Eserciziario di matematica finanziaria

Moduli

Fondamenti della valutazione finanziaria
Laboratorio di analisi finanziaria

Università degli Studi Roma Tre
anno accademico 2002/2003

Indice

PARTE PRIMA

Contratti a tasso fisso, contratti indicizzati

1 Grandezze finanziarie di base

Riferimenti bibliografici: [M] pp. 17-27, pp. 39-52.

Esercizio 1.1

Si consideri al tempo $t = 0$ l'operazione finanzaria di durata 105 giorni con valore iniziale $x_t = 98.20$ euro e valore finale $x_s = 102.40$ euro, essendo $s = 105$ giorni. Relativamente al periodo $(0, 105)$ giorni calcolare il fattore di sconto, il fattore montante, l'interesse, il tasso d'interesse periodale, il tasso di sconto, l'intensità d'interesse e l'intensità di sconto.

Soluzione

Il fattore di sconto è calcolato dalla:

$$v(0, 105) = \frac{x_t}{x_s} = \frac{98.20}{102.40} = 0.95898\,,$$

mentre il fattore montante, essendo il reciproco del fattore di sconto, si ottiene dalla:

$$m(0, 105) = \frac{x_s}{x_t} = \frac{102.40}{98.20} = 1.04277\,.$$

L'interesse è:

$$I(0, 105) = x_s - x_t = 102.40 - 98.20 = 4.20 \text{ euro.}$$

Il tasso d'interesse periodale è dato dal rapporto tra l'interesse e il valore iniziale x_t, ossia:

$$j(0, 105) = \frac{x_s - x_t}{x_t} = \frac{102.40 - 98.20}{98.20} = 4.27699\%\,,$$

mentre il tasso di sconto periodale è ottenuto dal rapporto tra l'interesse e il valore finale x_s, ossia:

$$d(0, 105) = \frac{x_s - x_t}{x_s} = \frac{102.40 - 98.20}{102.40} = 4.10156\%\,.$$

L'intensità d'interesse e di sconto sono date dal rapporto, rispettivamente, tra il tasso di interesse periodale e l'ampiezza dell'orizzonte di scambio, e il tasso di sconto periodale e l'ampiezza dell'orizzonte di scambio, quindi:

$$\begin{aligned} \gamma(0, 105) &= \frac{j(0, 105)}{105}\,, \\ \alpha(0, 105) &= \frac{d(0, 105)}{105}\,, \end{aligned}$$

da cui si ottengono i valori:

$$\begin{aligned} \gamma(0, 105) &= 0.000407 \text{ giorni}^{-1}\,, \\ \alpha(0, 105) &= 0.000391 \text{ giorni}^{-1}\,. \end{aligned}$$

Esercizio 1.2

Si consideri l'operazione finanziaria dell'esercizio 1.1, si ipotizzi per l'anno la durata civile (365 giorni).
(a) Calcolare il tasso di interesse equivalente, su base annua e su base semestrale, al tasso di interesse periodale nel caso di legge esponenziale e nel caso di legge lineare.
(b) Calcolare l'intensità istantanea d'interesse su base annua e su base semestrale nel caso di legge esponenziale.

Soluzione

(a) Il tasso d'interesse su base annua, equivalente in legge esponenziale al tasso periodale $j(0,105)$ (su base 105 giorni), si ottiene dalla:

$$i = (1 + j(0,105))^q - 1\,,$$

dove q è il fattore di scala uguale a $365/105$; quindi $i = 15.67156\%$.
Il tasso d'interesse su base semestrale è calcolato dal tasso di interesse su base annua essendo il fattore di scala $q = 1/2$ [1] , ossia:

$$i = (1 + 0.15672)^{\frac{1}{2}} - 1 = 7.55071\%\,.$$

Il tasso d'interesse su base annua equivalente in legge lineare al tasso periodale $j(0,105)$ è calcolato dalla:

$$i = j(0,105)\,\frac{365}{105} = 14.86762\%\,.$$

In maniera analoga il tasso d'interesse su base semestrale è [2] :

$$i = \frac{1}{2}\,0.1486762 = 7.43381\%\,.$$

(b) L'intensità istantanea d'interesse su base annua è:

$$\delta = \ln(1+i) = 0.14559 \text{ anni}^{-1}\,,$$

essendo i il tasso di interesse su base annua. Se nella precedente relazione si considera il tasso di interesse $i = 7.55071\%$ su base semestrale si otterrà l'intensità istantanea di interesse su base semestrale, $\delta = 0.07279$ semestri^{-1}.

Esercizio 1.3

Si consideri l'operazione finanziaria che garantisce il raddoppio del capitale investito in 2 anni e 3 mesi; calcolare il tasso di interesse e il tasso di sconto su base periodale. Calcolare il tasso d'interesse equivalente su base annua e su base semestrale nel caso di legge esponenziale.

[1] Può anche essere calcolato a partire dal tasso periodale $j(0,105)$ considerando il fattore di scala $q = 182.5/105$.

[2] Come nella nota 1, può anche essere calcolato dalla:

$$i = j(0,105)\,\frac{182.5}{105}\,.$$

Soluzione

Si indichi con x_t il capitale investito nell'istante di tempo $t = 0$. Sia $s = 2.25$ anni, quindi $x_s = 2\,x_t$ è l'importo finale ottenuto dall'investimento del capitale; il tasso di interesse periodale è:

$$j(0, 2.25) = 100\%\,,$$

mentre il tasso di sconto periodale è:

$$d(0, 2.25) = \frac{x_s - x_t}{x_s} = 50\%\,.$$

Nella legge esponenziale il tasso annuo d'interesse equivalente al tasso periodale è calcolato dalla:

$$i = (1 + j(0, 2.25))^{\frac{1}{2.25}} - 1 = 36.07900\%\,,$$

mentre il tasso d'interesse su base semestrale, considerato che l'ampiezza dell'orizzonte di scambio è di 4.5 semestri, è ottenuto dalla [3] :

$$i = (1 + j(0, 2.25))^{\frac{1}{4.5}} - 1 = 16.65290\%\,.$$

[3] Esprimendo l'ampiezza dell'orizzonte di scambio in mesi si può anche scrivere:

$$i = (1 + j(0, 2.25))^{\frac{6}{27}} - 1\,;$$

anche il tasso di interesse su base annua può essere calcolato dalla:

$$i = (1 + j(0, 2.25))^{\frac{12}{27}} - 1\,.$$

2 La struttura per scadenza dei tassi di interesse

Riferimenti bibliografici: [M] pp. 99-131, pp. 155-166.

Esercizio 2.1

Siano $V(0;x_1) = 98.35$ euro, $V(0;x_2) = 192.50$ euro e $V(0;x_3) = 282.50$ euro i prezzi di mercato al tempo $t = 0$ di tre *zero coupon bond* con valori di rimborso $x_1 = 100$ euro, $x_2 = 200$ euro e $x_3 = 300$ euro, esigibili ai tempi $t_1 = 0.5$ anni, $t_2 = 1$ anno e $t_3 = 1.5$ anni.
Calcolare la struttura per scadenza dei tassi di interesse a pronti e a termine uniperiodali corrispondente alla struttura dei prezzi assegnata, esprimendo i tassi su base annua.

Soluzione

Dai prezzi assegnati si calcolano i prezzi degli *zero coupon bond* unitari relativi allo scadenzario $\mathbf{t} = \{t_1, t_2, t_3\}$:

$$\begin{aligned} v(0,t_1) &= \frac{98.35}{100}\,, \\ v(0,t_2) &= \frac{192.50}{200}\,, \\ v(0,t_3) &= \frac{282.50}{300}\,. \end{aligned}$$

I tassi di interesse a pronti su base annua relativi allo scadenzario $\mathbf{t}$ si ottengono, in legge esponenziale, come segue:

$$\begin{aligned} i(0,t_1) &= \left\{\frac{100}{98.35}\right\}^2 - 1\,, \\ i(0,t_2) &= \left\{\frac{200}{192.50}\right\} - 1\,, \\ i(0,t_3) &= \left\{\frac{300}{282.50}\right\}^{2/3} - 1\,, \end{aligned}$$

da cui sono facilmente calcolabili i tassi a termine uniperiodali su base annua, infatti:

$$\begin{aligned} i(0,0,t_1) &= i(0,t_1)\,, \\ i(0,t_1,t_2) &= \frac{[1+i(0,t_2)]^2}{[1+i(0,t_1)]} - 1\,, \\ i(0,t_2,t_3) &= \frac{[1+i(0,t_3)]^3}{[1+i(0,t_2)]^2} - 1\,. \end{aligned}$$

Si ha:

$$\begin{aligned} i(0,t_1) &= 3.38351\,\%\,, & i(0,0,t_1) &= 3.38351\,\%\,, \\ i(0,t_2) &= 3.89610\,\%\,, & i(0,t_1,t_2) &= 4.41124\,\%\,, \\ i(0,t_3) &= 4.08829\,\%\,, & i(0,t_2,t_3) &= 4.47373\,\%\,. \end{aligned}$$

Esercizio 2.2

Siano $V(0;x_1) = 98.84$ euro, $V(0;x_2) = 192.50$ euro e $V(0;x_3) = 277.50$ euro i prezzi di mercato al tempo $t = 0$ di tre *zero coupon bond* con valori di rimborso $x_1 = 100$ euro, $x_2 = 200$ euro e $x_3 = 300$ euro, esigibili ai tempi $t_1 = 65$ giorni, $t_2 = 187$ giorni e $t_3 = 365$ giorni.
Calcolare la struttura per scadenza dei tassi di interesse a pronti e a termine uniperiodali corrispondente alla struttura dei prezzi assegnata, esprimendo i tassi su base annua ed assumendo la durata civile dell'anno (365 giorni).

Soluzione

Come nell'esercizio 2.1, essendo l'anno di 365 giorni, la struttura per scadenza dei tassi a pronti su base annua si ottiene dalle:

$$\begin{aligned} i(0,t_1) &= \left\{\frac{100}{98.84}\right\}^{\frac{365}{65}} - 1\,, \\ i(0,t_2) &= \left\{\frac{200}{192.50}\right\}^{\frac{365}{187}} - 1\,, \\ i(0,t_3) &= \frac{300}{277.50} - 1\,. \end{aligned}$$

La struttura per scadenza dei tassi di interesse a termine uniperiodali è calcolata dai tassi a pronti con le seguenti:

$$\begin{aligned} i(0,0,t_1) &= i(0,t_1)\,, \\ i(0,t_1,t_2) &= \frac{[1+i(0,t_2)]^{\frac{187}{122}}}{[1+i(0,t_1)]^{\frac{65}{122}}} - 1\,, \\ i(0,t_2,t_3) &= \frac{[1+i(0,t_3)]^{\frac{365}{178}}}{[1+i(0,t_2)]^{\frac{187}{178}}} - 1\,. \end{aligned}$$

Si ottengono i valori:

$$\begin{aligned} i(0,t_1) &= 6.77132\,\%\,, & i(0,0,t_1) &= 6.77132\,\%\,, \\ i(0,t_2) &= 7.74562\,\%\,, & i(0,t_1,t_2) &= 8.26834\,\%\,, \\ i(0,t_3) &= 8.10811\,\%\,, & i(0,t_2,t_3) &= 8.49024\,\%\,. \end{aligned}$$

Esercizio 2.3

Si consideri un mercato in cui nell'istante di valutazione $t = 0$ sia in vigore la legge di equivalenza finanziaria:

$$v(0,s) = 1 - ds \qquad \text{con } s \text{ espresso in anni e } d = 0.07.$$

In riferimento allo scadenzario $\{1,2,3\}$ anni, si determinino le strutture per scadenza dei tassi di interesse a pronti, delle intensità istantanee di interesse e delle intensità di rendimento a scadenza, su base annua.

Soluzione

La struttura per scadenza dei tassi di interesse a pronti su base annua si calcola come:

$$i(0,s) = v(0,s)^{-1/s} - 1$$

per $s = 1, 2, 3$, quindi sostituendo il valore della costante d si ha:

$$\begin{aligned} i(0,1) &= 7.52688\% \\ i(0,2) &= 7.83277\% \\ i(0,3) &= 8.17435\% \end{aligned}$$

Essendo:

$$\delta(0,s) = -\frac{\partial}{\partial s} \log v(0,s)$$

si ricava l'espressione:

$$\delta(0,s) = \frac{d}{v(0,s)}$$

da cui:

$$\begin{aligned} \delta(0,1) &= 0.07527 \text{ anni}^{-1}, \\ \delta(0,2) &= 0.08140 \text{ anni}^{-1}, \\ \delta(0,3) &= 0.08861 \text{ anni}^{-1}. \end{aligned}$$

La struttura dell'intensità di rendimento a scadenza su base annua può essere calcolata con la formula:

$$h(0,s) = -\log[1 + i(0,s)],$$

o equivalentemente dalla:

$$h(0,s) = \frac{\log[v(0,s)]}{s},$$

quindi si ha:

$$\begin{aligned} h(0,1) &= 0.07257 \text{ anni}^{-1}, \\ h(0,2) &= 0.07541 \text{ anni}^{-1}, \\ h(0,3) &= 0.07857 \text{ anni}^{-1}. \end{aligned}$$

Esercizio 2.4

Si consideri, nell'istante di valutazione $t = 0$, un mercato descritto dalla funzione intensità istantanea di interesse:

$$\delta(0,s) = 0.06 - 0.0025s, \qquad \text{per ogni } s \geq 0.$$

In riferimento allo scadenzario $\{1, 2, 3\}$ anni, si determinino le strutture per scadenza dei tassi di interesse a pronti e dei tassi di interesse a termine uniperiodali, esprimendo i tassi su base annua.

Soluzione

Per $s = 1, 2, 3$ dalla formula:

$$i(0,s) = e^{\frac{1}{s}\int_0^s \delta(0,u)du} - 1$$

si ricava la struttura per scadenza dei tassi di interesse a pronti su base annua. I tassi a termine uniperiodali si ottengono dalla:

$$i(0,s-1,s) = e^{\int_{s-1}^s \delta(0,u)du} - 1\,,$$

ancora per $s = 1, 2, 3$.
Risolvendo l'integrale si ottiene:

$$i(0,s) = e^{0.06-0.0025\frac{s}{2}} - 1\,, \quad \text{e} \quad i(0,s-1,s) = e^{0.06-\frac{0.0025}{2}[s^2-(s-1)^2]} - 1\,,$$

quindi:

$$\begin{aligned} i(0,1) &= 6.05101\,\%\,, & i(0,0,1) &= 6.05101\,\%\,,\\ i(0,2) &= 5.91853\,\%\,, & i(0,1,2) &= 5.78621\,\%\,,\\ i(0,3) &= 5.78621\,\%\,, & i(0,2,3) &= 5.52208\,\%\,. \end{aligned}$$

Esercizio 2.5

Si consideri, nell'istante di valutazione $t = 0$, un mercato descritto dalla funzione intensità istantanea di interesse:

$$\delta(0,s) = \alpha + \beta s^2 + \gamma s^3\,, \qquad \text{con } s > 0;$$

essendo il tempo espresso in anni, con $\alpha = 0.075$, $\beta = 0.0029$ e $\gamma = 0.0003$.
In riferimento allo scadenzario $\{1, 2, 3\}$ anni, si determino le intensità di rendimento a scadenza a pronti, i tassi di interesse a pronti, i tassi di interesse a termine uniperiodali, esprimendo i tassi su base annua.

Soluzione

La relazione che esprime l'intensità di rendimento a scadenza a pronti in termini dell'intensità istantanea di interesse a pronti è:

$$h(0,s) = \frac{1}{s}\int_0^s \delta(0,u)du\,.$$

Risolvendo l'integrale si ottiene:

$$h(0,s) = \alpha + \beta\frac{s^2}{3} + \gamma\frac{s^3}{4}$$

Per $s = 1, 2, 3$ si ottengono le strutture delle intensità di rendimento a scadenza a pronti:

$$\begin{aligned} h(0,1) &= 0.07604 \text{ anni}^{-1}\,,\\ h(0,2) &= 0.07947 \text{ anni}^{-1}\,,\\ h(0,3) &= 0.08573 \text{ anni}^{-1}\,,\ . \end{aligned}$$

I tassi di struttura a pronti e a termine uniperiodali si ricavano dalle seguenti espressioni:

$$i(0,s) = e^{h(0,s)} - 1 \ , \ i(0,s-1,s) = e^{h(0,s-1,s)} - 1 \, ,$$

e si ha:

$$\begin{aligned} i(0,1) &= 7.90075 \, , \\ i(0,2) &= 8.27095 \, , \\ i(0,3) &= 8.95067 \ . \end{aligned}$$

Esercizio 2.6

Si consideri, nell'istante di valutazione $t = 0$, un mercato descritto dalla funzione intensità di rendimento a scadenza:

$$h(0,s) = \alpha + \beta s \, , \qquad \text{con } s > 0$$

essendo il tempo espresso in anni, $\alpha = 0.068$ e $\beta = 0.006$. In riferimento allo scadenzario $\{0.25, 0.5, 0.75, 1\}$ anni, si determinino le strutture per scadenza dei tassi di interesse a pronti e a termine uniperiodali, su base annua.

Soluzione

(a) Per $s = 0.25, 0.5, 0.75, 1$ dalla relazione:

$$i(0,s) = e^{h(0,s)} - 1$$

si ottengono i tassi di interesse a pronti su base annua relativamente allo scadenzario $\mathbf{t}$:

$$\begin{aligned} i(0,0.25) &= 7.19721\% \, , \\ i(0,0.5) &= 7.35812\% \, , \\ i(0,0.75) &= 7.51928\% \, , \\ i(0,1) &= 7.68068\% \, . \end{aligned}$$

I tassi di interesse a termine sono calcolati dai tassi di interesse a pronti; si ha:

$$\begin{aligned} i(0,0,0.25) &= i(0,0.25) &&= 7.19721\,\% \, , \\ i(0,0.25,0.5) &= \frac{[1+i(0,0.5)]^2}{[1+i(0,0.25)]} - 1 &&= 7.51928\,\% \, , \\ i(0,0.5,0.75) &= \frac{[1+i(0,0.75)]^3}{[1+i(0,0.5)]^2} - 1 &&= 7.84232\,\% \, , \\ i(0,0.75,1) &= \frac{[1+i(0,1)]^4}{[1+i(0,0.75)]^3} - 1 &&= 8.16634\,\% \, . \end{aligned}$$

I - Obbligazioni e mutui “a tasso fisso”

3 Valore (prezzo), indici di durata, indici di variabilità

Riferimenti bibliografici: [M] pp. 57-81, pp. 135-148, pp. 167-197.

Esercizio 3.1

Si determini, nell'istante di valutazione $t = 0$, il valore del flusso di importi:

$$\mathbf{x}/\mathbf{t} = \{100, 200, 300\}/\{t_1, t_2, t_3\}$$

rispetto alla struttura per scadenza dei tassi di interesse calcolata nell'esercizio 2.1.

Soluzione

Il valore in $t = 0$ del flusso $\mathbf{x}$ è dato dalla seguente:

$$V(0; \mathbf{x}) = V(0; x_1) + V(0; x_2) + V(0; x_3) = 573.35000 \text{ euro.}$$

Esercizio 3.2

Si determini, nell'istante di valutazione $t = 0$, il valore del flusso di importi:

$$\mathbf{x}/\mathbf{t} = \{150, 230, 315\}/\{t_1, t_2, t_3\}$$

rispetto alla struttura per scadenza dei tassi di interesse calcolata nell'esercizio 2.2.

Soluzione

Come nell'esercizio precedente si avrà:

$$\begin{aligned} V(0; \mathbf{x}) &= 150[1 + i(0, t_1)]^{-\frac{65}{365}} + 230[1 + i(0, t_2)]^{-\frac{187}{365}} + 315[1 + i(0, t_3)]^{-1} \\ &= 661.01000 \text{ euro.} \end{aligned}$$

Esercizio 3.3

Si consideri una rendita annua anticipata perpetua con rata $R = 525$ euro; si determini il suo valore nell'istante di valutazione $t = 0$ in base alla legge esponenziale caratterizzata da:
(a) un tasso annuo di interesse $i = 10.2\%$;
(b) una intensità istantanea d'interesse $\delta = 0.07$ semestri^{-1};
(c) un tasso trimestrale di interesse $i = 2.7\%$.

Soluzione

(a) Si indichi con $\mathbf{r}$ il flusso delle poste generato dalla rendita annua anticipata perpetua con rata costante R. Il valore della rendita nell'istante di valutazione $t = 0$ è calcolato dalla seguente:

$$V(0, \mathbf{r}) = R\frac{1 + i}{i},$$

essendo i il tasso d'interesse su base annua. Si ottiene quindi $V(0,\mathbf{r}) = 5672.05882$ euro.
(b) Dato δ su base semestrale si avrà[4] :

$$V(0,\mathbf{r}) = R\frac{e^{2\cdot 0.07}}{e^{2\cdot 0.07}-1} = 4018.62300 \text{ euro.}$$

(c) Se i è il tasso di interesse su base trimestrale si ha[5] :

$$V(0,\mathbf{r}) = R\frac{(1+i)^4}{(1+i)^4-1} = 5193.60617 \text{ euro.}$$

Esercizio 3.4

Si consideri una rendita semestrale posticipata di durata 2 anni e con rata $R = 75$ euro; si determini il suo valore nell'istante di valutazione $t = 0$ in base ad una legge lineare caratterizzata da:
(a) un tasso annuo di interesse $i = 10.2\%$;
(b) un tasso trimestrale di interesse $i = 2.7\%$.

Soluzione

(a) Sia $\mathbf{r}$ il flusso di poste generato dalla rendita. Il valore della rendita nell'istante di valutazione $t = 0$ si ottiene dalla:

$$V(0,\mathbf{r}) = R\sum_{k=1}^{4}\left[1+\frac{k}{2}i\right]^{-1} = 266.75875 \text{ euro},$$

essendo i il tasso di interesse annuo. Se il tasso i è espresso su base trimestrale si avrà:

$$V(0,\mathbf{r}) = R\sum_{k=1}^{4}[1+2\,k\,i]^{-1} = 265.06855 \text{ euro.}$$

Esercizio 3.5

Determinare il numero minimo di annualità con cui si può rimborsare al tasso annuo $i = 10.5\%$, in legge esponenziale, un debito $S = 17000$ euro se in futuro si è in grado di pagare al massimo 1800 euro alla fine di ogni anno. Determinare inoltre il valore della rata R.

[4] Dato δ su base semestrale, il tasso d'interesse su base annua è:

$$i = e^{2\cdot 0.07} - 1\,;$$

basta quindi sostituire nella formula precedente.

[5] Il tasso d'interesse su base annua equivalente in legge esponenziale al tasso d'interesse trimestrale i è:

$$(1+i)^4 - 1\,;$$

il risultato si ottiene sostituendo nella formula per il calcolo di $V(0;\mathbf{r})$.

Soluzione

Per determinare il numero minimo di annualità si ipotizza di pagare una rata uguale al massimo importo disponibile. Di conseguenza, noto il valore del debito, la ricerca del numero minimo di annualità consiste nella risoluzione dell'equazione:

$$S = R\frac{1-(1+i)^{-m}}{i},$$

nell'incognita è m, ossia il numero delle rate. Risulta:

$$m = -\frac{\ln(1-\frac{iS}{R})}{\ln(1+i)},$$

da cui si ottiene $m = 47.94908$.
Affinché l'importo della rata non superi il limite consentito, risulta $m = 48$ e il livello della rata è:

$$R = \frac{i\,S}{1-(1+i)^{-48}} = 1799.92329 \text{ euro.}$$

Esercizio 3.6

Si consideri l'ammortamento di una somma $S = 18000$ euro in 3 anni e 285 giorni a rate annuali costanti posticipate, con rata di preammortamento pagabile dopo 285 giorni, in legge lineare. Compilare il piano di ammortamento al tasso annuo $i = 12.5\%$, considerando per l'anno la durata civile.

Soluzione

La rata di preammortamento è interamente composta dalla quota interesse relativa alla frazione di anno 285/365, quindi è data da:

$$S\,i\,\frac{285}{365} = 1756.84932 \text{ euro.}$$

La rata si ottiene dalla:

$$R = S\frac{i}{1-(1+i)^{-m}},$$

che fornisce il valore $R = 7558.75576$ euro.
Relativamente a ciascuna scadenza, la decomposizione della rata in quota interesse e quota capitale si ottiene dalle:

$$I_k = i\,M_{k-1}\,; \quad C_k = R - I_k\,,$$

essendo M_{k-1} il residuo debito all'inizio del periodo precedente. Il piano di ammortamento risulta:

t_k	R	I_k	C_k	M_k
0.78082	1756.85	1756.85	0.00	18000.00
1.78082	7558.76	2250.00	5308.76	12691.24
2.78082	7558.76	1586.41	5972.35	6718.89
3.78082	7558.76	839.86	6718.89	0.00

essendo il tempo espresso in anni e il residuo debito $M_k = M_{k-1} - C_k$, per $k = 1, \ldots, 4$, con $M_0 = S$.

Esercizio 3.7

Si consideri l'ammortamento di una somma $S = 14000$ euro in 3 anni e 189 giorni a quota capitale costante e rate annuali posticipate, con rata di preammortamento pagabile dopo 189 giorni, in legge esponenziale. Compilare il piano di ammortamento al tasso annuo $i = 8\%$, considerando per l'anno la durata civile.

Soluzione

La rata di preammortamento, composta interamente da quota interesse relativa alla frazione di anno 189/365, è calcolata in legge degli interessi composti, quindi si ha:

$$S\left[(1+i)^{\frac{189}{365}} - 1\right] = 569.18074 \text{ euro.}$$

Poichè l'ammortamento è a quota capitale costante, ciascuna rata è ottenuta come somma della quota interesse $I_k = i\,M_{k-1}$, dove M_{k-1} è il residuo debito alla data precedente, e della quota capitale costante C data da:

$$C = \frac{S}{3} = 4666.66667 \text{ euro.}$$

Il piano di ammortamento è:

t_k	R	I_k	C_k	M_k
0.51718	569.18	569.18	0.00	14000.00
1.51718	5786.67	1120.00	4666.67	9333.33
2.51718	5413.33	746.67	4666.67	4666.67
3.51718	5040.00	373.33	4666.67	0.00

essendo il tempo espresso in anni e il residuo debito $M_k = M_{k-1} - C$, per $k = 1, \ldots, 4$, con $M_0 = S$.

Esercizio 3.8

Un debito $S = 8000$ euro viene ammortizzato con il metodo francese in 8 rate annue al tasso $i = 16\%$ annuo. Pagata la quinta rata, si conviene di estinguere il debito residuo mediante 2 versamenti di importo Z pagabili dopo 3 e 6 anni al medesimo tasso d'interesse; determinare l'importo Z.

Soluzione

Il debito residuo, M_5, dopo il pagamento della quinta rata è dato dalla seguente:

$$M_5 = R \sum_{k=5}^{7} [1+i]^{-(m-k)},$$

essendo $m = 8$ anni. Calcolato il livello della rata R secondo la formula:

$$R = \frac{i\,S}{1-(1+i)^(-8)} = 1841.79408 \text{ euro},$$

si ha $M_5 = 4136.46606$ euro.
Si ha:

$$M_5 = Z[(1+i)^{-3} + (1+i)^{-6}]\,,$$

da cui si ottiene il valore $Z = 3935.36899$ euro.

Esercizio 3.9

Si consideri l'ammortamento a quota capitale costante e a rata posticipata di una somma $S = 10000$ euro in 50 semestri al tasso annuo $i = 7\%$. Si determini l'ammontare R della ventunesima rata, la si decomponga in quota capitale (C) e quota interesse (I); si calcoli infine il debito residuo M dopo il pagamento di tale rata.

Soluzione

Poiché l'ammortamento è a quota capitale costante si ha:

$$C = \frac{S}{m} = 200 \text{ euro},$$

essendo $m = 50$ il numero delle rate.
Il residuo debito M è calcolato dalla seguente:

$$M = S\left(1 - \frac{k}{m}\right) = 5800 \text{ euro},$$

essendo $k = 21$. La quota interesse I è data da:

$$I = j\,S\left(1 - \frac{k-1}{m}\right),$$

dove j è il tasso di interesse su base semestrale equivalente in legge esponenziale al tasso annuo i, ossia $j = (1+i)^{1/2} - 1 = 3.44080\%$. Si ottiene il valore $I = 206.44826$ euro. Quindi l'ammontare della ventunesima rata, somma della quota capitale C e della quota interesse I, è 406.44826 euro.

Esercizio 3.10

Un titolo a cedola fissa $\mathbf{x}$ di durata 2 anni, capitale di 100 euro, paga cedole ogni trimestre al tasso annuo nominale dell' 8%. Nell'istante di valutazione $t = 0$, calcolare:
(a) la durata media finanziaria, l'indice di dispersione e la dispersione standard rispetto a una struttura per scadenza piatta al livello $i = 8.30$ su base annua;
(b) la durata media finanziaria, l'indice di dispersione e la dispersione standard rispetto alla seguente struttura per scadenza dei tassi di interesse a pronti espressi su base annua:

$$\begin{aligned}
i(0,0.25) &= 4.50\%\,, & i(0,0.5) &= 4.85\%\,,\\
i(0,0.75) &= 5.25\%\,, & i(0,1) &= 5.53\%\,,\\
i(0,1.25) &= 5.75\%\,, & i(0,1.5) &= 6.10\%\,,\\
i(0,1.75) &= 6.35\%\,, & i(0,2) &= 6.55\%\,.
\end{aligned}$$

Soluzione

Il contratto finanziario $\mathbf{x}$ è rappresentato dal bivettore:

$$\{2,2,2,2,2,2,2,102\}/\{0.25,0.5,0.75,1,1.25,1.5,1.75,2\}.$$

(a) Nel caso di struttura piatta la durata media finanziaria (*duration*) è data dalla:

$$D(0,\mathbf{x}) = \frac{2\sum_{k=1}^{8}\frac{k}{4}(1+i)^{-k/4} + 100\,2\,(1+i)^{-2}}{V(0;\mathbf{x})},$$

essendo:

$$V(0;\mathbf{x}) = 2\sum_{k=1}^{8}(1+i)^{-k/4} + 100\,(1+i)^{-2} = 99.90208 \text{ euro}.$$

Si ottiene che $D(0,\mathbf{x}) = 1.86792$ anni.
Utilizzando la formula:

$$M^{(2)}(0,\mathbf{x}) = \frac{2\sum_{k=1}^{8}(\frac{k}{4}-D_0)^2(1+i)^{-k/4} + 100\,(2-D_0)^2\,(1+i)^{-2}}{V(0;\mathbf{x})},$$

essendo $D_0 = D(0,\mathbf{x})$, si calcola il momento secondo baricentrale; il valore è:

$$M^{(2)}(0,\mathbf{x}) = 0.14961 \text{ anni}^2.$$

La dispersione standard è data da:

$$\sqrt{M^{(2)}(0,\mathbf{x})} = 0.38679 \text{ anni}.$$

(b) La durata media finanziaria del contratto finanziario $\mathbf{x}$ è:

$$D(0,\mathbf{x}) = \frac{2\sum_{k=1}^{8}\frac{k}{4}[1+i(0,\frac{k}{4})]^{-k/4} + 100\,2\,[1+i(0,2)]^{-2}}{V(0;\mathbf{x})},$$

essendo:

$$V(0;\mathbf{x}) = 2\sum_{k=1}^{8}[1+i(0,\frac{k}{4})]^{-k/4} + 100\,[1+i(0,2)]^{-2} = 103.08682 \text{ euro}.$$

Si ottiene che $D(0,\mathbf{x}) = 1.86948$ anni.
Il momento secondo baricentrale è dato dalla formula:

$$M^{(2)}(0,\mathbf{x}) = \frac{2\sum_{k=1}^{8}(\frac{k}{4}-D_0)^2[1+i(0,\frac{k}{4})]^{-k/4} + 100\,(2-D_0)^2\,[1+i(0,2)]^{-2}}{V(0;\mathbf{x})},$$

essendo $D_0 = D(0,\mathbf{x})$; si ottiene il valore:

$$M^{(2)}(0,\mathbf{x}) = 0.14762 \text{ anni}^2.$$

La dispersione standard è ottenuta dalla:

$$\sqrt{M^{(2)}(0,\mathbf{x})} = 0.38422 \text{ anni}.$$

Esercizio 3.11

Si consideri, nell'istante $t = 0$, lo scadenzario $\mathbf{t} = \{1, 2, 3, \cdots, 30\}$ anni; siano definiti su $\mathbf{t}$ i seguenti tre contratti:

$\mathbf{a} = \{a_5 = 164.87,\ a_k = 0,\ \text{per } k \neq 5\}$,

$\mathbf{b} = \{b_1 = 55.26,\ b_9 = 122.98, b_k = 0,\ \text{per } k \neq 1, 9\}$,

$\mathbf{c} = \{c_1 = 95.27,\ c_{30} = 277.04, c_k = 0,\ \text{per } k \neq 1, 30\}$.

Si ipotizzino due situazioni di intermediazione:
– portafoglio di intermediazione A: una attività rappresentata dal contratto **c**, finanziata da una passività rappresentata dal contratto **a**;
– portafoglio di intermediazione B: una attività rappresentata dal contratto **c**, finanziata da una passività rappresentata dal contratto **b**.
Discutere i due portafogli di intermediazione in termini di valore e di indici di rischiosità (indice di variazione relativa, indice di convessità), nel caso di un mercato descritto, in $t = 0$, da una struttura piatta al livello $\delta = 0.1$.

Soluzione

Si calcolano il valore, l'indice di variazione relativa e l'indice di convessità dei 3 contratti:

$$\begin{aligned}
V(0, \mathbf{a}) &= 164.87e^{-5\delta} &&= 100\ ,\\
V(0, \mathbf{b}) &= 55.26\ e^{-\delta} + 122.98e^{-9\delta} &&= 100\ ,\\
V(0, \mathbf{c}) &= 95.27\ e^{-\delta} + 277.04e^{-30\delta} &&= 100\ .
\end{aligned}$$

Nel caso di struttura piatta in termini del parametro δ, l'indice di variazione relativa si ottiene dalle:

$$\begin{aligned}
V_a'(\delta)/V_a(\delta) &= -D(0, \mathbf{a}) = -5\,,\\
V_b'(\delta)/V_b(\delta) &= -D(0, \mathbf{b}) = -5\,,\\
V_c'(\delta)/V_c(\delta) &= -D(0, \mathbf{c}) = -5\,,
\end{aligned}$$

e l'indice di convessità dalle:

$$\begin{aligned}
V_a''(\delta)/V_a(\delta) &= D^2(0, \mathbf{a}) = 5^2 \cdot 164.87e^{-5\delta}/100 &&= 25\ ,\\
V_b''(\delta)/V_b(\delta) &= D^2(0, \mathbf{b}) = 1^2 \cdot 55.26e^{-\delta} + 9^2 \cdot 122.98e^{-9\delta}/100 &&= 41\ ,\\
V_c''(\delta)/V_c(\delta) &= D^2(0, \mathbf{c}) = 1^2 \cdot 95.27e^{-\delta} + 30^2 \cdot 277.04e^{-30\delta}/100 &&= 125\ .
\end{aligned}$$

Entrambi i portafogli di intermediazione hanno quindi valore dell'attivo uguale al valore del passivo (vincolo di bilancio) e duration dell'attivo uguale alla duration del passivo (vincolo di duration); la convessità netta del portafoglio A è maggiore della convessità netta del portafoglio B.

4 Indici di rendimento

4.1 Il tasso interno di rendimento

Riferimenti bibliografici: [M] pp. 52-55, 83-98.

Esercizio 4.1.1

Calcolare il tasso interno di rendimento i^* del contratto finanziario:

$$\mathbf{x}/\mathbf{t} = \{-85, 8, 8, 8, 8, 8, 8, 8, 93\}/\{0, 0.5, ..., 4\}\,,$$

essendo il tempo espresso in anni. Calcolare quindi il valore residuo del contratto nell'istante $H = 0.75$ anni in base alla legge esponenziale individuata da i^*.

Soluzione

Il contratto finanziario è un titolo a cedola fissa di durata 4 anni, con capitale nominale $C = 85$ euro e cedola semestrale $I = 8$ euro che quota alla pari. Quindi il tasso interno di rendimento su base semestrale è uguale al tasso cedolare, dato da:

$$\frac{I}{C} = \frac{8}{85} = 9.41176\%\,;$$

il tasso interno di rendimento su base annua risulta:

$$i^* = \left(1 + \frac{I}{C}\right)^2 - 1 = 19.70934\%\,.$$

Il valore di un contratto finanziario in un qualsiasi istante di tempo H ($t_0 \leq H \leq t_m$) può essere scomposto nella somma del montante delle poste scadute fino a H, $M(H, \mathbf{x})$, e del valore del flusso residuo delle poste con scadenza dopo H, $R(H, \mathbf{x})$; si ha:

$$V(H, \mathbf{x}) = M(H, \mathbf{x}) + R(H, \mathbf{x}) = \sum_{k:t_k<t} x_k m(t_k, H) + \sum_{k:t_k \geq t} x_k v(H, t_k)\,;$$

essendo l'operazione finanziaria equa secondo la legge esponenziale individuata da i^*, ($V(H, \mathbf{x}) = 0$), risulta:

$$M(H, \mathbf{x}) = -R(H, \mathbf{x})\,;$$

e quindi si ottiene:

$$R(0.75, \mathbf{x}) = -\left[-85(1 + i^*)^{0.75} + 8(1 + i^*)^{(0.75-0.5)}\right] = 88.91007 \text{ euro.}$$

Esercizio 4.1.2

Calcolare il tasso interno di rendimento i^* del contratto finanziario:

$$\mathbf{x}/\mathbf{t} = \{-45, -40, 100\}/\{0, 1, 2\}$$

essendo il tempo espresso in anni. Determinare, inoltre, l'importo Δx_1 che bisogna sommare alla prima posta del flusso affinchè il tasso interno di rendimento della nuova operazione finanziaria sia $i^* = 12\%$.

Soluzione

Il tasso interno di rendimento i^* si determina risolvendo l'equazione di secondo grado nell'incognita v:

$$100v^2 - 40v - 45 = 0\,,$$

che ammette due soluzioni reali e distinte $v_1 = 0.9$ e $v_2 = -0.5$. La soluzione finanziariamente significativa è $v_1 = 0.9$, pertanto:

$$i^* = v_1^{-1} - 1 = 11.11111\%\,,$$

espresso su base annua.
L'importo Δx_1 da sommare alla prima posta del flusso affinché il tasso interno di rendimento sia del 12% si determina risolvendo l'equazione di primo grado nell'incognita Δx_1:

$$(-45 + \Delta x_1) - 40(1.12)^{-1} + 100(1.12)^{-2} = 0\,,$$

che fornisce il valore $\Delta x_1 = 0.99490$ euro.

Esercizio 4.1.3

Si consideri il contratto finanziario $\mathbf{x}/\mathbf{t} = \{x_0, 25, 31\}/\{0, 1, 2\}$ essendo il tempo espresso in semestri. Determinare l'importo x_0 affinchè il tasso interno di rendimento del contratto, espresso su base annua, risulti non inferiore al 9% (annuo).

Soluzione

Esprimendo lo scadenzario di riferimento in anni, poiché l'operazione finanziaria $\mathbf{x}$ è equa secondo la legge esponenziale individuata dal tasso i^*, la soluzione dell'esercizio è ottenuta risolvendo l'equazione di primo grado:

$$x_0 + 25(1 + i^*)^{-0.5} + 31(1 + i^*)^{-1} = 0\,,$$

da cui si ha $x_0 = -52.38602$ euro.

Esercizio 4.1.4

Si consideri il contratto finanziario $\mathbf{x}/\mathbf{t} = \{-55, 10, 50\}/\{0, 0.5, t_2\}$ essendo il tempo espresso in anni. Determinare t_2 in modo che il contratto abbia un tasso interno di rendimento $i^* = 9\%$.

Soluzione

Per equità il tempo t_2 deve soddisfare la seguente:

$$50(1 + i^*)^{-t_2} + 10(1 + i^*)^{-0.5} - 55 = 0\,,$$

da cui si ricava $t_2 = 1.11435$ anni.

Esercizio 4.1.5

Si consideri l'operazione finanziaria $\mathbf{x}/\mathbf{t} = \{87, -50, -40\}/\{0, 2, 4\}$, essendo il tempo espresso in mesi; si determini:
(a) il tasso interno di rendimento i^* su base annua dell'operazione;
(b) la rata R di una rendita semestrale perpetua posticipata $\mathbf{r}$ che in base al tasso i^* ha valore 87 euro.

Soluzione

(a) Il calcolo del tasso interno di rendimento si effettua risolvendo l'equazione:

$$-40(1+i^*)^{-\frac{4}{12}} - 50(1+i^*)^{-\frac{2}{12}} + 87 = 0\,;$$

ponendo $(1+i^*)^{-\frac{2}{12}} = v$, l'equazione diventa:

$$40v^2 + 50v - 87 = 0\,,$$

che ammette come soluzione finanziariamente significativa $v = 0.97676$. Il tasso interno di rendimento su base annua si ottiene esplicitando la soluzione nei termini dell'incognita i^*:

$$i^* = v^{-\frac{12}{2}} - 1 = 15.15458\%\,.$$

(b) Si utilizza la:

$$87 = R\frac{1+i}{i}\,;$$

essendo i il tasso d'interesse su base semestrale equivalente in legge esponenziale al tasso annuo i^*, risulta: $i = (1+i^*)^{1/2} - 1 = 7.31010\%$. L'importo della rata è dunque:

$$R = 87\frac{i}{1+i} = 5.92655 \text{ euro.}$$

Esercizio 4.1.6

Calcolare il tasso interno di rendimento espresso su base annua dell'operazione consistente nello scambio, in $t = 0$, della somma $S = 540$ euro con una rendita perpetua posticipata di rata mensile costante $R = 6$ euro.

Soluzione

Il tasso interno di rendimento i su base mensile si ottiene dalla:

$$S = R\frac{1+i}{i}\,,$$

da cui si ha:

$$i = \frac{R}{S-R}\,.$$

Il tasso interno di rendimento i^* su base annua è:

$$i^* = (1+i)^{12} - 1 = 14.34838\%\,.$$

4.2 Il tasso di parità

Esercizio 4.2.1

Si supponga che, nell'istante di tempo $t = 0$, sia in vigore la seguente struttura per scadenza dei tassi di interesse a pronti:

$$i(0,1) = 4.50\%$$

$$i(0,2) = 4.95\%$$

$$i(0,3) = 5.43\%$$

$$i(0,4) = 5.85\%$$

espressi su base annua.
Calcolare i tassi di parità (*par yield*) per le scadenze $\{1, 2, 3, 4\}$.

Soluzione

Indicando con z_m il tasso di parità per la scadenza m anni, basta applicare la formula:

$$z_m = \frac{1 - [1 + i(0,m)]^{-m}}{\sum_{k=1}^{m} [1 + i(0,k)]^{-k}} \, ,$$

da cui si ottengono i valori:

$$\begin{aligned} z_1 &= 4.50000\% \, , \\ z_2 &= 4.93911\% \, , \\ z_3 &= 5.39666\% \, , \\ z_4 &= 5.78726\% \, . \end{aligned}$$

Esercizio 4.2.2

Si supponga che nell'istante di valutazione $t = 0$, in riferimento allo scadenzario $\mathbf{t} = \{1, 2, 3, 4\}$ anni, sia in vigore la seguente struttura per scadenza dei tassi di interesse a pronti:

$$i(0,1) = 3.60\%$$

$$i(0,2) = 4.25\%$$

$$i(0,3) = 4.75\%$$

$$i(0,4) = 5.42\%$$

essendo i tassi espressi su base annua.
a) Calcolare il tasso di parità z_4 per la scadenza $m = 4$ anni.
b) Si supponga che al tempo $t = 0$ si voglia emettere un titolo a cedola fissa, di durata 4 anni e capitale nominale C, che paghi un tasso annuo cedolare uguale 5.5%. Tale titolo sarà emesso alla pari, sopra la pari o sotto la pari?

Soluzione

(a) Il livello del tasso di parità z_4 si ottiene dalla seguente:

$$z_4 = \frac{1 - [1 + i(0,4)]^{-4}}{\sum_{k=1}^{4}[1 + i(0,k)]^{-k}} = 5.33873\%\,.$$

(b) Poiché il tasso annuo pagato dal titolo è maggiore del tasso di parità z_4, il titolo sarà emesso sopra la pari.

Esercizio 4.2.3

Si consideri un mercato definito al tempo $t = 0$ sullo scadenzario $\mathbf{t} = \{t_1, t_2, t_3\} = \{1, 2, 3\}$ anni; siano trattati sul mercato tre titoli obbligazionari:
· uno *zero coupon bond* a pronti che garantisce $x = 100$ euro in t_1 al prezzo a pronti di 95.75 euro;
· uno *zero coupon bond* a termine che garantisce $y = 200$ euro in t_2, al prezzo a termine (pattuito in t e pagabile in t_1) di 188 euro;
· uno *zero coupon bond* a termine che garantisce $z = 200$ euro in t_3, al prezzo a termine (pattuito in t e pagabile in t_1) di 173.5 euro.
(a) Si calcolino le strutture per scadenza dei tassi di interesse a pronti e a termine uniperiodali corrispondenti alla struttura dei prezzi di mercato, esprimendo i tassi su base annua.
(b) Volendo emettere, in $t = 0$, un titolo a cedola fissa con scadenza 3 anni, che paghi un tasso annuo cedolare uguale al tasso di parità, determinare il livello della cedola I del titolo, considerando un capitale di 100 euro.

Soluzione

(a) Calcoliamo dapprima la struttura dei tassi di interesse a termine uniperiodale su base annua. Il prezzo a termine dello *zero coupon bond* a termine con scadenza t_2 definisce il livello del tasso a termine $i(0, t_1, t_2)$ dato da:

$$i(0, t_1, t_2) = v(0, t_1, t_2)^{-1/(t_2 - t_1)} - 1 = \frac{200}{188} - 1 = 6.38298\%\,.$$

Analogamente il tasso $i(0, t_2, t_3)$ è calcolato dalla:

$$i(0, t_2, t_3) = v(0, t_2, t_3)^{-1/(t_3 - t_2)} - 1\,,$$

essendo $v(0, t_2, t_3)$ il rapporto tra i prezzi a pronti $v(0, t_3)$ e $v(0, t_2)$. Ora, poiché:

$$v(0, t_2) = v(0, t_1, t_2)v(0, t_1) \;\text{ e }\; v(0, t_3) = v(0, t_1, t_3)v(0, t_1)\,,$$

si ottiene:

$$i(0, t_2, t_3) = \left[\frac{v(0, t_1, t_3)}{v(0, t_1, t_2)}\right]^{-1/(t_3 - t_2)} - 1\,,$$

quindi:

$$i(0, t_2, t_3) = \frac{188}{173.5} - 1 = 8.35735\%\,.$$

Il tasso di interesse a pronti $i(0, t_1)$ si ricava dal prezzo $v(0, t_1)$:

$$i(0, t_1) = v(0, t_1)^{-1/t_1} - 1 = \frac{100}{95.75} - 1 = 4.43864\%\,.$$

Poiché il fattore montante a pronti è una media geometrica dei fattori montante a termine, si ha:

$$i(0,t_2) = \{[1+i(0,t_1)]\,[1+i(0,t_1,t_2)]\}^{1/2} - 1\,,$$

mentre:

$$i(0,t_3) = \{[1+i(0,t_1)]\,[1+i(0,t_1,t_2)]\,[1+i(0,t_2,t_3)]\}^{1/3} - 1\,.$$

Si ottengono i valori:

$$i(0,t_2) = 5.40633\%\ ,\ \ i(0,t_3) = 6.38096\%\,.$$

(b) Il livello della cedola I è individuato dal tasso tasso di parità z_3; data la struttura dei tassi di interesse a pronti si calcola dalla:

$$z_3 = \frac{1-[1+i(0,t_3)]^{-t_3}}{\sum_{k=1}^{3}[1+i(0,t_k)]^{-t_k}}\,,$$

da cui $I = 6.30049$ euro.

5 Strategie di arbitraggio

Esercizio 5.1

Sia t il giorno 31 gennaio 2001 e siano quotati sul mercato i seguenti *zero coupon bond*, con valore di rimborso di 100 euro:

scadenza	durata gg	prezzo
14/03/01	42	99.54
15/05/01	104	98.64
15/07/01	165	97.65

(a) Determinare i prezzi a pronti e i prezzi a termine di non arbitraggio dei corrispondenti titoli a cedola nulla unitari corrispondenti alla struttura dei prezzi assegnati.
(b) Facendo riferimento all'anno civile (365 giorni), calcolare la struttura per scadenza dei tassi a pronti e dei tassi a termine uniperiodali su base annua relativamente allo scadenzario $\{t_1, t_2, t_3\} = \{42, 104, 165\}$ giorni.
(c) Ipotizzando che gli zcb unitari siano quotati sul mercato, dire se il prezzo a termine $v(t_0, t_1, t_3) = 0.9856$ euro consente o no arbitraggi non rischiosi, motivando la risposta e, in caso affermativo, determinare l'eventuale profitto G da arbitraggio.

Soluzione

(a) I prezzi dei titoli a cedola nulla unitari che scadono alle scadenze $\{t_1, t_2, t_3\}$ sono:

$$\begin{aligned} v(0,t_1) &= \frac{99.54}{100} = 0.99540\,, \\ v(0,t_2) &= \frac{98.64}{100} = 0.98640\,, \\ v(0,t_3) &= \frac{97.65}{100} = 0.97650\,. \end{aligned}$$

I prezzi a termine uniperiodali si calcolano dalle:

$$\begin{aligned} v(0,0,t_1) &= v(0,0,42) = 0.99540\,, \\ v(0,t_1,t_2) &= \frac{98.64}{99.54} = 0.99096\,, \\ v(0,t_2,t_3) &= \frac{97.65}{98.64} = 0.98996\,. \end{aligned}$$

(b) La risoluzione segue la logica dell'esercizio 2.2:

$$\begin{aligned} i(0,t_1) &= 4.08820\,\%\,, & i(0,0,t_1) &= 4.08820\,\%\,, \\ i(0,t_2) &= 4.92318\,\%\,, & i(0,t_1,t_2) &= 5.49262\,\%\,, \\ i(0,t_3) &= 5.40137\,\%\,, & i(0,t_2,t_3) &= 6.22166\,\%\,. \end{aligned}$$

(c) Date le quotazioni degli *zero coupon bond*, il prezzo di non arbitraggio dello *zero coupon bond* avente istante di consegna t_1 e scadenza t_3 è:

$$v(t,t_1,t_3) = \frac{v(t,t_3)}{v(t,t_1)} = 0.98101 \text{ euro,}$$

quindi è possibile realizzare una strategia di compravendita che consente in guadagno certo in t di 0.00457 euro. La strategia è composta dalle seguenti azioni:
– acquisto in t dello *zero coupon bond* unitario che scade in t_3;
– vendita allo scoperto in t di 0.9856 unità dello *zero coupon bond* che scade in t_1;
– acquisto a termine in t per consegna in t_1 dello *zero coupon bond* unitario che scade in t_3.

Esercizio 5.2

Si consideri un mercato definito, nell'istante di valutazione $t = 0$, sullo scadenzario $\mathbf{t} = \{t_1, t_2\} = \{0.5, 1\}$. Siano trattati sul mercato due titoli a cedola nulla $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$ ed un contratto a termine $\mathbf{z}$: il contratto $\mathbf{x}$ paga 100 euro in t_1 ed è scambiato in t a 98 euro; il contratto $\mathbf{y}$ paga 52 euro in t_2 con un prezzo in t di 49 euro e il contratto $\mathbf{z}$ paga 106 euro in t_2, al prezzo a termine (pattuito in t e pagabile in t_1) di 100 euro.
(a) Verificare se sono possibili arbitraggi non rischiosi.
(b1) Nel caso si abbia risposto "sì" alla domanda precedente (e solo in questo caso), costruire la strategia di arbitraggio non rischioso.
(b2) Nel caso si abbia risposto "no" o "non si può dire nulla in merito" (e solo in questo caso), determinare la struttura per scadenza dei tassi di interesse a pronti e a termine uniperiodale corrispondente alla struttura dei prezzi dei titoli, esprimendo i tassi in forma percentuale e su base annua.

Soluzione

(a) Dati i prezzi dei titoli $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$, il prezzo a termine del titolo $\mathbf{z}$ per evitare arbitraggi privi di rischio deve essere:

$$106\,\frac{v(0,t_2)}{v(0,t_1)} = 106\,\frac{49/52}{98/100} = 101.92308 \text{ euro;}$$

essendo il prezzo di mercato uguale a 100 euro è possibile realizzare una strategia che porti a un profitto certo.
(b1) La strategia di arbitraggio risulta:
– azione (A): acquistare a pronti in 0 una unità del titolo $\mathbf{x}$,
– azione (B): vendere allo scoperto in 0 due unità del titolo $\mathbf{y}$,
– azione (C): acquistare a termine per consegna in t_1 una unità del titolo $\mathbf{z}$.
Ciò è rappresentato nella tabella di *pay-off*:

	0	0.5	1
(A):	-98	+100	0
(B):	+98	0	-104
(C):	0	-100	+106
	0	0	+2

II - Contratti indicizzati

6 Contratti indicizzati "sincroni"

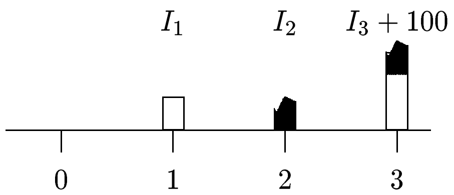
Riferimenti bibliografici: [CDMM] pp. 53-73.

Esercizio 6.1

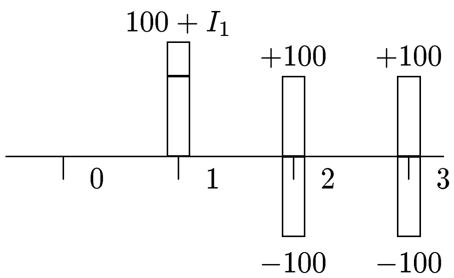
Nell'istante di valutazione $t = 0$ sia 195 euro il prezzo di una rendita, $\mathbf{r}$, di rata annua costante $R = 100$ euro, durata $m = 3$ anni. Siano $\mathbf{X}$ e $\mathbf{Y}$ due titoli indicizzati "sincroni", emessi da un'impresa in $t = 0$, di durata tre anni, che rimborsano un capitale di 100 euro in unica soluzione a scadenza, e che corrispondono cedole annue essendo la prima cedola nota, fornita dalla $I_1 = 100\, i(0,1)$; il titolo $\mathbf{X}$ ha uno *spread* uguale a zero mentre il titolo $\mathbf{Y}$ ha uno *spread* annuo $s = 0.05\%$.
Sapendo che la durata media finanziaria in t della rendita $\mathbf{r}$ è uguale a 1.65 anni, calcolare il valore e la durata media finanziaria in t dei due titoli.

Soluzione

Il titolo $\mathbf{X}$ è caratterizzato dal flusso di importi:



che risulta equivalente al flusso deterministico:



Il titolo è replicato da un contratto del tipo *zero coupon bond* con scadenza uguale alla data di pagamento della prima cedola, e valore nominale uguale alla somma del capitale (100 euro) e dell'importo corrispondente alla prima cedola; il suo valore, in $t = 0$, è fornito dalla:

$$V(0;\mathbf{X}) = [100 + I_1][1 + i(0,1)]^{-1} = 100\,.$$

La durata media finanziaria del titolo è uguale a un anno.
Il titolo $\mathbf{Y}$ può essere considerato come un portafoglio composto da una unità del titolo $\mathbf{X}$ e da una rendita $\mathbf{s}$ posticipata di durata 3 anni che corrisponde una rata annua uguale a 0.05 euro; il suo valore in $t = 0$ risulta:

$$V(0;\mathbf{Y}) = V(0;\mathbf{X}) + V(0;\mathbf{s})\,.$$

Dato che:

$$V(0;\mathbf{r}) = 100 \sum_{k=1}^{3} v(0,k)$$

essendo $v(0,k)$ il fattore di sconto per la scadenza k anni in vigore sul mercato in $t=0$, si ha che:

$$V(0;\mathbf{s}) = 0.05\sum_{k=1}^{3} v(0,k) = 0.05\frac{V(0;\mathbf{r})}{100} = 0.09750 \text{ euro},$$

da cui si ottiene:

$$V(0;\mathbf{Y}) = 100.09750 \text{ euro}\,.$$

La durata media finanziaria, in $t=0$, del titolo $\mathbf{Y}$ risulta dalla:

$$D(0;\mathbf{Y}) = \frac{V(0;\mathbf{X})}{V(0;\mathbf{Y})}D(0;\mathbf{X}) + \frac{V(0;\mathbf{s})}{V(0;\mathbf{Y})}D(0;\mathbf{s})\,.$$

Per calcolare $D(0,\mathbf{s})$ basta considerare che la *duration* di una rendita a rata costante non dipende dal valore della rata; quindi la rendita $\mathbf{s}$ avrà una durata media finanziaria uguale a quella della rendita $\mathbf{r}$ (1.65 anni). Risulta pertanto:

$$D(0;\mathbf{Y}) = 1.00063 \text{ anni.}$$

Esercizio 6.2

Nell'istante di tempo $t=0$ il mercato è descritto dalla struttura per scadenza dei tassi di interessi a pronti:

$$i(0,0.5) = 3.85\% \qquad i(0,1) = 4.25\% \qquad i(0,1.5) = 4.75\% \qquad i(0,2) = 5.10\%$$

essendo i tassi espressi su base annua.
In $t=0$ è scambiato sul mercato un titolo indicizzato "sincrono", $\mathbf{X}'$, di durata 2 anni, che rimborsa un capitale di 100 euro in unica soluzione alla scadenza e che paga cedole ogni semestre, essendo la prima cedola nota al livello definito dal tasso annuo $i(0,0.5)$; il titolo corrisponde uno *spread* semestrale $s=0.15\%$. Calcolare, in $t=0$:

(a) il valore del contratto;

(b) la duration del contratto;

(c) la dispersione standard del contratto.

Soluzione

(a) Si indichi con $\mathbf{X}$ il titolo indicizzato "sincrono" con stesse caratteristiche contrattuali del titolo $\mathbf{X}'$ ma con *spread* uguale a zero; sia $\mathbf{s}$ il flusso caratteristico di una rendita che paga ogni semestre un importo monetario uguale a $s=0.15$ euro per 2 anni. Il valore in $t=0$ del contratto $\mathbf{X}'$ è fornito dalla:

$$V(0;\mathbf{X}') = V(0;\mathbf{X}) + V(0;\mathbf{s}) = 100.56679\,,$$

essendo, per le argomentazioni dell'esercizio precedente:

$$V(0;\mathbf{X}) = 100 \text{ euro}$$

e:

$$V(0;\mathbf{s}) = 0.15\sum_{k=1}^{4}[1+i(0,k/2)]^{-k/2} = 0.56679 \text{ euro.}$$

(b) La durata media finanziaria del titolo $\mathbf{X}$ è fornita dalla seguente:

$$D(0;\mathbf{X}') = \frac{V(0;\mathbf{X})}{V(0;\mathbf{X}')}D(0;\mathbf{X}) + \frac{V(0;\mathbf{s})}{V(0;\mathbf{X}')}D(0;\mathbf{s})\,,$$

essendo la *duration* del titolo $\mathbf{X}$, per le argomentazioni dell'esercizio precedente, uguale a 0.5 anni. La duration della rendita $\mathbf{s}$ è calcolata dalla:

$$D(0,\mathbf{s}) = \frac{0.15\sum_{k=1}^{4} k/2\,[1+i(0,k/2)]^{-k/2}}{V(0;\mathbf{s})} = 1.23317 \text{ anni}\,.$$

Si ha:

$$D(0;\mathbf{X}') = 0.50413 \text{ anni.}$$

(c) L'indice di dispersione del titolo $\mathbf{X}'$ è uguale all'indice di dispersione del suo portafoglio replicante certo; risulta:

$$M^{(2)}(0,\mathbf{X}') = 0.00477 \text{ anni}^2\,,$$

da cui $M = 0.06907$ anni.

Esercizio 6.3

Sia:

$$i(0,0.5) = 5.20\%\,,\quad i(0,1) = 5.35\%\,,\quad i(0,1.5) = 5.63\%\,,\quad i(0,2) = 5.84\%\,,$$

la struttura dei tassi di interesse a pronti espressa su base annua caratteristica del mercato nell'istante di valutazione $t=0$. Sia scambiato sul mercato il titolo $\mathbf{x}/\mathbf{t} = \{8,8,8,108\}/\{0.5,1,1.5,2\}$, con prezzo, in $t=0$ uguale a 119.17297 euro e *duration* uguale a 1.80719 anni.
Si consideri il titolo da reinvestimento $\mathbf{Y}$ che paga in $s=1.5$ anni l'importo $X = 100/v(1,1.5)$. Indicato con $\mathbf{Z}$ il portafoglio costituito da α quote del titolo $\mathbf{x}$ e da β quote del titolo da reinvestimento $\mathbf{Y}$, determinare le quote di composizione α e β in modo che risulti $V(0;\mathbf{Z}) = 300$ e $D(0;\mathbf{Z}) = 1.2$ anni.

Soluzione

Per determinare la composizione del portafoglio $\mathbf{Z}$ occorre risolvere il sistema di equazioni lineari:

$$\begin{cases} \alpha V(0;\mathbf{x}) + \beta V(0;\mathbf{Y}) = 300 \\ \alpha V(0;\mathbf{x})D(0;\mathbf{x}) + \beta V(0;\mathbf{Y})D(0;\mathbf{Y}) = 1.2\,V(0;\mathbf{Z}) \end{cases}$$

dove la prima equazione deriva dalla condizione sul valore del portafoglio ($V(0;\mathbf{Z}) =$ 300 euro), mentre la seconda equazione deriva dalla condizione sul livello di *duration* del portafoglio ($D(0,\mathbf{Z}) = 1.2$ anni). Per il teorema del titolo di reinvestimento è:

$$V(0;\mathbf{Y}) = 100\,v(0,1) = 100\,[1+i(0,1)]^{-1}$$

e:

$$D(0;\mathbf{y}) = 1 \text{ anno.}$$

Risolvendo il sistema per sostituzione si ottengono i valori:

$$\alpha = 0.62373,\quad \beta = 2.37741.$$

Riferimenti bibliografici

[M] - Moriconi, F., *Matematica finanziaria*, Il Mulino, Bologna, 1995

[CDMM] - Castellani, G., De Felice, M., Moriconi, F., Mottura, C. *Un corso sul controllo del rischio di tasso di interesse*, Il Mulino, Bologna, 1993

PARTE SECONDA

Contratti derivati, contratti assicurativi

III - Contratti derivati

7 Interest rate swap

Riferimenti bibliografici: [H] pp. 111-125.

Esercizio 7.1

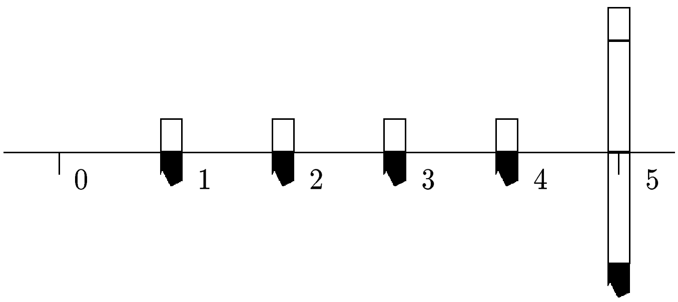
Nell'istante di tempo $t = 0$ siano quotati sul mercato i seguenti tassi *swap*:

$$z_1 = 5.03\%$$
$$z_2 = 5.08\%$$
$$z_4 = 5.20\%$$
$$z_5 = 5.40\%$$

avendo indicato con z_m il tasso *swap* relativo alla scadenza di m anni.
Un'impresa ha un debito in-essere di 100 euro a tasso fisso, ammortizzato in unica soluzione a scadenza, con interesse annuo uguale a 6 euro e durata residua di 5 anni; per "trasformare" il contratto di debito da tasso fisso a tasso variabile decide di stipulare un contratto di *interest rate swap* a 5 anni come pagatore di tasso variabile e ricevitore di tasso fisso.
(a) Calcolare lo *spread* annuo, s, della passività "sintetica" a tasso variabile.
(b) Calcolare il valore della passività "sintetica" sapendo che il valore, in $t = 0$, di una rendita a rata annua costante posticipata, s, di durata 5 anni, è $V(0; \mathbf{s}) = 2.58117$ euro.

Soluzione

L'impresa sottoscrive un contratto *swap* a 5 anni nel quale paga "variabile" e riceve "fisso" (tasso quotato sul mercato per quella scadenza), su un capitale nozionale di 100 euro:



Alla fine di ciascun anno, l'impresa riceve un interesse di 5.40 euro essendo, in $t = 0$, il tasso *swap* quotato per la scadenza 5 anni, $z_5 = 5.40\%$; sempre alla fine di ciascun anno, l'impresa paga un interesse aleatorio definito secondo lo schema contrattuale del titolo indicizzato "sincrono", con prima cedola aleatoria.
(a) Il tasso annuo del debito a tasso fisso è uguale 6%; lo *spread* annuo della passività "sintetica" è definito, in questo caso, dalla differenza tra tasso fisso a debito e il tasso *swap* per la scadenza corrispondente, pertanto $s = 0.60\%$.
(b) Il valore, in $t = 0$, della passività "sintetica", è fornito dalla somma del valore del flusso a tasso variabile dello swap (all'emissione) e del valore, in $t = 0$, del flusso *spread*, $\mathbf{s}$, uguale a 102.58117 euro.

7.1 Ricavare la curva zero coupon swap

Esercizio 7.1.1

Nell'istante di tempo $t = 0$ sono quotati sul mercato i seguenti tassi *swap*:

$$z_1 = 4.50\%$$

$$z_2 = 4.95\%$$

$$z_4 = 5.43\%$$

$$z_5 = 5.85\%$$

avendo indicato con z_m il tasso *swap* relativo alla scadenza di m anni.
In riferimento allo scadenzario $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ anni, calcolare le strutture per scadenza dei tassi di interesse a pronti e a termine uniperiodali, esprimendo i tassi su base annua.

Soluzione

Il tasso *swap* per la scadenza m, z_m è il tasso di parità di un titolo a cedola fissa annua, di durata m anni; vale quindi la relazione:

$$z_m \sum_{k=1}^{m} [1 + i(0, k)]^{-k} + [1 + i(0, m)]^{-m} = 1$$

da cui si ricava:

$$i(0, m) = \left\{ \frac{z_m}{1 - z_m \sum_{k=1}^{m-1} [1 + i(0, k)]^{-k}} \right\}^{1/m} - 1\,.$$

Per la risoluzione dell'esercizio basta applicare l'espressione in modo iterativo, con la condizione $i(0, 1) = z(0, 1)$; il tasso *swap* a 3 anni, non quotato dal mercato, può essere determinato con interpolazione lineare:

$$z_3 = \frac{z_2 + z_4}{2} = 5.19\%\,.$$

La struttura per scadenza dei tassi di interesse a pronti, desunta dai tassi *swap* ,è:

$$\begin{aligned} i(0,1) &= 4.50000\,\%\,, \\ i(0,2) &= 4.96119\,\%\,, \\ i(0,3) &= 5.21059\,\%\,, \\ i(0,4) &= 5.46667\,\%\,, \\ i(0,5) &= 5.93493\,\%\,. \end{aligned}$$

La struttura per scadenza dei tassi di interesse a termine uniperiodali risulta:

$$\begin{aligned} i(0,0,1) &= 4.50000\,\%\,, \\ i(0,1,2) &= 5.42441\,\%\,, \\ i(0,2,3) &= 5.71118\,\%\,, \\ i(0,3,4) &= 6.23866\,\%\,, \\ i(0,4,5) &= 7.82883\,\%\,. \end{aligned}$$

Esercizio 7.1.2

Nell'istante di tempo $t = 0$ sono quotati sul mercato i seguenti tassi *swap*:

$$z_1 = 4.53\%$$

$$z_2 = 4.85\%$$

$$z_5 = 5.95\%$$

avendo indicato con z_m il tasso *swap* relativo alla scadenza m anni.
In riferimento allo scadenzario $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ anni, calcolare le strutture per scadenza dei tassi di interesse a pronti e a termine uniperiodali, esprimendo i tassi su base annua.

Soluzione

Come nell'esercizio precedente, non essendo assegnati i tassi *swap* per le scadenze 3 e 4 anni, si utilizza l'interpolazione lineare; dall'equazione della retta passante per i punti di coordinate $(2, z_2)$ e $(5, z_5)$, ossia

$$y = \frac{z_5 - z_2}{3}(x - 2) + z_2\,,$$

si ha:

$$z_3 = 5.22\%\,, \qquad z_4 = 5.58\%\,.$$

La struttura dei tassi *zero coupon swap*, ottenuta con procedura iterativa, risulta:

$$\begin{aligned}
i(0,1) &= 4.53000\,\%\,,\\
i(0,2) &= 4.85778\,\%\,,\\
i(0,3) &= 5.24187\,\%\,,\\
i(0,4) &= 5.63595\,\%\,,\\
i(0,5) &= 6.04246\,\%\,,
\end{aligned}$$

da cui si calcola quella dei tassi a termine:

$$\begin{aligned}
i(0,0,1) &= 4.53000\,\%\,,\\
i(0,1,2) &= 5.18660\,\%\,,\\
i(0,2,3) &= 6.01427\,\%\,,\\
i(0,3,4) &= 6.82708\,\%\,,\\
i(0,4,5) &= 7.68417\,\%\,.
\end{aligned}$$

Esercizio 7.1.3

Nell'istante di tempo $t = 0$ sono trattati sul mercato i seguenti titoli:
· uno *zero coupon bond* a termine con scadenza $t_1 = 1$ anno e valore nominale 100 euro, con prezzo a termine uguale a 96.15 euro ;
· un titolo a cedola fissa di durata 2 anni che paga cedole annue al tasso annuo $i = 4\%$, con prezzo a pronti uguale a 99.87 euro;

· un contratto di *interest rate swap*, di durata 3 anni, essendo $z_3 = 4.5\%$.
In riferimento allo scadenzario $\{1, 2, 3\}$ anni, calcolare:
(a) la struttura per scadenza dei prezzi a pronti e a termine;
(b) la struttura per scadenza dei tassi di interesse a pronti e a termine uniperiodali, esprimendo i tassi su base annua.

Soluzione

(a) La determinazione della struttura per scadenza dei prezzi a pronti segue dalla risoluzione del sistema lineare:

$$\begin{cases} 100\, v(0,1) & & & = & 96.15 \\ 4\, v(0,1) & + & 104\, v(0,2) & & & = & 99.87 \\ 4.5\, v(0,1) & + & 4.5\, v(0,2) & + & 104.5\, v(0,3) & = & 100 \end{cases}$$

Si ottiene:

$$\begin{aligned} v(0,1) &= 0.96150\,, \\ v(0,2) &= 0.92331\,, \\ v(0,3) &= 0.87577\,, \end{aligned}$$

da cui si calcolano i prezzi a termine:

$$\begin{aligned} v(0,0,1) &= 0.96150\,, \\ v(0,1,2) &= 0.96028\,, \\ v(0,2,3) &= 0.94851\,. \end{aligned}$$

Le strutture per scadenza dei tassi di interesse a pronti e a termine uniperiodali risultano:

$$\begin{aligned} i(0,1) &= 4.00416\,\%\,, & i(0,0,1) &= 4.00416\,\%\,, \\ i(0,2) &= 4.07029\,\%\,, & i(0,1,2) &= 4.13646\,\%\,, \\ i(0,3) &= 4.52079\,\%\,, & i(0,2,3) &= 5.42765\,\%\,. \end{aligned}$$

8 Opzioni finanziarie "semplici"

Riferimenti bibliografici: [H] pp. 5-9, pp. 138-159, pp. 167-168, pp. 194-207, pp. 240-244.

Esercizio 8.1

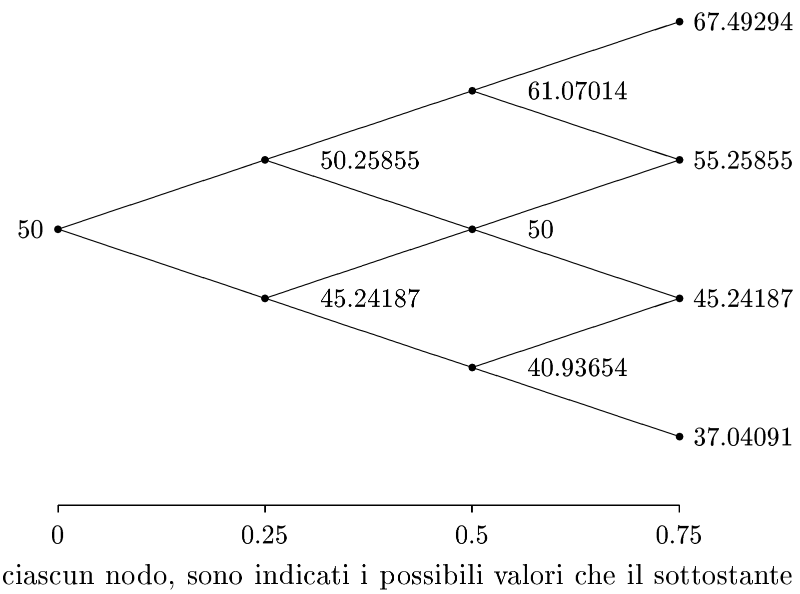
Si consideri nell'istante di tempo $t = 0$ un'opzione *call* di tipo europeo scritta su un titolo azionario, con prezzo di esercizio $K = 65$ euro e tempo di esercizio $T = 0,75$ anni; il prezzo del titolo sottostante (che non paga dividendi), in $t = 0$, è uguale a 50 euro, e la volatilità annua è uguale a 0.20. Sapendo che il tasso *risk-free* è $i = 4.2\%$, su base annua, determinare, utilizzando il modello di Cox, Ross e Rubinstein e considerando "tre passi":
(a) il valore $C(0)$ dell'opzione *call*;
(b) il valore $P(0)$ della corrispondente *put*.

Soluzione

Il passo di discretizzazione è $\Delta t = (T - t)/N$, con $N = 3$; risulta $\Delta t = 0.25$ anni. Indicati con a e b i fattori, rispettivamente, di rialzo e di ribasso del prezzo del sottostante, si ha:

$$a = e^{\sigma\sqrt{\Delta t}} = 1.10517 \text{ e } b = \frac{1}{a} = 0.90484\,,$$

essendo σ il parametro di volatilità. L'evoluzione del prezzo del sottostante è rappresentata dall'albero binomiale:



dove, su ciascun nodo, sono indicati i possibili valori che il sottostante può assumere:
– in $t = 0$ il prezzo del sottostante è $S = 50$ euro;
– in $\Delta t = 0.25$ anni il prezzo può assumere i valori $aS = 50.25855$ (rialzo) o $bS = 45.24187$ (ribasso);
– in $2\Delta t = 0.5$ anni si avranno 3 possibili stati: se nell'istante Δt il prezzo del sottostante è aS, in ipotesi di rialzo il valore è $a^2S = 61.07014$, in ipotesi di ribasso

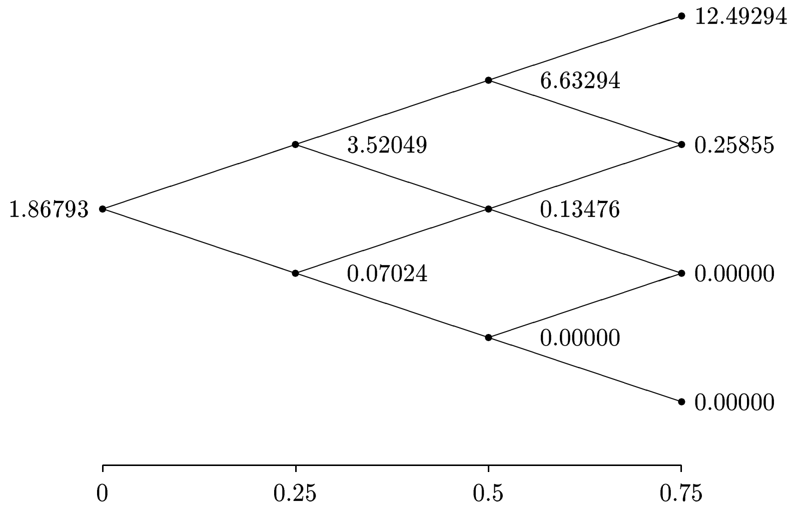
esso è $abS = S$; se in Δt il prezzo del sottostante è bS, in ipotesi di rialzo il valore è $baS = S$[6], in ipotesi di ribasso è $b^2S = 40.93654$;
– alla scadenza dell'opzione, in $3\Delta t = 0.75$ anni, si avranno quattro possibili valori dati da $a^3S = 67.49294$, $a^2bS = 55.25855$, $ab^2S = 45.24187$ e $b^3S = 37.04091$ nella stessa logica seguita al passo precedente.
(a) Dato il fattore montante m su ciascun periodo di ampiezza Δt anni:

$$m = (1+i)^{\Delta t} = 1.01034\,,$$

e la probabilità *risk-adjusted*

$$q = \frac{m-b}{a-b} = 0.52663\,,$$

il prezzo della *call* è determinato "tornando indietro" sull'albero (*backward*).



In particolare:
– dato il *pay-off* dell'opzione alla scadenza $T = 0.75$:

$$C(T) = \max\{S(T) - K, 0\}\,,$$

essendo $S(T)$ il prezzo del sottostante in T, e dati i possibili valori del sottostante alla scadenza, i valori che l'opzione può assumere in corrispondenza di ciascun nodo risultano:

$$\begin{aligned}
C_1(T) &= \max\{67.49294 - 55, 0\} = 12.49294,\\
C_2(T) &= \max\{55.25855 - 55, 0\} = 0.25855,\\
C_3(T) &= \max\{45.24187 - 55, 0\} = 0.00000,\\
C_4(T) &= \max\{37.04091 - 55, 0\} = 0.00000.
\end{aligned}$$

– in $2\Delta t$ in corrispondenza di ciascun nodo si calcola il valore atteso scontato dei valori dell'opzione al tempo T, ossia:

[6] L'albero è ricombinate, ossia un movimento al ribasso seguito da un movimento al rialzo porta allo stesso stato di un movimento al rialzo seguito da uno al ribasso.

$$\begin{aligned}
C_1(2\Delta t) &= \frac{1}{m}\left[qC_1(T) + (1-q)C_2(T)\right] &= 6.63294,\\
C_2(2\Delta t) &= \frac{1}{m}\left[qC_2(T) + (1-q)C_3(T)\right] &= 0.13476,\\
C_3(2\Delta t) &= \frac{1}{m}\left[qC_3(T) + (1-q)C_4(T)\right] &= 0.00000.
\end{aligned}$$

– analogamente, in Δt, si ha:

$$\begin{aligned}
C_1(\Delta t) &= \frac{1}{m}\left[qC_1(2\Delta t) + (1-q)C_2(2\Delta t)\right] &= 3.52049,\\
C_2(\Delta t) &= \frac{1}{m}\left[qC_2(2\Delta t) + (1-q)C_3(2\Delta t)\right] &= 0.07204.
\end{aligned}$$

Quindi il valore dell'opzione *call* nell'istante $t = 0$ è fornito dalla:

$$C(t) = \frac{1}{m}\left[qC_1(\Delta t) + (1-q)C_2(\Delta t)\right] = 1.86793 \text{ euro.}$$

(b) Il prezzo, in $t = 0$, della corrispondente opzione *put* è determinato utilizzando la relazione di parità tra *call* e *put*:

$$P(t) = C(t) - S(t) + (1+i)^{-T}K = 5.19674 \text{ euro,}.$$

Esercizio 8.2

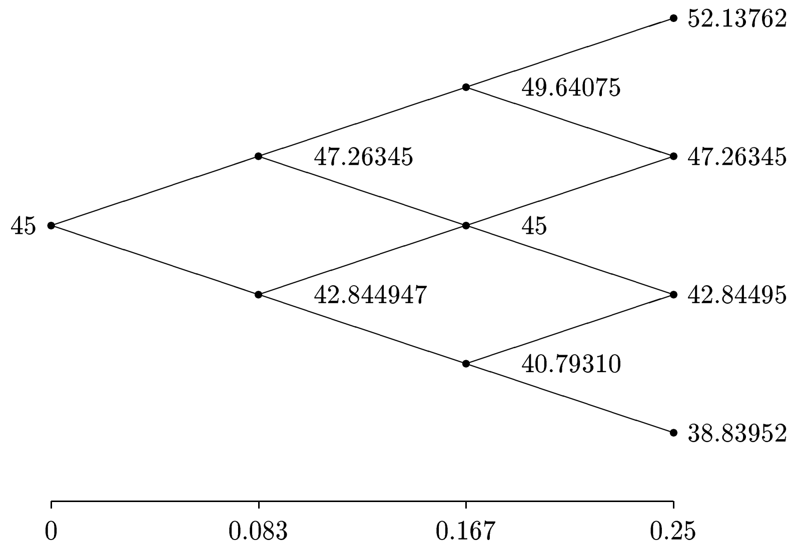
Si consideri nell'istante di tempo $t = 0$ un'opzione *call* di tipo europeo scritta su un titolo azionario, con prezzo di esercizio $K = 48$ euro e tempo di esercizio $T = 0.25$ anni; il prezzo del titolo sottostante (che non paga dividendi), in $t = 0$, è uguale a 45 euro, e la volatilità annua è uguale a 0.17. Sapendo che il tasso *risk-free* è $i = 3.85\%$, su base annua, determinare, utilizzando il modello di Cox, Ross e Rubinstein e considerando "tre passi":

(a) la composizione del portafoglio replicante l'opzione in $t = 0$;

(b) la probabilità *risk-adjusted* che l'opzione call sia *in the money* alla scadenza T.

Soluzione

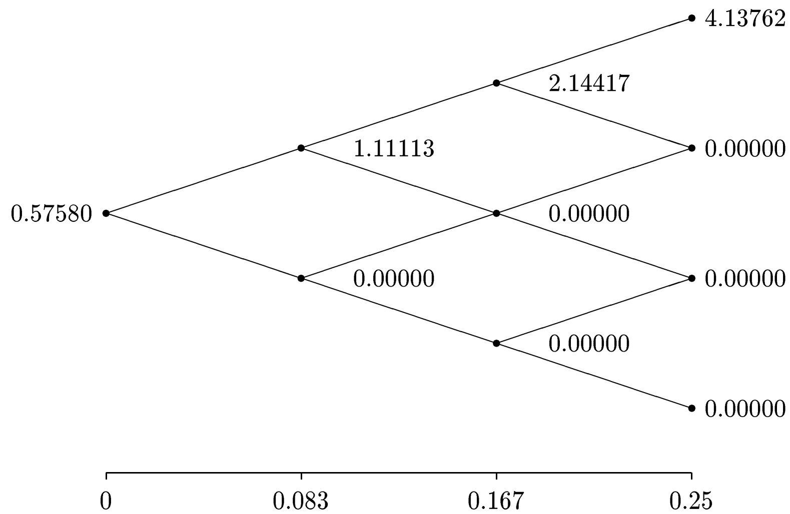
Si costruisce l'albero binomiale del processo del sottostante a partire dal valore in $t = 0$ del titolo sottostante, $S = 45$:



dove il passo di discretizzazione è $\Delta t = 0.083$ anni, il fattore di rialzo è $a = e^{\sigma\sqrt{\Delta t}} = 1.05030$, il fattore di ribasso è $b = 1/a = 0.95211$.
Il valore dell'opzione è determinato come illustrato nell'esercizio precedente, utilizzando i valori:

$$m = (1+i)^{\Delta t} = 1.00315 \quad \text{e} \quad q = \frac{m-b}{a-b} = 0.91985\,,$$

rispettivamente per il fattore montante e per la probabilità *risk-adjusted*. Si ottiene:



(a) Si indichi con C_a il valore dell'opzione nell'istante Δt in corrispondenza di un movimento al rialzo del prezzo del sottostante, ossia quando il prezzo è $aS = 47.26345$, e con C_b il valore dell'opzione in corrispondenza di un movimento al ribasso del prezzo del sottostante, ossia quando il prezzo è $bS = 42.84495$. Risulta:

$$C_a = 1.11113 \text{ e } C_b = 0.00000.$$

Il portafoglio replicante l'opzione, in $t = 0$, è costituito da Δ unità del titolo sottostante e da un investimento di B euro al tasso i, essendo

$$\Delta = \frac{\partial C}{\partial S} = \frac{C_a - C_b}{S(a-b)} = 0.25147,$$

e

$$B = \frac{aC_b - bC_a}{(a-b)m} = -10.74047.$$

Il valore, in $t = 0$, del portafoglio replicante risulta (valore dell'opzione *call*):

$$\Delta S + B(1+i)^{-\Delta t} = 0.57580\,.$$

(b) L'opzione *call* è *in the money* in T se $S(T) > K$ e ciò si verificare solo nel caso di tre rialzi consecutivi del prezzo del sottostante ossia quando $S(T) = a^3 S$; poichè nel modello di Cox, Ross e Rubistein la variabile aleatoria $S(T)$ ha distribuzione binomiale, la probabilità di avere tre rialzi consecutivi è $q^3 = 0.14048$.

Esercizio 8.3

Nell'istante di tempo $t = 0$ un'istituzione finanziaria emette un contratto "con minimo garantito" che alla scadenza T garantisce il capitale investito B e il rendimento realizzato da una certa azione nel periodo $[0, T]$ se superiore a un livello di tasso i (minimo garantito), altrimenti l'interesse calcolato allo stesso tasso i.
(a) Descrivere il *pay-off* del contratto, alla scadenza T, e ricavare le "scomposizioni" di tipo *call* e di tipo *put*.
(b) Caratterizzare lo schema di valutazione del contratto all'emissione, ipotizzando che l'azione non paghi dividendi.

Soluzione

(a) Sia $S(t)$ il valore dell'azione in un generico istante t. Il *pay-off* in T del titolo obbligazionario è formalizzato dalla:

$$X(T) = B + B\max\left\{\frac{S(T)-S(0)}{S(0)}, i\right\} = B + B\max\left\{\frac{S(T)}{S(0)} - 1, i\right\}\,.$$

Per la proprietà $\max\{x, y\} = y + \max\{x - y, 0\}$, in riferimento alla scomposizione di tipo *call*, si ha:

$$\begin{aligned} X(T) &= (1+i)B + B\max\left\{\frac{S(T)}{S(0)} - (1+i), 0\right\} \\ &= (1+i)B + \frac{B}{S(0)}\max\{S(T) - (1+i)S(0), 0\} \\ &= (1+i)B + C(T)\,. \end{aligned}$$

dove $C(T)$ è il *pay-off* in T di un'opzione *call* di tipo europeo, scritta sull'azione, con prezzo *strike* $K = (1+i)S(0)$.
In riferimento alla scomposizione di tipo *put* si può anche scrivere:

$$\begin{aligned} X(T) &= B + \left(\frac{S(T)}{S(0)} - 1\right)B + B\max\left\{(1+i) - \frac{S(T)}{S(0)}, 0\right\} \\ &= \frac{S(T)}{S(0)}B + \frac{B}{S(0)}\max\{(1+i)S(0) - S(T), 0\} \\ &= \frac{S(T)}{S(0)}B + P(T)\,, \end{aligned}$$

dove $P(T)$ è il *pay-off* in T di un'opzione *put* di tipo europeo, scritta sull'azione, con prezzo *strike* $K = (1+i)S(0)$.
(b) Il prezzo all'emissione del titolo obbligazionario, in riferimento alla scomposizione *call*, può essere calcolato dalla:

$$V(0; X(T)) = (1+i)Bv(0,T) + C(0)\,,$$

dove $v(0,T)$ è il fattore di sconto, in $t=0$ per la scadenza T, e C(0) è il prezzo in $t=0$ dell'opzione *call* che rappresenta il costo della garanzia di sovrarendimento del titolo azionario.

In riferimento alla scomposizione *put*, il prezzo all'emissione del titolo obbligazionario può anche essere calcolato dalla:

$$V(0; X(T)) = \frac{V(0; S(T))}{S(0)}B + P(0)\,,$$

dove $P(0)$ è il prezzo in $t=0$ della *put*, e rappresenta il costo della garanzia di rendimento minimo; data l'ipotesi che l'azione non paghi dividendi, si ha che $V(0; S(T)) = S(0)$, e quindi:

$$V(0; X(T)) = B + P(0)\,.$$

IV - Contratti assicurativi

9 - Contratti elementari di assicurazione sulla vita

Riferimenti bibliografici: [P] pp. 19-22, pp. 43-57.

Esercizio 9.1

Data la base tecnica demografica (SIM93):

$$\begin{aligned} {}_{19/1}q_{40} &= 0.09712, \\ {}_{14/1}q_{50} &= 0.14439, \\ {}_{4/1}q_{70} &= 0.18487, \end{aligned}$$

e:

$$\begin{aligned} {}_{20}p_{40} &= 0.90288, \\ {}_{15}p_{50} &= 0.85561, \\ {}_{5}p_{70} &= 0.81513, \end{aligned}$$

e ipotizzando un tasso tecnico su base annua uguale al 5%, calcolare:
(a) per un contratto di assicurazione elementare in caso di morte, riferito a una prestazione unitaria (1 euro):
– il premio unico puro U_1 su una testa di età $x = 40$ anni, con durata 20 anni;
– il premio unico puro U_2 su una testa di età $x = 50$ anni, con durata 15 anni;
– il premio unico puro U_3 su una testa di età $x = 70$ anni, con durata 5 anni;
(b) per un contratto di assicurazione elementare di capitale differito in caso di sopravvivenza, riferito a una prestazione unitaria (1 euro):
– il premio unico puro U_4 su una testa di età $x = 40$ anni, con durata 20 anni;
– il premio unico puro U_5 su una testa di età $x = 35$ anni, con durata 15 anni;
– il premio unico puro U_6 su una testa di età $x = 70$ anni, con durata 5 anni.

Soluzione

(a) La prestazione della compagnia per un'assicurazione elementare in caso di morte di durata n anni su una testa di età x è il pagamento di 1 euro alla fine dell'anno n se la testa assicurata muore nell'anno n, altrimenti è zero; il premio unico puro, per ciascun contratto, risulta dalle:

$$\begin{aligned} U_1 &= {}_{19/1}A_{40} = (1+i)^{-20}\ {}_{19/1}q_{40} \\ U_2 &= {}_{14/1}A_{50} = (1+i)^{-15}\ {}_{14/1}q_{50} \\ U_3 &= {}_{4/1}A_{70} = (1+i)^{-5}\ {}_{4/1}q_{70} \end{aligned}$$

avendo indicato con i il tasso tecnico del 5% e con ${}_{h-1/h}q_x$ la probabilità che una testa di età x ha di morire nell'anno h; si ottiene:

$$\begin{aligned} U_1 &= 0.03660, \\ U_2 &= 0.06945, \\ U_3 &= 0.14485. \end{aligned}$$

(b) La prestazione della compagnia in un'assicurazione di capitale differito di durata n anni su una testa di età x è il pagamento di 1 euro alla fine dell'anno n se la testa assicurata raggiunge in vita l'età $x + n$ altrimenti è zero; il premio unico puro, per ciascun contratto, risulta dalle:

$$\begin{aligned} U_4 &= {}_{20}E_{40} &= (1+i)^{-20}\ {}_{20}p_{40} \\ U_5 &= {}_{15}E_{50} &= (1+i)^{-15}\ {}_{15}p_{50} \\ U_6 &= {}_{5}E_{70} &= (1+i)^{-5}\ {}_{5}p_{70} \end{aligned}$$

essendo ancora i il tasso tecnico e ${}_hp_x$ la probabilità che una testa di età x raggiunga in vita l'età $x+h$; si ottiene:

$$\begin{aligned} U_4 &= 0.34029, \\ U_5 &= 0.41156, \\ U_6 &= 0.63868. \end{aligned}$$

Esercizio 9.2

Data la base tecnica demografica (SIM93):

– $x = 20$, $n = 10$:

h	${}_hp_x$
0	1.00000
1	0.99897
2	0.99792
3	0.99682
4	0.99573
5	0.99463
6	0.99351
7	0.99234
8	0.99109
9	0.98972

– $x = 30$, $n = 20$:

h	${}_hp_x$
0	1.00000
1	0.99845
2	0.99685
3	0.99525
4	0.99370
5	0.99217
6	0.99069
7	0.99920
8	0.98767
9	0.98610
10	0.98452
11	0.98283
12	0.98101
13	0.97902
14	0.97685
15	0.97446
16	0.97188
17	0.96904
18	0.96581
19	0.96222

– $x = 50$, $n = 10$:

h	${}_hp_x$
0	1.00000
1	0.94810
2	0.89852
3	0.85109
4	0.80564
5	0.76213
6	0.72039
7	0.68034
8	0.64191
9	0.60497

e ipotizzando un tasso tecnico su base annua uguale al 5%, calcolare il premio unico puro di un'assicurazione di rendita vitalizia unitaria anticipata, di durata n anni, nei seguenti casi:

– età della testa assicurata $x = 20$ anni, durata $n = 10$ anni,

– età della testa assicurata $x = 30$ anni, durata $n = 20$ anni,

– età della testa assicurata $x = 50$ anni, durata $n = 10$ anni.

Soluzione

In un'assicurazione di rendita vitalizia temporanea di durata n anni anticipata la prestazione della compagnia è il pagamento di un importo, in questo caso di un euro, all'inizio ciascun anno fin quando la testa assicurata rimane in vita su un periodo di n anni. Dunque il premio unico puro, U, è espresso dalla seguente:

$$U =_n \ddot{a}_x = \sum_{h=0}^{n-1} (1+i)^{-h} \ {}_hp_x \, ,$$

dove i è il tasso tecnico e ${}_hp_x$ è la probabilità che una testa di età x raggiunga in vita l'età $x + h$.

Nei tre diversi casi risulta:

$$\begin{aligned} {}_{10}\ddot{a}_{20} &= 8.07154, \\ {}_{20}\ddot{a}_{30} &= 12.91287, \\ {}_{10}\ddot{a}_{50} &= 7.91307. \end{aligned}$$

Esercizio 9.3

Si consideri la base tecnica demografica (SIM93):

h	${}_{h-1/1}q_{50}$
1	0.00449
2	0.00491
3	0.00543
4	0.00606
5	0.00672
6	0.00750
7	0.00838
8	0.00931
9	0.01043
10	0.01160
11	0.01288
12	0.01432
13	0.01589
14	0.01758
15	0.01946
16	0.02155
17	0.02367
18	0.02591
19	0.02800
20	0.03055

h	${}_hp_{50}$
1	0.99551
2	0.99061
3	0.98524
4	0.97926
5	0.97269

e un individuo di età $x = 50$ anni che intende stipulare una polizza temporanea caso morte con capitale assicurato di 10 milioni di euro e scadenza 20 anni. Calcolare:
(a) il premio unico puro nel caso in cui il tasso d'interesse tecnico sia uguale al 5% su base annua;
(b) il premio periodico nel caso in cui si voglia rateizzare il premio unico in 5 versamenti annui anticipati a partire dall'istante di stipula del contratto.

Soluzione

(a) La prestazione della compagnia è il pagamento del capitale assicurato $C = 10$ milioni di euro alla fine dell'anno in cui la testa assicurata muore se il decesso avviene entro 20 anni, altrimenti zero. Il premio unico puro, U, è fornito dalla:

$$U = C \sum_{h=1}^{20} (1+i)^{-h} \ {}_{h-1/1}q_{50} \,,$$

dove i è il tasso tecnico; si ricava: $U = 1511071$ euro.
(b) Il premio periodico A da pagare alla fine di ciscun anno per 5 anni si ricava dalla seguente:

$$A = \frac{U}{\sum_{h=1}^{5} {}_hp_{50}} \,,$$

dove il denominatore è il premio unico di una rendita vitalizia temporanea di durata 5 anni con capitale assicurato unitario; si ricava: $A = 354256$ euro.

Riferimenti bibliografici

[CDMM] - Castellani, G., De Felice, M., Moriconi, F., Mottura, C. *Un corso sul controllo del rischio di tasso di interesse*, Il Mulino, Bologna, 1993

[H] Hull, J.C., *Opzioni, futures e altri derivati*, Milano, Il Sole 24 Ore Libri, 1998

[P] Pitacco, E., *Elementi di matematica attuariale delle assicurazioni sulla vita*, Lint, Trieste, 1988