

ANALISI STATISTICA DEI DATI

STATISTICA E PROBABILITA'

Misura di una grandezza fisica

Errori dovuti a:

- *Strumenti di misura*
- *Parametri non controllabili da sperimentatore*



- \neq da valore vero grandezza
- varia da misura a misura

La misura è **fenomeno casuale** e la singola misura sarà **evento casuale**.

Evento casuale (o aleatorio): evento ripetibile (*infinite volte*) che si manifesta in modo **non prevedibile** singolarmente
(es. lancio dado/moneta, estrazione carta ...)



S: insieme di tutti i modi possibili del fenomeno casuale

E: generica modalità dell'evento casuale
(*generico evento casuale*)

E $\xrightarrow{\text{in modo univoco}}$ **x(E)** (numero reale)

x(E): **variabile casuale** definita nell'insieme S.

Variabili casuali $\left\{ \begin{array}{l} \text{discrete o continue} \\ \text{numero finito o infinito di valori} \end{array} \right.$

La misura di una grandezza fisica può essere considerata come un **evento casuale** e il numero (che si ottiene) la **variabile casuale** associata all'evento.

PROBLEMA DELLA MISURA

insieme di misure della stessa grandezza fisica



valore vero



Analisi statistica delle misure
che utilizza teoria della probabilità

Definire intervallo di valori della variabile casuale "misura" con assegnata probabilità di contenere **valore vero** della grandezza


La **STATISTICA** è un ramo della matematica che studia i fenomeni casuali utilizzando la **TEORIA della PROBABILITA'**

PROBABILITA`

1) Definizione "classica"

Probabilità $P(E)$ di un evento casuale E : rapporto fra numero dei casi "favorevoli" (casi in cui si presenta E) e numero totale casi possibili, purché tutti i casi possibili siano equiprobabili

COROLLARIO: $0 = \mathbf{P} = 1$

 *numero reale*

PROBLEMA: *Tautologia (per definire probabilità è necessario valutare equiprobabilità)*

Es. 1. *Lotto*

$$P(n) = \frac{1}{90} \qquad P(\text{pari}) = \frac{45}{90} = \frac{1}{2}$$

Es. 2. *3 figli non dello stesso sesso*

MMM MMF MEM EMM MEF EMF FEM FFF

Tot casi possibili = 8

$$P(\text{non stesso sesso}) = \frac{6}{8} = \frac{3}{4}$$

2) Definizione "empirica" (Frequenzistica)

Frequenza relativa di E : $f(E)$

$$f(E) = \frac{n}{N}$$

N : numero totale prove

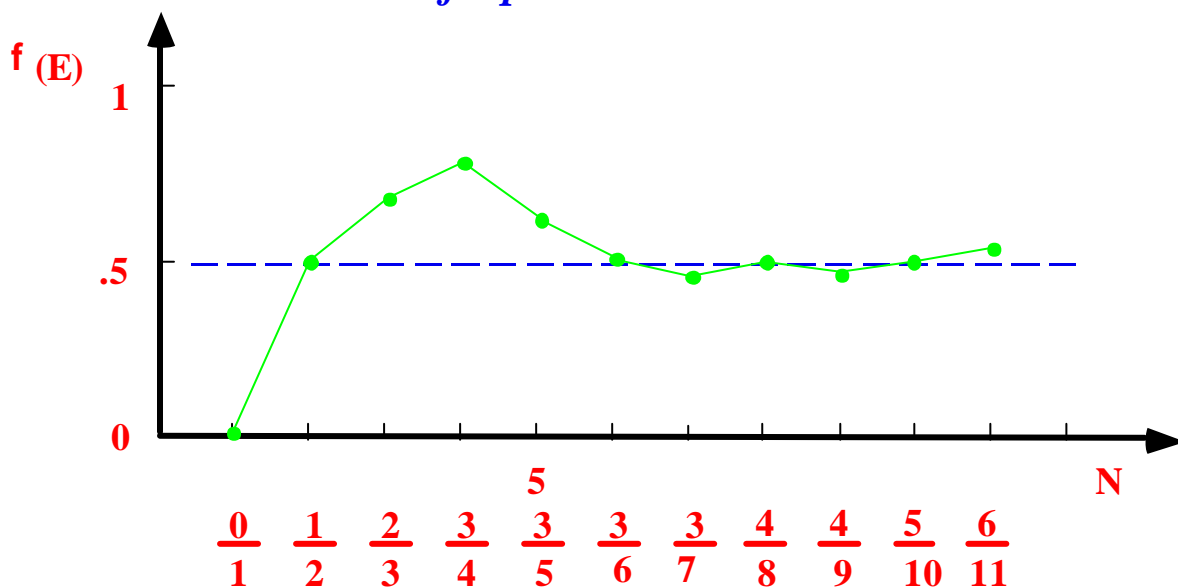
n : numero volte in cui si è presentato E su N prove

Si definisce:

$$P(E) = \lim_{N \rightarrow \infty} f(E) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{n}{N}$$

PROBLEMA:

- *postula che $\lim f(E)$ sia numero definito*
- *non è def. operativa*

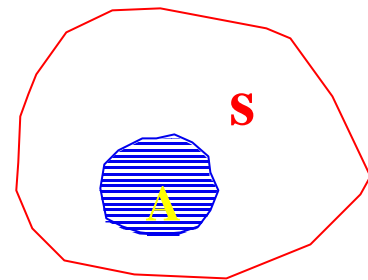


E : testa su lancio moneta

2) Definizione "assiomatica"

S: Insieme di tutti i possibili **E**

A: Sottoinsieme di **S**



P(A) E' un numero associato univocamente ad **A** tale che:

— $P(A) = 0$ per ogni **A**

— $P(S) = 1$

— $P(\underbrace{A+B}_{A \cup B}) = P(A) + P(B)$ se $A \cap B = \emptyset$

\cup *Unione*

\cap *Intersezione*

\supset *Contenuto*

PROBLEMA: Non ci dice quanto vale **P**

L'assegnazione di **P** ad **A** è un modello matematico

A partire da definizione assiomatica di **P** si può dimostrare che:

$$f(E) \longrightarrow P(E) \quad \text{per } N \longrightarrow 8$$

LEGGE DEI GRANDI NUMERI

LEGGE DEI GRANDI NUMERI

Dato evento casuale E a cui è associata $P(E)$,
se $f(E) = \frac{n}{N}$ (su N prove), scelti due numeri positivi a piacere
 ϵ' , ϵ'' è possibile definire un N tale che, per ogni $M > N$:

$$P(|f(E) - P(E)| > \epsilon') < \epsilon''$$

$$(\text{In analisi: } |f(E) - P(E)| < \epsilon)$$

Si dimostra a partire dalla disuguaglianza
di BIENAYME' - ČEBIČEV

PROPRIETA' DELLA PROBABILITA'

1) Evento complementare di E : \bar{E}

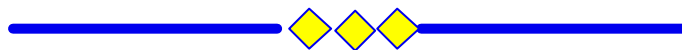
$$f(\bar{E}) = \frac{N-n}{N} = 1 - \frac{n}{N} = 1 - f(E)$$

$$P(\bar{E}) = 1 - P(E)$$

$$P(E) + P(\bar{E}) = 1$$

Se $E_1 \dots E_m$: insieme di tutti gli eventi possibili in S , mutuamente esclusivi:

$$\sum_{i=1}^m P(E_i) = 1$$



Evento complesso = prodotto logico di due eventi casuali

E, F (es.: *moneta/carta*)

Su N prove

| | F | \bar{F} |
|-----------|----------|-----------|
| E | n_{11} | n_{12} |
| \bar{E} | n_{21} | n_{22} |

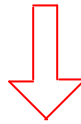
4 possibili casi:

EF
 $E\bar{F}$
 $\bar{E}F$
 $\bar{E}\bar{F}$

$$f(EF) = \frac{n_{11}}{N}; \quad f(E\bar{F}) = \frac{n_{21}}{N}; \quad f(\bar{E}F) = \frac{n_{12}}{N}; \quad f(\bar{E}\bar{F}) = \frac{n_{22}}{N};$$

$$f(E) = \frac{n_{11} + n_{12}}{N} = f(EF) + f(E\bar{F})$$

$$f(F) = \frac{n_{11} + n_{21}}{N} = f(EF) + f(\bar{E}F)$$



$$P(E) = P(EF) + P(E\bar{F})$$

$$P(F) = P(EF) + P(\bar{E}F)$$

PROBABILITA' CONDIZIONATA:

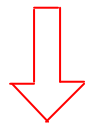
Probabilità che si verifichi **E** se si è verificato **F** (o viceversa)

P(E|F)

P(F|E)

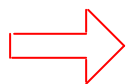
$$f(E|F) = \frac{n_{11}}{n_{11} + n_{21}} = \frac{n_{11}}{N} \cdot \frac{N}{n_{11} + n_{21}} = \frac{f(EF)}{f(F)}$$

$$f(F|E) = \frac{n_{11}}{n_{11} + n_{12}} = \frac{f(EF)}{f(E)}$$



$$P(E|F) = \frac{P(EF)}{P(F)}$$

$$P(EF) = P(F) \cdot P(E|F)$$



$$P(F|E) = \frac{P(EF)}{P(E)}$$

$$P(EF) = P(E) \cdot P(F|E)$$

2) LEGGE DELLE PROBABILITA' COMPOSTE

Se E ed F sono **statisticamente indipendenti**

$$P(E|F) = P(E)$$



$$P(F|E) = P(F)$$

$$P(EF) = P(E) \cdot P(F)$$

$$P(E_1 \cdot E_2 \dots \cdot E_m) = \prod_{i=1}^m P(E_i)$$

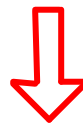
La probabilità che avvengano contemporaneamente E ed F (*prodotto logico*) è uguale al prodotto delle probabilità dell'evento **E** e dell'evento **F**

se E ed F sono statisticamente indipendenti

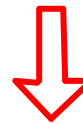
Es. 2 dadi - Probabilità che escano due 4

$$P(4,4) = P(4) \cdot P(4) = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{36}$$

Se **E** ed **F** sono mutuamente esclusivi:



$$P(E|F) = P(F|E) = 0$$



$$P(EF) = 0$$

3) LEGGE DELLE PROBABILITA' TOTALI

$f(E + F)$: evento **E** o evento **F** o ambedue

$$f(E + F) = \frac{n_{11} + n_{12} + n_{21}}{N} = \frac{(n_{11} + n_{12}) + (n_{21} + n_{11}) - n_{11}}{N}$$

$$f(E + F) = f(E) + f(F) - f(EF)$$



$$P(E + F) = P(E) + P(F) - P(EF)$$

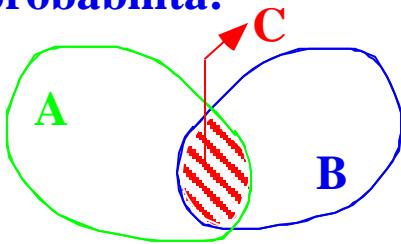
Se **E** ed **F** sono mutuamente esclusivi

$$P(EF) = 0$$

$$P(E + F) = P(E) + P(F)$$

$$P(E_1 \dots E_m) = \sum_i^m P(E_i)$$

Dimostrabile anche usando la definizione assiomatica di probabilità:



$$A = (A - C) + C$$

$$B = (B - C) + C$$

$(A - C), (B - C), C$: disgiunti

Da III assioma: $(P(A + B) = P(A) + P(B))$ se A,B disgiunti;

$$P(A) = P(A - C) + P(C)$$

$$P(A - C) = P(A) - P(C)$$

$$P(B) = P(B - C) + P(C)$$

$$P(B - C) = P(B) - P(C)$$

Se ora consideriamo insieme somma $A+B$:

$$A + B = (A - C) + (B - C) + C$$

$$P(A + B) = P(A - C) + P(B - C) + P(C)$$

$$P(A + B) = P(A) - P(C) + P(B) - P(C) + P(C)$$

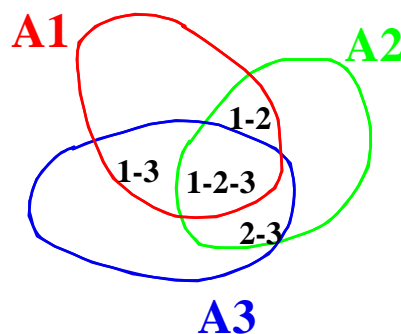
$$P(A + B) = P(A) + P(B) - P(C)$$

$$\searrow P(A \cdot B)$$

$$P(A + B) = P(A) + P(B) - P(A \cdot B)$$

Se considero 3 eventi casuali :

$$P(A_1 + A_2 + A_3) = P(A_1) + P(A_2) + P(A_3) - P(A_1 A_2) - P(A_1 A_3) - P(A_2 A_3) + P(A_1 \cdot A_2 \cdot A_3)$$



STATISTICAMENTE INDIPENDENTI

$$P(E|F) = P(\bar{E}) \quad P(F|E) = P(F)$$

$$\longrightarrow P(EF) = P(E) \cdot P(F)$$

STATISTICAMENTE DIPENDENTI

MAZZO CON 42 CARTE (solo KQJ fiori)

E estrazione FIORI
F estrazione RE

$$P(E) = \frac{3}{42} \quad P(F) = \frac{4}{42}$$

$$P(E|F) = \frac{1}{4} \quad P(F|E) = \frac{1}{3}$$

$$P(E \cdot F) = \frac{3}{42} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{42} \neq P(E) \cdot P(F)$$

$$P(E) \cdot P(F|E) = \frac{1}{\cancel{12}} \cdot \frac{\cancel{4}}{42} = \frac{1}{126}$$

SOMMARIO

| | <i>statisticamente indipendenti</i> | <i>statisticamente dipendenti</i> | <i>statisticamente esclusivi</i> |
|----------------|---|--|--------------------------------------|
| $P(A \cdot B)$ | $P(A) \cdot P(B)$ | $\begin{cases} P(A) \cdot P(B A) \\ P(B) \cdot P(A B) \end{cases}$ | $= 0$ |
| $P(A + B)$ | $P(A) + P(B) - P(A \cdot B)$ | $P(A) + P(B) - P(A \cdot B)$ | $P(A) + P(B) - P(A \cdot B)$ |

Es.: efficienza di scanning nella ricerca di eventi rari

N : N. di eventi rari presenti nel campione (**incognito**)

$N_{12} + N_1$: N. di eventi trovati nella 1^a ricerca

$N_{12} + N_2$: N. di eventi trovati nella 2^a ricerca

N_{12} : N. di eventi trovati in ambedue

$$P(1) = \frac{N_{12} + N_1}{N}$$

(1) e (2) *statisticamente indipendenti*

$$P(2) = \frac{N_{12} + N_2}{N}$$

$$P(1, 2) = \frac{N_{12}}{N} = P(1) \cdot P(2) \Rightarrow N = \frac{(N_{12} + N_1) \cdot (N_{12} + N_2)}{N_{12}}$$

$$P(1) = \frac{N_{12}}{N_{12} + N_2}$$

$$P(2) = \frac{N_{12}}{(N_{12} + N_1)}$$

Probabilità di trovare un evento nelle due ricerche:

$$\begin{aligned} P(1 + 2) &= P(1) + P(2) - P(1) \cdot P(2) = \frac{(N_{12} + N_1)}{N} + \frac{(N_{12} + N_2)}{N} - \frac{N_{12}}{N} = \\ &= \frac{N_{12}}{(N_{12} + N_1) \cdot (N_{12} + N_2)} \cdot (N_1 + N_2 + N_{12}) \end{aligned}$$

DISTRIBUZIONE DI PROBABILITA' E DENSITA' DI PROBABILITA'

1) Variabile casuale discreta x_i $i = 1, \dots$

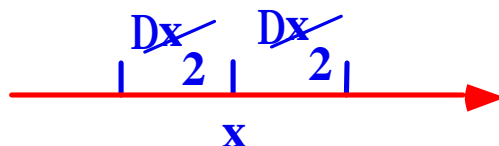
$$x_i \longrightarrow P_i(x_i) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{n(x_i)}{N}$$

$$\sum_i P_i(x_i) = 1$$

L'insieme di P_i costituisce la

distribuzione di probabilità della variabile casuale

2) Variabile casuale continua



$$f(x - \frac{Dx}{2}, x + \frac{Dx}{2}) : \text{frequenza in } x \pm \frac{Dx}{2}$$

$$\frac{n(x \pm \frac{Dx}{2})}{N}$$

Frequenza limite per unità di Dx:

$$\lim_{Dx \rightarrow 0} \frac{f(x - \frac{Dx}{2}, x + \frac{Dx}{2})}{Dx} = f(x)$$

$$N \rightarrow \infty$$

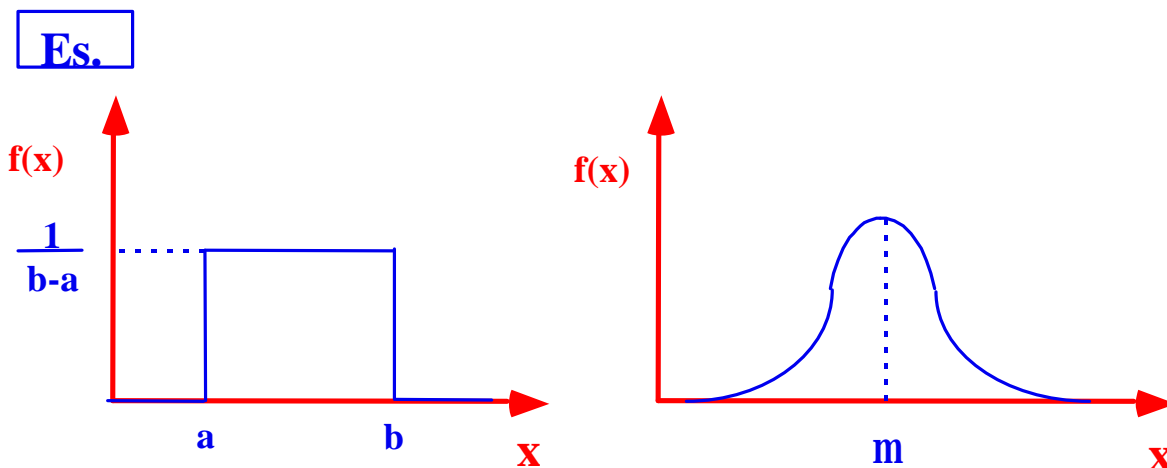
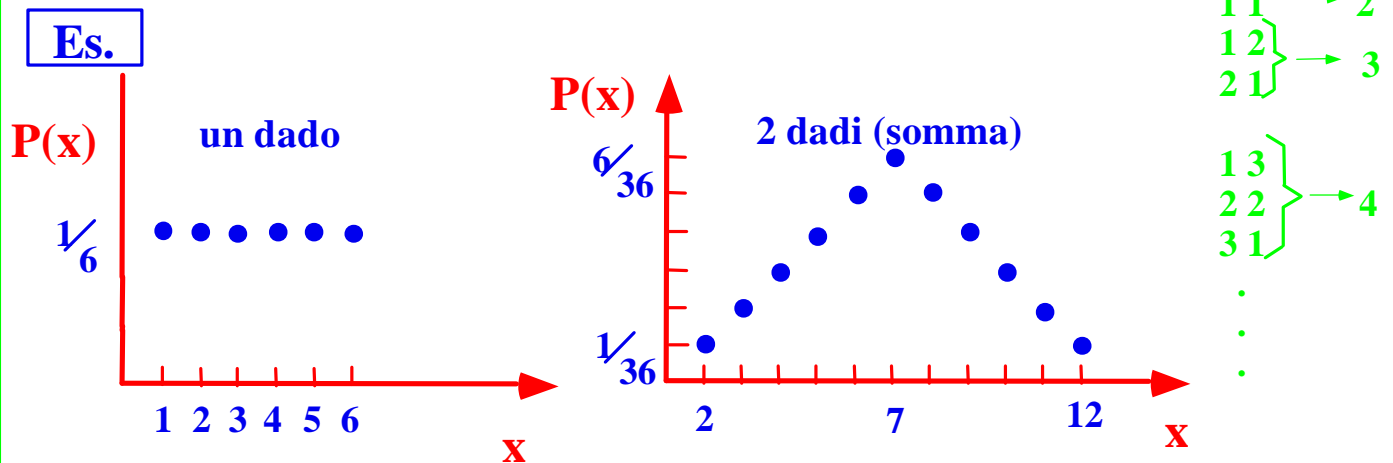
$f(x)$: DENSITA' DI PROBABILITA' o
FUNZIONE DI DISTRIBUZIONE

$$\frac{dP(x, x + dx)}{dx} = f(x)$$

$$dP = f(x) dx$$

$$P(a, b) = \int_a^b = \text{probabilità che la variabile casuale cada in } (a, b) = \int_a^b f(x) dx$$

$$\int_s^{\infty} f(x) dx = \int_{-\infty}^{+} f(x) dx = 1$$



Densità uniforme di probabilità

$$f(x) = C \quad \int_a^b C \cdot dx = C \cdot (b - a) = 1 \quad C = \frac{1}{b - a}$$

CUMULATIVA DI UNA FUNZIONE DI DISTRIBUZIONE

Funzione cumulativa:

$$F(x) = \int_{-\infty}^x f(x') dx'$$

PROPRIETA':

◆ $F(x) = P(-\infty < x' < x)$

◆ $P(a < x < b) = \int_a^b f(x) dx = \int_{-\infty}^b f(x) dx - \int_{-\infty}^a f(x) dx = F(b) - F(a)$

$$f(x)dx = F(x + dx) - F(x) = dF(x)$$

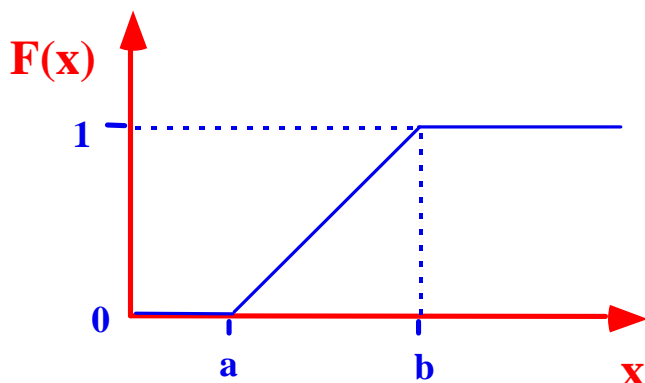
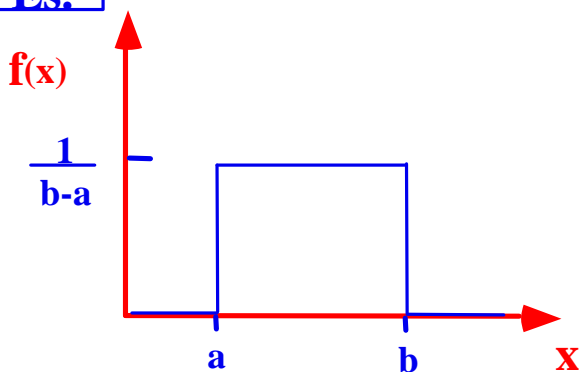
$$\frac{dF(x)}{dx} = f(x)$$

$F(x)$ è monotona crescente
dato che $f(x) \geq 0$ sempre

◆ Se x è definito fra a e b :

$$F(a) = 0 \quad F(b) = 1 \quad (F(-\infty) = 0; F(+\infty) = 1)$$

Es.



$$F(x) = \frac{1}{b-a} \int_a^x dx' = \frac{x-a}{b-a}$$

PARAMETRI CARATTERISTICI DELLE DISTRIBUZIONI DI PROBABILITA'

1) La "posizione" della distribuzione

- ① La moda: x per cui la distribuzione ha il massimo (*unimodali, multimodali*)
- ② La mediana: x_M che divide a metà la distribuzione

$$\int_{-\infty}^{x_M} f(x) dx = \int_{x_M}^{+\infty} f(x) dx = \frac{1}{2}$$

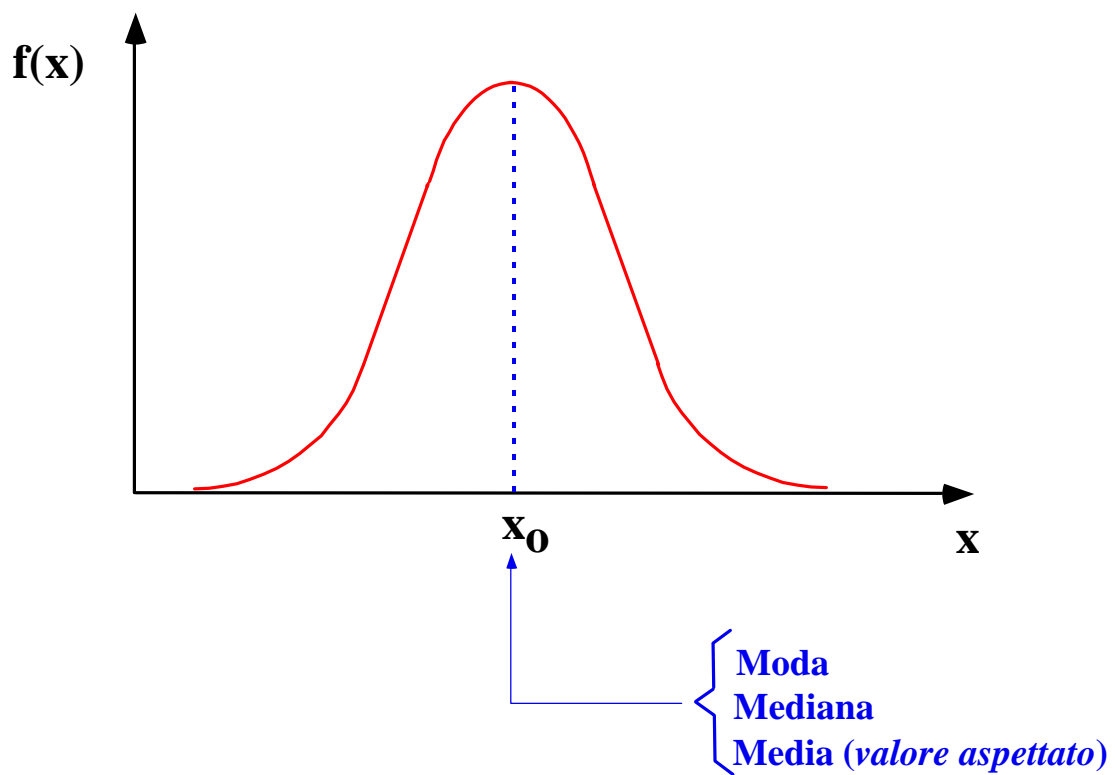
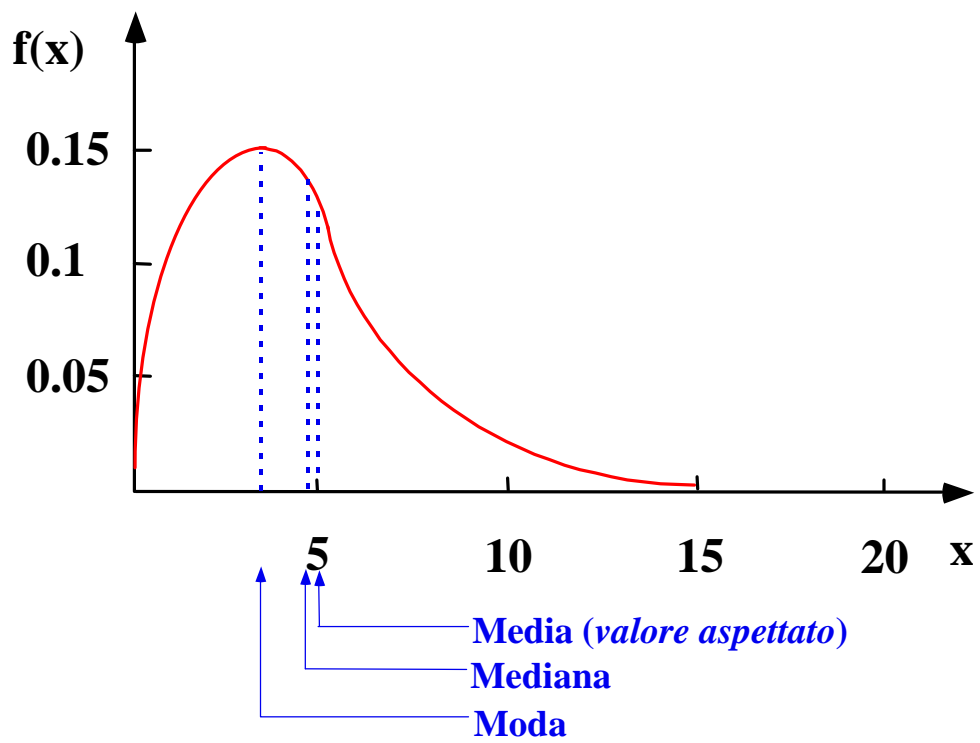
- ③ La media (o **valore atteso**) : ($= \mu$)

$$E[x] = \mu = \int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot f(x) dx \quad \text{continuo}$$

$$E[x] = \mu = \sum_{i=1}^n x_i \cdot P_i(x_i) \quad \text{discreto}$$

In generale si definisce il valore atteso di una funzione di x , $g(x)$ (se x variabile casuale $g(x)$ è anche variabile casuale):

$$E[g(x)] = \int_{-\infty}^{+\infty} g(x) \cdot f(x) dx$$



Proprietà del valore atteso:

$$E[S_k a_k \cdot g_k(x)] = S_k a_k \cdot E[g_k(x)]$$

Casi notevoli:

$$E[a] = a$$

$$\int a \cdot f(x) dx = a \cdot \int f(x) dx = a$$

\uparrow
 $= 1$

$$E[a \cdot g(x)] = a \cdot E[g(x)]$$

Notare:

$$E[(x - \mu)] = E[x] - \mu = 0$$

2) La "larghezza" della distribuzione = **varianza**
= **valore atteso di $(x - \mu)^2$**

$$\text{Varianza} = s^2$$

$$E[(x - \mu)^2]$$

$$s^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - \mu)^2 \cdot f(x) dx \quad \text{continuo}$$

$$s^2 = \sum_{i=1}^n (x_i - \mu)^2 \cdot P_i(x_i) \quad \text{discreto}$$

$$E[(x - \mu)^2] = E[x^2 + \mu^2 - 2\mu x] =$$

$$E[x^2] + \mu^2 - 2\mu E[x] = E[x^2] - \mu^2 = E[x^2] - (E[x])^2$$

$$s = \sqrt{s^2} = \text{deviazione standard}$$

3) La "asimmetria" della distribuzione (valore aspettato di $(x - \mu)^3$)

SKEWNESS $SK = \frac{\int_{-\infty}^{+\infty} (x - \mu)^3 f(x) dx}{S^3}$ > 0 : coda a destra
 < 0 : coda a sinistra
rispetto a μ

$= 0$ per distribuzioni $f(x)$ simmetriche

• **CURTOSIS** $\frac{E[(x - \mu)^4]}{S^4} - 3$ > 0 più piccata
 < 0 meno piccata

• $= 0$ per gaussiana

In generale la funzione di distribuzione è completamente definita dall'insieme dei suoi momenti:

Momento k-esimo di $f(x)$ rispetto a $x_0 = \mu$ $= \mu_k(x_0) = E[(x - x_0)^k]$

$\mu_0(0) = 1 \quad \mu_0(\mu) = 1$

$$\left\{ \begin{array}{l} \int_{-\infty}^{+\infty} (x - x_0)^k \cdot f(x) dx \\ \sum_i (x_i - x_0)^k P_i(x_i) \end{array} \right.$$

Si può dimostrare che:

$$\mu_k(x_0) = \sum_{r=0}^k (-1)^r \cdot \binom{k}{r} \cdot x_0^r \cdot \mu_{k-r}(0)$$

\uparrow *coefficiente binomiale*

Funzione simmetrica

\rightarrow **momenti dispari rispetto $\mu = 0$**
rispetto a μ

VALORE ASPETTATO : $\mu_1(0) = \mu =$ momento primo rispetto a $x_0 = 0$

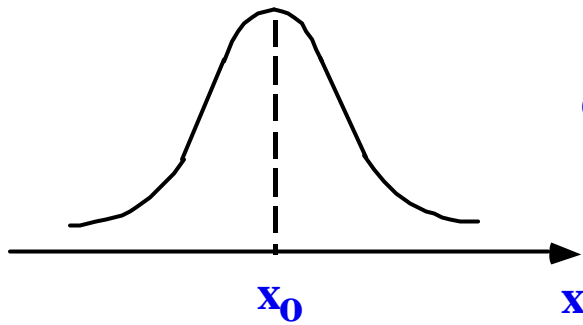
VARIANZA : $\mu_2(\mu) = S^2 =$ momento secondo rispetto a $x_0 = \mu$

SKEWNESS : $\mu_3(\mu/S^3) =$ momento terzo rispetto a μ/S^3

CURTOSIS : momento quarto rispetto a μ/S^4

•
•
•

VALORE ASPETTATO



di $f(x)$ simmetrica rispetto a x_0

$$\mu = x_0$$

Infatti:

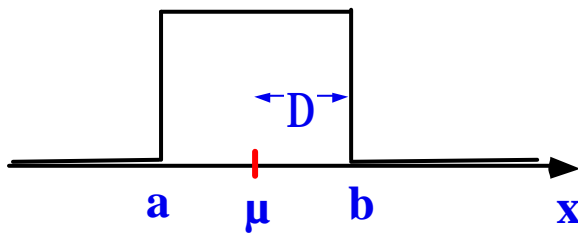
$$\mu = \int_{-8}^{+8} x f(x) dx = \int_{-8}^{+8} (x' + x_0) f(x' + x_0) dx' =$$

$x' = x - x_0 \quad x = x' + x_0 \quad dx = dx'$

$$= \int_{-8}^{+8} \underbrace{x' f(x' + x_0)}_{=0 \text{ (} f \text{ dispari} \cdot f \text{ pari)}} dx' + x_0 \underbrace{\int_{-8}^{+8} f(x' + x_0) dx'}_{=1} = x_0$$

VARIANZA

di una distribuzione uniforme



$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{for } x < a \text{ or } x > b \\ c & \text{for } a \leq x \leq b \end{cases}$$

$$c = \frac{1}{b-a} \quad a, b$$

$$\mu = \int_a^b x f(x) dx = \int_a^b \frac{1}{b-a} x dx = \frac{1}{b-a} \left(\frac{b^2 - a^2}{2} \right) = \frac{b+a}{2}$$

$$s^2 = \int_a^b (x - \mu)^2 f(x) dx = \int_a^b x^2 f(x) dx - \mu^2 =$$

$$= \frac{b^3 - a^3}{3(b-a)} - \frac{(b+a)^2}{4} = \frac{(b-a)^2}{12}$$

$$s = \frac{(b-a)}{\sqrt{12}} = \frac{(b-a)}{2} \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{D}{\sqrt{3}}$$

FUNZIONE GENERATRICE DEI MOMENTI

Funzione della variabile casuale x :

$$G_x(t) = E[e^{xt}]$$

Sviluppano in serie e^{xt} :

$$\begin{aligned} G_x(t) &= E \left[1 + xt + \frac{x^2 t^2}{2} + \dots + \frac{x^k t^k}{k!} + \dots \right] = \\ &= 1 + \mu_1(0)t + \mu_2(0)\frac{t^2}{2} \dots \mu_k(0) \frac{t^k}{k!} + \dots \end{aligned}$$

I coefficienti dello sviluppo della $G_x(t)$ in serie di potenze di t sono i momenti intorno all'origine.

$$\frac{d^k G_x(t)}{dt^k} = E \left[\frac{d^k}{dt^k} e^{xt} \right] = E \left[x^k \cdot e^{xt} \right]$$



$$\frac{d^k G_x(0)}{dt^k} = E[x^k] = \mu_k(0)$$

PROPRIETA' NOTEVOLI :

$$\textcircled{\text{I}} \quad G_{cx}(t) = E[e^{c \cdot x \cdot t}] = E[e^{x \cdot ct}] = G_x(ct)$$

$$\textcircled{\text{II}} \quad G_{c+x}(t) = E[e^{(c+x) \cdot t}] = e^{ct} E[e^{xt}] = e^{ct} \cdot G_x(t)$$

$$\textcircled{\text{III}} \quad G_x(0) = 1$$

La $\textcircled{\text{II}}$ ci permette di calcolare i momenti centrali:

Es. S^2 : momento secondo di $(x - \mu)$

$$G_{x-\mu}(t) = e^{-\mu t} G_x(t)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d}{dt} G_{x-\mu}(t) = -\mu e^{-\mu t} G_x(t) + e^{-\mu t} \cdot \frac{d}{dt} G_x(t) \\ \frac{d^2}{dt^2} G_{x-\mu}(t) = \mu^2 e^{-\mu t} G_x(t) - \mu e^{-\mu t} \cdot \frac{d}{dt} G_x(t) + \\ - \mu \cdot e^{-\mu t} \cdot \frac{d}{dt} G_x(t) + e^{-\mu t} \cdot \frac{d^2}{dt^2} G_x(t) \end{array} \right.$$

$$\frac{d}{dt} G_{x-\mu}(0) = -\mu \underset{=1}{G_x(0)} + \underbrace{\frac{d}{dt} G_x(0)}_{=\mu} = 0$$

$$\frac{d}{dt} G_x(0) = \mu$$

$$\frac{d^2}{dt^2} G_{x-\mu}(0) = \mu^2 - \mu^2 - \mu \cdot \underbrace{\frac{d}{dt} G_x(0)}_{=\mu} + \frac{d^2}{dt^2} G_x(0)$$

\downarrow
 S^2

$$S^2 = \frac{d^2}{dt^2} G_x(0) - \mu^2$$

FUNZIONE DI DISTRIBUZIONE PER FUNZIONE DELLA VARIABILE CASUALE

$x \rightarrow f(x)$ $y = y(x) \rightarrow f(y) ?$
corr. biunivoca

$$dP(x, x + dx) = dP(\underbrace{y, y + dy}_{y(x)})$$



$$f(x) dx = f(y) dy$$

$$f(y) = \left| \frac{dx(y)}{dy} \right| \cdot f(x(y))$$



*dato che f deve
essere sempre ≥ 0*

NOTARE :

$$E[g(x)] = \int g(x) \cdot f(x) \cdot dx$$

$$g(x) = y$$

$$E[y] = \int y \cdot f(x) \cdot dx = \int y \cdot f(y) \cdot dy$$

Infatti:

$$f(y) = \left| \frac{dx}{dy} \right| \cdot f(x)$$

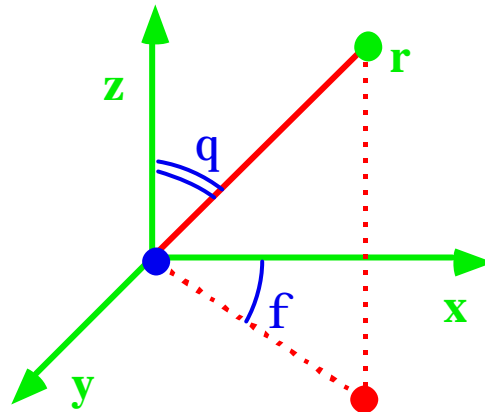
$$E[y] = \int y \cdot f(y) \cdot dy =$$

$$= \int y \cdot \left| \frac{dx}{dy} \right| \cdot f(x) \cdot dy =$$

$$= \int y(x) f(x) \cdot dx$$

Es.

SORGENTE DI PARTICELLE ISOTROPA



Isotropia: *flusso di particelle emesso (per unità di tempo) proporzionale ad angolo solido e costante*

$$dS_{\text{sfera}} = r^2 \sin q dq dj \quad dW = \frac{dS_{\text{sfera}}}{r^2} = d(\cos q) \cdot dj$$

Quindi la funzione di distribuzione di $\cos q$ sarà costante fra -1, +1; $f(\cos q) = \frac{1}{2}$

Funzione di distribuzione di q ?

$$-1 < x < 1$$

$$q = \arccos(\cos q)$$

y

x

$$p > y > 0$$

$$f(y) = f(x) \cdot \left| \frac{dx}{dy} \right| = \frac{1}{2} \left| \frac{d \cos q}{dq} \right| = \frac{1}{2} \sin q$$

$$\int_0^p \frac{1}{2} \sin q dq = -\frac{1}{2} \cos q \Big|_0^p = 1$$

Es.

CUMULATIVA

$F(x)$ è variabile casuale funzione di x

$$y = F(x) = \int_{-\infty}^x f(x') dx'$$

$$\frac{dy}{dx} = f(x)$$

Funzione di distribuzione di y : $f(y) = f(x)$

$$\left| \frac{dx}{dy} \right| = \frac{f(x)}{f(x)} = 1$$

$$\downarrow$$

$$\frac{1}{f(x)}$$

uniforme fra 0 e 1

Dato che $F(x)$ è distribuita uniforme (0, 1) posso ottenere variabili casuali con funzione di distribuzione qualsiasi a partire da variabile casuale con distribuzione uniforme fra 0 e 1 (*utile nei calcolatori*).



Es.

DISTRIBUZIONE ESPONENZIALE

$$x \rightarrow f(x) = \frac{1}{x_0} e^{-\frac{x}{x_0}}$$

$$\int_0^{\infty} f(x) dx = 1$$

$$y = F(x) = \int_0^x \frac{1}{x_0} e^{-\frac{x'}{x_0}} dx' = 1 - e^{-\frac{x}{x_0}}$$

Se y è la cumulativa di $f(x)$, generato y uniforme, $x = g(y)$ sarà distribuito secondo $f(x)$

$$y = 1 - e^{-\frac{x}{x_0}}$$

$$\lg_e (1 - y) = -\frac{x}{x_0} \quad x = -x_0 \lg_e (1 - y)$$

Per generare gaussiana ($\mu = 0, \sigma = 1$) :

$$x = \sin(2\pi y_1) \cdot \sqrt{-2 \lg_e y_2}$$

y_1, y_2 : 2 numeri casuali con distribuzione uniforme

VALORE ASPETTATO E VARIANZA DI y

$$y = g(x)$$

Siano μ_x e s_x^2 valore atteso e varianza di x .

Sviluppo $y(x)$ in serie di Taylor intorno a μ_x :

$$y(x) = y(\mu_x) + \underbrace{\left(\frac{dy}{dx} \right)_{\mu_x}}_{\textcircled{A}} (x - \mu_x) + \frac{1}{2} \left(\frac{d^2y}{dx^2} \right)_{\mu_x} (x - \mu_x)^2 + \dots$$

$$\mu_y = E[y] = y(\mu_x) + \left(\frac{dy}{dx} \right)_{\mu_x} \underbrace{E[(x - \mu_x)]}_{=0} + \frac{1}{2} \left(\frac{d^2y}{dx^2} \right)_{\mu_x} \cdot E[(x - \mu_x)^2] + \dots$$

Trascurando i termini di ordine più alto:

$$\mu_y = E[y] \simeq y(\mu_x)$$

$$E \left[\underbrace{\left(y - y(\mu_x) \right)}_{\downarrow \mu(y)}^2 \right] = \textcircled{A} \text{ dalla } \simeq E \left[\left(\frac{dy}{dx} \right)_{\mu_x}^2 (x - \mu_x)^2 \right] = \left(\frac{dy}{dx} \right)_{\mu_x}^2 \cdot \underbrace{E[(x - \mu_x)^2]}_{\hookrightarrow s_x^2}$$

$$s_y^2 = E \left[\left(y - y(\mu_x) \right)^2 \right] = \left(\frac{dy}{dx} \right)_{\mu_x}^2 \cdot s_x^2$$

approssimata

Se y è funzione lineare di x :

$$y = g(x)$$

$$y = ax + b$$

$$\mu_y = a\mu_x + b$$

$$s_y^2 = a^2 s_x^2$$

ESATTA

DISTRIBUZIONE BINOMIALE

Processo casuale generico

"successo" : una certa modalità E di presentarsi nel processo casuale con probabilità p
(evento complementare \bar{E} , probabilità $(1 - p)$)

Se facciamo n prove, quale è la probabilità che il successo si presenti k volte?

$$P_{n,p}(k)$$

Da teorema delle probabilità composte (le prove sono statisticamente indipendenti) :

k successi, $n-k$ insuccessi

$$p^k (1 - p)^{n-k} \quad k \text{ volte (SI), } (n-k) \text{ volte (NO)}$$

$$p (1 - p)^{n-k} p^{k-1} \quad \text{SI, } (n-k) \text{ volte NO, } (k-1) \text{ SI}$$

⋮

Sommare su tutte le possibili combinazioni:

$$\left(\text{n. di combinazioni } n \text{ oggetti } k \text{ a } k = \binom{n}{k} = \frac{n!}{k! (n - k)!} \right)$$

PERMUTAZIONI**(P)**

Dati **n** oggetti distinti, in quanti modi se ne possono selezionare **r**?


$${}_nP_r = n \cdot (n - 1) \dots (n - r + 1)$$

$${}_nP_n = n \cdot (n - 1) \dots (n \cancel{-} n \cancel{-} 1) = n!$$



$${}_nP_r = \frac{n!}{(n - r)!}$$

RICORDARE:


$$0! = 1$$

COMBINAZIONI**(C)**

Se non siamo interessati all'ordine in cui compaiono gli **r** oggetti:

$${}_nC_r = \frac{n!}{(n - r)! r!} = \binom{n}{r} = \frac{n \cdot (n - 1) \dots (n - r + 1)}{r!}$$

$${}_nC_r \cdot r! = {}nP_r$$

$${}_nC_r = \frac{n!}{(n - r)! r!}$$

$$P_{n,p}(k) = \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot (1-p)^{n-k}$$

$$k = 0 \text{ @ } n$$

DISTRIBUZIONE BINOMIALE

Distribuzione di probabilità nella variabile casuale k
(n finito di valori: $0 \dots n$)

$$\sum_0^n P_{n,p}(k) = \sum_0^n \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot (1-p)^{n-k} = \left(p + (1-p) \right)^n = 1$$

Ricordare che:

$$(a+b)^n = \sum_0^n \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$$

Es.

Probabilità di un 2 su 10 lanci di un dado:

$$p = \frac{1}{6} \quad \begin{array}{l} \text{probabilità} \\ \text{evento} \\ \text{favorevole} \end{array}$$

$$n = 10 \quad \begin{array}{l} \text{numero} \\ \text{prove} \end{array}$$

$$P_{10, \frac{1}{6}}(1) = \frac{10!}{1! (10-1)!} \cdot \left(\frac{1}{6} \right)^1 \cdot \left(1 - \frac{1}{6} \right)^9 = 0.32$$

Probabilità di nessun 2:

$$P_{10, \frac{1}{6}}(0) = \frac{10!}{0! 10!} \cdot \left(\frac{1}{6} \right)^0 \cdot \left(\frac{5}{6} \right)^{10} = 0.16$$

Probabilità di tutti 2:

$$P_{10, \frac{1}{6}}(10) = \frac{10!}{10! 0!} \cdot \left(\frac{1}{6} \right)^{10} \cdot \left(\frac{5}{6} \right)^0 = 1.7 \cdot 10^{-8}$$

Probabilità di avere almeno un 2:

$$\sum_{k=1}^{10} P_{10,1/6}(k) = 1 - P_{10,1/6}(0) = 1 - 0.16 = 0.84$$

Proprietà notevoli della binomiale:

① **Valore aspettato e varianza**

$$\mu = E[k] = \sum_{k=0}^n k \cdot \frac{n!}{k! (n-k)!} \cdot p^k \cdot (1-p)^{n-k} =$$

1 dato che $k=0$ annulla primo termine

$$= n \cdot p \sum_{k=1}^n \frac{(n-1)!}{(k-1)! (n-k)!} p^{k-1} \cdot (1-p)^{n-k}$$

$$\begin{cases} k' = k - 1 \\ n' = n - 1 \end{cases}$$

$$= n \cdot p \underbrace{\sum_{k'=0}^{n'} \frac{n'!}{k'! (n'-k')!} p^{k'} \cdot (1-p)^{n'-k'}}_{=1}$$

$$\mu = n \cdot p$$

$$s^2 = E[(k - np)^2] = E[k^2] - (np)^2$$

$$E[k^2] = \sum_0^n k^2 \frac{n!}{k! (n-k)!} p^k (1-p)^{n-k} =$$

$$= n p \sum_1^n k \frac{(n-1)!}{(k-1)! (n-k)!} p^{k-1} (1-p)^{n-k} =$$

$$k' = k - 1$$

$$n' = n - 1$$

$$= n p \sum_0^{n'} (k' + 1) P_{n',p}(k') =$$

su n-1 prove

$$= np \cdot E[(k' + 1)] = np \cdot (E[k'] + 1) =$$

$$\hookrightarrow (n-1) \cdot p$$

$$= np \cdot \{(n-1) \cdot p + 1\} = n (n-1) \cdot p^2 + n \cdot p$$

$$s^2 = n (n-1) \cdot p^2 + n \cdot p - (n \cdot p)^2 = np(1-p)$$

$$s^2 = np \cdot (1-p)$$

$$s = \sqrt{np(1-p)}$$

Distribuzione binomiale:

$$p_{n,p}(k) = \binom{n}{k} p^k q^{n-k} \quad q = (1-p)$$

$$\mu = np \quad s = \sqrt{npq}$$

**μ e s^2 della distribuzione binomiale
usando funzione generatrice dei momenti**

$$\begin{cases} \mu = \mu_1(0) \\ s^2 = \mu_2(\mu) \end{cases} \quad P_{N,p}(k) = \binom{N}{k} p^k q^{N-k}$$

$$\begin{aligned} G_k(t) &= E[e^{tk}] = \sum_{k=0}^N e^{tk} \binom{N}{k} p^k q^{N-k} = \\ &= \sum_{k=0}^N \binom{N}{k} \cdot (p e^t)^k \cdot q^{N-k} = \left(\text{sviluppo di un binomio} \right) \\ &= (e^t \cdot p + q)^N \end{aligned}$$

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} G_k(t) = N \cdot (e^t \cdot p + q)^{N-1} \cdot p \cdot e^t \\ \frac{d^2}{dt^2} G_k(t) = N \cdot (e^t \cdot p + q)^{N-1} \cdot p \cdot e^t + \\ \quad + N \cdot (N-1) \cdot (e^t \cdot p + q)^{N-2} \cdot p^2 \cdot e^{2t} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \mu_1(0) = \frac{d}{dt} G_k(0) \\ \mu_2(\mu) = s^2 = \frac{d^2}{dt^2} G_e(0) - \mu^2 \end{cases}$$

$$\mu = \frac{d}{dt} G_k(0) = N \cdot (p + q)^{N-1} \cdot p = N \cdot p$$

$$\begin{aligned} \frac{d^2}{dt^2} G_k(0) &= N (p + q)^{N-1} \cdot p + \\ &\quad + N (N - 1) \cdot (p + q)^{N-2} \cdot p^2 = \\ &= N \cdot p + N \cdot (N - 1) \cdot p^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} s^2 &= \frac{d^2}{dt^2} G_k(0) - \mu^2 = Np + N^2p^2 - Np^2 + \\ &\quad - (Np)^2 = Np \cdot (1 - p) = \\ &= N \cdot p \cdot q \end{aligned}$$

1

Massimo della distribuzione

Massimo in corrispondenza a $k \simeq np$ (se $np \gg 1$)

$$\begin{aligned} \frac{P_{N,p}(k+1)}{P_{N,p}(k)} &= \frac{\cancel{N!}}{(k+1)! (N-k-1)!} \cdot \frac{p^{k+1} q^{N-k-1}}{p^k \cdot q^{N-k}} = \\ &= \frac{N-k}{k+1} \cdot \frac{p}{q} \end{aligned}$$

Distribuzione crescente per :

$$\frac{N-k}{k+1} \cdot \frac{p}{q} = 1$$

$$k = Np - q$$

2

Massimo della distribuzione

Massimo in corrispondenza a $k \simeq np$ (se $np \gg 1$)

3

se $p = 0.5$

$$p_{n,1/2}(k) = \frac{n!}{k! (n-k)!} \left(\frac{1}{2}\right)^k \cdot \left(1 - \frac{1}{2}\right)^{n-k}$$

$$p_{n,1/2}(n-k) = \frac{n!}{(n-k)! k!} \left(\frac{1}{2}\right)^{n-k} \cdot \left(1 - \frac{1}{2}\right)^k$$

$$p(k) = p(n-k)$$



Se $p = 0.5$ distribuzione simmetrica intorno a np (*intero*)

4

 $n \rightarrow \infty$, $p = \text{costante}$

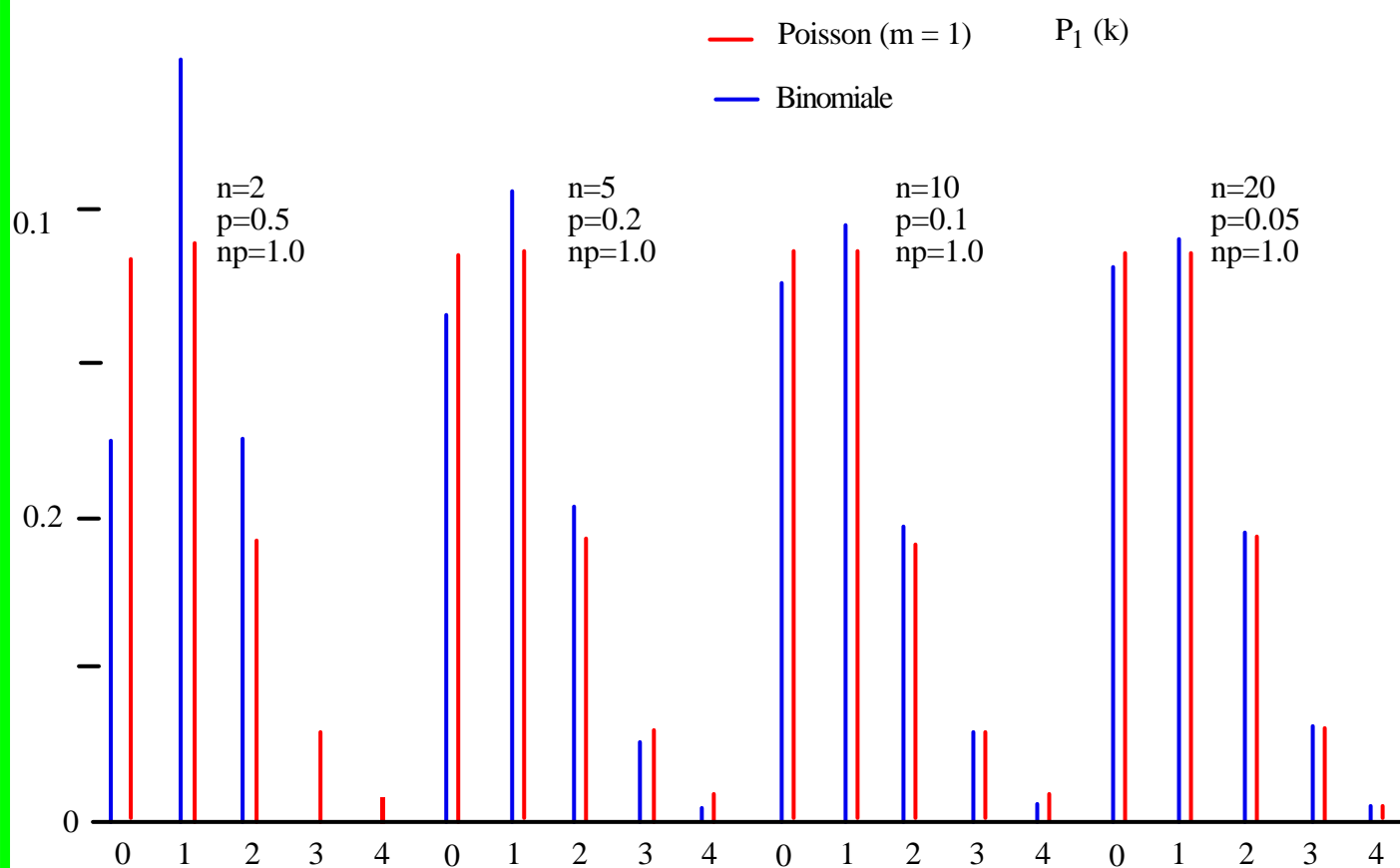
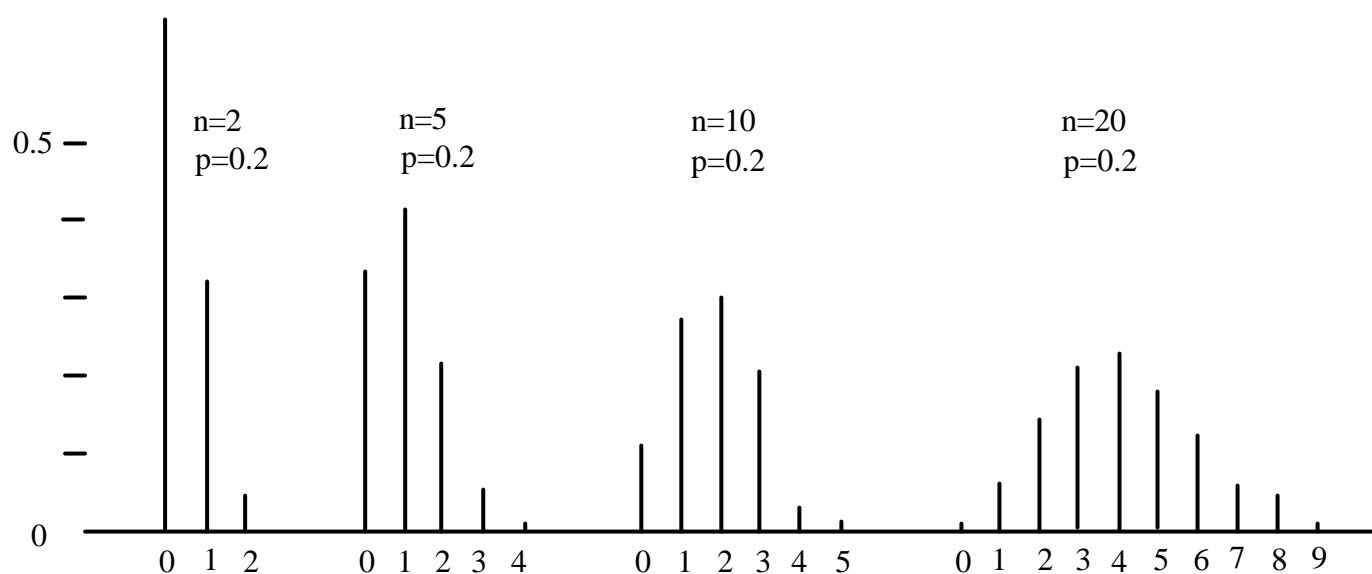
Tende alla distribuzione "normale" (*gaussiana*) con:

$$\mu = np \qquad \sigma = \sqrt{np \cdot (1-p)}$$

5

 $n \rightarrow \infty$, $np = \text{costante}$

Tende alla distribuzione di Poisson



Es. Frequenza su n prove

(Evento favorevole con probabilità p)

$$n = \frac{k}{p}$$

$$\mu = E[n] = \frac{1}{p} \quad E[k] = \frac{np}{1} = p$$

$$s_n^2 = E[(n - \mu_n)^2] = E \left[\left(\frac{k}{p} - p \right)^2 \right] =$$

$$= E \left[\left(\frac{k}{p} \right)^2 \right] - p^2 = \frac{1}{p^2} \left\{ n(n-1) p^2 + np \right\} p^2$$

$$= \frac{1}{p^2} \cdot np \cdot (1 - p) = \frac{p \cdot (1 - p)}{p}$$

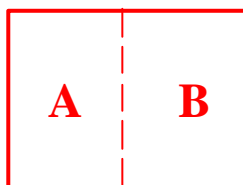
vedi

AS-34

$$\begin{cases} s_n \rightarrow 0 & \text{per } n \rightarrow \infty \\ n \rightarrow p & \text{per } n \rightarrow \infty \end{cases}$$

*Vedi anche
Teorema di Bernoulli*

Es. Fluttuazioni di densità in un gas ideale



V

Date N molecole in V, sia p la probabilità per generica molecola di essere in A e (1 - p) la probabilità di essere in B.

(Nessuna interazione fra molecole, a parte urti ® posizione molecola indipendente da posizione altre molecole).

AS-40

Probabilità ad un certo istante di avere n_A molecole in A?



Ogni molecola è una prova indipendente

e "evento favorevole" = essere in A.

$$P_{N,p_A}(n_A) = \binom{N}{n_A} \cdot p_A^{n_A} \cdot (1 - p_A)^{N-n_A}$$

se $p_A = (1 - p_A) = \frac{1}{2}$ (dato che i volumi sono uguali)

$$P_{N,\frac{1}{2}}(n_A) = \frac{N!}{n_A! (N - n_A)!} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^N$$

$$\mu(n_A) = \frac{N}{2} \quad s(n_A) = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{N}$$

Applicando la formula di Stirling alla variabile x :

$$x = \frac{n_A - \frac{N}{2}}{\frac{N}{2}} \quad \left(\begin{array}{l} \text{scarto relativo di} \\ n_A \text{ dal suo} \\ \text{valore atteso} \end{array} \right)$$

$$P(x) = \sqrt{\frac{2}{p \cdot N}} \cdot e^{-(N-1) \cdot \frac{x^2}{2}}$$

Dato che nell'esponente compare $-\frac{N \cdot x^2}{2}$ con N molto grande, appena x si scosta da 0, $P \rightarrow 0$ ($x = 10^{-8}$, $P \approx 0$).

UN GAS HA SEMPRE DENSITA' UNIFORME

DISTRIBUZIONI SPERIMENTALI

● *Variabile casuale discreta*

Es. Somma di due dadi

| | | | | | |
|--------|-------|-------|-------|-----|----------|
| x | 2 | 3 | 4 | ... | 12 |
| $P(x)$ | P_2 | P_3 | P_4 | ... | P_{12} |

N Esperimenti ripetuti (lancio dadi)

Risultato: n_2 n_3 ... n_{12} $S_n = N$

$$F_2 = \frac{n_2}{N} \quad F_3 = \frac{n_3}{N} \quad \dots \quad F_{12} = \frac{n_{12}}{N}$$

*Per il Teorema
di Bernoulli*



P_2



P_3



$N \text{ @ } 8$

...



P_{12}

Consideriamo un particolare valore della variabile casuale (Es. 2):

$$\text{=} \quad N \text{ @ } 8 \quad n_2 \text{ @ } NP_2$$

$$\text{=} \quad N \text{ finito:} \quad F_2 ? P_2 \quad n_2 ? NP_2$$

Quale è la distribuzione di probabilità di n_2 ?

$$P_{N, P_2}(k) = \binom{N}{k} P_2^k (1 - P_2)^{N-k} \quad (\text{binomiale})$$

Se P_2 è probabilità della variabile 2, la probabilità di $k(=n_2)$ successi su N prove si ottiene dalla distribuzione binomiale

Ripetendo M volte la serie di N lanci (N cost) i valori di n_2 che si ottengono saranno distribuiti secondo la $P_{N, P_2}(n_2)$ ($0 < n_2 < N$). [Se N grande e P_2 piccolo la distribuzione tenderà alla poissoniana con $m = NP_2$. Vedi dopo.

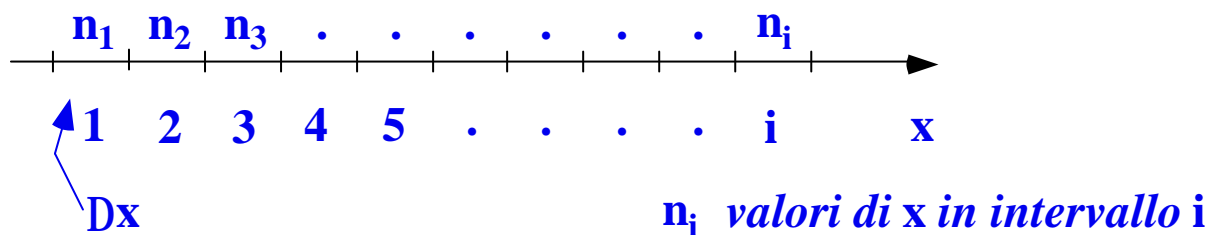
Valore atteso e varianza di n_2 :

$$\mu(n_2) = NP_2$$

$$s^2(n_2) = N \cdot P_2 \cdot (1 - P_2)$$

● Variabile casuale continua

N prove : $x_1 \dots x_N$



$$\frac{n_i}{N} \quad \text{--- } N \text{ @ } 8 \text{ ---} \rightarrow DP_i = \int_{x_i}^{x_i+Dx} f(x) dx \simeq f(x_i) \cdot Dx$$

Per N finito n_i ? NDP .

Ripetendo M volte la serie di N misure il contenuto n_i del generico Dx avrà distribuzione binomiale $P_{N, f(x)}(n_i)$ [tenderà alla poissoniana con $m(n_i) = N \cdot f(x_i) \cdot Dx$ per N grande e DP piccolo].

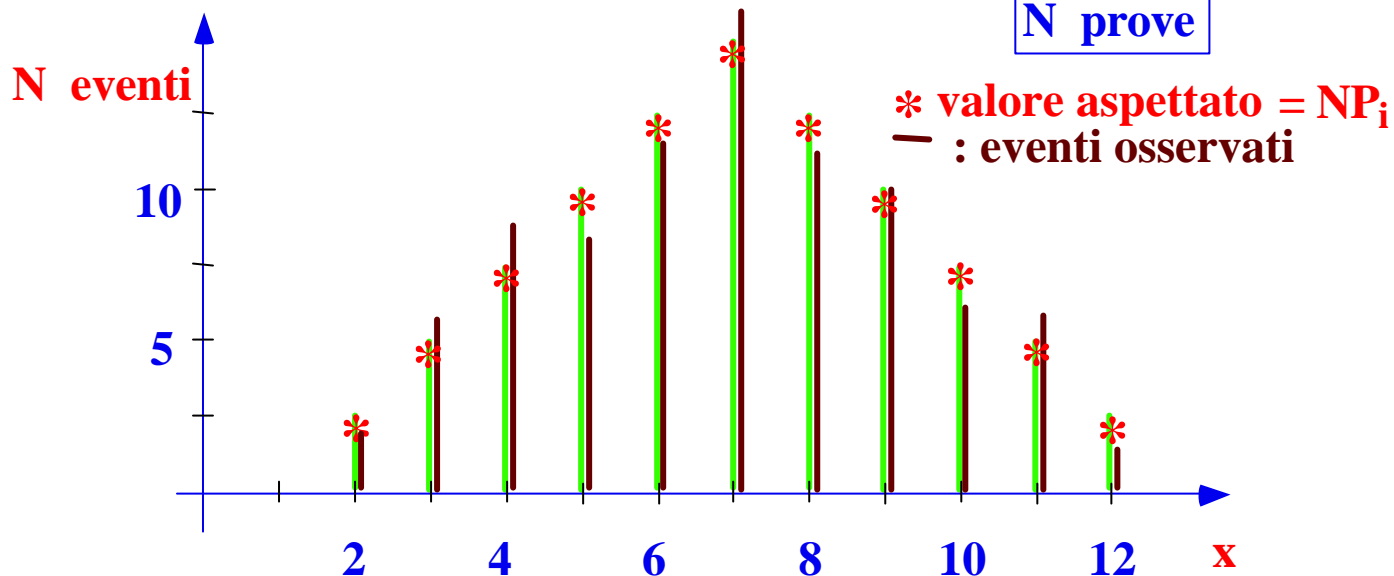
Valore aspettato di n_i :

$$\mu(n_i) = N f(x_i) \cdot Dx$$

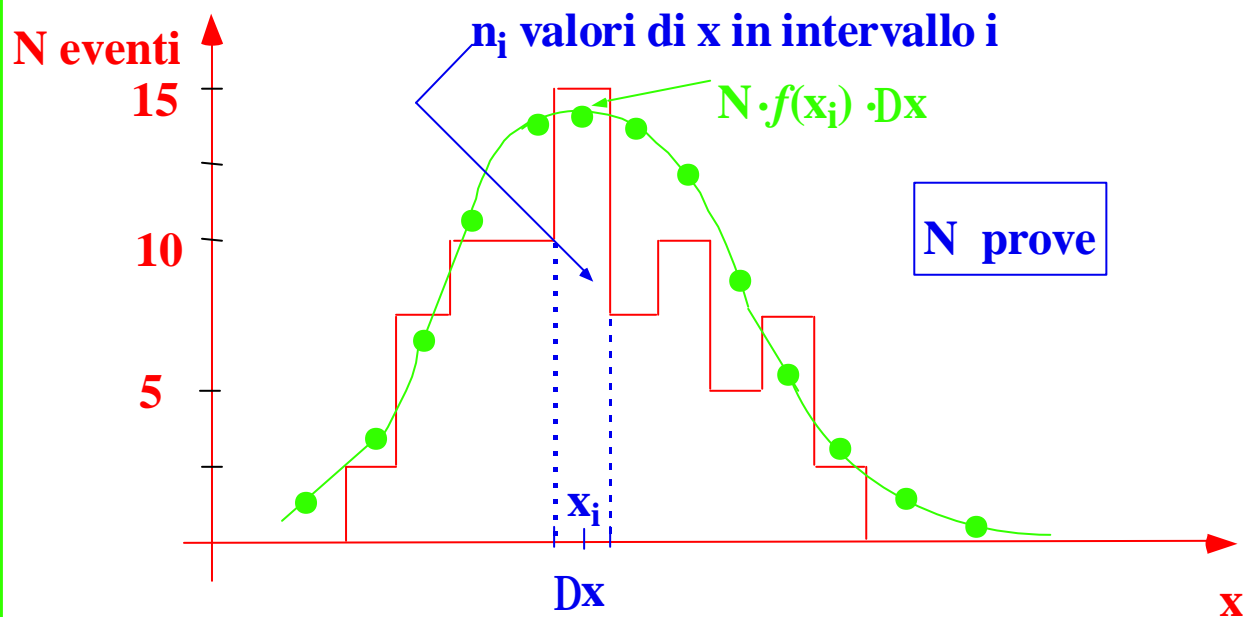
$$s^2(n_i) = N \cdot f(x_i) \cdot Dx \cdot (1 - f(x_i) \cdot Dx)$$

Rappresentazione grafica (istogrammi)

caso discreto



caso continuo



$$\text{Area} = \sum_i n_i Dx = Dx \sum_i n_i = Dx \cdot N$$

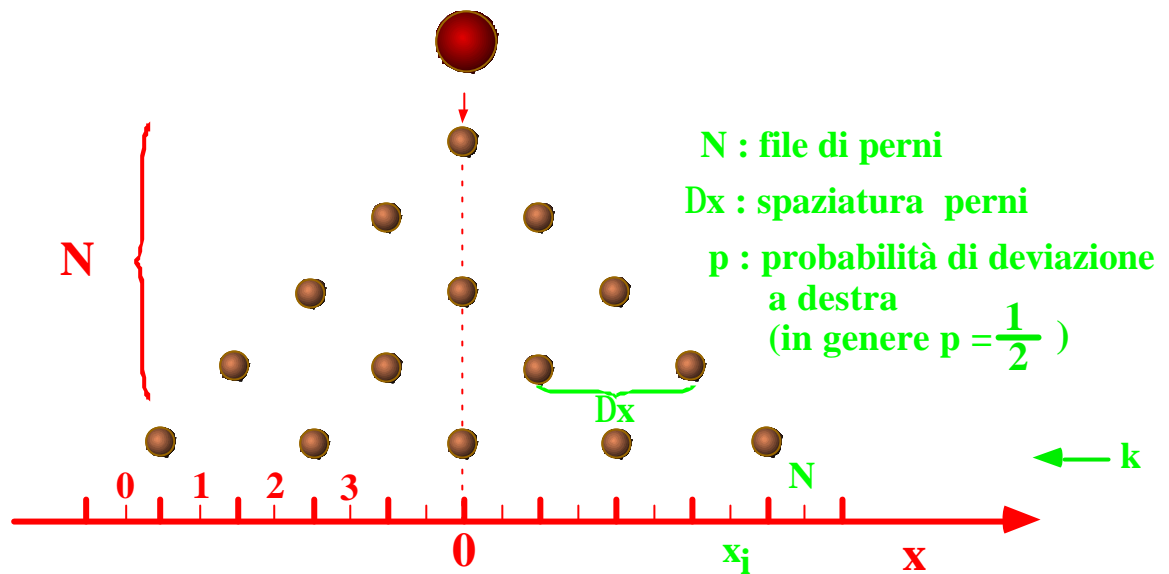
Valore atteso in intervallo i:

$$\mu_i = N f(x_i) \cdot Dx$$

$$\text{Area} = \sum_i \mu_i Dx = N \cdot Dx \sum_i f(x_i) Dx = Dx \cdot N$$

$$\int_s f(x) dx = 1$$

QUINCONCE DI GALTON



Ad ogni urto la pallina subirà spostamento $\frac{Dx}{2}$

Coordinata x_i finale della pallina :

$$x_i = \left(n_D - \frac{N}{2} \right) Dx$$

Infatti:

n_D : n. urti con deviazione a destra

$n_S = (N - n_D)$: n. urti con deviazione a sinistra

$$\begin{aligned}
 x &= n_D \cdot \frac{Dx}{2} - (N - n_D) \frac{Dx}{2} = \\
 &= (2n_D - N) \frac{Dx}{2} = \left(n_D - \frac{N}{2} \right) Dx
 \end{aligned}$$

$$n_D = 0, \dots, N$$

$N + 1$ valori

$$x = -\frac{N}{2}, \dots, \frac{N}{2}$$

($Dx = 1$)

Vogliamo valutare la probabilità che la pallina abbia alla fine x_i

$$P(x_i) = P(n_D)$$

Evento favorevole : *deviazione a destra*

Un singolo urto : *una prova ogni fila di perni*

Dopo **N** prove (= N di file di perni), la probabilità che evento favorevole si sia presentato **n_D** volte (essendo **p** la probabilità di deviazione a destra) :

$$P_{N,p}(n_D) = \binom{N}{n_D} \cdot p^{n_D} \cdot (1 - p)^{N-n_D}$$

$$\mu(n_D) = N \cdot p$$

$$s^2(n_D) = N \cdot p \cdot (1 - p)$$

Se considero ora la variabile **x = f(n_D)**:

$$y = az + b$$



$$\mu_z, s_z^2$$

$$P(y) = P(z = \frac{1}{a} \{y - b\})$$

$$\mu(y) = a \cdot \mu_z + b$$

$$s^2(y) = a^2 \cdot s_z^2$$

$$x = (n_D - \frac{N}{2}) \cdot Dx$$

$$n_D = \frac{x}{Dx} + \frac{N}{2}$$

$$P(x) = P(n_D \text{ calcolato in } x) = \binom{N}{n_D} \cdot p^{n_D} \cdot (1 - p)^{N-n_D}$$

$$\mu(x) = (N \cdot p - \frac{N}{2}) \cdot Dx$$

$$s^2(x) = (N \cdot p \cdot (1 - p)) \cdot Dx^2$$

La probabilità che la pallina abbia coord. finale x è una

BINOMIALE con $\begin{cases} n. \text{ prove} = n. \text{ file chiodi} \\ p = \text{prob. urto a destra} \end{cases}$

LANCI RIPETUTI

Numeriamo caselle di arrivo della pallina da **0** a **N**

(**k** (numero della casella) = **n_D**)

$x_k = (\text{coordinata centro cella}) = \left(k - \frac{N}{2}\right)$ avendo posto:

$$P(k) = P(n_D) = P(x_k)$$

$$Dx = 1$$

Se faccio **N** lanci di palline, quale è la probabilità di trovare **m_k** palline in cella **k**?

Se eseguiamo **N** lanci (**N** prove) e se $P(k)$ è la probabilità che la pallina vada nella cella **k** (evento favorevole), la distribuzione di probabilità per la variabile casuale **m_k** (= numero di successi su **N** prove, cioè numero di palline in cella **k**) è una *binomiale*:

$$P_{N,p(k)}(m_k) = \binom{N}{m_k} \cdot \{P(k)\}^{m_k} \cdot \{Q(k)\}^{N-m_k}$$

↓

$$Q=1-P$$

$$0 = m_k = N$$

con

$$P(k) = P_{N,p}(k) = \binom{N}{k} p^k \cdot (1-p)^{N-k}$$

N: numero di file di chiodi

p: probabilità di deviazione a destra

La variabile casuale m_k avrà valore atteso e varianza:

$$\mu(m_k) = N \cdot P(k)$$

$$s^2(m_k) = N \cdot P(k) \cdot (1 - P(k))$$

Dove $\mu(m_k)$ rappresenta il numero atteso di palline nella cella k se si eseguono N lanci e s ($= \sqrt{\text{varianza}} = \text{deviazione standard}$) è la larghezza della distribuzione intorno al valore atteso. Notare che:

$$\frac{s(m_k)}{\mu(m_k)} = \frac{\sqrt{N \cdot P(k) \cdot (1 - P(k))}}{N \cdot P(k)} = \frac{1}{\sqrt{N}} \cdot \sqrt{\frac{1}{P(k)} - 1}$$



*Larghezza relativa distribuzione =
intervallo fluttuazione valori
osservati intorno a valore
atteso/valore atteso*

Quindi $\frac{s}{\mu}$ decresce come $\frac{1}{\sqrt{N}}$ per un dato $P(k)$

NOTARE:

se $P(k) \ll 1$, $(1 - P(k)) \approx 1$

$$s^2(m_k) \sim \mu(m_k) \quad \frac{s}{\mu} = \frac{1}{\sqrt{\mu}}$$

TRACCIA SUGGERITA ESPERIENZA

$$(P = 0.5; \quad XD = 1)$$

1

Verifica valore aspettato e varianza
variabile x

N determinazioni di x con **N** lanci

Miglior stima di μ e s :

$$\bar{x} = \frac{\sum x_i}{N}$$

$$s = \sqrt{\frac{\sum (x_i - \bar{x})^2}{(N - 1)}} \approx \sqrt{\frac{\sum x_i^2}{N} - \bar{x}^2}$$

$(N - 1) \sim N$

Nella generica cella k, m_k palline;

→ osservato m_k volte $x_k = \left(k - \frac{N}{2}\right)$

$$\sum_{i=1}^N x_i = \sum_{k=0}^N x_k \cdot m_k$$

$$\sum_{i=1}^N x_i^2 = \sum_{k=0}^N (x_k \cdot m_k)^2$$

Confronto valori misurati → valori aspettati

$$\begin{array}{cc} & \text{(Stime)} \\ \bar{x}, s(x) & \mu(x), s(x) \end{array}$$

Per buon accordo alto numero N di lanci

$$(N = 30, N = 10\,000)$$

2

Confronto distribuzione aspettata e distribuzione osservata variabile m_k

Valore aspettato di m_k in cella k avendo effettuato N lanci:

$$\mu_k = \mu(m_k) = N \cdot P(k)$$

Confrontare, per ogni cella k , μ_k con valore osservato m_k .

Verificare, utilizzando il test del χ^2 (vedi dopo), l'accordo fra distribuzione aspettata e distribuzione osservata.

Accordo (visivo) migliora con $N \rightarrow \left(\frac{s}{\mu} \pm \frac{1}{\sqrt{N}} \right)$

Con stesso valore di N fare due serie
con N piccolo e N grande

$$N = 30$$

$$N_1 = 100$$

$$N_2 = 10000$$

3

Confronto distribuzione osservata e
distribuzione attesa per un
determinato m_k

Fisso una cella k

M serie di N lanci

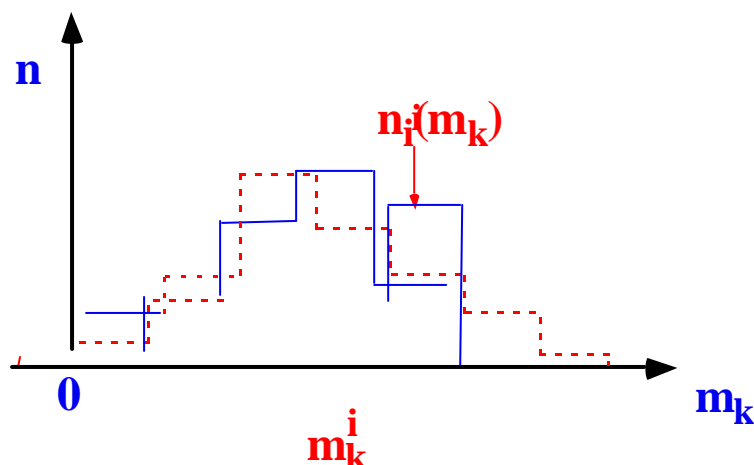
j m_k = numero di palline in cella k nella serie j ($j = 1, M$)

Distribuzione attesa per n_i ,

n_i = numero di volte che si osserva m_k in i cella k

$$n_i(m_k^i) = M \cdot P(m_k^i)$$

con
$$P(m_k^i) = \binom{N}{m_k^i} \cdot \{P(k)\}^{m_k^i} \cdot \{Q(k)\}^{N-m_k^i}$$



DISTRIBUZIONE DI POISSON

Evento casuale **E** cui è associata variabile casuale **t** con le seguenti caratteristiche :

1) Densità di probabilità uniforme $f(t) = 1$

$$dP = 1 \, dt$$

2) Eventi statisticamente indipendenti

3) Probabilità **trascurabile** di avere più di un evento in dt

Distribuzione di probabilità che in un intervallo $(0, t)$ si verifichino **k** eventi:

$$P(k, t)$$

$$dP(1, dt) = 1 \, dt$$

$$dP(0, dt) = 1 - 1 \, dt$$

$$\begin{aligned} P(k, t + dt) &= P(k-1, t) \cdot dP(1, dt) + P(k, t) \, dP(0, dt) \\ &= P(k-1, t) \cdot 1 \, dt + P(k, t) \cdot (1 - 1 \, dt) \end{aligned}$$

$$\frac{P(k, t + dt) - P(k, t)}{dt} = 1 \cdot P(k-1, t) - 1 \cdot P(k, t)$$

$$\frac{dP(k, t)}{dt} + 1 \cdot P(k, t) - 1 \cdot P(k-1, t) = 0$$

$$k = 0 \longrightarrow P(k - 1, t) = 0$$

$$\frac{dP(0, t)}{dt} = -\lambda P(0, t)$$

$$P(0, t) = e^{-\lambda t}$$

$$P(0, 0) = 1$$

$$k = 1$$

$$\frac{dP(1, t)}{dt} + \lambda \cdot P(1, t) - \lambda e^{-\lambda t} = 0$$

$$\text{Sol. : } P(1, t) = \lambda t \cdot e^{-\lambda t} \quad \text{infatti:}$$

$$\cancel{1 e^{-\lambda t}} - \cancel{\lambda^2 t e^{-\lambda t}} + \cancel{\lambda^2 t e^{-\lambda t}} - \cancel{1 e^{-\lambda t}} = 0$$

$$k = 2$$

⋮

$$k$$

$$\frac{dP(2, t)}{dt} + \lambda \cdot P(2, t) - \lambda^2 t \cdot e^{-\lambda t} = 0$$

$$P(k, t) = \frac{(\lambda t)^k}{k!} e^{-\lambda t}$$

t : costante; $m = \lambda t$ costante

$$P_m(k) = \frac{m^k}{k!} e^{-m}$$

**Distribuzione
di
Poisson**

(dipende da un solo
parametro: m)

k : variabile casuale discreta fra 0 \mathbb{R} + 8

Normalizzazione :

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{m^k}{k!} e^{-m} = e^{-m} \cdot \underbrace{\sum_{k=0}^{\infty} \frac{m^k}{k!}}_{e^m} = e^{-m} \cdot e^m = 1$$

sviluppo in serie di e^m

Valore aspettato : $0 = k = 8$

$$\mu = E[k] = \sum_0^8 k \frac{m^k}{k!} e^{-m} = m e^{-m} \cdot \sum_1^8 \frac{m^{k-1}}{(k-1)!}$$

\downarrow
 1

$$k' = k - 1$$

$$= m \cdot e^{-m} \underbrace{\sum_0^8 \frac{m^{k'}}{k'!}}_{e^m} = m \cdot \cancel{e^{-m}} \cdot \cancel{e^m}$$

$$\mu = m$$

Notare:

$$\bullet P_m(k) = P_m(k-1) \cdot \frac{m}{k}$$

crescente fino a
 $k = m$

$$\bullet P_m(m) = P_m(m-1)$$

Varianza :

$$s^2 = E[(k - m)^2] = E[k^2] - m^2$$

$$E[k^2] = \sum_0^8 k^2 \frac{m^k}{k!} e^{-m} = m \sum_1^8 k \frac{m^{k-1}}{(k-1)!} e^{-m} =$$

\downarrow
 1

$$k' = k - 1$$

$$= m \sum_0^8 (k' + 1) \frac{m^{k'}}{k'!} e^{-m} =$$

$$= m E[k' + 1] = m(m + 1)$$

$$s^2 = m(m + 1) - m^2$$

$$s^2 = m$$

$$s = \sqrt{m}$$

La distribuzione di Poisson si può anche ottenere da distribuzione binomiale per n molto grande, p molto piccolo ($n \cdot p$ limitato).

Infatti (esempio decadimento radioattivo): per ogni intervallo di tempo t :

p : probabilità di decadere

1) Si fanno n prove (n nuclei che possono decadere)

2) Si ottengono k "successi" (= k decadimenti)

p : molto piccolo n : molto grande np : limitato

$$\begin{aligned}
 P_{n,p}(k) &= \lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ np = \text{cost.}}} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} = \\
 &\quad \mu(k) = \underbrace{n \cdot p}_{\substack{\downarrow \\ \text{in Poisson} \\ m \rightarrow p = \frac{m}{n}}} \quad S^2(k) \simeq n p \quad \swarrow 1-p \sim 1 \text{ se } p \text{ piccolo} \\
 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n \cdot (n-1) \dots (n-k+1)}{k!} \left(\frac{m}{n}\right)^k \left(1 - \frac{m}{n}\right)^{n-k} = \\
 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n \cdot (n-1) \dots (n-k+1)}{n^k} \frac{m^k}{k!} \frac{\left(1 - \frac{m}{n}\right)^n}{\left(1 - \frac{m}{n}\right)^k} = \\
 &\quad = 1 \dots \text{dato che } k \text{ finito} \\
 &= \lim_{n \rightarrow \infty} 1 \left(1 - \frac{1}{n}\right) \left(1 - \frac{2}{n}\right) \dots \left(1 - \frac{k-1}{n}\right) \cdot \frac{m^k}{k!} \cdot \frac{\left(1 - \frac{m}{n}\right)^n}{\left(1 - \frac{m}{n}\right)^k} = \frac{m^k}{k!} e^{-m}
 \end{aligned}$$

Ricordare che:

c.v.d.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{a}{x}\right)^x = e^a \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{m}{n}\right)^n = e^{-m}$$

DIMOSTRAZIONE ALTERNATIVA:

$$\lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ p = \frac{m}{n}}} \frac{n!}{k! (n-k)!} \cdot p^k (1-p)^{n-k} =$$

FORMULA DI STIRLING : $n! \underset{n \gg 1}{\simeq} \sqrt{2\pi n} \cdot n^n \cdot e^{-n}$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{k!} \cdot \frac{\sqrt{2\pi n}}{\sqrt{2\pi (n-k)}} \cdot \frac{\cancel{n^n} \cdot \cancel{e^{-n}}}{(n-k)^{n-k} \cdot e^{-(n-k)}} \cdot \left(\frac{m}{n}\right)^k \cdot \left(1 - \frac{m}{n}\right)^{n-k} =$$

$= 1$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{k!} \cdot \frac{1}{\left(1 - \frac{k}{n}\right)^{n-k} \cdot e^k} m^k \left(1 - \frac{m}{n}\right)^{n-k} =$$

$\swarrow e^{-k} \qquad \searrow e^{-m}$

Ricordare:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{a}{x}\right)^x = e^a$$

$$= \frac{1}{k!} m^k \cdot e^{-m}$$

Es. Decadimento nuclei radioattivi :

Se m è numero medio di decadimenti per unità di tempo ($m = \text{media}$), la probabilità di osservare k dec. nell'unità di tempo è data dalla :

$$P_m(k) = \frac{m^k}{k!} e^{-m}$$

10 dec./U.T. ;

Probabilità di 0 dec.?

$$P_{10}(0) = \frac{10^0}{0!} e^{-10} = 4.5 \cdot 10^{-5}$$

$$P_{10}(10) = \frac{10^{10}}{10!} e^{-10} = 0.13$$

$$\mu = m \qquad \sigma = \sqrt{m}$$

$$P(m - \sqrt{m} \leq k \leq m + \sqrt{m}) \quad ?$$

$$P_{10}(7 \leq k \leq 13) = F_{10}(13) - F_{10}(7) = 0.865 - 0.220 = 0.645$$

Se $m = 4$:

$$P_4(2 \leq k \leq 6) = F_4(6) - F_4(2) = 0.889 - 0.238 = 0.651$$

Es.

(Esperimento di Rutherford)

Sorgente α su bersaglio

◀ conteggio numero di particelle con angolo di "scattering" q

◀ 2608 conteggi da 7.5 s; 10 094 particelle in totale.

$$\frac{10\,094}{2608} = \text{in media } 3.87 \text{ particelle/conteggio} = m$$

Verifica della distribuzione Poisson del numero di particelle osservate in un conteggio:

● Prove fatte: 2608 = N

● Probabilità di osservare k particelle in un conteggio :

$$P_m(k) = \frac{m^k}{k!} e^{-m}$$

● Numero aspettato di conteggi in cui osservo k particelle, avendo fatto N prove (da binomiale) :

$$n_k = N \cdot P_m(k)$$

| k | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | ≥ 10 |
|----------------------|----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|----|----|-----------|
| n_k (osservato) | 57 | 203 | 383 | 525 | 532 | 408 | 273 | 139 | 45 | 27 | 11 |
| n_k (aspettato) | 54 | 210 | 407 | 526 | 508 | 393 | 254 | 140 | 68 | 29 | 17 |
| $S n_k$ | 7 | 14 | 20 | 23 | 22 | 20 | 16 | 12 | 8 | 5 | 4 |

Es.

Conteggi da rivelatore con $e < 1$

- ◆ numero medio per unità di tempo di particelle nel rivelatore : n
(con distribuzione di Poisson)
- ◆ r : numero di particelle osservate nell'unità di tempo
quale è: $P(r)$?

Per avere r conteggi, = r particelle nel rivelatore con
 p = probabilità del rivelatore di osservare particella

$$\begin{aligned} P(r) &= \sum_n P_n(n) \cdot B_{n,p}(r) = \\ &= \sum_n \frac{1}{n!} \cdot n^n \cdot e^{-n} \cdot \binom{n}{r} p^r (1-p)^{n-r} = \\ &= \frac{1}{r!} \cdot (pn)^r \cdot e^{-n} \cdot \underbrace{\sum_n \frac{1}{(n-r)!} \cdot \{n \cdot (1-p)\}^{n-r}}_{\text{sviluppo in serie di } e^k \text{ con } k = n(1-p)} = \\ &= \frac{1}{r!} \cdot (pn)^r \cdot e^{-n} \cdot e^{(1-p)n} = \\ &= \frac{1}{r!} \cdot (pn)^r \cdot e^{-pn} = P_{pn}(r) \end{aligned}$$

Poisson con $m = pn$

DISTRIBUZIONE UNIFORME

$$f(x) = \frac{1}{b - a}$$

$$F(x) = \frac{b - x}{b - a}$$

$$\begin{aligned}\mu = E[x] &= ? \int_a^b x \frac{1}{b - a} dx = \frac{1}{b - a} \left[\frac{x^2}{2} \right]_a^b = \\ &= \frac{1}{2} \frac{b^2 - a^2}{b - a} = \frac{1}{2} (b + a)\end{aligned}$$

$$s^2 = E[(x - \mu)^2] = E[x^2] - \mu^2$$

$$E[x^2] = ? \int_a^b x^2 \frac{1}{b - a} dx = \frac{1}{b - a} \frac{b^3 - a^3}{3}$$

$$s^2 = \frac{b^3 - a^3}{3(b - a)} - \frac{(b + a)^2}{4} = \frac{1}{12} = \frac{(b - a)^3}{b - a} = \frac{1}{12} (b - a)^2$$

$$\mu = \frac{1}{2} (b + a)$$

$$s^2 = \frac{1}{12} (b - a)^2$$

$$s = \frac{1}{\sqrt{12}} (b - a)$$

$$(b - a) = 2 \cdot Dx \quad \boxed{s = \frac{1}{\sqrt{3}} Dx} \rightarrow P(\mu - s \leq x \leq \mu + s) = \frac{\frac{2}{\sqrt{3}} Dx}{2 Dx} = 0.58$$

DISTRIBUZIONE ESPONENZIALE

$$f_b(x) = \frac{1}{b} e^{-x/b}$$

$$0 = x = 8$$

$$b > 0$$

$$\int_0^8 f(x) dx = \frac{1}{b} \int_0^8 e^{-x/b} dx = -e^{-x/b} \Big|_0^8 = 1$$

$$\mu(x) = \frac{1}{b} \int_0^8 x \cdot e^{-x/b} dx = - \overbrace{x \cdot e^{-x/b}}^{=0} \Big|_0^8 + \int_0^8 e^{-x/b} dx =$$

integrando per parti :

$$u = x$$

$$v = e^{-x/b}$$

$$dv = - \frac{1}{b} e^{-x/b} dx$$

$$= b$$

$$s^2 = \frac{1}{b} \int_0^8 x^2 e^{-x/b} dx - b^2 = \frac{1}{b} \cdot 2b^3 - b^2 = b^2$$

$$\int x^2 e^{ax} dx = \frac{e^{ax}}{a} \left(x^2 - \frac{2x}{a} + \frac{2}{a^2} \right)$$

$$f_m(x) = \frac{1}{m} e^{-x/m}$$

$$\begin{cases} \mu(x) = \mu \\ s^2(x) = \mu^2 \end{cases}$$

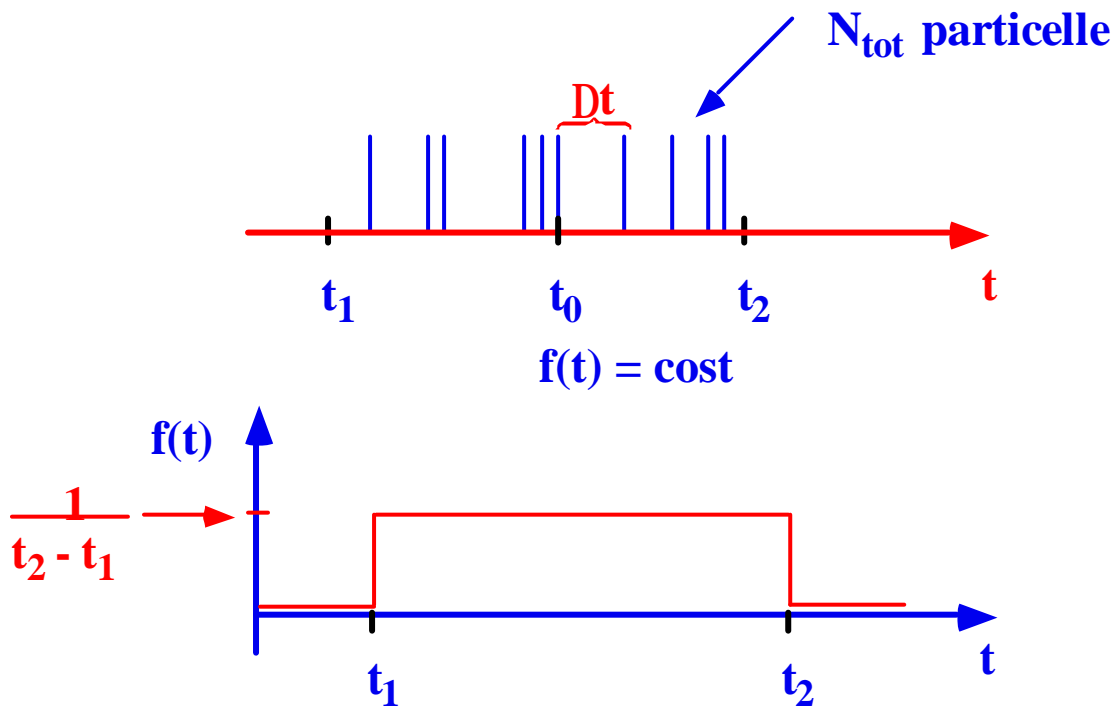
CUMULATIVA DELLA DISTRIBUZIONE ESPONENZIALE

$$F(x) = \int_0^x \frac{1}{m} e^{-x'/m} dx' = 1 - e^{-x/m}$$

$$P(\underbrace{\mu - s}_0 = x = \underbrace{\mu + s}_{2\mu}) = F(2\mu) = 1 - e^{-2} = 0.86$$

Esempio

Distribuzione del Dt fra due particelle consecutive in un fascio con distribuzione temporale uniforme.



Fissato arbitrariamente t_0 :

0 particella in Dt
 1 " " dt

$$dP(Dt) = e^{-lDt} \cdot l \, dt$$

\swarrow \searrow
 $P(0, t)$ $dP(1, dt)$ (vedi pag. AS-54)

$$f(Dt) = \frac{dP(Dt)}{dt} = l \cdot e^{-lDt}$$

$$l = \frac{N_{\text{tot}}}{t_2 - t_1} \qquad \mu(Dt) = \frac{1}{l} = \frac{t_2 - t_1}{N_{\text{tot}}}$$

DISTRIBUZIONE DI GAUSS (NORMALE)

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \cdot a} \cdot e^{-\frac{(x-x_0)^2}{2a^2}} ; \quad \int_{-8}^{+8} f(x)dx = 1$$

- ① Simmetria intorno a: $x = x_0$
- ② $x_0 - a$, $x_0 + a$ sono i punti di flesso $\left(\frac{d^2f}{dx^2}\right) = 0$
 a misura la larghezza della distribuzione
- ③ massimo: $f(x = x_0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \cdot a} \quad \left(\frac{df}{dx}\right) = 0$

Valore aspettato

$$\mu = E[x] = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \cdot a} \int_{-8}^{+8} x e^{-\frac{(x-x_0)^2}{2a^2}} dx =$$

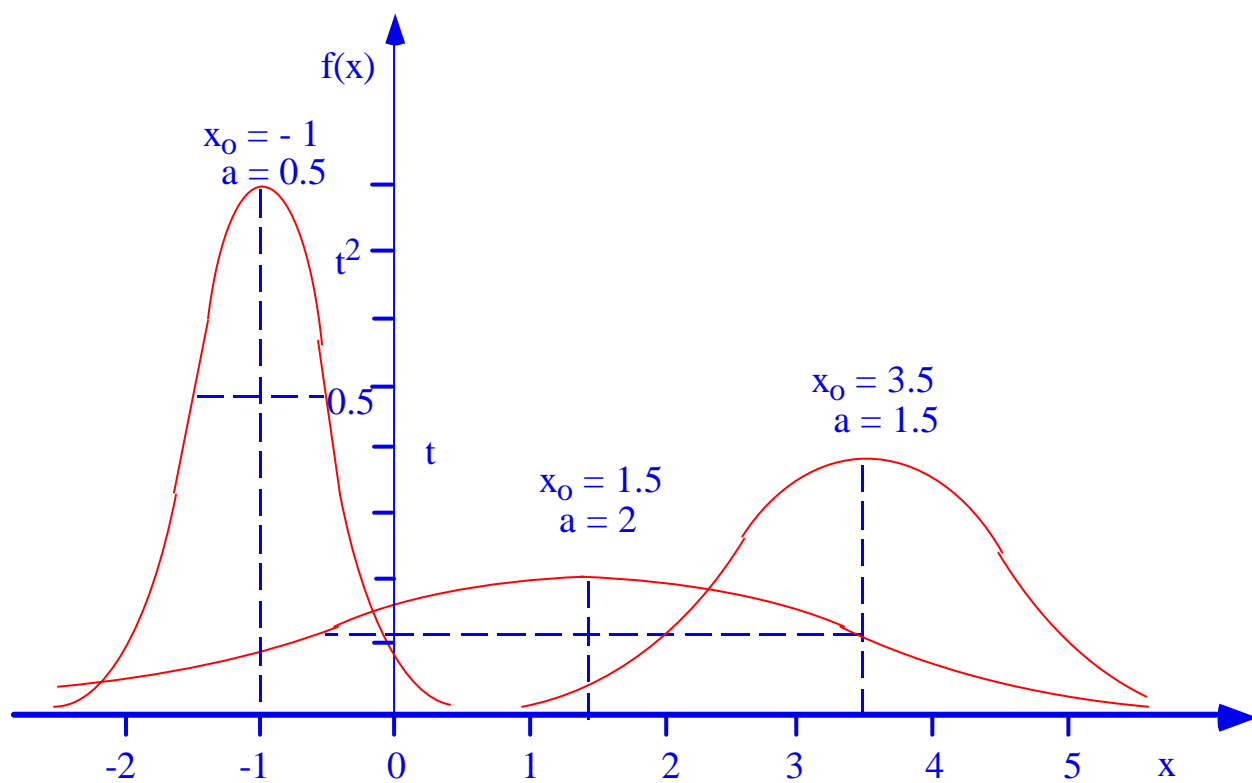
cambiando variabile:

$$t = \frac{x - x_0}{a} \quad dt = \frac{1}{a} dx$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-8}^{+8} (a \cdot t + x_0) e^{-\frac{t^2}{2}} dt =$$

$$= \underbrace{\frac{1}{\sqrt{2\pi}} a \int_{-8}^{+8} t \cdot e^{-\frac{t^2}{2}} dt}_{=0} + \frac{x_0}{\sqrt{2\pi}} \int_{-8}^{+8} e^{-\frac{t^2}{2}} dt = x_0$$

$$\int_{-8}^{+8} \text{Gauss con } \begin{cases} x_0 = 0 \\ a = 1 \end{cases} = 1$$



Varianza

$$s^2 = E[(x - \mu)^2] = \frac{1}{\sqrt{2\pi} a} \int_{-8}^{+8} (x - \mu)^2 e^{-\frac{(x - \mu)^2}{2a^2}} dx =$$

\uparrow \bar{x}_0

$$t = \frac{x - \mu}{a} \quad dt = \frac{1}{a} dx$$

$$= \frac{a^2}{\sqrt{2\pi}} \int_{-8}^{+8} t^2 \cdot e^{-\frac{t^2}{2}} dt = \left(\text{integrando per parti} \right)$$

$$u = t \quad du = dt$$

$$v = e^{-\frac{t^2}{2}} \quad dv = t \cdot e^{-\frac{t^2}{2}} dt$$

$$= \int_{-8}^{+8} u \cdot dv = \left[u \cdot v \right]_{-8}^{+8} - \int_{-8}^{+8} v du =$$

$$= - \underbrace{\frac{a^2 t}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{t^2}{2}}}_{=0} \Big|_{-8}^{+8} + \frac{a^2}{\sqrt{2\pi}} \int_{-8}^{+8} e^{-\frac{t^2}{2}} dt =$$

$\nearrow = 1$
 Gauss $x = 0$
 $a = 1$

$$= a^2$$

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} s} \cdot e^{-\frac{(x - \mu)^2}{2s^2}}$$

**Distribuzione
di
Gauss**

$$F(x) = \int_{-\infty}^x \frac{1}{\sqrt{2\pi} \cdot s} e^{-\frac{(x' - \mu)^2}{2s^2}} dx'$$

Cumulativa

Variabile ridotta

$$t = \frac{x - \mu}{s} \quad dt = \frac{dx}{s}$$

Se x ha funzione di distribuzione $f(x)$,

$$t = t(x) \longrightarrow g(t) = \left| \frac{dx}{dt} \right| \cdot f(x = t)$$

Funzione universale

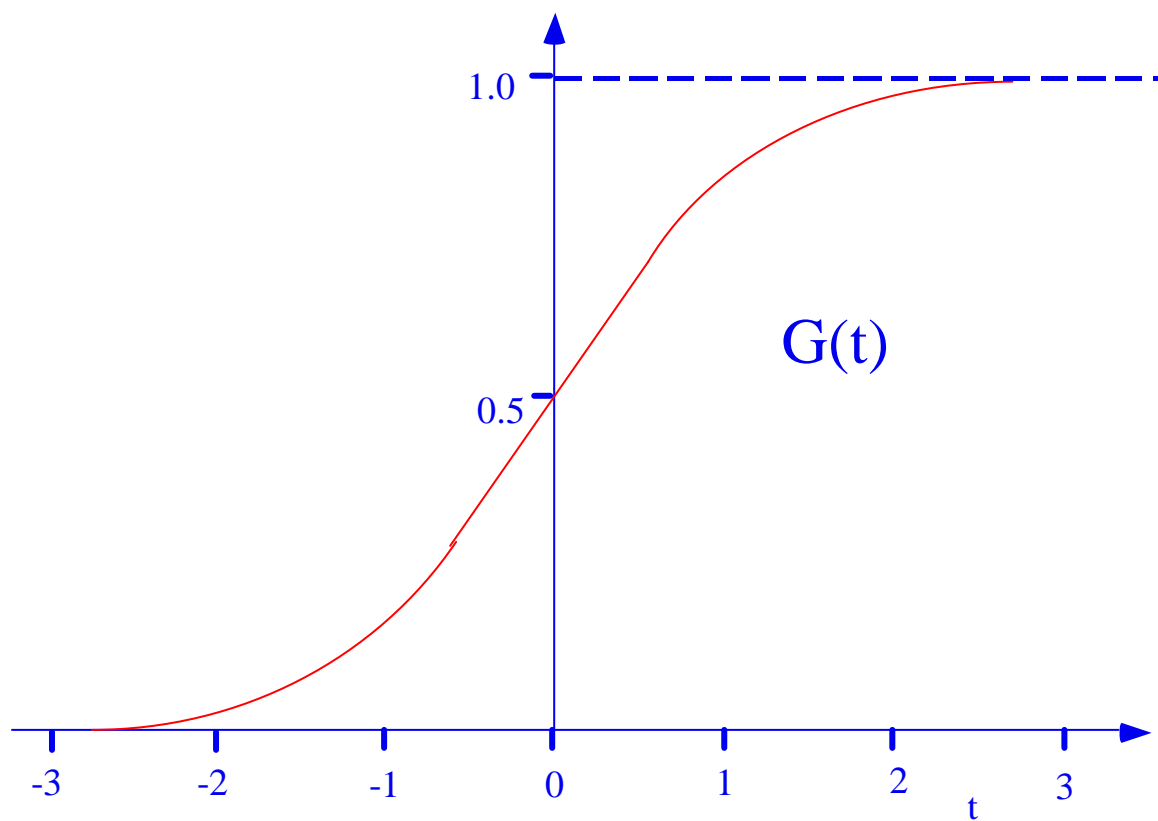
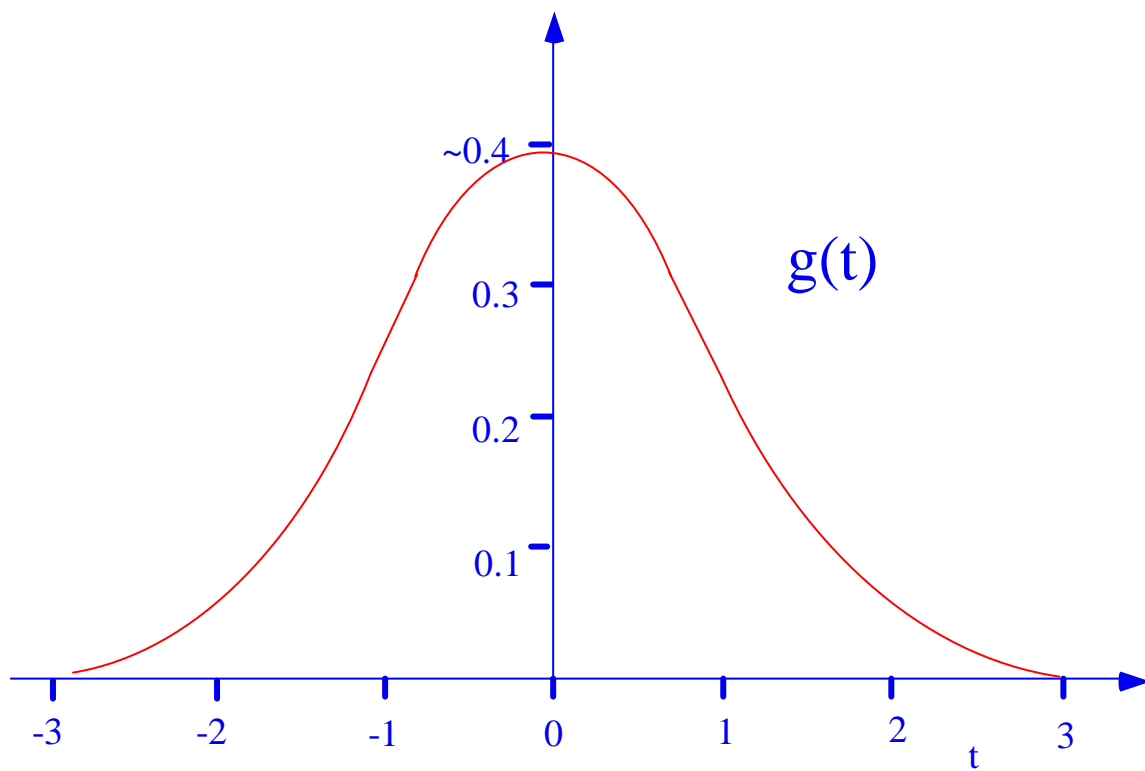
$$g(t) = \cancel{s} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi} \cancel{s}} \cdot e^{-\frac{t^2}{2}}$$

Gaussiana $\begin{cases} \mu = 0 \\ s = 1 \end{cases}$

Cumulativa

$$G(t) = \int_{-\infty}^t g(t') dt'$$

$g(t)$ e $G(t)$ tabulate.



Il contenuto probabilistico di un intervallo Dx per la funzione di Gauss si ottiene usando $G(t)$:

$$P_{\mu,S}(\mu-D, \mu+D) = P(-t_0, t_0) = \int_{-t_0}^{t_0} g(t) dt = 2 \int_0^{t_0} g(t) dt =$$

$$t_0 = \frac{x_0 - \mu}{S}$$

$$= \left(\begin{array}{l} \text{Se si ha } G(t) \\ \text{tabulata} \\ \text{fra 0 e } t \end{array} \right) 2 \left\{ \int_{-8}^{t_0} g(t) dt - \int_{-8}^0 g(t) dt \right\} =$$

$$= 2 \left\{ G(t_0) - G(0) \right\} = 2G(t_0) - 1$$

$\swarrow \searrow$
 $\frac{1}{2}$

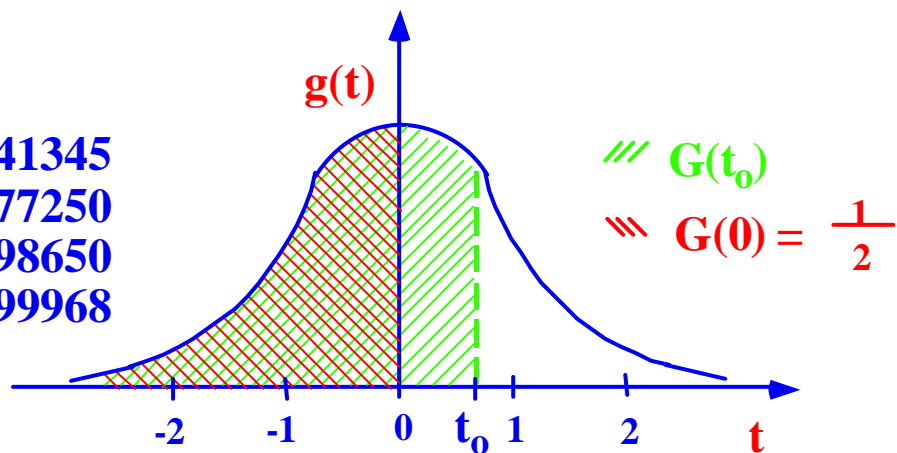
$$G(0) = 0.5$$

$$G(1) = 0.841345$$

$$G(2) = 0.977250$$

$$G(3) = 0.998650$$

$$G(4) = 0.999968$$



$$P(\mu \pm 1S) = 2 \cdot G(1) - 1 = 0.6827$$

$$P(\mu \pm 3S) = 2 \cdot G(3) - 1 = 0.9973$$

$$P(\mu \pm 2S) = 2 \cdot G(2) - 1 = 0.9545$$

$$P(\mu \pm 4S) = 2 \cdot G(4) - 1 = 0.99994$$



$$P(a = x = b) = G\left(\frac{b - \mu}{s}\right) - G\left(\frac{a - \mu}{s}\right)$$

Se, fissato $P = P_0$, voglio ricavare (a, b) ?

$$P_0 = G\left(\frac{b - \mu}{s}\right) - G\left(\frac{a - \mu}{s}\right) \quad \text{infinite soluzioni}$$

Se richiedo intervallo simmetrico: (intorno a μ)

$$P_0 = 2G\left(\frac{b - \mu}{s}\right) - 1$$

$$G\left(\frac{b - \mu}{s}\right) = \frac{P_0 + 1}{2}$$

Es:

$$P_0 = 0.9 \quad \longrightarrow \quad G\left(\frac{b - \mu}{s}\right) = 0.95$$

$$\frac{b - \mu}{s} = 1.645 \quad b - \mu = 1.645 \cdot s$$



$$P(x > \mu + ns) = 1 - G(n)$$

$$P(\mu - ns = x = \mu + ns) = 2(1 - G(n))$$

Funzione di distribuzione di più variabili casuali

Dato un *fenomeno causale* che dipende da più variabili casuali

$$\underline{x} \equiv (x_1, x_2, \dots, x_n)$$

Si può definire una *densità di probabilità congiunta*

$$f(\underline{x}) = f(x_1, \dots, x_n)$$

$$\int_{c^n} f(\underline{x}) d\underline{x} = 1$$

$$E \{G(\underline{x})\} = \int_{c^n} G(\underline{x}) f(\underline{x}) d\underline{x}$$

$$E \{x_i\} = \int_{c^n} x_i f(\underline{x}) d\underline{x} = \mu_i$$

$$E \{(x_i - \mu_i)^2\} = \int_{c^n} (x_i - \mu_i)^2 f(\underline{x}) d\underline{x}$$

$$E \{(x_i - \mu_i) \cdot (x_j - \mu_j)\} = \int_{c^n} (x_i - \mu_i) (x_j - \mu_j) f(\underline{x}) d\underline{x}$$

$$\begin{aligned}
&= \int_{\mathbb{C}^n} (x_i x_j + \mu_i \mu_j - x_i \mu_j - x_j \mu_i) f(\underline{x}) d\underline{x} = \\
&= E\{x_i x_j\} + \mu_i \mu_j - 2\mu_i \mu_j \\
&= E\{x_i x_j\} - E\{x_i\} \cdot E\{x_j\} = \mathbf{V}_{ij}
\end{aligned}$$

\mathbf{V}_{ij} : *matrice di covarianza*

I è una matrice simmetrica $\mathbf{V}_{ij} = \mathbf{V}_{ji}$

II elementi diagonali $\mathbf{V}_{ii} = S^2(x_i)$

III $i \neq j$ \mathbf{V}_{ij} : covarianza (x_i, x_j) $\begin{pmatrix} > 0 \\ < 0 \end{pmatrix}$

Coefficiente di correlazione $r(x_i, x_j)$:

$$r(x_i, x_j) = \frac{\mathbf{V}_{ij}}{\sqrt{\mathbf{V}_{ii} \cdot \mathbf{V}_{jj}}} = \frac{\text{cov}(x_i, x_j)}{S_i \cdot S_j}$$

$-1 = r(x_i, x_j) = 1$ $r = 0$ *scorrelate*
 $r = \pm 1$ *completamente correlate*

Infatti : (es)

$$S^2(x_1 + ax_2) = S^2(x_1) + a^2 S^2(x_2) + 2a \cdot \text{cov}(x_1 x_2)$$

[Vedi dopo combinazioni lineari di variabili casuali]

Dato che $S^2(x_1 + ax_2)$ è per definizione = 0 :

$$S^2(x_1) + a^2 S^2(x_2) + 2a \operatorname{cov}(x_1 x_2) = 0$$

Dividendo per $S^2(x_1)$:

$$1 + \underbrace{a^2 \frac{S^2(x_2)}{S^2(x_1)}}_{a^2} + 2a \underbrace{\frac{S(x_2)}{S(x_1)}}_a \cdot \underbrace{\frac{\operatorname{cov}(x_1 x_2)}{S(x_1) \cdot S(x_2)}}_{\substack{\downarrow \\ r(x_1 x_2)}} = 0$$

$$1 + a^2 + 2ar = 0 \quad \text{per ogni } a$$

$$\longrightarrow r^2 = 1 \quad -1 = r = 1$$

Se le x_i sono mutuamente indipendenti:

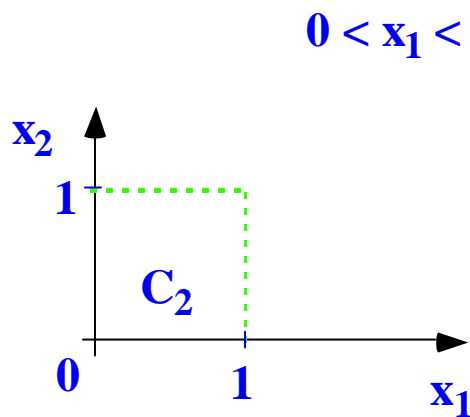
$$f(x_1 \dots x_n) = f(x_1) f(x_2) \dots f(x_n)$$

$$\begin{aligned} E\{x_i x_j\} &= \int x_i x_j f(x_i) \dots f(x_n) dx_1 \dots dx_n = \\ &= \int x_i x_j f(x_i) \cdot f(x_j) dx_i dx_j = \\ &= \int x_i f(x_i) dx_i \cdot \int x_j f(x_j) dx_j = E\{x_i\} \cdot E\{x_j\} \end{aligned}$$

(vedi pag. prec.) $\longrightarrow \operatorname{cov}(x_i x_j) = 0$ per $j \neq i$

Es.

x_1 e x_2 indipendenti



$$0 < x_2 < 1$$

{ F. di distribuzione
uniforme entro C_2

↓
 $f(x_1, x_2) = 1$

Infatti:

$$\int_0^1 \int_0^1 f(x_1, x_2) dx_1 dx_2 = 1$$

$$\mu_{x_1} = \int_1 \int_2 x_1 f(x_1, x_2) dx_1 dx_2 = \left. \frac{x_1^2}{2} \right|_0^1 = \frac{1}{2}$$

$$\mu_{x_2} = \int_1 \int_2 x_2 \quad " \quad = \left. \frac{x_2^2}{2} \right|_0^1 = \frac{1}{2}$$

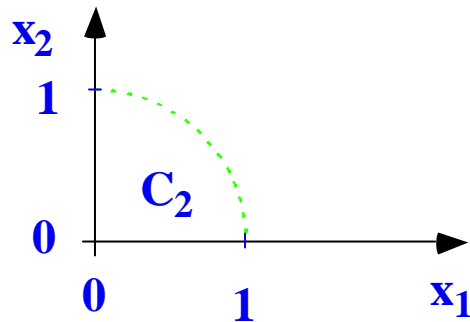
$$S_{x_1}^2 = V_{11} = \int_1 \int_2 (x_1 - \mu_{x_1})^2 \cdot f(x_1, x_2) \cdot dx_1 \cdot dx_2 = \int_0^1 (x_1 - \mu_{x_1})^2 dx_1 =$$

$$= E[x_1^2] - \mu_{x_1}^2 = \left. \frac{x_1^3}{3} \right|_0^1 - \mu_{x_1}^2 = \frac{1}{3} - \frac{1}{4} = \frac{1}{12}$$

$$V_{12} = \int \int (x_1 - \mu_{x_1}) (x_2 - \mu_{x_2}) f(x_1, x_2) dx_1 dx_2 =$$

$$= \int (x_1 - \mu_1) dx_1 \int (x_2 - \mu_2) dx_2 = 0$$

x₁ e x₂ correlati



$$0 < x_1 < 1$$

$$0 < x_2 < 1$$

$$x_1^2 + x_2^2 = 1$$

F. di distribuzione uniforme entro C₂

$$f(x_1, x_2) = \text{cost.}$$

$$\int_{C_2} f(x_1, x_2) dx_1 dx_2 = 1$$

$$f(x_1, x_2) = \frac{4}{p} \quad \left(\text{area} = \frac{pR^2}{4} \right)$$

$$\mu_{x_1} = \frac{4}{p} \int_0^1 x_1 dx_1 \cdot \int_0^{\sqrt{1-x_1^2}} dx_2 = \frac{4}{p} \int_0^1 x_1 \cdot \sqrt{1-x_1^2} \cdot dx_1 = 0.42$$

$$S_{x_1}^2 = V_{11} = \frac{4}{p} \int_0^1 (x_1 - \mu_{x_1})^2 \cdot dx_1 \cdot \int_0^{\sqrt{1-x_1^2}} dx_2 = \frac{4}{p} \int_0^1 (x_1 - \mu_{x_1})^2 \cdot \sqrt{1-x_1^2} dx_1 = 0.07$$

$$V_{12} = \frac{4}{p} \int_0^1 (x_1 - \mu_{x_1}) dx_1 \int_0^{\sqrt{1-x_1^2}} (x_2 - \mu_{x_2}) dx_2 = -0.022$$

$$r_{12} = \frac{-0.022}{\sqrt{0.07} \cdot \sqrt{0.07}} = -0.31$$

DISTRIBUZIONE GAUSSIANA MULTIVARIATA

La funzione di distribuzione di **n** variabili casuali gaussiane correlate:

$$f(\underline{x}) = k \cdot e^{-1/2(\underline{x} - \underline{a})^T \cdot B \cdot (\underline{x} - \underline{a})}$$

$$k = \frac{1}{(2\pi)^{n/2} \cdot (\text{DET } B^{-1})^{1/2}}$$

Con:

$$\underline{a} = (\mu_1, \mu_2 \dots \mu_n)$$

$$B^{-1} = C \quad \rightarrow \quad \text{Matrice delle covarianze di } x_1, \dots, x_n$$

$$\int f(\underline{x}) \cdot d\underline{x} = 1$$

$$(\underline{x}_1 - \mu_1, \dots, \underline{x}_n - \mu_n) \cdot \begin{pmatrix} B_{11} & \dots & B_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ B_{n1} & \dots & B_{nn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \underline{x}_1 - \mu_1 \\ \vdots \\ \underline{x}_n - \mu_n \end{pmatrix}$$

DISTRIBUZIONE GAUSSIANA BIDIMENSIONALE

Distribuzione binormale

$$C = \begin{pmatrix} s_1^2 & \text{cov}(x_1, x_2) \\ \text{cov}(x_1, x_2) & s_2^2 \end{pmatrix} = B^{-1}$$

$$B = \frac{1}{s_1^2 s_2^2 - \text{cov}(x_1, x_2)^2} \cdot \begin{pmatrix} s_2^2 & -\text{cov}(x_1, x_2) \\ -\text{cov}(x_1, x_2) & s_1^2 \end{pmatrix}$$

se (x_1, x_2) sono scorrelate ($\text{cov}(x_1, x_2) = 0$):

$$B = \begin{pmatrix} 1/s_1^2 & 0 \\ 0 & 1/s_2^2 \end{pmatrix}$$

$$(x_1 - \mu_1, x_2 - \mu_2) \begin{pmatrix} 1/s_1^2 & 0 \\ 0 & 1/s_2^2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 - \mu_1 \\ x_2 - \mu_2 \end{pmatrix} =$$

$$= (x_1 - \mu_1, x_2 - \mu_2) \begin{pmatrix} \frac{x_1 - \mu_1}{s_1^2} \\ \frac{x_2 - \mu_2}{s_2^2} \end{pmatrix} = \frac{(x_1 - \mu_1)^2}{s_1^2} + \frac{(x_2 - \mu_2)^2}{s_2^2}$$

$$f(x_1, x_2) = \frac{1}{2\pi \cdot s_1 s_2} \cdot e^{-\frac{1}{2} \frac{(x_1 - \mu_1)^2}{s_1^2}} \cdot e^{-\frac{1}{2} \frac{(x_2 - \mu_2)^2}{s_2^2}}$$

Prodotto di 2 gaussiane

Nel caso in cui x_1 e x_2 sono correlate:

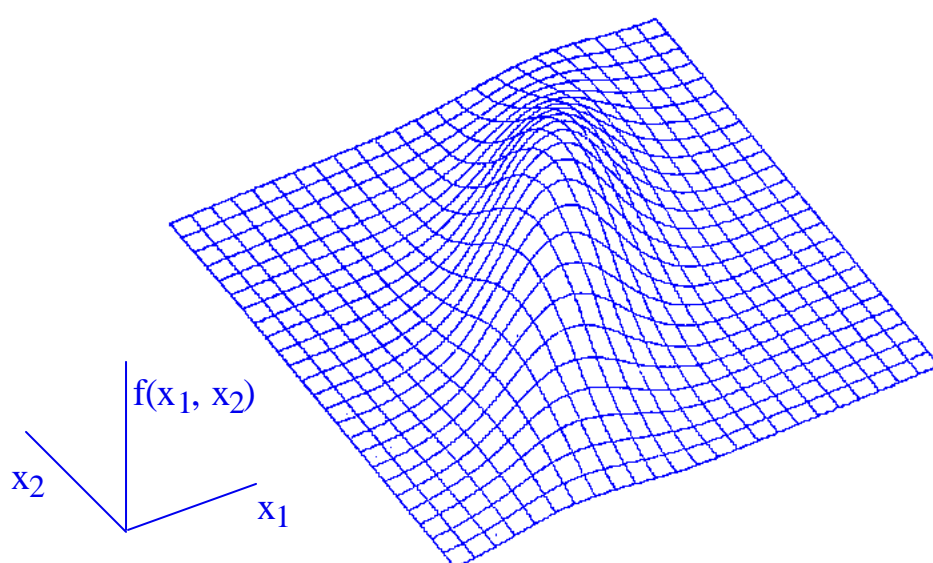
$$r = \frac{\text{cov}(x_1, x_2)}{s_1 s_2} \xrightarrow[\text{divido per } s_1 s_2]{\text{multiplico e}} C = s_1 s_2 \begin{pmatrix} s_1/s_2 & r \\ r & s_2/s_1 \end{pmatrix}$$

B può essere scritta:

$$B = \frac{1}{1 - r^2} \begin{pmatrix} 1/s_1^2 & -r/s_1 s_2 \\ -r/s_1 s_2 & 1/s_2^2 \end{pmatrix}$$

$$f(x_1, x_2) = \frac{1}{2\pi s_1 s_2 \sqrt{1 - r^2}} \cdot e^{-1/2 G}$$

$$G = \frac{1}{1 - r^2} \left\{ \frac{(x_1 - \mu_1)^2}{s_1^2} + \frac{(x_2 - \mu_2)^2}{s_2^2} - 2r \left(\frac{x_1 - \mu_1}{s_1} \right) \left(\frac{x_2 - \mu_2}{s_2} \right) \right\}$$



Probability density of a bivariate Gaussian distribution

FUNZIONI LINEARI DI VARIABILI CASUALI

$$y(x_1, \dots, x_n) = \sum_{i=1}^n a_i x_i$$

Valore atteso:

$$E[y] = E\left[\sum_i a_i x_i\right] = \sum_i a_i E[x_i] = \sum_i a_i \mu_i$$


Dato che E è un operatore lineare

Varianza:

$$\begin{aligned}
 E[(y - \mu_y)^2] &= \\
 &= E \left[\left(\sum_i a_i x_i - \sum_i a_i \mu_i \right)^2 \right] = \\
 &= E \left[\left(\sum_i a_i (x_i - \mu_i) \right)^2 \right] = \\
 &= E \left[\sum_i a_i^2 (x_i - \mu_i)^2 + \sum_{i \neq j} a_i a_j (x_i - \mu_i) (x_j - \mu_j) \right] = \\
 &= \sum_i a_i^2 \sigma_i^2 + \sum_{i \neq j} a_i a_j \cdot \text{cov}(x_i, x_j)
 \end{aligned}$$

Se le variabili x_i sono indipendenti:

$$y = \sum_{i=1}^N a_i \cdot x_i \quad \longrightarrow \quad \begin{aligned} \mu_y &= \sum_{i=1}^N a_i \cdot \mu_{x_i} \\ S_y^2 &= \sum_{i=1}^N a_i^2 \cdot S_{x_i}^2 \end{aligned}$$

Ma: forma della f_y , date le f_{x_i} ?

Difficile in generale ma:

- Alcuni casi particolari
 - a) Distribuzioni gaussiane
 - b) "Tante" $f(x_i)$ qualsiasi
(sotto particolari condizioni)

FUNZIONI LINEARI DI VARIABILI CASUALI CON DISTRIBUZIONE "NORMALE" (GAUSSIANA)

Date n variabili casuali x_i con funzione di distribuzione gaussiana ("normale") $f(\mu_i, S_i)$ la funzione :

$$y = \sum_{i=1}^n a_i \cdot x_i$$

avrà ancora una funzione di distribuzione "normale"

$$f(\mu_y, S_y)$$

(si può dimostrare)

con :

$$\mu_y = \sum_i a_i \cdot \mu_i$$

$$S_y^2 = \sum_i a_i^2 \cdot S_i^2$$

Ne segue che la media $\bar{x} = \sum_{i=1}^N \frac{x_i}{N}$ di un campione di dimensione N di una variabile "normale" (S_x, μ_x) è ancora una variabile "normale" con: $\mu_{\bar{x}} = \mu_x$ e $S_{\bar{x}} = \frac{S_x}{\sqrt{N}}$

[Ogni x_i può essere considerata una variabile casuale con f. di distribuzione normale]

TEOREMA DEL LIMITE CENTRALE

Date n variabili casuali indipendenti x_i con funzioni di distribuzione ~~qualsiasi~~ (μ_i, S_i finita), la funzione:

$$y = \sum_{i=1}^n a_i \cdot x_i$$

nel limite $n \rightarrow \infty$ avrà distribuzione "normale" con :

$$\mu_y = \sum_i a_i \mu_i$$

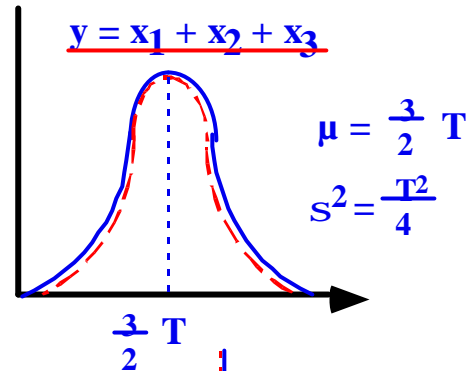
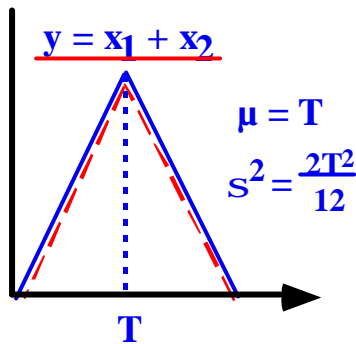
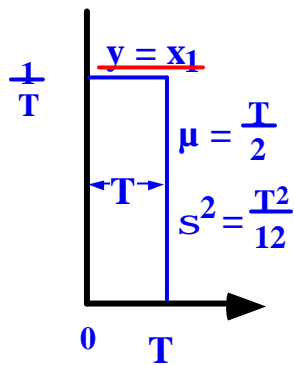
$$S_y^2 = \sum_i a_i^2 S_i^2$$

Condizioni di validità molto ampie, ma :

→ è importante che le S_i^2 siano tutte finite e paragonabili, cioè nessuna domina le altre.

N.B. *Se le f_i sono concentrate attorno al valore aspettato (S_i piccole), il teorema è valido già per valori piccoli di N .*

Es.:



$$\frac{1}{T} \sqrt{\frac{3}{p}} e^{-3(x-T)^2/T^2}$$

Gaussiana con stessa μ, s

$$\frac{1}{T} \sqrt{\frac{2}{p}} e^{-2(x-1.5 T)^2/T^2}$$

Gaussiana con stessa μ, s

ES.

Generatore di numeri a caso con distribuzione Gauss
 $G(0, s)$: ottenuto con la somma di n numeri a caso
con distribuzione uniforme in $(0, 1)$.

$$y = \sum_{i=1}^n x_i - \frac{n}{2}$$

$$\begin{cases} \mu = n \cdot \frac{1}{2} - \frac{n}{2} = 0 \\ s^2 = n \cdot \frac{1}{12} \end{cases}$$

Buon accordo con gaussiana per $n > 5 \div 10$. Per $n = 12$ si ottiene
 $G(0, 1)$

N.B. Il teorema del L.C. ha validità più generale.

Il modello di Laplace degli errori di misura

Sia x^* il **valore vero** di una grandezza fisica, x il risultato di una generica misura.

$x \neq x^*$ a causa degli errori di misura che assumeremo puramente casuali

Modello di Laplace : errore di misura = insieme estremamente grande (≈ 8) di disturbi contemporanei molto piccoli (\approx infinitesimi)

$\left\{ \begin{array}{l} \text{Ogni disturbo} = \pm e \text{ (50\% + e, 50\% - e)} \\ \text{Ogni disturbo è statisticamente indipendente} \end{array} \right.$

Se N sono i disturbi e k i disturbi $+e$:

$$x = x^* + k e - (N - k) e = x^* + (2k - N) e$$

$$P_{N,p}(k) = \frac{N!}{k! (N - k)!} p^k \cdot q^{N-k}$$

con :

$$p = \text{probabilità di disturbo} + e = \frac{1}{2}$$

$$\mu(\mathbf{k}) = \mathbf{N} \cdot \mathbf{p} \qquad s^2(\mathbf{k}) = \mathbf{N} \mathbf{p} \mathbf{q}$$

$$\mu(\mathbf{k}) = \mathbf{N} \cdot \mathbf{p} \qquad s^2(\mathbf{k}) = \mathbf{N} \mathbf{p} \mathbf{q}$$

1 : scarto di k dal suo valore atteso

$$\mathbf{k} - \mathbf{Np} = \mathbf{l}$$

$$\begin{cases} \mathbf{k} = \mathbf{Np} + \mathbf{l} \\ \mathbf{N} - \mathbf{k} = \mathbf{N} \cdot \mathbf{q} - \mathbf{l} \end{cases}$$

$$\mathbf{0} = \mathbf{k} = \mathbf{N}$$

$$\mathbf{-Np} = \mathbf{l} = \mathbf{N} \cdot \mathbf{q}$$

$$P_{N,p}(1) = \frac{N!}{(N_p + 1)! (N_q - 1)!} \cdot p^{N_p + 1} \cdot q^{N_q - 1}$$

$$\mu(l) = E[l] = E[k] - N \cdot p = 0$$

$$s^2(1) = E[(1 - E(1))^2] = 0$$

$$= E[(k - Np)^2] = Npq$$

Al crescere di N si può utilizzare per $N!$ la formula di Stirling :

$$N! \approx \sqrt{2\pi} \cdot N^{N+1/2} e^{-N}$$

$$\textcircled{\text{I}} \quad (\mathbf{Np} + 1)! = \sqrt{2\mathbf{p}} \quad (\mathbf{Np} + 1)^{\mathbf{Np}+1/2} \cdot \mathbf{e}^{-\mathbf{Np}-1} =$$

$$= \sqrt{2\mathbf{p}} \left(1 + \frac{1}{\mathbf{Np}}\right)^{\mathbf{Np}+1/2} \cdot \mathbf{e}^{-\mathbf{Np}-1} \cdot (\mathbf{Np})^{\mathbf{Np}+1/2}$$

$$\textcircled{II} \quad (Nq - l) = \sqrt{2p} \left(1 - \frac{1}{Nq}\right)^{Nq - l + \frac{1}{2}} e^{-Nq + l} (Nq)^{Nq - l + \frac{1}{2}}$$

\textcircled{I} e \textcircled{II} valide per l lontano dai suoi limiti $\begin{cases} -Np \\ Nq \end{cases}$

$$P_{N,p}(l) = \frac{\cancel{\sqrt{2p}} \cancel{N^{Nq + \frac{1}{2}}} \cancel{e^{-N}}}{\cancel{\sqrt{2p}} \left(1 + \frac{1}{Nq}\right)^{Np+1+1/2} \cancel{\sqrt{2p}} \left(1 - \frac{1}{Nq}\right)^{Np-1+1/2} \cancel{e^{-Nq - Nq}} \cdot \cancel{N^{N+1/2}}}$$

\downarrow
 $= N$

$$\cdot \frac{\cancel{p^{Np+1}} \cdot \cancel{q^{Nq-1}}}{\cancel{p^{Np+1 + \frac{1}{2}}} \cdot \cancel{q^{Nq-1 + \frac{1}{2}}}} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2p} \cdot \sqrt{Npq}} \cdot \left(1 + \frac{1}{Nq}\right)^{-Np-1-\frac{1}{2}} \cdot \left(1 - \frac{1}{Nq}\right)^{-Np+1-\frac{1}{2}}$$

NOTE:

$$\textcircled{I} \quad P_{N,p}(0) = \frac{1}{\sqrt{2p} \cdot \sqrt{Npq}}$$

Valore massimo

$$\sum_k P(k) = 1$$

$P(0) \propto 0$ come \sqrt{N} ; quindi il numero di valori di l per cui $P(l)$ non è trascurabile rispetto a $P(0)$ deve divergere come \sqrt{N} , anche se il numero totale di valori di l diverge come $N+1$.

\textcircled{II} La formula approssimata per $P(l)$ non è valida per $l \sim -Np$ e $l \sim Nq$; ma in questi intornoi $P(l)$ è trascurabile rispetto a $P(0)$.

Consideriamo ora:

$$\lg = \left\{ \left(1 + \frac{1}{N_p} \right)^{N_p - 1 - \frac{1}{2}} \left(1 - \frac{1}{N_q} \right)^{N_p + 1 - \frac{1}{2}} \right\} =$$

$$= \left(N_p + 1 - \frac{1}{2} \right) \lg \left(1 + \frac{1}{N_p} \right) - \left(N_q - 1 + \frac{1}{2} \right) \lg \left(1 - \frac{1}{N_q} \right) =$$

$\frac{1}{N_p}$ e $\frac{1}{N_q}$ sono $\ll 1$ lontano dagli estremi.

$$\lg(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \dots$$

$$= \left(N_p + 1 - \frac{1}{2} \right) \left(\frac{1}{N_p} - \frac{1^2}{2N_p^2} + \dots \right) - \left(N_q - 1 + \frac{1}{2} \right) \left(-\frac{1}{N_q} - \frac{1^2}{2N_q^2} + \dots \right) =$$

$$= -\frac{1^2}{2N_p q} - \frac{1}{2N} - \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{q} \right) + \frac{1^3}{6N^2} \left(\frac{1}{p^2} - \frac{1}{q^2} \right) + \dots$$

Per $1 \sim \sqrt{N}$ (unici valori non trascurabili) solo I termine finito (secondo $\propto 0 \frac{1}{\sqrt{N}}$, terzo $\propto 0 \frac{1}{\sqrt{N}}$, altri come $\frac{1}{N}$).

$$\lg k \simeq - \frac{l^2}{2Npq} \quad k = e^{-\frac{l^2}{2Npq}}$$

$$P(l) \simeq \frac{1}{\sqrt{2p}} \frac{1}{\sqrt{Npq}} e^{-\frac{1}{2} \frac{l^2}{Npq}}$$

$$P(l) \simeq \frac{1}{\sqrt{2p} s_l} \cdot e^{-\frac{1}{2} \frac{l^2}{s_l^2}}$$

Ma nel modello di Laplace:

$$p = \frac{1}{2}$$

$$x = l^* + (2k - N) \cdot e =$$

\downarrow
 $Np + l$

$$\begin{aligned} 2Np + 2l - N &= \\ 2 \cdot N \cdot 1/2 + 2l - N &= \\ &= 2l \end{aligned}$$

$$= x^* + 2l e \longrightarrow (x - x^*) = 2l e$$

$$E[x] = E[x^* + 2l e] = x^* + 2e E[l]$$

$$\downarrow = 0$$

$$E[(x - x^*)^2] = E[(2l e)^2] = 4e^2 E[l^2] = 4e^2 s_l^2$$

Per $e \gg 0$ (x da discreta a continua) :

$$P(x) = \left| \frac{\Delta l}{\Delta x} \right| \cdot P(l)$$

\downarrow $\rightarrow \frac{1}{2e}$ \downarrow $\rightarrow l = l(x)$

$$P(x) = \frac{1}{2e} \frac{1}{\sqrt{2\pi} s_l} \cdot e^{-\frac{1}{2} \frac{l^2}{s_l^2}}$$

$$\begin{cases} x = x^* + 2le \\ s_x = 2es_l \end{cases}$$

$$P(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} s_x} e^{-\frac{1}{2} \frac{(x-x^*)^2}{s_x^2}}$$

c.v.d

In questo caso $P(x)$ rappresenta una densità di probabilità

La misura di una grandezza fisica è una variabile casuale con f. di distribuzione gaussiana (normale). Il valore aspettato di tale variabile casuale è proprio il valore vero della grandezza.

MISURA DI UNA GRANDEZZA FISICA (Caso generale)

- 1) Ammettiamo che esista un valore "vero" x^* della grandezza.
- 2) Ammettiamo che esistano molte sorgenti (N) di disturbo della misura. Queste sorgenti generano degli errori casuali e_i che hanno le seguenti proprietà:

$$\left\{ \begin{array}{l} \mu(e_i) = \int e_i f(e_i) d e_i = 0 \\ s^2(e_i) = \int e_i^2 f(e_i) d e_i \quad \text{finito} \end{array} \right.$$

(Nessuna ipotesi sul tipo delle $f(e_i)$)

Potremo quindi scrivere per la generica misura di x , x_M :

$$x_M = x^* + \sum_{i=1}^N e_i \qquad x_M = x^* + e$$

$$e = \sum_{i=1}^N e_i$$

Per il teorema del **limite centrale** la variabile casuale e , somma di N variabili casuali a varianza finita, per $N \gg 8$ avrà distribuzione normale con valore atteso e varianza:

$$\mu(e) = \sum_{i=1}^N \mu(e_i) = 0 \qquad s_e^2 = \sum_{i=1}^N s^2(e_i)$$

$$f(e) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} s_e} e^{-\frac{e^2}{2s_e^2}}$$

Per il teorema della addizione di variabili normali, x_M sarà ancora una variabile normale con :

$$\mu_{x_M} = x^* + \mu_e = x^*$$

$$S_{x_M}^2 = S_e^2$$

$$y = ax + b$$

$$\mu_y = a\mu_x + b$$

$$S_y^2 = a^2 S_x^2$$

$$f(x_M) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} S_{x_M}} \cdot e^{-\frac{(x_M - x^*)^2}{2 S_{x_M}^2}}$$

Dimostreremo (vedi prossime lezioni) anche che:

se si eseguono N misure x_i della grandezza, cioè se si estrae un campione di dimensione N dalla popolazione (infinita) della variabile x_M (che ha funzione di distribuzione normale), la miglior stima di μ_{x_M} (cioè del valore x^* della grandezza fisica) sarà dato da:

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^N x_i}{N} \quad (\text{media aritmetica delle } x_i)$$

e che la miglior stima di S_{xM}^2 :

$$s^2 = \frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x})^2 \quad (\text{scarto quadratico medio})$$

La media \bar{x} , essendo combinazione di variabili casuali normali, avrà a sua volta distribuzione normale con :

$$\mu(\bar{x}) = x^*$$

$$S^2(\bar{x}) = \frac{S_x^2}{N}$$

Indicheremo il risultato di N misure ripetute (con stesso metodo nelle stesse condizioni) di una grandezza fisica con la notazione:

$$\bar{x} = \bar{x} \pm s_{\bar{x}} = \bar{x} \pm \frac{s_x}{\sqrt{N}}$$

$$\bar{x} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i$$

$$s_x = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x})^2}{N-1}}$$

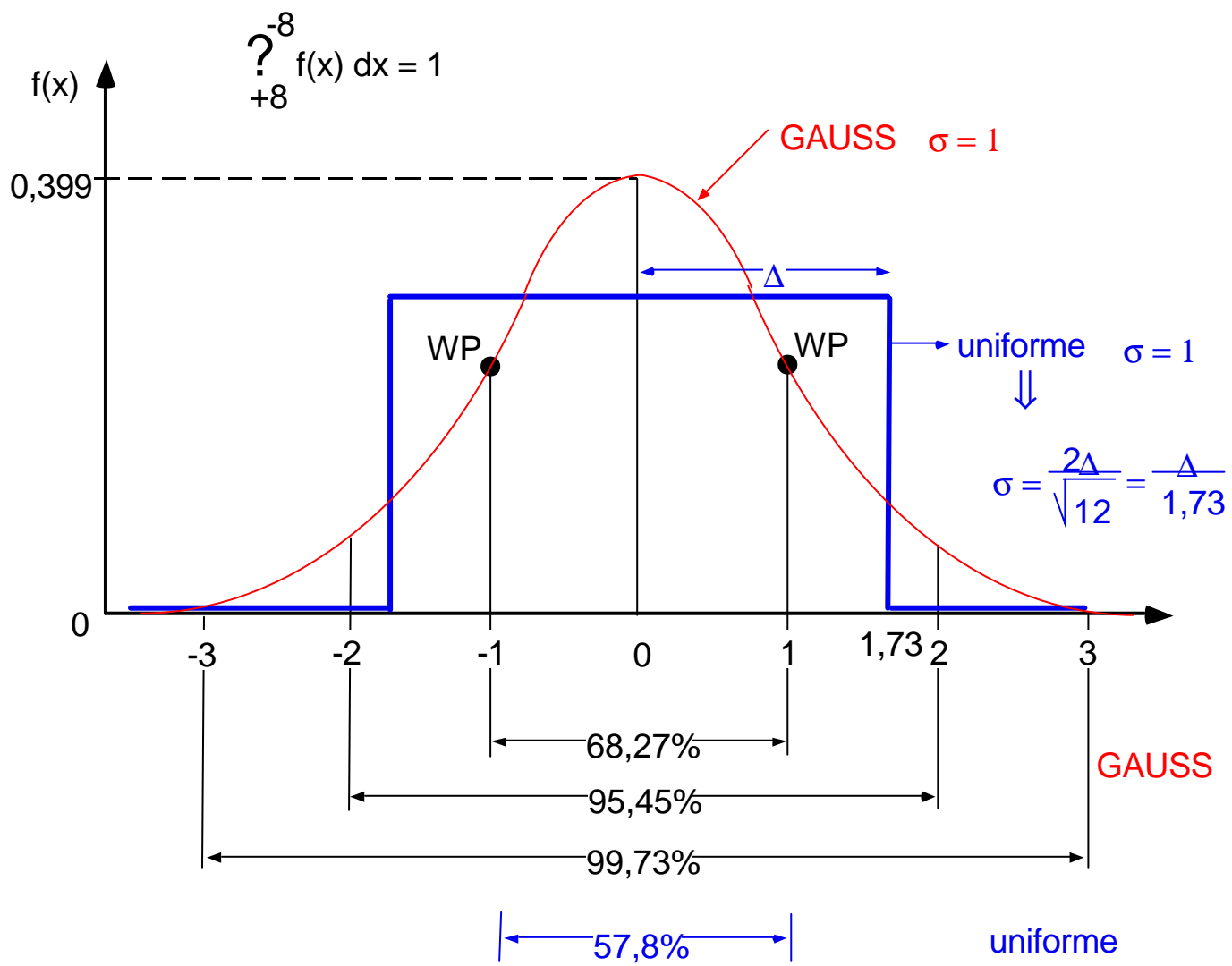
Con questa notazione si intende :

$$P(|\bar{x} - x^*| \leq s_{\bar{x}}) = 68\%$$

Cioè la probabilità che l'intervallo: $\bar{x} - s_{\bar{x}} \leq x^* \leq \bar{x} + s_{\bar{x}}$ contenga x^* è il 68%

Risultato di una singola misura x_i (assumendo noto s_x) :

$$x = x_i \pm s_x$$



PROPAGAZIONE DEGLI ERRORI (STATISTICI)

Misura indiretta di una grandezza fisica:

$$y = f(x_1, \dots, x_n)$$

Dove x_i sono grandezze fisiche misurate direttamente ($x_i \pm s_i$); dato che le x_i sono variabili casuali, anche la y sarà variabile casuale.

Se sviluppiamo y in serie di Taylor in μ_n intorno di (μ_1, \dots, μ_n) [valori aspettati delle x_i]:

$$y = y(\mu_1, \dots, \mu_n) + \sum_i \left(\frac{\partial y}{\partial x_i} \right)_{\mu_i} (x_i - \mu_i) + \dots$$

Se trascuriamo i termini di ordine superiore (cioè assumiamo che le x_i siano in un intorno dei loro valori veri μ_i)



y è combinazione lineare di variabili casuali con distribuzione normale



(quindi)

y ha funzione di distribuzione normale con :

$$\mu_y = y(\mu_1, \dots, \mu_n)$$

(dato che $(x_i - \mu_i)$ ha valore aspettato = 0)

Per la varianza:

$$\begin{aligned}
 S_y^2 &= E[(y - \mu_y)^2] = E \left[\left\{ \sum_i^n \left(\frac{\partial y}{\partial x_i} \right)_{\mu_i} (x_i - \mu_i) \right\}^2 \right] = \\
 &= E \left[\sum_i^n \sum_j^n \left(\frac{\partial y}{\partial x_i} \right)_{\mu_i} \cdot \left(\frac{\partial y}{\partial x_j} \right)_{\mu_j} \cdot (x_i - \mu_i) \cdot (x_j - \mu_j) \right] = \\
 &= \sum_i^n \sum_j^n \left(\frac{\partial y}{\partial x_i} \right)_{\mu_i} \cdot \left(\frac{\partial y}{\partial x_j} \right)_{\mu_j} \cdot \underbrace{E[(x_i - \mu_i) \cdot (x_j - \mu_j)]}_{V_{ij}} =
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 V_{ij} &= E[(x_i - \mu_i)(x_j - \mu_j)] = E[x_i x_j + \mu_i \mu_j - x_i \mu_j - x_j \mu_i] = \\
 (V_{ij} = V_{ji}) \quad &= E[x_i x_j] + \cancel{\mu_i \mu_j} - \cancel{2} \mu_i \mu_j = E[x_i x_j] - \mu_i \mu_j
 \end{aligned}$$

$$S_y^2 = \sum_i^n \sum_j^n \left(\frac{\partial y}{\partial x_i} \right) \left(\frac{\partial y}{\partial x_j} \right) \cdot V_{ij}$$

**LEGGE DI PROPAGAZIONE
ERRORI STATISTICI**

$$S_y^2 = \sum_i^n \left(\frac{\partial y}{\partial x_i} \right)^2 S_{x_i}^2 + \sum_{i \neq j} \left(\frac{\partial y}{\partial x_i} \right) \left(\frac{\partial y}{\partial x_j} \right) \cdot V_{ij}$$

i ≠ j

Se le x_i sono statisticamente indipendenti : ($V_{ij} = 0 \quad i \neq j$)

$$S_y^2 = \sum_i^n \left(\frac{\partial y}{\partial x_i} \right)^2 S_{x_i}^2$$

**LEGGE DI PROPAGAZIONE
ERRORI STATISTICI**
(x *scorrelate*)

Questa legge di propagazione degli errori è esatta solo se y è funzione lineare della x_i .

Nel caso in cui y sia un monomio : $y = \prod_i x_i^{a_i}$

LEGGE DI PROPAGAZIONE ERRORI RELATIVI

x_i correlate:

$$\left(\frac{s_y}{y}\right)^2 = \sum_{i=1}^n a_i^2 \cdot \left(\frac{s_i}{x_i}\right)^2 + \sum_{i < j} a_i \cdot a_j \cdot r_{ij} \cdot \left(\frac{s_i}{x_i}\right) \cdot \left(\frac{s_j}{x_j}\right)$$

x_i scorrelate:

$$\left(\frac{s_y}{y}\right)^2 = \sum_{i=1}^n a_i^2 \cdot \left(\frac{s_i}{x_i}\right)^2$$

STIMA DEI PARAMETRI DELLE DISTRIBUZIONI

Se distribuzione di probabilità o funzione di distribuzione non note a priori :



Numero infinito di prove per determinarla

Esperimento con N. finito di prove :

"campione" di dimensione n della popolazione

Analisi statistica dei dati (*risultato delle prove*) permette una stima delle proprietà (*delle grandezze caratteristiche*) della distribuzione e permette di valutare bontà della stima.

BONTA' : *probabilità statistica che il valore vero del parametro cada in un certo intervallo intorno alla stima ottenuta (intervallo di confidenza)*

Stime con campioni di egual n hanno bontà equivalenti.

Stime con n maggiore hanno intervalli di confidenza più stretti.

CAMPIONAMENTO

Estrazione di n valori della variabile casuale \textcircled{R} campione di dimensione n

$$\begin{array}{ccc} x_1^{(1)} & \dots\dots\dots & x_n^{(1)} \\ \vdots & & \\ x_1^{(m)} & \dots\dots\dots & x_n^{(m)} \end{array} \left. \vphantom{\begin{array}{ccc} x_1^{(1)} & \dots\dots\dots & x_n^{(1)} \\ \vdots & & \\ x_1^{(m)} & \dots\dots\dots & x_n^{(m)} \end{array}} \right\} m \text{ CAMPIONI}$$

Se considero :

$$\bar{x}^{(j)} = (x_1^{(j)} \dots x_n^{(j)})$$

\bar{x} sarà ancora una variabile casuale con

$$f(\bar{x}) = f(x_1 \dots x_n)$$

Il campione sarà casuale se :

I x_i indipendenti

$$f(x_1 \dots x_n) = f(x_1) \dots f(x_n)$$

II x_i tutte con la stessa formula di distribuzione:

$$f(x_1) = \dots = f(x_n) = f(x)$$

Una generica funzione di un campione: "statistica"

Una "statistica" si usa per stimare i parametri di una funzione di distribuzione



Estimatore

$S(x_1 \dots x_n)$

se a sono i parametri incogniti:

S è una variabile casuale

$\hat{a}_{stima} \quad a = S$

Un estimatore gode delle seguenti proprietà:

1) **ASSENZA DI DISTORSIONE**

Per un campione finito, un estimatore è **non distorto** se:

$$E[S(x_1, \dots x_n)] = E[\hat{a}] = a^* \quad (\text{per ogni } n)$$

Se la distorsione tende **solo asintoticamente** a 0 lo estimatore si dice **asintoticamente non distorto**.

2) **CONSISTENZA**

Al crescere delle dimensioni del campione l'estimatore converge al valore vero del parametro :

$$\text{per } n \rightarrow \infty \quad S_{\hat{a}}^2 \rightarrow 0$$

3) **EFFICIENZA**

La stima ottenuta da un estimatore avrà una certa varianza; è più efficiente un estimatore con varianza minore. (A parità di dimensioni n del campione).

4) **INVARIANZA SOTTO TRASFORMAZIONE DEI PARAMETRI**

Se \hat{a} è la stima del parametro a , allora la stima per una generica $f(a)$, è proprio $f(\hat{a})$.

Estimatore del valore aspettato : **media aritmetica**

$$\bar{x} = \frac{1}{n}(x_1 + \dots x_n)$$

PROPRIETA':

① $E[\bar{x}] = \frac{1}{n} \{E[x] + \dots E[x_n]\} = \frac{1}{n} \cdot n\mu = \mu(x)$



non distorto

② Per le proprietà di funzioni lineari di variabili casuali: $a = \frac{1}{n}$

$$S^2(\bar{x}) = \frac{1}{n^2} \cdot n \cdot S^2(x) = \frac{S^2(x)}{n}$$

è consistente $S^2 \rightarrow 0$
 $n \rightarrow \infty$

③ Si può dimostrare che la **media aritmetica** è la stima del valore aspettato che ha la minima varianza, cioè è la

più efficiente

Proprietà della media:

I Somma degli scarti da $\bar{x} = 0$

$$\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x}) = \sum_{i=1}^n x_i - \bar{x} \cdot n = n \cdot \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n} - n\bar{x} = n\bar{x} - n\bar{x} = 0$$

II Somma dei quadrati degli scarti da \bar{x} **minima**

Infatti, scelto un generico x :

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n (x_i - x)^2 &= \sum_{i=1}^n \left((x_i - \bar{x}) + (\bar{x} - x) \right)^2 = \\ &= \sum_{i=1}^n \left[(x_i - \bar{x})^2 + (\bar{x} - x)^2 + 2(x_i - \bar{x})(\bar{x} - x) \right] = \\ &= \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 + n \cdot (\bar{x} - x)^2 + 2(\bar{x} - x) \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x}) = \\ &= \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 + n(\bar{x} - x)^2 > \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 \end{aligned}$$

Estimatore della varianza (*scarto quadratico medio*)

$$s^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2$$

Consideriamo inizialmente:

$$\begin{aligned} s'^2 &= \frac{1}{n} \left\{ (x_1 - \bar{x})^2 + \dots + (x_n - \bar{x})^2 \right\} \\ E[s'^2] &= \frac{1}{n} E \left[\sum_i (x_i - \bar{x})^2 \right] = \\ &= \frac{1}{n} \sum_i \left\{ E \left[\left((x_i - \mu) - (\bar{x} - \mu) \right)^2 \right] \right\} = \\ &= \frac{1}{n} \sum_i \left\{ E \left[(x_i - \mu)^2 \right] - \underbrace{E \left[(\bar{x} - \mu)^2 \right]}_{\rightarrow s^2(\bar{x})} \right\} = \\ &= \frac{1}{n} \left\{ n S^2 - n \frac{1}{n} S^2 \right\} = \\ &= \frac{n-1}{n} S^2 = \left(1 - \frac{1}{n} \right) \cdot S^2 \end{aligned}$$

E' distorto (solo "asintoticamente non distorto")

$$s^2 = \frac{1}{n-1} \sum_i (x_i - \bar{x})^2$$

Sarà invece **non distorto**

LA LEGGE DEI GRANDI NUMERI

(Applicata al caso della media aritmetica)

Data una popolazione di varianza finita S^2 , e dati 2 numeri positivi ϵ' e ϵ'' , esisterà sempre un numero N tale che, per ogni campione della popolazione di dimensione $M = N$, si avrà:

$$P(|\bar{x} - \mu_x| = \epsilon') = \epsilon''$$

DISEGUAGLIANZA DI BIENAYME' - ČEBIČEV

Data una variabile casuale x con funzione di distribuzione $f(x)$ e varianza finita S^2 :

$$P(|x - \mu| \leq l S) = \frac{1}{l^2}$$

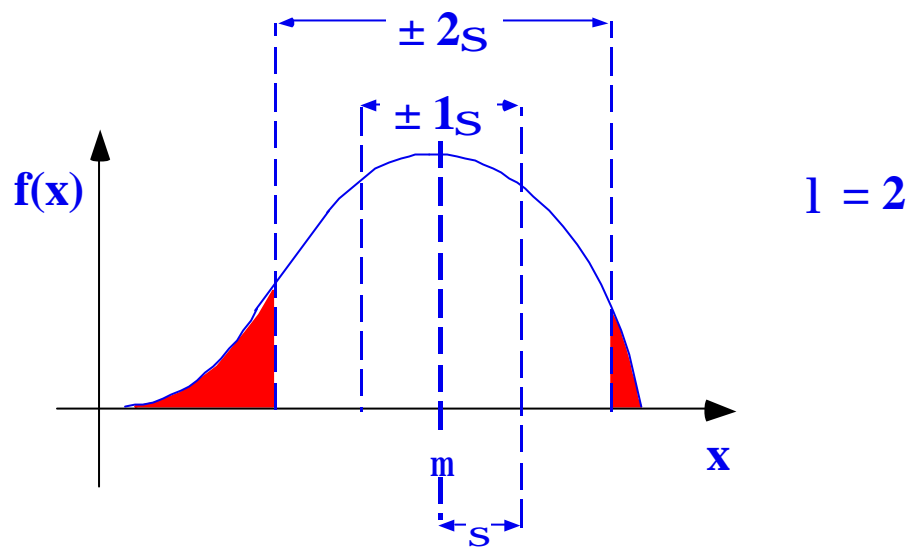
per l positivo qualunque.

Infatti:

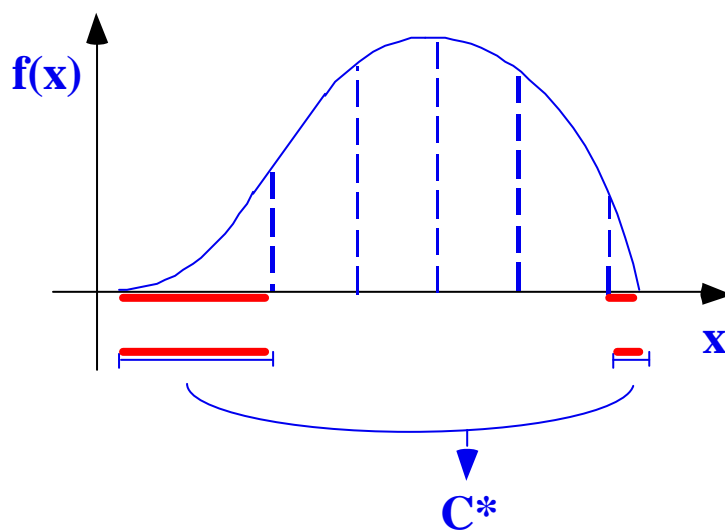
$$P(|x - \mu| \leq l S) = \int_{C^*} f(x) dx$$

dove $C^* = \text{dominio in cui } \frac{|x - \mu|}{l S} \leq 1.$

Graficamente:



Voglio dimostrare che: $\blacksquare = \int_{C^*} f(x) dx = \frac{1}{l^2} = \frac{1}{4}$



In C^* sarà anche vero :

$$\frac{(x - \mu)^2}{l^2 s^2} = 1$$

Quindi:

$$\begin{aligned} P(|x - \mu| = l s) &= \int_{C^*} \frac{(x - \mu)^2}{l^2 s^2} f(x) dx = \\ &= \int_C \frac{(x - \mu)^2}{l^2 s^2} f(x) dx \end{aligned}$$

Dove C è tutto il campo di definizione di x .

$$P(|x - \mu| = l s) = \frac{1}{l^2 s^2} \underbrace{E[(x - \mu)^2]}_{\text{varianza di } x = s^2} = \frac{1}{l^2}$$

c.v.d.

Ricordando che \bar{x} ha varianza = $\frac{s^2}{N}$, potremo riscrivere la disuguaglianza di **B.C.** :

$$P(|\bar{x} - \mu| = l \underbrace{\frac{s}{\sqrt{N}}}_{e'}) = \underbrace{\frac{1}{l^2}}_{e''}$$

$$e' = \frac{s}{\sqrt{N}} \quad e'' = \frac{1}{l^2} = \frac{s^2}{e'^2 N}$$

Fissato e' ed e'' (quindi l), si sceglie N tale che :

$$N = \frac{s^2}{e'^2 \cdot e''}$$

Per ogni $M = N$ la disuguaglianza iniziale sarà soddisfatta. *

Es.: Valore di N per cui la probabilità che la media \bar{x} disti da μ più di $1s = 20\%$.

$$e'' = 0.2 \quad e' = 1 \cdot s$$

Infatti se $e' = s$, ne segue che $\frac{1}{\sqrt{N}} = 1$; $\frac{1}{1^2} = \frac{1}{N}$

$$N = \frac{\cancel{s^2}}{0.2 * \cancel{s^2}} = 5$$

In generale, fissato N , la $P(|\bar{x} - \mu| > 1s) = \frac{1}{N}$:

| | | |
|---------|-------------------------------|--------------|
| $N = 1$ | $P(\bar{x} - \mu > 1s) = 1$ | 0.32 |
| 2 | 1/2 | 0.20 |
| 5 | 1/5 | 0.04 |
| 10 | 1/10 | 0.001 |
| 100 | 1/100 | |

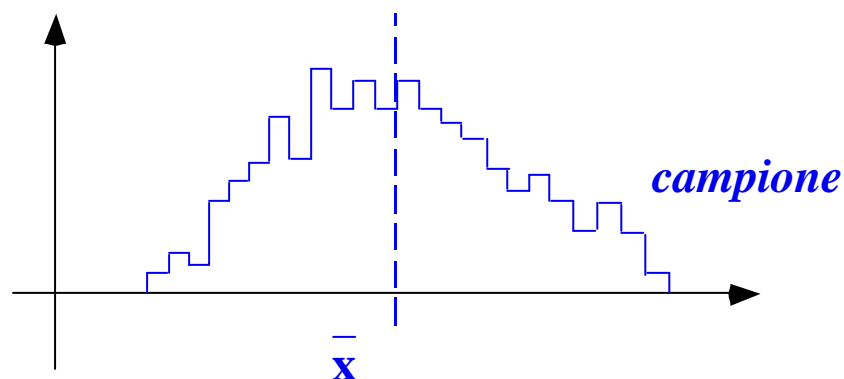
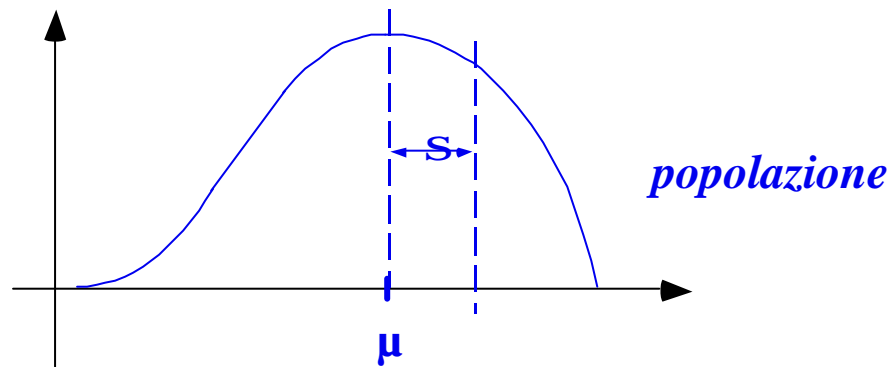
$f(x)$
qualsiasi

$f(x)$
gaussiana

$$s_{\bar{x}} = \frac{s}{\sqrt{N}}$$

❖ **Significato dell'argomento :**

Data una variabile casuale con distribuzione qualsiasi, fissato un livello di confidenza richiesto (cioè una **probabilità**), è possibile determinare la grandezza minima del campione (cioè il valore di N) per cui la media è (con probabilità assegnata) prossima al valore "vero" più di un dato valore (in unità di S)



TEOREMA DI BERNOULLI

Data distribuzione binomiale: $P_{N,p}(k)$ consideriamo la variabile casuale :

$$f = \frac{k}{N}$$

$$P_{N,p}(f) = P_{N,p}(k = Nf)$$

$$E[f] = \frac{1}{N} E[k] = \frac{Np}{N} = p$$

$$S^2[f] = \frac{1}{N^2} E[k^2] = \frac{Npq}{N^2} = \frac{pq}{N}$$

Dalla diseguaglianza di B.C. ^v :

$$P(|x - \mu| = 1s) = \frac{1}{1^2}$$

$$1s = e \quad 1^2 = \frac{e^2}{s^2}$$

$$P(|x - \mu| = e) = \frac{s^2}{e^2}$$

$$P(|f - p| = e) = \frac{p \cdot q}{Ne^2}$$

Per $N \gg 8$ $P\left(\frac{k}{N} - p > e\right)$ tende a 0.



frequenza

In altre parole, per $N \rightarrow \infty$ la probabilità che la frequenza relativa differisca dalla probabilità per più di una quantità ϵ assegnata, tende a 0.

→ Il **teorema di Bernoulli** è una giustificazione della definizione di probabilità in termini della frequenza relativa.

METODO DELLA MASSIMA VEROSIMIGLIANZA

Stima dei parametri di distribuzioni :

data una funzione di distribuzione di una variabile casuale, con forma funzionale nota, dipendente da un certo numero di parametri incogniti, si vuole stimare il valore dei parametri a partire da un campione limitato della popolazione.

$f(\underline{x}, \underline{a})$ \underline{a} : parametri incogniti ($a_1 \dots a_n$)

$x_1, x_2, x_3, \dots x_N$: misure della variabile casuale (campione)

Se f è la funzione di distribuzione di x , la probabilità di osservare l'insieme $x_1 \dots x_N$ di valori :

$$dP = f(x_1, \underline{a}) dx \ f(x_2, \underline{a}) dx \dots f(x_N, \underline{a}) dx = \prod_{i=1}^N f(x_i, \underline{a}) dx$$

Se si definisce **funzione di verosimiglianza** :

$$L = \prod_{i=1}^N f(x_i, \underline{a})$$

IL PRINCIPIO DELLA MASSIMA VEROSIMIGLIANZA :

La miglior stima dei parametri \underline{a} è quella che rende massima la funzione L

$$\frac{\partial L}{\partial a_i} = 0 \quad \frac{\partial^2 L}{\partial a_i^2} < 0$$

Un estimatore di massima verosimiglianza gode delle seguenti proprietà:

1) ASSENZA DI DISTORSIONE.

$$E[\text{Estimatore}] = \text{valore vero (per ogni } N)$$

Gli estimatori di massima verosimiglianza sono **solo** asintoticamente non distorti.

2) CONSISTENZA.

$$(\hat{a} \rightarrow a^* \text{ per } N \rightarrow \infty) \Rightarrow S_{\hat{a}}^2 \xrightarrow[N \rightarrow \infty]{2} 0$$

Gli estimatori di massima verosimiglianza sono consistenti

3) EFFICIENZA.

Gli estimatori di massima verosimiglianza sono quelli con efficienza migliore.

4) INVARIANZA SOTTO TRASFORMAZIONE DEI PARAMETRI.

Gli estimatori di massima verosimiglianza sono invarianti sotto trasformazione dei parametri.

In generale si preferisce usare, invece della L , il suo logaritmo:

$$w = \ln L = \sum_{i=1}^N \ln f(x_i, \underline{a})$$

e cercare quel valore di \underline{a} che rende massimo w .

$$\left(\frac{\partial w}{\partial \underline{a}} = 0; \quad \frac{\partial^2 w}{\partial^2 \underline{a}} < 0 \right)$$

Es. Stima di μ e S^2 per una distribuzione normale

I Stima di μ . (dati: $x_1 \dots x_N$)

$$L = \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi} S} \right)^N \prod_{i=1}^N e^{-\frac{(x_i - \mu)^2}{2S^2}}$$

$$w = \ln L = -N \ln \frac{1}{\sqrt{2\pi} S} - \sum_{i=1}^N \frac{(x_i - \mu)^2}{2S^2}$$

$$\frac{\partial w}{\partial \mu} = \sum_{i=1}^N \frac{(x_i - \mu)}{S^2} = 0$$

$$\sum_{i=1}^N x_i - N \cdot \mu = 0$$

$$\hat{\mu} = \frac{\sum_{i=1}^N x_i}{N}$$

Stima di massima verosimiglianza del parametro μ

$$\frac{\partial^2 w}{\partial \mu^2} = -\frac{N}{S^2} < 0$$

II Stima di S^2 .

$$\frac{\partial w}{\partial S^2} = -\frac{N}{2} \frac{1}{S^2} + \sum_{i=1}^N \frac{(x_i - \mu)^2}{2S^4} = 0$$

$$\hat{S}^2 = \frac{\sum_{i=1}^N (x_i - \mu)^2}{N}$$

Ma μ da (I), è: $\hat{\mu} = \frac{\sum_{i=1}^N x_i}{N} = \bar{x}$

$$\hat{S}^2 = \frac{\sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x})^2}{N}$$

Stima di massima verosimiglianza del parametro S^2 è solo asintoticamente non distorta

$$\hat{S}^2 = S_{\text{non dist.}}^2 \cdot \frac{N-1}{N} =$$

$$= S_{\text{non dist.}}^2 \cdot \left(1 - \frac{1}{N}\right) \text{ Asintoticamente non distorto}$$

Es. **Combinazione di misure con diversa precisione**
(Media pesata di misure con diversa S stesso μ)

$$x_1 x_2 \dots x_N$$

$$S_1 S_2 \dots S_N$$

$$L = \sum_{i=1}^N \frac{1}{\sqrt{2\pi} S_i} e^{-\frac{(x_i - \mu)^2}{2S_i^2}}$$

$$w = -N \ln \sqrt{2\pi} - \sum_{i=1}^N \ln S_i - \sum_{i=1}^N \frac{(x_i - \mu)^2}{2S_i^2}$$

$$\frac{\partial w}{\partial \mu} = \sum_{i=1}^N \frac{x_i - \mu}{S_i^2} = 0$$

$$\sum_{i=1}^N \frac{x_i}{s_i^2} = \mu \cdot \sum_{i=1}^N \frac{1}{s_i^2}$$

$$\hat{m} = \frac{\sum_{i=1}^N \frac{1}{s_i^2} x_i}{\sum_{i=1}^N \frac{1}{s_i^2}}$$

Ponendo : $p_i = \frac{1}{s_i^2}$

MEDIA PESATA

$$\hat{m} = \frac{\sum_{i=1}^N p_i x_i}{\sum_{i=1}^N p_i}$$

Varianza della stima di massima verosimiglianza

Si può dimostrare che per $N \gg 8$ la funzione di verosimiglianza L (che è la funzione di distribuzione per a) tende ad una distribuzione gaussiana:

$$L(a) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} s_a} e^{-\frac{(a - a^*)^2}{2s_a^2}}$$

Se consideriamo $w(a) = \ln L(a)$ e la deriviamo 2 volte rispetto ad a :

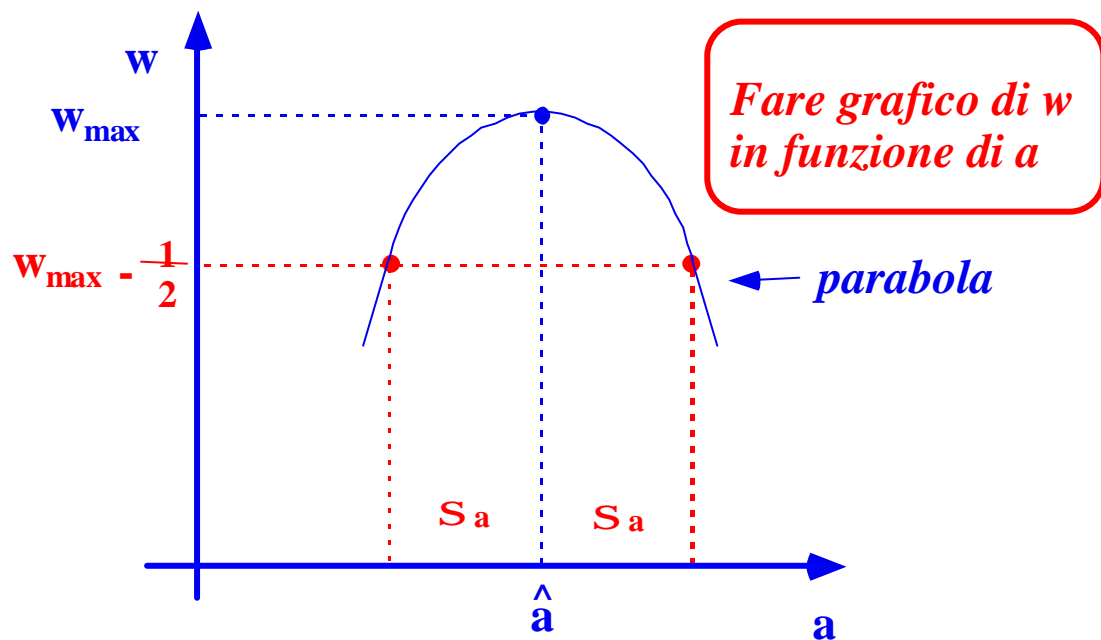
$$w(a) = -\frac{(a - a^*)^2}{2s_a^2} + \text{cost}$$

$$\frac{\partial w}{\partial a} = - \frac{(a - a^*)}{S_a^2}$$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial a^2} = - \frac{1}{S_a^2}$$

$$S_a^2 = - \frac{1}{\frac{\partial^2 w}{\partial a^2}}$$

Se non si ha espressione analitica di w :



$$w_{\max} = - \frac{(\hat{a} - a^*)^2}{2S_a^2} + \text{const.} \approx \text{const.}$$

↑
se $\hat{a} \approx a^*$

Se: $\hat{a} \sim a^*$:

In corrispondenza ad: $(a - \hat{a}) = S_a$

$$w(a) = w_{\max} - \frac{1}{2}$$

Quindi le due intersezioni con $w_{\max} - \frac{1}{2} : \pm S_a$

Es. Varianza sulla media

$$\hat{\mu} \left(\begin{array}{c} \text{stima di} \\ \mu \end{array} \right) = \sum_{i=1}^n \frac{x_i}{N} = \bar{x}$$

Errore sulla stima di μ :

$$S_{\hat{\mu}}^2 = S_{\bar{x}}^2 = - \frac{1}{\frac{\sum w}{\mu^2}} = - \frac{\hat{S}^2}{N}$$

$$\frac{\sum w}{\mu^2} = - \frac{N}{S^2}$$

$$S_{\hat{\mu}}^2 = \frac{\hat{S}^2}{N}$$

Es. Varianza sulla varianza

$$\hat{S}^2 \left(\begin{array}{c} \text{stima di} \\ S^2 \end{array} \right) = \frac{\sum_i (x_i - \bar{x})^2}{N}$$

$$\frac{\partial w}{\partial S^2} = -\frac{N}{2} \frac{1}{S^2} + \sum_i \frac{(x_i - \mu)^2}{2S^4} \rightarrow (S^2)^2$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 w}{\partial (S^2)^2} &= +\frac{N}{2} \frac{1}{S^4} - 2 \frac{\sum_i (x_i - \mu)^2}{2 \cdot S^6} = \\ &= \frac{N}{2} \frac{1}{S^4} - \frac{1}{S^6} N \frac{\sum_i (x_i - \mu)^2}{N} = \\ &= \frac{N}{2} \frac{1}{S^4} - N \frac{1}{S^4} = -\frac{N}{2} \frac{1}{S^4} \end{aligned}$$

\hat{S}^2

$$\boxed{S_{\hat{S}}^2 = \frac{2\hat{S}^4}{N}} \rightarrow S_{\hat{S}}^2 = \left(\frac{dS}{dS^2} \right)^2 S_{\hat{S}^2}^2 = \frac{1}{4S^2} \frac{2S^4}{N} = \frac{S^2}{2N}$$

$$\begin{aligned} x &= S^2 \\ \frac{\partial \sqrt{x}}{\partial x} &= \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{x}} \end{aligned}$$

$$\boxed{S_{\hat{S}}^2 = \frac{\hat{S}^2}{2N}} \rightarrow S_{\hat{S}} = \frac{\hat{S}}{\sqrt{2N}}$$

Es. Varianza sulla media pesata

$$\hat{\mu} = \frac{\sum_i \frac{1}{S_i^2} x_i}{\sum_i \frac{1}{S_i^2}}$$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial \mu^2} = -\sum_i \frac{1}{S_i^2}$$

$$\boxed{S_{\hat{\mu}}^2 = \frac{1}{\sum_i \frac{1}{S_i^2}}}$$

Es.

Stima di m in una distribuzione di Poisson

Fatte N prove, sono stati osservati i valori: $n_1 \dots n_N$

$$\hat{O} = \prod_{i=1}^N \frac{e^{-m} m^{n_i}}{n_i!}$$

$$w = \prod_{i=1}^N \lg_e \frac{e^{-m} m^{n_i}}{n_i!} =$$

$$= -Nm + \sum_{i=1}^N n_i \lg_e m + \sum_{i=1}^N \lg_e \frac{1}{n_i!}$$

$$\frac{\partial w}{\partial m} = -N + \sum_{i=1}^N n_i \frac{1}{m} = 0$$

$$\hat{m} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N n_i$$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial m^2} = - \frac{\sum_{i=1}^N n_i}{m^2}$$

$$S_{\hat{m}}^2 = \frac{m^2}{\sum_{i=1}^N n_i} = \frac{\hat{m}^2}{N\hat{m}} = \frac{\hat{m}}{N}$$

Es.

Stima di p in una distribuzione binomiale

Fatte n serie di N prove:

k_1, k_2, \dots, k_n n , casi favorevoli in ogni serie

$$L = \prod_{i=1}^n \frac{N!}{k_i! (N - k_i)!} \cdot p^{k_i} \cdot (1 - p)^{N - k_i}$$

$$w = \sum_{i=1}^n k_i \lg_e p + \sum_{i=1}^n (N - k_i) \lg_e (1 - p) + \text{cost}$$

$$\frac{\partial w}{\partial p} = \frac{1}{p} \sum_{i=1}^n k_i - \frac{1}{1-p} \sum_{i=1}^n (N - k_i) = 0$$

$$(1 - p) \sum_{i=1}^n k_i = p \sum_{i=1}^n (N - k_i)$$

$$\sum_{i=1}^n k_i - p \sum_{i=1}^n k_i = Npn - p \sum_{i=1}^n k_i$$

$$p = \frac{1 - \frac{\sum_{i=1}^n k_i}{N}}{1 - p} = \frac{\bar{k}}{N}$$

$$\hat{p} = \frac{\bar{k}}{N}$$

Es.

Stima parametri retta

$$y = ax + b$$

$$y_1 \pm S_1 \dots y_n \pm S_n \quad (y_i: \text{funzione di distribuzione Gauss})$$

$$x_1 \dots x_n$$

$$L = \prod_i \frac{1}{\sqrt{2\pi} S_i} e^{-\frac{(y_i - y_i^*)^2}{2 S_i^2}}$$

$$y_i^* = a x_i + b$$

$$w = - \sum_i \frac{(y_i - y_i^*)^2}{2 S_i^2} + \text{cost}$$

$$\max(w) \longrightarrow \min \left(\sum_i \frac{(y_i - y_i^*)^2}{2 S_i^2} \right)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial w}{\partial a} = + \sum_i \frac{(y_i - a x_i - b)}{S_i^2} \cdot x_i = 0 \\ \frac{\partial w}{\partial b} = + \sum_i \frac{(y_i - a x_i - b)}{S_i^2} = 0 \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} a \sum_i \frac{x_i^2}{S_i^2} + b \sum_i \frac{x_i}{S_i^2} = \sum_i \frac{x_i y_i}{S_i^2} \\ a \sum_i \frac{x_i}{S_i^2} + b \sum_i \frac{1}{S_i^2} = \sum_i \frac{y_i}{S_i^2} \end{array} \right. \longrightarrow \hat{a} \text{ e } \hat{b}$$

Es.

Stima di t per distribuzione: $f(t,t) = \frac{1}{t} e^{-\frac{t}{t}}$

$$\int_0^8 f(t,t) dt = 1$$

Osservati i tempi:

$t_1 \dots t_N$

in N . prove

Voglio stima di massima verosimiglianza per t .

$$L = \prod_{i=1}^N \frac{1}{t} e^{-\frac{t_i}{t}}$$

$$w = - \sum_{i=1}^N \lg_e t + \sum_{i=1}^N \left(-\frac{t_i}{t} \right)$$

$$\frac{\partial w}{\partial t} = - \sum_{i=1}^N \frac{1}{t} + \sum_{i=1}^N \frac{t_i}{t^2} = 0$$

$$\hat{t} = \frac{\sum_{i=1}^N t_i}{N}$$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = + \sum_{i=1}^N \frac{1}{t^2} - 2 \sum_{i=1}^N \frac{t_i}{t^3} =$$

$$= \frac{N}{t^2} - \frac{2N}{t^3} \sum_{i=1}^N \frac{t_i}{N} \xrightarrow{\hat{t}} = - \frac{N}{\hat{t}^2}$$

$$S_{\hat{t}}^2 = \frac{\hat{t}^2}{N}$$

IL METODO DEI MINIMI QUADRATI

Date due grandezze x, y legate dalla relazione funzionale:

$$y = f(x, \underline{a})$$

$\underline{a} : a_1, \dots, a_n$ n parametri

Fatte N misure :

$$y_1 \pm S_1 \dots y_N \pm S_N$$

$$x_1 \dots x_N$$

[Errore su x trascurabile; $|f(x_i + D_x) - f(x_i)| \ll S_{y_i}$]

Voglio stimare i valori dei parametri a_1, \dots, a_n .

Se le y_i hanno formula di distribuzione gaussiana, posso applicare il metodo della massima verosimiglianza.

$$L = \prod_{i=1}^N \frac{1}{\sqrt{2\pi} S_i} e^{-\frac{(y_i - \mu_i)^2}{2 S_i^2}}$$

$$w = - \sum_{i=1}^N \frac{(y_i - \mu_i)^2}{2 S_i^2} + \text{cost}$$

$$w = - \sum_{i=1}^N \frac{(y_i - f(x_i, \underline{a}))^2}{2s_i^2} + \text{cost}$$

$$\text{Max (w)} \longrightarrow \min \left\{ \sum_{i=1}^N \frac{(y_i - f(x_i, \underline{a}))^2}{s_i^2} \right\}$$

Il principio dei minimi quadrati afferma che la miglior stima dei parametri \underline{a} è quella che minimizza la somma:

$$X^2 = \sum_{i=1}^N \frac{(y_i - f(x_i, \underline{a}))^2}{s_i^2} + \text{cost}$$

indipendente dalla formula di distribuzione delle y_i .

Notare che il metodo richiede la conoscenza a priori di tutte le s_i ; nel caso però in cui le s_i siano tutte uguali il metodo è ancora applicabile anche non conoscendo s . (*Altro parametro incognito*)

MINIMI QUADRATI NEL CASO LINEARE

Supponiamo che la dipendenza della y dai parametri sia lineare:

$$y = f(x, \underline{a}) = \sum_{k=1}^n a_k \cdot f_k(x)$$

$$y_1 \pm s_1 \dots y_N \pm s_N$$

$$x_1 \quad \dots \quad x_N$$

Assumiamo inoltre che la y_i siano fra loro statisticamente indipendenti

$$X^2 = \sum_{i=1}^N \frac{\left(y_i - \sum_{k=1}^n a_k f_k(x_i) \right)^2}{s_i^2}$$

$$\left\{ \frac{\partial X^2}{\partial a_j} = 0 \right. \quad j = 1, \dots, n$$

n equazioni lineari nelle n incognite a_k

$$\frac{\partial X^2}{\partial a_j} = 2 \cdot \sum_{i=1}^N \left(y_i - \sum_{k=1}^n a_k f_k(x_i) \right) \cdot \frac{f_j(x_i)}{s_i^2} = 0$$

$$\sum_{i=1}^N \sum_{k=1}^n a_k \cdot f_k(x_i) \frac{f_j(x_i)}{s_i^2} = \sum_{i=1}^N f_j(x_i) \frac{y_i}{s_i^2}$$

$$\sum_{i=1}^N a_k \frac{f_k(x_i) f_j(x_i)}{s_i^2} = \sum_{i=1}^N f_j(x_i) \frac{y_i}{s_i^2}$$

n equazioni lineari al variare $j = 1, n$.

Sistema di n equazioni lineari nelle incognite a_k .

$$\begin{array}{c} \xrightarrow{\quad k \quad} \\ \left\{ \begin{array}{l} A_{11} a_1 + A_{12} a_2 + \dots + A_{1n} a_n = b_1 \\ A_{21} a_1 + A_{22} a_2 + \dots + A_{2n} a_n = b_2 \\ \vdots \\ A_{n1} a_1 + A_{n2} a_2 + \dots + A_{nn} a_n = b_n \end{array} \right. \quad \downarrow j \end{array}$$

$$\begin{pmatrix} A_{11} & \dots & A_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ A_{n1} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

$$A_{jk} = \sum_{i=1}^N \frac{f_k(x_i) \cdot f_j(x_i)}{s_i^2} = A_{kj} \quad \uparrow \text{matrice simmetrica}$$

$$b_j = \sum_{i=1}^N \frac{y_i \cdot f_j(x_i)}{s_i^2}$$

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{a} = \mathbf{b} \quad \text{sistema di equazioni lineari}$$

SOLUZIONE:

matrice inversa $\rightarrow A^{-1} \rightarrow (A^{-1} A = U)$

$$A^{-1} \cdot A \cdot \underline{a} = A^{-1} \cdot \underline{b}$$

$$U \cdot \underline{a} = \underline{a}$$

$$\underline{a} = A^{-1} \cdot \underline{b}$$

$$A_{kj}^{-1} = (-1)^{k+j} \cdot \frac{|A_{kj}|}{|A|}$$

$|A|$ = determinante matrice A

$|A_{kj}|$ = minore kj della matrice A

$$\hat{a}_k = \sum_{j=1}^n A_{kj}^{-1} \cdot b_j = \sum_{j=1}^n A_{kj}^{-1} \cdot \sum_{i=1}^N y_i f_j(x_i) / s_i^2$$

Stima a_k con minimi quadrati

A^{-1} : matrice delle covarianze

Infatti si può dimostrare che :

$$E \{ (a_k - a_k^*) \cdot (a_j - a_j^*) \} = \text{cov} (a_k, a_j) = A_{kj}^{-1}$$

$$S_k^2 = A_{kk}^{-1}$$

Nota la matrice delle covarianze, è possibile calcolare la varianza su una qualsiasi funzione delle a_k . In particolare:

$$\hat{y} = \sum_{k=1}^n \hat{a}_k f_k(x) \quad \left(\hat{y} : \text{valore stimato della } y \text{ dalla stima } \hat{a}_k \right)$$

$$S_{\hat{y}}^2 = \sum_{k,j=1}^n \frac{\partial \hat{y}}{\partial \hat{a}_k} \cdot \frac{\partial \hat{y}}{\partial \hat{a}_j} \cdot \text{cov}(a_k, a_j) = \sum_{k,j=1}^n f_k(x) \cdot f_j(x) \cdot A_{kj}^{-1}$$

Per verificare se il risultato delle stime degli a_k con i minimi quadrati è compatibile con i dati:

(Nel caso di errori gaussiani sulla y_i)

$$C_{N-n}^2 = \sum_{i=1}^n \frac{(y_i - \hat{y}(x_i))^2}{S_i^2}$$

Distribuzione normale \hat{y}, S_i

N-n gradi di libertà:

N variabili casuali y_i - n parametri estratti dai dati

ES.

$$y = ax$$

$$X^2 = \frac{\sum_{i=1}^N (y_i - ax_i)^2}{S_i^2}$$

$$\frac{\partial X^2}{\partial a} = -2 \sum_{i=1}^N \frac{(y_i - ax_i)x_i}{S_i^2} = 0$$

$$\sum_{i=1}^N \frac{x_i y_i}{S_i^2} = a \sum_{i=1}^N \frac{x_i^2}{S_i^2}$$

$$a = \frac{\sum_{i=1}^N \frac{x_i y_i}{S_i^2}}{\sum_{i=1}^N \frac{x_i^2}{S_i^2}}$$

Essendo a una combinazione lineare di variabili casuali y_i con varianza nota (trascurando la varianza su x_i), la sua varianza:

$$S_a^2 = \sum_{i=1}^N \left(\frac{\partial a}{\partial y_i} \right)^2 S_i^2 = \frac{\sum_{i=1}^N \frac{x_i^2}{S_i^2} S_i^2}{\left(\sum_{i=1}^N \frac{x_i^2}{S_i^2} \right)^2} =$$
$$= \frac{1}{\sum_{i=1}^N \frac{x_i^2}{S_i^2}}$$

ES. $y = a_1 + a_2 x$

$$y = \sum_{k=1}^n a_k \cdot f_k(x)$$

In questo caso:

$$n = 2 \quad f_1(x) = 1 \quad f_2(x) = x$$

$$\begin{matrix} y_1 \pm s_1 & \dots & y_N \pm s_N \\ x_1 & \dots & x_N \end{matrix}$$

A :

$$A_{11} = \frac{\sum_{i=1}^N f_1(x_i) \cdot f_1(x_i)}{s_i^2} = \frac{\sum_{i=1}^N 1}{s_i^2} = s$$

$$A_{12} = \frac{\sum_{i=1}^N f_1(x_i) \cdot f_2(x_i)}{s_i^2} = \frac{\sum_{i=1}^N x_i}{s_i^2} = s_x$$

$$A_{22} = \frac{\sum_{i=1}^N f_2(x_i) \cdot f_2(x_i)}{s_i^2} = \frac{\sum_{i=1}^N x_i^2}{s_i^2} = s_{xx}$$

$$A = \begin{pmatrix} s & s_x \\ s_x & s_{xx} \end{pmatrix}$$

$$|A| = \det A = s \cdot s_{xx} - s_x^2 =$$

$$= \sum_{i=1}^N \frac{1}{s_i^2} \cdot \sum_{i=1}^N \frac{x_i^2}{s_i^2} - \left(\sum_{i=1}^N \frac{x_i}{s_i^2} \right)^2$$

b:

$$b_1 = \frac{\sum_{i=1}^N y_i \cdot f_1(x_i)}{s_i^2} = \frac{\sum_{i=1}^N \frac{y_i}{s_i^2}}{s_i^2} = s_y$$

$$b_2 = \frac{\sum_{i=1}^N y_i \cdot f_2(x_i)}{s_i^2} = \frac{\sum_{i=1}^N \frac{y_i x_i}{s_i^2}}{s_i^2} = s_{xy}$$

A⁻¹: (*Matrice covarianze*)

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \cdot \begin{pmatrix} s_{xx} & -s_x \\ -s_x & s \end{pmatrix}$$

SOLUZIONE :

$$\left(|A| = D \right)$$

$$\underline{a} = A^{-1} \cdot \underline{b}$$

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_{11}^{-1} & A_{12}^{-1} \\ A_{21}^{-1} & A_{22}^{-1} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{D} \begin{pmatrix} s_{xx} & -s_x \\ -s_x & s \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} s_y \\ s_{xy} \end{pmatrix}$$

$$a_1 = \frac{1}{D} (S_{xx} \cdot S_y - S_x \cdot S_{xy}) =$$

$$= \frac{1}{D} \left\{ \sum_{i=1}^N \frac{x_i^2}{S_i^2} \cdot \sum_{i=1}^N \frac{y_i}{S_i^2} - \sum_{i=1}^N \frac{x_i}{S_i^2} \cdot \sum_{i=1}^N \frac{x_i y_i}{S_i^2} \right\}$$

$$a_2 = \frac{1}{D} (-S_x \cdot S_y + S \cdot S_{xy}) =$$

$$= \frac{1}{D} \left\{ - \sum_{i=1}^N \frac{x_i}{S_i^2} \cdot \sum_{i=1}^N \frac{y_i}{S_i^2} + \sum_{i=1}^N \frac{1}{S_i^2} \cdot \sum_{i=1}^N \frac{x_i y_i}{S_i^2} \right\}$$

$$S_{a_1}^2 = A_{11}^{-1} = \frac{1}{D} \cdot S_{xx} = \frac{1}{D} \sum_{i=1}^N \frac{x_i^2}{S_i^2}$$

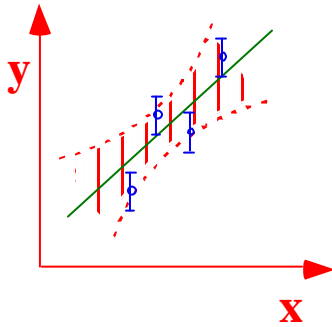
$$S_{a_2}^2 = A_{22}^{-1} = \frac{1}{D} \cdot S = \frac{1}{D} \cdot \sum_{i=1}^N \frac{1}{S_i^2}$$

$$\text{cov} = (a_1 a_2) = - \frac{1}{D} \cdot S_x = - \frac{1}{D} \cdot \sum_{i=1}^N \frac{x_i}{S_i^2}$$

$$D = S \cdot S_{xx} - S_x^2$$

ES. Calcolo banda errore intorno a soluzione

$$\begin{aligned}
 S_{\hat{y}}^2 &= \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n \left(\frac{\partial y}{\partial a_j} \right) \cdot \left(\frac{\partial y}{\partial a_k} \right) \cdot \text{cov}(a_j, a_k) = \\
 &= \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n f_j(x) \cdot f_k(x) \cdot \text{cov}(a_j, a_k) = \\
 &= f_1(x) \cdot f_1(x) \cdot \text{cov}(a_1, a_1) + f_2(x) \cdot f_2(x) \cdot \text{cov}(a_2, a_2) + \\
 &\quad + 2f_1(x) \cdot f_2(x) \cdot \text{cov}(a_1, a_2) = \\
 &= S_{a_1}^2 + x^2 S_{a_2}^2 + 2x \text{cov}(a_1, a_2) = \\
 &= \frac{1}{D} \left(S_{xx} + x^2 \cdot S - 2x S_x \right) \\
 &= \frac{1}{D} \left(\sum_{i=1}^N \frac{x_i^2}{S_i^2} + x^2 \cdot \sum_{i=1}^N \frac{1}{S_i^2} - 2x \sum_{i=1}^N \frac{x_i}{S_i^2} \right)
 \end{aligned}$$



Notare: $S_{\hat{y}}^2$ è funzione della x

Minimo di $S_{\hat{y}}^2$: $\left(\frac{\partial S_{\hat{y}}^2}{\partial x} = 0 \right)$

$$2x_{\min} \cdot S = 2 \cdot S_x$$

$$x_{\min} = \frac{S_x}{S}$$

Se S^2 uguali: $x_{\min} = \frac{\sum_{i=1}^N x_i}{N} = \bar{x}$

Per vedere che A^{-1} è la matrice delle covarianze:

\hat{a}_k : funzione delle y_i ($i = 1, N$) con varianza s_i^2 .
(*indipendenti*)

Dalla legge di propagazione degli errori:

$$\text{cov}(\hat{a}_k, \hat{a}_j) = \sum_1^N \frac{\partial \hat{a}_k}{\partial y_i} \cdot \frac{\partial \hat{a}_j}{\partial y_i} \cdot s_i^2$$

Dato che y_i indipendenti

$$\text{cov}(a_1, a_1) = \sum_1^N \left(\frac{\partial a_1}{\partial y_i} \right)^2 \cdot s_i^2$$

$$\begin{aligned} a_1 &= A_{11}^{-1} \cdot b_1 + A_{12}^{-1} b_2 \\ \frac{\partial a_1}{\partial y_i} &= A_{11}^{-1} \cdot \frac{1}{s_i^2} + A_{12}^{-1} \cdot \frac{x_i}{s_i^2} \\ a_2 &= A_{21}^{-1} \cdot b_1 + A_{22}^{-1} \cdot b_2 \\ \frac{\partial a_2}{\partial y_i} &= A_{21}^{-1} \cdot \frac{1}{s_i^2} + A_{22}^{-1} \cdot \frac{x_i}{s_i^2} \end{aligned} \quad \begin{aligned} b_1 &= \sum_1^N \frac{y_i}{s_i^2} \\ b_2 &= \sum_1^N \frac{x_i y_i}{s_i^2} \end{aligned}$$

Abbiamo dimostrato che:

$$y = y(\bar{\mathbf{x}})$$

$$S_y^2 = \text{var}(y) \simeq \sum_i \sum_j \frac{\partial y}{\partial x_i} \frac{\partial y}{\partial x_j} V_{ij}(\underline{\mathbf{x}})$$

se y è un vettore: $\underline{y}(\underline{\mathbf{x}}) = y_1(\bar{\mathbf{x}}), y_2(\bar{\mathbf{x}}) \dots$

Si può dimostrare che:

$$\text{cov}(y_l, y_m) = V_{l,m} \simeq \sum_i \sum_j \frac{\partial y_l}{\partial x_i} \frac{\partial y_m}{\partial x_j} V_{ij}(\underline{\mathbf{x}})$$

$$\begin{aligned}
\text{cov}(a_1, a_1) &= \sum_{i=1}^N \left(\frac{a_1}{y_i} \right)^2 s_i^2 = \sum_{i=1}^N \frac{1}{s_i^2} (A_{11}^{-1} + A_{12}^{-1} x_i)^2 = \\
&= \sum_{i=1}^N \frac{1}{s_i^2} \left\{ (A_{11}^{-1})^2 + (A_{12}^{-1})^2 \cdot x_i^2 + 2A_{11}^{-1}A_{12}^{-1}x_i \right\} = \\
&= (A_{11}^{-1})^2 \cdot s + (A_{12}^{-1})^2 s_{xx} + 2A_{11}^{-1}A_{12}^{-1}s_x = \\
&= (A_{11}^{-1})^2 \cdot A_{22}^{-1} \cdot D + (A_{12}^{-1})^2 A_{11}^{-1} \cdot D +
\end{aligned}$$

← vedi pagina precedente →

$$\begin{aligned}
&+ 2A_{11}^{-1}A_{12}^{-1} \cdot (-A_{12}^{-1}) \cdot D = \\
&= D\{A_{11}^{-1} \cdot [A_{11}^{-1} \cdot A_{22}^{-1} + \cancel{(A_{12}^{-1})^2} - \cancel{2(A_{12}^{-1})^2}]\} = \\
&= D\{A_{11}^{-1} \underbrace{[A_{11}^{-1} \cdot A_{22}^{-1} - (A_{12}^{-1})^2]}_{= A_{11}^{-1}}\} = A_{11}^{-1}
\end{aligned}$$

$$\text{DET}(A^{-1}) = \frac{1}{D}$$

Analogamente:

$$\text{cov}(a_2, a_2) = A_{22}^{-1}$$

$$\text{cov}(a_1, a_2) = A_{12}^{-1}$$

Dipendenza degli errori su a_1 e a_2 dal N. misure

Assumiamo tutti i S_i uguali

$$\begin{aligned}
 D = S_{xx} \cdot S - (S_x)^2 &= \sum_{i=1}^N \frac{x_i^2}{s^2} \cdot \frac{N}{s^2} - \left(\sum_{i=1}^N \frac{x_i}{s^2} \right)^2 \\
 &= \frac{N^2}{s^4} \sum_{i=1}^N \frac{x_i^2}{N} - \frac{N^2}{s^4} \left(\sum_{i=1}^N \frac{x_i}{N} \right)^2 = \\
 &= \frac{N^2}{s^4} \cdot (\overline{x^2} - \bar{x}^2)
 \end{aligned}$$

$$S_{a_2}^2 = \frac{1}{D} \sum_{i=1}^N \frac{1}{s^2} = \frac{s^4}{N^2(\overline{x^2} - \bar{x}^2)} \cdot \frac{N}{s^2} = \frac{1}{N} \cdot \frac{s^2}{(\overline{x^2} - \bar{x}^2)}$$

$$S_{a_1}^2 = \frac{1}{D} \sum_{i=1}^N \frac{x_i^2}{s^2} = \frac{s^4}{N^2(\overline{x^2} - \bar{x}^2)} \cdot \frac{N}{s^2} \cdot \bar{x}^2 = \frac{1}{N} \cdot \frac{s^2 \bar{x}^2}{(\overline{x^2} - \bar{x}^2)}$$

Gli errori sulla stima dei parametri diminuiscono all'aumentare del N. dei punti misurati (a parità di intervallo in x) come $\frac{1}{\sqrt{N}}$.

Se: tutte $S_i = S$

Cambio sistema di riferimento:

$$x_0 = \frac{S_i x_i}{N} \quad y_0 = \frac{S_i y_i}{N}$$

$$\begin{cases} x'_i = x_i - x_0 \\ y'_i = y_i - y_0 \end{cases} \quad (\text{ATT: } b' ? b) \longrightarrow S_i x'_i = 0$$

$$S = \frac{N}{S_2} \quad S_x = 0 \quad S_{xx} = \frac{1}{S^2} S_i x'_i \quad S_{xy} = \frac{1}{S^2} S_i x'_i y_i$$

$$S_y = \frac{1}{S_2} S y_i$$

$$D = S \cdot S_{xx}$$

$$a = \frac{1}{\cancel{S} \cdot S_{xx}} \cdot \cancel{S} \cdot S_{xy} = \frac{S_{xy}}{S_{xx}} = \frac{S_i x'_i y_i}{S_i x'^2_i}$$

$$b = \frac{1}{S \cdot \cancel{S_{xx}}} \cdot \cancel{S_{xx}} \cdot S_y = \frac{S_y}{S} = \frac{S_i y_i}{N}$$

$$s_a^2 = \frac{1}{\cancel{S} \cdot S_{xx}} \cdot \cancel{S} = \frac{1}{S_{xx}} \quad s_b^2 = \frac{1}{S \cdot S_{xx}} \quad S_{xx} = \frac{1}{S} = \frac{S^2}{N}$$

$$\text{cov}(a, b) = - \frac{1}{S \cdot S_{xx}} \cdot S_x = 0$$

TEST DI IPOTESI

Confronto di dati sperimentali con predizioni di un modello (o più modelli) e accettazione del modello (o scelta fra più modelli).

DATI SPERIMENTALI (*estrazione di un campione*)



STIMA DEI PARAMETRI DEL MODELLO



TEST DEL MODELLO / SCELTA FRA MODELLI

- 1 Date due ipotesi H_0 e H_1 stabilire quale delle due sia statisticamente più accettabile sulla base dei dati.
- 2 Data una ipotesi H_0 stabilire se è accettabile o no sulla base dei dati sperimentali.

ESEMPIO:

Campione di monete buone + monete false

buone : peso x_1

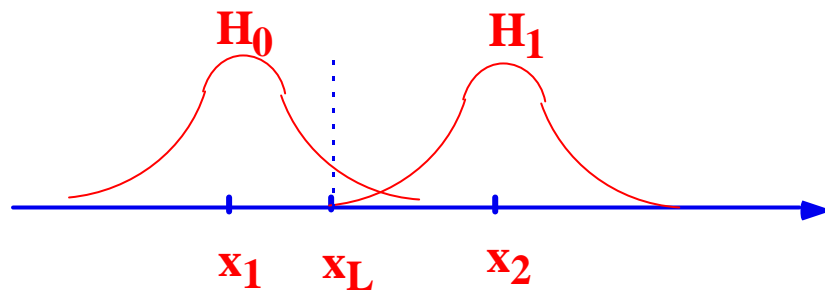
false: peso x_2

Bilancia con errore gauss. (s)

Una moneta
 x

H_0 : appartenente a $N(x_1, s)$

H_1 : appartenente a $N(x_2, s)$



Si fissa a priori un valore x_L

H_0 vera se $x = x_L$ $-8, x_L$

H_1 vera se $x > x_L$ $x_L, 8$

Fissato x_L :

$$a = \int_{x_L}^8 \frac{1}{\sqrt{2\pi} s} e^{-\frac{(x - x_2)^2}{2s^2}} dx \quad \text{Probabilità di rigettare } H_0, \text{ anche se vera}$$

$$b = \int_{-8}^{x_L} \frac{1}{\sqrt{2\pi} s} e^{-\frac{(x - x_2)^2}{2s^2}} dx \quad \text{Probabilità di accettare } H_1, \text{ anche se falsa}$$

a : **significatività** del test ($100 \cdot a =$ livello di significatività in %).
(*confidence level*)

$1 - b$: **potenza** del test (probabilità di rigettare ipotesi sbagliata).

ES. H_0 : grandezza fisica ha distribuzione gaussiana $N(\mu_0, S_0)$

Si accetta l'ipotesi **H_0** se $x_1 < x < x_2$

$$|x_1| = |x_2| = n S_0$$

$$a = -1 \int_{\mu_0 - nS_0}^{\mu_0 + nS_0} \frac{1}{\sqrt{2\pi} S_0} e^{-\frac{(x - \mu_0)^2}{2S_0^2}} dx$$

In questo caso b non può essere definito

Più in generale, dato un certo test di ipotesi, si definisce:

Statistica di controllo: grandezza, funzione dei dati sperimentali, sulla base della quale si effettua la selezione di ipotesi.

Ipotesi accettate se: $a = \text{stat. controllo} = b$

La regione di accettazione (**a**, **b**) dovrà avere la massima potenza di reiezione una volta fissata la significatività del test.

DISTRIBUZIONE DEL c^2 E TEST DEL c^2

Date n variabili gaussiane indipendenti $x_i(\mu_i, s_i)$,
la variabile:

$$c^2 = \sum_{i=1}^n \frac{(x_i - \mu_i)^2}{s_i^2}$$

E' ancora una variabile casuale con:

$$f_n(c^2) = \frac{1}{2^{n/2} G(\frac{n}{2})} e^{-c^2/2} \cdot (c^2)^{\frac{n}{2}-1}$$

Funzione G: $G\left(\frac{n}{2}\right) \begin{cases} n=1 & G(\frac{1}{2}) = p \\ n=2 & G(1) = 1 \\ n \text{ pari} & G(\frac{n}{2}) = (\frac{n}{2} - 1)! \\ n \text{ dispari} & G(\frac{n}{2}) = (\frac{n}{2} - 1)(\frac{n}{2} - 2) \dots \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot p \end{cases}$

n (N. di gradi di libertà) \equiv N. di variabili indipendenti

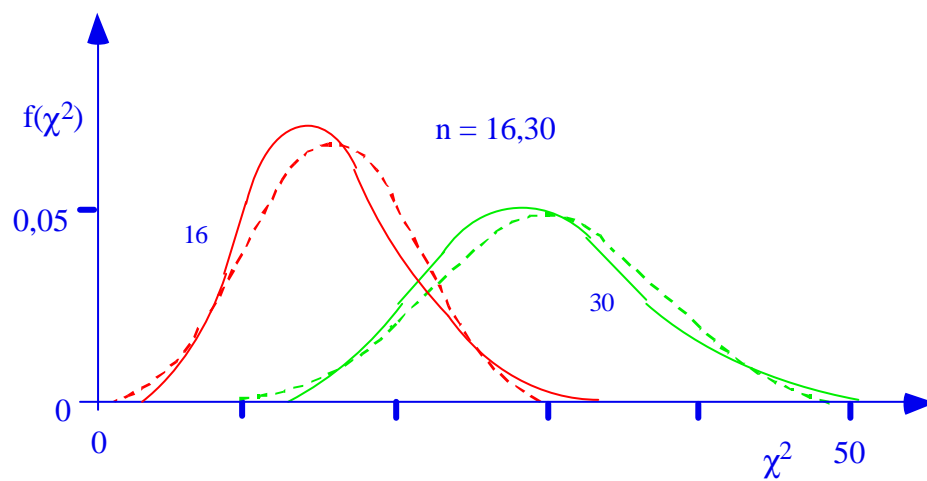
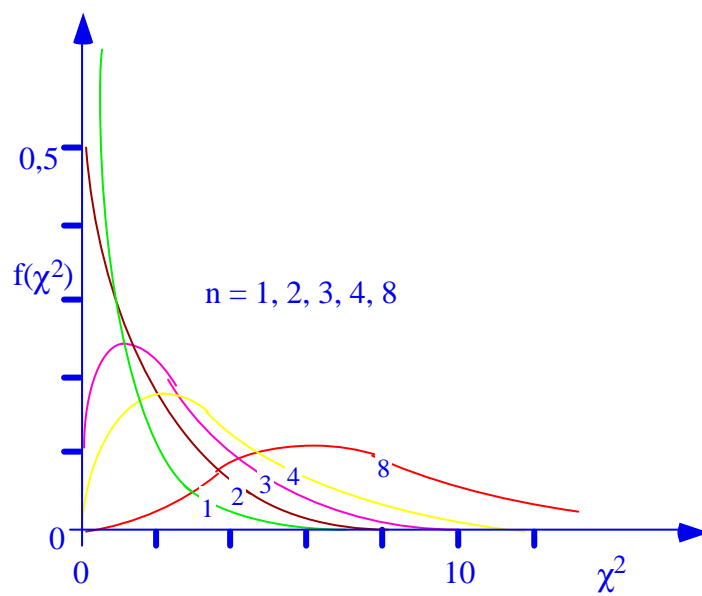
$$\mu(c^2) = n$$

$$s^2(c^2) = 2n$$

Per $n = 1$ f_1 diverge per $c^2 \rightarrow 0$

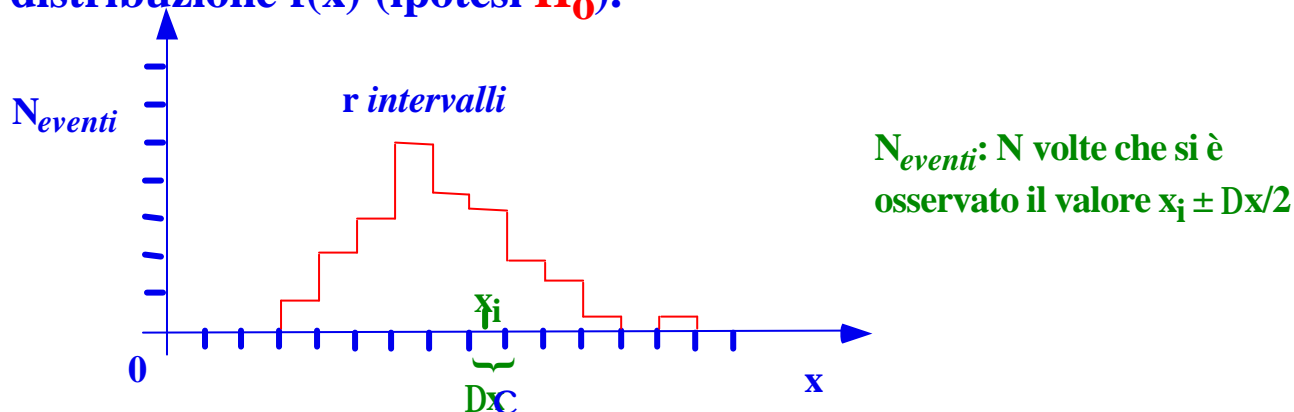
Per $n = 2$ $f_2 = 0.5$ per $c^2 = 0$

n grande tende alla gaussiana con stesso μ , s .



TEST DI IPOTESI (statistica di controllo c^2)

Supponiamo di aver estratto un campione di dimensione N dalla popolazione di una variabile casuale (continua) (cioè aver fatto N misure di una grandezza fisica) e di voler verificare se questa variabile segue una certa funzione di distribuzione $f(x)$ (ipotesi H_0).



Generico intervallo i :

$$p_i = f(x_i)Dx$$

n_i : N di eventi in i

$$\sum_{i=1}^r n_i = N$$

n_i avrà distribuzione binomiale con:

$$\mu_i = N \cdot p_i$$

$$s_i^2 = N \cdot p_i \cdot (1 - p_i)$$

Dato che per $N \rightarrow \infty$ la binomiale tende a gaussiana, potremo dire che la variabile:

$$c^2 = \frac{\sum_{i=1}^r (n_i - \mu_i)^2}{s_i^2} = \frac{\sum_{i=1}^r (n_i - N p_i)^2}{N p_i \cdot (1 - p_i)}$$

r : N . di intervalli considerati

ha come funzione di distribuzione $\sim f_{r-1}(c^2)$

Segue la funzione di distribuzione del c^2 con $r - 1$ gradi di libertà

($r - 1$ dato che: $\sum_1^r n_i = N$; uno degli n_i non è indipendente).

La variabile casuale:

$$c^2$$

sarà la "statistica di controllo"

$\mu_i = Np_i$ sarà il valore aspettato per l'iesimo intervallo.

(p_i : probabilità, per la variabile casuale x_i , di trovarsi nell'intervallo i , calcolata sulla base dell'ipotesi teorica $f(x)$)

Detto μ_i il N. di eventi aspettati nell'intervallo i , la varianza

s_i^2 potrà essere ottenuta anche dalla distribuzione di Poisson;

$$s_i^2 = \mu_i.$$

$$c^2 = \frac{\sum_1^r (n_i - \mu_i)^2}{\mu_i}$$

Si fissa a priori il livello di significatività del test, α .

Fissato α , dato che f. di distribuzione della statistica di controllo è nota, si ottiene c_{LIM}^2 .

$$\int_{c_{LIM}^2}^{\infty} f_{r-1}(c^2) dc^2 = \alpha \quad r-1: n. di gradi di libertà$$

Se $c_{MIS}^2 = c_{LIM}^2$ H_0 accettata

$c_{MIS}^2 > c_{LIM}^2$ H_0 rigettata

NOTA

Per $r = n_D \gg 1$, $f(c^2)$ ® gaussiana.
Quindi la variabile y :

$$y = \frac{c^2 - n_D}{\sqrt{2n_D}}$$

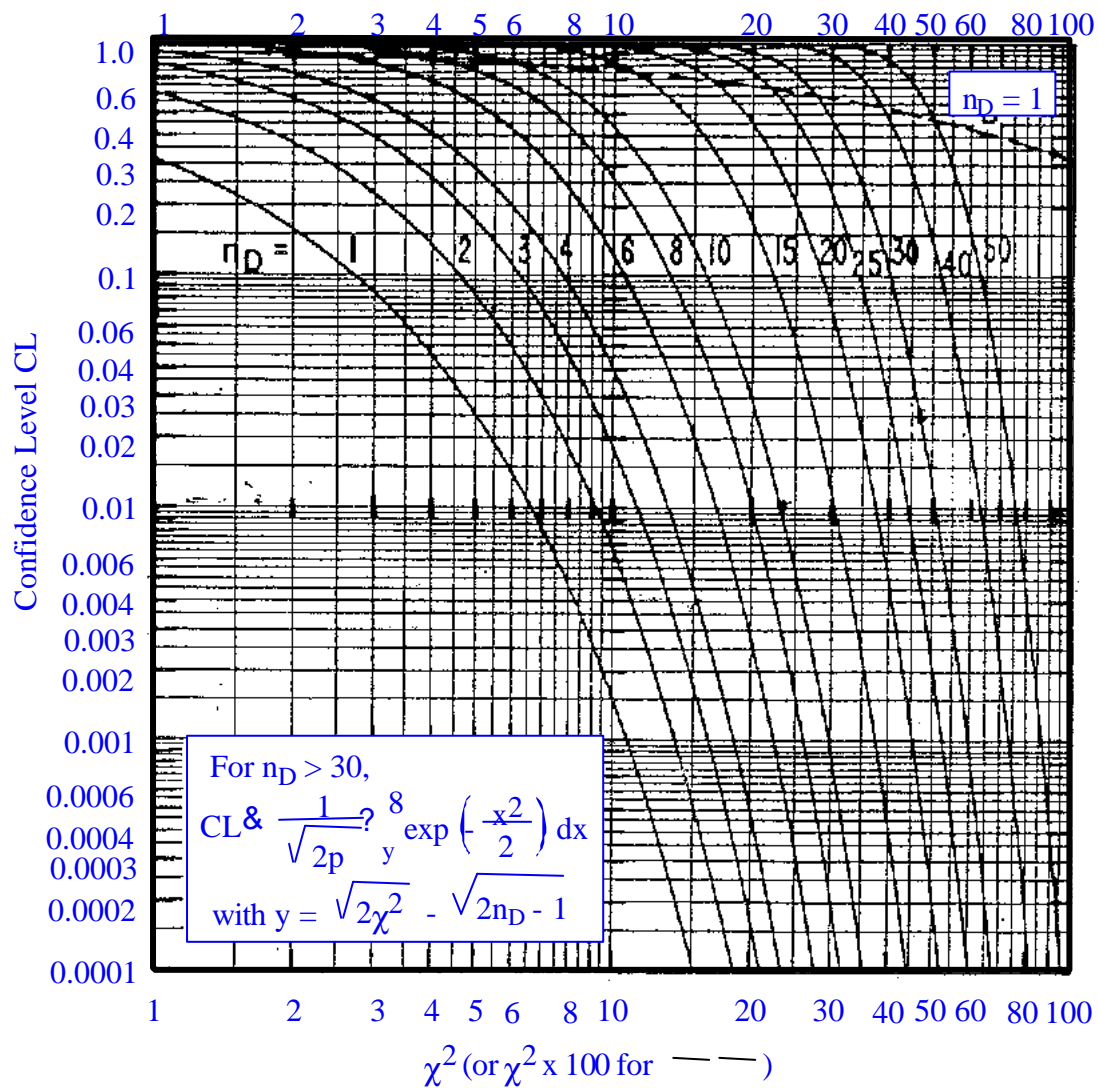
sarà gaussiana con valore atteso = 0 e varianza 1.

Migliore approssimazione (Fisher): $y = \sqrt{2 c^2} - \sqrt{2n_D - 1}$

NOTARE:

- 1) Test valido se variabile casuale n_i è gaussiana (® $\mu_i \approx 10$).
- 2) Arbitrarietà del test: scelta Dx istogramma.
- 3) Dato che la statistica di controllo opera sui quadrati, non può evidenziare discrepanze sistematiche di segno.

c² confidence level vs. c² for n_D degrees of freedom



4) Il test del χ^2 potrà essere utilizzato per verificare fit con minimi quadrati:

$$y = ax + b$$

$$x_1 \quad y_1 \pm s_1$$

$$x_2 \quad y_2 \pm s_2$$

$$\begin{array}{c} \cdot \quad \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \\ \cdot \quad \underbrace{\cdot \cdot \cdot \cdot \cdot} \end{array}$$

distribuzione gaussiana
 N_p punti misurati

$$\chi^2_{N_p - 2} = \frac{\sum_i (y_i - \{ax_i + b\})^2}{s_i^2}$$

$ax_i + b = \mu_i$: *se la mia ipotesi ($y = ax + b$) è corretta*

a, b: stima con il metodo dei minimi quadrati

Il test di compatibilità di **N** istogrammi sperimentali della stessa variabile casuale (*grandezza fisica*) di cui si ignora **funzione di distribuzione**

$$\chi^2 = \sum_j^N \sum_i^r \frac{(n_{ij} - \hat{p}_i N_j)^2}{\hat{p}_i N_j}$$

r: N. di intervalli

n_{ij} : N. eventi, intervallo i istogramma j

n_j : N. totale eventi, istogramma j

$$\hat{p}_i = \frac{\sum_j^N n_{ij}}{\sum_j^N N_j} \quad (\text{definizione frequenzistica di probabilità})$$

N. di gradi di libertà: $(N - 1) (r - 1)$

infatti

N. di variabili indipendenti = $(N \cdot r - N)$

N. di parametri stimati = $(r - 1)$

Nel caso di egual numero di eventi negli istogrammi
(2 istogrammi)

$$c^2 = \sum_i^r \frac{(n_{i1} - n_{i2})^2}{n_{i1} + n_{i2}} \quad (\text{banale})$$

ES. *Errore sull'errore quadratico medio*

$$s^2 = \frac{\sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x})^2}{N - 1}$$

La variabile casuale:

$$\frac{\sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x})^2}{s^2} \rightarrow c^2 (N - 1)$$

(N - 1 in quanto la \bar{x} introduce una correlazione fra le x_i).

$$u = c^2 (N - 1) = \frac{N - 1}{s^2} \cdot s^2 \rightarrow s^2 = \frac{s^2}{N - 1} \cdot c^2 (N - 1)$$

$$E[u] \mu(u) = N - 1$$

$$s^2 = f(c^2 (N - 1))$$

$$E[(u - \mu)^2] = s^2(u) = 2(N - 1)$$

$$s_{s^2}^2 = \left(\frac{f'}{f} \right)^2 \cdot s_{c^2}^2$$

$$\downarrow \rightarrow \left(\frac{s^2}{N - 1} \right)^2$$

$$s_{s^2}^2 = \frac{s^4}{(N - 1)^2} \cdot \overset{2 \cdot (N - 1)}{s_{\mu}^2} = \frac{2 \cdot s^4}{(N - 1)} = \frac{2 \cdot s^4}{N - 1}$$

$$s_s^2 = \left(\frac{ds}{ds^2} \right)^2 s_{s^2}^2 = \frac{1}{4 s^2} \frac{2 s^4}{N - 1} = \frac{s^2}{2(N - 1)}$$

$$\downarrow \rightarrow = \frac{1}{2s}$$

$$S_s = \frac{s}{\sqrt{2(N-1)}}$$

(errore sull'errore quadratico medio)

Per l'errore sulla media:

$$s_{\bar{x}} = \frac{s}{\sqrt{N}}$$

L'errore sull'errore sulla media $\left(= \frac{s}{\sqrt{N}} \right)$:

$$S_{s_{\bar{x}}} = \frac{s}{\sqrt{2(N-1)}}$$