

Fisica Applicata alla Biologia

Guido Tiana (Dipartimento di Fisica, email: tiana@mi.infn.it)

pagina web: http://www.mi.infn.it/~tiana/fisica_bio

Aula 403, lunedì e martedì, 14.30-16.30



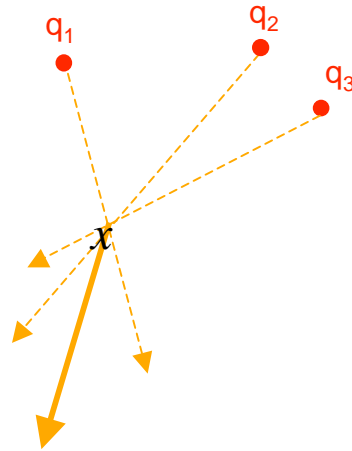
Cosa dovete sapere: cos'è un campo elettrico
 un po' di trigonometria
 qualcosa sulle derivate e ricordarsi vagamente cos'è un integrale

Libri: qualunque libro di elettromagnetismo e ottica (es. Halliday-Resnick-Walker, Fondamenti di Fisica: elettrologia, magnetismo e ottica)

il campo elettrico \vec{E} (ripasso...)

$q \rightarrow \vec{E}$

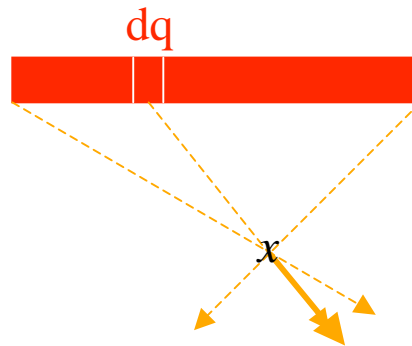
cariche generano campi elettrici



distribuzione discreta

$$\vec{E}(x) = \frac{1}{4\pi\epsilon} \cdot \frac{q}{r^2} \vec{u}_r$$

$$\vec{E}_{tot}(x) = \sum_i \vec{E}_i$$

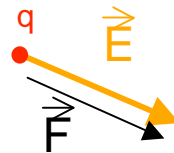


distribuzione continua

$$\vec{E}_{tot}(x) = \int \frac{1}{4\pi\epsilon} \cdot \frac{dq}{r^2} \vec{u}_r$$

$\vec{E} \rightarrow q$

campi elettrici producono forze sulle cariche

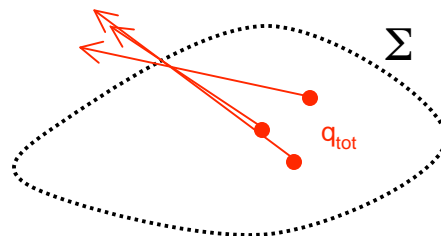


$$\vec{F} = q\vec{E}$$

Legge di Gauss

$$\int_{\Sigma} \vec{E} \cdot \vec{u}_n d\Sigma = \frac{q_{tot}}{\epsilon_0}$$

flusso di E attraverso Σ

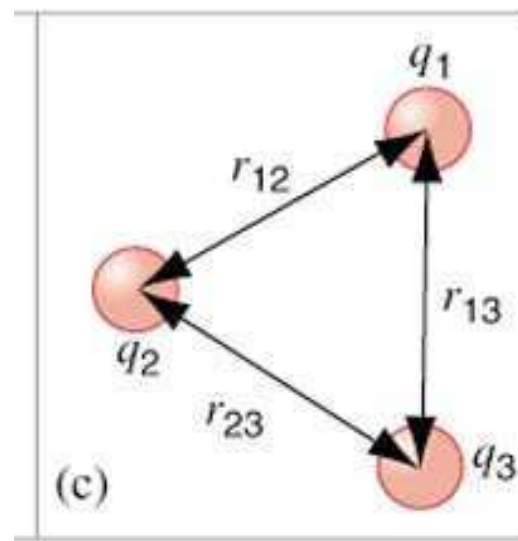


Energia potenziale

per due cariche puntiformi $U(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon} \frac{q_1 q_2}{r}$

per un sistema di cariche $U = \frac{1}{2} \sum_{i \neq j} \frac{q_i q_j}{4\pi\epsilon_0 r_{ij}}$

L'energia totale del sistema si conserva: $K + U = \text{costante}$



Potenziale elettrico

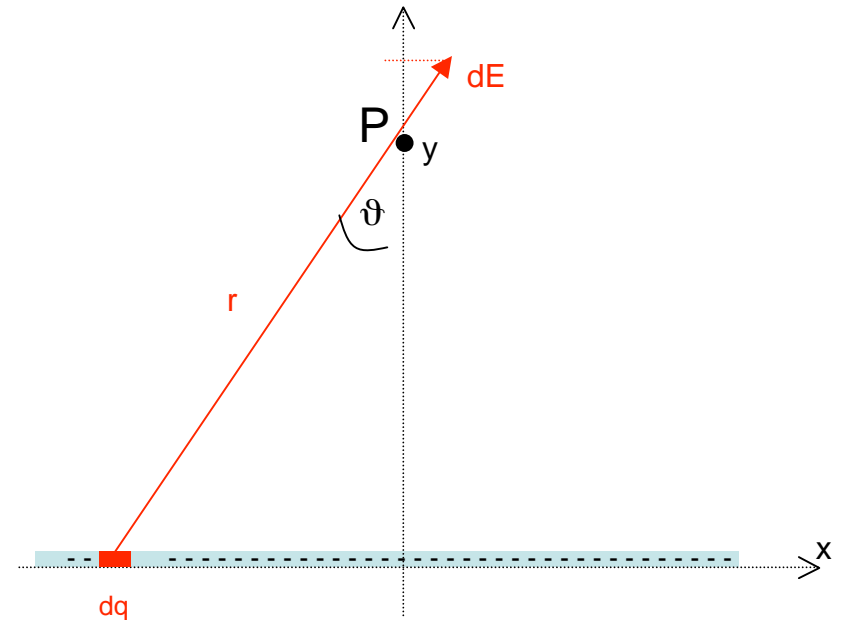
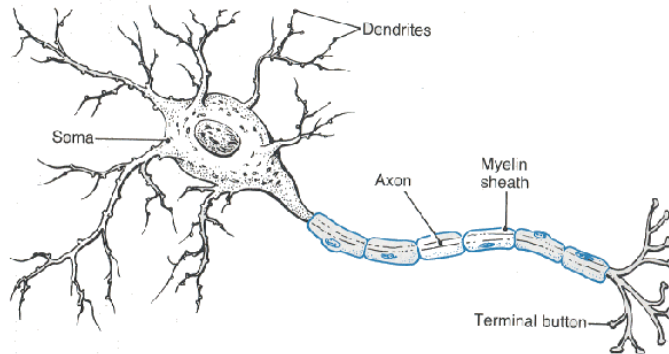
per una carica in un campo generato da altre cariche $\Delta V = \frac{\Delta U}{q_0}$

e' equivalente alla conoscenza del campo $E_x = -\frac{\partial V}{\partial x}$, $E_y = -\frac{\partial V}{\partial y}$, $E_z = -\frac{\partial V}{\partial z}$

e' uniforme nei conduttori

$$\Delta V = V_A - V_B = -\int_B^A \vec{E} \cdot d\vec{s}$$

Esempio



Se l'assone fosse nel vuoto e fosse infinitamente sottile e lungo:

$$d\vec{E}(P) = \frac{dq}{4\pi\epsilon_0 r^2} \vec{u}_r = \frac{\lambda dx}{4\pi\epsilon_0 r^2} \vec{u}_r \quad (\text{dove } \lambda = dq/dx \text{ e' la densita' lineare di carica})$$

$$dE_x(P) = \frac{\lambda dx}{4\pi\epsilon_0 r^2} \sin \vartheta$$

$$E_x(P) = \int dE_x = 0$$

$$dE_y(P) = \frac{\lambda dx}{4\pi\epsilon_0 r^2} \cos \vartheta$$

$$E_y(P) = \int dE_y = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\lambda dx}{4\pi\epsilon_0 \underbrace{(x^2 + y^2)}_{r^2}} \cdot \underbrace{\frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}}_{r/y = \cos \vartheta} = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 y}$$

$$1\text{mM di Cl}^- = 10^{23} \times 10^{-3} \text{ dm}^{-3}$$

la sezione dell'assone del calamaro e' $\Sigma = 1\text{mm}^2 = 10^{-4}\text{dm}^2$, quindi

$$\text{ci sono } 10^{20} \times 10^{-4} = 10^{16} \text{ ioni/dm}$$

$$\text{quindi } \lambda = -e \times 10^{16} \text{ dm}^{-1} = -10^{-19}\text{C} \times 10^{17}\text{m}^{-1} = -10^{-2} \text{ C/m}$$

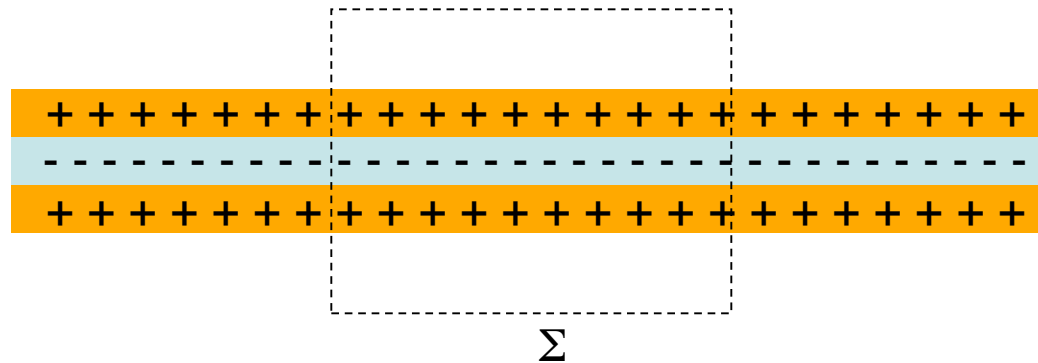
$$\text{alla distanza } y=1\text{mm } E = -10^{-2} \text{ Cm}^{-1} / (10^{-10} \text{ CN}^{-1}\text{m}^{-2} \times 10^{-3}\text{m}) = -10^{11} \text{ N/C} \quad (\text{E IL POTENZIALE??})$$

$$\text{e' tanto? il campo che il nucleo produce sull'elettrone e' } E = 10^{-19}\text{C} / (10^{-10} \text{ CN}^{-1}\text{m}^{-2} \times 10^{-20}\text{m}) = 10^{11}\text{N/C}$$

<http://integrals.wolfram.com>

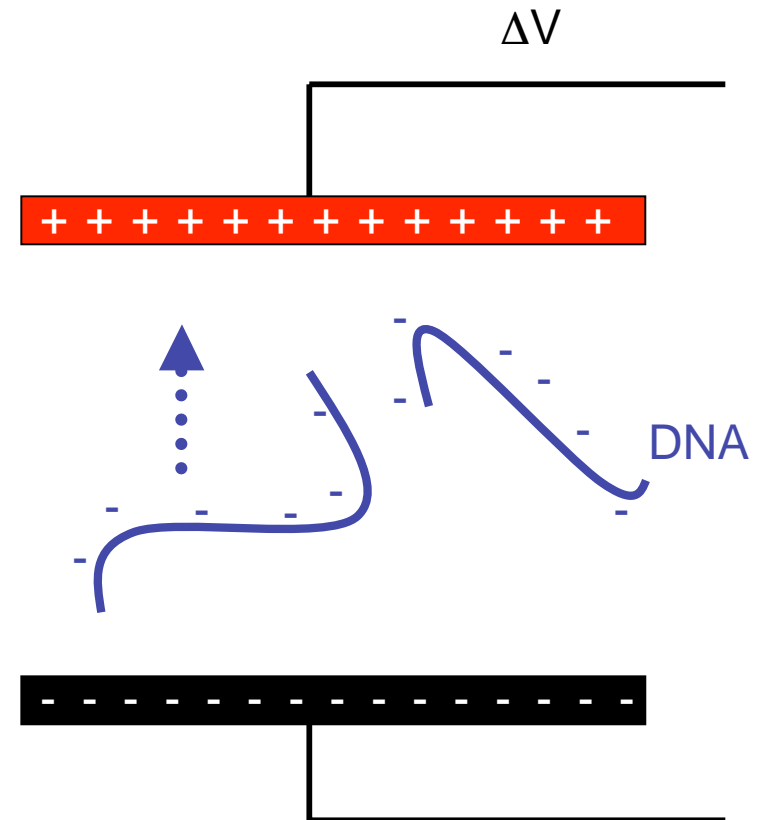
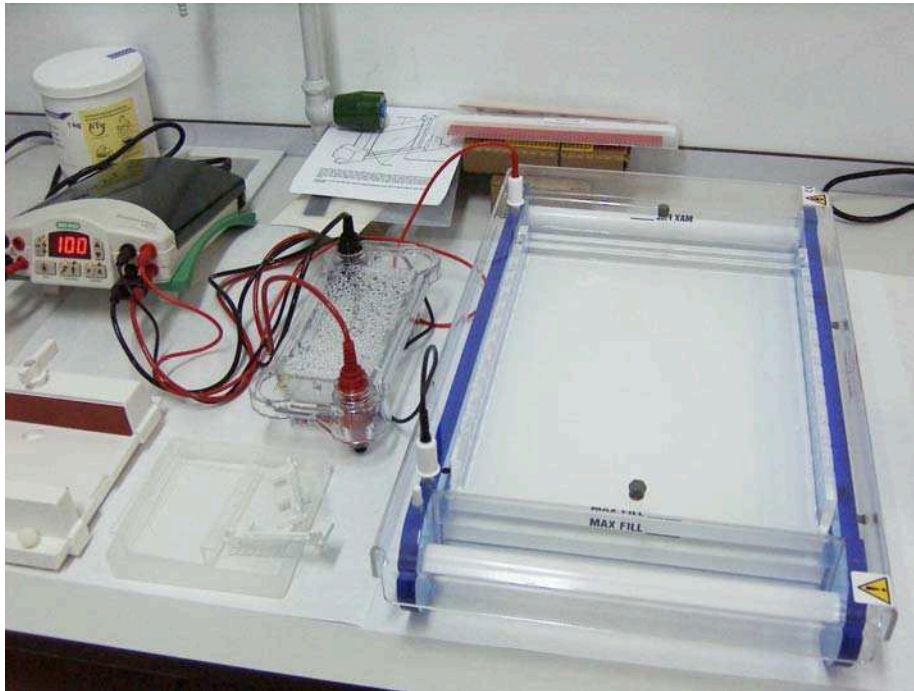
Caso piu' realistico: distribuzione cilindrica di carica negativa, circondata da una distribuzione cilindrica di ugual carica positiva.

- l'eventuale campo sarebbe necessariamente perpendicolare al cilindro (x simmetria)
- uso la legge di Gauss



$$\int_{\Sigma} \vec{E} \cdot \vec{u}_n d\Sigma = \frac{q_{tot}}{\epsilon_0} = 0 \quad \longrightarrow \quad E = 0$$

Elettroforesi

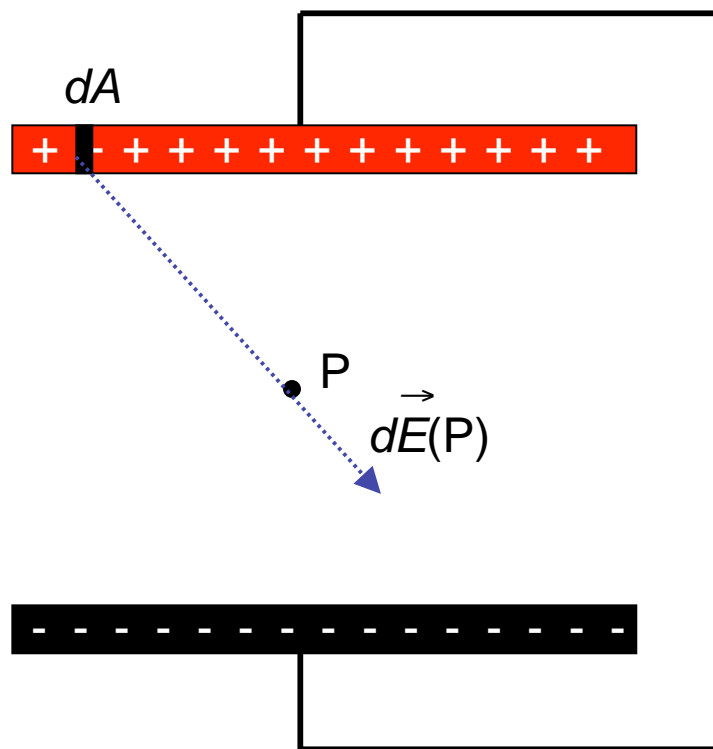


Strategia:

- 1) calcolo il campo elettrico tra le due piastre
- 2) calcolo il moto del DNA attraverso $F = qE$

Com'e' fatto il campo elettrico tra le due piastre?

(carica uniforme e piastre infinite)



La carica non e' puntiforme!

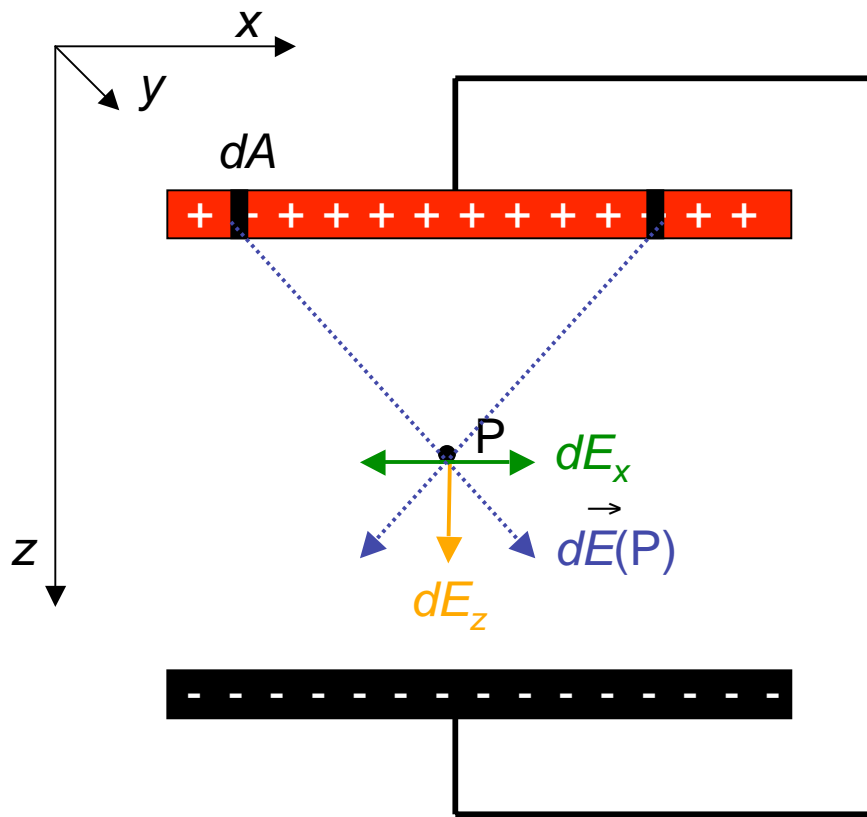
...non posso usare $\vec{E}(x) = \frac{1}{4\pi\epsilon} \cdot \frac{q}{r^2} \vec{u}_r$

Considero la piastra come composta da aree infinitesime dA , che posso considerare praticamente puntiformi, e sommo (integro) tutti i contributi dE .

$$d\vec{E}(x) = \frac{1}{4\pi\epsilon} \cdot \frac{dq}{r^2} \vec{u}_r$$

~~$$\vec{E}_{tot}(x) = \sum_i d\vec{E}_i$$~~

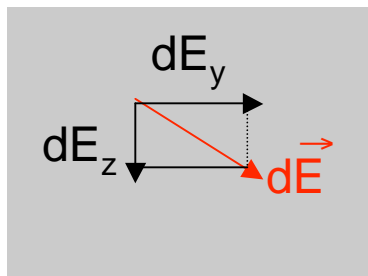
$$\vec{E}_{tot}(x) = \int d\vec{E}_i$$



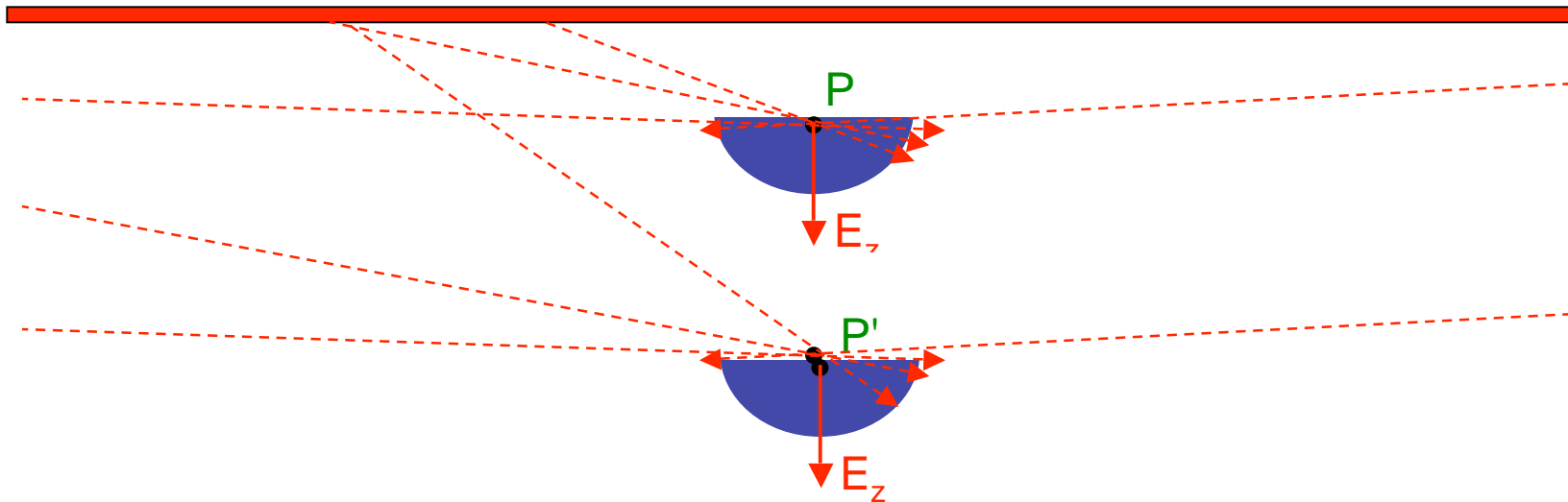
Tutto consegue da $\vec{E}_{tot}(x) = \int d\vec{E}_i$

$$E_x = E_y = 0$$

perche' ogni contributo dE_x del semipiano positivo di x e' cancellato esattamente dal vettore del semipiano negativo

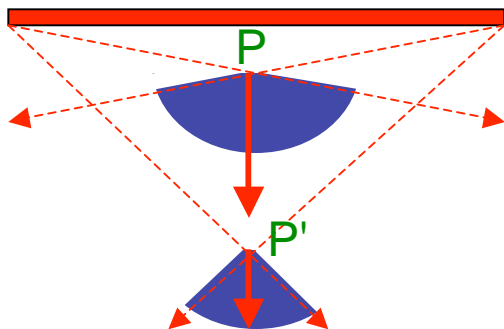


E_z non dipende da x, y, z perché se le piastre sono abbastanza grandi...



(i vettori corrispondenti ai contributi infinitesimi formano semicerchio identici in ogni punto)

Sarebbe diverso se le piastre fossero piccole:



QUINDI... $E(P) = E_z = \text{costante}$
(e punta verso la piastra negativa)

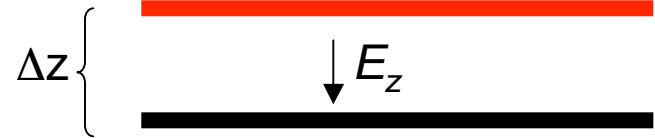
Tra le due piastre e' applicata una differenza di potenziale ΔV (ad opera di un qualche generatore).

In generale $E_z = -\frac{\partial V}{\partial z}$, ma noi sappiamo che E_z non dipende da z

Quale funzione V se derivata rispetto a z produce la costante E_z ? $\Delta V = - E_z \cdot \Delta z$

$$\text{(cioe' } \Delta V = - \int_0^{\Delta z} E_z dz = - E_z \cdot z \Big|_0^{\Delta z} = - E_z \Delta z \text{)}$$

Quindi.... $E_z = -\Delta V / \Delta z$



Esempio:

Se metto una carica positiva q_0 in prossimita' della lastra carica positivamente, con che velocita' urtera' la lastra carica negativamente?

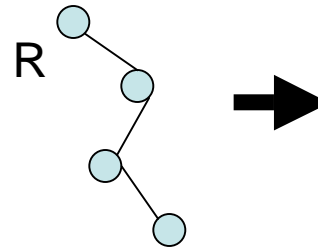
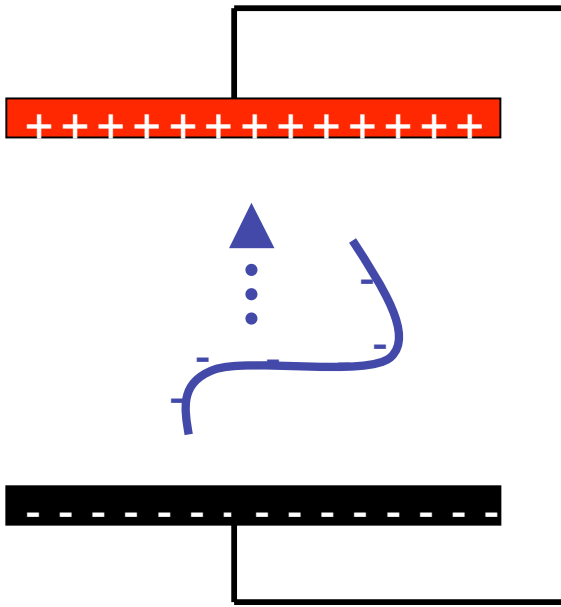
L'energia si conserva: all'inizio l'energia e' solo potenziale $U = q_0 \Delta V$
alla fine e' solo cinetica $K = 1/2 mv^2$

quindi $1/2 mv^2 = q_0 \Delta V$, e quindi $v = (2q_0 \Delta V / m)^{1/2}$

Calcolo del moto del DNA

se mettessi tra le piastre un **liquido viscoso**: $\vec{F} = \vec{F}_E - \gamma \vec{v}$

γ e' il coefficiente di frizione viscosa



$$\gamma = 6 \pi \eta R N \quad (\text{Legge di Stokes})$$

η e' il coefficiente di viscosita'

R il raggio della sfera

N il numero effettivo di sfere

$$\vec{F}_E = q N \vec{E}$$

(dato che la carica totale del DNA e' qN)

Quindi l'equazione di Newton e' $m\vec{a} = \vec{F}_E - \gamma \vec{v}$

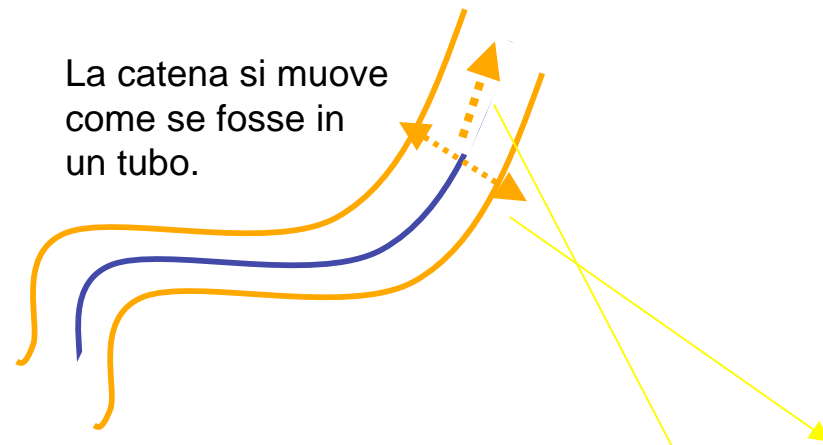
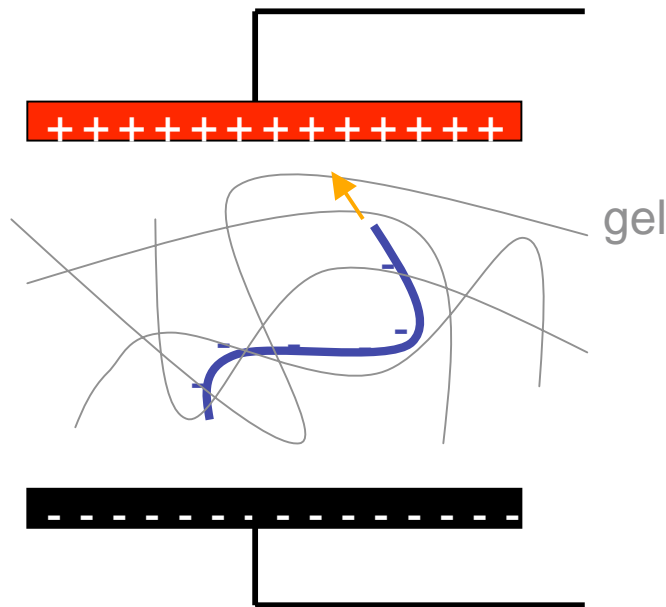
F_E e' costante nel tempo, v aumenta nel tempo, quindi ad un certo punto $F_E = \gamma v$

→ l'accelerazione e' zero ed il DNA si muove di moto rettilineo uniforme

$$0 = \vec{F}_E - \gamma \vec{v} \quad \longrightarrow \quad \vec{v} = \frac{\vec{F}_E}{\gamma} = \frac{qNE}{6\pi\eta RN} \quad \text{NON DIPENDE DA } N \text{ (l'elettroforesi non funziona)}$$

Devo usare un gel!

(un gel e' una "soluzione" di polimeri intrecciati)



per E piccolo

γ^{gel} dipende debolmente da N

$$\frac{1}{\gamma^{\text{gel}}} = \frac{1}{6\pi\eta N^2 a} \left(1 + \frac{N(qaE)^2}{12(kT)^2} \right)$$

se $N \ll 12(kT)^2/(qaE)^2$ γ^{gel} indipendente da N

$v = qNE/\gamma^{\text{gel}}$ proporz. a $1/N \rightarrow$ elettroforesi funziona!

se $N \gg 12(kT)^2/(qaE)^2$ γ^{gel} ancora proporz. a N

$v = qNE/\gamma^{\text{gel}}$ indipend. da N \rightarrow elettroforesi non funziona!

per E grande

γ^{gel} proporzionale a N \rightarrow elettroforesi non funziona!

Per esempio,

$$\Delta V = 100 \text{ V} \quad \longrightarrow \quad E = \Delta V/h = 10 \text{ V}/0.1 \text{ m} = 10^3 \text{ J/C}$$

$$h = 0.1 \text{ m}$$

$$q = 10^{-19} \text{ C}$$

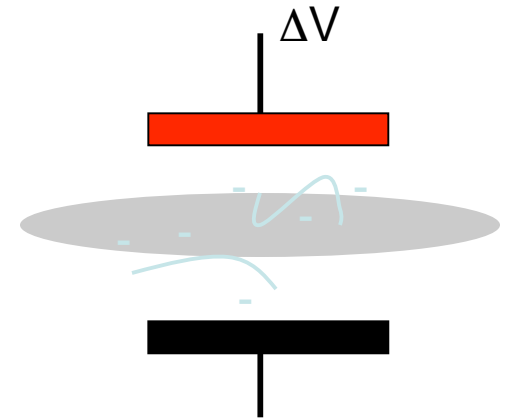
$$T = 300 \text{ K}$$

$$a = 10^{-8} \text{ m}$$

$$N = 12 (kT)^2 / (qaE)^2 = 12 (300 \text{ K } 10^{-23} \text{ J/K})^2 / (10^{-19} \text{ C } 10^{-8} \text{ m } 10^3 \text{ J/C})^2 = 10 \cdot 10^{-42} \text{ J}^2 / 10^{-48} \text{ J}^2 = 10^7$$

Corrente elettrica

$$i = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta q}{\Delta t} = \frac{dq}{dt} \quad \text{si misura in C/s = Ampere (A)}$$



La forza elettrica e' bilanciata dagli urti delle cariche (DNA) con il mezzo che riempie le due piastre. Per materiali semplici

$$i = \frac{\Delta V}{R} \quad \text{dove } R \text{ e' la resistenza e si misura in V/A=Ohm}$$

Questo vale per esempio per gli elettroni nei conduttori metallici.

Esempio

Zona pianeggiante, tempo sereno: $\Delta V = 100 \text{ V}$ ogni metro, quindi c'è un campo $E = 100 \text{ V/m}$ (la terra è carica negativamente)..

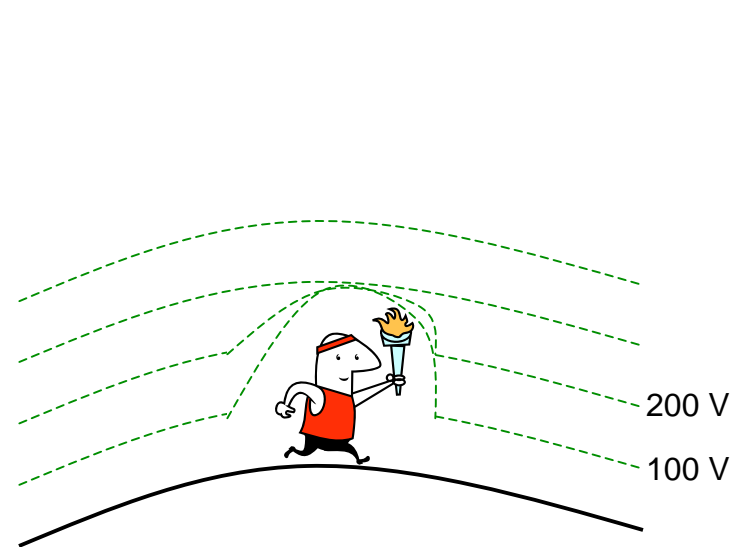
In totale $\Delta V = 400000 \text{ V}$ tra la terra e il limite dell'atmosfera (50 km).

Un conduttore modifica nelle sue vicinanze la forma del campo.

Nell'atmosfera ci sono degli ioni, generati dai raggi cosmici, che si muovono con resistenza $R = 400 \text{ Ohm}$.

Ci sarà una corrente di cariche positive verso la terra pari a $i = 400000 \text{ V} / 400 \text{ Ohm} = 1000 \text{ A}$

Dato che la terra ha raggio $r = 40000 \text{ Km}$, cioè superficie $S = 10^{15} \text{ m}^2$, la corrente che attraversa la superficie terrestre è $1000 \text{ A} / 10^{15} \text{ m}^2 = 10^{-12} \text{ A/m}^2$ (cioè piccola, a livello locale)



Perché l'atmosfera non si scarica in pochi minuti?

Ci sono 40000 fulmini al giorno sulla terra, che riportano 10^3 A di carica negativa sulla terra.



Esercizio:

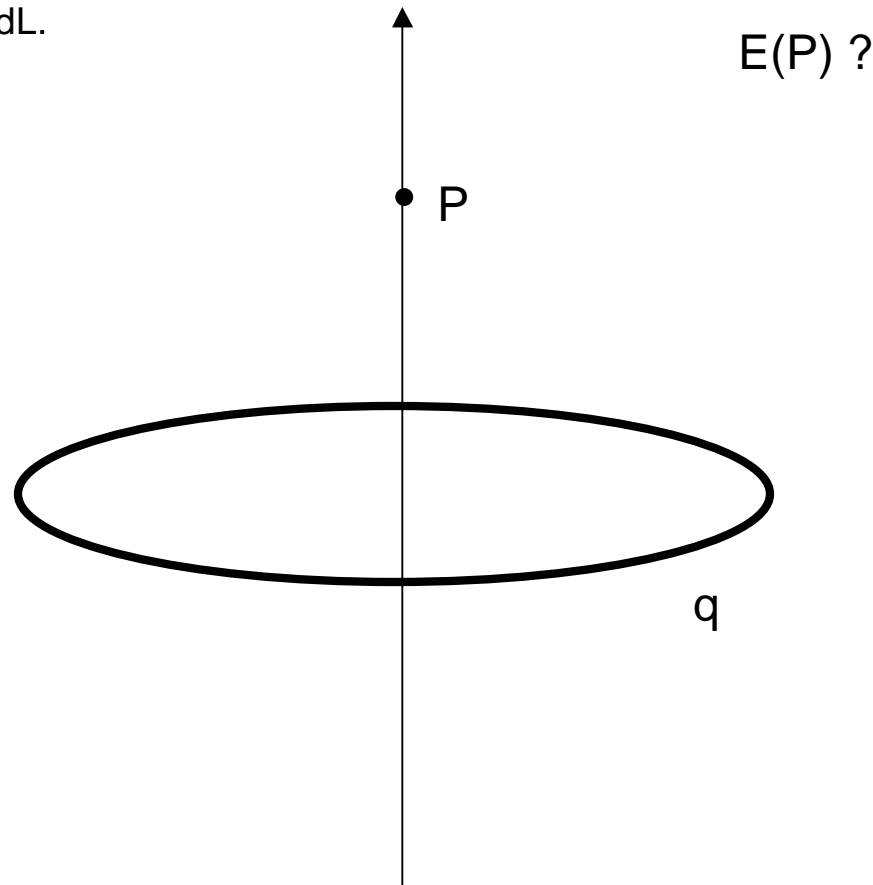
Sia dato un anello di raggio R con carica q uniformemente distribuita su di esso.

Che direzione ha il campo elettrico?

Aumenta o diminuisce all'aumentare della distanza di P dall'anello?

(+ difficile) Calcolare esattamente il campo.

Suggerimento: la densità di carica sull'anello è $\lambda = q/2\pi R$, quindi un elementino infinitesimo di anello di lunghezza dL avrà carica λdL .



Il campo magnetico

carica	genera	campo elettrico
campo elettrico	imprime forza	su carica

e allo stesso modo

carica in moto	genera	campo magnetico
campo magnetico	imprime forza	su carica in moto

campo magnetico B
(si misura in Telsa (T))

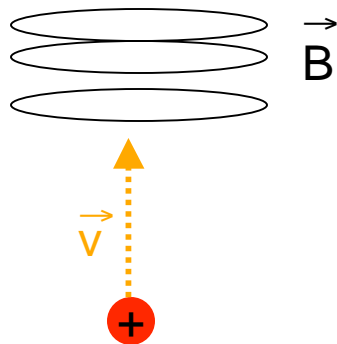
$$1\text{T}=1\text{N} / (\text{Am})$$

campo terrestre	$B=10^{-4}\text{T}$
vicino a una calamita	$B=10^{-2}\text{T}$
smagnetizza le carte di credito	$B=1\text{T}$

altra unita': 1 Gauss (G) = 10^{-4} T

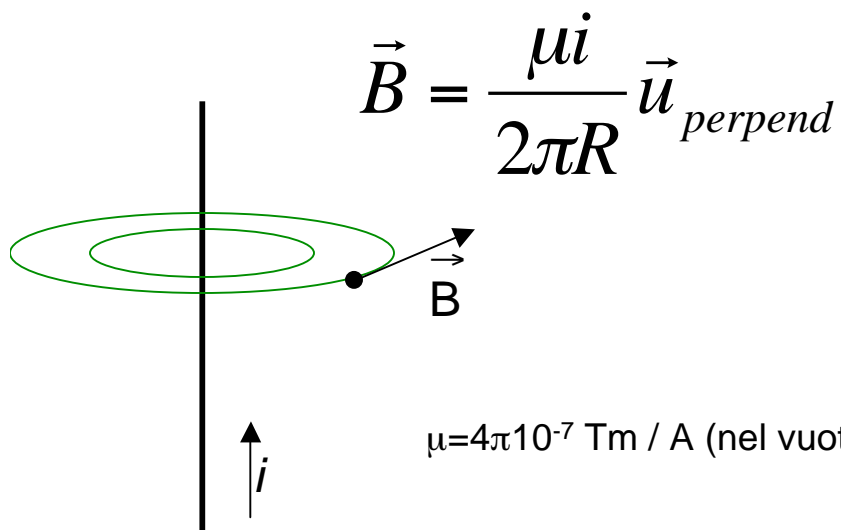


1) Una carica in moto genera (= una corrente) un campo magnetico



(ovviamente ci sarà anche un campo elettrico sovrapposto al campo magnetico)

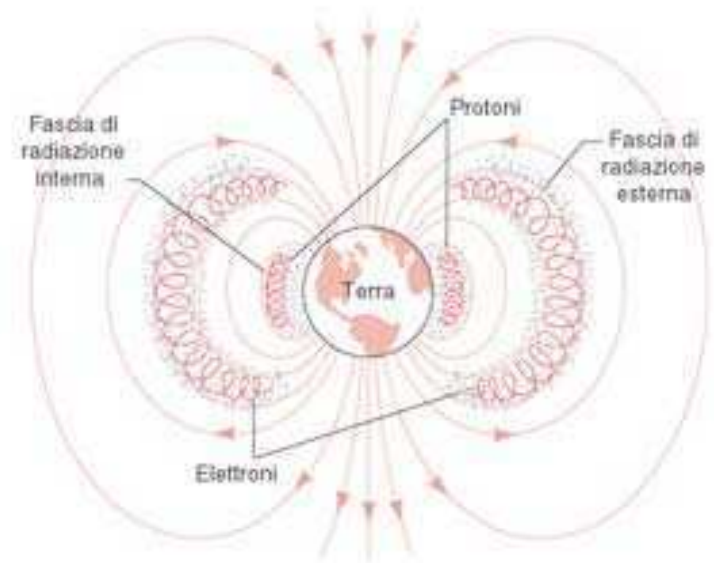
per una corrente in un filo rettilineo:



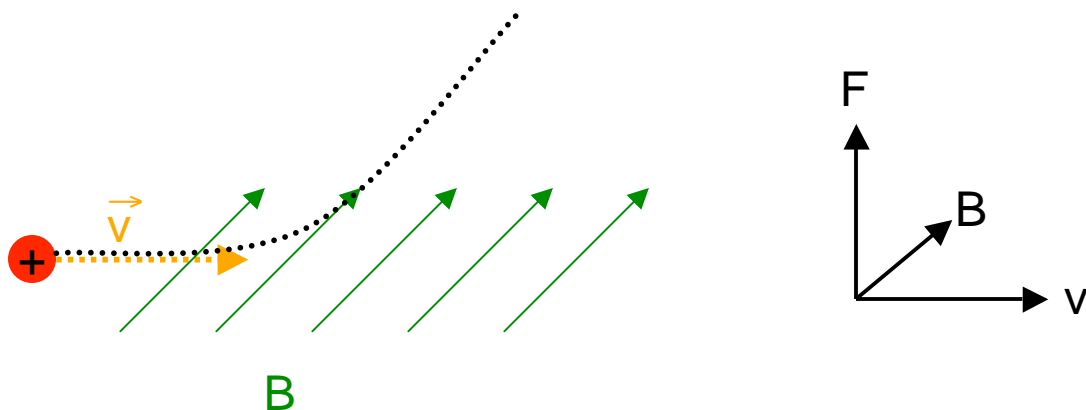
$$\vec{B} = \frac{\mu i}{2\pi R} \vec{u}_{\text{perpend}}$$

$$\mu = 4\pi 10^{-7} \text{ Tm / A (nel vuoto)}$$

campo magnetico terrestre:

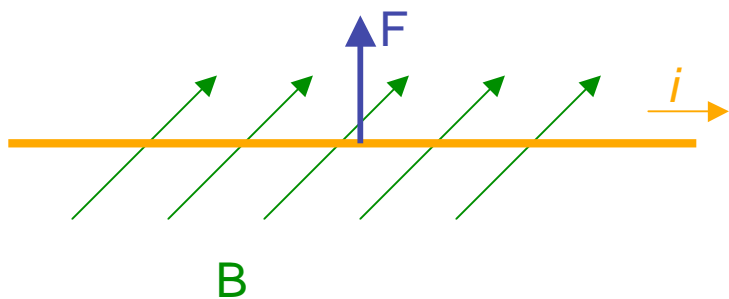


2) Una carica in moto in un campo magnetico subisce una forza



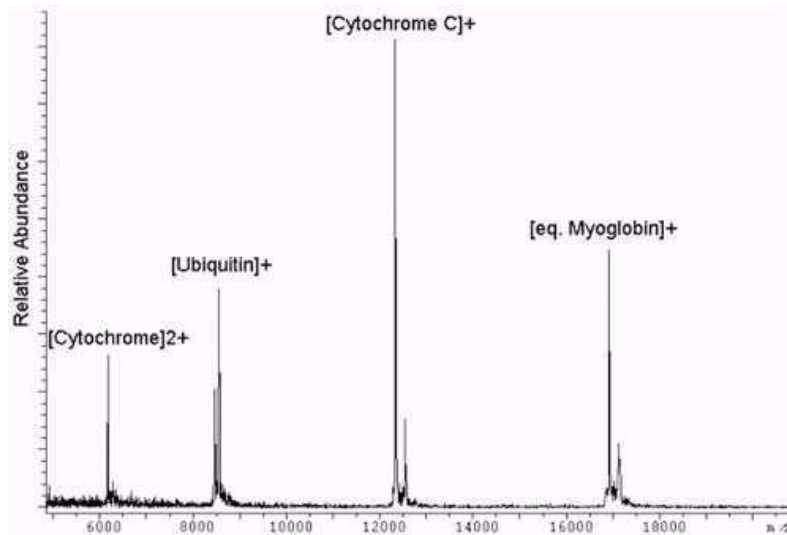
$$\vec{F} = q\vec{v} \times \vec{B}$$

per esempio, un filo rettilineo percorso da corrente, immerso in un campo B , subisce una forza



$$\vec{F} = q\vec{v} \times \vec{B} = q \frac{\Delta \vec{L}}{\Delta t} \times \vec{B} = \vec{L} \frac{\Delta q}{\Delta t} \times \vec{B} = \vec{L} i \times \vec{B}$$

Esempio: lo spettrometro di massa



All'uscita del campo elettrico, la proteina ha velocità che soddisfa

$$\frac{1}{2}mv^2 = q\Delta V \quad \Rightarrow \quad v = \sqrt{\frac{2q\Delta V}{m}}$$

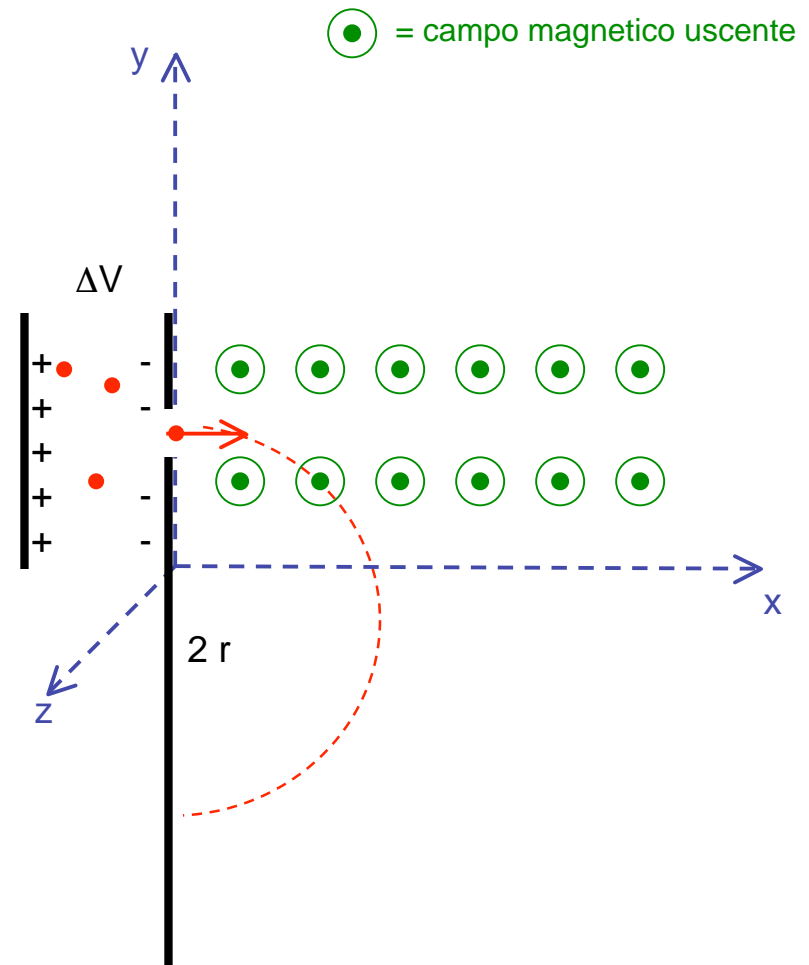
nel campo magnetico, la forza centripeta è uguale alla forza magnetica

$$F = qvB = m\frac{v^2}{r} \quad \Rightarrow \quad r = \frac{mv}{qB}$$

quindi

$$r = \sqrt{\frac{2m\Delta V}{qB^2}}$$

la distanza dal foro di uscita è proporzionale alla radice di m/q : se conosco q ottengo m .



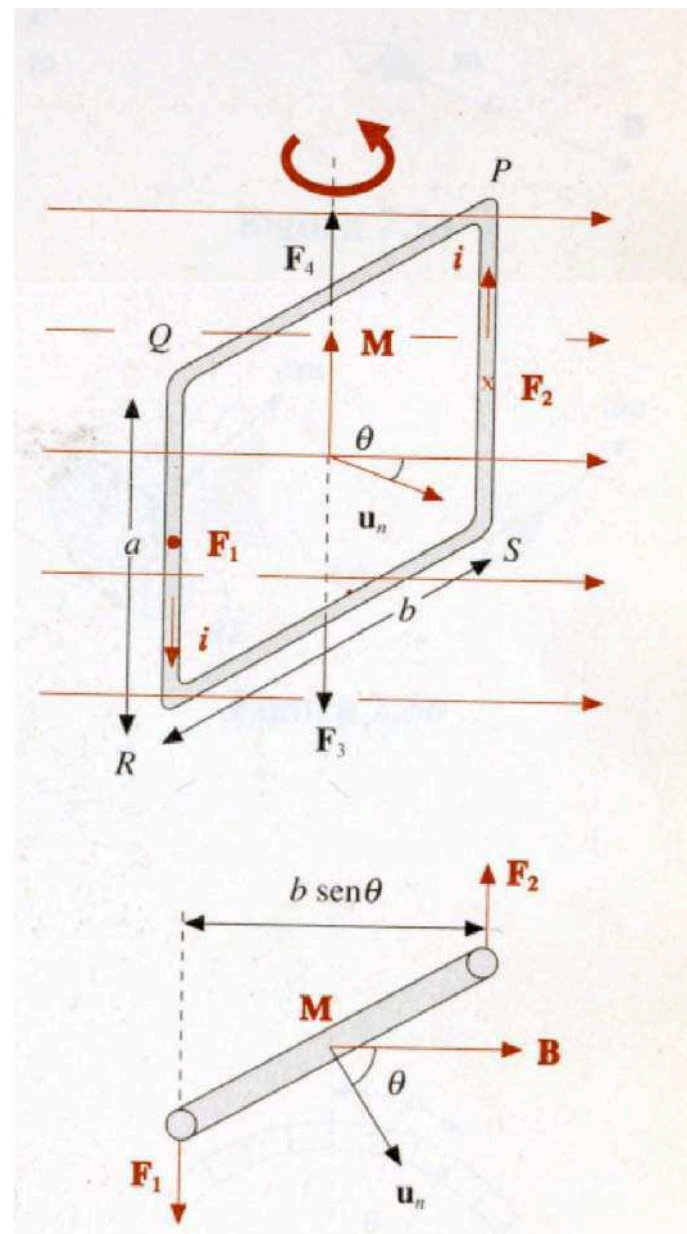
Esempio: circuito percorso da corrente in un campo uniforme

Lo stato di equilibrio e' quello in cui il vettore normale al circuito e' parallelo al campo ($\theta=0$).

Si definisce momento di dipolo magnetico del circuito
$$\vec{m} = i A \vec{u}_n$$
dove A e' l'area e i la corrente

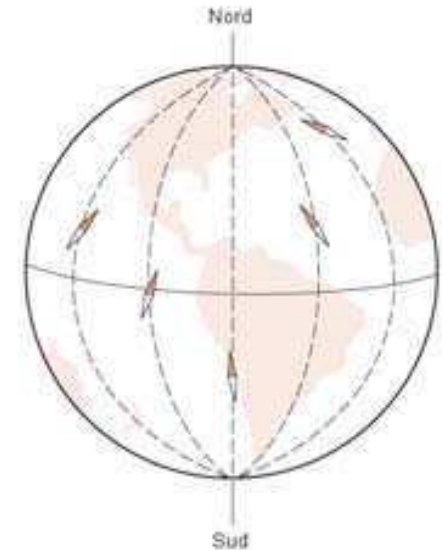
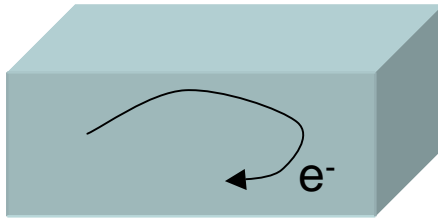
L'energia del circuito e'
$$U = - \vec{m} \cdot \vec{B} = -mB \cos\theta$$

(infatti il minimo di energia si ha per $\theta=0$)



Ci sono anche delle correnti "nascoste" che producono/subiscono campi magnetici

- Correnti a livello atomico → calamite

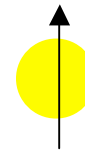


- Spin del protone e dell'elettrone (come se girassero su se stessi)
(dovrebbe ruotare con velocità $137c$ per giustificare i dati sperimentali
→ non può essere inquadrato nella fisica classica)

in ogni caso, vale $U = -mB$, con $m = \pm 9 \cdot 10^{-24} \text{ J/T}$ (può essere solo in 2 stati)

$\underbrace{\hspace{1.5cm}}_{\mu_B}$
(magnetone di Bohr)

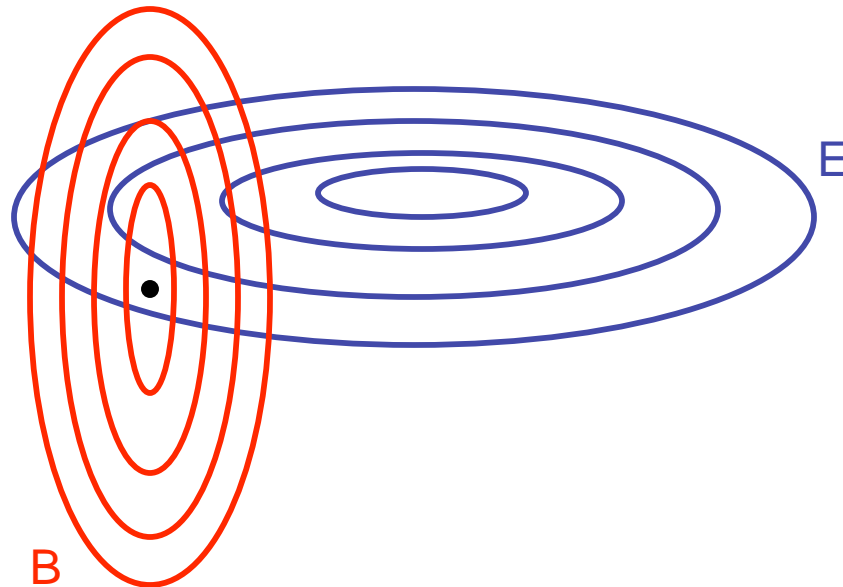
importante per l'**NMR** !!!



Secondo quanto detto finora, se non ho cariche non posso avere campi E e B, ma...

...variazioni del campo E nel tempo generano campi B

...variazioni del campo B nel tempo generano campi E



Tutti i punti dello spazio dove il campo E (B) varia nel tempo diventano sorgenti di campo B (E).
Si parla quindi di **campo elettromagnetico**

Alcuni modi di oscillazione del campo elettromagnetico sono in grado di propagarsi per lunghe distanze
—————► **onda elettromagnetica**

Onde elettromagnetiche

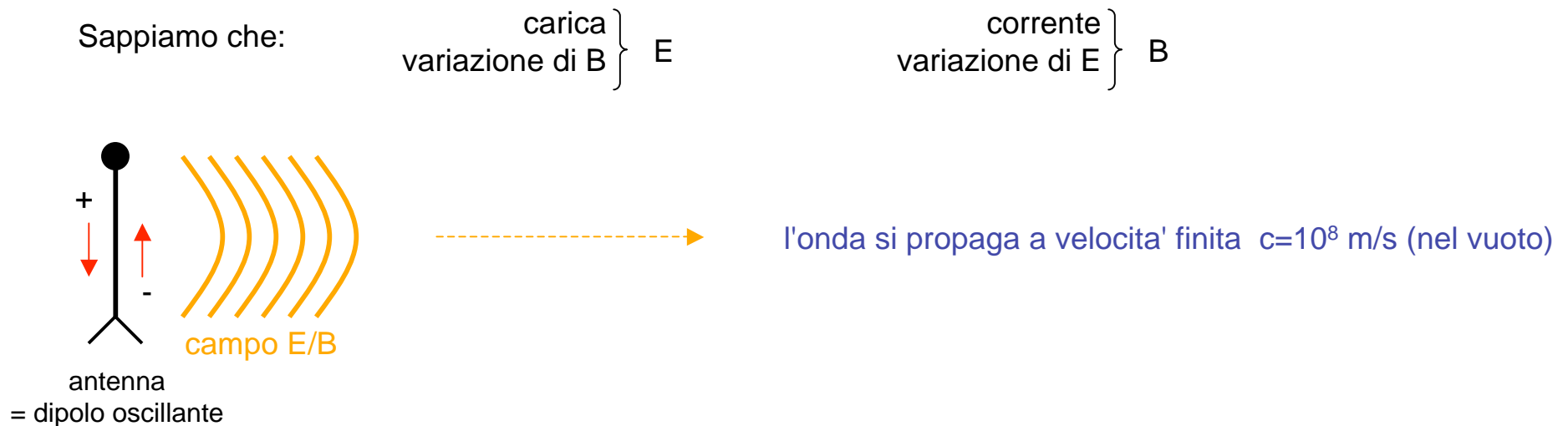
La maggior parte dei metodi di osservazione di sistemi biologici sfruttano l'interazione onda elettromagnetica-materia:

- * Microscopio ottico
- * Spettroscopia UV
- * NMR

- * Dicroismo circolare
- * Fluorimetria
- * Cristallografia a raggi X

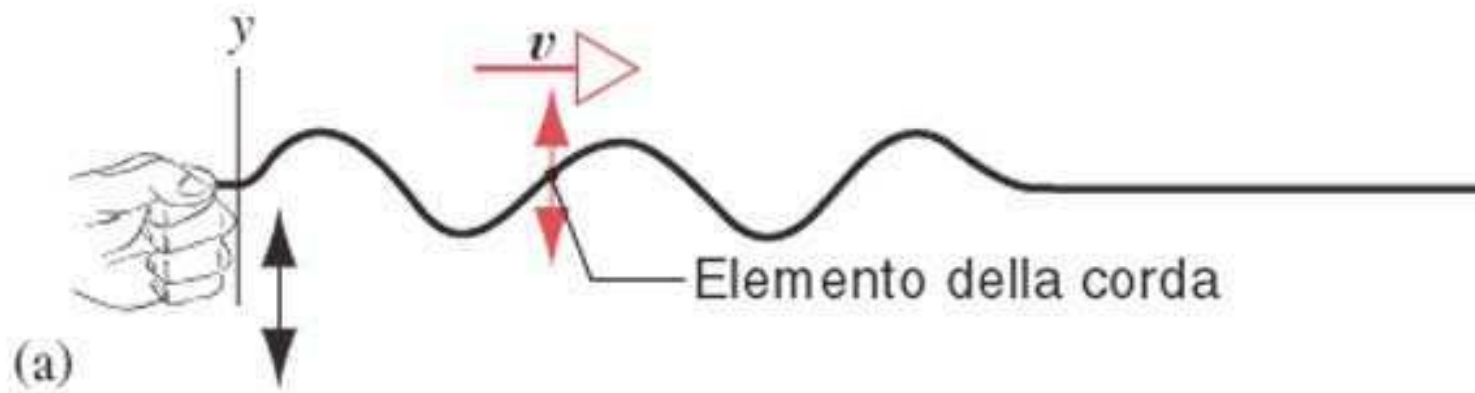
Dobbiamo capire: 1) come si genera, 2) come si propaga, 3) come interagisce con la materia

1) Come si genera



2) Come si propaga.

La propagazione di un'onda elettromagnetica è simile a quella di un'onda in una corda infinita...

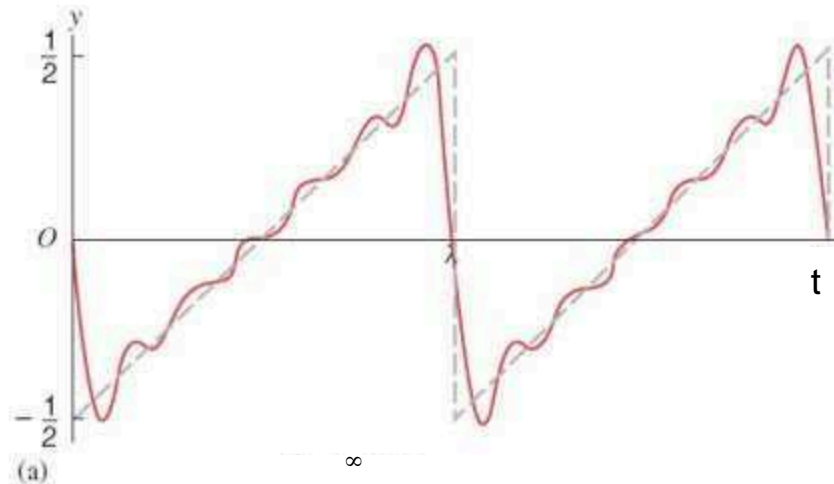


L'onda è una perturbazione periodica del valore di y
la sua forma viene descritta da una funzione matematica $y(x,t)$

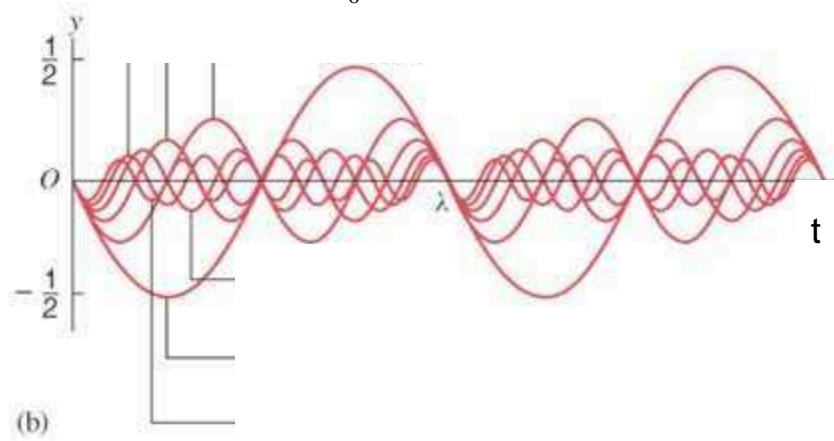
Data $y(x,t)$, possiamo vedere come la y varia in funzione di x a fissato tempo t (vedi sopra),
oppure come varia nel tempo in un dato punto x .

La forma precisa di $y(x,t)$ dipende da come l'onda e' generata (il movimento della mano), esiste pero' un teorema (Teorema di Fourier) che asserisce

qualsiasi onda puo' essere descritta come la somma di funzioni del tipo $\sin(kx - \omega t)$ con diversi ω .



$$y(x,t) = \int_0^{\infty} f(\omega) \sin(kx - \omega t) d\omega$$



ω e' la pulsazione

$\nu = \omega/2\pi$ e' la frequenza

$T = 1/\nu$ e' il periodo

k e' il numero d'onda

$\lambda = 2\pi/k$ e' la lunghezza d'onda

Si puo' dimostrare che la velocita' di propagazione dell'onda e'

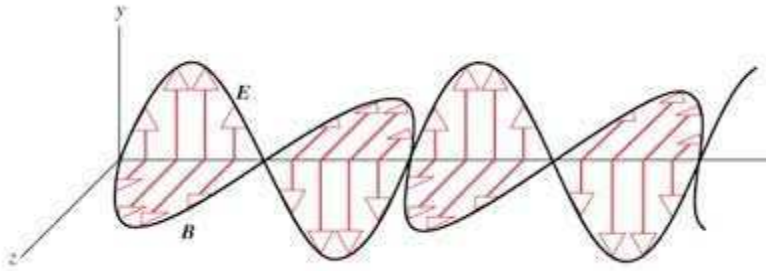
$$v = \omega/k = \lambda \nu$$

Un'onda composta da una sola componente di Fourier (una sola frequenza) si dice monocromatica.

la stessa cosa vale per descrivere $y(x,t)$ in funzione di x

Un'onda elettromagnetica e' un po' piu' complicata di un'onda su una corda perche' e' tridimensionale....

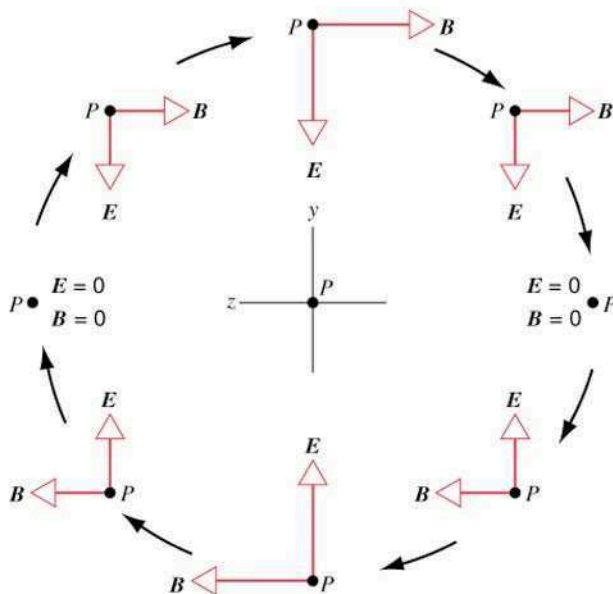
A tempo fissato, in funzione della coordinata spaziale di propagazione



$$E(x, t) = E_0 \sin(\vec{k} \cdot \vec{x} - \omega t)$$

Chiamiamo intensita' I dell'onda il quadrato del massimo del campo elettrico E_0^2

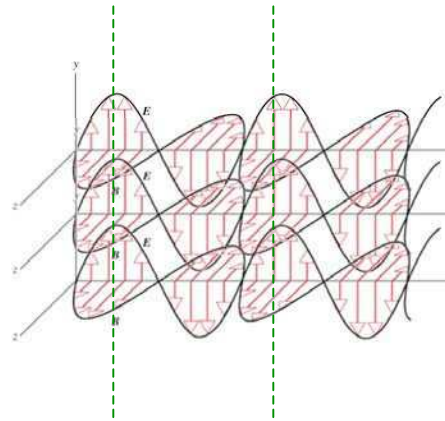
In un punto fissato, in funzione del tempo



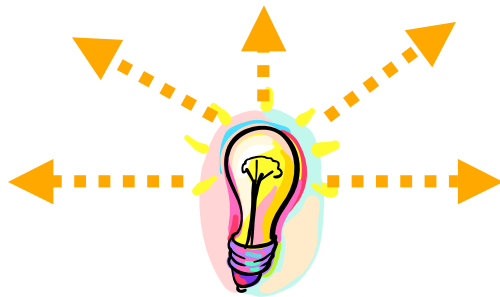
Le caratteristiche principali sono:

- * E e B sono sempre perpendicolari (ma la direzione di E' e' indeterminata)
- * le oscillazioni sono trasversali alla direzione dell'onda
- * l'onda e' tridimensionale

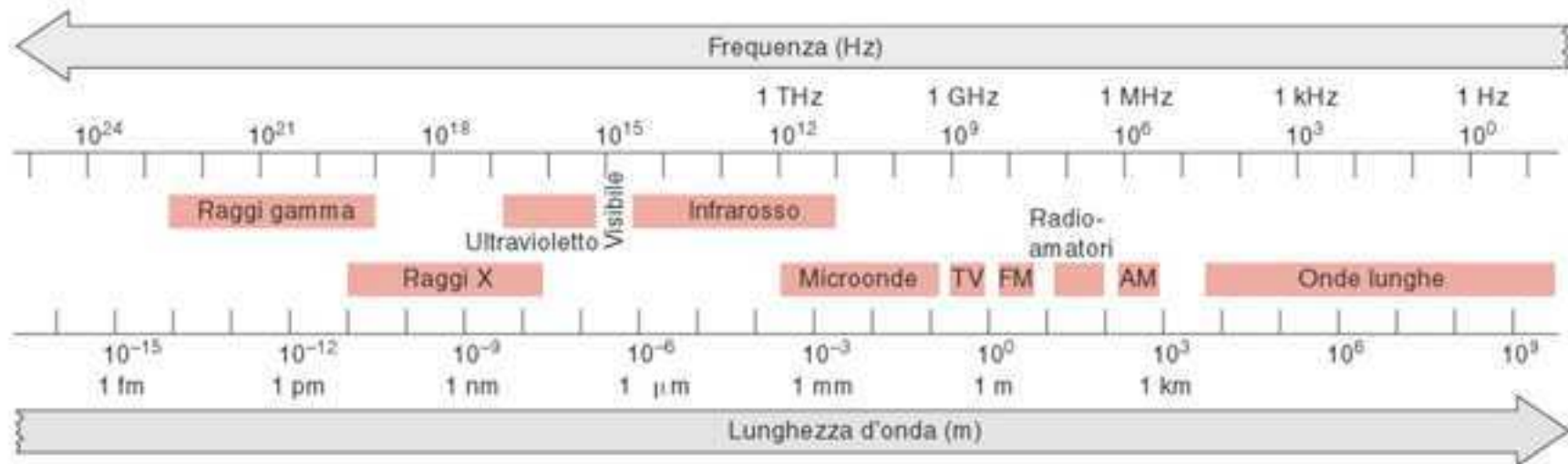
laser



Chiamiamo **raggio** la direzione di propagazione, **fascio** un insieme di raggi e **fronte d'onda** la superficie immaginaria su cui un fascio ha la massima intensita' del campo elettrico



Lo spettro delle onde elettromagnetiche (in funzione di λ o ν)



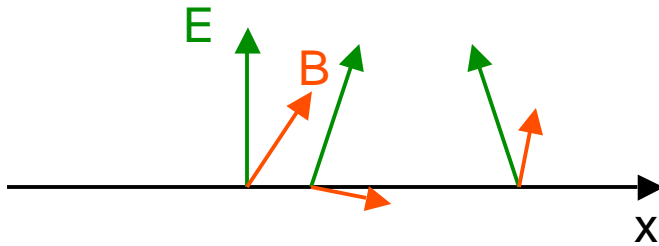
I nostri occhi sono in grado di vedere lunghezze d'onda dai 400 a 700 nm.

Esercizio:

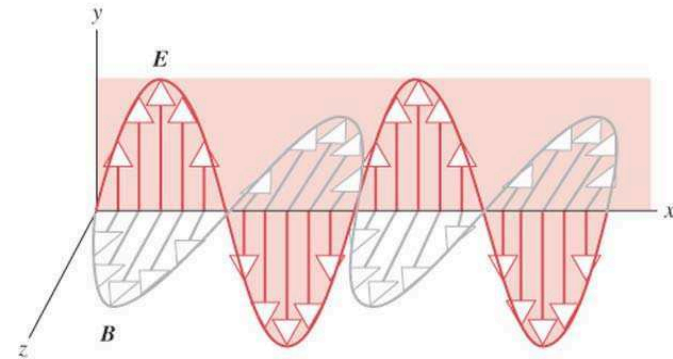
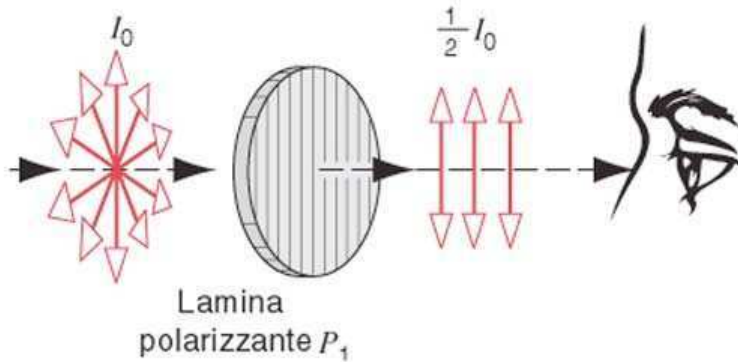
Siano dati due fili indefiniti paralleli percorsi da una corrente i . La corrente scorre nello stesso verso in entrambi i fili. Com'è fatta la forza che agisce tra i due fili. E se inverte il verso della corrente in uno dei due fili?

Onde elettromagnetiche: polarizzazione

Il campo E è normale alla direzione di propagazione dell'onda ma, in generale, non ha una direzione specificata

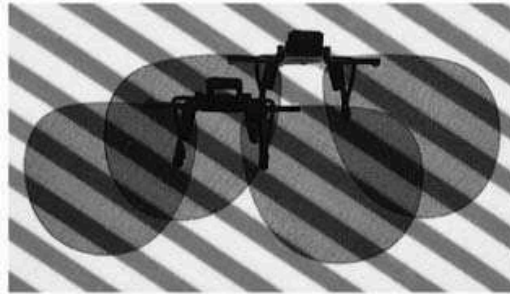


Esistono alcune lenti (lenti Polaroid) in grado di polarizzare la luce, cioè di filtrare solo la componente del campo elettrico diretta verso una precisa direzione

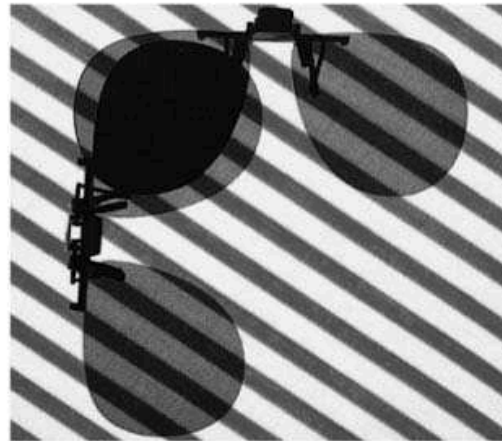


polarizzazione rettilinea

Lenti polarizzanti:



(a)

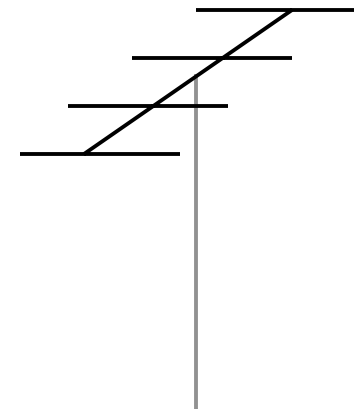
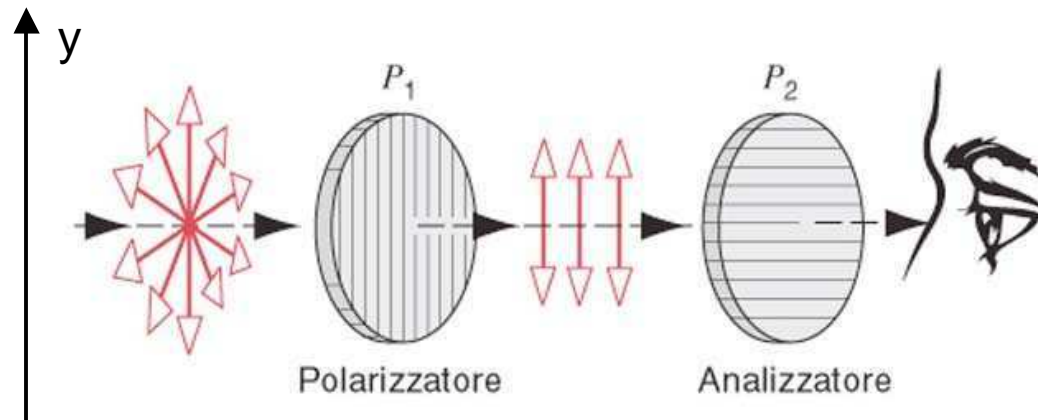


(b)

Legge di Malus:

$$(E_y = E_0 \cos \theta)$$

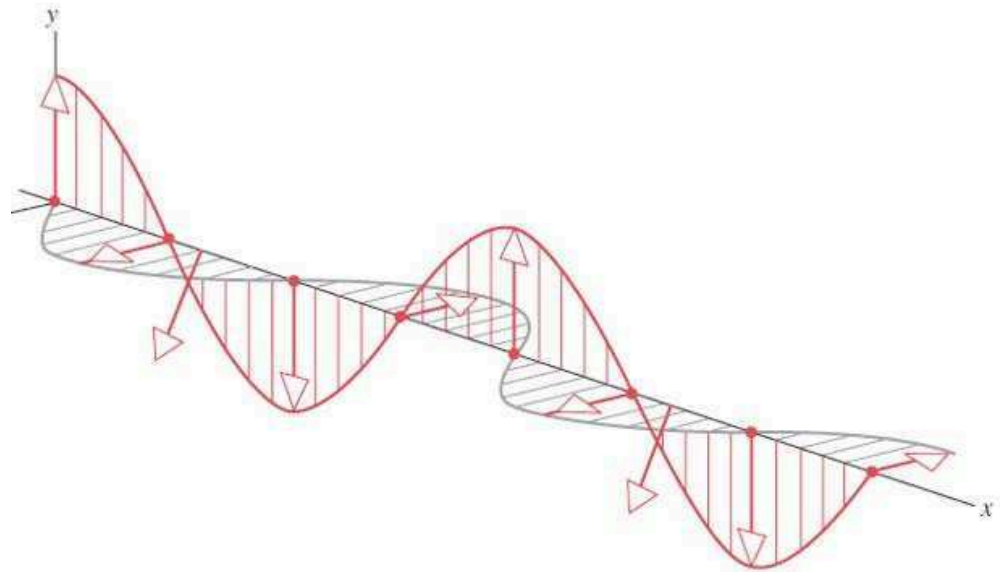
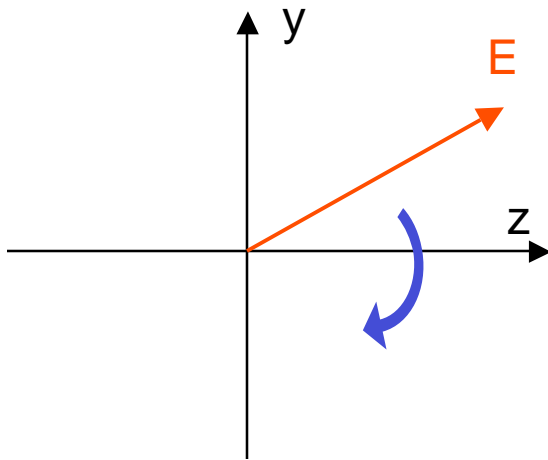
$$I = I_0 \cos^2 \theta$$



Polarizzazione circolare

Due onde polarizzate linearmente in direzioni perpendicolari e sfasate di 90° danno luogo a polarizzazione circolare.

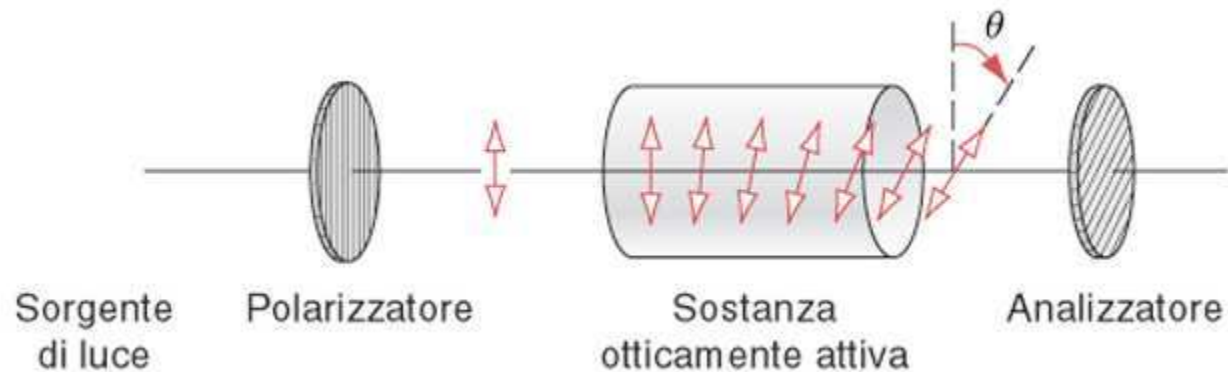
Il vettore che definisce il massimo di E ruota intorno all'asse di propagazione (x)



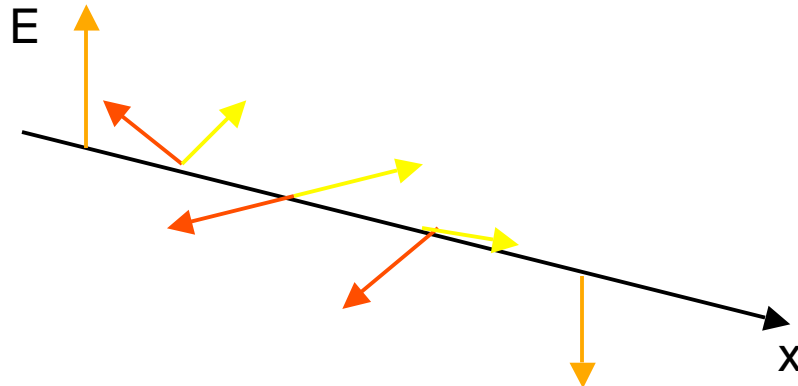
(ellittica = come la circolare ma con intensita' diversa sui due assi)

Attività ottica

Alcune sostanze sono in grado di ruotare il piano di polarizzazione un fascio di luce con polarizzazione rettilinea (sostanze otticamente attive).

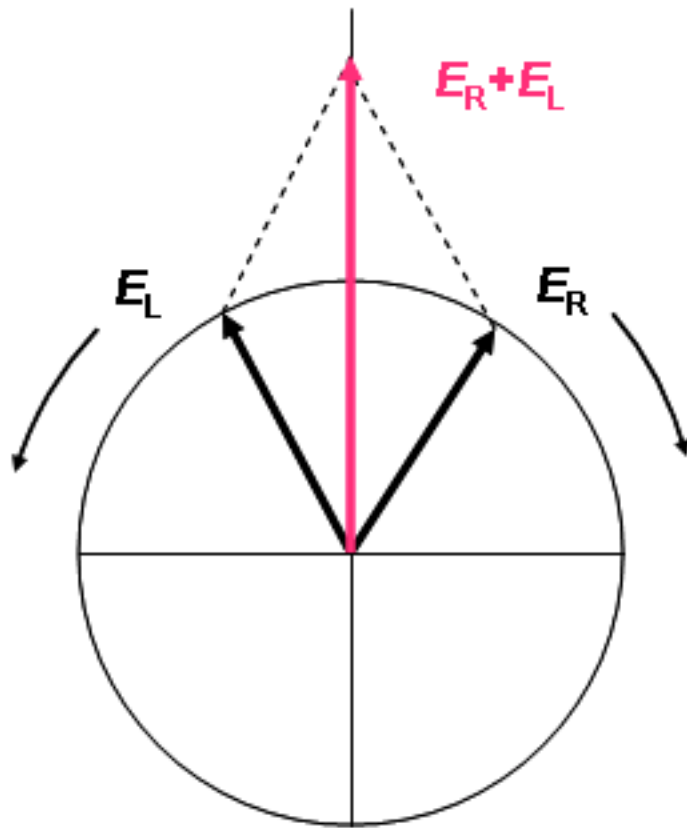


Si può interpretare un fascio con polarizzazione rettilinea come la sovrapposizione di due fasci con polarizzazioni circolari opposte. Ognuno dei due fasci è "chirale". Le sostanze otticamente attive sono chirali. In una sostanza otticamente attiva, i due fasci viaggiano con velocità diverse, quindi si sfasano.

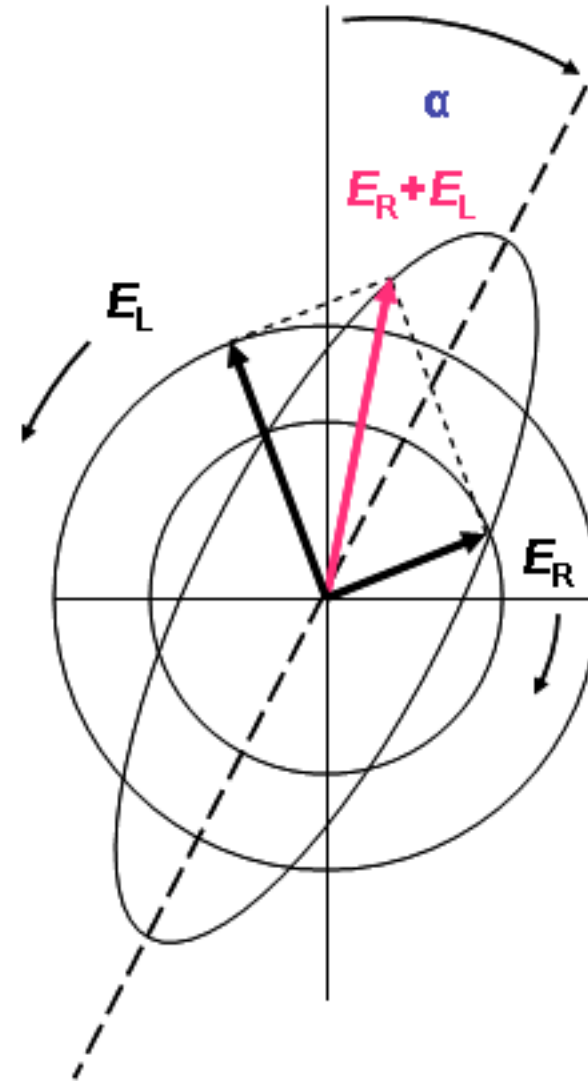


L'angolo di rotazione dipenderà quindi dalla lunghezza d'onda (perché $v = \lambda \nu$): "dispersione rotatoria ottica" (o "ORD")

Dicroismo circolare



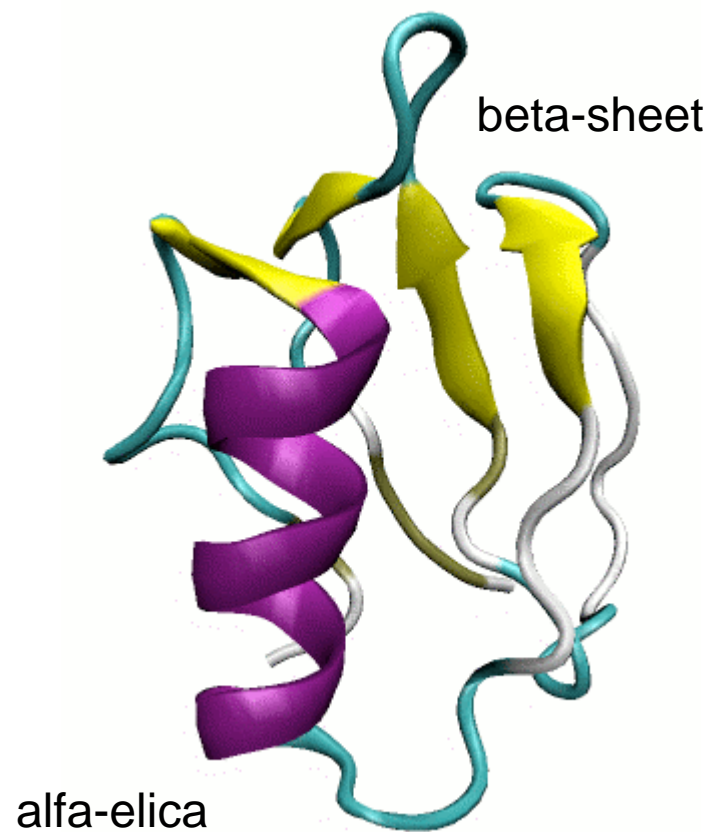
fascio con polarizzazione rettilinea =
sovrapposizione di due fasci con
polarizzazione circolare opposta



una delle due componenti viene maggiormente
assorbita: la polarizzazione diventa ellittica

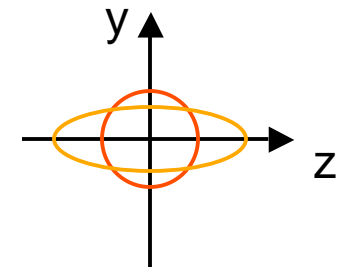
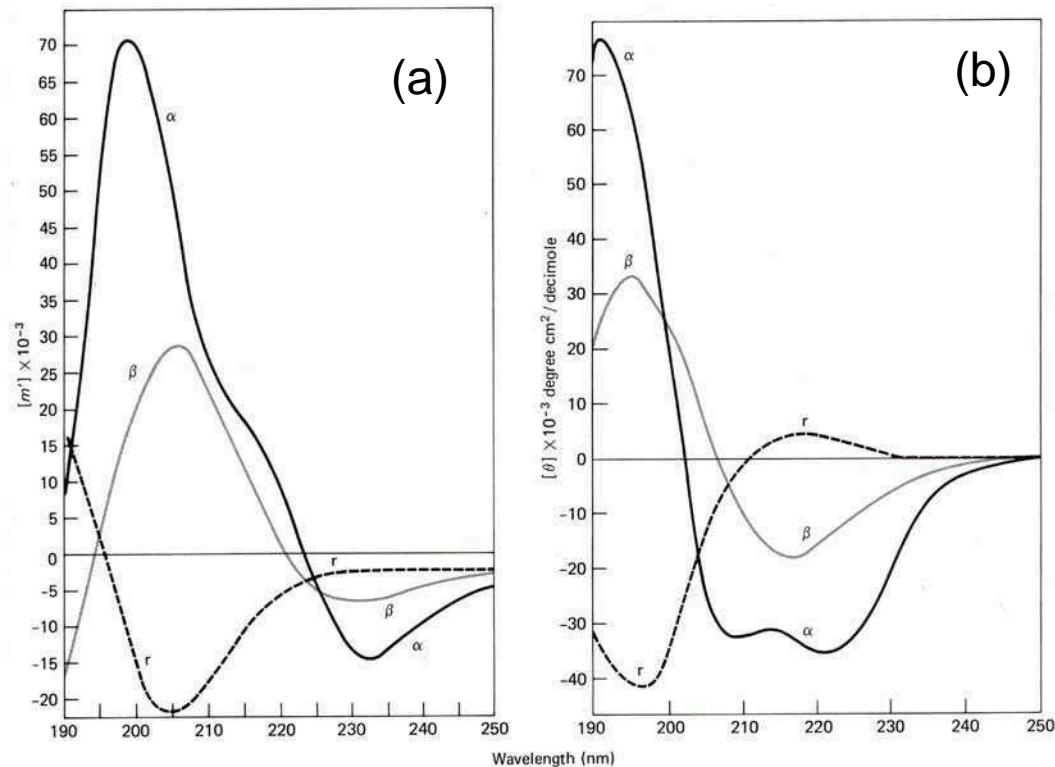
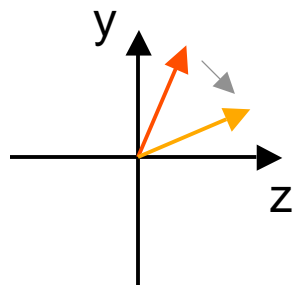
Dicroismo circolare

Tecnica per misurare la quantita' di strutture secondarie in una soluzione di proteine



Le strutture secondarie delle proteine sono otticamente attive. Se mando un fascio di luce con polarizzazione rettilinea, questa viene ruotata.

Dicroismo = la luce polarizzata in diverse direzioni viene assorbita in modo diverso

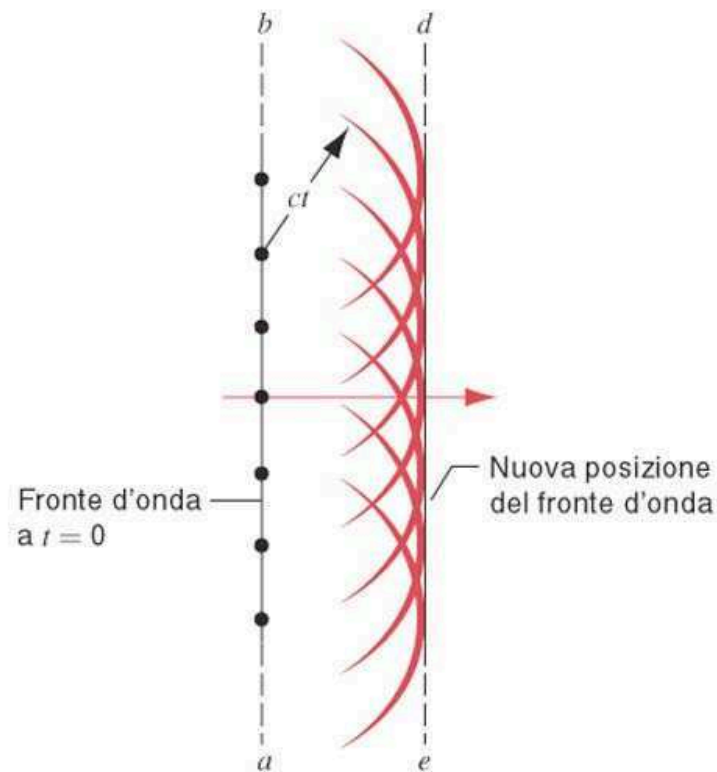


(a) ORD, l'asse di oscillazione di un fascio polarizzato linearmente ruota quando interagisce con un' α -elica (α), un β -sheet (β) e un random coil (r)

(b) per lo stesso principio, nel fascio di luce la polarizzazione diventa ellittica (e si misura l'arcotangente del rapporto tra gli assi).

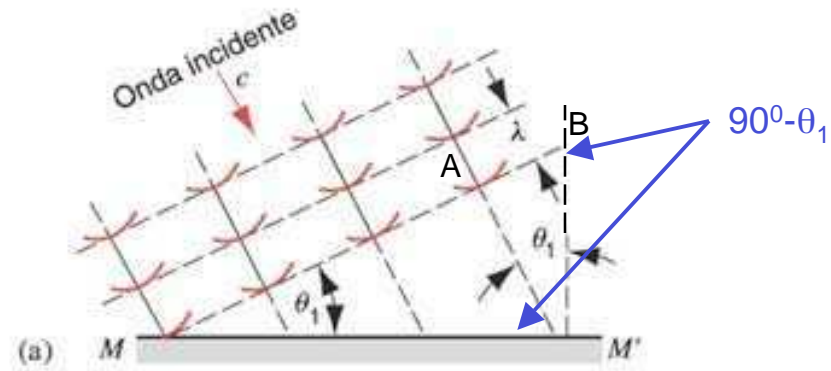
Riflessione e Rifrazione

Principio di Huygens: tutti i punti di un fronte d'onda fungono da sorgenti puntuali di onde elementari sferiche secondarie. Dopo un certo tempo t , la nuova posizione del fronte d'onda darà la tangente superficiale a queste onde secondarie.

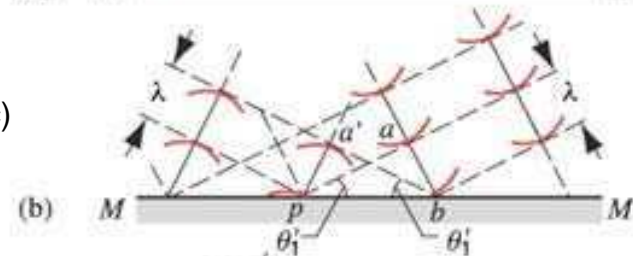


(il significato fisico viene dal modo in cui vengono generate le onde elettromagnetiche, vedi indietro)

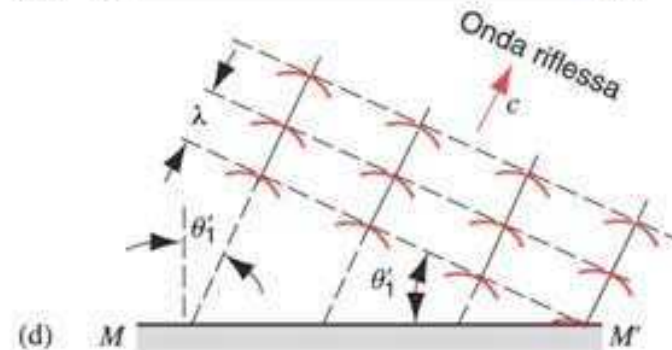
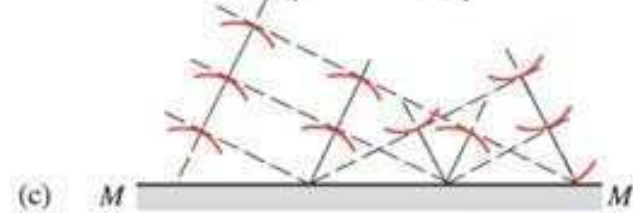
Riflessione



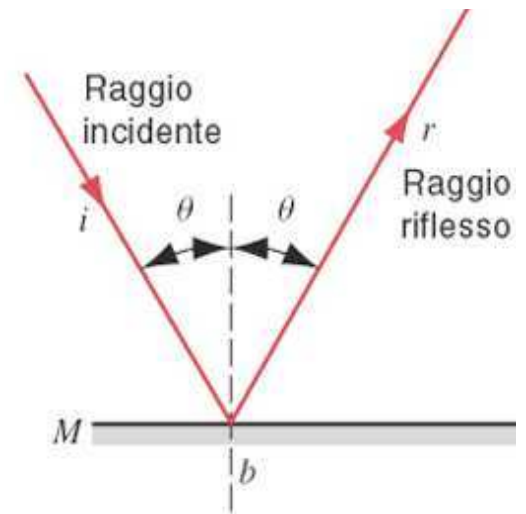
$a \rightarrow b$
 $p \rightarrow a'$ nello stesso tempo ($\Delta t = \lambda/c$)



triangoli abp e $a'bp$ sono uguali
 quindi $\theta = \theta'$



in altre parole...



Morale: l'angolo di riflessione e' uguale a quello di incidenza

Rifrazione (= passaggio di un raggio di luce da un mezzo ad un altro in cui la velocità del raggio è diversa)

$$\left. \begin{array}{l} e \rightarrow d \\ h \rightarrow f \end{array} \right\} \text{ nel tempo } \Delta t = \left\{ \begin{array}{l} \lambda_1 / v_1 \\ \lambda_2 / v_2 \end{array} \right.$$

$$\lambda_1 / v_1 = \lambda_2 / v_2$$

$$\lambda_1 / \lambda_2 = v_1 / v_2$$

per i triangoli hed e hfd:

$$\sin \theta_1 = \frac{\lambda_1}{hd}$$

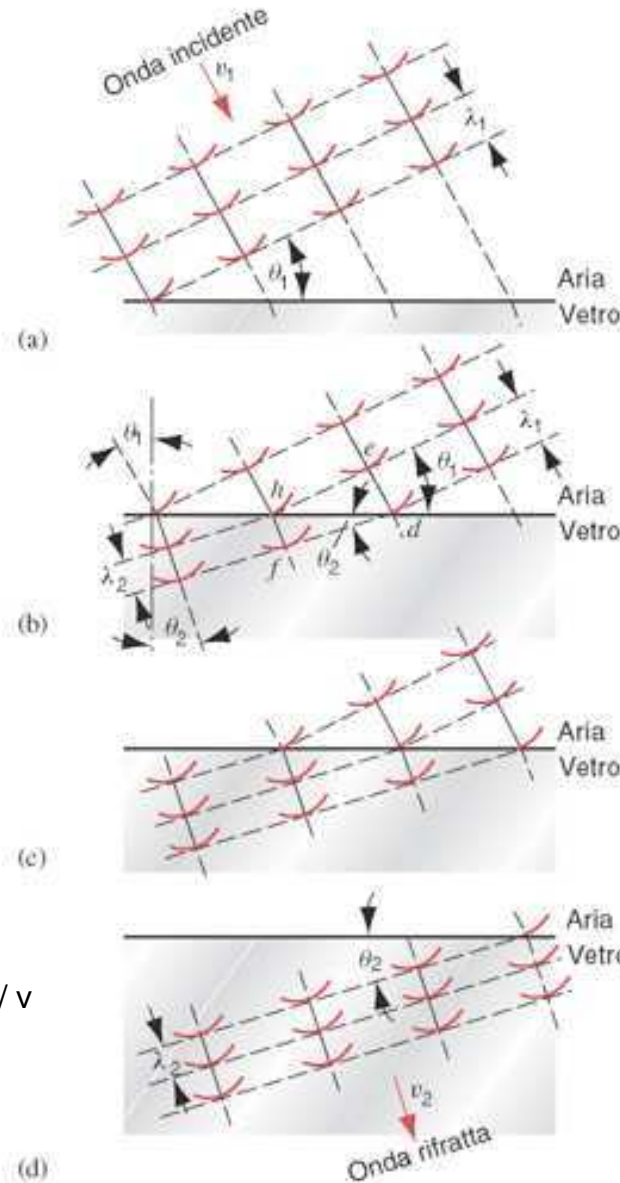
$$\sin \theta_2 = \frac{\lambda_2}{hd}$$

quindi

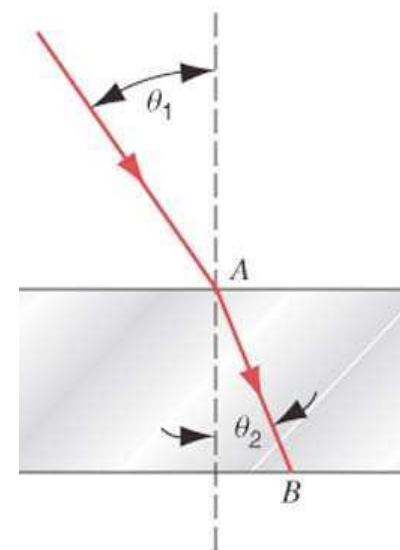
$$\frac{\sin \theta_1}{\sin \theta_2} = \frac{\lambda_1}{\lambda_2} = \frac{v_1}{v_2}$$

e definendo l'indice di rifrazione $n = c / v$

$$\frac{\sin \theta_1}{\sin \theta_2} = \frac{n_2}{n_1}$$



in altre parole...



$$\sin \theta_1 = \frac{n_2}{n_1} \sin \theta_2$$

mezzo	n
vuoto	1
aria	1.00029
acqua	1.33
vetro comune	1.52
diamante	2.42

quindi...

$$\sin \theta_{aria} = 1.33 \sin \theta_{acqua}$$

$$se \quad \theta_{acqua} = 45^0$$

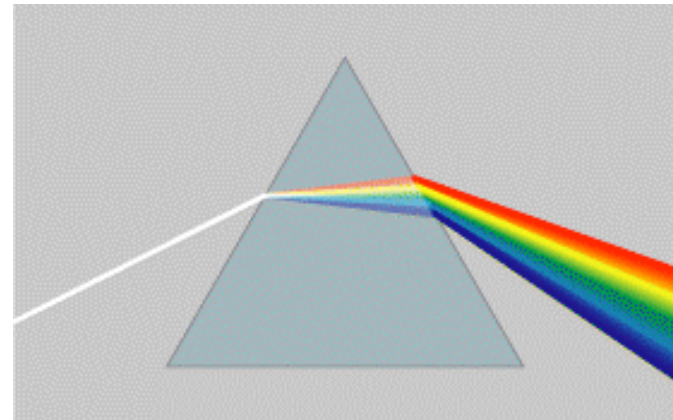
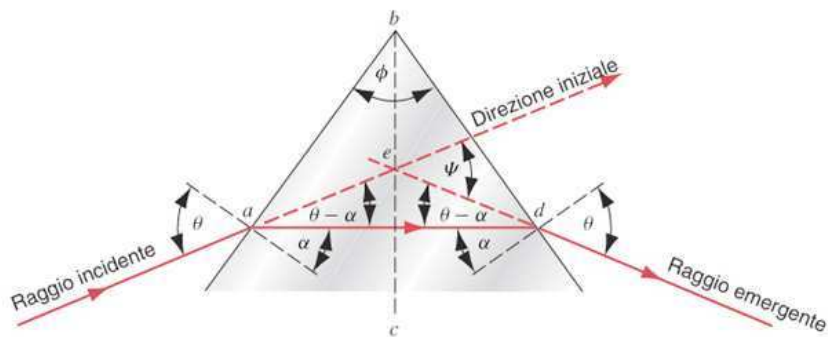
$$\theta_{aria} = \arcsin(1.33 \times 0.7) = 44.4^0$$



Dispersione cromatica

la velocità di un'onda (e quindi n) dipendono dalla lunghezza d'onda λ

Quindi, l'angolo di uscita dipende da λ



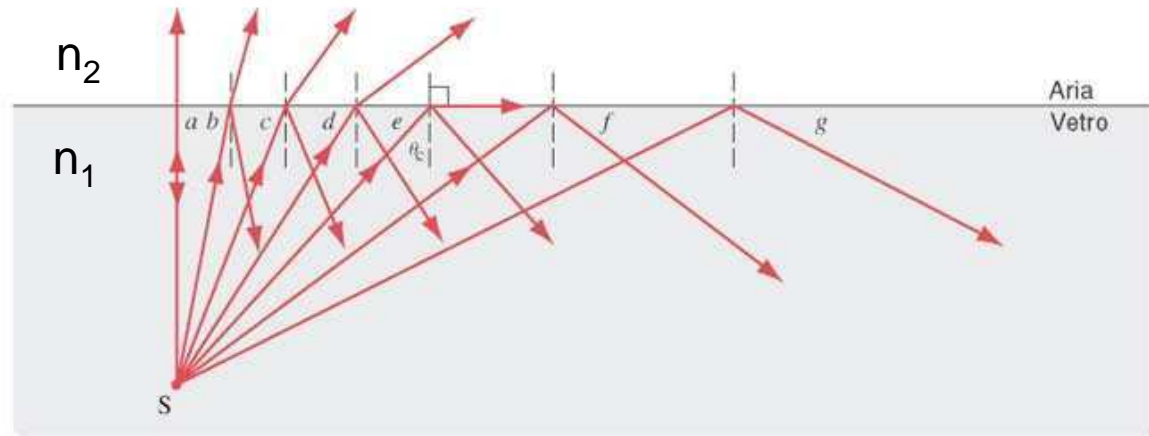
Riflessione totale

l'angolo del raggio rifratto non può superare 90° :
se $n_1 < n_2$ non c'è problema.
se $n_1 > n_2$ esiste un angolo limite θ_c

$$n_1 \sin \theta_c = n_2 \sin 90^\circ$$

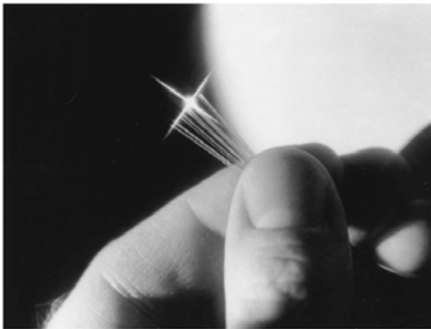
quindi

$$\theta_c = \arcsin \frac{n_2}{n_1}$$

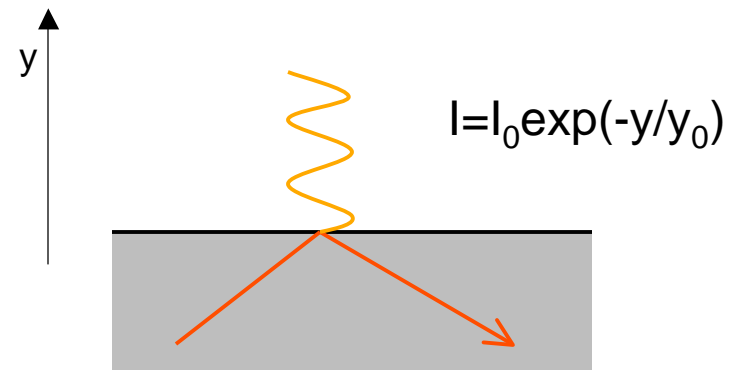


Applicazioni:

1) Fibre ottiche



2) Onda evanescente per misure fini



Polarizzazione per riflessione

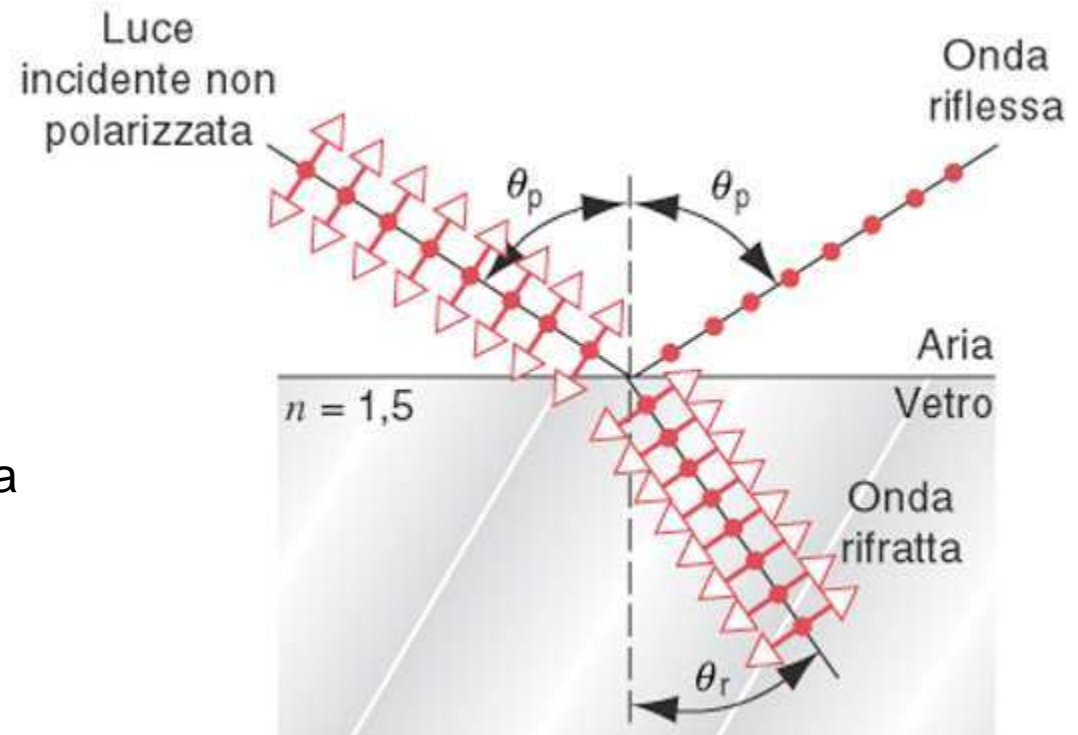
Le componenti parallela e perpendicolare uscenti hanno diversa intensita'.
Esiste un angolo θ_B (angolo di Brewster) al quale la componente parallela al piano e' nulla.

$$\theta_B = \arctg \frac{n_2}{n_1}$$

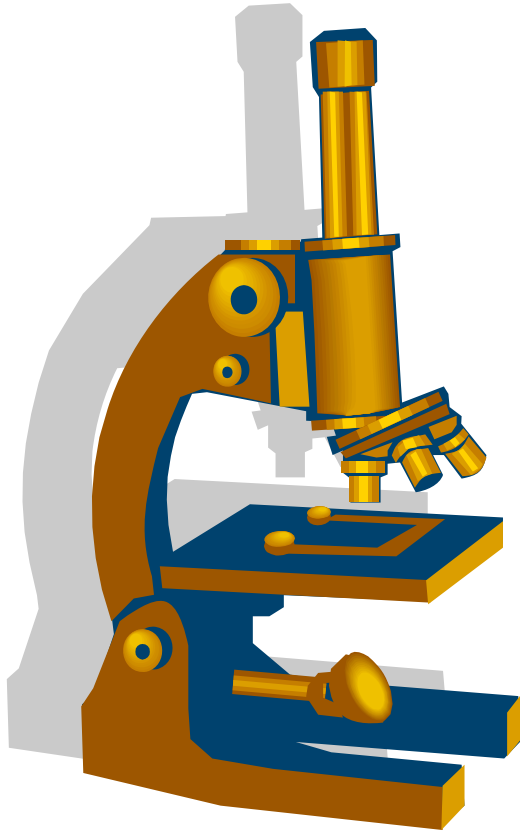
(da non confondere con l'angolo limite!)



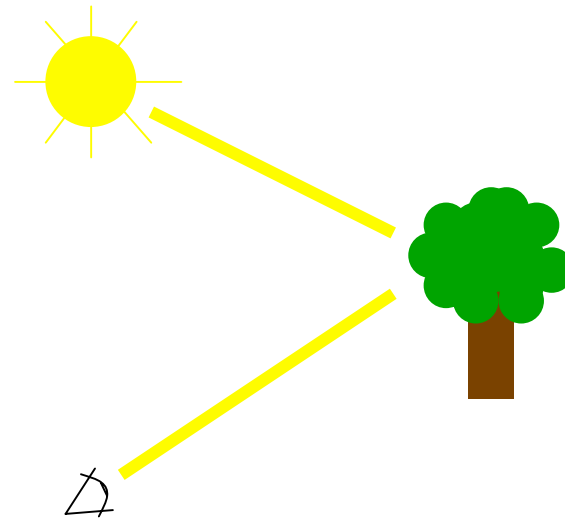
La luce riflessa risulta polarizzata



Microscopia (specchi, lenti, ecc.)

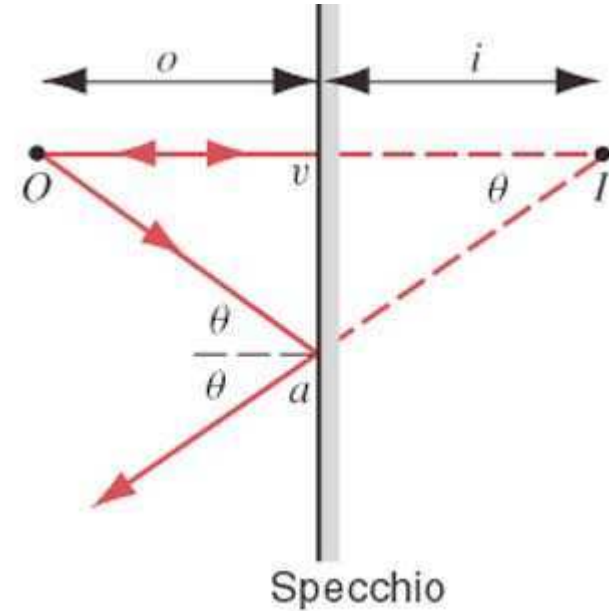
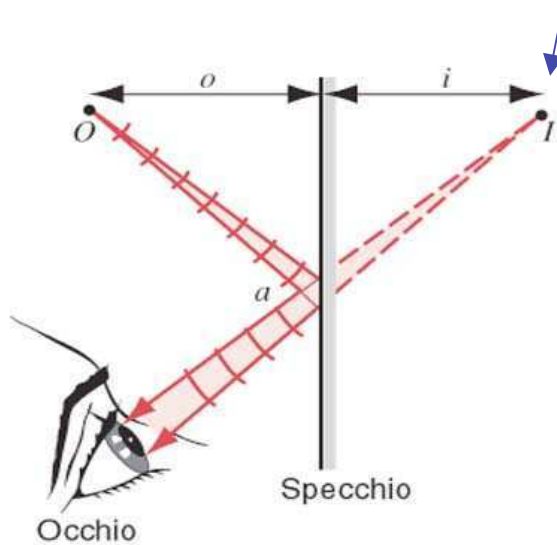
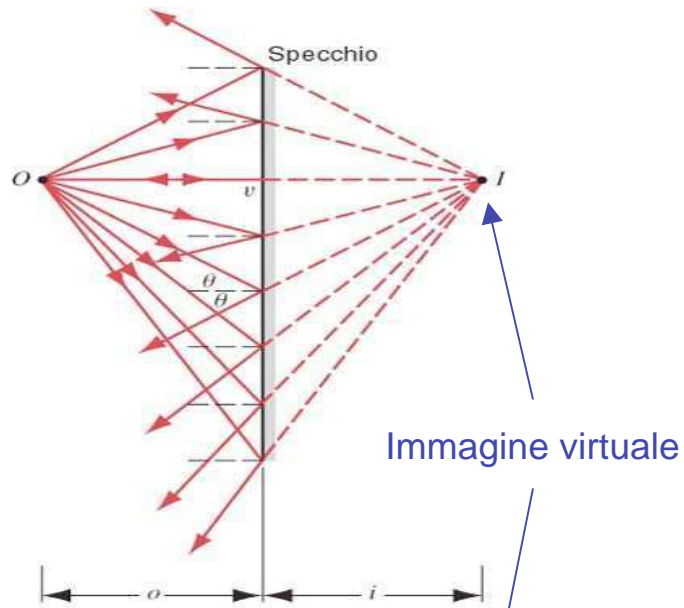


Principio generale per cui si creano le immagini nel nostro occhio:



Specchi piani

O e' un oggetto (= sorgente di luce),
nel caso piu' semplice e' puntiforme

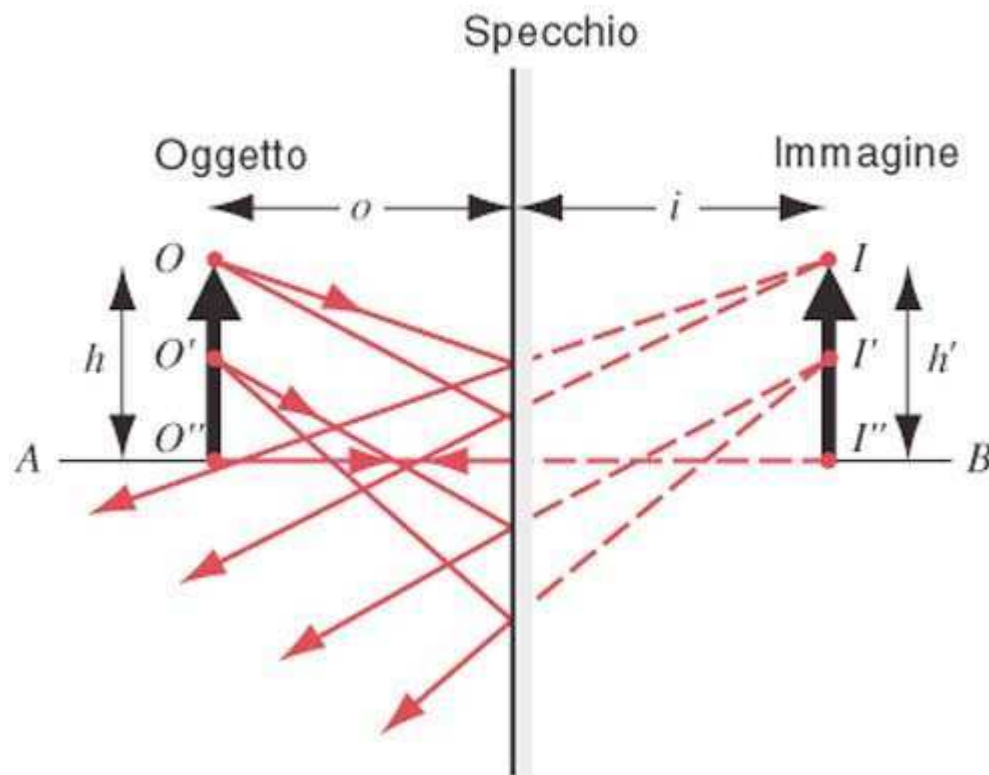


L'immagine virtuale e' alla stessa distanza
dallo specchio dell'immagine reale ($|o|=|i|$)

questo perche' i triangoli Ova e vIa sono
uguali (un lato e due angoli uguali)

scriviamo convenzionalmente $o = -i$
(cioe' poniamo la distanza dell'immagine
virtuale negativa)

Nel caso di oggetti estesi...



Vale ancora $o = -i$

Definiamo l'ingrandimento trasversale
 $m = h'/h$

per gli specchi piani $m=1$
(non ingrandiscono)

Immagine virtuale: (1) attraverso I non passa in realtà la luce, (2) non può essere proiettata su uno schermo, (3) è dritta

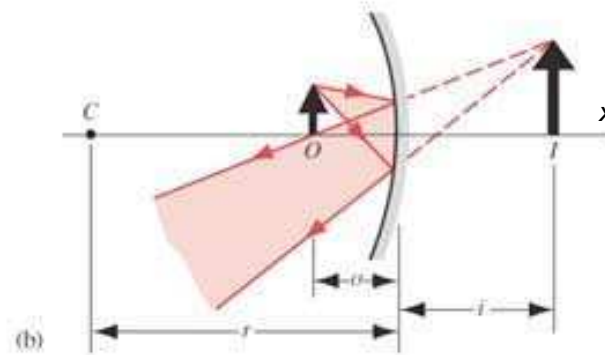
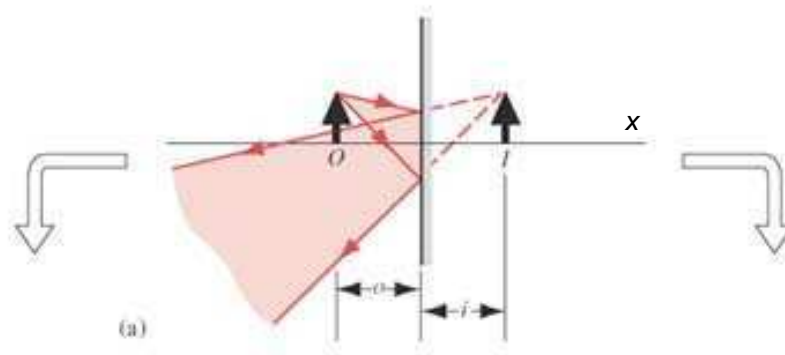
“Fallimento” delle leggi sugli specchi....



Manet, le Bar des Folies-Bergères

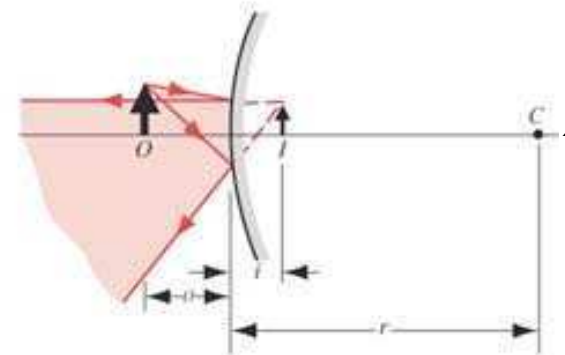
Specchi sferici:

C e' il centro di curvatura;
 r il raggio di curvatura;
 x l'asse centrale;
 in rosa il campo visivo;



specchio concavo

- C e' di fronte allo specchio
- il campo visivo e' ridotto
- $|i| > o$, cioe' l'immagine si e' allontanata
- $h' > h$, cioe' l'altezza dell'immagine e' aumentata



specchio convesso

- C e' dietro allo specchio
- il campo visivo e' aumentato
- $|i| < o$, cioe' l'immagine si e' avvicinata
- $h' < h$, cioe' l'altezza dell'immagine e' diminuita

per specchi sferici si dimostra che....

Equazione dello specchio:

$$\frac{1}{o} + \frac{1}{i} = \frac{2}{r}$$

$$\frac{1}{o} + \frac{1}{i} = \frac{2}{r}$$

Definiamo lunghezza focale f la quantita'

$$f = r/2$$

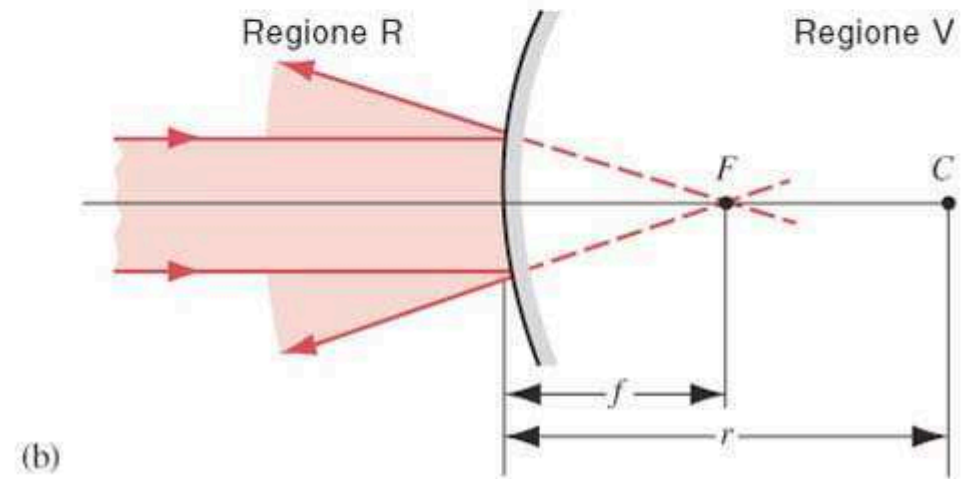
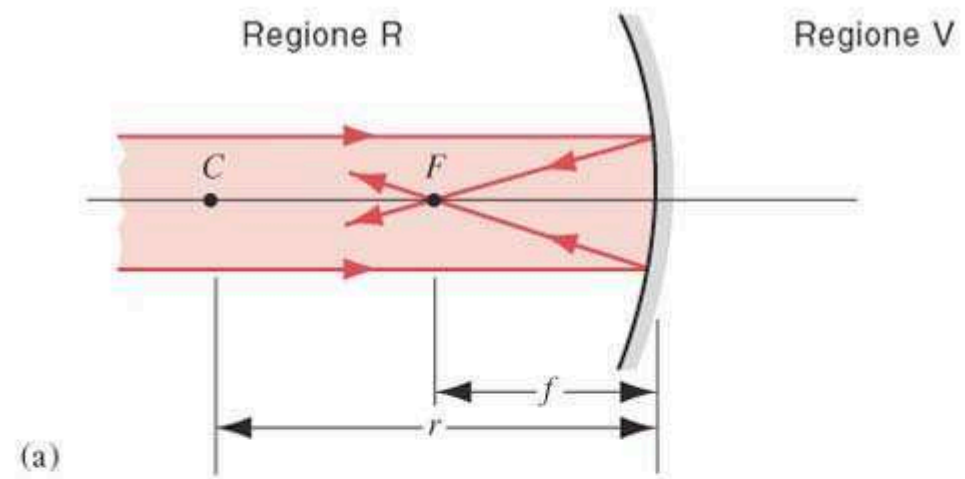
quindi

$$\frac{1}{o} + \frac{1}{i} = \frac{1}{f}$$

se $o \rightarrow \infty$ allora $i = f$

il fuoco (cioe' il punto a distanza f) e' il punto dove convergono i raggi prossimi all'asse centrale provenienti da molto lontano

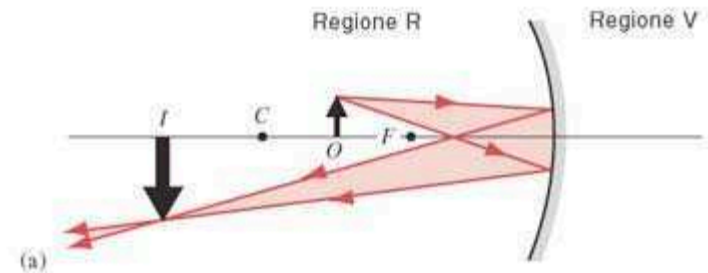
nel caso di uno specchio convesso il fuoco e' virtuale



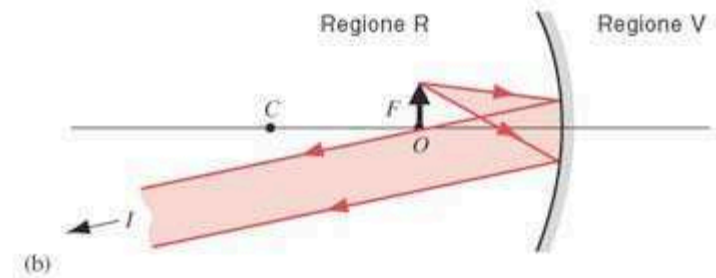
Oggetti estesi...

- ➔ Se l'oggetto e' oltre la distanza focale
l'immagine e' capovolta
l'immagine si focalizza in un punto ("e' a fuoco")

Immagine reale: (1) il raggio luminoso passa veramente nella posizione dell'immagine, (2) puo' essere proiettata su uno schermo, (3) e' capovolta, (4) non dipende dalla presenza di un osservatore.

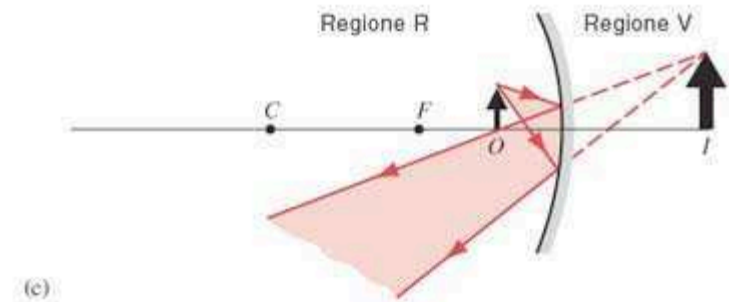


- ➔ Se l'oggetto e' alla distanza focale
non si forma nessuna immagine ($i \rightarrow \infty$)



- ➔ Se l'oggetto e' sotto la distanza focale
si forma un'immagine virtuale

Immagine virtuale: (1) il raggio luminoso non passa veramente nella posizione dell'immagine, (2) non puo' essere proiettata su uno schermo, (3) e' dritta, (4) esiste solo nel cervello dell'osservatore.

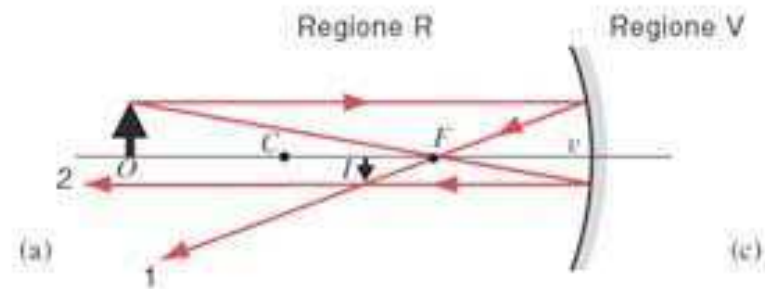


Si dimostra che l'ingrandimento trasversale $m = -i/o$

$$\frac{1}{o} + \frac{1}{i} = \frac{1}{f}$$

Esempio:

Sia $f=12\text{cm}$ e $o=36\text{ cm}$, si trovi la posizione dell'immagine e l'ingrandimento trasversale.



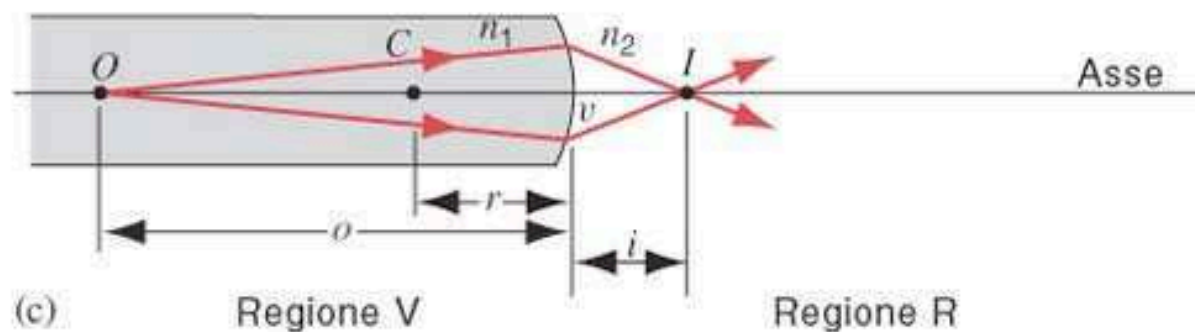
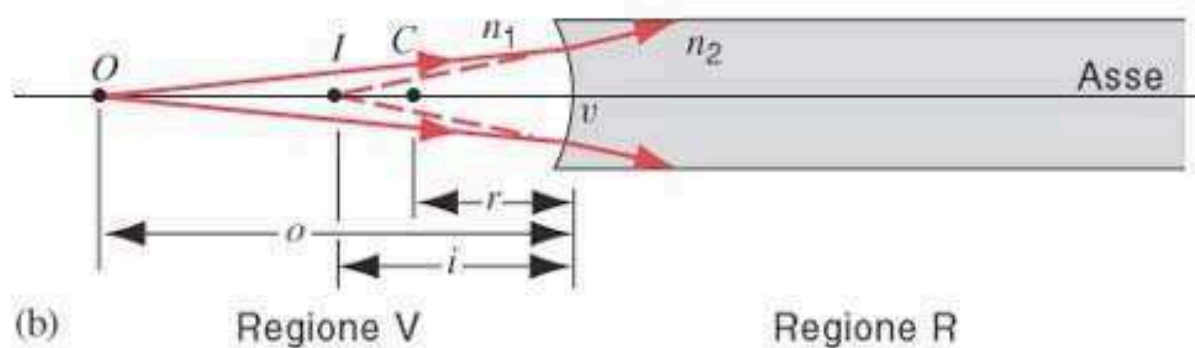
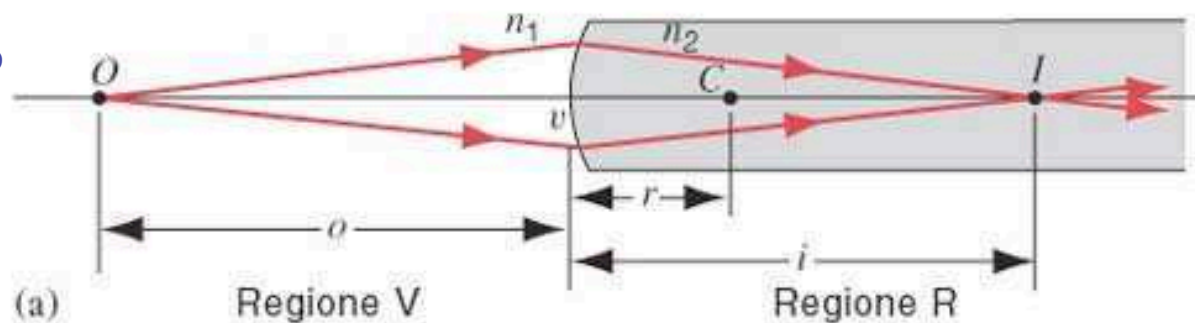
$$\frac{1}{i} = \frac{1}{f} - \frac{1}{o} = \frac{1}{12\text{cm}} - \frac{1}{36\text{cm}} = \frac{1}{18\text{cm}}$$

$$\rightarrow i = 18\text{cm}$$

$$m = -\frac{i}{o} = -\frac{18\text{cm}}{36\text{cm}} = -0.5$$

Superfici rifrangenti sferiche:

Il comportamento e' simile a quello degli specchi...



Equazione per trovare i:

$$\frac{n_1}{o} + \frac{n_2}{i} = \frac{n_2 - n_1}{r}$$

dove $r > 0$ per superfici convesse

Lenti sottili:

(convergenti o divergenti)

e' un oggetto trasparente con due superfici rifrangenti

sottile se il suo spessore e' piccolo rispetto a o

consideriamo solo raggi che formano angoli piccoli con l'asse (parassiali)

$$\frac{1}{o} + \frac{1}{i} = \frac{1}{f}$$

$$\frac{1}{f} = (n_{lente} - n_{esterno}) \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right)$$

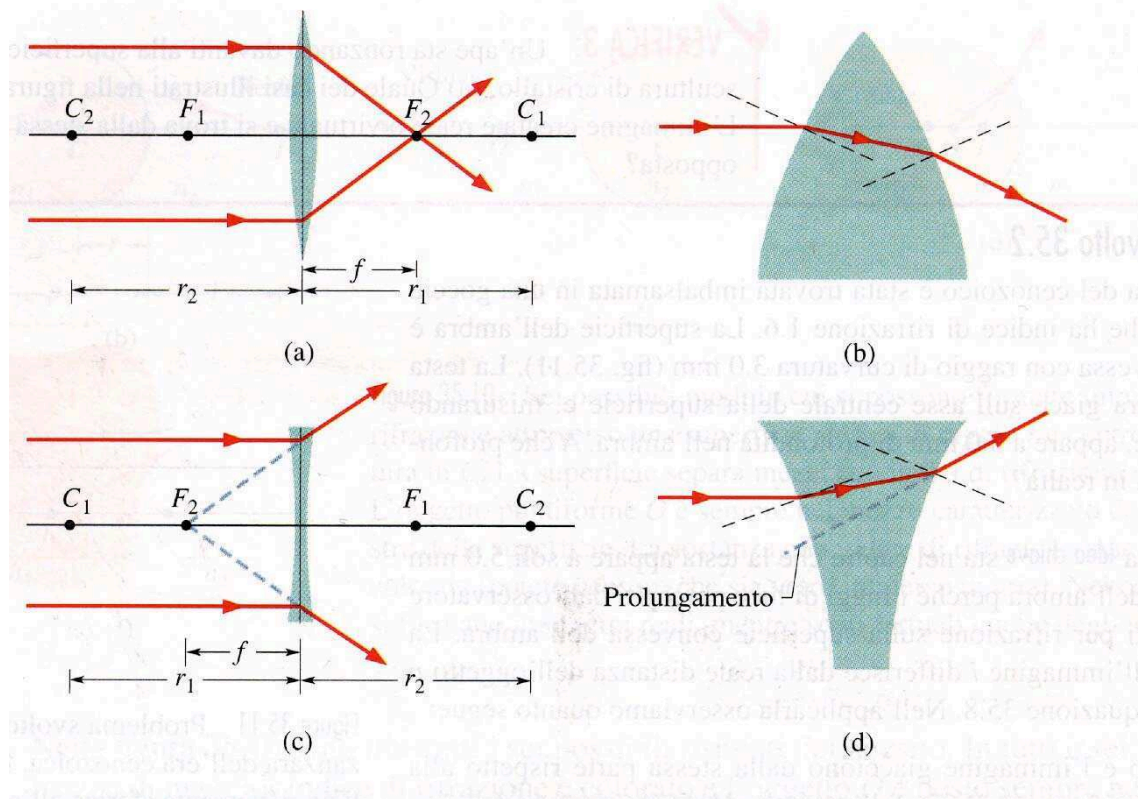
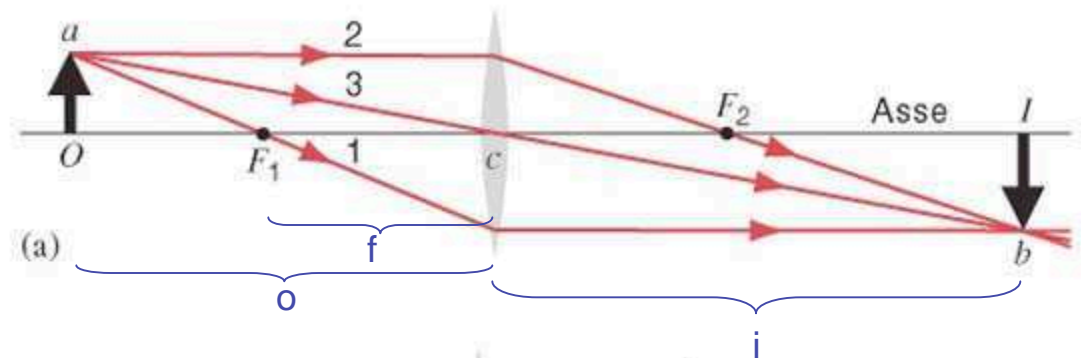
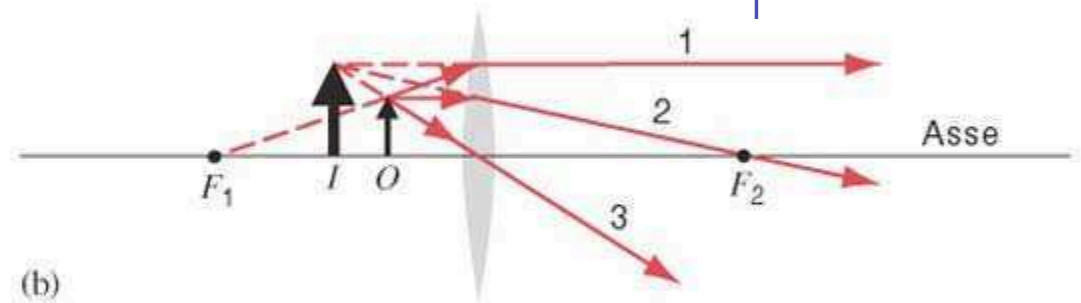


Immagine prodotta da lenti sottili:

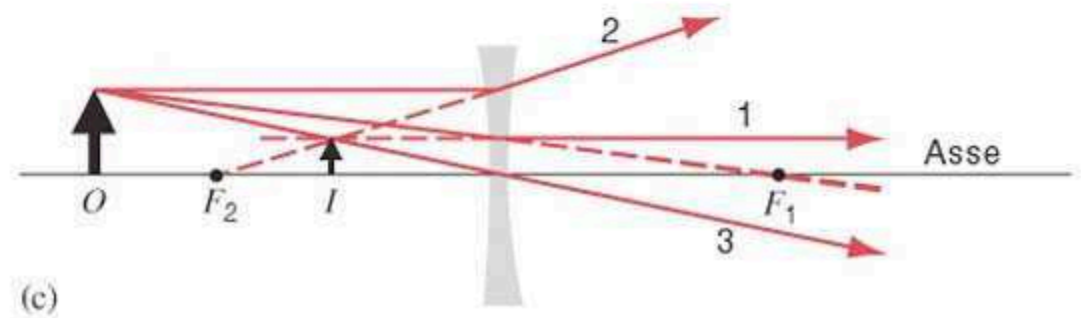
Se $o > f$, immagine reale, capovolta e dalla parte opposta della lente.



Se $o < f$, immagine virtuale, dritta e dalla stessa della lente.



Lente divergente: immagine virtuale dritta dalla stessa parte (per ogni o)



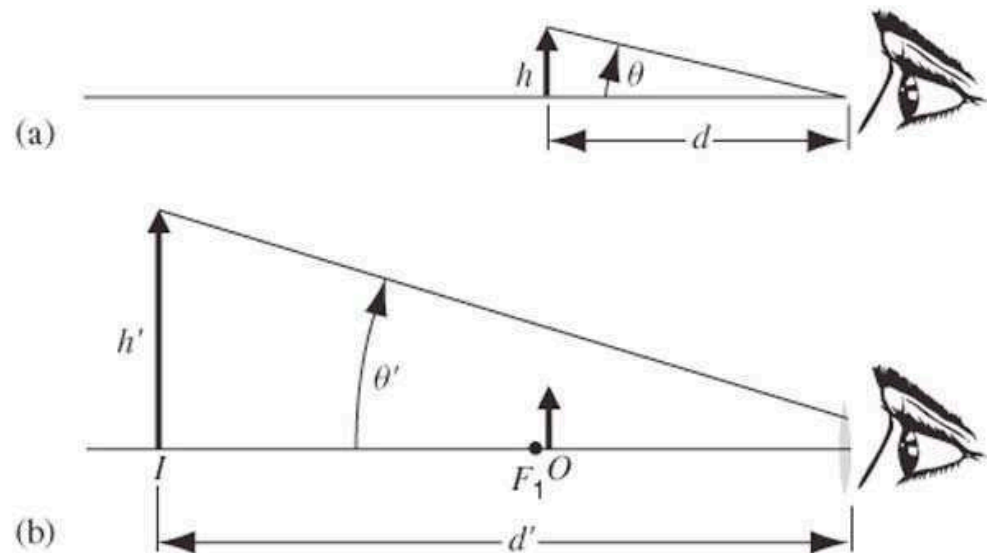
La lente di ingrandimento...

La dimensione dell'immagine sulla retina e' determinata da θ (cornea+cristallino poi fanno il resto del lavoro)

$$\theta = \arctg(h/d) \approx h/d$$

Se metto una lente tra O e l'occhio ($o < f$) si torna al caso della figura (b) della diapositiva precedente

$$\theta' \approx h'/d'$$



Si definisce ingrandimento angolare $m_\theta = \theta'/\theta$

L'occhio umano puo' mettere a fuoco distanze tra ∞ e 25 cm ("punto prossimo")

Mettiamo - per esempio - un oggetto di altezza h nel punto prossimo $\longrightarrow \theta = h / 25\text{cm}$

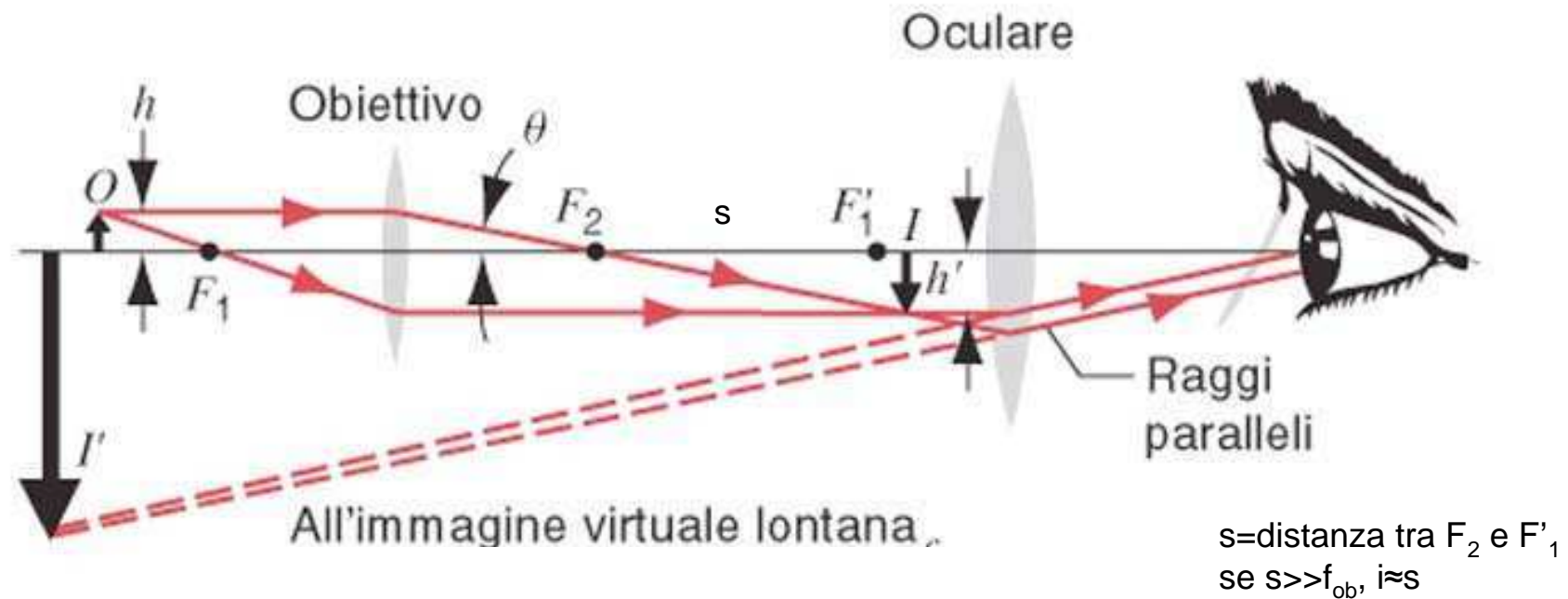
Se lo guardiamo attraverso una lente (con $f \approx o$), l'ingrandimento trasversale e' $m = i / o$
quindi la dimensione trasversale dell'immagine e' $h' = m h = i h / o$
e l'angolo dell'immagine e' $\theta' = h' / d' = i h / i o = h / o \approx h / f$

l'ingrandimento angolare e' $m_\theta = \theta' / \theta = h / 25\text{cm} / h / f = 25 \text{ cm} / f$

piu' piccola la distanza focale, maggiore l'ingrandimento.

(in realta' il massimo m_θ raggiungibile dalla lente e' 10, poi ci sono fenomeni di aberrazione)

Il microscopio:



Metto l'obiettivo in modo tale che O sia appena oltre la distanza focale f_{ob}

→ ottengo un'immagine reale capovolta con $m = h' / h = -s / f_{ob}$

Metto l'oculare in modo tale che il suo fuoco F'_1 cada vicino a dove si forma l'immagine I .

Nell'occhio si forma l'immagine I' (virtuale). L'ingrandimento angolare complessivo è

$$M = mm_{\theta} = \frac{s}{f_{ob}} \frac{25cm}{f_{oc}}$$

Interferenza e diffrazione

La radiazione elettromagnetica proveniente da diverse sorgenti si sovrappongono in ogni punto combinando l'intensita' —————> **INTERFERENZA**

Quando la radiazione elettromagnetica passa attraverso una fenditura stretta, l'onda interferisce con se stessa producendo frange di interferenza su uno schermo messo dietro —————> **DIFFRAZIONE**

Si possono usare le frange di interferenza per studiare la struttura atomica di molecole (es. Watson& Crick, Perutz)

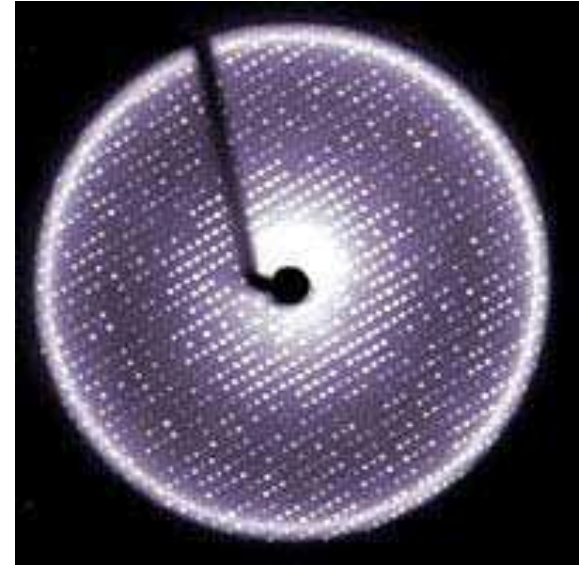
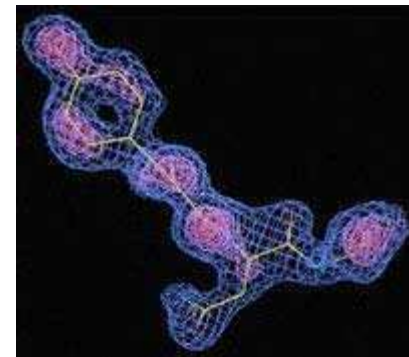


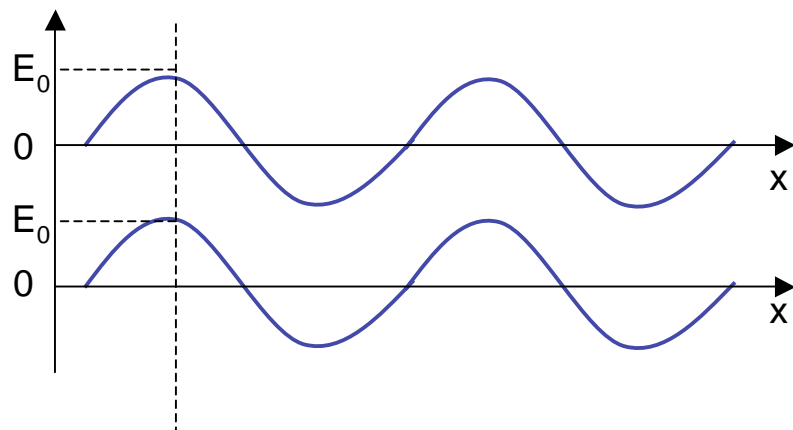
Immagine di diffrazione a raggi x



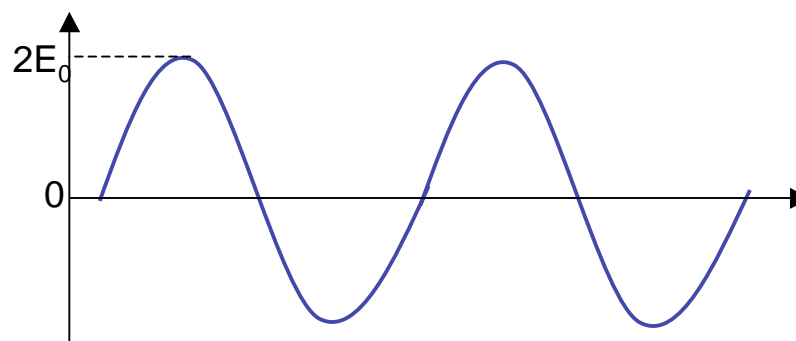
Struttura molecolare

$$E = \sin (k x - \omega t) = \sin (2 \pi x / \lambda - \omega t)$$

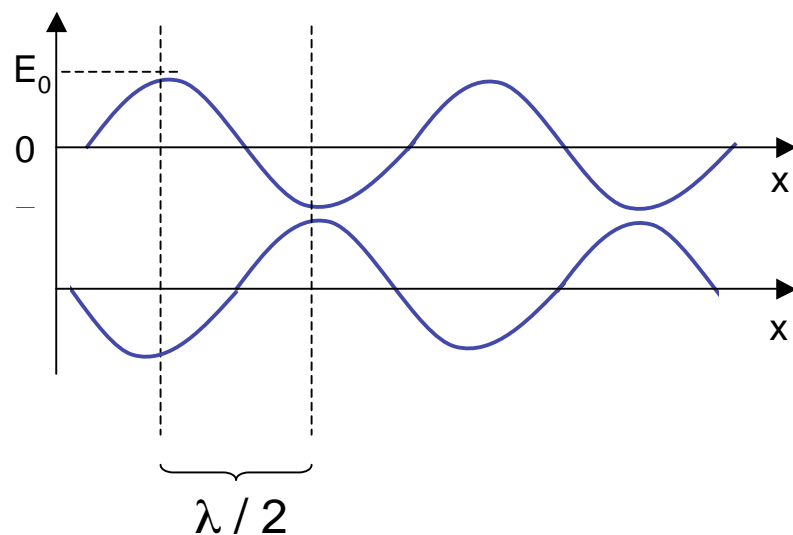
Onde in fase



interferenza costruttiva



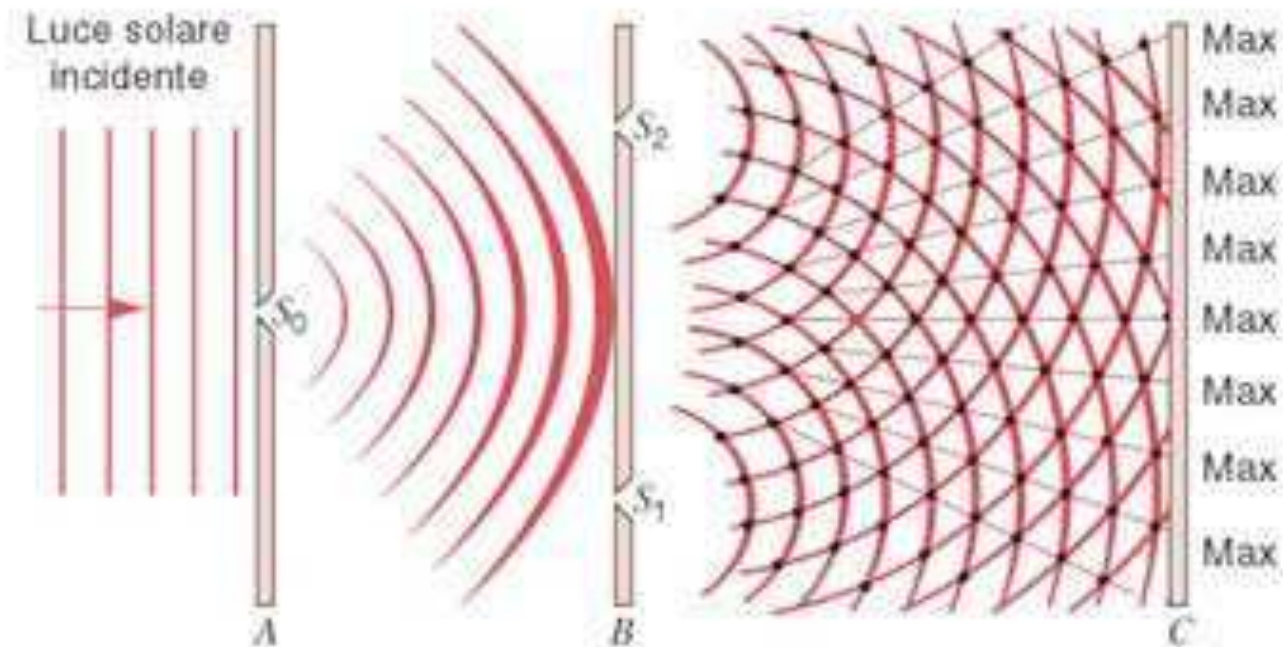
Onde sfasate di $\lambda / 2$



interferenza distruttiva

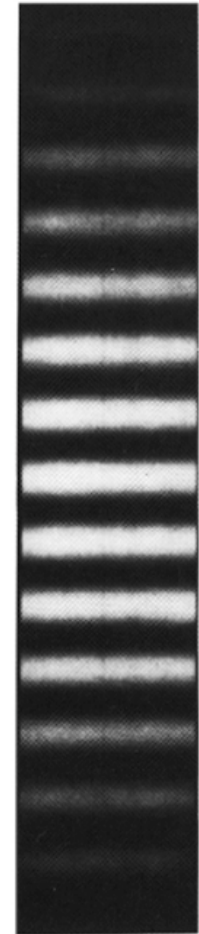


Esperimento di Young



La prima fenditura serve per rendere le onde in S_1 e S_2 in fase tra loro.

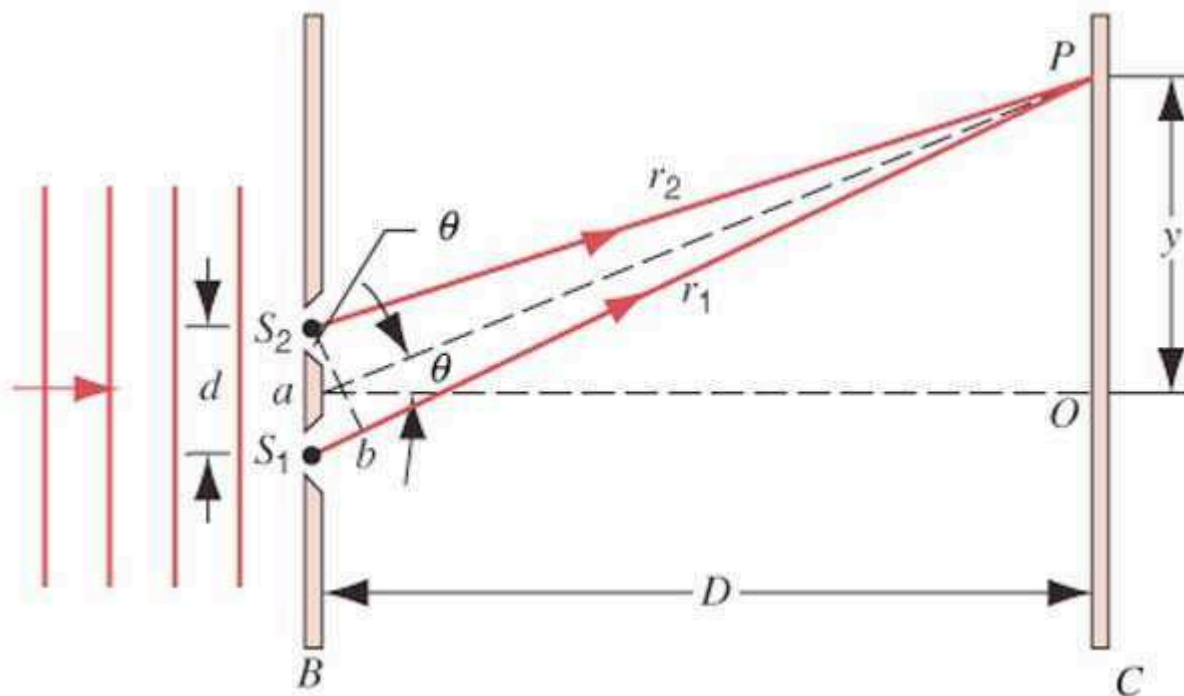
Luce coerente (LASER) = la differenza di fase non varia nel tempo.



Franghe di interferenza

Calcolo della posizione delle frange

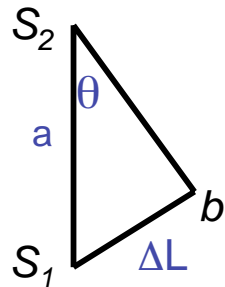
L'onda che passa per S_1 deve compiere un percorso più lungo per raggiungere $P \rightarrow$ si sfasano
 Se $D \gg a$ i raggi r_1 e r_2 sono approssimativamente paralleli (e formano un angolo θ con la normale allo schermo)
 ed il triangolo S_1S_2b è approssimativamente rettangolo.



In generale:

$$I = I_0 \cos^2 \beta$$

$$\beta \equiv \frac{\pi d}{\lambda} \sin \theta$$



$$\Delta L = a \sin \theta$$

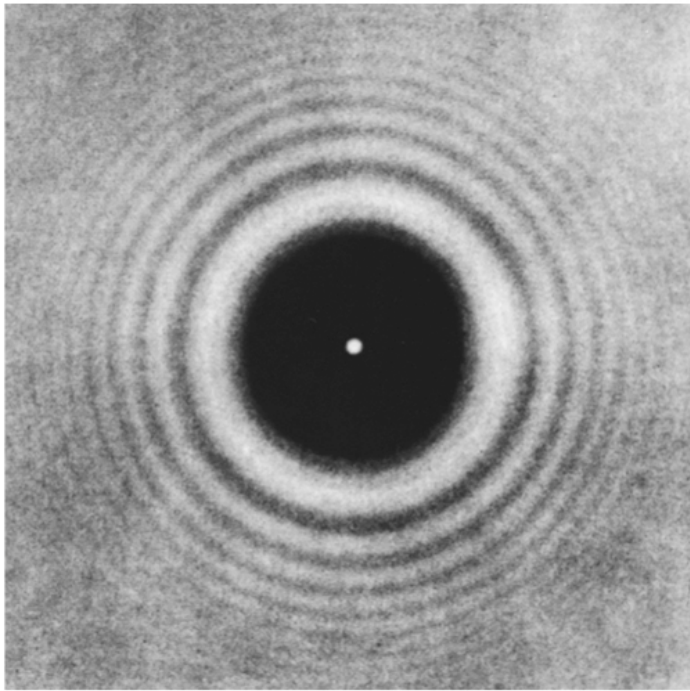
Se ΔL è un multiplo di λ si ha interferenza costruttiva \rightarrow frange chiare

$$a \sin \theta = m \lambda \quad \text{con } m = 0, 1, 2, \dots$$

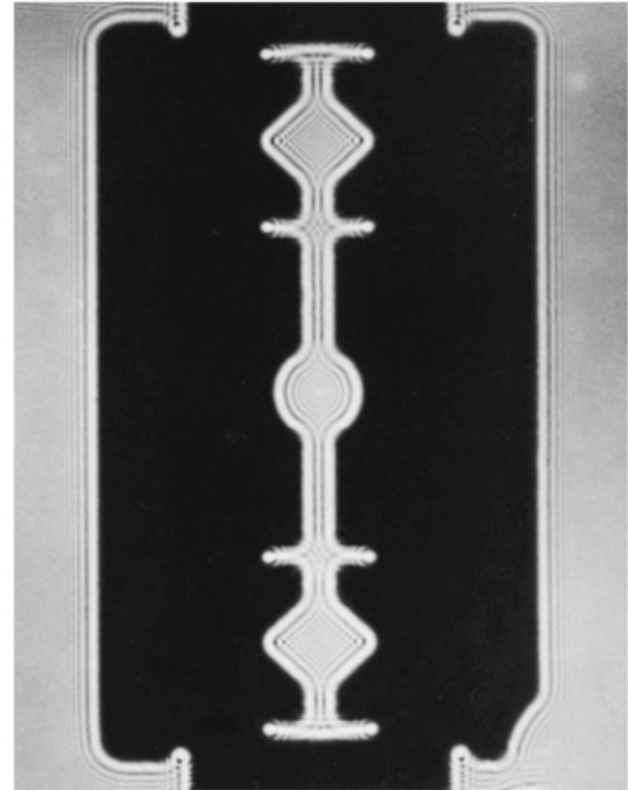
Se invece $a \sin \theta = (m + 1/2) \lambda$ si ha interferenza distruttiva \rightarrow frange scure

Diffrazione

L'interferenza di un'onda con se stessa dopo un ostacolo provoca massimi e minimi di intensita' come nel caso della doppia fenditura.



Diffrazione da foro circolare



Lametta da barba illuminata
con luce monocromatica

Diffrazione da fenditura

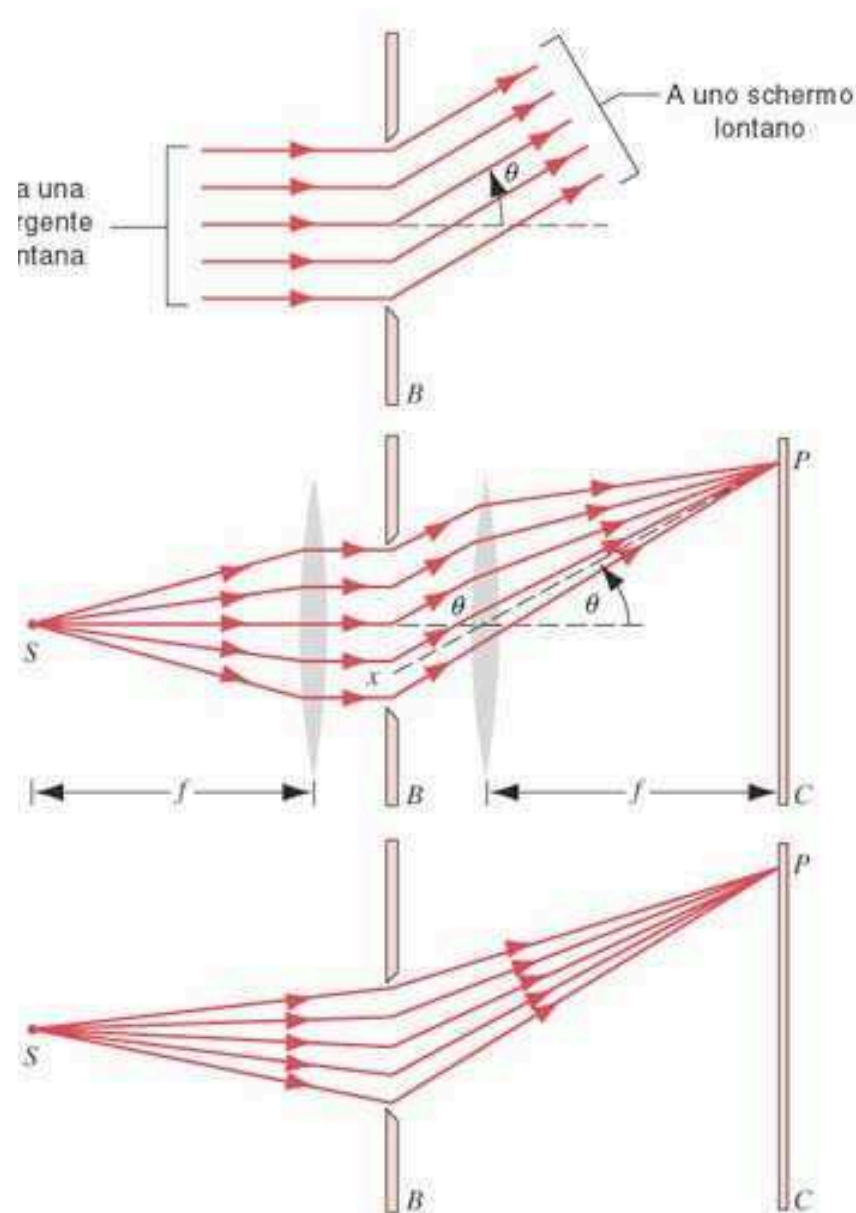
Esperimenti "classici":

a) Difrazione di Fraunhofer:
sia la sorgente che lo schermo
sono a distanza infinita,
quindi i fronti d'onda sono
piani ovunque.

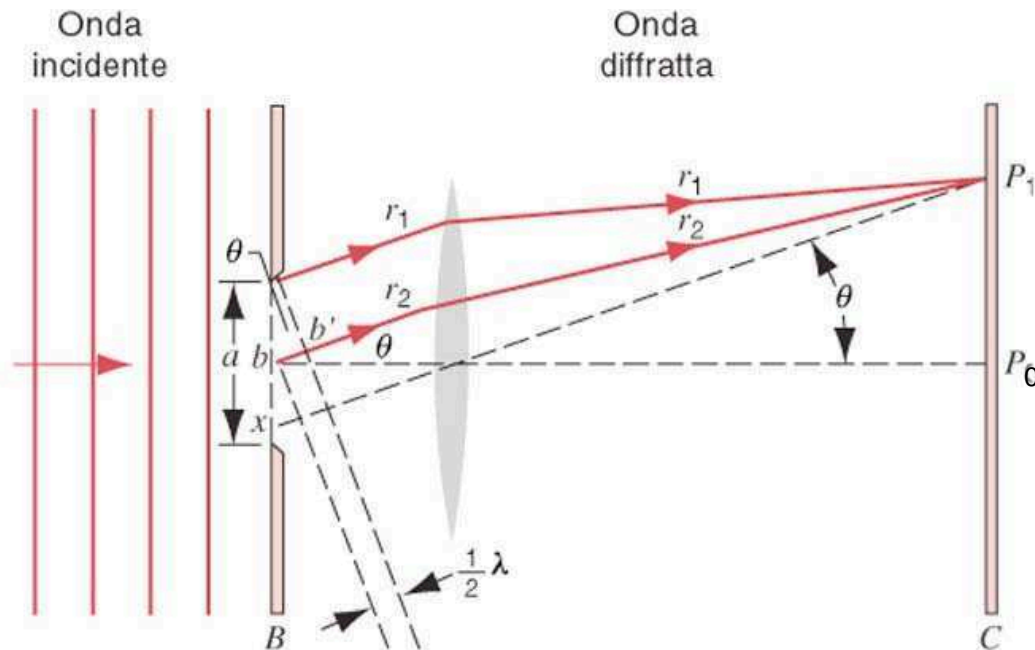
si realizza sperimentalmente
con due lenti

b) Difrazione di Fresnel
sia la sorgente che lo schermo
sono a distanza finita.

Figure di
diffrazione



Diffrazione di Fraunhofer



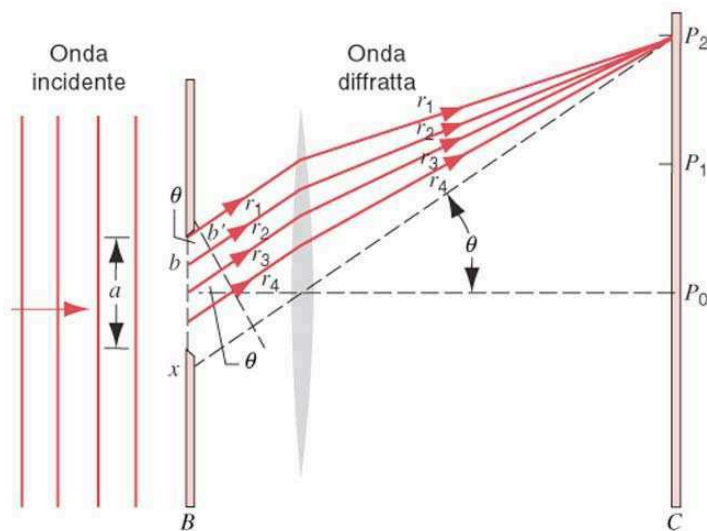
Se lo schermo e' lontano r_1 e r_2 sono approssimativamente paralleli

Nel punto P_0 tutte le onde sono in fase e quindi fanno interferenza costruttiva.

Nel punto P_1 i raggi r_1 e r_2 fanno interferenza distruttiva se

$$a/2 \sin \theta = \lambda/2$$

Lo stesso vale per ogni coppia di raggi r'_1 e r'_2 presi sotto r_1 e r_2 rispettivamente.



Lo stesso ragionamento si può fare dividendo la fenditura in quattro segmenti di lunghezza $a/4$ e considerando i raggi a due a due. I minimi di intensità soddisfano

$$a/4 \sin \theta = \lambda/2$$

In generale, soddisfano

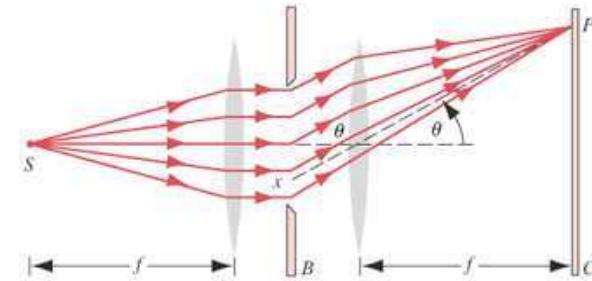
$$a \sin \theta = m \lambda \quad \text{con } m=1,2,3,\dots$$

Piu' in generale, com'e' fatta l'intensita' dell'onda sullo schermo in funzione di θ ?

Il campo elettrico dell'onda e'

$$E = \sin (k x - \omega t) = \sin (2 \pi x / \lambda - \omega t)$$

Se dividiamo ancora la fenditura in N segmenti di lunghezza Δx , l'onda che arriva in un punto P caratterizzato da un angolo θ dipendera' dalle fasi delle diverse onde (cioe' se l'interferenza e' costruttiva o distruttiva).



La differenza di fase tra due onde adiacenti e'

$$\Delta\phi = \frac{2\pi}{\lambda} \cdot (\text{differenza di cammino})$$

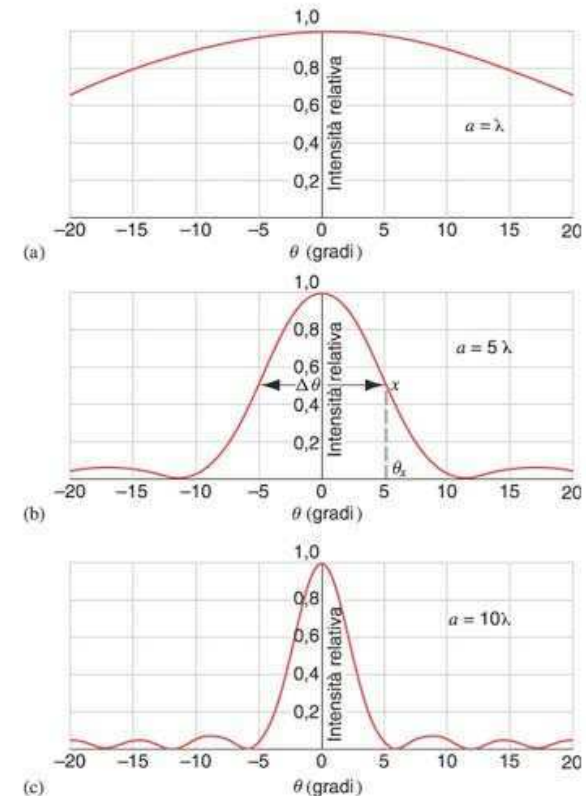
e la differenza di cammino e' $\Delta x \sin \theta$.

Se $\theta=0$ allora $\Delta\phi=0$ e tutte le onde sono in fase, quindi si ha sempre interferenza costruttiva e l'intensita' risultante ($I = E^2$) ha un massimo (caso (a)).

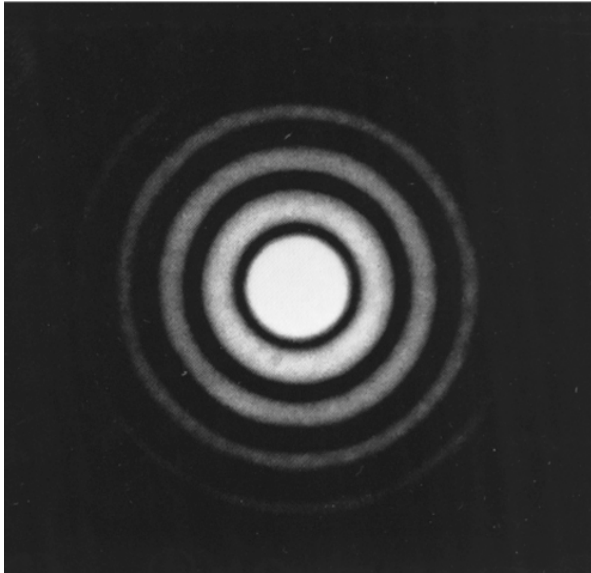
Aumentando θ le onde si sfasano e l'intensita' decresce.

In generale, $I = I_0 \left(\frac{\sin \alpha}{\alpha} \right)^2$, dove

$$\alpha \equiv \frac{\pi a}{\lambda} \sin \theta$$



Diffrazione attraverso foro circolare



I minimi di intensita' soddisfano

$$\sin \theta = 1.22 \frac{\lambda}{d}$$

dove d e' il diametro del foro. Da notare il fattore 1.22 che differenzia il foro circolare dalla fenditura. Ogni forma dell'ostacolo produce un fattore diverso.

Le figure di diffrazione generate dalle lenti possono impedire di distinguere oggetti vicini

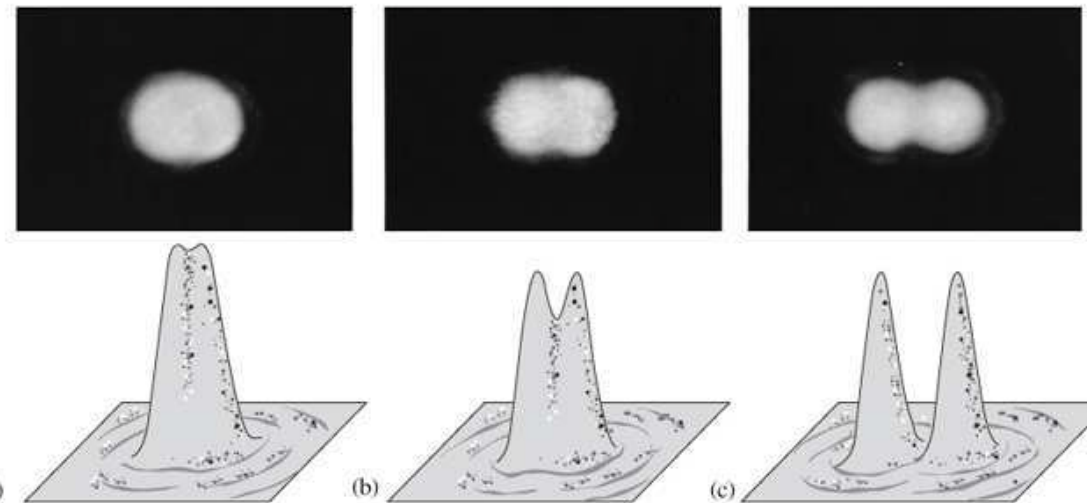
→ POTERE RISOLVENTE

$$\theta_R = \arcsin \frac{1.22\lambda}{d} \approx \frac{1.22\lambda}{d}$$

e' l'angolo minimo che separa due oggetti risolvibili.

(il microscopio a luce UV e' meglio!)

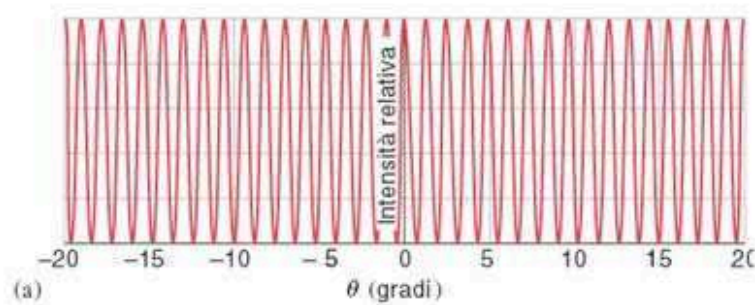
Una lente puo' essere considerata un foro circolare (produce diffrazione)



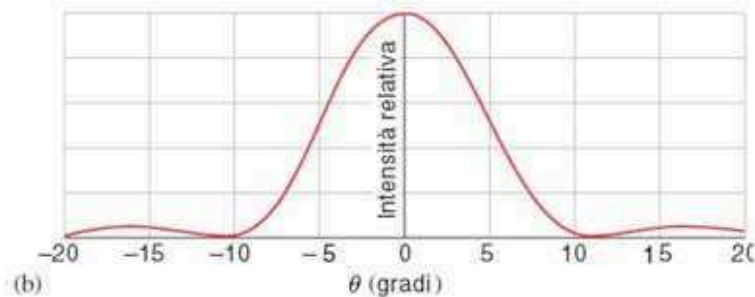
Diffrazione da doppia fenditura

(Nell'esperimento dell'interferenza da doppia fenditura avevamo assunto che la fenditura fosse stretta ($a \ll \lambda$), quindi il massimo copriva tutto lo schermo)

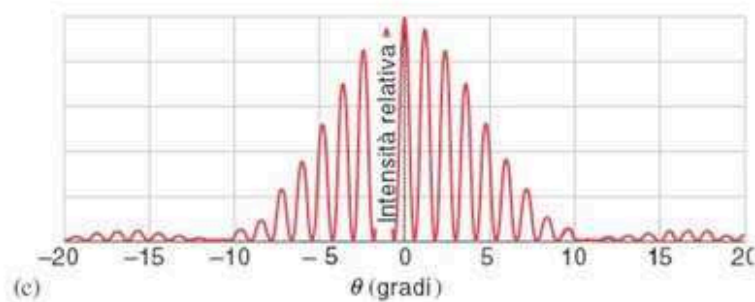
In generale, oltre all'interferenza c'è diffrazione...



Solo interferenza
 $a \ll \lambda$



Una sola fenditura



Due fenditure con
a paragonabile a λ

La forma della curva è

$$I = I_0 \underbrace{\left(\cos^2 \beta \right)}_{\text{interf.}} \underbrace{\left(\frac{\sin \alpha}{\alpha} \right)^2}_{\text{diff..}}$$

$$\beta \equiv \frac{\pi d}{\lambda} \sin \theta$$

$$\alpha \equiv \frac{\pi a}{\lambda} \sin \theta$$

dove d è la distanza tra le fenditure e a il loro spessore



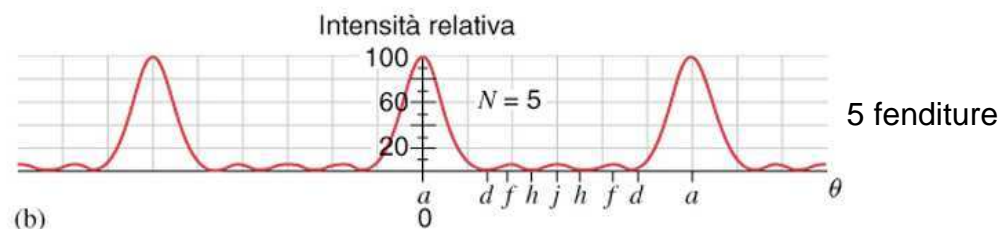
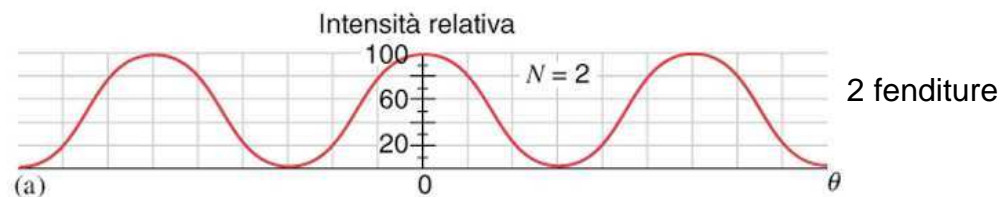
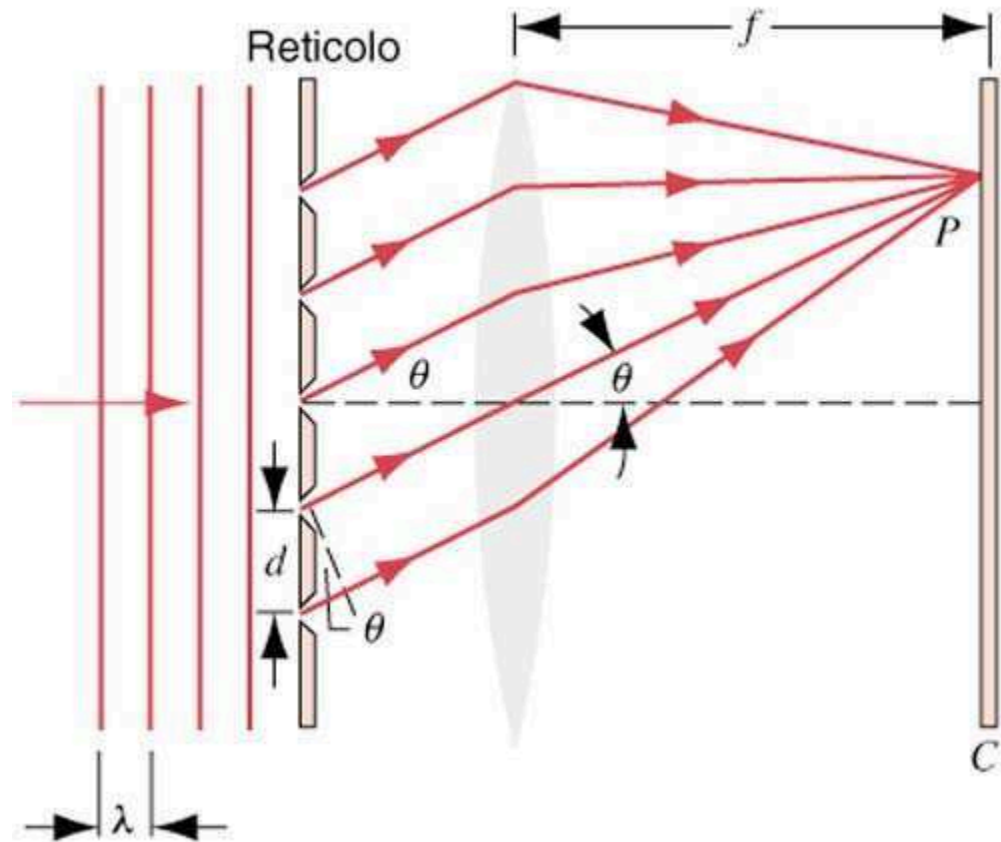
Reticoli di diffrazione

Estende l'effetto della doppia fenditura.

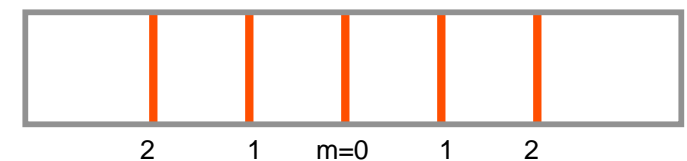
I massimi soddisfano

$$L/N \sin \theta = m \lambda$$

dove L e' la larghezza del reticolo e N il numero di fori (il principio e' uguale a quello della doppia fenditura (che corrisponde a N=2).



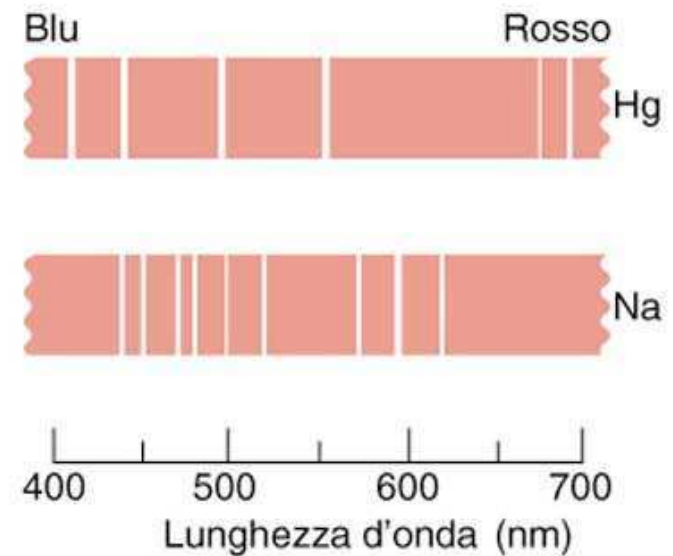
Al crescere di N si vedono righe sottili.



I reticoli di diffrazione sono usati per determinare la lunghezza d'onda di una radiazione qualsiasi (anche non monocromatica).

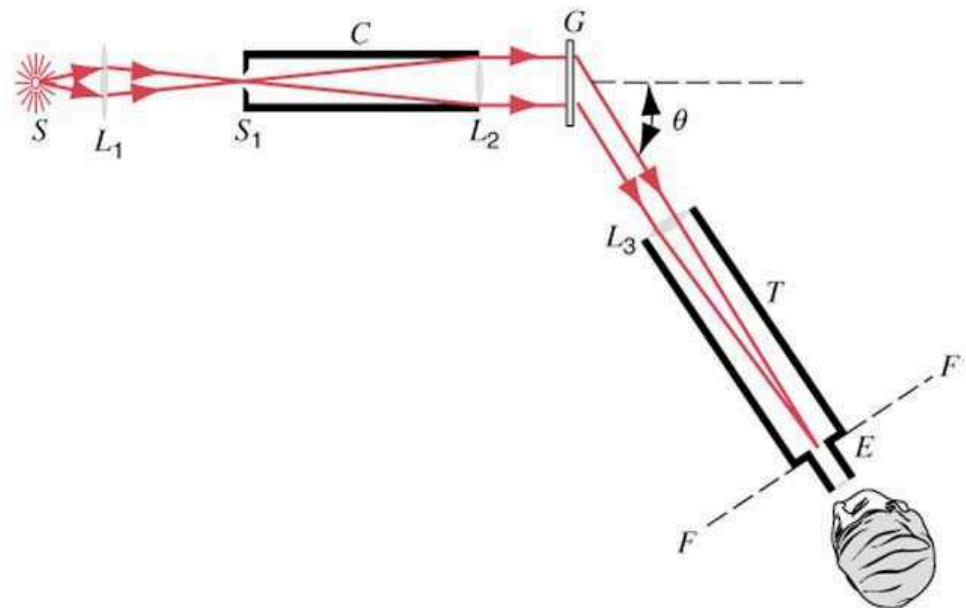
L'angolo dipende dalla lunghezza d'onda
 $L/N \sin \theta = m \lambda$

piu' grande e' N piu' riesco a risolvere differenze
di lunghezza d'onda piccole ($L \sin \theta = m \lambda N$)



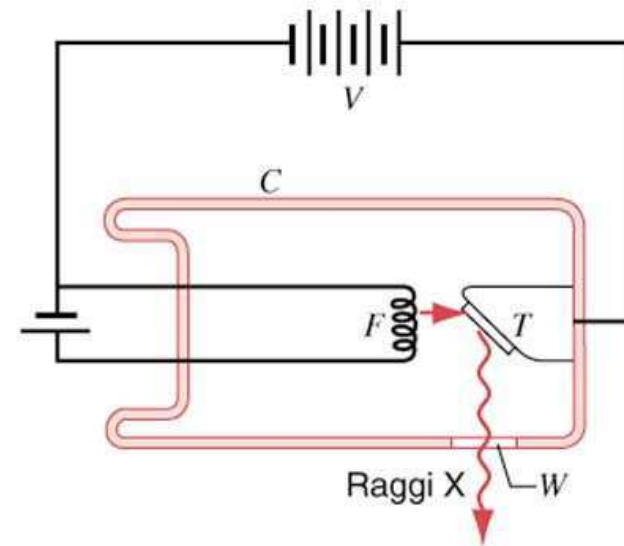
Spettroscopio

ruotando il telescopio T
permette di misurare quali
lunghezze d'onda sono presenti
e la loro intensita'



Diffrazione dei raggi X

I raggi X vengono prodotti accelerando elettroni mediante una differenza di potenziale contro un bersaglio metallico



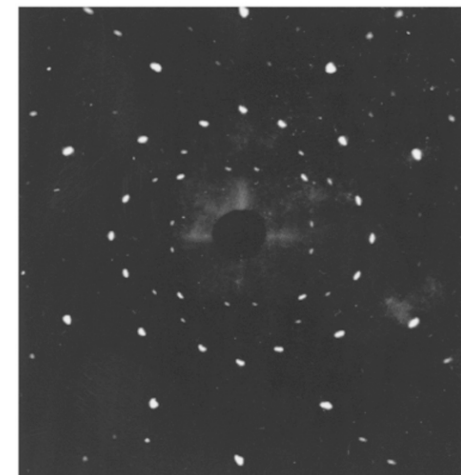
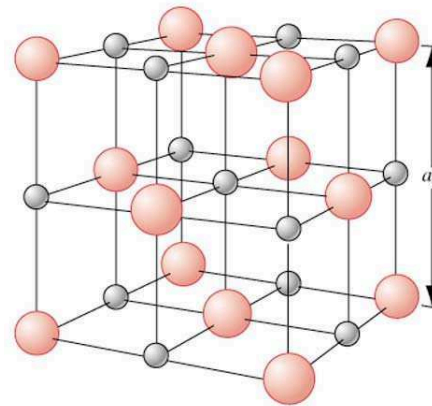
Un normale reticolo non riesce a discriminare le lunghezze d'onda dei raggi X ($\approx 1\text{\AA}$)

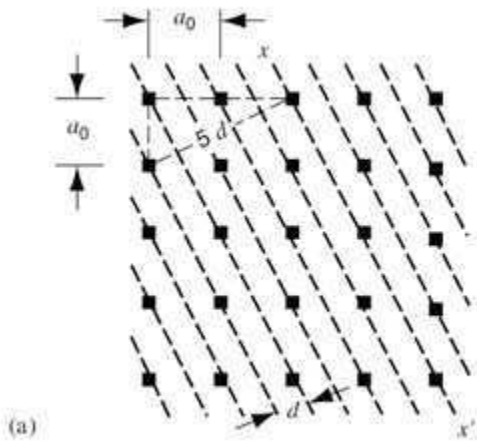
es. $d = 3\text{ }\mu\text{m}$

$$\theta = \arcsin m \lambda / d = 0.0019^\circ$$

I reticoli dei cristalli invece hanno $d \approx \lambda$

Es. NaCl





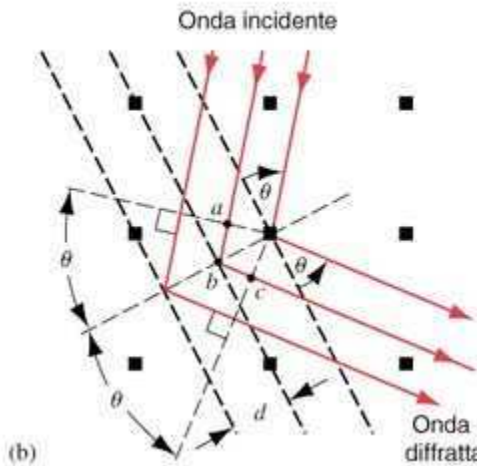
I piani determinati dagli atomi fungono da reticoli di diffrazione.

I massimi soddisfano quindi

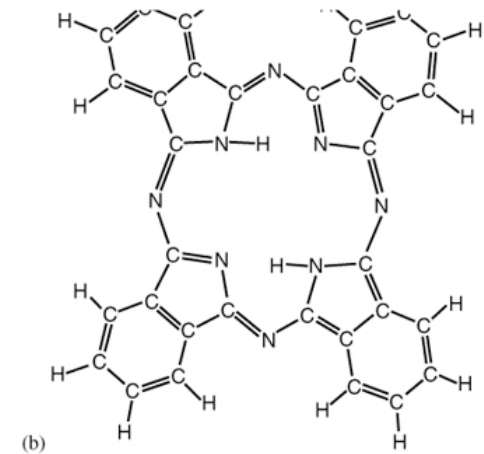
$$2 d \sin \theta = m \lambda$$

(il 2 proviene dal fatto che sia in entrata che in uscita c'è una differenza di cammino ottico).

Questa si chiama Legge di Bragg.



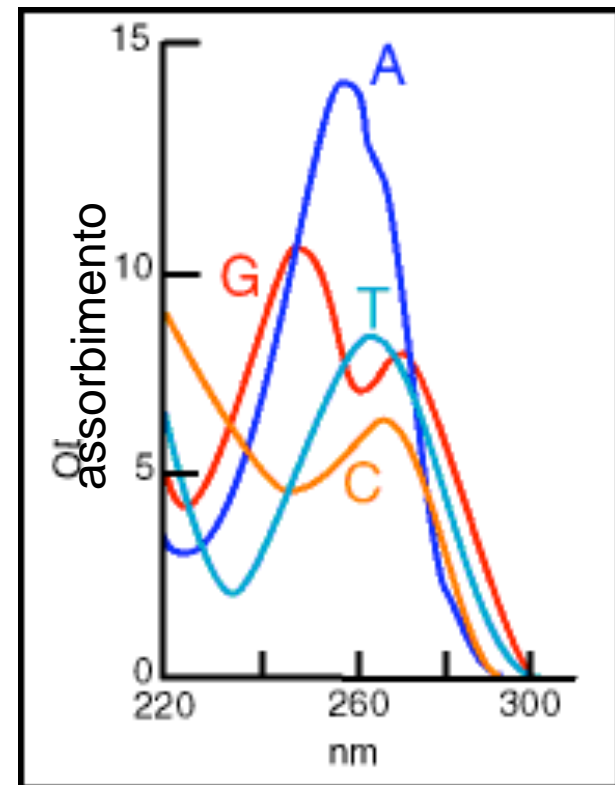
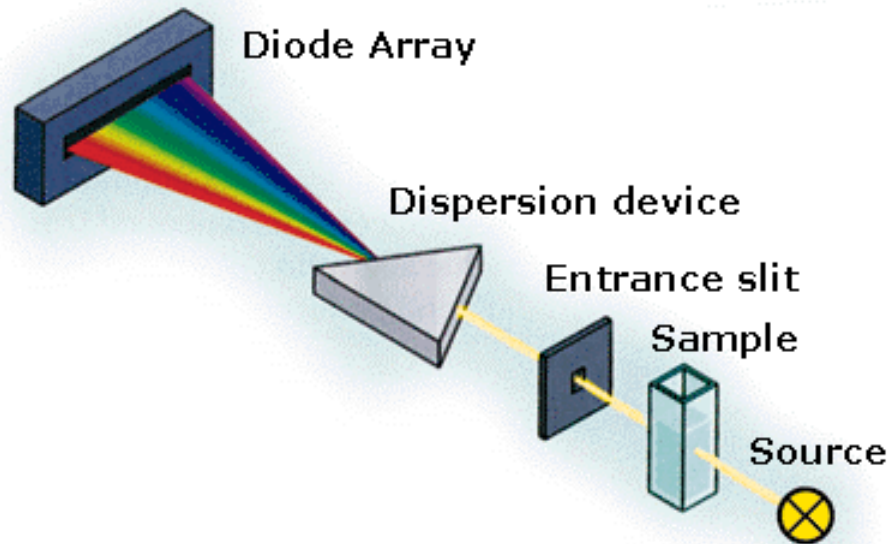
Usando un fascio di raggi X monocromatici e variando θ si può ricostruire la struttura di un cristallo
es. Ftalocianina



Elettroni e spettroscopia



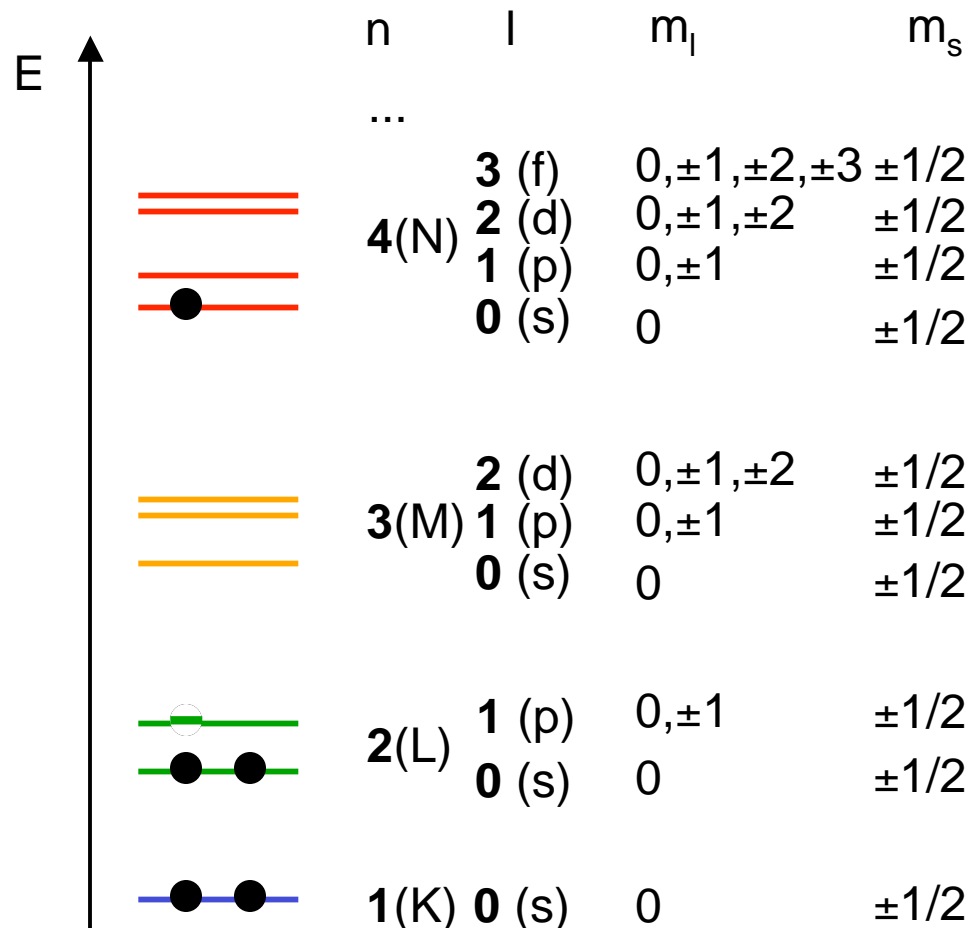
Atomi e molecole sono in grado di assorbire la luce in corrispondenza di particolari frequenze. Misuro l'assorbimento con uno spettrofotometro.



Struttura elettronica degli atomi

1) Gli elettroni possono assumere solo energie ben determinate

La forma tipica dei livelli **disponibili** (= non necessariamente occupati) e'



n e' il maggiore determinante dell'energia
l determina il modulo del momento angolare
 m_l determina la direzione del momento angolare
 m_s determina la direzione del momento di spin

se non agiscono forti campi Elettromagnetici,
 i vari m e s corrispondono a uguali energie.

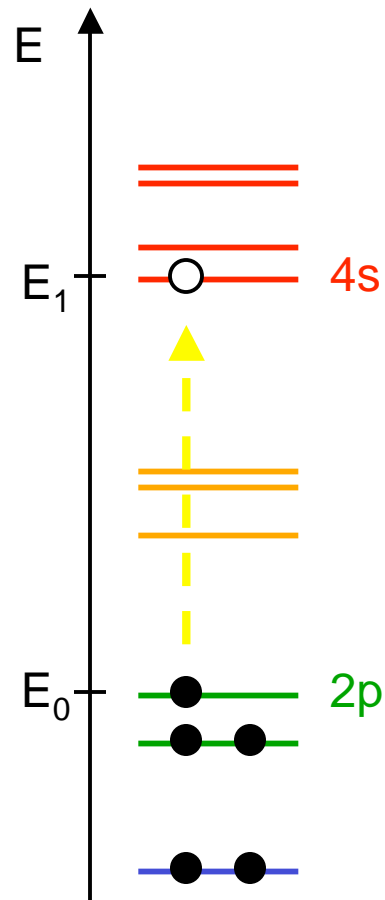
2) Nello stato fondamentale (quello di equilibrio) gli elettroni occupano i livelli a energia piu' bassa.
 Possono esistere stati eccitati, con gli elettroni che si portano sui livelli piu' alti, ma questi si diseccitano in un tempo breve.

3) Principio di Pauli: due elettroni non possono avere gli stessi numeri quantici.

Eccitazioni elettroniche

Devono soddisfare:

1) Conservazione dell'energia: un elettrone per passare da energia E_0 a energia E_1 ($>E_0$) deve assorbire l'energia dall'esterno. Di solito l'energia proviene da radiazione elettromagnetica. Per passare da E_1 a E_0 l'elettrone deve emettere energia.



L'energia di un'onda e.m. di frequenza ν e' $h\nu$
con $h = 6.6 \cdot 10^{-34} \text{ J s}$ (costante di Planck)

$$\text{quindi } E_1 - E_0 = h\nu$$

Un'unita' di energia e.m. si chiama "fotone"
Tipicamente $E_1 - E_0 = 1 \text{ eV}$ ($=10^{-19} \text{ J}$)
quindi $\nu = 10^{-19} \text{ J} / 10^{-34} \text{ J s} = 10^{15} \text{ Hz}$ (visibile)

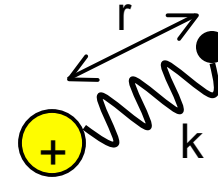
2) Regole di selezione: $\Delta l = \pm 1$

Per esempio, e' ammessa $2p \rightarrow 4s$
ma non $2p \rightarrow 4p$

Interazione luce-atomo

Studiamo un modellino molto semplice in cui un elettrone e' legato al nucleo attraverso una molla con costante elastica k .

$$m \frac{d^2 r}{dt^2} = -kr \quad \rightarrow \quad \frac{d^2 r}{dt^2} = -\frac{k}{m} r$$



la cui soluzione e'

$$r(t) = A \cos(\omega_0 t) + B \sin(\omega_0 t)$$

dove abbiamo riassunto $\omega_0 = (k / m)^{1/2}$ (sostituire per credere....)

quindi secondo questo modellino l'elettrone oscilla intorno al nucleo. Naturalmente stiamo trascurando quello che sappiamo dalla meccanica quantistica. Possiamo pero' imporre che l'energia dell'oscillatore sia uguale a quella di uno dei livelli atomici.

Se investiamo l'elettrone con un'onda elettromagnetica $E = E_0 \cos(\omega t)$, questa imprime all'elettrone una forza

$$F_{em} = q \cdot E(t) = qE_0 \cos(\omega t)$$

e l'equazione del moto diventa

$$\frac{d^2 r}{dt^2} = -\frac{k}{m} r + \frac{qE_0}{m} \cos(\omega t)$$

mostriamo che la soluzione di

$$\frac{d^2 r}{dt^2} = -\frac{k}{m} r + \frac{qE_0}{m} \cos(\omega t)$$

ha la forma

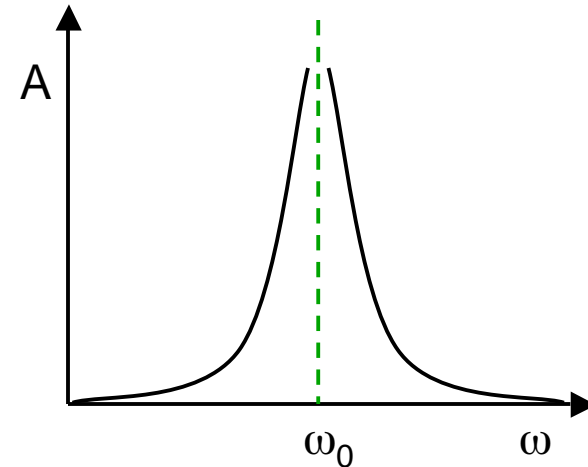
$$r(t) = A \cos(\omega t)$$

dove la frequenza di oscillazione dell'elettrone non e' piu' ω_0 ma e' ω . Infatti, sostituendo

$$-A\omega^2 \cancel{\cos(\omega t)} = -\frac{k}{m} A \cancel{\cos(\omega t)} + \frac{qE_0}{m} \cancel{\cos(\omega t)}$$

che e' soddisfatta se

$$A \left(\frac{k}{m} - \omega^2 \right) = \frac{qE_0}{m} \longrightarrow A = \frac{qE_0}{m(\omega_0^2 - \omega^2)}$$

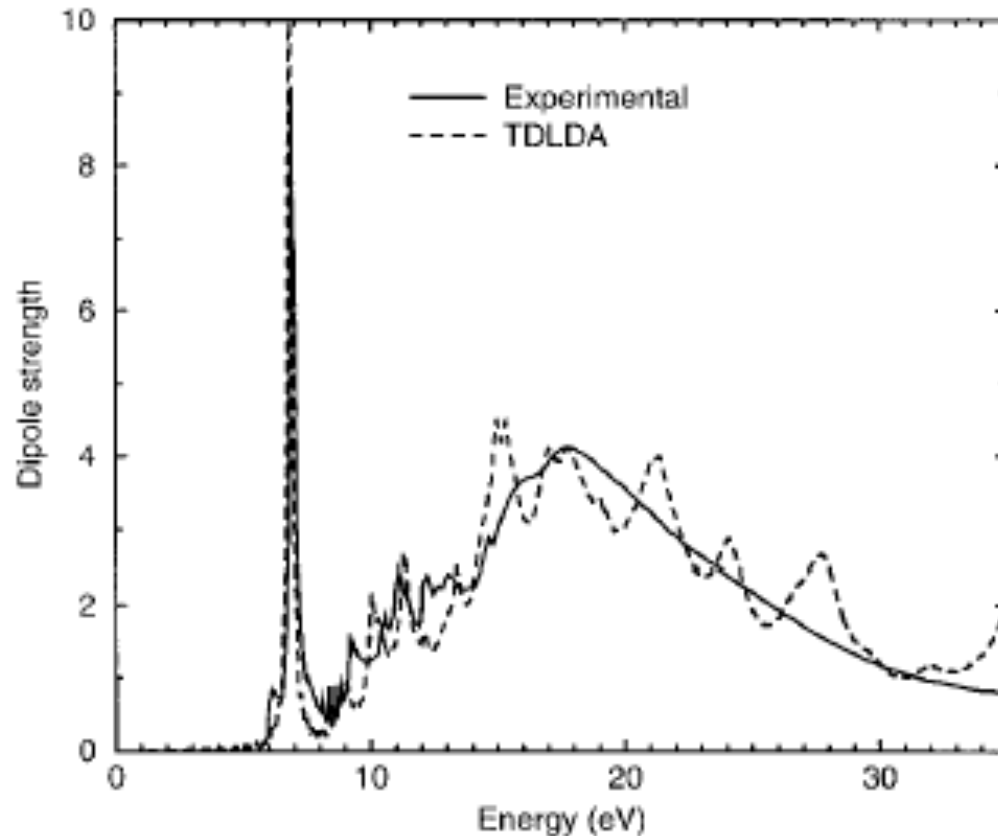


Cosa vuol dire questo? Se la frequenza del campo e.m. e' molto diversa dalla frequenza di risonanza dell'elettrone (determinata dalla sua energia), il campo non ha nessun effetto. Se invece $\omega \approx \omega_0$, allora l'elettrone viene accelerato e assorbe l'energia del campo elettromagnetico.

Morale: se misuriamo lo spettro di una molecola, otteniamo un picco per ogni pulsazione ω tale che esistano due livelli E_1 e E_2 tali che $E_2 - E_1 = h\omega / 2\pi$ ($= h\nu$) e che $\Delta l = \pm 1$ (regola di selezione).
Gli spettri spesso sono raffigurati direttamente in funzione dell'energia (o anche di λ).

Esempio: il benzene

I livelli elettronici dipendono dal tipo di atomo/molecola e debolmente dall'ambiente circostante: mediante spettroscopia visibile/UV posso investigare cosa e quanto c'è in soluzione.

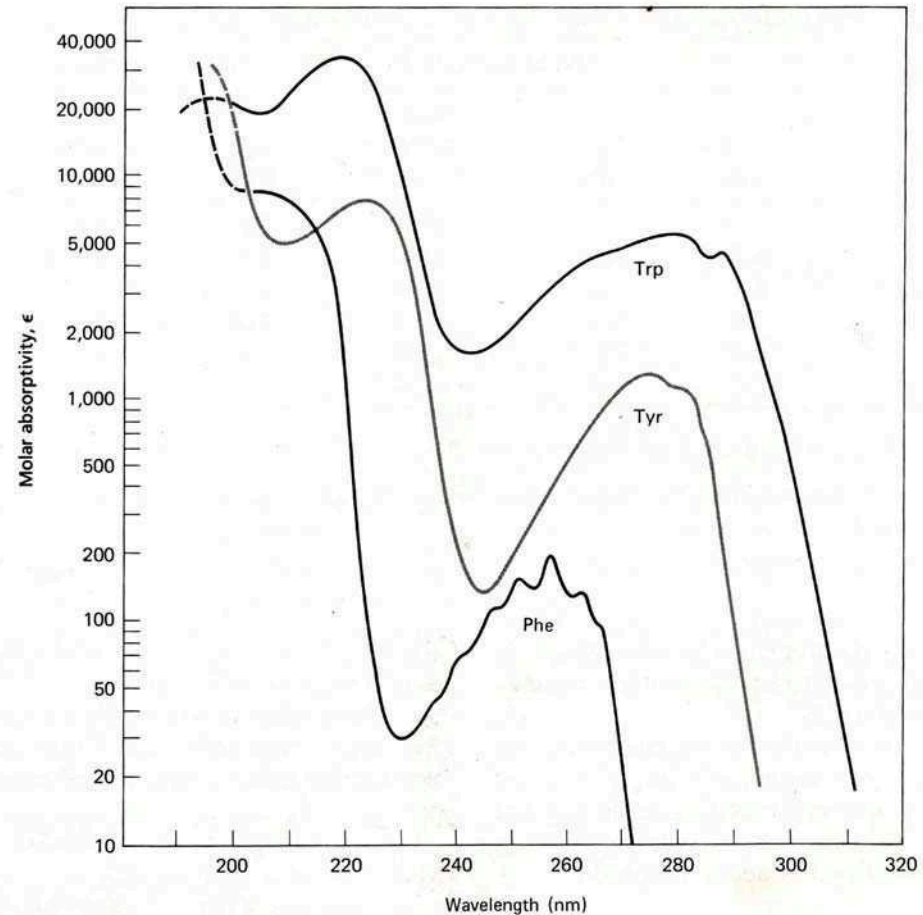
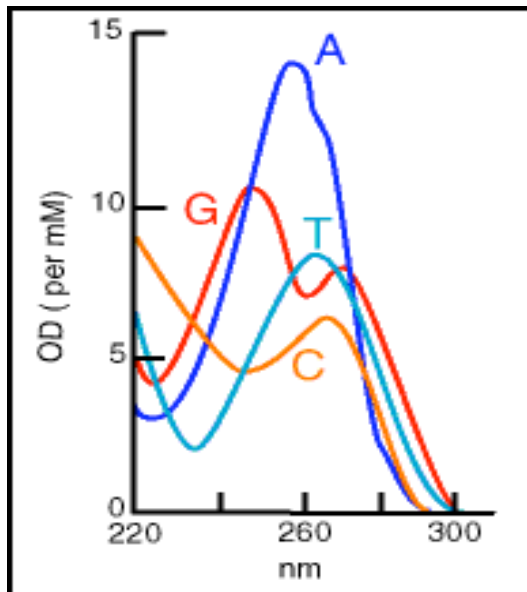


Molecole biologiche

Problema: l'acqua ha un grosso picco di assorbimento intorno a 190 nm.

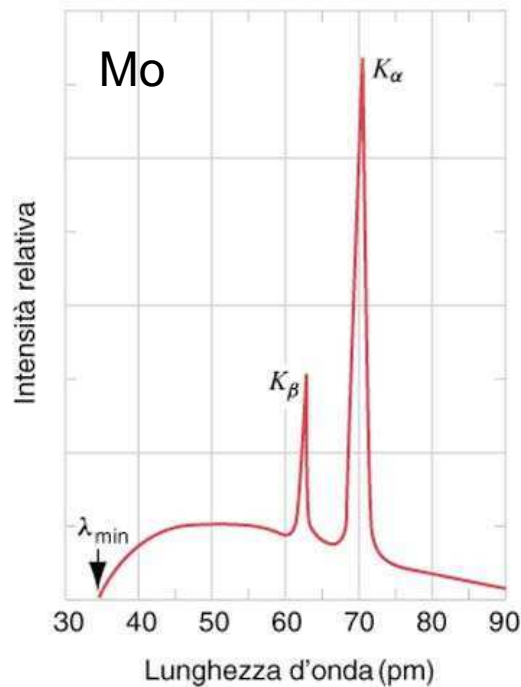
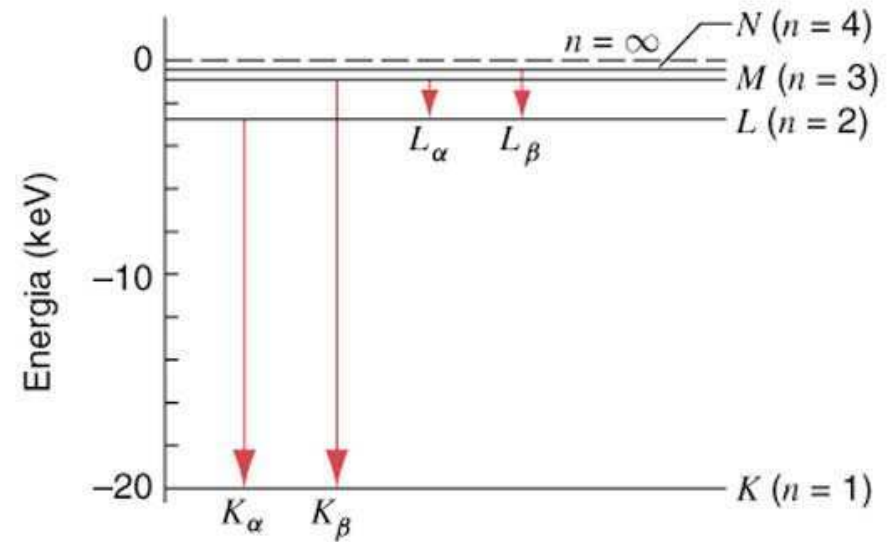
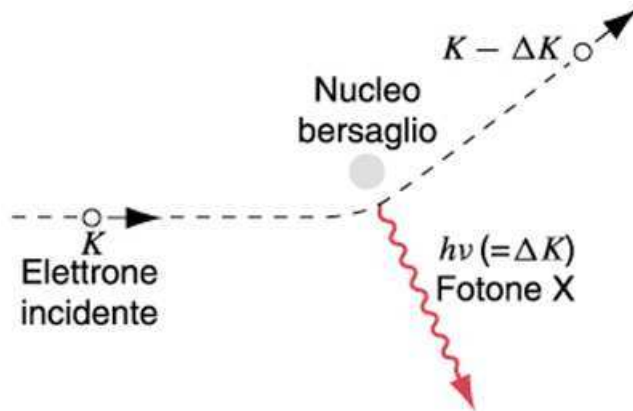
Solo 3 amminoacidi assorbono a energie piu' basse (TRP, TYR e PHE).

Le basi del DNA invece assorbono intorno a 260 nm.



Raggi X

Un elettrone viene accelerato e colpisce l'atomo bersaglio, estraendo un elettrone dai livelli più interni. Uno degli elettroni dei livelli esterni va a riempire la "lacuna" lasciata, rilasciando un fotone. Le energie in gioco sono dell'ordine dei keV ($\lambda \approx \text{nm}$).



In uno spettro a raggi X, oltre ai picchi corrispondenti al processo descritto sopra, c'è un fondo corrispondente ai fotoni emessi dall'elettrone incidente a causa del fatto che viene rallentato ("bremsstrahlung").

LASER

Rispetto a lampadine e tubi a scarica il laser e'

1. notevolmente monocromatica ($\Delta\lambda=10^{-9}\lambda$)
2. coerente
3. direzionale
4. puo' essere molto focalizzata (10^{15} W/cm^2)

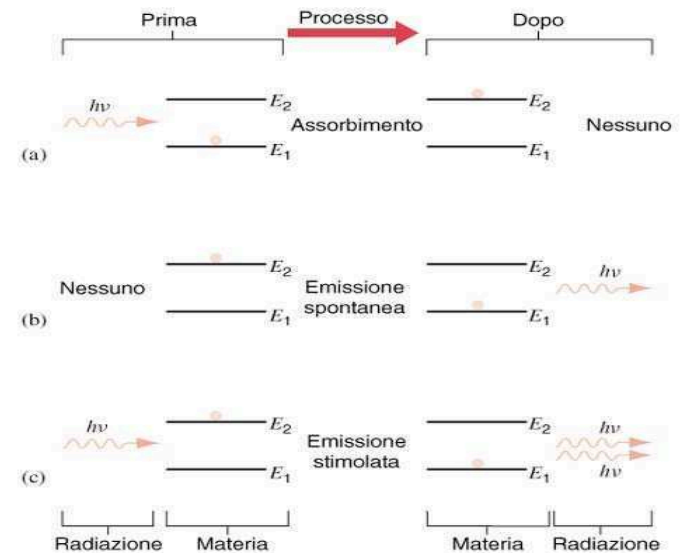
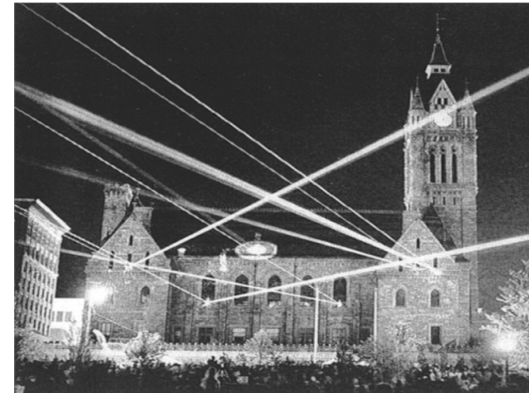
Il principio su cui si basa il laser e' quello dell'emissione stimolata:

il fotone stimolato ha le stesse proprieta' (fase, polarizzazione, ecc.) di quello stimolante.

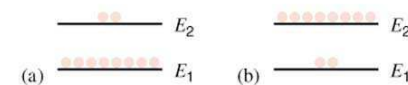
Puo' avvenire anche tra stati proibiti dalle regole di selezione.

Gli atomi di solito sono nello stato fondamentale: se li irraggio con luce li eccito e la luce viene assorbita. Se pero' riesco a preparare degli atomi in modo che gli elettroni siano piu' numerosi in un livello di alta energia, e se – ancora meglio – si tratta di due livelli con $\Delta l \neq \pm 1$, il processo dominante sara' l'emissione stimolata.

Se tanti atomi \rightarrow reazione a catena



stato fondamentale stato invertito



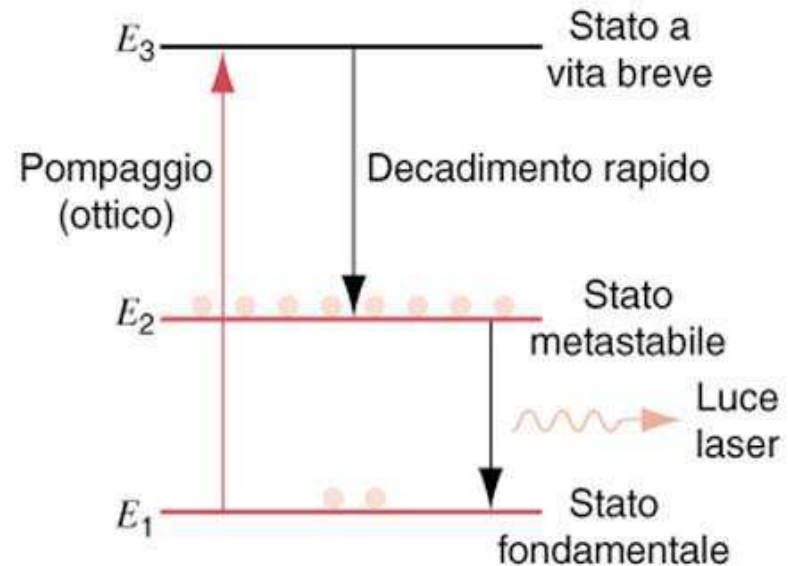
Il laser piu' semplice (a rubino):

Eccito gli elettroni da E_1 a E_3 mediante una normale lampada.

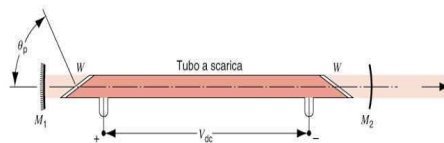
Il decadimento da E_3 a E_2 e' permesso dalle regole di selezione.

Il decadimento da E_2 a E_1 non e' permesso (in realta' avviene lo stesso, ma e' molto lento).

Quando un elettrone riesce a passare da E_2 a E_1 si attiva una reazione a catena: i fotoni emessi stimolano il decadimento di altri elettroni, e quindi l'emissione di altri fotoni.



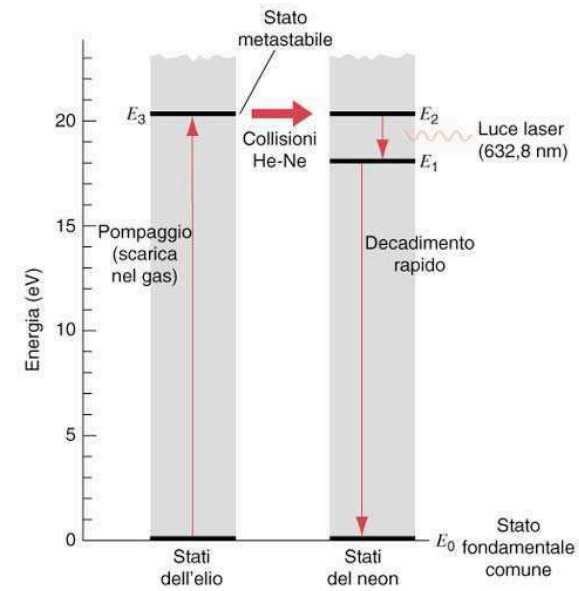
Il laser He-Ne



L'eccitazione di elettroni puo' avvenire anche attraverso urti tra gli elettroni.

Per una coincidenza, il livello E_3 dell'He e' simile al livello E_2 del Ne, quindi l'energia passa facilmente dall'uno all'altro.

Per il resto, e' simile al laser a rubino.

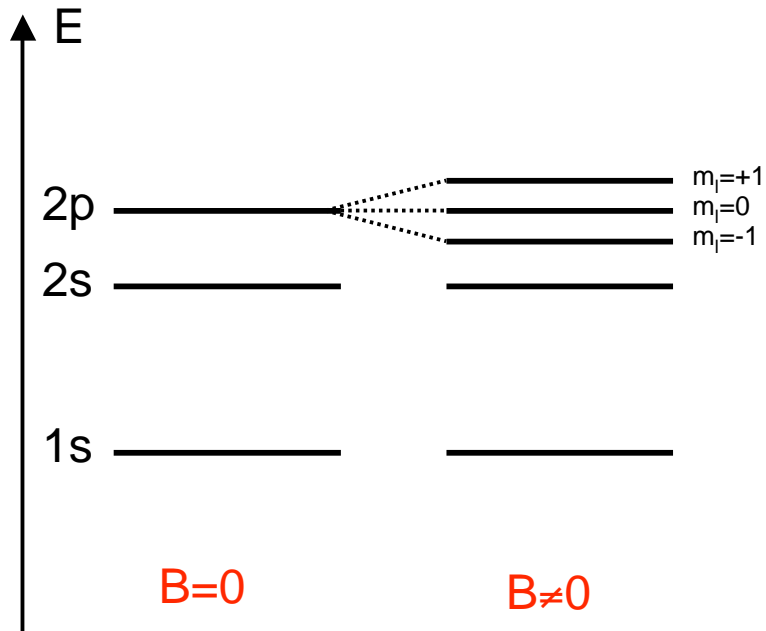
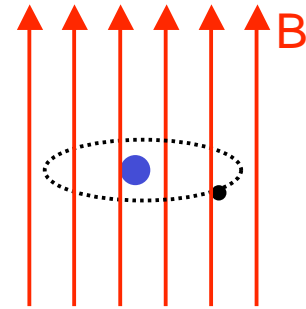


Atomi in campo magnetico

Un dipolo in un campo magnetico ha un'energia $U = - \vec{\mu} \cdot \vec{B}$ (vedi lezione 2)

Un elettrone con numero quantico m_l ha momento di dipolo $\mu = - m_l \mu_B$
dove μ_B vale $9.3 \cdot 10^{-24}$ J/T (e si chiama "magnetone di Bohr").

Quindi $U = B m_l \mu_B \longrightarrow$ i livelli elettronici con diverso m_l si separano



La stessa cosa vale per il momento di spin m_s

$$\mu_s = - g_s m_s \mu_B \quad \text{dove } g_s \approx 2 \text{ e } m_s = \pm 1/2$$

quindi

$$U = g_s B m_s \mu_B$$

e ogni livello si divide in due.

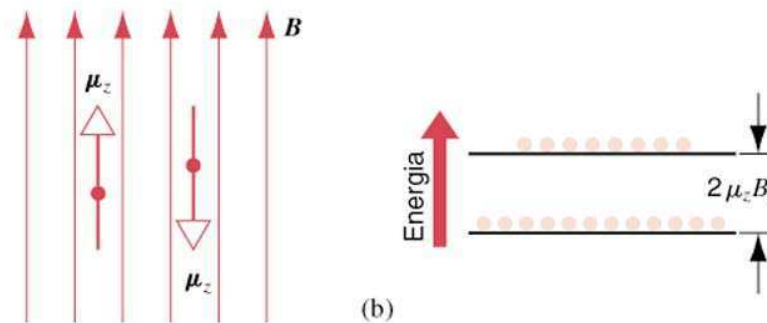
Risonanza Magnetica Nucleare

Anche il protone ha un momento di spin $\pm 1/2$ e quindi se messo in un campo magnetico può assumere due livelli quantici (come gli elettroni).

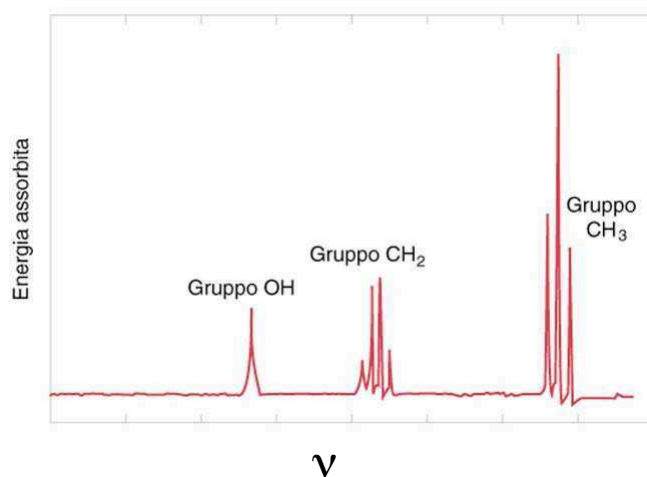
Un protone in un campo magnetico può quindi assorbire un'onda e.m. con energia $h\nu = g_s B \mu_B$

Se il protone è quello di un atomo di idrogeno di una molecola, si sovrappone al campo magnetico esterno B il campo magnetico B_e (molto più debole) generato dagli elettroni in moto nelle vicinanze.

→ il protone nella molecola assorbe a $h\nu = g_s (B+B_e) \mu_B$



la frequenza di assorbimento ν da informazioni sull'intorno elettronico.

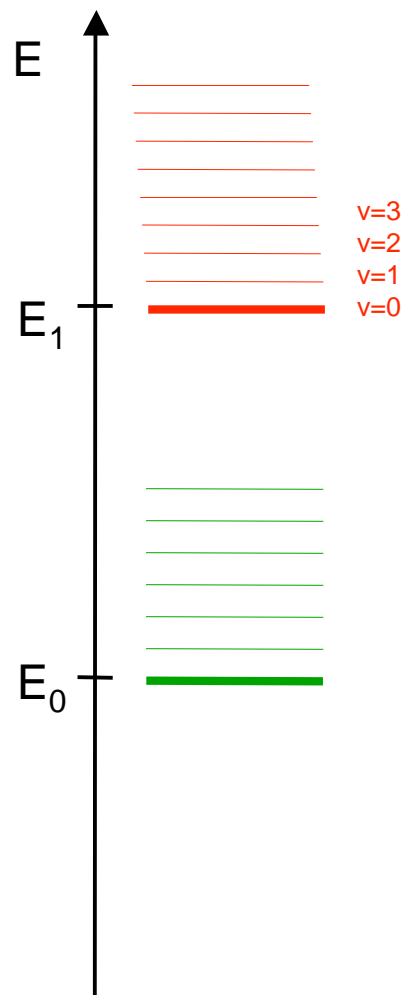


Dalle frequenze di assorbimento si ricostruisce la struttura di molecole o piccole proteine.

Fluorescenza

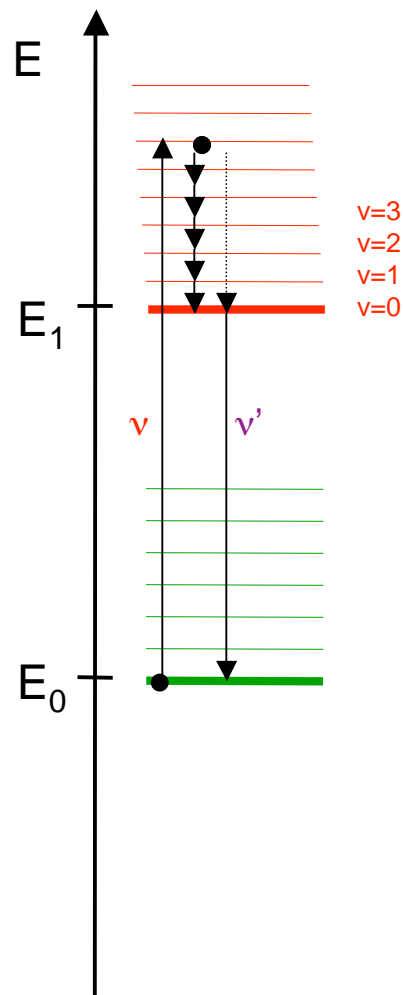
Rispetto a quanto detto in precedenza ci sono due caratteristiche aggiuntive degli spettri elettronici:

- 1) Vale la regola di selezione $\Delta m_s = 0$
- 2) Ogni livello elettronico in realt  e' diviso in sottolivelli vibrazionali con numero quantico v .
Un'altra regola di selezione e' $\Delta v = \pm 1$ (all'interno dello stesso stato elettronico).



Le transizioni possono avvenire tra qualsiasi livello vibrazionale, a patto che soddisfino le regole di selezione e la conservazione dell'energia.

Le energie $h\nu$ tra due livelli vibrazionali adiacenti corrispondono a emissioni nell'infrarosso ($\nu=10^{12}$ Hz)



Oltre all'emissione di fotoni nell'infrarosso, l'energia può passare agli atomi vicini attraverso urti ("interconversione interna"). In questo caso non devono essere soddisfatte le regole di selezione. Questo processo prende 10^{-8} s (contro i 10^{-15} del decadimento spontaneo).

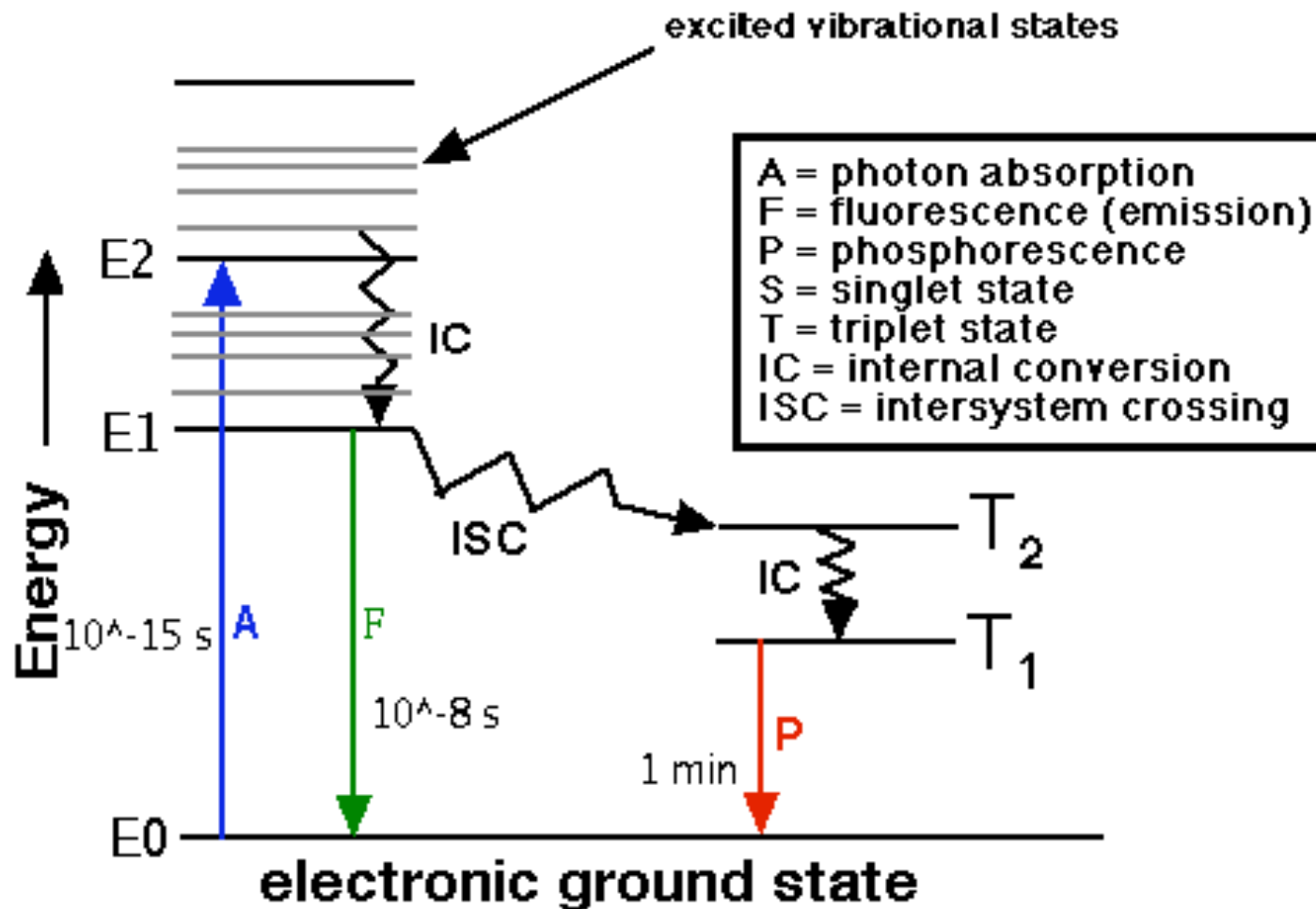
Se questo avviene, può essere che il sistema emetta un fotone a frequenza minore del fotone che ha causato l'eccitazione.

Questo fenomeno si chiama FLUORESCENZA.

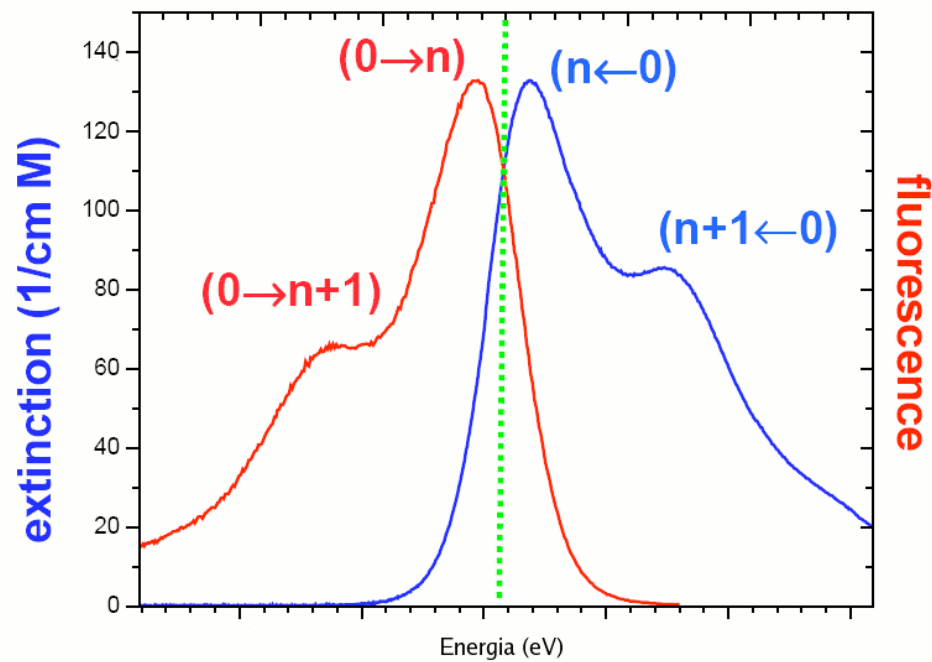
Il passaggio di energia attraverso gli urti dipende in modo critico dall'ambiente che circonda l'atomo (acqua, ponti idrogeno, ecc), per cui l'intensità di fluorescenza sarà sensibile all'ambiente circostante (mentre questo non è vero per le transizioni elettroniche pure).

In una molecola il numero quantico di spin è importante! Tipicamente ci sono stati di “singoletto” ($s=0$) e stati di “tripletto” ($s=1$). La regola di selezione proibisce transizioni elettroniche tra $s=0$ e $s=1$. Se l'energia passa attraverso urti da uno stato di singoletto a uno stato di tripletto, il decadimento allo stato fondamentale ($s=0$) è proibito (cioè è improbabile, tempo dell'ordine dei minuti).

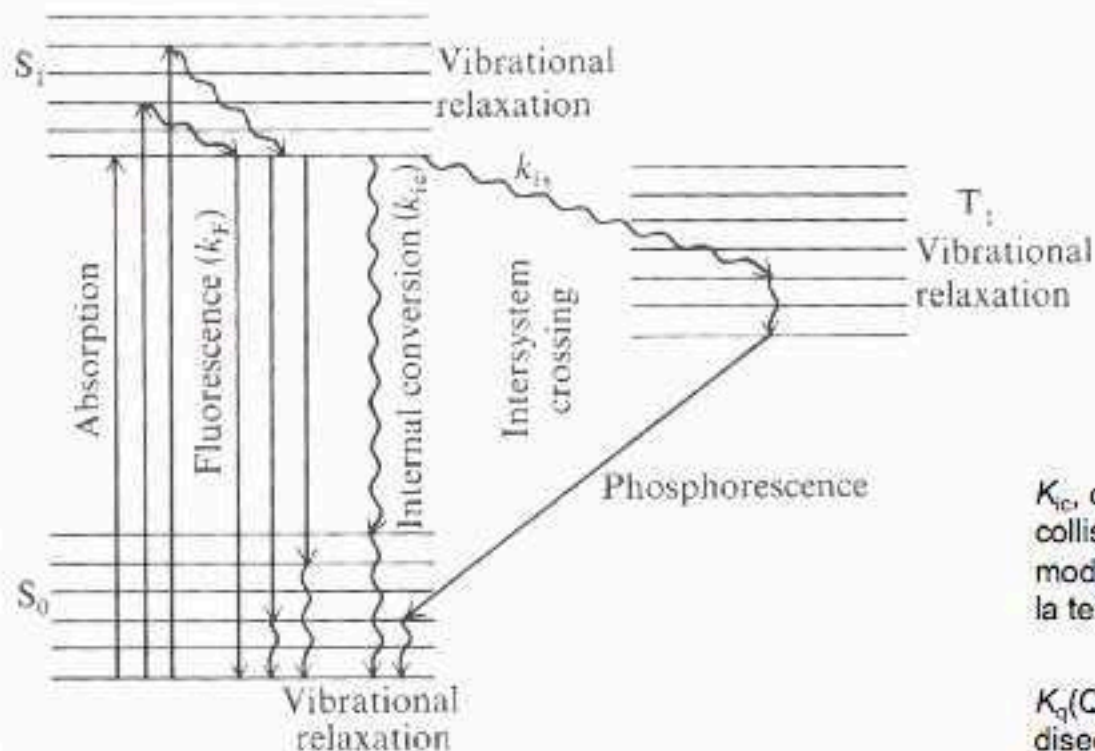
Questo fenomeno si chiama FOSFORESCENZA.



Un tipico spettro di fluorescenza e' fatto cosi':



- 1) Lo spettro di emissione (fluorescenza) ha energia piu' bassa di quello di assorbimento.
- 2) E' simmetrico
- 3) Viene emesso in ritardo (10^{-8} s) rispetto all'assorbimento



K_{ic} , conversion interna:
collisione con il solvente o dissipazione attraverso
modi vibrazionali interni (contributi che crescono con
la temperatura)

$K_q(Q)$, quenching:
diseccitazione dovuta a collisione o altra interazione
con molecole in soluzione con le caratteristiche di
quencher dello stato di singoletto

Quantum yield della fluorescenza:
(rapporto tra fotoni emessi e fotoni assorbiti)

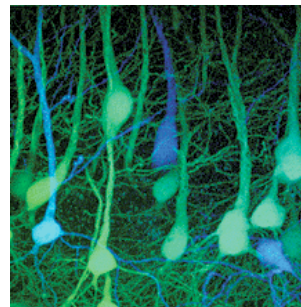
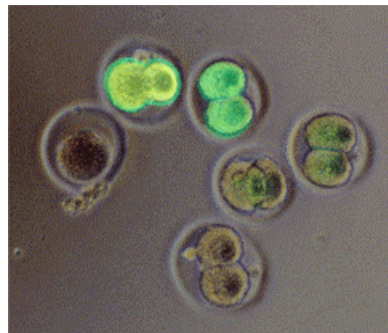
$$\phi_F = \frac{k_F}{k_F + k_{ic} + k_{is} + k_q(Q)}$$

Perche' e' importante in biologia?

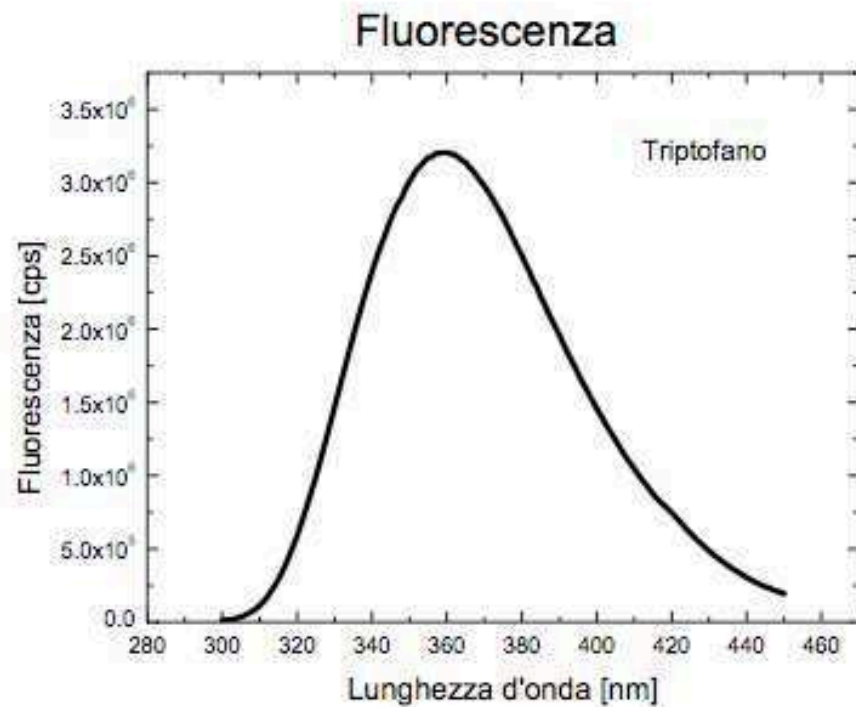
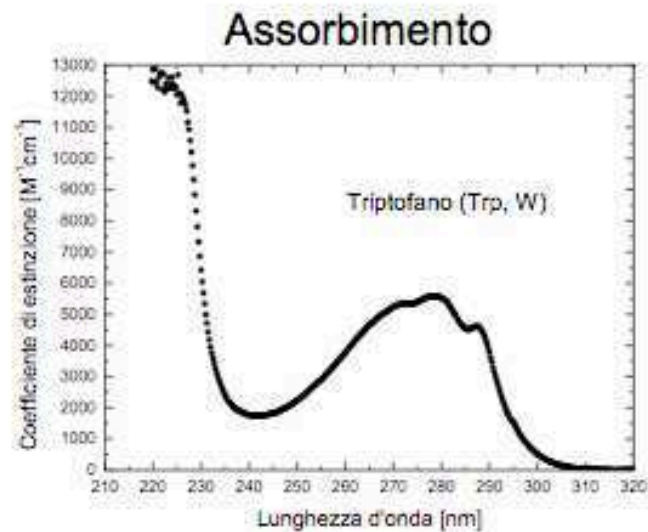
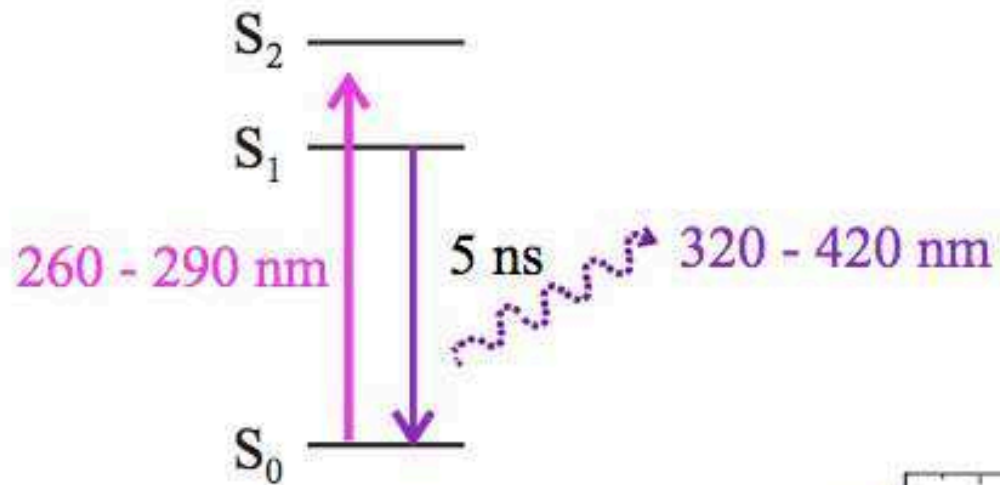
- * perche' gli aminoacidi aromatici (fenilalanina, istidina, triptofano e tirosina) emettono luce di fluorescenza, in particolare il triptofano ha uno spettro piu' intenso degli altri. Questa luce dipende dall'ambiente circostante e permette di ottenere informazioni sullo stato di una proteina (es. se un TRP e' nascosto o esposto all'acqua).

- * perche' e' sempre possibile attaccare delle piccole molecole fluorescenti, tipo la fluorescina, a molecole non fluorescenti molto piu' grandi tipo DNA e proteine

- * perche' si puo' inserire il gene di una proteina fluorescente (GFP) in qualsiasi parte del DNA.

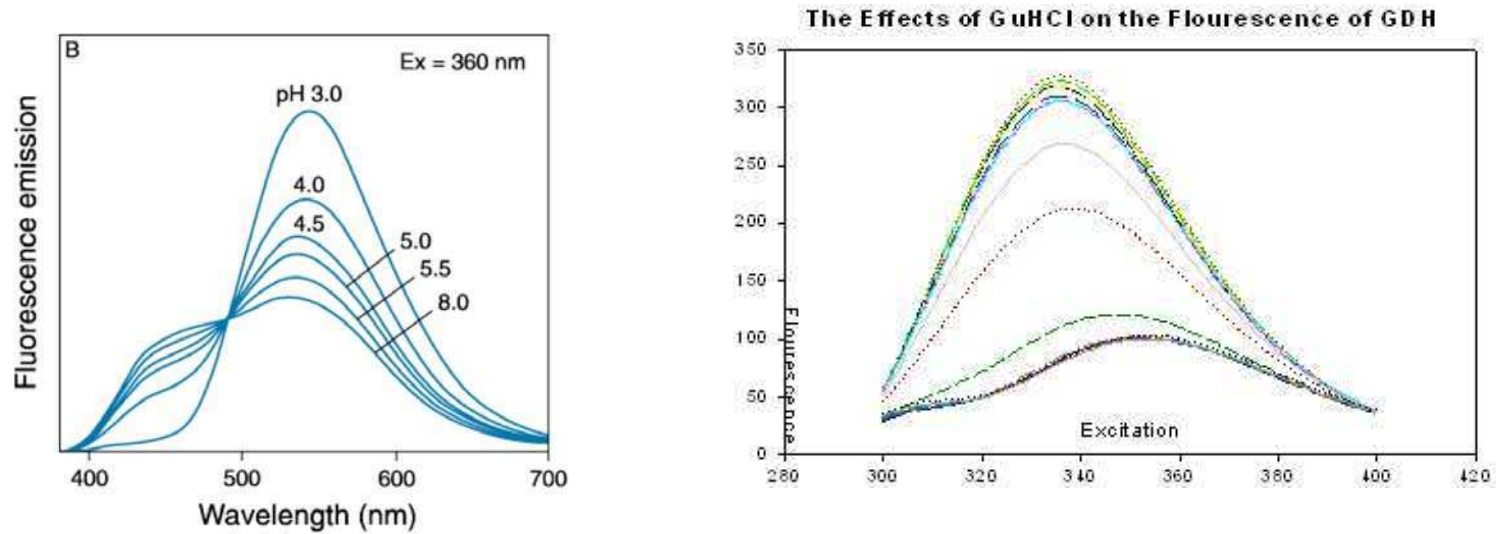


Triptofano

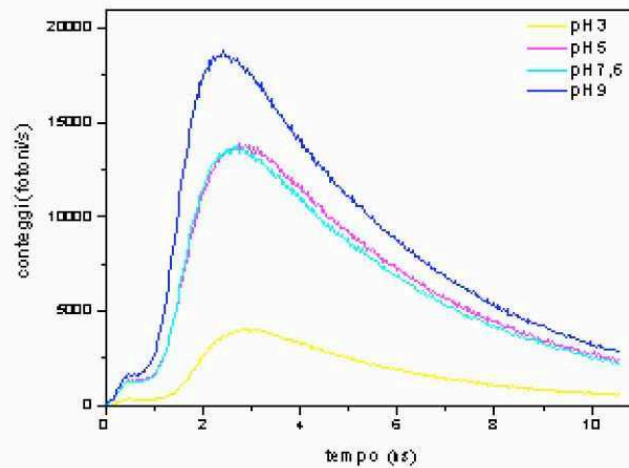


ESEMPI DI COSA MISURO:

- * Intensita' della fluorescenza in funzione dell'ambiente (pH, temperatura, ...)



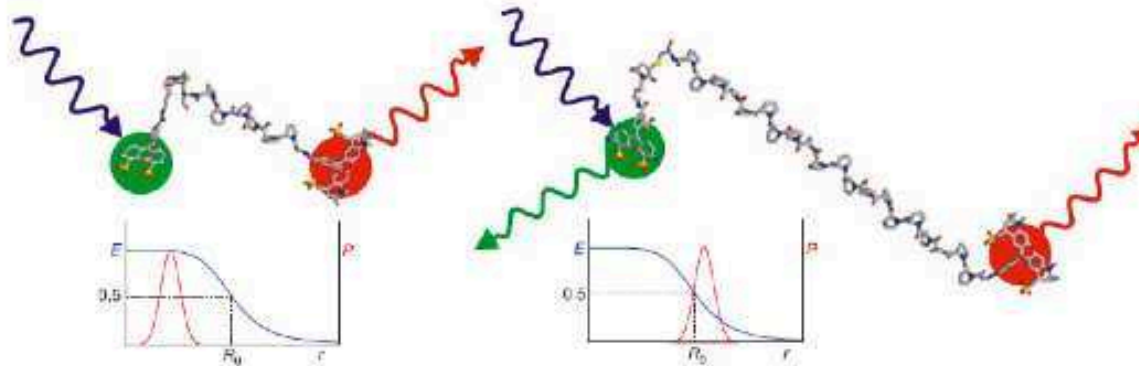
- * intensita' delle fluorescenza in funzione del tempo (misure del tempo di vita di fluorescenza)



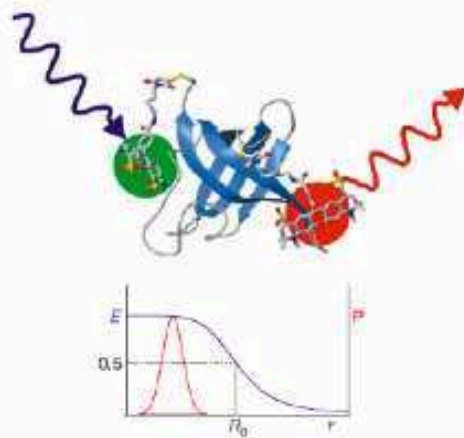
FRET: Förster Resonance Energy Transfer

L'energia di eccitazione passa da una molecola ad un'altra vicina (fino a 80\AA), che emette per fluorescenza.

Rigid spacer: Poly-Proline



Folded Protein



Unfolded Protein

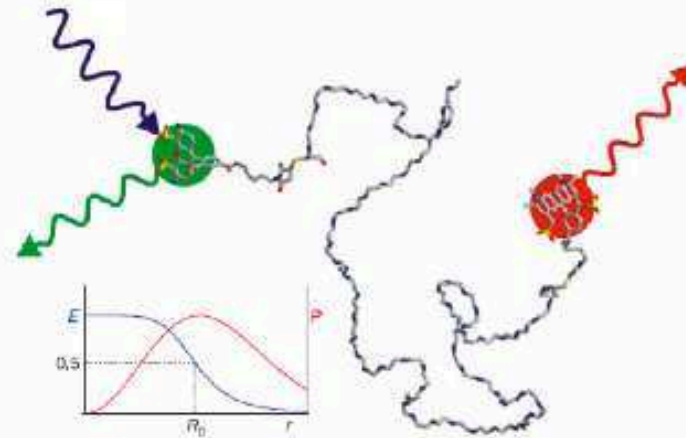


figure gentilmente prestate da Marco Buscaglia

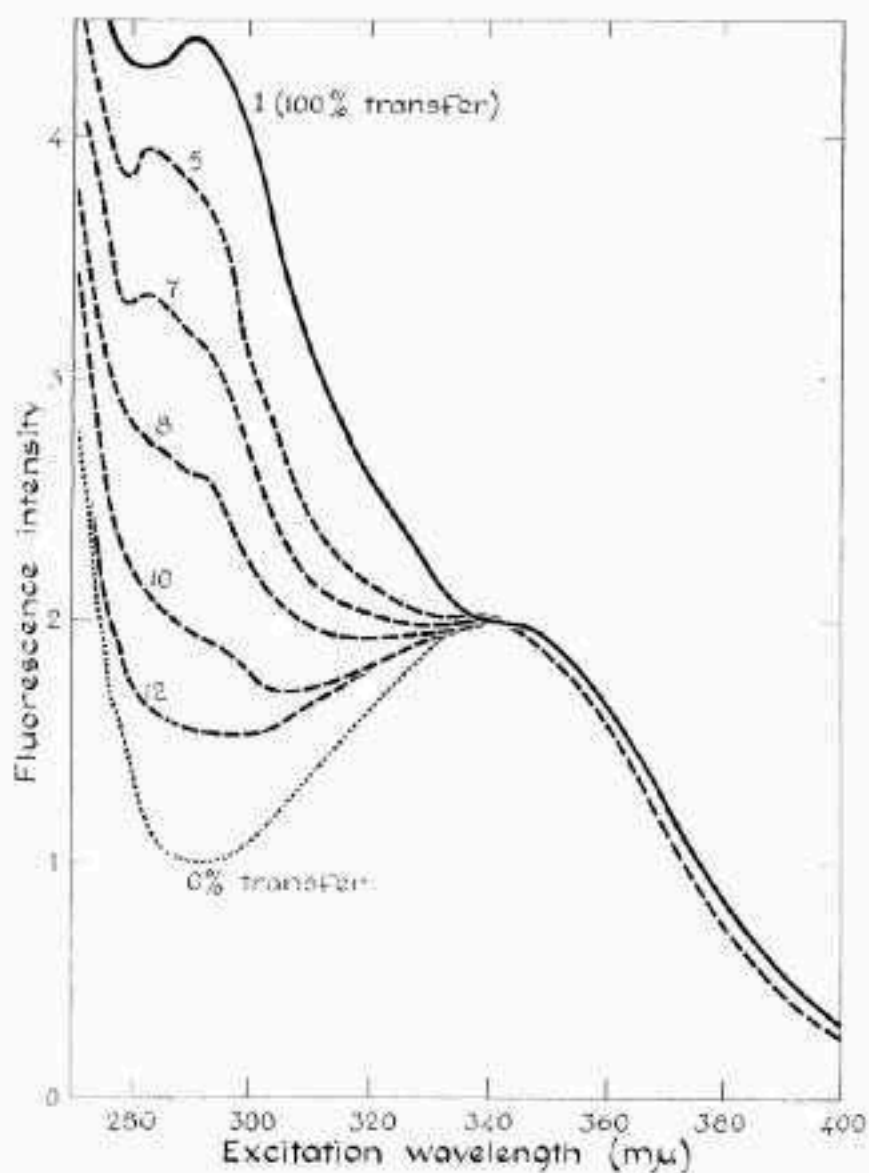


FIG. 3.—Excitation spectrum of dansyl-L-prolyl-hydrazide (....., 0% transfer), dansyl-L-prolyl- α -naphthyl (——, 100% transfer), and dansyl-(L-prolyl) α - α -naphthyl (----, $n = 5, 7, 8, 10, 12$) in ethanol.

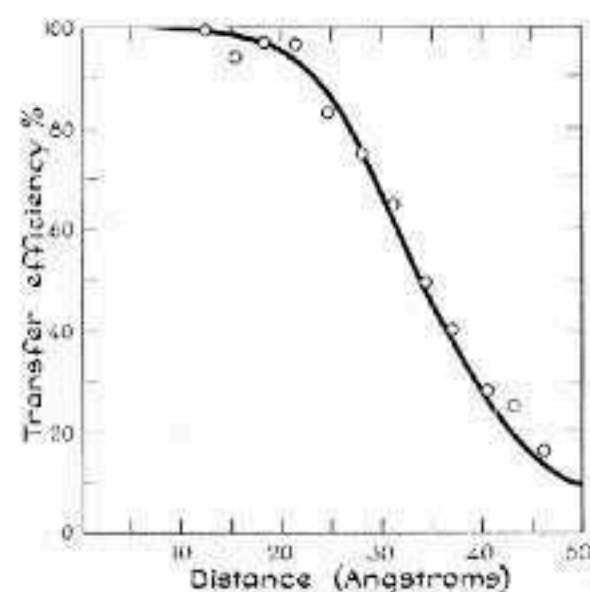


FIG. 4.—Efficiency of energy transfer as a function of distance in dansyl-(L-prolyl) α - α -naphthyl, $n = 1$ to 12. The α -naphthyl and dansyl groups were separated by defined distances ranging from 12 to 46 Å. The energy transfer is 50% efficient at 34.6 Å. The solid line corresponds to an r^{-6} distance dependence.

$$E(r) = \frac{1}{1 + \frac{r^6}{R_0^6}}$$