UNIVERSITÀ DEGLI STUDI "LA SAPIENZA"
PRIMA FACOLTÀ DI ARCHITETTURA "L. QUARONI"
Corso di Laurea in Urbanistica e S.I.T.

Ilia Arcidiacono

ANALISI MATEMATICA
ALGEBRA LINEARE
GEOMETRIA ANALITICA

A.A. 2002-2003

Parte Seconda

ALGEBRA LINEARE

Cap. 1: Matrici e determinanti

Cap. 1: Matrici e determinanti

1.1 Definizione di matrice

Dati mxn numeri naturali ($m,n \in N_o$), definiamo <u>matrice</u> un insieme ordinato di elementi appartenenti ad un corpo K, disposti su m righe orizzontali e su n linee verticali; tale quadro si ottiene tracciando, su un foglio , <u>m</u> rette orizzontali ed <u>n</u> rette verticali, in modo che all'incrocio fra ogni riga ed ogni colonna si situi un numero reale o complesso ($m, n \in N_o$).
Nel caso generale, indicheremo l'elemento generico della matrice con i due indici dei quali il primo indica la riga, il secondo la colonna, così:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

Una matrice A di <u>m</u> righe ed <u>n</u> colonne è composta da <u>mxn</u> elementi; verrà indicata col simbolo: A_{mxn}.
Se è m = n, la matrice si dice quadrata di ordine n.
In questo caso l'insieme degli elementi a_{rr} situati all'incrocio fra l'erresima riga e l'erresima colonna, aventi cioè indici uguali costituiscono la diagonale principale.
Se invece la matrice non è quadrata (cioè se:$m \neq n$) la matrice si dice di dimensioni <u>m x n</u>; cioè il numero delle righe è <u>m</u> ed il numero delle colonne è <u>n</u>. Due matrici con lo stesso numero di righe e di colonne si dicono simili.

1.2 Matrice trasposta

Sulla prima di esse operiamo la seguente trasposizione: scriviamo una matrice nella quale al posto della prima riga sostituiamo la prima colonna, al posto della seconda riga la seconda colonna, ecc..; allora, evidentemente, nella prima colonna compariranno gli elementi della prima riga, ecc...; questa matrice si dice trasposta di A e si scrive A^t o A' .
Una matrice quadrata tale che: $a_{hk} = a_{kh}$ è identica alla sua trasposta e viene detta <u>simmetrica</u>. Se poi gli elementi della matrice simmetrica sono tutti nulli ad eccezione di quelli situati sulla diagonale principale, cioè se è:

$$a_{hk} = 0 \Rightarrow h \neq k$$

$$a_{hk} \neq 0 \Rightarrow h = k$$

si ottiene una matrice detta diagonale:

$$A = \begin{bmatrix} a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c & 0 \\ 0 & 0 & 0 & d \end{bmatrix}$$

Definizione: In un insieme ambiente E, strutturato secondo certe leggi, l' insieme delle matrici è composto da famiglie di un numero finito ed ordinato di elementi appartenenti ad un corpo **K**, disposti su una griglia rettangolare di m righe ed n colonne ($n, m \in N$). Il corpo **K** sarà in genere quello dei numeri reali R, o dei numeri complessi C.

1.3 Algebra delle matrici

1.3.1 Uguaglianza

Diremo che due matrici A e B sono uguali, quando, avendo lo stesso numero di righe e di colonne, ogni elemento a_{hk} dell' una è uguale ad ogni elemento b_{hk} dell' altra.
Allora, se m è il numero delle righe ed n il numero delle colonne, una uguaglianza matriciale comporta mxn relazioni tra gli elementi.

$$a_{hk} = b_{hk} \text{ con } h = 1, 2, 3, \ldots\ldots, m \text{ e } k = 1, 2, 3, \ldots\ldots, n$$

Più sinteticamente, usando i simboli già introdotti:

$$A = B \longleftrightarrow a_{hk} = b_{hk} \quad \forall\, h,k$$

1.3.2 Somma di due matrici

Si può definire la somma algebrica (addizione e/o sottrazione) di due matrici A e B, indicandola con A+B, solo nel caso in cui A e B abbiano lo stesso numero di righe e di colonne, cioè siano simili.
La matrice somma si ottiene sommando gli elementi corrispondenti, cioè gli elementi che hanno gli stessi indici.

Se

$$A = [a_{hk}] \quad \text{e} \quad B = [b_{hk}]$$

Allora:

$$A + B = C = [c_{hk}] = [a_{hk} + b_{hk}] \quad \forall\, h,k$$

1.3.3 Prodotto di una matrice per uno scalare

Definiamo ora il prodotto di una matrice A_{mxn} per un numero λ, tale prodotto si ottiene moltiplicando per λ tutti gli elementi a_{hk} della matrice, cioè:

$$\lambda A = \begin{bmatrix} \lambda a_{11} & \lambda a_{12} & \lambda a_{13} & \ldots & \lambda a_{1n} \\ \lambda a_{21} & \lambda a_{22} & \lambda a_{23} & \ldots & \lambda a_{2n} \\ \lambda a_{31} & \lambda a_{32} & \lambda a_{33} & \ldots & \lambda a_{3n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \lambda a_{m1} & \lambda a_{m2} & \lambda a_{m3} & \ldots & \lambda a_{mn} \end{bmatrix}$$

1.3.4 Vettori uniriga e unicolonna

Per arrivare al concetto di prodotto di due matrici, dobbiamo fare una premessa. Chiameremo "vettore V a p componenti" una successione ordinata di p numeri [a_1, a_2,........a_p] $\in R^p$ che scriveremo così:

$$V_{1xp} = V' = [\,a_1 \quad a_2 \quad \ldots \quad a_p\,]$$

$$V_{px1} = V = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \ldots \\ a_p \end{bmatrix}$$

Evidentemente i due vettori V_{1xp} e V_{px1} sono l' uno il trasporto dell' altro. Indicheremo sempre con V il vettore unicolonna e con V' il vettore uniriga.
Quindi ogni riga di una matrice può essere considerata un vettore ad n componenti (se la matrice è composta di n colonne) ed ogni colonna di una matrice è un vettore ad m componenti (se m è il numero delle righe)

1.3.5 Prodotto scalare di due vettori

"Dati due vettori a p componenti, definiamo prodotto scalare dei due vettori il numero che si ottiene sommando i prodotti di ciascuna componente del primo vettore per la corrispondente componente del secondo vettore". In simboli si ha:

$$A_{1xp} = A' = [\,a_1 \quad a_2 \quad \ldots \quad a_p\,]$$

$$B_{px1} = B = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \ldots \\ b_p \end{bmatrix}$$

Il prodotto scalare sarà dato da:

$$A'B = \sum_{i=1}^{p} a_i b_i = a_1 b_1 + a_2 b_2 + \ldots + a_p b_p$$

1.3.6 Prodotto di due matrici

Siano date due matrici, A_{mxp} e B_{pxn} tali cioè che il numero di colonne della prima sia uguale al numero di righe della seconda.
Indichiamo, come al solito, con a_{hk} il termine generico della matrice A, con b_{hk} il termine generico della matrice B, con c_{hk} l' elemento corrispondente della matrice prodotto: C = A B.
Per comprendere come si esegue il calcolo dell' elemento generico della matrice prodotto c_{hk}, facciamo il seguente schema. Scriviamo l' h-esimo vettore riga della matrice A:

$$U'_{hxp} = \begin{bmatrix} a_{h1} & a_{h2} & a_{h3} & \dots & a_{hp} \end{bmatrix}$$

che è a p componenti, e scriviamo il k-esimo vettore colonna della matrice B:

$$V_{pxk} = \begin{bmatrix} b_{1k} \\ b_{2k} \\ b_{3k} \\ \dots \\ b_{pk} \end{bmatrix}$$

anch' esso a p componenti.
Eseguiamo il prodotto dei due vettori: U' V secondo la regola del paragrafo precedente; eseguiamo cioè la somma dei prodotti $a_{hr}b_{rk}$ con r = 1, 2, 3, . . ., p.
Questo prodotto è il termine generale c_{hk} della matrice prodotto. Cioè ogni termine della matrice prodotto è dato dalla somma dei prodotti degli elementi di un vettore riga di A per gli elementi di un vettore colonna di B.
In simboli avremo:

$$[c_{hk}] = \sum_{r=1}^{p} a_{hr} b_{rk}$$

Questa regola comporta, come abbiamo precedentemente affermato, che il numero di righe della seconda matrice sia uguale al numero di colonne della prima; le dimensioni della matrice prodotto saranno evidentemente date dal numero di righe della prima matrice e dal numero di colonne della seconda.
In genere ricordiamo che un termine generico c_{hk} del prodotto di due matrici A e B, si esegue calcolando il prodotto dell' h-esimo vettore riga di A per il k-esimo vettore colonna di B.
Calcoliamo ora invece il prodotto B x A; intanto vediamo le dimensioni. Essendo B_{2x3} ed A_{3x2}, la matrice prodotto C' = BxA sarà di dimensioni 2x2, mentre il prodotto C = AxB di dimensioni 3x3. Quindi è evidente che le due matrici prodotto non possono essere uguali, tranne alcuni casi particolari di matrici quadrate.

1) E' evidente che il prodotto matriciale non è commutativo:

$$A'B \neq B'A$$

e quindi si deve parlare di prodotto a destra e a sinistra.

2) Il prodotto AxB dell'esempio 1 è diverso da zero, ma il prodotto BxA è uguale a zero, senza che nessuna delle due matrici, da cui è ottenuto, siano nulle.
Nell'algebra dei numeri reali, invece, è sempre valida la legge di annullamento del prodotto, che possiamo riassumere così:

$$x \cdot y = 0 \overset{\text{(implica)}}{\Leftrightarrow} x = 0 \text{ oppure } y = 0$$

Nell'algebra matriciale, invece:

$$X \cdot Y = 0 \overset{\text{(non implica)}}{\not\Leftrightarrow} X = 0 \text{ oppure } Y = 0$$

Se un prodotto A’B=0, senza che sia A=0 o B=0, si dice che A e B sono divisori dello zero, e più precisamente: se AxB = 0, con A≠0, B≠0, si dice che B è divisore dello zero a destra, ed A è divisore dello zero a sinistra. In presenza di divisori dello zero, sono impossibili le semplificazioni dell'algebra elementare, e precisamente:

$$M \cdot N = MN' \overset{\text{(non implica)}}{\not\Leftrightarrow} N = N'$$

perché

$$M’N = MN' - MN' = 0$$

da cui M’(N-N') =0, ma non essendo qui valida la legge di annullamento del prodotto:

$$M \cdot (N - N') = 0 \overset{\text{non implica}}{\not\Rightarrow} M = 0 \text{ oppure } N - N' = 0 \text{ (cioè } N = N')$$

La matrice nulla 0, è composta da tutti elementi nulli, è d'ordine qualsiasi ed è tale che:

$$A’0 = 0’A = 0$$

come nell'algebra classica.
Possiamo concludere che: “Il prodotto matriciale, nell'insieme delle matrici simili, è una legge di composizione interna (il prodotto di due matrici è una matrice), non commutativa, con divisori dello zero e dotata di elemento nullo”.
Per poter completare la struttura algebrica dell'insieme delle matrici dobbiamo definire l'elemento neutro rispetto al prodotto.
Premettiamo alcune definizioni: Si dice <u>matrice scalare</u> la matrice quadrata nella quale gli elementi della diagonale principale siano tutti uguali mentre tutti gli altri sono nulli, essa si indica con D(ß) chiamando ß l'elemento diverso da zero e posto nella diagonale principale

$$D(\beta) = \begin{bmatrix} \beta & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \beta & 0 & 0 \\ .. & .. & .. & .. \\ 0 & 0 & 0 & \beta \end{bmatrix}$$

della matrice stessa:

$$d_{hk} = \begin{cases} 0 & \text{se } h \neq k \\ \beta & \text{se } h = k \end{cases}$$

Eseguiamo il prodotto matriciale fra D ed una qualunque matrice A_{mxn}
Sia

$$A_{2x3} = \begin{bmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \end{bmatrix}$$

Se calcoliamo $A'_{2x3}D(\beta)$ l' ordine di D deve essere 3, se invece calcoliamo $D'(\beta)A_{2x3}$, l' ordine di D' deve essere 2:

$$A'_{2x3}D(\beta) = \begin{bmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta & 0 & 0 \\ 0 & \beta & 0 \\ 0 & 0 & \beta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a\beta & b\beta & c\beta \\ a'\beta & b'\beta & c'\beta \end{bmatrix}$$

$$D'(\beta)A_{2x3} = \begin{bmatrix} \beta & 0 \\ 0 & \beta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a\beta & b\beta & c\beta \\ a'\beta & b'\beta & c'\beta \end{bmatrix}$$

Otteniamo, cioè, che A’D = D' A = βA; cioè: "Una matrice scalare si comporta, rispetto alla moltiplicazione delle matrici, come un numero β".
Se β = 1, la matrice viene detta matrice unità,si denota con I ed assume la forma:

$$I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ .. & .. & .. & .. \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

essa è tale che: A’I = I’A = A.
Ecco l' elemento neutro per la legge moltiplicativa.

1.3.7 Proprietà del prodotto matriciale

La legge di moltiplicazione delle matrici è:

a) associativa;
b) distributiva rispetto alla legge additiva.

E' facile verificare che è:

$$(A'B)'C = A'(B'C)$$

e che è:

$$A'(B + C) = A'B + A'C$$

In definitiva abbiamo definito nell' algebra delle matrici, due operazioni, somma e prodotto, che si possono eseguire contemporaneamente solo quando le matrici su cui si opera sono quadrate di ordine $n \in N_o$.

Infatti la somma è definita solo per matrici simili (cioè dello stesso numero di righe e di colonne), mentre il prodotto è definito per matrici nelle quali il numero delle colonne della prima matrice è uguale al numero delle righe della seconda.
Esiste un elemento neutro che è la matrice scalare I.
Quindi sono verificato gli assiomi che conferiscono all' insieme delle matrici quadrate così strutturate, la caratteristica di anello non commutativo dotato di divisori dello zero.

1.3.8 Potenza intera di una matrice quadrata

Dalla definizione di prodotto matriciale e dalla sua associatività possiamo facilmente definire la potenza ad esponente intero di una matrice quadrata nel seguente modo:
Sia A una matrice quadrata di ordine n, poniamo:

- $A^0 = I$
- $A^1 = A$
- $A^2 = A'A$
- $A^p = (A^{p-1})'A$

cioè si definisce la potenza ad esponente intero p di una matrice A in modo del tutto uguale alla potenza intera dei numeri reali, come prodotto di p fattori uguali ad A.
In modo analogo si definisce il prodotto di due potenze intere di base A:

$$A^m \; A^n = A^{m+n} \qquad m, n \in N$$

e la potenza di potenza:

$$(A^n)^p = A^{np} \qquad n, p \in N$$

Vediamo ora se è possibile estendere al campo delle potenze di una matrice le altre operazioni sulle potenze, cioè se possiamo dire che $(A'B)^n = A^n{}'B^n$
In generale tale regola non è valida per le matrici; infatti poiché in genere

$$A'B \neq B'A$$

$$(AB)^n = (AB)'(AB)'.... (AB)' \neq (BA)'(BA)'.... (BA)'$$

Se invece, come avviene in qualche caso, il prodotto è commutativo, si può applicare la regola della potenza di un prodotto dell' algebra classica.
E' evidente che non avendo ancora definito il quoziente delle matrici, non potremmo definire né il quoziente di due potenze di uguale base A, né la potenza di un quoziente.

1.4 Definizione di determinante

Dicesi determinante di una matrice quadrata di ordine n la somma di tutti gli n! prodotti associati alla matrice quadrata. Dicesi prodotto associato un prodotto i cui n fattori sono gli elementi della matrice data scelti in modo che nello stesso prodotto tutti i fattori appartengano a righe e colonne diverse. Cioè possiamo scrivere:

$$\det(A) = \sum_{h_1,h_2,h_3,\dots,h_n} (-1)^h a_{1h}\ a_{2h}\ a_{3h}\ \dots a_{nh} = \sum_{k_1,k_2,k_3,\dots,k_n} (-1)^k a_{k1} a_{k2} a_{k3} \dots a_{kn}$$

dove h e k rappresentano il numero complessivo delle inversioni della permutazione h_1, h_2, h_n, $k_1, k_2 \dots k_n$, e la sommatoria si intende estesa a tutte le n! permutazioni.
Abbiamo definito che cosa s' intende per determinante di una matrice: esso è costituito da una somma di prodotti: cioè un valore numerico, se gli elementi sono numeri, o una espressione algebrica. E' un grave errore confondere una matrice col suo determinante; la prima è un quadro di numeri, mentre la seconda indica una serie di operazioni da eseguire sugli elementi della matrice stessa, operazioni le quali, al termine dei calcoli, si risolvono in un unico valore numerico o algebrico.

1.5 Calcolo del determinante del secondo ordine.

Data la matrice del secondo ordine.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$$

I prodotti associati del determinante sono 2! = $2 \cdot 1 = 2$
Scriviamoli:

$$a_{11}\ a_{22} \quad \text{e} \quad a_{12}\ a_{21}$$

Il primo termine appartiene alla diagonale principale e quindi non presenta alcuna inversione, (cioè sarà positivo).
Il secondo prodotto $a_{21}\ a_{12}$, invece, è composto di due elementi nei quali i secondi indici costituiscono la permutazione fondamentale (1 2), mentre il primo indice presenta una sola inversione (dell' 1 col 2), quindi sarà negativo.
Perciò:

$$\det[A] = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

quindi

$$\text{Det (A)} = a_{11}\ a_{22} - a_{12}\ a_{21}$$

che è la regola nota fin dalle scuole secondarie.

1.6 Determinanti del terzo ordine

Sia data ora una matrice quadrata del terz' ordine:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

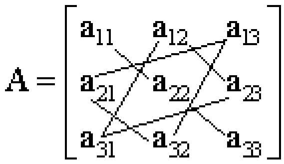
Tenendo fermi i primi indici, poiché abbiamo visto che le permutazioni di tre elementi sono sei, scriveremo sei prodotti associati, così:

$$a_{11}\,a_{22}\,a_{33} \quad a_{12}\,a_{23}\,a_{31} \quad a_{13}\,a_{21}\,a_{32}$$

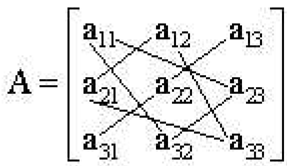
$$a_{13}\,a_{22}\,a_{31} \quad a_{12}\,a_{21}\,a_{33} \quad a_{11}\,a_{23}\,a_{32}$$

Se controlliamo secondo lo schema precedente il numero delle inversioni dei secondi indici rispetto alla permutazione fondamentale 1,2,3, possiamo concludere che i tre termini della prima riga sono positivi (0 o 2 inversioni), e che gli altri tre sono negativi (1 o 3 inversioni).
La regola, ben facile da ricordare, è conosciuta come regola del Sarrüs:
"Si devono sommare i tre prodotti che si trovano sulla diagonale principale e sono ai vertici di un triangolo con un lato ad essa parallelo e si sottraggono i prodotti degli elementi che si trovano sulla diagonale secondaria o sono ai vertici di un triangolo con un lato parallelo alla diagonale secondaria".
Schema per calcolare i prodotti associati:

Prodotti associati positivi



Prodotti associati negativi



1.7 Calcolo dei determinanti di ordine qualsiasi. Primo e Secondo Teorema di Laplace

Cominciamo con una definizione: "Data una matrice quadrata di ordine n, se a_{hk} è l' elemento dell' h-esima riga e k-esima colonna, diciamo <u>complemento algebrico</u> di a_{hk} e lo indichiamo con A_{hk}, il determinante che si ottiene dalla matrice data, sopprimendo l' h-esima riga e la k-esima colonna, preceduto dal segno + o - a seconda che h + k è pari o dispari".
Enunciamo ora un teorema fondamentale per il calcolo dei determinanti, che viene indicato col nome di prima Teorema di Laplace: " Moltiplicando ciascun elemento di una riga o colonna di una matrice A quadrata, di ordine n, per il proprio complemento algebrico e sommando i prodotti ottenuti si ottiene il det(A)".
Il Secondo Teorema di Laplace è invece:

"Moltiplicando tutti gli elementi di una riga per i complementi algebrici di una linea ad essa parallela e sommando tali prodotti, si ottiene il valore zero". I due teoremi di Laplace si possono riassumere in una sola regola così:

$$a_{h1}A_{k1} + a_{h2}A_{k2} + a_{h3}A_{k3} + ...a_{hn}A_{kn} = \left\langle \begin{array}{lll} \det(A) & \text{per} & h = k \\ 0 & \text{per} & h \neq k \end{array} \right.$$

1.8. Matrice inversa

Data una matrice quadrata A_{nxn} si definisce matrice inversa di A e si scrive A^{-1} la matrice quadrata di ordine n (se esiste) tale che:

$$A^{-1}_{n\times n} \cdot A_{n\times n} = A_{n\times n} \cdot A^{-1}_{n\times n} = I_{n\times n}$$

Omettendo la dimostrazione, affermiamo che esiste la matrice inversa se e solo se il det(A)$\neq$0, in questo caso la A^{-1} si determina nel modo che descriviamo qui di seguito
Si calcola il determinante di A_{nxn} e nel caso che questo sia diverso da zero si procede in questo modo:

a) Si scrive la matrice A' trasposta della A_{nxn}
b) Di ciascun elemento di A' si calcola il suo complemento algebrico (vedi al n. 1.7)
c) Si divide ciascun complemento algebrico per il det(A)
d) I numeri così determinati costituiscono gli elementi della matrice inversa A^{-1} con l'avvertenza che ciascun elemento assume il posto corrispondente nella matrice trasposta.

Per chiarire il metodo facciamo un esempio di calcolo di una matrice inversa.
Sia data la matrice

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & 1 & -1 \\ 3 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Si ha:

$$A^T = A' = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & 2 \end{bmatrix} \qquad \det(A) = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & 1 & -1 \\ 3 & 0 & 2 \end{vmatrix} = -5$$

ed infine:

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} -0,4 & 0,8 & 1 \\ -0,2 & 1,4 & 1 \\ 0,6 & -1,2 & -1 \end{bmatrix}$$

1.9. Traccia

Si definisce traccia di una matrice quadrata la somma degli elementi posti sulla diagonale principale. Data la matrice quadrata:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

La traccia di A si definisce:

$$tr(A) = \sum_{h=1}^{n} a_{hh} = a_{11} + a_{22} + a_{33} + ... + a_{nn}$$

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI "LA SAPIENZA"
PRIMA FACOLTÀ DI ARCHITETTURA "L. QUARONI"
Corso di Laurea in Urbanistica e S.I.T.

Ilia Arcidiacono

ANALISI MATEMATICA
ALGEBRA LINEARE
GEOMETRIA ANALITICA

A.A. 2002-2003

Parte Seconda

ALGEBRA LINEARE

Cap. 2: Spazi vettoriali

Cap. 2: Spazi vettoriali

2.1 Premessa

Abbiamo già studiato gli insiemi numerici $N \subset Z \subset Q \subset R \subset C$ le operazioni e le loro proprietà. Alcune di queste proprietà avranno la veste di assiomi nel momento in cui definiremo gli “spazi vettoriali" astratti, o, come talvolta vengono chiamati, gli "spazi lineari".
La definizione di uno spazio vettoriale implica un campo[1] arbitrario, i cui elementi si chiamano scalari. Adottiamo la notazione che segue (a meno che non vi sia una diversa dichiarazione, o implicazione):

K	campo degli scalari,
a, b, c, k	elementi di K,
V	lo spazio vettoriale dato,
u, v, w	elementi di V.

Notiamo che niente di essenziale va perduto se il lettore assume che K sia il campo reale R o il campo complesso C, noi porremo sempre il campo K come campo dei reali R

Definizione: Sia K un campo dato e sia V un insieme non vuoto, nel quale sussistono le regole di addizione e di moltiplicazione per uno scalare, che assegna ad ogni $u, v \in V$ una somma $u + v \in V$, e ad ogni $u \in V, k \in K$ un prodotto $ku \in V$. Allora V è chiamato spazio vettoriale su K (e gli elementi di V si chiamano vettori) se sussistono i seguenti assiomi:

a) Per tutti i vettori $u, v, w \in V$, (u + v) + w = u + (v + w).
b) Esiste in V un vettore, indicato con 0 e chiamato vettore zero, per il quale u + 0 = u per ogni vettore $u \in V$
c) Per ogni vettore $u \in V$ si ha in V un vettore, indicato con -u, per il quale u + (-u) = 0.
d) Per tutti i vettori $u, v \in V$, u + v = v + u.

A) Per ogni scalare $k \in K$ ed ogni vettore $u, v \in V$, k(u + v) = ku +kv
B) Per ogni scalare $k_1, k_2 \in K$ ed ogni vettore $u \in V$, $(k_1 + k_2)u = k_1u + k_2u$
C) Per ogni scalare $k_1, k_2 \in K$ ed ogni vettore $u \in V$, $(k_1 k_2)u = k_1 (k_2u)$.
D) Per lo scalare unità $1 \in K$, 1u = u, per ogni vettore $u \in V$.

Gli assiomi ora esposti si dividono per loro natura in due ínsíemí. I primi quattro riguardano soltanto la struttura additiva di V, e possono essere riassunti dicendo che V è un gruppo commutativo dal punto di vista dell'addizione. Ne segue che qualsiasi somma di vettori nella forma:

$$v_1 + v_2 + \ldots + v_n$$

[1] Dicesi “campo” un insieme numerico nel quale sono definite due operazioni ed alcune proprietà di esse.

non richiede parentesi e non dipende dall'ordine degli addendi, il vettore zero 0 è unico, il negativo -u di u è unico, e sussiste la legge di cancellazione:

$$u + w = v + w \text{ implica } \quad u = v \quad \text{per ogni vettore } u,v,w \in V.$$

Si definisce anche la sottrazione u-v = u+(-v), come una addizione e quindi vale lo stesso gruppo di assiomi

D'altra parte gli altri quattro assiomi riguardano “l'azione" del campo K su V. Notare che il simbolo scelto per l’elenco degli assiomi riflette questa divisione. Con l'uso di questi si possono dimostrare le seguenti semplici proprietà di uno spazio vettoriale.

Teorema 1. 1: Sia V uno spazio vettoriale su di un campo K.

(1) Per ogni scalare $k \in K$ e $0 \in V$, $k0 = 0$.
(2) Per $0 \in K$ ed ogni vettore $u \in V$, $0u = 0$.
(3) Se $ku = 0$, con $k \in K$ e $u \in V$, allora è $k = 0$ oppure $u = 0$.
(4) Per ogni scalare $k \in K$ e ogni vettore $u \in V$, $(-k)u = k(-u) = -ku$.

2.2 Esempi di spazi vettoriali

Diamo ora alcuni esempi importanti di spazi vettoriali. Il primo consiste in una generalizzazione dello spazio R^n.

Esempio 1: Sia K un campo arbitrario. L'insieme di tutte le n-ple di elementi di K, con l'addizione vettoriale e la moltiplicazione per uno scalare definite da

$$(a_1, a_2, ..., a_n) + (b_1, b_2, ..., b_n) = (a_1 + b_1, a_2 + b_2, ..., a_n + b_n)$$

e

$$k(a_1, a_2, .. ., a_n) = (ka_1, ka_2, ... , ka_n)$$

in cui $a_i, b_i, k \in K$, è uno spazio vettoriale su K; lo indichiamo con K^n. Il vettore zero in K^n è la n-pla di zeri 0 = (0, 0, . . ., 0). Quindi se K = R, R^n è lo spazio vettoriale i cui elementi sono le n-ple ordinate di numeri reali.

Esempio 2: Sia V l'insieme di tutte le matrici m X n con elementi di un campo K arbitrario. Allora V è uno spazio vettoriale su K rispetto alle operazioni di addizione di matrici e moltiplicazione per uno scalare.

Esempio 3: Sia V l'insieme di tutti i polinomi $a_0 + a_1t + a_2 t^2 + ... + a_nt^n$, con coefficienti a_i in un campo K. Allora V è uno spazio vettoriale su K rispetto alle abituali operazioni di addizione di polinomi e di moltiplicazione per una costante.

Esempio 4: Sia K un campo arbitrario, e X un qualsiasi insieme non vuoto. Consideriamo l'insieme V di tutte le funzioni di $x \in X$ in K. La somma di due qualsiasi funzioni $f, g \in V$ è la funzione $f + g \in V$ definita da

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x)$$

e il prodotto di uno scalare $k \in K$ per una funzione $f \in V$ è la funzione $kf \in V$

definita da $(kf)(x) = k\, f(x)$

Allora V, con le operazioni ora viste, è uno spazio vettoriale su K. Il vettore zero in V è la funzione zero 0 che applica ogni $x \in X$ su 0 e K: $0(x) = 0$, per ogni $x \in X$. Inoltre, per ogni funzione $f \in V$, $-f$ è quella funzione in V per la quale $(-f)(x) = -f(x)$, per ogni $x \in X$.

Esempio 5: Poniamo che E sia un campo contenente un sottocampo K. Allora E si può considerare uno spazio vettoriale su K, assumendo la usuale addizione in E come addizione vettoriale, e definendo il prodotto scalare kv di $k \in K$ e $v \in E$ come prodotto di k e v elementi del campo E. Perciò il campo complesso C è uno spazio vettoriale sul campo reale R, e il campo reale R è uno spazio vettoriale sul campo razionale Q.

2.3 Sottospazi

Sia W un sottoinsieme di spazio vettoriale su di un campo K. W si chiama sottospazio di V se W è esso stesso uno spazio vettoriale su K rispetto alle operazioni di addizione vettoriale e moltiplicazione per uno scalare su V. Seguono dei semplici criteri per identificare i sottospazi.

Teorema 1.2: W è un sottospazio di V se e solo se

(1) W è non vuoto;
(2) W è chiuso rispetto all'addizione vettoriale. $v, w \in W$ implica $v + w \in W$;
(3) W è chiuso rispetto alla moltiplicazione per uno scalare: $v \in W$ implica $kv \in W$ per ogni $k \in K$.

Corollario 1.3: W è un sottospazio di V se e solo se (1) $0 \in W$ (con $W \neq \emptyset$) (2) $v, w \in W$ implica $av + bw \in W$ ogni $a, b \in K$.

Esempio 6:

(1) Sia V lo spazio vettoriale R3 . Allora l' insieme W consistente nei vettori la cui terza componente è zero, $W = \{(a, b, 0): a, b \in R\}$, è un sottospazio di V.

(2) Sia V lo spazio di tutte le matrici quadrate n X n (vedere l' esempio 2). Allora l' insieme W costituito da quelle matrici $A = (a_{ij})$ per le quali $a_{ij} = a_{ji}$, e che si chiamano matrici simmetriche, è un sottospazio di V.

(3) Sia V lo spazio dei polinomi (esempio 3). Allora l' insieme W costituito dai polinomi di grado < n per un dato n è un sottospazio di V.

(4) Sia V lo spazio delle funzioni da un insieme non vuoto X nel campo reale R. Allora l' insieme W che consiste delle funzioni limitate in V è un sottospazio di V. (Una funzione $f \in V$ è limitata se esiste un $M \in R$ tale che $|f(x)| \leq M$ per ogni $x \in X$.)

Esempio 7: Siano U e W dei sottospazi di uno spazio vettoriale V. Dimostriamo che l' intersezione $U \cap W$ è ancora un sottospazio di V. E' chiaramente $0 \in U$ e $0 \in W$ dal momento che U e W sono dei sottospazi; quindi $0 \in U \cap W$. Supponiamo ora che sia $u, v \in U \cap W$. Allora $u, v \in U$ e $u, v \in W$ e, dato che U e W sono dei sottospazi,

$$au + bv \in U \text{ e } au + bv \in W$$

per ogni scalare $a, b \in K$. Di conseguenza, $au + bv \in U \cap W$ e allora $U \cap W$ è un sottospazio di V.

Il risultato ottenuto in questo esempio si generalizza nel modo che segue.

Teorema 1.4: L' intersezione di un numero qualsiasi di sottospazi in uno spazio vettoriale V è un sottospazio di V.

2.4 Combinazioni lineari

Sia V uno spazio vettoriale su di un campo K, e siano $v_1, \ldots, v_m \in V$. Ogni vettore in V della forma

$$a_1 v_1 + a_2 v_2 + . \ . \ . + a_m v_m$$

in cui $a_i \in K$, si chiama combinazione lineare di $v_1 \ldots, v_m$ Vale il teorema seguente.

Teorema 1.5: Sia S un insieme non vuoto di V. L' insieme delle combinazioni lineari di vettori di S, indicato con L(S), è un sottospazio di V che contiene S. Inoltre, se W è un qualsiasi altro sottospazio di V contenente S, allora $L(S) \subset W$.

In altri termini, L(S) è il più piccolo sottospazio di V che contenga S; quindi si chiama sottospazio generato da S. Per opportunità definiamo $L(\emptyset) = \{0\}$.

Esempio 9: Sia V lo spazio vettoriale R^3. Il Sottospazio generato da ogni vettore u non nullo consiste negli scalari multipli di u; geometricamente è la retta per l' origine passante per il punto u. Lo spazio lineare di ogni coppia di vettori u e v che non siano multipli l' uno dell' altro è il piano per l' origine, passante per i punti u e v.

2.5 Spazio riga di una matrice

Sia A una matrice arbitraria m X n su un campo K:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

Le righe di A: $R_1 = [a_{11} \quad a_{12} \quad \ldots \quad a_{1n}]$, $R_2 = [a_{21} \quad a_{22} \quad \ldots \quad a_{2n}]$, . . . , $R_m = [a_{m1} \quad a_{m2} \quad \ldots \quad a_{mn}]$

viste come vettori in K^n, generano un sottospazio di K chiamato spazio riga di A. Quindi:

$$\text{Spazio riga di } A = L(R_1, R_2, \dots, R_n)$$

Analogamente le colonne di A, viste come vettori in K^m, generano un sottospazio di K^m chiamato spazio colonna di A.

Supponiamo adesso di applicare un' operazione elementare di riga su A,

$$(1)\ R_i \leftrightarrow R_{.j}, \quad (2)\ R_i \to kR_i,\ k \neq 0, \text{ o} \qquad (3)\ R_i \to kR_j + R_i$$

ottenendo una matrice B. Allora ogni riga di B è evidentemente una riga di A, o una combinazione lineare di righe di A. Quindi lo spazio riga di B è contenuto nello spazio riga di A. D' altro canto, possiamo applicare l' operazione elementare di riga inversa su B, e ottenere A. quindi lo spazio riga di A è contenuto nello spazio riga di B. Di conseguenza, A e B hanno lo stesso spazio riga. Questo ci conduce al teorema seguente.

Teorema 1.6: Matrici equivalenti per riga hanno lo stesso spazio riga.

2.6 Somme e somme dirette

U e W siano dei sottospazi di uno spazio vettoriale V. La somma di U e W, scritta U + W, consiste in tutte le somme u + w, essendo $u \in U$ e $w \in W$:

$$U + W = \{u + W : u \in U, W \in W\}$$

Si noti che $0 = 0 + 0 \in U + W$, poiché $0 \in U$, $0 \in W$. Inoltre poniamo che u + w e u' + w' appartengano a U + W, essendo $u, u' \in U$ e $w, w' \in W$. Allora

$$(u + w) + (u' + w') = (u + u') + (w + w') \in U + W$$

e, per ogni scalare k,

$$k(u + w) = ku + kw \in U + W$$

E così abbiamo dimostrato il teorema che segue.

Teorema 1.8: La somma U + W dei sottospazi U e W di V è ancora un sottospazio di V.

E' possibile, a questo punto enunciare il seguente:

Teorema 1.9: Lo spazio vettoriale V è la somma diretta dei propri sottospazi U e W solo ed esclusivamente se: (1) V = U + W, e (2) $U \cap W = \{0\}$.

2.7 Dipendenza lineare

Dato una spazio vettoriale V su K, i vettori $v_1, v_2, v_3, \dots, v_m \in V$ si dicono linearmente dipendenti su K, ovvero semplicemente dipendenti, se esistono m scalari $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \dots, \lambda_m$, non tutti nulli tali che:

$$\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \lambda_3 v_3 + \ldots + \lambda_m v_m = 0$$

In caso contrario, cioè se l'unica m-pla di λ (che si dicono coefficienti della combinazione lineare) che verifica la precedente è la m-pla nulla ($\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \ldots = \lambda_m = 0$).
Notiamo che se uno dei vettori dati è il vettore 0 allora i vettori sono linearmente dipendenti, quindi il vettore 0 è dipendente di qualsiasi vettore
In altre parole se, dati m vettori v_i, non zero, uno di essi è esprimibile come combinazione lineare dei rimanenti m-1, allora gli m vettori sono dipendenti.

2.8 Rango di una matrice

Ricordando ora che una matrice A_{mxn} è costituita da m vettori (riga) ad n componenti ovvero da n vettori (colonna) ad m componenti, possiamo trovare il numero dei vettori contenuti in essa che siano indipendenti, tale numero viene detto <u>rango della matrice.</u>
Se la matrice è quadrata (m = n) ed è costituita da vettori tutti indipendenti tra di loro, allora il suo determinante è diverso da zero, altrimenti se det(A) = 0 significa che i suoi vettori sono dipendenti.
Detto ora <u>minore</u> il determinante i cui elementi siano presenti nella matrice data, si ha che in una matrice nxn esistono n-1 minori di ordine n-1 (ottenuti cancellando ordinatamente una riga ed una colonna) allora se esiste almeno un minore di ordine n-1 diverso da zero significa che nella matrice A vi sono esattamente n-1 vettori indipendenti. Nel caso che tutti i minori di ordine n-1 siano nulli e ne esista almeno uno di ordine n-2 diverso da zero, allora il numero dei vettori indipendenti di A è n-2 e così via fino ad arrivare a minori di ordine 1, che sono gli elementi della matrice data, se ne esiste almeno uno diverso da zero allora il numero dei vettori indipendenti è 1.
Possiamo allora affermare che il rango di una matrice quadrata A_{nxn} è:

$$r(A_{n\times n}) = n, n-1, n-2, n-3, \ldots, 3, 2, 1$$

è un numero intero ed è il massimo ordine del minore non nullo estratto dalla matrice data.
Se, invece , la matrice è rettangolare A_{mxn} allora il suo rango può essere al massimo il più piccolo tra i due valori m ed n, cioè:

$$r(A_{m\times n}) \leq \min(m, n)$$

In pratica per trovare il rango di una matrice bisogna procedere calcolando i minori da quello di ordine massimo in giù.
ESEMPIO:
Trovare il rango della matrice

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & -3 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

la matrice ha dimensioni 3x4 quindi il suo rango può essere al massimo uguale a 3:

$$r(A_{3\times 4}) \leq \min(3, 4) = 3$$

Si calcolano i 4 minori di ordine 3:

i) cancellando la 4ª colonna: $\begin{vmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0$

ii) cancellando la 3ª colonna: $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -3 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0$

iii) cancellando la 2ª colonna: $\begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 2 & -3 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$

iv) cancellando la 1ª colonna: $\begin{vmatrix} 0 & -2 & 3 \\ 1 & 2 & -3 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$

Quindi il r(A) non è 3, in quanto tutti i minori estratti di ordine 3 sono nulli, procediamo calcolando i minori di ordine 2:

i) cancellando la 3ª e la 4ª colonna e la 3ª riga: $\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$

Non dobbiamo più procedere con il calcolo dei minori in quanto abbiamo trovato un minore non nullo, possiamo allora affermare che:

$$r(A) = 2$$

2.9 Base e dimensione

Uno spazio vettoriale V si dice di dimensione finita n (V è allora detto n-dimensionale) se in V esistono n vettori linearmente indipendenti $e_1, e_2, e_3, \dots, e_n$ tali che ogni altro vettore di V può essere espresso come combinazione lineare dei vettori e_i.
In altre parole esistono n numeri a_i, non tutti nulli, tali che ogni vettore $v \in V$ può essere scritto:

$$v = a_1e_1 + a_2e_2 + a_3e_3 + \dots + a_n e_n$$

In questo caso si dice che gli n vettori e_i costituiscono una base dello spazio vettoriale V.

2.10 Equazione caratteristica di una matrice

Sia Y=AX, in cui $A=[a_{ij}]$, (i,j = 1,2,.... n), una trasformazione lineare su F. In genere la trasformazione porta un vettore $X = [x_1, x_2,..., x_n]$ in uno $Y = [y_1, y_2, ... y_n]$ la cui unica

connessione con *X* è attraverso la trasformazione stessa. Indagheremo qui se è possibile portare, per mezzo della trasformazione, dei vettori X in altri λX. Per A s' intende uno scalare di F*,* o di qualche campo **F** nel quale F è un sottocampo.
Ogni vettore X che con la trasformazione venga portato in λX, ovvero, ogni vettore *X* per cui

$$(1) \qquad AX = \lambda X$$

si definisce <u>vettore invariante</u> rispetto alla trasformazione.

Dalla (1) si ottiene:

$$(2) \qquad \lambda X - AX = (\lambda \mathbf{I} - A)X = \begin{bmatrix} \lambda - a_{11} & -a_{12} & \ldots\ldots & -a_{1n} \\ -a_{21} & \lambda - a_{22} & \ldots\ldots & -a_{2n} \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots \\ -a_{n1} & -a_{n2} & \ldots\ldots & \lambda - a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \ldots \\ x_n \end{bmatrix} = 0$$

Il sistema di equazioni omogenee (2) ha delle soluzioni non banali solo ed unicamente se

$$(3) \qquad |\lambda \mathbf{I} - A| = \begin{vmatrix} \lambda - a_{11} & -a_{12} & \ldots\ldots & -a_{1n} \\ -a_{21} & \lambda - a_{22} & \ldots\ldots & -a_{2n} \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots \\ -a_{n1} & -a_{n2} & \ldots\ldots & \lambda - a_{nn} \end{vmatrix} = 0$$

Lo sviluppo di questo determinante fornisce un polinomio $\phi(\lambda)$ di grado n in λ, conosciuto come polinomio caratteristico della matrice A della trasformazione data. L' equazione $\phi(\lambda) = 0$ si chiama equazione caratteristica di A, e le sue radici $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \ldots, \lambda_n$ radici caratteristiche di A. Se $\lambda = \lambda_i$ è una radice caratteristica, la (2) ha delle soluzioni non banali che sono componenti di vettori invarianti, o caratteristici, associati (o corrispondenti) a detta radice.
Le radici caratteristiche sono anche conosciute come radici latenti o autovalori; i vettori caratteristici si dicono vettori latenti o autovettori.

Esempio I. Determinare le radici caratteristiche, e i vettori invarianti associati, per

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix}$$

L' equazione caratteristica è $\begin{vmatrix} \lambda - 2 & -2 & -1 \\ -1 & \lambda - 3 & -1 \\ -1 & -2 & \lambda - 2 \end{vmatrix} = \lambda^3 - 7\lambda^2 + 11\lambda - 5 = 0$

e le radici caratteristiche sono: $\lambda_1 = 5$, $\lambda_2 = 1$, $\lambda_2 = 1$

Quando $\lambda = \lambda_1 = 5$, la (2) diventa:

$$\begin{bmatrix} 3 & -2 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{bmatrix} = 0$$

Cioè il sistema omogeneo:

$$\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 - x_3 = 0 \\ -x_1 + 2x_2 - x_3 = 0 \\ -x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 0 \end{cases}$$

Che ammette ∞^1 soluzioni (k, k, k) con $k \in R$

Quando $\lambda = \lambda_2$=1, la (2) diventa:

$$\begin{bmatrix} -1 & -2 & -1 \\ -1 & -2 & -1 \\ -1 & -2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{bmatrix} = 0$$

Cioè il sistema omogeneo:

$$\begin{cases} -x_1 - 2x_2 - x_3 = 0 \\ -x_1 - 2x_2 - x_3 = 0 \\ -x_1 - 2x_2 - x_3 = 0 \end{cases}$$

Che ammette ∞^2 soluzioni (2h+k, -k, -k) con h, $k \in R$

TEOREMI GENERALI.

I. Se $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \dots, \lambda_p$ sono radici caratteristiche <u>distinte</u> di una matrice A, e se X_l, X_2, ... X_p sono vettori invarianti non nulli rispettivamente associati a dette radici, i vettori X_i sono linearmente indipendenti.

II. La derivata k-esima di $\phi(\lambda)= |\lambda\mathbf{I}- A|$ rispetto a λ con A quadrata di ordine n, vale k! volte la somma dei minori principali di ordine n-k della matrice caratteristica. se è k <n. Vale invece n! se k =n, mentre è 0 quando k> n.

III. Le radici caratteristiche di A e A' sono le stesse.

Confrontando le equazioni caratteristiche troviamo:

IV. Se $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \dots, \lambda_n$ sono le radici caratteristiche di una matrice A quadrata dì ordine n, e se k è uno scalare, allora $k\lambda_1, k\lambda_2, k\lambda_3, \dots, k\lambda_n$ sono le radici caratteristiche di kA.

V. Se $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \dots, \lambda_n$ sono le radici caratteristiche di una matrice A quadrata dì ordine n, e se k è uno scalare, allora λ_1-k, λ_2-k, λ_3-k, … , λ_n-k sono le radici caratteristiche di A - k.**I**

2.11 Similitudine

Due matrici quadrate A e B di ordine n su F si dicono simili sullo stesso campo se su di esso esiste una matrice R non singolare tale che

(1) $$B = R^{-1}AR$$

Esempio l. La matrice $A = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix}$, e la matrice

$$B = R^{-1}A\,R = \begin{bmatrix} 7 & -3 & -3 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 1 & 4 & 3 \\ 1 & 3 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 14 & 13 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

sono simili, infatti le equazioni caratteristiche di A e di B sono uguali. Quindi:

I. Due matrici simili hanno le stesse radici caratteristiche.

II. Se Y è un vettore invariante di $B = R^{-1}AR$ e corrisponde alla radice caratteristica k_i di B, allora X = R Y è un vettore invariante di A e corrisponde alla stessa radice caratteristica k_i di A.
Le radici caratteristiche di una matrice diagonale $D = \mathrm{diag}(a_l, a_2, \dots a_n,)$ sono gli stessi elementi diagonali.
Una matrice diagonale ha sempre n vettori invarianti linearmente indipendenti. 1 vettori elementari E_i costituiscono un insieme simile, dato che $DE_i = a_i E_i$, (i = 1, 2, ... n).

III. Ogni matrice quadrata A di ordine n, simile ad una matrice diagonale, ha n vettori invarianti linearmente indipendenti.

IV. Se una matrice A, quadrata di ordine n, ha n vettori invarianti linearmente indipendenti, essa è simile ad una matrice diagonale.

V. Su di un campo F una matrice quadrata A di ordine n è simile ad una matrice diagonale solo ed unicamente se $\lambda\mathbf{I}$-A si riduce completamente in fattori nel campo F, e se la molteplicità di ogni X_i è uguale alla dimensione dello spazio nullo di $\lambda\mathbf{I}$-A.

(Dicesi spazio nullo di una matrice A lo spazio vettoriale dei vettori soluzione del sistema omogeneo AX=0)

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI “LA SAPIENZA”
PRIMA FACOLTÀ DI ARCHITETTURA “L. QUARONI”
Corso di Laurea in Urbanistica e S.I.T.

Ilia Arcidiacono

ANALISI MATEMATICA
ALGEBRA LINEARE
GEOMETRIA ANALITICA

A.A. 2002-2003

Parte Seconda

ALGEBRA LINEARE

Cap. 3 Sistemi Lineari

Cap. 3: Sistemi lineari

3.1 Definizione di sistema lineare

Dicesi sistema lineare un insieme di m equazioni lineari in n incognite e soluzione di un sistema la n-pla di valori tale che sostituendo tali valori alle incognite tutte le equazioni del sistema risultino essere identità.
In generale possiamo quindi scrivere un sistema lineare nel seguente modo:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

Denotiamo con A_{mxn} la matrice $[a_{ij}]$ dei coefficienti (l'indice di riga i individua l'equazione e l'indice di colonna j l'incognita), con X_{nx1} il vettore unicolonna delle n incognite e con B_{mx1} il vettore unicolonna dei termini noti b_i, allora il sistema precedente può anche essere scritto in forma matriciale:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \ldots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \ldots \\ b_m \end{bmatrix}$$

oppure, ancor meglio, in forma matriciale compatta:

$$A_{m\times n}X_{n\times 1} = B_{m\times 1}$$

In tal modo si vede che un sistema lineare di m equazioni in n incognite è assimilabile ad una equazione lineare (di primo grado) con coefficiente, incognita e termine noto di tipo matriciale.
L'analoga della equazione precedente, ma con valori in R, è ax=b che, come sappiamo, ha sempre una ed una sola soluzione quando $a\neq 0$, non ha alcuna soluzione quando a=0 e $b\neq 0$ ed, infine, può avere ∞ soluzioni quando a=b=0.
Un sistema lineare in generale si comporterà in maniera analoga, cioè:

1) ha una ed una sola soluzione e si dice determinato,
2) non ha alcuna soluzione e si dice impossibile,
3) ha ∞ soluzioni e si dice indeterminato.

Inoltre potrà essere:

1) m = n, (sistema a matrice quadrata)
2) m > n
3) m < n

3.2 Sistema a matrice quadrata. Teorema di Cramer

Un sistema lineare di n equazioni in n incognite si scrive:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

oppure in forma matriciale:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \ldots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \ldots \\ b_n \end{bmatrix}$$

o in forma matriciale compatta:

$$A_{n\times n}X_{n\times 1} = B_{n\times 1}$$

Dimostriamo il Teorema di Cramer: Condizione necessaria e sufficiente affinché un sistema lineare di n equazioni in n incognite sia risolubile e determinato è che il determinante della matrice A dei coefficienti sia diverso da zero

Dimostrazione:

Il sistema in forma matriciale compatta si scrive:

$$A_{n\times n}X_{n\times 1} = B_{n\times 1}$$

tale scrittura lo rende analogo ad una equazione di primo grado, se il det(A) ≠ 0, allora esiste la matrice inversa di A e allora moltiplichiamo per A^{-1} a sinistra ambo i membri dell' equazione precedente, si ha:

$$A^{-1}_{n\times n}A_{n\times n}X_{n\times 1} = A^{-1}_{n\times n}B_{n\times 1}$$

$$I_{n\times n}X_{n\times 1} = A^{-1}_{n\times n}B_{n\times 1}$$

$$X_{n\times 1} = A^{-1}_{n\times n}B_{n\times 1}$$

In questo modo siamo riusciti a determinare la soluzione del sistema e la formula precedente ci fornisce anche la cosiddetta Regola di Cramer, cioè l' algoritmo che ci permette di calcolare la soluzione.

3.3 Teorema di Rouché-Capelli

Un sistema lineare di m equazioni in n incognite (m>n) è risolubile (compatibile) se il rango della matrice A dei coefficienti è uguale al rango della matrice B dei coefficienti e termini noti.
Il metodo di calcolo proposto però non prevede il calcolo del rango di B, ma soltanto quello di A.
Il minore non nullo che determina il rango di A viene detto "determinante fondamentale", supponendo che il rango sia p $\leq$ min(m,n), calcoliamo i determinanti associati (orlati) che si ottengono dal determinate fondamentale orlandolo con la colonna dei termini noti e con i coefficienti di ciascuna delle equazioni che non sono state prese in considerazione nel determinante fondamentale stesso.
Il teorema di Rouché-Capelli ci assicura che, nel caso che <u>tutti</u> i determinati associati siano nulli, allora il sistema è compatibile, cioè esiste almeno una sua soluzione.

ESEMPIO 1:

$$\begin{cases} 3x+y-z=1 \\ x+y+2z=0 \\ -x-2y-z=1 \\ 2x-y-2z=3 \end{cases}$$

si ha:

$$A_{4\times 3}=\begin{bmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \\ -1 & -2 & -1 \\ 2 & -1 & -2 \end{bmatrix} \qquad B_{4\times 4}=\begin{bmatrix} 3 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 0 \\ -1 & -2 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & -2 & 3 \end{bmatrix}$$

Troviamo il rango di A, che può essere al massimo 3:

$$\begin{vmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \\ -1 & -2 & -1 \end{vmatrix}=9\neq 0$$

Il primo minore calcolato (ottenuto cancellando nella matrice A la 4° riga) è "fortunatamente" diverso da zero, quindi r(A)=3, questo determinate è il determinante fondamentale ed è tutto contenuto anche in B, il suo determinate associato è proprio tutto B, infatti è ottenuto orlando il determinate fondamentale con la colonna dei termini noti e la riga dei coefficienti delle incognite nella 4° equazione:

$$\begin{vmatrix} 3 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 0 \\ -1 & -2 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & -2 & 3 \end{vmatrix}=9\neq 0$$

(abbiamo evidenziato il determinate fondamentale)
Poiché il determinate associato non è nullo, il sistema dato non è compatibile, quindi non ammette alcuna soluzione
ESEMPIO 2:

$$\begin{cases} 2x + y - z = 2 \\ -x + 2y + z = 2 \\ 2x - 2y - z = -1 \\ -x + 2y - 3z = -2 \end{cases}$$

si ha:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 2 & -2 & -1 \\ -1 & 2 & -3 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & -2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -3 & -2 \end{bmatrix}$$

r(A)=3,2,1

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 2 & -2 & -1 \end{bmatrix}\begin{array}{cc} 2 & 1 \\ -1 & 2 \\ 2 & -2 \end{array} = -4 + 2 - 2 - (+1 - 4 - 4) = -4 + 7 = 3 \neq 0$$

Il primo minore di terzo ordine della matrice A è diverso da zero, quindi il rango di A è 3. Calcoliamo il determinante associato al fondamentale:

$$\det(B) = \begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & -2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -3 & -2 \end{vmatrix} = 0$$

quindi secondo il Teorema di Rouché-Capelli, il sistema è compatibile, possiamo allora risolverlo. Naturalmente risolveremo il sistema formato dalle prime 3 equazioni, in quanto la quarta equazione è compatibile con esse dato che il determinante associato è nullo.

$$\begin{cases} x = \dfrac{\begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & 1 \\ -1 & -2 & -1 \end{vmatrix}}{3} = 1 \\[2ex] y = \dfrac{\begin{vmatrix} 2 & 2 & -1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & -1 \end{vmatrix}}{3} = 1 \\[2ex] z = \dfrac{\begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 2 \\ 2 & -2 & -1 \end{vmatrix}}{3} = 1 \end{cases}$$

3.4 Sistemi omogenei

Dato il sistema

$$A_{n\times n}X_{n\times 1}=B_{n\times 1}$$

se il vettore $B_{m\times 1}$ dei termini noti è il vettore nullo, il sistema si dice omogeneo e diventa:

$$A_{n\times n}X_{n\times 1}=0$$

Se det(A)≠0, esiste la matrice inversa A^{-1} allora, moltiplicando ambo i membri a sinistra per A^{-1}, si ha:

$$A^{-1}_{n\times n}A_{n\times n}X_{n\times 1}=A^{-1}_{n\times n}\cdot 0 \quad \text{quindi} \quad X_{n\times 1}=0$$

allora, in tal caso, il sistema ammette la soluzione nulla che viene detta banale: $\begin{cases} x_1=0 \\ x_2=0 \\ \dots\dots \\ x_n=0 \end{cases}$

Se invece det(A)=0 non esiste la inversa A^{-1}, dobbiamo quindi procedere facendo altre considerazioni.
Ricordiamo prima di tutto che, per il Teorema di Cramer, un sistema "quadrato" è risolubile e determinato se e solo se il determinante della matrice dei suoi coefficienti è diverso da zero, cioè quando la matrice dei coefficienti è costituita da tutti vettori tra di loro indipendenti. Nel sistema dato quando det(A)=0 significa che le equazioni del sistema sono tra di loro dipendenti ed il r(A) indicherà il numero di quelle indipendenti
Trovando quindi il r(A) si troverà un minore di A diverso da zero, considerando le equazioni e le incognite che i cui coefficienti sono compresi nel minore suddetto e portando a secondo membro le incognite non comprese si otterrà un sistema quadrato determinato la cui soluzione dipende dalle incognite che abbiamo portato a secondo membro. Per esempio se r(A)=p<n il sistema avrà ∞n-p soluzioni dipendenti quindi da n-p incognite.

ESEMPIO:
Denotiamo con x_1, x_2, x_3, x_4 le incognite del sistema, sia dato quindi il sistema:

$$\begin{cases} x_1+2x_2-5x_3+4x_4 = 0 \\ 2x_1-3x_2+2x_3+3x_4 = 0 \\ 4x_1-7x_2+x_3-6x_4 = 0 \\ 3x_1-9x_2+6x_3-10x_4 = 0 \end{cases}$$

Calcoliamo il determinante dei coefficienti:

$$\det(A)=\begin{vmatrix} 1 & 2 & -5 & 4 \\ 2 & -3 & 2 & 3 \\ 4 & -7 & 1 & -6 \\ 3 & -9 & 6 & -10 \end{vmatrix}=0$$

Quindi il r(A) < 4, troviamo allora un minore del 3° ordine diverso da zero:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & -5 \\ 2 & -3 & 2 \\ 4 & -7 & 1 \end{vmatrix} = 33 \neq 0$$

Il minore precedente ha gli elementi che sono i coefficienti delle prime tre equazioni nelle prime tre incognite, quindi portando a secondo membro l'incognita x_4 si deve risolvere il sistema:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 5x_3 = -4x_4 \\ 2x_1 - 3x_2 + 2x_3 = -3x_4 \\ 4x_1 - 7x_2 + x_3 = 6x_4 \end{cases}$$

Dove x_4 viene considerato come un parametro $\alpha \in R$, il sistema allora diventa:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 5x_3 = -4\alpha \\ 2x_1 - 3x_2 + 2x_3 = -3\alpha \\ 4x_1 - 7x_2 + x_3 = 6\alpha \end{cases}$$

Che ammette ∞^{n-p} soluzioni, quindi $\infty^{4-3} = \infty^1$ soluzioni dipendenti da α:

$$\begin{cases} x_1 = -\dfrac{19}{3}\alpha \\ x_2 = -\dfrac{53}{11}\alpha \\ x_3 = -\dfrac{79}{33}\alpha \\ x_4 = \alpha \end{cases}$$

In generale in un sistema omogeneo $A_{m \times n} X_{n \times 1} = 0$ può essere:

a) m = n
b) m < n
c) m > n

Il caso a) lo abbiamo appena esaminato esaminiamo ora i casi b) e c) mediante alcuni esempi:

ESEMPIO 1 caso b):

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 5x_3 - 4x_4 = 0 \\ 2x_1 - 3x_2 + 2x_3 - 3x_4 = 0 \\ 4x_1 - 7x_2 + x_3 - 6x_4 = 0 \end{cases}$$

Scriviamo la matrice dei coefficienti A:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -5 & -4 \\ 2 & -3 & 2 & -3 \\ 4 & -7 & 1 & -6 \end{bmatrix}$$

Calcoliamo il rango di A:

$$\begin{vmatrix} 2 & -5 & -4 \\ -3 & 2 & -3 \\ -7 & 1 & -6 \end{vmatrix} = -77 \neq 0$$

Quindi r(A)=3, riscriviamo il sistema ponendo $x_1=\alpha$ e portandolo a secondo membro in tutte le equazioni:

$$\begin{cases} 2x_2 - 5x_3 - 4x_4 = -\alpha \\ -3x_2 + 2x_3 - 3x_4 = -2\alpha \\ -7x_2 + x_3 - 6x_4 = -4\alpha \end{cases}$$

Questo sistema quadrato in x_2, x_3 e x_4 ha il determinante dei coefficienti diverso da zero, quindi è verificato il Teorema di Cramer e possiamo risolverlo usando la Regola di Cramer:

$$\begin{cases} x_1 = \alpha \\ x_2 = \dfrac{\begin{vmatrix} -\alpha & -5 & -4 \\ -2\alpha & 2 & -3 \\ -4\alpha & 1 & -6 \end{vmatrix}}{-77} = \dfrac{15}{77}\alpha \\ x_3 = \dfrac{\begin{vmatrix} 2 & -\alpha & -4 \\ -3 & -2\alpha & -3 \\ -7 & -4\alpha & -6 \end{vmatrix}}{-77} = -\dfrac{5}{77}\alpha \\ x_4 = \dfrac{\begin{vmatrix} 2 & -5 & -\alpha \\ -3 & 2 & -2\alpha \\ -7 & 1 & -4\alpha \end{vmatrix}}{-77} = \dfrac{-33}{-77}\alpha = \dfrac{3}{7}\alpha \end{cases}$$

Il sistema è indeterminato ed abbiamo trovato le sue ∞^1 soluzioni dipendenti da α.

ESEMPIO 2 caso c):

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 2x_3 = 0 \\ 2x_1 + x_2 - 2x_3 = 0 \\ 3x_1 + 4x_2 - 6x_3 = 0 \\ 3x_1 - 11x_2 + 12x_3 = 0 \end{cases}$$

Scriviamo la matrice dei coefficienti A:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 3 & 4 & -6 \\ 3 & -11 & 12 \end{bmatrix}$$

Calcoliamo il rango di A:

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 3 & 4 & -6 \end{vmatrix} = 0 \qquad \begin{vmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 3 & -11 & 12 \end{vmatrix} = 0 \qquad \begin{vmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 3 & 4 & -6 \\ 3 & -11 & 12 \end{vmatrix} = 0 \qquad \begin{vmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 3 & 4 & -6 \\ 3 & -11 & 12 \end{vmatrix} = 0$$

Quindi r(A) ≤ 2 perché tutti i minori del 3° ordine sono nulli, passiamo allora a calcolare i minori del 2° ordine:

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 1 + 4 = 5 \neq 0$$

Abbiamo trovato un minore del 2° ordine diverso da zero, quindi r(A)=2 riscriviamo il sistema considerando solo le prime due equazioni, poniamo $x_3 = \alpha$ e portiamolo a secondo membro:

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 = -2\alpha \\ 2x_1 + x_2 = 2\alpha \end{cases}$$

Il sistema è di Cramer, quindi:

$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{\begin{vmatrix} -2\alpha & -2 \\ 2\alpha & 1 \end{vmatrix}}{5} = \dfrac{\begin{vmatrix} -2 & -2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}}{5}\alpha = \dfrac{-2+4}{5}\alpha = \dfrac{2}{5}\alpha \\ x_2 = \dfrac{\begin{vmatrix} 1 & -2\alpha \\ 2 & 2\alpha \end{vmatrix}}{5} = \dfrac{\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 2 \end{vmatrix}}{5}\alpha = \dfrac{2+2}{5}\alpha = \dfrac{4}{5}\alpha \\ x_3 = \alpha \end{cases}$$

3.5 Discussione dei sistemi parametrici

Un sistema parametrico è un sistema lineare omogeneo o non omogeneo in cui alcuni coefficienti e/o termini noti invece di essere numeri finiti sono “parametri” (cioè lettere per esempio h, k, α, β, δ, λ, ecc.). La discussione di un sistema parametrico si effettua trovando per quali valori dei parametri il sistema stesso è risolubile:determinato o indeterminato ovvero è impossibile. Nel caso che il sistema sia risolubile allora si deve trovarne la o le soluzioni.

Facciamo ora alcuni esempi di discussione di un sistema.
Per non appesantire i calcoli ci limiteremo a sistemi con massimo 3 incognite: x, y, z e in non più di 4 equazioni.

ESEMPIO 1:

$$\begin{cases} kx - y + z = k \\ 2x - y + kz = -3 \\ -2x + 2y - z = 3 \end{cases}$$

Sistema lineare non omogeneo parametrico di 3 equazioni in 3 incognite.
Scriviamo le matrici del sistema:

$$A = \begin{bmatrix} k & -1 & 1 \\ 2 & -1 & k \\ -2 & 2 & -1 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} k & -1 & 1 & k \\ 2 & -1 & k & -3 \\ -2 & 2 & -1 & 3 \end{bmatrix}$$

Calcoliamo il determinante di A:

$$\det(A) = \begin{vmatrix} k & -1 & 1 \\ 2 & -1 & k \\ -2 & 2 & -1 \end{vmatrix} \begin{matrix} k & -1 \\ 2 & -1 \\ -2 & 2 \end{matrix} = k - 2k - 4 - (2 + 2k^2 + 2) = -2k^2 + 3k$$

$$\det(A) = -2k^2 + 3k \begin{matrix} \nearrow & = 0 \begin{cases} k = 0 \\ k = \dfrac{3}{2} \end{cases} \\ \searrow & \neq 0 \begin{cases} k \neq 0 \\ k \neq \dfrac{3}{2} \end{cases} \end{matrix}$$

$\boxed{1}$ $k \neq 0,\ k \neq \frac{3}{2}$

Il sistema è di Cramer quindi è determinato ed ammette una ed una sola soluzione:

$$\begin{cases} x = \dfrac{\begin{vmatrix} k & -1 & 1 \\ -3 & -1 & k \\ 3 & 2 & -1 \end{vmatrix}}{-2k^2+3k} = \dfrac{2k+2}{2k-3} \\ \\ y = \dfrac{\begin{vmatrix} k & k & 1 \\ 2 & -3 & k \\ -2 & 3 & -1 \end{vmatrix}}{-2k^2+3k} = \dfrac{5k-5}{2k-3} \\ \\ z = \dfrac{\begin{vmatrix} k & -1 & k \\ 2 & -1 & -3 \\ -2 & 2 & 3 \end{vmatrix}}{-2k^2+3k} = \dfrac{5}{3-2k} \end{cases}$$

$\boxed{2}$ k=0

Allora il sistema diventa (sostituendo a k il suo valore):

$$\begin{cases} -y+z=0 \\ 2x-y=-3 \\ -2x+2y-z=3 \end{cases}$$

La cui matrice dei coefficienti ha determinante nullo*, quindi r(A)<3 Determiniamone il rango estraendo un minore diverso da zero (per esempio quello formato dalle prime due righe e dalle prime due colonne)

$$\begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = 2 \neq 0$$

* non occorre calcolarlo perché k=0 è una soluzione dell'equazione det(A)= $-2k^2+3k=0$

quindi r(A)=2 e questo appena calcolato è il determinate fondamentale del sistema, applichiamo il Teorema di Rouché-Capelli calcolando il determinante associato al fondamentale:

$$\begin{vmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 2 & -1 & -3 \\ -2 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 0$$

quindi poiché il determinante associato è zero il sistema è compatibile e indeterminato. Possiamo calcolarne le $\infty^{3-2} = \infty^{1}$ soluzioni risolvendo in x ed y il sistema formato dalle prime due equazioni e ponendo $z = \alpha \in R$

$$\begin{cases} -y = -\alpha \\ 2x - y = -3 \\ z = \alpha \end{cases} \qquad \begin{cases} y = \alpha \\ 2x - \alpha = -3 \\ z = \alpha \end{cases} \qquad \begin{cases} x = \dfrac{\alpha - 3}{2} \\ y = \alpha \\ z = \alpha \end{cases}$$

$\boxed{3}$ $k = \dfrac{3}{2}$

Il sistema diventa:

$$\begin{cases} \dfrac{3}{2}x - y + z = \dfrac{3}{2} \\ 2x - y + \dfrac{3}{2}z = -3 \\ -2x + 2y - z = 3 \end{cases}$$

cioè:

$$\begin{cases} 3x - 2y + 2z = 3 \\ 4x - 2y + 3z = -6 \\ -2x + 2y - z = 3 \end{cases}$$

La cui matrice dei coefficienti ha determinante nullo*, quindi r(A)<3 Determiniamone il rango estraendo un minore diverso da zero (per esempio quello formato dalla prima e dalla terza riga e dalle prime due colonne)

---

* non occorre calcolarlo perché $k=\frac{3}{2}$ è una soluzione dell'equazione $\det(A)= -2k^2+3k=0$

$$\begin{vmatrix} 3 & -2 \\ -2 & 2 \end{vmatrix} = 6 - 4 = 2 \neq 0$$

quindi r(A)=2 e questo appena calcolato è il determinate fondamentale del sistema, applichiamo il Teorema di Rouché-Capelli calcolando il determinante associato al fondamentale:

$$\begin{vmatrix} 3 & -2 & 3 \\ -2 & 2 & 3 \\ 4 & -2 & -6 \end{vmatrix} = -36 - 24 + 12 - 24 + 18 + 24 = -30 \neq 0$$

quindi poiché il determinante associato è diverso da zero il sistema è incompatibile.

ESEMPIO 2:

$$\begin{cases} x - 2y = -k \\ x - ky = 0 \\ 3x - 2y = k \\ -2x + ky = -1 \end{cases}$$

Sistema lineare non omogeneo parametrico di 4 equazioni in 2 incognite.
Scriviamo le matrici del sistema:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 1 & -k \\ 3 & -2 \\ -2 & k \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 1 & -2 & -k \\ 1 & -k & 0 \\ 3 & -2 & k \\ -2 & k & -1 \end{bmatrix}$$

Calcoliamo il rango di A estraendo un minore qualsiasi (per esempio quello formato dalle prime due righe nelle due colonne):

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 1 & -k \end{vmatrix} = -k + 2 \begin{cases} \nearrow \neq 0 \rightarrow k \neq 2 \\ \searrow = 0 \rightarrow k = 2 \end{cases}$$

$\boxed{1}$ $\quad k \neq 2$

allora r(A) = 2, verifichiamo la compatibilità delle equazioni terza e quarta con le prime due, cioè calcoliamo i due determinanti associati:

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 & -k \\ 1 & -k & 0 \\ 3 & -2 & k \end{vmatrix} = -4k^2 + 4k = 0 \quad \begin{matrix} \nearrow & k = 0 \\ \searrow & \boxed{k = 1} \end{matrix}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 & -k \\ 1 & -k & 0 \\ -2 & k & -1 \end{vmatrix} = k^2 + k - 2 = 0 \quad \begin{matrix} \nearrow & k = -2 \\ \searrow & \boxed{k = 1} \end{matrix}$$

Per $k = 1 \neq 2$[#] entrambi i determinanti associati sono nulli, quindi il sistema è compatibile per tale valore di k, calcoliamo allora la soluzione del sistema formato dalle prime due equazioni:

$$\begin{cases} x - 2y = -1 \\ x - y = 0 \end{cases} \qquad \text{si ha} \qquad \begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \end{cases}$$

ed il sistema in questo caso è determinato.

$\boxed{2}$ K = 2

per determinare il rango di A dobbiamo ancora trovare un minore diverso da zero, intanto il sistema diventa:

$$\begin{cases} x - 2y = -2 \\ x - 2y = 0 \\ 3x - 2y = 2 \\ -2x + 2y = -1 \end{cases} {}^{*}$$

con le matrici:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 1 & -2 \\ 3 & -2 \\ -2 & 2 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 1 & -2 & -2 \\ 1 & -2 & 0 \\ 3 & -2 & 2 \\ -2 & 2 & -1 \end{bmatrix}$$

Calcoliamo un altro minore di A (per esempio considerando la prima e la terza riga con entrambe le colonne):

[#] Ricordiamo che siamo nel primo caso quindi con $k \neq 2$

[*] Dall'esame del sistema si nota subito che le prime due equazioni hanno il I membro uguale ed i termini noti diversi, quindi sono incompatibili, come lo è tutto il sistema

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} = -2+6=4\neq 0$$

È r(A)=2 verifichiamo il Teorema di Rouché-Capelli calcolando i due determinanti associati:

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 & -2 \\ 3 & -2 & 2 \\ 1 & -2 & 0 \end{vmatrix} = -4+12-4+4=8\neq 0$$

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 & -2 \\ 3 & -2 & 2 \\ -2 & 2 & -1 \end{vmatrix} = 2+8-12+8-4-6=-4\neq 0$$

Già dopo il calcolo del primo determinante associato possiamo affermare che il sistema per k = 2 è incompatibile.

ESEMPIO 3:

$$\begin{cases} kx+y-2z=0 \\ 2x+ky-z=0 \\ 2x-y+5z=0 \end{cases}$$

Sistema lineare omogeneo di 3 equazioni in 3 incognite, Calcoliamo il determinante della matrice A dei coefficienti:

$$\det(A)=\det\begin{bmatrix} k & 1 & -2 \\ 2 & k & -1 \\ 2 & -1 & 5 \end{bmatrix} = \begin{vmatrix} k & 1 & -2 \\ 2 & k & -1 \\ 2 & -1 & 5 \end{vmatrix} = 5k^2-2+4+4k-k-10=5k^2+3k-8 \begin{cases} =0 \Rightarrow k=1 \text{ e } k=-\frac{8}{5} \\ \neq 0 \Rightarrow k\neq 1 \text{ e } k\neq -\frac{8}{5} \end{cases}$$

$\boxed{1}$ $\quad k\neq 1 \text{ e } k\neq -\frac{8}{5}$

In questo caso $\det(A)\neq 0$ quindi il sistema ammette solo la soluzione banale nulla:

$$\begin{cases} x=0 \\ y=0 \\ z=0 \end{cases}$$

$\boxed{2}$ $k = 1$

In questo caso det(A) = 0 quindi il sistema ammette autosoluzioni, scriviamo il sistema in questo caso:

$$\begin{cases} x + y - 2z = 0 \\ 2x + y - z = 0 \\ 2x - y + 5z = 0 \end{cases} \qquad A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 2 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 5 \end{bmatrix}$$

determiniamo dapprima il rango di A, cioè troviamo un minore diverso da zero:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 1 - 2 = -1 \neq 0$$

Quindi r(A) = 2, il sistema è sicuramente compatibile perché è omogeneo, quindi risolviamolo:

$$\begin{cases} x + y = 2\alpha \\ 2x + y = \alpha \\ z = \alpha \end{cases}$$

Da cui si trovano le $\infty^{3-2} = \infty^1$ autosoluzioni ed il sistema è indeterminato:

$$\begin{cases} x = -\alpha \\ y = 3\alpha \\ z = \alpha \end{cases}$$

Abbiamo trovato le $\infty^{3-2} = \infty^1$ autosoluzioni ed il sistema è quindi indeterminato:

$\boxed{3}$ $k = -\frac{8}{5}$

Anche in questo caso det(A) = 0 quindi il sistema ammette autosoluzioni, riscriviamo il sistema:

$$\begin{cases} -\frac{8}{5}x + y - 2z = 0 \\ 2x - \frac{8}{5}y - z = 0 \\ 2x - y + 5z = 0 \end{cases}$$

cioè:

$$\begin{cases} 8x-5y+10z=0 \\ 10x-8y-5z=0 \\ 2x-y+5z=0 \end{cases} \qquad A=\begin{bmatrix} 8 & -5 & 10 \\ 10 & -8 & -5 \\ 2 & -1 & 5 \end{bmatrix}$$

determiniamo dapprima il rango di A, cioè troviamo un minore diverso da zero:

$$\begin{vmatrix} -8 & -5 \\ -1 & 5 \end{vmatrix} = -40-5=45 \neq 0$$

Quindi r(A) = 2, il sistema è sicuramente compatibile perché è omogeneo, quindi risolviamolo:

$$\begin{cases} x=\alpha \\ 8y+5z=10\alpha \\ y-5z=2\alpha \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=\alpha \\ y=\frac{4}{3}\alpha \\ z=-\frac{2}{15}\alpha \end{cases}$$

Abbiamo trovato le $\infty^{3-2}=\infty^1$ autosoluzioni ed il sistema è quindi indeterminato:

ESEMPIO 4:

$$\begin{cases} (k+2)x-7y+6z=-5 \\ kx-5y+5z=k \end{cases}$$

Sistema lineare non omogeneo di 2 equazioni in 3 incognite, scriviamo le matrici del sistema:

$$A=\begin{bmatrix} (k+2) & -7 & 6 \\ k & -5 & 5 \end{bmatrix} \qquad B=\begin{bmatrix} (k+2) & -7 & 6 & -5 \\ k & -5 & 5 & k \end{bmatrix}$$

$r(A) \leq 2$, scriviamo un suo minore del secondo ordine:

$$\begin{vmatrix} -7 & 6 \\ -5 & 5 \end{vmatrix} = -35+30=-5 \neq 0$$

Quindi* r(A) = 2, non dobbiamo verificare la compatibilità mediante il Teorema di Rouché-Capelli in quanto r(A) = numero delle equazioni pertanto il sistema formato dalle due equazioni nelle incognite y e z è di Cramer, calcoliamo allora le ∞^1 soluzioni del sistema determinato:

$$\begin{cases} x = \alpha \\ -7y + 6z = -5 - (k+2)\alpha \\ -5y + 5z = k - k\alpha \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = \alpha \\ y = \dfrac{\begin{vmatrix} -5-(k+2)\alpha & 6 \\ k - k\alpha & 5 \end{vmatrix}}{-5} = \dfrac{5\left[-5-(k+2)\alpha\right] - 6\left[k-k\alpha\right]}{-5} = \dfrac{25 - k\alpha - 10\alpha - 6k}{-5} \\ z = \dfrac{\begin{vmatrix} -7 & -5-(k+2)\alpha \\ -5 & k - k\alpha \end{vmatrix}}{-5} = \dfrac{-7\left[k-k\alpha\right] + 5\left[-5-(k+2)\alpha\right]}{-5} = \dfrac{25 - 2k\alpha + 10\alpha + 7k}{-5} \end{cases}$$

N.B. le ∞^1 soluzioni dipendono dal parametro α e non dal parametro k che è già presente nel sistema e che quindi non influenza il numero delle soluzioni

* In A esiste sempre un minore diverso da zero che non dipende da k