

GRAVIMETRIA PARTE I:
MOTI DELLA TERRA
GRAVITA' TERRESTRE E GEOIDE

Corso di Geofisica Ambientale e Applicata
Anno Accademico 2003-2004
Prof.ssa Gabriella Losito

Revisione: Ing. Rossana Angelini

1. CAMPO GRAVITAZIONALE

E' noto che la legge di gravitazione universale, formulata da Newton nel 1687, ci fornisce la forza d'attrazione che si esercita tra due masse supposte puntiformi m e M poste a distanza r :

$$\bar{F} = G \frac{Mm}{r^2} \text{vers}\bar{r} \quad [1],$$

dove G è la costante di gravitazione universale che nel sistema c.g.s. vale $6.672 \cdot 10^{-8} \text{ cm}^3 \text{ g}^{-1} \text{ s}^{-2}$ e nel S.I. vale $6.672 \cdot 10^{-11} \text{ m}^3 \text{ kg}^{-1} \text{ s}^{-2}$.

Da questa formula è possibile ottenere l'espressione del potenziale prodotto in un punto generico $P(x,y,z)$ da una massa M , posta in un punto $Q(a,b,c)$ usando come massa esplorante in P una massa unitaria ($m=1$). Sarà allora

$$|\bar{F}| = |\bar{g}|$$

e le componenti cartesiane di \bar{g} risultano :

$$g_x = G \frac{M}{r^2} \cdot \frac{a-x}{r} ; \quad g_y = G \frac{M}{r^2} \cdot \frac{a-y}{r} ; \quad g_z = G \frac{M}{r^2} \cdot \frac{a-z}{r}.$$

Poiche' $r^2 = (a-x)^2 + (b-y)^2 + (c-z)^2$, la sua derivata rispetto ad x vale :

$$2r \frac{\partial r}{\partial x} = 2(x-a) ;$$

$$\text{quindi si ottiene } \frac{\partial r}{\partial x} = \frac{2(x-a)}{2r} ; \quad \frac{\partial r}{\partial x} = \frac{(x-a)}{r}$$

d'altra parte varrà anche :

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{r} \right) = - \left(\frac{1}{r^2} \right) \frac{(x-a)}{r} ; \quad \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{r} \right) = - \frac{x-a}{r^3}.$$

Le componenti cartesiane di \bar{g} risultano dunque :

$$g_x = GM \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{r} \right) ; \quad g_x = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{GM}{r} \right)$$

$$g_y = GM \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{1}{r} \right) ; \quad g_y = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{GM}{r} \right)$$

$$g_z = GM \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{1}{r} \right) ; \quad g_z = \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{GM}{r} \right)$$

L'argomento fra parentesi e' proprio il POTENZIALE generato dalla massa M in un punto P posto a distanza r dalla massa stessa:

$$U_{(x,y,z)} = \left(\frac{GM}{r} \right) \quad [2].$$

In conclusione quindi si può scrivere:

$$g_x = \frac{\partial U}{\partial x}$$

$$g_y = \frac{\partial U}{\partial y} \quad [3];$$

$$g_z = \frac{\partial U}{\partial z}$$

U rappresenta una superficie equipotenziale. Il campo gravitazionale e' orientato verso potenziali crescenti ed e' perpendicolare ad una superficie equipotenziale.

$$U_{(x,y,z)} - U_0 = 0.$$

La relazione [1] continua a valere per ogni corpo di forma sferica posto all'esterno della "superficie" che racchiude le masse, o a strati sferici concentrici omogenei: in tal caso la distanza r che compare nella relazione, è da intendersi come distanza tra i centri di massa dei due corpi. Così, ad esempio, la terra e la luna dal punto di vista della mutua attrazione si comportano come se la loro massa fosse concentrata nel centro di massa, inoltre il SOLE e la LUNA interagiscono con la massa terrestre in modo continuo nel tempo, ma variabile nello spazio e producono variazioni del campo gravitazionale terrestre in modo apprezzabile sia mediante osservazioni indirette (maree), sia mediante misure dirette della gravità.

Masse astrali quali pianeti del Sistema Solare interagiscono debolmente con il campo gravitazionale terrestre, alterazioni della gravità possono essere anche prodotte da "passaggi" di comete.

2. MOTI DELLA TERRA

2.1 ROTAZIONE

La terra ruota intorno al proprio asse con velocità $\omega = 73 \cdot 10^{-6} \text{ rad s}^{-1}$, (465 m/s all'equatore) ed impiega per una rotazione completa $T_d = 23\text{h } 56' 04''$. Il moto risulta essere perturbato da:

- cause secolari, dovute all'attrito delle onde del mare sulla crosta terrestre
- cause meteorologiche, dovute all'attrito delle masse di aria sulla crosta terrestre

2.2 RIVOLUZIONE

La Terra inoltre ruota intorno al Sole con un periodo di rivoluzione $T_r = 365\text{d } 4\text{h } 9' 26''$. A causa dell'ellitticità della sua orbita di rivoluzione varia la distanza dei centri di massa Terra – Sole:

$$D_{\text{media}} = 150 \cdot 10^9 \text{ m}$$

$$D_{\text{Afelio}} = 152 \cdot 10^9 \text{ m}$$

$$D_{\text{Perielio}} = 147 \cdot 10^9 \text{ m}$$

In base alla II legge di Keplero (conservazione del momento angolare) si osservano le diverse velocità:

$$\text{Velocità all'Afelio } V_A = 29.274 \text{ km/s}$$

$$\text{Velocità al Perielio } V_P = 30.268 \text{ km/s}$$

$$\text{Velocità media } V_m = 29.263 \text{ km/s}$$

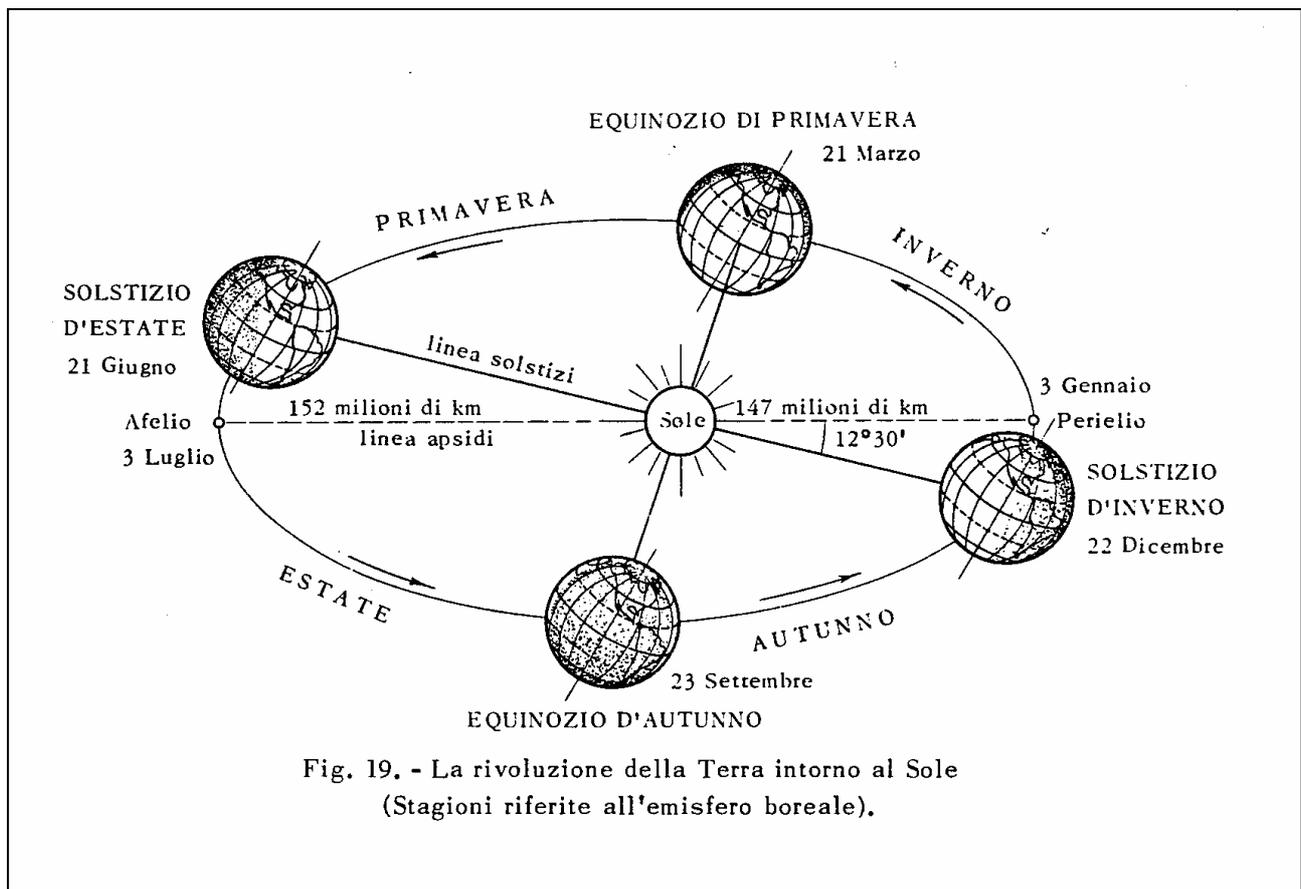


Fig.1 – La rivoluzione della Terra intorno al Sole; le stagioni sono riferite all'emisfero boreale [da Vialli]

2.3 PRECESSIONE DEGLI EQUINOZI

La Precessione degli Equinozi PE, è prodotta dall'ATTRAZIONE SOLARE agente in modo diverso sulle "masse" che compongono la Terra (in questo caso la massa terrestre non si considera

concentrata in un unico punto). La PE produce l'oscillazione dell'asse terrestre attorno al suo centro e lo schiacciamento polare.

La PE ha un periodo $T_{PE} = 25800$ anni.

2.4 NUTAZIONE

La Nutazione è causata dalla azione differenziata della LUNA sulle masse terrestri e dalla ELLITTICITA' dell'orbita terrestre.

La Nutazione produce piccole oscillazioni dell'asse terrestre, che si sovrappongono alla Precessione degli Equinozi; il suo periodo è $T_N = 18.5$ anni.

2.5 TRASLAZIONE DEL SISTEMA SOLARE (TSS)

La TSS, avviene verso la costellazione di ERCOLE e della LYRA con velocità $V_{TSS} = 600$ km/s.

2.6 POLODIA (PO)

La polodia è lo spostamento dei poli prodotto dalle OSCILLAZIONI LIBERE DELLA TERRA; questo spostamento è caratterizzato da un periodo $T_{PO} = 430$ giorni.

3. GRAVITA' TERRESTRE E GEOIDE

Un corpo che si trova sulla superficie terrestre è partecipe esso stesso del moto della terra: su di esso agiranno, oltre alla forza di gravitazione universale dovuta alla massa propria della terra, anche le cosiddette forze apparenti, dovute alla non inerzialità del sistema di riferimento terrestre.

La più importante tra queste è la forza centrifuga, causata dalla rotazione della terra attorno al proprio asse, che avviene con velocità $\omega = 73 \cdot 10^{-6} \text{ rad s}^{-1}$.

La forza di gravità agente su una massa unitaria ($m=1$) posta nel punto $P(x,y,z)$ sulla superficie della terra, si può definire come la risultante di (Fig.2):

- l'attrazione Newtoniana \overline{F}_g di tutti i punti che costituiscono la massa della Terra, diretta secondo la congiungente il punto con il centro di massa della terra (CM) e il cui modulo vale:

$$F_g = \frac{GM_T}{R^2} \quad [4],$$

dove G è la costante di gravitazione universale, M_T è la massa della terra e R è il raggio della Terra (che per ora supponiamo sferica);

- la componente \bar{f} della forza centrifuga \bar{f}_c diretta sempre secondo la congiungente il punto con CM, il cui modulo vale:

$$f = f_c \cos(\varphi) = (\omega^2 d) \cos(\varphi) = [\omega^2 R \cos(\varphi)] \cos(\varphi) = \omega^2 R \cos^2(\varphi) \quad [5],$$

dove φ è la latitudine geocentrica (l'angolo al centro della terra compreso tra la congiungente il punto P e il piano equatoriale), d è la distanza dall'asse di rotazione, R è il raggio della terra; questa componente si può ritenere indipendente dal tempo solo in prima approssimazione, a causa delle perturbazioni a cui è soggetto il moto rotatorio della terra.

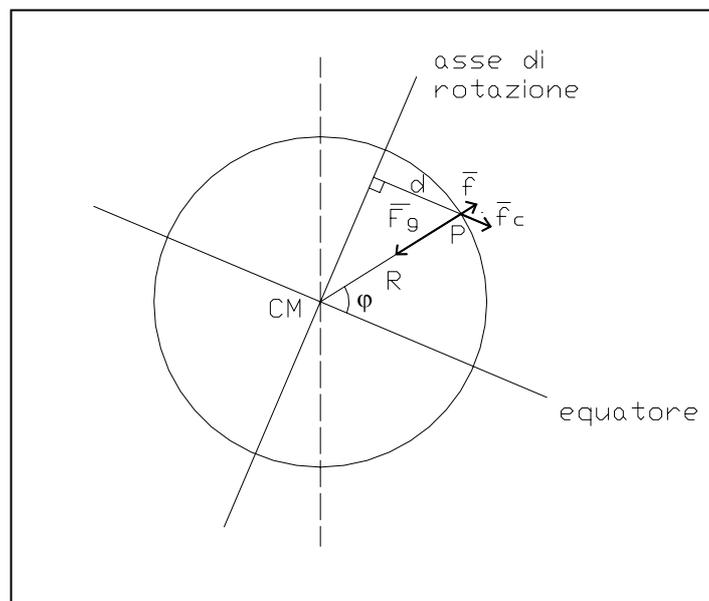


Fig. 2 – Componenti della forza di gravità; per il significato dei simboli si veda il testo

La direzione della forza di gravità, individuata dalla direzione del filo a piombo, è per definizione la verticale. L'accelerazione che compete alla forza di gravità si indica con "g". Nel sistema c.g.s. l'unità di misura è il gal = 1 cm s⁻², mentre nel sistema SI l'unità di misura per g è: m s⁻²; una unità di misura molto usata è la g.u. = 1 μm s⁻².

L'intensità della g è quindi data da:

$$g = G \frac{M}{R^2} - \omega^2 R \cos^2 \Phi \quad [6],$$

dove Φ è la latitudine geografica, che nella formula sostituisce quella geocentrica senza alterare l'ordine di approssimazione.

Si dimostra che il campo dell'accelerazione di gravità terrestre è conservativo.

E' quindi possibile definire una funzione scalare della posizione detta *potenziale terrestre gravitazionale* U , il cui gradiente è proprio l'accelerazione di gravità stessa.

Tale potenziale può essere scritto come:

$$U = \left(\int_{V_{terra}} \frac{dm}{r} + \frac{\omega^2 d^2}{2} \right) \quad [7],$$

dove V_{terra} è il volume della terra ed il significato degli altri simboli è illustrato in Fig. 3.

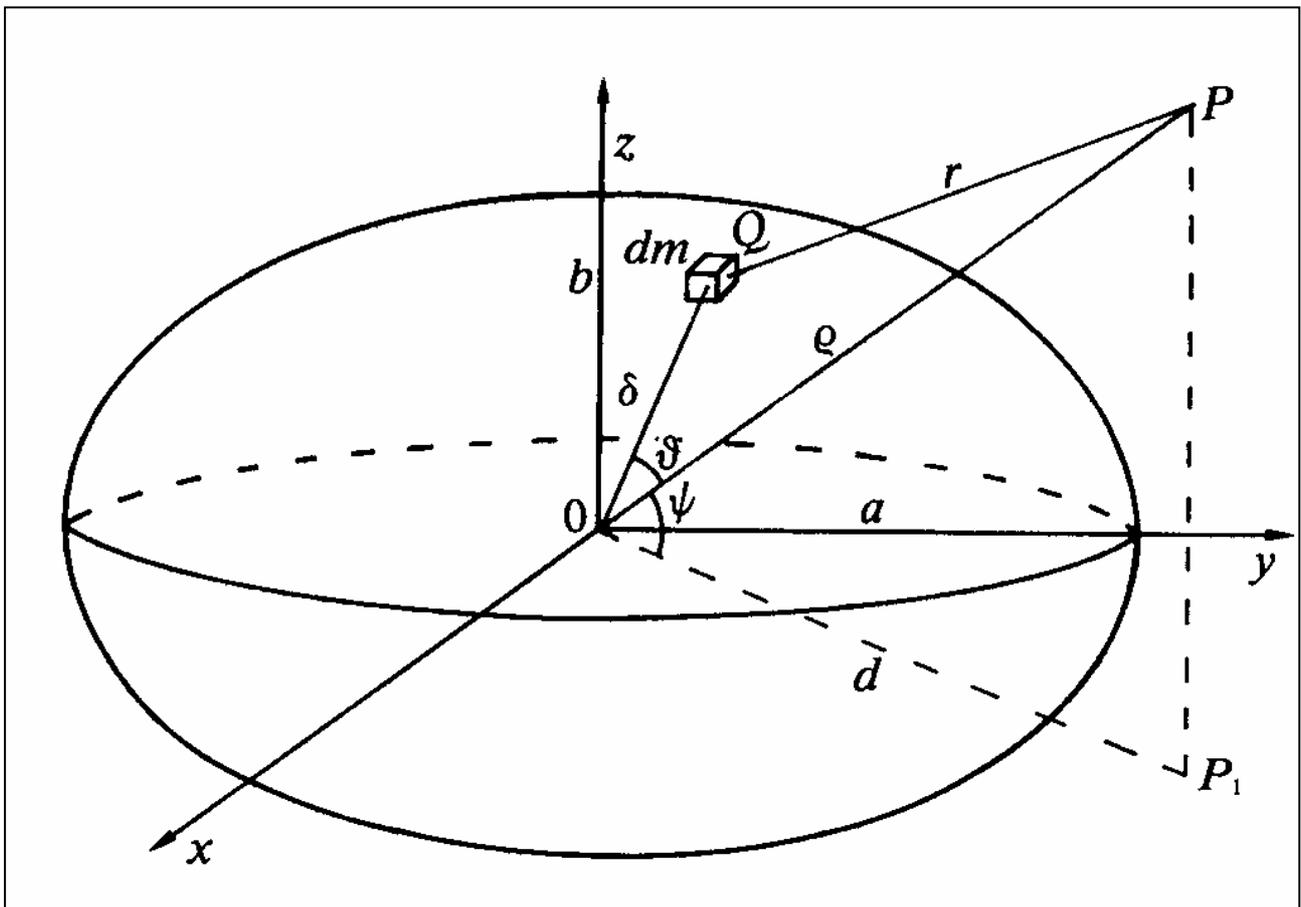


Fig.3 – L'ellissoide di rotazione terrestre [da Norinelli]

Le superfici su cui la funzione potenziale è costante sono dette *superfici equipotenziali* e sono definite dalla condizione di essere in ogni punto perpendicolari alle linee di forza (infatti il gradiente è sempre ortogonale alle superfici di livello).

Si dimostra che le superfici equipotenziali hanno in prima approssimazione una forma ellissoidica e non hanno punti di intersezione.

La necessità di dare una forma matematica alla superficie terrestre ha portato all'introduzione del Geoide, che è la superficie equipotenziale di riferimento che passa per il Livello Medio Marino (l.m.m.) in un determinato luogo, in una determinata epoca. Il l.m.m. di un punto è ottenuto calcolando la media dei valori misurati con mareografi per un intervallo di tempo sufficientemente lungo: ciò consente di tenere conto delle variazioni locali, sia periodiche che non.

Il geoide è una superficie di individuazione estremamente complicata poiché risente di tutte le masse topografiche esterne all'ellissoide (sotto i rilievi esso si innalza e, viceversa, si abbassa in corrispondenza delle depressioni, fig. 4) e anche delle variazioni di densità interne, quindi è per noi esageratamente difficile da conoscere. Tuttavia è importante avere una superficie di riferimento che ci consenta di quotare e rappresentare i punti della superficie terrestre.

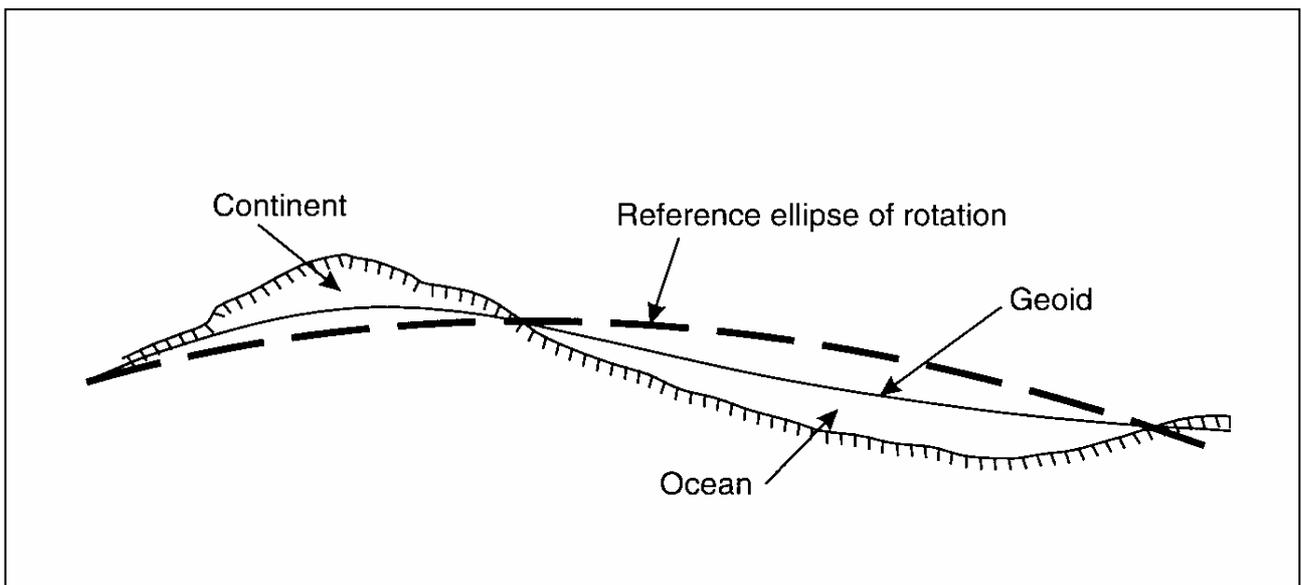


Fig.4 – Confronto tra geoidi ed ellissoide di rotazione (da Reynolds)

A seconda dell'approssimazione, che si vuole ottenere, si utilizzano (Fig.5):

- la sfera di raggio pari al raggio medio terrestre, $R = 6371$ km.
- un ellissoide di rotazione schiacciato ai poli individuabile attraverso due parametri:
 - a = semiasse maggiore o equatoriale,
 - b = semiasse minore o polare

con i due parametri ausiliari

$$s = \frac{a-b}{b}, \text{ schiacciamento}$$

$$\frac{dg}{dp} \cong 51851 \text{ sec}^{-1} \text{ con } e \text{ definita eccentricità;}$$

è interessante sottolineare che, se la terra fosse un sistema di masse omogeneo ed isotropo, la sua superficie sarebbe proprio un ellissoide di rotazione.

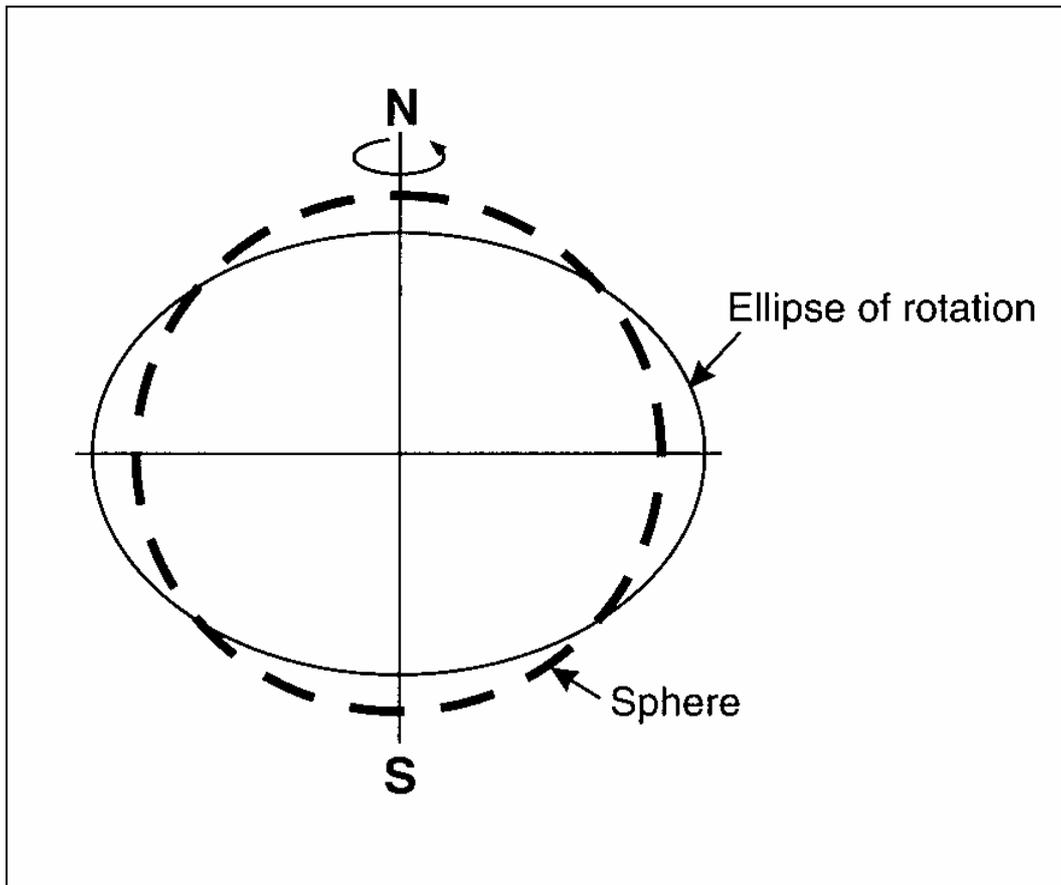


Fig.5 – Differenza esagerata tra una sfera e un ellissoide di rotazione (da Reynolds)

L'IGM ha scelto per la costruzione dei fogli 1:100.000 l'ellissoide di Bessel con $a = 6377397$ m e

$s = \frac{1}{299.2}$, un ellissoide a tre assi in cui l'equatore non è più un cerchio ma un'ellisse.

Nelle applicazioni geodetiche e geofisiche è normalmente usato un ellissoide di rotazione proposto

da Hayford nel 1909, individuato dai parametri $a = 6378388$ m e $g_z = \frac{\partial(GM)}{\partial(r)}$; questo è stato assunto

nel 1924 come ellissoide internazionale di riferimento dall'U.G.G.I.

Tuttavia l'ellissoide così definito non è una superficie equipotenziale, se non nel caso puramente teorico in cui il corpo terrestre sia supposto omogeneo.

Il vantaggio che una superficie del genere comporta è però quello di essere estremamente semplice: per questo motivo sono state sviluppate su di esso tutte le formule della geodesia operativa e si è assunto come superficie di riferimento per il vettore di gravità.

La **formula, praticamente usata per la determinazione della gravità normale sull'ellissoide internazionale**, ha la seguente forma:

$$g = g_0 \left[1 - \frac{3}{2} \sin^2 \Phi + k \sin^2 \Phi \right] \quad [8],$$

dove $\Phi(\text{rad})$ è sempre la latitudine geografica. La g_0 fornita dalla formula è in c.g.s. e riproduce i valori assoluti di gravità misurati a livello del mare con uno scarto di $1 \mu\text{m}/\text{s}^2$.

I valori normali, teorici, così calcolati andranno confrontati con i valori osservati e convenientemente ridotti, onde avere un criterio per dedurre le anomalie.

La forza di gravità è stata definita come risultante di due forze indipendenti dal tempo ma il valore della g misurata è influenzato anche da forze dipendenti dal tempo di cui bisogna conoscere il contributo:

- forze agenti a lungo periodo, derivanti sia da spostamenti di masse interne che esterne (non hanno importanza dal punto di vista pratico);
- forze agenti a breve periodo, derivanti dalla non uguale attrazione dei corpi celesti nel tempo, in particolare dalle variazioni di attrazione in un punto della terra esercitate dal Sole (per la grande massa) e dalla Luna (per la sua vicinanza).

Queste ultime danno origine ad una variazione diurna dell'intensità della gravità sulla superficie terrestre chiamata sinteticamente *marea gravimetrica* (Fig.6), che si traducono in spostamenti sia delle masse liquide (maree in senso tradizionale, ossia spostamenti dell'acqua di oceani, mari, laghi), che delle masse solide (maree terrestri). L'ordine di grandezza del valore massimo di questa marea gravimetrica è di 0.1 mgal.

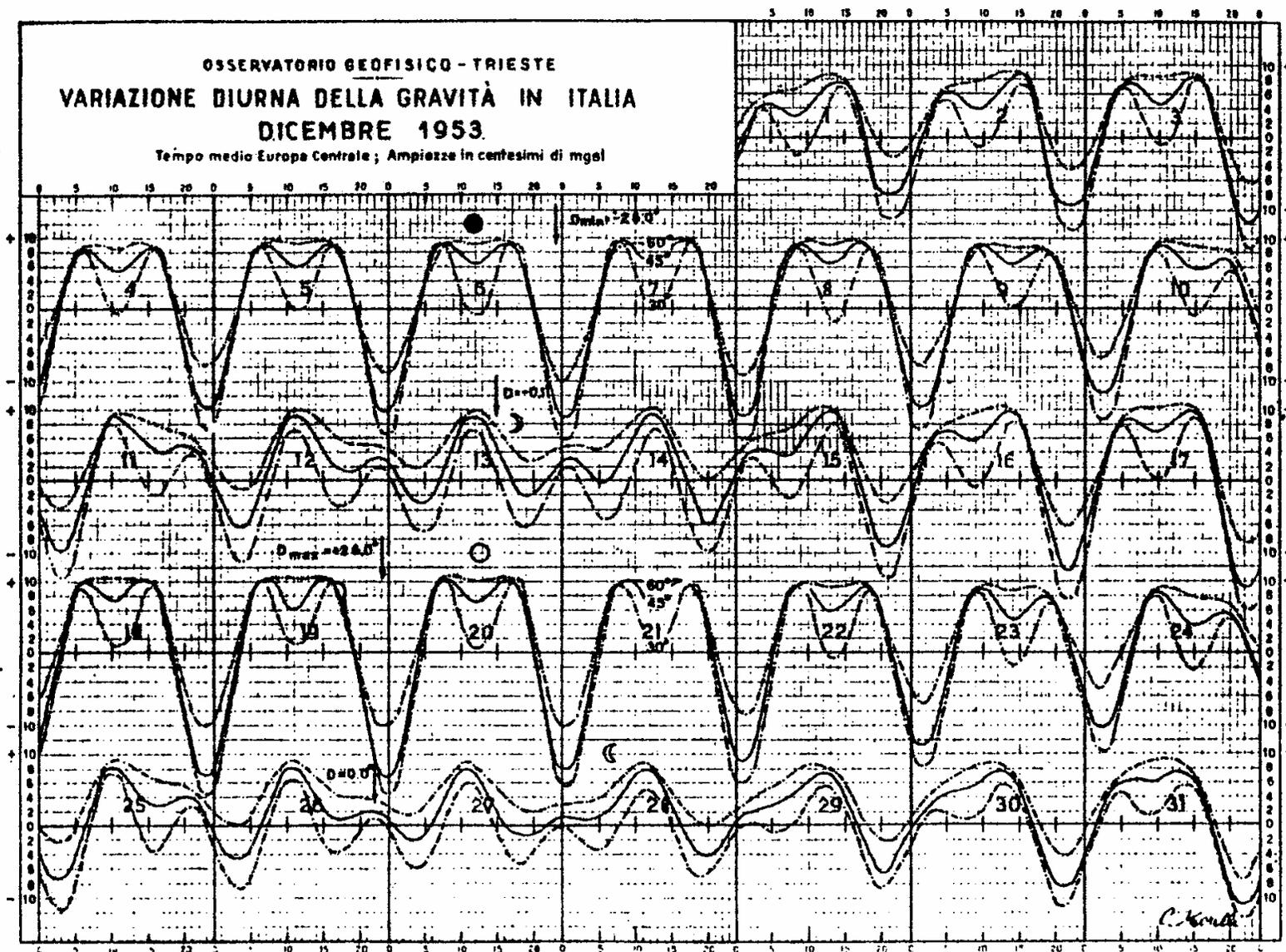


Fig. 6 – Variazione diurna della gravità in Italia; l'unità di misura è il centesimo di mgal (da Morelli)

Sappiamo che le forze di marea sono una conseguenza della variazione nel tempo dell'attrazione esercitata dalla Luna e dal Sole sul punto di misura terrestre. Tuttavia è più importante l'effetto attrattivo della Luna a causa della sua vicinanza con la Terra (il rapporto tra forza di attrazione Luna - Terra e Sole - Terra è di 2.2:1). Utilizzando un modello semplificato, consideriamo la Terra ricoperta da un velo d'acqua di uniforme profondità, ed il sistema Terra - Luna in equilibrio meccanico, mentre i due corpi celesti compiono un moto di rivoluzione intorno all'asse che passa per il centro di massa del sistema, il quale si trova all'interno della superficie terrestre, a circa 1600 km di profondità. Quando i due corpi ruotano intorno al centro del sistema, entrano in gioco due forze: la forza di reciproca attrazione gravitazionale e la forza centrifuga. La forza di attrazione lunare (vedi Fig.7) sarà massima nel punto A, più vicino alla Luna, e minimo nel punto B, agli antipodi di A; la forza centrifuga invece sarà massima in B, lontano dal centro di rotazione del sistema, e minima in A, vicino a tale punto. Componendo le due forze in ogni punto si avranno delle forze risultanti di cui, quella in A è rivolta verso la Luna, perché prevale la forza di attrazione, mentre in B è rivolta in senso opposto perché prevale la forza centrifuga. In conseguenza di ciò si ha un accumulo di acqua lungo l'asse A - B e un abbassamento di livello lungo l'asse ad esso ortogonale; la superficie del mare tende ad avere una forma ellissoide il cui asse maggiore passa per la congiungente Terra - Luna.

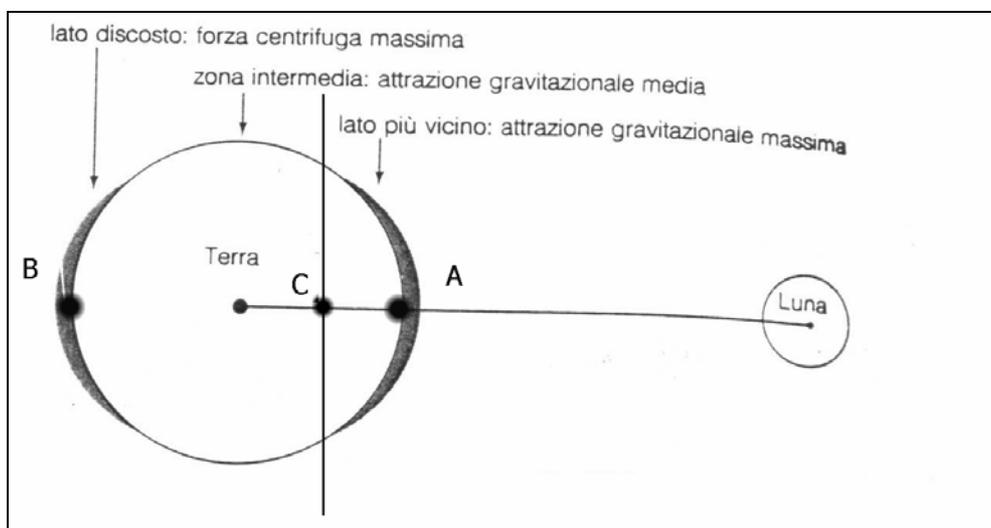


Fig. 7 – Variazione del baricentro del sistema Terra-Luna [da Braitenberg]

Nonostante che molteplici siano i contributi che influenzano il valore della g misurata, quello dovuto all'attrazione newtoniana della massa terrestre è di gran lunga il più importante. Se supponiamo la Terra sferica con $R = 6378$ km e $g = 980$ gal, si può stimare un valore medio della

densità terrestre pari a 5.52 g/cm^3 corrispondente al doppio della densità media delle rocce della crosta uguale a 2.67 g/cm^3 . Bisogna supporre quindi che esista una distribuzione concentrica di masse a densità crescente con la profondità.. Lo studio della distribuzione della velocità delle onde sismiche ha evidenziato varie superfici di discontinuità (vedi Fig.8):

- sup. MOHO, discontinuità tra crosta e mantello a profondità variabile tra 5 km (per la crosta oceanica) e 70 km (per la crosta continentale in corrispondenza delle montagne);
- sup. di WIECHET – GUTENBERG, discontinuità tra mantello e nucleo esterno a circa 2900 km di profondità;
- sup. di discontinuità tra nucleo esterno ed interno a circa 5150 km.

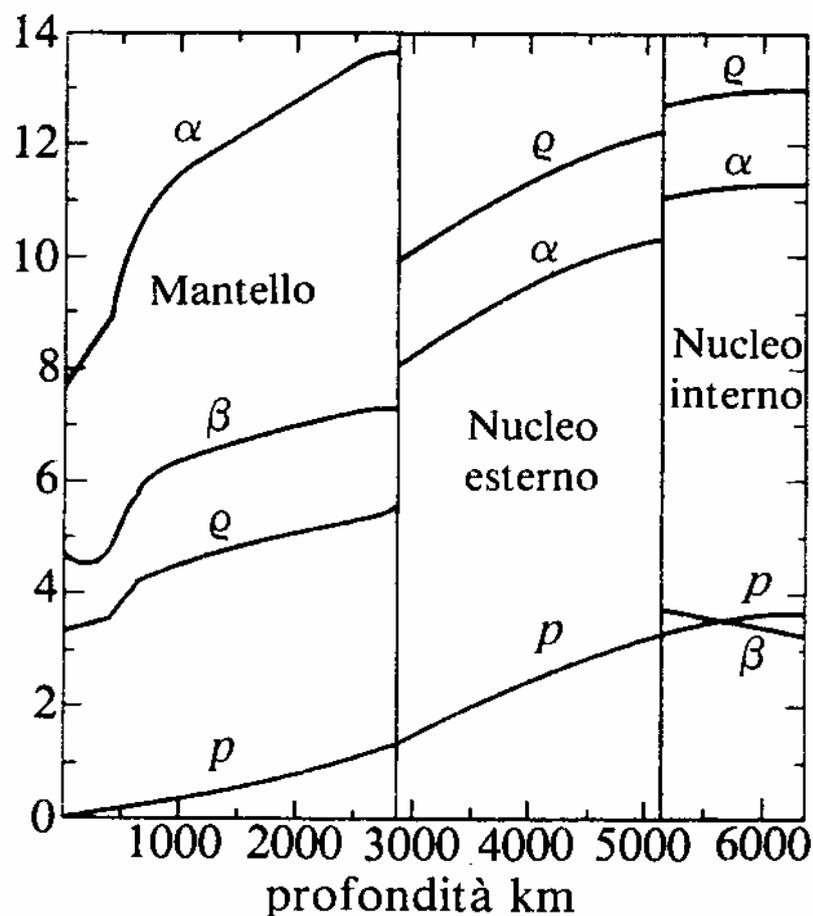


Fig.8 - Distribuzione all'interno della Terra, in funzione della profondità (km), di: densità $\rho(\text{g/cm}^3)$, pressione $p(10^{11} \text{ N/m}^2)$; velocità α e β (km/s) delle onde P e S [da Norinelli]

GRAVIMETRIA PARTE II:
DETERMINAZIONI SPERIMENTALI DELLA GRAVITÀ

Corso di Geofisica Ambientale e Applicata
Anno Accademico 2003-2004
Prof.ssa Gabriella Losito

Revisione: Ing. Rossana Angelini

1. INTRODUZIONE

La misura di g può avvenire attraverso uno qualunque dei fenomeni influenzati da g , ma in pratica si ricorre al principio del dinamometro nel metodo statico, mentre i metodi dinamici più comuni si basano sull'isocronia delle piccole oscillazioni del pendolo semplice oppure sulle leggi che regolano la caduta libera dei gravi. La misura di g può essere assoluta, se indipendente dagli altri valori di g , relativa se si misura solo la differenza o il rapporto con un valore di g noto.

Le misure assolute di g sono difficili da ottenere a causa dell'impossibilità di eliminare alcuni errori sistematici. Pertanto le poche misure di g assolute sono di competenza di istituti specializzati ed oramai eseguite solo per delle revisioni.

2. MISURE ASSOLUTE

I procedimenti più usati sono:

- a) Pendolo a reversione di Kater (1818)
- b) Caduta libera dei gravi :

Si sfrutta la relazione $s = v_0 t + \frac{1}{2} g t^2$ e si misura il tempo t che un corpo impiega a percorrere verticalmente una distanza s ; facendo le misure dei tempi t_1 e t_2 , relativi rispettivamente ai percorsi s_1 e s_2 compiuti da un grave lasciato cadere, si ottiene:

$$g = \frac{2(s_2 t_1 - s_1 t_2)}{t_1 t_2 (t_2 - t_1)} \quad [1];$$

Metodi sofisticati di misura (metodo delle due stazioni) si ottengono con lancio della massa verso l'alto e uso di raggi laser per misurare le quote.

3. MISURE RELATIVE

Le misure relative di g (cioè la misura della differenza di gravità tra due punti) possono essere fatte con il metodo pendolare o con i gravimetri.

3.1 METODO PENDOLARE

Il metodo pendolare si basa sull'ipotesi di ammettere la costanza della lunghezza del pendolo semplice equivalente nei vari luoghi e sulla misura del periodo di oscillazione del pendolo. In questo modo si ricava la Δg .

3.1.1 Teoria del pendolo matematico

La teoria del pendolo matematico si basa sull'ipotesi di un punto materiale di massa m vincolato, per mezzo di un filo flessibile, inestendibile ed imponderabile, ad un punto O' ; il punto è libero di muoversi in un piano verticale lungo un arco di circonferenza di centro O' (detto centro di sospensione o 'vincolo') ed è libero di oscillare attorno al punto di equilibrio O (detto centro di oscillazione) conservando il suo piano di oscillazione.

Per il II principio della dinamica vale : $\mathbf{F} = m\mathbf{a}$ cioè $\mathbf{F} = m\mathbf{g}$.

Questa forza è scomponibile in 2 componenti (vedi Fig.1):

- 1) una diretta secondo la direzione del filo, compensata dalla reazione del filo-vincolo ;
- 2) l'altra perpendicolare al filo e diretta verso il punto O , di intensità $mg \sin\theta$; il moto di m è prodotto proprio da questa componente.

Se le oscillazioni di m sono molto piccole, si può confondere il valore θ con quello di $\sin\theta$, quindi la componente $mg \sin\theta$ è approssimabile con $mg \theta$, diretta secondo l'asse delle x verso O ; e l'arco descritto da m è approssimabile con un segmento dell'asse delle x .

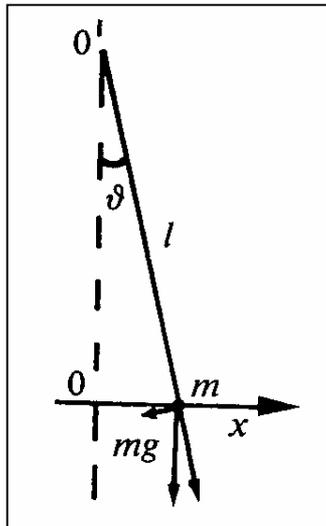


Fig.1 – Pendolo matematico [da Norinelli]

Si può dunque porre :

$$- mg = m \frac{d^2x}{dt^2} \quad [2];$$

ed essendo $x = l\theta$, supponendo appunto l costante, si ottiene

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{g}{l}\theta = 0 \quad [3],$$

che è una equazione differenziale del II ordine in θ , la cui soluzione è del tipo :

$$\theta = A \sin\left(\sqrt{\frac{g}{l}}t + B\right) \quad [4],$$

dove A e B sono delle costanti; questa equazione descrive un moto armonico.

Il periodo T del pendolo semplice si ottiene facilmente osservando che per ogni $\theta + 2\pi$ si ripete la stessa relazione. T è il tempo necessario perché lo spostamento di m compia un ciclo.

$$T = 2\pi\left(\sqrt{\frac{l}{g}}\right) \quad [5].$$

3.1.2 Pendolo gravimetrico

Nelle misure, ovviamente, non si usano pendoli matematici, ma pendoli fisici (vedi Fig.2); si definisce lunghezza l del pendolo quella del pendolo semplice avente lo stesso periodo di oscillazione :

$$l = \frac{K}{Ma} \quad [6],$$

con K = momento di inerzia del pendolo fisico; M = massa del pendolo fisico; a = distanza tra baricentro e asse di sospensione del pendolo fisico.

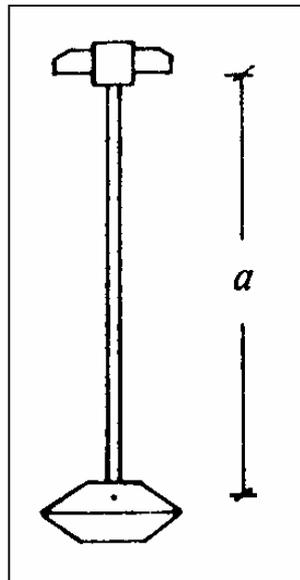


Fig.2 – Pendolo gravimetrico [da Norinelli]

3.1.3 Misure relative di g

Con il pendolo si possono ottenere facilmente misure relative di g.

Infatti per due pendoli uguali posti in due diverse stazioni, varrà:

$$T_1 = 2\pi \left(\sqrt{\frac{l}{g_1}} \right) \text{ e } T_2 = 2\pi \left(\sqrt{\frac{l}{g_2}} \right)$$

$$\frac{g_1}{g_2} = \frac{T_2^2}{T_1^2}$$

e quindi

$$g_1 - g_2 = g_1 \frac{(T_2^2 - T_1^2)}{T_2^2} \quad [7];$$

in definitiva conoscendo il valore della gravità in una stazione si può risalire al valore della gravità nell'altra.

Le misure relative ai periodi richiedono estrema attenzione e vanno sempre corrette: infatti l'angolo di oscillazione per quanto piccolo, è sempre finito e mai infinitesimo come prevede la teoria; lo stato dell'orologio con cui si eseguono le misure deve essere controllato con segnali di alta precisione dal momento che l'orologio stesso può avanzare o ritardare; la lunghezza del pendolo può variare a causa della dilatazione termica; il supporto a cui il pendolo è vincolato può entrare esso stesso in oscillazione (in conseguenza di ciò si ha un aumento della lunghezza apparente del pendolo e quindi del periodo T); se il pendolo non è amagnetico, il campo magnetico terrestre influenza il suo moto inducendo su di esso le correnti frenanti di Foucault; il moto del pendolo è sempre smorzato a causa degli attriti; la spinta di Archimede fa diminuire il peso del pendolo (ne consegue un aumento della lunghezza del pendolo semplice equivalente).

Ancora oggi si ricorre alle misure pendolari nelle reti gravimetriche per stabilire la gravità assoluta o per la taratura di strumenti più agili detti gravimetri.

3.2 GRAVIMETRI

La gravità varia al più tra 9.7803318 e 9.832177 m/s². Ricordando brevemente le seguenti equivalenze, 1 gal = 1cm/s², 1 g.u. = 10mgal e considerando che le variazioni prodotte dalla distribuzione disomogenea delle masse nel sottosuolo sono dell'ordine delle decine o centinaia di g.u., è evidente che per misurare variazioni della gravità occorrono strumenti in grado di apprezzare la g con 8 o 9 cifre significative. Ciò è possibile con gli attuali gravimetri.

I gravimetri sono strumenti che consentono la misura relativa della gravità. Il principio su cui si basano è quello del *dinamometro*: una massa, sospesa ad un sistema elastico, varia di peso col variare della gravità, provocando variazioni nel sistema elastico stabilizzante: la misura di tali variazioni consente poi di risalire alle differenze di gravità che le hanno provocate.

I gravimetri, a differenza dei pendoli utilizzati per misure di gravità, risultano molto maneggevoli (hanno una massa di pochi chilogrammi), rapidi nella misura (richiedono pochi minuti) e nei calcoli successivi e assai sensibili (anche 0.01 mgal).

I gravimetri tradizionali si suddividono in :

- **Statici o lineari**
- **Astatici**

3.2.1 Gravimetri statici o lineari

Sfruttano i movimenti di traslazione della massa mobile secondo una direzione, oppure una rotazione di un piano orizzontale prodotti dalla variazione di g ; operano in condizioni di equilibrio statico, ma possono essere utilizzati anche in condizioni di equilibrio dinamico (cioè per misure assolute).

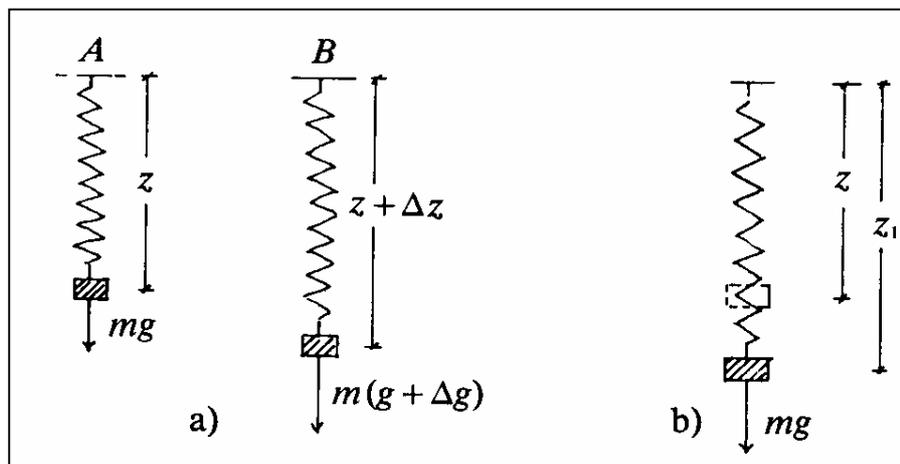


Fig.3 – Schema di un gravimetro lineare [da Norinelli]

a) Aspetto statico del gravimetro lineare (vedi Fig.3a)

Si ponga il gravimetro nella stazione A; il peso della massa m fa allungare la molla fino a quando la reazione elastica uguaglia la forza mg ; quindi all'equilibrio, posto τ = costante elastica della molla, si ha :

$$mg - \tau z = 0$$

dove z è l'allungamento della molla nella stazione A;

spostiamoci ora nella stazione B, dove, ad esempio, $g_B = g + \Delta g$ e l'allungamento della molla sarà $z_B = z + \Delta z$; avremo:

$$mg_B - \tau z_B = 0 ;$$

ovvero

$$m(g + \Delta g) - \tau(z + \Delta z) = 0$$

e quindi

$$\frac{\Delta z}{\Delta g} = \frac{m}{\tau} \quad [8],$$

che esprime la sensibilità statica del gravimetro.

b) Aspetto dinamico del gravimetro lineare (vedi Fig.3b)

Si possono anche sfruttare le caratteristiche dinamiche del gravimetro e quindi ottenere misure di gravità assolute. Supponiamo infatti di spostare la massa m dalla sua posizione di equilibrio (allungamento z) ad una posizione perturbata (allungamento z_1) e di lasciarla poi libera di muoversi; applicando il secondo principio della dinamica si arriva ad ottenere l'equazione

$$\frac{d^2 Z}{dt^2} + \frac{\tau}{m} Z = 0 \quad [9],$$

dove $Z = z_1 - z$ è l'escursione locale della molla; questa è ancora una equazione del tipo 'pendolo semplice', da cui si ottiene in modo analogo il periodo T di oscillazione (pari alla sensibilità dinamica del gravimetro) :

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{\tau}} \quad [10],$$

da cui: $\tau = \frac{(4\pi^2 m)}{T^2}$ e considerando la [8], risulta $\frac{\Delta z}{\Delta g} = \frac{mT^2}{4\pi^2 m}$, cioè :

$$\frac{\Delta z}{\Delta g} = \frac{T^2}{4\pi^2} \quad [11];$$

questa relazione lega una caratteristica dinamica del gravimetro (il suo periodo) con una caratteristica statica del gravimetro (il suo allungamento).

3.2.2 Gravimetri astatici

I gravimetri astatici sono strumenti di grande precisione e già nel 1850 avevano la sensibilità di 10 mgal.

Essi sono costituiti essenzialmente da un braccio che può ruotare attorno ad un punto O nel piano P(x,z) e porta all'estremo libero una massa m; il braccio è mantenuto in posizione orizzontale da una molla fissata ad un asse verticale passante per O (Fig.4). L'equilibrio del sistema dipende dai momenti delle forze in gioco rispetto ad O : uno dovuto alla \mathbf{g} agente su m; un'altro dovuto alla reazione elastica della molla di bilanciamento.

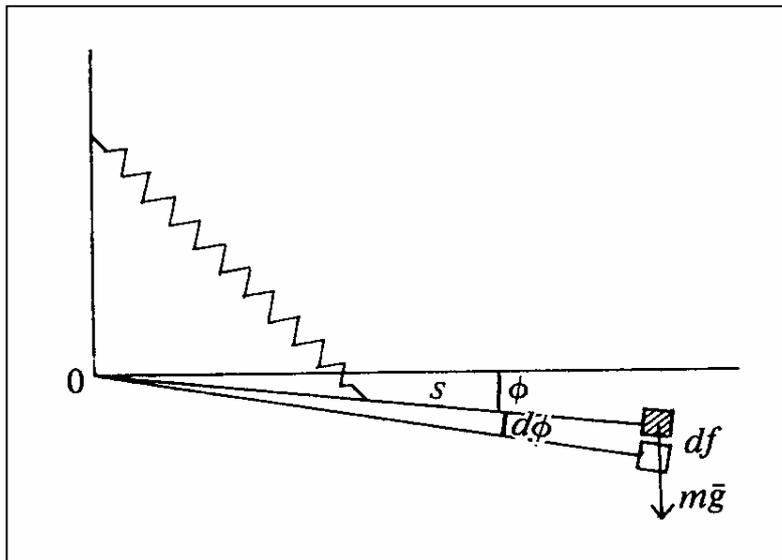


Fig.4 – Schema di un gravimetro astatico [da Norinelli]

a) Comportamento statico del gravimetro astatico

Sia ϕ l'angolo nel piano P(x,z) compreso tra il braccio s e il piano orizzontale passante per O . Supponiamo che per effetto di \mathbf{g}_1 (gravità nella stazione S1) si raggiunga l'equilibrio per una rotazione del braccio di un angolo ϕ_1 ; in queste condizioni ovviamente le forze in gioco sono in equilibrio e quindi il momento totale delle forze in gioco \mathbf{M} deve essere nullo; in termini di modulo:

$$M(\mathbf{g}_1, \phi_1) = 0 .$$

Nella Stazione S2 si avrà l'equilibrio per un angolo ϕ_2 ed analogamente risulterà:

$$M(\mathbf{g}_2, \phi_2) = 0 .$$

Sviluppando la funzione $M(g, \varphi)$ in serie di Taylor arrestata ai primi termini e prendendo come origine proprio il punto S1, la condizione di equilibrio in S2 può essere scritta in funzione di S1 :

$$M(g_2, \varphi_2) = M(g_1, \varphi_1) + \left(\frac{\partial M}{\partial g} \right)_{S1} dg + \left(\frac{\partial M}{\partial \varphi} \right)_{S1} d\varphi ,$$

poiché $M(g_2, \varphi_2) = M(g_1, \varphi_1) = 0$, si ottiene alla fine

$$\frac{d\varphi}{dg} = - \frac{\left(\frac{\partial M}{\partial g} \right)}{\left(\frac{\partial M}{\partial \varphi} \right)} \quad [12].$$

L'equilibrio dei gravimetri è ottenuto mediante una molla compensatrice (Fig.4). In una situazione di **non equilibrio** si ha quindi che il Momento complessivo (istantaneo) è dato da:

$$\mathbf{M}(g, \varphi) = \mathbf{M}_e - \mathbf{M}_g \quad [13],$$

in cui \mathbf{M}_e è il momento meccanico dovuto alle forze elastiche e \mathbf{M}_g è il momento dovuto alla forza peso.

Passando di nuovo al modulo dei momenti, $M_g = mg \cos(\varphi) \cong mg \varphi$ (con φ molto piccolo), mentre M_e non dipende esplicitamente da g . Passando al modulo del momento

$$\frac{\partial M}{\partial g} = \frac{\partial M_e}{\partial g} - \frac{\partial M_g}{\partial g} = -ms \quad [14];$$

la [12] diventa quindi

$$\frac{d\varphi}{dg} = \frac{ms^2}{\left(\frac{\partial M}{\partial \varphi} \right)} \quad [15];$$

da cui , posto $dl = s d\varphi$, si ottiene la **sensibilità statica del gravimetro** :

$$\frac{dl}{dg} = \frac{ms^2}{\left(\frac{\partial M}{\partial \varphi} \right)} \quad [16].$$

b) Comportamento dinamico del gravimetro astatico

Se si sposta la massa m dalla sua posizione di equilibrio e la si lascia libera di oscillare, la relazione $\mathbf{F} = m\mathbf{a}$ deve essere sostituita da : $\mathbf{M} = \mathbf{I}\alpha$, in cui \mathbf{M} è il momento totale delle forze, \mathbf{I} è il momento di inerzia, α è l'accelerazione angolare; \mathbf{M} dipende solo da φ , poiché \mathbf{g} , dato il

piccolo spostamento della massa m , non cambia. Nella posizione di equilibrio si ha $\varphi = 0$; allora sviluppando in serie di McLaurin (passando ai moduli):

$$M(\varphi) = M(0) + \varphi(\partial M/\partial\varphi)_0 \text{ e poich\`e } M(0) = 0 ,$$

$$M(\varphi) = \varphi(\partial M/\partial\varphi)_0$$

Da cui, considerando che $\mathbf{M} = \mathbf{I}\alpha$, otteniamo l'equazione del moto :

$$ms^2 \frac{d^2\varphi}{dt^2} + \varphi \frac{\partial M}{\partial\varphi} \quad [17],$$

che è simile all'equazione del pendolo. La massa oscilla attorno alla posizione di equilibrio con un periodo T , che è la sensibilità dinamica del gravimetro:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{ms^2}{\partial M/\partial\varphi}} \quad [18];$$

ricordando la definizione [16] della sensibilità statica del gravimetro, è possibile esprimere quest'ultima in funzione del periodo T :

$$\frac{dl}{dg} = \frac{T^2}{4\pi^2} \quad [19].$$

I gravimetri astatici vengono ulteriormente classificati come *stabili (non astatizzati)* ed *instabili (astatizzati)*.

3.2.2a Astatizzazione

L'astatizzazione dei gravimetri (instabilità) ha l'obiettivo di realizzare appunto una situazione di equilibrio instabile nella quale i piccoli spostamenti della massa test sono sensibilmente amplificati; il fine ultimo di ciò è ottenere grandi periodi di oscillazione (nell'impiego dello strumento in condizioni dinamiche) e quindi sensibilità elevate.

Il principio fisico utilizzato è descritto dal seguente schema (Fig.5): una massa M , solidale col braccio, è posta in corrispondenza del fulcro del braccio stesso (cioè al di sopra dell'asse di rotazione, la cui traccia indichiamo con O); l'effetto di tale massa è appunto quello di creare una condizione di instabilità dell'equilibrio e quindi di amplificare gli spostamenti.

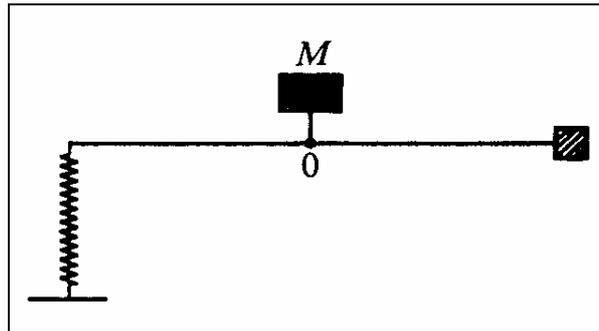


Fig. 5 – Principio dell’astatizzazione di un gravimetro astatico [da Norinelli]

Nei gravimetri più recenti l’aumento del periodo T si ottiene giocando sulla geometria del sistema piuttosto che collocando una grande massa aggiuntiva solidale con il braccio del gravimetro.

Il periodo T (v. [18]) risulta inversamente proporzionale a $\partial M / \partial \varphi$, quindi si può aumentare il periodo T (cioè la sensibilità dinamica del gravimetro) diminuendo $\partial M / \partial \varphi$ ($T \Rightarrow \infty$ se $\partial M / \partial \varphi \Rightarrow 0$).

Ricordando la [13], si ha che

$$\frac{\partial M}{\partial \varphi} = \frac{\partial M_e}{\partial \varphi} - \frac{\partial M_g}{\partial \varphi} \quad [20],$$

quindi grandi valori di T si possono ottenere in 2 modi:

- 1 - si cerca di mantenere costante M_g , così che $\partial M_g / \partial \varphi \approx 0$ e $\partial M_e / \partial \varphi$ molto piccola (come avviene nei gravimetri Worden e Western);
- 2 - si fa in modo che $(\partial M_g / \partial \varphi - \partial M_e / \partial \varphi)$ sia molto piccola.

3.2.2b Gravimetri stabili o non astatizzati

Sono assimilabili a sistemi bilanciati estremamente sensibili, provvisti di molle che reggono delle masse, che si scostano dalla configurazione di equilibrio quando la forza di gravità cambia. Lo scostamento, sempre molto piccolo è amplificato con metodi meccanici, ottici o elettrici. Presentiamo un esempio, il

Gravimetro Askania (Fig. 6).

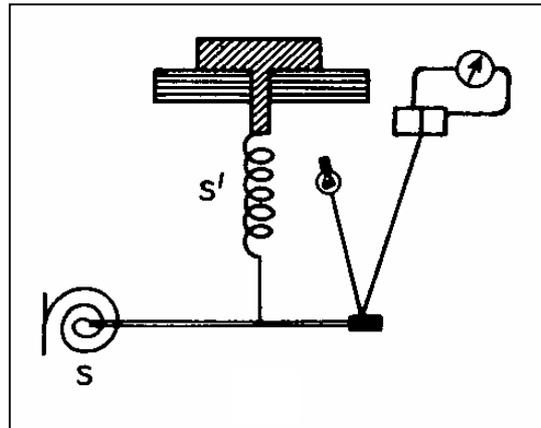


Fig.6 – Gravimetro Askania [da Parasnis]

Una sbarra, che porta appesa ad una estremità una massa, è mantenuta orizzontale da una molla principale ed è dotata di uno specchio che riflette un raggio luminoso in una doppia cellula fotoelettrica. Il movimento della massa, causato dalla variazione di gravità, è rilevato attraverso un galvanometro che misura la corrente fornita dalla cellula fotoelettrica.

3.2.2c Gravimetri instabili o astatizzati

Si tratta di gravimetri che hanno appunto subito la modifica detta astatizzazione. Presentiamo alcuni esempi.

Gravimetri Lacoste & Romberg (Fig.7).

Il principio elementare di funzionamento è quello di un sismografo di lungo periodo riadattato, che utilizza una molla di lunghezza zero. L'allungamento della molla coincide con la distanza che separa i punti ai quali essa è fissata, cosicché la lunghezza, definita come differenza tra la lunghezza fisica reale della molla e il suo allungamento è zero. La molla di lunghezza zero è fissata rigidamente ad un supporto C e ad un'asta; ad una estremità dell'asta è appesa una massa M che bilancia la forza elastica della molla. Si ha equilibrio se il momento risultante è nullo, ovvero se il momento meccanico delle forze elastiche eguaglia il momento meccanico della forza peso. Si fa in modo di avere una condizione di equilibrio instabile: lo strumento è molto sensibile alle variazioni di g. La lettura viene effettuata riportando M alla posizione originale (per questo la molla viene denominata 'di lunghezza zero') variando la posizione del supporto S attraverso una vite provvista di quadrante calibrato.

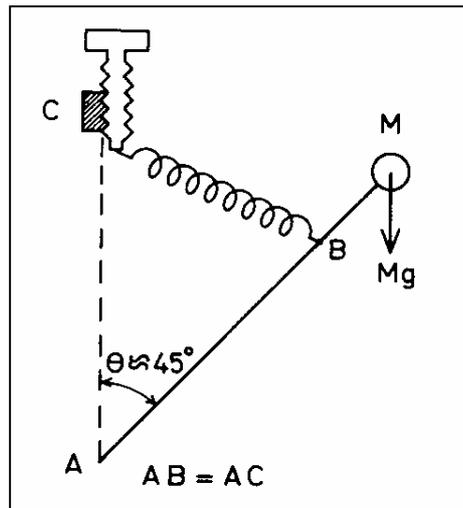


Fig. 7 – Gravimetro Lacoste & Romberg (da Norinelli)

Dalla figura si vede che il momento risultante in M è

$$(Mg\overline{AM} - k\overline{AB}^2)\sin\theta$$

in cui k è la costante elastica della molla. Se questo momento risultante diventa uguale a zero, il periodo di oscillazione diventa infinito e l'equilibrio instabile. Lo strumento dunque è molto sensibile e l'accuratezza è dell'ordine di 0.2 g.u. ($0.2 \mu\text{m/s}^2$; 0.02 mgal).

I moderni gravimetri Lacoste & Romberg si basano ancora su sistemi di molle a lunghezza zero e su sistemi leva per annullare tale lunghezza. Attualmente sono disponibili due modelli: il modello 'G' (metro geodetico) ed il modello 'D' (metro "microgal"). Il primo lavora universalmente (ampio range di misura, 7.000 mgal) e con una precisione migliore di 0.04 mgal; il secondo raggiunge lo stesso range di misura ma utilizzando un sistema di reset, ed è in grado di raggiungere una maggior precisione. I fattori di taratura di questi strumenti dipendono dal sistema leva piuttosto che da molle ausiliarie generalmente utilizzate da altri gravimetri: per questo motivo la taratura è sensibilmente stabile ed è eliminata la necessità di frequenti controlli. La deriva (v. dopo) è in molti casi piccola: normalmente minore di 1.0 mgal/mese e minore di 0.5 mgal/mese in un anno. Inoltre gli elementi atti alla misurazione della gravità sono completamente sospesi da molle, pertanto il gravimetro è generalmente in grado di sopportare ogni tipo di shock che non danneggi l'involucro esterno (la casa produttrice vanta il fatto che questi gravimetri abbiano superato incidenti automobilistici ed aerei senza alcun tipo di danneggiamento).

Questi gravimetri lavorano in ambienti sigillati a pressione controllata.

L'acquisizione dei dati (v. dopo) sta procedendo sempre più verso sistemi di trasduzione del segnale: gli strumenti descritti possono essere dotati di sistemi 'force-feedback'. Il sistema viene offerto in due versioni: una digitale, che permette estrema accuratezza e stabilità ed una analogica per applicazioni che richiedono piccole dimensioni dello strumento e basso consumo di energia.

Gravimetro Western (Fig. 8)

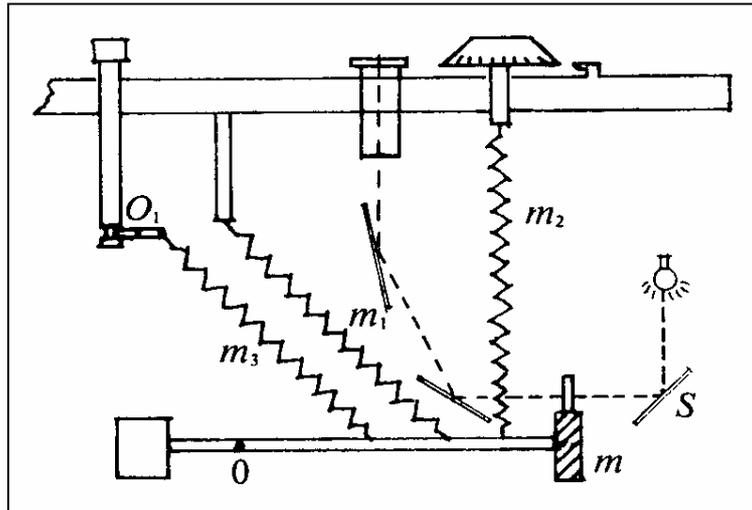


Fig. 8 – Schema del gravimetro Western (da Norinelli)

Consiste in un braccio ruotante in un piano verticale attorno ad un punto O interno ad esso ed avente la massa m ad una estremità ed una massa compensatrice della spinta di Archimede dall'altra.

Il braccio è sostenuto da 3 molle (Fig.8) :

la molla *principale* m_1 : orizzontale; vincolata al baricentro della parte mobile e in un punto del piano quasi-verticale contenente O (a 45° se il braccio è orizzontale) ;

la molla *di lettura* m_2 : sottile, serve a riportare il braccio in posizione orizzontale (utilizzando un

sistema ottico di precisione); è fissata al braccio mobile internamente alla congiungente fulcro-massa e ad una vite micrometrica azionabile dall'esterno del contenitore-strumento;

la molla *di campo* m_3 : parallela a m_1 , serve a variare il campo di misura.

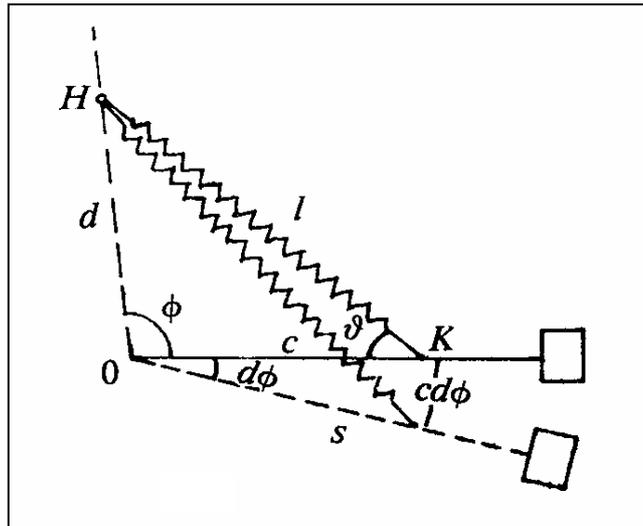


Fig. 9 – Geometria dell'equipaggio mobile del gravimetro Western (da Norinelli)

Le condizioni di astatizzazione richiedono $\partial \mathbf{M} / \partial \varphi = 0$ dove \mathbf{M} è il momento totale agente sul sistema ed è dato, in modulo, da (vedi Fig.9):

$$M = M_g - M_e = mgs - \tau(l-l_0)c \sin\theta,$$

in cui s = lunghezza braccio ; τ = costante elastica della molla, l_0 = lunghezza della molla non in tensione, c = distanza fulcro- attacco molla, θ = angolo molla-braccio.

3.2.3 Deriva dei gravimetri

Il valore della gravità è in generale variabile nel tempo sostanzialmente a causa dell'attrazione luni-solare e dalla deformazione della crosta terrestre che ne consegue. Tale variazione diurna della gravità è detta *marea gravimetrica*. Se escludiamo tale effetto la gravità è da pensarsi puntualmente costante nel tempo; tuttavia ripetendo misurazioni successive relativamente ad un singolo punto si ottengono valori della gravità diversi. Ciò dipende dal fatto che, inevitabilmente, col passare del tempo, lo strumento di misura subisce uno spostamento, detto *deriva*, dello zero e i valori misurati ne sono influenzati. Le cause della deriva sono:

- variazioni di temperatura (cambiano la lunghezza delle molle ed il valore delle costanti elastiche)
- variazioni di pressione (cambiano la spinta di Archimede e, in condizioni adiabatiche, provocano effetti termici)
- eventuali sollecitazioni meccaniche
- invecchiamento
- isteresi delle molle

La deriva è ineliminabile. Per alcuni gravimetri è piccola e con andamento lineare.

3.2.4 Acquisizione dei dati

Le osservazioni si effettuano sempre più spesso tramite *trasduzione del segnale*, ovvero trasformazione di grandezze meccaniche in grandezze elettromagnetiche. Ciò viene fatto sfruttando i principi di base della teoria dell'elettromagnetismo: induzione di corrente causata dal flusso variabile di un campo magnetico attraverso un conduttore (ad esempio un elemento magnetico in moto all'interno di un circuito elettrico). La corrente indotta in un opportuno circuito dà una misura del movimento meccanico in atto. Molto spesso si usano circuiti di compensazione (feedback), cioè circuiti che riportino il sistema in equilibrio, 'compensando', appunto, la corrente indotta in modo da produrre un effetto globale nullo: in tal caso si misura l'energia (corrente) utilizzata per riequilibrare il sistema.

Un tale sistema di acquisizione non dipende dall'osservatore, consente una risoluzione molto superiore e produce dati sotto forma di segnale elettrico, che è campionabile, digitalizzabile.

4. RETI GRAVIMETRICHE

Le misure assolute di gravità sono difficili ed imprecise; si è pertanto convenuto di assumere il risultato di una misura assoluta come valore di riferimento per tutte le misure di gravità relative nel mondo (sistema di Potsdam). Il compito di trasportare il valore della gravità dal caposaldo di Potsdam agli altri capisaldi di riferimento, secondo un criterio che rispetti la precisione necessaria (almeno 1 mgal) è allora affidato a delle *reti gravimetriche*. La più importante tra queste è la rete mondiale del primo ordine, che collega Potsdam con un limitato numero di stazioni in modo da costruire dei poligoni la cui chiusura deve garantire la precisione richiesta.

Esistono oltre alle reti descritte (a carattere geodetico) anche reti di ordine successivo, reti regionali (stazioni a distanza di alcuni chilometri) nonché di dettaglio (usate per prospezioni geofisiche, le distanze tra le stazioni si riducono a qualche metro).

Di un rilievo gravimetrico è necessario conoscere la precisione con cui viene condotto: essa viene determinata attraverso la teoria degli errori. Per prospezioni di dettaglio la precisione può arrivare anche al centesimo di mgal; per rilievi regionali si tollerano errori medi maggiori.

5. MISURE GRAVIMETRICHE IN MARE

Le prime misure gravimetriche marine venivano effettuate attraverso pendoli a bordo di sottomarini. Con l'introduzione del gravimetro la misura della gravità in mari poco profondi poté essere svolta attraverso gravimetri racchiusi, insieme ad un operatore, in campane depositate sul fondo (per profondità di circa 20 m) oppure entro batimetri a tenuta stagna collocati sul fondo del mare (a profondità non superiori a 200 m) e telecomandati a bordo delle navi. Altrimenti si utilizzano oggi, a bordo di navi, gravimetri simili a quelli terrestri cui siano state apportate alcune modifiche (ampio campo di misura e grande smorzamento dell'equipaggio mobile reso insensibile alle accelerazioni orizzontali; sono costruiti in modo che la deriva risulti lineare e stabile).

Le misure gravimetriche marine presentano l'ovvia complicazione di dipendere sensibilmente dalla velocità e dalla rotta della nave: ad esempio se la nave si muove da Ovest verso Est, ovvero in modo concorde alla rotazione terrestre, la sua velocità va a sommarsi a quella del moto di rotazione, la forza centrifuga risulta irrobustita e la gravità viene pertanto ad essere sottostimata. Si devono quindi apportare delle correzioni esprimibili attraverso formule del tipo della seguente, che esprimono appunto la differenza tra la gravità effettiva e quella misurata da una stazione mobile:

$$\Delta g = g - g_a = 2 V \omega \sin(a) \cos(\varphi) + V^2 R^{-1} \quad (\text{Effetto Eötvös})$$

dove: V è la velocità della nave; ω è la velocità angolare della Terra; a è l'azimut della rotta; φ è la latitudine geografica; R è il raggio della Terra.

Più recentemente le misure gravimetriche vengono effettuate attraverso gravimetri aeroportati soprattutto per ricognizioni di zone poco praticabili e sugli oceani: rispetto alle misure da navi ci sono complicazioni derivanti dall'alta velocità dell'aeromobile, dalle sue repentine variazioni di rotta, dalle accelerazioni e dal rollio non più trascurabili a cui si aggiungono gli effetti delle variazioni di quota.

Esempio di un moderno gravimetro marino: *Scintrex SeaGrav*

Lo *Scintrex SeaGrav* è uno strumento versatile, nel senso che può, a seconda delle diverse esigenze, essere utilizzato in vari modi: all'interno di sommergibili con equipaggio umano, lasciato entro contenitori sul fondo del mare e controllato a distanza (opzione necessaria per misure di gravità sul fondo degli oceani), oppure sospeso alla nave utilizzata per le ricerche e dislocato in profondità attraverso un argano.

Il sistema base dello *Scintrex SeaGrav* è costituito da un gravimetro terrestre a sensore modificato e da un'unità di controllo ed acquisizione dati esterna. Le due unità sono in collegamento tramite un cavo

della lunghezza di 10 metri. Nei casi di controllo remoto il sistema è corredato di un 'cordone ombelicale' di opportuna lunghezza.

L'elemento sensore basa il proprio funzionamento su un sistema elastico a quarzo fuso (preferibile a molle metalliche perché non interagisce col campo magnetico terrestre oltre che per le sue eccellenti qualità elastiche). La forza gravitazionale agente sulla massa-test è bilanciata dalla forza elastica di richiamo e dalla forza elettrostatica, relativamente piccola generata dal circuito di compensazione usato per la trasduzione del segnale.

Attraverso l'uso di sensori elettronici dell'inclinazione lo strumento è continuamente in grado di aggiornare l'informazione apportando le opportune correzioni dovute alla non perfetta orizzontalità.

Il sensore è inoltre sigillato in una camera sotto vuoto a temperatura stabilizzata in modo tale da essere protetto a fronte di variazioni della temperatura ambiente e della pressione atmosferica; a tale proposito, affinché non sia richiesto un tempo troppo lungo per la stabilizzazione del segnale è auspicabile che lo strumento operi entro certi condizioni esterne limite (i limiti di operatività vengono definiti in base alle esigenze dell'utenza).

Caratteristiche del sensore:

Dimensioni:	275 x 216 x 295 mm
Peso:	7,5 kg
Precisione strumentale:	1 μ gal
Deviazione Standard:	<10 μ gal
Range di operatività	8000 mgal
Deriva	< 0,02 mgal/giorno

Per quanto riguarda l'acquisizione dei dati, in uscita si possono avere segnali analogici (convenienti per certe applicazioni) o digitali: in ogni caso le misurazioni acquisite in condizioni di instabilità vengono automaticamente compensate: dal segnale si eliminano errori di misura dovuti a shock esterni locali o vibrazioni e si escludono misure affette da errori grossolani (ovvero esterne ad un certo range) in modo che non influenzino il dato compensato. L'opzione segnale digitale prevede anche che appositi software apportino automaticamente correzioni per la deriva lineare, la temperatura, la non orizzontalità nel posizionamento del sensore.

GRAVIMETRIA PARTE III:
RIDUZIONE DELLE MISURE GRAVIMETRICHE
ANOMALIA DI BOUGUER

Corso di Geofisica Ambientale e Applicata
Anno Accademico 2003-2004
Prof.ssa Gabriella Losito

Revisione: Ing. Rossana Angelini

1. RIDUZIONE DELLE MISURE GRAVIMETRICHE AL GEOIDE

L'unico modo per poter confrontare tra loro le misure gravimetriche ottenute in diversi punti della superficie terrestre, dopo averle selezionate e filtrate dall'effetto di marea, è quello di riferirle ad una stessa superficie equipotenziale, che, di solito, è il geoide (ovvero l'ellissoide che lo sostituisce in seconda approssimazione). In un generico punto, posto sulla superficie terrestre, si osserverà un valore della componente verticale di g in generale diverso da quello che si osserverebbe sulla superficie del geoide; bisogna allora apportare al valore della g osservata delle riduzioni, in modo da ottenere il valore della gravità che si misurerebbe in P' sul geoide privato delle masse esterne, al piede della verticale, condotta per il punto di stazione. Infatti, quando le misure di gravità vengono impiegate ai fini geologico-tettonici e, più in generale, quando si vuole mettere in evidenza il contributo delle disomogeneità interne, bisogna depurare i valori osservati dal contributo di qualsiasi altra causa (fig.1).

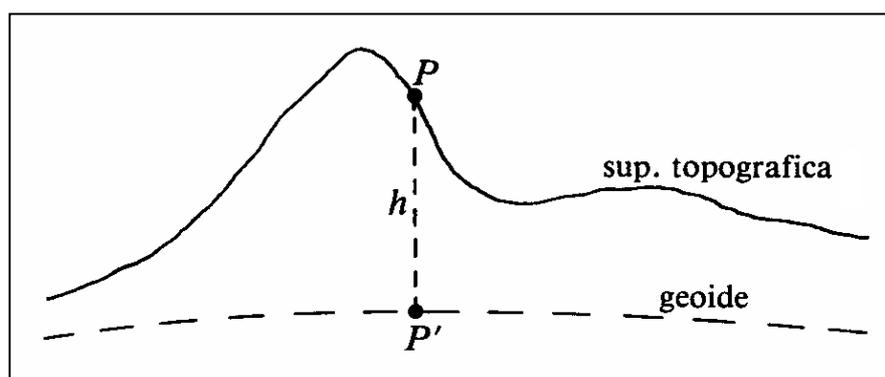


Fig.1 – Riduzione al geoide della gravità osservata nel punto di stazione P [da Norinelli]

1.1 RIDUZIONE PER LA LATITUDINE

È ottenuta differenziando l'equazione "schiacciamento polare", in cui si trascura il termine con $\text{sen}^2(2\varphi)$ (§ parte I, [8]):

$$\frac{dg_L}{d\varphi} \cong 51851 \text{sen}(2\varphi) \text{ (g.u./rad)} \quad [1],$$

in cui: g_L = gravità alla latitudine di osservazione;

φ = latitudine;

più in generale a noi interessa la variazione di g in funzione di $s=R\varphi$, distanza orizzontale NS:

$$\frac{dg_L}{ds} = \frac{1}{R_\varphi} \frac{dg_L}{d\varphi} \approx \frac{1}{R_{eq}} \frac{dg_L}{d\varphi} \quad [2],$$

in cui: g_L = gravità alla latitudine di osservazione;

R_{eq} = raggio equatoriale;

R_φ = raggio della terra alla latitudine φ ;

φ = latitudine;

ds = distanza orizzontale NS.

Questa riduzione è positiva movendosi dai poli verso l'equatore ed occorre nel caso in cui le misure siano molto distanti relativamente a φ . Una approssimazione valida correntemente è:

$$\Delta g = 0.081 \sin 2\varphi \quad (\text{g.u. per } 10 \text{ m}) \quad [3].$$

1.2. RIDUZIONE IN ARIA LIBERA O DI FAYE (PER LA QUOTA)

Consiste nel ridurre i valori di g , osservati a quote diverse, al livello del mare, come se tra il punto di stazione e la superficie geoidica non ci fossero masse interposte. È necessario allora conoscere il valore di dg/dr , ovvero la variazione di g con l'altezza. Si può supporre, per semplicità, la Terra sferica e trascurare il contributo della forza centrifuga (si ricorda che la forza centrifuga aumenta all'aumentare della distanza dall'asse di rotazione della Terra, cioè diminuisce verso il polo, e cresce con la quota). Sotto queste ipotesi, derivando rispetto a R l'equazione [6] della parte I si ottiene:

$$\left(\frac{dg}{dr} \right)_{r=R} = -2G \frac{M}{R^3} = -\frac{2}{R} \left(G \frac{M}{R^2} \right) = -2 \frac{g}{R} \quad [4],$$

dove R è il raggio medio della terra ed il segno meno indica che g diminuisce aumentando r . Sostituendo a g ed R i loro valori medi, si ottiene l'espressione 'in pratica' usata per calcolare la **riduzione in aria libera** alle nostre latitudini:

$$\Delta g' = 0.3086h \text{ (mgal/m)} \quad [5],$$

dove $h(m)$ è l'altezza del punto di stazione.

La riduzione $\Delta g'$ si aggiunge alla g osservata quando h è positivo, mentre va tolta se il punto di stazione si trova in una stazione depressa.

Nel sistema mks si ha (con h espressa sempre in m):

$$\Delta g \left(\frac{m}{s^2} \right) = -2 \cdot 9.8 \left(\frac{h}{6300 \cdot 10^3} \right) = 3.072 \cdot 10^{-6} h$$

$$\Rightarrow \Delta g \approx 3 \cdot 10^{-1} \text{ mgal/m};$$

a Roma il coefficiente di riduzione adottato è 0.330855.

In pratica per ogni m si ha una variazione di circa 0.3 mgal; data la precisione delle misure di g , occorre definire la quota con la precisione di almeno 3 cm.

1.3. RIDUZIONE PER LA PIASTRA O DI BOUGUER

Questa riduzione si adotta per tener conto del contributo attrattivo delle masse interposte tra il punto

di stazione P e il suo corrispondente P' sul geoide. Si toglie cioè il contributo delle masse costituenti una piastra indefinita di spessore h (se h è la quota della stazione) senza tener conto delle masse che sporgono rispetto alla piastra, né del fatto che in questo modo gli avvallamenti vengono artificialmente riempiti di materia: è come se ci trovassimo su un pianoro fittizio posto ad una certa quota rispetto al mare (fig.2).

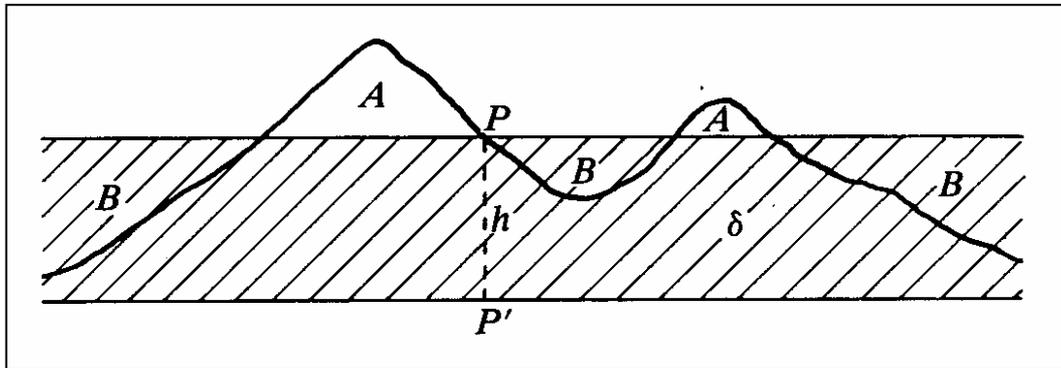


Fig.2 – Schema per la riduzione di Bouguer [da Norinelli]

Consideriamo, in un sistema di coordinate cilindriche (Fig.3), l'effetto dell'attrazione newtoniana sull'unità di massa nel punto P(0,0,0) prodotta da un elemento di massa dm, di coordinate (rho, phi, z) e definita come $dm = \delta dV$, con δ densità e $dV = \rho d\phi d\rho dz$ volume elementare.

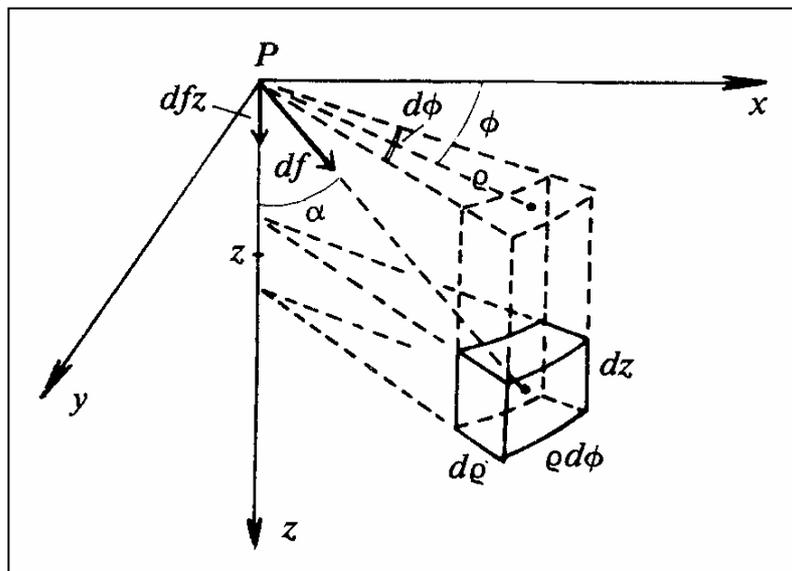


Fig.3 – Attrazione esercitata nel punto P da un elemento di massa dm

L'attrazione newtoniana esercitata da questa massa dm sull'unità di massa in P(0,0,0) è quindi:

$$dg = G \frac{dm}{r^2} = G \frac{\delta dV}{r^2} = G\delta \frac{\rho d\phi d\rho dz}{(\rho^2 + z^2)} \quad [6],$$

la cui componente verticale vale

$$dg_z = d\phi \cos\alpha = G\delta \frac{z\rho d\rho d\phi dz}{(\rho^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} \quad [7].$$

L'attrazione di tutta la massa indefinita si ottiene allora integrando la precedente.

$$\begin{aligned} g_z &= G\delta \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^h z dz \int_0^\infty \frac{\rho d\rho}{(\rho^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} = 2\pi G\delta \int_0^h z dz \int_0^\infty \frac{\rho d\rho}{(\rho^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} = 2\pi G\delta \int_0^h z \left[-\frac{1}{\sqrt{(\rho^2 + z^2)}} \right]_0^\infty dz = \\ &= 2\pi G\delta \int_0^h z \cdot \frac{1}{z} dz = 2\pi G\delta \int_0^h dz = 2\pi G\delta h \quad [8]. \end{aligned}$$

In definitiva la **riduzione di Bouguer** è:

$$\Delta g'' = -g_z = -0.042\delta h \quad [9].$$

Il segno meno è dovuto al fatto che la riduzione di Bouguer, a differenza di quella in aria libera, viene sottratta quando h è positivo e viene aggiunta nel caso contrario.

La grossa difficoltà nell'applicazione di questa riduzione consiste nella determinazione del valore medio da attribuire alla densità δ : anche nel caso in cui lo strato sia omogeneo, se esso è di origine sedimentaria incoerente, si avrà sempre una densità crescente all'aumentare della profondità; inoltre nella maggioranza dei casi non si conosce la stratigrafia della zona.

1.4. RIDUZIONI PER LE MISURE IN MARE

Nel caso di misure sul fondo marino bisogna tenere conto che tra il punto di stazione e il geoide c'è il mare e che al suo posto ci dovrebbe essere la terra. Perciò:

- si toglie il contributo della massa d'acqua soprastante (tale riduzione è positiva perché ha diminuito il valore osservato)
- si riempie lo spazio così liberato dall'acqua con materiale di densità pari a quella δ del fondo: poiché, per la sua mancanza, il valore osservato è minore, la riduzione sarà ancora positiva.

1.5. RIDUZIONE TOPOGRAFICA

Se la superficie topografica del terreno su cui si opera non è piana, bisogna tener conto sia degli avvallamenti (che con la riduzione di Bouguer corrispondevano a masse arbitrariamente introdotte al di sotto del punto di stazione) che delle masse che sporgono rispetto alla piastra. Questa riduzione è sempre positiva; infatti il contributo delle masse a quota superiore ad h è negativo per la gravità

osservata in P, mentre riempiendo gli avvallamenti si è considerato un termine negativo di troppo. Per tener conto di queste ineguaglianze di massa, si può procedere ancora una volta considerando la componente verticale dg_z [7] dell'attrazione di una massa elementare (Fig. 4).

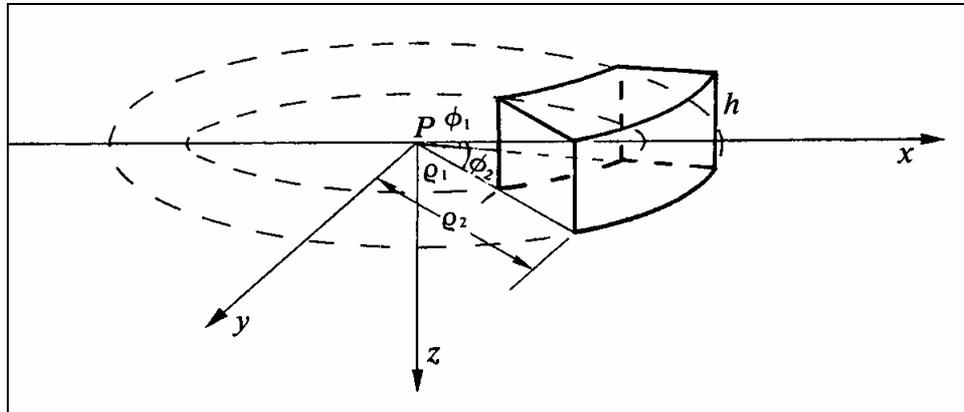


Fig.4 – Schema che illustra la riduzione topografica [da Norinelli]

Il contributo della massa elementare viene quindi integrato su intervalli di Δz , $\Delta \rho$ e $\Delta \phi$ relativi ad un elemento di massa finita equivalente alla massa sporgente o mancante, ma di forma più semplice, compreso tra due piani orizzontali, di cui uno passante per il punto di stazione e l'altro posto ad un'altezza media h :

$$\begin{aligned}
 g_z &= G\delta \int_{\phi_1}^{\phi_2} d\phi \int_{\rho_1}^{\rho_2} \rho d\rho \int_0^h \frac{zdz}{(\rho^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} = G\delta(\phi_2 - \phi_1) \int_{\rho_1}^{\rho_2} \rho \left[-\frac{1}{\sqrt{\rho^2 + z^2}} \right]_0^h d\rho = \\
 &= G\delta(\phi_2 - \phi_1) \int_{\rho_1}^{\rho_2} \rho \left[-\frac{1}{\sqrt{\rho^2 + h^2}} + \frac{1}{\rho} \right] d\rho = G\delta(\phi_2 - \phi_1) \int_{\rho_1}^{\rho_2} \left[1 - \frac{\rho}{\sqrt{\rho^2 + h^2}} \right] d\rho = \\
 &= G\delta(\phi_2 - \phi_1) \left[\rho - \sqrt{\rho^2 + h^2} \right]_{\rho_1}^{\rho_2} \quad [10];
 \end{aligned}$$

In definitiva si ottiene la formula di Messerschmidt per la riduzione topografica:

$$\Delta g''' = g_z = G\delta(\phi_2 - \phi_1) \left\{ (\rho_2 - \rho_1) + \sqrt{\rho_1^2 + h^2} - \sqrt{\rho_2^2 + h^2} \right\} [11],$$

dove appunto h non è la quota del punto P ma la quota media della porzione di terreno considerata rispetto al punto P(fig.4).

Per la determinazione della formula sono state costruite apposite tavole che tengono conto del fatto che il contributo attrattivo è maggiore per le masse più vicine al punto di misura. Hayford, infatti, ha diviso il terreno circostante il punto di misura in corone circolari di raggio crescente e suddiviso le zone in compartimenti (Fig. 5); per ogni compartimento si hanno valori caratteristici noti di ϕ_1 , ϕ_2 , ρ_1 e ρ_2 .

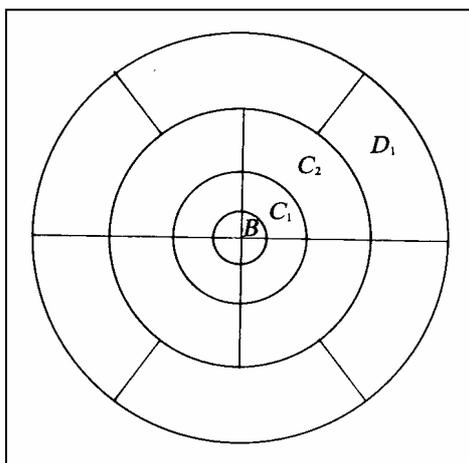


Fig.5 – Alcune zone di Hayford [da Norinelli]

Il centro delle zone di Hayford (disegnate su carte trasparenti) viene fatto coincidere con il punto di stazione riportato su carta topografica; ciascun compartimento delimiterà, sulla carta stessa, un'area della superficie terrestre di cui si deve stimare la quota media: la differenza tra questa quota media e la quota del punto di stazione è la h che compare nella formula, e che va cercata nelle tavole; le tavole forniscono infatti, per ogni compartimento, il valore di $\Delta g'''(h)$ che si ottiene con la [11] per $\delta=1\text{g/cm}^3$. Oggi comunque il ricorso alle tavole è sostituito dall'uso dei calcolatori elettronici.

N.B. La riduzione topografica diventa insignificante se $h/\rho \leq 1/20$.

1.6. RIDUZIONE PER L'EFFETTO INDIRETTO O DI BOWIE

Si applica solo quando si studiano regioni molto estese o la Terra intera. Infatti i valori della g osservata vengono ridotti al geoide, mentre i valori teorici, con cui si confrontano, sono relativi ad una distribuzione di densità calcolata per l'ellissoide: le due superfici hanno ondulazioni diverse e non è detto che coincidano, per cui si dovrebbe tenere conto anche della effettiva distanza tra le due superfici di riferimento.

2. ANOMALIA DI BOUGUER

Se al valore della gravità osservata in P si apportano le riduzioni di cui si è parlato (dopo aver corretto la g_{oss} della variazione diurna della gravità e marea gravimetrica), si può finalmente scrivere la gravità ridotta al geoide g_{rid} .

$$g_{\text{rid}} = g_{\text{oss}} + \Delta g' + \Delta g'' + \Delta g''' \quad [12],$$

dove $\Delta g'$ è la riduzione in aria libera; $\Delta g''$ è la riduzione di Bouguer e $\Delta g'''$ è la riduzione topografica.

Questo valore dovrebbe corrispondere a quello della gravità normale al geoide g_0 se la Terra fosse costituita da una successione di strati omogenei concentrici.

Nella pratica si riscontra però una differenza ($g_{rid} - g_0$) che può essere:

- nulla se nell'interno del punto di stazione c'è una distribuzione omogenea di massa
- positiva se c'è un eccesso di massa rispetto all'ipotesi teorica (Fig. 6a).
- negativa se c'è un difetto di massa rispetto all'ipotesi teorica (Fig. 6b).

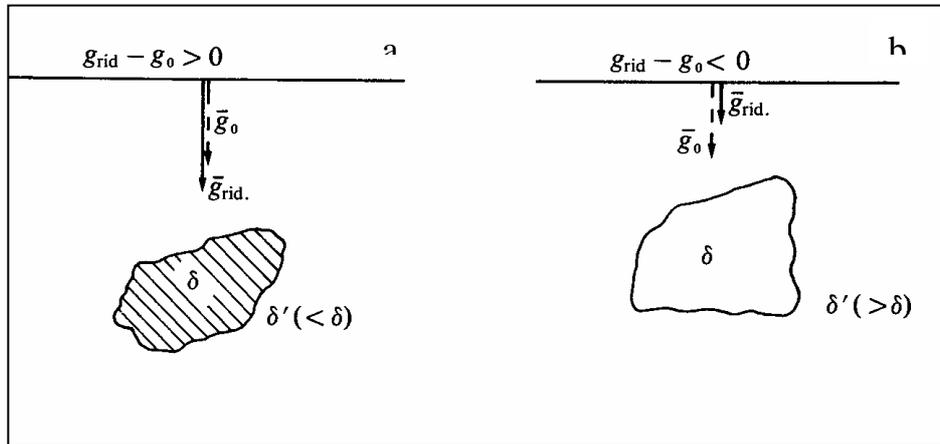


Fig.6 – Differenza tra la gravità ridotta g (nelle dispense g_{rid}) e la gravità normale g_0
 [da Norinelli]

La differenza ($g_{rid} - g_0$), definita ANOMALIA DI BOUGUER, dà informazioni riguardo alle variazioni di densità, sia profonde che superficiali; le linee che congiungono i punti di uguale anomalia sono dette ISOANOMALE SECONDO BOUGUER.

Se al di sotto del punto di stazione c'è una massa sepolta di densità δ , diversa da quella del terreno circostante, la componente verticale dell'attrazione varierà come se la massa sepolta (o la grotta) avesse una densità pari alla densità differenziale $\sigma = \delta - \delta'$ (Fig.7). Chiameremo massa perturbante quella che produce le anomalie di gravità.

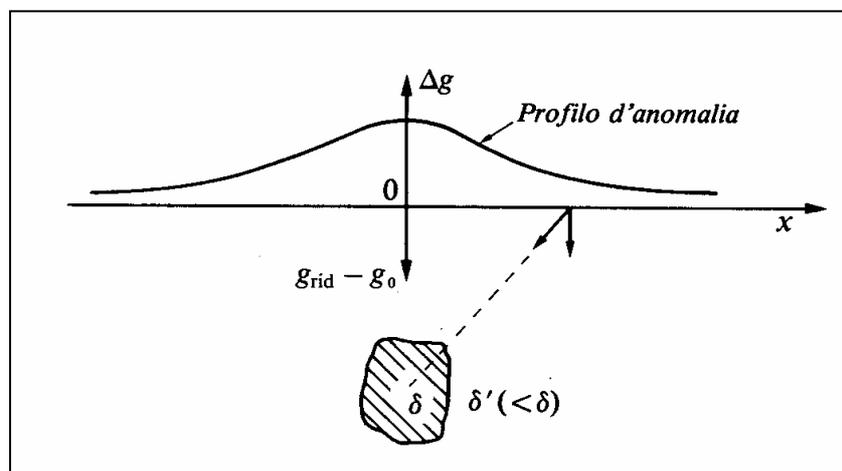


Fig.7 – Profilo di anomalia gravimetrica [da Norinelli]

A determinare quali sono i limiti per cui un'anomalia è più o meno apprezzabile è la sensibilità strumentale. Inoltre un'anomalia rilevata in un solo punto di misura può essere attribuita ad un'infinità di casi possibili; solo se si ha a disposizione una rete di punti su un'area convenientemente estesa il numero di casi può essere ridotto attraverso l'interpretazione delle isoanomale.

Interpretare le anomalie gravimetriche attraverso lo studio delle isoanomale di Bouguer significa determinare la densità, la forma e la profondità della struttura che le ha provocate: il problema, per come si presenta, è ovviamente indeterminato. Alla riduzione del grado di indeterminazione contribuiscono le conoscenze geologiche o geofisiche riguardanti i valori più probabili della densità o della profondità.

Per avere un'idea di quelli che sono gli ordini di grandezza:

- se la massa perturbante ha dimensioni dell'ordine del metro e profondità di qualche metro, si rileverà in superficie un'anomalia estesa a qualche decina di metri;
- se le dimensioni e la profondità sono dell'ordine del chilometro, le anomalie corrispondenti sono estese qualche chilometro;
- le anomalie della crosta terrestre e quelle derivanti da differenze di densità subcrostali sono estese centinaia di chilometri.

L'estensione dell'anomalia è quindi legata essenzialmente alla profondità della massa, mentre a parità di profondità l'ampiezza del picco dipende dalla densità della massa sottostante.

**GRAVIMETRIA PARTE IV:
CAMPO DI REGIONALITÀ
INTERPRETAZIONE QUANTITATIVA:
METODO DIRETTO E METODO INDIRETTO
ISOSTASIA**

Corso di Geofisica Ambientale e Applicata
Anno Accademico 2003-2004
Prof.ssa Gabriella Losito

Revisione: Ing. Rossana Angelini

1. CAMPO DI REGIONALITA'

Si possono distinguere:

- le “anomalie regionali” (o di grande estensione) , attribuibili a cause profonde che influenzano tutto il rilievo o almeno buona parte di esso; la superficie che le rappresenta ha una pendenza non variabile rapidamente e le isoanomale hanno di conseguenza piccole curvature e sono distanziate regolarmente. Interessano studi di tettonica profonda;
- le “anomalie locali” (o di estensione limitata), influenzano poche stazioni. La superficie che le rappresenta ha grande curvatura e di conseguenza le isoanomale sono molto contorte e irregolarmente distanziate. Sono interessanti soprattutto per ricerche minerarie, ma forniscono utili indicazioni ad esempio nello studio di un basamento roccioso allorché si vogliono mettere in evidenza particolarità topografiche del fondo stesso.

Per separare le anomalie locali, dette anche residue, dalle anomalie regionali si esegue una operazione di filtraggio, analoga a quella usata nell'elaborazione numerica dei dati quando si vuole togliere una determinata frequenza. Per far questo si ricorre a metodi analitici e grafici.

I metodi grafici consistono in una semplice operazione di “lisciamento “ delle isoanomale, considerando lo scostamento delle linee isoanomale da quelle lisce come anomalia residua nel punto. Basta, in pratica, sovrapporre al foglio delle isoanomale di Bouguer un foglio di carta lucida su cui tracciare “a sentimento” le isoanomale che rappresentano l'effetto regionale. Quindi si segnano punto per punto i valori delle anomalie residue Δg_{res} calcolando la differenza:

$$\Delta g_{res} = \Delta g_B - \Delta g_{reg} \quad [1],$$

dove Δg_B è l'anomalia di Bouguer e Δg_{reg} è l'anomalia regionale (isoanomale lisce).

Infine si congiungono i punti di uguale anomalia residua (Fig.1).

I metodi grafici sono però troppo soggettivi e si preferisce perciò applicare metodi analitici (come il metodo dei minimi quadrati).

Il tipo di interpretazione che si ricava attraverso l'insieme di questi metodi è, però, solamente qualitativo ed assicura solo l'esistenza nel sottosuolo di masse di densità differente da quella del mezzo circostante, indicandone la presunta posizione planimetrica e, entro certi limiti, l'estensione (in prima approssimazione si possono “leggere” le isoanomale di Bouguer quali isoipse della struttura sepolta che genera l'anomalia).

I parametri che limitano e definiscono la causa dell'anomalia (intesa come forma, densità e profondità della massa perturbante) possono essere precisati solo attraverso un'interpretazione quantitativa: l'indeterminazione, propria del metodo, ci obbliga tuttavia a fare delle ipotesi sul valore di un parametro per poter determinare gli altri (ci si serve per questo di dati geologici o

geofisici, relativi alla zona in esame, che permettono di determinare i valori più probabili della densità e/o della profondità).

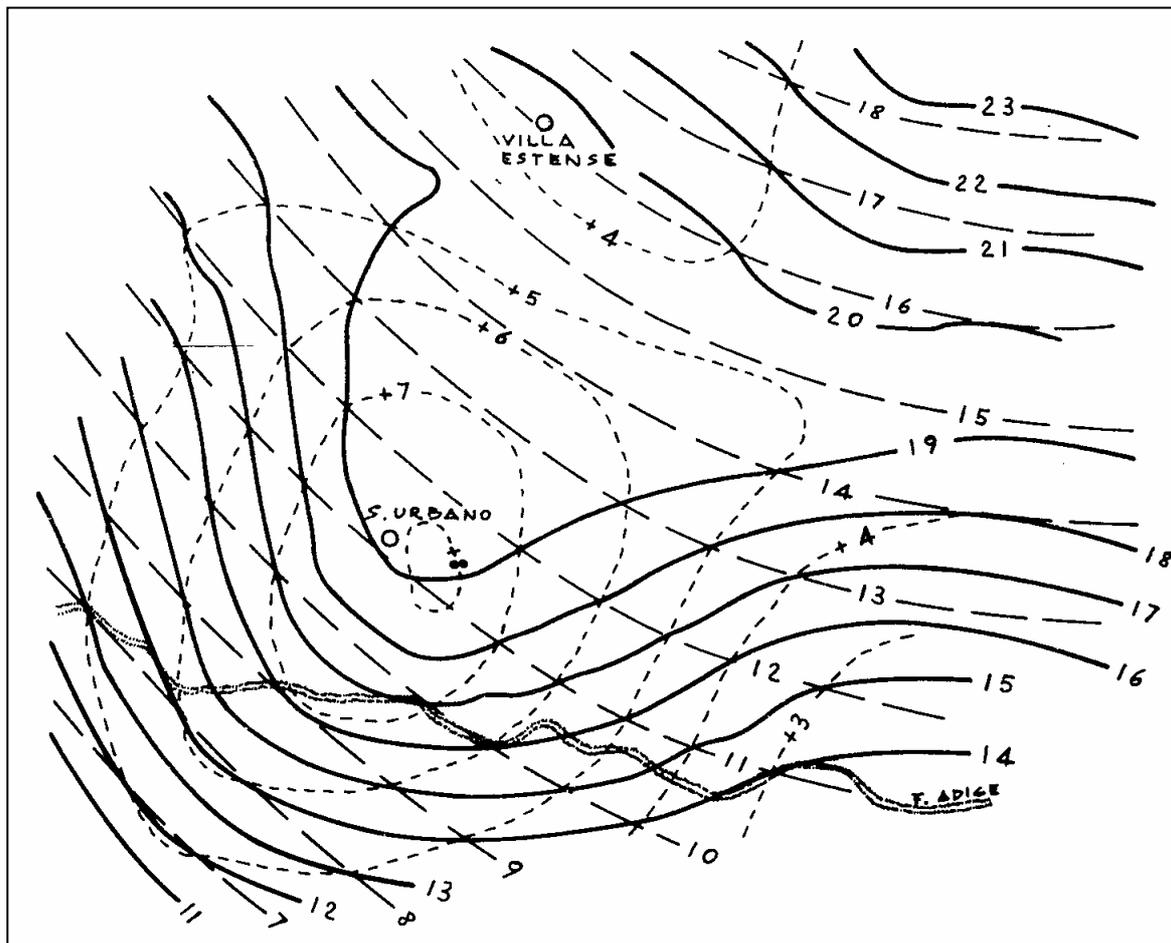


Fig.1 – Isoanomale di Bouguer (linea continua), regionali (a tratto lungo) e residue (a tratteggio)
[da Norinelli]

2. INTERPRETAZIONE QUANTITATIVA: IL METODO DIRETTO

Consiste nel confrontare le anomalie sperimentali con anomalie tecniche di cui sono già state studiate le proprietà. Questo sarà tanto più agevole quanto maggiore è il numero di curve tecniche a disposizione (oggi pressoché infinito grazie al contributo dell'informatica). Praticamente si suppone che la distribuzione di massa che determina l'anomalia corrisponda ad alcune strutture semplici e i parametri di queste strutture (densità, profondità, dimensioni) sono aggiustati fino a quando l'anomalia teorica così calcolata non rispecchia l'andamento dell'anomalia sperimentale.

2.1 CALCOLO DELL'ANOMALIA DI UNA SFERA.

Consideriamo una massa sepolta a forma sferica avente raggio R (Fig. 2). Il valore dell'attrazione nel punto $P(x,0,0)$ sarà dato da:

$$\Delta g_s = G \frac{M}{r^2} = G \left(\frac{4}{3} \pi R^3 \delta \right) \frac{1}{(\sqrt{x^2 + h^2})^2} = \frac{4}{3} \pi R^3 G \delta \frac{1}{x^2 + h^2} \quad [2],$$

dove: G è la costante di gravitazione universale; M è la massa della sfera; r è la distanza tra il punto P e il centro della sfera; δ è la densità differenziale (ossia la differenza tra la densità della sfera e quella del terreno circostante); h è la quota del centro della sfera.

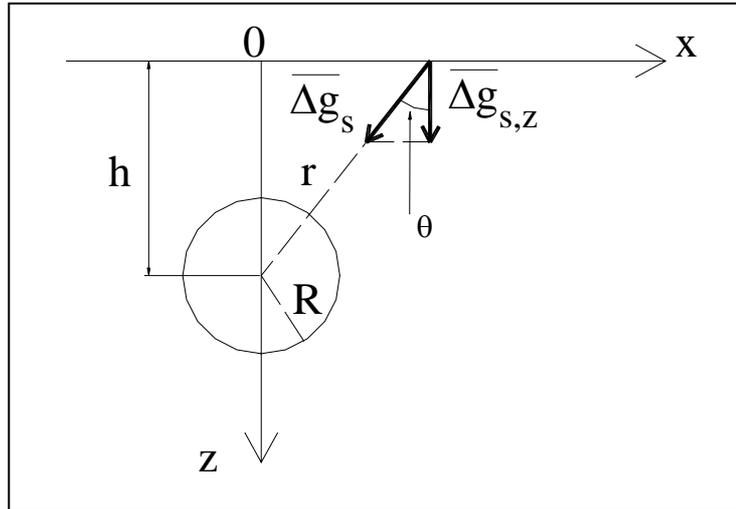


Fig.2 – Calcolo dell’anomalia gravimetrica relativa ad una massa sferica;
l'asse y esce dal piano della figura

L’anomalia gravimetrica corrispondente è data dalla componente di questa attrazione lungo l’asse z:

$$\Delta g_{s,z} = \Delta g_s \cos\theta = \Delta g_s \frac{h}{r} = \frac{4}{3} \pi G R^3 \delta \frac{h}{(x^2 + h^2)^{\frac{3}{2}}} \quad [3].$$

dove θ è l’angolo che la distanza r forma con l’asse verticale delle z .

Più in generale, se x_c è la coordinata lungo l’asse x della proiezione in superficie del centro della sfera, si avrà:

$$\Delta g_{s,z} = \frac{4}{3} \pi G R^3 \delta \frac{h}{[(x - x_c)^2 + h^2]^{\frac{3}{2}}} \quad [4].$$

E’ importante sottolineare che questa formula vale per un profilo orizzontale passante per la proiezione in superficie del centro della sfera: in Fig. 3a è riportato un esempio di profilo per cui si può usare la formula, mentre in Fig.3b è riportato un esempio di profilo per cui non è valida la formula.

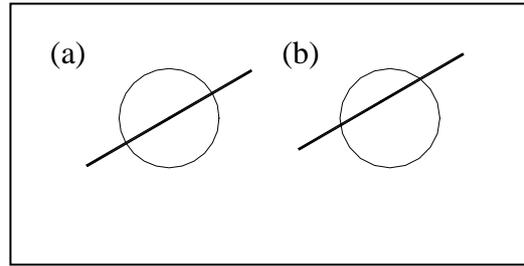


Fig. 3 – Rappresentazione nel piano xy di un profilo per cui la formula [4] è applicabile (a) e di un profilo per cui la formula non è applicabile (b).

Un altro aspetto a cui bisogna fare molta attenzione sono le unità di misura adottate.

Si ricorda che nel sistema c.g.s.: $G = 6.67 \cdot 10^{-8} \text{ cm}^3 \text{ g}^{-1} \text{ s}^{-2}$; $\delta \text{ (g cm}^{-3}\text{)}$, $\Delta g_{s,z} \text{ (gal)}$ e le distanze sono espresse in cm. Nel sistema S.I.: $G = 6.67 \cdot 10^{-11} \text{ m}^3 \text{ kg}^{-1} \text{ s}^{-2}$; $\delta \text{ (kg m}^{-3}\text{)}$, $\Delta g_{s,z} \text{ (m s}^{-2}\text{)}$ e le distanze sono espresse in m.

Una volta fissati i parametri δ , R , x_c e h , l'anomalia risulterà funzione della sola x : $\Delta g_{s,z} = \Delta g_{s,z}(x)$ sarà quindi la curva che rappresenta l'andamento dell'anomalia gravimetrica lungo l'asse x (Fig.4).

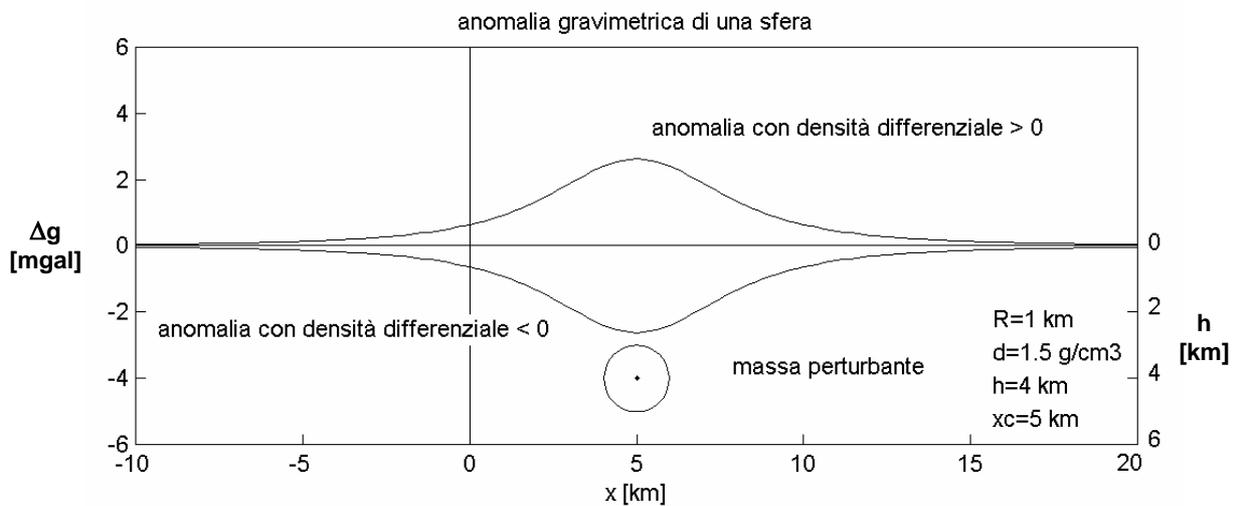


Fig.4 – Andamento lungo l'asse x dell'anomalia gravimetrica relativa ad una massa sferica

La funzione avrà un estremo (un massimo o un minimo a seconda del segno di δ) in corrispondenza della verticale passante per il baricentro (cioè per $x = x_c$):

$$(\Delta g_{s,z})_{\max} = \Delta g_{s,z}(x = x_c) = \frac{GM}{h^2} \quad [5],$$

dove $M = \frac{4}{3} \pi R^3 \delta$ è appunto la massa della sfera;

all'aumentare di x (e quindi della distanza dal centro della sfera) gli effetti della massa perturbante diminuiscono, fino a diventare trascurabili; per avere un'idea di quanto velocemente diminuisce la funzione con la distanza, proviamo a calcolare il valore $x_{1/2}$ per il quale risulta

$$\Delta g_{s,z}(x = x_{1/2}) = (\Delta g_{s,z})_{\max}/2$$

imponendo:

$$\frac{GMh}{[(x_{1/2} - x_c)^2 + h^2]^{3/2}} = \frac{1}{2} \frac{GM}{h^2}$$

e svolgendo gli opportuni calcoli, si ottiene:

$$x_{1/2} = x_c \pm \sqrt{0.59}h \approx x_c \pm \frac{3}{4}h \quad [6].$$

Le isoanomale relative all'anomalia prodotta da una massa sferica perturbante sono circonferenze concentriche: se $\delta > 0$, allora i valori dell'anomalia decrescono verso l'esterno, se invece $\delta < 0$, i valori decrescono verso l'interno.

Può essere interessante vedere come varia $\Delta g_{s,z}$ in funzione degli altri parametri in gioco:

- all'aumentare, in valore assoluto, della densità differenziale δ (Fig. 5), aumenta, sempre in valore assoluto, il picco della curva ed inoltre si allarga la zona in cui l'effetto della sfera non è trascurabile;
- maggiore è la profondità h del centro della sfera (Fig.6), maggiore è la zona in cui gli effetti della sfera non sono trascurabili (la campana si allarga), ma l'intensità dell'anomalia è inferiore (la campana è più schiacciata);
- all'aumentare del raggio della sfera R (Fig.7), aumenta l'effetto perturbante dovuto alla sfera stessa (le curve sono più larghe e più alte); è importante ricordare che anche piccole variazioni del raggio possono determinare variazioni significative di $\Delta g_{s,z}$ poiché nella formula compare R^3 .

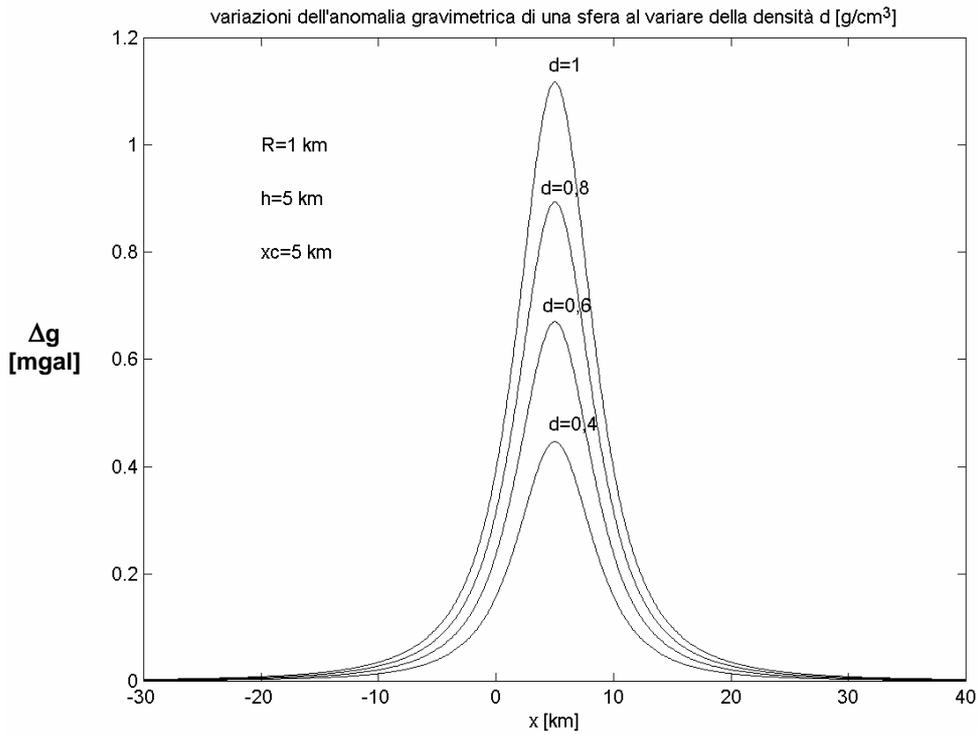


Fig. 5 – Effetti della variazione della densità differenziale d sull'anomalia gravimetrica relativa ad una massa sferica

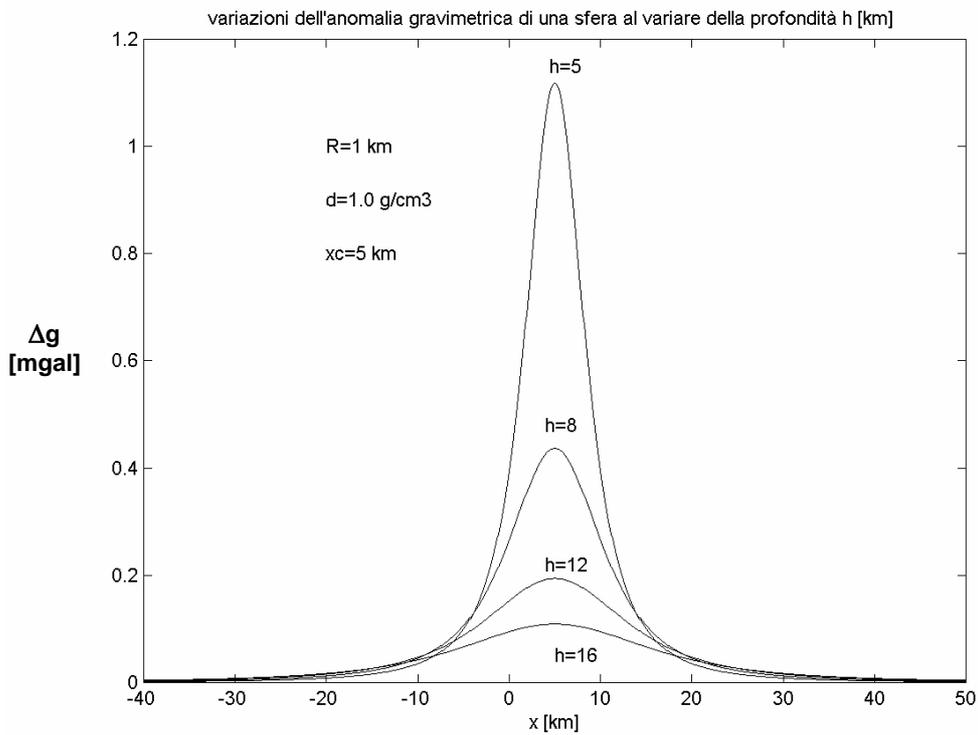


Fig.6 - Effetti della variazione della profondità h del centro di una massa sferica sull'anomalia gravimetrica relativa alla massa stessa

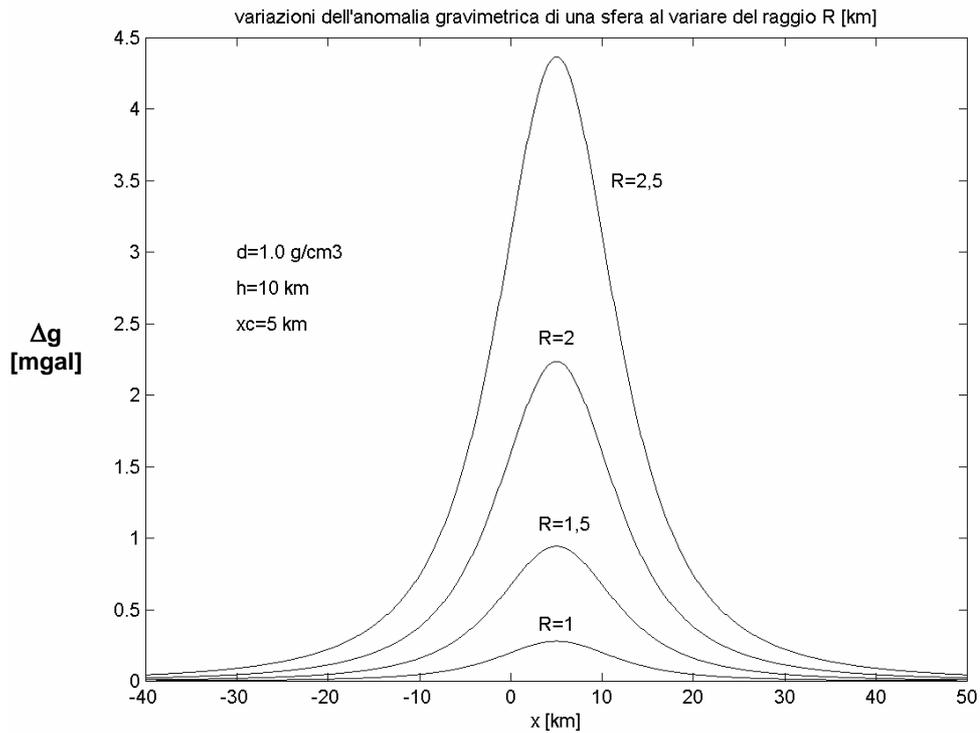


Fig.7 - Effetti della variazione del raggio R di una massa sferica sull'anomalia gravimetrica relativa alla massa stessa

2.2 CALCOLO DELL'ANOMALIA DI UN CILINDRO ORIZZONTALE INDEFINITO

Per ottenere l'effetto gravimetrico lungo l'asse x di un cilindro con asse orizzontale parallelo all'asse y, partiamo dall'effetto di un disco di spessore dy, con centro in C(0,y,h) (Fig.8).

L'attrazione Newtoniana esercitata dal disco nel punto P(x,0,0) è (supposta tutta la massa concentrata nel centro):

$$dg = \frac{Gdm}{r^2} = G(\delta\pi R^2 dy) \frac{1}{(\sqrt{x^2 + y^2 + h^2})^2} = G\delta\pi R^2 \frac{dy}{x^2 + y^2 + h^2} \quad [7],$$

dove: G è la costante di gravitazione universale; dm è la massa del disco; r è la distanza tra il punto P e il centro del disco; δ è la densità differenziale (ossia la differenza tra la densità del cilindro e quella del terreno circostante); R è il raggio del disco; h è la quota del centro del disco.

L'anomalia dovuta al disco sarà la componente verticale di dg, quindi:

$$dg_z = dg \cdot \cos\theta = dg \frac{h}{r} = G\delta\pi R^2 \frac{hdy}{(x^2 + y^2 + h^2)^{3/2}} \quad [8]$$

dove θ è l'angolo che la forza dg forma con l'asse verticale delle z.

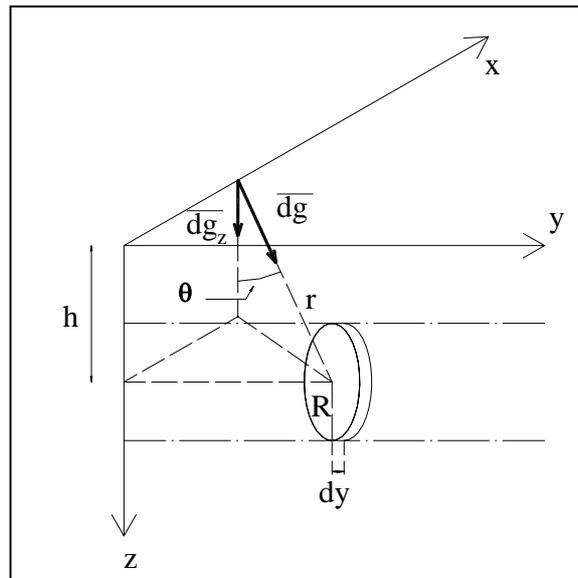


Fig. 8 – Calcolo dell’anomalia gravimetrica relativa ad una massa cilindrica orizzontale indefinita

L’anomalia gravimetrica dell’intero cilindro sarà ottenuta integrando tra $-\infty$ e $+\infty$ l’anomalia gravimetrica dovuta al disco:

$$\Delta g_{c,z} = G\delta\pi R^2 h \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dy}{(x^2 + y^2 + h^2)^{3/2}} = 2G\delta\pi R^2 \frac{h}{x^2 + h^2} \quad [9];$$

questo risultato è ottenuto facilmente ricordando che l’integrale risulta invariante rispetto a y; più in generale, se x_c è la coordinata lungo l’asse delle x dei punti dell’asse del cilindro, si avrà:

$$\Delta g_{c,z} = 2G\delta\pi R^2 \frac{h}{(x - x_c)^2 + h^2} \quad [10].$$

E’ importante sottolineare che anche questa formula non vale per qualunque profilo orizzontale, ma solo per un profilo orizzontale ortogonale all’asse del cilindro (Fig. 9).

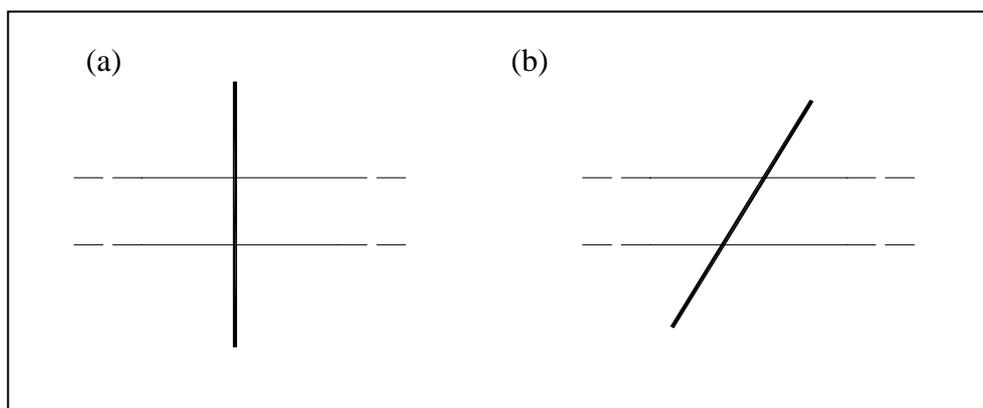


Fig. 9 – Rappresentazione nel piano xy di un profilo per cui la formula [10] è applicabile (a) e di un profilo per cui la formula non è applicabile (b).

Per quanto riguarda le unità di misura adottate, valgono le stesse precisazioni viste per l'anomalia della sfera.

L'andamento dell'anomalia in funzione della direzione x (una volta fissati gli altri parametri) è analogo all'anomalia prodotta da una sfera (Fig. 10): la curva $\Delta g_{c,z} = \Delta g_{c,z}(x)$ avrà un estremo (un massimo o un minimo a seconda del segno di δ) in corrispondenza dell'asse del cilindro (cioè per $x=x_c$) e all'aumentare di x (e quindi della distanza dall'asse del cilindro) gli effetti della massa perturbante diminuiscono, fino a diventare trascurabili; il valore massimo della curva vale

$$(\Delta g_{c,z})_{\max} = \Delta g_{c,z}(x = x_c) = \frac{2\pi G \delta R^2}{h} \quad [11].$$

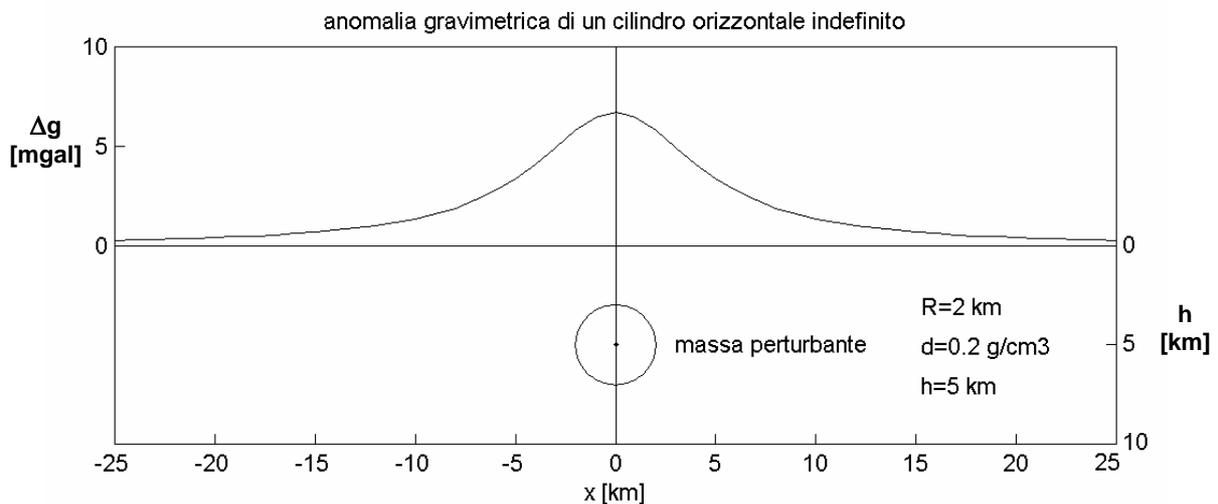


Fig.10 – Andamento lungo l'asse x dell'anomalia gravimetrica relativa ad una massa cilindrica orizzontale indefinita

Può essere interessante confrontare le anomalie gravimetriche dovute ad una sfera e ad un cilindro orizzontale indefinito a parità dei valori assunti dai parametri δ , R, x_c e h (Fig. 11): si osserva facilmente che gli effetti perturbanti del cilindro sono nettamente maggiori rispetto a quelli di una massa sferica (infatti il picco dell'anomalia del cilindro è molto maggiore rispetto a quello della sfera e la zona di influenza in cui gli effetti del cilindro non sono trascurabili è più estesa di quella della sfera).

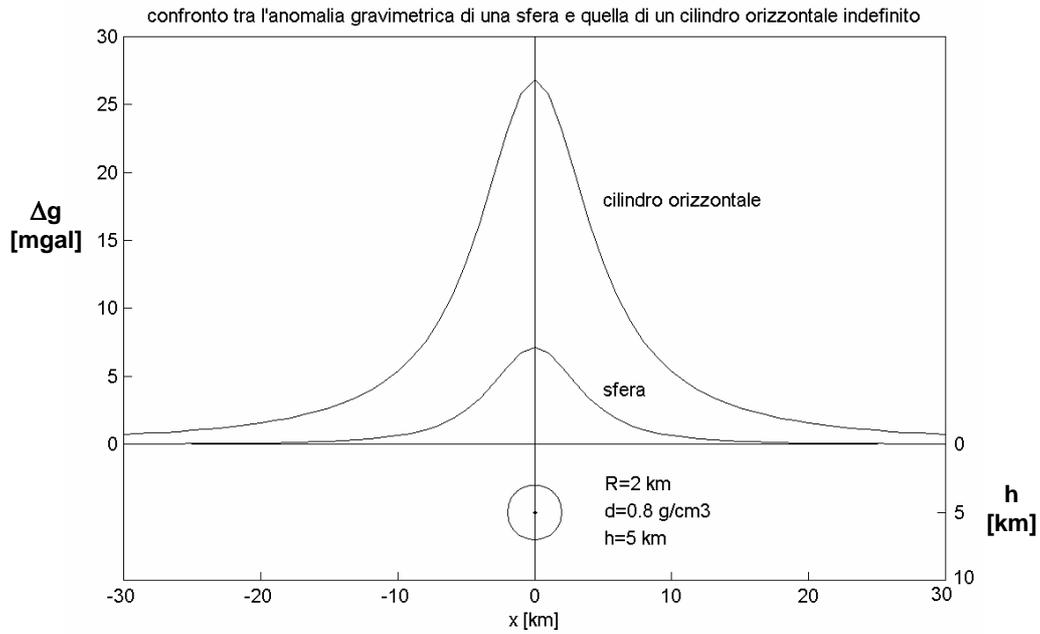


Fig.11– Confronto tra l’anomalia gravimetrica relativa ad una massa sferica e quella relativa ad una massa cilindrica orizzontale indefinita, a parità dei parametri R,d e h

Nelle figure successive (Figg.12-14) sono riportate le variazioni dell’anomalia di una massa cilindrica orizzontale indefinita al variare dei parametri δ , R e h.

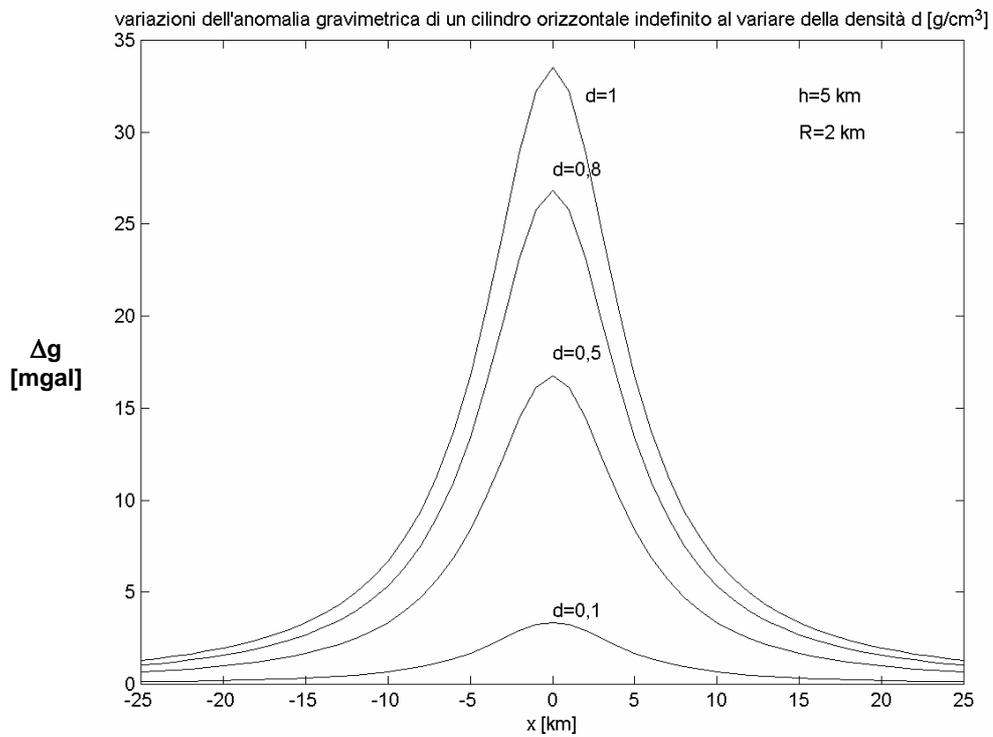


Fig. 12 – Effetti della variazione della densità differenziale d sull’anomalia gravimetrica relativa ad una massa cilindrica orizzontale indefinita

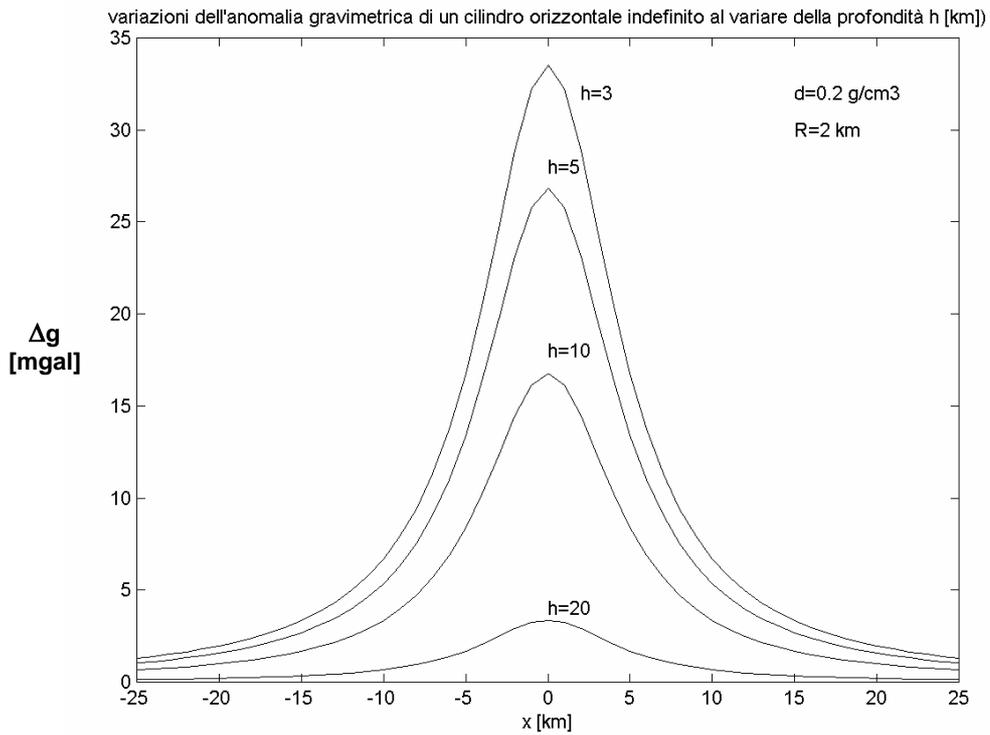


Fig. 13 – Effetti della variazione della profondità h dell'asse di una massa cilindrica orizzontale indefinita sull'anomalia gravimetrica relativa alla massa stessa

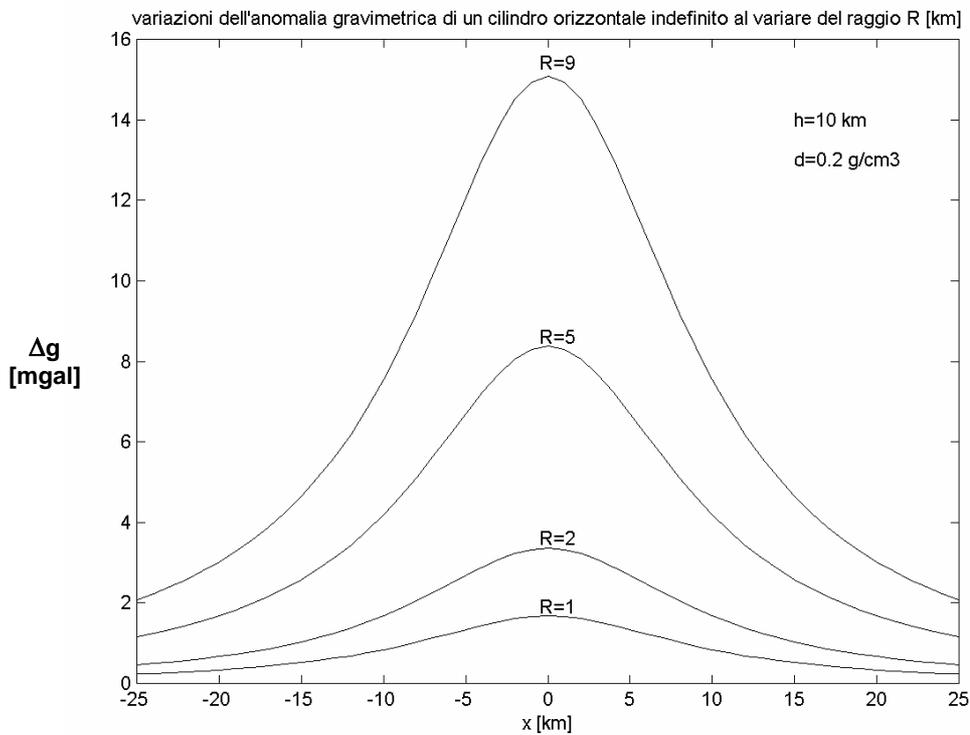


Fig. 14 – Effetti della variazione del raggio R di una massa cilindrica orizzontale indefinita sull'anomalia gravimetrica relativa alla massa stessa

2.3 CALCOLO DELL'ANOMALIA RELATIVA AD UNA FAGLIA VERTICALE

Una faglia verticale può essere schematizzata (Fig.15) tramite una struttura di densità uniforme δ_2 infinitamente estesa verso il basso e limitata superiormente da due semipiani orizzontali (posti alle profondità h_1 e h_2 , con $h_2 > h_1$, la cui differenza $h_2 - h_1$ è detta rigetto della faglia) raccordati tra loro da un piano verticale.

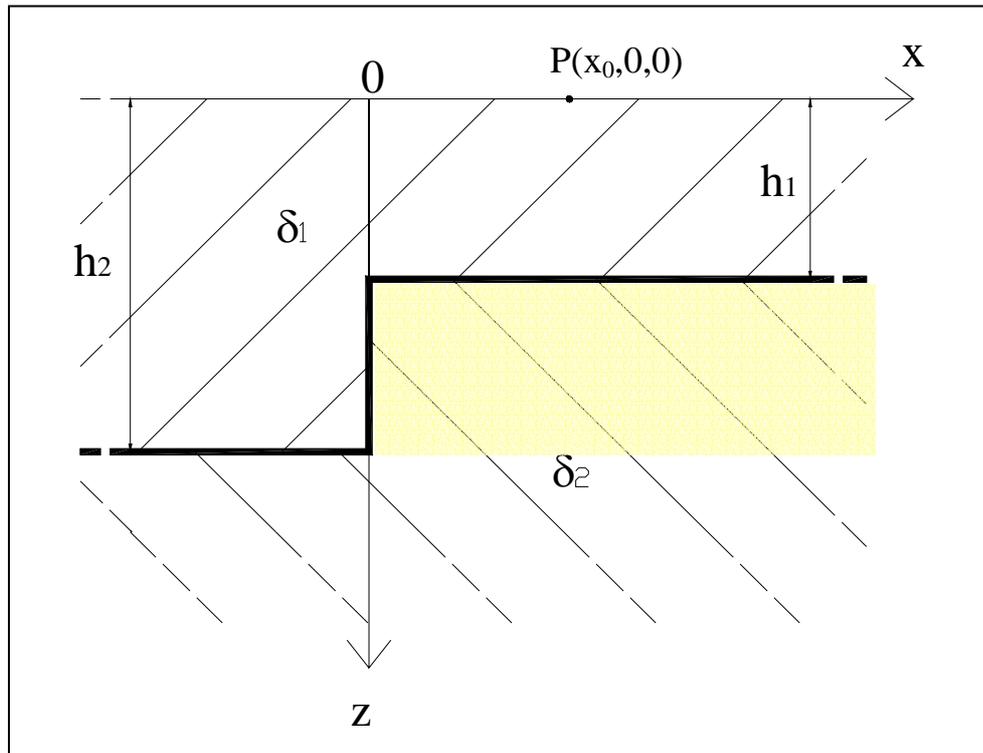


Fig.15 – Struttura che schematizza una faglia verticale

L'anomalia gravimetrica provocata nel punto $P(x_0, 0, 0)$ dalla presenza della faglia è da imputare alla presenza di una massa perturbante rispetto alla situazione di due strati orizzontali paralleli di densità rispettivamente δ_1 e δ_2 , separati dal piano orizzontale a profondità h_2 . Il terreno di densità δ_2 al di sotto di h_2 dà un contributo costante su tutti i punti del piano xy (è infatti l'anomalia relativa ad una struttura tabulare), contributo che non viene minimamente alterato dalla presenza della faglia; analogamente, anche il contributo del terreno di densità δ_1 posto al di sopra dei due semipiani orizzontali non è alterato dalla presenza della faglia. Ciò che determina una differenza rispetto alla situazione senza faglia è quindi la sola struttura (di densità differenziale $\delta = \delta_2 - \delta_1$) limitata dai due semipiani orizzontali a quota h_1 e h_2 : l'anomalia gravimetrica dovuta a questa struttura sarà ottenuta integrando sui limiti della struttura stessa l'anomalia gravimetrica dovuta ad un elemento di massa infinitesima dm .

L'attrazione gravitazionale dg nel punto $P(x_0,0,0)$ dovuta all'elemento di massa differenziale infinitesima $dm(x,y,z)$ è (Fig. 16):

$$dg = G \frac{dm}{r^2} = G \frac{(\delta dx dy dz)}{r^2} \quad [12],$$

dove G è la costante di gravitazione universale; r è la distanza tra l'elemento di massa dm ed il punto P ; δ è appunto la densità differenziale e dx , dy e dz sono le dimensioni infinitesime dell'elemento di massa dm .

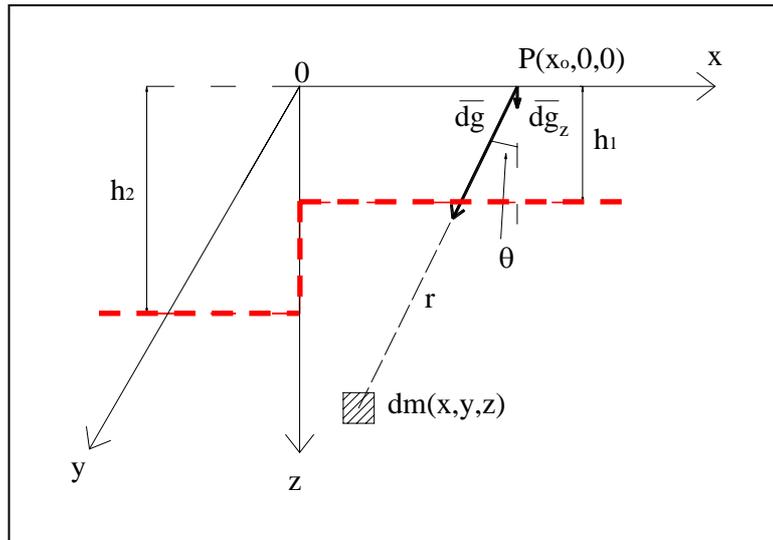


Fig. 16 – Calcolo dell'anomalia gravimetrica relativa ad una faglia verticale; la linea spessa tratteggiata è la proiezione della faglia sul piano xz

L'anomalia gravimetrica dg_z relativa all'elemento di massa differenziale dm è quindi la componente verticale di dg :

$$dg_z = dg \cdot \cos\theta = dg \frac{z}{r} = G\delta dx dy dz \frac{z}{r^3} = G\delta \frac{z dx dy dz}{[(x - x_0)^2 + y^2 + z^2]^{3/2}} \quad [13],$$

dove θ è l'angolo che la forza dg forma con l'asse verticale delle z .

Integrando infine dg_z sui limiti della struttura in esame, si ottiene l'anomalia gravimetrica relativa alla faglia verticale:

$$\Delta g_{f,z} = G\delta \int_{h_1}^{h_2} z dz \int_0^{\infty} dx \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dy}{[(x - x_0)^2 + y^2 + z^2]^{3/2}}$$

l'integrale in dy è invariante rispetto a y , quindi si ha

$$\begin{aligned}\Delta g_{f,z} &= 2G\delta \int_{h_1}^{h_2} dz \int_0^\infty \frac{z dx}{(x-x_o)^2+z^2} = 2G\delta \int_{h_1}^{h_2} dz \int_0^\infty \frac{\frac{1}{z} dx}{\left(\frac{x-x_o}{z}\right)^2+1} = 2G\delta \int_{h_1}^{h_2} \left[\arctg\left(\frac{x-x_o}{z}\right) \right]_0^\infty dz = \\ &= 2G\delta \int_{h_1}^{h_2} \left[\frac{\pi}{2} + \arctg\left(\frac{x_o}{z}\right) \right] dz = G\delta\pi(h_2-h_1) + 2G\delta \int_{h_1}^{h_2} \arctg\left(\frac{x_o}{z}\right) dz\end{aligned}$$

per risolvere l'integrale in dz si ricorre all'integrazione per parti:

$$\begin{aligned}\Delta g_{f,z} &= G\delta\pi(h_2-h_1) + 2G\delta \left[z \cdot \arctg\left(\frac{x_o}{z}\right) \right]_{h_1}^{h_2} + \int_{h_1}^{h_2} \frac{x_o \cdot z}{x_o^2+z^2} dz = \\ &= G\delta\pi(h_2-h_1) + 2G\delta \left[h_2 \cdot \arctg\left(\frac{x_o}{h_2}\right) - h_1 \cdot \arctg\left(\frac{x_o}{h_1}\right) \right] + 2G\delta \left(x_o \ln \sqrt{x_o^2+z^2} \right)_{h_1}^{h_2}\end{aligned}$$

In definitiva l'anomalia gravimetrica relativa ad una faglia verticale con rigetto (h_2-h_1) è:

$$\Delta g_{f,z} = G\delta\pi(h_2-h_1) + 2G\delta \left[h_2 \cdot \arctg\left(\frac{x_o}{h_2}\right) - h_1 \cdot \arctg\left(\frac{x_o}{h_1}\right) + x_o \ln \left(\sqrt{\frac{x_o^2+h_2^2}{x_o^2+h_1^2}} \right) \right] \quad [14].$$

Più in generale, se x è la coordinata lungo l'asse delle x del punto di osservazione P e x_F quella del piano verticale che compone la faglia, si ha:

$$\Delta g_{f,z} = G\delta\pi(h_2-h_1) + 2G\delta \left\{ h_2 \cdot \arctg\left(\frac{x-x_F}{h_2}\right) - h_1 \cdot \arctg\left(\frac{x-x_F}{h_1}\right) + x_o \ln \left[\sqrt{\frac{(x-x_F)^2+h_2^2}{(x-x_F)^2+h_1^2}} \right] \right\} \quad [15].$$

Per quanto riguarda le unità di misura adottate, valgono esattamente le stesse precisazioni viste per l'anomalia della sfera.

L'andamento dell'anomalia lungo l'asse x è riportato nella Fig.17; si osserva che:

- per $x_o \rightarrow -\infty$ l'anomalia tende ad annullarsi;
- per $x_o=0$ l'anomalia si riduce al termine costante presente nella formula

$$(\Delta g_{f,z})_0 = \Delta g_{f,z}(x=0) = G\delta\pi(h_2-h_1) \quad [15];$$

- per $x_o \rightarrow \infty$ l'anomalia tende asintoticamente al suo valore massimo, pari a due volte il termine costante:

$$(\Delta g_{f,z})_{\max} = \Delta g_{f,z}(x \rightarrow \infty) = 2(\Delta g_{f,z})_0 = 2G\delta\pi(h_2-h_1) \quad [16].$$

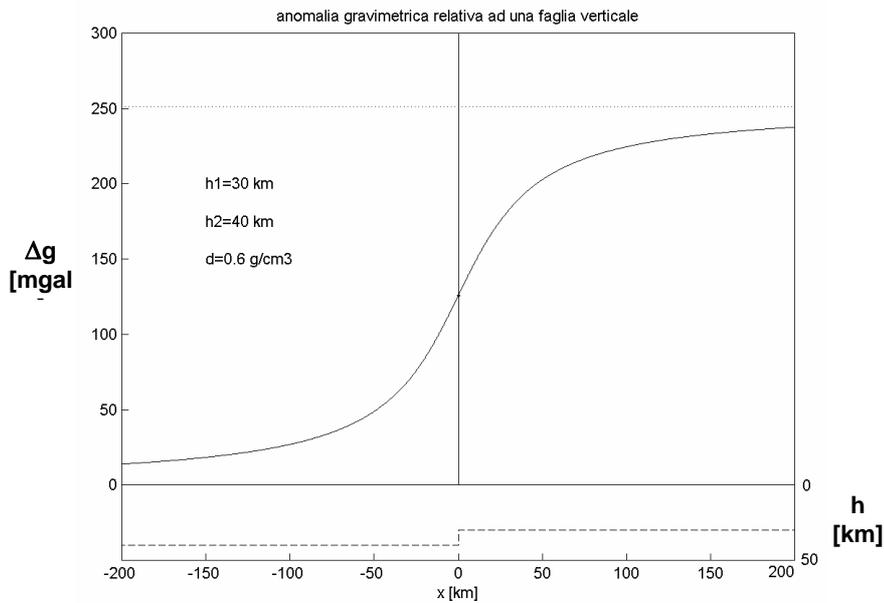


Fig.17 – Anomalia gravimetrica relativa ad una faglia verticale;
per il significato dei simboli si veda il testo

Nella Fig.18 è visualizzato l'effetto combinato delle anomalie prodotte da una faglia verticale ed una massa perturbante sferica.

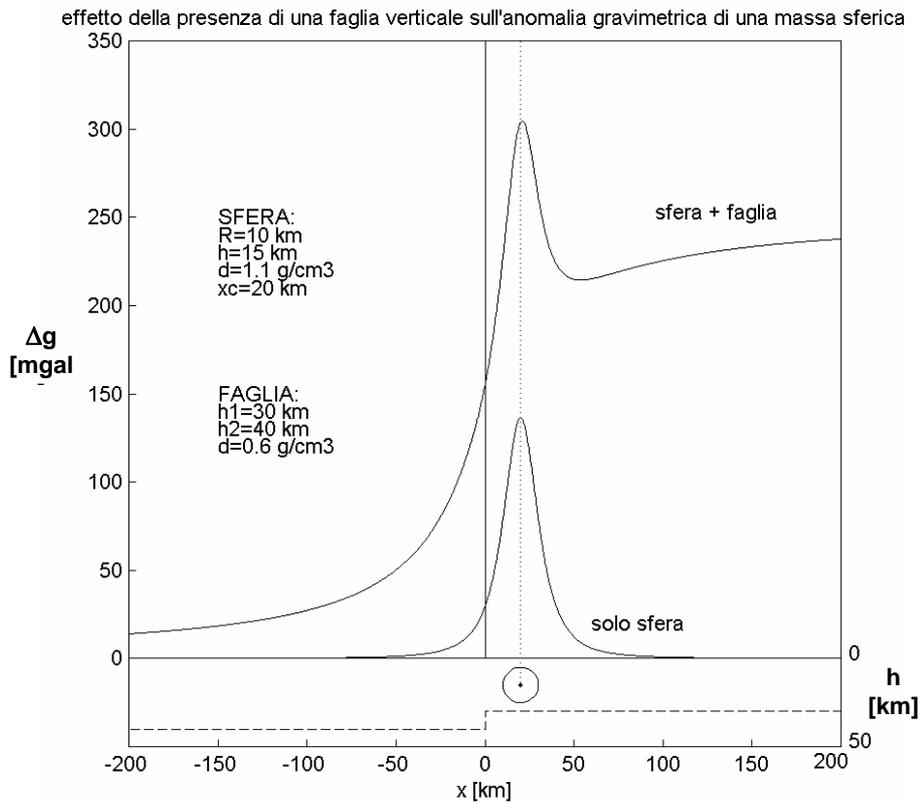


Fig.18 – Effetto della presenza di una faglia verticale sull'anomalia gravimetrica prodotta da una massa perturbante sferica; per il significato dei simboli si veda il testo

3. INTERPRETAZIONE QUANTITATIVA: IL METODO INDIRECTO

Consiste nel ricostruire pezzo per pezzo una struttura simulata che provoca le anomalie trovate sperimentalmente in superficie. Tale studio si fa con reticoli e abachi che si basano sul principio di dividere un piano in zone, ciascuna delle quali da un contributo noto all'anomalia di gravità in un punto (centro del reticolo).

3.1 RETICOLO PER STRUTTURE BIDIMENSIONALI

Un primo tipo di reticolo si adotta nel caso in cui la massa responsabile dell'anomalia sia una struttura bidimensionale, cioè infinitamente estesa secondo una direzione, che supporremo, per comodità, orizzontale (Fig. 19). In questo caso la struttura può essere approssimata mediante un cilindro orizzontale infinitamente esteso nel senso del suo asse: essendo tale cilindro determinato dalla sua sezione retta, il piano normale all'asse del reticolo viene diviso in tante aree elementari (ognuna delle quali reca un contributo "t" o tasso del reticolo) tali che i cilindri indefiniti aventi per direttrici i contorni di tali aree causino uguali anomalie g nel centro del reticolo (fig.20). In tal modo, se n è il numero di tasselli occupato dalla massa in esame, nt sarà l'anomalia generata nel punto O.

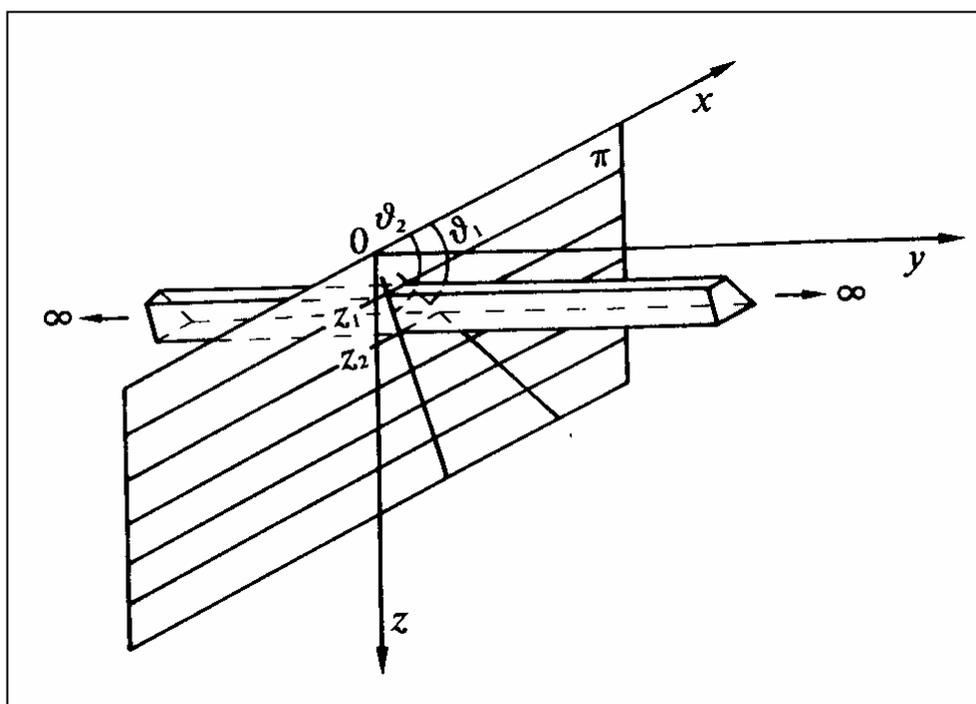


Fig. 19 – Schema per il calcolo del reticolo per strutture bidimensionali (da Norinelli)

Con riferimento alla fig. 19, fissato un sistema di assi ortogonali di origine O, calcoliamo la componente verticale dell'attrazione (cioè l'anomalia gravimetrica) esercitata sull'unità di massa posta in O da un corpo cilindrico (nel senso della geometria analitica) allungato secondo la y.

La componente verticale dg_z esercitata da un elemento di volume $dV=dx dy dz$ di coordinate (x,y,z) e di densità δ , sarà quindi:

$$dg_z = G \frac{\delta dV}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} \frac{z}{\sqrt{(x^2 + y^2 + z^2)}} = \frac{G\delta z dx dy dz}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} \quad [17],$$

dove G è la costante di gravitazione universale e dx , dy e dz sono appunto le dimensioni infinitesime dell'elemento di volume dV .

L'anomalia gravimetrica dovuta all'intero cilindro è ottenuta integrando questo contributo infinitesimo sui limiti Δx , Δy e Δz che definiscono il cilindro:

$$\begin{aligned} \Delta g_z &= G\delta \iint_s z dx dz \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dy}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} = 2G\delta \iint_s z dx dz \left| \frac{y}{(x^2 + z^2)\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \right|_0^{\infty} = 2G\delta \iint_s \frac{z dx dz}{x^2 + z^2} = \\ &= 2G\delta \int_{z_1}^{z_2} z dz \int_{\text{ctg}(90-\theta_2)}^{\text{ctg}(90-\theta_1)} \frac{dx}{x^2 + z^2} = 2G\delta(z_2 - z_1)(\theta_2 - \theta_1). \end{aligned}$$

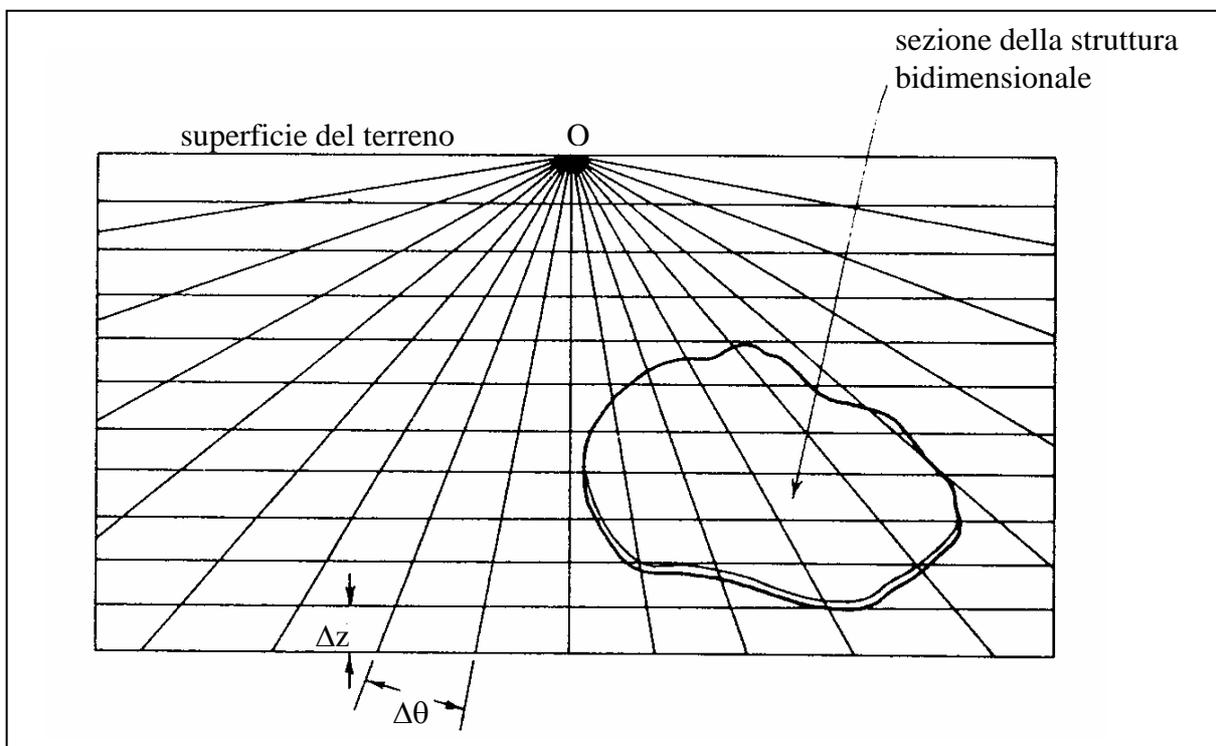
Cioè in definitiva:

$$\Delta g_z = 2G\delta \Delta z \Delta \theta \quad [18],$$

avendo posto $\Delta z = (z_2 - z_1)$ e $\Delta \theta = (\theta_2 - \theta_1)$.

Quest'ultima formula permette di costruire facilmente un reticolo per masse bidimensionali (Fig.20); basta infatti dividere il piano (x,z) in settori limitati da semirette uscenti da O e da rette parallele all'asse x , in modo che $\Delta \theta = \text{costante}$ e $\Delta z = \text{costante}$.

In tale ipotesi l'attrazione esercitata da ognuno dei settori è costante qualunque sia la sua posizione. Se si vuole calcolare in un punto O l'attrazione verticale di una massa bidimensionale orizzontale a sezione qualsiasi, anche irregolare, è sufficiente valutare il numero dei settori ricoprenti la sezione in esame; tale numero deve essere poi moltiplicato per la costante del reticolo, cioè il valore della



densità.

Fig. 20 – Reticolo per strutture bidimensionali (da Telford)

Nella pratica dato un profilo d'anomalia sperimentale, si fanno delle ipotesi sulla struttura perturbante (profondità, densità, forma) e per mezzo del reticolo se ne calcola il profilo gravimetrico, si riportano cioè i punti su una carta millimetrica cercando di realizzare il fitting migliore con la curva dei dati sperimentali.

3.2 RETICOLO PER STRUTTURE NON BIDIMENSIONALI

Nel caso in cui la massa responsabile dell'anomalia non abbia una dimensione maggiore delle altre si adottano altri tipi di reticoli. Per costruirli, si calcola in un punto P il valore di g causata da un solido limitato: due piani orizzontali, compresi tra le profondità z_1 e z_2 ; due piani passanti per la verticale del punto P con azimut φ_1 e φ_2 e due cilindri coassiali aventi per assi la verticale per P e raggi ρ_1 e ρ_2 (fig.21).

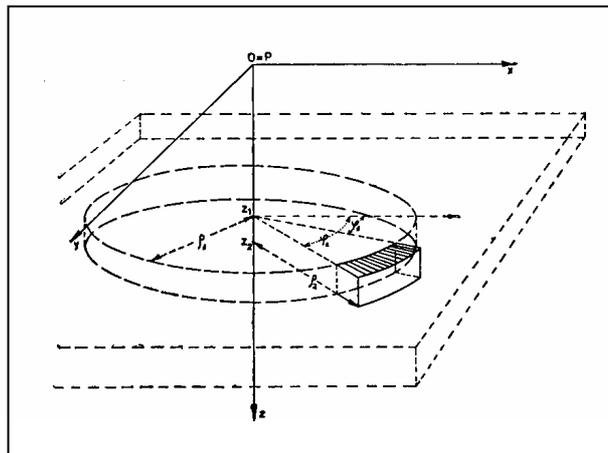


Fig.21 - Schema per il calcolo del reticolo per masse finite (da Morelli)

Si impone che l'attrazione esercitata da ciascuno dei solidi così costruiti al variare di questi parametri e data una certa densità differenziale assuma un valore costante predeterminato.

Il reticolo che ne risulta si presenta sotto forma di più corone circolari, ciascuna delle quali divisa in più settori (fig. 22).

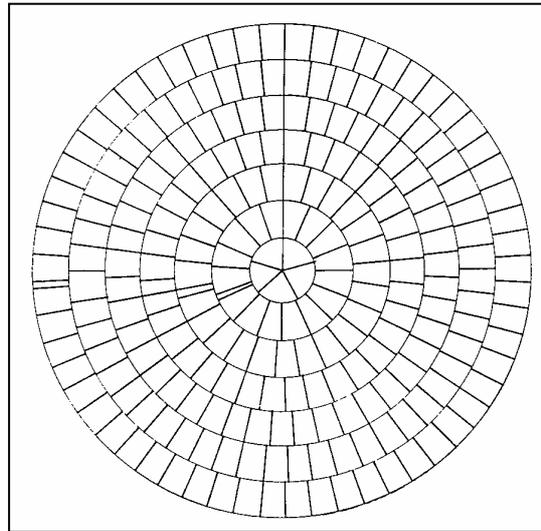


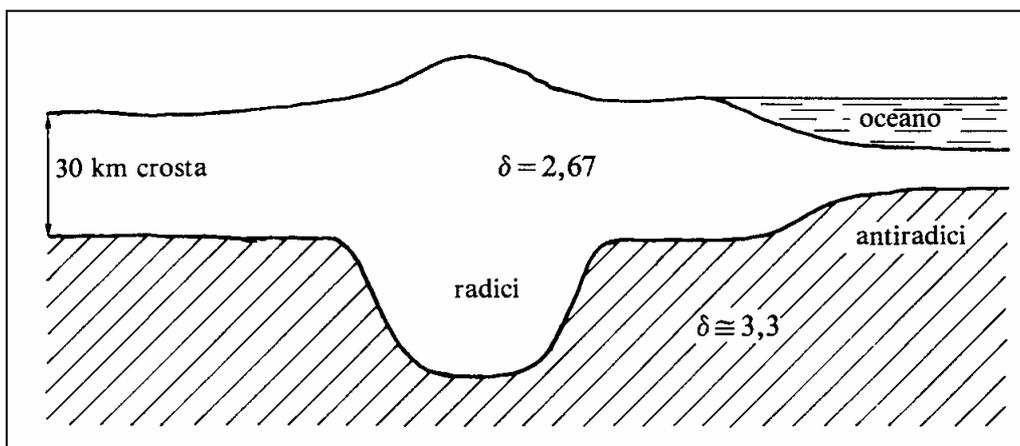
Fig. 22 – Esempio di un reticolo per masse finite, calcolato per $z=200\text{m}$, $z_2 - z_1 = 100\text{ m}$, $\rho_2 - \rho_1 = 100\text{ m}$, $\delta = 0.1\text{ g/cm}^3$; il tasso del reticolo è $t = 10\text{ }\mu\text{Gal}$ (da Morelli)

4. L'ISOSTASIA

Si tratta di un complesso di vecchie teorie nate quando si è tentato di dare una spiegazione al fatto che, allorché si studiano zone della terra molto vaste come gli oceani o le grandi catene montuose, si assiste a delle anomalie a carattere regionale piuttosto curiose:

- in corrispondenza dei grandi rilievi montuosi le anomalie di Bouguer sono negative come se al disotto del livello del mare, in corrispondenza dei rilievi tolti, esistesse una zona a densità minore; inoltre la direzione del filo a piombo che per definizione è la verticale, presso le montagne dovrebbe subire una deviazione teorica (rispetto alla normale all'ellissoide) che risulta invece superiore a quella reale.
- in corrispondenza degli oceani le anomalie di Bouguer sono positive, come se ad ogni deficit di massa corrispondesse un eccesso di massa interna.

L'isostasia è una sorta di condizione di equilibrio a cui tende ogni corpo planetario e deriva da una visione dinamica dei comportamenti crostali: si ammette cioè che il mantello, se sottoposto a pressioni prolungate nel tempo, tenda a deformarsi plasticamente comportandosi come un corpo



viscoso. Secondo l'ipotesi di Airy, alle culminazioni montuose corrispondono profonde radici ed inflessioni del mantello mentre al disotto dell'oceano il materiale più denso risale in superficie (antiradici) come se i continenti galleggiassero sul mantello con una parte emersa assai ridotta rispetto alla parte immersa per cui è stato fatto il paragone con gli iceberg galleggianti sull'acqua del mare. Il mantello deve essere quindi più vicino alla superficie in zona oceanica e più distante in zona continentale (fig. 23).

Fig. 23 – Ipotesi di Airy (da Norinelli)

L'elemento comune a tutte le teorie che fanno capo all'isostasia è l'ipotesi che ad una certa profondità si raggiunga un equilibrio cosiddetto isostatico: ad esempio in Scandinavia esiste una forte anomalia negativa probabilmente perché la crosta liberata dal ghiaccio quaternario sta recuperando da alcune migliaia di anni il suo equilibrio e sta tuttora sollevandosi.

Tutto questo fa sì che nei rilievi gravimetrici di regioni particolarmente estese la riduzione di Bouguer non sia più sufficiente ma si debba aggiungere una riduzione compensativa o riduzione isostatica che tenga conto dell'eccesso o del difetto di massa aggiungendo masse compensatrici all'interno nel caso di catene montuose e togliendo le masse in eccesso che stanno al di sotto nel caso degli oceani. In pratica, dopo la riduzione di Bouguer, che ha eliminato l'effetto del rilievo, si immagina che la radice leggera sottostante venga sostituita da un ugual volume avente la densità del substrato, cosicché la crosta leggera si configura come una lastra di densità e spessore uniformi. A prescindere dal modo con cui tale riduzione può essere calcolata, una volta fatta questa ulteriore correzione le anomalie isostatiche dovrebbero essere nulle nella situazione di equilibrio isostatico: forti anomalie possono significare una situazione di equilibrio non raggiunto. Così:

- ad anomalie isostatiche positive corrisponde l'esistenza di masse che devono essere ulteriormente compensate: il materiale superiore si trova più vicino alla superficie di quanto non dovrebbe e quindi questa zona dovrebbe abbassarsi per raggiungere l'equilibrio;
- ad anomalie isostatiche negative corrisponde invece la tendenza della crosta ad innalzarsi.

Il limite dell'isostasia stanno nel fatto che non sempre le masse compensatrici ipotizzate corrispondono a strutture geologiche effettivamente esistenti per cui questi fenomeni andrebbero forse visti nell'ottica di una dinamica più ampia.