $10^8$  °K gli effetti relativistici sono importanti e la relazione deve essere corretta mediante il fattore moltiplicativo  $(1 + 0.35T_9^{1/2} + 0.73T_9)^{-1}$  dove  $T_9 = T/10^9$  °K.

**Opacità conduttiva.** In condizioni di degenerazione l'opacità è essenzialmente dovuta alla conduzione elettronica. Il concetto di opacità conduttiva è stato introdotto per analogia con il caso radiativo

$$\kappa_c = \frac{4acT^3}{3\Lambda\rho} \quad (13.64)$$

dove  $\Lambda$  ha le dimensioni di ergs/cm/sec/grado. Il calcolo di  $\kappa_c$  è complesso e richiede la conoscenza del grado di degenerazione del gas. Possiamo tuttavia ottenere una stima approssimata di  $\kappa_c$  ricorrendo al caso di un gas di ioni non degeneri. In tal caso il flusso conduttivo

$$F_c = -n_e v l \frac{d\epsilon}{dx} \quad (13.65)$$

dove  $n_e$  è la densità numerica totale,  $v$  la velocità media,  $l$  il cammino libero medio (distanza fra due incontri successivi con nuclei) ed  $\epsilon$  la energia cinetica media degli elettroni liberi. Nel caso non relativistico e non degeneri  $\epsilon = (3/2)KT$  per cui

$$F_c = -\frac{3}{2}n_e v l K \frac{dT}{dx} \quad (13.66)$$

da cui

$$\Lambda = \frac{3}{2} K n_e v l \quad (13.67)$$

Per il cammino libero medio prendiamo

$$l = \frac{1}{n_i \sigma} \quad (13.68)$$

dove  $n_i$  è la densità numerica di ioni e  $\sigma$  la sezione d'urto di collisione fra elettroni e nuclei. Per calcolare  $\sigma$  supponiamo che una collisione avvenga quando un elettrone si avvicina ad uno ione ad una distanza  $r_0$  tale che la sua energia cinetica pareggi la energia potenziale coulombiana. Si ottiene

$$\sigma = \pi r_0^2 = \frac{4\pi}{9} \frac{Z^2 e^4}{(KT)^2} \quad (13.69)$$

dove  $Ze$  è la tipica carica degli ioni. Ponendo  $v = (3KT/m)^{1/2}$ ,  $n_e = (1/2)(1+X)(\rho/H)$  e  $n_i = (\rho/H)/A$  dove  $A$  è la massa atomica tipica degli ioni si ricava

$$\Lambda = \frac{27\sqrt{3}}{16\pi} \frac{K^{7/2}}{m_e^{1/2} e^4} \frac{(1+X)}{(Z^2/A)} (T^{5/2}) \quad (13.70)$$

da cui si ha immediatamente  $\kappa_c$

$$\kappa_c = 5 \times 10^3 \frac{(Z^2/A) T_7^{1/2}}{(1+X)(\rho/10)} \quad cm^2/g. \quad (13.71)$$

dove  $T$  è in unità di  $10^7$  °K. Nel caso di gas degeneri (di elettroni) ci aspettiamo che  $v$  e  $l$  siano molto maggiori che nel caso non degeneri. Questo è vero per  $v$  in quanto la maggior parte degli elettroni si muoveranno con velocità appropriate al momento di Fermi e per  $l$  in quanto a causa delle non disponibilità di stati finali gli elettroni dopo le collisioni si muoveranno su distanze maggiori. Ci si aspetta pertanto che a causa della degenerazione  $\kappa_c$  diventi molto piccolo e quindi che il gas degeneri di elettroni diventi un buon conduttore di energia. Il calcolo dettagliato della opacità conduttiva porta alla relazione generale

$$\kappa_c = 1.158 \times 10^3 \frac{\sum_i Z_i^2 X_i \Theta_i / A_i}{T_7 f(\eta)} \quad cm^2/g \quad (13.72)$$

con  $T$  sempre in unità di  $10^7$  °K.  $X_i$  è la abbondanza relativa in massa dell'elemento  $i$ ;  $f(\eta)$  è una funzione del parametro di degenerazione, mentre la

quantità  $\Theta_i$  è un termine che tiene conto degli incontri a grande distanza fra ioni ed elettroni e dipende pure da  $\eta$ . Essa è data da

$$\Theta_i = \ln \left[ \frac{2}{1 - \cos(h/2\pi m v R_{Zi})} \right] \quad (13.73)$$

con  $R_{Zi}$  è definito come il raggio della sfera in cui la carica  $Zi$  è schermata dagli elettroni  $4\pi/3 R_{Zi}^3 n_e = Zi$ . Questa relazione si applica ad un gas di elettroni non relativistico ed ad un gas di ioni totalmente ionizzato. Sono possibili approssimazioni analitiche nei casi di piccola ed elevata degenerazione mentre il caso di degenerazione intermedia è più laborioso da ottenersi e coinvolge complesse espressioni.

Ricordiamo infine che in materiale degenerare anche le opacità di free-free e di diffusione elettronica devono essere corrette per gli effetti della degenerazione degli elettroni. Nel primo caso si deve considerare che gli elettroni obbediscono alla distribuzione di Fermi e che esercitano un forte effetto di schermo sulle cariche ioniche. Nel secondo caso è necessario considerare la distribuzione di Fermi dei momenti. Le varie sorgenti di opacità contribuiscono in maniera dominante alla opacità totale a seconda del valore di densità e temperatura come schematizzato nella Figura 12.1.



## Capitolo 14

# TEORIA DEL TRASPORTO CONVETTIVO

### 14.1 Criteri di instabilità

Il gradiente di temperatura dettato dalla condizione di solo trasporto radiativo dell'energia può dar luogo ad una situazione di instabilità che porta all'instaurarsi di moti di materia su larga scala ed al trasporto di energia per convezione. Supponiamo che il gradiente di temperatura locale sia quello dato dalla equazione del trasporto radiativo e supponiamo che un elemento di materia  $\delta m$  subisca un aumento di temperatura arbitrario e piccolo  $\Delta T$  con

$$\Delta T = T_{\delta m}(r) - T(r) \quad (14.1)$$

dove  $T_{\delta m}(r)$  è la temperatura dell'elemento e  $T(r)$  quella del mezzo. A causa di ciò la pressione dentro l'elemento aumenta di un poco rispetto a quella del mezzo con conseguente aumento di volume e diminuzione di densità fino a che la pressione interna ed esterna si bilanciano. Si ha pertanto un eccesso (negativo) di densità dato da

$$\Delta \rho = \rho_{\delta m}(r) - \rho(r) \quad (14.2)$$

L'elemento allora comincerà a salire sotto la spinta archimedeica in condizioni di equilibrio di pressione con il mezzo circostante. È chiaro che affinché esista una condizione di equilibrio stabile la densità dell'elemento deve ridiventare uguale a quella del mezzo ad una certa distanza  $r + dr$ . Questo significa che le curve  $\rho_{\delta m}(r)$  e  $\rho(r)$  devono intersecarsi come in Figura 14.1.

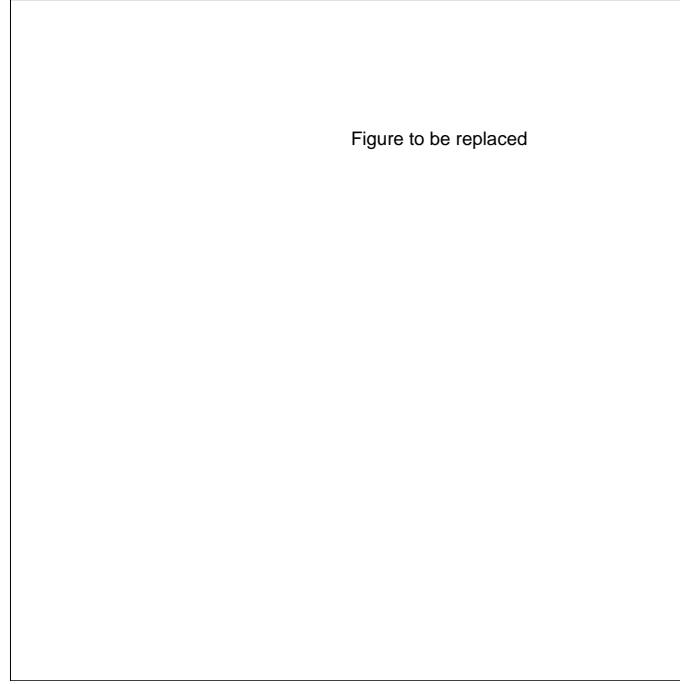


Figura 14.1: Gradienti di densità

La condizione necessaria e sufficiente all' equilibrio è dunque

$$\frac{d(\Delta\rho)}{dr} > 0 \quad (14.3)$$

ovvero

$$\left(\frac{d\rho}{dr}\right)_{\delta m} > \left(\frac{d\rho}{dr}\right)_{mezzo} \quad (14.4)$$

*Questa condizione è assolutamente generale.*

Essa tuttavia può essere riscritta per casi particolari dipendenti dalla composizione chimica del mezzo. In caso di composizione chimica uniforme è facile vedere che essa si traduce in

$$\left(\frac{dT}{dr}\right)_{\delta m} < \left(\frac{dT}{dr}\right)_{mezzo} \quad (14.5)$$

La variazione  $\Delta\rho$  è stata sostituita dalla variazione  $\Delta T$  mediante l'equazione di stato di un gas perfetto con  $\mu$  costante (e per ora senza pressione di radiazione) che è stata differenziata sotto la condizione  $P = \text{costante}$ .

Poichè in una stella  $dT/dr$  è quasi sempre negativo con la sola eccezione delle regioni dove esiste una grande produzione di neutrini possiamo scrivere



$$\left| \frac{1}{T} \left( \frac{dT}{dr} \right) \right|_{\delta m} > \left| \frac{1}{T} \left( \frac{dT}{dr} \right) \right|_{mezzo} \quad (14.6)$$

Pur essendo generale la relazione di cui sopra non è praticamente utile in quanto  $(dT/dr)_{\delta m}$  non è noto. Tuttavia, a parte il caso particolare in cui dentro l'elemento stesso siano presenti efficienti sorgenti di energia, durante lo spostamento l'elemento di materia potrà solo cedere energia al mezzo circostante per irraggiamento o conduzione. Pertanto la  $T_{\delta m}(r)$  scenderà più rapidamente di quanto avverrebbe se il moto fosse puramente adiabatico. Si ottiene dunque la condizione sufficiente per la stabilità del gradiente radiativo

$$\left| \frac{1}{T} \left( \frac{dT}{dr} \right) \right|_A > \left| \frac{1}{T} \left( \frac{dT}{dr} \right) \right|_{mezzo} \quad (14.7)$$

Il gradiente adiabatico è sempre noto e viene dato da

$$\frac{1}{T} \left( \frac{dT}{dr} \right)_A = \left( \frac{\Gamma_2 - 1}{\Gamma_2} \right) \frac{1}{P} \frac{dP}{dr} \quad (14.8)$$

dove  $\Gamma_2$  è l'esponente adiabatico includente ionizzazione, dissociazione e radiazione. Espressione equivalente della relazione (14.7) è

$$\left( \frac{d \ln T}{d \ln P} \right) < \left( \frac{d \ln T}{d \ln P} \right)_A \quad \text{ovvero} \quad \nabla < \nabla_A \quad (14.9)$$

La condizione di stabilità può anche essere formulata in modo diverso tramite una condizione sulla luminosità

$$L(r) < \frac{16\pi acG}{3\kappa} \left( 1 - \frac{1}{\Gamma_2} \right) \left( \frac{T^4}{P} \right) M(r) \quad (14.10)$$

Questa condizione può essere violata nelle regioni dove  $L(r)$  è molto grande come nelle zone di efficiente produzione di energia nucleare e dove  $\kappa$  è molto grande come avviene in certe regioni esterne di stelle fredde a causa della ricombinazione di idrogeno ed elio. In generale in tutte le stelle esisterà una regione dove gli elementi da totalmente ionizzati diventano parzialmente ionizzati o neutri con conseguente aumento di  $\kappa$ . Ci aspetteremo pertanto che la convezione si instauri nelle zone centrali e in quelle molto esterne. Le caratteristiche fisiche delle due regioni convettive saranno tuttavia profondamente diverse.

Consideriamo ora il caso in cui questa relazione non sia verificata (gradiente radiativo instabile). In questo caso il gradiente radiativo che esisterebbe in condizioni perfettamente statiche è più ripido del gradiente di temperatura  $(dT/dr)_{\delta m}$  ed ogni piccola perturbazione della temperatura provocherebbe uno spostamento finito dell'elemento lontano dalla sua posizione iniziale. In conseguenza si instaurano movimenti su larga scala di materia in salita e discesa (convezione) che rimescolano il materiale e trasportano enormi quantità di calore dalle regioni più interne verso quelle più esterne e modificano la distribuzione della temperatura  $T(r)$ . Si instaura una condizione di equilibrio, in cui sia la radiazione che la convezione contribuiscono al trasporto dell'energia. La vera  $T(r)$  sarà intermedia fra quella puramente radiativa e quella adiabatica. Cioè la  $T(r)$  sarà più ripida di quella adiabatica (*super-adiabatica*) ma meno ripida di quella radiativa.

È facile verificare che negli interni stellari il grado di superadiabaticità del gradiente di temperatura nelle regioni instabili alla convezione è una quantità molto piccola. Infatti consideriamo una strato sferico di spessore  $\Lambda$  che possiamo assumere come il tipico cammino degli elementi convettivi prima di dissolversi nel mezzo circostante e sia  $t$  il loro tempo di vita medio. È chiaro che un tempo dell'ordine di  $t$  deve trascorrere affinché la energia  $L(r) \times t$  entrante alla base della regione possa uscire dalla superficie superiore di raggio  $r + \Lambda$ . In assenza di sorgenti di energia deve essere  $L(r) = L(r + \Lambda)$ . Ogni unità di massa del materiale entro la regione con massa totale  $\Delta M$  riceve un incremento di energia  $L(r) \times t / \Delta M$  e quindi si riscalda di

$$\Delta T = \frac{L(r) \times t}{\Delta M} \frac{1}{c_v} \quad (14.11)$$

dove  $c_v$  è il calore specifico a volume costante. Se la temperatura media è  $T$  allora il grado di superadiabaticità è dato da

$$\frac{\Delta[\frac{dT}{dr}]}{[\frac{dT}{dr}]_A} = \frac{\Delta T}{T} = \frac{L(r) \times t}{\Delta M} \frac{1}{c_v T} \quad (14.12)$$

Ponendo tipici valori per le varie grandezze si trova

$$\frac{\Delta[\frac{dT}{dr}]}{[\frac{dT}{dr}]_{ad}} = 10^{-8} \quad (14.13)$$

che è circa  $10^4$  volte più piccolo del gradiente medio stellare. In una regione convettiva interna si può pertanto ritenere che il gradiente superadiabatico sia quasi identico a quello adiabatico ed adottare quest'ultimo come il gradiente di temperatura che si instaura nella regione qualora essa risulti instabile alla convezione. Ciò significa che nella regione dove la condizione (14.6) è violata, la relazione del trasporto radiativo viene sostituita dalla relazione (14.8) che assume il ruolo di una equazione fondamentale in alternativa alla equazione (12.4).

Si può anche vedere subito che in regioni dove l'energia interna per unità di massa ( $c_v T$ ) è piccola a causa della bassa temperatura e calore specifico, il grado di superadiabaticità non sarà più trascurabile e sarà necessario valutare il gradiente vero che si instaura in presenza di convezione. Questo è fatto ricorrendo alla teoria del mescolamento (*mixing length*).

Infine ricordiamo che la condizione di stabilità alla convezione valida per un mezzo omogeneo, non può essere applicata ad un mezzo con un gradiente di peso molecolare. Semplici considerazioni simili a quelle usate per derivare la condizione (14.9) danno la nuova condizione

$$\left(\frac{d\ln T}{d\ln P}\right) < \left(\frac{d\ln T}{d\ln P}\right)_A + \left(\frac{\beta}{4 - 3\beta}\right) \frac{d\ln \mu}{d\ln P} \quad (14.14)$$

valida per un gas perfetto con pressione di radiazione; si ricordi che  $\beta = P_g/(P_g + P_r)$ .

## 14.2 Teoria della mixing length

Nel paragrafo precedente abbiamo visto in quali condizioni possa instaurarsi la convezione ma non sappiamo ancora quanta energia possa essere trasportata da questa. Il problema è superfluo nelle regioni interne dove il gradiente di temperatura può essere identificato con quello adiabatico, ma diventa importante nelle regioni esterne di grande superadiabaticità. Il modello fisico più semplice per lo studio del trasporto convettivo è quello della *mixing length*. In tale modello ogni volumetto di materia è supposto muoversi adiabaticamente per un certo tratto  $\Lambda$  dipendente in qualche modo dalle condizioni fisiche della materia circostante e che in seguito si mescoli con questa cedendo una certa quantità di calore.

Incominciamo col definire quattro gradienti di temperatura nella notazione  $\nabla = d\ln T/d\ln P$ . Sia  $\nabla$  il gradiente medio di tutta la materia ad un dato livello  $r$  e  $\nabla'$  il gradiente di un tipico elemento convettivo in moto, questo dipenderà fra altre cose dal modo con cui l'elemento scambia energia con l'ambiente circostante. Sia  $\nabla_A$  il gradiente adiabatico ed infine sia  $\nabla_R$  un gradiente fittizio ma calcolabile nella ipotesi che tutto il flusso di energia sia trasportato dalla radiazione e cioè dalla equazione

$$F_R = -\left(\frac{4acT^3}{3\kappa\rho}\right)\frac{dT}{dr} = -\left(\frac{d\ln P}{dr}\right)\left(\frac{4acT^4}{3\kappa\rho}\right)\left(\frac{d\ln T}{d\ln P}\right) \quad (14.15)$$

Introducendo l'altezza di scala di pressione  $\lambda_p$  così definita

$$\left(\frac{-d\ln P}{dr}\right) = \frac{1}{\lambda_p} = \frac{\rho}{P} \frac{GM(r)}{r^2} = \frac{\rho g}{P} \quad (14.16)$$

dove  $g$  è l'accelerazione di gravità locale

$$F_R = \frac{4acT^4 g}{3\kappa P} \nabla. \quad (14.17)$$

il gradiente  $\nabla_R$  è dato dalla relazione

$$F = F_R + F_C = \left(\frac{4acT^4 g}{3\kappa P}\right) \nabla_R \quad (14.18)$$

dove  $F_C$  e  $F_R$  sono i flussi di energia trasportati dalla convezione e radiazione rispettivamente. Si ricordi che in ogni caso esisterà una componente del flusso totale associata al trasporto radiativo e cioè quella data dalla equazione (12.4) quando il gradiente di temperatura sia quello del mezzo  $\nabla$  in presenza di convezione. Per ora esso è sconosciuto.

In generale i quattro gradienti obbediscono alla disuguaglianza

$$\nabla_r > \nabla > \nabla' > \nabla_A \quad (14.19)$$

Passiamo ora a definire il flusso convettivo  $F_C$  nel seguente modo: un elemento convettivo percorre una certa distanza  $\Delta r$  prima di dissolversi e trasferisce una quantità di calore per unità di area e di tempo data da

$$F_C = \frac{1}{2} \rho v c_p \Delta r \left[ \left( \frac{-dT}{dr} \right) - \left( \frac{-dT'}{dr} \right) \right] \quad (14.20)$$

il fattore  $1/2$  tiene conto del fatto che in media ci saranno tanti elementi in salita quanti in discesa visto che non c'è movimento netto del materiale, il calore specifico è quello a pressione costante  $c_p$  in quanto è stata assunta la condizione di equilibrio di pressione.

Non tutti gli elementi percorreranno la stessa distanza  $\Delta r$ . Pertanto è necessario introdurre un cammino medio  $\Lambda$  degli elementi. Altrettanto dicasi per la velocità  $v$ . Il flusso  $F_C$  espresso tramite queste quantità medie diventa

$$F_C = \frac{1}{2} \bar{\rho} \bar{v} c_p T \frac{\Lambda}{\lambda_p} (\nabla - \nabla') \quad (14.21)$$

Osserviamo che  $\bar{v}$  e  $\Lambda$  sono ancora sconosciuti. Per calcolare  $\bar{v}$  si procede nel modo seguente. Sia  $\Delta\rho$  l'eccesso di densità di un elemento di materia rispetto al mezzo; la forza agente sull'elemento è ottenuta dall'equazione del moto

$$\ddot{r} = -g - \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial r} \quad (14.22)$$

sviluppando  $\rho$  in serie attorno al valore di equilibrio  $\rho_0$  si ha

$$\ddot{r} = -g_0 \frac{\Delta\rho}{\rho_0} \quad (14.23)$$

da cui si ricava la forza agente per unità di volume

$$F_B = -g\Delta\rho \quad (14.24)$$

detta *buoyancy force* o di galleggiamento.

Supponiamo che l'elemento si muova da velocità zero alla posizione  $r$  e che venga accelerato sotto la spinta di galleggiamento durante tutto il tragitto  $\Delta r$  prima di dissolversi. La forza netta per unità di volume alla posizione  $r + \Delta r$  è data da

$$F_B = -g\Delta\rho(\Delta r) \quad (14.25)$$

Il lavoro fatto sull'unità di volume nel muoversi lungo  $\Delta r$  è

$$W(\Delta r) = -\frac{1}{2} g \Delta\rho(\Delta r) \Delta r \quad (14.26)$$

Mediando su tutti i valori possibili di  $\Delta r$  ed introducendo  $\Lambda$  si ottiene un valore medio di  $W$  espresso da

$$\overline{W(\Lambda)} = -\frac{1}{8}g\Delta\rho(\Lambda)\Lambda \quad (14.27)$$

dove si è introdotto un fattore numerico  $1/4$  per avere accordo con la formulazione originale della teoria. In assenza di forze dissipative (attriti), scambi di calore e trasferimenti di energia cinetica al mezzo circostante, questo lavoro va tutto in energia cinetica dell'elemento in moto. Tuttavia si suppone che solamente metà di questo lavoro vada in energia cinetica degli elementi

$$\frac{1}{2}\rho v^2 = \frac{1}{2}\overline{W(\Lambda)} \quad (14.28)$$

Questa scelta è motivata dal fatto che da una parte a causa delle grandi dimensioni degli elementi convettivi le forze viscosse hanno un ruolo secondario dall'altra che le grandi dimensioni implicano che il numero di Reynolds ( $Re = vD\rho/\eta$  dove  $D$  è la dimensione ed  $\eta$  la viscosità) è pure grande e quindi che il moto è essenzialmente turbolento. Pertanto gran parte delle forze che tendono a ritardare il moto nascono dal fatto che gli elementi nel muoversi devono farsi strada fra altri elementi e quindi cedere parte dell'energia a questi. Sulla base di queste considerazioni si ottiene per  $\bar{v}$

$$\bar{v}^2 = -\frac{1}{8}g\left(\frac{\Delta\rho(\Lambda)}{\rho}\right)\Lambda \quad (14.29)$$

$\Delta\rho$  può essere facilmente sostituito con  $\Delta T$  tramite la equazione di stato differenziando quest'ultima a pressione costante. In generale si può scrivere

$$\Delta\ln\rho = -Q\Delta\ln T \quad (14.30)$$

dove

$$-Q = \left(\frac{d\ln\rho}{d\ln\mu}\right)_{P,T} \left(\frac{d\ln\mu}{d\ln T}\right)_P + \left(\frac{d\ln\rho}{d\ln T}\right)_{\mu,P} \quad (14.31)$$

La velocità media è dunque

$$\bar{v}^2 = \frac{1}{8}gQ\left(\frac{\Delta T(\Lambda)}{T}\right)\Lambda \quad (14.32)$$

L'eccesso di temperatura può essere scritto come

$$\Delta T(\Lambda) = \Lambda\left(\frac{T}{\lambda_p}\right)(\nabla - \nabla') \quad (14.33)$$

ed infine

$$\bar{v} = (2\sqrt{2})^{-1} g Q^{1/2} \left(\frac{\rho}{P}\right)^{1/2} \Lambda (\nabla - \nabla')^{1/2} \quad (14.34)$$

Con l'aiuto della velocità media così ottenuta e dell'espressione per il flusso totale deriviamo la seguente relazione fra  $\nabla_R$ ,  $\nabla$  e  $\nabla'$

$$\nabla_R = \nabla + \left[ \frac{3c_p \kappa Q^{1/2} \rho^{5/2} g \Lambda^2}{16\sqrt{2} a c P^{1/2} T^3} \right] (\nabla - \nabla')^{3/2} \quad (14.35)$$

Il fattore che moltiplica  $(\nabla - \nabla')^{3/2}$  può essere visto come il rapporto fra la conduttività radiativa e quella convettiva.

Questa relazione lega i tre gradienti  $\nabla$ ,  $\nabla'$  e  $\nabla_R$  fra loro e alle varie quantità fisiche del mezzo. Quest'ultime e  $\nabla_R$  sono sempre conosciute mentre per ora  $\nabla$  e  $\nabla'$  sono incogniti. In particolare ricordiamo che uno degli scopi principali è quello di determinare  $\nabla$  cioè il gradiente del mezzo in presenza di convezione. Quando  $\nabla'$  non è quasi uguale a  $\nabla_A$  come nel caso della convezione in regioni esterne, è necessario stabilire un'altra relazione fra i gradienti che dipenderà dal meccanismo di scambio di calore fra gli elementi convettivi ed il mezzo circostante. Poiché  $\nabla_A$  è sempre noto, dato il valore di uno dei tre rimanenti, gli altri due possono essere così determinati. Di solito si assegnano o  $\nabla_R$  o  $\nabla$  a seconda della natura del problema.

Questo ci porta ad introdurre il concetto di efficienza della convezione. Un elemento convettivo in moto ascensionale è più caldo del mezzo circostante e pertanto perderà energia durante il suo moto per irraggiamento. D'altro canto se esso possiede delle sorgenti interne di energia (nucleari) esso potrà anche aumentare il suo contenuto energetico durante il moto. È importante ricordare che questi guadagni e perdite di energia non sono pensati contribuire al flusso netto di energia verso l'esterno né modificare le condizioni di equilibrio termico dell'ambiente circostante. Essi sono pensati come "orizzontali" e poiché ci sono in media tanti elementi in salita quanti in discesa il flusso netto di calore non risulta modificato. Tuttavia essi contribuiscono indirettamente al flusso verso l'esterno in quanto determinano la efficienza della convezione.

Definiamo come efficienza della convezione il rapporto fra l'eccesso di calore posseduto da un elemento prima di dissolversi e la energia irraggiata da questo durante il suo moto. Attese le grandi dimensioni degli elementi convettivi e la relativamente grande opacità del materiale stellare gli elementi convettivi pos-

sono essere considerati come otticamente spessi e pertanto la energia irraggiata può essere calcolata ricorrendo alla equazione del trasporto radiativo. La energia totale irraggiata da un elemento di dimensioni tipiche  $\Lambda$ , superficie  $A$  e tempo di vita  $t = \Lambda/\bar{v}$  è

$$\left(\frac{4acT^3}{3\kappa\rho}\right)\left(\frac{\Delta T}{\Lambda/2}\right)\left(\frac{\Lambda}{v}\right)A \quad (14.36)$$

dove  $\Delta T$  è la differenza di temperatura fra il centro dell'elemento ed il mezzo circostante.

L'eccesso di calore posseduto da un elemento al momento di dissolversi è

$$c_p\rho(\Delta T)_{max}V \quad (14.37)$$

dove  $V$  è il volume e  $(\Delta T)_{max}$  è l'eccesso di temperatura rispetto al mezzo. Possiamo assumere  $\Delta T_{max} = 2 \times \Delta T$ . Si definisce efficienza  $\Gamma$

$$\Gamma = \frac{\text{Eccesso di calore prima di dissolversi}}{\text{Energia persa durante il moto}} \quad (14.38)$$

ovvero

$$\Gamma = \frac{3}{4ac}c_p\frac{\kappa\rho^2}{T^3}\bar{v}\frac{V}{A} \quad (14.39)$$

ed infine

$$\Gamma = \left(\frac{c_p}{12\sqrt{2}ac}\right)\left(\frac{\kappa g Q^{1/2}\rho^{5/2}\Lambda^2}{P^{1/2}T^3}\right)(\nabla - \nabla')^{1/2} \quad (14.40)$$

dove  $\bar{v}$  è stata sostituita con la espressione trovata in precedenza e il rapporto  $V/A$  (volume su superficie) è stato preso uguale a  $\frac{2}{9}\Lambda$ . Dal confronto con la relazione (14.18) si ottiene

$$\nabla_R = \nabla + \frac{9}{4}\Gamma(\nabla - \nabla') \quad (14.41)$$

Possiamo ora costruire un'altra relazione per  $\Gamma$ . Ricordiamo che una trasformazione politropica è quella in cui la derivata  $c = dQ/dT$  varia in maniera assegnata. Il caso adiabatico ad esempio è per  $dQ = 0$  ovvero  $c = 0$ . Le variabili di stato del sistema sono legate da leggi di trasformazione caratterizzate da esponenti politropici fra i quali ricordiamo la

$$\frac{d\ln P}{d\ln T} = \frac{\Gamma'_2}{\Gamma'_2 - 1}. \quad (14.42)$$



$\Gamma'_2$  può essere legata al corrispondente esponente per una trasformazione adiabatica dalla relazione

$$\frac{\Gamma'_2}{\Gamma'_2 - 1} = \left(1 - \frac{c}{c_p}\right) \frac{\Gamma_2}{\Gamma_2 - 1} \quad (14.43)$$

Questo ci permette di legare  $\nabla'$  a  $\nabla_A$

$$\nabla' = \nabla_A \frac{1}{(1 - c/c_p)} \quad (14.44)$$

dove

$$c = \frac{dQ}{dT'} \quad (14.45)$$

è un calore specifico generalizzato per unità di massa che è specificato dalla trasformazione in esame e  $T'$  è la temperatura dell'elemento convettivo durante il suo moto. La variazione nel tempo del calore posseduto dall'elemento è

$$\frac{dQ}{dt} = \left(\frac{dQ}{dT'}\right) \left(\frac{dT'}{dt}\right) = \Delta\epsilon - \Delta\left(\frac{\bar{\nabla} \cdot \bar{F}}{\rho}\right) \quad (14.46)$$

dove  $T'$  è la temperatura dell'elemento durante il moto,  $\Delta\epsilon$  e  $\Delta(\frac{\bar{\nabla} \cdot \bar{F}}{\rho})$  sono l'eccesso di energia prodotta nell'interno e l'eccesso di irraggiamento rispettivamente. Dalla definizione di calore specifico  $c$  è facile vedere che

$$\frac{c}{c_p} = \frac{[\Delta\epsilon - \Delta(\frac{\bar{\nabla} \cdot \bar{F}}{\rho})]}{c_p(dT'/dt)} = -\frac{(1 - \eta)/\Gamma}{1 - [\nabla/(\nabla - \nabla')]} \quad (14.47)$$

dove

$$\eta = \frac{\Delta\epsilon}{\Delta(\frac{\bar{\nabla} \cdot \bar{F}}{\rho})} \quad (14.48)$$

Per ottenere questa relazione si è identificato

$$\frac{\Delta(\frac{\bar{\nabla} \cdot \bar{F}}{\rho})}{c_p[(dT'/dt) - (dT/dt)]} = \frac{1}{\Gamma} \quad (14.49)$$

dove  $\Gamma$  è l'efficienza della convezione.

Poichè il tasso di produzione di energia è una funzione di  $T$  e  $\rho$  (e composizione chimica, qui trascurata),  $\Delta\epsilon$  viene espresso da

$$\frac{\Delta\epsilon}{\epsilon} = \left(\frac{d\ln\epsilon}{d\ln\rho}\right)_T + \left(\frac{d\ln\epsilon}{d\ln T}\right)_\rho \quad (14.50)$$

Ponendo  $\lambda = (\frac{d \ln \epsilon}{d \ln \rho})_T$  e  $\nu = (\frac{d \ln \epsilon}{d \ln T})_\rho$  e facendo uso dell'equazione di stato si ha

$$\frac{\Delta \epsilon}{\epsilon} = (\nu - Q\lambda) \frac{\Delta T}{T} \quad (14.51)$$

$$\eta = \frac{1}{16ac} \frac{(\nu - \lambda Q)}{T^4} \epsilon \kappa \rho^2 \Lambda^2 \quad (14.52)$$

in cui il rapporto  $V/A$  nell'espressione per l'energia totale irradiata è stato preso uguale a  $\Lambda/6$ . da queste finalmente otteniamo

$$\frac{\Gamma}{(1 - \eta)} = \frac{(\nabla - \nabla')}{(\nabla' - \nabla_A)} \quad (14.53)$$

dove  $\eta = 0$  nel caso di assenza di sorgenti energetiche.

Da quanto detto si vede che  $\nabla' \Rightarrow \nabla_A$  e  $\nabla \Rightarrow \nabla'$  per  $\Gamma \Rightarrow \infty$  (grande efficienza convettiva) e che  $\nabla$  e  $\nabla' \Rightarrow \nabla_R$  per  $\Gamma \Rightarrow 0$  (piccola efficienza convettiva).

La frazione di flusso trasportata dalla convezione può essere esaminata in questi due casi limite. In generale si ha

$$\frac{F_C}{F} = \frac{(\nabla_R - \nabla)}{\nabla_R} \quad (14.54)$$

Per  $\Gamma \Rightarrow 0$   $F_C/F \Rightarrow 0$ . Una piccola efficienza significa che anche in presenza di convezione, il flusso è essenzialmente radiativo, quindi  $\nabla$  tende a  $\nabla_R$

Al contrario, per  $\Gamma \Rightarrow \infty$ ,  $\nabla \Rightarrow \nabla_A$

$$\frac{F_C}{F} \simeq \frac{(\nabla_R - \nabla_A)}{\nabla_R} \quad (14.55)$$

quindi  $F_C/F \Rightarrow 1$  se  $\nabla_R > \nabla_A$  o  $F_C/F \Rightarrow 0$  se  $\nabla_R \Rightarrow \nabla_A$ . Il primo caso è tipico delle zone più interne di una regione convettiva, mentre il secondo caso è tipico della regione di transizione fra zona instabile alla convezione e quella stabile. Pertanto una grande efficienza convettiva non implica necessariamente un grande flusso convettivo.

Con l'aiuto delle relazioni (14.18), (14.41) e (14.55) si può ricavare il gradiente di temperatura in una regione convettiva in cui non sia applicabile la approssimazione di piccolissima superadiabaticità ed in cui il gradiente di temperatura può essere senz'altro preso uguale a quello adiabatico. Esistono due diversi modi di procedere a seconda che sia noto il flusso totale di energia oppure il gradiente di temperatura. Il primo caso è tipico dei metodi attuali di calcolo dei modelli stellari ed è giustificato dal fatto che nelle regioni esterne dove è

necessario applicare la teoria della mixing length, non sono attive le sorgenti nucleari a causa della bassa temperatura. In quanto segue verrà considerato solo questo caso.

Definiamo la quantità adimensionale

$$A = \frac{(Q^{1/2} c_p \kappa g \rho^{5/2} \Lambda^2)}{(12\sqrt{2} a c P^{1/2} T^3)} \quad (14.56)$$

poniamo  $\eta = 0$  e sostituiamo il fattore numerico (9/4) nella relazione (14.41) con una costante generica  $a_0$ . Mediante le posizioni

$$\zeta = \frac{(\nabla_R - \nabla)}{(\nabla_R - \nabla_A)} \quad (14.57)$$

$$B = [(\frac{A^2}{a_0})(\nabla_R - \nabla_A)]^{1/3} \quad (14.58)$$

si ottiene la seguente equazione

$$\zeta^{1/3} + B\zeta^{2/3} + a_0 B^2 \zeta - a_0 B^2 = 0 \quad (14.59)$$

nota anche come *equazione cubica* della teoria della mixing length. Una volta ottenuto  $\zeta$  si possono avere tutte le altre quantità di interesse. Si noti che la soluzione dipenderà oltre che dalla conoscenza delle grandezze fisiche  $c_p$ ,  $\kappa$ ,  $\rho$ ,  $g$ ,  $P$ ,  $T$  etc... anche da  $\Lambda$  e da  $a_0$ . La scelta di  $a_0$  è essenzialmente legata alla geometria degli elementi convettivi e non è veramente cruciale, mentre la scelta di  $\Lambda$  è fondamentale. Di solito  $\Lambda$  viene assunto proporzionale ad una tipica scala di lunghezza lungo la quale le proprietà fisiche del mezzo variano in maniera significativa. Nella modellistica corrente si assume  $\Lambda = \alpha \lambda_p$  dove  $\lambda_p$  è l'altezza di scala di pressione ed  $\alpha$  è un parametro che viene essenzialmente determinato dal confronto dei risultati teorici con i dati di osservazione. I valori generalmente usati sono compresi fra 1 e 2. Piccoli valori di  $\alpha$  si riflettono in piccoli flussi convettivi quindi in un contributo dominante del flusso radiativo il che implica raggi stellari più estesi. Il contrario è vero per grandi valori di  $\alpha$ . La più importante limitazione della teoria della mixing length è che essa è applicabile solamente se le velocità convettive sono piccole rispetto alla velocità del suono. Ciò è imposto dalla condizione di equilibrio di pressione fra gli elementi convettivi in moto e il mezzo circostante). Tale limitazione è soddisfatta all'interno delle stelle dove d'altra parte la teoria stessa è superflua, mentre

nelle regioni più esterne essa può facilmente cadere in difetto. Sfortunatamente manca una adeguata teoria della convezione supersonica anche se numerosi studi sono stati fatti in proposito. Infine è doveroso ricordare che la teoria della mixing length è una cruda approssimazione della reale fisica della convezione, giustificata solamente dai soddisfacenti risultati ottenuti.

## Capitolo 15

# OPACITÀ STELLARI

### 15.1 Introduzione

Nel capitolo precedente abbiamo visto come si definisce l'opacità media di Rosseland in funzione dei coefficienti di assorbimento  $\kappa_{\nu,a}$  e  $\kappa_{\nu,s}$  ed identificato i vari processi che portano alla costruzione dell'opacità.

In generale a causa dei suddetti processi, l'intensità di un fascio di fotoni viene ridotta secondo la legge

$$\frac{dI}{dx} = -\kappa\rho I \quad I = I_0 e^{-\kappa\rho x} \quad (15.1)$$

La quantità  $(\kappa\rho)^{-1}$  rappresenta quindi il cammino libero medio dei fotoni. D'altra parte, secondo la teoria cinetica, il cammino libero medio di una particella di gas è

$$\frac{1}{n\sigma} \quad (15.2)$$

dove  $n$  è il numero di particelle di gas per unità di volume e  $\sigma$  è la sezione d'urto del processo. Dal confronto delle due espressioni per il cammino libero medio si ottiene

$$\kappa\rho = n\sigma \quad (15.3)$$

dove  $\rho = nm = nAH$ , con  $m$  è la massa di una particella,  $H$  la massa dell'atomo di idrogeno in AMU e  $A$  il numero di massa. Da questa si deriva

$$\kappa = \frac{\sigma}{AH} \quad (15.4)$$

Poichè  $\sigma$  ha le dimensioni di un'area,  $\kappa$  ha le dimensioni  $[L^2 M^{-1}]$ . Da questa si vede che il valore di  $\kappa$  è legato alla sezione d'urto  $\sigma$  dei vari processi considerati i quali saranno caratterizzati dai rispettivi coefficienti  $\kappa_{bb}$ ,  $\kappa_{bf}$ ,  $\kappa_{ff}$  etc ... Il calcolo di  $\kappa$  è dunque ricondotto al calcolo di  $\sigma$ .

Si definisce la *sezione d'urto differenziale*  $\sigma(\theta, \phi)$  nel modo seguente. Sia  $N$  il numero di particelle incidenti su un bersaglio per unità di tempo e di area; il numero di particelle diffuse nell'unità di tempo nell'angolo solido  $d\Omega$  attorno alla direzione  $(\theta, \phi)$  è dato da

$$dn = N\sigma(\theta, \phi)d\Omega \quad (15.5)$$

Le dimensioni di  $\sigma(\theta, \phi)$  sono quelle di un'area. La sezione d'urto totale è

$$\sigma_T = \int \sigma(\theta, \phi)d\Omega \quad (15.6)$$

che rappresenta l'area efficace che deve essere colpita affinché la particella incidente venga deflessa in una direzione qualunque.

Consideriamo un volume  $L^3$  nel quale supponiamo ci siano due particelle, cioè un bersaglio ed un proiettile che si muove con velocità  $v$ . La densità di particelle incidenti è allora  $1/L^3$ . Se  $\sigma$  è la sezione d'urto del processo affinché il proiettile colpisca il bersaglio nell'unità di tempo è necessario che si trovi in un cilindro di base  $\sigma$  ed altezza  $v$ . La probabilità che avvenga l'urto è allora

$$W = \frac{1}{L^3}\sigma v \quad (15.7)$$

Questa relazione lega la sezione d'urto  $\sigma$  alla probabilità per unità di tempo  $W$ . Questa è calcolata per ogni processo mediante la *teoria perturbativa dipendente dal tempo*.

In quanto segue daremo dei richiami di meccanica quantistica al fine di calcolare la probabilità  $W$  di alcuni processi fondamentali di assorbimento della radiazione da parte della materia.

## 15.2 Equazione di Schroedinger

In meccanica ondulatoria, la propagazione dell'onda  $\Psi(\vec{r}, t)$  associata ad una particella di massa  $m$  soggetta ad un campo di forza rappresentato dal potenziale  $U(\vec{r}, t)$  è descritta dall'equazione temporale di Schroedinger

$$-\frac{h^2}{8\pi^2m}\Delta\Psi + U\Psi = \frac{ih}{2\pi}\frac{\partial\Psi}{\partial t} \quad (15.8)$$

Se il potenziale  $U(\bar{r}, t)$  non dipende esplicitamente dal tempo il problema si riduce alla soluzione dell' *equazione stazionaria*

$$-\frac{h^2}{8\pi^2m}\Delta\Psi + U\Psi = E\Psi \quad (15.9)$$

dove  $E$  è l'energia totale del sistema, mentre la funzione  $\Psi(\bar{r}, t)$  viene espressa come il prodotto di due funzioni: una dipendente solo da  $\bar{r}$  e l'altra solo dal tempo  $t$

$$\Psi(\bar{r}, t) = Cu(\bar{r})e^{-\frac{2\pi i}{h}Et} \quad (15.10)$$

Infine l'interpretazione probabilistica della  $\Psi(\bar{r}, t)$  impone che sia verificata la condizione di normalizzazione

$$\int |\Psi|^2 dV = 1 \quad (15.11)$$

dove l'integrale è esteso a tutto lo spazio. Affinchè l'integrale converga occorre che  $\Psi(\bar{r}, t) \rightarrow 0$  quando  $\bar{r} \rightarrow \infty$

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \Psi = 0 \quad (15.12)$$

Inoltre il significato fisico della  $\Psi$  impone che essa sia univoca e continua assieme alla derivata prima in ogni punto dello spazio e ad ogni istante  $t$ . Queste condizioni pongono delle restrizioni ai possibili valori di  $E$  per cui l'equazione può essere risolta. Tali valori di  $E$  sono detti *autovalori*. Essi possono essere discreti o continui. Le  $\Psi$  ad essi associate sono dette *autofunzioni*.

Se  $\Psi$  rappresenta un *pacchetto* d'onde la condizione (15.11) è verificata in quanto  $|\Psi|^2$  diventa molto piccola già a breve distanza dal massimo principale.

Se  $\Psi$  rappresenta un *treno* d'onde piane, allora l'integrale (15.11) non converge in quanto la  $\Psi$  non si annulla mai. In questo caso occorre pensare alla  $\Psi$  come definita su uno spazio arbitrariamente grande (un cubo di volume  $V$ ) ma finito, sul contorno del quale la  $\Psi$  assume valori nulli o periodici, in modo tale che l'integrale esteso a tutto il volume sia convergente.

Le autofunzioni godono di alcune proprietà di cui faremo uso in seguito:

(1) le autofunzioni  $u_n$  e  $u_m$  relative a due autovalori  $E_n$  e  $E_m$  sono fra loro ortogonali e ciascuna di esse è normalizzata ad uno

$$\int_V u_m^* u_n dV = \delta_{mn} \quad (15.13)$$

(2) una funzione  $\Psi(\bar{r}, t)$  qualunque puo' essere espressa come somma di una serie di autofunzioni complete dell' equazione stazionaria

$$\Psi(\bar{r}, t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \Psi_n(\bar{r}, t) \quad (15.14)$$

dove le  $\Psi_n(\bar{r}, t)$  sono date da

$$\Psi_n(\bar{r}, t) = u_n e^{-\frac{2\pi i}{h} E_n t} \quad (15.15)$$

soluzioni della equazione stazionaria.

(3) vale la proprietà di *chiusura* delle autofunzioni, espressa dalle relazioni

$$\sum_n u_n^*(\bar{r}') u_n(\bar{r}) = 0 \quad \text{per } \bar{r}' \neq \bar{r} \quad (15.16)$$

$$\int_V \sum_n u_n^*(\bar{r}') u_n(\bar{r}) dV' = 1 \quad \text{per } \bar{r}' = \bar{r} \quad (15.17)$$

L'equazione di Schroedinger puo' essere scritta in forma compatta mediante l'operatore

$$H = -\frac{h^2}{8\pi^2 m} \Delta + U \quad (15.18)$$

e cioè

$$H\Psi = \frac{h}{2\pi i} \frac{\partial \Psi}{\partial t} \quad (15.19)$$

$$H\Psi = E\Psi \quad (15.20)$$

L'operatore  $H$  è detto hamiltoniano e rappresenta l'energia totale del sistema. Senza dare una dimostrazione rigorosa, ricordiamo che in meccanica quantistica alle grandezze classiche  $P_x, P_y, P_z$  (componenti del momento) corrispondono gli operatori

$$P_x \rightarrow \frac{h}{2\pi i} \frac{\partial}{\partial x} \quad P_y \rightarrow \frac{h}{2\pi i} \frac{\partial}{\partial y} \quad P_z \rightarrow \frac{h}{2\pi i} \frac{\partial}{\partial z}$$



Eseguendo la sostituzione nell' hamiltoniano classico di una particella

$$H = \sum_{i=1}^3 \frac{P_i^2}{2m} + U \quad (15.21)$$

si ottiene proprio l'operatore in questione.

L'equazione di Schroedinger ammette soluzioni esatte solo in alcuni casi particolari. Poichè siamo interessati allo studio delle sezioni d'urto, cioè a processi in cui lo stato finale del sistema può essere diverso da quello iniziale, è necessario far uso dell' equazione temporale. Ci limiteremo pertanto a presentare un metodo risolutivo approssimato del caso dipendente dal tempo.

### 15.3 Metodo della variazione delle costanti

Consideriamo il caso generale di un sistema con hamiltoniano  $H$  e supponiamo che quest'ultimo possa scindersi in due parti:  $H^0$  indipendente dal tempo, e  $H'$  dipendente dal tempo

$$H = H^0 + H' \quad (15.22)$$

Per capire il senso di questa approssimazione consideriamo il caso di una particella che subisca un processo di diffusione da parte di un atomo. Il termine  $H^0$  sarà l'hamiltoniano relativo alla situazione iniziale quando atomo e particella sono lontani fra loro e non interagiscono, mentre  $H'$  è relativo alla situazione in cui le due particelle sono vicine e stanno interagendo.

La funzione  $\Psi$  deve risolvere l'equazione

$$(H^0 + H')\Psi = \frac{i\hbar}{2\pi} \frac{\partial \Psi}{\partial t} \quad (15.23)$$

Siano  $\Psi_n^0(x, y, z, t)$  le soluzioni di tipo stazionario relative al caso iniziale imperturbato

$$H^0 \Psi_n^0 = E_n \Psi_n^0 \quad (15.24)$$

Possiamo esprimere (si veda la relazione 15.14) la soluzione  $\Psi$  più generale dell'equazione temporale come sviluppo in serie delle autofunzioni ortogonali complete  $\Psi_n^0$  del sistema di hamiltoniano  $H^0$

$$\Psi = \sum_n a_n(t) \Psi_n^0(x, y, z, t) \quad (15.25)$$

dove i coefficienti  $a_n(t)$  sono funzioni del tempo in quanto a causa della interazione lo stato finale rappresentato da una certa  $\Psi_k^0$  sarà diverso da quello iniziale rappresentato da una certa  $\Psi_n^0$ .

La quantità

$$|a_k(t)|^2 = a_k^*(t)a_k(t) \quad (15.26)$$

rappresenta la probabilità (detta di *transizione*) di determinare al tempo  $t$  lo stato  $\Psi_k^0$  del sistema che inizialmente stava nello stato  $(E_n, \Psi_n^0)$ .

Sia

$$\Psi_n^0 = u_n(x, y, z)e^{-\frac{2\pi i}{h}E_n t} \quad (15.27)$$

una soluzione stazionaria della equazione imperturbata ( $H^0$ ), si ha allora

$$\begin{aligned} \sum_n a_n(t)(H^0 + H')u_n(\bar{r})e^{-\frac{2\pi i}{h}E_n t} = \\ \frac{ih}{2\pi} \left[ \sum_n \dot{a}_n u_n e^{-\frac{2\pi i}{h}E_n t} + \sum_n a_n u_n \left(\frac{2\pi}{h i}\right) E_n e^{-\frac{2\pi i}{h}E_n t} \right] \end{aligned} \quad (15.28)$$

dalla quale essendo

$$H^0 \sum a_n \Psi_n^0 = \sum a_n H^0 \psi_n^0 = \sum a_n E_n \Psi_n^0 \quad (15.29)$$

si ottiene

$$H' \sum a_n u_n e^{-\frac{2\pi i}{h}E_n t} = \frac{ih}{2\pi} \sum \dot{a}_n u_n e^{-\frac{2\pi i}{h}E_n t} \quad (15.30)$$

Questa relazione rappresenta un sistema di equazioni differenziali cui soddisfano le  $a_n(t)$ . Per eliminare le sommatorie che vi compaiono, si moltiplicano ambo i membri per una generica autofunzione  $u_k^*$  e si integra su tutto lo spazio  $\tau$  tenendo conto della condizione di ortogonalità

$$\frac{ih}{2\pi} \dot{a}_k(t) e^{-\frac{2\pi i}{h}E_k t} = \sum_n a_n(t) e^{-\frac{2\pi i}{h}E_n t} \int_{\tau} u_k^* H' u_n d\tau \quad (15.31)$$

con  $(k = 1, 2, 3, \dots)$ . Questa può essere scritta con la notazione matriciale

$$H'_{kn} = \int_{\tau} u_k^* H' u_n d\tau \quad (15.32)$$

nella forma

$$\dot{a}_m(t) = \frac{2\pi}{ih} \sum H'_{kn} a_n(t) e^{\frac{2\pi i}{h}(E_k - E_n)t} \quad (15.33)$$

Si ottiene così per ciascuna  $a_k$ , un sistema di infinite equazioni differenziali che non si sa integrare esattamente. Si cerca pertanto una soluzione approssimata che tenga conto delle condizioni iniziali del problema. Sviluppiamo le  $a_n$  in serie

$$a_n(t) = a_n^{(0)} + a_n^{(1)} + \dots \quad (15.34)$$

dove le  $a_n^{(0)}$  rappresentano le  $a_n$  calcolate per lo stato iniziale ( $t = 0$ ). Questo significa che se inizialmente il sistema si trova nello stato  $n$ -esimo ( $E_n$  e  $\Psi_n^0$ ) avremo nella (15.25)

$$a_n^{(0)} = a_n(t = 0) = 1 \quad a_n^{(s+1)} = 0 \quad \text{per } s = 0, 1, 2.. \quad (15.35)$$

Supponendo che nell'intervallo di tempo  $0 - t$  lo stato del sistema vari poco ( $H'$  piccolo rispetto  $H^0$ ) avremo

$$\dot{a}_k(t)^{(0)} \simeq 0 \quad (15.36)$$

e

$$\dot{a}_k^{(s+1)} = \frac{2\pi}{i\hbar} \sum_n a_n^{(s)} H'_{kn} e^{\frac{2\pi i}{\hbar}(E_k - E_n)t} \quad (15.37)$$

con  $s = 0, 1, 2, 3, \dots$ . La prima di queste equazioni mostra che i coefficienti di ordine zero sono costanti nel tempo. Il loro valore sono le condizioni iniziali del problema che specificano lo stato del sistema prima che venga applicata la perturbazione. Assumiamo che tutti i coefficienti  $a_k^{(0)}$  meno uno siano nulli, così che il sistema sia in un definito stato imperturbato quando la perturbazione è applicata. Poniamo  $a_k^{(0)} = \delta_{km}$  a seconda che lo stato  $m$  appartenga ad un set discreto o continuo di valori. L'integrazione nel tempo dà

$$a_k^{(1)} = \frac{2\pi}{i\hbar} \int_0^t H'_{km}(t') e^{\frac{2\pi i}{\hbar}(E_k - E_m)t'} dt' \quad (15.38)$$

con ( $k = 1, 2, \dots$ ) e dove la costante di integrazione è assunta uguale a zero per  $t = 0$  (prima di applicare la perturbazione). Se  $H'$  è di durata finita, l'ampiezza dello stato  $u_k$  ( $k \neq m$ ) dopo che la perturbazione è scomparsa è proporzionale alla componente temporale di Fourier dell'elemento di matrice della perturbazione tra lo stato iniziale e finale.

Si possono ora considerare due casi a seconda che l'elemento di matrice  $H_{km}$  dipenda o meno dal tempo.

**Se  $H_{km}^0$  non dipende dal tempo**, la relazione (15.38) si integra facilmente ottenendo

$$a_k^{(1)} = \frac{H_{km}}{E_m - E_k} \left[ e^{\frac{2\pi i}{h}(E_k - E_m)t} - 1 \right] \quad (15.39)$$

La probabilità di transizione dallo stato iniziale  $m$  allo stato finale  $k$  è data da

$$|a_k^{(1)}(t)|^2 = \frac{4|H'_{km}|^2}{(E_k - E_m)^2} \sin^2 \frac{(E_k - E_m)t}{2(h/2\pi)} \quad (15.40)$$

Posto

$$\omega_{km} = 2\pi \frac{E_k - E_m}{h} \quad (15.41)$$

essa diventa

$$|a_k^{(1)}(t)|^2 = \frac{4|H'_{km}|^2}{h^2 \omega_{km}^2} \sin^2 \frac{\omega_{km} t}{2} \quad (15.42)$$

Da questa relazione traspare che il significato fisico degli elementi di matrice non diagonali  $H'_{km}$  è legato alla transizione tra due stati corrispondenti ai due indici che li individuano. Inoltre la dipendenza dall'energia delle  $|a_k^{(1)}(t)|^2$  è data dal fattore

$$\frac{1}{\omega_{km}^2} \sin^2 \frac{\omega_{km} t}{2} = \frac{\sin^2 \frac{\omega_{km} t}{2}}{\frac{\omega_{km}^2 t^2}{4}} \left( \frac{t^2}{4} \right) \quad (15.43)$$

il cui andamento è mostrato in Figura 15.1 in funzione di  $\omega_{km}$  per un fissato valore di  $t$ . La funzione è massima per  $\omega_{km} = 0$  dove vale  $t^2/4$ , decade rapidamente a  $\omega_{km} = \pm 2\pi/t$ , ed ha dei minimi a  $\omega_{km} = \pm n2\pi/t$  con  $n = 1, 2, \dots$

La transizione più probabile è quella per  $\omega_{km} = 0$  e cioè  $E_k = E_m$ . Questo significa che la transizione più probabile è quella che conserva l'energia totale del sistema (si noti che la legge di conservazione dell'energia è una conseguenza delle considerazioni fatte e non una imposizione a priori). Inoltre questo è tanto più vero quanto maggiore è l'intervallo di tempo trascorso fra le misure degli stati  $k$  e  $m$ , in quanto il massimo della curva è proporzionale a  $t^2$ , mentre la larghezza del picco diminuisce con  $1/t$  (in accordo con il principio di indeterminazione tra energia e tempo).



Figura 15.1: Andamento della  $|a_k^{(1)}(t)|^2$  in funzione di  $\omega_{km}$  ad fissato valore di  $t$

Ancora ad ogni valore delle ascisse corrisponde una  $|a_k^{(1)}|^2$ , e ogni ordinata è proporzionale a  $t^2$ , mentre ci aspetteremmo di trovare che  $|a_k^{(1)}|^2/t$  (probabilità di transizione per unità di tempo) non dipenda dal tempo. Infine non si sa per un dato  $t$  quale ordinata scegliere. In realtà non ha senso andare a vedere cosa succede all'interno del massimo, in quanto in tutti i problemi in cui si fa uso del metodo descritto, il sistema possiede un gruppo di stati finali  $k$  che hanno energie circa uguali a quella dello stato iniziale e per i quali  $H'_{km}$  varia lentamente al variare di  $k$  ed è quindi impossibile distinguerli sperimentalmente. In realtà ciò che è suscettibile di misura sarà solo la probabilità di trovare il sistema in uno qualunque degli stati finali  $k$ .

Pertanto se c'è un gruppo di stati finali  $k$  che hanno energie uguali (quasi uguali) a quella dello stato iniziale e per i quali  $H'_{km}$  è indipendente da  $t$ , allora la probabilità di trovare il sistema in uno qualunque di questi stati è proporzionale a  $t$ . Questa è una situazione fisicamente interessante in quanto ciò di cui abbiamo bisogno è la probabilità di transizione per unità di tempo e questo implica che la probabilità che una transizione abbia luogo sotto l'effetto di una perturbazione di durata  $t$  è proporzionale a  $t$

Pertanto la probabilità di transizione per unità di tempo

$$W = \frac{\sum_k |a_k^{(1)}|^2}{t} \quad (15.44)$$

**non dipende da  $t$ .**

Per calcolare  $W$ , consideriamo un gruppo continuo di stati finali di energia  $E_k \simeq E_m$ ; ognuno di questi stati dovrà essere considerato con un certo peso statistico che rappresenti il numero di stati contenuti in  $E_k + dE_k$ . Se  $\rho(E_k)$  è la densità di stati finali, il suddetto numero di stati è  $\rho(E_k)dE_k$ . Il valore  $\rho(E_k)$  si calcola descrivendo la particella incidente nello stato iniziale con un'onda piana di vettore di propagazione  $\bar{k}$  per cui avremo

$$\rho(E_k)dE_k = \frac{4\pi k^2}{h^3} dk = dn \quad (15.45)$$

dove

$$E_k = \frac{p^2}{2m} = \left(\frac{h}{2\pi}\right)^2 \frac{k^2}{2m} \quad (15.46)$$

è l'energia dello stato finale uguale a quello iniziale. Supponiamo inoltre che  $\rho(E_k)$  vari lentamente con  $k$ . Sostituendo la sommatoria con un integrale si ottiene

$$W = \frac{1}{t} \int_{-\infty}^{+\infty} |a_k^{(1)}(t)|^2 \rho(E_k) dE_k \quad (15.47)$$

Ricordando che

$$dE_k = \frac{2\pi d\omega_{km}}{h} \quad (15.48)$$

si deriva

$$W = \frac{8\pi}{h} \left(\frac{1}{t}\right) \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{|H'_{km}|^2}{\omega_{km}^2} \rho(E_k) \sin^2\left(\frac{\omega_{km}}{2}t\right) d\omega_{km} \quad (15.49)$$

Posto  $y = \omega_{km}t$  l'integrale diventa

$$W = \frac{8\pi}{h} \int_{-\infty}^{+\infty} |H'_{km}|^2 \rho(E_k) \frac{\sin^2 y}{y^2} dy \quad (15.50)$$

L'integrale si risolve assumendo per  $H'_{km}$  e  $\rho(E_k)$  il valore che essi hanno al massimo, per cui

$$W = \frac{8\pi}{h} \left[ |H'_{km}|^2 \rho(E_k) \right]_{\omega_{km}} \times \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin^2 y}{y^2} dy \quad (15.51)$$

nella quale l'integrale definito vale  $\pi/2$ . Ne segue che

$$W = \frac{4\pi^2}{h} [ |H'_{km}|^2 ]_{(\omega_{km}=0)} \rho(E_k) \quad (15.52)$$

che non dipende dal tempo.

## 15.4 Trattazione semiclassica della radiazione

Il metodo descritto in precedenza ci permette di calcolare l'opacità di un determinato processo mediante le relazioni

$$\sigma = \frac{L^3 W}{v} \quad \kappa = \frac{\sigma}{AH} \quad (15.53)$$

una volta determinata la  $W$ . La trattazione rigorosa di questo problema richiede l'uso di una teoria quantistica per la radiazione (teoria dei campi) di difficile formulazione. Il problema viene superato ricorrendo alla trattazione semiclassica della radiazione e utilizzando il formalismo quantistico solo per il sistema atomico.

L'hamiltoniano classico di una particella che interagisce con un campo elettromagnetico è dato da

$$H = \frac{1}{2m} \sum_{x=1}^3 (P_x - \frac{e}{c} A_x)^2 + U \quad (15.54)$$

dove  $\mathbf{P}$  è il momento e  $\mathbf{A}$  è il potenziale vettore del campo elettromagnetico. Per passare dalla trattazione classica a quella quantistica si compie la sostituzione

$$P_x \quad \text{con} \quad \frac{h}{2\pi i} \frac{\partial}{\partial x} \quad (15.55)$$

e l'operatore ottenuto viene applicato alla  $\Psi$ .

L'equazione a cui deve soddisfare la  $\Psi$  è l'equazione temporale con

$$H = \frac{1}{2m} \sum_x \left( \frac{h}{2\pi i} \frac{\partial}{\partial x} - \frac{e}{c} A_x \right)^2 + U \quad (15.56)$$

$$H = -\frac{1}{2m} \frac{h^2}{(2\pi)^2} \Delta - \frac{h}{2\pi m i} \frac{e}{c} \sum_x A_x \frac{\partial}{\partial x} + \frac{1}{2m} \left( \frac{e}{c} \right)^2 \sum_x A_x^2 + U \quad (15.57)$$

Scriviamo ora l'hamiltoniano nella forma

$$H = H^0 + H' \quad (15.58)$$

con  $H^0$  (parte imperturbata) data da

$$H^0 = -\frac{1}{2m} \frac{h^2}{(2\pi)^2} \Delta + U \quad (15.59)$$

e con  $H'$  (parte perturbativa) data da

$$H' = -\frac{he}{2\pi mic} \bar{A} \cdot \bar{\nabla} + \frac{e^2}{2mc^2} |\bar{A}|^2 \quad (15.60)$$

In approssimazione non relativistica il termine con  $c^2$  al denominatore è trascurabile rispetto agli altri, per cui rimane

$$H' = -\frac{he}{2\pi mic} \bar{A} \cdot \bar{\nabla} \quad (15.61)$$

Come caso semplice consideriamo il potenziale vettore  $\mathbf{A}$  di onda piana e cioè

$$\bar{A} = \bar{A}_0 \cos(\bar{k} \cdot \bar{r} - \omega t) = \bar{A}_0 \frac{e^{i(\bar{k} \cdot \bar{r} - \omega t)} + e^{-i(\bar{k} \cdot \bar{r} - \omega t)}}{2} \quad (15.62)$$

dove  $\mathbf{k}$  è il vettore di propagazione (con  $|\mathbf{k}| = 2\pi/\lambda$  e  $\bar{A}_0$  vettore di polarizzazione). Sostituendo si ottiene per  $H'$

$$H' = -\frac{he}{2\pi mic} \frac{e^{i(\bar{k} \cdot \bar{r} - \omega t)} + e^{-i(\bar{k} \cdot \bar{r} - \omega t)}}{2} \bar{A}_0 \cdot \bar{\nabla} \quad (15.63)$$

Per calcolare la probabilità di transizione  $W$  tra uno stato iniziale  $m$  ed uno finale  $k$ , è necessario calcolare l'elemento di matrice  $H'_{km}$  dato da

$$H'_{km} = \int_{\tau} u_k^* H' u_m d\tau \quad (15.64)$$

Nel nostro caso abbiamo

$$H'_{km} = -\frac{eh}{4\pi mic} \left[ \int_{\tau} u_k^* e^{i(\bar{k} \cdot \bar{r} - \omega t)} \bar{A}_0 \cdot \bar{\nabla} u_m d\tau + \int_{\tau} u_k^* e^{-i(\bar{k} \cdot \bar{r} - \omega t)} \bar{A}_0 \cdot \bar{\nabla} u_m d\tau \right] \quad (15.65)$$

che può essere posto nella forma compatta

$$H_{km} = H_{km}^{(1)} e^{-i\omega t} + H_{km}^{(2)} e^{i\omega t} \quad (15.66)$$

dove  $H_{km}^{(1)}$  e  $H_{km}^{(2)}$  sono due fattori che non dipendono da  $t$  e che sono dati da



$$H'_{km}(1) = -\frac{eh}{4\pi mic} \int_{\tau} u_k^* e^{-i(\vec{k} \cdot \vec{r})} \vec{A}_0 \cdot \vec{\nabla} u_m d\tau \quad (15.67)$$

$$H'_{km}(2) = \frac{eh}{4\pi mic} \int_{\tau} u_k^* e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r})} \vec{A}_0 \cdot \vec{\nabla} u_m d\tau \quad (15.68)$$

Osserviamo che nella (15.66) l'elemento di matrice  $H'_{km}$  dipende sinusoidalmente dal tempo. Nella sezione precedente abbiamo fatto l'ipotesi che  $H'_{km}$  non dipendesse dal tempo per cui i risultati allora ottenuti devono essere ora modificati.

Sostituendo la (15.65) nella espressione per  $\dot{a}_k^{(1)}$  data da

$$\frac{h}{2\pi i} \dot{a}_k^{(1)} = \sum_n a_n^{(0)}(t) H'_{kn} e^{i\omega_{nk}t} = H'_{km} e^{i\omega_{mk}t} \quad (15.69)$$

si ottiene

$$\frac{h}{2\pi i} \dot{a}_k^{(1)} = H'_{km}(1) e^{i(\omega_{mk}-\omega)t} + H'_{km}(2) e^{i(\omega_{mk}+\omega)t} \quad (15.70)$$

Questa equazione si integra facilmente ottenendo

$$a_k^{(1)} = \frac{H'_{km}(1)}{h} \frac{e^{-i(\omega_{mk}-\omega)t} - 1}{\omega_{mk} - \omega} + \frac{H'_{km}(2)}{h} \frac{e^{-i(\omega_{mk}+\omega)t} - 1}{\omega_{mk} + \omega} \quad (15.71)$$

I due termini di questa relazione sono sensibilmente diversi da zero solo nell'intorno di  $\omega = \omega_{mk}$  e  $\omega = -\omega_{mk}$ . Pertanto è lecito nel calcolo di  $|a_k^{(1)}(t)|^2$  trascurarne il prodotto misto, in quanto l'uno è importante dove l'altro è trascurabile e viceversa. Avremo quindi

$$|a_k^{(1)}(t)|^2 = \frac{4|H'_{km}(1)|^2}{h^2} \frac{\sin^2(\frac{\omega_{mk}-\omega}{2}t)}{(\omega_{mk}-\omega)^2} + \frac{4|H'_{km}(2)|^2}{h^2} \frac{\sin^2(\frac{\omega_{mk}+\omega}{2}t)}{(\omega_{mk}+\omega)^2} \quad (15.72)$$

Questa relazione è mostrata in Figura 15.2. La probabilità di transizione è massima per

$$\omega = \pm\omega_{km} = \pm \frac{E_k - E_m}{(h/2\pi)} \quad (15.73)$$

Posto  $\omega = 2\pi\nu$ , la prima ci dice che la transizione più probabile per un sistema atomico, posto in un campo di radiazione incidente di frequenza  $\nu$ , è quella tra gli stati  $E_k$  e  $E_m$  per cui vale la

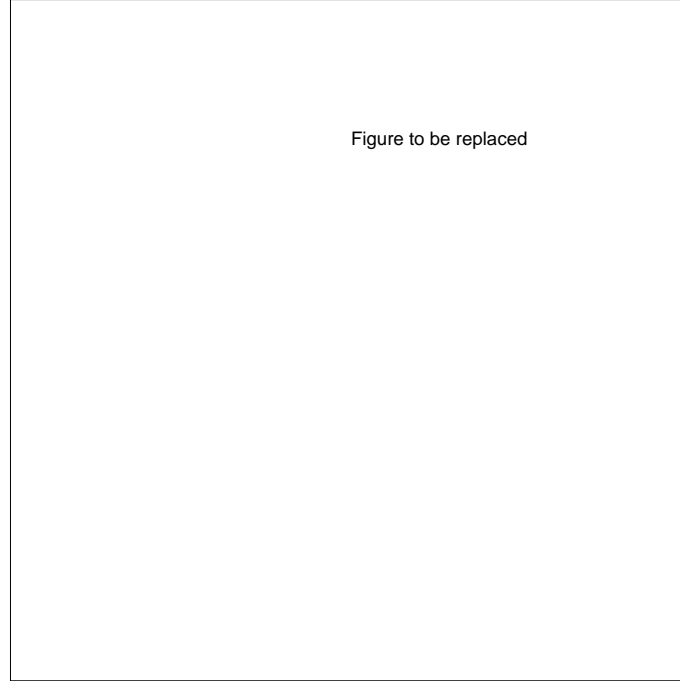


Figura 15.2: Andamento della funzione  $|a_k^{(1)}(t)|^2$  della relazione (9.72)

$$\nu_{km} = \frac{E_k - E_m}{h} \quad (15.74)$$

la quale esprime la legge di Bohr, la quale ora appare come una conseguenza della teoria discussa e non un postulato introdotto a priori. Nel secondo caso invece ( $\omega = -\omega_{km}$ ), la massima probabilità si ha per la transizione inversa a quella precedente, cioè per la *emissione indotta* di un fotone con frequenza

$$\nu_{mk} = \frac{E_m - E_k}{h} \quad (15.75)$$

da parte del sistema atomico.

Questo formalismo spiega simultaneamente i fenomeni dell'emissione indotta e dell'assorbimento.

Per il calcolo della probabilità di transizione per unità di tempo  $W$ , vale il ragionamento già fatto in precedenza, per cui si ha

$$W = \frac{1}{t} \int_{-\infty}^{+\infty} |a_k^{(1)}(t)|^2 \rho(E_k) dE_k \quad (15.76)$$

Si dimostra con semplici passaggi che la probabilità per unità di tempo relativa al caso dell'assorbimento è data da

$$W_a = \frac{4\pi^2 e^2}{m^2 c} \frac{\omega_{km}^2 |A_0|^2}{8c\omega_{km}} \left| \int_{\tau} u_k^* e^{-i\vec{k} \cdot \vec{r}} \vec{A}_0 \cdot \vec{\nabla} u_m d\tau \right|_{\omega=\omega_{km}}^2 \quad (15.77)$$

Per l'emissione indotta si ottiene una espressione analoga dove però  $\omega_{km}$  è sostituita da  $\omega_{mk}$ .

## 15.5 Transizione di dipolo elettrico

Le autofunzioni  $u_m$  ed  $u_k$  del sistema atomico negli stati stazionari  $k$  e  $m$  sono sensibilmente diverse da zero solo all'interno dell'atomo e divengono trascurabili per  $r > r_0$  dove  $r_0$  è il raggio della prima orbita di Bohr (circa  $0.5 \cdot 10^{-8}$  cm). Se la radiazione è nella banda ottica, il numero d'onda  $|\vec{k}| \simeq 10^5$ , per cui per  $r < r_0$ , l'esponente  $\vec{k} \cdot \vec{r}$  è dell'ordine di  $10^{-3}$ . Pertanto si può sviluppare in serie l'esponenziale

$$e^{\pm i\vec{k} \cdot \vec{r}} = 1 \pm i\vec{k} \cdot \vec{r} + \frac{1}{2!} (i\vec{k} \cdot \vec{r})^2 + \dots \quad (15.78)$$

e considerare solo il primo termine. L'integrale nella (15.77) assume la forma

$$\int_{\tau} u_k^* \vec{A}_0 \cdot \vec{\nabla} u_m d\tau = \int_{\tau} u_k^* \vec{\nabla}_A u_m d\tau \quad (15.79)$$

dove  $\vec{\nabla}_A$  rappresenta la componente del gradiente nella direzione di  $\vec{A}_0$ . Poichè  $(\nabla)_x = \frac{\partial}{\partial x}$  e  $P_x = \frac{\hbar}{2\pi i} \frac{\partial}{\partial x}$ , vale la relazione

$$(\nabla)_x = \frac{2\pi i}{\hbar} P_x \quad (15.80)$$

sostituendo tale relazione nella precedente si ha

$$\int_{\tau} u_k^* \vec{\nabla}_A u_m d\tau = \frac{2\pi i}{\hbar} \int_{\tau} u_k^* P_A u_m d\tau \quad (15.81)$$

dove  $P_A$  rappresenta la componente del momento  $\vec{P}$  nella direzione di  $\vec{A}$ . Ricordando ancora che

$$\vec{P} = m\vec{v} = m \frac{d\vec{r}}{dt} \quad (15.82)$$

si ottiene

$$\int_{\tau} u_k^* \vec{\nabla}_A u_m d\tau = \frac{m2\pi i}{\hbar} \int_{\tau} u_k^* P_A u_m d\tau \quad (15.83)$$

In meccanica quantistica si dimostra che vale la relazione

$$\frac{d}{dt} \int_{\tau} u_k^* r_A u_m d\tau = i\omega_{km} \int_{\tau} u_k^* r_A u_m d\tau \quad (15.84)$$

per cui in definitiva l'integrale diviene

$$\int_{\tau} u_k^* \nabla_A u_m d\tau = -\frac{m\omega_{km}}{h} \int_{\tau} u_k^* r_A u_m d\tau \quad (15.85)$$

e la probabilità  $W$  per l'assorbimento è data da

$$W_a = \frac{e^2 \pi^2 \omega_{km}^2 |A_0|^2}{ch^2 8c} \left| \int_{\tau} u_m^* r_A u_k d\tau \right|_{\omega=\omega_{km}} \quad (15.86)$$

Se si porta  $e^2$  dentro l'integrale si ottiene un termine  $(er_A)$  che rappresenta un momento elettrico nella direzione  $A_0$  di polarizzazione della radiazione incidente. La trattazione ottenuta considerando solo il primo termine dello sviluppo in serie è detta *transizione di dipolo elettrico*.

Se risulta che

$$\int_{\tau} u_k^* (er_A) u_m d\tau = 0 \quad (15.87)$$

la probabilità di transizione di dipolo è nulla. Non è detto tuttavia che la transizione sia proibita in quanto esistono gli altri termini dello sviluppo. Le probabilità che si ottengono usando i termini successivi vengono dette di quadrupolo, ottupolo, etc.

Se la  $W$  è nulla per tutte le approssimazioni successive di  $e^{\pm \vec{k} \cdot \vec{r}}$  si dice che la *transizione è rigorosamente proibita*.

## 15.6 Regole di selezione

In questa sezione si mostra come le regole di selezione che sono state trovate empiricamente dallo studio degli spettri atomici, siano in realtà conseguenza del formalismo quantistico.

Le soluzioni della equazione stazionaria di Schroedinger per il moto di una particella sotto un potenziale  $U(r)$  a simmetria sferica e funzione solo di  $r$  si separano in due parti, radiale ed angolare

$$u(r, \theta, \phi) = R(r)Y(\theta, \phi) \quad (15.88)$$

dove  $Y(\theta, \phi)$  è una funzione degli angoli  $\theta$  e  $\phi$  che dipende dai numeri quantici  $l$  (quanto azimutale) ed  $m$  (quanto magnetico) ed è comune a tutti i problemi a simmetria sferica. Essa può a sua volta essere separata in

$$Y(\theta, \phi) = P_{l,m}(\cos\theta)\Phi_m(\phi) \quad (15.89)$$

dove gli indici indicano la dipendenza di ogni singola componente dai numeri quantici. La funzione  $R(r)$  dipende invece dalla forma esplicita del potenziale  $U(r)$ .

Nel caso di sistemi idrogenoidi (nucleo centrale di carica  $Ze$  e un solo elettrone), la funzione  $R(r)$  dipende da un altro numero quantico,  $n$  (detto quanto principale) e da  $l$  per cui i sistemi idrogenoidi hanno autofunzioni del tipo

$$u_{n,l,m}(r, \theta, \phi) = R_{n,l}(r)P_{l,m}(\cos\theta)\Phi_m(\phi) \quad (15.90)$$

Le funzioni  $P_{l,m}$  sono dette polinomi di Legendre e godono della seguenti proprietà

$$\cos(\theta)P_{l,m}(\cos\theta) = \frac{1+|m|}{2l+1}P_{(l-1),m}(\cos\theta) + \frac{1-|m|}{2l+1}P_{(l+1),l}(\cos\theta) \quad (15.91)$$

$$\int_{-1}^{+1} P_{m,l}(\cos\theta)P_{m,l'}(\cos\theta)d\cos\theta = \delta_{l,l'} \quad (15.92)$$

(ortogonalità dei polinomi).

La funzione  $\Phi$  è data semplicemente da

$$\Phi_m(\phi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{im\phi} \quad (15.93)$$

Premesso questo, consideriamo la probabilità  $W$  relativa alla transizione  $m \rightarrow k$ . Essa è nulla se l'integrale (15.87) è nullo. Assumendo l'asse  $z$  come direzione di polarizzazione e ricordando che  $z = r\cos\theta$ , questa condizione si esprime

$$\int_{\tau} u_k^* r\cos\theta u_m d\tau = 0 \quad (15.94)$$

ovvero

$$\int_0^{\infty} r^3 R_{n,l}(r)R_{n',l'}dr \int_0^{\pi} \int_0^{2\pi} Y_{l,m}(\theta, \phi)\cos\theta \cdot Y_{l',m'}(\theta, \phi)\sin\theta d\theta d\phi = 0 \quad (15.95)$$

dove  $n, l, m$  sono i numeri quantici dello stato finale e  $n', l', m'$  quelli dello stato iniziale del sistema.

Sostituendo le (15.89) e (15.93) nella (15.95) l'integrazione rispetto a  $\phi$  diventa

$$\int_0^{2\pi} e^{i(m'-m)\phi} d\phi \quad (15.96)$$

che è sempre nulla tranne quando  $m = m'$  ed in tal caso vale  $2\pi$ .

*Sono proibite tutte le transizioni tra due stati aventi numeri quantici magnetici diversi.*

Posto  $m = m'$  nella (15.95) e tenuto conto della (15.91), si trova che l'integrazione rispetto a  $\theta$  conduce (a parte dei fattori numerici) alla

$$\int_0^\pi (P_{m,l'} \cdot P_{m,(l-1)} + P_{m,l'} \cdot P_{m,(l+1)}) \sin\theta d\theta \quad (15.97)$$

che a causa della ortogonalità dei polinomi di Legendre è nullo a meno che  $l' = l \pm 1$ .

*Sono permesse le transizioni fra due stati solo se i relativi numeri quantici azimutali  $l$  e  $l'$  sono legati dalla*

$$l' = l \pm 1 \quad (15.98)$$

L'integrazione rispetto ad  $r$  non porta ad alcuna regola di selezione per il quanto principale  $n$ . Essa fornisce l'intensità effettiva di una certa transizione.

## 15.7 Opacità della materia stellare

Nota la probabilità di transizione di un certo processo, è allora possibile risalire all'opacità relativa. Come già ricordato esistono numerosi processi fisici responsabili dell'opacità stellare e la trattazione completa degli stessi è estremamente complessa. In quanto segue daremo una presentazione semplice di alcuni processi tipici allo scopo di chiarire il metodo da seguire.

Sono presi in esame i seguenti processi:

- (1) assorbimento legato-legato (bound-bound) o eccitazione.
- (2) assorbimento legato-libero (bound-free) o fotoionizzazione.
- (3) assorbimento libero-libero (free-free).

- (4) scattering da parte di elettroni liberi (Compton nel caso relativistico o Thomson nel caso non relativistico).

### (1) Assorbimento legato-legato

Questo fenomeno è stato in pratica già ampiamente discusso nei paragrafi precedenti, dove abbiamo ottenuto la probabilità di transizione e le regole di selezione. Si è anche messo in evidenza che nel calcolo della  $W_a$  il contributo effettivo è dato dalla funzione  $R_{n,l}(r)$ . Tuttavia la relazione per la  $W_a$  deve essere lievemente modificata per tener conto che tutti gli stati eccitati hanno una vita media finita  $\tau$  e che questo comporta una indeterminazione dell'energia del livello eccitato dettata dal Principio di Indeterminazione (in quanto  $\tau$  rappresenta l'indeterminazione nel tempo con cui lo stato può essere localizzato). La corrispondente indeterminazione nell'energia è data dalla relazione

$$\Gamma \cdot \tau = \frac{h}{2\pi} \quad (15.99)$$

Tenendo conto di questo fatto, la sezione d'urto effettiva sarà data da

$$\int_{\Delta\omega} \sigma(\omega) d\omega \quad (15.100)$$

dove  $\Delta\omega$  è un piccolo intervallo di frequenze di larghezza dell'ordine di  $\frac{2\pi\Gamma}{h}$  attorno alla frequenza effettiva.

### (2) Assorbimento legato-libero

Questo fenomeno come il precedente è tipico degli atomi, in genere i metalli, che ad una data temperatura possiedono ancora degli elettroni legati. Al crescere della temperatura anche gli atomi più pesanti presenti nelle stelle possono essere completamente ionizzati cosicchè i fenomeni (1) e (2) non avvengono.

Per studiare il processo legato-libero consideriamo un atomo con un solo elettrone nello stato fondamentale. Affinchè si abbia ionizzazione occorre che l'energia del fotone incidente sia tale da soddisfare la legge di conservazione

$$h\nu = \chi + \frac{p^2}{2m} \quad (15.101)$$

dove  $\chi$  è l'energia di legame dell' elettrone e  $p^2/2m$  è la sua energia cinetica dopo essere stato ionizzato. Esiste pertanto una frequenza di soglia per avere la ionizzazione dall livello considerato, cioè  $\sigma = 0$  se  $h\nu < \chi$ . Inoltre la sezione

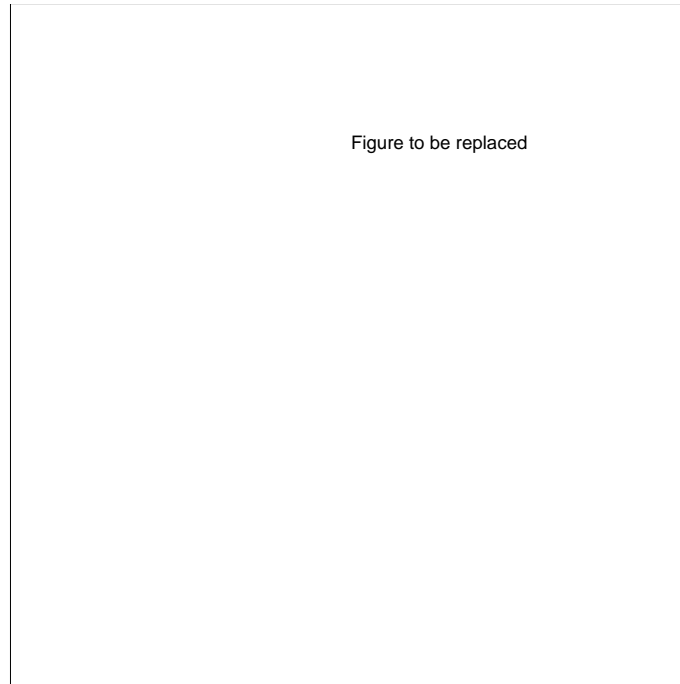


Figura 15.3: Andamento della sezione d'urto  $\sigma$  dei processi legato-libero in funzione della frequenza della radiazione incidente

d'urto varierà lentamente per  $h\nu > \chi$ , in quanto l'elettrone una volta ionizzato può avere una qualunque energia cinetica.

Se supponiamo che l'elettrone sia in uno stato eccitato, si avranno allora varie frequenze di soglia, corrispondenti ai diversi livelli energetici. La situazione tipica è mostrata in Figura 15.3, dove si nota la presenza dei picchi dovuti alle diverse energie di estrazione. Sperimentalmente si trova che la sezione d'urto relativa all'intervallo di frequenze fra due picchi successivi è rappresentata analiticamente dalla relazione

$$\sigma = CZ^4\lambda^3 + B \quad (15.102)$$

dove le costanti  $C$  e  $B$  dipendono dai livelli considerati.

La Figura 15.3 mostra il caso di una sola specie atomica. Si capisce che in presenza di numerose specie atomiche la situazione diventi molto complicata.

Allo scopo di calcolare la sezione d'urto  $\sigma$  si procede nel seguente modo: si considera un solo tipo di atomo ed un particolare livello energetico cosicché sia possibile calcolare la sezione d'urto nel modo consueto. Esiste subito una difficoltà: in breve l'elettrone ionizzato è rappresentabile con un'onda piana solo



quando la sua velocità è molto grande per cui esso risente poco dell'interazione con il campo coulombiano del nucleo; tuttavia si vede dalla (\*\*) che la velocità dell'elettrone è tanto maggiore quanto più lontano dalla soglia dove però la sezione d'urto è piccola, il contrario vicino alla soglia. Pertanto la rappresentazione in onda piana (approssimazione di Born) è lecita solo lontano dalla soglia, ma non vicino ad essa, dove è necessario usare un altro metodo.

Nella rappresentazione di Born, la sezione d'urto totale è data da

$$\sigma_{tot} = cost \cdot \frac{Z^5 k^3}{\nu^5} \quad (15.103)$$

dove  $\bar{k}$  è il numero d'onda dell'elettrone

$$|\bar{k}|^2 = \frac{|\bar{P}|^2}{h^2} \quad (15.104)$$

e  $\nu$  è la frequenza del fotone.

Si dimostra in modo alquanto laborioso che quando  $h\nu \gg \chi$  la frequenza  $\nu$  è proporzionale a  $k^2$  per cui la (15.103) si riduce a

$$\sigma_{tot} = cost \cdot Z^5 \lambda^{7/2} \quad (15.105)$$

Questo risultato non coincide con quello sperimentale. Le cose vengono aggiustate scrivendo

$$\sigma_{tot} = cost \cdot Z^5 \lambda^3 \lambda^{1/2} \quad (15.106)$$

Ricordando che il valore di  $\lambda_K$  relativo al moto dell'elettrone nell'orbita  $K$  (livello fondamentale) è data da

$$\frac{hc}{\lambda_K} = \frac{Z^2 e^2}{2r_0} \quad (15.107)$$

con  $r_0$  il raggio di Bohr ( $r_0 = h^2/me^2$ ), vicino alla soglia dove la sezione d'urto è grande si ha (sostituendo  $\lambda^{1/2}$  con  $\lambda_K^{1/2}$ )

$$\sigma_{tot} = cost \cdot Z^4 \lambda^3 \quad (15.108)$$

che coincide con la (15.102).

Correggendo per l'effetto vicino alla soglia (dimostrazione molto complessa) si trova che la sezione d'urto dell'assorbimento legato-libero è data dalla seguente relazione

$$\sigma_{bf} = \frac{64\pi^4 m e^4 [10]}{3\sqrt{3} c h^6} \frac{Z^4}{n^5} \frac{g_{\nu,n,l,Z}}{\nu^3} \quad (15.109)$$

dove il fattore  $g_{\nu,n,l,Z}$  è detto *fattore di Gaunt* e il suo valore dipende dallo stato iniziale dell'elettrone e varia lentamente al variare di  $\nu$ . Si dimostra che il fattore di Gaunt per atomi idrogenoidi vale circa uno vicino alla soglia (frequenza di maggior interesse).

Questo risultato vale per un dato atomo e dato livello energetico: occorre pertanto calcolare la  $\sigma$  per i vari livelli e i vari tipi di atomi, ottenendo infine la *sezione d'urto complessiva* tramite la quale si calcola la  $W$ . La sezione d'urto complessiva è data dalla media pesata delle singole  $\sigma$  relative ai vari elementi.

### (3) Assorbimento libero-libero

Il processo consiste nell'assorbimento di un fotone da parte di un elettrone libero in presenza di un campo coulombiano (nucleo). La presenza del nucleo è necessaria per la simultanea conservazione dell'energia e del momento.

L'elemento di matrice  $H'_{km}$  deve essere calcolato facendo uso di un hamiltoniano di interazione che tenga conto dell'interazione coulombiana e dell'interazione dell'elettrone con il campo elettromagnetico (fotone assorbito). Si dimostra che non sono possibili reazioni in cui venga assorbito (o emesso) più di un solo fotone alla volta, per cui dovendo l'elettrone interagire (scambiando fotoni) sia col campo coulombiano che con quello radiativo, è necessario considerare un processo a due tempi: (a) un elettrone libero viene prima deviato dal campo coulombiano; (b) in seguito esso assorbe un solo fotone dal campo radiativo. È vero anche il processo inverso. I due processi sono rappresentati dai digrammi di Feynmann di Figura 15.4.

Entrambi i processi richiedono uno stato intermedio (due vertici nei diagrammi di Feynmann) per cui è necessario fare uso dell'approssimazione al secondo ordine in quanto al primo ordine  $H'_{km} = 0$  (si rimanda ad un testo di Fisica Teorica). La probabilità di transizione è data da

$$W = \frac{(2\pi)^2}{h} \rho(E_m) \left| \frac{\sum_n H'_{nm} \cdot H'_{kn}}{\omega_{nm}} + \frac{\sum_n H'_{pm} \cdot H'_{kp}}{\omega_{pm}} \right|^2 \quad (15.110)$$

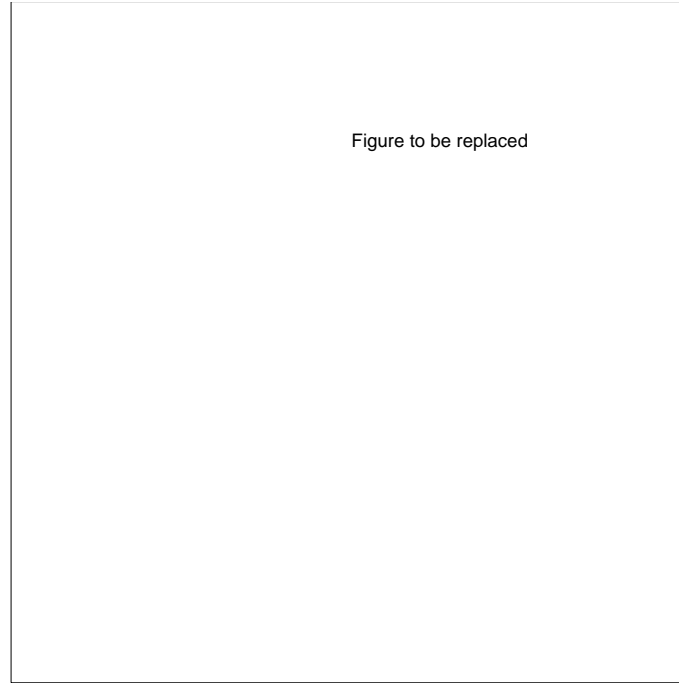


Figura 15.4: Diagramma di Feynmann del processo libero-libero

dove sono sommati i contributi dei due stadi e due modi. Si noti che in ognuno dei due processi lo stadi intermedio è diverso con una diversa  $W$ . L'esperienza conferma che il risultato giusto è quello dato dalla somma delle due  $W$  nel modo indicato. Un aspetto interessante del problema è che la conservazione dell'energia può essere violata nello stato intermedio, in quanto esso esiste per un tempo brevissimo e quindi con una grande indeterminazione dell'energia. Senza dare la dimostrazione si trova che la sezione d'urto differenziale per l'assorbimento libero-libero in caso non relativistico è data da

$$d\sigma_{ff} = \frac{4\pi}{3\sqrt{3}hc} \frac{Z^2 e^6}{m^2} \frac{1}{v} \frac{1}{\nu^3} n_e(v) g_{ff}(v, \nu) dv \quad (15.111)$$

dove  $v$  è la velocità dell'elettrone,  $n_e(v)$  è la legge di distribuzione delle velocità degli elettroni,  $Z$  è la carica dello ione che genera il campo coulombiano, e  $g_{ff}(v, \nu)$  è il cosiddetto fattore di Gaunt per le transizioni libero-libero; esso dipende dalla velocità dell'elettrone e dall'energia del fotone assorbito.

Se si suppone che il gas di elettroni sia non degenere,  $n_e(v)dv$  è data dalla legge di Maxwell delle velocità.

La sezione d'urto media per fotoni di frequenza  $\nu$  è allora

$$\bar{\sigma}_{ff}(Z, \nu) = \int_0^\infty ds_{ff} = \text{cost} \cdot \frac{Z^2 n_e}{(KT)^{1/2} \nu^3} \bar{g}_{ff} \quad (15.112)$$

dove  $n_e$  è la densità numerica di elettroni, e  $\bar{g}_{ff}$  è mediato sulla temperatura. Si trova che nella maggior parte dei casi di interesse  $\bar{g}_{ff} \simeq 1$ .

L'opacità effettiva si deriva dalla  $\kappa = \sigma/AH$  moltiplicando la precedente per il numero di ioni di tipo  $Z$  presenti e sommando su  $Z$ . Essa deve essere sommata alle opacità dei processi (1) e (2) prima di effettuare la media sulle frequenze richiesta dalla (\*\*).

In certe situazioni la sorgente libero-libero domina su tutte le altre per cui è interessante calcolarne la media di Rosseland separatamente. Senza dimostrarlo si ottiene

$$\bar{\kappa}_{ff} = \text{cost} \cdot \frac{\rho}{T^{3.5}} \quad (15.113)$$

detta **legge di Kramers**.

Infine si noti che nei processi legato-libero idrogeno ed elio non danno in pratica contributo in quanto già totalmente ionizzati (a parte le regioni esterne), per cui  $\kappa_{bf}$  dipenderà essenzialmente dalla abbondanza degli elementi pesanti  $Z$ . Per i processi libero-libero invece tutti gli elementi contribuiscono allo stesso modo, ma essendo i metalli molto meno abbondanti di idrogeno ed elio, l'opacità  $\kappa_{ff}$  sarà legata essenzialmente alla somma  $(X+Y)$ .

Si può infine vedere che per una miscela con composizione  $(X, Y, Z)$

$$\bar{\kappa}_{ff} = 10^{22} (X + Y) \cdot \frac{\rho}{T^{3.5}} \quad (15.114)$$

$$\bar{\kappa}_{bf} = 10^{25} \frac{Z\rho}{T^{3.5}} \quad (15.115)$$

#### (4) Scattering

Questo tipo di opacità è sempre presente quando ci sono elettroni liberi, ma a causa della piccola sezione d'urto è trascurabile rispetto ai processi legato-libero e libero-libero. Solo ad alte temperature, gli elettroni liberi diventano la sorgente dominante di opacità.

Anche in questo caso, il processo avviene in due stadi: dapprima l'elettrone assorbe il fotone, viene deviato, e poi emette il fotone. Ovviamente è possibile anche il processo inverso. Nei diagrammi di Feynmann il processo richiede la

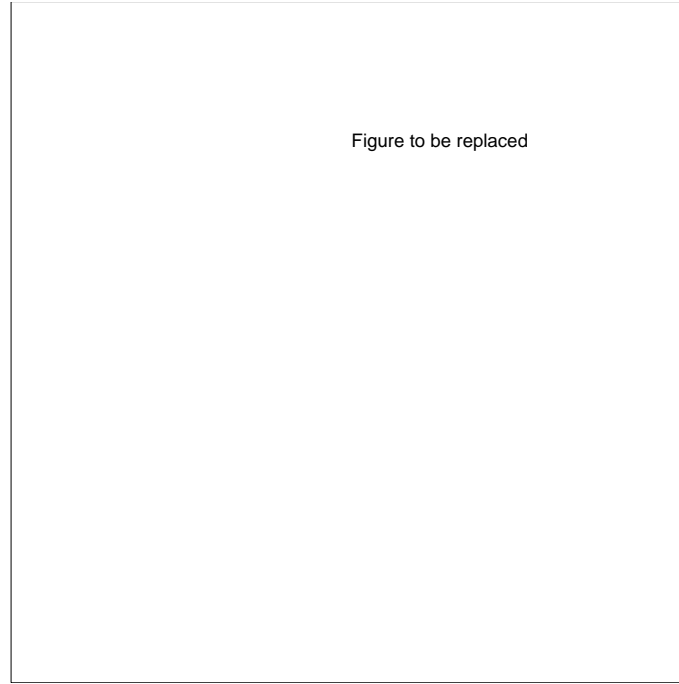


Figura 15.5: Diagramma di Feynmann del processo di scattering

presenza di due vertici (si veda Fig.\*\*). Anche in questo caso è necessaria l'approssimazione del secondo ordine e si trova che la descrizione corretta del fenomeno è data dal tener conto di entrambi i modi.

È possibile trattare il processo classicamente, in quanto la variazione di lunghezza d'onda  $\Delta\lambda$  subita dal fotone per scattering non dipende da  $\lambda$ . Lo schema è il seguente: un'onda elettromagnetica piana colpisce un elettrone libero, il quale viene accelerato e questo provoca l'emissione di radiazione in direzione diversa da quella dell'onda incidente. La radiazione così diffusa ha la stessa frequenza della radiazione incidente. Il processo può essere descritto con l'elettro-dinamica classica, e si trova che la potenza irradiata nell'angolo solido  $d\Omega$  nella direzione  $\psi$  rispetto alla direzione di accelerazione  $\bar{a}$  per particelle non relativistiche è data da

$$dP = \frac{e^2}{4\pi c^3} a^2 \sin^2 \psi d\Omega \quad (15.116)$$

Calcoliamo quanto vale  $a^2$ . Supponiamo che l'onda piana incidente si muova nella direzione  $z$  con numero d'onda  $k = 2\pi/\lambda$  e vettore di polarizzazione  $\bar{\epsilon}$  (nel piano  $x,y$ ). Il campo elettrico è dato da

$$\overline{E}(z, t) = \bar{\epsilon} E_0 \cos(kz - \omega t) \quad (15.117)$$

dalla seconda legge di Newton si ottien per l' accelerazione

$$\bar{a} = -\frac{e\overline{E}}{m} = -\bar{\epsilon}\frac{e}{m}E_0\cos(kz - \omega t) \quad (15.118)$$

Poichè siamo interessati alla potenza media irradiata, dobbiamo mediare su un periodo

$$\overline{a^2} = \frac{e^2}{m^2} E_0^2 \frac{1}{T} \int_0^T \cos^2(kx - \omega t) dt = \frac{1}{2} \frac{e^2}{m^2} E_0^2 \quad (15.119)$$

Sostituendo si trova

$$\overline{a^2} = -\frac{c}{8\pi} E_0^2 \left(\frac{e^2}{mc^2}\right) \sin^2 \psi \quad (15.120)$$

La sezione d'urto differenziale può definirsi, in questo calcolo classico, come il rapporto fra la potenza diffusa per unità di angolo solido e la potenza incidente per unità di area. Quest'ultima per un' onda piana è data dalla media del vettore di Poynting su un periodo e vale

$$S = \frac{c}{4\pi} \overline{E^2} = \frac{c}{4\pi} E_0^2 \quad (15.121)$$

Ne segue che

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \left(\frac{e^2}{mc^2}\right)^2 \sin^2 \psi \quad (15.122)$$

la quantità  $r_0 = \frac{e^2}{mc^2} = 2.818 \times 10^{-13}$  cm è detta *raggio classico dell'elettrone*, in quanto esso si comporta nella diffusione dell'onda incidente come una sferetta di tale raggio. La relazione (15.122) è riferita alla direzione  $\psi$ : passando invece all' angolo  $\theta$  formato dalle direzioni di moto del fotone incidente e di quello diffuso, si ha

$$\sin^2 \psi = 1 - \sin^2 \theta \cos^2 \phi \quad (15.123)$$

Se l'onda incidente non è polarizzata si deve mediare sull'angolo  $\psi$

$$\sin^2 \psi = 1 - \sin^2 \theta \cos^2 \phi = 1 - \frac{1}{2} \sin^2 \theta \quad (15.124)$$

ed in tal modo si ottiene l'espressione per la sezione d'urto differenziale per fotoni non polarizzati che è detta *formula di Thompson*

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \left(\frac{e^2}{mc^2}\right)^2 \frac{1}{2} (1 + \cos^2\theta) \quad (15.125)$$

Ricordiamo che questa formula vale solo per particelle non relativistiche e per fotoni con energia  $h\nu \ll mc^2$ . Poichè queste limitazioni sono violate solo ad alte temperature ( $T > 10^9$ ) °K, la reazione trovata è sufficiente per descrivere la diffusione dei fotoni da parte di particelle nella gran parte dei casi di interesse. La sezione d'urto è proporzionale a  $(1/m)^2$  per cui la diffusione da parte di elettroni è molto più importante della diffusione da parte di nuclei che può essere trascurata.

Ricordando che il peso molecolare medio degli elettroni dipende solo dalla concentrazione di idrogeno X, si dimostra che vale la

$$\kappa_s = \frac{\sigma_{tot}}{AH} \simeq 0.2(1 + X) \quad (15.126)$$

Dalla (15.122) si ottiene la sezione d'urto totale

$$\sigma_{tot} = \int \frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{8\pi}{3} \left(\frac{e^2}{mc^2}\right)^2 = 0.66 \times 10^{-24} \quad \text{cm}^2 \quad (15.127)$$

detta la sezione d'urto Thompson. Essa non dipende dalla frequenza, per cui il termine  $\kappa_s$  nella media di Rosseland sarà costante.

Quando l'energia dei fotoni è  $h\nu \simeq mc^2$ , la relazione (\*\*) cade in difetto ed è necessario sostituirla con la relazione di Klein-Nishima (si veda il corso di Fisica Teorica)

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{1}{4\pi} \frac{\sigma_{tot} \frac{3}{4} (1 + \cos^2\theta)}{(1 + 2\epsilon \sin^2(\frac{\theta}{2}))} \left(1 + \frac{4\epsilon^2 \sin^4(\frac{\theta}{2})}{(1 + \cos^2\theta)(1 + 2\epsilon \sin^2(\frac{\theta}{2}))}\right) \quad (15.128)$$

dove  $\epsilon = h\nu/mc^2$  e  $\sigma_{tot}$  è data dalla (\*\*). Infine si ottiene la sezione d'urto complessiva del fenomeno di scattering relativistico

$$\sigma = \frac{3}{4} \sigma_{tot} \left[ \frac{1 + \epsilon}{\epsilon^2} \left( \frac{2 + 2\epsilon}{1 + 2\epsilon} - \frac{\ln(1 + 2\epsilon)}{\epsilon} \right) - \frac{1 + 3\epsilon}{(1 + 2\epsilon)^2} \right] \quad (15.129)$$

**Note**

Si è già detto che l'opacità totale è data dalla somma dei vari contributi corretti per l'emissione indotta. Si ricordi che la media di Rosseland della somma non è uguale alla somma delle medie di Rosseland delle componenti.

Vi sono tuttavia situazioni astrofisiche in cui uno dei contributi predomina rispetto a tutti gli altri. Ad esempio a basse temperature (quando un certo numero di atomi non è ancora totalmente ionizzato), l'opacità totale è dominata dai processi legato-legato e legato-libero. Al crescere della temperatura, la ionizzazione diventa del tutto (o quasi) completa e l'opacità è dominata dai processi libero-libero. Tuttavia poichè la media di Rosseland di  $\kappa_{ff}$  decresce al crescere della temperatura, si raggiunge un valore della temperatura per il quale diventa dominante lo scattering da parte degli elettroni liberi.

Il dominio nel piano densità-temperatura dove i singoli processi discussi sopra sono dominanti e già stato mostrato nella Figura 15.6. è interessante confrontare il piano densità-temperatura della equazione di stato con quello dell' opacità. Si vede che alle alte temperature dove predomina la pressione di radiazione l'opacità è dominata dalla diffusione.



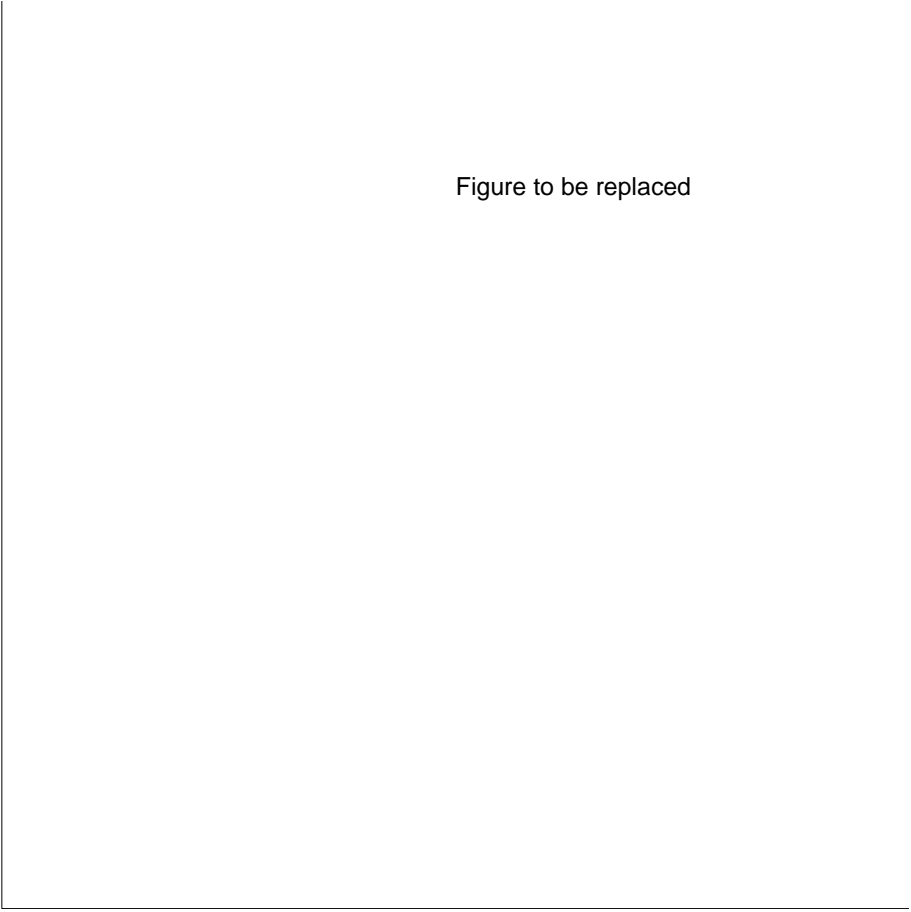


Figure to be replaced

Figura 15.6: Opacità ed equazione di stato nel piano temperatura e densità



## Capitolo 16

# SORGENTI DI ENERGIA

In questo capitolo tratteremo la questione del tasso di produzione di energia presente nelle stelle e delle condizioni imposte dal grande tasso di emissione e lunga durata del fenomeno. Non è necessario per ora entrare nel dettaglio dei meccanismi responsabili della produzione.

Nel Sole il tasso di produzione per unità di massa è misurato dal rapporto  $L/M$

$$\epsilon = \simeq 2 \quad \text{erg/gm/sec} \quad (16.1)$$

e nelle stelle della sequenza principale esso è compreso nell' intervallo

$$0.1 \leq \epsilon \leq 1000 \quad \text{erg/gm/sec} \quad (16.2)$$

Questi sono i tassi medi necessari a mantenere la luminosità osservata. Giusto per farw un confronto, il tasso di produzione di energia nel metabolismo umano è circa  $10^4$  erg/gm/sec. La ragione per cui gli esseri umani non sono altrettanto luminosi è che non sono altrettanto massicci.

Le sorgenti principali di energia in una stella sono di natura gravitazionale e nucleare (e neutrinica anche se in condizioni ordinarie non è utilizzabile ai nostri scopi). In questo capitolo ci occuperemo soprattutto della sorgente gravitazionale rimandando ai capitoli successivi quella nucleare e neutrinica.

### 16.1 Energia potenziale gravitazionale

Consideriamo una stella come inizialmente dispersa all' infinito. *La contrazione di una sfera di gas autogravitante da dimensioni infinite ad una configurazione qualunque di raggio  $R$  libera energia gravitazionale.*

Supponiamo di avere già formato una sfera di raggio  $r$  contenente una quantità di gas  $M(r)$ . Aggiungiamo ora una certa quantità  $dM(r)$  sotto forma di una shell sferica sottile di spessore  $dr$  portandola dall'infinito a  $r$ . La forza gravitazionale generata dalla massa  $M(r)$  è  $GM(r)dM(r)/r^2$ . Il lavoro richiesto per portare  $dM(r)$  dall'infinito ad  $r$  è dato da

$$d\Omega = -GM(r)dM(r) \int_r^\infty \frac{dr'}{(r')^2} = -G \frac{M(r)dM(r)}{r} \quad (16.3)$$

Pertanto il lavoro totale per portare l'intera stella dall'infinito ad  $r$  è

$$\Omega = -G \int_0^M \frac{M(r)dM(r)}{r} \quad (16.4)$$

detta *energia potenziale gravitazionale*. Essa può essere anche scritta come

$$\Omega = -q \frac{GM^2}{R} \quad (16.5)$$

dove

$$q = \int_0^1 \frac{M(r/R)/M}{r/R} \frac{dM(r/R)}{M} \quad (16.6)$$

è una quantità adimensionale che dipende dalla concentrazione in massa della stella. Per tipiche distribuzioni di materia si trova  $q \geq \frac{3}{5}$  ovvero

$$\Omega \leq -\frac{3}{5} \frac{GM^2}{R} \quad (16.7)$$

Il segno di uguaglianza è per una stella omogenea. Per stelle della sequenza principale  $q \simeq 1.5$ , mentre per un politropo di indice  $n$

$$\Omega = -\frac{3}{5-n} \frac{GM^2}{R} \quad (16.8)$$

Si noti che  $\Omega < 0$  per una stella con raggio  $R$  finito e per i politropi anche per  $n < 5$ .

## 16.2 Teorema del Viriale: Formulazione Generale

Abbiamo già fatto conoscenza con il teorema del viriale in uno dei capitoli precedenti. Ora lo presenteremo nella forma più generale, più adatta ai nostri scopi.

Assumendo che la meccanica newtoniana sia applicabile, l'equazione del moto di un elemento di fluido (gas) è

$$\ddot{\mathbf{r}} = -\frac{1}{\rho}\nabla \cdot \mathbf{P} + \mathbf{F} \quad (16.9)$$

dove il  $\mathbf{P}$  è il tensore pressione, termine  $-\frac{1}{\rho}\nabla \cdot \mathbf{P}$  è la forza per unità di massa dovuta al gradiente di pressione e  $\mathbf{F}$  è la forza totale agente sull'unità di massa. Facciamo ora il prodotto scalare con  $\mathbf{r}$  ed integriamo sull'intera massa  $M$  del fluido (stella)

$$\int_M \mathbf{r} \cdot \ddot{\mathbf{r}} dM = - \int_V \mathbf{r} \cdot (\nabla \cdot \mathbf{P}) dV + \int_M \mathbf{r} \cdot \mathbf{F} dM \quad (16.10)$$

con  $V$  volume totale. Esaminiamo prima il membro di sinistra. Abbiamo

$$\mathbf{r} \cdot \ddot{\mathbf{r}} = \frac{1}{2} \frac{d^2}{dt^2} (\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}) - \dot{r}^2 \quad (16.11)$$

cosicchè

$$\int_M \mathbf{r} \cdot \ddot{\mathbf{r}} dM = \frac{1}{2} \frac{d^2}{dt^2} \int_M r^2 dM - \int_M \dot{r}^2 dM = \frac{1}{2} \ddot{I} - 2K_M \quad (16.12)$$

dove  $I$  è il momento di inerzia e  $K_M$  l'energia cinetica dei moti di massa (turbolenza, rotazione, pulsazione...).

Consideriamo il primo termine del membro di destra. È facile verificare che

$$\mathbf{r} \cdot (\nabla \cdot \mathbf{P}) = \nabla \cdot (\mathbf{r} \cdot \mathbf{P}) - \sum_i P_{ii} \quad (16.13)$$

dove  $\sum_i P_{ii} = \text{Tr} \mathbf{P} = 3\bar{P}$  e  $\bar{P}$  è la pressione mediata su tutte le possibili orientazioni di un elemento di superficie. Quindi il termine in questione diventa

$$\int_V \mathbf{r} \cdot (\nabla \cdot \mathbf{P}) dV = \int_V \nabla \cdot (\mathbf{r} \cdot \mathbf{P}) dV - 3 \int_V \bar{P} dV \quad (16.14)$$

nella quale il secondo termine viene trasformato in un integrale di superficie mediante il teorema della divergenza, pertanto la equazione (16.14) diventa

$$\int_V \nabla \cdot (\mathbf{r} \cdot \mathbf{P}) dV = \oint (\mathbf{r} \cdot \mathbf{P}_S) \cdot d\mathbf{A} - 3 \int_V \bar{P} dV \quad (16.15)$$

dove  $S$  denota la superficie del volume  $V$ ,  $\mathbf{P}_S$  è il valore di  $\mathbf{P}$  alla superficie, e  $d\mathbf{A}$  è l'elemento di area orientata della superficie  $S$ . Se  $\mathbf{P}_S = P_S \mathbf{I}$  ( $\mathbf{I}$  tensore

unitario, cioè alla superficie gli stress si riducono alla pura pressione idrostatica  $P_S$ ) e se  $P_S$  è costante su  $S$ , abbiamo

$$\oint (\mathbf{r} \cdot \mathbf{P}_S) \cdot d\mathbf{A} = 3P_S V \quad (16.16)$$

Infine, l'ultimo termine è il viriale di Clausius semplicemente indicato con *Virial*.

La forma finale è

$$\frac{1}{2}\ddot{I} = 2K_M + 3 \int \bar{P} dV - 3P_S V + \text{Virial} \quad (16.17)$$

Per un sistema statico  $\ddot{I} = 0$ . Per un sistema quasi statico  $\ddot{I} \neq 0$  (ad esempio una stella pulsante). Infine, in tutte le applicazioni successive assumeremo  $P_S = 0$ .

### 16.3 Teorema del Viriale: Casi Particolari

Nel caso che le forze agenti sul fluido (diverse da quelle di pressione) siano le forze gravitazionali

$$\text{Virial} = \int \mathbf{r} \cdot \mathbf{F} dM = \Omega \quad (16.18)$$

Se la pressione è dovuta al trasferimento di momento da parte delle particelle del sistema abbiamo allora

$$\bar{P} = \frac{2}{3} u_{kin} \quad (16.19)$$

dove  $u_{kin}$  è l'energia cinetica media del moto traslazionale per unità di volume. In tal caso

$$\frac{1}{2}\ddot{I} = 2K_M + 2U_{kin} - 3P_S V + \Omega \quad (16.20)$$

dove  $U_{kin} = \int u_{kin} dV$ . Atteso che  $P_S = 0$  essa diventa

$$\frac{1}{2}\ddot{I} = 2K_M + 2U_{kin} + \Omega \quad (16.21)$$

La somma di  $K_M$  e  $U_{kin}$  dà l'energia cinetica totale del sistema. Di solito il termine  $K_M$  è nullo (salvo casi particolari come stelle pulsanti, venti stellari etc..) per cui rimane solo  $U_{kin}$  che è l'energia interna di agitazione termica.

Come ultimo passo, supponiamo che valga una relazione generale fra pressione ed densità di energia interna  $u$  (solo moto di agitazione termica delle particelle)

$$P = (\gamma - 1)u \quad (16.22)$$

dove  $u$  e' l'energia interna totale per unità di volume e  $\gamma$  e una funzione delle variabili di stato del sistema. In generale  $\gamma$  non è uguale a nessun rapporto di calori specifici. salvo che nel caso di gas perfetto monoatomico. Si ottiene la relazione generale (sempre per  $P_S = 0$ )

$$\frac{1}{2}\ddot{I} = 2K_M + 3(\gamma - 1)U + \Omega \quad (16.23)$$

In questa ultima relazione se  $\gamma$  non è costante ovunque, si intende che esso è il valore medio sull'intera stella (o gran parte di questa)  $(\gamma - 1) = \langle(\gamma - 1)\rangle$ .

## 16.4 Energia interna ed energia totale

Applichiamo ora il risultato ottenuto ad una stella in equilibrio idrostatico nella quale i moti di massa sono trascurati ( $K_M = 0$ ). Si ha

$$3(\gamma - 1)U + \Omega = 0 \quad (16.24)$$

cosicchè l'energia interna  $U$  è legata all' energia gravitazionale

$$U = -\frac{1}{3(\gamma - 1)}\Omega \quad (16.25)$$

La energia totale del sistema  $E$  è

$$E = U + \Omega = \frac{3\gamma - 4}{3(\gamma - 1)}\Omega \quad (16.26)$$

## 16.5 Contrazione gravitazionale

La contrazione gravitazionale è una possibile sorgente di energia come originariamente proposto da Helmholtz e Kelvin.

Si parte dalla

$$E = \frac{3\gamma - 4}{3(\gamma - 1)} \Omega = \frac{3\gamma - 4}{3(\gamma - 1)} \cdot q \cdot \frac{GM^2}{R} \quad (16.27)$$

e la discussione è limitata al caso di  $\gamma < 4/3$ . Da questa relazione si vede che  $E = 0$  quando  $R = \infty$  e che  $E < 0$  quando  $R$  è finito. La energia totale è diminuita durante il processo di contrazione. Questa perdita di energia è apparsa sotto forma di energia irradiata o luminosità

$$-\frac{dE}{dt} = L(R) = \frac{3\gamma - 4}{3(\gamma - 1)} \cdot q \cdot \frac{GM^2}{R^2} \frac{dR}{dt} \quad (16.28)$$

se  $q$  e  $\gamma$  non cambiano. Quindi il tempo necessario ad una stella per contrarsi dall'infinito a  $R$  è

$$t_{con} = \frac{3\gamma - 4}{3(\gamma - 1)} \cdot q \cdot GM^2 \int_R^\infty \frac{dR'}{R'^2 L(R')} \quad (16.29)$$

Per  $L = cost$  si ottiene immediatamente il tempo scala  $t_K$  già introdotto in precedenza

$$t_K = t_{con} = \frac{3\gamma - 4}{3(\gamma - 1)} \cdot q \cdot \frac{GM^2}{LR} \quad (16.30)$$

Nel caso di  $\gamma = 5/3$ , tutta l'energia interna è assunta essere sotto forma di moto di agitazione termica, e di  $q = 1.5$ , valido per stelle della sequenza principale si ha

$$t_K = 2 \times 10^7 \frac{M_*^2}{L_* R_*} \quad \text{anni} \quad (16.31)$$

dove  $L_*$ ,  $M_*$ ,  $R_*$  sono in unità solari.

Un'altra scala di tempo utile è quella di contrazione gravitazionale definita da

$$t_{grav} = - \left[ \frac{d \ln R}{dt} \right]^{-1} \quad (16.32)$$

che rappresenta il tempo richiesto affinché una stella sotto l'effetto della propria forza gravitazionale cambi il proprio raggio di una frazione confrontabile con il raggio stesso. Si vede subito che

$$t_{grav} = \frac{3\gamma - 4}{3(\gamma - 1)} \cdot q \cdot \frac{GM^2}{L(R)R} = t_K(R) \quad (16.33)$$



È importante notare che nelle stelle reali  $L(R)$  può diminuire molto rapidamente durante le prime fasi (si veda la fase di Hayashi), cosicchè  $t_{con}$  può essere molto minore di  $t_K$ .

## 16.6 Condizioni per la contrazione gravitazionale

Per una stella in equilibrio idrostatico valgono le relazioni

$$U = -\frac{1}{3(\gamma-1)}\Omega \quad \Delta U = -\frac{1}{3(\gamma-1)}\Delta\Omega \quad (16.34)$$

$$E = \frac{3\gamma-4}{3(\gamma-1)}\Omega \quad \Delta E = \frac{3\gamma-4}{3(\gamma-1)}\Delta\Omega \quad (16.35)$$

Possono aversi tre casi a seconda del valore di  $\gamma$ :

(1)  $\gamma > 4/3$ . Dato che una stella irradia energia, se le sole sorgenti sono termica e gravitazionale allora  $\Delta E < 0$  da cui  $\Delta\Omega < 0$ . Ciò implica una contrazione secolare durante la quale la frazione  $1/[3(\gamma-1)]$  della  $|\Delta\Omega|$  va in energia interna e il resto è irradiato. Per  $\gamma = 5/3$  si ha il noto risultato  $(1/2)|\Delta\Omega|$ .

(2)  $\gamma = 4/3$ . In questo caso  $E = 0$  e  $\Delta E = 0$  indipendentemente da  $\Omega$  e  $\Delta\Omega$ . Una stella con  $\gamma = 4/3$  passa da un raggio ad un altro senza variazioni di energia totale.  $\Delta U = -\Delta\Omega$  cosicchè la energia gravitazionale rilasciata va tutta in energia interna senza irraggiamento. Tuttavia una stella (ora senza sorgenti nucleari) che abbia nel passato irradiato energia (quando  $\gamma$  era  $> 4/3$ ), ha  $E < 0$ . Se ora per qualche ragione  $\gamma$  scende a  $4/3$  allora la prima equazione di (\*\*) non è più valida e la stella non può stare in equilibrio idrostatico. Essa deve essere nello stato di collasso dinamico. Ciò può essere visto dal teorema del viriale

$$\frac{1}{2}\ddot{I} = 3(\gamma-1)U + \Omega + 2K_M \quad (16.36)$$

Prendendo  $E = U + \Omega + K_M$  e combinandola con la precedente si ottiene

$$E = \frac{3\gamma-4}{3(\gamma-1)}\Omega + \frac{3\gamma-5}{3(\gamma-1)}K_M + \frac{1}{3(\gamma-1)}\frac{1}{2}\ddot{I} \quad (16.37)$$

Se il primo termine del membro di destra cresce improvvisamente da un valore negativo dell'ordine di  $\Omega$  a zero, la somma dei rimanenti termini deve diventare molto negativa. Se inizialmente  $K_M \simeq 0$  allora l'ultimo termine  $\frac{1}{3(\gamma-1)}\frac{1}{2}\ddot{I}$  deve

diventare molto negativo, cioè deve instaurarsi il collasso dinamico per ridurre drasticamente il momento di inerzia.

**(3)**  $\gamma < 4/3$ . In questo caso  $\Delta E > 0$  se  $\Delta\Omega < 0$ , cioè una contrazione comporta un aumento della energia totale. Poichè questo è chiaramente impossibile, si interpreta questo fatto per una stella senza sorgenti di energia nucleare (o esterne) come una tendenza a rimanere dispersa all' infinito, cioè espansione su tempo dinamico.

## 16.7 Energia gravitazionale locale

In questa sezione esaminiamo più in dettaglio il rilascio locale di energia gravitazionale già formulato in uno dei capitoli precedenti. Partiamo dalla prima legge della termodinamica

$$\frac{dQ}{dt} = \frac{\partial U}{\partial t} + P \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{1}{\rho} \right) \quad (16.38)$$

dove  $dQ/dt$  è il tasso di guadagno di calore per unità di massa,  $U$  è l'energia interna per unità di massa e le derivate temporali sono fatte seguendo il moto dell' elemento di fluido. L' energia interna è considerata come  $U = U(P, \rho)$  funzione di  $P$  e  $\rho$ . La relazione (\*\*) diventa

$$\frac{dQ}{dt} = P \left( \frac{dU}{dP} \right)_\rho \left[ \frac{\partial \ln P}{\partial t} - \frac{[P/\rho - \rho(\partial U/\partial \rho)_P]}{P(\partial U/\partial P)_\rho} \frac{\partial \ln \rho}{\partial t} \right] \quad (16.39)$$

Si riconosce che

$$\Gamma_1 = \frac{[P/\rho - \rho(\partial U/\partial \rho)_P]}{P(\partial U/\partial P)_\rho} \quad (16.40)$$

e che

$$P \left( \frac{dU}{dP} \right)_\rho = \frac{C_V T}{\chi_T} \quad (16.41)$$

Finalmente

$$\epsilon_N - \epsilon_\nu - \frac{\partial L(r)}{\partial M(r)} = \frac{C_V T}{\chi_T} \left[ \frac{\partial}{\partial t} \left( \ln \frac{P}{\rho^{\Gamma_1}} \right) + (\ln \rho) \frac{\partial \Gamma_1}{\partial t} \right] \quad (16.42)$$

che può essere scritta come

$$\epsilon_N + \epsilon_{grav} - \epsilon_\nu - \frac{\partial L(r)}{\partial M(r)} = 0 \quad (16.43)$$

avendo posto

$$\epsilon_{grav} = -\frac{C_V T}{\chi_T} \left[ \frac{\partial}{\partial t} \left( \ln \frac{P}{\rho^{\Gamma_1}} \right) + (\ln \rho) \frac{\partial \Gamma_1}{\partial t} \right] \quad (16.44)$$

chiamata *tasso locale di rilascio di energia gravitazionale*.

Una espressione equivalente è

$$\epsilon_{grav} = -C_V T \left[ \frac{\partial}{\partial t} \left( \ln \frac{T}{\rho^{\Gamma_3-1}} \right) + (\ln \rho) \frac{\partial \Gamma_3}{\partial t} \right] \quad (16.45)$$

Nel caso che  $\epsilon_N = \epsilon_\nu = 0$  allora  $\partial L(r)/\partial M(r)$  è dominato da  $\epsilon_{grav}$ . Nel caso di un gas perfetto semplice  $\chi_T = 1$ ,  $\Gamma_1 = \gamma$ ,  $\partial \Gamma_1/\partial t = 0$  e  $U = C_V T$  e si ottiene

$$\epsilon_{grav} = -U \frac{\partial}{\partial t} \left( \ln \frac{P}{\rho^\gamma} \right) = -U \frac{\partial}{\partial t} \left( \ln \frac{T}{\rho^{\gamma-1}} \right) \quad (16.46)$$

Infine si noti che

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( \ln \frac{P}{\rho^\gamma} \right) = (3\gamma - 4) \frac{d \ln R}{dt} \quad (16.47)$$

e quindi

$$\epsilon_{grav} = -(3\gamma - 4)U \frac{d \ln R}{dt} = -\frac{3\gamma - 4}{(\gamma - 1)} \frac{KT}{\mu H} \frac{d \ln R}{dt} \quad (16.48)$$

dove abbiamo usato le relazioni  $U = uV$ ,  $= (K/\mu H)\rho T = (\gamma - 1)u$  con  $u$  la energia interna per unità di volume, valide per un gas perfetto semplice.



## Capitolo 17

# GENERAZIONE DI ENERGIA NUCLEARE

Il principio alla base delle teorie di produzione energetica per reazioni nucleari è la conversione della materia in energia

$$\Delta E = c^2 \Delta M \quad (17.1)$$

L'energia di legame  $E_B$  di un nucleo con  $Z$  protoni,  $A$  nucleoni (protoni e neutroni) ed  $A - Z$  neutroni è definita come

$$E_B = [M_p Z + (A - Z)M_n - M_N]c^2 \quad (17.2)$$

dove  $M_p$ ,  $M_n$ ,  $M_N$  sono le masse dei protoni, neutroni e nucleo rispettivamente. Essa rappresenta l'energia necessaria a separare le particelle di un nucleo oppure l'energia disponibile quando le particelle vengono riunite a formare un nucleo. La  $E_B$  di un nucleo stabile è sempre positiva in quanto la massa del nucleo è sempre minore della somma delle masse delle particelle costituenti. Si definisce come energia di legame per nucleone la quantità  $f = E_B/A$ , la quale risulta essere di circa 7 Mev/nucleone.

L'energia di legame per nucleone in funzione di  $A$  (Figura 17.1) ha un massimo nella regione  $40 < A < 80$  detta anche regione del ferro. La diminuzione a destra della regione del ferro è dovuta all'effetto della crescente repulsione coulombiana fra protoni nei nuclei, mentre quella a sinistra è dovuta ad un effetto di superficie. Infatti i nucleoni sulla superficie di un nucleo sono meno legati di quelli interni, e poichè l'area superficiale per unità di volume cresce al

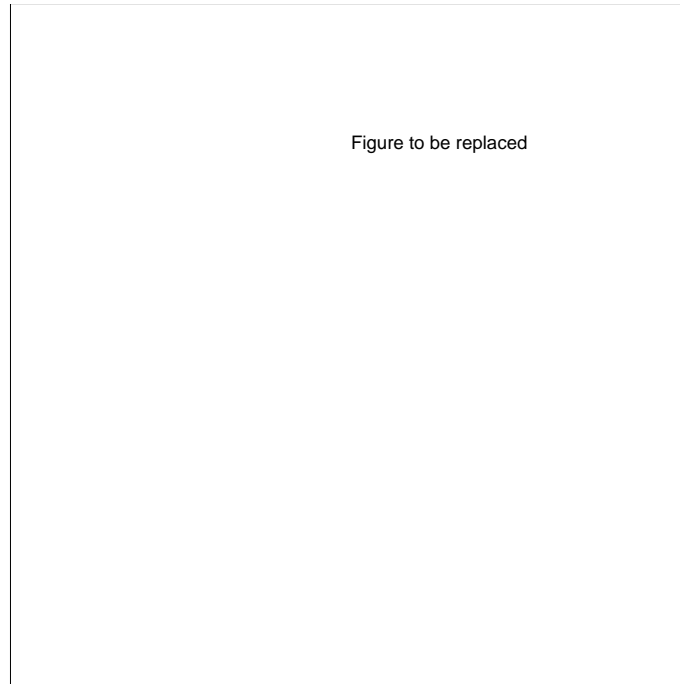


Figura 17.1: Energia di legame per nucleone

decrescere di  $A$  questo determina una forte diminuzione dell'energia di legame per nucleone dalla parte dei nuclei più piccoli.

Consideriamo una generica reazione nucleare

$$a + X = Y + b \quad (17.3)$$

dove  $X$  e  $Y$  sono i nuclei prima e dopo la reazione ed  $a$  e  $b$  sono le particelle incidenti ed emesse, rispettivamente.

Le energie delle particelle interagenti sono usualmente riferite al sistema del baricentro mediante la velocità relativa  $v$  e la massa ridotta  $m$  delle due particelle interagenti. L'energia cinetica relativa e massa ridotta di  $a$  e  $X$  sono

$$E = v^2 m / 2 \quad m = \frac{M_a M_X}{(M_a + M_X)} \quad (17.4)$$

È facile vedere che alle temperature tipiche stellari ( $10^7 - 10^9$  K) l'energia cinetica media delle particelle ( $KT$ ) è fra 1 e  $100\text{Kev}$ , quindi molto piccola rispetto alle energie usualmente in gioco nelle reazioni nucleari in laboratorio (da alcuni Mev a pochi Bev). Affinchè una reazione proceda spontaneamente ad energie così basse deve essere esotermica cioè deve produrre una certa quantità

di energia  $Q > 0$ , la quale è ovviamente data da

$$Q = [M_a + M_X - M_Y - M_b]c^2. \quad (17.5)$$

Essa è comunemente detta  $Q$ -valore della reazione.

## 17.1 Velocità di una reazione

Noto il  $Q$ -valore di una reazione per calcolare la quantità complessiva di energia emessa dalla reazione in esame è necessario conoscere il numero di dette reazioni per unità di volume e per unità di tempo.

A tale scopo si introduce il concetto di sezione d'urto di una reazione. Essa è una misura della probabilità che una data coppia di particelle possa dare luogo ad una reazione nucleare.

Consideriamo la reazione  $a + X = Y + b$  ed immaginiamo i nuclei  $X$  bombardati da un certo flusso uniforme di particelle  $a$ , la sezione d'urto è definita come

$$\sigma \text{ (cm}^2\text{)} = \frac{\text{numero di reazioni/nucleo } X/\text{unità di tempo}}{\text{numero di particelle incidenti/cm}^2/\text{unità di tempo}}. \quad (17.6)$$

Il nome di sezione d'urto deriva dall'unità di misura e dal fatto che il numero di reazioni per unità di tempo può essere calcolato assumendo che ogni nucleo abbia associata un'area  $\sigma$  tale che ogni volta che una particella  $a$  vi incide abbia luogo la reazione. Quantunque tale schematizzazione non sia del tutto corretta fisicamente, essa fornisce un valido aiuto mnemonico.

Il numero di reazioni per unità di tempo indotte dal moto di agitazione termica secondo lo schema  $a + X = Y + b$  è dato da

$$r = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} dN_1(v_1) dN_2(v_2) v \sigma(v) \quad (17.7)$$

dove le particelle  $a$  e  $X$  sono indicate con i simboli 1 e 2,  $dN_1(v_1)$  e  $dN_2(v_2)$  denotano le densità numeriche di particelle con velocità vettoriale  $\mathbf{v}_1$  e  $\mathbf{v}_2$  confinate negli elementi di volume dello spazio delle velocità,  $\mathbf{v}$  è la velocità relativa e  $\sigma(v)$  è la sezione d'urto della reazione, la quale in generale è funzione della velocità relativa.

Poichè i nuclei non degenerano se non a densità molto grandi ( $\rho > 10^{14} \text{ g cm}^{-3}$ ) possiamo assumere per le velocità delle particelle la legge di distribuzione di Maxwell

$$dN_i(\mathbf{v}_i) = N_i \left( \frac{m_i}{2\pi KT} \right)^{\frac{3}{2}} \exp\left(-\frac{m_i v_i^2}{2KT}\right) d^3 v_i \quad (17.8)$$

dove  $N_i$  la densità numerica totale delle particelle di tipo  $i$  e  $m_i$  la loro massa. Introducendo la legge di Maxwell nella definizione di velocità di reazione si ottiene

$$r = N_1 N_2 \left( \frac{m_1}{2\pi KT} \right)^{3/2} \left( \frac{m_2}{2\pi KT} \right)^{3/2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{m_1 v_1^2 + m_2 v_2^2}{2KT}} v \sigma(v) d^3 v_1 d^3 v_2. \quad (17.9)$$

Trasformiamo le velocità in velocità relative  $v$  al moto del baricentro

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2 \quad (17.10)$$

$$(m_1 + m_2)\mathbf{V} = m_1 \mathbf{v}_1 + m_2 \mathbf{v}_2 \quad (17.11)$$

Da queste si ottiene

$$\mathbf{v}_1 = \mathbf{V} + \frac{m_2}{m_1 + m_2} \mathbf{v} \quad (17.12)$$

$$\mathbf{v}_2 = \mathbf{V} + \frac{m_1}{m_1 + m_2} \mathbf{v} \quad (17.13)$$

assieme alla massa ridotta

$$m = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \quad (17.14)$$

Infine teniamo conto che le velocità delle particelle sono distribuite isotropicamente nello spazio delle fasi. La velocità di reazione diventa

$$r = N_1 N_2 \left( \frac{m_1}{2\pi KT} \right)^{3/2} \left( \frac{m_2}{2\pi KT} \right)^{3/2} \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} e^{-\frac{m_1 + m_2}{2KT} V^2 - \frac{mv^2}{2KT}} v \sigma(v) 4\pi V^2 dV 4\pi v^2 dv \quad (17.15)$$

Eseguita l'integrazione sulle velocità del baricentro, essa si riduce a

$$r = 4\pi N_1 N_2 \left( \frac{m}{2\pi KT} \right)^{3/2} \int_0^{\infty} e^{-\frac{mv^2}{2KT}} v \sigma(v) v^2 dv \quad (17.16)$$



ovvero

$$r = N_1 N_2 \langle \sigma v \rangle \quad (17.17)$$

avendo posto

$$\langle \sigma v \rangle = (2\pi^{-1/2})(KT)^{-3/2} \int_0^\infty e^{-\frac{E}{KT}} v \sigma(v) E^{1/2} dE \quad (17.18)$$

dove  $E$  è l'energia cinetica del moto relativo.  $\langle \sigma v \rangle$  è la media sulla funzione di Maxwell della quantità  $\sigma(v)v$ . Essa rappresenta la probabilità per unità di tempo che due particelle confinate in volume unitario subiscano la reazione nucleare in esame.

Se le due particelle sono identiche, la velocità di reazione ottenuta in precedenza deve essere lievemente modificata. Si ricordi il significato fisico di  $\langle \sigma v \rangle$ ; esso è la probabilità per unità di tempo che una coppia di particelle confinate dentro un volume unitario diano luogo alla reazione nucleare. Allora la probabilità che una coppia interagisca dentro un volume  $V$  qualunque è data da  $\langle \sigma v \rangle / V$ . Ora il numero totale di coppie distinte di particelle identiche in sistema di  $N$  particelle è  $N(N-1)/2$ . Pertanto il numero totale di reazioni per unità di tempo nel sistema è  $N(N-1) \langle \sigma v \rangle / 2V$ , cioè

$$r = \frac{1}{V^2} \frac{N(N-1)}{2} \langle \sigma v \rangle = \frac{N(N - \frac{1}{V})}{2} \langle \sigma v \rangle = (N^2/2) \langle \sigma v \rangle \quad (17.19)$$

dove ora  $N$  è la densità numerica di particelle ed è stato trascurato il termine  $1/V$ .

È utile introdurre il concetto di vita media di un nucleo rispetto ad una data reazione. La vita media del nucleo  $X$  nei confronti di una data reazione con la particella  $a$  è

$$t_X = \frac{1}{N_a \langle \sigma v \rangle} = \frac{1}{N_0 \rho (X_a/A_a) \langle \sigma v \rangle} \quad (17.20)$$

e viceversa la vita media per la particella  $a$  è

$$t_a = \frac{1}{N_X \langle \sigma v \rangle} = \frac{1}{N_0 \rho (X_X/A_X) \langle \sigma v \rangle} \quad (17.21)$$

dove  $N_0$  è il numero di Avogadro,  $X_a$  e  $X_X$  sono le abbondanze in massa,  $A_a$  e  $A_X$  sono le masse atomiche e  $\rho$  la densità del materiale. Se le particelle sono

identiche la vita media è data da  $t = 1/(N < \sigma v >)$ . La quantità di energia liberata per grammo e per secondo è

$$\epsilon = N_0^2 \rho \frac{X_a}{A_a} \frac{X_X}{A_X} < \sigma v > Q \quad (17.22)$$

se le particelle sono diverse e

$$\epsilon = \frac{1}{2} N_0^2 \rho \left( \frac{X}{A} \right)^2 < \sigma v > Q \quad (17.23)$$

se le particelle sono identiche.

**La quantità cruciale che entra nel calcolo di  $\epsilon$  è pertanto  $< \sigma v >$ .**

## 17.2 Sezione d'Urto di una Reazione

### 17.2.1 Modello di Bohr

Una reazione nucleare a bassa energia può essere descritta con il *modello di Bohr* anche se questo è una cruda schematizzazione del fenomeno. Nel modello di Bohr una reazione nucleare  $a + X = Y + b$  è pensata avvenire in due passi successivi:

- 1) creazione di un nucleo composto  $C'$  che è sempre in uno stato eccitato in quanto possiede l'energia cinetica e di legame della particella incidente;
- 2) la disintegrazione di  $C'$  nel particolare prodotto di reazione o canale di interesse.

Ovviamente ogni canale deve soddisfare alle leggi di conservazione di energia, momento angolare e parità.  $C'$  ha vari modi di decadimento:  $X + a$  (scattering elastico);  $X' + a$  dove  $X'$  è in uno stato eccitato (scattering anelastico);  $Y + b$  (emissione di particella);  $C + \gamma$  (cattura radiativa).

Il nucleo eccitato  $C'$ , pur avendo un tempo di vita breve, sopravvive per un tempo abbastanza lungo rispetto ai tipici tempi nucleari, quali ad esempio il tempo di attraversamento del nucleo da parte di un nucleone. Nel modello di Bohr i due rami della reazione sono indipendenti fra di loro nel senso che il modo di decadimento di  $C'$  dipende solo dalla sua energia, momento angolare e parità, ma non dal modo in cui  $C'$  è stato formato.

Affinchè questo modello sia valido devono essere verificate due condizioni:

- 1) il cammino libero medio di un nucleone nel nucleo deve essere piccolo rispetto al raggio nucleare;

2) l'energia media per nucleone ricevuta dalla particella entrante deve essere piccola rispetto all'energia minima  $S$  richiesta per rimuovere un nucleone dal nucleo.

Queste condizioni pongono un limite al valore massimo di  $E$  a cui il modello di Bohr può essere usato. Se  $E'$  denota l'energia di eccitazione di  $C'$  ed  $E$  l'energia cinetica relativa di  $a$  e  $X$  prima della collisione, si ha  $E' = E + S_a$ , dove  $S_a$  è l'energia di separazione di  $a$  ( $S_a = S$ ) da cui segue  $E'/A = (E + S_a)/A \ll S$  ( $A$  numero di nucleoni) ed infine  $E \ll (A - 1)S$ . Poichè  $S = 8 \text{ Mev}$  ne segue che  $E < 50 \text{ Mev}$  per  $A > 10$ .

### 17.2.2 Risonanze

Uno dei fatti sperimentali più importanti nel dominio delle basse energie è la presenza nella sezione d'urto di formazione del nucleo composto di picchi o risonanze a certi valori dell'energia ai quali corrisponde una grande probabilità di formazione di  $C'$ . Queste energie sono rappresentative dei livelli energetici quasi-stazionari in cui il nucleo composto può trovarsi.

L'esistenza di questi livelli può essere compresa nell'ambito del modello a shell della struttura di un nucleo. Senza entrare nei dettagli, ricordiamo brevemente che il modello a shell suppone che l'interazione di ogni nucleone con gli altri nucleoni nel nucleo sia descrivibile da un potenziale a simmetria sferica di forma opportuna da determinarsi a cui si aggiunge un termine non centrale generato dall'accoppiamento fra momento angolare orbitale e spin del nucleone. Ciascun nucleone descrive all'interno del nucleo un'orbita caratterizzata dai numeri quantici di energia e momento angolare con un numero massimo di nucleoni per orbita di due protoni e due neutroni in accordo con il principio di Pauli.

Nonostante l'apparente semplicità, il modello a shell ha permesso di interpretare le proprietà sperimentali dei nuclei, anche quelle più complesse. Ovvio risultato del modello a shell è che ogni nucleo possiede una struttura di livelli energetici ed, in analogia con quanto avviene per gli atomi, esistono livelli fondamentali e livelli eccitati a cui è associata una vita media  $t$ . A causa del principio di Heisenberg questo implica una indeterminazione dell'energia del livello (detta larghezza) data da

$$\Gamma = \frac{h}{2\pi t} \quad (17.24)$$

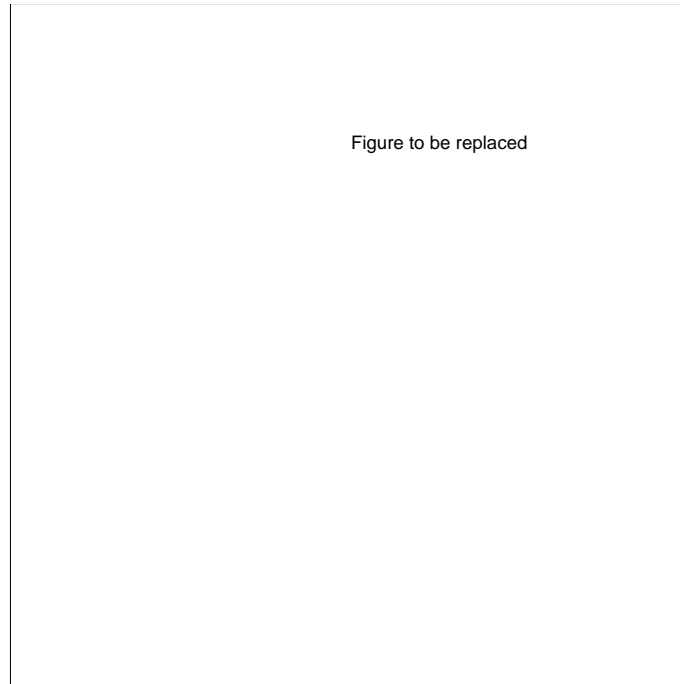


Figura 17.2: Potenziale nucleare e livelli energetici stazionari e quasi stazionari

Per facilitare la discussione del fenomeno della risonanza e dell'esistenza degli stati quasi stazionari sono necessarie alcune assunzioni ulteriori circa la struttura del nucleo:

1) Il nucleo ha una superficie sferica definita di raggio  $R$ , dove  $R$  è il raggio di interazione nucleare dato da

$$R = 1.44 \times 10^{-13} (A_a^{1/3} + A_X^{1/3}) \quad \text{cm} \quad (17.25)$$

2) La particella  $a$ , una volta penetrata nel nucleo si muove con un'energia cinetica  $E_N$  molto maggiore dell'energia cinetica  $E_X$  del moto relativo rispetto ad  $X$  fuori del nucleo  $E_N = E_X + E_M$ , dove  $E_M$  è l'energia media per nucleone del moto all'interno del nucleo.  $E_M$  è circa uguale a  $20 \text{ Mev}$ ;

3) La particella  $a$  è soggetta a forti interazioni con gli altri nucleoni così da ripartire rapidamente la sua energia con questi.

Queste assunzioni equivalgono a dire che il potenziale cambia rapidamente a  $r = R$ , e che per  $r < R$  esiste una profonda buca di potenziale. In Figura 17.2 è schematizzato il potenziale governante il moto relativo della particella  $a$  e il nucleo  $X$  (entrambi supposti carichi): per  $r < R$  il potenziale è fortemente

attrattivo dovuto all'interazione nucleare e per  $r \rightarrow 0$  esso diventa relativamente piatto in modo non ancora del tutto sicuro; per  $r > R$  le forze nucleari non agiscono più e il potenziale è semplicemente la somma di quello coulombiano e di quello centrifugo

$$U_l(r) = \frac{l(l+1)\hbar^2}{8\pi^2 mr^2} + \frac{Z_1 Z_2 e^2}{r} \quad (17.26)$$

dove  $m$  è la massa ridotta ed  $l$  è il numero quantico del momento angolare. I livelli energetici associabili a tale potenziale sono indicati nella Figura 17.2.

Il nucleo composto  $C'$  viene sempre creato in uno stato eccitato in quanto la particella  $a$  cede al nucleo  $C'$  non solo la sua energia cinetica ma anche la sua energia di legame  $S_a$ .

Indicando con  $E_{min}$  l'energia minima richiesta per rimuovere la particella  $a$  dal nucleo  $C'$  e con  $E'$  l'energia di eccitazione. Ricordiamo che  $E_{min}$  è proprio l'energia di un livello stazionario rispetto allo zero del potenziale complessivo. (si veda Fig.17.2) Se  $E' < E_{min}$  allora i livelli di  $C'$  saranno stazionari a parte la possibilità di un decadimento radiativo. Per  $E' > E_{min}$  i livelli energetici di  $C'$  strettamente parlando formerebbero un continuo in quanto esiste sempre la possibilità di emissione della particella  $a$  con energia cinetica  $E' - E_{min}$ . Tuttavia a causa della brusca variazione di potenziale alla superficie del nucleo la particella può non essere emessa anche per tempi molto lunghi. Questi stati sono detti quasi-stazionari. Il loro tempo di vita è minore di quelli con  $E' < E_{min}$  semplicemente in quanto è possibile l'emissione di una particella in aggiunta al decadimento radiativo. La larghezza degli stati quasi-stazionari sarà pertanto maggiore di quelli stazionari. Per energie sufficientemente alte le vite medie diventano molto corte e poichè i livelli energetici sono vicini, gli stati quasi-stazionari adiacenti si sovrappongono formando un continuo. Le risonanze possono avvenire quando l'energia cinetica della particella  $a$  all'infinito è tale che l'energia totale coincide con quella di uno degli stati quasi-stazionari del nucleo composto.

È noto che da un punto di vista classico l'energia  $E$  all'infinito viene spesa a vincere l'energia potenziale  $U_l(r)$  permettendo una distanza di massimo avvicinamento  $R_0$  data da  $U(R_0) = E$ . Nella meccanica quantistica esiste sempre una probabilità che la particella possa penetrare la barriera di potenziale e rag-

giungere la regione delle forze nucleari. Se l'energia  $E$  non coincide con quella di uno stato quasi-stazionario (o non è molto vicina a questa) la reazione sarà detta non risonante. Essa sarà detta risonante in caso contrario.

Lo studio dei livelli energetici con le tecniche della meccanica quantistica mostra che al livello con vita media  $t$  è associato un profilo di energia

$$P(E) = \frac{\frac{h}{2\pi t}}{(E - E_i)^2 + (\frac{h}{2\pi t})^2}. \quad (17.27)$$

Una volta formato, il nucleo composto  $C'$  può decadere in vari canali ad ognuno dei quali è associata una vita media  $t_i$  ed una larghezza  $\Gamma_i$ . La larghezza totale di un livello è data dalla somma delle larghezze relative ai diversi canali. Al crescere dell'energia di eccitazione del nucleo, la larghezza del livello cresce in quanto aumenta il numero dei canali di decadimento possibili. È chiaro che uno spettro discreto è possibile fintanto che la larghezza dei livelli è minore della distanza  $D$  fra questi.

Il nucleo può essere pensato ora come un sistema in cui i singoli nucleoni si muovono su livelli energetici stazionari o quasi-stazionari. In analogia con il modello a shell per il moto degli elettroni attorno al nucleo, possiamo affermare che il periodo del moto *orbitale* dei nucleoni è data da

$$P = h/D \quad (17.28)$$

dove  $D$  è la separazione media fra i livelli energetici.

Nel caso di un nucleo (composito)  $P$  può essere interpretato come il tempo necessario affinché la particella  $a$ , entrata attraverso un dato canale, si presenti pronta ad uscire attraverso lo stesso. A causa della brusca discontinuità nel potenziale, questo può avvenire solamente dopo un certo numero di tentativi. Se una particella  $a$  lasciasse il nucleo dopo il tempo  $P$ , il tempo di vita dello stato eccitato sarebbe dato dalla relazione

$$t_a = \frac{h}{2\pi \Gamma} = P \simeq \frac{h}{D} \quad (17.29)$$

ovvero

$$\Gamma \simeq \frac{D}{2\pi} \quad (17.30)$$

con la conseguenza che gli stati energetici quasi-stazionari non sarebbero discreti. Da questo si deduce che la condizione per l'esistenza di stati quasi-stazionari discreti è  $t_a \gg P$ .

Il numero di volte che una particella  $a$  è rimandata indietro nel nucleo dalla riflessione alla superficie di questo, prima di sfuggire definitivamente attraverso lo stesso canale di entrata, è dato dal rapporto

$$\frac{1}{T_l(a)} \quad (17.31)$$

dove  $T_l(a)$  detto *fattore di trasmissione* è una misura della probabilità di penetrazione della particella  $a$  nel nucleo  $X$  attraverso quel particolare canale. L'indice  $l$  ricorda il fatto che la particella  $a$  ha in generale un certo momento angolare  $[l(l+1)]^{1/2} \hbar/2\pi$  rispetto al nucleo  $X$ .

Pertanto possiamo scrivere la relazione

$$t_a = \frac{\hbar}{2\pi} \frac{1}{\Gamma_a} = \frac{P}{T_l(a)} \simeq \frac{\hbar}{T_l(a)D} \quad (17.32)$$

Da questa si deduce l'ulteriore importante relazione

$$\Gamma_a = T_l(a) \frac{D}{2\pi} \quad (17.33)$$

che lega la larghezza per decadimento di  $C'$  attraverso un particolare canale al fattore di trasmissione per la formazione di  $C'$  attraverso lo stesso canale.

Si può dimostrare che il fattore di trasmissione può essere riscritto come

$$T_l(a) = \left(\frac{4k}{K}\right) P_l(a) \quad (17.34)$$

dove  $k$  e  $K$  sono i numeri d'onda associati alla particella fuori e dentro il nucleo e  $P_l(a)$  è il fattore di *penetrazione* della barriera coulombiana. Esso è 1 per neutroni con  $l = 0$  e molto piccolo ma positivo per particelle cariche e per valori di  $l$  maggiori di zero. Questa relazione vale se l'energia  $E$  è molto minore dell'energia media all'interno del nucleo. Finalmente abbiamo

$$\Gamma_a = \left(\frac{4k}{K}\right) P_l(a) \frac{D}{2\pi} \quad (17.35)$$

di cui faremo uso per calcolare la sezione d'urto di una reazione dal punto di vista teorico.

### 17.2.3 Sezione d'Urto

La sezione d'urto  $\sigma(v)$  può essere pensata come il prodotto di vari termini:

$$\sigma = (2l + 1)\pi \left(\frac{\lambda}{2\pi}\right)^2 \cdot \omega \cdot T_l(a) \cdot y(E) \cdot S \cdot G(b) \quad (17.36)$$

Il primo termine  $(2l + 1)\pi (\lambda/2\pi)^2$  è legato alla sezione d'urto geometrica. La lunghezza d'onda  $\lambda$  è legata all'energia cinetica relativa  $E$  della particella dalle relazioni

$$\frac{\lambda}{2\pi} = \frac{1}{k} = \frac{h}{2\pi} (2mE)^{-1/2} \quad (17.37)$$

dove  $k$  è il numero d'onda e  $m$  la massa ridotta di  $a$  e  $X$ . Essa rappresenta la massima sezione d'urto per particelle il cui parametro d'urto  $b$  è compreso fra  $l(\lambda/2\pi)$  e  $(l + 1)(\lambda/2\pi)$ . Poichè le forze nucleari sono a corto raggio d'azione esse agiscono sulla traiettoria della particella  $a$  solamente se il parametro d'urto è minore del loro raggio d'azione  $R$ . Il che è possibile solo per  $b = h\lambda/mv < R$ , ovvero per  $l = 0$  (urto centrale o approssimazione di onda  $S$ ). In tale caso la sezione d'urto geometrica è

$$\sigma = \frac{h^2}{8\pi mE} \quad (17.38)$$

Essa rappresenta il fatto che in accordo con il principio di Heisenberg due particelle non possono "vedersi" distintamente per distanze dell'ordine di  $1/k$ . Il fattore  $\omega$  è un fattore statistico dell'ordine dell'unità che tiene conto degli spin o dei momenti angolari interni di  $a$ ,  $X$  e  $C'$ .

Il terzo termine  $T_l(a)$  è il fattore di trasmissione non risonante cioè la probabilità di penetrazione di  $a$  in  $X$  in assenza di risonanze. Esso è legato alla  $\Gamma_a$  per l'emissione di una particella  $a$  da  $C'$  attraverso la relazione  $T_l(a) = (2\pi/D)\Gamma_a$ . Il termine  $y(E)$  è un fattore adimensionale di correzione per la presenza di risonanze ed è proporzionale al profilo del livello. Si trova che

$$y(E) = \left(\frac{D}{2\pi}\right) \frac{\Gamma}{(E - E_r)^2 + (\Gamma/2)^2} \quad (17.39)$$

dove  $E_r$  è l'energia del livello di risonanza. In assenza di risonanze  $y(E) = 1$ , mentre in presenza di una risonanza  $y(E)$  è massimo attorno ad  $E_r$  e trascurabile altrove.



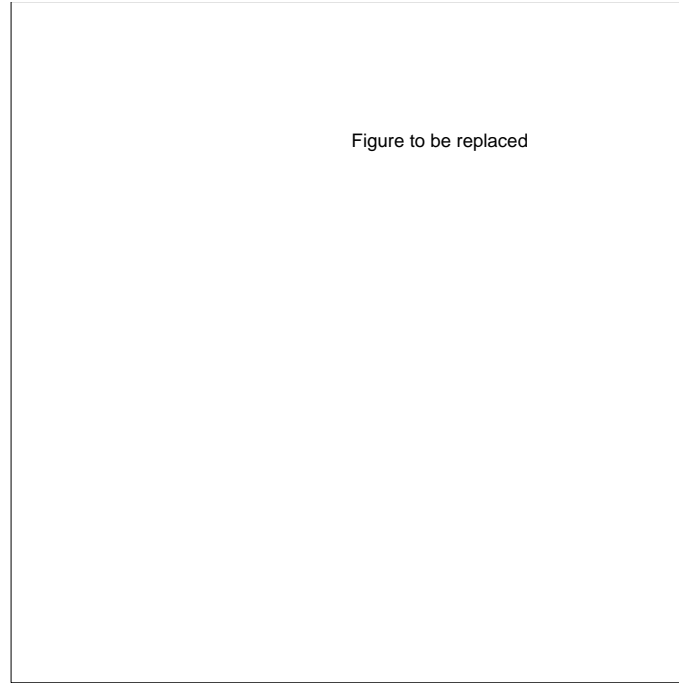


Figura 17.3: Andamento della funzione  $S(E)$  in intervalli di energia tipicamente stellari

Il termine  $S$  è un fattore di simmetria uguale a 1 se le particelle sono diverse e uguale a 2 se identiche e senza spin.

L'ultimo termine  $G(b)$  è il "branching ratio" e cioè la probabilità relativa di decadimento di  $C'$  nel canale di formazione della particella  $b$ .  $G(b) = \Gamma_b/\Gamma$ .

Mettendo insieme i vari termini si ottiene la ben nota relazione di Breit-Wigner per un livello singolo

$$\sigma = (2l + 1)\pi \left(\frac{\lambda}{2\pi}\right)^2 \omega S \frac{\Gamma_a \Gamma_b}{(E - E_r)^2 + (\frac{\Gamma}{2})^2} \quad (17.40)$$

### Sezione d'urto non risonante

Nella relazione di Breit-Wigner raggruppiamo in una costante tutti i termini che non tendono a zero con l'energia; si ottiene

$$\sigma = \text{cost} \times \left(\frac{\lambda}{2\pi}\right)^2 \Gamma_a = \text{cost} \times E^{-1/2} P_l(E) \quad (17.41)$$

La probabilità di penetrazione della barriera coulombiana rappresentata in Figura 17.2 per una particella  $a$  con momento angolare del moto relativo a

$X$  uguale a  $[l(l+1)]^{1/2}(h/2\pi)$  è

$$P_l = \frac{K_l(R)}{k} e^{-2 \int_R^{r_0} K_l(r) dr} \quad (17.42)$$

dove  $r_0$  è il raggio classico di massimo avvicinamento e

$$K_l(r) = \sqrt{(2\pi/h)^2 2mU_l(r) - k^2} \quad (17.43)$$

$$U_l(r) = V(r) + \frac{l(l+1)h^2}{8\pi^2 m r^2} \quad (17.44)$$

$$V(r) = \frac{Z_a Z_X e^2}{r} \quad (r \geq R). \quad (17.45)$$

A causa della piccola sezione d'urto di particelle cariche a bassa energia possiamo adottare l'approssimazione di onda  $S(l=0)$  e con facili passaggi algebrici arrivare alla relazione per  $P_0$

$$P_0 = \left[ B^{1/2} e^{\frac{8e2\pi}{h}} \sqrt{\frac{mZ_a Z_X R}{2}} \right] E^{-1/2} e^{-2\pi\eta} \quad (17.46)$$

dove  $R$  è la larghezza della buca di potenziale, mentre  $B$  (altezza della barriera) e  $\eta$  sono date da

$$B = V(R) = \frac{Z_a Z_X e^2}{R} \quad (17.47)$$

$$\eta = \sqrt{\frac{m}{2}} Z_a Z_X e^2 \left( \frac{h}{2\pi} \right)^{-1} E^{-1/2}. \quad (17.48)$$

Da questo segue che

$$\sigma(E) = \text{cost} \times E^{-1} e^{-2\pi\eta} \quad (17.49)$$

La costante può essere calcolata teoricamente, tuttavia ciò è possibile solamente in alcuni casi particolarmente semplici. Nell'uso astrofisico si procede in maniera diversa introducendo una funzione  $S(E)$  definita da

$$\sigma(E) = (S/E) e^{-2\pi\eta} \quad (17.50)$$

dove  $\sigma(E)$  è la sezione d'urto sperimentale della reazione e  $S(E)$  è determinata da questa nell'ipotesi che sia una funzione debole di  $E$ . Il vantaggio offerto dall'usare questa funzione è evidente pensando che a causa della barriera coulombiana le sezioni d'urto fra particelle cariche diventano molto piccole al di sotto di circa 100 *KeV*. D'altra parte le energie di interesse astrofisico cadono proprio al di sotto di questo valore ed è necessario estrapolare il valore di  $S$  ottenuto dalla misura di  $\sigma(E)$  in domini di energia accessibili in laboratorio (si veda l'esempio di Figura 17.3). Se non ci sono risonanze nel dominio astrofisico la  $S(E)$  è ragionevolmente corretta. Se invece ci sono delle risonanze la funzione  $S(E)$  così ottenuta può essere completamente errata.

Prima di passare a discutere il caso risonante, ricaviamo la quantità  $\langle \sigma v \rangle$  per il caso non risonante. Sostituendo la  $\sigma(v)$  con la  $\sigma(E)$  ottenuta nell'espressione per  $\langle \sigma v \rangle$  si ha

$$\langle \sigma v \rangle = \sqrt{\frac{2}{m}} \frac{2}{\pi^{1/2}} \frac{1}{(KT)^{3/2}} S \int_0^\infty e^{-E/KT - BE^{-1/2}} dE \quad (17.51)$$

dove  $S(E)$  è assunta costante e  $B$  è dato da

$$B = \pi \sqrt{2m} \frac{Z_a Z_X e^2}{h/2\pi}. \quad (17.52)$$

Si osservi che nell'integrale si ha il prodotto di due esponenziali uno ( $\exp - E/KT$ ) rapidamente decrescente e l'altro ( $\exp - BE^{-1/2}$ ) rapidamente crescente con  $E$  per cui il prodotto sarà diverso da zero solamente in un piccolo intervallo di energia. Questa regione di massimo nell'integrando è detta finestra di Gamow (Figura 17.4). Si può facilmente verificare che il massimo è localizzato al valore dell'energia

$$E_{max} = \left[ \sqrt{\frac{m}{2}} \frac{\pi Z_a Z_X e^2}{\frac{h}{2\pi}} (KT) \right]^{2/3} \quad (17.53)$$

e che per valori tipici della temperatura  $E_{max}$  è confinato fra 5 e 100 *KeV*.  $E_{max}$  rappresenta dunque il valore dell'energia a cui per data temperatura avvengono tutte le reazioni termonucleari. Siccome la maggior parte delle particelle hanno energie dell'ordine di  $(1/2)KT$  è anche facile vedere che la finestra di Gamow cade nella coda della distribuzione di Maxwell e che pertanto solo pochissime particelle avranno energie sufficienti per reagire (Figura 17.5). Il

calcolo dell'integrale non è immediato, tuttavia approssimando la finestra di Gamow con una opportuna gaussiana ed introducendo la variabile ausiliaria

$$\tau = 3 \frac{E_{max}}{KT} \quad (17.54)$$

si arriva a

$$\langle \sigma v \rangle = 7.02 \times 10^{-19} \frac{1}{Z_a Z_X A} S \tau^2 e^{-\tau} \quad cm^3 \text{ sec}^{-1} \quad (17.55)$$

dove A è il numero di massa ridotta dei nuclei  $[A = A_a A_X / (A_a + A_X)]$ . In funzione esplicita della temperatura si ha

$$\langle \sigma v \rangle = \text{cost} \frac{(\frac{Z_a Z_X}{A})^{1/3}}{T^{2/3}} e^{-C(\frac{Z_a^2 Z_X^2 A}{T})^{1/3}} \quad (17.56)$$

con

$$C = 3 \left[ \frac{\pi^2 e^4}{2 N_0 (\frac{h}{2\pi})^2 K} \right]^{1/3} \quad (17.57)$$

e  $N_0$  numero di Avogadro. A causa del termine  $(Z_a^2 Z_X^2 A)^{1/3}$  si vede che reazioni fra particelle cariche in cui una è un protone sono di gran lunga molto più probabili di quelle in cui nessuna è un protone. Inoltre la velocità di reazione diminuisce rapidamente al crescere delle cariche dei nuclei coinvolti.

### Sezione d'urto risonante

Se in vicinanza di  $E_{max}$  esiste una risonanza allora la  $\langle \sigma v \rangle$  è determinata più da quest'ultima che dal picco della finestra di Gamow. È chiaro che se la risonanza non cade proprio nelle immediate vicinanze di  $E_{max}$ , attesa la piccola larghezza della finestra di Gamow, essa influisce molto poco sulla  $\langle \sigma v \rangle$  come mostrato dalla Figura 17.6. Pertanto la  $\langle \sigma v \rangle$  può essere approssimata a

$$\langle \sigma v \rangle \simeq n(E_r) v_r \int \sigma(E) dE \quad (17.58)$$

dove si valuta la distribuzione Maxwelliana delle velocità e le velocità stesse alla energia  $E_r$ . Introducendo la  $\sigma(E)$  valida per una risonanza (si considera il caso di un solo livello), si ottiene

$$\langle \sigma v \rangle = \left(\frac{2\pi}{m}\right)^{3/2} \left(\frac{h}{2\pi}\right)^2 \omega S \frac{\Gamma_a(E_r) \Gamma_b}{\Gamma} \frac{1}{(KT)^{3/2}} e^{-E_r/KT} \quad (17.59)$$



Figura 17.4: Dipendenza dall' energia dei fattori dominanti della  $\langle \sigma \cdot v \rangle$  non risonante e posizione della finestra di Gamow

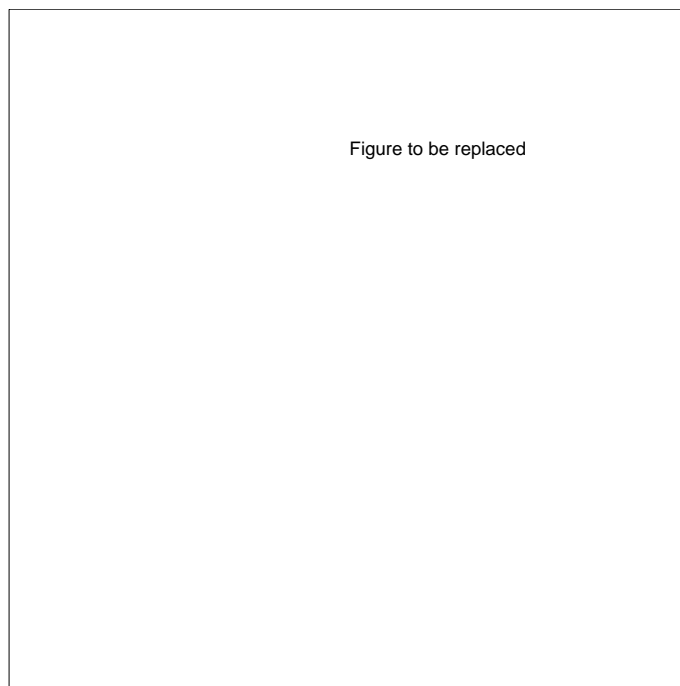


Figura 17.5: Dipendenza dall' energia dei fattori dominanti della  $\langle \sigma \cdot v \rangle$  che procede attraverso le ali di una larga risonanza

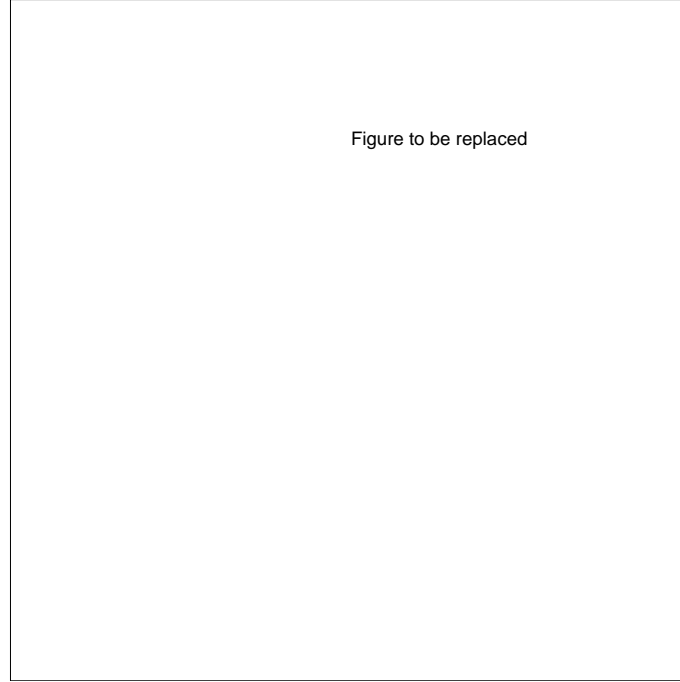


Figura 17.6: Andamento schematico della  $\frac{d\langle\sigma \cdot v\rangle}{dE}$  nel caso di una risonanza vicina alla finestra di Gamow

### 17.3 Schermaggio elettronico

Nel valutare l'energia di interazione elettrostatica fra nuclei si è implicitamente supposto di trascurare ogni effetto da parte degli elettroni liberi. Tuttavia ad alte densità i nuclei tendono ad attrarre gli elettroni vicini i quali, formando una nuvola di carica negativa attorno ai nuclei e schermano la carica di quest'ultimi. La diminuzione della carica effettiva nucleare abbassa la barriera coulombiana e facilita l'occorrere delle reazioni.

Il primo passo è quello di considerare la polarizzazione che il nucleo di carica  $Ze$  produce nelle sue vicinanze. Gli elettroni di carica opposta sono attratti ed acquistano una densità numerica  $n_e$  livemente maggiore nelle immediate vicinanze del nucleo rispetto a quella media  $\tilde{n}_e$ . Gli altri nuclei sono respinti acquistando una densità numerica  $n_i$  livemente inferiore al valore medio  $\tilde{n}_i$ .

Per un gas non degenerare, la densità numerica di particelle con carica  $q$  viene modificata in presenza di un potenziale  $\phi$  secondo la relazione

$$n = \tilde{n} e^{\frac{-q\phi}{kT}} \quad (17.60)$$

Nella maggior parte dei casi  $|q\phi| \ll KT$  cosicchè l' esponenziale può essere approssimato a  $1 - q\phi/KT$ . Si ottiene

$$n_i = \tilde{n}_i \left(1 - \frac{Z_i e \phi}{KT}\right) \quad (17.61)$$

$$n_e = \tilde{n}_i \left(1 + \frac{e \phi}{KT}\right) \quad (17.62)$$

che mostrano la diminuzione ed aumento delle densità di nuclei ed elettroni, rispettivamente.

Consideriamo gli  $n_i$  di tutti i tipi di nuclei presenti nel gas. Possiamo allora scrivere subito la densità di carica totale  $\sigma$ . Quando  $\phi = 0$  la densità di carica totale è ovviamente  $\tilde{\sigma} = 0$  (gas neutro) , cioè

$$\tilde{\sigma} = \sum_i (Z_i e) \tilde{n}_i - e \tilde{n}_e = 0 \quad (17.63)$$

mentre per un potenziale non nullo si ha

$$\sigma = \sum_i -\frac{(Z_i e)^2 \phi}{KT} \tilde{n}_i - \frac{e^2 \phi}{KT} \tilde{n}_e \quad (17.64)$$

dove si è fatto uso dell' approssimazione dell' esponenziale. Questa relazione può essere riscritta nel modo seguente

$$\sigma = -\chi \frac{e^2 \phi}{KT} n \quad (17.65)$$

con

$$n = n_e + \sum n_i \quad (17.66)$$

e

$$\chi = \frac{1}{n} \left( \sum_i Z_i^2 \tilde{n}_i + \tilde{n}_e \right) \quad (17.67)$$

Se invece delle densità numeriche viene usata la frazione di massa  $X_i = A_i \tilde{n}_i / n \mu$  (dove  $\mu$  è il peso molecolare medio) si ottiene

$$\chi = \mu \sum_i \frac{Z_i (Z_i + 1)}{A_i} X_i = \mu \zeta \quad (17.68)$$

La densità di carica  $\sigma$  e potenziale  $\phi$  sono legati dalla equazione di Poisson

$$\nabla^2 \phi = -4\pi\sigma. \quad (17.69)$$

Nel caso di simmetria sferica, l'equazione di Poisson diventa

$$\frac{R_D^2}{r} \frac{d^2(r\phi)}{dr^2} = \phi \quad (17.70)$$

dove  $R_D$  è la lunghezza di Debye data da

$$R_D = \sqrt{\frac{KT}{4\pi e^2 n \chi}} \quad (17.71)$$

La soluzione della equazione di Poisson è il potenziale

$$\phi = \frac{Ze}{r} e^{-r/R_D} \quad (17.72)$$

nella quale si vede che  $\phi$  tende al potenziale normale di un punto di carica  $Ze$  al tendere di  $r \rightarrow 0$ , mentre si ha una importante riduzione del potenziale normale a distanze  $r \geq R_D$ . Possiamo ritenere che  $R_D$  rappresenti il raggio della nuvola di elettroni capace di schermare significativamente la carica del nucleo.

Per temperature  $\simeq 10^7$  e densità  $1 < \rho < 10^2 \text{ g cm}^{-3}$ ,  $R_D \simeq 10^{-8} \div 10^{-9} \text{ cm}$  (si ricordi che  $\zeta \simeq 1$ ).

Per dare un'idea delle dimensioni di  $R_D$  è utile confrontarlo con un altro raggio caratteristico e cioè il raggio di massimo avvicinamento  $R_0$  di una particella in moto con energia cinetica pari a quella tipica del picco di Gamow  $E_0$  sotto l'effetto della barriera coulombiana. Abbiamo trovato

$$R_0 = \frac{Z_1 Z_2 e^2}{E_0} \quad (17.73)$$

Il rapporto fra i due raggi è

$$\frac{R_D}{R_0} \simeq 200 \frac{E_0}{Z_1 Z_2} \left( \frac{T_7}{\zeta \rho} \right)^{1/2} \quad (17.74)$$

dove  $E_0$  è in Kev e  $\rho$  in  $\text{g cm}^{-3}$ . Per tipici valori di temperature, densità,  $Z_1$ ,  $Z_2$  ed  $E_0$  il rapporto  $R_D/R_0 \simeq 50 \div 100$ . Questo significa che per stelle normali,  $R_D \gg R_0$  cioè la particella può penetrare (anche classicamente) l'intera nuvola elettronica.

Tuttavia la diminuzione del potenziale coulombiano aumenta la probabilità di penetrazione della barriera. Questo avviene tramite il termine  $e^{-2\pi\eta}$  nel calcolo



della  $P_0$ , esso infatti è determinato dalla funzione  $E_C - E$ , dove  $E_C$  è l'energia di interazione coulombiana (che ora è ridotta). In prima approssimazione (espansione in serie dell'esponenziale)

$$E_C - E = \frac{Z_1 Z_2 e^2}{r} e^{-r/R_D} - E = \frac{Z_1 Z_2 e^2}{r} - \frac{Z_1 Z_2 e^2}{R_D} - E \quad (17.75)$$

la quale mostra che otteniamo lo stesso risultato del caso senza schermaggio ma con l'energia della particella aumentata

$$\tilde{E} = E + \frac{Z_1 Z_2 e^2}{R_D} = E + E_D \quad (17.76)$$

Allo scopo di vederne l'effetto, consideriamo il caso semplice non risonante e calcoliamo  $\langle \sigma \cdot v \rangle$ : al posto di  $E$  mettiamo  $\tilde{E}$  (nella relazione che segue  $f(v)$  compatta tutti gli altri termini) e sostituiamo il termine  $\eta$  con  $\eta = (E/\tilde{E})^{1/2}$ . Si ottiene

$$\sigma(\tilde{E}) v f(v) \propto (\tilde{E}^{-1} e^{-2\pi\tilde{\eta}}) E^{1/2} (E^{1/2} e^{-E/KT}) \propto (1 - \frac{E_D}{\tilde{E}}) e^{(E_D/KT - \tilde{E}/KT - 2\pi\tilde{\eta})} \quad (17.77)$$

Assumiamo ora  $E_D/KT \ll 1$  (schermaggio debole) e teniamo conto che alla sezione d'urto mediata  $\langle \sigma \cdot v \rangle$  contribuiscono solo le particelle in uno stretto intervallo di  $E$  molto maggiore di  $KT$  (picco di Gamow). Ciò permette di trascurare il termine  $(1 - \frac{E_D}{\tilde{E}})$  ed integrare su  $\tilde{E}$  invece che su  $E$ . Si ottiene

$$\langle \sigma \cdot v \rangle_s = \langle \sigma \cdot v \rangle e^{\frac{E_D}{KT}} \quad (17.78)$$

dove  $E_D = Z_a Z_X e^2 / R_D$ . La  $\langle \sigma \cdot v \rangle_s$  è maggiore di quella in assenza di schermaggio elettronico.

Per  $\frac{E_D}{KT}$  vale la espressione

$$\frac{E_D}{KT} = 5.92 \times 10^{-3} Z_1 Z_2 \left( \frac{\zeta \rho}{T_7^3} \right)^{1/2} \quad (17.79)$$

Nel caso di schermaggio forte (alte densità) la relazione è molto più complicata. Si trova

$$\frac{E_D}{KT} = 0.0205 \left[ (Z_1 + Z_2)^{5/3} - Z_1^{5/3} - Z_2^{5/3} \right] \frac{(\rho/\mu_e)^{1/3}}{T_7} \quad (17.80)$$

Da entrambe le relazioni si vede che lo schermaggio elettronico aumenta al crescere  $\rho$  e decrescere di  $T$ . Inoltre mentre esso è di minore importanza nelle stelle normali, la situazione cambia radicalmente in condizioni di alta densità e bassa temperatura (ad esempio stelle della bassa sequenza principale e/o nuclei stellari molto compatti).

Infine una reazione con schermaggio elettronico viene di solito scritta in questo modo

$$f < \sigma \cdot v > = f_0 < \sigma \cdot v >_0 \left( \frac{\rho}{\rho_0} \right)^\lambda \left( \frac{T}{T_0} \right)^\nu \quad (17.81)$$

con opportune espressioni per  $\nu$  e  $\lambda$ .

Quando lo schermaggio elettronico è forte, le reazioni sono controllate dalla densità piuttosto che dalla temperatura. In tali condizioni esse vengono chiamate *reazioni picno-nucleari*. Tali reazioni giocano un ruolo importante nelle fasi avanzate dell'evoluzione stellare, dove un bruciamento nucleare può essere stimolato dalla compressione senza aumento della temperatura.

## 17.4 Principali Reazioni Termonucleari

Il numero di reazioni possibili dipende primariamente dalla temperatura e dai nuclei presenti nel materiale stellare dando luogo ben presto ad un sistema di reazioni estremamente complesso. Distinguiamo due gruppi principali di reazioni: quelle che per l'abbondanza dei nuclei coinvolti e la grande sezione d'urto sono responsabili della quantità di energia emessa; le altre che non contribuiscono significativamente alla produzione di energia ma che sono importanti per la sintesi di elementi vari.

### 17.4.1 Il Bruciamento dell'Idrogeno

Il materiale inizialmente presente in una stella è essenzialmente costituito da idrogeno ed elio a cui si aggiungono tracce di elementi leggeri come  $D$ ,  $Li$ ,  $Be$  e  $B$  se esso proviene dalla nucleosintesi primordiale oppure, in aggiunta a questi, anche tracce di elementi pesanti (primariamente carbonio ed ossigeno) se esso ha già subito processi di nucleosintesi stellare. Nella fase di pre-sequenza principale, al crescere graduale della temperatura per contrazione gravitazionale, gli elementi leggeri come  $D$ ,  $Li$ ,  $Be$  e  $B$  reagiscono con protoni e sono distrutti.

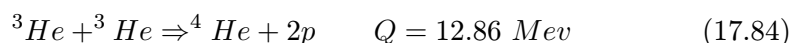
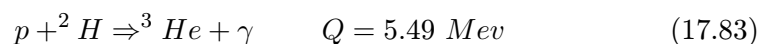
Tuttavia poichè le abbondanze di questi elementi sono piccole, tali reazioni non sono in grado di fornire sufficiente energia, l'unico risultato essendo un rallentamento della contrazione ed una trascurabile produzione di  ${}^3\text{He}$  e  ${}^4\text{He}$ . È solo quando la temperatura è salita sopra un certo valore che può avvenire la fusione di  ${}^1\text{H}$  in  ${}^4\text{He}$ . Ci sono due possibilità: (1) diretta ma non simultanea fusione di 4 protoni per formare un nucleo di  ${}^4\text{He}$ ; (2) fusione indiretta di quattro protoni con nuclei più pesanti ed eventuale emissione di un nucleo di  ${}^4\text{He}$ . Il primo va sotto il nome di catena Protone-Protone, il secondo di ciclo CN o CNO.

### Catena Protone-Protone

Quando la temperatura sale sopra  $6 \times 10^6$  K diventa efficiente la fusione di protoni secondo lo schema



Pur essendo  ${}^2\text{He}$  instabile ( ${}^2\text{He} \Rightarrow p + p$ ) vi è la possibilità che una frazione di  ${}^2\text{He}$  si trasformi in deuterio (stabile). Questo processo può iniziare anche in una stella composta di solo idrogeno. La sezione d'urto è estremamente piccola e questa reazione non è mai stata osservata in laboratorio. La sezione d'urto è piccola in quanto, durante il breve tempo di vita dell'incontro fra i due protoni, deve avvenire un decadimento beta. Ancora, a causa del principio di Pauli, i due protoni devono avere spin antiparallelo per formare un nucleo composto. Questo emette un positrone ed un neutrino, tuttavia lo stato fondamentale del  ${}^2\text{H}$  è quello in cui il protone e neutrone hanno spin parallelo. Pertanto è anche necessario il cambiamento dello spin di uno dei nucleoni. Questo fa sì che la sezione d'urto aspettata sia estremamente piccola (circa  $3.3 \pm 0.4 \times 10^{-22}$  Kev/barns). I passi successivi sono



Si noti che per ogni reazione (c) le reazioni (a) e (b) devono avvenire due volte. La resa totale della catena è di 26.2 Mev dove si tiene già conto della perdita per neutrini. Questo insieme di reazioni è noto come catena PP1.

—noindent In presenza di quantità apprezzabili di  ${}^4\text{He}$  sono possibili due altri gruppi di reazioni, noti come PP2 e PP3, sottoindicati. D'ora in poi adottiamo per le reazioni la scrittura più compatta  $X(a, b)Y$ .

Catena PP2	Q(Mev)	Catena PP3	Q(Mev)
${}^1\text{H}(p, \beta^+, \nu){}^2\text{H}$	1.18	${}^1\text{H}(p, \beta^+, \nu){}^2\text{H}$	1.18
${}^2\text{H}(p, \gamma){}^3\text{He}$	5.49	${}^2\text{H}(p, \gamma){}^3\text{He}$	5.49
${}^3\text{He}(\alpha, \gamma){}^7\text{Be}$	1.59	${}^3\text{He}(\alpha, \gamma){}^7\text{Be}$	1.59
${}^7\text{Be}(\beta^-, \nu){}^7\text{Li}$	0.06	${}^7\text{Be}(p, \gamma){}^8\text{B}$	0.13
${}^7\text{Li}(p, \alpha){}^4\text{He}$	17.35	${}^8\text{B} \rightarrow {}^8\text{Be} + e^+ + \nu$	10.78
		${}^8\text{Be} \rightarrow 2{}^4\text{He}$	0.09
$Q_T = 25.67$		$Q_T = 19.2$	
$\nu 4\%$		$\nu 29\%$	

I tre gruppi di reazioni non sono egualmente efficienti a tutte le temperature ed abbondanze di  ${}^4\text{He}$ . Innanzi tutto le catene PP2 e PP3 sono in pratica assenti per piccole abbondanze di  ${}^4\text{He}$ . In presenza di quantità significative di  ${}^4\text{He}$  la catena PP1 domina a temperature minori di  $10^7$  K mentre la PP2 e PP3 diventano via via importanti al crescere della temperatura. A temperature superiori a circa  $20 \times 10^6$  K la catena PP3 è dominante.

### Cicli CN e CNO

Se nel materiale stellare sono inizialmente presenti gli elementi  $C$ ,  $N$  e  $O$  e se la temperatura è sufficientemente elevata possono avvenire due cicli di reazioni noti come CN e CNO che portano alla fusione indiretta di quattro  ${}^1\text{H}$  in un nucleo di  ${}^4\text{He}$ . Gli isotopi di  $C$ ,  $N$  e  $O$  partecipanti alle reazioni vengono continuamente distrutti e creati dalle reazioni e svolgono pertanto il ruolo di catalizzatori. Lo schema del ciclo CN è il seguente

Ciclo CN	$Q$ (Mev)
${}^{12}\text{C}(p, \gamma){}^{13}\text{N}$	1.94
${}^{13}\text{N} \rightarrow {}^{13}\text{C} + e^+ + \nu$	1.51
${}^{13}\text{C}(p, \gamma){}^{14}\text{N}$	7.54
${}^{14}\text{N}(p, \gamma){}^{15}\text{O}$	7.29
${}^{15}\text{O} \rightarrow {}^{15}\text{N} + e^+ + \nu$	1.76
${}^{15}\text{N}(p, \alpha){}^{12}\text{C}$	4.96

La reazione  $^{15}\text{N} + p$  ha una certa probabilità (1/2500) di dar luogo a  $^{16}\text{O} + \gamma$  invece che  $^{12}\text{C} + \alpha$ , questo apre un'ulteriore serie di reazioni

Ciclo CNO	Q (Mev)
$^{15}\text{N}(p, \gamma)^{16}\text{O}$	12.12
$^{16}\text{O}(p, \gamma)^{17}\text{F}$	0.60
$^{17}\text{F} \rightarrow ^{17}\text{O} + e^+ + \nu$	2.22
$^{17}\text{O}(p, \alpha)^{14}\text{N}$	1.19
$^{17}\text{O}(p, \gamma)^{18}\text{F}$	
$^{18}\text{F} \rightarrow ^{18}\text{O} + e^+ + \nu$	
$^{18}\text{O}(p, \alpha)^{15}\text{N}$	
$^{18}\text{O}(p, \gamma)^{19}\text{F}$	
$^{19}\text{F}(p, \alpha)^{16}\text{O}$	

L'insieme dei due gruppi di reazioni è noto come ciclo CNO. È chiaro che trattandosi di un ciclo il gruppo, CN può iniziare quando è presente uno qualunque degli elementi catalizzatori  $^{12}\text{C}$ ,  $^{13}\text{C}$ ,  $^{14}\text{N}$ ,  $^{15}\text{N}$  avendo assunto come elemento iniziale  $^{12}\text{C}$  solo a titolo di esempio. Esso può operare solo se le temperature sono dell'ordine di  $15 \times 10^6$  K. Il secondo gruppo di reazioni per essere attivo richiede temperature ancora maggiori attorno a  $20 \times 10^6$  K. È facile verificare che il risultato netto dei sistemi di reazioni è quello di trasformare quattro nuclei di  $^1\text{H}$  in un nucleo di  $^4\text{He}$ .

## 17.5 Generazione di energia nel CN-CNO e PP

In generale le abbondanze in massa o in numero degli elementi che partecipano ad un sistema di reazioni nucleari sono governate da equazioni del tipo

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{N_i}{\rho}\right) = \sum_j \left(\frac{N_j}{\rho}\right) \frac{1}{t_{ij}} - \left(\frac{N_i}{\rho}\right) \sum_k \frac{1}{t_{ik}} \quad (17.85)$$

dove  $N_i/\rho$  è il numero di nuclei  $i$  per unità di massa,  $t_{ij}$  sono le vite medie di nuclei  $j$  in reazioni che li trasformano in nuclei  $i$ , mentre  $t_{ik}$  sono le vite medie di nuclei  $i$  in reazioni che li trasformano in nuclei  $k$ , infine le somme sono estese a tutti i processi che creano e distruggono i nuclei  $i$ . Risolvendo il sistema in funzione del tempo si ottengono le  $(N_i/\rho)$  e tramite queste il rilascio energetico da ogni reazione del sistema. Le vite medie non sono tuttavia le stesse per tutte le reazioni e ciò fa sì che per i nuclei, le cui vite medie sono le più brevi fra

tutte, possano essere raggiunte delle condizioni di equilibrio in cui le abbondanze si mantengono costanti nel tempo ed uguali a valori che sono caratteristici del sistema di reazioni e delle temperature a cui sono avvenute. In virtù di questo si giunge a relazioni globali per il rilascio energetico. Per illustrare ciò consideriamo il caso del ciclo CN che è particolarmente semplice fermo restando che una simile procedura può essere applicata per quanto complessa anche ad altri sistemi di reazioni.

### 17.5.1 Ciclo CN

La quantità di energia liberata per grammo e per secondo dall'insieme delle sei reazioni del ciclo CN è

$$\epsilon = \frac{1}{\rho} \sum_{i=1}^6 \frac{N_i Q_i}{t_i}. \quad (17.86)$$

Dallo studio del sistema di equazioni che governano le abbondanze dei singoli nuclei si vede che dopo un tempo dell'ordine di alcuni milioni di anni per un gas con densità  $\rho = 10^2 \text{ g cm}^{-3}$  e  $T = 25 - 30 \times 10^6 \text{ K}$ , i nuclei ad esclusione di  $^1\text{H}$  e  $^4\text{He}$  hanno raggiunto una condizione di equilibrio secolare in cui le  $N_i$  sono statisticamente costanti e proporzionali alla vita media  $N_i = C t_i$ . Ne segue che

$$\sum_i N_i = C \sum_i t_i \quad (17.87)$$

escludendo idrogeno ed elio dalla sommatoria. Ancora

$$\sum_i N_i Q_i / t_i = C \cdot \sum_i Q_i = \frac{\sum_i N_i}{\sum_i t_i} \sum_i Q_i = \frac{\sum_i N_i}{t'} \sum_i Q_i \quad (17.88)$$

dove  $\sum_i t_i \simeq t'$  e  $t'$  è la vita media più lunga. Infine si ha

$$\epsilon = \frac{1}{\rho} (\sum_i N_i) (\sum_i Q_i) / t' \quad (17.89)$$

Si riconosce che la vita media più lunga è quella del  $^{14}\text{N}$  nella  $^{14}\text{N}(p, \gamma)^{15}\text{O}$  e quindi  $t' = t_{14}$ . Ricordando che

$$\frac{1}{t_{14}} = N_{14} < 14, 1 > = N_0 \rho X_1 < 14, 1 > \quad (17.90)$$

dove  $< 14, 1 >$  sta per  $< \sigma v >_{14,1}$ ,  $N_0$  è il numero di Avogadro e  $X_1$  l'abbondanza in massa di protoni (idrogeno), si ottiene

$$\epsilon_{CN} = N_0^2 \rho X_1 \left( \sum_i \frac{X_i}{A_i} \right) Q < 14, 1 > \quad (17.91)$$

In questa relazione  $Q = \sum_i Q_i$  e  $\sum_i X_i/A_i$  è relativo agli elementi  $C$  ed  $N$ .

Infine, ricordando che la reazione  $^{14}\text{N}(p, \gamma)^{15}\text{O}$  è di tipo non risonante, si può dare la seguente relazione per  $\epsilon_{CN}$

$$\epsilon_{CN} = 7.94 \times 10^{27} \cdot f_{14,1} \cdot g_{14,1} \cdot \rho X_{CN} X_1 \cdot T_6^{-2/3} e^{-152.313/T_6^{1/3}} \quad (17.92)$$

in  $\text{erg g}^{-1} \text{sec}^{-1}$ , dove  $T_6$  è la temperatura in unità di  $10^6$  K,  $f_{14,1}$  è la correzione per schermaggio elettronico e  $g_{14,1}$  è un fattore che tiene conto che il picco di Gamow è stato sostituito con una gaussiana. Entrambi possono essere espressi in funzione della temperatura.

Tipiche espressioni per  $f_{14,1}$  e  $g_{14,1}$  sono

$$f_{14,1} = 1 + 1.75 \rho^{1/2} T_6^{3/2} \quad (\text{schermaggio debole}) \quad (17.93)$$

$$g_{14,1} = 1 + 0.00027 T_6^{1/3} - 0.0037 T_6^{2/3} - 0.0007 T_6 \quad (17.94)$$

Dipendendo dall'accuratezza con cui vengono calcolate  $< \sigma v >$  e le funzioni  $f$  e  $g$ , sono possibili altre espressioni per  $\epsilon_{CN}$  tuttavia simili a quella data sopra. Questa procedura può essere estesa all'intero ciclo CNO anche se in maniera molto più laboriosa.

Infine, è interessante notare che il tasso di produzione di energia nucleare può essere scritto nella forma seguente

$$\epsilon = \rho^\alpha X_{CN} X_1 \cdot f_{14,1} \cdot g_{14,1} \cdot \epsilon_0 \left( \frac{T}{T_0} \right)^\nu \quad (17.95)$$

dove  $\alpha$ ,  $\nu$  e  $\epsilon_0$  hanno  $T_0$  hanno valori opportuni. Questa relazione, che ha l'aspetto di una generica  $\epsilon = \epsilon(\mu, \rho, T)$ , è di particolare utilità nel calcolo delle strutture stellari. Tipici valori di  $\alpha$ ,  $\epsilon_0$  (in cgs) e  $T_0$  son riportanti nella tabella sottostante

$\alpha$	$T_0$	$\epsilon_0$	$\nu$
1	10	3.35(-4)	22.9
1	20	5.51(+2)	18.0
1	30	4.11(+5)	15.6

Se la combustione dell'idrogeno avviene attraverso il ciclo CN, il modo in cui le abbondanze vanno all'equilibrio dipende dalle sezioni d'urto di  $^{12}\text{C}$ ,  $^{13}\text{C}$ ,  $^{14}\text{N}$  e  $^{15}\text{N}$ . La sezione d'urto più piccola è quella di  $^{14}\text{N}$  seguita da quella del  $^{12}\text{C}$ ,  $^{13}\text{C}$  e  $^{15}\text{N}$ . Ci si aspetta pertanto che il 95% dei nuclei sia sotto forma di  $^{14}\text{N}$ . Partendo da  $^{12}\text{C}$  prima si raggiunge il rapporto di equilibrio fra  $^{12}\text{C}$  e  $^{13}\text{C}$ , poi fra  $^{14}\text{N}$  e  $^{15}\text{N}$  ed infine le due coppie andranno all'equilibrio generale. Le abbondanze di *equilibrio* non sono le stesse per ogni temperatura ma variano con questa. Ne segue che guardando alle abbondanze di questi elementi nelle stelle (qualora i prodotti di nucleosintesi siano esposti in superficie) si è in grado di sapere quale meccanismo di bruciamento è stato operativo e a quale temperatura. In genere, in materiale che non ha subito processi nucleari il carbonio è dominante rispetto ad azoto ed ossigeno, mentre in materiale processato CN il carbonio è diminuito a favore di azoto ed ossigeno, infine in materiale processato CNO il carbonio ed ossigeno sono diminuiti a favore dell'azoto. Le abbondanze di equilibrio di  $^{12}\text{C}$ ,  $^{13}\text{C}$ ,  $^{14}\text{N}$ ,  $^{15}\text{N}$  per una temperatura di circa  $15 \times 10^6$  K sono

$$\frac{^{12}\text{C}}{^{13}\text{C}} = 4 \quad \frac{^{14}\text{N}}{^{15}\text{N}} = 2800 \quad \frac{^{14}\text{N} + ^{15}\text{N}}{^{12}\text{C} + ^{13}\text{C}} = 21 \quad (17.96)$$

### 17.5.2 Catene PP

Il caso delle catene PP1, PP2 e PP3 è molto più complesso da descrivere. la procedura parte dal riconoscere che *l'energia prodotta per unità di massa dalla catena i-esima è data dal prodotto della  $Q_i$  per il numero di nuclei di  $^4\text{He}$  creati da questa per unità di massa e di tempo.*

Ricordando che  $\langle \sigma \cdot v \rangle \cdot N_1 \cdot N_2$  è per definizione il numer di reazione per unità di volume e di tempo è immediato esprimere il tasso di produzione di energia per i tre rami separatmente.

Per il ramo PP1 abbiamo

$$\epsilon_1 = \left(\frac{1}{\rho}\right) Q_1 \left(\frac{N_3^2}{2}\right) \langle 3, 3 \rangle \quad (17.97)$$

dove  $N_3$  è il numero di nuclei di  $^3\text{He}$ . Il termine  $(N_3^2/2) \langle 3, 3 \rangle$  è il numero di reazioni  $^3\text{He}(^3\text{He}, 2p)^4\text{He}$  per unità di volume e di tempo, che è anche uguale al tasso di creazione di nuclei di  $^4\text{He}$  per unità di volume e di tempo.

Nelle catene PP2 e PP3 riconosciamo il fatto che, grazie alla condizione di



equilibrio secolare, la velocità di produzione di  ${}^4\text{He}$  è uguale alla velocità di una qualunque delle reazioni coinvolte. Scegliendo le reazioni  ${}^7\text{Be}(e^-, \nu){}^7\text{Li}$  e  ${}^7\text{Be}(p, \gamma){}^8\text{B}$  come rappresentative del tasso di produzione di  ${}^4\text{He}$  nei rispettivi rami, abbiamo

$$\epsilon_2 = \left(\frac{1}{\rho}\right) Q_2 N_7 \frac{1}{t_{7,\beta-}} \quad (17.98)$$

$$\epsilon_3 = \left(\frac{1}{\rho}\right) Q_3 N_7 N_1 < 7, 1 > \quad (17.99)$$

dove il significato dei simboli è ovvio. La produzione totale di energia è data da

$$\epsilon_{pp} = \epsilon_1 + \epsilon_2 + \epsilon_3 \quad (17.100)$$

ovvero

$$\epsilon_{pp} = \frac{1}{\rho} \left[ Q_1 (N_3^2/2) < 3, 3 > + Q_2 (N_7/t_{7,\beta-}) + Q_3 N_7 N_1 < 7, 1 > \right] \quad (17.101)$$

Se avvenisse solo la PP1 avremmo  $(N_3^2/2) < 3, 3 > = (1/2)(N_1^2/2) < 1, 1 >$  (in quanto per ogni reazione  ${}^1\text{H}(p, \beta^+, \nu){}^2\text{H}$  è prodotto un solo nucleo di  ${}^3\text{He}$ , mentre due nuclei di  ${}^3\text{He}$  sono consumati nella reazione  ${}^3\text{He}({}^3\text{He}, 2p){}^4\text{He}$ . In questo caso, la produzione di energia sarebbe

$$\epsilon'_1 = \left(\frac{1}{\rho}\right) Q_1 \left(\frac{1}{2}\right) (N_1^2/2) < 1, 1 > \quad (17.102)$$

Sommando le  $\epsilon_i$  parziali ed esprimendo la  $\epsilon$  totale in funzione di  $\epsilon'_1$  si ha

$$\epsilon = \epsilon'_1 \Psi_{PP} \quad (17.103)$$

dove  $\Psi_{PP}$  è definita da

$$\Psi_{PP} = \left(\frac{1}{N_1^2 < 1, 1 >}\right) \left[ 2N_3^2 < 3, 3 > + \frac{Q_2}{Q_1} \frac{4N_7}{t_{7,\beta-}} + \frac{Q_3}{Q_1} 4N_7 N_1 < 7, 1 > \right] \quad (17.104)$$

Per calcolare  $\Psi_{PP}$  bisogna determinare le abbondanze dei nuclei intermedi  ${}^3\text{He}$  e  ${}^7\text{Be}$ . Queste sono derivate dalla condizione di equilibrio secolare, cioè dall'imporre

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{N_i}{\rho}\right) = \sum_j \left(\frac{N_j}{\rho}\right) \frac{1}{t_{ij}} - \left(\frac{N_i}{\rho}\right) \sum_k \frac{1}{t_{ik}} = 0 \quad (17.105)$$

per le abbondanze in questione.

Ponendo a zero il tasso netto di produzione di  ${}^3\text{He}$  si deriva

$$\left(\frac{N_1^2}{2}\right) < 1, 1 > -2\left(\frac{N_3^2}{2}\right) < 3, 3 > -N_3 N_4 < 3, 4 > = 0 \quad (17.106)$$

Similmente per  ${}^7\text{Be}$  si ricava

$$N_3 N_4 < 3, 4 > -\frac{N_7}{t_{7,\beta-}} - N_7 N_1 < 7, 1 > = 0 \quad (17.107)$$

Con l'aiuto di tre funzioni ausiliarie

$$\alpha = \frac{< 3, 4 >^2}{< 1, 1 > < 3, 3 >} \left(\frac{N_4}{N_1}\right)^2 \quad (17.108)$$

$$w = N_1 < 7, 1 > t_{7,\beta-} \quad (17.109)$$

$$\gamma = \alpha \left( \sqrt{1 + \frac{2}{\alpha}} - 1 \right) \quad (17.110)$$

e laboriosa manipolazione algebrica si arriva a

$$\Psi_{PP} = 1 + \gamma \left[ \frac{2Q_2/Q_1 - 1 + (2Q_3/Q_1 - 1)w}{w + 1} \right]. \quad (17.111)$$

Il calcolo di  $\alpha$ , e  $w$  richiede la conoscenza di sezioni d'urto e vite medie e pertanto esse dipendono dall'accuratezza con cui quest'ultime sono derivate. Espressioni largamente usate sono

$$\alpha = 5.48 \times 10^{17} e^{-100/T_6^{1/3}} \left( \frac{X_4}{4X_1} \right)^2 \quad (17.112)$$

$$w = 1.22 \times 10^{16} f_{7,1} g_{7,1} (T_6^{-1/6}) \frac{e^{-102/T_6^{1/3}}}{1 + 1/X_1} \quad (17.113)$$

con ovvio significato dei simboli. La funzione  $\Psi_{PP}$  dipende dalla temperatura ed è massima intorno a circa  $20 \times 10^6$  K dove vale circa 1.5 – 2. Infine per  $\epsilon'_1$  possiamo dare

$$\epsilon'_1 = 2.06 \times 10^6 \cdot f_{1,1} \cdot g_{1,1} \cdot \rho X_1^2 \cdot e^{-33.81 T_6^{-1/3}} T_6^{-2/3} \quad (17.114)$$

in ergs  $g^{-1} \text{ sec}^{-1}$ .

Anche in questo caso le quantità  $f_{1,1}$  e  $g_{1,1}$  nel calcolo di  $\epsilon'_1$  sono esprimibili in funzione della temperatura. Tipiche espressioni sono

$$f_{1,1} = 1 + 0.25\rho^{1/2}T_6^{3/2} \quad (\text{schermaggio debole}) \quad (17.115)$$

$$g_{1,1} = 1 + 0.0012T_6^{1/3} + 0.0078T_6^{2/3} + 0.0006T_6 \quad (17.116)$$

Dipendendo dall'accuratezza con cui vengono calcolate  $\langle \sigma v \rangle$  e le funzioni  $f$  e  $g$ , sono possibili altre espressioni per  $\epsilon_{PP}$  tuttavia simili a quella data sopra. Anche in questo caso è possibile esprimere il tasso di produzione di energia nella forma

$$\epsilon_{PP} = \rho^\alpha X_1^2 \cdot f_{1,1} \cdot g_{1,1} \cdot \Psi(\alpha, w) \cdot \epsilon_0 \left( \frac{T}{T_0} \right)^\nu \quad (17.117)$$

dove  $\alpha$ ,  $\nu$  e  $\epsilon_0$  hanno  $T_0$  hanno valori opportuni di cui è dato un esempio nella tabella sottostante

$\alpha$	$T_0$	$\epsilon_0$	$\nu$
1	5	1.82(-3)	5.95
1	10	6.79(-2)	4.60
1	20	1.09(+0)	3.54
1	30	4.01(+0)	3.03

È interessante notare la dipendenza molto più debole dalla temperatura del tasso di produzione di energia nucleare da parte delle catene PP rispetto al ciclo CN

Nella Figura 17.7 sono mostrati i rendimenti energetici del ciclo CNO e catene PP in funzione della temperatura. Da questa si vede che per  $T < 13 \times 10^6$  K dominano le catene PP (e precisamente PP1) mentre a temperature superiori è più efficiente il CNO. Poichè la temperatura centrale di una stella di sequenza principale cresce con la massa, il bruciamento dell'idrogeno nel centro passa da PP a CNO con il crescere della massa. La transizione avviene attorno al tipo spettrale F o a masse fra 1.5 e 2  $M_\odot$ .

## 17.6 Il Bruciamento dell'Elío

Convertito tutto l'idrogeno in elio nelle regioni centrali di bruciamento, non vi sono sorgenti nucleari immediatamente disponibili. Queste regioni si contrag-



Figura 17.7: Andamento dei tassi di produzione di energia nucleare attraverso la catena PP e ciclo CNO in funzione della temperatura

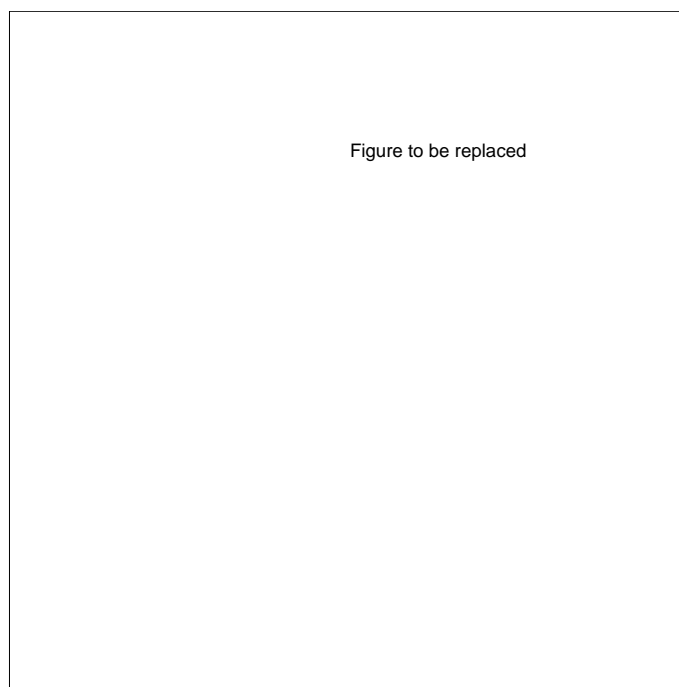
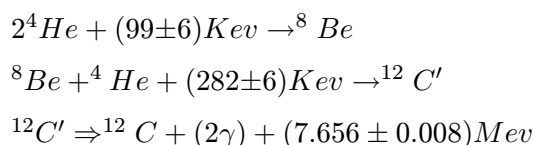


Figura 17.8: Diagramma dei livelli energetici del nucleo di  $^{12}\text{C}$

gono gravitazionalmente aumentando l'energia interna e la temperatura fino a valori tali da innescare successive reazioni. Ricordando che a parità di temperatura sono favorite le reazioni fra elementi leggeri, il naturale candidato è  ${}^4\text{He}$ . Poichè le reazioni a tre o quattro corpi, come  $3{}^4\text{He} = {}^{12}\text{C}$  e  $4{}^4\text{He} = {}^{16}\text{O}$  sono da escludersi attesa la piccolissima sezione d'urto, rimane la possibilità offerta dalla reazione  ${}^4\text{He} + {}^4\text{He} + 99 \text{ Kev} = {}^8\text{Be}$ . La reazione è endotermica e risonante attorno al livello fondamentale del  ${}^8\text{Be}$ . Tuttavia, il  ${}^8\text{Be}$  è instabile con una vita media di  $10^{-16} \text{ sec}$  e decade nelle due particelle  $\alpha$  (nuclei di  ${}^4\text{He}$ ) di partenza. Tuttavia a temperature superiori a  $10^8 \text{ K}$  è possibile realizzare una condizione di equilibrio fra i nuclei di  ${}^8\text{Be}$  prodotti e quelli che decadono in 2  $\alpha$ . Pur essendo il tempo di vita del  ${}^8\text{Be}$  molto piccolo, esso è lungo abbastanza affinché una terza particella  $\alpha$  interagisca con  ${}^8\text{Be}$  secondo la  ${}^8\text{Be}(\alpha, 2\gamma){}^{12}\text{C}$ . Si calcola che solamente un nucleo di  ${}^8\text{Be}$  ogni  $10^9$  nuclei di  ${}^4\text{He}$  subisca il processo. La reazione  ${}^8\text{Be} + \alpha$  è una reazione endotermica ( $282 \text{ Kev}$ ) e risonante attorno al secondo livello eccitato di  $7.656 \text{ Mev}$  di  ${}^{12}\text{C}'$  secondo lo schema indicato nella Figura 17.8. A sua volta il nucleo composto  ${}^{12}\text{C}'$  ha tre modi di decadere: i) emissione di tre particelle  $\alpha$ , ii) emissione di due fotoni attraverso il passaggio al livello intermedio di  $4.43 \text{ Mev}$  e poi al fondamentale, iii) diretta transizione allo stato fondamentale con emissione di una coppia ( $e^+$ ,  $e^-$ ) con momento angolare totale nullo. Il passaggio diretto al fondamentale per decadimento radiativo non è possibile in quanto i due stati hanno spin e parità uguali. L'azione combinata della grande probabilità di decadimento del  ${}^{12}\text{C}'$  in tre  $\alpha$  e del suo lungo tempo di vita fa sì che l'abbondanza di  ${}^{12}\text{C}'$  in equilibrio con le particelle  $\alpha$  sia piccola ma tuttavia sufficiente allo scopo. Lo schema completo delle reazioni è



Si ricordi che le prime due reazioni sono endotermiche per cui la energia totale liberata per la formazione di un nucleo di  ${}^{12}\text{C}$  è  $Q = 7.656 - 0.099 - 0.282 = 7.275 \text{ Mev}$ . L'energia liberata per nucleone nel processo  $3\alpha \rightarrow {}^{12}\text{C}$  è  $7.275/12 = 0.61 \text{ Mev/nucleone}$ , circa 1/12 della corrispondente energia liberata dal processo  $4{}^1\text{H} = {}^4\text{He}$ . Il tasso di energia liberata per unità di massa è

$$\epsilon = Q \frac{d}{dt} \left( \frac{N_{12}}{\rho} \right). \quad (17.118)$$

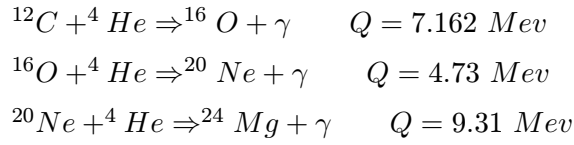
dove  $d(N_{12})/dt$  è il tasso di produzione di  $^{12}\text{C}$  per unità di massa il quale dipende dalle abbondanze di equilibrio di  $^8\text{Be}$  e  $^{12}\text{C}$ . Tralasciando ogni dettaglio si arriva alla seguente relazione

$$\epsilon_{3\alpha} = 3.46 \times 10^{11} \rho^2 X_4^3 f_{3\alpha} T_8^{-3} e^{-43.2/T_8} \quad (17.119)$$

in  $\text{erg g}^{-1} \text{sec}^{-1}$ , dove  $T_8 = T/10^8$  e  $f_{3\alpha}$  è il fattore di schermaggio elettronico di cui diamo una delle possibili formulazioni

$$f_{3\alpha} = e^{2.4 \times 10^{-3} \rho^{1/2} T_8^{-3/2}}. \quad (17.120)$$

La caratteristica importante della reazione  $3\alpha \rightarrow ^{12}\text{C}$  è la fortissima dipendenza dalla temperatura. Infatti ponendo  $\epsilon = \epsilon_0 \rho^2 T^\nu$  si ha  $\nu = -3 + 43/T_8$ . Ne discende che in condizioni di alta temperatura e densità un gas di  $^4\text{He}$  gode di proprietà esplosive nel senso che un piccolo aumento di temperatura provoca una enorme produzione di energia. Non appena si è formata una certa quantità di  $^{12}\text{C}$  sono possibili ulteriori reazioni di cattura  $\alpha$  come



Queste reazioni non sono particolarmente importanti dal punto di vista energetico. Ad esempio l'energia per unità di massa liberata dalla prima è circa 3/4 dell'energia liberata dalla  $3\alpha \rightarrow ^{12}\text{C}$ , ma hanno un ruolo fondamentale nel determinare la composizione chimica del materiale che ha subito il bruciamento dell'elio. Nel calcolo delle moderne strutture stellari viene considerato l'insieme completo delle reazioni che accompagnano la  $3\alpha$ . La  $^{12}\text{C}(\alpha, \gamma)^{16}\text{O}$  ha un ruolo particolarmente importante in quanto determina le abbondanze relative di  $^{12}\text{C}$  e  $^{16}\text{O}$  anche grazie al fatto che la sezione d'urto della  $^{16}\text{O}(\alpha, \gamma)^{20}\text{Ne}$  è piccola. La  $^{12}\text{C}(\alpha, \gamma)^{16}\text{O}$  è una reazione non risonante, cioè non ci sono livelli energetici vicini ad  $E_{max}$  della finestra di Gamow, ed è supposta avvenire nella coda di un livello di  $^{16}\text{O}$  che si trova sotto la energia di massa di  $^{12}\text{C} + ^4\text{He}$ . La larghezza di questo livello per decadimento radiativo è molto piccola ( $0.066 \text{ Mev}$ ), mentre è incerta la larghezza per cattura  $\alpha$ . Questo si riflette nella sezione d'urto della

reazione. L'usuale sezione d'urto è tale che alla fine del bruciamento dell'elio si hanno abbondanze di  $^{12}\text{C}$  e  $^{16}\text{O}$  circa uguali. In tempi recenti, nuove misure sperimentali della sezione d'urto hanno suggerito per questa un valore da 3 a 5 volte maggiore della stima classica il che implica che l'abbondanza finale di  $^{12}\text{C}$  è attesa essere nettamente inferiore a quella di  $^{16}\text{O}$ . Le produzioni di energia da parte delle  $^{12}\text{C}(\alpha, \gamma)^{16}\text{O}$  e  $^{16}\text{O}(\alpha, \gamma)^{20}\text{Ne}$  sono incerte. A titolo illustrativo riportiamo delle espressioni ampiamente usate nel calcolo della modellistica stellare

$$\epsilon_{12,4} = 2.64 \times 10^{27} \rho X_{12} X_4 f_{12,4} \frac{e^{[-30.05 T_8^{1/3} - \delta]^{0.434}}}{h(T)} \quad \text{erg g}^{-1} \text{ sec}^{-1} \quad (17.121)$$

con

$$h(T) = T_8^2 [0.002 T_8 + 0.2 T_8^{-2/3}]^2 \quad (17.122)$$

$$\delta = 0.06 T_8^{2/3} (1 + 0.07 T_8^{1/3}) \quad (17.123)$$

$$f_{12,4} = e^{(0.0024 \rho^{1/2} T^{-3/2})} \quad (17.124)$$

$$\epsilon_{16,4} = 2.85 \times 10^{27} \rho X_{16} X_4 f_{16,4} \Phi(T) \quad (17.125)$$

in  $\text{erg g}^{-1} \text{ sec}^{-1}$ , dove

$$\Phi(T) = 4.5 \times 10^9 e^{\left(-\frac{37.3}{\sqrt{T_8}}\right)^{0.43}} T_8^{-2/3} \quad \text{per} \quad 1 < T_8 < 2.1 \quad (17.126)$$

$$\Phi(T) = 6.3 \times 10^3 e^{\left(-\frac{45.9}{T_8}\right)^{0.43}} T_8^{-3/2} \quad \text{per} \quad 2.1 < T_8 < 8 \quad (17.127)$$

$$\Phi(T) = 6.3 \times 10^3 e^{-\frac{54.5}{T_8}} T_8^{-3/2} \quad \text{per} \quad 8 < T_8 \quad (17.128)$$

$$f_{16,4} = e^{(0.0032 \rho^{1/2} T_8^{-3/2})} \quad (17.129)$$

Attualmente sono in uso altre relazioni molto più accurate. Se il bruciamento dell'elio avviene in materiale che ha subito in precedenza il ciclo CNO allora i nuclei di  $^{14}\text{N}$  presenti possono dar luogo alla catena di reazioni

$$^{14}\text{N}(\alpha, \gamma)^{18}\text{F}(e^+, \nu)^{18}\text{O}(\alpha, \gamma)^{22}\text{Ne}(\alpha, n)^{25}\text{Mg} \quad (17.130)$$

che viene completata se prima dell'esaurimento dell'elio sono raggiunte temperature attorno a  $2 \times 10^8$  K. Questa catena di reazioni, trascurabile dal punto di vista energetico, è una importante sorgente di neutroni. Poichè i neutroni sono insensibili alle barriere coulombiane essi tendono a fondersi con i nuclei circostanti i quali fungono da semi per la costruzione di elementi più pesanti. Altra sorgente di neutroni è la  $^{13}\text{C}(\alpha, n)^{16}\text{O}$ , la quale è attiva in presenza di  $^{13}\text{C}$  lasciato da un precedente ciclo CN. Se una sorgente di protoni è disponibile fra i prodotti di successive catture  $\alpha$  e se è presente del  $^{20}\text{Ne}$ , allora può avvenire il ciclo  $\text{Ne} - \text{Na}$  il quale, trascurabile dal punto di vista energetico, ha il merito di trasformare una parte del  $^{20}\text{Ne}$  in  $^{21}\text{Ne}$ . Questo a sua volta dà luogo alla  $^{21}\text{Ne}(\alpha, n)^{24}\text{Mg}$  che è un'ulteriore sorgente di neutroni.

## 17.7 Bruciamenti del C, Ne, O e Si

### 17.7.1 Carbonio

Dopo la trasformazione di  $^4\text{He}$  in  $^{12}\text{C}$ ,  $^{16}\text{O}$  e  $^{20}\text{Ne}$ , la contrazione gravitazionale può dar luogo in opportune circostanze ad un ulteriore aumento della temperatura e densità fino al punto che questi nuclei reagiscono fra loro. A temperature di  $6 - 7 \times 10^8$  K la prima reazione ad essere efficiente è la

	Q (Mev)
$^{12}\text{C} + ^{12}\text{C} \Rightarrow$	
$^{24}\text{Mg} + \gamma$	13.930
$^{23}\text{Na} + p$	2.238
$^{23}\text{Mg} + n$	-2.605
$^{20}\text{Ne} + ^4\text{He}$	4.616
$^{16}\text{O} + ^4\text{He}$	-0.114

dove la prima e la quarta reazione sono quelle più probabili e pertanto i principali prodotti del bruciamento del  $^{12}\text{C}$  sono  $^{20}\text{Ne}$  e  $^{24}\text{Mg}$ . L'aspetto importante di queste reazioni è che si generano ancora protoni e particelle  $\alpha$ . Le reazioni



che esprimono la generazione di energia per il bruciamento del carbonio sono alquanto complicate, per cui ci limitiamo a dare una dipendenza approssimata dalla temperatura del tipo

$$\epsilon_{12,12} = 2.6 \times 10^{40} \rho X_{12}^2 f_{12,12} \Lambda_{12,12} \quad \text{erg g}^{-1} \text{ sec}^{-1} \quad (17.131)$$

con

$$\log \Lambda_{12,12} = 4.3 - [36.55(1 + 0.1T_9)^{1/3}] T_9^{-1/3} - (2/3) \log T_9 \quad (17.132)$$

Il fattore di schermo  $f_{12,12}$  è

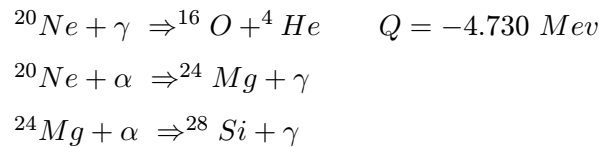
$$f_{12,12} = \begin{cases} e^{\frac{U_0}{KT}} & \text{per } \frac{U_0}{KT} < 1 \\ 3.5 \times 10^{-2} \rho^{1/3} T_8^{-1} & \text{per } \frac{U_0}{KT} > 1 \end{cases}$$

dove

$$\frac{U_0}{KT} = 1.2 \times 10^{-2} \rho^{1/2} T_8^{-3/2} \quad (17.133)$$

### 17.7.2 Neon

A temperature lievemente superiori inizia il bruciamento del  $^{20}\text{Ne}$  e per la prima volta i processi di fotodissociazione hanno un ruolo importante. Lo schema delle reazioni è il seguente



Il risultato della dissociazione e bruciamento del  $^{20}\text{Ne}$  è la conversione di questo in  $^{16}\text{O}$  e  $^{24}\text{Mg}$  e di quest'ultimo in  $^{28}\text{Si}$ .

### 17.7.3 Ossigeno

A temperature attorno a  $1.5 \times 10^9$  K possono avvenire le reazioni di bruciamento dell'ossigeno secondo lo schema

$$^{16}O + ^{16}O \Rightarrow \begin{cases} ^{32}S + \gamma & 16.539 \text{ Mev} \\ ^{31}P + p & 7.676 \text{ Mev} \\ ^{31}S + n & 1.459 \text{ Mev} \\ ^{28}Si + ^4He & 9.593 \text{ Mev} \\ ^{24}Mg + ^4He & -0.393 \text{ Mev} \\ ^{30}Si + 2p & 0.424 \text{ Mev} \end{cases}$$

seguite dalle

$$^{31}P + p \Rightarrow ^{28}Si + \alpha$$

$$^{24}Mg + \alpha \Rightarrow ^{28}Si + \gamma$$

$$^{28}Si + \alpha \Rightarrow ^{32}S + \gamma$$

Di nuovo sono prodotti  $p$  e  $\alpha$  che catturati da isotopi esistenti e danno origine a nuclei nell'intervallo  $25 < A < 32$ . L'energia prodotta può essere espressa da

$$\epsilon_{16,16} = 210^{40} \rho X_{16}^2 f_{16,16} \Lambda_{16,16} \text{ erg } g^{-1} \text{ sec}^{-1} \quad (17.134)$$

con

$$\log(\Lambda_{16,16}) = 17.9 - [59.02(1 + 0.14T_9)^{1/3}]T_9^{-1/3} - (2/3)\log T_9. \quad (17.135)$$

Il fattore di schermo  $f_{16,16}$  è circa il doppio di quello dato in precedenza per la  $^{12}C + ^{12}C$ .

#### 17.7.4 Silicio

Dopo il bruciamento dell'ossigeno le caratteristiche dell'evoluzione nucleare cambiano in maniera drastica. Da una parte la diretta fusione dei principali prodotti del bruciamento dell'ossigeno è estremamente improbabile a causa delle alte barriere coulombiane, dall'altra le temperature sono così elevate che la fotodissociazione dei nuclei formati in precedenza diventa molto efficiente. Infine i protoni, i neutroni e particelle emesse dalla fotodissociazione sono catturati rapidamente. Si stabilisce una specie di quasi equilibrio in cui il  $^{28}Si$  è fuso in nuclei via via più pesanti fino a quelli del gruppo del ferro. Questo avviene a temperature attorno a circa  $5 \times 10^9$  K. Lo schema delle reazioni è molto complesso e viene simbolicamente indicato con

$$^{28}Si + ^{28}Si \Rightarrow ^{28}Si + 7\alpha \Rightarrow ^{56}Ni$$

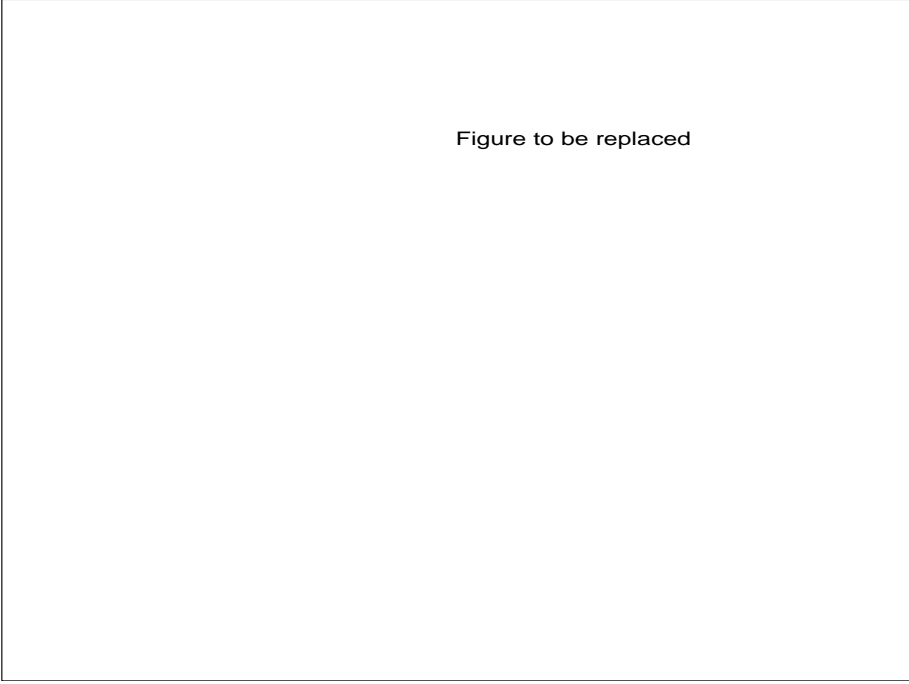


Figure to be replaced

Figura 17.9: La sequenza dei bruciamenti nucleari e le fasi corrispondenti nel diagramma H-R

Quando abbastanza  $^{28}\text{Si}$  è stato consumato si raggiunge il regime di equilibrio nucleare statistico in cui l'abbondanza del  $^{56}\text{Fe}$  può essere espressa tramite quella delle particelle  $\alpha$  presenti. Infine l'evoluzione nucleare è resa ancora più complicata dalla presenza delle catture elettroniche da parte dei nuclei presenti che porta al processo di neutronizzazione della materia. Per esempio nelle regioni di maggior temperatura e parzialmente neutronizzate si hanno elementi come  $^{48}\text{Ca}$ ,  $^{50}\text{Ti}$ ,  $^{54}\text{Cr}$ ,  $^{58}\text{Fe}$  e  $^{60}\text{Ni}$ . La composizione cambia gradualmente verso zone con elementi meno ricchi di neutroni come  $^{56}\text{Fe}$ ,  $^{56}\text{Ni}$  e  $^{54}\text{Fe}$ . Il bruciamento del  $^{28}\text{Si}$  e formazione degli elementi del gruppo del Fe è il termine ultimo delle possibili reazioni eso-energetiche da cui una stella può trarre energia.

In conclusione sono possibili sei fasi di bruciamento nucleare esoenergetico (idrogeno, elio, carbonio, neon, ossigeno e silicio), i quali avvengono a temperature e densità via via crescenti. Si vedrà che non tutte le stelle sono in grado di percorrere l'intera sequenza ed inoltre che le varie fasi nucleari corrispondono a stelle in zone diverse del diagramma H-R. La corrispondenza fra fase nucleare e tipo di stella nel diagramma H-R è schematicamente indicata

nella Figura 17.9.

## Capitolo 18

# EMISSIONE DI ENERGIA PER NEUTRINI

L'esistenza del neutrino venne posta come ipotesi per spiegare il fenomeno del decadimento- $\beta$ . Nel tipo più semplice di decadimento si osserva che un atomo di numero atomico  $Z$  e peso atomico  $A$  si trasforma in atomo di numero atomico  $Z + 1$  e peso atomico  $A$  e viene emesso un elettrone

$$N_{Z,A} \Rightarrow N_{Z+1,A} + e^{-}$$

Questa reazione fu interpretata come dovuta alla trasformazione di un neutrone del nucleo in un protone ed elettrone

$$n \Rightarrow p + e^{-}$$

Tuttavia, si può vedere facilmente, usando le leggi di conservazione della quantità di moto e dell'energia, che una reazione di questo tipo l'energia delle particelle è perfettamente determinata, mentre si trova sperimentalmente che lo spettro energetico degli elettroni è continuo con un andamento come in Fig.18.1. Inoltre la reazione di cui sopra non conserva lo spin ( $p$ ,  $n$  ed  $e^{-}$  hanno spin  $1/2$  e la somma deve essere 0 o 1 ma mai  $1/2$ ), infine si ha una conferma sperimentale che la quantità di moto non è conservata. Per ripristinare le leggi di conservazione dell'energia, quantità di moto e spin si dovette ipotizzare l'esistenza di una terza particella che doveva avere carica nulla (conservazione della carica), spin semintero e massa piccolissima possibilmente nulla come si può dedurre dallo spettro energetico del  $e^{-}$  e dalla cinematica della reazione. Questa particella fu chiamata *neutrino*, e la sua esistenza può essere rivelata da opportune esperienze.

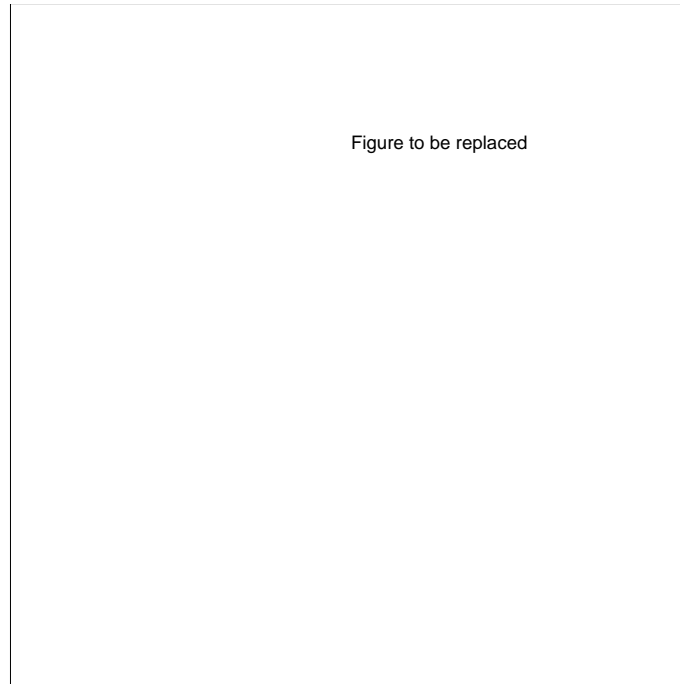


Figura 18.1: Distribuzione dell' energie degli elettroni nel decadimento  $\beta$

Tabella 18.1: Interazioni fondamentali e relativa costante di accoppiamento.

Interazione	Costante adimensionale
Elettromagnetica	$10^{-2}$
Debole	$10^{-23}$
Forte	10
Gravitazionale	$10^{-45}$

## 18.1 Teoria dell'interazione debole: cenni

In natura sono note quattro tipi di interazioni: elettromagnetica, debole, forte e gravitazionale, ognuna delle quali è descrivibile da un opportuno Hamiltoniano di interazione ed ha una intensità caratteristica espressa da una costante di accoppiamento adimensionale che viene costruita per mezzo di costanti fondamentali a partire da una grandezza che interviene in modo essenziale nella descrizione del processo. Ad esempio la carica nella interazione elettromagnetica, la massa nell'interazione gravitazionale etc.

È evidente che l'interazione gravitazionale è la più debole di tutte e pertanto nello studio delle interazioni fra particelle elementari può essere ignorata.

Tabella 18.2: Famiglie di particelle ed antiparticelle.

Gruppo	Particella	Antiparticella	Massa (Mev)	Spin
Fotoni	$\gamma$	$\gamma$	0	1
Leptoni	$\nu_e$	$\tilde{\nu}_e$	0	1/2
	$\nu_\mu$	$\tilde{\nu}_\mu$	0	1/2
	$e^-$	$e^+$	0.5	1/2
	$\mu^-$	$\mu^+$	105	1/2
Mesoni	$\pi^-$	$\pi^+$	139	0
	$\pi^0$	$\pi^0$	135	0
Barioni	$p$	$\tilde{p}$	938	1/2
	$n$	$\tilde{n}$	939	1/2

Nel 1928 Dirac enunciò un concetto chiave derivato dalla sintesi da lui proposta fra relatività e meccanica quantistica: *tutte le particelle devono esistere in coppia*, cioè ad ogni particella deve corrispondere una antiparticella di uguale massa, vita media e spin, ma con carica opposta. L'esistenza delle antiparticelle è stata ampiamente confermata dall'esperienza: ogni particella ha la sua antiparticella (in alcuni casi esse coincidono). Quando particella ed antiparticella entrano in collisione, esse si annichilano e vengono emessi fotoni. In opportune circostanze i fotoni possono materializzarsi in una coppia particella - antiparticella.

In base alla massa, tipo di interazione e spin, le particelle possono essere raggruppate in quattro gruppi: fotoni, leptoni, mesoni, barioni.

Non tutte le particelle risentono di tutte le quattro interazioni. In generale si può dire che tutte risentono della interazione gravitazionale, che tutte le particelle cariche sono soggette alla interazione elettromagnetica e che solo barioni e mesoni risentono della interazione forte. In particolare i neutrini sentono solo le interazioni deboli. È per questo che interagiscono poco con la materia e sono difficili da rivelare. Inoltre avendo massa nulla si muovono alla velocità della luce.

Nella tabella sono indicati due tipi di neutrini:  $\nu_e$  (neutrino dell'elettone) e  $\nu_\mu$

(neutrino del muone). Si trova infatti sperimentalmente che i neutrini coinvolti nelle interazioni deboli dei muoni (di cui parleremo in seguito) sono diversi da quelli coinvolti nelle interazioni deboli degli elettroni.

Una reazione fra particelle elementari è possibile solo se sono conservati energia, quantità di moto, carica elettrica e momento angolare. Tuttavia si trova sperimentalmente che certe reazioni attese perchè non violano le leggi di cui sopra, in realtà non avvengono. A tale scopo sono state introdotte altre leggi di conservazione, e cioè la *conservazione del numero barionico* e del numero leptonico, cioè il numero delle particelle meno il numero delle antiparticelle deve restare costante; inoltre si trova che la parità è conservata nelle interazioni forti ma non in quelle deboli.

Possiamo attribuire ai barioni una *carica barionica (+1)* ed agli antibarioni una *carica barionica (-1)* e dire che la carica barionica deve conservarsi. Analogamente per i leptoni.

Applichiamo tali concetti al decadimento  $\beta$ : il neutrone che decade ha numero barionico +1 e numero leptonico 0; in seguito al decadimento vengono prodotti un barione (protone) e due leptoni (elettrone e neutrino), per cui il numero barionico è conservato e lo è anche il numero leptonico se consideriamo l'elettrone come "la particella" nella coppia elettrone-positrone e supponiamo che il neutrino emesso sia l'*antineutrino*. La reazione si scrive

$$n \Rightarrow p + e^- + \tilde{\nu}_e \quad (18.1)$$

Accanto a questo tipo di decadimento (detto  $\beta$ -meno) se ne hanno altri

$$p \Rightarrow n + e^+ + \nu_e \quad \beta - \text{piu'} \quad (18.2)$$

$$p + e^- \Rightarrow n + \nu_e \quad \text{cattura } K \quad (18.3)$$

Mentre il decadimento  $n \Rightarrow p + e^- + \tilde{\nu}_e$  può avvenire anche in un neutrone libero, il decadimento  $p \Rightarrow n + e^+ + \nu_e$  può avvenire solo all'interno del nucleo in quanto la massa del protone è minore della massa del neutrone e quindi è necessario che il protone interagisca con il campo coulombiano del nucleo per assicurare la conservazione dell'energia.

Osserviamo che è possibile passare da un tipo all'altro di decadimento portando una particella da un membro all'altro della reazione e scambiandola con la sua



antiparticella. Con lo stesso metodo sono possibili anche le reazioni

$$n + \nu_e \Rightarrow p + e^- \quad p + e^- \Rightarrow n + \nu_e \quad (18.4)$$

$$n + e^+ \Rightarrow p + \tilde{\nu}_e \quad p + \tilde{\nu}_e \Rightarrow n + e^+ \quad (18.5)$$

che avvengono effettivamente in natura.

Dai dati sperimentali si deduce che il decadimento- $\beta$  è una interazione debole e che esiste un'altra particella il muone  $\mu$  che si comporta nelle sue interazioni come l'elettrone. Ad esempio

$$p + e^- \Rightarrow n + \nu_e \quad \text{equivale a} \quad p + \mu^- \Rightarrow n + \nu_\mu \quad (18.6)$$

Un'altra caratteristica del muone è il suo decadimento (interazione debole come il decadimento- $\beta$ )

$$\mu^- \Rightarrow e^- + \nu_\mu + \tilde{\nu}_e \quad (18.7)$$

Vediamo dunque che le particelle che intervengono nelle interazioni deboli sono il protone, il neutrone, l'elettrone, il muone, il neutrino dell'elettrone, ed il neutrino del muone.

**La caratteristica fondamentale delle interazioni deboli è la non conservazione della parità.**

Che cosa si intende con questa affermazione? In analogia all'esistenza della **invarianza per traslazione**, il risultato di un esperimento non dipende dal luogo dove esso viene compiuto, o all' **invarianza per rotazione**, la rotazione dell'apparato sperimentale non varia il risultato, o infine l'**invarianza per traslazione temporale**, il risultato di un esperimento non dipende dal momento in cui viene eseguito, ci attendiamo che valga l' **invarianza speculare**, l'immagine speculare di un esperimento dovrebbe essere un esperimento realizzabile.

L'invarianza speculare è dimostrata valere per le interazioni forti ed elettromagnetiche, ma non in quelle deboli (**violazione della parità**). Classico è l'esperimento di Wu et al (1967) nel quale è stata misurata l'asimmetria dell'emissione di elettroni da parte di nuclei polarizzati di  $Co^{60}$

$$Co^{60} \Rightarrow Ni^{60} + e^- + \tilde{\nu}_e \quad (18.8)$$

all'interno di un solenoide percorso da corrente.

Nel 1934 Fermi propose una teoria sul decadimento- $\beta$  che oggi è nota come teoria dell'interazione universale di Fermi. Si cominci col notare che tutte le reazioni deboli presentate coinvolgono quattro fermioni, che sono compresi sempre in due tra le seguenti coppie:

$$\begin{array}{ll} (\tilde{n}; p) & (\tilde{p}; n) \\ (\tilde{e}; \nu_e) & (\tilde{\nu}_e; e) \\ (\tilde{\mu}; \nu_\mu) & (\tilde{\nu}_\mu; \mu) \end{array}$$

Facciamo ora la convenzione che ciascuna coppia rappresenti una coppia di operatori, capaci di creare la particella o di distruggere la sua antiparticella. Ad esempio la coppia  $(\tilde{n}; p)$  è intesa come il prodotto di due operatori che possono rappresentare i seguenti processi:

- 1) creazione di un antineutrone e di un protone
- 2) distruzione di un neutrone e creazione di un protone
- 3) distruzione di un neutrone e di un antiprotone
- 4) creazione di un antineutrone e distruzione di un antiprotone.

La creazione di una particella o la distruzione della sua antiparticella sono rappresentate dallo stesso operatore. Le interazioni devono coinvolgere operatori che creano e distruggono fermioni, ma in combinazioni tali da conservare il numero di leptoni e di barioni. Questa restrizione è garantita dalle coppie di operatori in quanto in esse i fenomeni sono raggruppati solo in coppie nucleone-antinucleone e leptone-antileptone.

Nella teoria di Feymann-Gellmann l'hamiltoniano di interazione responsabile delle interazioni deboli viene scritto

$$H_{int} = g J^+ J \quad (18.9)$$

dove  $g$  è la costante di accoppiamento universale che misura l'intensità della interazione debole e dove  $J^+$  e  $J$  sono degli operatori che date le convenzioni di cui sopra sono dati da

$$J = (\tilde{n}; p) + (\tilde{e}; \nu_e) + (\tilde{\mu}; \nu_\mu) \quad (18.10)$$

$$J^+ = (\tilde{p}; n) + (\tilde{\nu}_e; e) + (\tilde{\nu}_\mu; \mu) \quad (18.11)$$

Ciascuna coppia di operatori ha lo stesso peso (coefficiente di proporzionalità nella somma posto uguale ad uno) e stessa costante di interazione. Da ciò viene il nome di *teoria universale delle interazioni deboli*. Nella espressione per  $H_{int}$  la reazione fra quattro fermioni che partecipano all'interazione debole è descritta dal prodotto di una qualunque coppia di operatori che compaiono in  $J$  con una qualunque coppia di  $J^+$ .

Di tutte le possibili combinazioni che possono derivare dal prodotto  $J^+ J$ , soltanto i termini misti sono stati studiati in laboratorio trovando che hanno la stessa costante di accoppiamento. I termini quadratici sono difficili da sperimentare in quanto l'interazione debole è mascherata da quella forte e/o elettromagnetica, oppure la sezione d'urto del processo è molto piccola.

Una conferma dell'esistenza dei termini quadratici e dell'ipotesi fatta su  $H_{int}$  viene dall'evoluzione stellare in quanto se tali reazioni esistono possono produrre una notevole emissione di neutrini dalle stelle con conseguente perdita di energia e modifiche sulla struttura ed evoluzione delle stelle.

## 18.2 Processi neutrinici: termini misti di $H_{int}$

Consideriamo per ora i processi che sono generati dai termini misti dell' hamiltoniano di interazione:

**(a) Interazioni**  $(\tilde{n}; p)(\nu_e; e)$  e  $(\tilde{p}; n)(\tilde{e}; \nu_e)$

Questi prodotti rappresentano i processi di decadimento- $\beta$

$$n \Rightarrow p + \tilde{\nu}_e + e^- \quad p \Rightarrow n + \nu_e + e^+ \quad (18.12)$$

$$\nu + n \Rightarrow p + e^- \quad e^+ + n \Rightarrow p + \tilde{\nu} \quad (18.13)$$

assieme ai processi che si possono ottenere scambiando ciascuna particella con la propria antiparticella e/o rovesciando la freccia.

Poichè alcune di queste reazioni avvengono all'interno dei nuclei, è importante osservare che mentre in laboratorio i nuclei si trovano nel loro stato fondamentale, nell'interno delle stelle (a causa dell'altissima temperatura) essi possono trovarsi in stati eccitati e poichè la costante di decadimento, cioè la probabilità che un nucleo decada nell' unità di tempo può essere maggiore per un nucleo eccitato rispetto a quello nello stato fondamentale, è ovvio che la costante del decadimento- $\beta$  nelle stelle dipenda molto dalla temperatura.

Un altro fenomeno che nelle stelle avviene in maniera diversa che in laboratorio è la cattura-K: nelle stelle gli atomi sono totalmente (quasi tutti) ionizzati e i nuclei catturano elettroni liberi, pertanto la reazione dipende dalla densità elettronica. In laboratorio i nuclei non sono ionizzati e catturano elettroni nell'orbita K più interna.

Un ciclo di decadimento molto importante è il cosiddetto processo URCA di Gamow e Schonberg. Questo è basato su transizioni tra livelli di due isobari di energie quasi uguali per cattura e successiva emissione di elettroni:

$$e^- + (Z, A) \Rightarrow (Z-1, A) + \nu \quad \text{cattura K} \quad (18.14)$$

seguito da, se il nucleo  $(Z-1, A)$  è radioattivo, dalla

$$(Z-1, A) \Rightarrow (Z, A) + e^- + \bar{\nu} \quad (18.15)$$

Il ciclo non varia la composizione della stella ma produce una coppia  $\nu, \bar{\nu}$  con conseguente liberazione di energia; inoltre la velocità della prima reazione cresce notevolmente con la temperatura, mentre la seconda dipende poco da quest'ultima. Pertanto il numero di processi URCA raggiunge un valore massimo al crescere di  $T$ . Tipico esempio di processo URCA è

$$^{35}\text{Cl} + e^- \Rightarrow ^{35}\text{S} + \nu \quad Q = -0.17 \text{ Mev}$$

$$^{35}\text{S} \Rightarrow ^{35}\text{Cl} + e^- + \bar{\nu} \quad Q = +0.17 \text{ Mev}.$$

Atteso che il neutrino ha un cammino libero medio molto maggiore dei tipici raggi stellari, le coppie emesse sfuggono alla stella e sottraggono notevoli quantità di energia.

I processi URCA sono importanti solo in condizioni di alta densità e temperatura.

**(b) Interazioni:**  $(\tilde{\nu}_\mu; \mu)(\tilde{\nu}_e; e) \quad \text{e} \quad (\tilde{e}; \nu_e)(\tilde{\mu}; \nu_\mu)$

L'esempio più classico è il decadimento del muone.

**(c) Interazioni:**  $(\tilde{\nu}_\mu; \mu)(\tilde{p}; n) \quad \text{e} \quad (\tilde{n}; p)(\tilde{\nu}_\mu; \mu)$

di cui il processo più noto è la cattura di un muone negativo da parte di un atomo di idrogeno

$$\mu^- + p \Rightarrow n + \nu_\mu \quad (18.16)$$

che avviene in quanto  $\mu^-$  orbita attorno al protone in un'orbita di raggio  $\simeq 10^{-11}$  cm. Ciò in stretta analogia con il caso dell'elettrone nell'atomo di H. Tuttavia a causa della maggior massa del muone il raggio dell'orbita sarà più piccolo. Le interazioni di tipo (b) e (c) non hanno interesse astrofisico in quanto anche a temperature maggiori di  $10^9$  °K non vi è energia sufficiente per produrre muoni.

### 18.3 Processi neutrini: termini quadratici di $H_{int}$

Passiamo ora ad esaminare i termini quadratici di  $H_{int}$  che descrivono le reazioni costituenti le maggior sorgenti di neutrini in astrofisica.

**(d) Interazioni :**  $(\tilde{n}; p)(\tilde{p}; n)$

Essa descrive la reazione

$$n + p \Rightarrow n + p \quad (18.17)$$

cioè lo scattering, dovuto all'interazione debole, di un protone da parte di un neutrone. Questa reazione è mascherata da quella analoga che avviene tramite le interazioni forti, con una probabilità  $10^{20}$  maggiore. Poichè la corrispondente interazione debole non conserva la parità, ci si aspetterebbe una asimmetria nella sezione d'urto di scattering  $n - p$  dovuta alla componente debole. Difficile da verificare sperimentalmente.

**(e) Interazioni:**  $(\tilde{\mu}; \nu_\mu)(\tilde{\nu}_\mu; \mu)$

Tale reazione non ha interesse in evoluzione stellare in quanto i muoni hanno una vita media dell'ordine di  $10^{-6}$  s. Non è inoltre facilmente verificabile dal punto di vista sperimentale.

**(f) Interazioni:**  $(\tilde{e}; \nu_e)(\tilde{\nu}_e; e)$

Essa descrive lo scattering debole di neutrini da parte di elettroni

$$e^- + \nu_e \Rightarrow e^- + \nu_e \quad (18.18)$$

La sezione d'urto di questo processo è piccolissima (dell'ordine di  $10^{-44}$  cm<sup>2</sup>) e quindi praticamente impossibile da verificare in laboratorio. Tuttavia questa reazione è molto importante in quanto, se esiste, sono possibili allora certe reazioni che derivano da essa e che costituiscono la maggior sorgente di neutrini nelle stelle.

Si osservi che essa non è un processo nucleare come il decadimento- $\beta$  ma una interazione fra neutrini ed elettroni. Sappiamo che in elettrodinamica quantistica i fotoni sono il mezzo attraverso il quale si trasmettono le interazioni elettromagnetiche. Essi sono considerati come *coppie virtuali di elettroni e positroni*. Questo non viola le leggi di conservazione in quanto in base al *Principio di Indeterminazione* possiamo attribuire al fotone energia tanto più grande quanto più piccolo è l'intervallo di tempo considerato. Poiché le interazioni con particelle virtuali sono le stesse di quelle con particelle libere, la reazione (\*\*) se esiste collega i neutrini con i costituenti principali del gas stellare e cioè elettroni e fotoni

$$\begin{array}{ccc}
 & e^+ & \\
 \text{fotone} & & \text{fotone} \\
 & e^- &
 \end{array}$$

Esaminiamo ora le reazioni più importanti che derivano dalla (18.18)

**Foto-neutrini.** Il processo è schematizzato da

$$\gamma + e^- \Rightarrow e^- + \nu_e + \bar{\nu}_e \quad (18.19)$$

ovvero

$$\begin{array}{ccc}
 e^- + \gamma & \Rightarrow & \gamma + e^- \\
 & & e^- + \nu_e + \bar{\nu}_e
 \end{array}$$

detta **foto-produzione di neutrini** e rappresentata dai diagrammi di Feynmann di Figura 18.2.

Essa è analoga allo scattering Compton (ramo superiore), con la differenza che il fotone uscente è sostituito da una coppia di neutrini. In una piccola frazione

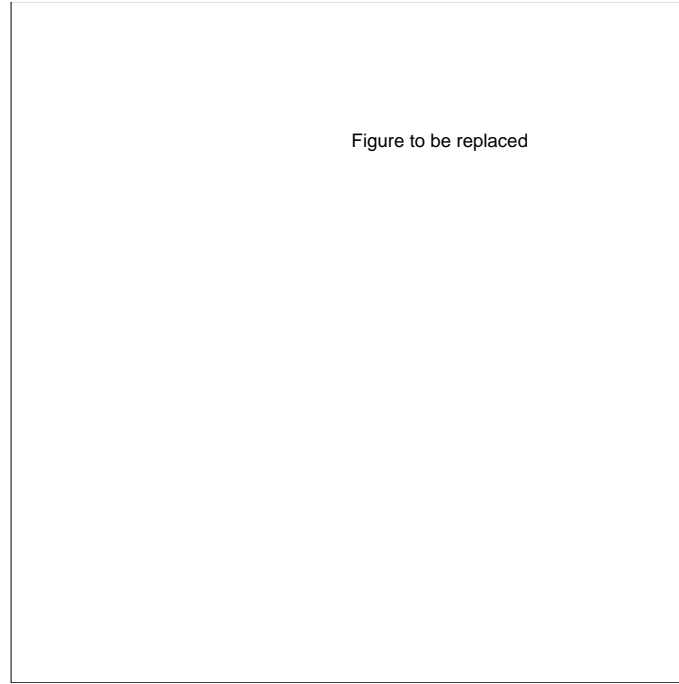


Figura 18.2: Diagramma di Feymann

di eventi si ha l'attivazione del secondo ramo con produzione di una coppia  $(\nu_e, \tilde{\nu}_e)$ .

La sezione d'urto di produzione di  $\nu$  è  $\simeq 10^{-15}$  volte più piccola di quella Compton. Si tenga tuttavia presente che i neutrini prodotti subito sfuggono dalla stella (in condizioni ordinarie).

Il numero di coppie di neutrini per unità di tempo e volume dipende dalle densità  $N_e$  di elettroni, dalla densità di fotoni e dalla sezione d'urto

$$\frac{dn_\nu}{dt} = N_e u_\gamma \langle \sigma v \rangle \quad (18.20)$$

dove  $\langle \sigma v \rangle$  è il valore medio del prodotto della sezione d'urto e velocità relativa fra fotone ed elettrone, la media essendo fatta rispetto alla distribuzione di velocità delle particelle.

L'energia si ottiene moltiplicando la (18.20) per l'energia media di una reazione. Il calcolo dipende dalle condizioni fisiche del gas di elettroni.

Nell'ipotesi di elettroni non degeneri e non relativistici l'energia prodotta per unità di massa è data da

$$\epsilon_{\nu f} = -10^{7.7} \left(\frac{T}{10^9}\right)^8 \quad \text{erg g}^{-1} \text{ s}^{-1} \quad (18.21)$$

La grande dipendenza dalla temperatura è dovuta al fatto che la densità di fotoni cresce con  $T$ . La ragione per cui  $\epsilon_{\nu f}$  non dipende da  $\rho$  è semplicemente dovuta al fatto che essa è proporzionale al numero di elettroni liberi per unità di massa, il quale in caso di completa ionizzazione è indipendente dalla densità. È anche chiaro che a  $T = 10^9 \text{ }^\circ\text{K}$   $\epsilon_{\nu f}$  può essere molto maggiore del corrispondente tasso di produzione di energia per reazioni nucleari. Se il gas di elettroni è parzialmente degenere,  $\epsilon_{\nu f}$  sarà minore di quello dato sopra. La ragione di ciò è che ad ogni atto di scattering gli elettroni variano il momento e si portano in un'altra cella dello spazio delle fasi. Poichè la degenerazione diminuisce il numero delle celle disponibili nello spazio delle fasi, la sezione d'urto di scattering Compton e quella del ramo foto-neutrinico sono minori.

**Neutrini di coppie.** A temperature dell'ordine di  $10^9 \text{ }^\circ\text{K}$  ed oltre diventa significativo il numero di fotoni nella distribuzione di Planck con energia  $> 2m_e c^2$  e quindi in grado di produrre coppie  $(e^+, e^-)$ . Di solito le coppie così create si ricombinano dando origine a fotoni,

$$\gamma + \gamma \Rightarrow e^+ + e^- \Rightarrow \gamma + \gamma$$

tuttavia una certa frazione può produrre neutrini ed antineutrini invece di fotoni, secondo lo schema

$$\gamma + \gamma \Rightarrow e^+ + e^- \Rightarrow \nu_e + \bar{\nu}_e.$$

Si trova che la prima reazione avviene circa  $10^{19}$  volte più frequentemente della seconda.

La densità di positroni  $n_+$  soddisfa alla equazione di bilancio

$$\frac{dn_+}{dt} = (\text{velocità di produzione di coppie } e^+e^-) - \frac{n_+}{\tau_{ann}} \quad (18.22)$$

dove  $\tau_{ann}$  è la vita media dei positroni per annichilazione e

$$(\text{velocità di produzione di coppie } e^+e^-) = \langle \sigma v \rangle u_\gamma \quad (18.23)$$



Poichè  $\tau_{ann}$  è molto piccola la densità  $n_+$  raggiunge rapidamente un valore di equilibrio tale che  $dn_+/dt = 0$  per cui

$$(n_+)_{eq} = (\text{velocità di produzione di coppie } e^+e^-) \times \tau_{ann} \quad (18.24)$$

Si può quindi affermare che nelle stelle ad alte temperature è presente anche un gas di positroni che danno luogo alla reazione (\*\*). La sezione d'urto calcolata diminuisce al crescere della densità (a temperatura fissa). L'energia neutrिनica prodotta per unità di volume è

$$\frac{dE}{dt} = n_+ n_- \langle \sigma \times v \times W \rangle \quad (18.25)$$

dove  $W$  è l'energia totale della coppia (compresa la loro massa). Si dimostra che la quantità di energia per unità di massa e di tempo liberata da questo processo da in un gas non degenerare con  $X = 0$  e  $A/Z = 2$  è

$$\epsilon_{\nu c} = -10^{18.7} e^{-\frac{11.88}{T_9}} T_9^3 / \rho \quad \text{erg g}^{-1} \text{ s}^{-1} \quad (18.26)$$

Di nuovo in un gas degenerare la  $\epsilon_{\nu c}$  è minore di quella data sopra in quanto la degenerazione diminuisce il numero di celle disponibili nello spazio delle fasi.

**Neutrini di plasma.** Anche se un fotone è virtualmente costituito da una coppia  $(e^+, e^-)$  esso non può decadere in una coppia  $(\nu, \nu)$  in quanto i neutrini a causa della elicità intrinseca non possono dar luogo ad uno spin intero a meno che non si muovano in direzioni opposte. Tuttavia se i neutrini si muovono in direzioni opposte il decadimento non può conservare energia e momento fin tanto che le tre particelle coinvolte obbediscono alla relazione  $E = pc$ . Infatti dovrebbero valere simultaneamente le equazioni

$$h\nu = h\nu_1 + h\nu_2 \quad \text{energia} \quad (18.27)$$

$$\frac{h\nu}{c} = \frac{h\nu_1}{c} - \frac{h\nu_2}{c} \quad \text{impulso} \quad (18.28)$$

dove  $\nu$  è la frequenza del fotone e  $\nu_1$  e  $\nu_2$  sono quelle del neutrino ed antineutrino). Il sistema è soddisfatto solo se  $\nu = \nu_1 = \nu_2 = 0$ . Nel vuoto il decadimento è impedito.

La situazione è più complicata in una stella. Infatti all'interno delle stelle i fotoni non sono liberi ma si muovono in un plasma (gas altamente ionizzato ma elettricamente neutro) con il quale interagiscono. Si può dimostrare che tutto avviene come se i fotoni si propagassero nel vuoto con velocità minore di quella della luce. Il plasma stellare costituisce per la propagazione dei fotoni un dielettrico tale che la relazione di dispersione per la frequenza angolare  $\omega$  e il numero d'onda  $k$  diventa

$$\omega^2 = (kc)^2 + \omega_0^2 \quad (18.29)$$

dove la frequenza  $\omega_0$ , detta frequenza di plasma, nel caso di un gas non degenere è data da

$$\omega_0^2 = \frac{4\pi e^2 N_e}{m_e} \quad (18.30)$$

con  $N_e$  la densità numerica di elettroni liberi e  $m_e$  la loro massa a riposo.

Questo equivale a dire che al fotone nel plasma si può attribuire l'energia

$$h^2\nu^2 = h^2k^2c^2 + h^2\nu_0^2 \quad (18.31)$$

con  $k$  numero d'onda del fotone e  $\nu_0$  dato da  $\omega_0$  di cui sopra

$$(2\pi)^2\nu_0^2 = \frac{4\pi e^2 N_e}{m_e} \quad (18.32)$$

La relazione (18.30) è equivalente dal punto di vista cinematico alla relazione energia-momento per una particella con massa diversa da zero.

$$E^2 = p^2c^2 + m^2c^4 \quad (18.33)$$

Il fotone nel plasma *acquista la massa*  $m_{pl}$

$$m_{pl} = \frac{h\nu_0}{c^2} \quad (18.34)$$

la quale aumenta all'aumentare di  $N_e$ . In conclusione i fotoni propagantesi in un plasma si comportano come bosoni relativistici con massa a riposo diversa da zero. Tali onde elettromagnetiche sono dette *plasmoni*. Questa relazione descrive il fatto che un'onda elettromagnetica in un plasma ha per dato momento un eccesso di energia, il quale rende possibile il decadimento in una coppia

$(\nu, \bar{\nu})$  muovendosi in direzioni opposte. La situazione più favorevole all'avvenire del fenomeno si ha in un gas degenere in quanto l'energia dei plasmoni diventa maggiore di quella dei fotoni termici. Definendo con  $X = (h/2\pi)\omega_0/KT$  si ottiene che l'energia emessa sotto forma di coppie  $(\nu, \bar{\nu})$  è data da

$$\epsilon_{\nu pl} = -3.85 \times 10^{21} \frac{1}{\rho} \left( \frac{h\omega_0}{2\pi m_e c^2} \right)^{7.5} \left( \frac{KT}{m_e c^2} \right)^{1.5} e^{-X} \quad (18.35)$$

per  $X$  grande ( $> 1$ ) e da

$$\epsilon_{\nu pl} = -7.4 \times 10^{21} \frac{1}{\rho} \left( \frac{KT}{m_e c^2} \right)^3 X^6 \quad (18.36)$$

per  $X < 0.5$ . In entrambe le relazioni le energie sono in  $\text{erg g}^{-1} \text{s}^{-1}$ .

**Neutrini di bremsstrahlung.** L'urto anelastico (decelerazione) di un elettrone nel campo coulombiano di un nucleo è usualmente accompagnato dall'emissione di un fotone (emissione free-free). Questo fotone può essere sostituito da una coppia  $(\nu, \bar{\nu})$ . Lo schema è il seguente

$$\gamma + e^- \Rightarrow e^- + \gamma + \nu + \bar{\nu} \quad (18.37)$$

Il tasso di perdita di energia a densità elevate può essere espresso da

$$\epsilon_{\nu b} = 0.76 (Z^2/A) T_8^6 \quad \text{erg g}^{-1} \text{s}^{-1} \quad (18.38)$$

dove  $Z$  ed  $A$  sono la carica e la massa del nucleo rispettivamente. A densità inferiori ( $\rho \simeq 10^4 \text{ g cm}^{-3}$ ) il tasso di energia è circa 10 volte inferiore. Questo processo è importante a basse temperature ed alte densità. Il tasso  $\epsilon_{\nu b}$  non diminuisce al crescere della degenerazione in quanto la carenza di stati di momento liberi nello spazio delle fasi è compensata dall'aumento della sezione d'urto per l'emissione dei neutrini.

**Nota.** Essenzialmente vi sono quattro processi che possono essere importanti in ambiente astrofisico: foto-neutrini, neutrini di coppie, neutrini di plasma e neutrini di bremsstrahlung. Le temperature e densità a cui la produzione di neutrini è significativa sono  $10^2 < \rho < 10^9 \text{ g cm}^{-3}$  e  $10^8 < T < 5 \times 10^9 \text{ K}$ . Nella Figura 18.3 sono riportati i domini nel piano  $\rho - T$  dove i processi discussi in precedenza sono dominanti. L'effetto della produzione di neutrini ed antineutrini e relativa perdita di energia sulla struttura ed evoluzione delle

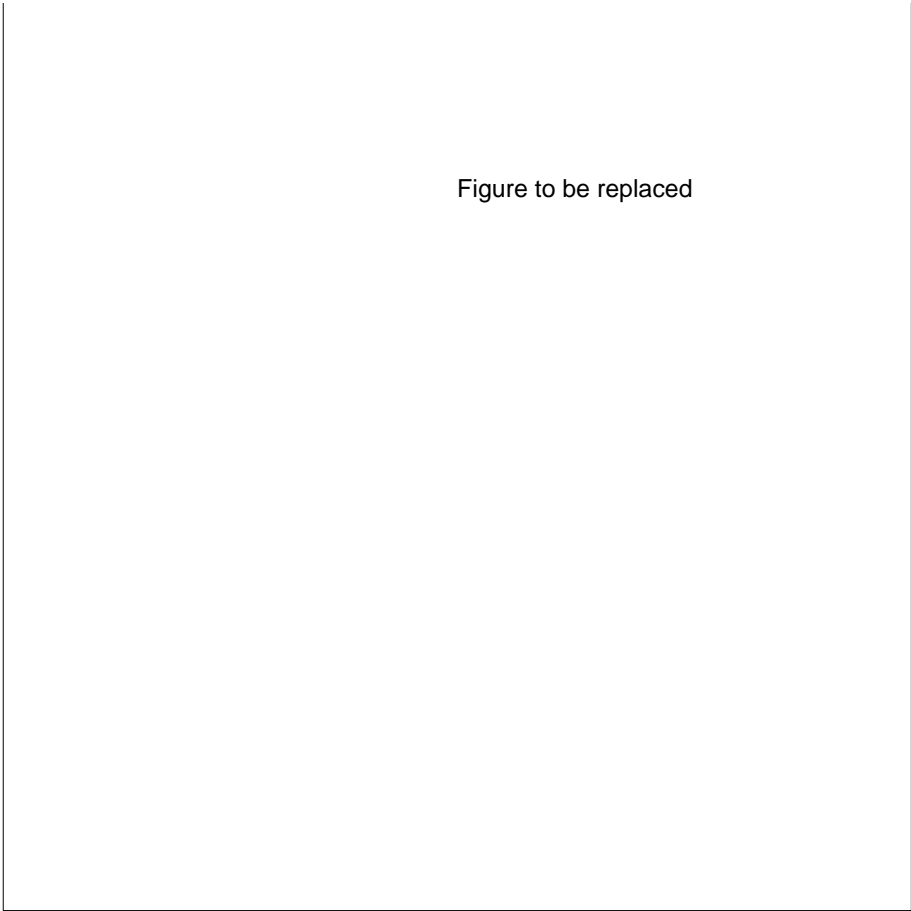


Figure to be replaced

Figura 18.3: I processi neutrini nel piano densità temperatura

stelle è rilevante in quanto in certe fasi la luminosità neutrinica risulta anche maggiore della luminosità fotonica.



## Capitolo 19

# METODI RISOLUTIVI

Nei capitoli precedenti sono stati introdotti i principi fisici su cui si fonda la struttura delle stelle e sono state formulate quattro equazioni di conservazione (momento, massa, energia e flusso) assieme ad un certo numero di relazioni fra le variabili naturali del problema (equazione di stato, opacità, generazione di energia, entropia, energia interna, calori specifici, etc...). Per procedere oltre è necessario chiarire alcuni punti fondamentali: 1) condizioni al contorno centrali e superficiali; 2) unicità delle soluzioni; 3) metodi di soluzione.

### 19.1 Sistema Completo di Equazioni

Le quattro equazioni fondamentali della struttura stellare sono

$$\frac{dP(r)}{dr} = -\frac{GM(r)\rho}{r^2} \quad (19.1)$$

$$\frac{dM(r)}{dr} = 4\pi r^2 \rho \quad (19.2)$$

$$\frac{dT(r)}{dr} = -\frac{3}{16\pi} \frac{\kappa \rho}{ac r^2 T^3} L(r) \quad \text{radiativo} \quad (19.3)$$

$$\frac{dT(r)}{dr} = \frac{\Gamma_2 - 1}{\Gamma_2} \frac{T}{P} \frac{dP(r)}{dr} \quad \text{convettivo} \quad (19.4)$$

$$\frac{dL(r)}{dr} = 4\pi r^2 \rho (\epsilon_n - \epsilon_\nu + \epsilon_g) \quad (19.5)$$

assieme alle relazioni di stato e di produzione  $\kappa = \kappa(\mu, \rho, T)$ ,  $P = P(\mu, \rho, T)$ ,  $U = U(\mu, \rho, T)$ ,  $\Gamma_2 = \Gamma_2(\mu, \rho, T)$ ,  $\epsilon_n = \epsilon_n(\mu, \rho, T)$ ,  $\epsilon_\nu = \epsilon_\nu(\mu, \rho, T)$ ,  $\epsilon_g =$

$\epsilon_g(\mu, \rho, T)$ , ed ai valori delle abbondanze  $X_i$ , le quali a loro volta sono funzioni di  $r$  ed obbediscono alla condizione  $\sum_i X_i = 1$ .

Nelle zone convettive esterne l'equazione dell'equilibrio convettivo adiabatico deve essere sostituita dall'insieme di equazioni che danno il gradiente di temperatura secondo la teoria della mixing length. Inoltre, in strutture in equilibrio termico le derivate temporali sono nulle.

## 19.2 Condizioni al contorno.

Ovvie condizioni al contorno sono

$$r = 0, \quad M(r) = 0, \quad L(r) = 0 \quad (19.6)$$

$$r = R, \quad \rho = \rho_p, \quad T = T_p, \quad L(r) = L, \quad M(r) = M \quad (19.7)$$

dove la variabile indipendente è il raggio  $r$ .  $T_s$  e  $\rho_s$  sono i valori di temperatura e densità alla superficie della stella fissata dal raggio fotosferico. In generale essi dipendono da  $L$ ,  $M$ ,  $R$  e composizione chimica.

Se gli strati esterni sono radiativi si possono usare le semplici condizioni

$$r = R \quad T_s = 0 \quad \rho_s = 0 \quad (19.8)$$

Quantunque queste condizioni al contorno risultino sufficienti per determinare l'andamento delle soluzioni verso l'interno della stella (infatti si può verificare che ogni soluzione interna rapidamente converge verso quella ottenuta con queste condizioni), esse non sono generali e devono essere sostituite da

$$r = R \quad T_s = T_p \quad \rho_s = \rho_p \quad (19.9)$$

La determinazione di  $T_p$  e  $\rho_p$  (oppure  $P_p$ ) non è semplice e richiede una complessa trattazione degli strati (detti atmosfera) sopra la fotosfera di una stella.

Si ricordi che la fotosfera è lo strato che definisce la superficie visibile di una stella, quello a cui l'energia proveniente dagli strati profondi viene finalmente irradiata e al disopra del quale la condizione di quasi equilibrio termodinamico non può più essere applicata, ed infine quello a cui si definisce la temperatura effettiva  $T_{eff}$  mediante la relazione



$$L = 4\pi R^2 \sigma T_{eff}^4 \quad (19.10)$$

In altre parole la fotosfera è anche lo strato sotto il quale la materia non è più parzialmente trasparente alla radiazione come avviene invece per gli strati sovrastanti.

Esprimiamo questa condizione mediante l'approssimazione di Eddington della equazione del trasporto radiativo e ricorrendo alla definizione di profondità ottica. Dalla

$$\frac{dP_r}{dr} = -\left(\frac{\kappa\rho}{c}\right) \frac{L(r)}{4\pi r^2} \quad (19.11)$$

dove  $P_r$  è la pressione di radiazione. Assumendo che a  $r = R$  sia  $L(r) = L$  e  $F = L/(4\pi R^2)$ , per ogni valore di  $r > R$  si ha

$$P_r(r) - P_r(R) = \frac{F}{c} \int_R^\infty d\tau \quad (19.12)$$

dove  $d\tau = -\kappa\rho dr$  è la profondità ottica e  $P_r(R)$  è il valore superficiale della pressione di radiazione. La profondità ottica è definita in modo tale che  $\tau = 0$  per  $r \rightarrow \infty$  e  $\tau \simeq 1$  per  $r = R$ .

L'approssimazione di Eddington consiste nell' assumere che  $P_r = (1/3)aT^4$  ovunque mentre essa è vera solamente a grandi profondità ottiche. Il valore di  $P_r(R)$  è ottenuto supponendo che ci sia radiazione solamente verso l'esterno e che l'intensità specifica della radiazione alla superficie sia isotropa. Si dimostra che vale la relazione seguente

$$P_r(R) = \left(\frac{2}{3}\right) \frac{F}{c} \quad (19.13)$$

Combinando le due relazioni ed esplicitando la temperatura si ottiene

$$T_p^4 = \left(\frac{1}{2}\right) T_{eff}^4 \left[1 + (3/2)\tau\right] \quad (19.14)$$

La fotosfera è dunque lo strato dove  $\tau = 2/3$ . Questa relazione dà la legge della temperatura nella regione fra  $\tau = 0$  ( $\rho = 0$ ) e  $\tau = 2/3$  nell'approssimazione di atmosfera grigia, cioè con  $\kappa$  indipendente dalla frequenza.

Finalmente, la pressione alla fotosfera è data dall' equazione di equilibrio idrostatico in cui si è introdotta la profondità ottica,

$$P_p = \frac{GM}{R^2} \int_0^{\tau_p} \frac{1}{\kappa} d\tau \quad (19.15)$$

dove  $P = 0$  per  $\tau = 0$  e si trascura la pressione di radiazione. Il coefficiente di assorbimento è una funzione della posizione nell'atmosfera, tuttavia in prima approssimazione può essere valutato alla fotosfera. Ne segue che

$$P_p = \frac{2}{3} \frac{1}{\kappa_p} \frac{GM}{R^2} \quad (19.16)$$

Le relazioni per  $T_p$  e  $P_p$  rappresentano le condizioni al contorno naturali del sistema.

L'andamento di temperatura, pressione e densità nelle regioni sopra la fotosfera è descritto mediante la variabile  $\tau$ . Sotto la fotosfera è necessario invece fare uso del sistema completo di equazioni.

### 19.3 Unicità delle Soluzioni

L'unicità delle soluzioni delle equazioni di struttura assieme alle loro condizioni al contorno è basata sul teorema di Vogt-Russel il quale può essere enunciato nel modo seguente:

*”La struttura completa di una stella in equilibrio idrostatico e termico è univocamente determinata dalla massa e dal profilo di composizione chimica nel suo interno, ammesso che la pressione, l'energia interna per unità di massa, l'opacità e il tasso di produzione di energia siano funzioni locali solamente della densità, temperatura e composizione chimica.”*

L'enunciato di Vogt-Russel, quantunque sia considerato come un teorema fondamentale nello studio delle stelle in completo equilibrio, non lo è in senso matematico. Infatti non è stata data una rigorosa dimostrazione del teorema, ne questa evidentemente può esistere dal momento che possono essere costruiti modelli stellari in evidente contrasto con il teorema stesso. Tuttavia esso può essere ritenuto valido per stelle ordinarie (ad esempio stelle omogenee con equazione di stato semplice).

Il ragionamento alla base del teorema di Vogt-Russel è il seguente. Assumendo il raggio come variabile indipendente, la soluzione simultanea delle quattro equazioni introduce 4 costanti di integrazione A, B, C, D, così che ogni variabile

dependente sarà funzione di  $(A, B, C, D, X_i, r)$ , dove  $X_i$  sono i parametri di composizione chimica. Le condizioni al contorno assieme a  $L(R) = L$ ,  $M(R) = M$  e  $\sum_i X_i = 1$  danno 7 relazioni indipendenti fra  $n+7$  quantità  $A, B, C, D, L, M, R$ , e  $X_i$ . In condizioni ordinarie queste relazioni possono fissare il valore di 7 delle  $n+7$  grandezze in funzione di altre  $n$  quantità. Si conviene di considerare la massa totale  $M$  e  $n-1$  dei parametri di composizione chimica come le quantità da fissare a priori. In tal modo la massa totale e la composizione chimica sono i parametri indipendenti. Ne segue che le variabili  $T(r)$ ,  $L(r)$ ,  $P(r)$  e  $M(r)$  sono funzioni di  $M$ ,  $X_i$ , e  $r$ . In particolare  $L = L(M, X_i)$  e  $R = R(M, X_i)$  da cui segue  $L = L(T_{eff}, X_i)$ , la quale costituisce un'interpretazione formale del diagramma H-R.

## 19.4 Sequenze Evolutive

Ad eccezione di una struttura completamente omogenea, in generale la composizione chimica di una stella è funzione della posizione o equivalentemente della massa  $M(r)$  cioè i parametri di composizione chimica sono  $X_i[M(r)]$ . Queste funzioni chiaramente non sono determinate dalle condizioni di equilibrio valide in quel particolare stadio evolutivo, ma sono il risultato combinato delle trasmutazioni nucleari e processi di mescolamento avvenuti nelle fasi evolutive precedenti.

Se  $X_i[M(r)]_0$  sono le composizioni chimiche ad un certo tempo  $t_0$  determinate dalla storia precedente, la soluzione del sistema di equazioni determina le variabili fisiche e le velocità di reazione per ogni singolo elemento, le quali a loro volta forniscono le  $(dX_i/dt)$  ad ogni punto della stella. Dopo un certo tempo  $\delta t$  le nuove composizioni chimiche in ogni strato sono

$$X_i[M(r)] = X_i[M(r)]_0 + \langle \frac{dX_i}{dt} \rangle \delta t. \quad (19.17)$$

Queste rimangono tali se le regioni considerate sono radiative, oppure sono sostituite da un valore medio in presenza di convezione

$$\langle X_i \rangle = \left( \frac{1}{\delta M} \right) \int_{\delta M} X_i[M(r)] dM(r) \quad (19.18)$$

dove  $\delta M$  è l'estensione in massa della regione convettiva. È chiaro che nelle zone dove la temperatura è troppo bassa affinché le reazioni nucleari possano

essere efficaci l'unico effetto sarà quello della convezione se presente, altrimenti la composizione chimica rimarrà uguale a quella iniziale. Questo permette di connettere ogni stadio evolutivo di una stella in una sequenza causale di stadi descritti dal parametro tempo. Il problema è quindi ricondotto a quello di conoscere la struttura chimica di uno stadio assunto come stadio iniziale. Lo studio delle condizioni fisiche all'atto della formazione delle stelle garantisce che esse sono inizialmente omogenee. L'insieme dei modelli descriventi la struttura completa viene chiamato sequenza evolutiva ed in particolare la variazione nel tempo di  $L$  e  $T_{eff}$  corrisponde al cammino o traccia evolutiva nel diagramma H-R, luogo principale degli osservabili stellari.

## 19.5 Soluzioni Numeriche

Le equazioni di struttura stellare sono dal punto di vista matematico talmente complesse da precludere ogni possibilità di integrazione analitica salvo che in casi particolari di limitato interesse. Sono pertanto necessari dei metodi numerici. Allo scopo di iniziare una integrazione numerica deve essere noto il valore iniziale di tutte le variabili in un determinato punto. Ad esempio è noto che

$$L(r) = 0, \quad M(r) = 0, \quad \rho = \rho_c, \quad T = T_c \quad \text{per} \quad r = 0 \quad (19.19)$$

dove tuttavia  $\rho_c$  e  $T_c$  non possono essere qualunque ma devono essere tali che la soluzione soddisfi alle condizioni superficiali

$$L(R) = L, \quad M(R) = M, \quad T = T_p, \quad P = P_p \quad \text{per} \quad r = R \quad (19.20)$$

Questo è un tipico problema a due autovalori ( $\rho_c$  e  $T_c$ ). Inoltre se gli strati superficiali sono convettivi e superadiabatici il parametro di mixing length è un ulteriore autovalore che deve essere scelto in modo da riprodurre  $L$  e  $T_{eff}$ .

Essenzialmente esistono due metodi di integrazione: metodo del raccordo e metodo delle shells o di Henyey che per primo lo applicò a problemi di struttura stellare. Per le ragioni che vedremo i due metodi offrono particolari vantaggi. Il metodo del raccordo può essere applicato in ogni caso e non richiede

una soluzione di partenza, esso tuttavia non è particolarmente conveniente nel trattare strutture complesse. Il metodo di Henyey, al contrario, richiede la conoscenza di una soluzione iniziale di prova ma offre il vantaggio di essere particolarmente adatto a risolvere strutture anche molto complicate.

### 19.5.1 Metodo del raccordo

In questo metodo l'integrazione è compiuta a partire da un bordo, centro o superficie, e andando verso l'estremo opposto. La tecnica numerica di uso più frequente è il metodo di Runge-Kutta. Il sistema di equazioni differenziali da risolvere sia

$$\frac{dy_i}{dx} = f[x, (y_i)] \quad i = 1, 2, 3 \dots N. \quad (19.21)$$

Interpolando con un polinomio del quarto grado su quattro punti si ottiene una relazione di accuratezza  $h^4$  dove  $h$  è il passo di integrazione

$$y_i(x+h) = y_i(x) + \frac{1}{6} [K_{1i} + 2K_{2i} + 2K_{3i} + K_{4i}] + O(h^4) \quad (19.22)$$

dove

$$K_{1i} = f_i[x, (y_i)]h, \quad K_{2i} = f_i[x + h/2, (y_i + K_{1i}/2)]h \quad (19.23)$$

$$K_{3i} = f_i[x + h/2, (y_i + K_{2i}/2)]h, \quad K_{4i} = f_i[x + h, (y_i + K_{3i})]h \quad (19.24)$$

Note le  $y_i$  a  $X = X_0$  si determinano le  $y_i$  a  $X = x_0 + h$ . Nel caso delle strutture stellari, atteso che i valori di densità, temperatura e pressione al centro differiscono da quelli superficiali per ordini di grandezza, è conveniente usare variabili logaritmiche. Inoltre se l'integrazione è fatta a cominciare dal centro, i valori di densità, pressione e temperatura alla superficie sono confrontabili con le relative accuratezze numeriche delle stesse quantità al centro e l'integrazione diventa priva di significato. Infine, le equazioni sono singolari al centro in quanto  $L(r)$  e  $M(r)$  diventano nulli. Pertanto l'integrazione fatta a partire dalla superficie diverge via via che procede verso il centro. Per ovviare a tali difficoltà si usa compiere due integrazioni: una a partire dal centro (soluzione di core) e una a

partire dalla superficie (soluzione di inviluppo). Queste vengono raccordate ad un determinato punto. Si usano anche particolari sviluppi analitici per incominciare le integrazioni centrale e superficiale. Supponiamo che la massa totale  $M$  e la composizione chimica siano fissate, allora gli autovalori per la soluzione centrale sono  $T_c$  e  $\rho_c$  mentre quelli per la soluzione di inviluppo sono  $L$  e  $R$ . La condizione di continuità della variabili fisiche al punto di raccordo è raggiunta mediante un insieme di soluzioni ottenute con le seguenti combinazioni dei parametri

interno		esterno	
$\rho_c$	$T_c$	$L$	$R$
$\rho_c + d\rho_c$	$T_c$	$L + dL$	$R$
$\rho_c$	$T_c + dT_c$	$L$	$R + dR$

dove  $d\rho_c$ ,  $dT_c$ ,  $dL$  e  $dR$  sono piccole variazioni. Assumendo che nel punto di raccordo tutte le variabili fisiche siano funzioni lineari di  $\rho_c$ ,  $T_c$ ,  $L$  e  $R$  si calcolano le variazioni da apportare agli autovalori al fine di soddisfare le condizioni di continuità. Questa procedura è ripetuta fino al raggiungimento dell'accuratezza voluta.

### 19.5.2 Metodo delle shell o di Henyey

L'idea alla base del metodo di Henyey è che assunta una data struttura della stella, cioè  $P(r)$ ,  $T(r)$ ,  $M(r)$  e  $L(r)$  assieme alle condizioni al contorno, molto probabilmente questa non soddisfa il sistema di equazioni differenziali. Si apportano allora delle correzioni alle variabili in ogni punto mediante un opportuno algoritmo in modo tale da soddisfare più da vicino al sistema di equazioni differenziali. La procedura è ripetuta fintanto che le correzioni diventano trascurabili. Si dice che in tal caso la soluzione di prova è stata rilassata alla soluzione vera. Quantunque la massa  $M(r)$  sia la naturale variabile lagrangiana del sistema, può essere conveniente introdurre una variabile fittizia  $\xi$  mediante una opportuna funzione della massa tale che  $M(r) = M(\xi)$  per  $0 < \xi < 1$  e che soddisfi alle condizioni  $M(0) = 0$  e  $M(1) = M$ . Il sistema di equazioni scritto in funzione della nuova variabile diventa

$$\frac{dP}{d\xi} + \frac{GM(r)\rho}{r^2} \frac{dr}{d\xi} = 0 \quad (19.25)$$

$$M'(\xi) - 4\pi r^2 \rho \frac{dr}{d\xi} = 0 \quad (19.26)$$

$$\frac{dL(\xi)}{d\xi} - M'(\xi) [\epsilon_n - \epsilon_\nu + \epsilon_g] = 0 \quad (19.27)$$

$$\frac{dT}{d\xi} + \frac{3\kappa\rho L(\xi)}{16\pi acT^3 r^2} \frac{dr}{d\xi} = 0 \quad (\text{radiativo}) \quad (19.28)$$

$$\frac{dS}{d\xi} = \frac{dU}{d\xi} + P \frac{d}{d\xi} \frac{1}{\rho} = 0 \quad (\text{convettivo}) \quad (19.29)$$

Al fine di compensare per la grande escursione nelle variabili dal centro alla superficie è opportuno introdurre le variabili ausiliarie

$$p = P^{1/4}, \quad q = \rho^{1/3}, \quad F = \frac{L(\xi)}{\xi^2}, \quad H = \frac{3\kappa p^3}{64\pi GacT^3} \quad (19.30)$$

Il sistema di equazioni diventa

$$\frac{dp}{d\xi} + \frac{GM(\xi)q^3}{4p^3 r^2} \frac{dr}{d\xi} = 0 \quad (19.31)$$

$$M'(\xi) - 4\pi r^2 q^3 \frac{dr}{d\xi} = 0 \quad (19.32)$$

$$\xi^2 \frac{dF}{d\xi} + 2\xi F - M'(\xi)(\epsilon_n - \epsilon_\nu - \frac{dU}{dt} + \frac{3p^4}{q^4} \frac{dq}{dt}) = 0 \quad (19.33)$$

$$\frac{dT}{d\xi} - \frac{16H\xi^2 F}{M(o)} \frac{dp}{d\xi} = 0 \quad (\text{radiativo}) \quad (19.34)$$

$$\frac{dU}{d\xi} - \frac{3p^4}{q^4} \frac{dp}{d\xi} = 0 \quad (\text{convettivo}) \quad (19.35)$$

La stella viene divisa in un certo numero di zone o shells concentriche definite da valori discreti  $\xi_j$  con  $j = 1, 2, \dots, J$ .  $\xi_0 = 0$  e  $\xi_J = 1$ . Non è necessario che le  $\xi_j$  siano equispaziate. Ci sono vari modi di approssimare il sistema di equazioni differenziali con un sistema di equazioni alle differenze finite e quello mostrato di seguito è uno fra i tanti possibili.

$$f_1(j, j+1) = p_{j+1} - p_j + \frac{GM_{j+\frac{1}{2}}(q_{j+1} + q_j)^3(r_{j+1} - r_j)}{(p_{j+1} + p_j)^3(r_{j+1} + r_j)^2} = 0 \quad (19.36)$$

$$f_2(j, j+1) = \left(\frac{8}{\pi}\right) M'_{j+1/2}(\xi_{j+1} - \xi_j) - (q_{j+1} + q_j)^3 (r_{j+1} + r_j)^2 (r_{j+1} - r_j) = 0 \quad (19.37)$$

$$\begin{aligned} f_3(j, j+1) = & F_{j+1}(\xi_{j+1} + \xi_j)(3\xi_{j+1} - \xi_j) + F_j(\xi_{j+1} + \xi_j)(\xi_{j+1} - 3\xi_j) \\ & - 2M'_{j+1/2}(\xi_{j+1} - \xi_j) \left[ 2(\epsilon_{j+1}\epsilon_j)^{1/2} - \left( \frac{U_{j+1} + U_j - U_{j+1}^n - U_j^n}{\delta t} \right) \right. \\ & \left. + 3 \left( \frac{p_{j+1} + p_j}{q_{j+1} + q_j} \right)^4 \left( \frac{q_{j+1} + q_j - q_{j+1}^n - q_j^n}{\delta t} \right) \right] = 0 \end{aligned} \quad (19.38)$$

$$\begin{aligned} f_4(j, j+1) = \\ T_{j+1} - T_j - \frac{(H_{j+1} + H_j)(\xi_{j+1} + \xi_j)^2 (F_{j+1} + F_j)(p_{j+1} - p_j)}{M_{j+1/2}} = 0 \end{aligned} \quad \text{(radiativo)} \quad (19.39)$$

$$f_5(j, j+1) = U_{j+1} - U_j - 3 \left[ \frac{p_{j+1} + p_j}{q_{j+1} + q_j} \right]^4 (p_{j+1} - p_j) = 0 \quad \text{(convettivo)} \quad (19.40)$$

dove

$$\epsilon = \epsilon_n - \epsilon_\nu + \epsilon_g \quad (19.41)$$

$$X_j = X(\xi_j) \quad X_{j+1/2} = X(\xi_{j+1/2}) \quad (19.42)$$

$$M_{j+1/2} = M(\xi_{j+1/2}) \quad \xi_{j+1/2} = 1/2(\xi_{j+1} + \xi_j) \quad (19.43)$$

$q_j^n$  ed  $\epsilon_j^n$  sono i valori di queste variabili valutati al passo temporale precedente. Le  $f_i(j, j+1)$  con  $i=1,..5$  sono funzioni algebriche e gli argomenti  $(j, j+1)$  stanno ad indicare che *esse* dipendono da valori adiacenti con sottoscritte  $j$  e  $j+1$ . La derivata temporale non è approssimata da una differenza tra due valori simmetrici ma è solo una differenza all'indietro nel tempo. Questo sembra garantire una migliore convergenza alla soluzione vera. La scelta delle medie geometriche per  $\epsilon_n$  ed  $\epsilon_\nu$  è dovuta alla rapida variazione di queste due grandezze con la posizione nella stella. Le condizioni al centro sono  $M(0) = 0$  e  $L(0) = 0$ . Se si trascurano complicate integrazioni all'atmosfera, le condizioni superficiali



sono semplicemente  $r_J = R$ ,  $F_J = L/R^2$ ,  $M_J = M$ ,  $\rho_J = 0$  e  $T_J = 0$ , altrimenti possono essere sostituite da un sistema di funzioni  $g$  tali che  $F_{J-1} = g_1, q_{J-1} = g_2, r_{J-1} = g_3, T_{J-1} = g_4$ . L'insieme di queste relazioni costituisce un sistema di  $4J$  equazioni algebriche con variabili  $q_j, T_j, r_j$  e  $F_j$  con  $j = 1 \dots J-1$ . Il problema è quello di trovare la soluzione di queste  $4J$  equazioni. A tale scopo è usato il metodo di Newton- Raphson delle iterazioni successive. Indichiamo l'insieme delle  $[F_j], [q_j], [r_j]$  e  $[T_j]$  con  $[X_j^h]$  dove  $h=1, \dots, 4$ . Sia  $[X_j^h(0)]$  la prima approssimazione della corrette radici delle  $f_i(j, j+1)$  equazioni e sviluppiamo le  $f_i(j, j+1)$  attorno a  $[X_j^h(0)]$  allora la prima correzione  $[\delta X_j^h(0)]$  è data dalla seguente equazione

$$f_i(j, j+1) + \sum_{h=1}^4 \frac{\partial f_i(j, j+1)}{\partial X_j^h(0)} \delta X_j^h(0) + \sum_{h=1}^4 \frac{\partial f_i(j, j+1)}{\partial X_{j+1}^h(0)} \delta X_{j+1}^h(0) = 0 \quad (19.44)$$

dove  $i = 1, \dots, 4$  o  $5$ . Questa equazione è equivalente al seguente sistema di equazioni

$$A_0^i + \sum_{h=1}^4 A_h^i \delta X_j^h(0) + \sum_{h=1}^4 B_h^i \delta X_{j+1}^h(0) = 0 \quad (19.45)$$

dove  $i = 1, 2, 4$  o  $5$  e  $A_0^i, A_h^i$  e  $B_h^i$  non dipendono da  $X_j^h(0)$  e  $X_{j+1}^h(0)$ . Questa equazione lega due valori adiacenti delle variabili  $X$  permettendo di determinare le correzioni  $\delta X_j^h(0)$  e  $\delta X_{j+1}^h(0)$  in funzione dei loro valori al contorno. Questi sono  $\delta r_0 = 0$  e  $\delta F_0 = 0$  al centro e  $X_{j-1}^h(0) - g_h + \delta X_{j-1}^h(0) - \partial g_h / \partial X_{j-1}^h(0) = 0$  alla superficie. È conveniente incominciare dal centro e considerare la sfera definita da  $j = 0$  e  $j = 1$ , in questo caso due delle  $\delta X$  sono già note ( $\delta r_0 = 0$  e  $\delta F_0 = 0$ ) e quindi possiamo supporre di ricavare le rimanenti  $\delta X$  in funzione di due di queste, ad esempio in funzione di  $\delta \rho_0$  e  $\delta T_0$ . Le correzioni nel punto  $j=1$  sono allora espresse come combinazioni lineari di  $\delta T_0$  e  $\delta \rho_0$  con coefficienti noti grazie alla soluzione di prova. Si passa quindi alla shell successiva e si esprimono ancora le correzioni  $\delta X$  come combinazioni lineari di  $\delta T_0$  e  $\delta \rho_0$  con coefficienti pure noti ma diversi dai precedenti. Si procede così fino all'ultimo punto  $J$ . Consideriamo il caso di condizioni superficiali semplici  $T = 0$  e  $\rho = 0$  allora le correzioni corrispondenti sono pure nulle e rimangono le  $\delta r_J$  e  $\delta F_J$ . Ci sono dunque quattro equazioni con incognite  $\delta T_0, \delta \rho_0, \delta F_J$  e  $\delta r_J$ . Questo permette di ricavare  $\delta \rho_0$  e  $\delta T_0$  e quindi tutte le altre correzioni per ogni coppia

$j, j + 1$  se i coefficienti delle combinazioni lineari sono stati opportunamente memorizzati. Ponendo  $X_j^h(1) = X_j^h(0) + \delta X_j^h(0)$  la procedura viene ripetuta per  $X_j^h(1)$  e così via fino a che sia stata raggiunta l'accuratezza desiderata.

## Capitolo 20

# STABILITÀ STELLARE

L'analisi della stabilità di una stella può essere compiuta in vari modi primo fra tutti il *metodo del pistone* che sotto molti aspetti si avvicina alla situazione reale esistente in una stella. In quanto segue svilupperemo questo modello attraverso vari gradi di complessità al fine di preparare uno strumento di indagine applicabile a molti problemi.

### 20.1 Equazioni del Moto

L'equilibrio idrostatico è un caso particolare di conservazione del momento. Se una stella subisce moti radiali accelerati bisogna tener conto dei termini inerziali. Il modo più semplice di formulare il problema è quello della descrizione lagrangiana assumendo  $m_r$  e  $t$  come variabili indipendenti.

Si consideri uno strato sferico di spessore  $dM_r$  alla distanza  $r$  dal centro. Sulla massa  $dM_r$  agiscono le forze di pressione e di gravità

$$f_P = -\frac{\partial P}{\partial M_r} dM_r \quad (20.1)$$

$$f_g = -\frac{g}{4\pi r^2} dM_r = -\frac{GM_r}{r^2} dM_r \quad (20.2)$$

Se la somma delle due non è uguale a zero, lo strato subirà l'accelerazione

$$\frac{dM_r}{4\pi r^2} \frac{\partial^2 r}{\partial t^2} = -\frac{\partial P}{\partial M_r} - \frac{GM_r}{4\pi r^2} \quad (20.3)$$

I segni in quest'ultima equazione sono tali che il gradiente di pressione da solo produce una accelerazione verso l'esterno, mentre la gravità da sola produce una accelerazione verso l'interno. Da questa equazione si ha il caso particolare dell'equilibrio idrostatico se il termine  $\partial^2 r / \partial t^2 = 0$ .

Lo studio dell'equazione (20.3) ci permette di definire due tempi caratteristici molto importanti: il tempo di caduta libera  $\tau_{ff}$  e il tempo di esplosione  $\tau_{expl}$ . Supponiamo che il termine di pressione sia nullo allora approssimando  $r \simeq R$ ,  $M_r \simeq M$  e  $\partial^2 r / \partial t^2 = R / \tau_{ff}^2$  si ha

$$\tau_{ff} \simeq \left( \frac{R}{g} \right)^{1/2} \quad (20.4)$$

Analogamente, supponendo che il termine di gravità sia nullo e facendo ovvie approssimazioni si deriva

$$\tau_{expl} \simeq R \left( \frac{\rho}{P} \right)^{1/2} \quad (20.5)$$

Poichè  $(P/\rho)^{1/2}$  è dell'ordine della velocità media del suono,  $\tau_{expl}$  è circa uguale al tempo impiegato da un'onda sonora ad andare dal centro alla superficie.

Per una stella in equilibrio idrostatico  $\tau_{ff} \simeq \tau_{expl}$ . Quanto vale la scala di tempo  $\tau_{hydr}$  che rappresenta questa situazione? Con ragionamenti analoghi a quelli fatti in precedenza otteniamo

$$\tau_{hydr} \simeq \left( \frac{R^3}{GM} \right)^{1/2} \quad (20.6)$$

Nel caso del Sole  $\tau_{hydr} \simeq 17$  minuti, nel caso di una Gigante Rossa  $\tau_{hydr} \simeq 18$  giorni, nel caso di una Nana Bianca  $\tau_{hydr} \simeq 4$  secondi. Questa è una riprova che la condizione di equilibrio idrostatico viene realizzata entro strettissimi margini.

## 20.2 Il Modello a Pistone

Un pistone di massa  $M^*$  delimita una cavità contenente una massa di gas  $m^*$  come mostrato in Figura 20.1. Il pistone è soggetto al campo gravitazionale descritto dalla accelerazione di gravità  $g$  e quindi ha un peso  $G^* = gM^*$ . Sia  $A$  l'area del pistone ed  $h$  l'altezza a cui è collocato. Il volume racchiuso è  $V = h \cdot A$ . La densità del gas dentro la cavità è  $\rho = m^*/V$ .

In caso di equilibrio idrostatico, la forza di pressione del gas  $P \cdot A$  bilancia il peso del pistone

$$G^* = P \cdot A \quad (20.7)$$

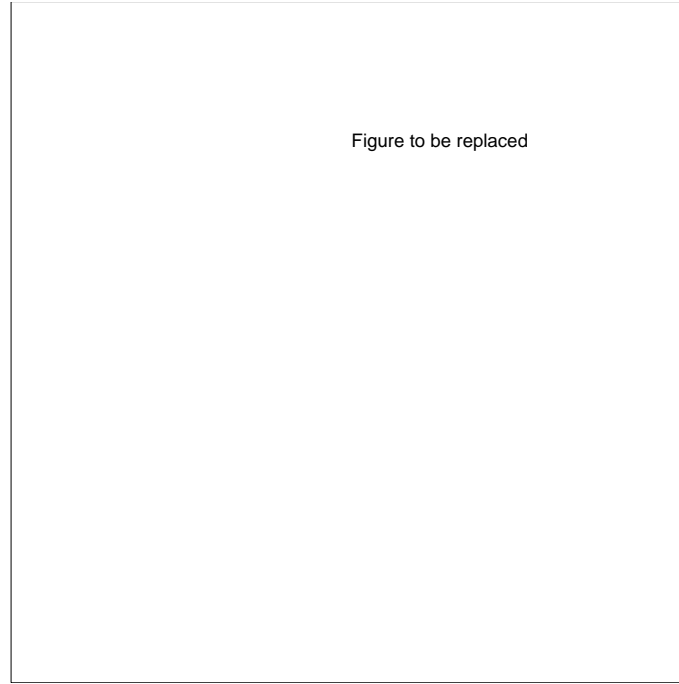


Figura 20.1: Il modello a pistone per lo studio della stabilità

Se le forze non si bilanciano allora il pistone viene accelerato lungo la verticale con equazione del moto

$$M^* \frac{d^2 h}{dt^2} = -G^* + P \cdot A. \quad (20.8)$$

Possiamo ora calcolare le scale di tempo  $\tau_{ff}$  e  $\tau_{expl}$  associate a questa situazione fisica, ottenendo

$$\tau_{ff} = \left( \frac{h}{g} \right)^{1/2} \quad (20.9)$$

$$\tau_{expl} = h \left( \frac{\rho}{P} \right)^{1/2} \left( \frac{M^*}{m^*} \right)^{1/2} \quad (20.10)$$

**Teorema del Viriale.** Consideriamo il caso del gas perfetto e supponiamo che  $M^* \gg m^*$ . L'energia gravitazionale del sistema è  $E_g = G^* h$  (dove  $E_g = 0$  per  $h = 0$ ).

La condizione di equilibrio idrostatico (con  $m^* = Ah\rho$ ) impone che

$$hG^* = \frac{P}{\rho} m^* = (\gamma - 1) c_v T m^* \quad (20.11)$$

Il termine  $c_v T m^*$  non è altri che l'energia interna  $E_i$  del gas  $E_i = c_v T m^*$ . Da quanto detto segue che

$$E_g = (\gamma - 1)E_i \quad (20.12)$$

La relazione (20.12) rappresenta il Teorema del Viriale per il pistone. Supponiamo ora che il gas sia perfetto monoatomico con  $\gamma = 5/3$  e differenziamo rispetto al tempo

$$\frac{dE_g}{dt} = \frac{2}{3} \frac{dE_i}{dt} \quad (20.13)$$

Da questa si vede che, contrariamente al caso delle stelle, una riduzione di  $E_g$  comporta il raffreddamento del gas. Infatti il pistone può scendere solo se il gas si raffredda. Questo diverso comportamento è dovuto all'ipotesi di campo gravitazionale costante.

Allo scopo di dimostrare ciò assumiamo che il peso  $G^*$  sia funzione di  $h$  e differenziamo rispetto ad  $h$

$$G^*(1 + G_h^*) = (\gamma - 1) \frac{dE_i}{dh} \quad (20.14)$$

dove  $G_h^* = d \ln G^* / d \ln h$ .

Se  $G_h^* = 0$  (gravità costante) si vede che  $E_i$  aumenta con  $h$ . Tuttavia, se  $G^*$  diminuisce rapidamente con  $h$  in modo tale che  $G_h^* < -1$  allora  $E_i$  aumenta al diminuire di  $h$  (come nelle stelle). Infatti in una stella che si espande, ogni shell di massa perde peso all'aumentare di  $r$ .

**Proprieta' termiche.** Per studiare le proprietà termiche del pistone, incominciamo col supporre che la cavità sia adiabatica

$$dQ = m^* du + P dV = 0 \quad (20.15)$$

dove  $dQ$  è il calore fornito,  $u = c_v T$  è l'energia interna per unità di massa ed infine  $V = Ah$  è il volume della cavità. Da questo segue la relazione

$$dQ = c_v m^* dT + P A dh = 0 \quad (20.16)$$

Lasciamo ora cadere la condizione di adiabaticità in tre modi:

(1) Primo supponiamo che una certa quantità di calore vada persa passando dall'interno della cavità (a temperatura  $T$ ) all'esterno di questa (a temperatura  $T_s$ ). Il flusso di calore sia  $\chi(T - T_s)$  dove  $\chi$  è un opportuno coefficiente.

(2) Secondo, supponiamo che venga prodotta una certa quantità di energia nucleare al tasso  $\epsilon$  per unità di massa e tempo.

(3) Terzo, assumiamo che un certo flusso  $F$  per secondo penetri all'interno della cavità e che il gas assorba per unità di tempo la quantità  $\kappa F m^*$ .

la condizione di bilancio energetico impone che

$$\epsilon m^* + \kappa F m^* = \chi(T - T_s) \quad (20.17)$$

In generale, la quantità di calore  $dQ$  guadagnato dal gas nel tempo  $dt$  è

$$dQ = [\epsilon m^* + \kappa F m^* - \chi(T - T_s)]dt \quad (20.18)$$

Dal confronto con la condizione di bilancio adiabatico, segue la relazione di conservazione dell'energia

$$c_v m^* \frac{dT}{dt} + PA \frac{dh}{dt} = [\epsilon m^* + \kappa F m^* - \chi(T - T_s)] \quad (20.19)$$

Se assumiamo  $\epsilon = \kappa = 0$ , allora l'unica soluzione indipendente dal tempo è  $T = T_s$ . Qual'è il tempo scala di questo aggiustamento di temperatura? Le due derivate temporali al membro di destra danno la stessa stima per  $\tau$ : infatti una variazione di  $h$  avviene come conseguenza del ed in concomitanza al cambiamento di temperatura.

Per avere una rozza stima della scala di tempo sostituiamo il membro di sinistra della equazione (20.19) con  $c_v \Delta T m^* / \tau$  dove  $\Delta T = |T - T_s|$

$$c_v m^* \frac{|T - T_s|}{\tau} \simeq \chi |T - T_s| \quad (20.20)$$

da cui

$$\tau \simeq \frac{c_v m^*}{\chi} \quad (20.21)$$

che è il tempo impiegato dal pistone per portare la sua temperatura in equilibrio con quella dell'ambiente circostante.

**Stabilità del modello a pistone.** Allo scopo di analizzare la stabilità del modello applichiamo delle piccole perturbazioni attorno al valore di equilibrio (indicato con il suffisso 0). Le perturbazioni sono tali che per ogni variabile si abbia

$$\frac{\delta f}{f_0} = \frac{f(t) - f_0}{f_0} = g(r)u(t) \quad (20.22)$$

dove  $g(r)$  dipende solo dalle coordinate ed è molto piccola ( $g(r) \ll 1$ ) e  $u(t)$  dipende solo dal tempo. Per quest'ultima si usa di solito una funzione del tipo  $e^{i\omega t}$ , con  $\omega$  complesso.

Con tali notazioni e premesse possiamo scrivere

$$h(t) = h_0(1 + xe^{i\omega t}) \quad (20.23)$$

$$P(t) = P_0(1 + pe^{i\omega t}) \quad (20.24)$$

$$T(t) = T_0(1 + \theta e^{i\omega t}) \quad (20.25)$$

con  $|x|, |p|, |\theta| \ll 1$ . Partiamo dalla equazione del moto (20.8) e del bilancio energetico (20.20) e dalla equazione di stato, assumiamo che  $\epsilon = \kappa = 0$ , introduciamo le perturbazioni, linearizziamo le equazioni ed infine trascuriamo i termini di ordine superiore.

Dalla equazione di continuità  $\rho h = \text{cost}$  ed equazione di stato  $P \simeq \rho T$  abbiamo

$$p = \theta - x \quad (20.26)$$

e dalla equazione del moto deriviamo

$$M^* h_0 \omega^2 x + P_0 A p = 0 \quad (20.27)$$

la quale, usando  $g = P_0 A / M^*$  e la (20.26), diventa

$$\left( \frac{\omega^2 h_0}{g} - 1 \right) x + \theta = 0 \quad (20.28)$$

Analogamente, dalla equazione del bilancio energetico otteniamo

$$i\omega P_0 A h_0 x + (i\omega c_v m^* T_0 + \chi T_0) \theta = 0 \quad (20.29)$$



Queste due equazioni lineari e omogenee in  $x$  e  $\theta$  sono risolvibili se il determinante si annulla. Questa condizione dà una equazione algebrica del terzo grado in  $\omega$ .

Il problema diventa semplice se assumiamo che il gas subisca trasformazioni adiabatiche ( $\chi = 0$ ). Infatti l'equazione linearizzata del bilancio energetico (20.29), assieme alla equazione di stato di gas perfetto e alla relazione  $\rho_0 = m^*/Ah_0$ , diventa

$$\frac{K}{\mu H c_v} x + \theta = 0 \quad (20.30)$$

Ricordando che  $K/\mu H = c_p - c_v$  e  $c_p/c_v = \gamma_{ad}$  ne segue che

$$(\gamma_{ad} - 1)x + \theta = 0 \quad (20.31)$$

Dalla condizione sul determinante si ottiene

$$\omega = \pm \omega_{ad} \quad \omega_{ad} = \left( \frac{g\gamma_{ad}}{h_0} \right)^{1/2} \quad (20.32)$$

Poiché  $\omega$  è reale, il moto adiabatico è una oscillazione con frequenza  $\omega$  ed ampiezza costante. Si dice allora che il pistone è **dinamicamente stabile**.

Il risultato cambia introducendo i termini non adiabatici. Per  $\chi \neq 0$  abbiamo

$$(\gamma_{ad} - 1)x + \left(1 + \frac{a}{i\omega}\right)\theta = 0 \quad (20.33)$$

dove  $a = \chi/c_v m^*$ . La condizione sul determinante genera ora una equazione cubica in  $\omega$ , dove in generale  $\omega$  è complesso.

Se assumiamo che  $\chi$  sia piccolo, in modo tale che la frequenza di oscillazione sia prossima a quella del caso adiabatico, possiamo porre  $\omega = \omega_{ad} + \xi$ . Se trascuriamo i termini di ordine superiore in  $\xi$  e  $\chi$  nell'equazione del determinante otteniamo

$$i\xi = -\frac{\gamma_{ad} - 1}{2\gamma_{ad}} \frac{\chi}{c_v m^*} = -\frac{\gamma_{ad} - 1}{2\gamma_{ad}} \left(\frac{1}{\tau}\right) < 0 \quad (20.34)$$

Le oscillazioni quasi adiabatiche sono pertanto **smorzate**, in quanto  $i\omega = i\omega_{ad} + i\xi$  ha la parte reale che diminuisce con l'ampiezza sulla scala di tempo  $\tau$ . In tale situazione il pistone è **vibrazionalmente stabile**.

L'equazione cubica in  $\omega$  deve avere una terza radice che può essere trovata assumendo che essa descriva un'evoluzione così lenta che i termini di inerzia nella (20.8) siano trascurabili. Allora la relazione (20.28) deve essere sostituita da

$$\theta - x = 0 \quad \text{ovvero} \quad p = 0 \quad (20.35)$$

Infatti se l'evoluzione è così lenta che la condizione di equilibrio idrostatico è sempre verificata, la pressione è data dal peso del pistone. Si ricava

$$i\omega = -\frac{\chi T}{P_0 A h_0 + c_v m^* T_0} = -\frac{\chi}{c_p m^*} = -\frac{1}{\gamma_{ad}} \left(\frac{1}{\tau}\right) \quad (20.36)$$

Essa corrisponde ad un decadimento esponenziale su scala temporale  $\tau$  della perturbazione iniziale. Si dice che il pistone è **secolarmente stabile**.

### 20.3 Ancora sul pistone: complicazioni

Consideriamo il caso in cui non ci sia perdita, produzione e assorbimento di energia, cioè  $\epsilon = \kappa = \chi = 0$ . In tal caso l'entropia del gas rimane costante durante lo spostamento del pistone. Nella sezione precedente abbiamo esaminato questa situazione sotto l'ipotesi di peso del pistone costante ( $G^* = \text{cost}$ ). Ora immaginiamo che il peso vari con l'altezza,  $G^* = G^*(h)$ . L'equazione del moto diventa

$$M^* \frac{d^2 h}{dt^2} = -G^* + PA \quad (20.37)$$

la quale perturbata e linearizzata dà

$$M^* h_0 \omega^2 x + P_0 A p - G_h^* G_0^* x = 0 \quad (20.38)$$

dove  $G_h^* = d \ln G^* / d \ln h$  ( $< 0$ ) e  $G_0^* = P_0 A = g_0 M^*$ .  $G_0^*$  e  $g_0$  sono i valori di equilibrio.

Dalla condizione di continuità e dall'equazione di stato di gas perfetto si ottiene

$$\left[ \frac{\omega^2 h_0}{g_0} - G_h^* - 1 \right] x + \theta = 0 \quad (20.39)$$

la quale assieme all'equazione adiabatica

$$(\gamma_{ad} - 1)x + \theta = 0 \quad (20.40)$$

dà per gli autovalori dell'oscillazione adiabatica  $\omega = \pm\omega_{ad}$  con

$$\omega_{ad} = \left[ (\gamma_{ad} + G_h^*) \frac{g_0}{h_0} \right]^{1/2} \quad (20.41)$$

Si ricordi che le perturbazioni cambiano nel tempo con  $e^{i\omega t}$ . Da questa si vede che  $\omega_{ad}$  è un numero reale solo se  $\gamma_{ad} > -G_h^*$ . In questo caso la perturbazione (piccola) è seguita da una oscillazione periodica che rimane sempre piccola. Il sistema è **dinamicamente stabile**. Ma se  $\gamma_{ad} < -G_h^*$  allora  $\omega_{ad}$  è immaginario e uno degli autovalori  $\omega$  dà una ampiezza che cresce esponenzialmente nel tempo; in tal caso il sistema è **dinamicamente instabile**. Il corrispondente caso stellare è per  $\gamma_{ad} > G_h^* = \gamma_{ad} > 4/3$ .

**Presenza dei termini non adiabatici.** Lasciamo ora cadere l'ipotesi di adiabaticità. Consideriamo  $\epsilon$  e  $\kappa$  funzioni di  $P$  e  $T$  mentre lasciamo  $\chi$  costante. In caso di equilibrio termico abbiamo

$$\epsilon_0 m^* + \kappa_0 m^* F = \chi(T - T_s) \quad (20.42)$$

Se perturbiamo e linearizziamo questa condizione si ottiene

$$i\omega(c_v m^* T_0 \theta + P_0 A h_0 x) = \epsilon_0 m^* (p\epsilon_P + \theta\epsilon_T) + \kappa_0 m^* F(p\kappa_P + \theta\kappa_T) - \chi T_0 \theta \quad (20.43)$$

dove

$$\epsilon_P = \left( \frac{\partial \ln \epsilon}{\partial \ln P} \right)_T \quad \epsilon_T = \left( \frac{\partial \ln \epsilon}{\partial \ln T} \right)_P \quad (20.44)$$

$$\kappa_P = \left( \frac{\partial \ln \kappa}{\partial \ln P} \right)_T \quad \kappa_T = \left( \frac{\partial \ln \kappa}{\partial \ln T} \right)_P \quad (20.45)$$

La equazione del moto (20.37) ha generato la equazione (20.39) la quale, assieme alla condizione di peso costante del pistone ( $G_h^* = 0$  che porta alla stabilità dinamica, diventa

$$\left( \frac{\omega^2 h_0}{g_0} - 1 \right) x + \theta = 0 \quad (20.46)$$

Poichè  $\rho \propto h^{-1}$ , l'equazione di stato dà

$$p = \theta - x \quad (20.47)$$

Le equazioni (20.43), (20.46) e (20.47) formano un sistema di equazioni lineari omogenee in  $p$ ,  $\theta$  e  $x$ . Per avere soluzioni il determinante dei coefficienti deve annullarsi

$$\frac{h_0}{g_0} i u_0 \omega^3 - \frac{h_0}{g_0} (e_P + e_T) \omega^2 - \frac{5}{3} u_0 i \omega + e_T = 0 \quad (20.48)$$

con

$$e_P = \epsilon_0 \epsilon_P + \kappa_0 F \kappa_P \quad e_T = \epsilon_0 \epsilon_T + \kappa_0 F \kappa_T - \frac{\chi T_0}{m^*} \quad u_0 = c_v T_0 \quad (20.49)$$

dove per l'ultima relazione si è assunto che il gas sia perfetto e monoatomico. Questa equazione diventa con coefficienti reali se poniamo  $\sigma = i\omega$

$$\frac{h_0}{g_0} u_0 \sigma^3 - \frac{h_0}{g_0} (e_P + e_T) \sigma^2 + \frac{5}{3} u_0 \sigma + e_T = 0 \quad (20.50)$$

Essa è una equazione del terzo grado in  $\sigma$ . Mentre nel caso adiabatico abbiamo ottenuto due soluzioni  $\sigma = \pm \sigma_{ad} = \pm i\omega_{ad}$ , ora in condizioni non adiabatiche abbiamo tre autovalori.

Se i termini non adiabatici  $e_P$  e  $e_T$  sono piccoli, ci aspettiamo che due autovalori (complessi coniugati) siano vicini a quelli del caso adiabatico

$$\sigma = \sigma_r \pm i\omega_{ad} \quad \omega_{ad} = \left( \gamma_{ad} \frac{g_0}{h_0} \right)^{1/2} \quad (20.51)$$

dove  $\sigma_r$  è reale e  $|\sigma_r| \ll \omega_{ad}$ . Mentre nel caso adiabatico l'oscillazione rimane strettamente periodica, ora la parte reale  $\sigma_r$  obbliga l'ampiezza di oscillazione a crescere (decrescere) nel tempo in funzione del segno di  $\sigma_r$ . Poichè  $|\sigma_r| \ll \omega_{ad}$  questi cambiamenti avvengono su una scala di tempo molto lunga rispetto al periodo di oscillazione (*stabilità vibrazionale*). Se l'oscillazione cresce nel tempo, allora la soluzione si allontana dalla condizione di equilibrio, che risulta pertanto instabile.

Occupiamoci ora della terza radice che necessariamente compare in presenza dei termini dissipativi  $e_P$ ,  $e_T$ . Invece di risolvere l'equazione cerchiamo di derivare la soluzione da semplici argomenti. La presenza dei termini non adiabatici ha cambiato l'oscillazione nel senso che la sua ampiezza varia sulla scala di tempo

$1/\sigma_r$ . Ora cerchiamo una terza soluzione in grado di cambiare con la stessa scala temporale. Ciò significa che nella equazione (20.50) i termini in  $\sigma^3$  e  $\sigma^2$  possono essere trascurati (equivale a trascurare tutti i termini inerziali). La soluzione è

$$\sigma = \sigma_{sec} = i\omega_{sec} = \frac{3}{5} \frac{e_T}{u_0} \quad (20.52)$$

detta *soluzione e/o stabilità secolare*.

Per piccole deviazioni dall' adiabaticità  $|\sigma_{sec}| \ll \omega_{ad}$ . A seconda del segno di  $\sigma_{sec}$  le perturbazioni crescono in ampiezza o si smorzano su una scala di tempo che è quella di aggiustamento termico.

Abbiamo in definitiva isolato tre tipi di stabilità: dinamica, vibrazionale e secolare. Da un tipo di stabilità non si può dedurre alcunchè circa gli altri tipi. Ad esempio un sistema può essere dinamicamente stabile ma essere vibrazionalmente e/o secolarmente instabile. Se la struttura è dinamicamente instabile, gli altri tipi di instabilità perdono di interesse, il quanto esso si allontana dalla posizione di equilibrio ben prima che le altre instabilità possano manifestarsi.

## 20.4 Stabilità stellare: metodi semplici

Nelle stelle il problema della stabilità è di vitale importanza e deve essere attentamente analizzato. Una stella può essere stabile in una fase ma diventare instabile in un'altra. Ad ogni stadio evolutivo una stella è conosciuta sulla base di certi parametri, ad esempio la composizione chimica o distribuzione di entropia. Pertanto dobbiamo porci la seguente domanda: una qualunque perturbazione può decadere rapidamente confrontata con la scala di tempo di variazione di questi parametri o no ?

Per rispondere a questa fondamentale domanda bisogna porre il problema in termini corretti. Supponiamo di avere una stella di data massa  $M$  e composizione chimica  $\mu(r)$  per la quale è nota la struttura cioè le funzioni  $M_0(r)$ ,  $P_0(r)$ ,  $T_0(r)$ ,  $L_0(r)$  assieme ad ogni altra relazione ausiliaria (equazione di stato, opacità, generazione di energia etc.). Consideriamo solo il caso di perturbazioni sfericamente simmetriche cioè funzioni solo di  $r$  ovvero di  $M(r)$  e del tempo  $t$  in modo tale che le variabili perturbate diventino:

$$r[M(r), t] = r_0[M(r)] \left[ 1 + x[M(r)] e^{i\omega t} \right] \quad (20.53)$$

$$P[M(r), t] = P_0[M(r)] \left[ 1 + p[M(r)] e^{i\omega t} \right] \quad (20.54)$$

$$T[M(r), t] = T_0[M(r)] \left[ 1 + \theta[M(r)] e^{i\omega t} \right] \quad (20.55)$$

$$L[M(r), t] = L_0[M(r)] \left[ 1 + \lambda[M(r)] e^{i\omega t} \right] \quad (20.56)$$

con ovvio significato dei simboli. Tutte le funzioni  $x$ ,  $p$ ,  $\theta$ ,  $\lambda$  sono  $\ll 1$ . Queste variabili devono soddisfare al sistema completo delle equazioni di base con la variabile temporale esplicitamente inclusa.

A scopo illustrativo introduciamo le perturbazioni nella equazione del moto e linearizziamola rispetto a  $p$  e  $x$ . Essa diventa

$$P'_0(1 + pe^{i\omega t}) + P_0 p' e^{i\omega t} = -\frac{GM(r)}{4\pi r_0^4} (1 - 4xe^{i\omega t}) + \frac{\omega^2}{4\pi r_0} x e^{i\omega t} \quad (20.57)$$

dove l'apice sta ad indicare  $d/dM(r)$ . Poichè i termini di equilibrio obbediscono alla equazione di equilibrio idrostatico vale la uguaglianza

$$P'_0 = -\frac{GM_0(r)}{4\pi r_0^2} \quad (20.58)$$

I termini indipendenti dal tempo si cancellano fra loro, gli esponenziali cadono e si ottiene la prima delle equazioni date più avanti. Analogamente per l'equazione di continuità, l'equazione di conservazione dell'energia e l'equazione del trasporto radiativo (avendo assunto per l'equazione di stato la forma generale  $\rho \propto P^\alpha T^{-\delta}$ ). Le equazioni perturbate e linearizzate sono

$$p' = -\frac{P'_0}{P_0} \left[ p + \left( 4 + \frac{r_o^3}{GM(r)} \omega^2 \right) x \right] \quad (20.59)$$

$$x' = -\frac{1}{4\pi r_0^3 \rho_0} (3x + \alpha p - \delta \theta) \quad (20.60)$$

$$\lambda' = -\frac{\epsilon_0}{L_0(r)} (\lambda - \epsilon_P p - \epsilon_T \theta) - i\omega \frac{P_0 \delta}{L_0(r) \rho_0} \left( \frac{\theta}{\nabla_{ad}} - p \right) \quad (20.61)$$

$$\theta' = \frac{P'_0}{P_0} \nabla_{rad} [\kappa_P p + (\kappa_T - 4)\theta + \lambda - 4x] \quad (20.62)$$

Esse costituiscono un sistema di quattro equazioni differenziali lineari omogenee del 1° ordine nelle incognite  $p$ ,  $\theta$ ,  $x$ ,  $\lambda$ . Esse devono obbedire ad opportune condizioni al contorno corrispondenti a quelle delle equazioni non perturbate. Le soluzioni devono essere regolari al centro e finite alla superficie. Pertanto la soluzione del sistema di equazioni è possibile solo per certi valori di  $\omega$ . Esiste un sistema infinito di valori di  $\omega$  (*autovalori*) assieme alle corrispondenti funzioni  $x$ ,  $p$ ,  $\theta$ ,  $\lambda$  dette (*autofunzioni*). Il termine in  $\omega^2$  viene dal termine inerziale della equazione del moto, mentre il termine in  $\omega$  viene dalle derivate temporali nella equazione dell'energia. Le scale di tempo corrispondenti sono  $\tau_{hydr}$  e  $\tau_{th}$ , dinamica e termica rispettivamente. Poichè  $\tau_{hydr} \ll \tau_{th}$ , ci aspettiamo di trovare (almeno in via generale) le stesse stabilità dinamica, vibrazionale e secolare incontrate nel caso del pistone.

### 20.4.1 Stabilità dinamica

Invece che risolvere esplicitamente il sistema di equazioni (20.59,20.62) cerchiamo le oscillazioni che avvengono sulla scala  $\tau_{hydr}$ . Poichè  $\tau_{hydr} \ll \tau_{th}$  la temperatura della materia varia in maniera quasi-adiabatica e pertanto si può sostituire  $\theta$  con  $p\nabla_{ad}$ . Le due relazioni (20.59) e (20.60) costituiscono due equazioni nelle incognite  $p$  e  $x$  con autovalore  $\omega^2$ . Il problema è *auto-aggiunto* con una infinita serie di  $\omega_n^2$  reali ( $\omega_n$  puramente reale o puramente immaginario). Essi corrispondono ad oscillazioni periodiche ( $\omega_n^2 > 0$ ) o esponenziali ( $\omega_n^2 < 0$ ). Analoga soluzione è stata trovata per il pistone ma ora abbiamo una serie infinita di autovalori. La stabilità impone che tutti gli  $\omega_n^2 > 0$ , mentre anche un solo  $\omega_n^2 < 0$  è sufficiente per l'instabilità.

Il modo con cui una stella risponde a compressioni/espansioni adiabatiche dipende da  $\gamma_{ad}$ . Per verificare questa affermazione, consideriamo una sfera concentrica di raggio  $r = r[M(r)]$  dentro una stella in equilibrio idrostatico. La pressione è uguale al peso degli strati sovrastanti

$$P = \int_{M(r)}^M \frac{GM(r)}{4\pi r^4} dM(r) \quad (20.63)$$

Comprimiamo ora la stella in maniera adiabatica ed omologa. Dopo questa

operazione la stella non sarà più in equilibrio idrostatico. Se l'apice indica il valore di una variabile dopo la compressione, allora le relazioni di omologia impongono che il membro di destra della equazione vari come  $(R'/R)^{-4}$  (dove  $R$  è il raggio totale), mentre le condizioni di adiabaticità e di omologia impongono che il membro di sinistra vari come  $(\rho'/\rho)^{\gamma_{ad}} = (R'/R)^{-3\gamma_{ad}}$ . Per questo si veda il capitolo sulle trasformazioni di omologia. Pertanto se  $\gamma_{ad} > 4/3$ , allora la pressione nel membro di sinistra aumenta con la contrazione più rapidamente del membro di destra. La stella recupera la posizione di equilibrio: essa è dinamicamente stabile. L'opposto per  $\gamma_{ad} < 4/3$ : la stella è dinamicamente instabile. Per  $\gamma_{ad} = 4/3$  la stella è in condizioni neutre.

### 20.4.2 Effetti non adiabatici

In una stella dinamicamente stabile, la presenza di effetti non adiabatici porta alla possibilità delle instabilità vibrazionale e secolare. La stabilità vibrazionale è legata al fenomeno delle pulsazioni (Cefeidi, RR Lyrae). La stabilità secolare è legata al bruciamento nucleare e verrà da noi utilizzata per studiare il fenomeno del flash in un gas degenere e la instabilità termica (puls) delle shells sottili non degeneri.

### 20.4.3 Calore specifico gravo-termico

Consideriamo una piccola sfera di raggio  $r_s$  e massa  $M_s$  attorno al centro di una stella in equilibrio idrostatico. Se la sfera è piccola la pressione e densità nel suo interno possono essere presi uguali ai valori centrali  $P_c$  e  $\rho_c$ . Supponiamo che in risposta all'aggiunta di una piccola quantità di calore alla sfera centrale l'intera stella si espanda un poco e che l'espansione sia omologa. Allora ogni shell di massa  $dM_r$  al raggio  $r$  si porta al raggio  $r + dr = r(1 + x)$  dove  $x$  è costante per tutte le shells. Se dopo l'espansione la pressione nella sfera è diventata  $P_c + dP_c$ , i cambiamenti di  $P_c$  e  $\rho_c$  sono dati da

$$\frac{d\rho_c}{\rho_c} = -3x \quad p_c = \frac{dP_c}{P_c} = -4x \quad (20.64)$$

Queste relazioni si derivano in maniera semplice dalla cosiddetta contrazione omologa. Supponiamo di prendere una stella a due istanti temporali  $t$  e  $t + \Delta t$  che subisca una contrazione (espansione), allora i raggi di ogni shell ai due tempi saranno legati dalla relazione



$$r' = r + \dot{r}\Delta t \quad (20.65)$$

ovvero

$$\frac{r'}{r} = 1 + \frac{\dot{r}}{r}\Delta t \quad (20.66)$$

Per una contrazione omologa (si veda il capitolo sulle trasformazioni di omologia per maggiori dettagli) deve essere  $r'/r = R'/R$  costante lungo l'intera stella per cui il rapporto

$$\frac{\dot{r}}{r} = \frac{\dot{R}}{R} \quad (20.67)$$

deve essere costante lungo l'intera stella. Ciò significa che

$$\frac{\partial}{\partial m} \left( \frac{\partial \ln r}{\partial t} \right) = 0 \quad (20.68)$$

Dall'equazione di continuità e scambio delle derivate si ricava

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial r}{\partial m} \right) = \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{1}{4\pi r^3 \rho} \right) = \frac{1}{4\pi r^3 \rho} \left( -3 \frac{\dot{r}}{r} - \frac{\dot{\rho}}{\rho} \right) = 0 \quad (20.69)$$

la quale genera

$$\frac{\dot{\rho}}{\rho} = -3 \frac{\dot{r}}{r} \quad (20.70)$$

Analogamente per la pressione formalmente espressa da

$$P = \int_{M(r)}^M \frac{GM(r)}{4\pi r^4} dM(r) \quad (20.71)$$

Differenziando rispetto al tempo si ottiene

$$\dot{P} = \int_{M(r)}^M \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{1}{r^4} \right) \frac{GM(r)}{4\pi} dM(r) = -4 \frac{\dot{r}}{r} \int_{M(r)}^M \frac{GM(r)}{4\pi r^4} dM(r) \quad (20.72)$$

da cui

$$\frac{\dot{P}}{P} = -4 \frac{\dot{r}}{r} \quad (20.73)$$

Infine usando l'equazione di stato  $\rho \propto P^\alpha T^{-\delta}$  si deriva una espressione simile per la temperatura

$$\frac{\dot{T}}{T} = \frac{4\alpha - 3}{\delta} \frac{\dot{r}}{r} \quad (20.74)$$

che è quanto si voleva.

Scriviamo ora l'equazione di stato nella forma

$$\frac{d\rho_c}{\rho_c} = \alpha p_c - \delta \theta_c \quad (20.75)$$

Combinando le due relazioni si ottiene

$$p_c = \frac{4\delta}{4\alpha - 3} \theta_c \quad (20.76)$$

In base al primo principio della termodinamica la quantità di calore aggiunta alla sfera per unità di massa è

$$dq = du + Pdv = c_p T_c (\theta_c - \nabla_{ad} p_c) = c^* T_c \theta_c \quad (20.77)$$

dove

$$c^* = c_p \left( 1 - \nabla_{ad} \frac{4\delta}{4\alpha - 3} \right) \quad (20.78)$$

Questa quantità ha le dimensioni di un calore specifico per unità di massa, in quanto  $dT = dq/c^*$  dà l'aumento di temperatura nella sfera centrale quando viene aggiunto il calore  $dq$ . La condizione sotto la quale è stato ottenuto  $c^*$  è che la pressione del gas rimanga in equilibrio con il peso degli strati sovrastanti ( $r > r_s$ ). La quantità  $c^*$  è chiamata *il calore specifico gravo-termico*.

Per un gas monoatomico per il quale  $\alpha = \delta = 1$  e  $\nabla_{ad} = 2/5$ , si ha  $c^* < 0$ . Questa è una fortunata circostanza in quanto se per un momento le reazioni nucleari depositano calore,  $dq > 0$ , allora  $dT < 0$ , cioè la regione si espande e si raffredda riducendo la produzione di energia nucleare. **Il calore specifico gravo-termico negativo agisce come un termostato stabilizzatore.** È facile rendersi conto che la diminuzione di temperatura non contraddice la conservazione dell'energia in quanto si deve considerare anche il lavoro di espansione  $p dv$  fatto dalla sfera centrale.

In un gas degenere non relativistico dove  $\delta \rightarrow 0$  e  $\alpha \rightarrow 3/5$  si ha  $c^* > 0$ . L'aggiunta di energia alla sfera centrale riscalda ulteriormente la materia. Si ricordi che la equazione di stato non contiene la temperatura quindi non vi è risposta di espansione all'aggiunta di calore. **Questo induce un runaway termico.**

### 20.4.4 Stabilità secolare e bruciamento nucleare

Usando la definizione di  $dq$  ora ottenuta esaminiamo il bilancio energetico della sfera. L'energia prodotta nel suo interno dalle reazioni nucleari è trasportata altrove o dalla radiazione o dalla convezione. Supponiamo per semplicità che valga il trasporto radiativo. In stato stazionario guadagni e perdite di energia si compensano. Sia  $\epsilon$  il tasso di produzione (per unità di massa e tempo) nucleare e  $L_s$  il tasso di irraggiamento dalla sfera (per unità di tempo), allora vale la condizione

$$\epsilon M_s - L_s = 0 \quad (20.79)$$

Supponiamo di perturbare l'equilibrio in questione su una scala di tempo  $\tau$  molto più lunga del tempo scala dell'equilibrio idrostatico  $\tau_{hydr} \simeq \tau_{ff}$  ma breve rispetto a quella di aggiustamento termico  $\tau_{th}$ . La condizione di equilibrio perturbata diventa

$$M_s d\epsilon - dL_s = M_s \frac{dq}{dt} = M_s c^* \frac{dT_c}{dt} \quad (20.80)$$

Perturbiamo ora l'equazione del trasporto radiativo

$$L_s \propto \frac{T^3 r^4}{\kappa} \frac{dT}{dM(r)} \quad (20.81)$$

ottenendo

$$\frac{dL_s}{L_s} = 4\theta_c + 4x - \kappa_P p_c - \kappa_T \theta_c \quad (20.82)$$

Nella perturbazione di  $dT/dM(r)$  abbiamo fatto uso della omologia  $\theta = dT/T =$  costante ovvero  $d(dT/dM(r)) = d(T\theta)/dM(r) = \theta dT/dM(r)$ .

Combinando le varie relazioni si ottiene

$$\frac{dL_s}{L_s} = \left[ 4 - \kappa_T - \frac{4\delta}{4\alpha - 3} (1 + \kappa_P) \right] \theta_c \quad (20.83)$$

Introducendola nella condizione di equilibrio perturbata abbiamo

$$\begin{aligned} \frac{M_s}{L_s} \frac{dq}{dt} &= \frac{(M_s d\epsilon - dL_s)}{L_s} = \epsilon_T \theta_c + \epsilon_P p_c - \frac{dL_s}{L_s} = \\ &= \left[ (\epsilon_T + \kappa_T - 4) + \frac{4\delta}{4\alpha - 3} (\epsilon_P + \kappa_P + 1) \right] \theta_c \end{aligned} \quad (20.84)$$

dove abbiamo fatto uso della relazione  $L_s = \epsilon M_s$ . Infine si ricava

$$\frac{M_s c^* T_c}{L_s} \frac{d\theta_c}{dt} = \left[ (\epsilon_T + \kappa_T - 4) + \frac{4\delta}{4\alpha - 3} (\epsilon_P + \kappa_P + 1) \right] \theta_c \quad (20.85)$$

il segno della parentesi ci dice se per  $dT_c > 0$  la variazione di produzione di energia supera la variazione di flusso dalla sfera ( $[\dots] > 0$ ). Il segno di  $c^*$  ci dice se in questo caso la sfera si riscalda ( $c^* > 0$ ) o si raffredda ( $c^* < 0$ ).

Normalmente  $\epsilon_T$  è il termine dominante nella [...] e pertanto [...]  $> 0$ . Nel caso di un gas perfetto ( $\alpha = \delta = 1$  e  $c^* < 0$ ) si ottiene

$$\frac{M_s c^* T_c}{L_s} \frac{d\theta_c}{dt} = [\epsilon_T + \kappa_T + 4(\epsilon_P + \kappa_P)] \theta_c \quad (20.86)$$

Poichè  $c^* < 0$  si trova che  $(d\theta_c/dt)/\theta_c < 0$ , cioè la perturbazione  $dT_c$  decade e l'equilibrio è stabile se

$$[\epsilon_T + \kappa_T + 4(\epsilon_P + \kappa_P)] > 0 \quad (20.87)$$

Di solito questa condizione è verificata. Il solo termine pericoloso è  $\kappa_T$  che può essere anche -4.5 (opacità di Kramers). D'altra parte  $\epsilon_T = 5$  per la catena  $pp$  e così la condizione è soddisfatta. Un aumento di temperatura  $dT_c$  provoca un aumento di produzione di energia nucleare, ma grazie al calore specifico gravotermico  $c^* < 0$  la sfera reagisce producendo  $dT_c < 0$ . Il bruciamento nucleare è stabile.

Atteso il predominare del termine  $\epsilon_T$  rispetto agli altri ( $\epsilon_T > 20$  in molti casi) possiamo approssimare la relazione (20.86) con

$$\frac{d\theta_c}{dt} = \frac{L_s \epsilon_T}{M_s T_c c^*} \theta_c = \frac{1}{C} \theta_c \quad (20.88)$$

dove ovviamente  $C < 0$  indica stabilità,  $C > 0$  instabilità. Poichè per un gas ideale  $\epsilon_T > 0$  e  $c^* < 0$ , la quantità  $C$  è negativa: il bruciamento nucleare in queste condizioni è stabile.

Per un gas degenere non relativistico  $\delta = 0$  e  $\alpha = 3/5$ , per cui  $c^* > 0$  e  $C > 0$ . Ogni bruciamento nucleare con le consuete dipendenze dalla temperatura diventa instabile. Per questa ragione in una Nana Bianca non possono esistere intense sorgenti nucleari altrimenti si avrebbe immediatamente un runaway termico.

Lo stesso fenomeno è responsabile del flash (dell'elio) che avviene nei nuclei degeneri di stelle giganti rosse di piccola massa.

Vi è un'altra considerazione importante che si può trarre dalla condizione di stabilità. Supponiamo che nella regione centrale di una stella non ci siano sorgenti nucleari ma perdite di energia per neutrini. La sorgente nucleare è in questi casi confinata in una shell (ad esempio la shell di idrogeno in una gigante rossa, le shell di elio e di idrogeno nelle stelle AGB). In questo caso parte dell'energia prodotta fluisce verso l'esterno, mentre parte della stessa va verso l'interno dove viene trasformata in neutrini. La temperatura massima si ha nella shell e non nel centro della stella. In questa situazione il flusso  $L_s$  nella sfera centrale è negativo. Se  $\epsilon_T > 0$  come nel caso di perdite di energia per neutrini, allora tutte le conclusioni tratte in precedenza saranno invertite a causa del diverso segno di  $L_s$  nel nucleo centrale: l'equilibrio è stabile se  $c^* > 0$  cioè per un gas degenerare, instabile per  $c^* < 0$  come nel caso di gas perfetto.

Infine ricordiamo che lo stesso formalismo renderà conto dell'instabilità termica delle shell nucleari di spessore molto piccolo (tipica è l'instabilità termica della shell di elio nelle stelle AGB).

## 20.5 Stabilità stellare: metodi variazionali

Abbiamo visto che ci sono diversi tipi di stabilità (instabilità). In questo capitolo presenteremo in maniera schematica il metodo variazionale limitatamente al caso delle piccole perturbazioni. Questo tipo di stabilità è noto come stabilità secolare

Piccole perturbazioni possono essere considerate come adiabatiche o isoentropiche. Ciò è possibile se durante il tempo in cui viene applicata la perturbazione, parti diverse della stella non scambiano energia fra loro in maniera apprezzabile. Il tempo caratteristico con cui avviene lo scambio di energia e cioè  $\tau_{th}$  è dell'ordine di  $10^3 \div 10^5$  anni molto lungo a confronto dei tipici periodi di oscillazione (da poche ore a giorni). Pertanto l'ipotesi di perturbazione adiabatica è pienamente giustificata.

Fra i molti possibili tipi di instabilità e criteri associati consideriamo qui solamente quello rispetto a piccole perturbazioni adiabatiche o equivalentemente isoentropiche.

In generale possiamo affermare:

*Una stella viene detta secolarmente stabile se è stabile rispetto ad arbitrarie perturbazioni adiabatiche; una stella è detta instabile se è instabile rispetto ad una qualunque perturbazione.*

In termini di energia questo equivale a dire che una stella è stabile se la sua configurazione di equilibrio corrisponde ad un minimo della superficie dell'energia. Questo significa che in uno stato di equilibrio, la variazione prima dell'energia totale  $E$  deve essere nulla e che la variazione seconda di  $E$  deve essere positiva. Se  $E$  è l'energia totale (interna più gravitazionale,  $E = U_T + \Omega$ ) della stella, abbiamo

$$\begin{aligned} E &< 0 && \text{legame gravitazionale} \\ (\delta E)_{ad} &= 0 && \text{condizione per equilibrio idrostatico} \\ (\delta^2 E)_{ad} &= 0 && \text{condizione per stabilità secolare} \end{aligned}$$

La prima delle tre relazioni è ovvia ed è già stata incontrata discutendo il Teorema del Viriale.

**(1) Condizione per l'equilibrio (idrostatico):  $\delta E = 0$**

La seconda relazione è meno ovvia tuttavia è facile verificare che la  $(\delta E)_{ad} = 0$  equivale alla condizione di equilibrio idrostatico.

Infatti sia  $v = 1/\rho$  il volume specifico (volume per unità di massa) ed  $U$  l'energia interna per unità di massa, la variazione di  $U_T$  da

$$\delta U_T = \int_0^M \delta U dM(r) \quad (20.89)$$

dove  $\delta U = -P\delta v$  dal primo principio della termodinamica con  $dQ = 0$ . Per calcolare  $\delta v$  si procede come segue:

$$v = \frac{1}{\rho} = \frac{dV}{dM_r} \quad (20.90)$$

$$\delta v = \frac{d\delta v}{dM_r} = \frac{d(4\pi r^2 \delta r)}{dM(r)} \quad (20.91)$$

Integrando per parti e facendo uso delle condizioni al contorno  $P = 0$  per  $r = R$  e  $\delta r = 0$  a  $r = 0$ , si ottiene

$$\delta U_T = \int_0^R \frac{dP}{dM(r)} 4\pi r^2 \delta r dM(r). \quad (20.92)$$

La variazione di  $\Omega$  è data da

$$\delta \Omega = \int_0^R \left( \frac{GM(r)}{r} \right)^2 \delta r dM(r). \quad (20.93)$$

Infine dalla condizione  $\delta E = \delta U_T + \delta \Omega = 0$  si deriva la condizione

$$\delta E = \int_0^R \delta \left( + \right) 4\pi r^2 \delta r dM_r = 0 \quad (20.94)$$

da cui la condizione di equilibrio idrostatico attesa l'arbitrarietà di  $\delta r$ .

### (2) Condizione di stabilità secolare $\delta^2 E > 0$

La condizione di stabilità  $(\delta^2 E)_{ad} > 0$  si esprime tramite le variazioni seconde di  $U$  (energia interna per unità di massa) e di  $\Omega$ . La variazione  $\delta^2 U$  è

$$\delta^2 U = - \frac{\partial P}{\partial v_{ad}} (\delta v)^2 - P \delta^2 v \quad (20.95)$$

dove

$$\delta^2 v = \frac{d}{dM(r)} [8\pi r (\delta r)^2] \quad (20.96)$$

$$(\delta r)^2 = \frac{(\delta V)^2}{12\pi r V} \quad (20.97)$$

con  $V = (4/3)\pi r^3$ . Ricordando la definizione del primo esponente adiabatico  $\Gamma_1$

$$\Gamma_1 = - \frac{v}{P} \left( \frac{\partial P}{\partial v} \right)_{ad} \quad (20.98)$$

la relazione fra  $P$  e  $v$  è nota. La seconda variazione di  $\Omega$  è semplicemente

$$\delta^2 \Omega = - \int_0^R \left( 2 \frac{GM(r)}{r^3} \right) (\delta r)^2 dM(r). \quad (20.99)$$

Combinando le equazioni si ottiene

$$\delta^2 E = \int_0^R \left\{ (P\Gamma_1/v) \left[ \frac{d\delta V}{dM(r)} \right]^2 - P \frac{d[8\pi r (\delta r)^2]}{dM(r)} + \frac{dP}{dM(r)} [8\pi r^2 (\delta r)^2] \right\} dM(r) \quad (20.100)$$

Si vede che dopo integrazione parziale il secondo termine è uguale al terzo. Eliminando  $(\delta r)^2$  e cambiando la variabile da  $M(r)$  a  $V$  [si ricordi che  $v = dV/dM(r)$ ],  $\delta^2 E$  può essere scritta come

$$\delta^2 E = \int_0^{V_R} \left[ \left( \frac{d\delta V}{dV} \right)^2 P \Gamma_1 + \left( \frac{4}{3} \right) \left( \frac{dP}{dV} \right) \left( \frac{\delta V}{V} \right)^2 \right] dV \quad (20.101)$$

Il criterio di stabilità può essere posto in termini di  $\delta V$ . La stella è stabile se  $\delta^2 E > 0$  per ogni  $\delta V$ , mentre è instabile se  $\delta^2 E < 0$  per un  $\delta V$ . Ponendo  $g = \delta V$  possiamo definire la quantità  $\gamma$  data da

$$\gamma = \frac{\int_0^{V_R} \Gamma_1 P \left( \frac{dg}{dV} \right)^2 dV}{\int_0^{V_R} -\frac{1}{V} \frac{dP}{dV} g^2 dV} \quad (20.102)$$

Poichè  $dP/dV < 0$ ,  $P > 0$  e  $\Gamma_1 > 1$ ,  $\gamma$  è sempre positivo. Confrontando la relazione per  $\gamma$  con quella per  $\delta^2 E$  si vede che la condizione di stabilità richiede che  $\gamma > 4/3$  per ogni  $g$ . Questa condizione è facilmente riconducibile ad un problema agli autovalori. Se si definisce  $\eta$  con la seguente equazione

$$\eta = \int_0^{V_R} \left[ \Gamma_1 P \left( \frac{dg}{dV} \right)^2 + \gamma \left( \frac{dP}{dV} \right) \frac{g^2}{V} \right] dV \quad (20.103)$$

la quale se  $\eta = 0$  diventa uguale a quella per  $\gamma$ . Se è nota la struttura della stella allora  $\Gamma_1$  e  $P$  sono funzioni di  $V$ . Se anche  $g$  è funzione di  $V$ , allora si può calcolare  $\gamma$ . Se al contrario  $\gamma$  è dato a priori, allora l'equazione per  $g$  può essere ottenuta da quella per  $\eta$  richiedendo che la sola forma di  $g$  ammissibile sia quella per cui  $\eta = 0$ . Questo implica che  $\delta\eta = 0$ . Applicando il principio variazionale si ottiene l'equazione

$$\frac{d}{dV} \left( \Gamma_1 P \frac{dg}{dV} \right) = \left( \frac{\gamma}{V} \right) \left( \frac{dP}{dV} \right) g \quad (20.104)$$

con le condizioni al contorno

$$g = 0 \quad \text{per } V = 0 \quad \text{centro} \quad (20.105)$$

$$\Gamma_1 P \left( \frac{dg}{dV} \right) = 0 \quad \text{per } P = 0 \quad \text{superficie} \quad (20.106)$$

L'equazione (20.104) è una equazione differenziale del secondo ordine autoaggiunta con condizioni al contorno in due punti diversi dello spazio. È noto dalla teoria delle equazioni differenziali che esistono soluzioni solamente per



un sistema di valori di  $\gamma$  detti autovalori. Sia  $\gamma_0$  il valore minimo fra questi. Il criterio di stabilità afferma che se  $\gamma_0 > 4/3$  la stella è stabile mentre se  $\gamma_0 < 4/3$  la stella è instabile. In generale,  $\Gamma_1$  è funzione delle variabili termodinamiche e non è costante. Ciò implica che non possono essere trovate soluzioni generali dell'equazione (20.104) e quindi che non ci sono criteri generali di stabilità. Tuttavia in molti casi  $\Gamma_1$  è circa costante. In questo caso la soluzione dell'equazione è

$$\gamma_0 = \Gamma_1 \quad g = kV \quad (20.107)$$

dove  $k$  è una costante e la condizione di stabilità diventa

$$\delta^2 E = k^2 \int_0^{V_R} P(\Gamma_1 - \frac{4}{3}) dV > 0 \quad (20.108)$$

La stella è dunque stabile se  $\Gamma_1 > 4/3$ . Un gas perfetto non relativistico ha  $\Gamma_1 = 5/3$  ed è dunque stabile, mentre un gas perfetto relativistico ha  $\Gamma_1 = 4/3$  e pertanto non è stabile.



## Capitolo 21

# POLITROPI

Sfere gassose in equilibrio idrostatico in cui la pressione e la densità siano legate dalla relazione

$$P = K \rho^{\frac{n+1}{n}} \quad (21.1)$$

dove  $K$  è una costante sono chiamate politropi e  $n$  è detto indice politropico. L'interesse in tali strutture sta nel fatto che in particolari circostanze fisiche, il legame fra pressione e densità può essere del tipo indicato. Consideriamo alcuni esempi classici:

i) In un gas di particelle e radiazione la pressione totale è  $P = P_g + P_r$  con  $P_g = (k/\mu H)\rho T$ ,  $P_r = (1/3)aT^4$ . Introdotta il parametro  $\beta = P_g/P$ , la temperatura è formalmente data da

$$T = \left[ \frac{k}{\mu H} \left( \frac{3}{a} \right) \frac{(1-\beta)}{\beta} \right]^{1/3} \rho^{1/3} \quad (21.2)$$

mediante la quale si può esprimere la pressione nel modo seguente

$$P = \left[ \left( \frac{K}{\mu H} \right)^4 \left( \frac{3}{a} \right) \frac{1-\beta}{\beta^4} \right]^{1/3} \rho^{4/3} \quad (21.3)$$

Questa equazione è vera in ogni punto della stella. In generale  $\beta$  non è costante ma dipende dalla distanza dal centro. Tuttavia, poichè si constata che  $\beta$  dipende poco da  $r$ , esso può essere considerato costante. In tale caso la relazione di sopra è una relazione politropica con  $n = 3$ .

ii) Una regione interna di una stella che sia instabile alla convezione ed in cui valga il gradiente di temperatura adiabatico è descrivibile mediante la  $P = K \rho^\gamma$

dove  $\gamma$  dipende dalla natura del gas. Per un gas momonatomico ed in assenza di radiazione  $\gamma = 5/3$  e quindi la struttura è politropica con  $n = 1.5$ .

iii) Strutture, il cui gas di elettroni sia totalmente degenere, sono governate da relazioni del tipo  $P = K\rho^{5/3}$  o  $P = K\rho^{4/3}$  a seconda che gli elettroni non relativistici o relativistici, rispettivamente.

Lo studio delle strutture politropiche incomincia col definire una funzione  $\phi$  tale che

$$\rho = \lambda \phi^n \quad (21.4)$$

dove  $\lambda$  è un parametro che dipende dalla definizione di  $\phi$ ; in generale si usa porre  $\phi = 1$  al centro della stella e questo equivale a identificare  $\lambda$  con la densità  $\rho_c$  al centro della stella. Dalla relazione (21.1) segue che

$$P = K\lambda^{\frac{n+1}{n}}\phi^{n+1} \quad (21.5)$$

Combinando l'equazione dell'equilibrio idrostatico con quella di conservazione della massa e sostituendo  $P$  e  $\rho$  con le relazioni definite sopra si ottiene

$$(n+1)K\lambda^{1/n}\frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{d\phi}{dr}\right) = -4\pi G\lambda\phi^n \quad (21.6)$$

Introducendo la variabile adimensionale  $\xi = r/\alpha$  con

$$\alpha = \sqrt{\frac{(n+1)K\lambda^{(1-n)/n}}{4\pi G}} \quad (21.7)$$

si ricava

$$\frac{1}{\xi^2}\frac{d}{d\xi}\left(\xi^2\frac{d\phi}{d\xi}\right) = -\phi^n \quad (21.8)$$

chiamata *equazione di Lane-Emden* del politropo di indice  $n$ . Essa governa la distribuzione di densità in ogni regione dove sia valida la relazione politropica fra pressione e densità, non necessariamente l'intera stella. Politropi completi sono quelli in cui tale relazione vale dal centro alla superficie. In questo caso la costante  $\lambda$  si identifica con la densità centrale. La soluzione di  $\phi$  in funzione di  $\xi$  determina completamente la struttura del politropo eccetto che per la scelta della densità centrale. Ponendo  $\lambda = \rho_c$  è facile vedere che le condizioni al centro sono

$$\phi = 1 \quad \frac{d\phi}{d\xi} = 0 \quad \text{per} \quad \xi = 0 \quad (21.9)$$

La condizione sulla derivata di  $\phi$  è imposta dalla simmetria sferica della configurazione.

Altre ovvie relazioni sono

$$P_c = K \rho_c^{\frac{n+1}{n}} \quad (21.10)$$

$$\rho = \rho_c \phi^n \quad P = P_c \phi^{n+1} \quad T = T_c \phi \quad (21.11)$$

ancora

$$\alpha = \sqrt{\frac{(n+1) P_c}{4\pi G \rho_c^2}} \quad (21.12)$$

La soluzione che soddisfa la equazione di Lane-Emden di indice  $n$  sotto tali condizioni è detta funzione di Lane-Emden di indice  $n$ .

Soluzioni analitiche della equazione di Lane-Emden sono possibili per i valori di  $n = 0, 1$  e  $5$ . Esse sono date dalle seguenti relazioni

$$n = 0 \quad \phi(\xi) = 1 - \frac{1}{6}\xi^2 \quad (21.13)$$

Essa corrisponde alla sfera omogenea di gas, in quanto  $\rho = \lambda \phi^0 = \lambda = \rho_c$  sempre.

$$n = 1 \quad \phi(\xi) = \frac{\sin \xi}{\xi} \quad (21.14)$$

$$n = 5 \quad \phi(\xi) = \frac{1}{(1 + \xi^2/3)^{1/2}} \quad (21.15)$$

Si noti che nel caso del politropo di indice  $n = 5$  la soluzione non si annulla mai per  $r \neq \infty$ . Il raggio è infinito. Tutti i politropi con  $n \geq 5$  hanno raggio infinito.

Ogni altro caso deve essere risolto per via numerica. Si dimostra che le soluzioni decrescono continuamente dal centro ( $\xi = 0$ ) verso l'esterno e che per valori di  $n < 5$  esse intersecano l'asse  $\xi$  ad un certo valore  $\xi_1$ . Evidentemente l'annullarsi di  $\phi$  in  $\xi_1$  significa che la  $P = 0$  e quindi  $\xi_1$  può essere preso come il raggio adimensionale della configurazione.

La massa dentro la sfera di raggio  $\xi$  è data da

$$M(\xi) = 4\pi \left[ \frac{(n+1)K}{4\pi G} \right]^{3/2} \lambda^{(3-n)/2n} \left( -\xi^2 \frac{d\phi}{d\xi} \right) \quad (21.16)$$

ovvero

$$M(\xi) = \frac{(n+1)^{3/2}}{(4\pi)^{1/2} G^{3/2}} \frac{P_c^{3/2}}{\rho_c^2} \left( -\xi^2 \frac{d\phi}{d\xi} \right) \quad (21.17)$$

La massa totale è data da

$$M = 4\pi \left[ \frac{(n+1)K}{4\pi G} \right]^{3/2} \lambda^{(3-n)/2n} \left( -\xi^2 \frac{d\phi}{d\xi} \right)_{\xi_1} \quad (21.18)$$

ovvero

$$M = \frac{(n+1)^{3/2}}{(4\pi)^{1/2} G^{3/2}} \frac{P_c^{3/2}}{\rho_c^2} \left( -\xi^2 \frac{d\phi}{d\xi} \right)_{\xi_1} \quad (21.19)$$

Infine il raggio totale è legato a  $\xi_1$  da

$$R = \xi_1 \sqrt{\frac{(n+1)K}{4\pi G} \rho_c^{(1-n)/n}} \quad (21.20)$$

dove tutte le quantità in  $\xi_1$  sono calcolabili. Fissati  $M$  e  $R$  si determina  $K$  e  $\lambda$  (o  $\rho_c$ ) e quindi la struttura politropica.

Le relazioni di cui sopra permettono di avere i valori centrali di densità e pressione in funzione dei valori di  $\xi$  e  $\phi$  alla superficie e massa e raggio totali.

Con semplici passaggi si ha

$$P_c = \frac{1}{4\pi(n+1)} \frac{GM^2}{R^4} \frac{1}{\left( \frac{d\phi}{d\xi} \right)_{\xi_1}^{-2}} \quad (21.21)$$

$$\rho_c = \frac{3M}{4\pi R^3} \frac{1}{3} \left( \frac{-\xi}{\frac{d\phi}{d\xi}} \right)_{\xi_1} \quad (21.22)$$

dalle quali si deriva una relazione massa-raggio. Infatti dalla relazione politropica valida ovunque anche nel centro si ricava

$$K = \frac{(4\pi)^{\frac{1}{n}}}{(n+1) \left[ \xi^{n+1} \left( -\frac{d\phi}{d\xi} \right)^{n-1} \right]_{\xi_1}^{\frac{1}{n}}} GM^{\frac{n-1}{n}} R^{\frac{3-n}{n}} \quad (21.23)$$

Osserviamo che per  $n = 3$  la dipendenza dal raggio scompare.

Possiamo ancora derivare il rapporto fra densità media e centrale

$$\frac{\bar{\rho}}{\rho_c} = -\frac{3}{\xi_1} \left( \frac{d\phi}{d\xi} \right)_{\xi_1} \quad (21.24)$$

il quale dipende solo da  $n$ . Per  $n = 0$   $\bar{\rho} = \rho_c$ , mentre per  $n \rightarrow 5$   $\rho_c/\bar{\rho} \rightarrow \infty$ . Politropi con  $n = 5$  sono infinitamente concentrati verso il centro. La pressione centrale è data da

$$P_c = \frac{4\pi R^2 G}{(n+1)\xi_1^2} \left[ \frac{\xi_1}{3} \frac{1}{(d\phi/d\xi)_{\xi_1}} \right]^2 \bar{\rho}^2. \quad (21.25)$$

Facendo uso dell'equazione di stato si ottiene subito la temperatura centrale

$$T_c = \frac{\mu H}{k} \frac{\beta_c P_c}{\rho_c} \quad (21.26)$$

che nel caso del politropo con  $n = 3$  diventa

$$T_c = 4.6 \times 10^6 \mu \beta \left( \frac{M}{M_\odot} \right)^{2/3} \rho_c^{1/3}. \quad (21.27)$$

Le stelle della sequenza principale sono in buona approssimazione uguali a politropi di indice 3 e la loro densità media obbedisce alla legge  $\bar{\rho} = 1.4 M_\odot / M$   $\text{g cm}^{-3}$ ; ne segue che  $T_c = \text{cost} \times M^{1/3}$ .

**Energia potenziale.** L'energia potenziale di uno strato sferico di massa  $dM_r$  è

$$d\Omega = -\frac{GM_r dM_r}{r} \quad (21.28)$$

ovvero

$$d\Omega = d\left(-\frac{GM_r^2}{2r}\right) - \frac{GM_r^2}{2r^2} dr \quad (21.29)$$

Sostituiamo  $dr$  con  $dP$  mediante l'equazione di equilibrio idrostatico ottenendo

$$d\Omega = d\left(-\frac{GM_r^2}{2r}\right) + \frac{1}{2} M_r \frac{dP}{\rho} \quad (21.30)$$

Tuttavia

$$\frac{dp}{\rho} = (n+1)d\left(\frac{P}{\rho}\right) \quad (21.31)$$

che introdotto nella relazione precedente e fatte alcune manipolazioni algebriche fornisce la relazione

$$d\Omega = d\left(-\frac{GM_r^2}{2r}\right) + \frac{1}{2}(n+1)d\left(\frac{M_r P}{\rho}\right) - \frac{1}{2}(n+1)\frac{P}{\rho}dM_r \quad (21.32)$$

Facendo uso ora del teorema del viriale valido per un sistema sferico e della condizione  $P = 0$  alla superficie si ricava

$$d\Omega + \frac{3P}{\rho}dM_r - 3d\left(P \times \frac{4}{3}\pi r^3\right) = 0 \quad (21.33)$$

Inserendo ora  $\frac{P}{\rho}dM_r$  nella precedente si deriva

$$d\Omega = \frac{3}{5-n}d\left[-\frac{GM_r^2}{r}\right] \quad (21.34)$$

ovvero

$$\Omega = -\frac{3}{5-n}\frac{GM^2}{R} \quad (21.35)$$

Si noti che per  $n = 5$  l'energia potenziale  $\Omega$  tende a  $\infty$ . Questo è consistente col fatto che tale politropo ha

$$\frac{\rho_c}{\langle\rho\rangle} = \infty \quad (21.36)$$

in quanto esso è infinitamente concentrato verso il centro pur avendo estensione infinita.

**Equazione quartica di Eddington.** Per un politropo di indice  $n = 3$  che sotto l'ipotesi di  $\beta \simeq \text{costante}$  ben descrive l'equazione di stato di un gas non degenero di particelle e radiazione, la relazione massa-raggio generica diventa

$$K = \frac{(4\pi)^{\frac{1}{3}}}{4[\xi^4(-\frac{d\phi}{d\xi})^2]_{\xi_1}^{\frac{1}{3}}}GM^{\frac{2}{3}} \quad (21.37)$$

dalla quale ricordando la definizione di  $K$  mediante l'equazione di stato si ha

$$\frac{1-\beta}{\beta^4} = \frac{a}{3}\left(\frac{\mu H}{k}\right)^4 \frac{\pi G^3}{16[-\xi^2 \frac{d\phi}{d\xi}]_{\xi_1}^2} M^2 \quad (21.38)$$

Questa equazione ci permette di ricavare  $\beta$  una volta assegnata la massa totale. Sostituendo i valori numerici della soluzione politropica (con  $n = 3$ )

$$\xi_1 = 6.89685 \quad \left[-\xi^2 \frac{d\phi}{d\xi}\right]_{\xi_1} = 2.01824 \quad (21.39)$$



Tabella 21.1: Struttura schematica delle stelle della sequenza principale.

Stella	Nucleo	Involuppo
0.8 $M_{\odot}$	radiativo	convettivo
10 $M_{\odot}$	convettivo	radiativo

ed altre costanti della fisica, essa si riduce a

$$\frac{1 - \beta}{\beta^4} = 0.002979 \mu^4 \left( \frac{M}{M_{\odot}} \right)^2 \quad (21.40)$$

Da questa si vede che per  $M \rightarrow \infty$   $\beta \rightarrow 0$  e cioè che la pressione di radiazione diventa via via dominante al crescere della massa.

**Politropi compositi.** I politropi sono stati ampiamente usati nel passato per calcolare strutture stellari anche di notevole complessità combinando politropi di diverso indice politropico mediante la tecnica degli invarianti di omologia (si veda più avanti).

In una stella reale l'indice politropico  $n$  cambia da punto a punto o da zona a zona. Per fare un esempio vedremo che le stelle della sequenza principale possono essere schematicamente divise in due porzioni con diverso meccanismo di trasporto dell'energia che sono descrivibili con politropi di diverso indice politropico.

Come si può formulare il problema per una tale struttura ? Ogni porzione è descritta dalle equazioni

$$P = K_i \rho^{1 + \frac{1}{n_i}} \quad (21.41)$$

$$\rho = \lambda_i \phi^{n_i}(\xi_i) \quad (21.42)$$

$$r = \left[ \frac{n_i + 1}{4\pi G} K_i \right]^{1/2} \lambda^{\frac{1-n_i}{2n_i}} \xi_i \quad (21.43)$$

dove  $i = 1, 2$  con  $i = 1$  per l'interno e  $i = 2$  per l'esterno. Il politropo associato alla regione esterna non necessariamente deve soddisfare alle condizioni al centro (21.9) tipiche delle soluzioni regolari in quanto esso non si estende fino a tale

punto (cioè  $\lambda_2$  non è la densità centrale). Le costanti  $\lambda_2$  e  $K_2$  sono ovviamente legate alla massa totale  $M$  e raggio totale  $R$

$$M = 4\pi \left[ \frac{n_2 + 1}{4\pi G} K_2 \right]^{3/2} \lambda_2^{\frac{3-n_2}{2n_2}} (-\xi_2^2 \phi'_{n_2})_2 \quad (21.44)$$

$$R = \left[ \frac{n_2 + 1}{4\pi G} K_2 \right]^{1/2} \lambda_2^{\frac{1-n_2}{2n_2}} \quad (21.45)$$

dove il suffisso 2 si riferisce al punto esterno del politropo di indice  $n_2$ . Combinando queste due relazioni si può facilmente ottenere la relazione Massa-Raggio- $K_2$ .

Al punto di raccordo fra i due politropi devono essere continue le seguenti variabili: Pressione (una discontinuità implicherebbe una forza infinita); Temperatura (una discontinuità implicherebbe un flusso infinito di energia), Massa (una discontinuità implicherebbe una densità infinita) ed infine il raggio (al punto di raccordo) del politropo  $n_1$  deve coincidere con il raggio del politropo  $n_2$ . Le condizioni di continuità in pressione, raggio e massa sono

$$K_1 \lambda_1^{1+\frac{1}{n_1}} \phi_{n_1}^{n_1+1} = K_2 \lambda_2^{1+\frac{1}{n_2}} \phi_{n_2}^{n_2+1} \quad (21.46)$$

$$\left[ \frac{n_1 + 1}{4\pi G} K_1 \right]^{1/2} \lambda_1^{\frac{1-n_1}{2n_1}} \xi_1 = \left[ \frac{n_2 + 1}{4\pi G} K_2 \right]^{1/2} \lambda_2^{\frac{1-n_2}{2n_2}} \xi_2 \quad (21.47)$$

$$\left[ \frac{n_1 + 1}{4\pi G} K_1 \right]^{3/2} \lambda_1^{\frac{3-n_1}{2n_1}} (\xi_1^2 \phi'_{n_1}) = \left[ \frac{n_2 + 1}{4\pi G} K_2 \right]^{3/2} \lambda_2^{\frac{3-n_2}{2n_2}} (\xi_2^2 \phi'_{n_2}) \quad (21.48)$$

Al fine di facilitare la soluzione del problema del raccordo e cioè trovare il legame fra  $K_1$ ,  $K_2$ ,  $\lambda_1$ ,  $\lambda_2$ , etc e per una più pregnante comprensione fisica del problema si introducono due variabili adimensionali  $U$  e  $V$  detti *invarianti di omologia*. Essi sono così definiti

$$U = \frac{d \ln M(r)}{d \ln r} = \frac{4\pi r^3 \rho}{M(r)} = -\frac{\xi^3 \phi_n^n}{\xi^2 \phi'_n} = \frac{-\xi \phi_n^n}{\phi'_n} \quad (21.49)$$

$$V = -\frac{d \ln P}{d \ln r} = -\frac{d \ln \phi_n^{n+1}}{d \ln \xi} = -(n+1) \frac{\xi}{\phi_n^n} \phi'_n \quad (21.50)$$

Poichè  $M(r)$  cresce con  $r$  e  $P$  decresce con  $r$ , hanno senso solo i valori positivi di  $U$  e  $V$ . Scriviamo ora anche la condizione di continuità in temperatura. Si parte dalla equazione di stato

$$P = \frac{K}{\mu H} \frac{1}{\beta} \rho T \quad (21.51)$$

dalla quale si deriva

$$\frac{\rho_1}{\mu_1 \beta_1} = \frac{\rho_2}{\mu_2 \beta_2} \quad (21.52)$$

Atteso che  $T_1 = T_2$  deve essere  $\beta_1 = \beta_2$ , quindi

$$\frac{\rho_1}{\mu_1} = \frac{\rho_2}{\mu_2} \quad (21.53)$$

La continuità delle variabili fisiche si traduce in

$$\frac{U_1}{\mu_1} = \frac{U_2}{\mu_2} \quad (21.54)$$

$$\frac{V_1}{\mu_1} = \frac{V_2}{\mu_2} \quad (21.55)$$

Il senso fisico delle variabili di omologia è il seguente

$$(n+1) = \frac{d \ln P}{d \ln T} \quad \text{indice politropico} \quad (21.56)$$

$$U = \frac{4\pi r^3 \rho}{3M(r)} \propto \frac{\text{densità locale}}{\text{densità media interna}} \quad (21.57)$$

$$V = \frac{3GM(r)/r}{(3/2)(P/\rho)} \propto \frac{\text{energia gravitazionale}}{\beta \text{ energia interna}} \quad (21.58)$$

Il comportamento analitico di  $U$  e  $V$  è il seguente:

Alla superficie  $\rho \rightarrow 0$  e  $P/\rho \propto T \rightarrow 0$  e pertanto

$$U \Rightarrow 0 \quad V \Rightarrow \infty \quad (21.59)$$

Al centro, ricordando che una sfera centrale di raggio  $r$  molto piccolo ha massa  $M(r) = 4\pi r^3 \rho_c / 3$ , e identificando  $\rho$  con  $\rho_c$  e  $P$  con  $P_c$  nella definizione di  $U$  e  $V$

$$U \Rightarrow 3 \quad V \Rightarrow 0 \quad (21.60)$$

la ricerca di una struttura composita si riduce a trovare una intersezione delle curve  $U, V$  nel piano  $U, V$ . Se tale intersezione esiste, allora la struttura composita è fisicamente permessa. Il procedimento è illustrato in Figura 21.1.

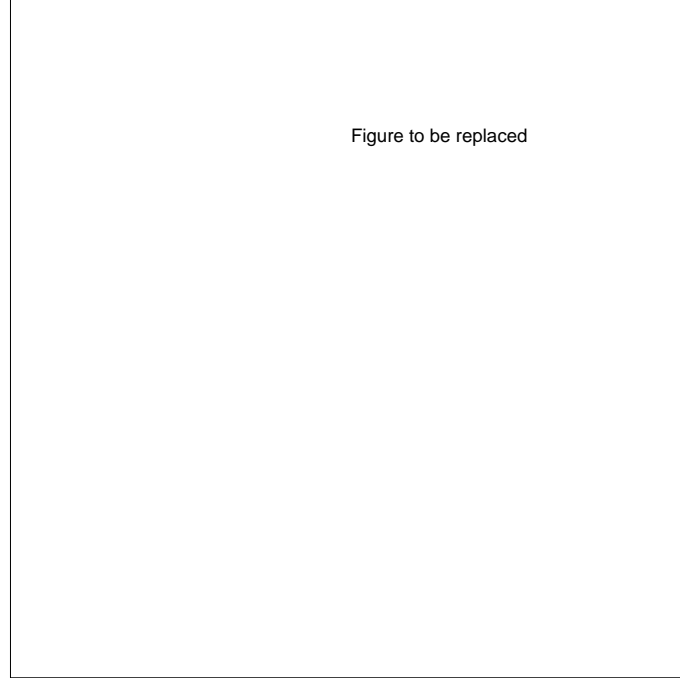


Figura 21.1: Raccordo di politropi nel piano degli invarianti di omologia  $U$  e  $V$

## 21.1 Modelli semplici nel piano U-V

### 21.1.1 Involuppi radiativi

Consideriamo l'involuppo di una stella dove ragionevolmente non vi sono sorgenti di energia  $\epsilon = 0$  e pertanto la luminosità è costante. Supponiamo inoltre che l'opacità sia data dalla legge di Kramers

$$\kappa = \kappa_0 \rho^a T^{-b} \quad (21.61)$$

con  $\kappa_0$  ed esponenti  $a$  e  $b$  costanti. Introduciamo ora le variabili adimensionali  $y, t, q, x$  così definite

$$P = \frac{GM^2}{4\pi R^4} y \quad T = \frac{\mu H}{k} \frac{GM}{R} t \quad M(r) = qM \quad r = xR \quad (21.62)$$

con ovvio significato dei simboli. Dalla equazione di stato (trascurando la pressione di radiazione) ottengo la densità

$$\rho = \frac{M}{4\pi R^3} \frac{y}{t} \quad (21.63)$$

Si può vedere facilmente che gli invarianti di omologia diventano

$$u = \frac{x^3 y}{qt} \quad v = \frac{q}{tx} \quad (21.64)$$

Scrivendo le equazioni fondamentali di conservazione della massa e momento e del trasporto radiativo nelle nuove variabili si ottiene

$$\frac{dx}{dq} = \frac{T}{x^2 y} \quad \frac{dy}{dq} = -\frac{q}{x^4} \quad \frac{dt}{dq} = -C \frac{y^a}{t^{a+b+3} x^4} \quad (21.65)$$

dove

$$C = \frac{3\kappa_0}{4ac(4\pi)^{a+2}} \left( \frac{k}{\mu H} \right)^{b+4} L R^{b-3a} M^{a-b-3} \quad (21.66)$$

Alla superficie  $q = 1$  e le soluzioni devono soddisfare alle condizioni al contorno

$$y = 0 \quad x = 1 \quad y/t = 0 \quad (21.67)$$

dove l'ultima assicura l'annullarsi della densità. La singolarità del sistema di equazioni alla superficie viene superata con una approssimazione. Se si pone  $q = 1$  in una regione piccola sotto la superficie si trova che

$$\frac{dy}{dt} = \frac{1}{C} \frac{t^{a+b+3}}{y^3} \quad \frac{dt}{dx} = -\frac{a+1}{a+b+4} \left( \frac{1}{x^2} \right) \quad (21.68)$$

Queste equazioni vengono integrate (col metodo della separazione delle variabili) fino ad un certo punto sotto la superficie. Da quì in poi si usano le equazioni (21.65).

Si ottiene ovviamente una famiglia di soluzioni nel parametro  $C$ . Inoltre si ha

$$\nabla = \frac{d \ln T}{d \ln P} = \frac{y}{t} \frac{dt}{dy} = C \frac{Y^{a+1}}{t^{a+b+4} q} \quad (21.69)$$

da cui si vede che  $\nabla$  tende a  $\infty$  vicino al centro. Infatti  $\nabla$  è piccolo alla superficie e cresce andando verso l'interno fino a superare il valore di  $\nabla_{ad}$ . Da questo momento l'involuppo radiativo cessa e si passa ad un nucleo convettivo.

### 21.1.2 Nucleo convettivo e raccordo con involucro radiativo

Un nucleo convettivo è una tipica struttura politropica con indice politropico che dipende dalla equazione di stato. Nel caso semplice di gas perfetto monoatomico senza pressione di radiazione l'indice politropico è  $n = 1.5$ . La struttura di questa regione è facile da calcolarsi e non richiede commenti particolari.

**Raccordo con inviluppo radiativo.** L'integrazione del nucleo convettivo parte dal centro ( $u = 3, v = 0$ ) la soluzione è ovviamente unica. Il raccordo deve avvenire dove la soluzione di inviluppo raggiunge per la prima volta  $\nabla = \nabla_{ad}$ . Le soluzioni di inviluppo sono calcolate al variare del parametro  $C$ . Lungo ognuna di queste esiste un punto dove la  $\nabla = \nabla_{ad}$  è verificata. Questo significa che esiste una linea nel piano  $u - v$  data dalle soluzioni di inviluppo lungo la quale vale la  $\nabla = \nabla_{ad}$  e che interseca la soluzione del nucleo convettivo (in realtà atteso che anche  $\nabla$  deve essere continuo è un punto di tangenza). In questo punto la soluzione di inviluppo ha le variabili  $q^*, y^*, x^*, t^*$ , la soluzione del nucleo ha le variabili  $\xi^*$  e  $\phi^*$ . Assumiamo un certo peso molecolare per l'inviluppo. Il raccordo ha fissato  $C = C^*$ , che produce una relazione tra  $L, R$  e  $M$ . Ma la luminosità è regolata dal tasso di produzione di energia

$$\epsilon = \epsilon_0 \rho T^\nu \quad (21.70)$$

Procediamo ora come segue: nel nucleo  $r = \alpha \xi$  ovunque dunque anche al raccordo dove in particolare  $r = r^* R$ . Pertanto nel nucleo la variabile  $r$  ed il gradiente di luminosità possono essere scritti come

$$r = r^* \frac{\xi}{\xi^*} \quad r^* \frac{dl}{dr} = \xi^* \frac{dl}{d\xi} \quad (21.71)$$

ancora

$$\rho = \rho_c \phi^{3/2} \quad T = T_c \phi \quad (21.72)$$

Ponendo  $\lambda = l/L$  si ottengono le relazioni

$$\frac{d\lambda}{d\xi} = B \xi^2 \phi^{\nu+3} \quad B = \frac{4\pi\epsilon_0}{L} \left( \frac{x^* R}{\xi^*} \right)^3 \rho_c^2 T_c^\nu \quad (21.73)$$

La continuità di  $T$  e  $\rho$  fra nucleo ed inviluppo impone che

$$\rho^* = \rho_c \phi^{3/2} = \frac{M}{4\pi R^3} \frac{y^*}{t^*} \quad (21.74)$$

$$T^* = T_c \phi^* = \frac{\mu H}{k} \frac{GM}{R} t^* \quad (21.75)$$

Con queste due equazioni possiamo esprimere  $\rho_c$  e  $T_c$  in funzione di  $\phi^*, y^*, T^*$  e di  $M$  e  $R$ . Inserendole nella relazione per il coefficiente  $B$  si ha

$$B = B_0 \epsilon_0 \left( \frac{\mu H G}{K} \right)^\nu \frac{M^{\nu+2}}{L R^{\nu+3}} \quad (21.76)$$

dove  $B_0$  è noto dall'integrazione numerica fino al punto di raccordo. Poichè  $L$  è generata nel nucleo, al punto di raccordo vale  $\lambda = l/L = 1$ . Pertanto si ha

$$1 = \int_0^{\xi^*} \frac{d\lambda}{d\xi} d\xi = B \int_0^{\xi^*} \xi^2 \phi^{\nu+3} d\xi \quad (21.77)$$

Questa relazione fissa il valore  $B = B^*$ . In questo modo abbiamo trovato  $C^*$  e  $B^*$ . Pertanto per un dato valore di  $M$  si ottengono  $L$  e  $R$ . Il modello è completamente determinato !!!!

## 21.2 Collasso di un politropo

Fino ad ora abbiamo trattato i politropi come sfere gassose in equilibrio idrostatico. È possibile tuttavia trovare soluzioni per politropi con  $n = 3$  per i quali i termini inerziali nella equazione del momento sono importanti. Scriviamo l'equazione del momento in forma generale e simmetria sferica

$$\frac{\partial v_r}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial r} + \frac{\partial \Phi}{\partial r} = 0 \quad (21.78)$$

dove  $v_r = \partial r / \partial t$ .

Consideriamo un gas degenere relativistico con  $n = 3$  ovvero  $\gamma = 4/3$ . In analogia con il caso statico definiamo una lunghezza di scala adimensionale  $\xi$  tramite la

$$r = a(t)\xi \quad v_r = \dot{a}(t)\xi \quad (21.79)$$

tale che  $\xi$  sia indipendente dal tempo e questa sia tutta nella funzione  $a(t)$ . La forma (21.79) descrive un cambiamento omologo. Introduciamo ora la funzione  $\psi$  (detta *potenziale di velocità*) definita da

$$v_r = \frac{\partial \psi}{\partial r} \quad (21.80)$$

possiamo scrivere

$$a v_r = a \dot{a} \xi = a \frac{\partial \psi}{\partial r} = \frac{\partial \psi}{\partial \xi} \quad \psi = \frac{1}{2} a \dot{a} \xi^2 \quad (21.81)$$

dove abbiamo fissato la costante di integrazione del potenziale di velocità assumendo che per  $\xi = 0$   $\psi = 0$ . Si noti che la derivata temporale di  $\psi$  nel sistema comoviente è

$$\frac{d\psi}{dt} = \frac{\partial\psi}{\partial t} + v_r \frac{\partial\psi}{\partial r} = \frac{\partial\psi}{\partial t} + (\dot{a}\xi)^2 \quad (21.82)$$

Con le nuove variabili la equazione di Poisson

$$\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left( r^2 \frac{d\Phi}{dr} \right) = 4\pi G \rho \quad (21.83)$$

diventa

$$\frac{1}{\xi^2} \frac{\partial}{\partial \xi} \left( \xi^2 \frac{\partial \psi}{\partial \xi} \right) = 4\pi G \rho a^2 \quad (21.84)$$

mentre la equazione di continuità nella forma più generale

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = - \frac{1}{r^2} \frac{\partial(\rho r^2 v)}{\partial r} \quad (21.85)$$

diventa

$$\frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{dt} + \frac{1}{\xi^2 a^2} \frac{\partial}{\partial \xi} \left( \xi^2 \frac{\partial \psi}{\partial \xi} \right) = \frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{dt} + 3 \frac{\dot{a}}{a} = 0 \quad (21.86)$$

Questo significa che  $\rho \propto a^{-3}$  nel sistema comoviente.

Come nel caso statico definiamo la funzione  $\phi(\xi)$  mediante la  $\rho = \rho_c \phi^3(\xi)$ . Si vedrà che la funzione  $\phi(\xi)$  è legata alla funzione di Lane-Emden di indice  $n = 3$ . Si noti che  $\rho_c$  è funzione del tempo. Al fine di non discostarsi dal formalismo del caso statico fissiamo  $a = r/\xi$  dalla relazione

$$\frac{1}{a^2} = \frac{\pi G}{K} \rho_c^{2/3} \quad (21.87)$$

dove  $K$  è la costante politropica. In questo modo

$$\rho = \rho_c \phi^3(\xi) = \left( \frac{K}{\pi G} \right)^{3/2} \frac{1}{a^3} \phi^3(\xi) \quad (21.88)$$

Veniamo ora all'equazione del moto e definiamo

$$h = \int \frac{dP}{\rho} = 4K \rho^{1/3} \quad (21.89)$$

Inserendo  $\psi$  ed  $h$  nella equazione del moto (21.78) si ottiene



$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial r \partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{\partial \psi}{\partial r} \right)^2 + \frac{\partial \Phi}{\partial r} + \frac{\partial h}{\partial r} = 0 \quad (21.90)$$

che può essere integrata rispetto ad  $r$ . Ponendo nulla la costante di integrazione, sostituendo  $\frac{\partial \psi}{\partial r}$  con  $\dot{a}\xi$  e tenendo conto di (21.82) si trova

$$\frac{d\psi}{dt} = \frac{1}{2} \dot{a}^2 \xi^2 - \Phi - h \quad (21.91)$$

e pertanto

$$\frac{1}{2} a \ddot{a} \xi^2 = -\Phi - h \quad (21.92)$$

Dalle (21.88) e (21.89) si ricava

$$h = 4K\rho^{1/3} = 4 \frac{K^{3/2}}{(\pi G)^{1/2}} \frac{1}{a} \phi(\xi) \quad (21.93)$$

Usiamo un formalismo simile per la dipendenza di  $\Phi$  dal tempo  $t$  e scriviamo

$$\Phi = 4 \frac{K^{3/2}}{(\pi G)^{1/2}} \frac{1}{a} g(\xi) \quad (21.94)$$

che definisce la funzione adimensionale  $g(\xi)$ . Inserendo queste ultime due relazioni nella equazione (21.92) si trova

$$\frac{1}{2} a^2 \ddot{a} = -4 \frac{K^{3/2}}{(\pi G)^{1/2}} (g + \phi) \frac{1}{\xi^2} \quad (21.95)$$

I due membri di questa equazione dipendono solo dal tempo (sinistra) e dallo spazio (destra), pertanto ogni membro deve essere separatamente uguale ad una costante  $\lambda$

$$\frac{3}{4} \frac{(\pi G)^{1/2}}{K^{3/2}} a^2 \ddot{a} = -\lambda \quad (21.96)$$

$$6 \frac{g + \phi}{\xi^2} = \lambda \quad (21.97)$$

La prima di queste equazioni può essere integrata due volte: con la prima integrazione otteniamo

$$\dot{a}^2 = \frac{8}{3} \lambda \left( \frac{K^3}{\pi G} \right)^{1/2} \frac{1}{a} \quad (21.98)$$

dove la costante di integrazione è posta uguale a zero (velocità nulla quando la sfera è espansa all'infinito). Moltiplicata per  $a$  si ottiene

$$a^{1/2}\dot{a} = \frac{2}{3} \frac{d}{dt}(a^{3/2}) = \pm \left[ \frac{8\lambda}{3} \left( \frac{K^3}{\pi G} \right)^{1/2} \right]^{1/2} \quad (21.99)$$

dove il segno  $\pm$  indica esplosione o contrazione, rispettivamente. Questa equazione può essere integrata immediatamente dando per un collasso che inizia ad  $a_0$  per  $t = 0$

$$a^{3/2}(t) = a_0^{3/2} - \frac{3}{2} \left[ \frac{8\lambda}{3} \left( \frac{K^3}{\pi G} \right)^{1/2} \right]^{1/2} t \quad (21.100)$$

Questa espressione dà la dipendenza temporale del termine di scala  $a(t)$  e perciò della densità.

Esaminiamo ora il comportamento spaziale della soluzione. In particolare deve essere ancora determinata la funzione  $\phi(\xi)$ . A tale scopo scriviamo l'equazione di Poisson nella variabile  $\xi$

$$\frac{1}{\xi^2} \frac{\partial}{\partial \xi} (\xi^2 \frac{\partial \Phi}{\partial \xi}) = 4\pi G \rho a^2 \quad (21.101)$$

Sostituendo le espressioni trovate per  $\Phi$ ,  $g(\xi)$  e  $\rho$  troviamo

$$\frac{1}{\xi^2} \frac{d}{d\xi} (\xi^2 \frac{d\phi}{d\xi}) + \phi^3 = \lambda \quad (21.102)$$

Per  $\lambda = 0$  si ha l'equazione di Lane-Emden. Le soluzioni per  $\lambda \neq 0$  deviano dall'equilibrio idrostatico, ed il valore di  $\lambda$  dà una misura della deviazione. L'integrazione numerica di questa equazione mostra che si ottengono soluzioni fisicamente significative solo per piccoli valori di  $\lambda$ , esattamente per  $\lambda < \lambda_m = 0.0065$ . Per valori superiori la funzione  $\phi(\xi)$  e densità  $\rho$  non si annullano a valori finiti di  $\xi$ , ma raggiunto un minimo essi tendono all'infinito.

La soluzione trovata deve essere interpretata nel modo seguente. Consideriamo un politropo di indice  $n = 3$  in equilibrio, allora l'equilibrio è indipendente dal raggio. L'energia totale del sistema è nulla. Infatti si ricordi che l'energia gravitazionale ed interna di un politropo sono

$$\Omega = -\frac{3}{5-n} \frac{GM^2}{R} \quad (21.103)$$

$$U = -\frac{1}{3(\gamma_{ad} - 1)}\Omega \quad (21.104)$$

da cui

$$W = \Omega + U = \frac{3}{5-n} \left( \frac{1}{3(\gamma_{ad} - 1)} - 1 \right) \frac{GM^2}{R} \quad (21.105)$$

Nel nostro caso  $\gamma_{ad} = 4/3$  per cui  $W = 0$ . Il politropo è indifferente a cambiamenti di raggio. Ma se per qualche ragione la pressione è ridotta (ad esempio perchè la costante politropica  $K$  è diminuita) allora la sfera incomincia a contrarsi e la contrazione è descritta dalle equazioni (21.96) e (21.97). La prima descrive il comportamento temporale mentre la seconda mostra le deviazioni dalla soluzione di Lane-Emden causate dai termini inerziali.

Questa classe di politropi verrà usata nella descrizione del collasso del nucleo di una stella massiccia quando dà origine al fenomeno di supernova.

### 21.3 Sfere isoterme

Consideriamo una sfera in equilibrio idrostatico e isoterma (temperatura costante ovunque) per la quale valga l'equazione di stato

$$P = \left( \frac{k}{\mu H} \right) \rho T + \frac{1}{3} a T^4 \quad (21.106)$$

Poichè  $T = \text{costante}$ , essa equivale a

$$P = K\rho + D \quad (21.107)$$

dove

$$K = \left( \frac{k}{\mu H} \right) T \quad D = \frac{1}{3} a T^4 \quad (21.108)$$

L'equazione di equilibrio di questa stella è

$$\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left( \frac{r^2}{\rho} \frac{dP}{dr} \right) = -4\pi G \rho \quad (21.109)$$

essa diventa

$$K \frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left( r^2 \frac{d \ln \rho}{dr} \right) = -4\pi G \rho \quad (21.110)$$

Poniamo

$$\rho = \lambda e^\psi \quad r = \left[ \frac{K}{4\pi G \lambda} \right]^{1/2} \xi = \alpha \xi \quad (21.111)$$

dove  $\lambda$  è una costante arbitraria. In analogia con i politropi l'equazione diventa

$$\frac{1}{\xi^2} \frac{d}{d\xi} \left( \xi^2 \frac{d\psi}{d\xi} \right) = e^{-\psi} \quad (21.112)$$

Le condizioni al contorno sono

$$\rho = \rho_c \quad \text{per} \quad \xi = 0 \quad \lambda = \lambda_c \quad (21.113)$$

$$\psi = 0 \quad \frac{d\psi}{d\xi} = 0 \quad \text{per} \quad \xi = 0 \quad (21.114)$$

Questa equazione non ammette soluzione analitica. La soluzione numerica mostra che  $\psi \rightarrow 0$  solo per  $\xi \rightarrow \infty$ . Quindi una sfera isoterma si estende all'infinito similmente ai politropi con  $n \geq 5$ .

Massa e densità media entro una sfera di raggio  $\xi$  sono

$$M(\xi) = 4\pi\alpha^3 \lambda \xi^2 \frac{d\psi}{d\xi} \quad (21.115)$$

$$\bar{\rho}(\xi) = \lambda \frac{3}{\xi} \frac{d\psi}{d\xi}. \quad (21.116)$$

Si trova che la massa di una sfera isoterma cresce proporzionalmente al raggio quindi essa è infinita.

Ovviamente non possono esistere stelle completamente isoterme. Tuttavia in certe fasi evolutive si sviluppano dei nuclei isotermi ai quali si possono applicare le proprietà delle sfere isoterme.

## Capitolo 22

# MODELLI SEMPLICI E RELAZIONI DI OMOLOGIA

In questo capitolo presentiamo alcuni modelli stellari ottenuti in maniera analitica atti a chiarire alcuni aspetti importanti della struttura stellare assieme alle trasformazioni di omologia le quali traggono la loro origine dalle proprietà dei politropi.

### 22.1 Modelli semplici

#### Modello standard

Questo modello ha svolto un ruolo importante nella comprensione della struttura delle stelle chimicamente omogenee e non completamente convettive. Vedremo che esso corrisponde ad un caso particolare del politropo di indice  $n = 3$ .

In prima approssimazione possiamo trascurare la dipendenza dell'opacità da  $\rho$  e  $T$  e considerare solo gli strati esterni dove  $L(r) \simeq L$  e  $M(r) \simeq M$ . Assumiamo che tali regioni siano in equilibrio idrostatico e che il trasporto dell'energia sia radiativo.

$$\frac{dP}{dr} = -\frac{GM(r)}{r^2}\rho \simeq \frac{GM}{r^2}\rho \quad (22.1)$$

$$\frac{d}{dr}\left(\frac{1}{3}aT^4\right) = -\frac{\kappa\rho}{c}\frac{L(r)}{4\pi r^2} \simeq -\frac{\kappa\rho}{c}\frac{L}{4\pi r^2} \quad (22.2)$$

Si vede da queste equazioni che la  $P \propto T^4$  se la costante di integrazione è posta uguale a zero assumendo che per  $r = R$  sia  $P = T = \rho = 0$ .

Dalla definizione di indice politropico

$$n = \left( \frac{d \ln P}{d \ln T} \right) - 1 = 3 \quad (22.3)$$

si riconosce che la soluzione di cui sopra corrisponde a quella del politropo di indice  $n = 3$ . Questa conclusione non dipende dalla equazione di stato ed in buona approssimazione dalla opacità.

Per sviluppare le equazioni del modello standard notiamo che

$$\nabla_R = \frac{d \ln T}{d \ln P} = \frac{d \ln T}{d \ln P_r} \frac{d \ln P_r}{d \ln P} = \frac{1}{4} \frac{d \ln P_r}{d \ln P} \quad (22.4)$$

dove  $P_r$  è la sola pressione di radiazione. Da questa segue

$$\nabla_R = \frac{L}{16\pi acG} \frac{P}{P_r} \frac{\kappa L(r)/M(r)}{L/M} \quad (22.5)$$

Si introduca la quantità

$$\eta = \frac{\overline{\epsilon(r)}}{\bar{\epsilon}} \quad (22.6)$$

dove  $\overline{\epsilon(r)} = L(r)/M(r)$  è il tasso medio di produzione di energia per unità di massa dentro la sfera di raggio  $r$  e  $\epsilon(r) = L/M$  è il tasso medio di produzione di energia per unità di massa riferito all'intera stella.

$$\frac{dP_r}{dP} = \frac{L}{4\pi cGM} \kappa \cdot \eta \quad (22.7)$$

Integrando dalla superficie (dove  $P = P_r = 0$ ) verso l'interno si ha

$$P_r = \frac{L}{4\pi cGM} \overline{\kappa \cdot \eta} P \quad (22.8)$$

da cui

$$1 - \beta = \frac{L}{4\pi cGM} \overline{\kappa \cdot \eta} \quad (22.9)$$

Seguendo il ragionamento originalmente proposto da Eddington, la quantità  $\eta \propto L/M$  verosimilmente aumenta andando verso l'interno. Al contrario  $\kappa$  diminuisce passando dagli strati esterni a quelli interni. Pertanto

$$\overline{\kappa \cdot \eta} \simeq \text{costante} \quad (22.10)$$

Questo implica che  $1 - \beta \simeq \text{costante}$  attraverso una stella. Si ricordi che abbiamo fatto questa ipotesi quando abbiamo introdotto i politropi per la prima volta

e quando abbiamo discusso la equazione quartica di Eddington per stabilire il legame fra pressione di radiazione e massa di una stella. Entrambe le cose ricevono ora completa giustificazione.

### Modello con sorgente uniforme di energia

Il modello con  $\epsilon$  uniforme è quello in cui il tasso di produzione di energia per unità di massa è costante. Esso chiaramente non corrisponde a stelle con sorgenti nucleari fortemente localizzate nel centro ma descrive con buona approssimazione il caso di stelle in contrazione gravitazionale in cui

$$\epsilon_{grav} \propto T \quad (22.11)$$

Lo studio di questo modello permette di chiarire il ruolo delle condizioni superficiali.

Poichè il tasso di produzione  $\epsilon =$  è costante ne segue che

$$\frac{L(r)}{M(r)} = \frac{L}{M} \quad (22.12)$$

Partiamo dalla

$$\nabla_r = \frac{3}{16\pi acG} \frac{L(r)}{M(r)} \frac{\kappa P}{T^4} \quad (22.13)$$

Adottando per l'opacità e l'equazione di stato le relazioni

$$\kappa = \kappa_0 \rho^n T^{-s} \quad P = \left(\frac{K}{\mu H}\right) \rho T \quad (22.14)$$

essa si trasforma in

$$\nabla_R = \frac{3\kappa'_0 L}{16\pi acGM} \frac{P^{n+1}}{T^{n+s+4}} \quad (22.15)$$

con  $\kappa'_0 = \kappa_0(\mu/R)^n$  dove  $R$  è la costante dei gas  $R = K/H$ .

Esprimiamo ora il tutto mediante il valore centrale  $\nabla_R^c$ ; si ottiene

$$\nabla_R = \nabla_R^c \left(\frac{P}{P_c}\right)^{(n+1)} \left(\frac{T}{T_c}\right)^{-(n+s+4)} \quad (22.16)$$

dalla quale si può derivare

$$\left(\frac{P}{P_c}\right)^n d\left(\frac{P}{P_c}\right) = \frac{1}{\nabla_R^c} \left(\frac{T}{T_c}\right)^{n+s+3} d\left(\frac{T}{T_c}\right) \quad (22.17)$$

Assumiamo ora che sia valida ovunque la condizione di trasporto radiativo: questo impone che  $n + s + 4 > (n + 1)\Gamma_2/(\Gamma_2 - 1)$  ed integriamo dal centro al punto generico con  $P$  e  $T$

$$\left(\frac{P}{P_c}\right)^{n+1} = 1 + \frac{1}{\nabla_R^c} \cdot \frac{n+1}{n+s+4} \left[ \left(\frac{T}{T_c}\right)^{n+s+4} - 1 \right] \quad (22.18)$$

Se

$$\nabla_R^c = \frac{n+1}{n+s+4} \quad (22.19)$$

si ottiene la soluzione *radiativa zero*

$$P = \left(\frac{P_c}{T_c^{n_e+1}}\right) \cdot T^{n_e+1} = K' T^{n_e+1} \quad (22.20)$$

con

$$n_e = \frac{s+3}{n+1} \quad \text{e} \quad K' = \left[ \frac{n+1}{n+s+4} \frac{16\pi acGM}{3\kappa'_0 L} \right]^{\frac{1}{n+1}} \quad (22.21)$$

Se  $\nabla_R^c = \frac{n+1}{n+s+4}$  sull'intera stella, la soluzione radiativa vale ovunque.

La luminosità di tale modello è presto calcolata uguagliando la espressione per  $K'$  a quella corrispondente del politropo di indice  $n_e$  (si veda capitolo \*\*). Dopo opportuna manipolazione algebrica si ottiene

$$L = \frac{16\pi ac}{3\kappa_0} \left(\frac{GH}{K}\right)^{s+4} \frac{1}{n_e+1} \left[ \frac{4\pi}{(n_e+1)^{n_e} \xi_1^{n_e+1} (-\theta_{n_e})_1^{n_e-1}} \right]^{\frac{s+3}{n_e}} \frac{\mu^{s+4} M^{s-n+3}}{R^{s-3n}} \quad (22.22)$$

Per opacità di Kramers con  $n = 1$  e  $s = 3.5$  a cui corrisponde  $n_e = 3.25$  si ha

$$L_* = \frac{1.37 \times 10^{27}}{\kappa_0} \mu^{7.5} M_*^{5.5} R_*^{-0.5} \quad (22.23)$$

dove  $L_*$ ,  $R_*$ ,  $M_*$  sono in unità solari e  $\kappa_0$  è in unità cgs. Per una opacità costante ( $n = s = 0$  e  $n_e = 3$ ) si deriva

$$L_* = \frac{38.9}{\kappa_0} \mu^4 M^3 \quad (22.24)$$

### Modello con sorgente puntiforme di energia

In questo modello (l'opposto del precedente) la produzione di energia è tutta concentrata in una sfera centrale convettiva di raggio  $r_c$ . Esso corrisponde all



tipica struttura delle stelle della sequenza principale dove la generazione di energia avviene attraverso il ciclo CN-CNO.

Con questa assunzione e l'ipotesi di equilibrio termico la luminosità della stella è data da

$$L = L(r) = \int_0^M \epsilon dM(r) \quad (22.25)$$

la quale deve essere compatibile con la condizione di trasporto radiativo attraverso i rimanenti strati dal nucleo alla superficie.

In questo modello non è necessario conoscere l'esatta legge di produzione di energia. Infatti non si fa uso della equazione

$$\frac{dl(r)}{dM(r)} = 4\pi r^2 \rho \epsilon \quad (22.26)$$

che viene integrata a parte per fissare il raggio della stella.

Le caratteristiche del modello sono fissate dal raccordo della soluzione per l'involuppo radiativo a quella del nucleo convettivo.

#### *Variabili di Schwarzschild*

Prima di procedere oltre è conveniente riformulare le equazioni della struttura stellare mediante le variabili adimensionali di Schwarzschild così definite

$$r = XR \quad M(r) = qM \quad L(r) = fL$$

$$P = p \frac{GM^2}{4\pi R^4} \quad T = t\mu_s \frac{H}{K} \frac{GM}{R}$$

con ovvio significato dei simboli. In particolare  $\mu_s$  è inteso come un peso molecolare di riferimento ad esempio per composizione chimica solare  $X = 0.70, Y = 0.28, Z = 0.02$ . Si assuma inoltre la legge di gas perfetto, l'opacità di Kramers e formule analitiche per  $\epsilon_N$

$$P = \frac{K}{\mu H} \rho T \quad \text{con} \quad \mu = l\mu_s$$

$$\kappa = \kappa_0 \rho^n T^{-s} \quad \text{con} \quad \kappa_0 = \frac{j}{l^n} \kappa_{0,s}$$

$$\epsilon_N = \epsilon_{N,0} \rho^\lambda T^\nu \quad \text{con} \quad \epsilon_{N,0} = \frac{i}{l^\lambda} \epsilon_{N,0,s}$$

dove  $\mu_s, \kappa_{0,s}, \epsilon_{N,0,s}$  si riferiscono tutte ad una certa composizione chimica. Le variabili  $l, j, i$  tengono conto di possibili disomogeneità (gradienti) chimiche del

materiale. Una stella chimicamente omogenea ha  $l = j = i = 1$ . D'ora innanzi ci riferimemo a questo caso senza perdere in generalità.

Inserendo tali variabili si ottiene il sistema di equazioni di struttura dove compaiono due parametri  $C$  e  $D$  generati dalla equazione del trasporto radiativo e produzione di energia, rispettivamente. I parametri sono così definiti

$$C = C(n, s) = \left[ \frac{3}{4(4\pi)^{n+2} \left( \frac{K}{HG} \right)^{s+4}} \right] \left( \frac{\kappa_{0,s}}{\mu_s^{s+4}} \right) \frac{LR^{s-3n}}{M^{s-n+3}} \quad (22.27)$$

$$D = D(\lambda, \nu) = \left[ \frac{1}{(4\pi)^\lambda} \left( \frac{HG}{K} \right)^\nu \right] [\epsilon_{N,0,s} \mu_s^\nu] \frac{M^{\nu+\lambda+1}}{LR^{\nu+3\lambda}} \quad (22.28)$$

Si noti che i parametri  $C$  e  $D$  contengono  $L$ ,  $M$  e  $R$  e che essi possono essere invertiti per esprimere

$$L = CF(M, R, s, n, \dots) \quad L = \frac{1}{D} G(M, R, \lambda, \nu, \dots) \quad (22.29)$$

dove  $F$  e  $G$  sono due opportune funzioni facilmente ricavabili. Le condizioni al contorno sono

$$x = 0 \quad q = 0 \quad f = 0 \quad \text{al centro}$$

$$x = 1 \quad p = p_p \quad t = t_p \quad \text{alla fotosfera}$$

I valori alla fotosfera del caso radiativo sono semplicemente  $p_p = 0$  e  $t_p = 0$ , mentre nel caso convettivo essi sono

$$t_p = 0 \quad p = Et^{n_e+1}$$

con  $n_e = \Gamma_2/(\Gamma_2 - 1)$ . Il parametro  $E$  è espresso da

$$E = \frac{4\pi}{G} \left( \frac{HG}{K} \right)^{n_e+1} \mu_S^{n_e+1} M^{n_e-1} R^{3-n_e} K_P \quad (22.30)$$

dove  $K_P$  è la costante politropica del politropo corrispondente.

Si noti infine che le condizioni superficiali danno i valori di partenza per tutte le variabili  $x$ ,  $p$ ,  $t$ ,  $q$  e  $f$ , mentre le condizioni centrali fissano solamente  $x$ ,  $q$  e  $f$  ma non  $p_c$  e  $t_c$ . Quindi i parametri del problema sono  $p_c$ ,  $t_c$ ,  $C$  e  $D$ .

Date le condizioni iniziali, l'involuppo è descritto dal parametro  $C$ . Scelto un valore si integra verso l'interno ed a ogni punto si calcola l'indice politropico  $n_e$ . Poichè andando verso il centro il rapporto  $L(r)/M(r)$  cresce e così pure

$\nabla_R \propto \frac{1}{n_e+1}$  ciò significa che  $n_e$  decresce fino a raggiungere il valore limite dettato dalla convezione. In questo caso  $n_e = 1.5$  per  $\Gamma_2 = 5/3$  valido per il gas perfetto. Da questo punto il gradiente di temperatura sarà fissato dalla relazione adiabatica fra pressione e temperatura. La regione convettiva è descritta dal politropo con  $n_e = 1.5$ . La soluzione è completamente determinata una volta che i valori di  $p_c$  e  $t_c$  sono assegnati. Utilizzando le variabili di Schwarzschild si ha

$$x = \frac{r}{R} = \xi(n_e + 1)^{1/2} t_c p_c^{-1/2} \quad (22.31)$$

$$t = t_c \theta(\xi) \quad (22.32)$$

$$p = p_c \theta^{n_e+1}(\xi) \quad (22.33)$$

$$\rho = \rho_c \theta^{n_e}(\xi) \quad (22.34)$$

dove

$$\rho_c = \bar{\rho} \frac{1}{3} \frac{p_c}{t_c} \quad (22.35)$$

$$q = (n_e + 1)^{3/2} t_c^2 p_c^{-1/2} (-\xi \theta') \quad (22.36)$$

Al punto dove  $n_e$  nell' involucro ha raggiunto il valore  $n_e = 1.5$  i valori di  $P$ ,  $T$ , e  $M$  dati dalle due soluzioni (nucleo - involucro) devono essere continui e  $x$  deve essere identico. Indichiamo con  $x_f$ ,  $t_f$ ,  $p_f$  e  $q_f$  le variabili della soluzione esterna al punto di raccordo (fitting) esse devono soddisfare alle condizioni

$$x_f = \xi_f(n_e + 1)^{1/2} t_c p_c^{1/2} \quad (22.37)$$

$$t_f = t_c \theta_f \quad (22.38)$$

$$p_f = p_c \theta_f^{n_e+1} \quad (22.39)$$

$$q_f = (n_e + 1)^{3/2} t_c^2 p_c^{-1/2} (-\xi^2 \theta')_f \quad (22.40)$$

Le quantità  $x_f, \dots, q_f$  sono funzioni del parametro  $C$ . Nelle equazioni di raccordo ci sono 4 incognite ( $C$ ,  $\xi_f$ ,  $p_c$  e  $t_c$ ) che possono essere determinate. Note queste è possibile ricavare le caratteristiche fisiche del modello. I valori  $P_c$  e  $T_c$  sono immediatamente dati dalle definizioni delle variabili adimensionali. Rimane ora da usare la condizione di equilibrio termico: la luminosità irradiata deve essere uguale a quella prodotta, equazione (\*\*). Facendo uso della espressione per il coefficiente  $D$  questo permette di fissare  $R$  e  $L$  una volta assegnata la massa  $M$  della stella. Il modello è determinato !

### Nota

A chiusura di questa sezione, consideriamo un altro tipo di soluzione di involucro, cioè quella convettiva e supponiamo che essa si estenda fino al centro. Quindi l'intera stella è descritta dal politropo  $n_e = 1.5$ . Senza ripetere la discussione, il parametro  $E$  di questo caso raggiunge il valore massimo dato da

$$E = (2.5)^{1.5} \xi_1^{2.5} (-\theta_{1.5})_1^{0.5} = 45.48 \quad (22.41)$$

Questo tipo di modello verrà ulteriormente esplorato in relazione alla linea di Hayashi (luogo delle stelle totalmente convettive in equilibrio idrostatico).

## 22.2 Trasformazioni di omologia

È intuitivo aspettarsi che strutture stellari che sono state calcolate sotto assunzioni identiche riguardanti l'equazione di stato, l'opacità, la generazione di energia, etc... godano di proprietà simili, nel senso che si possa passare da una soluzione ad un'altra per similitudine. Questa possibilità ci è data dalle *trasformazioni di omologia*.

### Politropi omologhi

Il primo caso di trasformazione omologa ci è dato dai politropi. Infatti se  $\theta_n(\zeta)$  è una soluzione della equazione di Lane-Emden di indice  $n$  è facile verificare che la funzione

$$C^{\frac{2}{n-1}} \theta_n(C\zeta) \quad (22.42)$$

dove  $C$  è un numero reale arbitrario è ancora soluzione della stessa equazione. Infatti ponendo  $\eta = C\zeta$  e  $\theta_n = C^{\frac{2}{n-1}}\Theta_n(\eta)$  e sostituendole nella equazione di partenza in  $\theta_n(\zeta)$  si ottiene la stessa equazione in  $\Theta_n(\eta)$ .

### Definizione Generale

Quando si confrontano due stelle di masse e raggi diversi,  $M$ ,  $M'$ ,  $R$  e  $R'$ , rispettivamente, possiamo considerare in particolare i punti omologhi ai quali i raggi relativi sono uguali

$$\frac{r}{R} = \frac{r'}{R'} \quad (22.43)$$

Diciamo ora che due stelle sono omologhe se le loro corone sferiche di massa omologa

$$\frac{M(r)}{M} = \frac{M'(r')}{M'} \quad (22.44)$$

sono situate a raggi omologhi.

Per essere più precisi consideriamo tutti i raggi come funzioni del valore della massa relativa  $\xi$

$$\xi = \frac{M(r)}{M} = \frac{M'(r')}{M'} \quad (22.45)$$

la quale è la stessa per tutte le corone sferiche omologhe. Pertanto la condizione di omologia è espressa da

$$\frac{r(\xi)}{r'(\xi)} = \frac{R}{R'} \quad (22.46)$$

per tutte le  $\xi$ . In stelle omologhe il rapporto dei raggi per corone di massa omologhe è costante lungo le stelle. Passando da una stella ad un'altra, tutte le corone sferiche sono compresse o espanse dello stesso fattore  $R/R'$ .

*Caso generale.* Poichè le due stelle devono verificare le stesse equazioni di struttura, il legame di omologia agisce su tutte le altre variabili.

Supponiamo di avere due stelle omogenee di masse  $M$  e  $M'$ , raggi  $R$  e  $R'$  e pesi molecolari  $\mu$  e  $\mu'$ . Indichiamo con

$$x = \frac{M}{M'} \quad y = \frac{\mu}{\mu'} \quad (22.47)$$

Tutte le variabili dei due modelli sono considerate funzioni di  $\xi$ .

**Ansatz:** Tutte le altre variabili stanno nei rapporti

$$\frac{r}{r'} = z = \frac{R}{R'} \quad \frac{P}{P'} = p = \frac{P_c}{P'_c} \quad \frac{T}{T'} = t = \frac{T_c}{T'_c} \quad \frac{L(r)}{L'(r)} = s = \frac{L}{L'} \quad (22.48)$$

dove  $z, p, t, s$  hanno gli stessi valori per tutte le  $\xi$  (il pedice  $c$  sta ad indicare il centro).

Esaminiamo dei modelli omologhi di sequenza principale, in equilibrio idrostatico e termico, nei quali l'energia è trasportata dalla radiazione. Inoltre assumiamo che densità, tasso di produzione di energia ed opacità scalino nel modo seguente

$$\frac{\rho}{\rho'} = d \quad \frac{\epsilon}{\epsilon'} = e \quad \frac{\kappa}{\kappa'} = k \quad (22.49)$$

ed infine che  $\rho$ ,  $\epsilon$ , e  $\kappa$  siano date da

$$\rho \propto P^\alpha T^{-\delta} \mu^\phi \quad \epsilon \propto \rho^\lambda T^\nu \quad \kappa \propto P^a T^b \quad (22.50)$$

Le equazioni di struttura della stella di massa  $M$  scritte nella nuova variabile  $\xi$  diventano

$$\frac{dr}{d\xi} = c_1 \frac{M}{r^2 \rho} \quad c_1 = \frac{1}{4\pi} \quad (22.51)$$

$$\frac{dP}{d\xi} = c_2 \frac{\xi M^2}{r^4} \quad c_2 = -\frac{G}{4\pi} \quad (22.52)$$

$$\frac{dL(r)}{d\xi} = \epsilon M \quad (22.53)$$

$$\frac{dT}{d\xi} = c_4 \frac{\kappa L(r) M}{r^4 T^3} \quad c_4 = -\frac{3}{64\pi^2 a c} \quad (22.54)$$

Applicando le trasformazioni esse diventano per la seconda stella

$$\frac{dr'}{d\xi} = c_1 \frac{M'}{r'^2 \rho'} \left[ \frac{x}{z^3 d} \right] \quad (22.55)$$

$$\frac{dP'}{d\xi} = c_2 \frac{\xi M'^2}{r'^4} \left[ \frac{x^2}{z^4 p} \right] \quad (22.56)$$

$$\frac{dL'(r)}{d\xi} = \epsilon' M' \left[ \frac{ex}{s} \right] \quad (22.57)$$

$$\frac{dT'}{d\xi} = c_4 \frac{\kappa L'(r') M'}{r'^4 T'^3} \left[ \frac{k s x}{z^4 t^4} \right] \quad (22.58)$$

Poichè le variabili  $r'$ ,  $P'$ ,  $T'$  e  $L'(r')$  devono soddisfare alle stesse equazioni di struttura per la prima stella tutti i termini [...] devono soddisfare alla condizione

$$[\dots] = 1 \quad (22.59)$$

Le relazioni fra densità, generazione di energia, ed opacità danno le seguenti relazioni

$$d = p^\alpha t^{-\delta} y^\phi \quad e = p^{\lambda\alpha} t^{\nu-\lambda\delta} y^{\lambda\phi} \quad k = p^a t^b \quad (22.60)$$

le quali introdotte nelle relazioni [...] = 1 danno quattro condizioni per le potenze di  $z$ ,  $p$ ,  $t$  e  $s$ .

Cerchiamo ora di rappresentar queste condizioni in funzione di  $x$  e  $y$  che descrivono i cambiamenti dei parametri fondamentali  $M$  e  $\mu$ . In queste condizioni gli esponenti di  $x$  e  $y$  devono dare somma nulla poichè i membri di destra delle relazioni [...] = 1 sono costanti. Questo fornisce otto relazioni lineari fra gli esponenti  $z_1, \dots, s_2$  e ciò equivale a risolvere i due sistemi di equazioni

$$\begin{array}{cccccc} -3 & -\alpha & \delta & 0 & z_1 & -1 \\ -4 & -1 & 0 & 0 & p_1 & -2 \\ 0 & \lambda\alpha & (\nu - \lambda\delta) & -1 & \cdot & t_1 = -1 \\ -4 & \alpha & (b-4) & 1 & s_1 & -1 \end{array}$$

e

$$\begin{array}{cccccc} -3 & -\alpha & \delta & 0 & z_2 & \phi \\ -4 & -1 & 0 & 0 & p_2 & 0 \\ 0 & \lambda\alpha & (\nu - \lambda\delta) & -1 & \cdot & t_2 = -\lambda\phi \\ -4 & \alpha & (b-4) & 1 & s_2 & 0 \end{array}$$

Le soluzioni sono

$$z_1 = \frac{1}{2}(1 + A) \quad (22.61)$$

$$p_1 = -2A \quad (22.62)$$

$$t_1 = \frac{1}{2\delta}[1 + (3 - 4\alpha)A] \quad (22.63)$$

$$s_1 = 1 + \frac{4-b}{2\delta} + \left[2 + 2a + \frac{3-4\alpha}{2\delta}(4-3b)\right]A \quad (22.64)$$

$$z_2 = \phi B \quad (22.65)$$

$$p_2 = -A\phi B \quad (22.66)$$

$$t_2 = \frac{\phi}{\delta}[1 + (3 - 4\alpha)B] \quad (22.67)$$

$$s_2 = \frac{\phi}{\delta}(4-b) + \phi\left[4 + 4a + \frac{3-4\alpha}{\delta}(4-b)\right]B \quad (22.68)$$

con

$$A = \left[\frac{4\delta(1+a+\lambda\alpha)}{\nu+b-4-\lambda\delta} + 4\alpha - 3\right]^{-1} \quad (22.69)$$

$$B = a\left(1 - \frac{\lambda\delta}{\nu+b-4}\right)^{-1} \quad (22.70)$$

### Semplici applicazioni

**Caso**  $\delta = 0$ . Questa situazione si presenta quando la densità non dipende da  $T$ . È una situazione politropica con  $n_e = \alpha/(1-\alpha)$ . Per queste stelle si ottiene la relazione massa-raggio

$$R \propto M^{z_1} \quad (22.71)$$

Per un gas di elettroni degeneri e non relativistico si ha  $\alpha = 3/5$  che dà l'esponente  $z_1 = -1/3$  che si ritrova nello studio delle configurazioni totalmente degeneri.

**Caso**  $\alpha = \delta = \phi = 1$ ,  $a = b = 0$ . Questa è la situazione tipica di un gas perfetto con opacità costante. Questa estrema semplificazione della realtà è tuttavia sufficiente a descrivere alcune delle proprietà delle stelle della sequenza principale.

Dalle soluzioni generali dei sistemi di equazioni otteniamo:



$$z_1 = \frac{\nu + \lambda - 2}{\nu + 3\lambda} \quad z_2 = \frac{\nu - 4}{\nu + 3\lambda} \quad (22.72)$$

$$p_1 = 2 - 4z_1 \quad p_2 = -4z_2 \quad (22.73)$$

$$t_1 = 1 - z_1 \quad t_2 = 1 - z_2 \quad (22.74)$$

$$s_1 = 3 \quad s_2 = 4 \quad (22.75)$$

Per questo modello si ottengono due risultati di interesse. Primo  $s_1 = 3$  e  $s_2 = 4$ , cioè costanti. In particolare essi non dipendono da  $\nu$  e  $\lambda$  cioè dal modo di produzione dell'energia. Secondo si ottengono le relazioni massa - luminosità e massa - raggio

$$\frac{L}{L'} = \left(\frac{M}{M'}\right)^3 \left(\frac{\mu}{\mu'}\right)^4 \quad (22.76)$$

$$\frac{R}{R'} = \left(\frac{M}{M'}\right)^{z_1} \left(\frac{\mu}{\mu'}\right)^{z_2} \quad (22.77)$$

L'esponente  $z_1$  dipende da  $\nu$  e  $\lambda$  ma per tutti i valori ragionevoli di questi esso è minore di uno, cioè  $R$  aumenta poco con  $M$ .

Combinando le due relazioni si ottiene subito il luogo di queste stelle nel diagramma HR. Si trova

$$\log L = \frac{12}{3 - 2z_1} \times \log T_{eff} + costante \quad (22.78)$$

La pendenza vale circa 6.67 per  $z_1 \simeq 0.7$  in buon accordo con i dati osservativi per la sequenza principale.

Infine possiamo trovare gli andamenti di  $T_c$  e  $\rho_c$

$$T_c \propto M^{1-z_1} \quad \rho_c \propto M^{1-3z_1} \quad (22.79)$$

Da questi si vede che all'aumentare di  $M$  la temperatura  $T_c$  cresce poco mentre  $\rho_c$  diminuisce significativamente.

**Nota**

Tabella 22.1: Caso del gas perfetto con opacità costante e diversa efficienza di produzione di energia nucleare ( $\nu$ ).

$\nu$	4	5	15	18
$z_1$	0.43	0.50	0.78	0.81
$z_2$	0.	0.13	0.61	0.67
$p_1$	0.29	0.	-1.11	-1.24
$p_2$	0.	-0.50	-2.44	-2.67
$t_1$	0.57	0.50	0.22	0.19
$t_2$	1.0	0.88	0.39	0.33
$s_1$	3	3	3	3
$s_2$	4	4	4	4

L'analisi di cui sopra non può essere estesa al caso in cui l'equazione di contenga anche la pressione di radiazione in quanto la presenza della somma di due termini nelle equazione di stato invalida le relazioni di proporzionalità usate. Tuttavia si possono avere delle stime qualitative supponendo che nella equazione di stato  $\beta$  sia costante ed usando la relazione  $P \propto \rho T / (\mu \beta)$ . Ricordando l'equazione quartica di Eddington ( $\beta$  diminuisce con  $M$ ) si ottiene

$$L \propto M^{s_1} \beta^{s_2} \propto M^{s_1 - c} \quad (22.80)$$

con  $c > 0$  per  $s_2 > 0$ . La relazione massa luminosità diventa meno ripida. Per  $\beta \ll 1$ , l'equazione di Eddington dà  $\beta \propto M^{-1/2}$  da cui

$$L \propto M^{s_1 - s_2/2} \propto M \quad (22.81)$$

La luminosità delle stelle dell'alta sequenza principale è proporzionale alla massa della stella.

## Capitolo 23

# FASI DI PRESEQUENZA

La storia delle prime fasi di vita di una stella può essere distinta in tre episodi principali:

- i) formazione;
- ii) collasso della protostella;
- iii) lenta contrazione verso la sequenza principale dove inizia la fase nucleare di produzione dell'energia (bruciamento dell'idrogeno nel centro).

Le caratteristiche fisiche delle tre fasi sono riassunte in Tabella 23. Si vede come esista una grande differenza nelle condizioni fisiche tra il momento in cui una stella si forma dal mezzo interstellare e quello in cui arriva in sequenza principale. Infatti la densità e la temperatura sono aumentate rispettivamente di 22 e 6 ordini di grandezza.

Nella fase di formazione e di collasso non è sufficiente assumere che l'oggetto abbia simmetria sferica, bensì è necessario prendere in considerazione un gran numero di complicati processi fisici quali rotazione, turbolenza, campi magnetici, reazioni chimiche fra molecole, trasporto radiativo dell'energia in completa trattazione idrodinamica. I risultati raggiunti fino ad ora sono limitati, sia per il numero di processi fisici considerati sia per la scarsa risoluzione spaziale dei modelli matematici sviluppati.

Al contrario esistono dettagliati studi numerici per la fase di collasso e quella di lenta contrazione. Inoltre non è ancora chiaro quale sia l'efficienza di conversione del gas interstellare in stelle, cosa governi la distribuzione delle masse stellari ed infine cosa determini la formazione di stelle binarie e/o multiple oppure di stelle singole dotate di sistemi planetari.

Tabella 23.1: Stadi principali della fase di presequenza di una stella di  $1 \times M_{\odot}$ 

Fase	Scale (cm)	Range	Densità $\text{g cm}^{-3}$	Temp (K)	Durata (anni)
Formazione	$10^{20} \div 10^{17}$	Radio	$10^{-22} \div 10^{-19}$	10	$10^7$
Collasso	$10^{17} \div 10^{12}$	IR	$10^{-10} \div 10^{-3}$	$10 \div 10^6$	$10^6$
Contrazione	$10^{12} \div 10^{11}$	Ottico	$10^{-3} \div 1$	$10^6 \div 10^7$	$4 \times 10^7$

## 23.1 Formazione Stellare

È chiaro che la formazione stellare è limitata a regioni con condizioni fisiche abbastanza peculiari rispetto a quelle tipiche del mezzo interstellare. La condensazione del gas avviene tramite l'azione a distanza della forza gravitazionale. Tuttavia esistono molti fattori che tendono a contrastare l'azione aggregante della gravitazione, quali la pressione del gas, la turbolenza, la rotazione i campi magnetici. Infine un ruolo importante spetta alla composizione chimica del gas, al suo grado di ionizzazione e dissociazione, alla presenza o meno di grani (particelle di ghiaccio, silicati ferro con dimensioni dell'ordine di  $5 \times 10^{-5} \text{ cm}$ ), ed infine ai processi di riscaldamento e raffreddamento.

Incominciamo col considerare il caso semplice di una nube gassosa sferica in cui operi solo la pressione del gas (perfetto) e la forza gravitazionale, la quale abbia densità  $\rho$  e temperatura  $T$  uniformi e possieda massa totale  $M$ . L'energia gravitazionale di questa nube è

$$\Omega = -0.6 \left( \frac{GM^2}{R} \right) \quad (23.1)$$

dove  $R$  è il raggio. L'energia interna è

$$U_T = \left( \frac{3}{2} \right) \left( \frac{K}{\mu H} \right) MT. \quad (23.2)$$

Il collasso sarà possibile solamente se

$$|\Omega| > U_T \quad (23.3)$$

cioè se la nube è gravitazionalmente legata. Pertanto affinché avvenga il collasso, il raggio deve essere minore di

$$R < R_J = 0.4 \frac{GH}{k} \mu \frac{M}{T} \quad (23.4)$$

detto anche raggio di Jeans. Eliminando il raggio in funzione della densità, si ottiene la massa di Jeans e cioè la massa minima con la quale una nube di densità  $\rho$  e temperatura  $T$  può collassare

$$M > M_J = \left[ 2.5 \frac{K}{H} \frac{T}{\mu G} \right]^{3/2} \left( \frac{4\pi \rho}{3} \right)^{-1/2} \quad (23.5)$$

Questa condizione è abbastanza restrittiva. Infatti una tipica nube interstellare di idrogeno neutro con  $T = 50$  K e  $\rho = 1.7 \times 10^{-23} \text{ g cm}^{-3}$  e  $\mu = 1$  ha  $M_J = 3600 M_\odot$ , mentre una nube molecolare con  $T = 10$  K,  $\rho = 1.7 \times 10^{-21} \text{ g cm}^{-3}$  e  $\mu = 2$  ha  $M_J = 8 M_\odot$ .

Tuttavia, nel caso dell'idrogeno neutro le masse osservate delle nubi sono molto minori di  $M_J$  e pertanto non sono gravitazionalmente legate ed il collasso non può avvenire, mentre nel caso delle nubi molecolari le masse osservate sono fino a  $10^4 - 10^5 M_\odot$ , esse sono legate e il collasso può aver luogo.

Come le nubi di idrogeno neutro possano essere compresse alle densità delle nubi molecolari non è stato compreso fino ad ora. Presumibilmente le collisioni fra nubi, l'onda di shock associata alle braccia di spirale nella galassia, le onde di shock associate alle esplosioni di supernova, infine l'instabilità di Rayleigh-Taylor indotta dall'avvolgimento delle linee dei campi magnetici nel piano galattico sono i fattori principali che inducono tale compressione e indirettamente stimolano il processo di formazione delle stelle.

Le osservazioni indicano che le nubi sono dotate di rotazione (momento angolare), la quale è tuttavia di ostacolo alla formazione delle stelle. Il minimo momento angolare di una nube è stimabile assumendo che essa ruoti alla stessa velocità angolare del suo moto attorno al centro galattico,  $10^{-15}$  radianti/sec. Il corrispondente momento angolare per unità di massa è  $J/M = 10^{24} \text{ cm}^2 \text{ s}^{-1}$  per una nube di  $10^4 M_\odot$ . Le velocità angolari delle stelle giovani che hanno appena iniziato la fase di contrazione di pre-sequenza indicano che  $J/M = 10^{17} \text{ cm}^2 \text{ s}^{-1}$ . Pertanto alcuni frammenti di nubi oscure devono perdere circa 7 ordini di grandezza di  $J/M$  prima di raggiungere lo stadio di stella.

Sono stati suggeriti due processi che potrebbero diminuire il momento angolare. Nel primo, se la materia è fortemente accoppiata a campi magnetici, la torsione delle linee di forza può generare delle onde di Alfvén in grado di trasferire momento angolare dall'interno della nube al mezzo esterno. È stato stimato che una efficiente riduzione del momento angolare potrebbe avvenire su scale di tempo di  $10^6 - 10^7$  anni. Tuttavia quando la densità della stella in formazione è cresciuta a circa  $10^{-19} \text{ g cm}^{-3}$ , il campo magnetico non è più fortemente accoppiato al gas in quanto la densità di particelle cariche diventa troppo piccola e questo meccanismo di perdita di momento angolare diventa poco efficace. Nel secondo, quando la frammentazione avviene in una nube rotante, la regione centrale potrebbe rompersi in sotto frammenti in orbita relativa. Ogni frammento conserva un certo momento angolare di rotazione, ma se è piccolo a sufficienza esso può ulteriormente collassare e dar luogo a sottoframmenti in orbita relativa e così via. In tal modo dopo una serie di frammentazioni, il momento angolare di rotazione dei frammenti può risultare considerevolmente minore del valore iniziale. Questo scenario è consistente col fatto che molte stelle appartengono a sistemi binari.

Una sequenza di frammentazioni deve avvenire molto verosimilmente durante il processo di formazione stellare. Infatti la relazione (23.5) mostra che la massa necessaria affinché il collasso possa partire è molto maggiore delle tipiche masse stellari. Tuttavia essa mostra anche che una volta che una grande massa ha iniziato a collassare, la frammentazione in masse minori è possibile. Infatti, al procedere del collasso la densità aumenta mentre la temperatura resta o costante o anche diminuisce in quanto, come la nube tende a riscaldarsi per compressione, l'energia interna è rapidamente convertita in radiazione, la quale fintanto che la densità è piccola fluisce liberamente dalla nube. Pertanto  $M_J$  diminuisce significando che ulteriore frammentazione è possibile fintanto che la nube diventa opaca alla radiazione. Questo stadio critico viene raggiunto a circa  $10^{-13} - 10^{-14} \text{ g cm}^{-3}$  e il corrispondente valore di  $M_J$  è  $0.005 M_\odot$  a  $T=10 \text{ K}$ . Un ulteriore aumento di densità fa aumentare il riscaldamento e quindi  $M_J$ . Che la frammentazione avvenga durante la formazione è sostenuto da molteplici evidenze: 1) osservazioni di molte sorgenti infrarosse e radio nascoste in nubi molecolari; 2) esistenza di sistemi stellari multipli di periodo corto e lungo che forse indicano la conversione del momento angolare di rotazione in quello

orbitale; 3) l'esistenza di associazioni ed ammassi stellari aperti e globulari, suggerenti la frammentazione di grandi nubi iniziali; 4) simulazioni numeriche di collassi in rotazione. Le osservazioni indicano con sempre maggior evidenza che le stelle si formano nelle parti dense delle nubi molecolari. Tuttavia, la maggior parte del gas nella nube non forma stelle, indicando forse che la turbolenza e i campi magnetici impediscono il collasso gravitazionale.

## 23.2 Collasso della Protostella

Anche se rotazione, turbolenza, campi magnetici ed effetti di frammentazione sono importanti, almeno durante le fasi iniziali del collasso gravitazionale di una protostella, questo viene descritto assumendo la simmetria sferica a partire dal momento in cui un frammento di data massa è capace di evolversi come una unità distinta dal rimanente gas. L'evoluzione può essere separata in tre fasi: isoterma, adiabatica e di accrescimento.

Un frammento di  $1 M_{\odot}$  con composizione solare, temperatura  $T=10$  K e dato volume può incominciare a collassare quando la densità è  $\rho = 10^{-19} \text{ g cm}^{-3}$ . Negli stadi iniziali fino a  $\rho = 10^{-14} \text{ g cm}^{-3}$ , il collasso continua in quanto la nube è trasparente alla propria radiazione e perde energia rapidamente. In conseguenza, la pressione non aumenta al punto da contrastare il collasso ed instaurare l'equilibrio idrostatico. La temperatura rimane talmente vicina al valore iniziale che il collasso può essere assunto *isotermo*. Le equazioni da risolvere sono quelle del momento e conservazione di massa con i termini inerziali e di flusso di materia inclusi assieme all'equazione di stato  $P = K\rho$  dove  $K$  è una costante.

Le condizioni alla superficie sono: o pressione costante o volume costante senza flusso di materia attraverso la superficie. I calcoli numerici mostrano che anche se all'inizio la densità è costante, rapidamente si instaura un gradiente di densità a causa dell'onda di rarefazione che si propaga verso l'interno. Le regioni centrali più dense collassano più velocemente e la protostella diventa molto densa verso il centro. La velocità di caduta aumenta da zero al centro ad un massimo ad una certa distanza dal centro e diminuisce verso la superficie. Tipici valori delle velocità massime sono  $1\text{-}2 \text{ km sec}^{-1}$ , le quali sono supersoniche.

Lo svilupparsi di un debole gradiente di pressione impedisce alle velocità di

raggiungere il valore di caduta libera. Le regioni centrali via via più dense diventano sempre più opache alla radiazione da loro stesse emessa, parte della energia gravitazionale liberata viene trattenuta e riscalda il gas. Il tempo di collasso è sempre vicino al valore di caduta libera ed al crescere della densità diventa via via più breve fino ad essere confrontabile con il tempo necessario alla radiazione per diffondere verso l'esterno. Da questo momento il collasso diventa quasi *adiabatico*. Il gradiente di pressione aumenta fino al punto da superare la forza di gravità e le regioni centrali vengono decelerate. Si forma una piccola regione (o sfera) centrale dove si ha quasi equilibrio idrostatico.

Al continuare della compressione la temperatura cresce fino a circa 2000 K. L'idrogeno molecolare si dissocia ed assorbe pertanto gran parte dell'energia gravitazionale liberata. Ne segue che la regione più centrale della nube collassa ulteriormente fino a che tutte le molecole si sono dissociate ad una densità di  $10^{-2} \text{ g cm}^{-3}$  e temperatura di  $3 \times 10^4 \text{ K}$ . Il collasso viene decelerato una seconda volta e si forma un nucleo in *equilibrio idrostatico*. La massa di questo nucleo è circa 0.1% della massa totale della nube ma continua a crescere via via che materiale ulteriore cade su di esso.

Una volta che la nube incomincia riscaldarsi, la struttura della protostella è descritta dalle equazioni di conservazione del momento, continuità di massa, trasporto radiativo e bilancio energetico. quest'ultima con  $\epsilon_n = 0$ , assieme all'equazione di stato di un gas perfetto.

Particolari accorgimenti numerici sono necessari per descrivere il fronte d'urto che si forma al bordo del nucleo quando incomincia la *fase di accrescimento*.

Il materiale a bassa densità all'esterno del nucleo cade su questo a velocità supersoniche, passa attraverso il fronte d'urto, decelera rapidamente e si sistema sul nucleo in quasi equilibrio idrostatico.

La maggior parte dell'energia cinetica di caduta è convertita in calore sotto il fronte d'urto e da qui viene irradiata attraverso il materiale sovrastante in caduta. La luminosità generata in questo modo è

$$L = \frac{GM_c}{R_c} \dot{M} \quad (23.6)$$

dove  $M_c$  ed  $R_c$  sono la massa e il raggio del nucleo, mentre  $\dot{M}$  è il tasso di accrescimento di materia sul nucleo in  $\text{g sec}^{-1}$ .





Figura 23.1: Tracce evolutive di protostelle di  $1M_{\odot}$  durante la fase collasso e confronto con i dati per le stelle T-Tauri

Questa energia è trasmessa attraverso gli strati esterni, detti involucro, ed emerge alla superficie della nube di polvere sotto forma di radiazione infrarossa. La temperatura alla superficie osservabile sale da circa 100 K all'inizio della fase di accrescimento a circa 3000 K quando quasi tutto l'involucro è caduto verso il nucleo centrale.

Il tempo necessario al completamento di questa fase è tipicamente il tempo di caduta degli strati più esterni e cioè  $10^5 - 10^6$  anni, a seconda del valore iniziale della densità.

Anche il raggio finale  $R_f$  della stella quando raggiunge la condizione di equilibrio dipende dalla densità iniziale. Ad esempio i calcoli numerici mostrano che  $1 M_{\odot}$  ha  $R_f = R_{\odot}$  per densità iniziale di  $10^{-19} \text{ g cm}^{-3}$ , e  $R_f = 6 R_{\odot}$  per densità iniziale di  $10^{-16} \text{ g cm}^{-3}$ .

La Figura 23.1 mostra alcune possibili tracce evolutive nel diagramma HR di protostelle. Il confronto con i dati osservativi per una categoria di stelle ritenute in formazione come le T-Tauri (i punti in Figura 23.1) mostra che i valori delle densità iniziali citati in precedenza sono plausibili.

### 23.3 Fase di Contrazione in Presequenza

Quando la temperatura interna supera i  $10^5$  K e l'idrogeno è essenzialmente tutto ionizzato, la stella raggiunge finalmente la condizione di equilibrio idrostatico in cui le forze di pressione sviluppate dal gas perfetto bilanciano la forza di gravità.

La luminosità della stella è fornita dalla lenta contrazione gravitazionale che avviene attraverso una successione di stati di equilibrio. Il teorema del viriale mostra che metà dell'energia gravitazionale rilasciata viene irradiata mentre l'altra metà va in aumento della energia interna del gas (almeno fintanto che vale l'equazione di gas perfetto).

Lo studio dei modelli stellari nella fase di lenta contrazione verso la sequenza principale si basa sull'uso delle quattro equazioni fondamentali assieme alle relazioni per l'energia, l'opacità e l'equazione di stato. Tracce evolutive per diversi valori della massa sono mostrate in Figura 23.2.

Il momento in cui una stella è osservabile su una di queste tracce dipende dalle condizioni iniziali nella fase precedente di protostella, la quale può essere trascurata. I risultati dei calcoli di modelli evolutivi indicano che le stelle prima passano attraverso una fase totalmente convettiva (parte verticale della traccia) e poi attraverso una fase radiativa (parte relativamente orizzontale della traccia). L'importanza relativa delle due fasi dipende dalla massa.

Durante la fase totalmente convettiva la stella viene completamente omogeneizzata. Il trasporto convettivo dell'energia è efficiente, ed il tasso di perdita di energia dalla superficie è controllato da uno sottile strato radiativo superficiale. In queste zone l'opacità è una funzione rapidamente crescente di  $T$  e pertanto la stella è in grado di aggiustare le condizioni alla superficie mediante piccole variazioni della  $T_{eff}$ . Al diminuire dell'area superficiale a causa della contrazione globale, la luminosità diminuisce mentre la  $T_{eff}$  rimane confinata fra 3000 e 4000K.

Al procedere della contrazione, la temperatura interna cresce mentre l'opacità (governata da una legge simile a quella di Kramers) diminuisce. Gradualmente a causa della diminuzione di  $L$  e di  $\kappa$ , la stella diventa sempre meno instabile alla convezione (si veda l'effetto di  $L$  e  $\kappa$  sul gradiente di temperatura radiativo). In tale modo un nucleo radiativo incomincia a formarsi nel centro.

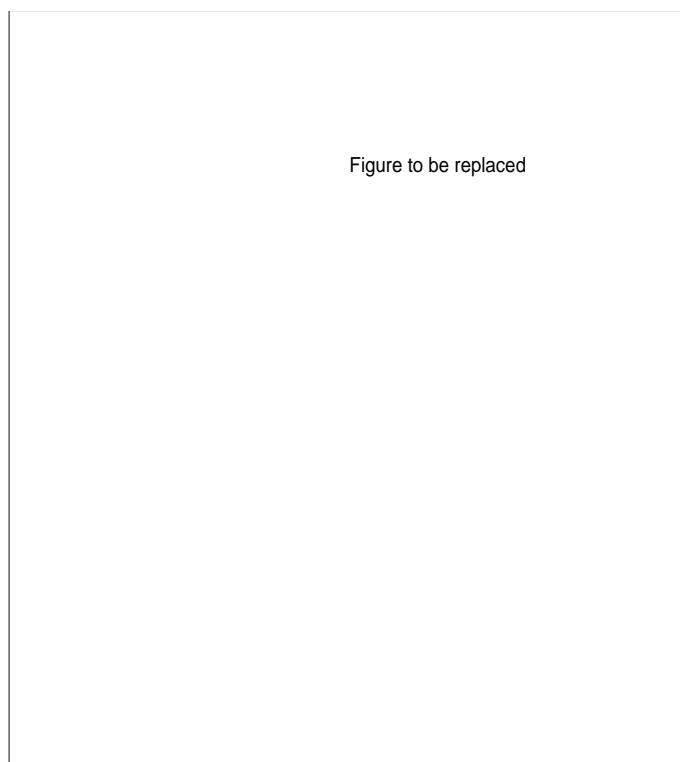


Figura 23.2: Tracce evolutive di stelle di massa diversa durante la fase idrostatica di presequenza. Si noti la porzione verticale lungo la linea di Hayashi (stella totalmente convettiva) e la porzione trasversale (stella con nucleo radiativo)

Quando circa il 75% della massa è racchiuso nella regione radiativa, il tasso di perdita di energia non è più controllato dal sottile strato superficiale, ma dall'opacità media della regione radiativa. In corrispondenza di ciò, la traccia rapidamente piega a luminosità debolmente crescenti verso alte  $T_{eff}$  fino a raggiungere la sequenza principale dove si accende il bruciamento dell'idrogeno nel centro.

La transizione dal regime convettivo a quello radiativo dipende dalla massa della stella.

Le stelle massicce sviluppano ben presto il nucleo radiativo. Questo è essenzialmente dovuto alla temperatura interna relativamente elevata e conseguente bassa opacità. La struttura della stella è quasi totalmente radiativa ad esclusione di una sottile regione esterna in coincidenza della zona di ionizzazione degli elementi che rimane convettiva. I tempi di contrazione sono brevi e, dato che la luminosità rimane pressochè costante durante la fase radiativa, essi sono essenzialmente uguali al tempo di Kelvin-Helmholtz,  $t_{KH} = G M^2 / (RL)$ .

Tabella 23.2: Sommario dell'Evoluzione del Sole. *Note: (A) Inizio del collasso di protostella. (B) Formazione del nucleo stellare. (C) Il nucleo stellare contiene metà della massa. (D) Inizio della fase di contrazione quasi statica. (E) Minimo di luminosità lungo la linea di Hayashi. (F) Massimo di luminosità prima della sequenza principale. (G) Stadio di sequenza principale di età zero. (H) Sole attuale.*

Stadio	Durata (anni)	$T_{eff}$ (K)	$L/L_{\odot}$	$T_c$ (K)	$\rho_c$ g cm-3	$R/R_{\odot}$
A	0	10	1.0(e-4)	10	10(e-19)	2(e6)
B	3.0(e5)	10	1.0(e-4)	2(e4)	2(e-2)	2(e6)
C	7.0(e4)	300	26	8(e5)	0.25	2(e3)
D	8.0(e5)	4400	1.6	4(e6)	1.5	2.1
E	8.0(e6)	4400	0.5	6(e6)	11	1.6
F	1.6(e7)	5900	1.1	1.3(e7)	83	1.0
G	1.0(e7)	5700	0.7	1.4(e7)	90	0.87
H	4.6(e9)	5800	1.0	1.5(e7)	156	1.0

Una stella di  $1 M_{\odot}$  spende circa  $10^7$  anni nella porzione verticale della traccia (nota anche come linea di Hayashi) e circa  $2 \times 10^7$  anni nella parte radiativa. In questo caso la struttura della stella è lievemente diversa dalla precedente in quanto lo strato convettivo superficiale è molto più esteso in massa e sopravvive fino al raggiungimento della sequenza principale. Anche in queste stelle lo straterello radiativo superficiale rimane presente.

Finalmente stelle con massa inferiore a circa  $0.3 M_{\odot}$  arrivano in sequenza rimanendo totalmente convettive. In questo caso, poichè la luminosità decresce rapidamente durante la fase di contrazione,  $t_{KH}$  non è una buona approssimazione del tempo totale di contrazione. Infatti una stella di  $0.1 M_{\odot}$  impiega circa  $10^9$  anni per raggiungere la sequenza principale.

In Tabella 23.3 sono riassunte alcune grandezze fondamentali di una stella come il Sole dal momento del collasso della protostella a quello attuale.

Il confronto dei modelli di stelle in fase di presequenza con le osservazioni permette di dedurre un certo numero di conclusioni.

a) Le tracce teoriche mostrano che non possono esistere strutture in equilibrio idrostatico con  $T_{eff}$  inferiori a  $2500 - 3000K$  in accordo con i dati osservativi. Vedremo che anche le stelle evolute non possono oltrepassare questo limite in

$T_{eff}$ .

b) Durante la contrazione gravitazionale la temperatura interna delle stelle raggiunge valori sufficienti a distruggere elementi leggeri come  $^2H$ ,  $Li$ ,  $Be$ ,  $B$  mediante reazioni con protoni ad esempio  $p + ^2H \rightarrow ^3He + \gamma$ . Di particolare interesse è il caso del  $Li$  il quale brucia a temperature attorno a  $2.8 \times 10^6$  K. Le stelle di piccola massa posseggono regioni convettive esterne che raggiungono durante la fase di contrazione strati dove la temperatura ha raggiunto il valore critico, mentre questo non è possibile per le stelle più massicce. Pertanto combinando l'effetto delle reazioni nucleari e del mescolamento convettivo esterno, si prevede che le stelle di piccola massa mostrino in sequenza principale delle abbondanze di  $Li$  inferiori a quelle osservate in stelle di massa più elevata. Il che è confermato dalle analisi delle abbondanze chimiche negli spettri di queste stelle. Ragionamenti analoghi si applicano agli altri elementi ognuno dei quali possiede una diversa temperatura critica di bruciamento. Le abbondanze degli elementi leggeri possono dunque essere utilizzate come sonde della struttura interna delle stelle.

c) Le stelle più giovani, note come T-Tauri, hanno abbondanze di  $Li$  elevate, sono associate a nubi molecolari oscure dove sta avvenendo la formazione stellare, mostrano delle variazioni irregolari in luminosità ed infine hanno evidenza di perdita di massa ad un tasso maggiore di quello osservato in stelle della sequenza principale. Tutte queste caratteristiche stanno ad indicare formazione recente. Infine le stelle T-Tauri si collocano nel diagramma H-R lungo le linee di Hayashi di modelli con massa fra 0.5 e  $2 M_{\odot}$ .

d) Il diagramma H-R degli ammassi stellari giovani può essere confrontato con le linee di uguale età (isocrone) deducibili dalle tracce evolutive mostrate in Figura 23.2. Il risultato indica che esiste una notevole dispersione delle osservazioni attorno ad una data isocrona suggerendo che la formazione delle stelle ha avuto luogo in maniera continua durante un intervallo di tempo di circa  $10^7$  anni.



## Capitolo 24

# FORMAZIONE STELLARE

### 24.1 Criterio di Jeans e Frammentazione

#### **Mezzo omogeneo e infinito a simmetria piano-parallela.**

Si consideri un gas omogeneo e di estensione infinita dove densità e temperatura sono costanti ovunque. È necessario chiarire sin dall'inizio che un tale sistema non è in una precisa condizione di equilibrio. Infatti, per ragioni di simmetria il potenziale gravitazionale  $\Phi$  deve essere costante. Ciò significa che grazie alla equazione di Poisson

$$\nabla^2 \Phi = 4\pi G \rho \quad (24.1)$$

la densità deve pure essere nulla ovunque ( $\rho = 0$ ). Nonostante tale apparente contraddizione, insistiamo ne supporre che il mezzo abbia densità non nulla e costante.

Se applichiamo delle perturbazioni di tipo periodico e di piccola lunghezza d'onda, ogni singola perturbazione si comporta come se fosse dentro una sfera isoterma in equilibrio idrostatico.

Il gas obbedisce all'equazione del moto dell'idrodinamica (equazione di Eulero)

$$\frac{\partial \bar{v}}{\partial t} + (\bar{v} \cdot \bar{\nabla}) \bar{v} + \frac{1}{\rho} \bar{\nabla} P + \bar{\nabla} \Phi = 0 \quad (24.2)$$

assieme a quella di continuità

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \bar{v} \bar{\nabla} \rho + \rho \bar{\nabla} \cdot \bar{v} = 0 \quad (24.3)$$

e all' equazione di Poisson

$$\bar{\nabla}^2 \Phi = 4\pi G \rho \quad (24.4)$$

e all' equazione di stato

$$P = \frac{k}{\mu H} \rho T = v_s^2 \rho \quad (24.5)$$

dove  $v_s$  è la velocità del suono. All' equilibrio assumiamo  $\rho = \rho_0 = \text{cost}$ ,  $T = T_0 = \text{cost}$  e  $v_0 = 0$ . Il potenziale  $\Phi_0$  può essere determinato dalla equazione di Poisson per i valori di equilibrio e le condizioni al contorno all' infinito.

Applichiamo la perturbazione

$$\rho = \rho_0 + \rho_1 \quad P = P_0 + P_1 \quad \Phi = \Phi_0 + \Phi_1 \quad \bar{v} = \bar{v}_1. \quad (24.6)$$

Assumiamo che le perturbazioni siano isoterme ( $v_s$  non cambia) ed ignoriamo i termini non lineari si trova

$$\frac{\partial \bar{v}_1}{\partial t} = -\bar{\nabla} \left( \Phi_1 + v_s^2 \frac{\rho_1}{\rho_0} \right) \quad (24.7)$$

$$\frac{\partial \rho_1}{\partial t} + \rho_0 \bar{\nabla} \cdot \bar{v}_1 = 0 \quad (24.8)$$

$$\bar{\nabla}^2 \Phi_1 = 4\pi G \rho_1 \quad (24.9)$$

Assumiamo che le soluzioni per le quantità perturbate siano tali che la parte spaziale e temporale dipendano da

$$e^{[i(kx + \omega t)]} \quad (24.10)$$

in modo da verificare le

$$\frac{\partial}{\partial x} = ik \quad \frac{\partial}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial z} = 0 \quad \frac{\partial}{\partial t} = i\omega \quad (24.11)$$

Ponendo  $v_{1x} = v_1$  e  $v_{1y} = v_{1z} = 0$  si trovano le relazioni

$$\omega v_1 + \frac{k v_s^2}{\rho_0} \rho_1 + k \Phi_1 = 0 \quad (24.12)$$



$$k\rho_0 v_1 + \omega\rho_1 = 0 \quad (24.13)$$

$$4\pi G\rho_1 + k^2\Phi_1 = 0 \quad (24.14)$$

Il sistema lineare e omogeneo nelle incognite  $v_1$ ,  $\rho_1$ ,  $\Phi_1$  ammette soluzioni se il suo determinante è nullo. Assumendo un numero d'onda  $k$  diverso da zero, si ottiene

$$\omega^2 = k^2 v_s^2 - 4\pi G\rho_0 \quad (24.15)$$

Per numeri d'onda grandi il membro di destra è positivo e  $\omega$  è reale. Le perturbazioni sono periodiche nel tempo. Poichè l'ampiezza non aumenta, l'equilibrio è stabile rispetto alle perturbazioni di piccola lunghezza d'onda. Al limite di  $k \rightarrow \infty$  si ottiene

$$\omega^2 = k^2 v_s^2 \quad (24.16)$$

che corrisponde alle onde sonore isoterme.

Se  $k^2 < 4\pi G\rho_0/v_s^2$ , allora  $\omega$  è della forma  $\pm i\xi$  dove  $\xi$  è reale. Pertanto esistono perturbazioni dipendenti da

$$e^{\pm \xi t} \quad (24.17)$$

che crescono esponenzialmente con il tempo. L'equilibrio è *instabile*.

Se definiamo un numero d'onda  $k_J$  ed una lunghezza d'onda  $\lambda_J$  caratteristici

$$k_J^2 = \frac{4\pi G\rho_0}{v_s^2} \quad \lambda_J = \frac{2\pi}{k_J} \quad (24.18)$$

le perturbazioni con  $k < k_J$  o  $\lambda > \lambda_J$  sono instabili.

La condizione di *instabilità* è dunque

$$\lambda > \lambda_J = \left( \frac{\pi}{G\rho_0} \right)^{1/2} v_s \quad (24.19)$$

Essa è nota come il **criterio di Jeans**.

Nel caso considerato il criterio di Jeans si interpreta nel seguente modo: a seguito di una compressione e prevalere della gravità strati piano-paralleli collassano a fogli sottili.

Possiamo stimare  $\omega$  dal solo termine gravitazionale della relazione (24.15), ottenendo  $i\omega \simeq (G\rho_0)^{1/2}$ . Da questo si può derivare la scala di tempo con cui avviene il fenomeno:  $\tau = (G\rho_0)^{-1/2}$  ovvero il tempo di caduta libera.

**Mezzo disomogeneo infinito a simmetria piano-parallela.**

Per ovviare alla contraddizione del caso precedente, consideriamo ora un mezzo (gas) in equilibrio idrostatico e stratificato lungo la direzione  $z$ . Il problema è ora unidimensionale lungo  $z$ . L'equazione di Poisson diventa

$$\frac{d^2\Phi_0}{dz^2} = 4\pi G\rho_0 \quad (24.20)$$

e la condizione di equilibrio idrostatico è

$$\frac{dP_0}{dz} = -\rho_0 \frac{d\Phi_0}{dz} \quad (24.21)$$

Questa può essere riformulata

$$v_s^2 \frac{d \ln \rho_0}{dz} = -\frac{d\Phi_0}{dz} \quad (24.22)$$

ovvero

$$\frac{d^2 \ln \rho_0}{dz^2} = -\frac{4\pi G}{v_s^2} \rho_0 \quad (24.23)$$

Usando la condizione al contorno che  $\rho_0 = 0$  per  $z = \pm\infty$  si ottiene la soluzione

$$\rho_0(z) = \frac{\rho_0(0)}{\cosh^2(z/H_*)} \quad (24.24)$$

con

$$H_* = \left( \frac{KT}{2\pi\mu HG\rho_0(0)} \right)^{1/2} = \frac{v_s}{[2\pi G\rho_0(0)]^{1/2}} \quad (24.25)$$

Per studiare la stabilità di questa configurazione, definiamo un sistema di coordinate cartesiane  $x, y$  nel piano perpendicolare all'asse  $z$  e consideriamo perturbazioni aventi la dipendenza

$$\rho_1 \propto f(z) \exp[i(kx + \omega t)] \quad (24.26)$$

Poichè le perturbazioni non dipendono da  $y$ , in caso di instabilità il sistema collassa su strati con simmetria piano-parallela. Ripetendo gli argomenti fatti

in precedenza si trova che esiste un numero d'onda critico delle perturbazioni  $k_J$

$$k_J = \frac{1}{H_*} = \frac{[2\pi g \rho_0(0)]^{1/2}}{v_s} \quad (24.27)$$

al di sotto del quale si ha instabilità. Il risultato è molto simile a quanto trovato nel caso precedente con differenze dovute alla sola geometria.

Nel caso di equilibrio idrostatico, la forza dovuta al gradiente di pressione bilancia esattamente quella gravitazionale. In generale, questo perfetto equilibrio viene disturbato dalla compressione. Quando solo una piccola quantità di gas viene compressa, l'aumento di pressione è maggiore dell'aumento della gravità ed il sistema è spinto indietro verso la situazione di equilibrio. Al contrario, quando grandi quantità di gas vengono compresse, l'aumento della forza gravitazionale può essere maggiore dell'aumento delle forze di pressione obbligando il gas compresso verso ulteriore compressione.

### **Sfera confinata da un mezzo a pressione non nulla.**

L'intero ragionamento può essere esteso al caso di una sfera isoterma di gas perfetto immersa in un mezzo con pressione  $P^* > 0$ .

La struttura della sfera isoterma viene ricavata dalla soluzione dell'equazione di Emden troncata al raggio dove  $P = P^*$ .

La sfera ha massa  $M$ , raggio  $R$ , energia interna  $U_i = c_V M T$  ed energia gravitazionale  $\Omega = q \cdot G M^2 / R$  (dove  $q \simeq 1$ ). Usando il teorema del Viriale si può ottenere la pressione  $P_0$  alla superficie

$$P_0 = \frac{c_V M T}{2\pi R^3} - \frac{q G M^2}{4\pi R^4} \quad (24.28)$$

Il primo termine è l'energia interna che tende ad espandere la sfera. Il secondo termine è dovuto alla gravità che tende a contrarre la sfera.

Discutiamo ora come  $P_0$  varia con  $R$  mantenendo  $M$ ,  $T$  e  $q$  costanti. Per piccoli  $R$  il valore di  $P_0$  è negativo. Esso cambia segno al crescere di  $R$  e diventa nullo per  $R \rightarrow \infty$ .  $P_0$  ha un massimo a  $R = R_m$  che può essere derivato differenziando la relazione di cui sopra. Si trova

$$R_m = \frac{4q}{9} \frac{G \mu H}{K} \frac{M}{T} \quad (24.29)$$

Supponiamo la sfera in equilibrio con il mezzo circostante:  $P = P_0$ . Per  $R < R_m$ , la pressione  $P_0$  alla superficie diminuisce al decrescere di  $R$ . Pertanto a causa di una compressione  $P_0 < P^*$  e la sfera continuerà a comprimersi; essa è **instabile**. Per  $R > R_m$ , la pressione  $P_0$  aumenta con la compressione e la sfera si espanderà di nuovo all'equilibrio; essa è **stabile**. Abbiamo così ottenuto la instabilità di Jeans discussa in precedenza. Questo può essere verificato sostituendo nella (24.24) la massa  $M$  con  $4\pi r_m^3 \bar{\rho}/3$ . Si ottiene

$$R_m^2 = \frac{27}{16\pi q} \frac{KT}{G\mu H\bar{\rho}} \quad (24.30)$$

La corrispondente lunghezza d'onda di Jeans è

$$\lambda_J^2 = \frac{\pi KT}{G\mu H\bar{\rho}} \quad (24.31)$$

Ovviamente ad ogni stato di equilibrio sarà associata una massa detta *massa di Jeans*  $M_J$ . Masse maggiori di  $M_J$  sono gravitazionalmente instabili. Se vengono lievemente compresse esse collassano. La massa di Jeans è

$$M_J = \frac{4\pi}{3} \bar{\rho} R_m^3 = \frac{27}{16} \left(\frac{3}{\pi}\right)^{1/2} \left(\frac{K}{GHq}\right)^{3/2} \left(\frac{T}{\mu}\right)^{3/2} \left(\frac{1}{\bar{\rho}}\right)^{1/2} \quad (24.32)$$

da questa si deriva la tipica espressione per  $M_J$

$$M_J = 1.2 \times 10^5 M_\odot \left(\frac{T}{100 \text{ K}}\right)^{3/2} \left(\frac{\rho}{10^{-24} \text{ g cm}^{-3}}\right)^{-1/2} \mu^{-3/2} \quad (24.33)$$

Usando valori per  $\rho = 10^{-24} \text{ g cm}^{-3}$ ,  $T = 100 \text{ K}$  e  $\mu = 1$ , la massa  $M_J = 10^5 M_\odot$ . Il tempo scala del collasso è  $\tau \simeq (G\rho)^{-1/2}$ . Con la densità adottata in precedenza  $\tau \simeq 10^8$  anni.

*Da queste considerazioni sembra che solamente masse molto maggiori delle tipiche masse stellari possano collassare.*

Il tempo scala di collasso è più lungo del tempo necessario all'aggiustamento termico del gas quando esso è otticamente sottile. Una stima di quest'ultimo tempo (energia interna divisa per la energia persa per irraggiamento) mostra che  $\tau_{adj} \simeq 100$  anni. Il collasso sembra poter avvenire in condizioni di aggiustamento termico (quasi isoterma). Tuttavia ciò non sarà sempre vero.

### Frammentazione

La formazione stellare è ancora oggi uno dei problemi dell'astrofisica fra i meno conosciuti. La spiegazione corrente è che una nuvola di gas con massa superiore a  $M_J$  collassi subendo il processo di *frammentazione*. In altre parole mentre la nube collassa parti di essa diventano instabili e collassano più rapidamente della nube madre. In realtà il problema non è così semplice. Infatti se una nube collassa isotermamente,  $M_J$  diminuisce con  $\rho^{-1/2}$ . Al contrario se la nube collassasse adiabaticamente per un gas monoatomico avremmo  $\nabla_A = 2/5$  ovvero  $T \propto P^{2/5}$  e grazie all'equazione di stato la temperatura cambierebbe come  $T \propto \rho^{2/3}$  e da questo  $M_J \propto \rho^{1/2}$ . Pertanto durante il collasso adiabatico la massa di Jeans aumenterebbe. Tuttavia abbiamo visto che  $\tau_{adj} \ll \tau_{ff}$ . Si può pertanto ritenere che il collasso avvenga in maniera isoterma piuttosto che adiabatica. In questo caso  $M_J$  diminuisce durante il collasso cosicché masse sempre più piccole possono diventare instabili (*frammentazione*). È facile prevedere che la situazione non può durare all'infinito perché si raggiungerà uno stadio in cui  $\tau_{adj} \simeq \tau_{ff}$  ed il collasso isoterma non può più esistere. In questo contesto è importante comprendere come possano agire i processi di irraggiamento da parte di una nuvola di gas in fase di collasso. Un'idea della quantità totale di energia irraggiata ci è data dall'energia gravitazionale dei frammenti mentre il tasso di irraggiamento è dato dal rapporto di questa energia e il tempo di  $\tau_{ff}$ . Pertanto affinché in una nube collassante i frammenti si mantengano alla temperatura  $T$  deve essere irradiata energia al tasso di

$$A = \frac{GM^2}{R}(G\rho)^{1/2} = \left(\frac{3}{4\pi}\right)^{1/2} \frac{G^{3/2}M^{5/2}}{r^{5/2}} \quad (24.34)$$

dove  $M$  e  $R$  sono massa e raggio dei frammenti. Ma i frammenti alla temperatura  $T$  non possono irradiare più di un corpo nero alla stessa temperatura. Pertanto il tasso di perdita di energia radiativa del frammento è

$$B = 4\pi f \sigma T^4 R^2 \quad (24.35)$$

dove  $\sigma$  è la costante di Stefan-Boltzmann e  $f < 1$ . Affinché il collasso sia isoterma deve essere  $B \gg A$  e ciò è vero quando

$$M^5 = \frac{64\pi^3}{3} \frac{\sigma^2 f^2 T^8 R^9}{G^3} \quad (24.36)$$

Si assume che la frammentazione cessi quando  $M_J \simeq M$ . Pertanto sostituendo nella relazione (24.36)  $M$  con  $M_J$  e  $R$  con

$$R = \left(\frac{3}{4\pi}\right)^{1/3} \frac{M_J^{1/3}}{\rho^{1/3}} \quad (24.37)$$

ed eliminando  $\rho$  con l'aiuto di (24.33), si ottiene

$$M_J = \left(\frac{\pi^9}{9}\right)^{1/4} \frac{1}{(\sigma G^3)^{1/2}} \left(\frac{K}{\mu H}\right)^{9/4} f^{-1/2} T^{1/4} \quad (24.38)$$

ovvero

$$M_J = 3.86 \times 10^{31} f^{-1/2} T^{1/4} = 0.02 M_\odot f^{-1/2} T^{1/4} \quad (24.39)$$

dove  $\mu = 1$ . Assumendo  $T \simeq 1000^\circ K$  e  $f = 0.1$  si ottiene  $M_J \simeq 1/3 M_\odot$ . La frammentazione sembra cessare quando sono raggiunte masse dell'ordine della massa solare.

## 24.2 Formazione di protostelle

Il criterio di Jeans presentato in precedenza deriva dalla teoria perturbativa arrestata al primo ordine e dà le condizioni affinché le perturbazioni apportate ad uno stato di equilibrio possano crescere in maniera esponenziale. La teoria lineare non dà tuttavia indicazioni nè sulla struttura in pieno regime di collasso nè sul risultato finale. la risposta a tali quesiti può venire solo da perturbazioni seguite nel cosiddetto regime di non linearità. In quanto segue presenteremo una descrizione del problema ultra-semplificata.

### Collasso di una sfera omogenea in caduta libera.

Si consideri una sfera omogenea di gas con raggio  $R$  e massa  $M$  maggiore della massa di Jeans. La sfera è pertanto soggetta al collasso gravitazionale. A causa di questo la gravità aumenta più rapidamente del gradiente di pressione. In simmetria sferica l'accelerazione gravitazionale e quella dovuta al gradiente di pressione sono date da

$$\frac{GM}{R^2} \quad \text{e} \quad \left| \frac{1}{\rho} \frac{dP}{dr} \right| \simeq \frac{P}{\rho R} \simeq \frac{K}{\mu H} \frac{T}{R} \quad (24.40)$$

Il rapporto fra forza gravitazionale e gradiente di pressione varia come  $\simeq M/(RT)$ , il quale durante il collasso cresce come  $1/R$ .

Il collasso di una sfera omogena può essere studiato analiticamente. Trascu-  
rando il gradiente di pressione, l'equazione del moto diventa

$$\ddot{r} = -\frac{GM(r)}{r^2} \quad (24.41)$$

Sostituiamo ora  $M(r)$  con  $4\pi\rho_0 r_0^3/3$ , dove i valori si riferiscono all'inizio del  
collasso (per definizione  $\rho_0 = 0$ ) ed integriamo rispetto al tempo ottenendo

$$\frac{1}{2}\dot{r}^2 = \frac{4\pi r_0^3}{3r} G\rho_0 + cost \quad (24.42)$$

La costante di integrazione è fissata imponendo che per  $t = 0$  e  $r = r_0$  sia  $\dot{r} = 0$ .  
Si ottiene

$$\frac{\dot{r}}{r_0} = \pm \left[ \frac{8\pi G}{3} \rho_0 \left( \frac{r_0}{r} - 1 \right) \right]^{1/2} \quad (24.43)$$

Affinchè  $r$  sia reale, il raggio corrente  $r$  deve sempre essere minore di  $r_0$ , ovvero  
deve essere considerato solo il caso con segno negativo. Introduciamo ora vari-  
abile ausiliaria  $\zeta$  definita da

$$\cos^2 \zeta = \frac{r}{r_0} \quad (24.44)$$

e da questa le relazioni

$$\frac{\dot{r}}{r_0} = -2\dot{\zeta} \cos \zeta \sin \zeta \quad \frac{r_0}{r} - 1 = \frac{\sin^2 \zeta}{\cos^2 \zeta} \quad (24.45)$$

Con l' aiuto delle precedenti relazioni, l'equazione (24.43) dà

$$2\dot{\zeta} \cos^2 \zeta = \left( \frac{8\pi G \rho_0}{3} \right)^{1/2} \quad (24.46)$$

Grazie all'identità (facilmente verificabile)

$$2\zeta \cos^2 \zeta = \frac{d}{dt} \left( \zeta + \frac{1}{2} \sin 2\zeta \right) \quad (24.47)$$

possiamo scrivere la relazione (24.46) come

$$\zeta + \frac{1}{2} \sin 2\zeta = \left( \frac{8\pi G \rho_0}{3} \right)^{1/2} t \quad (24.48)$$

dove la costante di integrazione è fissata imponendo che l'inizio del collasso  
(quando  $r = r_0$ ,  $\zeta = 0$ ) coincida con  $t = 0$ .

In questa relazione non compare più  $r_0$  e  $\rho_0 = \text{cost.}$  Pertanto la soluzione  $\zeta(t)$  è la stessa per tutte le corone sferiche. Ciò significa che la sfera sta subendo una *contrazione omologa*. Poichè  $\dot{r}/r_0$  non dipende da  $r_0$ , la variazione relativa della densità è indipendente da  $r_0$ . *La sfera inizialmente omogenea rimane omogenea.* Il tempo necessario a raggiungere il centro è chiamato tempo di caduta libera *free-fall*

$$t_{ff} = \left( \frac{3\pi}{32G\rho_0} \right)^{1/2} \quad (24.49)$$

Esso è lo stesso per tutte le corone sferiche. Per  $\rho_0 = 4 \times 10^{-23} \text{ gm/cm}^3$  (tipico di una nube iniziale)  $t_{ff} = 10^7$  anni.

Naturalmente prima di raggiungere il centro la pressione diventa importante poichè il gas diventa opaco e la  $T$  cresce. L'approssimazione di caduta libera non è più valida ed il collasso deve essere fermato.

#### **Collasso su un oggetto condensato.**

Quando l'oggetto in collasso diventa opaco alla radiazione, esso incomincia a riscaldarsi e ciò avviene più facilmente nel centro che vicino alla superficie. Il collasso si arresta prima nelle regioni centrali. Allo scopo di studiare questo problema consideriamo un nucleo di massa  $M$  e raggio  $R$  già formato nel quale si sia stabilito l'equilibrio idrostatico e sul quale continui a collassare gas in caduta libera ed in regime stazionario con velocità  $v$ .

Supponiamo per semplicità che il nucleo sia circondato da un serbatoio infinito di gas dal quale la materia fluisce al tasso di

$$\dot{M} = 4\pi r^2 \rho v \quad (24.50)$$

costante nel tempo e nello spazio. Differenziando tale relazione rispetto a  $r$  si ottiene l'equazione di continuità

$$\frac{2}{r} + \frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{dr} + \frac{1}{v} \frac{dv}{dr} = 0 \quad (24.51)$$

Se per la velocità prendiamo quella di caduta libera

$$v = v_{ff} = \left[ \frac{GM}{2r} \right]^{1/2} \quad (24.52)$$

e assumiamo che  $M \simeq \text{costante}$ , si trova



$$\frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{dr} = -\frac{3}{2r} \quad (24.53)$$

ovvero

$$\rho(r) = \frac{\text{costante}}{r^{3/2}} \quad (24.54)$$

Se  $R$  è il raggio del nucleo, allora al momento dell'impatto la materia in caduta libera ha la velocità

$$v_{ff} = \left(\frac{GM}{2R}\right)^{1/2} \quad (24.55)$$

Il gas caduto sul nucleo si ferma alla sua superficie. L'energia cinetica è trasformata in calore, parte del quale riscalda il nucleo e il resto viene irradiato. Trascurando (per il momento) il riscaldamento del nucleo, la perdita di energia radiativa è data da

$$L_{accr} = \frac{1}{2} v_{ff}^2(R) \dot{M} = \frac{1}{4} \frac{GM}{R} \dot{M} \quad (24.56)$$

$L_{accr}$  è chiamata la *luminosità da accrescimento*. Poichè abbiamo assunto per la soluzione stazionaria che  $M$  sia costante nella espressione per  $v_{ff}$ , la relazione (24.56) è valida solo se il tempo di accrescimento è lungo rispetto al tempo di free-fall

$$\tau_{accr} = \frac{M}{\dot{M}} \gg \tau_{ff} \quad (24.57)$$

### Modelli numerici di collasso.

Il collasso di una nube viene seguito numericamente con l'aiuto di sofisticate tecniche numeriche.

Le equazioni da risolvere sono quelle di continuità

$$\frac{\partial M(r)}{\partial t} + 4\pi r^2 \rho v = 0 \quad (24.58)$$

di conservazione del momento

$$\frac{\partial v}{\partial t} + v \frac{\partial v}{\partial r} + \frac{GM}{r^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial r} = 0 \quad (24.59)$$

di conservazione dell' energia

$$\frac{\partial u}{\partial t} + P \frac{\partial}{\partial t} \frac{1}{\rho} + v \left[ \frac{\partial u}{\partial r} + P \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{1}{\rho} \right) \right] + \frac{1}{4\pi\rho r^2} \frac{\partial L(r)}{\partial r} = 0 \quad (24.60)$$

dove  $u$  è l'energia interna per unità di massa. Inoltre abbiamo

$$\frac{\partial M(r)}{\partial r} = 4\pi r^2 \rho \quad (24.61)$$

Finalmente abbiamo bisogno di una equazione che descriva il trasporto dell'energia.

Per questa'ultima si adotta l'equazione del trasporto radiativo

$$L(r) = - \frac{16\pi a c r^2}{3\kappa\rho} T^3 \left[ \frac{\partial T}{\partial r} \right] \quad (24.62)$$

A queste si aggiungono le relazioni di stato ed di opacità del materiale. Possibili condizioni al contorno sono la massa totale  $M$  ed il raggio totale iniziale  $R$  che può essere preso costante nel tempo assieme alla  $V(R, t = 0) = 0$ .

I risultati di modelli complessi durante la fase iniziale fino al raggiungimento della condizione di equilibrio idrostatico sono già stati illustrati nel capitolo 17.

## Capitolo 25

# IL LIMITE DI HAYASHI

In questo capitolo esamineremo il caso di stelle *totalmente convettive*, cioè stelle che sono convettive dal centro fino alla fotosfera e solo l'atmosfera è radiativa.

La **linea di Hayashi** è definita come il luogo nel diagramma HR di stelle totalmente convettive con massa e composizione chimica assegnate. Si noti che per ogni massa e/o composizione chimica esiste una linea di Hayashi diversa. Queste linee sono collocate alla destra del diagramma HR tipicamente con  $T_{eff} \simeq 3000...5000 \text{ }^\circ K$  e sono molto ripide, in gran parte quasi verticali.

Dalla definizione non si può subito comprendere l'importanza di questa linea. La linea di Hayashi rappresenta innanzi tutto un limite di separazione fra regioni *permesse* alla sua sinistra e *vietate* alla sua destra per tutte le stelle di data  $M$  e  $\mu$  ammesso che esse siano in equilibrio idrostatico ed abbiano la convezione ben sviluppata. Quest'ultima affermazione significa che ad ogni istante gli elementi convettivi hanno le proprietà dettate dalla Mixing Length Theory. I possibili cambiamenti della struttura stellare devono avvenire su una scala di tempo lungo rispetto a quella tipica della convezione di guisa che la convezione possa adattarsi alle nuove condizioni. Poichè sia l'equilibrio idrostatico che la convezione hanno scale di tempo molto piccole rispetto ad ogni altra scala temporale evolutiva, le stelle possono sopravvivere a destra della linea di Hayashi solo per tempi molto piccoli.

La linea di Hayashi coincide con il percorso evolutivo delle stelle appena formate prima di raggiungere la sequenza principale e dalle stelle molto evolute. In buona approssimazione possiamo dire che la quasi totalità della vita di una stella è confinata tra questi due luoghi: linea di Hayashi e Sequenza Principale.

### 25.1 Luminosità delle stelle totalmente convettive

Incominciamo con l'esaminare il modo diverso con cui la luminosità si si lega ai gradienti di temperatura e pressione in regioni radiative e convettive.

Nelle zone radiative di una stella, la luminosità è legata ai gradienti di temperatura e pressione mediante la nota relazione (*radiativa*)

$$L(r)_R = K'_R \nabla \quad (25.1)$$

dove

$$\nabla = \frac{d \ln T}{d \ln P} \quad K'_R = \frac{16 \pi a c G}{3} \frac{T^4 M(r)}{\kappa P} \quad (25.2)$$

Data la stratificazione in  $P$  e  $T$ , la luminosità radiativa è determinata.

Nelle regioni convettive, in cui il trasporto di energia è effettuato dagli elementi di fluido in moto adiabatico secondo la visione della Mixing Length Theory, la luminosità è data data

$$L(r)_C = K'_C (\nabla - \nabla_A)^{3/2} \quad K'_C = \frac{\pi}{\sqrt{2}} \left( \frac{\Lambda}{H_p} \right) r^2 c_p T (\rho P \delta)^{1/2} \quad (25.3)$$

dove i simboli hanno il loro significato usuale. In linea di principio, si può sempre pensare che data la stratificazione in  $P$  e  $T$ , la luminosità *convettiva* sia determinata. In pratica ciò non è possibile in quanto sarebbe necessario conoscere il valore di  $\nabla$  con estrema precisione. La ragione sta nel fatto che la luminosità convettiva non è proporzionale al gradiente  $\nabla$ , ma ad una potenza dell'eccesso di questo rispetto al valore adiabatico  $(\nabla - \nabla_A)$ , differenza che può essere estremamente piccola ( $10^{-7}$ ) quando la convezione è molto efficiente. Pertanto la conduttività convettiva  $K'_C$  deve essere molto grande per trasportare grandi luminosità. Questo implica che di fatto la luminosità in regioni convettive è disaccoppiata dalla struttura  $P$ - $T$ . Infatti grazie a questo fatto si è semplificato il problema assumendo che il gradiente di temperatura sia quello adiabatico e lasciata da parte la relazione luminosità-gradiente.

In una stella totalmente convettiva, la luminosità è regolata dall'unica regione radiativa esistente e cioè l'atmosfera ed uno strato sottostante dove la convezione non è efficiente (fortemente super-adiabatica). Ciò porta all'affermazione che la luminosità di una stella totalmente convettiva è regolata dalla sua atmosfera.

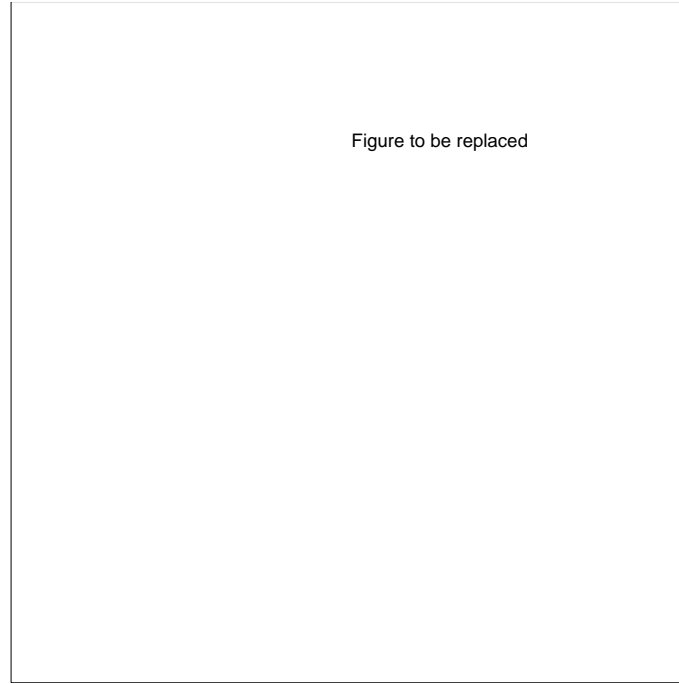


Figura 25.1: Diagramma pressione - temperatura che mostra il raccordo fra soluzioni interne (linee continue) e soluzioni atmosferiche (linee tratteggiate) per diversi valori del raggio  $R_i$ . Le intersezioni (punti) corrispondono alla linea di Hayashi nel diagramma H-R

Naturalmente, atteso che la luminosità è prodotta nelle regioni interne, è forse più corretto dire che gli strati superficiali si aggiustano in modo tale da essere compatibili con la luminosità fluente dall'interno.

## 25.2 Descrizione semplice della linea di Hayashi

Assumiamo che la condizione di stratificazione adiabatica (quasi) in temperatura e pressione che si realizza nelle regioni convettive valga sull'intera stella (anche quelle regioni dove sappiamo esistere la condizione di super-adiabaticità). Inoltre assumiamo che  $\nabla_A$  sia costante lungo l'intera stella (sono qui ignorate le variazioni di  $\nabla_A$  nelle regioni di ionizzazione) ed assumiamo il valore tipico  $\nabla_A = 0.4$ .

Con queste ipotesi, l'intera stella (a parte l'atmosfera) obbedisce alla relazione

$$P = CT^{1+n} \quad (25.4)$$

cioè ad una relazione politropica con indice  $n = 1/\nabla_A - 1 = 3/2$ . La costante

$C$  è legata alla costante politropica  $K$ ; per un gas perfetto senza radiazione

$$C = K^{-n} \left( \frac{k}{H\mu} \right)^{1+n} \quad (25.5)$$

Non si confonda la costante di Boltzmann entro la parentesi con la costante politropica.

Le quantità  $C$  e  $K$  sono costanti dentro una stella ma variano da stella a stella.

Ciò implica che non abbiamo una relazione massa-raggio.

Dalle relazioni stabilite per i politropi in generale si deriva

$$K \propto \rho_c^{1/3} \alpha^{-2} \propto \rho_c^{1/3} R^2 \propto M^{1/3} R \quad (25.6)$$

cosicchè

$$C = C' R^{-3/2} M^{-1/2} \quad (25.7)$$

dove la costante  $C'$  è nota per dati  $n$  e  $\mu$ .

Assumiamo ora che la relazione politropica (25.4) si estenda fino alla fotosfera, cioè il luogo con profondità ottica  $\tau = 2/3$  dove valgono le relazioni

$$T_0 = T_{eff} \quad P = P_0 \quad r = R \quad M(r) = M \quad (25.8)$$

Sopra questa regione abbiamo un'atmosfera radiativa con una semplice legge di opacità di tipo Kramers

$$\kappa = \kappa_0 P^a T^b \quad (25.9)$$

Integrando l'equazione dell'equilibrio idrostatico lungo l'atmosfera si ottiene la pressione  $P_0$  alla fotosfera

$$P_0 = \text{cost} \left( \frac{M}{R^2} T_{eff}^{-b} \right)^{\frac{1}{a+1}} \quad (25.10)$$

Inseriamo questo valore nella soluzione per l'interno sostituendo  $P = P_0$  e  $T = T_{eff}$  nella relazione (25.4) ed eliminando  $P_0$  con l'aiuto della relazione (25.10). Assegnati i valori di  $M$  e  $\mu$  questo genera una relazione fra  $R$  e  $T_{eff}$  o fra  $R$  e  $L$  (si ricordi che  $L \propto R^2 T_{eff}^4$ ).

Così ad ogni valore di  $R$  corrisponde un punto nel diagramma HR:

(a) Le soluzioni interne formano una famiglia uni-parametrica, in quanto la costante  $C'$  contiene il parametro libero  $R$  per dati  $M$  e  $\mu$ . A ciò corrisponde nel diagramma HR l'esistenza di una famiglia uni-parametrica di punti che definiscono la linea di Hayashi.

La procedura di raccordo è illustrata nella Figura 25.1 Ogni soluzione interna è rappresentata in questo diagramma da una retta

$$\log T = 0.4 \log P + 0.4 \left( \frac{3}{2} \log R + \frac{1}{2} \log M - \log C' \right) \quad (25.11)$$

Per dati  $M$  e  $\mu$ , ognuna di queste linee è individuata da un certo raggio  $R$ .

(b) Le soluzioni per l'atmosfera sono ancora linee rette date da

$$(a+1) \log P_0 = \log M - 2 \log R - b \log T_{eff} + \text{costante}. \quad (25.12)$$

(c) L'intersezione di due linee delle due famiglie con lo stesso raggio fissa il valore di  $T_{eff}$  (e di  $P_0$ ). Da  $R$  e  $T_{eff}$  abbiamo la luminosità  $L$  cioè un punto in HR. La linea di Hayashi è dunque costituita dalla continua variazione di  $R$ .

Questo formalismo permette di dare una equazione per la linea di Hayashi nel diagramma HR

$$\log T_{eff} = A \log L + B \log M + \text{costante} \quad (25.13)$$

dove

$$A = \frac{0.75a - 0.25}{b + 5.5a + 1.5} \quad B = \frac{0.5a + 1.5}{b + 5.5a + 1.5} \quad (25.14)$$

La linea di Hayashi dipende dunque dai tipici valori di  $a$  e  $b$  nella legge di assorbimento atmosferico. Il processo principale di assorbimento è quello da  $H^-$  per temperature  $T \leq 5000^\circ K$ . Per questo si trova  $a = 1$  e  $b = 3$ , dai quali si deriva subito  $A = 0.05$   $B = 0.2$ .

La pendenza della linea di Hayashi ( $\partial L / \partial T_{eff} = 1/A$ ). Poichè  $A \ll 1$ , si conclude che la **linea di Hayashi è molto ripida**.

Dalla ( $B = \partial T_{eff} / \partial \log M$ ) si vede che la **linea di Hayashi si sposta lentamente verso sinistra al crescere di  $M$** .

Esaminiamo più da vicino le ragioni fisiche della ripida pendenza della linea di Hayashi. Alla fotosfera, la pressione della soluzione interna  $P_{0i}$  e la pressione della soluzione esterna  $P_{0a}$  variano in questo modo

$$P_{0i} = \frac{T_{eff}^{2.5}}{R^{3/2}} \qquad P_{0a} = \frac{T_{eff}^{-b/(a+1)}}{R^{2/(a+1)}} \qquad (25.15)$$

Innanzitutto ci aspettiamo una grande pendenza per valori piccoli e positivi di  $a$ . Infatti per  $a = 1/3$ ,  $P_{0i}$  e  $P_{0a}$  hanno la stessa dipendenza da  $R$ , per cui la  $T_{eff}$  non varierà con  $R$  (e con  $L$ ), e la linea di Hayashi sarà quasi verticale.

Nelle approssimazioni fatte si è supposto  $\nabla_A$  costante, si è ignorata la sua depressione in presenza della ionizzazione ed infine si è ignorata la presenza della regione di superadiabaticità. L'analisi corretta di questo problema mostra che l'estensione della zona di ionizzazione e di super-adiabaticità varia sistematicamente con la luminosità della stella. Si trova che il coefficiente  $A$  cambia segno attorno a  $L \simeq L_\odot$ . Esso è positivo per  $L < L_\odot$  e negativo per  $L > L_\odot$ . Di conseguenza la linea di Hayashi è convessa rispetto alla sequenza principale.

Inoltre la posizione esatta della linea di Hayashi dipende da tutte le incertezze associate alla teoria della Mixing Length (in particolare dal parametro di mixing length). La linea di Hayashi sarà tanto più spostata verso basse temperature effettive quanto più inefficiente è la convezione super-adiabatica (ovvero al decrescere del parametro di mixing length).

Infine, la posizione della linea di Hayashi dipende dal peso molecolare  $\mu$  in due modi. Nell'interno attraverso la costante  $C$  (o costante politropica  $K$ ); all'esterno attraverso l'opacità  $\kappa$ .

La Figura 25.2 mostra in forma schematica le linee di Hayashi di stelle di massa diversa e le corrispondenti luminosità limite.

### 25.3 Luminosità limite delle stelle totalmente convettive

Nel derivare la linea di Hayashi abbiamo considerato stelle totalmente convettive. Questo permette di usare la descrizione politropica che è disaccoppiata dai meccanismi di produzione e trasporto dell'energia. Non ci siamo chiesti infatti se la situazione fisica consenta di avere convezione sull'intera stella. Questo in realtà dipende dalla distribuzione delle sorgenti di energia.

In base al criterio di Schwarzschild una regione chimicamente omogenea è instabile alla convezione se



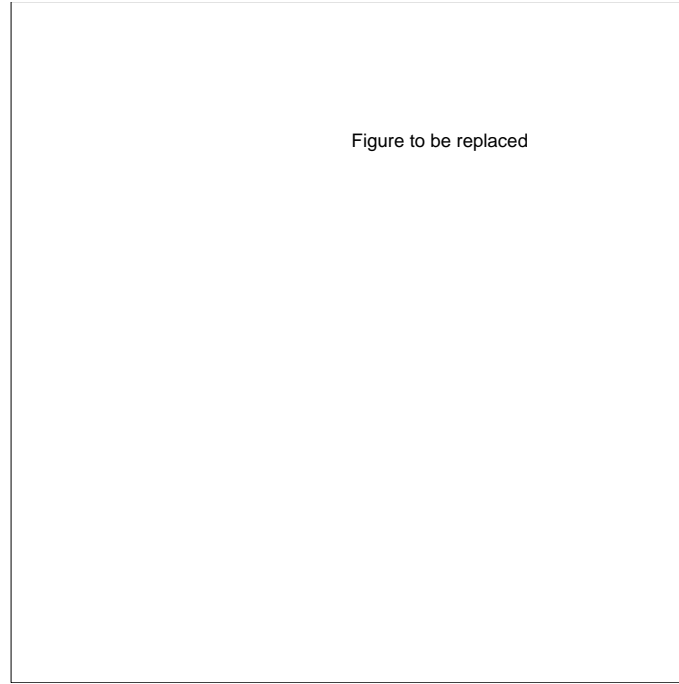


Figura 25.2: Regione del diagramma H-R occupata dalle stelle totalmente convettive, chimicamente omogenee, in contrazione gravitazionale. Le frecce indicano la direzione di evoluzione

$$\nabla_R \geq \nabla_A \quad (25.16)$$

dove

$$\nabla_R \propto \frac{\kappa L(r)P}{T^4 M(r)} \quad (25.17)$$

Se la distribuzione delle sorgenti energetiche fosse completamente arbitraria potremmo sceglierla in modo tale che la condizione (\*\*) sia violata da qualche parte con la conseguenza che la stella non possa essere totalmente convettiva. Ad esempio, se il nucleo centrale non ha sorgenti energetiche, allora  $L(r) = 0$  e  $\nabla_R = 0$ ; il nucleo deve essere radiativo. D'altra parte la migliore possibilità per avere stelle totalmente convettive è che la sorgente energetica sia concentrata nel centro, il che implica  $L(r) = L$  ovunque.

Una stella in fase di presequenza è in lenta contrazione gravitazionale e può essere assimilata ad un politropo in contrazione senza sorgenti nucleari e con la sorgente gravitazionale diffusa. Si può dimostrare facilmente che il termine di rilascio locale di energia gravitazionale per un gas monoatomico senza pressione

di radiazione è

$$\epsilon_g = -\frac{3}{5}c_P T \left( \frac{1}{R} \frac{dR}{dt} \right) \quad (25.18)$$

e cioè proporzionale alla temperatura, il che significa scarsa concentrazione spaziale. Con buona approssimazione possiamo assumere una sorgente costante di energia e cioè

$$\frac{L(r)}{M(r)} = \frac{L}{M} \quad (25.19)$$

Di nuovo assumiamo la legge di Kramers per l'opacità e  $\nabla = \nabla_A = 0.4$ . Dalla definizione di  $\nabla_R$  segue

$$\nabla_R \propto \frac{L}{M} C^{1+a} T^{b-4+2.5(1+a)} \quad (25.20)$$

Per tipici valori  $a = 1$  e  $b = -4.5$  si ottiene

$$\nabla_R \propto T^{-3.5} \quad (25.21)$$

In realtà per ogni ragionevole opacità nell'interno,  $\nabla_R$  ha un minimo al centro ed aumenta verso l'esterno. Pertanto il centro è il primo punto in una stella totalmente convettiva dove  $\nabla_R$  cade sotto  $\nabla_A$  (e la regione radiativa incomincia a svilupparsi) se la luminosità scende sotto un valore minimo  $L_{min}$ .

La costante  $C$  dipende da  $M$  e  $R$  e  $T \propto T_c \propto M/R$  per cui

$$\nabla_R \propto L M^{b-5+2(1+a)} R^{-b+4-4(1+a)} \quad (25.22)$$

Poniamo ancora una volta  $a = 1$  e  $b = -4.5$

$$\nabla_R \propto L M^{-5.5} R^{0.5} \quad (25.23)$$

Per modelli lungo la linea di Hayashi, la temperatura effettiva varia poco e pertanto possiamo assumere che  $R \propto L^{1/2}$ , da cui

$$\nabla_R \propto L^{1.25} M^{-5.5} \quad (25.24)$$

Per ogni valore di  $M$  la luminosità raggiunge  $L_{min}$  quando il valore centrale di  $\nabla_R$  scende a 0.4. Invertendo la relazione si ricava

$$L_{min} \propto M^{4.4} \quad (25.25)$$

La luminosità minima scende molto al diminuire della massa. Può infine accadere che per un certo valore di  $M$  la  $L_{min}$  coincida con il valore della luminosità sulla sequenza principale. La linea di Hayashi di questa massa interseca la sequenza principale. Ciò impone l'esistenza di un limite superiore alla massa di una stella, sotto il quale le stelle rimangono totalmente convettive anche in sequenza principale. Tale limite è circa  $0.3M_{\odot}$ . Stelle con massa maggiore sono totalmente convettive lungo la linea di Hayashi di loro competenza, lungo la quale si muovono in contrazione (luminosità decrescente) fino a raggiungere  $L_{min}(M)$  dopo di che sviluppano un nucleo radiativo nel centro muovendosi d'ora in avanti lungo una linea quasi orizzontale nel diagramma HR. Questa linea rappresenta il luogo di modelli con nucleo radiativo crescente ed involucri convettivi decrescenti.

Si noti infine che  $L_{min}$  dipende dal profilo energetico della stella.

## 25.4 Stelle vicine alla linea di Hayashi

Consideriamo ora stelle in equilibrio idrostatico vicine alla linea di Hayashi ma non esattamente su di essa. Ovviamente tali stelle non possono essere totalmente convettive con interno adiabatico. La loro struttura non è più un singolo politropo. Queste stelle non devono necessariamente essere chimicamente omogenee, in quanto la convezione le interessa solo per una parte. Studiare tali stelle è dunque più complesso. In quanto segue diamo una trattazione semplificata del problema.

Nel compiere l'integrazione verso il centro delle soluzioni di inviluppo di modelli con data  $M$ ,  $L$ ,  $\mu$  e diversa  $T_{eff}$  si trova che la regione radiativa viene raggiunta prima al crescere di  $T_{eff}$ . In altre parole le stelle che stanno alla sinistra della linea di Hayashi sviluppano una regione radiativa centrale, dove  $\nabla_R < \nabla_A$  per cui il valore medio del gradiente sarà  $\bar{\nabla} < \nabla_A$ . Sulla linea di Hayashi  $\bar{\nabla} = \nabla_A$ . Questo suggerisce che alla destra della linea di Hayashi sia  $\bar{\nabla} > \nabla_A$ .

Al fine di provare questa asserzione, consideriamo tre modelli con gradiente  $\nabla = \bar{\nabla}$  costante e variamo  $\bar{\nabla}$  attorno a  $\nabla_A$ . Questo ci darà dei politropi con diverso indice  $n$  (attorno  $n = 3/2$ ). La soluzione interna è del tipo

$$P = C_n T^{1+n} \quad (25.26)$$

dove  $\bar{\nabla} = (1+n)^{-1}$  ed in analogia col caso normale

$$C_n = C'_n \mu^{-n-1} M^{1-n} R^{n-3}. \quad (25.27)$$

Passando ai valori di  $M$  ed  $R$  in unità solari si ha

$$C'_n = \left(\frac{K}{H}\right)^{n+1} \left(\frac{1}{4\pi G^n}\right) (n+1)^n \left[-\left(\frac{d\phi}{d\xi}\right)_{\xi=\xi_n}\right]^{n-1} \xi_n^{n+1} R_\odot^{n-3} M_\odot^{1-n} \quad (25.28)$$

Si estenda la relazione (25.26) fino alla fotosfera ( $P = P_0$ ,  $T = T_{eff}$ ), dove possiamo eliminare  $P_0$  con l'aiuto della (25.10) e  $R$  tramite la  $R = c_2 L^{1/2} T_{eff}^{-2}$ . Questo dà un luogo in HR espresso da

$$\log T_{eff} = \alpha_1 \log L + \alpha_2 \log M + \alpha_3 \log \mu + \alpha_4 \log C'_n + \alpha_5 \log c_1 + \alpha_6 \log c_2 \quad (25.29)$$

dove  $c_1$  è il fattore di proporzionalità nella (25.10). Assumendo  $a = 1$  e  $b = 3$  nella legge di opacità si derivano le seguenti relazioni fra gli  $\alpha$  ed  $n$

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= \frac{2-n}{13-2n} & \alpha_2 &= \frac{2n-1}{13-2n} & \alpha_3 &= \frac{2(1+n)}{13-2n} \\ \alpha_4 &= \frac{-2}{13-2n} & \alpha_5 &= -\alpha_4 & \alpha_6 &= 2\alpha_1 \end{aligned} \quad (25.30)$$

Gli  $\alpha$  non variano molto per piccole variazioni di  $n$ . Questo significa che la pendenza delle soluzioni in HR data da  $\alpha_1$  rimane quasi costante. Le linee si spostano parallelamente a se stesse. Senza perdere generalità nella discussione del problema possiamo guardare al caso in cui  $L = M = \mu = 1$ . Allora la variazione di  $\log T_{eff}$  con  $n$  è data dagli ultimi tre termini della relazione precedente. Si trova che  $\partial \log T_{eff} / \partial n > 0$ , le stelle si spostano verso destra nel digramma HR al diminuire di  $n$ .

In questa ottica, le stelle alla destra della linea di Hayashi dovrebbero avere  $\bar{\nabla} > \nabla_A$  cioè esse dovrebbero avere una stratificazione di temperatura super-adiabatica. La teoria della mixing length dice che un piccolo eccesso di  $\bar{\nabla}$  rispetto a  $\nabla_A$  è sufficiente a trasportare una qualunque luminosità nelle regioni profonde di una stella. Allora che cosa succederebbe se per una ragione

qualunque una stella fosse portata alla destra della linea di Hayashi, in modo tale da avere nel suo interno regioni con  $\nabla - \nabla_A > 0$ ? Il risultato sarebbero velocità convettive molto elevate e grandi flussi convettivi. Questi raffredderebbero gli interni fino a raggiungere la condizione  $\nabla \simeq \nabla_A$  e la stella è riportata alla destra della linea di Hayashi.

Pertanto la linea di Hayashi è un vero limite fisico separante una regione permessa (a destra) da una vietata (a sinistra).



## Capitolo 26

# FASE DI SEQUENZA PRINCIPALE

### 26.1 Proprietà Generali

Si definisce sequenza principale il luogo nel diagramma HR in corrispondenza al quale per la prima volta le reazioni nucleari forniscono l'intera luminosità irradiata dalla stella.

La composizione chimica dei modelli è assunta spazialmente uniforme grazie al processo di mescolamento convettivo subito nelle fasi di presequenza. Più avanti le reazioni nucleari genereranno una distribuzione chimica disomogenea con il rapporto He/H crescente verso l'interno.

Alcune proprietà fondamentali delle stelle in sequenza principale sono riportate in Tabella 26.1, mentre le caratteristiche generali dei modelli corrispondenti possono essere riassunte nel modo seguente:

- (1). L'equazione di stato è prevalentemente quella del gas perfetto di ioni ed elettroni. Per le stelle massicce ( $M > 10 M_{\odot}$ ) le maggiori deviazioni sono dovute alla pressione di radiazione crescente con la massa ( $\beta = P_g/P \rightarrow 0$ ), mentre per le stelle di piccola massa al crescente contributo della pressione di elettroni degeneri.
- (2). Il raggio aumenta con la massa in maniera quasi lineare nel dominio delle piccole masse e con la radice quadrata di questa nel dominio delle grandi masse.
- (3). La relazione teorica massa-luminosità si accorda molto bene con i dati di osservazione ed altresì dicasi della posizione della sequenza principale nel diagramma H-R.
- (4). La temperatura centrale e media della stella aumentano con la massa,

come predetto dal teorema del viriale.

(5). Le stelle di massa più elevata ( $M > 2 M_{\odot}$ ) bruciano l'idrogeno attraverso il ciclo CN-CNO e pertanto a causa della grande dipendenza dalla temperatura da parte del tasso di produzione di energia, la sorgente energetica nucleare è molto concentrata. Da ciò segue che il nucleo è convettivo (si veda la dipendenza del gradiente radiativo di temperatura dalla luminosità). La frazione di massa contenuta nel nucleo convettivo cresce con la massa della stella, ciò dovuto anche alla progressiva diminuzione del gradiente adiabatico verso il valore limite  $\nabla_A = 0.25$  al decrescere di  $\beta$  con la massa. Queste stelle inoltre a causa della bassa opacità hanno un involucro esterno radiativo. La struttura di sequenza principale di una tipica stella massiccia ( $9 M_{\odot}$ ) è mostrata in Figura 26.1.

(6). Le stelle con massa inferiore a circa  $1.1 M_{\odot}$  bruciano l'idrogeno attraverso la catena PP, e grazie alla dipendenza dalla temperatura più dolce di quella del ciclo CN-CNO, per ragioni analoghe a quelle addotte sopra, queste stelle non sviluppano un nucleo convettivo. Al contrario esse posseggono un involucro convettivo in quanto la minore temperatura negli strati esterni favorisce una maggiore opacità e quindi l'instaurarsi della convezione. La Figura 26.2 mostra la struttura di sequenza principale di una stella come il Sole.

(7). La zona convettiva diventa via via più profonda al diminuire della massa. Attorno a  $0.3 M_{\odot}$  la convezione di involucro si estende fino al centro.

(8). Lievemente più complessa è la struttura di stelle con massa fra  $1.5 M_{\odot}$  e  $2 M_{\odot}$  o di tipo spettrale  $F$ , le quali posseggono un nucleo convettivo (a causa della produzione nucleare attraverso il CNO), un'estesa zona intermedia radiativa ed infine un involucro esterno convettivo.

(9). Infine le stelle di piccola massa non posseggono una temperatura centrale sufficientemente elevata da far sì che  ${}^3\text{He}$  reagisca con se stesso. Pertanto la catena PP procede solamente attraverso i rami PPI e PPIL.

(10). La Figura 26.3 mostra in forma schematica la posizione della sequenza principale nel diagramma H-R al variare della composizione chimica iniziale, nonché la graduale transizione da stelle totalmente convettive a quelle con involucro convettivo e nucleo radiativo ed infine a quelle con nucleo convettivo ed involucro radiativo.

(11). Non esiste una grande evidenza per l'esistenza di stelle con massa superiore a circa  $100 M_{\odot}$ . Questo limite superiore può forse essere collegato al fatto



che durante la fase di accrescimento in presequenza, la pressione di radiazione nel nucleo centrale può impedire l'ulteriore accumulo di materiale, oppure al fatto che stelle della sequenza principale più massicce di un certo valore risultano pulsazionalmente instabili e possono perdere massa su una scala di tempo rapida.

**(12).** La parte inferiore della sequenza principale si estende fino a circa  $0.08 M_{\odot}$ . Al di sotto di tale limite, a causa della bassa temperatura le reazioni nucleari non possono fornire sufficiente energia. Fisicamente ciò è dettato dal fatto che in fase di contrazione le stelle di piccola massa raggiungono la degenerazione elettronica prima che la temperatura sia salita al valore minimo richiesto dal bruciamento dell'idrogeno. Poiché gli elettroni sono forzati a stati di momento crescenti, l'energia fornita dalla contrazione gravitazionale viene spesa a dare energia agli elettroni piuttosto che agli ioni. Quest'ultimi, la cui temperatura determina l'accensione delle reazioni, raggiungono una temperatura massima e poi incominciano a raffreddarsi. Pertanto l'energia termica degli ioni e l'energia gravitazionale liberata (in diminuzione a causa del progressivo irrigidimento della struttura man mano che il gas di elettroni diventa più degenere) vengono spese a bilanciare l'energia irradiata. Stelle con massa inferiore a  $0.08 M_{\odot}$ , semplicemente si contraggono al valore limite del raggio compatibile con una struttura totalmente degenere e poi si raffreddano.

## 26.2 Bruciamento dell'Idrogeno

Durante la fase di bruciamento dell'idrogeno nel centro, una stella si muove lentamente allontanandosi dalla sequenza principale.

Il tempo di vita della fase di bruciamento dell'idrogeno dipende primariamente dalla massa della stella e secondariamente da altri parametri quali la composizione chimica, l'opacità, etc.

Le stelle massicce esauriscono la fase in pochi milioni di anni, mentre stelle con massa inferiore a circa  $0.7 - 0.8 M_{\odot}$  non hanno avuto tempo durante l'intera vita della galassia di allontanarsi dalla sequenza principale.

Il tempo di vita totale di una stella di circa  $0.7 - 0.8 M_{\odot}$  è stimata intorno a  $16 \times 10^9$  anni. Le stelle di massa più piccola hanno il tempo di vita via via più lungo:  $t \propto (M/M_{\odot})^{-3}$ .

Tabella 26.1: Parametri fisici di stelle in Sequenza Principale. *Note: La temperatura superficiale  $T_{eff}$  è espressa in K. La temperatura centrale  $T_c$  è in unità di  $10^6$  K. La densità centrale  $\rho_c$  è in  $g\ cm^{-3}$ .  $M_{nu}$  è la massa del nucleo convettivo.  $M_{in}$  è la massa dell'involuppo esterno convettivo.*

$M/M_\odot$	$LogL/L_\odot$	$LogT_{eff}$	$R/R_\odot$	$T_c$	$\rho_c$	$M_{nu}$	$M_{in}$	Energia
30	5.15	4.64	6.6	36	3.0	0.60	0	CNO
15	4.32	4.51	4.7	34	6.2	0.39	0	CNO
9	3.65	4.41	3.5	31	10.5	0.30	0	CNO
5	2.80	4.29	2.3	27	17.5	0.23	0	CNO
3	2.00	4.14	1.7	24	40.4	0.18	0	CNO
2	1.30	4.01	1.4	21	68.0	0.12	0	CNO
1	-0.13	3.76	0.9	14	90.0	0.	0.01	PP
0.5	-1.42	3.59	0.44	9	74.0	0.	0.4	PP
0.3	-1.90	3.55	0.30	8	125.0	0.	1.0	PP
0.1	-3.0	3.51	0.10	5	690.0	0.	1.0	PP

Figure to be replaced

Figura 26.1: Struttura di una stella di  $9M_\odot$  sulla sequenza principale

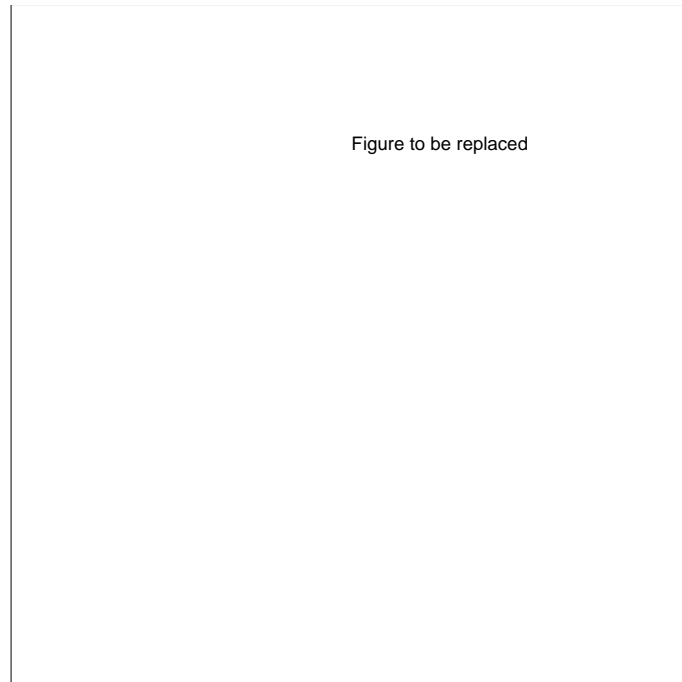


Figura 26.2: Struttura di una stella di  $1M_{\odot}$  sulla sequenza principale

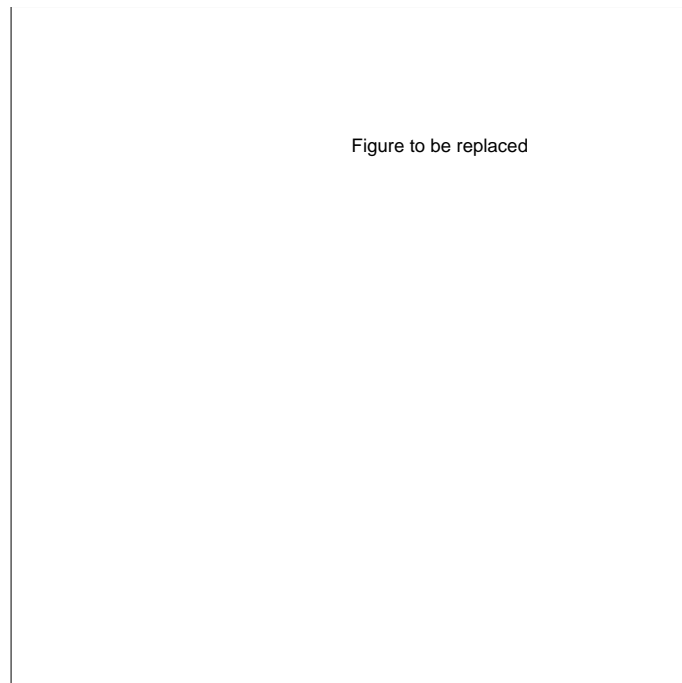


Figura 26.3: Tipica struttura delle stelle sulla sequenza principale

Il tasso di perdita di energia dalla superficie, il quale fissa la scala di tempo evolutiva, è controllato dall'opacità nell'interno della stella. Il tasso di produzione è invece governato dalle reazioni nucleari, le quali godono della proprietà di agire come termostati nel senso che esse si aggiustano in maniera da mantenere l'equilibrio termico, il che significa che l'energia viene prodotta allo stesso ritmo con cui può essere trasportata dalla radiazione e/o convezione. Se per qualche ragione viene prodotta dai processi nucleari più energia di quanta sia trasportabile, in ambiente di gas perfetto parte dell'eccesso viene depositato sotto forma di lavoro di espansione della regione con successivo raffreddamento della stessa. La forte dipendenza delle reazioni nucleari dalla temperatura fa sì che il tasso di produzione di energia venga immediatamente riportato al valore di equilibrio termico. Similmente se la sorgente nucleare genera meno energia di quanto sia necessario all'equilibrio fra produzione e perdita dalla superficie.

Tuttavia se il gas nel centro è in condizioni di degenerazione le considerazioni fatte sopra non sono più valide ed avviene il fenomeno del runaway termico che sarà discusso in seguito.

La struttura della stella cambia durante la fase di sequenza principale in conseguenza delle trasformazioni chimiche che avvengono nell'interno. Nelle stelle dell'alta sequenza principale ( $M > 2M_{\odot}$ ) l'idrogeno è consumato uniformemente nel nucleo centrale convettivo, mentre nelle stelle di piccola massa ( $M < 1.1M_{\odot}$ ), che hanno il nucleo radiativo, esso viene consumato in preferenza nelle regioni vicine al centro.

La conversione di H in He produce una lieve perdita in pressione in quanto diminuisce il numero di particelle libere. Di conseguenza le regioni interne si contraggono lentamente al fine di assicurare l'equilibrio idrostatico.

La conversione di H in He diminuisce anche l'opacità negli strati interni, il che tende a produrre un lento aumento di  $L$ . Al contrario gli strati esterni non subiscono tale variazione di opacità. Una certa parte dell'energia proveniente dal nucleo va in lavoro di espansione degli stessi, il che causa una lenta diminuzione della  $T_{eff}$ . Durante la fase di bruciamento dell'idrogeno centrale, una stella dunque tende ad evolversi verso  $L$  crescenti e  $T_{eff}$  decrescenti.

Nel caso delle stelle con nuclei convettivi quando l'idrogeno va a zero nel centro esso diventa nullo in un nucleo di massa finita e la stella è lasciata improvvisamente senza combustibile. Questo provoca una rapida contrazione dell'intera

stella fintanto che gli strati immediatamente sovrastanti il nucleo (senza H e ricco di He ed elementi più pesanti) raggiungono una temperatura sufficiente ad innescare il bruciamento locale dell'idrogeno attraverso il ciclo CNO. Il bruciamento ha luogo in uno strato (shell) di dimensioni finite (in massa e raggio) il cui bordo inferiore è dato dall'assenza di combustibile, mentre il bordo superiore è fissato dal fatto che in ogni caso la temperatura della stella diminuisce verso l'esterno e quindi le reazioni si spengono. Attesa l'alta sensibilità delle reazioni dalla temperatura la shell è sottile in massa e raggio. Nelle stelle in cui il bruciamento è avvenuto in ambiente radiativo l'accensione del bruciamento in shell avviene in maniera molto più lenta. In entrambi casi la shell si sposta progressivamente verso l'esterno lasciando dietro di sé un nucleo di He di massa via via crescente.

In stelle con massa relativamente grande il nucleo di He nasce contenendo una frazione considerevole della massa totale, mentre in stelle di piccola massa esso si sviluppa in maniera graduale da una dimensione molto piccola.

## 26.3 Stelle Nane Nere

Stelle con massa minore di circa  $0.08M_{\odot}$  non raggiungono mai una temperatura interna sufficiente ad innescare le reazioni dell'idrogeno da cui trarre l'energia irradiata dalla superficie. Queste stelle si contraggono al punto tale che gli elettroni diventano degeneri e raggiungono un raggio limite che dipende dalla massa e dalla composizione chimica. Per una  $0.07M_{\odot}$  il tempo necessario a raggiungere il raggio limite è circa  $10^9$  anni ed è minore per masse inferiori. Oltre questo stadio semplicemente la stella si raffredda a raggio costante, mentre  $L$  e  $T_{eff}$  diminuiscono. La  $T_{eff}$  durante la contrazione è circa  $2500^{\circ}K$  per una  $0.07M_{\odot}$  e  $2000^{\circ}K$  per una  $0.01M_{\odot}$ . Queste stelle vengono chiamate Nane Nere. Dopo un tempo evolutivo di circa  $3 \times 10^9$  anni una tipica nana nera avrà  $T_{eff} = 1000^{\circ}K$  e  $L = 10^{-5} \div 10^{-6}L_{\odot}$  e quindi sarà molto difficile da osservare. Esse sono diverse dalle nane bianche, primo per la bassa  $T_{eff}$ , secondo per la composizione chimica che è rimasta immutata dalla formazione. La distinzione fra nane nere e pianeti è arbitraria, ad esempio Giove con una massa di  $0.001M_{\odot}$  potrebbe essere considerato una nana nera in quanto sta irradiando la sua energia interna al tasso di  $10^{-9}L_{\odot}$ .



## Capitolo 27

# EVOLUZIONE DOPO LA SEQUENZA PRINCIPALE

In questo capitolo riassumiamo in maniera qualitativa il diverso comportamento evolutivo di stelle di massa diversa per quanto riguarda l'accensione del secondo (elio), terzo (carbonio) e successivi passi nucleari, mettendo in evidenza la regioni fisiche di ciò.

Come vedremo non tutte le stelle possono accendere il bruciamento dell'elio nel centro. Per quelle per le quali ciò è possibile alcune lo accendono in condizioni di altissima degenerazione elettronica, le altre in condizioni di gas perfetto non degenerare. In ogni caso l'accensione dell'elio non costituisce un evento traumatico per la stella.

Ancora non tutte le stelle possono accendere il bruciamento del carbonio nel centro. Quando ciò è possibile alcune lo accendono in condizioni di altissima degenerazione elettronica, le altre in condizioni di gas perfetto non degenerare. L'accensione in gas degenerare comporta la distruzione della stella.

Infine solo alcune stelle (quelle di massa maggiore riescono a compiere l'intero percorso nucleare fino alla sintesi del ferro.

### 27.1 Caratteristiche Generali e Masse Critiche

Dopo l'esaurimento dell'idrogeno nel centro, avvengono profonde variazioni di struttura, le quali portano alla formazione di una gigante (supergigante) rossa. Mentre si accende il bruciamento dell'idrogeno in shell, il nucleo di He si contrae e gli strati sopra la shell si espandono fin tanto che la  $T_{eff}$  diminuisce attorno a  $3500 - 4500^\circ K$  e la stella raggiunge la linea di Hayashi. Si forma una regione

convettiva esterna la quale diventa sempre più profonda al diminuire della  $T_{eff}$ . Se e quando la temperatura centrale raggiunge  $10^8$  °K incomincia la serie di reazioni note come il bruciamento dell'elio, il quale converte  $^4\text{He}$  in  $^{12}\text{C}$  e  $^{16}\text{O}$ . A differenza della fase di bruciamento dell'idrogeno che è comune a tutte le stelle e viene accesa sostanzialmente in condizioni di gas perfetto, primo il bruciamento dell'elio è possibile solamente in stelle con massa maggiore di circa  $0.5M_{\odot}$ , secondo per stelle con massa inferiore a circa  $2.2M_{\odot}$  esso viene acceso in condizioni di alta degenerazione elettronica.

Analoghi limiti possono essere stabiliti anche per il bruciamento centrale del  $^{12}\text{C}$  ed in misura minore del  $^{20}\text{Ne}$ .

Le cause sono molto semplici e possono essere così riassunte:

- (1). Ogni bruciamento nucleare richiede una temperatura e densità minime per avvenire, le quali crescono via via che elementi sempre più pesanti vengono coinvolti. Temperatura e densità minime vengono raggiunte o per contrazione gravitazionale e/o per aumento della massa del nucleo ed implicano una massa minima di questo.
- (2). All'aumentare della densità, il gas di elettroni nelle regioni centrali degenera, domina la pressione e l'equazione di stato diventa insensibile o quasi alla temperatura. L'accensione di un combustibile nucleare in un gas degenerare dà origine al runaway termico ed è potenzialmente esplosiva.
- (3). Alle densità a cui si instaura la degenerazione elettronica, diventano anche importanti i processi di perdita di energia per neutrini, i quali tendono a raffreddare le parti più centrali e quindi a ritardare l'aumento di temperatura necessario per l'innesco delle reazioni. Infine, gli elettroni degeneri hanno una efficiente conducibilità termica, il che favorisce l'isotermicità della regione degenerare (nucleo).
- (4). La massa minima del nucleo per un dato bruciamento nucleare è diversa per un gas non degenerare ed è inferiore a quella richiesta per un gas degenerare. Nel caso del bruciamento dell'elio le due masse sono  $0.33 M_{\odot}$  e  $0.45 - 0.55 M_{\odot}$  (quest'ultima dipende alquanto dalla composizione chimica). Nel caso del bruciamento centrale del  $^{12}\text{C}$  la massa minima del nucleo di  $^{12}\text{C} + ^{16}\text{O}$  (risultato del bruciamento dell'elio) necessaria ad innescare il bruciamento in condizioni di non degenerazione elettronica è  $1.06M_{\odot}$ , mentre in presenza di forte degenerazione la massa minima sale a circa  $1.4M_{\odot}$ . Questo corrisponde alla massa



massima compatibile con una struttura totalmente degenere fatta di  $^{12}\text{C} + ^{16}\text{O}$  in equilibrio idrostatico. Essa è anche detta limite di Chandrasekhar.

(5). Se la temperatura di accensione di un dato combustibile è raggiunta prima della forte degenerazione il bruciamento ha luogo, altrimenti esso sarà ritardato fin tanto che la massa (temperatura) del nucleo avrà raggiunto un valore sufficiente a compensare gli effetti contrastanti della degenerazione, conduzione elettronica e della perdita di energia per neutrini. In questo secondo caso, i processi fisici di cui sopra sono responsabili anche del fatto che indipendentemente dalla massa iniziale, tutte le stelle che vanno verso un regime di degenerazione elettronica prima di un bruciamento nucleare costruiscono dei nuclei (di  $^4\text{He}$ ,  $^{12}\text{C} + ^{16}\text{O}$ ,  $^{20}\text{Ne} + ^{24}\text{Mg} + ^{16}\text{O}$ , Si) aventi la stessa massa.

(6). Per ogni bruciamento (in particolare per quello del  $^4\text{He}$  e del  $^{12}\text{C}$ ) esiste una massa iniziale della stella sotto la quale il regime di degenerazione elettronica diventa dominante. Il valore esatto di tale limite dipende dal particolare legame fra massa iniziale e massa dei nuclei di  $^4\text{He}$ ,  $^{12}\text{C} + ^{16}\text{O}$  e successivi costruiti durante le fasi precedenti al bruciamento in esame. Nel caso di bruciamento dell'idrogeno in nuclei radiativi, la relazione massa-iniziale massa del nucleo di He dipende essenzialmente dalla composizione chimica della stella e dall'efficienza del bruciamento dell'idrogeno in shell. Nel caso di bruciamento dell'idrogeno in nuclei convettivi, la relazione massa iniziale-massa del nucleo di He è primariamente dettata dall'estensione della convezione, un aspetto della fisica di base delle stelle ancora lontano dall'essere ben compreso. Poichè il bruciamento centrale dell'elio è sempre convettivo, l'incertezza di cui sopra domina sempre la relazione massa iniziale-massa del nucleo di  $^{12}\text{C} + ^{16}\text{O}$ . Tali incertezze sono minori per i nuclei di combustibile con numero atomico più elevato.

(7). I modelli evolutivi correnti danno come massa iniziale minima per bruciamento di  $^4\text{He}$  in un nucleo non degenere un valore compreso fra  $1.8$  e  $2.2M_{\odot}$  a seconda della composizione chimica. Sotto questo limite e per masse iniziali maggiori di  $0.45 - 0.55M_{\odot}$  in funzione della composizione chimica, l'accensione avviene in nuclei altamente degeneri.

(8). Il bruciamento del  $^4\text{He}$  non è addirittura possibile per masse inferiori, in quanto la stella non può sviluppare la massa minima del nucleo di He richiesta.

(9). Nel caso del bruciamento del  $^{12}\text{C}$ , tutte le stelle con massa iniziale inferiore a circa  $8M_{\odot}$  sviluppano un nucleo di  $^{12}\text{C} + ^{16}\text{O}$  altamente degenere. Tuttavia

stelle con massa inferiore a  $1.4M_{\odot}$  non possono avere la fase di bruciamento del  $^{12}\text{C}$  in quanto il loro nucleo non può crescere alla massa necessaria per raggiungere la temperatura di innesco. Questa massa è molto vicina al limite di Chandrasekhar ( $1.4M_{\odot}$ , si veda più avanti).

(10). In realtà tutte le stelle con massa inferiore a circa  $5 - 6M_{\odot}$  non possono innescare la fase di bruciamento del carbonio a causa del fenomeno della perdita di massa per vento stellare, la quale rimuovendo l'intero involucro sovrastante il nucleo dopo la fase di bruciamento dell'elio, impedisce al nucleo di  $^{12}\text{C} + ^{16}\text{O}$  di crescere al limite di  $1.4M_{\odot}$ . La massa limite dipende dall'efficienza del vento stellare che è tuttora molto incerta.

(11). In conclusione, solamente le stelle con massa fra  $5 - 6M_{\odot}$  e  $8 - 9M_{\odot}$  possono avere l'accensione del  $^{12}\text{C}$  nel nucleo. Tuttavia come vedremo essa è altamente esplosiva e conduce alla distruzione dell'intera stella.

(12). Stelle con massa compresa fra circa 8 e  $13M_{\odot}$  accendono sia l'elio che il carbonio in condizioni di non degenerazione e formano un nucleo di  $\text{Ne} + \text{O} + \text{Mg}$ , tuttavia, a causa del gioco complicato dei fenomeni descritti in precedenza e di catture K sui nuclei di Ne e Mg, esse non sono in grado di proseguire oltre nella sequenza naturale dei bruciamenti nucleari. La loro evoluzione è molto complessa e verrà brevemente riassunta in seguito.

(13). Le stelle con massa superiore a  $13 - 15M_{\odot}$  sono capaci di completare la sequenza nucleare naturale procedendo all'accensione dei vari combustibili prima nei nuclei poi in shell fino alla costruzione di un nocciolo centrale di elementi del gruppo del  $\text{Fe} \div \text{Ni}$  circondato da strati di elementi più leggeri in cui sono attive shells nucleari e sottili regioni convettive fino alla shell di H sopra la quale si colloca l'involucro inerte con composizione chimica quasi inalterata rispetto a quella iniziale. La caratteristica dominante di queste stelle è la perdita di energia per neutrini dalle regioni più interne e conseguente parziale raffreddamento. Questo favorisce la degenerazione elettronica, ritarda l'accensione dei successivi combustibili ed inibisce l'estensione della convezione. Come conseguenza della minore estensione della convezione, il nucleo corrispondente ad un dato bruciamento tende ad avere una massa via via più piccola del precedente. Poiché il nucleo è parzialmente degenere e raffreddato dalle perdite neutriniche ogni accensione avverrà a densità crescenti e quindi in nuclei via via più vicini alla massa di Chandrasekhar. In conseguenza di ciò, tutte le stelle massicce indipen-

dentemente dalla massa iniziale, sviluppano dei nuclei di circa  $1.4M_{\odot}$ . Stelle la cui massa è compresa fra  $100M_{\odot}$  e circa  $5 \times 10^4 M_{\odot}$ , ammesso che possano formarsi, sono soggette all'instabilità prodotta dalla creazione di coppie ( $e^+$ ,  $e^-$ ) durante la fase di bruciamento dell'ossigeno e subiscono un'evoluzione diversa da quella delle stelle massicce. Poichè l'esistenza di tali stelle è molto incerta esse non verranno descritte.

## 27.2 Diagramma delle condizioni centrali

La Figura 27.1 riassume l'evoluzione della temperatura e densità centrali in stelle con massa fra  $1M_{\odot}$  e  $120M_{\odot}$  ed identifica i luoghi a cui avvengono i bruciamenti principali (idrogeno, elio, carbonio, neon, ossigeno e silicio), distinguendo in funzione della massa iniziale della stella e del grado di degenerazione raggiunto durante l'evoluzione dei nuclei i vari domini a cui viene arrestata la sequenza nucleare. La figura mette anche in evidenza le regioni di instabilità per creazione di coppie ( $e^+$ ,  $e^-$ ), dove  $\Gamma_1$  diventa minore di  $4/3$ , e di transizione  $\text{Fe} \rightarrow \text{He}$ .

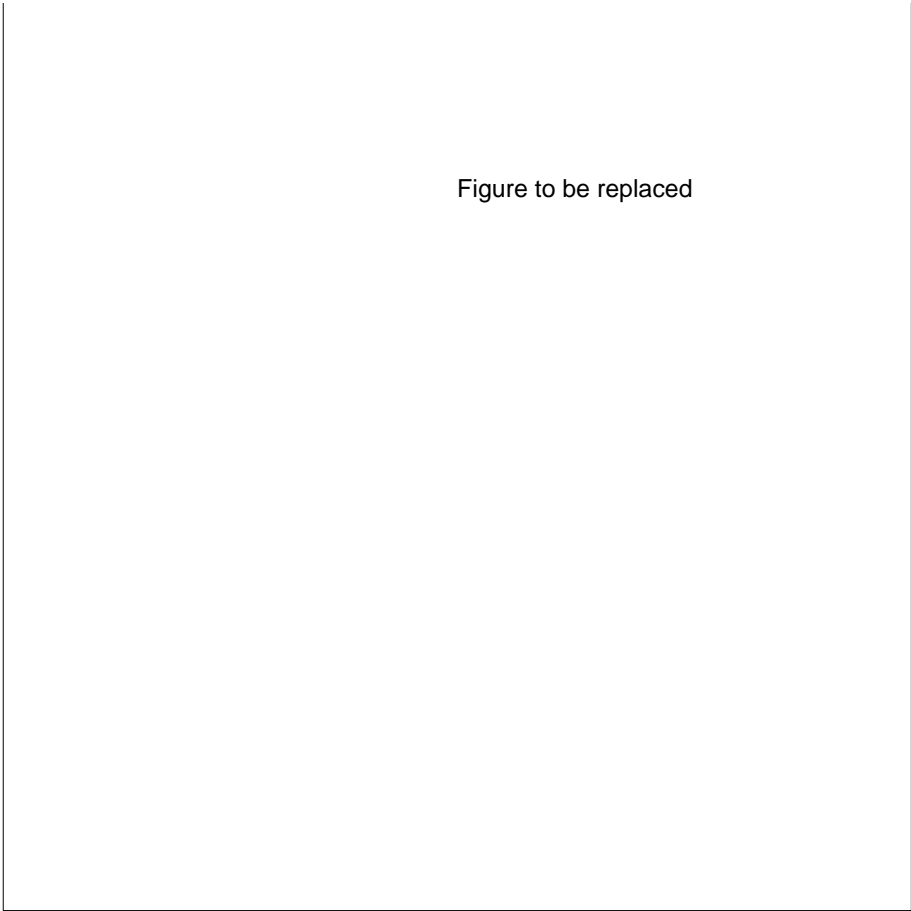


Figure to be replaced

Figura 27.1: Diagramma delle condizioni centrali  $T_c$  e  $\rho_c$

## Capitolo 28

# STELLE DI PICCOLA MASSA

### 28.1 Caratteristiche generali

In questo intervallo di massa ( $M \leq M_{HeF}$ ) le maggiori differenze si hanno nella fase di sequenza principale in quanto avviene la transizione da bruciamento dell'idrogeno in nucleo convettivo ( $M > 1.1M_{\odot}$ ) a quello in nucleo radiativo.

Poichè le caratteristiche della fase di sequenza principale delle stelle con  $M > 1.1M_{\odot}$  sono simili a quelle delle stelle con  $M > 2.2M_{\odot}$  esse verranno presentate assieme a quest'ultime. In ogni altro aspetto esse si comportano come quelle di massa inferiore. In particolare, poichè le masse coinvolte nello studio dei diagrammi H-R degli ammassi globulari sono comprese fra  $0.7 - 0.8M_{\odot}$  molto di quanto segue si riferisce nei dettagli a questo particolare valore della massa, quantunque le caratteristiche generali siano valide anche per stelle di massa maggiore.

Durante la fase di sequenza principale, a causa dell'assenza di convezione, l'idrogeno viene consumato più rapidamente nel centro che nelle regioni immediatamente periferiche cosicchè si forma un gradiente di composizione chimica con l'idrogeno decrescente verso il centro.

Dopo che l'idrogeno è esaurito nel centro, il bruciamento si sposta gradualmente in una shell che si sposta verso l'esterno. Durante questo processo il nucleo si contrae mentre l'involuppo si espande. La shell diventa via via più sottile mentre la stella evolve verso destra nel diagramma H-R.

Quantunque questa fase sia breve rispetto a quella di sequenza principale è lunga abbastanza da essere osservabile in ammassi vecchi (globulari) sufficientemente

ricchi di stelle.

Raggiungendo la linea di Hayashi, l'involuppo diventa convettivo, la traccia evolutiva cambia direzione nel diagramma H-R: la luminosità cresce mentre la  $T_{eff}$  rimane quasi costante e la stella sale lungo il Ramo delle Giganti (RGB). Il bordo esterno della regione convettiva penetra all'interno fino alle regioni immediatamente sovrastanti la shell bruciante H.

La temperatura nella shell diventa così elevata da permettere al ciclo di CNO di sostituire le catene PP quali sorgenti di energia nucleare.

Sotto la shell vi è un nucleo essenzialmente costituito di  $^4\text{He}$  il quale cresce in massa e diventa via via più caldo e più denso e nel quale gli elettroni sono altamente degeneri.

L'involuppo convettivo penetra fino a raggiungere gli strati in cui in precedenza il C è stato convertito in N attraverso le prime reazioni del ciclo CNO. A causa del mescolamento le abbondanze superficiali di C e N sono modificate, trovando conferma sperimentale nelle osservazioni di abbondanze in giganti rosse. Questa fase di mescolamento esterno è nota come *I dredge-up*.

L'accensione dell'elio avviene quando il nucleo degeneri ha la massa di circa  $0.45-0.55M_{\odot}$  (a seconda della composizione chimica) e la luminosità della stella è  $2 \times 10^3 L_{\odot}$ . Poiché l'inizio del bruciamento dell'elio in gas degeneri avviene ad una massa di nucleo che è praticamente la stessa per tutte le stelle (a parte la piccola dipendenza dalla composizione chimica iniziale) altrettanto sarà vero per la luminosità superficiale. Ciò è confermato dalle osservazioni in ammassi globulari i quali mostrano che i rami giganti terminano tutti essenzialmente alla stessa luminosità.

Tuttavia questo non vale per stelle con massa iniziale confinata nell'intervallo  $1M_{\odot} < M < 2.2M_{\odot}$  le quali tendono ad avere il flash dell'elio a luminosità via via decrescenti. Anche questo in accordo con le osservazioni in ammassi galattici vecchi ma non quanto gli ammassi globulari dove le masse coinvolte sono in questo intervallo.

La Figura 28.1 mostra la variazione della struttura interna di una stella con composizione chimica e massa uguali a quelle solari dalla fase di sequenza principale fino a quella di accensione dell'elio nel nucleo, mentre la Figura 28.2 mostra il cammino della stessa stella nel diagramma H-R fino alla fase di flash dell'elio e fasi successive che saranno discusse in seguito. Infine, la Figura 28.3

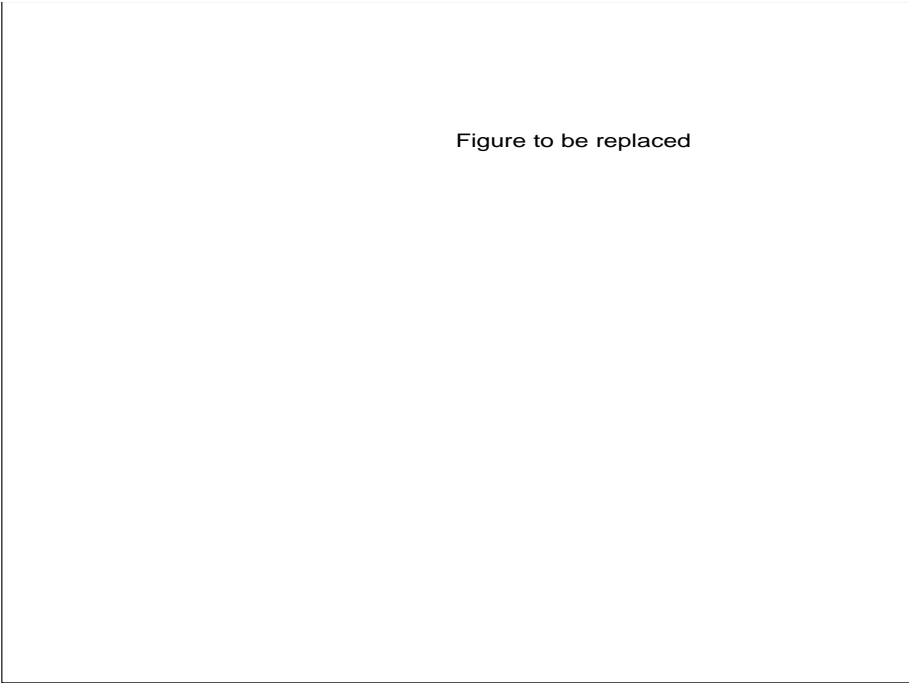


Figure to be replaced

Figura 28.1: Diagramma di struttura di una stella con  $1M_{\odot}$

mostra il cammino evolutivo di stelle con masse uguali a quelle tipiche degli ammassi globulari ( $0.7M_{\odot}$  e  $0.8M_{\odot}$  al turn-off).

Le reazioni del bruciamento dell'elio sono molto sensibili alla temperatura, mentre la pressione elettronica è quasi indipendente da questa. Quando la reazione inizia, le parti centrali si riscaldano e la reazione procede più efficacemente dando luogo ad ulteriore riscaldamento. In circostanze normali, gas perfetto, l'aumento di temperatura genera un aumento di pressione e quindi una espansione della regione fintanto che il tasso di produzione di energia nucleare eguaglia il tasso di trasporto dell'energia. In un gas degenere la pressione rimane quasi insensibile all'aumento di temperatura e pertanto l'espansione non avviene. Il nucleo si riscalda sempre più generando crescenti quantità di energia nucleare (runaway termico o flash dell'elio). La luminosità del nucleo raggiunge per un breve periodo valori molto elevati, fino a  $10^{11} L_{\odot}$ . Tuttavia questa enorme quantità di energia è spesa a riscaldare il nucleo ed a rimuovere la degenerazione, cosicché la luminosità superficiale non è affetta da quanto avviene nel nucleo.

La sdegenerazione del gas di elettroni ed il ripristino dell'equazione di stato di gas perfetto permette il raffreddamento parziale del nucleo e l'instaurarsi del

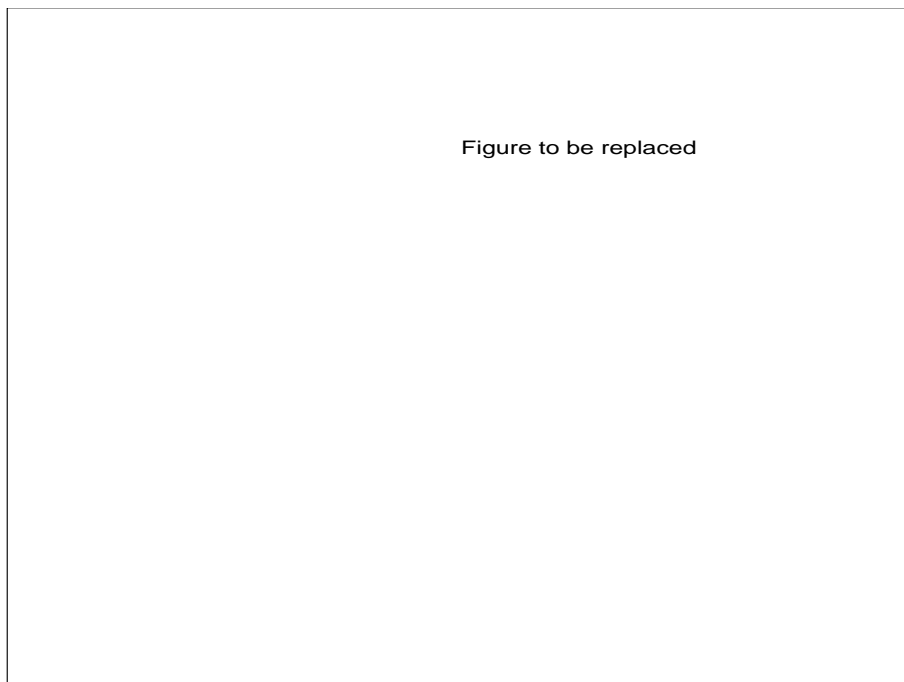


Figura 28.2: Cammino evolutivo di una stella di  $1M_{\odot}$  e spaccato della sua struttura interna nelle varie fasi

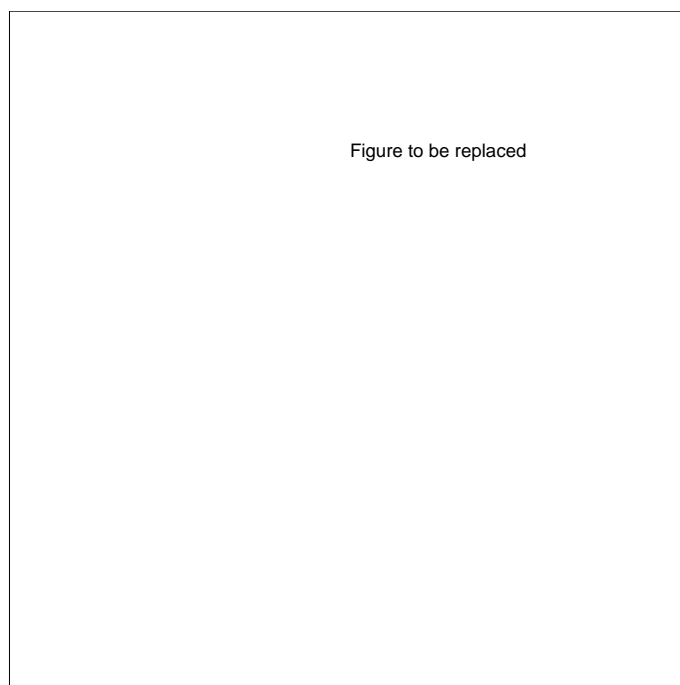


Figura 28.3: Cammino evolutivo delle stelle di  $0.7$  e  $0.8M_{\odot}$



meccanismo di autoregolazione termica della sorgente nucleare.

Durante la fase di He-flash viene bruciata una piccola quantità di  $^4\text{He}$  che può essere trascurata a tutti gli effetti.

Attesa l'elevata dipendenza dalla temperatura della reazione  $3\alpha \rightarrow ^{12}\text{C}$  si ha la comparsa della convezione che si estende per una certa frazione della massa del nucleo. La convezione interna rimane separata da quella esterna e pertanto i prodotti del bruciamento dell'elio rimangono confinati nel nucleo.

La produzione di energia nucleare avviene ora in due zone distinte: bruciamento dell'elio nel nucleo, bruciamento dell'idrogeno nella shell.

Il tempo trascorso dal momento del flash dell'elio fino all'instaurarsi del bruciamento quieto di questo nel nucleo è molto breve e può essere trascurato a tutti gli effetti.

La stella, compatibilmente con la massa del nucleo e la produzione quieta di energia nucleare, si colloca ad una luminosità inferiore a quella della cima del RGB nel luogo del diagramma H-R chiamato ramo orizzontale (HB) e che trova corrispondenza nei diagrammi C-M degli ammassi globulari.

La  $T_{eff}$  della stella è invece regolata da un altro fenomeno che deve essere incluso nella modellistica stellare al fine di spiegare le osservazioni e cioè la perdita di massa per vento stellare durante la fase di RGB.

Se l'evoluzione dalla cima del ramo gigante al ramo orizzontale avvenisse a massa costante, avremmo che il bruciamento dell'elio nel core sarebbe confinato a basse  $T_{eff}$  lungo il ramo gigante stesso per ogni plausibile assunzione riguardo lo stato fisico dei modelli (composizioni chimiche iniziali, opacità equazione di stato, etc.) in contrasto con le osservazioni le quali mostrano che gli ammassi globulari posseggono rami orizzontali di estensione variabile: alcuni vicini al ramo gigante, altri estendentesi fino a  $T_{eff}$  elevate. Quantunque la casistica sia più complessa di quanto andremo ad esporre, indicando che altri fenomeni o parametri fisici devono essere presi in considerazione, è assodato che la perdita di massa gioca il ruolo fondamentale.

Numerose osservazioni indicano che le stelle giganti rosse alla massima luminosità della RGB mostrano evidenza di perdita di massa con tassi dell'ordine di  $10^{-8} - 10^{-7} M_{\odot}/\text{anno}$  (tassi maggiori sono presenti per stelle di luminosità più elevata). Il tasso di perdita di massa può essere espresso in funzione dei parametri fondamentali di una stella (quali gravità, luminosità, raggio) nel

modo seguente

$$\dot{M} = \eta 4 \times 10^{-13} \left( \frac{L}{gR} \right) \quad (28.1)$$

dove tutte le grandezze sono in unità solari, ed  $\eta$  è un parametro compreso fra 0.3 e 3. In uno schema semplificato della perdita di massa, la quantità di materia persa è data da

$$\Delta M = \int \dot{M} dt_{ER} \quad (28.2)$$

dove  $dt_{ER}$  è la velocità evolutiva della fase in esame, in questo caso la salita lungo il ramo gigante.

A parte l'evidenza sperimentale, l'argomento più convincente circa la necessità ed efficienza della perdita di massa è dato dal fatto che l'evoluzione a massa costante non può popolare il ramo orizzontale degli ammassi globulari. Infatti, la tipica massa di una stella in HB di un ammasso globulare deve essere attorno a  $0.6M_{\odot}$  contro le  $0.7 - 0.8M_{\odot}$  al turn-off della sequenza principale. Questo è necessario se si vuole che la parte del ramo orizzontale più blu della zona d'instabilità delle RR Lyrae possa essere popolata.

Inoltre deve esistere una certa dispersione nel valore della massa persa per avere un ottimo accordo con i dati sperimentali. Valori tipici di  $\Delta M = M_{RGB} - M_{HB}$  sono  $0.2M_{\odot}$  con dispersione  $\sigma = 0.025$ . Il confronto dettagliato con le osservazioni permette di fissare  $\eta$  nell'intervallo  $0.45 \pm 0.05$ .

Il valore di  $\Delta M$  non è lo stesso per tutte le masse. Infatti stelle di massa più piccola di quelle in esame hanno tempi di vita così lunghi rispetto al tempo di vita della galassia o in generale il tempo di Hubble (tempo di vita dell'universo) da essere ancora nella fase di sequenza principale. Inoltre stelle di massa superiore hanno  $dt_{ER}$  così breve che l'aumento in  $\dot{M}$  non è sufficiente a compensare l'effetto e pertanto la perdita di massa è trascurabile.

Nel dominio delle stelle che subiscono il flash dell'elio, la perdita di massa ha un ruolo importante solamente per stelle con massa uguale a quella del turn-off degli ammassi globulari e può essere trascurata altrove. Ne segue che il bruciamento dell'elio nel nucleo avviene vicino alla linea di Hayashi per le stelle con massa minore nell'intervallo  $1M_{\odot} - 2.2M_{\odot}$  (si veda la traccia evolutiva della  $1M_{\odot}$  in Figura 28.2), mentre, attorno alle  $0.7 - 0.8M_{\odot}$  la perdita di massa ha un

ruolo importante e il bruciamento dell'elio avviene lungo l'estensione del ramo orizzontale, come indicato dalle tracce mostrate in Figura 28.3, nella quale le stelle nel ramo orizzontale hanno massa minore di quella al tip del RGB.

L'esatta  $T_{eff}$  di una stella nelle fasi iniziali del bruciamento dipende in primo luogo dal rapporto fra la massa del nucleo di elio (quasi costante) e la massa totale ed inoltre dalla metallicità.

Al crescere del rapporto fra le masse ed in prima approssimazione al decrescere della metallicità, la  $T_{eff}$  cresce. Infatti ordinando gli ammassi globulari in funzione di metallicità crescente come nella sequenza M92, M3, 47 Tuc, il ramo orizzontale si estende a  $T_{eff}$  via via decrescenti. 47 Tuc con metallicità pari a circa  $1/3 Z_{\odot}$  ha il ramo orizzontale compresso vicino al RGB.

Questa schematizzazione semplice presenta numerose anomalie. Tipico il caso di M13 che pur avendo un contenuto metallico dell'ordine o superiore a quello di M3 ha un ramo orizzontale totalmente blu. Evidentemente in M13 qualcosa deve variare oltre alla metallicità per contrastare l'atteso arrossamento. Questo problema è noto come il "secondo parametro" degli ammassi globulari che verrà esaminato più avanti.

Il bruciamento dell'elio nel nucleo non presenta particolari problemi salvo quello della estensione del nucleo convettivo che ha dato luogo a due classi di modelli noti come "semiconvettivi" e con "overshoot".

I due fenomeni hanno ragioni fisiche diverse. Nella formulazione classica della condizione per l'instaurarsi della convezione, il bordo di un nucleo convettivo è il luogo dove  $\nabla_r$  e  $\nabla_{ad}$  si intersecano ( $\nabla_r = \nabla_{ad}$ ). In questo punto si annulla l'accelerazione impartita dalla spinta di galleggiamento agli elementi convettivi ma non la loro energia cinetica. Pertanto essi possono penetrare (overshoot) nelle regioni radiative circostanti ed aumentare la dimensione del nucleo convettivo.

L'overshoot convettivo è presente non solo durante la fase di bruciamento dell'elio in stelle di ramo orizzontale ma in tutte le fasi in cui si ha la presenza di nuclei (o regioni) convettive.

Anche se gli effetti dell'overshoot sono ben noti (principalmente allungamento del tempo di vita della fase nucleare in esame), la trattazione di questo fenomeno è complessa ed incerta.

La semiconvezione invece trae origine dal fatto che l'opacità della miscela ricca

di  $^{12}\text{C} + ^{16}\text{O}$  all'interno del nucleo convettivo in cui avviene il bruciamento dell'elio è maggiore dell'opacità nelle regioni radiative sovrastanti più povere di  $^{12}\text{C} + ^{16}\text{O}$ . Questo fatto induce una discontinuità nel gradiente radiativo sulla faccia interna del bordo formale del core convettivo, che non è accettabile fisicamente. La continuità di  $\nabla_r$  e uguaglianza a  $\nabla_{ad}$  sulla faccia interna del bordo convettivo del nucleo viene ripristinata assumendo un'ulteriore estensione del nucleo convettivo nelle regioni radiative circostanti stabili fino a che la condizione di stabilità è verificata ( $\nabla_r = \nabla_{ad}$ ).

La semiconvezione è presente solamente nelle fasi di bruciamento dell'elio ed è particolarmente importante proprio nelle stelle di piccola massa. Gli effetti della semiconvezione sono simili a quelli dell'overshoot. Anche in questo caso la trattazione corretta del fenomeno è molto incerta.

L'evoluzione lungo il ramo orizzontale avviene prima verso  $T_{eff}$  più elevate e poi più basse andando alle fasi finali (Figure 28.2 e 28.3), fino a raggiungere la linea di Hayashi, mentre la luminosità aumenta di poco durante l'intera fase.

Quando l'elio è esaurito nel nucleo, questo si contrae e si riscalda fino a che il bruciamento dell'elio viene acceso in una shell in maniera simile a quanto avvenne per la shell di H. La shell di H è ancora attiva, cosicché ora la stella ha una doppia sorgente nucleare circondante il nucleo di  $^{12}\text{C} + ^{16}\text{O}$  inerte.

La convezione esterna ripenetra nell'involuppo fino agli strati immediatamente sovrastanti la shell di H. La stella risale lungo la linea di Hayashi, mentre le due shells nucleari diventano molto sottili e vicine fra loro.

Tuttavia, l'espansione dell'involuppo ed il trasporto efficiente di energia per convezione fanno diminuire la temperatura nelle regioni della shell di H al punto tale che questa viene temporaneamente spenta, permettendo così alla convezione esterna di penetrare fino a questi strati e di portare in superficie prodotti del CNO. Questo episodio è noto come il *II dredge-up*.

Il raffreddamento dell'involuppo induce ben presto la contrazione dello stesso, la recessione della convezione e la riaccensione della shell di H. Nel diagramma H-R questa fase corrisponde alla parte iniziale del ramo asintotico (AGB) ed è indicata con E-AGB.

Aumentando la densità il nucleo diventa degenere e la temperatura si stabilizza in quanto l'energia liberata per contrazione viene in parte spesa a portare gli elettroni a livelli di momento sempre più elevati.

La struttura della stella è divisa in tre regioni:

- (1) il nucleo degenere di  $^{12}\text{C} + ^{16}\text{O}$ , che cresce in massa mantenendo il raggio quasi costante;
- (2) le shell di H e He, separate da un sottile strato di He;
- (3) un esteso involucro convettivo.

Quando la shell di He è diventata molto sottile essa è soggetta ad una instabilità termica durante la quale la produzione di energia cresce a valori molto elevati per brevi periodi di tempo. A causa di ciò si instaura un complicato meccanismo che vede coinvolte le due shells nucleari, la convezione esterna, più una sottile zona convettiva che compare fra le due shell in coincidenza con lo stato di massima attività della shell di He.

In breve, il meccanismo è il seguente: l'instabilità termica induce il runaway nucleare della shell di He che genera una enorme quantità di energia (la luminosità della shell sale fino a  $10^7 L_{\odot}$ ), compare una sottile zona convettiva sopra la shell di He e viene indotta la rapida espansione degli strati sovrastanti. Il materiale viene espanso e raffreddato a tal punto che la sottile regione convettiva scompare e la shell di H si spegne permettendo alla convezione esterna di penetrare oltre gli strati dove essa era operativa. Rapidamente la shell di He crolla in attività semplicemente perchè ha consumato il sottile strato di He preparato in precedenza dalla shell di H. Come di consueto, espansione e raffreddamento dell' involucro esterno non possono durare a lungo, ma sono seguiti da contrazione ed aumento della temperatura fino a che la shell di H si riaccende e la convezione di involucro recede. Il ciclo si ripete ad intervalli regolari di tempo. Questa fase è nota come la thermally pulsing AGB (TP-AGB).

Al momento di massima penetrazione la convezione esterna si sovrappone per una certa frazione di massa alle regioni interessate dalla sottile shell convettiva durante il ciclo precedente, portando in superficie prodotti di combustione dell'elio, in particolare  $^{12}\text{C}$ .

L'insieme dei cicli di mescolamento indiretto di prodotti di nucleosintesi verso la superficie viene chiamato *III dredge-up*. Il numero di cicli e il tempo intercorrente fra due successivi aumenta con la massa totale della stella.

Come nel caso del flash dell'elio, nonostante l'intensa attività nelle parti interne, la luminosità superficiale della stella non cambia visibilmente, ma continua a crescere essenzialmente in maniera proporzionale alla massa del nucleo senza

H.

Al crescere della luminosità si sviluppa un vento simile a quello incontrato durante la fase di RGB a causa del quale la stella perde per la seconda volta una frazione significativa della massa dell' involuppo. Durante questa fase le stelle occupano la parte più luminosa del ramo asintotico nel diagramma H-R. L'effetto combinato del III dredge-up e del vento stellare che riduce la massa dell' involuppo entro la quale sono diluiti i prodotti di nucleosintesi interna, spiega le proprietà osservate delle stelle al carbonio. Queste sono giganti rosse di alta luminosità che mostrano nello spettro forti caratteristiche di composti del carbonio. Quando la luminosità è attorno a  $10^4 L_{\odot}$ , nell'involuppo residuo si sviluppa un'instabilità che porta al distacco di questo dal resto della stella su una scala di tempo quasi dinamica.

Quantunque i dettagli siano ancora parzialmente ignoti, è probabile che la stella diventi prima instabile alle oscillazioni. Infatti questa regione del diagramma H-R è popolata da variabili con periodo di circa un anno.

Al crescere ulteriore della luminosità, l'ampiezza delle oscillazioni è tale che una parte della materia vicino alla superficie acquista velocità maggiori di quella di fuga e viene persa. Come la stella incomincia a perdere massa per effetto delle oscillazioni, l'intero involuppo diventa dinamicamente instabile e viene espulso lasciando solamente uno strato sottile ricco di H a ricoprire le shell brucianti ed il nucleo di  $^{12}\text{C} + ^{16}\text{O}$  inerte. La stella termina la fase di AGB ed entra in quella di nebulosa planetaria (PN) come illustrato in Figura 28.4.

Il sistema consiste di un oggetto centrale compatto e di un involuppo diffuso in espansione, noto come nebulosa planetaria, il quale è osservabile in quanto illuminato dalla stella centrale. Quest'ultima evolve verso alte  $T_{eff}$  a luminosità quasi costante pari a circa  $10^4 L_{\odot}$ , con  $T_{eff}$  che cresce da  $10^4$  a  $2 \cdot 10^5 \text{ K}$  e raggio che decresce da  $33 R_{\odot}$  a  $0.08 R_{\odot}$ .

Il tempo speso nella fase di planetaria è di pochi  $10^4$  anni. La stella gradualmente consuma le shell di H e di He, esaurendo il combustibile alla superficie del nucleo di  $^{12}\text{C} + ^{16}\text{O}$ . Poichè questo è altamente degenere ed ha massa inferiore a  $1.4 M_{\odot}$ , alla quale si avrebbe l'accensione del carbonio, la storia nucleare della stella è terminata.

Gli strati più esterni si contraggono, tuttavia a causa dell'elevatissima degenerazione elettronica la contrazione gravitazionale avviene in misura molto piccola.

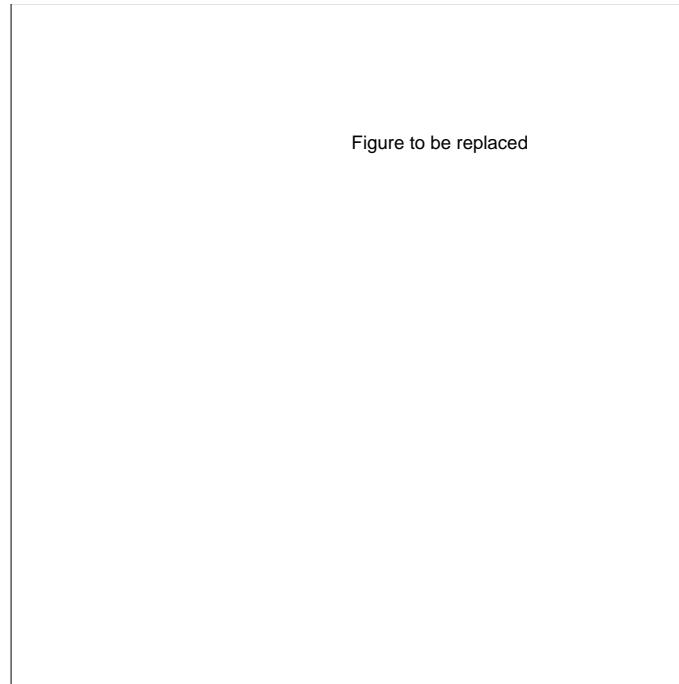


Figura 28.4: Cammino evolutivo dall' AGB alla Nana Bianca attraverso la fase di Nebulosa Planetaria

La sola sorgente di energia disponibile è l'energia interna e la stella comincia a raffreddarsi rapidamente, evolve verso luminosità e  $T_{eff}$  inferiori ed entra nella regione delle Nane Bianche (White Dwarfs o WD) disponendosi sulla linea fissata dalla relazione massa-raggio per una struttura totalmente degenere. Si rimanda al capitolo 33 per una dettagliata discussione sulla struttura delle nane Bianche.

La diminuzione di luminosità e di temperatura effettiva decelera la perdita di energia termica garantendo alla Nana Bianca un tempo di vita molto lungo.

Al fine di completare il panorama dell'evoluzione delle stelle di piccola massa, la Tabella 28.1 riassume i tempi di vita, luminosità e temperature effettive dallo stadio di sequenza principale fino al a quello di He-flash per stelle con massa e composizione chimica tipiche degli ammassi globulari, mentre la Tabella 28.1 presenta le stesse quantità per le stelle in ramo orizzontale.

## 28.2 Proprietà fisiche

Abbiamo visto come le stelle con massa minore di circa  $2.2M_{\odot}$  evolvano in maniera diversa rispetto a quelle di massa maggiore durante le fasi di post

Tabella 28.1: Caratteristiche di stelle di piccola massa con composizione chimica  $Y = 0.235$   $Z = 0.0004$ . Età in  $10^{11}$  anni. *Note.* *sp*: sequenza principale; *to*: turn-off  $x_c=0$ : esaurimento dell'idrogeno nel centro; *sgb*: base del ramo gigante; *hf*: flash dell'elio.

$M/M_{\odot}$	Età	$\text{Log}L/L_{\odot}$	$\text{Log}T_{eff}$	$M/M_{\odot}$	Età	$\text{Log}L/L_{\odot}$	$\text{Log}T_{eff}$	Note
0.7	0.	-0.560	3.745	0.8	0.	-0.281	3.782	sp
	0.1028	-0.371	3.767		0.0639	-0.095	3.799	
	0.2120	0.128	3.796		0.1265	0.315	3.821	to
	0.2156	0.170	3.795		0.1309	0.380	3.820	$x_c=0$
	0.2276	0.424	3.760		0.1390	0.596	3.780	
	0.2304	0.602	3.735		0.1414	0.776	3.735	sgb
	0.2350	1.300	3.711		0.1438	1.300	3.714	
	0.2360	1.900	3.690		0.1448	1.900	3.693	
	0.2364	2.500	3.664		0.1452	2.500	3.668	
	0.2365	3.251	3.629		0.1453	3.237	3.632	hf

Tabella 28.2: Caratteristiche fisiche delle stelle di piccola massa dall'inizio della fase di HB alla fine della fase di E- AGB. Le età in unità di  $10^9$  anni sono contate a partire dalla fase di HB. La composizione chimica è  $Y = 0.235$   $Z = 0.0004$ . *Note* – *zahb*: ramo orizzontale di età zero;  $Y_c=0$ : fine della fase di bruciamento dell'elio;  $L_X > L_Y$  stadio a cui dopo la riaccensione la shell di idrogeno produce più energia di quella di elio; *f-agb*: inizio della fase dei puls termici della shell di elio durante la fase di AGB.

$M/M_{\odot}$	Età	$\text{Log}L/L_{\odot}$	$\text{Log}T_{eff}$	$M/M_{\odot}$	Età	$\text{Log}L/L_{\odot}$	$\text{Log}T_{eff}$	Note
0.55	0.	1.293	4.220	0.65	0.	1.584	3.932	zahb
	0.0441	1.370	4.188		0.0091	1.595	3.928	
	0.0969	1.511	4.138		0.0514	1.579	3.965	
	0.1110	1.598	4.164		0.0942	1.676	3.890	
	0.1120	1.932	3.977		0.1018	2.105	3.701	$Y_c = 0$
	0.1405	2.693	3.668		0.1261	2.822	3.656	$L_X > L_Y$
	0.1417	2.903	3.656		0.1269	3.062	3.643	fine-eagb



sequenza di cui abbiamo già presentato le caratteristiche essenziali.

In questa sezione si intende esaminare più da vicino alcuni dei fenomeni discussi in precedenza allo scopo di approfondire i meccanismi fisici responsabili del diverso comportamento evolutivo.

Ci sono diverse cause da considerare. Innanzi tutto le stelle di piccola massa bruciano l'idrogeno in nuclei radiativi, oppure convettivi ma di piccole dimensioni. Secondo, la degenerazione diventa importante subito dopo la fase di bruciamento dell'idrogeno sulla sequenza principale se non durante la stessa. Infine la loro posizione sulla sequenza principale è in realtà molto vicina alla linea di Hayashi.

Queste stelle producono un nucleo di elio di dimensioni nulle o molto piccole, pertanto esse subiranno una dolce transizione dal bruciamento dell'idrogeno nel centro a quello in shell. La loro densità centrale è così elevata da essere al bordo della degenerazione elettronica. Il limite di Schoenberg non ha alcuna importanza in quanto esse partono da una massa di nucleo di elio piccola ( $M_c < 0.1M_\odot$ ) ma quando il bruciamento in shell ha prodotto  $M_c > 0.1M_\odot$ , la degenerazione è diventata tale da rendere obsoleto questo limite. La stella esiste in una configurazione di equilibrio con un nucleo degenere ed isoterma. Non è necessaria una rapida contrazione del nucleo e pertanto non si ha l'equivalente del gap di Hertzsprung nel diagramma HR. Ancora, a causa della degenerazione, la contrazione del nucleo non è connessa al suo riscaldamento. Durante le prime fasi di post sequenza la crescita del nucleo di elio è lenta, il nucleo è isoterma e alla temperatura della shell di idrogeno ben inferiore a quella di innesco del bruciamento dell'elio (circa  $10^8$  °K). In queste stelle l'innesco dell'elio nel centro sarà ritardato da effetti secondari fino a quando la massa del nucleo sarà cresciuta oltre un certo limite. Pertanto la fase fra l'esaurimento dell'idrogeno e l'accensione dell'elio nel centro è lenta e facilmente osservabile (molte stelle visibili nel diagramma HR). La contrazione del nucleo causa l'espansione dell'involucro sopra la shell di idrogeno ma fintanto che la luminosità non cambia drasticamente la stella rimarrà vicina alla sequenza principale, in quanto la linea di Hayashi è vicina alla sequenza principale. Ogni ulteriore espansione dell'involucro è possibile a patto che la luminosità aumenti. Infatti si dimostra e si osserva che la luminosità cresce circa di un fattore  $10^2$ . La caratteristica più saliente di queste stelle è che la luminosità dipende solo

(o quasi) dalla massa del nucleo  $M_c$  e non dalla massa dell'inviluppo e cioè massa totale. I modelli nelle fasi precedenti l'innesco dell'elio nel centro sono descrivibili mediante le leggi dell'omologia.

### 28.3 Omologia di shell

Consideriamo un modello (in equilibrio) composto da un nucleo degenere di elio (massa  $M_c$  e raggio  $R_c$ ) circondato da un inviluppo ricco di idrogeno con abbondanza  $X_H$ . La massa del nucleo  $M_c$  cresce a causa del bruciamento dell'idrogeno in shell che fornisce la luminosità  $L$

$$\frac{dM_c}{dt} = \frac{L}{X_H E_H} \quad (28.3)$$

dove  $E_H$  è l'energia liberata per grammo di idrogeno. Se la luminosità fosse costante questa equazione potrebbe essere facilmente integrata, ma durante l'evuzione la luminosità cresce al crescere di  $M_c$ . Questo può essere facilmente compreso tenendo conto della grande concentrazione in massa nel nucleo e della grande gravità alla sua superficie. Con buona approssimazione l'inviluppo può essere considerato come staccato dal nucleo e senza alcun effetto sulla shell di idrogeno.

Presentiamo in quanto segue un approccio analitico teso a legare le proprietà del nucleo con quelle della shell. A tale scopo usiamo le leggi dell'omologia e le seguenti rappresentazioni dell'opacità, della produzione di energia e della equazione di stato

$$\kappa = \kappa_0 P^a T^b \quad \epsilon = \epsilon_0 \rho^{n-1} T^\nu \quad P = \frac{K}{\mu H} \rho T \quad (28.4)$$

quest'ultima valida fuori del nucleo dove il gas è non degenere.

Assumiamo ora che per densità, temperatura, pressione e luminosità locale nella regione della shell esistano delle relazioni di proporzionalità con  $M_c$  e  $R_c$

$$\rho(r/R_c) \propto M_c^{\phi_1} R_c^{\phi_2} \quad (28.5)$$

$$T(r/R_c) \propto M_c^{\psi_1} R_c^{\psi_2} \quad (28.6)$$

$$P(r/R_c) \propto M_c^{\tau_1} R_c^{\tau_2} \quad (28.7)$$

$$L(r/R_c) \propto M_c^{\sigma_1} R_c^{\sigma_2} \quad (28.8)$$

Queste relazioni di tipo omologo servono a confrontare due modelli di massa e raggio diversi,  $M_c$ ,  $M'_c$ ,  $R_c$ ,  $R'_c$ . I punti omologhi nei due modelli sono definiti dalla relazione

$$\frac{r}{R_c} = \frac{r'}{R'_c} \quad (28.9)$$

sulla base della quale possiamo scrivere

$$\frac{\rho}{\rho'} = \left(\frac{M_c}{M'_c}\right)^{\phi_1} \left(\frac{R_c}{R'_c}\right)^{\phi_2} \quad (28.10)$$

$$\frac{P}{P'} = \left(\frac{M_c}{M'_c}\right)^{\tau_1} \left(\frac{R_c}{R'_c}\right)^{\tau_2} \quad (28.11)$$

Introduciamo queste relazioni nelle equazioni di struttura allo scopo di determinare gli esponenti. Le equazioni di struttura vengono formulate come segue

$$dP \propto M_c \rho d(1/r) \quad (28.12)$$

$$d(T^4) \propto \kappa \rho L_r d(1/r) = \kappa_0 \rho P^a T^b L_r d(1/r) \quad (28.13)$$

$$dL_r \propto \epsilon \rho d(r^3) = \epsilon_0 \rho^n T^\nu d(r^3) \quad (28.14)$$

con fattori di proporzionalità positivi. Dalla equazione di stato e le relazioni di omologia per  $\rho$  e  $T$  abbiamo le relazioni

$$\tau_1 = \phi_1 + \psi_1 \quad \tau_2 = \phi_2 + \psi_2 \quad (28.15)$$

Integriamo ora le equazioni di struttura attraverso la shell prendendo un raggio iniziale  $r_0$  sufficientemente più grande di  $R_c$  in modo tale che  $P(r_0/R_c) \ll P(r/R_c)$

$$P(r/R_c) = P(r_0/R_c) + \int_{1/r_0}^{1/r} GM_c \rho d(1/r) \simeq \frac{GM_c}{R_c} \int_{x_0}^x \rho dx \quad (28.16)$$

con  $x = R_c/r$ . Ripetendo lo stesso per l'altro modello abbiamo

$$P'(r'/R'_c) \simeq \frac{GM'_c}{R'_c} \int_{x_0}^x \rho' dx = \frac{GM'_c}{R'_c} \left(\frac{M'_c}{M_c}\right)^{\phi_1} \left(\frac{R'_c}{R_c}\right)^{\phi_2} \int_{x_0}^x \rho dx. \quad (28.17)$$

Dal confronto otteniamo

$$P(r/R_c) \propto M_c^{\phi_1+1} R_c^{\phi_2-1} \quad (28.18)$$

insieme a

$$\tau_1 = \phi_1 + 1 \quad \tau_2 = \phi_2 - 1 \quad (28.19)$$

Lo stesso procedimento può essere ripetuto per le altre equazioni con l' accortezza di prendere  $r_0 = R_c$  per la equazione della produzione di energia (a  $R_c$  la luminosità locale si annulla). Alla fine otteniamo le seguenti relazioni fra gli esponenti

$$(4-b)\psi_1 = \phi_1 + a\tau_1 + \sigma_1 \quad (28.20)$$

$$(4-b)\psi_2 = \phi_2 + a\tau_2 + \sigma_2 - 1 \quad (28.21)$$

$$\sigma_1 = n\phi_1 + \nu\psi_1 \quad \sigma_2 = n\phi_2 + \nu\psi_2 + 3 \quad (28.22)$$

L'insieme delle relazioni ottenute fino ad ora per gli esponenti costituisce un sistema di equazioni algebriche lineari la cui soluzione è

$$\phi_1 = -\frac{\nu - 4 + a + b}{1 + n + a} \quad \phi_2 = -\frac{\nu - 6 + a + b}{1 + n + a} \quad (28.23)$$

$$\psi_1 = 1 \quad \psi_2 = -1 \quad (28.24)$$

$$\tau_1 = 1 + \phi_1 \quad \tau_2 = \phi_2 - 1 \quad (28.25)$$

$$\sigma_1 = \nu + n\phi_1 \quad \sigma_2 = 3 - \nu + n\phi_2 \quad (28.26)$$

Queste relazioni ci permettono di conoscere le variazioni da un modello ad un altro. Ad esempio per la temperatura e luminosità abbiamo

$$T \propto M^{\psi_1} R^{\psi_2} = \frac{M_C}{R_c} \quad (28.27)$$

$$L_r \propto M_c^{\nu+n\phi_1} R_c^{3-\nu+n\phi_2} \quad (28.28)$$

Se usiamo l'opacità di electron-scattering ( $a=b=0$ ), la produzione di energia del *CNO* ( $\nu = 13$ ,  $n = 2$ ) a cui corrisponde  $\phi_1 = -3$ ,  $\phi_2 = 7/3$ , si ottiene che

$$L_r \propto M_c^7 R_c^{-16/3} \quad (28.29)$$

Questa relazione vale per tutti i punti omologhi e quindi anche sopra la shell di idrogeno dove  $L_r = L$ . Da questa discende la relazione per la luminosità totale

$$L \propto M_c^7 R_c^{-16/3} \quad (28.30)$$

A questo punto abbiamo bisogno di una relazione che legghi fra loro  $R_c$  e  $M_c$ . I nuclei degeneri sono simili a Nane Bianche per le quali il raggio diminuisce al crescere della massa. È ovvio che la relazione delle Nane Bianche non può essere utilizzata direttamente in questo caso, in quanto sotto la shell di idrogeno deve esistere uno strato di transizione molto caldo e coinvolgente una grande frazione del volume del nucleo in cui la materia passa da non degenerare a degenerare. Tuttavia solo allo scopo di illustrare il problema adottiamo la relazione delle Nane Bianche e scrivere

$$\frac{d \ln L}{d \ln M_c} = \sigma_1 + \sigma_2 \frac{d \ln R_c}{d \ln M_c} \quad (28.31)$$

Nel caso che  $a = b = 0$ ,  $n = 2$  e  $\nu = 14$  si trova che  $d \ln L / d \ln M_c \simeq 8 \dots 10$ .

Analoga relazione è derivabile per la temperatura dei punti omologhi

$$\frac{d \ln T}{d \ln M_c} = 1 - \frac{d \ln R_c}{d \ln M_c} \quad (28.32)$$

da cui si vede che  $d \ln T / d \ln M_c \geq 1$ . Poichè i nuclei sono isotermini questa relazione dà anche l'aumento della temperatura centrale.

Con lo stesso formalismo possiamo spiegare la variazione in luminosità che avviene quando, durante la salita lungo la linea di Hayashi (ramo delle giganti rosse), la shell di idrogeno incontra la discontinuità in peso molecolare causata dalla massima penetrazione della convezione esterna avvenuta durante i primi stadi della salita. A tale scopo usiamo le leggi dell'omologia prendendo  $M_c$ ,  $R_c$  e tutti

gli altri parametri costanti e variando solo il peso molecolare  $\mu$ . In analogia con il caso precedente si ha

$$\rho(r/R_c) \propto \mu^{\phi_3} \quad T(r/R_c) \propto \mu^{\psi_3} \quad P(r/R_c) \propto \mu^{\tau_3} \quad L_r(r/R_c) \propto \mu^{\sigma_3} \quad (28.33)$$

Con la stessa tecnica si ottengono i valori degli esponenti

$$\phi_3 = \frac{4 - b - \nu}{1 + n + a} \quad \psi_3 = 1 \quad \tau_3 = \psi_3 \quad \sigma_3 = \nu + n\phi_3 \quad (28.34)$$

Usando  $a = b = 0$ ,  $\nu = 13$  e  $n = 2$  si trova che  $L_r \propto \mu^7$ . Pertanto la diminuzione di peso molecolare nella shell al momento dell'incontro di quest'ultima con la discontinuità causa una temporanea diminuzione di  $L_r$ , seguita da un rapido aumento causato dal crescere della massa del nucleo (il peso molecolare nella shell rimane ora fermo al nuovo valore).

Al crescere della massa del nucleo, la temperatura di questo aumenta a causa di due effetti confrontabili. Il primo è la crescita della temperatura nella shell ( $T \propto M_c/R_c$ ). Il secondo è dovuto alla contrazione gravitazionale del nucleo al crescere di  $M_c$ . La contrazione libera energia e riscalda le regioni sotto la shell e pertanto l'intero nucleo. Nella regione sotto la shell si instaura un gradiente di temperatura diretto verso il centro che convoglia l'energia verso le regioni più interne. Tutto questo è rafforzato dal crescere della luminosità: il tasso di crescita della massa del nucleo  $\dot{M}_c$  è proporzionale a  $L$ , che a sua volta aumenta molto al crescere di  $M_c$ . La temperatura cresce fino al punto di ignizione dell'elio ( $\simeq 10^8$  °K). Quando ciò avviene la massa del nucle è circa  $0.5M_\odot$ .

Vi è una importante considerazione da fare che proviene dal fatto che il nucleo è degenere. La questione può essere posta in questi termini. In un nucleo non degenere (come nelle stelle più massicce) l'accensione dell'elio avviene sempre alla stessa temperatura ma quando la massa del nucleo è circa  $0.33M_\odot$ . Perché in un gas degenere è necessario far crescere la massa del nucleo fino a  $\simeq 0.5M_\odot$ ? La ragione sta nella degenerazione stessa. Infatti quando si contrae un nucleo non degenere, parte dell'energia liberata dalla contrazione va in aumento di energia termica del gas cioè nuclei ed elettroni in regime di equipartizione di energia in quanto entrambi sono governati dalla stessa statistica (Maxwell-Boltzmann). Nel caso di un nucleo degenere, l'energia liberata viene in gran

parte presa dagli elettroni per forzarli a stati di momento più elevati (non vale la equipartizione) e poca dai nuclei. Pertanto il processo di riscaldamento di quest' ultimi viene rallentato. Ci sarà bisogno di liberare un maggiore quantità di energia gravitazionale (maggior aumento della massa del nucleo) per poter finalmente riscaldare i nuclei alla temperatura di innesco.

## 28.4 Flash dell'elio

L'analisi della stabilità secolare del bruciamento nucleare ci permette di comprendere a fondo quanto avvenga all'accendersi dell'elio in nucleo degenerare.

Supponiamo che avvenga una piccola perturbazione della temperatura  $\theta = dT_c/T_c$  nelle regioni centrali del nucleo. Sappiamo che essa evolve secondo la relazione.

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{L_s}{c_P M_s T_c} (\epsilon_T + \kappa_T - 4) \theta \quad (28.35)$$

dove  $L_s$  e  $M_s$  sono la luminosità e massa di una sfera concentrica interna al nucleo stesso. Nel derivare questa relazione da quella generale abbiamo posto  $\delta = 0$  e usato di conseguenza  $c^* = c_P$ . Per il bruciamento dell'elio la quantità  $\epsilon_T > 0$  è grande (circa 30). Pertanto essa domina tutti gli altri termini nella relazione precedente rendendo positiva la quantità in parentesi: l'inizio del bruciamento dell'elio è instabile e dà luogo ad un runaway termico con tempo scala dell'ordine di  $c_P M_s T_c / L_s = c_P T_c / \epsilon$ . Con l'aiuto del formalismo dell'omologia possiamo ricavare

$$\frac{\delta \rho_c}{\rho_c} = \frac{3\delta}{4\alpha - 3} \theta \quad (28.36)$$

Pertanto per  $\alpha = 3/5$  e  $\delta = 0$  si ricava  $d\rho_c = 0$ . Da quanto sopra segue che mentre la temperatura sale, la materia non si espande e la densità centrale si mantiene costante. Nel diagramma  $T_c - \rho_c$  il centro evolve solo in temperatura. La ragione sta nell'equazione di stato del gas degenerare che non dipende dalla temperatura. Poiché non c'è lavoro di espansione durante il runaway termico si ha una enorme sovra-produzione di energia nucleare. La luminosità locale sale a circa  $10^{11} L_\odot$  (quella di una intera galassia). Al crescere della temperatura il luogo delle condizioni centrali interseca la linea  $\alpha = 3/4$  che separa la regione di degenerazione da quella di gas perfetto. Al crescere ulteriore della  $T_c$  il gas

si espande, la degenerazione viene rimossa, il calore specifico gravo-termico diventa  $c^* < 0$  ed il bruciamento centrale diventa stabile. L'espansione ferma l'aumento di temperatura, il gas si raffredda fino a portare la produzione di energia a valori normali. A seguito di ciò il nucleo di massa  $M_c$  (che è rimasta praticamente costante durante questa brevissima fase) si espande ad un nuovo raggio  $R_c$  maggiore di quello al momento dell'accensione. Dalle relazioni di omologia apprendiamo che a seguito di ciò la luminosità della stella deve scendere rispetto al valore al momento del flash. Queste previsioni sono confermate in pieno dai modelli numerici.

### 28.5 Instabilità termica della shell di elio

Nel corso dell'evoluzione le stelle possono dar vita a varie shells nucleari (ad esempio la shell di idrogeno, le shell di idrogeno ed elio, le shells di idrogeno, elio, carbonio etc.). L'efficienza di queste shells varia nel tempo fino al totale spegimento per periodi più o meno lunghi. Shells vicine possono influenzarsi a vicenda in quanto ognuna richiede una tipica temperatura per esistere. Ad esempio se una shell di elio ( $T \simeq 2 \times 10^8 \text{ }^\circ K$ ) si porta vicina ad uno strato ricco di idrogeno ci aspettiamo un'enorme aumento del bruciamento dell'idrogeno ( $T \leq 3 \times 10^7$ ). Inoltre, ogni shell ha una velocità  $\dot{M}_i$  caratteristica nel processare la materia a meno che le rispettive luminosità  $L_i$  non stiano in rapporti opportuni. Se  $X_i$  è l'abbondanza in massa di un combustibile e  $q_I$  l'energia liberata per grammo di materia, allora

$$\dot{M}_i = \frac{L_i}{q_i X_i} \quad (28.37)$$

Ad esempio il moto relativo delle shell di idrogeno ed elio nelle stelle di ramo asintotico è regolato dalla relazione

$$\frac{\dot{M}_H}{\dot{M}_{He}} = \frac{L_H}{L_{He}} \frac{q_{He}}{q_H} \frac{X_{He}}{X_H} \quad (28.38)$$

Questo dà una situazione stazionaria solo se  $L_H \simeq 7 \times L_{He}$  atteso che  $X_H \simeq 0.7$  e  $X_{He} \simeq 1$  e che  $q_H/q_{He} \simeq 10$ . In caso contrario o le due shell si avvicinano fra loro o la shell più interna resta indietro.

I modelli numerici di stelle AGB in fase di doppia shell mostrano il tipico fenomeno della instabilità termica della shell di elio la quale da origine al com-



plicato quadro evolutivo noto come *terzo dredge-up*. In quanto segue cerchiamo di dare una spiegazione fisica quantitativa delle ragioni per cui avviene l'instabilità termica.

A tale scopo ricordiamo alcuni fatti essenziali: dopo lo spegimento della shell di idrogeno e concomitante secondo dredge-up che ha portato la estensione dell'inviluppo ricco di idrogeno in zone molto vicine alla shell di elio sottostante, la shell di idrogeno viene riaccesa sopra la shell di elio, la separazione in massa fra le due shells è molto piccola e le shells stesse sono molto sottili in massa. Infine le due shells si alternano nel tempo quali sorgenti di energia; in generale la shell di elio è quieta e scarsamente efficiente, mentre la shell di idrogeno domina, ma con periodicità regolare la shell di elio aumenta vertiginosamente la produzione di energia su un intervallo di tempo molto piccolo, esaurisce il combustibile a disposizione, scatena l'espansione degli strati sovrastanti causando lo spegimento temporaneo della shell di idrogeno, ed infine ritorna ad essere quiescente. Perché? Quali sono le cause dell'instabilità termica della shell di elio?

Supponiamo di avere una shell di spessore  $D$  confinata fra  $r_0$  e  $r = r_0 + D$ . Se  $D$  è piccolo la massa dentro la shell è espressa da

$$\Delta M_s \simeq \rho r_0^2 D \quad (28.39)$$

Se a seguito di una perturbazione nella produzione di energia la shell si espande, abbiamo  $dr = dD$  ed imponendo che la variazione in massa sia trascurabile abbiamo

$$\frac{d\rho}{\rho} = -\frac{dD}{D} = -\frac{r}{D} \frac{dr}{r} \quad (28.40)$$

Assumiamo ora che la materia sopra la shell si espanda o contragga in maniera omologa. Sfruttando il formalismo perturbativo, la variazione di pressione nella shell è

$$\frac{dP}{P} = -4 \frac{dr}{r} \quad (28.41)$$

Calcoliamo ora il calore specifico gravo-termico: in queste condizioni esso diventa

$$c^* \frac{dT}{dt} = d\epsilon \quad c^* = c_P \left( 1 - \nabla_{ad} \frac{4\delta}{4\alpha - r/D} \right) \quad (28.42)$$

Questa relazione è stata ottenuta semplicemente sostituendo il termine  $d\rho/\rho = 3$  con  $d\rho/\rho = r/D$ . Se  $c^* > 0$  la shell è instabile poichè un aumento di energia ( $d\epsilon > 0$ ) porta ad una maggior temperatura ed ulteriore produzione di energia. Questa relazione ci riconduce immediatamente al caso dell' instabilità causata dall' accensione di un combustibile in un gas degenere. Tuttavia è presente un' altra forma di instabilità che avviene anche per un gas ferretto ( $\alpha = \delta = 1$ ,  $\nabla_{ad} = 2/5$ ). Essa è causata dallo spessore della shell. Infatti se  $r/D$  è grande ( $D$  molto piccolo) quando il rapporto  $D/r < 1/4$  il calore specifico gravo-termico è positivo; la shell è secolarmente instabile. Questo tipo di instabilità in una shell viene chiamata *pulso termico*.

A prima vista questo risultato è sorprendente. Come mai una semplice proprietà geometrica quale lo spessore può indurre instabilità. Il problema può essere chiarito se consideriamo il cambiamento di pressione nella shell come una risposta idrostatica allo spostamento degli strati sovrastanti. Supponiamo che la shell tenti di liberarsi della perturbazione energetica mediante l'espansione. Un significativo aumento dello spessore relativo  $dD/D$  dà lo stesso risultato di una diminuzione relativa della densità  $d\rho/\rho$ , ma comporta solo un piccolo aumento della posizione  $dr/r$  se  $D/r \ll 1$ . Questo significa che gli strati sovrastanti si sono mossi poco cosicchè il loro peso rimane circa costante. La condizione di equilibrio idrostatico impone allora che  $dP/P \simeq 0$ .

Dalla relazione di omologia

$$\frac{dP}{P} = -4 \frac{dr}{r} \quad (28.43)$$

il legame fra variazioni di pressione e densità è dato da

$$\frac{dP}{P} = 4 \frac{D}{r} \frac{d\rho}{\rho} \quad (28.44)$$

Introducendo l'equazione di stato

$$\frac{d\rho}{\rho} = \alpha \frac{dP}{P} - \delta \frac{dT}{T} \quad (28.45)$$

si vede subito che una espansione comporta un *aumento* di temperatura in quanto  $dP/P \rightarrow 0$  per  $D/r \rightarrow 0$

$$\frac{d\rho}{\rho} = -\delta \frac{dT}{T} \quad (28.46)$$

Pertanto in una shell sottile l'espansione non porta a stabilità ma al contrario la rende più instabile (il tutto è come se l'equazione di stato fosse  $\rho \propto 1/T$ ).

L'esistenza di questo tipo di instabilità fu scoperta da Schwarzschild e Harm nel lontano 1958, fu confermata da Weigert nel 1966 ed è stata successivamente confermata da migliaia di calcoli evolutivi di stelle durante la fase AGB.

L'instabilità viene momentaneamente rimossa per l'esaurirsi del contenuto di elio nella shell e per la sua stessa espansione.

La periodicità del fenomeno (tempo fra due cicli successivi) e' stata dedotta dai numerosi calcoli evolutivi e può essere espressa da

$$\lg(\tau_P) \simeq 3.05 + 4.5 \left(1 - \frac{M_c}{M_\odot}\right) \quad \text{in anni} \quad (28.47)$$

Per  $M_c = 0.5M_\odot$  la durata di un ciclo è di circa  $10^5$  anni, per scendere fino ad 1 anno per  $M_c = 1.4M_\odot$ .



## Capitolo 29

# STELLE DI MASSA INTERMEDIA

### 29.1 Evoluzione di Stelle di Massa Intermedia

Sono definite stelle di massa intermedia quelle in cui l'accensione del bruciamento centrale dell'elio e del carbonio avvengono in condizioni non degeneri la prima e di elevata degenerazione la seconda.

Prototipo di questa categoria di stelle è la  $5M_{\odot}$ . Sulla sequenza principale il bruciamento dell'idrogeno avviene attraverso il ciclo CNO in un nucleo convettivo che all'inizio contiene circa il 25% della massa e poi decresce nel tempo.

L'esatta dimensione del nucleo convettivo è affetta dall'incertezza dell'overshoot (non si presenta il problema della semiconvezione) con effetti sulla struttura noti ma ancora discutibili.

A causa della convezione, all'interno del nucleo l'idrogeno viene consumato in maniera uniforme.

La durata della fase dell'idrogeno dipende dalle dimensioni del nucleo convettivo ed in ogni caso diminuisce al crescere della massa.

Quando l'abbondanza dell'idrogeno centrale  $X_c$  è circa 0.05 la stella subisce una contrazione gravitazionale dell'intera struttura che porta al riscaldamento ed accensione del bruciamento dell'idrogeno in shell al bordo del nucleo di quasi puro He.

All'esaurirsi completamente dell'idrogeno nel nucleo la convezione centrale scompare, la shell di H diventa sottile e comincia a propagarsi verso l'esterno lasciando dietro di sé un nucleo di He crescente in massa ed in contrazione gravitazionale.

La contrazione del nucleo comporta l'espansione dell'involuppo con la shell di H che si mantiene grosso modo ad una distanza fissa dal centro. La materia immediatamente sovrastante la shell fluisce attraverso questa, viene processata e va ad aumentare la massa del nucleo. Al contrario gli strati più esterni si espandono.

La luminosità della stella diminuisce alquanto (l'energia va nel lavoro di espansione dell'involuppo) e così pure la  $T_{eff}$ . La stella attraversa rapidamente la regione fra la sequenza principale e le giganti rosse. A causa del rapido attraversamento, ci si aspetta di osservare poche stelle in questa regione, nota anche come Hertzsprung gap.

Raggiunta la linea di Hayashi pertinente alla sua massa, la stella incomincia a salire a luminosità crescenti mentre si genera la convezione di involuppo che progressivamente penetra fino a conglobare circa metà della massa. Quando il nucleo di He è pari a circa  $0.75M_{\odot}$  e  $\log L/L_{\odot} = 3.1$  si ha l'innesco del bruciamento dell'elio nel centro. Poichè la regione non è degenera, il bruciamento avviene in maniera quieta.

Si noti che la massa del nucleo di He è maggiore del valore minimo richiesto in materiale non degenera e corrisponde esattamente al valore fissato dal raggiungere una temperatura sufficiente.

A causa della forte dipendenza dalla temperatura della reazione  $3\alpha$  si forma un nocciolo più interno convettivo il quale cresce rapidamente in massa fino a stabilizzarsi attorno ad un valore opportuno. Anche in questo caso si presentano le incertezze sull'esatta dimensione del nucleo convettivo dovute ai fenomeni della semiconvezione e dell'overshoot. Gli effetti sono noti ma tuttora oggetto di indagine.

La struttura della stella è ora come segue:

- (1) nucleo convettivo centrale dove l'elio è trasformato progressivamente in  $^{12}\text{C} + ^{16}\text{O}$ ,
- (2) una regione ricca in He che non ha temperatura sufficiente per il bruciamento nucleare,
- (3) una sottile shell dove brucia l'idrogeno attraverso il ciclo CNO,
- (4) un esteso involuppo con abbondanze di H e He originali.

Tuttavia se la convezione esterna raggiunge (come avviene) gli strati interni in cui durante la fase di sequenza principale è avvenuto il bruciamento di idrogeno

attraverso il ciclo CNO, la composizione chimica dell'inviluppo viene modificata: l'abbondanza di H diminuisce mentre quella di He cresce, anche se in maniera limitata, e soprattutto l'abbondanza di C rispetto a quella del N diminuisce a favore di quest'ultimo. Questa infatti è la tipica composizione chimica superficiale nelle giganti rosse luminose.

Al progredire del bruciamento dell'elio, le regioni centrali tendono ad espandersi con conseguente lieve caduta della temperatura e produzione di energia nelle regioni della shell di H. L'inviluppo esterno si contrae, la convezione esterna recede e la stella ridiscende lungo la linea di Hayashi progressivamente allontanandosene verso  $T_{eff}$  più elevate muovendo attraverso il diagramma H-R a luminosità lievemente crescente.

Nel tempo speso in prossimità di e lungo la linea di Hayashi, la stella è stata soggetta all'azione del vento stellare quieto. Quantunque le osservazioni indichino dei tassi di perdita di massa superiori a quelli incontrati per le stelle di RGB di piccola massa (ciò può essere dedotto anche dalla relazione analitica per il tasso di perdita di massa), la velocità evolutiva in queste regioni  $dt_{RG}$  è tale che la quantità di massa persa è trascurabile e quindi si può assumere che l'evoluzione sia a massa costante.

L'escursione verso  $T_{eff}$  elevate è nota come *loop* della fase dell'elio. La stella attraversa la regione di instabilità delle stelle Cepheidi, le quali sono appunto interpretate come stelle di circa  $5M_{\odot}$  in questa fase. I numerosi calcoli evolutivi mostrano che la comparsa del loop dipende essenzialmente dalla composizione chimica e dalla massa della stella. Per data composizione chimica, l'estensione del loop cresce con la massa, stelle di massa relativamente piccola ( $2.2M_{\odot} < M < 3M_{\odot}$ ) tendono a rimanere vicine alla linea di Hayashi. Il loop è anche favorito da basse abbondanze iniziali di metalli e di elio. Tuttavia esso è molto sensibile anche ad altri parametri, quali opacità, velocità della reazione  $^{12}\text{C}(\alpha, \gamma)^{16}\text{O}$ , estensione del nucleo convettivo, etc. al punto tale da avere un comportamentanto alquanto imprevedibile.

Raggiunta la massima escursione nel diagramma H-R la stella staziona a completare il bruciamento dell'elio, mentre la produzione di energia gradualmente passa dalla shell di H al nucleo di He.

La durata totale del tempo di bruciamento dell'elio nel nucleo è compresa fra 0.05 e 0.20 del tempo di vita della fase dell'idrogeno a seconda dell'efficienza

dei processi di mescolamento convettivo (overshoot) durante quest'ultima. Il tempo di vita della fase di bruciamento dell'elio diminuisce al crescere della massa della stella ed è proporzionale alle dimensioni del nucleo convettivo. In ogni caso è circa  $0.1 \div 0.2$  volte quella del bruciamento dell'idrogeno.

Come l'elio incomincia ad esaurirsi nel centro, il nucleo si contrae e si riscalda al fine di mantenere inalterato il tasso di produzione di energia. La contrazione determina anche un lieve aumento di temperatura e di generazione di energia nella shell di H con conseguente espansione dell'involuppo esterno. L'evoluzione cambia direzione nel diagramma HR e la stella ritorna nella regione delle giganti rosse riportandosi sulla linea di Hayashi. L'elio viene esaurito nel centro e grazie alla contrazione del nucleo viene acceso in una shell esterna. La stella risale lungo la linea di Hayashi e la convezione esterna ripenetra nel profondo raggiungendo zone che erano state in precedenza arricchite in He. Pertanto il rapporto He/H alla superficie cresce ulteriormente.

La struttura della stella in salita lungo la linea di Hayashi è costituita da

- (1) nucleo di  $^{12}\text{C} + ^{16}\text{O}$  con forte degenerazione elettronica,
- (2) una shell sottile che brucia He,
- (3) uno strato sottile di He inerte
- (4) una shell che brucia H,
- (5) l'esteso involucro esterno quasi completamente convettivo (la convezione non arriva tuttavia a toccare la shell bruciante H).

La struttura della stella è esattamente simile a quella delle stelle con massa minore di  $2.2M_{\odot}$  durante la fase di *AGB* e quindi evolverà in maniera identica. La Figura 29.1 mostra la variazione nel tempo della struttura interna di due tipiche stelle di massa intermedia ( $3$  e  $7M_{\odot}$ ) con composizione chimica  $Y = 0.28$  e  $Z = 0.020$ , di cui una ( $7M_{\odot}$ ) esegue il loop nel diagramma H-R durante il bruciamento dell'elio, mentre l'altra ( $3M_{\odot}$ ) rimane vicina alla linea di Hayashi. Queste stelle sono calcolate assumendo una modesta efficienza di overshoot convettivo [quindi hanno nuclei convettivi di dimensioni maggiori di quelle dettate dalla semplice condizione  $(\nabla_r \geq \nabla_{ad})$ ] durante le fasi di bruciamento dell'idrogeno e dell'elio. Inoltre esse subiscono l'effetto della perdita di massa durante le fasi di RGB e E-AGB.

Modelli evolutivi di questo tipo sono attualmente da preferirsi a quelli con nuclei convettivi classici e senza perdita di massa in quanto meglio riproducono



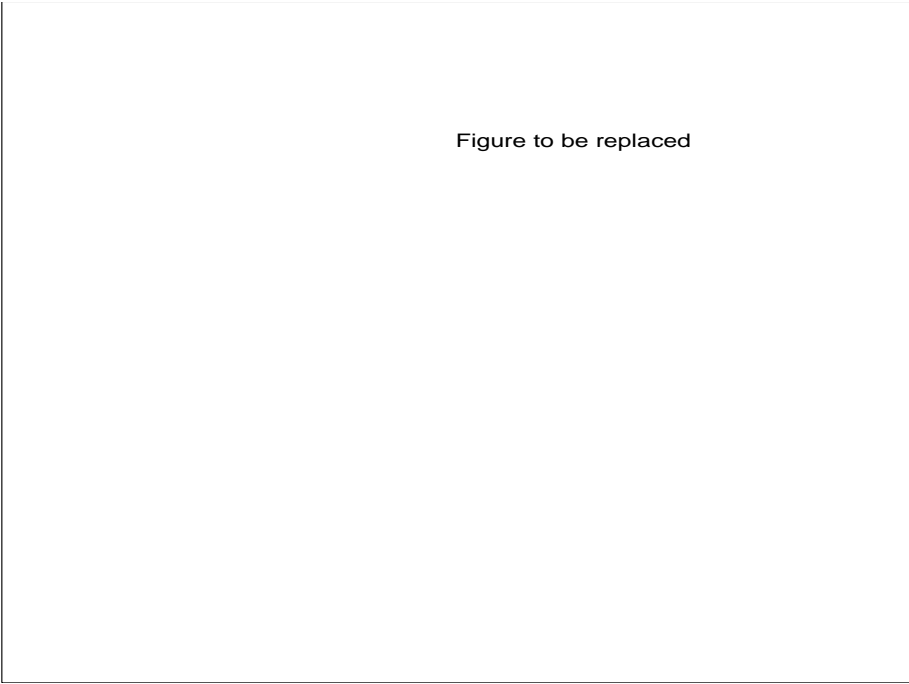


Figure to be replaced

Figura 29.1: Diagramma di struttura delle stelle di 3 (sinistra) e  $7 M_{\odot}$  (destra) dalla sequenza principale alla fine della fase E-AGB

le proprietà dei diagrammi H-R degli ammassi giovani e ricchi di stelle. La Figura 29.2 mostra il diagramma H-R di questi modelli assieme a quelli per stelle di  $4M_{\odot}$  e  $5M_{\odot}$ , infine i tempi di vita per gli stadi indicati in Figura 29.2 sono riportati in Tabella 29.1 e Tabella 29.1.

Durante la fase di AGB il nucleo di  $^{12}\text{C} + ^{16}\text{O}$  continua a crescere, la shell di He attraversa la fase di instabilità termica, si instaura il gioco complicato fra le due shell nucleari, la shell convettiva sottile sopra la shell bruciante He e la convezione esterna, si ha il *III dredge-up* e la perdita di massa per vento quieto dalla superficie ed infine la espulsione improvvisa dell' involucro per instabilità pulsazionale. Tuttavia in questo caso, a differenza di quanto avveniva per le stelle di massa più piccola, la massa totale della stella è ben maggiore del minimo necessario all'accensione del bruciamento del  $^{12}\text{C}$  nel centro in un gas altamente degenerare.

Se il nucleo di  $^{12}\text{C} + ^{16}\text{O}$  raggiunge il valore di  $\simeq 1.4M_{\odot}$  l'accensione avviene con caratteristiche esplosive ed è nota come la *deflagrazione del carbonio*.

La modellistica di tale fase è complessa e tuttora incerta. La teoria corrente predice l'esplosione dell'intera stella in un tipo di supernova chiamato I-1/2.

Tabella 29.1: Caratteristiche fisiche di stelle di massa intermedia con composizione  $Y=0.28$  e  $Z=0.020$ . Modelli calcolati con semiconvezione durante la fase di bruciamento dell'elio. *A: sequenza principale; B: punto di minor  $T_{eff}$  nella fase dell'idrogeno; C: fine della fase dell'idrogeno; D: punto più luminoso nel gap di Hertzsprung; E: inizio della fase di Hayashi; F: inizio del bruciamento dell'elio e di massima luminosità sulla linea di Hayashi; G: discesa dalla linea di Hayashi (luminosità minima); H; massima estensione del loop; I: fine del bruciamento dell'elio.*

$M/M_{\odot}$	Età	$LogL/L_{\odot}$	$LogT_{eff}$	$M/M_{\odot}$	Età	$LogL/L_{\odot}$	$LogT_{eff}$	Note
3.0	0.	1.895	4.095	5.0	0.	2.718	4.239	A
	0.295(e9)	2.058	3.992		0.823(e8)	2.951	4.148	B
	0.304(e9)	2.158	4.043		0.847(e8)	3.027	4.194	C
	0.310(e9)	2.185	3.989		0.855(e8)	3.067	4.120	D
	0.315(e9)	1.783	3.711		0.864(e8)	2.663	3.682	E
	0.318(e9)	2.471	3.640		0.867(e8)	3.145	3.617	F
	0.337(e9)	1.899	3.697		0.963(e8)	2.926	3.651	G
	0.464(e9)	2.433	3.648		0.103(e9)	3.143	3.832	H
	0.465(e9)	2.329	3.657		0.105(e9)	3.019	3.649	I
7.0	0.	3.234	4.326	9.0	0.	3.602	4.387	A
	0.394(e8)	3.511	4.238		0.242(e8)	3.907	4.297	B
	0.405(e8)	3.577	4.282		0.248(e8)	3.968	4.342	C
	0.407(e8)	3.622	4.190		0.249(e8)	3.996	4.239	D
	0.409(e8)	3.267	3.652		0.250(e8)	3.606	3.641	E
	0.410(e8)	3.685	3.588		0.250(e8)	4.088	3.566	F
	0.441(e8)	3.494	3.622		0.261(e8)	3.845	3.603	G
	0.461(e8)	3.737	4.000		0.269(e8)	4.103	4.108	H
	0.476(e8)	3.530	3.624		0.284(e8)	3.938	3.608	I

Tabella 29.2: Tempi di vita (in anni) delle maggiori fasi nucleari ed evolutive di stelle di massa intermedia.

$M/M_{\odot}$	H-Burning	He-Burning	C-Burning
9.0	2.87(e7)	4.59(e6)	5.89(e4)
7.0	4.73(e7)	9.68(e6)	2.50(e5)
5.0	9.88(e7)	2.71(e7)	
4.0	1.73(e8)	4.21(e7)	
3.0	3.98(e8)	1.28(e8)	
2.5	7.33(e8)	2.34(e8)	
2.0	1.68(e9)	3.26(e8)	

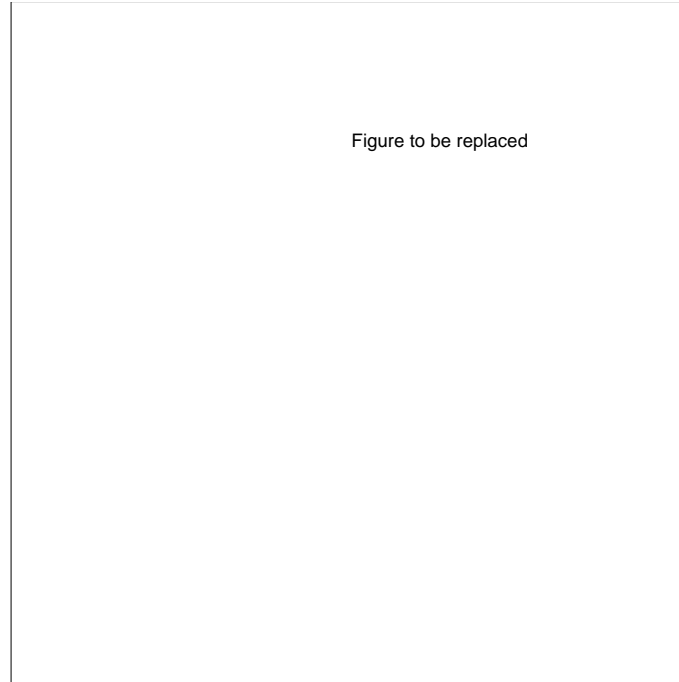


Figura 29.2: Diagramma H-R di stelle con moderato overshooting dai nuclei convettivi

Il destino della stella è dunque regolato dalla rapidità con cui cresce il nucleo di  $^{12}\text{C} + ^{16}\text{O}$  rispetto a quella con cui la stella perde massa dalla superficie.

I tassi osservati di perdita di massa in stelle giganti rosse e di AGB sono tali che una stella di  $5M_{\odot}$  perde l'intero involucro prima che il nucleo di  $^{12}\text{C} + ^{16}\text{O}$  abbia raggiunto il limite di  $1.4M_{\odot}$  e pertanto dopo aver formato una nebulosa planetaria finisca in una nana bianca di  $0.85M_{\odot}$ .

I calcoli evolutivi mostrano che in stelle con massa iniziale fino a circa  $6M_{\odot}$  prevale l'azione della perdita di massa e quindi che esse finiscono in nane bianche prima di poter accendere il bruciamento del carbonio. Invece in stelle con massa compresa fra  $6M_{\odot}$  e circa  $8 - 9M_{\odot}$  la perdita di massa non è sufficiente ed esse accendono il bruciamento del carbonio in condizioni degeneri dando origine alla classe di supernove di tipo I-1/2.

La Figura 29.3 compara le diverse evoluzioni e destini finali di stelle di massa piccola ed intermedia.

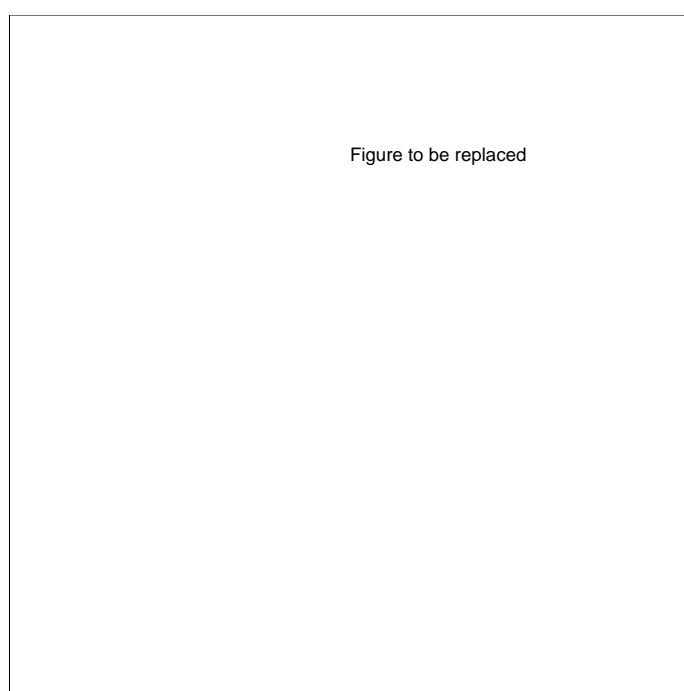


Figura 29.3: Diagramma H-R schematico di stelle con massa diversa

## Capitolo 30

# DEFLAGRAZIONE- DETONAZIONE DEL CARBONIO

### 30.1 Introduzione

Abbiamo visto che stelle con massa iniziale fino ad  $M_{up} \simeq 6 - 8M_{\odot}$  dopo aver attraversato una serie di stadi idrostatici e sviluppato un nucleo degenere con massa finale minore della massa  $M_{Ch}$ , diventano Nane Bianche.

Al contrario, stelle di massa iniziale compresa nell'intervallo  $6 - 8M_{\odot} < M < 10M_{\odot}$  arrivano all'innesco del carbonio nel centro in condizioni di totale degenerazione e con massa del nucleo  $\simeq M_{Ch}$ . Di conseguenza l'accensione del carbonio è potenzialmente esplosiva.

Da questo si comprende come fenomeni di supernova possano essere associati all'accensione di un combustibile in un nucleo fortemente degenere. Vedremo più avanti che un meccanismo alternativo è quello associato al collasso del nucleo di Fe. Questa situazione è tipica delle stelle massicce.

In questo capitolo discuteremo da vicino le cause fisiche della *detonazione - deflagrazione del carbonio* ed i fenomeni che ad esso si accompagnano.

### 30.2 Evoluzione del nucleo di C-O

Dopo il bruciamento centrale dell'elio, l'evoluzione del nucleo di C-O che si è formato dipende criticamente dalla possibilità che esso diventi degenere dopo la contrazione gravitazionale.

Poichè alla superficie del nucleo si è sviluppato un forte contrasto di densità,

la contrazione del nucleo è indipendente dall'involuppo e il nucleo stesso può essere considerato come una sfera in contrazione gravitazionale con pressione nulla alla superficie.

Incominciamo col valutare la massa critica di separazione fra il caso in cui la contrazione fa ulteriormente innalzare la temperatura da quello in cui ciò è impedito dalla degenerazione. A tale scopo usiamo una espressione per l'equazione di stato che metta in evidenza il diverso comportamento di ioni (nuclei) che non raggiungono la degenerazione da quello degli elettroni che possono facilmente raggiungerla.

In generale, il peso molecolare per la componente elettronica è  $\mu_e \simeq 2$  mentre quello degli ioni  $\mu_0 \simeq 12$ . Questo fa sì che la pressione degli elettroni non degeneri ( $1/\mu_e$ ) prevalga su quella degli ioni ( $1/\mu_0$ ). Ciò è ancor più vero nel caso che gli elettroni siano degeneri. Per semplicità si trascuri la pressione di radiazione e la creazione di coppie ( $e^+, e^-$ ) che possono portare a parziale degenerazione anche in condizioni di alta temperatura e bassa densità.

L'equazione di stato per gli elettroni è ora pensata come composta di due termini: uno che rappresenta la componente non degeneri; l'altro la componente degeneri

$$P = P_e = \left(\frac{k}{\mu_e H}\right) \rho T + K_\gamma \left(\frac{\rho}{\mu_e}\right)^\gamma \quad (30.1)$$

Nel secondo termine,  $\gamma$  non è costante: esso varia da  $\gamma = 5/3$  per  $\rho \ll 10^6$  g cm<sup>-3</sup> (non relativistico) a  $\gamma = 4/3$  per  $\rho \gg 10^6$  g cm<sup>-3</sup> (relativistico). Di conseguenza anche  $K_\gamma$  non rimane costante.

Una stima del valore della pressione centrale è fornita dall'equazione di equilibrio idrostatico

$$P_c \simeq \frac{GM_c \bar{\rho}}{R_c} = f GM_c^{2/3} \rho_c^{4/3} \quad (30.2)$$

dove si è assunto che  $P_c$  sia dato dal solo peso del nucleo, che  $\bar{\rho} = 3M_c/(4\pi R_c^3)$  sia proporzionale a  $\rho_c$  e sostituito  $R_c$ . Il fattore adimensionale  $f$  tiene conto della reale distribuzione di materia (densità) all'interno del nucleo ( $f \simeq 1$ ).

Usando l'equazione di stato ed eliminando  $P_c$  si ottiene

$$\left(\frac{k}{\mu_e H}\right) T_c = f GM_c^{2/3} \rho_c^{1/3} - K_\gamma \rho_c^{\gamma-1} \mu_e^{-\gamma} \quad (30.3)$$

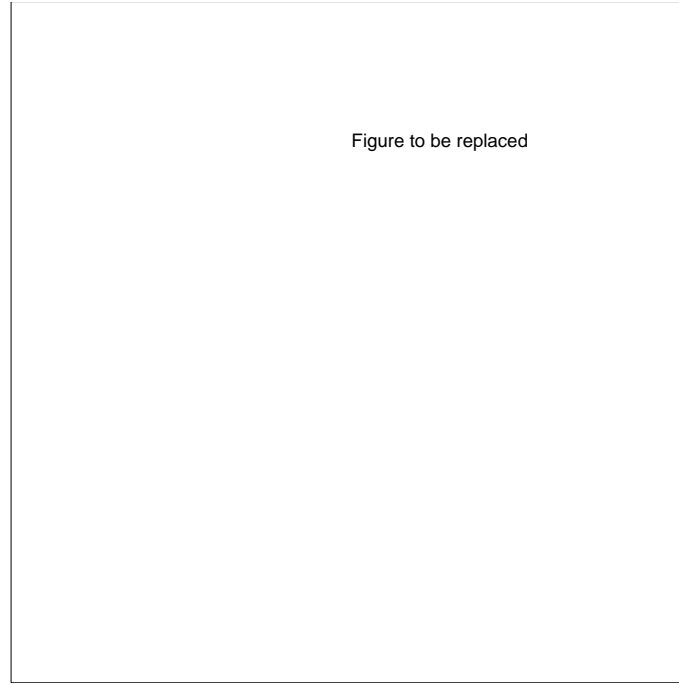


Figura 30.1: Diagramma delle condizioni centrali

Nel membro di destra di questa relazione, il primo termine domina sul secondo in assenza di degenerazione, mentre lo pareggia nel caso di alta degenerazione. Assegnata la massa  $M_c$ , questa equazione rappresenta un luogo nel diagramma  $\log \rho_c - \log T_c$  di Figura 30.1. Partendo da un valore piccolo di  $\rho_c$  e  $\gamma = 5/3$ , la temperatura centrale  $T_c$  cresce ed ha un massimo a  $\rho_{c,max}$  dopo di che diminuisce fino al valore limite  $T_c = 0$  che è raggiunto quando  $\rho_c = 8\rho_{max}$ . La prima parte della curva corrisponde al predominare nella equazione (30.3) del termine non degenere con pendenza  $1/3$ .

Tuttavia questo comportamento è modificato dagli effetti relativistici. Infatti al crescere della densità centrale la degenerazione relativistica diventa importante e  $\gamma \rightarrow 4/3$ ,  $K_\gamma \rightarrow K_{4/3}$ . Per tener conto del passaggio graduale dalla situazione non relativistica a quella relativistica introduciamo al seguente notazione ponendo  $\gamma = 4/3 + \chi$  con  $\chi \rightarrow 0$  al crescere di  $\rho$ . In questo modo possiamo scrivere

$$\left(\frac{k}{\mu_e H}\right) T_c = \rho_c^{1/3} \left( f G M_c^{2/3} - K_{4/3+\chi} \rho_c^\chi \mu_e^{-(4/3+\chi)} \right) \quad (30.4)$$

Questa relazione mostra che all'aumentare di  $\rho_c$  la temperatura non tende a

zero ma risale  $\propto \rho^{1/3}$  se viene verificata la condizione

$$M_c > M_{crit} = \left( \frac{K_{4/3}}{fG} \right)^{3/2} \mu_e^{-2} \quad (30.5)$$

Ovviamente  $M_{crit} \simeq M_{Ch}$ . Infatti se  $M_c = M_{crit}$  allora il nucleo con temperatura  $T_c = 0$  sarebbe completamente relativistico, degenere e in equilibrio idrostatico e ovviamente con massa  $M_c = M_{Ch}$ .

Possiamo pertanto dire che durante la contrazione di un nucleo con  $M_c \leq M_{Ch}$  la temperatura raggiunge un massimo e poi diminuisce mentre per  $M_{crit} \geq M_{Ch}$  la temperatura aumenta sempre proporzionalmente a  $\rho_c^{1/3}$ .

Consideriamo ora la massima temperatura raggiungibile quando  $M_{crit} \leq M_{Ch}$  in regime non relativistico. Poniamo  $\gamma = 5/3$  e  $K_\gamma = K_{5/3}$  e  $M_{crit}$  nella relazione (30.3) ottenendo

$$\left( \frac{k}{H} T_c \right) = K_{4/3} \left( \frac{M_c}{M_{crit}} \right)^{2/3} \left( \frac{\rho_c}{\mu_e} \right)^{1/3} - K_{5/3} \left( \frac{\rho_c}{\mu_e} \right)^{2/3} \quad (30.6)$$

Da questa si ottiene la temperatura  $T_{c,max}$  per

$$\rho_{c,max} = \frac{1}{8} \left( \frac{K_{4/3}}{K_{5/3}} \right)^3 \left( \frac{M_c}{M_{crit}} \right)^2 = 2.38 \times 10^5 \left( \frac{M_c}{M_{crit}} \right)^2 \quad \text{gcm}^{-3} \quad (30.7)$$

con il valore

$$T_{c,max} = \frac{H}{4k} \frac{K_{4/3}^2}{K_{5/3}} \left( \frac{M_c}{M_{crit}} \right)^{4/3} = 0.5 \times 10^9 \left( \frac{M_c}{M_{crit}} \right)^{4/3} \quad (30.8)$$

Ne segue che per nuclei con  $M_c \leq M_{crit}$  la temperatura  $T_c$  non può superare  $\simeq 0.5 \times 10^9 \text{ }^\circ K$ .

Gli stadi successivi dipendono da molti fattori che decideranno per esempio se il collasso di un nucleo è seguito da una esplosione, se rimane un oggetto collassato o meno. Come già ricordato al momento attuale è possibile la seguente schematizzazione in funzione della massa del nucleo (e della massa iniziale della stella).

(1) Se  $M_c < M_{crit} \simeq M_{Ch}$  e se non c'è un inviluppo sufficientemente massiccio (perdita di massa in fasi precedenti) cosicchè  $M_c$  non può crescere fino a  $M_{Ch}$  durante la fase di bruciamento in shell. Allora  $T_c$  cresce fino al massimo in regime non degenere. Quando la degenerazione è raggiunta la stella incomincia a raffreddarsi e *deve diventare una Nana Bianca*.



(2) Se  $M_c < M_{crit}$  ma c'è un involucro sufficientemente massiccio, allora il nucleo può crescere alla massa  $M_{Ch}$  grazie ai bruciamenti in shell. Il nucleo dopo aver raggiunto un massimo in temperatura incomincia a raffreddarsi. La massa del nucleo cresce fino a  $M_{Ch}$ . La densità  $\rho_0$  cresce con  $M_c$  e finalmente il carbonio può innescarsi ad esempio per reazioni *picno-nucleari*. Il destino di questa stella verrà discusso più avanti.

(3) Se  $M_{crit} < M_c < 40M_\odot$ , il cammino delle condizioni centrali evita le regioni di degenerazione relativistica. Il nucleo si riscalda, raggiungendo le reazioni nucleari più avanzate. Per  $M_c \simeq 4M_\odot$ , le catture elettroniche da parte di nuclei di *Ne* e *Mg* riducono la pressione ed inizia un collasso centrale. Per  $M_c \geq 4M_\odot$  la foto-disintegrazione dei nuclei porta  $\gamma_{ad}$  sotto  $4/3$  ed induce il collasso. Questo può portare alla formazione di una stella di neutroni (vedi più avanti) e all'esplosione di supernova di Tipo II.

(4) Se  $M_c \geq 40M_\odot$ , il nucleo raggiunge il bruciamento del carbonio senza essere degenerare, ma dopo esso incontra la regione della creazione di coppie, la quale abbassa  $\gamma_{ad}$  sotto  $4/3$  in una vasta porzione del nucleo. Se questa supera circa il 40% della massa allora si ha un collasso adiabatico fino a raggiungere la temperatura d'innescio dell'ossigeno. Questo può fermare il collasso e provocare un' esplosione. Altrimenti il collasso può portare il nucleo nella regione di instabilità della foto-disintegrazione, e la storia successiva assomiglia a quella del caso (3).

### 30.3 Flash del Carbonio

L'accensione del carbonio in nuclei degeneri di C-O con massa  $M_c \simeq M_{Ch}$  può avvenire o nel centro o in una shell in base al profilo di temperatura (in presenza di perdita di energia per neutrini, la temperatura al centro può essere inferiore di quella nelle regioni immediatamente circostanti). L'accensione avviene in maniera simile a quella dell'elio (flash) cioè con caratteristiche esplosive. Nella Figura 30.2 è mostrato il cammino dei valori centrali  $T_c$  e  $\rho_c$ . La stabilità del nucleo degenerare dipende criticamente dal bilancio energetico fra perdite neutriniche e produzione di energia nucleare: se  $\epsilon_{CC} - \epsilon_\nu < 0$  il nucleo è stabile; se  $\epsilon_{CC} - \epsilon_\nu > 0$  il nucleo è instabile. La linea di separazione  $\epsilon_{CC} - \epsilon_\nu = 0$  si inclina a densità di  $10^9 \text{ g cm}^{-3}$  in quanto  $\epsilon_{CC}$  aumenta al crescere di  $\rho$  tramite

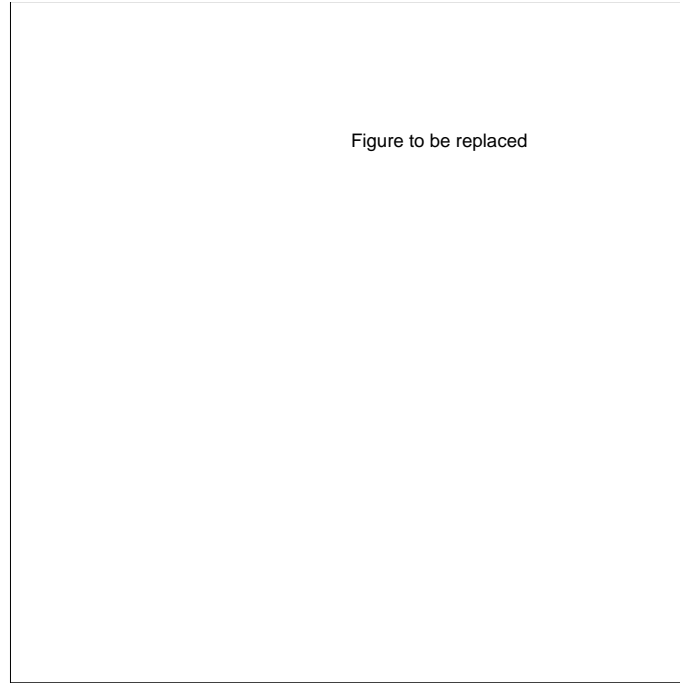


Figura 30.2: Evoluzione schematica delle condizioni fisiche centrali che portano all'innesco esplosivo del carbonio

le reazioni picno-nucleari.

Il più piccolo aumento di temperatura fa sì che  $\epsilon_{CC} - \epsilon_\nu > 0$ . A causa della degenerazione la pressione non aumenta e non c'è dissipazione di energia per espansione. Pertanto a causa del deposito di energia nucleare, il mezzo si riscalda sempre più con conseguente aumento di  $\epsilon_C$  e quindi di  $T$ : *avviene un violento flash !!* Come nel caso del flash dell'elio la materia si riscalda a densità costante fino a che la degenerazione viene rimossa ed è possibile l'espansione.

### 30.4 Equilibrio statistico nucleare

La violenza del flash del carbonio può essere stimata da semplici considerazioni. In una miscela contenente C e O in parti uguali, il bruciamento del carbonio libera circa  $2.5 \times 10^{17}$  erg/g, ed il successivo bruciamento dell'ossigeno circa il doppio. Tutta questa energia viene spesa per riscaldare il materiale e la temperatura raggiunge la linea indicata con C-0 in Figura 30.2. A queste temperature di circa  $10^{10}$  °K l'energia dei fotoni supera l'energia di legame dei nuclei che vengono disintegrati. Ad esempio



Anche la reazione inversa può avvenire ed i fotoni liberati dal processo possono disintegrare un altro nucleo di  $\text{Ne}$ . Il processo è simile alla ionizzazione e ricombinazione degli atomi. Viene raggiunta una condizione di equilibrio in cui le abbondanze di  $\text{O}$ ,  $\text{Ne}$  e  $\alpha$  sono regolate da una legge simile a quella di Saha

$$\frac{n_{\text{O}}n_{\alpha}}{n_{\text{Ne}}} = \frac{1}{h^3} \left( \frac{2\pi m_{\text{O}}m_{\alpha}KT}{m_{\text{Ne}}} \right)^{3/2} \frac{G_{\text{O}}G_{\alpha}}{G_{\text{Ne}}} e^{-Q/KT} \quad (30.10)$$

dove  $G_{\text{O}}$ ,  $G_{\alpha}$ ,  $G_{\text{Ne}}$  sono i pesi statistici, mentre  $Q$  è la differenza fra le energie di legame

$$Q = (m_{\text{O}} + m_{\alpha} - m_{\text{Ne}})c^2 \quad (30.11)$$

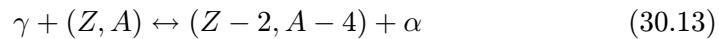
In aggiunta a ciò ci sono altre due condizioni: la prima lega la densità numerica di particelle alla densità di massa, l'altra la fissa la composizione iniziale in quanto la reazione (30.9) e la sua inversa non possono cambiare la differenza  $n_{\text{O}} - n_{\alpha}$ .

Ovviamente la reazione discussa sopra è una fra le tante possibili. Il problema diventa simile a quello della simultanea ionizzazione e ricombinazione di molte specie atomiche. I processi non sono fra loro indipendenti, in quanto tutti loro producono elettroni che influenzano i tassi di ricombinazione. Se la temperatura è molto elevata, molte specie nucleari possono essere disintegrate dai fotoni e i loro frammenti possono reagire di nuovo. Le abbondanze sono allora regolate da una serie di formule di Saha. Il nucleo di  $^{56}\text{Fe}$  essendo il più stabile gioca il ruolo di pivot nello stabilire l'equilibrio fra le specie nucleari presenti (*equilibrio statistico nucleare*).

Il ferro può essere disintegrato in



Allo scopo di determinare il rapporto  $n_{\text{Fe}}/n_{\alpha}$  consideriamo l'insieme delle reazioni schematizzate come segue



$$\gamma + (Z, A) \leftrightarrow (Z, A - 1) + n \quad (30.14)$$

Partiamo dal nucleo  ${}^{56}\text{Fe}$  e consideriamo 13 reazioni di tipo (30.13) e quattro di tipo (30.14). I rapporti di abbondanza sono alla fine regolati da

$$\frac{n_\alpha^{13} n_n^4}{n_{Fe}} = \frac{G_\alpha^{13} G_n^4}{G_{Fe}} \left( \frac{2\pi KT}{h^2} \right)^{24} \left( \frac{m_\alpha^{13} m_n^4}{m_{Fe}} \right)^{3/2} e^{-Q/KT} \quad (30.15)$$

con

$$Q = (13m_\alpha + 4m_n - m_{Fe})c^2 = 124.4 \quad \text{MeV} \quad (30.16)$$

L'avvenire della reazione (30.13) all'equilibrio implica che le densità numeriche di neutroni e particelle  $\alpha$  stiano nel rapporto

$$\frac{n_n}{n_\alpha} = \frac{4}{13} \quad (30.17)$$

La situazione descritta sopra è tipica delle regioni centrali di stelle massicce che sono arrivate indenni alla sintesi del  $Fe$ : questo elemento è allora il nucleo più abbondante a la sua disintegrazione libera quasi tutti i neutroni e le particelle  $\alpha$  presenti. Il membro di sinistra della equazione (30.15) puo' essere dunque sostituito da

$$\left( \frac{4}{13} \right)^4 \frac{n_\alpha^{17}}{n_{Fe}} \quad (30.18)$$

Per quanto riguarda la densità di massa  $\rho$  essa è legata alle densità numeriche di particelle presenti dalla relazione

$$\rho = m_u \sum_i n_i A_i = (56n_{Fe} + 4n_\alpha + n_n)m_u \quad (30.19)$$

dove  $m_u$  è l'unità di massa atomica ( $H$  nella notazione usuale),  $A_i$  è il numero di massa.

Per dati valori di  $T$  e  $\rho$  e rapporto  $n_n/n_\alpha$ , le relazioni precedenti possono essere usate per costruire un sistema di due equazioni in  $n_{Fe}$  e  $n_\alpha$ .

Supponiamo che il rapporto protoni/neutroni per unità di volume,  $\bar{Z}/\bar{N}$ , sia 13/15, allora la condizione di equilibrio statistico impone che la materia vada al  ${}^{56}\text{Fe}$  per temperature non troppo elevate (in realtà al  ${}^{56}_{28}\text{Ni}$  che è il più stabile di tutti), e in nuclei di  ${}^4\text{He}$  per temperature elevate. Tuttavia, se assumiamo  $\bar{Z}/\bar{N} = 1$ , allora a temperature relativamente basse  ${}^{56}_{28}\text{Ni}$  è il nucleo dominante in quanto fra tutti i nuclei con  $Z = N$  esso possiede la maggior energia di

legame per nucleone. Al crescere della temperatura, l'equilibrio si sposta dal  $^{56}\text{Ni}$  a  $^{54}\text{Fe}+2\text{p}$  e finalmente a  $14\ ^4\text{He}$ .

Il rapporto  $\bar{Z}/\bar{N}$  al momento della foto-disintegrazione dipende dalla passata storia di decadimenti  $\beta$ . In ogni caso, *la condizione di equilibrio a basse temperature richiede la formazione di nuclei del gruppo del Fe, mentre l'equilibrio ad alte temperature richiede il break-down in particelle  $\alpha$ , protoni e neutroni.*

## 30.5 Convezione ed equilibrio idrostatico

Dobbiamo ora porci la domanda se la stella al momento del flash rimane in equilibrio idrostatico e se la convezione possa trasportare tutta l'energia liberata senza diventare foremente super-adiabatica.

Nel caso del flash dell'elio la stella è rimasta in quasi equilibrio idrostatico in quanto la convezione è stata capace di trasportare tutta l'energia rilasciata dalle reazioni (senza diventare troppo super-adiabatica).

La situazione è diversa nel caso del carbonio dovuto al fatto che il bruciamento avviene in un nucleo dove la degenerazione è pressochè assoluta e su una scala di tempo molto breve (pochi millisecondi).

Al flash del carbonio, vengono raggiunte temperature così elevate da permettere anche il bruciamento di elementi come l'ossigeno con ulteriore liberazione di energia. Ne segue che in un tempo brevissimo viene raggiunta la condizione di equilibrio statistico nucleare tra  $\text{Fe}$  e  $\alpha$ . La degenerazione viene rimossa ed la regione più interna del nucleo incomincia ad espandersi.

La scala di tempo in cui ciò avviene può essere valutata come il rapporto  $\dot{T}/T \simeq \epsilon_{CC}/U$ , dove  $U$  è l'energia interna per unità di massa

$$\tau_\epsilon = \frac{T}{\dot{T}} = \frac{c_p T}{\epsilon_{CC}} \quad (30.20)$$

Le altre regioni del nucleo reagiscono all'espansione del centro sulla scala di tempo della condizione di equilibrio idrostatico cioè il tempo  $\tau_{hydr}$

$$\tau_{hydr} \simeq (G\rho)^{-1/2} \quad (30.21)$$

Se  $\tau_\epsilon/\tau_{hydr} \gg 1$  il nucleo risponde alla espansione centrale in modo tale da preservare (quasi) l'equilibrio idrostatico.

Se invece  $\tau_\epsilon/\tau_{hydr} \ll 1$  allora gli strati più esterni del nucleo non possono reagire con rapidità adeguata. Un fronte di compressione indotto dalla espansione della sfera più interna si propaga verso l'esterno alla velocità del suono. Se la spinta della sfera in espansione è sufficientemente robusta può instaurarsi *un'onda di shock* propagantesi verso l'esterno.

In concomitanza al flash, nasce un nucleo convettivo centrale, il quale ha due effetti: una parte dell'energia è trasportata altrove riducendo l'intensità del flash, nuovo combustibile è portato al centro verso il flash così aumentandone l'efficienza. Il tempo scala associato alla convezione è dell'ordine  $\tau_{con} \simeq \Lambda/v \simeq \lambda/v_s$  con  $v_s$  la velocità locale del suono e  $\Lambda$  la lunghezza di mescolamento.

Se  $\tau_\epsilon/\tau_{con} \gg 1$  la convezione porterà via tutta l'energia nucleare liberata, il contrario se  $\tau_\epsilon/\tau_{con} \ll 1$ .

Nella realtà i tempi scala  $\tau_{hydr}$  e  $\tau_{con}$  sono molto brevi: a densità di circa  $10^8 \text{ g cm}^{-3}$   $\tau_{hydr} = 0.1 \text{ s}$  e  $\tau_{con}$  è dello stesso ordine, ma  $\tau_\epsilon$  può essere anche  $10^{-6} \text{ s}$ .

Pertanto sia  $\tau_\epsilon/\tau_{hydr} \ll 1$  che  $\tau_\epsilon/\tau_{con} \ll 1$ . Questo significa che il mantenimento dell'equilibrio idrostatico non è possibile, per cui un'onda di compressione si propaga verso l'esterno, e la convezione non è capace di ridistribuire il surplus di energia verso l'esterno.

### 30.6 Fronti di combustione

Una delle caratteristiche del flash del carbonio è la formazione di un fronte di combustione di spessore praticamente nullo che si propaga attraverso la stella. La ragione sta nell'estrema piccolezza del tempo  $\tau_\epsilon$  caratteristico del bruciamento. Iniziato il flash in una regione qualunque, il bruciamento nucleare è completato prima che le regioni vicine abbiano il tempo di reagire adeguandosi alla nuova condizione. Solamente dopo gli strati vicini si riscaldano alla temperatura di combustione. Ciò dà origine ad un *fronte di combustione* che si propaga verso l'esterno.

La propagazione può avvenire in due modi. Abbiamo visto che può generarsi un'onda d'urto. A causa di ciò la materia attraversa la discontinuità con velocità supersonica si comprime e si riscalda.

**Detonazione.** Se questo è sufficiente ad innescare il bruciamento allora il fronte di combustione coincide con il fronte dell'onda d'urto. In tale caso si

dice che si propaga un *fronte di detonazione*.

**Deflagrazione.** Se la compressione nell'onda d'urto non dà inizio alla combustione, allora la temperatura di ignizione viene raggiunta grazie al trasporto dell'energia per convezione e/o conduzione. In tal caso il fronte di combustione si propaga con velocità inferiore a quella del suono e contiene una discontinuità in pressione e densità. Esso viene pertanto chiamato *fronte di deflagrazione*.

Ovviamente la velocità del fronte di deflagrazione dipende dalla efficienza della convezione (e/o conduzione) e dalla differenza di temperatura tra il fronte di deflagrazione e il materiale davanti a questa.

In entrambi i casi la deviazione dall'equilibrio idrostatico è confinata in una shell sottile attraverso la quale la pressione è discontinua e dove viene liberata l'energia nucleare. La quantità di moto della materia che si avvicina ad un fronte di detonazione in maniera super-sonica è bilanciata dalla maggior pressione dietro il fronte. la quantità di moto della materia che si avvicina ad fronte di deflagrazione in maniera sub-sonica è bilanciata dal rinculo della materia che si allontana da questo dietro il fronte.

La descrizione teorica del fenomeno si basa sulle leggi di conservazione della massa, momento, ed energia della materia che passa attraverso la discontinuità. A differenza del caso delle normali onde d'urto, si deve tener conto che la discontinuità è anche sede di liberazione di energia. Questo fa sì che entrambe le soluzioni (detonazione e/o deflagrazione) siano possibili, mentre la teoria delle normali onde d'urto prevede solo la soluzione in cui la densità di materia attraverso la discontinuità aumenti (si veda l'appendice).

In linea di principio sia deflagrazione che detonazione possono avvenire. Quale delle due si sviluppi concretamente dipende da dettagli del meccanismo di trasporto dell'energia la cui discussione esula dai nostri scopi.

I calcoli dettagliati in letteratura preferiscono il meccanismo di deflagrazione.

In generale si pensa che il nucleo sia distrutto dal flash del carbonio e la stella dispersa. Una rozza stima delle condizioni affinché ciò avvenga è la seguente. Supponiamo che il nucleo sia completamente relativistico con  $\gamma_{ad} = 4/3$ , l'energia totale è allora  $W = 0$  o  $W \simeq 0$ . Ne segue che

$$|W| = |E_g + E_i| \ll |E_g| \quad (30.22)$$

$E_g$  e  $E_i$  sono l'energia gravitazionale ed interna. L'energia gravitazionale è

$$|E_g| \simeq \frac{3}{2} \frac{GM_c^2}{R_c} \quad (30.23)$$

Prendendo  $M_c = 0.7M_\odot$  ed  $R_c$  il raggio corrispondente di Nana Bianca  $R \simeq 2.2 \times 10^9$  cm si trova

$$|W| \ll |E_g| \simeq 9 \times 10^{49} \quad \text{erg} \quad (30.24)$$

D'altra parte l'energia nucleare liberata dal bruciamento del carbonio è

$$E_n \simeq 2.5 \times 10^{17} \times M_c \simeq 3.5 \times 10^{50} \quad \text{erg} \quad (30.25)$$

Il bruciamento del carbonio libera una quantità energia più che sufficiente a disgregare il nucleo (l'intera stella).



## Capitolo 31

# STELLE QUASI MASSICCE E MASSICCE

### 31.1 Stelle Quasi Massicce

Sono definite quasi massicce quelle stelle che accendono e concludono il bruciamento del  $^{12}\text{C}$  nel nucleo in condizioni di non degenerazione elettronica, ma diventano fortemente degeneri nelle fasi immediatamente successive, cioè a partire dalla costruzione di un nucleo di  $^{16}\text{O} + ^{22}\text{Ne} + ^{24}\text{Mg}$ , prodotti della reazione di bruciamento del  $^{12}\text{C}$ .

La massa minima del nucleo di  $^{12}\text{C} + ^{16}\text{O}$  per l'accensione del  $^{12}\text{C}$  in un gas non degenero (elettroni) è di  $1.06M_{\odot}$ , a cui si fa corrispondere una massa iniziale di circa  $8 - 9M_{\odot}$ .

L'evoluzione di queste stelle durante la fase di bruciamento dell'idrogeno e dell'elio nel nucleo è qualitativamente identica quella delle stelle di massa intermedia.

Durante le fasi successive a quelle del bruciamento dell'elio nel nucleo, esse appaiono come supergiganti rosse e possono subire l'effetto della perdita di massa per vento stellare, il quale tuttavia non influenza minimamente l'evoluzione delle regioni centrali.

Questa categoria di stelle è limitata superiormente dal valore minimo di massa al di sopra della quale i vari passi nucleari fino alla costruzione di un nucleo di Fe avvengono essenzialmente in condizioni di non degenerazione elettronica.

Dopo l'esaurimento del  $^{12}\text{C}$  nel nucleo con modalità simili a quelle per il bruciamento del  $^4\text{He}$ , il bruciamento del  $^{22}\text{Ne}$  non può iniziare in quanto che la massa del nucleo di  $^{16}\text{O} + ^{22}\text{Ne} + ^{24}\text{Mg}$  all'interno della shell di  $^4\text{He}$  non è grande

abbastanza. Il nucleo si contrae gravitazionalmente diventando fortemente degenere. A causa della perdita di energia per neutrini la temperatura centrale diminuisce.

La massa del nucleo lentamente cresce sotto l'azione della doppia sorgente nucleare in shell ( ${}^4\text{He}$  e  $\text{H}$ ) verso il limite di Chandrasekhar). Anche se il bruciamento del  ${}^4\text{He}$  in shell costruisce uno stato di  ${}^{12}\text{C}$  sopra il nucleo il bruciamento del  ${}^{12}\text{C}$  in shell non viene acceso in quanto la contrazione gravitazionale non è sufficiente ad aumentare la temperatura al valore richiesto.

Al crescere della densità centrale, gli elettroni liberi vengono catturati dai nuclei di  ${}^{22}\text{Ne}$  e  ${}^{24}\text{Mg}$ . Il difetto di pressione generato dalla diminuzione del numero di elettroni liberi causa una rapida contrazione del nucleo. Quando la densità è circa  $2.5 \times 10^{10} \text{ g cm}^{-3}$  si ha l'accensione esplosiva dell'ossigeno e conseguente bruciamento degli elementi fino a formare la cosiddetta composizione chimica di equilibrio nucleare statistico. Si vedrà in seguito che i prodotti della nucleosintesi esplosiva sono alquanto diversi da quelli formati in condizioni non esplosive. Questi elementi favoriscono ulteriori catture di elettroni fino ad iniziare il collasso vero e proprio del nucleo centrale.

I modelli correnti indicano che si forma una esplosione di supernova (tipo II) con modalità abbastanza simili a quelle che varranno per le stelle massicce. Viene formata una stella di neutroni di circa  $1.2M_{\odot}$ , mentre il rimanente materiale viene espulso nell'esplosione di supernova che libera circa  $2 \times 10^{51}$  ergs di energia.

## 31.2 Stelle Massicce

Stelle con massa circa maggiore di  $12M_{\odot}$  evolvono in maniera simile alle stelle nei due intervalli inferiori sia durante la sequenza principale che il bruciamento dell'elio, con la differenza che la massa contenuta nei nuclei convettivi è maggiore, la pressione di radiazione domina l'equazione di stato e l'opacità nell'interno è quasi esclusivamente data dallo scattering elettronico.

Se il bordo del nucleo convettivo è fissato mediante la condizione  $\nabla_r = \nabla_{ad}$ , pressione di radiazione ed opacità sono responsabili della comparsa della semi-convezione dell'idrogeno. Questo fenomeno è simile alla semiconvezione durante la fase di bruciamento dell'elio in stelle di piccola massa.

Esso richiede una formulazione opportuna per determinare la dimensione del nucleo convettivo diversa da quella usuale.

Gli effetti della semiconvezione sono noti e risultano di marginale importanza. Tuttavia, se la condizione  $\nabla_r = \nabla_{ad}$  è sostituita dal più complesso fenomeno dell'*overshooting*, gli effetti (simili a quanto già detto per le stelle di massa piccola ed intermedia) sono di gran lunga più rilevanti.

La caratteristica più saliente dell'evoluzione delle stelle massicce è tuttavia la perdita di massa per vento stellare che è osservata in stelle luminose (massicce) di ogni tipo spettrale quindi di ogni fase evolutiva, sequenza principale inclusa. Infatti le osservazioni mostrano che le supergiganti OB hanno gli strati superficiali in espansione con velocità attorno a  $2000 \text{ km sec}^{-1}$  quindi maggiori della velocità di fuga che è di soli  $600 \text{ km sec}^{-1}$ .

Il meccanismo alla base del vento stellare è la pressione di radiazione sugli ioni di elementi pesanti quali il C e Si attraverso le righe risonanti e da cui per ripartizione del momento con il rimanente gas l'accelerazione del materiale a velocità maggiori di quelle di fuga.

Il tasso di perdita di massa è compreso fra  $10^{-7} - 10^{-4} M_{\odot}/\text{anno}$  ed aumenta con la luminosità della stella anche se ad ogni data luminosità esiste una notevole dispersione indicando che altri parametri sono in gioco.

Moderne compilazioni dei tassi di perdita di massa in funzione dei parametri stellari fondamentali (luminosità e  $T_{\text{eff}}$ ) permettono di tracciare nel diagramma H-R i luoghi di tasso di perdita di massa costante. Questi sono mostrati in Figura 31.1 dove sono state distinte le stelle supergiganti di ogni tipo spettrale dalle Wolf-Rayet, stelle al carbonio e nuclei di nebulose planetarie (PN). Per confronto sono anche indicati i tassi di perdita di massa per stelle RGB.

Fra le stelle dei primi tipi spettrali i tassi maggiori di perdita di massa sono osservati nelle stelle Wolf-Rayet (WR), oggetti di alta luminosità con forti righe di emissione, velocità del vento fino a  $3000 \text{ km sec}^{-1}$  ed anomala composizione chimica.

Esse sono ripartite in diverse classi a seconda della composizione chimica superficiale: in tipo WNL quasi prive di H e ricche di N, in tipo WNE totalmente prive di H e dominate da N, in tipo WC con totale assenza di H e dominate dal C, ed infine in tipo WO con totale assenza di H e dominate da O. Anche le stelle supergiganti K e M mostrano presenza di forti venti stellari con tassi

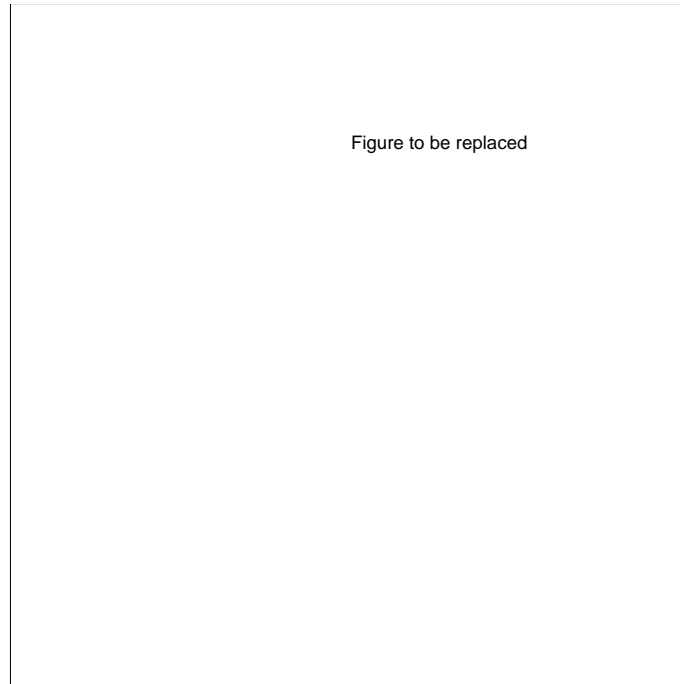


Figura 31.1: Tassi di perdita di massa in stelle di diverso tipo spettrale e luminosità.

di perdita di massa che sono confrontabili con quelli delle stelle dei primi tipi spettrali di pari luminosità. In questo caso il meccanismo di perdita di massa è più complesso in quanto il materiale espulso ha due componenti (gas e polvere). Considerando che il tempo di vita delle stelle con massa fra  $15M_{\odot}$  e  $100M_{\odot}$  è compreso fra  $13 \times 10^6$  anni e  $3 \times 10^6$  anni, si constata immediatamente che con i tassi di perdita di massa in gioco, una stella massiccia può perdere una frazione significativa della massa totale e quindi che la sua evoluzione sarà dominata dalla perdita di massa. Fortunatamente gli effetti maggiori si hanno sull'involuppo e quindi sulla posizione nel diagramma H-R e sulle abbondanze superficiali, mentre il nucleo è in pratica insensibile alla perdita di massa e pertanto le due regioni possono essere trattate separatamente.

### 31.2.1 Evoluzione del Nucleo

Dopo l'esaurimento dell'idrogeno nel centro, la stella è costituita da un nucleo radiativo di He di opportune dimensioni (crescenti con la massa totale), da una shell bruciante H, talvolta da una shell convettiva intermedia e da un involucro esterno. Il gas nelle regioni interne non è degenere. Il nucleo è in contrazione

Tabella 31.1: Tipiche temperature, densità e tempi di vita di una  $25 M_{\odot}$  con  $X=0.700$  e  $Z=0.020$ .

Fase	Temperatura (keV)	Densità $\text{g cm}^{-3}$	Durata
Idrogeno	5	5	7(e6) anni
Elio	20	7(e2)	5(e5) anni
Carbonio	80	2(e5)	6(e2) anni
Neon	150	4(e6)	1 anno
Ossigeno	200	1(e7)	6 mesi
Silicio	350	3(e8)	1 giorno
Collasso	600	3(e9)	10 secondi
Massimo Collasso	3000	1(e14)	2-3 millisecondi
Explosione	100-600	varia	1-10 secondi

Tabella 31.2: Contenuto globale di elementi pesanti (in masse solari) in stelle massicce allo stadio di pre-supernova.

$M/M_{\odot}$	$^{12}\text{C}$	$^{16}\text{O}$	$^{20}\text{Ne}$	$^{24}\text{Mg}$	$^{28}\text{Si}$	$^{32}\text{S}$	$^{36}\text{Ar}$	$^{40}\text{Ca}$
12	0.070	0.460	0.040	0.039	0.220	0.088	0.016	0.026
15	0.130	0.500	0.034	0.012	0.220	0.230	0.059	0.054
20	0.210	1.600	0.058	0.023	0.340	0.220	0.043	0.022
25	0.260	3.100	0.150	0.110	0.370	0.230	0.054	0.037
35	0.300	6.400	0.900	0.160	1.100	0.840	0.180	0.200
50	0.310	12.000	0.780	0.660	2.100	1.500	0.450	0.230
100	0.780	30.000	1.500	1.200	3.300	1.800	0.310	0.270

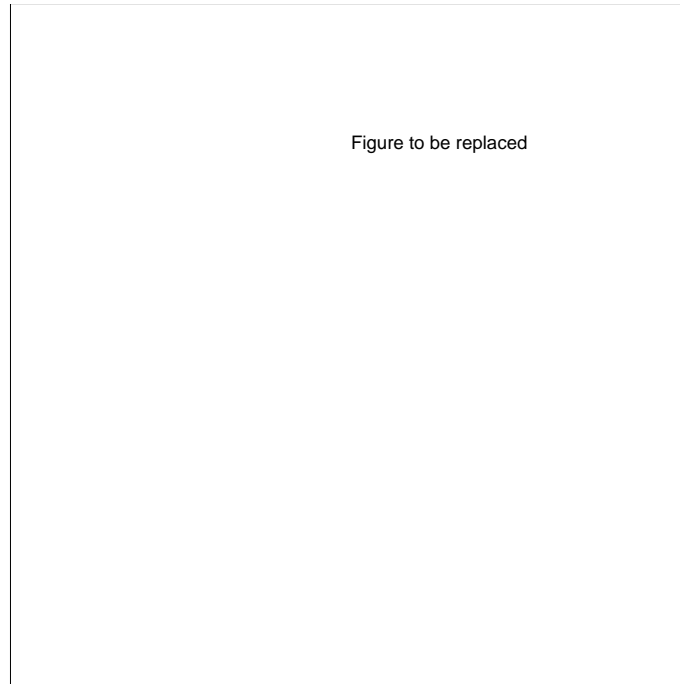


Figura 31.2: Struttura chimica di una stella di  $20M_{\odot}$  durante la sua evoluzione con perdita di massa

e quando viene raggiunta la temperatura di circa  $10^8 K$  si ha l' accensione dell'elio e la comparsa della convezione centrale che si estende fino ad una certa frazione del nucleo di He. Esaurito l'elio nel nucleo convettivo centrale, il nucleo di  $^{12}\text{C} + ^{16}\text{O}$  si contrae e si riscalda determinando l'accensione dell'elio in una shell e quando la temperatura centrale ha raggiunto circa  $9 \times 10^8 K$  si ha l' accensione del carbonio, ricomparsa della convezione centrale e così via per i successivi bruciamenti.

Alla fine del bruciamento del  $^{12}\text{C}$  la struttura chimica della stella è molto complessa, di cui il caso della  $20M_{\odot}$  mostrato in Figura 31.2 costituisce un tipico esempio.

I successivi bruciamenti avvengono a temperature via via più elevate: il neon brucia a circa  $1.75 \times 10^9 K$ , l'ossigeno a  $2.3 \times 10^9 K$ , il silicio a  $4 \times 10^9 K$ . In tal modo viene costruito un nucleo di Fe+Ni di circa  $1.5M_{\odot}$  circondato da strati successivi ricchi in Si, O, C e He in ognuno dei quali è attiva una shell bruciante il combustibile nucleare disponibile e sopra la quale è presente una sottile regione convettiva. La struttura tipica delle stelle in queste fasi è mostrata in Figura 31.3.

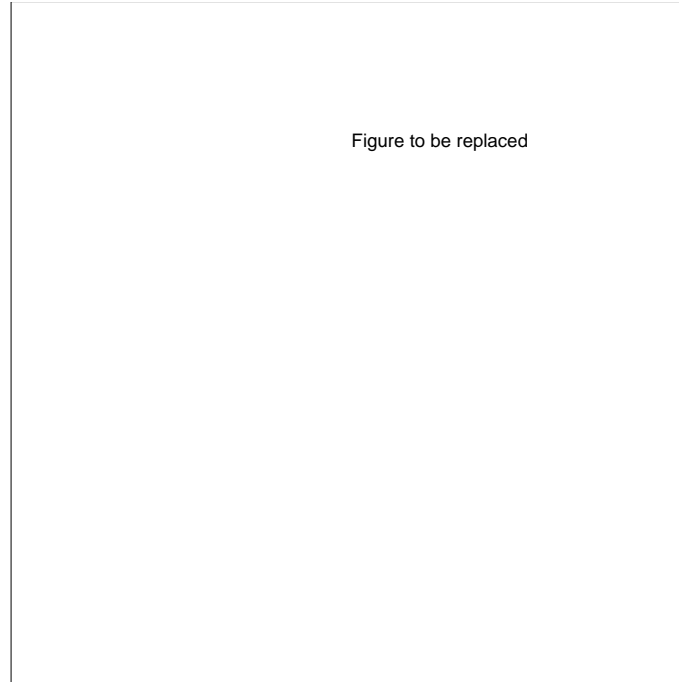


Figura 31.3: Illustrazione schematica non in scala della struttura interna di una stella massiccia che ha sviluppato la stratificazione a *cipolla*

Alla fine della sequenza di bruciamenti la temperatura e la densità centrali raggiungono valori molto elevati quali  $7 \times 10^9 K$  e  $1 \times 10^8 \text{ g cm}^{-3}$  rispettivamente (si veda il caso della  $25M_{\odot}$  in Figura 31.4). I tempi di vita delle varie fasi nucleari vanno da alcuni milioni di anni a circa un giorno (Tabella 31.1).

A partire dal bruciamento del carbonio le perdite di energia per neutrini dalle regioni centrali diventano sempre più importanti e nelle stesse regioni il gas diventa sempre più degenere nella componente elettronica.

Questi due fenomeni sono responsabili del fatto che tutte le stelle massicce sviluppino un nucleo di Fe+Ni avente la stessa massa indipendentemente dalla massa iniziale della stella.

I tempi evolutivi coinvolti nei vari stadi di bruciamento nucleare sono così brevi e il contrasto di densità fra parte centrale ed involucro è tale che esso non risponde ai cambiamenti che avvengono nell'interno.

La sequenza di bruciamenti nucleari che ha costruito il nucleo di Fe+Ni nel centro non può proseguire ulteriormente. Infatti questi elementi sono stati sintetizzati con un rilascio netto di energia di  $8 \times 10^{18} \text{ erg}$  per grammo di H convertito in Fe+Ni.

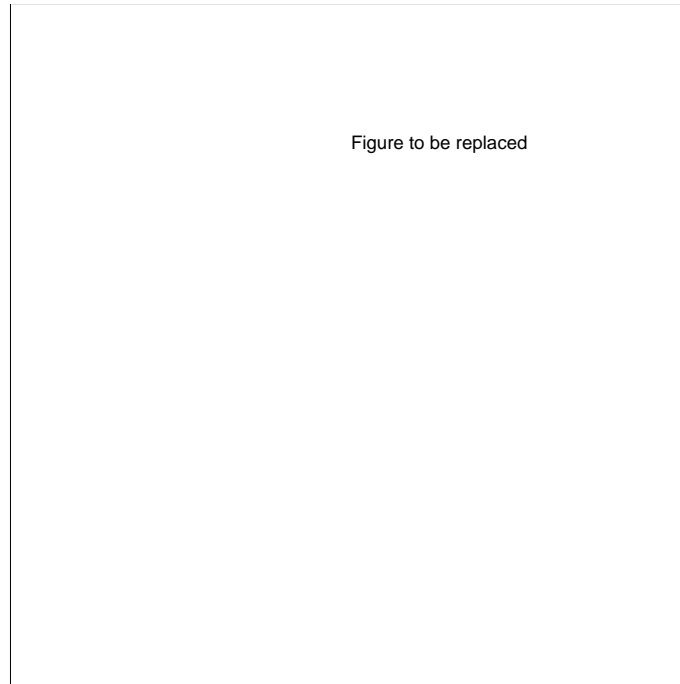


Figura 31.4: Struttura termodinamica e chimica di una stella di  $25M_{\odot}$  alla fine della sequenza nucleare

La costruzione di elementi più pesanti di Fe non è più esoenergetica (Fe infatti ha la massima energia di legame per nucleone) e pertanto richiederebbe la fornitura di energia da parte del sistema, inoltre le barriere coulombiane nelle possibili reazioni fra nuclei per la sintesi di elementi più pesanti diventano enormemente elevate. La struttura chimica e fisica di una stella massiccia a questo stadio di evoluzione è schematizzata in Figura 31.4 per il caso della  $25M_{\odot}$ .

Al contrario si ha l'instaurarsi della foto dissociazione del ferro. Infatti la temperatura e quindi le energie medie dei fotoni del campo di radiazione sono tali che i fotoni possono reagire con i nuclei di Fe dissociandoli in nuclei di  ${}^4\text{He}$  (particelle  $\alpha$ ), protoni e neutroni (Figura 31.4). Questo processo richiede una quantità di energia che essenzialmente proviene dall'energia termica del gas.

La dissociazione del Fe in particelle  $\alpha$ , protoni e neutroni, assorbendo energia, fa sì che la pressione non salga a sufficienza per compensare la crescente forza gravitazionale di contrazione ed il nucleo di Fe+Ni inizia il collasso gravitazionale (l'esponente adiabatico  $\Gamma_1$  diventa minore di  $4/3$ ). Su una scala di tempo di secondi, la densità centrale sale a  $10^{14} \text{ g cm}^{-3}$  e la temperatura a  $3 \times 10^{10} \text{ K}$ .

Al crescere della densità gli elettroni liberi vengono catturati dai nuclei, riducendo



ulteriormente la pressione elettronica e accelerando il collasso. Si raggiunge il punto in cui la materia è essenzialmente costituita da neutroni liberi.

Quando la densità ha raggiunto un valore sufficiente elevato i neutroni degenerano e la pressione riaumenta rapidamente al punto tale da fermare il collasso. A questo momento una frazione notevole (circa  $1.4M_{\odot}$ ) del nucleo originario di Fe+Ni è collassata ad una dimensione di circa  $10^6$  cm e ha formato una stella di neutroni in quasi equilibrio idrostatico.

Alla superficie del nocciolo neutronico si forma un'onda d'urto attraverso la quale il materiale in caduta dalle parti più esterne della stella (essenzialmente la regione corrispondente al nucleo di He iniziale) viene decelerato.

Come la stella evolva dopo il collasso del nucleo è ancora uno dei problemi più interessanti in astrofisica. La domanda principale a cui manca ancora una risposta univoca è se parte della energia gravitazionale liberata dal collasso possa essere trasferita agli strati sovrastanti e dar luogo ad una esplosione di supernova.

I modelli attuali mostrano che ciò è possibile e che l'onda di shock viene propagata attraverso la stella in questo aiutata dai neutrini, i quali a causa dell'alta densità depositano parte dell'energia e momento nelle parti più esterne del nucleo.

Assumendo che l'onda d'urto si propaghi all'esterno, essa passa attraverso le varie shell chimiche e nucleari aumentandone la temperatura e provocando ulteriori processi nucleari che si estendono ad una grande varietà di elementi fino a quelli del gruppo del Fe.

La struttura chimica della stella esistente allo stadio di pre-supernova (Figura 31.4 e Tabella 31.2) viene ulteriormente modificata (Figura 31.5).

Gli strati esterni al nucleo originale di Fe+Ni vengono accelerati a velocità maggiori di quelle di fuga. Quando l'onda d'urto raggiunge la superficie della stella (che come vedremo in seguito può essere o una supergigante rossa o una stella blu) il materiale viene accelerato a circa  $10.000 \text{ Km sec}^{-1}$ , mentre gli strati un poco più interni raggiungono velocità lievemente inferiori.

Luminosità, velocità,  $T_{eff}$  in funzione del tempo ottenute dai calcoli di esplosione di supernova si accordano molto bene con le supernove di tipo II. Le osservazioni indicano energie totali di esplosione dell'ordine di  $10^{51}$  erg. La Nebulosa del Granchio (Crab Nebula), attuale resto di supernova, è consistente

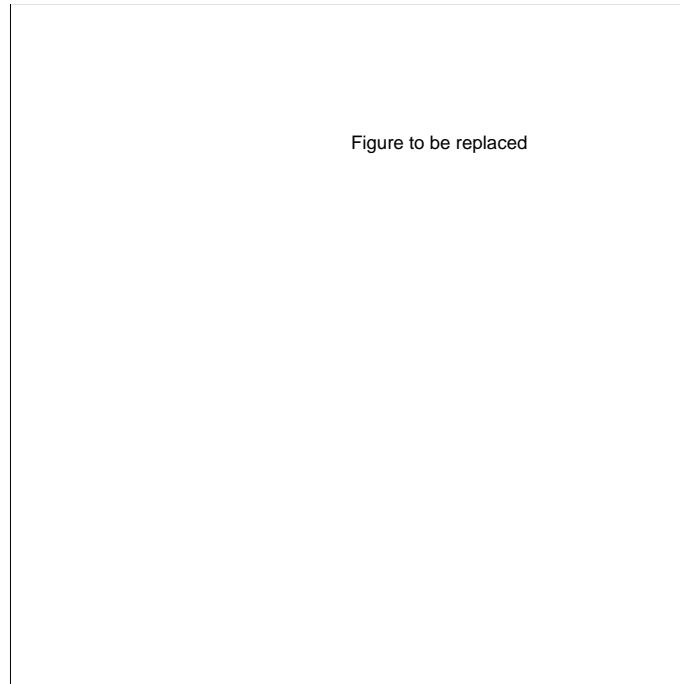


Figura 31.5: Struttura chimica della  $25 M_{\odot}$  prima del passaggio dell'onda di combustione (sopra) e dopo il passaggio dell'onda di combustione (sotto) che determina la nucleosintesi esplosiva

con questa energia e con velocità di espansione di  $10.000 \text{ Km sec}^{-1}$ . Ulteriore conferma alla teoria viene dal confronto dei calcoli di abbondanze relative degli elementi compresi fra ossigeno e ferro e le osservazioni delle stesse nei resti di supernova. Per una tipica stella di  $25M_{\odot}$ , le abbondanze finali si accordano molto bene con quelle osservate nel sistema solare.

Dopo l'esplosione della supernova, rimane una stella di neutroni con massa inferiore ad una certa massa critica, correntemente assunta uguale a  $1.4M_{\odot}$  (massa massima sopportabile da una struttura di neutroni totalmente degeneri).

Tuttavia, poichè l'equazione di stato del gas di neutroni non è ben conosciuta, questo limite è incerto. Una ragionevole stima è  $< 2M_{\odot}$ . Inoltre la complessa situazione fisica al momento del collasso, la quale determina lo strato a cui si instaura l'onda d'urto nel nucleo, rende incerta la massa che finisce nell'oggetto collassato.

Se la massa di questo supera il limite per una stella a neutroni, il collasso non potrà essere fermato in quanto le forze di pressione non riescono a bilanciare la gravità e continuerà fino a formare un *buco nero*.

I calcoli evolutivi attuali indicano che stelle fino a circa  $25 - 30M_{\odot}$  formano stelle a neutroni, mentre quelle con massa maggiore danno luogo a buchi neri.

### 31.2.2 Evoluzione dell' inviluppo

L'inviluppo è costituito dalle regioni esterne alla shell bruciante H. Esaurito l'elio nel centro, il contrasto di densità fra le regioni interne (sotto la shell di H) e quelle esterne è tale che l'evoluzione dell' inviluppo diventa insensibile o quasi a quella del resto della stella.

In assenza di perdita di massa, l'evoluzione delle stelle massicce è molto simile a quelle di massa inferiore. Il bruciamento dell'elio nel nucleo avviene generalmente in un loop la cui estensione è controllata dagli stessi parametri fisici attivi negli altri intervalli di massa.

Esistono tuttavia dei modelli di stelle massicce ( $15M_{\odot} < M < 30M_{\odot}$ ), nei quali il bruciamento dell'elio avviene in una prima fase ad alta  $T_{eff}$  ed in una seconda a bassa  $T_{eff}$ , senza pertanto dar luogo al loop nel diagramma H-R. Le stelle con massa maggiore di circa  $30M_{\odot}$  subiscono la fase del bruciamento dell'elio nelle regioni di bassa  $T_{eff}$ . Infine indipendentemente dalla massa, tutte le fasi dopo il bruciamento del elio avvengono a basse  $T_{eff}$ .

Le osservazioni tuttavia non sono in accordo con le previsioni basate sui modelli a massa costante. Infatti (1) non si osservano supergiganti rosse con  $\log L/L_{\odot} > 5.7$ , mentre esistono stelle O-B fino a  $\log L/L_{\odot} = 6.0$ ; (2) attesa la distribuzione spaziale simile sul disco galattico deve esistere un legame genetico fra le stelle O-B e stelle Wolf-Rayet; (3) la recente Supernova 1987a nella Grande Nube di Magellano ha avuto un progenitore identificato con sicurezza come una stella B3Ia ( $\log T_{eff} = 4.2$ ); (4) l'esistenza della perdita di massa per vento stellare è un fatto sperimentale assodato.

L'effetto della perdita di massa ha conseguenze sull'evoluzione di una stella massiccia che non sono facili da schematizzare in maniera semplice. Infatti da una parte essa tende a favorire lo spostamento dei modelli evolutivi a  $T_{eff}$  basse, dall'altra, se la perdita di massa è sufficientemente elevata, a produrre l'effetto opposto. In questo caso infatti, la riduzione della massa dell'inviluppo fino ad esporre strati processati dal ciclo CNO durante la fase di bruciamento dell'idrogeno e anche dal  $3\alpha$  durante quella dell'elio, da una parte diminuisce l'opacità degli strati superficiali, quindi favorisce raggi minori o  $T_{eff}$  più elevate,

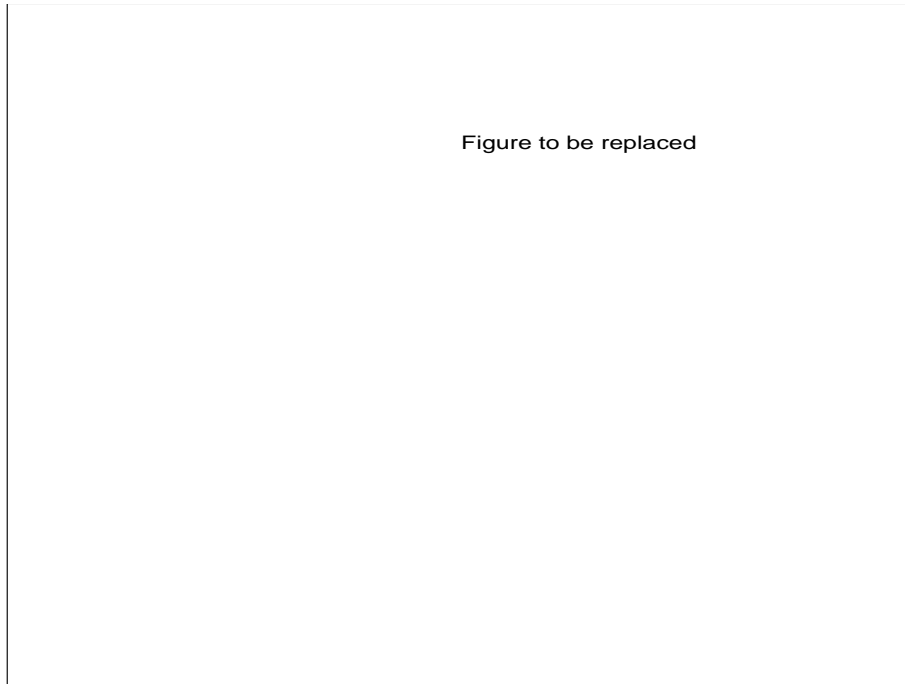


Figura 31.6: Diagramma H-R schematico delle stelle massicce con perdita di massa

dall'altra espone in superficie strati poveri o privi del tutto di H, ricchi di  ${}^4\text{He}$  ed  ${}^{14}\text{N}$  nel caso che sia esposto materiale processato CNO, o privi di H, ricchi di  ${}^4\text{He}$ ,  ${}^{12}\text{C}$  e  ${}^{16}\text{O}$  nel caso siano messe a nudo regioni processate  $3\alpha$ .

I risultati della modellistica corrente per le stelle massicce, nella quale si considerano sia l'effetto della perdita di massa sulla base dei tassi osservati (si veda la Figura 31.1) che quello dell'overshoot convettivo con efficienza opportuna, sono riassunti nel diagramma H-R di Figura 31.6 e nello schema riassuntivo di Tabella 31.3 mentre i corrispondenti tempi di vita sono dati in Tabella 31.4 assieme a quelli delle stelle di massa intermedia per confronto.

La possibilità di esporre in superficie del materiale processato CNO o  $3\alpha$  fornisce una elegante interpretazione evolutiva per le stelle Wolf-Rayet. Esse sono spiegate come le discendenti delle stelle O-B massicce nelle fasi finali del bruciamento dell'idrogeno (WNL) o in fase di bruciamento dell'elio (WNE, WN, WC e WO).

I tempi di vita delle fasi successive a quella del bruciamento dell'elio sono così brevi che, anche in presenza di forti tassi di perdita di massa, la quantità di materiale perso è trascurabile e la sequenza evolutiva rapidamente arriva allo

Tabella 31.3: Evoluzione schematica delle stelle massicce. *Note: BSG - Supergiganti Blu; RSG - Supergiganti rosse; YSG - Supergiganti gialle; SN - Supernova; WC - Stelle Wolf Rayet di tipo C; WN - Stelle Wolf Rayet di tipo N; WO - Stelle Wolf Rayet di tipo O; LBV - Stelle Variabili Luminose Blù.*

For $M > 60M_{\odot}$ A l w a y s   B l u e	
O star	- Of - BSG - LBV - WN - WC - (WO) - SN
For $25M_{\odot} < M < 60M_{\odot}$ B l u e - R e d - B l u e	
O star	- BSG - YSG - RSG - WN - (WC) - SN: High M's
O star	- BSG - YSG - RSG - WN - ——— - SN: Low M's
For $M < 25M_{\odot}$ B l u e - R e d	
O star	- (BSG) - RSG - YSG - Cepheid - RSG - SN

Tabella 31.4: Tempi di vita (in anni) delle maggiori fasi nucleari ed evolutive di stelle massicce.

$M/M_{\odot}$	H-Burning	He-Burning	C-Burning
120.0	2.94(e6)	5.13(e5)	1.05(e3)
85.0	3.32(e6)	5.01(e5)	1.84(e3)
60.0	3.71(e6)	6.06(e5)	1.94(e3)
40.0	4.79(e6)	6.40(e5)	4.80(e3)
25.0	7.09(e6)	1.17(e6)	7.10(e3)
20.0	8.81(e6)	1.26(e6)	8.79(e3)
15.0	1.21(e7)	1.62(e6)	1.55(e4)
12.0	1.74(e7)	2.69(e6)	2.46(e4)

stadio di supernova.

Lo scenario evolutivo attualmente disponibile (riassunto nella Tabella 31.3), vede tre intervalli di massa corrispondenti a tassi medi di perdita di massa via via più elevati al crescere della massa (luminosità) delle stelle in esame, ed all'interno dei quali la sequenza viene letta sia in termini temporali sia in termini di massa della stella via via decrescente dal valore iniziale sotto l'azione della perdita di massa.

È interessante notare la possibilità che l'esplosione di supernova possa avvenire in stelle aventi essenzialmente la stessa struttura del nucleo ma involucri diversi: o una supergigante rossa o una stella Wolf-Rayet. Spesso la transizione da un tipo all'altro è causata da una modesta variazione della massa dell'involuppo come mostrato da numerosi calcoli evolutivi. Il problema particolare della Supernova 1987a sta tuttavia ad indicare che la modellistica è ancora insufficiente. Infatti, laddove la teoria prevede un progenitore supergigante rossa o Wolf-Rayet, le osservazioni indicano una stella B3Ia.

## Capitolo 32

# VENTI STELLARI

### 32.1 Introduzione

Una stella può essere considerata come una concentrazione di materia ed energia nel mezzo interstellare. In questa rappresentazione, una stella non è un sistema chiuso, ma al contrario è un sistema aperto, il quale non solo irradia energia elettromagnetica ma emette anche un flusso di materia e di energia meccanica. D'altra parte il mezzo interstellare racchiude la stella, in un certo senso la confina. Questa azione può essere riassunta dicendo che esso esercita una pressione sulla superficie della stella.

Fra questi due ambienti deve esistere una zona di transizione ed il problema da porsi è come e perchè avvenga il passaggio dal mezzo stellare a quello interstellare.

La definizione dei limiti (superficie) di una stella spesso deriva da una definizione *ad hoc* che appare appropriata al problema in esame.

Dal punto di vista della struttura interna la superficie può essere definita semplicemente come il luogo dove pressione, temperatura e densità sono nulle.

Dal punto di vista degli strati esterni (atmosfera) le cose sono meno semplici. Infatti si usa definire come superficie quello strato in cui la profondità ottica diventa dell'ordine dell'unità ( $\tau \simeq 1$ ).

Rifrasando il discorso e partendo da questa superficie diciamo che l'atmosfera finisce quando  $\tau \simeq 0$ . Tuttavia bisogna ricordare che anche in queste circostanze la pressione non è rigorosamente nulla. Ad esempio per un valore tipico  $\tau = 0.000004$  si ha  $\log P = 0.4$  (in unità cgs), cioè una pressione piccolissima ma non nulla.

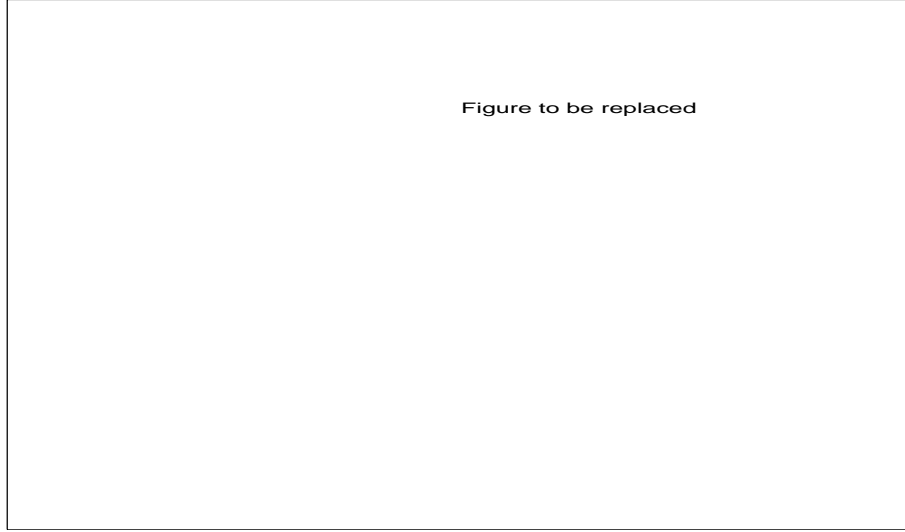


Figura 32.1: Rappresentazione schematica degli strati esterni di una stella nella zona di transizione verso il mezzo interstellare

In questo capitolo tratteremo principalmente questa regione di transizione e metteremo in evidenza le ragioni fisiche per le quali gli strati più esterni di una stella sono in rapida espansione, e la materia fluisce liberamente verso il mezzo circostante. Questo flusso di materia è chiamato *vento stellare*.

Nella Figura 32.1 viene rappresentata in maniera schematica la zona di transizione fra stella e mezzo interstellare, mettendo in evidenza i flussi di energia e di materia che sono coinvolti. In particolare distinguiamo la zona interna, l'atmosfera, la corona, la zona di transizione in cui si forma un fronte d'urto, ed infine il mezzo interstellare.

## 32.2 Venti coronali

### 32.2.1 Equilibrio idrostatico o idrodinamico?

Supponiamo che la zona coronale sia costituita da un plasma di idrogeno (per semplicità) completamente ionizzato. Dunque ioni ed elettroni in egual numero. Sia  $N(r) = N_i(r) + N_e(r)$  la densità numerica (numero di particelle per unità di volume) totale, somma delle corrispondenti densità numeriche di ioni ed elettroni. Sia  $T(r)$  la stratificazione di temperatura.

La pressione del plasma è data

$$P = N(r)kT(r) \quad (32.1)$$



dove  $k$  la costante di Boltzmann.

La condizione di equilibrio idrostatico dice che

$$\frac{d}{dr}N(r)kT(r) + \frac{GM}{r^2}N(r)m_H = 0 \quad (32.2)$$

dove  $M$  è la massa della stella,  $m_H$  la massa dell'atomo di idrogeno nella notazione usuale.

Fissiamo ora  $N(r)$  e  $T(r)$  ad un certo livello, per esempio la base della corona ( $r = r_0$ ), ed indichiamoli con  $N_0$  e  $T_0$ . Integrando l'equazione (32.2) da  $r_0$  fino ad una distanza  $r$  qualunque si ottiene

$$N(r)T(r) = N_0T_0 \exp\left(-\frac{GMm_H}{k} \int_{r_0}^r \frac{dr}{r^2T(r)}\right) \quad (32.3)$$

La stima della pressione all'infinito, assumendo  $T(r) = T_0 = \text{costante}$ , fornisce

$$P_\infty = kT_0N_\infty = kT_0N_0 \exp\left(-\frac{GMm_H}{kT_0r_0}\right) \quad (32.4)$$

Assumendo tipici valori  $kN_0T_0 = 0.2 \text{ dyne cm}^{-2}$ ,  $T_0 = 2 \times 10^6 \text{ K}$  e  $r_0 = 7 \times 10^{10} \text{ cm}$ , si trova  $P_\infty = 9 \times 10^{-4} \text{ dyne cm}^{-2}$ . Questa pressione deve essere confrontata con quella esercitata dalla materia e campo magnetico interstellari.

La densità del mezzo interstellare (ISM) è circa di  $1 \text{ particella cm}^{-3}$  e la temperatura per una tipica regione HI è di circa  $10^2 \text{ K}$ , mentre per una regione HII è di circa  $10^4 \text{ K}$ . La pressione della materia  $P_M$  è dunque compresa fra  $1.4 \times 10^{-14}$  e  $3 \times 10^{-12} \text{ dyne cm}^{-2}$ .

Il campo magnetico nel mezzo interstellare è dell'ordine di  $10^{-5} \text{ gauss}$ , di conseguenza la pressione magnetica  $P_B = B^2/8\pi$  è dell'ordine di  $4 \times 10^{-12} \text{ dyne cm}^{-2}$ .

La pressione dovuta alla presenza di raggi cosmici  $P_{CR}$  è stimata intorno a  $2 \times 10^{-12} \text{ dyne cm}^{-2}$ .

Pertanto il mezzo interstellare esercita sulla stella una pressione complessiva

$$P_{ISM} = P_M + P_B + P_{CR} \simeq 10^{-11} \text{ dyne cm}^{-2} \quad (32.5)$$

Questo valore è circa  $10^7$  volte più piccolo di quello esercitato da una corona in equilibrio idrostatico alla temperatura  $T_0 = 2 \times 10^6 \text{ K}$ . Pertanto il mezzo interstellare non può tenere confinata la corona e *questa deve espandersi in maniera stazionaria*.

Tuttavia questa stima è stata ottenuta adoperando una temperatura coronale elevata. Pertanto ha senso cercare il valore minimo di questa per il quale si instaura il moto stazionario. La condizione è

$$P_{\infty} > P_{ISM} \quad (32.6)$$

la quale in temperatura diventa

$$T_0 > \frac{GMm_H}{kr_o} \left( \ln \frac{P_0}{P_{ISM}} \right)^{-1} \quad (32.7)$$

Inserendo gli stessi valori numerici dell'esempio precedente si trova

$$T_{0,min} = 5.1 \times 10^5 \quad \text{K} \quad (32.8)$$

In altre parole, basta che la temperatura al livello di riferimento  $T_0$  sia superiore al valore di cui sopra affinché la pressione  $P_{ISM}$  sia sufficiente a contenere la corona in condizioni idrostatiche.

Poichè nella relazione (32.7) compare il rapporto  $M/r_0$ , la temperatura minima per una stella supergigante sarà minore che per una stella della sequenza principale.

Nel caso in cui  $T_0 > T_{0,min}$ , bisogna considerare l'andamento della temperatura in funzione del raggio,  $T(r)$ :

(a) Se  $T(r)$  decresce più rapidamente di  $1/r$ , l'integrale non ha un limite finito

$$\lim_{r \rightarrow \infty} N(r)kT(r) = 0 \quad (32.9)$$

che è il caso dell'atmosfera statica in senso classico.

(b) Se  $T(r)$  decresce meno rapidamente di  $1/r$ , ne segue che

$$\lim_{r \rightarrow \infty} N(r)kT(r) >> P > 0 \quad (32.10)$$

e di conseguenza deve esistere una pressione finita, che il mezzo interstellare non è in grado di fornire, per mantenere la corona in equilibrio idrostatico. Se la condizione di equilibrio non può essere realizzata ci deve essere espansione dell'atmosfera a partire dal punto dove  $T_0 > T_{0,min}$  o dove  $T(r)$  incomincia a decrescere meno rapidamente di  $1/r$ . *È questa ipotesi sulla variazione di  $T(r)$  che sta alla base della teoria dei venti stellari.*

La funzione  $T(r)$  dipende dal meccanismo di trasporto del calore, che deve quindi essere oggetto di studio dettagliato.

### 32.2.2 Equazioni generali

Il formalismo usato è quello classico in assenza di viscosità (Landau & Lifchitz 1971, *Mecanique de Fluides*, ed. MIR)

(1) Operatore di derivazione lungo il moto

$$\frac{D}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \bar{v}\nabla \quad (32.11)$$

(2) Conservazione della massa

$$\frac{D}{Dt}\rho + \rho \operatorname{div}\bar{v} = 0 \quad (32.12)$$

(3) Conservazione del momento

$$\rho \frac{D\bar{v}}{Dt} = \rho \bar{F} - \nabla P \quad (32.13)$$

dove  $\bar{F}$  sono tutte le forze agenti. In questo caso è presente la forza di gravità  $\bar{F} = -\nabla\Phi$ , dove  $\Phi$  è il potenziale gravitazionale.

(4) Conservazione dell'energia cinetica

$$\frac{1}{2}\rho \frac{Dv^2}{Dt} = \rho \bar{v}\bar{F} - \bar{v}\nabla P = -\rho \bar{v}\nabla\Phi - \bar{v}\nabla P \quad (32.14)$$

(5) Conservazione dell'energia potenziale

$$\rho \frac{D\Phi}{Dt} = \rho \frac{\partial\Phi}{\partial t} - \rho \bar{v}\nabla\Phi \quad (32.15)$$

(6) Conservazione dell'energia interna ( $1^{mo}$  principio della termodinamica)

$$\rho \frac{DU}{Dt} = \rho \frac{DQ}{Dt} - P \frac{D}{Dt}\left(\frac{1}{\rho}\right) = \rho \frac{DQ}{Dt} - P \operatorname{div}\bar{v} \quad (32.16)$$

dove  $Q$  è il calore fornito e il termine  $P \frac{D}{Dt}\left(\frac{1}{\rho}\right)$  rappresenta il lavoro delle forze di pressione.

(7) Conservazione dell'energia totale (per grammo di materia)

$$\rho \frac{D}{Dt}\left[\frac{v^2}{2} + \Phi + U\right] = \rho \frac{DQ}{Dt} + \rho \frac{\partial\Phi}{\partial t} - \operatorname{div}[P\bar{v}] \quad (32.17)$$

In regime stazionario  $\frac{D}{Dt}$  diventa  $\bar{v}\nabla$  e l'equazione (32.17) si riduce a

$$\rho \bar{v} \nabla \left[ \frac{v^2}{2} + \Phi + U \right] = \rho v \nabla Q - \left[ v \rho \frac{1}{\rho} \nabla P + v \rho \nabla \left( \frac{1}{\rho} \right) \right] = \rho v \nabla Q - \rho v \nabla \left( \frac{P}{\rho} \right) \quad (32.18)$$

ovvero

$$\rho \bar{v} \nabla \left[ \frac{v^2}{2} + \Phi + U + \left( \frac{P}{\rho} \right) \right] = \rho v \nabla Q \quad (32.19)$$

Si noti che  $P\bar{v}$  è il flusso microscopico di energia,  $\rho \bar{v} [\frac{v^2}{2} + \Phi + U]$  è il flusso convettivo di energia, e  $\rho \bar{v} [\frac{v^2}{2} + \Phi + U + \frac{P}{\rho}]$  è il flusso totale di energia.

Facciamo ora le seguenti ipotesi aggiuntive:

- (1) Flusso stazionario,
  - (2) Simmetria sferica,
  - (3) Unico fluido (mono-componente). Non viene fatta distinzione fra ioni ed elettroni, ma entrambi sono descritti dallo stesso fluido, cioè sono in equilibrio fra loro e sono descritti dalla stessa temperatura.
  - (4) Gas perfetto  $P = NkT$ , dove  $N = N_i + N_e$  somma delle densità numeriche di ioni ed elettroni. Il rapporto dei calori specifici è  $\gamma = 5/3$ .
  - (5) Sorgente dell'energia. Allo stato attuale della conoscenza, si ritiene che la zona convettiva presente negli strati esterni delle stelle, lo spessore della quale varia con il tipo spettrale e la luminosità della stella, contenga delle irregolarità (elementi convettivi di dimensioni e velocità qualunque) le quali generano delle onde magneto acustiche e gravitazionali che si propagano e depositano la loro energia nella zona più interna della corona. Al crescere della distanza dal centro della stella queste onde si attenuano e così pure la sorgente di energia. Per semplicità si suppone che esista un certo livello  $r_0$  detto *base della corona* sopra il quale non c'è più deposito di energia.
- La velocità del vento a  $r_0$  è comunemente assunta piccola assieme al moto di espansione coronale dovuto al deposito di calore negli strati immediatamente sottostanti. Il meccanismo dominante del trasporto dell'energia negli intervalli di temperatura e densità in gioco è la conduzione. Ogni altra meccanismo di trasporto (radiativo, convettivo etc.) può essere trascurato.
- (5) A causa del piccolo valore di  $P_{ISM}$  cercheremo delle soluzioni per le quali si può assumere  $P \rightarrow 0$  per  $r \rightarrow \infty$ .
  - (6) Finalmente verranno ignorati gli effetti del campo magnetico.

Fatte queste premesse, le equazioni di conservazione introdotte in precedenza diventano

Conservazione della massa

$$\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} [r^2 \rho v] = 0 \quad (32.20)$$

Conservazione del momento

$$\rho v \left( \frac{dv}{dr} \right) = - \left( \frac{dP}{dr} \right) - \rho \left( \frac{GM}{r^2} \right) \quad (32.21)$$

Conservazione dell'energia (conduzione inclusa)

$$\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left( r^2 \rho v \left[ \frac{1}{2} v^2 + U + \frac{P}{\rho} \right] \right) = \rho v \left( \frac{GM}{r^2} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} (r^2 k_c \frac{dT}{dr}) \quad (32.22)$$

dove  $k_c$  è il coefficiente di conduzione.

Per un gas di idrogeno totalmente ionizzato con densità numerica totale di particelle  $N = N_i + N_e$  (ioni + elettroni) e  $N_i = N_e$  abbiamo

$$P = NkT \quad \text{e} \quad \rho = \frac{N}{2} m_H \quad (32.23)$$

Il fattore 2 non è altri che il peso molecolare dell'idrogeno totalmente ionizzato.

L'energia interna specifica del gas è

$$U = \frac{3}{2} NkT \left( \frac{nm_H}{2} \right)^{-1} = \frac{3kT}{m_H} \quad (32.24)$$

e

$$\frac{P}{\rho} = NkT \left( \frac{Nm_H}{2} \right)^{-1} = \frac{2kT}{m_H} \quad (32.25)$$

Infine l'entalpia specifica è

$$H = U + \frac{P}{\rho} = \frac{5kT}{m_H} \quad (32.26)$$

Si noti che l'equazione di conservazione dell'energia non ha un termine rappresentante le perdite radiative o il deposito di energia meccanica proveniente dalla dissipazione delle onde. Ciò grazie all'ipotesi che questi processi avvengano unicamente in uno strato sottile situato sotto la corona e che sopra questo basti tener conto solo del termine cinetico.

Integrando l'equazione di continuità si ottiene

$$4\pi r^2 N v = F = \text{costante} \quad (32.27)$$

dove  $F$  rappresenta il flusso di particelle ovvero

$$\frac{dM}{dt} = m_H \cdot F = 4\pi r^2 N m_H v = \text{costante} \quad (32.28)$$

Il termine  $dM/dt$  è il *tasso di perdita di massa*.

L'integrazione dell'equazione dell'energia dà

$$(4\pi r^2 N v) \left( \frac{1}{2} m_H v^2 + 5kT - \frac{GMm_H}{r} \right) - 4\pi k \left( \frac{dT}{dr} \right) = E = \text{costante} \quad (32.29)$$

Questo significa che il *flusso totale di energia attraverso una superficie sferica è una costante del flusso*.

Le equazioni (32.27), (32.28) e (32.29) costituiscono un sistema non lineare di equazioni differenziali del primo ordine contenente due costanti arbitrarie ed incognite  $\dot{M}$  e  $E$  a cui se ne devono aggiungere altre due generate dall'integrazione. Al fine di fissare la soluzione devono essere formulate quattro condizioni al contorno.

### 32.2.3 Caso isoterma

Consideriamo il caso di una corona rigoramente isoterma. In tale ipotesi, le uniche variabili che rimangono sono  $N$  e  $v$  in quanto l'equazione dell'energia è superflua essendo  $T(r) = T_0 = \text{costante}$ .

Nel caso isoterma l'equazione di conservazione del momento (32.21) diventa

$$\frac{N}{2} m_H v \left( \frac{dv}{dr} \right) = -kT \frac{dN}{dr} - \frac{N}{2} m_H \frac{GM}{r^2} \quad (32.30)$$

Utilizzando la (32.27) per eliminare  $N$  si ricava

$$\frac{1}{2} \left( 1 - \frac{2kT_0}{m_H v^2} \right) \frac{dv^2}{dr} = -\frac{GM}{r^2} \left( 1 - \frac{4kT_0 r}{GM m_H} \right) \quad (32.31)$$

Questa equazione conduce a diverse famiglie di soluzioni con diverso comportamento matematico e diverso significato fisico.

Per la corona solare si ha

$$\frac{4kT_0}{GM_\odot m_H} \simeq 0.3 \quad (32.32)$$

Indicando con

$$r_c = \frac{GMm_H}{4kT_0} = \text{raggio critico} \quad (32.33)$$

e

$$v_c = \left(\frac{2kT_0}{m_H}\right)^{1/2} = \text{velocita' critica} \quad (32.34)$$

dove  $v_c$  non è altri che la velocità del suono isoterma, l'equazione (32.31) diventa

$$\frac{dv^2}{dr} = -\frac{2GM}{r^2} \left(1 - \frac{r}{r_c}\right) \left(1 - \frac{v_c^2}{v^2}\right)^{-1} \quad (32.35)$$

È chiaro che il numeratore è negativo per  $r < r_c$  e positivo per  $r_c < r < \infty$ , mentre per  $r = r_c$  esso è esattamente nullo. Nel caso della corona solare,  $r_c/r_\odot \simeq 3.5$ .

Mettiamoci ora nel punto  $r = r_c$  ed esaminiamo il comportamento della equazione (32.35). Se il denominatore è diverso da zero, si ha semplicemente

$$\left(\frac{dv^2}{dr}\right)_{r_c} = 0 \quad (32.36)$$

Al contrario se

$$v(r_c) = v_c \quad (32.37)$$

il denominatore della (32.35) si annulla e si ha un caso indeterminato

$$\left(\frac{dv^2}{dr}\right)_{r_c} = \frac{0}{0} \quad (32.38)$$

per la derivata al punto critico. Tale indeterminazione può essere rimossa con la regola di de l'Hospital applicata al punto  $(r_c, v_c)$  ottenendo due valori per la derivata  $(dv^2/dr)_{r_c}$ .

Supponiamo che l'equazione (32.36) sia verificata. Si possono costruire delle soluzioni per le quali il denominatore conservi lo stesso segno per tutti i valori di  $r$ . Le proprietà di queste soluzioni nel piano velocità - distanza sono mostrate in Figura 32.2.

(1) Se  $v(r_c) < v_c$  allora  $v(r)$  ha un massimo relativo a  $r_c$ : esse sono le soluzioni di tipo 1 sempre sub-soniche.

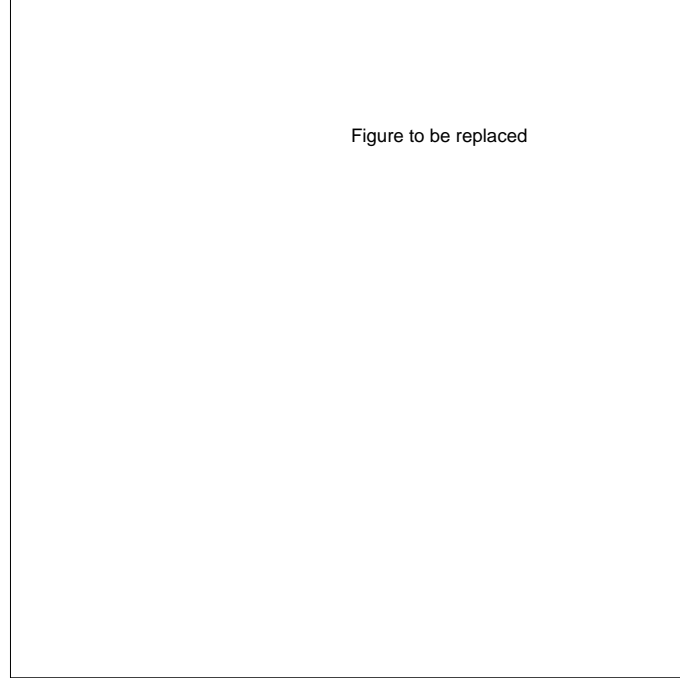


Figura 32.2: Rappresentazione schematica delle variazioni di velocità del vento stellare in funzione del raggio

(2) Se  $v(r_c) > v_c$  allora queste soluzioni hanno un minimo relativo a  $r_c$ : esse sono le soluzioni di tipo 2 sempre super-soniche. D'altra parte se la condizione (32.37) è soddisfatta, otteniamo le soluzioni critiche ( $v = v_c$  per  $r = r_c$ ) per le quali la derivata è finita in  $r = r_c$ .

(3) Se  $(dv/dr)_{r_c} > 0$  si ottiene una soluzione tran-sonica unica che cresce monotonicamente dalle velocità sub-soniche ( $v < v_c$ ) per  $r < r_c$  alle velocità super-soniche ( $v > v_c$ ) per  $r > r_c$ . Quest'unica soluzione è di tipo 3.

(4) Se  $(dv/dr)_{r_c} < 0$  si ottiene una soluzione tran-sonica unica che decresce monotonicamente dalle velocità super-soniche ( $v > v_c$ ) per  $r < r_c$  alle velocità sub-soniche ( $v < v_c$ ) per  $r > r_c$ . Quest'unica soluzione è di tipo 4.

Finalmente, esistono ancora due tipi di soluzioni definite limitatamente agli intervalli  $r \geq R > r_c$  e  $r \leq R < r_c$ , dove  $R$  è il raggio della stella. Queste due famiglie di soluzioni sono tali che

$$v(R) = v_c \quad \text{e} \quad \left(\frac{dv}{dr}\right) = \infty \quad (32.39)$$

Esse forniscono delle soluzioni doppie (due valori di  $v$  per un unico valore di  $r$ ) e sono di tipo 5 e 6. Per ora escludiamo queste soluzioni. Tuttavia esse possono



tornare utili quando si voglia cercare una soluzione completa comprendente un'onda d'urto allo scopo di verificare opportune condizioni al limite per  $r \rightarrow \infty$ .

*La scelta delle soluzioni utili dipende dalle condizioni al contorno che devono essere soddisfatte.*

In quest'ottica, l'intera famiglia delle soluzioni di tipo 2 e l'unica soluzione di tipo 4 devono essere scartate (almeno nel caso solare) in quanto esse predicono velocità  $v > v_c \simeq 200 \text{ km s}^{-1}$  nella bassa corona che non sono osservate. Rimangono le soluzioni di tipo 1 e 3. La scelta sarà fatta sulla base del loro comportamento all'infinito.

L'equazione (32.35) può essere integrata e diventare

$$\left(\frac{v}{v_c}\right)^2 - \ln\left(\frac{v}{v_c}\right)^2 = 4\ln\left(\frac{r}{r_c}\right) + 4\left(\frac{r_c}{r}\right) + A_i \quad (32.40)$$

Le soluzioni tran-soniche (tipo 3 e 4) corrispondono a  $A_i = -3$ , mentre le soluzioni di tipo 1 e 2 corrispondono a  $A_i > -3$ .

Il comportamento all'infinito viene riassunto in quanto segue:

(1) Soluzioni di tipo 1 per  $r \rightarrow \infty$ . In questo caso  $v/v_c < 1$  e decresce quando  $r \rightarrow \infty$ . Di conseguenza il termine dominante della (32.40) nel membro di sinistra sarà  $-2\ln(v/v_c)$ . Invece in quello di destra sarà  $4\ln(r/r_c)$ . Ne segue che per  $r \rightarrow \infty$ ,  $v \propto r^{-2}$ . Grazie alla equazione di continuità questo implica che  $N$  rimane finito. La conseguenza di ciò è che la pressione rimane finita a  $r \rightarrow \infty$  e maggiore di quella sviluppata dal mezzo interstellare. Queste soluzioni devono essere scartate per le stesse ragioni per le quali si sono eliminate le soluzioni statiche.

(2) Al contrario, la soluzione critica a  $v/v_c > 1$  cresce per  $r \rightarrow \infty$ . Di conseguenza il suo comportamento all'infinito è  $v \propto 2v_c[\ln(r/r_c)]^{1/2}$ . In questo caso  $N \propto r^{-2}v^{-1}$  per  $r \rightarrow \infty$ . Ciò significa che  $P$  tende a zero. Questo comportamento è accettabile.

Da questi ragionamenti traspare che la corona solare deve essere in espansione transonica. Se ora guardiamo all'andamento della  $v(r)$  per corone isoterme vediamo che la velocità cresce sempre. Questo comportamento non è del tutto soddisfacente in quanto  $v/v_c \rightarrow \infty$  per  $r/r_c \rightarrow \infty$ . Questo risultato è dovuto all'ipotesi iniziale che la corona sia isoterma, il che equivale ad ammettere che ci sia una sorgente parassita di energia. Questa difficoltà può essere superata

in vari modi. Essenzialmente si può supporre che

(a) la corona sia isoterma fino ad un certo valore del raggio e poi in espansione adiabatica. Da questo punto in avanti pressione densità sono governate dall'adiabatica  $P/P_0 = (\rho/\rho_0)^{5/3}$ .

(b) la corona sia descrivibile ovunque mediante un politropo con indice  $< 3/2$ . Questi due tipi di soluzioni evitano una crescita non fisica della velocità  $v$  a grandi distanze e si trova che  $v$  tende verso un valore finito  $v_\infty$  quando  $r \rightarrow \infty$ . Il punto saliente di questa analisi è che le soluzioni isoterme danno una prima descrizione dell'espansione coronale in un vento stellare supersonico. Esse sono tuttavia inadeguate a descrivere il fenomeno in maniera dettagliata.

### 32.2.4 Caso generale

Uno degli scopi delle soluzioni del caso generale è la determinazione del profilo di temperatura  $T(r)$ . In questo caso è necessario usare il sistema completo di equazioni compresa quella dell'energia. Vi sono due classi di soluzioni che devono essere considerate:

(1) I venti stellari deboli (o brezze), spesso di tipo sub-sonico simili alle soluzioni di tipo 1 del caso isoterma, che sono associate alla costante  $E = 0$ .

(2) I venti stellari veri e propri, soluzione critica tran-sonica, simili alla soluzione di tipo 3 del caso isoterma. Queste soluzioni corrispondono ad una costante  $E > 0$ . È importante notare quanto segue:

(a) Il ruolo fondamentale giocato dalla costante  $E$  nella ricerca delle soluzioni. Infatti solo  $E = 0$  permette di avere soluzioni la cui velocità all'infinito è nulla, mentre per avere delle velocità super-soniche non nulle all'infinito è necessario che  $E > 0$ .

(b) Una delle difficoltà maggiori della discussione proviene dal fatto che per isolare un tipo di soluzione è necessario che essa soddisfi al requisito di avere pressione nulla all'infinito.

In quanto segue considereremo solamente il caso dei venti intensi lasciando da parte i venti deboli (o brezze).

### 32.2.5 Venti stellari

Le soluzioni di tipo *vento* sono caratterizzate dall'avere

$$r \rightarrow \infty \quad v \rightarrow v_\infty (\neq 0) \quad N \rightarrow 0 \quad T \rightarrow 0$$

Al fine di determinare la soluzione sono necessarie quattro condizioni al contorno. Tipicamente si può scegliere il valore della densità e della temperatura alla base della corona, la soluzione critica (quella che passa senza discontinuità dal regime sub-sonico al regime super-sonico) e che  $T(r) \rightarrow 0$  per  $r \rightarrow \infty$ . Quest'ultima condizione è più complessa di quanto sembri e sappiamo che la natura della variazione di  $T$  con  $r$  dipende dal meccanismo di trasporto del calore a  $r \rightarrow \infty$ .

(a) Supponiamo che il flusso di calore trasportato per conduzione rimanga finito a  $r = \infty$  con un valore  $E_c(\infty)$ . Dalla equazione di conservazione dell'energia (32.29) segue che

$$v_\infty = \left( \frac{2[E - E_c(\infty)]}{\dot{M}} \right)^{1/2} = \text{costante} \quad (32.41)$$

e poichè

$$[r^2 T^{5/2} (\frac{dT}{dr})]_\infty = \text{costante} \quad (32.42)$$

la temperatura deve seguire la legge asintotica

$$T \propto r^{-2/7} \quad (32.43)$$

(b) Supponiamo ancora che all'infinito sopravviva non solo il flusso conduttivo ma anche quello di entalpia e che il rapporto

$$\frac{5kTv}{[r^2 T^{5/2} (dT/dr)]} \rightarrow \text{costante} \quad (32.44)$$

In questo caso i due flussi tendono a zero per  $r = \infty$  e

$$v_\infty = \left( \frac{2E}{\dot{M}} \right)^{1/2} = \text{costante} \quad (32.45)$$

Infine la condizione imposta al rapporto fra i due flussi implica che il comportamento asintotico della temperatura sia

$$T \propto r^{-2/5} \quad (32.46)$$

(c) Finalmente possiamo supporre che il flusso conduttivo tenda a zero per  $r \rightarrow \infty$  più rapidamente del flusso di entalpia. Di nuovo abbiamo

$$v_{\infty} = \left( \frac{2E}{\dot{M}} \right)^{1/2} = \text{costante} \quad (32.47)$$

In questo caso non c'è più un meccanismo di scambio di energia per  $r \rightarrow \infty$  e il gas si espande quasi adiabaticamente. Se l'esponente politropico è  $\gamma$  allora  $T \propto \rho^{(\gamma+1)}$ . Ma  $\rho \propto r^{-2}$  (si veda l'equazione di continuità e  $v_{\infty} = \text{costante}$ ), di conseguenza quando  $r \rightarrow \infty$  si ha  $T \propto r^{-4/3}$  per  $\gamma = 5/3$ .

La relazione fra queste diverse soluzioni può essere messa in evidenza guardando a soluzioni di vento con lo stesso valore di  $T_0$  e diversi valori di  $N_0$ .

Introduciamo ora l'energia residua per particella all'infinito e cioè  $\epsilon_{\infty} = E/F$  dove  $F$  è il flusso di materia (di particelle).

Per valori di  $N_0$  piccoli, la soluzione critica corrisponde a un grande valore di  $\epsilon(\infty)$ . In questo caso si ottiene  $T \propto r^{-2/7}$ .

Quando  $N_0$  cresce la parte di  $\epsilon(\infty)$  dovuta alla conduzione,  $\epsilon_c(\infty)$ , diminuisce e per un valore particolare  $N_0^*$   $\epsilon_c(\infty) = 0$  e  $T \propto r^{-2/5}$ . Questo valore particolare di  $N_0$  dà la soluzione di Whang e Chang.

Se  $N_0$  aumenta ancora,  $\epsilon_c(\infty)$  rimane uguale a zero ma questa volta  $\epsilon(\infty)$  diminuisce e  $T \propto r^{-4/3}$ .

Finalmente, se si continua ad aumentare  $N_0$ , si raggiunge un valore limite per il quale  $\epsilon_c(\infty) = 0$  e si ottiene una soluzione di tipo vento debole (brezza).

La casistica testè descritta è illustrata in Figura 32.3. Il significato fisico di questi risultati è quando  $N_0$  aumenta una frazione sempre maggiore del flusso conduttivo all'infinito è speso nell'espansione fino quando  $\epsilon_c(\infty) = 0$ . Aggiungendo materia, il flusso continua ad essere super-sonico ma sempre più energia è spesa nell'espansione adiabatica e  $\epsilon(\infty)$  diminuisce. Alla fine  $\epsilon(\infty)$  si annulla e il flusso diventa sotto-sonico.

Pertanto il comportamento del vento coronale dipende essenzialmente da due fattori: (i) l'importanza dell'apporto di energia alla base ( $T_0$ ); (ii) il modo in cui questa energia è dissipata ( $N_0$ ).

### 32.2.6 Relazione fra venti stellari e corone

Abbiamo già detto come sia ragionevole supporre che tutte le stelle che hanno una estesa zona convettiva esterna abbiano anche una corona e un vento.

Tuttavia molte stelle dei primi tipi spettrali hanno delle perdite di massa molto più significative di quella del Sole, per le quali il vento è otticamente spesso

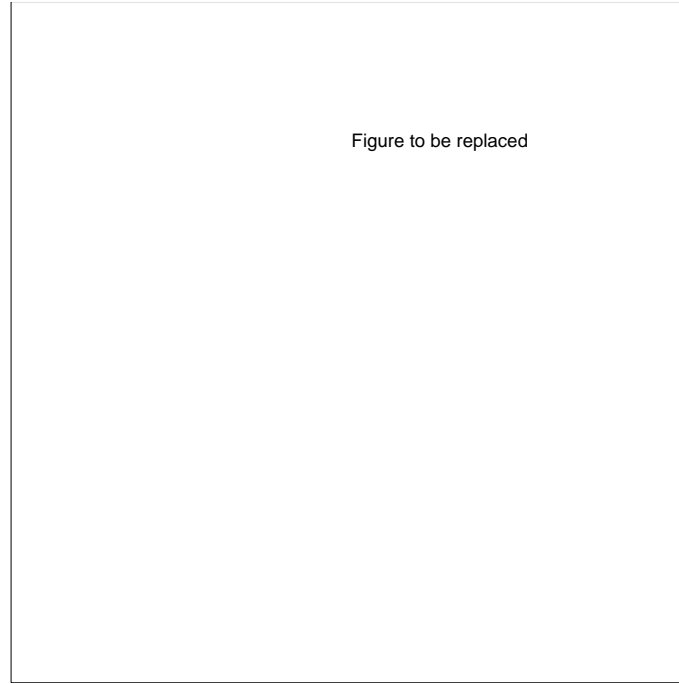


Figura 32.3: Zone di soluzione di brezza o di vento in funzione di  $T_0$  e di  $N_0$

in certe righe spettrali e dà origine a tipici profili delle righe noti come profili P-Cygni.

È possibile spiegare con la presente teoria anche quest'ultimo tipo di venti stellari? Cosa possiamo dedurre dall'analisi fatta fino ad ora?

(a) Si noti come la quantità di energia consumata nell'espansione aumenti molto rapidamente con la temperatura coronale. Ad esempio nel Sole essa passerebbe da  $10^{27}$  a  $3 \times 10^{30}$  erg s $^{-1}$  se la temperatura  $T_0$  passasse da  $10^6$  a  $4 \times 10^6$  K. Il vento agisce dunque come un termostato in grado di controllare la temperatura coronale.

(b) A partire dal momento in cui una stella possiede un vento, è necessario che la temperatura sia compatibile con il flusso. La temperatura dipende dal valore di  $r_c$ . In ogni caso il più piccolo raggio effettivo che si possa usare è  $r_c = R$ , il che impone

$$T_0 \leq \frac{GMm_H}{4kR} \quad (32.48)$$

Per una stella della sequenza principale il rapporto  $M/R$  varia solo di un fattore due attorno al valore solare, il che suggerisce che le temperature coronali  $T_0$

variano molto poco anche se le energie nel vento variano enormemente.

Al contrario in una supergigante il rapporto  $M/R$  è molto più piccolo che in una stella della sequenza principale e pertanto anche  $T_0$  deve essere molto più piccolo. Per esempio in una supergigante la temperatura data dalla (32.48) è circa  $4 \times 10^4$  K il che mette in dubbio persino l'esistenza della *base coronale* supposta in precedenza. In effetti ad una temperatura così bassa la conduzione diventa inefficiente e si deve supporre l'esistenza di un meccanismo di riscaldamento che interessi l'intera corona e non solamente un sottile strato alla base di questa.

(c) Analogamente possiamo attenderci che la velocità terminale del vento rappresenti una frazione significativa della velocità di fuga

$$v_{\infty} \geq \left(\frac{GM}{R}\right)^{1/2} \quad (32.49)$$

il che implica nuovamente che c'è poca variazione lungo la sequenza principale e che le supergiganti hanno venti con bassa velocità.

(d) Infine deve esserci un legame fra le energie coronali e il vento. Una corona è riscaldata dall'apporto di un flusso meccanico  $F_m$  che essa disperde per irraggiamento, conduzione e vento. L'analisi mostra che per *data pressione coronale* il tasso di perdita di energia per emissione di massa e per conduzione *aumenta* con la temperatura, mentre quello per irraggiamento *diminuisce*. Dunque per quella data pressione deve esistere una temperatura alla quale la perdita di energia è minima. D'altra parte le perdite corrispondenti a questi processi aumentano con la pressione, di conseguenza per una corona a flusso minimo esiste una relazione monotona fra la pressione coronale e il flusso di energia necessario a mantenere corona e vento. Questo suggerisce che un dato  $F_m$  determina una temperatura ed una pressione coronali uniche e pertanto un vento unico. Rimane tuttavia da dimostrare che se abbiamo una corona con flusso minimo assegnato ed arbitrariamente variamo  $F_m$ , allora *necessariamente* la corona si aggiusta ad una nuova configurazione di flusso minimo.

Il gioco combinato fra i vari processi permette di classificare le corone in tre tipi:

(1) Valori piccoli di  $F_m$ : le perdite sono essenzialmente radiative e conduttive. Un esempio è la corona solare stessa nella quale solamente il 10% del flusso

meccanico fornito alla corona si ritrova nel vento.

(2) Valori intermedi di  $F_m$ : le perdite avvengono per irraggiamento e perdita di massa. Ad esempio la stella supergigante A2  $\alpha$ -Cyg per la quale la perdita avviene primariamente nel vento. In questo caso la perdita irraggiamento è tuttavia significativa, mentre quella per conduzione è totalmente trascurabile.

(3) Valori elevati di  $F_m$ : la perdita di massa domina. Questo è il caso delle stelle luminose dei primi tipi spettrali con tassi di perdita di massa dell'ordine di  $10^{-5} - 10^{-6} M_\odot$  per anno. Tuttavia questi tassi così elevati *non possono essere spiegati mediante il meccanismo coronale* descritto fino ad ora.

## 32.3 Venti radiativi

### 32.3.1 Dinamica di base

All'interno delle stelle esiste un intenso campo di radiazione il quale può influire sul momento, guadagni e perdite di energia della materia e pertanto sul moto di questa.

Quando si tiene conto del campo di radiazione le equazioni fondamentali del problema diventano

$$\rho \frac{DU}{Dt} + P(\nabla \cdot \bar{v}) = Q_R \quad (32.50)$$

$$\rho \frac{D(\frac{1}{2}v^2)}{Dt} + (\bar{v} \nabla)P = \bar{v} \cdot (\bar{F} + \bar{F}_R) \quad (32.51)$$

$$\frac{\partial(\frac{1}{2}v^2 + \rho U)}{\partial t} + \nabla[(\frac{1}{2}\rho v^2 + \rho U + P)\bar{v}] = Q_R + \bar{v} \cdot (\bar{F} + \bar{F}_R) \quad (32.52)$$

dove  $Q_R$  rappresenta il tasso di guadagno netto di densità di energia eseguito dalla materia a partire dal campo di radiazione,  $\bar{F}_R$  è la forza per unità di volume esercitata dalla radiazione.

Per un flusso stazionario ( $\frac{\partial}{\partial t} = 0$ ) a simmetria sferica, l'integrazione delle (32.52) diventa

$$(4\pi r^2 \rho v) \left( \frac{1}{2}v^2 + U + \frac{P}{\rho} - \frac{GM}{r} \right) + 4\pi \int_r^\infty (Q_R + \bar{v} \cdot \bar{F}_R) r^2 dr = E = \text{costante} \quad (32.53)$$

Allo scopo di una più snella presentazione, scriviamo l'equazione (32.53) in questo modo

$$E_0(r) + 4\pi \int_r^\infty (Q_R + \bar{v} \cdot \bar{F}_R) r^2 dr = E = \text{costante} \quad (32.54)$$

La domanda da porci ora è se i grandi flussi osservati nelle stelle dei primi tipi spettrali possano essere spiegati mediante un'espansione coronale del tipo di quella discussa in precedenza. La risposta è negativa, in quanto la zona convettiva superficiale è molto piccola. Ma anche se queste stelle avessero una corona questa non potrebbe essere la sorgente del vento. Infatti la temperatura coronale necessaria a provocare il flusso di materia deve soddisfare alla relazione

$$2kT_c \simeq \frac{1}{2}mv_\infty^2 \quad (32.55)$$

Introducendo  $v_\infty \simeq 3000 \text{ km s}^{-1}$  (valore osservato) si ha  $T_c \simeq 3 \times 10^7 \text{ K}$ . Questo valore è poco probabile in quanto (i) le stelle dei primi tipi spettrali non sono sorgenti di raggi X molli; (ii) gli spettri mostrano la presenza di righe come CIV, NV, Si IV etc, le quali al contrario dovrebbero essere distrutte per ionizzazione collisionale quando la temperatura è superiore a  $3 \times 10^5 \text{ K}$ .

*È necessario trovare un'altro meccanismo per generare il vento osservato.*

Lucy & Solomon (1970, ApJ 159, 879) suggerirono che si tratti di immissione di momento nel gas attraverso l'assorbimento di radiazione da parte di una riga risonante forte osservata nell'ultravioletto. Il momento iniettato proviene dai fotoni del campo di radiazione che sono assorbiti da ioni opportuni. Questo è possibile in quanto il radiazione vicino alla superficie è fortemente *anisotropo*, *diretto verso l'esterno*.

Gli ioni che hanno assorbito i fotoni sono accelerati verso l'esterno e ridistribuiscono il momento guadagnato ad altri ioni mediante collisioni di guisa che la materia è globalmente spinta verso l'esterno.

L'accelerazione impartita al gas è dunque

$$g_R = \left(\frac{4\pi}{c\rho}\right) \int_0^\infty k_\nu^0 H_\nu^0 d\nu \quad (32.56)$$

dove  $k_\nu^0$  è il coefficiente di assorbimento per unità di volume complessivo di tutte le sorgenti, continuo, scattering elettronico e righe. Infine  $H_\nu^0$  è il flusso incidente.



Si confronti ora l'accelerazione verso l'esterno dovuta alla radiazione con quella verso l'interno dovuta alla gravità  $g = GM/r^2$ .

Se  $g$  è sempre maggiore (in modulo) di  $g_R$  l'atmosfera rimane in equilibrio idrostatico e non vi è espansione.

Dobbiamo dunque cercare le condizioni affinché  $g_R$  sia maggiore (in modulo) di  $g$ . A tale scopo definiamo

$$\Gamma = \frac{g_R}{g} \quad (32.57)$$

Nelle stelle di tipo O l'opacità nelle regioni di massimo flusso è dominata dallo scattering elettronico che non dipende dalla frequenza. Pertanto si può immediatamente scrivere

$$\Gamma_e = \frac{\kappa_e L}{4\pi c G M} \quad (32.58)$$

dove  $\kappa_e = N_e \sigma_e / \rho$  è il coefficiente di scattering per grammo di materia. In una tipica stella O si trova che  $\Gamma_e \simeq 0.4$ .

*È chiaro dunque che il solo assorbimento continuo non può produrre una forza in grado di superare la gravità.*

Dobbiamo pertanto valutare la forza prodotta dalle righe spettrali.

A grande profondità nell'atmosfera, è valida l'approssimazione di diffusione grazie alla quale  $H_\nu \propto k_\nu^{-1}$ : in questo caso il prodotto  $H_\nu k_\nu$  che appare nell'equazione (32.56) è indipendente dal valore di  $k_\nu$ .

Nell'approssimazione di diffusione le righe non sono più efficaci del continuo nel fornire momento al gas. A grandi profondità,  $\Gamma \simeq \Gamma_3 \simeq 0.4$  come trovato in precedenza.

Al contrario, vicino alla superficie dell'atmosfera,  $H_\nu$  può diventare molto maggiore del valore posseduto nell'interno in quanto vi è un intenso irradiazione verso l'esterno e un debole irradiazione verso l'interno (grande anisotropia).

In questo contesto, possiamo valutare il limite superiore della forza dovuta alle righe supponendo che il flusso continuo alla frequenza della riga  $\nu$  non sia ridotto dalla presenza della riga di assorbimento e che la riga intercetti radiazione continua non attenuata. In altre parole

$$F_\nu = F_c = B_\nu(T_{eff}) \quad (32.59)$$

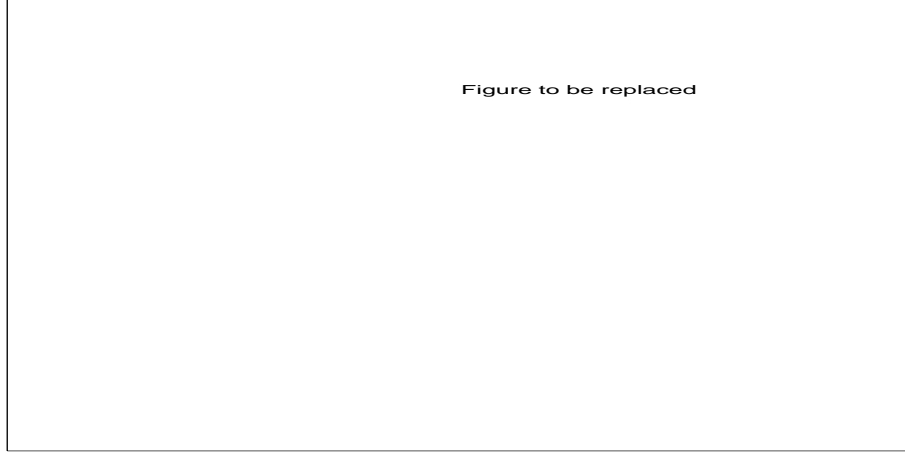


Figura 32.4: Effetto del moto della materia sulla struttura delle righe

Guardando al caso della riga del CIV a  $\lambda = 1548 \text{ \AA}$ , Lucy & Solomon (1970) stimarono che

$$\log(g_R^0)_{\lambda=1548} = 5.47 + \log\left(\frac{N_{jc}}{N_c}\right) \quad (32.60)$$

dove  $N_{jc}$  è il numero totale di atomi nello stato di ionizzazione  $j$  e  $N_c$  è il numero totale di atomi e ioni di C.

Per una tipica stella supergigante O si ha  $\log g \simeq 3$  e il limite superiore della forza (ottenuta per  $N_{jc}/N_c = 1$ ) dovuto ad una sola riga è circa 300 volte la forza di gravità.

Ovviamente si tratta di una approssimazione grossolana del fatto che gli atomi di carbonio producano una forte riga di assorbimento nella quale  $F_\nu \ll F_c$ . Per ovviare a questo inconveniente Lucy & Solomon (1970) risolvono l'equazione del trasporto in maniera accurata e trovano che sopra un certo livello la forza radiativa della riga del CIV(1548) effettivamente supera la gravità.

Riassumendo possiamo dire che nelle stelle O le forze ottenute nell'ipotesi di equilibrio idrostatico *non sono compatibili con questa ipotesi. Di conseguenza l'equilibrio idrostatico negli strati esterni non è possibile e vi deve essere emissione di materia.*

Non appena gli strati incominciano a muoversi succedono due ulteriori fatti di cui bisogna tener conto.

(a) Le righe subiscono uno spostamento Doppler, deviano dalla loro posizione (frequenza) a riposo e incominciano ad intercettare l'intenso flusso del continuo

adiacente. Questo accresce il momento immesso nella materia e pertanto la sua accelerazione.

(b) Gli strati sottostanti incominciano ad espandersi per compensare la rarefazione prodotta dagli strati superiori in espansione. Da ciò segue che le righe negli strati inferiori diventano non sature (in quanto le righe di assorbimento negli strati superiori sono spostate in frequenza, ovvero  $\tau_{\nu 0}$  diminuisce). Pertanto anche qui si incomincia ad intercettare un flusso via via crescente e gli strati incominciano a subire l'effetto della forza radiativa che supera quella gravitazionale (si veda la Figura 32.4).

Tutto questo spiega come l'emissione di materia possa essere iniziata ma rimane da verificare che

- (a) La perdita di massa è grande;
- (b) La variazione della forza dovuta alla radiazione con la profondità è compatibile con un flusso tran-sonico.

Incominciamo con questa seconda richiesta. Per avere un flusso tran-sonico devono essere realizzate certe condizioni. Per un flusso stazionario la condizione di conservazione della massa rimane sempre la relazione

$$\dot{M} = 4\pi r^2 N m_H v = \text{costante} \quad (32.61)$$

mentre l'equazione del momento (32.57) con la relazione (32.56) incorporata diventa

$$v \frac{dv}{dr} + \rho^{-1} \frac{d\rho}{dr} = - \frac{GM(1 - \Gamma)}{r^2} \quad (32.62)$$

dove  $\Gamma$  è funzione di  $r$ . Introduciamo ora la velocità del suono isoterma  $v_s$  nella (32.62) ed utilizziamo la relazione di continuità (32.61, in tal modo otteniamo

$$\frac{1}{2} \left( 1 - \left[ \frac{v_s^2}{v^2} \right] \right) \frac{dv^2}{dr} = \frac{2v_s^2}{r} - \frac{dv_s^2}{dr} - \frac{GM(1 - \Gamma)}{r^2} \quad (32.63)$$

In prima approssimazione si può supporre che l'involuppo sia isoterma e quindi sopprimere il termine  $\frac{dv_s^2}{dr}$ .

È chiaro che se vogliamo ottenere una transizione continua fra un flusso sub-sonico a piccoli  $r$  e uno super-sonico a grandi  $r$ , il membro di destra della (32.63) deve (i) *annullarsi* a un certo valore critico del raggio  $r = r_c$  dove  $v = v_s$ ; (ii) deve essere *negativo* per  $r < r_c$ ; (iii) deve essere *positivo* per  $r > r_c$ .

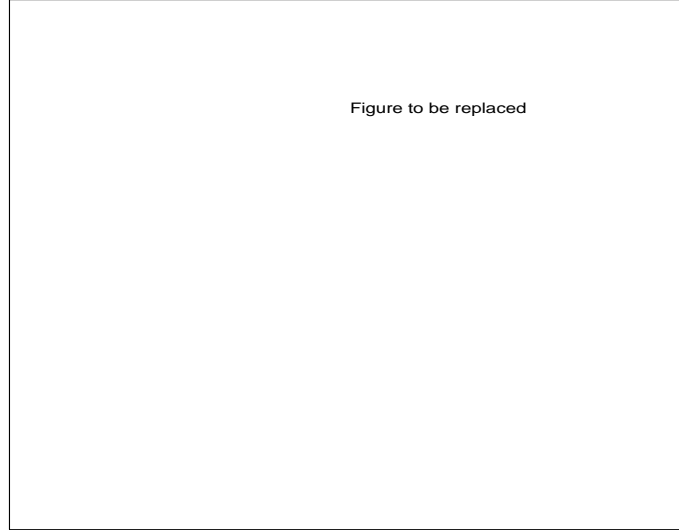


Figura 32.5: Andamento di  $E_0$  in funzione di  $r$  per diversi valori del coefficiente di assorbimento. Viene anche indicata la posizione del punto sonico

La condizione per  $r < r_c$  implica che  $\Gamma < 1$  in questa regione. Ciò vuol dire che nella regione sub-sonica è necessario che la gravità prevalga sulla forza dovuta alla radiazione.

Se  $\Gamma > 1$  ovunque (tutta la stella è instabile), il flusso tran-sonico è impossibile e si ha o un flusso sub-sonico che decelera o un flusso super-sonico che accelera. Inoltre  $r_c$  risulta negativo.

Per  $r > r_c$  nei flussi tran-sonici,  $\Gamma$  può diventare arbitrariamente grande nella regione super-sonica se le righe sono sufficientemente spostate rispetto alla loro posizione a riposo da essere capaci di assorbire nel continuo. Sono esattamente questi grandi valori di  $\Gamma$  che portano alle elevate velocità  $v_\infty$  osservate.

È importante sottolineare che la forza della radiazione sia nel continuo che nelle righe ha esattamente le proprietà richieste per produrre un vento tran-sonico. Infatti  $\Gamma \ll 1$  nelle regioni della stella dove l'approssimazione di diffusione è valida,  $\Gamma \simeq 1$  quando le righe si desaturano,  $\Gamma > 1$  quando le righe sono otticamente sottili ed infine  $\Gamma \gg 1$  là dove le righe sono depresse dentro al continuo.

Prima di concludere è utile fare qualche commento sul problema investigato da Cassinelli & Castor (1973, ApJ 179, 189) riguardante l'immissione di energia in un mezzo *otticamente sottile con solo opacità di continuo*. Alcune delle loro conclusioni sono molto importanti:

(a) Un vento può essere indotto dall'immissione nel gas di energia termica proveniente dal campo di radiazione grazie ad un processo di vero assorbimento vicino al punto critico. Un tale meccanismo deposita energia in una regione estesa analoga alla corona solare e in questo caso il campo di radiazione gioca il ruolo della conduzione a temperature coronali elevate. È importante notare che il termine  $E_0$  nella equazione (32.54) è negativo vicino alla stella, ma deve diventare positivo a grande distanza per un valore finito di  $v_\infty$  come mostrato in Figura 32.5. Cassinelli & Castor (1973) suppongono che il cambiamento sia dovuto all'immissione di energia assorbita integrata ( $Q_R$ ) e concludono che l'assorbimento vero è indispensabile per effettuare la transizione da sub-sonico a super-sonico. Questa conclusione è tuttavia troppo restrittiva in quanto è chiaro che sulla base della equazione (32.54) anche se l'immissione di energia termica può indurre il vento, il lavoro effettuato dalle forze della radiazione può servire egualmente. Infatti è proprio di questo lavoro che si servono Lucy & Solomon (1970) in quanto fanno l'ipotesi che le righe siano dei *diffusori puri* e quindi che  $Q_R = 0$ .

(b) Se il motore del vento è l'assorbimento vero allora in linea di principio ogni stella dei primi tipi spettrali dovrebbe avere un vento. Sfortunatamente nella maggior parte dei casi il punto sonico è così lontano dalla superficie stellare che il flusso di massa è trascurabile. È solo utilizzando dei grandi e non realistici valori per il coefficiente di assorbimento e per  $\Gamma$  che si ottiene un vento di intensità significativa. Questa difficoltà è rimossa utilizzando una rappresentazione realistica della forza radiativa dovuta alle righe.

(c) Il tempo richiesto dalla materia per perdere o guadagnare energia radiativamente è breve rispetto al tempo impiegato dal fluido per percorrere un'altezza di scala di densità. Pertanto il bilancio energetico è guidato dall'equilibrio radiativo.

Il primo modello di vento radiativo per una stella di tipo O è stato costruito da Lucy & Solomon (1970). Le ipotesi principali sono: geometria piana-parallela, temperatura costante, equilibrio di ionizzazione, e forza dovuta alla radiazione dominata dall'assorbimento nelle righe di risonanza di alcuni elementi (CIII, CIV, NIII, NV, SiIV, SIII, SIV e SVI).

L'equazione del momento si scrive

$$\frac{1}{2} \left( 1 - \left( \frac{v_s}{v} \right)^2 \right) \frac{dv^2}{dr} = -g_{eff} \quad (32.64)$$

dove

$$g_{eff} = g - g_{ce} - g_{R,L} = g - \frac{\pi F \kappa_e}{c} - g_{R,L} \quad (32.65)$$

dove  $g_{R,L}$  rappresenta la forza radiativa dovuta alle righe e  $g_{ce} = \pi F \kappa_e / c$  rappresenta la forza dovuta allo scattering elettronico.

Per calcolare  $g_{R,L}$  si procede come segue: le righe sono trattate come diffusori puri; la densità  $\rho_0$  alla base dell'involuppo è derivata da modelli di atmosfera; si introduce un valore per la velocità  $v_0$  fissando così il flusso di massa  $J = \rho_0 v_0$ ; il flusso di massa è usato come un autovalore del problema. Le cose sono variate fino ad ottenere  $g_{eff} = 0$  al punto sonico cioè  $v = v_s$ , il che permette di trovare una soluzione tran-sonica continua.

Infatti se  $J$  è troppo grande, la forza radiativa al punto sonico è troppo debole e  $g_{eff}$  sarà positivo e la transizione ad un flusso super-sonico impossibile.

Al contrario, se  $J$  è troppo piccolo,  $g_{eff}$  al punto sonico sarà negativa.

Questo modello, testato per diversi parametri stellari, dà delle perdite di massa dell'ordine di  $10^{-8} M_\odot$ /anno che sono circa un fattore 100 inferiori a quelle osservate anche se le velocità terminali ottenute sono dell'ordine di  $3000 \text{ km s}^{-1}$ , in accordo coi dati sperimentali.

La Figura 32.6 mostra il luogo nel diagramm HR dove le perdite di massa predette dal modello sono significative.

Qual'è l'ordine di grandezza della perdita di massa stimolata dalla radiazione? Seguendo Mihalas (1977) supponiamo che

(i) lo spettro contenga un gran numero di righe, ciascuna delle quali recupera integralmente il momento ceduto dal campo di radiazione indipendentemente dalla frequenza a cui è avvenuto l'assorbimento.

(ii) La materia viene accelerata da  $v = 0$  a  $v = v_\infty$  durante il processo, anche se una riga di frequenza  $\nu_i$  viene stemperata su un intervallo di frequenze  $\Delta\nu_i = \frac{\nu_i \cdot v}{c}$ .

Da queste ipotesi, la massima perdita di massa si ha quando il momento assorbito dal campo di radiazione nelle righe è integralmente trasmesso alla materia.

Ne segue che

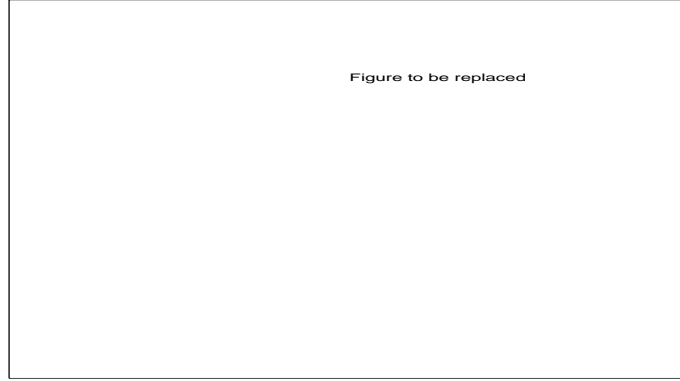


Figura 32.6: Dominio della perdita di massa nel diagramma HR. Le zone tratteggiate sono quelle di maggior tasso di perdita di massa. Per confronto sono mostrate le tracce evolutive di 5, 9 e 30  $M_{\odot}$

$$\dot{M}v_{\infty} = \left(\frac{4\pi r^2}{c}\right) \sum_i F(\nu_i) \Delta\nu_i \quad (32.66)$$

dove la somma è estesa a tutte le righe.

Lucy & Solomon (1970) hanno semplificato il problema supponendo che la sommatoria sia dominata da una sola riga situata vicino al massimo della distribuzione del flusso e hanno scritto

$$\dot{M}v_{\infty} = \left(\frac{4\pi r^2}{c}\right) \cdot F_{max} \left(\frac{\nu_{max}v_{\infty}}{c}\right) \quad (32.67)$$

ovvero

$$\dot{M} = \frac{4\pi r^2}{c^2} F_{max} \nu_{max} \simeq \left(\frac{4\pi r^2}{c^2}\right) F = \frac{L}{c^2} \quad (32.68)$$

dove  $F$  indica il flusso integrato e  $L$  la luminosità della stella. Questo porta a

$$\dot{M} = 7 \times 10^{-4} \left(\frac{L}{L_{\odot}}\right) M_{\odot}/\text{anno} \quad (32.69)$$

ovvero circa  $7 \times 10^{-8} M_{\odot}/\text{anno}$  per  $L = 10^6 L_{\odot}$ .

Gli autori hanno considerato questo come un limite superiore. Oggi sappiamo che esso è invece un limite inferiore.

Un vero limite superiore fu ottenuto da Cassinelli & Castor (1973) sostituendo  $(4\pi r^2) \sum F(\nu_i) \Delta\nu_i$  con  $L$  ed ottenendo

$$\dot{M} \leq \frac{L}{v_{\infty} c} = 7 \times 10^{-12} \left(\frac{L}{L_{\odot}}\right) \left(\frac{3000}{v_{\infty}}\right) M_{\odot}/\text{anno} \quad (32.70)$$

dove le velocità sono in  $\text{km s}^{-1}$ . Per  $L = 10^6 L_\odot$  si ottiene  $\dot{M} = 7 \times 10^{-6} M_\odot/\text{anno}$  che è il valore osservato per  $\zeta\text{Pup}$ . Si noti che questo risultato richiede che tutto il momento contenuto nella luminosità della stella sia convertito in perdita di massa. Nella realtà ciò non è vero, ma solo una frazione  $\epsilon$  viene utilizzata. Le osservazioni indicano che  $\epsilon \simeq 0.5$ .

Sembra dunque che i giusti tassi di perdita di massa siano ottenibili a patto di tener conto di un adeguato numero di righe nel calcolo di  $g_R$ .

### 32.3.2 Modelli a molte righe

La teoria più completa dei venti stellari dovuti alla pressione di radiazione è stata sviluppata da Castor, Abbott & Klein (1975, ApJ, 195, 157). Anche se i parametri utilizzati imporrebbero che questa teoria sia applicata solo alle stelle Of, essa è stata da sempre estesa alle stelle massicce dei primi tipi spettrali senza distinzione.

Le ipotesi di base sono la simmetria sferica, gas descritto come un unico fluido, assenza di viscosità e conduzione, infine assorbimento di momento dal campo di radiazione mediante le righe spettrali.

La caratteristica principale di questi modelli è dunque il modo di calcolare  $g_R$ , vale a dire il modo in cui è calcolata la forza impressa dalla radiazione alla materia. Punti essenziali sono il tener conto della saturazione delle righe e valutare correttamente la transizione fra righe otticamente spesse ed otticamente sottili. Quest'ultimo aspetto fu studiato preliminarmente da Castor (1974, MNRAS 169, 279) e il risultato più saliente di quell'analisi è che il calcolo della forza radiativa è ricondotto alla definizione di una grandezza chiamata *moltiplicatore della forza*  $M(t)$  funzione del solo parametro  $t$ .

In breve  $M(t)$  è così costruito. La forza dovuta ad una singola riga per unità di massa del materiale è data da

$$f_{R,L} = \left( \frac{\kappa_L F_c \Delta\nu_D}{c} \right) \min\left(1, \frac{1}{\tau_L}\right) \quad (32.71)$$

dove  $\kappa_L$  è il coefficiente monocromatico di assorbimento di linea, per unità di massa, diviso per la funzione profilo; questa funzione è assunta essere normalizzata su una scala di frequenze espressa in unità di effetto Doppler termico. In parole semplici  $\kappa_L$  è una quantità nota e facilmente derivabile. Il fattore  $F_c$  è



il flusso continuo per intervallo di frequenze alla frequenza della riga.  $\Delta\nu_D$  è la larghezza Doppler  $\Delta\nu_D = \nu_0 v_{th}/c$ .

La profondità ottica di linea  $\tau_L$  differisce da quella abituale del caso statico

$$\tau_L = \int_r^\infty \kappa_L \rho dr \quad (32.72)$$

diventando per una atmosfera in espansione

$$\tau_L = \kappa_L \rho v_{th} \left| \frac{dv}{dr} \right|^{-1} \quad (32.73)$$

In una atmosfera statica  $\tau_L$  misura la densità colonnare totale di assorbitori, in una atmosfera in espansione  $\tau_L$  conta solo gli assorbitori in una sezione della colonna lungo la quale la velocità cambia di  $v_{th}$ .

Introduciamo ora il rapporto  $\beta = \sigma_e/\kappa_L$  dove  $\sigma_e$  è il coefficiente di massa per la diffusione degli elettroni ed inoltre poniamo

$$t = \beta \tau_L \quad (32.74)$$

In questo modo le relazioni (32.72) e (32.73) diventano

$$t = \int_r \sigma \rho dr \quad \text{statico} \quad (32.75)$$

$$t = \sigma_e \rho v_{th} \left| \frac{dv}{dr} \right|^{-1} \quad \text{espansione} \quad (32.76)$$

Nel caso statico  $t$  è uguale alla profondità ottica dello scattering elettronico, nel caso in espansione  $t$  è minore di questo per un fattore significativo.

Per avere ora la forza totale sviluppata da un insieme di righe sommiamo l'equazione (32.77) su tutte le righe. Introduciamo il *moltiplicatore di forza* così definito

$$f_R = \frac{\sigma_e F}{c} M(t) \quad (32.77)$$

dove il termine  $\sigma_e F/c$  è la forza dovuta all'assorbimento del continuo e  $M(t)$  è dato da

$$M(t) = \sum_L \frac{F_c \Delta\nu_D}{F} \min\left(\frac{1}{\beta}, \frac{1}{t}\right) \quad (32.78)$$

Il moltiplicatore di forza può essere un numero molto grande (fino a circa  $10^3$ ), cioè molto maggiore di quanto ottenuto nel caso di una singola linea (si ricordi il fattore  $\Gamma \simeq 0.05 - 0.5$  visto in precedenza).

Infine Castor, Abbott & Klein (1975) generalizzano la formulazione per  $M(t)$  per tener conto della dipendenza dalla temperatura e di altre incertezze nella formulazione complessiva del problema. Essi suppongono che

$$M(t) = Ct^{-\alpha} \quad (32.79)$$

dove  $C$  e  $\alpha$  sono due costanti opportunamente scelte. Inoltre essi introducono una dipendenza semplificata di  $M(t)$  dalla abbondanza  $X_i$  degli ioni assorbenti e dalla velocità Doppler termica

$$M(X'_i, v'_{th}, t) = \frac{X'_i}{X_i} M\left(X_i, v_{th}, \frac{X'_i v_{th}}{X_i v'_{th}} t\right) \quad (32.80)$$

In questo modo la costante  $C$  varia con  $X_i$  e  $v_{th}$  come

$$C \propto X_i^{1-\alpha} v_{th}^\alpha \quad (32.81)$$

Con queste ipotesi l'accelerazione dovuta alle righe diventa

$$g_{R,L} = \left(\frac{\sigma_e L}{4\pi r^2 c}\right) M(t) \quad (32.82)$$

con analoga espressione per la componente di continuo. Le equazioni fondamentali di conservazione della massa e del momento nella notazione di Castor, Abbott & Klein (1975), leggermente diversa da quella usata fino ad ora, diventano

$$\frac{dM}{dt} = 4\pi r^2 \rho v = \text{costante} \quad (32.83)$$

$$v \frac{dv}{dr} = -\frac{GM}{r^2} + \frac{\sigma_e L}{4\pi r^2 c} [1 + M(t)] - \frac{1}{\rho} \frac{dP_g}{dr} \quad (32.84)$$

dove  $P_g$  è la pressione del gas regolata dalla equazione di stato

$$P_g = \rho v_s^2 \quad (32.85)$$

e  $v_s$  è la velocità isoterma del suono (funzione di  $r$ ).

La forza dovuta alla pressione del gas è data da

$$-\frac{1}{\rho} \frac{dP_g}{dr} = \frac{v_s^2}{v} \frac{dv}{dr} + \frac{2v_s^2}{r} - \frac{dv_s^2}{dr} \quad (32.86)$$

Combinando le varie equazioni si ottiene l'equazione finale per la velocità

$$\left(v - \frac{v_s^2}{v}\right) \frac{dv}{dr} = -\frac{GM(1-\Gamma)}{r^2} + \frac{2v_s^2}{r} - \frac{dv_s^2}{dr} + \frac{\Gamma GMC}{r^2} \left[\frac{4\pi}{\sigma_e v_{th} \dot{M}}\right]^\alpha \left(r^2 v \frac{dv}{dr}\right)^\alpha \quad (32.87)$$

Il parametro  $\Gamma$  è ora dato da

$$\Gamma = \frac{\sigma_e L}{4\pi G M c} \quad (32.88)$$

La discussione di questa equazione è molto più complessa di quanto visto fino ad ora. Basti ricordare che essa possiede un punto singolare dove la soluzione è limitata, possiede una biforcazione, dove mostra altre singolarità, infine questo punto non è il punto sonico.

Al punto sonico si vede che il membro di sinistra si annulla, mentre il membro di destra può annullarsi per un opportuno valore di  $dv/dr$  che non ha bisogno di essere infinito o discontinuo.

Questo diverso comportamento rispetto alla teoria del vento coronale proviene dal fatto che la forza motrice dipende da  $dv/dr$  e non dal raggio stesso. L'analisi dell'equazione è inoltre complicata dal fatto che essa è non lineare in  $dv/dr$ .

Il modello stellare è fissato dalla scelta fatta per  $L$ ,  $M$ ,  $R$  e la funzione  $T(r)$ . La perdita di massa è quasi interamente determinata da  $M$  e  $L$  attraverso il parametro  $\Gamma$ . La temperatura effettiva  $T_{eff}$  interviene nella velocità  $v_{th}$ .

In pratica il modello viene determinato adottando un valore di prova per  $r_c$ , l'equazione fondamentale viene risolta numericamente ottenendo la relazione fra raggio e profondità ottica. Il valore di  $r_c$  viene variato fino ad ottenere una profondità ottica accettabile alla fotosfera:  $\tau \simeq 2/3$  per  $r = R$ .

Prima di ottenere un modello dinamico, si può utilizzare la struttura di densità ricavata per aggistare la struttura della temperatura in modo tale da soddisfare l'equilibrio radiativo. La nuova struttura di temperatura è allora usata per costruire un nuovo modello dinamico ed il processo viene ripetuto. In pratica, la dinamica e pertanto la velocità, la struttura di densità e la perdita di massa sono insensibili alla struttura di temperatura garantendo una facile convergenza verso la soluzione esatta.



Figure to be replaced

Figura 32.7: Modello di vento radiativo secondo Castor, Abbott & Klein (1975). Variazione della velocità (pannello a), della densità (pannello b) in funzione del raggio  $r$ . Le lettere P, S, C indicano la fotosfera, il punto sonico, e il punto critico rispettivamente. Il pannello c mostra l'andamento del moltiplicatore di forza  $M(t)$  in funzione della profondità ottica  $\tau$ . I dati si riferiscono ad una stella tipica di tipo O5 con massa  $M = 60M_{\odot}$ , luminosità  $L = 9.7 \times 10^5 L_{\odot}$  e raggio  $R = 9.6 \times 10^{11}$  cm ovvero  $R = 13.8R_{\odot}$

Per una tipica stella di tipo O5 con massa  $M = 60M_{\odot}$ , luminosità  $L = 9.7 \times 10^5 L_{\odot}$  e raggio  $R = 9.6 \times 10^{11}$  cm ovvero  $R = 13.8R_{\odot}$  si trova  $\dot{M} = 6.6 \times 10^{-6} M_{\odot}/\text{anno}$  e  $v_{\infty} = 1500 \text{ km s}^{-1}$  che corrisponde a circa  $\dot{M} \propto 0.5(L/v_{\infty}c)$  mostrando in tal modo che circa metà del momento iniziale contenuto nel campo di radiazione è trasferito alla materia.

La struttura del modello di vento è mostrata nella serie di pannelli della Figura 32.7 dove le lettere P, S, C stanno ad indicare la fotosfera, il punto sonico e il punto critico rispettivamente. Si vede subito che

- (a) La struttura di densità è di tipo nucleo-alone: sotto il punto sonico il gradiente di densità è praticamente idrostatico, sopra il punto sonico la densità scala come  $\rho \propto r^{-2}$ .
- (b) Il gradiente di velocità è enorme. In effetti esso risulta maggiore di quanto dedotto dalle osservazioni (necessità di migliorare la teoria).
- (c) La variazione del moltiplicatore di forza mostra che esso è dell'ordine di 5 nell'involuppo esterno, il che significa che la forza radiativa generata dalle righe è circa il doppio di quella di gravità. Se si aggiunge il contributo dello

scattering elettronico (continuo) e si sottrae la gravità, si vede che la materia subisce un'accelerazione che è circa 1.5 volte quella gravitazionale.

### 32.4 Osservazioni finali

I venti stellari hanno una vasta gamma di proprietà che possono essere così riassunte: (1) i venti stellari intensi ( $\dot{M} \simeq 10^{-5} M_{\odot}/\text{anno}$ ) sono otticamente spessi nelle righe spettrali e in certa misura nel continuo e producono le righe di emissione e i profili PCyg.

(2) i venti stellari deboli ( $\dot{M} \simeq 10^{-14} M_{\odot}/\text{anno}$ ) che sono otticamente sottili e non hanno praticamente effetto sulla massa della stella ma sono importanti per altri effetti (rimozione del momento angolare ad esempio).

Ci sono due meccanismi basilari per generare il vento stellare:

(3) Riscaldamento coronale. Questo meccanismo è importante in stelle con estesi involucri convettivi (come il Sole). L'atmosfera esterna della stella è costituita da una corona riscaldata meccanicamente a temperatura molto elevata. La corona non è in equilibrio idrostatico con il mezzo interstellare e fluisce verso questo.

(4) Il campo di radiazione. Questo domina nelle stelle calde e luminose dove il campo di radiazione è così intenso da immettere momento nel gas fino ad accelerarlo a velocità maggiori di quelle di fuga.



## Capitolo 33

# COLLASSI ED ESPLOSIONI

Solo le stelle con massa iniziale maggiore di circa  $12M_{\odot}$  compiono l'intera sequenza nucleare e diventano fortemente degeneri nel centro solamente al momento della costruzione del nucleo di Fe: la successiva foto-dissociazione del Fe induce collasso ed esplosione.

Da questo si comprende come collasso del nucleo e conseguente esplosione della stella possano dar vita ad una supernova di tipo diverso da quella causata dalla detonazione - deflagrazione del carbonio.

Soggetto di questo capitolo è il collasso del nucleo di Fe e il fenomeno di supernova da esso indotto.

### 33.1 Collasso del nucleo in stelle massicce

Il cammino delle condizioni centrali del nucleo di una stella massiccia nel diagramma  $\log \rho_c - \log T_c$  è tale che non viene mai incontrata significativa degenerazione (Figura 30.1). Pertanto il nucleo si riscalda passando da un bruciamento a quello successivo. Per stelle con  $M_c < 40M_{\odot}$  viene anche evitata la regione della instabilità di coppie ( $e^+, e^-$ ) dove  $\gamma < 4/3$ .

Dopo essere passato attraverso l'intera sequenza nucleare, il nucleo raggiunge lo stadio di bruciamento del Silicio. Il bruciamento nucleare in shells dislocate a diversi raggi ha prodotto la tipica struttura stratificata (onion skin). Finalmente la regione centrale ha raggiunto temperature tali per cui le abbondanze degli elementi chimici sono regolate dalle condizioni di equilibrio statistico nucleare. Le condizioni fisiche del nucleo sono peculiari sotto molti aspetti. La pressione è dominata dagli elettroni che a temperature di  $10^9$  °K sono relativistici ( $KT \simeq 1.7m_e c^2$ ) e l'esponente adiabatico  $\gamma_{ad}$  è vicino a  $4/3$ . I processi di

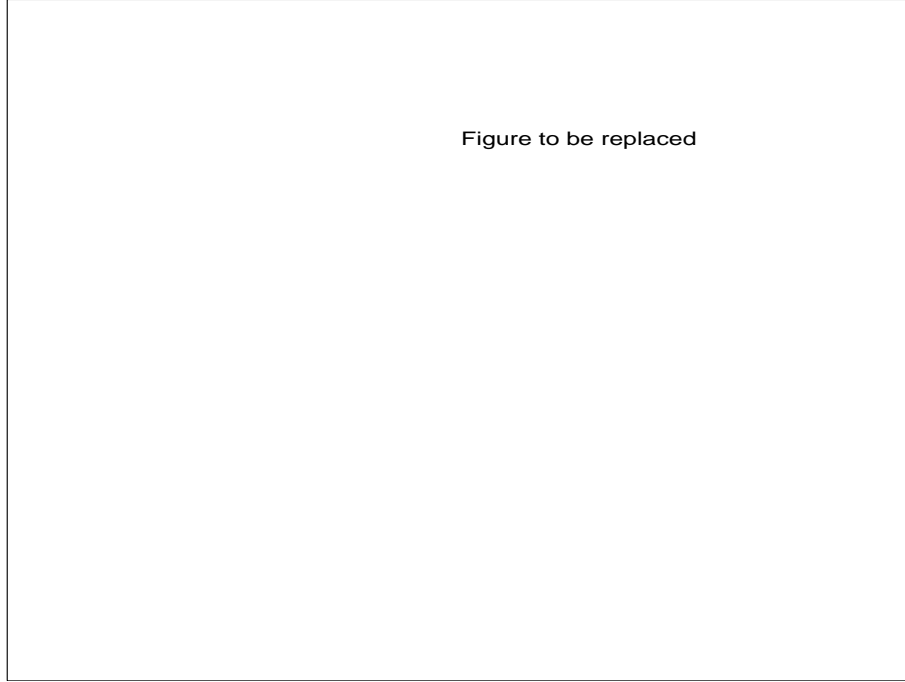


Figura 33.1: Stratificazione delle shell nucleari in una tipica stella massiccia in cui si sia formato un nucleo di Fe.

foto-disintegrazione fanno diminuire  $\gamma_{ad}$ . Inoltre gli elettroni sono catturati da nuclei pesanti ed il processo inverso (decadimento- $\beta$ ) non può avvenire a causa della forte degenerazione. Questo fa ridurre la pressione nel nucleo e dà inizio al collasso.

### 33.2 Trattazione politropica del collasso

Supponiamo di avere un nucleo che all'inizio del collasso abbia  $\rho_c \simeq 10^{10}$  g cm<sup>-3</sup> e  $T_c \simeq 10^{10}$  °K. Gli elettroni sono relativistici e degeneri; l'equazione di stato è quella di un politropo

$$P = K' \rho^{4/3} \quad (33.1)$$

con  $K' = K_{4/3}/\mu_e^{4/3}$  ed indice politropico  $n = 3$ , le cui proprietà sono già note e il cui collasso è già stato ampiamente descritto.

Il parametro  $\lambda$  che appare nella equazione di Lane-Emden modificata e che misura la deviazione dall'equilibrio idrostatico, permette soluzioni con raggio finito solo se  $0 < \lambda < 0.006544 = \lambda_{max}$ .



Sia  $\psi(\xi)$  la soluzione per la parte spaziale. Indichiamo con  $\xi_3$  il valore di  $\xi$  alla superficie del nucleo collassante, dove  $\psi(\xi_3) = 0$ . Per  $\lambda = 0$  si ha  $\xi_3 = 6.897$ , mentre per  $\lambda_{max}$  si ha  $\xi_3 = 9.889$ . Il valore limite di  $\lambda$  corrisponde al caso del collasso con l'accelerazione di caduta libera.

Dalla relazione (21.96) applicata alla superficie abbiamo

$$\xi_3 \ddot{a} = -\frac{4}{3} \frac{(K')^{3/2}}{\sqrt{\pi G}} \frac{\xi_3}{a^2} \quad (33.2)$$

mentre dalla relazioni (21.102) otteniamo

$$\frac{\rho}{\rho_c} = \psi^3 = \lambda - \frac{1}{\xi^2} \frac{d}{d\xi} \left( \xi^2 \frac{d\psi}{d\xi} \right) \quad (33.3)$$

Da queste ponendo  $r = a\xi$  e  $R_c = a\xi_3$  e usando

$$\bar{\rho} = \frac{3}{R_c^3} \int_0^{R_c} \rho r^2 dr \quad (33.4)$$

deriviamo

$$\frac{\bar{\rho}}{\rho_c} = \lambda - \left[ \frac{3}{\xi} \left( \frac{d\psi}{d\xi} \right) \right]_{\xi=\xi_3} \quad (33.5)$$

Applicando questa al caso limite  $\lambda = \lambda_{max}$  in cui  $d\psi/d\xi$  si annulla alla superficie, otteniamo

$$\frac{\bar{\rho}}{\rho_c} = \lambda_{max} \quad (33.6)$$

Il nucleo deve partire dalla condizione di equilibrio con  $\lambda = 0$ , cioè accelerazione alla superficie nulla in quanto gravità e pressione si bilanciano. Ma non appena la pressione diminuisce, esso incomincia a collassare ( $\lambda > 0$ ). Integrazioni numeriche per valori  $0 \leq \lambda \leq \lambda_{max}$  danno valori di  $z_3$  e  $\bar{\rho}/\rho_c$  negli intervalli  $6.897 \leq z_3 \leq 9.998$  e  $0.01846 \leq \bar{\rho}/\rho_c \leq 0.0654$ .

La massa dei politropi collassanti si deriva dall'espressione

$$M_c = \frac{4\pi \xi^3 \rho_c}{3} \frac{\bar{\rho}}{\rho_c} = \frac{4\pi \xi^3}{3} \left( \frac{K'}{\pi G} \right)^{3/2} \frac{\bar{\rho}}{\rho_c} \quad (33.7)$$

Questa equazione per  $\lambda = 0$  genera proprio la massa di Chandrasekhar. In generale, le masse ottenute per  $0 \leq \lambda \leq \lambda_{max}$  stanno nell'intervallo  $M_{Ch} \leq M_c \leq 1.0499 M_{Ch}$ . Al crescere di  $\lambda_{max}$  cioè della deviazione dall'equilibrio

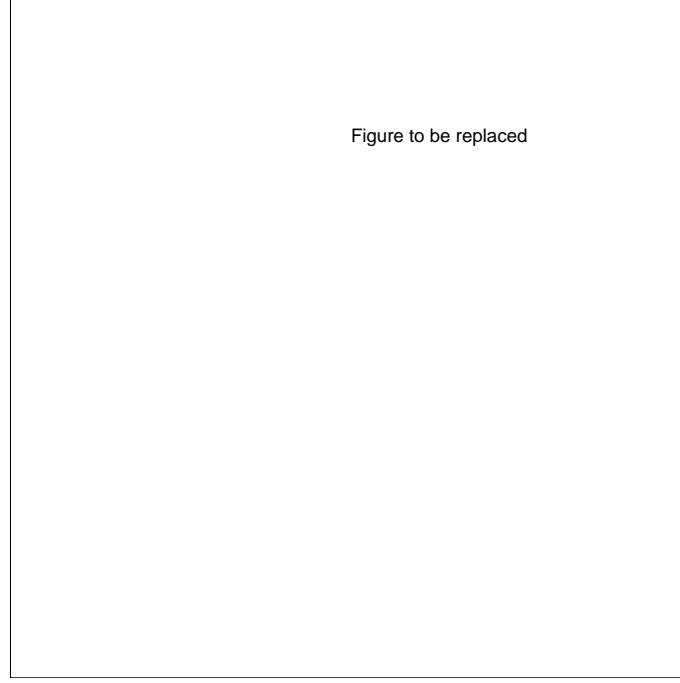


Figura 33.2: Andamento schematico della velocità  $v_r$  in un politropo collassante

idrostatico la massa limite del nucleo cresce di un poco rispetto al valore di Chandrasekhar, se il peso molecolare elettronico si mantiene costante..

Solamente i nuclei con masse in questo intervallo possono collassare in maniera omologa. Tuttavia, da una parte  $M_{Ch} \propto \mu_e^2$ , dall'altra le catture elettroniche che avvengono durante il collasso fanno diminuire  $\mu_e$  per cui il limite di massa per collasso omologo diminuisce durante il collasso stesso. Se all'inizio  $\mu_e = \mu_{e0}$  e  $M_{Ch} = M_{Ch0}$  dopo un certo tempo si avrà che solo la massa

$$M_c = 1.0499 \left( \frac{\mu_{e0}}{\mu_e} \right)^2 M_{Ch0} \propto \mu_e^2 \quad (33.8)$$

può collassare in maniera omologa.

La velocità radiale della materia in stato di collasso varia con  $r$  e/o  $M(r)$  nel modo indicato in Figura 33.2. Il massimo separa la regione di collasso omologo (interna) da quella di caduta libera (esterna). Durante il collasso il massimo non rimane costante in  $r$  e/o  $M(r)$  ma si sposta verso l'interno.

Il collasso ha una durata molto breve dell'ordine del tempo di free-fall  $\tau_{ff} = (G\rho)^{-1/2}$ : per il tipico valore di  $\rho = 10^{10} \text{ g cm}^{-3}$  la durata è di circa 40 millisecondi. Esso scende a circa 0.4 millisecondi quando la densità sale a circa

$10^{15} \text{ g cm}^{-3}$ .

### 33.3 Riflessione della caduta libera

A causa del collasso, la densità finale all'interno di una sfera centrale raggiunge il valore nucleare ( $10^{14} \text{ g cm}^{-3}$ ). L'equazione di stato cambia e diventa *rigida* cioè la materia diventa incompressibile. Il collasso ha termine.

Se l'intero processo fosse completamente *elastico* allora l'energia cinetica della materia collassante sarebbe sufficiente a riportarla indietro allo stato iniziale.

Una stima dell'energia in gioco è data dall'energia gravitazionale liberata portando il nucleo dalle dimensioni iniziali di una Nana Bianca a quelle di una stella di neutroni

$$E_g \simeq GM_c^2 \left( \frac{1}{R_n} - \frac{1}{R_{wd}} \right) \simeq \frac{GM_c^2}{R_n} \simeq 3 \times 10^{53} \quad \text{erg} \quad (33.9)$$

dove  $R_n$  e  $R_{wd}$  sono i tipici raggi di una stella di neutroni e di una Nana Bianca.

Stimiamo ora l'energia necessaria a disperdere il resto della stella, cioè gli strati che non hanno avuto tempo di partecipare al collasso centrale

$$E_e = \int_{M_{wd}}^M \frac{GM(r)dM(r)}{r} << \frac{GM^2}{R_{wd}} \simeq 3 \times 10^{52} \quad \text{erg} \quad (33.10)$$

per una tipica stella con  $M = 10M_\odot$ . Stime più realistiche portano questo valore dell'energia giù a circa  $10^{50} \text{ erg}$ . *Pertanto solo una piccola frazione dell'energia coinvolta nel collasso è sufficiente a disperdere la stella.*

Ciò che accade dopo la riflessione (*bounce*) del collasso dipende da quale frazione di questa energia viene trasferita alla parte esterna cioè in energia cinetica del moto esplosivo verso l'esterno.

Come avviene il trasferimento di energia dal nucleo all'involuppo? Un meccanismo possibile è un'onda d'urto propagantesi verso l'esterno. Il nucleo centrale per inerzia viene compresso oltre la sua posizione di equilibrio e come una molla si espande e spinge la materia che sta cadendo sopra. Questo crea un'onda di pressione che si irripidisce via via che si propaga verso gli strati più esterni di minore densità. In linea di principio l'energia immagazzinata nell'onda di pressione potrebbe essere sufficiente ad espellere il resto della stella.

### 33.4 Formazione dell'onda d'urto

Scopo di questa sezione è quello di descrivere le caratteristiche fondamentali dell'onda d'urto.

Come già anticipato, quando il centro della stella raggiunge e supera la densità nucleare, il materiale resiste alla compressione e sviluppa un gradiente di pressione. Il moto di caduta verso l'interno viene fermato e un fronte di pressione si propaga verso l'esterno.

Se il moto di caduta libera fosse fermato improvvisamente, la variazione di velocità sarebbe data da

$$\Delta u = -u_{inf} \quad (33.11)$$

dove  $u_{inf}$  è la velocità di caduta libera. In base alle leggi dell'acustica, questo cambiamento di velocità è associato ad un cambiamento di pressione

$$\Delta P = \rho v_s \Delta u \quad (33.12)$$

dove  $v_s$  è la velocità locale del suono. Il cambiamento di pressione a sua volta si accompagna ad un cambiamento di densità

$$\frac{\Delta \rho}{\rho} = \frac{u}{v_s} \quad (33.13)$$

Questa relazione è valida fintanto che il membro di destra è piccolo rispetto all'unità (questa situazione è chiamata approssimazione sonica).

*Si può dimostrare che il cambiamento di pressione  $\Delta P$  e di densità  $\Delta \rho$  sono gli stessi anche quando il cambiamento di velocità avviene in maniera graduale. Pertanto il risultato è di validità generale.*

Abbiamo visto dalla soluzione di collasso che verso il centro della stella la velocità  $u < v_s$  e pertanto la variazione  $\Delta P$  è modesta. La variazione di pressione si propaga verso l'esterno e mentre fa ciò il rapporto  $u/v_s$  aumenta ( $u$  cresce e  $v_s$  diminuisce), fino a raggiungere il punto dove  $u = v_s$  detto *punto sonico*. Da questo momento l'approssimazione sonica non è più valida e si sviluppa un'onda d'urto.

Al fronte dell'onda d'urto è presente una discontinuità nelle variabili fisiche che è descritta dalle equazioni di Hugoniot. Indichiamo con il pedice 1 le quantità

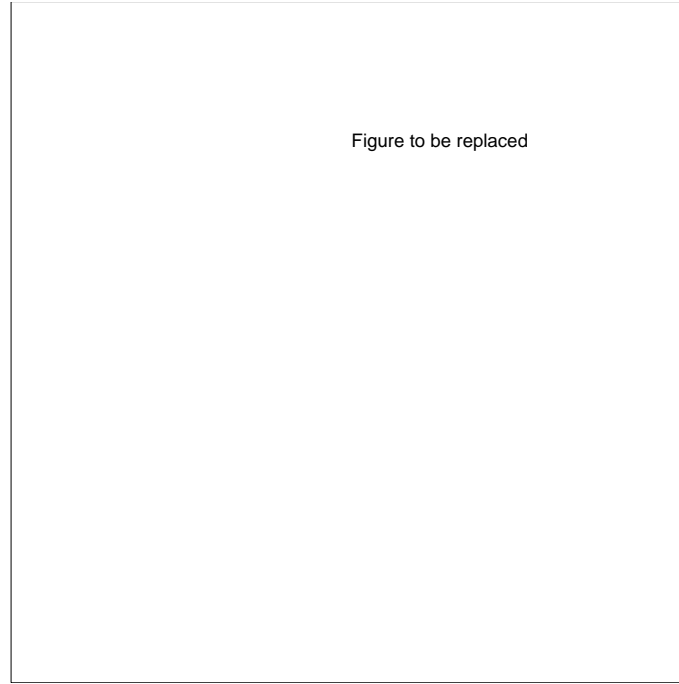


Figura 33.3: Andamento della velocità nella formazione del fronte d'urto

davanti (più esterne) al fronte dell'onda d'urto e con il pedice 2 quelle dietro (più interne) al fronte dell'onda d'urto. Sia  $U$  la velocità del fronte d'onda (relativa al centro della stella). Siano inoltre  $u_1$  e  $\epsilon_1$  la velocità ed energia interna per unità di massa del materiale che sta sopra il fronte d'onda. Finalmente, siano  $u_2$  e  $\epsilon_2$  quelle del materiale sotto il fronte d'onda.

Le equazioni di Hugoniot esprimono la conservazione del flusso di massa ( $\rho u$ ), del flusso di quantità di moto ( $P + \rho u^2$ ), del flusso di energia cinetica e interna ( $\rho u[\frac{1}{2}u^2 + \epsilon]$ ). Adattate al nostro caso esse diventano

$$\rho_1(U - u_1) = \rho_2(U - u_2) \quad (33.14)$$

$$(U - u_1)^2 = \frac{\rho_2}{\rho_2 - \rho_1} \frac{P_2 - P_1}{\rho_1} \quad (33.15)$$

$$(u_2 - u_1)^2 = (P_2 - P_1) \left( \frac{1}{\rho_1} - \frac{1}{\rho_2} \right) \quad (33.16)$$

$$\epsilon_2 - \epsilon_1 = (P_2 + P_1) \left( \frac{1}{\rho_1} - \frac{1}{\rho_2} \right) \quad (33.17)$$

Se l'onda d'urto è *forte*,  $P_2 \gg P_1$ , allora dalle equazioni (33.16) e (33.17) si deriva la relazione

$$2(\epsilon_2 - \epsilon_1) = (u_2 - u_1)^2 \quad (33.18)$$

Se poniamo  $\epsilon_1 = 0$  e assumiamo la legge di gas perfetto, l'energia  $\epsilon_2$  è data da

$$\epsilon_2 = \frac{\alpha P_2}{\rho_2} \quad (33.19)$$

quindi

$$\frac{\rho_2}{\rho_1} = 2\alpha + 1 \quad (33.20)$$

dove  $\alpha = 3/2$  per un gas perfetto.

Poichè l'equazione (33.18) è valida per ogni equazione di stato, essa può essere usata per stimare la velocità del materiale dietro il fronte d'urto.

L'effetto del passaggio dell'onda di compressione sull'andamento della velocità in funzione della distanza dal centro della stella è mostrato in Figura 33.3.

Gli effetti del passaggio di un'onda d'urto sullo stato dinamico e termodinamico del gas possono essere così riassunti:

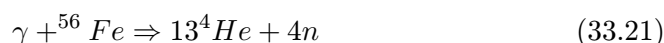
- (1) *Il moto è inizialmente supersonico, ma diventa subsonico dietro al fronte d'urto.*
- (2) *La densità dietro lo shock è maggiore della densità del mezzo imperturbato.*
- (3) *La pressione dietro il fronte d'urto è maggiore della pressione del gas imperturbato.*
- (4) *La temperatura dietro il fronte d'urto è maggiore di quella del gas imperturbato.*
- (5) *Nel caso di onda d'urto forte ( $P_2 \gg P_1$ ), i rapporti  $P_2/P_1$  e  $T_2/T_1$  tendono a divergere, mentre il rapporto  $\rho_2/\rho_1$  rimane finito e piccolo (si veda l'equazione 33.20).*

### 33.5 Bilancio energetico

Nello schema descritto fino ad ora sorge subito un problema. La stella di neutroni che si è appena formata ha una massa uguale al valore finale della massa  $M_{ChF}$ . Il resto della materia in collasso è costituito ancora da Fe. Questo significa che gran parte dell'energia dell'onda di compressione verrà spesa a foto-disintegrare il ferro. Pertanto solo una piccola frazione dell'energia originale rimane disponibile (nel caso più estremo anche niente).

È chiaro che l'eventuale successo di questo meccanismo dipende dalla massa della stella di neutroni che si è formata e dalla massa del nucleo originario di Fe. Se la massa della stella di neutroni è grande cioè vicina al valore iniziale (circa la massa del nucleo di Fe), allora rimane relativamente poca massa di Fe da foto-disintegrare. Il contrario, se la massa della stella di neutroni è piccola. Ne segue che tutto è legato a dove avviene il bounce e in ultima analisi da quanto rapidamente l'equazione di stato dei neutroni diventa rigida cioè dalla equazione di stato stessa (si veda più avanti).

Quanta energia viene dissipata nel processo di foto-disintegrazione ? Il processo



è endotermico ed assorbe

$$Q = (13m_\alpha + 4m_n - m_{56})c^2 \simeq 124.4 \quad \text{Mev} \quad (33.22)$$

Successivamente (temperature maggiori) avviene anche il processo



pure endotermico con  $Q$ -valore

$$Q = (2m_p + 2m_n - m_\alpha)c^2 \simeq * * * * \quad \text{Mev} \quad (33.24)$$

Esprimendo queste energie in maniera più conveniente ai nostri scopi, ogni  $0.1M_\odot$  di Fe richiede  $1.5 \times 10^{51}$  erg di energia per foto-disintegrarsi.

A questo si aggiunge anche un'altra considerazione da fare. Di solito il neutrone è instabile (tempo di vita circa 10.25 min)



producendo elettroni con energie fino a 1.3 Mev e antineutrini.

Tuttavia il decadimento del neutrone non può avvenire se elettroni di queste energie non sono accettati dal mezzo. A densità elettroniche elevate esistono molti elettroni con energie maggiori di 1.3 Mev i quali impediscono il decadimento del neutrone. Pertanto i neutroni formati rimangono tali.

Può anche avvenire il processo di cattura degli elettroni

$$e^- + p \rightarrow n + \nu_e \quad (33.26)$$

chiamato neutronizzazione. Questo rappresenta una possibile perdita di energia per emissione di neutrini. L'energia massima dissipabile per catture elettroniche è circa  $1.6 \times 10^{52}$  erg.

Nasce subito un importante problema di bilancio energetico. Infatti l'energia gravitazionale totale liberata dal collasso del nucleo vale circa  $3 \times 10^{53}$  erg. Di questa circa  $1.5 \times 10^{51} \times \Delta M_{Fe}/0.1 \times M_\odot$  erg e cioè  $\simeq 1.5 \times 10^{52}$  erg è spesa per foto-disintegrare l'intero nucleo di Fe. Infine circa  $1.6 \times 10^{52}$  è dissipata in catture elettroniche (attraverso l'emissione di neutrini). Sommando tutte le perdite si vede che rimane ancora una quantità di energia dello stesso ordine di grandezza che deve essere dissipata. Questo significa che *deve esistere uno stadio intermedio fra collasso e formazione di una stella di neutroni, durante il quale sono persi circa  $3 \times 10^{53}$  erg di energia.*

Questo stadio intermedio è la formazione di una *stella di neutroni calda* che perde energia sotto forma di neutrini. Solo una piccola frazione di questi viene dalle catture elettroniche. Gli altri hanno un'origine diversa. La temperatura è così elevata che vengono prodotte coppie  $(\nu, \bar{\nu})$  attraverso vari processi: annichilazione di coppie  $(e^+, e^-)$ , plasmoni, foto-neutrini, brems-strahlung. Possono essere generati tre tipi di neutrini

$$(\nu, \bar{\nu}_e) \quad (\nu_\mu, \bar{\nu}_\mu) \quad (\nu_\tau, \bar{\nu}_\tau) \quad (33.27)$$

Quindi il vero segnale del collasso del nucleo è l'emissione di una grande quantità di energia sotto forma di neutrini.

La frazione spesa nel fenomeno vistoso della supernova è una quantità del tutto trascurabile.

### 33.6 Effetto dei neutrini

L'esame del bilancio energetico di cui sopra mostra che l'onda di shock ha scarse possibilità di espellere l'involuppo in quanto tutta la sua energia è dissipata nel processo di foto-disintegrazione. Ciò è confermato dai modelli numerici più recenti ed accurati. *Il problema è forse rimosso dai neutrini stessi.*



Fino ad ora abbiamo sempre considerato i neutrini come una perdita netta di energia da parte di una stella in quanto a causa della loro piccola sezione d'urto essi sfuggono senza interagire con il mezzo stellare. Questo non più completamente vero nel caso del collasso finale del nucleo di una stella massiccia. L'energia tipica dei neutrini rilasciati durante il collasso è dell'ordine dell'energia di Fermi degli elettroni relativistici

$$\frac{E_\nu}{m_e c^2} \simeq \frac{E_F}{m_e c^2} = \frac{p_F}{m_e c} = \left( \frac{3}{8\pi H} \right)^{1/3} \frac{h}{m_e c} \left( \frac{\rho}{\mu_e} \right)^{1/3} \simeq 10^{-2} \left( \frac{\rho}{\mu_e} \right)^{1/3} \quad (33.28)$$

In presenza di nuclei i neutrini interagiscono prevalentemente attraverso il cosiddetto *scattering coerente* (contrapposto allo scattering da parte di nucleoni liberi)

$$\nu + (Z, A) \rightarrow \nu + (Z, A) \quad (33.29)$$

La sezione d'urto di questo processo è dell'ordine di

$$\sigma_\nu \simeq \left( \frac{E_\nu}{m_e c^2} \right)^2 A^2 \times 10^{-45} \quad \text{cm}^2 \quad (33.30)$$

ovvero

$$\sigma_\nu \simeq A^2 \left( \frac{\rho}{\mu_e} \right)^{2/3} \times 10^{-49} \quad \text{cm}^2 \quad (33.31)$$

Il cammino libero medio  $l_\nu$  attraverso un mezzo con densità numerica di nuclei  $(Z, A)$  pari a  $n = \rho/AH$  è

$$l_\nu = \frac{1}{n\sigma_\nu} = \frac{1}{\mu_e A} \left( \frac{\rho}{\mu_e} \right)^{-5/3} \times 1.7 \times 10^{25} \quad \text{cm} \quad (33.32)$$

È facile vedere che con  $\mu_e = 2$ ,  $A = 100$  e  $\rho/\mu_e = 3.6 \times 10^9 \text{ g cm}^{-3}$  il cammino libero medio  $l_\nu \simeq 10^7 \text{ cm}$ , cioè confrontabile con il raggio del nucleo stesso. *Ovviamente le interazioni dei neutrini con la materia non possono essere trascurate.*

Al crescere della densità  $l_\nu$  decresce, pertanto la materia diventa opaca ai neutrini. Questi possono sfuggire solo attraverso numerosi processi di scattering. A densità molto elevate può succedere che la velocità di diffusione dei neutrini diventi più piccola della velocità di collasso. Il calcolo esatto mostra che a densità  $\rho \geq 3 \times 10^{11} \text{ g cm}^{-3}$  i neutrini non possono sfuggire per diffusione durante

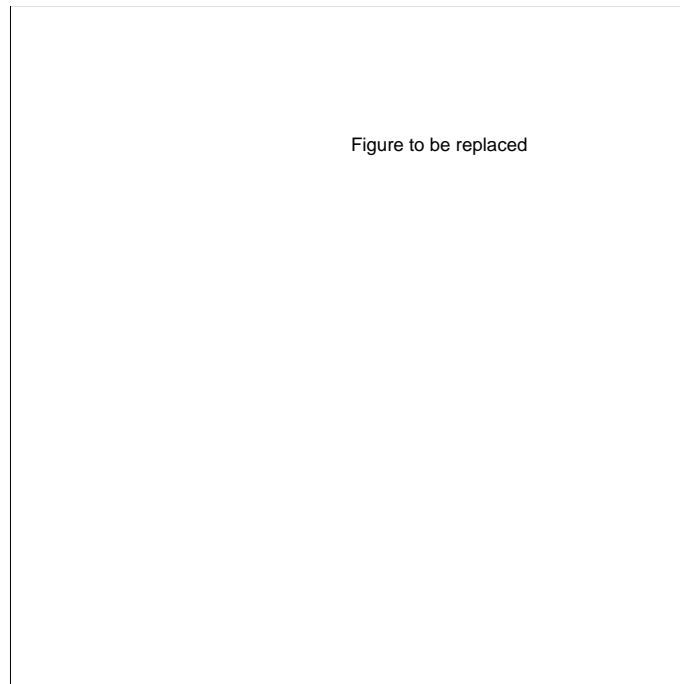


Figura 33.4: Struttura schematica di un nucleo in collasso al momento in cui neutrini riescono a essere in parte catturati dalla materia in collasso così fornendo energia all'onda d'urto propagantesi verso l'esterno

il tempo scala  $\tau_{ff}$ . *I neutrini sono intrappolati dentro una sfera che ha circa 40 km di raggio e  $\bar{\rho} \simeq 10^{11} \text{ g cm}^{-3}$  e  $\bar{T} \simeq 5 \text{ Mev}$ . Per confronto il fronte dell'onda di shock è molto più esterno a  $r \simeq 200 \text{ km}$ .*

la Figura 33.4 mostra in maniera schematica la struttura del nucleo in questa fase. Nella parte più interna (chiamata *core* la materia è praticamente a riposo e alla superficie gli strati in caduta subiscono la riflessione. Sopra questo vi è uno strato ancora in collasso dentro il quale i neutrini vengono intrappolati (la velocità di caduta è circa pari alla velocità di uscita dei neutrini). Infine, ancora più esterna, vi è una ulteriore regione dalla quale i neutrini sfuggono definitivamente

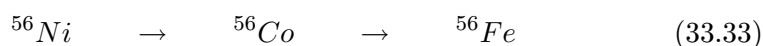
È possibile ora utilizzare una piccola parte di questa energia per rivitalizzare lo shock ? (anche una frazione di circa 1% sarebbe sufficiente).

Il problema è molto complicato in quanto bisogna formulare una equazione del trasporto dei neutrini (analoga a quella dei fotoni). È anche necessario determinare la funzione di distribuzione dei neutrini piuttosto che la loro energia media. Ciò è ovvio in quanto la sezione d'urto dipende dall'energia dei neutrini:

quelli di bassa energia possono sfuggire più facilmente di quelli di alta energia. Inoltre, i neutrini intrappolati nel nucleo influenzano la successiva neutronizzazione. Al crescere della densità i neutrini diventano essi stessi degeneri con energia di Fermi molto elevata. Le catture elettroniche diventano meno probabili, in quanto i nuovi neutrini prodotti devono essere innalzati sopra il mare di Fermi.

Alla densità di circa  $3 \times 10^{12} \text{ g cm}^{-3}$ , la neutronizzazione si ferma e  $\gamma_{ad} = 4/3$ . Ciò corrisponde a degenerazione totale relativistica. Il collasso continua fino a densità  $\rho > 10^{14} \text{ g cm}^{-3}$  quando l'equazione di stato dei neutroni diventa rigida ( $\gamma_{ad} > 5/3$ ).

I calcoli idrodinamici del collasso del nucleo mostrano che molto probabilmente una parte di energia viene trasferita allo shock che si rivitalizza e procede verso l'esterno. Il passaggio dell'onda di shock aumenta la temperatura negli strati più esterni della stella, cioè nel cosiddetto mantello, la regione compresa fra il nucleo originario di Fe all'inizio del collasso e il nucleo originario di He. L'aumento di temperatura rivitalizza le reazioni nucleari fra tutti gli elementi presenti che su scala di tempo brevissima sono processati fino all'equilibrio nucleare statistico. Questo è il materiale espulso dalla supernova più quanto rimane del vecchio involucro esterno dopo la perdita di massa per vento stellare nelle fasi precedenti. In particolare il  $^{56}\text{Ni}$  ora prodotto è la sorgente energetica della curva di luce della supernova mediante il decadimento radiativo



il primo con tempo di decadimento  $\tau = 6.5$  giorni, il secondo con  $\tau = 77$  giorni. Nel concludere questa sezione, ricordiamo che il panorama presentato si riferisce allo schema evolutivo secondo il quale alla fine del bruciamento idrostatico è stato formato un nucleo di Fe con massa molto vicina alla massa  $M_{Ch}$ . La modellistica più recente indica che sono possibili casi in cui il nucleo di Fe è molto maggiore di  $M_{Ch}$ . In questo caso il collasso del nucleo di Fe porta alla formazione di un buco nero cioè di un oggetto con massa superiore alla massa  $M_{Ch}$  e quindi destinato ad un collasso senza possibilità di arresto

La dimensione iniziale del nucleo di Fe dipende dalla storia di raffreddamento per neutrini nelle fasi precedenti in particolare in quella del bruciamento del

carbonio e dipende anche dalla efficienza della reazione  $^{12}\text{C}(\alpha, \gamma)^{16}\text{O}$  durante la fase dell' elio. Una bassa efficienza di questa reazione lascia molto carbonio, la fase del bruciamento del carbonio dura a lungo, e i neutrini raffreddano molto il nucleo, alla fine il nucleo di Fe formato è vicino a  $M_{Ch}$ , dopo il collasso finale viene formata una stella di neutroni. Il contrario avviene per una efficienza alta della  $^{12}\text{C}(\alpha, \gamma)^{16}\text{O}$ : il collasso procede verso il buco nero. La massa iniziale della stella che separa i due regimi e cioè la formazione di stelle di neutroni o di buchi neri è attorno a  $40M_{\odot}$ .

### 33.7 Instabilità di coppie

Rimane da esaminare il destino di quelle stelle che sono così massicce  $M > 100M_{\odot}$  da incontrare dopo il bruciamento dell' elio la regione di instabilità di coppie dove  $\gamma_{ad} < 4/3$ . In questa regione molti fotoni hanno energia maggiore della energia di massa a riposo di due elettroni  $h\nu > 2m_e c^2$  e pertanto i fotoni nel campo coulombiano dei nuclei (necessari per la conservazione di energia e momento) possono materializzarsi in coppie ( $e^+, e^-$ ). A loro volta le coppie si possono annichilare generando nuovi fotoni, ma ci sarà sempre un certo numero di coppie presenti (equilibrio). La energia media dei fotoni  $h\nu \simeq KT$  è uguale alla energia di massa dei due elettroni a temperature di circa  $1.2 \times 10^{10} \text{ }^{\circ}\text{K}$  ma anche a  $\simeq 10^9 \text{ }^{\circ}\text{K}$  il fenomeno è importante a causa dei fotoni di alta energia presenti nella distribuzione di Planck.

Sotto molti aspetti il fenomeno della creazione di coppie può essere assimilato a quello della ionizzazione o dissociazione (un fotone viene ionizzato o dissociato in una coppia). In analogia al caso della ionizzazione parziale, l'effetto più importante della creazione di coppie è quello di abbassare il valore di  $\gamma_{ad}$ . Infatti se il gas viene compresso, non tutta l'energia viene spesa per aumentare la temperatura, ma una parte di essa è usata per creare le coppie. Oltre a ciò,  $\gamma_{ad}$  viene diminuito dalla grande pressione di radiazione e dagli elettroni che sono relativistici. Il risultato dei tre contributi è che  $\gamma_{ad}$  scende sotto il valore minimo necessario alla stabilità dinamica, cioè  $4/3$ .

La posizione della regione di instabilità nel piano densità - temperatura è determinata dai seguenti fenomeni. Il numero totale di elettroni è la somma di quelli di coppia e quelli di normale ionizzazione (completa) degli atomi. Al

crescere della densità cresce l'energia di Fermi. Ciò diminuisce la possibilità di creare coppie in quanto i nuovi elettroni devono avere energia in eccesso a quella di Fermi. In ogni caso le coppie eventualmente create non sono relativistiche perchè hanno  $\gamma_{ad} = 5/3$ . Pertanto la regione di instabilità non può estendersi a densità maggiori di circa  $5 \times 10^5 \text{ g cm}^{-3}$ . Per temperature elevate le coppie create sono così numerose da portare  $\gamma_{ad}$  dell'intera miscela gas-radiazione livemente sopra  $4/3$ . Questo fatto limita l'estensione della zona di instabilità verso le alte temperature.

La presenza della pressione di radiazione non permette l'uso di semplici relazioni analitiche per descrivere l'evoluzione delle stelle attraverso la fase di creazione di coppie. I modelli numerici mostrano che quando una frazione significativa della massa del nucleo ha acquistato  $\gamma_{ad} < 4/3$  si instaura il collasso del nucleo a cui si accompagna l'accensione esplosiva dell'ossigeno che porta rapidamente il nucleo verso il regime di foto-disintegrazione. Il destino finale di queste stelle è ancora molto incerto.



## Capitolo 34

# SUPERNOVE

Le supernove vengono comunemente classificate in due gruppi principali basati sulle proprietà dello spettro ottico e sulla forma delle curve di luce.

Le supernovae di tipo I mostrano caratteristiche spettrali variabili nel tempo in maniera tipica e facilmente riconoscibile, le quali indicano velocità di espansione di circa  $10.000 \text{ km sec}^{-1}$ .

Le supernove di tipo II hanno uno spettro di quasi puro continuo durante il periodo di massimo seguito poi da caratteristiche simili a quelle delle tipo I anche se con maggiore individualità.

A loro volta le classi principali sono divise in sottoclassi: le supernove di tipo I sono raggruppate in Ia (le più comuni) e Ib (più rare) in base ad alcune caratteristiche spettrali. Le supernove di tipo II sono separate in II-L (lineare) e II-P (plateau) in base alla forma della curva di luce.

Tutte le supernove raggiungono il massimo della curva di luce nella banda spettrale ottica due o tre settimane dopo l'esplosione. Al picco, le tipo I sono più brillanti di circa una magnitudine delle tipo II. Inoltre l'osservazione in diverse bande spettrali mostra che le tipo I emettono gran parte della luce nell'ottico, mentre le tipo II emettono una parte significativa della radiazione nell'ultravioletto. Di conseguenza, le tipo II, anche se più deboli nell'ottico delle tipo I, hanno essenzialmente la stessa luminosità di picco delle prime.

La quantità totale (integrata nel tempo) di energia elettromagnetica emessa è dell'ordine di  $10^{49} - 10^{50}$  erg mentre l'energia cinetica di esplosione raggiunge  $10^{51}$  erg.

Tipiche curve di luce di supernove sono mostrate nella Figura 34.1.

La curva di luce delle tipo I consiste di un picco iniziale che dura circa 30 giorni,



Figura 34.1: Curve di luce di supernovae di tipo I e II

seguita da una lenta caduta esponenziale con tempo scala di circa 50 giorni.

La curva di luce delle tipo II-P dopo il picco ha un plateau che dura fino a circa 80 giorni dopo il massimo. Invece quella delle tipo II-L ha un declino lineare in luminosità dal picco fino a circa 80 giorni. Sia le II-L che II-P hanno infine una coda terminale lineare con tempo scala di circa 100 giorni.

Lo spettro delle tipo I indica un gas privo di H e ricco di elementi pesanti, quali O, C, Ca, Fe, mentre quello delle tipo II è ricco di H oltre che di elementi pesanti.

Le supernove di tipo II sono state viste solo in galassie spirali (di preferenza lungo le braccia di spirale), mentre le tipo I sono state osservate in galassie di tutti i tipi morfologici (quelle in galassie spirali hanno scarsa tendenza a trovarsi lungo le braccia di spirale).

Poichè le tipo II sono viste lungo le braccia di spirale assieme alle stelle O e B è spontaneo associarle alle stelle giovani (massicce). Il fatto che le tipo I siano viste in galassie ellittiche ma anche in galassie spirali appare paradossale. Infatti le galassie ellittiche sono essenzialmente formate da stelle vecchie con massa minore di  $1M_{\odot}$ , mentre la loro presenza in galassie spirali indica che le tipo I dovrebbero essere associabili a stelle relativamente massicce. Quantunque esista



la possibilità che stelle con massa compresa fra 5 e  $8M_{\odot}$  possano esplodere come supernove attraverso il meccanismo di deflagrazione del  $^{12}\text{C}$  e quindi giustificare le tipo I in galassie spirali, la loro presenza nelle galassie ellittiche richiederebbe formazione stellare recente senza tuttavia generare stelle massicce atteso che non sono osservate supernove di tipo II in galassie ellittiche. La spiegazione corrente per le tipo I è che esse siano prodotte da nane bianche di  $^{12}\text{C} + ^{16}\text{O}$  in un sistema binario.

### 34.0.1 Supernove di Tipo I

Quando una stella esplode, gli strati espulsi sono rapidamente riscaldati dall'onda d'urto che si propaga verso l'esterno, ma non appena incomincia l'espansione essi si raffreddano in maniera quasi adiabatica. A meno che il raggio iniziale della stella non sia estremamente grande, gli strati espulsi si raffreddano così rapidamente da non poter dar luogo alla grande ( $10^{15}$  cm), calda ( $10^4$  K) superficie radiante necessaria a spiegare il picco ottico di una supernova. *Deve esistere una sorgente addizionale di energia all'interno del gas in espansione in grado di compensare il raffreddamento adiabatico.*

Per le supernove di tipo I questa sorgente è indicata nel decadimento radiativo degli isotopi del Ni e Co.

I modelli dettagliati mostrano che la luminosità del picco e la forma della curva di luce delle supernove di tipo I possano essere spiegate supponendo che durante l'esplosione vanga sintetizzata una certa quantità di  $^{56}\text{Ni}$  (da 0.2 a  $1M_{\odot}$ ). Il  $^{56}\text{Ni}$  ha un tempo di decadimento di 6.1 giorni e si trasforma per cattura elettronica in  $^{56}\text{Co}$  con emissione di un  $\gamma$ . L'energia media di decadimento è 1.72 Mev. A sua volta il  $^{56}\text{Co}$  decade con tempo di vita medio di 79 giorni e produce un nucleo stabile di  $^{56}\text{Fe}$ , l'isotopo più abbondante del ferro in natura. Il decadimento del  $^{56}\text{Co}$  avviene primariamente per cattura elettronica ed emissione di un  $\gamma$ , ma talvolta anche per emissione di un positrone. L'energia media di decadimento è 3.58 Mev (4% in positroni).

Durante il primo mese dall'esplosione, la supernova (gli strati in espulsione) è opaca ai raggi  $\gamma$ , i quali sono assorbiti dalla materia in espansione e forniscono la sorgente addizionale di energia che spiega il picco e il rapido declino iniziale della curva di luce.

Al procedere dell'espansione gli strati diventano via via più trasparenti ai fotoni

$\gamma$  e dopo un mese circa questi possono sfuggire liberamente.

I positroni risultanti dal decadimento del  $^{56}\text{Co}$ , sono intrappolati da campi magnetici locali per un tempo lungo abbastanza da far sì che essi depositino la loro energia cinetica nel gas mediante collisioni prima di annichilarsi con elettroni e produrre fotoni  $\gamma$ . Questa ulteriore liberazione di energia rende conto della lunga coda della curva di luce delle supernove di tipo I.

La deflagrazione del  $^{12}\text{C}$  nei nuclei degeneri di  $^{12}\text{C} + ^{16}\text{O}$  delle giganti rosse o in nane bianche di  $^{12}\text{C} + ^{16}\text{O}$  aventi entrambi la massa di  $1.4M_{\odot}$  è la sorgente del  $^{56}\text{Ni}$ .

La deflagrazione del  $^{12}\text{C}$  in stelle singole può teoricamente avvenire per quelle con massa compresa fra circa 5 e  $8M_{\odot}$ , tuttavia la modellistica corrente indica che questa è verosimilmente impedita dalla perdita di massa per vento stellare. Una spiegazione più promettente dell'origine delle supernove di tipo I si basa sulla complicata evoluzione delle stelle binarie. Esso richiede la formazione di un sistema binario costituito da due stelle con massa lievemente diversa ma entrambe nel dominio delle stelle di massa intermedia, con periodo e separazione orbitale opportuna. La stella inizialmente di massa maggiore evolve per prima e diventa una Nana Bianca di  $^{12}\text{C} + ^{16}\text{O}$ . Successivamente evolve anche la stella compagna, la quale ad un certo momento (probabilmente durante la fase di gigante rossa) trasferisce parte del materiale superficiale sulla Nana Bianca aumentandone la massa e provocandone l'esplosione. Il tempo che intercorre tra la formazione del sistema binario e l'esplosione dipende dalla massa della stella compagna. L'accrescimento di materia sulla superficie della Nana Bianca dà luogo ad una varietà di fenomeni che dipendono dalla massa iniziale, dalla composizione della Nana Bianca e dal tasso di accrescimento. Se il tasso di accrescimento di materiale ricco di H su una Nana Bianca di  $^{12}\text{C} + ^{16}\text{O}$  è dell'ordine di  $10^{-7}M_{\odot}/\text{anno}$ , l'idrogeno accumulato è bruciato in  $^4\text{He}$  e questo a sua volta in  $^{12}\text{C}$  e  $^{16}\text{O}$  aumentando la massa della parte fortemente degenera della Nana Bianca. Quando la massa del nucleo di  $^{12}\text{C} + ^{16}\text{O}$  è uguale a  $1.4M_{\odot}$ , il carbonio si accende nel centro dando luogo ad un runaway termico che provoca la combustione simultanea del  $^{12}\text{C}$  e di elementi più pesanti fino alla sintesi degli elementi in cosiddetto equilibrio nucleare statistico, fra i quali il  $^{56}\text{Ni}$  è il più abbondante. Un fronte di bruciamento convettivo si propaga a velocità subsoniche dal centro verso l'esterno con velocità pari a circa 1/3 della velocità

locale del suono. Poichè il fronte di combustione è subsonico, un'onda di pressione si propaga in fronte a questo espandendo gli strati sovrastanti a densità minori. Al procedere verso l'esterno, il fronte di combustione perde di efficacia. Di conseguenza, solamente le parti più interne sono convertite in elementi in equilibrio nucleare statistico, mentre quelle intermedie sono convertite in elementi con peso atomico nell'intervallo O-Ca, ed infine una regione più esterna conserva la composizione iniziale ( $^{12}\text{C}$  e  $^{16}\text{O}$ ).

La Figura 34.2 mostra la composizione chimica aspettata per una Nana Bianca che subisce la deflagrazione del  $^{12}\text{C}$  durante l'esplosione (le abbondanze dei vari elementi sono date in funzione della velocità e della massa dagli strati in espansione).

L'energia liberata per fusione nucleare è pari a circa  $10^{51}$  erg. Una parte di questa energia è spesa per vincere il campo gravitazionale della Nana Bianca e a disperdere il materiale, il resto va in energia cinetica del materiale espulso.

A seconda della luminosità osservata al picco sono richieste quantità diverse di  $^{56}\text{Ni}$ .

La luminosità a sua volta dipende dalla distanza adottata per la supernova (si ricordi che le osservazioni danno solo la luminosità apparente e che la distanza delle stelle è molto difficile da determinare).

Le possibilità vanno dal richiedere circa  $1M_{\odot}$  di  $^{56}\text{Ni}$ , in tal caso è necessaria tanta energia di fusione da distruggere l'intera stella, fino a pochi decimi di  $M_{\odot}$ .

In questo caso è possibile che solo una parte della stella venga espulsa, il resto può formare o una stella di neutroni o rimanere come Nana Bianca con massa e composizione chimica diverse da quella iniziale. Le caratteristiche delle normali supernove di tipo I sembrano richiedere la distruzione dell'intera stella.

In sintesi, l'energia di fusione nucleare fa esplodere la stella, mentre l'energia di decadimento radiativo del  $^{56}\text{Ni}$  fa brillare la supernova.

### 34.0.2 Supernove di Tipo II

Le curve di luce delle supernove di tipo II, caratterizzate dal plateau dopo la fase di picco, non sono compatibili con il decadimento radiativo  $^{56}\text{Ni} \rightarrow ^{56}\text{Co} \rightarrow ^{56}\text{Fe}$ . Inoltre, poichè i loro spettri sono indicativi di un gas ricco di H, esse devono essere generate da stelle in grado di conservare l'involucro esterno.

Le stelle massicce supergiganti rosse sono le naturali candidate. In questo caso

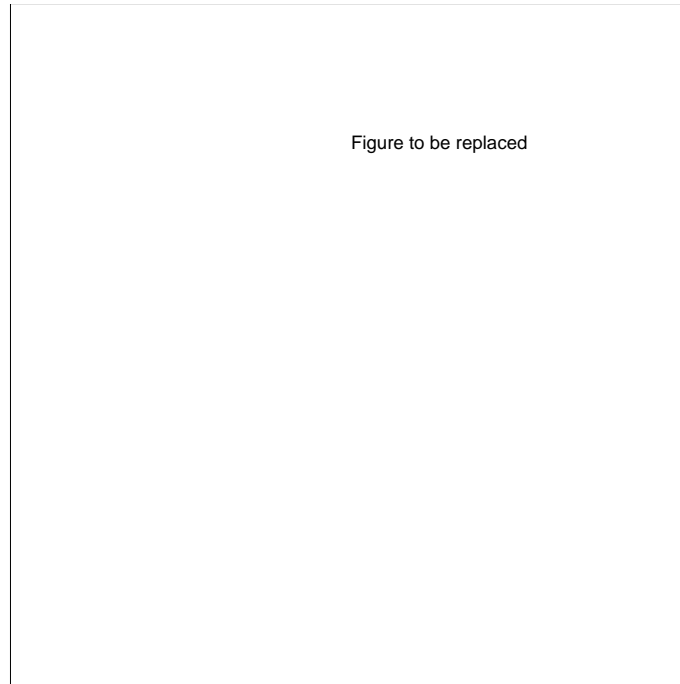


Figura 34.2: Tipica composizione di una Nana Bianca che esplode per deflagrazione del carbonio (supernova tipo Ia)

l'involuppo esterno è così esteso che facilmente può raggiungere dopo l'esplosione le dimensioni ( $10^{15}$  cm) e le temperature superficiali ( $10^4$  K) necessarie a spiegare il picco della curva di luce senza aver bisogno di una sorgente addizionale di energia, quale il decadimento radiativo  $^{56}\text{Ni} \rightarrow ^{56}\text{Co} \rightarrow ^{56}\text{Fe}$ .

I modelli teorici indicano che la risposta dell'involuppo di una supergigante rossa all'improvvisa generazione di energia nel nucleo causata dall'esplosione spiega la curva di luce delle tipo II- P. Il plateau corrisponde alla fase di rilascio diffusivo dell'energia termica depositata nell'involuppo dall'onda d'urto.

Per spiegare la luminosità osservata, la velocità di espansione e la durata della fase di plateau, la massa dell'involuppo deve essere di circa  $10M_{\odot}$ , il raggio di  $10^{14}$  cm ed, infine, l'energia liberata al centro di circa  $10^{51}$  erg. La coda della curva di luce è anche in questo caso dovuta al decadimento del  $^{56}\text{Ni}$ .

I prodotti di nucleosintesi espulsi nell'esplosione di supernova, la quale altera la struttura chimica della stella prodotta dalle fasi precedenti (si veda la Figura \*\*\*\*), sono difficili da rivelare in quanto nascosti nell'involuppo ricco di H. Essi sono noti più dal punto di vista teorico che da quello osservativo.

Le modifiche prodotte dall'esplosione sono state già presentate in Figura 34.3

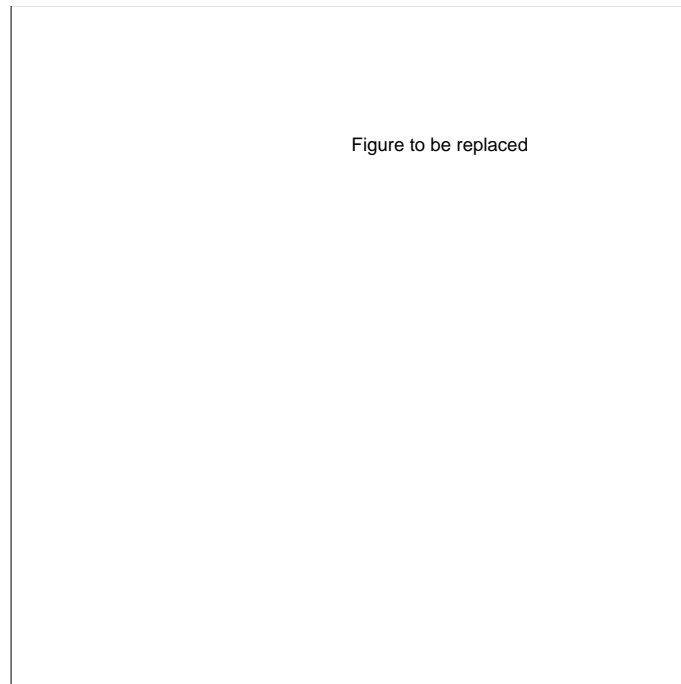


Figura 34.3: Nucleosintesi isotopica durante l'esplosione di una stella massiccia

per una tipica stella massiccia di  $25M_{\odot}$ .

La Figura 34.3 mostra le abbondanze di alcuni isotopi presenti nell'esplosione della stessa stella.

I modelli teorici predicono che supernove da stelle con massa attorno a  $10 M_{\odot}$  espellono trascurabili quantità di elementi pesanti, mentre quelle generate da stelle più massicce dovrebbero espellere alcune masse solari di elementi pesanti. Le supernove di tipo II-L sono simili a quelle di tipo II-P. La maggior differenza risiede nell'involuppo ricco di H, il quale nelle II-L a causa della perdita di massa per vento stellare al momento dell'esplosione è molto sottile. Questo spiegherebbe l'esistenza di un plateau poco pronunciato. Questa interpretazione è tuttavia incerta. Infine non è noto come dovrebbero apparire le supernove aventi come progenitori stelle Wolf-Rayet dei tipi  $WN$ ,  $WC$  e  $WO$ .



## Capitolo 35

# OGGETTI COMPATTI

### 35.1 Stelle Nane Bianche

Le Nane Bianche (*White Dwarfs*) sono l'esempio più evidente del manifestarsi a livello macroscopico di effetti quantistici e relativistici.

Queste stelle sono caratterizzate da luminosità troppo basse per la loro massa e da raggi molto piccoli. Il caso di Sirio B è indicativo:  $L = 1/400L_{\odot}$ ,  $M = 1M_{\odot}$ ,  $R = 1/40R_{\odot}$  e  $T_{eff} = 10000$  K. Almeno una Nana Bianca è nota avere un raggio circa uguale a quello lunare.

Questo implica che le densità in gioco sono molto elevate da  $10^5$  a  $10^8$  g cm<sup>-3</sup> e di conseguenza che il gas di elettroni deve essere degenere. Questo fa sì che le Nane Bianche abbiano proprietà completamente diverse da quelle delle stelle ordinarie.

Nel formulare la teoria delle Nane Bianche possiamo assumere che il materiale sia completamente ionizzato e consistente di elettroni liberi e nuclei. La pressione totale e densità totale di energia interna sono date dalla somma del termine ionico ed elettronico solamente in quanto la radiazione può essere trascurata.

Si assume che il gas di elettroni sia totalmente degenere dovunque ad eccezione di un sottile strato superficiale, e si trascura il contributo alla pressione da parte degli ioni. Ciò è possibile in quanto alla tipica densità di  $10^6$  g cm<sup>-3</sup> l'energia cinetica degli elettroni è circa 0.15 Mev, mentre quella degli ioni alla stessa densità e ad una temperatura di circa  $10^6 - 10^7$  K (tipica degli interni delle Nane Bianche) è compresa fra 1 e 10 Kev.

L'equazione di stato di un gas di elettroni totalmente degenere e comportamento relativistico qualunque è espressa dall'insieme delle relazioni

$$P = P_e = Af(x) \quad (35.1)$$

$$\rho = Bx^3 \quad (35.2)$$

dove

$$A = \frac{\pi m^4 c^5}{3h^3} = 6.002 \times 10^{22} \quad \text{dynes cm}^{-2} \quad (35.3)$$

$$B = \frac{8\pi m^3 c^3}{3h^3 N_0} \mu_e = 9.736 \times 10^5 \mu_e \quad \text{g cm}^{-3} \quad (35.4)$$

$$f(x) = x(x^2 + 1)^{1/2}(2x^2 - 3) + 3 \ln[(1 + x^2)^{1/2} + x] \quad (35.5)$$

$$x = \frac{p_F}{mc}, \quad p_F = \left(\frac{3h^3 n_e}{8\pi}\right)^{1/3}, \quad n_e = \frac{N_0 \rho}{\mu_e} \quad (35.6)$$

dove  $x$  esprime il comportamento relativistico:  $x \rightarrow 0$  regime non relativistico,  $x \rightarrow \infty$  regime totalmente relativistico.

### 35.1.1 Interno Degenere

Combinando la equazione di equilibrio idrostatico con quella di continuità della massa e sostituendo  $P$  e  $\rho$  con le relazioni date sopra si ottiene

$$\frac{A}{B} \frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left[ \frac{r^2}{x^3} \frac{df(x)}{dr} \right] = -4\pi G B x^3 \quad (35.7)$$

ovvero, atteso che

$$\frac{1}{x^3} \frac{df(x)}{dr} = 8 \frac{d}{dr} (x^2 + 1)^{1/2} \quad (35.8)$$

$$\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left[ r^2 \frac{d}{dr} (x^2 + 1)^{1/2} \right] = -\frac{\pi G B^2}{2A} x^3 \quad (35.9)$$

Definiamo ora la variabile adimensionale

$$z^2 = x^2 + 1 \quad (35.10)$$

il cui significato fisico è



$$z = \left(\frac{E_F}{mc^2}\right) + 1 \quad (35.11)$$

dove  $E_F$  è l'energia di Fermi.

Si definiscano le variabili ausiliarie

$$r = \alpha \zeta \quad \text{e} \quad z = z_c \Phi \quad (35.12)$$

con

$$\alpha = \left(\frac{2A}{\pi G}\right)^{1/2} \left(\frac{1}{Bz_c}\right) \quad (35.13)$$

avente le dimensioni di una lunghezza. Introdotta nella equazione (35.9) essa si trasforma in arriva a

$$\frac{1}{\zeta^2} \frac{d}{d\zeta} \left( \zeta^2 \frac{d\Phi}{d\zeta} \right) = - \left( \Phi^2 - \frac{1}{z_c^2} \right)^{3/2} \quad (35.14)$$

le cui condizioni al centro sono

$$\zeta = 0 \quad \Phi = 1 \quad \frac{d\Phi}{d\zeta} = 0 \quad (35.15)$$

Si noti che questa equazione si riduce a quella di un politropo di indice  $n = 3$  quando  $z \rightarrow \infty$  ( $x \rightarrow \infty$ ) cioè totalmente relativistico e a quella di un politropo di indice  $n = 3/2$  quando  $z \rightarrow 1$  ( $x \rightarrow 0$ ) cioè totalmente non relativistico. In ogni caso questa equazione è parametrica in  $z_c$ .

La superficie è ovviamente raggiunta quando la densità è nulla e cioè quando valgono le relazioni

$$\zeta = \zeta_1 \quad x_1 = 0 \quad z_1 = 1 \quad \Phi(\zeta_1) = \frac{1}{z_c} \quad (35.16)$$

Da questo segue che la distribuzione di densità data dalla funzione  $\Phi(\zeta)$  è univocamente determinata da  $z_c$  che a sua volta dipende da  $\rho_c$ . *Questo significa che la struttura di una Nana Bianca dipende dal valore della densità centrale, atteso il legame fra  $x$  e quest'ultima.*

In generale il raggio e la massa della Nana Bianca sono univocamente fissati dalla scelta di  $z_c$  ( $\rho_c$ ) e di  $\mu_e$ .

Il raggio totale  $R$  è dato dalla relazione

Tabella 35.1: Risultati numerici per modelli di Nane Bianche (Cox &amp; Juli 1968)

$\frac{1}{z_c^2}$	$x_c$	$\zeta_1$	$-(\zeta^2 \frac{d\Phi}{d\zeta})$	$\frac{\rho_c}{\mu_e}$	$\mu_e^2 M$	$\mu_e R$
0.0	$\infty$	6.8968	2.0182	$\infty$	5.84	0.000
0.01	9.95	5.3571	1.9321	9.48(e8)	5.60	4.170
0.02	7.00	4.9857	1.8652	3.31(e8)	5.41	5.500
0.05	4.36	4.4601	1.7096	7.98(e7)	4.95	7.760
0.1	3.00	4.0690	1.5186	2.89(e7)	4.40	10.000
0.2	2.00	3.7271	1.2430	7.70(e6)	3.60	13.000
0.3	1.53	3.5803	1.0337	3.43(36)	2.99	16.000
0.5	1.00	3.5330	0.7070	9.63(e5)	2.04	19.500
0.8	0.50	4.0446	0.3091	1.21(e5)	0.89	28.200
1.0	0.00	$\infty$	0.	0.	0.	$\infty$

$$R = \alpha \zeta_1 = \left(\frac{2A}{\pi G}\right)^{1/2} \left(\frac{1}{B z_c}\right) \zeta_1 \quad (35.17)$$

La massa totale si ottiene facilmente dalla definizione di massa entro una sfera di raggio  $\zeta$

$$M(\zeta) = 4\pi\alpha^3 \int_0^\zeta \rho \zeta'^2 d\zeta' \quad (35.18)$$

dalla quale dopo facili passaggi si ottiene

$$M(\zeta) = 4\pi \left(\frac{2A}{\pi G}\right)^{3/2} \frac{1}{B^2} \left(-\zeta^2 \frac{d\Phi}{d\zeta}\right) \quad (35.19)$$

da cui infine la massa totale quando la parentesi  $(-\zeta^2 \Phi')$  è valutata alla superficie

$$M = 4\pi \left(\frac{2A}{\pi G}\right)^{3/2} \left(\frac{1}{B^2}\right) (-\zeta^2 \Phi')_1 \quad (35.20)$$

dove B dipende da  $\mu_e$  e  $(-\zeta^2 \Phi')_1$  dipende da  $z_c$ .

Infine il rapporto fra densità centrale e dedità media è

$$\frac{\rho_c}{\langle \rho \rangle} = \left(1 - \frac{1}{z_c^2}\right)^{3/2} \frac{\zeta_1^3}{3(-\zeta^2 \Phi')_1} \quad (35.21)$$

il quale dipende pure da  $z_c$  ( $\rho_c$ ).

Nella Tabella 23.1 diamo le caratteristiche più salienti delle soluzioni al variare di  $x$  e/o  $z_c$ .



Figura 35.1: Relazione massa - raggio per stelle Nane Bianche

Dall'esame delle soluzioni si deduce che configurazioni totalmente degeneri con assegnati valori di  $\rho_c$  e  $\mu_e$ , hanno raggio, massa e rapporto fra densità centrale e media univocamente determinati. Questo fa sì che in generale esista una relazione  $R = R(\mu_e, M)$ , cioè *il raggio di una struttura completamente degenera dipende solo dalla massa totale e dalla composizione chimica*. Ciò è completamente in contrasto con le stelle ordinarie, dove il raggio è essenzialmente fissato dalla condizione di bilancio energetico e dal meccanismo di trasporto dell'energia.

Si noti ancora come in analogia dei politropi ordinari la relazione massa-raggio delle Nane Bianche abbia  $dR/dM < 0$ , ma a differenza di questi l'esponente della massa non sia costante.

La relazione teorica massa-raggio per una configurazione totalmente degenera è in ottimo accordo con i dati sperimentali delle Nane Bianche (Figura 35.1).

Un'interessante proprietà è che le configurazioni totalmente degeneri ammettono una massa limite al tendere della  $\rho_c \rightarrow \infty$  (situazione totalmente relativistica). Infatti al tendere di  $\rho_c \rightarrow \infty$  quindi  $x_c \rightarrow \infty$ ,  $z_c \rightarrow \infty$  e  $1/z_c \rightarrow 0$ , la  $\Phi(\zeta)$  tende a quella del politropo di indice 3 e la massa corrispondente è data da

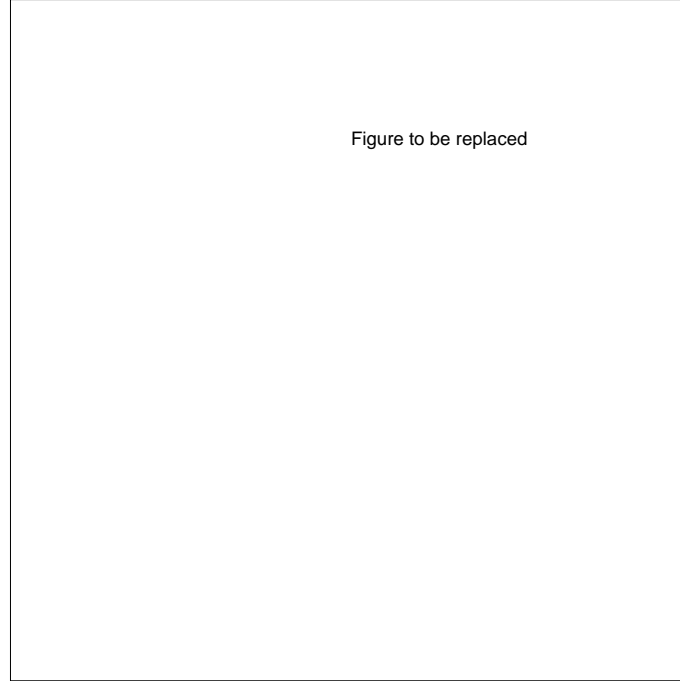


Figura 35.2: Sequenze di raffreddamento delle Nane Bianche

$$M = 4\pi \left( \frac{2A}{\pi G} \right)^{3/2} \left( \frac{1}{B^2} \right) (-\xi^2 \theta'_3)_1 \quad (35.22)$$

ovvero

$$M = \frac{5.836}{\mu_e^2} M_\odot \quad (35.23)$$

esprimendo la massa in unità solari. Essa è anche detta massa di Chandrasekhar.

Con le tipiche composizioni chimiche delle Nane Bianche ( ${}^4\text{He}$ ,  ${}^{12}\text{C}$  e  ${}^{16}\text{O}$ ), il peso molecolare elettronico è  $\mu_e = 2$ , da cui segue che la massa limite è

$$M = 1.46 M_\odot \quad (35.24)$$

Il raggio corrispondente tende a zero (almeno in senso matematico).

In realtà una tale situazione ideale non viene mai raggiunta in quanto a densità dell'ordine di  $10^9 - 10^{10} \text{ g cm}^{-3}$  intervengono due ulteriori effetti che modificano la relazione fra  $M$ ,  $R$  e  $\rho_c$ . Questi sono gli effetti della relatività generale sulla condizione di equilibrio idrostatico ed i processi di neutronizzazione.

### 35.1.2 Revisione della struttura meccanica

La relazione massa-raggio ottenuta nella sezione 23.1.2 suggerisce che debbano essere apportate correzioni alla teoria in entrambi gli estremi dell'intervallo di massa.

Nel caso di strutture con  $M \rightarrow 0$  ci aspettiamo che  $R \rightarrow 0$  e  $\rho \simeq$  costante (come nel caso di pianeti invece di  $R \rightarrow \infty$  e  $\rho \rightarrow 0$ ). In questo caso le correzioni da apportare sono dovute alla interazione elettrostatica.

Nel caso di strutture con  $M \rightarrow M_{Ch}$  e  $\rho \rightarrow \infty$ , dobbiamo tener conto di effetti dovuti alle interazioni deboli (decadimenti  $\beta$  inversi) e alla possibile presenza di reazioni picno-nucleari che cambiano la composizione chimica del materiale.

**Interazioni elettrostatiche.** Supponiamo di avere un plasma freddo con nuclei di tipo  $(Z, A)$  ed elettroni con densità numerica  $n_e$ . A basse temperature (si veda più avanti per una giustificazione fisica di tale affermazione), i nuclei danno origine ad una struttura cristallina (nuclei posizionati ai nodi di un reticolo geometrico). Gli elettroni invece sono uniformemente distribuiti all'interno di questo. Immaginiamo ora il reticolo come composto da sfere contenenti uno ione (carica positiva  $Z$  nel centro) e  $Z$  elettroni uniformemente distribuiti. Ogni sfera ha raggio

$$R' = Z^{1/3} r_e a_0 \quad (35.25)$$

dove  $a_0$  è raggio di Bohr e  $r_e$  la separazione media degli elettroni in unità di  $a_0$ . Per calcolare l'energia coulombiana  $Z \cdot E_C$  della sfera, prendiamo delle corone sferiche di raggio  $y$  e carica  $-3Zey^2 dy/R'^3$  e portiamole all'infinito vincendo la differenza di potenziale  $Ze(1 - y^3/R'^3)$ . Integrando sull'intera sfera, l'energia per elettrone che ne risulta è data da

$$-E_C = \frac{9}{10} \frac{Ze^2}{R'} = \frac{9}{10} \frac{Z^{2/3} e^2}{r_e a_0} \simeq 2 \frac{Z^{1/3}}{A^{1/3}} \rho_6^{1/3} \quad \text{keV} \quad (35.26)$$

dove  $\rho_6 = \rho/10^6 \text{ g cm}^{-3}$ . Anche per temperature  $T \rightarrow 0$  gli ioni non stanno immobili al centro del reticolo, ma oscillano con una certa frequenza  $\omega_E \propto Z^2 e^2 n_0 / m_0$  dove  $n_0$  e  $m_0$  sono rispettivamente la densità numerica e massa degli ioni. Il punto zero dell'energia è  $ZE_{zp} = (3/2)(h/2\pi)\omega_E$  per ione. Con  $\rho = n_0 A m_u$  ( $m_u$  unità di massa atomica) abbiamo per elettrone

$$E_{zp} = \frac{3}{2} \left( \frac{4\pi}{3} \right)^{1/2} \frac{he}{2\pi A m_u} \rho^{1/6} \simeq \frac{0.6}{A} \rho_6^{1/2} \quad keV \quad (35.27)$$

Ad esempio per  $^{12}C$  ( $Z = 6$ ,  $A = 12$ ) e  $\rho = 10^6 \text{ g cm}^{-3}$ , le energie sono  $-E_C \simeq 5.2 \text{ keV}$  e  $E_{zp} \simeq 0.05 \text{ keV}$ . Il rapporto  $-E_C/E_{zp} \simeq ZA^{2/3}\rho^{-1/6}$  varia poco con  $\rho$  e cresce con  $Z$  e  $A$ .

Gli ioni formano dunque una struttura cristallina regolare che minimizza l'energia. Essi compiono delle oscillazioni attorno alle loro posizioni di equilibrio, dove sono forzati a rimanere dalle reciproche repulsioni.

L'energia per elettrone è ora data dalla somma

$$E = E_0 + E_C + E_{zp} \simeq E_0 + E_C < E_0 \quad (35.28)$$

dove  $E_0$  è l'energia media di un elettrone in un gas di Fermi ideale. L'effetto di  $E_C$  sulla pressione è valutabile dalla relazione

$$P = -\frac{\partial E}{\partial(1/n)} \simeq -\frac{\partial E_0}{\partial(1/n)} - \frac{\partial E_C}{\partial(1/n)} < P_0 \quad (35.29)$$

dove le derivate sono eseguite ad entropia costante e  $P_0$  è la pressione del gas ideale di Fermi. La diminuzione di  $E$  e  $P$  dovuta a  $E_C < 0$  deriva dalla concentrazione di tutte le cariche positive nel nucleo e alla uniformità della distribuzione delle cariche negative. La distanza media elettrone-elettrone è pertanto maggiore della distanza media elettrone-nucleo. Pertanto la repulsione è minore dell'attrazione.

*Questo effetto è quello dominante a piccoli valori di  $M$  e genera una diminuzione del raggio della stella.*

**Reazioni picno-nucleari.** Ad alte densità come quelle incontrate nell'intervallo di masse maggiori, possono avvenire le reazioni *picno-nucleari* che dipendono principalmente da  $\rho$  e poco da  $T$ . Esse possono avvenire anche per  $T \rightarrow 0$  in conseguenza del moto oscillatorio dei nuclei nel reticolo e dell'effetto tunnel. Tali reazioni si instaurano bruscamente per densità sopra valori limite  $\rho_{pyc}$  che dipendono dal tipo di combustibile. Si trova che  $\rho_{pyc} \simeq 10^6$  per  $^1\text{H}$ ,  $\rho_{pyc} \simeq 10^9 \text{ g cm}^{-3}$  per  $^4\text{He}$ ,  $\rho_{pyc} \simeq 10^{10} \text{ g cm}^{-3}$  per  $^{12}\text{C}$ .

**Decadimento- $\beta$  inverso.** Questo fenomeno diventa importante alle alte densità. Si consideri un nucleo  $(Z-1, A)$ , instabile al decadimento  $\beta$ , che si

trasformi nel nucleo stabile  $(Z, A) + e^- + \bar{\nu}$  con energia di decadimento  $E_d$ . Se il nucleo  $(Z, A)$  è circondato da un gas di elettroni degeneri con energia cinetica alla soglia di Fermi

$$E_F = m_e c^2 [(1 + x^2)^{1/2} - 1] \quad (35.30)$$

tale che  $E_f > E_d$ , allora il nucleo  $(Z, A)$  diventa instabile alla cattura degli elettroni cioè il decadimento  $\beta$  inverso

$$(Z, A) + e^- \rightarrow (Z - 1, A) + \nu \quad (35.31)$$

In generale abbiamo a che fare con nuclei pari-pari  $(Z, A)$  particolarmente stabili e pertanto  $E_d(Z - 1, A) < E_d(Z, A)$ .

Se  $E_F > E_d(Z, A)$  allora sarà anche  $E_f > E_d(Z - 1, A)$  ed il decadimento  $\beta$  inverso procederà verso il nucleo  $(Z - 2, A)$ .

I nuovi nuclei sono ora stabilizzati dal mare di Fermi, cioè non potranno emettere un elettrone con  $E_d(< E_F)$  poichè esso non potrebbe trovare un posto libero nello spazio delle fasi.

L'energia di Fermi  $E_F$  aumenta con  $\rho$ ; pertanto per ogni tipo di nucleo  $(Z, A)$  esisterà una densità di soglia  $\rho_n$  sopra la quale avviene il processo noto come *neutronizzazione*. Nel caso di  $^1\text{H}$  e  $^4\text{He}$  le densità soglia sono  $\rho_n = 1.2 \times 10^7 \text{ g cm}^{-3}$  e  $\rho_n = 1.2 \times 10^7 \text{ g cm}^{-3}$ , quindi di nessun interesse in quanto sono già intervenute le reazioni picno-nucleari prima che possa avvenire la neutronizzazione. Al contrario, nel caso di  $^{56}_{26}\text{Fe} \rightarrow ^{56}_{25}\text{Mn} \rightarrow ^{56}_{24}\text{Cr}$ ,  $\rho_n = 1.14 \times 10^9 \text{ g cm}^{-3} < \rho_{pyc}$ .

**Equilibrio Chimico.** Per procedere oltre è necessario chiarire alcuni aspetti sulla natura della composizione chimica che si instaura nell'interno delle stelle. Di solito la composizione chimica è considerata come un *parametro libero* o in altre parole come congelata. Questo è ragionevole fintanto che la scala di tempo su cui avvengono le trasformazioni nucleari è molto lunga. Ad ogni istante la stella ha una certa composizione chimica dettata da un gruppo dominante di reazioni nucleari e che pertanto è molto lontana da quella detta di equilibrio che si avrebbe se un gran numero di reazioni potesse avvenire contemporaneamente (tipico delle fasi molto avanzate).

Le Nane Bianche sono principalmente costituite da carbonio ed ossigeno e da elettroni totalmente degeneri, quindi con composizione chimica è ben diversa

da quella di equilibrio.

Come possiamo applicare a queste stelle la nozione di composizione all'equilibrio? Incominciamo col notare che a grandi densità, la presenza di reazioni picno-nucleari e di decadimenti  $\beta$  che avvengono su scale di tempo molto brevi, fanno sì che l'ipotesi di composizione chimica congelata possa non essere valida, e chiederci cosa succederebbe se a causa di fenomeni opportuni la composizione chimica andasse verso quella di equilibrio.

La composizione di equilibrio può essere trovata partendo da un certo tipo di nuclei e variando  $Z$  e  $A$  fino ad ottenere l'energia minima. Per nuclei isolati la contrapposizione fra forze nucleari attrattive e forze coulombiane repulsive fa sì che la massima energia di legame per i nucleoni sia al  ${}^{56}\text{Fe}$ . Pertanto  ${}^{56}\text{Fe}$  sarà la composizione di equilibrio per densità non troppo elevate  $\rho < 8 \times 10^6 \text{ g cm}^{-3}$ . Al crescere di  $\rho$  il bilancio è spostato via via a nuclei più pesanti con maggior numero di neutroni. Pertanto sostituire un protone con un neutrone (effetto di decadimento  $\beta$  inverso o cattura) diminuisce le forze repulsive coulombiane dentro i nuclei. Il decadimento  $\beta$  diretto è impedito dalla degenerazione degli elettroni circondanti i nuclei.

Inoltre l'energia della struttura cristallina, se da una parte modifica di poco la pressione, dall'altra altera in maniera sensibile l'energia coulombiana alla superficie dei nuclei. Al crescere della densità la composizione chimica di equilibrio si sposta verso nuclei con numero di massa e di carica. A densità  $\rho > 4 \times 10^{11} \text{ g cm}^{-3}$ , la situazione di energia minima è quella che vede un crescente numero di neutroni liberi piuttosto che all'interno dei nuclei. Questo fenomeno è noto come *neutron drip*.

La composizione consiste di un reticolo di nuclei (con sufficienti elettroni per avere la neutralità della carica totale) e una popolazione di neutroni liberi. Il numero di questi aumenta al crescere di  $\rho$  a di conseguenza la pressione  $P_n$  da essi esercitata. Quando  $\rho \simeq 4 \times 10^{12} \text{ g cm}^{-3}$  si ha  $P_n > P_e$ . A densità  $\rho \simeq 2 \times 10^{14} \text{ g cm}^{-3}$  i nuclei sono distrutti lasciando un gas degenero di neutroni con una piccola percentuale di protoni ed elettroni.

Nota l'equazione di stato dei neutroni, si ottiene una nuova relazione massa-raggio, che va a modificare quella ottenuta in precedenza per la Nana Bianca lontana dalla neutronizzazione. La nuova relazione massa-raggio predice che esiste un valore massimo di massa al decrescere del raggio, superato il quale la





Figura 35.3: Relazione massa-raggio per Nane-Bianche modificata dagli effetti della neutronizzazione.

massa tende a diminuire per  $R \rightarrow 0$ . Essa è mostrata in Figura 35.3.

### 35.1.3 Involuppo esterno

Nel trattare le Nane Bianche abbiamo assunto che equazione di stato di un gas di elettroni totalmente degenere (a temperatura zero) sia valida ovunque e non abbiamo minimamente discusso la sorgente della luminosità irraggiata.

Innanzitutto ricordiamo che ogni Nana Bianca di data massa e composizione chimica ha un raggio assegnato e che quindi esse si collocano nel diagramma  $H - R$  lungo linee di raggio costante come mostrato in Figura 35.2 dove sono riportati i dati di osservazione delle Nane Bianche e dei loro immediati progenitori, ossia i nuclei delle nebulose planetarie.

Secondo, è ovvio ritenere che il gas di elettroni non sia degenere in uno strato superficiale di un certo spessore e che la materia in questa regione sia in condizioni di trasporto radiativo.

Combinando la equazione di equilibrio idrostatico con quella del trasporto radiativo ed assumendo una opacità del materiale superficiale di tipo Kramers ( $\kappa = \kappa_0 \rho T^{-3.5}$ ) si ottiene

$$\frac{dP}{dT} = \frac{16\pi acG}{3} \frac{M}{L} \frac{T^{6.5}}{\kappa_0 \rho} \quad (35.32)$$

dove  $M$  e  $L$  sono la massa e la luminosità totali. Il gas nello strato superficiale è sicuramente un gas perfetto non degenere in cui la pressione di radiazione è trascurabile. Questo permette di sostituire facilmente la  $\rho$  mediante l'equazione di stato e di ottenere una equazione differenziale in  $P$  e  $T$  solamente, la quale integrata da

$$P^2 = \frac{2}{8.5} \frac{16\pi acG}{3} \frac{K}{H} \frac{M}{L} \frac{T^{8.5}}{\kappa_0 \mu} + C. \quad (35.33)$$

Essa rappresenta il legame fra pressione e temperatura per involucri stellari in condizioni radiative, per il quale possiamo assumere come condizioni superficiali  $T = 0$  e  $P = 0$  a  $r = R$ . Ne segue  $C = 0$ . Da questa relazione si ottiene un legame fra la densità e la temperatura che può essere utilizzata dalla superficie fino alla strato interno in cui incomincia la degenerazione.

Allo strato di transizione deve valere l'uguaglianza della pressione del gas non degenere (si considerino solo gli elettroni quindi  $\mu = \mu_e$ ) e quella del gas degenere, il che si traduce nella relazione

$$\rho_{tr} = \mu_e \left( 9.96 \times 10^{-13} \frac{K}{H} T_{tr} \right)^{3/2}. \quad (35.34)$$

Eliminando la densità fra questa relazione e quella ottenuta dalla relazione (35.32), introducendo il valore di  $\kappa_0 = 4.34 \cdot 10^{24} \cdot Z(1 + X)$ , dove  $Z$  e  $X$  sono le abbondanze in massa di elementi pesanti e di idrogeno rispettivamente, ed esprimendo in funzione della luminosità totale si ottiene

$$L = 1.3 \times 10^{-27} \left( \frac{\mu}{\mu_e^2} \right) \frac{MT_{tr}^{3.5}}{Z(1 + X)} \quad (35.35)$$

dove  $L$  e  $M$  sono in unità solari.

Da questa relazione, note la luminosità e la massa della Nana Bianca dai dati di osservazione, si determina  $T_{tr}$ , la quale grazie alla grande conduzione elettronica del gas degenere di elettroni, è anche la temperatura dell'intera zona interna. Lo spessore dello strato esterno non degenere può essere facilmente calcolato tramite la relazione  $T(r)$  ottenuta dall'integrazione della condizione di equilibrio radiativo. Si ha

Tabella 35.2: Parametri Caratteristici delle Stelle Nane Bianche ( $M = 1M_{\odot}$ ,  $R = 0.0083 R_{\odot}$ ,  $\rho_c = 2.810^7 \text{gcm}^{-3}$ ).

$L/L_{\odot}$	$T_{tr}$ (K)	$\log R_{tr}$	$(R - r_{tr})/R$	$\eta$	$t_{cool}$ (anni)
10(e-2)	17(e6)	3.0	0.011	600	0.3(e9)
10(e-3)	9(e6)	2.6	0.006	1000	1.6(e9)
10(e-4)	4(e6)	2.1	0.003	2500	8.0(e9)

$$T_{tr} = \frac{1}{4.25} \frac{\mu}{K} \frac{H}{R} \frac{GM}{R} \left( \frac{R}{r_{tr}} - 1 \right) \quad (35.36)$$

che permette di stimare lo spessore relativo  $(R - r_{tr})/R$ . Nella tabella 35.1.3 riportiamo alcuni valori tipici.

Si vede che il trascurare lo strato superficiale nella trattazione della Nana Bianca è ampiamente giustificato in quanto la densità di transizione è piccola rispetto ai valori centrali e lo spessore della regione è trascurabile rispetto al raggio totale.

Quando una stella diventa Nana Bianca, la sola sorgente di energia significativa è l'energia termica degli ioni. Infatti semplici considerazioni portano a concludere che non ci sono sorgenti di energia nucleare, che pochissima energia può essere liberata per contrazione gravitazionale (in quanto la stella ha raggiunto lo stato di degenerazione degli elettroni che inibisce ulteriori contrazioni gravitazionali), che l'energia termica degli elettroni non è facilmente disponibile a causa della degenerazione (tutti i livelli energetici più bassi sono già occupati), infine che la perdita di energia per emissioni di neutrini può avere un qualche ruolo solamente nelle fasi iniziali di più alta temperatura. Rimane come unica sorgente a disposizione l'energia termica degli ioni data da

$$U = \frac{3}{2} \frac{K}{H} \frac{TM}{\mu_i} \quad (35.37)$$

dove  $\mu_i$  è il peso molecolare medio degli ioni.

Per temperature dell'ordine di  $10^7$  K il serbatoio energetico totale è circa  $10^{48}$  ergs.

Il tasso di perdita di energia termica  $-dU/dt$  è uguale alla luminosità irraggiata

$$L = -\frac{dU}{dt} \quad (35.38)$$

che introdotto nella relazione che definisce la luminosità in funzione della massa  $M$  e temperatura  $T$  (la temperatura di transizione) dà per il tempo di raffreddamento (cooling)  $t_{cool}$

$$t_{cool} = 2 \times 10^{-7} \frac{3}{2} \frac{K}{H} \frac{M}{\mu_i T^{2.5}}. \quad (35.39)$$

Questa relazione è stata ottenuta ponendo la costante di integrazione uguale a zero il che significa calcolare il tempo di raffreddamento dal momento in cui la temperatura era infinita. Nella pratica, ciò equivale a calcolare il tempo dal momento in cui la temperatura era circa il doppio di quella attuale, in quanto la scala di tempo associata a stadi precedenti è molto piccola. Il tempo di raffreddamento può essere considerato come il tempo intercorso dall'ultimo episodio nucleare fino al momento attuale.

Tipici valori di  $t_{cool}$  sono riportati nella Tabella 35.1.3. Essi devono essere presi come valori indicativi a causa della trattazione semplificata del problema.

L'effetto più importante che è stato trascurato è la cristallizzazione del reticolo di ioni. A temperature (quindi luminosità) sufficientemente basse, il calore specifico è dovuto alle vibrazioni del reticolo cristallino degli ioni piuttosto che al moto termico degli stessi. La temperatura critica al di sotto della quale il calore specifico a volume costante  $c_v$  diminuisce rapidamente è circa  $10^7$  K. Questo comporta un raffreddamento più efficiente e quindi tempi di raffreddamento più brevi.

## 35.2 Stelle di Neutroni

L'esistenza delle Stelle di Neutroni (*Neutron Stars*) quali residui condensati delle esplosioni di supernova fu prevista da F. Zwicky nel 1934. Esse furono scoperte solo nel 1967 grazie all'emissione di onde radio con periodicità regolare. I tipici valori della massa e del raggio sono circa  $1 M_\odot$  e il 10 km rispettivamente, quindi la densità media è circa  $10^{14} \text{ g cm}^{-3}$ , molto vicina alla densità della materia nei nuclei. A tali densità i costituenti principali sono i neutroni con una piccola concentrazione di protoni, elettroni ed altre particelle.

Le stelle di neutroni sono generate dal collasso del nucleo di stelle massicce e pertanto nascono con temperature molto elevate, circa  $10^9 - 10^{10}$  K. Tuttavia esse si raffreddano rapidamente a causa della grande produzione di neutrini. Nell'intervallo di tempo di un mese la  $T_{eff}$  scende  $10^8$  K ed in  $10^5$  anni essa diventa minore di  $10^6$  K.

Già alla temperatura di  $10^8$  K ( $kT \simeq 10$  keV) la materia può essere considerata *fredda* ( $T \simeq 0$ ) per quanto riguarda l'equazione di stato del materiale (composto com'è da neutroni degeneri e relativistici con  $E_F \simeq 1000$  keV).

**Neutronizzazione.** Come già visto La neutronizzazione della materia è dovuta ai processi  $\beta$ -inversi fra nuclei ed elettroni che si trovano in cima alla distribuzione di Fermi.

I processi sono del tipo  $(Z, A) + e^- \rightarrow (Z - 1, A) + \bar{\nu}$ , il nucleo prodotto è instabile e decade secondo la  $(Z - 1, A) \rightarrow (Z, A) + e^- + \nu$ . Tuttavia la seconda reazione non può in realtà avvenire in quanto, a causa della degenerazione, tutti gli stati dello spazio delle fasi sono occupati. Questo porta ad un progressivo diminuzione del numero di elettroni liberi ed un aumento del numero di neutroni nei nuclei.

All'aumentare della densità  $\rho$  i processi di neutronizzazione diventano sempre più frequenti fino a che l'energia di legame dei nuclei diventa positiva ed essi si rompono in neutroni e nuclei più leggeri. Il risultato è la trasformazione della materia in un aggregato di neutroni a spese dell'energia gravitazionale del sistema.

I nuclei di elementi ricchi di neutroni come  $^{118}\text{Kr}$  incominciano a rilasciare neutroni liberi (*sgocciolamento di neutroni o neutron drip*) già a densità  $\rho_{dr} \simeq 4 \times 10^{11} \text{ g cm}^{-3}$ .

Ora la materia è composta di nuclei (spesso organizzati in una reticolo) più elettroni in numero sufficiente ad avere neutralità di carica totale e neutroni liberi. La densità numerica di neutroni  $n_n$  aumenta e così pure la loro pressione  $P_n$ .

Alla densità  $\rho_{dr} \simeq 4 \times 10^{11} \text{ g cm}^{-3}$  si ha  $P \simeq P_e \gg P_n$ , a  $\rho \simeq 4 \times 10^{12} \text{ g cm}^{-3}$   $P_n \simeq P/2$  ed infine a  $\rho \simeq 1.5 \times 10^{13} \text{ g cm}^{-3}$   $P_n > 0.8P$  e finalmente a densità maggiori  $P = P_n$ .

È tuttavia necessario ricordare che i valori di  $\rho$  citati in precedenza si riferiscono

ad un certo tipo di modello assunto per le interazioni fra le particelle.

All'aumentare del fenomeno di neutron drip il numero di nuclei diminuisce per fusione. Infatti a  $\rho \simeq 2.4 \times 10^{14} \text{ g cm}^{-3}$  i nuclei si toccano fra loro, pertanto si fondono e si dissolvono, lasciando un gas (liquido) di neutroni più una miscela di  $e^-$  e  $p$ .

La concentrazione di elettroni, protoni e neutroni viene calcolata dalla condizione di equilibrio fra le reazioni  $n \leftrightarrow p + e^-$  (neutrini e/o antineutrini prodotti sfuggono immediatamente). Le condizioni in uso sono che le energie di Fermi e densità numeriche  $n_e, n_p$  soddisfino le relazioni

$$E_F^n = E_F^p + E_F^e \quad n_e = n_p \quad (35.40)$$

Questo implica che  $n_p = 0.01 \times n_n$  entro un grande intervallo di  $\rho$ . Al crescere di quest'ultima fino alle densità nucleari  $\simeq 10^{15} \text{ g cm}^{-3}$ , le densità numeriche di neutroni, elettroni, protoni stanno nei rapporti  $n_n : n_p : n_e = 8 : 1 : 1$ .

**Equazione di stato.** Fino a  $\rho \simeq \rho_{dr}$ , l'equazione di stato è quella degli elettroni degeneri e relativistici, cioè  $P \simeq P_e \propto \rho^{4/3}$ .

All'instaurarsi del dripping neutronico, l'equazione di stato cambia. Infatti al crescere di  $\rho$  si ha un aumento di  $n_n$  a spese di  $n_e$ , cosicchè l'umento di pressione  $dP$  è piccolo. Il gas diventa più comprimibile. Si dice che l'equazione di stato diventa più *morbida* (*soft*). In altre parole ciò significa che l'indice adiabatico  $\gamma_{ad} = (d \ln P / d \ln \rho)_{ad}$  cade sotto il valore critico di  $4/3$ . Solamente quando i neutroni contribuiscono in maniera significativa alla pressione  $\gamma_{ad}$  ritorna ad essere maggiore di  $4/3$ . Questo avviene a  $\rho \geq 7 \times 10^{12} \text{ g cm}^{-3}$ .

Quando  $P_n$  è la sorgente dominante della pressione, possiamo ritenere che i neutroni formino un gas ideale (particelle non interagenti) totalmente degenere. I neutroni sono fermioni ed obbediscono alla statistica di Fermi. Pertanto per essi varranno le stesse relazioni trovate per gli elettroni a patto di sostituire, dove necessario,  $m_e$  con  $m_n$  e  $\mu_e$  con 1 (un nucleone per fermione). L'equazione di stato è

$$P_n = K_\gamma \rho_0^\gamma \quad (35.41)$$

con

$$\gamma = \frac{5}{3} \quad K_{5/3} = \frac{1}{20} \left( \frac{3}{\pi} \right)^{2/3} \frac{h^2}{m_n^{8/3}} \quad \rho_0 \ll 6 \times 10^{15} \text{ g cm}^{-3} \quad (35.42)$$

nel caso non relativistico e

$$\gamma = \frac{4}{3} \quad K_{4/3} = \frac{1}{8} \left( \frac{3}{\pi} \right)^{1/3} \frac{hc}{m_n^{4/3}} \quad \rho_0 \gg 6 \times 10^{15} \text{ g cm}^{-3} \quad (35.43)$$

nel caso relativistico.

Nella relazione (35.41) si è usato la densità di massa riposo  $\rho_0 = n_n m_n$ . Per configurazioni relativistiche invece di  $\rho_0$  si deve usare la relazione massa totale - densità di di energia  $\rho = \rho_0 + u/c^2$ . Questa distinzione non è necessaria per gli elettroni in quanto  $\rho_0$  (derivante dai nuclei non degeneri) è sempre dominante rispetto alla densità di energia  $u/c^2$  derivante dagli elettroni degeneri. Ora sia  $\rho_0$  che  $u/c^2$  sono dati dallo stesso tipo di particella (i neutroni degeneri). Per neutroni degeneri non relativistici  $\rho_0 \gg u/c^2$  per cui  $\rho \simeq \rho_0$ . Per neutroni degeneri relativistici,  $\rho_0 \ll u/c^2$  e  $\rho \simeq u/c^2$ .

Ricordiamo ora che particelle relativistiche hanno  $P = u/3$ , cioè  $P = \rho c^2/3$ .

Da questo segue che

$$P_n \propto \rho^k \quad (35.44)$$

con  $k = 5/3$  nel caso non relativistico e  $k = 1$  nel caso relativistico. La distinzione fra  $\rho$  e  $\rho_0$  non è trascurabile in quanto essa svolge un ruolo importante nella costruzione di modelli di stelle di neutroni.

Alle densità in gioco, le interazioni fra particelle non possono essere ignorate. Infatti esse diventano importanti ben prima di raggiungere la densità limite di  $6 \times 10^{15} \text{ g cm}^{-3}$  alla quale  $p_F = m_n c$ . Al fine di vedere l'effetto delle interazioni fra particelle sulla equazione di stato è necessario trovare una conveniente rappresentazione del potenziale. Mutuando quanto noto per le interazioni fra nucleoni nei nuclei, possiamo ragionevolmente dire che le forze fra neutroni saranno attrattive fintanto che la distanza media fra loro è *relativamente grande* (densità relativamente piccole) per diventare repulsive quando la distanza media fra loro è *relativamente piccola* (densità relativamente grande). L'attrazione darà luogo ad una equazione di stato soft mentre la repulsione darà luogo ad una equazione di stato rigida (*stiff*).

Ulteriore causa di incertezza a grandissime densità è la comparsa di nuovi tipi di particelle. Per esempio possono essere prodotti degli *iperoni*, i quali contribuisco

a  $\rho$  ma poco o nulla a  $P$ , in quanto la loro creazione abbassa il mare di Fermi dei neutroni. La creazione di iperoni rende il gas di neutroni più comprimibile.

**Modelli di Stelle di Neutroni.** Data l'equazione di stato del tipo  $P = P(\rho)$  è facile dedurre i corrispondenti modelli in equilibrio idrostatico. A tale scopo è necessario rivedere l'equazione di equilibrio idrostatico in modo da tener conto degli effetti relativistici.

Gli intensi campi gravitazionali quali quelli esistenti nelle stelle di neutroni sono descritti dalle equazioni di campo di Einstein

$$R_{ik} - \frac{1}{2}g_{ik}R = \frac{\kappa}{c^2}T_{ik} \quad \kappa = \frac{8\pi G}{c^2} \quad (35.45)$$

dove  $R_{ik}$  è il tensore di Ricci,  $g_{ik}$  è il tensore metrico,  $R$  è la curvatura di Riemann,  $T_{ik}$  è il tensore energia-momento, che per un gas ideale ha non nulle solo le componenti  $T_{00} = \rho c^2$ ,  $T_{11}=T_{22}=T_{33}=P$ , dove  $\rho$  include la densità di energia e  $P$  è la pressione.

Siamo ora interessati al caso statico (indipendente dal tempo) con simmetria sferica. L'elemento di linea  $ds$  (distanza fra due eventi successivi) in coordinate sferiche è dato da

$$ds^2 = e^\nu c^2 dt^2 - e^\lambda dr^2 - r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi) \quad (35.46)$$

con  $\nu = \nu(r)$  e  $\lambda = \lambda(r)$ . Con queste definizioni per  $T_{ik}$  e  $ds$  l'equazione di campo (35.46) si riduce a tre equazioni differenziali ordinarie

$$\frac{\kappa P}{c^2} = e^{-\lambda} \left( \frac{\nu'}{r} + \frac{1}{r^2} \right) - \frac{1}{r^2} \quad (35.47)$$

$$\frac{\kappa P}{c^2} = e^{-\lambda} \left( \nu'' + \frac{1}{2}\nu'^2 + \frac{\nu' - \lambda'}{r} - \frac{\nu'\lambda'}{2} \right) \quad (35.48)$$

$$\kappa\rho = e^{-\lambda} \left( \frac{\lambda'}{r} - \frac{1}{r^2} \right) + \frac{1}{r^2} \quad (35.49)$$

dove l'apice significa la derivata rispetto a  $r$ .

Moltiplicando la (35.49) per  $4\pi r^2$  ed integrando si ha

$$\kappa m = 4\pi r(1 - e^{-\lambda}) \quad (35.50)$$

dove  $m$  è la *massa gravitazionale* entro la sfera di raggio  $r$



$$m = \int_0^r 4\pi r^2 \rho dr \quad (35.51)$$

per  $r = R$ ,  $m$  diventa la massa gravitazionale  $M$  della stella. Essa è la massa che un osservatore distante misurerebbe dagli effetti gravitazionali. Essa tuttavia non è la massa data dal prodotto del numero di barioni per l'unità di massa atomica, in quanto essa contiene non solo la massa a riposo ma anche l'intera energia (divisa per  $c^2$ ). Questa a sua volta contiene l'energia di interna e l'energia gravitazionale. Quest'ultima è negativa e pertanto riduce la massa gravitazionale (esattamente come l'energia di legame di un nucleo dà luogo al difetto di massa). Infine non si confonda la (35.51) con la sua gemella in assenza di effetti relativistici. Infatti  $\rho = \rho_0 + U/c^2$  dove  $\rho_0$  è la densità di massa a riposo e  $U$  è l'intera densità di energia.

Differenziando la (35.47) rispetto a  $r$  si ottiene  $P' = P(\lambda, \lambda', \nu, \nu', r)$ . Con l'aiuto delle relazioni (35.47, 35.48, 35.49) si eliminano  $\lambda, \lambda', \nu, \nu'$  e si arriva all'equazione dell'equilibrio idrostatico in Relatività Generale

$$\frac{dP}{dr} = -\frac{Gm}{r^2} \rho \left(1 + \frac{P}{\rho c^2}\right) \left(1 + \frac{4\pi r^3 P}{mc^2}\right) \left(1 - \frac{2Gm}{rc^2}\right) \quad (35.52)$$

Essa è nota come equazione di *Tolman - Oppenheimer - Volkoff (TOV)*. Per campi gravitazionali non molto intensi, si possono sviluppare i prodotti e conservare solo i termini lineari in  $1/c^2$ . Questo dà la cosiddetta *approssimazione post-newtoniana*

$$\frac{dP}{dr} = -\frac{Gm}{r^2} \rho \left(1 + \frac{P}{\rho c^2} + \frac{4\pi r^3 P}{mc^2} + \frac{2Gm}{rc^2}\right) \quad (35.53)$$

**Relazione Massa-Raggio.** La soluzione delle equazioni di equilibrio idrostatico e continuità di massa per una data  $P = P(\rho)$  e ovvie condizioni al centro (per  $r = 0$   $\rho = \rho_c$ ) permette di determinare la struttura meccanica della stella di neutroni. I metodi sono simili a quelli usati per le Nane Bianche. In particolare, si ottengono le relazioni  $M = M(\rho_c)$ ,  $R = R(\rho_c)$  e la relazione  $R = R(M)$ . La forma esatta della  $R = R(M)$  dipende in maniera sensibile dalla equazione di stato usata. La Figura 35.4 mostra in maniera schematica l'andamento aspettato.

Tre sono gli aspetti salienti di questa curva:

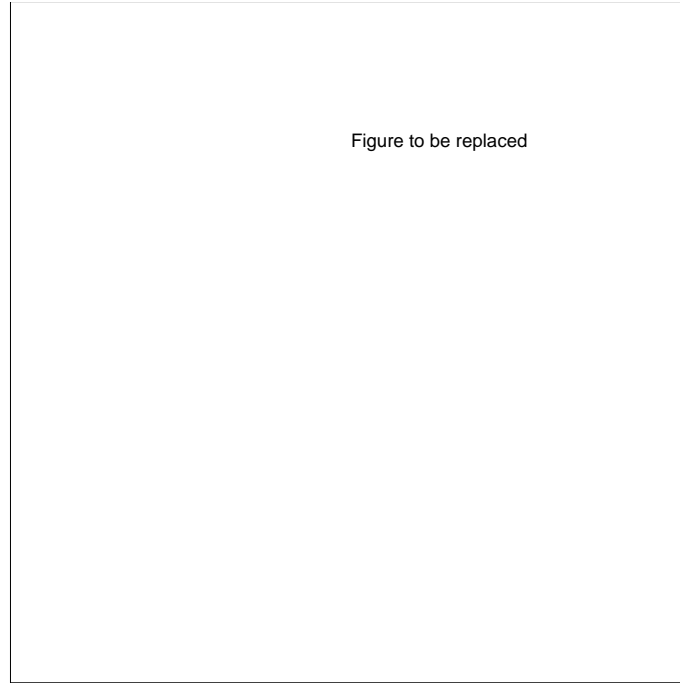


Figura 35.4: Relazione massa - raggio per stelle totalmente degeneri

(i) L'esistenza di una massa minima dopo il regime di Nana Bianca. Essa avviene a  $\rho_c \simeq 2 \times 10^{14} \text{ g cm}^{-3}$  e vale approssimativamente  $0.05 M_\odot$ .

(ii) L'esistenza di un valore massimo della massa a densità  $\rho_c$  molto elevate. Questa massa è detta massa di Oppenheimer-Volkhoff ( $M_{OV}$ ). Essa è determinata dal passaggio da condizioni non relativistiche a relativistiche del gas di neutroni. L'esistenza di questo massimo non dipende dalla particolare equazione di stato, mentre il valore della massa associata è fortemente dipendente dalla equazione di stato. Attualmente si ritiene che  $M_{OV}$  sia compresa fra 1 e  $3 M_\odot$  (Figura 35.4). Dal punto di vista sperimentale, la pulsar binaria PSR 1913+16 per la quale è possibile una stima accurata della massa, fornisce  $M \simeq 1.42 M_\odot$ , la quale elimina tutte le equazioni di stato che predicono una massa inferiore a questa. Infine si ricordi che stelle di neutroni con masse superiori a  $M_{OV}$  devono collassare in Buchi Neri.

(iii) Le proprietà di stabilità delle strutture intimamente legate alla pendenza della relazione  $R = R(M)$ . Le parti continue della curva corrispondono al regime di stabilità, mentre le parti tratteggiate a quello di instabilità.

L'esistenza di una massa massima dovuta al passaggio dal regime non rela-

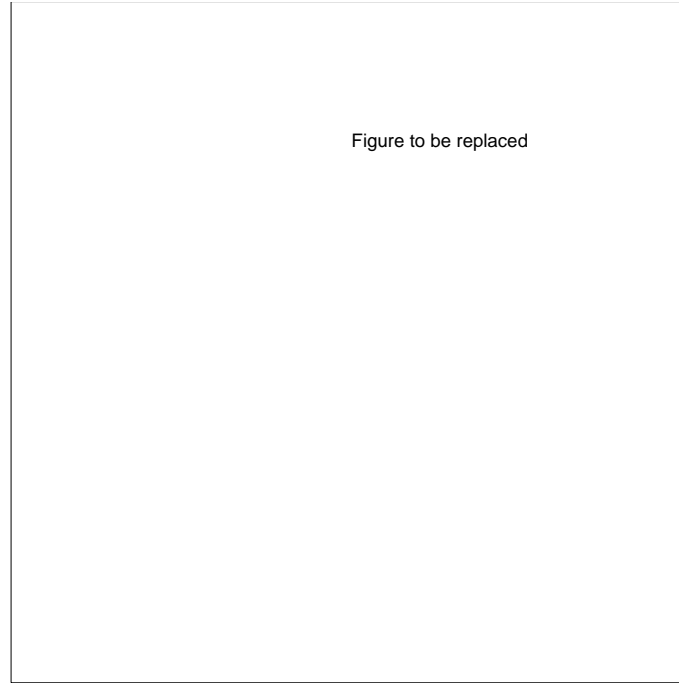


Figura 35.5: Struttura di una stella di neutroni

tivistico a quello relativistico è facile da giustificare con semplici argomenti dimensionali. Come nel caso del normale equilibrio idrostatico  $P \propto M^2/R^4$ , eliminando  $\rho$  mediante  $\rho \propto M/R^3$  otteniamo

$$P \propto M^{2/3} \rho^{4/3} \quad (35.54)$$

Introduciamo ora la relazione  $\rho \propto M^{1/\kappa}$  data dalla equazione (35.44) e risolviamo in  $M$  ottenendo

$$M \propto \rho^{3(\kappa-4/3)/2} \quad (35.55)$$

Nel caso non relativistico  $\kappa = 5/3$  da cui  $M \propto \rho^{1/2}$  e quindi  $dM/d\rho > 0$ . Nel caso estremamente relativistico  $\kappa = 1$  da cui  $M \propto \rho^{-1/2}$  e quindi  $dM/d\rho < 0$ . Da qualche parte deve essere  $dM/d\rho = 0$  cioè la *massa massima*.

Il massimo della massa avviene in coincidenza del passaggio dei neutroni alla situazione relativistica quando la densità di energia  $u/c^2$  diventa maggiore della densità di massa a riposo  $\rho_0$ . Infatti, è stato possibile avere la massa di Chandrasekhar  $M_{Ch} = 5.73M_\odot$  quale valore limite estremo di degenerazione e stato relativistico totale (parametro  $\gamma' = 4/3$ ) solamente ignorando il termine  $u/c^2$  nel

calcolo della  $\rho$ . Pertanto  $M_{max} < M_{Ch}$ .

Intimamente connesso all'esistenza degli estremi nella relazione  $M(R)$  di Figura 35.4 è il problema della *stabilità*. La relazione  $M = M(\rho_c)$  può essere considerata come una successione di modelli di equilibrio descritta dal parametro  $\rho_c$ . Partendo dalla situazione tipica dei pianeti  $\rho_c \simeq 10^5 \text{ g cm}^{-3}$  verso densità crescenti la curva mostra quattro estremi dei più significativi dei quali sono  $M_{min}$  e  $M_{max}$  per le Stelle di Neutroni e  $M_{max}$  per le Nane Bianche. Rami stabili della relazione sono quelli con  $dM/d\rho_c > 0$  indicati dal tratto continuo, instabili gli altri.

**Struttura e Luminosità di una Stella di Neutroni.** La struttura finale di una stella di neutroni è molto complessa. A scopo illustrativo descriviamo il caso di una Stella di Neutroni con massa  $M = 1.4 M_\odot$  e raggio  $R = 10.6 \text{ km}$ . Essa è stata calcolata con una equazione di stato relativamente soft la quale permette  $M_{max} \simeq 2 M_\odot$ . La situazione è mostrata in Figura 35.5.

L'atmosfera esterna è molto calda ed incredibilmente compressa. Infatti, la temperatura è dell'ordine di  $10^6 \text{ K}$  e lo spessore è molto sottile attesa la grande gravità superficiale  $g_0 \simeq 1.3 \times 10^{14} \text{ cm s}^{-2}$ . Per confronto nel sole abbiamo  $g_0 \simeq 2.7 \times 10^4 \text{ cm s}^{-2}$ , in una Nana Bianca abbiamo  $g_0 \simeq 10^8 \text{ cm s}^{-2}$ . L'altezza di scala di pressione alla superficie di una Stella di Neutroni è circa  $1 \text{ cm}$ .

Appena sotto la superficie, dove le densità saranno sempre maggiori di quelle tipiche di una Nana Bianca ( $\rho \geq 10^6 \text{ g cm}^{-3}$ ), vi è una *crosta* (intervallo di densità  $10^6 < \rho < 2.4 \times 10^{14} \text{ g cm}^{-3}$ ) di spessore  $\Delta r \simeq 0.9 \text{ km}$ . I nuclei in questa regione si organizzano in reticolo allo scopo di rendere minima l'energia d'interazione coulombiana (come nelle Nane Bianche cristallizzate). La parte più esterna della crosta ( $\Delta r \simeq 0.3 \text{ km}$ ) è composta solo da questi nuclei più un gas di elettroni. Essa si estende fino alla zona dove  $\rho = \rho_{dr} = 4 \times 10^{11} \text{ g cm}^{-3}$ . La parte più interna della crosta ( $10^{11} \leq \rho \leq 2 \times 10^{14} \text{ g cm}^{-3}$ ) è costituita da un *liquido* di neutroni liberi in aggiunta ai nuclei organizzati in un reticolo ed elettroni liberi.

Al diminuire di  $r$  (aumentare di  $\rho$ ) i neutroni liberi diventano via via più numerosi a spese sia dei nuclei che del reticolo stesso che alla fine scompaiono entrambi alla profondità di circa  $0.9 \text{ km}$  quando la densità arriva a  $\rho \simeq \rho_{nuc} \simeq 2.4 \times 10^{14} \text{ g cm}^{-3}$ .

Sotto la costa, a densità ancora maggiori ( $\rho \geq 2.4 \times 10^{14} \text{ g cm}^{-3}$ ), vi è un liquido

di neutroni liberi in equilibrio con pochi protoni ed elettroni. I neutroni sono super-fluidi.

Non è chiaro se la centro dove la densità raggiunge valori molto elevati ( $\rho_c \simeq 1.3 \times 10^{15} \text{ g cm}^{-3}$ ) i neutroni formino una struttura solida a causa delle forze repulsive che si sviluppano fra loro quando sono forzati a piccolissime distanze. La luminosità delle stelle di neutroni è così bassa che esse potrebbero essere difficilmente osservate se non fossero vicine e se non godessero delle seguenti proprietà: (1) intensi campi magnetici, (2) rapida rotazione, (3) emissione di radiazione radio in un cono molto stretto attorno all'asse magnetico. L'asse di rotazione non coincide con l'asse magnetico e pertanto se la stella è orientata in maniera opportuna rispetto all'osservatore questi può ricevere la radiazione radio emessa nel cono ad intervalli regolari. Le pulsars osservate sono pertanto interpretate come stelle di neutroni in rapida rotazione (periodi di rotazione tipici di 1 sec o più brevi). Ad esempio la pulsar osservata nella Nebulosa del Granchio (tipico resto di supernova) ha un periodo di 1/30 sec. Il periodo più breve osservato è di pochi millisecondi. L'origine della radiazione collimata nel cono ed osservata anche nelle bande spettrali ottiche e X non è nota con sicurezza. L'energia emessa nel cono di radiazione viene sottratta all'energia di rotazione e pertanto i periodi di rotazione si allungano nel tempo.

### 35.3 Buchi Neri

Come visto in precedenza, le stelle di neutroni posseggono anch'esse delle masse limite. Se il nucleo collassante di una stella supera tale valore, il collasso della stella di neutroni in formazione non può essere fermato, la materia collassa indefinitamente, a densità infinite, dando origine ad un Buco Nero (*Black Hole*). Un Buco Nero rappresenta veramente uno stadio finale dell'evoluzione di una stella. Esso può essere definito come una regione dello spazio-tempo racchiusa da un orizzonte degli eventi: una regione con campo gravitazionale così intenso che nè materia nè radiazione possono sfuggire dalla sua superficie.

Un Buco Nero non è osservabile se non attraverso la sua azione gravitazionale sui corpi vicini. Il parametro più importante di un Buco Nero è la massa,  $M$ , la quale determina le dimensioni dell'oggetto e l'intensità del campo gravitazionale associato. Esiste un modo semplice per descrivere un Buco Nero.

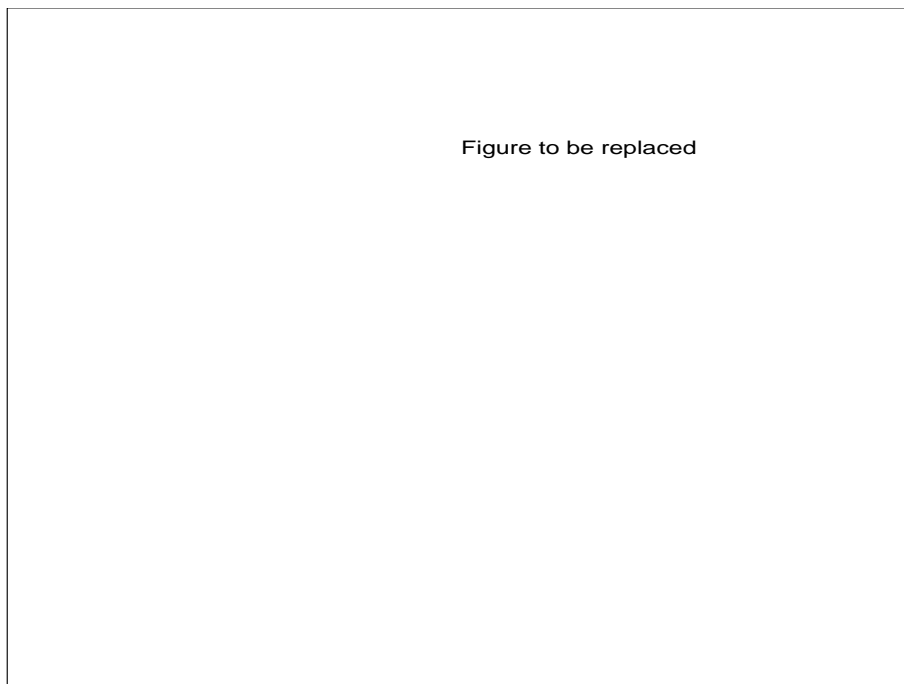


Figura 35.6: Illustrazione dei coni di luce a diverse distanze dalla singolarità centrale, dentro e fuori il raggio di Schwarzschild  $r_s$

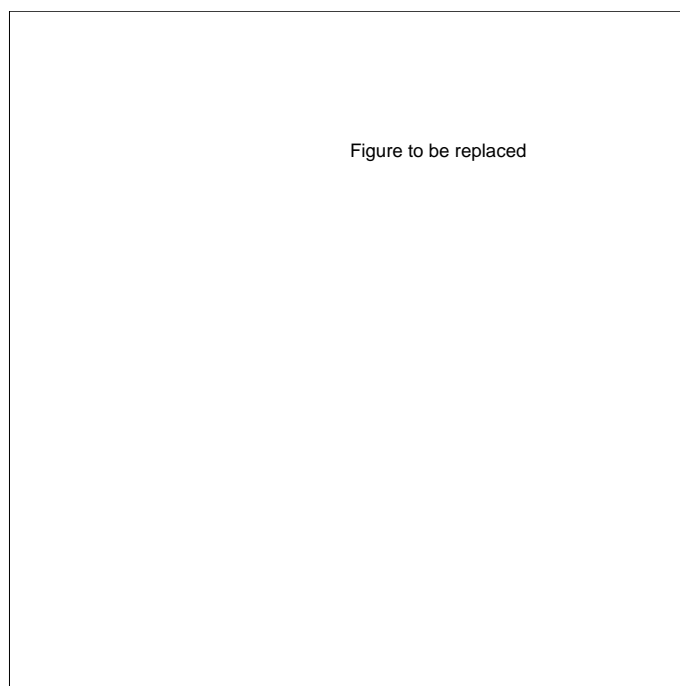


Figura 35.7: Caduta radiale di una particella di prova verso un Buco Nero. La particella è supposta partire con velocità nulla dalla distanza  $5r_s$ . Il moto è descritto in funzione del tempo proprio  $\tau$  a del tempo  $t$  di un osservatore posto all'infinito

Consideriamo una particella di massa  $m$  soggetta al campo gravitazionale di una stella di massa  $M$ , la quale sfugga con velocità di fuga tale da possedere velocità nulla all'infinito. La sua energia totale è

$$\left(\frac{1}{2}\right)mv^2 - \frac{GmM}{R} = 0 \quad (35.56)$$

ovvero la velocità di fuga minima è

$$v^2 = \frac{2GM}{R} \quad (35.57)$$

Poichè un oggetto non può muoversi con velocità maggiore di quella della luce, ne segue la relazione di Schwarzschild per il raggio  $R_S$  di un Buco Nero:

$$R_S = \frac{2GM}{c^2} \quad (35.58)$$

Un Buco Nero di una massa solare ha  $R_S \simeq 3$  km. Fisicamente  $R_S$  misura ad ogni istante la superficie degli eventi del Buco Nero.

Oltre alla massa, un Buco Nero può avere due ulteriori caratteristiche: rotazione e carica elettrica. La prima deriva dal fatto che se il nucleo collassante è in rotazione questa rimarrà anche al Buco Nero. La seconda deriva dalla possibilità che la materia originariamente costituente il Buco Nero non sia elettricamente neutra. In tal caso anche il Buco Nero sarà carico ed eserciterà una forza elettrica sulla materia fuori del suo orizzonte degli eventi. Tuttavia, a causa di possibili accrescimenti di materia, in genere ricca di particelle cariche, sul Buco Nero, rapidamente esso diventerà neutro.

Ogni altra caratteristica del materiale inizialmente costituente un Buco Nero è irrimediabilmente persa.

Dopo questa breve introduzione, cerchiamo ora di dare una descrizione semplificata delle proprietà di un Buco Nero, limitandoci al caso di Buco Nero non rotante. Lo strumento necessario è quello della Relatività Generale.

Si consideri il campo gravitazionale attorno un oggetto con massa  $M$  e simmetria sferica estremamente condensato. Esso è governato dalle soluzioni di Einstein in base alle quali l'elemento di linea  $ds$ , cioè la distanza tra due eventi vicini nello spazio tetra-dimensionale, è dato da

$$ds^2 = g_{ij}dx^i dx^j \quad (35.59)$$

$$ds^2 = \left(1 - \frac{r_s}{r}\right) c^2 dt^2 - \left(1 - \frac{r_s}{r}\right)^{-1} dr^2 - r^2 d\theta^2 - r^2 \sin^2 \theta d\phi^2 \quad (35.60)$$

$$ds^2 = \left(1 - \frac{r_s}{r}\right) c^2 dt^2 - d\sigma^2 \quad (35.61)$$

dove si deve sommare da 0 a 3 sugli indici  $i$  e  $j$ , e dove le coordinate sferiche  $r$ ,  $\theta$  e  $\phi$  sono considerate come le coordinate spaziali  $x^1$ ,  $x^2$ ,  $x^3$  ed infine  $x^0 = ct$ . Il parametro  $r_s$  è il raggio di Schwarzschild visto in precedenza.

La seconda componente del tensore metrico  $(1 - r_s/r)^{-1}$  diventa singolare a  $r = r_s$ . Tuttavia questa singolarità non è grave (ovvero fisica) in quanto si può dimostrare che essa scompare eseguendo una opportuna trasformazione di coordinate.

Il tempo proprio  $\tau$ , misurato da un osservatore munito di un orologio normale, è legato all'elemento di linea  $ds$  dalla relazione

$$d\tau = \frac{1}{c} ds \quad (35.62)$$

Per un osservatore stazionario ( $dr = d\theta = d\phi$ ) posto all'infinito ( $r \rightarrow \infty$ ) il tempo proprio  $\tau_\infty$  coincide con il tempo  $t$  della metrica (35.61).

Consideriamo ora due osservatori stazionari, uno nella posizione  $r, \theta, \phi$  l'altro all'infinito. I loro tempi propri  $\tau$  e  $\tau_\infty$  sono legati da

$$\frac{d\tau}{d\tau_\infty} = \left(1 - \frac{r_s}{r}\right)^{1/2} \quad (35.63)$$

Supponiamo che il primo osservatore emetta un segnale luminoso ad intervalli regolari  $d\tau$ , ad esempio un atomo che emetta con frequenza  $\nu_0 = 1/d\tau$ . L'altro osservatore riceve il segnale e misura gli intervalli di tempo con il proprio orologio come  $d\tau_\infty$ , cioè misura la frequenza  $\nu = 1/d\tau_\infty$ .

Il red-shift risultante dovuto al campo gravitazionale è dato dalla relazione

$$z = \frac{\nu_0 - \nu}{\nu} = \frac{\nu_0}{\nu} - 1 = \frac{d\tau_{infy}}{d\tau} - 1 = \left(1 - \frac{r_s}{r}\right)^{-1/2} - 1 \quad (35.64)$$

la quale dà  $z \rightarrow \infty$  per  $r \rightarrow r_s$ .

Le componenti della metrica (35.61) mostrano che lo spazio 4-dimensionale è curvo e che ciò vale anche per lo spazio 3-dimensionale. Alla superficie di una



configurazione con massa  $M$  e raggio  $R$ , la curvatura gaussiana dello spazio delle posizioni è data da

$$K = -\frac{GM}{c^2 R^3} = -\frac{1}{2} \frac{r_s}{R} \frac{1}{R^2} \quad (35.65)$$

La curvatura è di solito molto piccola rispetto alla curvatura  $R^{-2}$  della superficie 2-dimensionale. Per esempio  $-K \simeq 2 \times 10^{-6} R^{-2}$  alla superficie del Sole, ma essa diventa  $-K \simeq 0.15 R^{-2}$  alla superficie di una stella di neutroni. Le due curvature diventano confrontabili alla superficie di un Buco Nero con  $R = R_s$ . Consideriamo una particella di prova (così piccola da non disturbare il campo gravitazionale) che si muova liberamente da A a B. La linea di universo nello spazio 4-dimensionale è allora una *geodesica*, cioè la lunghezza  $s_{AB}$  è estrema

$$\delta s_{AB} = \delta \int_A^B ds = 0 \quad (35.66)$$

Se la particella si muove con velocità  $v$  percorrendo una distanza spaziale  $d\sigma$ , allora l'intervallo di tempo proprio  $d\tau$  decresce al crescere di  $v$ . Esso diventa

$$d\tau = ds = 0 \quad \text{per} \quad v = c \quad (35.67)$$

cioè per fotoni ed altre particelle con massa a riposo nulla (esse si muovono lungo geodesiche).

Per particelle materiali, la richiesta della relatività speciale (valida localmente) che  $v < c$  impone che  $d\tau^2$  e  $ds^2 > 0$ . Tali separazioni sono dette di *tipo-tempo*. Le linee di universo delle particelle materiali devono essere di *tipo-tempo*.

Separazioni con  $ds^2 < 0$  e/o  $d\tau^2 < 0$  richiederebbero  $v > c$ . Esse sono chiamate di *tipo-spazio*. Per esempio la distanza fra due eventi simultanei ( $dt = 0$ ) è di *tipo-spazio*.

Le geodesiche nulle ( $ds^2 = 0$ ), che danno la propagazione di fotoni, descrivono degli *iper-coni* nello spazio tempo detti *coni di luce*. Per esaminare le loro proprietà vicino a  $r = r_s$ , introduciamo la nuova coordinata temporale  $\bar{t}$  data da

$$\bar{t} = t + \frac{r_s}{c} \ln \left| \frac{r}{r_s} - 1 \right| \quad (35.68)$$

Essa si trasforma la (35.61) in

$$ds^2 = \left(1 - \frac{r_s}{r}\right)c^2 d\bar{t}^2 - 2\frac{r_s}{r}c dr d\bar{t} - \left(1 + \frac{r_s}{r}\right)dr^2 - r^2 d\theta^2 - r^2 \sin^2 \theta d\phi^2 \quad (35.69)$$

la quale non è più singolare in  $r = r_s$ . Consideriamo solo i lati radiali del cono di luce, cioè il cammino di fotoni emessi lungo  $r$  ( $d\phi = d\theta = 0$ ). Allora per  $ds^2 = 0$  e dopo la divisione per  $c^2 dr^2$  l'equazione (35.69) diventa

$$\left(1 - \frac{r_s}{r}\right)\left(\frac{d\bar{t}}{dr}\right)^2 - \frac{2r_s}{c} \frac{d\bar{t}}{dr} - \frac{1}{c^2}\left(1 + \frac{r_s}{r}\right) = 0 \quad (35.70)$$

Questa equazione ammette le soluzioni

$$\left(\frac{d\bar{t}}{dr}\right)_1 = -\frac{1}{c} \quad \left(\frac{d\bar{t}}{dr}\right)_2 = \frac{1}{c} \frac{1 + r_s/r}{1 - r_s/r} \quad (35.71)$$

Queste derivate sono le inclinazioni dei coni di luce nel piano  $r - \bar{t}$  di Figura 35.6.

La prima corrisponde sempre ad un moto verso l'interno con velocità  $c$ . La seconda derivata cambia segno a  $r = r_s$ , essendo positiva per  $r > r_s$ , dove i fotoni possono essere emessi in avanti ( $dr > 0$ ). Al diminuire di  $r$  la seconda derivata diventa grande abbastanza da restringere il cono di luce e da farlo ruotare verso l'asse delle  $r$ . A  $r = r_s$  il cono di luce è tale che nessun fotone può essere emesso verso l'esterno ( $dr > 0$ ).

Questa è la ragione per la quale la configurazione con  $R = r_s$  è chiamata Buco Nero ed il raggio di Schwarzschild  $r_s$  è detto raggio di un Buco Nero di massa  $M$ .

Per  $r < r_s$  entrambe le soluzioni sono negative e l'intero cono di luce è ruotato verso l'interno. Pertanto per  $r < r_s$  la radiazione e tutte le particelle dotate di massa (che si possono muovere solo all'interno del cono di luce) sono portati inesorabilmente verso l'interno. Questo significa che non esiste una soluzione statica ( $dr = d\theta = d\phi = 0$ ) all'interno di  $r_s$ , in quanto essa richiederebbe un moto verticale verso l'alto di Figura 35.6, cioè fuori del cono di luce.

Al fine di studiare il moto di una particella materiale, supponiamo che tutte le variabili dipendano da parametro  $\tau$ , tempo proprio, che varia monotonicamente lungo la linea di universo  $d\tau = ds/c$ . Il punto indica la derivata rispetto a  $\tau$ . Per esempio  $\dot{x}^\alpha = dx^\alpha/d\tau$  è la  $\alpha$  componente di una tetra-velocità. Introducendo  $dx^\alpha = \dot{x}^\alpha d\tau$  nella relazione (35.61) si ha l'identità

$$c^2 = g_{ij}\dot{x}^i\dot{x}^j = c^2\left(1 - \frac{r_s}{r}\right)\dot{t}^2 - \left(1 - \frac{r_s}{r}\right)^{-1}\dot{r}^2 - r^2(\dot{\theta}^2 + \sin^2\theta\dot{\phi}^2) \quad (35.72)$$

La condizione che la linea di universo sia una geodesica significa che  $\delta s = \delta\tau = 0$  la quale dà la equazione di Eulero-Lagrange

$$\frac{d}{d\tau}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}^\alpha}\right) - \frac{\partial L}{\partial x^\alpha} = 0 \quad (35.73)$$

dove il lagrangiano  $L$  è dato da

$$2cL = \left[g\dot{x}^i\dot{x}^j\right]^{1/2} \quad (35.74)$$

ovvero

$$2cL = \left[c^2\left(1 - \frac{r_s}{r}\right)\dot{t}^2 - \left(1 - \frac{r_s}{r}\right)^{-1}\dot{r}^2 - r^2(\dot{\theta}^2 + \sin^2\theta\dot{\phi}^2)\right]^{1/2} \quad (35.75)$$

Dall'insieme delle equazioni (35.73,35.74,35.75) si deduce che  $L = 1/2$ . Per  $x^0 = ct$  la (35.74) diventa

$$\frac{d}{d\tau}\left[\left(1 - \frac{r_s}{r}\right)\dot{t}\right] = 0 \quad \left(1 - \frac{r_s}{r}\right)\dot{t} = \text{costante} = A \quad (35.76)$$

Ci limitiamo a discutere ora il caso puramente radiale ( $\dot{\theta} = \dot{\phi} = 0$ ) partendo dal punto  $r_0$  con velocità nulla al tempo  $\tau = 0$ . Introduciamo la seconda delle equazioni (35.76) nell'equazione (35.72) e risolviamo per  $\dot{r}$ . Si ottiene

$$\dot{r} = c\left[A^2 - 1 + \frac{r_s}{r}\right]^{1/2} \quad (35.77)$$

Poniamo  $A^2 - 1 = -r_s/r_0$ . Ciò significa assumere che la particella di prova parta con velocità nulla a  $r_0$ . Integrando si ricava

$$\tau = \frac{1}{2} \frac{r_0}{c} \sqrt{\frac{r_0}{r_s}} (\sin\eta + \eta) \quad (35.78)$$

dove  $\eta = \arccos(2r/r_0 - 1)$ , come è facile da verificare mediante differenziazione. La funzione  $\tau = \tau(r)$  è mostrata in Figura 35.7 per  $r_0 = 5r_s$ . Di nuovo, nulla accade quando la particella raggiunge  $r = r_s$ . Il tempo proprio per arrivare a  $r = 0$  è dato da

$$\tau_0 = \frac{\pi}{2} \frac{r_s}{c} \left( \frac{r_0}{r_s} \right)^{3/2} \quad (35.79)$$

Per  $r_0 = 10r_s$  abbiamo  $\tau_0 = 49.67r_s/c$  che per  $M = M_\odot$  corrisponde a circa  $9.8 \times 10^{-6}$  s.

Il moto visto da un osservatore all'infinito è molto diverso. Il legame fra  $t$  e  $\tau$  è dato da  $d\tau/dt = (1 - r_s/r)/A$  il quale va zero al tendere di  $r \rightarrow r_s$ . Da questa relazione e dalla equazione (35.77) si ottiene

$$\frac{t}{r_s/c} = \ln \left| \frac{\xi + tg\eta/2}{\xi - tg\eta/2} \right| + \left( \frac{r_0}{r_s} - 1 \right)^{1/2} \left[ \eta + \frac{r_0}{2r_s} (\eta + \sin\eta) \right] \quad (35.80)$$

dove  $\xi = (r_0/r_s - 1)^{1/2}$ . La curva  $t = t(r)$  è mostrata in Figura 35.7 per  $r_0 = 5r_s$ .

Il fatto che l'osservatore veda l'orologio  $\tau$  della particella rallentare per  $r \rightarrow r_s$  implica che al tendere di  $r \rightarrow r_s$  il tempo  $t = t(r)$  tende  $\rightarrow \infty$ .

Gli eventi all'interno di  $r_s$  sono invisibili all'osservatore posto all'infinito grazie allo schermo posto dalla singolarità al raggio di Schwarzschild che agisce come un *orizzonte degli eventi*.

Queste considerazioni sono sufficienti ad illustrare alcune proprietà importanti dei Buchi Neri.

Osservato dalla superficie del Buco Nero (tempo proprio  $\tau$ ), il collasso avviene rapidamente e in maniera dolce attraverso il raggio  $r_s$ . All'interno di  $r_s$  una configurazione statica non è possibile ed il collasso finale verso la singolarità centrale è inevitabile. A nulla servirebbe invocare una grandissima pressione esercitata da qualche fenomeno fisico sconosciuto, in quanto la pressione contribuirebbe anche all'energia gravitazionale. La singolarità a  $r = 0$  è reale e con gravità infinita. Rimane da speculare se effetti quantistici possano rimuovere tale singolarità.

Il collasso appare completamente diverso ad un osservatore posto all'infinito. Nella sua coordinata temporale egli vede il collasso rallentare sempre più via via che la configurazione tende a  $r_s$ . Infatti egli vedrebbe raggiunto il raggio  $r_s$  solo in un tempo infinito. Non solo, ma egli riceverebbe fotoni con energie via via decrescenti e in intervalli di tempo sempre più lunghi: la stella in collasso verso un Buco Nero scomparirebbe dalla sua visuale (capacità di rivelazione) per lasciar posto solo ad un intenso campo gravitazionale.

Da questo momento la presenza del Buco Nero può essere rivelata solo dalla radiazione emessa nelle sue vicinanze da materia da esso catturata o dal moto di una stella compagna se il Buco Nero appartiene ad un sistema binario.



## Capitolo 36

# STELLE VARIABILI

Ogni regione del diagramma H-R (Figura 36.1) è caratterizzata dall'esistenza di stelle, non appartenenti a sistemi binari, la cui luminosità non è costante nel tempo ma varia con periodicità più o meno regolare. Esse sono dette stelle variabili.

Il caso delle stelle binarie, in cui le variazioni di luminosità hanno cause geometriche, è di minore interesse.

I parametri fondamentali nello studio della variabilità stellare sono le curve di luce e di velocità radiale, le prime sono ottenute dall'osservazione della magnitudine (luminosità) in funzione del tempo, le seconde sono derivate dall'analisi dello spettro e mostrano un'oscillazione periodica del raggio della stella.

L'analisi delle curve di luce e di velocità radiale permette di determinare il periodo di oscillazione. La variazione del raggio stellare in funzione del tempo è in ultima analisi responsabile della variazione in luminosità e  $T_{eff}$ .

Le curve di luce e di velocità radiale in genere non sono simmetriche nel tempo, ma la fase ascendente è di solito più ripida di quella discendente. Molte non sono strettamente periodiche, altre sono veramente non periodiche. Spesso esiste uno sfasamento fra il momento di massima luminosità e di massima velocità radiale.

La relazione fra le fasi di massima luminosità e di massima velocità radiale è di particolare importanza in quanto è connessa con il meccanismo fisico di instabilità. L'oscillazione è in generale radiale (Cefeidi, RR Lyrae, etc.), sovente però essa è chiaramente non radiale ( $\beta$  Cephei).

Per le stelle Cefeidi esiste una ben nota relazione periodo-luminosità-colore che è di particolare importanza in una vasta gamma di applicazioni.

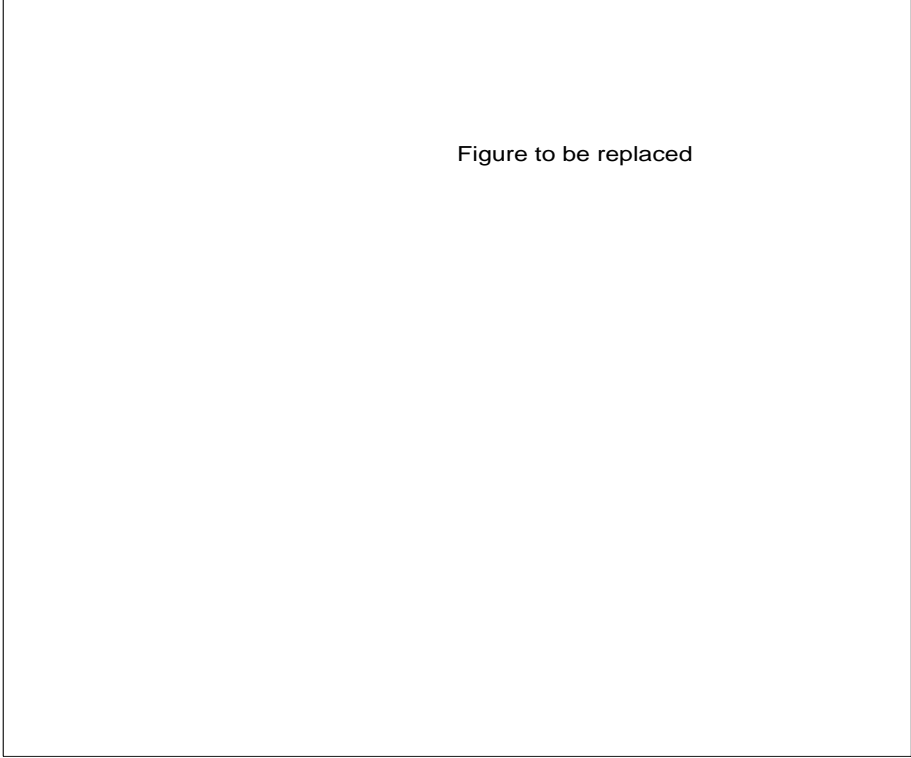


Figure to be replaced

Figura 36.1: Stelle variabili nel diagramma H-R

### 36.1 Fondamenti della Teoria delle Pulsazioni

La pulsazione stellare è un fenomeno strettamente legato a deviazioni dalle condizioni di rigoroso equilibrio idrostatico e termico. La ragione di ciò sta nel fatto che è difficile specificare la natura del legame meccanico e termico fra regioni diverse di una stella. Gli interni stellari sono ben lungi dall'essere uniformi ed isotermini. Infatti, esistono significativi gradienti di temperatura vicino alla superficie, variazioni di composizione chimica per reazioni nucleari nelle zone interne, mentre la ionizzazione del gas, l'opacità e l'equazione di stato variano con la profondità e così pure la capacità termica e le perdite radiative di energia del gas.

In una stella pulsante sono definibili tre scale di tempo fondamentali. La prima è il tempo caratteristico in cui una regione di dimensioni finite può raggiungere l'equilibrio di pressione ovvero il tempo di attraversamento di un'onda sonora. Esso è dato da  $t_s = l/v_s$ , dove  $v_s = (\Gamma_1 P/\rho)^{1/2}$  è la velocità locale del suono e  $l$  una tipica dimensione. La seconda è la scala di tempo delle perdite radiative di energia, le quali dipendono dall'opacità, equazione di stato, densità e tem-



peratura. La terza scala è il tempo di caduta libera  $t_{ff} = (G\bar{\rho})^{-1/2}$ , dove  $\bar{\rho}$  è la densità media della stella.

Grazie al fatto che in generale le stelle sono fortemente concentrate verso il centro, la scala di tempo di pulsazione risulta legata al tempo  $t_{ff}$  mediante la relazione

$$Q = \Pi \sqrt{\frac{\bar{\rho}}{\bar{\rho}_{\odot}}} \quad (36.1)$$

dove  $Q$  è una costante,  $\Pi$  è il periodo di pulsazione,  $\bar{\rho}$  e  $\bar{\rho}_{\odot}$  sono le densità medie della stella del Sole ( $1.4 \text{ g cm}^{-3}$ ) rispettivamente.  $Q$  è anche detta costante di pulsazione.

In quanto segue presenteremo una versione semplificata della teoria delle oscillazioni stellari e della loro stabilità limitatamente ai moti radiali ed alla instabilità di tipo vibrazionale, tralasciando le oscillazioni non radiali di più complessa trattazione.

Inoltre dei vari meccanismi esistenti responsabili delle instabilità stellari discuteremo con un certo dettaglio solamente quello legato alla ionizzazione degli elementi, il quale è stato riconosciuto alla base del fenomeno delle pulsazioni di almeno due categorie di stelle variabili (Cefeidi e RR Lyrae).

La presente formulazione del problema si basa sulle seguenti assunzioni addizionali:

- (1) presenza delle sole forze gravitazionali e di pressione,
- (2) esistenza della equazione di stato e della funzione energia interna del tipo  $P(\mu, \rho, T)$  e  $E(\mu, \rho, T)$ , rispettivamente,
- (3) ed infine descrizione lagrangiana, in cui il tempo  $t$  e la massa  $M_r$  interna ad una sfera di raggio  $r$  sono le variabili indipendenti.

Le equazioni di conservazione della massa, del momento, dell'energia e del flusso (consideriamo solo il flusso radiativo) sono

$$\frac{\partial r}{\partial M_r} = \frac{1}{4} \pi r^2 \rho \quad (36.2)$$

$$\frac{\partial^2 r}{\partial t^2} = \ddot{r} = -\left(\frac{1}{\rho}\right) \frac{\partial P}{\partial r} - \frac{GM_r}{r^2} \quad (36.3)$$

$$\frac{\partial E}{\partial t} - \frac{P}{\rho^2} \frac{\partial \rho}{\partial t} = \epsilon - \frac{\partial L_r}{\partial M_r} \quad (36.4)$$

$$L_r = -4\pi r^2 \frac{4ac}{3} \frac{T^3}{\kappa \rho} \frac{\partial T}{\partial r} = -\frac{64\pi^2 ac}{3} r^4 \frac{T^3}{\kappa} \frac{\partial T}{\partial M_r} \quad (36.5)$$

Nel caso più generale in cui sia presente sia il flusso radiativo che quello convettivo, il flusso  $L_r$  nella equazione (36.5) si deve intendere come la somma  $L_R + L_C$  con ovvio significato dei simboli.

La generazione di energia  $\epsilon$  e l'opacità  $\kappa$  sono pensate come funzioni di  $\rho$  e  $T$  del tipo ( $\epsilon = \epsilon_0 \rho^\lambda T^\nu$ ) e ( $\kappa = \kappa_0 \rho^n T^{-s}$ ).

Si proceda ora a linearizzare le equazioni da (36.2) a (36.5) limitatamente al caso in cui il sistema sia prossimo ad uno stato statico per il quale valgono rigorosamente le condizioni di equilibrio idrostatico ( $\dot{r} = 0$ ) e termico ( $\epsilon - \partial L / \partial M_r = 0$ ). Esso è detto *stato di equilibrio*.

Le equazioni che lo definiscono sono

$$\ddot{r} = 0, \quad \dot{r} = 0, \quad \dot{\rho}_0 = 0, \quad \dot{P}_0 = 0, \quad \dot{T}_0 = 0, \quad \text{per ogni shell} \quad (36.6)$$

$$\frac{\partial r_0}{\partial M_r} = \frac{1}{4\pi \rho_0 r_0^2} \quad (36.7)$$

$$\frac{\partial P_0}{\partial M_r} = -\frac{GM_r}{4\pi r_0^4} \quad (36.8)$$

$$\frac{\partial L_{r0}}{\partial M_r} = \epsilon_0 \quad (36.9)$$

È conveniente introdurre lo spostamento relativo  $\zeta = \delta r / r_0$  per esprimere la distanza radiale all'istante  $t$  come  $r = r_0(1 + \zeta)$  ed inoltre la variazione lagrangiana relativa delle varie grandezze  $\delta f / f_0$  per esprimere  $f$  come  $f = f_0(1 + \delta f / f_0)$ . Assumiamo che nell'approssimazione lineare siano sempre verificate le condizioni  $|\zeta| < 1$  e  $|\delta f / f_0| < 1$ . Inoltre nel processo di linearizzazione trascuriamo tutti i termini di ordine superiore. Illustriamo la procedura nel caso della equazione di conservazione delle massa

$$\frac{\partial [r_0(1 + \zeta)]}{\partial r_0} = \frac{1}{(1 + \zeta^2)(1 + \delta \rho / \rho_0)} \quad (36.10)$$

ovvero

$$1 + \zeta + r_0 \frac{\partial \zeta}{\partial r_0} \simeq (1 - 2\zeta) \left(1 - \frac{\delta \rho}{\rho_0}\right) \simeq 1 - 2\zeta - \frac{\delta \rho}{\rho_0} \quad (36.11)$$

da cui

$$\frac{\delta\rho}{\rho_0} = -3\zeta - r_0 \frac{\partial\zeta}{\partial r_0} \quad (36.12)$$

La equazione del momento perturbata diventa

$$r_0 \ddot{\zeta} = -\frac{4\zeta}{\rho_0} \frac{dP_0}{dr_0} - \frac{1}{\rho_0} \left( \frac{\delta P}{P_0} \right) \frac{dP_0}{dr_0} - \frac{P_0}{\rho_0} \frac{\partial}{\partial r_0} \left( \frac{\delta P}{P_0} \right) \quad (36.13)$$

Ancora per l'equazione di produzione dell'energia si ottiene (lasciando cadere il pedice 0)

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\delta P}{P} \right) = \Gamma_1 \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\delta\rho}{\rho} \right) + \frac{\rho(\Gamma_3 - 1)}{P} \delta \left( \epsilon - \frac{\partial L_r}{\partial M_r} \right) \quad (36.14)$$

Per ultimo, l'equazione del trasporto radiativo diventa

$$\left( \frac{\delta L_r}{L_r} \right) = 4\zeta - \frac{\delta\kappa}{\kappa} + 4 \frac{\delta T}{T} + \frac{1}{d\ln T/dx} \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\delta T}{T} \right) \quad (36.15)$$

con  $x = r_0/R_0$ .

Infine combinando in un' unica equazione tutte le equazioni perturbate si ottiene

$$\ddot{\zeta} - \frac{\ddot{\zeta}}{r\rho} \frac{d}{dr} \left[ (3\Gamma_1 - 4)P \right] - \left( \frac{1}{\rho r^4} \right) \frac{\partial}{\partial r} \left( \Gamma_1 P r^4 \frac{\partial\zeta}{\partial r} \right) = - \left( \frac{1}{r\rho} \right) \frac{\partial}{\partial r} \left[ \rho(\Gamma_3 - 1) \delta \left( \epsilon - \frac{\partial L}{\partial M_r} \right) \right] \quad (36.16)$$

dove

$$\Gamma_1 = (d\ln P/d\ln\rho)_{ad} \quad \text{e} \quad \Gamma_3 - 1 = (d\ln T/d\ln\rho)_{ad} \quad (36.17)$$

sono gli esponenti adiabatici della pressione e temperatura.

Lo studio di questa equazione permette di isolare le proprietà fondamentali del sistema e le condizioni per le quali esso risulta instabile.

Si considerino ora solo soluzioni della forma

$$\zeta(r, t) = \frac{\delta r}{r} = \xi(r) e^{i\sigma t} \quad (36.18)$$

dove  $\xi(r)$  è una funzione (in generale complessa) solamente della distanza radiale di equilibrio e  $\sigma$  è una costante.

### 36.1.1 Trattazione Adiabatica

Poichè risulterà che le oscillazioni sono quasi adiabatiche nella gran parte della massa di una stella, non è sorprendente che l'approssimazione adiabatica fornisca una descrizione abbastanza buona delle proprietà globali di una stella pulsante, in particolare il periodo.

Nel caso adiabatico l'equazione (36.16) diventa

$$-\frac{1}{\rho r^4} \frac{d}{dr} \left[ \Gamma_1 P r^4 \frac{d\xi}{dr} \right] - \left( \frac{1}{r\rho} \right) \left\{ \frac{d}{dr} [(3\Gamma_1 - 4)P] \right\} \xi = \sigma^2 \xi \quad (36.19)$$

dove si è escluso il caso  $\sigma = 0$  che corrisponde alla situazione statica priva di interesse.

La soluzione delle equazioni lineari di oscillazione richiede l'adozione di particolari condizioni al centro e alla superficie.

Al centro della stella ( $r = 0$ ) si deve avere ovviamente porre  $\delta r = 0$ , quindi  $\zeta = \delta r/r$  deve essere finito. Inoltre deve anche valere  $d\zeta/dr = 0$  e  $d^2\zeta/dr^2 = 0$ . Alla superficie ( $r = R$ ) si deve imporre che tutte le variabili relative di oscillazione,  $\delta P/P$ ,  $\delta T/T$ ,  $\delta\rho/\rho$  etc., rimangano finite. La specifica condizione alla superficie si ottiene dalla equazione linearizzata del momento scritta come segue

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\delta P}{P} \right) = \frac{R}{\lambda_p} \left[ \left( \frac{\sigma^2 r}{g} + 4 \right) \zeta + \frac{\delta P}{P} \right] \quad (36.20)$$

dove  $\lambda_p = 1/(d \ln P / dr)$ . Alla superficie  $R/\lambda_p \gg 1$  e pertanto la condizione superficiale diventa

$$\frac{\delta P}{P} = - \left( \frac{\sigma^2 r}{g} + 4 \right) \zeta. \quad (36.21)$$

Questa condizione garantisce che a  $r = R$   $\partial(\delta P/P)/\partial r$  rimanga finito e che  $(\delta P/P)$  sia finito anche se  $P = 0$ . Si noti che essa non è stata ottenuta facendo ricorso all'ipotesi di adiabaticità e pertanto è assolutamente generale.

Nel caso adiabatico, esprimendo  $\delta P/P$  in funzione di  $\delta\rho/\rho$  e di  $\zeta$  attraverso l'equazione di continuità essa diventa

$$\left( \frac{d \ln \xi}{dx} \right)_R = \left( \frac{1}{\Gamma_1} \right) \left[ \frac{\sigma^2 R^3}{GM} - (3\Gamma_1 - 4) \right] \quad (36.22)$$

con  $x = r_0/R_0$  rapporto fra il raggio corrente e raggio totale della struttura di equilibrio. Si può dimostrare che nel caso adiabatico questa condizione alla superficie garantisce l'esistenza di onde stazionarie nell'interno della stella.

Le proprietà matematiche dell'equazione d'onda adiabatica (36.19) sono ben note.

Essa è un'equazione agli autovalori tale che solamente determinate funzioni  $\xi_k$  ed autovalori  $\sigma_k^2$  risolvono l'equazione e le sue condizioni al contorno. La natura agli autovalori del problema nasce dal fatto che l'equazione differenziale è omogenea e del secondo ordine e che le condizioni al contorno sono applicate al centro ed alla superficie della stella.

L'omogeneità della equazione implica che delle due costanti di integrazione una rimane arbitraria. Se  $F$  è una soluzione allora anche  $AF$  è una soluzione con  $A$  costante arbitraria.

L'imposizione delle condizioni al contorno richiede però che ci siano due costanti aggiustabili, il solo parametro a disposizione è  $\sigma^2$  che pertanto è un autovalore. L'autofunzione  $\xi_0$  che possiede il più piccolo  $\sigma_0^2$  è detta il modo fondamentale ed è caratterizzata dal non avere nodi nell'intervallo  $0 < r < R$ . In generale il modo  $k$ -esimo ha  $k$  nodi.

L'equazione può essere scritta anche come

$$\Lambda \xi_k = \sigma_k^2 \xi_k \quad (36.23)$$

dove l'operatore lineare  $\Lambda$  è definito dal confronto. Se a  $r = R$  vale  $P = 0$ , si può dimostrare che  $\Lambda$  è hermitiano o auto-aggiunto. Da questo fatto seguono alcune interessanti proprietà:

(1) Tutti gli autovalori  $\sigma_k^2$  sono reali. Poichè i coefficienti dell'equazione lineare adiabatica sono reali, ne segue che esistono soluzioni  $\xi_k$  puramente reali corrispondenti ad onde stazionarie, in cui il sistema passa due volte per lo stato di equilibrio ad ogni periodo. Per ogni valore di  $k$  esistono solamente tre possibilità per il moto adiabatico con soluzione stazionaria del tipo

$$\zeta(r, t) = \xi(r) \exp(i\sigma t) \quad (36.24)$$

(a)  $\sigma_k$  è puramente reale,  $\sigma_k^2 > 0$ , corrispondente ad una pulsazione con ampiezza costante

(b)  $\sigma_k$  è puramente immaginario,  $\sigma_k^2 < 0$ , corrispondente ad instabilità dinamica con scala di tempo di caduta libera  $t_{ff}$ .

(c)  $\sigma_k = 0$ , corrispondente o a stabilità neutra su una scala di tempo arbitraria o al caso perfettamente statico.

(d) Soluzioni dell'equazione lineare adiabatica con  $\sigma_k$  complessi, quindi corrispondenti ad oscillazioni smorzate o amplificate nel tempo, non esistono.

**(2)** Le autofunzioni  $\xi_k$  sono ortogonali fra di loro rispetto all'elemento di momento di inerzia  $r^2 dM_r$ . Per due autofunzioni  $\xi_k$  e  $\xi_l$  si ha

$$\int_M \xi_k^* \xi_l r^2 dM_r = J_k \delta_{kl} \quad (36.25)$$

dove

$$J_k = \int_M |\xi_k|^2 r^2 dM_r \quad (36.26)$$

è il momento d'inerzia di oscillazione del modo  $k$ -esimo, l'asterisco denota la complessa coniugata di  $\xi_k$  e  $\delta_{kl}$  è il simbolo di Kronecker. Ne segue che soluzioni più generali dell'equazione d'onda possono essere espresse come sovrapposizioni delle  $\xi_k$  assumendo che quest'ultime costituiscano un sistema completo.

**(3)** Gli autovalori hanno carattere minimale. Si consideri il modo fondamentale e si prenda una funzione regolare  $u(r)$  qualunque che obbedisca alle stesse condizioni al contorno delle  $\xi_k$  e si costruisca la quantità reale

$$\Sigma^2 = \frac{1}{J} \int_M u^* \Lambda u r^2 dM_r \quad (36.27)$$

si trova che  $\sigma_0^2 < \Sigma^2$  dove  $\sigma_0^2$  è l'autovalore del modo fondamentale. Si trova l'uguaglianza non appena  $u(r) = \xi_0(r)$ . Questa proprietà è utile per avere una stima approssimata di  $\sigma_0^2$ . Per esempio prendendo  $u(r) = \text{costante}$ , è facile dimostrare che

$$\sigma_0^2 \leq \Sigma^2 = < (3\Gamma_1 - 4) > (-\Omega/I) \quad (36.28)$$

dove  $\Omega$  è l'energia potenziale gravitazionale e  $I$  è il momento d'inerzia della stella rispetto al suo centro. Da questa si vede anche che se  $\Gamma_1 < 4/3$  la stella è dinamicamente instabile. Ancora, per una stella omogenea e con  $\Gamma_1$  costante

$$\sigma_0^2 = \frac{4}{3} (3\Gamma_1 - 4) \pi G \bar{\rho}. \quad (36.29)$$

Questa non è altri che una versione semplificata della relazione che definisce la costante di pulsazione  $Q$ .

Le soluzioni numeriche dell'equazione d'onda lineare adiabatica mostrano delle interessanti proprietà:

(a) In tutti i casi noti fino ad ora esaminati, per i quali  $\Gamma_1 > 4/3$  quasi ovunque nella stella e la condizione superficiale è soddisfatta,  $\xi(r)$  del modo fondamentale è una funzione monotonicamente crescente di  $r$ .

(b) La frequenza adimensionale  $\sigma_0^2 R^3 / GM$  del modo fondamentale in genere cresce con il crescere della concentrazione di massa misurata dal rapporto  $\rho_c / \bar{\rho}$  ma non in maniera monotona.

(c) Le ampiezze di oscillazione alla superficie e al centro stanno nel rapporto  $\xi_R / \xi_c = \rho_c / \bar{\rho}$ . In generale le stelle variabili sono stelle evolute per le quali il rapporto  $\rho_c / \bar{\rho}$  è piccolo e quindi questo comportamento della  $\xi$  sarà importante nel determinare le caratteristiche delle oscillazioni. Ancora, questo ci dice che le sorgenti nucleari di solito localizzate nelle regioni della stella con densità maggiori saranno poco affette dal fenomeno delle oscillazioni e quindi che esse avranno scarso o nullo effetto nel determinare la instabilità del sistema.

(d) Il rapporto  $Q_1 / Q_0$  dove  $Q_1$  e  $Q_0$  sono i periodi del primo modo e del modo fondamentale, rispettivamente, aumenta al crescere di  $\sigma_0^2 R^3 / GM$ .

(e) In quasi tutti i casi il nodo del primo modo cade nell'intervallo  $0.75 < r/R < 0.85$ .

(f) Il grande valore del rapporto fra le ampiezze di oscillazione  $\xi_R / \xi_c$  suggerisce che la pulsazione stellare è essenzialmente un fenomeno di superficie. Questa conclusione è rinforzata dalla valutazione dell'energia pulsazionale  $\Psi$  posseduta da una stella pulsante. Si trova che  $\Psi \simeq 10^{-3} < |\xi|^2 / |\xi_R|^2 > (-\Omega)$  ovvero  $\Psi \simeq 10^{-8}(-\Omega)$ , atteso che per concentrazioni tipiche  $< |\xi|^2 / |\xi_R|^2 > = 10^{-5}$ .

### 36.1.2 Trattazione Non Adiabatica

Poichè il sistema è ora non conservativo ci aspettiamo di trovare soluzioni con frequenze complesse cioè con ampiezze crescenti o decrescenti su scale di tempo secolari e pertanto adatte allo studio della stabilità pulsazionale delle stelle.

La metodologia matematica è simile al quella seguita nel caso adiabatico. Assumiamo che tutte le variabili abbiano una dipendenza temporale del tipo  $\exp(i\omega t)$  dove  $\omega$  è in generale complesso:  $\omega = \sigma + i\kappa$ ,  $\sigma = 2\pi/\Pi$  è la pulsazione angolare (periodo) e  $\kappa$  è il coefficiente di stabilità. Le pulsazioni sono smorzate (stabili) o amplificate (instabili) a seconda che  $\kappa$  sia positivo o

negativo.

Quando il fattore  $\exp(i\omega t)$  è stato introdotto nelle equazioni di conservazione della massa, del momento, dell'energia, del flusso e nella relazione di produzione di energia, esiste una sola variabile indipendente e cioè la variabile lagrangiana  $x = r/R$  e le equazioni sono equazioni differenziali ordinarie.

Se l'equazione del flusso ha solo derivate prime rispetto all temperatura, il sistema risultante è del quarto ordine, lineare ed omogeneo. Tuttavia nel caso di oscillazioni non adiabatiche, la fase delle variazioni non è costante attraverso la stella ed ogni variazione deve essere considerata come una variabile complessa. Nelle vere variabili il sistema è dell'ottavo ordine.

Le costanti del problema sono otto costanti di integrazione più  $\sigma$  e  $\kappa$ . Quando le equazioni sono applicate ad una stella reale di data  $L$ ,  $M$  e  $R$ , le condizioni al centro ed alla superficie determinano le otto costanti di integrazione, mentre le rimanenti due sono arbitrarie. Il problema è ancora agli autovalori in  $\sigma$  e  $\kappa$ . Tuttavia questo modo di procedere non è usato molto spesso in quanto esistono modi più semplici per valutare  $\kappa$ .

È possibile combinare le quattro equazioni in un'unica equazione differenziale complessa del quarto ordine. Essa però non è della forma  $\Lambda \xi = \omega^2 \xi$ . Poichè gli autovalori non sono autovalori di un operatore hermitiano essi non godono della proprietà minimale del caso adiabatico. Come condizioni al contorno possiamo imporre che tutte le variabili pulsazionali e le loro derivate rimangano finite al centro ed alla superficie. La dettagliata discussione di queste non è strettamente necessaria nel contesto di una presentazione semplice del problema.

Partendo dalla equazione (36.16), assumiamo una soluzione del tipo

$$\zeta(r, t) = \frac{\delta r}{r} = \xi(r) e^{i\omega t} \quad (36.30)$$

$$\delta(\epsilon - \frac{\partial L}{\partial M_r}) = \delta(\epsilon - \frac{\partial L}{\partial M_r})_{sp} e^{i\omega t} \quad (36.31)$$

dove  $\xi$  e  $\delta(\epsilon - \partial L / \partial M_r)_{sp}$  (parte spaziale di) sono in generale complesse. Si ottiene

$$\begin{aligned} -i\omega^3 \xi - i\omega \left( \frac{\xi}{r\rho} \right) \frac{d}{dr} [(3\Gamma_1 - 4)P - i\omega \left( \frac{1}{\rho r^4} \right) \frac{d}{dr} (\Gamma_1 P r^4 \frac{d\xi}{dr})] = \\ - \left( \frac{1}{r\rho} \right) \frac{d}{dr} [\rho(\Gamma_3 - 1) \delta(\epsilon - \frac{\partial L}{\partial M_r})_{sp}] \end{aligned} \quad (36.32)$$



dove il secondo e terzo termine del membro di sinistra possono essere scritti come  $i\omega\Lambda\xi$  e dove  $\Lambda$  è un operatore di ovvia definizione. Moltiplichiamo ora per  $\xi^*r^2dM_r$  ed integriamo sulla massa totale  $M$ :

$$i\omega^3J - i\omega \int_M \xi^* \Lambda \xi r^2 dm = C \quad (36.33)$$

con

$$J = \int_M |\xi|^2 r^2 dM_r \quad (36.34)$$

(momento di inerzia di oscillazione) e

$$\int_0^M \xi^* \Lambda \xi r^2 dM_r = \int_0^R \left\{ 4\pi\Gamma_1 P r^4 \left| \frac{d\xi}{dr} \right|^2 - 4\pi r^3 |\xi|^2 \frac{d}{dr} [(3\Gamma_1 - 4)P] \right\} dr \quad (36.35)$$

dove nell'ottenere il membro di destra è stata eseguita una integrazione per parti assumendo che a  $r = R$  sia  $P = 0$ . Infine abbiamo

$$C = - \int_0^R \rho(\Gamma_3 - 1) \delta(\epsilon - \frac{\partial L}{\partial M_r})_{sp} \frac{d(4\pi r^3 \xi^*)}{dr} dr. \quad (36.36)$$

Quest'ultima è stata ottenuta assumendo che a  $r = R$  sia  $\rho = 0$ ,  $\delta(\epsilon - \partial L / \partial M_r)_{sp} = 0$  e  $P/\rho = 0$  a  $r = R$ . Ricordando che in base all'equazione linearizzata di continuità di massa  $-d(r^3 \xi^*)/r^2 dr = (\delta\rho/\rho)^*_{sp}$  si ricava

$$C = \int_0^M (\Gamma_3 - 1) \left( \frac{\delta\rho}{\rho} \right)^*_{sp} \delta(\epsilon - \frac{\partial L}{\partial m})_{sp} dm = C_r + iC_i \quad (36.37)$$

dove la parte reale è proporzionale alla potenza mediata su un ciclo con cui le forze di pressione e gravità compiono lavoro sull'intera stella.

La parte immaginaria sarebbe nulla se  $\delta(\epsilon - \partial L / \partial M_r)$  fosse esattamente in fase con  $(\delta\rho/\rho)$ .

Si può vedere che il principale effetto di  $C_i$  è quello di alterare il periodo di pulsazione rendendolo lievemente crescente o decrescente col tempo.

Si può anche dimostrare che  $\kappa$  e  $C_r$  sono legati fra loro dalla relazione

$$\kappa = - \frac{C_r}{2J\sigma^2} \quad (36.38)$$

e che pertanto l'oscillazione è smorzata se  $\kappa > 0$  ovvero se  $C_r < 0$ ; essa è amplificata se  $\kappa < 0$  ovvero se  $C_r > 0$ .

È quindi  $C_r$  che determina la stabilità pulsazionale del sistema. Il tempo scala di smorzamento o amplificazione dell'oscillazione  $\tau_d = 1/|\kappa|$  è anche uguale a  $\tau_d = |2J\sigma^2/C_r|$ .

Vari processi fisici concorrono a determinare il segno di  $C_r$ , fra questi sono di primaria importanza le sorgenti nucleari e i meccanismi di trasporto dell'energia (soprattutto per radiazione e per convezione) e il modo con cui quest'ultimi reagiscono a variazioni di densità e di pressione indotte dalle oscillazioni.

La discussione dettagliata di questi esula da una trattazione semplice. Basti ricordare come originalmente messo in evidenza da Eddington, che affinché una stella sia instabile è necessario che la regione contenente il meccanismo responsabile deve sovra-riscaldarsi durante la compressione e sovra-raffreddarsi durante l'espansione.

Fra tutti i meccanismi in gioco uno è particolarmente importante ed è quello dovuto alla ionizzazione degli elementi nelle regioni più esterne delle stelle.

## 36.2 Instabilità da Ionizzazione

Atteso che nella maggior parte delle stelle le reazioni nucleari hanno un effetto totalmente trascurabile nel fenomeno della pulsazione, in quanto l'ampiezza di pulsazione è molto piccola nelle regioni in cui queste sono attive, la sorgente dell'instabilità è stata cercata nell'involuppo ed identificata con la ionizzazione degli elementi.

La capacità della ionizzazione di stimolare le pulsazioni risiede nel fatto che essa produce modulazioni delle variazioni di flusso tali che queste regioni assorbono energia nella fase di compressione e perdono energia in quella di espansione. In conseguenza di ciò, il massimo di pressione in questi strati viene dopo la massima densità favorendo l'insorgere dell'instabilità. Infine la regione di ionizzazione è localizzata negli zone esterne della stella dove le ampiezze di pulsazione sono maggiori.

Al contrario, le regioni interne hanno piccole ampiezze di oscillazione e mostrano tendenze opposte favorendo così la stabilità.

Gli effetti prodotti dalle modulazioni del flusso possono essere spiegati per mezzo dell'integrale  $C_r$  scritto in forma opportuna

$$C_r = \int_0^M -L_T(\Gamma_3 - 1) \left( \frac{\delta \rho}{\rho} \right) \frac{d}{dM_r} \left( \frac{\delta L}{L} \right) dM_r \quad (36.39)$$

dove tutte le variazioni denotano la parte spaziale delle variabili corrispondenti, le sorgenti nucleari vengono trascurate,  $L$  è la luminosità interna ad una sfera di raggio  $r$ ,  $(\delta \rho / \rho)$  è assunto reale e positivo (le regioni hanno la massima densità in corrispondenza del minimo raggio) e finalmente il valore di equilibrio di  $L$  è assunto costante con la massa ed uguale alla luminosità totale  $L_T$ . Valori negativi e positivi di  $C_r$  indicano stabilità ed instabilità, rispettivamente.

Assumendo che l'energia sia trasportata solo dalla radiazione (approssimazione ragionevole nella maggior parte dei casi), le variazioni di luminosità sono date da

$$\frac{\delta L}{L} = 4 \frac{\delta r}{r} - \frac{\delta \kappa}{\kappa} + 4 \frac{\delta T}{T} + \frac{dr_0}{d \ln T_0} \frac{d}{dr_0} \frac{\delta T}{T} \quad (36.40)$$

dove le quantità in parentesi hanno significato ovvio ed il pedice  $o$  si riferisce allo stato di equilibrio. Usando l'approssimazione quasi adiabatica

$$\frac{\delta T}{T} = (\Gamma_3 - 1) \frac{\delta \rho}{\rho} \quad (36.41)$$

assumendo per l'opacità una legge di tipo Kramers ( $\kappa = \kappa_0 \rho^n T^{-s}$ ), e trascurando l'ultimo termine nella equazione (36.40) si ottiene

$$\left( \frac{\delta L}{L} \right)_a = 4 \frac{\delta r}{r} + [(s+4)(\Gamma_3 - 1) - n] \frac{\delta \rho}{\rho} \quad (36.42)$$

assieme a

$$\frac{\delta L}{L} = 4 \frac{\delta r}{r} - n \frac{\delta \rho}{\rho} + (s+4) \frac{\delta T}{T}. \quad (36.43)$$

Nella maggior parte dei casi, poichè  $d(\delta L / L) / dm$  risulta positivo,  $C_r$  è negativo e la stabilità è garantita.

Questo può essere facilmente compreso nel seguente modo: alla massima compressione le variazioni di luminosità crescono con la distanza radiale e pertanto maggiori quantità di calore fluiscono verso l'esterno da ogni elemento di materia di quante non ne fluiscono verso l'interno e la pulsazione viene smorzata.

Questo deriva essenzialmente dalle variazioni di opacità, la quale solitamente diminuisce per effetto della compressione (si ricordi la dipendenza dalla temperatura e densità della legge di Kramers).

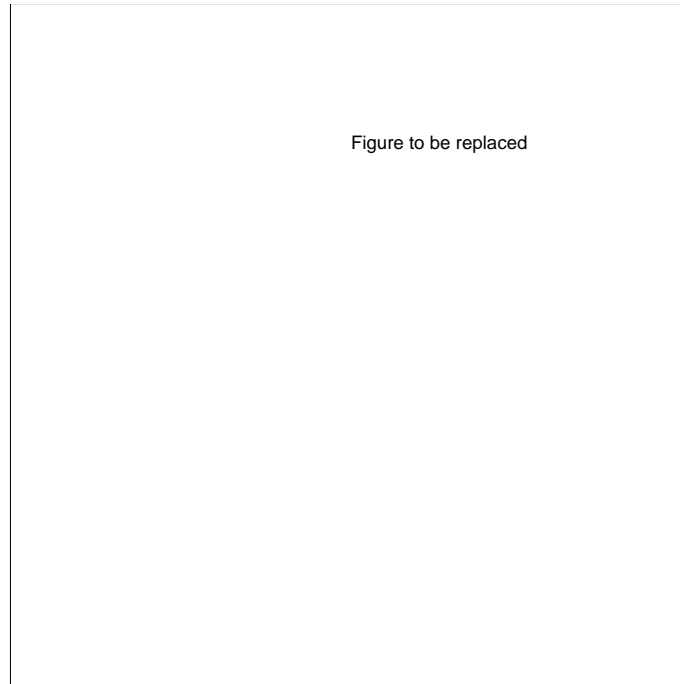


Figura 36.2: Andamento di  $\Gamma_3 - 1$  nella zona di ionizzazione

Tuttavia per effetto della ionizzazione di elementi come H,  $He^+$ , C, and O,  $(\Gamma_3 - 1)$  diventa molto piccolo, in quanto gran parte del lavoro di compressione adiabatica va nella ionizzazione del gas invece che in energia cinetica di agitazione termica, cosicchè la temperatura del gas rimane quasi costante durante la compressione.

La variazione di  $(\Gamma_3 - 1)$  in funzione della temperatura nella regione di ionizzazione del  $He^+$  è mostrata in forma schematica nella Figura 36.2.

Il comportamento di  $(\Gamma_3 - 1)$  può essere facilmente compreso considerando che la ionizzazione rappresenta gradi interni di libertà addizionali. In conseguenza di ciò, le variazioni adiabatiche di luminosità hanno un minimo pronunciato nella zona di ionizzazione. La parte decrescente di  $(\delta L/L)_a$  in corrispondenza delle regioni più interne della zona di ionizzazione indica assorbimento di energia al massimo della compressione ed agisce come la sorgente di destabilizzazione. La diminuzione di  $(\Gamma_3 - 1)$  e  $(\delta L/L)_a$  sono in parte il risultato della minore variazione di temperatura in presenza di ionizzazione. Questo effetto diretto delle variazioni di temperatura sulle variazioni di luminosità è chiamato *meccanismo -  $\gamma$* .

Se l'opacità obbedisce ad una legge di tipo Kramers, ne segue che piccoli  $(\delta T/T)$



Figure to be replaced

Figura 36.3: Posizione della zona di transizione ed ionizzazione

nelle regioni di piccolo  $(\Gamma_3 - 1)$  possono far crescere  $\kappa$  durante la compressione, mentre di solito avviene il contrario. Questo aumento locale di opacità contribuisce ulteriormente all'instabilità. Esso è noto come *meccanismo*  $-\kappa$ .

Inoltre, durante la compressione ( $\delta r/r$  negativi), l'area totale irradiante è minore e pertanto maggior energia viene trattenuta nella regione, contribuendo a destabilizzarla ulteriormente. Questo è noto come *meccanismo*  $-r$  [primo termine nelle equazioni (36.43) e/o (36.44)].

Finalmente, se l'esponente  $s$  è grande e negativo (come nel caso dell'ionizzazione dell'idrogeno), ci può essere uno smorzamento della radiazione e quindi instabilità anche se  $\Gamma_3 - 1$  ha il valore normale. Questo effetto è importante nelle stelle  $\delta - \text{Scuti}$  and  $\beta - \text{Cephei}$  ed è noto come il *meccanismo*  $-bump$ .

Argomenti simili a quelli presentati fino ad ora portano a concludere che  $(\delta L/L)_a$  deve ricrescere verso l'esterno nelle regioni più periferiche della zona di ionizzazione, dando luogo pertanto ad effetti opposti. In generale, la grande instabilità potenziale data dalle regioni più interne è bilanciata dagli effetti opposti presenti nelle regioni più esterne. Tuttavia, a causa del comportamento non adiabatico,  $(\delta L/L)$  e  $(\delta L/L)_a$  non sono uguali nelle regioni più periferiche di una stella.

Per comprendere il ruolo del comportamento non adiabatico è utile dividere gli strati esterni in tre regioni distinte.

La prima è la zona più interna dove le oscillazioni sono usualmente quasi adiabatiche ed in cui l'instabilità è cancellata dalla stabilità.

La seconda è la regione più esterna, nella quale avviene la ionizzazione e gli effetti non adiabatici sono dominanti, ma nella quale la massa coinvolta è così piccola che le perturbazioni del flusso radiativo sono "congelate" cosicchè, grazie all'assenza di modulazione, non c'è contributo all'instabilità.

La terza regione, chiamata zona di transizione,  $TR$ , è situata tra la prima e la seconda e può essere grossolanamente definita dalla condizione che l'energia interna totale degli strati sovrastanti eguagli l'energia irradiata dalla stella in un periodo,

$$c_v T_{TR} \Delta M^* = L \cdot \Pi \quad (36.44)$$

dove  $c_v$  è il calore specifico a volume costante,  $T_{TR}$  è la temperatura media nella zona  $TR$ ,  $\Delta M^*$  è la massa sopra questa,  $L$  è la luminosità e  $\Pi$  il periodo.

La posizione di  $TR$  è essenzialmente regolata dal raggio di equilibrio della stella  $R$  (si può assumere che  $T_{TR} \propto R^{-0.5}$ ) e si sposta verso l'esterno in massa al crescere di  $R$ . L'effetto principale della non adiabaticità è quello di disaccoppiare  $(\delta L/L)$  da  $(\delta L/L)_a$  nelle regioni esterne a  $TR$ . Le variazioni di densità e temperatura sono tali che  $(\delta L/L)$  è mantenuto circa costante. Se  $R$  è così piccolo che la zona di ionizzazione sta tutta sopra  $TR$ ,  $(\delta L/L)$  è costante nella regione nonostante il minimo pronunciato di  $(\delta L/L)_a$ . Pertanto  $(\delta L/L)$  è positivo ed aumenta verso l'esterno fino a che viene raggiunta  $TR$  e poi rimane costante come mostrato in Figura 36.3 (pannello a). Ne segue che negli strati esterni esiste solo smorzamento e che la stella è stabile.

Simile situazione esiste per raggi molto grandi, in quanto  $TR$  si trova sopra la zona di ionizzazione. La diminuzione di  $(\delta L/L)$  nella zona di ionizzazione viene compensata dalla rapida salita prima di entrare nella zona  $TR$  (Figura 36.3, pannello b). Finalmente per valori opportuni del raggio  $T_{TR}$  eventualmente diventa quasi uguale alla temperatura caratteristica di ionizzazione degli elementi come  $He^+$ . In questo caso la regione di ionizzazione e  $TR$  sono quasi coincidenti (Figura 36.3 pannello c).

Gli strati interni della zona di ionizzazione sono essenzialmente dentro alla zona adiabatica, dove  $(\delta L/L) = (\delta L/L)_a$  e dove la diminuzione verso l'esterno di  $(\Gamma_3 - 1)$  provoca una forte diminuzione sia di  $(\delta L/L)_a$  sia di  $(\delta L/L)$ .

Al contrario, gli strati esterni della zona di ionizzazione stanno nel dominio nonadiabatico, dove  $(\delta L/L)$  è stato congelato al piccolo valore assunto nel minimo. In questo caso lo smorzamento dovuto agli strati esterni è eliminato dagli effetti non adiabatici, e la potenziale instabilità causata dalla diminuzione di  $(\delta L/L)$  nelle regioni interne diventa ora efficace e la stella è instabile.

Si può facilmente vedere che la condizione (36.43) che definisce  $TR$  implica che la regione di instabilità sia nettamente delimitata verso le alte  $T_{eff}$ , e che questo limite è quasi verticale nel diagramma H-R.

La estesissima letteratura esistente sulla banda di instabilità delle stelle Cefeidi e RR Lyrae ha mostrato chiaramente che la ionizzazione dell'  $He^+$  nell'involuppo è l'agente responsabile della loro pulsazione, mentre calcoli numerici molto dettagliati confermano lo scenario semplificato presentato in precedenza.

Il meccanismo della ionizzazione di involuppo, che spiega così bene il lato blu della banda di instabilità, non è in grado sulla base del semplice trasporto radiativo di spiegare il ritorno alla stabilità verso le basse  $T_{eff}$  indicato dalle osservazioni (lato rosso della banda di instabilità). Tuttavia al decrescere della  $T_{eff}$ , si instaura la convezione esterna e semplici argomenti ci permettono di dire che la convezione di involuppo spegne l'instabilità. Infatti il trasporto convettivo risulta tanto più efficiente quanto più la stella è compressa. Al massimo della compressione il tasso di perdita di energia raggiunge la massima efficienza e quindi favorisce la stabilità. Sfortunatamente, la modulazione del flusso in presenza di convezione è molto più complicato di quello nel caso radiativo, cosicché la determinazione del lato rosso della banda di instabilità è molto incerto. Questo implica che la larghezza della banda è oggetto di dibattito. Lungo il lato blu della strip di instabilità la condizione (36.43) può essere scritta in maniera alternativa

$$L = Q_i^\alpha Y^\beta Z^\gamma M^\delta T_{eff}^\delta \quad (36.45)$$

dove  $Q_i$  sono le costanti di pulsazione dei vari modi in esame,  $Y$  e  $Z$  sono, rispettivamente, le abbondanze di  $^4He$  ed elementi più pesanti e  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$ , e  $\delta$  sono

opportuni esponenti da fissarsi per mezzo di calcoli dettagliati di pulsazioni. Questa relazione ha una vasta gamma di applicazioni. Per esempio, essa racchiude la relazione periodo-luminosità. Se la  $T_{eff}$  è espressa in funzione di  $L$ , and  $R$ , se  $R$  a sua volta è espresso in funzione di  $\Pi$ ,  $M$  ed i  $Q_i$  sono presi dalla relazione periodo-densità media, allora per fissati  $Y$  e  $Z$ , la relazione (36.44) diventa una relazione fra  $L - M - \Pi$  e, a sua volta, assumendo una relazione  $L - M$ , essa fornisce  $L = L(\Pi)$ . Il periodo è noto crescere con la luminosità. La relazione (36.44) è anche utile per stimare come il lato blu della banda di instabilità sia affetto da variazioni nella composizione chimica. Per fissata  $L$ , un aumento in  $Y$  sposta il lato blu verso più alte  $T_{eff}$ , mentre un aumento in  $Z$  muove il lato blu verso  $T_{eff}$  più basse. Questo proviene soprattutto dall'opacità: un aumento in  $Y$  implica una diminuzione in  $H$  (usualmente la sorgente dominante di opacità nell'involuppo). Poichè il materiale nell'involuppo è più trasparente, la temperatura di ionizzazione dell  $He^+$  viene raggiunta a pressioni più elevate o equivalentemente per valori maggiori di  $\Delta m^*$ . Pertanto  $T_{eff}$  deve crescere affinché l'equazione (36.43) sia soddisfatta. Analogamente per le variazioni in  $Z$ . Inoltre, il lato blu dei modi di ordine più elevato (minori  $Q_i$ ) dovrebbe in generale stare a  $T_{eff}$  maggiori di quelle dei modi di ordine più basso. Questa previsione non è tuttavia sempre confermata dai calcoli dettagliati, in quanto la relazione (36.43) è una condizione necessaria ma non sufficiente all'instaurarsi della instabilità.

### 36.3 I Pulsatori Radiali

La maggior parte dei pulsatori radiali sono confinati nella banda quasi verticale nel diagramma H-R, nota come "instability strip" e di cui sono già state discusse le caratteristiche principali. Ogni volta che una stella nel corso della sua evoluzione attraversa la instability strip essa apparirà come una stella variabile le cui caratteristiche sono essenzialmente fissate dalla massa e dallo stadio evolutivo al momento del transito.

#### Variabili $\delta$ Scuti

Le variabili  $\delta$  Scuti sono stelle di tipo spettrale A localizzate lungo la sequenza principale dove essa interseca la banda di instabilità. Esse hanno piccole ampiezze di pulsazione (da 0.003 a 0.9 magnitudini) e periodi da 0.01 a 0.2



giorni.

### Variabili RR Lyrae

Le stelle RR Lyrae sono identificate con stelle di piccola massa durante la fase di bruciamento centrale dell'elio lungo il ramo orizzontale. Le stelle RR Lyrae sono di tipo spettrale A3-A6, hanno magnitudini assolute  $M_V$  circa uguali a 0.5 e luminosità assolute  $L = 10^2 L_\odot$ . La massa è compresa fra 0.5 e  $0.7 M_\odot$ . Esse sono localizzate lungo il ramo orizzontale nella regione dove questo interseca la instability strip e la loro pulsazione è stimolata dall'ionizzazione di HeII. Esse mostrano curve di luce diverse che sono correlate coi periodi. Le stelle RR-b hanno eccitati sia il modo fondamentale che il primo modo con rapporto  $Q_1/Q_0 = 0.75$ . Il prototipo di questa classe è la stella AQ Leo. Le RR Lyrae aventi un solo periodo sono a loro volta divise in due gruppi. Le RR-ab con periodi fra 0.3 e 1.2 giorni e con ampiezze di circa 0.5 magnitudini, le quali sono caratterizzate dall'avere curve di luce a "dente di sega" con ramo ascendente estremamente ripido. Il prototipo del gruppo è RR Lyrae stessa. Infine, le RR-c mostrano piccole ampiezze, in genere minori di 0.8 magnitudini, periodi brevi da 0.2 a 0.5 giorni e curve di luce quasi esattamente sinusoidali. Le RR Lyrae sono state ampiamente studiate negli ammassi globulari dove possono trovarsi in gran numero. La metallicità dedotta per le RR Lyrae indica che esse sono povere di metalli in linea con l'appartenere alla Popolazione II.

### Variabili $\delta$ Cefeidi

Le variabili  $\delta$  Cefeidi sono i prototipi delle stelle variabili in generale e sono la prima classe di variabili per la quale è stata scoperta la relazione luminosità-periodo. Esse sono stelle moderatamente massicce con massa fra 2 e  $5 M_\odot$  in fase di bruciamento dell'elio nel nucleo. Si ricordi che durante la fase di bruciamento dell'elio una stella in questo intervallo di massa compie un loop nel diagramma H-R e che pertanto ha almeno tre possibilità di attraversare la strip di instabilità. A causa delle diverse velocità di percorrenza del diagramma H-R, le stelle  $\delta$  Cefeidi sono generalmente associate alla seconda intersezione cioè quando la stella lasciata la linea di Hayashi evolve su scala nucleare verso lo stadio di maggior  $T_{eff}$  nel loop. Le stelle Cefeidi hanno periodi che vanno da 1 giorno a 140 giorni con ampiezze di pulsazione ad 0.01 a 2 magnitudini. Le stelle sono usualmente di tipo F al massimo e di tipo G o K al minimo. Le luminosità vanno da  $5 \times 10^2 L_\odot$  a  $2 \times 10^4 L_\odot$  a seconda della massa e stato

evolutivo. Le Cefeidi classiche sono di Popolazione I, occasionalmente associate ad ammassi aperti ed in questo caso la massa stimata è di circa  $5 - 10 M_{\odot}$ . Alcune possono essere membre di sistemi binari come SU Cas. Le variazioni di velocità radiale mostrano che la massima espansione corrisponde alla massima luminosità. Il meccanismo di instabilità universalmente accettato è quello della ionizzazione. Un sotto gruppo chiamato Cefeidi-B (o Cefeidi con bump) mostra evidenza di periodi multipli, usualmente con  $Q_1/Q_0 = 0.7$  e  $Q_0$  fra 2 e 7 giorni. La relazione periodo-luminosità-colore delle Cefeidi è di primaria importanza non solo per la verifica delle teorie della struttura stellare e delle oscillazioni ma anche quale uno dei calibratori primari delle scale distanza.

### **Variabili W Virginis: Cefeidi di Popolazione II**

Queste sono le variabili di Popolazione II corrispondenti alle Cefeidi classiche, ma con masse molto più piccole,  $0.5 - 0.8 M_{\odot}$ , identica struttura interna e quindi proprietà meccaniche e fotometriche simili. I periodi vanno da 0.5 a 35 giorni, le ampiezze di oscillazione da 0.3 a 1 magnitudini. Le stelle W Virginis a parità di periodo sono più deboli di circa  $0.7 - 2$  magnitudini rispetto alle Cefeidi classiche, un fatto che ha notevoli implicazioni cosmologiche. Infatti l'inclusione (errata) delle W Virginis nella relazione periodo-luminosità-colore delle Cefeidi classiche porta a sovrastimare la costante di Hubble e quindi a sottostimare la distanza delle galassie. Vale la pena di menzionare che il disaccordo fra l'età degli ammassi globulari e l'età apparente dell'universo portò infatti alla formulazione della teoria cosmologica dello stato stazionario ora abbandonata.

### **Variabili a Lungo Periodo**

**Variabili Mira.** Le variabili Mira, così chiamate dal nome Mira assegnato nel 1596 da Fabricius alla prima stella scoperta come variabile e cioè *o Ceti*, sono stelle giganti rosse con righe di emissione originate da una popolazione con massa compresa fra 1 e  $2 M_{\odot}$ . Esse hanno luminosità di circa  $10^3 \times L_{\odot}$  e  $T_{eff}$  inferiori a  $4000^{\circ}K$ . Esse appartengono alle classi spettrali Me, Ce Se e mostrano le maggiori ampiezze di pulsazione fra tutte le stelle variabili, con variazioni che vanno da 2.5 a 11 magnitudini nella banda ottica. I periodi sono compresi fra 80 e 1000 giorni ed oltre, con curve di luce che sono abbastanza irregolari. Queste stelle sono forse il miglior esempio di pulsatori non lineari con effetti non adiabatici molto evidenti. Il meccanismo di instabilità presenta ancora delle notevoli incertezze. Le ampiezze di oscillazione sono così forti da

indurre la perdita di massa dalla superficie.

### **Variabili RV Tauri**

Le stelle RV Tauri sono supergiganti di tipo intermedio (F e G) con luminosità circa uguali a  $10^4 L_{\odot}$ , molto evolute e con periodi lunghi che vanno da 30 a 1000 giorni ed ampiezze di pulsazione di circa 3 – 4 magnitudini. Le stelle RV Tauri sono facilmente identificabili dalle loro caratteristiche curve di luce.

### **Variabili R Corona Borealis**

Le stelle R CrB sono stelle povere di H, ricche di He e spesso di C, caratterizzate da un comportamento semiregolare unico fra le stelle variabili. Esse mostrano diminuzioni quasi periodiche di magnitudine (da 1 a 10 magnitudini) su una scala di tempo da 30 giorni ad alcune centinaia di giorni). Gli intervalli fra questi eventi sono irregolari anche se una certa periodicità su scala di tempo inferiore all'anno può essere notata. Questi episodi sono anche associati all'emissione da parte della stella di notevoli quantità di polvere come indicato dalle osservazioni nella banda ultravioletta. La ragione di tale comportamento non è stata trovata. Infine le stelle R CrB occupano un ampio intervallo di tipi spettrali da B a C e sono di elevata luminosità, circa  $5 \times 10^4 L_{\odot}$ .

### **Variabili Semiregolari**

Esse sono stelle di elevata luminosità che mostrano variazioni fotometriche e di velocità radiale con scale di tempo dell'ordine di mesi o anni, ma che non sembrano essere periodiche. Le stelle supergiganti sono fra i migliori esempi di questa classe di variabili il cui prototipo è forse la supergigante  $\alpha$  Orionis. Esse vengono divise in tre gruppi. Le SRc hanno ampiezze di variazione fino ad una magnitudine ed intervalli di tempo che vanno dalla decina fino alle migliaia di giorni. Le luminosità sono comprese fra  $10^4$  a  $10^5 L_{\odot}$  e le  $T_{eff}$  sono nell'intervallo  $2000 - 4000^{\circ}K$ . Esse si sovrappongono alle variabili R CrB. Le SRa e SRb sono giganti simili alle precedenti ma di minore luminosità. Esse si sovrappongono alle stelle di tipo Mira.

### **Variabili Luminose Blu**

Le variabili luminose blu, recentemente riconosciute come supergiganti massicce, sono fra le stelle più luminose nella galassia e facilmente identificabili in galassie esterne. La loro luminosità è di circa  $10^6 L_{\odot}$  e la massa è superiore alle  $30 M_{\odot}$ . L'ampiezza di variazione è compresa fra 1 e 10 magnitudini. Esse mostrano variazioni in  $T_{eff}$  e luminosità su scale di tempo molto lunghe con

evidenza di emissione di strati di materia otticamente spessi tali da formare una pseudo fotosfera, cosicchè il tipo spettrale cambia da O a F. La stella galattica P Cygni ben nota per l'elevato tasso di perdita di massa e le irregolari variazioni di luce è il prototipo della categoria.

### 36.4 I Pulsatori Non Radiali

Le oscillazioni non radiali nelle stelle sono il risultato della mancanza di simmetria sferica causata o da rapida rotazione o dal disturbo provocato dalla presenza di un compagno. Tali pulsazioni sono spesso quasi adiabatiche e riguardano solamente l'atmosfera delle stelle e di conseguenza sono di corto periodo e di piccola ampiezza. I modi non radiali sono eccitati dalla forza gravitazionale piuttosto che dalle forze di pressione e sono molto più sensibili all'equazione di stato che all'opacità.

#### Stelle $\beta$ Cephei

Le stelle  $\beta$  Cephei o  $\beta$  Canis Majoris sono i prototipi dei pulsatori non radiali. Esse non mostrano una struttura semplice di modi di oscillazione ma pulsano contemporaneamente in modi diversi. I periodi sono estremamente brevi, circa 3 – 6 ore. Il gruppo più studiato sta nell'intervallo spettrale B2-B3 IV-V con periodi tra 0.02 e 0.04 giorni ed ampiezze fra 0.015 e 0.025 magnitudini. Nel diagramma H-R, le stelle  $\beta$  Cephei visualizzano una regione di instabilità nettamente distinta da quella delle Cefeidi classiche o delle RR Lyrae. Essa è grosso modo parallela alla sequenza principale e con classe di luminosità IV tipica delle fasi vicine all'esaurimento dell'idrogeno nel centro. Il meccanismo responsabile dell'instabilità di queste stelle non è noto. Esso è stato alternativamente identificato o con la convezione di involuppo o con un aumento ad hoc dell'opacità attorno a circa  $10^5 K$ , dove avviene la ionizzazione degli elementi del gruppo del CNO. Le ragioni addotte per tale aumento di opacità sono plausibili dal punto di vista della fisica atomica.

#### Stelle Nane Bianche

Alcuni tipi di stelle variabili sono state trovate fra le stelle degeneri. Le più calde sono chiamate GW Virginis. Queste stelle sono nane bianche di He molto calde con  $T_{eff}$  attorno a  $10^5 K$ . Esse mostrano piccole ampiezze e periodi di circa 500 sec entrambi tipici dei modi non radiali. Alcune delle stelle centrali

delle nebulose planetarie appartengono a questa classe con periodi fino a 2000 sec. Quelle più fredde hanno come prototipo la stella ZZ Ceti. Esse sono nane bianche di tipo DA con temperature fra  $10^4$  e  $2 \times 10^4$  K situate lungo il prolungamento della banda di instabilità e sono state predette dalla teoria. Il meccanismo stimolante l'instabilità è la regione convettiva superficiale di H. I periodi sono da 500 a 1000 sec e le masse attorno a  $0.6 M_{\odot}$ . Le stelle DBV, le analoghe ricche di He delle stelle ZZ Ceti, hanno  $T_{eff}$  comprese fra  $2 \times 10^4$  e  $3 \times 10^4$  K e proprietà simili. In entrambi i casi le ampiezze sono comprese fra alcuni decimi ed alcuni centesimi di millimagnitudine.



## Capitolo 37

# IL DIAGRAMMA HR

### 37.1 Introduzione

La teoria della formazione, struttura ed evoluzione stellare sviluppata nel corso dei capitoli precedenti ha come scopo ultimo la comprensione non solo delle proprietà delle singole stelle, ma anche di quelle di insiemi di stelle, quali gli ammassi stellari e le popolazioni stellari in generale.

Il dato fondamentale da analizzare è costituito dal diagramma HR, nel quale le singole stelle occupano una posizione determinata dalla loro massa, composizione chimica e stadio evolutivo, o equivalentemente età.

Gli ammassi stellari sono il laboratorio ideale in cui verificare le teorie della struttura ed evoluzione stellare, in quanto le stelle costituenti hanno essenzialmente la stessa età e stessa composizione chimica iniziale.

I processi che portano alla formazione delle stelle di un ammasso regolano anche la distribuzione di queste nei vari intervalli di massa o in altre parole determinano la funzione iniziale di massa (IMF).

I diagrammi HR di popolazioni stellari più complesse quali quelle presenti nelle diverse componenti delle galassie di ogni tipo morfologico sono più difficili da analizzare in quanto sono presenti stelle di ogni massa composizione chimica, ed età in percentuali che sono legate alla complessa storia della formazione stellare ed arricchimento chimico che ha avuto luogo nel passato.

In questo capitolo ci limiteremo alla discussione di alcuni aspetti fondamentali essenzialmente legati allo studio di singole popolazioni stellari, quali quelle presenti negli ammassi.

### 37.2 Funzione iniziale di massa

I passi necessari alla ricostruzione della funzione iniziale di massa (IMF) dalle osservazioni, numero di stelle per intervallo di magnitudine (e di colore) sono complessi ed affetti da notevole incertezza.

Tuttavia il quadro emergente dalle osservazioni e dall'incompleta conoscenza del problema è che la IMF delle stelle di ammasso è molto simile a quella delle stelle di campo, che entrambe sono rimaste abbastanza stabili durante gli ultimi  $10^{10}$  anni, ed infine che le stelle di piccola massa sono formate in numero molto maggiore di quelle di grande massa.

Una popolare rappresentazione della IMF è una legge di potenza del tipo

$$\Phi(M)dM = M^{-\alpha}dM \quad (37.1)$$

con  $\alpha$  uguale a circa  $2 \pm 0.5$ . Una rappresentazione più accurata per le stelle di campo è una distribuzione log-normale.

La relazione (37.1) deve essere completata con i limiti di massa inferiori e superiori,  $M_i$  e  $M_s$  rispettivamente. La determinazione di  $M_i$  è molto incerta attesa la difficoltà di accurati conteggi di stelle di bassa luminosità. Esso è per ora noto più per via teorica che osservativa ed è posto attorno ad  $0.1 M_\odot$  come suggerito dal fatto che la massa minima per l'innesco del bruciamento dell'idrogeno è circa  $0.07 M_\odot$  e che un valore simile si ottiene dalla teoria della frammentazione.  $M_s$  è invece determinabile con maggior certezza dalle osservazioni ed è posto attorno a  $100 M_\odot$ . Non è chiaro come entrambi i limiti dipendano dalle condizioni fisiche, ad esempio composizioni chimica, del mezzo in cui si formano le stelle.

Non è ancora chiaro se  $\alpha$  sia costante in tutto il dominio di massa o se vari con questa. È opinione corrente che  $\Phi(M)$  deve avere un picco nel dominio delle piccole masse e poi declinare verso il limite  $M_i$ , il che implica una variazione di  $\alpha$  con  $M$ . Non è stato ancora compreso se e come  $\alpha$  dipenda dalle condizioni fisiche del mezzo, se vari dalle stelle di campo a quelle di ammasso, con la posizione nella nostra galassia, ed infine da galassia a galassia.

La distribuzione delle stelle nel diagramma H-R di un ammasso riflette dunque l'età, la composizione chimica iniziale, la durata relativa delle fasi evolutive coinvolte e la IMF.



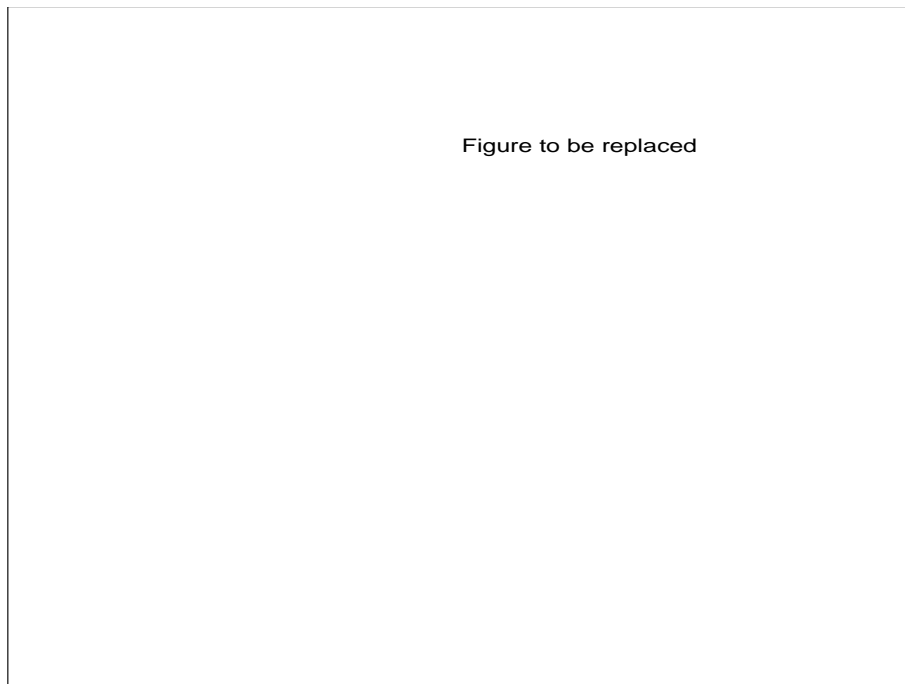


Figura 37.1: Isocrone per età tipiche degli ammassi aperti vecchi ed ammassi globulari

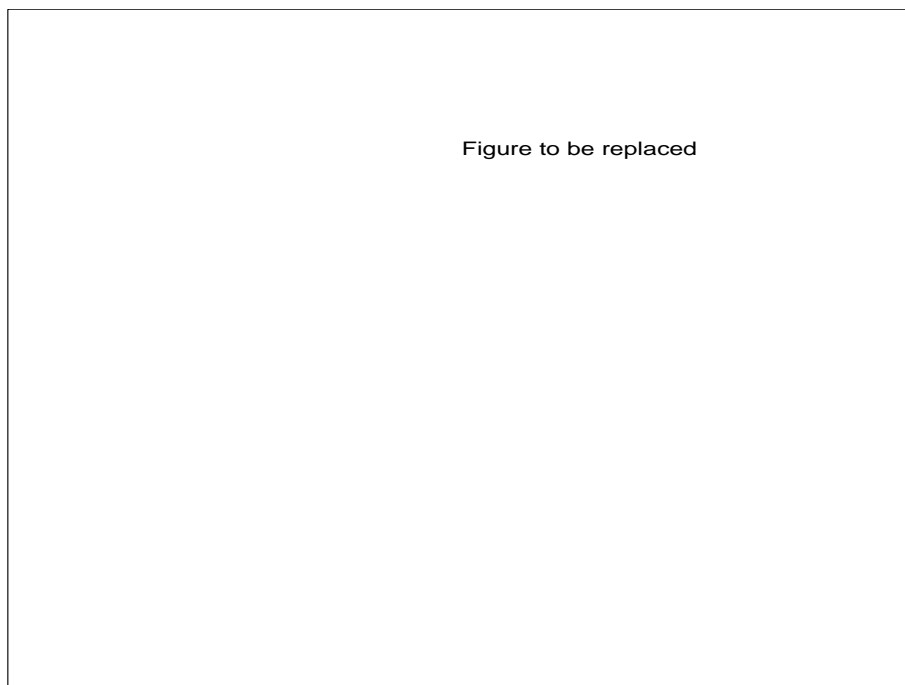


Figura 37.2: Isocrone per età tipiche degli ammassi stellari giovani

### 37.3 Isocrone

Lo strumento più idoneo per analizzare le proprietà dei diagrammi H-R e da queste risalire ai parametri fondamentali età, composizione chimica, IMF è quello delle isocrone e delle funzioni di luminosità per le stelle di sequenza principale ed evolute.

Poichè le stelle hanno tempi di vita nelle diverse fasi nucleari che decrescono con la massa ed evolvono nel diagramma H-R con velocità crescenti con la massa, la costruzione dell'isocrona consente di fissare la posizione nel diagramm H-R delle stelle aventi masse e velocità evolutive diverse. La Figura 37.1 mostra due gruppi di isocrone nel diagramma H-R osservativo, magnitudine assoluta  $M_V$  in funzione dell'indice di colore intrinseco  $(B-V)_0$ , per due scelte dei parametri di composizione chimica appropriate per gli ammassi globulari, mentre la Figura 37.2 presenta isocrone di età molto più giovane e composizione chimica appropriate per ammassi aperti giovani ed ammassi globulari giovani, quali quelli osservati nella galassia irregolare vicina Grande Nube di Magellano.

Si ricordi che l'indice di colore intrinseco è quello corretto per arrossamento dovuto alla materia interstellare.

Si noti come le isocrone abbiano una forma molto simile alle tracce evolutive. Questo è essenzialmente dovuto alla forte dipendenza dei tempi evolutivi dalla massa della stella.

Inoltre, atteso che la traccia evolutiva di una stella di data massa non è percorsa a velocità costante, ma esistono fasi lente (bruciamenti nucleari) e fasi veloci (contrazioni e/o espansioni gravitazionali), le isocrone corrispondenti non sono egualmente popolate, ma la distribuzione del numero di stelle lungo quest'ultime rifletterà le velocità evolutive.

Questo può essere compreso mediante la teoria dell'evoluzione di una popolazione coeva e facilmente visualizzato mediante la tecnica dei diagrammi H-R sintetici, in cui le stelle vengono distribuite lungo una data isocrona mediante un algoritmo opportuno che pesa il loro numero relativo sulla base dei tempi di vita e funzione iniziale di massa.

È chiaro che per ogni età sono osservabili nell' ammasso solamente le stelle il cui tempo di vita nucleare totale è maggiore o uguale all'età scelta. Ne segue che sono presenti stelle in fasi nucleari attive fino ad un valore massimo della massa

funzione dell'età in questione. Stelle con massa maggiore o sono già esplose come supernove o sono presenti come oggetti collassati (buchi neri, stelle di neutroni, nane bianche come appropriato) in ogni caso di difficile osservabilità.

## 37.4 Teoria delle SSP

La popolazione stellare di un ammasso si avvicina alla condizione ideale in cui tutte le stelle hanno la stessa composizione chimica ed età e possono essere studiate con la teoria delle singole popolazioni stellari (SSP) originariamente dovuta a Tinsley (1980) e successivamente sviluppata da Renzini e Buzzoni (1986).

Questa costituisce uno strumento fondamentale per la comprensione delle proprietà degli ammassi stellari e successivamente di sistemi complessi quali le galassie che possono essere pensati come la convoluzione di tante SSP di diversa età e composizione chimica.

Una SSP è definita come un insieme di stelle singole coeve e con la stessa composizione chimica iniziale. Per descrivere una SSP sono necessari quattro parametri:

- (1) età  $t$ ,
- (2) funzione iniziale di massa (IMF),
- (3) contenuto di elio  $Y$ ,
- (4) metallicità  $Z$ .

Le proprietà di una SSP sono governate dal teorema del *consumo nucleare*: *Il contributo alla luminosità bolometrica di una SSP da parte delle stelle in un qualunque stadio evolutivo di post sequenza è direttamente proporzionale alla quantità di combustibile bruciato durante quella fase.*

Supponiamo di approssimare la situazione in un ammasso a quella di una singola isocrona lungo la quale si collocano le stelle di massa diversa. È noto che il tempo di vita di una stella è funzione della massa e della sua composizione chimica e che una stella spende gran parte della sua vita nella fase di sequenza principale.

In una SSP di età  $t$ , la massa al turn-off  $M_{TO}$  è definita come la massa della stella che sta per esaurire l'idrogeno al centro. Le stelle con massa  $M_i < M_{TO}$  sono ancora in sequenza principale, mentre le stelle con  $M_i > M_{TO}$  sono in stadi evolutivi più avanzati.

Il turn-off può essere considerato come lo stadio a cui le stelle lasciano la sequenza principale, entrano nelle fasi successive, ed infine muiono (esplodono o diventano oggetti compatti).

La velocità con cui ciò avviene è data da

$$b(t) = \phi(M_{TO}) |\dot{M}_{TO}| \quad \text{stelle/anno} \quad (37.2)$$

dove  $\Phi(M_i) = AM_i^{-1+x}$  è la IMF of the SSP, e  $\dot{M}_{TO}$  è la velocità con cui cambia la massa al turn-off al procedere dell'età. Essa viene calcolata dalla relazione fra massa al turn-off ed età della SSP. La funzione  $b(t)$  rappresenta il *flusso evolutivo* della popolazione ed è indipendente dal particolare stadio evolutivo. Essa dà la velocità con cui le stelle entrano ed escono da ogni porzione della isocrona (o particolare fase).

La luminosità bolometrica integrata  $L_T$  della popolazione è

$$L_T = \sum_i L_i \quad (37.3)$$

dove la sommatoria si estende a tutte le stelle.

Separiamo ora il contributo delle stelle della sequenza principale da quello delle stelle nelle fasi più avanzate. La luminosità totale  $L_T$  può essere scritta come

$$L_T = \sum_i^{MS} L_i + \sum_j^{PMS} n_j L_j \quad (37.4)$$

dove  $n_j$  è il numero di stelle nella j-esima fase evolutiva e  $L_j$  è la loro luminosità media.

Il contributo dalle stelle di sequenza è dato da

$$\sum_i^{MS} L_i = \int_{M_{inf}}^{M_{TO}} L(M) \phi(M) dM \quad (37.5)$$

dove  $M_{inf}$  è il limite inferiore della IMF. Per le stelle della sequenza principale  $L(M) \propto M^a$  con  $a \simeq 3$ . Adottando per la IMF la legge di Salpeter si ottiene

$$\sum_i^{MS} L_i \sim \frac{A}{a-x} \left( M_{TO}^{a-x} - M_{inf}^{a-x} \right) \quad (37.6)$$

dove  $x = 1.35$  è l'esponente della IMF.

Il contributo delle stelle di post sequenza può essere valutato considerando che il numero di stelle in ogni fase è proporzionale alla durata  $t_j$  della fase e che il coefficiente di proporzionalità è proprio  $b(t)$ . Pertanto si ha

$$n_j = b(t)t_j \quad (37.7)$$

Da questo si deriva

$$L_{PMS} = \sum_j^{PMS} b(t)t_j L_j = b(t) \sum_j^{PMS} F_j \quad (37.8)$$

dove  $F_j$  è il *consumo nucleare* durante la fase  $j$  dato da  $F_j = m_j^H + 0.1m_j^{He}$ , dove  $m_j^H$  e  $m_j^{He}$  sono le masse di H ed He burned bruciate durante la fase  $j$  (esprese in unità solari). La luminosità totale è allora

$$L_T \sim \frac{1}{2}M_{TO}^2 + b(t) \sum_j F_j \quad (37.9)$$

È subito evidente che il contributo alla luminosità totale aumenta all'aumentare del numero degli oggetti nella fase e che l'aumento di luminosità è funzione della durata della fase stessa.

Questa semplice teoria permette di stabilire che in un ammasso con età  $t$ , numero totale di stelle  $N_T$  e luminosità bolometrica totale  $L_T(t)$ , il numero di stelle aspettato nelle diverse fasi evolutive dopo la sequenza principale è proporzionale alla durata delle fasi stesse ed alla luminosità bolometrica totale

$$N_j = B[t]L_T(t)t_j \quad (37.10)$$

con  $B[t] = b(t)/L_T(t)$ .

Si dimostra che  $B(t)$  è quasi indipendente dalla  $\Phi(M)$  e quasi costante su un'ampio intervallo di età (esso varia da  $5 \times 10^{-10}$  a  $2 \times 10^{-11}$  per età comprese fra  $10^7$  e  $10^{10}$  anni).

Un esempio è dato dai conteggi nell'ammasso globulare M3 e dal confronto con le predizioni teoriche riportati in Tabella 37.1.

Quanto sopra chiarisce che il confronto dei risultati della teoria dell'evoluzione stellare con i dati di osservazione richiede per essere significativo che quest'ultimi siano acquisiti rispettando ovvi criteri di completezza statistica. Ad esempio i conteggi nei diagrammi H-R potranno essere ricondotti ai tempi di vita delle

Tabella 37.1: Numeri di stelle nelle varie fasi e durate corrispondenti. Confronto fra teoria ed osservazioni.  $N_J$  numero di stelle nella fase  $J$ .

FASE J	$N_J$	$t_J$	$t_J$	$L_J/L_\odot$	$L_J/L_T$	$L_J/L_T$
		Osservato	Teorico		Osservato	Teorico
MS	8334	5337	0.19	0.20		
SGB	1058	1650	1400	2798	0.10	0.09
RGB	342	530	515	10739	0.38	0.41
HB	80	125	100	3553	0.12	0.09
AGB	10	16	17	5524	0.20	0.21
P-AGB	1	0.6		1260	0.016	0.01

fasi evolutive corrispondenti solamente se per ogni fase il campione di stelle in esame raccoglie numeri di stelle vicini a quelli predetti dalla teoria delle SSP.

Solamente dopo aver raggiunto la necessaria completezza statistica, un eventuale disaccordo con la teoria può essere considerato suggerire una revisione di quest'ultima.

Questa è la maggiore difficoltà presente nel confronto dei risultati teorici con quelli osservativi.

Altra causa di incertezza risiede nella conversione dei dati osservativi (generalmente magnitudini e colori apparenti nelle bande fotometriche UBVRI) in magnitudini assolute e colori intrinseci (entrambi corretti per l'arrossamento dovuto alla materia interstellare) a luminosità o magnitudine bolometrica e  $T_{eff}$ . Questo è possibile se è noto l'assorbimento ed eccesso di colore (ad esempio  $A_V$  e  $E_{B-V}$ ), la distanza dell'ammasso, e se si conoscono opportune relazioni di conversione da colori a  $T_{eff}$ .

## 37.5 Ammassi Aperti ed Associazioni

La popolazione giovane della nostra galassia, il cui contenuto metallico è simile a quello del solè è apparentemente in grado di formare solo associazioni ed ammassi aperti poco consistenti contenenti da alcune centinaia ad alcune migliaia di stelle.

Le età degli ammassi aperti vanno da alcuni milioni di anni (anche meno nel

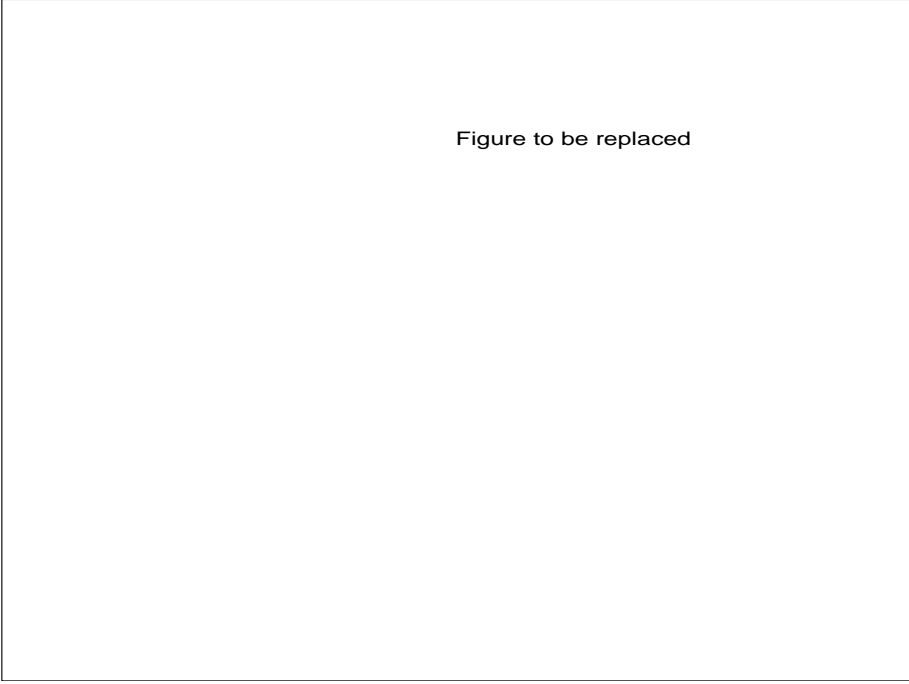


Figure to be replaced

Figura 37.3: Diagrammi H-R di tre ammassi giovani: NGC6231 (a) molto giovane, NGC884 (b) intermedio, NGC3766 (c) più vecchio, con sovrapposte isocrone di età crescente

caso delle associazioni) fino alle età degli ammassi globulari più antichi e cioè dell'ordine di  $10^{10}$  anni. La Tabella 37.2 contiene una compilazione di età e di metallicità di ammassi aperti galattici.

Questa compilazione non è esauriente ne tantomeno precisa, ma è puramente indicativa. Ognuno degli ammassi in Tabella 37.2 può essere considerato il prototipo di gruppi di ammassi aventi età simile.

La serie di Figure 37.3(a,b,c), 37.4 e 37.5 mostra il diagramma H-R di alcuni ammassi di età crescente con sovrapposte le isocrone corrispondenti. Dove necessario sono anche indicati l'eccesso di colore ed il modulo di distanza adottati nel passaggio da magnitudini e colori apparenti a quelli teorici. Infine la Figura 37.6 mostra la simulazione del diagramma H-R dell'ammasso aperto King 11.

In ognuno dei diagrammi è evidente che mentre la fase di sequenza principale è ben popolata, quelle di post sequenza (in particolare il bruciamento dell'elio nel nucleo) sono scarse di stelle, ciò dovuto al piccolo numero totale di stelle presenti negli ammassi aperti galattici. In particolare, si può notare l'evidenza del gap di Hertzsprung (ad esempio NGC 7789 ed IC 4651). Infine appare

Tabella 37.2: Età e metallicità di ammassi aperti galattici

Ammasso	(B-V) <sub>o</sub>	Z	Age (yr)
NGC 457	-0.230		1.4(e7)
NGC 884	-0.240		1.1(e7)
NGC 2362	-0.270		0.7(e7)
NGC 3766	-0.210		2.1(e7)
NGC 6231	-0.320		0.3(e7)
NGC 752	0.350	0.010	1.4(e9)
NGC 2360	0.300	0.012	1.4(e9)
Presepe	0.150	0.024	1.1(e9)
NGC 2660	0.015		1.1(e9)
NGC 3680	0.020		1.3(e9)
Iadi	0.100	0.025	1.2(e9)
NGC 7789	0.300	0.010	1.1(e9)
IC 4651	0.370	0.013	1.3(e9)
NGC 188	0.590	0.013	6.5(e9)
NGC 2141	0.500	0.006	6.0(e9)
NGC 2158	0.350	0.005	3.5(e9)
NGC 2204	0.360	0.008	4.0(e9)
NGC 2243	0.470	0.004	5.0(e9)
NGC 2420	0.500	0.006	6.0(e9)
NGC 2506	0.380	0.007	5.0(e9)
NGC 2682	0.460	0.011	4.5(e9)
NGC 6791	0.590		6.0(e9)
NGC 7142	0.430	0.005	5.0(e9)
Mel 66	0.520	0.006	7.0(e9)
King 2	0.900	0.020	6.0(e9)
King 11	0.550	0.020	5.0(e9)



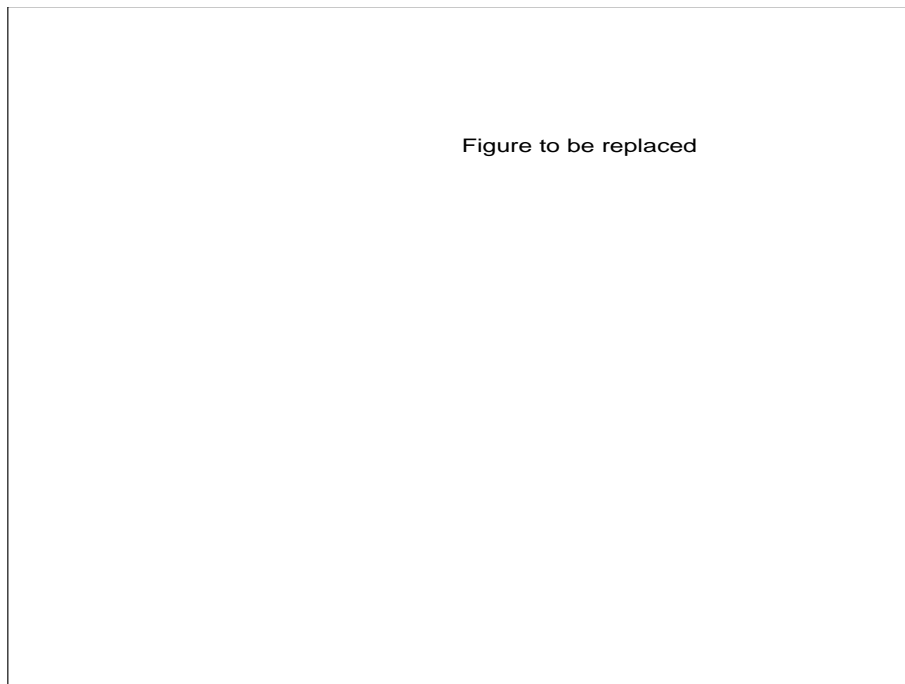


Figura 37.4: Due ammassi aperti relativamente vecchi

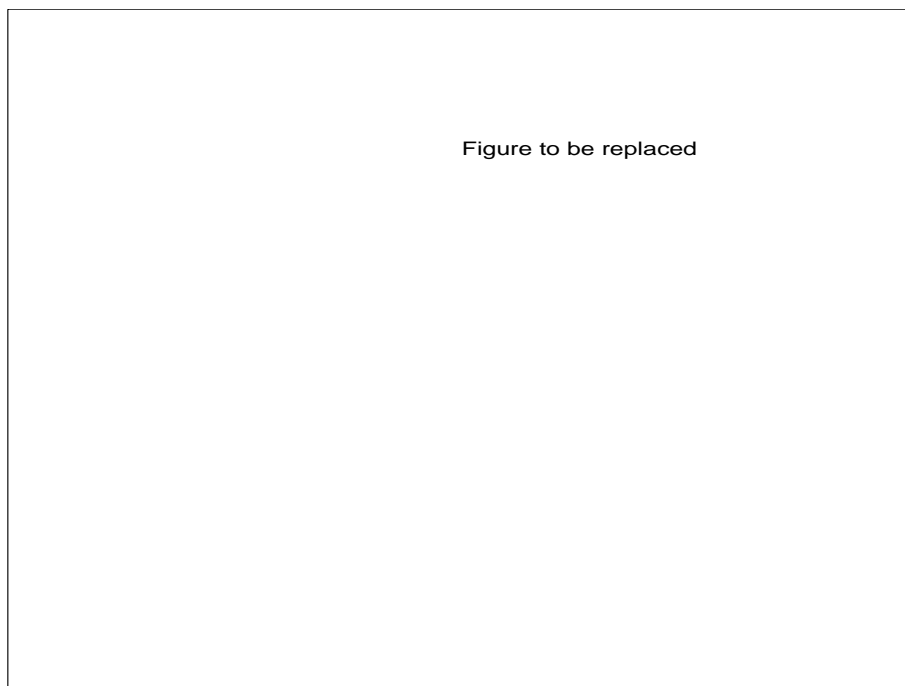


Figura 37.5: Diagramma H-R schematico di alcuni ammassi aperti vecchi



Figura 37.6: Diagramma H-R di King11 con una simulazione (punti)

abbastanza evidente che la maggior parte delle stelle in un ammasso possiede la stessa età, cioè il processo di formazione stellare ha avuto una durata abbastanza limitata. Questo è particolarmente vero per ammassi sufficientemente vecchi. Nonostante la difficoltà nell'interpretare i diagrammi H-R degli ammassi aperti galattici e quindi nell'assegnare modulo di distanza, arrossamento, età e composizione chimica ai singoli ammassi, l'accordo fra teoria ed osservazioni è molto soddisfacente (si veda la simulazione fatta per King 11 in Figura 37.6).

In alcuni ammassi, come le Pleiadi, si nota la presenza nelle regioni di bassa luminosità di una sequenza sopra la sequenza principale che viene comunemente interpretata come evidenza di formazione stellare in atto o più esattamente di stelle di piccola massa ancora nella fase di pre-sequenza principale.

In altri ammassi, ad esempio M 67, si notano alcune stelle sopra il prolungamento della sequenza principale, chiamate "blue stragglers", per le quali si è spesso suggerita la spiegazione di successivi episodi di formazione stellare in aggiunta ad altre interpretazioni, quali una diversa evoluzione in sistemi binari con parametri (rapporto delle masse e separazione) opportuni.

Infine sembra essere caratteristica comune che molte stelle negli ammassi siano binarie anche se sono tuttora incerte la frequenza e la distribuzione dei rapporti

di massa.

Un'ulteriore verifica della teoria dell'evoluzione stellare proviene dalla presenza in molti ammassi vecchi di stelle nane bianche. In questo caso la determinazione dell'età e quindi della massa delle stelle più evolute nell'ammasso è particolarmente importante in quanto permette di risalire alla massa dei progenitori delle nane bianche.

Alcuni tipi di stelle variabili sono presenti in ammassi aperti in particolare le stelle Cefeidi. La sicura appartenenza di una di tali variabili ad un ammasso è di grande utilità in quanto è possibile confrontare la massa della stella cefeide determinata dallo studio delle proprietà pulsazionali con quella derivata dalla sua posizione nel diagramma H-R dell'ammasso. In generale la massa pulsazionale è minore di quella evolutiva. Da molti anni questo è uno dei problemi insoluti della teoria dell'evoluzione stellare.

## 37.6 Ammassi Globulari Giovani

Forse la maggior caratteristica degli ammassi nella nostra galassia è la dicotomia fra gli ammassi globulari vecchi e massicci e gli ammassi aperti nel disco più giovani e meno massicci.

Tale dicotomia non esiste nel caso della Grande e Piccola Nube di Magellano, dove ammassi molto ricchi di stelle e pertanto massicci coprono l'intero intervallo di età che va da quelli molto vecchi come NGC 121 nella Piccola Nube a NGC 2257 o NGC 2164 nella Grande Nube molto simili agli ammassi giovani galattici.

Inoltre alcuni degli ammassi delle Nubi, ad esempio NGC 121 e NGC 1978, sono notevolmente appiattiti mentre gli ammassi globulari galattici sono pressochè sferici.

Infine, la maggior parte degli ammassi giovani delle Nubi sembrano avere una bassa metallicità (esistono tuttavia eccezioni) se confrontati con i gli ammassi galattici di pari età.

Ancora, nel diagramma H-R della magnitudine  $V$  e colore  $(B - V)$  integrati, gli ammassi della Grande Nube ed in misura minore anche quelli della Piccola Nube si distribuiscono in due regioni di colore: quelli più blu di  $(B - V) = 0.4$  e quelli più rossi di  $(B - V) = 0.6$ , indipendentemente dalla magnitudine integrata

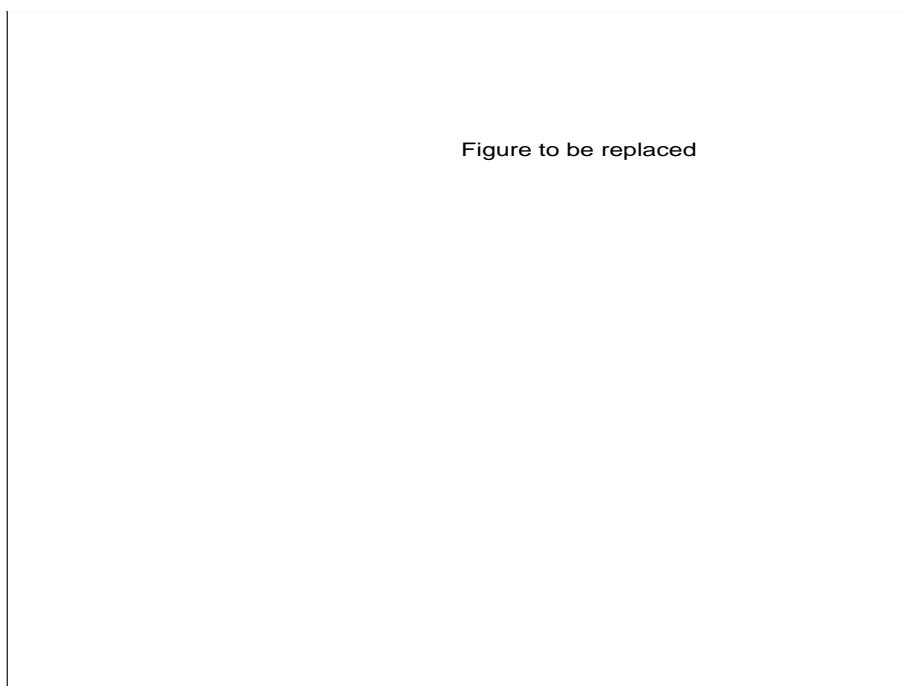


Figura 37.7: Diagramma H-R con isocrone degli ammassi globulari giovani NGC 2164 e NGC 1831 appartenenti alla Grande Nube di Magellano

(che ' una misura della massa totale).

Infine nella Grande Nube (e in minor misura anche nella Piccola Nube) quelli blu sono molto più numerosi di quelli rossi. In ciò essi differiscono nettamente da quelli della galassia Andromeda (M31) dove gli ammassi rossi sono di gran lunga i più numerosi.

La ragione del diverso comportamento delle famiglie di ammassi in galassie diverse non è ancora chiarezza.

Dal punto di vista dell'evoluzione stellare, l'interesse primario negli ammassi giovani delle Nubi di Magellano risiede nel fatto che grazie al loro elevato numero di stelle essi permettono un confronto accurato con le teorie dell'evoluzione stellare in quanto hanno sufficientemente popolate anche le fasi di breve durata che altrimenti sarebbero inosservabili. Basti pensare che uno solo di questi ammassi può contenere un numero di stelle in fasi di post-sequenza principale addirittura maggiore di quanto possibile sommando assieme l'intero contenuto stellare di numerosi ammassi aperti galattici. A ciò si aggiunga il fatto di avere in ognuno di questi ammassi un campione di stelle coevo e chimicamente omogeneo.

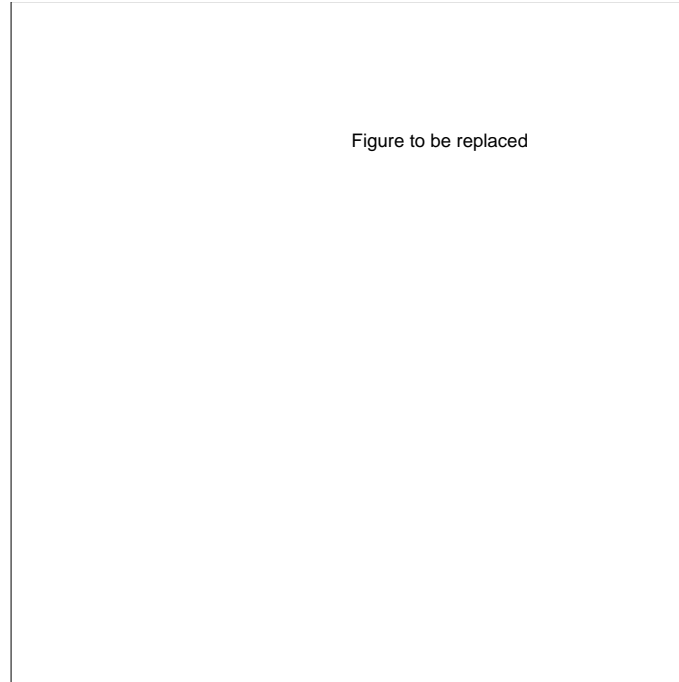


Figura 37.8: Diagramma H-R dell'ammasso della Grande Nube di Magellano NGC 2157 con le sue stelle cefeidi

Le Figure 37.7 e 37.8 mostrano i diagrammi H-R di tre di tali ammassi della Grande Nube limitatamente ad un campione del loro contenuto stellare che soddisfa a determinati criteri di completezza nella identificazione delle stelle e nella misura delle loro magnitudini.

Il caso di NGC 2157 è particolarmente interessante in quanto è uno dei tanti ammassi in cui sono state osservate stelle cefeidi, indice sicuro di età giovane.

Le funzioni di luminosità delle stelle della sequenza principale rapportate al numero delle stelle in fasi di post-sequenza (Figura 15.10) sono uno dei modi più sicuri per verificare le predizioni teoriche. Tale funzione di luminosità, nota anche come funzione di luminosità integrata  $[\Sigma_i N(\Delta V_i)/N_{pms}]$  con  $N(\Delta V_i)$  numero di stelle di sequenza principale per intervallo di magnitudine e  $N_{pms}$  numero di stelle in fasi di post-sequenza] è infatti controllata principalmente dalle durate relative delle fasi coinvolte ed, in misura molto minore, dalla funzione iniziale di massa.

Lo studio accurato del problema sembra suggerire che nel dominio delle stelle massicce e di massa intermedia (ammassi di età giovane) il rapporto fra il tempo di vita del bruciamento centrale dell'idrogeno e quello dell'elio deve essere mi-

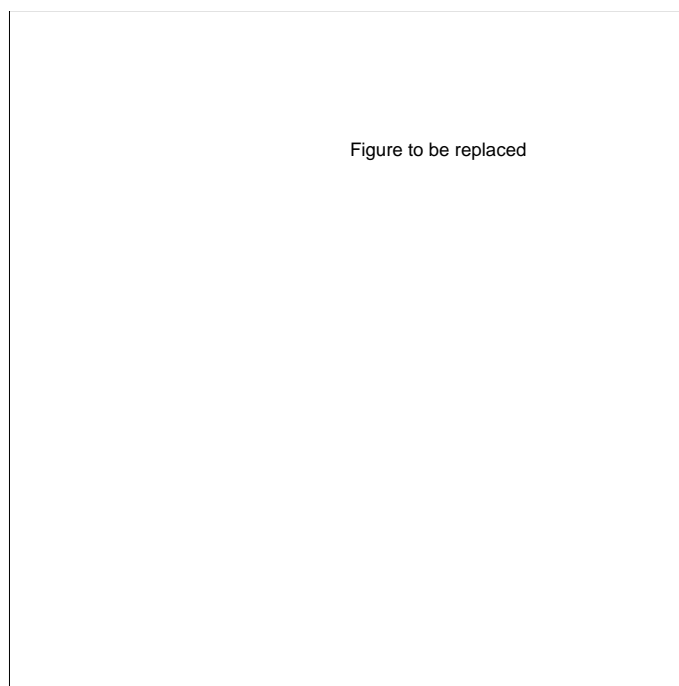


Figura 37.9: Funzioni di luminosità sperimentali e teoriche per l'ammasso NGC 1831 della Grande Nube di Magellano

nore di quanto predetto dalla teoria corrente. Ciò sembra forse indicare una maggior estensione dei nuclei convettivi di queste stelle. Il problema è attualmente oggetto di accurate indagini osservative e teoriche.

### 37.7 Ammassi Globulari Classici

Gli ammassi globulari, essendo i sistemi più antichi conosciuti nella galassia, contengono l'informazione fossile dei meccanismi che hanno portato alla formazione della stessa e pongono un limite inferiore all'età dell'Universo.

Inoltre, avendo gli ammassi globulari diverso contenuto metallico, essi pongono dei vincoli alla storia dell'arricchimento chimico in quelle epoche.

In particolare, la conoscenza accurata delle età e loro dispersione e del contenuto di elio e di metalli degli ammassi globulari, può chiarire se la galassia abbia subito un collasso su scala di tempo rapida ( $< 1 \times 10^9$  anni) o se invece abbia attraversato una fase di collasso prolungata e caotica estendentesi su di un periodo di alcuni miliardi di anni, se l'abbondanza di elio sia quella della nucleosintesi primordiale, se l'abbondanza di metalli sia correlata o no all'età e posizione dell'ammasso nell'alone oppure sia dovuta ad un processo di autoin-

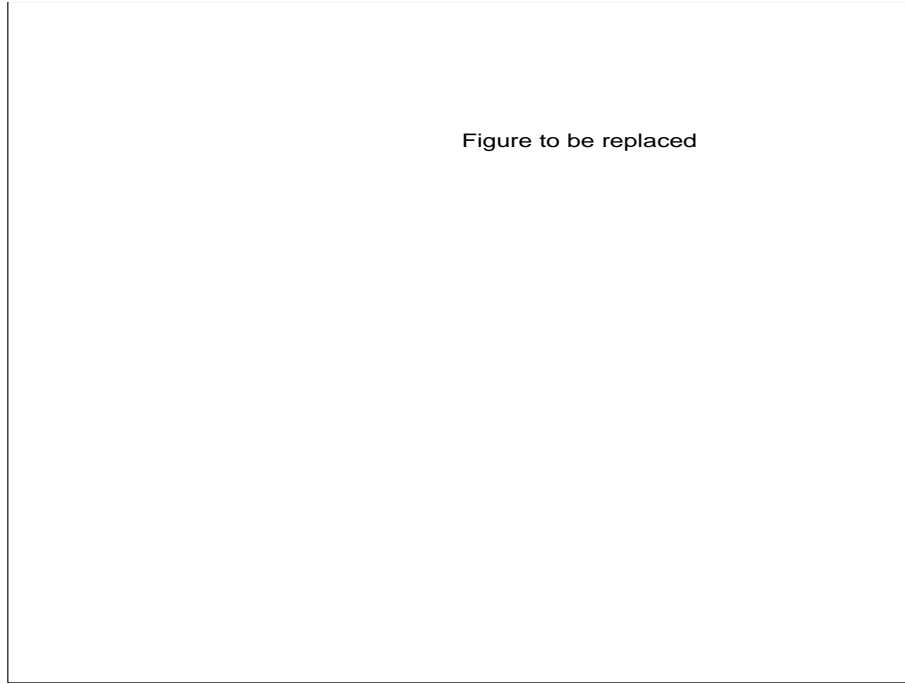


Figura 37.10: Diagrammi H-R teorici ed osservativi di ammassi globulari classici dove sono evidenziati i luoghi caratteristici discussi nel testo

quinamento in ogni singolo ammasso al momento della sua formazione, infine se gli ammassi più poveri di metalli e/o più distanti dal centro galattico siano anche i più antichi.

La risposta a queste domande passa attraverso la conoscenza diretta ed indiretta di alcune quantità fondamentali, quali il modulo di distanza, l'arrossamento (eccesso di colore ed assorbimento), la composizione chimica e l'età.

Dall'esame delle isocrone nel diagramma H-R teorico al variare dei parametri fondamentali (età,  $Y$  e  $Z$ ) e dall'analisi dei corrispondenti diagrammi H-R osservativi degli ammassi (Figura 37.10) sono state riconosciute alcune proprietà utili alla determinazione dei parametri fondamentali di cui sopra.

In quanto segue sarà necessario separare la metallicità  $Z$  in due contributi principali  $Z = Z_{CNO} + Z_{Fe}$  e cioè la metallicità dovuta agli elementi del gruppo  $CNO$  e quella dovuta al  $Fe$ . Entrambe sono espresse mediante il parametro  $[X/H] = \text{Log}(X/H) - \text{log}(X/H)_{\odot}$  ovvero numero di atomi dell'elemento  $X$  rispetto al numero di atomi di  $H$  riferiti al corrispondente rapporto nel Sole.

### 37.7.1 Fasi in HRD

**Sequenza Principale.** La posizione della sequenza principale è funzione della composizione chimica, mentre la sua estensione è funzione dell'età.

La sequenza principale si sposta pressochè in maniera omologa verso  $T_{eff}$  più elevate all'aumentare di  $Y$  e/o al diminuire di  $Z$ .

Confrontando le sequenze principali degli ammassi o con sequenze principali teoriche di noti  $Y$  e  $Z$  ed assumendo che i primi abbiano abbondanze simili, è possibile determinare il modulo di distanza e l'arrossamento.

Alternativamente le sequenze principali degli ammassi sono riferite a sequenze di calibrazione di opportuna composizione chimica nelle quali le magnitudini assolute delle stelle siano state ottenute con il metodo delle parallassi trigonometriche, (indipendente determinazione della distanza).

La conoscenza del modulo di distanza è il primo fondamentale passo verso la determinazione dell'età. Infatti determinare l'età di un ammasso non è altri che conoscere la magnitudine assoluta delle stelle più brillanti della sua sequenza principale e questo richiede fotometrie accurate quali quelle ottenibili con i moderni rivelatori.

Un esempio del grado di precisione raggiungibile attualmente è dato dal diagramma H-R dell'ammasso globulare NGC 104 (47 Tuc) mostrato in Figura 37.11.

**Turn-off.** Definito come turn-off il punto di maggior  $T_{eff}$  dell'isocrona nella fase di bruciamento dell'idrogeno nel centro (Figure 37.9a,b), i parametri  $M_b^{TO}$  e  $T_{eff}^{TO}$  ed i loro corrispondenti osservativi dipendono essenzialmente dall'età, dalla metallicità  $Z$  tramite la componente  $Z_{CNO}$  (si ricordi che fuori dalla sequenza principale il bruciamento dell'idrogeno avviene attraverso il ciclo CNO) e poco dal contenuto di elio.

L'uso di calibrazioni basate sulle proprietà del turn-off in ammassi di cui si supponga nota la  $Z$  permetterebbe di valutare l'età con una indeterminazione di circa  $1 \times 10^9$  anni.

Tuttavia le stelle al turn-off in questo intervallo di massa hanno involuppi esterni convettivi, quindi affetti dalle incertezze della teoria della mixing length che si riflettono su  $M_b^{TO}$  e  $T_{eff}^{TO}$  e in conseguenza sull'età.

**Ramo delle Subgiganti (SGB).** La forma del ramo delle stelle subgiganti



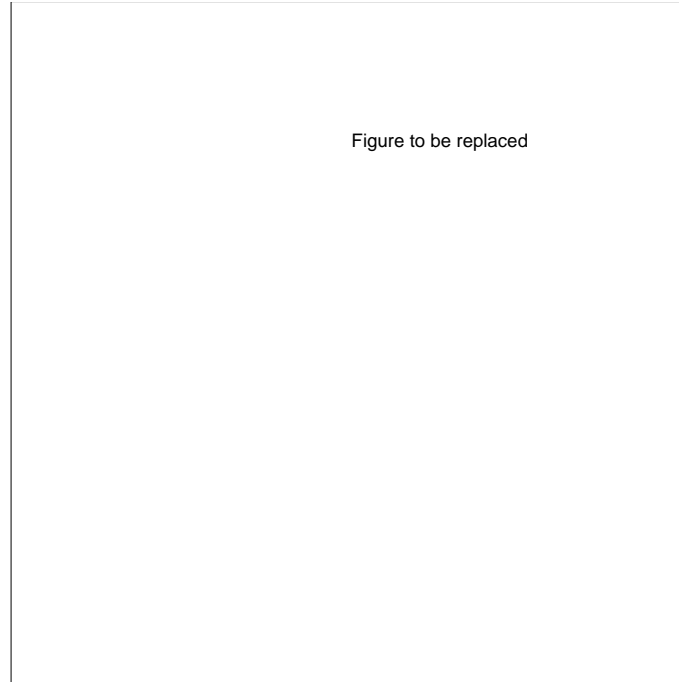


Figura 37.11: Diagramma H-R dell' ammasso globulare galattico 47 Tuc

(Figura 37.10a,b) dipende molto dall'età e metallicità, poco dal contenuto di elio.

**Ramo delle Giganti Rosse (RGB).** La traccia evolutiva e l'isocrona dipendono molto poco dalla massa delle stelle in evoluzione e dal loro contenuto di elio, molto dalla metallicità, questa volta tramite la componente  $Z_{Fe}$ . Ciò è conseguenza del fatto che la linea di Hayashi, dominata dalla convezione esterna, non risente delle sorgenti di energia nucleare nell'interno, mentre dipende dall'opacità della materia nell'involuppo e dalle incertezze nella teoria della mixing length. A sua volta l'opacità è molto più sensibile alle abbondanze in elementi pesanti come Fe che a quelli del gruppo CNO.

La linea di Hayashi trasla a luminosità quasi costante verso  $T_{eff}$  minori al crescere di  $[Fe/H]$  ed al decrescere del parametro di mixing length. Questi effetti sono esaltati nel diagramma H-R sperimentale a causa del progressivo aumento delle correzioni bolometriche al diminuire della  $T_{eff}$ .

L'esame dei diagrammi H-R sperimentali (Figura 37.10ab) suggerisce di prendere inclinazione e colore del ramo delle giganti RGB come indicatori di  $[Fe/H]$  assumendo come riferimento la luminosità del ramo orizzontale HB. A tale scopo sono definiti i seguenti parametri: l'indice di colore  $(B - V)_{og}$  del RGB alla lu-

minosità del ramo orizzontale e l'inclinazione "S" del RGB data dal rapporto tra le differenze in luminosità e colore tra il punto del RGB alla luminosità del HB e la luminosità e colore del punto a luminosità 2.5 mag più elevata (Figura 37.10b).

**Ramo Orizzontale (HB).** Per ogni valore del contenuto di elio  $Y$ , le caratteristiche principali delle stelle nel HB sono: la massa diminuita rispetto a quella della cima del RGB, la luminosità governata dalla massa del nucleo di elio ( $M_{He}$ ), la  $T_{eff}$  governata dalla differenza  $M - M_{He}$  con  $M$  massa totale.

Queste proprietà sono responsabili del fatto che la luminosità delle stelle in HB dipende molto poco dall'età mentre è sensibile ai parametri di composizione chimica  $Y$  e  $Z$ . Ne segue che la luminosità delle stelle HB ad una fissata temperatura (colore), ad esempio quella caratteristica delle stelle RR Lyrae (Figura 37.10b), è per ogni dato valore di  $Z$  un sensibile indicatore del contenuto di elio  $Y$ .

Tuttavia l'esatta relazione  $M_V^{HB} = A[Fe/H] + B$  fra la magnitudine visuale assoluta delle stelle di HB ed il loro contenuto metallico è tuttora incerta, in quanto spesso le determinazioni empiriche si discostano da quella teorica. Si passa da  $M_V^{HB} = 0.68$  ottenuto dalle parallassi statistiche, a  $M_V^{HB} = 0.20[Fe/H] + 1.05$  dalle magnitudini assolute delle RR Lyrae di campo basate sul metodo di Baade-Wesselink, a  $M_V^{HB} = 0.39[Fe/H] + 1.17$  ottenuta dalle proprietà pulsazionali delle RR Lyrae, a  $M_V^{HB} = 0.37[Fe/H] + 1.29$  ed infine a  $M_V^{HB} = 0.20[Fe/H] + 0.84$  entrambe basate sul metodo delle sequenze principali.

*Questa incertezza, lungi dall'essere marginale, si riflette pesantemente sulla determinazione delle età.*

Un'ulteriore caratteristica degli ammassi globulari è che, indipendentemente dalla metallicità e dettagli evolutivi, la differenza di luminosità fra HB e turn-off è quasi costante e pari a  $3.5 \pm 0.25$  mag. In generale  $L_{HB} - L_{TO} = f(Y, Z, t, \dots) = cost$ , dove  $t$  è l'età. Introducendo la dipendenza delle due luminosità dai vari parametri ed assumendo per  $M_V^{HB} = 0.68$  (valore classico) ottiene la relazione fondamentale

$$Logt = -0.352 - 0.188(Y - 0.3) - 1.44(Y_{HB} - Y) - 0.09(3 + LogZ) + 0.4\Delta M_{TO}^{HB} \quad (37.11)$$

dove  $Y$  è l'elio originario,  $Y_{HB}$  è il valore superficiale di questo dopo essere stato modificato dal mescolamento convettivo subito dalla stella in RGB (I dredge up),  $\Delta M_{TO}^{HB}$  è la differenza di magnitudine fra HB e TO e  $t$  l'età in  $10^9$  anni.

Questa quantità è un poderoso indicatore di età in quanto, mentre la luminosità del HB è pressochè indipendente da questa, la luminosità del turn-off varia con l'inverso dell'età.

Assumendo  $Y_{HB} = Y$  e supponendo esatta la differenza  $\Delta M_{TO}^{HB}$  si ricava o che l'età aumenta al diminuire di  $Z$  (se  $Y$  è costante) o un'anticorrelazione fra  $Y$  e  $Z$  se l'età è costante. In realtà, l'esistenza della relazione  $M_V^{HB} = A[Fe/H] + B$  fa sì che le conclusioni di cui sopra siano dubbie e che anche questo metodo dia risultati incerti.

**RR Lyrae.** Paradossalmente il fatto che la luminosità dei rami orizzontali dipenda molto poco dall'età ed invece dalla composizione chimica ha dato origine ad un sistema di calibrazione dell'età basato sulle proprietà pulsazionali delle RR Lyrae.

Infatti queste stelle possono essere utilizzate per trovare la differenza (piccola) nella luminosità dei rami orizzontali di ammassi diversi e su questa base ordinare gli ammassi avendo come riferimento la luminosità delle RR Lyrae se presenti (Figura 37.12).

Determinata in qualche modo la  $M_V$  di queste stelle, si può a sua volta calibrare la luminosità del turn-off e da questa con l'ausilio di isocrone (una assunzione circa la composizione chimica è necessaria) fissare l'età.

**Ramo Asintotico (AGB).** Le stelle in fase di doppia shell dopo l'esaurimento dell'elio nel centro (in particolare nella fase relativamente lenta dell'innescio della shell di He) trovano corrispondenza nel gruppo di stelle osservate in molti ammassi sulla sinistra del RGB e circa una magnitudine più brillanti del HB.

La luminosità e numero di queste stelle rapportati a quelli del HB (detto rapporto  $R_2$ , vedasi sotto) sono proporzionali alla massa del nucleo di carbonio - ossigeno residuo della combustione dell'elio. Il rapporto  $R_2$  è utilizzato per testare l'estensione della convezione centrale durante la fase di bruciamento dell'elio.



Figura 37.12: Diagrammi H-R schematici di ammassi globulari galattici di diversa metallicità, nei quali è stato evidenziato il luogo quasi costante delle RR Lyrae nei rami orizzontali

### 37.7.2 Elio e Rapporti $R$ , $R'$ , $R_1$ e $R_2$

In linea di principio sulla base delle proprietà delle isocrone in funzione di età e composizione chimica dovrebbe essere possibile determinare contemporaneamente l'età ed i parametri  $Y$  e  $Z$  di un ammasso globulare. Nella realtà le varie incertezze presenti sia nei dati di osservazione che nei modelli teorici preclude fino ad ora questa possibilità.

Se la composizione chimica fosse direttamente conoscibile da osservazioni spettroscopiche, l'unico parametro residuo sarebbe l'età. Sfortunatamente per ragioni diverse, osservazioni di abbondanze nelle atmosfere sono estremamente difficili ed incerte almeno nel dominio delle stelle di ammassi globulari. Se è stato possibile determinare il rapporto  $[\text{Fe}/\text{H}]$  in giganti rosse, si ricordi tuttavia che esso è solamente una parte della metallicità, la determinazione diretta dell'elio non è stata fino ad ora possibile. Laddove tale abbondanza è stata misurata (stelle calde dei rami orizzontali molto blu), essa è risultata essere spesso inferiore (da  $1/10$  a  $1/100$ ) al valore solare, in netto contrasto con il valore cosmologico che è posto tra  $Y = 0.20$  e  $Y = 0.30$ , molto verosimilmente

$Y = 0.23$ .

È universalmente accettato che tale deficienza di elio non sia rappresentativa di una reale sotto-abbondanza di questo elemento negli ammassi globulari, ma piuttosto sia da attribuirsi ad un processo di sedimentazione gravitazionale nelle atmosfere di queste stelle.

La determinazione dell'elio resta quindi affidato all'analisi delle proprietà dei diagrammi H-R ed alle relazioni teoriche di calibrazione.

La teoria dell'evoluzione stellare prevede che luoghi diversi del diagramma H-R siano percorsi con velocità diverse a cui debbono corrispondere numeri relativi di stelle diversi. In particolare è stato verificato che oltre al rapporto  $R_2$  discusso sopra possono essere costruiti tre altri rapporti fra numeri di stelle i quali risultano essere primariamente funzioni del contenuto di elio e dell'efficienza della convezione centrale durante la fase di bruciamento dell'elio. I rapporti sono

$$R = \frac{N_{HB}}{N_{RGB}} \quad (37.12)$$

$$R' = \frac{N_{HB}}{N_{AGB} + N_{RGB}} \quad (37.13)$$

$$R_1 = \frac{N_{AGB}}{N_{RGB}} \quad (37.14)$$

$$R_2 = N_{AGB}/N_{HB} \quad (37.15)$$

dove  $N_{HB}$  è il numero di stelle in HB,  $N_{RGB}$  è il numero di stelle in RGB più brillanti della luminosità del HB,  $N_{AGB}$  è il numero di stelle in AGB fino a 2.5 magnitudini sopra il ramo orizzontale.

Affinchè i quattro rapporti diano risultati accettabili, i campioni di stelle in esame devono essere statisticamente significativi. Con l'aiuto di questi rapporti e di opportune calibrazioni teoriche è stato concluso che il contenuto di elio negli ammassi globulari è virtualmente costante e pari a  $Y = 0.235 \pm 0.005$ .

### 37.7.3 Secondo Parametro

In generale al crescere della metallicità il ramo orizzontale di un ammasso si estende a  $T_{eff}$  via via minori. Un classico esempio è costituito dalla sequenza

Figure to be replaced

Figura 37.13: Quattro ammassi globulari galattici ordinati per metallicità crescente. Si vede subito che M13 sfugge alla regola generale: secondo parametro

di ammassi M92, M3 e 47Tuc i quali al crescere di  $Z$  mostrano rami orizzontali progressivamente più rossi (Figura \*\*). Questa sequenza può essere facilmente compresa dalla teoria corrente.

Tuttavia esistono numerose eccezioni. Tipico è il caso di M13, il quale pur avendo una metallicità simile se non superiore a quella di M3 ha un ramo orizzontale totalmente blu addirittura privo di stelle RR Lyrae. Evidentemente in questo ammasso qualcosa deve variare oltre a  $Z$  per giustificare l'inatteso comportamento ("secondo parametro").

Tra le possibili cause fisiche che possono essere invocate abbiamo: una maggiore età (stelle al turn-off con massa minore e, quindi a parità di effetto di perdita di massa nel RGB, involuppi in HB minori), maggiore contenuto di elio nelle stelle HB (stelle più omogenee e quindi HB più blu), minore  $Z_{CNO}$  (shell di H meno efficienti), maggiore perdita di massa nel RGB (involuppi in HB meno massicci).

A tuttoggi non esiste una spiegazione esauriente della natura fisica del secondo parametro.

### 37.7.4 Età degli Ammassi Globulari

La Tabella 37.3 contiene una recente compilazione dei parametri  $[\text{Fe}/\text{H}]$ ,  $\Delta M_{TO}^{HB}$ , magnitudine  $V$  apparente del ramo orizzontale  $V_{HB}$ , eccesso di colore  $E_{B-V}$ , distanza  $R$  dal centro galattico in Kpc, ed infine delle determinazioni di età basate sui due metodi principali: turn-off della sequenza principale [Età (1)] e sul parametro  $\Delta M_{TO}^{HB}$  per tre diverse assunzioni circa la relazione  $M_V^{HB} = A[\text{Fe}/\text{H}] + B$  [Età (2), (3) e (4)]. Le relazioni  $M_V^{HB}-[\text{Fe}/\text{H}]$  adottate sono riportate nella tabella stessa.

Il metodo delle sequenze principali fornisce un'età media di  $14 + 2 \times 10^9$  che è il valore canonicamente accettato. Questo valore è puramente indicativo in quanto ottenuto da una particolare libreria di isocrone (Yale Observatory). L'uso di altre librerie di isocrone da valori dell'età più vecchi di circa  $2 \times 10^9$  anni.

Le fluttuazioni da ammasso ad ammasso potrebbero non essere indicative di una reale dispersione delle età ma essere dovute ad incertezze sia nei dati di osservazione (qualità dei dati fotometrici usati) sia nel particolare sistema di isocrone teoriche adottate.

Il metodo del parametro  $\Delta M_{TO}^{HB}$  fornisce delle età sistematicamente maggiori con un'incertezza comparabile a quella delle età derivate dal turn-off. La discrepanza non è significativa nel caso della relazione basata sui modelli teorici di stelle in HB, mentre è notevole per gli altri due casi. Questo non è sorprendente attesa la sensibilità del metodo in questione dalla particolare relazione usata e non significa che le età debbano essere necessariamente maggiori di quelle ottenute dal metodo del turn-off, ma semplicemente che un diverso metodo di calibrazione è in uso. Allo stesso tempo questo rende chiaro che la determinazione delle età è ben lungi dall'essere soddisfacente.

I dati in Tabella 37.3 indicano anche che una correlazione fra l'età e  $[\text{Fe}/\text{H}]$  è possibile nei casi (1), (2) e (3) mentre viene distrutta nel caso (4). Sulla base di questa correlazione gli ammassi più poveri di metalli dovrebbero essere anche i più antichi con una dispersione di età di circa  $5 \times 10^9$  anni, forse indicativo di un periodo prolungato di formazione degli ammassi globulari.

Inoltre tale intervallo di età è lungo abbastanza da giustificare le anomalie osservate nella morfologia dei rami orizzontali degli ammassi globulari, in altre parole *la dispersione delle età potrebbe essere il secondo parametro*. Tuttavia il

risultato negativo ottenuto con l'uso della  $M_V^{HB} - [Fe/H]$  empirica indica che ogni conclusione in tal senso è prematura.

Attualmente il problema dell'età degli ammassi globulari appoggia quasi interamente o sulla accurata fotometria e calibrazione del turn-off o sulla determinazione accurata della relazione  $M_V^{HB} - [Fe/H]$  per le stelle di ramo orizzontale. Inoltre i dati in Tabella 37.3 indicano che non sembra esistere una correlazione fra l'età e la distanza dal centro galattico degli ammassi globulari, questo indipendentemente dal sistema di età adottato.

Infine, ricordando che l'età degli ammassi globulari rappresenta il limite inferiore dell'età dell'Universo ed assumendo il valore di  $14 \pm 2 \times 10^9$  anni, ne segue che la costante di Hubble ha come limite superior il valore  $H_0 < 75 \pm 20 \text{ Km sec}^{-1} \text{ Mpc}^{-1}$ .

### 37.7.5 Funzione di Luminosità delle Stelle *RGB*

La necessità di ottenere una accurata relazione  $M_V^{HB} - [Fe/H]$  per le stelle di ramo orizzontale ha spinto la ricerca di calibratori indipendenti sui quali tarare la magnitudine  $M_V$  delle stelle di HB e la relazione  $M_V^{HB} = A[Fe/H] + B$ . Un metodo elegante si basa sullo studio del picco visibile nella funzione di luminosità (numero di stelle per intervallo di magnitudine) delle stelle di *RGB* (Figura 37.14). Il picco ha origine dal fatto che la velocità di evoluzione rallenta quando la shell di idrogeno passa attraverso la discontinuità nel profilo chimico generata dalla convezione di involuppo (lungo il *RGB* stesso) al momento della sua massima penetrazione, circa a mezza via lungo il *RGB*. Poiché la magnitudine bolometrica del picco nella funzione di luminosità è nota dai modelli di struttura stellare, ciò fornisce un ulteriore calibratore di distanza ed in ultima analisi fissa la magnitudine  $M_V$  delle stelle di HB. Ripetendo lo studio su ammassi di diverso  $[Fe/H]$  si ha una verifica ulteriore della relazione  $M_V^{HB} = A[Fe/H] + B$ . Quest'ultima sembra essere in accordo più con quella teorica che con quelle empiriche.

### 37.7.6 Funzione di Luminosità della SP

L'avvento dei moderni rivelatori ha permesso di estendere fino a magnitudini molto deboli e quindi fino a masse sulla sequenza principale ben al di sotto del valore al turn-off. Scopo principale è quello di determinare le funzioni di



Tabella 37.3: Età, metallicità e distanze galattocentriche di ammassi globulari. Le età sono in  $10^9$  anni, le distanze sono in Kpc. *Età (1): età ottenuta dal tun-off, valore medio  $14 \times 10^9$  anni, incertezza  $\pm 2 \times 10^9$  anni. Età(2): età ottenuta dalla relazione (15.3) assumendo  $M_V = 0.6$ , valore medio  $17 \times 10^9$  anni, incertezza  $\pm 2 \times 10^9$  anni. Età(3): età ottenuta dalla equazione (15.3) assumendo la relazione teorica  $M_V = 0.20[Fe/H] + 1.05$ , valore medio  $15 \times 10^9$  anni, incertezza  $\pm 2 \times 10^9$  anni. Età(4): età ottenuta dalla equazione (15.3) assumendo la relazione empirica  $M_V = 0.35[Fe/H] + 1.39$ , valore medio  $21 \times 10^9$  anni, incertezza  $\pm 2 \times 10^9$  anni.*

NGC	Nome	[Fe/H]	R	$\Delta M_{TO}^{HB}$	$V_{HB}$	$E_{B-V}$	Età (1)	Età (2)	Età (3)	Età (4)
104	47Tuc	-0.76	7.43	3.60	14.11	0.04	12	13	13	21
288		-1.40	11.93	3.70	15.30	0.04	16	19	16	24
362		-1.40	9.62	3.37	15.43	0.06	12	13	12	18
1904	M79	-1.69	20.00	3.40	16.20	0.01		16	13	19
2298		-1.85	17.25	3.49	16.11	0.08	15	18	15	20
2419		-2.10	110.31	3.50	20.5	0.03		19	15	20
2808		-1.37	11.30	3.58	16.12	0.22		17	15	22
3201		-1.61	8.98	3.33	14.67	0.21		14	12	18
4147		-1.80	22.38	3.60	17.00	0.02	15	19	16	22
4590	M68	-2.10	10.59	3.39	15.61	0.03	16	17	14	18
5033		-2.58	18.85	3.50	16.63	0.01		22	16	20
5139	oCen	-1.59	6.39	3.80	14.50	0.11		22	19	27
5272	M3	-1.66	12.54	3.32	15.63	0.01		14	12	17
5466		-2.22	18.28	3.58	16.62	0.00		21	17	22
	Pal5	-1.40	18.36	3.45	17.35	0.03	13	15	13	19
5904	M5	-1.40	6.50	3.55	15.15	0.03	14	16	14	21
6121	M4	-1.33	6.02	3.52	13.38	0.40	12	15	14	21
6171	M107	-0.99	3.17	3.60	15.75	0.31		15	14	22
6205	M13	-1.65	8.66	3.60	14.90	0.02	14	17	16	22
6341	M92	-2.00	8.80	3.55	15.05	0.02	17	21	16	21
6362		-1.08	5.20	3.41	15.34	0.11		13	12	18
6397		-1.91	5.86	3.80	12.90	0.18		24	19	26
6656	M22	-1.75	4.71	3.4	14.1	0.32		16	13	19
6752		-1.54	5.00	3.60	13.80	0.04	13	18	15	22
6809	M55	-1.82	3.71	3.55	14.35	0.06	15	19	15	21
6981	M72	-1.54	13.88	3.35	16.85	0.04	13	14	12	18
7078	M15	-2.15	10.69	3.40	15.80	0.10	14	18	14	19
7099	M30	-2.13	7.20	3.60	15.05	0.04	15	21	17	22
	Pal12	-1.14	17.22	3.30	17.13	0.02	10	12	11	17
	Pal13	-1.79	27.90	3.39	17.71	0.05		16	13	19
7492		-1.82	27.10	3.61	17.63	0.00		20	16	22

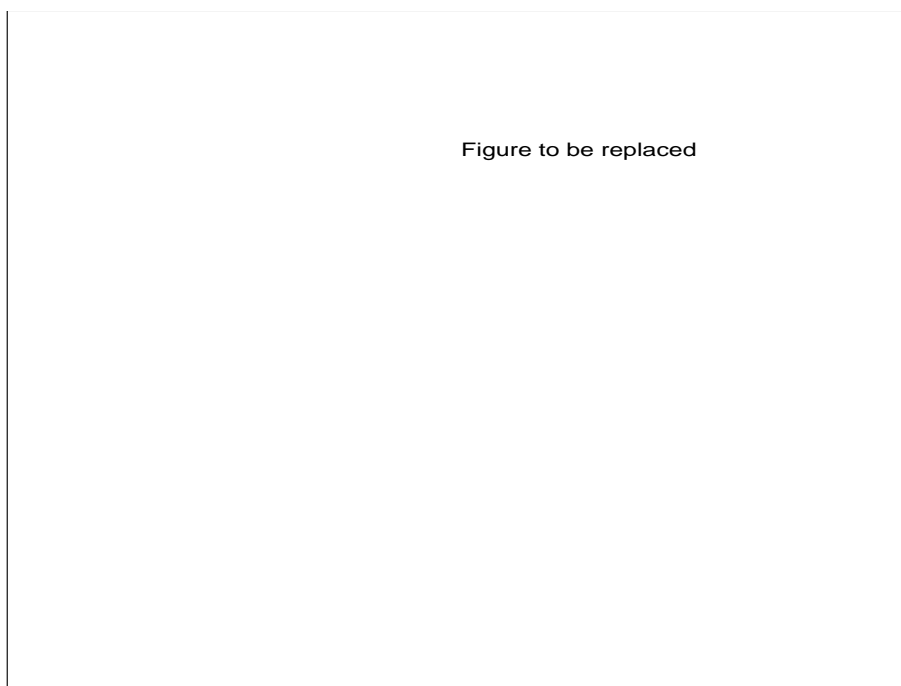


Figura 37.14: Funzioni di luminosità di due ammassi globulari galattici con diverso contenuto metallico

luminosità e di massa attualmente esistenti negli ammassi. In particolare, si è tentato di esaminare se la pendenza della funzione di massa rappresentata da un legge di potenza come nell'equazione (37.1) sia costante in tutti gli ammassi o mostri invece delle variazioni sistematiche. È stato suggerito che la pendenza sia funzione della metallicità nel senso che gli ammassi più ricchi di metalli tendono ad avere la funzione di massa più piatta di quelli poveri di metalli. Tuttavia da una parte si è messo in evidenza come la rappresentazione della funzione di massa mediante una singola legge di potenza sia un'approssimazione troppo semplicistica, dall'altra si è puntualizzato che effetti di segregazione di massa possono essere importanti falsando la reale distribuzione di massa. Pertanto ogni conclusione circa la sospettata dipendenza della funzione di massa dalla metallicità, morfologia e posizione degli ammassi nella galassia sia prematura. Ovviamente nulla può essere detto circa la funzione iniziale di massa, in quanto tutte le stelle più massicce sono già evolute. Infine grazie alla stretta distribuzione delle stelle di sequenza principale in quegli ammassi per i quali i dati fotometrici rendono possibile questo tipo di analisi, esiste una certa evidenza che non vi sia una significativa popolazione di stelle binarie, nè di successivi

episodi di formazione stellare.



## Capitolo 38

# CONCLUSIONI

Lo studio della struttura ed evoluzione delle stelle ha raggiunto risultati che trovano ampia conferma nei dati di osservazione, fornendo un panorama complessivo coerente.

Questo è ancora più importante se si considera la funzione primaria assegnata alle stelle nel quadro complessivo dell'Astronomia e Cosmologia e cioè quello di orologio campione sul quale tarare l'intera storia evolutiva dell'Universo.

Infatti, oltre all'interesse nel comprendere la fisica fondamentale della struttura ed evoluzione delle stelle, è proprio la loro capacità di agire come cronometri insita nell'interpretazione dei diagrammi H-R, che è particolarmente importante.

Allo stadio attuale della nostre conoscenze possiamo dire che il ritmo con cui scorre l'orologio stellare ci è noto con sufficiente precisione, mentre è ancora imprecisa la conoscenza del punto zero della scala dei tempi.

È ovvio che la teoria dell'evoluzione stellare ha ancora numerose zone di incertezza, in particolare manca una adeguata teoria della convezione e l'opacità non è ancora nota con il desiderato livello di accuratezza. Molto resta ancora da studiare sugli effetti della rotazione e dei campi magnetici, due argomenti che a causa della loro complessità non sono stati minimamente sfiorati in questo libro. La conoscenza esatta degli stadi finali dell'evoluzione stellare sono ancora incompleti. Basti ricordare la problematica suscitata dall'esplosione della supernova 1987a nella Grande Nube di Magellano. Altresì dicasi dei meccanismi di arricchimento chimico per i quali si ricorda che le stelle svolgono il ruolo fondamentale di fucine nucleari dove gli elementi leggeri, i soli prodotti della nucleosintesi del Big-Bang, vengono trasformati in elementi pesanti e restituiti al mezzo interstellare da cui nuove stelle si formano. Migliaia di generazioni stel-

lari sono occorse per produrre lo spettro delle abbondanze osservato nell'attuale mezzo interstellare e nei corpi celesti (Terra inclusa) in generale. Infine la fisica stessa delle particelle elementari trova negli interni stellari, in particolare negli oggetti collassati, l'ideale laboratorio dove le teorie correnti possono essere confrontate.

### Bibliografia

- Clayton, D.D. (1983). *"Principles of Stellar Evolution and Nucleosynthesis"*. University of Chicago Press, Chicago, Illinois, USA.
- Kippenhahn R e Weigert A. (1990). *"Stellar Structure and Evolution"*. Astronomy and Astrophysics Library. Springer-Verlag, Berlin, Germany
- Castellani V. (1985). *"Astrofisica Stellare: I fondamenti Fisici dell' interpretazione evolutiva di stelle e Galassie"*. Zanichelli, Bologna, Italia
- Hong-Yee Chiu (1968). *"Stellar Physics Volume I"*. Blaisdell Publishing Company, Waltham Massachusetts, USA
- Cox J.P. (1980). *"Theory of Stellar Pulsation"*. Princeton University Press, Princeton, New Jersey, USA
- Audouze J, Chiosi C. Woosley S.E. (1986). *"Nucleosynthesis and chemical evolution"*. Geneva Observatory, Switzerland
- "Encyclopedia of Astronomy and Astrophysics"*. (1989). Academic Press Incorporated, San Diego, California, USA
- Schwarzschild M. (1958) *Structure and Evolution of the Stars*. Princeton University Press & Dover Publications, Inc. New York, USA
- Phillips A. C. (1994) *The Physics of the Stars*. John Wiley & Sons, England
- Chandrasekhar S. (1939) *An Introduction to the Study of Stellar Structure*. The University of Chicago & Dover Publications, Inc. New York, USA
- de Loore C. W. H. & Doom C. (1992) *Structure and Evolution of Single and Binary Stars*. Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, Holland
- Shapiro S. L. & Teukolsky S.A. (1983) *Black Holes, White Dwarfs, and Neutron Stars: the Physics of Compact Objects*. John Wiley & Sons, New York, USA
- Eddington Sir A. S. (1959) *The Internal Constitution of the Stars*. Dover Publications, Inc. New York, USA