UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DEL SALENTO
FACOLTÀ DI INGEGNERIA

Appunti del corso di

Analisi Matematica I

per il C.d.L. in Ingegneria dell'Informazione

Angela Albanese, Diego Pallara

Aggiornati da Antonio Leaci per l'a.a. 2008/09

PREFAZIONE

Nel presente fascicolo sono raccolte le nozioni di Analisi matematica presentate nel corso di Analisi Matematica I del primo anno di Ingegneria. In un altro fascicolo sono raccolte le nozioni presentate nel corso di Analisi Matematica II.

Il pochissimo tempo destinato dai nuovi ordinamenti all'insegnamento della materia non permette alcun approfondimento, ed anzi obbliga ad escludere dai programmi argomenti tradizionalmente ritenuti indispensabili.

Riteniamo però imprescindibile, pur con tale riduzione dei contenuti, conservare intatti l'impianto concettuale e l'impostazione metodologica dell'Analisi, e riteniamo che questo obbiettivo sia conseguibile solo dando enunciati sintetici e precisi, e rifuggendo da espressioni vaghe o poco chiare. Per semplificare un enunciato si può rinunziare alla massima generalità possibile, ma non al rigore della presentazione. Per questa ragione abbiamo ritenuto opportuno, e, speriamo, utile agli studenti, raccogliere in poche pagine le definizioni ed i risultati principali che vengono esposti durante le lezioni. Lo stile degli appunti è volutamente scarno ed avaro di commenti e divagazioni, che restano affidati all'esposizione orale in aula; suggeriamo agli studenti, pertanto, di limitarsi ad appuntare, durante le lezioni, solo le parti meno formali delle lezioni stesse, affidandosi a questa dispensa per gli enunciati che richiedono maggior rigore.

È per altro evidente che questi appunti non hanno la pretesa di sostituire il libro di testo, che resta indispensabile per acquisire una conoscenza dignitosa della materia. La loro funzione è piuttosto, come già detto, quella di sostituire gli appunti di lezione, troppo poco affidabili per tanti motivi, e di indicare il bagaglio *minimo* di conoscenze richieste per affrontare l'esame.

Infine, ringraziamo il collega Raffaele Vitolo per averci fornito il file di stile LATEX usato per la compilazione delle dispense, e dichiariamo in anticipo la nostra gratitudine a tutti i lettori che ci segnaleranno ogni osservazione utile a migliorare il testo.

INDICE

CAPITOLO 1

NUMERI REALI E COMPLESSI

1.1 L'insieme dei numeri reali

L'ambiente in cui si svolgerà la nostra trattazione è quello dei numeri *reali*. Diamo per note le definizioni e le proprietà dei numeri *naturali*, il cui insieme è denotato con $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \ldots\}$, dei numeri *interi*, il cui insieme è denotato con $\mathbb{Z} = \{\ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots\}$ e dei numeri *razionali*, il cui insieme è denotato con $\mathbb{Q} = \{p/q : \ p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{N}, q \neq 0\}$. Una definizione costruttiva dell'insieme $\mathbb{R}$ dei numeri reali, pur possibile, non è altrettanto immediata, ed in effetti non la daremo in queste note, rinviando ai libri di testo. È essenziale però impadronirsi delle proprietà dell'insieme dei numeri reali, che esprimeremo in forma assiomatica. La costruzione di $\mathbb{R}$ ha il ruolo (fondamentale) di provare che un insieme che gode delle proprietà elencate esiste nell'ambito delle usuali teorie insiemistiche.

Assiomi dei numeri reali.

Assumiamo che esista un insieme $\mathbb{R}$ dotato di due *operazioni binarie*, dette *addizione* e *moltiplicazione* e denotate rispettivamente $+$ e $\cdot$, e della *relazione d'ordine* di "maggiore od uguale", denotata $\geq$; chiamiamo gli elementi di tale insieme *numeri reali*, e assumiamo che valgano le seguenti proprietà, per ogni scelta di $a, b, c \in \mathbb{R}$.

Assiomi di campo.

Assioma 1. (Proprietà associative) $(a + b) + c = a + (b + c)$, $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$.

Assioma 2. (Proprietà commutative) $a + b = b + a$, $a \cdot b = b \cdot a$.

Assioma 3. (Proprietà distributiva) $(a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c$.

Assioma 4. (Elementi neutri) Esistono due numeri reali, denotati 0 e 1, che agiscono come *elementi neutri* rispettivamente dell'addizione e della moltiplicazione, cioè che verificano le uguaglianze: $a + 0 = a$ e $a \cdot 1 = a$ per ogni $a \in \mathbb{R}$.

Assioma 5. (Opposto) Per ogni $a \in \mathbb{R}$ esiste $b \in \mathbb{R}$ tale che $a + b = 0$; tale numero si dice *opposto* di a e si denota $-a$.

Assioma 6. (Inverso) Per ogni $a \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$, esiste $b \in \mathbb{R}$ tale che $a \cdot b = 1$; tale numero si dice *inverso* di a e si denota a^{-1}.

Assiomi dell'ordine.
Assioma 7. Per ogni coppia di numeri reali a, b, o vale $a \geq b$ oppure $b \geq a$.
Assioma 8. Se valgono contemporaneamente $a \geq b$ e $b \geq a$ allora $a = b$.
Assioma 9. Se $a \geq b$, per ogni $c \in \mathbb{R}$ risulta $a + c \geq b + c$.
Assioma 10. Se $a \geq 0$ e $b \geq 0$ allora $a + b \geq 0$ e $a \cdot b \geq 0$.

Gli assiomi elencati fin qui contengono, in forma rigorosa e concisa, delle proprietà dei numeri che sono già familiari; da esse si possono dedurre in modo sistematico tutte le proprietà note (per esempio, l'unicità degli elementi neutri) e le usuali regole algebriche e del calcolo letterale (semplificazioni, passaggio da un membro all'altro nelle uguaglianze e nelle diseguaglianze, eccetera). Non procederemo in questo modo, ritenendo che queste regole siano già note. Osserviamo che i primi sei assiomi sono di contenuto puramente algebrico e riguardano le operazioni di somma e moltiplicazione, mentre il 7 e l'8 riguardano la relazione d'ordine e il 9 e 10 legano le operazioni algebriche alla relazione d'ordine. Notiamo anche che, ovviamente, i numeri 0 e 1 dell'assioma 4 sono gli stessi degli insiemi $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, che si possono considerare, come faremo sempre, sottoinsiemi di $\mathbb{R}$.

Osservazione 1.1.1 Osserviamo che dagli assiomi 9 e 10 segue la proprietà transitiva dell'ordinamento, infatti se $b \geq a$ e $c \geq b$ dall'assioma 9 e 10 segue $c - b + b - a \geq 0$, da cui $c \geq a$.

Osserviamo inoltre che i dieci assiomi elencati sopra *non definiscono ancora completamente* $\mathbb{R}$. Infatti, essi valgono (per esempio) in $\mathbb{Q}$. Per definire $\mathbb{R}$ occorre un altro assioma che enunceremo fra poco e richiede qualche ulteriore nozione preliminare.

Definizione 1.1.2 (Valore assoluto) *Per ogni $x \in \mathbb{R}$, si definisce il* valore assoluto di *x, denotato con $|x|$, il numero*

$$|x| = \begin{cases} x & \text{se } x > 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \\ -x & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

Proposizione 1.1.3 (Proprietà del valore assoluto) *Per ogni $r > 0$ valgono le seguenti equivalenze:*

$$|x| \leq r \iff -r \leq x \leq r. \tag{1.1.1}$$

$$|x| \geq r \iff x \leq -r \vee x \geq r. \tag{1.1.2}$$

Inoltre, per ogni $x, y \in \mathbb{R}$:

$$|x| \geq 0, \qquad |x| = 0 \Leftrightarrow x = 0; \tag{1.1.3}$$
$$|x| = |-x|, \;\; |x \cdot y| = |x| \cdot |y|; \tag{1.1.4}$$
$$|x + y| \leq |x| + |y|; \tag{1.1.5}$$
$$\big||x| - |y|\big| \leq |x - y|. \tag{1.1.6}$$

Dim. Proviamo prima (1.1.1). Supponiamo dapprima $|x| \le r$. Se $x \ge 0$ allora $x \ge -r$ e $|x| = x \le r$; se $x < 0$ allora $x \le r$ e $|x| = -x \le r$, da cui $x \ge -r$. Viceversa, supponiamo $-r \le x \le r$. Allora, se $x \ge 0$ si ha $|x| = x \le r$, mentre se $x < 0$ si ha $x = -|x| \ge -r$, da cui $|x| \le r$.

La (1.1.2) si dimostra in modo analogo. Le (1.1.3), (1.1.4) sono ovvie conseguenze della definizione di valore assoluto. La (1.1.5), detta *diseguaglianza triangolare*, si può dimostrare usando (1.1.1). Infatti, sommando le relazioni:

$$-|x| \le x \le |x|, \quad -|y| \le y \le |y|$$

si deduce

$$-(|x| + |y|) \le x + y \le (|x| + |y|)$$

da cui per la (1.1.1) segue $|x + y| \le |x| + |y|$.

Infine, da (1.1.5) si deduce facilmente (1.1.6); infatti, risulta

$$|x| = |(x - y) + y| \le |x - y| + |y|,$$

e da qui $|x| - |y| \le |x - y|$; scambiando x con y si ottiene $|y| - |x| \le |x - y|$ e quindi $-|x - y| \le |x| - |y| \le |x - y|$ e la tesi segue da (1.1.1). QED

Definiamo una classe di sottoinsiemi di $\mathbb{R}$ che interverrà in numerose considerazioni.

Definizione 1.1.4 (Insiemi limitati) *Un sottoinsieme non vuoto $X \subset \mathbb{R}$ si dice:*

1. limitato superiormente *se esiste $M \in \mathbb{R}$ tale che $x \le M$ per ogni $x \in X$;*
2. limitato inferiormente *se esiste $m \in \mathbb{R}$ tale che $x \ge m$ per ogni $x \in X$;*
3. limitato *se è limitato superiormente ed inferiormente.*

Introduciamo una notazione per gli intervalli di $\mathbb{R}$, che sono i sottoinsiemi con cui prevalentemente (ma non *esclusivamente*!) lavoreremo, e per gli intorni di un punto, che useremo per descrivere le proprietà di vicinanza tra numeri reali.

Definizione 1.1.5 (Intervalli e intorni) *Dati a e b in $\mathbb{R}$, con $a < b$, si dice* intervallo chiuso *di estremi a e b l'insieme*

$$[a, b] = \{x \in \mathbb{R} : \ a \le x \le b\};$$

si dice intervallo aperto *di estremi a e b l'insieme*

$$]a, b[= \{x \in \mathbb{R} : \ a < x < b\};$$

si dice intervallo semiaperto a destra *di estremi a e b l'insieme*

$$[a, b[= \{x \in \mathbb{R} : \ a \le x < b\};$$

si dice intervallo semiaperto a sinistra *di estremi a e b l'insieme*

$$]a, b] = \{x \in \mathbb{R} : \ a < x \leq b\}.$$

Dato $a \in \mathbb{R}$, si denota con $[a, +\infty[$ l'insieme

$$[a, +\infty[= \{x \in \mathbb{R} : \ a \leq x\},$$

e con $]a, +\infty[$ l'insieme

$$]a, +\infty[= \{x \in \mathbb{R} : \ a < x\};$$

analogamente:

$$\begin{array}{rcl}]-\infty, a] & = & \{x \in \mathbb{R} : \ x \leq a\}, \\ ]-\infty, a[& = & \{x \in \mathbb{R} : \ x < a\}. \end{array}$$

Dati $x_0 \in \mathbb{R}$ e $r > 0$, si dice intorno aperto di x_0 di raggio r *l'insieme*

$$I_r(x_0) = \{x \in \mathbb{R} : \ x_0 - r < x < x_0 + r\} =]x_0 - r, x_0 + r[.$$

Nella definizione di intervalli con un estremo infinito, non si è dato alcun significato ai simboli $\pm\infty$ fuori dal contesto dell'intera espressione che li contiene. Questo accadrà spesso anche nel seguito. Notiamo anche che talvolta si scrive $]-\infty, +\infty[$ per denotare $\mathbb{R}$.

Molto spesso, parleremo genericamente di *intervallo*; se non viene specificato nulla, s'intende che quanto detto vale per intervalli qualunque (aperti, chiusi, semiaperti limitati, illimitati, indifferentemente). Accanto all'intorno aperto di x_0 di raggio r possiamo considerare l'intorno chiuso

$$\overline{I}_r(x_0) = \{x \in \mathbb{R} : \ x_0 - r \leq x \leq x_0 + r\} = [x_0 - r, x_0 + r].$$

Notiamo inoltre che un insieme X è limitato se e solo se è contenuto in un intervallo limitato, cioè se e solo se esistono $m, M \in \mathbb{R}$ tali che $X \subset [m, M]$. Introduciamo due importanti concetti legati alla limitatezza.

Definizione 1.1.6 (Maggioranti, minoranti, massimo, minimo) *Sia X un sottoinsieme di $\mathbb{R}$.*

Si dice che $M \in \mathbb{R}$ è un maggiorante per X *se $x \leq M$ per ogni $x \in X$. Si dice che M è il* massimo di X, *e si scrive $M = \max X$, se M è un maggiorante ed inoltre M appartiene ad X.*

Si dice che $m \in \mathbb{R}$ è un minorante per X *se $x \geq m$ per ogni $x \in X$. Si dice che m è il* minimo di X, *e si scrive $m = \min X$, se m è un minorante ed m appartiene ad X.*

Le considerazioni che seguono sono tutte conseguenze dirette delle definizioni.

Osservazioni 1.1.7

1. Un insieme ammette maggioranti se e solo se è limitato superiormente, ed ammette minoranti se e solo se è limitato inferiormente.

2. Se un insieme ammette un maggiorante M allora ne ammette infiniti, poiché ogni numero maggiore di M è ancora un maggiorante. Naturalmente, una considerazione analoga vale per i minoranti.

3. A differenza dei maggioranti, il massimo e il minimo di un insieme, se esistono, sono unici. Infatti, se M_1 ed M_2 sono entrambi massimi di X allora M_1, M_2 appartengono entrambi ad X ed applicando la definizione di massimo prima con $M = M_1$ ed $x = M_2$ e poi con $M = M_2$ e $x = M_1$ si trova $M_2 \leq M_1$ e poi $M_1 \leq M_2$, da cui $M_1 = M_2$ e l'unicità del massimo. Ovviamente un ragionamento analogo porta all'unicità del minimo.

4. Un insieme limitato può non avere massimo o minimo. Per esempio, l'intervallo $]a, b]$ ha massimo b ma non ha minimo, perché i suoi minoranti sono gli elementi dell'intervallo $]-\infty, a]$, e nessuno di essi appartiene ad $]a, b]$.

5. Ogni insieme costituito da un numero *finito* di numeri reali ha sempre massimo e minimo.

Tenendo conto delle osservazioni precedenti, diamo la seguente definizione.

Definizione 1.1.8 (Estremo superiore ed inferiore) *Dato $X \subset \mathbb{R}$ limitato superiormente, e detto M_X l'insieme dei suoi maggioranti, diciamo* estremo superiore di X *il più piccolo dei maggioranti, cioè il numero*

$$\sup X = \min M_X.$$

Dato $X \subset \mathbb{R}$ limitato inferiormente, e detto M'_X l'insieme dei suoi minoranti, diciamo estremo inferiore di X *il più grande dei minoranti, cioè il numero*

$$\inf X = \max M'_X.$$

Come osservato, in generale, un insieme, anche limitato, può non avere massimo o minimo, ed infatti aver definito sup e inf permette di parlarne, ma non ne assicura l'esistenza. Il fatto che (in $\mathbb{R}$) l'insieme dei maggioranti (rispettivamente, dei minoranti) di un insieme dato abbia *sempre* minimo (risp. massimo) in $\mathbb{R}$ distingue in modo essenziale $\mathbb{R}$ da $\mathbb{Q}$. L'esistenza dell'estremo superiore (inferiore) per un insieme limitato superiormente (inferiormente) completa la nostra descrizione assiomatica dell'insieme dei numeri reali. Notiamo che in tutta la trattazione precedente sono stati usati solo gli assiomi già enunciati, e quindi essa è logicamente coerente, anche se la descrizione di $\mathbb{R}$ non era ancora completa.

Assioma 11. (Completezza) Ogni insieme $X \subset \mathbb{R}$ non vuoto e limitato superiormente ammette estremo superiore $\sup X$ in $\mathbb{R}$.

Osservazioni 1.1.9

1. Dall'Assioma 11 segue subito che ogni sottoinsieme di $\mathbb{R}$ non vuoto e limitato inferiormente ammette estremo inferiore in $\mathbb{R}$. Infatti risulta $\inf X = -\sup(-X)$.

2. Abbiamo già osservato che il massimo e il minimo di un insieme, se esistono, sono unici. Segue subito quindi dalla definizione l'unicità dell'estremo superiore e dell'estremo inferiore.

3. Conveniamo di porre $\sup X = +\infty$ se $\emptyset \neq X \subset \mathbb{R}$ e X non è limitato superiormente, e $\inf X = -\infty$ se $\emptyset \neq X \subset \mathbb{R}$ e X non è limitato inferiormente. Come prima, non diamo un significato ai simboli $\pm\infty$ isolati dal contesto, ma solo all'intera espressione che li contiene.

4. È evidente che se $\emptyset \neq A \subset B \subset \mathbb{R}$ allora $\sup A \leq \sup B$ e $\inf A \geq \inf B$.

Discutiamo separatamente altre due importanti conseguenze dell'assioma di completezza, la cui dimostrazione è meno immediata.

Osservazione 1.1.10

1. **(Proprietà archimedea)**: per ogni coppia di numeri reali a e b, con $0 < a < b$, esiste un numero naturale n tale che $na > b$. Segnaliamo anche la seguente conseguenza: se un numero $c \geq 0$ è minore di ε *per ogni* $\varepsilon > 0$ allora $c = 0$. Infatti, se fosse $c > 0$, dato $\varepsilon > 0$ esisterebbe $n \in \mathbb{N}$ tale che $nc > \varepsilon$, ossia $c > \varepsilon/n$, che contraddice l'ipotesi che c sia minore di *ogni* numero strettamente positivo prefissato. Tale risultato è talvolta utile per provare che due numeri reali a e b sono uguali, applicandolo a $c = |a-b|$. Se infatti si riesce a provare che $|a-b| < \varepsilon$ per ogni $\varepsilon > 0$, allora segue $a = b$.

2. **(Densità dei razionali nei reali)**: per ogni coppia di numeri reali a, b, con $a < b$, esiste un numero *razionale* r tale che $a < r < b$. Prendiamo prima $a > 0$. Allora per n maggiore del più grande fra i numeri $\frac{1}{a}$ e $\frac{1}{b-a}$ risulta $0 < \frac{1}{n} < a$ e per la proprietà archimedea esiste m tale che $\frac{m}{n} > a$. Se si sceglie m in modo che $\frac{m-1}{n} \leq a$, essendo $\frac{1}{n} < b - a$, si ha anche $\frac{m}{n} < b$. Se $b < a < 0$ si ragiona come prima con $-a$ e $-b$ e poi si cambia di segno il numero trovato. se $a \leq 0$ e $b > 0$ si trova come prima r tra $b/2$ e b, se $a < 0$ e $b = 0$ si trova r tra a e $a/2$.

Si può dare una utile caratterizzazione dell'estremo superiore e dell'estremo inferiore di un insieme.

Proposizione 1.1.11 (Caratterizzazione del sup e dell'inf) *Sia $X \subset \mathbb{R}$ limitato. Allora valgono le seguenti equivalenze:*

$$L = \sup X \iff \begin{cases} x \leq L \text{ per ogni } x \in X \\ \text{per ogni } \varepsilon > 0 \text{ esiste } x_\varepsilon \in X \text{ tale che } x_\varepsilon > L - \varepsilon \end{cases} \tag{1.1.7}$$

$$\text{(1.1.8)} \qquad \ell = \inf X \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{cases} x \geq \ell \text{ per ogni } x \in X \\ \text{per ogni } \varepsilon > 0 \text{ esiste } x_\varepsilon \in X \text{ tale che } x_\varepsilon < \ell + \varepsilon \end{cases}$$

DIM. Sia dapprima $L = \sup X$. Allora, $x \leq L$ per ogni $x \in X$ perché L è un maggiorante di X. Inoltre, nessun numero più piccolo di L è un maggiorante di X; poiché ogni numero minore di L si può scrivere nella forma $L - \varepsilon$, con $\varepsilon > 0$, negare che $L - \varepsilon$ sia un maggiorante di X equivale a dire che esiste un $x_\varepsilon \in X$ tale che $x_\varepsilon > L - \varepsilon$.

Viceversa, supponiamo che valgano le due condizioni a destra in (1.1.7); allora, la prima dice che L è un maggiorante di X. La seconda afferma che nessun numero più piccolo di L, espresso nella forma $L - \varepsilon$, con $\varepsilon > 0$ arbitrario, è un maggiorante di X. Segue $L = \sup X$.

La dimostrazione di (1.1.8) è analoga. QED

L'assioma di completezza *non vale* nell'insieme dei numeri razionali $\mathbb{Q}$, e quindi $\mathbb{Q}$ è contenuto *propriamente* in $\mathbb{R}$. I numeri reali non razionali si dicono *irrazionali*.

Esempio 1.1.12 Sia $X = \{r \in \mathbb{Q} : \; r^2 < 2\}$; allora, X è limitato superiormente, ma $\sup X \notin \mathbb{Q}$; segue che l'assioma di completezza non vale in $\mathbb{Q}$. Per giustificare la nostra affermazione, procediamo in due passi: mostriamo prima che se $L = \sup X$ allora $L^2 = 2$, e poi che se $L^2 = 2$ allora $L \notin \mathbb{Q}$. Per la prima parte, si può ragionare così: supposto $L^2 < 2$, esistono $0 < \varepsilon < 1$ tali che $(L + \varepsilon)^2 < 2$ infatti risulta:

$$(L + \varepsilon)^2 = L^2 + 2L\varepsilon + \varepsilon^2 < L^2 + 2L\varepsilon + \varepsilon = L^2 + (2L + 1)\varepsilon < 2$$

pur di scegliere

$$\varepsilon < \frac{2 - L^2}{2L + 1}.$$

Per tali valori di ε risulta che $(L + \varepsilon)^2 < 2$ e quindi per la densità di $\mathbb{Q}$ in $\mathbb{R}$ ci sono elementi di X compresi tra L ed $L + \varepsilon$, sicché, supposto $L^2 < 2$, L non può essere il sup di X.

Analogamente, supposto $L^2 > 2$, si vede che esistono $\varepsilon > 0$ tali che

$$(L - \varepsilon)^2 = L^2 - 2L\varepsilon + \varepsilon^2 > L^2 - 2L\varepsilon > 2,$$

pur di prendere

$$\varepsilon < \frac{L^2 - 2}{2L}.$$

Per tali valori di ε risulta che $(L - \varepsilon)^2 > 2$ e quindi esistono maggioranti di X compresi tra $L - \varepsilon$ ed L, in particolare più piccoli di L. Questo prova che, supposto $L^2 > 2$, L non può essere il sup di X. In definitiva, $(\sup X)^2 = 2$.

Proviamo ora che $\sup X \notin \mathbb{Q}$. Supposto vero il contrario, sia $\sup X = p/q$ con la frazione p/q ridotta ai minimi termini. Si vede facilmente che questo porta ad una contraddizione. Infatti:

> $\left(\frac{p}{q}\right)^2 = 2$ implica $p^2 = 2q^2$, da cui p^2 pari, e quindi p pari, diciamo $p = 2r$ allora $q^2 = 2r^2$ pari, e q pari.

La precedente conclusione è impossibile perché la frazione era supposta ridotta ai minimi termini.

1.2 Funzioni elementari

Prima di affrontare lo studio delle funzioni reali di variabile reale, che sarà l'argomento centrale del corso, richiamiamo alcune nozioni generali sulle funzioni tra insiemi generici.

1.2.a Generalità sulle funzioni

Definizione 1.2.1 *Sia U un qualunque insieme (non vuoto), che consideriamo come l'universo del nostro discorso.*

1. *Una* funzione *è una terna costituita da due sottoinsiemi di U, il primo, che denotiamo con A, detto* dominio, *il secondo, denotato con B, detto* codominio, *ed una legge di corrispondenza che fa corrispondere ad ogni elemento x di A uno (ed un solo) elemento di B, denotato con $f(x)$. Simbolicamente, scriviamo $f : A \to B$.*

2. *Si dice* insieme immagine *di f l'insieme*
$$f(A) = \{y \in B : \text{ esiste } x \in A \text{ tale che } f(x) = y\} \subset B.$$

3. *Si dice* grafico di *f l'insieme*
$$G(f) = \{(x, y) \in A \times B : \ x \in A, \ y = f(x)\} \subset A \times B.$$

4. *Data $f : A \to B$, e dato un sottoinsieme $C \subset A$, si dice* restrizione di *f la funzione $f|_C : C \to B$ che ha per dominio C, per codominio B e come legge di corrispondenza la stessa della f iniziale.*

5. *Una funzione $f : A \to B$ si dice* iniettiva *se $x_1, x_2 \in A$, $x_1 \neq x_2$ implica $f(x_1) \neq f(x_2)$.*

6. *Una funzione $f : A \to B$ si dice* surgettiva *se $f(A) = B$, cioè se per ogni $y \in B$ esiste $x \in A$ tale che $f(x) = y$.*

7. *Una funzione $f : A \to B$ si dice* bigettiva *se è iniettiva e surgettiva.*

8. *Una funzione $f : A \to B$ si dice* invertibile *se esiste una funzione $g : B \to A$ tale che $y = f(x) \Leftrightarrow x = g(y)$ per ogni $x \in A$, $y \in B$. Se f è invertibile, la funzione g suddetta si dice* inversa di *f e si denota con f^{-1}.*

9. *Per ogni insieme $A \subset U$, si definisce la* funzione identità *$id_A : A \to A$ ponendo $id_A(x) = x$ per ogni $x \in A$.*

10. *Date le funzioni* $f : A \to B$ *e* $g : B \to C$*, si definisce la* funzione composta $g \circ f : A \to C$ *ponendo* $(g \circ f)(x) = g\big(f(x)\big)$ *per ogni* $x \in A$*.*

Osservazioni 1.2.2 1. Una funzione è invertibile se e solo se è bigettiva.

2. Data $f : A \to B$, la funzione $g : B \to A$ è l'inversa di f se e solo se $g \circ f = id_A$ e $f \circ g = id_B$, cioè se $(g \circ f)(x) = x$ per ogni $x \in A$ e $(f \circ g)(y) = y$ per ogni $y \in B$.

3. Una funzione è sempre surgettiva prendendo come codominio l'insieme immagine $f(A)$, quindi ogni funzione iniettiva è sempre bigettiva da A in $f(A)$.

4. Se $f : A \to B$ è invertibile e $G(f)$ è il suo grafico, allora il grafico della funzione inversa $f^{-1} : B \to A$ è l'insieme

$$G(f^{-1}) = \{(y, x) \in B \times A : \ (x, y) \in G(f)\}.$$

1.2.b Funzioni reali di una variabile

D'ora in poi l'universo del nostro discorso, salvo avviso contrario, sarà l'insieme dei numeri reali, o qualche suo sottoinsieme. Considereremo perciò *funzioni reali di una variabile reale*, cioè funzioni definite in $X \subset \mathbb{R}$ ed a valori in $\mathbb{R}$, simbolicamente $f : X \to \mathbb{R}$. Useremo ovviamente la terminologia introdotta nella Definizione 1.2.1, ma, in questo caso particolare, accanto alle proprietà generali delle funzioni già viste possiamo segnalarne altre, peculiari delle funzioni reali. Iniziamo dall'importante nozione di monotonia.

Definizione 1.2.3 *Sia* $f : X \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$*; si dice che* f *è* crescente *se*

$$x_1, x_2 \in X, \ x_1 < x_2 \quad \Longrightarrow \quad f(x_1) \le f(x_2);$$

si dice che f *è* strettamente crescente *se*

$$x_1, x_2 \in X, \ x_1 < x_2 \quad \Longrightarrow \quad f(x_1) < f(x_2);$$

si dice che f *è* decrescente *se*

$$x_1, x_2 \in X, \ x_1 < x_2 \quad \Longrightarrow \quad f(x_1) \ge f(x_2);$$

si dice che f *è* strettamente decrescente *se*

$$x_1, x_2 \in X, \ x_1 < x_2 \quad \Longrightarrow \quad f(x_1) > f(x_2);$$

si dice che f *è* monotòna *se è crescente o decrescente, che è* strettamente monotòna *se è strettamente crescente o strettamente decrescente.*

Osservazione 1.2.4 È chiaro che ogni funzione $f : X \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ strettamente monotona è iniettiva, e perciò è invertibile da X su $f(X)$. Useremo sistematicamente questo fatto per studiare l'invertibilità delle funzioni. Inoltre, segue subito dalle definizioni che l'inversa di una funzione crescente è crescente, e l'inversa di una funzione decrescente è decrescente.

Altre proprietà delle funzioni reali corrispondono alle proprietà dei sottoinsiemi di $\mathbb{R}$ visti nella sezione precedente.

Definizione 1.2.5 (Funzioni limitate) *Sia $f : X \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Si dice che f è* limitata *se $f(X)$ è limitato, cioè se esistono $m, M \in \mathbb{R}$ tali che $m \leq f(x) \leq M$ per ogni $x \in X$.*

Come per la limitatezza, per definire massimo, minimo, estremo superiore ed inferiore di una funzione si fa riferimento all'insieme immagine $f(X)$.

Definizione 1.2.6 (max, min, sup ed inf di una funzione) *Si definiscono il* massimo*, il* minimo*, l'*estremo superiore *e l'*estremo inferiore *di f su X ponendo:*

$$\begin{aligned}
\max_X f &= \max f(X) = \max\{f(x) : \ x \in X\}, \\
\min_X f &= \min f(X) = \min\{f(x) : \ x \in X\}, \\
\sup_X f &= \sup f(X) = \sup\{f(x) : \ x \in X\}, \\
\inf_X f &= \inf f(X) = \inf\{f(x) : \ x \in X\}.
\end{aligned}$$

Osservazione 1.2.7 Come per gli insiemi, una funzione $f : X \to \mathbb{R}$, anche limitata, può non avere minimo o massimo. La funzione f ha minimo se e solo se esiste $x_1 \in X$ tale che $f(x) \geq f(x_1)$ per ogni $x \in X$. In tal caso, x_1 si dice *punto di minimo assoluto per f in X*. Analogamente, la funzione f ha massimo se e solo se esiste $x_2 \in X$ tale che $f(x) \leq f(x_2)$ per ogni $x \in X$. In tal caso, x_2 si dice *punto di massimo assoluto per f in X*.

Naturalmente, il grafico di una funzione $f : X \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ è sempre un sottoinsieme di $\mathbb{R}^2$, prodotto cartesiano della retta reale per sé stessa, in cui supponiamo fissato un riferimento cartesiano ortogonale di assi x (asse delle ascisse) ed y (asse delle ordinate). Conveniamo di rappresentare sull'asse delle ascisse la variabile indipendente e sull'asse delle ordinate la variabile dipendente, sicché il grafico di una funzione $f : X \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sarà l'insieme dei punti del piano che verificano le condizioni $x \in X$ e $y = f(x)$. Dal punto di vista geometrico, i grafici delle funzioni nel piano sono caratterizzati dalla seguente condizione:

> Sia $G \subset \mathbb{R}^2$. Allora, esistono $X \subset \mathbb{R}$ ed $f : X \to \mathbb{R}$ tali che $G = G(f)$ se e solo se l'intersezione di G con ogni retta verticale, cioè del tipo $x =$ costante, contiene al più un punto.

In tal caso, X è l'insieme dei punti x tali che l'intersezione di G con la retta verticale passante per $(x, 0)$ contiene esattamente un punto. Tale punto, sia (x, y), permette di definire la funzione f ponendo $f(x) = y$ per ogni $x \in X$.

Una condizione geometrica analoga caratterizza l'*iniettività* di una funzione; infatti,

> Sia $f : X \to \mathbb{R}$; allora, f è iniettiva se e solo se l'intersezione di $G(f)$ con ogni retta orizzontale, cioè del tipo $y =$ costante, contiene al più un punto.

L'insieme delle y tali che l'intersezione di G con la retta orizzontale passante per $(0, y)$ non è vuota costituisce $f(X)$.

1.2.c Funzioni elementari

In questo paragrafo definiamo le più usuali funzioni di una variabile, a partire dalle quali, con le operazioni algebriche e la composizione di funzioni, si otterranno la maggior parte degli esempi che incontreremo. Le funzioni che andiamo a considerare saranno definite attraverso *espressioni analitiche*, cioè algoritmi di calcolo che comprendono operazioni algebriche oppure calcolo di estremi superiore od inferiore. Tali algoritmi consistono in una procedura che, dato il numero reale x in un opportuno insieme, prescrive come si debba calcolare il numero $f(x)$, cioè il valore cha la funzione f assume in corrispondenza del valore assegnato alla variabile indipendente. Non bisogna per altro confondere la *funzione* f con la procedura per il calcolo di $f(x)$, che chiamiamo *espressione analitica.* Infatti, per dare la funzione f, pur dando per scontato che il suo codominio sia $\mathbb{R}$, bisogna dichiarare quale sia il *dominio* scelto, oltre ad assegnare l'espressione analitica che contiene la legge di corrispondenza richiesta per completare la definizione. Ciò non ostante, talvolta il dominio corrispondente ad una certa espressione analitica è taciuto: in tal caso, si assume come dominio il così detto *dominio naturale dell'espressione analitica*, cioè il più grande sottoinsieme di $\mathbb{R}$ in cui tutte le operazioni richieste per il calcolo di $f(x)$ si possono eseguire.

Funzioni razionali

Le funzioni definite da espressioni analitiche che contengono solo operazioni algebriche sono i *polinomi* e le *funzioni razionali.* Chiameremo *polinomio di grado* n nella variabile x l'espressione

$$P(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n,$$

definita per ogni x reale, dove gli $a_0, \ldots, a_n$ sono numeri reali dati, con $a_n \neq 0$, detti *coefficienti del polinomio.* Il grado del polinomio è quindi il massimo esponente della potenza di x con coefficiente non nullo. Tra i polinomi hanno un ruolo particolare le *potenze intere*, cioè del tipo $f(x) = x^n$, in cui uno solo dei coefficienti è non nullo. I polinomi di primo grado sono le funzioni *affini*, $f(x) = ax + b$ e in particolare quelle *lineari*, $f(x) = ax$. Notiamo che le funzioni affini e lineari, con $a \neq 0$, sono strettamente monotone, e perciò invertibili (crescenti per $a > 0$ e decrescenti per $a < 0$). Per quanto riguarda le funzioni potenza, per n dispari esse sono strettamente crescenti su $\mathbb{R}$ (e quindi invertibili), mentre per n pari sono strettamente crescenti le loro restrizioni all'insieme dei numeri positivi $\{x \in \mathbb{R} : \ x \geq 0\}$.

Le altre funzioni razionali sono quelle espresse come rapporto di polinomi. Fra queste, le più semplici sono le funzioni *potenze negative* x^{-n}, con $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$, definite per $x \neq 0$ come $x^{-n} = \frac{1}{x^n}$. La generica funzione razionale sarà del tipo

$$f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)},$$

dove P e Q sono polinomi di grado qualunque. Il dominio naturale di f è in questo caso l'insieme $X = \{x \in \mathbb{R} : \ Q(x) \neq 0\}$, dal momento che, delle operazioni richieste per il calcolo di $f(x)$, l'unica che non si possa eseguire per ogni numero reale è la divisione, per la quale è escluso che il denominatore possa essere 0.

Radici aritmetiche e potenze razionali

Per ogni $n \in \mathbb{N}$, con $n \geq 2$, e per ogni $x \geq 0$, poniamo

$$\sqrt[n]{x} = \sup\{y \in \mathbb{R} : \ y^n < x\},$$

funzione detta *radice* n*-esima aritmetica di* x. Notiamo che per ogni $x \geq 0$ risulta $\sqrt[n]{x} \geq 0$. L'esistenza della radice è assicurata dall'assioma di completezza. Inoltre, ragionando come nell'Esempio 1.1.12, si può dedurre dalle proprietà dell'estremo superiore che $(\sqrt[n]{x})^n = x$, cioè che la funzione radice n-esima è l'*inversa della restrizione della funzione potenza* n*-esima all'insieme* $\{x \in \mathbb{R} : \ x \geq 0\}$, che, come già osservato, è strettamente crescente. Poiché le funzioni potenza n-esima per n dispari sono strettamente crescenti su $\mathbb{R}$ e non solo su $\{x \geq 0\}$, si possono estendere le funzioni radice n-esima, per n dispari, ad $\mathbb{R}$, ponendo $\sqrt[n]{x} = -\sqrt[n]{-x}$ per ogni $x < 0$.

Per $r \in \mathbb{Q}$, posto per fissare le idee $r = p/q$ con $p \in \mathbb{Z}$ e $q \in \mathbb{N}$, $q \neq 0$, poniamo $x^r = x^{p/q} = \sqrt[q]{x^p}$ per ogni $x \geq 0$ ($x > 0$ se $p < 0$).

Esponenziali e logaritmi

Avendo definito l'espressione x^r, con $x > 0$ ed $r \in \mathbb{Q}$, possiamo pensarla con x fissato ed r variabile, passando così dalla *funzione potenza* già considerata alla *funzione esponenziale*, per ora con esponente razionale. Siccome $1^r = 1$ per ogni r, considereremo in questo paragrafo una base strettamente positiva e diversa da 1. Per sottolineare che la base della potenza è costante, scriveremo a^r, supponendo fissato il numero reale $a > 0$, $a \neq 1$. Vale il seguente importante risultato.

Proposizione 1.2.8 *La funzione esponenziale* a^r, $r \in \mathbb{Q}$, *gode delle seguenti proprietà:*

1. $a^r > 0$ *per ogni* $a > 0$ *e per ogni* $r \in \mathbb{Q}$;
2. *per* $a \in]0,1[$ *la funzione* a^r *è strettamente decrescente;*
3. *per* $a > 1$ *la funzione* a^r *è strettamente crescente;*
4. *vale l'uguaglianza* $a^{r_1} \cdot a^{r_2} = a^{r_1+r_2}$ *per ogni* $r_1, r_2 \in \mathbb{Q}$.

Dalla Proposizione 1.2.8 segue che la definizione di esponenziale si può estendere al caso di esponenti *reali* qualsiasi. Sia $a > 0$, $a \neq 1$. Poniamo

$$a^x = \inf\{a^r : \ r \in \mathbb{Q}, \ r < x\} \qquad \text{se } a \in]0,1[; \tag{1.2.9}$$

$$a^x = \sup\{a^r : \ r \in \mathbb{Q}, \ r < x\} \qquad \text{se } a > 1. \tag{1.2.10}$$

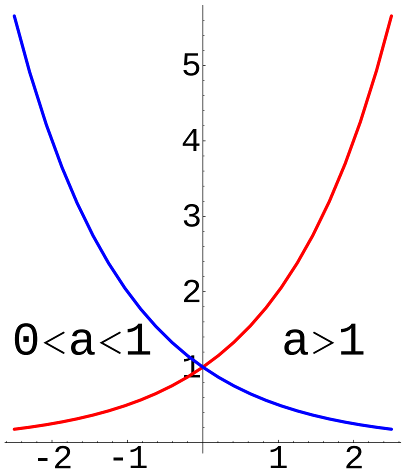


Figura – 1.1: Grafico delle funzioni esponenziali

È molto importante notare che la funzione esponenziale *con esponente reale* appena definita gode ancora delle proprietà elencate nella Proposizione 1.2.8 ed è surgettiva su $]0, +\infty[$. Segue allora dall'Osservazione 1.2.4 che è possibile definire la funzione inversa dell'esponenziale.

Per $a > 0$, $a \neq 1$, si dice *logaritmo in base* a, e si denota $\log_a : \{x > 0\} \to \mathbb{R}$, la funzione inversa di a^x; risulta allora

$$\log_a x = y \quad \Longleftrightarrow \quad a^y = x \qquad \forall\, x > 0,\ y \in \mathbb{R}.$$

Sempre per l'Osservazione 1.2.4 si ha che $\log_a$ è strettamente crescente per $a > 1$ e strettamente decrescente per $a \in]0, 1[$. Tra le funzioni esponenziali e i logaritmi, per motivi che saranno chiari più avanti nel corso, ha un ruolo importantissimo quella la cui base è il numero

$$\mathrm{e} = \sup_{n \in \mathbb{N}} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n . \tag{1.2.11}$$

Risulta che e è un numero *irrazionale* e in particolare un suo valore approssimato è $\mathrm{e} = 2,71828$. Torneremo sulla definizione del numero e nell'Esempio 2.3.3.

Definizione 1.2.9 (Funzione esponenziale e logaritmo naturale) *Si dice* funzione esponenziale *la funzione* e^x, *e* logaritmo naturale *il logaritmo in base* e, *denotato semplicemente* log.

Notiamo che $\mathrm{e} > 1$, quindi sia l'esponenziale e^x che il logaritmo naturale $\log x$ sono funzioni strettamente crescenti.

Infine, il procedimento esposto permette di definire anche le *funzioni potenza con esponente reale*. In altri termini, fissato $\alpha \in \mathbb{R}$, possiamo definire la *funzione potenza di esponente* α ponendo, per ogni $x > 0$, x^α come il valore dato dalle (1.2.9), (1.2.10), secondo i casi. Notiamo che $x^\alpha = \mathrm{e}^{\alpha \log x}$.

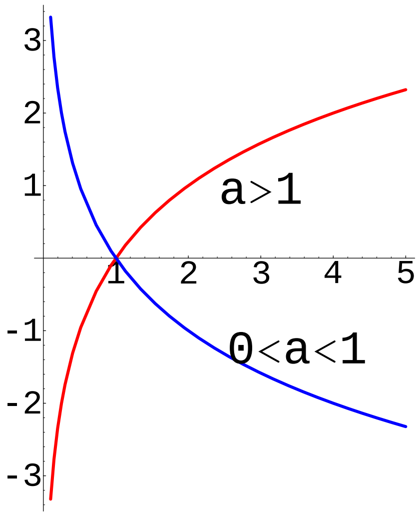


Figura – 1.2: Grafico delle funzioni logaritmo

Funzioni iperboliche

A partire dalla funzione esponenziale è possibile definire le funzioni iperboliche.

Definizione 1.2.10 (Funzioni iperboliche) *Le funzioni iperboliche sono il* coseno iperbolico*, il* seno iperbolico *e la* tangente iperbolica*, definite su tutto* $\mathbb{R}$ *da*

$$\cosh x = \frac{\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}}{2}, \quad \sinh x = \frac{\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}}{2}, \quad \tanh x = \frac{\sinh x}{\cosh x}.$$

La relazione fondamentale tra le funzioni iperboliche è:

$$\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1 .$$

Le funzioni $\sinh x$ e $\tanh x$ sono strettamente crescenti e dispari (cioè $\sinh(-x) = -\sinh x$ e $\tanh(-x) = -\tanh x$) e le loro immagini sono rispettivamente $\mathbb{R}$ e $]-1,1[$ mentre la funzione $\cosh x$ è pari (cioè $\cosh(-x) = \cosh x$) e la sua immagine è l'intervallo $[1,+\infty[$.

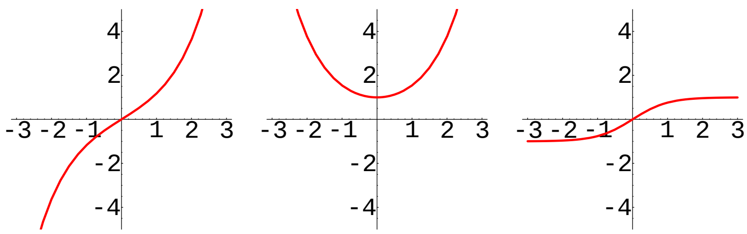


Figura – 1.3: Grafici di $\sinh x$, $\cosh x$, $\tanh x$.

Definizione 1.2.11 *Si dicono* funzioni iperboliche inverse *le funzioni:*

- *la funzione* settore seno iperbolico*,* $\operatorname{sett\,sinh} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$*, inversa della funzione strettamente crescente* sinh*, definita da*

$$x = \operatorname{sett\,sinh} y \iff y = \sinh x \qquad \forall\ x \in \mathbb{R},\ \forall\ y \in \mathbb{R};$$

- *la funzione* settore coseno iperbolico*,* $\operatorname{sett\,cosh} : [1, +\infty[\to [0, +\infty[$*, inversa della restrizione di* cosh *all'intervallo* $[0, +\infty[$*, definita da*

$$x = \operatorname{sett\,cosh} y \iff y = \cosh x \qquad \forall\ x \in [0, +\infty[,\ \forall\ y \in [1, +\infty[;$$

- *la funzione* settore tangente iperbolica*,* $\operatorname{sett\,tanh} :]-1, 1[\to \mathbb{R}$*, inversa della funzione strettamente crescente* tanh*, definita da*

$$x = \operatorname{sett\,tanh} y \iff y = \tanh x \qquad \forall\ x \in \mathbb{R},\ \forall\ y \in]-1, 1[.$$

È possibile esprimere le funzioni iperboliche inverse in termini di altre funzioni elementari. Infatti risulta

$$\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2} = y$$

se e solo se, posto $e^x = t$ si ha $t - \frac{1}{t} = 2y$ da cui $t^2 - 2yt - 1 = 0$. Risolvendo l'equazione in t e tenendo conto che ci interessa solo la soluzione $t > 0$ risulta $t = y + \sqrt{y^2 + 1}$ ossia, ricordando la definizione di t

$$x = \operatorname{sett\,sinh} y = \log t = \log(y + \sqrt{y^2 + 1}).$$

Analogamente si ottiene

$$x = \operatorname{sett\,cosh} y = \log(y + \sqrt{y^2 - 1}),$$

$$x = \operatorname{sett\,tanh} y = \frac{1}{2} \log\left(\frac{1 + y}{1 - y}\right).$$

Funzioni trigonometriche

Non ci soffermeremo sulle (tante) proprietà delle funzioni trigonometriche, che supponiamo note. Ci limitiamo a darne brevissimi cenni, limitati agli aspetti più legati alle applicazioni che seguono. Fissiamo anzitutto un riferimento ortogonale nel piano e consideriamo la circonferenza di centro l'origine O e raggio 1, di equazione $x^2 + y^2 = 1$. I suoi punti P possono essere identificati tramite l'angolo che il raggio OP forma col semiasse positivo dell'asse x. Definiamo ora l'unità di misura degli angoli.

Definizione 1.2.12 *Si dice* misura in radianti di un angolo *la lunghezza dell'arco individuato dalle semirette che determinano l'angolo sulla circonferenza unitaria di centro il punto d'incontro delle semirette stesse.*

Sottolineiamo che la precedente definizione, sebbene intuitiva, non può considerarsi rigorosa, dal momento che non abbiamo precisato come si possa definire e calcolare la lunghezza di un arco di circonferenza. Questo si può fare, sfruttando le proprietà della circonferenza, in modo elementare (cioè seguendo gli *Elementi* di Euclide, dove l'argomento è trattato in modo esauriente), oppure come caso particolare di una trattazione generale del problema della lunghezza delle curve, che viene studiata nel corso di Analisi matematica II.

Vogliamo ora passare ad una misura *orientata* degli angoli, così come si fa per le misura lineari quando si introduce la nozione di ascissa. Per prima cosa, scegliamo di considerare positivo il verso antiorario di percorrenza della circonferenza, e misuriamo gli angoli a partire dal semiasse positivo delle x.

Ricordiamo che il numero π è definito come rapporto tra la circonferenza unitaria e il suo diametro, sicché la lunghezza della circonferenza unitaria ha il valore 2π. Notiamo inoltre che allo stesso punto sulla circonferenza sono associati infiniti valori dell'angolo (positivi e negativi). Fissato un intervallo semiaperto di lunghezza 2π (cioè pari alla lunghezza della circonferenza unitaria), per esempio $]-\pi,\pi]$, uno e uno solo di questi valori appartiene a tale intervallo, e tutti gli altri si ottengono da questo sommando multipli interi di 2π.

Queste proprietà si riflettono nella proprietà delle funzioni trigonometriche di essere *periodiche*, secondo la seguente definizione.

Definizione 1.2.13 (Funzioni periodiche) *Sia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$; diciamo che f è* periodica di periodo T *(o T*-periodica*) se $T>0$ è il più piccolo numero reale tale che $f(x+T)=f(x)$ per ogni $x\in\mathbb{R}$. Se f è T-periodica, T si dice* periodo *della funzione f.*

Osserviamo che se f è T-periodica allora $f(x+kT)=f(x)$ per ogni $x\in\mathbb{R}$ e per ogni $k\in\mathbb{Z}$.

Passiamo a definire le funzioni trigonometriche.

Definizione 1.2.14 *Si dicono rispettivamente* seno *e* coseno *del numero $\alpha\in\mathbb{R}$ l'ordinata e l'ascissa del punto della circonferenza unitaria con centro l'origine determinato dalla semiretta per l'origine che forma un angolo di α radianti col semiasse positivo dell'asse x.*

Osservazioni 1.2.15

1. Nella definizione di seno e coseno abbiamo sottolineato che si deve parlare di seno e coseno di un *numero* e non di un angolo: la costruzione geometrica basata sull'angolo è strumentale (e per altro non è l'unica possibile), ma ciò che viene definito sono il seno e il coseno del numero che esprime la misura in radianti di un angolo, e non dell'angolo stesso. Quest'osservazione è importante al fine di evitare confusioni quando si usino unità diverse dal radiante per misurare gli angoli. Anche per questo, è bene usare solo i radianti per misurare gli angoli. Come per la funzione esponenziale, forse questa scelta può apparire ora innaturale, mentre al contrario, come vedremo, risulterà essere la più naturale possibile.

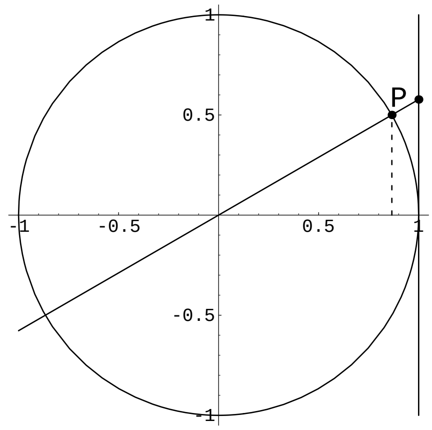


Figura – 1.4: Definizione di $\sin x$, $\cos x$, $\tan x$.

2. Come abbiamo già osservato, lo stesso punto della circonferenza unitaria è determinato da infiniti valori della misura in radianti dell'angolo: due valori che differiscono per un multiplo intero di 2π, infatti, determinano lo stesso punto.

3. In base alle osservazioni precedenti, la definizione 1.2.14 definisce le due funzioni seno e coseno, aventi dominio $\mathbb{R}$. Come al solito, useremo d'ora in poi la lettera x per denotare la variabile. Inoltre, sono funzioni periodiche di periodo 2π e la loro immagine è l'intervallo $[-1, 1]$.

4. È chiaro dalla definizione che vale la relazione

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$$

per ogni $x \in \mathbb{R}$.

Accanto alle funzioni seno e coseno si definisce la funzione *tangente* ponendo

$$\tan : \mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + k\pi : \; k \in \mathbb{Z}\}, \qquad \tan x = \frac{\sin x}{\cos x}.$$

Geometricamente, detto P il punto sulla circonferenza unitaria determinato dal numero x come al solito, per ogni x nel dominio di tan la tangente rappresenta l'ordinata del punto d'intersezione della retta $x = 1$ con la retta di origine O passante per P.

È evidente che la funzione tangente è definita per tutti i valori di x in cui il coseno è diverso da zero. Dal punto di vista geometrico, questi valori corrispondono ai punti P della circonferenza unitaria tali che la retta OP sia parallela alla retta $x = 1$. L'immagine della funzione tangente è $\mathbb{R}$.

Osserviamo anche che la funzione tangente è periodica di periodo minimo π e non 2π, malgrado sia rapporto di funzioni 2π-periodiche. Infatti $\tan(x + \pi) = \frac{\sin(x+\pi)}{\cos(x+\pi)} = \frac{-\sin x}{-\cos x} = \tan x$. Ricordiamo infine alcuni valori fondamentali delle funzioni seno, coseno e tangente:

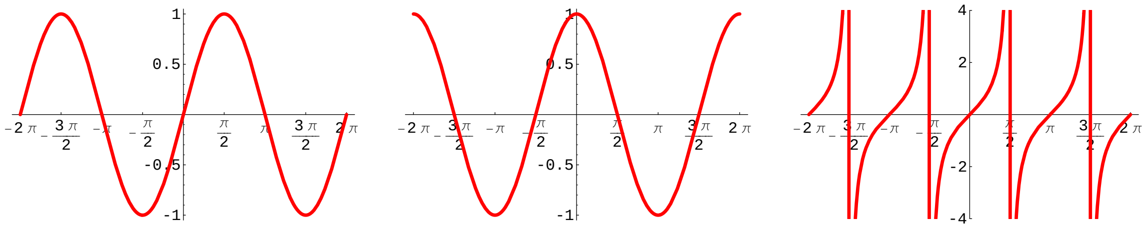


Figura – 1.5: Grafici di $\sin x$, $\cos x$, $\tan x$.

$$
\begin{array}{lll}
\sin 0 = 0 & \cos 0 = 1 & \tan 0 = 0 \\
\sin \frac{\pi}{2} = 1 & \cos \frac{\pi}{2} = 0 & \nexists \tan \frac{\pi}{2} \\
\sin \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} & \cos \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} & \tan \frac{\pi}{4} = 1 \\
\sin \frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2} & \cos \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2} & \tan \frac{\pi}{3} = \sqrt{3} \\
\sin \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2} & \cos \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2} & \tan \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{3}.
\end{array}
$$

Le proprietà delle funzioni trigonometriche sono numerose ed importanti, ma non ne discutiamo ulteriormente qui perché esse si suppongono note dalla scuola superiore. Ci limitiamo a presentare le funzioni arcsin, arccos e arctan e a mostrare in che relazione sono con seno, coseno e tangente.

Proposizione 1.2.16 *La restrizione di* sin *all'intervallo* $[-\pi/2, \pi/2]$ *è strettamente crescente, la restrizione di* cos *all'intervallo* $[0, \pi]$ *è strettamente decrescente, e la restrizione di* tan *all'intervallo* $]-\pi/2, \pi/2[$ *è strettamente crescente.*

Non presentiamo la dimostrazione analitica della proposizione precedente, ma osserviamo che essa è chiara dalla costruzione geometrica delle funzioni trigonometriche. Dalla proposizione precedente e dall'Osservazione 1.2.4 segue subito che le restrizioni considerate sono invertibili. Diamo pertanto la seguente definizione.

Definizione 1.2.17 *Si dicono* funzioni trigonometriche inverse *le funzioni:*

- *la funzione* arcoseno, $\arcsin : [-1, 1] \to [-\pi/2, \pi/2]$, *inversa della restrizione di* sin *all'intervallo* $[-\pi/2, \pi/2]$, *definita da*

$$x = \arcsin y \iff y = \sin x \qquad \forall\, x \in [-\pi/2, \pi/2],\ \forall\, y \in [-1, 1];$$

- *la funzione* arcocoseno, $\arccos : [-1, 1] \to [0, \pi]$, *inversa della restrizione di* cos *all'intervallo* $[0, \pi]$, *definita da*

$$x = \arccos y \iff y = \cos x \qquad \forall\, x \in [0, \pi],\ \forall\, y \in [-1, 1];$$

- *la funzione* arcotangente, $\arctan : \mathbb{R} \to]-\pi/2, \pi/2[$, *inversa della restrizione di* tan *all'intervallo* $]-\pi/2, \pi/2[$, *definita da*

$$x = \arctan y \iff y = \tan x \qquad \forall\, x \in]-\pi/2, \pi/2[,\ \forall\, y \in \mathbb{R}.$$

Dalla Proposizione 1.2.16 e dall'Osservazione 1.2.4 segue che arcsin e arctan sono strettamente crescenti e che arccos è strettamente decrescente.

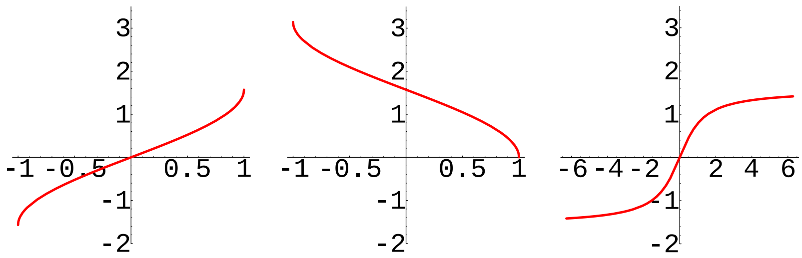


Figura – 1.6: Grafici di $\arcsin x$, $\arccos x$, $\arctan x$.

1.3 Numeri complessi

L'introduzione di un altro insieme numerico, oltre ai numeri reali, è giustificata dall'esigenza di trovare un insieme numerico in cui tutte le equazioni algebriche, cioè le equazioni del tipo $P(x) = 0$, con P polinomio di grado arbitrario, abbiano soluzioni. Questo non accade in $\mathbb{R}$; il più semplice esempio di equazione algebrica priva di soluzioni reali è certamente $x^2 + 1 = 0$. È forse sorprendente che, come vedremo, sarà in un certo senso sufficiente "aggiungere" ad $\mathbb{R}$ le soluzioni di quest'equazione per ottenere lo scopo indicato di risolvere *tutte* le equazioni algebriche (vedi il successivo Teorema fondamentale dell'algebra 1.3.10).

Definizione 1.3.1 (Campo complesso) *Si dice* campo complesso *l'insieme* $\mathbb{R}^2$ *in cui sono definite le due operazioni di addizione e moltiplicazione seguenti:*

$$(a,b) + (c,d) = (a+c, b+d) \tag{1.3.12}$$

$$(a,b) \cdot (c,d) = (ac - bd, bc + ad) \tag{1.3.13}$$

Il campo complesso si denota con $\mathbb{C}$.

Osservazioni 1.3.2

1. Le operazioni definite in (1.3.12), (1.3.13) godono delle stesse proprietà algebriche indicate negli Assiomi da 1 a 6 per le analoghe operazioni in $\mathbb{R}$.

2. Gli elementi neutri per le operazioni di addizione e moltiplicazione sono rispettivamente $0 = (0,0)$ e $1 = (1,0)$, mentre l'opposto e l'inverso, quest'ultimo solo per $(a,b) \neq (0,0)$, sono rispettivamente

$$-(a,b) = (-a,-b), \qquad (a,b)^{-1} = \left(\frac{a}{a^2+b^2}, \frac{-b}{a^2+b^2}\right).$$

3. Alla luce delle considerazioni precedenti, si ha che si possono identificare i numeri reali col sottoinsieme di $\mathbb{C}$ dato da $\{(a,0): \ a \in \mathbb{R}\}$. Ne segue che per $a \in \mathbb{R}$ si ha $a \cdot (b,c) = (a,0) \cdot (b,c) = (ab, ac)$ per ogni $(b,c) \in \mathbb{C}$.

4. A differenza di $\mathbb{R}$, è possibile trovare numeri complessi (a,b) tali che $(a,b)^2 = -1 = (-1,0)$; per esempio, $(0,1)^2 = -1$.

5. In $\mathbb{C}$ non si può definire alcuna relazione d'ordine $\geq$ tale che valgano gli Assiomi 7, 8, 9 e 10 stabiliti per i numeri reali.

6. Avendo definito la somma e la moltiplicazione tra numeri complessi, si possono considerare i *polinomi complessi* nella variabile complessa z nella forma

$$P(z) = a_0 + a_1 z + \ldots + a_n z^n, \quad \text{con } a_0, \ldots a_n \in \mathbb{C}.$$

A proposito dei polinomi e delle equazioni algebriche in campo complesso, dal momento che, come vedremo, essi hanno un ruolo importante nella teoria, ricordiamo le nozioni di *radice* e *molteplicità*.

Definizione 1.3.3 (Radice di un polinomio e molteplicità) *Sia $P(z)$ un polinomio nella variabile complessa z, sia $z_0 \in \mathbb{C}$ e sia $m \in \mathbb{N}$, $m \geq 1$. Si dice che z_0 è* radice *di P se $P(z_0) = 0$; in tal caso, $P(z)$ è divisibile per $(z - z_0)$, e si dice che z_0 ha* molteplicità *m se $P(z)$ è divisibile per $(z - z_0)^m$ ma non per $(z - z_0)^{m+1}$.*

Una conseguenza della definizione precedente è che un polinomio di grado n non può avere più di n radici (contate con le rispettive molteplicità).

La rappresentazione dei numeri complessi come coppie ordinate non è molto comoda nelle manipolazioni algebriche. Per questo introduciamo la seguente definizione.

Definizione 1.3.4 (Forma algebrica, Re, Im, modulo, coniugato) *Denotato con i il numero complesso $(0,1)$, definiamo* forma algebrica del numero complesso $z = (a,b)$ *la scrittura $z = (a,0) + (b,0) \cdot (0,1) = a + ib$. Il numero reale a si dice* parte reale di z, *denotata $Re\, z$ e il numero reale b si dice* parte immaginaria di z, *denotata $Im\, z$. Si definisce inoltre il* modulo di z *come $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$ e il numero* complesso coniugato di z *come $\bar{z} = a - ib$.*

Il modulo complesso gode di proprietà analoghe a quelle del valore assoluto in campo reale.

Proposizione 1.3.5 (Proprietà del modulo) *Per ogni $z, w \in \mathbf{C}$ valgono le seguenti proprietà:*

$$\begin{aligned}
&|z| \geq 0, \qquad |z| = 0 \ \Leftrightarrow \ z = 0; \\
&|z| = |-z|, \ |z \cdot w| = |z| \cdot |w|; \\
&|z + w| \leq |z| + |w|.
\end{aligned}$$

Segue che per le operazioni tra numeri complessi si possono usare le usuali regole algebriche, trattando il numero i come una variabile letterale, e tenendo conto che $i^2 = -1$. La forma algebrica è basata sulla rappresentazione dei punti del piano $\mathbb{R}^2$ attraverso le coordinate cartesiane ed è molto comoda per le addizioni, non è altrettanto comoda per le moltiplicazioni. Introduciamo perciò nel piano le *coordinate polari*, che ci consentiranno di ottenere un'altra espressione dei numeri complessi, stavolta utile in modo particolare per le moltiplicazioni. L'argomento sarà ripreso nel corso di Analisi Matematica II.

Coordinate polari Le coordinate polari (ϱ, ϑ) sono definite come segue: $\varrho = \sqrt{x^2 + y^2}$ rappresenta la distanza del punto generico di coordinate cartesiane (x, y) dall'origine e coincide col modulo, mentre ϑ rappresenta l'angolo formato dalla semiretta di origine $(0, 0)$ e passante per (x, y) con il semiasse $\{x \geq 0, y = 0\}$ e si dice *argomento* o anche *anomalia* del numero complesso $z = x + iy$. Ne segue che il punto $(x, y) \neq (0, 0)$ è univocamente determinato da una coppia (ϱ, ϑ), con $\varrho \geq 0$ e ϑ che varia in un intervallo semiaperto di ampiezza 2π. Fa eccezione l'origine, che è determinato dal valore $\varrho = 0$, ma non ha un ϑ determinato. In questo contesto è utile scegliere come intervallo di variabilità per l'angolo l'intervallo $] - \pi, \pi]$, e si ha:

$$\begin{cases} x = \varrho \cos \vartheta \\ y = \varrho \sin \vartheta \end{cases} \tag{1.3.14}$$

Definizione 1.3.6 (Forma trigonometrica) *Ogni $z \in \mathbb{C}$ si può esprimere in* forma trigonometrica *usando le coordinate polari; risulta $z = \varrho(\cos \vartheta + i \sin \vartheta)$.*

Se $z = x + iy$ allora la sua forma trigonometrica si ottiene scegliendo $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$ e

$$\theta = \begin{cases} \arctan \frac{y}{x} & \text{se } x > 0, \\ \pi + \arctan \frac{y}{x} & \text{se } x < 0,\ y \geq 0, \\ -\pi + \arctan \frac{y}{x} & \text{se } x < 0,\ y < 0\,. \\ \frac{\pi}{2} & \text{se } x = 0,\ y > 0\,. \\ -\frac{\pi}{2} & \text{se } x = 0,\ y < 0\,. \end{cases}$$

Vediamo come la forma trigonometrica permette di eseguire facilmente le moltiplicazioni. Dati $z_1 = \varrho_1(\cos \vartheta_1 + i \sin \vartheta_1)$ e $z_2 = \varrho_2(\cos \vartheta_2 + i \sin \vartheta_2)$, risulta:

$$\begin{aligned} z_1 z_2 &= \varrho_1 \varrho_2 \big[(\cos \vartheta_1 \cos \vartheta_2 - \sin \vartheta_1 \sin \vartheta_2) + i(\sin \vartheta_1 \cos \vartheta_2 + \sin \vartheta_2 \cos \vartheta_1)\big] \\ &= \varrho_1 \varrho_2 \big[\cos(\vartheta_1 + \vartheta_2) + i \sin(\vartheta_1 + \vartheta_2)\big], \end{aligned}$$

risultato che si può descrivere dicendo che il prodotto di due numeri complessi ha per modulo il prodotto dei moduli e per argomento la somma degli argomenti. In particolare, per $z = \varrho(\cos\vartheta + i\sin\vartheta)$ ed $n \in \mathbb{N}$ si ha la *formula di De Moivre*:

$$z^n = \varrho^n\big[\cos(n\vartheta) + i\sin(n\vartheta)\big]. \tag{1.3.15}$$

Queste osservazioni suggeriscono di dare la seguente definizione.

Definizione 1.3.7 (Esponenziale complesso e forma esponenziale) *Per $z = x + iy$, si pone*

$$\mathrm{e}^z = \mathrm{e}^x(\cos y + i\sin y); \tag{1.3.16}$$

in particolare, per $x = 0$ si ottengono i numeri complessi di modulo unitario, sicché si può scrivere ogni numero complesso nella forma esponenziale $z = |z|\,\mathrm{e}^{i\vartheta}$, *dove ϑ è un argomento di z.*

Notiamo che usando la forma esponenziale la formula appena vista per il prodotto di due numeri complessi e la formula di De Moivre si possono riscrivere

$$\varrho_1\,\mathrm{e}^{i\vartheta_1}\,\varrho_2\,\mathrm{e}^{i\vartheta_2} = \varrho_1\varrho_2\ \mathrm{e}^{i(\vartheta_1+\vartheta_2)}, \qquad (\varrho\,\mathrm{e}^{i\vartheta})^n = \varrho^n\,\mathrm{e}^{in\vartheta},$$

due uguaglianze che formalmente rispettano le leggi degli esponenti per il prodotto di potenze con la stessa base. Anche se la Definizione 1.3.7 ha delle giustificazioni ben più profonde (vedi anche il Paragrafo 7.3 di questi Appunti), questa coerenza formale si può considerare come una prima motivazione. Le notazioni introdotte saranno comode nel calcolo delle radici complesse che ora definiamo.

Definizione 1.3.8 *Dati $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, e $w \in \mathbb{C}$, un numero complesso z si dice* radice complessa n-esima di w *se $z^n = w$.*

Notiamo che un numero complesso non può avere più di n radici complesse distinte, essendo le radici n-esime di w le radici del polinomio $P(z) = z^n - w$. Inoltre, è importante capire che la nozione di radice complessa, a differenza della radice n-esima aritmetica in campo reale, *non definisce una funzione*, anche quando si parta da numeri reali positivi. Per esempio, la *radice quadrata reale* del numero 4 è 2, e infatti in ambito reale si scrive $\sqrt{4} = 2$, mentre le *radici complesse* dello *stesso numero* 4 sono 2 e -2. Di che cosa si stia parlando dev'essere pertanto sempre dichiarato o chiaro dal contesto.

Teorema 1.3.9 (Radici complesse) *Per ogni $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, e per ogni $w \in \mathbb{C}$, $w \neq 0$, esistono n radici complesse distinte di $w = |w|\,\mathrm{e}^{i\vartheta}$, date dalla formula*

$$z_k = \sqrt[n]{|w|}\,\mathrm{e}^{i\phi_k}, \quad \textit{con } \phi_k = \frac{\vartheta + 2k\pi}{n} \quad \textit{e } k = 0, \dots, n-1. \tag{1.3.17}$$

Dim. Posto $w = \varrho\,\mathrm{e}^{i\vartheta}$, cerchiamo i numeri complessi $z = r\,\mathrm{e}^{i\phi}$ tali che $z^n = w$. Dalla formula di De Moivre, quest'equazione equivale a $r^n\,\mathrm{e}^{in\phi} = \varrho\,\mathrm{e}^{i\vartheta}$, che a sua volta equivale al sistema

$$\begin{cases} r^n = \varrho \\ \cos(n\phi) = \cos\vartheta \\ \sin(n\phi) = \sin\vartheta \end{cases}$$

nelle incognite reali r e ϕ. Le soluzioni di questo sistema sono

$$r = \sqrt[n]{\varrho}, \qquad \phi_k = \frac{\vartheta + 2k\pi}{n},\ k \in \mathbb{Z},$$

dove $\sqrt[n]{\ }$ indica la radice aritmetica del numero positivo ϱ. Quindi r, cioè il modulo di z, è unico, mentre per l'argomento abbiamo trovato infinite soluzioni ϕ_k. In realtà, esse non dànno luogo ad infiniti numeri complessi distinti (che sarebbe impossibile, come già osservato), a causa del fatto che l'argomento di un numero complesso è determinato a meno di multipli di 2π. Infatti, $z_k = z_j$ se e solo se $\cos\phi_k = \cos\phi_j$ e $\sin\phi_k = \sin\phi_j$, cioè se e solo se i due indici k e j differiscono per un multiplo intero di n. Ne segue che i numeri $z_0, \ldots, z_{n-1}$ sono tutti distinti tra loro e che ogni altra radice trovata coincide con uno di questi numeri. QED

Come annunciato all'inizio della sezione, la possibilità di trovare soluzioni dell'equazione $z^n = w$, cioè radici complesse di tutti i numeri complessi, si estende a tutte le equazioni algebriche. Infatti, il seguente importante (e difficile!) teorema assicura che ogni polinomio complesso ammette almeno una radice complessa.

Teorema 1.3.10 (Teorema fondamentale dell'algebra) *Per ogni polinomio complesso di grado almeno 1 $P(z)$ esiste almeno un numero complesso z_0 tale che $P(z_0) = 0$.*

È facile trarre dal Teorema fondamentale dell'algebra numerose conseguenze: in particolare, usando la nozione di molteplicità di una radice, si può concludere che ogni polinomio di grado n ha esattamente n radici, pur di contarle con le rispettive molteplicità.

Teorema 1.3.11 *Ogni polinomio complesso di grado n ha esattamente n radici, se si conta m volte ogni radice di molteplicità m.*

Non abbiamo al momento bisogno di queste ulteriori informazioni. L'argomento sarà ripreso nel corso di Analisi matematica II. Enunciamo invece subito un risultato riguardante i polinomi a coefficienti reali.

Teorema 1.3.12 (Polinomi a coefficienti reali) *Se $P(z)$ è un polinomio nella variabile complessa z i cui coefficienti sono tutti numeri reali, allora $z_0 \in \mathbb{C}$ è radice di $P(z)$ se e solo se il suo coniugato $\bar{z}_0$ lo è, ed in tal caso z_0 e $\bar{z}_0$ hanno la stessa molteplicità.*

DIM. Basta osservare che se $P(z_0) = 0$ allora

$$P(\bar{z}_0) = \overline{P(z_0)} = 0.$$

$\boxed{QED}$

Osserviamo che dal Teorema precedente segue che ogni polinomio a coefficienti reali di grado dispari ammette almeno una radice reale.

CAPITOLO 2

SUCCESSIONI

In questo capitolo introduciamo e studiamo i concetti di successione e di limite di una successione di numeri reali, e discutiamo l'importante concetto di principio di induzione.

2.1 Limiti di successioni reali

Il concetto di successione è molto generale: chiamiamo *successione* ogni funzione il cui dominio sia l'insieme $\mathbb{N}$ dei numeri naturali. Siamo però particolarmente interessati ora alle *successioni reali*, cioè le funzioni $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$. È utile però usare una notazione differente dalle funzioni reali generiche, per evidenziare che l'insieme immagine di una successione si può pensare come un insieme di numeri reali ordinato attraverso la dipendenza dalla variabile n. Perciò si scrive a_n in luogo di $f(n)$, sicché, se per ogni $n \in \mathbb{N}$ è dato il numero reale a_n risulta definita la *successione di numeri reali* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, e in particolare, a_n è detto *termine* n*-esimo o di indice* n della successione $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$

Definizione 2.1.1 *Sia* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *una successione di numeri reali.*

(1) Diciamo che la successione $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge ad $a \in \mathbb{R}$ *(o* che tende ad a*) per* n *che tende a* $+\infty$*, e scriviamo*

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = a \qquad o \qquad a_n \overset{n}{\to} a\,,$$

se vale la seguente proprietà

$$\forall\varepsilon > 0\ \exists\nu > 0 \text{ tale che } \forall n \in \mathbb{N},\ n \geq \nu \Rightarrow |a_n - a| < \varepsilon\ (\Leftrightarrow\ a - \varepsilon < a_n < a + \varepsilon)\,.$$

(2) Diciamo che la successione $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge positivamente *(o* tende a $+\infty$*) per* n *che tende a* $+\infty$*, e scriviamo*

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = +\infty \qquad o \qquad a_n \overset{n}{\to} +\infty\,,$$

se vale la seguente proprietà

$$\forall M > 0\ \exists\nu > 0 \text{ tale che } \forall n \in \mathbb{N},\ n \geq \nu \Rightarrow\ a_n > M\,.$$

Diciamo che la successione $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge negativamente *(o* tende a $-\infty$*) per* n *che tende a* $+\infty$*, e scriviamo*

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = -\infty \qquad o \quad a_n \xrightarrow{n} -\infty\,,$$

se vale la seguente proprietà

$$\forall M > 0\ \exists \nu \in \mathbb{N}\ \textit{tale che}\ \forall n \in \mathbb{N},\ n \geq \nu \Rightarrow\ a_n < -M\,.$$

(3) Diciamo che la successione $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ è convergente *se ammette limite finito; diciamo che la successione* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ è divergente *se ammette limite uguale a* $+\infty$ *o a* $-\infty$*.*

(4) Diciamo che la successione $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ è regolare *se ammette limite, altrimenti* irregolare*. Infine, diciamo che la successione* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ è infinitesima *se converge a* 0 *e se esiste* $\nu \in \mathbb{N}$ *tale che* $a_n \neq 0$ *per ogni* $n \geq \nu$*; diciamo che la successione* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ è infinita *se è divergente.*

Se una successione ammette limite, questo è unico. Infatti, vale la seguente proprietà.

Teorema 2.1.2 (Unicità del limite) *Supponiamo che la successione* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *tenda ad* a *e* a' *per* n *che tende a* $+\infty$*. Allora* $a = a'$*.*

Dim. Diamo la dimostrazione solo nel caso $a,\ a' \in \mathbb{R}$.

Supponiamo che $a \neq a'$. Allora, scelto $\varepsilon_0 = \frac{|a-a'|}{2} > 0$, applicando la Definizione 2.1.1(1) deduciamo che

$$\exists \nu_1 > 0 \text{ tale che } \forall n \in \mathbb{N},\ n \geq \nu_1 \Rightarrow\ |a_n - a| < \varepsilon_0 \tag{2.1.1}$$

e

$$\exists \nu_2 \in \mathbb{N} \text{ tale che } \forall n \in \mathbb{N},\ n \geq \nu_2 \Rightarrow\ |a_n - a'| < \varepsilon_0\ . \tag{2.1.2}$$

Posto $\nu = \max\{\nu_1, \nu_2\}$, combinando (2.1.1) e (2.1.2) otteniamo che $\forall n \in \mathbb{N}\ ,\ n > \nu$

$$|a - a'| = |(a - a_n) + (a_n - a')| \leq |a_n - a| + |a_n - a'| < \varepsilon_0 + \varepsilon_0 = 2\varepsilon_0 = |a - a'|\,,$$

cioè una contraddizione. $\boxed{QED}$

Esempi 2.1.3

1. Ogni successione $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tale che $a_n = a$ per ogni $n \in \mathbb{N}$ è convergente e ha per limite proprio a.

2. $$\lim_{n\to+\infty} n^\alpha = \begin{cases} +\infty & \text{se } \alpha > 0 \\ 0 & \text{se } \alpha < 0 \\ 1 & \text{se } \alpha = 0\,. \end{cases}$$

3. la successione $((-1)^n)_{n\in\mathbb{N}}$ è irregolare: scelto un $\varepsilon < 1/2$, per ogni $a \in \mathbb{R}$ esistono infiniti indici n per cui $|(-1)^n - a| > \varepsilon$.

Questi esempi mostrano che esistono successioni convergenti, divergenti e irregolari.

Una prima proprietà delle successioni convergenti è la loro limitatezza. Ricordiamo che, in accordo con la Definizione 1.2.5, una successione di numeri reali $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ si dice *limitata superiormente* se

$$\exists L \in \mathbb{R} \text{ tale che } \; a_n \leq L \, \forall n \in \mathbb{N},$$

e si dice *limitata inferiormente* se

$$\exists L' \in \mathbb{R} \text{ tale che } \; a_n \geq L' \, \forall n \in \mathbb{N},$$

e si dice *limitata* se è limitata superiormente e inferiormente, cioè se

$$\exists L,\; L' \in \mathbb{R} \text{ tale che } \; L' \leq a_n \leq L \, \forall n \in \mathbb{N}$$

o equivalentemente, se

$$\exists M \in \mathbb{R}_+ \text{ tale che } \; |a_n| \leq M \, \forall n \in \mathbb{N}.$$

Esempi 2.1.4 È facile dimostrare che $(\frac{1}{n})_{n\in\mathbb{N}}$, $(\frac{n-1}{n^2})_{n\in\mathbb{N}}$ e $((-1)^n)_{n\in\mathbb{N}}$ sono esempi di successioni limitate e che $(n^2)_{n\in\mathbb{N}}$ è un esempio di successione limitata inferiormente ma non superiormente (analogamente, $(-n^2)_{n\in\mathbb{N}}$ è un esempio di successione limitata superiormente ma non inferiormente).

È bene osservare che esistono esempi di successioni limitate non convergenti come $((-1)^n)_{n\in\mathbb{N}}$, ma la convergenza implica sempre la limitatezza.

Teorema 2.1.5 (Limitatezza) *Ogni successione convergente è limitata.*

Dim. Supponiamo che $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sia una successione convergente e che sia $a \in \mathbb{R}$ il suo limite. Allora, preso $\varepsilon_0 := 1$, applicando la Definizione 2.1.1(1) di successione convergente, deduciamo che

$$\exists \nu > 0 \text{ tale che } \forall n \in \mathbb{N},\; n \geq \nu \Rightarrow \; |a_n - a| \leq 1\,.$$

Questo implica che

$$\forall n \in \mathbb{N},\; n \geq \nu \Rightarrow |a_n| = |(a_n - a) + a| \leq |a_n - a| + |a| \leq 1 + |a|\,.$$

Posto $M = \max\{1 + |a|, |a_n| : \; n \leq \nu\}$ (osserviamo che tale massimo esiste perché si tratta di un insieme finito) otteniamo che $|a_n| \leq M$ per ogni $n \in \mathbb{N}$, cioè che $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ è limitata. $\boxed{QED}$

La strategia per il calcolo dei limiti di successioni sarà la seguente: calcoleremo dei limiti di “successioni campione”, che chiamiamo *limiti notevoli*, e poi utilizzeremo questi risultati per calcolare i limiti di successioni più complesse. Il modo in cui i limiti notevoli si possono utilizzare per il calcolo di ulteriori limiti è descritto nei risultati seguenti. Il primo problema che affrontiamo è la relazione tra i limiti e la relazione d'ordine in $\mathbb{R}$.

Teorema 2.1.6 (Teorema della permanenza del segno) *Sia $a_n \to a$. Allora valgono i seguenti risultati:*

(i) *se $a > 0$ o $a = +\infty$ allora esiste $\nu > 0$ tale che $a_n > 0$ per ogni $n \geq \nu$;*

(ii) *se esiste $\nu > 0$ tale che $a_n > 0$ per ogni $n \geq \nu$, allora $a \geq 0$.*

Dim. (i) Supponiamo dapprima $a \in \mathbb{R}$. Fissato $\varepsilon_0 := a/2 > 0$, applicando la Definizione 2.1.1(1) deduciamo che

$$\exists \nu > 0 \text{ tale che } \forall n \in \mathbb{N},\ n \geq \nu \Rightarrow\ |a_n - a| < \varepsilon_0 = a/2\,;$$

ne segue che

$$\forall n \in \mathbb{N},\ n \geq \nu \Rightarrow\ 0 < a/2 = a - a/2 < a_n\,.$$

Se $a = +\infty$, si può ripetere il ragionamento con $\varepsilon_0 > 0$ qualunque.

(ii) Supponiamo per assurdo che sia $a < 0$. Allora, applicando (i), otteniamo che

$$\exists \nu_1 > 0 \text{ tale che } \forall n \in \mathbb{N},\ n \geq \nu_1 \Rightarrow\ a_n < 0\,;$$

posto $n_0 = \max\{\nu, \nu_1\}$, ne segue che $0 < a_n < 0$ se $n \geq n_0$, cioè una contraddizione.

QED

Un'informazione molto importante riguarda il comportamento dei limiti rispetto alle operazioni algebriche.

Teorema 2.1.7 (Operazioni con i limiti) *Supponiamo che $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ e $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ siano due successioni reali tali che $\lim_{n\to+\infty} a_n = a$ e $\lim_{n\to+\infty} b_n = b$ con $a,\ b \in \mathbb{R}$. Allora valgono le seguenti proprietà:*

(i) $\lim_{n\to+\infty} a_n \pm b_n = a \pm b$,

(ii) $\lim_{n\to+\infty} a_n \cdot b_n = a \cdot b$,

(iii) $\lim_{n\to+\infty} \dfrac{a_n}{b_n} = \dfrac{a}{b}$ *purché $b \neq 0$.*

Dal Teorema della permanenza del segno e dal Teorema 2.1.7 si deduce il seguente teorema di confronto.

Teorema 2.1.8 (Primo Teorema del Confronto) *Siano $a_n \to a$ e $b_n \to b$ due successioni regolari; allora:*

(i) *se $a > b$ allora esiste $\nu > 0$ tale che $a_n > b_n$ per ogni $n \geq \nu$;*

(ii) *se esiste $\nu > 0$ tale che $a_n > b_n$ per ogni $n \geq \nu$ allora $a \geq b$.*

DIM. Basta applicare il Teorema della permanenza del segno alla successione $(a_n - b_n)_{n\in\mathbb{N}}$. $\boxed{QED}$

Osservazione 2.1.9 Passando al limite le diseguaglianze, in generale, si indeboliscono: ad esempio, per ogni $n \in \mathbb{N}$ risulta $\frac{1}{n} > 0$, ma $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = 0$. Quindi la diseguaglianza della tesi nella (ii) dei Teoremi 2.1.6, 2.1.8, in generale, non è stretta.

In molti casi è utile anche un teorema di confronto fra tre successioni.

Teorema 2.1.10 (Secondo Teorema del Confronto) *Date tre successioni* (a_n), (b_n) *e* (c_n), *se*

(i) *esiste* $\nu_0 \geq 0$ *tale che* $a_n \leq b_n \leq c_n$ *per ogni* $n \geq \nu_0$,

(ii) *esistono* $\lim_{n\to+\infty} a_n = \lim_{n\to+\infty} c_n = \ell$,

allora esiste il limite $\lim_{n\to+\infty} b_n = \ell$.

DIM. Supponiamo $\ell \in \mathbb{R}$. Allora, per (ii) possiamo affermare che (cfr Definizione 2.1.1(1))

$$\forall\varepsilon > 0\ \exists\nu_1 > 0 \ \text{ tale che } \forall n \in \mathbb{N},\ n \geq \nu_1 \Rightarrow\ \ell - \varepsilon < a_n < \ell + \varepsilon\,, \tag{2.1.3}$$

$$\forall\varepsilon > 0\ \exists\nu_2 > 0 \ \text{ tale che } \forall n \in \mathbb{N},\ n \geq \nu_2 \Rightarrow\ \ell - \varepsilon < c_n < \ell + \varepsilon\,. \tag{2.1.4}$$

Fissato $\varepsilon > 0$ e scelto $\nu := \max\{\nu_0, \nu_1, \nu_2\}$, dalle diseguaglianze (i), (2.1.3) e (2.1.4) otteniamo che

$$\forall n \in \mathbb{N},\ n \geq \nu \Rightarrow\ \ell - \varepsilon < a_n \leq b_n \leq c_n < \ell + \varepsilon\,.$$

Per l'arbitrarieà di ε, possiamo così concludere che $\exists \lim_{n\to+\infty} b_n = \ell$. $\boxed{QED}$

Osservazione 2.1.11 Vale l'implicazione

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = a \ \Rightarrow\ \lim_{n\to+\infty} |a_n| = |a| \tag{2.1.5}$$

Infatti, dalla proprietà (1.1.6) del valore assoluto segue che, fissato $\varepsilon > 0$, se esiste $\nu > 0$ tale che $n \geq \nu$ implica $|a_n - a| < \varepsilon$, allora per ogni $n \geq \nu$ vale anche

$$\big||a_n| - |a|\big| \leq |a_n - a| < \varepsilon.$$

La (2.1.5) si può invertire solo se $a = 0$. Infatti, in tal caso si vede subito dalla definizione che $a_n \to 0$ se e solo se $|a_n| \to 0$, mentre per esempio $|(-1)^n| \to 1$ là dove, come già visto, la successione $((-1)^n)_{n\in\mathbb{N}}$ non è regolare.

Esempio 2.1.12 Dati i polinomi $P(x) = a_k x^k + a_{k-1}x^{k-1} + \ldots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$ e $Q(x) = b_k x^k + b_{k-1}x^{k-1} + \ldots + b_2 x^2 + b_1 x + b_0$ con $a_k \neq 0$ e $b_k \neq 0$, consideriamo la successione $a_n = \frac{P(n)}{Q(n)}$. Applicando il Teorema 2.1.7 otteniamo che

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to+\infty} a_n &= \lim_{n\to+\infty} \frac{P_k(n)}{Q_k(n)} \\
&= \lim_{n\to+\infty} \frac{n^k \left(a_k + +a_{k-1}n^{-1} + \ldots + a_2 n^{2-k} + a_1 n^{1-k} + a_0 n^{-k}\right)}{n^k \left(b_k + +b_{k-1}n^{-1} + \ldots + b_2 n^{2-k} + b_1 n^{1-k} + b_0 n^{-k}\right)} = \frac{a_k}{b_k}
\end{aligned}$$

Osservazione 2.1.13 Nel caso in cui le successioni $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ e $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ non siano entrambe convergenti, il teorema precedente è ancora valido sotto opportune condizioni su a e b. In particolare:

$$\begin{aligned}
& a_n \overset{n}{\to} +\infty,\ b_n \overset{n}{\to} b \in \mathbb{R}\ \Rightarrow a_n \pm b_n \overset{n}{\to} +\infty \\
& a_n \overset{n}{\to} -\infty,\ b_n \overset{n}{\to} b \in \mathbb{R}\ \Rightarrow a_n \pm b_n \overset{n}{\to} -\infty \\
& a_n \overset{n}{\to} +\infty,\ b_n \overset{n}{\to} +\infty\ \Rightarrow a_n + b_n \overset{n}{\to} +\infty \\
& a_n \overset{n}{\to} -\infty,\ b_n \overset{n}{\to} -\infty\ \Rightarrow a_n + b_n \overset{n}{\to} -\infty \\
& a_n \overset{n}{\to} a \in \mathbb{R},\ b_n \overset{n}{\to} \pm\infty\ \Rightarrow \frac{a_n}{b_n} \overset{n}{\to} 0 \\
& a_n \overset{n}{\to} +\infty,\ b_n \overset{n}{\to} b \in \mathbb{R}\setminus\{0\}\ \Rightarrow a_n \cdot b_n \overset{n}{\to} \pm\infty \\
& a_n \overset{n}{\to} \pm\infty,\ b_n \overset{n}{\to} \pm\infty\ \Rightarrow a_n \cdot b_n \overset{n}{\to} \pm\infty \\
& a_n \overset{n}{\to} \pm\infty,\ b_n \overset{n}{\to} b \in \mathbb{R}\setminus\{0\} \Rightarrow \frac{a_n}{b_n} \overset{n}{\to} \pm\infty \\
& a_n \overset{n}{\to} a \in \mathbb{R}\setminus\{0\},\ b_n \overset{n}{\to} 0,\ b_n > 0\ (b_n < 0)\ \Rightarrow \frac{a_n}{b_n} \overset{n}{\to} \pm\infty \\
& \text{(si applica l'usuale regola dei segni per determinare} \\
& \ \text{il segno di } \infty \text{ negli ultimi quattro casi)}
\end{aligned}$$

Inoltre, se $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \to 0$ e $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ è una successione limitata, diciamo $|b_n| \leq M$ per ogni $n \in \mathbb{N}$, la successione prodotto $(a_n \cdot b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ è ancora una successione convergente a 0; infatti, applicando il Secondo teorema di confronto si ha $-M|a_n| \leq a_n b_n \leq M|a_n|$, ed entrambe le successioni $(-M|a_n|)$ ed $(M|a_n|)$ convergono a 0.

Esempi 2.1.14 Applicando tali proprietà possiamo discutere i seguenti esempi.

1.

$$\begin{aligned}
& \lim_{n\to+\infty} (n^3 + 2^n) = +\infty \\
& \lim_{n\to+\infty} (n^3 - (-1)^n) = \lim_{n\to+\infty} n^3 \left(1 - (-1)^n \frac{1}{n^3}\right) = +\infty \\
& \lim_{n\to+\infty} \frac{2^{-n} + 1}{n} = 0
\end{aligned}$$

2.

$$
\begin{aligned}
&\lim_{n\to+\infty}(a_k n^k + a_{k-1}n^{k-1} + \ldots + a_2 n^2 + a_1 n + a_0)\\
&= \lim_{n\to+\infty} n^k \left(a_k + a_{k-1}n^{-1} + \ldots + a_2 n^{2-k} + a_1 n^{1-k} + a_0 n^{-k}\right)\\
&= \begin{cases} +\infty & \text{se } a_k > 0 \\ -\infty & \text{se } a_k < 0 \end{cases},
\end{aligned}
$$

3.

$$
\begin{aligned}
&\lim_{n\to+\infty} \frac{a_k n^k + a_{k-1}n^{k-1} + \ldots + a_2 n^2 + a_1 n + a_0}{b_h n^h + b_{h-1}n^{h-1} + \ldots + b_2 n^2 + b_1 n + b_0}\\
&= \lim_{n\to+\infty} \frac{a_k n^k}{b_h n^h} = \begin{cases} \pm\infty & \text{se } k > h \\ 0 & \text{se } k < h \\ \frac{a_k}{b_h} & \text{se } k = h \end{cases}
\end{aligned}
$$

4. Nulla si può dire invece nei seguenti casi:

$$
\begin{aligned}
&a_n \xrightarrow{n} +\infty,\ b_n \xrightarrow{n} -\infty \ \text{ e } a_n + b_n \xrightarrow{n} ?\\
&a_n \xrightarrow{n} \pm\infty,\ b_n \xrightarrow{n} 0 \ \text{ e } a_n \cdot b_n \xrightarrow{n} ?\\
&a_n \xrightarrow{n} \pm\infty,\ b_n \xrightarrow{n} \pm\infty \ \text{ e } \frac{a_n}{b_n} \xrightarrow{n} ?\\
&a_n \xrightarrow{n} 0,\ b_n \xrightarrow{n} 0 \ \text{ e } \frac{a_n}{b_n} \xrightarrow{n} ?\,.
\end{aligned}
$$

Infatti, esistono esempi di coppie di successioni reali tali che la relativa successione somma (o prodotto o rapporto) risulta o convergente o divergente o irregolare, come

$$
\begin{aligned}
&\lim_{n\to+\infty}(n^2 + (-1)^n) = \infty \text{ e } \lim_{n\to+\infty}(-n^2) = -\infty \text{ ma la successione}\\
&\text{somma } ([n^2 + (-1)^n + (-n^2)])_{n\in\mathbb{N}} = ((-1)^n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ è irregolare}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&\lim_{n\to+\infty} n^2 = +\infty \text{ e } \lim_{n\to+\infty}(-1)^n n^{-2} = 0 \text{ ma la successione}\\
&\text{prodotto } (n^2 \cdot (-1)^n n^{-2})_{n\in\mathbb{N}} = ((-1)^n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ è irregolare}
\end{aligned}
$$

etc...

Questo è il motivo per cui si parla di *forme indeterminate* per indicare i casi riportati sopra e questi sono solitamente denotati nel modo seguente: $\infty - \infty$, $0 \cdot \infty$, $\frac{\infty}{\infty}$ e $\frac{0}{0}$.

Nei teoremi visti finora l'esistenza del limite delle successioni considerate era sempre assunta come ipotesi. Il prossimo risultato riguarda invece *l'esistenza* di un limite. Le successioni, come tutte le funzioni reali definite in un sottoinsieme di $\mathbb{R}$, possono essere monotone crescenti o decrescenti, in accordo con la Definizione 1.2.3. Nel caso delle successioni però la proprietà di monotonia si può enunciare in un modo più semplice.

Osservazione 2.1.15 (Successioni monotone) Sia $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una successione di numeri reali.

1. La successione $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ è *strettamente crescente* (*crescente*) se e solo se $a_n < a_{n+1}$ ($a_n \le a_{n+1}$) per ogni $n \in \mathbb{N}$.

2. La successione $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ è *strettamente decrescente* (*decrescente*) se e solo se $a_n > a_{n+1}$ ($a_n \ge a_{n+1}$) per ogni $n \in \mathbb{N}$.

Come sempre, diciamo che la successione $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ è *strettamente monotona* (*monotona*) se $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ è strettamente crescente o decrescente (crescente o decrescente).

Osserviamo che ogni successione strettamente monotona è monotona. Aver riformulato le proprietà di monotonia per le successioni in questo modo ha il vantaggio di ridurre la verifica della monotonia ad una disequazione *con un solo parametro* n, avendo ridotto il confronto di ciascun valore a_n soltanto con il suo successivo a_{n+1}. Le successioni monotone godono della fondamentale proprietà di essere sempre regolari.

Teorema 2.1.16 (Teor. fondamentale sul limite delle successioni monotone) *Ogni successione monotona è regolare. In particolare, valgono le seguenti proprietà:*

(i) $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ crescente $\Rightarrow$ $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} a_n = \sup_{n\in\mathbb{N}} a_n$,

(ii) $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ decrescente $\Rightarrow$ $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} a_n = \inf_{n\in\mathbb{N}} a_n$,

(iii) $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ monotona e limitata $\Rightarrow$ $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *convergente.*

DIM. Dimostriamo solo (i). Sia $L = \sup_{n\in\mathbb{N}} a_n$. Allora $L \in \mathbb{R}$ o $L = +\infty$.

Nel caso in cui $L \in \mathbb{R}$, fissato $\varepsilon > 0$, per la seconda proprietà dell'estremo superiore, vedi Proposizione 1.1.11, esiste $n_0 \in \mathbb{N}$ tale che $a_{n_0} > L - \varepsilon$. Poiché $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ è crescente ed L è l'estremo superiore di $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, ne segue che

$$\forall n \in \mathbb{N},\ n \ge n_0 \Rightarrow\ L - \varepsilon < a_{n_0} \le a_n \le L < L + \varepsilon\,.$$

Per l'arbitrarietà di ε, possiamo concludere che $\displaystyle\lim_{\to+\infty} a_n = L$.

Nel caso in cui $L = +\infty$, la successione $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ non è limitata superiormente (cioè, non ammette alcun maggiorante) e quindi

$$\forall M > 0\ \exists n_0 \in \mathbb{N} \text{ tale che } a_{n_0} > M\,.$$

Poiché $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ è crescente, ne segue allora che

$$\forall M > 0\ \exists n_0 \in \mathbb{N} \text{ tale che } \forall n \in \mathbb{N},\ n \ge n_0 \Rightarrow\ a_n \ge a_{n_0} > M\,,$$

cioè $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} a_n = +\infty$. QED

Naturalmente, non tutte le successioni sono regolari: perciò, è spesso utile studiare il comportamento di una successione isolandone solo una parte dei termini, che da sé possono dar luogo ad una successione regolare.

Definizione 2.1.17 (Successioni estratte) *Siano (a_n) una successione reale e $(n_k)_{k\in\mathbb{N}}$ una successione strettamente crescente di numeri naturali. La successione $(a_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ si dice* successione estratta *da $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ o* sottosuccessione *di $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$.*

Notiamo che se si pensa alla successione $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in termini della funzione f definita in $\mathbb{N}$ tale che $a_n = f(n)$, per definire una sottosuccessione bisogna assegnare un'altra successione $g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, $n_k = g(k)$ nella notazione appena introdotta, in modo tale che $f \circ g$ definisca l'estratta $(a_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$. Una successione estratta non è però semplicemente una successione i cui termini sono un sottoinsieme dell'insieme $\{a_n : \ n \in \mathbb{N}\}$ dei valori assunti dalla successione iniziale. Infatti, si vuole che nello scegliere i valori $(a_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ *si rispetti l'ordine* in cui tali valori compaiono nella successione $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ iniziale. Questa richiesta viene formalizzata imponendo la *stretta crescenza* alla legge di estrazione $n_k = g(k)$. Osserviamo che (n_k) strettamente crescente comporta $n_k \geq k$ per ogni $k \in \mathbb{N}$.

Esempio 2.1.18 Le successioni $((-1)^{2k})_{k\in\mathbb{N}} = (1)_{k\in\mathbb{N}}$ e $((-1)^{2k-1})_{k\in\mathbb{N}} = (-1)_{k\in\mathbb{N}}$ sono esempi di successioni estratte da $((-1)^n)_{n\in\mathbb{N}}$; le successioni $\left(\frac{1}{k^2}\right)_{k\in\mathbb{N}}$, $\left(\frac{1}{2^k}\right)_{k\in\mathbb{N}}$ e $\left(\frac{1}{k+3}\right)_{k\in\mathbb{N}}$ sono esempi di successioni estratte da $\left(\frac{1}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$.

Osservazione 2.1.19 Se la successione reale $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tende ad a per n che tende a $+\infty$ allora ogni successione estratta da $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ha per limite a. Tale osservazione è ovvia, ma può essere riformulata in un modo molto utile per dimostrare che una successione non è regolare. Infatti, l'enunciato precedente equivale a dire che una successione *non è* regolare se e solo se ammette due estratte che non tendono allo stesso limite, quindi in particolare:

> se una successione ammette due estratte aventi due limiti diversi allora non è regolare.

In questo modo si può nuovamente verificare che $((-1)^n)_{n\in\mathbb{N}}$ non è regolare. Infatti, l'Esempio 2.1.18 mostra che possiede due estratte convergenti a due limiti diversi.

Abbiamo già osservato che esistono successioni limitate e non convergenti, come $((-1)^n)_{n\in\mathbb{N}}$. Però, risulta che

Teorema 2.1.20 (Teorema di Bolzano–Weierstass) *Sia $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una successione limitata. Allora esiste almeno una successione estratta da $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergente.*

Dim. Poiché $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ è una successione limitata siano $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tali che $a_n \in [\alpha, \beta]$ $\forall n \in \mathbb{N}$. Sia $c = (\alpha + \beta)/2$ il punto medio di $[\alpha, \beta]$. Per infiniti indici n risulta che a_n appartiene all'intervallo $[\alpha, c]$ oppure a $[c, \beta]$. Indichiamo con $[\alpha_1, \beta_1]$ tale intervallo e con n_1 il primo indice per cui $a_{n_1} \in [\alpha_1, \beta_1]$. Sia $c_1 = (\alpha_1 + \beta_1)/2$ il punto medio di $[\alpha_1, \beta_1]$, di nuovo per infiniti indici n risulta che a_n appartiene all'intervallo $[\alpha_1, c_1]$ oppure a $[c_1, \beta_1]$. Indichiamo con $[\alpha_2, \beta_2]$ tale intervallo e con n_2 il primo indice maggiore di n_1 per cui $a_{n_2} \in [\alpha_2, \beta_2]$. Continuando con questo procedimento otteniamo tre successioni $(\alpha_k), (a_{n_k}), (\beta_k)$ tali che

$$\begin{cases} \alpha_k \leq a_{n_k} \leq \beta_k \\ \alpha_k \leq \alpha_{k+1} \\ \beta_k - \alpha_k = \frac{\beta-\alpha}{2^k} \end{cases} \qquad \forall k \in \mathbb{N}\,.$$

Poiché la successione (α_k) è crescente, per il Teorema 2.1.16 essa converge a $x_0 \in [\alpha, \beta]$ ed anche (β_k) converge ad x_0 perchè $\beta_k = \alpha_k + \dfrac{\beta - \alpha}{2^k} \xrightarrow{k} x_0$. Allora per il Secondo Teorema del Confronto 2.1.10 anche la successione (a_{n_k}) converge a x_0 e il Teorema è dimostrato. $\boxed{QED}$

Questo teorema è di fatto equivalente all'Assioma di completezza, così come anche il seguente Teorema 2.1.22, che è molto importante perché dà una condizione di convergenza su una successione *senza coinvolgere il valore del limite*, ma basato *solo sui termini della successione stessa*, che ovviamente è la condizione in cui ci si trova se si vuole conoscere il comportamento di una successione prima di calcolarne il limite, e quando non si è affatto in grado di calcolarlo. Premettiamo la definizione di successione di Cauchy.

Definizione 2.1.21 (Successioni di Cauchy) *Diciamo che la successione* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *è una* successione di Cauchy *se*

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \nu > 0 \textit{ tale che } \forall n,\, m \in \mathbb{N},\ \ n,\, m \geq \nu \Rightarrow\ \ |a_m - a_n| < \varepsilon\,.$$

Teorema 2.1.22 (Criterio di convergenza di Cauchy) *La successione reale* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *è convergente in* $\mathbb{R}$ *se e solo se è una successione di Cauchy.*

Osservazioni 2.1.23

1. Il criterio di Cauchy stabilisce l'equivalenza tra due affermazioni: la convergenza della successione $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ e la sua proprietà di essere una successione di Cauchy, quindi contiene due implicazioni. Di queste, una è ovvia, mentre l'altra è difficile. Quella ovvia è che se $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ è convergente allora è di Cauchy. Infatti, se $a_n \to \ell \in \mathbb{R}$ allora per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $\nu > 0$ tale che $n > \nu$ implica $|a_n - \ell| < \varepsilon$. Quindi, per $n, m > \nu$ risulta

$$|a_m - a_n| = |a_m - \ell + \ell - a_n| \leq |a_m - \ell| + |\ell - a_n| < 2\varepsilon,$$

   e quindi $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ è di Cauchy.

2. Come osservato, il Criterio di Cauchy è equivalente all'Assioma di completezza (ed anche al Teorema di Bolzano–Weierstrass), quindi è valido in $\mathbb{R}$ ma non in $\mathbb{Q}$. Infatti, esistono successioni di numeri razionali che sono di Cauchy, ma non ammettono limite in $\mathbb{Q}$ come la successione (che studieremo) $\big((1 + \frac{1}{n})^n\big)_{n\in\mathbb{N}}$.

Osservazione 2.1.24 Come abbiamo osservato, esistono successioni $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ che non ammettono limite, ma esistono sempre il *limite superiore* e il *limite inferiore* che sono così definiti:

1. $\limsup\limits_{n\to+\infty} a_n = +\infty$ se e solo se a_n non è limitata superiormente;

2. $\limsup_{n\to+\infty} a_n = \ell \in \mathbb{R}$ se e solo se valgono le seguenti proprietà:

$$\begin{cases} \forall\varepsilon > 0\ \exists\nu > 0 \text{ tale che } \forall n \in \mathbb{N},\ n \geq \nu & \Longrightarrow \quad a_n < \ell + \varepsilon\,, \\ \forall\varepsilon > 0 \text{ per infiniti indici } n \in \mathbb{N} & \Longrightarrow \quad \ell - \varepsilon < a_n\,; \end{cases}$$

3. $\liminf_{n\to+\infty} a_n = -\infty$ se e solo se a_n non è limitata inferiormente;

4. $\liminf_{n\to+\infty} a_n = \ell \in \mathbb{R}$ se e solo se valgono le seguenti proprietà:

$$\begin{cases} \forall\varepsilon > 0\ \exists\nu > 0 \text{ tale che } \forall n \in \mathbb{N},\ n \geq \nu & \Longrightarrow \quad \ell - \varepsilon < a_n\,, \\ \forall\varepsilon > 0 \text{ per infiniti indici } n \in \mathbb{N} & \Longrightarrow \quad a_n < \ell + \varepsilon\,. \end{cases}$$

Ad esempio $\liminf_{n\to+\infty}(-1)^n = -1$ e $\limsup_{n\to+\infty}(-1)^n = 1$. Si verifica facilmente che

$$\exists \lim_{n\to+\infty} a_n = \ell \in \bar{\mathbb{R}} \quad \Longleftrightarrow \quad \limsup_{n\to+\infty} a_n = \liminf_{n\to+\infty} a_n = \ell\,,$$

ed inoltre

$$\liminf_{n\to+\infty} a_n = \sup_n \left(\inf_{k\geq n} (a_k) \right)\,, \quad \limsup_{n\to+\infty} a_n = \inf_n \left(\sup_{k\geq n} (a_k) \right)\,.$$

Osservazione 2.1.25 Concludiamo osservando che si possono considerare anche *successioni complesse* $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Per studiarne il comportamento, basta scrivere ogni termine in forma algebrica, $z_n = a_n + ib_n$, e studiare le due successioni reali $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ e $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ separatamente. Ovviamente, non ha senso in $\mathbb{C}$ parlare di successioni positivamente o negativamente divergenti, perciò si considereranno solo successioni convergenti, cioè tali che $z_n \to z \in \mathbb{C}$, divergenti, cioè tali che $|z_n| \to +\infty$, e irregolari.

2.2 Principio di induzione

In questo paragrafo discutiamo un teorema, noto sotto il nome tradizionale di "Principio di induzione", che è spesso utile, come vedremo, per discutere la validità di una successione *infinita* di proposizioni in un *numero finito di passi*. Equivalentemente, si vuol provare che un enunciato dipendente dalla variabile naturale $n \in \mathbb{N}$ (detto *predicato*) è vero per ogni valore di n (o, più in generale, per ogni valore di n a partire da un valore iniziale n_0 che può essere diverso da 0). Non presentiamo la dimostrazione, ma ne discutiamo il significato dopo averlo enunciato.

Teorema 2.2.1 (Principio di induzione) *Sia $\mathcal{P}(n)$ un predicato dipendente dalla variabile $n \in \mathbb{N}$. Se*

(i) *esiste $n_0 \geq 0$ tale che $\mathcal{P}(n_0)$ sia vera;*

(ii) *per ogni $n \geq n_0$ vale l'implicazione*

$$\mathcal{P}(n) \quad vera \qquad \Longrightarrow \qquad \mathcal{P}(n+1) \quad vera \tag{2.2.6}$$

allora $\mathcal{P}(n)$ è vera per ogni $n \geq n_0$.

Un *predicato* è un enunciato che contiene una variabile (in questo caso, $n \in \mathbb{N}$), e quindi di per sé non è né vero né falso, in quanto il suo valore di verità dipende dal valore che viene attribuito alla variabile. Quando si assegna un valore ad ogni variabile presente in un predicato si ottiene una *proposizione*, che sarà vera o falsa. Per esempio, l'enunciato "n è un numero pari" è vero se alla variabile n viene attribuito come valore un multiplo di 2, ed è falso altrimenti. La tesi del Teorema 2.2.1 (per semplicità, supponiamo $n_0 = 0$), non è che *il predicato $\mathcal{P}(n)$ è vero*, ma che *l'enunciato $\mathcal{P}(n)$ è vero per ogni n*, cioè che *tutte le proposizioni che si ottengono fissando ad arbitrio il valore della variabile $n \in \mathbb{N}$ sono vere*. È importante anche chiarire che nella (ii) l'ipotesi è che sia vera *l'implicazione* nella (2.2.6), che è cosa diversa dall'assumere che $\mathcal{P}(n)$ sia vera: quello che si suppone nella (2.2.6) è che *non possa accadere, per alcun valore di $n \geq n_0$, che $\mathcal{P}(n)$ sia vera e $\mathcal{P}(n+1)$ sia falsa*. Questo infatti è l'unico caso in cui è falsa *l'implicazione*. D'altra parte, la sola (ii) non può bastare, come vedremo nell'Esempio 2.2.2.

Esempio 2.2.2 Consideriamo l'enunciato

$$\mathcal{P}(n): \quad 2^n \geq n^3,$$

e proviamo che "$\mathcal{P}(n)$ vera $\Rightarrow \mathcal{P}(n+1)$ vera" per ogni $n \geq 7$. Infatti, per $n \geq 7$ risulta:

$$\begin{aligned} 2^{n+1} &= 2 \cdot 2^n \geq 2 \cdot n^3 = n^3 + n \cdot n^2 \geq n^3 + 7n^2 \\ &\geq n^3 + 3n^2 + 3n + 1 = (n+1)^3, \end{aligned}$$

e quindi per ogni $n \geq 7$, *se* $2^n \geq n^3$ *allora* $2^{n+1} \geq (n+1)^3$. D'altra parte, semplici calcoli mostrano che $\mathcal{P}(n)$ *è falsa* per $n = 7, 8, 9$, mentre è vera per $n = 10$. Sintetizzando, si può dire che $\mathcal{P}(n)$ è *induttiva*, cioè verifica la (2.2.6), per ogni $n \geq 7$, mentre è *vera* per ogni $n \geq 10$, dal momento che (i) è verificata con $n_0 = 10$.

Presentiamo ora alcuni esempi di enunciati che si possono provare per induzione. Essi saranno utili in successive applicazioni, nel Paragrafo 2.3 e nel Capitolo 3.

Esempio 2.2.3 Proviamo per induzione che per ogni $n \in \mathbb{N}$ risulta

$$\sum_{k=0}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}.$$

La formula è banalmente vera per $n = 0$, mentre il passo induttivo si può provare come segue:

$$\sum_{k=0}^{n+1} k = \sum_{k=0}^{n} k + (n+1) = \frac{n(n+1)}{2} + (n+1) = \frac{(n+1)(n+2)}{2}.$$

L'esempio seguente, che generalizza uguaglianze elementari come $1-x^2 = (1-x)(1+x)$ o $1 - x^3 = (1 - x)(1 + x + x^2)$, sarà utile in connessione con la serie geometrica discussa nell'Esempio 3.1.7.

Esempio 2.2.4 Proviamo per induzione che per ogni $n \in \mathbb{N}$ e per ogni $x \neq 1$ risulta

$$\sum_{k=0}^{n} x^k = \frac{1 - x^{n+1}}{1 - x}.$$

La formula è banalmente vera per $n = 0$, mentre il passo induttivo si può provare come segue:

$$\sum_{k=0}^{n+1} x^k = \sum_{k=0}^{n} x^k + x^{n+1} = \frac{1 - x^{n+1}}{1 - x} + x^{n+1} = \frac{1 - x^{n+2}}{1 - x}.$$

La diseguaglianza dell'esempio seguente è nota come *diseguaglianza di Bernoulli*.

Esempio 2.2.5 Proviamo per induzione che per ogni $n \in \mathbb{N}$ e per ogni $x > -1$ risulta

$$(1 + x)^n \geq 1 + nx.$$

La formula è banalmente vera per $n = 0$, mentre il passo induttivo si può provare come segue:

$$(1 + x)^{n+1} = (1 + x)(1 + x)^n \geq (1 + x)(1 + nx) = 1 + (n + 1)x + nx^2 \geq 1 + (n + 1)x,$$

dal momento che $nx^2 \geq 0$.

L'esempio precedente si può raffinare, ottenendo una diseguaglianza più precisa.

Esempio 2.2.6 Proviamo per induzione che per ogni $n \in \mathbb{N}$ e per ogni $x \geq 0$ risulta

$$(1 + x)^n \geq 1 + \frac{n(n-1)}{2}x^2.$$

La formula è banalmente vera per $n = 0, 1, 2$, mentre il passo induttivo si può provare come segue:

$$\begin{aligned}(1 + x)^{n+1} &= (1 + x)(1 + x)^n \geq (1 + x)\Big(1 + \frac{n(n-1)}{2}x^2\Big) = 1 + \frac{n(n-1)}{2}(x^2 + x^3) + x \\ &= 1 + \frac{n(n+1)}{2}x^2 + x\Big[\frac{n(n-1)}{2}x^2 - nx + 1\Big] \geq 1 + \frac{n(n+1)}{2}x^2\end{aligned}$$

dal momento che il trinomio in parentesi quadre ha discriminante negativo per ogni $n > 2$ e quindi è positivo per ogni valore di x.

L'idea dell'induzione è alla base anche della definizione di successioni *per ricorrenza*, o, appunto, *per induzione*. Per definire una successione, invece di usare una formula chiusa del tipo $a_n = f(n)$, si può procedere così: Si definisce a_0 e poi si dà una formula del tipo $a_{n+1} = F(n, a_0, \dots, a_n)$. Per esempio, si può porre (n fattoriale)

$$0! = 1, \qquad (n+1)! = (n+1)n! \ \text{ per ogni } n \in \mathbb{N}.$$

Un procedimento di questo tipo si incontra, per esempio, quando i termini di una successione vengano calcolati con un metodo ricorsivo in cui una variabile viene attualizzata utilizzando il risultato ottenuto al passo precedente. Noi incontreremo almeno due importanti esempi, nella Definizione delle somme parziali di una serie (vedi Osservazione 3.1.2) e (nel corso di Analisi Matematica II) nella dimostrazione del Teorema di esistenza globale in intervalli compatti relativo alle equazioni differenziali.

L'introduzione di $n!$ permette di dare altri due esempi significativi che possono essere dimostrati grazie al Principio di Induzione.

Esempio 2.2.7 Proviamo per induzione che per ogni $n \geq 4$ risulta

$$2^n < n!\,.$$

Per $n = 4$ la diseguaglianza è chiaramente soddisfatta. Il passo induttivo si può provare come segue:

$$2^{n+1} = 2 \cdot 2^n < 2 \cdot n! < (n+1) \cdot n! = (n+1)!\,.$$

Esempio 2.2.8 Per ogni $n \in \mathbb{N}$ e $h \in \{0, 1, \dots, n\}$ poniamo

$$\binom{n}{h} = \frac{n!}{h!(n-h)!} = \frac{n(n-1)\dots(n-h+1)}{h!}\,.$$

Il numero $\binom{n}{h}$ si dice *coefficiente binomiale* e soddisfa le seguenti proprietà:

$$\binom{n}{n} = 1\,, \quad \binom{n}{0} = 1\,, \quad \binom{n+1}{h} = \binom{n}{h-1} + \binom{n}{h}\,.$$

Dati $a, b \in \mathbb{R}$ e $n \in \mathbb{N}$ possiamo ora dare la *formula di Newton* per lo sviluppo di $(a+b)^n$:

$$(a+b)^n = \sum_{h=0}^{n} \binom{n}{h} a^{n-h} b^h\,.$$

Questa formula si dimostra per induzione.

Per $n = 1$ è chiaramente verificata. Il passo induttivo si può provare come segue:

$$\begin{aligned}
(a+b)^{n+1} = (a+b)\cdot(a+b)^n = (a+b)\cdot\sum_{h=0}^{n}\binom{n}{h}a^{n-h}b^h \\
&= \sum_{h=0}^{n}\binom{n}{h}a^{n+1-h}b^h + \sum_{h=0}^{n}\binom{n}{h}a^{n-h}b^{h+1} \\
&= a^{n+1} + \sum_{h=1}^{n}\binom{n}{h}a^{n+1-h}b^h + \sum_{h=0}^{n-1}\binom{n}{h}a^{n-h}b^{h+1} + b^{n+1} \\
&= a^{n+1} + \sum_{h=1}^{n}\binom{n}{h}a^{n+1-h}b^h + \sum_{h=1}^{n}\binom{n}{h-1}a^{n+1-h}b^h + b^{n+1} \\
&= a^{n+1} + \sum_{h=1}^{n}\binom{n+1}{h}a^{n+1-h}b^h + b^{n+1} \\
&= \sum_{h=0}^{n+1}\binom{n+1}{h}a^{n+1-h}b^h\,.
\end{aligned}$$

2.3 Limiti notevoli

In questo paragrafo calcoliamo i limiti di alcune importanti successioni; essi saranno alla base del calcolo di tutti i limiti di successioni che incontreremo, e verranno utilizzati sfruttando i risultati generali visti nel Paragrafo 2.1.

Esempio 2.3.1 Ogni successione del tipo $(a^n)_{n\in\mathbb{N}}$, con $a \in \mathbb{R}$, è detta *successione geometrica di ragione a*. Osserviamo che la successione geometrica $(a^n)_{n\in\mathbb{N}}$ è irregolare se $a \le -1$, come ad esempio la successione $((-1)^n)_{n\in\mathbb{N}}$. Studiamo tutti i casi:

$$\lim_{n\to+\infty} a^n = \begin{cases} +\infty & \text{se } a > 1 \\ 0 & \text{se } |a| < 1 \\ 1 & \text{se } a = 1 \\ \nexists & \text{se } a \le -1\,. \end{cases}$$

Infatti, se $a > 1$ per la diseguaglianza di Bernoulli vista nell'Esempio 2.2.5 si ha

$$a^n = (1 + a - 1)^n \ge 1 + n(a-1) \to +\infty$$

e quindi $a^n \to +\infty$ per confronto. Se $|a| < 1$ allora $1/|a| > 1$ e quindi $(1/|a|)^n \to +\infty$. Segue $|a|^n = 1/(1/|a|)^n \to 0$ ed anche $a^n \to 0$ per l'Osservazione 2.1.11. Se $a < -1$ invece risulta $a^{2k} \to +\infty$ e $a^{2k+1} \to -\infty$ per $k \to +\infty$ e quindi $(a^n)_{n\in\mathbb{N}}$ è irregolare.

Esempio 2.3.2 Per ogni $a > 0$ risulta $\lim_n \sqrt[n]{a} = 1$. Infatti, se $a \ge 1$ si ha $\sqrt[n]{a} \ge 1$ e, posto $b_n = \sqrt[n]{a} - 1$, risulta $b_n \ge 0$ e, per la diseguaglianza di Bernoulli nell'Esempio 2.2.5,

$a = (1 + b_n)^n \geq 1 + nb_n$, da cui

$$0 \leq b_n \leq \frac{a-1}{n} \to 0 \quad \text{per} \quad n \to +\infty,$$

e quindi la tesi. Per $0 < a < 1$ si ha $\sqrt[n]{a} = 1/(\sqrt[n]{1/a}) \to 1$ per quanto appena detto.

Abbiamo definito il numero e in (1.2.11) come estremo superiore di una successione. Grazie al Teorema 2.1.16, esso è anche il limite della stessa successione.

Esempio 2.3.3 La successione

$$\left(\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n\right)_{n \in \mathbb{N}}$$

è strettamente crescente e limitata.

Per dimostrare che $\left((1 + \frac{1}{n})^n\right)_{n \in \mathbb{N}}$ è strettamente crescente, osserviamo che, per ogni $n \in \mathbb{N}$ con $n > 1$:

$$\begin{aligned}
\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n > \left(1 + \frac{1}{n-1}\right)^{n-1} &\iff \left(\frac{n+1}{n}\right)^n > \left(\frac{n}{n-1}\right)^{n-1} = \left(\frac{n}{n-1}\right)^n \cdot \frac{n-1}{n} \\
&\iff \left(\frac{n+1}{n}\right)^n \cdot \left(\frac{n-1}{n}\right)^n > \frac{n-1}{n} \\
&\iff \left(\frac{n^2-1}{n^2}\right)^n > 1 - \frac{1}{n} \\
&\iff \left(1 - \frac{1}{n^2}\right)^n > 1 - \frac{1}{n},
\end{aligned}$$

dove l'ultima diseguaglianza $\left(1 - \frac{1}{n^2}\right)^n > 1 - \frac{1}{n}$ è vera e segue applicando la Diseguaglianza di Bernoulli nell'Esempio 2.2.5 con $x = -1/n^2$. Quindi la successione $\left((1 + \frac{1}{n})^n\right)_{n \in \mathbb{N}}$ è strettamente crescente. Inoltre, per ogni $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned}
\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n &= \sum_{h=0}^{n} \binom{n}{h} \frac{1}{n^h} = \sum_{h=0}^{n} \frac{1}{h!} \cdot \frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-h+1)}{n^h} \\
&< \sum_{h=0}^{n} \frac{1}{h!} = 1 + 1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \ldots \cdot (n-1) \cdot n} \\
&< 1 + \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \ldots + \frac{1}{2^{n-1}}\right) \\
&= 1 + \frac{1 - \frac{1}{2^n}}{1 - \frac{1}{2}} < 1 + \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} = 3\,.
\end{aligned}$$

Pertanto, per ogni $n \in \mathbb{N},\ n > 1$, risulta

$$2 < \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < 3\,.$$

Per il Teorema fondamentale sul limite delle successioni monotone 2.1.16 possiamo concludere che

$$\exists \lim_{n\to+\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \sup_{n\in\mathbb{N}} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \mathrm{e} \in \mathbb{R}, \tag{2.3.7}$$

per la (1.2.11). Il numero e è irrazionale e quindi il suo sviluppo decimale è infinito e aperiodico; le prime cifre decimali sono le seguenti:

$$\mathrm{e} = 2,7182818284\ldots\,.$$

Dal limite appena calcolato si potrebbe dedurre che per ogni $x \in \mathbb{R}$ vale

$$\mathrm{e}^x = \lim_{n\to+\infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n$$

ed anche che valgono le seguenti relazioni:

$$\begin{aligned} a_n \to +\infty \quad &\Rightarrow \quad \lim_{n\to+\infty} \left(1 + \frac{1}{a_n}\right)^{a_n} = \mathrm{e} \\ a_n \to 0 \quad &\Rightarrow \quad \lim_{n\to+\infty} (1 + a_n)^{\frac{1}{a_n}} = \mathrm{e}\,. \end{aligned}$$

Dall'esempio precedente si può dedurre un altro limite notevole.

Esempio 2.3.4 Proviamo che $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{\log n}{n} = 0$. Si ha per ogni $n > 3$

$$\frac{\log(n+1)}{n+1} - \frac{\log n}{n} = \frac{1}{n(n+1)} \log \frac{(n+1)^n}{n^{n+1}} < \frac{1}{n(n+1)} \log \frac{\mathrm{e}}{n} < 0,$$

dove abbiamo usato la (2.3.7). Dalla decrescenza della successione segue l'esistenza del limite $\ell = \lim_n \frac{\log n}{n}$. Siccome per le proprietà dei logaritmi risulta

$$\frac{\log(n^2)}{n^2} = \frac{2}{n}\frac{\log n}{n}$$

e $\frac{\log(n^2)}{n^2} \to \ell$, per l'Osservazione 2.1.19, si ha che $\ell = 0$. Più in generale, si può provare che $\frac{\log^p n}{n^q} \to 0$ per ogni $p \in \mathbb{R},\ q > 0$.

Usando la diseguaglianza 2.2.6 si ottiene un altro limite notevole.

Esempio 2.3.5 Proviamo che $\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{n} = 1$. Scriviamo $\sqrt[n]{n} = 1 + x_n$, e applichiamo la diseguaglianza 2.2.6:

$$n = (1 + x_n)^n \geq 1 + \frac{n(n-1)}{2} x_n^2,$$

da cui $x_n^2 \leq 2/n \to 0$ e quindi $\sqrt[n]{n} \to 1$. Analogamente si prova che per ogni $b \in \mathbb{R}$ risulta $\lim_n \sqrt[n]{n^b} = 1$.

Vediamo ora due limiti notevoli riguardanti le funzioni trigonometriche.

Esempio 2.3.6 Sia $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una successione infinitesima. Allora

(i) $\lim_{n\to+\infty} \sin a_n = 0$,

(ii) $\lim_{n\to+\infty} \frac{\sin a_n}{a_n} = 1$.

Dimostriamo prima (i). Dato che $|\sin x| \leq |x|$ per ogni $x \in \mathbb{R}$, vale la seguente proprietà

$$\forall\; n \in \mathbb{N}\; 0 \leq |\sin a_n| \leq |a_n|\,,$$

dove $0 \xrightarrow{n} 0$ e $a_n \xrightarrow{n} 0$. Per il secondo teorema di confronto 2.1.10 possiamo concludere che $\lim_{n\to+\infty} \sin a_n = 0$. Applicando (i) e il Teorema sulle operazioni con i limiti 2.1.7 otteniamo che $\lim_{n\to+\infty} \cos a_n = \lim_{n\to+\infty} \big(1 - 2\sin^2(a_n/2)\big) = 1$.

Dimostriamo ora (ii). Poiché $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ è una successione infinitesima possiamo supporre, per semplicità, che $0 < a_n < \pi/2$ per ogni $n \in \mathbb{N}$. Ricordando che $0 < \sin x < x < \tan x$ per ogni $0 < x < \pi/2$, ne segue che

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad 0 < \sin a_n < a_n < \tan a_n = \frac{\sin a_n}{\cos a_n}$$

e quindi

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad 0 < \frac{\cos a_n}{\sin a_n} < \frac{1}{a_n} < \frac{1}{\sin a_n}\,.$$

Moltiplicando per $\sin a_n$ (> 0), otteniamo che

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad 0 < \cos a_n < \frac{\sin a_n}{a_n} < 1\,,$$

dove $\cos a_n \xrightarrow{n} 1$ e $1 \xrightarrow{n} 1$. Sempre per il Teorema 2.1.10 concludiamo che $\lim_{n\to+\infty} \frac{\sin a_n}{a_n} = 1$.

CAPITOLO 3

SERIE NUMERICHE

Trattiamo ora il problema di associare ad una successione (infinita) di numeri reali una procedura che generalizzi il calcolo della somma così come si esegue su un numero finito di termini. Ovviamente, non è possibile *neanche in linea di principio* "sommare fra loro infiniti numeri" e quindi bisognerà fare ricorso ancora una volta al concetto di limite. Iniziamo, come sempre, col definire l'oggetto del nostro discorso, cioè le serie numeriche.

3.1 Serie, convergenza, convergenza assoluta

Definizione 3.1.1 *Data la successione reale* $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$*, si dice* serie di termine generale a_k *l'operazione che associa alla successione* $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ *la successione* $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *definita per ogni* $n \in \mathbb{N}$ *da*

$$s_n = \sum_{k=0}^{n} a_k, \tag{3.1.1}$$

che si dice successione delle somme parziali della serie. *La serie di termine generale* a_k *si denota con la scrittura*

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k.$$

Notiamo che la scrittura introdotta per denotare le serie, facendo uso del simbolo di sommatoria, evoca il problema descritto all'inizio, ma *non denota una somma*.

Osservazione 3.1.2 La successione delle somme parziali si dice anche *successione delle ridotte*, e si può definire per ricorrenza così

$$s_0 = a_0, \qquad s_n = s_{n-1} + a_n, \quad n \geq 1. \tag{3.1.2}$$

Vediamo ora qual è la proprietà più rilevante delle serie.

Definizione 3.1.3 *Si dice che la serie di termine generale* a_k *è* convergente *se esiste finito il limite*

$$\lim_{n\to+\infty} s_n.$$

In caso affermativo, il valore di tale limite si dice somma della serie.

Vediamo una prima proprietà delle serie convergenti; intuitivamente, è naturale aspettarsi che, se una serie converge, il termine generale debba diventare sempre più piccolo. Quest'idea è formalizzata nel seguente enunciato.

Proposizione 3.1.4 *Se la serie* $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ *è convergente allora* $\lim_{k\to\infty} a_k = 0$.

Dim. Per definizione, dire che la serie data converge equivale a dire che la successione $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ delle ridotte converge; ma allora, detta S la somma della serie, si ha

$$S = \lim_{n\to+\infty} s_n = \lim_{n\to+\infty} s_{n-1},$$

da cui, essendo il limite finito,

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = \lim_{n\to+\infty} (s_n - s_{n-1}) = S - S = 0.$$

QED

La proposizione precedente esprime una condizione solo *necessaria* per la convergenza di una serie. Essa non è però sufficiente, come mostra l'Esempio 3.2.2.

Osservazioni 3.1.5

1. Notiamo che la condizione di convergenza per la serie di termine generale a_k è l'esistenza del limite di *un'altra* successione, quella delle ridotte $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

2. Il nome *somma* riservato al limite delle somme parziali, quando esiste finito, evoca di nuovo l'idea di generalizzare la somma tra numeri. In realtà non si tratta di una *somma* (cosa impossibile, come già osservato) ma di un *limite*.

3. Se la serie di termine generale a_k non è convergente, può accadere che il limite delle somme parziali sia infinito o non esista. Si dirà in tal caso che la serie è

   - *positivamente divergente* se $\lim_{n\to+\infty} s_n = +\infty$;
   - *negativamente divergente* se $\lim_{n\to+\infty} s_n = -\infty$;
   - *indeterminata* se il limite $\lim_{n\to+\infty} s_n$ non esiste.

4. Se la serie di termine generale a_k è convergente, la sua somma si denota con

   $$\sum_{k=0}^{\infty} a_k$$

   e lo stesso simbolo si usa anche per indicare che la serie è divergente positivamente, scrivendo

   $$\sum_{k=0}^{\infty} a_k = +\infty$$

o negativamente, scrivendo
$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k = -\infty.$$
Tale simbolo assume quindi due significati diversi (la serie o la sua somma), ma si vedrà che questo non genera alcuna confusione; infatti, assegnando una serie si pone naturalmente il problema di sapere se essa sia convergente o no, e, in caso affermativo, di determinarne la somma.

5. Si dice *carattere* della serie la sua proprietà di essere convergente, divergente o indeterminata.

6. Se si modifica un numero *finito* di termini della serie $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ non se ne altera il carattere. In altri termini, due serie che differiscono per un numero finito di termini hanno lo stesso carattere. Naturalmente, esse *non hanno in generale la stessa somma.*

7. Dati una serie $\sum_k a_k$ e un numero reale $c \neq 0$, si può considerare la serie $\sum_k (ca_k)$. Ovviamente, questa ha lo stesso carattere della $\sum_k a_k$ e, in caso di convergenza, la sua somma è il prodotto di c per la somma della serie $\sum_k a_k$. In particolare, studieremo le serie a termini positivi, ma in realtà è chiaro che la classe a cui si riferiranno tutti i risultati è quella delle *serie a termini di segno costante* e non importa se tale segno sia $+$ o $-$.

8. Il discorso è più delicato per le serie che sono *somma di due serie.* Per il momento, quello che possiamo dire è che se $\sum_k a_k$ è convergente e $\sum_k b_k$ è convergente, allora anche la serie $\sum_k (a_k + b_k)$ è convergente, e questo segue subito dal teorema sulla somma dei limiti applicato alle successioni delle ridotte. Invece, se $\sum_k a_k$ è convergente e $\sum_k b_k$ *non* è convergente, allora la serie $\sum_k (a_k + b_k)$ *non può convergere.* Infatti, applicando il risultato precedente alle serie $\sum_k (a_k + b_k)$ e $\sum_k (-a_k)$ dedurremmo che $\sum_k b_k$ converge, che è contrario all'ipotesi.

9. Accenniamo rapidamente alle serie *a termini complessi.* Non c'è niente di nuovo, dal momento che, data la serie di termine generale $z_k = a_k + ib_k$, il suo comportamento è determinato dal comportamento delle due serie reali di termine generale a_k e b_k. Ovviamente, non ci sono serie complesse divergenti, ma solo convergenti (se $\sum_k a_k$ e $\sum_k b_k$ convergono entrambe: in tal caso $\sum_{k=0}^{\infty} z_k = \sum_{k=0}^{\infty} a_k + i \sum_{k=0}^{\infty} b_k$) e non convergenti (se almeno una tra $\sum_k a_k$ e $\sum_k b_k$ non converge).

Il seguente risultato segue subito dal criterio di convergenza di Cauchy per le successioni.

Teorema 3.1.6 (Criterio di Cauchy per le serie) *La convergenza della serie* $\sum_k a_k$ *è equivalente alla validità della seguente* condizione di Cauchy*:*

$$\textit{per ogni } \varepsilon > 0 \textit{ esiste } \nu > 0 \textit{ tale che } \Big|\sum_{k=n+1}^{n+p} a_k\Big| < \varepsilon \quad \forall n \geq \nu,\ \forall p \in \mathbb{N}.$$

Dim. Ricordando il criterio di Cauchy per le successioni 2.1.22, basta applicarlo alla successione $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ delle ridotte, e si ha che $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge se e solo se per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $\nu > 0$ tale che $\forall n \geq \nu$ implica $|s_{n+p} - s_n| < \varepsilon$ per ogni $p \in \mathbb{N}$. A questo punto resta solo da osservare che

$$|s_{n+p} - s_n| = \Big|\sum_{k=n+1}^{n+p} a_k\Big|.$$

QED

Studiamo in dettaglio un esempio molto importante che sarà di guida in numerose applicazioni.

Esempio 3.1.7 Per ogni $x \in \mathbb{R}$, consideriamo la serie di termine generale x^k, cioè la serie

$$\sum_{k=0}^{\infty} x^k;$$

essa è detta *serie geometrica di ragione* x. È uno dei (pochi) casi in cui si riescono a calcolare esplicitamente, al variare di x, le somme parziali s_n. Anzi, è in realtà un lavoro già fatto: nell'Esempio 2.2.4 abbiamo ottenuto la formula

$$s_n = \frac{1 - x^{n+1}}{1 - x}, \qquad x \neq 1, \tag{3.1.3}$$

(per $x = 1$ è ovvio che $s_n = n + 1$ e la serie è positivamente divergente). Possiamo allora facilmente calcolare il limite della successione $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ e determinare il carattere della serie geometrica. Risulta:

$$\lim_{n\to+\infty} s_n \begin{cases} \text{non esiste} & x \leq -1 \\ = \dfrac{1}{1-x} & -1 < x < 1 \\ = +\infty & x \geq 1 \end{cases}$$

e quindi la serie geometrica di ragione x converge se e solo se $-1 < x < 1$, diverge positivamente per $x \geq 1$ ed è indeterminata per $x \leq -1$.

Vediamo un altro esempio di serie convergenti per cui è possibile calcolare la somma.

Esempio 3.1.8 (Serie telescopiche) Sia $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ una serie tale che esiste una successione infinitesima (b_k) per cui $a_k = b_k - b_{k+1}$ $\forall k \in \mathbb{N}$. Allora risulta

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} a_k = \sum_{k=1}^{n} (b_k - b_{k+1}) = b_1 - b_{n+1};$$

da cui

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k = \lim_{n\to+\infty} s_n = b_1 - \lim_{n\to+\infty} b_{n+1} = b_1.$$

Un esempio di serie telescopica è la serie di Mengoli

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)} = \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right) = 1.$$

Introduciamo ora la nozione di *convergenza assoluta*, più forte della convergenza semplice.

Definizione 3.1.9 (Convergenza assoluta) *Si dice che la serie* $\sum_k a_k$ converge assolutamente *se la serie* $\sum_k |a_k|$ *converge.*

Vediamo che la convergenza assoluta implica quella semplice.

Proposizione 3.1.10 *Se* $\sum_k |a_k|$ *converge allora anche* $\sum_k a_k$ *converge.*

DIM. Usiamo il criterio di convergenza di Cauchy. Per ipotesi, fissato $\varepsilon > 0$, esiste $\nu > 0$ tale che

$$\sum_{k=n+1}^{n+p} |a_k| < \varepsilon \qquad \forall n \geq \nu,\ \forall p \in \mathbb{N}.$$

Poiché per la diseguaglianza triangolare (1.1.5) risulta

$$\Big|\sum_{k=n+1}^{n+p} a_k\Big| \leq \sum_{k=n+1}^{n+p} |a_k|$$

in corrispondenza dello stesso ν si ha pure

$$\Big|\sum_{k=n+1}^{n+p} a_k\Big| < \varepsilon \qquad \forall n \geq \nu,\ \forall p \in \mathbb{N}$$

e la tesi segue usando l'altra implicazione del criterio di Cauchy. QED

Vedremo nell'Osservazione 3.3.2.4 che invece esistono serie che convergono semplicemente ma non assolutamente.

3.2 Serie a termini positivi

Tra le serie, hanno un posto di rilievo quelle i cui termini hanno segno costante. Per fissare le idee (vedi Osservazione 3.1.5.7), supponiamo che i termini delle serie che consideriamo siano tutti positivi. Tali serie, dette per l'appunto *serie a termini positivi*, sono particolarmente importanti anche in relazione alla proprietà espressa dalla Proposizione 3.1.10: infatti, studiare la convergenza assoluta di una qualunque serie $\sum_k a_k$ consiste nello studiare la convergenza della serie a termini positivi $\sum_k |a_k|$ e, se la serie risulta assolutamente convergente, resta provata anche la convergenza semplice, sicché il problema della convergenza è completamente risolto. Inoltre, per le serie a termini positivi esistono numerosi criteri di convergenza. Una prima loro proprietà è la seguente.

Proposizione 3.2.1 *Una serie a termini positivi può essere convergente o positivamente divergente, ma non è mai indeterminata. In particolare, una serie a termini positivi è convergente se e solo se la successione delle sue ridotte è limitata.*

Dim. Data la serie $\sum_k a_k$, se $a_k \geq 0$ per ogni $k \in \mathbb{N}$ allora la successione $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ delle ridotte è monotona crescente, perché

$$s_{n+1} = s_n + a_{n+1} \geq s_n \qquad \forall\, n \in \mathbb{N}$$

e quindi, per il Teorema fondamentale delle successioni monotone (Teorema 2.1.16), ammette limite, pari a $\sup_n s_n$. Segue che la serie data non può essere indeterminata, ed è positivamente divergente se $\sup_n s_n = +\infty$, è convergente se $\sup_n s_n$ è finito, cioè se e solo se la successione delle ridotte è limitata. $\boxed{QED}$

Studiamo ora una serie di fondamentale importanza, detta *serie armonica*. In particolare, essa è una serie che non converge, malgrado il suo termine generale tenda a 0. Questo, come già sottolineato, mostra che la condizione nella Proposizione 3.1.4 è *solo necessaria* per la convergenza di una serie, ma non sufficiente.

Esempio 3.2.2 (Serie armonica) La serie

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k},$$

detta *serie armonica*, è positivamente divergente. Infatti, essendo una serie a termini positivi, per la Proposizione 3.2.1 esiste il limite della successione delle ridotte,

$$S = \lim_{n\to+\infty} s_n = \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}.$$

Proviamo che $S = +\infty$. In accordo con l'Osservazione 2.1.19, possiamo conoscere S calcolando il limite di una qualsiasi successione estratta da $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Scegliamo l'estratta $(s_{2^k})_{k\in\mathbb{N}}$, cioè la sottosuccessione della $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ottenuta arrestandosi di volta in volta quando l'indice è una potenza di 2. Allora otteniamo

$$
\begin{aligned}
s_{2^k} &= 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \cdots + \frac{1}{8} + \cdots + \frac{1}{2^{k-1}} + \frac{1}{2^{k-1}+1} + \cdots + \frac{1}{2^k} \\
&= 1 + \frac{1}{2} + \Big(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\Big) + \Big(\frac{1}{5} + \cdots + \frac{1}{8}\Big) + \cdots + \frac{1}{2^{k-1}} + \Big(\frac{1}{2^{k-1}+1} + \cdots + \frac{1}{2^k}\Big) \\
&\geq 1 + \frac{1}{2} + \Big(\frac{1}{4} + \frac{1}{4}\Big) + \Big(\frac{1}{8} + \cdots + \frac{1}{8}\Big) + \cdots\cdots + \Big(\frac{1}{2^k} + \cdots + \frac{1}{2^k}\Big) \\
&= 1 + \frac{1}{2} + 2\frac{1}{4} + 4\frac{1}{8} + \cdots + 2^{k-1}\frac{1}{2^k} = 1 + \sum_{j=1}^{k} 2^{j-1}\frac{1}{2^j} \\
&= 1 + k\frac{1}{2} \longrightarrow +\infty \qquad \text{per} \quad k \to +\infty.
\end{aligned}
$$

Per quanto detto, l'intera successione $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ delle ridotte tende a $+\infty$, e quindi la serie armonica diverge positivamente.

Per le serie a termini positivi vale il seguente criterio di confronto.

Teorema 3.2.3 (Criterio di confronto) *Siano $\sum_k a_k$ e $\sum_k b_k$ due serie a termini positivi, e supponiamo che esista $\nu > 0$ tale che $a_k \leq b_k$ per ogni $k > \nu$. Allora:*

1. *se $\sum_k b_k$ converge allora anche $\sum_k a_k$ converge;*
2. *se $\sum_k a_k$ diverge allora anche $\sum_k b_k$ diverge.*

Dim. Poiché, come abbiamo visto, la convergenza di una serie non cambia modificando un numero finito di termini, possiamo supporre che $0 \leq a_k \leq b_k$ per ogni $k \in \mathbb{N}$ e non solo per $k \geq \nu$. Chiamando $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ e $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ le successioni delle ridotte di $\sum_k a_k$ e $\sum_k b_k$ rispettivamente, ponendo cioè

$$
s_n = \sum_{k=0}^{n} a_k, \qquad\qquad t_n = \sum_{k=0}^{n} b_k,
$$

entrambe le successioni $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ e $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sono crescenti e risulta evidentemente che $s_n \leq t_n$ per ogni n. La tesi allora segue dalla Proposizione 3.2.1.

Infatti, se $\sum_k b_k$ converge, la successione $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ è limitata, quindi lo è anche la $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ e la serie $\sum_k a_k$ converge e questo prova 1.

Viceversa, se $\sum_k a_k$ diverge, allora (per definizione) la successione $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge, ed ugualmente diverge la $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Segue che $\sum_k b_k$ diverge e questo prova 2. QED

Una semplice applicazione della teoria vista fin qui, basata sulla serie geometrica, è nel seguente esempio.

Esempio 3.2.4 (Sviluppi decimali) Abbiamo tutti familiarità con la rappresentazione decimale (anche con infinite cifre, si pensi a numeri come $\sqrt{2}$, e o π) dei numeri reali, di cui la conoscenza delle serie numeriche dà una completa spiegazione. Un numero reale x si può rappresentare in forma decimale così:

$$x = n, a_1 a_2 a_3 \dots a_k \dots \tag{3.2.4}$$

ove $n \in \mathbb{Z}$ è la *parte intera*, le cifre a_k, numeri interi compresi tra 0 e 9, costituiscono la *parte decimale* di x. La scrittura (3.2.4) ha il significato dell'uguaglianza

$$x = n + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{10^k}, \tag{3.2.5}$$

che è coerente con il linguaggio usuale, secondo cui a_1 sono i *decimi*, a_2 i *centesimi*, a_3 i *millesimi*, eccetera. Notiamo che siccome $a_k \le 9$ per ogni k, risulta $\frac{a_k}{10^k} \le \frac{9}{10^k}$. Quest'ultimo è il termine generale della serie geometrica di ragione $\frac{1}{10} < 1$ (moltiplicato per 9), che converge. Per confronto, *tutte* le serie del tipo (3.2.5) che dànno gli sviluppi decimali convergono. Come applicazione, si possono dedurre senza difficoltà le proprietà degli sviluppi decimali *periodici* in relazione alla rappresentazione frazionaria. Il più semplice esempio è l'uguaglianza $1 = 0, \overline{9}$, che si ottiene sommando la serie corrispondente:

$$0, \overline{9} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{9}{10^k} = 9 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{10^k} = 9\Big(\frac{1}{1 - \frac{1}{10}} - 1\Big) = 9\Big(\frac{10}{9} - 1\Big) = 1.$$

In particolare, questo mostra che lo sviluppo decimale in generale non è unico. Più in generale, la stessa teoria si applica agli *sviluppi in base b qualunque*: dato un numero naturale $b \ge 2$ (i più usati in questo contesto sono, oltre a 10, le potenze di 2), la corrispondente rappresentazione in base b è data dalla serie

$$x = n + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{b^k},$$

dove stavolta le cifre a_k sono interi compresi tra 0 e $b-1$ e la serie converge per confronto con la serie geometrica di ragione $\frac{1}{b} < 1$.

Osservazione 3.2.5 Siano $\sum_k a_k$ e $\sum_k b_k$ due serie a termini positivi, con $b_k > 0$, e supponiamo che esistano $\nu > 0$ e due costanti $c_1, c_2 > 0$ tali che

$$c_1 \le \frac{a_k}{b_k} \le c_2$$

per $k \ge \nu$. Allora $\sum_k a_k$ e $\sum_k b_k$ hanno lo stesso carattere.

Infatti, se $\sum_k a_k$ diverge o $\sum_k b_k$ converge, la tesi segue dal teorema di confronto in virtù delle diseguaglianze

$$a_k \le c_2 b_k,$$

mentre se $\sum_k a_k$ converge o $\sum_k b_k$ diverge la tesi segue dal teorema di confronto in virtù delle diseguaglianze

$$c_1 b_k \leq a_k.$$

Un risultato che si deduce facilmente dal criterio di confronto è il seguente criterio, basato sul calcolo di un limite.

Teorema 3.2.6 (Criterio di confronto asintotico) *Siano $\sum_k a_k$ e $\sum_k b_k$ due serie a termini positivi, con $b_k > 0$, e supponiamo che esista*

$$\lim_{k\to\infty} \frac{a_k}{b_k} = c.$$

Allora:

1. *se $0 < c < +\infty$ allora $\sum_k a_k$ e $\sum_k b_k$ hanno lo stesso carattere;*
2. *se $c = 0$ e $\sum_k b_k$ converge allora anche $\sum_k a_k$ converge;*
3. *se $c = 0$ e $\sum_k a_k$ diverge allora anche $\sum_k b_k$ diverge;*
4. *se $c = +\infty$ e $\sum_k a_k$ converge allora anche $\sum_k b_k$ converge;*
5. *se $c = +\infty$ e $\sum_k b_k$ diverge allora anche $\sum_k a_k$ diverge.*

Dim. Per il punto 1, osserviamo che, usando la definizione di limite con $\varepsilon = \frac{c}{2}$, per k abbastanza grande risulta

$$\frac{c}{2} \leq \frac{a_k}{b_k} \leq \frac{3}{2}c$$

e quindi

$$\frac{c}{2}b_k \leq a_k \leq \frac{3}{2}c\, b_k$$

e il risultato segue dall'osservazione 3.2.5.

Per i punti 2 e 3, fissato un $\varepsilon > 0$ arbitrario, per k abbastanza grande risulta

$$a_k \leq \varepsilon b_k$$

e la tesi segue dal Criterio di confronto.

Analogamente, per i punti 4 e 5, fissato un $M > 0$ arbitrario, per k abbastanza grande risulta

$$a_k \geq M b_k$$

e la tesi segue ancora dal Criterio di confronto. QED

Presentiamo un ulteriore criterio di convergenza per le serie a termini positivi, noto come *criterio di condensazione* (in realtà ne esistono molti altri che tralasciamo), di cui vedremo l'utilità nell'Esempio 3.2.8. In un certo senso, è la forma astratta del ragionamento seguito nell'Esempio 3.2.2.

Teorema 3.2.7 *Sia $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ una successione decrescente di numeri positivi. Allora le due serie*

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k \qquad e \qquad \sum_{k=1}^{\infty} 2^{k-1} a_{2^k}$$

hanno lo stesso carattere.

Non riportiamo la dimostrazione del criterio, ma lo applichiamo negli esempi che seguono.

Esempio 3.2.8

1. Consideriamo la serie armonica $\sum 1/k$ e applichiamo il criterio di condensazione. Risulta che essa converge se e solo se la serie

$$\sum_k 2^{k-1}\frac{1}{2^k} = \sum \frac{1}{2}$$

converge. Poiché quest'ultima chiaramente non converge (il suo termine generale non tende a 0), non converge neanche la serie armonica.

2. Consideriamo la *serie armonica generalizzata*

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^\alpha}, \qquad \alpha \in \mathbb{R}.$$

Se $\alpha \leq 0$ allora la condizione necessaria 3.1.4 è banalmente violata e la serie non converge. Se $\alpha > 0$ allora si può applicare il criterio di condensazione e concludere che la serie data converge se e solo se $\alpha > 1$:

$$\sum_{k=1}^{\infty} 2^{k-1}\frac{1}{(2^k)^\alpha} = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{\infty}(2^{1-\alpha})^k,$$

che converge se e solo se $\alpha > 1$, essendo una serie geometrica di ragione $2^{1-\alpha}$.

3. Consideriamo la serie

$$\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k\log^\alpha k}, \qquad \alpha \in \mathbb{R}.$$

Se $\alpha \leq 0$ allora vale la relazione $\frac{1}{k\log^\alpha k} \geq \frac{1}{k}$ e quindi la serie diverge per confronto con la serie armonica. Se $\alpha > 0$ allora si può applicare il criterio di condensazione e concludere che la serie data converge se e solo se $\alpha > 1$:

$$\sum_{k=2}^{\infty} 2^{k-1}\frac{1}{2^k\log^\alpha(2^k)} = \frac{1}{2\log^\alpha 2}\sum_{k=2}^{\infty}\frac{1}{k^\alpha}.$$

4. Consideriamo la serie
$$\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{(\log k)^{\log k}}$$
Applicando il Criterio di condensazione, se ne può determinare il carattere studiando la serie
$$\sum_{k=2}^{\infty} 2^{k-1} \frac{1}{(k \log 2)^{k \log 2}} = \frac{1}{2} \sum_{k=2}^{\infty} \left(\frac{2}{k^{\log 2} (\log 2)^{\log 2}} \right)^k$$
che converge per confronto con la serie geometrica, dal momento che (per esempio)
$$\frac{2}{k^{\log 2} (\log 2)^{\log 2}} \le \frac{1}{2}$$
per k abbastanza grande (il primo membro tende a 0).

Si può dare un criterio di convergenza basato sul confronto con le serie armoniche generalizzate.

Corollario 3.2.9 *Data la serie a termini positivi $\sum_k a_k$, se esiste finito*
$$\lim_{k\to\infty} k^\alpha a_k = c > 0$$
allora $\sum_k a_k$ converge se $\alpha > 1$ e diverge se $\alpha \le 1$.

DIM. Il criterio di confronto asintotico (Teorema 3.2.6) implica che $\sum_k a_k$ e $\sum_k k^{-\alpha}$ hanno lo stesso carattere, quindi il risultato segue subito usando i risultati dell'Esempio 6.5.18. $\boxed{QED}$

Presentiamo ora due utili criteri di convergenza, basati sul confronto con la serie geometrica.

Teorema 3.2.10 (Criterio della radice) *Sia $\sum_k a_k$ una serie a termini positivi; se esistono $\nu > 0$ e $h \in [0, 1[$ tali che $\sqrt[k]{a_k} \le h$ per ogni $k > \nu$ allora la serie $\sum_k a_k$ converge. Se invece $\sqrt[k]{a_k} \ge 1$ per infiniti valori di k allora la serie non converge.*

DIM. Dall'ipotesi segue immediatamente che $a_k \le h^k$ per ogni $k > \nu$ e la tesi segue per confronto con la serie $\sum_k h^k$, che è convergente perché $h < 1$.

Viceversa, se $\sqrt[k]{a_k} \ge 1$ per infiniti valori di k allora la condizione $a_k \to 0$ è violata e la serie non converge. $\boxed{QED}$

Teorema 3.2.11 (Criterio del rapporto) *Sia $\sum_k a_k$ una serie a termini strettamente positivi; se esistono $\nu > 0$ e $h \in [0, 1[$ tale che $\frac{a_{k+1}}{a_k} \le h$ per ogni $k > \nu$ allora la serie $\sum_k a_k$ converge. Se invece esiste $\nu > 0$ tale che $\frac{a_{k+1}}{a_k} \ge 1$ per $k > \nu$ allora la serie $\sum_k a_k$ diverge.*

Dim. Supponiamo per semplicità che sia $\nu = 0$. Dall'ipotesi segue la diseguaglianza

$$a_{k+1} = \frac{a_{k+1}}{a_k} \cdot \frac{a_k}{a_{k-1}} \cdots \frac{a_1}{a_0} \cdot a_0 \leq h^k a_0$$

e la tesi segue per confronto con la serie $\sum_k h^k$, che è convergente perché $h < 1$.

Se invece $\frac{a_{k+1}}{a_k} \geq 1$ per ogni $k > \nu$ allora $a_{k+1} \geq a_k$ ogni $k > \nu$, sicché la condizione necessaria $a_k \to 0$ è violata e la serie non può convergere. QED

I due precedenti criteri hanno una versione che è spesso utile ed è basata sul calcolo di un limite, che può risultare più semplice della ricerca di un maggiorante.

Corollario 3.2.12 *Sia $\sum_k a_k$ una serie a termini positivi, e supponiamo che esista il limite*

$$\lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{a_k} = \ell.$$

Allora:

1. *se $0 \leq \ell < 1$ allora la serie converge;*
2. *se $\ell > 1$ allora la serie diverge;*
3. *se $\ell = 1$ allora non si può trarre alcuna conclusione.*

Dim. Se $\ell < 1$ allora, fissato $\ell < h < 1$, esiste $\nu > 0$ tale che per $k > \nu$ risulti $\sqrt[k]{a_k} \leq h$ e la tesi segue dal Teorema 3.2.10.

Se $\ell > 1$ allora esiste $\nu > 0$ tale che $\sqrt[k]{a_k} > 1$ per ogni $k > \nu$ e la tesi segue dal Teorema 3.2.10.

Infine, per provare il punto 3 basta considerare le serie $\sum_k \frac{1}{k}$ e $\sum_k \frac{1}{k^2}$. Per entrambe $\ell = 1$, ma la prima diverge e la seconda converge. QED

Corollario 3.2.13 *Sia $\sum_k a_k$ una serie a termini strettamente positivi, e supponiamo che esista il limite*

$$\lim_{k\to\infty} \frac{a_{k+1}}{a_k} = \ell.$$

Allora:

1. *se $0 \leq \ell < 1$ allora la serie converge;*
2. *se $\ell > 1$ allora la serie diverge;*
3. *se $\ell = 1$ allora non si può trarre alcuna conclusione.*

Dim. Se $\ell < 1$ allora, fissato $\ell < h < 1$, esiste $\nu > 0$ tale che per $k > \nu$ risulti $\frac{a_{k+1}}{a_k} \leq h$ e la tesi segue dal Teorema 3.2.11.

Se $\ell > 1$ allora esiste $\nu > 0$ tale che $\frac{a_{k+1}}{a_k} \geq 1$ per ogni $k > \nu$ e la tesi segue dal Teorema 3.2.11.

Infine, per provare il punto 3, come per il Corollario 3.2.12 basta considerare le serie $\sum_k \frac{1}{k}$ e $\sum_k \frac{1}{k^2}$. Per entrambe $\ell = 1$, ma la prima diverge e la seconda converge. QED

Osservazione 3.2.14 Sia data la successione $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$, con $a_k > 0$ per ogni k. Si può dimostrare il seguente risultato:

> Se esiste
> $$\lim_{k\to\infty} \frac{a_{k+1}}{a_k} = \ell$$
> allora esiste anche il $\lim\limits_{k\to\infty} \sqrt[k]{a_k}$ e vale ℓ.

Di conseguenza, se si deve studiare la serie $\sum_k a_k$ e il criterio del rapporto sotto forma di limite dà $\ell = 1$, è inutile ritentare col criterio della radice, che non può che fornire lo stesso risultato. D'altra parte, segnaliamo che può esistere il limite della radice senza che esista quello del rapporto.

Esempio 3.2.15 (Serie esponenziale) Per $x \in \mathbb{R}$ consideriamo la serie

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^k}{k!}.$$

Poichè per $x < 0$ è una serie a termini di segno variabile, studiamone la convergenza assoluta mediante il criterio del rapporto. Risulta:

$$\lim_{k\to+\infty} \frac{|x^{k+1}|}{(k+1)!} \cdot \frac{k!}{|x^k|} = \lim_{k\to+\infty} \frac{|x|}{k+1} = 0$$

pertanto, per ogni $x \in \mathbb{R}$, la serie converge assolutamente e dunque anche semplicemente. Come vedremo in seguito, la somma della serie vale e^x. Otteniamo come conseguenza due limiti notevoli di successioni:

1. vale la condizione necessaria di convergenza, pertanto
$$\lim_{k\to+\infty} \frac{x^k}{k!} = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}\,,$$

2. per l'osservazione 3.2.14, scelto $x = 1$ risulta $\lim\limits_{k\to+\infty} \frac{1}{\sqrt[k]{k!}} = 0$ da cui
$$\lim_{k\to+\infty} \sqrt[k]{k!} = +\infty\,.$$

3.3 Serie a termini di segno variabile

Nel paragrafo precedente abbiamo discusso vari criteri di convergenza per serie a termini positivi, che, come abbiamo già osservato, sono anche criteri di convergenza assoluta per serie a termini di segno qualunque. Forse val la pena di spiegare che per “serie a termini di segno qualunque” si intendono serie

$$\sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon_k a_k$$

dove $a_k > 0$ per ogni k e gli ε_k possono assumere i valori 1 e -1 con *qualunque* alternanza di segno. Per tali serie non esiste una teoria, né esistono criteri di convergenza *semplice*. Pertanto, tutto ciò che si può fare è studiare caso per caso ciascuna singola serie (il che può essere molto difficile, e quindi esula dagli scopi di un corso introduttivo come questo) oppure studiare solo la convergenza assoluta con i metodi del paragrafo precedente, ben sapendo che se la serie non è assolutamente convergente resta aperto il problema di stabilire se sia o no semplicemente convergente.

Un caso particolare delle serie a termini di segno variabile è quello delle *serie a segni alterni*, cioè il caso in cui $\varepsilon_k = (-1)^k$. Come dice la locuzione appena introdotta, sono serie a termini di segno variabile, in cui però la legge della variazione di segno ε_k non è arbitraria, come nel caso generale, ma segue una regola semplicissima, che consiste nell'alternarsi dei segni + e −. Per queste serie esiste un semplice criterio di convergenza, ma prima di presentarlo ci sembra opportuno osservare che, malgrado siano di un tipo particolarissimo, si incontrano molto frequentemente nelle applicazioni (per esempio, come si vedrà, in connessione con le serie di Fourier).

Teorema 3.3.1 (Criterio di Leibniz) *Sia $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ una successione di numeri strettamente positivi, e supponiamo che*

1. $\lim_{k\to\infty} a_k = 0$
2. $a_k \geq a_{k+1}$ *per ogni* $k \in \mathbb{N}$.

Allora la serie a segni alterni

$$\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k a_k$$

è semplicemente convergente. Inoltre, se la serie è convergente, detta S la sua somma, per ogni $n \in \mathbb{N}$ risulta

$$\left| S - \sum_{k=0}^{n} (-1)^k a_k \right| \leq a_{n+1}. \tag{3.3.6}$$

Dim. Consideriamo le due successioni estratte dalla successione $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ delle somme parziali della serie corrispondenti agli indici pari e dispari rispettivamente, e notiamo che sono monotone a causa della decrescenza della successione $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$:

$$\begin{aligned}
s_{2p} &= \sum_{k=0}^{2p}(-1)^k a_k = \sum_{k=0}^{2p-2}(-1)^k a_k - a_{2p-1} + a_{2p} \\
&\le \sum_{k=0}^{2p-2}(-1)^k a_k = s_{2p-2} \\
s_{2p+1} &= \sum_{k=0}^{2p+1}(-1)^k a_k = \sum_{k=0}^{2p-1}(-1)^k a_k + a_{2p} - a_{2p+1} \\
&\ge \sum_{k=0}^{2p-1}(-1)^k a_k = s_{2p-1}
\end{aligned}$$

Per il Teorema fondamentale sulle successioni monotone entrambe le estratte $(s_{2p})_{p\in\mathbb{N}}$ e $(s_{2p+1})_{p\in\mathbb{N}}$ ammettono limite, siano S_p ed S_d rispettivamente. Siccome l'unione degli indici delle due estratte è tutto l'insieme dei numeri naturali, se proviamo che i due limiti sono finiti e che $S_p = S_d$, risulterà provata la convergenza dell'intera successione $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ e quindi della serie. Iniziamo a vedere che i due limiti sono finiti. Siccome s_{2p} è decrescente ed s_{2p+1} è crescente, basta trovare un minorante di s_{2p} e un maggiorante di s_{2p+1}; risulta

$$\begin{aligned}
s_{2p} &= s_{2p-1} + a_{2p} \ge s_{2p-1} \ge s_1 \\
s_{2p+1} &= s_{2p} - a_{2p+1} \le s_{2p} \le s_0 = a_0
\end{aligned}$$

per ogni $p \in \mathbb{N}$,e quindi sia S_p che S_d sono finiti. D'altra parte, per il teorema sulla somma dei limiti e l'ipotesi 1:

$$0 = \lim_{n\to\infty} -a_{2n+1} = \lim_{n\to\infty}(s_{2n+1} - s_{2n}) = \lim_{n\to\infty} s_{2n+1} - \lim_{n\to\infty} s_{2n} = S_d - S_p$$

da cui segue evidentemente che $S_p = S_d$ e che la serie converge. Detta allora S la sua somma, si ha

$$S = S_p = S_d = \inf_p s_{2p} = \sup_p s_{2p+1}$$

e quindi per ogni $p \in \mathbb{N}$

$$s_{2p} - a_{2p+1} = s_{2p+1} \le S \le s_{2p} \qquad \Longrightarrow \qquad 0 \le s_{2p} - S \le a_{2p+1}$$

e analogamente

$$s_{2p+1} \le S \le s_{2p+2} = s_{2p+1} + a_{2p+2} \qquad \Longrightarrow \qquad 0 \le S - s_{2p+1} \le a_{2p+2},$$

sicché in ogni caso si ha (3.3.6). $\boxed{QED}$

Osservazioni 3.3.2

1. Naturalmente, la scelta che i termini pari siano positivi e quelli dispari negativi è una delle due possibili, l'altra essendo ovviamente del tutto equivalente. Inoltre, osserviamo che come al solito le condizioni 1 e 2 del Criterio di Leibniz debbono essere verificate *da un certo indice in poi*, per poter applicare il criterio stesso, e non necessariamente *per tutti gli indici*.

2. L'errore più frequente nell'applicazione del criterio di Leibniz è l'omissione della verifica che la successione $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ sia decrescente. Questa verifica è invece essenziale, dal momento che, ovviamente, esistono successioni positive infinitesime *non decrescenti*. Per avere un esempio esplicito, consideriamo la successione (infinitesima ma non decrescente)
$$a_k = \begin{cases} \dfrac{1}{k} & \text{se } k \text{ è pari,} \\ \\ \dfrac{1}{k^2} & \text{se } k \text{ è dispari.} \end{cases}$$
Per l'Osservazione 3.1.5.8, la serie a segni alterni $\sum_k (-1)^k a_k$ non può convergere, perché si può scrivere come differenza tra la serie $\sum_k \frac{1}{2k}$, che diverge, e la serie $\sum_k \frac{1}{(2k+1)^2}$, che converge.

3. Si possono aggiungere alcune interessanti considerazioni generali all'esempio precedente (vedi anche il Teorema 3.3.3 seguente): se la serie a segni alterni $\sum_k (-1)^k a_k$ converge semplicemente ma *non* converge assolutamente, allora né la serie $\sum_k a_{2k}$ dei termini positivi né la serie $\sum_k a_{2k+1}$ dei termini negativi possono convergere. Infatti, una sola di queste ultime non può convergere (l'argomento per provare questa affermazione è quello dell'esempio precedente), e se convergessero entrambe si avrebbe convergenza assoluta della serie di partenza.

4. Ora che abbiamo un criterio di convergenza semplice, possiamo vedere un esempio di serie semplicemente convergente che non è assolutamente convergente. Basta considerare la *serie armonica a segni alterni* $\sum_k (-1)^k \frac{1}{k}$, che converge semplicemente per il criterio di Leibniz, ma non converge assolutamente, come abbiamo già visto.

Terminiamo il capitolo con delle considerazioni che dovrebbero far capire quanta distanza ci sia tra le serie e le somme finite. Una delle proprietà più "ovvie" delle somme finite è la proprietà commutativa (Assioma 2 dei numeri reali). È naturale domandarsi se essa valga anche per le serie. Per formulare correttamente il problema bisogna introdurre il concetto di *permutazione dei termini di una serie*. Date la serie $\sum_k a_k$ ed una funzione bigettiva $\pi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ (permutazione), si dice *serie ottenuta permutando i termini di* $\sum_k a_k$ *secondo* π *la serie* $\sum_k a_{\pi(k)}$. Notiamo che i valori assunti dalla successione $(a_{\pi(k)})_{k\in\mathbb{N}}$ sono *gli stessi di* $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$*, e vengono assunti lo stesso numero di volte*, per cui se avessimo a che fare con una somma finita passare da $\sum_k a_k$ a $\sum_k a_{\pi(k)}$ si ridurrebbe a "cambiare l'ordine degli addendi", ed è ben noto che in tal caso "la somma non cambia". Per le serie infinite le cose vanno in modo completamente diverso, a meno che non si abbia convergenza assoluta.

Teorema 3.3.3 *Sia* $\sum_k a_k$ *una serie semplicemente convergente. Allora:*

(i) *se la serie* $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ *converge assolutamente e la sua somma è* S*, allora per ogni permutazione* π *la serie* $\sum_{k=0}^{\infty} a_{\pi(k)}$ *converge assolutamente ed ha per somma* S*.*

(ii) *se la serie* $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ *non converge assolutamente, allora nessuna serie permutata converge assolutamente, ed inoltre per ogni* $S \in \mathbb{R}$ *esiste una permutazione* π *tale che la serie permutata* $\sum_{k=0}^{\infty} a_{\pi(k)}$ *converga (semplicemente) ad* S*.*

Non presentiamo la dimostrazione di questo risultato, che per altro non richiede strumenti che vadano oltre la presente trattazione, ma ci limitiamo a sottolineare ancora la differenza tra le somme finite e le serie non assolutamente convergenti: queste, cambiando l'ordine degli addendi, possono dare *qualunque* somma!

CAPITOLO 4

LIMITI E CONTINUITÀ

In questo capitolo introduciamo dapprima il concetto di limite di funzioni reali di una variabile reale e ne studiamo le principali proprietà, e poi trattiamo le funzioni continue.

4.1 Limiti di funzioni

Per introdurre il concetto di limite è necessario dare la seguente

Definizione 4.1.1 *Siano $X \subseteq \mathbb{R}$, $X \neq \emptyset$, e $x_0 \in \mathbb{R}$.*

1. *Diciamo che x_0 è un* punto di accumulazione di X *se*
$$\forall \varepsilon > 0 \;\; X \cap]x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon[\setminus \{x_0\} \neq \emptyset\,.$$

2. *Diciamo che x_0 è un* punto isolato di X *se*
$$\exists \varepsilon_0 > 0 \;\; X \cap]x_0 - \varepsilon_0, x_0 + \varepsilon_0[= \{x_0\}\,.$$

3. *Diciamo che x_0 è* interno ad X *se esiste un intorno $I_r(x_0)$ di x_0 contenuto in X.*

Osservazione 4.1.2

1. Se x_0 è un punto di accumulazione di X, allora x_0 può o no appartenere ad X.

2. Se x_0 è un punto isolato di X, allora $x_0 \in X$.

3. x_0 non può essere un punto di accumulazione di X e anche un punto isolato di X.

4. Se $X = \cup_{k=1}^{n}(a_k, b_k)$ dove (a_k, b_k) denota un intervallo qualsiasi di estremi a_k e b_k, allora X non ha punti isolati e l'insieme dei punti di accumulazione di X è dato da $\overline{X} = \cup_{k=1}^{n}[a_k, b_k]$.
Se, invece, $X = \{x_n : \; n \in \mathbb{N}\}$ dove $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ è una successione convergente a $x_0 \in \mathbb{R}$ e tale che $x_n \neq x_0$ per ogni $n \in \mathbb{N}$, allora X ha x_0 come unico punto di accumulazione e l'insieme dei punti isolati di X è X stesso.

5. Si può dimostrare che x_0 è un punto di accumulazione di X se, e solo se, esiste $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset X \setminus \{x_0\}$ tale che $x_n \stackrel{n}{\to} x_0$.

6. Se X è un intervallo di estremi a e b, l'insieme dei punti interni di X è l'intervallo aperto $]a, b[$, indipendentemente dal fatto che gli estremi a e b appartengano o no ad X.

Possiamo ora definire il concetto di limite di funzioni reali di una variabile reale.

Definizione 4.1.3 *Siano $X \subset \mathbb{R}$ e $x_0 \in \mathbb{R}$ un punto d'accumulazione di X. Sia $f\colon X \to \mathbb{R}$ una funzione.*

1. *Diciamo che la funzione f* ha limite uguale a $\ell \in \mathbb{R}$ *per x che tende a x_0, e scriviamo $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \ell$, se vale la seguente proprietà*

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta = \delta(\varepsilon, x_0) > 0 \;\; \textit{tale che} \; \forall x \in X : \; 0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - \ell| < \varepsilon \, .$$

2. *Diciamo che la funzione f* ha limite uguale a $+\infty$ *$(-\infty)$ per x che tende a x_0, e scriviamo $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = +\infty$ $(= -\infty)$, se vale la seguente proprietà*

$$\forall M > 0 \, \exists \delta = \delta(M, x_0) > 0 \; \textit{tale che} \; \forall x \in X : \; 0 < |x - x_0| < \delta \;\; \Rightarrow \;\; f(x) > M \quad (f(x) < -M) \, .$$

Poiché molti risultati che vedremo valgono sia che i limiti considerati siano reali, oppure $+\infty$ o $-\infty$, introduciamo la seguente notazione, che ci consentirà enunciati più sintetici: poniamo $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$.

Osservazione 4.1.4 Nella definizione di limite $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ il valore di f nel punto x_0 non viene considerato, dal momento che si richiede sempre $|x - x_0| > 0$. In effetti, esso è irrilevante. Per esempio, data la funzione $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ così definita

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{se } x > 0 \\ 1 & \text{se } x = 0 \\ -x & \text{se } x < 0 \, , \end{cases}$$

è facile dimostrare che $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 0$. Infatti, fissato $\varepsilon > 0$, osserviamo che, per ogni $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$,

$$|f(x) - 0| < \varepsilon \Leftrightarrow 0 < |x| < \varepsilon \, ;$$

posto $\delta = \varepsilon > 0$, ne segue che

$$\forall x \in \mathbb{R} : \; 0 < |x| < \delta = \varepsilon \Rightarrow |f(x) - 0| < \varepsilon \, .$$

Vediamo qualche altro semplice esempio.

Esempi 4.1.5

1. Per ogni $x_0 \in \mathbb{R}$ risulta $\lim\limits_{x \to x_0} \sin x = \sin x_0$. Per dimostrare tale affermazione, osserviamo che, per ogni $x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} |\sin x - \sin x_0| &= \left| 2 \sin\left(\frac{x - x_0}{2}\right) \cos\left(\frac{x + x_0}{2}\right) \right| \\ &\leq 2 \left| \sin\left(\frac{x - x_0}{2}\right) \right| \left| \cos\left(\frac{x + x_0}{2}\right) \right| \leq 2 \left| \frac{x - x_0}{2} \right| = |x - x_0| \end{aligned}$$

(abbiamo utilizzato sopra la seguente diseguaglianza: $|\sin y| \leq |y|$ per ogni $y \in \mathbb{R}$ già usata nell'Esempio 2.3.6). Fissato $\varepsilon > 0$, ne segue che

$$\exists \delta = \varepsilon > 0 \text{ tale che } \forall x \in \mathbb{R}:\ 0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow |\sin x - \sin x_0| < \varepsilon\,.$$

2. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1}{x^2} = +\infty$.

Fissato $M > 0$, osserviamo che

$$\frac{1}{x^2} > M \Leftrightarrow 0 < x^2 < \frac{1}{M} \Leftrightarrow 0 < |x| < \sqrt{\frac{1}{M}}\,.$$

Allora, posto $\delta = \sqrt{\frac{1}{M}} > 0$, ne segue che

$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0\} : 0 < |x| < \sqrt{\frac{1}{M}} \Rightarrow \frac{1}{x^2} > M\,.$$

Definizione 4.1.6 *Siano $X \subseteq \mathbb{R}$ non limitato superiormente (non limitato inferiormente) e $f : X \to \mathbb{R}$ una funzione.*

1. *Diciamo che la funzione f* ha limite uguale a *$\ell \in \mathbb{R}$ per x che tende a $+\infty$ $(-\infty)$, e scriviamo $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \ell$ $(\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \ell)$, se vale la seguente proprietà*

$$\begin{aligned} \forall \varepsilon > 0\ \exists K = K(\varepsilon) > 0 \text{ tale che } \forall x \in X : x > K &\Rightarrow |f(x) - \ell| < \varepsilon \\ (x < -K)& \end{aligned}$$

2. *Diciamo che la funzione f* ha limite uguale a *$+\infty$ per x che tende a $+\infty$ $(-\infty)$, e scriviamo $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ $(\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty)$, se vale la seguente proprietà*

$$\begin{aligned} \forall M > 0\ \exists K = K(M) > 0 \text{ tale che } \forall x \in X : x > K &\Rightarrow f(x) > M \\ (x < -K)& \end{aligned}$$

3. *Diciamo che la funzione* f ha limite uguale a $-\infty$ *per* x *che tende a* $+\infty$ $(-\infty)$*, e scriviamo* $\lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$ $(\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty)$*, se vale la seguente proprietà*

$$\forall M > 0\ \exists K = K(M) > 0 \text{ tale che } \forall x \in X : x > K \Rightarrow f(x) < -M$$
$$(x < -K)$$

Esempi 4.1.7

1. (i) $\lim_{x\to+\infty} \arctan x = \pi/2$ e (ii) $\lim_{x\to-\infty} \arctan x = -\pi/2$. Per dimostrare la (i) procediamo come segue.

   Fissato $0 < \varepsilon < \pi/2$, osserviamo che

   $$\begin{aligned} |\arctan x - \pi/2| < \varepsilon &\iff \pi/2 - \varepsilon < \arctan x < \pi/2 + \varepsilon \\ &\iff \pi/2 - \varepsilon < \arctan x \\ &\iff \tan(\pi/2 - \varepsilon) < x\,. \end{aligned}$$

   Posto $K = \tan(\pi/2 - \varepsilon) > 0$, ne segue che

   $$\forall x \in \mathbb{R} :\ x > K \Rightarrow |\arctan x - \pi/2| < \varepsilon\,.$$

   (ii) si dimostra in modo analogo.

2. Per ogni $a > 1$, (i) $\lim_{x\to+\infty} a^x = +\infty$ e (ii) $\lim_{x\to-\infty} a^x = 0$. Per dimostrare la (i) procediamo come segue.

   Fissato $M > 0$, osserviamo che

   $$\forall x \in \mathbb{R}\ \ a^x > M \Leftrightarrow x > \log_a M\,;$$

   posto $K = \max\{\log_a M, 0\} > 0$, ne segue che

   $$\forall x \in \mathbb{R} :\ x > K \Rightarrow a^x > M\,.$$

   (ii) si dimostra in modo analogo.

3. In modo analogo, si dimostra che

   $$\lim_{x\to+\infty} x^n = +\infty$$

   e

   $$\lim_{x\to-\infty} x^n = \begin{cases} +\infty & \text{se } n \text{ è pari} \\ -\infty & \text{se } n \text{ è dispari}\,. \end{cases}$$

Adesso diamo un teorema fondamentale che permette di ricondurre il concetto di limite ora introdotto a quello del limite di successioni.

Teorema 4.1.8 (Caratterizzazione dei limiti con successioni) *Siano $X \subset \mathbb{R}$, $x_0 \in \mathbb{R}$ un punto di accumulazione di X e $f\colon X \to \mathbb{R}$ una funzione. Allora*

$$\exists \lim_{x\to x_0} f(x) = \ell \in \overline{\mathbb{R}} \iff \forall (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset X \setminus \{x_0\} : \lim_{n\to+\infty} x_n = x_0 \;\Rightarrow\; \lim_{n\to+\infty} f(x_n) = \ell\,.$$

Dim. Diamo la dimostrazione solo nel caso in cui $\ell \in \mathbb{R}$.
"$\Rightarrow$": Fissato $\varepsilon > 0$, per ipotesi

$$\exists\delta = \delta(\varepsilon, x_0) > 0 \text{ tale che } \forall x \in X : \; 0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - \ell| < \varepsilon\,. \tag{4.1.1}$$

Sia $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset X \setminus \{x_0\}$ una successione convergente a x_0. Allora, in corrispondenza di δ

$$\exists\nu = \nu(\delta) \in \mathbb{N} \text{ tale che } \forall n \in \mathbb{N} : \; n \geq \nu \Rightarrow \; 0 < |x_n - x_0| < \delta\,, \tag{4.1.2}$$

sicché per (4.1.1) risulta

$$\forall n \in \mathbb{N} : \; n \geq \nu \Rightarrow \; |f(x_n) - \ell| < \varepsilon\,.$$

Per l'arbitrarietà di ε, possiamo così concludere che $\lim_{n\to+\infty} f(x_n) = \ell$.
"$\Leftarrow$": Supponiamo, per assurdo, che f non abbia limite ℓ per x tendente ad x_0, cioè che

$$\exists\bar\varepsilon > 0 \text{ tale che } \forall\delta > 0 \; \exists x \in X \text{ tale che } 0 < |x - x_0| < \delta \text{ e } |f(x) - \ell| \geq \bar\varepsilon\,.$$

Di conseguenza, per ogni $n \in \mathbb{N}$ possiamo scegliere $x_n \in X$ tale che $0 < |x_n - x_0| < 1/n$ e $|f(x_n) - \ell| \geq \bar\varepsilon$.

Abbiamo così determinato una successione $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ di elementi di $X\setminus\{x_0\}$ per la quale si ha $0 < |x_n - x_0| < 1/n$ per ogni $n \in \mathbb{N}$, e quindi per il Teorema 2.1.10 $\lim_{n\to+\infty} x_n = x_0$. Ma $|f(x_n) - \ell| \geq \bar\varepsilon$ per ogni $n \in \mathbb{N}$, quindi la successione $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ non converge a ℓ ed abbiamo ottenuto così una contraddizione. $\boxed{QED}$

Osserviamo che vale una analoga caratterizzazione per limiti di funzioni con x tendente a $+\infty$ $(-\infty)$. Infatti, si può dimostrare

Teorema 4.1.9 *Siano $X \subset \mathbb{R}$ un insieme non limitato superiormente (inferiormente) e $f\colon X \to \mathbb{R}$ una funzione. Allora*

$$\exists \lim_{x\to+\infty} f(x) = \ell \in \overline{\mathbb{R}} \iff \forall (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset X : \lim_{n\to+\infty} x_n = +\infty \;\Rightarrow\; \lim_{n\to+\infty} f(x_n) = \ell$$

$$\left(\exists \lim_{x\to-\infty} f(x) = \ell \in \overline{\mathbb{R}} \iff \forall (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset X : \lim_{n\to+\infty} x_n = -\infty \;\Rightarrow \lim_{n\to+\infty} f(x_n) = \ell\right).$$

Osservazione 4.1.10 I Teoremi 4.1.8 e 4.1.9 forniscono un utile strumento per riconoscere se una data funzione $f\colon X \to \mathbb{R}$ non ammette limite per x che tende x_0 (o a $\pm\infty$); basta infatti determinare due successioni $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ e $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ di elementi di $X \setminus \{x_0\}$ convergenti a x_0 tali che $\lim_{n\to+\infty} f(x_n) \neq \lim_{n\to+\infty} f(y_n)$.

Esempio 4.1.11 $\nexists \lim_{x\to+\infty} \sin x$. Infatti, posto $x_n = \pi/2 + 2n\pi$ e $y_n = 2n\pi$ per ogni n, si ha che $\lim_{n\to+\infty} x_n = \lim_{n\to+\infty} y_n = +\infty$, ma $\sin x_n = 1$ e $\sin y_n = 0$ per ogni n e quindi $\lim_{n\to+\infty} \sin x_n = 1 \neq 0 = \lim_{n\to+\infty} \sin y_n$. Analogamente, non esiste $\lim_{x\to 0} \sin \frac{1}{x}$.

Esempio 4.1.12 Nel Capitolo 2.1 abbiamo dimostrato che, per ogni successione infinitesima $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $\lim_{n\to+\infty} \sin a_n = 0$, $\lim_{n\to+\infty} \cos a_n = 1$ e $\lim_{n\to+\infty} \frac{\sin a_n}{a_n} = 1$. Applicando il Teorema 4.1.8 possiamo allora concludere che $\lim_{x\to 0} \sin x = 0$, $\lim_{x\to 0} \cos x = 1$ e $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$.

Per semplicità i teoremi che adesso daremo sono enunciati solo nel caso in cui $x_0 \in \mathbb{R}$ sia un punto di accumulazione di X. Ma gli stessi risultati continuano a valere se consideriamo limiti per x che tende a $\pm\infty$.

Applicando il Teorema 4.1.8 deduciamo subito che

Teorema 4.1.13 (Unicità del limite) *Siano $X \subset \mathbb{R}$ e $x_0 \in \mathbb{R}$ un punto di accumulazione di X. Sia $f : X \to \mathbb{R}$ una funzione tale che*

$$\exists \lim_{x\to x_0} f(x) = \ell \in \overline{\mathbb{R}}.$$

Allora il limite è unico.

Dim. Supponiamo, per assurdo, che risulti anche $\lim_{x\to x_0} f(x) = \ell'$ con $\ell \neq \ell'$.

Sia $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset X \setminus \{x_0\}$ tale che $\lim_{n\to+\infty} x_n = x_0$. Per il Teorema 4.1.8 e per ipotesi deduciamo che $\lim_{n\to+\infty} f(x_n) = \ell$ e $\lim_{n\to+\infty} f(x_n) = \ell'$. Per l'unicità del limite per le successioni ne segue che $\ell = \ell'$, e otteniamo una contraddizione. QED

Il Teorema 4.1.8 permette di estendere facilmente anche i risultati riguardanti le operazioni con i limiti di successioni ai limiti di funzioni. Si ha infatti:

Teorema 4.1.14 *Siano $X \subset \mathbb{R}$ e $x_0 \in \mathbb{R}$ un punto di accumulazione di X. Siano $f, g : X \to \mathbb{R}$ due funzioni tali che*

$$\exists \lim_{x\to x_0} f(x) = \ell \in \mathbb{R}, \quad \exists \lim_{x\to x_0} g(x) = m \in \mathbb{R}.$$

Allora

1. $\exists \lim_{x\to x_0} (f(x) + g(x)) = \ell + m$;
2. $\exists \lim_{x\to x_0} f(x) \cdot g(x) = \ell \cdot m$;
3. $\exists \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\ell}{m}$, *purché* $m \neq 0$.

Questi risultati si estendono al caso in cui ℓ o m siano $\pm\infty$, purché le operazioni indicate non diano luogo a forme indeterminate.

Dim. A titolo di esempio, dimostriamo solo 1. Sia $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset X \setminus \{x_0\}$ tale che $\lim_{n\to+\infty} x_n = x_0$. Per ipotesi e per il Teorema 4.1.8 abbiamo che

$$\lim_{n\to+\infty} f(x_n) = \ell, \qquad \lim_{n\to+\infty} g(x_n) = m\,.$$

Per il Teorema 2.1.7 possiamo allora concludere che $\lim_{n\to+\infty}(f(x_n)+g(x_n)) = \ell + m$. Per l'arbitrarietà della successione $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, la tesi segue. $\boxed{QED}$

Esempi 4.1.15 Applicando il Teorema 4.1.14 e ricordando i risultati degli esempi del Capitolo 2, deduciamo immediatamente quanto segue.

1. $\lim_{x\to 0} \frac{\tan x}{x} = 1.$

   Infatti, per ogni $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$,

   $$\frac{\tan x}{x} = \frac{\frac{\sin x}{\cos x}}{x} = \frac{\sin x}{x} \cdot \frac{1}{\cos x}\,,$$

   e quindi, per il Teorema 4.1.14 e l'Esempio 4.1.12, possiamo affermare che

   $$\lim_{x\to 0} \frac{\tan x}{x} = 1 \cdot 1 = 1\,.$$

2. Consideriamo un polinomio:

   $$\begin{aligned}
   &\lim_{x\to+\infty} (a_k x^k + a_{k-1}x^{k-1} + \ldots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0) \\
   &\quad = \lim_{x\to+\infty} x^k \left(a_k + a_{k-1}x^{-1} + \ldots + a_2 x^{2-k} + a_1 x^{1-k} + a_0 x^{-k}\right) \\
   &\quad = \begin{cases} +\infty & \text{se } a_k > 0 \\ -\infty & \text{se } a_k < 0 \end{cases},
   \end{aligned}$$

3. Consideriamo una funzione razionale:

   $$\begin{aligned}
   &\lim_{x\to+\infty} \frac{a_k x^k + a_{k-1}x^{k-1} + \ldots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0}{b_h x^h + b_{h-1}x^{h-1} + \ldots + b_2 x^2 + b_1 x + b_0} \\
   &\quad = \lim_{x\to+\infty} \frac{a_k x^k}{b_h x^h} = \begin{cases} +\infty & \text{se } k > h \text{ e } a_k \text{ e } b_h \text{ sono concordi} \\ -\infty & \text{se } k > h \text{ e } a_k \text{ e } b_h \text{ sono discordi} \\ 0 & \text{se } k < h \\ \frac{a_k}{b_h} & \text{se } k = h \end{cases}
   \end{aligned}$$

   Un risultato analogo vale per x tendente a $-\infty$.

Anche il seguente teorema può essere dimostrato applicando il Teorema 4.1.8.

Teorema 4.1.16 (Teorema sul limite della funzione composta) *Siano $X, Y \subset \mathbb{R}$, $f \colon X \to \mathbb{R}$ e $g \colon Y \to \mathbb{R}$. Siano $x_0 \in \mathbb{R}$ un punto di accumulazione di X e $y_0 \in \mathbb{R}$ un punto di accumulazione di Y tali che esiste $r > 0$ con $f(x) \neq y_0$ per ogni $x \in X \cap]x_0 - r, x_0 + r[\setminus \{x_0\}$.*

Se $\exists \lim\limits_{x \to x_0} f(x) = y_0$ e $\exists \lim_{y \to y_0} g(y) = \ell$, allora $\exists \lim\limits_{x \to x_0} g(f(x)) = \ell$.

Esempi 4.1.17

1. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1 - \cos x}{x^2} = \dfrac{1}{2}$. Infatti, per ogni $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$,

$$\frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{2 \sin^2(x/2)}{x^2} = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{\sin(x/2)}{(x/2)} \right)^2 ,$$

e quindi, per i Teoremi 4.1.14 e 4.1.16 possiamo concludere che

$$\lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{1}{2} \cdot 1 = \frac{1}{2} .$$

2. (i) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\arcsin x}{x} = 1$, (ii) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\arctan x}{x} = 1$.

Dimostriamo solo (i). Posto $y = \arcsin x$, risulta che y tende a 0 quando x tende a 0 e $x = \sin y$ cosicché

$$\lim_{x \to 0} \frac{\arcsin x}{x} = \lim_{y \to 0} \frac{y}{\sin y} = 1 .$$

In verità, tutte le proprietà dei limiti di successioni date nel Capitolo 2.1 continuano a valere per i limiti di funzioni. Infatti, risulta:

Teorema 4.1.18 (Proprietà dei limiti) *Siano $X \subset \mathbb{R}$ e $x_0 \in \mathbb{R}$ un punto di accumulazione di X. Sia $f : X \to \mathbb{R}$ una funzione tale che esista $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \ell \in \overline{\mathbb{R}}$. Allora*

1. **[Permanenza del segno]**
(i) Se $\ell > 0$ o $\ell = +\infty$, allora esiste $r > 0$ tale che, per ogni $x \in X \cap]x_0 - r, x_0 + r[\setminus \{x_0\}$ risulta $f(x) > 0$.
(ii) Se esiste $r > 0$ tale che per ogni $x \in X \cap]x_0 - r, x_0 + r[) \setminus \{x_0\}$ risulti $f(x) > 0$, allora $\ell \geq 0$.

2. **[Limitatezza locale]** *Se $\ell \in \mathbb{R}$, allora esistono $r > 0$ ed $M > 0$ tali che, per ogni $x \in X \cap]x_0 - r, x_0 + r[\setminus \{x_0\}$ risulta $|f(x)| \leq M$.*

Dim. A titolo di esempio, diamo solo la dimostrazione di 2. Scelto $\varepsilon = 1$, per ipotesi esiste $\delta = \delta(1, x_0) > 0$ tale che

$$\forall x \in X : 0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - \ell| < 1 .$$

Posto $M = |\ell| + 1 > 0$ e $r = \delta > 0$, ne segue che per ogni $x \in X \cap]x_0 - r, x_0 + r[\setminus \{x_0\}$ risulta

$$|f(x)| = |(f(x) - \ell) + \ell| \leq |f(x) - \ell| + |\ell| < 1 + |\ell| = M .$$

$\boxed{QED}$

Teorema 4.1.19 (Primo Teorema del Confronto) *Siano $X \subset \mathbb{R}$ e $x_0 \in \mathbb{R}$ un punto di accumulazione di X. Siano $f, g : X \to \mathbb{R}$ due funzioni tali che esistano $\lim_{x \to x_0} f(x) = \ell$ e $\lim_{x \to x_0} g(x) = m$. Allora*

(i) Se $\ell > m$, allora esiste $r > 0$ tale che, per ogni $x \in X \cap]x_0 - r, x_0 + r[\setminus \{x_0\}$ risulta $f(x) > g(x)$.

(ii) Se esiste $r > 0$ tale che per ogni $x \in X \cap]x_0 - r, x_0 + r[) \setminus \{x_0\}$ risulti $f(x) > g(x)$, allora $\ell \geq m$.

Teorema 4.1.20 (Secondo Teorema del Confronto) *Siano $X \subset \mathbb{R}$, $x_0 \in \mathbb{R}$ un punto di accumulazione di X. Siano $f, g, h : X \to \mathbb{R}$ tre funzioni tali che*

(i) *$\exists r > 0$ tale che per ogni $x \in X \cap]x_0 - r, x_0 + r[\setminus \{x_0\}$ risulti $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$,*

(ii) *$\exists \lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{x \to x_0} h(x) = \ell$.*

Allora $\exists \lim_{x \to x_0} g(x) = \ell$.

Osservazioni 4.1.21

1. Anche per i limiti di funzioni vale l'implicazione

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \ell \quad \Rightarrow \quad \lim_{x \to x_0} |f(x)| = |\ell| .$$

   Il viceversa è vero solo nel caso in cui $\ell = 0$.

2. Se $\lim_{x \to x_0} f(x) = 0$ ed esiste $r > 0$ tale che $|g(x)| \leq M$ per ogni $x \in]x_0 - r, x_0 + r[\setminus \{x_0\}$, allora dal Secondo Teorema del Confronto 4.1.20 segue che $\lim_{x \to x_0} f(x) \cdot g(x) = 0$, dato che $0 \leq |f(x) \cdot g(x)| \leq M |f(x)|$ per ogni $x \in]x_0 - r, x_0 + r[\setminus \{x_0\}$. Quindi, per esempio,

$$\lim_{x \to 0} x \sin \frac{1}{x} = 0 \qquad \text{e} \qquad \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x^2} \sin x = 0,$$

   malgrado i limiti $\lim_{x \to 0} \sin \frac{1}{x}$ e $\lim_{x \to +\infty} \sin x$ non esistano e quindi non sia applicabile il Teorema 4.1.14.

4.2 Limite destro e limite sinistro

Introduciamo ora il concetto di limite destro e di limite sinistro. Per fare ciò è necessario dare la seguente

Definizione 4.2.1 *Siano $X \subseteq \mathbb{R}$, $X \neq \emptyset$, e $x_0 \in \mathbb{R}$.*

1. *Diciamo che x_0 è un* punto di accumulazione a destra di X *se*

$$\forall \varepsilon > 0 \ X \cap]x_0, x_0 + \varepsilon[\neq \emptyset\,.$$

2. *Diciamo che x_0 è un* punto di accumulazione a sinistra di X *se*

$$\forall \varepsilon > 0 \ X \cap]x_0 - \varepsilon, x_0[\neq \emptyset\,.$$

Osservazione 4.2.2 Osserviamo che se x_0 è un punto di accumulazione a destra o a sinistra di X, allora x_0 è anche un punto di accumulazione di X. Inoltre, un insieme X può avere punti di accumulazione solo a destra o solo a sinistra. Ad esempio, l'insieme $X = \{1/n : \ n \in \mathbb{N}\}$ ha un unico punto di accumulazione a destra che è 0; se $X = [a, b[$, tutti i punti che appartengono a $]a, b[$ sono punti di accumulazione sia a destra sia a sinistra di X, mentre a è un punto di accumulazione solo a destra di X e b è un punto di accumulazione solo a sinistra di X.

Possiamo ora introdurre

Definizione 4.2.3 (Limite destro) *Siano $X \subset \mathbb{R}$, $x_0 \in \mathbb{R}$ un punto di accumulazione a destra di X e $f \colon X \to \mathbb{R}$ una funzione.*

1. *Diciamo che la funzione f* ha limite destro uguale a $\ell \in \mathbb{R}$ *per x che tende a x_0 da destra, e scriviamo $\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) = \ell$, se vale la seguente proprietà*

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta = \delta(\varepsilon, x_0) > 0 \ \textit{tale che} \ \forall x \in X : x_0 < x < x_0 + \delta \Rightarrow |f(x) - \ell| < \varepsilon\,.$$

2. *Diciamo che la funzione f* ha limite destro uguale a $+\infty$ *($-\infty$) per x che tende a x_0 da destra, e scriviamo $\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) = +\infty$ ($= -\infty$), se vale la seguente proprietà*

$$\forall M > 0 \ \exists \delta = \delta(M, x_0) > 0 \ \textit{tale che} \ \forall x \in X : x_0 < x < x_0 + \delta \quad \Rightarrow \quad f(x) > M$$
$$(f(x) < -M)\,.$$

Definizione 4.2.4 (Limite sinistro) *Siano $X \subset \mathbb{R}$, $x_0 \in \mathbb{R}$ un punto di accumulazione a sinistra di X e $f \colon X \to \mathbb{R}$ una funzione.*

1. *Diciamo che la funzione f* ha limite sinistro uguale a $\ell \in \mathbb{R}$ *per x che tende a x_0 da sinistra, e scriviamo* $\lim_{x \to x_0^-} f(x) = \ell$, *se vale la seguente proprietà*

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta = \delta(\varepsilon, x_0) > 0 \textit{ tale che } \forall x \in X : x_0 - \delta < x < x_0 \Rightarrow |f(x) - \ell| < \varepsilon\,.$$

2. *Diciamo che la funzione f* ha limite sinistro uguale a $+\infty$ *($-\infty$) per x che tende a x_0 da sinistra, e scriviamo* $\lim_{x \to x_0^-} f(x) = +\infty$ *($= -\infty$), se vale la seguente proprietà*

$$\forall M > 0 \; \exists \delta = \delta(M, x_0) > 0 \textit{ tale che } \forall x \in X : x_0 - \delta < x < x_0 \quad \Rightarrow \quad f(x) > M \quad (f(x) < -M)\,.$$

Esempi 4.2.5

1. Data la funzione $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ così definita
$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \geq 0 \\ -1 & \text{se } x < 0\,, \end{cases}$$
risulta che $\lim_{x \to 0^+} f(x) = 1$ e $\lim_{x \to 0^-} f(x) = -1$.

2. $\lim_{x \to \pi/2^-} \tan x = +\infty$ e $\lim_{x \to \pi/2^+} \tan x = -\infty$.

3. $$\lim_{x \to 0^-} \frac{1}{x^n} = \begin{cases} +\infty & \text{se } n \text{ è pari} \\ -\infty & \text{se } n \text{ è dispari}\,, \end{cases}$$
mentre, per ogni $n \in \mathbb{N}$,
$$\lim_{x \to 0^+} \frac{1}{x^n} = +\infty\,.$$

Nel caso in cui x_0 sia un punto di accumulazione sia a destra che a sinistra di X, l'esistenza del limite per x che tende a x_0 dipende dall'esistenza del limite destro e sinistro, cioè

Teorema 4.2.6 *Siano $X \subset \mathbb{R}$, x_0 un punto di accumulazione sia a destra sia a sinistra di X e $f\colon X \to \mathbb{R}$ una funzione. Allora:*

$$\exists \lim_{x \to x_0} f(x) = \ell \in \overline{\mathbb{R}} \qquad \Longleftrightarrow \qquad \exists \lim_{x \to x_0^+} f(x) = \lim_{x \to x_0^-} f(x) = \ell\,.$$

Esempi 4.2.7 Per il Teorema 4.2.6 e gli esempi dati in 4.2.5 possiamo subito concludere che $\nexists \lim_{x \to \pi/2} \tan x$, $\nexists \lim_{x \to 0} \frac{1}{x^n}$ se n è dispari, e $\exists \lim_{x \to 0} \dfrac{1}{x^n} = +\infty$ se n è pari.

Inoltre, per le funzioni monotone vale il seguente risultato, analogo al Teorema fondamentale per le successioni monotone 2.1.16.

Teorema 4.2.8 (Teorema fondamentale sul limite delle funzioni monotone) *Siano $X \subset \mathbb{R}$, $x_0 \in \mathbb{R}$ e $f\colon X \to \mathbb{R}$ una funzione monotona. Allora valgono le seguenti proprietà.*

1. *Se x_0 è un punto di accumulazione a destra di X e f è crescente, allora esiste* $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x) = \inf\{f(x):\ x \in X, x > x_0\}$.

2. *Se x_0 è un punto di accumulazione a sinistra di X e f è crescente, allora esiste* $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x) = \sup\{f(x):\ x \in X, x < x_0\}$.

3. *Se x_0 è un punto di accumulazione a destra di X e f è decrescente, allora esiste* $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x) = \sup\{f(x):\ x \in X, x > x_0\}$.

4. *Se x_0 è un punto di accumulazione a sinistra di X e f è decrescente, allora esiste* $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x) = \inf\{f(x):\ x \in X, x < x_0\}$.

Osserviamo che tutte le proprietà dei limiti di funzioni sopra introdotte continuano a valere sia per il limite destro sia per il limite sinistro.

4.3 Limiti notevoli

In questo paragrafo ricordiamo alcuni limiti per mezzo dei quali e dei risultati visti nei paragrafi precedenti si possono calcolare i limiti di funzioni più generali.

1. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x}{x} = 1,$

2. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\tan x}{x} = 1,$

3. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\cos x}{x^2} = \dfrac{1}{2},$

4. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\arcsin x}{x} = 1,$

5. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\arctan x}{x} = 1,$

6. $\lim\limits_{x\to \pm\infty} \left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x = \mathrm{e}\,,$

7. $\lim\limits_{x\to 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = \mathrm{e}\,,$

8. $\lim_{x\to 0} \dfrac{\log(1+x)}{x} = 1\,,$

9. $\lim_{x\to 0} \dfrac{\mathrm{e}^x - 1}{x} = 1\,,$

10. $\lim_{x\to +\infty} \dfrac{\log x}{x} = 0\;,$

I limiti 1. ÷ 5. sono stati già calcolati nel paragrafo 4.1. I limiti 6. e 10. seguono applicando il Teorema di Caratterizzazione dei limiti con successioni 4.1.8 e ricordando gli Esempi 2.3.3, 2.3.4 del Capitolo 2.

Per il calcolo del limite 7. basta osservare che, posto $y = \frac{1}{x}$ cosicché $y \to +\infty$ se $x \to 0^+$ e $y \to -\infty$ se $x \to 0^-$, risulta che

$$\lim_{x\to 0^+} (1+x)^{\frac{1}{x}} = \lim_{y\to +\infty} \left(1 + \frac{1}{y}\right)^y = \mathrm{e}$$

$$\lim_{x\to 0^-} (1+x)^{\frac{1}{x}} = \lim_{y\to -\infty} \left(1 + \frac{1}{y}\right)^y = \mathrm{e}\;.$$

La conclusione segue dal Teorema 4.2.6.

Il limite 8. è una immediata conseguenza di 7. perché

$$\lim_{x\to 0} \frac{\log(1+x)}{x} = \lim_{x\to 0} \log(1+x)^{\frac{1}{x}} = \log \mathrm{e} = 1\,.$$

Infine, per verificare 9. basta porre $y = \mathrm{e}^x - 1$ e osservare che $y \to 0$ se $x \to 0$ e $x = \log(1+y)$ ottenendo così

$$\lim_{x\to 0} \frac{\mathrm{e}^x - 1}{x} = \lim_{y\to 0} \frac{y}{\log(1+y)} = 1.$$

4.4 Funzioni continue

Come abbiamo già osservato, il valore $f(x_0)$ è a priori slegato dal valore del $\lim_{x\to x_0} f(x)$. D'altra parte, è naturale aspettarsi che la coincidenza di tali valori possa avere conseguenze rilevanti. È così, come vedremo in questo paragrafo.

Definizione 4.4.1 *Sia $X \subset \mathbb{R}$. Sia $f\colon X \to \mathbb{R}$ una funzione e sia $x_0 \in X$. Si dice che f* è continua in x_0 *se x_0 è un punto isolato di X oppure*

$$\exists \lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0),$$

o equivalentemente, se

$$\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists \delta = \delta(\varepsilon, x_0) > 0 \;\; t.\ c.\ \forall x \in X :\; |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon. \tag{4.4.3}$$

Inoltre, si dice che f è continua in X *se essa è continua in ogni punto di X.*

Esempi 4.4.2

1. Tutte le funzioni elementari che abbiamo introdotto nel Capitolo 1 sono continue in tutto il loro insieme di definizione. Quindi, ad esempio, le funzioni $\sin x$, $\cos x$, a^x $(a > 0)$ sono continue in $\mathbb{R}$, la funzione $\log_a x$ $(1 \neq a > 0)$ è definita e continua in $]0, +\infty[$, le funzioni $\arcsin x$ e $\arccos x$ sono definite e continue in $[-1, 1]$.

2. La funzione $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ così definita
$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \geq 0 \\ -1 & \text{se } x < 0 \end{cases}$$
è continua in $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ e non è continua nel punto 0.

Osservazione 4.4.3 Siano $f\colon X \to \mathbb{R}$ una funzione e $x_0 \in X$ un punto di accumulazione di X. Osserviamo che f non è continua in x_0, cioè f è discontinua in x_0, se $\exists \lim_{x \to x_0} f(x) = \ell$ con $\ell \neq f(x_0)$, oppure se $\nexists \lim_{x \to x_0} f(x)$.

1. Nel caso in cui $\exists \lim_{x \to x_0} f(x) = \ell \in \mathbb{R}$, con $\ell \neq f(x_0)$, diciamo che la funzione f ha *una discontinuità eliminabile* in x_0. In particolare, la funzione $\tilde{f}\colon X \to \mathbb{R}$ così definita
$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x) & \text{se } x \in X \setminus \{x_0\} \\ \ell & \text{se } x = x_0\,, \end{cases}$$
è continua in x_0. Ad esempio, la funzione così definita
$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x} & \text{se } x \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \\ 0 & \text{se } x = 0 \end{cases}$$
ha una discontinuità eliminabile in 0 poiché $\displaystyle\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ con $1 \neq 0$.

2. Nel caso in cui $\nexists \lim_{x \to x_0} f(x)$, x_0 è un punto di accumulazione sia a destra sia a sinistra di X e $\exists \lim_{x \to x_0^+} f(x) = \ell_2 \in \mathbb{R}$ e $\exists \lim_{x \to x_0^-} f(x) = \ell_1 \in \mathbb{R}$ (ovviamente risulta $\ell_1 \neq \ell_2$), diciamo che x_0 è un *punto di discontinuità di* 1^a *specie* per f. In particolare, $\ell_2 - \ell_1$ si dice *salto* di f in x_0. Ad esempio, la funzione così definita
$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \geq 0 \\ -1 & \text{se } x < 0 \end{cases}$$
ha un punto di discontinuità di 1^a specie in 0 con salto 2, dato che $\lim_{x \to 0^+} f(x) = 1$ e $\lim_{x \to 0^-} f(x) = -1$.

3. Nei rimanenti casi, cioè quando $\exists \lim_{x\to x_0} f(x) = \pm\infty$, o $\exists \lim_{x\to x_0^+} f(x) = \ell_2 \in \mathbb{R}$ e $\exists \lim_{x\to x_0^-} f(x) = \pm\infty$, o $\exists \lim_{x\to x_0^+} f(x) = \pm\infty$ e $\exists \lim_{x\to x_0^-} f(x) = \ell_1 \in \mathbb{R}$, o $\nexists \lim_{x\to x_0^+} f(x)$ e $\exists \lim_{x\to x_0^-} f(x) = \ell_1$, etc., diciamo che x_0 è un *punto di discontinuità di* 2^a *specie* per f. Ad esempio, la funzione così definita

$$f(x) = \begin{cases} \sin\frac{1}{x} & \text{se } x > 0 \\ -1 & \text{se } x \leq 0 \end{cases}$$

ha un punto di discontinuità di 2^a specie in 0 dato che, come abbiamo visto nell'Esempio 4.1.11, il limite $\lim_{x\to 0^+} f(x)$ non esiste e $\lim_{x\to 0^-} f(x) = -1$.

Osserviamo che, per il Teorema fondamentale sul limite delle funzioni monotone 4.2.8, le funzioni monotone possono avere solo discontinuità di 1^a specie nei punti di accumulazione sia a destra sia a sinistra del loro insieme di definizione.

Osservazione 4.4.4 Siano $f\colon X \to \mathbb{R}$ una funzione e $x_0 \in \mathbb{R} \setminus X$ un punto di accumulazione di X. Se esiste finito il

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = \ell\,,$$

diciamo che la funzione f *è prolungabile per continuità in* x_0. In tal caso, la funzione $\overline{f}\colon X \cup \{x_0\} \to \mathbb{R}$ così definita

$$\overline{f}(x) = \begin{cases} f(x) & \text{se } x \in X \\ \ell & \text{se } x = x_0 \end{cases}$$

è continua in x_0 poiché $\lim_{x\to x_0} \overline{f}(x) = \lim_{x\to x_0} f(x) = \ell = \overline{f}(x_0)$.

Ad esempio, la funzione $f(x) = \frac{\sin x}{x}$, $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ è prolungabile per continuità in 0 poiché esiste finito il $\lim_{x\to 0} f(x) = 1$.

Dalla definizione stessa di continuità e dai teoremi fondamentali sui limiti si deducono immediatamente le seguenti proprietà delle funzioni continue.

Teorema 4.4.5 (Proprietà delle funzioni continue) *Valgono le seguenti proprietà.*

1. **[Caratterizzazione della continuità con le successioni]** *Siano $f\colon X \to \mathbb{R}$ una funzione e $x_0 \in X$ un punto di accumulazione di X. Allora f è continua in x_0 se, e solo se, per ogni successione $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset X$ con $\lim_{n\to+\infty} x_n = x_0$, risulta $\lim_{n\to+\infty} f(x_n) = f(x_0)$.*

2. **[Permanenza del Segno]** *Sia $f\colon X \to \mathbb{R}$ una funzione continua in $x_0 \in X$ con x_0 punto di accumulazione di X. Se $f(x_0) > 0$, allora esiste $r > 0$ tale che, per ogni $x \in X \cap]x_0 - r, x_0 + r[$, $f(x) > 0$.*

3. **[Operazioni]** *Siano* $f, g\colon X \to \mathbb{R}$ *due funzioni continua in* $x_0 \in X$. *Allora le funzioni* $|f|$, $f \pm g$ *e* $f \cdot g$ *sono continue in* x_0.

   Inoltre, se $g(x_0) \neq 0$, *allora anche la funzione* f/g *è continua in* x_0.

4. **[Continuità della funzione composta]** *Siano* $f\colon X \to \mathbb{R}$ *una funzione continua in* $x_0 \in X$ *e* $g\colon Y \to \mathbb{R}$ *una funzione continua in* $y_0 = f(x_0) \in Y$. *Allora la funzione composta* $g \circ f$ *è continua in* x_0.

Ovviamente, tutte le proprietà enunciate per funzioni continue in un punto valgono in tutto il dominio X se valgono in ciascun punto di X.

4.5 Proprietà globali delle funzioni continue

Tutte le proprietà delle funzioni continue viste nel paragrafo precedente sono relative ai singoli punti del dominio o valgono in intorni dei punti considerati, sono cioè *locali*, nel senso che dipendono dal fatto che la funzione sia continua nel punto considerato di volta in volta, indipendentemente dal comportamento della funzione negli altri punti del dominio. In questo paragrafo consideriamo funzioni continue nel loro dominio, che supponiamo essere un intervallo, e dimostriamo delle proprietà *globali* di fondamentale importanza, cioè asserzioni che riguardano l'insieme dei valori che la funzione assume nell'intero dominio, e dipendono in modo essenziale dal fatto che la funzione sia continua nell'intero dominio.

Teorema 4.5.1 (Teorema di Weierstrass) *Sia* $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ *una funzione continua in* $[a, b]$. *Allora* f *è limitata ed è dotata di massimo e minimo in* $[a, b]$, *cioè*

$$\exists x_1,\, x_2 \in [a, b] \text{ tali che } \forall x \in [a, b]\ f(x_1) \leq f(x) \leq f(x_2)\,.$$

Dim. Dimostriamo che f è limitata superiormente ed è dotata di massimo in $[a, b]$.

Poniamo $L = \sup_{x\in[a,b]} f(x)$ e osserviamo che o $L \in \mathbb{R}$ o $L = +\infty$. In ogni caso, per le proprietà dell'estremo superiore, possiamo determinare una successione $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset [a, b]$ tale che $\lim\limits_{n\to+\infty} f(x_n) = L$. Infatti:

1. se $L = +\infty$, allora f non è limitata superiormente (cioè l'insieme $f([a, b])$ non è limitato superiormente) e quindi, per ogni $n \in \mathbb{N}$,

   $$n \text{ non è un maggiorante di } f \qquad \Longleftrightarrow \qquad \exists x_n \in [a, b] \text{ tale che } f(x_n) > n\,.$$

   Abbiamo così determinato una successione $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset [a, b]$ tale che, per ogni $n \in \mathbb{N}$, $f(x_n) > n$; ne segue che $\lim\limits_{n\to+\infty} f(x_n) = L$.

2. se $L \in \mathbb{R}$, allora, per le proprietà caratteristiche dell'estremo superiore, per ogni $n \in \mathbb{N}$, in corrispondenza di $\varepsilon_n = 1/n$,

$$\exists x_n \in [a,b] \text{ tale che } \; L - \frac{1}{n} < f(x_n) \le L\,.$$

Abbiamo così determinato una successione $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset [a,b]$ tale che, per ogni $n \in \mathbb{N}$, $L - 1/n < f(x_n) \le L$; ne segue, per il Teorema 2.1.10, che $\lim_{n\to+\infty} f(x_n) = L$.

In ogni caso, la successione $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ è limitata poiché è contenuta nell'intervallo chiuso e limitato $[a,b]$. Per il Teorema di Bolzano–Weierstrass 2.1.20 esiste allora una successione $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ estratta da $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ e convergente a qualche $x_0 \in [a,b]$. Per la continuità di f, ne segue che

$$\lim_{k\to+\infty} f(x_{n_k}) = f(x_0)\,;$$

d'altro canto $\lim_{k\to+\infty} f(x_{n_k}) = L$ poiché $(f(x_{n_k}))_{k\in\mathbb{N}}$ è una successione estratta da $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ che, per costruzione, tende a L. Per l'unicità del limite deduciamo che $L = f(x_0)$ è un numero reale, e quindi che f ammette massimo (in particolare, f è limitata superiormente).

Si dimostra in modo analogo che f è limitata inferiormente ed è dotata di minimo in $[a,b]$. $\boxed{QED}$

Teorema 4.5.2 (Teorema dell'esistenza degli zeri) *Sia $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ una funzione continua in $[a,b]$ tale che $f(a)\cdot f(b) < 0$. Allora esiste almeno un $x_0 \in]a,b[$ tale che $f(x_0) = 0$.*

Se, inoltre, f è strettamente monotona in $[a,b]$, allora esiste un unico $x_0 \in]a,b[$ tale che $f(x_0) = 0$.

Dim. Dato che $f(a)\cdot f(b) < 0$, possiamo supporre $f(a) < 0$ e $f(b) > 0$. Allora, posto $c = (a+b)/2$ il punto medio di $[a,b]$, se $f(c) = 0$ abbiamo trovato la radice. Altrimenti $f(c) < 0$ oppure $f(c) > 0$. Indichiamo con $[a_1, b_1]$ l'intervallo dove f cambia di segno, cioé

$$\begin{cases} \text{se} \quad f(c) > 0 \quad \text{allora } a_1 = a,\; b_1 = c \\ \text{se} \quad f(c) < 0 \quad \text{allora } a_1 = c,\; b_1 = b. \end{cases}$$

Allora abbiamo trovato un intervallo $[a_1, b_1]$ di lunghezza $(b-a)/2$ per cui $f(a_1) < 0$ e $f(b_1) > 0$. Definiamo $c_1 = (a_1 + b_1)/2$ e ripetiamo il ragionamento. Otteniamo tre successioni (a_n), (b_n), (c_n) tali che, se per qualche c_n risulta $f(c_n) = 0$ ci si ferma, perché abbiamo trovato una radice, altrimenti $f(a_n) < 0$ e $f(b_n) > 0$. Inoltre risulta

$$b_n - a_n = \frac{b-a}{2^n} \qquad \forall n \in \mathbb{N}$$

Per costruzione la successione (a_n) è crescente e limitata, perché contenuta in $[a,b]$. Per il Teorema sulle successioni monotone ammette limite $x_0 \in [a,b]$. Anche la successione

(b_n) espressa da

$$b_n = a_n + \frac{b-a}{2^n}$$

converge ad x_0. Dalla continuitá di f si ha

$$f(x_0) = \lim_n f(a_n) \le 0, \qquad f(x_0) = \lim_n f(b_n) \ge 0.$$

Pertanto, possiamo concludere che $f(x_0) = 0$ e il teorema è provato.

Se f è anche strettamente monotona, allora f è iniettiva e quindi l'unicità segue immediatamente. QED

Più in generale, vale un risultato analogo in un qualuque intervallo, anche non chiuso o non limitato.

Corollario 4.5.3 *Siano I un intervallo e $f\colon I \to \mathbb{R}$ una funzione continua in I. Se esistono a, $b \in I$ tali che $f(a) \cdot f(b) < 0$, allora esiste almeno un $x_0 \in I$ tale che $f(x_0) = 0$.*

Dim. Per provare il corollario, basta applicare il Teorema 4.5.2 all'intervallo di estremi a e b, che per l'ipotesi che I sia un intervallo è contenuto nel dominio di f. QED

Esempi 4.5.4 Il Teorema dell'esistenza degli zeri 4.5.2 è un utile strumento per stabilire l'esistenza di soluzioni (e anche un'eventuale approssimazione) di equazioni non risolubili in modo esplicito. Infatti, per determinare se un'equazione del tipo $f(x) = 0$, con f funzione definita e continua in un intervallo I, ha qualche soluzione in I, è sufficiente stabilire l'esistenza di due elementi x_1, $x_2 \in I$, con $x_1 < x_2$, tali che $f(x_1) \cdot f(x_2) < 0$. Infatti, in tal caso, grazie al Corollario 4.5.3, si può subito concludere che esiste $x_0 \in]x_1, x_2[$ tale che $f(x_0) = 0$. Ad esempio:

1. l'equazione $\mathrm{e}^x + \arctan x = 0$ ha almeno una soluzione in $]-1, 0[$ perché la funzione $f(x) = \mathrm{e}^x + \arctan x$ è definita e continua in $\mathbb{R}$, $f(-1) = \mathrm{e}^{-1} - (\pi/4) < 0$ e $f(0) = 1 > 0$; notando che f è somma di due funzioni strettamente crescenti e quindi è a sua volta strettamente crescente, la soluzione è unica.

2. L'equazione algebrica $a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots a_1 x + a_0 = 0$, con $n \in \mathbb{N}$ dispari e $a_n \ne 0$, ha almeno una soluzione reale. Supposto per fissare le idee che $a_n > 0$, la funzione $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots a_1 x + a_0$ è definita e continua in $\mathbb{R}$, $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ e $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$ (quindi, per il Teorema della permanenza del segno, esistono K_1, $K_2 \in \mathbb{R}$ tali che $f(x) < 0$ per ogni $x \le K_1$ e $f(x) > 0$ per ogni $x \ge K_2$). Naturalmente, è essenziale che il grado del polinomio sia *dispari*. Per esempio, il polinomio $x^2 + 1$ non ha zeri in $\mathbb{R}$.

Dal Corollario 4.5.3 del Teorema dell'esistenza degli zeri 4.5.2 segue immediatamente il seguente risultato.

Teorema 4.5.5 (Teorema dei valori intermedi) *Sia I un intervallo, ed $f : I \to \mathbb{R}$ una funzione continua in I. Allora f assume in I tutti i valori compresi tra $m = \inf\{f(x) : x \in I\}$ ed $M = \sup\{f(x) : x \in I\}$, cioè: per ogni $y_0 \in]m, M[$ esiste $x_0 \in I$ tale che $f(x_0) = y_0$.*

DIM. Fissato $y_0 \in]m, M[$, per le proprietà dell'estremo superiore e dell'estremo inferiore esistono x_1, $x_2 \in I$ tali che $m < f(x_1) < y_0 < f(x_2) < M$. Posto allora $g(x) = f(x) - y_0$, la funzione g è continua in I e risulta $g(x_1) = f(x_1) - y_0 < 0$ e $g(x_2) = f(x_2) - y_0 > 0$. Per il Corollario 4.5.3 esiste $x_0 \in I$ tale che $g(x_0) = 0$, il che significa che $y_0 = f(x_0)$. Per l'arbitrarietà di y_0, il teorema è dimostrato. QED

Osservazione 4.5.6 Il teorema dei valori intermedi si può riformulare dicendo che se $X \subset \mathbb{R}$ è un qualunque insieme, $f\colon X \to \mathbb{R}$ è una funzione continua in X, ed I è un intervallo contenuto in X, allora $f(I)$ è ancora un intervallo.

Inoltre, se il dominio di f nel Teorema 4.5.5 è un intervallo chiuso e limitato, diciamo $I = [a, b]$, allora per il Teorema di Weierstrass f assume i valori m (che non è quindi solo l'estremo inferiore di f in I, ma anche il minimo), ed M (che non è quindi solo l'estremo superiore di f in I, ma anche il massimo), quindi $f([a, b]) = [m, M]$.

La continuità delle funzioni monotone può essere caratterizzata come segue.

Teorema 4.5.7 (Continuità della funzioni monotone) *Sia $f : I \to \mathbb{R}$ una funzione monotona nell'intervallo I. Allora le seguenti proprietà sono equivalenti:*

1. *f è continua in I;*
2. *$f(I)$ è un intervallo.*

Osservazione 4.5.8 Se in particolare $I = [a, b]$ allora possiamo dire che $f(I) = f([a, b]) = [f(a), f(b)]$ se f è crescente, e $f(I) = f([a, b]) = [f(b), f(a)]$ se f è decrescente.

Il Teorema 4.5.7 permette di dimostrare che

Teorema 4.5.9 (Continuità della funzione inversa) *Sia $f : I \to \mathbb{R}$ una funzione continua e strettamente monotona in I. Allora la sua funzione inversa $f^{-1}\colon f(I) \to I$ è continua in $f(I)$.*

DIM. Per la continuità di f sappiamo che $f(I) = J$ è un intervallo. Di conseguenza, la funzione inversa f^{-1} è definita nell'intervallo J ed è ivi strettamente monotona con $f^{-1}(J) = I$. Dal Teorema 4.5.7 segue che f^{-1} è continua in J. QED

In virtù di questi ultimi risultati possiamo affermare che le funzioni inverse delle funzioni elementari sono tutte continue nel loro insieme di definizione, cioè la funzione $\log_a x$ $(1 \neq a > 0)$ è continua in $]0, +\infty[$, la funzione $\arctan x$ è continua in $\mathbb{R}$, le funzioni $\arcsin x$ e $\arccos x$ sono continue in $[-1, 1]$, etc.

Osservazioni 4.5.10 Osserviamo che in tutti i teoremi presentati in questo paragrafo 4.5 nessuna delle ipotesi può essere rimossa. Facciamo qualche esempio.

1. Se una funzione f è continua in un intervallo I e I non è chiuso o non è limitato, non possiamo affatto concludere che f ammetta massimo e minimo in I. Per esempio, la funzione $f(x) = 1/x$ è continua in $]0,1]$, ma non ammette massimo in $]0,1]$; la funzione $g(x) = a^x$ ($a > 0$, $a \neq 1$) è continua in $\mathbb{R}$, ma non ammette nè massimo nè minimo in $\mathbb{R}$.

2. Se una funzione f è definita ma non continua in un intervallo I e esistono a, $b \in I$ tali che $f(a) \cdot f(b) < 0$, non possiamo affatto concludere che f si annulli in qualche punto di I. Per esempio, la funzione f così definita
$$f(x) = \begin{cases} -1 & \text{se } x \in [-1,0] \\ 1 & \text{se } x \in]0,1] \end{cases}$$
non si annulla in nessun punto di $[-1,1]$ anche se $f(-1) \cdot f(1) < 0$.

3. Se f è una funzione continua e invertibile in un insieme generico X, non è in generale vero che la sua inversa f^{-1} sia ancora continua in $f(X)$. Infatti, la funzione f così definita
$$f(x) = \begin{cases} x+1 & \text{se } x \in [-1,0] \\ x & \text{se } x \in]1,2] \,, \end{cases}$$
è continua e invertibile in $X = [-1,0] \cup]1,2]$, ma la sua funzione inversa f^{-1}, che è data da
$$f^{-1}(x) = \begin{cases} x-1 & \text{se } x \in [0,1] \\ x & \text{se } x \in]1,2] \,, \end{cases}$$
non è continua in $f(X) = [0,2]$ perché ha un punto di discontinuità (di 1^a specie) nel punto 1.

Concludiamo questo capitolo discutendo i due concetti presentati nella Definizione che segue, in cui si considerano versioni "globali" della continuità.

Definizione 4.5.11 *Siano $X \subset \mathbb{R}$ e $f \colon X \to \mathbb{R}$ una funzione.*

1. *Diciamo che f* è uniformente continua in X *se vale la seguente proprietà*
$$\begin{aligned} &\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0 \ \textit{tale che} \\ &\forall x,\, x' \in X : \ |x - x'| < \delta \Rightarrow \ |f(x) - f(x')| < \varepsilon \,. \end{aligned} \tag{4.5.4}$$

2. *Diciamo che f* lipschitziana in X *se vale la seguente proprietà*
$$\exists L > 0 \ \textit{tale che} \ \forall x,\, x' \in X, \ |f(x) - f(x')| \leq L|x - x'| \,.$$
In tal caso, L è detta costante di Lipschitz.

Osservazioni 4.5.12

1. Spieghiamo in che senso l'uniforme continuità è una versione globale della continuità, come si vede confrontando le definizioni 4.4.1 e 4.5.11.1, ed in particolare (4.4.3) e (4.5.4). Data una funzione $f : X \to \mathbb{R}$ continua in X, la differenza tra continuità ed uniforme continuità consiste nel fatto che, fissato $\varepsilon > 0$, si trova un $\delta > 0$ che se f è solo continua dipende anche dal punto $x_0 \in X$ considerato, mentre se f è uniformemente continua dipende solo da ε e dal dominio X, ma non varia da punto a punto (in questo senso la scelta è globale).

2. La lipschitzianità implica la uniforme continuità e la uniforme continuità implica la continuità. D'altra parte, esistono funzioni lipschitziane, funzioni uniformemente continue ma non lipschitziane e funzioni continue non uniformemente continue.

   La funzione $f(x) = x$ è lipschitziana in $\mathbb{R}$; anche le funzioni $\sin x$ e $\cos x$ sono esempi di funzioni lipschitziane in $\mathbb{R}$. La funzione $g(x) = \sqrt{x}$ è uniformemente continua in $[0, +\infty[$, ma non lipschitziana in $[0, +\infty[$, infatti i rapporti $\dfrac{\sqrt{x_1} - \sqrt{x_2}}{x_1 - x_2} = \dfrac{1}{\sqrt{x_1} + \sqrt{x_2}}$ non sono limitati superiormente quando x_1 e x_2 sono vicini a 0. Infine, la funzione $h(x) = 1/x$ è continua in $\mathbb{R} \setminus \{0\}$, ma non uniformemente continua in $\mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Per le funzioni uniformemente continue vale il seguente risultato:

Teorema 4.5.13 *Sia $f :]a, b[\to \mathbb{R}$ una funzione uniformemente continua in un intervallo limitato $]a, b[$. Allora*

1. *f è limitata;*
2. *f si può prolungare a una funzione uniformemente continua in $[a, b]$.*

La continuità in intervalli chiusi e limitati implica l'uniforme continuità. Infatti, vale il seguente risultato.

Teorema 4.5.14 (Teorema di Heine–Cantor) *Sia $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una funzione continua in $[a, b]$. Allora f è anche uniformemente continua in $[a, b]$.*

Dim. Dimostriamo il teorema per assurdo. La tesi è

$$\begin{aligned}&\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0 \text{ tale che}\\ &\forall x,\ x' \in [a, b] :\ |x - x'| < \delta \Rightarrow\ |f(x) - f(x')| < \varepsilon\,.\end{aligned}$$

La sua negazione è

$$\begin{aligned}&\exists \bar{\varepsilon} > 0 \ \text{ tale che } \forall \delta > 0\\ &\exists x,\ x' \in [a, b] :\ |x - x'| < \delta \Rightarrow\ |f(x) - f(x')| \ge \bar{\varepsilon}\,.\end{aligned} \tag{4.5.5}$$

Per ogni $n \in \mathbb{N}$ scegliamo $\delta = \frac{1}{n}$ e siano $x_n, x'_n \in [a,b]$ tali che $|x_n - x'_n| < \frac{1}{n}$ e $|f(x_n) - f(x'_n)| \geq \bar{\varepsilon}$. Poiché la successione (x_n) è limitata, per il Teorema di Bolzano–Weierstrass 2.1.20 esiste una sottosuccessione convergente $x_{n_k} \xrightarrow{k} \bar{x} \in [a,b]$. Considerata la sottosuccessione x'_{n_k} con gli stessi indici risulta $x_{n_k} - \frac{1}{n_k} < x'_{n_k} < x_{n_k} + \frac{1}{n_k}$, perció per il secondo teorema del confronto 2.1.10 anche $x'_{n_k} \xrightarrow{k} \bar{x}$. Per la continuità di f risulta

$$\lim_k |f(x_{n_k}) - f(x'_{n_k})| = |f(\bar{x}) - f(\bar{x})| = 0$$

contro la condizione (4.5.5) $|f(x_{n_k}) - f(x'_{n_k})| \geq \bar{\varepsilon} > 0$. $\boxed{QED}$

CAPITOLO 5

CALCOLO DIFFERENZIALE

In questo capitolo introduciamo la nozione di derivata e studiamo le sue principali proprietà.

5.1 Derivate di una funzione

Siano $I \subset \mathbb{R}$ un intervallo aperto, $f\colon I \to \mathbb{R}$ una funzione e $x_0 \in I$. Se $h \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ è tale che $x_0 + h \in I$, possiamo considerare il seguente rapporto

$$\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} .$$

Esso è detto *rapporto incrementale* della funzione f in x_0 relativo all'incremento h della variabile.

A questo punto possiamo dare la seguente

Definizione 5.1.1 *Se esiste finito il*

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} ,$$

allora diciamo che la funzione f è derivabile in x_0. *In tal caso, il limite si dice* derivata di f in x_0 *e si indica con uno dei seguenti simboli*

$$f'(x_0) \quad \left(\frac{df}{dx}\right)_{x=x_0} \quad \frac{df}{dx}(x_0) \quad (Df)_{x=x_0} \quad Df(x_0) .$$

Quindi

$$f'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} .$$

Inoltre, diciamo che la funzione f è derivabile in I *se essa è derivabile in ogni punto di I. In tal caso, è ben definita la funzione che associa ad ogni $x \in I$ la derivata $f'(x)$; tale funzione si dice* derivata di f *e si indica solitamente con f'. In altri termini, la funzione derivata di f è così definita*

$$f'\colon I \to \mathbb{R}, \qquad x \in I \to f'(x) .$$

Osservazioni 5.1.2

1. Osserviamo che, posto $x = x_0 + h$, possiamo scrivere il rapporto incrementale come segue
$$\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$$
e quindi f è derivabile in x_0 se, e solo se, esiste finito il $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$.

2. Supponiamo che la funzione $f\colon I \to \mathbb{R}$ sia derivabile in x_0 e poniamo, per ogni $x \in I$, con $x \neq x_0$,
$$\omega(x) = \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} - f'(x_0) \qquad \text{e} \qquad \omega(x_0) = 0\,.$$
Allora possiamo scrivere che, per ogni $x \in I$,
$$f(x) - f(x_0) = f'(x_0)(x-x_0) + \omega(x)(x-x_0)\,,$$
dove $\lim\limits_{x\to x_0} \omega(x) = 0 = \omega(x_0)$.

Come nel caso dei limiti e della continuità, quando una funzione non è derivabile in un punto si può parlare di *derivata destra* e di *derivata sinistra*.

Definizione 5.1.3 (Derivata destra e derivata sinistra) *Siano $I \subset \mathbb{R}$ un intervallo, $f\colon I \to \mathbb{R}$ una funzione e $x_0 \in I$ un punto di accumulazione a destra di I (a sinistra di I). Se esiste finito il*
$$\lim_{x\to x_0^+} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \qquad \left(\lim_{x\to x_0^-} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\right),$$
diciamo che f ammette derivata destra in x_0 (derivata sinistra in x_0)*. In tal caso, tale limite è detto* derivata destra di f in x_0 (derivata sinistra di f in x_0) *e si indica con uno dei seguenti simboli*
$$f'_d(x_0), \quad D_+f(x_0) \qquad (f'_s(x_0), \quad D_-f(x_0))\,.$$

Osserviamo che, se $x_0 \in I$ è un punto interno di I, f è derivabile in x_0 se, e solo se, f ammette derivata destra e derivata sinistra in x_0 e, in tal caso, $f'(x_0) = f'_d(x_0) = f'_s(x_0)$.

Una prima conseguenza della derivabilità è il seguente risultato, che lega il concetto di derivata a quello di continuità.

Proposizione 5.1.4 *Siano $I \subset \mathbb{R}$ un intervallo, $x_0 \in I$ e $f\colon I \to \mathbb{R}$ una funzione. Se f è derivabile in x_0, allora f è continua in x_0.*

Dim. Osserviamo che

$$\lim_{x\to x_0}(f(x)-f(x_0)) = \lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\cdot(x-x_0) = f'(x_0)\cdot 0 = 0\,;$$

quindi esiste $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$, cioè f è continua in x_0. QED

Osservazione 5.1.5 In generale, una funzione continua non è detto che sia derivabile. Per esempio, la funzione valore assoluto $f(x) = |x|$ non è derivabile in $x_0 = 0$, dato che

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{|x|-|x_0|}{x-x_0} = \lim_{x\to 0^+}\frac{x}{x} = 1 \quad \text{e} \quad \lim_{x\to 0^-}\frac{|x|-|x_0|}{x-x_0} = \lim_{x\to 0^-}\frac{-x}{x} = -1$$
$$\Longrightarrow \nexists \lim_{x\to 0}\frac{|x|-|x_0|}{x-x_0}\,.$$

In realtà, si potrebbero costruire funzioni *continue in tutto un intervallo* ma *non derivabili in alcun punto.*

Il rapporto incrementale e la derivata hanno un importante significato geometrico, che discutiamo nella seguente osservazione.

Osservazione 5.1.6 (Significato geometrico della derivata) Dati un intervallo aperto I, $x_0 \in I$ e una funzione $f\colon I \to \mathbb{R}$, osserviamo che, per ogni $h \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$ tale che $x_0 + h \in I$, la retta passante per i punti $P = (x_0+h, f(x_0+h))$ e $P_0 = (x_0, f(x_0))$ ha equazione cartesiana data da

$$r_h:\ y - f(x_0) = \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}(x-x_0)\,;$$

il cui coefficiente angolare $m(h)$ è uguale a $\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$, cioè è uguale al rapporto incrementale di f in x_0 relativo all'incremento h della variabile. Se h tende a 0, cioè se P si avvicina a P_0 lungo il grafico di f, la sua pendenza varia. Al limite, si possono avere situazioni differenti.

1. Nel caso in cui f sia derivabile in x_0, esiste finito il $\lim\limits_{h\to 0} m(h) = f'(x_0)$. Questo significa che la retta r_h assume una posizione limite, non parallela all'asse y al tendere di h a 0. Tale posizione limite è detta *retta tangente al grafico di f nel punto P_0* e la sua equazione cartesiana è data da

$$\boxed{y - f(x_0) = f'(x_0)(x-x_0)\,.}$$

Pertanto$f'(x_0)$ è il coefficiente angolare della retta tangente al grafico di f nel punto P_0.

2. Se f non è derivabile in x_0, allora
$$\text{o } \exists \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = \pm\infty \text{ oppure } \quad \nexists \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}\,.$$

3. Nel caso in cui f sia continua in x_0 e $\exists \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = \pm\infty$, la retta r_h assume una posizione limite, parallela all'asse y, al tendere di h a 0. Tale retta è ancora tangente al grafico di f nel punto $P_0 = (x_0, f(x_0))$ e la sua equazione cartesiana è data da $x = x_0$. Per questo motivo, si dice che f ha in x_0 un *punto di flesso a tangente verticale*. Ad esempio, la funzione $f(x) = \sqrt[3]{x}$, $x \in \mathbb{R}$, ha un punto di flesso a tangente verticale in 0.

4. Nel caso in cui f sia continua in x_0 e
$$\exists \lim_{h\to 0^+} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = m \in \mathbb{R}\,,\ \exists \lim_{h\to 0^-} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = m'\,,$$
con $m \neq m'$ (cioè, $m = f'_d(x_0)$ e $m' = f'_s(x_0)$), la retta r_h non assume alcuna posizione limite al tendere di h a 0. Infatti, se h tende a 0 da destra, la retta r_h assume una posizione limite $t_d(x_0)$, non parallela all'asse y e di equazione cartesiana $y - f(x_0) = f'_d(x_0)(x - x_0)$. La retta $t_d(x_0)$ è *tangente a destra* al grafico di f nel punto P_0. Se h tende a 0 da sinistra, la retta r_h assume una posizione limite $t_s(x_0)$, non parallela all'asse y e di equazione cartesiana $y - f(x_0) = f'_s(x_0)(x - x_0)$. Essa è *tangente a sinistra* al grafico di f nel punto P_0. In particolare, le rette $t_d(x_0)$ e $t_s(x_0)$ non coincidono avendo coefficienti angolari diversi. In tal caso, si dice che f ha in x_0 un *punto angoloso*. Ad esempio, la funzione $f(x) = |x|$, $x \in \mathbb{R}$, ha un punto angoloso in 0.

5. Nel caso in cui f è continua in x_0 e
$$\exists \lim_{h\to 0^+} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = +\infty\,,\ \exists \lim_{h\to 0^-} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = -\infty$$
(o viceversa), la retta r_h non assume una posizione limite al tendere di h a 0. Infatti, se h tende a 0 da destra, la retta r_h assume una posizione limite $t_d(x_0)$, parallela all'asse y e con verso di percorrenza dal basso verso l'alto. Essa è *tangente a destra* al grafico di f nel punto P_0. Se h tende a 0 da sinistra, la retta r_h assume una posizione limite $t_s(x_0)$, parallela ancora all'asse y e verso di percorrenza dall'alto verso il basso. Essa è *tangente a sinistra* al grafico di f nel punto P_0. Pertanto le rette $t_d(x_0)$ e $t_s(x_0)$, pur avendo la stessa equazione cartesiana $x = x_0$, non coincidono. In tal caso, si dice che f ha in x_0 un *punto di cuspide*. Ad esempio, la funzione $f(x) = \sqrt[3]{|x|}$, $x \in \mathbb{R}$, ha un punto di cuspide in 0.

Vediamo ora le relazioni esistenti tra l'operazione di derivazione e le principali operazioni tra le funzioni.

Il seguente risultato è una conseguenza della definizione di derivata e delle operazioni tra i limiti.

Teorema 5.1.7 (Regole di derivazione) *Siano I un intervallo, x_0 un punto interno ad I ed $f, g\colon I \to \mathbb{R}$ due funzioni derivabili in x_0. Allora, $f \pm g$, $f \cdot g$ e $\frac{f}{g}$ (se $g(x_0) \neq 0$) sono derivabili in x_0 e valgono le seguenti formule:*

$$(f \pm g)'(x_0) = f'(x_0) \pm g'(x_0)\,; \tag{5.1.1}$$

$$(f \cdot g)'(x_0) = f'(x_0) \cdot g(x_0) + f(x_0) \cdot g'(x_0)\,; \tag{5.1.2}$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \frac{f'(x_0) \cdot g(x_0) - f(x_0) \cdot g'(x_0)}{g^2(x_0)}\,. \tag{5.1.3}$$

In, particolare, dalla (5.1.2) si deduce che

$$\forall c \in \mathbb{R} \quad (c \cdot f)'(x_0) = c \cdot f'(x_0)$$

e dalla (5.1.3) si deduce, ponendo $f \equiv 1$, che

$$\left(\frac{1}{g}\right)'(x_0) = -\frac{g'(x_0)}{g^2(x_0)}\,.$$

Dim. La formula (5.1.1) è una immediata conseguenza della definizione di derivabilità e del fatto che il limite di una somma di funzioni è uguale alla somma dei limiti.

Proviamo la formula (5.1.2). Osserviamo che, per ogni $x \in I$, con $x \neq x_0$,

$$\begin{aligned}\frac{(f \cdot g)(x) - (f \cdot g)(x_0)}{x - x_0} &= \frac{f(x) \cdot g(x) - f(x_0) \cdot g(x) + f(x_0)g(x) - f(x_0)g(x_0)}{x - x_0} \\ &= \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \cdot g(x) + f(x_0) \cdot \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0}\,.\end{aligned}$$

Per ipotesi e tenuto conto che la derivabilità implica la continuità (vedere la Proposizione 5.1.4), deduciamo che

$$\begin{aligned}\lim_{x \to x_0} \frac{(f \cdot g)(x) - (f \cdot g)(x_0)}{x - x_0} &= \lim_{x \to x_0} \left(\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \cdot g(x) + f(x_0) \cdot \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} \right) \\ &= f'(x_0) \cdot g(x_0) + f(x_0) \cdot g'(x_0)\,.\end{aligned}$$

In modo analogo, si dimostra la formula (5.1.3). $\boxed{QED}$

Accanto alle operazioni algebriche, consideriamo le operazioni di composizione e inversione funzionale.

Teorema 5.1.8 (Teorema di derivazione della funzione composta) *Siano I, $J \subset \mathbb{R}$ due intervalli aperti e $f\colon I \to \mathbb{R}$ e $g\colon J \to \mathbb{R}$ due funzioni tali che $f(I) \subset J$. Se f è derivabile in $x_0 \in I$ e g è derivabile in $y_0 = f(x_0) \in J$, allora la funzione composta $g \circ f$ è derivabile in x_0 e vale la seguente formula*

$$(g \circ f)'(x_0) = g'(f(x_0)) \cdot f'(x_0)\,. \tag{5.1.4}$$

Dim. Poiché g è derivabile in y_0, possiamo scrivere che

$$g(y) - g(y_0) = g'(y_0)(y - y_0) + \omega(y)(y - y_0)$$

per ogni $y \in J$, dove ω è una opportuna funzione definita su J tale che $\lim_{y \to y_0} \omega(y) = 0 = \omega(y_0)$ (vedere l'Osservazione 5.1.2.2). Dato che $f(I) \subset J$ e $y_0 = f(x_0)$ ne segue che, per ogni $x \in I$, con $x \neq x_0$, vale la seguente identità

$$\begin{aligned}
\frac{(g \circ f)(x) - (g \circ f)(x_0)}{x - x_0} &= \frac{g(f(x)) - g(f(x_0))}{x - x_0} \\
&= \frac{g'(f(x_0))(f(x) - f(x_0)) + \omega(f(x))(f(x) - f(x_0))}{x - x_0} \\
&= g'(f(x_0)) \cdot \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} + \omega(f(x)) \cdot \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}\,.
\end{aligned}$$

Poiché f è derivabile in x_0 e la derivabilità implica la continuità (vedere la Proposizione 5.1.4), deduciamo che

$$\begin{aligned}
&\lim_{x \to x_0} \frac{(g \circ f)(x) - (g \circ f)(x_0)}{x - x_0} \\
&= \lim_{x \to x_0} \left[g'(f(x_0)) \cdot \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} + \omega(f(x)) \cdot \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \right] \\
&= g'(f(x_0)) \cdot f'(x_0)\,.
\end{aligned}$$

QED

Teorema 5.1.9 (Teorema di derivazione della funzione inversa) *Siano $I \subset \mathbb{R}$ un intervallo aperto e $f\colon I \to \mathbb{R}$ una funzione continua e strettamente monotona in I. Se f è derivabile in $x_0 \in I$ e $f'(x_0) \neq 0$, allora la sua funzione inversa $f^{-1}\colon f(I) \to \mathbb{R}$ è derivabile in $y_0 = f(x_0)$ e vale la seguente formula*

$$(f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)}\,. \tag{5.1.5}$$

Dim. Per l'Osservazione 1.2.4 e i Teoremi 4.5.7, 4.5.9, f^{-1} è una funzione continua in $f(I)$ ed $f(I)$ è un intervallo aperto. Inoltre, per l'iniettività e la continuità di f e di f^{-1},

$\forall y \in f(I) \setminus \{y_0\}, \quad \exists!\, x \in I \setminus \{x_0\}$ tale che $y = f(x)$ o, equivalentemente, $f^{-1}(y) = x$ e $x \to x_0$ se e solo se $y \to y_0$.

Di conseguenza, per ogni $y \in f(I) \setminus \{y_0\}$ possiamo scrivere che

$$\frac{f^{-1}(y) - f^{-1}(y_0)}{y - y_0} = \frac{f^{-1}(f(x)) - f^{-1}(f(x_0))}{f(x) - f(x_0)} = \frac{x - x_0}{f(x) - f(x_0)} = \frac{1}{\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}}\,.$$

Poiché $y \to y_0$ se, e solo se, $x \to x_0$ e $f'(x_0) \neq 0$, ne segue che

$$\lim_{y \to y_0} \frac{f^{-1}(y) - f^{-1}(y_0)}{y - y_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{1}{\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}} = \frac{1}{f'(x_0)}\,.$$

QED

Osservazione 5.1.10 I teoremi precedenti continuano a valere in tutti i punti degli intervalli di definizione delle funzioni in cui le ipotesi sono soddisfatte.

Esempi 5.1.11 (Derivate delle funzioni elementari)

1. [**Costanti**] Sia $f(x) = k$ per ogni $x \in \mathbb{R}$ con $k \in \mathbb{R}$ fissato. Allora f è derivabile in $\mathbb{R}$ e $f'(x) = 0$ per ogni $x \in \mathbb{R}$. Infatti, fissato $x_0 \in \mathbb{R}$, risulta che

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{k - k}{x - x_0} = 0\,.$$

2. [**Potenze naturali**] Per ogni $n \in \mathbb{N}$, sia $f_n(x) = x^n$ per ogni $x \in \mathbb{R}$. Allora f_n è derivabile in $\mathbb{R}$ e $f_n'(x) = nx^{n-1}$ per ogni $x \in \mathbb{R}$. Si può dimostrare ciò per induzione. Infatti, per $n = 1$, fissato $x_0 \in \mathbb{R}$, si ha che

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f_1(x) - f_1(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{x - x_0}{x - x_0} = 1\,;$$

per l'arbitrarietà di x_0, possiamo concludere che la funzione f_1 è derivabile in $\mathbb{R}$ e la sua derivata $f_1'(x) = 1$ per ogni $x \in \mathbb{R}$.

Supponiamo ora che la funzione f_n sia derivabile in $\mathbb{R}$ e che la sua derivata sia $f_n'(x) = nx^{n-1}$ per ogni $x \in \mathbb{R}$.

Fissato $x_0 \in \mathbb{R}$, per l'ipotesi induttiva, usando la (5.1.2) deduciamo che

$$Df_{n+1}(x_0) = D(f_1 \cdot f_n)(x_0) = f_n(x_0) + f_1(x_0) \cdot n f_{n-1}(x_0) = x_0^n + x_0(n x_0^{n-1}) = (n+1)x_0^n.$$

Per l'arbitrarietà di x_0, la funzione f_{n+1} è allora derivabile in $\mathbb{R}$ e la sua derivata è $f_{n+1}'(x) = (n+1)x^n$ per ogni $x \in \mathbb{R}$.

3. [**Polinomi e funzioni razionali**] Dal Teorema 5.1.7 deduciamo anche che:

   - (a) ogni polinomio $P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$ è derivabile in $\mathbb{R}$ e la sua derivata è data da

$$P'(x) = na_n x^{n-1} + (n-1)a_{n-1}x^{n-2} + \ldots + a_1\,;$$

- (b) ogni funzione razionale, cioè del tipo

$$f(x) = \frac{a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0}{b_m x^m + b_{m-1}x^{m-1} + \ldots + b_1 x + b_0},$$

  è derivabile in $\mathbb{R} \setminus \{x \in \mathbb{R} : \ b_m x^m + b_{m-1}x^{m-1} + \ldots + b_1 x + b_0 = 0\}$; in particolare, se $f(x) = \frac{1}{x^n}$, la sua derivata è $f'(x) = -\frac{n}{x^{n+1}}$ per ogni $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

4. **[Funzioni trigonometriche]** Sia $f(x) = \sin x$ per ogni $x \in \mathbb{R}$. Allora f è derivabile in $\mathbb{R}$ e $f'(x) = \cos x$ per ogni $x \in \mathbb{R}$. Infatti, fissato $x_0 \in \mathbb{R}$, dall'Esempio 4.1.12 risulta che

$$\begin{aligned} &\lim_{x\to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x\to x_0} \frac{\sin x - \sin x_0}{x - x_0} \\ &= \lim_{x\to x_0} \frac{2 \cdot \sin\frac{x-x_0}{2} \cdot \cos\frac{x+x_0}{2}}{x - x_0} = \lim_{x\to x_0} \frac{\sin\frac{x-x_0}{2}}{\frac{x-x_0}{2}} \cdot \cos\frac{x+x_0}{2} = \cos x_0 \,. \end{aligned}$$

   Per l'arbitrarietà di x_0, la tesi è dimostrata. Analogamente, se $f(x) = \cos x$ allora $f'(x) = -\sin x$; infatti, basta osservare che $\cos x = \sin(\frac{\pi}{2} - x)$ e dedurre dal Teorema di derivazione della funzione composta 5.1.8 che:

$$\begin{aligned} D\cos x &= D(\sin(\frac{\pi}{2} - x)) = D(\frac{\pi}{2} - x)\sin'(\frac{\pi}{2} - x) \\ &= -\sin'(\frac{\pi}{2} - x) = -\cos(\frac{\pi}{2} - x) = -\sin x. \end{aligned}$$

   La funzione $f(x) = \tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$ è derivabile in tutto il suo insieme di definizione e la sua derivata è

$$f'(x) = \frac{\cos x \cos x + \sin x \sin x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x.$$

5. **[Funzioni trigonometriche inverse]** La funzione $f(x) = \arcsin x$ è derivabile in $]-1, +1[$ e la sua derivata è data da

$$\forall x \in]-1, +1[\quad f'(x) \overset{y=\arcsin x}{=} \frac{1}{\cos y} = \frac{1}{\sqrt{1 - \sin^2 y}} = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}\,;$$

   in modo analogo si dimostra che

$$\forall x \in]-1, +1[\quad (\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}\,,$$

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad (\arctan x)' = \frac{1}{1 + x^2}\,.$$

6. **[Esponenziali]** Si dimostra facilmente usando il limite notevole 9 nel Paragrafo 4.3 che le funzioni esponenziali sono derivabili in $\mathbb{R}$ e che, posto $f(x) = a^x$, vale la relazione $f'(x) = a^x \log a$. Infatti,
$$\lim_{h\to 0} \frac{a^{x+h} - a^x}{h} = a^x \lim_{h\to 0} \frac{\mathrm{e}^{h\log a} - 1}{h} = a^x \log a.$$

7. **[Logaritmi]** Si dimostra facilmente usando il limite notevole 8 nel Paragrafo 4.3 che la funzione $f(x) = \log_a x$ $(0 < a \neq 1)$ è derivabile in $]0, +\infty[$ e la sua derivata è data da $1/(x \log a)$. Infatti,
$$\lim_{h\to 0} \frac{\log_a(x+h) - \log_a(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\log_a(1 + h/x)}{h} = \frac{1}{x\log a}.$$

8. **[Funzioni iperboliche]** Si verifica immediatamente dalla definizione che
$$D(\sinh x) = \cosh x, \quad D(\cosh x) = \sinh x, \quad D(\tanh x) = \frac{1}{\cosh^2 x}.$$

9. **[Funzioni iperboliche inverse]** La funzione $f(x) = \operatorname{sett}\sinh x$ è derivabile in $\mathbb{R}$ e la sua derivata è data da
$$\forall x \in \mathbb{R} \quad f'(x) \overset{y=\operatorname{sett}\sinh x}{=} \frac{1}{\cosh y} = \frac{1}{\sqrt{1+\sinh^2 y}} = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\,;$$
in modo analogo si dimostra che
$$\forall x \in]1, +\infty[\quad (\operatorname{sett}\cosh x)' = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}\,,$$
$$\forall x \in]-1, 1[\quad (\operatorname{sett}\tanh x)' = \frac{1}{1-x^2}\,,$$
come si può verificare anche usando le espressioni per le funzioni iperboliche inverse trovate nel capitolo 1.

10. **[Potenze reali]** Dal Teorema 5.1.8 e dagli esempi precedenti deduciamo che la funzione $f(x) = x^\alpha = \mathrm{e}^{\alpha\log x}$ $(\alpha \in \mathbb{R})$ è derivabile nel suo insieme di definizione $]0. + \infty[$ e la sua derivata è data da
$$\forall x \in]0, +\infty[\ f'(x) = \mathrm{e}^{\alpha\log x} \cdot \alpha\frac{1}{x} = x^\alpha \cdot \alpha\frac{1}{x} = \alpha x^{\alpha-1}\,.$$
Notiamo che la formula precedente è stata ottenuta in vari passi e con vari metodi, partendo dal caso $\alpha \in \mathbb{N}$, ma in definitiva è valida per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$.

Concludiamo questo paragrafo introducendo la

Definizione 5.1.12 (Derivate successive) *Siano $f\colon I \to \mathbb{R}$ una funzione derivabile nell'intervallo aperto I ed $f'\colon I \to \mathbb{R}$ la sua derivata prima.*

Se la funzione derivata f' è a sua volta derivabile in $x_0 \in I$, si dice che f ammette derivata seconda in x_0 *e tale derivata seconda si indica con $D^2 f(x_0)$ oppure con $f''(x_0)$. In particolare, risulta che*

$$f''(x_0) = (f')'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x) - f'(x_0)}{x - x_0}\,.$$

Se tale derivata seconda esiste in ogni punto di I, si dice che f è derivabile 2 volte in I *e la funzione così definita*

$$f''\colon I \to \mathbb{R}, \quad x \in I \to f''(x)\,,$$

è detta derivata seconda di f.

In modo analogo, si definiscono le derivate successive di f. Dato $k \in \mathbb{N}$, si dice che f ammette derivata k–esima in $x_0 \in I$ *se f è derivabile $(k-1)$ volte in I e la sua derivata $f^{(k-1)}$ di ordine $(k-1)$ è derivabile in x_0. Tale derivata k–esima si indica con $D^k f(x_0)$ o con $f^{(k)}(x_0)$. In particolare, $f^{(k)}(x_0) = (f^{(k-1)})'(x_0)$. Se tale derivata esiste in ogni punto di I, si dice che f è* derivabile k volte in I *e la funzione così definita*

$$f^{(k)}\colon I \to \mathbb{R}, \quad x \in I \to f^{(k)}(x)\,,$$

è detta derivata k–esima di f. *Se inoltre $f^{(k)}$ è una funzione continua in I allora si scrive $f \in C^k(I)$ e si dice che f è* di classe C-k in I. *Se f è di classe C^k in I per ogni $k \in \mathbb{N}$ allora si scrive $f \in C^\infty(I)$ e si dice che f è* di classe C-infinito in I.

Ad esempio, ogni polinomio $P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$ è derivabile k volte in $\mathbb{R}$ per ogni $k \in \mathbb{N}$ e $P''(x) = n(n-1)a_n x^{n-2} + (n-1)(n-2)a_{n-1}x^{n-3} + \ldots + 2a_2$, $P^{(3)}(x) = n(n-1)(n-2)a_n x^{n-3} + (n-1)(n-2)(n-3)a_{n-1}x^{n-4} + \ldots + 6a_3$, …, $P^{(n)}(x) = n!a_n$, $P^{(k)}(x) = 0$ per ogni $k > n$.

5.2 Proprietà delle funzioni derivabili

Diamo ora i teoremi fondamentali del calcolo differenziale per funzioni reali di una variabile reale. Questi risultati sono un utile strumento per la ricerca dei massimi e minimi e per lo studio qualitativo del grafico delle funzioni. Oltre agli estremi assoluti introdotti nella Definizione 1.2.6, la cui esistenza è discussa nel Paragrafo 4.5, definiamo gli estremi *relativi* di una funzione.

Definizione 5.2.1 (Estremi relativi) *Siano $X \subset \mathbb{R}$, $x_0 \in X$ e $f\colon X \to \mathbb{R}$ una funzione. Diciamo che f ha un* massimo relativo *in x_0 se esiste $\delta > 0$ tale che*

$$\forall x \in X \cap]x_0 - \delta, x_0 + \delta[: \qquad f(x) \le f(x_0);$$

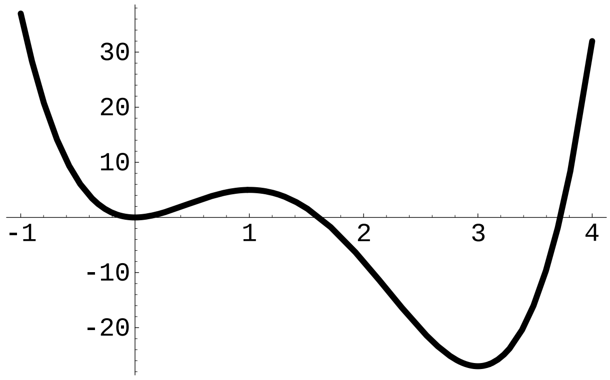


Figura – 5.1: Massimi e minimi relativi.

diciamo che f ha un minimo relativo *in x_0 se esiste $\delta > 0$ tale che*

$$\forall x \in X \cap]x_0 - \delta, x_0 + \delta[: \qquad f(x) \geq f(x_0).$$

Se f ha un massimo o un minimo relativo in x_0, allora diciamo che ha un estremo relativo *in x_0. Se le due diseguaglianze precedenti valgono per $x \neq x_0$ con $<$ (risp. $>$) anziché $\leq$ (risp. $\geq$) diciamo che l'estremo relativo è* proprio.

Osservazione 5.2.2 Ricordiamo che se $f\colon X \to \mathbb{R}$ ammette massimo (o minimo) in X allora esiste $x_1 \in X$ (esiste $x_2 \in X$) tale che, per ogni $x \in X$, $f(x) \leq f(x_1)$ ($f(x) \geq f(x_2)$). In tal caso, si dice che f ha un *massimo assoluto* in x_1 (un *minimo assoluto* in x_2). È chiaro che se $x_1 \in X$ è un punto di massimo assoluto (se $x_2 \in X$ è un punto di minimo assoluto) per f, allora x_1 è un punto di massimo relativo (x_2 è un punto di minimo relativo) per f. Il viceversa non è vero. Ad esempio, la funzione $f(x) = 3x^4 - 16x^3 + 18x^2$, con $x \in [-1, 4]$, ha un massimo relativo nel punto 1 e $f(1) = 5$, mentre ha un massimo assoluto (e quindi relativo) nel punto -1 e $f(-1) = 37$. Inoltre, f ha un minimo relativo nel punto 0 e $f(0) = 0$, mentre ha un minimo assoluto (e quindi relativo) nel punto 3 e $f(3) = -27$.

Osserviamo anche che una funzione f può ammettere diversi massimi relativi e minimi relativi, ma il massimo assoluto e il minimo assoluto (se esistono) sono unici. Infatti, la funzione precedente ammette come massimi relativi $f(1) = 5$ e $f(-1) = 37$ e come minimi relativi $f(0) = 0$ e $f(3) = -27$.

Il seguente risultato fornisce un criterio per determinare i punti dove una funzione f potrebbe assumere un estremo relativo.

Teorema 5.2.3 (Teorema di Fermat) *Siano $I \subset \mathbb{R}$ un intervallo, $x_0 \in I$ un punto interno, ed $f\colon I \to \mathbb{R}$ una funzione. Se x_0 è un punto di estremo relativo di f ed f è derivabile in x_0, allora $f'(x_0) = 0$.*

Dim. Supponiamo che x_0 sia un punto di massimo relativo per f. Allora esiste $\delta > 0$ tale che

$$\forall x \in]x_0 - \delta, x_0 + \delta[\subset I: \qquad f(x) \leq f(x_0).$$

Poiché f è derivabile in x_0, ne segue che

$$\forall x \in]x_0 - \delta, x_0[: \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geq 0 \quad \Rightarrow \lim_{x \to x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0) \geq 0\,,$$

$$\forall x \in]x_0, x_0 + \delta[: \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \leq 0 \quad \Rightarrow \lim_{x \to x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0) \leq 0\,.$$

Di conseguenza, $f'(x_0) = 0$. QED

Vista l'importanza che avranno nel seguito i punti in cui si annulla la derivata prima di una funzione, introduciamo una speciale locuzione per indicarli.

Definizione 5.2.4 *Sia $f : I \to \mathbb{R}$ derivabile in I; i punti interni di I in cui si annulla la derivata f' di f si dicono* punti stazionari *o* punti critici *di f.*

Esempio 5.2.5 Consideriamo il problema di stabilire l'esistenza del massimo e del minimo assoluti della funzione $f(x) = \sin x - x \cos x$ nell'intervallo $[0, \pi]$, e, nel caso che esistano, di trovarli e di calcolare i punti di estremo.

> *Per risolvere problemi di questo tipo è sufficiente verificare se la funzione data è continua nell'intervallo chiuso e limitato assegnato. In tal caso, il Teorema di Weierstrass 4.5.1 ci assicura l'esistenza del massimo e del minimo assoluti.*

Poiché la funzione data è continua nell'intervallo chiuso e limitato $[0, \pi]$ possiamo concludere che essa ammette massimo e minimo assoluti in tale intervallo. Adesso rimane il problema di determinare tali valori.

> *Per determinare tali valori, osserviamo che f può assumere il massimo e minimo assoluti o agli estremi dell'intervallo oppure all'interno dell'intervallo. Se f è derivabile nell'interno dell'intervallo, per il Teorema di Fermat 5.2.3 gli eventuali punti interni di massimo e minimo relativo annullano la sua derivata. Quindi è sufficiente risolvere l'equazione $f'(x) = 0$ e calcolare il valore di f su tutte le soluzioni di questa equazione che sono interne all'intervallo. Infine, basta calcolare il valore di f agli estremi dell'intervallo e confrontare tutti i valori così ottenuti. Osserviamo che se la funzione da studiare ha qualche punto in cui non è derivabile, allora bisogna calcolare il valore della funzione anche in questi punti e fare il confronto con gli altri valori ottenuti.*

Poiché la funzione data è derivabile in $]0, \pi[$ risolviamo la seguente equazione

$$\cos x - \cos x + x \sin x = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = 0 \quad \text{o} \quad \sin x = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\,.$$

Dato che tale equazione non ha alcuna soluzione all'interno dell'intervallo $[0, \pi]$, possiamo concludere che la funzione $f(x) = \sin x - x \cos x$ assume il massimo e il minimo assoluti agli estremi dell'intervallo. Precisamente, $f(0) = 0$ è il minimo assoluto e $f(\pi) = \pi$ è il massimo assoluto di f in $[0, \pi]$.

Osservazione 5.2.6 Osserviamo che il Teorema di Fermat 5.2.3 rappresenta solo una condizione necessaria affinché un punto interno all'intervallo sia di estremo relativo. Infatti, la funzione $f(x) = x^3$ non ammette alcun punto di estremo relativo in $\mathbb{R}$, ma la sua derivata $f'(x) = 3x^2$ si annulla in 0. Il Teorema di Fermat quindi afferma che esiste la seguente relazione tra i punti di estremo relativo e i punti stazionari di una funzione:

$$x_0 \text{ punto di estremo relativo } \Rightarrow \quad x_0 \text{ punto stazionario.}$$

Il viceversa non è vero in generale come mostra l'esempio appena dato.

Diamo adesso un risultato (e sue conseguenze) che ci assicura l'esistenza di almeno un punto stazionario.

Teorema 5.2.7 (Teorema di Rolle) *Sia $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ una funzione. Se valgono le seguenti proprietà*

1. *f è continua in $[a,b]$,*
2. *f è derivabile in $]a,b[$,*
3. *$f(a) = f(b)$,*

allora esiste $x_0 \in]a,b[$ tale che $f'(x_0) = 0$.

Dim. Per la continuità di f in $[a,b]$ possiamo applicare il Teorema di Weierstrass 4.5.1 e così concludere che f ammette massimo e minimo in $[a,b]$, cioè esistono x_1, $x_2 \in [a,b]$ tali che

$$M = f(x_1) = \max_{x\in[a,b]} f(x)\,, \qquad m = f(x_2) = \min_{x\in[a,b]} f(x)\,.$$

Si possono verificare due casi: x_1 e x_2 coincidono entrambi con uno degli estremi, oppure almeno uno tra x_1 e x_2 è interno all'intervallo $[a,b]$.

Se sia x_1 che x_2 coincidono con uno degli estremi, ad esempio $x_1 = a$ e $x_2 = b$, allora per l'ipotesi 3.

$$M = f(x_1) = f(a) = f(b) = f(x_2) = m$$

e questo significa che la funzione f è costante in $[a,b]$ e quindi $f'(x) = 0$ per ogni $x \in [a,b]$.

Se almeno uno tra x_1 e x_2 è interno all'intervallo $[a,b]$, ad esempio $x_1 \in]a,b[$, allora x_1 è un punto interno di estremo relativo per f e quindi, per il Teorema di Fermat 5.2.3, $f'(x_1) = 0$. $\boxed{QED}$

Dal Teorema di Rolle si deducono facilmente i seguenti risultati.

Teorema 5.2.8 (Teorema di Cauchy) *Siano f, $g\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ due funzioni continue in $[a,b]$ e derivabili in $]a,b[$. Allora esiste $x_0 \in]a,b[$ tale che*

$$g'(x_0)[f(b) - f(a)] = f'(x_0)[g(b) - g(a)]\,.$$

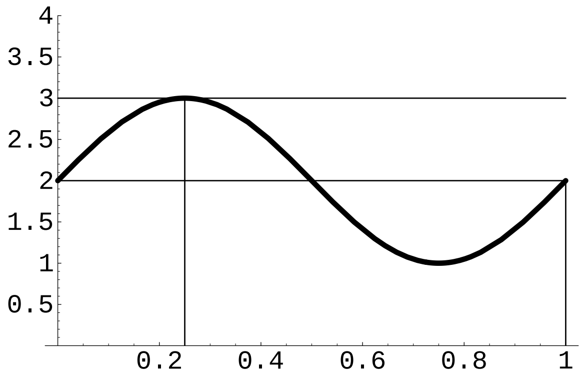


Figura – 5.2: Punto x_1 con tangente orizzontale.

DIM. Sia $h\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ la funzione così definita

$$\forall x \in [a,b] \quad h(x) = g(x)[f(b) - f(a)] - f(x)[g(b) - g(a)]\,.$$

Per le ipotesi su f e g possiamo affermare che la funzione h è continua in $[a,b]$ e derivabile in $]a,b[$. Inoltre, si verifica facilmente che $h(a) = h(b)$. Quindi, per il Teorema di Rolle 5.2.7 esiste $x_0 \in]a,b[$ tale che

$$\begin{aligned} h'(x_0) = 0 \quad &\Leftrightarrow \quad g'(x_0)[f(b) - f(a)] - f'(x_0)[g(b) - g(a)] = 0 \\ &\Leftrightarrow \quad g'(x_0)[f(b) - f(a)] = f'(x_0)[g(b) - g(a)]\,. \end{aligned}$$

QED

Teorema 5.2.9 (Teorema di Lagrange) *Sia $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ una funzione continua in $[a,b]$ e derivabile in $]a,b[$; allora esiste $x_0 \in]a,b[$ tale che*

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(x_0)\,.$$

DIM. Basta applicare il Teorema di Cauchy 5.2.8, con $g(x) = x$ per ogni $x \in [a,b]$. QED

Osservazioni 5.2.10

1. Il teorema di Lagrange ha un'interessante interpretazione geometrica: infatti il rapporto $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ è il coefficiente angolare della retta r che congiunge i punti estremi del grafico di f su $[a,b]$, cioè i punti $(a, f(a))$ e $(b, f(b))$, quindi il teorema afferma che c'è un punto x_0 in cui la retta tangente al grafico è parallela ad r.

2. Osserviamo che il Teorema di Rolle (e quindi i Teoremi di Cauchy e di Lagrange) non è più vero se una (e basta una) delle ipotesi non è soddisfatta. Facciamo qualche esempio.

(a) Se una funzione f è continua in un intervallo $[a,b]$, assume agli estremi di $[a,b]$ lo stesso valore, ma non è derivabile in ogni punto di $]a,b[$, non possiamo affatto concludere che la sua derivata f' si annulla in qualche punto di $]a,b[$. Infatti, la funzione $f(x)=|x|$ è continua in $[-1,1]$, $f(1)=1=f(-1)$, è derivabile in $]-1,1[\setminus\{0\}$, ma la sua derivata f' (dove esiste), che è data da

$$f(x)=\begin{cases} 1 & \text{se } x\in]0,1[\\ -1 & \text{se } x\in]-1,0[\,, \end{cases}$$

non si annulla in alcun punto di $]-1,1[\setminus\{0\}$.

(b) Se una funzione f è continua in un intervallo $[a,b]$ e derivabile in $]a,b[$, ma $f(a)\neq f(b)$, non possiamo affatto concludere che la sua derivata f' si annulla in qualche punto di $]a,b[$. Infatti, la funzione $f(x)=1/x$ è continua in $[1,2]$, derivabile in $]1,2[$ e $f(1)=1\neq f(2)=1/2$, ma la sua derivata $f'(x)=-1/x^2$ non si annulla in alcun punto di $]1,2[$.

Diamo adesso alcune conseguenze del Teorema di Lagrange 5.2.9.

Proposizione 5.2.11

1. *Sia $f\colon[a,b]\to\mathbb{R}$ una funzione continua in $[a,b]$ e derivabile in $]a,b[$. Se $f'\equiv 0$ in $]a,b[$, allora f è una funzione costante in $[a,b]$.*

2. *Siano $f,\ g\colon[a,b]\to\mathbb{R}$ due funzioni continue in $[a,b]$ e derivabili in $]a,b[$. Se $f'\equiv g'$ in $]a,b[$, allora $f-g$ è una funzione costante in $[a,b]$.*

DIM. 1. Osserviamo che, per ogni $x\in]a,b]$, la funzione f è continua in $[a,x]$ e derivabile in $]a,x[$. Si può così applicare il Teorema di Lagrange concludendo che esiste $x_0\in]a,x[$ tale che $\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=f'(x_0)$. Poiché $f'(x_0)=0$, ne segue che $f(x)-f(a)=0$, cioè $f(x)=f(a)$.
2. segue applicando il risultato 1. alla funzione $h=f-g$. QED

Osservazione 5.2.12 Osserviamo che la Proposizione 5.2.11 non è vera su insiemi più generali degli intervalli. Infatti, la funzione f, data da

$$f(x)=\begin{cases} 1 & \text{se } 0<x<1 \\ 2 & \text{se } 2<x<3\,, \end{cases}$$

è continua e derivabile in $]0,1[\cup]2,3[$ e la sua derivata $f'\equiv 0$ in $]0,1[\cup]2,3[$, ma f non è costante in tale insieme.

Teorema 5.2.13 (Test di monotonia) *Sia $f\colon[a,b]\to\mathbb{R}$ una funzione continua in $[a,b]$ e derivabile in $]a,b[$. Allora valgono le seguenti proprietà.*

1. *Se per ogni $x\in]a,b[$ $f'(x)>0$ allora f è strettamente crescente in $[a,b]$.*

2. *Se per ogni $x\in]a,b[$ $f'(x)<0$ allora f è strettamente decrescente in $[a,b]$.*

DIM. Dimostriamo solo 1. Fissati x_1, $x_2 \in [a,b]$ con $x_1 < x_2$, osserviamo che la funzione f è continua in $[x_1,x_2]$ e derivabile in $]x_1,x_2[$. Possiamo allora applicare il Teorema di Lagrange 5.2.9 per concludere che esiste $x_0 \in]x_1,x_2[$ tale che

$$\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} = f'(x_0)\,,$$

dove $f'(x_0) > 0$. Tenuto conto che $x_1 < x_2$, ne segue che $f(x_1) < f(x_2)$. Per l'arbitrarietà di x_1 e x_2, abbiamo dimostrato che f è strettamente crescente in $[a,b]$.

In modo analogo si dimostra la 2. QED

In modo analogo si dimostra anche

Teorema 5.2.14 (Criterio di monotonia) *Sia $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ una funzione continua in $[a,b]$ e derivabile in $]a,b[$. Allora valgono le seguenti proprietà.*

1. *$\forall x \in]a,b[\ f'(x) \geq 0 \Leftrightarrow f$ è crescente in $[a,b]$.*
2. *$\forall x \in]a,b[\ f'(x) \leq 0 \Leftrightarrow f$ è decrescente in $[a,b]$.*

Ricordiamo che una funzione è Lipschitziana (vedi Definizione 4.5.11.2) se ha rapporti incrementali limitati. Se consideriamo funzioni derivabili, tale condizione segue dalla limitatezza della derivata.

Teorema 5.2.15 *Sia $f : I \to \mathbb{R}$ una funzione continua nell'intervallo I e derivabile nei punti interni di I. Se la funzione derivata f' è limitata allora f è lipschitziana in I.*

DIM. Per ogni $x, x' \in I$ esiste x_0 punto interno ad I tale che

$$\left|\frac{f(x')-f(x)}{x'-x}\right| = |f'(x_0)| \leq \sup_I |f'(x)|,$$

e quindi, posto $L = \sup_I |f'(x)|$, risulta $|f(x')-f(x)| \leq L|x'-x|$. QED

Un'altra utile proprietà è espressa nella seguente proposizione.

Proposizione 5.2.16 *Sia $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ continua in $[a,b]$ e derivabile in $]a,b[$. Se esiste finito il $\lim\limits_{x\to b^-} f'(x) = \ell$, allora f è derivabile a sinistra in b e $f'_s(b) = \ell$.*

DIM. Fissata una successione (x_n) in $[a,b]$ che converge a b, per il Teorema di Lagrange per ogni n esiste $t_n \in]x_n,b[$ tale che

$$\frac{f(b)-f(x_n)}{b-x_n} = f'(t_n),$$

sicché

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{f(b)-f(x_n)}{b-x_n} = \lim_{n\to+\infty} f'(t_n) = \ell.$$

Poiché questo vale per ogni successione $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ come sopra, la tesi è provata. QED

Inoltre, usando i Test di monotonia 5.2.13 è facile dedurre che vale

Teorema 5.2.17 (Test della derivata prima) *Siano* $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ *una funzione continua in* $[a,b]$ *e derivabile in* $]a,b[$ *e* $x_0 \in]a,b[$ *un punto stazionario di* f*. Allora valgono le seguenti proprietà.*

1. $\exists \delta > 0$ *tale che* $\forall x \in]x_0 - \delta, x_0[\ f'(x) \geq 0$ *e* $\forall x \in]x_0, x_0 + \delta[\ f'(x) \leq 0$ *allora* x_0 *è un punto di massimo relativo di* f*.*

2. $\exists \delta > 0$ *tale che* $\forall x \in]x_0 - \delta, x_0[\ f'(x) \leq 0$ *e* $\forall x \in]x_0, x_0 + \delta[\ f'(x) \geq 0$ *allora* x_0 *è un punto di minimo relativo di* f*.*

3. $\exists \delta > 0$ *tale che* $\forall x \in]x_0 - \delta, x_0 + \delta[\ f'(x) \leq 0$ *(o* $f'(x) \geq 0$*) allora* x_0 *non è nè un punto di massimo nè di minimo relativo di* f*.*

Osserviamo che i punti del teorema precedente si possono utilizzare anche se la funzione f è continua ma non derivabile nel punto x_0.

Esempio 5.2.18 Consideriamo il problema di determinare gli intervalli di monotonia e stabilire l'esistenza dei massimi e minimi assoluti e relativi della funzione $f(x) = \mathrm{e}^{\frac{x^2}{x-1}}$ nel suo insieme di definizione.

> *Per risolvere problemi di questo tipo è sufficiente verificare che la funzione data sia derivabile nel suo insieme di definizione. In tal caso, per i Test di monotonia e della derivata prima lo studio del segno della sua derivata permette di individuare gli intervalli di monotonia e gli eventuali estremi relativi. Infine, tramite lo studio del comportamento della funzione agli estremi del suo insieme di definizione si può stabilire se la funzione data ammetta o no massimo o minimo assoluti.*

La funzione data è definita e derivabile in $X =]-\infty, 1[\cup]1, +\infty[$. La sua derivata f' è data da

$$f'(x) = \mathrm{e}^{\frac{x^2}{x-1}} \frac{2x(x-1) - x^2}{(x-1)^2} = \mathrm{e}^{\frac{x^2}{x-1}} \frac{x^2 - 2x}{(x-1)^2}$$

così che $f'(x) \geq 0$ se e solo se $x^2 - 2x \geq 0$ se e solo se $x \leq 0$ o $x \geq 2$. Allora f è strettamente crescente in $]-\infty, 0[$ e in $]2, +\infty[$, mentre è strettamente decrescente in $]0, 1[$ e in $]1, 2[$. Inoltre 0 è un punto di massimo relativo e $f(0) = 1$, mentre 2 è un punto di minimo relativo $f(2) = \mathrm{e}^4$. Possiamo già concludere che f non ammette massimo e minimo assoluti dato che $f(0) = 1 < \mathrm{e}^4 = f(2)$. In ogni modo, osserviamo che $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$, $\lim_{x\to-\infty} f(x) = 0$, $\lim_{x\to 1^-} f(x) = 0$ e $\lim_{x\to 1^+} f(x) = +\infty$.

Ne segue che $\sup_X f = +\infty$ e $\inf_X f = 0$.

Il Teorema di Cauchy permette di dimostrare il seguente risultato che è un utile strumento per il calcolo di limiti che si presentano sotto la forma indeterminata $0/0$ o ∞/∞.

Teorema 5.2.19 (Teorema di de l'Hôpital) *Siano f, $g\colon]a,b[\to \mathbb{R}$ due funzioni derivabili in $]a,b[$. Se $g'(x)\neq 0$ in un intorno destro di a e*

1. $\lim\limits_{x\to a^+} f(x) = \lim\limits_{x\to a^+} g(x) = 0$ *oppure* $\pm\infty$,
2. $\lim\limits_{x\to a^+} \dfrac{f'(x)}{g'(x)} = \ell$,

allora esiste

$$\lim_{x\to a^+} \frac{f(x)}{g(x)} = \ell\,.$$

DIM. Diamo la dimostrazione solo nel caso in cui $\lim\limits_{x\to a^+} f(x) = \lim\limits_{x\to a^+} g(x) = 0$. Allora possiamo estendere per continuità f e g nel punto a ponendo $f(a) = g(a) = 0$. In tal caso, fissata una successione $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset]a,b[$ convergente ad a, risulta che, per ogni $n\in\mathbb{N}$, f e g soddisfanno le ipotesi del Teorema di Cauchy 5.2.8 nell'intervallo $[a,x_n]$ e quindi esiste $t_n \in]a,x_n[$ tale che

$$\begin{aligned} g'(t_n)[f(x_n)-f(a)] = f'(t_n)[g(x_n)-g(a)] \quad &\Leftrightarrow \quad g'(t_n)f(x_n) = f'(t_n)g(x_n)\\ &\Leftrightarrow \quad \frac{f(x_n)}{g(x_n)} = \frac{f'(t_n)}{g'(t_n)}\,. \end{aligned}$$

Ora $t_n \xrightarrow{n} a^+$ (dato che $t_n \in]a,x_n[$ e $x_n \xrightarrow{n} a^+$) così che $\frac{f'(t_n)}{g'(t_n)} \xrightarrow{n} \ell$ per il Teorema di caratterizzazione dei limiti con successioni 4.1.8 e di conseguenza anche $\frac{f(x_n)}{g(x_n)} \xrightarrow{n} \ell$. Per l'arbitrarietà di $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la tesi segue grazie al Teorema di caratterizzazione dei limiti con successioni 4.1.8. $\boxed{QED}$

Esempi 5.2.20 Applichiamo adesso il Teorema di de l'Hôpital per calcolare alcuni limiti notevoli.

1. $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x}{\mathrm{e}^{\beta x}} = 0$ per ogni $\beta > 0$; infatti

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{(x)'}{(\mathrm{e}^{\beta x})'} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{\beta\,\mathrm{e}^{\beta x}} = 0 \quad \Rightarrow \quad \lim_{x\to+\infty} \frac{x}{\mathrm{e}^{\beta x}} = 0\,.$$

   Questo risultato si generalizza subito come segue

$$\forall\alpha,\ \beta>0 \qquad \lim_{x\to+\infty} \frac{x^\alpha}{\mathrm{e}^{\beta x}} = \lim_{x\to+\infty} \left(\frac{x}{\mathrm{e}^{(\beta/\alpha)x}}\right)^\alpha = 0\,.$$

2. Da 1. segue $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{|\log_a x|^\alpha}{x^\beta} = 0$ per ogni α, $\beta > 0$ e $0 < a \neq 1$ (basta porre $t = \log_a x$ così che $x = a^t$).

Osservazioni 5.2.21

1. Anzitutto, osserviamo esplicitamente che il Teorema 5.2.19 vale anche se $\ell = \pm\infty$.

2. Il teorema continua a valere se $a = -\infty$ oppure se si considera il limite per $x \to b^-$, con $b \in \mathbb{R}$ o $b = +\infty$, e anche se si considera il limite per $x \to x_0$ con x_0 un qualsiasi punto dell'intervallo $]a, b[$.

3. Il teorema di de l'Hôpital può essere usato anche nel calcolo di limiti che si presentano nella forma indeterminata $\infty - \infty$ o $0 \cdot \infty$.

   Supponiamo che si voglia calcolare il $\lim_{x\to a^+} [f(x) + g(x)]$, dove $\lim_{x\to a^+} f(x) = +\infty$ e $\lim_{x\to a^+} g(x) = -\infty$. Allora basta porre la funzione $f + g$ nella seguente forma

$$f(x) + g(x) = \frac{\frac{1}{g(x)} + \frac{1}{f(x)}}{\frac{1}{f(x)g(x)}}$$

   e poi applicare il Teorema di de l'Hôpital alle funzioni $\frac{1}{g(x)} + \frac{1}{f(x)}$ e $\frac{1}{f(x)g(x)}$. Ad esempio

$$\lim_{x\to 0^+} \left[\frac{1}{\sin x} - \frac{2}{x}\right] = \lim_{x\to 0^+} \frac{x - 2\sin x}{x \sin x};$$

   applicando il Teorema 5.2.19 otteniamo

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{(x - 2\sin x)'}{(x \sin x)'} = \lim_{x\to 0^+} \frac{1 - 2\cos x}{\sin x + x\cos x} = -\infty$$

   e quindi

$$\lim_{x\to 0^+} \left[\frac{1}{\sin x} - \frac{2}{x}\right] = -\infty\,.$$

   Supponiamo ora che si voglia calcolare il $\lim_{x\to a^+} f(x)g(x)$ dove $\lim_{x\to a^+} f(x) = 0$ e $\lim_{x\to a^+} g(x) = \pm\infty$. Allora basta porre la funzione $f \cdot g$ in una delle seguenti forme

$$f(x)g(x) = \frac{f(x)}{\frac{1}{g(x)}} \qquad \text{o} \qquad f(x)g(x) = \frac{g(x)}{\frac{1}{f(x)}}$$

   e poi applicare il Teorema di de l'Hôpital alle funzioni $f(x)$ e $\frac{1}{g(x)}$ oppure alle funzioni $g(x)$ e $\frac{1}{f(x)}$. Ad esempio

$$\lim_{x\to 0^+} x\log x = \lim_{x\to 0^+} \frac{\log x}{\frac{1}{x}};$$

   applicando il Teorema 5.2.19 otteniamo

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{(\log x)'}{\left(\frac{1}{x}\right)'} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = 0$$

e quindi

$$\lim_{x\to 0^+} x\log x = 0\,.$$

4. Il procedimento indicato nel Teorema 5.2.19 si può iterare, a patto che le funzioni f e g siano derivabili più volte: se il rapporto f'/g' dà ancora luogo ad una forma indeterminata del tipo visto, si può procedere ad una ulteriore applicazione e studiare il limite del rapporto f''/g'', e così via.

5. Anche le forme indeterminate $1^\infty, 0^0, \infty^0$ si possono ricondurre alle precedenti utilizzando l'uguaglianza $f(x)^{g(x)} = \mathrm{e}^{g(x)\log f(x)}$. In questo caso infatti l'esponente presenta una forma indeterminata dei tipi visti ed allora basta prendere l'esponenziale del limite.

5.3 Funzioni convesse e concave

Introduciamo adesso una ulteriore proprietà delle funzioni reali di una variabile reale utile ai fini dello studio qualitativo del relativo grafico.

Definizione 5.3.1 *Siano $I \subset \mathbb{R}$ un intervallo e $f\colon I \to \mathbb{R}$ una funzione derivabile in I.*

1. *Diciamo che la funzione f è* convessa *in I se*

$$\forall x,\, x_0 \in I \quad f(x) \geq f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)\,. \tag{5.3.6}$$

2. *Diciamo che la funzione f è* concava *in I se*

$$\forall x,\, x_0 \in I \quad f(x) \leq f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)\,. \tag{5.3.7}$$

Se le due diseguaglianze precedenti valgono per $x \neq x_0$ con $>$ (risp. $<$) anziché $\geq$ (risp. $\leq$) diciamo che la funzione f è strettamente convessa *in I (risp.* strettamente concava *in I).*

Osservazioni 5.3.2

1. La diseguaglianza (5.3.6) significa che per ogni $x_0 \in I$ la retta tangente al grafico di f nel punto $(x_0, f(x_0))$ (di equazione $y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$) è al di sotto del grafico di f. Mentre, la diseguaglianza (5.3.7) significa che per ogni $x_0 \in I$ la retta tangente al grafico di f nel punto $(x_0, f(x_0))$ (di equazione $y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$) è al di sopra del grafico di f.

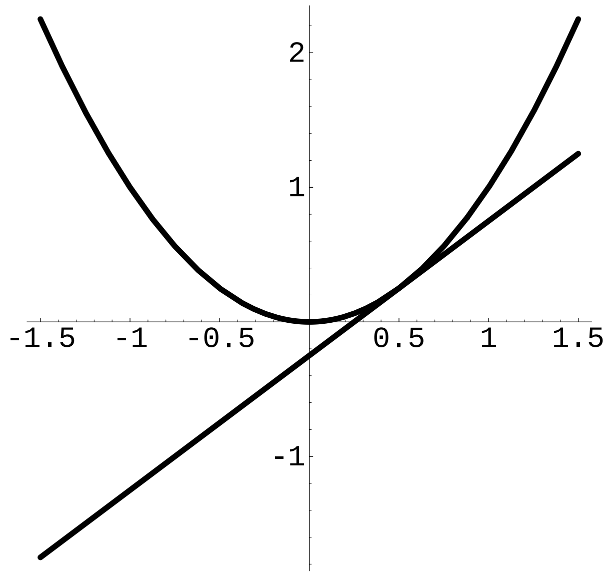


Figura – 5.3: Grafico di una funzione convessa e della retta tangente.

2. Si può dare la definizione di convessità e concavità anche nell'ambito della classe delle funzioni non derivabili. Precisamente, data una funzione $f\colon I \to \mathbb{R}$, diciamo che f è *convessa* (risp. *concava*) nell'intervallo I se il suo epigrafico (risp. ipografico)

$$\mathcal{E}_f := \{(x,y):\ x \in I, y \geq f(x)\} \text{ (risp. } \mathcal{D}_f := \{(x,y):\ x \in I, y \leq f(x)\})$$

è un sottoinsieme convesso di $\mathbb{R}^2$, cioè tale che per ogni coppia di suoi punti P, Q l'intero segmento di estremi P e Q appartiene ancora all'insieme dato. Se esplicitiamo questa condizione con P e Q sul grafico di f, la richiesta diviene che il segmento della retta secante il grafico di f che passa per P e Q sia contenuto in $\mathcal{E}_f$ (risp. $\mathcal{D}_f$). Ricordando l'equazione della secante (vedi Osservazione 5.1.6), ciò vuol dire che

$$f(x) \leq f(x_1) + \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}(x - x_1) \tag{5.3.8}$$

se $x_1 < x < x_2$. Poiché ogni punto x siffatto si può scrivere nella forma $x = tx_2 + (1-t)x_1$, con $t = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}$, la (5.3.8) diviene

$$f(tx_2 + (1-t)x_1) \leq tf(x_2) + (1-t)f(x_1),$$

condizione che dev'essere verificata per ogni coppia di punti $x_1, x_2 \in I$ e per ogni $t \in [0,1]$. Ovviamente, considerazioni analoghe valgono per le funzioni concave, e conducono alla diseguaglianza di concavità

$$f(tx_2 + (1-t)x_1) \geq tf(x_2) + (1-t)f(x_1).$$

Si può anche dimostrare che ogni funzione convessa (o concava) in un intervallo aperto è ivi continua e che la precedente definizione e la Definizione 5.3.1 sono equivalenti nell'ambito della classe delle funzioni derivabili.

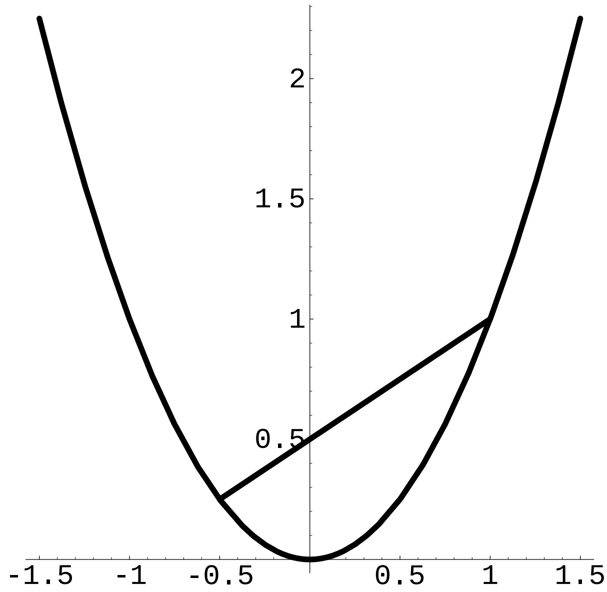


Figura – 5.4: Funzione x^2, $x_1 = -0.5$, $x_2 = 1$.

3. La funzione esponenziale a^x è un esempio di funzione strettamente convessa in $\mathbb{R}$, mentre la funzione logaritmo $\log_a x$ è un esempio di funzione strettamente concava in $]0, +\infty[$ se $a > 1$ (strettamente convessa in $]0, +\infty[$ se $0 < a < 1$).

Il segno della derivata seconda (qualora esista) permette di determinare gli intervalli di convessità e/o di concavità di una data funzione come il seguente risultato mostra.

Teorema 5.3.3 (Criterio di convessità/concavità) *Sia $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ una funzione derivabile in $[a, b]$ e 2 volte derivabile in $]a, b[$. Allora valgono le seguenti proprietà.*

1. *Le seguenti condizioni sono equivalenti:*

   (a) f è convessa in $[a, b]$

   (b) f' è crescente in $[a, b]$

   (c) $f''(x) \geq 0$ per ogni $x \in]a, b[$.

2. *Le seguenti condizioni sono equivalenti:*

   (a') f è concava in $[a, b]$

   (b') f' è decrescente in $[a, b]$

(c') $f''(x) \leq 0$ per ogni $x \in]a, b[$.

Dim. Dimostriamo solo il punto 1.
Per il Criterio di monotonia 5.2.14 applicato alla funzione derivata f' possiamo concludere che f' è crescente in $[a, b]$ se e solo se $f''(x) \geq 0$ per ogni $x \in]a, b[$.

Per completare la dimostrazione basta dimostrare che le affermazioni (a) e (b) sono equivalenti.

Dimostriamo prima che (a) implica (b). Fissati x_1, $x_2 \in [a, b]$ con $x_1 < x_2$ e posto x_0 uguale a x_1 e poi uguale a x_2 in (5.3.6), risulta che per ogni $x \in [a, b]$

$$f(x) \geq f(x_1) + f'(x_1)(x - x_1) \tag{5.3.9}$$

e

$$f(x) \geq f(x_2) + f'(x_2)(x - x_2)\,. \tag{5.3.10}$$

Scelto $x = x_2$ in (5.3.9) e $x = x_1$ in (5.3.10) otteniamo

$$f(x_2) \geq f(x_1) + f'(x_1)(x_2 - x_1) \quad \text{e} \quad f(x_1) \geq f(x_2) + f'(x_2)(x_1 - x_2)\,.$$

Sommando membro a membro, deduciamo che

$$\begin{aligned}
&f(x_2) + f(x_1) \geq f(x_1) + f'(x_1)(x_2 - x_1) + f(x_2) + f'(x_2)(x_1 - x_2) \\
&\Leftrightarrow \ 0 \geq f'(x_1)(x_2 - x_1) + f'(x_2)(x_1 - x_2) \\
&\Leftrightarrow \ [f'(x_2) - f'(x_1)] \cdot (x_2 - x_1) \geq 0\,.
\end{aligned}$$

Dato che $x_1 < x_2$, ne segue che $f'(x_1) \leq f'(x_2)$.

Dimostriamo infine che (b) implica (a). Fissati x, $x_0 \in [a, b]$ con $x \neq x_0$, per il Teorema di Lagrange 5.2.9 esiste un punto x_1 interno all'intervallo di estremi x_0 e x tali che

$$f(x) - f(x_0) = f'(x_1)(x - x_0) \tag{5.3.11}$$

Se $x > x_0$, anche $x_1 > x_0$ e quindi $f'(x_1) \geq f'(x_0)$ per la monotonia di f'. Questo insieme a (5.3.11) implica che

$$f(x) - f(x_0) \geq f'(x_0)(x - x_0) \ \Leftrightarrow \ f(x) \geq f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)\,.$$

Se $x < x_0$, anche $x_1 < x_0$ e quindi $f'(x_1) \leq f'(x_0)$ per la monotonia di f'. Dato che $x - x_0 < 0$ questo insieme a (5.3.11) implica ancora che

$$f(x) - f(x_0) \geq f'(x_0)(x - x_0) \ \Leftrightarrow \ f(x) \geq f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)\,. \quad \boxed{QED}$$

Concludiamo questo paragrafo con la definizione di punto di flesso.

Definizione 5.3.4 *Siano $I \subset \mathbb{R}$ un intervallo, $x_0 \in I$ un punto interno ad I ed $f\colon I \to \mathbb{R}$ una funzione (derivabile in I). Diciamo che x_0 è un* punto di flesso *per f se esiste $\delta > 0$ tale che f è convessa (risp. concava) in $]x_0 - \delta, x_0[(\subset I)$ e concava (risp. convessa) in $]x_0, x_0 + \delta[(\subset I)$.*

Per determinare gli eventuali punti di flesso di una data funzione è utile la seguente condizione necessaria.

Proposizione 5.3.5 *Siano $I \subset \mathbb{R}$ un intervallo aperto, $x_0 \in I$ e $f\colon I \to \mathbb{R}$ una funzione derivabile in I. Se x_0 è un punto di flesso per f e f è derivabile 2 volte in x_0, allora $f''(x_0) = 0$.*

5.4 Il metodo di Newton per il calcolo degli zeri di una funzione

In questo paragrafo presentiamo un metodo per la soluzione dell'equazione $f(x) = 0$ più efficiente del metodo di bisezione utilizzato nella dimostrazione del Teorema di esistenza degli zeri. Esponiamo questo metodo nel caso di una funzione $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, derivabile con $f'(x) > 0$ e convessa in $[a, b]$ con $f(a)\cdot f(b) < 0$. Dal Teorema 4.5.2 sappiamo che esiste un'unica soluzione $x_0 \in]a, b[$ dell'equazione $f(x) = 0$. Per la crescenza di f si ha $f(a) < 0$ e $f(b) > 0$. Scelto un punto x_1 con $f(x_1) > 0$ il metodo di Newton consiste nel trovare il punto x_2 di intersezione della retta tangente al grafico della funzione nel punto $(x_1, f(x_1))$ con l'asse delle ascisse. La retta tangente ha equazione

$$y = f(x_1) + f'(x_1)(x - x_1),$$

e incontra l'asse $y = 0$ nel punto

$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)}. \tag{5.4.12}$$

Per la convessità di f si ha

$$f(x_2) \geq f(x_1) + f'(x_1)(x_2 - x_1) = 0 = f(x_0).$$

Siccome f è strettamente crescente risulta $x_0 < x_2$ e, poichè $f(x_1) > 0$, $f'(x_1) > 0$, da (5.4.12) abbiamo $x_2 < x_1 \leq b$. Allora possiamo ripetere l'argomento a partire da x_2 ottenendo una successione definita per ricorrenza da

$$x_1 = b\,, \quad x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}. \tag{5.4.13}$$

Vale il seguente teorema.

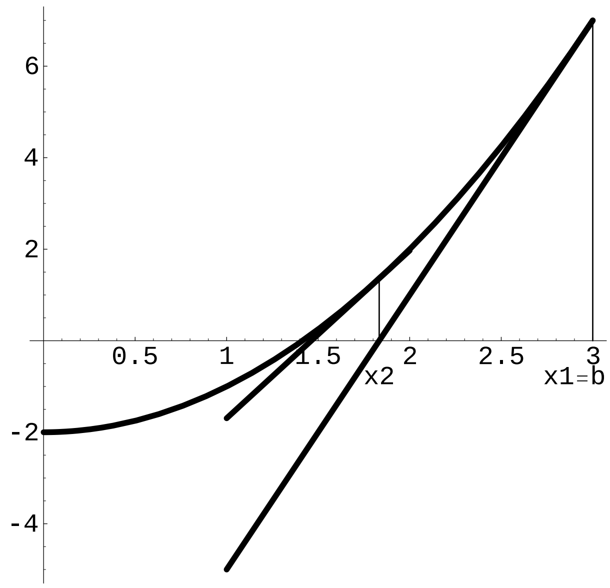


Figura – 5.5: Due iterazioni del metodo di Newton.

Teorema 5.4.1 (Metodo di Newton) *Sia f una funzione di classe $C^1([a,b])$, convessa e supponiamo $f(a)\cdot f(b) < 0$ e $f'(x) > 0$ per ogni $x \in [a,b]$. Allora la successione (x_n) definita per ricorrenza da (5.4.13) converge decrescendo all'unica soluzione x_0 dell'equazione $f(x) = 0$.*

Dim. Come per i primi due termini si dimostra che (x_n) è decrescente e $x_0 < x_n$ per ogni $n \in \mathbb{N}$. Allora esiste $\lim_n x_n = \bar{x} \in [x_0, b]$. Dalla (5.4.13), per la continuità di f e f' si ha

$$\bar{x} = \bar{x} - \frac{f(\bar{x})}{f'(\bar{x})},$$

da cui $f(\bar{x}) = 0$ e per l'unicità della soluzione $\bar{x} = x_0$. QED

5.5 Formula di Taylor

Dati una funzione $f\colon I \to \mathbb{R}$ e $x_0 \in I$ punto interno all'intervallo I, se f è derivabile in x_0 possiamo scrivere che, per ogni $x \in I$,

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \omega(x)(x - x_0)\,, \tag{5.5.14}$$

dove ω è una opportuna funzione definita in I tale che $\lim_{x\to x_0} \omega(x) = 0 = \omega(x_0)$ (vedere Osservazione 5.1.2.2). Quindi $\lim_{x\to x_0} \dfrac{\omega(x)(x - x_0)}{x - x_0} = 0$ e questo si esprime talvolta dicendo che la funzione $\omega(x)(x - x_0)$ è un infinitesimo di ordine superiore a $x - x_0$ per $x \to x_0$.

Introduciamo ora un simbolo (detto di Landau) che permette di descrivere in maniera sintetica questa situazione.

Definizione 5.5.1 (“o” piccolo) *Date due funzioni f e g definite in un intorno di x_0, si dice che*

$$f(x) = o(g(x)) \quad per \quad x \to x_0$$

e si legge “$f(x)$ è o piccolo di $g(x)$ per $x \to x_0$” se

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 0\,. \tag{5.5.15}$$

Se g è una funzione non nulla in $I \setminus \{x_0\}$ e $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = 0$, cioè g *è un infinitesimo per* $x \to x_0$, il fatto che $f(x) = o(g(x))$ per $x \to x_0$ implica che anche $f(x)$ tende a 0 per $x \to x_0$ ma più velocemente rispetto a $g(x)$. Ecco perché in tale caso si dice che $f(x)$ è *un infinitesimo di ordine superiore a $g(x)$ per $x \to x_0$*. Deve essere chiaro che il simbolo o non esprime una relazione funzionale, ma, data g, descrive una classe di funzioni, quelle f per cui vale (5.5.15). Le proprietà che stiamo per enunciare vanno pertanto intese in questo senso.

La relazione “o piccolo” adesso introdotta verifica le seguenti proprietà: per ogni $c \in \mathbb{R}$, con $c \neq 0$, e $\alpha \in \mathbb{R}^+$

1. $o(g) + o(g) = o(g)$,
2. $c \cdot o(g) = o(g)$,
3. $g_1 \cdot o(g_2) = o(g_1 \cdot g_2)$,
4. $o(g_1) \cdot o(g_2) = o(g_1 \cdot g_2)$,
5. $|o(g)|^\alpha = o(|g|^\alpha)$,
6. $o(g + o(g)) = o(g)$,
7. $o(o(g)) = o(g)$.

Indicata con $R_1(x; x_0)$ la funzione $\omega(x)(x - x_0)$ che compare in (5.5.14), possiamo scrivere

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + R_1(x; x_0)\,,$$

dove $R_1(x; x_0) = o(x - x_0)$ per $x \to x_0$. Questo significa che, se approssimiamo la funzione f con il polinomio di 1^o grado $f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$, cioè

$$f(x) \approx f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)\,,$$

commettiamo un errore $R_1(x; x_0) = o(x - x_0)$ che è un infinitesimo superiore a $(x - x_0)$ per $x \to x_0$, dato che

$$\lim_{x \to x_0} \frac{R_1(x; x_0)}{x - x_0} = 0\,.$$

Notiamo anzi che f è derivabile in x_0 se e solo se esiste $a \in \mathbb{R}$ tale che

$$f(x) = f(x_0) + a(x - x_0) + o(x - x_0).$$

Ovviamente, in tal caso $a = f'(x_0)$.

A questo punto è naturale porsi il problema se, data una funzione f n volte derivabile in un punto x_0, si possa approssimare con un opportuno polinomio $P_n(x)$ di grado n commettendo un errore $R_n(x; x_0)$ che tende a 0 più rapidamente di $(x - x_0)^n$ quando $x \to x_0$. Tale problema ha una risposta positiva, come vedremo dopo aver introdotto i polinomi di Taylor.

Data una funzione $f \colon I \to \mathbb{R}$ n volte derivabile in un punto $x_0 \in I$ interno all'intervallo I, si dice *polinomio di Taylor di ordine n e di centro (o punto iniziale)* x_0 di f il polinomio così definito

$$\begin{aligned} T_n(x; x_0) &= f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \ldots + \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k + \ldots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n \\ &= \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k \,. \end{aligned}$$

Nel caso in cui $x_0 = 0$, $T_n(x) = T_n(x; 0)$ si dice *polinomio di MacLaurin di ordine n* di f.

Si può dimostrare che il polinomio di Taylor $T_n(x; x_0)$ è l'unico polinomio di grado n per cui $f^{(k)}(x_0) = T_n^{(k)}(x_0; x_0)$ per ogni $k = 0, 1, \ldots, n$.

Inoltre osserviamo che, se $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$ è un polinomio di grado n, allora f coincide con il suo polinomio di Taylor $T_n(x; x_0)$ di ordine n e di centro x_0 per ogni fissato $x_0 \in \mathbb{R}$. Quindi, in questo caso f e $T_n(x; x_0)$ rappresentano la stessa funzione e sostituire l'una con l'altra non comporta alcun errore, dando così una giustificazione intuitiva al fatto che i polinomi di Taylor sono gli opportuni polinomi che permettono di risolvere positivamente il problema appena posto, come mostra il seguente risultato.

Teorema 5.5.2 (Formula di Taylor con il resto di Peano) *Sia $f \colon I \to \mathbb{R}$ una funzione $(n - 1)$ volte derivabile nell'intervallo aperto I e derivabile n volte in un punto $x_0 \in I$. Allora, per ogni $x \in I$,*

$$\begin{aligned} f(x) &= f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \ldots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + R_n(x; x_0) \\ &= \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k + R_n(x; x_0) \,, \end{aligned} \tag{5.5.16}$$

dove $R_n(x; x_0) = o((x - x_0)^n)$, cioè

$$\lim_{x \to x_0} \frac{R_n(x; x_0)}{(x - x_0)^n} = 0 \,. \tag{5.5.17}$$

Per (5.5.16) e (5.5.17) possiamo così scrivere che, per ogni $x \in I$,

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \ldots + \frac{(x - x_0)^n}{n!}[f^{(n)}(x_0) + \omega(x)]\,, \tag{5.5.18}$$

con $\omega(x) = \frac{R_n(x;x_0)}{(x-x_0)^n}$ *per* $x \in I$ *e* $x \neq x_0$, $\omega(x_0) = 0$*. La (5.5.18) si dice* formula di Taylor di ordine n e punto iniziale x_0 (formula di MacLaurin di ordine n se $x_0 = 0$) con il termine complementare, o resto, di Peano.

Dim. Per dimostrare la (5.5.17) basta verificare che

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - T_n(x; x_0)}{(x - x_0)^n} = 0$$

o, equivalentemente, che

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x - x_0) - \ldots - \frac{f^{(n-1)}(x_0)}{(n-1)!}(x - x_0)^{n-1}}{(x - x_0)^n} = \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}\,. \tag{5.5.19}$$

Se $n = 1$ il risultato segue dalla definizione di derivabilità in x_0. Se $n > 1$, osserviamo che le funzioni al numeratore e al denominatore del limite in (5.5.19) soddisfanno tutte le ipotesi del Teorema di de L'Hôpital 5.2.19 e quindi il suo calcolo può essere ricondotto al calcolo del limite per $x \to x_0$ delle rispettive derivate, cioè al calcolo del

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f'(x) - f'(x_0) - f''(x_0)(x - x_0) - \ldots - \frac{f^{(n-1)}(x_0)}{(n-2)!}(x - x_0)^{n-2}}{n(x - x_0)^{n-1}}\,. \tag{5.5.20}$$

Anche nel limite (5.5.20) le funzioni al numeratore e al denominatore soddisfanno tutte le ipotesi del Teorema di de L'Hôpital 5.2.19 e quindi il suo calcolo può essere ricondotto al calcolo del limite per $x \to x_0$ delle rispettive derivate. Questo procedimento può essere iterato $(n-1)$ volte (vedi Osservazione 5.2.21.4) riconducendo il calcolo del limite (5.5.19) iniziale alla seguente relazione

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f^{(n-1)}(x) - f^{(n-1)}(x_0)}{n!(x - x_0)} = \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!},$$

che è vera, dato che $\frac{f^{(n-1)}(x) - f^{(n-1)}(x_0)}{(x-x_0)}$ non è altro che il rapporto incrementale della derivata $(n-1)$–esima di f nel punto x_0 e f è n volte derivabile in x_0. QED

Esempi 5.5.3 Per calcolare lo sviluppo di Taylor di una funzione f ad un ordine prefissato n, in generale non si può far altro che calcolare le derivate di f fino all'ordine n ed usare i risultati trovati per ottenere i coefficienti del polinomio di Taylor T_n. In molti casi però si riescono ad ottenere formule che forniscono, in dipendenza dal parametro $k = 0, 1, \dots, n$, il valore di *tutte le derivate* $f^{(k)}$, almeno nel centro dello sviluppo; in tal caso si può scrivere il polinomio di Taylor cercato senza ulteriore fatica. Nel caso delle funzioni elementari, poi, che sono di classe C^∞, si possono scrivere i polinomi di Taylor di ogni ordine. Un'ulteriore semplificazione si ha spesso se il centro dello sviluppo è $x_0 = 0$.

Diamo adesso lo sviluppo in formula di MacLaurin di ordine n di alcune funzioni elementari:

1. [**Esponenziale**] Poiché $D^k \mathrm{e}^x \,|_{x=0} = \mathrm{e}^x \,|_{x=0} 1$ per ogni $k \in \mathbb{N}$, si ottiene facilmente

   (5.5.21) $$\mathrm{e}^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n)$$

2. [**Funzioni trigonometriche**] Le derivate di ordine pari della funzione seno sono $D^{2k} \sin x = (-1)^k \sin x$ e quelle di ordine dispari $D^{2k+1} \sin x = (-1)^k \cos x$, sicché per $x = 0$ tutte le derivate pari si annullano, mentre la derivata di ordine $2k+1$ vale $(-1)^k$. Ne segue lo sviluppo

   (5.5.22) $$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \dots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2(n+1)}),$$

   ove si è tenuto conto che $D^{2n+2} \sin x = 0$ per $x = 0$. Analogamente, per il coseno risulta $D^{2k} \cos x = (-1)^k \cos x$ e $D^{2k+1} \cos x = (-1)^k \sin x$, da cui

   (5.5.23) $$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} + \dots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n+1})$$

   ove si è tenuto conto che $D^{2n+1} \cos x = 0$ per $x = 0$.

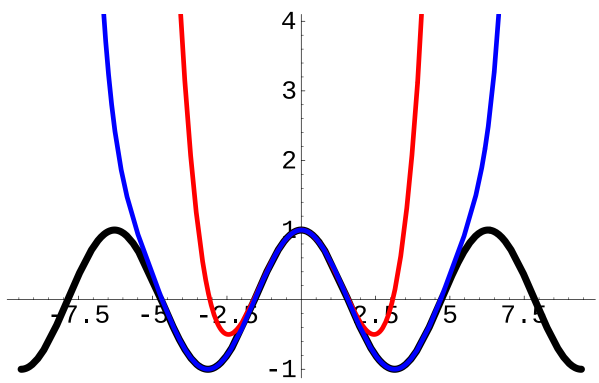


Figura – 5.6: Grafici dei polinomi di Taylor di grado 4 e 12 di $\cos x$.

3. **[Formula del binomio]** Per $\alpha \in \mathbb{R}$ consideriamo la funzione $f(x) = (1+x)^\alpha$. Un calcolo elementare mostra che $D^k f(0) = \alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-k+1)$, da cui

$$\begin{aligned}(1+x)^\alpha =&1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2}x^2 + \dots \\ &+ \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)}{n!}x^n + o(x^n).\end{aligned} \tag{5.5.24}$$

4. **[Logaritmi]** La funzione $f(x) = \log(1+x)$ ha per derivata $(1+x)^{-1}$, quindi possiamo usare lo sviluppo del binomio (5.5.24) per $\alpha = -1$ per ottenere

$$\log(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + o(x^n). \tag{5.5.25}$$

5. **[Funzioni trigonometriche inverse]** Anche le funzioni trigonometriche inverse hanno derivate di tipo binomiale (pur di sostituire x^2 al posto di x), e quindi se ne possono ottenere gli sviluppi di MacLaurin dalla (5.5.24). La derivata della funzione arcotangente è $(1+x^2)^{-1}$, e quindi

$$\arctan x = x - \frac{x^3}{3} + \dots + (-1)^n\frac{x^{2n+1}}{2n+1} + o(x^{2(n+1)})\,. \tag{5.5.26}$$

Analogamente, la derivata della funzione arcoseno è $(1-x^2)^{-1/2}$ e la derivata della funzione arcocoseno è $-(1-x^2)^{-1/2}$, da cui

$$\arcsin x = x + \frac{1}{2}\frac{x^3}{3} + \frac{1}{2}\frac{3}{4}\frac{x^5}{5} + \dots + \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\frac{x^{2n+1}}{2n+1} + o(x^{2n+2}) \tag{5.5.27}$$

$$\arccos x = \frac{\pi}{2} - x - \frac{1}{2}\frac{x^3}{3} - \frac{1}{2}\frac{3}{4}\frac{x^5}{5} - \dots - \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\frac{x^{2n+1}}{2n+1} + o(x^{2n+2}), \tag{5.5.28}$$

dove abbiamo introdotto per comodità il simbolo del *semifattoriale* $k!!$, definito da $(2n)!! = 2\cdot 4\cdots(2n)$ per $k = 2n$ pari, e $(2n+1)!! = 1\cdot 3\cdots(2n+1)$ per $k = 2n+1$ dispari.

Il termine complementare di Peano fornisce solo una informazione qualitativa dell'errore che si commette nell'approssimare una funzione data con il relativo polinomio di Taylor di ordine n e punto iniziale x_0. Per avere qualche informazione di tipo quantitativo su tale errore occorre ovviamente richiedere che la funzione data soddisfaccia qualche ulteriore proprietà. Precisamente, risulta:

Teorema 5.5.4 (Formula di Taylor con il resto di Lagrange) *Siano I un intervallo aperto, $x_0 \in I$ ed $f \in C^{n+1}(I)$; allora per ogni $x \in I$ esiste $\bar{x} \in I$, con $|x-\bar{x}| \le |x-x_0|$,* *tale che*

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \dots + \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + \frac{f^{(n+1)}(\bar{x})}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1}. \tag{5.5.29}$$

La (5.5.29) si dice formula di Taylor di ordine n e punto iniziale x_0 (formula di MacLaurin di ordine n se $x_0 = 0$) con il termine complementare, o resto, di Lagrange.

Osserviamo che se la funzione f, oltre a soddisfare le ipotesi del Teorema 5.5.4, ha derivata $f^{(n+1)}$ di ordine $(n+1)$ limitata in I, cioè esiste un $M > 0$ tale che $|f^{(n+1)}(x)| \leq M$ per ogni $x \in I$ allora

$$|R_n(x; x_0)| = \left| \frac{f^{(n+1)}(\bar{x})}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1} \right| \leq \frac{M}{(n+1)!}|x - x_0|^{n+1}.$$

Questa diseguaglianza permette di valutare il resto $R_n(x; x_0)$ e quindi di stimare *quantitativamente* l'errore che si commette approssimando la funzione f con il relativo polinomio di Taylor di ordine n e punto iniziale x_0, come negli esempi che seguono.

Esempi 5.5.5

- Supponiamo di voler valutare l'errore che si commette nell'approssimare e col polinomio di MacLaurin di ordine 4 della funzione $f(x) = \mathrm{e}^x$.

  Tale polinomio è $T_4(x; 0) = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!}$ e quindi, applicando il Teorema 5.5.4, possiamo scrivere che

  $$\mathrm{e}^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{\mathrm{e}^{\bar{x}}}{5!}x^5,$$

  con $0 < |\bar{x} - x| < |x|$. Sostituendo $x = 1$ otteniamo che $0 < \bar{x} < 1$ e

  $$\mathrm{e} = 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \frac{\mathrm{e}^{\bar{x}}}{5!} = 2,708\bar{3} + \frac{\mathrm{e}^{\bar{x}}}{5!},$$

  dove $R_5(1; 0) = \frac{\mathrm{e}^{\bar{x}}}{120} \leq \frac{3}{120} = 0,025$ e $\frac{3}{120} > 10^{-2}$. Questo ci permette di affermare che, approssimando e con $2,708\bar{3}$, solo la prima cifra decimale è certamente esatta.

- Supponiamo invece di voler approssimare e con un errore non superiore a 10^{-4} (e questo significa che le prime quattro cifre dopo la virgola del numero trovato corrispondono a quelle dello sviluppo decimale del numero e).

  La formula di McLaurin di ordine n con il termine complementare di Lagrange della funzione $f(x) = \mathrm{e}^x$ è data da

  $$\mathrm{e}^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \dots + \frac{x^k}{k!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \frac{\mathrm{e}^{\bar{x}}}{(n+1)!}x^{n+1},$$

con $0 < |\bar{x} - x| < |x|$. Sostituendo $x = 1$ otteniamo che $0 < \bar{x} < 1$ e

$$\mathrm{e} = 1 + 1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{k!} + \ldots + \frac{1}{n!} + \frac{\mathrm{e}^{\bar{x}}}{(n+1)!},$$

dove

$$|R_n(1;0)| = \frac{\mathrm{e}^{\bar{x}}}{(n+1)!} \leq \frac{3}{(n+1)!}.$$

Affinché l'errore che si commette nell'approssimare e con $1+1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{k!}+\ldots+\frac{1}{n!}$ non sia superiore a 10^{-4} basta determinare n in modo tale che

$$\frac{3}{(n+1)!} \leq 10^{-4} \quad \Leftrightarrow \quad (n+1)! \geq 3 \cdot 10^4 .$$

Ora il più piccolo n che soddisfa la diseguaglianza di sopra è uguale a 7. Quindi la somma (calcolarla!)

$$1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{24} + \frac{1}{120} + \frac{1}{720} + \frac{1}{5040}$$

fornisce una approssimazione del numero e con 4 cifre decimali esatte.

- La formula di Taylor è anche un utile strumento per calcolare i limiti. Facciamo qualche esempio:

  1.

  $$\begin{aligned}\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+x} - \mathrm{e}^{\frac{x}{2}}}{x^2} &= \lim_{x\to 0} \frac{(1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + o(x^2)) - (1 + \frac{1}{2}x + \frac{1}{8}x^2 + o(x^2))}{x^2} \\ &= \lim_{x\to 0} \frac{-\frac{1}{4}x^2 + o(x^2)}{x^2} = -\frac{1}{4};\end{aligned}$$

  2.

  $$\begin{aligned}\lim_{x\to 0} \frac{\sin x - \arctan x}{x\sqrt{1+x} - \sin x} &= \lim_{x\to 0} \frac{(x - \frac{1}{6}x^3 + o(x^4)) - (x - \frac{1}{3}x^3 + o(x^4))}{x(1 + \frac{1}{2}x + o(x)) - (x - \frac{1}{6}x^3 + o(x^4))} \\ &= \lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{6}x^3 + o(x^4)}{\frac{1}{2}x^2 + o(x^2)} = 0 .\end{aligned}$$

Un'altra importante applicazione della formula di Taylor è la seguente condizione sufficiente di estremalità.

Teorema 5.5.6 (Condizione sufficiente di estremalità) *Siano I un intervallo aperto, $f \in C^n(I)$ e $x_0 \in I$ tale che $f'(x_0) = f''(x_0) = \ldots = f^{(n-1)}(x_0) = 0$ e $f^{(n)}(x_0) \neq 0$. Allora:*

1. *se n è pari e $f^{(n)}(x_0) > 0$ allora x_0 è punto di minimo relativo proprio per f in I,*

2. *se n è pari e $f^{(n)}(x_0) < 0$ allora x_0 è punto di massimo relativo proprio per f in I,*

3. *se n è dispari allora x_0 non è né un punto di minimo né un punto di massimo relativo per f in I.*

DIM. Poiché la funzione f soddisfa le ipotesi del Teorema 5.5.2 possiamo scrivere che

$$\begin{aligned} f(x) = & f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2}(x-x_0)^2 + \dots \\ & + \frac{f^{(n-1)}(x_0)}{(n-1)!}(x-x_0)^{n-1} + \frac{(x-x_0)^n}{n!}[f^{(n)}(x_0) + \omega(x)], \quad x \in I, \end{aligned}$$

dove $\lim_{x\to x_0} \omega(x) = 0 = \omega(x_0)$ (cfr con (5.5.18)). Tenuto conto che $f'(x_0) = f''(x_0) = \ldots = f^{(n-1)}(x_0) = 0$, ne segue che

$$f(x) - f(x_0) = \frac{(x-x_0)^n}{n!}[f^{(n)}(x_0) + \omega(x)], \quad x \in I. \tag{5.5.30}$$

Osserviamo ora che $\lim_{x\to x_0}[f^{(n)}(x_0) + \omega(x)] = f^{(n)}(x_0) \neq 0$ e quindi, per il Teorema della Permanenza del Segno, esiste un $\delta > 0$ tale che $]x_0-\delta, x_0+\delta[\subset I$ e la funzione $[f^{(n)}(x_0) + \omega(x)]$ ha lo stesso segno di $f^{(n)}(x_0)$ in tale intervallo.

Se n è pari e $f^{(n)}(x_0) > 0$, da (5.5.30) segue che $f(x) - f(x_0) > 0$ per ogni $x \in]x_0-\delta, x_0+\delta[\setminus \{x_0\}$ e questo significa che x_0 è un punto di minimo relativo proprio per f in I.

Se n è pari e $f^{(n)}(x_0) < 0$, da (5.5.30) segue che $f(x) - f(x_0) < 0$ per ogni $x \in]x_0-\delta, x_0+\delta[\setminus \{x_0\}$ e questo significa che x_0 è un punto di massimo relativo proprio per f in I.

Se n è dispari e $f^{(n)}(x_0) > 0$ (< 0), da (5.5.30) segue che $f(x) - f(x_0) < 0$ (> 0) per ogni $x \in]x_0-\delta, x_0[$ e $f(x) - f(x_0) > 0$ (< 0) per ogni $x \in]x_0, x_0+\delta[$; questo significa che x_0 non è né un punto di minimo né un punto di massimo relativo per f in I. QED

5.6 Grafici di funzioni

Una delle principali applicazioni del calcolo differenziale trattato in questo capitolo consiste nello studiare l'andamento qualitativo di una funzione e di tracciarne il relativo grafico. A tal fine si può procedere secondo lo schema seguente.

- *Determinare l'insieme o dominio di definizione*: in generale, è data un'espressione analitica (vedi il Paragrafo 1.2.c) di cui bisogna determinare il dominio naturale $\mathrm{Dom}(f)$.

- *Stabilire se la funzione gode di qualche simmetria*, cioè stabilire se f è dispari o pari o se f è periodica.

- *Determinare il segno della funzione e le intersezioni del grafico con gli assi* quando è semplice farlo.

- *Calcolare i limiti agli estremi del dominio di f*, cioè calcolare i limiti di f per $x \to \pm\infty$ se $\mathrm{Dom}(f)$ non è limitato superiormente e/o inferiormente e i limiti (destro e/o sinistro) per $x \to x_0$ per ogni $x_0 \notin \mathrm{Dom}(f)$ punto di accumulazione di $\mathrm{Dom}(f)$. In questa fase, si determinano anche gli eventuali asintoti orizzontali, verticali e obliqui e i punti in cui la funzione è prolungabile per continuità. Ricordiamo che

  1. la retta di equazione $y = \ell$ si dice *asintoto orizzontale* per f se $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \ell$,
  2. la retta di equazione $x = x_0$ si dice *asintoto verticale* (risp. destro, risp. sinistro) per f se $\lim_{x\to x_0} f(x) = \infty$ (risp. $\lim_{x\to x_0^+} f(x) = \infty$, risp. $\lim_{x\to x_0^-} f(x) = \infty$),
  3. la retta di equazione $y = mx + q$ con $m \neq 0$ si dice *asintoto obliquo* per f se $\lim_{x\to\pm\infty} [f(x) - (mx + q)] = 0$.

  Osserviamo che l'esistenza dell'asintoto orizzontale per $x \to +\infty$ (risp. per $x \to -\infty$) esclude l'esistenza dell'asintoto obliquo per $x \to +\infty$ (risp. per $x \to -\infty$). Inoltre, si procede come segue per determinare l'esistenza dell'asintoto obliquo: si verifica prima che
  $$\exists \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = m \in \mathbb{R} \setminus \{0\};$$
  in tal caso, si verifica poi che
  $$\exists \lim_{x\to+\infty} [f(x) - mx] = q \in \mathbb{R}\,.$$
  Se ambedue queste condizioni sono soddisfatte, allora si può concludere che $y = mx + q$ è un asintoto di f per $x \to +\infty$. Si procede in modo analogo per $x \to -\infty$.

- *Calcolare la derivata prima e successivamente determinare il suo segno* così che si possono stabilire gli intervalli dove la funzione è crescente o decrescente e i punti di estremo relativo. In questa fase, si determinano anche i punti del dominio di definizione in cui la funzione non è derivabile e quindi gli eventuali punti angolosi o di cuspide o di flesso a tangente verticale.

- *Calcolare la derivata seconda e successivamente determinare il suo segno* così che si possono stabilire gli intervalli dove la funzione è convessa o concava e i punti di flesso.

- *Disegnare il grafico* con l'aiuto delle informazioni raccolte nei punti precedenti.

CAPITOLO 6

CALCOLO INTEGRALE

Con lo studio del Calcolo integrale ci prefiggiamo di risolvere due problemi apparentemente distinti, ma che in realtà si vedranno essere intimamente legati. Essi sono:

Problema 1 (antiderivazione) Sia $I \subset \mathbb{R}$ un intervallo; data $f : I \to \mathbb{R}$, dire se esiste una funzione G derivabile in I tale che $G' = f$.

Problema 2 (quadratura) Date $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$, con $f(x) \leq g(x)$ per ogni $x \in [a, b]$, assegnare un valore numerico che esprima l'*area* dell'insieme

$$E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \ a \leq x \leq b, \ f(x) \leq y \leq g(x)\}.$$

Per quanto riguarda il problema 2 si vuole definire l'area di una regione piana in modo che certi (naturali) requisiti siano soddisfatti: per esempio, si vuole che l'area di una regione A contenuta in una B sia più piccola dell'area di B, o che l'area dell'unione di due regioni disgiunte sia la somma delle aree, e così via. Non formalizziamo tutte le richieste, ma è importante avere in mente che *una funzione che esprima l'area non può essere arbitraria*.

Definizione 6.0.1 (Primitive) *Date $f, G : I \to \mathbb{R}$, si dice che G è una* primitiva *di f in I se G è derivabile in I e risulta $G'(x) = f(x)$ per ogni $x \in I$.*

Osservazioni 6.0.2 Le seguenti proprietà delle primitive sono immediate conseguenze della definizione.

1. Se G è una primitiva della funzione f in I, ogni funzione del tipo $G(x) + c$, con $c \in \mathbb{R}$, è ancora una primitiva di f in I. Infatti, $D(G + c) = G' = f$.

2. Se G_1 e G_2 sono primitive della stessa funzione in un intervallo I, allora la funzione differenza $G_1 - G_2$ è costante in I. Infatti, risulta $D(G_1 - G_2) = G_1' - G_2' = 0$ in I, e quindi $G_1 - G_2$ è costante in I per la Proposizione 5.2.11.

3. Tenendo conto delle precedenti osservazioni, il problema del calcolo di *tutte* le primitive di una funzione f *in un intervallo* si riconduce al calcolo di *una sola* primitiva. Infatti trovatane una, sia G, le funzioni $G + c$, al variare della costante c in $\mathbb{R}$, sono *tutte e sole* le primitive di f in I.

Esempio 6.0.3 Ricordando le derivate delle funzioni elementari, possiamo dire che:

$$
\begin{aligned}
&F(x) = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}\ (\alpha \neq -1) \quad \text{è una primitiva di} \quad f(x) = x^\alpha \quad \text{in} \quad]0,+\infty[\\
&F(x) = \log_a x \quad \text{è una primitiva di} \quad f(x) = \frac{1}{x \log a} \quad \text{in} \quad]0,+\infty[\\
&F(x) = \cos x \quad \text{è una primitiva di} \quad f(x) = -\sin x \quad \text{in} \quad \mathbb{R} \\
&F(x) = \sin x \quad \text{è una primitiva di} \quad f(x) = \cos x \quad \text{in} \quad \mathbb{R}.
\end{aligned}
$$

6.1 Funzioni integrabili secondo Riemann

In questo paragrafo considereremo sempre funzioni definite in un intervallo chiuso e limitato che denoteremo $[a, b]$. Daremo una definizione di integrale di una funzione, ma precisiamo che questa non è l'unica definizione possibile per affrontare i problemi su esposti. Le idee presentate in questo capitolo sono state sviluppate dal matematico tedesco Bernhard Riemann (1826-1866), ed è per questo che l'integrale che definiremo viene detto *integrale di Riemann.*

Definizione 6.1.1 (suddivisione) *Si dice* suddivisione dell'intervallo $[a, b]$ *la scelta di un numero finito di punti* $x_0, \dots, x_n$ *tali che*

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n = b.$$

Per la generica suddivisione di $[a, b]$ *useremo la notazione* $P = \{a = x_0, \dots, x_n = b\}$.

Notiamo che fra le suddivisioni di un intervallo sussiste l'ovvia relazione di inclusione. Costruiremo l'integrale di una funzione con un procedimento di approssimazione basato sulle nozioni introdotte nella seguente definizione.

Definizione 6.1.2 (Somme integrali) *Sia data* $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *limitata, e fissiamo una suddivisione* $P = \{a = x_0, \dots, x_n = b\}$ *di* $[a, b]$. *Per* $k = 1, \dots, n$ *poniamo*

$$m_k = \inf\{f(x) : \ x_{k-1} \le x \le x_k\} \tag{6.1.1}$$

$$M_k = \sup\{f(x) : \ x_{k-1} \le x \le x_k\} \tag{6.1.2}$$

e definiamo la somma integrale inferiore di f relativa a P *ponendo*

$$s(f, P) = \sum_{k=1}^{n} m_k (x_k - x_{k-1}) \tag{6.1.3}$$

e la somma integrale superiore di f relativa a P *ponendo*

$$S(f, P) = \sum_{k=1}^{n} M_k (x_k - x_{k-1}). \tag{6.1.4}$$

Tutta la costruzione è basata sulle proprietà delle somme integrali esposte nella proposizione seguente.

Proposizione 6.1.3 *Sia $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ limitata, e siano P, Q suddivisioni di $[a,b]$, con $P \subset Q$. Allora*

$$s(f,P) \le s(f,Q) \le S(f,Q) \le S(f,P).$$

DIM. Proviamo l'enunciato per Q ottenuta da P aggiungendo un punto, poiché nel caso generale basterà ripetere l'argomento per ogni punto appartenente a Q e non a P. Siano allora $P = \{a = x_0 < \cdots < x_n = b\}$, e $Q = P \cup \{\bar{x}\}$. Se, com'è ovvio, assumiamo che $\bar{x}$ non appartenga a P, esiste un indice $j \in \{1, \ldots, n\}$ tale che $x_{j-1} < \bar{x} < x_j$. Posto

$$\begin{aligned} m'_j &= \inf\{f(x) : \ x_{j-1} \le x \le \bar{x}\}, \quad m''_j = \inf\{f(x) : \ \bar{x} \le x \le x_j\}, \\ M'_j &= \sup\{f(x) : \ x_{j-1} \le x \le \bar{x}\}, \quad M''_j = \sup\{f(x) : \ \bar{x} \le x \le x_j\}, \end{aligned}$$

risulta, dall'osservazione 1.1.9.4, $m'_j \ge m_j$, $m''_j \ge m_j$, $M'_j \le M_j$, $M''_j \le M_j$, e quindi

$$\begin{aligned} s(f,Q) - s(f,P) &= m'_j(\bar{x} - x_{j-1}) + m''_j(x_j - \bar{x}) - m_j(x_j - x_{j-1}) \ge 0, \\ S(f,Q) - S(f,P) &= M'_j(\bar{x} - x_{j-1}) + M''_j(x_j - \bar{x}) - M_j(x_j - x_{j-1}) \le 0. \end{aligned}$$

Poiché la diseguaglianza $s(f,Q) \le S(f,Q)$ è ovvia dalla definizione per ogni suddivisione Q, la tesi è dimostrata. QED

Definizione 6.1.4 (Funzioni integrabili) *Data $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ limitata, definiamo il suo* integrale inferiore in $[a,b]$ *ponendo*

$$\underline{\int_a^b} f(x)dx = \sup\{s(f,P) : \ P \text{ suddivisione di } [a,b]\}$$

e il suo integrale superiore in $[a,b]$ *ponendo*

$$\overline{\int_a^b} f(x)dx = \inf\{S(f,P) : \ P \text{ suddivisione di } [a,b]\}.$$

Diciamo che f è integrabile in $[a,b]$ *se*

$$\underline{\int_a^b} f(x)dx = \overline{\int_a^b} f(x)dx.$$

In tal caso, il loro comune valore si denota con

$$\int_a^b f(x)dx$$

e si dice integrale definito di f in $[a,b]$.

Notiamo che nella notazione appena introdotta per gli integrali la variabile x è *muta*, può cioè essere sostituita con qualunque altro simbolo senza alterare il significato dell'espressione. In particolare, se f è integrabile in $[a,b]$ allora le scritture $\int_a^b f(x)dx$ e $\int_a^b f(t)dt$ indicano lo stesso numero.

Osservazione 6.1.5 Mostriamo con un esempio che non tutte le funzioni sono integrabili. Come si vedrà, l'esempio è piuttosto "artificiale", rispetto agli esempi considerati fin qui, che sono sempre stati costruiti usando le funzioni elementari, malgrado sia probabilmente il più semplice possibile. Questo fa capire che in generale le funzioni che incontreremo saranno tutte integrabili negli intervalli chiusi e limitati. D'altra parte, è importante essere consapevoli che una definizione ha senso solo se qualche oggetto sfugge alla classe che si sta definendo; altrimenti, la definizione è quanto meno inutile. Vediamo l'esempio di funzione non integrabile, che in genere viene chiamata *funzione di Dirichlet*, dal nome di un matematico dell'ottocento. Sia $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ definita da

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \in [0,1] \cap \mathbb{Q} \\ 0 & \text{se } x \in [0,1] \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$$

Poiché fra due qualunque numeri reali ci sono sempre un numero razionale ed un numero irrazionale, per ogni suddivisione $P = \{0 = x_0, \ldots, x_n = 1\}$ di $[0,1]$ e per ogni $k = 1, \ldots, n$ risulta (con la solita notazione) $m_k = 0$ e $M_k = 1$, e quindi $s(f,P) = 0$ e $S(f,P) = 1$. Segue

$$\underline{\int_0^1} f(x)dx = 0, \qquad \overline{\int_0^1} f(x)dx = 1$$

e quindi f non è integrabile.

L'integrale definito gode di alcune semplici proprietà, che valgono in modo ovvio per le somme integrali e seguono facilmente per l'integrale.

Proposizione 6.1.6 (Proprietà degli integrali) *Siano $f,g : [a,b] \to \mathbb{R}$ integrabili, e siano $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Allora:*

1. **[Linearità]** *La funzione $\alpha f + \beta g$ è integrabile, e risulta*

$$\int_a^b (\alpha f + \beta g)dx = \alpha \int_a^b f dx + \beta \int_a^b g dx.$$

2. **[Additività rispetto all'intervallo]** *Se $c \in]a,b[$ allora*

$$\int_a^c f dx + \int_c^b f dx = \int_a^b f dx.$$

3. **[Confronto]** *Se $f(x) \leq g(x)$ per ogni $x \in [a,b]$ allora*

$$\int_a^b f dx \leq \int_a^b g dx.$$

Osservazione 6.1.7 È utile definire l'integrale anche quando il primo estremo d'integrazione è un numero reale maggiore del secondo estremo. Il modo più coerente di definire l'integrale è il seguente:

$$\int_b^a f dx = -\int_a^b f dx$$

per ogni $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ integrabile. Con questa definizione, la proprietà di additività rispetto all'intervallo vale qualunque sia l'ordine dei punti a, b, c.

La verifica dell'integrabilità di una funzione, più che sulla definizione, fa spesso uso del seguente risultato.

Teorema 6.1.8 (Caratterizzazione delle funzioni integrabili) *Una funzione limitata $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ è integrabile in $[a,b]$ se e solo se per ogni $\varepsilon > 0$ esiste una suddivisione P di $[a,b]$ tale che $S(f,P) - s(f,P) < \varepsilon$.*

Dim. Sia f integrabile, sia $I \in \mathbb{R}$ il valore dell'integrale e sia ε fissato. Siccome I è sia il valore dell'integrale superiore che quello dell'integrale inferiore, dalla Proposizione 1.1.11 (con $\varepsilon/2$ al posto di ε) segue che esistono due suddivisioni P_1 e P_2 tali che

$$S(f, P_1) < I + \frac{\varepsilon}{2}, \qquad s(f, P_2) > I - \frac{\varepsilon}{2}.$$

Per $P = P_1 \cup P_2$ risulta allora, grazie alla Proposizione 6.1.3,

$$S(f,P) - s(f,P) \leq S(f,P_1) - s(f,P_2) < \varepsilon$$

e la prima implicazione è dimostrata.

Viceversa, se per ogni $\varepsilon > 0$ esiste una suddivisione P di $[a,b]$ tale che $S(f,P) - s(f,P) < \varepsilon$, poiché la differenza tra integrale superiore ed integrale inferiore è minore della differenza $S(f,P) - s(f,P)$ per ogni suddivisione, risulta

$$\overline{\int_a^b} f - \underline{\int_a^b} f \leq \varepsilon$$

per ogni $\varepsilon > 0$, e, per l'Osservazione 1.1.10, ciò è possibile solo se $\overline{\int_a^b} f = \underline{\int_a^b} f$, cioè se f è integrabile. QED

Usando il precedente risultato, si può dimostrare che ampie classi di funzioni sono integrabili. Vediamo alcuni risultati abbastanza generali.

Teorema 6.1.9 (Integrabilità delle funzioni continue) *Se $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ è continua in $[a, b]$ allora è integrabile in $[a, b]$.*

DIM. Useremo la caratterizzazione dell'integrabilità data nel Teorema 6.1.8. Fissato $\varepsilon > 0$, poiché f è uniformemente continua in $[a, b]$ in virtù del Teorema di Heine-Cantor 4.5.14, esiste un $\delta > 0$ tale che $|x - y| < \delta$ implica $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$. Di conseguenza, se fissiamo una suddivisione $P = \{x_0, \ldots, x_n\}$ di $[a, b]$ tale che $x_k - x_{k-1} < \delta$ per ogni $k = 1, \ldots, n$, con la solita notazione risulta $M_k - m_k < \varepsilon$, e pertanto

$$S(f, P) - s(f, P) = \sum_{k=1}^{n} (M_k - m_k)(x_k - x_{k-1}) < \varepsilon \sum_{k=1}^{n} (x_k - x_{k-1}) = \varepsilon(b - a).$$

QED

Definizione 6.1.10 (Funzioni continue a tratti) *Diciamo che $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ è conti-* nua a tratti *in $[a, b]$ se è continua per ogni x in $[a, b]$ eccetto un numero finito di punti in cui ha discontinuità di prima specie.*

In modo equivalente, si può dire che f è continua a tratti se è continua per ogni x in $[a, b]$ eccetto un numero finito di punti, siano $x_1, \ldots, x_n$, e le restrizioni di f agli intervalli $[a, x_1],\ [x_1, x_2], \ldots, [x_n, b]$ sono continue.

Osservazione 6.1.11 (Integrabilità delle funzioni continue a tratti) Se f è continua a tratti in $[a, b]$ allora è integrabile in $[a, b]$. Infatti, con la notazione appena introdotta, f è integrabile negli intervalli $[a, x_1],\ [x_1, x_2], \ldots, [x_n, b]$ e risulta

$$\int_a^b f = \int_a^{x_1} f + \int_{x_1}^{x_2} f + \cdots + \int_{x_{n-1}}^{x_n} f + \int_{x_n}^b f$$

Le funzioni monotone in un intervallo possono presentare un numero infinito di punti di discontinuità, ma sono ancora integrabili.

Teorema 6.1.12 (Integrabilità delle funzioni monotone) *Se $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ è monotona in $[a, b]$ allora è integrabile in $[a, b]$.*

DIM. Useremo anche in questo caso la caratterizzazione dell'integrabilità data nel Teorema 6.1.8. Per fissare le idee, supponiamo f crescente. In tal caso, per ogni suddivisione $P = \{x_0, \ldots, x_n\}$ di $[a, b]$ risulta, con la solita notazione, $M_k = f(x_k)$ e $m_k = f(x_{k-1})$. Dato allora $\varepsilon > 0$, basta scegliere P tale che $x_k - x_{k-1} < \varepsilon$ per ogni $k = 1, \ldots, n$, così che si abbia

$$\begin{aligned} S(f, P) - s(f, P) &= \sum_{k=1}^{n} (M_k - m_k)(x_k - x_{k-1}) = \sum_{k=1}^{n} (f(x_k) - f(x_{k-1}))(x_k - x_{k-1}) \\ &< \varepsilon \sum_{k=1}^{n} (f(x_k) - f(x_{k-1})) = \varepsilon\big(f(b) - f(a)\big). \end{aligned}$$

QED

Il seguente risultato ci permetterà di estendere notevolmente la classe delle funzioni integrabili.

Proposizione 6.1.13 *Siano f integrabile in $[a, b]$ e $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ lipschitziana in ogni intervallo limitato. Allora $g \circ f$ è integrabile in $[a, b]$.*

DIM. Poiché f è integrabile in $[a, b]$, f è limitata, diciamo $|f(x)| \le M$ per ogni $x \in [a, b]$. Sia L la costante di Lipschitz di g nell'intervallo $[-M, M]$, sicché risulti

$$|g(y_1) - g(y_2)| \le L|y_1 - y_2| \qquad \forall y_1, y_2 \in [-M, M]. \tag{6.1.5}$$

Dato $\varepsilon > 0$, per ipotesi esiste una suddivisione $P = \{a = x_0, \dots, x_n = b\}$ dell'intervallo $[a, b]$ tale che $S(f, P) - s(f, P) < \varepsilon/L$. Posto, per $k = 1, \dots, n$

$$\begin{aligned}
m_k &= \inf\{f(x) : \ x_{k-1} \le x \le x_k\} \\
M_k &= \sup\{f(x) : \ x_{k-1} \le x \le x_k\} \\
m'_k &= \inf\{g\bigl(f(x)\bigr) : \ x_{k-1} \le x \le x_k\} \\
M'_k &= \sup\{g\bigl(f(x)\bigr) : \ x_{k-1} \le x \le x_k\}
\end{aligned}$$

per (6.1.5) risulta $M'_k - m'_k \le L(M_k - m_k)$. Quindi

$$\begin{aligned}
S(g \circ f, P) - s(g \circ f, P) &\le \sum_{k=1}^{n} (M'_k - m'_k)(x_k - x_{k-1}) \\
&\le L \sum_{k=1}^{n} (M_k - m_k)(x_k - x_{k-1}) = L\bigl(S(f, P) - s(f, P)\bigr) < \varepsilon
\end{aligned}$$

e per l'arbitrarietà di ε la tesi segue dal Teorema 6.1.8 di caratterizzazione delle funzioni integrabili. QED

Il precedente risultato è molto generale: vediamone alcune semplici conseguenze. È utile introdurre le seguenti notazioni. Poniamo

$$\begin{aligned}
g^+(y) &= \begin{cases} y & \text{se } \ y \ge 0 \\ 0 & \text{se } \ y < 0 \end{cases} \\
g^-(y) &= \begin{cases} 0 & \text{se } \ y \ge 0 \\ -y & \text{se } \ y < 0 \end{cases}
\end{aligned}$$

e, per $f : I \to \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}
f^+(x) &= \begin{cases} f(x) & \text{se } \ f(x) \ge 0 \\ 0 & \text{se } \ f(x) < 0 \end{cases} \\
f^-(x) &= \begin{cases} 0 & \text{se } \ f(x) \ge 0 \\ -f(x) & \text{se } \ f(x) < 0 \end{cases}
\end{aligned}$$

Le funzioni f^+ ed f^- si dicono rispettivamente *parte positiva* e *parte negativa* di f. Notiamo che le funzioni f^+ ed f^- sono entrambe positive e che $f = f^+ - f^-$, mentre $|f| = f^+ + f^-$. Dal momento che risulta $f^+ = g^+ \circ f$, $f^- = g^- \circ f$ e le funzioni g^+, g^- sono lipschitziane, si ha subito che se f è integrabile in $[a, b]$ allora anche $f^+, f^-, |f|$ sono integrabili. Inoltre, vale la diseguaglianza

$$\Big|\int_a^b f(x)dx\Big| \le \int_a^b \big|f(x)\big|dx. \tag{6.1.6}$$

Infatti, $-|f| \le f \le |f|$, per la proprietà di confronto, implica

$$-\int_a^b |f| \le \int_a^b f \le \int_a^b |f|,$$

e da (1.1.1) segue (6.1.6). Applicando ancora la Proposizione 6.1.13 si ottiene che se f è integrabile anche f^2 è integrabile ($f^2 = g \circ f$, con $g(y) = y^2$ lipschitziana sugli intervalli limitati) e, se f e g sono integrabili, lo è anche il prodotto fg; infatti,

$$fg = \frac{1}{4}\Big[(f+g)^2 - (f-g)^2\Big]$$

e, se f e g sono integrabili, sia $f + g$ che $f - g$ lo sono, così come i loro quadrati. Naturalmente, è possibile completare questi risultati, estendendoli al caso di potenze diverse da 2 e al prodotto di più di due funzioni.

Possiamo ora dare una soluzione (parziale) al Problema 2 posto all'inizio del capitolo.

Definizione 6.1.14 (Area di figure piane) *Siano date $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ integrabili, con $g(x) \le f(x)$ per ogni $x \in [a, b]$. Si dice* area *dell'insieme*

$$E = \Big\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \ a \le x \le b, \ g(x) \le y \le f(x)\Big\}$$

il numero $\int_a^b (f - g)dx$.

Osserviamo che gli insiemi del tipo descritto nella definizione precedente (cioè gli insiemi di punti compresi tra i grafici di due funzioni integrabili) possono essere usati in situazioni più generali: dato un insieme qualunque del piano, si può infatti tentare di scomporlo nell'unione disgiunta di un numero finito di insiemi del tipo detto, e la sua area sarà data dalla somma delle aree dei singoli sottoinsiemi, ciascuna calcolata come spiegato.

Abbiamo visto che l'integrale è, in un certo senso, un'estensione dell'operazione di somma. Come per un numero finito di numeri $a_1, \dots, a_n$ si definisce la *media aritmetica* m ponendo

$$m = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} a_k,$$

si può definire un concetto di media integrale.

Definizione 6.1.15 *Sia* $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *integrabile; si definisce la* media integrale di f in $[a, b]$ *ponendo*

$$m(f) = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)dx.$$

Teorema 6.1.16 (Teorema della media integrale) *Sia* $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *integrabile, e siano*

$$m = \inf\{f(x) : \ a \le x \le b\}; \qquad M = \sup\{f(x) : \ a \le x \le b\};$$

allora $m \le m(f) \le M$. *Se inoltre* f *è continua in* $[a, b]$ *allora esiste* $x_0 \in [a, b]$ *tale che* $f(x_0) = m(f)$.

Dim. Per provare la prima affermazione, basta integrare le diseguaglianze $m \le f(x) \le M$ in $[a, b]$, tenendo conto della proprietà di confronto. Si ottiene

$$m(b-a) \le \int_a^b f(x)dx \le M(b-a),$$

da cui, dividendo per $b - a$, la tesi.

Per quanto riguarda la seconda affermazione, basta applicare il Teorema dei valori intermedi 4.5.5 al numero $m(f) \in [m, M]$. QED

Osserviamo che, se $f(x) \ge 0$, il numero $m(f)$ è l'altezza del rettangolo di base $[a, b]$ che ha la stessa area del *trapeziode di* f definito da $\big\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \ a \le x \le b, \ 0 \le y \le f(x)\big\}$.

6.2 Teorema fondamentale del calcolo e integrali indefiniti

In questo paragrafo mostriamo come si risolve il Problema 1 del calcolo delle primitive di una funzione, e quali sono i legami tra i due problemi enunciati. Iniziamo osservando che, data una funzione f integrabile in $[a, b]$, per ogni $x \in [a, b]$ si può considerare l'integrale tra a ed x di f, ottenendo un risultato che (ovviamente!) dipende solo da x, e pertanto definisce una nuova funzione con dominio $[a, b]$. Vediamone una prima importante proprietà.

Proposizione 6.2.1 *Sia* $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *integrabile; definiamo la sua* funzione integrale F *ponendo*

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt, \qquad x \in [a, b]. \tag{6.2.7}$$

La funzione F *è lipschitziana in* $[a, b]$.

Dim. Sia $M = \sup\{|f(x)| : \ a \le x \le b\}$. Notiamo che per l'Osservazione 6.1.7 e per la proprietà (6.1.6) risulta

$$|F(x_1) - F(x_2)| = \Big|\int_{x_1}^{x_2} f(t)dt\Big| \le \Big|\int_{x_1}^{x_2} |f(t)|dt\Big| \le \Big|\int_{x_1}^{x_2} M dt\Big| \le M|x_1 - x_2|.$$

QED

La precedente proposizione mostra che la funzione integrale di f è più regolare della f stessa. Utilizzando F si possono costruire le primitive di f, sotto l'ulteriore ipotesi che f sia continua. È questo il contenuto del seguente importante risultato.

Teorema 6.2.2 (Teorema fondamentale del calcolo) *Sia $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ continua in $[a,b]$. Allora la funzione*

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt, \qquad x \in [a,b],$$

è derivabile in $[a,b]$ e risulta $F'(x) = f(x)$ per ogni $x \in [a,b]$.

Dim. Fissiamo $x_0 \in [a,b]$ e proviamo che $F'(x_0) = f(x_0)$. Per l'arbitrarietà di x_0 questo prova la tesi. Esplicitando la definizione della derivata, dobbiamo mostrare che

$$\lim_{h \to 0} \frac{F(x_0 + h) - F(x_0)}{h} = f(x_0),$$

cioè, esplicitando anche la definizione di limite, che per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $\delta > 0$ tale che per $|h| < \delta$ risulta

$$\Big|\frac{F(x_0 + h) - F(x_0)}{h} - f(x_0)\Big| < \varepsilon. \tag{6.2.8}$$

Sia quindi $\varepsilon > 0$ fissato. Per ipotesi, f è continua in $[a,b]$ e in particolare in x_0, sicché, in corrispondenza del numero ε fissato,

$$\exists \delta > 0 \text{ tale che } |x - x_0| < \delta \quad \Longrightarrow \quad |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon. \tag{6.2.9}$$

Notiamo che risulta

$$f(x_0) = \frac{1}{h} \int_{x_0}^{x_0+h} f(x_0)dx \tag{6.2.10}$$

(è la media integrale della costante $f(x_0)$ nell'intervallo di estremi x_0 e $x_0 + h$) e che, per l'Osservazione 6.1.7, possiamo scrivere il rapporto incrementale di F nella forma:

$$\begin{aligned} \frac{F(x_0 + h) - F(x_0)}{h} &= \frac{1}{h}\Big[\int_a^{x_0+h} f(x)dx - \int_a^{x_0} f(x)dx\Big] \\ &= \frac{1}{h}\int_{x_0}^{x_0+h} f(x)dx. \end{aligned} \tag{6.2.11}$$

Da (6.2.11) e (6.2.10) deduciamo

$$\frac{F(x_0+h)-F(x_0)}{h} - f(x_0) = \frac{1}{h}\int_{x_0}^{x_0+h} \Big(f(x)-f(x_0)\Big)dx. \tag{6.2.12}$$

Se ora prendiamo $|h|<\delta$, con δ dato da (6.2.9), risulta anche $|x-x_0|<\delta$ per x compreso tra x_0 ed x_0+h, sicché, usando (6.1.6), otteniamo

$$\Big|\frac{F(x_0+h)-F(x_0)}{h} - f(x_0)\Big| \leq \frac{1}{h}\int_{x_0}^{x_0+h} \Big|f(x)-f(x_0\Big|dx < \frac{1}{h}\int_{x_0}^{x_0+h} \varepsilon\, dx = \varepsilon,$$

cioè (6.2.8). QED

Osservazione 6.2.3 È importante notare che nel teorema fondamentale del calcolo non è necessario che l'intervallo I in cui la funzione f è definita sia chiuso e limitato. Infatti, anche se il dominio di f è un intervallo aperto o illimitato (anche $\mathbb{R}$, che anzi è un caso frequentissimo), pur di fissare (arbitrariamente, ma una volta per tutte) un punto $a \in I$, tutti gli integrali che abbiamo scritto sono calcolati su intervalli chiusi e limitati, in accordo con la trattazione precedente.

Il teorema fondamentale del calcolo mostra come si può calcolare una primitiva di una assegnata funzione continua in un intervallo. In realtà, grazie alle Osservazioni 6.0.2, il procedimento fornisce *tutte* le primitive cercate. Il teorema mostra lo stretto legame che c'è tra i Problemi 1 e 2 enunciati all'inizio del capitolo: il procedimento usato per risolvere il Problema 2, che fornisce l'area delle regioni di piano descritte nel Paragrafo precedente, permette infatti di costruire, facendo variare l'estremo superiore d'integrazione, le primitive di una funzione *continua* data. Notiamo che, com'è evidente dalla dimostrazione, avremmo potuto definire una funzione integrale diversa, ponendo

$$F_c(x) = \int_c^x f(t)dt$$

con c punto *qualunque* di $[a,b]$, ed avremmo ottenuto ancora una primitiva di f (e quindi tutte le primitive). La costruzione appena vista dà ragione della seguente definizione.

Definizione 6.2.4 (Integrale indefinito) *Sia I un intervallo, e sia $f : I \to \mathbb{R}$; si dice* integrale indefinito di f *l'insieme di tutte le primitive di f. Si denota con*

$$\int f(x)dx.$$

Osservazioni 6.2.5

1. Non bisogna confondere l'integrale definito con quello indefinito, che sono evidentemente oggetti del tutto diversi: *l'integrale di f tra a e b è un numero reale, mentre l'integrale indefinito di f è un insieme di funzioni.* Il legame tra i due, che giustifica i nomi, è nella costruzione del secondo, che è basata sulla definizione del primo.

2. Abbiamo dato la definizione di integrale indefinito per una generica funzione f, ma saremo quasi sempre interessati all'integrale di funzioni continue sull'intervallo I. In questo caso possiamo scrivere

$$\int f(x)dx = \left\{ \int_a^x f(t)dt + c : \ c \in \mathbb{R} \right\}, \tag{6.2.13}$$

dove a è un qualunque punto di I. Infatti, la funzione integrale di f è una primitiva di f per il Teorema fondamentale del calcolo, e tutte le altre primitive si ottengono sommando un'arbitraria costante, come spiegato nelle Osservazioni 6.0.2.

3. Se il dominio di f non è un intervallo, ma, per esempio, l'unione di più intervalli, allora la descrizione dell'integrale indefinito cambia. Per esempio, sapendo che $\log|x|$ è una primitiva della funzione $1/x$, definita per $x \in]-\infty, 0[\cup]0, +\infty[$, l'integrale indefinito di $1/x$ è dato da tutte le funzioni del tipo

$$\begin{cases} \log x + c_1 & \text{se } x > 0 \\ \log(-x) + c_2 & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

al variare di tutte le possibili scelte di c_1 e c_2 in $\mathbb{R}$, che non c'è alcun motivo di scegliere uguali. In particolare, la descrizione completa dell'integrale indefinito non dipende da una sola costante arbitraria (come nel caso in cui il dominio sia un intervallo) ma da più di una, in questo caso due. La ragione è che nell'Osservazione 6.0.2.2 abbiamo usato la Proposizione 5.2.11, che vale per funzioni derivabili *in un intervallo*.

4. Il Teorema fondamentale del calcolo 6.2.2 afferma che *ogni funzione continua ammette primitive*. Bisogna tener distinta quest'affermazione, che è molto generale, dal problema del *calcolo effettivo* delle primitive di una funzione data. Anzi, anche l'espressione "calcolo effettivo" è da definire con chiarezza. In generale, il problema sarà di determinare le primitive di una *funzione elementare*, che, com'è noto, è sostanzialmente il risultato di (un numero finito di) operazioni algebriche e di composizione sulle funzioni elencate nel Capitolo 1. Anche in questo caso, però, *non è detto che le primitive della funzione data siano ancora funzioni elementari in quest'accezione*. Possiamo dare esempi semplicissimi, come e^{x^2}, $\frac{e^x}{x}$, $\frac{\sin x}{x}$, o le funzioni irrazionali del tipo $x^m(a + bx^n)^p$, con $a, b \in \mathbb{R}$ non nulli, $m, n, p \in \mathbb{Q}$ tali che nessuno dei tre numeri

$$p, \quad \frac{m+1}{n}, \quad p + \frac{m+1}{n}$$

sia intero.

Il legame tra l'integrale indefinito e quello definito è ulteriormente illustrato dal seguente risultato, che è il principale strumento per calcolare integrali definiti senza ricorrere alla definizione.

Teorema 6.2.6 (Secondo teorema fondamentale del calcolo) *Se $f : I \to \mathbb{R}$ è continua in I e G è una qualunque primitiva di f, allora per ogni intervallo $[a, b] \subset I$ risulta*

$$\int_a^b f(x)dx = G(b) - G(a).$$

Dim. Posto al solito $F(x) = \int_a^x f(t)dt$, per l'Osservazione 6.0.2.2, esiste $c \in \mathbb{R}$ tale che $G(x) = F(x) + c$, e quindi

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) = [G(b) - c] - [G(a) - c] = G(b) - G(a).$$

QED

6.3 Metodi d'integrazione

In questo paragrafo affronteremo il problema del calcolo effettivo degli integrali indefiniti e definiti, cioè della determinazione delle primitive di una funzione data e dell'applicazione di questo al calcolo degli integrali definiti. Dal momento che il teorema fondamentale del calcolo dice sostanzialmente che l'integrazione indefinita è il procedimento inverso della derivazione, è lecito aspettarsi che i metodi di calcolo degli integrali indefiniti siano fondati su un'opportuna elaborazione dei metodi di calcolo delle derivate. Così è, infatti, ed i due principali metodi d'integrazione, detti *per parti* e *per sostituzione*, sono, rispettivamente, i procedimenti inversi del calcolo delle derivate del prodotto e della composizione di funzioni.

Teorema 6.3.1 (Integrazione per parti) *Siano f e g due funzioni di classe C^1 nell'intervallo I. Allora*

$$\int fg'\,dx = fg - \int f'g\,dx.$$

Dim. Basta osservare che la funzione fg è una primitiva della funzione $fg' + f'g$. QED

Osservazioni 6.3.2

1. Il teorema precedente può sembrare inutile ai fini del calcolo effettivo di integrali, dal momento che al primo ed al secondo membro appaiono due integrali simili. In realtà, come si vede su esempi concreti, se usata in modo opportuno, la formula può fornire un integrale più semplice di quello di partenza. Per esempio, sia $a \neq 0$ e consideriamo l'integrale

$$\int x\, e^{ax}\, dx.$$

Posto $f(x) = x$, $g(x) = e^{ax}$, risulta evidentemente $f'(x) = 1$ e $g'(x) = a\, e^{ax}$, sicché si ha:

$$\int x\, e^{ax}\; dx = x\frac{e^{ax}}{a} - \int \frac{e^{ax}}{a}\, dx = x\frac{e^{ax}}{a} - \frac{e^{ax}}{a^2} + c, \qquad c \in \mathbb{R}$$

ed è evidente che al primo passaggio si è ottenuto un integrale più semplice di quello dato.

2. Anche quando dall'integrazione per parti si ottiene un integrale molto simile a quello dato, non è detto che il calcolo sia stato inutile. Ad esempio, consideriamo l'integrale
$$\int \cos^2 x\,dx.$$
Posto $f(x) = g'(x) = \cos x$, risulta $f'(x) = -g(x) = -\sin x$, e si ha:
$$\begin{aligned}\int \cos^2 x\,dx &= \sin x\cos x + \int \sin^2 x\,dx\\ &= \sin x\cos x + \int (1-\cos^2 x)\,dx\\ &= \sin x\cos x + x - \int \cos^2 x\,dx\end{aligned}$$
da cui
$$\int \cos^2 x = \frac{1}{2}\big(x+\sin x\cos x\big) + c.$$

3. La formula di integrazione per parti si applica ovviamente anche agli integrali definiti. Con la notazione del teorema, se $[a,b] \subset I$, allora
$$\begin{aligned}\int_a^b f(x)g'(x)\,dx &= \big[f(x)g(x)\big]_a^b - \int_a^b f'(x)g(x)\,dx\\ &= \big[f(b)g(b) - f(a)g(a)\big] - \int_a^b f'(x)g(x)\,dx.\end{aligned}$$

Teorema 6.3.3 (Integrazione per sostituzione) *Siano I, J due intervalli, $f : I \to \mathbb{R}$ continua, $\varphi : J \to I$ di classe C^1. Risulta:*

$$\int f(x)\,dx = \int f(\varphi(t))\varphi'(t)\,dt. \tag{6.3.14}$$

Per quanto riguarda gli integrali definiti, risulta

$$\int_{\varphi(c)}^{\varphi(d)} f(x)\,dx = \int_c^d f(\varphi(t))\varphi'(t)\,dt \tag{6.3.15}$$

per ogni intervallo $[c,d] \subset J$.

Dim. Se G è una qualunque primitiva di f, allora $G\circ\varphi$ è una primitiva della funzione $(f\circ\varphi)\,\varphi'$. Infatti:
$$\frac{d}{dt}(G\circ\varphi) = (G'\circ\varphi)\,\varphi' = (f\circ\varphi)\,\varphi'$$

e quindi la formula dice semplicemente che l'integrale indefinito di f è $\{G+c\}$ se e solo se l'integrale indefinito di $(f \circ \varphi)\,\varphi'$ è $\{G \circ \varphi + c\}$. QED

Esempio 6.3.4 (Integrali quasi immediati) Dalla formula di cambiamento di variabile segue che se $f \in C^1$:

$$\begin{aligned}
\frac{f(x)^{\alpha+1}}{\alpha+1} + c &= \int f(x)^\alpha f'(x)\,dx \qquad (\alpha \neq -1)\\
\log_a f(x) + c &= \int \frac{f'(x)}{f(x)\log a}\,dx\\
\cos\big(f(x)\big) + c &= \int -\sin\big(f(x)\big) f'(x)\,dx\\
\sin\big(f(x)\big) + c &= \int \cos\big(f(x)\big) f'(x)\,dx\\
\tan\big(f(x)\big) + c &= \int \frac{f'(x)}{\cos^2\big(f(x)\big)}\,dx\\
\mathrm{e}^{f(x)} + c &= \int \mathrm{e}^{f(x)}\, f'(x)\,dx\\
\arctan\big(f(x)\big) + c &= \int \frac{f'(x)}{1+(f(x))^2}\,dx\\
\arcsin\big(f(x)\big) + c &= \int \frac{f'(x)}{\sqrt{1-(f(x))^2}}\,dx
\end{aligned}$$

Osservazioni 6.3.5

1. Il modo forse più semplice (almeno dal punto di vista mnemonico) di applicare il Teorema 6.3.3 è il seguente. Ricordando la notazione $\varphi' = \frac{dx}{dt}$ per la derivata della funzione $x = \varphi(t)$, si può ricavare (formalmente) $dx = \varphi'(t)dt$, e questa sostituzione, assieme alla $x = \varphi(t)$, fornisce l'enunciato corretto del teorema, malgrado non sia giustificata dalle conoscenze presentate fin qui.

2. Il Teorema 6.3.3 si può usare nei due versi. Per esempio, consideriamo l'integrale

$$\int \sqrt{1-x^2}\,dx.$$

Ponendo $x = \varphi(t)$ con $\varphi(t) = \sin t$ si ottiene, procedendo come appena indicato, $dx = \cos t\,dt$ e quindi

$$\int \sqrt{1-x^2}\,dx = \int \sqrt{1-\sin^2 t}\,\cos t\,dt = \int \cos^2 t\,dt$$

e l'ultimo integrale è stato calcolato nell'Osservazione 6.3.2.2. Invece, se si considera l'integrale

$$\int \tan t\,dt,$$

per esempio per $t \in]-\pi/2, \pi/2[$, conviene porre $x = \varphi(t) = \cos t$, sicché $dx = \varphi'(t)dt = -\sin t\, dt$ e si ottiene

$$\int \tan t\, dt = \int \frac{\sin t}{\cos t}\, dt = \int \frac{-1}{x}\, dx = -\log|x| + c = -\log|\cos t| + c.$$

3. Nel calcolo per sostituzione degli integrali definiti si può procedere in due modi. Dovendo calcolare l'integrale $\int_a^b f(x)dx$, si possono prima calcolare le primitive in termini della variabile x e sostituire alla fine i valori a e b, oppure calcolare le primitive in termini della variabile t e sostituire alla fine i valori c e d tali che $\varphi(c) = a$ e $\varphi(d) = b$. È essenziale però verificare l'applicabilità del teorema *nell'intervallo* $[a, b]$. Per esempio, consideriamo l'integrale

$$\int_0^\pi \frac{1}{1 + \cos^2 t}\, dt.$$

È facile verificare che la sostituzione $x = \tan t$ fornisce

$$\int \frac{1}{1+\cos^2 t}\, dt = \int \frac{1}{2+\tan^2 t} \frac{1}{\cos^2 t}\, dt = \int \frac{1}{2+x^2}\, dx = \frac{1}{\sqrt{2}} \arctan(x/\sqrt{2}) + c.$$

Se ora proviamo a sostituire gli estremi, otteniamo che $t = 0$ dà $x = 0$ e $t = \pi$ dà ancora $x = 0$, e da questi calcoli dedurremmo che l'integrale è nullo, risultato assurdo dal momento che l'integrale di una funzione strettamente positiva è strettamente positivo. L'errore è dovuto al fatto che la funzione tan *non è definita nell'intervallo* di integrazione $[0, \pi]$ perché $\pi/2$ non è nel suo dominio. La sostituzione indicata si può ancora adoperare, ma il calcolo corretto è quest'altro (in cui si tiene conto che $\cos^2(\pi - t) = \cos^2 t$):

$$\begin{aligned} \int_0^\pi \frac{1}{1+\cos^2 t}\, dt &= \int_0^{\pi/2} \frac{1}{1+\cos^2 t}\, dt + \int_{\pi/2}^{\pi} \frac{1}{1+\cos^2(\pi - t)}\, dt \\ &= 2\int_0^{\pi/2} \frac{1}{1+\cos^2 t}\, dt = 2\int_0^{+\infty} \frac{1}{2+x^2}\, dx = \sqrt{2}\pi/2, \end{aligned}$$

dove l'ultimo passaggio è giustificato nell'esempio 6.5.14 del paragrafo 6.5.

4. A volte è dato da calcolare un integrale definito nella forma

$$\int_a^b f(x)dx$$

e si vuol cercare una funzione φ che ne semplifichi il calcolo. Gli estremi c e d dell'integrale nella nuova variabile t tale che $x = \varphi(t)$ saranno due punti del dominio J di φ tali che $a = \varphi(c)$ e $b = \varphi(d)$ e in generale non sono univocamente determinati, dal momento che nell'enunciato del Teorema 6.3.3 non abbiamo supposto che φ sia invertibile. Se però φ è invertibile, possiamo scrivere (6.3.15) nella forma

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_{\varphi^{-1}(a)}^{\varphi^{-1}(b)} f(\varphi(t))\varphi'(t)\,dt. \tag{6.3.16}$$

A tal proposito, osserviamo che se la funzione φ è decrescente allora l'ordine degli estremi di integrazione viene scambiato, cioè se $a < b$ allora $\varphi^{-1}(a) > \varphi^{-1}(b)$. Se si vuole conservare l'ordine crescente negli estremi d'integrazione, detto $[c, d]$ l'intervallo di estremi $\varphi^{-1}(a)$ e $\varphi^{-1}(b)$, la formula (6.3.16) va scritta

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_c^d f(\varphi(t))\,|\varphi'(t)|\,dt.$$

6.4 Integrali indefiniti di funzioni razionali

È sempre possibile, in linea di principio, calcolare l'integrale indefinito del rapporto di due polinomi a coefficienti reali $\dfrac{P(x)}{Q(x)}$, purchè si conoscano le radici del denominatore $Q(x)$. Se il grado p del numeratore è maggiore o uguale al grado q del denominatore, si deve effettuare la divisione dei due polinomi ottenendo un quoziente $S(x)$ e un resto $R(x)$ che è un polinomio di grado $h < q$. Allora possiamo scrivere

$$P(x) = Q(x) \cdot S(x) + R(x),$$

ossia

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = S(x) + \frac{R(x)}{Q(x)}.$$

Quindi otteniamo

$$\int \frac{P(x)}{Q(x)}\,dx = \int S(x)\,dx + \int \frac{R(x)}{Q(x)}\,dx\,,$$

dove l'integrale del polinomio S è immediato e nell'integrale razionale il grado di R è strettamente minore del grado di Q. Per calcolare quest'ultimo integrale si usa il metodo dei fratti semplici. Per i teoremi 1.3.11 e 1.3.12 il polinomio Q si fattorizza come:

$$Q(x) = a_q(x - x_1)^{m_1} \cdots (x - x_r)^{m_r} \cdot (x^2 + p_1x + q_1)^{n_1} \cdots (x^2 + p_sx + q_s)^{n_s},$$

con $m_1 + \ldots + m_r + 2n_1 + \ldots 2n_s = q$ e i polinomi $(x^2 + p_jx + q_j)$ hanno il discriminante negativo. Illustriamo il metodo dei fratti semplici con un esempio in cui Q ha una radice reale doppia e due radici semplici complesse coniugate.

Esempio 6.4.1 Consideriamo l'integrale indefinito:

$$\int \frac{2x + 1}{x^4 + 2x^2 - 8x + 5}\,dx\,.$$

Il denominatore ha la radice doppia $x = 1$ e si fattorizza come

$$Q(x) = (x-1)^2(x^2+2x+5)\,.$$

Allora si introducono delle costanti da determinare mediante la seguente uguaglianza:

$$\frac{2x+1}{x^4+2x^2-8x+5} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{(x-1)^2} + \frac{Cx+D}{x^2+2x+5}\,.$$

Effettuando la somma nel membro destro e riducendo i termini simili si ha:

$$\begin{aligned}&\frac{2x+1}{x^4+2x^2-8x+5}\\ &= \frac{(A+C)x^3+(A+B-2C+D)x^2+(3A+2B+C-2D)x-5A+5B+D}{x^4+2x^2-8x+5}.\end{aligned}$$

Uguagliando i coefficienti delle potenze di x dello stesso grado si arriva al sistema:

$$\begin{cases} A+C=0 \\ A+B-2C+D=0 \\ 3A+2B+C-2D=2 \\ -5A+5B+D=1 \end{cases}$$

Risolvendo il sistema lineare si ottiene:

$$A=\frac{1}{16},\ B=\frac{3}{8},\ C=-\frac{1}{16},\ D=-\frac{9}{16}.$$

Dunque

$$\begin{aligned}\int \frac{2x+1}{x^4+2x^2-8x+5}\,dx &= \int \frac{1}{16(x-1)}\,dx + \int \frac{3}{8(x-1)^2}\,dx\\ &\quad - \int \frac{\frac{1}{16}\,x+\frac{9}{16}}{x^2+2x+5}\,dx.\end{aligned}$$

Calcoliamo i tre integrali separatamente.

$$
\begin{aligned}
\int \frac{1}{16(x-1)}\,dx &= \frac{1}{16}\log|x-1|\,,\\
\int \frac{3}{8(x-1)^2}\,dx &= -\frac{3}{8(x-1)}\,,\\
-\int \frac{\frac{1}{16}x+\frac{9}{16}}{x^2+2x+5}\,dx\\
= -\frac{1}{32}\int \frac{2x+2-2+18}{x^2+2x+5}\,dx\\
= -\frac{1}{32}\int \frac{2x+2}{x^2+2x+5}\,dx - \frac{1}{32}\int \frac{16}{x^2+2x+5}\,dx\\
= -\frac{1}{32}\log(x^2+2x+5) - \frac{1}{32}\int \frac{16}{(x+1)^2+4}\,dx
\end{aligned}
$$

e l'ultimo integrale vale

$$
-\frac{1}{2}\int \frac{1}{4}\frac{1}{\left(\frac{x+1}{2}\right)^2+1}\,dx = -\frac{1}{4}\arctan\left(\frac{x+1}{2}\right).
$$

6.5 Integrali impropri

Finora abbiamo trattato solo integrali di funzioni *limitate* su intervalli *limitati*. Vediamo ora come sia possibile generalizzare la teoria per considerare casi più generali, che fra l'altro sono connessi con la teoria delle serie numeriche studiate nel Capitolo 2. Distinguiamo due casi, quello di funzioni non limitate su intervalli limitati e quello di intervalli non limitati, che si chiamano integrali generalizzati (o impropri) di prima e di seconda specie, rispettivamente. Naturalmente, tutta la trattazione si basa sui procedimenti già visti. Come nel caso delle serie numeriche, esiste una nozione di *convergenza assoluta* accanto a quella di convergenza semplice.

Definizione 6.5.1 (Integrali impropri di 1^a specie) *Sia $f : [a,b[\to \mathbb{R}$ integrabile in $[a,c]$ per ogni $c<b$; diciamo che f è* integrabile in senso improprio in $[a,b[$ *se esiste finito il limite*

$$
\lim_{c\to b^-}\int_a^c f(x)\,dx.
$$

Diciamo che f è assolutamente integrabile in senso improprio in $[a,b[$ *se esiste finito il limite*

$$
\lim_{c\to b^-}\int_a^c |f(x)|\,dx.
$$

Se $f :]a,b] \to \mathbb{R}$ è integrabile in $[c,b]$ per ogni $c \in]a,b]$, allora i limiti considerati sopra vanno sostituiti con

$$\lim_{c\to a^+} \int_c^b f(x)\,dx, \qquad\qquad \lim_{c\to a^+} \int_c^b |f(x)|\,dx.$$

Sulle relazioni tra integrabilità assoluta e non assoluta torneremo nell'Osservazione 6.5.8 e nell'Esempio 6.5.16.

La proprietà che la funzione f sia (assolutamente) integrabile in senso improprio in $[a,b[$ dipende da quanto velocemente $f(x)$ diventa grande per x che tende a b da destra. Ritroviamo questa considerazione qualitativa nel fondamentale esempio che segue.

Esempio 6.5.2 Studiamo l'integrabilità in senso improprio nell'intervallo $]0,1]$ della funzione $f(x) = x^{-\alpha}$ al variare del parametro $\alpha \in \mathbb{R}$. Ovviamente, per $\alpha \leq 0$ la funzione è continua nell'intervallo chiuso $[0,1]$ e quindi è integrabile, grazie al Teorema 6.1.9. Il problema dell'integrabilità in senso improprio si pone per $\alpha > 0$. Usando la definizione otteniamo:

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \frac{1}{x^\alpha}\,dx &= \lim_{c\to 0^+} \int_c^1 \frac{1}{x^\alpha}\,dx = \begin{cases} \displaystyle\lim_{c\to 0^+} \frac{1-c^{-\alpha+1}}{-\alpha+1} & \alpha \neq 1 \\[2ex] \displaystyle\lim_{c\to 0^+} -\log c & \alpha = 1 \end{cases} \\
&= \begin{cases} \dfrac{1}{-\alpha+1} & \alpha < 1 \\[2ex] +\infty & \alpha \geq 1 \end{cases}
\end{aligned}$$

e quindi $x^{-\alpha}$ è integrabile in senso improprio in $]0,1]$ se e solo se $\alpha < 1$.

Come abbiamo accennato prima, una funzione che tenda all'infinito troppo velocemente in un estremo dell'intervallo di definizione non sarà integrabile in senso improprio. Infatti, $x^{-\alpha}$ tende all'infinito per $x \to 0$ tanto più velocemente quanto più il parametro α è grande. La soglia per l'integrabilità, come spiegato nell'esempio, è il valore $\alpha = 1$: se α è più piccolo la funzione $x^{-\alpha}$ è integrabile, se α è più grande non lo è. Questo punto di vista è utile per comprendere il seguente teorema di confronto. Trattiamo il caso di una funzione che può essere illimitata in prossimità dell'estremo destro dell'intervallo di definizione. Nel caso in cui il problema dell'integrabilità si ponga nell'estremo sinistro, le modifiche da apportare sono ovvie.

Teorema 6.5.3 (Criterio di confronto per gli integrali impropri di 1^a specie) *Siano $f, g : [a,b[\to \mathbb{R}$ integrabili in $[a,c]$ per ogni $c < b$, e supponiamo $|f(x)| \leq g(x)$ per ogni $x \in [a,b[$. Se g è integrabile in senso improprio in $[a,b[$ allora f è assolutamente integrabile in senso improprio in $[a,b[$.*

Osservazione 6.5.4 Dal teorema precedente segue subito che se $f \geq g \geq 0$ e g *non è* integrabile in senso improprio allora neanche f lo è.

Combinando la proposizione e l'osservazione precedenti con l'Esempio 6.5.2 si ottiene il seguente corollario.

Corollario 6.5.5 (Criterio d'integrabilità) *Sia $f : [a,b[\to \mathbb{R}$ integrabile in $[a,c]$ per ogni $c \in [a,b[$. Allora:*

(i) se esistono $C > 0$ ed $\alpha < 1$ tali che $|f(x)| \leq C(b-x)^{-\alpha}$ per ogni $x \in [a,b[$ allora f è assolutamente integrabile in senso improprio;

(ii) se esistono $C > 0$ ed $\alpha \geq 1$ tali che $|f(x)| \geq C(b-x)^{-\alpha}$ per ogni $x \in [a,b[$ allora f non è assolutamente integrabile in senso improprio.

Osservazione 6.5.6 Quanto visto finora per funzioni definite in un intervallo semiaperto a destra $[a,b[$ si può facilmente riformulare per funzioni definite in un intervallo semiaperto a sinistra del tipo $]a,b]$ o per funzioni definite in un intervallo privato di un punto interno.

Se $f :]a,b] \to \mathbb{R}$ è integrabile in $[c,b]$ per ogni $c \in]a,b]$, le condizioni nel Corollario 6.5.5 divengono

$$|f(x)| \leq C(x-a)^{-\alpha}, \qquad |f(x)| \geq C(x-a)^{-\alpha};$$

la prima, con $\alpha < 1$ garantisce l'integrabilità, e la seconda, con $\alpha \geq 1$, garantisce la non integrabilità.

Consideriamo ora $c \in]a,b[$, e sia $f : [a,b] \setminus \{c\} \to \mathbb{R}$ integrabile in $[a, c-\delta]$ e in $[c+\delta, b]$ per ogni $\delta > 0$. Allora, f è integrabile in senso improprio in $[a,b]$ se è integrabile in senso improprio sia in $[a,c]$ che in $[c,b]$, cioè se esistono finiti *entrambi* i seguenti limiti:

$$\lim_{\delta \to 0^+} \int_a^{c-\delta} f(x)dx, \qquad \lim_{\delta \to 0^+} \int_{c+\delta}^{b} f(x)dx.$$

Una definizione analoga vale ovviamente per l'assoluta integrabilità. In altri termini, nel caso di uno (o più) punti singolari *interni* all'intervallo di integrazione, si deve studiare un punto per volta, e ciascuno separatamente da destra e da sinistra.

Passiamo ora a considerare l'integrabilità di funzioni su semirette. Anche in questo caso, studiamo in dettaglio il caso della semiretta $[a, +\infty[$, ed esponiamo poi le modifiche da fare nel caso della semiretta $]-\infty, b]$).

Definizione 6.5.7 (Integrali impropri di 2^a specie) *Sia $f : [a, +\infty[\to \mathbb{R}$ integrabile in $[a,b]$ per ogni $b > a$; diciamo che f è* integrabile in senso improprio in $[a, +\infty[$ *se esiste finito il limite*

$$\lim_{b \to +\infty} \int_a^b f(x)\, dx.$$

Diciamo che f è assolutamente integrabile in senso improprio in $[a,+\infty[$ *se esiste finito il limite*

$$\lim_{b\to+\infty}\int_a^b |f(x)|\,dx.$$

Come nel caso delle serie numeriche (vedi Proposizione 3.1.10), la convergenza assoluta implica quella semplice.

Osservazione 6.5.8 Si può dimostrare che, sia nel caso degli integrali impropri di prima che di seconda specie, se f è assolutamente integrabile in senso improprio in $[a,b[$ (o $[a,+\infty[$) allora è anche integrabile in senso improprio (senza valore assoluto) nello stesso intervallo. Nell'esempio 6.5.16 vedremo che il viceversa non è vero. Questo tipo di fenomeno è analogo a quanto accade per le serie numeriche, vedi Proposizione 3.1.10 ed Osservazione 3.3.2.4.

Esempio 6.5.9 Studiamo l'integrabilità in senso improprio nell'intervallo $[1,+\infty[$ della funzione $f(x)=x^{-\alpha}$ al variare del parametro $\alpha\in\mathbb{R}$. Usando la definizione otteniamo:

$$\begin{aligned}\int_1^\infty \frac{1}{x^\alpha}\,dx &= \lim_{c\to+\infty}\int_1^c \frac{1}{x^\alpha}\,dx = \begin{cases}\displaystyle\lim_{c\to+\infty}\frac{c^{-\alpha+1}-1}{-\alpha+1} & \alpha\neq 1\\[2ex] \displaystyle\lim_{c\to+\infty}\log c & \alpha=1\end{cases}\\ &= \begin{cases}\dfrac{1}{\alpha-1} & \alpha>1\\[2ex] +\infty & \alpha\le 1\end{cases}\end{aligned}$$

e quindi $x^{-\alpha}$ è integrabile in senso improprio in $[1,+\infty[$ se e solo se $\alpha>1$.

In questo caso, una funzione che tenda a zero troppo lentamente per $x\to+\infty$ non sarà integrabile in senso improprio. Infatti, $x^{-\alpha}$ tende a zero per $x\to+\infty$ tanto più velocemente quanto più il parametro α è grande. La soglia per l'integrabilità, anche in questo caso, è il valore $\alpha=1$: stavolta, se α è più grande di 1 la funzione $x^{-\alpha}$ è integrabile, se α è più piccolo non lo è. Vediamo ora un'altra interessante classe di esempi.

Esempio 6.5.10 Studiamo l'integrabilità in senso improprio nell'intervallo $[2,+\infty[$ della funzione $f(t)=\frac{1}{t\log^\alpha t}$ al variare del parametro $\alpha>0$. In base alle proprietà dei logaritmi, non è possibile applicare teoremi di confronto con le funzioni studiate nell'esempio 6.5.9. Possiamo però usare l'esempio 6.5.9, dopo aver calcolato l'integrale con la sostituzione $x=\log t$, e otteniamo:

$$\int_2^\infty \frac{1}{t\log^\alpha t}\,dt = \int_{\log 2}^\infty \frac{1}{x^\alpha}\,dx$$

e quindi $\frac{1}{t\log^\alpha t}$ è integrabile in senso improprio in $[2,+\infty[$ se e solo se $\alpha>1$.

Anche per gli intervalli illimitati vale un teorema di confronto, analogo al Teorema 6.5.3.

Teorema 6.5.11 (Criterio di confronto per gli integrali impropri di 2^a specie)

Siano $f, g : [a, +\infty[\to \mathbb{R}$ integrabili in $[a, b]$ per ogni $b > a$, e supponiamo $|f(x)| \leq g(x)$ per ogni $x \in [a, +\infty[$. Se g è integrabile in senso improprio in $[a, +\infty[$ allora f è assolutamente integrabile in senso improprio in $[a, +\infty[$.

Osservazione 6.5.12 Dal teorema precedente segue subito che se $f \geq g \geq 0$ e g *non* è integrabile in senso improprio in $[a, +\infty[$ allora neanche f lo è.

Come prima, combinando la proposizione e l'osservazione precedenti con l'Esempio 6.5.9 si ottiene il seguente corollario, analogo al Corollario 3.2.9 valido per le serie.

Corollario 6.5.13 (Criterio d'integrabilità) *Sia $f : [a, +\infty[\to \mathbb{R}$ integrabile in $[a, b]$ per ogni $b > a$. Allora:*

(i) *se esistono $C > 0$ ed $\alpha > 1$ tali che $|f(x)| \leq Cx^{-\alpha}$ per ogni $x \in [a, +\infty[$ allora f è assolutamente integrabile in senso improprio in $[a, +\infty[$;*

(ii) *se esistono $C > 0$ ed $\alpha \leq 1$ tali che $|f(x)| \geq Cx^{-\alpha}$ per ogni $x \in [a, +\infty[$ allora f non è assolutamente integrabile in senso improprio in $[a, +\infty[$.*

Il seguente esempio è interessante anche in relazione all'Osservazione 6.3.5.4.

Esempio 6.5.14 Consideriamo l'integrale

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{m^2 + x^2} dx,$$

con $m > 0$. Il Corollario 6.5.13 ci dice subito che l'integrale è convergente, ma è ancora più semplice procedere al calcolo diretto:

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{m^2 + x^2}\, dx = \frac{1}{m^2} \int_0^{+\infty} \frac{1}{1 + (x/m)^2}\, dx = \frac{1}{m} \lim_{b \to +\infty} \arctan(b/m) = \frac{\pi}{2m}.$$

Osservazioni 6.5.15 Consideriamo ora il caso in cui l'intervallo d'interesse sia una semiretta del tipo $]-\infty, b]$ o tutta la retta $]-\infty, +\infty[$. Come nel caso degli integrali di prima specie, sarà sufficiente indicare in breve le modifiche da fare. Distinguiamo i due casi.

1. Sia $f :]-\infty, b] \to \mathbb{R}$ integrabile in $[a, b]$ per ogni $a < b$. I limiti considerati nella Definizione 6.5.7 vanno sostituiti con

$$\lim_{a \to -\infty} \int_a^b f(x)\, dx, \qquad \lim_{a \to -\infty} \int_a^b |f(x)|\, dx,$$

e le condizioni nel Corollario 6.5.13 con

$$|f(x)| \leq C|x|^{-\alpha}, \qquad |f(x)| \geq C|x|^{-\alpha};$$

la prima, con $\alpha > 1$ garantisce l'integrabilità, e la seconda, con $\alpha \leq 1$, garantisce la non integrabilità in $]-\infty, b]$.

2. Sia ora $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ integrabile in $[a, b]$ per ogni $a < b$. Allora, f è integrabile in senso improprio in $\mathbb{R}$ se è integrabile in senso improprio sia in $[0, +\infty[$ che in $]-\infty, 0]$, cioè se esistono finiti *entrambi* i seguenti limiti:

$$\lim_{b\to+\infty} \int_0^b f(x)dx, \qquad \lim_{a\to-\infty} \int_a^0 f(x)dx.$$

Una definizione analoga vale ovviamente per l'assoluta integrabilità. Naturalmente, l'estremo finito d'integrazione nelle formule precedenti è del tutto arbitrario, e si è scelto 0 solo per non introdurre altri parametri. Qualunque numero reale andrebbe bene.

Esempio 6.5.16 Consideriamo la funzione $\frac{\sin x}{x}$, per $x \in \mathbb{R}$ (com'è noto, la funzione vale 1 per $x = 0$, trattandosi di una discontinuità eliminabile). Allora l'integrale improprio

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx \tag{6.5.17}$$

è convergente (e vale π), mentre l'integrale improprio

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \left|\frac{\sin x}{x}\right| dx \tag{6.5.18}$$

non è convergente. Questo prova che esistono funzioni integrabili in senso improprio che non sono *assolutamente* integrabili in senso improprio. È abbastanza facile vedere la divergenza dell'integrale in (6.5.17), mentre non è altrettanto facile provare la convergenza dell'integrale in (6.5.17). La difficoltà risiede nel fatto che le primitive della funzione $\frac{\sin x}{x}$, che ovviamente esistono per il Teorema fondamentale del calcolo, non sono esprimibili in termini delle funzioni elementari (come già osservato nell'Osservazione 6.2.5.4), per cui il calcolo esplicito, come negli esempi precedenti, è impossibile. Possiamo mettere in relazione quest'esempio con l'esempio 3.3.2.4 relativo alle serie a segni alterni, notando che, grazie al criterio di Leibniz, la trattazione relativa alle serie è molto più semplice.

Come accennato all'inizio, ci sono molte somiglianze tra la teoria degli integrali impropri e quella delle serie, tanto che sotto opportune condizioni lo studio di un integrale improprio e di una serie sono equivalenti, come mostra il seguente criterio. Esso è particolarmente efficace perché, mentre è in generale molto difficile trovare una formula esplicita per le ridotte di una serie, è spesso possibile determinare le primitive di una funzione usando il teorema fondamentale del Calcolo.

Teorema 6.5.17 *Sia $f : [0, \infty[\to \mathbb{R}$ una funzione positiva e decrescente. Allora la serie*

$$\sum_{k=0}^{\infty} f(k)$$

converge se e solo se l'integrale improprio

$$\int_0^{\infty} f(x)\,dx$$

converge.

Dim. Siccome f è decrescente, risulta $f(k+1) \le f(x) \le f(k)$ per ogni $x \in [k, k+1]$ ed inoltre f è integrabile in ogni intervallo $[0, x]$, $x > 0$. Poiché f è positiva, la funzione

$$x \mapsto \int_0^x f(t)\,dt$$

è monotona crescente e quindi esiste (finito o no) il

$$\lim_{x\to\infty} \int_0^x f(t)\,dt, \tag{6.5.19}$$

che possiamo calcolare per valori interi di x considerando la successione $\left(\int_0^n f(t)\,dt\right)$. Se per ogni $n \in \mathbb{N}$ consideriamo la suddivisione $P_n = \{0, 1, \ldots, n-1, n\}$ dell'intervallo $[0, n]$ e le relative somme integrali inferiore e superiore, detta (s_n) la successione delle ridotte della serie $\sum_k f(k)$, risulta

$$s(f, P_n) = \sum_{k=1}^{n} f(k) = s_n - f(0) \le \int_0^n f(x)\,dx \le S(f, P_n) = \sum_{k=0}^{n-1} f(k) = s_{n-1},$$

sicché il limite in (6.5.19) è finito se e solo se la successione (s_n) converge. QED

Vediamo come il precedente criterio si possa applicare in due casi particolari importanti, già visti in altro modo.

Esempi 6.5.18 In quest'esempio discutiamo due famiglie di serie che sono utili anche come riferimento per i teoremi di confronto.

1. Sappiamo dall'Esempio 3.2.8.2 che la *serie armonica generalizzata*

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^{\alpha}}, \qquad \alpha \in \mathbb{R}$$

converge se e solo se $\alpha > 1$. Per ogni $\alpha > 0$ si può applicare il criterio di confronto con l'integrale improprio con $f(x) = \frac{1}{x^{\alpha}}$ e concludere che la serie data converge se e solo se $\alpha > 1$.

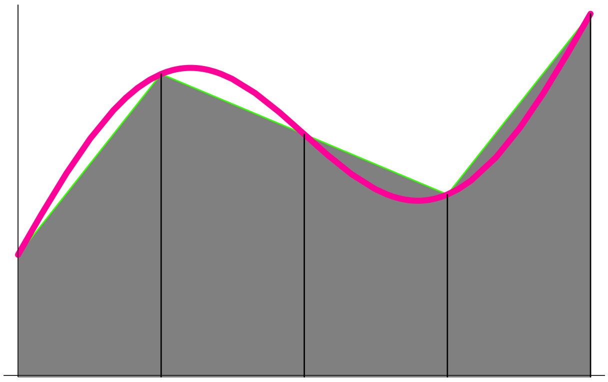


Figura – 6.1: Metodo dei trapezi, $n = 4$.

2. Sappiamo dall'Esempio 3.2.8.2 che la serie

$$\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k \log^{\alpha} k}, \qquad \alpha \in \mathbb{R}$$

converge se e solo se $\alpha > 1$. Per ogni $\alpha > 0$ si può applicare il criterio di confronto con l'integrale improprio con $f(x) = \frac{1}{x \log^{\alpha} x}$ e concludere, in base all'esempio 6.5.10, che la serie data converge se e solo se $\alpha > 1$.

6.6 Cenni sull'approssimazione numerica degli integrali

In questa sezione diamo dei brevissimi cenni al problema dell'approssimazione numerica di integrali definiti. Infatti non sempre è possibile trovare esplicitamente una primitiva della funzione integranda in termini di funzioni elementari e quindi si ricorre a formule che consentono di approssimare il valore dell'integrale e alla relativa stima dell'errore commesso. Presenteremo solo due metodi detti dei trapezi e di Cavalieri–Simpson. Sia data una funzione $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ continua in $[a, b]$ e sia $I(f) = \int_a^b f(x)\,dx$. Suddividiamo il dominio in n intervalli di uguale lunghezza, cioè posto $h = \frac{b-a}{n}$ definiamo $x_k = a + kh$ ($k = 0, 1, \ldots, n$). Il metodo dei trapezi consiste nell'approssimare l'integrale della funzione f nell'intervallo $[x_{k-1}, x_k]$ con l'integrale della funzione avente come grafico la retta passante per i punti $(x_{k-1}, f(x_{k-1}))$ e $(x_k, f(x_k))$. È facile verificare che, ripetendo questa operazione in ciascun intervallo, si ottiene la formula:

$$T_n(f) = \frac{h}{2} \sum_{k=1}^{n} \big(f(x_{k-1}) + f(x_k)\big). \tag{6.6.20}$$

Per poter stimare l'errore commesso abbiamo bisogno di maggiore regolarità sulla funzione f. Vale infatti il seguente risultato.

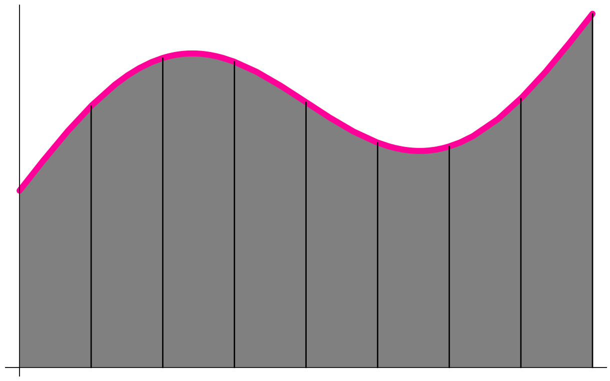


Figura – 6.2: Metodo di Cavalieri–Simpson, $n = 4$.

Teorema 6.6.1 (Metodo dei trapezi) *Sia $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una funzione di classe $C^2([a, b])$ e sia*

$$|f''(x)| \leq C_1 \qquad \forall x \in [a, b].$$

Posto $T_n(f)$ come in (6.6.20), si ha

$$|I(f) - T_n(f)| \leq \frac{C_1}{12} \frac{(b-a)^3}{n^2} .$$

Il metodo di Cavalieri–Simpson consiste nel suddividere ancora l'intervallo $[a, b]$ in n parti uguali mediante i punti (x_k) definiti in precedenza e nel considerare anche i punti medi degli n intervalli $[x_{k-1}, x_k]$, dati da $z_k = \dfrac{x_{k-1} + x_k}{2}$ $(k = 1, \ldots, n)$. L'integrale della funzione f nell'intervallo $[x_{k-1}, x_k]$ viene allora approssimato con l'integrale del polinomio di secondo grado passante per i tre punti $(x_{k-1}, f(x_{k-1}))$, $(z_k, f(z_k))$ e $(x_k, f(x_k))$. Non è difficile verificare che in questo modo si ottiene la formula

$$\begin{aligned} S_n(f) &= \frac{h}{6} \sum_{k=1}^{n} \big(f(x_{k-1}) + 4f(z_k) + f(x_k) \big) \\ &= \frac{h}{6} \left(f(x_0) + f(x_n) + 2 \sum_{k=1}^{n-1} f(x_k) + 4 \sum_{k=1}^{n} f(z_k) \right) \end{aligned} \tag{6.6.21}$$

Per stimare l'errore commesso usando la formula $S_n(f)$ occorre ancora maggiore regolarità sulla funzione f.

Teorema 6.6.2 (Metodo di Cavalieri–Simpson) *Sia $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una funzione di classe $C^4([a, b])$ e sia*

$$|f^{(4)}(x)| \leq C_2 \qquad \forall x \in [a, b].$$

Posto $S_n(f)$ come in (6.6.21), si ha

$$|I(f) - S_n(f)| \leq \frac{C_2}{2880} \frac{(b-a)^5}{n^4} .$$

CAPITOLO 7

SUCCESSIONI E SERIE DI FUNZIONI

7.1 Successioni di funzioni

Indichiamo con I un sottoinsieme non vuoto di $\mathbb{R}$.

Definizione 7.1.1 *Sia $I \subset \mathbb{R}$ e per ogni $h \in \mathbb{N}$ sia data la funzione $f_h : I \to \mathbb{R}$; risulta cosí definita la* successione di funzioni *reali (f_h) in I.*

1. *Diciamo che la successione (f_h)* converge in $x_0 \in I$ *se la successione numerica $(f_h(x_0))$ ha limite reale.*

2. *Diciamo che la successione (f_h)* converge puntualmente *in $J \subset I$ alla funzione $f : J \to \mathbb{R}$ se si ha*
$$\lim_{h\to\infty} f_h(x) = f(x) \qquad \forall x \in J.$$
La funzione f è detta limite puntuale *della successione (f_h).*

3. *Diciamo che la successione (f_h)* converge uniformemente in J *alla funzione $f : J \to \mathbb{R}$ se si ha*
$$\lim_{h\to\infty} \sup_{x\in J} |f_h(x) - f(x)| = 0.$$

Esempi 7.1.2 È facile verificare che se le funzioni f_h sono tutte crescenti nell'insieme I e convergono puntualmente alla funzione f, allora anche la funzione f è crescente in I. Non valgono considerazioni analoghe per altre proprietà delle funzioni f_h, come mostrano i seguenti esempi.

Siano $I = [0, 2\pi]$ e $f_h(x) = \sin^h x$; allora, $f_h(\pi/2) = 1$ per ogni h, $f_h(3\pi/2) = (-1)^h$ non converge, e $f_h(x) \to 0$ per ogni valore di x diverso da $\pi/2$, $3\pi/2$. Di conseguenza, la funzione limite f è definita in $J = I \setminus \{3\pi/2\}$, e vale $f(x) = 0$ per $x \neq \pi/2$, $f(\pi/2) = 1$.

Siano $I = [0, 1]$, $f_h(x) = \mathrm{e}^{-hx}$. Allora il limite puntuale di (f_h) è la funzione che vale 1 per $x = 0$ e 0 altrimenti.

Siano $I = [0, \pi/2[$, $f_h(x) = \min\{\tan x, h\}$. Allora il limite puntuale di (f_h) è la funzione $\tan x$.

Questi esempi mostrano che in generale l'insieme di convergenza di una successione è piú piccolo dell'insieme ove le f_h sono definite, e che proprietà come la limitatezza, la continuità e (a maggior ragione) la derivabilità, non sono stabili per la convergenza puntuale. Questa è la motivazione principale che porta ad introdurre la nozione di convergenza uniforme.

Osservazione 7.1.3 La convergenza uniforme in J implica la convergenza puntuale per ogni $x_0 \in J$: basta osservare che per ogni $x_0 \in J$ si ha

$$|f_h(x_0) - f(x_0)| \leq \sup_{x \in J} |f_h(x) - f(x)|$$

che tende a 0 se f_h converge uniformemente ad f in J. Il viceversa non è vero, neanche se si considerano funzioni continue ed insiemi compatti: sia infatti $I = [0, 1]$ e

$$f_h(x) = x^h \qquad 0 \leq x \leq 1. \tag{7.1.1}$$

La successione converge puntualmente alla funzione

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } 0 \leq x < 1; \\ 1 & \text{se } x = 1. \end{cases}$$

ma non vi converge uniformemente, dal momento che usando la disuguaglianza di Bernoulli 2.2.5

$$\sup_{x \in I} |f_h(x) - f(x)| \geq f_h(1 - 1/(2h)) \geq 1/2 \quad \text{non tende a zero.}$$

Osservazione 7.1.4 Se esplicitiamo le richieste sulla successione (f_h) affinché essa converga puntualmente o uniformemente ad f, otteniamo le seguenti equivalenze:

$$f_h \to f \text{ puntualmente in } J \quad \Leftrightarrow \quad \forall \varepsilon > 0,\ \forall x \in J\ \exists \nu > 0 : |f_h(x) - f(x)| < \varepsilon\ \forall h \geq \nu,$$

mentre

$$f_h \to f \text{ uniformemente in } J \quad \Leftrightarrow \quad \forall \varepsilon > 0\ \exists \nu > 0 : |f_h(x) - f(x)| < \varepsilon\ \forall h \geq \nu,\ \forall x \in J.$$

In altri termini, nel primo caso il ν trovato dipende sia da ε che da x, mentre nel secondo dipende solo da ε. Tornando all'esempio (7.1.1), vediamo che, fissati $\varepsilon \in]0, 1[$ e $x \in [0, 1[$, risulta $x^h < \varepsilon$ se e solo se $x = 0$ e h è qualunque, oppure $x > 0$ e $h \geq \nu = \frac{\log \varepsilon}{\log x}$, sicché non si può scegliere un ν indipendente da x.

La convergenza uniforme di una successione di funzioni ha numerose conseguenze sulle proprietà della funzione limite.

Teorema 7.1.5 (Continuità della funzione limite) *Supponiamo che la successione di funzioni $f_h : I \to \mathbb{R}$ converga uniformemente in I alla funzione f; se tutte le f_h sono continue nel punto $x_0 \in I$, allora anche la funzione f è continua in x_0; di conseguenza, se le f_h sono tutte continue in I, la funzione f è continua in I.*

Osservazione 7.1.6 1. Il teorema precedente fornisce un'altra prova del fatto che la successione (x^h) non può convergere uniformemente in $[0,1]$; infatti, il suo limite puntuale non è una funzione continua.

2. Si potrebbe dimostrare il seguente enunciato:

   Sia $I = [a,b]$, siano f_h continue in I, e supponiamo che $f_h \to f$ uniformemente in $]a,b]$; allora si ha convergenza uniforme in $[a,b]$.

   Questo risultato è spesso utile nella discussione della convergenza uniforme: infatti, se è noto che la successione non converge nel punto a, si ha subito che non può convergere uniformemente in $]a,b]$.

Teorema 7.1.7 (Passaggio al limite sotto il segno di integrale) *Supponiamo che la successione di funzioni $f_h : I \to \mathbb{R}$ converga uniformemente in I alla funzione f e che tutte le f_h siano continue in I; allora, per ogni intervallo $[a,b] \subset I$ risulta*

$$\lim_{h\to\infty} \int_a^b f_h(x)dx = \int_a^b f(x)dx. \tag{7.1.2}$$

Dim. Notiamo che tutti gli integrali sono definiti, perché le f_h sono funzioni continue per ipotesi (quindi integrabili su ogni intervallo compatto), e la f è pure continua per il Teorema 7.1.5. Sia fissato $\varepsilon > 0$, e sia $\nu > 0$ tale che

$$M_h = \sup_{x\in I} |f_h(x) - f(x)| < \varepsilon \qquad \forall\, h \geq \nu$$

(tale ν esiste per la convergenza uniforme delle f_h ad f). Allora:

$$\Big|\int_a^b f_h(x)dx - \int_a^b f(x)dx\Big| \leq \int_a^b |f_h(x) - f(x)|dx \leq \int_a^b M_h dx < \varepsilon(b-a)$$

per ogni $h \geq \nu$. QED

Esempi 7.1.8 1. L'eguaglianza (7.1.2) non vale in generale su intervalli che non sono chiusi e limitati. Per esempio, la successione di funzioni

$$f_h(x) = \begin{cases} \frac{1}{2h} & \text{per } -h < x < h \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

converge uniformemente a $f(x) \equiv 0$ in $\mathbb{R}$, ma $1 = \int_{\mathbb{R}} f_h \neq \int_{\mathbb{R}} f = 0$.

2. La sola convergenza puntuale non basta ad assicurare la validità della (7.1.2). Infatti, le $f_h(x) = 2hx\,\mathrm{e}^{-hx^2}$ convergono puntualmente a 0 per ogni $x \in [0,1]$, ma

$$\lim_{h\to+\infty} \int_0^1 f_h(x)dx = \lim_{h\to+\infty} (1 - \mathrm{e}^{-h}) \neq \int_0^1 f(x)dx = 0.$$

3. In generale, non è vero che, se una successione di funzioni derivabili converge uniformemente, la funzione limite è essa pure derivabile. Per esempio, la successione di funzioni derivabili per ogni $x \in \mathbb{R}$ data da $f_h(x) = \sqrt{x^2 + 1/h}$ converge uniformemente alla funzione $f(x) = |x|$ che non è derivabile per $x = 0$. Inoltre, anche se la funzione limite è derivabile, in generale la sua derivata non è il limite delle derivate delle f_h. Per esempio, le funzioni $f_h(x) = \frac{\sin(hx)}{h}$ sono tutte derivabili, convergono a 0 uniformemente in $\mathbb{R}$, ma le loro derivate, $f_h'(x) = \cos(hx)$, non convergono alla derivata del limite.

Teorema 7.1.9 (Passaggio al limite sotto il segno di derivata) *Supponiamo che la successione di funzioni $f_h : I \to \mathbb{R}$ converga puntualmente in I alla funzione f, che le f_h siano tutte derivabili in I con derivate prime continue, e che la successione (f_h') converga uniformemente in I alla funzione g. Allora la funzione f è derivabile in I, la sua derivata è g, e la successione (f_h) converge uniformemente ad f in ogni intervallo chiuso e limitato $[a, b] \subset I$.*

7.2 Serie di funzioni

Come nel paragrafo precedente, indichiamo con I un sottoinsieme non vuoto di $\mathbb{R}$. Data una successione di funzioni (u_k) in I, consideriamo la serie ad essa associata, denotata come nel caso delle serie numeriche con la notazione $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} u_k(x)$.

Definizione 7.2.1 *Sia $I \subset \mathbb{R}$; per ogni $k \in \mathbb{N}$ sia data la funzione $u_k : I \to \mathbb{R}$, e consideriamo la serie di funzioni $\sum_{k=0}^{\infty} u_k$. Definiamo la successione delle* somme parziali *(o* ridotte*) della serie ponendo, per ogni $h \in \mathbb{N}$ e per ogni $x \in I$, $f_h(x) = \sum_{k=0}^{h} u_k(x)$.*

1. *Diciamo che la serie $\sum_{k=0}^{\infty} u_k$* converge in *$x_0 \in I$ se la successione $(f_h(x_0))$ ammette limite reale.*

2. *Diciamo che la serie $\sum_{k=0}^{\infty} u_k$* converge puntualmente *alla funzione $f : J \to \mathbb{R}$ se la successione (f_h) converge puntualmente ad f in $J \subset I$. La funzione f è detta* somma *della serie in J e si denota anche $\sum_{k=0}^{\infty} u_k$.*

3. *Diciamo che la serie $\sum_{k=0}^{\infty} u_k$* converge uniformemente in *J alla funzione $f : J \to \mathbb{R}$ se la successione (f_h) converge uniformemente ad f in J.*

Osservazione 7.2.2 Si può formulare la definizione precedente dicendo che la serie $\sum_k u_k$ converge puntualmente o uniformemente se si verificano, rispettivamente le condizioni:

$$\lim_{h\to\infty}\sum_{k=0}^{h} u_k(x) = f(x) \qquad \forall x \in J \qquad \Longleftrightarrow$$

$$\forall\varepsilon > 0, \forall x \in J\ \exists\nu > 0 : \left| f(x) - \sum_{k=0}^{h} u_k(x) \right| < \varepsilon\ \forall h \geq \nu,$$

$$\lim_{h\to\infty}\sup_{x\in J}\left| f(x) - \sum_{k=0}^{h} u_k(x) \right| = 0 \qquad \Longleftrightarrow$$

$$\forall\varepsilon > 0\ \exists\nu > 0 : \sup_{x\in J}\left| f(x) - \sum_{k=0}^{h} u_k(x) \right| < \varepsilon\ \forall h \geq \nu \qquad \Longleftrightarrow$$

$$\forall\varepsilon > 0\ \exists\nu > 0 : \left| f(x) - \sum_{k=0}^{h} u_k(x) \right| < \varepsilon\ \forall h \geq \nu, \forall x \in J.$$

Come nel caso delle successioni, anche nel caso delle serie di funzioni la convergenza uniforme in J implica la convergenza puntuale per ogni $x \in J$.

Come per le serie numeriche, si può dare per le serie di funzioni una nozione di convergenza assoluta, che non ha un'equivalente nella teoria delle successioni (ed infatti la definizione seguente non ricorre alla successione delle ridotte). Si può inoltre dare un'ulteriore nozione di convergenza, detta convergenza totale, che permette un uso diretto dei criteri di convergenza noti per le serie a termini positivi, ed implica, come vedremo, tutti gli altri tipi di convergenza.

Definizione 7.2.3 *Sia $I \subset \mathbb{R}$; per ogni $k \in \mathbb{N}$ sia data la funzione $u_k : I \to \mathbb{R}$, e consideriamo la serie di funzioni $\sum_{k=0}^{\infty} u_k$.*

1. *Diciamo che la serie $\sum_{k=0}^{\infty} u_k$* converge puntualmente assolutamente *o, rispettivamente,* uniformemente assolutamente *in $J \subset I$ se la serie $\sum_{k=0}^{\infty} |u_k|$ converge puntualmente (risp. uniformemente) in J.*
2. *Diciamo che la serie $\sum_{k=0}^{\infty} u_k$* converge totalmente *in $J \subset I$ se la serie numerica $\sum_{k=0}^{\infty} \sup_{x\in J} |u_k(x)|$ converge.*

Osservazione 7.2.4 È immediato che, come nel caso delle serie numeriche, se una serie di funzioni converge assolutamente puntualmente (risp. uniformemente) allora converge puntualmente (risp. uniformemente); inoltre, è pure immediato per confronto che se la serie converge totalmente allora converge assolutamente uniformemente.

Una serie di funzioni può convergere assolutamente ma non uniformemente e viceversa. Per esempio,

$$\sum_{k=0}^{\infty} x^k \quad \text{converge assolutamente in } [0,1[$$

ma non converge uniformemente (altrimenti dovrebbe convergere anche per $x = 1$), mentre usando il criterio di Leibniz si può verificare che la serie

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{x+k} \quad \text{converge uniformemente in } [0, +\infty[$$

ma non converge assolutamente per alcun $x \in [0, +\infty[$ (per confronto con la serie armonica).

Per verificare la convergenza totale di una serie, non occorre sempre necessariamente calcolare l'estremo superiore delle u_k in I; se si riesce a darne una valutazione sufficientemente accurata, ciò può bastare.

Teorema 7.2.5 (Criterio di Weierstrass) *Sia $I \subset \mathbb{R}$ e per ogni $k \in \mathbb{N}$ sia data la funzione $u_k : I \to \mathbb{R}$. Se esiste una successione numerica (M_k) tale che $|u_k(x)| \leq M_k$ per ogni $x \in I$ e per ogni $k \in \mathbb{N}$ e la serie $\sum_k M_k$ è convergente, allora la serie di funzioni $\sum_{k=0}^{\infty} u_k$ converge totalmente in I.*

Per la somma di una serie di funzioni uniformemente convergente valgono proprietà analoghe a quelle viste per il limite uniforme di una successione, di cui sono conseguenze immediate.

Teorema 7.2.6 (Continuità della funzione somma) *Se la serie di funzioni $\sum_{k=0}^{\infty} u_k$ converge uniformemente in I alla funzione f e tutte le u_k sono continue nel punto $x_0 \in I$, allora anche la funzione f è continua in x_0; di conseguenza, se le u_k sono tutte continue in I, la funzione f è continua in I.*

Teorema 7.2.7 (Integrazione per serie) *Se la serie di funzioni $\sum_{k=0}^{\infty} u_k$ converge uniformemente in I alla funzione f e tutte le u_k sono continue in I allora, per ogni intervallo $[a, b] \subset I$ risulta*

$$\int_a^b \sum_{k=0}^{\infty} u_k(x)dx = \sum_{k=0}^{\infty} \int_a^b u_k(x)dx.$$

Teorema 7.2.8 (Derivazione per serie) *Se la serie di funzioni $\sum_{k=0}^{\infty} u_k$ converge puntualmente in I alla funzione f, le u_k sono tutte derivabili in I con derivate prime continue, e la serie $\sum_{k=0}^{\infty} u'_k$ converge uniformemente in I alla funzione g, allora la funzione f è derivabile in I, la sua derivata è g, e la serie $\sum_{k=0}^{\infty} u_k$ converge uniformemente ad f in ogni intervallo chiuso e limitato $[a, b] \subset I$.*

7.3 Serie di potenze e serie di Taylor

Le serie di potenze sono particolari serie di funzioni, precisamente quelle il cui termine generale $u_k(x)$ è del tipo $c_k(x - x_0)^k$, con (c_k) successione reale e $x_0 \in \mathbb{R}$. Ne segue che la ridotta h-esima di una serie di potenze è un polinomio di grado al piú h. Tali serie godono di particolari proprietà: l'insieme di convergenza è sempre un intervallo (mentre ciò non è vero per una serie di funzioni generica), la convergenza è assoluta in tutti i punti del suddetto intervallo, esclusi al piú gli estremi, la somma è una funzione indefinitamente derivabile, ecc.

Definizione 7.3.1 *Si dice* serie di potenze di centro $x_0 \in \mathbb{R}$ e coefficienti $(c_k) \subset \mathbb{R}$ *la serie di funzioni*

$$\sum_{k=0}^{\infty} c_k (x - x_0)^k, \qquad x \in \mathbb{R}. \tag{7.3.3}$$

Osservazione 7.3.2
1. Il primo termine di una serie di potenze per $x = x_0$ è sempre (sostituendo formalmente) $c_0 0^0$, ossia un'espressione priva di significato. Poiché per ogni altro valore di x esso vale c_0, gli si attribuisce il valore c_0 anche per $x = x_0$.

2. È bene tener presente, anche in vista di una corretta applicazione dei risultati esposti nel seguente Teorema 7.3.5, che il coefficiente c_k nella (7.3.3) è *il coefficiente della k-esima potenza di x* e non il coefficiente del k-esimo termine non nullo nella serie. Per esempio, se si considera la serie $\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k x^{2k}$ risulta:

$$c_k = \begin{cases} 0 & \text{se } k \text{ è dispari} \\ 1 & \text{se } k = 2p, \text{ con } p \text{ pari} \\ -1 & \text{se } k = 2p, \text{ con } p \text{ dispari} \end{cases}$$

3. L'insieme di convergenza J di una serie di potenze non è mai vuoto, in quanto esso contiene sempre almeno il punto x_0. Vi sono casi in cui la serie converge solo per $x = x_0$, per esempio per la serie $\sum_k k! x^k$ vale $J = \{0\}$. Tenendo conto che J non è mai vuoto, la seguente definizione è ben posta.

Definizione 7.3.3 (Raggio di convergenza) *Si dice* raggio di convergenza *della serie (7.3.3) il seguente estremo superiore*

$$\rho = \sup\Big\{ |x| : \sum_{k=0}^{\infty} |c_k|\,|x|^k \quad \textit{converge} \Big\}.$$

Osservazione 7.3.4 Il valore ρ sopra definito può essere 0 (come nel caso della serie nel punto 3 dell'osservazione precedente), un qualunque numero positivo oppure $+\infty$. Per esempio, le serie

$$\sum_{k=0}^{\infty} c^k x^k, \ c > 0, \qquad \text{e} \qquad \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$$

hanno raggi di convergenza rispettivi $\rho = 1/c$ e $\rho = +\infty$, come si può agevolmente verificare, per esempio usando il criterio del rapporto (vedi Osservazione 7.3.6.4).

Notiamo anche che il raggio di convergenza dipende solo dai coefficienti della serie, e non dal loro centro. Infatti, cambiando il centro della serie (7.3.3) si trasla l'intervallo di convergenza, ma non se ne altera l'ampiezza.

Le proprietà delle serie di potenze sono raccolte nel seguente enunciato.

Teorema 7.3.5 (Proprietà delle serie di potenze) *Data la serie di potenze (7.3.3), sia $\rho \in [0, +\infty]$ il suo raggio di convergenza.*

(i) *Se $\rho = 0$ allora la serie converge solo per $x = x_0$.*

(ii) *Se $\rho = +\infty$ allora la serie converge assolutamente per ogni $x \in \mathbb{R}$ e converge totalmente in ogni intervallo chiuso e limitato di $\mathbb{R}$.*

(iii) *Se $0 < \rho < +\infty$ allora la serie converge assolutamente per ogni $x \in]x_0 - \rho, x_0 + \rho[$, converge totalmente in ogni intervallo chiuso e limitato contenuto in $]x_0 - \rho, x_0 + \rho[$ e non converge per alcun x tale che $|x - x_0| > \rho$.*

(iv) *Supposto $\rho > 0$, sia $f :]x_0 - \rho, x_0 + \rho[\to \mathbb{R}$ la somma della serie; allora $f \in C^\infty(]x_0 - \rho, x_0 + \rho[)$ e vale l'eguaglianza:*

$$f^{(h)}(x) = \sum_{k=h}^{\infty} k(k-1)\cdots(k-h+1)c_k(x-x_0)^{k-h} \tag{7.3.4}$$

per ogni $h \in \mathbb{N}$ e per ogni $x \in]x_0 - \rho, x_0 + \rho[$. In particolare, la serie al secondo membro ha raggio di convergenza ρ per ogni h.

(v) *Se esiste il limite $\lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{|c_k|}$, detto ℓ il suo valore, si ha $\rho = 1/\ell$, con le convenzioni che se $\ell = 0$ allora $\rho = +\infty$ e se $\ell = +\infty$ allora $\rho = 0$.*

Osservazione 7.3.6 1. Il teorema precedente non contiene alcuna affermazione sul comportamento delle serie di potenze negli estremi $x_0 - \rho$ e $x_0 + \rho$ dell'intervallo di convergenza. Infatti, si possono verificare tutti i casi, come mostrano i seguenti esempi, in cui il raggio di convergenza è sempre $\rho = 1$:

$$\sum_{k=0}^{\infty} x^k \qquad \text{converge in} \qquad]-1, 1[;$$
$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k} \qquad \text{converge in} \qquad [-1, 1[;$$
$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k^2} \qquad \text{converge in} \qquad [-1, 1].$$

Vale il seguente risultato:

Teorema 7.3.7 (Abel) *Se la serie di potenze (7.3.3) ha raggio di convergenza $\varrho > 0$ e converge nel punto $x_0 + \varrho$, allora la serie converge uniformemente in ogni intervallo chiuso del tipo $[x_0 - r, x_0 + \varrho]$ con $0 < r < \rho$. Analogo risultato vale se la serie converge in $x_0 - \varrho$.*

2. Dal Teorema 7.3.5 e dal Teorema 7.2.7 segue che una serie di potenze si può integrare termine a termine nel suo intervallo di convergenza; supponendo che (7.3.3) abbia raggio di convergenza $\rho > 0$, risulta
$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k(x-x_0)^k \quad \Rightarrow \quad \int_{x_0}^{x} f(t)dt = \sum_{k=0}^{\infty} \int_{x_0}^{x} c_k(t-x_0)^k dt = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{c_k}{k+1}(x-x_0)^{k+1}$$
per ogni $x \in]x_0 - \rho, x_0 + \rho[$.

3. Supponiamo che la serie (7.3.3) abbia raggio di convergenza $\rho > 0$. Dal teorema 7.3.5(v) segue che sostituendo αt^n (con $\alpha \neq 0$ e $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$) al posto di $x - x_0$ si ottiene un'altra serie di potenze con raggio di convergenza pari a $\sqrt[n]{\rho}/|\alpha|$.

4. Notiamo che se esiste il limite
$$\lim_{k\to+\infty} \frac{|c_{k+1}|}{|c_k|},$$
allora esiste anche
$$\lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{|c_k|},$$
tali due limiti sono uguali, e, detto ℓ il loro valore, si ha che il raggio di convergenza di (7.3.3) è $\rho = 1/\ell$, con le convenzioni dette. Come già osservato per le serie numeriche (vedi Osservazione 3.2.14), può però accadere che esista il limite delle radici k-esime, ma non dei rapporti.

5. Si può dimostrare un risultato piú forte del Teorema 7.3.5(v), che può essere enunciato come segue:

   Sia
$$\ell = \sup\Big\{r \geq 0 : \ \textit{esiste un'estratta } (c_{k_j}) \textit{ tale che } \lim_{j\to+\infty} \sqrt[k_j]{|c_{k_j}|} = r\Big\}$$
   Allora, il raggio di convergenza della (7.3.3) è $1/\ell$ (con le solite convenzioni).

   Il numero ℓ è il *limite superiore* della successione $\sqrt[k]{|c_k|}$ e l'assioma di completezza assicura che il limite superiore di una successione esiste sempre (vedi Osservazione 2.1.24).

   Per esempio, la serie di potenze $\sum_{n=0}^{\infty} x^{n^2}$ ha raggio di convergenza $\rho = 1$. Infatti, i coefficienti sono $c_k = 1$ se $k = n^2$ è il quadrato di un numero naturale, $c_k = 0$ altrimenti e quindi il limite della successione $\sqrt[k]{|c_k|}$ non esiste. Poiché la successione $\sqrt[k]{|c_k|}$ assume solo i valori 0 e 1, e ciascuno di essi infinite volte, il limite di ogni sua estratta convergente è 0 o 1, $\ell = 1$ e $\rho = 1$.

Abbiamo osservato che le serie di potenze, in un certo senso, generalizzano i polinomi. Inoltre, abbiamo visto nella Parte I che ad ogni funzione f di classe C^h in un intervallo I, si può associare, per ogni $x_0 \in I$, il polinomio di Taylor di grado h di centro x_0. È quindi ora naturale associare ad una funzione f di classe C^∞ una serie di potenze. Ci aspettiamo che in molti casi la somma della serie, i cui coefficienti sono definiti con la stessa logica dei coefficienti dei polinomi di Taylor, sia proprio la funzione f da cui siamo partiti. Ciò in effetti accade in molte situazioni, ma non sempre.

Definizione 7.3.8 (Serie di Taylor) *Sia I un intervallo di $\mathbb{R}$, x_0 interno ad I, e sia $f \in C^\infty(I)$; si dice* serie di Taylor di f di punto iniziale x_0 *la serie di potenze*

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k \tag{7.3.5}$$

(i) *Si dice che f è* sviluppabile in serie di Taylor di centro x_0 in I *se la serie (7.3.5) converge ad f in I.*

(ii) *Si dice che f è* analitica reale in I *se per ogni $x_0 \in I$ esiste $\rho > 0$ tale che la serie (7.3.5) converge ad f in $]x_0 - \rho, x_0 + \rho[$.*

Esempi 7.3.9 Per ogni funzione C^∞ è evidentemente possibile *scrivere* la serie di Taylor. Il fatto che la serie converga, e che la somma sia la funzione di partenza, è invece da verificare.

1. La somma di una serie di potenze è sempre sviluppabile in serie di Taylor nel suo intervallo di convergenza.

2. La funzione
$$f(x) = \begin{cases} \mathrm{e}^{-1/x^2} & \text{per } x \neq 0 \\ 0 & \text{per } x = 0 \end{cases}$$
appartiene a $C^\infty(\mathbb{R})$ e verifica $f^{(k)}(0) = 0$ per ogni $k \in \mathbb{N}$, sicché la sua serie di Taylor di centro 0 è la serie con tutti i coefficienti nulli. Tale serie converge banalmente in $\mathbb{R}$, ma la sua somma è 0, e non coincide con la funzione f.

3. La funzione $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$, vedi (7.3.10), è analitica reale in $\mathbb{R}$, ma non è sviluppabile in serie di Taylor in $\mathbb{R}$, in quanto per nessun $x_0 \in \mathbb{R}$ la serie di Taylor di f con centro x_0 converge in $\mathbb{R}$.

Vale il seguente teorema di sviluppabilità in serie di Taylor in un intervallo I.

Teorema 7.3.10 (Sviluppabilità in serie di Taylor) *Sia $f : I \to \mathbb{R}$ una funzione di classe $C^\infty(I)$ e supponiamo che valga la seguente condizione:*

$$\exists c > 0,\ \exists M > 0,\ t.c.\ \forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in I\ :\ |f^{(n)}(x)| \leq cM^n. \tag{7.3.6}$$

Allora f è sviluppabile in serie di Taylor in I.

Dim. Poichè $f \in C^\infty(I)$ vale la formula di Taylor con resto di Lagrange 5.5.4 per ogni $n \in \mathbb{N}$ e per ogni $x_0, x \in I$

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k + \frac{f^{(n+1)}(\bar{x})}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}, \tag{7.3.7}$$

con $\bar{x}$ compreso tra x_0 e x. Indicato con $T_n(x; x_0)$ il polinomio di Taylor di f di ordine n centrato in x_0, da (7.3.7) e dalla stima (7.3.6) segue

$$|f(x) - T_n(x; x_0)| = \left| \frac{f^{(n+1)}(\bar{x})}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1} \right| \leq c\frac{(M|x-x_0|)^{(n+1)}}{(n+1)!}.$$

Passando al limite per $n \to +\infty$ tenendo conto del limite 1 nell'esempio 3.2.15 otteniamo

$$\lim_{n \to +\infty} |f(x) - T_n(x; x_0)| = 0 \quad \forall x \in I,$$

da cui segue la tesi. QED

Utilizzando il teorema precedente, si vede che molte funzioni elementari sono analitiche reali, ed alcune sviluppabili in serie di Taylor sull'intera retta reale $\mathbb{R}$. Elenchiamo alcuni sviluppi, precisando l'intervallo di validità

$$\sum_{k=0}^{\infty} x^k = \frac{1}{1-x} \qquad x \in]-1, 1[. \tag{7.3.8}$$

Quest'esempio è di fatto già noto (vedi esempio 3.1.7), è la serie geometrica. Da questa formula si possono dedurre altri sviluppi, cambiando variabile. Sostituendo x con $-x$ si ottiene

$$\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k x^k = \frac{1}{1+x} \qquad x \in]-1, 1[, \tag{7.3.9}$$

mentre sostituendo x con $-x^2$ si ottiene (vedi Osservazione 7.3.6.3):

$$\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k x^{2k} = \frac{1}{1+x^2} \qquad x \in]-1, 1[. \tag{7.3.10}$$

Integrando termine a termine la (7.3.9) si ottiene

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k+1} x^{k+1} = \log(1+x) \qquad x \in]-1, 1[, \tag{7.3.11}$$

ed integrando termine a termine (7.3.10)

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1} x^{2k+1} = \arctan x \qquad x \in]-1, 1[. \tag{7.3.12}$$

Il calcolo diretto dei coefficienti permette di ottenere facilmente gli sviluppi di Taylor delle funzioni e^x, $\sin x$ e $\cos x$, che valgono per ogni $x \in \mathbb{R}$:

$$\mathrm{e}^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}, \qquad \sin x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} x^{2k+1}, \qquad \cos x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} x^{2k}. \tag{7.3.13}$$

Notiamo che, coerentemente con le proprietà di parità e disparità del seno e del coseno, i rispettivi sviluppi contengono solo potenze pari o dispari. L'uso dello sviluppo della funzione esponenziale consente di ottenere gli sviluppi di Taylor delle funzioni $\sinh x$ e $\cosh x$, che valgono per ogni $x \in \mathbb{R}$:

$$\sinh x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}, \qquad \cosh x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k}}{(2k)!}. \tag{7.3.14}$$

7.4 Serie di Fourier

Un tipo di sviluppo in serie rispetto a funzioni elementari completamente diverso da quello di Taylor è fornito dagli sviluppi in serie di Fourier. Questa volta le funzioni di partenza non sono potenze, ma funzioni trigonometriche elementari del tipo $\sin(kx)$ e $\cos(kx)$. Gli sviluppi in serie di Fourier si prestano ad approssimare le funzioni periodiche, che ora definiamo.

Definizione 7.4.1 (Funzioni periodiche) *Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$; diciamo che f è* periodica di periodo T *(o T-*periodica*) se $T > 0$ è il piú piccolo numero reale tale che $f(x+T) = f(x)$ per ogni $x \in \mathbb{R}$. Se f è T-periodica, T si dice* periodo *della funzione f.*

Osservazione 7.4.2

1. Osserviamo che se f è T-periodica allora $f(x + kT) = f(x)$ per ogni $x \in \mathbb{R}$ e per ogni $k \in \mathbb{Z}$.
2. Fissato $T > 0$ e posto $\omega = \frac{2\pi}{T}$, le funzioni $\sin(k\omega x)$ e $\cos(k\omega x)$ sono T-periodiche per ogni $k \in \mathbb{Z}$. Il numero ω si dice *pulsazione*.

Al contrario degli sviluppi in serie di Taylor, che presuppongono di partire da funzioni di classe C^∞, gli sviluppi in serie di Fourier si possono considerare per funzioni anche assai poco regolari. Infatti i coefficienti degli sviluppi in serie di Fourier si ottengono calcolando degli integrali, e non delle derivate. Definiamo una classe funzionale in cui è possibile considerare gli sviluppi di Fourier, anche se essa non è certamente la piú ampia possibile.

Definizione 7.4.3 (Funzioni continue a tratti) *Una funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ si dice* continua a tratti *se per ogni intervallo limitato $I \subset \mathbb{R}$ essa è continua in I eccetto un numero finito di punti di I, ed in tali punti ammette limiti finiti a destra ed a sinistra. Se f è continua a tratti, per ogni punto x_0 di discontinuità poniamo*

$$f(x_0+) = \lim_{x \to x_0^+} f(x), \qquad f(x_0-) = \lim_{x \to x_0^-} f(x).$$

Notiamo che una funzione continua a tratti è integrabile in ogni intervallo limitato, quindi possiamo dare le seguente definizione.

Definizione 7.4.4 (Serie di Fourier) *Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continua a tratti e T-periodica, e sia $\omega = \frac{2\pi}{T}$. Poniamo*

$$a_0 = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(x)dx,$$

e, per $k \in \mathbb{N}, k \geq 1$,

$$a_k = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(x)\cos(k\omega x)dx, \quad b_k = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(x)\sin(k\omega x)dx.$$

I numeri a_0, a_k, b_k si dicono coefficienti di Fourier della funzione f. *Si dice* serie di Fourier associata ad f *la serie*

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=0}^{\infty} \Big(a_k \cos(k\omega x) + b_k \sin(k\omega x) \Big). \tag{7.4.15}$$

Come nel caso delle serie di Taylor, in generale non si può affermare che la serie di Fourier converga, né, se converge, che la sua somma sia f. Ciò vale sotto ipotesi piú restrittive su f della sola continuità a tratti.

Definizione 7.4.5 (Funzioni regolari a tratti) *La funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ si dice* regolare a tratti *se è continua a tratti e, inoltre, valgono le condizioni seguenti:*

(i) *f è derivabile in ogni intervallo di continuità, eccetto un numero finito di punti;*

(ii) *in ogni punto di discontinuità x_0 di f o di f' esistono finiti i limiti*

$$\lim_{x \to x_0^+} f'(x), \qquad \lim_{x \to x_0^-} f'(x).$$

Teorema 7.4.6 (Convergenza della serie di Fourier) *Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ regolare a tratti e T-periodica. Allora, la serie di Fourier di f converge puntualmente per ogni $x \in \mathbb{R}$ al valore*

$$\tilde{f}(x) = \frac{f(x+) + f(x-)}{2}.$$

Inoltre, la convergenza è uniforme in ogni intervallo chiuso in cui f è continua. Se f è continua in $\mathbb{R}$ allora la serie converge uniformemente in $\mathbb{R}$.

Osservazione 7.4.7 1. Si vede facilmente con un cambiamento di variabili che per calcolare i coefficienti di Fourier non bisogna necessariamente integrare sull'intervallo $(-T/2, T/2)$, ma qualunque intervallo di lunghezza T, cioè pari ad un periodo, fornisce lo stesso risultato.

2. Il termine $a_0/2$ che compare nella serie di Fourier di f esprime la *media integrale* di f nel periodo (vedi 6.1.15).

3. Ricordiamo che f si dice *pari* se $f(x) = f(-x)$ per ogni $x \in \mathbb{R}$ e si dice *dispari* se $f(x) = -f(-x)$ per ogni $x \in \mathbb{R}$, e che le funzioni $\cos(k\omega x)$ sono pari, le funzioni $\sin(k\omega x)$ sono dispari. Possiamo osservare che se f è pari allora tutti i coefficienti b_k sono nulli, mentre se f è dispari sono nulli tutti i coefficienti a_k. Infatti, in entrambi i casi nelle formule della Definizione 7.4.4 detti coefficienti si ottengono attraverso integrali di funzioni dispari su intervalli simmetrici rispetto all'origine, che dànno risultato nullo.

4. Data una funzione f definita in un intervallo limitato qualunque, che senza ledere la generalità possiamo supporre sia del tipo $[0, b]$, si può definire una estensione periodica arbitraria di f e studiare la convergenza della serie di Fourier dell'estensione. Il Teorema 7.4.6 implica, in particolare, che se due funzioni sviluppabili in serie di Fourier coincidono in un intervallo J allora le loro serie convergono allo stesso limite in J. Di conseguenza, se si considerano due estensioni periodiche differenti di f, e le rispettive serie di Fourier convergono entrambe ad esse, si ottengono due serie di Fourier diverse convergenti, *nell'intervallo* $(0, b)$, alla stessa funzione f. Queste considerazioni portano ad associare una serie di Fourier anche ad una funzione non periodica, passando per una sua estensione periodica. Le estensioni periodiche naturali di una $f : [0, b] \to \mathbb{R}$ sono le seguenti:

   (i) l'estensione f^* di periodo b cosí definita:
   $$f^*(x) = f(x - kb), \qquad x \in \mathbb{R},$$
   dove per ogni $x \in \mathbb{R}$, $k \in \mathbb{Z}$ è l'unico intero tale che $x - kb \in [0, b)$.

   (ii) l'estensione pari f_p di periodo $2b$ cosí definita:
   $$f_p(x) = f(-x) \quad \text{per } x \in [-b, 0), \quad f_p(x) = f_p(x - 2kb), \ x \in \mathbb{R},$$
   dove per ogni $x \in \mathbb{R}$, $k \in \mathbb{Z}$ è l'unico intero tale che $x - 2kb \in [-b, b)$. Tale estensione, essendo pari, dà luogo ad una serie di Fourier contenente solo i termini in $\cos(k\omega x)$, detta *sviluppo in soli coseni di* f.

   (iii) l'estensione dispari f_d di periodo $2b$ cosí definita:
   $$f_d(x) = -f(-x) \quad \text{per } x \in [-b, 0), \quad f_d(x) = f_d(x - 2kb), \ x \in \mathbb{R},$$
   dove per ogni $x \in \mathbb{R}$, $k \in \mathbb{Z}$ è l'unico intero tale che $x - 2kb \in [-b, b)$. Tale estensione, essendo dispari, dà luogo ad una serie di Fourier contenente solo i termini in $\sin(k\omega x)$, detta *sviluppo in soli seni di* f.

5. A volte si scrive la serie di Fourier di f in modo equivalente nella forma

$$\sum_{k=0}^{\infty} A_k \cos(k\omega x + \phi_k),$$

che mette in evidenza i coefficienti di *ampiezza* A_k e di *fase* ϕ_k. I legami tra i coefficienti si deducono facilmente dalla formula di addizione $\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$, e sono dati da:

$$a_0 = A_0\cos\phi_0, \qquad a_k = A_k\cos\phi_k, \qquad b_k = -A_k\sin\phi_k,\ \ k \geq 1.$$

6. Quanto detto finora vale senza cambiamenti per funzioni a valori complessi (un caso utile in varie applicazioni), dal momento che si può ragionare separatamente sulla parte reale e sulla parte immaginaria. Per le funzioni a valori complessi valgono quindi ancora le formule nella Definizione 7.4.4, ma si può scrivere la serie di Fourier in modo piú naturale usando esponenziali complessi anziché funzioni trigonometriche reali. Tenendo conto delle relazioni di Eulero $\sin x = \frac{1}{2i}(\mathrm{e}^{ix} - \mathrm{e}^{-ix})$, $\cos x = \frac{1}{2}(\mathrm{e}^{ix} + \mathrm{e}^{-ix})$, si ottiene la *serie di Fourier complessa*

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k\, \mathrm{e}^{ik\omega x}$$

con

$$\begin{cases} c_k = \frac{1}{2}(a_k - ib_k) \\ c_{-k} = \frac{1}{2}(a_k + ib_k) \end{cases} \qquad\qquad \begin{cases} a_k = c_k + ic_{-k} \\ b_k = c_k - ic_{-k} \end{cases}$$

e i coefficienti c_k possono essere calcolati tramite le

$$c_k = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(x)\,\mathrm{e}^{-ik\omega x}\,dx, \qquad k \in \mathbb{Z}\,.$$

7. Usando le formule di prostaferesi si verificano facilmente le seguenti uguaglianze:

$$\int_{-T/2}^{T/2} \sin(k\omega x)\cos(h\omega x)dx = 0,$$
$$\int_{-T/2}^{T/2} \sin(k\omega x)\sin(h\omega x)dx = \delta_{hk}\frac{T}{2},$$
$$\int_{-T/2}^{T/2} \cos(k\omega x)\cos(h\omega x)dx = \delta_{hk}\frac{T}{2},$$

da cui, passando al limite sotto il segno di integrale, si può dedurre l'*eguaglianza di Parseval*

$$\int_{-T/2}^{T/2} |f(x)|^2 dx = \frac{T}{2}\Big(\frac{|a_0|^2}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} |a_k|^2 + |b_k|^2\Big).$$

Per il calcolo delle serie di Fourier è a volte utile il seguente risultato, che lega i coefficienti di f a quelli delle sue primitive.

Teorema 7.4.8 (Integrazione della serie di Fourier) *Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continua a tratti e T-periodica, e poniamo*

$$F(x) = \int_{-T/2}^{x} \big(f(t) - a_0/2\big)dt.$$

Allora, F è T-periodica, continua e regolare a tratti, sicché la sua serie di Fourier converge uniformemente ad F in $\mathbb{R}$. Inoltre, i suoi coefficienti di Fourier A_k e B_k sono legati ai coefficienti a_k, b_k di f dalle relazioni

$$A_k = -\frac{b_k}{\omega k}, \qquad B_k = \frac{a_k}{\omega k}.$$

Osserviamo che nel teorema precedente non si suppone che la serie di Fourier di f sia convergente, ed infatti quest'ipotesi non è necessaria.

Esempi 7.4.9 1. Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la funzione π–periodica che nell'intervallo $[-\pi/2, \pi/2]$ vale $f(x) = \frac{2}{\pi}|x|$. Poiché $f(-\pi/2) = f(\pi/2)$ la funzione f è continua e regolare a tratti, dunque la sua serie di Fourier converge uniformemente ad f in $\mathbb{R}$. Poiché la funzione è pari i coefficienti b_k valgono tutti zero.

Calcoliamo a_0. Risulta

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{2}{\pi}\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{2}{\pi}|t|\,dt = \frac{4}{\pi}\int_0^{\pi/2} \frac{2}{\pi}\,t\,dt = \\ &= \frac{8}{\pi^2}\left[\frac{t^2}{2}\right]_0^{\pi/2} = 1 \end{aligned}$$

Calcoliamo ora a_k per $k \in \mathbb{N}$, $k > 0$. Risulta $\omega = 2$ e pertanto

$$\begin{aligned} a_k &= \frac{2}{\pi}\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{2}{\pi}|t|\,\cos 2kt\,dt = \frac{4}{\pi}\int_0^{\pi/2} \frac{2}{\pi}\,t\,\cos 2kt\,dt = \\ &= \frac{8}{\pi^2}\left\{\left[\frac{1}{2k}\,t\,\sin 2kt\right]_0^{\pi/2} - \int_0^{\pi/2} \frac{1}{2k}\,\sin 2kt\,dt\right\} = \\ &= \frac{8}{\pi^2}\left\{\left[\frac{\pi}{4k}\,\sin k\pi\right] - \left[\frac{1}{4k^2}\,(-\cos 2kt\,)\right]_0^{\pi/2}\right\} = \\ &= \frac{8}{\pi^2}\left[\frac{1}{4k^2}\,\cos k\pi\, - \frac{1}{4k^2}\right] = \frac{2}{k^2\pi^2}\,\left[(-1)^k - 1\right]. \end{aligned}$$

Si ottiene quindi

$$f(x) = \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{2\,\big((-1)^k - 1\big)}{k^2\pi^2}\,\cos 2kx = \frac{1}{2} - \sum_{h=0}^{+\infty} \frac{4}{(2h+1)^2\pi^2}\,\cos 2(2h+1)x.$$

Per $x = 0$ troviamo la formula

$$\frac{\pi^2}{8} = \sum_{h=0}^{+\infty} \frac{1}{(2h+1)^2} \,,$$

mentre l'eguaglianza di Parseval fornisce

$$\frac{\pi^4}{96} = \sum_{h=0}^{+\infty} \frac{1}{(2h+1)^4} \,.$$

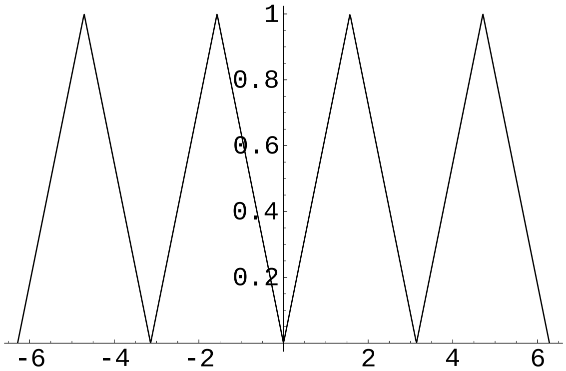


Figura – 7.1: Grafico della somma dei primi 100 termini della serie di Fourier.

2. Sviluppare in serie di soli seni la funzione f che nell'intervallo $[0,1]$ vale 1. Per ottenere questo dobbiamo prolungare f ad una funzione f_d dispari e 2–periodica che nell'intervallo $[-1,1]$ vale

$$f_d(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } 0 < x < 1 \,, \\ 0 & \text{se } x = -1, 0, 1 \,, \\ -1 & \text{se } -1 < x < 0 \,. \end{cases}$$

I coefficienti a_k della serie di Fourier di f_d sono tutti nulli. Calcoliamo b_k per $k > 0$.

$$\begin{aligned} b_k &= \int_{-1}^{1} f_d(t) \sin k\pi t \, dt = 2 \int_0^1 \sin k\pi t \, dt = \\ &= 2 \left[\frac{-\cos k\pi t}{k\pi} \right]_0^1 = 2 \frac{1 - \cos k\pi}{k\pi} = 2 \frac{1 - (-1)^k}{k\pi} \,. \end{aligned}$$

Dunque

$$f_d(x) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{2\left(1 - (-1)^k\right)}{k\pi} \sin k\pi x = \sum_{h=0}^{+\infty} \frac{4}{(2h+1)\pi} \sin(2h+1)\pi x.$$

Per $x = \dfrac{1}{2}$ troviamo

$$\sum_{h=0}^{+\infty} \frac{(-1)^h}{2h+1} = \frac{\pi}{4}\,.$$

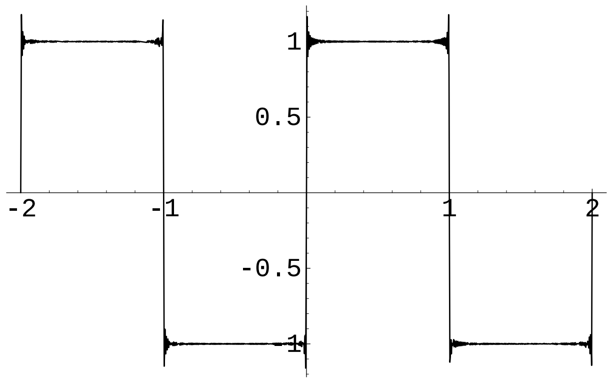


Figura – 7.2: Grafico della somma dei primi 100 termini della serie di Fourier.

BIBLIOGRAFIA

[1] M.Bramanti, C.D.Pagani e S.Salsa: Analisi Matematica Uno, Zanichelli, Bologna, 2008.

[2] G.Gilardi: Analisi Uno, McGraw-Hill, Milano, 1994.

[3] E.Giusti: Analisi Matematica 1, Bollati Boringhieri, Torino, 1989.

[4] E.Giusti: Esercizi e complementi di Analisi Matematica, vol. 1, Bollati Boringhieri, Torino, 1989.

[5] P.Marcellini, C.Sbordone: Analisi Matematica uno, Liguori Editore, Napoli, 1998.

[6] P.Marcellini, C.Sbordone: Esercitazioni di Matematica, Volume 1, parte I e II, Liguori Editore, Napoli, 1995.

[7] M.Miranda jr., F.Paronetto: Eserciziario del corso di Matematica I, all'indirizzo `http://poincare.unile.it/miranda/MatematicaI/eserciziario1.pdf`

Università del Salento

Facoltà di Ingegneria
Corso di Laurea in Ingegneria dell'Informazione

Prof. Antonio Leaci

Compiti di Analisi Matematica I

A.A. 2008/2009

Indice

1 Compito di Analisi Matematica I del 9/12/08 (DM509)

1. Tracciare il grafico della funzione così definita
$$f(x) = \log\left(\frac{1 + |x - 1|}{x^2}\right)$$

2. Studiare il seguente limite
$$\lim_{x\to 0+} \frac{\sin x^\alpha - \alpha \tan x}{x}$$
al variare del parametro $\alpha \in \mathbb{R}_+$.

3. Calcolare il seguente integrale indefinito
$$\int \frac{x + \sqrt{x+1}}{2\,x + 1}\,dx$$

4. Studiare il carattere della seguente serie
$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\sqrt{n+1} - \sqrt{n}}{\log n}$$

1.1 Soluzione del compito di Analisi Matematica I del 9/12/08

1. • (Dominio e simmetrie) La funzione è definita per ogni $x \neq 0$ pertanto il Dominio è $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ e f è continua nel suo dominio. Non ci sono simmetrie.

   • (Intersezioni con gli assi e segno) Poichè compare la funzione valore assoluto consideriamo le due funzioni

   $$\begin{cases} f_1(x) = \log\left(\dfrac{1+x-1}{x^2}\right) = \log\left(\dfrac{1}{x}\right) & \text{per } x \geq 1 \\ f_2(x) = \log\left(\dfrac{1-x+1}{x^2}\right) = \log\left(\dfrac{2-x}{x^2}\right) & \text{per } x < 1, x \neq 0 \end{cases}$$

   e studiamole separatamente.

   Risolvendo $f_1(x) = 0$ troviamo $\dfrac{1}{x} = 1$ e dunque $x = 1$. Inoltre $f_1(x) < 0$ per ogni $x > 1$.

   Studiamo ora f_2 in $(-\infty, 0) \cup (0, 1]$. Risolvendo $f_2(x) = 0$ troviamo $\dfrac{2-x}{x^2} = 1$ e dunque $x^2 + x - 2 = 0$. Otteniamo la soluzione $x = -2$ e ritroviamo la soluzione $x = 1$ Inoltre $f_2(x) > 0$ se e solo se $\dfrac{2-x}{x^2} > 1$, cioè $x^2 + x - 2 < 0$. Allora $f_2(x) > 0$ per ogni $x \in (-2, 0) \cup (0, 1)$ mentre $f_2(x) < 0$ per $x \in (-\infty, -2)$.

   • (Asintoti) Si ha $\lim_{x\to+\infty} f_1(x) = -\infty$ e non c'è asintoto obliquo. Risulta $\lim_{x\to0} f_2(x) = +\infty$ pertanto $x = 0$ è asintoto verticale e $\lim_{x\to-\infty} f_2(x) = -\infty$ e non c'è asintoto obliquo.

   • (Derivata prima e monotonia) Risulta $f_1'(x) = -\dfrac{1}{x} < 0$ per ogni $x \geq 1$ perciò f_1 è decrescente in $[1, +\infty)$.

   Calcolando $f_2'(x)$ troviamo $f_2'(x) = \dfrac{x-4}{x(2-x)}$ e si ha $f_2'(x) > 0$ per $x \in (-\infty, 0)$ mentre $f_2'(x) < 0$ per $x \in (0, 1]$. Quindi f_2 è crescente in $(-\infty, 0)$ e decrescente in $(0, 1]$.

   • (Derivata seconda e convessità) Infine $f_1''(x) = \dfrac{1}{x^2} > 0$ per ogni $x \geq 1$ perciò f_1 è convessa in $[1, +\infty)$.

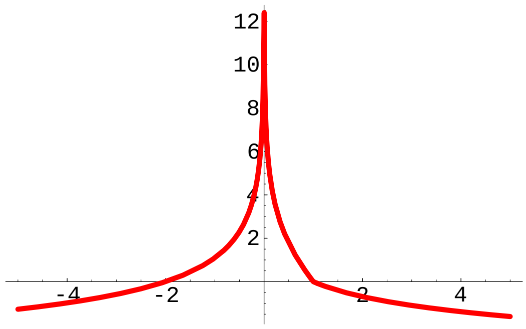


Figura 1: Grafico della funzione f.

Calcolando la derivata seconda di f_2 si ottiene $f_2''(x) = \dfrac{x^2 - 8x + 8}{x^2(x-2)^2}$ che è positiva in $(-\infty, 0) \cup (0, 1]$ pertanto f_2 è convessa in $(-\infty, 0)$ e in $(0, 1]$.

- (Grafico) Tornando alla funzione assegnata f osserviamo che $f_s'(1) = -3$ e $f_d'(1) = -1$ pertanto $x = 1$ è un punto angoloso. La funzione f è crescente in $(-\infty, 0)$ e decrescente in $(0, +\infty)$. La funzione f è convessa in $(-\infty, 0)$ e, poichè $f_s'(1) = -3 < f_d'(1) = -1$ è convessa anche in $(0, +\infty)$. La funzione è illimitata superiormente e inferiormente e non ha punti di estremo locale. Il grafico è riportato in Figura 1.

2. Per lo studio del limite si ha:

$$\lim_{x \to 0+} \frac{\sin x^\alpha - \alpha \tan x}{x} = \lim_{x \to 0+} \left(\frac{\sin x^\alpha}{x^\alpha} \frac{x^\alpha}{x} - \alpha \frac{\tan x}{x} \right)$$

Se $0 < \alpha < 1$ il limite è $+\infty$, se $\alpha = 1$ il limite è 0, se $\alpha > 1$ il limite è $-\alpha$.

3. Per calcolare l'integrale usiamo la sostituzione $x+1 = t^2$, cioè $x = t^2 - 1$ da cui $dx = 2t\, dt$. L'integrale diventa:

$$\int \frac{t^2 - 1 + t}{2\,t^2 - 1}\, 2t\, dt.$$

Effettuando la divisione tra polinomi e usando il metodo dei fratti semplici si ottiene

$$\int \left(t + 1 + \frac{1}{2}\,\frac{\sqrt{2}-1}{2\,t-\sqrt{2}} - \frac{1}{2}\,\frac{1+\sqrt{2}}{2\,t+\sqrt{2}} \right) dt.$$

Calcolando gli integrali elementari si ottiene:

$$\frac{t^2}{2} + t + \frac{\sqrt{2}-1}{4}\,\log\left(2\,t-\sqrt{2}\right) - \frac{\sqrt{2}+1}{4}\,\log\left(2\,t+\sqrt{2}\right) + c\,.$$

Ritornando nella variabile x si ottiene

$$\frac{x+1}{2} + \sqrt{x+1} + \frac{\sqrt{2}-1}{4}\,\log\left(2\sqrt{x+1}-\sqrt{2}\right) - \frac{\sqrt{2}+1}{4}\,\log\left(2\sqrt{x+1}+\sqrt{2}\right) + c.$$

4. La serie è a termini positivi. Moltiplicando numeratore e denominatore per $(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})$ otteniamo

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})\log n}\,.$$

Il termine generale di questa serie è un infinitesimo di ordine superiore rispetto a $\dfrac{1}{\sqrt{n}}$ ma di ordine inferiore rispetto a $\dfrac{1}{n^\alpha}$ per ogni $1/2 < \alpha < 1$. Scelto ad esempio $\alpha = 2/3$ risulta:

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\dfrac{1}{n^{2/3}}}{\dfrac{1}{(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})\log n}} = 0\,.$$

Poichè la serie $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^{2/3}}$ diverge, per il Teorema del confronto asintotico anche la serie data diverge.

2 Compito di Analisi Matematica I del 12/01/09 (DM509)

1. Tracciare il grafico della funzione così definita
$$f(x) = \arcsin \sqrt{|1 - x^2|}\,.$$

2. Studiare il seguente limite
$$\lim_{x\to 0} \frac{x\sqrt{1+x^2} - \sin x}{(1+x^2)^x - \sqrt{1+x^3}}.$$

3. Calcolare il seguente integrale indefinito
$$\int \sqrt{1+\sin x}\, dx\,.$$

4. Studiare il carattere della seguente serie
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n n! \sqrt{n}}{(n+2)!}\,.$$

2.1 Soluzione del compito di Analisi Matematica I del 12/01/09

1. • (Dominio) Poichè il radicando è non negativo la condizione da imporre per individuare il Dominio di f è $\sqrt{|1-x^2|} \leq 1$ cioè $|1-x^2| \leq 1$ ossia

$$-1 \leq 1 - x^2 \leq 1.$$

Aggiungendo 1 ad ambedue le disuguaglianze otteniamo $0 \leq 2 - x^2 \leq 2$. La seconda è sempre verificata mentre la prima comporta $x^2 \leq 2$ e quindi $-\sqrt{2} \leq x \leq \sqrt{2}$. Allora il dominio di f è l'intervallo chiuso e limitato $[-\sqrt{2}, \sqrt{2}]$.

• (Segno, simmetrie e comportamento negli estremi) Nel dominio f è continua e non negativa, negli estremi del dominio assume il valore $\pi/2$ pertanto f ha massimo pari a $\pi/2$ e minimo pari a 0. La funzione è pari. Abbiamo $f(0) = \pi/2$ e $f(x) = 0$ se e solo se $x = \pm 1$.

• (Derivata e monotonia) Poichè compare la funzione valore assoluto consideriamo le due funzioni

$$\begin{cases} f_1(x) = \arcsin\sqrt{1-x^2} & \text{per } 1 - x^2 \geq 0 \\ f_2(x) = \arcsin\sqrt{x^2-1} & \text{per } 1 - x^2 \leq 0 \end{cases}$$

cioè

$$\begin{cases} f_1(x) = \arcsin\sqrt{1-x^2} & \text{per } x \in [-1, 1] \\ f_2(x) = \arcsin\sqrt{x^2-1} & \text{per } x \in [-\sqrt{2}, -1] \cup [1, \sqrt{2}] \end{cases}$$

e studiamole separatamente. Inoltre poichè le funzioni sono pari possiamo limitarci a studiarle solo per $x \geq 0$.

Risulta

$$f_1'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-(1-x^2)}} \frac{-x}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{1}{\sqrt{x^2}} \frac{-x}{\sqrt{1-x^2}} = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \; \forall x \in (0, 1)$$

e risulta $f_{1d}'(0) = -1$ e in $x = 1$ il limite del rapporto incrementale da sinistra è $-\infty$. Poichè $f_1'(x) < 0$ in $(0, 1)$ la funzione è decrescente in $[0, 1]$. Poichè è pari risulta crescente in $[-1, 0]$ e $f_{1s}'(0) = 1$ perciò $x = 0$ è punto angoloso e di massimo assoluto mentre $x = \pm 1$ sono punti di cuspide e di minimo assoluto.

- (Derivata seconda e convessità) La derivata seconda in $(0, 1)$ è:

$$f_1''(x) = -\frac{\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}}{1-x^2} = -\frac{x}{(1-x^2)^{3/2}}$$

che è sempre negativa perciò f_1 è concava in $[0, 1]$ e per simmetria anche in $[-1, 0]$, dunque in complesso poichè $f'_{1s}(0) = 1 > f'_{1d}(0) = -1$ la funzione f_1 è concava in $[-1, 1]$.
Studiamo ora f_2 in $[1, \sqrt{2}]$. Risulta

$$f_2'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-(x^2-1)}} \frac{x}{\sqrt{x^2-1}} = \frac{1}{\sqrt{2-x^2}} \frac{x}{\sqrt{x^2-1}} \ \forall x \in (1, \sqrt{2})$$

e risulta che i limiti dei rapporti incrementali di f_2 in $x = 1$ e in $x = \sqrt{2}$ valgono $+\infty$. Poichè $f_2'(x) > 0$ in $(1, \sqrt{2})$ la funzione è crescente in $[1, \sqrt{2}]$ e, per simmetria, è decrescente in $[-\sqrt{2}, -1]$. Come già detto i punti $x = \pm 1$ sono di cuspide e nei punti $x = \pm\sqrt{2}$ la tangente è verticale. La derivata seconda in $(1, \sqrt{2})$ è:

$$\begin{aligned} f_2''(x) &= \frac{x^2}{(2-x^2)^{3/2}\sqrt{x^2-1}} + \frac{1}{\sqrt{2-x^2}\sqrt{x^2-1}} - \frac{x^2}{\sqrt{2-x^2}\,(x^2-1)^{3/2}} \\ &= \frac{x^4-2}{(2-x^2)^{3/2}(x^2-1)^{3/2}}. \end{aligned}$$

Il denominatore è sempre positivo mentre il numeratore si annulla per $x = \sqrt[4]{2}$ ed è negativo in $(1, \sqrt[4]{2})$ e positivo in $(\sqrt[4]{2}, \sqrt{2})$, perciò f_2 è concava in $[1, \sqrt[4]{2}]$ e convessa in $[\sqrt[4]{2}, \sqrt{2}]$. Per simmetria f_2 è convessa in $[-\sqrt{2}, -\sqrt[4]{2}]$ e concava in $[-\sqrt[4]{2}, -1]$. I punti $x = \pm\sqrt[4]{2}$ sono di flesso.

- (Grafico) Mettendo insieme tutte le informazioni, il grafico della funzione f è riportato in Figura 2.

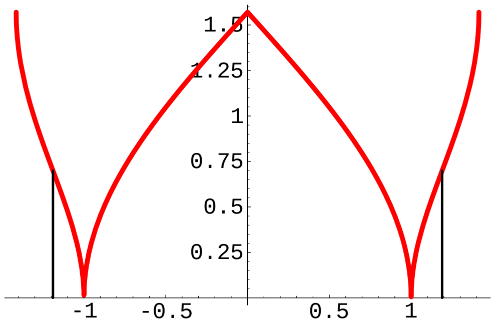


Figura 2: Grafico della funzione f.

2. Utilizzando gli sviluppi di Taylor si ottiene:

$$\lim_{x\to 0} \frac{x\sqrt{1+x^2} - \sin x}{(1+x^2)^x - \sqrt{1+x^3}} =$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{x(1+\frac{1}{2}x^2 + o(x^2)) - (x - \frac{1}{6}x^3 + o(x^4))}{\mathrm{e}^{x\log(1+x^2)} - (1 + \frac{1}{2}x^3 + o(x^3))} =$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{x + \frac{1}{2}x^3 + o(x^3) - x + \frac{1}{6}x^3 + o(x^4)}{\mathrm{e}^{x(x^2+o(x^2))} - 1 - \frac{1}{2}x^3 + o(x^3)} =$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{2}x^3 + \frac{1}{6}x^3 + o(x^3)}{x^3 - \frac{1}{2}x^3 + o(x^3)} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{2}{3}x^3}{\frac{1}{2}x^3} = \frac{4}{3}\,.$$

3. La funzione integranda è definita su tutto $\mathbb{R}$, 2π-periodica, non negativa, continua, con zeri isolati, perciò la sua primitiva è di classe C^1 strettamente crescente. Calcoliamola su un intervallo di lunghezza pari a un periodo. Consideriamo l'intervallo $(-\pi/2, \pi/2)$ ed effettuiamo la sostituzione $\sin x = t$, cioè $x = \arcsin t$. Abbiamo $dx = \dfrac{dt}{\sqrt{1-t^2}}$ e

dunque dobbiamo calcolare l'integrale:

$$\int \frac{\sqrt{1+t}}{\sqrt{1-t^2}}\,dt = \int \frac{\sqrt{1+t}}{\sqrt{1-t}\sqrt{1+t}}\,dt =$$
$$\int \frac{1}{\sqrt{1-t}}\,dt = \int (1-t)^{-1/2}\,dt = -2\sqrt{1-t} + c\,.$$

Ritornando nella variabile x otteniamo le primitive definite in $[-\pi/2, \pi/2]$ (la derivata negli estremi vale 0):

$$-2\sqrt{1-\sin x} + c\,.$$

Per trovare la primitiva definita sull'intervallo $(\pi/2, 3\pi/2)$ usiamo la sostituzione $x = \pi + \arcsin t$ per cui ancora $dx = \dfrac{dt}{\sqrt{1-t^2}}$. Usando la formula di addizione per il seno troviamo:

$$\sin x = \sin\pi\,\cos(\arcsin t) + \cos\pi\,\sin(\arcsin t) = -t.$$

L'integrale da calcolare è allora

$$\int \frac{\sqrt{1-t}}{\sqrt{1-t^2}}\,dt = \int \frac{\sqrt{1-t}}{\sqrt{1-t}\sqrt{1+t}}\,dt =$$
$$\int \frac{1}{\sqrt{1+t}}\,dt = \int (1+t)^{-1/2}\,dt = 2\sqrt{1+t} + c\,.$$

Ritornando nella variabile x otteniamo le primitive definite in $[\pi/2, 3\pi/2]$ (la derivata negli estremi vale 0):

$$2\sqrt{1-\sin x} + c\,.$$

Usando la stessa costante nelle due espressioni otteniamo una primitiva $F_0(x)$ definita in $[-\pi/2, 3\pi/2]$. Questo è soddisfacente come soluzione del quesito. Negli altri intervalli $[2k\pi - \pi/2, 2k\pi + 3\pi/2]$ $(k \in \mathbb{Z})$ la primitiva ha la stessa espressione $F_0(x)$ più una opportuna costante pari all'incremento di F_0 tra gli estremi dell'intervallo moltiplicata per k, cioè in $[2k\pi - \pi/2, 2k\pi + 3\pi/2]$ la primitiva con $c = 0$ ha l'espressione

$$F(x) = F_0(x) + 4\sqrt{2}k\,.$$

4. La serie è a termini di segno alterno ma possiamo studiarne la convergenza assoluta. Infatti semplificando i fattoriali al numeratore e denominatore otteniamo:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n}}{(n+1)(n+2)}\,.$$

Per il termine generale di questa serie abbiamo:

$$\frac{\sqrt{n}}{(n+1)(n+2)} \leq \frac{\sqrt{n}}{n^2} = \frac{1}{n^{3/2}}.$$

Poichè la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{3/2}}$ converge, per il Teorema del confronto la serie data converge assolutamente e quindi anche semplicemente.

3 Compito di Analisi Matematica I del 16/02/09

1. Tracciare il grafico della funzione così definita
$$f(x) = x(\log|x| + 1)^2\,.$$

2. Studiare il seguente limite
$$\lim_{x\to 0} \frac{e^{x^2} - \cos x}{\sqrt{1+x^2} - \sqrt[3]{1+x^2}}\,.$$

3. Stabilire se il seguente integrale improprio è convergente e, in caso affermativo, calcolarne il valore
$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^3 + x^2}\,dx\,.$$

4. Studiare la convergenza puntuale e totale della seguente serie di funzioni
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \log\left(1 + \frac{x^2}{n}\right)\,.$$

3.1 Soluzione del compito di Analisi Matematica I del 16/02/09

1.
   - (Dominio e simmetrie) Il dominio della funzione f è $\mathbb{R} \setminus \{0\}$. Risulta $f(-x) = -f(x)$, cioè la funzione è dispari e il suo grafico è simmetrico rispetto all'origine. Possiamo allora studiare la funzione soltanto per $x > 0$ e ottenere il comportamento per $x < 0$ per simmetria.
   - (Intersezioni con gli assi e segno) Per $x > 0$ la funzione è $f(x) = x(1 + \log x)^2$ pertanto è $f(x) \geq 0$ e $f(x) = 0$ per $1 + \log x = 0$, cioè per $x = \frac{1}{\mathrm{e}}$.
   - (Asintoti) Studiamo il comportamento negli estremi della semiretta $(0, +\infty)$. Si ha $\lim\limits_{x\to+\infty} x(1 + \log x)^2 = +\infty$ e $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty$ pertanto non ci sono asintoti orizzontali o obliqui. Inoltre si ha $\lim\limits_{x\to 0^+} x(1 + \log x)^2 = 0$ perchè $\lim\limits_{x\to 0^+} x|\log x|^\alpha = 0$ per ogni $\alpha > 0$. Poichè anche $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = 0$ il punto $x = 0$ è un punto in cui la funzione può essere prolungata per continuità con valore 0.
   - (Derivata prima e monotonia) Studiamo la derivata prima di f. Risulta

$$f'(x) = (1 + \log x)^2 + 2(1 + \log x) = (1 + \log x)(3 + \log x),$$

pertanto $f'(x) = 0$ per $\log x = -1$ e $\log x = -3$, cioè per $x = \frac{1}{\mathrm{e}}$ e per $x = \frac{1}{\mathrm{e}^3}$. Studiando il segno dei due fattori di $f'(x)$ risulta $f'(x) > 0$ in $(0, \frac{1}{\mathrm{e}^3})$ e in $(\frac{1}{\mathrm{e}}, +\infty)$ mentre $f'(x) < 0$ in $(\frac{1}{\mathrm{e}^3}, \frac{1}{\mathrm{e}})$. Dunque la funzione è crescente in $(0, \frac{1}{\mathrm{e}^3})$ ed in $(\frac{1}{\mathrm{e}}, +\infty)$ mentre è decrescente in $(\frac{1}{\mathrm{e}^3}, \frac{1}{\mathrm{e}})$. Il punto $x = \frac{1}{\mathrm{e}^3}$ è un punto di massimo relativo e la funzione vale $\frac{4}{\mathrm{e}^3}$ mentre $x = \frac{1}{\mathrm{e}}$ è un punto di minimo relativo e la funzione vale 0. Osserviamo che si ha $\lim\limits_{x\to 0} f'(x) = +\infty$ quindi la tangente al grafico in $(0, 0)$ è verticale.

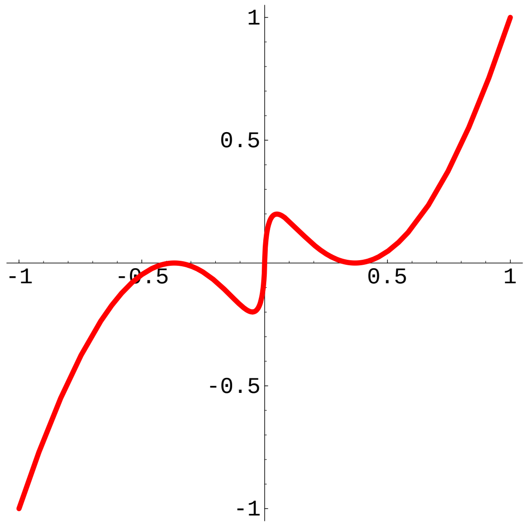


Figura 3: Grafico della funzione f.

- (Derivata seconda e convessità) Studiamo la derivata seconda di f. Risulta

$$f''(x) = \frac{2(1+\log x)}{x} + \frac{2}{x} = \frac{2(2+\log x)}{x},$$

quindi $f''(x) = 0$ per $\log x = -2$, cioè per $x = \frac{1}{e^2}$, mentre si ha $f''(x) > 0$ in $\left(\frac{1}{e^2}, +\infty\right)$ e $f''(x) < 0$ in $\left(0, \frac{1}{e^2}\right)$. Dunque la funzione è concava in $\left(0, \frac{1}{e^2}\right)$ ed è convessa in $\left(\frac{1}{e^2}, +\infty\right)$. Il punto $x = \frac{1}{e^2}$ è di flesso.

- (Grafico) Mettendo insieme tutte le informazioni ottenute per $x > 0$ e la simmetria rispetto all'origine, il grafico della funzione f è riportato in Figura 3.

2. Per calcolare il limite proposto usiamo i seguenti sviluppi di Taylor:

- $e^{x^2} = 1 + x^2 + o(x^2)$,
- $\cos x = 1 - \frac{1}{2}x^2 + o(x^3)$,

- $\sqrt{1+x^2} = (1+x^2)^{1/2} = 1 + \frac{1}{2}x^2 + o(x^2)$,
- $\sqrt[3]{1+x^2} = (1+x^2)^{1/3} = 1 + \frac{1}{3}x^2 + o(x^2)$.

Sostituendo queste espressioni nel limite proposto otteniamo

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^{x^2} - \cos x}{\sqrt{1+x^2} - \sqrt[3]{1+x^2}} =$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{1 + x^2 + o(x^2) - \left(1 - \dfrac{x^2}{2} + o(x^3)\right)}{1 + \dfrac{1}{2}x^2 + o(x^2) - \left(1 + \dfrac{1}{3}x^2 + o(x^2)\right)} =$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{x^2 + \dfrac{x^2}{2} + o(x^2)}{\dfrac{1}{2}x^2 - \dfrac{1}{3}x^2 + o(x^2)} = \lim_{x\to 0} \frac{\dfrac{3}{2}x^2}{\dfrac{1}{6}x^2} = 9\,.$$

3. L'integrale proposto è di seconda specie. La funzione integranda è continua in $[1, +\infty)$ e per x tendente a infinito è un infinitesimo dello stesso ordine di $\dfrac{1}{x^3}$ pertanto l'integrale converge. Determiniamo una primitiva. Usando il metodo dei fratti semplici si ottiene

$$\frac{1}{x^3 + x^2} = \frac{1}{x^2(x+1)} = -\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x+1},$$

da cui

$$\int \frac{1}{x^3 + x^2}\,dx = -\log x - \frac{1}{x} + \log(x+1).$$

Allora

$$\lim_{c\to+\infty} \int_1^c \frac{1}{x^3+x^2}\,dx = \lim_{c\to+\infty} \left(-\frac{1}{c} + \log\left(\frac{c+1}{c}\right) + 1 - \log 2\right) = 1 - \log 2.$$

4. Le funzioni $f_n(x) = \dfrac{1}{n}\log\left(1 + \dfrac{x^2}{n}\right)$ sono definite su tutto $\mathbb{R}$ e non negative. Per $x = 0$ tutti i termini della serie valgono zero e dunque

essa converge. Per studiare la convergenza puntuale per $x \neq 0$ possiamo usare il criterio del confronto asintotico. Infatti dal limite notevole

$$\lim_{y \to 0} \frac{\log(1+y)}{y} = 1$$

segue che possiamo confrontare $f_n(x)$ con $\dfrac{x^2}{n^2}$ ottenendo

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{\dfrac{1}{n} \log\left(1 + \dfrac{x^2}{n}\right)}{\dfrac{x^2}{n^2}} = 1.$$

Poichè la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^2}{n^2} = x^2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ è convergente per ogni x, segue che la serie data converge puntualmente in $\mathbb{R}$.

Per la convergenza totale notiamo che per ogni n risulta $\sup\limits_{x \in \mathbb{R}} f_n(x) = +\infty$, dunque non ci può essere convergenza totale in $\mathbb{R}$. Se consideriamo $a > 0$ risulta

$$\max_{x \in [-a,a]} f_n(x) = \frac{1}{n} \log\left(1 + \frac{a^2}{n}\right)$$

e per quanto visto prima la serie di questi massimi è convergente, pertanto la serie data converge totalmente in ogni intervallo chiuso e limitato $[-a, a]$.

4 Compito di Analisi Matematica I del 2/03/09

1. Tracciare il grafico della funzione così definita
$$f(x) = \sqrt{|x^2 + x|} - x\,.$$
Utilizzare i risultati ottenuti per stabilire il numero di soluzioni dell'equazione $f(x) = k$ al variare di $k \in \mathbb{R}$.

2. Studiare il seguente limite
$$\lim_{x\to 0} \Big(\sin x + \cos x\Big)^{\dfrac{2}{\tan x}}.$$

3. Stabilire se il seguente integrale improprio è convergente e, in caso affermativo, calcolarne il valore
$$\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-\sqrt{x+1}}\, dx\,.$$

4. Studiare la convergenza puntuale, uniforme e totale della seguente serie di funzioni
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(3x+2)^n}{n}\,,$$
e calcolarne la somma.

4.1 Soluzione del compito di Analisi Matematica I del 2/03/09

1. • (Dominio e simmetrie) Il Dominio della funzione f è tutto $\mathbb{R}$ ed essa è continua. Non presenta simmetrie.

   • (Segno e intersezione con gli assi) Poichè compare la funzione valore assoluto e si ha $x^2+x \geq 0$ se e solo se $x \in]-\infty,-1] \cup [0,+\infty[$ consideriamo le due funzioni

$$\begin{cases} f_1(x) = \sqrt{x^2+x} - x & \text{per } x \in]-\infty,-1] \cup [0,+\infty[\\ f_2(x) = \sqrt{-x^2-x} - x & \text{per } x \in (-1,0) \end{cases}$$

   e studiamole separatamente.
   Risolvendo $f_1(x) = 0$ troviamo solo la soluzione $x = 0$. Infatti $f_1(x) > 0$ per ogni $x \leq -1$ e per $x > 0$.
   Studiamo ora f_2 in $(-1,0)$. Risulta sempre $f_2(x) > 0$.

   • (Asintoti) Si ha

$$\lim_{x\to+\infty} f_1(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2+x-x^2}{\sqrt{x^2+x}+x} = \frac{1}{2}$$

   per cui $y = \dfrac{1}{2}$ è asintoto orizzontale. Invece $\lim\limits_{x\to-\infty} f_1(x) = +\infty$ per cui vediamo se c'è asintoto obliquo. Otteniamo

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{\sqrt{x^2+x}-x}{x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{-x\sqrt{1+\frac{1}{x}}-x}{x} = -2$$

   e

$$\lim_{x\to-\infty} \sqrt{x^2+x}-x+2x = \lim_{x\to-\infty} \frac{x^2+x-x^2}{\sqrt{x^2+x}-x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{x}{-x\sqrt{1+\frac{1}{x}}-x} = -\frac{1}{2}$$

   pertanto la retta $y = -2x - \dfrac{1}{2}$ è asintoto obliquo.

   • (Derivata prima e monotonia) Risulta

$$f_1'(x) = \frac{2x+1}{2\sqrt{x^2+x}} - 1 = \frac{2x+1-2\sqrt{x^2+x}}{2\sqrt{x^2+x}}$$

perciò $f_1'(x) < 0$ per ogni $x < -1$ e $f_1'(x) > 0$ per ogni $x > 0$, pertanto f_1 è decrescente in $(-\infty, -1]$ ed è crescente in $[0, +\infty)$. Osserviamo che $f_1(-1) = 1$ e $\lim_{x\to -1^-} f_1'(x) = -\infty$ mentre $f_1(0) = 0$ e $\lim_{x\to 0^+} f_1'(x) = +\infty$.
Calcolando $f_2'(x)$ troviamo

$$f_2'(x) = -\frac{2x+1}{2\sqrt{-x^2-x}} - 1 = -\frac{2x+1+2\sqrt{-x^2-x}}{2\sqrt{-x^2-x}}$$

e si ha

$$2x+1+2\sqrt{-x^2-x} = 0 \Leftrightarrow 2\sqrt{-x^2-x} = -(2x+1) \Rightarrow 4(-x^2-x) = (2x+1)^2.$$

Risolvendo l'equazione di secondo grado si ha che solo la radice $x = -\frac{2+\sqrt{2}}{4}$ è accettabile e $f_2'(x) > 0$ per $x \in \left(-1, -\frac{2+\sqrt{2}}{4}\right)$ mentre $f_2'(x) < 0$ per $x \in \left(-\frac{2+\sqrt{2}}{4}, 0\right)$. Quindi f_2 è crescente in $\left(-1, -\frac{2+\sqrt{2}}{4}\right)$ e decrescente in $\left(-\frac{2+\sqrt{2}}{4}, 0\right)$. Si ha $f_2\left(-\frac{2+\sqrt{2}}{4}\right) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\sqrt{2}}$. Inoltre $\lim_{x\to -1^+} f_2'(x) = +\infty$ mentre $\lim_{x\to 0^-} f_2'(x) = -\infty$.

- (Derivata seconda e convessità) Risulta

$$f_1''(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2+x}} - \frac{(2x+1)^2}{4(x^2+x)^{3/2}} = \frac{4(x^2+x)-(2x+1)^2}{4(x^2+x)^{3/2}} = -\frac{1}{4(x^2+x)^{3/2}} < 0$$

per ogni $x < -1$ e per ogni $x > 0$ perciò f_1 è concava in $(-\infty, -1]$ e in $[0, +\infty)$.
Calcolando la derivata seconda di f_2 si ottiene

$$f_2''(x) = -\frac{(-2x-1)^2}{4(-x^2-x)^{3/2}} - \frac{1}{\sqrt{-x^2-x}} = \frac{1}{4\sqrt{-x^2-x}(x^2+x)}$$

che è negativa in $(-1, 0)$ pertanto f_2 è concava in $(-1, 0)$.

- (Grafico) Tornando alla funzione assegnata f osserviamo che $x = -1$ è un punto di minimo relativo e una cuspide. Il punto $x = -\frac{2+\sqrt{2}}{4}$ è un punto di massimo relativo. Il punto $x = 0$ è un punto di minimo assoluto e una cuspide. La funzione f è decrescente in $(-\infty, -1)$ e decrescente in $(-\frac{2+\sqrt{2}}{4}, 0)$ mentre è crescente in $(-1, -\frac{2+\sqrt{2}}{4})$ e in $(0, +\infty)$. La funzione f è concava in $(-\infty, -1)$, in $(-1, 0)$ e in $(0, +\infty)$. La funzione è illimitata superiormente e ha minimo assoluto $f(0) = 0$. Il grafico della funzione e gli asintoti sono riportati in Figura 4.
- Per rispondere all'ultima domanda abbiamo che $f(x) = k$ ha

$$\begin{cases} 0 \text{ soluzioni per } & k < 0 \\ 1 \text{ soluzione per } & k = 0 \\ 2 \text{ soluzioni per } & 0 < k < \frac{1}{2} \\ 1 \text{ soluzione per } & \frac{1}{2} \leq k < 1 \\ 2 \text{ soluzioni per } & k = 1 \\ 3 \text{ soluzioni per } & 1 < k < \frac{1}{2} + \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 2 \text{ soluzioni per } & k = \frac{1}{2} + \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 1 \text{ soluzione per } & k > \frac{1}{2} + \frac{1}{\sqrt{2}}. \end{cases}$$

2. Per studiare il limite assegnato osserviamo che

$$\lim_{x \to 0} \Big(\sin x + \cos x\Big)^{\dfrac{2}{\tan x}} = \lim_{x \to 0} e^{\frac{2}{\tan x} \log\left(\sin x + \cos x\right)},$$

quindi basta studiare il limite dell'esponente di e. Otteniamo, usando per esempio il Teorema di de l'Hôpital,

$$\lim_{x \to 0} \frac{2 \log\big(\sin x + \cos x\big)}{\tan x} =$$
$$\lim_{x \to 0} \frac{2\big(\cos x - \sin x\big)}{\big(\sin x + \cos x\big)\dfrac{1}{\cos^2 x}} = 2,$$

quindi il limite cercato vale e^2.

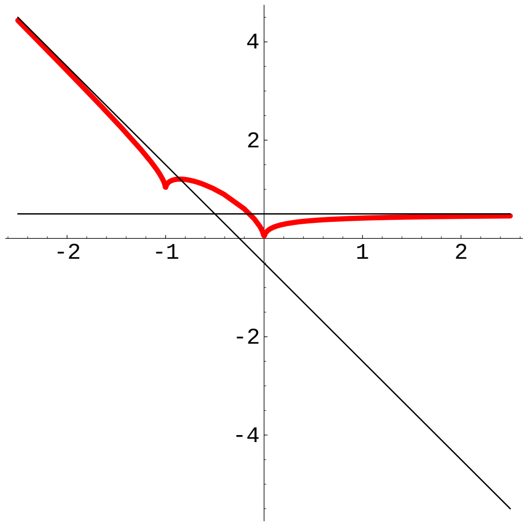


Figura 4: Grafico della funzione f.

3. La funzione integranda è continua e, per esempio, $\lim_{x\to+\infty} x^2 \mathrm{e}^{-\sqrt{x+1}} = 0$ pertanto l'integrale converge. Per calcolare una primitiva usiamo la sostituzione $x + 1 = t^2$ da cui $dx = 2tdt$ e quindi sostituendo e integrando per parti

$$\int 2t\,\mathrm{e}^{-t}\;dt = -2t\,\mathrm{e}^{-t} + \int 2\,\mathrm{e}^{-t}\;dt = -2t\,\mathrm{e}^{-t} - 2\,\mathrm{e}^{-t}\;.$$

Tornando nella variabile x otteniamo

$$\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-\sqrt{x+1}}\;dx = \lim_{c\to+\infty}\Big[-2\sqrt{x+1}\,\mathrm{e}^{-\sqrt{x+1}} - 2\,\mathrm{e}^{-\sqrt{x+1}}\Big]_0^c = \frac{4}{\mathrm{e}}\,.$$

4. La serie data si riconduce a una serie di potenze centrata in 0 con la sostituzione $y = 3x+2$ pertanto studiamo la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{y^n}{n}$. Questa serie ha raggio di convergenza uguale a 1 e non converge per $y = 1$ mentre converge per $y = -1$ (per il Teorema di Leibniz). Dunque questa serie converge puntualmente in $[-1, 1)$ e assolutamente puntualmente in $(-1, 1)$. Converge uniformemente in $[-1, r]$ con $0 < r < 1$ per il teorema di Abel e converge totalmente in $[-r, r]$. Inoltre la serie

è ottenuta integrando termine a termine la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} y^{n-1} = \frac{1}{1-y}$, pertanto

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{y^n}{n} = \sum_{n=1}^{+\infty} \int_0^y t^{n-1}\, dt = \int_0^y \frac{1}{1-t}\, dt = -\log(1-y).$$

Ritornando nella variabile x otteniamo che la serie data converge puntualmente per $-1 \leq 3x+2 < 1$ cioè per $x \in [-1, -\frac{1}{3})$ e assolutamente puntualmente in $(-1, -\frac{1}{3})$. Converge uniformemente in $[-1, -\frac{1}{3} - r]$ con $0 < r < \frac{1}{3}$ e converge totalmente in $[-1+r, -\frac{1}{3} - r]$.

La sua somma è $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(3x+2)^n}{n} = -\log(-1-3x)$ per $x \in [-1, -\frac{1}{3})$.

5 Compito di Analisi Matematica I del 23/03/09 (DM509)

1. Tracciare il grafico della funzione così definita

$$f(x) = \log(1 + \sqrt{|x-1|})$$

   e studiare la derivata destra e sinistra di f negli eventuali punti di non derivabilità.

2. Studiare il seguente limite

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x - x\sqrt{1+x}}{1-\cos x}.$$

3. Calcolare il seguente integrale indefinito

$$\int x \arctan x \, dx.$$

4. Studiare il carattere della seguente serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left[\log\left(1 + \frac{1}{n}\right)\right]^{\alpha}$$

   al variare del parametro $\alpha \in \mathbb{R}_+$.

5.1 Soluzione del compito di Analisi Matematica I del 23/03/09

1.
   - (Dominio, segno e asintoti) La funzione è definita e continua su tutto $\mathbb{R}$, è non negativa e $\lim\limits_{\pm\infty} f(x) = +\infty$. Non ha asintoti. Per $x = 1$ essa vale 0.
   - (Derivata prima e monotonia) La sua derivata prima per $x > 1$ è
   $$f'(x) = \frac{1}{2(1+\sqrt{x-1})\sqrt{x-1}}\,,$$
   è sempre positiva e $\lim\limits_{x\to 1^+} f'(x) = +\infty$. La sua derivata prima per $x < 1$ è
   $$f'(x) = -\frac{1}{2(1+\sqrt{1-x})\sqrt{1-x}}\,,$$
   è sempre negativa e $\lim\limits_{x\to 1^-} f'(x) = -\infty$. Dunque $x = 1$ è un punto di minimo assoluto e una cuspide.
   - (Derivata seconda e convessità) La derivata seconda è
   $$-\frac{1}{4\left(1+\sqrt{|x-1|}\right)|x-1|^{\frac{3}{2}}}-\frac{1}{4\left(1+\sqrt{|x-1|}\right)^2|x-1|} \qquad (x \neq 1)$$
   ed è sempre negativa per $x \neq 1$, dunque la funzione è concava in $]-\infty, 1]$ e in $[1, +\infty[$.
   - (Grafico) Il grafico di f è riportato in Figura 5

2. Usando la formula di Taylor si ottiene:
$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x - x\sqrt{1+x}}{1-\cos x} = \lim_{x\to 0} \frac{x - \dfrac{x^3}{6} - x(1+\dfrac{1}{2}x) + o(x^2)}{1 - 1 + \dfrac{x^2}{2} + o(x^2)} = -1$$

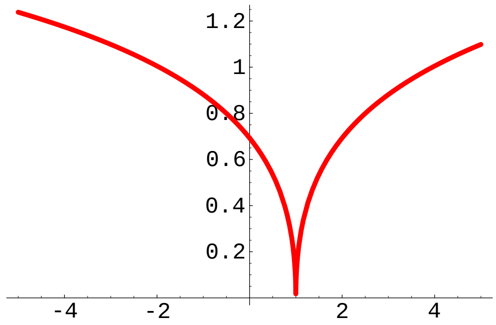


Figura 5: Grafico della funzione f.

3. Integrando per parti si ottiene

$$\begin{aligned}
\int x \arctan x \, dx &= \frac{x^2}{2} \arctan x - \int \frac{x^2}{2} \frac{1}{1+x^2} \, dx \\
&= \frac{x^2}{2} \arctan x - \frac{1}{2} \int \frac{x^2+1-1}{1+x^2} \, dx \\
&= \frac{x^2}{2} \arctan x - \frac{1}{2} \int \left(1 - \frac{1}{1+x^2}\right) dx \\
&= \frac{x^2}{2} \arctan x - \frac{1}{2}\Big(x - \arctan x\Big).
\end{aligned}$$

4. La successione in parentesi quadra è positiva, decrescente e infinitesima dello stesso ordine di $\frac{1}{n}$. Dunque per $\alpha > 1$ la serie è assolutamente convergente, mentre per $0 < \alpha \leq 1$ è convergente per il Teorema di Leibniz.

6 Compito di Analisi Matematica I del 6/04/09 (DM509)

1. Tracciare il grafico della funzione così definita

$$f(x) = x(1-x)\,\mathrm{e}^{\frac{x}{1-x}}$$

   e studiare la derivata destra e sinistra di f negli eventuali punti di non derivabilità.

2. Studiare il seguente limite

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\sqrt{2(1-\cos x)} - x\,\mathrm{e}^{x^2}}{x - \sin x}\,.$$

3. Calcolare il seguente integrale indefinito

$$\int \frac{\sin x}{\cos x - \sin x} dx\,.$$

4. Risolvere nel campo complesso la seguente equazione

$$z|z|^2 - 9i\bar{z} = 0\,.$$

6.1 Soluzione del compito di Analisi Matematica I del 6/04/09

1. • (Dominio e segno) Il dominio della funzione è $\mathbb{R} \setminus \{1\}$. Nei punti del dominio la funzione è derivabile. La funzione si annulla in 0, è positiva in $]0,1[$ e negativa in $]-\infty,0[\cup]1,+\infty[$.

   • (Asintoti) Studiamo il comportamento negli estremi del dominio:

$$\begin{aligned}
&\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty\,,\\
&\lim_{x\to1^-} f(x) = +\infty\,,\\
&\lim_{x\to1^+} f(x) = 0\,,\\
&\lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty\,.
\end{aligned}$$

   Non ci sono asintoti obliqui.

   • (Derivata prima e monotonia) Calcoliamo la derivata di f. Risulta:

$$\begin{aligned}
f'(x) &= (1-2x)\,\mathrm{e}^{\frac{x}{1-x}} + (x-x^2)\,\mathrm{e}^{\frac{x}{1-x}}\,\frac{1-x+x}{(1-x)^2} = \\
&= \mathrm{e}^{\frac{x}{1-x}}\left(1-2x+\frac{x-x^2}{(1-x)^2}\right) = \\
&= \mathrm{e}^{\frac{x}{1-x}}\,\frac{(1-2x)(1-x)^2+x-x^2}{(1-x)^2} = \\
&= \mathrm{e}^{\frac{x}{1-x}}\,\frac{(1-x)(1-2x+2x^2)}{(1-x)^2} = \\
&= \mathrm{e}^{\frac{x}{1-x}}\,\frac{1-2x+2x^2}{1-x}\,.
\end{aligned}$$

   Poichè il numeratore è sempre positivo, $f'(x) > 0$ per $x \in]-\infty,1[$, mentre $f'(x) < 0$ per $x \in]1,+\infty[$, dunque f è crescente in $]-\infty,1[$ e decrescente in $]1,+\infty[$.

- (Derivata seconda e convessità) Per la derivata seconda si ottiene:

$$f''(x) = e^{\frac{x}{1-x}} \left(\frac{1}{(1-x)^2} \frac{1-2x+2x^2}{1-x} + \frac{(4x-2)(1-x)+(1-2x+2x^2)}{(1-x)^2} \right) =$$
$$= e^{\frac{x}{1-x}} \left(\frac{1-2x+2x^2+(4x-2)(1-x)^2+(1-2x+2x^2)(1-x)}{(1-x)^3} \right) =$$
$$= e^{\frac{x}{1-x}} \left(\frac{x(2x^2-4x+3)}{(1-x)^3} \right) .$$

Poichè il trinomio al numeratore è sempre positivo, $f''(x) > 0$ per $x \in]0,1[$, mentre $f''(x) < 0$ per $x \in]-\infty, 0[\cup]1, +\infty[$. Dunque la funzione è convessa in $]0,1[$ ed è concava in $]-\infty, 0[$ e in $]1, +\infty[$. Il punto $x = 0$ è un punto di flesso.

- (Grafico) Il grafico della funzione e dell'asintoto verticale è riportato in Figura 6.

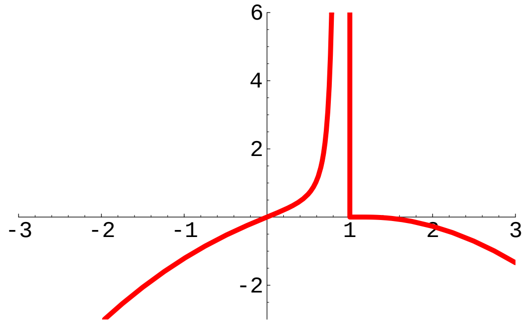


Figura 6: Grafico della funzione f.

2. Usando gli sviluppi di Taylor e tenendo conto che è $x > 0$ abbiamo:

$$\sqrt{2(1-\cos x)} = \sqrt{2(1 - 1 + \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{24} + o(x^5))} =$$
$$= x \left(1 - \frac{x^2}{12} + o(x^3)\right)^{1/2} = x - \frac{x^3}{24} + o(x^4) \,,$$
$$x\, e^{x^2} = x + x^3 + o(x^4) \,,$$
$$x - \sin x = \frac{x^3}{6} + o(x^4) \,.$$

Sostituendo nel limite, otteniamo:

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\sqrt{2(1-\cos x)} - x\,\mathrm{e}^{x^2}}{x - \sin x} = \frac{-\dfrac{x^3}{24} - x^3 + o(x^4)}{\dfrac{x^3}{6} + o(x^4)} = -\frac{25}{4}\,.$$

3. Mettendo in evidenza $\cos x$ al denominatore otteniamo

$$\int \frac{\sin x}{\cos x - \sin x}\,dx = \int \frac{\tan x}{1 - \tan x}\,dx\,.$$

Usando la sostituzione $\tan x = t$, da cui $dx = \dfrac{dt}{1+t^2}$, otteniamo

$$\int \frac{t}{1-t}\,\frac{1}{1+t^2}\,dt\,.$$

Usando il metodo dei fratti semplici abbiamo

$$\begin{aligned}\frac{t}{(1-t)(1+t^2)} &= \frac{A}{1-t} + \frac{Bt+C}{1+t^2} \\ &= \frac{A + At^2 + Bt + C - Bt^2 - Ct}{(1-t)(1+t^2)}\,,\end{aligned}$$

da cui

$$\begin{cases} A - B = 0 \\ B - C = 1 \\ A + C = 0\,. \end{cases}$$

Risolvendo il sistema otteniamo

$$\int \frac{t}{1-t}\,\frac{1}{1+t^2}\,dt = \frac{1}{2}\int \left(\frac{1}{1-t} + \frac{t-1}{1+t^2}\right) dt =$$

$$= -\frac{1}{2}\log(1-t) + \frac{1}{4}\log(1+t^2) - \frac{1}{2}\arctan t + c\,.$$

Ritornando nella variabile x troviamo:

$$-\frac{1}{2}\log(1-\tan x) + \frac{1}{4}\log(1+\tan^2 x) - \frac{x}{2} + c = -\frac{1}{2}\log(\cos x - \sin x) - \frac{x}{2} + c\,.$$

4. Evidentemente $z = 0$ è una soluzione. Moltiplicando l'equazione per z otteniamo:

$$z^2|z|^2 - 9i|z|^2 = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad |z|^2(z^2 - 9i) = 0\,.$$

Dunque, oltre a 0, le soluzioni sono le radici quadrate di $9i = 9\,\mathrm{e}^{i\pi/2}$, che sono $z = 3\,\mathrm{e}^{i\pi/4}$ e $z = 3\,\mathrm{e}^{i5\pi/4}$, cioè:

$$z = 0\,, \qquad z = 3\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\,, \qquad z = -3\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\,.$$

7 Compito di Analisi Matematica I del 4/05/09

1. Tracciare il grafico della funzione così definita
$$f(x) = x(\log^2 |x| - 1)$$
e studiare la derivata destra e sinistra di f negli eventuali punti di non derivabilità.

2. Studiare il seguente limite
$$\lim_{x\to+\infty} \left[x - x^\alpha \log\left(1 + \frac{1}{x}\right)\right]$$
al variare del parametro $\alpha \in \mathbb{R}_+$.

3. Stabilire se il seguente integrale improprio
$$\int_1^\infty \frac{x - \arctan x}{x^3}\, dx$$
è convergente e, in caso affermativo, calcolarlo.

4. Studiare la convergenza puntuale, uniforme e totale della serie
$$\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{n}{(x-1)^n}$$
e determinarne la somma.

7.1 Soluzione del compito di Analisi Matematica I del 4/05/09

1. - (Dominio e simmetrie) Il dominio della funzione è $\mathbb{R} \setminus \{0\}$. Nei punti del dominio la funzione è derivabile. La funzione è dispari, perciò la studiamo prima per $x > 0$.
   - (Asintoti) Studiamo il comportamento negli estremi del dominio:

     $$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty\,,$$
     $$\lim_{x\to 0^+} f(x) = 0\,,$$

     grazie al limite notevole $\lim_{x\to 0^+} x\log^\alpha x = 0$, per ogni $\alpha > 0$. Pertanto la funzione si può prolungare per continuità in 0 dandole il valore 0.

     Non ci sono asintoti obliqui in quanto $\lim_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x} = +\infty$.
   - (Derivata prima e monotonia) Calcoliamo la derivata di f sempre per $x > 0$. Risulta:

     $$\begin{aligned} f'(x) &= \log^2 x\, - 1 + x\, 2\log x\, \frac{1}{x} = \\ &= \log^2 x + 2\log x\, - 1\,. \end{aligned}$$

     Osserviamo subito che $\lim_{x\to 0^+} f'(x) = +\infty$ quindi il prolungamento della funzione non è derivabile in 0, in cui la tangente al grafico è verticale.

     Per studiare il segno della derivata prima poniamo $t = \log x$ e risolviamo l'equazione $t^2 + 2t - 1 = 0$. Le radici sono

     $$t_{1,2} = \frac{-2 \pm \sqrt{8}}{2} = -1 \pm \sqrt{2}\,.$$

     Ritornando nella variabile x abbiamo che $f'(x) > 0$ per $0 < x < \mathrm{e}^{-1-\sqrt{2}}$ e per $x > \mathrm{e}^{-1+\sqrt{2}}$ mentre $f'(x) < 0$ per $\mathrm{e}^{-1-\sqrt{2}} < x < \mathrm{e}^{-1+\sqrt{2}}$. Allora f è crescente in $[0, \mathrm{e}^{-1-\sqrt{2}}]$ e in $[\mathrm{e}^{-1+\sqrt{2}}, +\infty)$, mentre è decrescente in $[\mathrm{e}^{-1-\sqrt{2}}, \mathrm{e}^{-1+\sqrt{2}}]$. Il punto $x_1 = \mathrm{e}^{-1-\sqrt{2}}$ è un punto di massimo relativo e $f(x_1) \approx 0.431$ mentre $x_2 = \mathrm{e}^{-1+\sqrt{2}}$ è un punto di minimo relativo per f e $f(x_2) \approx -1.253$.

- (Derivata seconda e convessità) Per la derivata seconda si ottiene:

$$f''(x) = 2\log x \,\frac{1}{x} + \frac{2}{x} = 2\,\frac{\log x\; + 1}{x}\,.$$

Dunque $f''(x) > 0$ per $x \in]\frac{1}{e}, +\infty[$, mentre $f''(x) < 0$ per $x \in]0, \frac{1}{e}[$ pertanto f è concava in $]0, \frac{1}{e}[$ ed è convessa in $]\frac{1}{e}, +\infty[$. Il punto $x_3 = \frac{1}{e}$ è un punto di flesso e $f(x_3) = 0$.

- (Grafico) Il grafico della funzione per $x < 0$ si ottiene per riflessione rispetto all'origine ed è riportato in Figura 7.

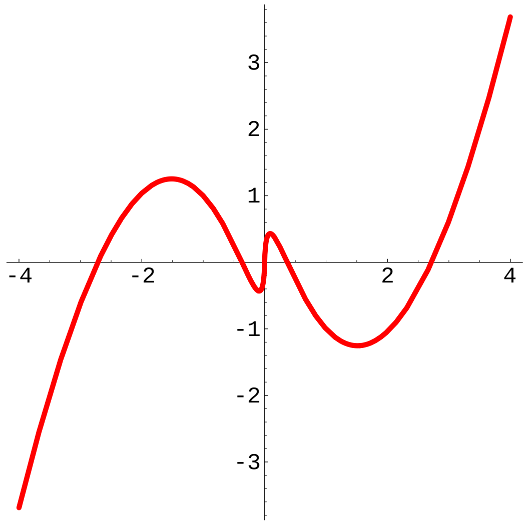


Figura 7: Grafico della funzione f.

2. Usando lo sviluppo di Taylor del logaritmo (poichè $\frac{1}{x} \to 0$ per $x \to +\infty$) abbiamo:

$$\log\left(1 + \frac{1}{x}\right) = \frac{1}{x} - \frac{1}{2}\,\frac{1}{x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right)\,.$$

Sostituendo nel limite, otteniamo:

$$\lim_{x\to+\infty}\left[x - x^\alpha\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{2}\,\frac{1}{x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right)\right)\right] =$$
$$\lim_{x\to+\infty}\left[x - \frac{x^\alpha}{x} + \frac{1}{2}\,\frac{x^\alpha}{x^2} + o\left(\frac{x^\alpha}{x^2}\right)\right]\,.$$

Dunque risulta

$$\lim_{x\to+\infty}\left[x - x^\alpha \log\left(1+\frac{1}{x}\right)\right] = \begin{cases} +\infty & \text{se } 0<\alpha<2\,,\\ \frac{1}{2} & \text{se } \alpha=2\,,\\ -\infty & \text{se } \alpha>2\,. \end{cases}$$

3. La funzione integranda è continua e infinitesima all'infinito come $\frac{1}{x^2}$ pertanto l'integrale converge. Calcoliamo l'integrale indefinito. Integrando per parti si ottiene:

$$\begin{aligned} \int \frac{x-\arctan x}{x^3}\,dx &= \int \frac{1}{x^2}\,dx - \int \frac{\arctan x}{x^3}\,dx \\ &= -\frac{1}{x} - \left(-\frac{\arctan x}{2x^2} + \int \frac{1}{2x^2(x^2+1)}\,dx\right)\,. \qquad (1) \end{aligned}$$

Usando il metodo dei fratti semplici abbiamo

$$\begin{aligned} \frac{1}{2x^2(x^2+1)} &= \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{Cx+D}{x^2+1} \\ &= \frac{Ax^3+Ax+Bx^2+B+Cx^3+Dx^2}{x^2(x^2+1)}\,, \end{aligned}$$

da cui

$$\begin{cases} A+C=0 \\ B+D=0 \\ A=0 \\ B=\frac{1}{2}\,. \end{cases}$$

Risolvendo il sistema otteniamo

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{2x^2(x^2+1)}\,dx &= \frac{1}{2}\int\left(\frac{1}{x^2} - \frac{1}{1+x^2}\right)dx \\ &= -\frac{1}{2x} - \frac{1}{2}\arctan x\,. \end{aligned}$$

Sostituendo nell'uguaglianza (1) troviamo:

$$\begin{aligned} &-\frac{1}{x} - \left(-\frac{\arctan x}{2x^2} + \int \frac{1}{2x^2(x^2+1)}\,dx\right) \\ &= -\frac{1}{x} + \frac{\arctan x}{2x^2} + \frac{1}{2x} + \frac{1}{2}\arctan x \\ &= -\frac{1}{2x} + \frac{\arctan x}{2x^2} + \frac{1}{2}\arctan x\,. \end{aligned}$$

Allora l'integrale vale

$$
\begin{aligned}
&\int_1^{\infty} \frac{x - \arctan x}{x^3}\, dx \\
&= \lim_{c \to +\infty} \left[-\frac{1}{2x} + \frac{\arctan x}{2x^2} + \frac{1}{2} \arctan x \right]_1^c \\
&= \lim_{c \to +\infty} \left(-\frac{1}{2c} + \frac{\arctan c}{2c^2} + \frac{1}{2} \arctan c + \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \arctan 1 - \frac{1}{2} \arctan 1 \right) = \frac{1}{2}\,.
\end{aligned}
$$

4. Con la sostituzione $y = \dfrac{1}{1-x}$ otteniamo

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{n}{(x-1)^n} = \sum_{n=1}^{+\infty} n y^n\,.$$

Questa serie di potenze converge assolutamente per $y \in (-1, 1)$, con convergenza totale negli intervalli chiusi $[-r, r]$ con $0 < r < 1$ e non converge negli estremi. Tornando nella variabile x abbiamo la convergenza assoluta per $|x - 1| > 1$. Dunque la serie converge puntualmente assolutamente in $(-\infty, 0) \cup (2, +\infty)$ e converge totalmente in $(-\infty, -r] \cup [2 + r, +\infty)$ per $r > 0$. La somma della serie è

$$
\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{n}{(x-1)^n} &= \sum_{n=1}^{+\infty} n y^n = y \sum_{n=1}^{+\infty} n y^{n-1} = y D \left(\sum_{n=1}^{+\infty} y^n \right) \\
&= y D \left(\frac{1}{1-y} - 1 \right) = \frac{y}{(1-y)^2} = \frac{1-x}{x^2}\,.
\end{aligned}
$$

8 Compito di Analisi Matematica I del 29/06/09

1. Tracciare il grafico della funzione così definita
$$f(x) = \log(x^2 + x + 1) - |x|.$$

2. Studiare il seguente limite
$$\lim_{x \to 0} \left(1 + \tan^2 x\right)^{\dfrac{1}{1 - \cos x}}.$$

3. Calcolare il valore del seguente integrale
$$\int_{\pi/4}^{\pi/3} \frac{\sin x}{\cos^2 x + \cos x}\, dx\,.$$

4. Determinare la serie di Fourier della funzione 2π-periodica che nell'intervallo $[-\pi, \pi]$ è data da
$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{per } x \in [-\pi, 0) \\ x(\pi - x) & \text{per } x \in [0, \pi]\,. \end{cases}$$
Precisare la convergenza puntuale e uniforme della serie ottenuta.

8.1 Soluzione del compito di Analisi Matematica I del 29/06/09

1. • (Dominio e simmetrie) Poichè l'argomento del logaritmo è un trinomio con discriminante minore di zero, esso è sempre positivo, perciò la funzione è definita e continua su tutto $\mathbb{R}$. Essa non presenta simmetrie. Evidentemente $f(0) = 0$ mentre lo studio delle altre radici e del segno è problematico, perciò lo tratterremo alla fine dello studio della funzione.

   • (Asintoti) Risulta $\lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$ e $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$. Non ha asintoti obliqui in quanto $\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = -1$ ma $\lim_{x\to+\infty} f(x) + x = +\infty$. Analogamente $\lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = 1$ ma $\lim_{x\to+\infty} f(x) - x = +\infty$.

   • (Derivata prima e monotonia) Poiché è presente il valore assoluto consideriamo le due funzioni

   $$\begin{cases} f_1(x) = \log(x^2 + x + 1) - x & \text{per } x \geq 0\,, \\ f_2(x) = \log(x^2 + x + 1) + x & \text{per } x < 0\,. \end{cases}$$

   La derivata prima di f_1 per $x \geq 0$ è

   $$f_1'(x) = \frac{1 + 2\,x}{1 + x + x^2} - 1 = \frac{x - x^2}{1 + x + x^2}\,.$$

   Essa si annulla per $x = 0$ e $x = 1$, è positiva per $0 < x < 1$ ed è negativa per $x > 1$. Dunque f è crescente in $[0, 1]$ e decrescente in $[1, +\infty)$. Perciò $x = 1$ è un punto di massimo relativo e $f(1) = -1 + \log 3$, pertanto esiste un punto $\bar{x} > 1$ dove la funzione si annulla.

   La derivata prima di f_2 per $x \leq 0$ è

   $$f_2'(x) = \frac{1 + 2\,x}{1 + x + x^2} + 1 = \frac{2 + 3\,x + x^2}{1 + x + x^2}.$$

   L'equazione $f_2'(x) = 0$ ha le soluzioni $x = -1$ e $x = -2$. Si ha $f_2'(x) > 0$ per $x \in (-\infty, -2)$ e per $x \in (-1, 0]$ e $f_2'(x) < 0$ per $x \in (-2, -1)$. Dunque la funzione f è crescente in $(-\infty, -2]$ e in $[-1,0]$ e decrescente in $[-2,-1]$, perciò $x=-2$ è un punto di massimo relativo con $f(-2)=-2+\log 4$ e $x=-1$ è un punto di minimo relativo con $f(-1)=-1$. Poichè $f_2'(0)=2$ allora $x=0$ è un punto angoloso.

- (Derivata seconda e convessità) La derivata seconda di f_1 è

$$f_1''(x)=\frac{2}{1+x+x^2}-\frac{(1+2\,x)^2}{(1+x+x^2)^2}=\frac{1-2\,x-2\,x^2}{(1+x+x^2)^2}\qquad (x>0)$$

ed è uguale a zero per $x=\dfrac{\sqrt{3}-1}{2}$, positiva per $0<x<\dfrac{\sqrt{3}-1}{2}$, negativa per $x>\dfrac{\sqrt{3}-1}{2}$, dunque la funzione è convessa in $\left[0,\dfrac{\sqrt{3}-1}{2}\right]$ e concava in $\left[\dfrac{\sqrt{3}-1}{2},+\infty\right)$. Il punto $x=\dfrac{\sqrt{3}-1}{2}$ è di flesso.
La derivata seconda di f_2 è

$$f_2''(x)=\frac{2}{1+x+x^2}-\frac{(1+2\,x)^2}{(1+x+x^2)^2}=\frac{1-2\,x-2\,x^2}{(1+x+x^2)^2}\qquad (x<0)$$

che si annulla per $x=-\dfrac{\sqrt{3}+1}{2}$, è positiva per $-\dfrac{\sqrt{3}+1}{2}<x<0$, negativa per $x<-\dfrac{\sqrt{3}+1}{2}$, dunque la funzione è convessa in $\left[-\dfrac{\sqrt{3}+1}{2},0\right]$ e concava in $\left(-\infty,-\dfrac{\sqrt{3}+1}{2}\right]$. Il punto $x=-\dfrac{\sqrt{3}+1}{2}$ è di flesso.

- (Grafico) Il grafico di f è riportato in Figura 8 per cui $x=1$ è un punto di massimo assoluto.

2. Il limite si presenta nella forma indeterminata 1^∞ perciò consideriamo l'esponenziale del logaritmo della funzione da studiare, cioè:

$$\left(1+\tan^2 x\right)^{\frac{1}{1-\cos x}}=\mathrm{e}^{\frac{1}{1-\cos x}\log(1+\tan^2 x)}$$

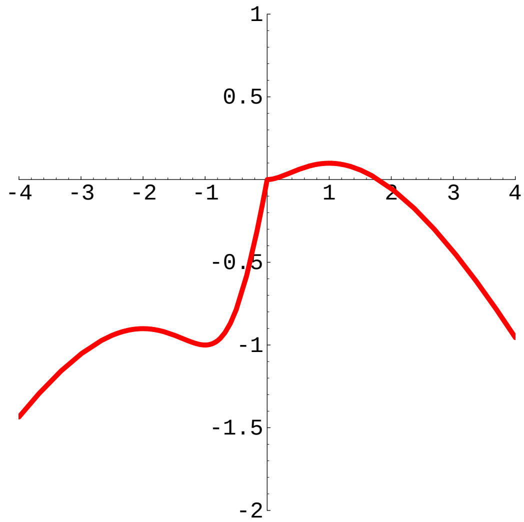


Figura 8: Grafico della funzione f.

e studiamo il limite dell'esponente. Risulta, moltiplicando e dividendo per x^2 e per $\tan^2 x$ e utilizzando i limiti notevoli:

$$\lim_{x\to 0} \frac{1}{1-\cos x} \log\left(1+\tan^2 x\right) = \lim_{x\to 0} \frac{x^2}{1-\cos x} \frac{\tan^2 x}{x^2} \frac{\log(1+\tan^2 x)}{\tan^2 x} = 2\,.$$

Pertanto il valore del limite cercato è e^2.

3. Per calcolare l'integrale utilizziamo il cambiamento di variabile $y = \cos x$, da cui risulta $dy = -\sin x\,dx$. Sostituendo troviamo

$$
\begin{aligned}
\int_{\pi/4}^{\pi/3} \frac{\sin x}{\cos^2 x + \cos x}\, dx &= \int_{\sqrt{2}/2}^{1/2} \frac{-1}{y^2+y}\, dy \\
&= \int_{\sqrt{2}/2}^{1/2} \frac{-1}{y(y+1)}\, dy \\
&= \int_{\sqrt{2}/2}^{1/2} \left(\frac{1}{y+1} - \frac{1}{y} \right) dy \\
&= \Big[\log(y+1) - \log y \Big]_{\sqrt{2}/2}^{1/2} \\
&= \log\left(1+\frac{1}{2}\right) - \log\left(\frac{1}{2}\right) - \log\left(1+\frac{\sqrt{2}}{2}\right) + \log\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \\
&= \log 3 + \log(\sqrt{2}-1)\,.
\end{aligned}
$$

4. La funzione non è pari né dispari dunque dovremo calcolare tutti i coefficienti di Fourier. Risulta $\omega = 1$ e dunque abbiamo, tenendo conto che la funzione vale zero in $[-\pi, 0]$:

$$
\begin{aligned}
a_0 &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} (\pi x - x^2)\, dx = \frac{\pi^2}{6} \\
a_k &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} (\pi x - x^2)\, \cos(kx)\, dx \quad \text{(integrando per parti)} \\
&= \frac{1}{\pi} \left(-\frac{\pi}{k^2} - \frac{\pi\, \cos(k\,\pi)}{k^2} + \frac{2\, \sin(k\,\pi)}{k^3} \right) = -\frac{1+(-1)^k}{k^2} \\
b_k &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} (\pi x - x^2)\, \sin(kx)\, dx \quad \text{(integrando per parti)} \\
&= \frac{1}{\pi} \left(\frac{2}{k^3} - \frac{2\, \cos(k\,\pi)}{k^3} - \frac{\pi\, \sin(k\,\pi)}{k^2} \right) = 2\frac{1-(-1)^k}{\pi k^3}\,,
\end{aligned}
$$

dunque la serie di Fourier di f è

$$
\frac{\pi^2}{12} + \sum_{k=1}^{+\infty} \left(-\frac{1+(-1)^k}{k^2} \cos(kx) + 2\frac{1-(-1)^k}{\pi k^3} \sin(kx) \right) .
$$

Poichè la funzione è continua e regolare a tratti, la serie converge uniformemente ad f su $\mathbb{R}$.

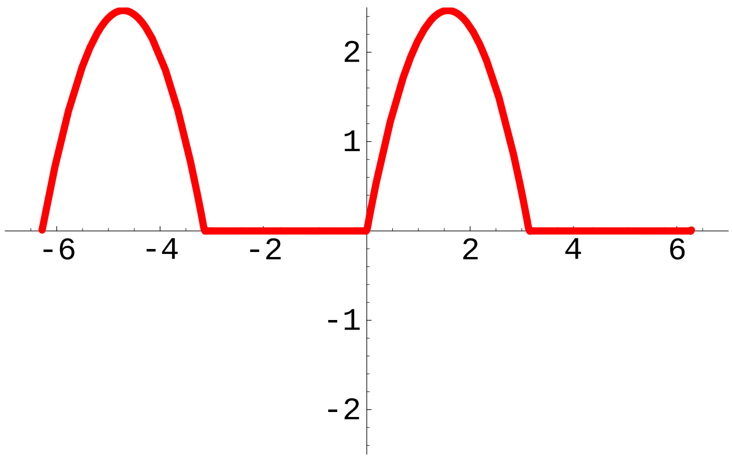


Figura 9: Somma parziale della serie di Fourier di f per $k = 100$.

La somma dei primi 101 termini della serie è riportata in Figura 9.

9 Compito di Analisi Matematica I del 13/07/09

1. Tracciare il grafico della funzione così definita
$$f(x) = x\sqrt{|x-1|}\,.$$
Determinare l'equazione della retta tangente al grafico nell'origine.

2. Studiare il seguente limite
$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{2}{x^2} - \frac{\arctan 2x}{x^3}\right)\,.$$

3. Calcolare il valore del seguente integrale improprio
$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{\mathrm{e}^{2x}+1}\,dx\,.$$

4. Studiare la convergenza puntuale, uniforme e totale della seguente serie di funzioni
$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{3n}{2^n}(\log x)^n\,,$$
e calcolarne la somma.

9.1 Soluzione del compito di Analisi Matematica I del 13/07/09

1. • (Dominio, simmetrie, segno) La funzione è definita e continua su tutto $\mathbb{R}$. Essa non presenta simmetrie, è non negativa per $x \geq 0$ ed è negativa per $x < 0$.

   • (Asintoti) Risulta $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ e $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$. Non ha asintoti obliqui in quanto $\lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty$. Per $x = 0$ e per $x = 1$ essa vale 0.

   • (Derivata prima e monotonia) Poiché è presente il valore assoluto consideriamo le due funzioni

$$\begin{cases} f_1(x) = x\sqrt{x-1} & \text{per } x \geq 1\,, \\ f_2(x) = x\sqrt{1-x} & \text{per } x < 1\,. \end{cases}$$

   La derivata prima di f_1 per $x > 1$ è

$$f_1'(x) = \sqrt{x-1} + \frac{x}{2\sqrt{x-1}}\,.$$

   Essa è sempre positiva e $\lim_{x\to1^+} f_1'(x) = +\infty$. Dunque f è crescente in $[1, +\infty)$.
   La derivata prima di f_2 per $x < 1$ è

$$f_2'(x) = \sqrt{1-x} - \frac{x}{2\sqrt{1-x}} = \frac{2-3x}{2\sqrt{1-x}}.$$

   L'equazione $f_2'(x) = 0$ ha l'unica soluzione $x = \frac{2}{3}$. Si ha $f_2'(x) > 0$ per $x < \frac{2}{3}$ e $f_2'(x) < 0$ per $\frac{2}{3} < x < 1$. Inoltre $\lim_{x\to1^-} f_2'(x) = -\infty$. Dunque la funzione f è crescente in $\left(-\infty, \frac{2}{3}\right]$ e decrescente in $\left[\frac{2}{3}, 1\right]$.
   Il punto $x = 1$ è un punto di minimo relativo e una cuspide. Il punto $x = \frac{2}{3}$ è di massimo relativo e la funzione vale $f\left(\frac{2}{3}\right) = \frac{2}{3\sqrt{3}}$.

- (Derivata seconda e convessità) La derivata seconda di f_1 è

$$f_1''(x) = \frac{1}{\sqrt{x-1}} - \frac{x}{4\,(x-1)^{\frac{3}{2}}} = \frac{3\,x-4}{4\,(x-1)^{\frac{3}{2}}} \qquad (x>1)$$

ed è uguale a zero per $x = \dfrac{4}{3}$, negativa per $1 < x < \dfrac{4}{3}$, positiva per $x > \dfrac{4}{3}$, dunque la funzione è concava in $\left[1, \dfrac{4}{3}\right]$ e convessa in $\left[\dfrac{4}{3}, +\infty\right[$. Il punto $x = \dfrac{4}{3}$ è di flesso.

La derivata seconda di f_2 è

$$f_2''(x) = -\left(\frac{1}{\sqrt{1-x}}\right) - \frac{x}{4\,(1-x)^{\frac{3}{2}}} = \frac{4-3\,x}{4\,\sqrt{1-x}\,(x-1)} \qquad (x<1)$$

ed è sempre negativa perché il numeratore è positivo e il denominatore è negativo, perciò la funzione è concava in $(-\infty, 1]$.

- (Grafico) Il grafico di f è riportato in Figura 10. Poiché $f(0) = 0$ e $f'(0) = 1$ l'equazione della retta tangente al grafico in $(0,0)$ è $y = x$.

2. Calcoliamo il limite usando la regola di de l'Hôpital.

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{2}{x^2} - \frac{\arctan 2x}{x^3}\right)$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{2x - \arctan 2x}{x^3} = \lim_{x\to 0}\frac{2 - \dfrac{2}{1+4x^2}}{3x^2}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\dfrac{8x^2}{1+4x^2}}{3x^2} = \frac{8}{3}\,.$$

3. La funzione è assolutamente integrabile in senso improprio in quanto è continua e infinitesima di ordine infinitamente grande all'infinito. Calcoliamo una primitiva della funzione integranda. Usando la sostituzione $\mathrm{e}^x = t$ otteniamo $x = \log t$ e dunque $dx = \dfrac{dt}{t}$. Dunque dobbiamo calcolare

$$\int \frac{1}{t^2+1}\,\frac{1}{t}\,dt\,.$$

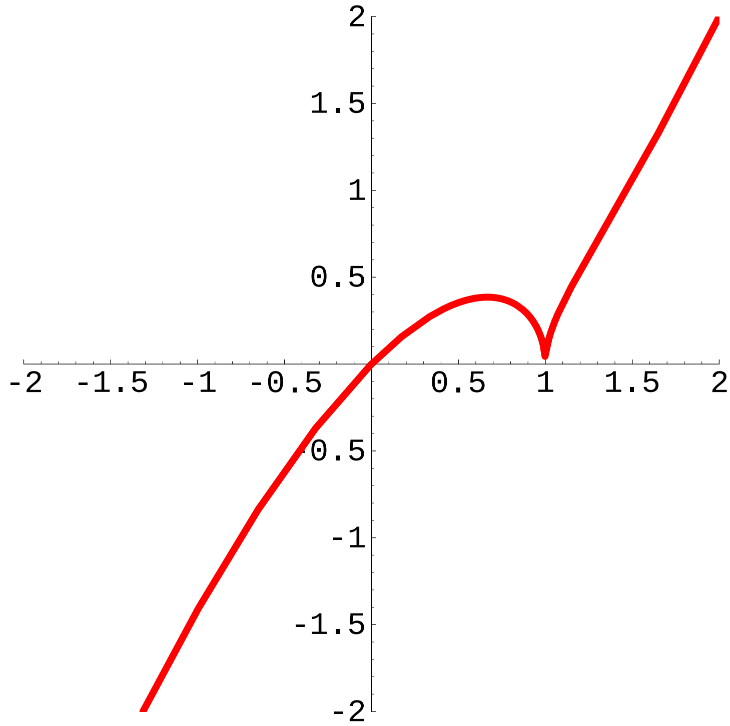


Figura 10: Grafico della funzione f.

Usando il metodo dei fratti semplici abbiamo

$$\frac{1}{t^2+1}\,\frac{1}{t} = \frac{At+B}{t^2+1} + \frac{C}{t} = \frac{At^2+Bt+Ct^2+C}{(t^2+1)t}\,.$$

Dunque

$$\begin{cases} A+C=0 \\ B=0 \\ C=1 \end{cases}$$

Allora

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{t^2+1}\,\frac{1}{t}\,dt &= \int \left(\frac{-t}{t^2+1} + \frac{1}{t}\right) \\ &= -\frac{1}{2}\log(t^2+1) + \log t + c\end{aligned}$$

Ritornando nella variabile x e calcolando l'integrale improprio otteniamo

$$\lim_{c\to+\infty}\int_1^c \frac{1}{\mathrm{e}^{2x}+1}\,dx = \lim_{c\to+\infty}\left[\log\left(\frac{\mathrm{e}^x}{\sqrt{\mathrm{e}^{2x}+1}}\right)\right]_1^c$$
$$= \lim_{c\to+\infty}\left(\log\left(\frac{\mathrm{e}^c}{\sqrt{\mathrm{e}^{2c}+1}}\right) - \log\left(\frac{\mathrm{e}}{\sqrt{\mathrm{e}^2+1}}\right)\right) = \frac{1}{2}\log(\mathrm{e}^2+1) - 1\,.$$

4. Con la sostituzione $y = \dfrac{\log x}{2}$ otteniamo

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{3n}{2^n}(\log x)^n = \sum_{n=0}^{+\infty} 3ny^n\,.$$

Questa serie di potenze ha raggio di convergenza 1 perciò converge assolutamente per $y\in(-1,1)$ e non converge negli estremi. La serie converge totalmente (e quindi uniformemente) negli intervalli chiusi $[-r,r]$ con $0<r<1$.

Tornando nella variabile x abbiamo la convergenza assoluta per $\left|\dfrac{\log x}{2}\right| < 1$. Dunque la serie converge puntualmente assolutamente per $-2 < \log x < 2$, cioè in $\left(\dfrac{1}{\mathrm{e}^2}\,,\,\mathrm{e}^2\right)$ e converge totalmente in $\left[\dfrac{1}{\mathrm{e}^2}+r\,,\,\mathrm{e}^2-r\right]$ per $r>0$.

La somma della serie è

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{3n}{2^n}(\log x)^n &= \sum_{n=1}^{+\infty}3ny^n = 3y\sum_{n=1}^{+\infty}ny^{n-1}\\ &= 3y\left(\sum_{n=1}^{+\infty}Dy^n\right) = 3yD\left(\sum_{n=1}^{+\infty}y^n\right)\\ &= 3yD\left(\frac{1}{1-y}-1\right) = \frac{3y}{(1-y)^2} = \frac{6\log x}{(2-\log x)^2}\,.\end{aligned}$$

10 Compito di Analisi Matematica I (D.M.509) del 13/07/09

1. Tracciare il grafico della funzione così definita

$$f(x) = \arctan \frac{|x| + 1}{x^2}$$

e studiare la derivata destra e sinistra negli eventuali punti di non derivabilità.

2. Studiare il seguente limite

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{\log x - \log \sin x}{x^2}\,.$$

3. Calcolare il valore del seguente integrale definito

$$\int_0^1 x \,\arctan \sqrt{x}\, dx\,.$$

4. Risolvere in $\mathbb{C}$ la seguente equazione

$$z\,\bar{z} - 2 = z\,.$$

10.1 Soluzione del compito di Analisi Matematica I del 13/07/09 (DM 509)

1.
   - (Dominio, simmetrie e segno) La funzione è definita in $\mathbb{R} \setminus \{0\}$, è pari ed è sempre positiva. Grazie alla simmetria rispetto all'asse delle y basta studiare la funzione in $x > 0$.
   - (Asintoti) Studiando il comportamento negli estremi del dominio otteniamo

     $$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \frac{\pi}{2}\,, \qquad \lim_{x\to +\infty} f(x) = 0\,.$$

     Dunque la funzione si può prolungare per continuità in $x = 0$ dandole il valore $\frac{\pi}{2}$ ed ha come asintoto orizzontale l'asse $y = 0$.
   - (Derivata prima e monotonia) La sua derivata prima è

     $$f'(x) = \frac{\frac{1}{x^2} - \frac{2\,(1+x)}{x^3}}{1 + \frac{(1+x)^2}{x^4}} = -\frac{x\;(2+x)}{1+2\,x+x^2+x^4} \qquad (x > 0)\,.$$

     Il numeratore e il denominatore sono sempre positivi, dunque $f'(x) < 0$ e la funzione è decrescente in $(0, +\infty)$. Il limite della derivata prima in zero vale zero. Dunque il prolungamento della funzione è derivabile in $\mathbb{R}$.
   - (Derivata seconda e convessità) La derivata seconda è

     $$\begin{aligned} f''(x) &= \frac{x\;(2+x)\;(2+2\,x+4\,x^3)}{(1+2\,x+x^2+x^4)^2} - \frac{2+2x}{1+2\,x+x^2+x^4} \\ &= \frac{2\;(-1-x+3\,x^4+x^5)}{(1+2\,x+x^2+x^4)^2}\,. \end{aligned}$$

     Il numeratore in un intorno di 0 è negativo, mentre poi diventa positivo, dunque esiste un punto α compreso tra 1/2 e 1 di flesso, per cui la funzione è concava in $(0, \alpha)$ ed è convessa in $(\alpha, +\infty)$.
   - (Grafico) Il grafico di f è riportato in Figura 11.

2. Poiché il numeratore è uguale a $\log\left(\dfrac{x}{\sin x}\right)$ il suo limite è zero, dunque abbiamo una forma indeterminata 0/0. Usando il Teorema di de

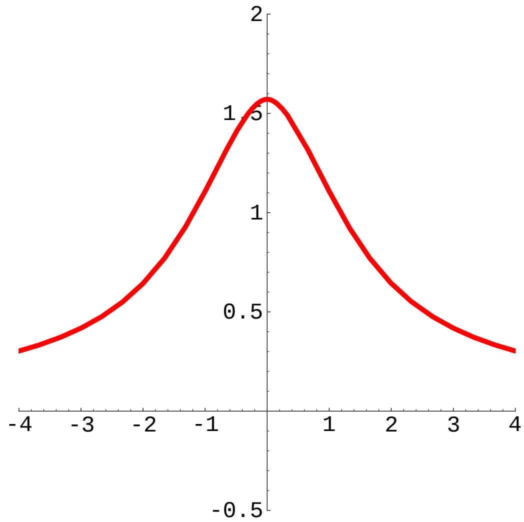


Figura 11: Grafico della funzione f.

l'Hôpital si ha

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0^+} \frac{\log x - \log \sin x}{x^2} &= \lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{1}{x} - \frac{\cos x}{\sin x}}{2x} \\
&= \lim_{x\to 0^+} \frac{\sin x - x\cos x}{2x^2 \sin x} \\
&= \lim_{x\to 0^+} \frac{\cos x - \cos x + x\sin x}{4x\sin x + 2x^2\cos x} \\
&= \lim_{x\to 0^+} \frac{\sin x}{4\sin x + 2x\cos x} = \frac{1}{6}\,.
\end{aligned}$$

3. Calcoliamo l'integrale per parti e poi per sostituzione usando $x = t^2$

(gli estremi d'integrazione sono gli stessi)

$$
\begin{aligned}
\int_0^1 x \arctan \sqrt{x}\, dx &= \left[\frac{x^2}{2} \arctan \sqrt{x}\right]_0^1 - \int_0^1 \frac{x^2}{2} \frac{1}{1+x} \frac{1}{2\sqrt{x}}\, dx \\
&= \frac{\pi}{8} - \int_0^1 \frac{t^4}{2} \frac{1}{1+t^2}\, dt \\
&= \frac{\pi}{8} - \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{t^4 + t^2 - t^2 - 1 + 1}{1+t^2}\, dt \\
&= \frac{\pi}{8} - \frac{1}{2} \int_0^1 \left(t^2 - 1 + \frac{1}{1+t^2}\right) dt \\
&= \frac{\pi}{8} - \frac{1}{2} \left[\frac{t^3}{3} - t + \arctan t\right]_0^1 \\
&= \frac{\pi}{8} - \frac{1}{2} \left(-\frac{2}{3} + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{3}\,.
\end{aligned}
$$

4. Poiché $z\bar{z} = |z|^2 \in \mathbb{R}$ allora anche $z \in \mathbb{R}$ e l'equazione diventa $z^2 - z - 2 = 0$. Le radici sono dunque

$$
z_{1/2} = \frac{1 \pm \sqrt{1+8}}{2} = \frac{1 \pm 3}{2}\,,
$$

cioè $z_1 = 2$ e $z_2 = -1$.

11 Compito di Analisi Matematica I del 7/09/09

1. Tracciare il grafico della funzione così definita

$$f(x) = \log|x| + |1 - x^2|\,.$$

2. Studiare il seguente limite

$$\lim_{x\to+\infty} \left(\frac{x^2+1}{x^2-1}\right)^{x^2}.$$

3. Calcolare il valore del seguente integrale

$$\int_0^{\pi/3} \sqrt{\cos x}\,\sin x\,dx\,.$$

4. Studiare la convergenza puntuale, uniforme e totale della seguente serie di funzioni

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^{2n}}{n} \log\left(1 + \frac{x^2}{\sqrt{n}}\right).$$

11.1 Soluzione del compito di Analisi Matematica I del 7/9/09

1.
   - (Dominio e simmetrie) La funzione è definita per ogni $x \neq 0$ pertanto il Dominio è $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ e f è continua nel suo dominio. La funzione è pari perciò la studieremo solo per $x > 0$, essendo il suo grafico simmetrico rispetto all'asse delle y.
   - (Intersezioni con gli assi e segno) Poichè compare la funzione valore assoluto consideriamo le due funzioni

$$\begin{cases} f_1(x) = 1 - x^2 + \log x & \text{per } 0 < x \leq 1 \\ f_2(x) = x^2 - 1 + \log x & \text{per } x > 1 \end{cases}$$

   e studiamole separatamente.
   È difficile determinare le radici e il segno di f perciò rimandiamo questo punto alla fine dello studio della funzione. Osserviamo solo che $f(1) = 0$ e che $f(x) > 0$ per ogni $x > 1$ in quanto somma di due termini positivi.
   - (Asintoti) Si ha $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ e non c'è asintoto obliquo. Risulta $\lim_{x \to 0^+} f(x) = -\infty$ pertanto $x = 0$ è asintoto verticale.
   - (Derivata prima e monotonia) Risulta $f_1'(x) = \dfrac{1}{x} - 2x = \dfrac{1 - 2x^2}{x}$. Il numeratore si annulla per $x = \frac{1}{\sqrt{2}}$, è positivo per ogni $0 < x < \dfrac{1}{\sqrt{2}}$ ed è negativo per ogni $\dfrac{1}{\sqrt{2}} < x < 1$. Perciò f_1 è crescente in $(0, \dfrac{1}{\sqrt{2}}]$ e decrescente in $\left[\dfrac{1}{\sqrt{2}}, 1\right]$. Il punto $x = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$ è di massimo relativo e $f\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right) = \dfrac{1}{2}(1 - \log 2) > 0$ per cui esiste un punto $0 < \alpha < \frac{1}{\sqrt{2}}$ in cui f_1 si annulla. Infine risulta $\lim_{x \to 1^-} f_1'(x) = -1$.

   Calcolando $f_2'(x)$ troviamo $f_2'(x) = \dfrac{1}{x} + 2x = \dfrac{1 + 2x^2}{x}$ e si ha $f_2'(x) > 0$ per $x \in (1, +\infty)$. Quindi f_2 è crescente in $[1, +\infty)$ e il punto $x = 1$ è punto di minimo relativo per f. Poiché $\lim_{x \to 1^+} f_2'(x) = 3$ il punto $x = 1$ è punto angoloso per f.

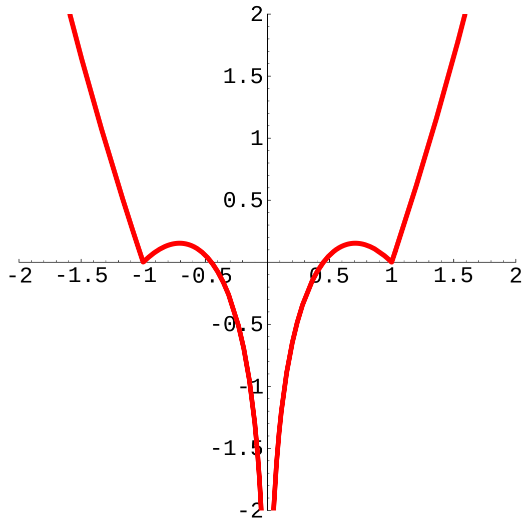


Figura 12: Grafico della funzione f.

- (Derivata seconda e convessità) Infine $f_1''(x) = -\dfrac{1}{x^2} - 2 = -\dfrac{1+2x^2}{x^2} < 0$ per ogni $x \in (0,1)$ perciò f_1 è concava in $(0,1)$.

  Calcolando la derivata seconda di f_2 si ottiene $f_2''(x) = -\dfrac{1}{x^2} + 2 = \dfrac{2x^2-1}{x^2}$ che è positiva in $(1,+\infty)$ pertanto f_2 è convessa in $(1,+\infty)$.

- (Grafico) Tornando alla funzione assegnata f osserviamo che i punti $x = \pm 1$ sono angolosi e di minimo relativo. I punti $x = \pm\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ sono di massimo relativo. La funzione f è crescente in $\left(-1, -\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)$, in $\left(0, \dfrac{1}{\sqrt{2}}\right]$ e in $[1,+\infty)$. La funzione f è decrescente in $(-\infty,-1)$, in $\left[-\dfrac{1}{\sqrt{2}}, 0\right)$ e in $\left[\dfrac{1}{\sqrt{2}}, 1\right]$. La funzione f è convessa in $(-\infty,-1)$ e in $(1,+\infty)$ ed è concava in $(-1,0)$ e in $(0,1)$. La funzione è illimitata superiormente e inferiormente. Il grafico è riportato in Figura 12.

2. Per lo studio del limite si ha:

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x^2+1}{x^2-1}\right)^{x^2} = \lim_{x\to+\infty} \mathrm{e}^{x^2\log\left(\frac{x^2+1}{x^2-1}\right)}.$$

Studiando il limite dell'esponente otteniamo

$$\lim_{x\to+\infty} x^2\log\left(\frac{x^2+1}{x^2-1}\right) = \lim_{x\to+\infty} x^2\log\left(1+\frac{2}{x^2-1}\right)$$
$$= \lim_{x\to+\infty}\frac{2x^2}{x^2-1}\,\frac{x^2-1}{2}\log\left(1+\frac{2}{x^2-1}\right) = 2,$$

avendo usato il limite notevole $\lim\limits_{y\to 0}\dfrac{\log(1+y)}{y} = 1$.

In definitiva il limite cercato vale e^2

3. L'integrale è quasi immediato infatti, poiché $D(\cos x) = -\sin x$ abbiamo:

$$\int \sqrt{\cos x}\,\sin x\,dx = -\int(\cos x)^{1/2}\,(-\sin x)\,dx = -\frac{2}{3}(\cos x)^{3/2} + c\,.$$

In definitiva otteniamo

$$\int_0^{\pi/3}\sqrt{\cos x}\,\sin x\,dx = \left[-\frac{2}{3}(\cos x)^{3/2}\right]_0^{\pi/3} = \frac{2}{3} - \frac{1}{3\sqrt{2}}\,.$$

4. Le funzioni sono definite su tutto $\mathbb{R}$, non negative e pari. La serie converge in 0 e per studiare la convergenza puntuale per $x \neq 0$ usiamo il criterio del rapporto. Risulta:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{x^{2(n+1)}}{n+1}\log\left(1+\frac{x^2}{\sqrt{n+1}}\right)}{\frac{x^{2n}}{n}\log\left(1+\frac{x^2}{\sqrt{n}}\right)} = \lim_{n\to\infty}\frac{x^2 n}{n+1} = x^2\,.$$

Dunque la serie converge puntualmente per $|x| < 1$ e diverge positivamente per $|x| > 1$. Nei punti $x = \pm 1$ la serie diventa

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n}\log\left(1+\frac{1}{\sqrt{n}}\right).$$

Grazie al limite notevole $\lim_{y\to 0} \frac{\log(1+y)}{y} = 1$, si può usare il criterio del confronto asintotico con la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^{3/2}}$, che è una serie armonica generalizzata convergente. Pertanto la serie data converge puntualmente in $[-1,1]$.

Per la convergenza totale si ha, per ogni $n \geq 1$,

$$M_n = \max_{x\in[-1,1]} \frac{x^{2n}}{n} \log\left(1 + \frac{x^2}{\sqrt{n}}\right) = \frac{1}{n} \log\left(1 + \frac{1}{\sqrt{n}}\right)$$

e per quanto già visto risulta $\sum_{n=1}^{+\infty} M_n < +\infty$ pertanto la serie converge totalmente in $[-1,1]$.

12 Compito di Analisi Matematica I (D.M.509) del 7/09/09

1. Tracciare il grafico della funzione così definita

$$f(x) = \frac{x^3 + 2x^2 + x - 8}{x^2 + 2x}.$$

2. Studiare il seguente limite

$$\lim_{x \to +\infty} \left(\frac{x^2 + 1}{x^2 - 1} \right)^x.$$

3. Calcolare il valore del seguente integrale

$$\int_0^{\pi/2} \sqrt{\cos x}\, \sin x \, dx.$$

4. Studiare il carattere della serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n} \log\left(1 + \frac{1}{\sqrt{n}}\right).$$

12.1 Soluzione del compito di Analisi Matematica I del 7/9/09 (DM 509)

1.
- (Dominio e simmetrie) La funzione è definita per ogni $x \neq 0, -2$ pertanto il Dominio è $\mathbb{R} \setminus \{-2, 0\}$ e f è continua nel suo dominio. La funzione non ha simmetrie.

- (Intersezioni con gli assi e segno) Per determinare le radici e il segno del numeratore studiamo il polinomio $p(x) = x^3+2x^2+x-8$. Osserviamo che $p'(x) = 3x^2 + 4x + 1$ le cui radici sono $x_{1/2} = \dfrac{-4 \pm 2}{6}$ ossia $x_1 = -1$ e $x_2 = -\dfrac{1}{3}$. Dunque il polinomio p è crescente in $(-\infty, -1]$ e in $\left[-\dfrac{1}{3}, +\infty\right)$ mentre è decrescente in $\left[-1, -\dfrac{1}{3}\right]$. Poiché $p(-1) = -8$, $p(-1/3) = -220/27$, $p(1) = -4$ e $p(2) = 10$, esiste un punto $1 < \alpha < 2$ tale che $p(x) < 0$ per $x < \alpha$ e $p(x) > 0$ per $x > \alpha$. Tenendo conto che il denominatore è negativo per $-2 < x < 0$ e positivo per $x < -2$ e per $x > 0$ otteniamo che la funzione f è negativa per $x < -2$ e per $0 < x < \alpha$ mentre è positiva per $-2 < x < 0$ e per $x > \alpha$.

- (Asintoti) Si ha $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \pm\infty$ e $\lim_{x\to\pm\infty} \dfrac{f(x)}{x} = 1$, $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) - x = 0$ perciò $y = x$ è asintoto obliquo a sinistra e a destra.
Risulta $\lim_{x\to 0^+} f(x) = -\infty$ e $\lim_{x\to 0^-} f(x) = +\infty$ pertanto $x = 0$ è asintoto verticale.
Analogamente $\lim_{x\to -2^+} f(x) = +\infty$ e $\lim_{x\to -2^-} f(x) = -\infty$ pertanto $x = -2$ è asintoto verticale.

- (Derivata prima e monotonia) Risulta

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1+4\,x+3\,x^2}{2\,x+x^2} - \frac{(2+2\,x)\,(-8+x+2\,x^2+x^3)}{(2\,x+x^2)^2} \\ &= \frac{16+16\,x+3\,x^2+4\,x^3+x^4}{(2\,x+x^2)^2} \qquad \text{(usando Ruffini)} \\ &= \frac{(1+x)\,(4+x)\,(4-x+x^2)}{(2\,x+x^2)^2}. \end{aligned}$$

Il numeratore si annulla per $x = -1$ e per $x = -4$, è positivo per ogni $x < -4$ e per ogni $x > -1$ con $x \neq 0$, ed è negativo per ogni $-4 < x < -1$ con $x \neq -2$. Perciò f è crescente in $(-\infty, -4]$, in $[-1, 0)$ e in $(0, +\infty)$ mentre è decrescente in $[-4, -2)$ e in $(-2, -1]$. Il punto $x = -4$ è di massimo relativo e $f(-4) = -\frac{11}{2}$. Il punto $x = -1$ è di minimo relativo e $f(-1) = 8$.

- (Derivata seconda e convessità) Infine calcolando la derivata seconda a partire dalla prima espressione di f' si ottiene

$$\begin{aligned} f''(x) &= \frac{4 + 6\,x}{2\,x + x^2} - \frac{2\,(2 + 2\,x)\,(1 + 4\,x + 3\,x^2)}{(2\,x + x^2)^2} \\ &\quad + \frac{2\,(2 + 2\,x)^2\,(-8 + x + 2\,x^2 + x^3)}{(2\,x + x^2)^3} - \frac{2\,(-8 + x + 2\,x^2 + x^3)}{(2\,x + x^2)^2} \\ &= \frac{2\,(-32 - 48\,x - 24\,x^2 + x^3)}{(2\,x + x^2)^3}. \end{aligned}$$

Per studiare il segno del numeratore calcoliamone la derivata prima: $6x^2 - 96x - 96$ che si annulla per $x_1 = 4\left(2 - \sqrt{5}\right) < 0$ e per $x_2 = 4\left(2 + \sqrt{5}\right) > 0$. Dunque il numeratore è crescente crescente in $(-\infty, x_1]$ e in $[x_2, +\infty)$ mentre è decrescente in $[x_1, x_2]$. Poiché $x_1 \approx -0.9$ e $x_2 \approx 16.9$, il numeratore vale approssimativamente -8.9 e -2871, esiste $\beta > 17$ tale che il numeratore di f'' è negativo per $x < \beta$ ed è positivo per $x > \beta$. In conclusione, tenendo conto del segno del denominatore di f'', otteniamo che f è convessa in $(-2, 0)$ e in $(\beta, +\infty)$ mentre è concava in $(-\infty, -2)$ e in $(0, \beta)$, perciò β è un punto di flesso. Osserviamo che l'equazione $f(x) = x$ ha la radice $x = 8$, dunque il grafico interseca l'asintoto nel punto $(8, 8)$ e per $x > 8$ rimane al di sopra di esso.

- (Grafico) La funzione è illimitata superiormente e inferiormente. Il grafico è riportato in Figura 13.

2. Per lo studio del limite si ha:

$$\lim_{x \to +\infty} \left(\frac{x^2 + 1}{x^2 - 1}\right)^x = \lim_{x \to +\infty} e^{x \log\left(\frac{x^2+1}{x^2-1}\right)}.$$

Studiando il limite dell'esponente otteniamo

$$\lim_{x \to +\infty} x \log\left(\frac{x^2 + 1}{x^2 - 1}\right) = \lim_{x \to +\infty} x \log\left(1 + \frac{2}{x^2 - 1}\right)$$

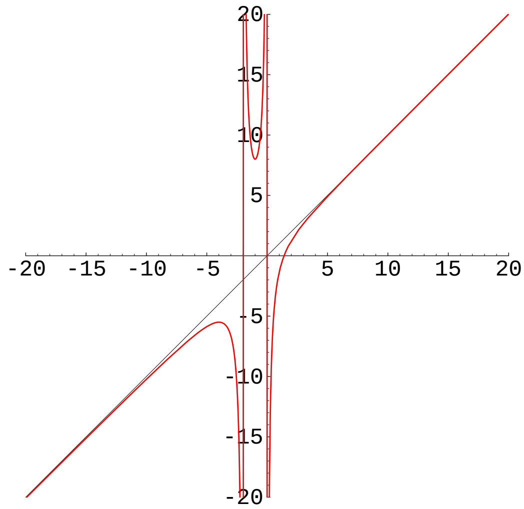


Figura 13: Grafico della funzione f.

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{2x}{x^2-1} \frac{x^2-1}{2} \log\left(1+\frac{2}{x^2-1}\right) = 0,$$

avendo usato il limite notevole $\displaystyle\lim_{y\to 0} \frac{\log(1+y)}{y} = 1$.

In definitiva il limite cercato vale 1.

3. L'integrale è quasi immediato infatti, poiché $D(\cos x) = -\sin x$ abbiamo:

$$\int \sqrt{\cos x}\, \sin x\, dx = -\int (\cos x)^{1/2} (-\sin x)\, dx = -\frac{2}{3}(\cos x)^{3/2} + c\,.$$

In definitiva otteniamo

$$\int_0^{\pi/2} \sqrt{\cos x}\, \sin x\, dx = \left[-\frac{2}{3}(\cos x)^{3/2}\right]_0^{\pi/2} = \frac{2}{3}\,.$$

4. La serie è a termini di segno alterno, ma possiamo studiarne la convergenza assoluta. Usando il limite notevole $\displaystyle\lim_{y\to 0} \frac{\log(1+y)}{y} = 1$, possiamo fare il confronto asintotico della serie data con la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^{3/2}}$, che è

una serie armonica generalizzata convergente. Risulta

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n}\log\left(1+\frac{1}{\sqrt{n}}\right)}{\frac{1}{n^{3/2}}} = 1\,,$$

pertanto la serie data converge assolutamente e quindi anche semplicemente.

UNIVERSITÀ DEL SALENTO
FACOLTÀ DI INGEGNERIA

Angela Albanese

Antonio Leaci

Diego Pallara

Appunti del corso di Analisi Matematica II

ANNO ACCADEMICO 2009-2010

PREFAZIONE

Nel presente fascicolo abbiamo raccolto le nozioni di Analisi Matematica presentate nel corso di Analisi Matematica II del secondo anno di Ingegneria dell'Informazione.

Il poco tempo destinato dai nuovi ordinamenti all'insegnamento della materia non permette alcun approfondimento, ed anzi obbliga ad escludere dai programmi argomenti tradizionalmente ritenuti indispensabili. Sono comunque inseriti alcuni argomenti solitamente trattati in un terzo corso di Analisi Matematica, riguardanti l'Analisi Complessa e le trasformate di Fourier e di Laplace.

Riteniamo però imprescindibile, pur con tale riduzione dei contenuti, conservare intatti l'impianto concettuale e l'impostazione metodologica dell'Analisi, e riteniamo che questo obbiettivo sia conseguibile solo dando enunciati sintetici e precisi, e rifuggendo da espressioni vaghe o poco chiare. Per semplificare un enunciato si può rinunziare alla massima generalità possibile, ma non al rigore della presentazione. Per questa ragione abbiamo ritenuto opportuno, e, speriamo, utile agli studenti, raccogliere in poche pagine le definizioni ed i risultati principali che vengono esposti durante le lezioni. Lo stile degli appunti è volutamente scarno ed avaro di commenti e divagazioni, che restano affidati all'esposizione orale in aula; suggeriamo agli studenti, pertanto, di limitarsi ad appuntare, durante le lezioni, solo le parti meno formali delle lezioni stesse, affidandosi a questa dispensa per gli enunciati che richiedono maggior rigore.

È per altro evidente che questi appunti non hanno la pretesa di sostituire il libro di testo, che resta indispensabile per acquisire una conoscenza dignitosa della materia. La loro funzione è piuttosto, come già detto, quella di sostituire gli appunti di lezione, troppo poco affidabili per tanti motivi, e di indicare il bagaglio *minimo* di conoscenze richieste per affrontare l'esame.

Per i Capitoli da 1 a 5 si segnalano i testi [2], [5], [7], [8], [9] e [11].

Per i Capitoli da 6 a 9 si segnalano i testi [1], [3], [4], [6], [10] e [12].

Osserviamo inoltre l'esistenza di alcuni riferimenti ad argomenti di Analisi Matematica I per cui rimandiamo alle relative dispense.

Infine, ringraziamo il collega Raffaele Vitolo per averci fornito il file di stile LATEX usato per la compilazione delle dispense, e dichiariamo in anticipo la nostra gratitudine a tutti i lettori che ci segnaleranno ogni osservazione utile a migliorare il testo.

INDICE

CAPITOLO 1

LIMITI E CONTINUITÀ IN PIÙ VARIABILI

In questo capitolo iniziamo lo studio delle funzioni dipendenti da piú variabili reali, cioè definite in (sottoinsiemi di) $\mathbb{R}^n$, dove al solito $\mathbb{R}^n = \mathbb{R} \times \cdots \times \mathbb{R}$ (n volte), e discutiamo brevemente le principali proprietà delle funzioni di una variabile a valori in $\mathbb{R}^n$, che approfondiremo nel Capitolo 3. Indicheremo con $x = (x_1, \ldots, x_n)$ il punto generico di $\mathbb{R}^n$, di *coordinate* $x_1, \ldots, x_n$. Nel caso di $\mathbb{R}^2$ o $\mathbb{R}^3$ useremo anche le notazioni (x, y) o (x, y, z). Com'è noto, $\mathbb{R}^n$ è uno spazio vettoriale reale di dimensione n, che supporremo sempre munito della *base canonica* $(e_1, \ldots, e_n)$, dove la j-esima coordinata di e_i è δ_{ij}. Indicheremo con p_i la proiezione sull'asse x_i, cioè la funzione lineare con dominio $\mathbb{R}^n$ ed a valori in $\mathbb{R}$ che associa ad ogni elemento di $\mathbb{R}^n$ la sua i-esima coordinata.

1.1 Topologia di $\mathbb{R}^n$

In questo paragrafo estendiamo al caso di $\mathbb{R}^n$ le nozioni di intorno, aperto, chiuso, ecc., che si sono già viste in $\mathbb{R}$. In questo caso, la discussione è piú articolata perché, mentre in $\mathbb{R}$ abbiamo considerato solo intervalli o unioni di intervalli, ora dobbiamo considerare insiemi di forma geometrica a priori arbitaria.

Su $\mathbb{R}^n$ pensiamo sempre definito il *prodotto scalare euclideo* $x \cdot y = x_1 y_1 + \cdots + x_n y_n$, e la *norma euclidea* indotta $\|x\| = \sqrt{x \cdot x} = \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2}$. La norma, come sempre, induce una *distanza* tra i punti di $\mathbb{R}^n$: per ogni coppia x, y poniamo $d(x, y) = \|x - y\|$. Ricordiamo le seguenti proprietà della norma (analoghe alle proprietà già viste per il valore assoluto), valide per ogni $x, y \in \mathbb{R}^n$ e per ogni $\lambda \in \mathbb{R}$:

1. $\|x\| \geq 0$, $\|x\| = 0 \iff x = 0$,
2. $\|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|$,
3. $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$.

Da queste seguono le analoghe proprietà della distanza, valide per ogni $x, y, z \in \mathbb{R}^n$:

1. $d(x, y) \geq 0, \qquad d(x, y) = 0 \iff x = y$,

2. $d(x, y) = d(y, x)$,

3. $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$ (diseguaglianza triangolare).

Queste proprietà possono essere usate per dare una definizione generale di distanza su un insieme qualunque e sono state segnalate per completezza. In questo corso non seguiremo questa strada, ma faremo sempre ricorso direttamente alla norma.

Definizione 1.1.1 (Intorni sferici) *Sia $x_0 \in \mathbb{R}^n$ e sia $r > 0$. Si dice* intorno sferico aperto*, o anche* palla aperta *di centro x_0 e raggio r l'insieme cosí definito*

$$B_r(x_0) := \{x \in \mathbb{R}^n : \ \|x_0 - x\| < r\}.$$

L'insieme $\bar{B}_r(x_0) := \{x \in \mathbb{R}^n : \ \|x_0 - x\| \leq r\}$ è detto intorno sferico chiuso*, o anche* palla chiusa*, di centro x_0 e raggio r. Si dice* sfera *di centro x_0 e raggio r l'insieme così definito*

$$S_r(x_0) := \{x \in \mathbb{R}^n : \ \|x_0 - x\| = r\}.$$

Notiamo che $\bar{B}_r(x_0) = B_r(x_0) \cup S_r(x_0)$.

Esempio 1.1.2 Sia $n = 1$; per $x_0 \in \mathbb{R}$ e $r > 0$, l'intorno sferico aperto di x_0 e raggio r è l'intervallo $]x_0 - r, x_0 + r[$ già introdotto nella definizione di intorno di $x_0 \in \mathbb{R}$. Per $n = 2$ e $x_0 \in \mathbb{R}^2$, $r > 0$ l'intorno sferico aperto di x_0 e raggio r è il cerchio di centro x_0 e raggio r, esclusi i punti della circonferenza con lo stesso centro e lo stesso raggio.

In generale, si dice che $I \subset \mathbb{R}^n$ è un *intorno di x_0* se esiste $r > 0$ tale che $B_r(x_0) \subset I$.

Osservazione 1.1.3 Notiamo che per ogni coppia di punti $x, y \in \mathbb{R}^n$ con $x \neq y$ esiste $r > 0$ tale che $B_r(x) \cap B_r(y) = \emptyset$ (basta scegliere $r < \|x - y\|/2$).

Definizione 1.1.4 (Punti interni, esterni, di frontiera) *Siano $A \subset \mathbb{R}^n$ e $x_0 \in \mathbb{R}^n$. Si dice che x_0 è un* punto interno *ad A se esiste $r > 0$ tale che $B_r(x_0) \subset A$. Invece, si dice che x_0 è un* punto esterno *ad A se x_0 è un punto interno al complementare di A, che indichiamo con A^c. Infine, si dice che x_0 è un* punto di frontiera *di A se x_0 non è né un punto interno né un punto esterno ad A.*

L'insieme dei punti interni ad A è indicato con $\mathring{A}$; l'insieme dei punti di frontiera di A è indicato con ∂A. Ovviamente, $\partial A = \partial A^c$.

Osservazione 1.1.5 Notiamo che se x_0 è un punto interno ad A, allora $x_0 \in A$, mentre se x_0 è un punto esterno ad A, allora $x_0 \in A^c$. Invece, se x_0 è un punto di frontiera di A, allora x_0 può appartenere indifferentemente ad A oppure ad A^c.

Esempi 1.1.6

(i) Se A è un intervallo di $\mathbb{R}$ di estremi a e b, allora $\mathring{A} =]a, b[$ e $\partial A = \{a, b\}$, indipendentemente dal fatto che a e b appartengano o no ad A.

(ii) Sia $A = \mathbb{R}^n$; allora $\overset{\circ}{\mathbb{R}^n} = \mathbb{R}^n$ e $\partial\mathbb{R}^n = \emptyset$.

(iii) Sia $A = \mathbb{Q}$; allora $\overset{\circ}{\mathbb{Q}} = \emptyset$ e $\partial\mathbb{Q} = \mathbb{R}$.

(iv) Sia $A = B_r(x_0)$ l'intorno sferico di x_0 e raggio r, allora $\overset{\circ}{B}_r(x_0) = B_r(x_0)$ e $\partial B_r(x_0) = S_r(x_0)$. In particolare, $\overset{\circ}{S}_r(x_0) = \emptyset$.

Definizione 1.1.7 (Punti di accumulazione e punti isolati) *Siano $A \subset \mathbb{R}^n$ e $x_0 \in \mathbb{R}^n$. Si dice che x_0 è un* punto di accumulazione *di A se, per ogni $r > 0$, $A \cap B_r(x_0) \setminus \{x_0\} \neq \emptyset$. L'insieme dei punti di accumulazione di un insieme A si chiama* derivato di A *e si indica con $\mathcal{D}(A)$.*

Si dice che x_0 è un punto isolato *di A se esiste $r > 0$ tale che $A \cap B_r(x_0) = \{x_0\}$.*

Osservazione 1.1.8 Se x_0 è un punto di accumulazione di A, allora x_0 può appartenere indifferentemente ad A o ad A^c; invece, se x_0 è un punto isolato di A, si ha necessariamente $x_0 \in A$.

Se x_0 è un punto interno ad A, allora x_0 è anche un punto di accumulazione di A. Ma non vale il viceversa. Infatti a è un punto di accumulazione di $]a, b[$, ma non è interno ad $]a, b[$.

Esempi 1.1.9

1. Se $A = \mathbb{Q}$, allora $\mathcal{D}(\mathbb{Q}) = \mathbb{R}$ e $\mathbb{Q}$ non ha alcun punto isolato.

2. Se $A = \mathbb{N}$, allora $\mathcal{D}(\mathbb{N}) = \emptyset$ e tutti gli elementi di $\mathbb{N}$ sono punti isolati di $\mathbb{N}$.

3. Se $A = B_r(x_0)$ è l'intorno sferico aperto di x_0 e raggio r, allora $\mathcal{D}(B_r(x_0)) = \bar{B}_r(x_0)$ e $B_r(x_0)$ non ha alcun punto isolato.

4. Sia $(a_n)_n$ una successione reale convergente al numero a che assume infiniti valori diversi, e sia $A = \{x = a_n : \ n \in \mathbb{N}\}$ l'insieme dei valori della successione. Allora ogni $a_n \neq a$ è un punto isolato di A e A ha un unico punto di accumulazione: a.

Definizione 1.1.10 (Insiemi aperti e chiusi) *Sia $A \subset \mathbb{R}^n$. Si dice che A è (un insieme)* aperto *se ogni $x \in A$ è un punto interno ad A, cioè se $\overset{\circ}{A} = A$. Si dice, invece, che A è (un insieme)* chiuso *se il suo complementare A^c è (un insieme) aperto.*

Esempi 1.1.11

1. Siano $x_0 \in \mathbb{R}^n$ e $r > 0$. Allora $B_r(x_0)$ è un insieme aperto. Infatti, per ogni $x \in B_r(x_0)$ le palle aperte di centro x e raggio $\varrho < r - \|x - x_0\|$ sono contenute in $B_r(x_0)$:

$$y \in B_\varrho(x) \ \Rightarrow \ \|y - x\| < \varrho \ \Rightarrow \ \|y - x_0\| \leq \|y - x\| + \|x - x_0\| < r \ \Rightarrow \ y \in B_r(x_0)$$

   Invece, ragionando in modo analogo sui complementari, si verifica che $\bar{B}_r(x_0)$ e $S_r(x_0)$ sono insiemi chiusi.

2. $\mathbb{Q}$ non è né chiuso né aperto.
3. $\mathbb{N}$ e $\mathbf{Z}$ sono chiusi.
4. $\mathbb{R}^n$ e $\emptyset$ sono gli unici sottoinsiemi di $\mathbb{R}^n$ aperti e chiusi contemporaneamente.

Vediamo ora le principali proprietà degli aperti e dei chiusi. Data una famiglia $\mathcal{A}$ di insiemi di $\mathbb{R}^n$, usiamo la seguente notazione:

$$\begin{aligned}\bigcup_{A\in\mathcal{A}} A &= \Big\{x \in \mathbb{R}^n : \ \exists\, A \in \mathcal{A} \text{ tale che } x \in A\Big\}\\ \bigcap_{A\in\mathcal{A}} A &= \Big\{x \in \mathbb{R}^n : \ x \in A \ \ \forall\, A \in \mathcal{A}\Big\}.\end{aligned}$$

Proposizione 1.1.12 (Proprietà degli aperti e dei chiusi)

1. *Se $\mathcal{A}$ è una famiglia* qualsiasi *di insiemi aperti di $\mathbb{R}^n$, allora $\cup_{A\in\mathcal{A}}A$ è ancora un insieme aperto. Se $\mathcal{A}$ è una famiglia* finita *di insiemi aperti di $\mathbb{R}^n$, allora $\cap_{A\in\mathcal{A}}A$ è ancora un insieme aperto.*
2. *Se $\mathcal{C}$ è una famiglia* qualsiasi *di insiemi chiusi di $\mathbb{R}^n$, allora $\cap_{C\in\mathcal{C}}C$ è ancora un insieme chiuso. Se $\mathcal{C}$ è una famiglia* finita *di insiemi chiusi di $\mathbb{R}^n$, allora $\cup_{C\in\mathcal{C}}C$ è ancora un insieme chiuso.*

Esempi 1.1.13

1. Gli intervalli $A =]0,1[$ e $B =]2,3[$ sono insiemi aperti di $\mathbb{R}$. Allora $]0,1[\cup]2,3[$ è ancora un insieme aperto di $\mathbb{R}$.
2. Gli insiemi $\mathbb{N}$ e $[0,1]$ sono insiemi chiusi di $\mathbb{R}$. Allora $\mathbb{N}\cup[0,1]$ e $\mathbb{N}\cap[0,1]$ sono insiemi chiusi di $\mathbb{R}$.

Gli insiemi chiusi possono così caratterizzarsi:

Teorema 1.1.14 (Caratterizzazione dei chiusi) *Sia $C \subset \mathbb{R}^n$. Allora: C è chiuso se, e solo se, $\partial C \subset C$ se, e solo se, $\mathcal{D}(C) \subset C$.*

Definizione 1.1.15 (Chiusura, parte interna) *Sia $A \subset \mathbb{R}^n$.*
Si dice chiusura di A *e si indica con $\bar{A}$ l'insieme $A \cup \partial A$.*
Si dice parte interna di A *l'insieme $\mathring{A}$ dei punti interni ad A.*

Osservazione 1.1.16 Osserviamo che $\bar{A}$ è un insieme chiuso, ed anzi è il più piccolo insieme chiuso contenente A. Invece, $\mathring{A}$ è il più grande insieme aperto contenuto in A.

Inoltre, risulta: $\mathring{A} \subset A \subset \bar{A}$; $\bar{A} = A \cup \partial A$; $\partial A = \bar{A} \setminus \mathring{A}$.

Definizione 1.1.17 (Insiemi limitati) *Sia $A \subset \mathbb{R}^n$. Si dice che A è limitato se esiste $r > 0$ tale che $A \subset B_r(0)$, cioè se esiste $r > 0$ tale che $\|x\| \le r$ per ogni $x \in A$.*

Osserviamo che, se A è un sottoinsieme di $\mathbb{R}^n$ limitato, allora, per ogni $i = 1, \dots, n$, $A_i := \{p_i(x) \in \mathbb{R} : \ x \in A\}$ è un insieme limitato di $\mathbb{R}$. Vale anche il viceversa, cioè se A_i è limitato per ogni $i = 1, \dots, n$, allora A è limitato.

Una proprietà degl'intervalli di $\mathbb{R}$ è la *connessione*, che può esprimersi dicendo che $I \subset \mathbb{R}$ è un intervallo se e solo se per ogni coppia di punti $x_1 < x_2 \in I$ l'insieme $\{x : \ x_1 < x < x_2\}$ è contenuto in I. Per generalizzare i risultati dipendenti da tale proprietà al caso di $\mathbb{R}^n$, iniziamo definendo i segmenti e le poligonali in $\mathbb{R}^n$.

Definizione 1.1.18 (Segmenti e poligonali) *Dati $x, y \in \mathbb{R}^n$, si dice* segmento di estremi x ed y *l'insieme*

$$[x, y] = \{ty + (1 - t)x : \ 0 \le t \le 1\} = \{x + t(y - x) : \ 0 \le t \le 1\};$$

dati i punti $x_0, x_1, \dots, x_k$, si dice poligonale di vertici $x_0, x_1, \dots, x_k$ *(nell'ordine), l'unione dei segmenti $[x_{i-1}, x_i]$, per $i = 1, \dots, k$.*

Osserviamo che con gli stessi vertici si possono ottenere poligonali differenti mutandone l'ordine: perciò nella definizione precedente abbiamo sottolineato che la poligonale non è definita solo dai vertici, ma anche dall'ordine in cui vengono assegnati. Usando le poligonali, si può dare una nozione di connessione in $\mathbb{R}^n$.

Definizione 1.1.19 (Insiemi connessi per poligonali) *Un sottoinsieme A di $\mathbb{R}^n$ si dice* connesso per poligonali *se per ogni coppia di punti $x, y \in A$ esiste una poligonale di vertici $x = x_0, x_1, \dots, x_k = y$ tutta contenuta in A.*

Una nozione più generale è quella di insieme connesso.

Definizione 1.1.20 (Insiemi connessi) *Un sottoinsieme E di $\mathbb{R}^n$ si dice* connesso *se non esistono due insiemi aperti A, B con le seguenti proprietà:*

$$A \cap B = \emptyset\,, \quad A \cap E \ne \emptyset\,, \quad B \cap E \ne \emptyset\,, \quad E \subset A \cup B\,.$$

Esempi 1.1.21

1. Se E è connesso per poligonali allora è connesso. Il viceversa in generale non è vero: una circonferenza è connessa ma non è connessa per poligonali. Però se E è aperto allora E è connesso se e solo se è connesso per poligonali.

2. Un insieme $A \subset \mathbb{R}^n$ si dice *convesso* se per ogni coppia di punti $x, y \in A$ il segmento $[x, y]$ è contenuto in A. Ovviamente, ogni insieme convesso è connesso per poligonali. Per esempio, se $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ è convessa allora il suo *sopragrafico* $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \in (a, b), \ y > f(x)\}$ è un insieme convesso di $\mathbb{R}^2$.

3. Un insieme $A \subset \mathbb{R}^n$ si dice *stellato rispetto al punto* $x_0 \in A$ se per ogni punto $x \in A$ il segmento $[x_0, x]$ è contenuto in A. Ogni insieme A che sia stellato rispetto ad un punto è connesso per poligonali: dati $x, y \in A$, la poligonale $[x, x_0] \cup [x_0, y]$ è infatti sempre contenuta in A.

4. Si può dimostrare che ogni aperto $A \subset \mathbb{R}^n$ (se non è connesso per poligonali) si può decomporre in un'unione disgiunta di sottoinsiemi aperti connessi per poligonali. Ciascuno di questi si dice *componente connessa di* A.

1.2 Successioni

Sia $(x_h)_h$ una successione a valori in $\mathbb{R}^n$, cioè con $x_h \in \mathbb{R}^n$ per ogni $h \in \mathbb{N}$. Allora:

Definizione 1.2.1 *Si dice che la successione $(x_h)_h$ è limitata se esiste $r > 0$ tale che*

$$\forall h \in \mathbb{N} \quad \|x_h\| \le r.$$

Definizione 1.2.2 *Si dice che la successione $(x_h)_h$ converge, o è convergente, ad un elemento $x_0 \in \mathbb{R}^n$, e si scrive $\lim\limits_{h\to\infty} x_h = x_0$, se:*

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \nu > 0 \ \textit{tale che} \ \forall h \in \mathbb{N} \quad h > \nu \implies \|x_h - x_0\| < \varepsilon.$$

Definizione 1.2.3 *Si dice che la successione $(x_h)_h$ diverge, o è divergente, e si scrive $\lim\limits_{h\to\infty} \|x_h\| = +\infty$, se:*

$$\forall M > 0 \ \exists \nu > 0 \ \textit{tale che} \ \forall h \in \mathbb{N} \quad h > \nu \implies \|x_h\| > M.$$

Si può dimostrare che (come nel caso delle successioni reali)

Proposizione 1.2.4 *Se $(x_h)_h$ è una successione convergente di $\mathbb{R}^n$, allora $(x_h)_h$ è limitata.*

Proposizione 1.2.5 *Sia $(x_h)_h$ una successione di $\mathbb{R}^n$. Supponiamo che $x_h = (x_h^1, \ldots, x_h^n)$ per ogni $h \in \mathbb{N}$. Sono equivalenti:*

(i) *la successione vettoriale $(x_h)_h$ è convergente ad $x_0 = (x_0^1, x_0^2, \ldots, x_0^n) \in \mathbb{R}^n$*

(ii) *per ogni $i = 1, \ldots, n$ la successione reale $(x_h^i)_h$ converge ad x_0^i.*

Dim. Segue immediatamente dalle disuguaglianze valide per ogni $i = 1, \ldots, n$

$$|x_h^i - x_0^i| \le \|x_h - x_0\| \le \sum_{k=1}^{n} |x_h^k - x_0^k| \, . \qquad \boxed{QED}$$

Osservazione 1.2.6 Dalla proposizione precedente segue subito che, come nel caso delle successioni reali, il limite di una successione convergente è unico.

Esempio 1.2.7

1. Sia $x_h = (\frac{1}{h}, \frac{1+h}{h})$ per ogni $h \in \mathbb{N}$. Poiché $(\frac{1}{h})_h$ e $(\frac{1+h}{h})_h$ convergono a 0 e a 1 rispettivamente, per la Proposizione 1.2.5 possiamo concludere che la successione data converge a $(0,1)$ in $\mathbb{R}^2$.

2. La successione $(x_h)_h = (((-1)^h, \frac{1}{h}))_h$ è limitata, ma non convergente poiché $((-1)^h)_h$ non è una successione regolare in $\mathbb{R}$. Quindi possiamo concludere che anche in $\mathbb{R}^n$ la limitatezza della successione è solo una condizione necessaria, ma non sufficiente per la convergenza.

Come al solito, se $(x_h)_h$ è una successione di $\mathbb{R}^n$ ed $(k_h)_h$ è una successione strettamente crescente di numeri naturali, la successione $(x_{k_h})_h$ si dice successione estratta, o sottosuccessione, di $(x_h)_h$.

Osserviamo che, come nel caso reale, se $(x_h)_h$ è una successione convergente di $\mathbb{R}^n$, il cui limite è x_0, allora ogni successione estratta di $(x_h)_h$ converge allo stesso limite x_0. Ma esistono successioni non convergenti che ammettono estratte convergenti come $(((-1)^h, 1))_h$.

Esempio 1.2.8 Sia $(x_h)_h = ((\frac{1}{h}, 1, h))_h$ e sia $(k_h)_h = (h^2)_h$. Allora $((\frac{1}{h^2}, 1, h^2))_h$ è una successione estratta di $((\frac{1}{h}, 1, h))_h$.

Con le successioni si possono caratterizzare gli insiemi chiusi.

Proposizione 1.2.9 *L'insieme $A \subset \mathbb{R}^n$ è chiuso se e solo se vale la seguente proprietà: se $(x_h)_h$ è una successione convergente di punti di A, detto x il suo limite, risulta che x appartiene ad A.*

Introduciamo ora un'altra classe di insiemi particolarmente importante.

Definizione 1.2.10 (Insiemi compatti) *Sia $K \subset \mathbb{R}^n$. Si dice che K è un insieme compatto di $\mathbb{R}^n$ se da ogni successione a valori in K si può estrarre una sottosuccessione convergente ad un elemento di K.*

Si può dimostrare il seguente Teorema di Heine-Borel.

Teorema 1.2.11 (Compatti di $\mathbb{R}^n$) *Sia $K \subset \mathbb{R}^n$. Allora K è compatto se, e solo se, K è chiuso e limitato.*

Esempio 1.2.12 Sia $K = \bar{B}_r(x_0)$. Allora K è compatto perché è chiuso e limitato. Analogamente, $K = S_r(x_0)$ è compatto perché è chiuso e limitato.

Sia $K = \{x_1, x_2, \dots, x_k\}$ un insieme finito di punti di $\mathbb{R}^n$. Allora K è compatto perché è chiuso e limitato.

1.3 Limiti e continuità delle funzioni

In questo paragrafo iniziamo lo studio sistematico delle funzioni f dipendenti da una variabile vettoriale $x = (x_1, \ldots, x_n)$ appartenente ad un sottoinsieme A di $\mathbb{R}^n$, detto al solito *dominio di* f. Spesso la funzione f sarà definita da un'espressione analitica formulata usando le usuali funzioni elementari. In questo caso, come per le funzioni di una variabile, diciamo *dominio naturale* dell'espressione analitica, o, piú brevemente, della funzione f, il piú grande sottoinsieme di punti x di $\mathbb{R}^n$ in cui tutte le operazioni richieste per il calcolo del valore $f(x)$ si possono eseguire.

Definizione 1.3.1 *Sia $A \subset \mathbb{R}^n$ e sia $x_0 \in \mathbb{R}^n$ un punto di accumulazione di A. Sia $f : A \to \mathbb{R}$ una funzione. Si dice che f tende ad $\ell \in \mathbb{R}$ per x che tende a x_0, e si scrive $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \ell$, se*

$$\forall \varepsilon > 0 \ \ \exists \delta > 0 \ \textit{tale che} \ \forall x \in A, \ 0 < \|x - x_0\| < \delta : \ |f(x) - \ell| < \varepsilon.$$

Si dice che f tende ad $+\infty$ per x che tende a x_0, e si scrive $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = +\infty$, se

$$\forall M > 0 \ \ \exists \delta > 0 \ \textit{tale che} \ \forall x \in A, \ 0 < \|x - x_0\| < \delta : \ f(x) > M.$$

Si dice che f tende ad $-\infty$ per x che tende a x_0, e si scrive $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = -\infty$, se

$$\forall M > 0 \ \ \exists \delta > 0 \ \textit{tale che} \ \forall x \in A, \ 0 < \|x - x_0\| < \delta : \ f(x) < -M.$$

Se A è illimitato, si può definire anche il limite di f all'infinito, ponendo

$$\lim_{\|x\| \to +\infty} f(x) = \ell$$

(con ℓ reale) se per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $R > 0$ tale che per ogni $x \in A$ con $\|x\| > R$ risulta $|f(x) - \ell| < \varepsilon$. Se $\ell = \pm\infty$ si dà l'analoga definizione, con le modifiche ovvie.

Osserviamo che per $n = 1$ la definizione data concorda con quella già nota per le funzioni reali di variabile reale. E in particolare, continuano a valere le stesse proprietà come:

Teorema 1.3.2 (Proprietà dei limiti) *Sia $A \subset \mathbb{R}^n$ e sia $x_0 \in \mathbb{R}^n$ un punto di accumulazione di A. Sia $f : A \to \mathbb{R}$ una funzione tale che esiste $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \ell$. Allora*

1. **[Unicità]** *Il limite è unico.*

2. **[Permanenza del segno]** *Se $\ell > 0$, allora esiste $r > 0$ tale che, per ogni $x \in A \cap B_r(x_0) \setminus \{x_0\}$, $f(x) > 0$.*

3. **[Confronto]** *Se esiste $r > 0$ tale che per ogni $x \in A \cap B_r(x_0) \setminus \{x_0\}$ risulti $f(x) > 0$, allora $\ell \geq 0$.*

4. **[Caratterizzazione dei limiti con successioni]** *Sono equivalenti:*

   (a) $\lim_{x \to x_0} f(x) = \ell$

   (b) $\forall (x_h)_h \subset A \setminus \{x_0\},\ x_h \to x_0 \Rightarrow\ f(x_h) \to \ell.$

Anche per le operazioni sui limiti valgono risultati analoghi a quelli visti per le funzioni di una variabile reale.

Teorema 1.3.3 *Sia $A \subset \mathbb{R}^n$ e sia $x_0 \in \mathbb{R}^n$ un punto di accumulazione di A. Siano $f, g : A \to \mathbb{R}$ due funzioni tali che*

$$\exists \lim_{x \to x_0} f(x) = \ell \in \mathbb{R}, \quad \exists \lim_{x \to x_0} g(x) = m \in \mathbb{R}.$$

Allora

1. $\exists \lim_{x \to x_0} (f(x) \pm g(x)) = \ell \pm m;$

2. $\exists \lim_{x \to x_0} f(x) \cdot g(x) = \ell \cdot m;$

3. $\exists \lim_{x \to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{\ell}{m}$, *purché* $m \neq 0$.

Questi risultati si estendono al caso in cui ℓ o m siano $\pm\infty$, purché le operazioni indicate non diano luogo a forme indeterminate.

Osservazione 1.3.4 Notiamo che l'esistenza del limite nella Definizione 1.3.1 è una condizione più forte dell'esistenza dei limiti delle restrizioni di f anche a *tutte* le rette passanti per x_0. In altri termini, se $\lim_{x \to x_0} f(x) = \ell$ allora per ogni $v \in \mathbb{R}^n$, $v \neq 0$ fissato, risulta $\lim_{t \to 0} f(x_0 + tv) = \ell$. Viceversa, può accadere che $\lim_{t \to 0} f(x_0 + tv) = \ell$ *per ogni* $v \neq 0$, ma non esiste $\lim_{x \to x_0} f(x)$. Per esempio, sia $n = 2$ e $f(x, y) = \dfrac{x^2 y}{x^4 + y^2}$. Allora, fissato $v = (v_1, v_2) \neq (0, 0)$ risulta:

$$\lim_{t \to 0} f(tv_1, tv_2) = \lim_{t \to 0} \frac{t^3 v_1^2 v_2}{t^4 v_1^4 + t^2 v_2^2} = 0,$$

per ogni v, mentre $\lim_{x \to 0} f(x)$ non esiste. Infatti, considerando la restrizione di f alla *curva* di equazione $y = x^2$, cioè ponendo $y = x^2$, si ha che il

$$\lim_{x \to 0} f(x, x^2) = \lim_{x \to 0} \frac{x^4}{2x^4} = \frac{1}{2},$$

e quindi $\lim_{(x,y) \to (0,0)} f(x, y)$ non esiste.

Definiamo ora le funzioni continue in più variabili reali.

Definizione 1.3.5 *Sia $A \subset \mathbb{R}^n$. Sia $f : A \to \mathbb{R}$ una funzione e sia $x_0 \in A$. Si dice che f è continua in x_0 se x_0 è un punto isolato di A oppure*

$$\exists \lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0),$$

o equivalentemente, se

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \textit{tale che}\ \forall x \in A,\ \|x - x_0\| < \delta :\ |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon.$$

Inoltre, si dice che f è continua in A se essa è continua in ogni punto di A.

Osservazione 1.3.6 È immediato dare le definizioni di limite e continuità per funzioni a valori vettoriali. Se $f : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$ ed x_0 è di accumulazione per A allora

$$\begin{aligned}&\lim_{x \to x_0} f(x) = \ell \in \mathbb{R}^k \quad \Longleftrightarrow \\ &\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \text{ tale che } \forall x \in A,\ 0 < \|x - x_0\| < \delta :\ \|f(x) - \ell\| < \varepsilon,\end{aligned}$$

dove $\|\cdot\|$ indica la norma euclidea sia in $\mathbb{R}^n$ che in $\mathbb{R}^k$. Ovviamente, se $x_0 \in A$ allora f è continua in x_0 se

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0).$$

Come per le successioni vale che

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \ell = (\ell_1, \ldots, \ell_k) \in \mathbb{R}^k \quad \Longleftrightarrow \quad \lim_{x \to x_0} f_i(x) = \ell_i \quad \forall\, i = 1, \ldots, k,$$

doeve f_i sono le componenti di f.

Vale il seguente Teorema.

Teorema 1.3.7 (Continuità della funzione composta) *Siano $A \subset \mathbb{R}^n$, $B \subset \mathbb{R}^k$ e siano $f : A \to B$ continua in $x_0 \in A$, $g : B \to \mathbb{R}^p$ continua in $y_0 = f(x_0)$. Allora, la funzione composta $h = g \circ f : A \to \mathbb{R}^p$ è continua in x_0 .*

La definizione di funzione continua in A è stata data in modo puntuale, cioè sulla base del comportamento della funzione nei singoli punti; si può dare una utile caratterizzazione della continuità in A in termini globali come segue.

Proposizione 1.3.8 *Sia $A \subset \mathbb{R}^n$ ed $f : A \to \mathbb{R}^k$. Se A è aperto, f è continua in A se e solo se $f^{-1}(B)$ è un aperto di $\mathbb{R}^n$ per ogni aperto B di $\mathbb{R}^k$; se A è chiuso, f è continua in A se e solo se $f^{-1}(C)$ è un chiuso di $\mathbb{R}^n$ per ogni chiuso C di $\mathbb{R}^k$. In particolare, se $A = \mathbb{R}^n$ allora entrambe le caratterizzazioni della continuità sono valide.*

Per il Teorema 1.3.3 possiamo affermare che somme e prodotti di funzioni continue sono ancora funzioni continue.

Riformuliamo ora alcuni concetti già esposti nel corso di Analisi Matematica I.

Definizione 1.3.9 *Sia $A \subset \mathbb{R}^n$ e sia $f : A \to \mathbb{R}$ una funzione. Si dice che f è limitata superiormente in A se esiste $L \in \mathbb{R}$ tale che $f(x) \leq L$ per ogni $x \in A$ (in tal caso, L è detto maggiorante di f in A). Si dice che f è limitata inferiormente in A se esiste $H \in \mathbb{R}$ tale che $f(x) \geq H$ per ogni $x \in A$ (in tal caso, H è detto minorante di f in A). Infine f si dice limitata in A se esistono L, $H \in \mathbb{R}$ tali che $H \leq f(x) \leq L$ per ogni $x \in A$, o equivalentemente, esiste $M > 0$ tale che $|f(x)| \leq M$ per ogni $x \in A$.*

In analogia al caso delle funzioni reali di variabile reale, se f è limitata superiormente in A, si definisce estremo superiore di f in A, e si indica con $\sup\limits_{x \in A} f(x)$ o con $\sup_A f$, il minimo dei maggioranti di f in A. In particolare, risulta:

$$\sup_A f = \sup\{f(x) : \ x \in A\}.$$

Se f è limitata inferiormente, si definisce estremo inferiore di f in A, e si indica con $\inf\limits_{x \in A} f(x)$ o con $\inf_A f$, il massimo dei minoranti di f in A. In particolare, risulta:

$$\inf_A f = \inf\{f(x) : \ x \in A\}.$$

Definizione 1.3.10 *Sia f una funzione definita in $A \subset \mathbb{R}^n$ e ivi limitata superiormente. Se esiste $x_1 \in A$ tale che $f(x_1) = \sup_A f$, e quindi $f(x) \leq f(x_1)$ per ogni $x \in A$, si dice che $f(x_1)$ è il* massimo *di f in A, o che f è dotata di massimo in A, e si scrive* $\max_A f = f(x_1)$. *Il punto x_1 si dice* punto di massimo *per f in A.*

Sia f limitata inferiormente in A. Se esiste $x_2 \in A$ tale che $f(x_2) = \inf_A f$, e quindi $f(x) \geq f(x_2)$ per ogni $x \in A$, si dice che $f(x_2)$ è il minimo *di f in A, o che f è dotata di minimo in A, e si scrive* $\min_A f = f(x_2)$. *Il punto x_2 si dice* punto di minimo *per f in A.*

Con una dimostrazione molto simile al caso delle funzioni di una variabile, risulta che:

Teorema 1.3.11 (Weierstrass) *Sia K un sottoinsieme compatto di $\mathbb{R}^n$ e sia f una funzione definita e continua in K. Allora f è dotata di massimo e di minimo in K.*

Il seguente risultato estende al caso di funzioni di piú variabili il Teorema dei valori intermedi.

Teorema 1.3.12 (dei valori intermedi) *Se $A \subset \mathbb{R}^n$ è connesso ed $f : A \to \mathbb{R}$ è continua in A, allora $f(A)$ è un intervallo, cioè, per ogni numero reale y compreso tra* $\inf_A f$ *e* $\sup_A f$ *esiste $x \in A$ tale che $f(x) = y$.*

Si può dare come nel caso di una variabile una nozione più forte di continuità.

Definizione 1.3.13 (Uniforme continuità) *Sia* $A \subset \mathbb{R}^n$ *ed* $f : A \to \mathbb{R}$*; si dice che* f *è* uniformemente continua in A *se per ogni* $\varepsilon > 0$ *esiste* $\delta > 0$ *tale che* $x, y \in A$, $\|x - y\| < \delta$ *implica* $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$.

Ovviamente, ogni funzione uniformemente continua è continua. Viceversa la funzione definita in $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ da $f(x,y) = \dfrac{1}{x^2 + y^2}$ è continua ma non è uniformemente continua.

Vale anche per le funzioni di più variabili il seguente risultato.

Teorema 1.3.14 (Heine-Cantor) *Sia* $K \subset \mathbb{R}^n$ *un insieme compatto, ed* $f : K \to \mathbb{R}$ *continua in* K*; allora* f *è uniformemente continua in* K.

Un caso di funzioni uniformemente continue particolarmente interessanti è costituito dalle funzioni Lipschitziane.

Definizione 1.3.15 (Funzione Lipschitziana) *Sia* $A \subset \mathbb{R}^n$ *ed* $f : A \to \mathbb{R}$*; si dice che* f *è* Lipschitziana in A *se esiste* $L > 0$ *tale che* $\forall\, x, y \in A$, $|f(x) - f(y)| \le L\|x - y\|$.

Esempio 1.3.16 La norma è una funzione Lipschitziana in $\mathbb{R}^n$ con costante $L = 1$ infatti (come nel caso del valore assoluto) vale la disuguaglianza

$$\big|\, \|x\| - \|y\| \,\big| \le \|x - y\|\,, \qquad \forall x, y \in \mathbb{R}^n\,.$$

1.4 Funzioni vettoriali di una variabile

Se φ è una funzione definita in un intervallo $(a,b) \subset \mathbb{R}$ a valori in $\mathbb{R}^n$, possiamo esprimerla attraverso le sue componenti $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$, che sono funzioni reali. In analogia alla definizione di limite di una successione in $\mathbb{R}^n$, la funzione φ è continua in $t_0 \in (a,b)$ se $\varphi(t) \to \varphi(t_0)$ per $t \to t_0$, cioè, equivalentemente, se le componenti φ_i di φ sono continue in t_0. Inoltre, allo stesso modo, diciamo che φ è derivabile in t_0 se esiste il limite

$$\lim_{t \to t_0} \frac{\varphi(t) - \varphi(t_0)}{t - t_0},$$

che si denoterà $\varphi'(t_0)$. Come prima, questo equivale a richiedere che le componenti φ_i siano derivabili in t_0; in tal caso, risulta $\varphi'(t_0) = (\varphi_1'(t_0), \ldots, \varphi_n'(t_0))$. Il discorso si può naturalmente estendere alle derivate di ordine superiore. Analogamente, diciamo che φ è integrabile in (a,b) se le sue componenti lo sono, e poniamo

$$\int_a^b \varphi(t)dt = \Big(\int_a^b \varphi_1(t)dt, \ldots, \int_a^b \varphi_n(t)dt\Big).$$

Osserviamo che tanto $\varphi'(t_0)$ quanto $\int_a^b \varphi(t)dt$, quando esistono, sono vettori di $\mathbb{R}^n$, cosí come i valori di φ, e che vale la diseguaglianza:

$$\left\| \int_a^b \varphi(t)\, dt \right\| \leq \int_a^b \|\varphi(t)\|\, dt.$$

Inoltre, ragionando componente per componente, si ricava la seguente formulazione vettoriale del Teorema fondamentale del calcolo integrale per le funzioni vettoriali.

Teorema 1.4.1 *Se $\varphi : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ è continua, allora la funzione*

$$\psi(t) = \int_a^t \varphi(s)\, ds, \qquad t \in [a,b],$$

è derivabile in $[a,b]$, e risulta $\psi'(t) = \varphi(t)$ per ogni $t \in [a,b]$.

Osservazione 1.4.2 Concludiamo questo paragrafo segnalando che è possibile considerare successioni (u_k) e serie di funzioni $\sum_k u_k$ a valori vettoriali, cioè con $u_k : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$. Valgono tutte le considerazioni presentate nel corso di Analisi Matematica I, sia per quanto riguarda la terminologia e le definizioni, che per quanto riguarda i risultati. Le uniche varianti, per altro puramente formali, sono le seguenti: nella definizione di convergenza assoluta di una serie di funzioni, la serie $\sum_k |u_k(x)|$ va sostituita con la serie $\sum_k \|u_k(x)\|$, e nel criterio di Weierstrass la condizione $|u_k(x)| \leq M_k \ \forall x \in I$ va sostituita con la $\|u_k(x)\| \leq M_k \ \forall x \in I$.

CAPITOLO 2

CALCOLO DIFFERENZIALE IN PIÙ VARIABILI

In questo capitolo estendiamo al caso di funzioni definite in sottoinsiemi di $\mathbb{R}^n$, per $n \geq 2$, le nozioni ed i metodi del calcolo differenziale visti nel corso di Analisi Matematica I per le funzioni di una sola variabile reale. Incontreremo, oltre a complicazioni tecniche, problemi e fenomeni nuovi che richiederanno l'introduzione di nuove idee e strumenti. Discutiamo prima il caso di funzioni a valori reali, poi quello di funzioni a valori vettoriali.

2.1 Derivate parziali e differenziabilità

La prima nozione che vogliamo estendere al caso di funzioni di piú variabli reali è quella di derivata. Iniziamo dalla nozione di derivata direzionale, che è certamente l'estensione piú spontanea della definizione di derivata al caso n-dimensionale. Purtroppo, con questa sola definizione, neanche le prime proprietà delle funzioni derivabili di una sola variabile reale si estendono al caso n-dimensionale.

Definizione 2.1.1 (Derivata direzionale) *Sia $A \subset \mathbb{R}^n$ aperto, $f : A \to \mathbb{R}$, $x_0 \in A$ e $v \in \mathbb{R}^n$ tale che $\|v\| = 1$. Diciamo che f ammette* derivata direzionale in x_0 lungo la direzione v *se esiste finito il limite*

$$\lim_{t \to 0} \frac{f(x_0 + tv) - f(x_0)}{t}. \tag{2.1.1}$$

Se tale limite esiste si denota $\dfrac{\partial f}{\partial v}(x_0)$ o $D_v f(x_0)$. Le derivate direzionali di f in x_0 rispetto alle direzioni e_i, $i = 1, \dots, n$, degli assi coordinati si dicono derivate parziali di f in x_0 *e si denotano (quando esistono) in uno dei modi seguenti:*

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(x_0), \qquad D_i f(x_0), \qquad D_{x_i} f(x_0).$$

Esempio 2.1.2 L'esistenza delle derivate direzionali di f in x_0, anche lungo *tutte le direzioni* v non assicura la continuità di f in x_0. Consideriamo infatti la funzione $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ data da

$$f(x,y) = \begin{cases} 0 & \text{se } y \geq x^2 \text{ o } y \leq 0, \\ 1 & \text{se } 0 < y < x^2; \end{cases}$$

f ammette tutte le derivate direzionali in $(0,0)$, esse valgono 0, ma ovviamente f non è continua nell'origine.

Si vede dalla definizione che la condizione di esistenza delle derivate direzionali in x_0 si può formalizzare cosí:

$$\forall \|v\| = 1,\ \forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \text{ tale che } |t| < \delta \quad \Longrightarrow \quad \frac{|f(x_0 + tv) - f(x_0)|}{|t|} < \varepsilon,$$

dove evidentemente δ dipende sia da ε che da v. Se si analizza in dettaglio l'esempio precedente, si vede che , per $\varepsilon > 0$ fissato, $\delta \to 0$ quando il versore v tende al versore $e_1 = (1,0)$.

Per ottenere una procedura di derivazione che assicuri proprietà piú forti alle funzioni derivabili introduciamo la seguente definizione.

Definizione 2.1.3 (Differenziabilità) *Sia $A \subset \mathbb{R}^n$ aperto, $f : A \to \mathbb{R}$, $x_0 \in A$. Diciamo che f è* differenziabile *in x_0 se esiste un'applicazione* lineare *$L : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ tale che*

$$\lim_{\|h\| \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0) - L(h)}{\|h\|} = 0\,, \tag{2.1.2}$$

o equivalentemente

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0) - L(x - x_0)}{\|x - x_0\|} = 0.$$

Se f è differenziabile in x_0 allora l'applicazione L si dice differenziale di f in x_0 *e si indica con* $\mathrm{d}f_{x_0}$.

Osservazione 2.1.4 (Proprietà delle funzioni differenziabili)

1. Possiamo esplicitare la richiesta nella definizione precedente come abbiamo fatto per le derivate direzionali per confrontare le due nozioni; otteniamo che deve esistere un'applicazione lineare L tale che:

$$\forall \varepsilon > 0\, \exists \delta > 0 \text{ tale che } |t| < \delta \quad \Longrightarrow \quad \frac{|f(x_0 + tv) - f(x_0) - tL(v)|}{|t|} < \varepsilon \quad \forall \|v\| = 1,$$

dove stavolta si vede che δ dipende da ε ma può essere scelto indipendente dalla direzione v.

2. Se una funzione f è differenziabile in x_0 allora il suo differenziale è unico. Infatti, se per assurdo ce ne fossero due distinti, chiamiamoli L ed L', esisterebbe un $v \neq 0$, che possiamo supporre di norma unitaria, tale che $L(v) \neq L'(v)$, cosí che si avrebbe

$$\begin{aligned} 0 \quad \neq \quad & L'(v) - L(v) = \lim_{t \to 0} \frac{L'(tv) - L(tv)}{t} \\ = \quad & \lim_{t \to 0} \frac{f(x_0 + tv) - f(x_0) - L(tv)}{t} - \frac{f(x_0 + tv) - f(x_0) - L'(tv)}{t} = 0. \end{aligned}$$

3. La differenziabilità di f in x_0 implica la continuità di f nello stesso punto; infatti, la relazione (2.1.2) si può scrivere
$$f(x_0+h)-f(x_0)=L(h)+o(\|h\|),$$
da cui segue che $f(x_0+h)-f(x_0)\to 0$ per $h\to 0$.

4. La differenziabilità di f in x_0 implica l'esistenza di tutte le derivate direzionali di f nello stesso punto, ed anche l'eguaglianza $\dfrac{\partial f}{\partial v}(x_0)=L(v)$ da cui segue la linearità dell'applicazione $v\mapsto \dfrac{\partial f}{\partial v}(x_0)$. Infatti,
$$\lim_{t\to 0}\left|\frac{f(x_0+tv)-f(x_0)}{t}-L(v)\right|=\lim_{t\to 0}\frac{|f(x_0+tv)-f(x_0)-L(tv)|}{\|tv\|}=0.$$

5. Come si è visto nel corso di Geometria ed algebra, all'applicazione lineare L della Definizione 2.1.3 è univocamente associato un vettore $\nabla f(x_0)$ di $\mathbb{R}^n$ in modo tale che $L(v)=\nabla f(x_0)\cdot v$, sicché si ha la formula
$$\frac{\partial f}{\partial v}(x_0)=\nabla f(x_0)\cdot v=\sum_{i=1}^n v_i\Big(\nabla f(x_0)\Big)_i$$
per ogni vettore $v\in\mathbb{R}^n$. Scegliendo $v=e_i$ segue che le componenti di $\nabla f(x_0)$ sono le derivate parziali di f in x_0, cioè:
$$\nabla f(x_0)=\big(D_1f(x_0),\dots,D_nf(x_0)\big).$$

Definizione 2.1.5 *Il vettore $\nabla f(x_0)$ associato all'applicazione lineare L nella Definizione 2.1.3 si dice* gradiente di f in x_0.

Se f ammette derivate parziali in tutto un insieme aperto, per esempio A stesso, ci si può domandare se, al variare del punto x in A, le derivate parziali siano continue. Si dice che f è *di classe* $C^1(A)$ se ciò accade per tutte le derivate parziali prime $D_1f,\dots,D_nf$ in A. Vale allora il seguente importante risultato, che è il principale strumento per verificare la differenziabilità di una funzione.

Teorema 2.1.6 (Teorema del differenziale) *Sia A un aperto di $\mathbb{R}^n$, sia $x_0\in A$, e sia $f:A\to\mathbb{R}$; se le derivate parziali di f esistono in un intorno di x_0 e sono continue in x_0 allora f è differenziabile in x_0. Inoltre, se f è di classe $C^1(A)$ allora è differenziabile in tutti i punti di A.*

Dim. Supponiamo per semplicità di notazione $n=2$, e denotiamo le variabili con (x,y) e gli incrementi con (h,k). Allora, la relazione da provare è:
$$\lim_{\sqrt{h^2+k^2}\to 0}\frac{f(x_0+h,y_0+k)-f(x_0,y_0)-[D_xf(x_0,y_0)h+D_yf(x_0,y_0)k]}{\sqrt{h^2+k^2}}=0.$$

Scrivendo

$$f(x_0+h,y_0+k)-f(x_0,y_0)=[f(x_0+h,y_0+k)-f(x_0,y_0+k)]+[f(x_0,y_0+k)-f(x_0,y_0)],$$

si puo applicare il teorema di Lagrange alle funzioni di una variabile

$$x \mapsto f(x, y_0+k), \qquad y \mapsto f(x_0, y),$$

(definite rispettivamente negli intervalli di estremi x_0, x_0+h ed y_0, y_0+k), ottenendo

$$\begin{aligned} f(x_0+h,y_0+k)-f(x_0,y_0+k)&=D_xf(\xi,y_0+k)h,\\ f(x_0,y_0+k)-f(x_0,y_0)&=D_yf(x_0,\eta)k, \end{aligned}$$

dove ξ ed η sono due opportuni punti dei suddetti intervalli. Ne segue

$$\begin{aligned} &\Big|\frac{f(x_0+h,y_0+k)-f(x_0,y_0)-[D_xf(x_0,y_0)h+D_yf(x_0,y_0)k]}{\sqrt{h^2+k^2}}\Big|\\ &=\Big|\frac{[D_xf(\xi,y_0+k)h+D_yf(x_0,\eta)k]-[D_xf(x_0,y_0)h+D_yf(x_0,y_0)k]}{\sqrt{h^2+k^2}}\Big|\\ &\le\Big|[D_xf(\xi,y_0+k)-D_xf(x_0,y_0)]\frac{h}{\sqrt{h^2+k^2}}\Big|+\Big|[D_yf(x_0,\eta)-D_yf(x_0,y_0)]\frac{k}{\sqrt{h^2+k^2}}\Big| \end{aligned}$$

e il limite è nullo perché, per $(h,k)\to(0,0)$, ξ tende ad x_0, η tende a y_0, i rapporti $\dfrac{h}{\sqrt{h^2+k^2}}$ e $\dfrac{k}{\sqrt{h^2+k^2}}$ sono compresi tra -1 e 1, e i termini in parentesi quadre tendono a zero per la continuità delle derivate prime di f in (x_0,y_0). QED

Una volta chiarito che il calcolo del differenziale di una funzione si riconduce al calcolo delle sue derivate parziali, poiché le derivate parziali sono sostanzialmente derivate di funzioni di una sola variabile reale, è evidente che vale il seguente risultato.

Proposizione 2.1.7 *Somme, prodotti, quozienti (dove il denominatore non si annulla) di funzioni differenziabili sono differenziabili, e le derivate parziali seguono le regole di derivazione delle derivate delle funzioni di una variabile reale:*

1. $D_i(\alpha f+\beta g)=\alpha D_if+\beta D_ig \quad \forall\,\alpha,\beta\in\mathbb{R},\ i=1,\dots,n;$
2. $D_i(fg)=fD_ig+gD_if;$
3. $D_i\Big(\dfrac{f}{g}\Big)=\dfrac{gD_if-fD_ig}{g^2}.$

Esempio 2.1.8 Il calcolo delle derivate parziali è molto semplice, infatti basta trattare le altre variabili come costanti e derivare la funzione solo rispetto alla variabile considerata. Ad esempio, se $f(x,y)=x\cos(xy)$ allora $D_xf=\cos(xy)-xy\sin(xy)$ e $D_yf=-x^2\sin(xy)$.

È un po' più delicato il discorso relativo alla derivazione della composizione di due funzioni, che affronteremo in due passi. Un primo risultato che estende una formula già vista nel caso delle funzioni di una variabile è il seguente.

Teorema 2.1.9 (Differenziale della funzione composta) *Siano $I \subset \mathbb{R}$ un intervallo, $A \subset \mathbb{R}^n$ aperto, e siano $\varphi : I \to A$ derivabile in I, $f : A \to \mathbb{R}$ di classe $C^1(A)$. Allora, la funzione composta $g = f \circ \varphi : I \to \mathbb{R}$ è derivabile, e per ogni $t \in I$ risulta:*

$$g'(t) = \nabla f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t) = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_j}(\varphi(t))\varphi_j'(t),$$

dove $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ sono le componenti di φ.

Come nel caso di una variabile, si ha la seguente conseguenza.

Teorema 2.1.10 *Se f ammette derivate parziali in A, con $A \subset \mathbb{R}^n$ aperto connesso per poligonali, e $\nabla f(x) = 0$ per ogni $x \in A$, allora f è costante in A.*

Dim. Dati $x, y \in A$, basta provare che $f(x) = f(y)$. Per l'arbitrarietà di x, y la funzione f risulterà costante. Per ipotesi, esiste una poligonale P di vertici $x = x_0,\ x_1, \dots, x_k = y$ tutta contenuta in A. Per i fissato tra 1 e k, consideriamo la funzione $g(t) = f(x_{i-1} + t(x_i - x_{i-1}))$. Dal Teorema 2.1.9 segue $g'(t) = \nabla f(x_{i-1} + t(x_i - x_{i-1})) \cdot (x_i - x_{i-1}) = 0$ e quindi $f(x_{i-1}) = g(0) = g(1) = f(x_i)$. Applicando questo argomento per ogni i si ricava che f è costante su P ed in particolare $f(x) = f(y)$. QED

Nel corso di Analisi Matematica I si è visto come si possa dedurre l'andamento del grafico di una funzione derivabile studiandone le derivate, quando $n = 1$, caso in cui il grafico è una curva nel piano. Per $n = 2$ il grafico di una funzione reale è una superficie, e questo rende ovviamente piú complicato lo studio (e il disegno!). Per $n \geq 3$ il disegno del grafico diventa impossibile, e ci si deve accontentare di informazioni analitiche o di illustrazioni che non riproducono il grafico interamente, ma rappresentano solo alcune delle sue proprietà geometriche. Ci limitiamo ad una discussione del caso $n = 2$, riservandoci di segnalare alla fine qualche estensione al caso generale.

Sia $f : A \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ di classe C^1, sia $x_0 \in A$, e, fissato $v \in \mathbb{R}^2$ con $\|v\| = 1$, consideriamo la retta r in $\mathbb{R}^2$ passante per x_0 di direzione v, descritta parametricamente dall'equazione $x = x_0 + tv$, per $t \in \mathbb{R}$. Possiamo allora considerare la restrizione di f all'insieme $r \cap A \subset \mathbb{R}$. In particolare, possiamo considerare la funzione $f_v(t) = f(x_0 + tv)$ per t in un opportuno intorno dell'origine $I_v \subset \mathbb{R}$. Identificando ogni punto t di I_v con il punto $x = x_0 + tv$, il suo grafico

$$G(f_v) = \{(t, y) \in \mathbb{R}^2 :\ y = f_v(t),\ t \in I_v\},$$

è la curva intersezione del grafico di f

$$G(f) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^3 :\ y = f(x),\ x \in A\} \tag{2.1.3}$$

con il piano verticale che interseca il piano (x_1, x_2) nella retta r. Siccome $f_v \in C^1(I_v)$, possiamo scrivere l'equazione della retta tangente al suo grafico nel punto di coordinate $t = 0, y = f_v(0) = f(x_0)$ usando il teorema della derivazione della funzione composta, e otteniamo la formula

$$y = f_v(0) + f_v'(0)t = f(x_0) + \frac{\partial f}{\partial v}(x_0)t = f(x_0) + \sum_{i=1}^{2} \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_0)v_i t.$$

Questa retta si dice *retta tangente al grafico di f nella direzione v*. Teniamo ora fisso il punto x_0 e lasciamo variare v: questo equivale, nella formula precedente, a considerare due parametri indipendenti $v_1 t$ e $v_2 t$. È naturale chiamarli u, v, ottenendo l'equazione parametrica di un piano, che chiamiamo *piano tangente al grafico di f*:

$$y = f(x_0) + \frac{\partial f}{\partial x_1}(x_0)u + \frac{\partial f}{\partial x_2}(x_0)v = f(x_0) + \nabla f(x_0) \cdot (u, v).$$

Eliminando i parametri $u = x_1 - x_{01}, v = x_2 - x_{02}$ si perviene all'equazione cartesiana

$$\boxed{\frac{\partial f}{\partial x_1}(x_0)(x_1 - x_{01}) + \frac{\partial f}{\partial x_2}(x_0)(x_2 - x_{02}) - y + f(x_0) = 0\,,}$$

ove si riconoscono i *coefficienti di giacitura*, determinati come sempre a meno del segno, $-D_1 f(x_0), -D_2 f(x_0), 1$. Il vettore $(-D_1 f(x_0), -D_2 f(x_0), 1)$ è quindi perpendicolare al piano tangente.

A questo punto, è facile generalizzare tutto il discorso al caso di un numero arbitrario di variabili indipendenti. Se $A \subset \mathbb{R}^n$ ed $f : A \to \mathbb{R}$, introducendo coordinate cartesiane $(x_1, \ldots, x_n, y)$ in $\mathbb{R}^{n+1}$, la (2.1.3) definisce ancora il grafico di f (con $\mathbb{R}^{n+1}$ al posto di $\mathbb{R}^3$). Se f è di classe C^1 in A, e x_0 è un punto di A, diciamo ancora *piano tangente al grafico di f* il sottospazio affine n-dimensionale di $\mathbb{R}^{n+1}$ di equazione cartesiana

$$\boxed{y = f(x_0) + \nabla f(x_0) \cdot (x - x_0),} \qquad x \in \mathbb{R}^n.$$

Il versore

$$\nu = \frac{(-\nabla f(x_0), 1)}{\sqrt{1 + \|\nabla f(x_0)\|^2}}$$

è perpendicolare al piano tangente, ed è scelto in modo da avere componente positiva lungo l'asse verticale y.

Esempio 2.1.11 Consideriamo la funzione di due variabili $f(x, y) = x^2 + y^2$. Essa è differenziabile in $\mathbb{R}^2$ e il suo gradiente è $\nabla f(x, y) = (2x, 2y)$. Il piano tangente al grafico di f nel punto $(1, 1, 2)$ è dato da $z = 2(x - 1) + 2(y - 1) + 2 = 2x + 2y - 2$. I due grafici sono rappresentati in Figura – 2.1.

Un'altra nozione utile a descrivere l'andamento di una funzione è quella di *insieme di livello*. Data al solito $f : A \to \mathbb{R}$, e dato $c \in \mathbb{R}$, si dice *insieme di livello c di f* l'insieme

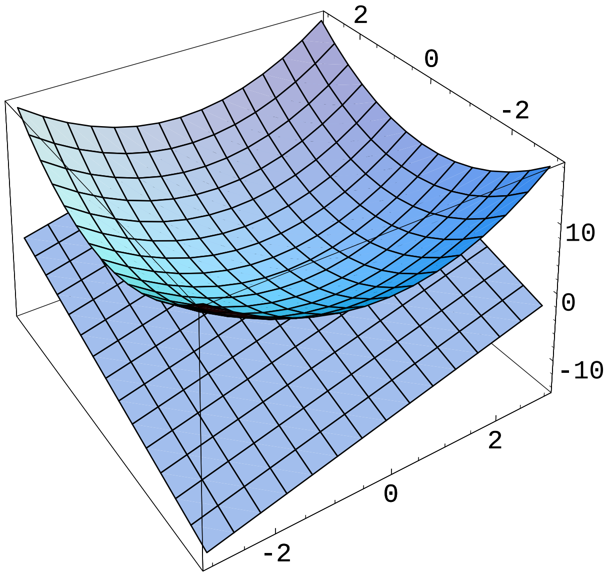


Figura – 2.1: Piano tangente al grafico.

$E_c = \{x \in A : \ f(x) = c\}$. Se $n = 2$ si parla di *curva di livello* e, se $n = 3$ di *superficie di livello*. Intuitivamente, questa terminologia è giustificata dal fatto che l'insieme ove f è costante ci si aspetta sia "sottile" rispetto all'ambiente. In Fisica si parla anche di *superficie equipotenziali*, perché, se f è un campo scalare che esprime il potenziale associato ad un'interazione (per esempio, gravitazionale od elettrica), gli insiemi di livello sono quelli su cui il potenziale è costante. In tal caso, il gradiente di f esprime il *campo di forze* indotto dal potenziale, ed ha la direzione dell'accelerazione indotta su una particella soggetta alla forza dovuta al campo f. Le curve dello spazio che in ogni punto x hanno per retta tangente quella di direzione $\nabla f(x)$ si dicono *linee di flusso* e sono, in ogni punto, ortogonali alla superficie equipotenziale che passa per quel punto. Questa proprietà si può formalizzare come segue.

Teorema 2.1.12 *Siano $A \subset \mathbb{R}^n$ aperto, ed $f \in C^1(A)$. Se $x_0 \in E_c$, $\nabla f(x_0) \neq 0$ e $\varphi : (-\delta, \delta) \to \mathbb{R}^n$ è di classe C^1 e tale che $\varphi(0) = x_0$, $\varphi(t) \in E_c$ per ogni $t \in (-\delta, \delta)$, allora $\nabla f(x_0) \cdot \varphi'(0) = 0$.*

Dim. La funzione $g : (-\delta, \delta) \to \mathbb{R}$ definita da $g(t) = f(\varphi(t))$ è costante e vale c, sicché $g'(t) = \nabla f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t) = 0$ per ogni t. Per $t = 0$ si ha la tesi. QED

Esempio 2.1.13 Consideriamo la funzione di due variabili $f(x, y) = 9x^2 + 16y^2$ e consideriamo la curva di livello $f(x, y) = 25$. La funzione è differenziabile in $\mathbb{R}^2$ e il suo gradiente è $\nabla f(x, y) = (18x, 32y)$. Il versore normale nel punto $(1, 1)$, appartenente alla curva di livello considerata, è dato da $\frac{1}{\sqrt{337}}(9, 16)$.

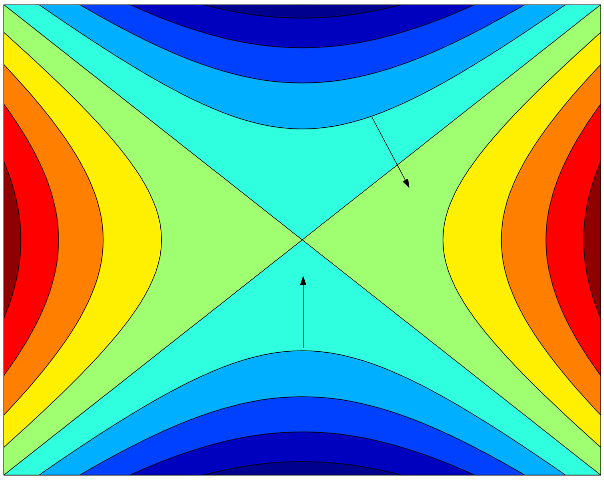


Figura – 2.2: Linee di livello di $f(x, y) = x^2 - y^2$.

È importante notare che il gradiente di una funzione (nei punti in cui non è nullo) determina *la direzione di massima pendenza*, nel senso che la derivata direzionale della funzione ha il massimo modulo lungo la direzione del gradiente, cioè:

$$\|\nabla f(x_0)\| = \max\{|D_v f(x_0)| : \ \|v\| = 1\}; \tag{2.1.4}$$

infatti, per ogni versore v risulta $D_v f(x_0) = \langle \nabla f(x_0), v\rangle$, e il prodotto scalare è massimo quando i due vettori sono paralleli, cioè quando $v = \nabla f(x_0)/\|\nabla f(x_0)\|$, e il tal caso vale la relazione (2.1.4).

Se f ammette derivate parziali non solo in un punto, ma in tutto un insieme aperto, per esempio A stesso, come nel caso di una variabile ci si può porre il problema dell'esistenza delle derivate parziali iterate (derivate successive, o di ordine superiore).

Definizione 2.1.14 *Siano $A \subset \mathbb{R}^n$ aperto, ed $f : A \to \mathbb{R}$; se esiste in A la derivata parziale $D_i f$, si dice che f ammette* derivata parziale seconda rispetto ad x_j ed x_i *se esiste la derivata parziale di $D_i f$ rispetto ad x_j, che in questo caso si denota $D_{ji} f$. In particolare, data f di classe $C^1(A)$, si dice che è di classe $C^2(A)$ se esistono tutte le derivate parziali seconde di f e sono continue in A.*

Iterando, si definisce la derivata parziale di ordine k di f rispetto ad $x_{i_1}, x_{i_2}, \ldots, x_{i_k}$ (nell'ordine), essendo $i_1, \ldots, i_k$ indici (anche ripetuti) in $\{1, \ldots, n\}$, la derivata parziale rispetto ad x_{i_k} della $D_{i_{k-1} \cdots i_1} f$. Si dice che f è di classe $C^k(A)$ se le sue derivate parziali esistono e sono continue in A fino all'ordine k.

Infine, si dice che f è di classe $C^\infty(A)$ se ammette derivate parziali di ogni ordine.

Notiamo che per $f \in C^1(A)$ le sue derivate parziali prime sono n e costituiscono un vettore (il gradiente), mentre le derivate seconde sono n^2, le terze n^3, eccetera. Le derivate seconde $D_{ij}f$ formano una matrice che è detta *matrice hessiana* di f ed è denotata

$$D^2 f = \left\{ \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} \right\} .$$

Malgrado nella precedente definizione l'ordine in cui si eseguono le derivate sia essenziale per definire le derivate di ordine superiore, in molti casi il risultato dipende solo dalle variabili rispetto alle quali si deriva, e non dall'ordine delle operazioni.

Teorema 2.1.15 (Teorema di Schwarz) *Se $f : A \to \mathbb{R}$ ammette derivate parziali seconde $D_{ij}f$ e $D_{ji}f$ in un intorno di $x_0 \in A$, ed esse sono continue in x_0, allora*

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x_0) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(x_0).$$

Di conseguenza, se $f \in C^2(A)$ allora $D_{ij}f(x) = D_{ji}f(x)$ per ogni $x \in A$ e per ogni $i, j = 1, \ldots, n$.

Si può riformulare l'ultima affermazione del precedente teorema dicendo che se $f \in C^2(A)$ allora $D^2 f$ è una matrice $n \times n$ simmetrica, cioè tale che $(D^2 f)_{ij} = D_{ij}f = D_{ji}f = (D^2 f)_{ji}$.

Osservazione 2.1.16 L'enunciato del Teorema di Schwarz si può naturalmente generalizzare alle derivate parziali di ordine superiore al secondo. Se $f \in C^k(A)$ allora tutte le sue derivate parziali, fino all'ordine k, dipendono solo dalla variabili coinvolte, e non dall'ordine in cui esse si considerano, e, se $f \in C^\infty(A)$, ciò vale per tutte le derivate parziali.

2.1.a La formula di Taylor

Come nel caso di una variabile, per ogni $x_0 \in A$ si può associare ad una funzione di classe $C^k(A)$ un polinomio di grado k tale che le sue derivate parziali in x_0 coincidano con quelle di f fino all'ordine k (polinomio di Taylor). Ci limitiamo a trattare il caso del secondo ordine.

Teorema 2.1.17 (Formula di Taylor del secondo ordine in piú variabili) *Siano $A \subset \mathbb{R}^n$ aperto ed $f \in C^2(A)$. Se $x_0 \in A$ ed h è tale che tutto il segmento $[x_0, x_0 + h]$ sia contenuto in A, allora*

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_0) h_i + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x_0) h_i h_j + o(\|h\|^2),$$

o, in forma vettoriale:

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + \nabla f(x_0) \cdot h + \frac{1}{2} D^2 f(x_0) h \cdot h + o(\|h\|^2).$$

Osservazione 2.1.18 Come nel caso delle funzioni di una variabile, vale anche il Teorema di Taylor con il resto di Lagrange per funzioni di più variabili.

1. Nelle ipotesi del Teorema 2.1.17, posto $x = x_0 + h$, esiste un punto $\vartheta \in (0,1)$ tale che
$$f(x) = f(x_0) + \nabla f(x_0) \cdot (x - x_0) + \frac{1}{2} D^2 f\big(x_0 + \vartheta(x - x_0)\big)(x - x_0) \cdot (x - x_0).$$

2. Se nel Teorema 2.1.17 si richiede solo $f \in C^1(A)$, posto $x = x_0 + h$, esiste un punto $\vartheta \in (0,1)$ tale che
$$f(x) = f(x_0) + \nabla f\big(x_0 + \vartheta(x - x_0)\big) \cdot (x - x_0).$$
Questa formula è l'analogo del Teorema di Lagrange per funzioni di più variabili.

3. (Esempio) È facile verificare che, per la funzione di due variabili $f(x,y) = (1+x)\,\mathrm{e}^{x+y}$, il polinomio di Taylor centrato in $(0,0)$ di secondo grado è
$$T_2(x,y) = 1 + x + y + \frac{1}{2}(x+y)^2 + x + x(x+y) = 1 + 2x + y + \frac{3}{2}x^2 + 2xy + \frac{1}{2}y^2\,.$$

La formula di Taylor del secondo ordine è lo strumento essenziale per studiare gli estremi relativi delle funzioni di piú variabili che è l'argomento del paragrafo seguente.

2.2 Forme quadratiche ed estremi relativi

Per affrontare il problema della ricerca dei punti in cui una funzione assume valori di massimo o minimo relativo ricorriamo alla classificazione delle forme quadratiche in base alla loro *segnatura*. Come si è visto nel corso di Geometria ed Algebra (vedi Cap. 5 degli appunti del corso) alla matrice hessiana di una f di classe C^2, fissato il punto x_0, è associata la *forma quadratica simmetrica*

$$D^2 f(x_0)h \cdot h = \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x_0) h_i h_j \qquad h \in \mathbb{R}^n. \tag{2.2.5}$$

Presentiamo ora la classificazione delle forme quadratiche in base alla segnatura; useremo questa classificazione per la forma quadratica associata alla matrice hessiana nel Teorema 2.2.9.

Definizione 2.2.1 (Classificazione delle forme quadratiche) *Sia $A = (a_{ij})$ una matrice reale quadrata simmetrica di dimensione n, e β la forma quadratica ad essa associata.*

Diciamo che A (o, equivalentemente, β) è:

$$
\begin{array}{lcl}
\textit{semidefinita positiva} & \iff & Ah\cdot h \geq 0 \quad \forall\, h\in\mathbb{R}^n \\
\textit{semidefinita negativa} & \iff & Ah\cdot h \leq 0 \quad \forall\, h\in\mathbb{R}^n \\
\textit{definita positiva} & \iff & Ah\cdot h > 0 \quad \forall\, h\in\mathbb{R}^n\setminus\{0\} \\
\textit{definita negativa} & \iff & Ah\cdot h < 0 \quad \forall\, h\in\mathbb{R}^n\setminus\{0\} \\
\textit{indefinita in tutti gli altri casi.} & &
\end{array}
$$

Notiamo che A è indefinita se e solo se esistono $h_1, h_2 \in \mathbb{R}^n$ tali che $Ah_1 \cdot h_1 > 0$, $Ah_2 \cdot h_2 < 0$. L'applicabilità concreta delle nozioni su esposte dipende evidentemente dalla facilità con cui si può determinare la segnatura di una forma quadratica data. Presentiamo un criterio diretto, basato sulla determinazione del segno degli autovalori di A, che, essendo A una matrice simmetrica, *sono tutti reali.*

Teorema 2.2.2 (Classificazione delle forme quadratiche con gli autovalori) *Sia A una matrice reale simmetrica, e siano $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ i suoi autovalori distinti. Allora A è:*

$$
\begin{array}{lcl}
\textit{semidefinita positiva} & \iff & \lambda_i \geq 0 \ \forall\, i=1,\ldots,k \\
\textit{semidefinita negativa} & \iff & \lambda_i \leq 0 \ \forall\, i=1,\ldots,k \\
\textit{definita positiva} & \iff & \lambda_i > 0 \ \forall\, i=1,\ldots,k \\
\textit{definita negativa} & \iff & \lambda_i < 0 \ \forall\, i=1,\ldots,k \\
\textit{indefinita} & \iff & \exists\, i,j\in\{1,\ldots,k\} \ \textit{tali che}\ \lambda_i>0, \lambda_j<0.
\end{array}
$$

Osserviamo che nel precedente criterio ciò che importa è solo il *segno* degli autovalori di $D^2 f(x_0)$ e non il loro valore numerico, ma vale la seguente proprietà.

Proposizione 2.2.3 *Sia A una matrice reale simmetrica, e siano $\lambda_1 < \ldots < \lambda_k$ i suoi autovalori distinti. Allora:*

$$
\begin{array}{ll}
\textit{se } A \textit{ è definita positiva e } h\neq 0 \textit{ risulta} & 0<\lambda_1\|h\|^2 \leq Ah\cdot h \leq \lambda_k\|h\|^2 \\
\textit{se } A \textit{ è definita negativa e } h\neq 0 \textit{ risulta} & \lambda_1\|h\|^2 \leq Ah\cdot h \leq \lambda_k\|h\|^2 < 0
\end{array}
$$

Il seguente risultato dà condizioni affinché una forma quadratica sia definita positiva o negativa.

Teorema 2.2.4 (Criterio di Sylvester) *Sia A una matrice reale $n \times n$ e siano $A^{(p)}$ i minori di A fatti con le prime p righe e le prime p colonne. Allora A è definita positiva se e solo se*

$$\det\bigl(A^{(p)}\bigr) > 0 \qquad \forall\, p = 1, \ldots, n.$$

La matrice A è definita negativa se e solo se $-A$ è definita positiva, quindi se e solo se $(-1)^p \det(A^{(p)}) > 0$ per ogni p.

Utile è anche la seguente caratterizzazione delle matrici semidefinite attraverso il segno dei minori principali. Ricordiamo che i minori principali di una matrice A sono i determinanti delle matrici che si ottengono da A sopprimendo un numero arbitrario di righe e colonne con lo stesso indice.

Proposizione 2.2.5 *Sia A una matrice reale $n \times n$ tale che* $\det A = 0$. *Allora A è semidefinita positiva se e solo se tutti i suoi minori principali sono maggiori o uguali a zero.*

La matrice A è semidefinita negativa se e solo se $-A$ è semidefinita positiva, quindi se e solo se tutti i suoi minori principali di ordine pari sono maggiori o uguali a zero e tutti i suoi minori principali di ordine dispari sono minori o uguali a zero.

Passiamo ora alla definizione di estremo relativo, ed alla discussione della ricerca e classificazione degli estremi relativi.

Definizione 2.2.6 (Estremi relativi) *Siano $A \subset \mathbb{R}^n$, $x_0 \in A$ ed $f : A \to \mathbb{R}$. Diciamo che f ha un* massimo relativo *in x_0 se esiste $\delta > 0$ tale che*

$$x \in A, \quad \|x - x_0\| < \delta \qquad \Longrightarrow \qquad f(x) \le f(x_0);$$

diciamo che f ha un minimo relativo *in x_0 se esiste $\delta > 0$ tale che*

$$x \in A, \quad \|x - x_0\| < \delta \qquad \Longrightarrow \qquad f(x) \ge f(x_0).$$

Se f ha un massimo o un minimo relativo in x_0 allora diciamo che ha un estremo relativo *in x_0. Se le due diseguaglianze precedenti valgono per $x \ne x_0$ con $<$ (risp. $>$) anziché $\le$ (risp. $\ge$) diciamo che l'estremo relativo è* proprio.

Il seguente risultato estende il Teorema di Fermat.

Teorema 2.2.7 *Siano $A \subset \mathbb{R}^n$, $x_0 \in A$ e $f : A \to \mathbb{R}$. Se x_0 è un punto di estremo relativo di f, x_0 è interno ad A ed f è differenziabile in x_0, allora $\nabla f(x_0) = 0$.*

DIM. Fissato $v \in \mathbb{R}^n$, $\|v\| = 1$, possiamo applicare il Teorema di Fermat alla restrizione f_v di f alla retta $x = x_0 + tv$, che ha un estremo per $t = 0$, ottenendo $f_v'(0) = \nabla f(x_0) \cdot v = 0$. Poiché ciò accade per ogni vettore unitario v, deve essere $\nabla f(x_0) = 0$. $\boxed{QED}$

Definizione 2.2.8 (Punti critici) *Se $f : A \to \mathbb{R}$ è differenziabile in $x_0 \in A$ e $\nabla f(x_0) = 0$ allora x_0 si dice* punto critico *o* stazionario *per f. Un punto critico che non è né di massimo relativo né di minimo relativo si dice* punto di sella.

Possiamo quindi dire che *ogni punto di estremo interno in cui f sia differenziabile è un punto critico.* Il viceversa, come nel caso di una variabile, non è vero. Per esempio, $f(x, y) = xy$ ha un punto critico nell'origine che non è né di massimo né di minimo. Infatti, $f(0, 0) = 0$, ma f assume valori positivi e negativi in ogni intorno dell'origine.

Per determinare gli estremi relativi di una funzione f si procede pertanto come nel caso di una variabile: se f è di classe C^1 se ne determinano i punti critici; se poi f è di classe C^2, se ne calcolano le derivate seconde nei punti critici trovati e si cerca di determinare la natura dei punti critici usando la formula di Taylor del secondo ordine. Esistono, come nel caso $n = 1$, criteri basati sulle derivate di ordine piú alto, ma, per l'elevata complessità (bisogna ricordare che le derivate parziali di ordine k sono n^k) non li discutiamo. La classificazione dei punti critici basata sulle derivate di ordine 2 è contenuta nel seguente teorema.

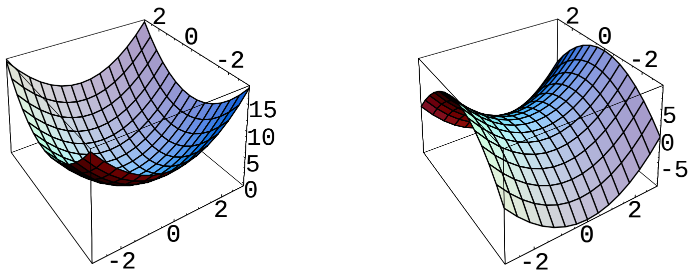


Figura – 2.3: Un punto di minimo relativo e un punto di sella.

Teorema 2.2.9 (Classificazione dei punti critici) *Siano A un sottoinsieme aperto di $\mathbb{R}^n$ ed $f \in C^2(A)$. Se $x_0 \in A$ è un punto critico di f, valgono le seguenti condizioni necessarie di estremalità:*

$$\begin{array}{lcl} x_0 \textit{ punto di minimo relativo} & \Longrightarrow & D^2 f(x_0) \textit{ semidefinita positiva} \\ x_0 \textit{ punto di massimo relativo} & \Longrightarrow & D^2 f(x_0) \textit{ semidefinita negativa} \end{array} \tag{2.2.6}$$

e le seguenti condizioni sufficienti:

$$\begin{array}{lcl} D^2 f(x_0) \textit{ definita positiva} & \Longrightarrow & x_0 \textit{ punto di minimo relativo proprio} \\ D^2 f(x_0) \textit{ definita negativa} & \Longrightarrow & x_0 \textit{ punto di massimo relativo proprio} \\ D^2 f(x_0) \; indefinita & \Longrightarrow & x_0 \textit{ punto di sella.} \end{array} \tag{2.2.7}$$

Dim. Dimostriamo solo la condizione sufficiente di minimo relativo. Dalla formula di Taylor del secondo ordine sappiamo che

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + \nabla f(x_0) \cdot h + \frac{1}{2} D^2 f(x_0) h \cdot h + o(\|h\|^2).$$

Poichè x_0 è un punto critico di f si ha $\nabla f(x_0) = 0$ e poichè la matrice hessiana in x_0 è definita positiva, per la Proposizione 2.2.3 esiste una costante $\lambda > 0$ tale che

$$D^2 f(x_0) h \cdot h \geq \lambda \|h\|^2.$$

Allora scelto $\delta > 0$ tale che per ogni h con $0 < \|h\| < \delta$ risulti $\dfrac{|o(\|h\|^2)|}{\|h\|^2} \leq \dfrac{\lambda}{4}$ si ha

$$f(x_0+h) = f(x_0) + \frac{1}{2} D^2 f(x_0) h \cdot h + o(\|h\|^2) \geq f(x_0) + \frac{\lambda}{2}\|h\|^2 - \frac{\lambda}{4}\|h\|^2 = f(x_0) + \frac{\lambda}{4}\|h\|^2.$$

Dunque x_0 è punto di minimo proprio nell'intorno $B_\delta(x_0)$. QED

Dal Teorema 2.2.2 segue una formulazione equivalente del risultato precedente, in termini degli autovalori della matrice hessiana.

Teorema 2.2.10 (Classificazione dei punti critici con gli autovalori) *Siano A un sottoinsieme aperto di $\mathbb{R}^n$, $f \in C^2(A)$, ed $x_0 \in A$ un punto critico di f. Siano inoltre*

$\lambda_1, \ldots \lambda_k$ gli autovalori distinti di $D^2 f(x_0)$. Valgono le seguenti condizioni necessarie di estremalità:

$$\begin{array}{lcl} x_0 \text{ punto di minimo relativo} & \Longrightarrow & \lambda_i \geq 0 \ \forall\ i = 1, \ldots, k; \\ x_0 \text{ punto di massimo relativo} & \Longrightarrow & \lambda_i \leq 0 \ \forall\ i = 1, \ldots, k. \end{array}$$

e le seguenti condizioni sufficienti:

$$\begin{array}{lcl} \lambda_i > 0 \ \forall\ i = 1, \ldots, k & \Longrightarrow & x_0 \text{ punto di minimo relativo proprio} \\ \lambda_i < 0 \ \forall\ i = 1, \ldots, k & \Longrightarrow & x_0 \text{ punto di massimo relativo proprio} \\ \exists\, i, j \in \{1, \ldots, k\} \text{ tali che } \lambda_i > 0, \lambda_j < 0 & \Longrightarrow & x_0 \text{ punto di sella.} \end{array}$$

Nel caso $n = 2$ possiamo ricavare in modo elementare il contenuto del Criterio di Sylvester 2.2.4 ed applicarlo alla classificazione di un punto critico in modo molto semplice.

Esempio 2.2.11 Sia $A = (a_{ij})$ una matrice simmetrica 2×2. Allora, l'equazione da risolvere per determinare gli autovalori è

$$\lambda^2 - (a_{11} + a_{22})\lambda + \det A = 0.$$

Ne segue che

$$\begin{array}{lcl} A \text{ è definita positiva} & \Longleftrightarrow & \det A > 0,\ a_{11} > 0 \\ A \text{ è definita negativa} & \Longleftrightarrow & \det A > 0,\ a_{11} < 0 \\ A \text{ è indefinita} & \Longleftrightarrow & \det A < 0 \\ A \text{ è semidefinita} & \Longleftrightarrow & \det A = 0. \end{array}$$

Siccome il determinante di una matrice è uguale al prodotto degli autovalori, le affermazioni relative ai casi indefinito e semidefinito sono ovvie. Per quanto riguarda il caso di A definita (positiva o negativa), cioè con i due autovalori concordi, è ovvio che il determinante di A debba essere positivo; d'altra parte, questo implica che a_{11} e a_{22} siano concordi, essendo $\det A = a_{11}a_{22} - a_{12}^2$. Quindi, ci sono due autovalori positivi se e solo se nell'equazione sono presenti due *variazioni* di segno nei coefficienti (cioè, $a_{11} > 0$ e $a_{22} > 0$), e ci sono due autovalori negativi se e solo se nell'equazione sono presenti due *permanenze* di segno nei coefficienti (cioè, $a_{11} < 0$ e $a_{22} < 0$).

In termini di punti di estremi relativi, se (x_0, y_0) è un punto critico interno di una funzione di classe C^2 di due variabili, si può stabilire il criterio seguente:

$$\begin{array}{lcl} \det D^2 f(x_0, y_0) > 0,\ D_{xx} f(x_0, y_0) > 0 & \Longrightarrow & (x_0, y_0) \text{ è punto di minimo relativo proprio} \\ \det D^2 f(x_0, y_0) > 0,\ D_{xx} f(x_0, y_0) < 0 & \Longrightarrow & (x_0, y_0) \text{ è punto di massimo relativo proprio} \\ \det D^2 f(x_0, y_0) < 0 & \Longrightarrow & (x_0, y_0) \text{ è punto di sella.} \end{array}$$

Osservazione 2.2.12 (Funzioni convesse) Anche per le funzioni di più variabili si definisce la nozione di funzione convessa. Dato $A \subset \mathbb{R}^n$ insieme *convesso* una funzione $f : A \to \mathbb{R}$ si dice *convessa* se per ogni coppia di punti $x\,, y \in A$ risulta

$$f(tx + (1-t)y) \leq tf(x) + (1-t)f(y) \qquad \forall t \in [0, 1]\,,$$

si dice strettamente convessa se vale la disuguaglianza con $<$ per ogni $t \in (0,1)$. Ad esempio $f(x,y) = x^2 + y^2$ è strettamente convessa, mentre $f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}$ è solo convessa.

Sia A un aperto convesso. Valgono le seguenti caratterizzazioni:

1. La funzione f è convessa se e solo il suo sopragrafico è un insieme convesso in $\mathbb{R}^{n+1}$.

2. Se $f \in C^1(A)$ allora è convessa se e solo se per ogni $x_0 \in A$ risulta
$$f(x) \geq f(x_0) + \nabla f(x_0) \cdot (x - x_0) \qquad \forall x \in A\,,$$
ossia, per ogni punto x_0 il grafico di f è sopra il grafico del piano tangente in x_0.

3. Se $f \in C^2(A)$ allora è convessa se e solo se la matrice hessiana $D^2 f(x)$ è semidefinita positiva per ogni $x \in A$.

Dalla proprietà 2 segue che se f è strettamente convessa e x_0 è un punto critico, allora esso è l'unico punto di minimo assoluto di f in A.

Una funzione f si dice concava se $-f$ è convessa.

2.3 Funzioni vettoriali

In questo paragrafo estendiamo i concetti del calcolo differenziale al caso delle funzioni di piú variabili a valori in $\mathbb{R}^k$, con $k \geq 2$. Come abbiamo già visto nel Capitolo 1 per le funzioni vettoriali di una variabile, non ci sono grosse novità concettuali, dal momento che si può procedere ragionando sulle singole componenti.

Definizione 2.3.1 (Matrice jacobiana e differenziale) *Sia $A \subset \mathbb{R}^n$ aperto, sia $x_0 \in A$ e sia $F : A \to \mathbb{R}^k$; indichiamo con $F_i : A \to \mathbb{R}$, per $i = 1, \ldots, k$, le sue componenti. Se esistono tutte le derivate parziali $D_j F_i(x_0)$, per $j = 1, \ldots, n$ e $i = 1, \ldots, k$ si definisce la* matrice jacobiana di F in x_0 *ponendo*
$$DF(x_0) = \begin{pmatrix} D_{x_1}F_1 & D_{x_2}F_1 & \ldots & D_{x_n}F_1 \\ D_{x_1}F_2 & D_{x_2}F_2 & \ldots & D_{x_n}F_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ D_{x_1}F_k & D_{x_2}F_k & \ldots & D_{x_n}F_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \nabla F_1 \\ \nabla F_2 \\ \vdots \\ \nabla F_k \end{pmatrix}.$$
Diciamo che F è di classe $C^1(A)$ se ha derivate parziali prime $D_j F = \big(D_j F_1 \ldots, D_j F_k\big)$ continue in A, e diciamo che F è differenziabile in x_0 se esiste un'applicazione lineare *$L : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$ tale che*
$$\lim_{\|h\|\to 0} \frac{F(x_0+h) - F(x_0) - L(h)}{\|h\|} = 0. \tag{2.3.8}$$

La matrice jacobiana di F è quindi una matrice con k righe ed n colonne dove la i-esima riga ha per elementi le componenti del gradiente di F_i, e la j-esima colonna ha per elementi le derivate parziali delle componenti rispetto ad x_j. Si estende in modo naturale anche la nozione di derivata direzionale in x_0 lungo la direzione del vettore $v \in \mathbb{R}^n$, con $\|v\| = 1$, imponendo l'esistenza del limite

$$D_v F(x_0) = \lim_{t \to 0} \frac{F(x_0 + tv) - F(x_0)}{t}$$

che questa volta (se esiste) è un vettore di $\mathbb{R}^k$. Anche nel caso delle derivate direzionali, $D_v F(x_0)$ esiste se e solo se $D_v F_i(x_0)$ esiste per ogni $i = 1, \ldots, k$ e

$$D_v F(x_0) = \big(D_v F_1(x_0), \ldots, D_v F_k(x_0)\big).$$

Si può riformulare l'eguaglianza precedente dicendo che per ogni vettore $w \in \mathbb{R}^k$ si ha $D_v(F \cdot w)(x_0) = D_v F(x_0) \cdot w$. In modo analogo si possono introdurre gli operatori differenziali di ordine piú alto, e sempre ragionando componente per componente ottenere il teorema di Schwarz.

Come abbiamo già preannunziato, la verifica della differenziabilità si esegue componente per componente. Infatti, il numeratore al primo membro della (2.3.8) è un vettore, e la frazione tende a zero se e solo se le componenti di tale vettore tendono a zero.

Proposizione 2.3.2 *Sia $A \subset \mathbb{R}^n$ aperto, sia $x_0 \in A$ e sia $F : A \to \mathbb{R}^k$; allora, F è differenziabile in x_0 se e solo se le sue componenti lo sono, e, se F è differenziabile in x_0 allora l'applicazione lineare L in (2.3.8) è unica ed è associata alla matrice jacobiana di F. Inoltre, se $F \in C^1(A)$ allora F è differenziabile in tutti i punti di A.*

Esempio 2.3.3 Se $f : A \to \mathbb{R}$ è di classe $C^2(A)$ allora la funzione vettoriale $F = \nabla f$ è di classe $C^1(A)$ e $DF = D^2 f$, cioè la matrice jacobiana di F è la matrice hessiana di f.

Possiamo ora enunciare la naturale generalizzazione del teorema di derivazione delle funzioni composte.

Teorema 2.3.4 (Differenziale della funzione composta, caso vettoriale) *Siano $A \subset \mathbb{R}^n$, $B \subset \mathbb{R}^k$ aperti, $F : A \to B$ e $G : B \to \mathbb{R}^p$. Sia $x_0 \in A$ e supponiamo che F sia differenziabile in x_0 e G sia differenziabile in $F(x_0)$. Allora $\Phi = G \circ F$ è differenziabile in x_0 e vale la formula*

$$D\Phi(x_0) = DG(F(x_0))DF(x_0),$$

ove il prodotto è il prodotto "righe per colonne" delle matrici.

Osservazioni 2.3.5

1. Posto $F = (F_1, \ldots, F_k)$, $G = (G_1, \ldots, G_p)$, $\Phi_r = G_r \circ F$, la formula di derivazione si può scrivere nel seguente modo:
$$\frac{\partial \Phi_r}{\partial x_j}(x_0) = \sum_{i=1}^{k} \frac{\partial G_r}{\partial y_i}(F(x_0)) \frac{\partial F_i}{\partial x_j}(x_0) \qquad j = 1, \ldots, n,\ r = 1, \ldots, p.$$
Osserviamo anche che la formula sopra, pur avendo senso, potrebbe essere falsa se F e G fossero solo dotate di derivate parziali, ma non differenziabili.

2. Vediamo ora due casi particolari della formula di differenziazione della funzione composta che ricorrono spesso nelle applicazioni. Se $k = p = 1$, allora G è una funzione reale di variabile reale e F, Φ sono funzioni reali di n variabili. In tal caso
$$\nabla \Phi(x_0) = G'(F(x_0)) \nabla F(x_0).$$
Se $n = p = 1$, allora F è una funzione vettoriale di variabile reale (quindi DF è un vettore colonna) e G è una funzione reale di k variabili (quindi $DG = \nabla G$ è un vettore riga). La funzione composta $\Phi(x) = G\big(F_1(x), \ldots, F_k(x)\big)$, $x \in A \subset \mathbb{R}$, è a valori in $\mathbb{R}$ e Φ' è data dal prodotto scalare
$$\Phi'(x_0) = \nabla G(F(x_0)) \cdot F'(x_0) = \sum_{i=1}^{k} \frac{\partial G}{\partial y_i}(F(x_0)) F_i'(x_0).$$

3. Con gli stessi metodi qui visti si potrebbero trattare funzioni $F : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{m,k}$ a valori matrici. Basta infatti identificare $\mathbb{R}^{m,k}$ con $\mathbb{R}^{mk}$ e vedere quindi tali F come mappe vettoriali a valori in $\mathbb{R}^{mk}$. Ragionando componente per componente, si introducono quindi le derivate parziali, il gradiente, il differenziale.

Tra le applicazioni vettoriali rivestono particolare importanza i *cambiamenti di coordinate* in $\mathbb{R}^n$, di cui discutiamo ora i principali esempi.

Esempi 2.3.6 (Cambiamenti di coordinate)

1. **(Trasformazioni lineari)** Sia $A = (a_{ij})$ una matrice reale $n \times n$ con $\det A \neq 0$. Allora, com'è noto dall'algebra lineare, essa rappresenta, rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^n$, un'applicazione lineare invertibile di $\mathbb{R}^n$ in sé (*isomorfismo*). Il vettore e_j della base canonica viene trasformato nel vettore $e'_j = (a_{1j}, \ldots, a_{nj})$ che ha per componenti gli elementi della j-esima colonna della matrice A. I vettori $e'_1, \ldots, e'_n$ costituiscono a loro volta una base di $\mathbb{R}^n$, essendo, per l'ipotesi $\det A \neq 0$, linearmente indipendenti. Ogni vettore di $\mathbb{R}^n$ si può quindi esprimere come combinazione lineare degli e'_i, ed ha, rispetto a questa nuova base, componente i-esima data da $\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j$. In termini analitici, consideriamo la funzione vettoriale $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ di componenti F_i date da
$$F_i(x) = \sum_{h=1}^{n} a_{ih} x_h, \qquad i = 1, \ldots, n.$$

Le F_i sono lineari, dunque differenziabili per ogni $x \in \mathbb{R}^n$, e un calcolo diretto mostra che $DF(x) = A$ per ogni $x \in \mathbb{R}^n$, cioè $D_j F_i(x) = a_{ij}$ per ogni i, j.

2. **(Coordinate polari piane)** Nel piano $\mathbb{R}^2$, oltre alle coordinate cartesiane, si possono introdurre altri sistemi di coordinate. Le coordinate polari (ϱ, ϑ) sono particolarmente utili per studiare problemi con qualche simmetria rispetto ad un punto, che si assume essere l'origine delle coordinate. Geometricamente, $\varrho = \sqrt{x^2 + y^2}$ rappresenta la distanza del punto generico di coordinate cartesiane (x, y) dall'origine, mentre ϑ rappresenta uno dei due angoli formati dalla semiretta di origine $(0, 0)$ e passante per (x, y) con il semiasse $\{x \geq 0, y = 0\}$. Fissato un criterio univoco per la scelta dell'angolo, il punto $(x, y) \neq (0, 0)$ è univocamente determinato da una coppia (ϱ, ϑ), con $\varrho \geq 0$ e ϑ che varia in un intervallo semiaperto di ampiezza 2π. Fa eccezione l'origine, che è determinato dal valore $\varrho = 0$, ma non ha un ϑ determinato. Scegliamo come angolo quello spazzato dal semiasse positivo delle ascisse mentre ruota in senso antiorario fino a sovrapporsi alla semiretta per l'origine passante per (x, y), e come intervallo di variabilità per l'angolo l'intervallo $[0, 2\pi[$, cosí che valgano le relazioni:
$$\begin{cases} x = \varrho \cos\vartheta \\ y = \varrho \sin\vartheta \end{cases} \tag{2.3.9}$$
Detta $F : [0, +\infty[\times[0, 2\pi[\to \mathbb{R}^2$ la funzione che a (ϱ, ϑ) associa (x, y), un calcolo diretto mostra che
$$DF(\varrho, \vartheta) = \begin{pmatrix} \cos\vartheta & -\varrho\sin\vartheta \\ \sin\vartheta & \varrho\cos\vartheta \end{pmatrix}$$
da cui, in particolare, $\det DF(\varrho, \vartheta) = \varrho$.

3. **(Coordinate cilindriche)** Come nel piano, in $\mathbb{R}^3$ si possono introdurre coordinate diverse dalle cartesiane (x, y, z); in presenza di simmetrie rispetto ad un asse, che supponiamo essere l'asse z, può essere conveniente usare coordinate cilindriche (ϱ, ϑ, z). Queste si ottengono semplicemente considerando coordinate polari nel piano (x, y):
$$\begin{cases} x = \varrho \cos\vartheta \\ y = \varrho \sin\vartheta \\ z = z \end{cases} \tag{2.3.10}$$
Detta $F : [0, +\infty[\times[0, 2\pi[\times\mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ la funzione che a (ϱ, ϑ, z) associa (x, y, z), un calcolo diretto mostra che
$$DF(\varrho, \vartheta, z) = \begin{pmatrix} \cos\vartheta & -\varrho\sin\vartheta & 0 \\ \sin\vartheta & \varrho\cos\vartheta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$
da cui, in particolare, $\det DF(\varrho, \vartheta, z) = \varrho$.

4. **(Coordinate sferiche)** In $\mathbb{R}^3$, per esempio in presenza di una simmetria rispetto ad un punto, che assumiamo essere l'origine, può essere conveniente usare coordinate

sferiche $(\varrho, \phi, \vartheta)$, dove, da un punto di vista geometrico, ϱ rappresenta la distanza del punto generico $P(x, y, z)$ dall'origine, ϕ l'angolo formato dalla semiretta di origine $(0, 0, 0)$ e passante per P con il semiasse $\{x = 0, y = 0, z \geq 0\}$, ϑ la coordinata polare del punto (x, y) (proiezione di P sul piano (x, y)). Ne segue che $\varrho \geq 0$, e (per esempio) $\phi \in [0, \pi]$, $\vartheta \in [0, 2\pi[$. Posto $F : [0, +\infty[\times[0, 2\pi[\times[0, \pi] \to \mathbb{R}^3$, si ha:

$$\begin{cases} x = \varrho \sin\phi \cos\vartheta \\ y = \varrho \sin\phi \sin\vartheta \\ z = \varrho \cos\phi \end{cases}$$

e quindi

$$DF(\varrho, \vartheta, \phi) = \begin{pmatrix} \sin\phi\cos\vartheta & \varrho\cos\phi\cos\vartheta & -\varrho\sin\phi\sin\vartheta \\ \sin\phi\sin\vartheta & \varrho\cos\phi\sin\vartheta & \varrho\sin\phi\cos\vartheta \\ \cos\phi & -\varrho\sin\phi & 0 \end{pmatrix}$$

da cui, in particolare, $\det DF(\varrho, \vartheta, \phi) = \varrho^2 \sin\phi$.

2.4 Estremi vincolati

In questo paragrafo studiamo il problema della ricerca dei punti di estremo relativo piú in generale rispetto al caso di estremi *interni*. Questo problema è di grande importanza nelle applicazioni, perché nei problemi concreti di *ottimizzazione* ci sono sempre dei *vincoli* da rispettare, nel senso che si ha interesse a confrontare fra loro i valori che una funzione data assume su un sottoinsieme del suo dominio (il vincolo) che in generale non è un insieme aperto.

Definizione 2.4.1 (Estremi vincolati) *Siano $A \subset \mathbb{R}^n$, $S \subset \mathbb{R}^n$, $x_0 \in A \cap S$ ed $f : A \to \mathbb{R}$. Diciamo che f ha un* massimo relativo in x_0 rispetto al vincolo S *se esiste $\delta > 0$ tale che*

$$x \in A \cap S, \quad \|x - x_0\| < \delta \qquad \Longrightarrow \qquad f(x) \leq f(x_0);$$

diciamo che f ha un minimo relativo in x_0 rispetto al vincolo S *se esiste $\delta > 0$ tale che*

$$x \in A \cap S, \quad \|x - x_0\| < \delta \qquad \Longrightarrow \qquad f(x) \geq f(x_0).$$

Se f ha un massimo o un minimo relativo in x_0 rispetto al vincolo S allora diciamo che ha un estremo relativo in x_0 rispetto al vincolo S*. Se le due diseguaglianze precedenti valgono per $x \neq x_0$ con $<$ (risp. $>$) anziché $\leq$ (risp. $\geq$) diciamo che l'estremo relativo è* proprio*.*

Il problema della determinazione degli estremi relativi vincolati con un vincolo qualsiasi è troppo generale per poter essere affrontato con un metodo generale. Ci limiteremo al caso in cui il vincolo S è un sottoinsieme di $\mathbb{R}^n$ descritto da funzioni regolari. In accordo con la discussione alla fine del Paragrafo 2.1, questo significa che S è l'*immagine* oppure un *insieme di livello* di una funzione regolare. Corrispondentemente, esponiamo due metodi per studiare il problema della ricerca degli estremi su S. Entrambi questi metodi consentono di ricondurre la ricerca degli estremi vincolati alla ricerca di estremi *non vincolati* di opportune funzioni ausiliarie. Per fissare le idee, supponiamo che sia data $f \in C^1(A)$, con $A \subset \mathbb{R}^n$ aperto, e che S sia un *vincolo di dimensione* $k < n$ *in* $\mathbb{R}^n$. Il nostro problema è: determinare gli estremi relativi di f vincolati su S.

Primo metodo (parametrizzazione del vincolo) Supponiamo che il vincolo sia dato nella forma

$$S = \{x \in \mathbb{R}^n : \ x = \varphi(t), \ t \in D\},$$

dove $D \subset \mathbb{R}^k$ è una insieme aperto e $\varphi : D \to \mathbb{R}^n$ è una funzione di classe C^1 in D. In questo caso, per determinare gli estremi relativi di f basta studiare la funzione composta $g = f \circ \varphi$ sull'insieme *aperto* $D \subset \mathbb{R}^k$, con i metodi già visti.

Secondo metodo (moltiplicatori di Lagrange) Supponiamo che il vincolo sia dato nella forma *implicita*

$$S = \{x \in A : \ F(x) = 0\},$$

cioè come insieme di livello di una funzione $F : A \to \mathbb{R}^{n-k}$ di classe $C^1(A)$. Notiamo che, essendo F a valori vettoriali, il suo insieme di livello S è l'intersezione degli insiemi di livello $S_i = \{x : \ F_i(x) = 0\}$, per $i = 1, \dots, n-k$, e supponiamo che la matrice DF abbia su S rango massimo $n-k$. In questo caso, si introduce la funzione ausiliaria

$$\Phi(x_1, \dots, x_n, \lambda_1, \dots, \lambda_{n-k}) = f(x) - \sum_{i=1}^{n-k} \lambda_i F_i(x),$$

che dipende dalla variabile $x \in A$ e dalle variabili reali anch'esse ausiliarie (dette *moltiplicatori di Lagrange*) $\lambda_1, \dots, \lambda_{n-k}$ e se ne cercano gli estremi *non vincolati* in $A \times \mathbb{R}^{n-k}$. Vale infatti il seguente risultato:

> *Se $x \in A$ è un estremo vincolato di f su S allora esistono numeri reali $\lambda_1, \dots, \lambda_{n-k}$ tali che il punto $(x_1, \dots, x_n, \lambda_1, \dots, \lambda_{n-k}) \in A \times \mathbb{R}^{n-k}$ sia estremo relativo di Φ.*

Osserviamo che quindi il metodo esposto fornisce solo una condizione necessaria di estremalità: per cercare gli estremi relativi di Φ si annulla il gradiente di Φ, cioè si risolve il sistema

$$\begin{cases} D_{x_1}\Phi(x_1, \dots, x_n, \lambda_1, \dots, \lambda_{n-k}) = 0 \\ \vdots \\ D_{x_n}\Phi(x_1, \dots, x_n, \lambda_1, \dots, \lambda_{n-k}) = 0 \\ D_{\lambda_1}\Phi(x_1, \dots, x_n, \lambda_1, \dots, \lambda_{n-k}) = 0 \\ \vdots \\ D_{\lambda_{n-k}}\Phi(x_1, \dots, x_n, \lambda_1, \dots, \lambda_{n-k}) = 0, \end{cases}$$

che si può riscrivere:

$$\begin{cases} D_{x_1} f(x) - \sum_{i=1}^{n-k} \lambda_i D_{x_1} F_i(x) = 0 \\ \vdots \\ D_{x_n} f(x) - \sum_{i=1}^{n-k} \lambda_i D_{x_n} F_i(x) = 0 \\ F_1(x) = 0 \\ \vdots \\ F_{n-k}(x) = 0. \end{cases}$$

I punti di estremo di Φ sono allora soluzioni di questo sistema, ma non tutte le soluzioni sono punti di estremo. Di conseguenza, lo stesso vale per gli estremi vincolati di f su S. Notiamo che le ultime equazioni del precedente sistema assicurano che i punti trovati appartengano ad S. Le prime n equazioni, invece, possono essere interpretate geometricamente dicendo che nei punti di estremo vincolato *il gradiente di f non ha componenti tangenti ad S*. Infatti, il gradiente risulta combinazione lineare dei gradienti delle $F_1, \ldots, F_{n-k}$, che, per il Teorema 2.1.12, non hanno componenti tangenziali lungo S.

CAPITOLO 3

CURVE ED INTEGRALI DI LINEA

In questo capitolo introduciamo la nozione di curva nello spazio $\mathbb{R}^n$, ne studiamo le piú elementari proprietà geometriche, come la lunghezza e la retta tangente, e definiamo gli integrali di linea di funzioni reali e di campi vettoriali. Quest'ultima nozione verrà usata per affrontare, in modo molto parziale, il problema della caratterizzazione dei campi vettoriali F che sono gradienti di una funzione regolare.

La nozione di curva presenta in modo naturale due aspetti, uno *geometrico* (la curva come insieme di punti), l'altro *cinematico* (la curva come traiettoria di un punto materiale in movimento). Privilegeremo questo secondo aspetto, definendo le curve come funzioni (in termini cinematici, leggi di moto), dal momento che l'informazione contenuta nella funzione che definisce un luogo geometrico non è tutta desumibile dalle proprietà insiemistiche del luogo stesso. D'altra parte, avremo cura di segnalare le proprietà dei luoghi geometrici che non dipendono dalla funzione che li rappresenta.

3.1 Curve regolari

Nella prima definizione precisiamo che cosa s'intende per curva in $\mathbb{R}^n$, ed introduciamo la nomenclatura fondamentale per le sue proprietà.

Definizione 3.1.1 (Curve) *Siano $I \subset \mathbb{R}$ un intervallo e $\varphi : I \to \mathbb{R}^n$.*
Diciamo che φ è una curva in $\mathbb{R}^n$ *se è una funzione continua.*
Diciamo che φ è una curva regolare *se $\varphi \in C^1(I)$ e $\varphi'(t) \neq 0$ per ogni $t \in I$.*
Diciamo che φ è una curva regolare a tratti *se è continua ed esistono* $\inf I = t_0 < t_1 < \ldots < t_k = \sup I$ *tali che φ sia regolare in $[t_{i-1}, t_i] \cap I$ per ogni $i = 1, \ldots, k$.*
Chiamiamo sostegno della curva *φ l'insieme $\varphi(I) \subset \mathbb{R}^n$.*
Diciamo che φ è semplice *se $t_1 \neq t_2$ implica $\varphi(t_1) \neq \varphi(t_2)$, purché almeno uno tra t_1 e t_2 sia interno ad I.*
Se $\varphi : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ diciamo che il punto $\varphi(a)$ è il primo estremo *e $\varphi(b)$ è il* secondo estremo *di φ.*
Diciamo che φ è chiusa *se $I = [a, b]$ è chiuso e limitato e $\varphi(a) = \varphi(b)$.*

Osservazioni 3.1.2

1. Come spiegato nell'introduzione al capitolo, abbiamo identificato una curva con la parametrizzazione; il luogo geometrico descritto dalla curva è quello che abbiamo chiamato il suo sostegno.

2. La condizione $\varphi'(t) \neq 0$ sarà utile per definire in ogni punto del sostegno della curva φ la retta tangente (vedi l'equazione (3.1.1) che definisce la retta tangente).

3. Nella definizione di curva semplice abbiamo escluso il caso che t_1 e t_2 siano *entrambi* estremi dell'intervallo I perché vogliamo che una curva semplice non abbia punti doppi, ma ammettiamo che possa essere allo stesso tempo semplice e chiusa (come una circonferenza, vedi esempio 3.1.3.2), non considerando il primo estremo (che coincide col secondo estremo) come punto doppio. Notiamo anche che gli estremi di una curva dipendono dalla parametrizzazione e non solo dal sostegno (vedi successivo esempio 3.1.3.2).

4. Se una curva è regolare a tratti allora nei punti in cui la regolarità viene meno esistono le derivate destra e sinistra.

Presentiamo subito alcuni esempi di curve.

Esempi 3.1.3

1. **(Segmenti, rette, poligonali)** Ricordiamo (vedi Definizione 1.1.18) che il segmento $[x, y]$ di estremi x ed y è la curva $\varphi(t) = x + t(y - x)$, per $t \in [0, 1]$. Dati un punto $x \in \mathbb{R}^n$ ed un vettore $v \neq 0$ in $\mathbb{R}^n$, la curva $\varphi(t) = x + tv$, per $t \in \mathbb{R}$, è la retta passante per x di direzione v. Ricordiamo che le poligonali sono già state introdotte nel Capitolo 1 (vedi Definizione 1.1.18). Una parametrizzazione della poligonale P di vertici $x_0, \ldots, x_k$ può essere $\varphi : [0, 1] \to \mathbb{R}^n$ definita da:
$$\varphi(t) = x_{i-1} + k(t - t_{i-1})(x_i - x_{i-1}) \qquad \text{per} \quad t_{i-1} = \frac{i-1}{k} \leq t \leq \frac{i}{k} = t_i, \quad i = 1, \ldots, k.$$

2. **(Circonferenza)** La curva $\varphi(t) = (R \cos t, R \sin t)$, per $t \in [0, 2\pi]$, è la circonferenza di centro l'origine e raggio R *percorsa una volta in senso antiorario*. È una curva semplice e chiusa, ma queste proprietà dipendono dall'espressione della funzione φ ed anche dall'intervallo di definizione. Infatti, se t varia in $[0, 3\pi]$ la curva non è piú né semplice né chiusa, pur avendo come sostegno la stessa circonferenza.

3. **(Ellisse)** Piú in generale, si può considerare l'ellisse di centro l'origine e semiassi a e b, descritta da $\varphi(t) = (a \cos t, b \sin t)$, per $t \in [0, 2\pi]$. Ovviamente, se $a = b = R$ si ottiene la circonferenza dell'esempio 2.

4. **(Elica)** Consideriamo la curva in $\mathbb{R}^3$ data da

$$\varphi(t) = (\cos t, \sin t, t), \quad \text{per } t \in [0, 4\pi].$$

Come abbiamo detto, vogliamo distinguere curve che, pur avendo lo stesso sostegno, sono descritte da funzioni diverse. In realtà molte proprietà di due curve permangono immutate se fra esse esiste il legame precisato dalla seguente definizione.

Definizione 3.1.4 (Curve equivalenti) *Due curve $\varphi : I \to \mathbb{R}^n$ e $\psi : J \to \mathbb{R}^n$ si dicono* equivalenti *se esiste una funzione $\alpha : I \to J$ di classe $C^1(I)$ con $\alpha'(t) \neq 0$ per ogni $t \in I$ tale che $\varphi = \psi \circ \alpha$.*

Osservazioni 3.1.5

1. La funzione α nella definizione precedente sarà detta talvolta *cambiamento di parametro ammissibile*.

2. È utile osservare che ogni curva definita in un intervallo chiuso e limitato $I = [a, b]$ è equivalente ad una curva definita nell'intervallo unitario $J = [0, 1]$, attraverso il cambiamento di parametro $\alpha(t) = \dfrac{t - a}{b - a}$.

3. La relazione introdotta è una relazione di equivalenza, cioè *riflessiva* (ogni curva è equivalente a sé stessa), *simmetrica* (se φ è equivalente a ψ allora ψ è equivalente a φ, con cambiamento di parametro la funzione inversa di α, cioè $\alpha^{-1} : J \to I$) e *transitiva* (se φ è equivalente a ψ con cambiamento di parametro $\alpha : I \to J$ e ψ è equivalente a $\zeta : K \to \mathbb{R}^n$ con cambiamento di parametro $\beta : J \to K$ allora φ è equivalente a ζ, con cambiamento di parametro la funzione composta $\beta \circ \alpha : I \to K$).

4. La condizione che α' sia continua nell'intervallo I e mai nulla implica che ha un segno costante, cioè che $\alpha'(t) > 0$ per ogni $t \in I$, oppure $\alpha'(t) < 0$ per ogni $t \in I$. Nel primo caso φ e ψ hanno la stessa *orientazione*, vengono percorse cioè nello stesso verso, nel secondo in verso opposto. Ne segue che ogni classe di equivalenza di curve si spezza in due sottoclassi, dette *curve orientate*. Due rappresentanti della stessa curva orientata sono equivalenti con un cambiamento di parametro ammissibile crescente, mentre si passa dal rappresentante di una sottoclasse a quello dell'altra con un cambiamento di parametro ammissibile decrescente.

5. Due curve equivalenti hanno gli stessi estremi, nello stesso ordine se hanno la stessa orientazione, in ordine inverso se hanno orientazione opposta.

6. Se $\varphi : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ è una curva regolare si può ottenere una curva con orientazione opposta considerando $\psi : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ definita da $\psi(t) = \varphi(a + b - t)$.

Cerchiamo ora una formula per la parametrizzazione della retta tangente ad una curva in un punto del suo sostegno, imponendo che sia la "retta limite" delle secanti. Se $\varphi : I \to \mathbb{R}^n$ è una curva semplice e regolare, fissato $t_0 \in I$, per ogni $t_1 \neq t_0$ si può scrivere l'equazione $\psi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ della retta secante nei punti $\varphi(t_0)$ e $\varphi(t_1)$; come nell'esempio

3.1.3.1, la direzione della retta è il vettore $\varphi(t_1) - \varphi(t_0)$ e, imponendo che $\psi(t_0) = \varphi(t_0)$ e $\psi(t_1) = \varphi(t_1)$ si ha

$$\psi(t) = \varphi(t_0) + \frac{\varphi(t_1) - \varphi(t_0)}{t_1 - t_0}(t - t_0).$$

Passando al limite per $t_1 \to t_0$ si ottiene l'*equazione della retta tangente a* φ *in* $\varphi(t_0)$, data da:

$$\psi(t) = \varphi(t_0) + \varphi'(t_0)(t - t_0). \tag{3.1.1}$$

Il versore $T(t) = \varphi'(t)/\|\varphi'(t)\|$ si dice versore tangente a φ nel punto $\varphi(t)$ e dipende solo dalla *curva orientata* a cui appartiene φ (vedi Osservazione 3.1.5.4). Notiamo che, essendo φ regolare per ipotesi, T è ben definito.

Esempio 3.1.6 (Curve cartesiane) Se $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ è una funzione continua, il suo grafico è il sostegno di una curva in $\mathbb{R}^2$ che si può rappresentare canonicamente con $\varphi(t) = (t, f(t))$, $t \in (a, b)$. Se $f \in C^1(a, b)$ l'equazione (3.1.1), per $t_0 = x_0$, diviene allora, scrivendo separatamente le due componenti,

$$\begin{cases} x = \psi_1(t) = \varphi_1(t_0) + \varphi_1'(t_0)(t - t_0) = t \\ y = \psi_2(t) = \varphi_2(t_0) + \varphi_2'(t_0)(t - t_0) = f(t_0) + f'(t_0)(t - t_0) \end{cases}$$

da cui, eliminando il parametro t, $y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$, che è l'equazione già trovata per le funzioni di una variabile.

Passiamo ora a definire la *lunghezza di una curva* ed a dimostrare una formula per il suo calcolo. Definiamo prima la lunghezza di un segmento, poi di una poligonale, e poi di una curva generica.

Definizione 3.1.7 (Lunghezza di una curva) *La lunghezza del segmento* $[x, y]$ *è*

$$\ell([x, y]) = \|x - y\|.$$

La lunghezza della poligonale P *di vertici* $x_0, \ldots, x_k$ *è*

$$\ell(P) = \sum_{i=1}^{k} \|x_i - x_{i-1}\|.$$

Data $\varphi : I \to \mathbb{R}^n$, *si dice che la poligonale* P *di vertici* $x_0, \ldots, x_k$ *è* inscritta nella curva φ *se esistono* $t_0 < \ldots < t_k \in I$ *tali che* $x_i = \varphi(t_i)$ *per* $i = 0, 1, \ldots, k$. *Definiamo la* lunghezza della curva φ *ponendo*

$$\ell(\varphi, I) = \sup\{\ell(P) : \ P \text{ poligonale inscritta in } \varphi\}.$$

Se $\ell(\varphi, I) < +\infty$ *allora diciamo che* φ *è* rettificabile. *Se* $\ell(\varphi, [a, b]) < +\infty$ *per ogni* $[a, b] \subset I$ *allora* φ *si dice* localmente rettificabile.

Per ottenere una formula che fornisca la lunghezza di una curva direttamente dalla sua rappresentazione parametrica, introduciamo la funzione che ad ogni valore di t associa la lunghezza del tratto di curva percorso fino all'istante t. Nella definizione seguente l'estremo b dell'intervallo può appartenere o no all'intervallo, e può anche essere $+\infty$.

Definizione 3.1.8 (Ascissa curvilinea) *Sia $\varphi : [a, b) \to \mathbb{R}^n$ una curva localmente rettificabile; per ogni $t \in [a, b)$ poniamo*

$$s(t) = \ell(\varphi, [a, t]);$$

la funzione s si dice ascissa curvilinea *della curva φ.*

Osservazione 3.1.9 Se $\varphi : I \to \mathbb{R}^n$ è una curva e $[a, b]$, $[b, c]$ sono due sottointervalli adiacenti di I allora risulta $\ell(\varphi, [a, c]) = \ell(\varphi, [a, b]) + \ell(\varphi, [b, c])$. In particolare, la funzione $s : [a, b) \to [0, \ell(\varphi, [a, b)))$ è monotona crescente.

Il seguente teorema fornisce una formula per il calcolo della lunghezza di una curva regolare a tratti che può essere interpretata dicendo che la lunghezza della curva (ossia, in termini cinematici, lo spazio percorso) è uguale all'integrale della velocità scalare.

Teorema 3.1.10 *Sia $\varphi : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ una curva regolare a tratti. Allora φ è rettificabile, e la sua lunghezza è data da*

$$\ell(\varphi, [a, b]) = \int_a^b \|\varphi'(t)\|\, dt. \tag{3.1.2}$$

Dim. Osserviamo anzitutto che basta provare la (3.1.2) per le curve regolari. Infatti, se la formula vale per le curve regolari e φ è regolare nei tratti $[t_{i-1}, t_i]$, con $a = t_0 < t_1 < \ldots < t_k = b$, allora

$$\ell(\varphi, [a, b]) = \sum_{i=1}^{k} \ell(\varphi, [t_{i-1}, t_i]) = \sum_{i=1}^{k} \int_{t_{i-1}}^{t_i} \|\varphi'(t)\|\, dt = \int_a^b \|\varphi'(t)\|\, dt.$$

Supponiamo perciò che φ sia regolare in $[a, b]$, e proviamo che la funzione s è in questo caso derivabile, con $s'(t) = \|\varphi'(t)\|$. A tale scopo, fissiamo $t \in [a, b]$, e sia $|h| \neq 0$ abbastanza piccolo affinché anche $t + h$ appartenga ad $[a, b]$. Poiché $|s(t + h) - s(t)|$ è uguale alla lunghezza del tratto di φ percorso nell'intervallo di estremi t e $t + h$, confrontando tale lunghezza con la lunghezza del segmento di estremi $\varphi(t)$ e $\varphi(t + h)$, che è una speciale poligonale inscritta nel tratto di curva suddetto, risulta:

$$\|\varphi(t + h) - \varphi(t)\| \leq |s(t + h) - s(t)|. \tag{3.1.3}$$

Sia ora P la poligonale di vertici $\varphi(t_0), \varphi(t_1), \ldots, \varphi(t_k)$ inscritta nel tratto di curva percorso nell'intervallo di estremi t e $t + h$; per il teorema fondamentale del calcolo 1.4.1

risulta

$$\ell(P) = \sum_{i=1}^{k} \|\varphi(t_i) - \varphi(t_{i-1})\| = \sum_{i=1}^{k} \Big\| \int_{t_{i-1}}^{t_i} \varphi'(\tau)\, d\tau \Big\| \le \sum_{i=1}^{k} \int_{t_{i-1}}^{t_i} \|\varphi'(\tau)\|\, d\tau = \int_{t_0}^{t_k} \|\varphi'(\tau)\|\, d\tau.$$

Poiché questa diseguaglianza vale per *ogni* poligonale inscritta, risulta

$$|s(t+h) - s(t)| \le \Big| \int_t^{t+h} \|\varphi'(\tau)\|\, d\tau \Big|. \tag{3.1.4}$$

Dividendo per $|h|$ ambo i membri delle (3.1.3), (3.1.4) e tenendo conto della monotonia di s risulta allora:

$$\Big\| \frac{\varphi(t+h) - \varphi(t)}{h} \Big\| \le \frac{s(t+h) - s(t)}{h} \le \frac{1}{h} \int_t^{t+h} \|\varphi'(\tau)\|\, d\tau,$$

da cui, passando al limite per $h \to 0$, $s'(t) = \|\varphi'(t)\|$ per ogni $t \in [a, b]$. Segue:

$$\ell(\varphi, [a, b]) = s(b) = s(b) - s(a) = \int_a^b s'(t)\, dt = \int_a^b \|\varphi'(t)\| dt.$$

Poiché φ' è una funzione continua, il suo integrale su $[a, b]$ è finito, e φ è rettificabile.

QED

Osservazioni 3.1.11

1. Si vede facilmente, con un cambiamento di variabili nell'integrale, che se $\varphi : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ e $\psi : [c, d] \to \mathbb{R}^n$ sono due curve equivalenti nel senso della Definizione 3.1.4 allora $\ell(\varphi, [a, b]) = \ell(\psi, [c, d])$. Infatti, ricordando che $\varphi'(t) = \alpha'(t)\psi'(\alpha(t))$, si ha

   $$\ell(\psi, [c, d]) = \int_c^d \|\psi'(\tau)\|\, d\tau = \int_{\alpha^{-1}(c)}^{\alpha^{-1}(d)} \frac{1}{|\alpha'(t)|} \|\varphi'(t)\| \alpha'(t)\, dt = \int_a^b \|\varphi'(t)\|\, dt,$$

   dove abbiamo eseguito il cambio di variabili $\tau = \alpha(t)$ nel primo integrale.

2. Se $\varphi : [a, b) \to \mathbb{R}^n$ è una curva regolare, allora $s : [a, b) \to [0, \ell(\varphi, [a, b)))$ è un cambiamento di parametro ammissibile perché s è di classe C^1 ed $s'(t) = \|\varphi'(t)\| \neq 0$ per ogni t; ne segue che è possibile rappresentare ogni curva regolare usando come parametro l'ascissa curvilinea, ponendo cioè $\psi(s) = \varphi(t)$ per $s = s(t)$. Questo dà una rappresentazione canonica della curva, dal momento che l'eguaglianza $\psi'(s(t))s'(t) = \varphi'(t)$ implica che $\|\psi'(s)\| = 1$. Ne segue che la derivata della ψ rispetto all'ascissa curvilinea fornisce il versore tangente, cioè, per $s = s(t)$ risulta $\psi'(s) = T(t)$.

Esempi 3.1.12

1. **(Lunghezza di una curva cartesiana)** Data $f \in C^1([a,b])$, se $\varphi(t) = (t, f(t))$ è la curva cartesiana che descrive il grafico di f come nell'esempio 3.1.6, allora la sua lunghezza è data da
$$\ell(\varphi, [a,b]) = \int_a^b \sqrt{1 + [f'(t)]^2}\, dt.$$

2. **(Una curva cartesiana non rettificabile)** Data $f \in C^0([0, 2/\pi]) \cap C^1(]0, 2/\pi])$ definita da $f(t) = t \sin\left(\frac{1}{t}\right)$ per $t > 0$ e $f(0) = 0$, se $\varphi(t) = (t, f(t))$ è la curva cartesiana che descrive il grafico di f come nell'esempio 3.1.6 (vedi Figura – 3.1), allora la sua lunghezza è infinita. Infatti, considerati i punti $t_h = \dfrac{2}{\pi(2h+1)}$

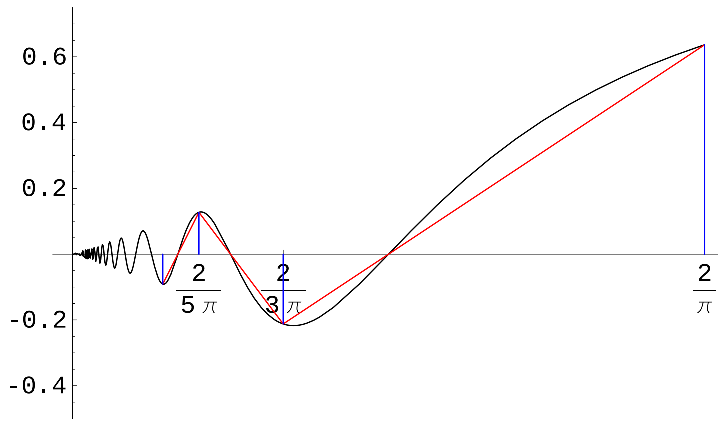


Figura – 3.1: Una poligonale inscritta nella curva φ.

$(h \in \mathbb{N})$ risulta che per $k > 1$ otteniamo una successione di poligonali inscritte la cui lunghezza
$$\ell(\varphi, [t_k, t_0]) \geq \frac{2}{\pi} \sum_{h=1}^{k} \frac{1}{2h-1} + \frac{1}{2h+1} = \frac{2}{\pi} \sum_{h=1}^{k} \frac{4h}{4h^2-1} \geq \sum_{h=1}^{k} \frac{2}{\pi\, h}$$
non è limitata superiormente.

3. **(Curve in coordinate polari)** Una curva piana può essere a volte assegnata convenientemente dandone l'equazione in coordinate polari, o in forma esplicita o in forma parametrica. Nel primo caso, tipicamente si tratta di un'espressione del tipo $\varrho = g(\vartheta)$, con $\vartheta \in (\vartheta_0, \vartheta_1)$. Per esempio, la circonferenza di centro l'origine e raggio R, percorsa una volta, ha la semplice equazione $\varrho = R$. Per calcolare la formula generale della lunghezza di una curva della forma detta, possiamo riscriverla

in coordinate cartesiane

$$\begin{cases} x = g(\vartheta)\cos\vartheta \\ y = g(\vartheta)\sin\vartheta \end{cases}$$

e poi usare la formula (3.1.2) con $\varphi(\vartheta) = \big(g(\vartheta)\cos\vartheta, g(\vartheta)\sin\vartheta\big)$; con semplici calcoli si ottiene:

$$\ell(\varphi, [\vartheta_0, \vartheta_1]) = \int_{\vartheta_0}^{\vartheta_1} \sqrt{[g(\vartheta)]^2 + [g'(\vartheta)]^2}\, d\vartheta.$$

Come applicazione, possiamo considerare la spirale φ di equazione polare $\varrho = e^{-\vartheta}$, per esempio con $\vartheta \in [0, 6\pi]$, ottenendo:

$$\ell(\varphi, [0, 6\pi]) = \int_0^{6\pi} \sqrt{2e^{-2\vartheta}}\, d\vartheta = \sqrt{2}\big(1 - e^{-6\pi}\big).$$

Se invece la curva è data in coordinate polari, ma in forma parametrica, è assegnata un'espressione vettoriale del tipo

$$\begin{cases} \varrho = \gamma(t) \\ \vartheta = \eta(t) \end{cases}$$

Ragionando come nel caso precedente si ottiene la formula

$$\ell(\varphi, [a, b]) = \int_a^b \sqrt{[\gamma'(t)]^2 + [\gamma(t)]^2[\eta'(t)]^2}\, dt.$$

3.2 Integrali di linea

In questo paragrafo definiamo gli integrali di linea e ne presentiamo le principali proprietà. Su una curva si possono integrare sia funzioni reali che funzioni vettoriali e corrispondentemente daremo due definizioni. La prima risulta invariante per equivalenza di curve, la seconda invece dipende dall'orientazione data alla curva, e cambia segno cambiando orientazione. Integrali di funzioni vettoriali s'incontrano in dinamica quando si definisce il *lavoro* compiuto da una forza. Diamo ora le due definizioni, e poi discutiamo i legami fra esse e le relative proprietà.

Definizione 3.2.1 (Integrali di funzioni reali) *Siano $A \subset \mathbb{R}^n$, $\varphi : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ una curva regolare con sostegno $\varphi([a, b])$ contenuto in A, ed $f : A \to \mathbb{R}$ una funzione continua. Poniamo*

$$\int_\varphi f\, ds = \int_a^b f\big(\varphi(t)\big)\|\varphi'(t)\|\, dt. \tag{3.2.5}$$

Se φ è regolare nei tratti $[t_{i-1}, t_i]$, con $a = t_0 < t_1 < \ldots < t_k = b$ allora poniamo

$$\int_\varphi f\, ds = \sum_{i=1}^k \int_{t_{i-1}}^{t_i} f\big(\varphi(t)\big)\|\varphi'(t)\|\, dt.$$

Se φ è chiusa spesso si usa la notazione $\displaystyle\oint_\varphi f\,ds$.

Definizione 3.2.2 (Integrali di funzioni vettoriali) *Siano $A \subset \mathbb{R}^n$, $\varphi : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ una curva regolare con sostegno $\varphi([a,b])$ contenuto in A, ed $F : A \to \mathbb{R}^n$ una funzione vettoriale continua. Poniamo*

$$\int_\varphi F \cdot d\ell = \int_a^b F\big(\varphi(t)\big) \cdot \varphi'(t)\,dt. \tag{3.2.6}$$

Se φ è regolare nei tratti $[t_{i-1}, t_i]$, con $a = t_0 < t_1 < \ldots < t_k = b$ allora poniamo

$$\int_\varphi F \cdot d\ell = \sum_{i=1}^k \int_{t_{i-1}}^{t_i} F\big(\varphi(t)\big) \cdot \varphi'(t)\,dt.$$

Se φ è chiusa spesso si usa la notazione $\displaystyle\oint_\varphi F \cdot d\ell$.

Osservazione 3.2.3 Dati un campo vettoriale F ed una curva φ come nella Definizione 3.2.2, l'integrale di F su φ definito nella (3.2.6) si può ricondurre all'integrale di una funzione reale definita sul sostegno di φ ponendo per ogni $t \in [a,b]$ $f(\varphi(t)) = F(\varphi(t)) \cdot T(t)$, dove T è come al solito il versore tangente. Segue subito dalle definizioni che $\int_\varphi F \cdot d\ell = \int_\varphi f\,ds$.

Ricordando le proprietà degli integrali su intervalli di $\mathbb{R}$, si deducono subito le seguenti proprietà degli integrali di linea, che enunciamo per gli integrali delle funzioni reali. Tenendo conto dell'osservazione precedente, analoghe proprietà varranno per gli integrali delle funzioni vettoriali. Per enunciare la proprietà 3, analoga all'additività rispetto al dominio, diamo la definizione di composizione di due curve, in cui per semplicità supponiamo che le curve siano entrambe definite sull'intervallo $[0,1]$. Questo, grazie all'Osservazione 3.1.5.2, non è restrittivo.

Definizione 3.2.4 *Siano φ e ψ due curve definite nell'intervallo $[0,1]$ a valori in $\mathbb{R}^n$; se $\varphi(1) = \psi(0)$ si definisce la composizione di φ e ψ, denotata $(\varphi \oplus \psi) : [0,1] \to \mathbb{R}^n$, ponendo:*

$$(\varphi \oplus \psi)(t) = \begin{cases} \varphi(2t) & \text{se } 0 \le t \le 1/2 \\ \psi(2t-1) & \text{se } 1/2 < t \le 1. \end{cases}$$

Enunciamo allora le proprietà degli integrali di linea:

1. L'integrale è lineare:

$$\int_\varphi (\alpha f + \beta g)\,ds = \alpha \int_\varphi f\,ds + \beta \int_\varphi g\,ds\,.$$

2. Se $f \geq 0$ sul sostegno di φ, allora
$$\int_\varphi f\, ds \geq 0\,.$$

3. Valgono le diseguaglianze:
$$\Big|\int_\varphi f\, ds\Big| \leq \int_\varphi |f|\, ds \leq \sup_{t\in[a,b]} |f(\varphi(t))|\; \ell(\varphi,[a,b]).$$

4. Vale l'eguaglianza:
$$\int_{\varphi\oplus\psi} f\, ds = \int_\varphi f\, ds + \int_\psi f\, ds.$$

Osservazione 3.2.5 È immediato che se $f(x) = 1$ per ogni $x \in \mathbb{R}^n$, allora l'integrale di f sulla curva φ dà la lunghezza di φ. Si vede facilmente con un cambiamento di variabile, come nel caso della formula per la lunghezza, che l'integrale in (3.2.5) non cambia se si considera una curva equivalente a φ. Invece, nel caso dell'integrale di una funzione vettoriale in (3.2.6), se la curva equivalente considerata ha la stessa orientazione l'integrale non cambia, se invece ha orientazione opposta assume valore opposto. Infatti, considerare una curva con orientazione opposta è equivalente a considerare un versore tangente opposto al versore T definito da φ', e questo, come spiegato nell'Osservazione 3.2.3, equivale ad integrare la funzione $-F\cdot T$. In formule, se $\varphi : [0,1] \to \mathbb{R}^n$ è una curva regolare e $\psi : [0,1] \to \mathbb{R}^n$, definita da $\psi(t) = \varphi(1-t)$, è la curva con uguale sostegno ed orientazione opposta, allora, osservando che $\psi'(t) = -\varphi'(1-t)$,
$$\begin{aligned}\int_\psi F\cdot d\ell &= \int_0^1 F(\psi(t))\cdot\psi'(t)\, dt = -\int_0^1 F(\varphi(1-t))\cdot\varphi'(1-t)\, dt\\ &\overset{t=1-\tau}{=} \int_1^0 F(\varphi(\tau))\cdot\varphi'(\tau)\, d\tau = -\int_0^1 F(\varphi(\tau))\cdot\varphi'(\tau)\, d\tau\\ &= -\int_\varphi F\cdot d\ell \qquad\qquad \forall\, F.\end{aligned}$$

3.3 Campi vettoriali conservativi

In questo paragrafo affrontiamo lo studio del seguente problema:

dato un campo vettoriale $F : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, esiste $f \in C^1(A)$ tale che $\nabla f = F$?

Nel caso $n = 1$ il problema è completamente risolto dal teorema fondamentale del calcolo integrale, che dà una risposta affermativa per ogni funzione continua F. Nel caso $n > 1$ la soluzione non è altrettanto semplice, e non dipende dalla regolarità del dato

F, ma da condizioni di compatibilità fra le varie componenti di F e dalla geometria del dominio A. Iniziamo con la seguente definizione.

Definizione 3.3.1 (Campi conservativi) *Sia $A \subset \mathbb{R}^n$ aperto, e sia $F : A \to \mathbb{R}^n$ continua. Diciamo che F è un* campo conservativo *in A se esiste una funzione reale $f \in C^1(A)$ tale che $\nabla f = F$, ossia*

$$F_i(x) = \frac{\partial f}{\partial x_i}(x) \qquad\qquad \forall\, x \in A,\ \forall\, i = 1, \dots, n.$$

Se F è conservativo in A allora ogni funzione f verificante le precedenti condizioni si dice potenziale *o* primitiva *di F in A.*

Nel caso $n = 1$ l'integrale di una funzione continua su un intervallo I è uguale alla differenza dei valori che una (qualunque) primitiva assume negli estremi di I, e due primitive della stessa funzione differiscono per una costante. Valgono risultati analoghi in piú variabili; naturalmente, l'integrale su un intervallo va sostituito con l'integrale di linea.

Teorema 3.3.2 (Potenziali) *Sia $A \subset \mathbb{R}^n$ un aperto connesso per poligonali, e sia $F : A \to \mathbb{R}^n$ un campo conservativo in A. Allora:*

(i) *se f e g sono due primitive di F in A esiste $c \in \mathbb{R}$ tale che $f = g + c$;*

(ii) *se $\varphi : [0, 1] \to \mathbb{R}^n$ è una curva regolare con sostegno contenuto in A risulta:*

$$\int_\varphi F \cdot d\ell = f\big(\varphi(1)\big) - f\big(\varphi(0)\big),$$

dove f è una qualunque primitiva di F in A.

Dim. (i) Poiché $\nabla(f - g) = 0$ in A, dal teorema 2.1.10 segue la tesi.
(ii) Sia f una primitiva di F, e sia $g : [0, 1] \to \mathbb{R}$ definita da $g(t) = f\big(\varphi(t)\big)$. Allora

$$g'(t) = \nabla f\big(\varphi(t)\big) \cdot \varphi'(t) = F\big(\varphi(t)\big) \cdot \varphi'(t)$$

e quindi per il Teorema fondamentale del calcolo integrale

$$\int_\varphi F \cdot d\ell = \int_0^1 F\big(\varphi(t)\big) \cdot \varphi'(t)\, dt = \int_0^1 g'(t)\, dt = g(1) - g(0) = f\big(\varphi(1)\big) - f\big(\varphi(0)\big).$$

QED

Osservazione 3.3.3 In particolare, il teorema precedente mostra che, dato un campo conservativo in un aperto connesso per poligonali, il suo potenziale è determinato a meno di una costante. Se il dominio A non è connesso per poligonali allora, come nel caso delle funzioni di una variabile definite nell'unione di piú intervalli, si avrà una costante arbitraria per ogni componente connessa di A.

Il teorema mostra anche che l'integrale di un campo conservativo lungo una curva *dipende solo dagli estremi della curva*, e non dalla particolare curva che li congiunge. Come vedremo, questa proprietà caratterizza i campi conservativi.

Teorema 3.3.4 (Caratterizzazione dei campi conservativi) *Sia $A \subset \mathbb{R}^n$ un aperto connesso, e sia $F : A \to \mathbb{R}^n$ una funzione continua in A. Le seguenti affermazioni sono equivalenti:*

(i) *F è conservativo;*

(ii) *se $\varphi : [0,1] \to \mathbb{R}^n$ è una curva regolare chiusa con sostegno contenuto in A allora $\displaystyle\oint_\varphi F \cdot d\ell = 0$;*

(iii) *se φ e ψ sono due curve regolari con sostegno contenuto in A aventi gli stessi estremi (nell'ordine) allora $\int_\varphi F \cdot d\ell = \int_\psi F \cdot d\ell$.*

Questo risultato è utile piú per *negare* che un campo sia conservativo che per provarlo: infatti, per provare che un campo è conservativo, in linea di principio si dovrebbe verificare che il suo integrale è nullo su *tutte* le curve chiuse, e questo è chiaramente impossibile. Viceversa, basta provare che l'integrale è diverso da zero su *una* curva chiusa per esser certi che il campo *non è* conservativo. La prima verifica da fare per sapere se un campo può essere conservativo è però quella contenuta nella seguente proposizione.

Proposizione 3.3.5 *Se $F : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ è un campo conservativo di classe $C^1(A)$ allora*

$$\frac{\partial F_i}{\partial x_j}(x) = \frac{\partial F_j}{\partial x_i}(x) \qquad \forall\, x \in A,\ \forall\, i, j = 1, \dots, n. \tag{3.3.7}$$

Dim. Se $F = \nabla f$ in A, allora $f \in C^2(A)$, e la condizione (3.3.7) è semplicemente la condizione di simmetria della matrice hessiana di f (Teorema di Schwarz 2.1.15). QED

La condizione (3.3.7), per $n = 3$, dice che il *rotore* di F è nullo (vedi (5.7.9)). In tal caso si dice anche che il campo è *irrotazionale*. È una condizione necessaria di facile verifica per la conservatività, ma non è sufficiente, come mostra il seguente esempio.

Esempio 3.3.6 (Un campo irrotazionale non conservativo) Consideriamo il campo piano F definito in $A = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$:

$$F(x, y) = \left(\frac{-y}{x^2 + y^2}, \frac{x}{x^2 + y^2}\right).$$

Si verifica facilmente che vale la condizione (3.3.7), ma l'integrale su una circonferenza di centro l'origine e raggio R non è nullo. Infatti, posto $\varphi(t) = (R\cos t, R\sin t)$ per

$t \in [0, 2\pi]$:

$$\oint_{\varphi} F \cdot d\ell = \int_0^{2\pi} \Big(\frac{-R\sin t}{R^2}(-R\sin t) + \frac{R\cos t}{R^2}(R\cos t) \Big)\, dt = 2\pi \neq 0 \qquad (3.3.8)$$

e quindi F non è conservativo in A.

Osserviamo infine che, se si estende F ad $\mathbb{R}^3 \setminus \{(0,0,z)\}$ ponendo

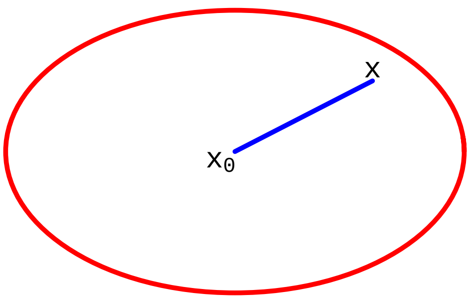
$$\mathcal{B}(x,y,z) = \Big(\frac{-y}{x^2+y^2}, \frac{x}{x^2+y^2}, 0 \Big)$$

si ottiene (a meno di costanti) il campo magnetico di un filo rettilineo indefinito (coincidente con l'asse z) percorso da corrente costante dato dalla legge di Biot-Savart.

Notiamo che l'integrale in (3.3.8) non dipende dal raggio della circonferenza; in realtà, si potrebbe dimostrare che l'integrale $\oint_{\varphi} F \cdot d\ell$ vale 2π *tutte le volte che φ è una curva chiusa regolare che compie un giro attorno all'origine in verso antiorario.* Quest'esempio suggerisce che anche la geometria del dominio A riveste un ruolo importante nella nostra discussione: infatti, le circonferenze considerate in (3.3.8) e, piú in generale, le altre curve descritte prima, *girano attorno alla singolarità del campo* presente nell'origine. Non approfondiremo questo aspetto, limitandoci a dare qualche semplice condizione geometrica sufficiente affinché un campo verificante le (3.3.7) sia conservativo.

Teorema 3.3.7 *Sia $F : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ un campo vettoriale di classe $C^1(A)$ verificante la condizione (3.3.7). Se A è un aperto convesso o, piú in generale, stellato rispetto ad un suo punto, allora F è conservativo.*

Osservazione 3.3.8 Se A è stellato rispetto al punto $x_0 \in A$ allora la funzione definita per ogni $x \in A$ da $f(x) = \int_\gamma F \cdot d\ell$, dove $\gamma : [0,1] \to A$ è data da $\gamma(t) = x_0 + t(x - x_0)$ è una primitiva di F.



Una conseguenza immediata di questo teorema è il seguente risultato, denominato a volte Lemma di Poincaré.

Teorema 3.3.9 *Se $A \subset \mathbb{R}^n$ è aperto e $F : A \to \mathbb{R}^n$ verifica la condizione (3.3.7) allora per ogni $x_0 \in A$ esistono un intorno U di x_0 ed una funzione $f \in C^1(U)$ tali che $\nabla f = F$ in U. Tali primitive f si dicono* primitive *o* potenziali locali di F.

Possiamo quindi affermare che nel problema enunciato all'inizio di questo paragrafo è essenziale il dato del dominio A in cui si vuole risolverlo. A questo punto, comunque, resta da vedere come si possono calcolare le primitive (locali o globali) di un campo dato $F : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, che supponiamo di classe C^1. Per prima cosa, si controlla la (3.3.7): se tale condizione non vale allora certamente il campo F non è (neanche localmente) conservativo. Se la (3.3.7) è verificata, il passo successivo è vedere se qualcuna delle condizioni nel Teorema 3.3.7 è soddisfatta: se ciò accade, esistono primitive globali. Altrimenti, le primitive che si troveranno saranno, almeno in principio (vedi Osservazione 3.3.10) solo locali. In ogni caso, si procede al loro calcolo seguendo uno dei seguenti metodi.

Primo metodo (integrale lungo una curva) Si fissa (arbitrariamente) un punto x_0 in A e per ogni punto x di A si considera una curva regolare φ (anch'essa arbitraria) di estremi (nell'ordine) x_0 ed x. L'integrale $\int_\varphi F \cdot d\ell$ (che per il Teorema 3.3.4 dipende solo dal punto terminale x) dà il potenziale di F che si annulla in x_0. Conviene (se la geometria dell'insieme A lo consente) scegliere un segmento oppure una poligonale con i lati paralleli agli assi coordinati. Se l'insieme A non è connesso per poligonali si ripete il procedimento in ciascuna componente connessa (vedi Esempio 1.1.21.3). Per esempio, consideriamo il campo vettoriale

$$F(x,y) = \Big(\frac{-2x}{(x^2-y-1)^2}, \frac{1}{(x^2-y-1)^2}\Big), \qquad (x,y) \in A = \mathbb{R}^2 \setminus \{(x,y) :\ y = x^2-1\}.$$

Il campo F verifica la (3.3.7) e il suo dominio A è costituito dalle due componenti connesse $A_1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 :\ y > x^2-1\}$ e $A_2 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 :\ y < x^2-1\}$, con A_1 convesso ed A_2 né convesso né stellato. Si possono calcolare le primitive in A_1 partendo per esempio dall'origine ed integrando lungo segmenti. Fissato il punto generico $(x,y) \in A_1$, il segmento di estremi $(0,0)$ e (x,y) ha parametrizzazione $\varphi(t) = (tx,ty)$, $t \in [0,1]$. La primitiva nulla nell'origine vale allora in (x,y)

$$\begin{aligned}\int_\varphi F \cdot d\ell &= \int_0^1 \Big(\frac{-2tx}{(t^2x^2-ty-1)^2}, \frac{1}{(t^2x^2-ty-1)^2}\Big) \cdot (x,y)\,dt = \int_0^1 \frac{-2tx^2+y}{(t^2x^2-ty-1)^2}\,dt \\ &= \Big[\frac{1}{t^2x^2-ty-1}\Big]_0^1 = \frac{1}{x^2-y-1} + 1.\end{aligned}$$

In A_2 possiamo fissare ad esempio il punto $P_0(0,-2)$ ed integrare fino a $P(x,y)$ lungo la poligonale φ di vertici P_0, P_1, P, con $P_1(x,-2)$. Posto

$$\varphi(t) = \begin{cases} (2tx, -2) & \text{per } 0 \le t \le 1/2 \\ (x, -2+(2t-1)(y+2)) & \text{per } 1/2 < t \le 1, \end{cases}$$

si ha

$$\begin{aligned}\int_\varphi F\cdot d\ell &= \int_0^{1/2}\frac{-8tx^2}{(4t^2x^2+1)^2}\,dt+\int_{1/2}^1\frac{2(y+2)}{[x^2-(2t-1)(y+2)+1]^2}\,dt\\ &= \Big[\frac{1}{4t^2x^2+1}\Big]_0^{1/2}+\Big[\frac{1}{x^2-(2t-1)(y+2)+1}\Big]_{1/2}^1=\frac{1}{x^2-y-1}-1\end{aligned}$$

e quest'ultima funzione è la primitiva di F in A_2 che si annulla in $(0,-2)$. In generale, le primitive di F in A sono allora

$$f(x,y)=\frac{1}{x^2-y-1}+c_1\chi_{A_1}(x,y)+c_2\chi_{A_2}(x,y),$$

dove χ_E denota la *funzione caratteristica* dell'insieme E, vedi (5.2.2).

Secondo metodo (primitive parziali) Si calcola l'integrale indefinito della prima componente di F rispetto ad x_1:

$$\int F_1(x_1,\dots,x_n)\,dx_1;$$

sia f_1 una primitiva. Se F_1 dipendesse solo da x_1, il risultato sarebbe determinato a meno di una costante, ma, poiché sono presenti le altre variabili, che entrano solo come parametri nel calcolo dell'integrale, f_1 sarà determinata *a meno di una funzione delle variabili* $x_2,\dots,x_n$, sia $g(x_2,\dots,x_n)$. Si impone allora che

$$\frac{\partial f_1}{\partial x_i}(x)+\frac{\partial g}{\partial x_i}(x)=F_i(x)\qquad\qquad \forall\, i=2,\dots,n$$

e si usano queste equazioni per determinare g. Per esempio, sia

$$F(x,y)=\Big(\frac{2x}{x^2+y^2},\frac{2y}{x^2+y^2}\Big),\qquad\qquad (x,y)\in A=\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}.$$

Si verifica facilmente che F verifica (3.3.7). Allora

$$\int\frac{2x}{x^2+y^2}\,dx=\log(x^2+y^2)+g(y);$$

con la notazione precedente, $f_1(x,y)=\log(x^2+y^2)$. Imponendo

$$\frac{\partial f_1}{\partial y}(x,y)+g'(y)=\frac{\partial}{\partial y}\log(x^2+y^2)+g'(y)=F_2(x,y)=\frac{2y}{x^2+y^2}$$

si ottiene $g'(y)=0$, ossia g costante, e, poiché A è connesso per poligonali, l'espressione $f(x,y)=\log(x^2+y^2)+c$, al variare di $c\in\mathbb{R}$, rappresenta tutte le primitive di F.

Osservazione 3.3.10 Se consideriamo l'esempio precedente, possiamo notare che il dominio A del campo studiato non è né convesso né stellato, sicché non si può affermare a priori che esistano primitive globali in A; anzi, visto che è lo stesso dominio dell'esempio 3.3.6, sappiamo che in generale non possiamo aspettarci che ce ne siano. In realtà il calcolo delle primitive, inizialmente solo locali, ha condotto direttamente ad ottenere primitive globali, dal momento che le funzioni $\log(x^2 + y^2) + c$ sono definite in tutto l'aperto A. Quest'eventualità va sempre considerata: dopo aver calcolato le primitive locali, un esame del loro dominio naturale di definizione dirà se sono solo locali oppure globali.

Nel caso di $\mathbb{R}^2$ si può dare una condizione geometrica su A piú generale di quelle date nel Teorema 3.3.7 affinché il campo $F : A \to \mathbb{R}^2$ sia conservativo.

Proposizione 3.3.11 *Sia $F : A \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ un campo vettoriale di classe $C^1(A)$ verificante la condizione (3.3.7). Supponiamo che A verifichi la seguente condizione:*

> *per ogni $B \subset \mathbb{R}^2$ tale che ∂B sia il sostegno di una curva regolare contenuta in A risulta $B \subset A$;*

allora F è conservativo.

Per esempio, il dominio $A = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ nell'esempio 3.3.6 non gode della proprietà considerata nella proposizione precedente: la circonferenza di centro l'origine e raggio R, per esempio, è la frontiera del cerchio $B_R(0)$, che *non è contenuto in A*. Lo stesso accade per tutte le curve discusse dopo lo stesso esempio.
I domini connessi per cui vale la condizione predente si dicono *semplicemente connessi*.

CAPITOLO 4

EQUAZIONI DIFFERENZIALI

4.1 Introduzione ed esempi

Le equazioni differenziali ordinarie esprimono una relazione funzionale tra un certo numero di derivate di una funzione (scalare o vettoriale) di una variabile reale $y(t)$ che è l'incognita dell'equazione. Possiamo quindi dire che la forma più generale di un'equazione differenziale ordinaria è la seguente

$$F(t, y(t), y'(t), \dots, y^{(k)}(t)) = 0. \tag{4.1.1}$$

Il termine *ordinarie* è usato per distinguerle dalle equazioni differenziali *alle derivate parziali* che coinvolgono funzioni di più variabili e le loro derivate parziali. Le equazioni che coinvolgono funzioni vettoriali sono a volte chiamate *sistemi*, e per essi useremo spesso la notazione vettoriale, che è più compatta; se y in (4.1.1) è a valori in $\mathbb{R}^n$, allora s'intenderà che F è funzione di $(n(k+1)+1)$ variabili reali, a valori in $\mathbb{R}^n$. Nel seguito parleremo di equazioni anche nel caso vettoriale, dando enunciati unificati. L'*ordine* di un'equazione differenziale è l'ordine massimo delle derivate che vi compaiono, ad esempio l'ordine dell'equazione (4.1.1) è k.

Osserviamo che in realtà *ogni sistema differenziale si può ricondurre ad un sistema di ordine 1*, a patto di aumentare la dimensione del codominio delle incognite, cioè il numero di equazioni del sistema. Vedremo questo nel caso particolare delle equazioni (scalari) di ordine k qualunque. Per questa ragione, possiamo limitarci a studiare sistemi del primo ordine, senza perdita di generalità.

Nel seguito indicheremo con t la variabile reale indipendente, con y la funzione (scalare o vettoriale) incognita e useremo le lettere I, J per indicare gli intervalli di definizione delle soluzioni. Per prima cosa, definiamo in modo dettagliato che cosa si intende per *soluzione* di un'equazione differenziale.

Definizione 4.1.1 (Soluzioni locali, massimali, globali) *Siano $A \subset \mathbb{R}^{2n+1}$, $F : A \to \mathbb{R}^n$ una funzione continua, e consideriamo l'equazione differenziale $F(t, y, y') = 0$ e la funzione $u : I \to \mathbb{R}^n$.*

1. *La funzione u è una* soluzione locale *se il suo dominio I è un intervallo reale, u è derivabile in I, il punto $(t, u(t), u'(t))$ appartiene ad A per ogni $t \in I$, e vale l'eguaglianza $F(t, u(t), u'(t)) = 0$ per ogni $t \in I$.*

2. *Si dice che la funzione $v : J \to \mathbb{R}^n$ è un* prolungamento *della soluzione locale u se v è a sua volta una soluzione locale, l'intervallo J include I e $v(t) = u(t)$ per ogni $t \in I$; se J include propriamente I si dice che v è un* prolungamento proprio.

3. *Si dice che u è una* soluzione massimale *se è una soluzione locale e non ammette prolungamenti propri.*

4. *Se $A = J \times \mathbb{R}^{2n}$, con $J \subset \mathbb{R}$ intervallo, si dice che $u : I \to \mathbb{R}^n$ è* soluzione globale *se è soluzione locale e $I = J$.*

5. *Si dice* integrale generale*, o* soluzione generale*, l'insieme di tutte le soluzioni massimali.*

Nel seguito, col termine soluzione privo di ulteriori specificazioni intenderemo sempre una soluzione locale.

Data un'equazione differenziale, affronteremo i seguenti problemi:

1. Esistono soluzioni?
2. In caso affermativo, si può dire quante sono?
3. Si possono dare condizioni affinché la soluzione esista e sia unica?
4. Le soluzioni trovate sono sempre globali, o almeno massimali?
5. Per quali classi di equazioni si possono dare dei metodi di calcolo delle soluzioni?

Indichiamo il tipo di risultati che ci si può attendere nel seguente esempio.

Esempio 4.1.2 In generale un'equazione può non avere alcuna soluzione. Per esempio, l'equazione $(y')^2 = -e^y$ non ha alcuna soluzione (il primo membro è ≥ 0 e il secondo è < 0).

Si verifica facilmente che anche l'equazione $y' = f(t)$ con $f(t) = -1$ per $t < 0$ e $f(t) = 1$ per $t \geq 0$ non ha soluzioni definite in un intervallo Contenente il punto 0.

Tipicamente, se un'equazione ha soluzioni esse sono infinite. Per esempio, la più semplice equazione differenziale del primo ordine, $y' = f(t)$, dove f è una funzione continua in un intervallo I, ha per soluzione generale l'integrale indefinito di f, a norma del Teorema fondamentale del calcolo; in altri termini, fissato $t_0 \in I$:

$$y' = f(t) \qquad \Longrightarrow \qquad y(t) = \int_{t_0}^{t} f(s)ds + c_0$$

con $c_0 \in \mathbb{R}$ costante arbitraria. Analogamente

$$y'' = f(t) \qquad \Longrightarrow \qquad y(t) = \int_{t_0}^{t} \Big(\int_{t_0}^{\tau} f(s)ds \Big) d\tau + c_1 t + c_0$$

con $c_0, c_1 \in \mathbb{R}$ costanti arbitrarie. Allo stesso modo, la soluzione dell'equazione $y^{(k)} = f(t)$ dipende da k parametri, o, più precisamente, da un polinomio arbitrario di grado $k-1$. Vedremo che questo è un fatto generale: la soluzione di un'equazione differenziale di ordine k dipende da k costanti arbitrarie, e se ne può selezionare una assegnando k condizioni indipendenti. Vedremo nel prossimo paragrafo alcuni risultati che assicurano l'esistenza e l'unicità della soluzione di un problema standard costituito da un'equazione differenziale ed opportune altre condizioni.

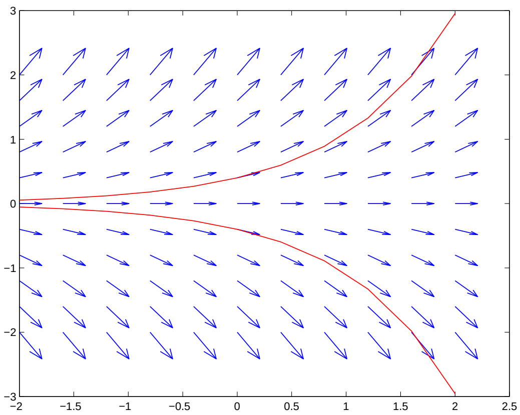
Le soluzioni delle equazioni differenziali, anche semplici, in generale non sono globali. Per esempio, vedremo (vedi Paragrafo 4.4.a) che l'integrale generale dell'equazione $y' = y^2$ è dato da $u(t) = 1/(c-t)$, al variare di $c \in \mathbb{R}$, e nessuna di queste funzioni è definita in $\mathbb{R}$, malgrado il dominio di $F(t, y, y') = y' - y^2$ sia $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^2$ ed F sia regolare (vedi Osservazione 4.2.8).

4.2 Teoremi di esistenza

L'equazione (4.1.1) è troppo generale per poter ottenere risultati significativi, quindi considereremo, nella trattazione generale, solo equazioni *in forma normale*, cioè del tipo

$$y' = f(t, y) \tag{4.2.2}$$

con f continua. Nel caso delle equazioni del primo ordine $y' = f(t, y)$, la funzione $f(t, y)$ assegna ad ogni punto del piano (t, y) una direzione, quella della retta il cui coefficiente angolare è $f(t, y)$. Quindi, in termini geometrici, cercare una soluzione dell'equazione vuol dire cercare le curve (anzi i grafici) Γ tali che, in ogni loro punto, la retta tangente a Γ abbia coefficiente angolare uguale a $f(t, y)$.
Ad esempio l'equazione differenziale $y' = y$ ha la seguente interpretazione geometrica.



In questa Sezione daremo inizialmente un teorema generale di esistenza *globale* ed unicità per equazioni o sistemi a crescita al più lineare con una condizione iniziale.

Definizione 4.2.1 (Problema di Cauchy) *Sia $A \subset \mathbb{R}^{n+1}$ aperto, ed $f : A \to \mathbb{R}^n$ continua; si dice* problema di Cauchy *la coppia di equazioni*

$$\begin{cases} y'(t) = f(t, y(t)) \\ y(t_0) = y_0 \end{cases} \tag{4.2.3}$$

dove $(t_0, y_0) \in A$.

Per prima cosa, notiamo che il problema di Cauchy precedente è equivalente ad un'equazione integrale.

Lemma 4.2.2 *Siano $A \subset \mathbb{R}^{n+1}$ aperto, $f : A \to \mathbb{R}^n$ continua e $(t_0, y_0) \in A$; siano inoltre I un intervallo reale contenente t_0 e $u : I \to \mathbb{R}^n$. Sono equivalenti:*

(i) *$u \in C^1(I)$ è soluzione del problema di Cauchy (4.2.3).*

(ii) *u è continua in I e verifica l'equazione*

$$u(t) = y_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, u(s))ds, \qquad t \in I. \tag{4.2.4}$$

DIM. (i) $\Rightarrow$ (ii). Per il teorema fondamentale del calcolo, dal momento che vale (4.2.3), risulta

$$u(t) = u(t_0) + \int_{t_0}^{t} u'(s)ds = y_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, u(s))ds$$

per ogni $t \in I$.
(ii) $\Rightarrow$ (i). Poiché u ed f sono continue, la funzione $s \mapsto f(s, u(s))$ è continua e quindi integrandola tra t_0 e t si ottiene una funzione $C^1(I)$. Siccome vale (4.2.4), anche u è di classe $C^1(I)$ e risulta $u(t_0) = y_0$. Per il teorema fondamentale del calcolo, la derivata di u è uguale all'integrando, cioè vale $u'(t) = f(t, u(t))$ per ogni $t \in I$ e u è soluzione di (4.2.3). QED

L'utilità del lemma precedente consiste nel fatto che la ricerca della soluzione del problema di Cauchy viene ridotta alla ricerca di una funzione solo *continua*, e questo facilita la dimostrazione dell'esistenza della soluzione. Per quanto riguarda l'unicità invece, sarà utile il seguente enunciato, che è un caso particolare di un risultato noto come *Lemma di Gronwall*.

Lemma 4.2.3 (Gronwall) *Siano $L > 0$, I un intervallo, $t_0 \in I$ e $w : I \to [0, +\infty)$ una funzione continua. Se*

$$w(t) \leq L \left| \int_{t_0}^{t} w(s)ds \right| \qquad \forall\, t \in I$$

allora $w(t) = 0$ per ogni $t \in I$.

Dim. Ragioniamo dapprima per $t \geq t_0$. Posto, per ogni $\varepsilon > 0$,

$$v_\varepsilon(t) = \varepsilon + L \int_{t_0}^{t} w(s)ds,$$

risulta $v_\varepsilon'(t) = Lw(t)$, e, per ipotesi, $v_\varepsilon'/v_\varepsilon \leq L$, per cui:

$$\log \frac{v_\varepsilon(t)}{\varepsilon} = \int_{t_0}^{t} \frac{v_\varepsilon'(s)}{v_\varepsilon(s)} ds \leq L(t - t_0)$$

e quindi $w(t) \leq v_\varepsilon(t) \leq \varepsilon \exp\{L(t - t_0)\}$ per ogni $t \in I,\ t \geq t_0$. Per l'arbitrarietà di ε segue $w = 0$.

Per $t \leq t_0$, basta applicare il ragionamento precedente alla funzione $v(t) = w(t_0 - t)$.
QED

Possiamo ora provare il principale risultato di esistenza ed unicità per il problema di Cauchy.

Teorema 4.2.4 (Esistenza globale in intervalli compatti) *Siano $A = [a, b] \times \mathbb{R}^n$ ed $f : A \to \mathbb{R}^n$ una funzione continua. Supponiamo che esista una costante $L > 0$ tale che valga la condizione*

$$\|f(t, y) - f(t, z)\| \leq L\|y - z\| \qquad \forall t \in [a, b],\ y,\ z \in \mathbb{R}^n. \tag{4.2.5}$$

Allora, per ogni $(t_0, y_0) \in A$ esiste un'unica soluzione globale del problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'(t) = f(t, y(t)) \\ y(t_0) = y_0 \end{cases} \tag{4.2.6}$$

Dim. A norma del Lemma 4.2.2, cercheremo una funzione continua $u : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ tale che valga (4.2.4). Tale funzione sarà ottenuta come limite uniforme di una successione di funzioni continue, e, poiché l'integrale vettoriale nel membro destro è eseguito come al solito componente per componente, useremo il fatto che i risultati visti nell'ultimo Capitolo delle dispense di Analisi Matematica I si estendono al caso vettoriale (vedi Osservazione 1.4.2).

Definiamo per ricorrenza la successione di funzioni:

$$u_0(t) = y_0, \qquad u_{h+1}(t) = y_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, u_h(s))ds, \qquad h \in \mathbb{N},$$

e proviamo che converge uniformemente in $[a, b]$ alla soluzione (unica) di (4.2.6). Posto $M = \max\{\|f(t, y_0)\| :\ t \in [a, b]\}$, il primo passo è la dimostrazione, per induzione, della seguente diseguaglianza:

$$\|u_h(t) - u_{h-1}(t)\| \leq \frac{ML^{h-1}|t - t_0|^h}{h!}, \qquad h \geq 1,\ t \in [a, b]. \tag{4.2.7}$$

La diseguaglianza è ovvia per $h = 1$:

$$\|u_1(t) - u_0(t)\| \le \left| \int_{t_0}^{t} \|f(s, y_0)\| ds \right| \le M|t - t_0|.$$

Supposta vera la (4.2.7) per un certo valore h, proviamola per il valore $h + 1$. Risulta:

$$\begin{aligned} \|u_{h+1}(t) - u_h(t)\| &\le \left| \int_{t_0}^{t} \|f(s, u_h(s)) - f(s, u_{h-1}(s))\| ds \right| \\ &\le \left| \int_{t_0}^{t} L\|u_h(s) - u_{h-1}(s)\| ds \right| \\ &\le \left| \int_{t_0}^{t} \frac{ML^h|s - t_0|^h}{h!} ds \right| = \frac{ML^h|t - t_0|^{h+1}}{(h+1)!}. \end{aligned}$$

Prendendo l'estremo superiore per $t \in [a, b]$, segue

$$\sup_{t\in[a,b]} \|u_h(t) - u_{h-1}(t)\| \le \frac{ML^{h-1}|b - a|^h}{h!}, \qquad h \ge 1. \tag{4.2.8}$$

Il secondo membro di (4.2.8) è il termine generale di una serie numerica convergente, e quindi per il criterio di convergenza totale di Weierstrass la serie

$$\sum_{h=1}^{\infty} \big(u_h(t) - u_{h-1}(t)\big) \tag{4.2.9}$$

converge uniformemente in $[a, b]$. Poiché sussiste la seguente ovvia relazione tra i termini della successione $(u_h)_h$ e la successione delle somme parziali di (4.2.9)

$$u_h(t) = y_0 + \sum_{k=1}^{h} \big(u_k(t) - u_{k-1}(t)\big),$$

la convergenza uniforme della (4.2.9) equivale alla convergenza uniforme della successione $(u_h)_h$ in $[a, b]$. Detta $u : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ la funzione limite, u è una funzione continua in $[a, b]$ per il Teorema sulla continuità del limite. Inoltre, per la condizione (4.2.5) risulta

$$\|f(t, u_h(t)) - f(t, u(t))\| \le L\|u_h(t) - u(t)\|$$

e quindi anche la successione $\big(f(t, u_h(t))\big)_h$ converge ad $f(t, u(t))$ uniformemente in $[a, b]$. Per il Teorema di passaggio al limite sotto il segno di integrale allora

$$\lim_{h\to\infty} \int_{t_0}^{t} f(s, u_h(s)) ds = \int_{t_0}^{t} f(s, u(s)) ds$$

per ogni $t \in [a, b]$ e quindi si può passare al limite per $h \to \infty$ nell'equazione che definisce u_h, ottenendo che la funzione u verifica l'equazione (4.2.4) e quindi risolve il problema di Cauchy (4.2.6).

Resta da provare l'unicità della soluzione. Se $v \in C([a, b])$ è un'altra soluzione, anch'essa verifica (4.2.4), e quindi, posto $w(t) = \|u(t) - v(t)\|$, risulta:

$$w(t) \leq \left| \int_{t_0}^{t} \|f(s, u(s)) - f(s, v(s))\| ds \right| \leq L \left| \int_{t_0}^{t} w(s) ds \right|.$$

Per il Lemma 4.2.3, si ha allora $w = 0$, quindi $u = v$ e la soluzione è unica. *QED*

Le ipotesi del teorema precedente sono piuttosto restrittive, ed infatti consentono una conclusione ottimale, cioè l'esistenza di una soluzione globale. In condizioni per certi versi più generali si ottiene una conclusione più debole.

Teorema 4.2.5 (Esistenza locale) *Siano $A \subset \mathbb{R}^{n+1}$ aperto ed $f : A \to \mathbb{R}^n$ una funzione continua con derivate continue rispetto alle ultime n variabili. Allora, per ogni $(t_0, y_0) \in A$ esiste un'unica soluzione massimale del problema di Cauchy (4.2.6).*

Osservazione 4.2.6 (Regolarità delle soluzioni) Se $y : I \to \mathbb{R}^n$ è soluzione del sistema $y' = f(t, y)$ con f continua in A, allora $f(t, y(t))$ è una funzione continua, e dunque $y \in C^1(I, \mathbb{R}^n)$. Se $f(t, y) \in C^1(A, \mathbb{R}^n)$, allora $f(t, y(t))$ è una funzione appartenente a $(C^1(I))^n$, e dunque $y \in (C^2(I))^n$. Per induzione si verifica che, se $f \in C^k(A, \mathbb{R}^n)$, allora $y \in C^{k+1}(I, \mathbb{R}^n)$. In particolare se $f \in C^\infty$ allora $y \in C^\infty$.

Anche se A è del tipo $I \times \mathbb{R}^n$, con I intervallo non compatto (quindi non chiuso o non limitato, possibilmente anche coincidente con $\mathbb{R}$), in generale, la soluzione fornita dal teorema precedente non è globale. Sotto ulteriori condizioni si ha esistenza di soluzioni globali.

Teorema 4.2.7 (Esistenza globale in intervalli qualunque) *Siano $I \subset \mathbb{R}$ un intervallo, $A = I \times \mathbb{R}^n$ ed $f : A \to \mathbb{R}^n$ una funzione continua. Se per ogni compatto $K \subset I$ esistono due costanti $p, q > 0$ tali che*

$$\|f(t, y)\| \leq p + q\|y\| \qquad \forall t \in K,\ y \in \mathbb{R}^n, \tag{4.2.10}$$

allora tutte le soluzioni massimali dell'equazione $y' = f(t, y(t))$ sono globali. Se inoltre f ha derivate continue rispetto alle ultime n variabili, allora per ogni dato iniziale la soluzione globale è unica.

Osservazione 4.2.8 Il risultato precedente è basato sull'ipotesi che la funzione f abbia una crescita, per $|y| \to +\infty$, al più di ordine 1. Nel caso dell'equazione $y' = y^2$ discussa nell'esempio 4.1.2, l'ordine d'infinito della f per $|y| \to +\infty$ è 2, ed infatti non c'è esistenza globale. La condizione di crescita lineare è verificata anche sotto le ipotesi del Teorema 4.2.4, dal momento che (4.2.5) implica (4.2.10), per esempio con

$$p = \sup_{t \in [a,b]} \|f(t, 0)\|, \qquad q = L.$$

Infatti, risulta

$$\begin{aligned}\|f(t,y)\| &\le \|f(t,0)\| + \|f(t,y)-f(t,0)\| \le \|f(t,0)\| + L\|y\| \\ &\le \sup_{t\in[a,b]} \|f(t,0)\| + L\|y\| = p + q\|y\|.\end{aligned}$$

Viceversa, se nel Teorema 4.2.4 si parte da $A = I \times \mathbb{R}^n$ con I non compatto e si assume che per ogni compatto $K \subset I$ esista $L > 0$ tale che valga (4.2.5) per ogni (x, y) e (x, z) in $K\times\mathbb{R}^n$, si può ancora provare l'esistenza di soluzioni globali procedendo come nel Teorema 4.2.4. Con la stessa notazione, la successione (u_h) convergerà stavolta *uniformemente sui compatti di* I e non uniformemente su tutto l'intervallo I.

I risultati precedenti sono stati enunciati per i sistemi del primo ordine e non per le equazioni sia perché, senza alcun aggravio di difficoltà, risultano in tal modo più generali, sia perché si possono applicare ad equazioni e sistemi di ordine qualunque con un semplice cambio di variabili. Il risultato che segue riguarda le equazioni (scalari) di ordine qualunque.

Teorema 4.2.9 (Esistenza ed unicità per equazioni di ordine k) *Siano $A \subset \mathbb{R}^{k+1}$ aperto ed $g : A \to \mathbb{R}$ una funzione continua con derivate continue rispetto alle ultime k variabili. Allora, per ogni $(t_0, y_0, y_1, \dots, y_{k-1}) \in A$ esiste un'unica soluzione massimale del problema di Cauchy*

$$\begin{cases} y^{(k)}(t) = g(t, y(t), y'(t), \dots, y^{(k-1)}(t)) \\ y(t_0) = y_0 \\ y'(t_0) = y_1 \\ \vdots \\ y^{(k-1)}(t_0) = y_{k-1} \end{cases} \tag{4.2.11}$$

Se poi $A = I\times\mathbb{R}^k$, con $I \subset \mathbb{R}$ intervallo, e per ogni compatto $K \subset I$ esistono due costanti $p, q > 0$ tali che

$$|g(t, y)| \le p + q\|y\| \qquad \forall t \in K,\ y \in \mathbb{R}^k, \tag{4.2.12}$$

allora tutte le soluzioni massimali dell'equazione $y^{(k)}(t) = g(t, y(t), y'(t), \dots, y^{(k-1)}(t))$ sono globali.

Dim. Basta scrivere l'equazione in forma di sistema del primo ordine, e il problema di Cauchy (4.2.11) come (4.2.6), per poi applicare i Teoremi 4.2.5, 4.2.7. Per questo scopo, sia $f : A \to \mathbb{R}^k$ definita da

$$f(t, u_1, \dots, u_k) = (u_2, \dots, u_k, g(t, u_1, \dots, u_k))$$

e notiamo che f è di classe $C^1(A)$, dal momento che lo è g. L'equazione in (4.2.11) si scrive allora in forma di sistema (nell'incognita vettoriale $u = (u_1, \dots, u_k)$) nel modo seguente:

$$\begin{cases} u_1' = f_1(t, u_1, \ldots, u_k) = u_2, \\ u_2' = f_2(t, u_1, \ldots, u_k) = u_3, \\ \vdots \\ u_{k-1}' = f_{k-1}(t, u_1, \ldots, u_k) = u_k, \\ u_k' = f_k(t, u_1, \ldots, u_k) = g(t, u_1, \ldots, u_k) \end{cases}$$

Analogamente si traducono le condizioni iniziali:

$$u_1(t_0) = y_0, \ u'(t_0) = y_1, \ldots, u^{(k-1)}(t_0) = y_{k-1}$$

ed è quindi possibile applicare il Teorema 4.2.5 visto per i sistemi. Per quanto riguarda l'esistenza globale, fissato K compatto contenuto in I, sono determinate per ipotesi due costanti p, q come in (4.2.12), e si ha

$$\|f(t,u)\| = \left(u_2^2 + \cdots u_k^2 + (g(t,u))^2\right)^{1/2} \leq \|u\| + |g(t,u)| \leq p + (1+q)\|u\|,$$

sicché si può applicare il Teorema 4.2.7. $\boxed{QED}$

4.3 Equazioni lineari

In questa Sezione studiamo un'importante classe di equazioni differenziali, cioè quelle *lineari*. La loro importanza risiede principalmente nel fatto che quasi tutti i modelli concreti, in prima approssimazione, sono lineari. Dal nostro punto di vista, la teoria è completa e va da una descrizione dell'integrale generale valida per tutte le equazioni lineari a coefficienti continui ad un metodo di calcolo esplicito nel caso dei coefficienti costanti. In questo paragrafo, consideriamo fissato un intervallo reale I (che può essere limitato o no). Osserviamo che tutto quello che diremo sulle equazioni lineari si può generalizzare ai *sistemi lineari*, per altro con modifiche non sempre facili. I sistemi lineari, comunque, non saranno trattati in questi appunti.

4.3.a Risultati generali

Definizione 4.3.1 (Operatori differenziali lineari) *Date k funzioni continue $a_0, \ldots, a_{k-1} : I \to \mathbb{R}$, definiamo l'operatore differenziale lineare di ordine k a coefficienti $a_0, \ldots, a_{k-1}$ ponendo, per ogni $y \in C^k(I)$:*

$$Ly = y^{(k)} + a_{k-1}(t)y^{(k-1)} + \ldots + a_1(t)y' + a_0(t)y \tag{4.3.13}$$

È ovvio dalle proprietà della derivata che Ly è una funzione continua in I e che l'operatore L è lineare fra gli spazi vettoriali (di dimensione *infinita*) $C^k(I)$ e $C(I)$, cioè verifica $L(\alpha y + \beta z) = \alpha Ly + \beta Lz$ per ogni $y, z \in C^k(I)$ e $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. La forma generale di un'*equazione differenziale lineare di ordine k* è allora

$$Ly = \varphi \tag{4.3.14}$$

dove $\varphi \in C(I)$ ne è il *termine noto.*

Proposizione 4.3.2 (Esistenza di soluzioni) *Tutte le soluzioni massimali dell'equazione $Ly = \varphi$ sono globali.*

DIM. È una semplice applicazione del Teorema 4.2.9. Infatti, l'equazione si può scrivere nella forma $y^{(k)} = g(t, y(t), y'(t), \dots, y^{(k-1)}(t))$, con $g : I \times \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$ data da

$$g(t, y(t), y'(t), \dots, y^{(k-1)}(t)) = -\big(a_{k-1}(t)y^{(k-1)} + \dots + a_1(t)y' + a_0(t)y\big) + \varphi(t);$$

allora, fissato un compatto $K \subset I$, per la diseguaglianza di Cauchy-Schwarz vale la condizione (4.2.12) con $p = \sup_K |\varphi|$ e $q = \sup_K \big(a_{k-1}^2(t) + \dots + a_1^2(t) + a_0^2(t)\big)^{1/2}$. $\boxed{QED}$

Accanto all'equazione $Ly = \varphi$ considereremo l'*omogenea associata* $Ly = 0$.

Lemma 4.3.3 (Integrale generale) *L'integrale generale V dell'equazione $Ly = \varphi$ è dato dalla somma dell'integrale generale V_0 dell'omogenea associata $Ly = 0$ e di una soluzione particolare della $Ly = \varphi$.*

DIM. Sia v una soluzione particolare (arbitraria) di $Ly = \varphi$. Se u è una qualunque soluzione di $Ly = 0$ allora $u + v$ risolve $Ly = \varphi$. Infatti:

$$L(u + v) = Lu + Lv = \varphi.$$

Questo prova l'inclusione $V_0 + v \subset V$. Viceversa, se v_1 è un elemento di V, allora $v_1 - v \in V_0$, dal momento che

$$L(v_1 - v) = Lv_1 - Lv = 0.$$

$\boxed{QED}$

Il lemma precedente mostra che il problema della ricerca dell'integrale generale di $Ly = \varphi$ si può ricondurre al problema della ricerca dell'integrale generale di $Ly = 0$ e di una soluzione particolare di $Ly = \varphi$. Per quanto riguarda l'integrale generale dell'equazione omogenea, vale il seguente risultato.

Teorema 4.3.4 (Integrale generale dell'omogenea) *L'integrale generale V_0 dell'equazione omogenea $Ly = 0$ è un sottospazio di dimensione k dello spazio $C^k(I)$.*

DIM. Il fatto che V_0 sia un sottospazio vettoriale è ovvio dal corso di Geometria ed Algebra, poiché $V_0 = \operatorname{Ker} L$ ed il nucleo di un'applicazione lineare è sempre un sottospazio vettoriale. Il fatto nuovo è che la dimensione di V_0 è finita (mentre potrebbe essere infinita, essendo infinita la dimensione di $C^k(I)$) ed è proprio uguale all'ordine dell'equazione. Per provare questo, costruiamo una base di V_0 costituita da k funzioni linearmente indipendenti risolvendo i seguenti k problemi di Cauchy:

$$\begin{cases} Ly = 0 \\ y(t_0) = 1 \\ y'(t_0) = 0 \\ \vdots \\ y^{(k-1)}(t_0) = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} Ly = 0 \\ y(t_0) = 0 \\ y'(t_0) = 1 \\ \vdots \\ y^{(k-1)}(t_0) = 0 \end{cases} \qquad \dots \qquad \begin{cases} Ly = 0 \\ y(t_0) = 0 \\ y'(t_0) = 0 \\ \vdots \\ y^{(k-1)}(t_0) = 1 \end{cases}$$

Dette $u_1, \ldots, u_k$ le rispettive soluzioni, proviamo che esse sono linearmente indipendenti, cioè che se $u(t) = \sum_{i=1}^k c_i u_i(t) = 0$ per ogni $t \in I$ allora $c_1 = c_2 = \cdots = c_k = 0$. Per questo, basta osservare che tutte le derivate di u sono nulle, e che $u^{(i)}(t_0) = c_{i+1}$, per $i = 0, \ldots, k-1$. Per provare che le $u_1, \ldots, u_k$ sono un sistema di generatori per V_0, consideriamo $u \in V_0$ e mostriamo che esistono costanti $c_1, \ldots, c_k$ tali che $u(t) = \sum_{i=1}^k c_i u_i(t)$. Fissata allora $u \in V_0$, poniamo $c_i = u^{(i-1)}(t_0)$ e $v(t) = \sum_{i=1}^k c_i u_i(t)$. La funzione v risolve il problema di Cauchy

$$\begin{cases} Ly = 0 \\ y(t_0) = c_1 \\ y'(t_0) = c_2 \\ \vdots \\ y^{(k-1)}(t_0) = c_k \end{cases}$$

la cui soluzione, per la scelta delle c_i, è la funzione u iniziale. Poiché il problema di Cauchy ha un'unica soluzione, risulta $v = u$ ed u è combinazione lineare delle u_i. $\boxed{QED}$

Date k soluzioni u_1, ..., u_k dell'equazione $Ly = 0$, definiamo la *matrice Wronskiana*

$$W(t) = \begin{pmatrix} u_1 & u_2 & \ldots & u_k \\ u_1' & u_2' & \ldots & u_k' \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ u_1^{(k-1)} & u_2^{(k-1)} & \ldots & u_k^{(k-1)} \end{pmatrix} \tag{4.3.15}$$

La principale proprietà della matrice W è enunciata nella seguente proposizione.

Proposizione 4.3.5 (Proprietà della matrice Wronskiana) *Se le funzioni u_1, ..., u_k sono linearmente indipendenti allora la matrice wronskiana (4.3.15) $W(t)$ è invertibile per ogni $t \in I$; viceversa, se $W(t_0)$ è invertibile per un $t_0 \in I$, allora è invertibile per ogni $t \in I$ e le $u_1, \ldots, u_k$ sono linearmente indipendenti.*

Notiamo che se le k soluzioni di $Ly = 0$ sono linearmente dipendenti allora $\det W(t) = 0$ per ogni $t \in I$, mentre se sono linearmente indipendenti allora $\det W(t) \neq 0$ (e quindi W è invertibile) per ogni $t \in I$.

Osservazione 4.3.6 Dal Lemma 4.3.3 e dal Teorema 4.3.4 segue che la soluzione generale dell'equazione $Ly = \varphi$ si esprime nella forma

$$u(t) = c_1 u_1(t) + \cdots + c_k u_k(t) + v(t),$$

con le notazioni già introdotte. Tenendo conto anche della Proposizione 4.3.2, si ha quindi che, assegnando le k condizioni iniziali $y(t_0) = y_1, \ldots y^{(k-1)}(t_0) = y_k$, esiste un'unica soluzione globale del relativo problema di Cauchy. Per identificarla, bisogna evidentemente determinare i valori delle costanti $c_1, \ldots, c_k$ eseguendo le derivate, calcolandole nel punto t_0 ed eguagliandole ai valori prescritti. La matrice del sistema così ottenuto è la matrice wronskiana delle u_i calcolata in t_0, che sappiamo essere invertibile, così che vengono univocamente determinate le c_i.

Restano da risolvere evidentemente due problemi: calcolare esplicitamente k soluzioni linearmente indipendenti dell'equazione omogenea $Ly = 0$ e calcolare una soluzione particolare dell'equazione completa $Ly = \varphi$. Non esiste un metodo generale per risolvere il primo di questi due problemi, che risolveremo completamente nel caso particolare (ancorché importante) delle equazioni a coefficienti costanti. Affrontiamo nel Paragrafo 4.3.c il secondo, che si può risolvere nel senso seguente: *se sono note k soluzioni linearmente indipendenti dell'equazione omogenea, è possibile usarle per calcolare una soluzione dell'equazione completa.* Prima però trattiamo a parte il caso delle equazioni del primo ordine.

4.3.b Equazioni di ordine 1

L'equazione lineare del primo ordine si può scrivere in generale nella forma

$$y' + a(t)y = \varphi(t) \tag{4.3.16}$$

con a, φ funzioni continue in I. In questo caso esiste una semplice formula risolutiva.

Proposizione 4.3.7 *Fissato $t_0 \in I$, l'integrale generale dell'equazione (4.3.16) è dato dalla formula*

$$u(t) = \exp\Big\{-\int_{t_0}^t a(s)ds\Big\}\left[c + \int_{t_0}^t \exp\Big\{\int_{t_0}^\tau a(s)ds\Big\}\varphi(\tau)d\tau\right] \tag{4.3.17}$$

al variare di $c \in \mathbb{R}$. Se poi all'equazione è associata la condizione iniziale $y(t_0) = y_0$ si ha

$$u(t) = \exp\Big\{-\int_{t_0}^t a(s)ds\Big\}\left[y_0 + \int_{t_0}^t \exp\Big\{\int_{t_0}^\tau a(s)ds\Big\}\varphi(\tau)d\tau\right] \tag{4.3.18}$$

Dim. Risolviamo dapprima l'equazione omogenea nella forma $y' = -a(t)y$. Dividendo per y (supposta non nulla) si ha

$$\log|y(t)| - c = \int \frac{y'(t)}{y(t)}dt = -\int a(t)dt;$$

prendendo l'esponenziale di ambo i membri e fissando gli estremi di integrazione si ottiene la soluzione generale $cu_1(t)$, con u_1 data da

$$u_1(t) = \exp\Big\{-\int_{t_0}^t a(s)ds\Big\}. \tag{4.3.19}$$

Cerchiamo ora una soluzione particolare dell'equazione completa nella forma

$$v(t) = c(t)u_1(t) = c(t)\exp\Big\{-\int_{t_0}^t a(s)ds\Big\},$$

dove stavolta il coefficiente c (da determinarsi) è pensato variabile. Calcolando v' e sostituendo il risultato in (4.3.16) si ha

$$c'(t)u_1(t) = c'(t)\exp\Big\{-\int_{t_0}^{t} a(s)ds\Big\} = \varphi(t)$$

da cui

$$c(t) = \int_{t_0}^{t} \exp\Big\{\int_{t_0}^{\tau} a(s)ds\Big\}\varphi(\tau)d\tau. \tag{4.3.20}$$

La soluzione generale $u = cu_1 + v$ ($c \in \mathbb{R}$) dell'equazione completa è dunque data da (4.3.17). Se è assegnata la condizione iniziale $y(t_0) = y_0$, per ottenere (4.3.18) basta imporre che $u(t_0) = y_0$, e si ottiene (4.3.18). QED

Notiamo che nelle formule appena provate è riconoscibile la struttura dell'integrale generale data dal Lemma 4.3.3.

Una forma più compatta dell'integrale generale dell'equazione (4.3.16) si può scrivere nel modo seguente: sia $A(t)$ una primitiva di $a(t)$, allora $u_1(t) = \mathrm{e}^{-A(t)}$ è soluzione dell'equazione omogenea e l'integrale generale è:

$$u(t) = \mathrm{e}^{-A(t)}\left[c + \int \mathrm{e}^{A(t)}\,\varphi(t)\,dt\right] \qquad c \in \mathbb{R}\,.$$

4.3.c Metodo di Lagrange o della variazione dei parametri

Questo procedimento per determinare una soluzione particolare v dell'equazione $Ly = \varphi$ è una generalizzazione del procedimento usato nella Proposizione 4.3.7 per le equazioni di ordine 1. In questo caso, supponiamo di conoscere k soluzioni linearmente indipendenti dell'equazione omogenea, siano $u_1, \dots, u_k$, e cerchiamo v nella forma:

$$v(t) = \sum_{i=1}^{k} c_i(t)u_i(t). \tag{4.3.21}$$

Sappiamo che se le c_i sono costanti allora la formula precedente fornisce una soluzione dell'equazione omogenea; vogliamo invece considerare le combinazioni lineari *con coefficienti variabili* (4.3.21) per vedere se è possibile determinare k coefficienti in modo da ottenere $Lv = \varphi$. L'idea è di imporre k condizioni alle k funzioni c_i e di risovere il relativo sistema lineare. Fissate allora k soluzioni linearmente indipendenti dell'equazione omogenea, per esempio le u_i costruite nella dimostrazione del Teorema 4.3.4, prendiamo una v come in (4.3.21) e cerchiamo di determinare in modo opportuno i coefficienti c_i. Imponiamo le k condizioni

$$\sum_{i=1}^{k} c_i'u_i = 0,\ \sum_{i=1}^{k} c_i'u_i' = 0,\ \dots,\ \sum_{i=1}^{k} c_i'u_i^{(k-2)} = 0,\ \sum_{i=1}^{k} c_i'u_i^{(k-1)} = \varphi. \tag{4.3.22}$$

Il sistema risultante, nelle incognite c'_i, ha come matrice associata proprio la matrice Wronskiana delle u_i, che, per la Proposizione 4.3.5, è invertibile per ogni $t \in I$ perché le u_i sono state scelte linearmente indipendenti. Il sistema è allora risolubile e, detta $c'_1(t), \ldots, c'_k(t)$ la k-pla di soluzioni, si verifica facilmente che, ponendo in (4.3.21) come coefficienti primitive di queste, si ottiene una soluzione di $Ly = \varphi$. Infatti, tenendo conto di (4.3.22), risulta:

$$\begin{aligned}
v'(t) &= \sum_{i=1}^{k} c_i(t) u'_i(t) \\
v''(t) &= \sum_{i=1}^{k} c_i(t) u''_i(t) \\
&\vdots \\
v^{(k)}(t) &= \sum_{i=1}^{k} c_i(t) u_i^{(k)}(t) + \sum_{i=1}^{k} c'_i(t) u_i^{(k-1)}(t)
\end{aligned}$$

e, di conseguenza:

$$\begin{aligned}
Lv &= v^{(k)} + a_{k-1}(t) v^{(k-1)}(t) + \cdots + a_0(t) v(t) \\
&= \Big(\sum_{i=1}^{k} c_i(t) u_i(t)\Big)^{(k)} + a_{k-1}(t)\Big(\sum_{i=1}^{k} c_i(t) u_i(t)\Big)^{(k-1)} + \cdots + a_0(t)\Big(\sum_{i=1}^{k} c_i(t) u_i(t)\Big) \\
&= \sum_{i=1}^{k} c'_i(t) u_i^{(k-1)}(t) + \sum_{i=1}^{k} c_i L u_i = \varphi(t).
\end{aligned}$$

Osservazione 4.3.8 Usando una notazione vettoriale, possiamo riformulare il metodo visto. Definiamo il vettore $U(t) = (u_1(t), \ldots, u_k(t))$ le cui componenti sono le k soluzioni linearmente indipendenti e il vettore $C(t) = (c_1(t), \ldots, c_k(t))$ dei coefficienti indeterminati, così che risulti $v = C \cdot U$, e il vettore $G(t) = (0, \ldots, 0, \varphi(t))$. Le condizioni che abbiamo imposto ai coefficienti si possono scrivere in forma compatta

$$W(t) C'(t) = G(t)$$

e, risolvendo questo sistema lineare e integrando, i coefficienti sono dati da

$$C(t) = \int W^{-1}(t) G(t) dt$$

dove l'integrale vettoriale va eseguito componente per componente. È utile confrontare questo metodo, ed i risultati trovati, con quanto visto nel Paragrafo precedente. In quel caso, $k = 1$ e sia U che C e G sono scalari; per quanto riguarda la matrice wronskiana, essa si riduce al solo termine u_1 dato da (4.3.19), sicché

$$W^{-1}(t) = \exp\Big\{\int a(t)dt\Big\}$$

e la formula per C si riduce alla (4.3.20).

4.3.d Equazioni a coefficienti costanti

Come abbiamo detto, non esiste un metodo sistematico per il calcolo esplicito delle soluzioni di un'equazione a coefficienti *continui*, se non per le equazioni del primo ordine (vedi Proposizione 4.3.7). Esiste invece un metodo sistematico per le equazioni a coefficienti *costanti*, cioè quelle in cui i coefficienti a_i in (4.3.13) sono numeri reali. In questo caso, l'intervallo in cui si studia l'equazione è quello in cui è definito il termine noto, ed, in particolare, si può studiare l'equazione omogenea in tutto l'asse reale. Il metodo che presentiamo è basato sulla riduzione del problema ad un problema algebrico, la cui risoluzione è a sua volta basata sul Teorema fondamentale dell'algebra visto nelle dispense di Analisi Matematica I. In questo momento abbiamo bisogno di una sua formulazione più articolata, che descriva completamente le soluzioni di un'equazione algebrica, distinguendo quelle reali da quelle complesse. Ricordiamo la definizione di radice di un polinomio e sua molteplicità.

Definizione 4.3.9 (Radice di un polinomio e molteplicità) *Sia P un polinomio nella variabile λ, sia $\lambda_0 \in \mathbb{C}$ e sia $r \in \mathbb{N}$. Si dice che λ_0 è* radice *di P di* molteplicità *r se P è divisibile per $(\lambda - \lambda_0)^r$ ma non per $(\lambda - \lambda_0)^{r+1}$.*

Ricordiamo il seguente importante risultato, conseguenza del Teorema fondamentale dell'algebra, che precisa il Teorema sui polinomi a coefficienti reali delle dispense di Analisi Matematica I.

Teorema 4.3.10 (Radici dei polinomi) *Sia P un polinomio di grado k a coefficienti reali nella variabile λ.*

(i) *P ammette $r \geq 0$ radici reali distinte $\lambda_1, \dots, \lambda_r$ e $2s \geq 0$ radici complesse (non reali) distinte (a due a due coniugate) $\lambda_{r+1}, \dots, \lambda_{r+s}$, $\bar{\lambda}_{r+1}, \dots, \bar{\lambda}_{r+s}$.*

(ii) *Dette $m_1, \dots, m_r$ le molteplicità delle radici reali $\lambda_1, \dots, \lambda_r$ ed m_{r+j} le molteplicità (comuni) delle radici complesse λ_{r+j}, $\bar{\lambda}_{r+j}$ (per $j = 1, \dots, s$), si ha*

$$m_1 + \cdots + m_r + 2m_{r+1} + \cdots + 2m_{r+s} = k.$$

(iii) *Supposto che il coefficiente di λ^k in $P(\lambda)$ sia 1, esistono numeri reali $p_1, q_1, \dots, p_s, q_s$ tali che*

$$P(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)^{m_1} \cdots (\lambda - \lambda_r)^{m_r} (\lambda^2 + p_1\lambda + q_1)^{m_{r+1}} \cdots (\lambda^2 + p_s\lambda + q_s)^{m_{r+s}}. \quad (4.3.23)$$

Osserviamo che il Teorema appena enunciato contiene varie informazioni che conviene commentare. Esso afferma che un polinomio possiede un numero di radici, ove contate con le rispettive molteplicità, pari al suo grado, sicché, per la definizione di radice e di molteplicità, è completamente scomponibile in fattori lineari. Le radici possono esser reali o complesse, ed abbiamo indicato con r il numero delle radici reali e con s il numero delle radici complesse non reali, senza escludere naturalmente che possa accadere che sia $r = 0$ o $s = 0$. Siccome appunto in generale le radici sono *complesse* anche se i coefficienti sono reali, la scomposizione è possibile solo in $\mathbb{C}$. Inoltre, osserviamo che fin qui quanto detto vale anche per polinomi a coefficienti complessi. Ciò che è peculiare dei polinomi a coefficienti reali è che le radici complesse non reali *si presentano a coppie coniugate*, e questo rende possibile una scomposizione *puramente reale* come in (4.3.23), in cui compaiono fattori di secondo grado con discriminante negativo.

Il Teorema sulle radici dei polinomi ha un'applicazione diretta al calcolo della soluzione generale dell'equazione omogenea a coefficienti costanti. Sussiste infatti il seguente risultato, in cui adoperiamo le medesime notazioni del Teorema 4.3.10.

Teorema 4.3.11 (Integrale generale dell'omogenea a coefficienti costanti) *Data l'equazione a coefficienti reali*

$$Ly = y^{(k)} + a_{k-1}y^{(k-1)} + \ldots + a_1 y' + a_0 y = 0, \tag{4.3.24}$$

siano $\lambda_1, \ldots, \lambda_r, \lambda_{r+1}, \bar{\lambda}_{r+1}, \ldots, \lambda_{r+s}, \bar{\lambda}_{r+s}$ *le radici del polinomio*

$$P(\lambda) = \lambda^k + a_{k-1}\lambda^{k-1} + \ldots + a_1\lambda + a_0 \tag{4.3.25}$$

con rispettive molteplicità $m_1, \ldots, m_r, m_{r+1}, \ldots, m_{r+s}$*. Posto* $\lambda_{r+j} = \alpha_j + i\beta_j$ *per* $j = 1, \ldots, s$*, un sistema di generatori per l'integrale generale dell'equazione (4.3.24) è dato dalle* k *funzioni*

$$\begin{aligned}
&e^{\lambda_1 t},\ te^{\lambda_1 t}, \ldots, t^{m_1-1}e^{\lambda_1 t},\\
&e^{\lambda_2 t},\ te^{\lambda_2 t}, \ldots, t^{m_2-1}e^{\lambda_2 t},\\
&\vdots\\
&e^{\lambda_r t},\ te^{\lambda_r t}, \ldots, t^{m_r-1}e^{\lambda_r t},\\
&e^{\alpha_1 t}\cos(\beta_1 t),\ te^{\alpha_1 t}\cos(\beta_1 t), \ldots, t^{m_{r+1}-1}e^{\alpha_1 t}\cos(\beta_1 t),\\
&e^{\alpha_1 t}\sin(\beta_1 t),\ te^{\alpha_1 t}\sin(\beta_1 t), \ldots, t^{m_{r+1}-1}e^{\alpha_1 t}\sin(\beta_1 t),\\
&\vdots\\
&e^{\alpha_s t}\cos(\beta_s t),\ te^{\alpha_s t}\cos(\beta_s t), \ldots, t^{m_{r+s}-1}e^{\alpha_s t}\cos(\beta_s t),\\
&e^{\alpha_s t}\sin(\beta_s t),\ te^{\alpha_s t}\sin(\beta_s t), \ldots, t^{m_{r+s}-1}e^{\alpha_s t}\sin(\beta_s t).
\end{aligned}$$

Come si è visto nel teorema precedente, nella ricerca delle soluzioni dell'equazione omogenea ha un ruolo fondamentale il polinomio definito in (4.3.25), che si dice *polinomio caratteristico* associato all'operatore L definito in (4.3.24).

Osservazione 4.3.12 L'enunciato del teorema è indubbiamente complesso, anche per la quantità di parametri necessari per enunciarlo, e merita qualche commento. L'idea, ed il procedimento per il calcolo delle soluzioni dell'equazione $Ly = 0$, è invece semplice.

Il primo passo consiste nell'associare all'operatore L il polinomio $P(\lambda)$ che si ottiene sostituendo formalmente alla derivata di ordine j dell'incognita y la potenza λ^j della variabile λ. Si ottiene un polinomio algebrico di grado k, per il quale vale il Teorema fondamentale dell'algebra e quindi il Teorema 4.3.10.

Il secondo passo è la determinazione delle radici del polinomio P, con le rispettive molteplicità. L'osservazione cruciale che lega le radici alle soluzioni dell'equazione differenziale è la seguente: *se λ_0 è radice di P con molteplicità m allora le funzioni $e^{\lambda_0 t}$, $te^{\lambda_0 t}, \ldots, t^{m-1}e^{\lambda_0 t}$ sono soluzioni linearmente indipendenti dell'equazione $Ly = 0$.* Quest'affermazione è molto facile da verificare, dal momento che è sufficiente sostituire le funzioni indicate al posto dell'incognita y nell'equazione per controllare che l'equazione sia soddisfatta. Osserviamo anche che in questo modo ogni radice di P produce un numero di soluzioni di $Ly = 0$ *esattamente uguale alla molteplicità della radice considerata.*

Non abbiamo ancora preso in considerazione la differenza tra il caso $\lambda_0 \in \mathbb{R}$ e il caso $\lambda_0 \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$. Nel caso $\lambda_0 \in \mathbb{C}$, poniamo per fissare le idee $\lambda_0 = \alpha + i\beta$, quanto detto è ancora vero, ma la funzione $e^{\lambda_0 t}$ è a valori complessi, e quindi non rientra nella nostra trattazione. Sappiamo però che, essendo i coefficienti di L (e quindi di P) *tutti reali*, anche il numero $\bar\lambda_0 = \alpha - i\beta$ è radice del polinomio. Dalla definizione dell'esponenziale complesso sappiamo che

$$e^{(\alpha \pm i\beta)t} = e^{\alpha t}\big(\cos(\beta t) \pm i \sin(\beta t)\big),$$

e quindi ad ogni coppia di soluzioni complesse $e^{\lambda_0 t}$, $e^{\bar\lambda_0 t}$ possiamo associare la coppia delle loro combinazioni lineari $e^{\alpha t}\cos(\beta t)$, $e^{\alpha t}\sin(\beta t)$, che, essendo L lineare, sono ancora soluzioni, stavolta *reali*, dell'equazione. In definitiva, ad ogni coppia di soluzioni complesse $t^j e^{\lambda_0 t}$, $t^j e^{\bar\lambda_0 t}$ possiamo sostituire le coppie di soluzioni *reali* $t^j e^{\alpha t}\cos(\beta t)$, $t^j e^{\alpha t}\sin(\beta t)$, per ogni $j = 0, \ldots, m-1$. In questo modo avremo ottenuto dalle $2s$ radici complesse del polinomio P (a due a due coniugate) un numero di soluzioni dell'equazione differenziale pari alla somma delle loro molteplicità.

È meno facile verificare un altro fatto importante, cioè che le funzioni indicate costituiscono un insieme *linearmente indipendente*. Fatto questo, possiamo concludere che alla fine del procedimento abbiamo trovato, come volevamo, k soluzioni reali linearmente indipendenti, che, per il Teorema 4.3.4, costituiscono una base del nucleo dell'operatore lineare L.

4.3.e Soluzione dell'equazione completa in casi particolari

Il metodo di variazione dei parametri ha il pregio di essere del tutto generale. Inoltre, poiché è basato sulla conoscenza dell'integrale generale dell'equazione omogenea, può senz'altro essere applicato nel caso delle equazioni a coefficienti costanti, caso in cui sappiamo calcolare esplicitamente l'integrale generale dell'equazione omogenea. Il suo difetto è che richiede molti calcoli, tra cui, come visto nell'Osservazione 4.3.8, il calcolo dell'inversa di una matrice, ed in più il calcolo di k integrali. Se però il termine noto φ è di tipo particolare, è possibile utilizzare, nel caso delle equazioni a coefficienti costanti, un metodo più diretto, anche questo algebrico. Possiamo identificare la classe dei termini noti a cui si applica questo metodo alternativo dicendo che sono *le funzioni che sono soluzioni di qualche equazione lineare omogenea a coefficienti costanti.* A norma del teorema 4.3.11, queste sono le funzioni contenute nella lista presentata nello stesso teorema e le loro combinazioni lineari. Come nel caso dell'equazione omogenea, presentiamo un risultato generale, riservandoci di commentarlo successivamente.

Teorema 4.3.13 *Dato l'operatore L come in (4.3.24), se nell'equazione $Ly = \varphi$ la funzione φ è del tipo*

$$e^{\alpha t}\big[p_m(t)\cos\beta t + q_n(t)\sin\beta t\big] \qquad \alpha,\ \beta \in \mathbb{R}, \tag{4.3.26}$$

con $p_m(t)$ polinomio di grado m e $q_n(t)$ polinomio di grado n, allora esiste una soluzione particolare $v(t)$ del tipo

$$v(t) = t^h e^{\alpha t}\big[r_p(t)\cos\beta t + s_p(t)\sin\beta t\big] \tag{4.3.27}$$

con $p = \max\{n, m\}$, $r_p(t)$ e $s_p(t)$ polinomi di grado p da determinarsi e h uguale alla molteplicità di $\lambda = \alpha + i\beta$ rispetto al polinomio P dato da (4.3.25), con $h = 0$ se λ non è radice di P.

Non dimostriamo questo teorema, che vogliamo comunque commentare brevemente. Come anticipato, l'ipotesi è che esista un operatore differenziale lineare a coefficienti costanti M tale che $M\varphi = 0$. Ne segue che, se v è soluzione di $Lv = \varphi$, allora, applicando iterativamente gli operatori M ed L si ottiene $MLv = M\varphi = 0$, sicché v va cercata nel nucleo di ML, ossia è combinazione lineare dei generatori di tale nucleo. Queste considerazioni suggeriscono che il problema della determinazione di v si può ricondurre ad un problema algebrico, come quello del calcolo della soluzione generale di un'equazione omogenea.

Osservazioni 4.3.14

1. Se il termine noto φ è *somma* di due funzioni del tipo (4.3.26), allora v sarà somma di due funzioni del tipo (4.3.27), con i corrispondenti parametri.

2. La formula (4.3.26) esprime il caso più generale, e naturalmente, specializzando i parametri, comprende vari casi particolari che semplificano l'espressione (4.3.27):

   (i) $\varphi = p_m$ polinomio: questo accade se $\lambda = \alpha + i\beta = 0$

   (ii) φ esponenziale, se $m = \beta = 0$, o $\varphi(t) = p_m(t)e^{\alpha t}$, se solo $\beta = 0$.

   (iii) φ funzione trigonometrica, se $n = \alpha = 0$, o φ prodotto di un polinomio per una funzione trigonometrica, se solo $\alpha = 0$.

3. Un caso particolare rilevante si verifica quando λ *non è radice di* P: in questo caso in (4.3.27) $h = 0$ e la soluzione v ha un grado, nella sua parte polinomiale, non superiore al grado di φ.

4. Operativamente, si procede così. Si controlla se $\lambda = \alpha + i\beta$ è radice di P o no: in caso affermativo, si registra la sua molteplicità h che entrerà in v; in caso negativo, il termine t^h in (4.3.27) non compare. Si determinano i gradi m ed n dei polinomi p_m e q_n, ed il più grande fra loro, indicato con p; ciò fatto, si scrivono due polinomi di grado p, a coefficienti indeterminati, che sono r_p ed s_p in (4.3.27). Gli altri parametri (α e β) sono di immediata determinazione, e quindi si possiede l'espressione esplicita di v. A quel punto, restano da determinare i coefficienti di r_p ed s_p. Per questo, si sostituisce v al posto dell'incognita in Ly e si eguaglia il risultato a φ. In questo modo si ottiene un sistema le cui incognite sono i coefficienti di r_p ed s_p, che il teorema assicura essere risolubile.

4.4 Altre equazioni integrabili elementarmente

In questa Sezione presentiamo alcune importanti classi di equazioni differenziali ordinarie non lineari del 1^0 e del 2^0 ordine per le quali è noto il metodo di risoluzione.

4.4.a Equazioni a variabili separabili

L'equazione differenziale del 1^0 ordine del tipo

$$y' = f(t)g(y), \tag{4.4.28}$$

dove f e g sono funzioni definite e continue negli intervalli aperti I e J rispettivamente, è detta *a variabili separabili*.

Supponendo $g(y) \neq 0$ per ogni $y \in J$ e dividendo per $g(y)$ ambo i membri della equazione (4.4.28), si ha

$$\frac{y'(t)}{g(y(t))} = f(t);$$

da cui, integrando rispetto a t, si ottiene

$$\int \frac{y'(t)}{g(y(t))}dt = \int f(t)dt$$

(o equivalentemente, osservando che $dy = y'(t)dt$, $\displaystyle\int \frac{1}{g(y)}dy = \int f(t)dt$).

Indicata con G una primitiva di $\frac{1}{g}$ in J e con F una primitiva di f in I, dall'equazione precedente si ricava

$$G(y(t)) = F(t) + c, \tag{4.4.29}$$

con c parametro reale. Abbiamo così dimostrato che ogni funzione derivabile $y(t)$ che soddisfa (4.4.29) è soluzione dell'equazione differenziale (4.4.28). In particolare la (4.4.29) rappresenta una famiglia di soluzioni in *forma implicita* della (4.4.28). Se la funzione G è anche invertibile, allora tale famiglia di soluzioni è data in *forma esplicita* da

$$y(t) = G^{-1}(F(t) + c)$$

con c parametro reale.

Si osservi che se $g(y_0) = 0$ per qualche $y_0 \in J$, allora la funzione costante $y_0(t) = y_0$, $t \in I$, è anche una soluzione dell'equazione differenziale (4.4.28), detta *soluzione stazionaria*, non appartenente alla famiglia di soluzioni definita da (4.4.29). Inoltre, si tenga presente che, in alcuni casi, le equazioni differerenziali a variabili separabili potrebbero ammettere soluzioni non stazionarie differenti da quelle definite da (4.4.29). Per esempio, per l'equazione differenziale

$$y' = y^{2/3}$$

il metodo delle separazioni delle variabili fornisce le soluzioni $y(t) = \dfrac{(t+c)^3}{27}$. Ma tale equazione ammette come soluzioni anche la soluzione stazionaria $y_0(t) = 0$ e le funzioni del tipo

$$y(t) = \begin{cases} \dfrac{(t-a)^3}{27} & \text{se } t < a \\ 0 & \text{se } a \le t \le b \\ \dfrac{(t-b)^3}{27} & \text{se } t > b \end{cases}$$

con $a < 0 < b$.

Esempio 4.4.1 La seguente equazione differenziale del 1^0 ordine

$$y' = y^2 \log t$$

è chiaramente a variabili separabili. In particolare, essa ammette come soluzione la funzione identicamente nulla $y_0(t) = 0$, $t > 0$ (*soluzione stazionaria*). Inoltre, separando le variabili come sopra esposto si ha

$$\frac{dy}{y^2} = \log t dt;$$

da cui, integrando, si ottiene

$$-\frac{1}{y} = t(\log t - 1) + c.$$

Ne segue che tutte le altre soluzioni dell'equazione data sono della forma

$$y(t) = \frac{1}{t(1 - \log t) + C} \quad \text{con } t > 0 \text{ e } C \text{ costante arbitraria.}$$

Osservazione 4.4.2 Equazioni differenziali del 1^0 ordine del tipo

$$y' = g(at + by), \tag{4.4.30}$$

con g funzione definita e continua in un intervallo aperto J e $a,\ b \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, sono immediatamente riconducibili al caso delle equazioni differenziali a variabili separabili. Infatti, posto $z(t) = at + by(t)$ cosicché $z'(t) = a + by'(t)$, la (4.4.30) diventa

$$z' = bg(z) + a$$

che è una equazione differenziale del primo ordine a variabili separabili.

4.4.b Equazioni omogenee

L'equazione differenziale del 1^0 ordine del tipo

$$y' = g\left(\frac{y}{t}\right), \tag{4.4.31}$$

con g funzione definita e continua in un intervallo aperto J, è detta *omogenea*. Per la risoluzione di questa classe di equazioni differenziali basta fare una opportuna sostituzione. Infatti, posto $z(t) = \dfrac{y(t)}{t}$ cosicché $y(t) = tz(t)$ e $y'(t) = z(t) + tz'(t)$, la (4.4.31) diventa

$$z + tz' = g(z) \Longleftrightarrow z' = \frac{1}{t}(g(z) - z)$$

che è una equazione differenziale a variabili separabili il cui metodo di risoluzione è stato dato in 4.4.a.

Riconducibili alla classe delle equazioni differenziali omogenee sono le equazioni differenziali del 1^0 ordine del seguente tipo

$$y' = g\left(\frac{at + by + c}{a't + b'y + c'}\right), \tag{4.4.32}$$

con g funzione definita e continua in un intervallo aperto J e $a,\ a',\ b,\ b',\ c,\ c' \in \mathbb{R}$.

Osserviamo che possono presentarsi i seguenti casi:

1. se $a = a' = b = b' = 0$ e $c' \neq 0$, allora la (4.4.32) diventa

$$y' = g\left(\frac{c}{c'}\right)$$

e quindi ammette come soluzione le funzioni del tipo $y(t) = g\left(\frac{c}{c'}\right)t + C$ al variare di C in $\mathbb{R}$;

2. se a, a', b, b' non sono tutti nulli e $a' = ha$, $b' = hb$ per qualche $h \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, che equivale ad avere $\det \begin{pmatrix} a & b \\ a' & b' \end{pmatrix} = 0$, allora la (4.4.32) diventa una equazione del tipo (4.4.30) per la cui risoluzione basta procedere come indicato nell'Osservazione 4.4.2;

3. se $ab' - a'b \neq 0$, allora la (4.4.32) può essere ricondotta ad una equazione differenziale omogenea con una opportuna sostituzione come è indicato di seguito.

Se $ab' - a'b \neq 0$, allora le rette di equazioni $at + by + c = 0$ e $a't + b'y + c' = 0$ non sono parallele e quindi si intersecano in un solo punto, sia $P_0 = (t_0, y_0)$. Posto

$$s = t - t_0 \quad \text{e} \quad z = y - y_0$$

e dato che $at_0 + by_0 + c = a't_0 + b'y_0 + c' = 0$, si deduce che $z'(s) = \dfrac{dz}{ds} = \dfrac{dy}{dt}$ e

$$\begin{aligned} at + by + c = a(s + t_0) + b(z + y_0) + c &= as + bz + (at_0 + by_0 + c) = as + bz, \\ a't + b'y + c' = a'(s + t_0) + b'(z + y_0) + c' &= a's + b'z + (a't_0 + b'y_0 + c') = a's + b'z. \end{aligned}$$

Effettuando tali sostituzioni, la (4.4.32) diventa

$$z' = g\left(\frac{as + bz}{a's + b'z}\right) = g\left(\frac{a + b(z/s)}{a' + b'(z/s)}\right),$$

e si ottiene un'equazione differenziale omogenea.

Esempio 4.4.3 Si consideri la seguente equazione differenziale del 1^0 ordine

$$y' = \frac{t + y}{t - y}$$

e si osservi che

$$y' = \frac{t\left(1 + \frac{y}{t}\right)}{t\left(1 - \frac{y}{t}\right)} = \frac{1 + \frac{y}{t}}{1 - \frac{y}{t}}.$$

Quindi l'equazione data è di tipo omogeneo cosicché per la sua risoluzione basta effettuare la sostituzione $z(t) = \dfrac{y(t)}{t}$, ottenendo la seguente equazione differenziale

$$z' = \frac{1}{t} \cdot \frac{1 + z^2}{1 - z}$$

che è a variabili separabili. Separando le variabili e integrando si ottiene

$$\int \frac{1 - z}{1 + z^2} dz = \int \frac{1}{t} dt,$$

cioè

$$\arctan z - \log\sqrt{1+z^2} = \log|t| + c, \text{ con } c \text{ costante arbitraria.}$$

Ricordando che $z(t) = \dfrac{y(t)}{t}$, si ottiene che l'integrale generale in forma implicita dell'equazione data è il seguente

$$\arctan\frac{y(t)}{t} = \log\sqrt{t^2+y^2(t)} + c, \text{ con } c \text{ costante arbitraria.}$$

4.4.c Equazioni di Bernoulli

L'equazione differenziale del 1^0 ordine del tipo

$$y' = a(t)y + b(t)y^\alpha, \tag{4.4.33}$$

dove a e b sono funzioni definite e continue nell'intervallo aperto I e $\alpha \in \mathbb{R}$, è detta *equazione di Bernoulli*.

Osserviamo che se $\alpha = 0$ la (4.4.33) si riduce ad un'equazione differenziale lineare del 1^0 ordine il cui integrale generale è dato da (4.3.17). Invece, se $\alpha = 1$ la (4.4.33) si riduce ad un'equazione differenziale del 1^0 ordine a variabili separabili il cui metodo di risoluzione è stato dato in 4.4.a. Inoltre per un qualsiasi $\alpha > 0$, la (4.4.33) ammette come soluzione la funzione identicamente nulla. Per questo nel seguito supporremo che α non sia né 0 né 1 e trascureremo tra le soluzioni la funzione identicamente nulla.

Il metodo di risoluzione per le equazioni differenziali di Bernoulli è il seguente.

Dividendo ambo i membri di (4.4.33) per y^α, si ha

$$\frac{y'}{y^\alpha} = a(t)y^{1-\alpha} + b(t);$$

da qui, posto $z(t) = (y(t))^{1-\alpha}$, cosicché $z'(t) = (1-\alpha)(y(t))^{-\alpha}y'(t)$, segue che

$$\frac{z'}{1-\alpha} = a(t)z + b(t) \Longleftrightarrow z' = (1-\alpha)a(t)z + (1-\alpha)b(t). \tag{4.4.34}$$

L'equazione (4.4.34) così ottenuta è chiaramente un'equazione differenziale lineare del primo ordine e quindi, per (4.3.17), il suo integrale generale è dato dalla seguente formula

$$z(t) = \exp\left\{-\int(\alpha-1)a(t)dt\right\}\left[c + \int\exp\left\{\int(\alpha-1)a(s)ds\right\}(1-\alpha)b(t)dt\right] \tag{4.4.35}$$

al variare di $c \in \mathbb{R}$.

A questo punto, ricordando che $z(t) = (y(t))^{1-\alpha}$, da (4.4.35) si ottiene l'integrale generale dell'equazione differenziale di Bernoulli (4.4.33).

Esempio 4.4.4 La seguente equazioni differenziale del 1^0 ordine

$$y' = 2y + ty^2$$

è di tipo Bernoulli con $\alpha = 2$. Dividendo ambo i membri per y^2 e ponendo $z(t) = (y(t))^{-1}$, si ottiene

$$-z' = 2z + t \Longleftrightarrow z' + 2z = -t.$$

Per (4.3.17) l'integrale generale dell'equazione differenziale lineare del 1^0 ordine così ottenuta è dato da

$$z(t) = \mathrm{e}^{-2t}\left[c - \int \mathrm{e}^{2t}\, t\, dt\right] = \mathrm{e}^{-2t}\left[c - \frac{1}{2}\,\mathrm{e}^{2t}\, t + \frac{1}{4}\,\mathrm{e}^{2t}\right].$$

A questo punto, ricordando che $z(t) = (y(t))^{-1}$, si ottiene che l'integrale generale dell'equazione proposta è il seguente

$$y(t) = \frac{1}{\mathrm{e}^{-2t}\left[c - \frac{1}{2}\,\mathrm{e}^{2t}\, t + \frac{1}{4}\,\mathrm{e}^{2t}\right]}.$$

4.4.d Equazioni differenziali non lineari del 2^0 ordine

Equazioni della forma $y'' = f(t, y')$ L'equazione differenziale del 2^0 ordine del tipo

$$y'' = f(t, y'), \tag{4.4.36}$$

dove f è una funzione continua con derivata continua rispetto alla seconda variabile in un aperto $A \subset \mathbb{R}^2$, si riduce ad un'equazione differenziale del 1^0 ordine ponendo $z(t) = y'(t)$, cosicché $z'(t) = y''(t)$. Infatti, effettuando tali sostituzioni la (4.4.36) diventa

$$z' = f(t, z),$$

il cui metodo di risoluzione dipende dalla forma analitica di f, come dimostra il seguente esempio.

Esempio 4.4.5 Si consideri la seguente equazione differenziale del 2^0 ordine

$$y'' = (y')^2 + 1.$$

Posto $z(t) = y'(t)$, essa si riduce ad un'equazione differenziale del 1^0 ordine a variabili separabili. Infatti, diventa

$$z' = z^2 + 1,$$

da cui, separando le variabili e integrando, si ottiene

$$\arctan z = t + c \Longleftrightarrow z = \tan(t + c) \text{ con } c \text{ costante arbitraria.}$$

Di conseguenza, l'integrale generale dell'equazione differenziale data è il seguente

$$y(t) = -\log|\cos(t + c)| + d \text{ con } c \text{ e } d \text{ costanti arbitrarie.}$$

Equazioni del secondo ordine autonome Le equazioni differenziali del 2^0 ordine del tipo

$$y'' = f(y, y'), \tag{4.4.37}$$

sono dette *autonome* perché la variabile t non vi compare esplicitamente e quindi, pensando al solito alla t come variabile temporale, sono tipici modelli di un sistema privo di termini forzanti, il cui comportamento è interamente governato dallo stato del sistema stesso.

Supposto che f sia una funzione di classe C^1 in un aperto $A \subset \mathbb{R}^2$, l'equazione data si risolve integrando successivamente due equazioni differenziali del 1^0 ordine, in una delle quali la funzione incognita dipende dalla variabile y, che viene assunta come variabile indipendente. Infatti, posto

$$z(y(t)) = y'(t) \Longrightarrow y''(t) = \frac{dy'}{dt}(t) = \frac{dz}{dy}(y(t))\frac{dy}{dt}(t) = \dot{z}(y)z(y)$$

(dove abbiamo indicato con $\dot{z}$ la derivata di z rispetto ad y), la (4.4.37) diventa

$$z\dot{z} = f(y, z), \tag{4.4.38}$$

il cui metodo di risoluzione dipende ovviamente dalla forma analitica di f. Ora, supponendo che $z = z(y, c_1)$ sia l'integrale generale di (4.4.38) con $c_1 \in \mathbb{R}$ e ricordando che $z = y'$, si perviene alla seguente equazione differenziale del 1^0 ordine a variabili separabili:

$$y' = z(y, c_1),$$

il cui metodo di risoluzione è dato in 4.4.a e le cui soluzioni sono tutte e sole quelle di (4.4.37).

Esempio 4.4.6 Si consideri il Problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'' = y'(1+y) \\ y(0) = 2 \\ y'(0) = 4. \end{cases} \tag{4.4.39}$$

Effettuando la sostituzione $z(y(t)) = y'(t)$ come sopra indicato, il problema di Cauchy (4.4.39) diventa

$$\begin{cases} z\dot{z} = z(1+y) \\ z(2) = 4 \end{cases}$$

(osservare la nuova condizione iniziale). Oltre alla soluzione costante $z(y) = 0$, che non verifica la condizione iniziale, l'equazione ammette come soluzioni le funzioni del tipo

$$z(y) = y + \frac{1}{2}y^2 + C_1 \Longleftrightarrow y' = y + \frac{1}{2}y^2 + C_1, \text{ con } C_1 \text{ costante arbitraria.}$$

Di conseguenza, per la condizione iniziale su z, la soluzione di (4.4.39) soddisfa la seguente equazione differenziale

$$y' = y + \frac{1}{2}y^2 \Longleftrightarrow y' = \frac{1}{2}(y^2 + 2y).$$

A questo punto, separando le variabili e integrando, si ottiene

$$\int \frac{2}{(y+2)y} dy = \int dt;$$

da qui segue, usando i fratti semplici per calcolare l'integrale in y,

$$\log\left(\frac{y}{y+2}\right) = t + C_2 \Longrightarrow \frac{y(t)}{y(t)+2} = k\,\mathrm{e}^t, \text{ con } k \text{ costante arbitraria.}$$

Infine, dalla condizione iniziale $y(0) = 2$ si ricava $k = \dfrac{1}{2}$ e la soluzione di (4.4.39) è la funzione

$$y(t) = \frac{2\,\mathrm{e}^t}{2 - \mathrm{e}^t}.$$

Un caso particolare dell'equazione (4.4.37) è

$$y'' = f(y),$$

in cui non compare esplicitamente la y'. Col metodo visto, si ha successivamente $z(y) = y'(t)$, $y'' = z\dot{z}$ e quindi

$$\int z dz = \int f(y)dy$$

da cui, se l'integrale al secondo membro è positivo,

$$(y')^2 = 2\int f(y)dy \quad \Longrightarrow \quad y' = \sqrt{2\int f(y)dy},$$

che è un'equazione a variabili separabili.

Esempio 4.4.7 Consideriamo il problema di Cauchy:

$$\begin{cases} y'' = 2y^3 \\ y(0) = 1 \\ y'(0) = 1 \end{cases}$$

Posto $z(y) = y'(t)$, risulta, procedendo come detto si ottiene:

$$\begin{cases} z\dot{z} = 2y^3 \\ z(1) = 1 \end{cases}$$

e quindi $z(y) = y^2$, da cui il problema

$$\begin{cases} y' = y^2 \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

che ha soluzione $y(t) = \dfrac{1}{1-t}$.

CAPITOLO 5

INTEGRALI MULTIPLI

Il problema dell'integrazione di funzioni di più variabili reali è molto importante, ad esempio per il calcolo di volumi, di masse, di baricentri, di momenti d'inerzia, ecc.

Noi ci limiteremo al caso di funzioni di due o tre variabili, ma il caso generale non presenta maggiori difficoltà, se non per le notazioni. La costruzione dell'integrale per funzioni di più variabili segue qui da vicino quella vista per funzioni di una variabile ed è stata sviluppata dal matematico tedesco Bernhard Riemann (1826-1866) e, per quanto riguarda la teoria della misura associata, dal matematico italiano Giuseppe Peano (1858-1932) e dal matematico francese Camille Jordan (1838-1922).

Nel Capitolo 7 presenteremo brevemente una formulazione più recente della teoria della misura e dell'integrazione dovuta al francese Henri Lebesgue (1875-1941).

La definizione dell'integrale doppio ci permetterà anche di definire integrali su superficie nello spazio, così come si usano gli integrali semplici per definire gli integrali di linea.

5.1 Integrale di Riemann

Vogliamo definire il concetto di funzione integrabile secondo Riemann nel caso di due variabili. Estenderemo a questo scopo le nozioni di partizione, somma integrale, funzione integrabile, ecc.

Siano $I = [a, b]$, $J = [c, d]$ intervalli limitati e sia $f : I \times J \to \mathbb{R}$ una funzione limitata. Consideriamo due partizioni di I e J:

$$a = x_0 < x_1 < \cdots < x_h = b$$

$$c = y_0 < y_1 < \cdots < y_k = d$$

Chiamiamo *partizione P del rettangolo $I \times J$* l'insieme di tutti i rettangoli $R_{ij} = [x_i, x_{i+1}] \times [y_j, y_{j+1}]$ al variare di i, j. Definiamo la *misura elementare* del rettangolo R_{ij} ponendo

$$m(R_{ij}) = (x_{i+1} - x_i) \cdot (y_{j+1} - y_j)$$

e poniamo

$$M_{ij} = \sup_{R_{ij}} f(x, y),$$

$$m_{ij} = \inf_{R_{ij}} f(x,y).$$

Indichiamo con il termine *somma integrale superiore di f relativa alla partizione P* il

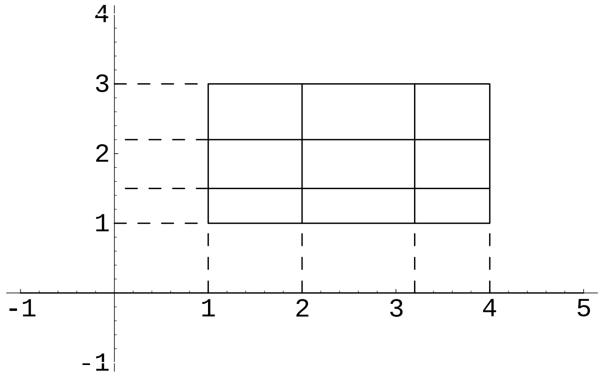


Figura – 5.1: Partizione di un rettangolo.

numero

$$S(f,P) = \sum_{i,j} M_{ij}\, m(R_{ij}).$$

Indichiamo con il termine *somma integrale inferiore di f relativa alla partizione P* il numero

$$s(f,P) = \sum_{i,j} m_{ij}\, m(R_{ij}).$$

È immediato verificare che $s(f,P) \leq S(f,P)$ e che date due partizioni P, Q risulta $s(f,P) \leq S(f,Q)$, infatti basta considerare la partizione R costituita dai rettangoli individuati dall'unione di tutti i punti degli intervalli I, J che intervengono nelle partizioni P, Q per ottenere che

$$s(f,P) \leq s(f,R) \leq S(f,R) \leq S(f,Q)\,.$$

Definizione 5.1.1 (Funzioni integrabili) *Diciamo che f è* integrabile secondo Riemann su $I \times J$ *se risulta*

$$\sup_P s(f,P) = \inf_P S(f,P)$$

al variare di tutte le possibili partizioni P. Tale valore comune è l'integrale di f su $I \times J$ e si indica con

$$\iint_{I\times J} f\, dxdy.$$

Come nel caso degli integrali semplici vale il seguente Teorema di caratterizzazione dell'integrabilità.

Teorema 5.1.2 (Caratterizzazione delle funzioni integrabili) *Una funzione limitata $f : I \times J \to \mathbb{R}$ è integrabile in $I \times J$ se e solo se per ogni $\varepsilon > 0$ esiste una partizione P di $I \times J$ tale che $S(f, P) - s(f, P) < \varepsilon$.*

Il risultato seguente estende al caso di due variabili il Teorema di integrabilità delle funzioni continue.

Teorema 5.1.3 (Integrabilità delle funzioni continue) *Se la funzione $f : I \times J \to \mathbb{R}$ è continua in $I \times J$, allora f è integrabile in $I \times J$.*

L'integrale gode delle abituali proprietà già viste nel caso di una variabile:

Teorema 5.1.4 (Proprietà dell'integrale) *Supponiamo che le funzioni $f, g : I \times J \to \mathbb{R}$ siano integrabili. Allora per ogni $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$*

1. *(Linearità)* $\displaystyle\iint_{I\times J} (\lambda f + \mu g)\, dxdy = \lambda \iint_{I\times J} f\, dxdy + \mu \iint_{I\times J} g\, dxdy$,

2. *(Positività) se $f \geq 0$ allora* $\displaystyle\iint_{I\times J} f\, dxdy \geq 0$*, da cui segue che se $f \leq g$ allora* $\displaystyle\iint_{I\times J} f\, dx \leq \iint_{I\times J} g\, dx$,

3. *(Proprietà della media)* $\displaystyle\inf_{I\times J} f \cdot m(I \times J) \leq \iint_{I\times J} f\, dx \leq \sup_{I\times J} f \cdot m(I \times J)$*, in particolare se f è continua esiste un punto $(x_0, y_0) \in I \times J$ per cui*
$$f(x_0, y_0) = \frac{1}{m(I \times J)} \iint_{I\times J} f\, dxdy\,, \tag{5.1.1}$$

4. *(Valore assoluto)*
$$\left| \iint_{I\times J} f\, dxdy \right| \leq \iint_{I\times J} |f|\, dxdy \leq \iint_{I\times J} \sup |f|\, dxdy = \sup |f|\, m(I \times J)\,,$$

5. *(Additività) se $A = I \times J$ e $B = I' \times J'$ sono due rettangoli a parti interne disgiunte allora* $\displaystyle\iint_{A\cup B} f\, dxdy = \iint_A f\, dxdy + \iint_B f\, dxdy.$

In maniera analoga si definisce l'integrale di una funzione di tre variabili su un parallelepipedo (prodotto cartesiano di tre intervalli I, J, K) e di una funzione di n variabili sul prodotto cartesiano di n intervalli, e valgono le proprietà analoghe a quelle appena enunciate.

5.2 Insiemi normali del piano e integrali doppi

Abitualmente si considerano domini di integrazione più generali dei rettangoli.

Per considerare integrali di funzioni su insiemi contenuti propriamente nel loro dominio, introduciamo la seguente comoda notazione. Chiamiamo *funzione caratteristica dell'insieme* E la funzione $\chi_E : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ così definita:

$$\chi_E(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \in E \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases} \tag{5.2.2}$$

Usiamo subito la funzione caratteristica di un insieme per definire gli *insiemi misurabili secondo Peano–Jordan.*

Definizione 5.2.1 (Insiemi limitati misurabili) *Un insieme limitato $E \subset \mathbb{R}^2$ si dice misurabile se la sua funzione caratteristica è integrabile. In tal caso si definisce la* misura *(o* area*) di E ponendo*

$$m(E) = \iint_{I\times J} \chi_E dxdy,$$

dove $I \times J$ è un qualunque rettangolo contenente E.

Gli insiemi misurabili si possono caratterizzare usando la nozione di *plurirettangolo.* Un plurirettangolo è l'unione di un numero finito di rettangoli a parti interne disgiunte. Se $P = \bigcup_{k=1}^{N} (I_k \times J_k)$ è un plurirettangolo, allora la sua misura è data da

$$m(P) = \sum_{k=1}^{N} m(I_k \times J_k)\,.$$

Vale la seguente caratterizzazione.

Proposizione 5.2.2 *Un insieme limitato E è misurabile se e solo se vale una delle seguenti proprietà:*

1. $\sup_{P\subset E} m(P) = \inf_{E\subset Q} m(Q)$ *al variare di P, Q plurirettangoli;*

2. $\forall \varepsilon > 0,\ \exists\ P, Q$ *plurirettangoli t.c.* $P \subset E \subset Q$ *e si ha* $m(Q) - m(P) < \varepsilon$ *;*

3. $\forall \varepsilon > 0,\ \exists\ P$ *plurirettangolo t.c.* $\partial E \subset P$ *e si ha* $m(P) < \varepsilon$ *(in tal caso si dice che la frontiera di E ha* misura nulla*).*

Gli insiemi misurabili godono delle seguenti proprietà.

Proposizione 5.2.3 *Sia (E_k) una famiglia finita di insiemi misurabili. Allora si ha:*

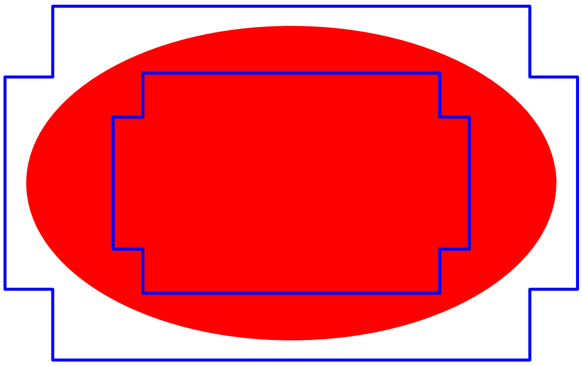


Figura – 5.2: Plurirettangoli contenuti e contenenti un insieme misurabile.

1. $\displaystyle\bigcup_{k=1}^{N} E_k$ *e* $\displaystyle\bigcap_{k=1}^{N} E_k$ *sono insiemi misurabili;*

2. *se gli* (E_k) *sono a due a due disgiunti allora* $m\left(\displaystyle\bigcup_{k=1}^{N} E_k\right) = \displaystyle\sum_{k=1}^{N} m(E_k)$ *(si dice che la misura di Peano–Jordan è finitamente additiva).*

Come al solito le definizioni e proprietà precedenti si estendono in modo immediato al caso di dimensione n.
Si può definire l'integrale di $f : I\times J \to \mathbb{R}$ su un qualunque insieme misurabile $E \subset (I\times J)$ ponendo

$$\iint_E f\,dxdy = \iint_{I\times J} f\chi_E, dxdy\,,$$

purché $f\chi_E$ sia integrabile in $I \times J$.

Osserviamo che integrare χ_E su un qualunque rettangolo contenente E è lo stesso che integrare la funzione di costante valore 1 sull'insieme E. Nell'Osservazione 5.2.8.2 confronteremo la nozione data nella Definizione 5.2.1 dell'area di un insieme con quella già data usando gli integrali di una variabile. Infine, facciamo presente che esistono insiemi *non misurabili*, in accordo col fatto che esistono funzioni (anche di una sola variabile) non integrabili (ad esempio $\mathbb{Q}^2 \cap [0,1]^2$ non è misurabile).

Vale la seguente generalizzazione del Teorema 5.1.3

Teorema 5.2.4 (Integrabilità delle funzioni continue quasi ovunque) *Se* E *è un insieme compatto e misurabile in* $\mathbb{R}^2$, $X \subset E$ *è di misura nulla e la funzione limitata* $f : E \to \mathbb{R}$ *è continua in* $E \setminus X$, *allora* f *è integrabile in* E.

Il calcolo effettivo di un integrale doppio, ove possibile, si riconduce in generale al caso di insiemi piani di geometria semplice. Tali insiemi si chiamano *insiemi normali* rispetto ad uno degli assi coordinati e sono misurabili, vedi Osservazione 5.2.8.2.

Definizione 5.2.5 (Integrali doppi su insiemi normali) *Si dice* insieme normale rispetto all'asse x *un insieme chiuso e limitato del tipo*

$$E = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2;\ x \in [a,b],\ \alpha(x) \le y \le \beta(x)\} \tag{5.2.3}$$

dove $\alpha, \beta : [a,b] \to \mathbb{R}$ *sono funzioni continue con* $\alpha(x) \le \beta(x)$ *per ogni* $x \in [a,b]$.

Se $E \subset (I \times J)$ *e la funzione* f*, definita su* E*, si prolunga a zero al di fuori di* E*, allora* f *si dice integrabile su* E *se il prolungamento detto, denotato con* f^**, è integrabile su* $I \times J$*; in tal caso si pone*

$$\iint_E f\, dxdy = \iint_{I\times J} f^*\, dxdy.$$

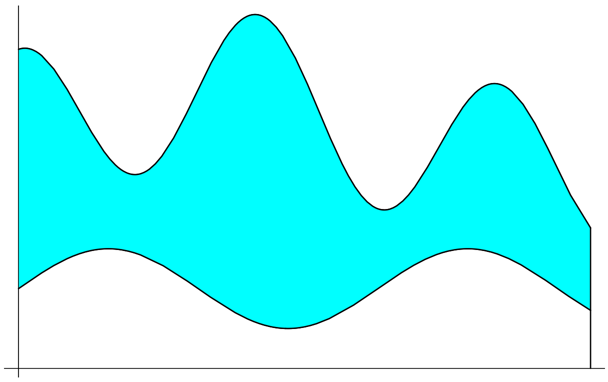


Figura – 5.3: Un insieme normale rispetto all'asse x.

I risultati che presentiamo ora permettono di calcolare integrali su insiemi più generali di quelli normali: l'idea è di cercare di decomporre l'insieme dato in un numero finito di insiemi normali a due a due a parti interne disgiunte, per poi calcolare gli integrali sui singoli pezzi e sommare i risultati ottenuti. Quest'idea può essere formalizzata, dal momento che vale la proprietà di additività rispetto agli insiemi di integrazione (vedi 5.1.4.4).

Teorema 5.2.6 (Proprietà di additività dell'integrale) *Supponiamo che l'insieme* E *sia l'unione di un numero finito di insiemi normali* E_h $(h = 1, \ldots, N)$ *a parti interne a due a due disgiunte e la funzione* $f : E \to \mathbb{R}$ *sia integrabile. Allora*

$$\iint_E f\, dxdy = \sum_{h=1}^{N} \iint_{E_h} f\, dxdy.$$

Non abbiamo ancora affrontato il problema del calcolo effettivo degli integrali doppi. Nel caso di una variabile, lo strumento essenziale è il Teorema fondamentale del calcolo, che è basato sulla nozione di primitiva. Nel caso degli integrali doppi è di fondamentale importanza nel calcolo di integrali la seguente formula di riduzione che riduce il calcolo di un integrale doppio al calcolo di due integrali semplici.

Teorema 5.2.7 (Teorema di riduzione per gli integrali doppi) *Sia $E \subset \mathbb{R}^2$ un insieme normale come in (5.2.3) e sia $f : E \to \mathbb{R}$ una funzione continua. Allora*

$$\iint_E f\,dxdy = \int_a^b \left(\int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} f(x,y)\,dy \right) dx.$$

Osservazioni 5.2.8

1. Per brevità si usano spesso le notazioni

$$\iint_E f\,dxdy = \int_a^b dx \int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} f(x,y)\,dy = \int_a^b \int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} f(x,y)\,dy\,dx.$$

2. La formula di riduzione ci permette di mostrare che ogni insieme normale è misurabile e la sua misura coincide con l'area definita usando gli integrali in una variabile. Infatti, se $E \subset (I \times J)$ è un insieme normale come nella Definizione 5.2.5, si ha

$$m(E) = \iint_{I\times J} \chi_E\,dxdy = \iint_E dxdy = \int_a^b (\beta(x) - \alpha(x))\,dx.$$

3. Ovviamente, si può dare in modo naturale la nozione di insieme normale rispetto all'asse y, e può naturalmente accadere che un insieme sia normale rispetto ad entrambi gli assi (basta pensare ad un cerchio), e vale l'analoga formula di riduzione. In tal caso, si hanno due modi di calcolare l'integrale dato, e la scelta dipende più che altro dalla facilità dei calcoli. Utilizzando il Teorema 5.2.6, può essere opportuno decomporre E in insiemi E_h alcuni dei quali normali rispetto all'asse x ed altri rispetto all'asse y.

5.3 Insiemi normali dello spazio e integrali tripli

Nel caso delle funzioni di tre variabili abbiamo una definizione di insieme normale analoga alla (5.2.3). Siano I, J, K tre intervalli chiusi e limitati.

Definizione 5.3.1 (Integrali su insiemi normali in $\mathbb{R}^3$) *Si dice insieme normale rispetto al piano $z = 0$ un insieme del tipo*

$$G = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3;\ (x,y) \in E,\ \phi(x,y) \le z \le \psi(x,y)\} \tag{5.3.4}$$

dove $\phi, \psi : E \to \mathbb{R}$ sono funzioni continue con $\phi(x,y) \le \psi(x,y)$ per ogni $(x,y) \in E$ ed E è un insieme piano normale.

Se $G \subset (I \times J \times K)$ e la funzione f, definita su G, si prolunga a zero al di fuori di G, allora f si dice integrabile su G se il prolungamento detto, denotato con f^*, è integrabile *su* $I \times J \times K$ *e si pone*

$$\iiint_G f\,dxdydz = \iiint_{I\times J\times K} f^*\,dxdydz.$$

Come nel caso piano, un insieme limitato $G \subset \mathbb{R}^3$ si dice misurabile secondo Peano-Jordan se la sua funzione caratteristica è integrabile su un qualunque parallelepipedo $I \times J \times K$ contenente G. In tal caso si pone

$$m(G) = \iiint_{I\times J\times K} \chi_G\,dxdydz$$

e la misura (volume) di G si può anche ottenere integrando la funzione di costante valore 1 sull'insieme G, in quanto

$$\iiint_G dxdydz = \iiint_{I\times J\times K} \chi_G\,dxdydz.$$

Naturalmente la teoria della misura di Peano-Jordan si estende ai sottoinsiemi di $\mathbb{R}^3$ (e di $\mathbb{R}^n$) in maniera immediata e valgono le proprietà viste nel caso di $\mathbb{R}^2$.

Valgono per gli integrali tripli i seguenti risultati, analoghi a quelli visti nel paragrafo precedente.

Teorema 5.3.2 (Proprietà dell'integrale) *Sia* $G \subset \mathbb{R}^3$ *un insieme normale e supponiamo che le funzioni* $f, g : G \to \mathbb{R}$ *siano integrabili. Allora per ogni* $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$

1. $\displaystyle\iiint_G (\lambda f + \mu g) dxdydz = \lambda \iiint_G f dxdydz + \mu \iiint_G g dxdydz,$

2. *se* $f \geq 0$ *allora* $\displaystyle\iiint_G f dxdydz \geq 0$*, da cui segue che se* $f \leq g$ *allora* $\displaystyle\iiint_G f\,dxdydz \leq \iiint_G g\,dxdydz\,,$

3. $\displaystyle\inf_G f \cdot m(G) \leq \iiint_G f\,dxdydz \leq \sup_G f \cdot m(G)\,,$ *in particolare se* f *è continua esiste un punto* $(x_0, y_0, z_0) \in G$ *per cui*
$$f(x_0, y_0, z_0) = \frac{1}{m(G)} \iiint_G f\,dxdydz\,, \tag{5.3.5}$$

4. $\displaystyle\left|\iiint_G f\,dxdydz\right| \leq \iiint_G |f|\,dxdydz \leq \iiint_G \sup_G |f|\,dxdydz = \sup_G |f|\,m(G),$

5. *se* A *e* B *sono due insiemi normali a parti interne disgiunte allora*
$$\iiint_{A\cup B} f\,dxdydz = \iiint_A f\,dxdydz + \iiint_B f\,dxdydz\,.$$

Teorema 5.3.3 (Proprietà di additività dell'integrale) *Supponiamo che $G \subset \mathbb{R}^3$ sia l'unione di un numero finito di insiemi misurabili G_h ($h = 1, \ldots, N$) a parti interne a due a due disgiunte e la funzione $f : G \to \mathbb{R}$ sia integrabile. Allora*

$$\iiint_G f\,dxdydz = \sum_{h=1}^{N} \iiint_{G_h} f\,dxdydz.$$

Teorema 5.3.4 (Integrabilità delle funzioni continue) *Sia $G \subset \mathbb{R}^3$ un insieme normale e supponiamo che la funzione $f : G \to \mathbb{R}$ sia continua in G. Allora f è integrabile in G.*

Il teorema di riduzione si estende al caso degli integrali tripli. La corrispondente formula di riduzione riduce il calcolo di un integrale triplo al calcolo di un integrale semplice e un integrale doppio.

Teorema 5.3.5 (Primo teorema di riduzione per gli integrali tripli) *Sia $G \subset \mathbb{R}^3$ un insieme misurabile normale come in (5.3.4) e sia $f : G \to \mathbb{R}$ una funzione continua in G. Allora*

$$\iiint_G f\,dxdydz = \iint_E \left(\int_{\phi(x,y)}^{\psi(x,y)} f(x,y,z)\,dz \right) dxdy.$$

È chiaro che per il calcolo dell'integrale doppio si usa la formula di riduzione vista in precedenza. Questo metodo di integrazione è detto anche "per fili".

Osservazione 5.3.6 (Volume di un sottografico) Se $E \subset \mathbb{R}^2$ è un insieme piano normale ed $f : E \to \mathbb{R}$ è positiva e integrabile, il suo integrale fornisce il volume dell'insieme

$$G = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3;\ (x,y) \in E,\ 0 \leq z \leq f(x,y)\}$$

cioè del sottografico di f delimitato dal piano $z = 0$. Infatti, applicando la formula di riduzione, risulta:

$$m(G) = \iiint_G dxdydz = \iint_E \left(\int_0^{f(x,y)} dz \right) dxdy = \iint_E f(x,y)\,dxdy.$$

Più in generale, se $f, g : E \to \mathbb{R}$ sono integrabili, con $f(x,y) \leq g(x,y)$ per ogni $(x,y) \in E$, risulta

$$m\big(\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3;\ (x,y) \in E, f(x,y) \leq z \leq g(x,y)\}\big) = \iint_E (g-f)\,dxdy.$$

Può essere utile talvolta procedere in maniera diversa, trasformando un integrale triplo in un integrale doppio e un integrale semplice. Questo secondo metodo di integrazione è detto anche "per strati". Esso si utilizza quando l'insieme G è del seguente tipo

$$G = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3;\ z \in [a,b], (x,y) \in G_z\} \tag{5.3.6}$$

dove i G_z sono insiemi piani normali. In tal caso il teorema di riduzione diventa:

Teorema 5.3.7 (Secondo teorema di riduzione per gli integrali tripli) *Sia G un insieme chiuso misurabile del tipo (5.3.6), e sia $f : G \to \mathbb{R}$ una funzione continua in G. Se la funzione*

$$z \mapsto \iint_{G_z} f(x,y,z)\,dxdy$$

è continua in $[a,b]$, allora si ha

$$\iiint_G f\,dxdydz = \int_a^b \left(\iint_{G_z} f(x,y,z)\,dxdy \right) dz.$$

Questa formula è particolarmente utile quando l'insieme G è un insieme di rotazione intorno all'asse z, nel qual caso i G_z sono cerchi. Se G è l'insieme di rotazione intorno all'asse z generato da una funzione $g : [a,b] \to (0,+\infty)$ continua allora risulta

$$m(G) = \pi \int_a^b (g(z))^2\,dz.$$

5.4 Cambiamenti di coordinate

Un secondo gruppo di formule molto utili per il calcolo di integrali multipli si ottiene dal teorema di cambiamento di variabili, che generalizza il metodo di sostituzione per gli integrali semplici; esso fornisce un metodo per calcolare un integrale doppio o triplo attraverso una sostituzione nelle coordinate. Enunciamolo simultaneamente nel caso di due o tre variabili.

Definizione 5.4.1 (Diffeomorfismi) *Sia $n = 2$ o 3 e siano $A, B \subset \mathbb{R}^n$ due insiemi aperti. Un'applicazione $F : A \to B$ si dice un* diffeomorfismo *se F è bigettiva ed inoltre F e F^{-1} sono di classe C^1.*

I diffeomorfismi portano un insieme su un altro della stessa dimensione (intuitivamente, questo è un ovvio requisito, dal momento che il numero di parametri necessario per descrivere gli elementi di un insieme non dipende dal sistema di coordinate scelto) attraverso una funzione regolare e con inversa regolare. Per poter usare i diffeomorfismi allo scopo di cambiare il sistema di coordinate da usare per il calcolo di un integrale doppio o triplo, ci restringiamo ad insiemi regolari, secondo la seguente definizione.

Definizione 5.4.2 (Insiemi regolari) *Si dice che l'insieme $E \subset \mathbb{R}^2$ è* regolare *se è unione di un numero finito di insiemi piani normali a due a due privi di punti interni in comune, ciascuno dei quali definito come nella Definizione 5.2.5 con $\alpha, \beta \in C^1([a,b])$, $\alpha(x) < \beta(x)$ in (a,b).*

Si dice che l'insieme $E \subset \mathbb{R}^3$ è regolare *se è unione di un numero finito di insiemi normali a due a due privi di punti interni in comune, ciascuno dei quali definito come* *nella Definizione 5.3.1 con ϕ, ψ funzioni di classe C^1 definite su un insieme piano regolare E, con $\phi < \psi$ in $\overset{\circ}{E}$.*

Possiamo ora enunciare il teorema sul cambiamento di variabili.

Teorema 5.4.3 (Cambiamento di variabili negli integrali multipli) *Se F è un diffeomorfismo tra due aperti A, B in $\mathbb{R}^n$ (con $n = 2$ o 3) ed E, G sono insiemi regolari di $\mathbb{R}^n$, con $F(E) = G$, e se f è integrabile su G, allora $(f \circ F)\ |\det DF|$ è integrabile su E e si ha*

$$\iint_G f(x,y)\,dxdy = \iint_E f(F(u,v))|\det DF(u,v)|\,dudv$$

se $n = 2$, e:

$$\iiint_G f(x,y,z)\,dxdydz = \iiint_E f(F(u,v,w))|\det DF(u,v,w)|\,dudvdw$$

se $n = 3$.

Osserviamo che, a differenza del caso della formula di sostituzione per gli integrali di una variabile, qui si richiede che F sia una funzione bigettiva.

Particolarmente frequente è l'uso del teorema precedente con i cambiamenti di variabili visti negli Esempi 2.3.6 (coordinate polari, cilindriche, sferiche). In questi casi accade che l'ipotesi di regolarità di F ed F^{-1} venga meno tra due insiemi chiusi $Z\,, Z'$ di misura nulla, ma la soppressione di Z e Z' non altera il valore degli integrali considerati.

Esempi 5.4.4

1. Vogliamo calcolare

$$\iint_G x\,dxdy$$

dove $G = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 :\ x^2+y^2-2x \le 0\,\}$. Utilizzando le coordinate polari, per cui il determinante della matrice jacobiana vale ϱ, si determina l'insieme E effettuando la sostituzione nelle disuguaglianze. In questo caso si ottiene $\varrho^2 - 2\varrho\cos\vartheta \le 0$ e quindi

$$E = F^{-1}(G) = \{(\varrho,\vartheta) :\ -\frac{\pi}{2} \le \vartheta \le \frac{\pi}{2},\ 0 \le \varrho \le 2\cos\vartheta\,\}.$$

(Osserviamo che si deve avere $\cos\vartheta \geq 0$, per questo abbiamo $\vartheta \in [-\pi/2, \pi/2]$). Dunque avremo

$$\begin{aligned}
\iint_G x\,dxdy &= \int_{-\pi/2}^{\pi/2} d\vartheta \int_0^{2\cos\vartheta} \varrho\cos\vartheta\,\varrho\,d\varrho = \frac{8}{3}\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^4\vartheta\,d\vartheta \\
&= \frac{8}{3}\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^2\vartheta(1-\sin^2\vartheta)\,d\vartheta = \frac{8}{3}\left(\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^2\vartheta\,d\vartheta - \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^2\vartheta\sin^2\vartheta\,d\vartheta\right) \\
&= \frac{8}{3}\left(\left[\frac{\vartheta + \sin\vartheta\cos\vartheta}{2}\right]_{-\pi/2}^{\pi/2} - \frac{1}{4}\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sin^2(2\vartheta)\,d\vartheta\right) \\
&= \frac{8}{3}\left(\frac{\pi}{2} - \frac{1}{8}\left[\frac{2\vartheta - \sin(2\vartheta)\cos(2\vartheta)}{2}\right]_{-\pi/2}^{\pi/2}\right) = \frac{8}{3}\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{8}\right) = \pi.
\end{aligned}$$

2. **Baricentro e momento d'inerzia.** Sia $E \subset \mathbb{R}^3$ e sia $\varrho(x, y, z)$ la sua densità di massa. Allora la massa di E è data da $m = \iiint_E \varrho\,dxdydz$. Le coordinate del *baricentro di* E sono date da

$$x_E = \frac{1}{m}\iiint_E x\,\varrho\,dxdydz\,,\ y_E = \frac{1}{m}\iiint_E y\,\varrho\,dxdydz\,,\ z_E = \frac{1}{m}\iiint_E z\,\varrho\,dxdydz\,.$$

Il *momento d'inerzia rispetto all'origine* di E è dato da

$$I_O = \iiint_E (x^2 + y^2 + z^2)\,\varrho\,dxdydz\,,$$

mentre il *momento d'inerzia rispetto a un asse* (per esempio l'asse z) è dato da

$$I_z = \iiint_E (x^2 + y^2)\,\varrho\,dxdydz\,.$$

Analoghe definizioni valgono nel caso $E \subset \mathbb{R}^2$.

5.5 Integrali generalizzati

In questo paragrafo consideriamo il caso di funzioni non limitate o domini di integrazione non limitati. Dato che non ci sono differenze formali, a questo livello, tra il caso di $\mathbb{R}^2$ e il caso di $\mathbb{R}^3$, svolgeremo la nostra trattazione denotando con $\mathbb{R}^n$ lo spazio ambiente, con l'intesa che n può essere 2 o 3 e indicheremo con la lettera x il complesso delle variabili. Iniziamo a specificare che cosa intendiamo per insieme misurabile nel caso di insiemi illimitati.

Definizione 5.5.1 (Insiemi misurabili illimitati) *Un insieme illimitato E si dice misurabile se risulta misurabile la sua intersezione con ogni intorno sferico $B_r(0)$ dell'origine,* *nel senso della Definizione 5.2.1. In tal caso si definisce la sua misura mediante la formula*

$$m(E) = \lim_{r\to+\infty} m(E \cap B_r(0)) = \sup_{r>0} m(E \cap B_r(0))\,.$$

Naturalmente la misura di un insieme illimitato può essere $+\infty$.

Nel caso delle funzioni di una variabile, l'integrale improprio era definito passando al limite su opportuni sottointervalli dell'intervallo di integrazione. Nel caso di due variabili diamo la seguente definizione.

Definizione 5.5.2 (Insiemi invadenti) *Sia E un insieme misurabile e sia (E_h) una successione di sottoinsiemi misurabili. Diciamo che E_h è una* successione di insiemi invadenti *per E se $E_h \subset E_{h+1}$ per ogni $h \in \mathbb{N}$ e* $m\left(E \setminus \bigcup_{h=0}^{\infty} E_h\right) = 0$.

Utilizzando le successioni di insiemi invadenti possiamo definire l'integrale generalizzato di una funzione.

Definizione 5.5.3 (Integrale generalizzato) *Sia E un insieme misurabile e sia (E_h) una successione di insiemi invadenti per E. Sia $f : E \to \mathbb{R}$ una funzione continua su E. Diciamo che f è* assolutamente integrabile in senso generalizzato su E *se*

$$\sup_{h\in\mathbb{N}} \int_{E_h} |f(x)|\,dx < +\infty.$$

In questo caso esiste finito il $\displaystyle\lim_{h\to+\infty}\int_{E_h} f(x)\,dx$ *e poniamo*

$$\int_E f(x)\,dx = \lim_{h\to+\infty}\int_{E_h} f(x)\,dx.$$

Osserviamo che la definizione precedente non dipende dalla scelta della successione $(E_h)_h$ di insiemi invadenti.

Esempio 5.5.4 Sia $E = \bar{B}_1(0,0) \setminus \{(0,0)\} \subset \mathbb{R}^2$ e sia $f(x,y) = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$. Evidentemente, la funzione f è illimitata su E. Scegliamo $E_h = \bar{B}_1(0,0) \setminus B_{1/h}(0,0)$. La funzione f è integrabile su E_h per il Teorema 5.1.3 e risulta

$$\iint_{E_h} f(x,y)\,dxdy = \int_0^{2\pi}\int_{1/h}^{1} \frac{1}{\varrho}\,\varrho\,d\varrho\,d\vartheta = 2\pi\left(1-\frac{1}{h}\right).$$

Pertanto

$$\iint_E f(x,y)\,dxdy = 2\pi.$$

Più in generale, possiamo considerare la funzione $f_\alpha(x,y) = \dfrac{1}{\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)^\alpha}$, al variare di $\alpha > 0$. Ripetendo il calcolo precedente con ovvie modifiche, si trova che f_α è integrabile in E se e solo se $\alpha < 2$.

Viceversa, ci si può domandare se f_α sia integrabile in $E = \mathbb{R}^2 \setminus B_1(0,0)$. Risulta, per $E_h = \bar{B}_h(0,0) \setminus B_1(0,0)$ e $\alpha \neq 2$:

$$\iint_{E_h} f_\alpha(x,y)\,dxdy = \int_0^{2\pi}\int_1^h \frac{1}{\varrho^\alpha}\varrho d\varrho d\vartheta = 2\pi\int_1^h \varrho^{1-\alpha} d\varrho = 2\pi\left(\frac{h^{2-\alpha}}{2-\alpha} - \frac{1}{2-\alpha}\right)$$

per cui

$$\sup_h \iint_{E_h} f_\alpha(x,y)\,dxdy < +\infty \qquad \Longleftrightarrow \qquad \alpha > 2,$$

e in questo caso risulta

$$\iint_E f_\alpha(x,y)\,dxdy = \frac{2\pi}{\alpha-2}.$$

Esempio 5.5.5 Oltre che in $\mathbb{R}^2$ e in $\mathbb{R}^3$, si possono definire *coordinate sferiche in* $\mathbb{R}^n$ per ogni valore di n. Non entriamo nei dettagli, ma segnaliamo che questo, generalizzando i casi $n = 2, 3$, si può fare definendo $\varrho = \sqrt{x_1^2 + \ldots + x_n^2}$ e introducendo in modo opportuno $n-1$ angoli, siano $\phi_1, \ldots, \phi_{n-1}$. Le formule di passaggio dalle coordinate $(\varrho, \phi_1, \ldots, \phi_{n-1})$ alle $(x_1, \ldots, x_n)$ saranno del tipo $x_i = \varrho F_i(\phi_1, \ldots, \phi_{n-1})$, dove le F_i sono polinomi in $\sin\phi_j, \cos\phi_j$ per $j = 1, \ldots, n-1$. Ne segue che il determinante jacobiano risulta della forma $\det\big(DF(\varrho, \phi_1, \ldots, \phi_{n-1})\big) = \varrho^{n-1} g(\phi_1, \ldots, \phi_{n-1})$, con g dello stesso tipo delle F_i. Queste considerazioni ci permettono di generalizzare l'Esempio 5.5.4 come segue, dove come prima $f_\alpha(x) = \dfrac{1}{\|x\|^\alpha}$:

$$\begin{array}{rcl} f_\alpha \text{ è integrabile in } B_1(0) \setminus \{0\} & \Longleftrightarrow & \alpha < n \\ f_\alpha \text{ è integrabile in } \mathbb{R}^n \setminus B_1(0) & \Longleftrightarrow & \alpha > n. \end{array}$$

Dall'esempio precedente si ottiene il seguente Teorema di confronto.

Teorema 5.5.6 (Teorema di confronto per gli integrali generalizzati)

1. *Sia $x_0 \in \mathbb{R}^n$ e sia E un intorno misurabile chiuso e limitato di x_0. Sia f una funzione continua in $E \setminus \{x_0\}$. Se esistono $0 < \alpha < n$ ed $M > 0$ tali che*

$$|f(x)| \le \frac{M}{\|x-x_0\|^\alpha}, \qquad \forall x \in E \setminus \{x_0\},$$

allora f è assolutamente integrabile in senso generalizzato in E. Viceversa se esistono $\alpha \ge n$ ed $M > 0$ tali che

$$|f(x)| \ge \frac{M}{\|x-x_0\|^\alpha}, \qquad \forall x \in E \setminus \{x_0\},$$

allora f non è assolutamente integrabile in senso generalizzato in E.

2. *Sia $x_0 \in \mathbb{R}^n$ e sia E un intorno misurabile aperto e limitato di x_0. Sia f una funzione continua in $\mathbb{R}^n \setminus E$. Se esistono $\alpha > n$ ed $M > 0$ tali che*

$$|f(x)| \leq \frac{M}{\|x - x_0\|^\alpha}, \qquad \forall x \in \mathbb{R}^n \setminus E,$$

allora f è assolutamente integrabile in senso generalizzato in $\mathbb{R}^n \setminus E$. Viceversa se esistono $\alpha \leq n$ ed $M > 0$ tali che

$$|f(x)| \geq \frac{M}{\|x - x_0\|^\alpha}, \qquad \forall x \in \mathbb{R}^n \setminus E,$$

allora f non è assolutamente integrabile in senso generalizzato in $\mathbb{R}^n \setminus E$.

Esempio 5.5.7 (L'integrale della funzione gaussiana) Mostriamo un'applicazione della formula di cambiamento di variabili e della formula di riduzione per calcolare l'integrale di e^{-x^2} su tutto $\mathbb{R}$. Non possiamo utilizzare il Teorema fondamentale del Calcolo Integrale perché le primitive di e^{-x^2} non si possono esprimere mediante funzioni elementari. Calcoliamo dapprima l'integrale di $\mathrm{e}^{-x^2-y^2}$ su $\mathbb{R}^2$. Questa funzione è integrabile in quanto all'infinito è un infinitesimo di ordine arbitrariamente grande. Usando la successione di insiemi invadenti data dai cerchi $B_k(0)$ di raggio $k \in \mathbb{N}$ e le coordinate polari troviamo

$$\iint_{B_k} \mathrm{e}^{-x^2-y^2}\, dxdy = \int_0^{2\pi} d\vartheta \int_0^k \mathrm{e}^{-\varrho^2}\, \varrho\, d\varrho = 2\pi \left[-\frac{1}{2}\, \mathrm{e}^{-\varrho^2} \right]_0^k = \pi(1 - \mathrm{e}^{-k^2})\,.$$

Passando al limite per $k \to \infty$ otteniamo

$$\iint_{\mathbb{R}^2} \mathrm{e}^{-x^2-y^2}\, dxdy = \pi\,.$$

Usando ora la successione di insiemi invadenti data dai quadrati $Q_k = [-k, k]^2$ di lato $2k$ con $k \in \mathbb{N}$ e la formula di riduzione abbiamo

$$\iint_{Q_k} \mathrm{e}^{-x^2-y^2}\, dxdy = \int_{-k}^k dx \int_{-k}^k \mathrm{e}^{-x^2-y^2}\, dy = \left(\int_{-k}^k \mathrm{e}^{-x^2}\, dx \right) \left(\int_{-k}^k \mathrm{e}^{-y^2}\, dy \right)\,.$$

Passando al limite per $k \to \infty$, confrontando con il risultato precedente e tenendo conto che la variabile di integrazione è muta troviamo

$$\left(\int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{-x^2}\, dx \right)^2 = \pi\,,$$

e in definitiva

$$\int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{-x^2}\, dx = \sqrt{\pi}\,. \tag{5.5.7}$$

5.6 Superficie regolari ed integrali di superficie

In questo paragrafo definiamo il concetto di superficie in $\mathbb{R}^3$ e di integrale su una superficie.

Definizione 5.6.1 (Superficie regolari) *Sia $D \subset \mathbb{R}^2$ la chiusura di un aperto connesso (detto anche* dominio*) e sia $\varphi : D \to \mathbb{R}^3$ una applicazione. Diciamo che φ è una* superficie regolare in $\mathbb{R}^3$ *se*

1. *$\varphi \in C^1(D)$, φ è iniettiva in $\overset{\circ}{D}$,*

2. *la matrice jacobiana $D\varphi$ ha rango due in ogni punto di $\overset{\circ}{D}$.*

Osservazione 5.6.2 Notiamo che la superficie è un'applicazione mentre chiamiamo *sostegno di φ* l'insieme immagine di φ.

Può accadere che il sostegno di una superficie regolare racchiuda una porzione limitata dello spazio. Tale situazione è considerata nella seguente definizione.

Definizione 5.6.3 (Superficie chiuse) *Una superficie regolare si dice* chiusa *se il suo sostegno è la frontiera di un insieme aperto connesso.*

Ricordiamo che la matrice $D\varphi = D\varphi(u, v)$ è data da

$$D\varphi(u,v) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial \varphi_1}{\partial u}(u,v) & \dfrac{\partial \varphi_1}{\partial v}(u,v) \\ \\ \dfrac{\partial \varphi_2}{\partial u}(u,v) & \dfrac{\partial \varphi_2}{\partial v}(u,v) \\ \\ \dfrac{\partial \varphi_3}{\partial u}(u,v) & \dfrac{\partial \varphi_3}{\partial v}(u,v) \end{pmatrix},$$

dunque la condizione sul rango significa che i due vettori colonna

$$\varphi_u = \frac{\partial \varphi}{\partial u}(u,v), \;\; \varphi_v = \frac{\partial \varphi}{\partial v}(u,v)$$

sono linearmente indipendenti in ogni punto $(u, v) \in \overset{\circ}{D}$, e questo assicura che essi generano un piano, detto il *piano tangente al sostegno della superficie*, in ogni punto di $\varphi\big(\overset{\circ}{D}\big)$.

Indichiamo con $(A, B, C) = \varphi_u \wedge \varphi_v$ il loro prodotto vettoriale, cioè

$$A = \det \begin{pmatrix} \dfrac{\partial \varphi_2}{\partial u}(u,v) & \dfrac{\partial \varphi_2}{\partial v}(u,v) \\ \\ \dfrac{\partial \varphi_3}{\partial u}(u,v) & \dfrac{\partial \varphi_3}{\partial v}(u,v) \end{pmatrix}$$

$$B = \det \begin{pmatrix} \dfrac{\partial \varphi_3}{\partial u}(u,v) & \dfrac{\partial \varphi_3}{\partial v}(u,v) \\ \\ \dfrac{\partial \varphi_1}{\partial u}(u,v) & \dfrac{\partial \varphi_1}{\partial v}(u,v) \\ \end{pmatrix}$$

$$C = \det \begin{pmatrix} \dfrac{\partial \varphi_1}{\partial u}(u,v) & \dfrac{\partial \varphi_1}{\partial v}(u,v) \\ \\ \dfrac{\partial \varphi_2}{\partial u}(u,v) & \dfrac{\partial \varphi_2}{\partial v}(u,v) \end{pmatrix}.$$

Risulta che (A, B, C) è ortogonale a φ_u e φ_v, pertanto è ortogonale al piano tangente e sarà detto *vettore normale alla superficie.*

Sia (u_0, v_0) un punto interno al dominio di φ e sia $(x_0, y_0, z_0) = \varphi(u_0, v_0)$. Posto

$$A_0 = A(u_0, v_0),\ B_0 = B(u_0, v_0),\ C_0 = C(u_0, v_0)$$

l'equazione del piano tangente al sostegno di φ nel punto (x_0, y_0, z_0) è data da

$$\boxed{A_0\,(x - x_0) + B_0\,(y - y_0) + C_0\,(z - z_0) = 0\,.}$$

Esempi 5.6.4

1. Un caso interessante di superficie si ottiene a partire da una funzione di classe C^1 $f : D \to \mathbb{R}$ definita in un dominio $D \subset \mathbb{R}^2$. Allora si definisce *superficie cartesiana* individuata da f la superficie

$$\varphi(x,y) = \begin{cases} \varphi_1(x,y) = x \\ \varphi_2(x,y) = y \\ \varphi_3(x,y) = f(x,y)\,. \end{cases} \qquad (x,y) \in D$$

   In questo caso il versore normale è dato da

$$\nu(x,y) = \frac{(-f_x(x,y), -f_y(x,y), 1)}{\sqrt{1 + (f_x(x,y))^2 + (f_y(x,y))^2}}\,.$$

2. Un esempio di superficie regolare è costituito dal toro (vedi Figura – 5.4) ottenuto ruotando intorno all'asse z, la circonferenza nel piano $y = 0$ di centro $(R, 0, 0)$ e raggio $r < R$. La sua rappresentazione parametrica è data da

$$\varphi(t,\vartheta) = \begin{cases} \varphi_1(t,\vartheta) = (R + r\cos t)\cos\vartheta \\ \varphi_2(t,\vartheta) = (R + r\cos t)\sin\vartheta \\ \varphi_3(t,\vartheta) = r\sin t\,. \end{cases} \qquad (t,\vartheta) \in [0, 2\pi] \times [0, 2\pi]$$

Un facile calcolo fornisce $\|\varphi_t \wedge \varphi_\vartheta\| = r(R + r\cos t)$, che, per la condizione $r < R$, è sempre maggiore di zero.

3. A volte il sostegno di una superficie è determinato come l'insieme S delle soluzioni di un'equazione $F(x, y, z) = 0$. Ad esempio la superficie sferica di centro l'origine e raggio 1 è individuata dall'equazione $x^2 + y^2 + z^2 - 1 = 0$. Se la funzione F è di classe C^1 e il suo gradiente è diverso da zero in un punto $(x_0, y_0, z_0) \in S$, per esempio $F_z(x_0, y_0, z_0) \neq 0$, allora in un intorno di tale punto S è il grafico di una superficie cartesiana $z = \varphi(x, y)$. Analogo discorso si può fare per il sostegno di una curva in $\mathbb{R}^2$ che può essere formato dalle soluzioni di una equazione $F(x, y) = 0$. Questa problematica è trattata dal Teorema del Dini, che qui non consideriamo.

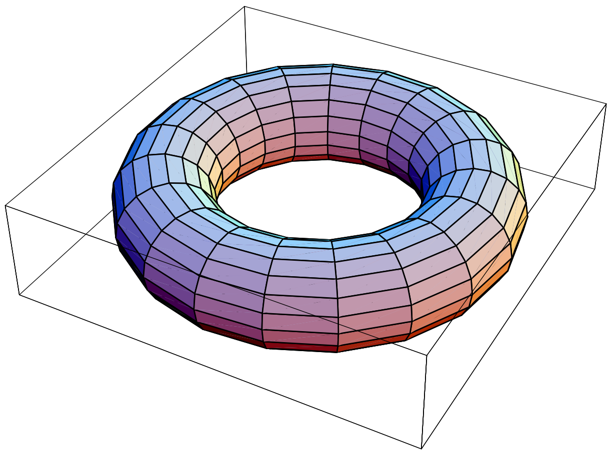


Figura – 5.4: Un toro.

Definizione 5.6.5 (Superficie equivalenti) *Sia $\varphi : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ una superficie regolare. Sia T un dominio connesso del piano e $\Phi : T \to D$ una trasformazione invertibile, C^1 con inversa C^1 e con determinante jacobiano non nullo in $\mathring{T}$. Allora anche $\psi : T \to \mathbb{R}^3$ definita da $\psi(s, t) = \varphi(\Phi(s, t))$ per $(s, t) \in T$ è una superficie regolare e si dice che φ e ψ sono equivalenti.*

Consideriamo ora una superficie regolare $\varphi : D \to \mathbb{R}^3$ e supponiamo che il dominio D sia un insieme regolare (vedi definizione 5.4.2).

Definizione 5.6.6 (Area di una superficie) *Definiamo area della superficie φ il numero*

$$\mathcal{A}(\varphi) = \iint_D \sqrt{A^2(u, v) + B^2(u, v) + C^2(u, v)}\, dudv = \iint_D \|\varphi_u \wedge \varphi_v\|\, dudv.$$

Notiamo che nel caso di una superficie cartesiana (vedi Esempio 5.6.4.1) la sua area è data dalla formula

$$\mathcal{A}(\varphi) = \iint_D \sqrt{1 + (f_x)^2 + (f_y)^2}\, dxdy = \iint_D \sqrt{1 + \|\nabla f(x,y)\|^2}\, dxdy.$$

Nel caso del toro (vedi Esempio 5.6.4.2) la sua area è data da

$$\mathcal{A}(\varphi) = \int_0^{2\pi} dt \int_0^{2\pi} r(R + r\cos t)\, d\vartheta = 4\pi^2 Rr\,.$$

Accanto all'area si possono dare la definizione di integrale superficiale di una funzione f e di flusso di un campo vettoriale F su una superficie regolare φ.

Definizione 5.6.7 (Integrale di superficie) *Sia φ una superficie regolare con dominio regolare, e supponiamo che f sia una funzione reale continua sul sostegno di φ. Definiamo* integrale superficiale di f su φ *il numero*

$$\begin{aligned}\int_\varphi f d\sigma &= \iint_D f(\varphi(u,v)) \sqrt{A^2(u,v) + B^2(u,v) + C^2(u,v)}\, dudv \\ &= \iint_D f(\varphi(u,v))\, \|\varphi_u \wedge \varphi_v\|\, dudv.\end{aligned}$$

Definizione 5.6.8 (Flusso di un campo vettoriale) *Siano φ una superficie regolare con dominio regolare, ed F un campo vettoriale continuo sul sostegno di φ. Definiamo* flusso di F attraverso φ *il numero*

$$\int_\varphi (F \cdot \nu)\, d\sigma = \iint_D F(\varphi(u,v)) \cdot (\varphi_u \wedge \varphi_v)\, dudv.$$

Anche gli integrali di superficie godono delle abituali proprietà di linearità, positività e additività.

Osservazioni 5.6.9

1. L'area di una superficie φ non cambia se si considera una superficie ψ equivalente a φ (vedi Definizione 5.6.5). Analogamente, l'integrale su φ di una funzione f non dipende dalla parametrizzazione, ma da f e dal sostegno di φ, cioè $\int_\varphi f\, d\sigma = \int_\psi f\, d\sigma$ per due superficie φ e ψ equivalenti. La verifica di queste proprietà dipende dalla formula di cambiamento di variabili negli integrali doppi, che mostra come, nelle nostre ipotesi, si possa trasformare l'integrale su φ in quello su ψ attraverso un cambiamento regolare di coordinate.

2. Il flusso di un campo vettoriale attraverso una superficie è definito usando il campo vettoriale $\varphi_u \wedge \varphi_v$, che, come si è detto, è normale al sostegno di φ e non si annulla mai grazie alla condizione che il rango di $D\varphi$ sia sempre 2. Ponendo

$$\nu = \frac{\varphi_u \wedge \varphi_v}{\|\varphi_u \wedge \varphi_v\|}\,. \tag{5.6.8}$$

si ottiene un campo vettoriale unitario normale al sostegno di φ che permette di ricondurre il flusso di un campo F all'integrale di superficie della funzione reale $f = F \cdot \nu$, componente del campo F lungo ν. Il vettore ν si chiama *versore normale alla superficie* φ. Per quanto riguarda il comportamento del flusso rispetto ad un cambio di parametrizzazione, però, bisogna tener conto del fatto che ν ha un verso che può cambiare se si cambia la rappresentazione parametrica del sostegno della superficie. Con la notazione del punto precedente, chiamando (u, v) le coordinate in D e (s, t) quelle in T, si ha:

$$\begin{aligned} \int_\varphi F \cdot \nu \, d\sigma &= \int_\psi F \cdot \nu \, d\sigma \qquad \text{se} \qquad \frac{\varphi_u \wedge \varphi_v}{\|\varphi_u \wedge \varphi_v\|} = \frac{\psi_s \wedge \psi_t}{\|\psi_s \wedge \psi_t\|}, \\ \int_\varphi F \cdot \nu \, d\sigma &= -\int_\psi F \cdot \nu \, d\sigma \qquad \text{se} \qquad \frac{\varphi_u \wedge \varphi_v}{\|\varphi_u \wedge \varphi_v\|} = -\frac{\psi_s \wedge \psi_t}{\|\psi_s \wedge \psi_t\|}. \end{aligned}$$

In particolare, se si considera una superficie chiusa si avrà un flusso *entrante* se il vettore normale determinato dalla parametrizzazione scelta è diretto verso l'interno della superficie, *uscente* nel caso opposto.

5.7 Teorema della divergenza e formula di Stokes

Il teorema della divergenza generalizza al caso degli integrali multipli il secondo teorema fondamentale del calcolo per gli integrali semplici. Questo teorema fu scoperto dal matematico tedesco Carl J.F. Gauss (1777-1855) e dal matematico inglese George Green (1793-1841) principalmente in connessione con la teoria del campo elettrico.

Soffermiamoci separatamente sui casi di dimensione due e tre.

Teorema 5.7.1 (Teorema della divergenza in $\mathbb{R}^2$) *Sia D un dominio regolare di $\mathbb{R}^2$. Se $F : D \to \mathbb{R}^2$ è un campo vettoriale di classe C^1, si ha*

$$\iint_D \mathrm{div} F \, dxdy = \int_{\partial D} F \cdot \nu \, ds,$$

dove ∂D denota la curva avente la frontiera di D come sostegno, ν è il versore normale a ∂D orientato verso l'esterno di D e la divergenza $\mathrm{div}\, F$ *di $F = (F_1, F_2)$ è data da*

$$\mathrm{div}\, F = \frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial y}.$$

Osserviamo che è possibile scegliere un verso di percorrenza per ∂D in modo che, detto τ il versore tangente e ν il versore normale esterno a D, la coppia (ν, τ) risulti congruente a quella dei versori degli assi coordinati. Intuitivamente questo corrisponde a richiedere di percorrere ∂D in modo da lasciare D alla propria sinistra. È facile vedere che se $\nu = (\nu_1, \nu_2)$ allora risulta $\tau = (-\nu_2, \nu_1)$. Indichiamo quest'orientamento con $+\partial D$ (vedi la Figura – 5.5). Il teorema della divergenza 5.7.1 può essere riformulato nel modo seguente.

Teorema 5.7.2 (Formula di Stokes in $\mathbb{R}^2$) *Sia $G = (G_1, G_2) : D \to \mathbb{R}^2$ un'applicazione di classe C^1 nel dominio regolare $D \subset \mathbb{R}^2$. Allora risulta*

$$\int_{+\partial D} G \cdot d\ell = \iint_D \left(\frac{\partial G_2}{\partial x} - \frac{\partial G_1}{\partial y} \right) dxdy.$$

La formula di Stokes si ottiene immediatamente applicando il Teorema della divergenza al campo $F = (G_2, -G_1)$ e tenendo conto della relazione tra ν e τ.

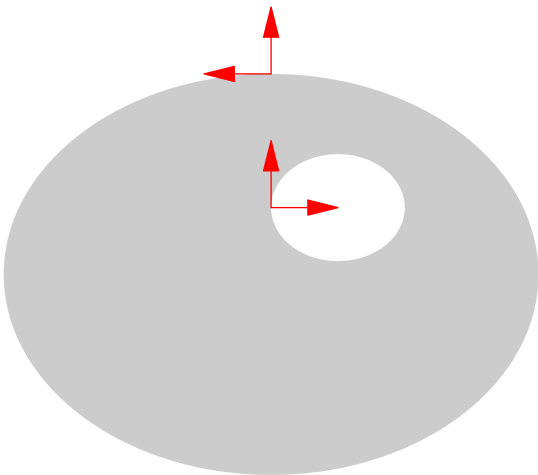


Figura – 5.5: Orientazione positiva della frontiera di D.

Osservazione 5.7.3 Notiamo che scegliendo il campo G in modo che sia

$$\frac{\partial G_2}{\partial x} - \frac{\partial G_1}{\partial y} = 1$$

è possibile conoscere l'area dell'insieme D calcolando un integrale di linea su ∂D. Mostriamo alcuni semplici esempi:

$$m(D) = \int_{+\partial D} (0, x) \cdot d\ell = \int_{+\partial D} (-y, 0) \cdot d\ell = \frac{1}{2} \int_{+\partial D} (-y, x) \cdot d\ell,$$

che corrispondono alle scelte $G(x, y) = (0, x)$, $G(x, y) = (-y, 0)$, $G(x, y) = \frac{1}{2}(-y, x)$. Ad esempio se consideriamo l'ellisse $D = \left\{ (x, y) : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1 \right\}$ $(a, b > 0)$, una parametrizzazione della sua frontiera è $(x(t), y(t)) = (a \cos t, b \sin t)$ con $t \in [0, 2\pi]$ ed allora usando la prima formula otteniamo:

$$m(D) = \int_0^{2\pi} x(t)\, y'(t)\, dt = \int_0^{2\pi} a \cos t\, b \cos t\, dt = ab \int_0^{2\pi} \cos^2 t\, dt = \pi ab\,.$$

Analogamente in tre dimensioni risulta:

Teorema 5.7.4 (Teorema della divergenza in $\mathbb{R}^3$) *Sia T un dominio regolare di $\mathbb{R}^3$. Se $F = (F_1, F_2, F_3) : T \to \mathbb{R}^3$ è un campo vettoriale di classe C^1, si ha*

$$\iiint_T \operatorname{div} F\, dxdydz = \int_{\partial T} F \cdot \nu\, d\sigma,$$

dove ∂T denota la superficie avente la frontiera di T come sostegno, ν è il versore normale a ∂T orientato verso l'esterno di T e la divergenza $\operatorname{div} F$ di F è data da

$$\operatorname{div} F = \frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial y} + \frac{\partial F_3}{\partial z}.$$

Il teorema precedente afferma che l'integrale della divergenza di F su T è pari al flusso del campo uscente da T.

Per enunciare la formula di Stokes, consideriamo una superficie regolare con dominio compatto chiusura di un aperto connesso $\varphi : D \to \mathbb{R}^3$ ed indichiamo con ν il campo dei versori normali individuato da φ (vedi (5.6.8)). Sia A un dominio regolare tale che $\overline{A} \subset \overset{\circ}{D}$ e sia $S = \varphi(A)$. Sia γ una curva regolare a tratti che orienta positivamente il bordo di A. Allora diciamo che la curva $\varphi \circ \gamma$ orienta positivamente il bordo della superficie S. Infine ricordiamo che il rotore di un campo vettoriale $F = (F_1, F_2, F_3)$ di classe C^1 è il campo vettoriale definito da

$$\operatorname{rot} F = \left(\frac{\partial F_3}{\partial y} - \frac{\partial F_2}{\partial z}, \frac{\partial F_1}{\partial z} - \frac{\partial F_3}{\partial x}, \frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} \right). \tag{5.7.9}$$

Teorema 5.7.5 (Formula di Stokes in $\mathbb{R}^3$) *Sia $\varphi : D \to \mathbb{R}^3$ una superficie regolare, siano A ed S come sopra e sia $F = (F_1, F_2, F_3) : B \to \mathbb{R}^3$ un'applicazione di classe C^1 in un aperto $B \subset \mathbb{R}^3$ contenente S. Allora risulta*

$$\int_S \operatorname{rot} F \cdot \nu\, d\sigma = \int_{+\partial S} F \cdot d\ell,$$

dove ν è il campo dei versori normali ad S e il bordo $+\partial S$ è orientato nel verso positivo corrispondente all'orientamento della superficie S.

Osservazione 5.7.6 Il Teorema di Stokes potrebbe essere falso se scegliessimo $A = D$ e $S = \varphi(D)$ in quanto il campo dei versori normali su S potrebbe essere discontinuo. Si può considerare, per esempio il campo vettoriale $F(x,y,z) = (0,0,y)$ e la superficie φ, detta *nastro di Möbius*, definita da

$$\varphi(t,\vartheta) = \begin{cases} \varphi_1(t,\vartheta) = 2\cos\vartheta + t\cos\vartheta\cos\left(\frac{\vartheta}{2}\right) \\ \varphi_2(t,\vartheta) = 2\sin\vartheta + t\sin\vartheta\cos\left(\frac{\vartheta}{2}\right) \\ \varphi_3(t,\vartheta) = t\sin\left(\frac{\vartheta}{2}\right)\,. \end{cases} \qquad (t,\vartheta) \in [-1,1] \times [0,2\pi]$$

Verificare che in questo caso risulta

$$\int_S \operatorname{rot} F \cdot \nu \, d\sigma = 2 \int_{+\partial S} F \cdot d\ell.$$

Poiché sul nastro di Möbius non esiste un campo di vettori normali continuo, si dice che

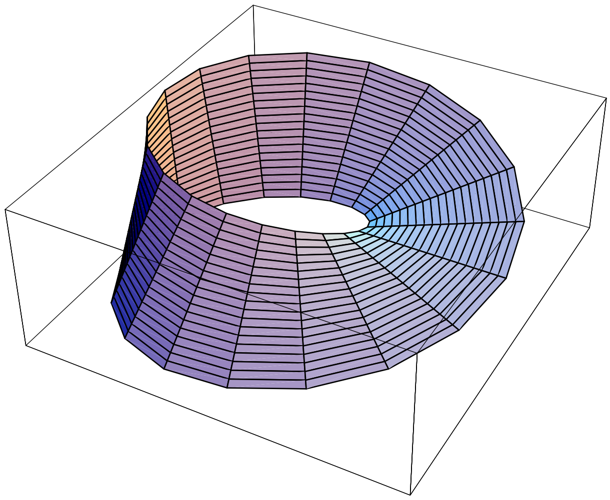


Figura – 5.6: Il nastro di Möbius.

esso è una *superficie non orientabile*.

CAPITOLO 6

ANALISI COMPLESSA

In questo capitolo studiamo le funzioni definite in un sottoinsieme di $\mathbb{C}$ ed a valori in $\mathbb{C}$. La teoria delle funzioni di variabile complessa è stata principalmente sviluppata dal matematico francese Augustin Louis Cauchy (1789-1857).

Indicheremo con z, w gli elementi generici di $\mathbb{C}$, e spesso identificheremo $\mathbb{C}$ con $\mathbb{R}^2$. In questo modo potremo utilizzare le nozioni topologiche introdotte nel Capitolo 1 utilizzando la distanza tra due numeri complessi data da $d(z,w) = |z-w|$. Dunque se $z = x+iy$ e $w = u+iv$ risulta $d(z,w) = \sqrt{(x-u)^2+(y-v)^2}$. Tutte le nozioni di intorno sferico di un punto, interno, esterno, frontiera, chiusura e derivato di un insieme si ottengono immediatamente come nel caso di $\mathbb{R}^2$. Analogamente si estendono le nozioni di insieme limitato, connesso, connesso per poligonali, stellato e convesso.

All'insieme $\mathbb{C}$ viene aggiunto un solo punto all'infinito i cui intorni sono dati dagli insiemi che contengono il complementare di un cerchio o, equivalentemente, i complementari degli insiemi limitati.

6.1 Successioni in $\mathbb{C}$, limiti e continuità di funzioni complesse

Sia $(z_h)_h$ una successione a valori in $\mathbb{C}$, cioè con $z_h \in \mathbb{C}$ per ogni $h \in \mathbb{N}$. Allora:

Definizione 6.1.1 *Si dice che la successione $(z_h)_h$ è limitata se esiste $r > 0$ tale che*

$$\forall h \in \mathbb{N} \quad |z_h| \leq r.$$

Definizione 6.1.2 *Si dice che la successione $(z_h)_h$ converge, o è convergente, ad un elemento $z_0 \in \mathbb{C}$, e si scrive $\lim\limits_{h\to\infty} z_h = z_0$, se:*

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \nu > 0 \textit{ tale che } \forall h \in \mathbb{N} \quad h > \nu \implies |z_h - z_0| < \varepsilon.$$

Definizione 6.1.3 *Si dice che la successione $(z_h)_h$ diverge, o è divergente, e si scrive $\lim\limits_{h\to+\infty} |z_h| = +\infty$, se:*

$$\forall M > 0\ \exists \nu > 0 \textit{ tale che } \forall h \in \mathbb{N} \quad h > \nu \implies |z_h| > M.$$

Come nel caso di $\mathbb{R}^2$, si ha:

Proposizione 6.1.4 *Se $(z_h)_h$ è una successione convergente di $\mathbb{C}$, allora $(z_h)_h$ è limitata.*

Proposizione 6.1.5 *Sia $(z_h)_h$ una successione di $\mathbb{C}$. Supponiamo che $z_h = x_h + iy_h$ per ogni $h \in \mathbb{N}$. Sono equivalenti:*

(i) *la successione $(z_h)_h$ è convergente a $z_0 = x_0 + iy_0 \in \mathbb{C}$;*

(ii) *la successione reale $(x_h)_h$ converge ad x_0 e la successione reale $(y_h)_h$ converge ad y_0.*

Esempio 6.1.6

1. Sia $z_h = \frac{1}{h} + i\frac{1+h}{h}$ per ogni $h \in \mathbb{N}$. Allora la successione data converge a i in $\mathbb{C}$.
2. Esistono successioni limitate, ma non convergenti. Quindi possiamo concludere che anche in $\mathbb{C}$ la limitatezza della successione è solo una condizione necessaria, ma non sufficiente per la convergenza.

Come al solito, se $(z_h)_h$ è una successione di $\mathbb{C}$ e $(k_h)_h$ è una successione strettamente crescente di numeri naturali, la successione $(z_{k_h})_h$ si dice successione estratta, o sottosuccessione, di $(z_h)_h$.

Con le successioni si possono caratterizzare gli insiemi chiusi e definire gli insiemi compatti come per $\mathbb{R}^2$.

Consideriamo ora funzioni $f : \Omega \to \mathbb{C}$ definite su un insieme Ω non vuoto contenuto in $\mathbb{C}$. Si osserva che, per ogni $z \in \mathbb{C}$, posto $u(z) := \operatorname{Re} f(z)$ e $v(z) := \operatorname{Im} f(z)$, si ottiene $f = u + iv$ e quindi assegnare una funzione complessa in Ω equivale ad assegnarne due reali in Ω. Se poi si riguarda Ω come un sottoinsieme di $\mathbb{R}^2$, le funzioni u e v possono essere considerate come funzioni reali di due variabili reali:

$$\forall z = (x, y) \in \Omega : \quad u(x, y) := \operatorname{Re} f(z) \ ; \quad v(x, y) := \operatorname{Im} f(z) \ .$$

Definizione 6.1.7 *Sia $\Omega \subset \mathbb{C}$ e sia $z_0 \in \mathbb{C}$ un punto di accumulazione di Ω. Sia $f : \Omega \to \mathbb{C}$ una funzione. Si dice che f tende a $w \in \mathbb{C}$ per z che tende a z_0, e si scrive $\lim\limits_{z \to z_0} f(z) = w$, se*

$$\forall \varepsilon > 0 \ \ \exists \delta > 0 \text{ tale che } \forall z \in \Omega, \ 0 < |z - z_0| < \delta : \ |f(z) - w| < \varepsilon.$$

Si dice che f tende ad ∞ per z che tende a z_0, e si scrive $\lim\limits_{z \to z_0} f(x) = \infty$, se

$$\forall M > 0 \ \ \exists \delta > 0 \text{ tale che } \forall x \in \Omega, \ 0 < |z - z_0| < \delta : \ |f(z)| > M.$$

Se Ω è illimitato, si può definire anche il limite di f all'infinito, ponendo

$$\lim_{z \to \infty} f(z) = w$$

(con w complesso) se per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $R > 0$ tale che per ogni $z \in \Omega$ con $|z| > R$ risulta $|f(x) - w| < \varepsilon$. Se $w = \infty$ si dà l'analoga definizione, con le modifiche ovvie.

Si riconosce facilmente che, posto $f = u + iv$, $z_0 = x_0 + iy_0$ e $w = s + it$, risulta

$$w = \lim_{z \to z_0} f(z) \Longleftrightarrow s = \lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} u(x,y) \ , \quad t = \lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} v(x,y) \ .$$

Pertanto, lo studio del limite di una funzione complessa equivale allo studio di due limiti reali. Le proprietà dei limiti (caratterizzazione del limite mediante successioni, unicità, operazioni sui limiti e forme indeterminate) derivano dalla equivalenza precedente.

Esempi 6.1.8

1. Si consideri il seguente limite
$$\lim_{z\to 0} \frac{z^2}{z+\bar{z}}$$
Da quanto detto e tenendo presente che
$$\frac{z^2}{z+\bar{z}} = \frac{x^2-y^2}{2x} + iy\,,$$
lo studio del limite precedente è equivalente a quello dei seguenti
$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2-y^2}{2x}\ , \quad \lim_{(x,y)\to(0,0)} y$$
Siccome il primo limite non esiste allora non esiste il limite proposto. Per vedere che il primo limite non esiste basta considerare $x > 0$, $k > 0$ e $y = \sqrt{kx}$. Allora si ha:
$$\lim_{x\to 0+} \frac{x^2-kx}{2x} = -\frac{k}{2}$$
che dipende da k, pertanto il limite non esiste.

2. Si consideri il seguente limite
$$\lim_{z\to 0} \frac{\bar{z}}{z}\ .$$
Si riconosce facilmente che, per ogni z reale e diverso da 0, si ha $\bar{z} = z$ e quindi $\frac{\bar{z}}{z} = 1$, mentre, per ogni z immaginario puro e diverso da 0, si ha $\frac{\bar{z}}{z} = -1$ pertanto in ogni intorno di 0, la funzione in esame assume i valori 1 e -1 e quindi non può tendere verso alcun limite.

Diamo ora la definizione di funzione continua.

Definizione 6.1.9 *Sia $\Omega \subset \mathbb{C}$. Sia $f : \Omega \to \mathbb{C}$ una funzione e sia $z_0 \in \Omega$. Si dice che f è continua in z_0 se z_0 è un punto isolato di Ω oppure*

$$\exists \lim_{z\to z_0} f(z) = f(z_0),$$

o equivalentemente, se

$$\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists \delta > 0 \;\; \textit{tale che} \; \forall z \in \Omega, \; |z - z_0| < \delta : \; |f(z) - f(z_0)| < \varepsilon.$$

Inoltre, si dice che f è continua in Ω se essa è continua in ogni punto di Ω.

Come al solito somme e prodotti di funzioni continue sono ancora funzioni continue.

Definizione 6.1.10 *Sia $\Omega \subset \mathbb{C}$ e sia $f : \Omega \to \mathbb{C}$ una funzione. Si dice che f è limitata in Ω se $f(\Omega)$ è limitato in $\mathbb{C}$.*

Poiché per le funzioni a valori complessi non si può parlare di massimo o minimo, vale la seguente versione del teorema di Weierstrass.

Teorema 6.1.11 (Weierstrass) *Sia K un sottoinsieme compatto di $\mathbb{C}$ e sia $f : K \to \mathbb{C}$ una funzione definita e continua in K. Allora $f(K)$ è un insieme compatto di $\mathbb{C}$.*

6.2 Funzioni olomorfe

A differenza delle nozioni precedenti, quella di funzione derivabile presenta diverse proprietà che non valgono nel caso reale e sulle quali conviene pertanto soffermarsi.

Definizione 6.2.1 *Siano Ω un sottoinsieme aperto di $\mathbb{C}$ ed $f : \Omega \to \mathbb{C}$ una funzione complessa. Se $z_0 \in \Omega$, si dice che f è derivabile in z_0 se il seguente limite*

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(z_0 + h) - f(z_0)}{h} \; \textit{(oppure)} \; \lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} \tag{6.2.1}$$

esiste ed è finito in $\mathbb{C}$. In tal caso, si pone

$$f'(z_0) := \lim_{h \to 0} \frac{f(z_0 + h) - f(z_0)}{h} \; .$$

Come per le funzioni reali, la derivata $f'(z_0)$ può essere denotata anche con uno dei seguenti simboli

$$Df(z_0); \quad \frac{df}{dz}(z_0); \quad (Df(z))_{z=z_0}; \quad \left(\frac{df}{dz}(z)\right)_{z=z_0} \; .$$

Una funzione derivabile in ogni punto di un sottoinsieme A di Ω viene denominata olomorfa in A. Infine, f si dice olomorfa se è olomorfa in Ω.

Osservazioni 6.2.2

- Utilizzando i noti simboli $o(h)$ di Landau visti nel corso di Analisi Matematica I, si riconosce facilmente che la derivabilità di f in z_0 equivale all'esistenza di $\ell \in \mathbb{C}$ tale che
$$f(z_0+h) = f(z_0) + \ell h + o(h) \quad \text{in} \quad z_0$$
ed in tal caso si ha $\ell = f'(z_0)$. Infatti, se f è derivabile in z_0, risulta
$$\lim_{h\to 0} \frac{f(z_0+h) - f(z_0) - f'(z_0)h}{h} = 0 \ ,$$
da cui $f(z_0+h) - f(z_0) - f'(z_0)h = o(h)$ e quindi anche $\ell = f'(z_0)$. Viceversa, se $f(z_0+h) = f(z_0) + \ell h + o(h)$ in z_0, risulta
$$\lim_{h\to 0} \frac{f(z_0+h) - f(z_0)}{h} = \ell \ ,$$
e quindi f è derivabile in z_0 con $\ell = f'(z_0)$.

- Dalla osservazione precedente, si ricava immediatamente che, se f è derivabile in z_0, allora f è anche continua in z_0.

- Poiché la definizione di derivabilità si avvale dello stesso limite considerato nel caso reale, per tale nozione continuano a valere le regole di derivazione già note nel caso reale. In particolare, valgono le seguenti proprietà.

  1. Se $f : \Omega \to \mathbb{C}$ e $g : \Omega \to \mathbb{C}$ sono derivabili in $z_0 \in \Omega$, allora $f+g$ è derivabile in z_0 e si ha $(f+g)'(z_0) = f'(z_0) + g'(z_0)$;
  2. Se $f : \Omega \to \mathbb{C}$ e $g : \Omega \to \mathbb{C}$ sono derivabili in $z_0 \in \Omega$, allora $f \cdot g$ è derivabile in z_0 e si ha $(f \cdot g)'(z_0) = f'(z_0)g(z_0) + f(z_0)g'(z_0)$;
  3. Se $f : \Omega \to \mathbb{C}$ è derivabile in $z_0 \in \Omega$ e $f(z) \neq 0$ per ogni $z \in \Omega$, allora $1/f$ è derivabile in z_0 e si ha
  $$\left(\frac{1}{f}\right)'(z_0) = -\frac{f'(z_0)}{(f(z_0))^2};$$
  4. Se $f : \Omega \to \mathbb{C}$ e $g : \Omega \to \mathbb{C}$ sono derivabili in $z_0 \in \Omega$ e $g(z) \neq 0$ per ogni $z \in \Omega$, allora f/g è derivabile in z_0 e si ha
  $$\left(\frac{f}{g}\right)'(z_0) = \frac{f'(z_0)g(z_0) - f(z_0)g'(z_0)}{(g(z_0))^2};$$
  5. Se $\Omega, \Gamma \subset \mathbb{C}$ e se $f : \Omega \to \mathbb{C}$ è derivabile in $z_0 \in \Omega$ e $g : \Gamma \to \mathbb{C}$ è derivabile in $w_0 := f(z_0)$, allora la funzione composta $g \circ f : \Omega \to \mathbb{C}$ definita ponendo, per ogni $z \in \Omega$, $(g \circ f)(z) = g(f(z))$ è derivabile in z_0 e si ha
  $$(g \circ f)'(z_0) = g'(f(z_0)) \cdot f'(z_0) \ :$$

6. Sia $f : \Omega \to \mathbb{C}$ una funzione iniettiva e si supponga che sia derivabile in $z_0 \in \Omega$ con $f'(z_0) \neq 0$. Posto $\Gamma = f(\Omega)$, si consideri la funzione inversa $f^{-1} : \Gamma \to \mathbb{C}$ definita ponendo, per ogni $w \in \Gamma$, $f^{-1}(w) = z$ con $z \in \Omega$ tale che $f(z) = w$. Se f^{-1} è continua in $w_0 := f(z_0)$, allora f^{-1} è anche derivabile in w_0 e si ha

$$(f^{-1})'(w_0) = \frac{1}{f'(z_0)} \, .$$

Esempi 6.2.3

1. Consideriamo la funzione potenza $f_n : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ definita da $f_n(z) := z^n$ $(n \in \mathbb{N})$. Dimostriamo che $f_n'(z) = nz^{n-1}$. Proviamolo per induzione su n. Dalla definizione segue immediatamente che la formula vale per $n = 1$. Supponiamola vera per n, allora $f_{n+1}(z) = zf_n(z)$. Per l'ipotesi di induzione e per la regola sulla derivata del prodotto risulta

$$D(f_{n+1}(z)) = D(zf_n(z)) = f_n(z) + zD(f_n(z)) = z^n + znz^{n-1} = (n+1)z^n \, .$$

Dalla regola sulla derivata del quoziente segue che la formula vale anche per n intero negativo.

2. Si consideri la funzione $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ definita ponendo, per ogni $z \in \mathbb{C}$, $f(z) = \operatorname{Re} z$. Per ogni $z_0 \in \mathbb{C}$, risulta

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(z_0+h) - f(z_0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\operatorname{Re}(z_0+h) - \operatorname{Re} z_0}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\operatorname{Re} h}{h}$$

e quest'ultimo limite non esiste in quanto per $h \neq 0$ reale si ha $\operatorname{Re} h/h = 1$ mentre per h immaginario puro si ha $\operatorname{Re} h/h = 0$. Quindi f non è derivabile in alcun punto di $\mathbb{C}$.

3. Si consideri la funzione $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ definita ponendo, per ogni $z \in \mathbb{C}$, $f(z) = \bar{z}$. Per ogni $z_0 \in \mathbb{C}$, risulta

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(z_0+h) - f(z_0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\overline{z_0+h} - \overline{z_0}}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\bar{h}}{h}$$

e quest'ultimo limite non esiste come si è visto nell'Esempio 6.1.8,2. Quindi f non è derivabile in alcun punto di $\mathbb{C}$.

Dimostriamo a questo punto il primo importante risultato sulle funzioni derivabili. Come al solito, considerate le parti reali ed immaginarie di f, si scrive $f = u + iv$ con u, v funzioni reali di due variabili reali.

Teorema 6.2.4 (Teorema di Cauchy-Riemann) *Siano $\Omega \subset \mathbb{C}$ un insieme aperto ed $f = u+iv : \Omega \to \mathbb{C}$ una funzione complessa. Se $z_0 = x_0+iy_0 \in \Omega$, le seguenti proposizioni sono equivalenti* *a)* *f è derivabile in z_0;*

b) *Le funzioni u e v sono differenziabili in (x_0, y_0) e si ha:*

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x_0, y_0) = \frac{\partial v}{\partial y}(x_0, y_0)\,, \quad \frac{\partial u}{\partial y}(x_0, y_0) = -\frac{\partial v}{\partial x}(x_0, y_0)\,. \tag{6.2.2}$$

Inoltre risulta

$$f'(z_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = \frac{1}{i}\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)\,. \tag{6.2.3}$$

Dim. Supponiamo che f sia derivabile in z_0 e poniamo $f'(z_0) = \alpha + i\beta$. Per ogni $h = p + iq \neq 0$, risulta

$$f(z_0 + h) = u(x_0 + p, y_0 + q) + iv(x_0 + p, y_0 + q)\ ;\ f(z_0) = u(x_0, y_0) + iv(x_0, y_0)$$

e inoltre

$$f'(z_0)h = (\alpha + i\beta)(p + iq) = (\alpha p - \beta q) + i(\alpha q + \beta p)$$

e quindi, dall'Osservazione 6.2.2 si ha

$$\begin{aligned} &u(x_0 + p, y_0 + q) + iv(x_0 + p, y_0 + q) \\ &\quad = u(x_0, y_0) + iv(x_0, y_0) + (\alpha + i\beta)(p + iq) + o(h) \\ &\quad = u(x_0, y_0) + iv(x_0, y_0) + (\alpha p - \beta q) + i(\alpha q + \beta p) + o(h)\,. \end{aligned}$$

Separando le parti reali e immaginarie si ottengono le equazioni

$$\begin{cases} u(x_0 + p, y_0 + q) = u(x_0, y_0) + (\alpha p - \beta q) + o(\sqrt{p^2 + q^2})\,, \\ v(x_0 + p, y_0 + q) = v(x_0, y_0) + (\alpha q + \beta p) + o(\sqrt{p^2 + q^2})\,, \end{cases}$$

dove si è potuto considerare $o(\sqrt{p^2 + q^2})$ al posto di $o(h)$ in quanto il rapporto $\sqrt{p^2 + q^2}/h = |h|/h$ è limitato. Dalle equazioni precedenti si ricava

$$\lim_{(p,q)\to(0,0)} \frac{u(x_0 + p, y_0 + q) - u(x_0, y_0) - (\alpha p - \beta q)}{\sqrt{p^2 + q^2}} = 0\,,$$
$$\lim_{(p,q)\to(0,0)} \frac{v(x_0 + p, y_0 + q) - v(x_0, y_0) - (\alpha q + \beta p)}{\sqrt{p^2 + q^2}} = 0\,,$$

e quindi u e v sono differenziabili in (x_0, y_0) e inoltre

$$du(x_0, y_0)(p, q) = \alpha p - \beta q\ ; \quad dv(x_0, y_0)(p, q) = \alpha q + \beta p\,.$$

Pertanto

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x_0, y_0) = du(x_0, y_0)(1, 0) = \alpha\ , \quad \frac{\partial u}{\partial y}(x_0, y_0) = du(x_0, y_0)(0, 1) = -\beta\ ,$$

$$\frac{\partial v}{\partial x}(x_0,y_0) = du(x_0,y_0)(1,0) = \beta\ , \quad \frac{\partial v}{\partial y}(x_0,y_0) = du(x_0,y_0)(0,1) = \alpha\ ,$$

da cui seguono (6.2.2) e (6.2.3).

Il viceversa si può dimostrare ripercorrendo a ritroso la dimostrazione già svolta.

QED

Corollario 6.2.5 *Siano Ω un sottoinsieme aperto connesso di $\mathbb{C}$ ed $f : \Omega \to \mathbb{C}$ una funzione olomorfa e tale che $f(\Omega) \subset \mathbb{R}$. Allora f è costante.*

DIM. Infatti, posto $f = u+iv$, risulta $v = 0$ e inoltre, dalle equazioni di Cauchy-Riemann (6.2.2), $D_x u = D_y v = 0$, $D_y u = -D_x v = 0$. Quindi u, e conseguentemente f, è costante (vedi Teorema 2.1.10). QED

Dal Corollario precedente si ottiene subito che le funzioni $\operatorname{Re} z$, $\operatorname{Im} z$, $|z|$ non possono essere olomorfe, altrimenti dovrebbero essere costanti. Si osservi che il corollario precedente rimane valido se si suppone che $f = u + ci$ con $c \in \mathbb{R}$ costante fissata.

Osservazione 6.2.6 Si dimostrerà in seguito che se f è olomorfa, le funzioni u e v sono derivabili parzialmente infinite volte. Da ciò e dalle equazioni di Cauchy-Riemann, segue allora facilmente che u e v verificano le seguenti condizioni:

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0\,,$$
$$\Delta v = \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 0\,.$$

Infatti, per ogni $(x,y) \in \Omega$, dalle equazioni di Cauchy-Riemann (6.2.2), si ha:

$$\Delta u(x,y) = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,y) + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x,y) = \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y}(x,y) - \frac{\partial^2 v}{\partial y \partial x}(x,y) = 0\,,$$

per il Teorema 2.1.15. Analogamente si ottiene il risultato per v.

L'operatore Δ è detto operatore di Laplace e le funzioni u per cui $\Delta u = 0$ sono dette funzioni armoniche. Tali funzioni sono molto importanti in matematica e nelle applicazioni.

6.3 Serie di potenze in campo complesso

La teoria delle successioni e serie di funzioni di variabile complessa non presenta novità rispetto al caso reale. Valgono le nozioni di convergenza puntuale e uniforme per le successioni di funzioni e di convergenza puntuale, assoluta, uniforme e totale per le serie di funzioni complesse, basta utilizzare il modulo al posto del valore assoluto.

Anche la teoria delle serie di potenze complesse è molto simile al caso reale.

Definizione 6.3.1 *Data una successione* $(c_k)_{k\in\mathbb{N}}$ *di numeri complessi e un punto* $z_0 \in \mathbb{C}$ *si dice* serie di potenze con coefficienti (c_k) centrata in z_0 *la serie*

$$\sum_{k=0}^{+\infty} c_k\,(z-z_0)^k\ . \tag{6.3.4}$$

Per la serie (6.3.4) si definisce il *raggio di convergenza* ϱ come segue:

$$\varrho = \sup\left\{ r\in[0,+\infty[\,:\ \sum_{k=0}^{+\infty}|c_k|\,r^k \ \text{ converge}\right\}.$$

Come nel caso reale $\varrho\in[0,+\infty]$. Vale il seguente Teorema.

Teorema 6.3.2 (Proprietà delle serie di potenze in $\mathbb{C}$) *Data la serie di potenze (6.3.4), sia* $\varrho\in[0,+\infty]$ *il suo raggio di convergenza.*

(i) *Se* $\varrho=0$ *allora la serie* (6.3.4) *converge solo per* $z=z_0$.

(ii) *Se* $\varrho=+\infty$ *allora la serie* (6.3.4) *converge assolutamente per ogni* $z\in\mathbb{C}$ *e converge totalmente in ogni intorno circolare* $B_r(z_0)$.

(iii) *Se* $0<\varrho<+\infty$ *allora la serie* (6.3.4) *converge assolutamente per ogni* $z\in B_\varrho(z_0)$, *converge totalmente in ogni intorno chiuso di* z_0 *contenuto in* $B_\varrho(z_0)$ *e non converge per alcun* z *tale che* $|z-z_0|>\varrho$.

(iv) *Supposto* $\varrho>0$, *sia* $f: B_\varrho(z_0)\to\mathbb{C}$ *la somma della serie* (6.3.4); *allora* f *è olomorfa e vale l'eguaglianza:*

$$f'(z) = \sum_{k=1}^{+\infty} k c_k (z-z_0)^{k-1} \tag{6.3.5}$$

per ogni $z\in B_\varrho(z_0)$.

(v) *Posto* $\ell = \limsup_{k\to\infty}\sqrt[k]{|c_k|}$,[1] *si ha* $\varrho=1/\ell$, *con le convenzioni che se* $\ell=0$ *allora* $\varrho=+\infty$ *e se* $\ell=+\infty$ *allora* $\varrho=0$. *Da questa formula segue che anche la serie nel punto (iv) ha lo stesso raggio di convergenza* ϱ. *Pertanto, per ricorrenza, la somma di una serie di potenze ha derivate di ogni ordine.*

Osserviamo che se $c_k\neq 0$ per ogni $k\in\mathbb{N}$ ed esiste $\lim_{k\to+\infty}\dfrac{|c_{k+1}|}{|c_k|}=\ell$ allora il raggio di convergenza della serie (6.3.4) è $1/\ell$ (con la usuale convenzione).

---

[1] Ricordiamo dalle dispense di Analisi Matematica I che il limite superiore di una successione di numeri reali $(a_k)_k$ è dato da $\limsup_{k\to\infty} a_k = \inf_{n\in\mathbb{N}}\left(\sup_{k\geq n} a_k\right)$.

6.3.a Le funzioni elementari

Oltre ai polinomi e alle funzioni razionali sono olomorfe nel loro dominio le funzioni elementari fondamentali.

1. L'esponenziale complesso è definito in $\mathbb{C}$. Se $z = x + iy$ allora

   $$\mathrm{e}^z = \mathrm{e}^x \big(\cos y + i \sin y \big) .$$

   Evidentemente l'esponenziale è una funzione $2\pi i$ periodica ed assume tutti i valori complessi tranne lo zero. La funzione esponenziale è iniettiva se viene ristretta ad una striscia del tipo $\mathbb{R} + i]\alpha, \alpha + 2\pi]$ per qualunque $\alpha \in \mathbb{R}$.

2. Le funzioni circolari e iperboliche sono definite su tutto $\mathbb{C}$ da:

   $$\cos z = \frac{\mathrm{e}^{iz} + \mathrm{e}^{-iz}}{2} , \qquad \sin z = \frac{\mathrm{e}^{iz} - \mathrm{e}^{-iz}}{2i} ,$$
   $$\cosh z = \frac{\mathrm{e}^{z} + \mathrm{e}^{-z}}{2} , \qquad \sinh z = \frac{\mathrm{e}^{z} - \mathrm{e}^{-z}}{2} .$$

3. Le funzioni precedenti sono olomorfe in $\mathbb{C}$ in quanto verificano le condizioni del Teorema 6.2.4 e sono sviluppabili in serie di potenze in tutto $\mathbb{C}$:

   $$\mathrm{e}^z = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{z^k}{k!} ,$$
   $$\cos z = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k z^{2k}}{(2k)!} , \qquad \sin z = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k z^{2k+1}}{(2k+1)!} ,$$
   $$\cosh z = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{z^{2k}}{(2k)!} , \qquad \sinh z = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{z^{2k+1}}{(2k+1)!} .$$

4. Le funzioni potenza, esponenziale, circolari e iperboliche non sono iniettive perciò per invertirle dovremo estendere il concetto di funzione e ammettere funzioni f che ad un punto associano un insieme di valori $f(z)$, dette funzioni *polidrome*. Data una funzione polidroma f in Ω si dice *determinazione di* f ogni funzione $g : \Omega \to \mathbb{C}$ tale che, per ogni $z \in \Omega$ si ha $g(z) \in f(z)$.

5. Se $n \geq 2$, si definisce funzione radice n-esima, la funzione polidroma $\sqrt[n]{} : \mathbb{C} \to \mathcal{P}(\mathbb{C})$ definita ponendo, per ogni $z = \varrho\, \mathrm{e}^{i\vartheta} \in \mathbb{C}$,

   $$\sqrt[n]{z} = \big\{ \sqrt[n]{\varrho}\, \mathrm{e}^{i \frac{\vartheta + 2k\pi}{n}} \ ; \ k = 0, 1, \dots, n-1 \big\} .$$

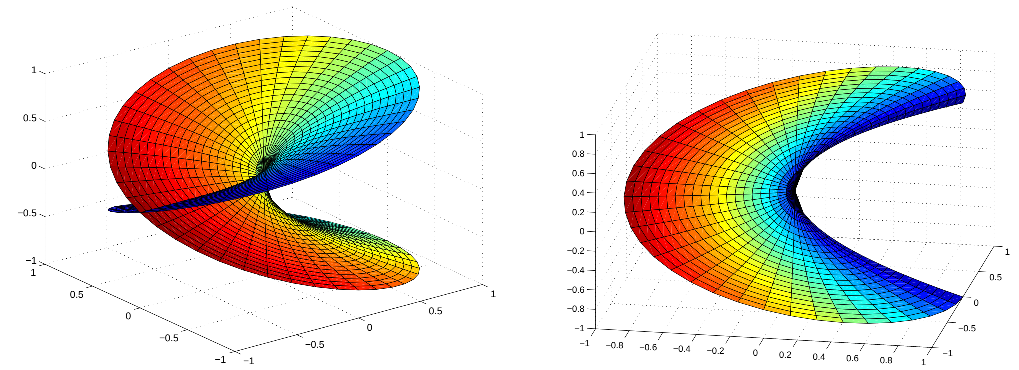


Figura – 6.1: Grafico della parte reale di $\sqrt{z}$ e di una sua determinazione.

6. Se $z = \varrho(\cos\vartheta + i\sin\vartheta)$, l'insieme degli argomenti di z viene denotato con $\arg z$; dunque
$$\arg z := \{\vartheta + 2k\pi\ ; k \in \mathbb{Z}\ \}\,.$$
Inoltre, l'argomento principale di z verrà denotato con $\operatorname{Arg} z$; quindi $\operatorname{Arg} z$ è l'unico elemento di $\arg z$ tale che $-\pi < \operatorname{Arg} z \leq \pi$.

7. La funzione *logaritmo in campo complesso* è la funzione polidroma $\log : \mathbb{C}\setminus\{0\} \to \mathcal{P}(\mathbb{C})$ definita ponendo, per ogni $z = \varrho\, e^{i\vartheta} \in \mathbb{C}\setminus\{0\}$ da:
$$\log z := \log|z| + i\arg z = \log\varrho + i\,(\vartheta + 2k\pi) \quad (k \in \mathbb{Z})\,. \tag{6.3.6}$$
La determinazione $\operatorname{Log} : \mathbb{C}\setminus\{0\} \to \mathbb{C}$ definita ponendo, per ogni $z = \varrho\, e^{i\vartheta} \in \mathbb{C}\setminus\{0\}$
$$\operatorname{Log} z := \log\varrho + i\ \operatorname{Arg} z$$
viene denominata funzione logaritmo principale. La determinazione $\operatorname{Log} z$ è olomorfa in $\mathbb{C}\setminus\{x \leq 0\}$, cioè in $\mathbb{C}$ privato del semiasse reale negativo e la sua derivata vale $\dfrac{1}{z}$. Tale funzione non è continua sulla semiretta $\{x \leq 0\}$. Infatti se $z = x + iy$ con $x < 0$ e $y > 0$ risulta $\lim\limits_{z\to x} \operatorname{Log} z = \log|x| + i\,\pi$, mentre se $y < 0$ allora $\lim\limits_{z\to x} \operatorname{Log} z = \log|x| - i\,\pi$. Infine $\lim\limits_{z\to 0} \operatorname{Log} z = \infty$.

Una situazione analoga si presenta se si considera una determinazione del logaritmo ottenuta escludendo dal piano complesso un'altra semiretta uscente dall'origine.

8. Utilizzando il logaritmo, si può definire la *potenza con esponente complesso*. Se $z \neq 0$ e $w \in \mathbb{C}$ si definisce la funzione polidroma $z^w = e^{w\log z}$. Scegliendo il logaritmo principale si ottiene la funzione $z^w = e^{w\operatorname{Log} z}$. Ad esempio si ha $i^i = e^{i\ \operatorname{Log} i} = e^{-\pi/2}$. Notiamo che per questa determinazione della potenza complessa non sempre valgono le usuali regole sulle potenze.

6.4 Cammini ed integrali curvilinei

Riprendiamo in questo paragrafo alcuni concetti già visti nel Capitolo 3. Una funzione continua $\varphi : [a,b] \to \mathbb{C}$ viene denominata *curva di Jordan*. Quindi assegnare una curva di Jordan è equivalente ad assegnare due funzioni continue $x : [a,b] \to \mathbb{R}$ e $y : [a,b] \to \mathbb{R}$ tali che, per ogni $t \in [a,b]$, $\varphi(t) = x(t) + iy(t)$. Il sostegno di φ è definito come l'insieme immagine di φ e viene denotato con φ^*; dunque

$$\varphi^* := \varphi([a,b]). \tag{6.4.7}$$

Una curva di Jordan viene denominata semplice se la sua restrizione a $[a,b[$ è iniettiva. Inoltre, una curva di Jordan viene denominata chiusa se $\varphi(a) = \varphi(b)$. Una curva di Jordan viene denominata regolare se è derivabile con derivata continua e inoltre $\varphi'(t) \neq 0$ per ogni $t \in [a,b]$. Per le curve regolari si può definire la nozione di lunghezza ponendo, coerentemente con il Teorema 3.1.10:

$$\ell(\varphi) := \int_a^b |\varphi'(t)|\, dt = \int_a^b \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}\, dt\,. \tag{6.4.8}$$

A questo punto si può dare la definizione di cammino. Una curva di Jordan $\varphi : [a,b] \to \mathbb{C}$ viene denominata cammino se è regolare a tratti, cioè se è continua ed esistono $a = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = b$ tali che φ sia regolare in $[t_{k-1}, t_k]$ per ogni $k = 1, \ldots, n$. Anche per i cammini si può considerare la nozione di lunghezza definita dalla 6.4.8 (in quanto la funzione integranda è continua a tratti). Un cammino chiuso viene spesso denominato anche circuito. Un esempio molto semplice di circuito che verrà utilizzato frequentemente nel seguito è costituito dalla circonferenza $\gamma_r : [0; 2\pi] \to \mathbb{C}$ di raggio $r > 0$ definita ponendo, per ogni $t \in [0, 2\pi]$, $\gamma_r(t) := r\,\mathrm{e}^{it}$. In questo caso si ha $x(t) := r\cos t$ e $y(t) := r\sin t$; si tratta ovviamente di un cammino semplice e chiuso la cui lunghezza è data da

$$\ell(\gamma_r) = \int_0^{2\pi} |ir\,\mathrm{e}^{it}\,|\, dt = r\int_0^{2\pi} dt = 2\pi r.$$

Se $z_0 \in \mathbb{C}$, la circonferenza $\gamma_{z_0,r} : [0; 2\pi] \to \mathbb{C}$ di centro z_0 e raggio $r > 0$ si può definire ponendo, per ogni $t \in [0, 2\pi]$,

$$\gamma_{z_0,r} := z_0 + r\,\mathrm{e}^{it}\ .$$

La lunghezza rimane ovviamente invariata.

Si considerino ora un sottoinsieme aperto $\Omega \subset \mathbb{C}$ ed una funzione $f : \Omega \to \mathbb{C}$ continua. Se $\varphi : [a,b] \to \mathbb{C}$ è un cammino con sostegno contenuto in Ω, si definisce integrale curvilineo di f lungo φ, il seguente numero complesso

$$\int_\varphi f(z)\, dz := \int_a^b f(\varphi(t))\, \varphi'(t)\, dt\ . \tag{6.4.9}$$

Se il cammino φ è chiuso l'integrale curvilineo si indica di solito con $\oint_\varphi f(z)\, dz$.

Enunciamo a questo punto alcune semplici proprietà degli integrali curvilinei lungo un cammino.

1. *(Proprietà di linearità degli integrali curvilinei)* Siano $f, g : \Omega \to \mathbb{C}$ due funzioni continue e sia $\varphi : [a, b] \to \mathbb{C}$ un cammino tale che $\varphi^* \subset \Omega$. Allora
$$\int_\varphi (f+g)(z)\,dz = \int_\varphi f(z)\,dz + \int_\varphi g(z)\,dz\,;$$
Inoltre, se $c \in \mathbb{C}$,
$$\int_\varphi (cf)(z)\,dz = c\int_\varphi f(z)\,dz\,.$$

2. *(Teorema della media)* Sia $f : \Omega \to \mathbb{C}$ una funzione continua e sia $\varphi : [a, b] \to \mathbb{C}$ un cammino tale che $\varphi^* \subset \Omega$. Allora
$$\left|\int_\varphi f(z)\,dz\right| \le \max_{z\in\varphi^*} |f(z)|\ \ell(\varphi)\,. \tag{6.4.10}$$
Infatti,
$$\begin{aligned}\left|\int_\varphi f(z)\,dz\right| &= \left|\int_a^b f(\varphi(t))\,\varphi'(t)\,dt\right| \le \int_a^b |f(\varphi(t))|\cdot|\varphi'(t)|\,dt\\ &\le \max_{z\in\varphi^*}|f(z)|\int_a^b |\varphi'(t)|\,dt = \max_{z\in\varphi^*}|f(z)|\,\ell(\varphi)\,.\end{aligned}$$

3. *(Proprietà di decomposizione degli integrali curvilinei)* Si definisce innanzitutto il cammino unione (denominato spesso anche cammino somma) di due cammini (vedi anche la definizione 3.2.4). Siano $\varphi_1 : [a, b] \to \mathbb{C}$ e $\varphi_2 : [b, c] \to \mathbb{C}$ due cammini tali che $\varphi_1(b) = \varphi_2(b)$. Allora, si verifica facilmente che la curva $\varphi_1 \oplus \varphi_2 : [a, c] \to \mathbb{C}$ definita ponendo, per ogni $t \in [a, c]$,
$$(\varphi_1 \oplus \varphi_2)(t) := \begin{cases}\varphi_1(t) & \text{se}\quad t\in[a,b]\,,\\ \varphi_2(t) & \text{se}\quad t\in[b,c]\,,\end{cases}$$
è a sua volta un cammino, il quale viene appunto denominato unione dei cammini φ_1 e φ_2. Si osserva che se Ω è un sottoinsieme aperto di $\mathbb{C}$ e se $\varphi_1^* \subset \Omega$ e $\varphi_2^* \subset \Omega$, allora anche $(\varphi_1 \oplus \varphi_2)^* \subset \Omega$. Se inoltre $f : \Omega \to \mathbb{C}$ è una funzione continua, vale ovviamente la seguente proprietà
$$\int_{\varphi_1\oplus\varphi_2} f(z)\,dz = \int_{\varphi_1} f(z)\,dz + \int_{\varphi_2} f(z)\,dz\,.$$

4. *(Integrale curvilineo sul cammino opposto)* Si consideri un cammino $\varphi : [a, b] \to \mathbb{C}$. Si definisce cammino opposto a φ il cammino $\varphi^o : [a, b] \to \mathbb{C}$ definito ponendo, per

ogni $t \in [a,b]$, $\varphi^o(t) := \varphi(a+b-t)$. Si verifica facilmente che $(\varphi^o)^* = \varphi^*$ e inoltre $\varphi^o(a) = \varphi(b)$ mentre $\varphi^o(b) = \varphi(a)$. Se Ω è un sottoinsieme aperto di $\mathbb{C}$ tale che $\varphi^* \subset \Omega$ e se $f : \Omega \to \mathbb{C}$ è una funzione continua, si ha usando il cambiamento di variabile $\tau = a+b-t$:

$$\begin{aligned}\int_{\varphi^o} f(z)\,dz &= \int_a^b f(\varphi^o(t))\,(\varphi^o)'(t)\,dt \\ &= -\int_b^a f(\varphi(\tau))\,(-\varphi'(\tau))\,d\tau = -\int_\varphi f(z)\,dz\,.\end{aligned}$$

Quindi l'integrale curvilineo di una funzione dipende dal verso di percorrenza della curva.

Esempio 6.4.1 Sia $n \in \mathbb{Z}$ e consideriamo la funzione $f : \mathbb{C} \setminus \{0\} \to \mathbb{C}$ definita da $f(z) = z^n$. Allora risulta $\forall r > 0$ se $n \neq -1$

$$\begin{aligned}\oint_{\gamma_r} z^n\,dz &= \int_0^{2\pi} r^n\,\mathrm{e}^{int} \cdot ir\,\mathrm{e}^{it}\ dt = ir^{n+1}\int_0^{2\pi} \mathrm{e}^{i(n+1)t}\ dt \\ &= ir^{n+1}\left[\frac{\mathrm{e}^{i(n+1)t}}{i(n+1)}\right]_0^{2\pi} = 0\end{aligned}$$

mentre

$$\oint_{\gamma_r} \frac{1}{z}\,dz = \int_0^{2\pi} \frac{1}{r\,\mathrm{e}^{it}}\,ir\,\mathrm{e}^{it}\ dt = \int_0^{2\pi} i\,dt = 2\pi i\,,$$

indipendentemente dal raggio.

Concludiamo ora le proprietà generali degli integrali curvilinei con un importante risultato.

Teorema 6.4.2 (Teorema di Jordan) *Sia $\varphi : [a,b] \to \mathbb{C}$ un cammino semplice e chiuso. Allora esiste uno ed un solo sottoinsieme aperto connesso e limitato Ω_φ di $\mathbb{C}$ tale che $\partial\Omega_\varphi = \varphi^*$.*

6.5 Funzioni analitiche e funzioni olomorfe

Sia Ω un sottoinsieme aperto di $\mathbb{C}$ e sia $f : \Omega \to \mathbb{C}$ una funzione complessa. Si dice che f è analitica se, per ogni $z_0 \in \Omega$, esistono $r > 0$ ed $(c_k)_{k\in\mathbb{N}}$ successione di numeri complessi tali che, per ogni $z \in B_r(z_0)$,

$$f(z) = \sum_{k=0}^{+\infty} c_k (z-z_0)^k\,.$$

Quindi una funzione è analitica se si può esprimere localmente come somma di una serie di potenze.

Per le funzioni analitiche dal Teorema 6.3.2 abbiamo il seguente risultato.

Teorema 6.5.1 *Siano Ω un sottoinsieme aperto di $\mathbb{C}$ e sia $f : \Omega \to \mathbb{C}$ una funzione analitica. Allora f è olomorfa ed inoltre la sua derivata f' è anch'essa una funzione analitica.*

Naturalmente iterando l'uso del teorema precedente si ha che una funzione analitica è derivabile infinite volte e tutte le derivate sono analitiche.

Faremo vedere ora che ogni funzione olomorfa è analitica. Da ciò seguirà che le funzioni olomorfe sono funzioni dotate di derivate di ogni ordine. Se Ω è un sottoinsieme aperto di $\mathbb{C}$, si denoterà con $\mathcal{H}(\Omega)$ l'insieme delle funzioni olomorfe definite in Ω.

Si può enunciare subito il seguente risultato preliminare.

Lemma 6.5.2 *Siano Ω un sottoinsieme aperto di $\mathbb{C}$ ed $F \in \mathcal{H}(\Omega)$ e si ponga $f = F'$. Se $\varphi : [a, b] \to \mathbb{C}$ è un cammino tale che $\varphi^* \subset \Omega$, allora*

$$\int_\varphi f(z)\, dz = F(\varphi(b)) - F(\varphi(a))\,.$$

Dim. Risulta

$$\int_\varphi f(z)\, dz = \int_a^b F'(\varphi(t))\, \varphi'(t)\, dt = \int_a^b (F \circ \varphi)'(t)\, dt = F(\varphi(b)) - F(\varphi(a))\,.$$

QED

In particolare, se φ è un circuito, allora l'integrale di f lungo φ risulta nullo. Questo risultato sarà dimostrato in seguito anche in ipotesi più generali.

A questo punto è utile richiamare la definizione di insieme stellato (vedi anche 1.1.21). Se Ω è un sottoinsieme aperto di $\mathbb{C}$, si dice che Ω è stellato rispetto ad un punto $z_0 \in \Omega$ se verifica la seguente condizione

$$\forall z \in \Omega\,,\ \forall t \in [0, 1]\ :\ z_0 + t(z - z_0) \in \Omega\,, \tag{6.5.11}$$

cioè per ogni $z \in \Omega$ il segmento di estremi z_0 e z è interamente contenuto in Ω. Un sottoinsieme aperto Ω di $\mathbb{C}$ si dice stellato se è stellato almeno rispetto ad un suo punto.

Teorema 6.5.3 (Teorema di Cauchy) *Siano Ω un sottoinsieme aperto stellato di $\mathbb{C}$, $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ e $\varphi : [a, b] \to \mathbb{C}$ un circuito tale che $\varphi^* \subset \Omega$. Allora*

$$\oint_\varphi f(z) dz = 0\,.$$

Dim. Per semplicità, in questa dimostrazione supponiamo che la derivata della funzione olomorfa f sia una funzione continua (con una dimostrazione più complessa si può fare a meno di questa ipotesi aggiuntiva). Posto come al solito $f = u + iv$ e $\varphi = x + iy$, si ha

$$\begin{aligned}
\oint_\varphi f(z)\,dz &= \int_a^b f(\varphi(t))\,\varphi'(t)\,dt \\
&= \int_a^b (u(\varphi(t)) + iv(\varphi(t))) \cdot (x'(t) + iy'(t))\,dt \\
&= \int_a^b \big(u(\varphi(t))x'(t) - v(\varphi(t))y'(t)\big)\,dt \\
&\quad + i\int_a^b \big(v(\varphi(t))x'(t) + u(\varphi(t))y'(t)\big)\,dt
\end{aligned}$$

e quindi, considerati i campi vettoriali $F := (u, -v)$ e $G := (v, u)$, si può scrivere (identificando φ con una curva in $\mathbb{R}^2$)

$$\oint_\varphi f(z)\,dz = \oint_\varphi F \cdot d\ell + i\oint_\varphi G \cdot d\ell\,.$$

Dalle equazioni di Cauchy-Riemann (6.2.2) deriva subito che i campi F e G (di classe C^1) sono irrotazionali e poiché Ω è un insieme aperto stellato, essi sono conservativi (vedi Teorema 3.3.7). Poiché l'integrale viene effettuato lungo una curva chiusa, si deve avere $\oint_\varphi F \cdot d\ell = 0$ e $\oint_\varphi G \cdot d\ell = 0$, da cui anche $\oint_\varphi f(z)\,dz = 0$. QED

Teorema 6.5.4 (Formula di Cauchy) *Siano Ω un sottoinsieme aperto stellato di $\mathbb{C}$, $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ e $\varphi : [a, b] \to \mathbb{C}$ un cammino semplice e chiuso tale che $\varphi^* \subset \Omega$. Allora $\Omega_\varphi \subset \Omega$ e inoltre, per ogni $z_0 \in \Omega_\varphi$,*

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i}\oint_\varphi \frac{f(z)}{z - z_0}\,dz\,. \tag{6.5.12}$$

Dim. Si dimostra la tesi nel caso particolare in cui φ sia la circonferenza di centro z_0 e raggio $r > 0$, supponendo che $\bar{B}_r(z_0) \subset \Omega$. Si consideri la funzione $g : \Omega \to \mathbb{C}$ definita ponendo, per ogni $z \in \Omega$,

$$g(z) := \begin{cases} \dfrac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} & \text{se } z \neq z_0 \\ f'(z_0) & \text{se } z = z_0\,. \end{cases}$$

Si verifica facilmente che g è continua in Ω (in quanto f è derivabile in z_0) ed olomorfa in $\Omega \setminus \{ z_0 \}$ (in quanto rapporto di funzioni olomorfe). Si può dimostrare inoltre che alla funzione g può essere applicato il Teorema di Cauchy 6.5.3 il quale, tenendo presente che

$\displaystyle\oint_{\varphi} \frac{1}{z - z_0}\, dz = 2\pi i$ (come nell'esempio 6.4.1), fornisce

$$0 = \oint_{\varphi} g(z)\, dz = \oint_{\varphi} \frac{f(z)}{z - z_0}\, dz - \oint_{\varphi} \frac{f(z_0)}{z - z_0}\, dz = \oint_{\varphi} \frac{f(z)}{z - z_0} - 2\pi i\, f(z_0)$$

da cui la tesi. QED

Si può a questo punto dimostrare che le funzioni olomorfe sono analitiche.

Teorema 6.5.5 (Analiticità delle funzioni olomorfe) *Siano Ω un sottoinsieme aperto di $\mathbb{C}$ ed $f : \Omega \to \mathbb{C}$ una funzione olomorfa. Allora f è analitica e inoltre, se $z_0 \in \Omega$ e se $r > 0$ è tale che $\bar{B}_r(z_0) \subset \Omega$, si ha, per ogni $z \in B_r(z_0)$,*

$$f(z) = \sum_{k=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma_{z_0,r}} \frac{f(\xi)}{(\xi - z_0)^{k+1}}\, d\xi \right) (z - z_0)^k \, . \tag{6.5.13}$$

Dim. Infatti, per ogni $z \in B_r(z_0)$, si ha

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma_{z_0,r}} \frac{f(\xi)}{\xi - z}\, d\xi = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma_{z_0,r}} \frac{f(\xi)}{\xi - z_0 - (z - z_0)}\, d\xi \\ &= \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma_{z_0,r}} \frac{f(\xi)}{(\xi - z_0)\left(1 - \dfrac{z - z_0}{\xi - z_0}\right)}\, d\xi \\ &= \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma_{z_0,r}} \frac{f(\xi)}{\xi - z_0} \sum_{k=0}^{+\infty} \left(\frac{z - z_0}{\xi - z_0}\right)^k d\xi \\ &= \sum_{k=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma_{z_0,r}} \frac{f(\xi)}{(\xi - z_0)^{k+1}}\, d\xi \right) (z - z_0)^k \, , \end{aligned}$$

dove si è usato il fatto che $\left|\dfrac{z - z_0}{\xi - z_0}\right| < 1$ per $\xi \in \gamma^*_{z_0,r}$ perciò la serie converge uniformemente e si può integrare per serie. QED

Osservazione 6.5.6 Dai Teoremi 6.5.1 e 6.5.5 segue che una funzione risulta olomorfa se e solo se essa è analitica. Inoltre, dagli stessi teoremi segue anche che se f è olomorfa, anche f' è olomorfa. Conseguentemente, f è dotata delle derivate di ogni ordine e, posto $f = u + iv$, risulta $u, v \in C^\infty(\Omega)$, e ciò giustifica pienamente anche quanto affermato nell'Osservazione 6.2.6. Si conclude pertanto che u e v sono armoniche.

Per stabilire che una funzione è olomorfa, può essere talvolta utile il seguente risultato.

Teorema 6.5.7 (Teorema di Morera) *Siano Ω un sottoinsieme aperto di $\mathbb{C}$ ed $f : \Omega \to \mathbb{C}$ una funzione continua. Si supponga che, per ogni triangolo $T \subset \Omega$, risulti*

$$\oint_{\partial T} f(z)\, dz = 0 \, .$$

Allora f è olomorfa.

Studiamo ora ulteriori conseguenze dell'analiticità delle funzioni olomorfe.

Corollario 6.5.8 *Siano Ω un sottoinsieme aperto di $\mathbb{C}$ ed $f : \Omega \to \mathbb{C}$ una funzione olomorfa. Se $z_0 \in \Omega$, allora f è derivabile infinite volte in z_0 e, per ogni $k \in \mathbb{N}$, si ha*

$$f^{(k)}(z_0) = \frac{k!}{2\pi i} \oint_{\gamma_{z_0,r}} \frac{f(z)}{(z - z_0)^{k+1}} \, dz \tag{6.5.14}$$

dove $r > 0$ è un arbitrario numero strettamente positivo tale che $\bar{B}_r(z_0) \subset \Omega$.

DIM. Poiché f è olomorfa e quindi è sviluppabile localmente in serie di potenze, il coefficiente k-esimo della serie (6.5.13) coincide con $\dfrac{f^{(k)}(z_0)}{k!}$ e da ciò segue direttamente la (6.5.14). QED

Corollario 6.5.9 (Diseguaglianza di Cauchy) *Siano Ω un sottoinsieme aperto di $\mathbb{C}$ ed $f : \Omega \to \mathbb{C}$ una funzione olomorfa. Se $z_0 \in \Omega$ e se $r > 0$ è tale che $\bar{B}_r(z_0) \subset \Omega$, allora, per ogni $k \in \mathbb{N}$, si ha:*

$$\left| f^{(k)}(z_0) \right| \le \frac{k!}{r^k} \max_{z \in \gamma^*_{z_0,r}} |f(z)| \tag{6.5.15}$$

DIM. Poniamo per brevità $M := \max_{z \in \gamma^*_{z_0,r}} |f(z)|$. Utilizzando la proprietà (6.4.10) ed il Corollario 6.5.8 e tenendo presente che, per ogni $z \in \gamma^*_{z_0,r}$ risulta $|f(z)/(z - z_0)^{k+1}| \le M/r^{k+1}$, si ha

$$\left| f^{(k)}(z_0) \right| \le \frac{k!}{2\pi} \frac{M}{r^{k+1}} \ell(\gamma_{z_0,r}) = \frac{k!}{2\pi} \frac{M}{r^{k+1}} 2\pi r = \frac{k!}{r^k} M \ .$$

QED

Teorema 6.5.10 (Teorema di Liouville) *Sia $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ una funzione olomorfa e limitata. Allora f è costante.*

DIM. Poiché f è limitata, esiste una costante $M > 0$ tale che $|f(z)| \le M$ per ogni $z \in \mathbb{C}$. Fissiamo $z_0 \in \mathbb{C}$; allora, dalla diseguaglianza di Cauchy (6.5.15) applicata per $k = 1$, si ottiene

$$\left| f'(z_0) \right| \le \frac{1}{r} \max_{z \in \gamma^*_{z_0,r}} |f(z)| \le \frac{M}{r} \ ,$$

ed essendo $r > 0$ arbitrario ciò comporta $f'(z_0) = 0$, dall'arbitrarietà di z_0, segue $f' = 0$ e quindi f è costante. QED

Dal Teorema 6.5.10 si ottiene facilmente il seguente Teorema.

Teorema 6.5.11 (Teorema fondamentale dell'algebra) *Sia $P : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ un polinomio di grado $n \ge 1$. Allora P ammette almeno uno zero (cioè esiste $z_0 \in \mathbb{C}$ tale che $P(z_0) = 0$).*

Dim. Supponiamo, per assurdo, che P non si annulli in alcun elemento di $\mathbb{C}$, allora la funzione reciproca $f = 1/P$ risulta olomorfa in tutto $\mathbb{C}$ in quanto rapporto di funzioni olomorfe. Verifichiamo ora che f è limitata. Infatti, considerati $a_0, \dots, a_n \in \mathbb{C}$ con $a_n \neq 0$ e tali che $P(z) = a_0 + \cdots + a_n z^n$ risulta $\lim_{z\to\infty} |P(z)| = \infty$ (infatti $\lim_{z\to\infty} |P(z)/(a_n z^n)| = 1$ e $\lim_{z\to\infty} |a_n z^n| = \infty$ in quanto $n \geq 1$). Pertanto $\lim_{z\to\infty} |f(z)| = \lim_{z\to\infty} |1/P(z)| = 0$. Applicandola definizione di limite, si può trovare una sfera $B_R(0)$ tale che $|f| \leq 1$ in $\mathbb{C} \setminus B_R(0)$, inoltre f è limitata in $\bar{B}_R(0)$ per il teorema di Weierstrass 6.1.11 e quindi f è limitata in tutto $\mathbb{C}$. Dal Teorema di Liouville segue che f deve essere costante e ciò è assurdo in quanto P è un polinomio di grado $n \geq 1$. QED

Dal teorema fondamentale dell'algebra segue che un polinomio di grado $n \geq 1$ ammette esattamente n zeri, infatti, basta reiterare l'applicazione del Teorema 6.5.11 tenendo presente che se z_0 è uno zero di un polinomio P di grado $n \geq 1$, allora P si decompone nella forma $P(z) = (z - z_0)P_1(z)$ con P_1 polinomio di grado $n - 1$.

6.6 Circuiti omotopici

Sia Ω un sottoinsieme aperto di $\mathbb{C}$ e siano $\varphi_0 : [a, b] \to \mathbb{C}$ e $\varphi_1 : [a, b] \to \mathbb{C}$ due circuiti tali che $\varphi_0^* \subset \Omega$, $\varphi_1^* \subset \Omega$. Si dice che φ_0 e φ_1 sono Ω-omotopici o equivalentemente che φ_0 è deformabile con continuità in φ_1 nell'insieme Ω se esiste una funzione continua $H : [a, b] \times [0, 1] \to \mathbb{C}$ verificante le seguenti condizioni

1. L'immagine di H è contenuta in Ω.
2. Per ogni $s \in [0, 1]$, la funzione $H(\cdot, s)$ è un circuito.
3. $H(\cdot, 0) = \varphi_0, \quad H(\cdot, 1) = \varphi_1$.

Una funzione H verificante le proprietà elencate sopra viene denominata omotopia tra i circuiti φ_0 e φ_1. Una circuito ridotto al punto $z_1 \in \mathbb{C}$ è una funzione costante $\varphi_{z_1} : [a, b] \to \mathbb{C}$ di costante valore z_1. Si dice che un circuito $\varphi_0 : [a, b] \to \mathbb{C}$ è continuamente deformabile in un punto z_1 (oppure che è omotopico ad un punto z_1) se esiste un'omotopia tra φ_0 e il circuito costante φ_{z_1} definito sopra. Il risultato più importante della presente sezione riguarda l'uguaglianza dell'integrale curvilineo lungo due circuiti omotopici.

Teorema 6.6.1 (Teorema di Cauchy sui circuiti omotopici) *Sia Ω un sottoinsieme aperto di $\mathbb{C}$ e sia $f : \Omega \to \mathbb{C}$ una funzione olomorfa. Se $\varphi_0 : [a, b] \to \mathbb{C}$ e $\varphi_1 : [a, b] \to \mathbb{C}$ sono due circuiti Ω-omotopici, allora*

$$\oint_{\varphi_0} f(z)\, dz = \oint_{\varphi_1} f(z)\, dz \ .$$

In particolare, se $\varphi : [a, b] \to \mathbb{C}$ è un circuito Ω-omotopico ad un punto di Ω, allora

$$\oint_{\varphi} f(z)\, dz = 0 \ .$$

Si dice che un sottoinsieme Ω di $\mathbb{C}$ è semplicemente connesso se è connesso e se ogni circuito con sostegno contenuto in Ω è Ω-omotopico ad un punto di Ω. Dal teorema precedente, segue che se Ω è un insieme aperto semplicemente connesso, allora $\displaystyle\oint_{\varphi} f(z)\,dz = 0$ per ogni circuito φ con sostegno contenuto in Ω.

6.7 Zeri di una funzione olomorfa

Siano Ω un sottoinsieme aperto di $\mathbb{C}$ ed $f : \Omega \to \mathbb{C}$ una funzione complessa. Si denomina zero di f ogni elemento $z_0 \in \Omega$ tale che $f(z_0) = 0$. L'insieme degli zeri di f si denota con $\mathcal{Z}(f)$.

Gli zeri delle funzioni olomorfe hanno alcune proprietà particolari di seguito descritte. Si considera dapprima il caso in cui f sia sviluppabile in serie di potenze.

Proposizione 6.7.1 *Si consideri una funzione sviluppabile in serie di potenze*

$$f(z) = \sum_{k=0}^{+\infty} c_k\,(z - z_0)^k \tag{6.7.16}$$

in $B_r(z_0)$. Allora z_0 è di accumulazione per $\mathcal{Z}(f)$ se e solo se f è identicamente nulla in $B_r(z_0)$ (cioè $c_k = 0$ per ogni $k \in \mathbb{N}$).

Dim. Se f è identicamente nulla, ovviamente z_0 è di accumulazione per $\mathcal{Z}(f)$. Viceversa, si supponga che f non sia identicamente nulla, per cui l'insieme $A := \{\, k \in \mathbb{N} : c_k \neq 0 \,\}$ è non vuoto e si denoti con m il suo più piccolo elemento. Se $m = 0$ allora $f(z_0) = c_0 \neq 0$ e quindi, poiché f è continua, esiste un intorno di z_0 in cui f non assume mai il valore 0, pertanto in questo caso z_0 non è di accumulazione per $\mathcal{Z}(f)$. Si supponga ora $m \geq 1$, allora la funzione f può essere scritta nella forma

$$f(z) = (z - z_0)^m \sum_{k=m}^{+\infty} c_k (z - z_0)^{k-m} .$$

Si consideri la funzione

$$g(z) := \sum_{k=m}^{+\infty} c_k (z - z_0)^{k-m} ,$$

si ha $g(z_0) = c_m \neq 0$ e poiché anche g è continua, essa non si annulla mai in un opportuno intorno $B_{r_1}(z_0)$; inoltre $(z-z_0)^m$ si annulla solamente in z_0 e pertanto $f(z) = (z-z_0)^m\, g(z)$ in $B_{r_1}(z_0)$ si annulla solamente in z_0; segue che in questo caso z_0 è un punto isolato di $\mathcal{Z}(f)$. $\boxed{QED}$

Dalla proposizione precedente segue che per una funzione non identicamente nulla del tipo (6.7.16) che si annulla in z_0, si ha che z_0 è un punto isolato di $\mathcal{Z}(f)$. Dal caso semplice delle serie di potenze si deduce il seguente risultato generale riguardante le funzioni olomorfe.

Teorema 6.7.2 (Teorema sull'annullamento delle funzioni olomorfe) *Siano Ω un sottoinsieme aperto connesso di $\mathbb{C}$ e $f : \Omega \to \mathbb{C}$ una funzione olomorfa. Allora le seguenti proposizioni sono equivalenti:*

a) L'insieme $\mathcal{Z}(f)$ è dotato di punti di accumulazione in Ω;

b) f è identicamente nulla.

Alcune conseguenze del Teorema 6.7.2 vengono fornite dai seguenti corollari.

Corollario 6.7.3 *Siano Ω un sottoinsieme aperto connesso di $\mathbb{C}$ e $f : \Omega \to \mathbb{C}$ una funzione olomorfa. Allora le seguenti proposizioni sono equivalenti:*

a) Esiste un punto $z_0 \in \Omega$ tale che, per ogni $k \in \mathbb{N}$, $f^{(k)}(z_0) = 0$;

b) f è identicamente nulla.

Corollario 6.7.4 *Siano Ω un sottoinsieme aperto di $\mathbb{C}$ e $f : \Omega \to \mathbb{C}$ una funzione olomorfa non identicamente nulla. Se $z_0 \in \Omega$ e $f(z_0) = 0$ allora esiste un unico numero naturale $m \geq 1$ tale che*

$$\lim_{z \to z_0} \frac{f(z)}{(z - z_0)^m} \in \mathbb{C} \setminus \{ 0 \} .$$

Pertanto, gli zeri di una funzione olomorfa non identicamente nulla sono isolati ed hanno ordine intero.

Corollario 6.7.5 (Estensione dell'annullamento) *Siano Ω un sottoinsieme aperto connesso di $\mathbb{C}$ tale che $\Omega \cap \mathbb{R} \neq \emptyset$ e $f : \Omega \to \mathbb{C}$ una funzione olomorfa. Se f si annulla in $\Omega \cap \mathbb{R}$, allora f è identicamente nulla in tutto Ω.*

L'ultimo corollario può essere utilizzato per dimostrare che alcune uguaglianze valide in $\mathbb{R}$ possono essere estese anche all'insieme $\mathbb{C}$. Ad esempio, si consideri l'uguaglianza $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ valida per ogni $x \in \mathbb{R}$. La funzione $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ definita ponendo, per ogni $z \in \mathbb{C}$, $f(z) := \sin^2 z + \cos^2 z - 1$ è olomorfa e si annulla in $\mathbb{R}$; dal Corollario 6.7.5, deve essere $f = 0$ in tutto $\mathbb{C}$ e quindi si conclude che $\forall z \in \mathbb{C} \ : \ \sin^2 z + \cos^2 z = 1$.

Il Corollario 6.7.5 può essere enunciato anche dicendo che se $f, g : \Omega \to \mathbb{C}$ sono due funzioni olomorfe in un insieme aperto connesso Ω tale che $\Omega \cap \mathbb{R} \neq \emptyset$ e se $f = g$ in $\Omega \cap \mathbb{R}$, allora $f = g$ in Ω. Infatti, basta applicare il Corollario 6.7.5 alla funzione $f - g$.

Da tale ultima proprietà si deduce l'unicità del prolungamento olomorfo di una funzione reale derivabile in un sottoinsieme di $\mathbb{R}$. Se Ω è un sottoinsieme aperto connesso di $\mathbb{C}$ e se $f : \Omega \cap \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ è una funzione reale derivabile, da quanto sopra si deduce che può esistere al più un unico prolungamento olomorfo $g : \Omega \to \mathbb{C}$ di f.

6.8 Singolarità e serie di Laurent

In questa sezione ci occupiamo dello sviluppo in serie di una funzione che presenta delle singolarità isolate.

Se $f : \Omega \to \mathbb{C}$ è una funzione definita in un sottoinsieme aperto Ω di $\mathbb{C}$, si dice che un punto $z_0 \in \mathbb{C} \setminus \Omega$ è di singolarità isolata per f se $B_r(z_0) \setminus \{z_0\} \subset \Omega$ ed f è olomorfa in $B_r(z_0) \setminus \{z_0\}$, per un opportuno $r > 0$.

Nel seguito denoteremo con $S(z_0; r, R)$ la corona circolare aperta di centro z_0 e raggi $0 < r < R$:

$$S(z_0; r, R) := \{ z \in \mathbb{C} \ : \ r < |z - z_0| < R \} \,, \tag{6.8.17}$$

analogamente, la corona circolare chiusa di centro z_0 e raggi r e R si definisce come segue

$$\bar{S}(z_0; r, R) := \{ z \in \mathbb{C} \ : \ r \le |z - z_0| \le R \} \,, \tag{6.8.18}$$

Segue ora il risultato più importante riguardante lo sviluppo in serie di Laurent di una funzione.

Teorema 6.8.1 (Teorema sulla serie di Laurent in una corona circolare) *Siano Ω un sottoinsieme aperto di $\mathbb{C}$, $f : \Omega \to \mathbb{C}$ una funzione olomorfa e si supponga che $\bar{S}(z_0; r, R) \subset \Omega$. Allora esistono una ed una sola successione $(c_k)_{k\in\mathbb{N}}$ ed una ed una sola successione $(d_k)_{k\ge 1}$ tali che, per ogni $z \in S(z_0; r, R)$, risulta*

$$f(z) = \sum_{k=0}^{+\infty} c_k (z - z_0)^k + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{d_k}{(z - z_0)^k} \tag{6.8.19}$$

e inoltre

$$\begin{cases} c_k = \dfrac{1}{2\pi i} \displaystyle\oint_{\gamma_{z_0,\varrho}} \frac{f(\xi)}{(\xi - z_0)^{k+1}} \, d\xi & \forall k \in \mathbb{N} \\[2ex] d_k = \dfrac{1}{2\pi i} \displaystyle\oint_{\gamma_{z_0,\varrho}} f(\xi)(\xi - z_0)^{k-1} \, d\xi & \forall k \ge 1 \end{cases} \tag{6.8.20}$$

con $r \le \varrho \le R$ arbitrario.

Dim. Sia $\varepsilon > 0$ tale che $\bar{B}_\varepsilon(z) \subset S(z_0; r, R)$. Allora per il Teorema sulla formula di Cauchy 6.5.4

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma_{z,\varepsilon}} \frac{f(\xi)}{\xi - z} \, d\xi \,.$$

Ma $\gamma_{z,\varepsilon}$ è $\Omega \setminus \{z\}$-omotopico al circuito φ rappresentato in Figura – 6.2 costituito da $\gamma_{z_0,R}$, da $-\gamma_{z_0,r}$ e dal segmento percorso una volta in un verso ed una volta nel verso opposto. Pertanto dal Teorema 6.6.1, poiché i tratti rettilinei si elidono, risulta:

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma_{z_0,R}} \frac{f(\xi)}{\xi - z} \, d\xi - \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma_{z_0,r}} \frac{f(\xi)}{\xi - z} \, d\xi \,.$$

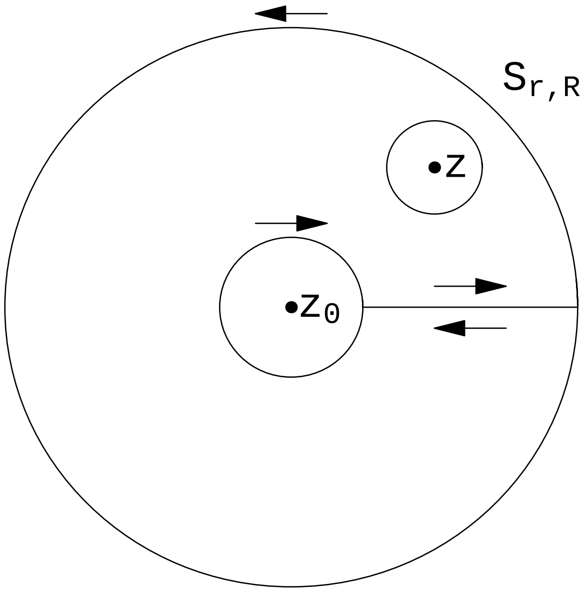


Figura – 6.2: Due cammini $\Omega \setminus \{z\}$-omotopici.

Il primo integrale si tratta come nel Teorema 6.5.5 e fornisce la prima serie di (6.8.19). Per il secondo integrale si ha:

$$
\begin{aligned}
&-\frac{1}{2\pi i}\oint_{\gamma_{z_0,r}} \frac{f(\xi)}{\xi - z}\,d\xi = -\frac{1}{2\pi i}\oint_{\gamma_{z_0,r}} \frac{f(\xi)}{\xi - z_0 - (z - z_0)}\,d\xi \\
&= \frac{1}{2\pi i}\oint_{\gamma_{z_0,r}} \frac{f(\xi)}{(z - z_0)\left(1 - \dfrac{\xi - z_0}{z - z_0}\right)}\,d\xi \\
&= \frac{1}{2\pi i}\oint_{\gamma_{z_0,r}} \frac{f(\xi)}{z - z_0}\sum_{k=0}^{+\infty}\left(\frac{\xi - z_0}{z - z_0}\right)^k d\xi \\
&= \sum_{k=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{2\pi i}\oint_{\gamma_{z_0,r}} f(\xi)(\xi - z_0)^{k-1}\,d\xi\right)\frac{1}{(z - z_0)^k}\,,
\end{aligned}
$$

dove si è usato il fatto che $\left|\dfrac{\xi - z_0}{z - z_0}\right| < 1$ per $\xi \in \gamma^*_{z_0,r}$ perciò la serie converge uniformemente e si può integrare per serie. Sommando i due sviluppi si ha la tesi (6.8.19). Per l'invarianza per omotopia i coefficienti si possono calcolare su qualunque circonferenza $\gamma_{z_0,\varrho}$ con $r \le \varrho \le R$. $\boxed{QED}$

Esempio 6.8.2

Consideriamo la funzione $f(z) = \dfrac{1}{1-z} + \dfrac{1}{2-z}$ definita in $\mathbb{C} \setminus \{1, 2\}$. Allora è possibile sviluppare in serie f in $B_1(0)$, in $S(0; 1, 2)$ e in $S(0; 2, +\infty)$. In $B_1(0)$ la funzione è olomorfa e otteniamo:

$$f(z) = \frac{1}{1-z} + \frac{1}{2}\frac{1}{1-z/2} = \sum_{k=0}^{+\infty} z^k + \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{+\infty}\left(\frac{z}{2}\right)^k = \sum_{k=0}^{+\infty}\left(1+\frac{1}{2^{k+1}}\right)z^k .$$

Nella corona $S(0;1,2)$ otteniamo:

$$f(z) = -\frac{1}{z}\frac{1}{1-1/z} + \frac{1}{2}\frac{1}{1-z/2} = -\frac{1}{z}\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{1}{z^k} + \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{+\infty}\left(\frac{z}{2}\right)^k = \sum_{k=1}^{+\infty}\frac{-1}{z^k} + \sum_{k=0}^{+\infty}\frac{1}{2^{k+1}}z^k .$$

Infine nella corona $S(0;2,+\infty)$ risulta:

$$f(z) = -\frac{1}{z}\frac{1}{1-1/z} - \frac{1}{z}\frac{1}{1-2/z} = -\frac{1}{z}\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{1}{z^k} - \frac{1}{z}\sum_{k=0}^{+\infty}\left(\frac{2}{z}\right)^k = \sum_{k=1}^{+\infty}\left(-1-2^{k-1}\right)\frac{1}{z^k} .$$

Teorema 6.8.3 (Teorema sulla serie di Laurent in un punto singolare)
Siano Ω un sottoinsieme aperto di $\mathbb{C}$, $f : \Omega \to \mathbb{C}$ una funzione olomorfa e $z_0 \in \mathbb{C}\setminus\Omega$ un punto di singolarità isolato per f. Allora esiste $R > 0$ tale che, per ogni $z \in B_R(z_0)\setminus\{z_0\}$,

$$f(z) = \sum_{k=0}^{+\infty} c_k(z-z_0)^k + \sum_{k=1}^{+\infty}\frac{d_k}{(z-z_0)^k}, \tag{6.8.21}$$

dove i coefficienti c_k e d_k sono dati dalla (6.8.20).
La prima serie ha raggio di convergenza $\varrho \geq R$, mentre la seconda ha raggio di convergenza infinito. Inoltre la convergenza di entrambe le serie è totale in ogni corona circolare con raggi positivi strettamente minori di R.

Dim. Si applica il teorema precedente in una corona circolare $S(z_0; r, R)$ con $0 < r < R$ arbitrario e poi considera $r \to 0$. QED

La serie $\sum_{k=0}^{+\infty} c_k(z-z_0)^k$ viene denominata *parte regolare di f*, mentre la serie $\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{d_k}{(z-z_0)^k}$ viene denominata *parte singolare oppure parte caratteristica di f.*

La parte caratteristica consente di formulare la seguente classificazione dei punti singolari isolati.

Fissiamo Ω un sottoinsieme aperto di $\mathbb{C}$, $f : \Omega \to \mathbb{C}$ una funzione olomorfa e $z_0 \in \mathbb{C}\setminus\Omega$ un punto di singolarità isolato per f. Consideriamo $R > 0$ tale che, per ogni $z \in B_R(z_0)\setminus\{z_0\}$ valga (6.8.21). Poniamo le seguenti definizioni:

1. Il punto z_0 si dice di *singolarità eliminabile per f* se $d_k = 0$ per ogni $k \geq 1$. In tal caso, per ogni $z \in B_R(z_0)\setminus\{z_0\}$, risulta

$$f(z) = \sum_{k=0}^{+\infty} c_k(z-z_0)^k$$

ed inoltre f ammette un prolungamento olomorfo considerando la funzione che in z_0 assume il valore c_0.

2. Il punto z_0 si dice *polo di ordine* $n \geq 1$ se $d_n \neq 0$ ed inoltre $d_k = 0$ per ogni $k > n$. In questo caso la parte singolare è costituita da un numero finito di addendi.

3. Il punto z_0 si dice di *singolarità essenziale per* f se $d_k \neq 0$ per infiniti $k \geq 1$.

Si hanno le seguenti caratterizzazioni delle singolarità.

Teorema 6.8.4 (Caratterizzazione delle singolarità eliminabili)
Siano Ω un sottoinsieme aperto di $\mathbb{C}$, $f : \Omega \to \mathbb{C}$ una funzione olomorfa e $z_0 \in \mathbb{C} \setminus \Omega$ un punto di singolarità isolato per f. Allora le seguenti proposizioni sono equivalenti:

a) z_0 è un punto di singolarità eliminabile per f,

b) f ammette un prolungamento olomorfo in $\Omega \cup \{z_0\}$,

c) f è limitata in un intorno di z_0.

Osservazione 6.8.5 Sia Ω un sottoinsieme aperto di $\mathbb{C}$, $z_0 \in \mathbb{C} \setminus \Omega$ tale che $B_r(z_0) \setminus \{z_0\} \subset \Omega$ per un opportuno $r > 0$ ed $f : \Omega \cup \{z_0\} \to \mathbb{C}$ una funzione olomorfa in Ω e continua in z_0. Allora f è derivabile anche in z_0. Infatti, dalla continuità di f in z_0 si deduce che f è limitata in un intorno di z_0 e quindi, per la caratterizzazione precedente, $f\big|_{\Omega}$ ammette un prolungamento olomorfo in $\Omega \cup \{z_0\}$.

Teorema 6.8.6 (Caratterizzazione dei poli di ordine n)
Siano Ω un sottoinsieme aperto di $\mathbb{C}$, $f : \Omega \to \mathbb{C}$ una funzione olomorfa e $z_0 \in \mathbb{C} \setminus \Omega$ un punto di singolarità isolato per f. Allora le seguenti proposizioni sono equivalenti:

a) z_0 è un polo di ordine n per f,

b) esiste $\lim_{z \to z_0} (z - z_0)^n f(z) = \ell \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$,

c) esiste una funzione olomorfa $g : \Omega \cup \{z_0\}$ tale che

$$g(z_0) \neq 0, \quad \forall z \in \Omega \ : \ f(z) = \frac{g(z)}{(z - z_0)^n}$$

In qualche caso può essere anche utile la seguente caratterizzazione dei poli indipendentemente dall'ordine. Per dimostrarla bisogna tener presente che un polo di ordine n per f è uno zero di ordine n per $1/f$ ed il Corollario 6.7.4.

Teorema 6.8.7 (Caratterizzazione dei poli indipendente dall'ordine)
Siano Ω un sottoinsieme aperto di $\mathbb{C}$, $f : \Omega \to \mathbb{C}$ una funzione olomorfa e $z_0 \in \mathbb{C} \setminus \Omega$ un punto di singolarità isolato per f. Allora le seguenti proposizioni sono equivalenti:

a) z_0 *è un polo per* f*,*

b) *esiste* $\lim_{z\to z_0} |f(z)| = +\infty$*.*

Infine vale il seguente teorema.

Teorema 6.8.8 (Caratterizzazione delle singolarià essenziali)
Siano Ω *un sottoinsieme aperto di* $\mathbb{C}$*,* $f : \Omega \to \mathbb{C}$ *una funzione olomorfa e* $z_0 \in \mathbb{C} \setminus \Omega$ *un punto di singolarità isolato per* f*. Allora le seguenti proposizioni sono equivalenti:*

a) z_0 *è un punto di singolarità essenziale per* f*,*

b) *per ogni* $r > 0$*, risulta* $\overline{f(\Omega \cap B_r(z_0))} = \mathbb{C}$*.*

Esercizio 6.8.9 Classificare l'origine come singolarità per le seguenti funzioni:

$$\frac{\sin z}{z^3}, \qquad \frac{1 - e^{-z}}{z}, \qquad \frac{e^{-1/z^2}}{z}, \qquad z^3 \sin\frac{1}{z}.$$

6.9 Il Teorema dei residui

Se $f : \Omega \to \mathbb{C}$ è una funzione olomorfa e $z_0 \in \mathbb{C} \setminus \Omega$ è un punto di singolarità isolata per f, il coefficiente d_1 dello sviluppo in serie di Laurent (6.8.21) si dice *residuo di* f *in* z_0 e si denota con $\mathrm{Res}(f, z_0)$. Dalle caratterizzazioni delle singolarità ottenute nella sezione precedente, si ottengono le seguenti proprietà dei residui.

1. Se z_0 è un punto di singolarità eliminabile per f, allora $\mathrm{Res}(f, z_0) = 0$.

2. Se z_0 è un polo del primo ordine per f, allora
$$\mathrm{Res}(f, z_0) = \lim_{z\to z_0} (z - z_0) f(z).$$

3. Se z_0 è un polo del primo ordine per f, allora
$$\mathrm{Res}(f, z_0) = \frac{1}{\left(\frac{1}{f}\right)'(z_0)}.$$

4. Se z_0 è un polo di ordine $n > 1$ per f, allora
$$\mathrm{Res}(f, z_0) = \frac{1}{(n-1)!} \lim_{z\to z_0} \frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}}\big((z - z_0)^n f(z)\big).$$

5. Nel calcolo dei residui è spesso utile la Regola di de L'Hôpital: se f e g hanno entrambe uno zero oppure entrambe un polo in z_0, allora

$$\lim_{z\to z_0}\frac{f(z)}{g(z)}=\frac{f'(z_0)}{g'(z_0)}\,.$$

6. Se f è olomorfa in z_0 e se g ha uno zero del primo ordine in z_0, allora

$$\mathrm{Res}\left(\frac{f}{g},z_0\right)=\frac{f(z_0)}{g'(z_0)}\,.$$

Il risultato principale della presente sezione è il seguente teorema.

Teorema 6.9.1 (Teorema dei residui)
Siano Ω un sottoinsieme aperto di $\mathbb{C}$, $\varphi:[a,b]\to\mathbb{C}$ un circuito tale che $\Omega_\varphi\subset\Omega$, S un sottoinsieme finito di Ω_φ ed $f:\Omega\setminus S\to\mathbb{C}$ una funzione olomorfa per la quale gli elementi di S siano punti di singolarità isolata. Allora

$$\oint_\varphi f(z)\,dz=2\pi i\sum_{z\in S}\mathrm{Res}(f,z)\,. \tag{6.9.22}$$

Il Teorema dei Residui si giustifica tenendo conto che, in base all'esempio 6.4.1, l'integrale su un circuito dello sviluppo di Laurent in $z\in S$ fornisce tutti termini nulli tranne l'integrale di $\frac{1}{z}$ che dà $2\pi\,i\ \mathrm{Res}(f,z)$.

Si consideri una funzione $f:\Omega\to\mathbb{C}$ olomorfa nell'insieme aperto Ω e si supponga che esista $r>0$ tale che $\mathbb{C}\setminus\bar{B}_r(0)\subset\Omega$ (cioè, f è definita al di fuori di un insieme chiuso e limitato); tale condizione viene espressa dicendo che il punto ∞ è una singolarità isolata per f. Come nel caso dei punti singolari isolati in $\mathbb{C}$, anche ora si può dimostrare che vale uno sviluppo in serie di Laurent in un intorno del punto ∞.

Precisamente, esistono un'unica successione $(c_k)_{k\in\mathbb{N}}$ ed un'unica successione $(d_k)_{k\geq1}$ di numeri complessi tali che, per ogni $z\in\mathbb{C}\setminus\bar{B}_r(0)$,

$$f(z)=\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{c_k}{z^k}+\sum_{k=1}^{+\infty}d_k\,z^k\,. \tag{6.9.23}$$

Il residuo di f nel punto ∞ viene definito come segue:

$$\mathrm{Res}(f,\infty):=-c_1\,.$$

La definizione precedente è giustificata dal fatto che la funzione

$$g(z):=-\frac{1}{z^2}f\left(\frac{1}{z}\right)$$

è definita ed olomorfa in $B_{1/r}(0) \setminus \{0\}$, ha nel punto 0 una singolarità isolata ed inoltre

$$\mathrm{Res}(f, \infty) = \mathrm{Res}(g, 0)\,.$$

Una proprietà interessante è che se S è un sottoinsieme finito di $\mathbb{C}$ e se $f : \mathbb{C} \setminus S \to \mathbb{C}$ è una funzione olomorfa che ha delle singolarità isolate nei punti di S, allora

$$\sum_{z \in S} \mathrm{Res}(f, z) + \mathrm{Res}(f, \infty) = 0\,.$$

La singolarità nel punto all'infinito può essere classificata allo stesso modo delle singolarità in elementi di $\mathbb{C}$. Precisamente, si dice che

1. Il punto ∞ è una singolarità eliminabile per f se, per ogni $k \geq 1$, risulta $d_k = 0$.
2. Il punto ∞ è un polo di ordine n per f (con $n \geq 1$) se $d_n \neq 0$ e, per ogni $k > n$, risulta $d_k = 0$.
3. Il punto ∞ è una singolarità essenziale per f se, per infiniti $k \geq 1$, risulta $d_k \neq 0$.

6.10 I Teoremi di Jordan

Enunciano ora alcuni teoremi di Jordan che vengono sistematicamente utilizzati nelle applicazioni riguardanti il calcolo di integrali. Intenderemo fissato un cammino il cui sostegno è un arco di un semicerchio; pertanto, consideriamo $t_0, t_1 \in [0, \pi]$ con $t_0 < t_1$, $z_0 \in \mathbb{C}$ ed $R > 0$ e definiamo la curva $\gamma_R : [t_0, t_1] \to \mathbb{C}$ ponendo, per ogni $t \in [t_0, t_1]$, $\gamma_R(t) = z_0 + R\,\mathrm{e}^{it}$.

Teorema 6.10.1 (Teorema del grande cerchio di Jordan) *Sia $f : \Omega \to \mathbb{C}$ una funzione olomorfa nell'insieme aperto Ω e supponiamo che, per ogni $r \geq R$ e per ogni $t \in [t_0, t_1]$, si abbia $z_0 + r\,\mathrm{e}^{it} \subset \Omega$. Allora*

$$\lim_{|z| \to \infty} (z - z_0) f(z) = \ell \in \mathbb{C} \quad \Longrightarrow \quad \lim_{R \to +\infty} \int_{\gamma_R} f(z)\,dz = i\,\ell\,(t_1 - t_0)\,.$$

Teorema 6.10.2 (Teorema del piccolo cerchio di Jordan) *Sia $f : \Omega \to \mathbb{C}$ una funzione olomorfa nell'insieme aperto Ω e si supponga che, per ogni $0 < r \leq R$ e per ogni $t \in [t_0, t_1]$, si abbia $z_0 + r\,\mathrm{e}^{it} \subset \Omega$. Allora*

$$\lim_{z \to z_0} (z - z_0) f(z) = \ell \in \mathbb{C} \quad \Longrightarrow \quad \lim_{R \to 0} \int_{\gamma_R} f(z)\,dz = i\,\ell\,(t_1 - t_0)\,.$$

Osserviamo che se f ha un polo del primo ordine in z_0 risulta $d_1 = \lim\limits_{z \to z_0} (z - z_0) f(z)$ e quindi

$$\lim_{R \to 0} \int_{\gamma_R} f(z)\,dz = i\,(t_1 - t_0)\ \mathrm{Res}(f, z_0)\,.$$

Teorema 6.10.3 (Lemma di Jordan) *Sia* $f : \Omega \to \mathbb{C}$ *una funzione olomorfa nell'insieme aperto* Ω *e si supponga che, per ogni* $r \geq R$ *e per ogni* $t \in [t_0, t_1]$, *si abbia* $z_0 + r\,\mathrm{e}^{it} \subset \Omega$. *Allora*

$$\lim_{|z|\to\infty} f(z) = 0 \quad \Longrightarrow \quad \forall \alpha > 0 : \lim_{R\to+\infty} \int_{\gamma_R} \mathrm{e}^{i\alpha z} f(z)\, dz = 0\,.$$

Nel Teorema precedente, se $\alpha < 0$ si considerano archi di circonferenza nel semipiano delle parti immaginarie negative, cioè $t_0, t_1 \in [\pi, 2\pi]$.

Analogamente i Teoremi 6.10.1 e 6.10.2 valgono anche nel caso $t_0, t_1 \in [\pi, 2\pi]$.

6.11 Applicazioni al calcolo di integrali

Consideriamo ora alcune applicazioni dei risultati precedenti.

Esempio 6.11.1 Si vuole calcolare il seguente integrale improprio

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(x^2+2)^2}\, dx\,.$$

Osserviamo innanzitutto che la funzione $u(x) := 1/(x^2+2)^2$ è integrabile in $\mathbb{R}$ in quanto è definita e continua in $\mathbb{R}$ e nei punti $\pm\infty$ è un infinitesimo di ordine 4.

Si consideri ora la funzione complessa $f : \mathbb{C} \setminus \{\pm i\sqrt{2}\} \to \mathbb{C}$ definita ponendo, per ogni $z \in \mathbb{C} \setminus \{\pm i\sqrt{2}\}$,

$$f(z) := \frac{1}{(z^2+2)^2}\,.$$

I punti singolari sono $\{\pm i\sqrt{2}\}$. Fissiamo $R > \sqrt{2}$ e consideriamo il circuito φ_R costituito dai due cammini $\gamma_{1,R} : [0,\pi] \to \mathbb{C}$ e $\gamma_{2,R} : [-R, R] \to \mathbb{C}$ definiti ponendo

$$\gamma_{1,R}(t) := R\,\mathrm{e}^{it}\,, \quad t \in [0,\pi]\,; \quad \gamma_{2,R}(t) := t\,, \quad t \in [-R, R]\,.$$

Si osservi che il circuito viene percorso in senso antiorario (vedi Figura – 6.3). Dal teorema dei residui segue

$$\oint_{\varphi_R} f(z)\, dz = 2\pi\, i\, \mathrm{Res}(f, i\sqrt{2})$$

(infatti, il circuito considerato contiene al suo interno solamente il punto $i\sqrt{2}$) e inoltre, tenendo presente che $i\sqrt{2}$ è un polo del secondo ordine, si ha

$$\begin{aligned}
\mathrm{Res}(f, i\sqrt{2}) &= \lim_{z\to i\sqrt{2}} \frac{d}{dz}\Big((z - i\sqrt{2})^2 f(z)\Big) = \lim_{z\to i\sqrt{2}} \frac{d}{dz}\Big(\frac{1}{(z+i\sqrt{2})^2}\Big) \\
&= \lim_{z\to i\sqrt{2}} -\frac{2}{(z+i\sqrt{2})^3} = -i\,\frac{\sqrt{2}}{16}\,.
\end{aligned}$$

Allora, esplicitando gli integrali sui cammini $\gamma_{1,R}$, $\gamma_{2,R}$

$$\int_{\gamma_{1,R}} f(z)\,dz + \int_{-R}^{R} \frac{1}{(t^2+2)^2}\,dt = 2\pi\, i\left(-i\,\frac{\sqrt{2}}{16}\right) = \frac{\sqrt{2}}{8}\pi\,.$$

Poiché $\lim_{z\to\infty} z\, f(z) = 0$, dal teorema di Jordan sul grande cerchio segue anche $\lim_{R\to+\infty}\int_{\gamma_{1,R}} f(z)\,dz = 0$, e quindi, passando al limite per $R\to+\infty$, si ottiene

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(x^2+2)^2}\,dx = \frac{\sqrt{2}}{8}\,\pi\,.$$

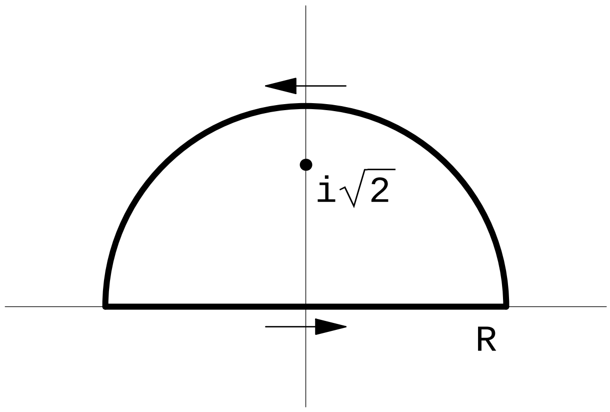


Figura – 6.3: Circuito relativo all'Esempio 6.11.1.

Esempio 6.11.2 Calcoliamo il seguente integrale improprio

$$\int_0^{+\infty} \frac{\cos x}{x^2+4}\,dx\,.$$

Osserviamo innanzitutto che la funzione $u(x) := \cos x/(x^2+4)$ è integrabile in $[0,+\infty)$ in quanto è definita e continua in $[0,+\infty)$ e nel punto $+\infty$ è un infinitesimo di ordine 2 e che, essendo pari, l'integrale considerato è la metà dell'integrale su tutto $\mathbb{R}$.

Consideriamo ora la funzione complessa $f : \mathbb{C}\setminus\{\pm 2i\} \to \mathbb{C}$ definita ponendo, per ogni $z \in \mathbb{C}\setminus\{\pm 2i\}$,

$$f(z) := \frac{e^{iz}}{z^2+4}\,.$$

I punti singolari sono $\{\pm 2i\}$. Fissiamo $R > 2$ e consideriamo il circuito φ_R costituito dai due cammini $\gamma_{1,R} : [0,\pi] \to \mathbb{C}$ e $\gamma_{2,R} : [-R,R] \to \mathbb{C}$ definiti ponendo

$$\gamma_{1,R}(t) := R\, e^{it}\,, \quad t\in[0,\pi]\,; \quad \gamma_{2,R}(t) := t\,, \quad t \in [-R,R]\,.$$

Si osservi che il circuito viene percorso in senso antiorario (vedi Figura – 6.4). Dal teorema dei residui segue

$$\oint_{\varphi_R} f(z)\,dz = 2\pi\, i\,\mathrm{Res}(f,2i)$$

(infatti, il circuito considerato contiene al suo interno solamente il punto $2i$) e inoltre, tenendo presente che $2i$ è un polo del primo ordine, si ha

$$\begin{aligned}\mathrm{Res}(f,2i) &= \lim_{z\to 2i}(z-2i)f(z) = \lim_{z\to 2i}\left(\frac{\mathrm{e}^{iz}}{z+2i}\right)\\ &= \frac{\mathrm{e}^{-2}}{4i} = -i\,\frac{\mathrm{e}^{-2}}{4}\,.\end{aligned}$$

Allora, esplicitando gli integrali sui cammini $\gamma_{1,R}\,,\ \gamma_{2,R}$

$$\int_{\gamma_{1,R}} f(z)\,dz + \int_{-R}^{R}\frac{\mathrm{e}^{it}}{t^2+4}\,dt = 2\pi\, i\left(-i\,\frac{\mathrm{e}^{-2}}{4}\right) = \frac{\mathrm{e}^{-2}}{2}\pi\,.$$

Poiché $\displaystyle\lim_{z\to\infty}\frac{1}{z^2+4}=0$, dal Lemma di Jordan 6.10.3 segue anche $\displaystyle\lim_{R\to+\infty}\int_{\gamma_{1,R}} f(z)\,dz = 0$, e quindi, passando al limite per $R\to+\infty$, si ottiene

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\cos x + i\sin x}{x^2+4}\,dx = \frac{\mathrm{e}^{-2}}{2}\,\pi\,,$$

da cui, uguagliando parte reale e parte immaginaria,

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\cos x}{x^2+4}\,dx = \frac{\mathrm{e}^{-2}}{2}\,\pi\,,\qquad \int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\sin x}{x^2+4}\,dx = 0.$$

Infine tenendo conto della parità della funzione integranda

$$\int_{0}^{+\infty}\frac{\cos x}{x^2+4}\,dx = \frac{\mathrm{e}^{-2}}{4}\,\pi\,.$$

(il valore 0 del secondo integrale era prevedibile in quanto la funzione integranda è dispari).

Esempio 6.11.3 Calcoliamo il seguente integrale improprio

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\sin x}{x}\,dx\,.$$

Osserviamo che la funzione $u(x) := \sin x/x$ è integrabile (semplicemente ma non assolutamente) in $\mathbb{R}$ in quanto è definita e continua in $\mathbb{R}$ e all'infinito è un infinitesimo di ordine 1. Si può verificare che u non è assolutamente integrabile mentre, posto per $k\in\mathbb{N}$

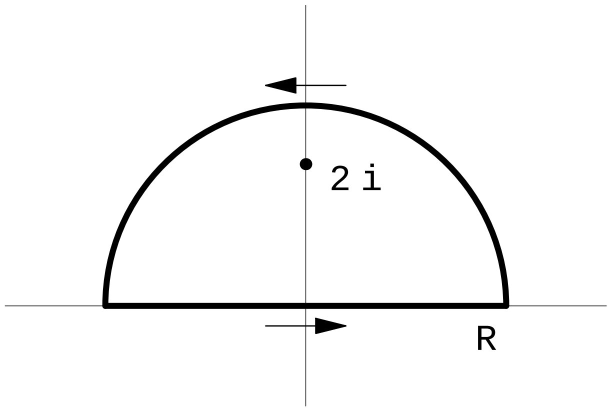


Figura – 6.4: Circuito relativo all'Esempio 6.11.2.

$a_k = \displaystyle\int_{k\pi}^{(k+1)\pi} \frac{\sin x}{x}\, dx$, la successione (a_k) è infinitesima, a segni alterni e la successione $(|a_k|)$ è decrescente, pertanto si ha:

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\, dx = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k\,,$$

e la serie converge per il Teorema di Leibniz. Analogo ragionamento vale in $(-\infty, 0]$.

Consideriamo ora la funzione complessa $f : \mathbb{C} \setminus \{0\} \to \mathbb{C}$ definita ponendo, per ogni $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$,

$$f(z) := \frac{\mathrm{e}^{iz}}{z}\,.$$

L'unico punto singolare è $z = 0$. Fissiamo $r < R$ e consideriamo il circuito $\varphi_{r,R}$ costituito dai quattro cammini $\gamma_{1,R} : [0, \pi] \to \mathbb{C}$, $\gamma_{2,r,R} : [-R, -r] \to \mathbb{C}$, $\gamma_{3,r} : [0, \pi] \to \mathbb{C}$ e $\gamma_{4,r,R} : [r, R] \to \mathbb{C}$, definiti ponendo

$$\begin{aligned} &\gamma_{1,R}(t) := R\,\mathrm{e}^{it}\,, \quad t \in [0, \pi]\,, && \gamma_{2,r,R}(t) := t\,, \quad t \in [-R, -r]\,, \\ &\gamma_{3,r}(t) := r\,\mathrm{e}^{i(\pi - t)}\,, \quad t \in [0, \pi]\,, && \gamma_{4,r,R}(t) := t\,, \quad t \in [r, R]\,. \end{aligned}$$

Si osservi che $\gamma_{3,r}$ è percorso in senso orario, in modo che il circuito $\varphi_{r,R}$ viene percorso in senso antiorario (vedi Figura – 6.5). Dal teorema dei residui, non essendoci all'interno di $\varphi_{r,R}$ punti singolari, segue

$$\oint_{\varphi_{r,R}} f(z)\, dz = 0\,.$$

Allora, esplicitando gli integrali sui quattro cammini abbiamo:

$$\int_{\gamma_{1,R}} f(z)\, dz + \int_{-R}^{-r} \frac{\mathrm{e}^{it}}{t}\, dt + \int_{\gamma_{3,r}} f(z)\, dz + \int_r^R \frac{\mathrm{e}^{it}}{t}\, dt = 0\,. \tag{6.11.24}$$

Poiché $\lim_{z\to\infty} \frac{1}{z} = 0$, dal Lemma di Jordan 6.10.3 segue che anche $\lim_{R\to+\infty} \int_{\gamma_{1,R}} f(z)\,dz = 0$, mentre, poiché $\lim_{z\to 0} z f(z) = 1$, dal Teorema di Jordan sul piccolo cerchio 6.10.2, segue che $\int_{\gamma_{3,r}} f(z)\,dz = -i\pi$ (il segno "–" segue dal fatto che il cammino è percorso in verso orario). Inoltre

$$\int_{-R}^{-r} \frac{\mathrm{e}^{it}}{t}\,dt = -\int_{R}^{r} \frac{\mathrm{e}^{-is}}{-s}\,ds = -\int_{r}^{R} \frac{\mathrm{e}^{-it}}{t}\,dt\,.$$

Quindi, passando al limite per $R \to +\infty$ e per $r \to 0$ nella (6.11.24) otteniamo:

$$\int_{0}^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{it} - \mathrm{e}^{-it}}{t}\,dt = i\,\pi\,,$$

da cui,

$$\int_{0}^{+\infty} \frac{2\,i\,\sin t}{t}\,dt = i\,\pi,$$

e infine, tenendo conto della parità della funzione integranda

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\,dx = \pi\,.$$

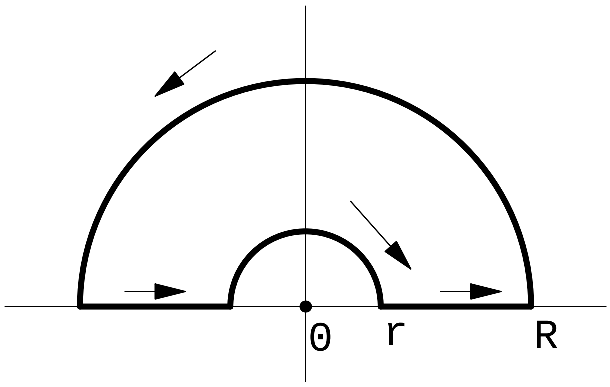


Figura – 6.5: Circuito relativo all'Esempio 6.11.3.

Esempio 6.11.4 Calcoliamo il seguente integrale improprio

$$\int_{0}^{+\infty} \frac{\log x}{x^2+1}\,dx\,.$$

Osserviamo innanzitutto che la funzione $u(x) := \log x/(x^2+1)$ è integrabile in $[0, +\infty)$ in quanto in 0 è un infinito di ordine arbitrariamente piccolo e nel punto $+\infty$ è un infinitesimo di ordine, per esempio, maggiore di $3/2$.

Prima di estendere la funzione u ad una funzione di variabile complessa, conviene tener presente che la funzione logaritmo, che è polidroma, ammette infinite determinazioni per cui si rende necessario sceglierne una. Come abbiamo osservato nella sezione 6.3.a per ottenere una determinazione olomorfa del logaritmo si esclude dal piano complesso una semiretta uscente dall'origine. Scegliamo la semiretta $\bar{r} = \{z = x + iy\ ;\ x = 0,\ y \leq 0\}$ e consideriamo la determinazione $\log : \mathbb{C} \setminus \bar{r} \to \mathbb{C}$ definita ponendo, per ogni $z \in \mathbb{C} \setminus \bar{r}$, $\log z = \log|z| + i\vartheta$ con $\vartheta \in \arg z$ e $\vartheta \in (-\pi/2, 3\pi/2)$. Tale funzione è olomorfa in $\mathbb{C} \setminus \bar{r}$, mentre nei punti della semiretta $\bar{r}$, non è neanche continua (come visto nella Sezione 6.3.a). Pertanto per applicare correttamente il teorema dei residui è necessario scegliere un cammino $\varphi_{r,R}$ in modo tale che i supporti delle curve considerate non abbiano punti in comune con $\bar{r}$. Poiché oltre al punto singolare 0 dovuto alla funzione logaritmo vi sono in ogni caso anche i punti singolari $\pm i$, possiamo fissare $0 < r < 1 < R$ e considerare $\varphi_{r,R}$ costituito dai quattro cammini (già considerati nell'esempio precedente) $\gamma_{1,R} : [0, \pi] \to \mathbb{C}$, $\gamma_{2,r,R} : [-R, -r] \to \mathbb{C}$, $\gamma_{3,r} : [0, \pi] \to \mathbb{C}$ e $\gamma_{4,r,R} : [r, R] \to \mathbb{C}$, definiti ponendo

$$
\begin{aligned}
&\gamma_{1,R}(t) := R\,\mathrm{e}^{it} \quad t \in [0, \pi]\ , && \gamma_{2,r,R}(t) := t \quad t \in [-R, -r]\ ,\\
&\gamma_{3,r}(t) := r\,\mathrm{e}^{i(\pi - t)} \quad t \in [0, \pi]\ , && \gamma_{4,r,R}(t) := t \quad t \in [r, R]\ .
\end{aligned}
$$

Si osservi che $\gamma_{3,r}$ è percorso in senso orario, in modo che il circuito $\varphi_{r,R}$ viene percorso in senso antiorario (vedi Figura – 6.6).

A questo punto, con la determinazione del logaritmo scelta in precedenza, consideriamo la funzione complessa olomorfa $f : \mathbb{C} \setminus (\bar{r} \cup \{\pm i\}) \to \mathbb{C}$ definita ponendo,

$$
f(z) := \frac{\log z}{z^2 + 1}\ .
$$

Dal teorema dei residui segue

$$
\oint_{\varphi_{r,R}} f(z)\,dz = 2\pi\,i\,\mathrm{Res}(f, i)
$$

(infatti, il circuito considerato contiene al suo interno solamente il punto singolare i) e inoltre, tenendo presente che i è un polo del primo ordine, si ha

$$
\mathrm{Res}(f, i) = \lim_{z \to i}(z - i) f(z) = \lim_{z \to i}\left(\frac{\log z}{z + i}\right) = \frac{i\pi/2}{2i} = \frac{\pi}{4}\ .
$$

Allora, esplicitando gli integrali sui quattro cammini

$$
\int_{\gamma_{1,R}} f(z)\,dz + \int_{-R}^{-r} \frac{\log|t| + i\pi}{t^2 + 1}\,dt + \int_{\gamma_{3,r}} f(z)\,dz + \int_{r}^{R} \frac{\log t}{t^2 + 1}\,dt = i\frac{\pi^2}{2}\ . \tag{6.11.25}
$$

Poiché $\lim_{z \to \infty} z\dfrac{\log z}{z^2 + 1} = 0$, dal Teorema sul grande cerchio 6.10.1 segue $\lim_{R \to +\infty} \int_{\gamma_{1,R}} f(z)\,dz =$ 0, e poiché $\lim_{z \to 0} z\dfrac{\log z}{z^2 + 1} = 0$, dal Teorema sul piccolo cerchio 6.10.2 segue $\lim_{r \to 0} \int_{\gamma_{3,r}} f(z)\,dz =$

0, e tenendo conto che

$$\int_{-R}^{-r} \frac{\log|t| + i\pi}{t^2+1}\, dt = \int_r^R \frac{\log t + i\pi}{t^2+1}\, dt$$

passando al limite per $R \to +\infty$ e $r \to 0$, dalla (6.11.25) si ottiene

$$\int_0^{+\infty} \frac{\log x + i\pi}{x^2+1}\, dx + \int_0^{+\infty} \frac{\log x}{x^2+1}\, dx = i\frac{\pi^2}{2}\,,$$

da cui, uguagliando parte reale e parte immaginaria, otteniamo

$$2\int_0^{+\infty} \frac{\log x}{x^2+1}\, dx = 0\,, \qquad \int_0^{+\infty} \frac{\pi}{x^2+1}\, dx = \frac{\pi^2}{2}.$$

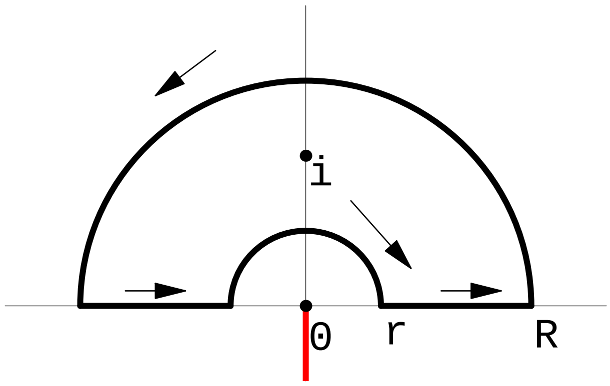


Figura – 6.6: Circuito relativo all'Esempio 6.11.4.

Esempio 6.11.5 Calcoliamo il seguente integrale improprio

$$\int_0^{+\infty} \frac{\log x}{(x+1)^2}\, dx\,.$$

Nonostante la somiglianza con l'integrale precedente, non possiamo usare lo stesso metodo perché la funzione presenta un polo doppio sull'asse reale in $x = -1$. Useremo dunque un cammino differente. Osserviamo innanzitutto che la funzione $u(x) := \log x/(x+1)^2$ è integrabile in $[0, +\infty)$ in quanto in 0 è un infinito di ordine arbitrariamente piccolo e nel punto $+\infty$ è un infinitesimo di ordine, per esempio, maggiore di 3/2.

Questa volta per ottenere una determinazione olomorfa del logaritmo escludiamo dal piano complesso la semiretta $\bar{r} = \{z = x + iy\ ;\ x \geq 0,\ y = 0\}$ e consideriamo la determinazione $\log : \mathbb{C}\setminus\bar{r} \to \mathbb{C}$ definita ponendo, per ogni $z \in \mathbb{C}\setminus\bar{r}$, $\log z = \log|z| + i\vartheta$ con $\vartheta \in \arg z$ e $\vartheta \in (0, 2\pi)$. Tale funzione è olomorfa in $\mathbb{C}\setminus\bar{r}$, mentre nei punti della semiretta $\bar{r}$, non è neanche continua (come visto nella Sezione 6.3.a). Scegliamo un cammino $\varphi_{r,R}$

costituito dai cammini $\gamma_{1,R} : [0,\pi] \to \mathbb{C}$, $\gamma_{2,r,R} : [-R,-r] \to \mathbb{C}$, $\gamma_{3,r} : [0,\pi] \to \mathbb{C}$ e $\gamma_{4,r,R} : [r,R] \to \mathbb{C}$, definiti ponendo

$$\gamma_{1,R}(t) := R\,\mathrm{e}^{it}\,, \quad t \in [0,2\pi]\,, \qquad \gamma_{2,r,R}(t) := R + r - t\,, \quad t \in [r,R]\,,$$
$$\gamma_{3,r}(t) := r\,\mathrm{e}^{i(2\pi - t)}\,, \quad t \in [0,2\pi]\,, \qquad \gamma_{4,r,R}(t) := t\,, \quad t \in [r,R]\,.$$

Poiché la determinazione del logaritmo scelta è discontinua sull'asse reale positivo, dovremmo scegliere $\varepsilon > 0$ e considerare i cammini $\gamma_{1,R}(t)$ e $\gamma_{3,R}(t)$ definiti in $[\varepsilon, 2\pi - \varepsilon]$ e conseguentemente $\gamma_{2,r,R}(t)$ e $\gamma_{4,r,R}(t)$ in modo tale da ottenere un circuito, e alla fine bisognerebbe considerare $\varepsilon \to 0^+$; per semplicità di calcoli, si preferisce porre direttamente $\varepsilon = 0$ (vedi Figura – 6.7). Osserviamo inoltre che il circuito viene percorso in senso antiorario per cui il cammino $\gamma_{2,r,R}(t)$ è l'opposto del cammino $\gamma_{4,r,R}(t)$ tuttavia, per ogni $t \in [r,R]$, la funzione logaritmo sul cammino $\gamma_{2,r,R}(t)$ assume il valore $\log t + 2\pi\, i$ mentre sul cammino $\gamma_{4,r,R}(t)$ assume il valore $\log t$, per cui è prevedibile che considerando la somma dei due integrali lungo $\gamma_{2,r,R}(t)$ e $\gamma_{2,r,R}(t)$ si annulli il termine con la funzione logaritmo e ciò non consente di calcolare l'integrale richiesto. Per evitare tale inconveniente, si considera il quadrato del logaritmo nella funzione da integrare e, come si vedrà, otterremo l'integrale richiesto.

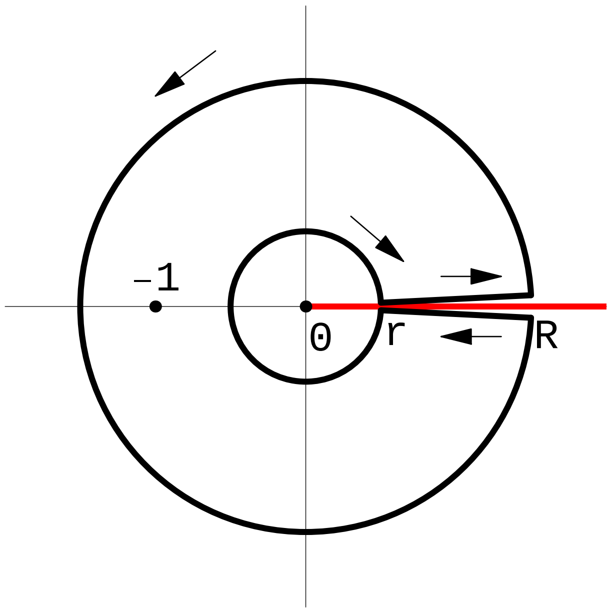


Figura – 6.7: Circuito relativo all'Esempio 6.11.5.

Pertanto, denotata per brevità con log la determinazione della funzione logaritmo olomorfa in $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_+$, si considera la funzione complessa olomorfa $f : \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_+ \to \mathbb{C}$ definita ponendo, per ogni $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_+$,

$$f(z) := \frac{\log^2 z}{(z+1)^2}\,, .$$

Dal teorema dei residui, poiché l'unico punto singolare interno al circuito considerato è -1, segue

$$\oint_{\varphi} f(z)\,dz = 2\pi\, i\ \mathrm{Res}(f,-1)\,.$$

Il punto -1 è un polo del secondo ordine per f e quindi

$$\mathrm{Res}(f,-1) = \lim_{z\to -1} \frac{d}{dz}\left((z+1)^2 \frac{\log^2 z}{(z+1)^2} \right) = \lim_{z\to -1} 2\log z\,\frac{1}{z} = -2\pi\, i.$$

Quindi

$$\int_{\gamma_{1,R}} f(z)\,dz - \int_r^R \frac{(\log(r+R-t)+2\pi\, i)^2}{(r+R-t+1)^2}\,dt + \int_{\gamma_{3,r}} f(z)\,dz + \int_r^R \frac{\log^2 t}{(t+1)^2}\,dt = 4\pi^2\,.$$

Poiché $\lim_{z\to\infty} z\,\dfrac{\log^2 z}{(z+1)^2} = 0$, dal teorema di Jordan sul grande cerchio segue $\lim_{R\to+\infty} \int_{\gamma_{1,R}} f(z)\,dz = 0$. Analogamente, poiché $\lim_{z\to 0} zf(z) = 0$, dal teorema di Jordan sul piccolo cerchio si ha anche $\lim_{r\to 0} \int_{\gamma_{3,r}} f(z)\,dz = 0$. Infine, ponendo $s = r+R-t$ nel secondo integrale,

$$\begin{aligned}
&-\int_r^R \frac{(\log(r+R-t)+2\pi\, i)^2}{(r+R-t+1)^2}\,dt \\
&= \int_R^r \frac{(\log s+2\pi\, i)^2}{(s+1)^2}\,ds = -\int_r^R \frac{(\log s+2\pi\, i)^2}{(s+1)^2}\,ds \\
&= -\int_r^R \frac{\log^2 s}{(s+1)^2}\,ds - 4\pi\, i\int_r^R \frac{\log s}{(s+1)^2}\,ds + 4\pi^2\int_r^R \frac{1}{(s+1)^2}\,ds.
\end{aligned}$$

Osserviamo che sommando gli integrali lungo le curve $\gamma_{2,r,R}$ e $\gamma_{4,r,R}$, si elidono i termini con $\log^2 t$ e rimane invece il termine con $\log t$ che era quello che interessava, da qui l'opportunità di considerare $\log^2 z$ anziché $\log z$ nell'espressione della funzione f. Passando al limite per $r\to 0^+$ e per $R\to+\infty$ nelle relazioni ottenute, si ha

$$-4\pi\, i\int_0^{+\infty} \frac{\log t}{(t+1)^2}\,dt + 4\pi^2\int_0^{+\infty} \frac{1}{(t+1)^2}\,dt = 4\pi^2$$

e confrontando le parti reali ed immaginarie si ottiene

$$\int_0^{+\infty} \frac{\log t}{(t+1)^2}\,dt = 0\,, \qquad \int_0^{+\infty} \frac{1}{(t+1)^2}\,dt = 1\,.$$

Concludiamo che l'integrale richiesto è uguale a 0.

Esempio 6.11.6 Vogliamo calcolare il valore principale del seguente integrale improprio

$$(v.p.) \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin x}{(x^2+4)(x-1)}\, dx\,.$$

Osserviamo che la funzione $u(x) := \sin x/((x^2+4)(x-1))$ è integrabile in un intorno dei punti $\pm\infty$ in quanto è un infinitesimo di ordine 3, tuttavia, la funzione u non è integrabile in un intorno del punto 1 in quanto in tale punto è un infinito di ordine 1. In questo caso, se il seguente limite esiste ed è finito

$$\lim_{r\to 0^+} \left(\int_{-\infty}^{1-r} \frac{\sin x}{(x^2+4)(x-1)}\, dx + \int_{1+r}^{+\infty} \frac{\sin x}{(x^2+4)(x-1)}\, dx \right)\,,$$

esso viene denominato *valore principale dell'integrale improprio* e si pone

$$\begin{aligned}(v.p.) \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin x}{(x^2+4)(x-1)}\, dx \;=\; & \lim_{r\to 0^+} \left(\int_{-\infty}^{1-r} \frac{\sin x}{(x^2+4)(x-1)}\, dx \right.\\ & \left. + \int_{1+r}^{+\infty} \frac{\sin x}{(x^2+4)(x-1)}\, dx \right)\,.\end{aligned}$$

Consideriamo ora la funzione complessa olomorfa $f : \mathbb{C} \setminus \{1, \pm 2i\} \to \mathbb{C}$ definita ponendo, per ogni $z \in \mathbb{C} \setminus \{1, \pm 2i\}$,

$$f(z) := \frac{\mathrm{e}^{i\,z}}{(z^2+4)(z-1)}\,.$$

Tenendo conto che i punti singolari della funzione sono 1 e $\pm 2i$, si possono ora fissare $0 < r < 1$ ed $R > 2$ e considerare il circuito φ costituito dai quattro cammini (vedi Figura – 6.8) $\gamma_{1,R} : [0,\pi] \to \mathbb{C}$, $\gamma_{2,r,R} : [-R, 1-r] \to \mathbb{C}$, $\gamma_{3,r} : [0,\pi] \to \mathbb{C}$ e $\gamma_{4,r,R} : [1+r, R] \to \mathbb{C}$, definiti ponendo

$$\begin{aligned} &\gamma_{1,R}(t) := R\,\mathrm{e}^{it}\,, \quad t \in [0,\pi]\,, && \gamma_{2,r,R}(t) := t\,, \quad t \in [-R, 1-r]\,,\\ &\gamma_{3,r}(t) := 1 + r\,\mathrm{e}^{i(\pi-t)}\,, \quad t \in [0,\pi]\,, && \gamma_{4,r,R}(t) := t\,, \quad t \in [1+r, R]\,. \end{aligned}$$

(osserviamo che il cammino $\gamma_{3,r}$ è percorso in senso orario in modo da rispettare il verso antiorario di φ).

Dal teorema dei residui, poiché l'unico punto singolare interno al circuito considerato è $2i$, segue

$$\oint_{\varphi} f(z)\, dz = 2\pi\, i\ \mathrm{Res}(f, 2i)\,.$$

Il punto $2i$ è un polo del primo ordine per f e pertanto

$$\mathrm{Res}(f, 2i) = \lim_{z\to 2i} (z-2i) f(z) = \lim_{z\to 2i} \frac{\mathrm{e}^{iz}}{(z+2i)(z-1)} = \frac{\mathrm{e}^{-2}}{4i(2i-1)}\,.$$

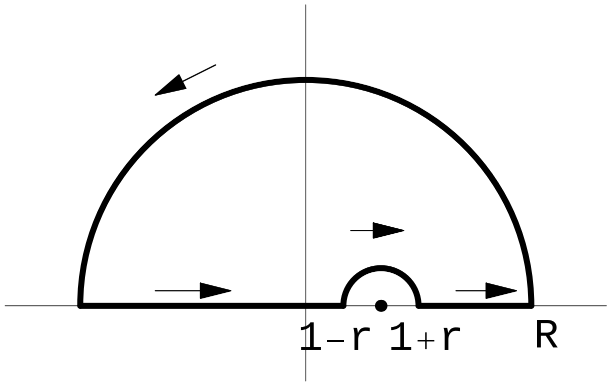


Figura – 6.8: Circuito relativo all'Esempio 6.11.6.

Quindi

$$\begin{aligned}\int_{\gamma_{1,R}} f(z)\,dz + \int_{-R}^{1-r} \frac{e^{it}}{(t^2+4)(t-1)}\,dt \\ + \int_{\gamma_{3,R}} f(z)\,dz + \int_{1+r}^{R} \frac{e^{it}}{(t^2+4)(t-1)}\,dt \\ = \frac{\pi}{2\,e^2(2i-1)} \;=\; -\frac{\pi(2i+1)}{10\,e^2}\,.\end{aligned}$$

Poiché $\lim\limits_{z\to\infty} 1/((z^2+4)(z-1)) = 0$, dal lemma di Jordan segue

$$\lim_{R\to+\infty} \int_{\gamma_{1,R}} f(z)\,dz = 0$$

inoltre, poiché $\lim\limits_{z\to1}(z-1)f(z) = e^i/5$, dal teorema di Jordan sul piccolo cerchio si ha

$$\lim_{r\to0^+} \int_{\gamma_{3,r}} f(z)\,dz = -\frac{i\pi\,e^i}{5}$$

(il segno negativo è giustificato dal fatto che il cammino considerato è l'opposto di quello considerato nel teorema di Jordan). Passando al limite per $R \to +\infty$ e per $r \to 0^+$ nelle relazioni ottenute, si ha

$$(v.p.)\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{it}}{(t^2+4)(t-1)}\,dt = \frac{i\pi\ e^i}{5} - \frac{\pi(2i+1)}{10\,e^2}\,.$$

Poiché

$$\frac{i\pi\ e^i}{5} - \frac{\pi(2i+1)}{10\,e^2} = -\pi\frac{2\,e^2\sin 1 + 1}{10\,e^2} + 2\pi\,i\,\frac{e^2\cos 1 - 1}{10\,e^2}\,,$$

uguagliando le parti reali ed immaginarie, si ottiene

$$(v.p.)\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos t}{(t^2+4)(t-1)}\,dt = -\pi\frac{2\,\mathrm{e}^2\sin 1+1}{10\,\mathrm{e}^2}\,,$$
$$(v.p.)\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin t}{(t^2+4)(t-1)}\,dt = 2\pi\,\frac{\mathrm{e}^2\cos 1-1}{10\,\mathrm{e}^2}\,.$$

Esempio 6.11.7 Con il Teorema dei residui è possibile calcolare integrali di funzioni razionali di funzioni trigonometriche sull'intervallo $[0, 2\pi]$ senza dover ricorrere alle sostituzioni parametriche. Vogliamo ad esempio calcolare

$$\int_0^{2\pi} \frac{dt}{2+\sin t}\,dt\,,.$$

Esprimendo il seno mediante l'esponenziale complesso, abbiamo:

$$\frac{1}{2+\sin t} = \frac{2i}{4i+\mathrm{e}^{it}-\mathrm{e}^{-it}} = \frac{2i\,\mathrm{e}^{it}}{4i\,\mathrm{e}^{it}+\mathrm{e}^{2it}-1} = f(\mathrm{e}^{it})\cdot i\,\mathrm{e}^{it}\,,$$

dove la funzione f è data da

$$f(z) = \frac{2}{z^2+4iz-1}\,.$$

I due poli semplici di questa funzione sono $-2i \pm i\sqrt{3}$. Possiamo interpretare l'integrale assegnato come l'integrale sulla circonferenza unitaria $\gamma_{0,1}$ della funzione f. Solo il polo $(-2+\sqrt{3})i$ è interno al circuito, perciò:

$$\int_0^{2\pi} \frac{dt}{2+\sin t}\,dt = \oint_{\gamma_{0,1}} f(z)\,dz = 2\pi\, i\,\mathrm{Res}(f, (-2+\sqrt{3})i)\,.$$

Calcolando il residuo troviamo:

$$\mathrm{Res}(f, (-2+\sqrt{3})i) = \lim_{z\to(-2+\sqrt{3})i} \frac{2}{z+(2+\sqrt{3})i} = \frac{1}{i\sqrt{3}}$$

pertanto

$$\int_0^{2\pi} \frac{dt}{2+\sin t}\,dt = \frac{2\pi}{\sqrt{3}}\,.$$

Esercizi 6.11.8 Verificare i seguenti risultati, utilizzando il Teorema dei residui:

1. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sqrt{x}}{x^2+1}\,dx = \frac{\sqrt{2}}{2}\pi$ (utilizzare un cammino come in Figura – 6.7).

2. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{x}(x+1)}\,dx = \pi\,.$

3. $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos(\alpha\, x)}{x^2+\beta^2}\, dx = \frac{\pi}{\beta}\, \mathrm{e}^{-\alpha\beta}\,, \qquad \alpha > 0,\ \beta > 0\,.$

4. $\displaystyle(v.p.) \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(x+1)(x^2+1)}\, dx = \frac{\pi}{2}\,.$

5. $\displaystyle\int_{0}^{2\pi} \frac{1}{1+\sin^2 x}\, dx = \sqrt{2}\,\pi\,.$

CAPITOLO 7

CENNI DI TEORIA DELLA MISURA

In questo capitolo accenniamo ad una estensione della teoria della misura e dell'integrazione esposte nel Capitolo 5 che verranno utilizzate negli ultimi due Capitoli e verranno poi riprese nella Laurea Specialistica. I principali vantaggi di questa teoria, tra l'altro, consistono nell'esistenza di teoremi di passaggio al limite sotto il segno di integrale e di integrazione per serie più generali di quelli visti nella teoria di Riemann. Questa teoria è stata sviluppata agli inizi del 1900 principalmente dal matematico francese Henri Lebesgue (1875-1941).

7.1 La teoria della misura secondo Lebesgue

Presentiamo la teoria direttamente nel caso n dimensionale. Definiamo la misura degli n-intervalli di $\mathbb{R}^n$. Siano $a = (a_1, \dots, a_n)$, $b = (b_1, \dots, b_n) \in \mathbb{R}^n$ tali che, per ogni $j = 1, \dots, n$ risulti $a_j \le b_j$. La misura $m([a_1, b_1] \times \cdots \times [a_n, b_n])$ dell'n-intervallo è definita ponendo

$$m([a_1, b_1] \times \cdots \times [a_n, b_n]) = \prod_{j=1}^{n} (b_j - a_j)\,.$$

La misura degli altri n-intervalli (aperti o semiaperti) viene definita allo stesso modo. Come abbiamo visto nel Capitolo 5 un sottoinsieme P di $\mathbb{R}^n$ viene denominato *plurintervallo* se si può rappresentare almeno in un modo come unione di un numero finito di n-intervalli. Un plurintervallo viene denominato aperto (rispettivamente, chiuso, semiaperto a sinistra oppure semiaperto a destra) se si può rappresentare come unione di un numero finito di n-intervalli aperti (rispettivamente, chiusi, semiaperti a sinistra oppure semiaperti a destra). L'insieme di tutti i plurintervalli di $\mathbb{R}^n$ viene denotato con $P(\mathbb{R}^n)$. Quindi, se P è un plurintervallo, esistono $J_1, \dots, J_p$ n-intervalli di $\mathbb{R}^n$ tali che

$$P = \bigcup_{h=1}^{p} J_h\,,$$

si può dimostrare che conseguentemente esistono un numero finito di n-intervalli $I_1, \dots, I_N$ a due a due a parti interne disgiunte e tali che

$$P = \bigcup_{h=1}^{N} I_h \, .$$

Si pone allora

$$m(P) := \sum_{h=1}^{N} m(I_h) \, .$$

La definizione precedente non dipende ovviamente dagli intervalli $I_1, \dots, I_N$ con interni a due a due disgiunti ed aventi P come unione. Una volta definita la misura dei plurintervalli, si può definire la misura esterna $\mu^*(A)$ di ogni sottoinsieme $A \subset \mathbb{R}^n$ ponendo

$$\mu^*(A) := \inf \left\{ \sum_{h \in \mathbb{N}} m(P_h) \ ; \ (P_h)_{h\in\mathbb{N}} \subset P(\mathbb{R}^n) \, , \ A \subset \bigcup_{h\in\mathbb{N}} P_h \right\} ,$$

con la convenzione $\mu^*(A) = +\infty$ se ognuna delle serie a secondo membro è divergente. Un sottoinsieme limitato $A \subset \mathbb{R}^n$ viene denominato *misurabile* se, per ogni $\varepsilon > 0$, esiste un plurintervallo $P \in P(\mathbb{R}^n)$ tale che $\mu^*(A \triangle P) < \varepsilon$.[1] Un insieme A illimitato si dice misurabile se per ogni $r > 0$ sono misurabili gli insiemi limitati $A \cap B_r(0)$. Se A è un sottoinsieme misurabile di $\mathbb{R}^n$ si definisce la sua misura di Lebesgue $m(A) := \mu^*(A)$. Tra le proprietà notevoli della misura di un sottoinsieme di $\mathbb{R}^n$ si segnalano le seguenti

Proposizione 7.1.1 (Proprietà degli insiemi misurabili e della misura)

1. *L'insieme vuoto è misurabile e $m(\emptyset) = 0$. $\mathbb{R}^n$ è misurabile e $m(\mathbb{R}^n) = +\infty$.*

2. *Se A e B sono sottoinsiemi misurabili di $\mathbb{R}^n$ tali che $A \subset B$, risulta che $B \setminus A$ è misurabile e $m(B \setminus A) = m(B) - m(A)$.*

3. *Se $(A_h)_{h\in\mathbb{N}}$ è una successione di insiemi misurabili a due a due disgiunti di $\mathbb{R}^n$, allora $\bigcup_{h\in\mathbb{N}} A_h$ è misurabile e*

$$m\left(\bigcup_{h\in\mathbb{N}} A_h\right) = \sum_{h\in\mathbb{N}} m(A_h) \, .$$

4. *Se $(A_h)_{h\in\mathbb{N}}$ è una successione di insiemi misurabili allora $\bigcup_{h\in\mathbb{N}} A_h$ e $\bigcap_{h\in\mathbb{N}} A_h$ sono misurabili. Inoltre*

$$m\left(\bigcup_{h\in\mathbb{N}} A_h\right) \leq \sum_{h\in\mathbb{N}} m(A_h) \, .$$

[1] Ricordiamo che la differenza simmetrica di due insiemi $A \triangle B$ è data da $(A \setminus B) \cup (B \setminus A)$.

5. *Gli insiemi aperti e gli insiemi chiusi sono misurabili.*

Un concetto importante della teoria della misura considerata riguarda la definizione di *insieme di misura nulla* o *trascurabile*, che è un sottoinsieme misurabile di $\mathbb{R}^n$ avente misura esterna nulla. Poiché ogni sottoinsieme $N \subset \mathbb{R}^n$ avente misura esterna nulla è misurabile, si può dire che un sottoinsieme N di $\mathbb{R}^n$ ha misura nulla se e solo se, per ogni $\varepsilon > 0$, esiste una successione $(P_h)_{h\in\mathbb{N}}$ di plurintervalli tale che

$$N \subset \bigcup_{h\in\mathbb{N}} P_h \,, \qquad \sum_{h\in\mathbb{N}} m(P_h) < \varepsilon \,.$$

Inoltre, poiché ogni plurintervallo è unione di un numero finito di n-intervalli, la condizione precedente è equivalente a richiedere che, per ogni $\varepsilon > 0$, esista una successione $(I_h)_{h\in\mathbb{N}}$ di n-intervalli tale che

$$N \subset \bigcup_{h\in\mathbb{N}} I_h \,, \qquad \sum_{h\in\mathbb{N}} m(I_h) < \varepsilon \,.$$

Ad esempio, si vede facilmente che il seguente sottoinsieme di $\mathbb{R}^n$

$$D := [0,1]^n \cap \mathbb{Q}^n$$

è misurabile ed ha misura nulla mentre non è misurabile secondo Peano-Jordan. Infatti, D è numerabile e quindi si può scrivere $D = \bigcup_{h\in\mathbb{N}}\{a_h\}$, con $a_h \in [0,1]^n \cap \mathbb{Q}^n$. Per ogni $\varepsilon > 0$ e per ogni $h \in \mathbb{N}$, si consideri l'n-intervallo

$$I_h = [a_{h,1} - \delta_h, a_{h,1} + \delta_h] \times \cdot \times [a_{h,n} - \delta_h, a_{h,n} + \delta_h]$$

dove $\delta_h := \dfrac{\sqrt[n]{\varepsilon}}{2^{(h+n+1)/n}}$, la cui misura è ovviamente $m(I_h) = (2\delta_h)^n = 2^n \dfrac{\varepsilon}{2^{h+n+1}} = \dfrac{\varepsilon}{2^{h+1}}$. Risulta quindi $D \subset \bigcup_{h\in\mathbb{N}} I_h$ e

$$\sum_{h\in\mathbb{N}} m(I_h) = \varepsilon \sum_{h\in\mathbb{N}} \frac{1}{2^{h+1}} = \varepsilon \,,$$

da cui, per l'arbitrarietà di $\varepsilon > 0$, segue $m(D) = 0$.

La definizione di insieme di misura nulla consente di introdurre le proprietà quasi ovunque (q.o.) verificate. Se E è un sottoinsieme di $\mathbb{R}^n$ e se per ogni $x \in E$ è assegnata la proprietà $\mathcal{P}(x)$, si dice che $\mathcal{P}$ è quasi ovunque vera se esiste un sottoinsieme $N \subset E$ di misura nulla secondo Lebesgue tale che la proprietà $\mathcal{P}(x)$ sia vera per ogni $x \in E \setminus N$. Pertanto, ad esempio, se $f, g : E \to \mathbb{R}$ sono funzioni reali, si dice che $f = g$ quasi ovunque (brevemente $f = g$ q.o.) se l'uguaglianza $f(x) = g(x)$ vale per ogni $x \in E \setminus N$, con $N \subset E$ di misura nulla.

7.2 Funzioni misurabili e sommabili

Consideriamo all'inizio funzioni definite su tutto $\mathbb{R}^n$.

Definizione 7.2.1 (Funzioni misurabili) *Sia $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. Diremo che f è* misurabile *se per ogni $t \in \mathbb{R}$ l'insieme $f^{-1}((t, +\infty)) = \{ x \in \mathbb{R}^n \ : \ f(x) > t \}$ è misurabile. A volte indicheremo per brevità tale insieme con $\{f > t\}$.*

Tutte le funzioni continue su $\mathbb{R}^n$ sono misurabili in quanto $\{f > t\}$ è aperto. Altri esempi di funzioni misurabili sono dati dalle funzioni caratteristiche di insiemi misurabili. Ricordiamo che se E è un arbitrario sottoinsieme di $\mathbb{R}^n$, si denota con $\chi_E : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ la funzione caratteristica di E definita in (5.2.2).

Proposizione 7.2.2 *Siano f, g funzioni misurabili. Allora sono funzioni misurabili le funzioni $\alpha f + \beta g$, $f \cdot g$, la funzione $f \vee g = \max\{f, g\}$, la funzione $f \wedge g = \min\{f, g\}$. Inoltre, se $(f_h)_h$ è una successione di funzioni misurabili convergenti q.o. a f, anche f è misurabile. Infine, se f è misurabile e $\{f \neq g\}$ è trascurabile, anche g è misurabile.*

Definizione 7.2.3 (Funzioni semplici) *Indicheremo con $\mathcal{S}_+(\mathbb{R}^n)$ l'insieme delle funzioni semplici positive, cioè l'insieme delle funzioni esprimibili nella forma*

$$f(x) = \sum_{h=1}^{N} a_h \, \chi_{E_h}(x) \, ,$$

con $a_1, \dots, a_N$ numeri reali positivi e $E_1, \dots, E_N$ misurabili.

Osserviamo che tutte le funzioni semplici sono misurabili. La rappresentazione come combinazione lineare di funzioni caratteristiche non è certo unica. È facile vedere che, aumentando se necessario il numero degli addendi, ogni funzione semplice è rappresentabile nel seguente modo

$$f(x) = \sum_{h=1}^{N} a_h \, \chi_{E_h}(x) \quad \text{con } E_h \cap E_k = \emptyset \ \text{ per } \ h \neq k. \tag{7.2.1}$$

Definizione 7.2.4 *L'integrale secondo Lebesgue di una funzione semplice f è definito dalla formula*

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(x) \, dx = \sum_{h=1}^{N} a_h \, m(E_h)$$

ove a_h e E_h sono scelti in modo che valga (7.2.1).

Naturalmente l'integrale non dipende dalla rappresentazione (7.2.1) prescelta. Estendiamo ora l'operazione di integrazione ad una classe più ampia di funzioni. Premettiamo un risultato di approssimazione che giustifica la definizione.

Proposizione 7.2.5 *Sia $f \geq 0$ misurabile. Allora esiste una successione di funzioni semplici (f_h) con $f_h \leq f$ convergente q.o. ad f.*

Possiamo ora definire l'integrale di Lebesgue di una funzione positiva.

Definizione 7.2.6 *Sia f misurabile e positiva. Allora poniamo*

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(x)\,dx = \sup\left\{ \int_{\mathbb{R}^n} g(x)\,dx \ ; \ g \in \mathcal{S}_+ \, , \ g \leq f \right\} .$$

Notiamo che l'integrale di una funzione misurabile positiva è ben definito, ma può essere $+\infty$. Inoltre, si vede facilmente che se $f \in \mathcal{S}_+$ il suo integrale coincide con quello già definito.

In generale, se f è misurabile (e di segno qualunque), consideriamo la parte positiva $f^+ = \max\{f, 0\}$ e la parte negativa $f^- = \max\{-f, 0\}$ di f, per cui $f = f^+ - f^-$. L'integrale di f^+ e f^- è definito nella Definizione 7.2.6. Se f^+ ed f^- hanno integrale finito poniamo

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(x)\,dx = \int_{\mathbb{R}^n} f^+(x)\,dx - \int_{\mathbb{R}^n} f^-(x)\,dx \, .$$

Diremo che f è *sommabile in* $\mathbb{R}^n$ se è misurabile e la parte positiva e la parte negativa hanno entrambe integrale finito. Poiché $|f| = f^+ + f^-$ se una funzione è sommabile anche il suo valore assoluto lo è.

Tutte le funzioni limitate, misurabili, nulle fuori di un limitato sono sommabili. La funzione $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ definita da $f(x) = \dfrac{1}{x}$ è misurabile ma non sommabile.

Consideriamo ora l'integrale su un insieme misurabile E. Dato un insieme misurabile $E \subset \mathbb{R}^n$ e $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ misurabile diremo che f è sommabile in E se $f \cdot \chi_E$ è sommabile in $\mathbb{R}^n$. In tal caso porremo

$$\int_E f(x)\,dx = \int_{\mathbb{R}^n} f(x)\,\chi_E\,dx \, .$$

In pratica si integra la funzione che vale $f(x)$ su E e 0 sul complementare di E. L'insieme delle funzioni sommabili in E verrà indicato con $L^1(E)$.

Elenchiamo in un Teorema le proprietà delle funzioni sommabili.

Teorema 7.2.7 *Sia $E \subset \mathbb{R}^n$ misurabile. L'insieme delle funzioni sommabili in E è uno spazio vettoriale. Inoltre valgono le proprietà*

1. *(Linearità)*

$$\int_E (\alpha f(x) + \beta g(x))\,dx = \alpha \int_E f(x)\,dx + \beta \int_E g(x)\,dx \, .$$

2. *(Monotonia)*

$$f \geq g \quad \Longrightarrow \quad \int_E f(x)\,dx \geq \int_E g(x)\,dx \, .$$

3. *(Indipendenza da insiemi di misura nulla) Se* $f \in L^1(E)$ *e* $m(\{ f(x) \neq g(x) \}) = 0$ *allora* $g \in L^1(E)$ *e*
$$\int_E f(x)\, dx = \int_E g(x)\, dx\,.$$

4. *(Disuguaglianza tra il modulo dell'integrale e l'integrale del modulo)*
$$\left| \int_E f(x)\, dx \right| \le \int_E |f(x)|\, dx\,.$$

Osserviamo che, com'è naturale aspettarsi, se una funzione è integrabile nel senso di Riemann allora è integrabile anche nel senso di Lebesgue e i due integrali hanno lo stesso valore. Questa proprietà non vale se si considerano gli integrali impropri visti nel corso di Analisi Matematica I. Infatti la funzione $\dfrac{\sin x}{x}$ è integrabile in senso improprio (vedi l'esempio 6.11.3) ma non è integrabile secondo Lebesgue.

Vediamo ora sotto quali condizioni vale l'implicazione
$$f_h \to f \quad \Rightarrow \quad \lim_h \int_E f_h(x)\, dx = \int_E f(x)\, dx.$$
Vedremo che in molti casi la sola convergenza puntuale della successione implica la convergenza degli integrali.

Teorema 7.2.8 (Teorema della convergenza dominata o di Lebesgue) *Sia* $E \subset \mathbb{R}^n$ *un insieme misurabile e* $(f_h)_h \subset L^1(E)$ *una successione convergente puntualmente a* $f : E \to \mathbb{R}$ *per q.o.* $x \in E$. *Supponiamo che esista una funzione* $g \in L^1(E)$ *tale che* $|f_h(x)| \le g(x)$ *per q.o.* $x \in E$, $\forall\, h \in \mathbb{N}$. *Allora* $f \in L^1(E)$ *e si ha*
$$\lim_h \int_E f_h(x)\, dx = \int_E f(x)\, dx\ ,$$
$$\lim_h \int_E |f_h(x) - f(x)|\, dx = 0\ .$$

Osservazioni 7.2.9

1. Il teorema della convergenza dominata può essere falso se non vale l'ipotesi $|f_h(x)| \le g(x)$: sia ad esempio $f_h(x) = h^2 x\, \mathrm{e}^{-hx}$ per $x \in [0, +\infty)$. Allora f_h converge puntualmente a zero in $[0, +\infty)$ ma $\displaystyle\int_0^{+\infty} f_h(x)\, dx = 1$.

2. Dal Teorema 7.2.8 si dimostra che se esista una funzione $g \in L^1(E)$ tale che
$$\left| \sum_{h=1}^{N} f_h(x) \right| \le g(x)\,, \quad \forall x \in E,\ \forall N \ge 1\,,$$

e la serie $\sum_{h=1}^{+\infty} f_h(x)$ converge puntualmente q.o. allora essa è sommabile e vale la formula di integrazione per serie

$$\int_E \left(\sum_{h=1}^{+\infty} f_h(x) \right) dx = \sum_{h=1}^{+\infty} \int_E f_h(x)\, dx\,.$$

Concludiamo il paragrafo con lo studio della dipendenza di integrali rispetto a parametri. Sia $A \subset \mathbb{R}^m$ un aperto, $E \subset \mathbb{R}^n$ un insieme misurabile e sia $f(t,x) : A \times E \to \mathbb{R}$. Supponiamo che per ogni $t \in A$ la funzione $x \to f(t,x)$ sia sommabile in E. È allora definita la funzione

$$F(t) = \int_E f(t,x)\, dx\ , \quad t \in A.$$

Il problema che affronteremo in questo paragrafo è quello della regolarità di F in funzione di quella di f. Incominciamo dalla continuità:

Teorema 7.2.10 *Supponiamo che $t \to f(t,x)$ sia continua in A per quasi ogni $x \in E$ ed esista una funzione $g \in L^1(E)$ tale che*

$$|f(t,x)| \le g(x) \quad \forall t \in A, x \in E. \tag{7.2.2}$$

Allora F è continua in A.

Passiamo ora allo studio della regolarità C^1:

Teorema 7.2.11 *Supponiamo che $t \to f(t,x)$ sia di classe C^1 in A per ogni $x \in E$ ed esista una funzione $g \in L^1(E)$ tale che*

$$|f(t,x)| + \sum_{j=1}^{m} \left| \frac{\partial f}{\partial t_j}(t,x) \right| \le g(x)\,, \quad \forall t \in A, x \in E. \tag{7.2.3}$$

Allora F è di classe C^1 in A e

$$\frac{\partial F}{\partial t_j}(t) = \int_E \frac{\partial f}{\partial t_j}(t,x)\, dx\,, \quad \forall t \in A,\ j = 1, \ldots, m. \tag{7.2.4}$$

Nel caso $m = 1$ possiamo anche supporre che l'insieme di integrazione dipenda da t:

$$F(t) = \int_{\alpha(t)}^{\beta(t)} f(t,x)\, dx,$$

con α, β funzioni di classe C^1. Allora $F(t) = G(t, \alpha(t), \beta(t))$ con $G(t,u,v) = \int_u^v f(t,x)\, dx$. Se f è continua nelle variabili (t,x) e C^1 nella variabile t abbiamo (si usa il teorema fondamentale del calcolo integrale)

$$\begin{aligned}G_t(t,u,v) &= \int_u^v f_t(t,x)\,dx\\ G_u(t,u,v) &= -f(t,u)\\ G_v(t,u,v) &= f(t,v)\end{aligned}$$

quindi dal teorema di derivazione della funzione composta otteniamo

$$\begin{aligned}F'(t) &= G_t(t,\alpha(t),\beta(t)) + G_u(t,\alpha(t),\beta(t))\alpha'(t) + G_v(t,\alpha(t),\beta(t))\beta'(t)\\ &= \int_{\alpha(t)}^{\beta(t)} f_t(t,x)\,dx + f(t,\beta(t))\,\beta'(t) - f(t,\alpha(t))\,\alpha'(t).\end{aligned}$$

7.3 Spazi $L^p(E)$

Prima di esporre alcuni elementi della teoria degli spazi $L^p(E)$ richiamiamo alcune nozioni a cui abbiamo già accennato nel Capitolo 1 a proposito di $\mathbb{R}^n$.

Ricordiamo che se V è uno spazio vettoriale su $\mathbb{K}$ (con $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ oppure $\mathbb{K} = \mathbb{C}$), una funzione $\|\cdot\| : V \to \mathbb{R}$ si dice norma su V se verifica le seguenti proprietà, per ogni $u, v \in V$ e $\lambda \in \mathbb{K}$,

1. $\|u\| \geq 0,\ \ \|u\| = 0 \ \Leftrightarrow\ u = 0,$
2. $\|\lambda u\| = |\lambda|\,\|u\|,$
3. $\|u + v\| \leq \|u\| + \|v\|.$

In questo caso la coppia $(V, \|\cdot\|)$ viene denominata spazio normato su $\mathbb{K}$. Dalla norma si può sempre dedurre una distanza, cioè una funzione $d : V \times V \to \mathbb{R}$ verificante le seguenti proprietà, per ogni $u, v, z \in V$,

1. $d(u,v) \geq 0,\ \ d(u,v) = 0 \ \Leftrightarrow\ u = v,$
2. $d(u,v) = d(v,u),$
3. $d(u,z) \leq d(u,v) + d(v,z).$

Nel caso degli spazi normati basta infatti porre, per ogni $u, v \in V$, $d(u,v) := \|u-v\|$. Tale distanza viene denominata distanza dedotta dalla norma $\|\cdot\|$ e la coppia (V,d) diventa uno spazio metrico. Negli spazi metrici viene definita in modo naturale la convergenza di successioni. Infatti, una successione $(u_h)_{h\in\mathbb{N}}$ di elementi di V è convergente verso $u \in V$ se

$$\lim_{h\to+\infty} u_h = u \iff \forall\varepsilon > 0,\ \exists\nu \in \mathbb{N}\ :\ \forall h \geq \nu\ :\ d(u_h,u) < \varepsilon\,.$$

Inoltre, si dice che la successione $(u_h)_{h\in\mathbb{N}}$ verifica la condizione di Cauchy se

$$\forall\varepsilon > 0,\ \exists\nu\in\mathbb{N}\ :\ \forall h,k\geq\nu\ :\ d(u_h,u_k)<\varepsilon\,.$$

Ovviamente, ogni successione convergente verifica la condizione di Cauchy, mentre il viceversa non vale in generale. Uno spazio metrico (V,d) si dice *completo* se ogni successione di Cauchy è convergente. Uno spazio normato $(V,\|\cdot\|)$ si dice *spazio di Banach* se è uno spazio metrico completo munito della distanza dedotta dalla norma.

In tutto il seguito verranno identificate le funzioni che sono quasi ovunque uguali. Inoltre considereremo funzioni a valori reali ma si potrebbero facilmente considerare funzioni a valori complessi. Siano E un sottoinsieme misurabile di $\mathbb{R}^n$ e $1\leq p<+\infty$. Lo spazio $L^p(E)$ viene definito come segue

$$L^p(E):=\{\,u:E\to\mathbb{R}\ ;\ |u|^p \text{ è sommabile }\,\}\,.$$

Lo spazio vettoriale (reale se si considerano solamente funzioni a valori reali, altrimenti complesso) $L^p(E)$ è munito della seguente norma, per ogni $u\in L^p(E)$

$$\|u\|_{L^p}:=\left(\int_E |u|^p\,dx\right)^{1/p}\,.$$

Una funzione $u:E\to\mathbb{R}$ si dice *essenzialmente limitata* se esiste un sottoinsieme $N\subset E$ di misura nulla tale che u è limitata in $E\setminus N$ (quindi, u è limitata quasi ovunque). In definitiva, le funzioni essenzialmente limitate sono quelle che coincidono quasi ovunque con una funzione limitata. Se $u:E\to\mathbb{R}$ è una funzione essenzialmente limitata, si definisce *estremo superiore essenziale di* u il numero reale

$$\|u\|_{L^\infty}=\operatorname{sup\,ess} u:=\inf\{\,M\ :\ |u(x)|\leq M\,,\ \forall x\in E\setminus N\,,m(N)=0\,\}$$

Lo spazio vettoriale di tutte le funzioni essenzialmente limitate su E viene denotato con $L^\infty(E)$. Lo spazio $(L^\infty(E),\|\cdot\|_{L^\infty})$ è uno spazio normato.

Seguono ora alcune proprietà essenziali degli spazi $(L^p(E),\|\cdot\|_{L^p})$ con $1\leq p\leq+\infty$. Se $1<p<+\infty$, si definisce coniugato di p, il numero reale p' che verifica la condizione

$$\frac{1}{p}+\frac{1}{p'}=1\,.$$

Ovviamente $1<p'<+\infty$ e $p'=p/(p-1)$. Inoltre, anche 1 e $+\infty$ si dicono coniugati.

Si osservi che l'unico numero coniugato con sé stesso è 2. Enunciamo un teorema che ci permette di stimare il prodotto di due funzioni.

Teorema 7.3.1 (Diseguaglianza di Hölder) *Siano $1\leq p,\,p'\leq+\infty$ coniugati e $u\in L^p(E)$, $v\in L^{p'}(E)$. Allora $u\cdot v\in L^1(E)$ e inoltre*

$$\int_E |u\,v|\,dx\leq\|u\|_{L^p}\|v\|_{L^{p'}}\,.$$

Osservazione 7.3.2 Notiamo che dal Teorema precedente si ottiene che, se E ha misura finita e $r < s$ allora $L^s(E) \subset L^r(E)$. Infatti se $f \in L^s(E)$ scegliamo $u = f^r$, $v = 1$ e $p = s/r$. Allora risulta che $u \in L^p(E)$, $v \in L^{p'}(E)$ e

$$\begin{aligned}\int_E |f|^r \cdot |v|\,dx &\leq \left(\int_E |u|^p\,dx\right)^{1/p} \left(\int_E |v|^{p'}\,dx\right)^{1/p'} \\ &= \|f\|_{L^s}^r\, m(E)^{1-r/s}\end{aligned}$$

da cui

$$\|f\|_{L^r} \leq \|f\|_{L^s}\ (m(E))^{\frac{1}{r}-\frac{1}{s}}\ .$$

In generale nulla si può dire se E ha misura infinita. La funzione $\dfrac{x}{1+x^2}$ appartiene a $L^2(\mathbb{R})$ ma non a $L^1(\mathbb{R})$. La funzione $\dfrac{1}{(1+x^2)\sqrt{|x|}}$ appartiene a $L^1(\mathbb{R})$ ma non a $L^2(\mathbb{R})$.

La proprietà seguente in realtà è stata già utilizzata affermando che $(L^p(E), \|\cdot\|_{L^p})$ è uno spazio normato, in quanto esprime proprio la terza proprietà della norma.

Teorema 7.3.3 (Diseguaglianza di Minkowski) *Siano* $1 \leq p \leq +\infty$ *e* $u, v \in L^p(E)$. *Allora* $(u+v) \in L^p(E)$ *e*

$$\|u+v\|_{L^p} \leq \|u\|_{L^p} + \|v\|_{L^p}\ .$$

La distanza dedotta dalla norma $\|\cdot\|_{L^p}$ viene denotata con d_p, quindi, per ogni $u, v \in L^p(E)$, $d_p(u,v) := \|u-v\|_{L^p}$. Pertanto, se $1 \leq p < +\infty$ una successione $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ di elementi di $L^p(E)$ converge verso $u \in L^p(E)$ se

$$\forall\varepsilon > 0\,, \exists\nu \in \mathbb{N}\ : \forall k \geq \nu\ :\ \int_E |u_k(x) - u(x)|^p\,dx < \varepsilon\,,$$

ossia

$$\lim_{h\to+\infty} \int_E |u_k(x) - u(x)|^p\,dx = 0\,.$$

Se $p = +\infty$, la condizione precedente diventa

$$\forall\varepsilon > 0\,, \exists\nu \in \mathbb{N}\ : \forall k \geq \nu\ :\ \text{sup ess}\,|u_k - u| < \varepsilon\,.$$

La stessa successione verifica la condizione di Cauchy se

$$\forall\varepsilon > 0\,, \exists\nu \in \mathbb{N}\ : \forall k, h \geq \nu\ :\ \int_E |u_k(x) - u_h(x)|^p\,dx < \varepsilon\,,$$

per $1 \leq p < +\infty$, mentre

$$\forall\varepsilon > 0\,, \exists\nu \in \mathbb{N}\ : \forall k, h \geq \nu\ :\ \text{sup ess}\,|u_k - u_h| < \varepsilon\,,$$

se $p = +\infty$. Una proprietà importante relativa alla convergenza negli spazi $L^p(E)$ è data dal seguente risultato.

Teorema 7.3.4 *Per ogni* $1 \le p \le +\infty$, $(L^p(E), \|\cdot\|_{L^p})$ *è uno spazio di Banach.*

Pertanto, ogni successione di Cauchy in $L^p(E)$ risulta convergente in norma L^p.

Osserviamo infine che la convergenza nella norma L^p non implica quella quasi ovunque, ma esiste una sottosuccessione che converge q.o. in E.

Esempi 7.3.5

1. Sia $\alpha > 0$ e si consideri la funzione $u : [0;1] \to \mathbb{R}$ definita ponendo, per ogni $x \in]0,1]$,
$$u(x) := \frac{1}{x^\alpha}\,,$$
(si osservi che è sufficiente definire le funzioni in L^p a meno di un insieme di misura nulla, in quanto le funzioni che differiscono in insiemi di misura nulla vengono identificate). Ovviamente, risulta
$$\int_0^1 \left|\frac{1}{x^\alpha}\right|^p dx < +\infty$$
se e solo se $\alpha\, p < 1$ e quindi $u \in L^p([0,1])$ se $\alpha < 1/p$, mentre $u \notin L^p([0,1])$ se $\alpha \ge 1/p$. Se $p = +\infty$, si verifica direttamente che $u \notin L^\infty([0,1])$ in quanto u non è essenzialmente limitata.

2. Sia $\alpha > 0$ e si consideri, per ogni $k \ge 1$, la funzione
$$u_k(x) := k^\alpha \chi_{[0,1/k]}(x)\,, \quad x \in \mathbb{R}\,.$$
Allora risulta ovviamente $u_k \in L^p(R)$ per ogni $1 \le p \le +\infty$ ed inoltre, se $1 \le p < +\infty$,
$$\|u_k\|_{L^p}^p = \int_0^{1/k} k^{\alpha\, p}\, dx = \frac{k^{\alpha\, p}}{k} = k^{\alpha\, p - 1}\,,$$
mentre
$$\|u_k\|_{L^\infty} = k^\alpha\,.$$
Pertanto, la successione $(u_k)_{k\ge1}$ non è convergente in norma L^∞ mentre, se $1 \le p < +\infty$, la successione $(u_k)_{k\ge1}$ converge alla funzione nulla nella norma L^p se e solo se $\alpha\, p - 1 < 0$, cioè se $p < 1/\alpha$.

7.4 Spazi di Hilbert e prodotto scalare in $L^2(E)$

La teoria di cui presentiamo i primi elementi è sta sviluppata dal matematico tedesco David Hilbert (1862-1943) ed ha avuto un ruolo molto importante nella formulazione della Meccanica Quantistica.

Sia H uno spazio vettoriale su $\mathbb{K}$, dove $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ oppure $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. Si dice che una funzione $\langle\cdot,\cdot\rangle : H \times H \to \mathbb{K}$ è un prodotto scalare su H se verifica le seguenti condizioni:

1. Per ogni $x \in H$: $\langle x, x\rangle \geq 0$ e inoltre $\langle x, x\rangle = 0 \iff x = 0$,
2. Per ogni $x, y \in H$: $\langle x, y\rangle = \overline{\langle y, x\rangle}$,
3. Per ogni $x, y, z \in H$: $\langle x + y, z\rangle = \langle x, z\rangle + \langle y, z\rangle$,
4. Per ogni $x \in H$ e $\lambda \in \mathbb{K}$: $\langle \lambda x, y\rangle = \lambda \langle x, y\rangle$.

Assegnato un prodotto scalare, si può definire una norma su H ponendo, per ogni $x \in H$,

$$\|x\| := \sqrt{\langle x, x\rangle}\,.$$

Si verifica facilmente che $\|\cdot\|$ è una norma su H, denominata norma dedotta dal prodotto scalare. Si dice che $(H, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ è uno *spazio di Hilbert* se lo spazio normato $(H, \|\cdot\|)$ munito della norma dedotta dal prodotto scalare è uno spazio di Banach.

Assegnato uno spazio normato $(V, \|\cdot\|)$, ci si può chiedere se esiste un prodotto scalare su V tale che la norma da esso dedotta coincida con quella originaria di V. La risposta a tale domanda è affermativa se e solo se la norma di V verifica la seguente *regola del parallelogramma*

$$\forall x\,, y \in V \ : \|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2)\,.$$

Nel caso degli spazi $L^p(E)$, con E sottoinsieme misurabile di $\mathbb{R}^n$, si può riconoscere che la regola del parallelogramma è valida se e solo se $p = 2$. Pertanto $L^2(E)$, usando il Teorema 7.3.1, può essere munito di un prodotto scalare per cui risulta uno spazio di Hilbert. Il prodotto scalare $\langle\cdot,\cdot\rangle \ : \ L^2(E) \times L^2(E) \to \mathbb{C}$ è definito ponendo, per ogni $u, v \in L^2(E)$,

$$\langle u, v\rangle := \int_E u(x)\,\overline{v(x)}\,dx\,.$$

Per ogni $1 \leq p < +\infty$, si può considerare lo spazio ℓ^p delle successioni p-sommabili definito come segue

$$\ell^p \ := \ \left\{ (a_k)_{k\in\mathbb{N}} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}} \ : \sum_{k=0}^{+\infty} |a_k|^p \ < \ +\infty \right\}.$$

Si pone inoltre

$$\ell^\infty \ := \ \left\{ (a_k)_{k\in\mathbb{N}} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}} \ : \sup_{k\in\mathbb{N}} |a_k| \ < \ +\infty \right\}.$$

Si riconosce facilmente che ℓ^p è uno spazio di Banach munito della norma

$$\|(a_k)_{k\in\mathbb{N}}\|_{\ell^p} := \left(\sum_{k=0}^{+\infty} |a_k|^p\right)^{1/p} \quad \text{se } 1 \leq p < +\infty\,, \quad \|(a_k)_{k\in\mathbb{N}}\|_{\ell^\infty} := \sup_{k\in\mathbb{N}} |a_k|\,.$$

Anche in questo caso la norma $\|\cdot\|_{\ell^p}$ deriva da un prodotto scalare solamente nel caso $p=2$, in ℓ^2 il prodotto scalare è definito nel modo seguente:

$$\langle (a_k)_{k\in\mathbb{N}}, (b_k)_{k\in\mathbb{N}}\rangle := \sum_{k=0}^{+\infty} a_k \cdot \overline{b_k}\,.$$

Lo spazio $(\ell^2, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ risulta uno spazio di Hilbert. Oltre agli esempi di spazi di Hilbert considerati, conviene tenere presente che anche $\mathbb{K}^n$ è uno spazio di Hilbert munito del prodotto scalare

$$\langle x, y\rangle = \sum_{k=0}^{n} x_k \cdot \overline{y_k}\,,$$

per ogni $x=(x_1,\dots,x_n)\in\mathbb{K}^n$ e $y=(y_1,\dots,y_n)\in\mathbb{K}^n$. Il prodotto scalare $\langle x,y\rangle$ in $\mathbb{K}^n$ viene spesso brevemente denotato con $x\cdot y$ e la norma da esso dedotta semplicemente con $|\cdot|$.

Si consideri ora un arbitrario spazio di Hilbert $(H,\langle\cdot,\cdot\rangle)$. Si dice che una successione $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ di elementi di H è una *base hilbertiana* di $(H,\langle\cdot,\cdot\rangle)$ se verifica le seguenti proprietà:

1. $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ è un *sistema ortonormale*, cioè, per ogni $h,k\in\mathbb{N}$,

$$\langle u_h, u_k\rangle = \delta_{hk} = \begin{cases} 1 & \text{se } h = k\,,\\ 0 & \text{se } h\neq k\,.\end{cases}$$

2. $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ è un *sistema di generatori di H*, cioè per ogni $u\in H$, esiste una successione $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ di elementi di $\mathbb{K}$ tale che

$$u = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k\, u_k\,. \tag{7.4.5}$$

Se $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ è una base hilbertiana di $(H,\langle\cdot,\cdot\rangle)$, per ogni $u\in H$, la successione $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ di elementi di K verificante la (7.4.5) è unica ed è data da

$$a_k = \langle u, u_k\rangle\,,\qquad k\in\mathbb{N}\,.$$

Pertanto

$$u = \sum_{k=0}^{+\infty} \langle u, u_k\rangle\, u_k\,.$$

Valgono inoltre la seguente *uguaglianza di Bessel*

$$\|u\|^2 = \sum_{k=0}^{+\infty} |a_k|^2$$

e *l'uguaglianza di Parseval*

$$\langle u, v\rangle = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k \, \overline{b_k}\,, \quad a_k = \langle u, u_k\rangle\,,\ b_k = \langle v, u_k\rangle\,.$$

Nello spazio di Hilbert $(L^2([0, 2\pi])\,, \langle\cdot,\cdot\rangle)$, una base hilbertiana è costituita dalla successione $(u_k)_{k\in\mathbb{Z}}$, dove per ogni $k \in \mathbb{Z}$, la funzione $u_k : [0, 2\pi] \to \mathbb{C}$ è definita ponendo, per ogni $t \in [0, 2\pi]$, $u_k(t) := \dfrac{\mathrm{e}^{ikt}}{\sqrt{2\pi}}$.

CAPITOLO 8

TRASFORMATA DI FOURIER

In questo capitolo introduciamo la trasformata di Fourier e ne enunciamo le principali proprietà. Questa trasformata, oltre a consentire di risolvere numerose equazioni differenziali della fisica matematica per cui fu introdotta dal matematico francese Joseph Fourier (1768-1830), è ampiamente utilizzata nella teoria dei segnali continui per realizzarne l'analisi e la sintesi. La sua versione discreta (cioè per successioni invece che per funzioni) è diventata particolarmente utilizzata da quando, negli anni 1960, è stata introdotta la Trasformata di Fourier Rapida (FFT).

Studieremo la Trasformata di Fourier negli spazi $L^1(\mathbb{R}^n)$ ed $L^2(\mathbb{R}^n)$, rimandando a corsi successivi l'estensione a spazi di funzioni generalizzate, dette distribuzioni e la trattazione del caso discreto.

In tutto il Capitolo si considerano funzioni $u : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ (in alcuni casi ci soffermeremo su $n = 1$)

8.1 La Trasformata di Fourier in $L^1(\mathbb{R}^n)$

Sia $u \in L^1(\mathbb{R}^n)$. Si definisce trasformata di Fourier di u, e si denota con $\mathcal{F}(u)$ (oppure semplicemente con $\hat{u}$), la funzione $\mathcal{F}(u) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ definita ponendo, per ogni $\xi \in \mathbb{R}^n$,

$$\mathcal{F}(u)(\xi) := \int_{\mathbb{R}^n} u(x)\ \mathrm{e}^{-ix\cdot\xi}\ dx\,. \tag{8.1.1}$$

Si osserva innanzitutto che l'integrale a secondo membro ha senso in quanto $u \in L^1(\mathbb{R}^n)$ ed inoltre, per ogni $x, \xi \in \mathbb{R}^n$, $|\,\mathrm{e}^{-ix\cdot\xi}\,| = 1$.

La trasformata di Fourier è lineare, nel senso che, se $u, v \in L^1(\mathbb{R}^n)$ e se $\lambda \in \mathbb{C}$, si ha

$$\mathcal{F}(u+v) = \mathcal{F}(u) + \mathcal{F}(v)\,, \qquad \mathcal{F}(\lambda u) = \lambda\mathcal{F}(u)\,,$$

come segue direttamente dalla linearità dell'integrale in (8.1.1). Dalla (8.1.1), si ottiene subito, per ogni $u \in L^1(\mathbb{R}^n)$ e $\xi \in \mathbb{R}^n$,

$$\mathcal{F}(u)(\xi) := \int_{\mathbb{R}^n} u(x)\ \cos(x\cdot\xi)\,dx\ -\ i\int_{\mathbb{R}^n} u(x)\ \sin(x\cdot\xi)\,dx$$

Pertanto, se u assume valori reali, si ha

$$\mathrm{Re}(\mathcal{F}(u)(\xi)) := \int_{\mathbb{R}^n} u(x)\,\cos(x\cdot\xi)\,dx\,,$$

$$\mathrm{Im}(\mathcal{F}(u)(\xi)) := -\int_{\mathbb{R}^n} u(x)\,\sin(x\cdot\xi)\,dx\,.$$

Osservazione 8.1.1 Nel caso $n = 1$, tenendo presente che l'integrale su $\mathbb{R}$ di una funzione dispari è nullo, si ottengono le seguenti proprietà:

1. Se $u \in L^1(R)$ è pari, allora $\mathcal{F}(u)$ è pari,
2. Se $u \in L^1(R)$ è dispari, allora $\mathcal{F}(u)$ è dispari,
3. Se $u \in L^1(R)$ è reale e pari, allora $\mathcal{F}(u)$ è reale e pari,
4. Se $u \in L^1(R)$ è reale e dispari, allora $\mathcal{F}(u)$ è immaginaria pura e dispari.

Infatti, per quanto riguarda la proprietà 1., è sufficiente osservare che, per ogni $\xi \in \mathbb{R}$,

$$\mathcal{F}(u)(-\xi) = \int_{\mathbb{R}} u(x)\,\cos(-x\cdot\xi)\,dx = \int_{\mathbb{R}} u(x)\,\cos(x\cdot\xi)\,dx = \mathcal{F}(u)(\xi)\,.$$

e quindi $\mathcal{F}(u)$ è pari e tenendo presente che la funzione coseno è pari, si ha inoltre

$$\mathcal{F}(u)(\xi) = 2\int_0^{+\infty} u(x)\,\cos(x\cdot\xi)\,dx\,.$$

Analogamente, si dimostra la seconda proprietà e, in tal caso si ha

$$\mathcal{F}(u)(-\xi) = -2i\int_{\mathbb{R}} u(x)\,\sin(-x\cdot\xi)\,dx = 2i\int_{\mathbb{R}} u(x)\,\sin(x\cdot\xi)\,dx = -\mathcal{F}(u)(\xi)\,.$$

Per quanto riguarda le proprietà 3. e 4., basta tener presente le espressioni già fornite della parte reale e della parte immaginaria di $\mathcal{F}(u)(\xi)$ ed applicare le proprietà 1. e 2.

Enunciano ora alcune **regole algebriche di trasformazione**.

1. (Cambiamento di scala) Sia $A = (a_{hk})$, $h, k = 1, \dots, n$ una matrice $n\times n$ non singolare. Allora A definisce la trasformazione $x \to A\cdot x$ di $\mathbb{R}^n$ in sé; precisamente, per ogni $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, si pone

$$(A\cdot x)_h = \sum_{k=1}^{n} a_{hk}x_k\,.$$

Sia ora $u \in L^1(\mathbb{R}^n)$ e definiamo la funzione $v(x) := u(A \cdot x)$ per ogni $x \in \mathbb{R}^n$. Allora $v \in L^1(\mathbb{R}^n)$ ed inoltre, per ogni $\xi \in \mathbb{R}^n$,

$$\mathcal{F}(v)(\xi) = \frac{\mathcal{F}(u)(A^{-T} \cdot \xi)}{|\det A|},$$

dove A^{-T} denota l'inversa della trasposta della matrice A. Infatti, posto $y = A \cdot x$, si ha

$$\begin{aligned} F(u(A \cdot x))(\xi) &= \int_{\mathbb{R}^n} u(A \cdot x)\, \mathrm{e}^{-ix\cdot\xi}\, dx \\ &= \frac{1}{|detA|} \int_{\mathbb{R}^n} u(y)\, \mathrm{e}^{-i(A^{-1}y)\cdot\xi}\, dy \\ &= \frac{1}{|detA|} \int_{\mathbb{R}^n} u(y)\, \mathrm{e}^{-iy\cdot(A^{-T}\cdot\xi)}\, dy = \frac{\mathcal{F}(u)(A^{-T} \cdot \xi)}{|\det A|}. \end{aligned}$$

Nel caso particolare in cui $n = 1$, la proprietà precedente si può esprimere come segue, per ogni $a \neq 0$,

$$\mathcal{F}(u(ax))(\xi) = \frac{1}{|a|}\mathcal{F}(u)\left(\frac{\xi}{a}\right), \quad \forall \xi \in \mathbb{R}.$$

2. (Traslazione) Se $u \in L^1(\mathbb{R}^n)$ e se $a \in \mathbb{R}^n$, allora la funzione $u(x - a)$ è ancora in $L^1(\mathbb{R}^n)$ e si ha, per ogni $\xi \in \mathbb{R}^n$,

$$\mathcal{F}(u(x - a))(\xi) = \mathrm{e}^{-ia\cdot\xi}\, \mathcal{F}(u)(\xi).$$

Infatti, posto $y = x - a$, si ha

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(u(x - a))(\xi) &= \int_{\mathbb{R}^n} u(x - a)\, \mathrm{e}^{-ix\cdot\xi}\, dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} u(y)\, \mathrm{e}^{-i(y+a)\cdot\xi}\, dy \\ &= \mathrm{e}^{-ia\cdot\xi} \int_{\mathbb{R}^n} u(y)\, \mathrm{e}^{-iy\cdot\xi}\, dy = \mathrm{e}^{-ia\cdot\xi}\, \mathcal{F}(u)(\xi). \end{aligned}$$

3. (Modulazione) Se $u \in L^1(\mathbb{R}^n)$ e se $a \in \mathbb{R}^n$, allora la funzione $\mathrm{e}^{ia\cdot x}\, u(x)$ è ancora in $L^1(\mathbb{R}^n)$ e si ha, per ogni $\xi \in \mathbb{R}^n$,

$$\mathcal{F}(\mathrm{e}^{ia\cdot x}\, u(x))(\xi) = \mathcal{F}(u)(\xi - a).$$

4. Se $u \in L^1(\mathbb{R}^n)$ e se $a \in \mathbb{R}^n$, allora la funzione $u(x)\, \cos(a \cdot x)$ è ancora in $L^1(\mathbb{R}^n)$ e si ha, per ogni $\xi \in \mathbb{R}^n$,

$$\mathcal{F}(u(x)\, \cos(a \cdot x))(\xi) = \frac{1}{2}(\mathcal{F}(u)(\xi - a) + \mathcal{F}(u)(\xi + a)).$$

5. Se $u \in L^1(\mathbb{R}^n)$ e se $a \in \mathbb{R}^n$, allora la funzione $u(x)\,\sin(a \cdot x)$ è ancora in $L^1(\mathbb{R}^n)$ e si ha, per ogni $\xi \in \mathbb{R}^n$,

$$\mathcal{F}(u(x)\,\sin(a\cdot x))(\xi) = \frac{1}{2i}(\mathcal{F}(u)(\xi - a) - \mathcal{F}(u)(\xi + a))\,.$$

Le proprietà 3, 4 e 5 precedenti si dimostrano procedendo come nelle proprietà 1 e 2.

Seguono a questo punto alcune *proprietà di regolarità* della trasformata di Fourier.

1. Per ogni $u \in L^1(\mathbb{R}^n)$, si ha $\mathcal{F}(u) \in C^0(\mathbb{R}^n) \cap L^\infty(\mathbb{R}^n)$ ed inoltre $\|\mathcal{F}(u)\|_{L^\infty} \leq \|u\|_{L^1}$. Infatti, l'ultima stima segue dal fatto che $|\,\mathrm{e}^{-ix\cdot\xi}\,| = 1$ e pertanto

$$\begin{aligned}\|\mathcal{F}(u)\|_{L^\infty} &= \sup_{\xi\in\mathbb{R}^n}\left|\int_{\mathbb{R}^n} u(x)\,\mathrm{e}^{-ix\cdot\xi}\;dx\right| \\ &\leq \sup_{\xi\in\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n} |u(x)|\,|\,\mathrm{e}^{-ix\cdot\xi}\,|\,dx = \|u\|_{L^1}\,.\end{aligned}$$

2. **(Lemma di Riemann-Lebesgue)** Per ogni $u \in L^1(\mathbb{R}^n)$, si ha

$$\lim_{|\xi|\to\infty} \mathcal{F}(u)(\xi) = 0\,.$$

Dalle proprietà precedenti segue che $\mathcal{F}(u) \in C_0(\mathbb{R}^n)$ (cioè è infinitesima all'infinito) e quindi la trasformata di Fourier è una funzione uniformemente continua.

Le successive **regole analitiche di trasformazione**, di frequente utilizzo, vengono enunciate per brevità solamente nel caso $n = 1$. La dimostrazione si ottiene usando il teorema 7.2.11

1. Supponiamo che $u \in L^1(\mathbb{R})$ e che la funzione $x \cdot u(x)$ sia anch'essa in $L^1(\mathbb{R})$. Allora $\mathcal{F}(u) \in C^1(\mathbb{R})$ ed inoltre, per ogni $\xi \in \mathbb{R}$,

$$(\mathcal{F}(u))'(\xi) = -i\mathcal{F}(x \cdot u(x))(\xi)\,.$$

2. Supponiamo che $u \in C^1(\mathbb{R})$ e che $u, u' \in L^1(\mathbb{R})$. Allora, per ogni $\xi \in \mathbb{R}$,

$$\mathcal{F}(u')(\xi) = i\xi\mathcal{F}(u)(\xi)\,.$$

Considerato il *prodotto di convoluzione* $u * v$ di due funzioni $u, v \in L^1(\mathbb{R}^n)$ definito da

$$(u * v)(x) := \int_{\mathbb{R}^n} u(x - y)\,v(y)\,dy\,,$$

risulta $(u * v) \in L^1(\mathbb{R}^n)$ e $\|(u * v)\|_{L^1} \leq \|u\|_{L^1}\,\|v\|_{L^1}$.

L'operazione di convoluzione è molto importante in quanto permette di regolarizzare una funzione. Infatti se $u \in L^1(\mathbb{R}^n)$ e $v \in C^1(\mathbb{R}^n)$ ed è nulla fuori di un insieme limitato allora $(u * v) \in C^1(\mathbb{R}^n)$ e $D_j(u * v)(x) = (u * D_jv)(x)$ per $j = 1, \ldots, n$. Inoltre se la funzione v è

1. non negativa,
2. nulla fuori della sfera $B_1(0)$,
3. $\displaystyle\int_{B_1(0)} v(x)\,dx = 1$,

allora si può definire la successione $v_k(x) := k^n\, v(kx)$ che si chiama *successione regolarizzante* oppure *approssimazione dell'unità*. Utilizzando la successione $(v_k)_{k\in\mathbb{N}}$ si ottiene che $u_k := (u * v_k) \in C^1(\mathbb{R}^n)$ e u_k converge in $L^1(\mathbb{R}^n)$ a u. Se la funzione u è continua allora u_k converge uniformemente a u su tutti gli insiemi compatti di $\mathbb{R}^n$.

Per quanto riguarda la trasformata di Fourier si ha

$$\mathcal{F}(u * v) = \mathcal{F}(u) \cdot \mathcal{F}(v)\,.$$

Consideriamo ora brevemente il problema dell'*inversione della trasformata di Fourier.* Sia $u \in L^1(\mathbb{R}^n)$; poiché $\mathcal{F}(u) \in C^0(\mathbb{R}^n) \cap L^\infty(\mathbb{R}^n)$, per poter invertire la trasformata di Fourier bisogna richiedere $u \in C^0(\mathbb{R}^n) \cap L^\infty(\mathbb{R}^n)$ oltre naturalmente alla condizione $\mathcal{F}(u) \in L^1(\mathbb{R}^n)$. Vale quindi il seguente Teorema.

Teorema 8.1.2 (Inversione della Trasformata di Fourier) *Se $u \in L^1(\mathbb{R}^n) \cap C^0(\mathbb{R}^n) \cap L^\infty(\mathbb{R}^n)$ ed $\mathcal{F}(u) \in L^1(\mathbb{R}^n)$, risulta, per ogni $x \in \mathbb{R}^n$,*

$$u(x) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}^n} \mathcal{F}(u)(\xi)\; \mathrm{e}^{ix\cdot\xi}\; d\xi\,.$$

Se si suppongono solamente le condizioni $u, \mathcal{F}(u) \in L^1(\mathbb{R}^n)$, allora la formula precedente vale quasi ovunque.

8.2 La Trasformata di Fourier in $L^2(\mathbb{R}^n)$

Lo spazio $L^2(\mathbb{R}^n)$ è molto importante, infatti i segnali che gli appartengono sono detti segnali di energia finita.

Se la funzione $u \in L^2(\mathbb{R}^n)$ l'integrale in (8.1.1) può non essere convergente. Pertanto nello spazio $L^2(\mathbb{R}^n)$, la trasformata di Fourier può essere definita nel modo seguente.

Sia $u \in L^2(\mathbb{R}^n)$ e, per ogni $r > 0$, si consideri la funzione $u_r := u \cdot \varphi_{[-r,r]^n}$

$$\forall x \in \mathbb{R}^n \;\;:\;\; u \cdot \varphi_{[-r,r]^n}(x) = \begin{cases} u(x)\,, & x \in [-r,r]^n\,, \\ 0\,, & x \in \mathbb{R}^n \setminus [-r,r]^n\,. \end{cases}$$

Queste funzioni, per l'osservazione 7.3.2 appartengono a $L^1(\mathbb{R}^n)$ e se ne può calcolare la trasformata usando la definizione (8.1.1). Si verifica che esiste il limite nel senso di $L^2(\mathbb{R}^n)$ di $\hat{u}_r$ per $r \to +\infty$. Allora la trasformata $\mathcal{F}(u)$ è definita ponendo, per ogni $\xi \in \mathbb{R}^n$,

$$\mathcal{F}(u)(\xi) := \lim_{r\to+\infty} \int_{\mathbb{R}^n} u_r(x)\; \mathrm{e}^{-ix\cdot\xi}\; dx \;=\; \lim_{r\to+\infty} \int_{[-r,r]^n} u(x)\; \mathrm{e}^{-ix\cdot\xi}\; dx\,,$$

dove il limite precedente va inteso nel senso della convergenza in $L^2(\mathbb{R}^n)$ essendo anche $\mathcal{F}(u) \in L^2(\mathbb{R}^n)$.

Se il limite esiste anche nel senso della convergenza q.o. allora esso è proprio la trasformata $\mathcal{F}(u)$.

In $L^2(\mathbb{R}^n)$ il teorema di inversione ha un enunciato molto più semplice di quello in $L^1(\mathbb{R}^n)$. Infatti si ha che $u \in L^2(\mathbb{R}^n) \;\Leftrightarrow\; \mathcal{F}(u) \in L^2(\mathbb{R}^n)$ e risulta:

$$u(x) = \frac{1}{(2\pi)^n} \lim_{r\to+\infty} \int_{\mathbb{R}^n} \mathcal{F}(u)(\xi)\, \cdot \varphi_{[-r,r]^n}(\xi)\, \mathrm{e}^{ix\cdot\xi}\, d\xi\,, \tag{8.2.2}$$

nel senso della convergenza in $L^2(\mathbb{R}^n)$.

In $L^2(\mathbb{R}^n)$ valgono le regole di trasformazione algebriche e analitiche analoghe a quelle viste in L^1 e si ha *l'uguaglianza di Plancherel*:

$$\|\mathcal{F}(u)\|_{L^2} = (2\,\pi)^{n/2}\, \|u\|_{L^2}\,. \tag{8.2.3}$$

8.3 Esempi ed applicazioni

Esempio 8.3.1 Sia $a > 0$ e si consideri la funzione $u : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita ponendo, per ogni $x \in \mathbb{R}$,

$$u(x) := \begin{cases} \mathrm{e}^{-ax} & x \geq 0\,, \\ 0\,, & x < 0\,. \end{cases}$$

Allora $u \in L^1(\mathbb{R})$ e, per ogni $\xi \in \mathbb{R}$, risulta

$$\mathcal{F}(u)(\xi) = \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-(a+i\xi)\cdot x}\, dx = \lim_{r\to+\infty} \left[\frac{\mathrm{e}^{-(a+i\xi)\cdot x}}{-(a+i\xi)}\right]_0^r = \frac{1}{a+i\xi}\,.$$

Se si considera la funzione

$$v(x) := \begin{cases} \mathrm{e}^{ax} & x \leq 0\,, \\ 0\,, & x > 0\,, \end{cases}$$

si ha $v \in L^1(\mathbb{R})$ e analogamente, per ogni $\xi \in \mathbb{R}$, risulta

$$\mathcal{F}(v)(\xi) = \int_{-\infty}^0 \mathrm{e}^{(a-i\xi)\cdot x}\, dx = \lim_{r\to-\infty} \left[\frac{\mathrm{e}^{(a-i\xi)\cdot x}}{(a-i\xi)}\right]_r^0 = \frac{1}{a-i\xi}\,.$$

Dalle due trasformate precedenti e dalla linearità della trasformata di Fourier, si ottiene anche, per ogni $\xi \in \mathbb{R}$,

$$\mathcal{F}(\mathrm{e}^{-a|x|})(\xi) = \mathcal{F}(u)(\xi) + \mathcal{F}(v)(\xi) = \frac{1}{a+i\xi} + \frac{1}{a-i\xi} = \frac{2a}{a^2+\xi^2}\,.$$

Esempio 8.3.2 Sia $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ e si consideri la funzione $u : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita ponendo, per ogni $x \in \mathbb{R}$,

$$u(x) := \frac{1}{a^2 + x^2}\,.$$

Osserviamo innanzitutto che $u \in L^1(\mathbb{R})$ e quindi si può considerare la trasformata di Fourier di u. Si ha, per ogni $\xi \in \mathbb{R}$,

$$\mathcal{F}(u)(\xi) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{a^2 + x^2}\,\mathrm{e}^{-i\xi\cdot x}\,dx\,.$$

Supponiamo in una prima fase $\xi \geq 0$ e consideriamo $R > |a|$, la funzione $f(z) := \mathrm{e}^{-i\xi z}/(a^2 + z^2)$ ed il circuito costituito dai cammini $\gamma_{1,R} : [0, \pi] \to \mathbb{C}$ e $\gamma_{2,R} : [-R, R] \to \mathbb{C}$ definiti ponendo

$$\gamma_{1,R}(t) := R\,\mathrm{e}^{-it}\,, \quad t \in [0, \pi]\,, \quad \gamma_{2,R}(t) := t\,, \quad t \in [-R; R]\,.$$

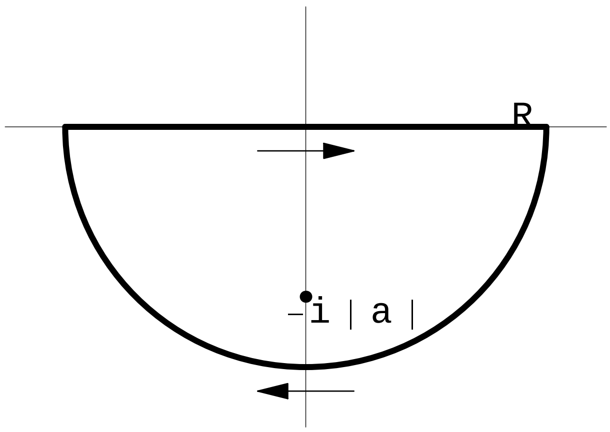


Figura – 8.1: Circuito relativo all'Esempio 8.3.2.

Poiché f ha un polo del primo ordine in $-|a|i$, dal teorema dei residui segue

$$\int_{\gamma_{1,R}} f(z)\,dz + \int_{\gamma_{2,R}} f(z)\,dz = -2\pi\,i\,\mathrm{Res}(f, -|a|i)$$

(il segno negativo è dovuto al fatto che il circuito è orientato in senso orario) ed inoltre

$$\mathrm{Res}(f, -|a|i) = \lim_{z \to -|a|i} \frac{\mathrm{e}^{-i\xi z}}{z - |a|i} = -\frac{\mathrm{e}^{-|a|\xi}}{2|a|i}$$

da cui

$$\int_{\gamma_{1,R}} f(z)\,dz + \int_{\gamma_{2,R}} f(z)\,dz = \frac{\pi}{|a|}\,\mathrm{e}^{-|a|\xi}\,.$$

La funzione $e^{-i\xi z}$ è limitata sul semipiano $\operatorname{Im} z \leq 0$ in quanto, se $z = x + iy$ con $y \leq 0$, risulta $|\,e^{-i\xi z}\,| = |\,e^{-i\xi x}\, e^{\xi y}\,| = |\,e^{\xi y}\,| \cdot 1$ (si è scelto $\xi \leq 0$ ed un circuito contenuto nel semipiano delle parti immaginarie negative proprio per far valere la limitatezza di $e^{-i\xi z}$) e si ha $\lim_{|z|\to+\infty} u(z) = 0$. Quindi, per il Lemma di Jordan, l'integrale di f lungo il cammino $\gamma_{1,R}$ tende a 0 per $R \to +\infty$. Pertanto

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{a^2+t^2}\, e^{-i\xi\cdot t}\, dt = \lim_{R\to+\infty} \int_{\gamma_{2,R}} f(z)\, dz = \frac{\pi\, e^{-|a|\xi}}{|a|}\,,$$

da cui, per ogni $\xi \geq 0$,

$$\mathcal{F}(u)(\xi) = \frac{\pi\, e^{-|a|\xi}}{|a|}\,.$$

La funzione $\mathcal{F}(u)$ deve essere pari e quindi, per ogni $\xi \in \mathbb{R}$,

$$\mathcal{F}(u)(\xi) = \frac{\pi\, e^{-|a\xi|}}{|a|}\,.$$

Alternativamente, si poteva anche utilizzare la formula di inversione applicata alla trasformata trovata nell'Esempio 8.3.1 precedente; infatti sia la funzione considerata che la sua trasformata sono in $L^1(\mathbb{R}) \cap L^\infty(\mathbb{R}) \cap C^0(\mathbb{R})$. Si supponga, per semplicità, $a > 0$, essendo, per ogni $\xi \in \mathbb{R}$,

$$\mathcal{F}(e^{-a|x|})(\xi) = \frac{2a}{a^2+\xi^2}\,,$$

si ottiene, per ogni $x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} e^{-a|x|} &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{2a}{a^2+\xi^2}\, e^{i\xi\cdot x}\, d\xi \\ &= \frac{a}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{a^2+\xi^2}\, e^{i\xi\cdot x}\, d\xi \\ &= \frac{a}{\pi} \mathcal{F}\left(\frac{1}{a^2+\xi^2}\right)(-x) \end{aligned}$$

e quindi, invertendo i ruoli delle variabili ξ ed x, si ha

$$\mathcal{F}\left(\frac{1}{a^2+x^2}\right)(-\xi) = \mathcal{F}\left(\frac{1}{a^2+x^2}\right)(\xi) = \frac{\pi}{a}\, e^{-a|\xi|}\,.$$

Esempio 8.3.3 Vogliamo calcolare la Trasformata di Fourier della funzione caratteristica $u(x) := \varphi_{[-1,1]}(x)$. Naturalmente $u \in L^1(\mathbb{R})$ pertanto possiamo usare la definizione (8.1.1).

Per $\xi \neq 0$ si ha

$$\begin{aligned}\mathcal{F}(u)(\xi) &= \int_{-\infty}^{+\infty} u(x)\ \mathrm{e}^{-i\xi\cdot x}\ dx \\ &= \int_{-1}^{1} \mathrm{e}^{-i\xi\cdot x}\ dx = \left[\frac{\mathrm{e}^{-i\xi\cdot x}}{-i\xi}\right]_{-1}^{1} \\ &= \frac{\mathrm{e}^{-i\xi} - \mathrm{e}^{i\xi}}{-i\xi} = \frac{2\sin\xi}{\xi}\,.\end{aligned}$$

Poiché $\mathcal{F}(u)$ è continua si ha $\mathcal{F}(u)(0) = 2$. Per calcolare la trasformata della funzione $u_T(x) := \varphi_{[-T,T]}(x)$ basta applicare la regola per il cambiamento di scala. Risulta infatti $u_T(x) = \varphi_{[-1,1]}(x/T)$ per cui

$$\mathcal{F}(u_T)(\xi) = \frac{2\sin(T\xi)}{\xi} \qquad \xi \in \mathbb{R}\,.$$

La funzione $\mathcal{F}(u) \in L^2(\mathbb{R})$ mentre non è sommabile (vedi 6.11.3). Possiamo calcolare la Trasformata di Fourier della funzione $v(x) := \dfrac{\sin x}{x}$ usando la formula di inversione in $L^2(\mathbb{R})$ (8.2.2). Otteniamo, scambiando i ruoli di x e ξ

$$\pi\varphi_{[-1,1]}(x) = \pi\varphi_{[-1,1]}(-x) = \lim_{r\to+\infty}\int_{-r}^{r} \frac{\sin\xi}{\xi}\ \mathrm{e}^{-i\xi\cdot x}\ d\xi\,.$$

Esempio 8.3.4 (La trasformata della funzione gaussiana) Consideriamo la trasformata di Fourier della funzione

$$u(x) := e^{-ax^2}\,, \qquad x \in \mathbb{R}\,,$$

con $a > 0$ fissato. La funzione u è in $L^1(\mathbb{R})$ e potremmo fare il calcolo nella definizione (8.1.1) utilizzando il teorema dei residui, integrando su un circuito rettangolare con base sull'asse reale di lunghezza $2R$ e altezza $\xi/(2\sqrt{a})$ e mandando R all'infinito (vedi ad esempio [3]), ma utilizzeremo invece un metodo che sfrutta le regole analitiche di trasformazione. Infatti, nel caso in esame, risulta $u \in C^1(\mathbb{R})$ con $u' \in L^1(\mathbb{R})$ e quindi, dalle proprietà generali delle trasformate di Fourier,

$$\mathcal{F}(u')(\xi) = i\xi\mathcal{F}(u)(\xi)\,, \quad \xi \in \mathbb{R}\,.$$

Inoltre anche la funzione $v(x) := xu(x)$ è in $L^1(\mathbb{R})$ e pertanto, sempre dalle proprietà generali delle trasformate di Fourier, si ha $\mathcal{F}(u) \in C^1(\mathbb{R})$ e, per ogni $\xi \in \mathbb{R}$,

$$\mathcal{F}(u)'(\xi) = -i\mathcal{F}(v)(\xi)\,, \quad \xi \in \mathbb{R}\,.$$

Dall'equazione $u'(x) = -2ax\,\mathrm{e}^{-ax^2} = -2\,a\,x\,u(x)$, considerando la trasformata di Fourier di entrambi i membri, si ottiene

$$i\xi\mathcal{F}(u)(\xi) = \frac{-2a}{-i}\mathcal{F}(u)'(\xi) = -2ai\mathcal{F}(u)'(\xi)\,,$$

da cui

$$\frac{\mathcal{F}(u)'}{\mathcal{F}(u)}(\xi) = -\frac{\xi}{2a}\,.$$

La soluzione generale di tale equazione differenziale lineare del primo ordine è data da

$$\mathcal{F}(u)(\xi) = c\,\mathrm{e}^{-\xi^2/(4a)}\,, \quad c \in \mathbb{R}\,,$$

e tenendo presente che, utilizzando (5.5.7), deve essere

$$\begin{aligned}\mathcal{F}(u)(0) &= \int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{-a\,x^2}\;dx = \frac{1}{\sqrt{a}}\int_{\mathbb{R}} \sqrt{a}\;\mathrm{e}^{-(\sqrt{a}\,x)^2}\;dx\\ &= \frac{1}{\sqrt{a}}\int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{-t^2}\;dt = \sqrt{\frac{\pi}{a}}\,,\end{aligned}$$

si ricava $c = \sqrt{\pi/a}$, da cui risulta

$$\mathcal{F}(u)(\xi) = \sqrt{\frac{\pi}{a}}\,\mathrm{e}^{-\xi^2/(4a)}\,.$$

Esempio 8.3.5 Utilizzando le regole di trasformazione e l'Esempio 8.3.4 precedente, si possono calcolare le trasformate di Fourier delle funzioni $v, w : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ definite ponendo, per ogni $x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} v(x) &:= \mathrm{e}^{-a(x-b)^2}\,, &\quad a > 0\,.\; b \in \mathbb{R}\,,\\ w(x) &:= \mathrm{e}^{icx}\,\mathrm{e}^{-a(x-b)^2}\,, &\quad a > 0\,.\; b, c \in \mathbb{R}\,.\end{aligned}$$

Infatti, considerata la funzione $u(x) := \mathrm{e}^{-ax^2}$ dell'Esempio 8.3.4 precedente, si ha, per ogni $\xi \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}\mathcal{F}(v)(\xi) &= \mathcal{F}(u(x-b))(\xi) = \mathrm{e}^{-ib\xi}\,\mathcal{F}(u)(\xi)\\ &= \mathrm{e}^{-ib\xi}\sqrt{\frac{\pi}{a}}\,\mathrm{e}^{-\xi^2/(4a)} = \sqrt{\frac{\pi}{a}}\,\mathrm{e}^{-\xi^2/(4a)-ib\xi}\,.\end{aligned}$$

Conseguentemente, per ogni $\xi \in \mathbb{R}$,

$$\mathcal{F}(w)(\xi) = \mathcal{F}(\mathrm{e}^{icx}\,v(x))(\xi) = \mathcal{F}(v)(\xi - c) = \sqrt{\frac{\pi}{a}}\,\mathrm{e}^{-(\xi-c)^2/(4a)-ib(\xi-c)}\,.$$

Esercizi 8.3.6

1. Calcolare le trasformate di Fourier delle seguenti funzioni:

$$(1-|x|)_+\,, \quad \cos x\cdot\varphi_{[-\pi/2,\pi/2]}\,, \quad \sin x\cdot\varphi_{[-\pi,\pi]}\,.$$

2. Partendo dalla trasformata di $1/(1+x^2)$ che vale $\pi\,\mathrm{e}^{-|\xi|}$, calcolare le trasformate di

$$\frac{\cos x}{1+x^2}\,, \quad \frac{1}{1+(x+3)^2}\,, \quad \frac{1}{4+x^2}\,,$$

   e di

$$\frac{x}{(1+x^2)^2}\,, \quad \frac{x^2}{(1+x^2)^2}\,, \quad \frac{1}{(1+x^2)^2}\,.$$

3. Usando la formula di Plancherel (8.2.3) calcolare

$$\int_{\mathbb{R}}\frac{dx}{(x^2+1)^2}\,.$$

CAPITOLO 9

TRASFORMATA DI LAPLACE

Nel presente capitolo consideriamo brevemente un ulteriore tipo di trasformata che in diverse applicazioni, come per la risoluzione di equazioni differenziali, presenta dei vantaggi rispetto alla trasformata di Fourier. Anche per la trasformata di Laplace ci si limita a considerare le proprietà più immediate insieme a qualche esempio ed applicazione. Nel seguito del capitolo si seguirà la convenzione di denotare con lettere maiuscole le funzioni assegnate e con la corrispondente lettera minuscola la relativa trasformata di Laplace.

9.1 Proprietà generali

Sia $F : [0;+\infty[\to \mathbb{C}$ una funzione arbitraria (F può essere definita anche in un insieme contenente $[0;+\infty[$ purché il suo supporto $\mathrm{Spt}(F)$ (cioè l'insieme dove è diversa da zero) sia contenuto in $[0;+\infty[$).

Definizione 9.1.1 *Si dice che F è $\mathcal{L}$-trasformabile oppure trasformabile secondo Laplace se esiste $\lambda \in \mathbb{R}$ tale che la funzione $F_\lambda(t) := F(t)\,\mathrm{e}^{-\lambda t}$ sia sommabile (cioè, $F_\lambda \in L^1([0;+\infty[)$). In tal caso, si possono definire l'insieme di convergenza assoluta*

$$\Omega_F := \{s \in \mathbb{C} :\ F_s \in L^1([0;+\infty[)\,\}$$

e la funzione $\mathcal{L}(F) : \Omega_F \to \mathbb{C}$ ponendo, per ogni $s \in \Omega_F$,

$$\mathcal{L}(F)(s) := \int_0^{+\infty} F(t)\,\mathrm{e}^{-st}\ dt\,. \tag{9.1.1}$$

Tale funzione viene denominata trasformata di Laplace di F; talvolta viene denotata semplicemente con il simbolo f.

Si riconosce facilmente che, se $\lambda \in \mathbb{R} \cap \Omega_F$, allora per ogni $s \in \mathbb{C}$ tale che $\mathrm{Re}\, s > \lambda$, si ha ancora $F_s \in L^1([0,+\infty[)$ e quindi $s \in \Omega_F$. Infatti, è sufficiente tener presente che

$$\int_0^{+\infty} F(t)\,\mathrm{e}^{-st}\ dt = \int_0^{+\infty} F(t)\,\mathrm{e}^{-\lambda t}\,\mathrm{e}^{(-\mathrm{Re}\, s+\lambda)t}\,\mathrm{e}^{-i(\mathrm{Im}\, s)t}\ dt$$

e che il secondo membro è sommabile in quanto la funzione $F(t)\,\mathrm{e}^{-\lambda t}$ è sommabile e la funzione $\mathrm{e}^{(-\operatorname{Re} s+\lambda)t}$ è limitata (anzi, compresa tra 0 e 1 ed infinitesima per $t \to +\infty$ se $\operatorname{Re} s > \lambda$ ed uguale costantemente ad 1 se $\operatorname{Re} s = \lambda$), inoltre, per quanto riguarda la funzione $\mathrm{e}^{-i(\operatorname{Im} s)t}$, si ha ovviamente $|\,\mathrm{e}^{-i(\operatorname{Im} s)t}\,| = 1$ e quindi è anch'essa limitata. Pertanto, considerata l'ascissa di convergenza assoluta di F

$$\lambda_F := \inf\{\, \lambda \in \mathbb{R} \;:\; F_\lambda \in L^1([0;+\infty[)\,\}\,,$$

con la convenzione $\lambda_F = -\infty$ se l'insieme $\{\, \lambda \in \mathbb{R} \;:\; F_\lambda \in L^1([0;+\infty[)\,\}$ non è limitato inferiormente, valgono le seguenti proprietà

1. Se $\lambda_F = -\infty$, allora $\Omega_F = \mathbb{C}$.

2. Se $\lambda_F \in \mathbb{R}$, allora

   i) Il semipiano $\{s \in \mathbb{C} \;:\; \operatorname{Re} s > \lambda_F\,\}$ è contenuto in Ω_F (cioè, la trasformata di Laplace è definita per $\operatorname{Re} s > \lambda_F$),

   ii) Il semipiano $\{\, s \in \mathbb{C} \;:\; \operatorname{Re} s < \lambda_F\,\}$ ha intersezione vuota con Ω_F (cioè, la trasformata di Laplace non è definita in alcun punto $\operatorname{Re} s < \lambda_F$).

Considerato $\lambda \in \Omega_F \cap \mathbb{R}$, la trasformata di Laplace è quindi definita su tutta la retta $\{\, \lambda + i\mu \;:\; \mu \in \mathbb{R}\,\}$ e risulta, per ogni $\mu \in \mathbb{R}$,

$$\mathcal{L}(F)(\lambda + i\mu) = \int_0^{+\infty} F(t)\,\mathrm{e}^{-\lambda t}\,\mathrm{e}^{-i\mu t}\; dt = \mathcal{F}(F_\lambda)(\mu)\,.$$

La formula precedente esprime un legame tra la trasformata di Laplace e quella di Fourier; in essa, la funzione F viene intesa estesa a tutto $\mathbb{R}$ assumendo il valore 0 in $]-\infty, 0[$, per cui l'integrale su $[0, +\infty[$ coincide con quello su tutta la retta come previsto nella trasformata di Fourier. Si può pertanto affermare che se $\lambda_F \in \Omega_F$, allora ogni $s \in \mathbb{C}$ tale che $\operatorname{Re} s = \lambda_F$ è ancora in Ω_F e quindi in questo caso Ω_F coincide con il semipiano chiuso $\{\, s \in \mathbb{C} \;:\; \operatorname{Re} s \geq \lambda_F\,\}$. Se $\lambda_F \notin \Omega_F$, si può dire solamente che

$$\{\, s \in \mathbb{C} \;:\; \operatorname{Re} s > \lambda_F\,\} \subset \Omega_F \subset \{\, s \in \mathbb{C} \;:\; \operatorname{Re} s \geq \lambda_F\,\}\,.$$

Seguono ora alcune proprietà elementari della trasformata di Laplace.

1. Se $F : [0;+\infty[\to \mathbb{C}$ è $\mathcal{L}$-trasformabile, allora $\mathcal{L}(F)$ è olomorfa nel semipiano $\{\, s \in \mathbb{C} \;:\; \operatorname{Re} s > \lambda_F\,\}$ e si ha, per ogni $k \in \mathbb{N}$ ed $s \in \mathbb{C}$ tale che $\operatorname{Re} s > \lambda_F$,

   $$\mathcal{L}(F)^{(k)}(s) = (-1)^k \mathcal{L}(t^k F(t))(s)\,.$$

   Inoltre

   $$\lim_{\operatorname{Re} s \to +\infty} \mathcal{L}(F)(s) = 0\,.$$

2. Siano $F, G : [0, +\infty[\to \mathbb{C}$ funzioni $\mathcal{L}$-trasformabili. Allora, per ogni $s \in \Omega_F \cap \Omega_G$,
$$\mathcal{L}(F+G)(s) = \mathcal{L}(F)(s) + \mathcal{L}(G)(s)\,.$$
Inoltre, per ogni $\alpha \in \mathbb{C}$,
$$\mathcal{L}(\alpha F) = \alpha \mathcal{L}(F)\,.$$
La presente proprietà esprime la linearità della trasformata di Laplace, anche se la trasformata della somma può non essere definita nello stesso insieme di convergenza della trasformata di F o di G.

A questo punto possono essere enunciate alcune *regole di trasformazione algebriche.*

1. (Cambiamento di scala) Se $F : [0; +\infty[\to \mathbb{C}$ è $\mathcal{L}$-trasformabile e se $a > 0$, allora la funzione $G(t) := F(at)$ è $\mathcal{L}$-trasformabile e si ha, per ogni $\mathrm{Re}\, s > a\lambda_F$,
$$\mathcal{L}(G)(s) = \frac{1}{a}\mathcal{L}(F)\left(\frac{s}{a}\right)\,.$$
Infatti, effettuando la sostituzione $\tau = at$,
$$\begin{aligned}\int_0^{+\infty} G(t)\, \mathrm{e}^{-st}\; dt &= \int_0^{+\infty} F(at)\, \mathrm{e}^{-st}\; dt\\ &= \frac{1}{a}\int_0^{+\infty} F(\tau)\, \mathrm{e}^{-s\tau/a}\; d\tau\\ &= \frac{1}{a}\mathcal{L}(F)\left(\frac{s}{a}\right)\,.\end{aligned}$$
si osservi che per l'ultima uguaglianza è necessario imporre $\mathrm{Re}(s/a) > \lambda_F$ e quindi, poiché a è reale, $\mathrm{Re}\, s > a\lambda_F$.

2. (Traslazione) Se $F : [0, +\infty[\to \mathbb{C}$ è $\mathcal{L}$-trasformabile e se $a > 0$, allora la funzione $G(t) := F(t-a)$ (F viene considerata nulla in [0, a[) è $\mathcal{L}$-trasformabile e si ha, per ogni $\mathrm{Re}\, s > \lambda_F$,
$$\mathcal{L}(G)(s) = \mathrm{e}^{-as}\, \mathcal{L}(F)(s)\,.$$
Infatti, effettuando la sostituzione $\tau = t - a$,
$$\begin{aligned}\int_0^{+\infty} G(t)\, \mathrm{e}^{-st}\; dt &= \int_0^{+\infty} F(t-a)\, \mathrm{e}^{-st}\; dt\\ &= \mathrm{e}^{-as}\int_0^{+\infty} F(\tau)\, \mathrm{e}^{-s\tau}\; d\tau = \mathrm{e}^{-as}\; \mathcal{L}(F)(s)\,.\end{aligned}$$

3. (Modulazione) Se $F : [0 + \infty[\to \mathbb{C}$ è $\mathcal{L}$-trasformabile e se $\alpha \in \mathbb{C}$, allora la funzione $G(t) := \mathrm{e}^{\alpha t}\, F(t)$ è $\mathcal{L}$-trasformabile e si ha, per ogni $\mathrm{Re}\, s > \lambda_F + \mathrm{Re}\, \alpha$,
$$\mathcal{L}(G)(s) = \mathcal{L}(F)(s-\alpha)\,.$$

Infatti

$$\begin{aligned}\int_0^{+\infty} G(t)\,\mathrm{e}^{-st}\,dt &= \int_0^{+\infty} F(t)\,\mathrm{e}^{\alpha t}\,\mathrm{e}^{-st}\,dt \\ &= \int_0^{+\infty} F(t)\,\mathrm{e}^{-(s-\alpha)t}\,dt = \mathcal{L}(F)(s-\alpha)\,.\end{aligned}$$

Per enunciare le proprietà successive, è necessario ricorrere ad alcune ulteriori proprietà delle funzioni ed all'introduzione di nuovi spazi di funzioni. Innanzitutto, siano I un intervallo di $\mathbb{R}$ e $f : I \to \mathbb{C}$ una funzione. Si dice che f è *assolutamente continua* se, per ogni $\varepsilon > 0$, esiste $\delta > 0$ tale che, assegnato un numero finito di intervalli aperti e a due a due disgiunti $I_j =]a_j, b_j[\subset I$, $j = 1, \ldots, m$, se vale la condizione $\sum_{j=1}^{m} (b_j - a_j) < \delta$, allora deve essere anche $\sum_{j=1}^{m} |f(b_j) - f(a_j)| < \varepsilon$. Dalla definizione precedente segue subito che una funzione assolutamente continua è anche uniformemente continua (basta considerare nella definizione il caso $m = 1$) e quindi continua. Una caratterizzazione semplice delle funzioni assolutamente continue si esprime dicendo che f è assolutamente continua se e solo se è derivabile quasi ovunque, $f' \in L^1(I)$ e

$$f(y) - f(x) = \int_x^y f'(t)\,dt \qquad x, y \in I \tag{9.1.2}$$

(quindi le funzioni assolutamente continue coincidono con le primitive delle funzioni in $L^1(I)$). L'insieme delle funzioni assolutamente continue su I viene denotato con $AC(I)$.

In diverse circostanze, si è interessati a proprietà locali per cui non è importante che la funzione assegnata sia assolutamente continua in tutto il suo insieme di definizione, ma solamente in un intorno di ogni punto prefissato. Pertanto, si dice che una funzione $f : I \to \mathbb{C}$ è localmente assolutamente continua se è assolutamente continua in ogni intervallo chiuso e limitato contenuto in I. L'insieme delle funzioni localmente assolutamente continue su I viene denotato con $AC_{loc}(I)$. Introdotto lo spazio $L^1_{loc}(I)$ delle funzioni localmente sommabili su I (cioè delle funzioni che sono sommabili in ogni intervallo chiuso e limitato contenuto in I), si ha che $f \in AC_{loc}(I)$ se e solo se f è derivabile quasi ovunque, $f' \in L^1_{loc}(I)$ e vale (9.1.2) (quindi le funzioni localmente assolutamente continue coincidono con le primitive delle funzioni in $L^1_{loc}(I)$). Per quanto riguarda le proprietà delle trasformate di Laplace, si è ovviamente interessati agli spazi $AC([0, +\infty[)$ e $AC_{loc}([0, +\infty[)$.

Possiamo ora vedere alcune *regole di trasformazione analitiche*.

Teorema 9.1.2 (Trasformata della derivata) *Sia $F : [0, +\infty[\to \mathbb{C}$ una funzione $\mathcal{L}$-trasformabile e si supponga che $F \in AC_{loc}([0, +\infty[)$ e che F' sia $\mathcal{L}$-trasformabile. Allora, per ogni $s \in \mathbb{C}$ tale che $\mathrm{Re}\, s > \lambda_F$, si ha*

$$\mathcal{L}(F')(s) = s\mathcal{L}(F)(s) - F(0^+)\,.$$

Teorema 9.1.3 (Trasformata della primitiva) *Sia $F : [0; +\infty[\to \mathbb{C}$ una funzione $\mathcal{L}$-trasformabile. Allora, per ogni $s \in \mathbb{C}$ tale che $\operatorname{Re} s > \max\{\, 0, \lambda_F \,\}$, si ha*

$$\mathcal{L}\left(\int_0^t F(\tau)\, d\tau \right)(s) = \frac{1}{s}\mathcal{L}(F)(s)\,.$$

Teorema 9.1.4 *Sia $F : [0; +\infty[\to \mathbb{C}$ una funzione $\mathcal{L}$-trasformabile e si supponga che anche la funzione $F(t)/t$ sia $\mathcal{L}$-trasformabile. Allora, per ogni $s \in \mathbb{C}$ tale che $\operatorname{Re} s >$ $\max\{\, 0\,,\, \lambda_F \,\}$, si ha*

$$\mathcal{L}\left(\frac{F(t)}{t}\right)(s) = \int_{\operatorname{Re} s + i \operatorname{Im} s}^{+\infty + i \operatorname{Im} s} \mathcal{L}(F)(\tau)\, d\tau$$

(quindi l'integrazione va calcolata sulla parte reale di s da $\operatorname{Re} s$ a $+\infty$).

Teorema 9.1.5 *Sia $F : [0, +\infty[\to \mathbb{C}$ una funzione $\mathcal{L}$-trasformabile e si supponga che $F \in AC_{loc}([0, +\infty[)$ e che F' sia $\mathcal{L}$-trasformabile. Allora*

1. **(Valore iniziale)** $\displaystyle\lim_{\operatorname{Re} s \to +\infty} s\mathcal{L}(F)(s) = F(0) \in \mathbb{C}\,.$

2. **(Valore finale)** *Se si suppone in più $F \in AC([0, +\infty[)$, allora il seguente limite*

$$\lim_{t \to +\infty} F(t) =: F(+\infty)$$

esiste in $\mathbb{C}$; inoltre F è limitata, $\lambda_F \le 0$ e

$$\lim_{\substack{s \to 0 \\ \operatorname{Re} s > 0}} s\mathcal{L}(F)(s) = F(+\infty)\,.$$

Si può riconoscere che se $F; G : [0, +\infty[\to \mathbb{C}$ sono funzioni $\mathcal{L}$-trasformabili, si può considerare il *prodotto di convoluzione* $F * G : [0; +\infty[\to \mathbb{C}$ definito ponendo, per ogni $t \in [0; +\infty[$,

$$(F * G)(t) := \int_0^t F(t - \tau) G(\tau)\, d\tau\,.$$

Allora $(F * G)$ è anch'esso $\mathcal{L}$-trasformabile con $\lambda_{F*G} = \max\{\, \lambda_F, \lambda_G \,\}$ e inoltre, per ogni $s \in \mathbb{C}$ tale che $\operatorname{Re} s > \lambda_{F*G}$, si ha

$$\mathcal{L}(F * G)(s) = \mathcal{L}(F)(s)\, \mathcal{L}(G)(s)\,.$$

In particolare, si consideri *la funzione di Heaviside* $H : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita ponendo, per ogni $t \in \mathbb{R}$,

$$H(t) := \begin{cases} 1\,, & t > 0\,, \\ 0\,, & t \le 0\,. \end{cases} \tag{9.1.3}$$

Dalla definizione (9.1.1) risulta facilmente $\mathcal{L}(H)(s) = \dfrac{1}{s}$ e allora la formula precedente applicata con $G := H$ fornisce

$$\mathcal{L}(F * H)(s) = \frac{\mathcal{L}(F)(s)}{s}$$

per ogni $s \in \mathbb{C}$ tale che $\mathrm{Re}\, s > \max\{\, 0,\ \lambda_F \,\}$. Tenendo presente che

$$\begin{aligned}\mathcal{L}(F * H)(s) &= \mathcal{L}\left(\int_0^{+\infty} F(t-\tau)\, d\tau\right)(s) = \mathcal{L}\left(\int_0^{t} F(t-\tau)\, d\tau\right)(s)\\ &= \mathcal{L}\left(-\int_t^{0} F(r)\, dr\right)(s) = \mathcal{L}\left(\int_0^{t} F(r)\, dr\right)(s)\end{aligned}$$

(si è tenuto conto del fatto che F si annulla in $]-\infty, 0[$ e si è applicato il cambiamento di variabile $r = t - \tau$), si ritrova il risultato ottenuto nel Teorema 9.1.3.

9.2 Inversione della trasformata di Laplace

Sia $F : [0, +\infty[\to \mathbb{C}$ una funzione $\mathcal{L}$-trasformabile con ascissa assoluta di convergenza λ_F e si supponga che esista un sottoinsieme finito $H \subset [0, +\infty[$ tale che F sia derivabile in $[0, +\infty[\setminus H$ ed inoltre nei punti di H esistano e siano finiti i limiti sinistro e destro di F e le derivate sinistra e destra di F (se F non è continua in t, posto $F(t^+) =: \lim_{\tau \to t^+} F(\tau)$ e analogamente $F(t^-) =: \lim_{\tau \to t^-} F(\tau)$, la derivata destra è da intendersi come il seguente limite $F'_+(t) := \lim_{\tau \to t^+} \dfrac{F(\tau) - F(t^+)}{t - \tau}$ e analogamente la derivata sinistra è data da $F'_-(t) := \lim_{\tau \to t^-} \dfrac{F(\tau) - F(t^-)}{t - \tau}$. Allora per ogni $a \in \mathbb{R}$ tale che $a > \lambda_F$ e per ogni $t > 0$, si ha

$$\frac{1}{2\pi i}(v.p.) \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} \mathcal{L}(F)(s)\, \mathrm{e}^{st}\, ds = \frac{F(t^+) + F(t^-)}{2}\,.$$

Quindi, l'integrale è calcolato sulla retta verticale $\mathrm{Re}\, s = a$. Nel caso in cui F è continua in $t > 0$, la formula precedente diventa

$$F(t) = \frac{1}{2\pi i}(v.p.) \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} \mathcal{L}(F)(s)\, \mathrm{e}^{st}\, ds\,.$$

Quest'ultima formula fornisce la funzione F in termini della sua trasformata di Laplace. Seguono ora alcune condizioni sufficienti sulla funzione f per la sua validità.

Teorema 9.2.1 *Sia $\lambda \in \mathbb{R}$ e si supponga che $f : \{\, s \in \mathbb{C} \ :\ \ \mathrm{Re}\, s > \lambda \} \to \mathbb{C}$ sia una funzione olomorfa per cui esistono $M > 0$ ed $\alpha > 1$ tali che*

$$\forall s \in \mathbb{C}\ :\ \ \mathrm{Re}\, s > \lambda\ \ : |f(s)| \le \frac{M}{1 + |s|^\alpha}\,.$$

Allora esiste una funzione $\mathcal{L}$-trasformabile e continua $F : [0, +\infty[\to \mathbb{C}$ tale che

1. $\lambda_F \leq \lambda$ *ed inoltre, per ogni* $s \in \mathbb{C}$, $\operatorname{Re} s > \lambda$, $f(s) = \mathcal{L}(F)(s)$.

2. *Per ogni* $a \in \mathbb{C}$, $\operatorname{Re} a > \lambda$ *e per ogni* $t \geq 0$,

$$F(t) = \frac{1}{2\pi\, i}(v.p.) \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} \mathcal{L}(F)(s)\, \mathrm{e}^{st}\, ds\,.$$

Teorema 9.2.2 *Sia* $\lambda \geq 0$ *e si supponga che* $g : \{\, s \in \mathbb{C} \;:\; \operatorname{Re} s > \lambda \,\} \to \mathbb{C}$ *sia una funzione olomorfa per cui esistono* $M > 0$ *ed* $\alpha > 1$ *tali che*

$$\forall s \in \mathbb{C} \;:\; \operatorname{Re} s > \lambda \;\; : |g(s)| \leq \frac{M}{1 + |s|^{\alpha}}\,.$$

Sia inoltre $c \in \mathbb{C}$ *e si consideri la funzione* $f : \{\, s \in \mathbb{C} \;:\; \operatorname{Re} s > \lambda \,\} \to \mathbb{C}$ *definita ponendo, per ogni* $s \in \mathbb{C}$, $\operatorname{Re} s > \lambda$,

$$f(s) := \frac{c}{s} + g(s)\,.$$

Allora esiste una funzione $\mathcal{L}$-trasformabile e continua $F : [0, +\infty[\to \mathbb{C}$ tale che

1. $\lambda_F \leq \lambda$ *ed inoltre, per ogni* $s \in \mathbb{C}$, $\operatorname{Re} s > \lambda$, $f(s) = \mathcal{L}(F)(s)$.

2. *Per ogni* $a \in \mathbb{C}$, $\operatorname{Re} a > \lambda$ *e per ogni* $t \geq 0$,

$$F(t) = \frac{1}{2\pi\, i}(v.p.) \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} \mathcal{L}(F)(s)\, \mathrm{e}^{st}\, ds\,.$$

Osserviamo che una funzione razionale

$$f(s) := \frac{P(s)}{Q(s)}$$

con P e Q polinomi tali che $\deg P < \deg Q$ verifica le condizioni previste nel teorema precedente e quindi è una trasformata di Laplace, la cui trasformata inversa F può essere determinata decomponendo f in una somma di fratti semplici (cioè, con denominatori di grado 1).

In particolare, se Q ha solamente zeri del primo ordine $z_1, \ldots, z_m$, vale la seguente *formula di Heaviside*:

$$F(t) = \sum_{k=1}^{m} \frac{P(z_k)}{Q'(z_k)}\, \mathrm{e}^{z_k t}\,, \qquad t \geq 0\,.$$

9.3 Applicazioni alla risoluzione di problemi differenziali

Come prima applicazione si consideri un problema di Cauchy relativo ad un'equazione lineare di ordine n a coefficienti costanti

$$\begin{cases} Y^{(n)} + a_{n-1}Y^{(n-1)} + \cdots + a_1 Y' + a_0 Y = F(t) \\ Y(0) = y_0, \\ \dots \\ Y^{(n-1)}(0) = y_{n-1} \end{cases}$$

Posto $y = \mathcal{L}(Y)$ ed $f = \mathcal{L}(F)$ e supponendo che sia Y che le sue derivate sino all'ordine $n-1$ siano localmente assolutamente continue, si può applicare il Teorema 9.1.2 e si ottiene

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(Y')(s) &= s\mathcal{L}(Y)(s) - Y(0) = sy(s) - y_0 \\ \mathcal{L}(Y'')(s) &= s\mathcal{L}(Y')(s) - Y'(0) = s^2 y(s) - sy_0 - y_1 \\ &\dots \\ \mathcal{L}(Y^{(n)})(s) &= s\mathcal{L}(Y^{(n-1)})(s) - Y^{(n-1)}(0) \\ &= s^n y(s) - s^{n-1}y_0 - s^{n-2}y_1 - \cdots - sy_{n-2} - y_{n-1}\,. \end{aligned}$$

Sostituendo nell'equazione differenziale, si ottiene un'equazione algebrica del tipo

$$Q(s) + P(s)y = f(s)$$

; dove Q è un polinomio di grado $n-1$ che dipende dai coefficienti dell'equazione e dalle condizioni iniziali e $P(s) = s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \cdots + a_1 s + a_0$ è il polinomio caratteristico dell'equazione differenziale. Si ottiene quindi

$$y(s) = \frac{f(s) - Q(s)}{P(s)}$$

ed applicando la formula di inversione

$$Y(t) = \frac{1}{2\pi\, i} \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} \frac{f(s) - Q(s)}{P(s)}\, \mathrm{e}^{st}\, ds\,.$$

9.4 Esempi ed applicazioni

Al fine di considerare funzioni con supporto in $[0, +\infty[$, utilizziamo la funzione di Heaviside H definita in (9.1.3).

Esempio 9.4.1 La trasformata di Laplace della funzione di Heaviside ha ascissa di convergenza assoluta $\lambda_H = 0$ e, per ogni $\mathrm{Re}\, s > 0$, risulta

$$\mathcal{L}(H)(s) = \frac{1}{s}\,.$$

Infatti, $e^{-\lambda t}$ è sommabile in $[0, +\infty[$ se e solo se $\lambda > 0$; inoltre, se $s \in \mathbb{C}$ e $\operatorname{Re} s > 0$, si ha

$$\mathcal{L}(H)(s) = \int_0^{+\infty} H(t)\, e^{-st}\, dt = \lim_{R \to +\infty} \left[\frac{e^{-st}}{-s} \right]_0^R = \frac{1}{s}\,.$$

Esempio 9.4.2 Dall'esempio precedente ed applicando le regole generali di trasformazione, si ricavano facilmente le seguenti trasformate di Laplace. Per ogni $a > 0$, la funzione $F(t) := H(t - a)$ è $\mathcal{L}$-trasformabile e si ha $\lambda_F = 0$ e, per ogni $\operatorname{Re} s > 0$,

$$\mathcal{L}(F)(s) = \frac{e^{-as}}{s}\,.$$

Inoltre, per ogni $\alpha \in \mathbb{C}$, la funzione $G(t) := e^{\alpha t} F(t)$ è anch'essa $\mathcal{L}$-trasformabile, $\lambda_G = \operatorname{Re} \alpha$ e si ha, per ogni $\operatorname{Re} s > \operatorname{Re} \alpha$,

$$\mathcal{L}(G)(s) = \mathcal{L}(F)(s - \alpha) = \frac{e^{-a(s-\alpha)}}{s - \alpha}\,.$$

Le trasformate precedenti possono essere facilmente ricavate direttamente dalla definizione.

Esempio 9.4.3 Sia $\omega > 0$ e si considerino le funzioni $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e $G : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definite ponendo, per ogni $t \in \mathbb{R}$,

$$F(t) := H(t) \cos(\omega t)\ , \qquad G(t) := H(t) \sin(\omega t)\,.$$

Poiché $F(t) = H(t)(e^{i\omega t} + e^{-i\omega t})/2$ e analogamente $G(t) = H(t)(e^{i\omega t} - e^{-i\omega t})/(2i)$, utilizzando la linearità della trasformazione di Laplace e le regole di trasformazione si ottiene allora che F e G sono $\mathcal{L}$-trasformabili e, per ogni $\operatorname{Re} s > 0$ ($= \operatorname{Re}(i\omega)$), si ha

$$\begin{aligned}\mathcal{L}(F)(s) =& \frac{1}{2}(\mathcal{L}(H(t)\, e^{i\omega t})(s) + \mathcal{L}(H(t)\, e^{-i\omega t})(s)) \\ =& \frac{1}{2}\left(\frac{1}{s - i\omega} + \frac{1}{s + i\omega} \right) = \frac{s}{s^2 + \omega^2}\,,\end{aligned}$$

e analogamente

$$\begin{aligned}\mathcal{L}(G)(s) =& \frac{1}{2i}(\mathcal{L}(H(t)\, e^{i\omega t})(s) - \mathcal{L}(H(t)\, e^{-i\omega t})(s)) \\ =& \frac{1}{2i}\left(\frac{1}{s - i\omega} - \frac{1}{s + i\omega} \right) = \frac{\omega}{s^2 + \omega^2}\,.\end{aligned}$$

Esempio 9.4.4 Sia $k \in \mathbb{N}$ e si consideri la funzione

$$F(t) := t^k H(t)\,.$$

Utilizzando il fatto che la trasformata di Laplace della funzione di Heaviside è olomorfa e, per ogni $k \in \mathbb{N}$ si ha

$$\mathcal{L}(H)^{(k)}(s) = (-1)^k \mathcal{L}(t^k H(t))(s)\,, \qquad \operatorname{Re} s > 0\,,$$

si ottiene direttamente che la funzione F è $\mathcal{L}$-trasformabile ed inoltre, per ogni $\operatorname{Re} s > 0$,

$$\mathcal{L}(F)(s) = (-1)^k \mathcal{L}(H)^{(k)}(s) = (-1)^k D^k \left(\frac{1}{s}\right) = (-1)^k (-1)^k \frac{k!}{s^{k+1}} = \frac{k!}{s^{k+1}}$$

(la penultima uguaglianza si riconosce facilmente procedendo per induzione su $k \in \mathbb{N}$).

Esempio 9.4.5 Mostriamo ora con un esempio esplicito come si può utilizzare la Trasformata di Laplace per risolvere un Problema di Cauchy. Consideriamo il problema:

$$\begin{cases} Y''(t) - 3Y'(t) + 2Y(t) = F(t) & t \geq 0 \\ Y(0) = 1\,, \quad Y'(0) = 2\,, \end{cases}$$

dove la funzione F vale $F(t) = t$ per $0 \leq t \leq 1$, e vale $F(t) = 1$ per $t > 1$. Osserviamo che la funzione F si può scrivere come $F(t) = tH(t) - (t-1)H(t-1)$ e dunque la sua trasformata è $\frac{1}{s^2} - \frac{e^{-s}}{s^2}$. Trasformando l'equazione, tenendo presente il Teorema 9.1.2 e usando la regola sulla traslazione, otteniamo:

$$s^2 y(s) - s - 2 - 3(sy(s) - 1) + 2y(s) = \frac{1}{s^2} - \frac{e^{-s}}{s^2}\,.$$

Mettendo in evidenza $y(s)$ e portando i termini noti al secondo membro si ha:

$$(s^2 - 3s + 2)y(s) = s - 1 + \frac{1}{s^2} - \frac{e^{-s}}{s^2}\,.$$

ossia

$$y(s) = \frac{s^3 - s^2 + 1 - e^{-s}}{s^2(s^2 - 3s + 2)} = \frac{s^3 - s^2 + 1 - e^{-s}}{s^2(s-1)(s-2)}\,.$$

Usando il metodo dei fratti semplici otteniamo:

$$\begin{aligned} \frac{s^3 - s^2 + 1}{s^2(s-1)(s-2)} &= \frac{5}{4\,(s-2)} - \frac{1}{s-1} + \frac{1}{2\,s^2} + \frac{3}{4\,s} \\ \frac{-\,e^{-s}}{s^2(s-1)(s-2)} &= -\,e^{-s} \left(\frac{1}{4\,(s-2)} - \frac{1}{s-1} + \frac{1}{2\,s^2} + \frac{3}{4\,s} \right)\,. \end{aligned}$$

Antitrasformando e usando ancora le regole sulla traslazione e sulla modulazione, si ha:

$$Y(t) = \left(\frac{5}{4}\,e^{2t} - e^t + \frac{1}{2}t + \frac{3}{4}\right) H(t) - \left(\frac{1}{4}\,e^{2(t-1)} - e^{(t-1)} + \frac{1}{2}(t-1) + \frac{3}{4}\right) H(t-1).$$

APPENDICE

Trasformata di Fourier

Definizione: $\hat{f}(\xi) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\ \mathrm{e}^{-ix\xi}\ dx$

$\frac{1}{a^2+x^2}$	$\frac{\pi\,\mathrm{e}^{-\lvert a\xi\rvert}}{\lvert a\rvert}$
$\mathrm{e}^{-ax^2}\ (a>0)$	$\sqrt{\frac{\pi}{a}}\,\mathrm{e}^{-\xi^2/(4a)}$
$\mathrm{e}^{-a\lvert x\rvert}\ (a>0)$	$\frac{2a}{a^2+\xi^2}$
$f(x-a)$	$\mathrm{e}^{-ia\xi}\,\hat{f}(\xi)$
$\mathrm{e}^{iax}\,f(x)$	$\hat{f}(\xi-a)$
$f(ax)$	$\frac{1}{\lvert a\rvert}\hat{f}(\frac{\xi}{a})$
$xf(x)$	$-\frac{1}{i}(\hat{f})'(\xi)$
$f'(x)$	$i\xi\hat{f}(\xi)$
$(f*g)(x)$	$\hat{f}(\xi)\cdot\hat{g}(\xi)$

Tabella – A.1: Trasformate di Fourier

Trasformata di Laplace

Definizione: $f(s) = \int_0^{+\infty} F(t)\ \mathrm{e}^{-st}\ dt$

$H(t)$	$\frac{1}{s} \quad (\mathrm{Re}\, s > 0)$
$H(t)\cos(\omega t)\ (\omega > 0)$	$\frac{s}{\omega^2 + s^2} \quad (\mathrm{Re}\, s > 0)$
$H(t)\sin(\omega t)\ (\omega > 0)$	$\frac{\omega}{\omega^2 + s^2} \quad (\mathrm{Re}\, s > 0)$
$t^k H(t)$	$\frac{k!}{s^{k+1}} \quad (\mathrm{Re}\, s > 0)$
$F(at)\ (a > 0)$	$\frac{1}{a} f\left(\frac{s}{a}\right) \quad (\mathrm{Re}\, s > a\lambda_F)$
$F(t-a)\ (a > 0)$	$\mathrm{e}^{-as} f(s) \quad (\mathrm{Re}\, s > \lambda_F)$
$\mathrm{e}^{\alpha t} F(t)$	$f(s-\alpha) \quad (\mathrm{Re}\, s > \lambda_F + \mathrm{Re}\, \alpha)$
$F'(t)$	$sf(s) - F(0) \quad (\mathrm{Re}\, s > \lambda_F)$
$\int_0^t F(\tau)\, d\tau$	$\frac{1}{s} f(s) \quad (\mathrm{Re}\, s > \max\{0, \lambda_F\})$
$\frac{F(t)}{t}$	$\int_{\mathrm{Re}\, s + i\, \mathrm{Im}\, s}^{+\infty + i\, \mathrm{Im}\, s} f(\sigma)\, d\sigma\ (\mathrm{Re}\, s > \max\{0, \lambda_F\})$
$(F * G)(t)$	$f(s) \cdot g(s) \quad (\mathrm{Re}\, s > \lambda_{F*G})$

Tabella – A.2: Trasformata di Laplace

BIBLIOGRAFIA

[1] G.C.Barozzi: Matematica per l'Ingegneria dell'Informazione, Zanichelli, Bologna, 2005.

[2] M.Bramanti, C.D.Pagani e S.Salsa: Analisi Matematica Due, Zanichelli, Bologna, 2009.

[3] M.Campiti: Matematica Applicata, dispense all'indirizzo
`http://michelecampiti.unile.it/didattica/materiale/matappl.pdf`

[4] M.Codegone: Metodi Matematici per l'Ingegneria, Zanichelli, Bologna, 1995.

[5] N.Fusco, P.Marcellini, C.Sbordone: Analisi Matematica due, Liguori Editore, Napoli, 1996.

[6] G.Gilardi: Analisi Tre, McGraw-Hill, Milano, 1994.

[7] E.Giusti: Analisi Matematica 2, Bollati Boringhieri, Torino, 1989.

[8] E.Giusti: Esercizi e complementi di Analisi Matematica, vol. 2, Bollati Boringhieri, Torino, 1989.

[9] P.Marcellini, C.Sbordone: Esercitazioni di Matematica 2, parte I e II, Liguori Editore, Napoli, 1991.

[10] M.Miranda jr.: Eserciziario del corso di Matematica Applicata, all'indirizzo
`http://poincare.unile.it/miranda/MatematicaApplicata/Esercizi.pdf`

[11] M.Miranda jr., F.Paronetto: Eserciziario del corso di Matematica II, all'indirizzo
`http://poincare.unile.it/miranda/MatematicaII/Esercizi2.pdf`

[12] F.Tomarelli: Esercizi di Metodi Matematici per l'Ingegneria, CLUP, Milano, 1987.

Università del Salento

Facoltà di Ingegneria
Corso di Laurea in Ingegneria dell'Informazione

Prof. Antonio Leaci

Compiti di Analisi Matematica II (D.M.509)

A.A. 2008/2009

Indice

1 Compito di Analisi Matematica II del 12/01/09

1. Studiare la convergenza della serie di funzioni

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^2 \, \mathrm{e}^{-nx} \,,$$

   e calcolarne la somma.

2. Risolvere il seguente Problema di Cauchy

$$\begin{cases} yy'' + 2(y')^2 = 0 \\ y(0) = 1 \\ y'(0) = 1. \end{cases}$$

3. Calcolare il seguente integrale

$$\iiint_E z \, dxdydz \,,$$

   dove $E = \{\, (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \, ; \, x^2 + y^2 \leq z \leq \sqrt{2 - x^2 - y^2} \,\}$.

4. Determinare il massimo e il minimo della funzione

$$f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2} + y^2 - 1 \,,$$

   nell'insieme $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \, ; \, x^2 + y^2 \leq 9 \,\}$.

1.1 Soluzione del compito di Analisi Matematica II del 12/01/09

1. Studiamo la convergenza puntuale. Le funzioni sono tutte non negative. In $x = 0$ esse valgono tutte zero. Per $x \neq 0$ usando il criterio della radice troviamo
$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{x^2 \, \mathrm{e}^{-nx}} = \mathrm{e}^{-x} \, ,$$
perciò la serie converge puntualmente assolutamente in $[0, +\infty)$, diverge positivamente per $x < 0$.

   Studiamo la convergenza totale in $X = [0, +\infty)$. Calcolando la derivata prima di ciascun termine troviamo $u_n'(x) = (2x - nx^2)\,\mathrm{e}^{-nx}$ che si annulla per $x = 0$ e $x = \dfrac{2}{n}$ dove $u_n\left(\dfrac{2}{n}\right) = \dfrac{4}{n^2\,\mathrm{e}^2}$. Pertanto
$$\sum_{n=1}^{+\infty} \sup_{x\in X} |u_n(x)| = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{4}{n^2\,\mathrm{e}^2} < +\infty \, ,$$
e dunque la serie converge totalmente (e quindi uniformemente) in X. La sua somma è
$$\sum_{n=0}^{\infty} x^2\,\mathrm{e}^{-nx} = x^2 \sum_{n=0}^{\infty} (\mathrm{e}^{-x})^n = \frac{x^2}{1-\mathrm{e}^{-x}} = \frac{x^2\,\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^x - 1} \, .$$

2. L'equazione differenziale è autonoma dunque usiamo la sostituzione $z(y(x)) = y'(x)$ da cui $z'(y)y' = z'(y)z(y) = y''$ e allora dobbiamo risolvere il P.d.C.
$$\begin{cases} yzz' + 2z^2 = 0 \\ z(1) = 1, \end{cases}$$
dove y è la variabile indipendente. Separando le variabili otteniamo
$$\frac{z'}{2z} = -\frac{1}{y}.$$
Integrando risulta
$$\frac{1}{2}\log z = -\log y + c$$

cioè $z = \dfrac{k}{y^2}$ e, imponendo la condizione iniziale otteniamo $k = 1$. A questo punto dobbiamo risolvere il P.d.C.

$$\begin{cases} y' = \dfrac{1}{y^2} \\ y(0) = 1. \end{cases}$$

Separando le variabili otteniamo

$$\int y^2 \, dy = \int 1 \, dx$$

cioè $\dfrac{y^3}{3} = x + c$ da cui, imponendo la condizione iniziale, troviamo $c = \dfrac{1}{3}$ e la soluzione $y(x) = (3x+1)^{1/3}$.

3. Possiamo integrare in coordinate cilindriche (ϱ, ϑ, z), nelle quali, imponendo $\varrho^2 = \sqrt{2-\varrho^2}$, abbiamo $0 \le \varrho \le 1$, $0 \le \vartheta \le 2\pi$ e $\varrho^2 \le z \le \sqrt{2-\varrho^2}$. Allora l'integrale vale

$$\begin{aligned} \iiint_E z \, dxdydz &= \int_0^{2\pi} d\vartheta \int_0^1 \varrho \, d\varrho \int_{\varrho^2}^{\sqrt{2-\varrho^2}} z \, dz \\ &= 2\pi \int_0^1 \left[\frac{z^2}{2} \right]_{\varrho^2}^{\sqrt{2-\varrho^2}} \varrho \, d\varrho = 2\pi \int_0^1 \left(\frac{2-\varrho^2}{2} - \frac{\varrho^4}{2} \right) \varrho \, d\varrho \\ &= 2\pi \left[\frac{\varrho^2}{2} - \frac{\varrho^4}{8} - \frac{\varrho^6}{12} \right]_0^1 = 2\pi \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{8} - \frac{1}{12} \right) = \frac{7\pi}{12} \, . \end{aligned}$$

4. La funzione è continua su un insieme chiuso e limitati, pertanto possiede massimo e minimo. Essa non è differenziabile in $(0,0)$ dove vale -1. Cerchiamo i punti stazionari interni. Il gradiente si annulla nelle soluzioni del sistema

$$\begin{cases} \dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} = 0 \\ 2\,y + \dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} = 0 \end{cases}$$

ma questo sistema non ha soluzioni, dunque non ci sono punti stazionari interni. Studiamo la funzione sulla frontiera con il metodo dei moltiplicatori di Lagrange. Definiamo la funzione $L(x, y, \lambda) = f(x, y) - \lambda(x^2 + y^2 - 9)$ e troviamo i punti stazionari risolvendo il sistema:

$$\begin{cases} \dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} - 2\lambda x = 0 \\ 2\,y + \dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} - 2\lambda y = 0 \\ x^2 + y^2 - 9 = 0 \end{cases} ,$$

ossia

$$\begin{cases} x\dfrac{1 - 2\,\lambda\sqrt{x^2+y^2}}{\sqrt{x^2+y^2}} = 0, \\ y\dfrac{(2-2\lambda)\sqrt{x^2+y^2} + 1}{\sqrt{x^2+y^2}} = 0 \\ x^2 + y^2 - 9 = 0 \end{cases} .$$

Dalla prima equazione otteniamo

$$x = 0 \qquad \text{oppure} \qquad \frac{1}{2\lambda} = \sqrt{x^2+y^2}\,,$$

Dalla seconda equazione otteniamo

$$y = 0 \qquad \text{oppure} \qquad \sqrt{x^2+y^2} = \frac{-1}{(2-2\lambda)}\,.$$

Ad $x = 0$ corrisponde nella terza equazione $y = \pm 3$. Ad $y = 0$ corrisponde nella terza equazione $x = \pm 3$. Negli altri due casi

$$\left(\frac{1}{2\lambda}\right) = 3 \;\Rightarrow\; \lambda = \frac{1}{6} \quad \text{oppure} \quad \left(\frac{-1}{(2-2\lambda)}\right) = 3 \;\Rightarrow\; \lambda = \frac{7}{6}\,,$$

non otteniamo altre soluzioni per x e y. In definitiva abbiamo

$$f(0,0) = -1\,, \quad f(\pm 3, 0) = 2\,, \quad f(0, \pm 3) = 11\,,$$

pertanto il minimo di f è -1 e il massimo è 11.

2 Compito di Analisi Matematica II del 23/03/09

1. Risolvere il seguente Problema di Cauchy :

$$\begin{cases} 2yy'' = 1 + (y')^2 \\ y(0) = 1\ ,\quad y'(0) = 0. \end{cases}$$

2. Studiare la convergenza puntuale ed uniforme della serie

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} \left(\frac{1 - x^2}{3x - 1} \right)^n \quad .$$

   Calcolarne la somma.

3. Calcolare il seguente integrale

$$\int_S |x^2 + y^2 - 1|\ dxdy$$

   dove $S = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2\,;\ 0 \le x \le \sqrt{3},\ y \ge 0,\ x^2 + y^2 \le 4 \right\}$.

4. Calcolare il massimo ed il minimo della funzione

$$f(x, y) = 3x^2 - 2y^2 + 3y$$

   nell'insieme $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2\,; x \ge 0,\ y \ge x,\ 4x^2 + y^2 \le 4\ \}$.

2.1 Soluzione del compito di Analisi Matematica II del 23/03/09

1. L'equazione differenziale è autonoma dunque usiamo la sostituzione $z(y(x)) = y'(x)$ con $z'(y(x))z(y(x)) = y''(x)$ e allora dobbiamo risolvere il P.d.C.
$$\begin{cases} 2yzz' = 1 + z^2 \\ z(1) = 0, \end{cases}$$
dove y è la variabile indipendente. Separando le variabili otteniamo
$$\frac{2zz'}{1+z^2} = \frac{1}{y}.$$
Integrando otteniamo
$$\int \frac{2z}{1+z^2}\,dz = \int \frac{1}{y}\,dy,$$
da cui
$$\log(1+z^2) = \log y + c$$
cioè $1 + z^2 = ky$ e, imponendo la condizione iniziale otteniamo $k = 1$. A questo punto dobbiamo risolvere il P.d.C.
$$\begin{cases} y' = \sqrt{y-1} \\ y(0) = 1. \end{cases}$$
Poichè $y(x) = 1$ non risolve l'equazione di partenza, separando le variabili otteniamo
$$\int \frac{1}{\sqrt{y-1}}\,dy = \int 1\,dx$$
cioè $2\sqrt{y-1} = x+c$ da cui, imponendo la condizione iniziale, troviamo $c = 0$ e la soluzione $y(x) = 1 + \dfrac{x^2}{4}$.

2. Con la sostituzione $y = \dfrac{1-x^2}{3x-1}$ otteniamo
$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} y^n = e^y$$

per ogni $y \in \mathbb{R}$, con convergenza totale negli intervalli limitati. Tornando nella variabile x abbiamo la convergenza puntuale per ogni $x \neq \frac{1}{3}$.
Poichè per la funzione $f(x) = \dfrac{1-x^2}{3x-1}$ risulta

$$\begin{cases} \lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty \\ \lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = +\infty \\ \lim\limits_{x\to\frac{1}{3}^+} f(x) = +\infty \\ \lim\limits_{x\to\frac{1}{3}^-} f(x) = -\infty \end{cases}$$

segue che la serie converge totalmente in $[a,b] \cup [c,d]$ con $b < \frac{1}{3} < c$.
La somma della serie è $e^{\frac{1-x^2}{3x-1}}$ per $x \neq \dfrac{1}{3}$.

3. Occorre distinguere tra $x^2 + y^2 - 1 < 0$ e $x^2 + y^2 - 1 > 0$. Inoltre l'intersezione tra la retta $x = \sqrt{3}$ e la circonferenza $x^2 + y^2 = 4$ fornisce il punto $(\sqrt{3}, 1) = 2(\cos\dfrac{\pi}{6}, \sin\dfrac{\pi}{6})$.

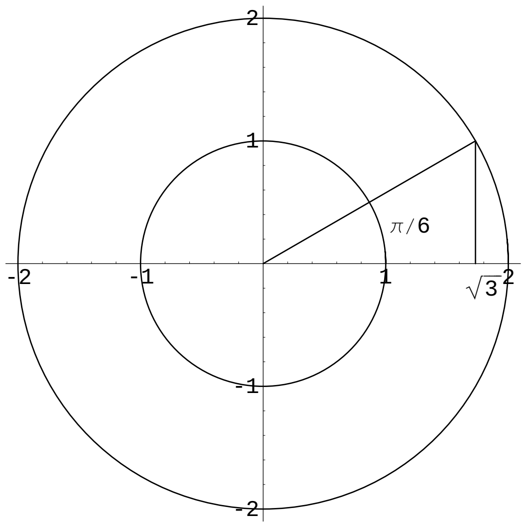


Figura 1: Dominio di integrazione.

Allora, passando in coordinate polari, l'integrale si spezza in tre parti e, tenendo conto che $x = \sqrt{3}$ diventa $\rho = \frac{\sqrt{3}}{\cos\vartheta}$, si ha:

$$\int_0^{\pi/2}\int_0^1 (1-\rho^2)\,\rho\,d\rho\,d\vartheta +$$
$$\int_0^{\pi/6}\int_1^{\frac{\sqrt{3}}{\cos\vartheta}} (\rho^2-1)\,\rho\,d\rho\,d\vartheta +$$
$$\int_{\pi/6}^{\pi/2}\int_1^2 (\rho^2-1)\,\rho\,d\rho\,d\vartheta\,.$$

I tre integrali valgono rispettivamente $\dfrac{\pi}{8}$, $\dfrac{1}{\sqrt{3}} + \dfrac{\pi}{24}$, $\dfrac{3\pi}{4}$ e dunque l'integrale proposto vale $\dfrac{1}{\sqrt{3}} + \dfrac{11\pi}{12}$.

Nel calcolo del secondo integrale interviene il seguente integrale:

$$\begin{aligned}
\int \frac{1}{\cos^4\vartheta}\,d\vartheta = &\int \frac{1}{\cos^2\vartheta}\,\frac{1}{\cos^2\vartheta}\,d\vartheta \\
=&\frac{1}{\cos^2\vartheta}\tan\vartheta - \int \frac{2\sin\vartheta\tan\vartheta}{\cos^3\vartheta}\,d\vartheta \\
=&\frac{\tan\vartheta}{\cos^2\vartheta} - 2\int \frac{\sin^2\vartheta}{\cos^4\vartheta}\,d\vartheta \\
=&\frac{\tan\vartheta}{\cos^2\vartheta} - 2\int \frac{1-\cos^2\vartheta}{\cos^4\vartheta}\,d\vartheta = \frac{\tan\vartheta}{\cos^2\vartheta} - 2\int \left(\frac{1}{\cos^4\vartheta} - \frac{1}{\cos^2\vartheta}\right)d\vartheta \\
=&\frac{\tan\vartheta}{\cos^2\vartheta} - 2\int \frac{1}{\cos^4\vartheta}\,d\vartheta + 2\int \frac{1}{\cos^2\vartheta}\,d\vartheta = \frac{\tan\vartheta}{\cos^2\vartheta} + 2\tan\vartheta \\
&- 2\int \frac{1}{\cos^4\vartheta}\,d\vartheta\,.
\end{aligned}$$

Portando al primo membro l'ultimo integrale e dividendo per tre si ha:

$$\int \frac{1}{\cos^4\vartheta}\,d\vartheta = \frac{1}{3}\left(\frac{\tan\vartheta}{\cos^2\vartheta} + 2\tan\vartheta\right)\,.$$

4. L'insieme è chiuso e limitato, la funzione è continua, quindi esistono il massimo e il minimo. Troviamo i punti in cui il gradiente si annulla:

$$\begin{cases} 6x = 0 \\ -4y + 3 = 0. \end{cases}$$

Troviamo $(0, \frac{3}{4})$ che appartiene alla frontiera. Sulla parte di frontiera $x = 0$ non ci sono altri punti stazionari quindi bisogna considerare anche i punti $(0,0)$ e $(0,2)$. Sulla parte di frontiera $y = x$ la funzione diventa $g(x) = x^2 + 3x$ con $x \in [0, 2/\sqrt{5}]$. La derivata $g'(x) = 2x + 3$ non si annulla nell'intervallo considerato, dunque bisogna aggiungere solo il punto $(2/\sqrt{5}, 2/\sqrt{5})$. Sulla parte di frontiera ellittica otteniamo $x^2 = 1 - \dfrac{y^2}{4}$ e la funzione diventa $h(y) = 3 - \dfrac{3}{4}y^2 - 2y^2 + 3y = 3 + 3y - \dfrac{11}{4}y^2$ con $y \in [2/\sqrt{5}, 2]$. La derivata $h'(y) = 3 - \dfrac{11}{2}y$ si annulla per $y = \dfrac{6}{11}$ che non appartiene all'intervallo in cui varia y. In definitiva dobbiamo valutare:

$$f(0,0) = 0, \quad f(0,2) = -2, \quad f\left(\frac{2}{\sqrt{5}}, \frac{2}{\sqrt{5}}\right) = \frac{4}{5} + \frac{6}{\sqrt{5}}, \quad f\left(0, \frac{3}{4}\right) = -\frac{9}{4},$$

Perciò il minimo di f è $-\dfrac{9}{4}$ e il massimo è $\dfrac{4}{5} + \dfrac{6}{\sqrt{5}}$.

3 Compito di Analisi Matematica II del 6/04/09

1. Trovare (se esistono) massimo e minimo assoluti della funzione

$$f(x,y,z) = xyz\log(x+y+z+2)$$

nell'insieme
$E = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \;:\; x+y+z-1 \leq 0,\; x \geq 0,\; y \geq 0,\; z \geq 0\}$.

2. Risolvere il P.d.C.

$$\begin{cases} y'' - 3y' + 2y = 10\cos x + \mathrm{e}^x \\ y(0) = 3, \quad y'(0) = -1 \;. \end{cases}$$

3. Calcolare l'integrale doppio

$$\int\!\!\int_D \log(x+y)\,dx\,dy\,,$$

dove $D = \{\,(x,y) \in \mathbb{R}^2 \;:\; 1 \leq x+y \leq 2,\; y \leq 2x \leq 2y\}$.

4. Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la funzione 1–periodica definita nell'intervallo $[0,1]$ da $f(x) = x - x^2$. Dire se f é sviluppabile in serie di Fourier e determinarne la serie.

Dedurre dal risultato precedente la somma della serie

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^2}\;.$$

3.1 Soluzione del compito di Analisi Matematica II del 6/04/09

1. La funzione è continua in un insieme chiuso e limitato, pertanto possiede massimo e minimo. Cerchiamo i punti stazionari risolvendo il sistema

$$\begin{cases} yz\log(x+y+z+2)+\dfrac{xyz}{x+y+z+2}=0\,, \\ xz\log(x+y+z+2)+\dfrac{xyz}{x+y+z+2}=0\,, \\ xy\log(x+y+z+2)+\dfrac{xyz}{x+y+z+2}=0\,. \end{cases}$$

Da cui:

$$\begin{cases} yz\dfrac{(x+y+z+2)\log(x+y+z+2)+x}{x+y+z+2}=0\,, \\ xz\dfrac{(x+y+z+2)\log(x+y+z+2)+y}{x+y+z+2}=0\,, \\ xy\dfrac{(x+y+z+2)\log(x+y+z+2)+z}{x+y+z+2}=0\,, \end{cases}$$

che ammette soluzioni solo sulla parte della frontiera di E dove due coppie di coordinate valgono 0, in cui la funzione vale zero.

Studiamo la funzione sulla frontiera. Sui tre piani $x=0$, $y=0$ e $z=0$ la funzione vale zero. Resta da considerare il piano $x+y+z=1$. Su tale piano cerchiamo i punti stazionari vincolati della funzione $g(x,y,z)=xyz\log(3)$. Usando il metodo dei moltiplicatori di Lagraange, dobbiamo risolvere il sistema:

$$\begin{cases} yz\log(3)-\lambda=0\,, \\ xz\log(3)-\lambda=0\,, \\ xy\log(3)-\lambda=0\,. \\ x+y+z=1\,. \end{cases}$$

Dalle prime tre equazioni si ha $x=y=z$, e quindi dall'ultima $x=y=z=\dfrac{1}{3}$. In questo punto f vale $\dfrac{\log 3}{27}$, e dunque questo è il massimo della funzione, mentre il minimo è 0.

2. L'equazione è lineare non omogenea con termini noti di tipo particolare. Studiamo prima l'equazione omogenea. L'equazione caratteristica è: $\lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0$, le cui soluzioni sono $\lambda = 1$ e $\lambda = 2$, allora l'integrale generale dell'equazione omogenea è:

$$y(c) = c_1 \mathrm{e}^x + c_2 \mathrm{e}^{2x} .$$

Poichè e^x è soluzione dell'equazione omogenea, cerchiamo una soluzione particolare della non omogenea del tipo $\bar{y}(x) = A\cos x + B\sin x + Cx\,\mathrm{e}^x$. Calcolando le derivate di $\bar{y}$ e sostituendo nell'equazione, troviamo:

$$\begin{aligned}&-A\cos x - B\sin x + 2C\,\mathrm{e}^x + Cx\,\mathrm{e}^x\\&-3(-A\sin x + B\cos x + C\,\mathrm{e}^x + Cx\,\mathrm{e}^x)\\&+2(A\cos x + B\sin x + Cx\,\mathrm{e}^x) = 10\cos x + \mathrm{e}^x \ .\end{aligned}$$

Semplificando e uguagliando i coefficienti dei termini simili otteniamo:

$$\begin{cases} A - 3B = 10\,, \\ B + 3A = 0\,, \\ C = -1\,. \end{cases}$$

Quindi l'integrale generale dell'equazione non omogenea è:

$$y(x) = c_1 \mathrm{e}^x + c_2 \mathrm{e}^{2x} + \cos x - 3\sin x - x\,\mathrm{e}^x .$$

Imponendo le condizioni iniziali troviamo:

$$y(x) = \mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{2x} + \cos x - 3\sin x - x\,\mathrm{e}^x .$$

3. Utilizziamo il cambiamento di variabili:

$$\begin{cases} x + y = u\,, \\ \frac{y}{x} = v\,. \end{cases}$$

Dalla seconda equazione abbiamo $y = xv$ e sostituendo nella prima otteniamo: $x = \dfrac{u}{1+v}$ con le condizioni $1 \le u \le 2$ e $1 \le v \le 2$. La matrice Jacobiana è:

$$\begin{pmatrix} \dfrac{1}{1+v} & -\dfrac{u}{(1+v)^2} \\[2ex] \dfrac{v}{1+v} & \dfrac{u+uv-uv}{(1+v)^2} \end{pmatrix}$$

il cui determinante vale $\dfrac{u}{(1+v)^2}$. Allora l'integrale da calcolare è:

$$\int_1^2\int_1^2 \frac{u\log u}{(1+v)^2}\,dv\,du = \int_1^2 u\log u\left[-\frac{1}{1+v}\right]_1^2 du =$$
$$\frac{1}{6}\left(\left[\frac{u^2}{2}\log u\right]_1^2 - \int_1^2 \frac{u}{2}\,du\right) = \frac{1}{6}(2\log 2 - 1 + \frac{1}{4}) = \frac{1}{6}(2\log 2 - \frac{3}{4})\,.$$

4. La funzione f è pari, quindi la sua serie di Fourier contiene solo coseni. Calcoliamo i coefficienti (a_k). Risulta $\omega = 2\pi$ e quindi

$$a_0 = 2\int_0^1 (x-x^2)\,dx = 2\left[\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3}\right]_0^1 = \frac{1}{3}\,,$$

mentre $\forall\, k\in\mathbb{N}, k\geq 1$ si ha

$$\begin{aligned} a_k &= 2\int_0^1 (x-x^2)\cos(2k\pi x)\,dx \\ &= 2\left(\left[(x-x^2)\frac{\sin(2k\pi x)}{2k\pi}\right]_0^1 - \int_0^1 \frac{1}{2k\pi}(1-2x)\sin(2k\pi x)\,dx\right) \\ &= 2\left(\left[(1-2x)\frac{\cos(2k\pi x)}{(2k\pi)^2}\right]_0^1 + \int_0^1 \frac{2}{(2k\pi)^2}\cos(2k\pi x)\,dx\right) = -\frac{1}{(k\pi)^2}\,. \end{aligned}$$

Allora risulta

$$f(x) = \frac{1}{6} - \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(k\pi)^2}\cos(2k\pi x)\,.$$

Per $x=0$ otteniamo

$$0 = \frac{1}{6} - \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(k\pi)^2} \quad \text{da cui} \quad \frac{\pi^2}{6} = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}\,.$$

Per $x=\frac{1}{2}$ otteniamo

$$\frac{1}{4} = \frac{1}{6} - \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(k\pi)^2}\cos(k\pi) \quad \text{da cui} \quad \frac{\pi^2}{12} = -\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k^2}\,.$$

Sommando membro a membro troviamo che i termini di indice pari si elidono e risulta:

$$\frac{\pi^2}{8} = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(2k+1)^2}\,.$$

4 Compito di Analisi Matematica II del 4/05/09

1. Calcolare il seguente limite

$$\lim_{\varepsilon \to 0^+} \iint_{A_\varepsilon} e^{\frac{x-y}{x+y}} \, dxdy$$

dove $A_\varepsilon = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2;\ \varepsilon \leq x + y \leq 2\ ,\ x \geq 0\ ,\ y \geq 0\ \}$.

N.B.: Utilizzare un opportuno cambiamento di variabili.

2. Calcolare il massimo ed il minimo della funzione

$$f(x, y) = 4x^2 + 2y^2 - 2x$$

nell'insieme $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2;\ x^2 + 2y^2 \leq 1\ ,\ 2x^2 + y^2 \leq 1\ \}$.

3. Risolvere il P.d.C. :

$$\begin{cases} y'' = \dfrac{1}{y}\,(y')^2 - y^2 \\ y(0) = -1 \quad , \quad y'(0) = 1\ . \end{cases}$$

N.B.: Attenzione alle condizioni iniziali!

4. Studiare la convergenza puntuale, uniforme e totale della serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{n}{(x-1)^n}$$

e determinarne la somma.

4.1 Soluzione del compito di Analisi Matematica II del 4/05/09

1. Utilizziamo il cambiamento di variabili

$$\begin{cases} x + y = u\,, \\ x - y = v\,. \end{cases}$$

Sommando e sottraendo le due equazione abbiamo $x = \frac{1}{2}(u+v)$ e $y = \frac{1}{2}(u-v)$ con le condizioni $\varepsilon \le u \le 2$, $u+v \ge 0$ e $u - v \ge 0$. La matrice Jacobiana è:

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

il cui determinante vale $-\dfrac{1}{2}$. Allora l'integrale da calcolare è:

$$\begin{aligned} \int_{A_\varepsilon} e^{\dfrac{x-y}{x+y}}\,dxdy &= \frac{1}{2}\int_\varepsilon^2 \int_{-u}^{u} \mathrm{e}^{\dfrac{v}{u}}\,dv\,du \\ &= \frac{1}{2}\int_\varepsilon^2 \left[u\,\mathrm{e}^{\dfrac{v}{u}}\right]_{-u}^{u} du = \frac{1}{2}\int_\varepsilon^2 u\left(\mathrm{e} - \frac{1}{\mathrm{e}}\right) du \\ &= \left(\mathrm{e} - \frac{1}{\mathrm{e}}\right)\left[\frac{u^2}{4}\right]_\varepsilon^2 = \left(\mathrm{e} - \frac{1}{\mathrm{e}}\right)\left(1 - \frac{\varepsilon^2}{4}\right), \end{aligned}$$

perciò il limite richiesto vale $\left(\mathrm{e} - \dfrac{1}{\mathrm{e}}\right)$.

2. L'insieme è chiuso e limitato, la funzione è continua, quindi esistono il massimo e il minimo. Troviamo i punti in cui il gradiente si annulla:

$$\begin{cases} 8x - 2 = 0 \\ 4y = 0. \end{cases}$$

Troviamo $(\frac{1}{4}, 0)$ che appartiene all'interno del dominio e $f(\frac{1}{4}, 0) = -\frac{1}{4}$.

Sulla parte di frontiera $x^2 + 2y^2 = 1$ utilizziamo i moltiplicatori di Lagrange e otteniamo il sistema

$$\begin{cases} 8x - 2 - 2\lambda x = 0 \\ 4y - 4\lambda y = 0 \\ x^2 + 2y^2 = 1 \end{cases}$$

da cui

$$\begin{cases} (4-\lambda)x = 1 \\ (1-\lambda)y = 0 \\ x^2 + 2y^2 = 1\,. \end{cases}$$

Dalla seconda equazione si ottiene $y = 0$ oppure $\lambda = 1$. Allora otteniamo i punti $(\pm 1, 0)$ e $(\frac{1}{3}, \pm\frac{2}{3})$. I primi non verificano la seconda disuguaglianza mentre nei secondi abbiamo $f(\frac{1}{3}, \pm\frac{2}{3}) = \frac{2}{3}$.

Sulla parte di frontiera $2x^2 + y^2 = 1$ utilizziamo i moltiplicatori di Lagrange e otteniamo il sistema

$$\begin{cases} 8x - 2 - 4\lambda x = 0 \\ 4y - 2\lambda y = 0 \\ 2x^2 + y^2 = 1 \end{cases}$$

da cui

$$\begin{cases} (4-2\lambda)x = 1 \\ (2-\lambda)y = 0 \\ 2x^2 + y^2 = 1\,. \end{cases}$$

Dalla seconda equazione si ottiene $y = 0$ oppure $\lambda = 2$. Allora otteniamo i punti $(\pm\frac{1}{\sqrt{2}}, 0)$ e nessuna soluzione per $\lambda = 2$. Risulta $f(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0) = 2 - \sqrt{2}$ e $f(-\frac{1}{\sqrt{2}}, 0) = 2 + \sqrt{2}$.

Infine dobbiamo considerare i punti di intersezione dei due vincoli, cioè dobbiamo risolvere

$$\begin{cases} x^2 + 2y^2 = 1 \\ 2x^2 + y^2 = 1, \end{cases}$$

da cui si ottengono i punti $(\pm\frac{1}{\sqrt{3}}, \pm\frac{1}{\sqrt{3}})$, in cui f vale: $f(\frac{1}{\sqrt{3}}, \pm\frac{1}{\sqrt{3}}) = 2 - \frac{2}{\sqrt{3}}$ e $f(-\frac{1}{\sqrt{3}}, \pm\frac{1}{\sqrt{3}}) = 2 + \frac{2}{\sqrt{3}}$. In conclusione, confrontando tutti i valori ottenuti, abbiamo:

$$f\left(-\frac{1}{\sqrt{2}},0\right)=2+\sqrt{2}=\max_A f\,,\qquad f\left(\frac{1}{4},0\right)=-\frac{1}{4}=\min_A f.$$

3. L'equazione differenziale è autonoma dunque usiamo la sostituzione $z(y(x))=y'(x)$ e $z'z=y''$, allora dobbiamo risolvere il P.d.C.

$$\begin{cases} zz'=\dfrac{1}{y}\,z^2-y^2 \\ z(-1)=1, \end{cases}$$

dove y è la variabile indipendente. Poichè $z=0$ non è soluzione, possiamo dividere per z e otteniamo l'equazione di Bernoulli con $\alpha=-1$:

$$\begin{cases} z'=\dfrac{1}{y}\,z-\dfrac{y^2}{z} \\ z(-1)=1. \end{cases}$$

Utilizziamo la sostituzione $w=z^2$, da cui $w'=2z\,z'$. Allora, moltiplicando per z, dobbiamo risolvere

$$\begin{cases} w'=\dfrac{2}{y}\,w-2y^2 \\ w(-1)=1. \end{cases}$$

Questa è un'equazione lineare del primo ordine non omogenea Risolvendo l'equazione omogenea $w'=\dfrac{2}{y}\,w$ otteniamo

$$w=c\,\mathrm{e}^{\int\frac{2}{y}\,dy}=c\,\mathrm{e}^{2\log|y|}=cy^2\,.$$

Una soluzione particolare dell'equazione non omogenea si ottiene risolvendo $c'(y)y^2=-2y^2$, da cui $c(y)=-2y$ e la soluzione generale è $w=cy^2-2y^3$. Imponendo la condizione iniziale troviamo $c=-1$ e dunque $w=-y^2-2y^3$. Dunque, ricordandoci della condizione iniziale su z troviamo $z=\sqrt{-y^2-2y^3}$.

Ora dobbiamo risolvere

$$\begin{cases} y'=\sqrt{-y^2-2y^3} \\ y(0)=-1. \end{cases}$$

Separando le variabili e ricordando che y deve essere negativa in un intorno di 0 troviamo:

$$\int \frac{1}{\sqrt{-y^2 - 2y^3}}\, dy = \int dx,$$

da cui

$$\int \frac{1}{-y\sqrt{-1-2y}}\, dy = x + k\,.$$

Per calcolare l'integrale usiamo la sostituzione $-1 - 2y = u^2$ da cui $-2\,dy = 2u\,du$ e $y = -\dfrac{u^2+1}{2}$, dunque

$$\int \frac{-2u}{(u^2+1)u}\, du = -2\arctan u = x + k\,.$$

Ritornando nella variabile y e imponendo la condizione iniziale otteniamo $k = -\frac{\pi}{2}$ e la soluzione è

$$y(x) = -\frac{1}{2}\left(1 + \tan^2\left(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2}\right)\right)\,.$$

4. Con la sostituzione $y = \dfrac{1}{1-x}$ otteniamo

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{n}{(x-1)^n} = \sum_{n=1}^{+\infty} n y^n\,.$$

Questa serie di potenze converge assolutamente per $y \in (-1, 1)$, con convergenza totale negli intervalli chiusi $[-r, r]$ con $0 < r < 1$ e non converge negli estremi. Tornando nella variabile x abbiamo la convergenza assoluta per $|x - 1| > 1$. Dunque la serie converge puntualmente assolutamente in $(-\infty, 0) \cup (2, +\infty)$ e converge totalmente in $(-\infty, -r] \cup [2 + r, +\infty)$ per $r > 0$. La somma della serie è

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{n}{(x-1)^n} &= \sum_{n=1}^{+\infty} n y^n = y \sum_{n=1}^{+\infty} n y^{n-1} = yD\left(\sum_{n=1}^{+\infty} y^n\right) \\ &= yD\Big(\frac{1}{1-y} - 1\Big) = \frac{y}{(1-y)^2} = \frac{1-x}{x^2}\,.\end{aligned}$$

5 Compito di Analisi Matematica II del 29/06/09

1. Determinare il massimo e il minimo della funzione così definita

$$f(x, y, z) = xy + z^2 ,$$

nell'insieme

$$B = \{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ x^2 + y^2 + z^2 \leq 1 \}.$$

2. Risolvere il seguente P.d.C.

$$\begin{cases} y'' + 2y' + 5y = \mathrm{e}^{-x} \\ y(0) = 1 , \quad y'(0) = 2 . \end{cases}$$

3. Calcolare il valore del seguente integrale

$$\iiint_E y \, dxdydz ,$$

dove

$$E = \{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ \sqrt{x^2 + y^2} \leq z \leq 1 , \ y \geq 0 \} .$$

4. Determinare la serie di Fourier della funzione 2π-periodica che nell'intervallo $[-\pi, \pi]$ è data da

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{per } x \in [-\pi, 0) \\ x(\pi - x) & \text{per } x \in [0, \pi] . \end{cases}$$

Precisare la convergenza puntuale e uniforme della serie ottenuta.

5.1 Soluzione del compito di Analisi Matematica II del 29/06/09

1. L'insieme B è chiuso e limitato, la funzione è continua, quindi esistono il massimo e il minimo. Troviamo i punti in cui il gradiente si annulla:

$$\begin{cases} y = 0 \\ x = 0 \\ 2z = 0. \end{cases}$$

L'unico punto stazionario interno è $(0,0,0)$, dove la funzione vale zero.

Sulla frontiera $x^2+y^2+z^2=1$ utilizziamo il metodo dei moltiplicatori di Lagrange e cerchiamo i punti stazionari della funzione $L(x,y,z,\lambda) = xy + z^2 - \lambda(x^2+y^2+z^2-1)$. Otteniamo il sistema

$$\begin{cases} y - 2\lambda x = 0 \\ x - 2\lambda y = 0 \\ 2z - 2\lambda z = 0 \\ x^2+y^2+z^2 = 1 \end{cases}$$

da cui

$$\begin{cases} y = 2\lambda x \\ x = 2\lambda y \\ 2z(1-\lambda) = 0 \\ x^2+y^2+z^2 = 1\,. \end{cases}$$

Dalla terza equazione si ottiene $z=0$ oppure $\lambda = 1$.

Nel caso $z = 0$, dalle prime due equazioni otteniamo $\lambda = \pm\dfrac{1}{2}$, per cui dall'ultima equazione otteniamo i punti $\left(\pm\frac{1}{\sqrt{2}}, \pm\frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right)$ e $\left(\pm\frac{1}{\sqrt{2}}, \mp\frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right)$ nei quali si ha

$$f\left(\pm\frac{1}{\sqrt{2}}, \pm\frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right) = \frac{1}{2}\,, \quad f\left(\pm\frac{1}{\sqrt{2}}, \mp\frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right) = -\frac{1}{2}\,.$$

Nel caso $\lambda = 1$, otteniamo $x = y = 0$ per cui $z = \pm 1$ ed allora

$$f(0,0,\pm 1) = 1\,.$$

In conclusione, confrontando tutti i valori ottenuti, abbiamo:

$$f\,(0,0,\pm 1) = 1 = \max_B f\,, \qquad f\left(\pm\frac{1}{\sqrt{2}}, \mp\frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right) = -\frac{1}{2} = \min_B f.$$

2. L'equazione differenziale è lineare a coefficienti costanti non omogenea. Troviamo l'integrale generale dell'equazione omogenea associata risolvendo l'equazione caratteristica

$$\lambda^2 + 2\lambda + 5 = 0\,.$$

Otteniamo $\lambda = -1 \pm 2\,i$, perciò l'integrale generale dell'equazione omogenea associata è

$$y(x) = c_1\ \mathrm{e}^{-x}\ \cos 2x + c_2\ \mathrm{e}^{-x}\ \sin 2x.$$

Cerchiamo una soluzione particolare dell'equazione non omogenea del tipo $\bar{y}(x) = A\ \mathrm{e}^{-x}$. Sostituendo nell'equazione troviamo $A = \dfrac{1}{4}$, perciò l'integrale generale dell'equazione non omogenea è

$$y(x) = c_1\ \mathrm{e}^{-x}\ \cos 2x + c_2\ \mathrm{e}^{-x}\ \sin 2x + \frac{1}{4}\ \mathrm{e}^{-x}\,.$$

Imponendo le condizioni iniziali otteniamo

$$\begin{cases} c_1 + \frac{1}{4} = 1 \\ -c_1 + 2c_2 - \frac{1}{4} = 2\,. \end{cases}$$

Dunque la soluzione è

$$\frac{3}{4}\ \mathrm{e}^{-x}\ \cos 2x + \frac{3}{2}\ \mathrm{e}^{-x}\ \sin 2x + \frac{1}{4}\ \mathrm{e}^{-x}\ .$$

3. Calcoliamo l'integrale in coordinate cartesiane, integrando "per strati".

Risulta

$$\begin{aligned}
\iiint_E y\,dxdydz &= \int_0^1 dz \int_{-z}^{z} dx \int_0^{\sqrt{z^2-x^2}} y\,dy \\
&= \int_0^1 dz \int_{-z}^{z} \left[\frac{y^2}{2}\right]_0^{\sqrt{z^2-x^2}} dx \\
&= \frac{1}{2}\int_0^1 dz \int_{-z}^{z} (z^2-x^2)dx \\
&= \frac{1}{2}\int_0^1 \left[z^2x-\frac{x^3}{3}\right]_{-z}^{z} dz \\
&= \frac{1}{2}\int_0^1 (2z^3-\frac{2}{3}z^3)\,dz = \frac{1}{2}\left[\frac{z^4}{3}\right]_0^1 = \frac{1}{6}\,,
\end{aligned}$$

perciò l'integrale richiesto vale $\frac{1}{6}$.

4. La funzione non è pari né dispari dunque dovremo calcolare tutti i coefficienti di Fourier. Risulta $\omega = 1$ e dunque abbiamo, tenendo conto che la funzione vale zero in $[-\pi, 0]$:

$$\begin{aligned}
a_0 &= \frac{1}{\pi}\int_0^\pi (\pi x - x^2)\,dx = \frac{\pi^2}{6} \\
a_k &= \frac{1}{\pi}\int_0^\pi (\pi x - x^2)\,\cos(kx)\,dx \quad \text{(integrando per parti)} \\
&= \frac{1}{\pi}\left(-\frac{\pi}{k^2} - \frac{\pi\,\cos(k\,\pi)}{k^2} + \frac{2\,\sin(k\,\pi)}{k^3}\right) \\
&= -\frac{1+(-1)^k}{k^2} \\
b_k &= \frac{1}{\pi}\int_0^\pi (\pi x - x^2)\,\sin(kx)\,dx \quad \text{(integrando per parti)} \\
&= \frac{1}{\pi}\left(\frac{2}{k^3} - \frac{2\,\cos(k\,\pi)}{k^3} - \frac{\pi\,\sin(k\,\pi)}{k^2}\right) = 2\frac{1-(-1)^k}{\pi k^3}\,,
\end{aligned}$$

dunque la serie di Fourier di f è

$$\frac{\pi^2}{12} + \sum_{k=1}^{+\infty}\left(-\frac{1+(-1)^k}{k^2}\,\cos(kx) + 2\frac{1-(-1)^k}{\pi k^3}\,\sin(kx)\right)\,.$$

Poichè la funzione è continua e regolare a tratti, la serie converge uniformemente ad f su $\mathbb{R}$.

La somma dei primi 101 termini della serie è riportata in Figura 2.

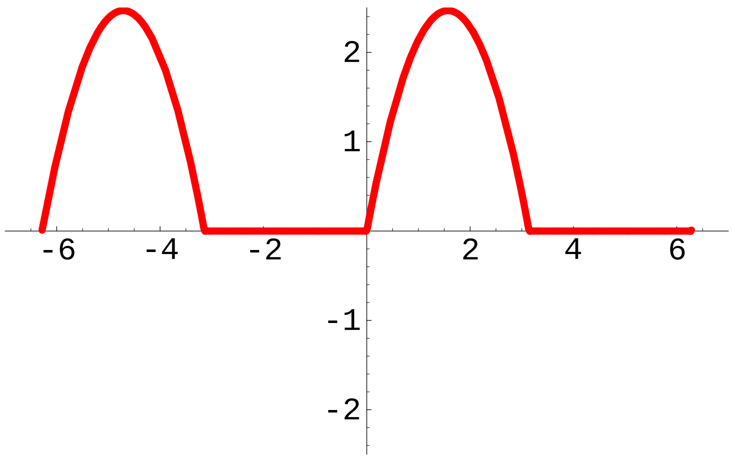


Figura 2: Somma parziale della serie di Fourier di f per $k = 100$.

6 Compito di Analisi Matematica II del 13/07/09

1. Risolvere il Problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = 2y \tan x + \sqrt{y} \\ y(0) = 1 \,. \end{cases}$$

2. Calcolare il seguente integrale triplo

$$\iiint_E \log(x^2 + y^2 + z)\, dxdydz \,,$$

dove

$$E = \{\, (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \;:\; 1 \leq x^2 + y^2 \leq 2 \,,\; 1 \leq z \leq 2 \,\} \,.$$

3. Trovare il massimo e il minimo assoluti e relativi (se esistono) della funzione

$$f(x, y) = x \log(x^2 + y^2) \,,$$

nell'insieme

$$E = \{\, (x, y) \in \mathbb{R}^2 \;:\; 0 \leq x \leq 1 \,,\; 0 \leq y \leq x \,\}.$$

4. Studiare la convergenza della seguente serie di funzioni

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \arctan \frac{1}{n^2 x^2} \,.$$

6.1 Soluzione del compito di Analisi Matematica II del 13/07/09

1. L'equazione è di Bernoulli con $\alpha = \frac{1}{2}$ e possiamo risolverla con la sostituzione $w = y^{1-\frac{1}{2}} = y^{1/2}$ e dunque $w' = \frac{1}{2}y^{-1/2}y'$. Dividendo l'equazione per $y^{1/2}$ e sostituendo otteniamo

$$\begin{cases} 2w' = 2w\tan x + 1 \\ w(0) = 1\,. \end{cases} \qquad \text{ossia} \qquad \begin{cases} w' = w\tan x + \frac{1}{2} \\ w(0) = 1\,. \end{cases}$$

La soluzione generale dell'equazione omogenea associata $w' = w\tan x$ è $w = \dfrac{c}{\cos x}$. Per trovare una soluzione particolare dell'equazione non omogenea del tipo $\dfrac{c(x)}{\cos x}$ risolviamo $\dfrac{c'(x)}{\cos x} = \dfrac{1}{2}$ cioè $c'(x) = \dfrac{\cos x}{2}$, da cui $c(x) = \dfrac{\sin x}{2}$ e quindi l'integrale generale dell'equazione non omogenea è $w = \dfrac{c}{\cos x} + \dfrac{\tan x}{2}$. Imponendo la condizione iniziale otteniamo $c = 1$ e dunque $w = \dfrac{1}{\cos x} + \dfrac{\tan x}{2}$. In definitiva

$$y(x) = w(x)^2 = \frac{1}{\cos^2 x} + \frac{\tan^2 x}{4} + \frac{\tan x}{\cos x}\,.$$

2. Possiamo integrare in coordinate cilindriche (ϱ, ϑ, z), nelle quali abbiamo $1 \le \varrho \le \sqrt{2}$, $0 \le \vartheta \le 2\pi$ e $1 \le z \le 2$. Allora l'integrale

vale

$$\iiint_E \log(x^2+y^2+z)\,dxdydz = \int_0^{2\pi} d\vartheta \int_1^{\sqrt{2}} \varrho\,d\varrho \int_1^2 \log(\varrho^2+z)\,dz$$

$$= 2\pi \int_1^{\sqrt{2}} \Big[(\varrho^2+z)\log(\varrho^2+z)-z\Big]_1^2 \varrho\,d\varrho$$

$$= 2\pi \int_1^{\sqrt{2}} \Big((\varrho^2+2)\log(\varrho^2+2)-(\varrho^2+1)\log(\varrho^2+1)-1\Big)\varrho\,d\varrho \overset{\varrho^2=t}{=}$$

$$= \pi \int_1^2 \Big((t+2)\log(t+2)-(t+1)\log(t+1)-1\Big)\,dt$$

$$= \pi \left[\frac{(t+2)^2}{2}\log(t+2)-\frac{(t+1)^2}{2}\log(t+1)-t\right]_1^2$$

$$-\pi \int_1^2 \left(\frac{(t+2)}{2}-\frac{(t+1)}{2}\right)dt = \frac{\pi}{2}\,(36\,\log 2-18\,\log 3-3)\,.$$

3. La funzione f si può prolungare per continuità nell'origine in quanto nel triangolo E risulta $x\log(x^2) \le x\log(x^2+y^2) \le x\log(2x^2)$ e dunque $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)=0$. Dunque abbiamo una funzione continua definita su un insieme chiuso e limitato, perciò esistono il massimo e il minimo di f.

   Siccome i punti in cui il gradiente di f si annulla devono risolvere

$$\frac{2\,x^2}{x^2+y^2}+\log(x^2+y^2)=0\,, \qquad \frac{2\,x\,y}{x^2+y^2}=0$$

   dalla seconda equazione abbiamo $x=0$ oppure $y=0$. Per $x=0$ otteniamo il vertice $(0,0)$, per $y=0$ otteniamo i punti della base del triangolo, dunque non esistono punti stazionari interni.

   Studiamo la funzione sulla frontiera. Per $y=0$ abbiamo $\varphi(x)=2x\log x$ con $0\le x\le 1$. Risulta $\varphi'(x)=2\log x+2$, allora $x=\dfrac{1}{\mathrm{e}}$ è un punto di minimo relativo sulla frontiera e $f\left(\dfrac{1}{\mathrm{e}},0\right)=-\dfrac{2}{\mathrm{e}}$. In $(1,0)$ la funzione vale zero.

   Sul lato $x=1$ abbiamo $\varphi(y)=\log(1+y^2)$ che è crescente e $f(1,1)=\log 2$.

Infine sul lato $y = x$ abbiamo $\varphi(x) = x\log(2x^2)$ con $0 \le x \le 1$. Risulta $\varphi'(x) = \log(2x^2) + 2$, allora $2x^2 = \mathrm{e}^{-2}$, cioè $x = \dfrac{1}{\mathrm{e}\sqrt{2}}$ è un punto di minimo relativo sulla frontiera e $f\left(\dfrac{1}{\mathrm{e}\sqrt{2}}, \dfrac{1}{\mathrm{e}\sqrt{2}}\right) = -\dfrac{\sqrt{2}}{\mathrm{e}}$.

Confrontando i valori ottenuti risulta che $f\left(\dfrac{1}{\mathrm{e}}, 0\right) = -\dfrac{2}{\mathrm{e}}$ è il minimo e $f(1,1) = \log 2$ è il massimo.

4. Le funzioni sono tutte definite in $\mathbb{R} \setminus \{ 0 \}$ e sono positive. Per studiare la convergenza puntuale, ricordando il limite $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\arctan x}{x} = 1$, fissato $x \neq 0$, confrontiamo la serie data con la serie convergente $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$, e otteniamo
$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\arctan \frac{1}{n^2x^2}}{\frac{1}{n^2}} = \frac{1}{x^2} \neq 0\,.$$
Dunque la serie converge puntualmente in $\mathbb{R} \setminus \{ 0 \}$.
Per quanto riguarda la convergenza totale, naturalmente la serie non converge in $X = \mathbb{R} \setminus \{ 0 \}$ perchè
$$\sup_{x\in X} \arctan \frac{1}{n^2x^2} = \frac{\pi}{2} \qquad \forall n \in \mathbb{N}\,.$$
Per $r > 0$ consideriamo gli insiemi
$$X_r = (-\infty, -r] \cup [r, +\infty)\,.$$
Risulta, poiché le funzioni sono pari e decrescenti in $x \ge r$,
$$\sup_{x\in X_r} \arctan \frac{1}{n^2x^2} = \arctan \frac{1}{n^2r^2}$$
e per le considerazioni sulla convergenza puntuale la serie
$$\sum_{n=1}^{+\infty} \arctan \frac{1}{n^2r^2}$$
converge, perciò la serie data converge totalmente in ogni insieme X_r.

7 Compito di Analisi Matematica II del 7/09/09

1. Determinare il massimo e il minimo della funzione $f(x) = 4 - z$ nell'insieme
$$E = \left\{ (x, y, z) \,:\, x^2 + y^2 = 8\,,\ x + y + z = 1 \right\} .$$

2. Calcolare
$$\iiint_A \left(x^2 + y^2 + z^2 \right)\, dxdydz\,,$$
dove
$$A = \left\{ (x, y, z) \,:\, z \geq \sqrt{x^2 + y^2}\,,\ x^2 + y^2 + z^2 \leq 1 \right\} .$$

3. Risolvere il Problema di Cauchy
$$\begin{cases} y\, y'' = (y')^2 \log(y') \\ y(0) = 1\,,\ y'(0) = \mathrm{e}\,. \end{cases}$$

4. Studiare la convergenza puntuale e totale della serie di funzioni:
$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^{2n}}{n} \log\left(1 + \frac{x^2}{\sqrt{n}}\right) .$$

7.1 Soluzione del compito di Analisi Matematica II del 7/09/09

1. L'insieme è chiuso e limitato, la funzione è continua, quindi esistono il massimo e il minimo. L'insieme E non ha punti interni.

   Dalla seconda equazione ricaviamo $z = 1-x-y$ perciò, sostituendo nella funzione f, si tratta di cercare il massimo e il minimo della funzione $g(x,y) = 3+x+y$ nell'insieme $B = \{\, (x,y)\ :\ x^2+y^2 = 8 \,\}$. Anche questo insieme B non ha punti interni, perciò usiamo il metodo dei moltiplicatori di Lagrange con la funzione $L(x,y,\lambda) = 3+x+y-\lambda(x^2+y^2-8)$ e otteniamo il sistema

$$\begin{cases} 1-2\lambda x = 0 \\ 1-2\lambda y = 0 \\ x^2+y^2 = 8 \end{cases}$$

   Dalle prime due equazioni otteniamo

$$x = \frac{1}{2\lambda}, \qquad y = \frac{1}{2\lambda},$$

   e sostituendo nella terza, si ha

$$\frac{1}{4\lambda^2} + \frac{1}{4\lambda^2} = \frac{1}{2\lambda^2} = 8,$$

   e dunque $\lambda = \pm 1/4$.

   Sostituendo nelle espressioni di x e y si ha $x = \pm 2$ e $y = \pm 2$. Calcolando il valore di g nei punti ottenuti abbiamo:

$$g(2,2) = 7, \quad g(-2,-2) = -1,$$

   ossia

$$f(2,2,-3) = 7, \qquad f(-2,-2,5) = -1.$$

   Dunque $\max_E f = 7$ e $\min_E f = -1$.

   Alternativamente si potevano usare direttamente due moltiplicatori di Lagrange studiando la funzione

$$L(x,y,z,\lambda,\mu) = 4 - z - \lambda(x^2+y^2-8) - \mu(x+y+z-1)$$

   ma il sistema sarebbe stato più lungo da risolvere.

2. Utilizziamo il cambiamento di variabili sferiche $(\varrho, \varphi, \vartheta)$ il cui Jacobiano è $\varrho^2 \sin\varphi$. In questo sistema di coordinate l'insieme A diventa

$$\left\{ (\varrho, \varphi, \vartheta) \;:\; 0 \leq \varrho \leq 1\,,\; 0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{4}\,,\; 0 \leq \vartheta \leq 2\pi \right\}.$$

Allora l'integrale da calcolare è:

$$\begin{aligned}
\iiint_A \left(x^2 + y^2 + z^2\right) dxdydz &= \int_0^1 \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/4} \varrho^4 \sin\varphi \, d\varphi \, d\vartheta \, d\varrho \\
&= 2\pi \left[\frac{\varrho^5}{5}\right]_0^1 [-\cos\varphi]_0^{\pi/4} \\
&= \frac{2\pi}{5}\left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right).
\end{aligned}$$

Alternativamente si può usare il cambiamento di variabili cilindriche (ϱ, ϑ, z) il cui Jacobiano è ϱ ma il calcolo è molto più lungo. In questo sistema di coordinate l'insieme A diventa

$$\left\{ (\varrho, \vartheta, z) \;:\; 0 \leq \vartheta \leq 2\pi\,, \varrho \leq z \leq \sqrt{1 - \varrho^2} \right\}.$$

Allora dobbiamo risolvere $\varrho^2 = 1 - \varrho^2$, cioè $\varrho^2 = 1/2$, per cui l'insieme A diventa:

$$\left\{ (\varrho, \vartheta, z) \;:\; 0 \leq \vartheta \leq 2\pi\,,\; 0 \leq \varrho \leq \frac{1}{\sqrt{2}},\; \varrho \leq z \leq \sqrt{1 - \varrho^2} \right\}.$$

In definitiva l'integrale da calcolare è:

$$\begin{aligned}
\iiint_A \left(x^2 + y^2 + z^2\right) dxdydz = &\int_0^{1/\sqrt{2}} \int_0^{2\pi} \int_\varrho^{\sqrt{1-\varrho^2}} (\varrho^2 + z^2)\, \varrho \, dz \, d\vartheta \, d\varrho \\
=&2\pi \int_0^{1/\sqrt{2}} \left[\varrho^2 z + \frac{z^3}{3}\right]_\varrho^{\sqrt{1-\varrho^2}} \varrho \, d\varrho \\
=&2\pi \int_0^{1/\sqrt{2}} \left(\varrho^2\sqrt{1-\varrho^2} + \frac{(\sqrt{1-\varrho^2})^3}{3} - \frac{4\varrho^3}{3}\right) \varrho \, d\varrho.
\end{aligned}$$

Sostituendo $\varrho^2 = t$, e quindi $2\varrho\, d\varrho = dt$, e integrando per parti, abbiamo

$$\iiint_A \left(x^2+y^2+z^2\right)\, dxdydz = \pi \int_0^{1/2} \left(t\sqrt{1-t} + \frac{(1-t)^{3/2}}{3} - \frac{4}{3}\, t^{3/2} \right) dt$$

$$= \pi \left(\left[-\frac{2}{3}\, t\,(1-t)^{3/2} - \frac{2(1-t)^{5/2}}{15} - \frac{8}{15}\, t^{5/2} \right]_0^{1/2} + \int_0^{1/2} \frac{2}{3}\,(1-t)^{3/2}\, dt \right)$$

$$= \pi \left(-\frac{1}{6\sqrt{2}} - \frac{1}{30\sqrt{2}} + \frac{2}{15} - \frac{2}{15\sqrt{2}} - \left[\frac{4}{15}\,(1-t)^{5/2} \right]_0^{1/2} \right)$$

$$= \pi \left(-\frac{1}{3\sqrt{2}} + \frac{2}{15} - \frac{1}{15\sqrt{2}} + \frac{4}{15} \right) = \pi \left(\frac{2}{5} - \frac{2}{5\sqrt{2}} \right) = \frac{2\pi}{5} \left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2} \right).$$

3. L'equazione differenziale è autonoma, dunque usiamo la sostituzione $z(y(x)) = y'(x)$, da cui $y''(x) = z'(y(x))\, y'(x) = z'(y(x))\, z(y(x))$ e allora dobbiamo risolvere il P.d.C.

$$\begin{cases} y\, z\, z' = z^2 \log z \\ z(1) = \mathrm{e}, \end{cases}$$

dove y è la variabile indipendente. Poichè $z = 0$ e $z = 1$ non sono soluzioni, possiamo separare le variabili e otteniamo il P.d.C.:

$$\begin{cases} \dfrac{z'}{z \log z} = \dfrac{1}{y} \\ z(1) = \mathrm{e}, \end{cases}$$

Allora dobbiamo risolvere

$$\int \frac{dz}{z \log z} = \int \frac{1}{y}\, dy\,,$$

cioè

$$\log(\log z) = \log y + c, \quad \text{da cui} \quad \log z = ky.$$

Imponendo la condizione iniziale troviamo $k = \log \mathrm{e} = 1$ e dunque $z = \mathrm{e}^y$.

Ora dobbiamo risolvere

$$\begin{cases} y' = \mathrm{e}^y \\ y(0) = 1. \end{cases}$$

Separando le variabili troviamo:

$$\int e^{-y}\, dy = \int dx,$$

da cui

$$-e^{-y} = x + k\,,$$

dunque

$$-y = \log(-x-k)\,.$$

Imponendo la condizione iniziale otteniamo $\log(-k) = -1$, cioè $k = -\dfrac{1}{e}$ e la soluzione è

$$y(x) = -\log\left(\frac{1}{e} - x\right)\,.$$

4. Le funzioni sono definite su tutto $\mathbb{R}$, non negative e pari. La serie converge in 0 e per studiare la convergenza puntuale per $x \neq 0$ usiamo il criterio del rapporto. Risulta:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{x^{2(n+1)}}{n+1}\log\left(1+\frac{x^2}{\sqrt{n+1}}\right)}{\frac{x^{2n}}{n}\log\left(1+\frac{x^2}{\sqrt{n}}\right)} = \lim_{n\to\infty}\frac{x^2 n}{n+1} = x^2\,.$$

Dunque la serie converge puntualmente per $|x| < 1$ e diverge positivamente per $|x| > 1$. Nei punti $x = \pm 1$ la serie diventa

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}\log\left(1+\frac{1}{\sqrt{n}}\right)\,.$$

Grazie al limite notevole $\lim\limits_{y\to 0}\dfrac{\log(1+y)}{y} = 1$, si può usare il criterio del confronto asintotico con la serie $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{1}{n^{3/2}}$, che è una serie armonica generalizzata convergente. Pertanto la serie data converge puntualmente in $[-1,1]$.

Per la convergenza totale si ha, per ogni $n \geq 1$,

$$M_n = \max_{x\in[-1,1]}\frac{x^{2n}}{n}\log\left(1+\frac{x^2}{\sqrt{n}}\right) = \frac{1}{n}\log\left(1+\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$$

e per quanto già visto risulta $\sum_{n=1}^{+\infty} M_n < +\infty$ pertanto la serie converge totalmente in $[-1, 1]$.