

Dispense di Matematica 0

Domenico Candeloro

Introduzione. Con l'entrata in vigore del Nuovo Ordinamento nella Facoltà d'Ingegneria, si rende necessario un corso *introduttivo* di Matematica per le matricole, nel quale si forniscano, assieme ai dovuti richiami delle nozioni di base, anche una serie di *modelli* volti a illustrare alcune semplici applicazioni degli strumenti matematici più elementari. Queste brevi dispense hanno lo scopo di mostrare che si possono adoperare strumenti assolutamente elementari, quali proporzioni, equazioni, disequazioni, anche per risolvere problemi non del tutto banali; citiamo ad esempio alcuni problemi di ottimizzazione (v. cap. IV), che altrove si trovano spesso affrontati e risolti con metodi di Trigonometria oppure con il Calcolo Differenziale.

Naturalmente, questo ci offre il pretesto per *ripassare*, sia pure a grandi linee, le nozioni di base acquisite nelle scuole precedenti, e per stimolare lo studente a confrontarsi con un modo di ragionare che, nonostante l'inevitabile riduzione dei programmi rispetto a quelli del Vecchio Ordinamento, deve comunque distinguere gli studi universitari da quelli della scuola media superiore.

Nel primo capitolo tratteremo lo strumento delle *proporzioni*, presentando vari problemi che con esse si possono affrontare e risolvere, e anche alcuni possibili *errori* di concetto, che si possono commettere qualora le si adoperi con eccessiva disinvoltura.

Nel secondo capitolo vedremo varie applicazioni delle proporzioni in Geometria piana, dalla similitudine dei triangoli al concetto di *sezione aurea*. Quest'ultimo ha anche lo scopo di introdurre il discorso sulle equazioni (e disequazioni), che poi vengono trattate, con svariati esercizi, nel capitolo 3. Precisiamo che qui ci siamo limitati alle equazioni e disequazioni algebriche o fratte, lasciando a capitoli successivi la trattazione di problemi coinvolgenti logaritmi, trigonometria, funzioni esponenziali.

Nel IV capitolo abbiamo voluto presentare alcuni semplici problemi di ottimizzazione, che si possono risolvere anche solo con l'uso delle equazioni o disequazioni algebriche, senza ricorrere a strumenti più sofisticati: si possono incontrare problemi classici come la ricerca

del triangolo di area massima e perimetro fissato, ma anche problemi di minima distanza, meno conosciuti ma ugualmente importanti.

Nel V e VI Capitolo abbiamo riportato i rudimenti della Trigonometria e del calcolo logaritmico ed esponenziale, con svariati esercizi, mentre nell'ultimo Capitolo, il settimo, riportiamo alcuni problemi tipici di equazioni e disequazioni che si possono facilmente incontrare affrontando studi di funzioni nel primo corso di Analisi Matematica.

Concludiamo con l'auspicio che l'uso di queste semplici note, al di là della comprensione dei vari argomenti e problemi qui trattati, stimoli lo studente a impegnarsi in prima persona: ad esempio, nel confrontare i procedimenti qui presentati con altri metodi di sua conoscenza (sicuramente ve ne sono, almeno per qualche problema); oppure, nel cimentarsi a proporre soluzioni personali alternative, e magari a porsi domande su altri temi e questioni, sia pure senza la pretesa di risolvere tutto e subito...

Capitolo 1

Proporzioni

Tra i numerosi strumenti matematici, che conducono alla impostazione di equazioni, uno dei piu' elementari é quello delle proporzioni. Non staremo qui a spiegare cosa sono le proporzioni, ma ci limiteremo a presentare alcuni problemi concreti, nei quali l'uso (accurato) delle proporzioni conduce prontamente alla soluzione giusta, ma anche problemi nei quali le proporzioni, applicate in modo superficiale, possono indurre in errore.

Un primo esempio di proporzioni si incontra nella determinazione della velocita' media: se un ciclista percorre 1.200 metri in 2 minuti, qual'é la sua velocita' in Km/h ?

Si puo' impostare la proporzione: $1200 : 2 = x : 60$. Applicando la regola del prodotto dei medi, si trova $x = 1200 \times 60/2 = 36000$ (metri). Dunque, in un'ora il ciclista percorre $36Km$.

L'uso della regola suddetta permette di interpretare ogni proporzione come un'equazione. In effetti, ogni proporzione, cosi' com'é scritta, é gia' un'equazione (basta solo stare attenti a non dividere per 0).

Un altro esempio si incontra nelle cartine geografiche: se la scala di una cartina é di $1 : 1200000$, qual é la distanza reale tra due localita' che distano, sulla carta, $48cm$?

La proporzione qui é molto semplice: $1 : 1200000 = 48 : x$, da cui $x = 1200000 \times 48 = 57600000$, ovviamente espresso in cm. Dunque, la distanza cercata é $576 Km$.

Dal punto di vista puramente tecnico, una proporzione puo' essere interpretata come una relazione lineare tra due quantita' (direttamente proporzionali, appunto): nell'esempio

del ciclista, la costante di proporzionalità è la velocità, chiamiamola v . Una volta stabilito che il ciclista si muove con velocità v costante, c'è proporzionalità diretta tra lo spazio percorso e il tempo impiegato a percorrerlo.

Nel caso della cartina, la costante di proporzionalità è la scala stessa, che esprime il rapporto (costante) tra distanza reale e distanza sulla carta. Possiamo quindi stabilire la seguente definizione.

Definizione 1.1 Quando due quantità reali, diciamo x e y , sono soggette a un legame di proporzionalità diretta, ad esempio $y = vx$, tale legame può essere rappresentato con una retta nel piano cartesiano, passante per l'origine. Per tale motivo, il legame che lega le due variabili x e y viene detto *lineare*. Più generalmente, si ha un *legame lineare* quando è $y = vx + c$, ove c è una costante qualunque. In tal caso, la rappresentazione nel piano cartesiano è ancora una retta, ma non necessariamente passante per l'origine. In ogni caso, purché risulti $v \neq 0$, il legame lineare è *reciproco*: se $y = vx + c$, risulta anche $x = \frac{1}{v}y - \frac{c}{v}$.

A volte, è utile anche il concetto di *proporzionalità inversa*, anch'esso di natura reciproca: se y è proporzionale a $\frac{1}{x}$, allora si dice che y e x sono *inversamente proporzionali*. Questa relazione ha senso se x e y sono entrambi non nulli, e si può anche esprimere dicendo che il prodotto $x \times y$ è costante. La famosa Legge di Boyle dei gas perfetti, $PV = KT$, esprime appunto una relazione di proporzionalità inversa tra pressione (P) e volume (V) di un gas, a patto che la sua temperatura assoluta T rimanga costante.

Ma torniamo alle nostre proporzioni, e affrontiamo un nuovo problema per il nostro ciclista: come sappiamo, egli pedala alla velocità media di 36 Km/h . Ad un certo punto, egli deve affrontare una salita di 3 Km , che percorre alla velocità ridotta di 24 Km/h . Quale velocità egli dovrà tenere, nella successiva discesa (pure di 3 Km), per recuperare la media di 36 Km/h ?

Non dobbiamo lasciarci trarre in inganno da considerazioni semplicistiche: se il ciclista percorresse la discesa a 48 Km/h (cioè, $36 + 12$, per bilanciare i precedenti $36 - 12$), impiegherebbe $1/16$ di ora (ossia $3'45''$). Ma nella salita egli ha impiegato $1/8$ di ora, cioè $7'30''$. Dunque, in totale, per i 6 km di salita e discesa, egli impiegherebbe 11 minuti e 15 secondi: troppo tempo! Infatti, se vuole rimanere nella media di 36 Km/h , i 6 Km vanno

percorsi complessivamente in 10 minuti! A tale scopo, visto che in salita sono già passati 7 minuti e mezzo, la discesa va percorsa in 2 minuti e mezzo, il che significa una velocità di 72 Km/h : ben più impegnativa, per un ciclista! Ma sarebbe senz'altro peggio, se egli percorresse la salita a 18 Km/h o meno: infatti, in tal caso egli impiegherebbe tutti i 10 minuti in salita, e quindi non avrebbe più possibilità di recuperare, almeno non con la sola discesa. Se si vuole impostare questo problema in termini di equazioni matematiche, si può procedere così: detta v la velocità media, detta u la velocità tenuta in salita, detta x la velocità della discesa, e indicata con s la lunghezza comune di salita e discesa, si deve avere

$$\frac{s}{u} + \frac{s}{x} = \frac{2s}{v} \quad (\text{uguagliando i tempi di percorrenza .})$$

Risolvendo l'equazione in x , con i soliti metodi, si ottiene

$$x = \frac{uv}{2u - v}$$

da cui si vede intanto che x è accettabile (*positiva*) solo se $v < 2u$, cioè se la velocità della salita supera i 18 Km/h . Se poi si sostituiscono i nostri dati, ossia $u = 24$, $v = 36$, si ricava $x = 72$. Si osservi che il valore trovato per x non dipende da s , dunque sarebbe lo stesso anche se la salita e la discesa avessero una qualunque altra lunghezza (purché la stessa, per entrambe).

Un'altra osservazione riguarda la cartina geografica: qual è il significato esatto della scala? Se una cartina da 1:1200000 rappresentasse l'Italia, questa cartina sarebbe circa di un metro quadrato. Ora, se la scala 1:1200000 comportasse che *tutto* si può dividere per tale numero, si potrebbe dedurre che sulla cartina, ipoteticamente stesa per terra, dovrebbero trovare posto comodamente circa 50 italiani (60 Milioni: 1.200000). Ma un metro quadrato è decisamente insufficiente! E difatti la scala si riferisce esclusivamente alle distanze: un discorso come quello precedente avrebbe come presupposto che anche le *aree* si rapportino allo stesso modo, e questo è errato. Infatti, se un cm corrisponde a 12 Km , un cm^2 corrisponde a $144 \text{ Km}^2 = 144 \times 10^{10} \text{ cm}^2$, e quindi la scala per le aree è di $1 : (1200000)^2$.

Un altro problema interessante, legato alle proporzioni, é il seguente:

Tutti sappiamo che, in certi momenti della giornata, le due lancette dell'orologio sono perfettamente sovrapposte. Una domanda allora potrebbe essere questa: quali sono le ore esatte in cui questo fenomeno accade?

In linea di principio, la lancetta delle ore, con la sua posizione, potrebbe da sola individuare l'ora esatta del giorno (a parte la distinzione tra mattina e pomeriggio), mentre la lancetta dei minuti segnala soltanto una frazione di ora. Ciascuna delle lancette segue una regola di proporzionalita': per quanto riguarda la lancetta delle ore, all'ora h del giorno essa forma un angolo α rispetto alla verticale (ore 12), osservato in senso orario; la relazione tra h e α é la seguente:

$$\alpha = \frac{\pi}{6}h.$$

Infatti, all'angolo di 90 gradi (cioé $\alpha = \frac{\pi}{2}$) corrisponde $h = 3$, all'angolo di 30 gradi ($\alpha = \frac{\pi}{6}$) corrisponde $h = 1$, e cosi' via.

La lancetta dei minuti segue un'altra proporzione: detto β l'angolo che questa lancetta forma con la verticale, sempre in senso orario, la frazione m di ora che tale posizione rappresenta é legata a β dalla relazione

$$\beta = 2\pi m.$$

Infatti, se $\beta = \frac{\pi}{2}$ sappiamo che $m = \frac{1}{4}$ (un quarto d'ora), se $\beta = \frac{\pi}{6}$ (30 gradi) allora $m = \frac{1}{12}$ (5 minuti= $\frac{1}{12}$ di ora), etc.

Ora, torniamo al nostro problema: se supponiamo che le lancette siano sovrapposte, allora α e β sono uguali. Facciamo finta per un momento di sapere che cio' avviene tra le 4 e le 5. Allora certamente l'ora esatta é $h = 4 + m$, e quindi, dalle relazioni scritte sopra:

$$\alpha = \frac{\pi}{6}(4 + m), \quad \beta = 2\pi m;$$

e siccome $\alpha = \beta$ troviamo

$$\frac{\pi}{6}(4 + m) = 2\pi m \tag{1.1}$$

cioé, dividendo per π e moltiplicando per 6:

$$4 + m = 12m, \quad \text{per cui } m = \frac{4}{11}.$$

Se si vuole l'indicazione in minuti, basta moltiplicare $\frac{4}{11}$ per 60: si ottiene 21.81818181..., ossia 21 minuti e circa 82 centesimi di minuto, circa 21 minuti e 49 secondi. In definitiva, se la sovrapposizione delle lancette avviene tra le 4 e le 5, sono le $4^h, 21'49''$.

Piu' in generale, se la sovrapposizione avviene tra l'ora k e l'ora $k+1$ (con $k=0,1,\dots,11$), la relazione (1.1) precedentemente trovata diviene

$$\frac{\pi}{6}(k+m) = 2\pi m$$

da cui

$$m = \frac{k}{11}.$$

Il rapporto trovato ci dice subito che l'ora esatta non puo' essere indicata semplicemente nella forma ore,minuti,secondi, ma occorrono anche le frazioni di secondo, ad eccezione del caso $k=11$, in cui viene $m=1$, e quindi l'ora esatta sono le 12 (ma questa non é certo una sorpresa). Un'altra osservazione che si puo' fare é che *non ci sono* istanti di sovrapposizione dopo le 0 e prima delle ore 1: ossia, per $k=0$ si ha anche $m=0$.

Per soddisfare la curiosita' dei lettori, scriviamo di seguito le 11 indicazioni (approssimative) delle ore in cui le lancette sono esattamente sovrapposte.

$$1^h, 5'27''; \quad 2^h, 10'54''; \quad 3^h, 16'22''; \quad 4^h, 21'49''; \quad 5^h, 27'16'';$$

$$6^h, 32'44''; \quad 7^h, 38'11''; \quad 8^h, 43'38''; \quad 9^h, 49'05''; \quad 10^h, 54'33''; \quad 12^h, 00'00''.$$

Capitolo 2

Applicazioni in Geometria

L'uso delle proporzioni é fondamentale in Geometria: la similitudine tra triangoli, i concetti fondamentali di trigonometria, la cosiddetta *sezione aurea* di un segmento, sono alcuni esempi importanti di applicazione delle proporzioni.

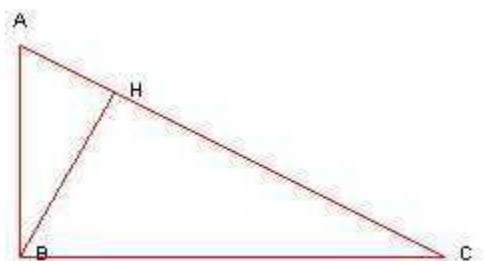
Esempio 2.1 Un buon inizio consiste nel ricavare il famoso *teorema di Pitagora*, mediante la similitudine dei triangoli.

Sia dato il triangolo ABC , retto in B , e si denoti con BH l'altezza relativa all'ipotenusa AC : é facile controllare che i triangoli

ABH e CBH sono entrambi simili ad ABC .

Ne ricaviamo allora le seguenti proporzioni:

$$\overline{AH} : \overline{AB} = \overline{AB} : \overline{AC}, \quad \text{e} \quad \overline{CH} : \overline{BC} = \overline{BC} : \overline{AC}.$$



Usando la regola del prodotto dei medi, otteniamo allora:

$$\overline{AB}^2 = \overline{AH} \times \overline{AC}, \quad \text{e} \quad \overline{BC}^2 = \overline{BH} \times \overline{AC}.$$

Sommando membro a membro, e tenendo presente che

$$\overline{AH} + \overline{CH} = \overline{AC},$$

otteniamo infine

$$\overline{AC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{BC}^2.$$

Le proporzioni conducono anche a equazioni di grado maggiore di 1, come avviene per esempio nella determinazione della *sezione aurea* di un segmento. I prossimi esempi illustrano meglio la situazione.

Esempio 2.2 Sia AB un segmento, di lunghezza L .

Si scelga un punto S nel segmento AB : diremo che il segmento

AS é la *sezione aurea* di AB se risulta:

$$\overline{AB} : \overline{AS} = \overline{AS} : \overline{SB}.$$

Se denotiamo con x la quantita' incognita \overline{AS} , e applichiamo la regola del prodotto dei medi, troviamo l'equazione

$$L(L - x) = x^2, \quad \text{o} \quad x^2 + Lx - L^2 = 0.$$

Tale equazione ha come soluzioni:

$$x = \frac{-L \pm \sqrt{5}L}{2}$$

delle quali é positiva (e quindi accettabile) solo $x = \frac{\sqrt{5}-1}{2}L$. pertanto, la sezione aurea di un segmento lungo L é lunga $\frac{\sqrt{5}-1}{2}L$; in particolare, se $L = 1$, la sezione aurea é $\frac{\sqrt{5}-1}{2} \approx 0.618$. Per brevitá', denoteremo a volte con α tale numero.

Facciamo notare, già che ci siamo, che il reciproco di α , cioè $\frac{1}{\alpha}$, coincide con $\alpha + 1$, cioè con $\frac{\sqrt{5}+1}{2} \approx 1.618$. Cio' si può controllare direttamente, ma deriva anche facilmente dall'equazione precedente, ponendo $L = 1$ e dividendo per x : in altre parole, α è l'unico numero positivo che verifica la condizione

$$\frac{1}{\alpha} = 1 + \alpha.$$

Precisiamo anche che il numero $\alpha + 1$ è spesso denotato con la lettera φ , e denominato *proporzione divina* (per motivi che saranno chiari quando si studieranno le *successioni*); anche i numeri $\frac{\alpha}{2}$ e $\frac{\varphi}{2}$ hanno notevoli proprietà, nell'ambito della Trigonometria.

Dunque, la sezione aurea *spunta fuori* piuttosto di frequente, anche in problemi che a priori non sembrerebbero collegati ad essa. Vediamone alcuni.

Esempio 2.3 Sia ABC un triangolo rettangolo, retto in B , (possiamo far riferimento alla figura precedente) e chiediamoci se e quando può accadere che l'ipotenusa, \overline{AC} , e i cateti \overline{AB} e \overline{BC} soddisfano alla seguente proporzione:

$$\overline{AC} : \overline{BC} : \overline{BC} : \overline{AB}.$$

Se denotiamo con b la lunghezza dell'ipotenusa, e con a e c rispettivamente le lunghezze dei cateti opposti ai vertici A e C , la regola del prodotto dei medi fornisce

$$bc = a^2$$

da cui, tenendo presente che $a^2 = b^2 - c^2$ per il teorema di Pitagora, otteniamo

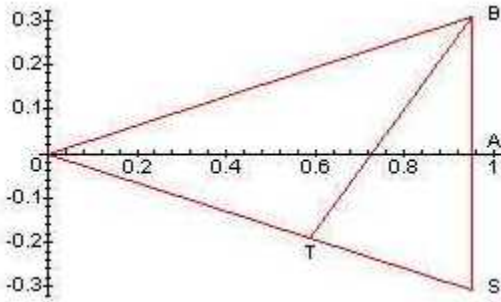
$$bc = b^2 - c^2, \quad \text{o} \quad c^2 + bc - b^2 = 0$$

la quale, risolta rispetto a c , dà come unica soluzione accettabile: $c = \frac{\sqrt{5}-1}{2}b$. Dunque, i triangoli rettangoli che verificano la condizione imposta sono tutti e soli quelli per i quali il cateto minore è la sezione aurea dell'ipotenusa. Il cateto maggiore ha lunghezza $a = \sqrt{b^2 - \frac{3-\sqrt{5}}{2}b^2} = \sqrt{\frac{\sqrt{5}-1}{2}} b$.

Questo mostra che tutti i triangoli suddetti sono simili tra loro: ad esempio, se si sceglie $b = 1$, il cateto maggiore misura esattamente quanto la *radice quadrata* del cateto minore

(si tenga presente che tali quantita' sono state supposte minori di 1, e quindi facendone la radice quadrata si ottiene un numero maggiore).

Un altro esempio, un po' piu' laborioso, é collegato con una questione di trigonometria: per chi sia gia' esperto di tale soggetto, basta dire che ricerchiamo il *seno* di 18° . Tuttavia, il problema puo' essere posto in termini elementari, in modo che chiunque lo possa comprendere. Faremo riferimento alla figura seguente.



Esempio 2.4 Si consideri il triangolo OAB , retto in A , con l'angolo in O di 18° . Si supponga che l'ipotenusa OB abbia lunghezza 1, e cerchiamo la lunghezza di AB . Poiché tale lunghezza é la nostra incognita, la denoteremo con x . A tale scopo, si prolunghi il lato BA dalla parte di A , in maniera da raddoppiarne la lunghezza, e si denoti con S l'estremo opposto a B . Così si avra'

$$\overline{AB} = \overline{AS} = x, \quad \hat{SOA} = \hat{AOB} = 18^\circ.$$

Si mandi ora da B la bisettrice dell'angolo $O\hat{B}A$ (che misura 72°), fino ad incontrare la retta OS nel punto T . L'angolo in S é naturalmente di 72° , e l'angolo $T\hat{B}S$ misura 36° , dunque $B\hat{T}S = 72^\circ$, e percio' il triangolo BTS é isoscele, e risulta $\overline{BT} = \overline{BS} = 2x$.

Similmente, anche il triangolo OTB risulta isoscele, e quindi $\overline{OT} = \overline{TB} = 2x$.

Notiamo ora che i triangoli BTS e BOS sono simili, e percio' ricaviamo

$$\overline{OB} : \overline{BS} = \overline{BS} : \overline{TS}$$

o anche, tenendo presente che $\overline{OB} = \overline{OS}$ e $\overline{BS} = \overline{OT}$:

$$\overline{OS} : \overline{OT} = \overline{OT} : \overline{TS}.$$

Questo significa che OT é la sezione aurea di OS , e quindi, essendo $\overline{OS} = \overline{OB} = 1$ per ipotesi:

$$2x = \overline{OT} = \frac{\sqrt{5} - 1}{2} = \alpha.$$

In termini trigonometrici, si puo' dunque affermare che

$$\sin 18^\circ = x = \frac{\sqrt{5} - 1}{4} = \frac{\alpha}{2} \approx .309.$$

Questa e altre proprieta' della sezione aurea resero questo numero (ed il suo reciproco φ) estremamente importante agli occhi degli scienziati e anche degli artisti rinascimentali, non ultimo Leonardo da Vinci.

Capitolo 3

Equazioni algebriche e loro applicazioni

Ci occuperemo qui di alcune equazioni algebriche, di grado non superiore a 4, e di altre equazioni, riconducibili a queste, con lo scopo di mettere in evidenza la loro importanza in svariati problemi, specialmente di tipo geometrico. Presupporremo che sia già nota la formula di risoluzione per le equazioni di II grado, ma precisiamo che siamo interessati esclusivamente alle *radici reali*, e quindi alcune delle equazioni che incontreremo potrebbero anche non avere alcuna soluzione. Un polinomio $P(x)$ che non abbia radici reali è detto *irriducibile*.

A volte, dovremo risolvere anche *sistemi* di equazioni, ma in tutti i casi che si presenteranno il sistema sarà immediatamente riconducibile ad una singola equazione.

Sarà anche necessario affrontare delle *disequazioni*, per le quali si fornirà il metodo più conciso di risoluzione.

A tale scopo, enunciamo alcuni teoremi fondamentali dell'Algebra, che non dimostreremo, riguardanti i polinomi a coefficienti reali.

Teorema 3.1 *Sia $P(x)$ un generico polinomio in x , di grado n . Sia x_1 una radice reale di $P(x)$. Allora $P(x)$ è divisibile per $(x - x_1)$, ossia esiste un polinomio $Q(x)$, di grado $n - 1$, tale che*

$$P(x) = (x - x_1) \times Q(x).$$

Questo teorema ci dice che conoscere una radice di $P(x)$ ci permette di *abbassare* di 1 il grado di $P(x)$, ossia di ricondurre lo studio di $P(x)$ a quello di $Q(x)$. Se poi si conoscono altre radici (di $P(x)$ o di $Q(x)$, indifferentemente), il grado si abbassa ulteriormente. E' dunque abbastanza chiaro il prossimo teorema.

Teorema 3.2 *Sia $P(x)$ un generico polinomio in x , di grado n , che ammetta solo radici reali. Dette x_1, x_2, \dots, x_k le radici reali di $P(x)$, esistono k numeri interi non negativi, $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_k$, (detti molteplicita' delle radici reali) tali che risulti*

$$P(x) = (x - x_1)^{\mu_1} \times (x - x_2)^{\mu_2} \times \dots \times (x - x_k)^{\mu_k}$$

per ogni x .

Il teorema piu' generale, che comprende anche il caso di radici complesse, é il seguente.

Teorema 3.3 *Sia $P(x)$ un generico polinomio in x , di grado n . Dette x_1, x_2, \dots, x_k le (eventuali) radici reali di $P(x)$, esistono k numeri interi non negativi, $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_k$, (le molteplicita' delle radici reali), e dei polinomi irriducibili di II grado, $P_1(x), P_2(x), \dots, P_h(x)$, (sempre a coefficienti reali) in modo tale che risulti*

$$P(x) = (x - x_1)^{\mu_1} \times (x - x_2)^{\mu_2} \times \dots \times (x - x_k)^{\mu_k} \times P_1(x) \times \dots \times P_h(x)$$

per ogni x .

Ad esempio, consideriamo il polinomio $P(x) = x^4 - 2x^3 + 2x^2 - 2x + 1$: esso ha una radice reale, $x_1 = 1$. Allora esso é divisibile per $(x - 1)$, e quindi esiste un polinomio $Q(x)$, di grado 3, tale che $P(x) = (x - 1)Q(x)$. Come troviamo $Q(x)$? Un metodo pratico é stato inventato da Ruffini: chi lo sa adoperare trovera' abbastanza rapidamente $Q(x)$. Un altro metodo consiste nel fare la *divisione* tra il polinomio $P(x)$ e il polinomio $x - 1$: chi sappia fare questo calcolo, trovera' rapidamente $Q(x)$. Un ultimo metodo, piu' lento, consiste nel porre $Q(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$, e determinare i coefficienti a, b, c utilizzando la relazione

$$P(x) = (x - 1)(x^3 + ax^2 + bx + c)$$

assieme con il principio d'identità dei polinomi. Uno qualunque dei metodi suddetti conduce a:

$$Q(x) = x^3 - x^2 + x - 1.$$

Questo polinomio è facilmente scomponibile: $Q(x) = (x^2 + 1)(x - 1)$, dunque ancora 1 è una radice, (radice doppia per $P(x)$), e possiamo concludere:

$$P(x) = (x - 1)^2(x^2 + 1)$$

poiché chiaramente $x^2 + 1$ è irriducibile.

Un altro esempio, più pestifero, è

$$P(x) = x^4 - x^3 + 2x^2 - x + 1 :$$

non consigliamo di cercare radici reali, dato che *non ce ne sono*. Il polinomio è comunque rappresentabile come il prodotto di due polinomi irriducibili di II grado, in accordo con il teorema 3.3. Scriviamo $P(x)$ in questo modo:

$$P(x) = x^4 - x^3 + x^2 + x^2 - x + 1 = x^2(x^2 - x + 1) + (x^2 - x + 1) = (x^2 + 1)(x^2 - x + 1)$$

e la decomposizione è fatta.

Detto questo, possiamo passare a esaminare qualche esempio concreto, anche per vedere in che modo equazioni e disequazioni tornino utili in vari problemi, geometrici e non.

Esempio 3.4 Una situazione classica riguarda le *intersezioni* tra curve algebriche. Per cominciare, cerchiamo di individuare quali punti una retta fissata ha in comune con il cerchio di equazione $x^2 + y^2 = 1$. (Tale cerchio è detto il *cerchio unitario*).

Supponiamo che l'equazione della retta sia in forma *normale*, cioè $y = mx + p$. Per il resto, lasciamo arbitrari i due parametri m e p . Le coordinate dei punti di intersezione debbono verificare il seguente sistema:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ y = mx + p \end{cases}$$

Sostituiamo nella I equazione l'espressione di y ricavata dalla seconda:

$$x^2 + (mx + p)^2 = 1, \quad \text{ossia} \quad (1 + m^2)x^2 + 2mpx + p^2 - 1 = 0.$$

Risolvendo quest'ultima equazione, troveremo due radici reali distinte (dunque la retta é *secante* la circonferenza), oppure nessuna radice reale (se la retta é *esterna*), oppure una radice doppia (nel caso di retta *tangente*): si ha la prima situazione se il *discriminante* Δ é positivo, la seconda se $\Delta < 0$, e la terza se $\Delta = 0$. Ricordiamo che, per definizione, si ha $\Delta = (2mp)^2 + 4(1 + m^2)(1 - p^2)$: per semplicità, calcoliamo $\Delta/4$:

$$\frac{\Delta}{4} = m^2 p^2 + (1 + m^2)(1 - p^2) = 1 + m^2 - p^2.$$

Dunque, la retta data risulta

tangente al cerchio assegnato se: $m^2 = p^2 - 1$,

secante, se risulta: $m^2 > p^2 - 1$,

esterna, se si ha: $m^2 < p^2 - 1$.

Ad esempio, sia $p = 3$; ciò vuol dire che la retta passa per $(0, 3)$, e quindi dev'essere molto inclinata (verso l'alto), se vogliamo che essa intersechi la circonferenza unitaria. Le formule precedenti specificano che infatti dev'essere $m^2 > 8$, ossia $m > 2\sqrt{2}$ oppure $m < -2\sqrt{2}$, se vogliamo che tale retta intersechi il cerchio.

Viceversa, se risulta $|p| < 1$, é ovvio che la retta *comunque* interseca il cerchio dato: e infatti, $|p| < 1$ implica $p^2 - 1 < 0$, e quindi certamente $m^2 \geq 0 > p^2 - 1$.

Esempio 3.5 Prendendo spunto dall'esempio precedente, possiamo ora ridimostrare un famoso teorema di geometria: dato un cerchio C , e un qualunque punto P del piano, esterno al cerchio dato, esistono sempre esattamente due rette, uscenti da P e tangenti a C .

Poniamo $P \equiv (u, v)$, e supponiamo per semplicità che C sia il cerchio unitario. Chiamamente, se P é esterno a C , dev'essere $u^2 + v^2 > 1$. Ora, la retta generica uscente da P ha equazione

$$y - v = m(x - u), \quad \text{ossia} \quad y = mx + v - mu$$

con m arbitraria. La condizione di tangenza espressa nell'esempio precedente ci porta a richiedere che:

$$m^2 = (v - mu)^2 - 1, \quad \text{ossia} \quad (1 - u^2)m^2 + 2umv + 1 - v^2 = 0.$$

Studiamo di nuovo il $\Delta/4$:

$$\frac{\Delta}{4} = u^2v^2 - (1 - u^2)(1 - v^2) = -1 + u^2 + v^2$$

e questa é certamente una quantita' positiva, per quanto suddetto. Dunque, esistono due distinti valori di m per i quali la retta $y = mx + v - mu$ é tangente al cerchio unitario.

Implicitamente, il calcolo precedente mostra anche che di tangenti ce n'é una sola, se P fa parte della circonferenza ($u^2 + v^2 = 1$), e nessuna, se invece P é interno ($u^2 + v^2 - 1 < 0$).

Esempio 3.6 Collegandoci all'esempio precedente, supponiamo che P faccia parte del cerchio unitario, e calcoliamo l'unica retta tangente a C , passante per P .

Poniamo di nuovo $P \equiv (u, v)$. Chiaramente, se P appartiene a C , dev'essere $u^2 + v^2 = 1$. Per evitare noie (comunque facilmente superabili), supponiamo anche $u \neq \pm 1$: tale eventualita' porta ovviamente a una tangente verticale, retta che non puo' essere scritta in forma normale.

Ora, riprendiamo l'equazione (nell'incognita m) trovata nell'esempio precedente:

$$(1 - u^2)m^2 + 2umv + 1 - v^2 = 0.$$

Essendo $\Delta = 0$, l'unica soluzione é data da

$$m = \frac{uv}{u^2 - 1}$$

(Qui si vede la *noia* che nasce se $u = \pm 1$). Essendo $1 - u^2 = v^2$, avremo anche

$$m = -\frac{u}{v}.$$

Dunque, la retta passante per P e tangente a C ha equazione

$$y = -\frac{u}{v}(x - u) + v.$$

Invece, la retta uscente dal centro di C e passante per P (ossia il *raggio* passante per P) ha equazione $y = \frac{v}{u}x$: confrontando i coefficienti angolari delle due rette, vediamo facilmente che la retta tangente in P é perpendicolare al raggio passante per P : altro *vecchio* teorema, che cosi' abbiamo ritrovato!

Esempio 3.7 Il cerchio unitario ci offre lo spunto per ritrovare un'altra conoscenza: la sezione aurea! Ci offrirà anche lo spunto per trattare alcune equazioni particolari di quarto grado, le *biquadratiche*.

Il problema è il seguente: trovare tutte le intersezioni del cerchio unitario C con la parabola di equazione $y = x^2$. Il sistema è molto semplice:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ y = x^2 \end{cases}$$

Basta allora sostituire, nella prima equazione, y al posto di x^2 , e si ottiene

$$y^2 + y - 1 = 0 :$$

l'unica radice accettabile (y dev'essere non negativa)) è $y = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$. I punti d'incontro sono due, in quanto le ascisse corrispondono alle due radici quadrate del numero $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$.

Il problema sarebbe risolto, ma vogliamo un momento soffermarci su questo aspetto tecnico: noi abbiamo risolto il sistema, sostituendo y a x^2 nella I equazione. Potevamo invece sostituire x^2 a y : in questo modo, la I equazione sarebbe diventata:

$$x^4 + x^2 - 1 = 0,$$

equazione di IV grado, apparentemente più difficile. In realtà, questa equazione è un po' speciale, perché vi compaiono solo i termini di grado *pari* nell'incognita (per meglio dire, sono nulli i coefficienti dei termini di grado dispari). Un'equazione con tale caratteristica (detta *biquadratica*) può essere risolta ponendo $x^2 = t$: tale posizione la trasforma in un'equazione di II grado in t , le cui soluzioni si possono trovare mediante la solita formula; bisogna fare soltanto attenzione a *non accettare* soluzioni negative, poiché $t = x^2$. Una volta trovate le eventuali soluzioni in termini della t , le loro radici quadrate saranno le soluzioni dell'equazione iniziale, in x .

Esempio 3.8 Un'equazione biquadratica può facilmente scaturire da una equazione *fratta*: ad esempio

$$\frac{x^2 + 1}{x^2 - 1} = x^2.$$

Prima di tutto, escludiamo i valori di x che annullano il denominatore: $x \neq \pm 1$.

Portiamo ora tutto a I membro, riconducendo l'espressione risultante ad una singola frazione:

$$0 = \frac{x^2 + 1}{x^2 - 1} - x^2 = \frac{2x^2 + 1 - x^4}{x^2 - 1}.$$

Un rapporto tra due funzioni di x si può annullare solo se il numeratore si annulla per qualche x : perveniamo quindi all'equazione biquadratica

$$x^4 - 2x^2 - 1 = 0.$$

Ponendo $x^2 = t$, ricaviamo $t^2 - 2t - 1 = 0$, le cui soluzioni sono

$$t = 1 \pm \sqrt{2} :$$

solo quella positiva è accettabile, ossia $t = 1 + \sqrt{2}$; pertanto, i valori reali di x che risolvono l'equazione iniziale sono due: $x = \pm \sqrt{1 + \sqrt{2}}$.

Esempio 3.9 Vediamo anche qualche *disequazione*, cominciando proprio da una fratta:

$$\frac{x - 1}{x^2 + 1} < x.$$

Qui, il denominatore è sempre diverso da 0, anzi, è sempre positivo, per cui non dobbiamo escludere alcun valore di x , a priori. Dato che $x^2 + 1 > 0$ per ogni x , siamo autorizzati a moltiplicare I e II membro per tale quantità: la disequazione non cambia verso, e resta equivalente:

$$x - 1 < x^3 + x, \quad \text{ossia} \quad -1 < x^3.$$

Ora, sappiamo che $u < v \Rightarrow u^3 < v^3$ (anche per u e/o v negativi), e che $-1 = (-1)^3$. Dunque, la disequazione ottenuta è soddisfatta se e solo se risulta $x > -1$.

Esempio 3.10 Molte disequazioni s'incontrano nel risolvere equazioni con radicali, o con il *valore assoluto*. Le due equazioni seguenti sono di questo tipo.

$$\begin{aligned} \text{(a)} \quad & 2\sqrt{x^2 - 3x + 2} = x + 1; \\ \text{(b)} \quad & \frac{|x + 2| - 3}{x - 2} = 3x. \end{aligned}$$

Tratteremo infine la disequazione seguente, che contiene sia un radicale che un valore assoluto:

$$(c) \quad \sqrt{x^2 + |2x - 1|} < x - 1.$$

Cominciamo dalla (a): per prima cosa, osserviamo che il I membro ha senso se il radicando é non negativo, ossia se (e solo se) $x^2 - 3x + 2 \geq 0$. Le radici sono facili da trovare: $x_1 = 1$, $x_2 = 2$. Allora sappiamo che $x^2 - 3x + 2 = (x - 1)(x - 2)$, e questo prodotto é positivo se e solo se i due fattori sono concordi; dunque,

$$x^2 - 3x + 2 \geq 0 \Leftrightarrow x \in]-\infty, 1] \cup [2, +\infty[;$$

perció, le soluzioni dell'equazione (a) vanno ricercate esclusivamente tra i valori di x che sono maggiori o uguali a 2, oppure minori o uguali a 1.

Il passo successivo, nella risoluzione della (a), consiste nell'osservare che il I membro, ove ben definito, é non negativo (per convenzione universale, infatti, quando si scrive $\sqrt{y^2}$ s'intende esclusivamente la radice *positiva* di y^2 , cioè $|y|$). Dunque, se si vuole che $2\sqrt{x^2 - 3x + 2} = x + 1$, bisogna che $x + 1$ sia non negativo: e questo accade solo se $x \geq -1$. Abbiamo quindi individuato una ulteriore restrizione dei possibili valori delle soluzioni: potremo accettare, tra le soluzioni che troveremo, solo le x che risultino comprese fra -1 e 1 oppure che siano maggiori o uguali a 2 .

Fatte queste premesse, possiamo presumere che primo e secondo membro della (a) siano definiti e non negativi. Allora essi sono uguali se e solo se i loro quadrati sono uguali. L'equazione dunque si risolve, elevando a quadrato I e II membro:

$$4x^2 - 12x + 8 = x^2 + 2x + 1, \quad \text{ossia} \quad 3x^2 - 14x + 7 = 0.$$

Le soluzioni di quest'ultima sono date da: $x = \frac{7 \pm 2\sqrt{7}}{3}$, ossia $x_1 = \frac{7 - 2\sqrt{7}}{3} \approx 0.569$, $x_2 = \frac{7 + 2\sqrt{7}}{3} \approx 4.097$. Entrambe queste soluzioni verificano le condizioni precedentemente trovate: la prima é compresa fra -1 e 1 , e la seconda é maggiore di 2 , pertanto le soluzioni di (a) sono i valori x_1 e x_2 trovati.

Passiamo ora alla (b): $\frac{|x+2|-3}{x-2} = 3x$. Prima di tutto, osserviamo che il primo membro ha senso solo se $x \neq 2$, a causa del denominatore. Dunque, bisogna escludere *a priori* il

valore $x = 2$. Fatto questo, possiamo moltiplicare ambo i membri per $x - 2$, ottenendo:
 $|x + 2| - 3 = 3x^2 - 6x$ o anche $|x + 2| = 3x^2 - 6x + 3$.

Ora, osserviamo di nuovo che il I membro é, per definizione, sempre maggiore o uguale a 0. Pertanto, l'equazione non puo' essere soddisfatta se $3x^2 - 6x + 3 < 0$. Tuttavia, notiamo subito che $3x^2 - 6x + 3 = 3(x - 1)^2 \geq 0$ per *ogni* x . Ora, per risolvere l'equazione $|x + 2| = 3(x^2 - 2x + 1)$, abbiamo a disposizione due vie: una é quella di elevare tutto a quadrato, e risolvere l'equazione risultante, che per quanto appena detto sara' equivalente a quella iniziale; l'altra via consiste nel *liberarsi* del modulo, risolvendo in pratica due equazioni: l'equazione $x + 2 = 3x^2 - 6x + 3$, (con l'avvertenza di accettare soltanto le soluzioni $x \geq -2$), e l'equazione $-(x + 2) = 3x^2 - 6x + 3$, (con l'avvertenza di accettare soltanto le soluzioni $x \leq -2$).

Seguiremo qui entrambi i procedimenti, lasciando comunque al lettore di scegliere da sé la strada che ritiene piu' praticabile.

Elevando a quadrato ambo i membri, l'equazione diviene

$$(x + 2)^2 = 9(x - 1)^4, \quad \text{ossia } 9(x - 1)^4 - (x + 2)^2 = 0.$$

L'equazione é di IV grado, e non é biquadratica, ma possiamo riconoscere a primo membro la differenza di due quadrati, pertanto l'equazione si puo' scrivere come segue:

$$[3(x - 1)^2 - (x + 2)][3(x - 1)^2 + (x + 2)] = 0$$

e quindi basta risolvere le due equazioni separate:

$$3(x - 1)^2 - (x + 2) = 0, \quad \text{ossia } 3x^2 - 7x + 1 = 0$$

$$3(x - 1)^2 + (x + 2) = 0, \quad \text{ossia } 3x^2 - 5x + 5 = 0.$$

La seconda non ha radici reali, dunque bastera' esaminare solo la prima, che ha come soluzioni: $x = \frac{7 \pm \sqrt{37}}{6}$, ossia $x_1 \approx 0.153$, $x_2 \approx 2.18$.

Queste sono dunque le soluzioni cercate. Seguiamo ora l'altro procedimento, liberandoci del modulo. L'equazione da trattare nel caso $x \geq -2$ é:

$$x + 2 = 3(x - 1)^2, \quad \text{ossia } 3x^2 - 7x + 1 = 0$$

equazione che abbiamo già risolto. Le radici trovate sono entrambe maggiori di -2 , e quindi entrambe accettabili. La seconda equazione, da trattare per $x \leq -2$, è

$$-x - 2 = 3(x - 1)^2, \quad \text{ossia } 3x^2 - 5x + 5 = 0 :$$

anche questa è già stata incontrata, e non ha soluzioni reali. Dunque, la seconda via non solo ha dato un risultato perfettamente identico a quello trovato con la prima via (il che era prevedibile), ma si è anche rivelata equivalente come impegno materiale. Tuttavia, non dimentichiamo che la trattazione di un'equazione di IV grado può spesso comportare difficoltà tecniche notevoli, per cui converrà valutare di volta in volta se vale la pena imbarcarvisi.

Infine, studiamo la disequazione (c): $\sqrt{x^2 + |2x - 1|} < x - 1$.

Prima di tutto, bisogna controllare che il radicando sia non negativo: chiaramente, poiché esso è somma di due quantità mai negative, la condizione richiesta è verificata per ogni x . Un'altra osservazione utile riguarda il segno del II membro: poiché il I membro è sempre non negativo, la disequazione (c) non può essere verificata, se $x - 1 \leq 0$. Dunque, escludiamo a priori tutti gli $x \leq 1$. Allora, assumendo $x > 1$, ambo i membri sono non negativi, e quindi si può elevare tutto a quadrato, ottenendo

$$x^2 + |2x - 1| < x^2 - 2x + 1, \quad \text{per cui } |2x - 1| = |1 - 2x| < 1 - 2x.$$

Chiaramente, la disequazione non è verificata: o i due membri sono uguali, oppure il secondo è negativo, mentre il primo è positivo. Pertanto, la disequazione iniziale non è mai verificata.

Un metodo alternativo per trattare la disequazione (e confermare il risultato trovato, il che non guasta), è quello di eliminare subito il modulo, esaminando separatamente il caso $x > \frac{1}{2}$ e il caso opposto. Se $x \leq \frac{1}{2}$, risulta $2x - 1 \leq 0$, e quindi la (c) diviene $\sqrt{x^2 - 2x + 1} < x - 1$. Ma, essendo $x^2 - 2x + 1 = (x - 1)^2$, la disequazione diventa: $|x - 1| < x - 1$, chiaramente impossibile.

Passiamo ora al caso $x > \frac{1}{2}$: allora, l'equazione diventa

$$\sqrt{x^2 + 2x - 1} < x - 1.$$

Ancora, dobbiamo richiedere $x > 1$ altrimenti la disequazione é impossibile. Supponendo $x > 1$, ed elevando a quadrato ambo i membri, troviamo

$$x^2 + 2x - 1 < x^2 - 2x + 1, \text{ e quindi } 4x < 2$$

cioé $x < \frac{1}{2}$, chiaramente incompatibile con la richiesta precedente.

Capitolo 4

Ulteriori applicazioni

Equazioni, sistemi, e disequazioni hanno applicazioni anche in problemi molto importanti: gran parte di questi problemi possono essere raggruppati sotto la denominazione di *ottimizzazione*: cercare il minimo, o il massimo, di certe quantità variabili; individuare punti di minima distanza da certi insiemi, o certe curve; individuare traiettorie da percorrere nel minimo tempo possibile, etc., sono esempi di tali problemi. In questo capitolo, presenteremo solo alcuni esempi, la cui risoluzione può essere condotta mediante i (pochi) strumenti che per ora possediamo. Strumenti più avanzati, utili per lo studio di problemi meno elementari, saranno acquisiti durante i corsi universitari.

Cominciamo con dei semplici problemi di minima distanza, per alcuni dei quali potremo anche avere delle conferme grazie a varie formule studiate a suo tempo.

Esempio 4.1 Sia data la retta r , di equazione $y = mx + p$, con p e m diversi da 0. Vogliamo trovare il punto P di r , che risulti a distanza minima dall'origine, $(0, 0)$.

Possiamo indicare con $d(Q)$ la distanza di Q dall'origine, per ciascun punto Q di r , e osservare che minimizzare $d(Q)$ o minimizzare $d(Q)^2$ è la stessa cosa. Chiaramente, si ha, ponendo $Q = (x, mx + p)$,

$$d(Q)^2 = x^2 + m^2x^2 + p^2 + 2mpx = (1 + m^2)x^2 + 2mpx + p^2 :$$

in questa relazione, x è variabile, mentre p e m sono parametri. Considerato che $1 + m^2$ è una quantità positiva, l'equazione $y = (1 + m^2)x^2 + 2mpx + p^2$ rappresenta una parabola,

con la concavita' rivolta verso l'alto, dunque essa raggiunge il minimo nel suo vertice. Come ben sappiamo, il vertice di una parabola, di equazione $y = ax^2 + bx + c$, ha ascissa $V_x = -\frac{b}{2a}$. Dunque, la nostra parabola ha il vertice nel punto di ascissa $V_x = -\frac{mp}{1+m^2}$. Pertanto, il punto P cercato ha coordinate

$$P \equiv \left(-\frac{mp}{1+m^2}, \frac{p}{1+m^2}\right).$$

Ne consegue che $d(P)^2 = \frac{p^2}{1+m^2}$ e quindi

$$d(P) = \frac{|p|}{\sqrt{1+m^2}}$$

in accordo con la ben nota formula per la distanza di una retta da un punto.

Un'ulteriore conferma viene dal fatto che il punto P trovato si trova lungo la retta uscente da $(0,0)$ e perpendicolare a r (infatti, il rapporto tra ordinata e ascissa di P viene uguale a $-\frac{1}{m}$).

Suggeriamo allo studente, se non fosse convinto o comunque si sentisse inesperto, di dare due valori arbitrari a m e p , ad esempio $m = p = 1$, e verificare graficamente il risultato trovato.

Esempio 4.2 Per il prossimo esempio, occorre un risultato preliminare: dimostriamo che, tra tutti i punti P del cerchio unitario, $P = (x, y)$, quello per cui é massima la somma $x + y$ verifica $x = y = \sqrt{2}/2$. In altre parole, fra tutti i rettangoli inscritti nel cerchio, quello di perimetro massimo é il quadrato.

Dal punto di vista tecnico, cerchiamo di dimostrare che risulta

$$|x + y| \leq \sqrt{2}$$

per tutti i punti (x, y) del cerchio unitario. Elevando a quadrato ambo i membri (che sono non negativi), otteniamo

$$x^2 + y^2 + 2xy \leq 2, \quad \text{ossia } 2xy \leq 1, \quad \text{ossia } 2xy \leq x^2 + y^2$$

e l'ultima relazione é sempre soddisfatta, essendo $x^2 + y^2 - 2xy = (x - y)^2 \geq 0$. D'altra parte, esistono due punti (x, y) nel cerchio unitario, tali che $|x + y|$ é proprio uguale a $\sqrt{2}$,

uno dei quali ha $x = y = \sqrt{2}/2$ e l'altro é il suo simmetrico rispetto all'origine. Questo vuol dire proprio che, tra tutti i punti (x, y) del cerchio unitario, la somma $|x + y|$ diventa massima solo se $x = y = \sqrt{2}/2$ oppure $x = y = -\sqrt{2}/2$, e in questi casi tale somma é uguale a $\sqrt{2}$.

Ora, affrontiamo il seguente problema di minima distanza: dato il solito cerchio unitario, e fissato un punto $P \equiv (a, b)$ nel piano xy , con $a^2 + b^2 > 1$, cerchiamo il punto (u, v) del cerchio a distanza minima da (a, b) .

Per rendere i conti piu' semplici, supponiamo che il punto P si venga a trovare lungo la bisettrice, e quindi risulti $a = b$: risolviamo il problema in tale situazione particolare, dopodiché potremo ricavare la conclusione nel caso piu' generale, operando una opportuna rotazione del piano cartesiano.

Supponiamo dunque $a = b$, e calcoliamo il quadrato della distanza d tra (a, a) e il generico punto del cerchio: un semplice calcolo fornisce il risultato

$$d^2 = 1 + 2a^2 - 2a(x + y).$$

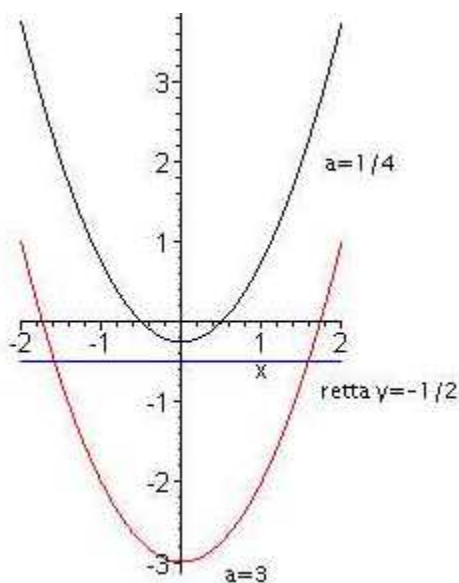
Tenendo presente che a e 1 sono quantita' fissate, d^2 risulta minima quando $x + y$ diventa massima: grazie al risultato preliminare trovato poc'anzi, sappiamo che cio' accade quando anche (x, y) appartiene alla bisettrice, cioè alla retta uscente dall'origine e passante per P . Il valore minimo della distanza, in tal caso, é dunque $1 + 2a^2 - 2a\sqrt{2} = (a\sqrt{2} - 1)^2$.

Esaminiamo ora il caso piu' generale, in cui il punto P non si trova necessariamente sulla bisettrice. Ruotando opportunamente il piano attorno all'origine, possiamo riportare P sulla bisettrice, mentre il cerchio rimane nella stessa posizione; in tale situazione, come abbiamo visto, il punto del cerchio piu' vicino a P é quello che si trova lungo la retta OP . Se ora ruotiamo il piano, in modo da ritornare nella condizione iniziale, il punto del cerchio a minima distanza da P si sposterà, ma resterà comunque lungo la retta che congiunge l'origine con il punto P : in altre parole, quando $a \neq b$, il punto a minima distanza da (a, b) sarà quel punto (x, y) del cerchio unitario, che verifica $\frac{y}{x} = \frac{b}{a}$, ossia

$$x = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}, \quad y = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

Esempio 4.3 Affrontiamo ora un problema meno noto. Consideriamo la parabola Π , di equazione $y = x^2 - a$, con a parametro arbitrario positivo, e ricerchiamo il punto di tale parabola a distanza minima dall'origine.

A prima vista, si potrebbe pensare che il vertice della parabola sia il punto cercato. E questo é abbastanza ragionevole (oltre che *vero*) quando a é piuttosto piccolo. Tuttavia, se a fosse maggiore di 1, certamente i punti di Π a ordinata nulla (cioé i punti $(-\sqrt{a}, 0), (\sqrt{a}, 0)$) sono a distanza da O minore rispetto al vertice $(0, -a)$. E, come vedremo, ci sono punti ancora piu' vicini all'origine.



Impostiamo la solita relazione per la distanza: il generico punto P della parabola Π ha coordinate $P \equiv (x, x^2 - a)$. Il quadrato della distanza di P da O é dato da:

$$d^2 = x^2 + x^4 + a^2 - 2ax^2 = x^4 + (1 - 2a)x^2 + a^2.$$

Poniamo $t = x^2$ e studiamo la parabola $y = t^2 + (1 - 2a)t$ (aggiungere o meno la costante a^2 non modifica l'ascissa del punto in cui si raggiunge il minimo). Questa parabola passa per l'origine, e puo' avere tre comportamenti diversi, a seconda del valore di a . Intanto, se $a = \frac{1}{2}$, essa si riduce a $y = t^2$, e allora chiaramente y ha minimo per $t = 0$, e quindi il punto di Π che cerchiamo é quello per cui $x = 0$, cioé il vertice.

Se risulta $a < \frac{1}{2}$, la parabola $y = t^2 + (1 - 2a)t$ ha vertice nel terzo quadrante, e quindi essa ha andamento *crescente* per $t > 0$. (Ricordiamo infatti che per noi é $t = x^2$). Dunque,

in tal caso, il minimo per y (e quindi per d^2) é raggiunto per $t = 0$, pertanto di nuovo il punto di Π piu' vicino a O é il vertice $(0, a)$.

Vediamo infine cosa accade se $a > \frac{1}{2}$. La parabola $y = t^2 + (1 - 2a)t$ ha vertice con ascissa positiva ($t = a - \frac{1}{2}$), e quindi il minimo viene raggiunto proprio nel vertice: in corrispondenza, i punti di Π a distanza minima da O hanno ascissa $x = \pm\sqrt{a - \frac{1}{2}}$, e ordinata pari a $x^2 - a = -\frac{1}{2}$.

Dunque, se $a \leq \frac{1}{2}$, il punto di Π a minima distanza dall'origine é il vertice; mentre, se $a > \frac{1}{2}$, la distanza minima da O é raggiunta dai due punti di Π che hanno ordinata $-\frac{1}{2}$, *indipendentemente* dal valore di a .

Esempio 4.4 Il prossimo problema é un classico della geometria piana: tra tutti i triangoli rettangoli, aventi perimetro assegnato p , qual é quello di area massima?

Noi risolveremo questo problema, verificando che il triangolo rettangolo *isoscele*, avente perimetro p , é quello di area massima.

Intanto, osserviamo che basta conoscere uno dei due cateti, perché il triangolo rettangolo sia ben determinato: infatti, se x denota la lunghezza di un cateto, e y la lunghezza dell'altro, per il teorema di Pitagora risulta:

$$x + y + \sqrt{x^2 + y^2} = p$$

da cui, isolando il termine con il radicale, ed elevando tutto a quadrato, con semplici calcoli si ricava

$$y = \frac{p}{2} \frac{p - 2x}{p - x}.$$

Allora, la doppia area sara':

$$2A = \frac{p}{2} x \frac{p - 2x}{p - x}.$$

Ora, nel caso del triangolo isoscele, avremo $x = y$, da cui $p = (2 + \sqrt{2})x$, sempre a causa del teorema di Pitagora, e pertanto

$$x = \frac{p}{2 + \sqrt{2}} = \frac{p}{2}(2 - \sqrt{2})$$

e la doppia area avra' l'espressione

$$2A_0 = x^2 = \frac{p^2}{4}(2 - \sqrt{2})^2 = \frac{p^2}{2}(3 - 2\sqrt{2})$$

(avendo indicato con A_0 l'area del triangolo rettangolo isoscele). Dobbiamo dunque verificare che la disequazione $2A \leq 2A_0$ é soddisfatta per ogni x , cioé che risulta

$$\frac{p}{2}x \frac{p-2x}{p-x} \leq \frac{p^2}{2}(3-2\sqrt{2})$$

per ogni x . Dividendo per $\frac{p}{2}$, e portando tutto a II membro, si ha la disequazione di 2° grado in x :

$$2x^2 - (4 - 2\sqrt{2})px + (3 - 2\sqrt{2})p^2 \geq 0.$$

Esaminiamo il discriminante:

$$\Delta/4 = (6 - 4\sqrt{2})p^2 - 2(3 - 2\sqrt{2})p^2 = 0.$$

Questo ci dice che il trinomio $2x^2 - (4 - 2\sqrt{2})px + (3 - 2\sqrt{2})p^2 \geq 0$ é un quadrato perfetto, e quindi la disequazione é sempre verificata, risultando uguale a 0 evidentemente quando $x = \frac{p}{2}(2 - \sqrt{2})$.

Esempio 4.5 Chiudiamo con un semplice problema di Fisica, che spesso viene associato proprio con lo studio delle parabole. Supponiamo di lanciare un corpo pesante verso l'alto, con velocita' v : qual' é l'altezza massima che il corpo puo' raggiungere, supponendo di poter escludere gli effetti della resistenza del mezzo?

Basta usare le leggi del moto accelerato: infatti, per effetto della velocita' iniziale v , e dell'azione antagonista della gravita' g , l'altezza y dipende dal tempo t attraverso la legge

$$y = vt - \frac{1}{2}gt^2.$$

In altri termini, l'altezza y varia con il tempo secondo la legge di una parabola, con la concavita' rivolta verso il basso. Il massimo di y é ottenuto in corrispondenza del vertice, $V \equiv (\frac{v}{g}, \frac{1}{2}\frac{v^2}{g})$. L'altezza massima é pertanto

$$y_{max} = \frac{1}{2}\frac{v^2}{g}.$$

Spesso questo problema si presenta in forma inversa: se si vuole che il corpo raggiunga una certa altezza h , con quale velocita' iniziale v bisogna lanciarlo?

Per questo scopo, basta ricavare v dall'espressione trovata per y_{max} :

$$v = \sqrt{2gh}.$$

Capitolo 5

Elementi di Trigonometria

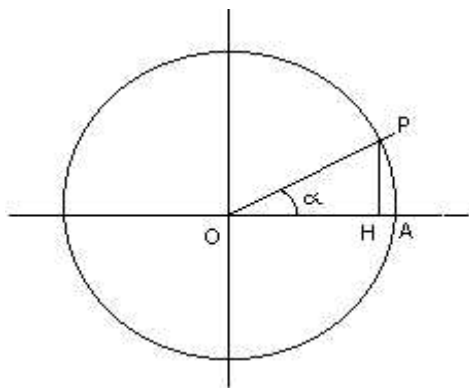
Si consideri il primo principio d'identità dei triangoli: *due triangoli sono uguali se (e solo se) hanno uguali, corrispondentemente, due lati e l'angolo da essi formato*. Questo, e altri principi analoghi, conducono alla seguente considerazione: se di un triangolo conosciamo la lunghezza di due lati, e l'ampiezza dell'angolo da essi formato, il triangolo é *univocamente determinato*, ossia é *uno solo*, e quindi ad esempio il terzo lato, o gli altri due angoli, si possono ricavare da questi dati che conosciamo. Il problema é: qual'é allora la lunghezza del *terzo lato*? Quali sono le ampiezze degli altri due angoli? In che modo queste quantita' sono legate alle lunghezze dei due lati che si conoscono, e all'angolo da essi formato? Rispondere a queste domande equivale, in termini tecnici, a *risolvere* il triangolo. In certi casi, la risposta é facile: ad esempio, se i due lati noti sono uguali, e l'angolo da essi formato é di 60^0 , siamo in presenza di un triangolo equilatero, e quindi il terzo lato e gli altri due angoli non hanno segreti. Oppure, se l'angolo noto é retto, e i due lati che lo formano sono uguali, vuol dire che siamo in presenza di un triangolo rettangolo e isoscele: dato che conosciamo i cateti, basta adoperare il teorema di Pitagora, e si puo' ricavare il terzo lato; quanto agli altri due angoli, saranno entrambi di 45^0 . Pero', gia' se i due cateti sono diversi, capire quanto siano ampi gli angoli acuti non é cosi' facile. Se poi l'angolo noto non é retto, e i due lati che lo formano non sono uguali, o legati da qualche relazione ovvia, il problema é ancora piu' difficile.

Ebbene, la Trigonometria nacque proprio con lo scopo di rispondere a queste domande, e

ad altre analoghe. Il *trucco* consiste nell'assegnare a ciascun angolo un numero (anzi, diversi numeri, sia pure collegati tra loro), in maniera opportuna: questi numeri (che prendono il nome di *seno*, oppure *coseno* o *tangente*) fungono da *rappresentanti* dell'angolo, e si possono utilizzare in varie formule, che permettono appunto di *risolvere* un triangolo, quando di questo siano noti soltanto alcuni elementi (comunque a sufficienza perché il triangolo sia univocamente determinato). Prima di iniziare la trattazione, precisiamo che, d'ora in poi, gli angoli verranno quasi sempre espressi in *radianti*: ricordiamo che la misura di un angolo in radianti non è altro che un numero puro, cioè la lunghezza dell'arco di cerchio unitario, che sottende quell'angolo; quindi, all'angolo di 60^0 corrisponde in radianti il *numero* $\frac{\pi}{3}$ (a un sesto di angolo giro corrisponde infatti l'arco di lunghezza $\frac{2\pi}{6}$), mentre a 90^0 corrisponde in radianti il numero $\frac{\pi}{2}$, e così' via, secondo una facile relazione di proporzionalità:

$$deg : rad = 180 : \pi$$

ove *deg* denota l'ampiezza in gradi, e *rad* quella in radianti.



Definizioni 5.1 Dato un angolo α , che per il momento supporremo compreso fra 0 e $\frac{\pi}{2}$, rappresentiamo questo angolo sulla *circonferenza goniometrica*, ossia sulla circonferenza di centro l'origine e raggio 1, come segue: partiamo dal punto $(1, 0)$ e procediamo in senso antiorario, fino a percorrere un arco di lunghezza α . L'angolo α è quello formato dall'asse x e dal raggio vettore OP del cerchio, nel momento in cui ci fermiamo (vedere figura). Ebbene, il *seno* dell'angolo α è esattamente l'ordinata di P , mentre il *coseno* di α è l'ascissa di P . Usualmente, il *seno* di α viene denotato con $\sin \alpha$ e il *coseno* con $\cos \alpha$.

Se denotiamo con A il punto $(1, 0)$, l'arco AP ha esattamente lunghezza α . Se poi denotiamo con H il piede della perpendicolare condotta da P all'asse x , potremo scrivere

$$\sin \alpha = \overline{HP}, \quad \cos \alpha = \overline{OH}.$$

Diremo infine *tangente* di α , e lo denoteremo con $\tan \alpha$, il rapporto

$$\tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}.$$

Dal punto di vista geometrico, la tangente di α é il coefficiente angolare della retta OP , e chiaramente non puo' essere definita se $\alpha = \frac{\pi}{2}$.

Una volta definiti seno e coseno (e quindi, la tangente) per ogni angolo compreso fra 0 e $\pi/2$, si puo' rapidamente passare a definire tali quantita' per ogni angolo compreso fra 0 e 2π , e infine per ogni angolo possibile (anche superiore a un angolo giro). Per definire seno e coseno di un generico angolo α in $[0, 2\pi]$, basta seguire la stessa idea adoperata prima: indicato con P il punto del cerchio goniometrico corrispondente all'angolo α , l'ordinata di P é il *seno* di α e l'ascissa di P é il *coseno* di α . Pertanto, tutti gli angoli compresi tra $\pi/2$ e π avranno il punto P nel II quadrante, e quindi seno positivo e coseno negativo; tutti gli angoli compresi fra π e $\frac{3}{2}\pi$ avranno seno e coseno negativi, e gli angoli compresi fra $\frac{3}{2}\pi$ e 2π hanno seno negativo e coseno positivo.

Per passare agli angoli α superiori a 2π , basta dividere per 2π il numero che rappresenta l'angolo in radianti, e attribuire ad α lo stesso seno e lo stesso coseno dell'angolo che corrisponde al *resto* della divisione. Ad esempio, se fosse $\alpha = (9/2)\pi$, il resto della divisione sarebbe $\pi/2$, e quindi avremmo $\sin \alpha = 1, \cos \alpha = 0$. Analogamente, angoli come $0, 2\pi, 4\pi, -4\pi$, etc., hanno tutti seno nullo e coseno uguale a 1 .

La tangente si ottiene sempre come rapporto tra seno e coseno (esclusi i casi in cui il coseno si annulla, ove la tangente non viene definita).

Tenendo presenti le definizioni di seno e coseno, non é difficile capire che per ogni angolo α si ha la relazione fondamentale

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1.$$

Per alcuni angoli, seno e coseno sono di facile deduzione: ad esempio, abbiamo già visto quanto valgono seno e coseno di $\pi/2$ e quelli di 0; anche seno e coseno di π sono facili: il seno è nullo, mentre il coseno è -1. Lasciamo al lettore ricavare seno e coseno di $\frac{3}{2}\pi$...

Anche per l'angolo di 45 gradi, cioè $\pi/4$, il calcolo è facile: seno e coseno sono uguali, e valgono $\frac{\sqrt{2}}{2}$, mentre la tangente è 1.

Facili considerazioni sul segno di tali quantità permettono poi di ricavare seno e coseno degli archi *corrispondenti* a $\pi/4$, cioè $\frac{3}{4}\pi$, $\frac{5}{4}\pi$, $\frac{7}{4}\pi$.

Ora, vediamo alcune relazioni, alcune facili altre meno, che riguardano queste quantità'.

5.1 Per qualsiasi angolo α , risulta

$$\sin \alpha = \cos \left(\frac{\pi}{2} - \alpha \right).$$

5.2 (Regola di addizione) Per qualsiasi angolo α e qualsiasi angolo β , risulta:

$$\sin (\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta;$$

$$\cos (\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta.$$

Da qui, scegliendo $\beta = -\alpha$, si ricava facilmente

$$\sin (-\alpha) = -\sin \alpha, \quad \cos (-\alpha) = \cos \alpha.$$

Inoltre, si vede senza difficoltà che risulta

$$\sin \left(\alpha + \frac{\pi}{2} \right) = \cos \alpha, \quad \cos \left(\alpha + \frac{\pi}{2} \right) = -\sin \alpha$$

e ancora

$$\sin (\alpha + \pi) = -\sin \alpha, \quad \cos (\alpha + \pi) = -\cos \alpha$$

e infine

$$\sin (\pi - \alpha) = \sin \alpha, \quad \cos (\pi - \alpha) = -\cos \alpha.$$

5.3 (Formula di duplicazione) Per qualsiasi angolo α , si ha

$$\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha, \quad \cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha.$$

5.4 (Formula di bisezione) Per qualsiasi angolo α , si ha

$$\sin \frac{\alpha}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 - \cos \alpha}{2}}, \quad \cos \frac{\alpha}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 + \cos \alpha}{2}},$$

dove il segno (+ o -) va preso a seconda della posizione dell'angolo $\frac{\alpha}{2}$.

5.5 (Formule parametriche) Per qualsiasi angolo α , risulta:

$$\sin \alpha = \frac{2t}{1+t^2}, \quad \cos \alpha = \frac{1-t^2}{1+t^2}$$

ove $t = \tan \frac{\alpha}{2}$.

Oltre a usare queste regole, che non dimostreremo, conviene anche tener conto di alcuni angoli *notevoli*, il cui seno e coseno si possono ricavare mediante considerazioni geometriche, come già abbiamo fatto per esempio con $\pi/4$.

5.6 Risulta

$$\sin \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}, \quad \cos \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

come si vede facilmente, tenendo presente che un triangolo rettangolo con un angolo di 30 gradi non è altro che metà di un triangolo equilatero.

5.7 Risulta, adoperando ad esempio la regola 5.1:

$$\sin \frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}, \quad \cos \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}.$$

5.8 Per quanto visto a proposito della sezione aurea, si ha anche

$$\sin \frac{\pi}{10} = \frac{\sqrt{5}-1}{4}, \quad \cos \frac{\pi}{10} = \sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{8}}.$$

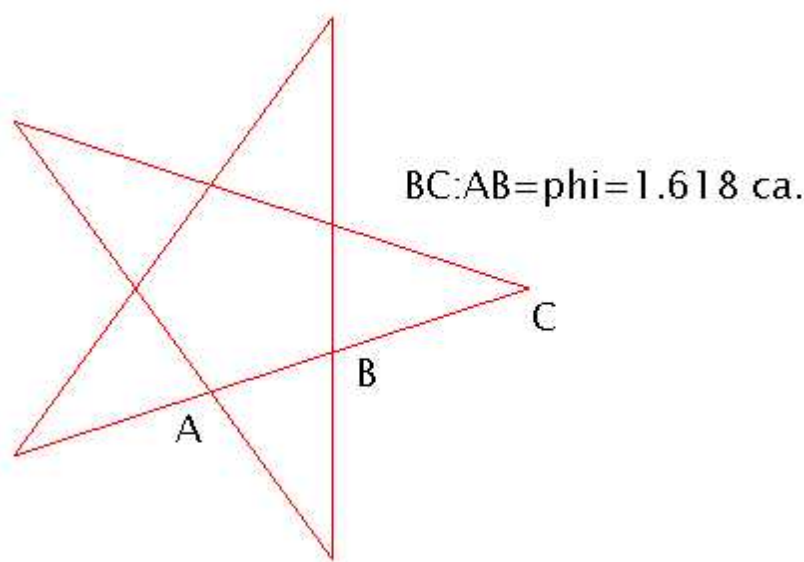
Inoltre, usando le formule di duplicazione, troviamo

$$\cos 36^\circ = \cos \frac{\pi}{5} = \cos^2 \frac{\pi}{10} - \sin^2 \frac{\pi}{10} = 1 - 2 \sin^2 \frac{\pi}{10} = 1 - 2 \frac{\alpha^2}{4} = 1 - \frac{\alpha^2}{2} = \frac{1}{2} - \frac{\alpha}{2} = \frac{\varphi}{2}.$$

Dunque, la *sezione aurea* α e la *proporzione divina* φ sono strettamente legate al seno di 18° e al coseno di 36° : poiché quest'ultimo angolo a sua volta è cruciale nello studio dei pentagoni regolari, anche il pentagono e il *pentacolo* (la famosa stella a 5

punte, presente in tanti loghi) divennero figure geometriche particolarmente cariche di proprietà *divine* presso gli antichi geometri e artisti.

Ad esempio, se si prolungano i lati di un pentagono regolare, questi si intersecheranno a formare un pentacolo; chiaramente, ciascuno dei lati risulta prolungato in entrambe le direzioni di una stessa lunghezza a , maggiore del lato del pentagono: ebbene, il rapporto tra a e il lato del pentagono non è altro che φ (basta fare semplici considerazioni trigonometriche sui vari triangoli che si formano, e adoperare il seno di 18° ...)



Fatta questa rapida panoramica, passiamo ad affrontare alcune equazioni e disequazioni trigonometriche. A tale scopo, dobbiamo fare alcune premesse circa le soluzioni di equazioni fondamentali quali

$$\sin x = a, \quad \cos x = b.$$

Per quanto abbiamo visto in fase di definizione di seno e coseno, osserviamo che le quantità a e b debbono essere sempre comprese fra -1 e 1, (altrimenti l'equazione non ha soluzioni); inoltre, notiamo che per ogni numero reale b compreso fra -1 e 1, c'è sempre un angolo x , compreso fra 0 e π , tale che $\cos x = b$. Anzi, si vede abbastanza facilmente che esistono esattamente *due* angoli, compresi fra 0 e 2π , che hanno lo stesso coseno: il secondo angolo si

puo' esprimere come $-x$, oppure $2\pi - x$ (é il simmetrico di x rispetto all'asse delle ascisse): l'unica eccezione (quasi irrilevante) si ha per $x = \pi$, ossia per $b = -1$. Inoltre, per ciascuno di tali angoli, basta aggiungere un multiplo (positivo o negativo) di 2π , per trovare un altro angolo cui compete lo stesso coseno. In definitiva, se si vuole descrivere completamente la totalita' delle soluzioni dell'equazione $\cos x = b$ (nel caso $|b| \leq 1$), conviene trovare la soluzione x_0 compresa in $[0, \pi]$ e aggiungere $2k\pi$ a x_0 , e a $-x_0$, con $k \in \mathbb{Z}$. Dunque, trovato x_0 , le soluzioni di $\cos x = b$ sono date da

$$\pm x_0 + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Ad esempio, l'equazione $\cos x = \frac{1}{\sqrt{2}}$ ha come soluzione immediata $\pi/4$. Allora, la totalita' delle soluzioni é $\pm\pi/4 + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

Una cosa analoga accade per il seno. Data l'equazione $\sin x = a$, con $a \in [-1, 1]$, esistono due valori di x in $[0, 2\pi]$ cui compete a come seno: se uno di questi é denotato con x_0 , l'altro sara' $\pi - x_0$ (si veda la regola 5.2). Allora, la totalita' delle soluzioni di $\sin x = a$ sara' data da

$$x_0 + 2k\pi, (2k + 1)\pi - x_0, k \in \mathbb{Z}$$

o anche

$$h\pi + (-1)^h x_0, \quad h \in \mathbb{Z}.$$

Ad esempio, l'equazione $\sin x = \frac{1}{2}$ ha come soluzione immediata l'angolo $x_0 = \pi/6$, e come soluzione completa l'insieme

$$\pi/6 + 2k\pi, 5\pi/6 + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Tuttavia, per evitare formule troppo complicate, negli esempi che seguono richiederemo quasi sempre di limitare le soluzioni all'intervallo $[0, 2\pi]$.

Esempio 1. Si risolva, in $[0, 2\pi[$, l'equazione

$$2 \sin^2 x - \sin x = 0.$$

Mettendo in evidenza $\sin x$, avremo: $\sin x(2 \sin x - 1) = 0$, che é soddisfatta se e solo se $\sin x = 0$ oppure $\sin x = \frac{1}{2}$. Nell'ambito di un angolo giro, vi sono due valori di x

per cui $\sin x = 0$, cioè 0 e π , (2π solitamente viene identificato con 0), e due valori per cui il $\sin x = \frac{1}{2}$, cioè $x = \frac{\pi}{6}$ e $x = \frac{5}{6}\pi$. Questi 4 valori di x sono dunque le soluzioni cercate.

Esempio 2. Si risolva, in $[0, 2\pi]$, l'equazione

$$\sin x + \cos^2 x = \frac{1 + \sqrt{2}}{2}.$$

Qui, conviene esprimere $\cos^2 x$ in termini di $\sin x$, usando la formula fondamentale: $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$. Avremo allora l'equazione di II grado:

$$\sin x + 1 - \sin^2 x = \frac{1 + \sqrt{2}}{2}, \quad \text{da cui } \sin^2 x - \sin x + \frac{\sqrt{2} - 1}{2} = 0.$$

Ponendo $t = \sin x$, l'equazione si può scrivere nella forma:

$$2t^2 - 2t + \sqrt{2} - 1 = 0$$

e le soluzioni sono

$$t_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{3 - 2\sqrt{2}}}{2}.$$

Ora, tenendo presente che $\sqrt{3 - 2\sqrt{2}} = \sqrt{2} - 1$ (come si vede usando la formula di semplificazione delle radici doppie, o anche semplicemente elevando a quadrato $\sqrt{2} - 1$), le soluzioni sono:

$$t_{1,2} = \frac{\sqrt{2}}{2}, \quad 1 - \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Il primo valore corrisponde al seno di $\pi/4$ e di $\frac{3}{4}\pi$, il secondo non è un valore di quelli noti, ma, essendo compreso tra 0 e 1 , corrisponde senz'altro al seno di un certo angolo β , compreso fra 0 e $\pi/2$: questo angolo β prende il nome di *arcoseno* di $1 - \frac{\sqrt{2}}{2}$, e, assieme al suo supplementare $\pi - \beta$, è soluzione dell'equazione data. La totalità delle soluzioni cercate è data dunque da

$$\pi/4, \frac{3}{4}\pi, \beta, \pi - \beta.$$

Esempio 3. Risolvere la disequazione

$$\cos^4 x - \sin^4 x > 0.$$

Intanto, osserviamo che si ha

$$\cos^4 x - \sin^4 x = (\cos^2 x - \sin^2 x)(\cos^2 x + \sin^2 x) = \cos^2 x - \sin^2 x = \cos 2x$$

usando la formula fondamentale e la legge di duplicazione del coseno. Dunque, non dobbiamo fare altro che individuare gli angoli x tali che $\cos 2x > 0$.

Ora, limitando l'angolo y a $[0, 2\pi]$, si ha $\cos y > 0 \Leftrightarrow y \in [0, \pi/2[\cup]-\frac{3}{2}\pi, 2\pi]$. Quindi, in generale,

$$\cos y > 0 \Leftrightarrow y \in \bigcup_{k=-\infty}^{+\infty}]2k\pi - \pi/2, 2k\pi + \pi/2[.$$

Interpretando y come $2x$, avremo infine la soluzione in termini di x :

$$x \in \bigcup_{k=-\infty}^{+\infty}]k\pi - \pi/4, k\pi + \pi/4[.$$

Esempio 4. Risolvere l'equazione

$$\sqrt{3}\sin x + \cos x = 0$$

in $[0, 2\pi]$.

Qui, si possono tentare varie strade: una possibilit  consiste nel mettere in evidenza $\cos x$, e impostare un'equazione lineare in $\tan x$:

$$\cos x(\sqrt{3}\tan x + 1) = 0$$

Ora, quando $\cos x = 0$ l'equazione iniziale non   soddisfatta, dunque i valori della x che risolvono l'equazione data sono quelli per cui risulta

$$\tan x = -\frac{\sqrt{3}}{3}.$$

Un'altra strada consiste nell'usare le formule parametriche (vedi 5.5), e riportare l'equazione in termini di $\tan x/2$. Un'ulteriore possibilit , forse piu' semplice, consiste nel dividere primo e secondo membro per 2:

$$\frac{\sqrt{3}}{2}\sin x + \frac{1}{2}\cos x = 0$$

e osservare che $\frac{\sqrt{3}}{2} = \cos \pi/6$, $\frac{1}{2} = \sin \pi/6$, per cui, adoperando le formule di addizione, si riconosce che l'equazione data si riduce a

$$\sin(x + \pi/6) = 0$$

e quindi le soluzioni si trovano facilmente: $x_1 = -\pi/6$ e $x_2 = \frac{5}{6}\pi$ sono due radici immediate, e, se si vuole limitarle a $[0, 2\pi]$, basta sostituire x_1 con $2\pi - x_1 = \frac{11}{6}\pi$, lasciando x_2 inalterata.

Esempio 5. Si risolva, in $[0, 2\pi[$, la disequazione

$$\frac{1}{\sin x} > \frac{1}{\cos x}.$$

Intanto, dobbiamo escludere i quattro angoli in cui si annulla il seno o il coseno: si tratta di $0, \pi/2, \pi, \frac{3}{2}\pi$. Poi, per risolvere la disequazione, bisogna tener conto del *segno* delle quantità ivi presenti. Ad esempio, nel I quadrante, entrambe le quantità sono positive, e quindi basterà risolvere la disequazione $\sin x < \cos x$. Nel II quadrante, il seno è positivo mentre il coseno è negativo, per cui la disequazione è sempre verificata. Nel IV quadrante accade il contrario, e quindi non vi sono soluzioni. Nel III quadrante, infine, seno e coseno sono entrambi negativi: la disequazione allora diviene $\sin x < \cos x$. In definitiva, la disequazione è verificata per

$$\pi/4 < x < \frac{5}{4}\pi.$$

Esempio 6. Risolvere, in $]0, 2\pi[$, l'equazione

$$\sin x - \cos x = \frac{\sqrt{3} - 1}{2}.$$

Qui, conviene far uso delle formule parametriche: sostituendo $\sin x$ con $\frac{2t}{1+t^2}$ e $\cos x$ con $\frac{1-t^2}{1+t^2}$, l'equazione data diventa:

$$(\sqrt{3} - 3)t^2 - 4t + (1 + \sqrt{3}) = 0.$$

Le radici di tale equazione sono:

$$t_1 = \frac{\sqrt{3}}{3} = \tan \pi/6, \quad t_2 = -(2 + \sqrt{3}) = \tan(-\frac{5}{12}\pi)$$

Allora, le soluzioni cercate sono:

$$\pi/3, \quad \frac{7}{6}\pi.$$

Esempio 7. Risolvere la disequazione

$$\sqrt{1 + \cos x} > \sqrt{2} \sin x$$

in $[0, 2\pi[$.

Intanto, osserviamo che il radicando é sempre maggiore o uguale a 0, e quindi non si deve escludere alcun valore di x , a priori. Inoltre, considerato che il I membro é non negativo per definizione, la disequazione é senz'altro verificata, tutte le volte che si ha $\sin x < 0$, ossia per $x \in]\pi, 2\pi[$.

Poi, dividendo tutto per $\sqrt{2}$, il I membro non é altro che il coseno di $\frac{x}{2}$, almeno quando x si trova nel I o II quadrante (infatti in tale situazione $x/2$ sta nel I quadrante, e ivi il coseno é non negativo). Dunque, per $0 \leq x \leq \pi$, la disequazione diventa

$$\cos \frac{x}{2} > \sin x.$$

Ora, ponendo $t = \frac{x}{2}$, si ha $\sin x = 2 \sin t \cos t$ (formula di duplicazione), e quindi la disequazione assume la forma

$$\cos t > 2 \sin t \cos t,$$

da trattare evidentemente per $t \in [0, \pi/2]$. Escluso $\cos t = 0$, ossia $t = \pi/2$, che certamente non verifica la disequazione, e dividendo tutto per $\cos t$, rimane

$$\sin t < \frac{1}{2}$$

che ovviamente é verificata per $t < \pi/6$, e quindi $x < \pi/3$. In definitiva, la disequazione data é verificata per $0 \leq x < \pi/3$ e per $\pi < x \leq 2\pi$.

Capitolo 6

Logaritmi ed esponenziali

I logaritmi si rivelano spesso strumenti utilissimi per trattare con quantità di *grosso taglio*, o per studiare fenomeni che evolvono in maniera molto rapida: tanto per fare un esempio, numeri come 152^{1025} sono ben difficili da visualizzare, e a volte anche da calcolare, se non si dispone di un buon computer; eppure, se si conosce il logaritmo in base 10 di questo numero, si possono facilmente ricavare importanti informazioni su di esso, ad esempio di quante cifre è composto, e con quali cifre *comincia* (questo di solito è ciò che serve conoscere, riguardo a numeri così grossi). Quasi a conferma dell'importanza dei logaritmi, in Analisi Matematica, e nelle sue applicazioni, si rivela addirittura fondamentale la funzione esponenziale, che del logaritmo è la naturale inversa. Vedremo presto qualche problema di natura finanziaria che si risolve rapidamente mediante l'uso dei logaritmi, e proprio da un *facile* problema di finanza scaturisce quel *prezzemolo* di tutta la Matematica che è il famoso numero *e* di Nepero, base dei logaritmi cosiddetti naturali e delle funzioni esponenziali più importanti e ricche di applicazioni.

Nella nostra panoramica su questo argomento, assumeremo qui che il lettore sia già familiare con i numeri reali, e quindi non si trovi a disagio dinanzi a espressioni del tipo $\pi^{\sqrt{2}}$: in altre parole, dato un qualunque numero reale *positivo* a , è sempre ben definita la potenza a^b , per qualunque numero reale b (anche negativo o nullo), e valgono tutte le regole già note per le potenze algebriche, o radicali. In particolare, si hanno le seguenti formule:

$$a^0 = 1, 1^b = 1 \forall b, \quad a^{b+c} = a^b a^c, \quad a^{-b} = \frac{1}{a^b}, \quad a^x > 0 \quad \forall x, \quad (a^b)^c = a^{bc}$$

con l'occasionale *convenzione* di porre $0^x = 0$ per $x \neq 0$, e $0^0 = 1$.

Definizione 6.1 Dato un numero reale *positivo* $a \neq 1$, e fissato un qualunque numero reale $b > 0$, si dice *logaritmo* di b , *in base* a , quel numero reale x , tale che $a^x = b$. (E' chiaro dunque per quale motivo la *base* a non puo' essere 1: $1^x = 1$ per ogni x).

Il numero x viene denotato con la scrittura $\log_a b$. Ad esempio, $\log_3 9 = 2$, perché $3^2 = 9$. Similmente, $\log_2 16 = 4$, e anche $\log_{16} 2 = \frac{1}{4}$, essendo $2 = \sqrt[4]{16}$. Banalmente, si vede poi che $\log_a 1 = 0$, e che $\log_a a = 1$, per qualsiasi *base* a .

Nella scrittura $\log_a b$, la quantita' b viene anche detta *argomento* del logaritmo.

Si noti che in questa definizione non ci siamo posti il problema dell'*esistenza* del logaritmo in questione: diamo cioè per *scontato* che, quando $a > 0, a \neq 1$, le potenze a^x possono assumere tutti i valori reali, al variare di x e senza ambiguita'. Questo vuol dire che, quale che sia $b > 0$, esiste sempre un x tale che $a^x = b$, e tale numero x é unico. (Questo fatto non é per niente banale, e a rigore andrebbe dimostrato, ma cio' esula dagli scopi di questa trattazione).

Vediamo qualche altro esempio: $\log_{10} 1000 = 3$, mentre $\log_{10} 10000 = 4$: questo ci dice anche che, per tutti i numeri compresi fra 1000 e 10000, il logaritmo in base 10 é compreso fra 3 e 4. Ad esempio, il computer ci dice che $\log_{10} 7812 = 3.892762235$. Ma i numeri interi compresi fra 1000 e 10000 (escluso l'ultimo) sono tutti i numeri interi positivi che hanno 4 cifre. Dunque, se un numero intero positivo ha 4 cifre, il suo logaritmo in base 10 é della forma $3, \dots$, ossia ha *parte intera* uguale a 3. Analogamente, tutti i numeri interi positivi di 5 cifre hanno il logaritmo in base 10 compreso fra 4 e 5. Dunque, il logaritmo in base 10 di un numero intero positivo ci permette di capire subito quante sono le cifre di quel numero!

Ovviamente poi, se x é un numero positivo non intero, ad esempio $x = 158,33$, il suo logaritmo in base 10, aumentato di 1, ci da' il numero di cifre che precedono la virgola, il che puo' far sempre comodo...

Qui, cominciamo un po' a capire come mai i logaritmi aiutino tanto a lavorare con i numeri *grandi*. Ma essi sono di grande aiuto anche con i numeri molto *piccoli*, in maniera perfettamente speculare: infatti si ha la relazione

$$\log_a \frac{1}{b} = -\log_a b;$$

Questa si dimostra facilmente, tenendo presente che $a^{-x} = \frac{1}{a^x}$, e prendendo $x = \log_a b$. Vedremo presto una dimostrazione alternativa, basata su altre proprietà dei logaritmi. Dunque, $\log_{10} \frac{1}{10000} = -4$, $\log_2 \frac{1}{128} = -7$, etc.

Ma si ha anche $\log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{128} = 7$, $\log_{\frac{1}{10}} \frac{1}{10000} = 4$..., come si vede subito adoperando la definizione di logaritmo.

Questa osservazione illustra la differenza che c'è tra i logaritmi in base *maggiore* di 1 e quelli in base *minore* di 1: in generale, si può dire che

$$\log_{\frac{1}{a}} b = -\log_a b$$

per ogni $a > 0, a \neq 1$ e per ogni $b > 0$. Infatti, se $x = \log_{\frac{1}{a}} b$, vuol dire che $b = (\frac{1}{a})^x = \frac{1}{a^x} = a^{-x}$ e allora, se $a^{-x} = b$, si ha $-x = \log_a b$, cioè per l'appunto $-\log_{\frac{1}{a}} b = \log_a b$.

Ma vediamo un po' più in dettaglio alcune importanti proprietà dei logaritmi, delle quali faremo spesso uso in seguito. Nelle relazioni che seguono, assumiamo $a > 0, a \neq 1$, e $b > 0$ arbitrario.

Regola 1 Per ogni $c \in \mathbb{R}, c > 0$, si ha:

$$\log_a bc = \log_a b + \log_a c.$$

Infatti, se poniamo $x = \log_a b$ e $y = \log_a c$, vuol dire che $a^x = b$ e $a^y = c$. Allora, $a^{x+y} = a^x a^y = bc$, ossia proprio $x + y = \log_a bc$.

(La relazione espressa in questa formuletta di solito viene citata dicendo che "il logaritmo di un prodotto è uguale alla somma dei logaritmi", beninteso rispetto alla stessa base. Ma non bisogna fare confusione: il logaritmo di una somma, invece, non ha niente a che fare con il prodotto dei logaritmi!)

Ad esempio, si ha

$$\log_2 10 = \log_2 (2 \times 5) = \log_2 2 + \log_2 5 = 1 + \log_2 5.$$

La morale è che basta conoscere alcuni logaritmi in base 2 (o in qualsiasi altra base), per potersi ricavare gli altri.

Dalla Regola 1 discende anche la proprieta' che abbiamo gia' incontrato, riguardante il logaritmo di $\frac{1}{b}$: si ha infatti

$$0 = \log_a 1 = \log_a \left(b \times \frac{1}{b}\right) = \log_a b + \log_a \frac{1}{b}.$$

Regola 2 Una facile conseguenza della regola 1 precedente é che

$$\log_a \frac{1}{b} = -\log_a b.$$

Basta portare tutto a I membro, e adoperare la regola 1, ricordando che si ha *sempre* $\log_a 1 = 0$.

Regola 3 Iterando la regola 1, si perviene facilmente alla seguente formula:

$$\log_a b^n = n \log_a b,$$

almeno per ogni *intero* n . Ma piu' in generale, si ha

$$\log_a b^c = c \log_a b$$

per *ogni* numero reale c . Infatti, posto $x = \log_a b$, avremo $a^x = b$ e allora $a^{cx} = (a^x)^c = b^c$, per cui $cx = \log_a b^c$. Ad esempio,

$$\log_2 144 = 2 \log_2 12 = 2 \log_2 (3 \times 4) = 2 \log_2 3 + 2 \log_2 4 = 2 \log_2 3 + 2.$$

(Questa regola si esprime dicendo che "il logaritmo di una potenza é l'esponente moltiplicato il logaritmo della base")

Regola 4 La seguente formula permette il cambio di base nei logaritmi. Per ogni $c > 0, c \neq 1$, si ha la cosiddetta *legge di cancellazione*:

$$\log_a c \log_c b = \log_a b.$$

Per dimostrare questa relazione, basta porre $x = \log_a c$, $y = \log_c b$: si ha allora

$$a^x = c, \quad c^y = b, \quad \text{e quindi} \quad b = (a^x)^y = a^{xy} \quad \text{dunque} \quad xy = \log_a b.$$

Una facile conseguenza é la formula d'inversione, ottenuta prendendo $b = a$:

$$\log_a c = \frac{1}{\log_c a}$$

Ad esempio, se si vuole calcolare il logaritmo in base 35 di 1024, e si dispone solo delle tavole dei logaritmi in base 2, si puo' fare cosi':

$$\log_{35} 1024 = \log_{35} 2^{10} = 10 \log_{35} 2 = \frac{10}{\log_2 35} = \frac{10}{\log_2 5 + \log_2 7}$$

(adoperando la regola 3, la formula d'inversione, e la regola 1).

Regola 5 Cambiamento di base: se $c > 0, c \neq 1$, si ha

$$\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}$$

qualunque sia $b > 0$. Per dimostrarla, basta moltiplicare I e II membro per $\log_c a$, e poi applicare la legge di cancellazione.

Per esempio, se si vuole calcolare $\log_{1024} 128$, basta usare la base 2:

$$\log_{1024} 128 = \frac{\log_2 128}{\log_2 1024} = \frac{7}{10}.$$

Regola 6 Questa non é una vera e propria regola, ma é una formula comunque utile. Per ogni $c > 0$, si ha

$$b^{\log_a c} = c^{\log_a b}.$$

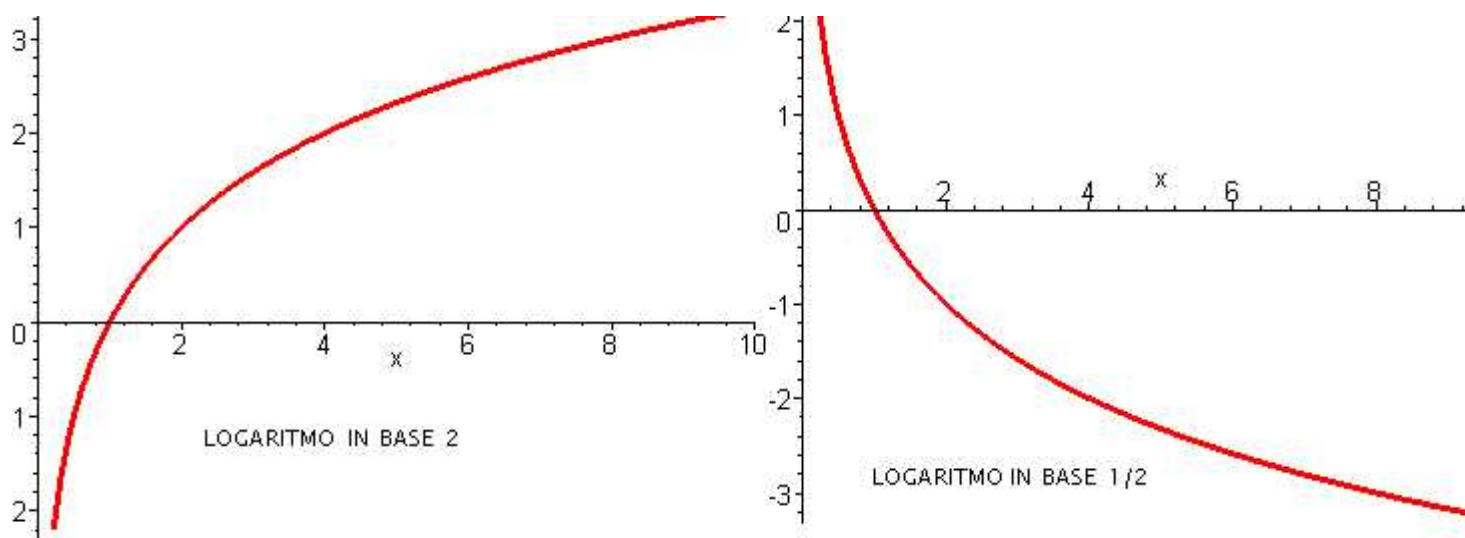
Infatti, la cosa é evidente, se $b = 1$. Se $b \neq 1$, per la legge di cancellazione avremo

$$b^{\log_a c} = b^{\log_a b \log_b c} = (b^{\log_b c})^{\log_a b} = c^{\log_a b}$$

(Si noti la *tautologia* $b^{\log_b c} = c$, dovuta proprio alla definizione di logaritmo: infatti $\log_b c$ é precisamente quell'esponente cui bisogna elevare b per trovare c).

Di seguito, forniamo due grafici della *funzione* logaritmo, una in base 2 (maggiore di 1), e una in base $\frac{1}{2}$, quindi minore di 1.

Siamo ora in grado di affrontare alcune equazioni e disequazioni, coinvolgenti i logaritmi.



Esercizio 1 Si risolva l'equazione

$$\log_4 8x = \log_2 x.$$

Osserviamo intanto che dev'essere $x > 0$, altrimenti i logaritmi coinvolti non esistono.

Poi, usando le regole precedenti, avremo:

$$\log_4 8x = \log_4 8 + \log_4 x = 3 \log_4 2 + \log_4 x = \frac{3}{2} + \log_4 x$$

e ancora

$$\log_2 x = \log_2 4 \log_4 x = 2 \log_4 x$$

per cui l'equazione data si riduce a

$$\frac{3}{2} + \log_4 x = 2 \log_4 x, \text{ ossia } \frac{3}{2} = \log_4 x.$$

Risolvendo:

$$x = 4^{\frac{3}{2}} = 8.$$

Esercizio 2 Si risolva l'equazione

$$\log_4 8x = \log_2 (x+1).$$

Ragionando come sopra, avremo

$$\log_2 (x+1) = 2 \log_4 (x+1) = \log_4 (x+1)^2,$$

per cui l'equazione si scrive

$$\log_4 8x = \log_4 (x+1)^2.$$

Ora, due logaritmi nella stessa base sono uguali se e solo se sono uguali gli argomenti, dunque l'equazione data si riconduce a

$$8x = (x+1)^2.$$

A questo punto, é facile ricavare le soluzioni: $x = 3 \pm 2\sqrt{2}$.

Esercizio 3 Affrontiamo ora una disequazione:

$$\log_3(4^x - 2^{x+2} + 2) < 0.$$

Osservando il grafico della funzione logaritmo, nel caso di base maggiore di 1, si vede chiaramente che il logaritmo in base 3 di un numero y é minore di 0 se e solo se y é minore di 1. Dunque la disequazione proposta equivale a richiedere:

$$4^x - 2^{x+2} + 2 < 1 \quad \text{cioe' } 4^x - 4 \times 2^x + 1 < 0.$$

Ora, scrivendo $4^x = 2^{2x} = (2^x)^2$, e ponendo $t = 2^x$, la disequazione diventa:

$$t^2 - 4t + 1 < 0$$

che ha soluzione nell'intervallo $]2 - \sqrt{3}, 2 + \sqrt{3}[$: in altri termini, le soluzioni x della disequazione proposta devono soddisfare alla condizione

$$2 - \sqrt{3} < 2^x < 2 + \sqrt{3}.$$

Infine, prendendo i logaritmi in base 2, troveremo:

$$\log_2(2 - \sqrt{3}) < x < \log_2(2 + \sqrt{3})$$

che é la soluzione cercata.

Esercizio 4 Risolviamo una semplice equazione, in forma esponenziale:

$$16 \times 3^x = 4^{x+1}.$$

Per risolvere tale equazione, prendiamo i logaritmi in base 4 di entrambi i membri:

$$\log_4(16 \times 3^x) = x + 1, \quad \text{ossia} \quad 2 + x \log_4 3 = x + 1$$

(avendo applicato le regole 1 e 3, oltre naturalmente alla definizione di logaritmo). A questo punto, la soluzione é facile:

$$x = \frac{1}{1 - \log_4 3} = \frac{1}{\log_4 \frac{4}{3}} = \log_{\frac{4}{3}} 4.$$

(Abbiamo scritto le ultime due uguaglianze solo per far notare che lo stesso numero puo' assumere forme diverse, a seconda della regola che si vuole applicare).

Esercizio 5 Ancora una disequazione, stavolta in forma esponenziale:

$$\left(\frac{1}{4}\right)^x < \left(\frac{2}{5}\right)^{|2x-1|}$$

complicata anche dalla presenza del valore assoluto. Prendiamo in entrambi i membri il logaritmo in base $\frac{1}{4}$, tenendo presente, pero', che cosi' facendo la disuguaglianza cambia verso, poiché la base del logaritmo é minore di 1 (infatti, il grafico della funzione logaritmo é decrescente quando la base é minore di 1). Avremo dunque

$$x > (|2x - 1|) \log_{\frac{1}{4}} \frac{2}{5}.$$

Per semplicita', indichiamo con h il numero $\log_{\frac{1}{4}} \frac{2}{5} \sim .6609640475$. La disequazione da risolvere diviene ora

$$|2x - 1| < \frac{x}{h}.$$

Per $x \geq \frac{1}{2}$, la disequazione diventa

$$2x - 1 < \frac{x}{h}, \quad \text{ossia} \quad (2h - 1)x < h, \quad \text{e} \quad x < \frac{h}{2h - 1} \sim 2.053141859.$$

Per $x < \frac{1}{2}$, la disequazione diviene

$$1 - 2x < \frac{x}{h}, \quad \text{ossia} \quad (2h + 1)x > h, \quad \text{e} \quad x > \frac{h}{2h + 1} \sim .2846617210.$$

Le soluzioni dell'equazione assegnata sono dunque comprese fra $\frac{h}{2h+1}$ e $\frac{h}{2h-1}$.

(Suggerimento: quando una disequazione non ha soluzione immediata, come in questo caso, può venire il dubbio di avere *invertito* qualche volta il verso giusto, e quindi le soluzioni trovate non sono negli intervalli giusti, ma nei loro complementari. Per chiarire il dubbio, basta fare una verifica, anche con un punto solo: ad esempio, nel caso dell'esercizio 5, uno dei punti compresi nell'intervallo trovato è 1, ed è facile vedere che, nel punto $x = 1$, la disequazione assegnata è soddisfatta. Dunque l'intervallo trovato è senz'altro quello giusto).

Un *esercizio* sui generis consiste nell'adoperare i logaritmi per studiare in qualche modo numeri molto *grandi*. Ad esempio, com'è fatto il numero 1951^{2003} ?

Sappiamo che il numero delle cifre di questa quantità è indicato dal suo logaritmo in base 10, aumentato di 1. Ma qual è il logaritmo in base 10 di 1951^{2003} ? Tenendo presente che $\log_{10} 1951^{2003} = 2003 \log_{10} 1951$, tutto sommato il calcolo non è proibitivo. Un computer di poche pretese ci dà subito il logaritmo di 1951: $\log_{10} 1951 \sim 3.29025727$, e quindi

$$\log_{10} 1951^{2003} \sim 2003 \times 3.29025727 \sim 6590.385312$$

Dunque 1951^{2003} è un numero di 6591 cifre. Ma ora ci chiediamo: quali sono (almeno) le prime cifre di tale numero? Per rispondere a questa domanda, conviene che adoperiamo qualche notazione di comodo.

Noi sappiamo che ogni numero reale positivo x ha una sua *parte intera*, che viene denotata con $[x]$: questo è il più grande numero intero, tra quelli minori o uguali a x . Ad esempio, si ha $[55/3] = 18$, $[\pi] = 3$, e così via. Poi, il numero $x - [x]$ viene detto *mantissa* di x , e possiamo denotarlo con $\{x\}$. Pertanto, si ha sempre $x = [x] + \{x\}$, e chiaramente $0 \leq \{x\} < 1$.

Ora, se N denota un qualunque numero reale positivo, e se si pone $Y = \log_{10} N$, si ha chiaramente

$$N = 10^{\log_{10} N} = 10^{[Y] + \{Y\}} = 10^{[Y]} \times 10^{\{Y\}}.$$

Osserviamo a questo punto che il numero $10^{[Y]}$ è una potenza di 10, e quindi moltiplicare un numero qualunque x per $10^{[Y]}$ significa semplicemente spostare verso destra la virgola che

compare nel numero x , ed eventualmente aggiungere zeri alla fine: ad esempio, $0,028 \times 10^9 = 28000000$; ma chiaramente questa operazione non modifica le prime cifre significative di x . In altri termini, se $10^{\{Y\}}$ comincia con 2,345 (ad esempio), allora N comincia con 2345 (se é piu' grande di 1000, altrimenti con 234,5, oppure con 23,45...).

Allora, se N é il nostro numero *gigantesco* 1951^{2003} , bastera' calcolare la quantita'

$$10^{\{N\}} = 10^{0,385312} \sim 2.428354014.$$

Dunque, il numero $N = 1951^{2003}$ é formato da 6591 cifre, le prime delle quali sono 24283... (per quanto riguarda le successive, non si esclude qualche errore di approssimazione nel calcolo di $10^{0,385312}$, e quindi é bene limitarsi solo alle primissime cifre trovate).

Prima di proseguire, dobbiamo almeno accennare a quella che é la base *canonica* di tutti i logaritmi. Benché il numero 10 sia indubbiamente importante come base dei logaritmi, é ormai universalmente riconosciuto un ruolo centrale al numero e di Nepero: questo per ragioni che non possiamo spiegare ora, ma che saranno chiare a fine corso.

Il numero e nasce da una idealizzazione della capitalizzazione bancaria, nel modo seguente. Tutti sanno che, quando si versa in banca un certo capitale C , la banca riconosce un interesse annuo di tasso r : quindi, dopo il primo anno, il capitale diventa $(C+rC) = (1+r)C$. Se lasciamo tutto in banca per un altro anno, gli interessi si cumulano, e alla fine del secondo anno il capitale sara' diventato $(1+r)C + r(1+r)C = (1+r)^2C$, etc. Se gli interessi fossero corrisposti con maggiore frequenza (naturalmente in misura proporzionale al tempo), il risparmiatore ci guadagnerebbe: ad esempio, se il cumulo degli interessi avvenisse ogni mese, il tasso naturalmente diverrebbe $\frac{r}{12}$, ma dopo un anno il capitale sarebbe $(1 + \frac{r}{12})^{12}C$, quantita' nettamente maggiore di $(1+r)C$. Sarebbe ancora meglio (ma non di molto), se gli interessi venissero conteggiati ogni settimana o magari ogni giorno: dopo un anno, il capitale diventerebbe $(1+r/N)^N C$, dove N rappresenta il numero di settimane (o giorni) in un anno. Se si andasse al *limite*, spingendo N a diventare infinitamente grande, il capitale dopo un anno non crescerebbe all'infinito, ma si avvicinerebbe ad un valore limite, che non puo' essere comunque mai raggiunto: tale valore é circa uguale a $2.718281828C$, e il numero 2.71828... é appunto quello che viene detto *numero di Nepero*, e denotato con la lettera e : si tratta di un numero irrazionale, anzi come si dice *trascendente*, in quanto non

é soluzione di nessuna equazione algebrica; ebbene, questo numero cosi' strano é la cosiddetta *base naturale* dei logaritmi! Ma non si deve pensare che tale importanza gli derivi solo dalla sua peculiarita' di natura economica (i Matematici sono assai poco venali!). Ci sono ben altre proprieta' di questo *numeretto* che lo rendono cosi' centrale, al punto che oramai i programmi di computer e macchine calcolatrici forniscono i logaritmi *solo* in tale base, costringendo spesso gli utenti a fare uso massiccio dei cambiamenti di base.

Con l'occasione, diciamo che i logaritmi in base e vengono detti logaritmi *naturali* o *Neperiani*, e di solito vengono scritti senza indicare la base; anzi, per maggiore distinzione, si usa spesso denotarli con il simbolo \ln (logaritmo naturale), invece di \log_e .

E naturalmente, essendo cosi' importante, il numero e funge spesso da base anche per gli esponenziali, dei quali i logaritmi sono le funzioni inverse. In genere, si chiama *funzione esponenziale* ogni funzione del tipo $y = a^x$, con $a > 0$, $a \neq 1$ (il numero a si dice *base* dell'esponenziale). Si parla di funzione inversa del logaritmo, perché valgono le due relazioni seguenti (per definizione):

$$a^{\log_a x} = x, \quad \text{e} \quad \log_a a^x = x$$

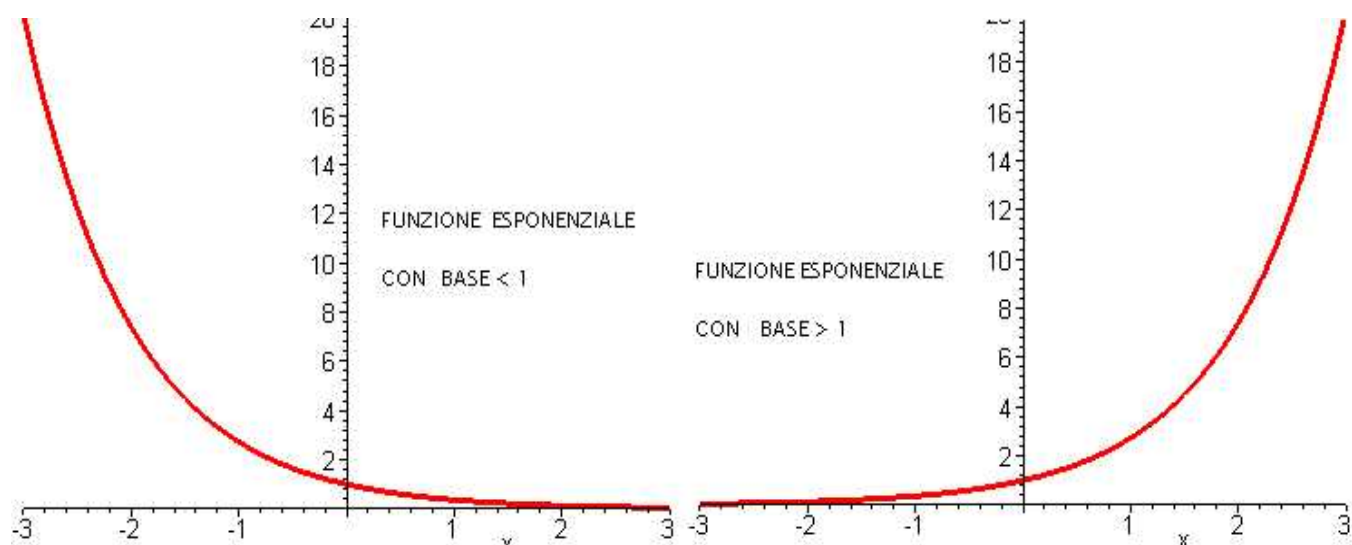
la prima per ogni reale positivo x e la seconda per ogni x reale. Benché il grafico delle funzioni esponenziali sia geometricamente identico a quello delle funzioni logaritmo, riportiamo qui due grafici, uno relativo alla funzione $y = e^x$, l'altro alla funzione $(\frac{1}{e})^x = e^{-x}$, in modo da distinguere il caso di base maggiore di 1 dal caso in cui la base é minore di 1.

Si noti la simmetria dei due grafici, e il fatto che in entrambi la y é sempre positiva. Infatti, ogni potenza del tipo a^x , con $a > 0$, é un numero strettamente positivo.

Come si vede dalle questioni finanziarie cui si accennava dianzi, esistono varie situazioni concrete in cui l'uso di logaritmi ed esponenziali permette di rispondere a vari quesiti.

Uno dei piu' semplici riguarda proprio la capitalizzazione: ad esempio, se si deposita un capitale C in banca, ad un interesse annuo del 4%, dopo quanti anni il capitale sara' raddoppiato?

Per quanto visto in precedenza, sappiamo che, dopo n anni, il capitale diviene $C_n = (1 + r)^n C$, ove $r = \frac{4}{100}$ (questo é il significato del tasso al 4%). Se si vuole che $C_n = 2C$,



bisogna imporre l'equazione

$$(1 + r)^n = 2$$

che si risolve appunto prendendo i logaritmi in ambo i membri:

$$n \ln(1 + r) = \ln 2, \text{ e quindi } n = \frac{\ln 2}{\ln(1 + r)} \sim 17.67298769,$$

avendo sostituito r con 0.04. Dunque, occorrono non meno di 18 anni per vedere raddoppiato il capitale.

Un discorso speculare riguarda i *prestiti* o i fidi, con la differenza che in questi casi il tasso d'interesse é molto piu' alto (attorno al 15% annuo), e questo spiega come mai, anche ammortizzando in 5 anni, si viene poi a pagare complessivamente circa il doppio di quanto ricevuto in prestito (Insomma, se si rifanno i conti precedenti, sostituendo il tasso del 4% con quello del 15%, il valore che si trova per n é quasi uguale a 5).

Vediamo ancora qualche equazione o disequazione, coinvolgente il numero e .

Esercizio 6. Si risolva la seguente disequazione:

$$2e^{x+1} - e^{2x} < 4.$$

Adoperando le proprieta' delle potenze, avremo:

$$2e^{x+1} = 2e \times e^x, \text{ e } e^{2x} = (e^x)^2$$

per cui, posto $e^x = u$, la disequazione diventa

$$2eu - u^2 - 4 < 0, \text{ o anche } u^2 - 2eu + 4 > 0.$$

Ora, le radici dell'equazione $u^2 - 2eu + 4 = 0$ sono: $u_1 = e - \sqrt{e^2 - 4}$ e $u_2 = e + \sqrt{e^2 - 4}$. Poiché $e^2 - 4$ è certamente positivo, le radici sono reali. Ma ci occorre di sapere se esse sono positive, in quanto la nostra u è comunque un numero positivo, rappresentando e^x . Ora, certamente $u_2 > 0$, ma come sarà u_1 ? Un modo per vederlo è quello di usare una calcolatrice, per individuare la rappresentazione decimale di u_1 . Un'altra via consiste nel controllare, con i metodi delle disequazioni, se risulta $e > \sqrt{e^2 - 4}$: tale verifica è pressoché immediata, elevando ambo i membri a quadrato. Dunque entrambe le radici trovate sono positive, e quindi le soluzioni della disequazione originaria sono tutti e soli i valori di x esterni all'intervallo $[\ln u_1, \ln u_2]$. Una riprova può essere fatta testando il numero $\ln e = 1$, che è interno all'intervallo delle radici: sostituendo $x = 1$ nella disequazione iniziale, si trova $2e^2 - e^2 < 4$, il che chiaramente non è vero; pertanto valori interni all'intervallo $[\ln u_1, \ln u_2]$ non soddisfano all'equazione data.

Esercizio 7. Si risolva la disequazione:

$$e^{4x+2} - 4e^{2x} - e^{-2} < 0.$$

Con tecniche analoghe all'esercizio precedente, e ponendo $u = e^{2x}$, la disequazione diviene:

$$e^2 u^2 - 4u - e^{-2} < 0$$

che ha le seguenti radici: $u_1 = \frac{2-\sqrt{5}}{e^2}$, $u_2 = \frac{2+\sqrt{5}}{e^2}$, di cui solo la seconda è positiva. Ciò significa che, dovendo aversi $u_1 < u < u_2$, e dovendo essere necessariamente $u > 0$, le soluzioni cercate corrispondono all'intervallo $0 < u < u_2$, e quindi $-\infty < x < \ln u_2$.

Esercizio 8. Si risolva la disequazione seguente:

$$\ln(x+1) + \ln x > 4.$$

Intanto, perché l'equazione abbia senso, bisogna escludere tutti i valori di x minori o uguali a 0. Adoperando le proprietà dei logaritmi, l'equazione data si riduce a:

$$\ln x(x+1) > \ln e^4, \quad \text{da cui} \quad x^2 + x - e^4 > 0.$$

A questo punto, le soluzioni sono tutti e soli i valori positivi di x esterni all'intervallo $[-\frac{1+\sqrt{1+4e^4}}{2}, \frac{\sqrt{1+4e^4}-1}{2}]$; e siccome l'estremo sinistro è negativo, si possono accettare soltanto i valori di $x > \frac{\sqrt{1+4e^4}-1}{2}$.

Esercizio 9. Si risolva l'equazione:

$$\ln x + \log_2 x^2 - \log_5 6x = 0.$$

Al solito, si possono accettare solo valori positivi di x . Conviene riportare tutti i logaritmi ad una stessa base, ad esempio e . Avremo allora

$$\ln x + 2 \log_2 e \ln x - \log_5 6 - \log_5 e \ln x = 0 \quad \text{ossia} \quad \ln x(1 + 2 \log_2 e - \log_5 e) = \log_5 6.$$

Risolvendo:

$$\ln x = \frac{\log_5 6}{1 + 2 \log_2 e - \log_5 e}$$

da cui

$$x = e^{\frac{\log_5 6}{1 + 2 \log_2 e - \log_5 e}}.$$

L'espressione ad esponente potrebbe assumere anche una forma un po' più semplice, se si riportasse tutto in termini di \log_5 , ma in questo caso non si avrebbero notevoli vantaggi da tale lavoro.

Esercizio 10. Si risolva la disequazione

$$3^x - 2e^x > 0.$$

Passiamo tutto a logaritmo naturale: avremo $x \ln 3 - \ln 2 - x > 0$, ossia

$$x(\ln 3 - 1) > \ln 2, \quad \text{da cui} \quad x > \frac{\ln 2}{\ln 3 - 1};$$

(essendo $3 > e$, la quantità per cui abbiamo diviso, cioè $\ln 3 - 1$, è positiva, e quindi il verso della disuguaglianza non è variato). La soluzione può anche porsi nella forma:

$$x > \log_{\frac{3}{e}} 2.$$

Esercizio 11. Risolvere la disequazione:

$$x^{\ln x} > 3.$$

Problemi di questo tipo si possono affrontare mediante il *trucco*:

$$f(x)^{g(x)} = e^{\ln f(x)^{g(x)}} = e^{g(x) \ln f(x)},$$

per ogni funzione $f(x) > 0$ e qualunque $g(x)$ reale. (Ricordiamo che $\ln x$ é il logaritmo in base e di x , e che $x = a^{\log_a x} \dots$) Tornando al nostro problema, escludendo a priori i valori $x \leq 0$, avremo

$$e^{\ln x \ln x} > 3, \text{ da cui } (\ln x)^2 > \ln 3.$$

Dunque, dovrà essere $|\ln x| > \sqrt{\ln 3}$, (richiesta ragionevole, poiché $\ln 3 > 0$), e quindi la soluzione cercata é data dai seguenti valori di x .

$$0 < x < e^{-\sqrt{\ln 3}}, \text{ e } x > e^{\sqrt{\ln 3}}$$

Esercizio 12. Risolvere l'equazione:

$$\log_x (e + 1) = \ln x.$$

Naturalmente, dovremo ricercare le soluzioni tra le $x > 0$, e $x \neq 1$. Conviene scambiare le basi, a I membro: $\log_x (e + 1) = \frac{1}{\log_{e+1} x} = \frac{1}{(\log_{e+1} e) \ln x}$. L'equazione diventa ora:

$$\ln x = \frac{\ln (e + 1)}{\ln x}, \text{ e quindi } (\ln x)^2 = \ln (e + 1),$$

da cui $\ln x = \pm \sqrt{\ln (e + 1)}$ e le soluzioni sono:

$$x = e^{\pm \sqrt{\ln (e+1)}}.$$

Capitolo 7

Equazioni e disequazioni in Analisi

In questo capitolo, tratteremo varie equazioni e disequazioni, che si possono incontrare negli studi di funzioni: questo é uno dei problemi centrali nel corso di Analisi Matematica I, e spesso le difficoltà maggiori si incontrano nel valutare correttamente gli intervalli nei quali le varie funzioni in esame sono positive o negative.

Esempio 1

$$(x - 1)\sqrt{4 - x^2} > 0.$$

Prima di tutto, bisogna richiedere $4 - x^2 \geq 0$, ossia $-2 \leq x \leq 2$, altrimenti il radicale non ha senso. Dunque, delle eventuali soluzioni che troveremo, potremo accettare solo quelle contenute nell'intervallo $] - 2, 2[$ (dobbiamo escludere gli estremi, perché annullano il I membro, e quindi non soddisfano la disequazione).

Ora, il segno del radicale é sempre positivo (o nullo), per cui il segno del I membro dipende solo da $x - 1$; dunque la disequazione é soddisfatta da tutti i valori di x maggiori di 1, purché compresi fra -2 e 2 : l'insieme soluzione é dunque l'**intervallo aperto** $]1, 2[$.

Esempio 2

$$\frac{x^3 + 1}{2x^3 - 5} \geq 1.$$

Intanto, escludiamo che il denominatore possa annullarsi: richiediamo quindi $x \neq (\frac{5}{2})^{1/3}$. Portando tutto a I membro, e sommando, si ha

$$\frac{6 - x^3}{2x^3 - 5} \geq 0.$$

Il numeratore é positivo per $x < 6^{1/3} \approx 1.817$, mentre il denominatore é positivo per $x > (\frac{5}{2})^{1/3} \approx 1.357$. Dunque, se $x < (\frac{5}{2})^{1/3}$, oppure se $x > 6^{1/3}$, numeratore e denominatore sono discordi, per cui la disuguaglianza é verificata nell'**intervallo** $](\frac{5}{2})^{1/3}, 6^{1/3}[$.

Esempio 3

$$x + 4 - 4\sqrt{x} = \sqrt{8x}.$$

Chiaramente, dobbiamo porre $x \geq 0$. Possiamo trattare questa equazione introducendo la variabile $t = \sqrt{x}$, in modo da ottenere l'equazione di II grado

$$t^2 - (4 + 2\sqrt{2})t + 4 = 0$$

della quale possiamo accettare solo radici non-negative. La formula risolutiva fornisce

$$t = \frac{2 + \sqrt{2} \pm \sqrt{2 + 4\sqrt{2}}}{2}$$

Confrontiamo $2 + \sqrt{2}$ con $\sqrt{2 + 4\sqrt{2}}$: la differenza dei loro quadrati é

$$(2 + \sqrt{2})^2 - \sqrt{2 + 4\sqrt{2}} = 4$$

quindi $2 + \sqrt{2} > \sqrt{2 + 4\sqrt{2}}$, e pertanto entrambe le radici trovate per t sono accettabili. Le soluzioni cercate sono poi le radici *positive* dei due valori trovati per t :

$$x = \sqrt{\frac{2 + \sqrt{2} \pm \sqrt{2 + 4\sqrt{2}}}{2}}$$

Esempio 4

$$(\sin x + \cos x)(\sin x + 1) > 0.$$

Poiché la funzione $f(x) = (\sin x + \cos x)(\sin x + 1)$ é periodica, di periodo 2π , risolveremo la disequazione soltanto nell'intervallo $[0, 2\pi]$.

Il prodotto di due quantità è positivo se e solo se esse sono concordi, e non nulle. Si ha

$$\sin x + \cos x = \sqrt{2} \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \sin x + \frac{\sqrt{2}}{2} \cos x \right) = \sqrt{2} \sin \left(x + \frac{\pi}{4} \right),$$

per cui

$$\sin x + \cos x > 0 \Leftrightarrow x \in \left[0, \frac{3}{4}\pi[\cup \right] \frac{7}{4}\pi, 2\pi].$$

Per quanto riguarda $\sin x + 1$, tale quantità è sempre positiva, tranne quando si annulla, ossia per $x = \frac{3}{2}\pi$. Poiché tale valore non è compreso negli intervalli indicati in precedenza, la soluzione è

$$x \in \left[0, \frac{3}{4}\pi[\cup \right] \frac{7}{4}\pi, 2\pi].$$

Esempio 5

$$\log(e^{2x} + e^x - 2) < 2.$$

Intanto, bisogna richiedere che l'argomento del logaritmo sia strettamente positivo, cioè:

$$e^{2x} + e^x - 2 > 0 :$$

ponendo $e^x = t$, si ricava $t^2 + t - 2 > 0$. Le radici essendo -2 e 1 , e dovendo essere $t = e^x > 0$, le soluzioni sono date da $t > 1$, e quindi $x > 0$.

Fatto ciò, la condizione $\log(e^{2x} + e^x - 2) < 2$ è soddisfatta se $e^{2x} + e^x - 2 < e^2$. Con la solita posizione, otteniamo

$$t^2 + t - (2 + e^2) < 0.$$

Le radici sono date da $t = \frac{-1 \pm \sqrt{9 + 4e^2}}{2}$, una delle quali è negativa, pertanto le soluzioni della disequazione $t^2 + t - (2 + e^2) < 0$ sono tutti i valori di t minori di $\frac{-1 + \sqrt{9 + 4e^2}}{2} \approx 2.60468$. Pertanto, la soluzione della disequazione iniziale è rappresentata dall'intervallo $]0, \log 2.60468[$.

Esempio 6

$$2 \sin x + \sin x \cos^2 x - 5 \cos^3 x < 0.$$

Il problema può apparire molto ostico, ma possiamo trasformarlo almeno in una disequazione di tipo *omogeneo*, scrivendo $2 \sin x = 2 \sin^3 x + 2 \sin x \cos^2 x$, il che conduce alla disequazione

$$2 \sin^3 x + 3 \sin x \cos^2 x - 5 \cos^3 x < 0 :$$

mettendo in evidenza $\cos^3 x$ e ponendo $t = \tan x$, troviamo

$$\cos^3 x (2t^3 + 3t - 5) < 0.$$

Ora, $t = 1$ è una radice del polinomio di terzo grado, che quindi può risolversi con la Regola di Ruffini, e ammette altre due radici reali. Confrontando le soluzioni della disequazione $2t^3 + 3t - 5 > 0$ con quelle di $\cos x > 0$, ricaviamo in conclusione che, nell'intervallo $[-\pi, \pi]$, la disequazione è soddisfatta per $x \in]-\frac{3}{4}\pi, \frac{\pi}{4}[$.

Indice

1	Proporzioni	3
2	Applicazioni in Geometria	8
3	Equazioni algebriche e loro applicazioni	13
4	Ulteriori applicazioni	24
5	Elementi di Trigonometria	30
6	Logaritmi ed esponenziali	41
7	Equazioni e disequazioni in Analisi	56

Dispense di Logica Matematica e Insiemistica

Domenico Candeloro

Introduzione

Lo scopo di queste note non é quello di fornire una trattazione accurata ed esaustiva di tutti gli aspetti della Logica Matematica: sarebbe troppo dispersivo e certamente troppo difficile. Si puo' rimandare il lettore interessato al volume di E.W.Beth I fondamenti logici della matematica, dove é anche possibile trovare numerosi riferimenti bibliografici.

Il nostro intento é invece quello di fornire gli elementi di base, gli strumenti e le regole per utilizzarli, corredando il tutto con qualche esempio e controesempio.

Questa breve disamina sara' poi messa a confronto con la Teoria degli Insiemi, che si puo' considerare la controparte matematica della Logica classica: una buona comprensione di questo parallelo permette di affrontare con sicurezza lo studio di quelle discipline (ad esempio la Probabilita' e la Statistica) che conducono alle applicazioni concrete di queste Teorie.

Naturalmente, abbiamo accennato agli insiemi di maggiore utilita' in Matematica e applicazioni, cogliendo l'occasione per introdurre in forma rapida e precisa alcune delle relazioni piu' importanti: ordinamento, equivalenze, funzioni.

Alla Teoria degli Insiemi si allacciano bene considerazioni su alcuni dei temi piu' attuali, suggeriti dalla presenza sempre piu' avvertita del computer nella nostra vita: abbiamo dunque introdotto alcuni cenni alle successioni definite per ricorrenza, alcune formule di approssimazione, una discussione delle rappresentazioni alternative dei numeri reali, e infine una breve disamina sui frattali, in forma molto semplificata.

Capitolo 1

Logica Matematica

Inizieremo con un riassunto dei principii della *logica elementare*, in base ai quali é possibile *combinare* tra loro vari *elementi*, anche di nature assai diverse, in modo da costituire *espressioni* piu' o meno complesse, sulle quali si possa stabilire oggettivamente se sono vere o false; tali espressioni possono poi a loro volta essere utilizzate per costruire espressioni piu' complesse, in un ciclo apparentemente infinito.

Una volta che siano definiti gli elementi sui quali lavorare, tutto il complesso di espressioni che con essi si possono costruire (in armonia con i principii di cui sopra) prende il nome di *sistema logico*.

1.1 Atomi e Operatori

Gli elementi che fanno parte di un sistema logico sono essenzialmente di due tipi:

1. *Atomi (o oggetti)*: denotati con simboli come a, b, c, x, y, z, \dots , essi possono essere numeri, frasi, o altri oggetti, nei quali non vogliamo, o non possiamo, distinguere elementi piu' semplici. Ad es. potremmo considerare come oggetto tutta la popolazione di Roma, senza distinguere tra un abitante e l'altro; potremmo considerare come oggetto la frase *piove*, senza ulteriori specifiche.
2. *Predicati*: denotati con simboli come $p(x), q(x), u(x, y), v(x, y), \alpha(a, b, c), \dots$, i predicati esprimono proprieta' che uno o piu' atomi possono avere: ad esempio, se $p(x)$ rap-

presenta la proprietà x è un numero pari, essa sarà soddisfatta da alcuni atomi, e non da altri.

I vari elementi del sistema possono essere collegati tra loro mediante gli *operatori*; essi sono i seguenti:

- = Questo operatore, posto tra due elementi, ne decreta l'identità'. Ad esempio, $3 = -(-3)$ esprime l'identità tra i due numeri reali, 3 e $-(-3)$.
- \neg Questo operatore trasforma una certa espressione nella sua negazione. Ad esempio, se $P(x)$ fosse il predicato x è mortale, e x fosse l'atomo Socrate, allora $\neg P(x)$ vorrebbe dire Socrate è immortale.
- \vee Questo operatore è detto *disgiunzione*, e serve per collegare due espressioni A e B dando origine all'espressione $A \vee B$. Ad esempio, se A fosse l'espressione Socrate è mortale e B fosse l'espressione Ercole è mortale, allora $A \vee B$ sarebbe l'espressione Socrate o Ercole è mortale (beninteso, le due possibilità non sono in contrasto l'una con l'altra).
- \wedge Questo è l'operatore *congiunzione*: le espressioni A e B danno origine all'espressione sia A che B . Nell'esempio precedente, $A \wedge B$ afferma che Socrate e Ercole sono entrambi mortali. Se le due espressioni sono incompatibili (come A e $\neg A$), si scrive $A \wedge B = 0$ o anche $A \wedge B = \emptyset$.
- \Rightarrow Questo è l'operatore implicazione, e lega due espressioni A e B asserendo che, se la prima è vera, allora anche l'altra è vera. Ad esempio, si può dire che $A \Rightarrow B$ quando A è l'espressione Piove e B è l'espressione Il giardino è bagnato.
- \Leftrightarrow Posta tra due espressioni A e B , comporta l'equivalenza tra le due, ossia $A \Rightarrow B \wedge B \Rightarrow A$. Ad esempio, A potrebbe essere l'espressione questo triangolo è rettangolo e isoscele, e B l'espressione questo triangolo ha un angolo retto e un angolo di 45° . Le espressioni del punto 4, invece, non sono equivalenti: è vero che, se piove, il giardino si bagna, ma non è detto che, se il giardino è bagnato, allora stia piovendo (qualcuno potrebbe averlo innaffiato).

\forall Questo operatore lega di solito atomi e predicati, ed esprime in pratica che un certo predicato sussiste per ogni atomo cui si può applicare. Ad esempio, se gli atomi x sono tutti i numeri interi positivi, e $P(x)$ è il predicato x ha una scomposizione in fattori primi, allora si ha l'espressione $\forall x P(x)$. Mentre non è vero che $\forall x S(x)$, ove $S(x)$ è il predicato x è dispari. Usando l'operatore negazione, possiamo scrivere l'espressione: $\neg\{\forall x S(x)\}$ (Qui, l'uso della parentesi graffa ha il solo scopo di interpretare ciò che in essa è contenuto come un'unica espressione).

\exists Anche questo operatore lega atomi e predicati, ma va inteso in senso particolarizzante, ossia esprime semplicemente il fatto che esiste qualche atomo con quel predicato. Ad esempio, se $P(x)$ è il predicato essere biondo, scrivere $\exists x P(x)$ vuol dire che qualche atomo è biondo (ovviamente, ciò ha senso quando gli atomi in esame sono esseri umani, oppure animali, o magari bevande...).

Naturalmente, un'espressione come $\forall x P(x)$ implica anche $\exists x P(x)$, ma la prima è molto più significativa della seconda.

Si noti che l'espressione $\exists x P(x)$ equivale all'altra: $\neg\{\forall x \neg P(x)\}$.

Ancora, l'espressione $\exists x \neg P(x)$ equivale alla $\neg\{\forall x P(x)\}$.

Gli ultimi due operatori menzionati sono anche detti *quantificatori*.

Essi possono essere usati anche in alternativa ad altri operatori. Ad esempio, se A e B designano due predicati generici, l'espressione $A \Rightarrow B$ equivale alla $\forall x \{A(x) \Rightarrow B(x)\}$. Ancora, l'espressione $\neg\{A \Rightarrow B\}$ equivale alla $\exists x \{A(x) \wedge \neg B(x)\}$.

Altri operatori possono essere introdotti, adoperando i precedenti: ne citiamo solo due, piuttosto importanti:

$$A \setminus B = A \wedge (\neg B), \quad (\text{differenza}), \quad A \Delta B = (A \setminus B) \vee (B \setminus A) \quad (\text{differenza simmetrica}) :$$

in poche parole, $A \setminus B$ vuol dire A , ma non B , e $A \Delta B$ significa A oppure B , ma non entrambi.

1.2 Regole Fondamentali

Le ultime equivalenze incontrate nella sezione precedente sono alcuni esempi di *regole*, alle quali ogni sistema logico deve sottostare. Queste regole si introducono per mezzo di un certo numero di *tesi*, ossia espressioni che sono vere *a priori*. Le tesi permettono poi di dedurre la falsità o veridicità delle varie espressioni che fanno parte del sistema logico.

Diamo di seguito un elenco delle tesi iniziali.

$$\mathbf{1} : \forall x \, x = x$$

$$\mathbf{2} : x = y \Rightarrow [a(x) \Rightarrow a(y)]$$

$$\mathbf{3} : A \Rightarrow (A \vee B)$$

$$\mathbf{4} : (A \vee B) \Rightarrow (B \vee A)$$

$$\mathbf{5} : (A \vee A) \Rightarrow A$$

$$\mathbf{6} : (A \Rightarrow B) \Rightarrow [(C \vee A) \Rightarrow (C \vee B)]$$

$$\mathbf{7} : (\forall x \, P(x)) \Rightarrow P(y)$$

$$\mathbf{8} : P(y) \Rightarrow (\exists x \, P(x)).$$

Non c'è bisogno, riteniamo, di chiarire le tesi precedenti, tale è la loro evidenza. Elenchiamo ora alcune tesi, che potrebbero essere comprese nelle precedenti, ma che in qualche modo abbiamo già incontrato: esse esprimono delle equivalenze tra proposizioni.

$$\mathbf{9} : \neg(\neg U) \Leftrightarrow U$$

$$\mathbf{10} : (U \Rightarrow V) \Leftrightarrow (\neg U \vee V) \Leftrightarrow (\neg V \Rightarrow \neg U)$$

$$\mathbf{11} : \neg(U \vee V) \Leftrightarrow (\neg U \wedge \neg V)$$

Enunciamo ora altre regole, che completano il quadro degli assiomi del generico sistema logico elementare.

$$\mathbf{12} : \mathbf{1}(A \vee \neg A) \text{ (qui } \mathbf{1} \text{ rappresenta il predicato essere vero).}$$

$$\mathbf{13} : \text{Se } \mathbf{1}(U) \text{ e } \mathbf{1}(U \Rightarrow V) \text{ , allora } \mathbf{1}(V) \text{ (il celebre } \textit{modus ponens} \text{ aristotelico).}$$

1.3 Esempi di sistemi logici

A questo punto, é opportuno introdurre qualche sistema logico *concreto*, in modo da fornire anche maggiore evidenza alle regole e ai principii precedentemente enunciati.

Sistema binario semplice. Questo sistema consiste di due soli atomi (che denoteremo 0 e 1) e tutti i possibili predicati a *un posto*, ossia quelli del tipo $P(x)$, con $x = 0$ oppure $x = 1$. Per ogni predicato P , abbiamo solo 4 possibili espressioni distinte (a meno di equivalenza):

$$\neg\exists x P(x), \quad P(0) \wedge \neg P(1), \quad P(1) \wedge \neg P(0), \quad P(0) \wedge P(1).$$

Notiamo che l'ultima espressione equivale a $\forall x P(x)$: si possono trovare facilmente altre espressioni equivalenti a qualcuna delle 4 suddette, ma non esistono espressioni sostanzialmente *diverse*.

Inoltre esse sono tra loro incompatibili, in quanto la congiunzione di due qualsiasi di esse risulta impossibile.

Ciascuna delle 4 espressioni enunciate individua una *parte* degli atomi: la prima individua la parte *vuota*, perché nessuno degli atomi verifica P ; la seconda individua la parte costituita dal solo atomo 0, la terza individua il solo elemento 1, mentre la quarta individua la totalità degli atomi.

Si può anche associare ad ogni predicato P una di queste parti: l'unica che corrisponde all'espressione vera per P .

Ad esempio, se $P(x)$ fosse il predicato $x^2 = x$, sappiamo che $\forall x P(x)$ (nel nostro sistema, beninteso!), e quindi la quarta espressione é l'unica vera.

Se invece $P(x)$ fosse il predicato $x^2 = -x$, sarebbe vera solo l'espressione $P(0) \wedge \neg P(1)$.

Al predicato $P(x) = "x < 0"$ sarebbe associata l'espressione $\forall x \neg P(x)$, che equivale alla $\neg\exists x P(x)$.

Sistema finito semplice. Scegliamo un numero maggiore di atomi, ad esempio 5, che denotiamo con 1, 2, 3, 4, 5, e ancora limitiamoci a tutti i predicati ad un posto. Stavolta,

per ciascun predicato P , le espressioni possibili sono piu' numerose, ma comunque sono un numero finito. Cominciamo con l'osservare che le espressioni $\forall x P(x)$ e $\forall x \neg P(x)$ fanno parte del novero, e chiaramente sono incompatibili. Consideriamo ora la seguente espressione:

$$P(1) \wedge \neg P(2) \neg P(3) \neg P(4) \neg P(5)$$

Ragionando come prima, se questa espressione é vera, gli atomi che soddisfano al predicato P si riducono al solo elemento 1. Possiamo trovare altre 4 espressioni di questo tipo, sostituendo 1 con uno qualsiasi degli altri atomi, e richiedendo che solo quello soddisfi a $P(x)$. Dunque, vi sono 5 espressioni che attribuiscono il predicato $P(x)$ ad un solo atomo.

Poi, vi sono espressioni che attribuiscono $P(x)$ a esattamente due atomi: per esempio

$$P(1) \wedge P(2) \wedge \neg P(3) \wedge \neg P(4) \wedge \neg P(5).$$

Si possono formare 10 espressioni di questo tipo. Andando avanti di questo passo, troveremo altre 10 espressioni che attribuiscono $P(x)$ esattamente a 3 atomi, e altre 5 espressioni che attribuiscono $P(x)$ esattamente a 4 atomi. In totale, vediamo che sono possibili 32 espressioni distinte, tutte tra loro incompatibili. Qualunque sia il predicato $P(x)$, esiste una e una sola di queste espressioni che é vera per tale predicato. Ad esempio, supponiamo che $P(x)$ voglia dire x é pari. Gli atomi che verificano P sono due: 2 e 4. Tutti gli altri non la verificano. Dunque, l'espressione

$$P(2) \wedge P(4) \wedge \neg P(1) \wedge \neg P(3) \wedge \neg P(5)$$

é quella che caratterizza P , ed é una delle 10 che attribuiscono $P(x)$ esattamente a due atomi.

Vedremo in seguito una dimostrazione piu' precisa di questo fatto: se gli atomi distinti sono in numero n , e i predicati sono tutti a un posto, le espressioni distinte che ogni predicato puo' verificare sono esattamente 2^n , a meno di equivalenza.

Sistema binario multidimensionale. E' il caso in cui gli atomi distinti sono soltanto due, 0 e 1, ma i predicati sono a piu' posti. Ad esempio, se ammettiamo predicati

a uno, due e tre posti, questi si possono caratterizzare mediante insiemi di *terne* ordinate composte con i simboli 0 e 1. In pratica, un predicato $P(x, y, z)$ interessa esattamente $2^3 = 8$ terne possibili, e quindi si puo' interpretare come un predicato a un posto, ma su un insieme di 8 atomi, anziché due. Un predicato a due posti puo' essere sostituito con predicati a tre posti, come segue:

$$P(x, y) \Leftrightarrow P^\#(x, y, 0) \Leftrightarrow P^\#(x, y, 1)$$

ove il predicato $P^\#(x, y, z)$ significa semplicemente $P(x, y)$, qualunque sia z . (In altre parole, (x, y, z) verifica $P^\#$ se e solo se (x, y) verifica P). Analogamente, i predicati a un posto possono essere sostituiti da predicati a tre posti, come segue:

$$P(x) \Leftrightarrow P^{\#\#}(x, 0, 0) \Leftrightarrow P^{\#\#}(x, 0, 1) \Leftrightarrow P^{\#\#}(x, 1, 1) \Leftrightarrow P^{\#\#}(x, 1, 0)$$

dove il predicato $P^{\#\#}(x, y, z)$ significa $P(x)$, per ogni scelta di y e z .

In definitiva, un sistema binario n -dimensionale puo' essere considerato come un sistema semplice con 2^n atomi; pertanto, vi sono esattamente 2^{2^n} espressioni, delle quali una e una sola puo' essere verificata da un qualunque predicato del sistema.

Sistema finito n -dimensionale . E' il caso piu' generale che tratteremo per il momento.

Supponiamo che gli atomi siano in numero n , e che siano ammessi predicati fino a k posti. Per quanto visto in precedenza, ogni predicato a 1, 2, ...o k posti puo' essere interpretato come un predicato ad un posto, in un sistema con n^k atomi (nell'esempio precedente, di un sistema binario con predicati a 3 posti, era $n = 2$ e $k = 3$, dunque si avevano predicati a un posto su un numero di 8 atomi). Allora, possiamo concludere che esistono esattamente 2^{n^k} espressioni distinte, delle quali una e una sola puo' essere verificata da un qualsivoglia predicato.

Naturalmente, esistono anche sistemi piu' complicati, con una quantita' infinita di atomi, e con predicati a un numero illimitato di posti: in tali situazioni é piu' difficile descrivere gli elementi essenziali del sistema logico; ma si puo' comunque pervenire a individuare un *insieme* ben preciso di espressioni, delle quali una e una sola puo' essere verificata da un qualsivoglia predicato.

La generalita' di queste conclusioni porta a individuare un metodo matematico assai efficace e rigoroso, nell'interpretare e descrivere un qualsiasi sistema logico. L'ideatore di questo metodo fu Boole, che intuì e studiò il parallelismo esistente tra la struttura dei sistemi logici e quella delle *algebre di Boole*, che a sua volta si può identificare con la struttura delle parti di un *insieme*.

1.4 Strutture logiche e algebriche

Cominciamo con il definire, e descrivere, le strutture matematiche che prendono il nome di *algebre di Boole*.

Definizione 1.1 Si dice *algebra di Boole* un sistema del tipo $(X, \cdot, ^c, 0, 1)$, dove X è un insieme astratto non vuoto, \cdot è un'operazione binaria su X , (ossia una funzione $\cdot(x, y) = x \cdot y$ che associa ad ogni coppia (x, y) di elementi di X un elemento ben preciso $x \cdot y$ di X), c è un'operazione 1-aria su X (ossia una funzione $^c(x) = x^c$ definita su X e a valori in X), e 0 e 1 sono due elementi distinti di X , detti *unita'*, in modo tale che siano soddisfatte varie proprietà, tra cui le seguenti:

1. $x \cdot y = y \cdot x$ per ogni x, y in X (*commutativita'*);
2. $(x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z)$ per ogni x, y, z in X (*associativita'*);
3. $x \cdot x^c = 0$ per ogni $x \in X$;
4. $x \cdot 0 = 0$ per ogni $x \in X$;
5. $(x^c)^c = x$ per ogni $x \in X$;
6. $x \cdot 1 = x$ per ogni $x \in X$.

L'operazione \cdot si chiama *intersezione* o anche *moltiplicazione*, mentre l'elemento x^c viene detto il *complementare*, o anche la *negazione*, o ancora il *duale* di x .

Dalle proprietà precedenti, si può dedurre ad esempio che $1^c = 0$ (e che $0^c = 1$). Infatti, dal punto 3. si ricava $1 \cdot 1^c = 0$. Dal punto 6. si ricava $1^c \cdot 1 = 1^c$. Allora, essendo $1 \cdot 1^c = 1^c \cdot 1$ per la commutatività, si ottiene $0 = 1^c$. Usando il punto 5., si ha poi anche $0^c = 1$.

Definizioni 1.2 Se due elementi x, y di X verificano $x \cdot y = 0$, allora essi si dicono *disgiunti*, o anche *ortogonali*.

Se due elementi x, y in X verificano $x \cdot y = x$, allora si dice che x è *incluso* in y , e si scrive anche $x \prec y$.

La relazione \prec ora introdotta individua un vero e proprio *ordinamento parziale* tra gli elementi di X , in cui è possibile riconoscere un *minimo* elemento (cioè 0) e un *massimo* elemento, cioè 1.

Adoperando le proprietà dell'operazione \cdot , è facile vedere che due elementi x e y sono uguali se e solo se $x \prec y$ e $y \prec x$.

In un'algebra di Boole, si può introdurre un'altra operazione, detta *somma (logica)*, e denotata con $+$:

$$x + y = (x^c \cdot y^c)^c.$$

Utilizzando le proprietà da 1. a 6. di cui sopra, è possibile stabilire proprietà simili per l'operazione $+$, ma in certo senso *duali*:

- I. $x + y = y + x$ per ogni x, y in X (*commutatività*);
- II. $(x + y) + z = x + (y + z)$ per ogni x, y, z in X (*associatività*);
- III. $x + x^c = 1$ per ogni $x \in X$;
- IV. $x + 0 = x$ per ogni $x \in X$;
- V. $x + 1 = 1$ per ogni $x \in X$;
- VI. $x \cdot (y + z) = (x \cdot y) + (x \cdot z)$ (*distributività*: questa regola deriva da condizioni che non abbiamo riportato, per semplicità, ma essa fa parte integrante delle regole di calcolo di ogni algebra di Boole);

Ad esempio, possiamo dimostrare la III. come segue:

$$x + x^c = (x^c \cdot x)^c = 0^c = 1$$

(utilizzando la definizione di $+$, la 3. e la relazione $0^c = 1$, già provata).

Da queste proprietà, ne seguono altre, non meno importanti. Ad esempio, dalla definizione $x + y = (x^c \cdot y^c)^c$ segue anche $(x + y)^c = x^c \cdot y^c$ per la 5., e $x \cdot y = (x^c + y^c)^c$: in parole povere, per passare dall'operazione \cdot all'operazione $+$ (e viceversa), basta sostituire le variabili con i propri complementi, e poi passare di nuovo a complementare.

Questo fatto, assieme con la VI. qui sopra, permette di dedurre la forma *duale* di distributività:

$$x + (y \cdot z) = (x + y) \cdot (x + z).$$

In un'algebra di Boole si può introdurre una terza operazione, denotata di solito con il simbolo \oplus , e detta *somma disgiuntiva*:

$$x \oplus y = (x \cdot y^c) + (y \cdot x^c).$$

Le proprietà di questa operazione sono piuttosto diverse da quelle di $+$, a parte il fatto che anche \oplus è commutativa e associativa. Si ha però:

$$x \oplus y = x^c \oplus y^c$$

$$x \oplus x = 0$$

$$x \oplus 1 = x^c$$

per ogni x, y in X . Si ha comunque ancora $x \oplus 0 = x$ per ogni x .

Si può anche introdurre l'operazione $-$, detta *differenza*, come segue:

$$x - y = x \cdot y^c$$

per cui si ha

$$0 - y = 0, \quad y - 0 = y, \quad 1 - y = y^c, \quad x \cdot (y - x) = 0, \quad x \oplus (y - x) = x + y.$$

Si potrebbero tirar fuori molte altre relazioni, in un'algebra di Boole, con una varietà paragonabile a quella delle possibili espressioni in un sistema logico: vedremo che, *sotto sotto*, la somiglianza è molto forte, e tutt'altro che casuale!

Ma è il momento di presentare qualche esempio concreto di algebre di Boole, in modo da orientarsi anche in tante operazioni ed espressioni, almeno nei casi più semplici.

Prima di tutto, introdurremo l'algebra più semplice di tutte, che viene spesso denotata con Z_2 . Tale algebra è formata di due soli elementi, 0 e 1, (ciascuno duale dell'altro) e le operazioni si effettuano in base alle seguenti tavole:

\times	0	1
0	0	0
1	0	1

\oplus	0	1
0	0	1
1	1	0

Notiamo che in Z_2 l'operazione \oplus coincide con $+$, per cui in tale ambito useremo solamente il simbolo $+$.

Benché concettualmente molto semplice, quest'algebra permette di effettuare molte operazioni logiche (o insiemistiche, come vedremo), anche piuttosto complesse, usando solo regole matematiche elementari, sia pure un po' insolite.

Infatti in Z_2 valgono *regole matematiche* assai particolari: ad esempio risulta

$$a + a = 0, \quad a \times a = a, \quad a + b = a - b,$$

comunque si scelgano a e b in Z_2 . (Per convincersi basta fare qualche verifica, sostituendo a e b ora con 0 ora con 1, e adoperare le tabelle precedenti.)

Ancora, a titolo di esercizio, svolgiamo il seguente calcolo:

$$(a + b)^2 = (a + b) \times (a + b) = a + b$$

in base alle formule suddette. D'altra parte, si ha pur sempre

$$(a + b)^2 = a^2 + b^2 + ab + ab = a^2 + b^2 = a + b$$

sempre in base alle stesse formule. Analogamente $(a - b)^2 = a + b = a - b$.

N.B. Si osservi che la relazione $a + a = 0$, ossia $a = -a$, valida per entrambi gli elementi di Z_2 , *non* vuol dire che ogni elemento é la *negazione* (ossia, il complementare) di se' stesso; abbiamo gia' affermato che 0 é il complementare di 1, e viceversa.

Benché insolite, queste operazioni algebriche sono perfettamente coerenti nell'aritmetica di Z_2 , e in fondo differiscono da quelle classiche solo a causa dell'operazione $1 + 1 = 0$.

Vedremo ora altre algebre di Boole, e scopriremo come in tutte queste algebre le operazioni ora studiate hanno un ruolo fondamentale.

Cominciamo con un'algebra di 8 elementi. Per aiutarci anche nel descrivere i risultati delle varie operazioni, denoteremo gli otto elementi in questo modo:

$$(0, 0, 0), (0, 0, 1), (0, 1, 0), (0, 1, 1), (1, 0, 0), (1, 0, 1), (1, 1, 0), (1, 1, 1).$$

L'algebra verra' denotata con E .

Per iniziare, individueremo gli elementi 0 e 1: senza troppa fantasia, poniamo: $0 = (0, 0, 0)$, $1 = (1, 1, 1)$. Definiamo poi l'operazione \cdot nel modo seguente: indicando con (x_1, x_2, x_3) il generico elemento di E (ove x_1, x_2, x_3 sono da scegliere tra i due elementi 0 e 1), porremo

$$(a_1, a_2, a_3) \cdot (b_1, b_2, b_3) = (a_1 b_1, a_2 b_2, a_3 b_3)$$

(ove il prodotto é quello usuale tra numeri interi): si vede facilmente che il risultato coincide con questo:

$$(a_1, a_2, a_3) \cdot (b_1, b_2, b_3) = (a_1 \wedge b_1, a_2 \wedge b_2, a_3 \wedge b_3)$$

ove l'operazione \wedge significa il *minimo* tra i due numeri. Ancora, poniamo

$$(a_1, a_2, a_3)^c = (1 - a_1, 1 - a_2, 1 - a_3)$$

per ogni scelta di $(a_1, a_2, a_3) \in E$: in altri termini, il duale di un elemento (a_1, a_2, a_3) si ottiene sostituendo con 0 le eventuali componenti a_i che siano uguali a 1, e con 1 quelle componenti che siano uguali a 0.

In tale algebra, la somma si fa come segue:

$$(a_1, a_2, a_3) + (b_1, b_2, b_3) = (a_1 + b_1 - a_1 b_1, a_2 + b_2 - a_2 b_2, a_3 + b_3 - a_3 b_3)$$

Con pochi conti, si vede facilmente che questo equivale a

$$(a_1, a_2, a_3) + (b_1, b_2, b_3) = (a_1 \vee b_1, a_2 \vee b_2, a_3 \vee b_3)$$

ove l'operazione \vee significa il *massimo* tra i due elementi.

Dunque, si comincia a vedere in modo un po' piu' concreto come sono fatte queste operazioni su E .

Prendiamo ora in considerazione la somma disgiuntiva:

$$(a_1, a_2, a_3) \oplus (b_1, b_2, b_3) = (c_1, c_2, c_3)$$

dove gli elementi c_i si individuano come segue: fissato i tra 1 e 3, si confrontino a_i e b_i ; se essi sono uguali (o entrambi 1 o entrambi 0), allora $c_i = 0$; se invece uno dei due é 1 e l'altro é 0, allora $c_i = 1$.

Infatti, se consideriamo la definizione di \oplus , nello spazio E , dovremmo avere

$$c_i = [a_i \wedge (1 - b_i)] \vee [(1 - a_i) \wedge b_i] :$$

se a_i e b_i sono uguali le due quantita' tra parentesi quadre sono 0; se invece a_i e b_i sono diversi, in ciascuna delle parentesi quadre si ha il minimo di due quantita' uguali, dunque $c_i = a_i \vee b_i = 1$ (uno dei due dev'essere 1).

Passiamo infine alla differenza:

$$(a_1, a_2, a_3) - (b_1, b_2, b_3) = (d_1, d_2, d_3)$$

dove, per ciascun i risulta $d_i = 1$ se e solo se $a_i = 1$ e $b_i = 0$.

Infatti, per definizione si avrebbe:

$$d_i = a_i \wedge (1 - b_i)$$

il che fornisce appunto $d_i = 1$ se $a_i = 1, b_i = 0$, ma anche $d_i = 0$ se $a_i = 0$ oppure se $a_i = b_i = 1$.

A questo punto, é abbastanza facile capire come si potrebbero definire algebre di Boole piu' complesse, con 16, 32, o anche un numero maggiore di elementi (sempre pero' in numero uguale a qualche potenza di 2).

La cosa interessante é che, almeno nel caso finito, *tutte* le algebre di Boole sono del tipo suddetto, con un numero di 2^n elementi.

Anche le algebre di Boole infinite (che pure esistono) si possono descrivere in maniera sostanzialmente simile. Ma questo verra' trattato in seguito. Ora é opportuno fare una pausa nei discorsi teorici, e fare qualche calcolo (facile), che permetta di prendere un po' dimestichezza con le algebre di Boole.

Esercizi 1.3

1. Nell'algebra E di 8 elementi, sopra descritta, si effettuino le seguenti operazioni:

$$(0, 1, 0) \cdot (0, 1, 1), \quad (0, 0, 1) \oplus (1, 0, 0),$$

$$[(0, 1, 1) \cdot (1, 1, 0)] \oplus (1, 1, 1), \quad (0, 1, 1) \cdot [(1, 1, 0) \oplus (1, 1, 1)].$$

2. In un'algebra Booleana qualunque, si dimostri che si ha sempre:

$$x + y = x + (y - x) = x + [y - (x \cdot y)] = (x \oplus y) + (x \cdot y)$$

$$x \oplus y = (x + y) - (x \cdot y)$$

$$x \oplus y = x + y \Leftrightarrow x \cdot y = 0$$

3. Ragionando in maniera analoga alla costruzione dell'algebra E di 8 elementi, se ne definisca una di 16 elementi.
4. Si consideri l'insieme $I = [0, 1]$, intervallo di numeri reali. In tale intervallo, si definisca l'operazione \cdot come l'usuale moltiplicazione, e il complementare c nel modo seguente: $x^c = 1 - x$. Con queste operazioni, e gli elementi 0 e 1 come unita', si puo' dire che I é un'algebra Booleana? (Sugg.: si controllino le proprieta' 1.,2.,3.,4.,5.,6....)
5. Siano A, B, C, D i quattro vertici di un quadrato, con A opposto a C e B opposto a D . Si scelga $A = 0$ e $C = 1$, e si definiscano le operazioni \cdot e c tra questi 4 elementi, in maniera da ottenere un'algebra di Boole.

6. Si consideri l'insieme H di tutte le funzioni f , definite in un intervallo $[a, b]$ e a valori 0 o 1. In altre parole, ogni funzione f di H deve obbedire alla condizione $f(t) = 0$ oppure $f(t) = 1$ per ogni t dell'intervallo $[a, b]$. Nell'insieme H , sia 0 la funzione costantemente nulla, e sia 1 la funzione costantemente 1. Per ogni funzione f di H , sia f^c la funzione che vale 1 quando f vale 0, e 0 quando f vale 1. Si definisca poi il prodotto $f \cdot g$ in questo modo:

$$(f \cdot g)(t) = f(t)g(t)$$

(in altri termini, $(f \cdot g)(t) = 1$ solo se $f(t)$ e $g(t)$ sono entrambi 1, altrimenti $(f \cdot g)(t) = 0$). Con queste operazioni, H diventa un'algebra di Boole. Considerate due funzioni f e g di H , si dimostri che $f + g$ é quella funzione che vale 1 in quei punti t ove almeno una delle due vale 1, e vale 0 altrimenti (dunque non si faccia confusione con l'operazione $+$ tradizionale, che qui non entra in gioco). Si dimostri inoltre che si ha

$$(f \oplus g)(t) = (f(t) - g(t))^2$$

(dove il $-$ a II membro é l'usuale operazione aritmetica).

7. Si consideri un qualunque insieme non vuoto, A (ad esempio, si puo' scegliere $A = [0, 1]$). Un importante esempio di algebra di Boole é l'insieme dei *sottoinsiemi* di A , che di solito si denota con $\mathcal{P}(A)$. In questo ambiente, si prende come 0 l'insieme vuoto, e come 1 l'insieme A stesso. L'operazione \cdot é l'intersezione, e naturalmente X^c é il complementare di X , per $X \subset A$.

Si dimostri che l'operazione $+$ in tale algebra corrisponde all'unione insiemistica.

Inoltre, ammettendo di aver scelto come insieme A l'intervallo $[0, 1]$, si determini la somma disgiuntiva dei due sottoinsiemi C e D , definiti da:

$$C = \{x \in [0, 1] : 2x^2 < x\}, \quad D = \{x \in [0, 1] : 4x^2 > x\}$$

8. Una situazione analoga, ma non identica, é la seguente: si consideri, nell'intervallo semiaperto $[0, 1[$, la famiglia \mathcal{F} di tutti i sottointervalli semiaperti $[u, v[$, ivi contenuti, e di tutte le loro unioni finite. In tale famiglia ammettiamo anche l'intervallo *vuoto*,

che si può interpretare come $[u, u[$, per qualunque $u \in [0, 1[$, e anche l'intervallo *pieno* $[0, 1[$. Si verifichi che la famiglia \mathcal{F} ha la struttura di un'algebra di Boole, pur di definire le operazioni come nell'esercizio precedente. In particolare si controlli che, per ogni elemento $A \in \mathcal{F}$, il complementare $[0, 1[\setminus A$ sta ancora in \mathcal{F} .

Si può notare un interessante parallelo tra gli elementi di un'algebra di Boole, e le espressioni caratteristiche dei predicati a un posto in un sistema logico semplice: le operazioni che si possono fare con le espressioni hanno precise corrispondenze con le operazioni in un'algebra di Boole, secondo lo schema seguente.

Espressioni Logiche	Elementi Booleani
Vero	1
Falso	0
$\neg A$	a^c
$A \vee B$	$a + b$
$A \cap B$	$a \cdot b$
$A \Delta B$	$a \oplus b$
$A \setminus B$	$a - b$
$A \Rightarrow B$	$a \prec b$
$A \Leftrightarrow B$	$a = b$

Basta riflettere un attimo, per comprendere le analogie! In ultima analisi, si può dire che ogni sistema logico altro non è che una qualche algebra di Boole, in cui le operazioni matematiche sono esattamente quelle logiche secondo la corrispondenza stabilita nella precedente tabella.

Ma è possibile dimostrare che anche ogni algebra Booleana in fondo permette di individuare un ben preciso sistema logico elementare, benché forse non sia il caso di entrare troppo nei dettagli: ci limiteremo a dire che, in presenza di un'algebra Booleana E , almeno quando in essa vi siano solo un numero finito di elementi, si possono individuare elementi *minimali* non 0 (rispetto all'ordinamento \prec); già sappiamo che 0 è minimo, ma tra gli elementi non zero ce ne sono alcuni, detti *atomi*, che non possono essere *maggiori* di nessun

altro elemento, a parte 0. Questi elementi possono proprio fare le veci degli atomi in un sistema logico ben preciso, che si può costruire in corrispondenza *biunivoca* con l'algebra E e le sue operazioni. Tale corrispondenza, che permette di *interpretare* l'algebra come sistema logico (e viceversa) si dice anche *isomorfismo*.

Conviene fare qualche esempio, per capire meglio. Torniamo alla situazione dell'algebra E di 8 elementi. Non è difficile, in tale algebra, individuare 3 elementi *minimali*: essi sono $(0, 0, 1)$, $(0, 1, 0)$ e $(1, 0, 0)$; infatti, prendiamo ad esempio $(0, 0, 1)$: un qualunque elemento di E può essere *minore* di $(0, 0, 1)$ se le sue prime due componenti sono 0: e allora tale elemento non può essere che 0 (cioè $(0, 0, 0)$) oppure $(0, 0, 1)$ stesso. Questo significa proprio che $(0, 0, 1)$ è minimale, ossia un atomo.

Per semplificare le notazioni, scriveremo i tre atomi in questo modo:

$$e_1 = (0, 0, 1), \quad e_2 = (0, 1, 0), \quad e_3 = (1, 0, 0).$$

Consideriamo ora un qualunque predicato P a un posto, che abbia come oggetto questi tre atomi. Supponiamo che risulti $P(e_1) \wedge P(e_2) \wedge \neg P(e_3)$: allora possiamo rappresentare P per mezzo di questa terna: $P \sim (1, 1, 0)$. Se invece risulta, ad esempio, $P(e_2) \wedge P(e_3) \wedge \neg P(e_1)$, rappresenteremo P con la terna: $P \sim (0, 1, 1)$. In altre parole, al primo posto della terna scriviamo 1 se vale $P(e_1)$, 0 se vale $\neg P(e_1)$; al secondo posto scriveremo 1 se vale $P(e_2)$ e 0 altrimenti; al terzo posto scriveremo 1 se vale $P(e_3)$ e 0 altrimenti.

In definitiva, ogni predicato a un posto, che interessi i tre atomi, viene identificato con un ben preciso elemento dell'algebra E . Anche lo 0 di E viene identificato con il predicato *nullo*, cioè quello che non è verificato da alcun atomo; mentre 1 viene identificato con il predicato *certo*, cioè quello verificato da tutti gli atomi.

(Si noti che non distinguiamo tra predicati *equivalenti*: il predicato $P(x) = "x^c \prec (0, 1, 1)"$ equivale al predicato $Q(x) = "e_1 \prec x"$, in quanto ogni atomo x o li soddisfa entrambi o non soddisfa nessuno dei due; e si vede facilmente che entrambi sono soddisfatti da e_1 , da $(1, 1, 0)$, da $(1, 0, 1)$ e da $(1, 1, 1)$: dunque essi *coincidono* con il predicato che si rappresenta con l'insieme $\{(1, 0, 0), (1, 0, 1), (1, 1, 0), (1, 1, 1)\}$.

Per convincersi meglio di questo isomorfismo, consideriamo anche le operazioni nell'algebra E . Ad esempio, sappiamo che

$$(1, 1, 0) \oplus (1, 0, 1) = (0, 1, 1) \quad (1.1)$$

(nella generica componente del risultato, ricordiamo che va inserito 1, se le corrispondenti componenti dei due *addendi* sono diverse, e 0 se sono uguali).

Cosa corrisponde in termini logici a questa operazione?

Sappiamo che $(1, 1, 0)$ rappresenta il predicato P che é verificato da e_1 e da e_2 , ma non da e_3 . Mentre $(1, 0, 1)$ rappresenta il predicato S che é verificato da e_1 e da e_3 , ma non da e_2 .

Poiché all'operazione \oplus algebrica corrisponde l'operazione logica *differenza simmetrica*, $(A \Delta B)$ cosa si ottiene facendo $P \Delta Q$? Per definizione, $P \Delta Q$ viene verificato se uno e uno solo dei due predicati é verificato: l'atomo e_2 soddisfa tale richiesta, e anche e_3 , ma non e_1 . E il predicato che é soddisfatto da e_1 ed e_3 , ma non da e_2 , si rappresenta con la terna $(0, 1, 1)$, che é per l'appunto il risultato dell'operazione (1.1).

Affrontiamo ancora un esempio: consideriamo l'esercizio n.6 precedente, in cui l'algebra di Boole era quella di tutte le funzioni, definite su un intervallo $[a, b]$, che possono assumere solo i valori 0 e 1. Quali sono gli elementi minimali? Intuitivamente, sono le funzioni che valgono 0 in molti punti dell'intervallo, e quindi valgono 1 il meno possibile; a parte la funzione nulla (che va esclusa essendo il minimo assoluto), le funzioni che valgono 1 il meno possibile sono quelle che sono 0 dappertutto, tranne che in un singolo punto di $[a, b]$. Determinato questo punto (che si puo' scegliere come si vuole in $[a, b]$), si ottiene una di tali funzioni minimali. Non é poi troppo difficile convincersi che queste funzioni sono tutti e soli gli elementi minimali, cioè gli *atomi* dell'algebra isomorfa. Dunque, dato che ogni funzione minimale é perfettamente individuata dal punto (unico) in cui essa vale 1, in definitiva gli atomi dell'algebra cercata non sono altro che i punti dell'intervallo $[a, b]$. Insomma, siamo certo *incappati* in un'algebra infinita (immensa, sotto certi aspetti), ma forse si riesce a darne una descrizione esauriente usando strumenti che conosciamo abbastanza bene!

Per il momento non ci preoccupiamo di fare cio'. Limitiamoci a rispondere a un facile quesito: date tre funzioni f, g, h di questa algebra, quale funzione risulta dall'operazione

$$f \cdot (g + h)?$$

Poniamo che la funzione g si annulli su tutti i punti di un insieme G_0 e valga 1 sull'insieme complementare, che possiamo chiamare G . Analogamente, supponiamo che h sia nulla su tutti i punti di un insieme H_0 e valga 1 su tutti i punti del complementare, H . Allora, la funzione $g + h$ vale 1 sui punti dell'insieme *unione* $G \cup H$, e 0 sui punti del complementare. Ora, se f si annulla in tutti i punti di un insieme F_0 e vale 1 sui punti dell'insieme complementare F , la funzione $f \cdot (g + h)$ vale 1 sui punti dell'insieme $F \cap (G \cup H)$, e 0 sul suo complementare.

Capitolo 2

Schemi logici

Ci riferiremo al testo di F.Cianflone, L'Algebra di Boole e i circuiti logici, ETAS KOMPASS (1970).

Le algebre di Boole sono molto utili nella pianificazione dei circuiti elettrici, o delle tubature idrauliche, dei flussi d'informazione, e in generale di qualunque processo in cui qualcosa *fluisca* da un punto iniziale (input) a un punto finale (output).

Possiamo immaginare che il nostro *sistema logico* sia un insieme di vari dispositivi, che collegano l'input all'output, e che possono alterare le condizioni di passaggio del fluido.

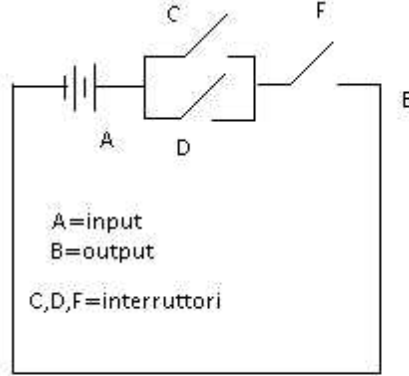
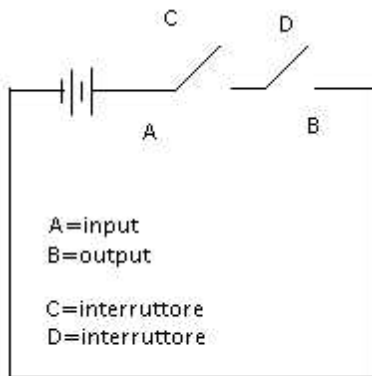
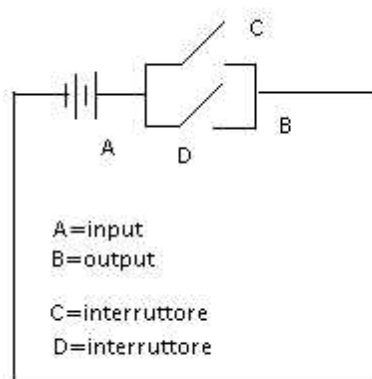
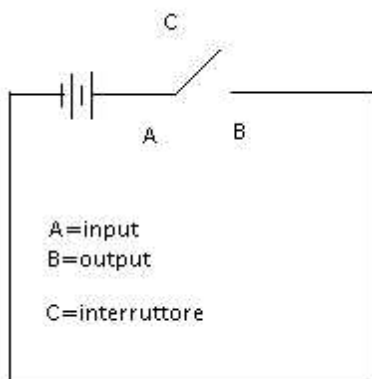
Chiameremo *flusso* ogni *messaggio*, o *corrente* che venga immesso nel sistema che collega l'input all'output. Usualmente, un flusso si puo' rappresentare come una *sequenza* di 0 e 1, i quali possono essere interpretati in molti modi diversi.

Qualora il flusso sia un liquido, o una corrente elettrica, il valore 1 attribuito ad un certo istante rappresenta la condizione di *attivit * (passaggio del fluido), mentre il valore 0 rappresenta l'assenza di flusso: nel passare dall'input all'output il fluido in genere subisce determinate azioni, che possono alterare o meno i valori nella sequenza, e quindi il valore che risulta all'output sara' funzione del valore dell'input e delle azioni subite nei vari passaggi intermedi.

Qualora il flusso sia un messaggio, cio  una sequenza di *bit*, i valori 0 e 1 servono a codificare il messaggio, e i vari passaggi dall'input all'output possono essere interpretati come un processo di *crittografia*, o piu' semplicemente come un test di attendibilit  della

codifica stessa.

Vi sono svariati dispositivi che possono alterare le condizioni di flusso in un sistema: per semplificare, useremo sempre schemi di tipo elettrico, in cui dall'input all'output la corrente possa attraversare conduttori in serie, o in parallelo, in alcuni punti dei quali sono inseriti (e possono essere azionati) interruttori di vario tipo. Ma schemi analoghi si possono realizzare anche per altri tipi di flusso, in perfetta analogia. I grafici che seguono sono esempi molto semplici di schemi logici, sotto forma di circuiti elettrici.

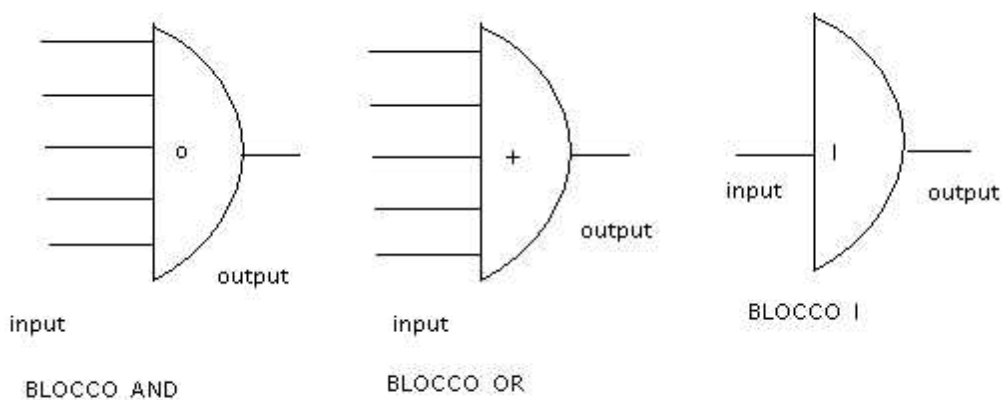


Ogni *circuito* di questo tipo viene detto anche *circuito logico*, e si basa su precisi strumenti matematici, come vedremo.

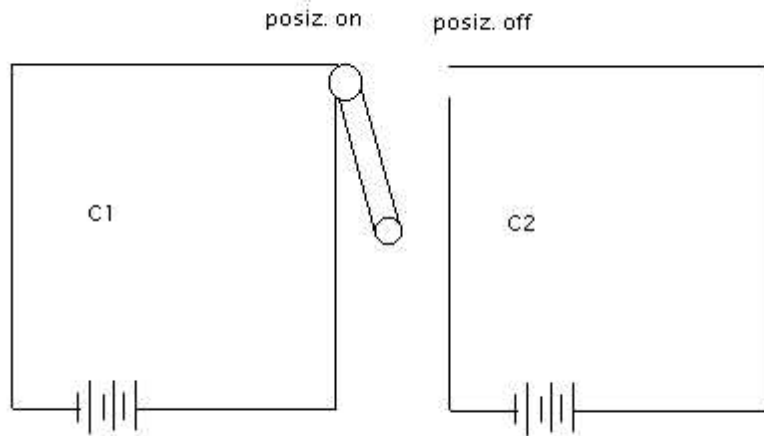
2.1 Blocchi logici

La base fondamentale dei circuiti logici sono i cosiddetti *blocchi logici*, ciascuno dei quali é un dispositivo che opera una *combinazione* dei vari *bit* che giungono all'input, dando luogo ad una sola uscita. Il valore di un generico bit (0 oppure 1) viene detto *segnale*. In effetti, un blocco logico é un semplice sistema logico, che a sua volta é inserito in un sistema logico piu' complesso. I blocchi logici fondamentali sono di 3 tipi:

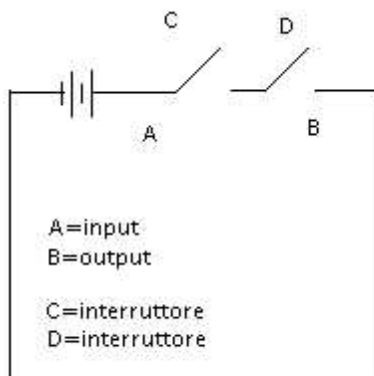
- b1.** Moltiplicatore Logico, detto anche *AND* : questo blocco effettua il minimo dei segnali all'input; siccome i segnali sono 0 e 1, il risultato di questo blocco sara' sempre uno 0, a meno che i bit all'input non valgano tutti 1. Il blocco AND é rappresentato con un semicerchio, con il simbolo \cdot inserito all'interno.
- b2.** Sommatore Logico, detto anche *OR* : questo blocco agisce sui bit all'input fornendo come risultato il loro massimo valore; dunque il segnale all'output sara' sempre 1, a meno che i bit all'ingresso non siano tutti 0. Tale blocco si rappresenta con un semicerchio, con un simbolo $+$ all'interno.
- b3.** Blocco Invertitore: esso ha un solo bit in entrata e un solo bit in uscita, e il suo compito é quello di trasformare in 0 il segnale 1 e in 1 il segnale 0. Tale blocco si rappresenta con un semicerchio, con una I all'interno.



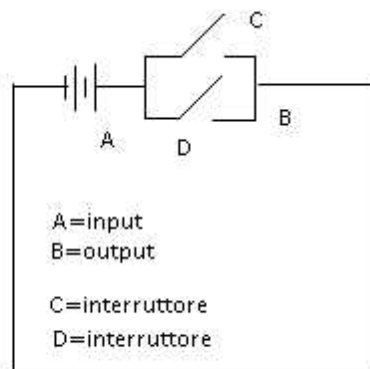
Il Blocco invertitore può essere rappresentato con un interruttore ruotante, che collega due circuiti, C_1 e C_2 : quando l'interruttore è nella posizione on, passa corrente in C_1 ma non in C_2 , mentre avviene il contrario nella posizione off. La figura mostra questa situazione.



Uno schema elettrico che rappresenti il Moltiplicatore Logico è un circuito in cui più interruttori siano inseriti *in serie*: la corrente potrà attraversare il circuito (output = 1) se e solo se tutti gli interruttori sono chiusi (tutti bit di valore 1). Il Sommatore Logico è invece rappresentato con un circuito in cui più interruttori siano inseriti in *parallelo*: basta che almeno uno di tali interruttori sia chiuso (bit di valore 1) perché si abbia corrente nel circuito (output = 1).



Blocco di tipo AND, a due entrate



Blocco di tipo OR, a due entrate

Se denotiamo con A il generico segnale inserito nel sistema, (e quindi $A = 0$ oppure $A = 1$), denoteremo con \overline{A} il valore invertito, ossia $1 - A$.

Inoltre, dati due segnali A e B , scriveremo con $A \cdot B$ (o anche soltanto AB) il risultato dell'operazione AND: in altri termini, se A e B sono all'input di un blocco AND, AB é cio' che si ha in output, cioé 1 se entrambi i valori sono 1, e 0 altrimenti.

Infine, dati due segnali A e B , scriveremo $A + B$ il risultato della loro somma logica, cioé quello che si osserva all'output di un blocco OR, se all'input si presentano A e B : dunque $A + B$ sara' 1 se almeno uno dei due segnali é 1, e 0 altrimenti.

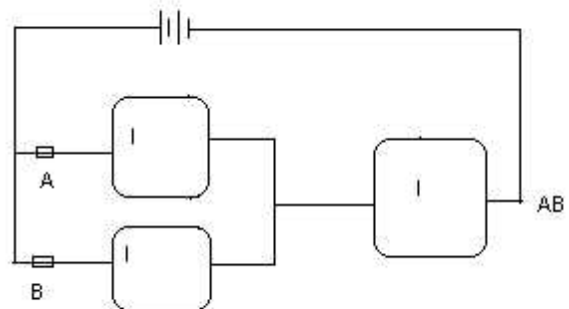
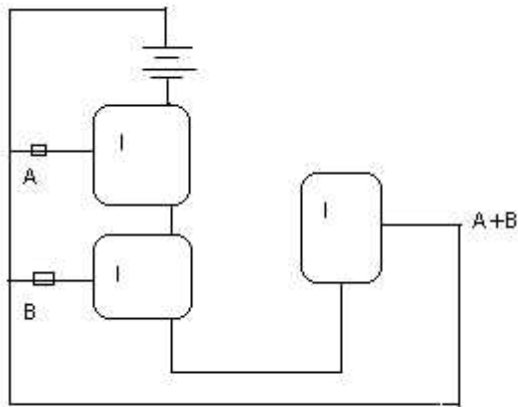
Osserviamo che i tre blocchi suddetti sono fondamentali, nel senso che tutti i sistemi logici si possono costruire combinando in vario modo i blocchi OR, AND e I. Tuttavia, facciamo notare che essi non sono minimali: ad esempio, il blocco OR si potrebbe ricavare da un blocco AND e tre blocchi I, come segue:

$$A + B = \overline{\overline{A} \cdot \overline{B}}$$

Analogamente, il blocco AND si puo' ricavare combinando 3 blocchi I e un blocco OR, come segue:

$$A \cdot B = \overline{\overline{A} + \overline{B}}$$

Possiamo anche visualizzare questi sistemi sotto forma di circuiti elettrici. (Non é invece possibile ricavare il blocco I combinando i blocchi OR e AND).



Immaginiamo di posizionare degli interruttori nei punti A e B dei due schemi: esaminando lo schema di sinistra, vediamo che nel punto $A + B$ arrivera' corrente se all'ultimo blocco I giunge il segnale 0, e questo avviene sempre, tranne quando i due blocchi I di sinistra sono sull'1, cioé se gli interruttori in A e B sono entrambi aperti. Esaminando lo schema di destra, notiamo che nel punto AB arriva corrente se all'ultimo blocco giunge il segnale 0, e questo avviene solo se entrambi gli interruttori sono chiusi.

Come si puo' facilmente vedere, le operazioni che stiamo introducendo sui segnali non sono altro che operazioni booleane: il prodotto é denotato esattamente nello stesso modo, e il *complementare* non é altro che il risultato dell'inversione. La somma logica ha poi definizione equivalente a quella in un'algebra Booleana, e pertanto le stesse proprieta'. In particolare, si ha

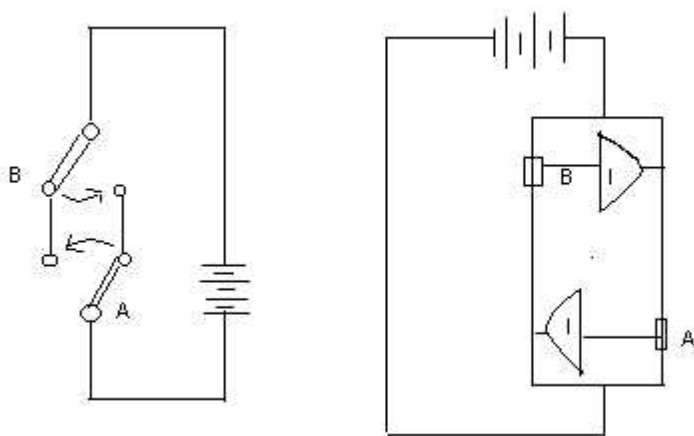
$$\overline{A + B} = \overline{A} \cdot \overline{B}$$

o anche

$$(A + B) \cdot C = (A \cdot C) + (B \cdot C)$$

Un altro dispositivo importante é la cosiddetta *somma disgiuntiva*, o *OR esclusivo*, che si denota con il simbolo \oplus : dati due segnali A e B all'input di questo dispositivo, in output compare il segnale $A \oplus B$, che vale 1 se e solo se uno e uno solo dei due segnali é 1.

Nel grafico seguente vediamo due schemi equivalenti, che realizzano il dispositivo OR esclusivo.



Nello schema di sinistra, gli interruttori A e B sono concepiti in modo da aprire un contatto nel momento in cui ne chiudono un altro, e viceversa. Nello schema di destra, agli interruttori A e B sono associati dei dispositivi invertitori, rappresentati con la classica mezzaluna.

Possiamo ora trattare la somma disgiuntiva di piu' di due segnali, tenendo presente la proprieta' *associativa*: $(A \oplus B) \oplus C = A \oplus (B \oplus C)$. Avremo dunque

$$\begin{aligned} A \oplus B \oplus C &= ((A\bar{B}) + (B\bar{A})) \oplus C = ((A\bar{B}) + (B\bar{A}))\bar{C} + \overline{((A\bar{B}) + (B\bar{A}))}C = \\ &= (A\bar{B}\bar{C}) + (\bar{A}B\bar{C}) + (\bar{A} + B)(\bar{B} + A) \cdot C = A\bar{B}\bar{C} + \bar{A}B\bar{C} + \bar{A}\bar{B}C + ABC. \end{aligned}$$

2.2 Tavole di Verita'

Le *tavole della verita'* sono rappresentazioni grafiche di variabili Booleane, e di loro *funzioni*, che hanno lo scopo di illustrare, in forma sintetica e diretta, eventuali relazioni tra le variabili in esame, e anche veri e propri teoremi (ossia relazioni che riguardano *tutte* le variabili possibili). Ecco alcuni esempi.

A	
0	
1	

B	A	
0	0	
0	1	
1	0	
1	1	

Di norma, una tavola della verita' é una tabella, costituita da una, due o piu' colonne, ciascuna delle quali contiene tutti i valori possibili delle variabili in gioco (vedremo negli esempi quanto devono essere complesse queste colonne). Una volta riempite le varie colonne, si considerano i valori che compaiono affiancati riga per riga, e su di essi si effettuano le operazioni che interessano. I risultato di queste operazioni vanno riportati in un'altra (o anche

altre colonne, poste a destra delle prime, e separate tramite linee verticali. Chiaramente, se si vogliono rappresentare tutti i valori possibili, per due variabili occorrono colonne di lunghezza 4, per 3 variabili servono colonne di lunghezza 8, e via dicendo. Nei grafici che seguono, vengono riportate tavole per 4 e 5 variabili, con alcune indicazioni del metodo usato per costruirle. In questi grafici, non compaiono colonne a destra, perché non abbiamo effettuato operazioni.

A	B	C	D
0	0	0	0
0	0	0	1
0	0	1	0
0	0	1	1
0	1	0	0
0	1	0	1
0	1	1	0
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	0	1
1	0	1	0
1	0	1	1
1	1	0	0
1	1	0	1
1	1	1	0
1	1	1	1

A	B	C	D	E
0	0	0	0	0
0	0	0	0	1
0	0	0	1	0
0	0	0	1	1
0	0	1	0	0
0	0	1	0	1
0	0	1	1	0
0	0	1	1	1
0	1	0	0	0
0	1	0	0	1
0	1	0	1	0
0	1	0	1	1
0	1	1	0	0
0	1	1	0	1
0	1	1	1	0
0	1	1	1	1
1	0	0	0	0
1	0	0	0	1
1	0	0	1	0
1	0	0	1	1
1	0	1	0	0
1	0	1	0	1
1	0	1	1	0
1	0	1	1	1
1	1	0	0	0
1	1	0	0	1
1	1	0	1	0
1	1	0	1	1
1	1	1	0	0
1	1	1	0	1
1	1	1	1	0
1	1	1	1	1

(I riquadri con i bordi arrotondati non fanno parte delle tavole, ma servono a illustrare

in che modo le tavole relative a due e tre variabili sono integrate nella tavola a 4 variabili, e questa, assieme alle prime, sia integrata nella tavola a 5 variabili).

Un esame accurato di queste tavole mostra come si possa, con pochi passi, costruire una tavola da n variabili a partire da una tavola a $n - 1$ variabili.

Ora, possiamo costruire tavole della verita' per espressioni che coinvolgano due o piu' variabili. Per ragioni di spazio, ci limiteremo a due o tre variabili, ma concettualmente il passaggio a un numero maggiore di variabili non comporta difficoltà in piu'.

Per comodita' di notazione, le variabili saranno denotate con lettere maiuscole, come A, B, C, \dots , e le loro *negazioni* con una barretta posta sopra la lettera: ad esempio \bar{B} rappresenta B^c .

Cominciamo con l'espressione $A + B$, che chiaramente coinvolge due variabili. Basta dunque riprendere la tavola relativa a due variabili, e aggiungere, a destra della linea verticale, una nuova colonna, nella quale sono riportati i risultati della somma $A + B$, effettuati riga per riga. In maniera analoga possiamo costruire la tavola della verita' di $A \cdot B$, di $A \cdot \bar{B}$ e di $A + \bar{B}$. Troviamo cosi' le tabelle seguenti.

A	B	$A+B$	A	B	AB	A	B	$A\bar{B}$	A	B	$A+\bar{B}$
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1
0	1	1	0	1	0	0	1	0	0	1	0
1	0	1	1	0	0	1	0	1	1	0	1
1	1	1	1	1	1	1	1	0	1	1	1

Possiamo usare le tavole anche per confrontare formule. Ad esempio, possiamo costruire simultaneamente la tavola di $A + (B \cdot C)$ e quella di $(A + B) \cdot C$: a tale scopo, puo' essere conveniente inserire delle colonne ausiliarie, in posizione centrale, con dei risultati parziali. Le formule da confrontare saranno comunque elencate nelle due colonne all'estrema destra.

Dal confronto di queste due colonne, vediamo che esse differiscono per due elementi, e questo significa che le due operazioni, $A + (B \cdot C)$ e $(A + B) \cdot C$, non danno in genere lo stesso risultato: esaminando la tabella, si hanno valori di verita' diversi quando $A = 1, B = 0, C = 0$ e quando $A = 1, B = 1, C = 0$. Negli altri casi, invece, il risultato e' lo stesso.

A	B	C	BC	A+B	A+(BC)	(A+B) C
0	0	0	0	0	0	0
0	0	1	0	0	0	0
0	1	0	0	1	0	0
0	1	1	1	1	1	1
1	0	0	0	1	1	0
1	0	1	0	1	1	1
1	1	0	0	1	1	0
1	1	1	1	1	1	1

Vediamo infine l'uso delle tavole di verità per dimostrare teoremi. In pratica, si tratta di controllare la validità di certe relazioni per tutti i valori possibili delle variabili in esame. Vediamo alcuni esempi.

Formula 1 $A \cdot (B + C) = (A \cdot B) + (A \cdot C)$.

E' la classica proprietà distributiva, e da questa discendono poi altre relazioni interessanti, ad esempio:

$$A \cdot B + A \cdot \overline{B} = A, \quad A \cdot (A + B) = A + A \cdot B = A,$$

$$(A + B) \cdot (\overline{A} + \overline{B}) = A \cdot \overline{B} + B \cdot \overline{A} = A \Delta B$$

Formula 2 $A \Delta B = \overline{A} \Delta \overline{B}$. Questa è una facile conseguenza dell'ultima formula scritta sopra, ma ha un suo significato peculiare, come abbiamo già visto in fase di interpretazione logica dell'operazione *somma disgiuntiva*.

Formula 3

$$(\overline{A} + \overline{B}) = \overline{(A \cdot B)}, \quad (\overline{A} \cdot \overline{B}) = \overline{(A + B)}.$$

Queste sono le ben note *Formule di de Morgan*, già incontrate in varie situazioni.

Formula 4 $\overline{A}C + B\overline{C} + \overline{B} = \overline{A} + \overline{B} + \overline{C}$.

Questa formula, come altre, può essere anche dimostrata per via algebrica, ma la cosa non è del tutto banale: intanto, osserviamo che si ha

$$B\overline{C} + \overline{B} = \overline{C} + \overline{B}$$

poiché $\overline{C} + \overline{B} = \overline{C}B + \overline{B}\overline{C} + \overline{B}$ e $\overline{B}\overline{C} + \overline{B} = \overline{B}$. Similmente, si ha

$$C\overline{A} + \overline{C} = \overline{C} + \overline{A}$$

e quindi, in definitiva

$$\overline{A}C + B\overline{C} + \overline{B} = \overline{A}C + \overline{C} + \overline{B} = \overline{B} + \overline{C} + \overline{A}.$$

Nei grafici che seguono, sono riportate le tavole di verità di alcune delle Formule precedenti. Le altre sono lasciate per esercizio.

A	B	C	B+C	AB	AC	A(B+C)	AB+AC
0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	1	1	0	0	0	0
0	1	0	1	0	0	0	0
0	1	1	1	0	0	0	0
1	0	0	0	0	0	0	0
1	0	1	1	0	1	1	1
1	1	0	1	1	0	1	1
1	1	1	1	1	1	1	1

DISTRIBUTIVITA'

A	B	C	$\overline{A}C$	$B\overline{C}$	\overline{B}	\overline{A}	\overline{C}	$\overline{A}C+B\overline{C}+\overline{B}$	$\overline{A}+\overline{B}+\overline{C}$
0	0	0	0	0	1	1	1	1	1
0	0	1	1	0	1	1	0	1	1
0	1	0	0	1	0	1	1	1	1
0	1	1	1	0	0	1	0	1	1
1	0	0	0	0	1	0	1	1	1
1	0	1	0	0	1	0	0	1	1
1	1	0	0	1	0	0	1	1	1
1	1	1	0	0	0	0	0	0	0

FORMULA 4

2.3 Rappresentazione numerica delle funzioni Booleane

Le tavole di verità permettono di rappresentare ogni *funzione Booleana* con una colonna di 0 e 1. Qui, l'espressione *funzione Booleana* rappresenta il risultato di alcune operazioni algebriche, in sequenza più o meno complessa, applicate a due o più variabili. Ad esempio,

la funzione $A\overline{B}C$ é il risultato di un'operazione di *inversione*, applicata alla variabile B , e dell'operazione di *congiunzione*, applicata alle variabili A, \overline{B}, C . Oppure, $AB + BC$ é il risultato di un'operazione di tipo *disgiunzione*, applicata ai risultati di due operazioni di *congiunzione*, la prima applicata a A e B , la seconda applicata a B e C . Se rappresentiamo le tre variabili in gioco in una tavola di verita', e calcoliamo la colonna relativa alla funzione che c'interessa, la colonna risultante sara' una determinata sequenza (a 8 posti) di 0 e 1.

L'aspetto interessante di questa osservazione é che, viceversa, ogni sequenza di 0 e 1, ad esempio di 8 posti, corrisponde una ben precisa funzione di tre variabili A, B, C . (Chiaramente, se le variabili fossero 4, avremmo sequenze da 16 elementi, e cosi' via).

Ad esempio, si voglia determinare la funzione (a tre variabili) corrispondente alla colonna (1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0). (Riportiamo la colonna come *riga*, per semplicita' di scrittura).

Osserviamo che questa colonna presenta un solo 1, e sette 0. Colonne con un solo 1 sono caratteristiche di funzioni del tipo $ABC, \overline{A}BC, A\overline{B}C$, etc., ossia funzioni in cui le tre variabili figurano tutte, o in forma positiva o in forma negata, e sono legate da un operatore di *congiunzione*. Funzioni di questo tipo sono in effetti gli *atomi* del sistema che stiamo trattando: trattasi di un sistema semplice a 8 elementi, che a sua volta rappresenta un sistema binario del quale pero' interessano i predicati a tre posti.

Cio' sara' meglio evidenziato negli esempi che seguiranno.

Dunque, a seconda di come si scrive la tavola di verita', la colonna di cui sopra puo' rappresentare la funzione ABC , oppure la funzione $\overline{A} \overline{B} \overline{C}$.

Nelle considerazioni seguenti, supporremo che le tavole della verita' siano disegnate in ordine *inverso* a quello seguito nei grafici del paragrafo precedente (ossia, scambiando gli 1 con gli 0).

Una colonna del tipo (1, 0, 1, 0, 0, 1, 0, 0), con tre 1 e cinque 0, risulta dalla somma di tre colonne del tipo precedente, che corrispondono alle seguenti funzioni: $ABC, \overline{A}BC, \overline{A}\overline{B}C$. La funzione corrispondente dunque alla colonna suddetta sara' la somma logica delle tre funzioni indicate. Facili calcoli mostrano poi che tale funzione si puo' scrivere anche come segue:

$$f(A, B, C) = AC + \overline{A}B\overline{C}.$$

In maniera analoga, la colonna $(0, 0, 1, 1, 1, 0, 0, 1)$ corrisponde alla funzione

$$g(A, B, C) = A\bar{B} + \bar{A}(BC + \bar{B}\bar{C}).$$

Facendo un po' di *conti*, vediamo facilmente che, di tali funzioni, ne esistono 256 (cioé 2^8 : stiamo supponendo che le variabili in gioco siano 3). In effetti, possiamo interpretare ogni funzione di questo tipo come un *predicato* a tre posti nel sistema binario semplice: ad esempio, la funzione ABC corrisponde a quel predicato che é soddisfatto solo da $(1, 1, 1)$, la funzione $A + \bar{B}$ é quel predicato che é soddisfatto da A oppure dalla negazione di B : in altri termini, corrisponde al predicato B implica A . Dalle tavole di verita' si vede subito che la colonna corrispondente a questo predicato é $(1, 1, 1, 1, 0, 0, 1, 1)$.

Inoltre, visto che ogni 8-upla di 0 e 1 si puo' interpretare come un numero intero in rappresentazione *binaria*, é facile assegnare a ciascun predicato a tre posti (sul sistema binario) un singolo numero, compreso fra 0 e 256. Ad esempio, il numero 0 corrisponde al predicato vuoto, cioé quello che non é mai verificato, il numero 1 corrisponde a quel predicato che é verificato dalla negazione di tutti e tre i segnali, il numero 2 (ossia la colonna $(0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 0)$) corrisponde a $\bar{A}\bar{B}\bar{C}$, il numero 255, colonna $(1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1)$, corrisponde al predicato che é sempre verificato, il numero 254, colonna $(1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 0)$, corrisponde alla funzione $A + B + C$ (ossia il predicato che é soddisfatto se almeno uno dei segnali é 1).

A titolo di esercizio, vediamo a quale funzione di tre variabili corrisponde il numero 12. In forma binaria, $12 = 8+4=(1,1,0,0)$. Dovendo pero' considerare tre variabili, occorre una colonna di 8 elementi, dunque premetteremo quattro 0, e otterremo la colonna $(0, 0, 0, 0, 1, 1, 0, 0)$: la funzione corrispondente g é la somma:

$$g(A, B, C) = \bar{A}BC + \bar{A}\bar{B}\bar{C} = \bar{A}B$$

Il predicato corrispondente é quello che si verifica quando si verifica B ma non A .

Notiamo che, se fossimo interessati a predicati a due posti, quindi con le sole variabili A e B , la colonna $(1, 1, 0, 0)$ corrisponderebbe alla funzione $f(A, B) = A$ (in quanto $(1, 1, 0, 0) = (1, 0, 0, 0) + (0, 1, 0, 0)$, e il primo addendo corrisponde a AB , mentre il secondo ad $\bar{A}\bar{B}$).

Quindi, la corrispondenza che si crea tra numeri e predicati varia, a seconda di quante sono le variabili dei predicati stessi.

2.4 Rappresentazione algebrica delle funzioni booleane

Lo scopo di questa sezione é quello di fornire uno strumento alternativo alle tavole di verita', che permetta ugualmente di stabilire relazioni tra funzioni booleane, ma utilizzi esclusivamente formule algebriche, ottenute mediante opportune regole di calcolo. Come vedremo, tale strumento ha maggiore immediatezza rispetto alle tavole di verita', anche se a volte il risultato non viene rappresentato nel modo piu' semplice.

Premettiamo il concetto di *funzione di verita'*: quando si verifica un determinato evento E , relativo a un certo sistema logico, vuol dire che si realizza uno degli atomi che fanno parte di E . Ad esempio, nel sistema logico $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ (lancio di un dado), l'evento numero pari si verifica se (e solo se) si verifica uno degli atomi 2, 4, 6. Allora, possiamo associare ad E una funzione (detta appunto *funzione di verita'*), che vale 1 per tutti gli atomi di E e 0 per gli altri. Naturalmente, se l'evento E fosse impossibile, la sua funzione di verita' associata sarebbe costantemente nulla; oppure, se E consistesse di un singolo atomo x , la funzione associata varrebbe 1 solo per l'atomo x , e 0 per gli altri. D'ora in poi, la funzione di verita' di A sara' anche denotata con $v(A)$, oppure con la lettera a minuscola.

Gli eventi, come sappiamo, possono essere *combinati* tra loro, dando origine ad altri eventi: ad esempio, la congiunzione tra due eventi A e B da' luogo all'evento AB che si verifica se e solo se A e B si realizzano entrambi. Allora, qual'é la funzione di verita' associata a AB ?

Un semplice calcolo porta a concludere che tale funzione é semplicemente il *prodotto* tra la funzione di verita' di A con quella di B :

$$v(A \wedge B) = v(A)v(B).$$

Se invece si vuole la funzione di verita' di $A \Delta B$ (*differenza simmetrica*, cioé l'evento che si verifica quando uno e uno solo dei due é vero), allora basta fare la somma tra la

funzione di verita' di A con quella di B , con l'avvertenza di porre $1 + 1 = 0$, in quanto il verificarsi di A e B insieme é contrario al verificarsi di $A\Delta B$.

Dunque, se a denota la funzione di verita' di A , e b quella di B , la funzione di verita' di $A\Delta B$ corrisponde a

$$v(A\Delta B) = a + b$$

in Z_2 .

Ancora, nota la funzione di verita' di A , (che usualmente denoteremo con a), é facile dedurre che quella di A^c é $1 - a$. Tuttavia, se si vuole rimanere nell'ambito dell'algebra Z_2 , si puo' osservare che $-a = +a$, e quindi la funzione di verita' di A^c é anche esprimibile come segue:

$$v(A^c) = 1 + a.$$

(Cio' non deve sorprendere: numericamente, le quantita' a , b , etc. altro non sono che i numeri 0 o 1, di volta in volta, e in Z_2 si ha appunto $1 + 1 = 0 + 0 = 0$).

Di conseguenza, dati A e B , anche la funzione di verita' di $A \setminus B$ si deduce facilmente da a e b , ossia dalle funzioni di verita' di A e di B rispettivamente: infatti, sappiamo che $A \setminus B = A \wedge B^c = A\overline{B}$, e quindi la sua funzione di

$$v(A \setminus B) = a(1 + b) = a + ab.$$

Ora, chiediamoci: note a e b , qual'é la funzione di verita' di $A \vee B$? Ricordiamo che $A \vee B$ vuol dire che almeno uno tra A e B é vero, e che $A \vee B = (A \setminus B) \Delta B$. Dalle espressioni trovate in precedenza, ne segue che la funzione di verita' di $A \vee B$ é data da

$$v(A \vee B) = a + b + ab.$$

Le formule che abbiamo trovato, assieme alle semplici regole di calcolo in Z_2 , permettono di esprimere in forma algebrica qualunque combinazione di due o piu' eventi.

Ad esempio, dati tre eventi A, B, C , la combinazione $D = (A \vee B) \wedge C$ si rappresenta mediante la seguente funzione di verita':

$$v(D) = (a + b + ab)c = ac + bc + abc.$$

D'altra parte, la combinazione $E = (A \wedge C) \vee (B \wedge C)$ ha la seguente funzione di verità:

$$v(E) = ac + bc + (abc) = ac + bc + abc,$$

in quanto in Z_2 si ha sempre $x^2 = x$. L'identità delle due espressioni trovate per D ed E dimostra che tali eventi coincidono, il che del resto era noto, per la distributività. In maniera analoga, si può dimostrare l'altra forma di distributività, ottenuta scambiando l'operazione di congiunzione con quella di disgiunzione.

Un'altra relazione, che si dimostra facilmente con queste tecniche, è la seguente: dati tre eventi A, B, C , è impossibile che si verifichino simultaneamente gli eventi $A\Delta B$, $B\Delta C$, e $C\Delta A$. In altre parole, si deve avere

$$(A\Delta B) \wedge (B\Delta C) \wedge (C\Delta A) = \emptyset.$$

E in effetti, la funzione di verità del primo membro è:

$$(a+b)(b+c)(c+a) = (ab+ac+b+bc)(c+a) = (abc+ac+bc+bc+ab+ac+ab+abc) = 0$$

in quanto la penultima espressione contempla le somme $abc+abc$, $ac+ac$, $bc+bc$ e $ab+ab$, che sono tutte nulle in Z_2 .

Volendo, il risultato trovato si può dedurre anche per via puramente deduttiva: l'evento considerato richiede che, tra A e C , se ne deve verificare uno e uno solo (cio' corrisponde a $C\Delta A$). D'altra parte, la congiunzione di $A\Delta B$ e di $B\Delta C$ impone quanto segue: o si verifica B , ma allora non si può verificare né A né C , oppure non si verifica B , ma allora si debbono verificare sia A che C ; in entrambi i casi, si viola la condizione precedentemente ricavata, che tra A e C se ne deve verificare uno e uno solo.

Osserviamo infine che il metodo qui esposto permette altresì di ricavare formule e risolvere equazioni anche in ambito *insiemistico*, in quanto sappiamo che gli insiemi e le operazioni tra insiemi possono essere trattati come eventi e corrispondenti combinazioni logiche: basta ricordare che:

1. all'operazione *negazione* tra eventi corrisponde la *complementazione* tra insiemi;

2. all'operazione \vee corrisponde l'unione insiemistica;
3. all'operazione \wedge corrisponde l'intersezione;
4. all'operazione \setminus corrisponde la *differenza* insiemistica;
5. all'operazione Δ tra predicati corrisponde l'operazione insiemistica (differenza simmetrica) indicata con lo stesso simbolo.

Capitolo 3

Insiemi, funzioni, relazioni

Abbiamo visto, nei capitoli precedenti, che la struttura di un sistema logico é la stessa di un'algebra di Boole; abbiamo anche visto che, almeno nei casi finiti, un'algebra di Boole é sempre *isomorfa* all'algebra dei sottoinsiemi di un opportuno insieme (l'insieme degli *atomi*). La *somiglianza* tra tutte queste strutture non é casuale: si puo' infatti stabilire, per ogni algebra Booleana E (finita o infinita), l'esistenza di un insieme X abbastanza grande, tale che l'algebra E é *isomorfa* a una qualche famiglia di sottoinsiemi di X . Benché questo sia un vero e proprio *Teorema* (*Teorema d'Isomorfismo di Stone*), non ne daremo un enunciato piu' preciso, né tantomeno una dimostrazione: ci bastano le *somiglianze* finora osservate.

Comunque, come conseguenza del Teorema di Stone, possiamo dire che ogni struttura algebrica, e quindi ogni sistema logico, puo' essere vista come un'opportuna algebra di sottoinsiemi di un qualche insieme X , non meglio identificato. Ciò motiva (in parte) la grande importanza che si riconosce ormai universalmente alla Teoria degli Insiemi, sia nella trattazione degli enti e delle strutture matematiche, sia nelle loro molteplici applicazioni nelle Scienze Fisiche, Economiche, Statistiche, etc.

3.1 Generalita'

Noi non presenteremo qui la teoria assiomatica degli insiemi: per comprendere la trattazione che segue bastano le nozioni che di solito si acquisiscono nelle Scuole Medie Superiori. Ci limiteremo ad osservare che il concetto di *insieme* si ritiene come *primitivo*, ossia se ne accetta il significato senza necessita' di darne una definizione. Inoltre, si accettano come veri alcuni *assiomi*, senza i quali non si potrebbe elaborare una teoria sufficientemente ricca e coerente.

Tra tali assiomi, ricordiamo l'esistenza del *vuoto*, ossia dell'insieme che non ha elementi, di solito denotato con \emptyset , e l'assioma di *estensione*: questo assioma prescrive che ogni insieme sia perfettamente individuato dall'elenco dei suoi elementi (se ne ha); da questo e altri assiomi si deduce l'esistenza di *sottoinsiemi* di un dato insieme, e anche dell'insieme delle *parti* di un insieme A : ossia, dato un insieme A , tutti i sottoinsiemi di A costituiscono un altro insieme, denotato con $\mathcal{P}(A)$, e detto appunto l'insieme delle parti di A , o anche *insieme potenza* di A .

Perché insieme *potenza*? Perché, se l'insieme A possiede n elementi, si dimostra che l'insieme $\mathcal{P}(A)$ ne contiene 2^n : questo non ci deve sorprendere, in quanto ci siamo già imbattuti in una situazione simile, quando abbiamo *contato* tutti i predicati ad un posto su un sistema logico a n atomi.

Una conseguenza importante dell'assioma di estensione è il cosiddetto *Principio della Doppia Inclusione*: se si vuole dimostrare che due insiemi, A e B , sono uguali, basta dimostrare che $A \subset B$ e che $B \subset A$. E, per dimostrare che $A \subset B$, si dimostra che ogni elemento di A è anche un elemento di B .

Ad esempio, si voglia dimostrare l'uguaglianza $A = B$, dove A è l'insieme dei numeri interi n tali che $n^2 - 2n = 0$, e B è l'insieme $\{0, 2\}$. Si vede subito che $B \subset A$: basta controllare che $0^2 - 2 \cdot 0 = 0$ e che $2^2 - 2 \cdot 2 = 0$. Ma ora bisogna anche far vedere che $A \subset B$ (potrebbero esistere altri numeri interi che verificano l'equazione...): supponiamo che n verifichi l'equazione $n^2 - 2n = 0$. Allora si ha $n(n - 2) = 0$. Ora, il prodotto di due numeri è 0 solo se uno dei due è 0, dunque $n(n - 2) = 0$ è possibile solo se $n = 0$, oppure se $n = 2$. Dunque, se $n \in A$, si ha anche $n \in B$, e la dimostrazione è finita.

A volte, usando opportunamente questo strumento, si può evitare di commettere errori in problemi anche piuttosto semplici: supponiamo ad esempio di voler risolvere l'equazione

$$\sqrt{2x-1} = -x.$$

Una tecnica sbrigativa consiste nel fare il quadrato in entrambi i membri:

$$2x - 1 = x^2$$

e poi risolvere: $x^2 - 2x + 1 = 0$, che porta facilmente a concludere: $x = 1$.

Tuttavia, a questo punto non abbiamo finito, anzi abbiamo preso una direzione *pericolosa*! Se noi denotiamo con A l'insieme dei numeri x che verificano l'equazione di cui sopra, abbiamo dimostrato questo:

$$A \subset \{1\} :$$

cioé, se $x \in A$, allora $x = 1$ (insomma, A contiene al massimo un elemento, e questo elemento può essere solo il numero 1). Ma ora dobbiamo verificare anche l'altra inclusione. Ossia, dobbiamo far vedere che $x = 1$ risolve l'equazione. E, se facciamo i conti, vediamo che $\sqrt{2 \cdot 1 - 1} = 1$, mentre dovrebbe risultare uguale a -1 !

In altre parole, è vero che $A \subset \{1\}$, ma non è vero che $\{1\} \subset A$. Dunque, A non contiene nessun elemento, ($A = \emptyset$), e l'equazione non è mai verificata.

Altre interessanti relazioni insiemistiche possono essere dimostrate con il Principio della Doppia Inclusione: ne diamo un elenco, ma non facciamo dimostrazioni, perché tutte le formule che scriveremo corrispondono a equivalenti formule valide in un'algebra Booleana.

1.

$$(A \cup B)^c = A^c \cap B^c, \quad (A \cap B)^c = A^c \cup B^c$$

(Regole di de Morgan).

2.

$$(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C), \quad (A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$$

(Regole distributive).

3.

$$A \cup B = A \cup (B \setminus A), \quad B \setminus A = B \setminus (A \cap B)$$

4.

$$A \Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A) = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$$

(Differenza simmetrica).

5.

$$A \subset B \Leftrightarrow A \cap B = A \Leftrightarrow A \cup B = B$$

3.2 Relazioni

Quali sono gli insiemi più usati comunemente? Intanto, quelli costituiti dai vari tipi di numeri: interi, razionali, reali e complessi: ciascuna di queste categorie costituisce un *insieme* ben noto: $\mathbb{N}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$ rispettivamente. Poi, enti geometrici: vettori, matrici, triangoli, cerchi, ma anche piani e spazi vettoriali. Questi oggetti sono ambientati in insiemi che sono *prodotti* di \mathbb{R} con sè stesso; quindi si studiano forme e proprietà anche di *sottoinsiemi* e *prodotti* di insiemi elementari. Altri strumenti che si adoperano spesso sono le cosiddette *relazioni*, ossia legami, più o meno stretti, tra oggetti di uno stesso insieme, o anche tra oggetti di insiemi diversi: ad esempio, relazioni di *ordine*, o di *equivalenza*, riguardano elementi di uno stesso insieme (ma anche *sottoinsiemi* di uno stesso insieme); mentre le *funzioni* sono tipicamente legami tra oggetti di insiemi differenti.

Dare definizioni rigorose di tutti questi strumenti può apparire difficile, e forse inutile: vedremo invece che, in fondo, non è tanto difficile; quanto all'utilità, oltre a fornire spesso una visione geometrica chiara dell'ente che si sta introducendo, una rigorosa definizione matematica elimina il rischio di fraintendimenti, che potrebbero provocare errori nelle applicazioni e negli esercizi. Tanto per fare un esempio, non si può confondere una funzione reale, di una variabile reale, con una generica *curva* del piano: da questo punto di vista, il *cerchio* non è affatto una funzione.

Ma è bene procedere per gradi, e iniziare dal concetto di *prodotto cartesiano*. Dati due insiemi (non vuoti) A e B , il *prodotto cartesiano* $A \times B$ è l'insieme di tutte le *coppie*

ordinate (a, b) , con $a \in A$, $b \in B$. (Non sottilizziamo sul significato dell'espressione "coppie ordinate": vuol dire semplicemente che la coppia (b, a) (ammesso che abbia senso) è distinta dalla coppia (a, b)). Dunque

$$A \times B = \{(a, b) : a \in A, b \in B\}.$$

Ora, una *relazione* tra gli elementi di A e quelli di B non è altro che un sottoinsieme (non vuoto), di $A \times B$. A seconda delle proprietà di tale insieme, la *relazione* acquisisce differenti significati e denominazioni.

Definizione 3.1 Dato un insieme non vuoto A , e una relazione $R \subset A \times A$, si dice che R è un *ordinamento* su A quando le seguenti condizioni sono soddisfatte:

- o1) $(x, x) \in R$ per ogni $x \in A$ (proprietà *riflessiva*);
- o2) $(x, y) \in R$ e $(y, x) \in R \Rightarrow x = y$ (proprietà *antisimmetrica*);
- o3) $(x, y) \in R$ e $(y, z) \in R \Rightarrow (x, z) \in R$ (proprietà *transitiva*).

Vediamo subito un esempio: supponiamo $A = \mathbb{R}$, e poniamo

$$R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \leq y\}.$$

E' evidente che le tre proprietà di cui sopra sono verificate. Si poteva anche definire R come l'insieme di tutte le coppie (x, y) tali che $y \leq x$: l'ordinamento sarebbe stato diverso, ma comunque le tre proprietà suddette sarebbero verificate. (In questi esempi si capisce anche l'importanza di avere coppie *ordinate* nel prodotto $\mathbb{R} \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^2$).

Un altro esempio si può costruire come segue:

Sia \mathbb{N}^* l'insieme degli interi positivi, e poniamo:

$$R = \{(n, m) \in \mathbb{N}^{*2} : m|n\}$$

(La scrittura $m|n$ sta a significare che n è un multiplo di m). Ancora, si vede facilmente che questo è un ordinamento su \mathbb{N}^* .

Ancora un altro esempio:

Sia X un insieme non vuoto qualunque, e $\wp(X)$ (cioè, l'insieme di tutti i sottoinsiemi di X). La relazione R può essere definita così: $(S, T) \in R$ quando $S \subset T$ (ovviamente, qui S e T sono due qualsiasi sottoinsiemi di X).

Ormai, sarà chiaro come interviene l'insieme $R \subset A \times A$ per definire l'ordinamento su A , e pertanto, d'ora in poi tralasceremo il riferimento a R : insomma, per dire che una coppia $(a, b) \in R$, diremo semplicemente che a è *minore o uguale* a b , e scriveremo $a \leq b$.

Ovviamente, la relazione d'ordine piu' importante é quella usuale su \mathbb{R} .

Al fine di evidenziare gli aspetti principali che riguardano questa relazione d'ordine, diamo alcune definizioni.

Definizioni 3.2 Sia (X, \leq) un insieme con una relazione d'ordine, e sia $A \subset X$ un insieme non vuoto. Diremo che A é *limitato superiormente* se esiste un elemento $M \in X$ tale che $a \leq M$ per ogni $a \in A$. Qualora cio' accada, gli elementi M con tale proprieta' (potrebbero essercene molti), sono detti *maggioranti* per A .

Analogamente, diremo che A é *limitato inferiormente* se esiste un elemento $m \in X$ tale che $m \leq a$ per ogni $a \in A$. Gli elementi m con tale proprieta' sono detti *minoranti* per A .

Se A é limitato sia inferiormente sia superiormente, diremo brevemente che A é *limitato*.

Ad esempio, in \mathbb{R} con l'ordinamento usuale, l'insieme \mathbb{N} é limitato inferiormente ma non superiormente. \mathbb{N} ammette infiniti minoranti (tutti i numeri minori o uguali a 0).

Se invece X é l'insieme delle parti di un insieme non vuoto S , con l'ordinamento dato dall'inclusione, un qualunque sottoinsieme $A \subset X$ é in pratica una famiglia di sottoinsiemi di S : tanto per fare un esempio, A potrebbe essere l'insieme di tutti i sottoinsiemi di S che contengono un punto fissato $s \in S$. Ebbene, qualunque sia A , esso é sempre un insieme limitato in X : infatti, \emptyset é certamente un elemento di X , che é contenuto in ogni insieme/elemento di A , e S stesso é un elemento di X , che maggiora A .

Definizioni 3.3 Al solito, sia (X, \leq) un insieme ordinato, e sia $A \subset X$ un sottoinsieme non vuoto, limitato superiormente. Se tra i maggioranti di A c'è un qualche elemento $a \in A$, diremo che tale elemento é *il massimo* elemento di A , e viene denotato con $\max(A)$. (Si vede facilmente che il massimo, se esiste, é unico).

Se invece A é limitato inferiormente, e tra i minoranti c'è qualche elemento $\alpha \in A$, diremo che α é *il minimo* elemento di A , e lo denoteremo con la scrittura $\alpha = \min(A)$.

In \mathbb{R} , l'insieme $A =]0, 1]$ ammette massimo, ma non ammette minimo. Il massimo é 1, ovvio. Come si fa a vedere che non c'è il minimo? Basta tener presente che il minimo (come il massimo) é sempre un elemento di A (se esiste). Ora, se x é un qualunque elemento di $]0, 1]$, x non puo' essere un minorante, in quanto esiste almeno un punto di A (ad esempio, $\frac{x}{2}$) che é piu' piccolo di x .

Quando il massimo o il minimo non esistono, possono essere presi in considerazione dei *surrogati*, cioè *l'estremo superiore* e *l'estremo inferiore*.

Dato un insieme $A \subset X$, limitato superiormente, puo' accadere che l'insieme dei maggioranti di A ammetta minimo: se cio' accade, tale minimo si denota $\sup A$ e si chiama *estremo superiore* di A .

Essendo un minimo, il *sup* é unico (purché esista). Inoltre, qualora A ammetta massimo, é chiaro che tale massimo é piu' piccolo di tutti i maggioranti (per definizione di maggiorante), e quindi esso é anche l'estremo superiore di A . Quello che va osservato, pero', é che l'estremo superiore esiste in molte situazioni importanti, anche se non esiste il massimo. Vedremo presto i dettagli.

Analogamente, se A é limitato inferiormente, l'*estremo inferiore* di A , (se esiste) é il massimo dei minoranti.

Anch'esso é unico (se esiste), e coincide col minimo, se A ha minimo elemento.

Ad esempio, in \mathbb{R} l'insieme $]0, 1]$ ammette 1 come *sup* (essendo anche massimo), e 0 come *inf* (anche se esso non é minimo).

Vediamo ora alcuni interessanti esempi di *inf* e *sup* che a volte non sono massimi.

1) Si consideri l'insieme \mathbb{N}^* , con l'ordinamento dato da:

$$m \leq n \iff \frac{n}{m} \in \mathbb{N}^*.$$

(Ossia, $m \leq n$ se m é un *divisore* di n). L'insieme $A = \{8, 12\}$ ha come estremo superiore il numero 24 (cioé il $mcm(8, 12)$), e come estremo inferiore il numero $4 = MCD(8, 12)$. Chiaramente, non c'è né massimo né minimo.

2) Al contrario, in \mathbb{R} , con l'ordinamento usuale, ogni sottoinsieme finito (non vuoto) ammette massimo e minimo. Tuttavia l'insieme \mathbb{N} non ha estremo superiore in \mathbb{R} , essendo illimitato superiormente.

3) Se X é l'insieme delle parti di un insieme non vuoto S , con l'ordinamento dato dall'inclusione, sia s un fissato elemento di S , e sia A la famiglia dei sottoinsiemi di S che contengono s . Chiaramente, S stesso fa parte di A , e quindi é il massimo elemento di A . Inoltre, l'estremo inferiore di A é anche il minimo, ed é l'insieme puntiforme $\{s\}$. Però, se S é un insieme infinito, e A^* denota la famiglia di tutti i sottoinsiemi infiniti di S , contenenti s , il massimo di A^* é sempre S , ma A^* non ammette minimo, mentre l'insieme puntiforme $\{s\}$ é l'estremo inferiore: infatti, é chiaro che $\{s\}$ é un minorante; se B é un sottoinsieme di S , ed é un minorante per A^* , B non puo' contenere nessun elemento $y \neq s$, altrimenti non sarebbe *minore* di $S \setminus \{y\}$, che invece fa parte di A^* . Dunque, un eventuale minorante per A^* non puo' contenere altri punti che s . Questo prova che $\{s\}$ é il massimo dei minoranti, e anche che A^* non ha minimo, in quanto l'estremo inferiore non é un elemento di A^* .

Per quanto riguarda l'ordinamento usuale su \mathbb{R} , un teorema molto importante, legato alla cosiddetta *completezza* di \mathbb{R} , assicura l'esistenza di *inf* e *sup*, per tutti gli insiemi limitati. Non riportiamo la dimostrazione: la validita' di tale teorema *confina* con l'assiomatica stessa dei numeri reali.

Teorema 3.4 *Sia $A \subset \mathbb{R}$ un sottoinsieme non vuoto, limitato superiormente. Allora esiste l'estremo superiore di A , in \mathbb{R} . Analogamente, se A é limitato inferiormente, esiste l'estremo inferiore.*

Anziché dimostrare questo teorema, diamo un procedimento *tecnico* per verificare, quando occorra, che un certo numero reale x é estremo superiore, o inferiore, per un insieme A .

Teorema 3.5 *Sia $A \subset \mathbb{R}$ un sottoinsieme non vuoto, limitato superiormente, e sia s un maggiorante per A . Le seguenti condizioni sono equivalenti:*

- 1) $s = \sup A$.
- 2) per ogni reale $\varepsilon > 0$ esiste un elemento $a \in A$ tale che $a > s - \varepsilon$.

Dimostrazione. Supponiamo $s = \sup A$. Allora, s é il minimo dei maggioranti. Questo vuol dire che $s - \varepsilon$ non é piu' un maggiorante, quale che sia $\varepsilon > 0$, e dunque deve esistere qualche elemento di A che sia maggiore di $s - \varepsilon$.

Per dimostrare il viceversa, si può fare lo stesso ragionamento: se è vero che $s - \varepsilon$ non è maggiorante di A , qualunque sia $\varepsilon > 0$, il maggiorante più piccolo dev'essere s . \square

Ovviamente, c'è anche una caratterizzazione simile per l'estremo inferiore. Di questa, naturalmente, non diamo la dimostrazione.

Teorema 3.6 *Sia $A \subset \mathbb{R}$ un sottoinsieme non vuoto, limitato inferiormente, e sia i un minorante per A . Le seguenti condizioni sono equivalenti:*

- 1) $i = \inf A$.
- 2) per ogni reale $\varepsilon > 0$ esiste un elemento $a \in A$ tale che $a < i + \varepsilon$.

Un esempio può essere utile. Sia $E = \{x \in \mathbb{R} : |x| > 2\}$, e sia $A = \{\log(x^2 + 1) : x \in E\}$. Trovare l'estremo inferiore di A .

Intanto, osserviamo che $x^2 + 1 > 5$ per ogni $x \in E$. Dunque, $\log x > \log 5$ per ogni $x \in E$, e questo vuol dire che A è limitato inferiormente, e $\log 5$ è un suo minorante. Proviamo ora che $\log 5$ è proprio l'inf di A .

Fissato $\varepsilon > 0$, dobbiamo trovare un elemento $x \in E$ tale che $\log(x^2 + 1) < \log 5 + \varepsilon$. scriviamo $\varepsilon = \log(e^\varepsilon)$, così $\log 5 + \varepsilon = \log(5e^\varepsilon)$. Dunque, cerchiamo $x \in E$ tale che

$$\log(x^2 + 1) < \log(5e^\varepsilon).$$

Ovviamente, questa relazione è verificata se $x^2 + 1 = 5e^{\varepsilon/2}$, ossia ad esempio $x = \sqrt{5e^{\varepsilon/2} - 1}$; inoltre, per tale valore di x , è chiaramente $x^2 + 1 > 5$, e quindi $x > 2$. Pertanto, la verifica è completa.

Passiamo ora alle relazioni di equivalenza, e alle loro varie applicazioni.

Definizione 3.7 Una relazione $R \subset A \times A$ è un' *equivalenza* se

- e1) $(x, x) \in R \quad \forall x \in A$; (proprietà *riflessiva*)
- e2) $(x, y) \in R \Rightarrow (y, x) \in R$; (proprietà *simmetrica*)
- e3) $(x, y) \in R$ e $(y, z) \in R \Rightarrow (x, z) \in R$ (proprietà *transitiva*).

Si noti la somiglianza di tali proprietà con le o1), o2), o3): soltanto l'antisimmetrica qui viene sostituita dalla simmetrica, ma si ottiene un concetto completamente diverso. Vediamo degli esempi.

Esempio E1. Sia $A = \mathbb{R}$, e poniamo: $(x, y) \in R$ se e solo se $|x| = |y|$.

Qui, è chiaro che due numeri reali sono "equivalenti" (secondo questa relazione) se e solo se sono uguali, oppure differiscono solo per il segno.

Esempio E2. Sia $A = \mathbb{R} \setminus \{0\}$, e poniamo: $(x, y) \in R$ se e solo se $xy > 0$. E' facile vedere che due elementi x e y sono "equivalenti" se hanno lo stesso segno (per questo abbiamo escluso lo 0).

Esempio E3. Sia $A = \mathbb{R}^2$. Poniamo $((x, y), (u, v)) \in R$ se e solo se $x + y = u + v$.

E' ormai abbastanza chiaro quante equivalenze si possono definire, tutte più o meno interessanti. D'ora in poi, ometteremo il riferimento a R , dicendo semplicemente che x e y sono *equivalenti* (se $(x, y) \in R$), e scriveremo: $x \approx y$.

A proposito di relazioni di equivalenza, dobbiamo ora precisare alcuni fatti: intanto, quando si ha una relazione di equivalenza R su un insieme A , ad ogni elemento $x \in A$ si associa una *classe di equivalenza*, cioè l'insieme di tutti gli elementi $y \in A$ che sono equivalenti ad x . La classe di equivalenza di x viene denotata con $[x]$, e non è mai vuota (almeno x è equivalente a sè stesso). Inoltre, se x e y sono due elementi di A , $[x]$ e $[y]$ sono coincidenti, oppure disgiunte: sono coincidenti, se $x \approx y$; disgiunte, altrimenti (infatti, per la e3, se z fosse un qualunque elemento di A , appartenente sia a $[x]$ sia a $[y]$, si avrebbe $x \approx z \approx y$, e quindi $[x] = [z] = [y]$).

Di conseguenza, ogni relazione di equivalenza in A individua una *partizione* di A : le varie classi di equivalenza sono infatti a due a due disgiunte, e la loro unione è tutto A (nel senso che ogni elemento x di A appartiene a qualche classe di equivalenza, cioè a $[x]$). Da un altro punto di vista, potremmo considerare ciascuna classe di equivalenza come un unico elemento, come ad "incollare" tra loro i punti di una stessa classe, e quindi l'intero insieme A si trova come "affettato", ogni "fetta" essendo una classe di equivalenza. Così, se torniamo all'esempio E1), l'insieme \mathbb{R} viene come "ripiegato" su sè stesso, facendo ruotare il semiasse negativo attorno a 0, fino a sovrapporlo al semiasse positivo: x viene "incollato" a $-x$, per ciascun x reale, e quindi le classi di equivalenza sono tutti gli insiemi del tipo $\{x, -x\}$. Una situazione in certo senso duale si ha nell'esempio E2: qui, le classi

di equivalenza sono solo due: la semiretta $]-\infty, 0[$ e la semiretta $]0, +\infty[$. Nell'esempio E3, le "fette" in cui il piano \mathbb{R}^2 viene suddiviso sono tutte le rette di equazione: $x + y = r$, al variare di r in \mathbb{R} .

Al di là della visione geometrica più o meno suggestiva, ciò che risulta dalla suddivisione di A in tante "fette", e dall'identificazione di tutti gli elementi di una singola "fetta", viene detto il *quoziente* di A , *modulo* la relazione di equivalenza \approx , e si denota con A / \approx : in termini rigorosi, A / \approx è l'*insieme* di tutte le classi di equivalenza $[x]$, con $x \in A$.

Un ultimo, importante esempio: in \mathbb{R} , poniamo $x \approx y$ se $x - y \in \mathbb{Z}$: in altre parole, si ha $[x] = \{x, x - 1, x - 2, \dots, x - n, \dots, x + 1, x + 2, x + 3, \dots, x + n, \dots\}$, per ogni $x \in \mathbb{R}$. Cosa sarà allora il *quoziente*? Basta osservare che in ogni classe di equivalenza c'è sempre un numero in $[0, 1]$, con l'accortezza di considerare 0 e 1 *equivalenti* tra loro: così,

$$\mathbb{R} / \approx = \{[x] : 0 \leq x < 1\} \cup [0]$$

(Notiamo che formalmente $[0] = \mathbb{Z}$). Dunque, identificando con x ($x \in]0, 1[$) tutti gli elementi di $[x]$, e *incollando* 0 a 1, il quoziente cercato si può assimilare a un *cerchio*: il cerchio virtualmente percorso da qualcuno che, partendo da 0, tocca tutti i punti di $]0, 1[$ e poi si ritrova in 0. Questa similitudine diverrà più concreta in seguito.

Definizione 3.8 Dati due insiemi (non vuoti) A e B , una *applicazione* di A in B è un sottoinsieme G di $A \times B$, tale che:

$$a) \forall a \in A \exists! b \in B \text{ tale che } (a, b) \in G.$$

Di solito, le applicazioni si denotano con scritture del tipo $f : A \rightarrow B$, intendendo che f è quel *meccanismo* che permette di individuare, per ciascun elemento $a \in A$, quell'unico elemento $b \in B$ tale che $(a, b) \in G$: si scrive allora $b = f(a)$, e si usa confondere la *legge* f con l'insieme G , dicendo che l'applicazione è f (sotto questo punto di vista, G viene descritto semplicemente come il *grafico* di f).

Di solito, la legge f si descrive attraverso un'espressione, del tipo $f(x) = x^2$, e questo può anche esser sufficiente, per individuare completamente l'applicazione, ma bisogna a volte dare delle specificazioni particolari, o sull'insieme A , o su certi valori particolari di $f(x)$. Ad esempio, la legge $f(x) = \frac{1}{x}$ non è definita per tutti gli $x \in \mathbb{R}$, e quindi, se non si specifica altro, si deve intendere che, in tal caso, sia $A = \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Ma si potrebbe definire

di ufficio il valore $f(0)$, ad esempio ponendo $f(0) = 0$. In tal caso, si preferisce scrivere la legge di f in questo modo:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x}, & \text{per } x \neq 0 \\ 0, & \text{per } x = 0 \end{cases}$$

Un altro esempio, piuttosto importante, è dato dalla seguente funzione φ , definita anch'essa su tutto \mathbb{R} (e naturalmente a valori in \mathbb{R}) :

$$\phi(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x}, & \text{per } x \neq 0 \\ 1, & \text{per } x = 0 \end{cases}$$

Come si può facilmente capire, la nostra definizione di *applicazione* non fa molta distinzione tra la *legge* f e il *grafico* G : e in genere il grafico è una curva del piano: in fondo riportiamo i grafici delle due funzioni $f(x) = \frac{1}{x}$, e $\phi(x) = \frac{\sin x}{x}$

Questo però non vuol dire che ogni curva del piano può essere interpretata come il grafico di qualche funzione: il cerchio di equazione $x^2 + y^2 = 1$ può essere rappresentato solo in parte, ad esempio ponendo $y = f(x) = \sqrt{1 - x^2}$, con $x \in [-1, 1]$.

Altre importanti applicazioni sono le *successioni*: una successione in un insieme A è una generica applicazione $\phi : \mathbb{N} \rightarrow A$. Di solito, data una tale successione, si preferisce scrivere a_n al posto di $\phi(n)$, e si usa la scrittura (a_n) per rappresentare l'intera successione. Ad esempio, $(\frac{1}{n})$ è la successione che, ad ogni intero positivo n , associa il numero reale (o, se si preferisce, razionale) $\frac{1}{n}$.

A volte, le successioni vengono anche definite per *ricorrenza*, ossia si assegna il valore a_0 , e poi si dà una "legge di passaggio" (detta appunto "legge di ricorrenza") da a_n ad a_{n+1} : in questo modo, nota a_0 , la legge di ricorrenza ci permette di ricavare a_1 ; da questa si ricava poi a_2 , e così via, all'infinito.

Possiamo porre ad esempio: $a_0 = 1, a_{n+1} = \frac{a_n}{2}$. Otteniamo così la successione di numeri: $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \dots$, e in generale $a_n = \frac{1}{2^n}$.

Ancora, si potrebbe porre: $a_0 = 1$, e dare la legge: $a_{n+1} = a_n + 1/(n+1)$. Si ottiene così la seguente successione di valori: $1, 1+1, 1+1+1/2, 1+1+1/2+1/3, \dots$. In genere, quando una successione è definita per ricorrenza, non si può pretendere di trovare un'espressione

elementare del termine generale a_n . E infatti, nell'ultimo esempio che abbiamo dato, non siamo arrivati a un'espressione per a_n .

Passiamo ora ad alcuni sviluppi dei concetti di applicazione iniettiva, suriettiva, bi-iettiva, che ci permetteranno di capire meglio alcune relazioni tra gli insiemi numerici fondamentali per il nostro corso.

Definizione 3.9 Data un'applicazione $h : A \rightarrow B$, si dice che h è *iniettiva* se sussiste la seguente implicazione:

$$h(a_1) = h(a_2) \Rightarrow a_1 = a_2.$$

In altre parole, se h è iniettiva, non è possibile che a due distinti elementi di A corrisponda lo stesso elemento di B : ciò esclude, ad esempio, funzioni come $\phi(x) = \sin x$, oppure $g(x) = x^2$, almeno se pensate definite su tutto \mathbb{R} . Invece, sono iniettive le funzioni $h(x) = x^3$, oppure $\psi(x) = e^x$.

Diciamo invece che h è *suriettiva* se ogni elemento $b \in B$ è immagine di qualche elemento $a \in A$, cioè se per ogni $b \in B$ esiste $a \in A$ tale che $h(a) = b$. Chiaramente, la funzione $\phi(x) = \sin x$ non è suriettiva, se si vuole $B = \mathbb{R}$, ma lo diventa, se si restringe B a $[-1, 1]$. E questo si può fare per ogni funzione: basta sostituire B con un suo sottoinsieme, cioè il *codominio* di h ; tale insieme, denotato con $h(A)$, si descrive così:

$$h(A) = \{h(a) : a \in A\} = \{b \in B : b = h(a) \text{ per qualche } a \in A\}.$$

Diremo infine che $h : A \rightarrow B$ è *biiettiva*, quando essa è sia iniettiva che suriettiva. Se h è biiettiva, si può dire che l'equazione $h(x) = b$ ammette una e una sola soluzione, per ciascun $b \in B$. Tale soluzione viene di solito denotata con $h^{-1}(b)$: in effetti, questo porta proprio a definire un'altra applicazione, denotata con $h^{-1} : B \rightarrow A$, detta l'*inversa* di h . Di conseguenza, si suole anche chiamare *invertibili* tutte le funzioni biiettive. Notiamo che si ha, allora :

$$h^{-1}(h(a)) = a, \text{ e anche } h(h^{-1}(b)) = b$$

per ogni $a \in A$ e ogni $b \in B$. Evidentemente, anche h^{-1} è biiettiva, e la sua inversa è h .

A titolo di esempio, sia $A = [0, +\infty[$, $B = [1, +\infty[$, e $h : A \rightarrow B$ sia definita da:

$$h(x) = \sqrt{x^2 + 1}.$$

E' facile controllare che tale funzione è biiettiva, e risulta: $h^{-1}(y) = \sqrt{y^2 - 1}$, per ogni $y \in B$.

Ma non si pensi che sia sempre facile descrivere l'inversa di una funzione biiettiva; a volte bisogna contentarsi di saperne qualcosa, almeno quanto basta per poterci lavorare: si pensi alla funzione $k(x) = e^x + x$, definita su $A = \mathbb{R}$, e a valori in $B = \mathbb{R}$. Si vede subito che, se $x_1 < x_2$, allora $k(x_1) < k(x_2)$, dunque k è iniettiva. La suriettività è un po' più difficile: ce ne possiamo convincere, considerando che $k(x)$ assume valori negativi, sempre più piccoli, man mano che x decresce a $-\infty$, e viceversa valori sempre più grandi, man mano che x cresce verso $+\infty$. Bene; avendo concluso che k è invertibile, ci possiamo chiedere: che funzione è k^{-1} ? E la risposta è: *Chi lo sa?* Non esiste una rappresentazione di tale inversa in termini conosciuti, e quindi k^{-1} rimane **non meglio identificata**.

Definizione 3.10 Attraverso il concetto di applicazione, si possono stabilire alcune importanti relazioni tra gli insiemi. Ad esempio, una *definizione* alquanto curiosa è quella di *insieme infinito*: noi siamo abituati a considerare questa nozione come intuitiva, ma in Matematica non ci si accontenta di questo, e allora si dice che un insieme A è *infinito* se si può trovare un insieme $B \subset A$, con $\emptyset \neq B \neq A$, in modo che esista un'applicazione biiettiva $\phi : B \rightarrow A$.

Per farsi un'idea della situazione, si pensi ad $A = \mathbb{N}$, e $B = \mathbb{P}$, insieme dei numeri pari non negativi: una biiezione $\phi : \mathbb{P} \rightarrow \mathbb{N}$ è ad esempio data da $\phi(p) = \frac{p}{2}$, $\forall p \in \mathbb{P}$.

Ancora, dati due insiemi A e B (finiti o infiniti), si dice che A è *più potente* di B se esiste un'applicazione iniettiva $J : B \rightarrow A$. (In parole povere, *più potente* significa *con un maggior numero di elementi*, intendendo anche *maggiore o uguale*). Questa definizione sembra ovvia, se gli insiemi sono finiti, ma diventa interessante se gli insiemi sono infiniti. Si dice poi che i due insiemi sono *equipotenti* (ossia che hanno lo stesso "numero di elementi"), se esiste una biiezione $\phi : A \rightarrow B$. Un fatto importante è espresso dal seguente teorema, dovuto a Bernstein. Benché l'enunciato sembri esprimere un fatto ovvio, la dimostrazione rigorosa, basata sulle definizioni precedenti, non é affatto facile, e noi la ometteremo.

Teorema 3.11 *Dati due insiemi A e B , se A è più potente di B , e B è più potente di A , allora A e B sono equipotenti.*

In definitiva, questa nozione di *potenza* può essere usata per stabilire un ordinamento tra insiemi, e inoltre il concetto di equipotenza può indurre una relazione di equivalenza: diciamo che due insiemi sono *equivalenti* riguardo alla potenza se esiste una biiezione dall'uno all'altro. Le *classi di equivalenza* sono le cosiddette *cardinalità*: in altre parole, *cardinalità* di un insieme A non è altro che il *numero* dei suoi elementi, intendendo per *numero* il concetto ben noto, nel caso che l'insieme A sia finito, mentre altrimenti il *numero* rappresenta la classe di tutti quegli insiemi che sono equivalenti ad A , nel senso che esiste una biiezione tra loro ed A . Di solito, la cardinalità di un insieme A è denotata con $\#(A)$. A questo punto potrebbe sorgere un dubbio: finchè si lavora con insiemi finiti, tutto sommato non si è fatto nulla di nuovo, anzi si è reso più complicato un concetto così "naturale" come quello di numero. Dunque questo discorso dice qualcosa di nuovo solo nel caso di insiemi infiniti. Tuttavia, già la definizione di insieme infinito ci fa capire che è "molto facile" costruire biiezioni tra insiemi infiniti, anche tra un insieme come \mathbb{N} e una sua "metà": e se "tutti" gli insiemi infiniti fossero equipotenti? Avremmo fatto un bel buco nell'acqua! In realtà, le cose non stanno così, e in effetti c'è un modo molto semplice per costruire, dato un insieme infinito qualunque A , un insieme B che è più potente di A , e non equipotente ad A : basta scegliere $B = \wp(A)$, cioè l'insieme di tutti i sottoinsiemi di A . Nel prossimo teorema, di cui riportiamo la dimostrazione solo per maggiore chiarezza, si evidenzia questo fatto.

Teorema 3.12 *Dato un qualunque insieme A , esiste un'applicazione iniettiva $J : A \rightarrow \wp(A)$, ma i due insiemi non sono equipotenti.*

Dimostrazione. Ponendo $J(x) = \{x\}$, per ogni $x \in A$, è evidente che J è un'applicazione iniettiva, di A in $\wp(A)$. Proviamo ora che non può esistere alcuna biiezione $\phi : A \rightarrow \wp(A)$. Infatti, se una tale biiezione ϕ esistesse, potremmo considerare il seguente sottoinsieme $H \subset A$:

$$H = \{x \in A : x \notin \phi(x)\}.$$

Possiamo vedere facilmente che H è non vuoto: infatti, siccome ϕ è biiettiva, al sottoinsieme A di A corrisponde un elemento $x \in A$ tale che $\phi(x) = A$, e allora $x \in \phi(x)$. Anche il complementare H^c è non vuoto: siccome ϕ per ipotesi è suriettiva, esiste anche un $y \in A$ tale che $\phi(y) = \emptyset$, e allora chiaramente non può essere $y \in \phi(y)$. Ora, veniamo all'assurdo. Siccome H^c è un sottoinsieme di A , e ϕ è biiettiva, c'è sicuramente un elemento $a \in A$ tale che $\phi(a) = H^c$. Ora, necessariamente dev'essere $a \in H$, oppure $a \in H^c$. Ma, se $a \in H$, si deve avere $a \in \phi(a)$, per la definizione stessa di H . Dunque, se $a \in H$, si deve avere $a \in \phi(a) = H^c$, impossibile. Resta l'alternativa $a \in H^c$: ma, per definizione di H , se $a \in H^c$, ossia $a \notin H$, non può essere $a \in \phi(A) = H^c$! Dunque, anche se $a \in H^c$, arriviamo ad una contraddizione. In conclusione, a non può stare nè in H , nè in H^c , e questo è assurdo.

Le considerazioni finora svolte diventano un po' più concrete, quando si comincia a lavorare con gli insiemi infiniti che conosciamo meglio: \mathbb{N} , \mathbb{Z} , \mathbb{Q} , \mathbb{R} : si può dimostrare che \mathbb{N} , \mathbb{Z} , e \mathbb{Q} hanno la stessa cardinalità, e questa è la *più piccola* tra le cardinalità infinite. Invece, \mathbb{R} ha cardinalità strettamente maggiore: infatti, \mathbb{R} ha la stessa cardinalità di $\wp(\mathbb{N})$. Questo fatto può essere spiegato, ripensando alla rappresentazione *binaria* dei numeri reali: ossia, ogni numero reale può essere espresso come una successione infinita di *zeri* e *uni*, cioè come un elemento di $\{0, 1\}^{\mathbb{N}}$ (torneremo più tardi su questo punto). Ma anche ogni elemento di $\wp(\mathbb{N})$ può essere espresso come un elemento di $\{0, 1\}^{\mathbb{N}}$: infatti, se $A \subset \mathbb{N}$, possiamo "scorrere" gli elementi n di \mathbb{N} , segnando *uno* se $n \in A$, *zero* se $n \notin A$. Alla fine, avremo una sequenza di *zeri* e *uni*, che caratterizza perfettamente l'insieme A : ad esempio, la sequenza (0111001101001...) caratterizza l'insieme $\{1, 2, 3, 6, 7, 9, 12, \dots\}$, avendo iniziato a scorrere da 0 (che non appartiene ad A , perchè il primo elemento della sequenza è 0), e poi via via tutti gli altri. Si noti la somiglianza di questa operazione con il concetto di *messaggio*, inteso come sequenza di segnali: abbiamo un'altra esemplificazione dell'isomorfismo tra le algebre Booleane e i sottoinsiemi di un insieme opportuno, in questo caso \mathbb{N} .

3.3 Varietà di insiemi in \mathbb{R}

In questa sezione, ci interesseremo principalmente di stabilire legami intercorrenti tra vari sottinsiemi di \mathbb{R} , mostrando come molti di essi siano più *grossi* di quel che sembra, e che altri sono più *piccoli* di quanto si possa credere.

Inizieremo, mostrando che *tutti* gli intervalli hanno la stessa cardinalità.

Esempio 2.1 Sia $[a, b]$ un generico intervallo chiuso di \mathbb{R} , e mostriamo che esiste una biiezione $\phi : [0, 1] \rightarrow [a, b]$. Basta porre infatti: $\phi(t) = a + t(b - a)$. La legge è molto semplice, e quindi lasciamo al lettore la verifica della biiettività, e anche la ricerca dell'inversa, $\phi^{-1} : [a, b] \rightarrow [0, 1]$. Grazie a questo fatto, si vede facilmente che due *qualsiasi* intervalli chiusi, $[a, b]$ e $[u, v]$, sono equipotenti.

Esempio 2.2 Sia $]a, b[$ un generico intervallo aperto: allora esiste una biiezione tra $]a, b[$ e $]0, 1[$ (quale?). Ne consegue che due qualsiasi intervalli aperti sono equipotenti.

Ora, è abbastanza ragionevole aspettarsi che un intervallo chiuso $[a, b]$ sia equipotente con il corrispondente intervallo aperto $]a, b[$. Tuttavia, invece di mostrare direttamente una biiezione, ci limitiamo a osservare che $]a, b[$ ha senz'altro cardinalità minore o uguale a $[a, b]$, ma che anche $[a, b]$ ha cardinalità minore o uguale a $]a - 1, b + 1[$ (che lo contiene); ma la cardinalità di quest'ultimo è la stessa di $]a, b[$ (perchè sono entrambi intervalli aperti), e quindi abbiamo $\#([a, b]) \geq \#(]a, b[) = \#(]a - 1, b + 1[) \geq \#([a, b])$. (Ricordiamo che la scrittura $\#(A)$ rappresenta la *cardinalità* dell'insieme A). Poichè questa relazione d'ordine è antisimmetrica (teorema di Bernstein), le disuguaglianze sono tutte uguaglianze.

Esempio 2.3 A questo punto è abbastanza evidente che *tutti* gli intervalli (aperti, semi-aperti, chiusi) hanno la stessa cardinalità (purchè *non-degeneri*). Possiamo anche far vedere che essi hanno la stessa cardinalità di \mathbb{R} , tramite un'altra interessante funzione biiettiva. Definiamo $\psi : \mathbb{R} \rightarrow]-1, 1[$ in questo modo: $\psi(x) = \frac{x|x|}{1+x^2}$. Mostriamo che ψ è iniettiva: supponendo $x \leq 0$, si ha $\psi(x) = -\frac{x^2}{1+x^2} = \frac{1}{1+x^2} - 1$: se ne deduce facilmente che ψ è negativa e *crescente* per $x < 0$, e nulla per $x = 0$. Invece, per $x > 0$ si ha

$\psi(x) = \frac{x^2}{1+x^2} = 1 - \frac{1}{1+x^2}$, da cui si vede che ψ è positiva e ancora crescente. Questo basta per dedurre l'iniettività.

Proviamo ora che ψ è suriettiva. Sia $y \in]-1, 1[$, e supponiamo $y \geq 0$: troveremo un $x \geq 0$ tale che $\psi(x) = y$. Dato che dev'essere $x \geq 0$, l'equazione da risolvere è :

$$\frac{x^2}{1+x^2} = y, \text{ da cui facilmente si trova } x^2 = \frac{y}{1-y}, \text{ e l'unica soluzione positiva è } x = \sqrt{\frac{y}{1-y}}.$$

Se invece scegliamo $y < 0$, scriviamo $y = -|y|$, e poniamo $x^* = -\sqrt{\frac{|y|}{1-|y|}}$ (stiamo usando il fatto che ψ è *dispari* cioè $\psi(-x) = -\psi(x)$).

Dunque, tutti gli intervalli in \mathbb{R} hanno la stessa cardinalità, e questa cardinalità coincide con quella di \mathbb{R} . Ma ci sono molti altri sottoinsiemi di \mathbb{R} , che hanno la stessa cardinalità: ad esempio, l'insieme degli *irrazionali*, $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. (perchè già \mathbb{Q} è *solo* numerabile, se anche $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ avesse potenza minore di \mathbb{R} , l'unione di questi due *non potrebbe* avere la cardinalità di \mathbb{R} : è un discorso un po' strano, ma per le cardinalità infinite la *somma* di due oggetti è soltanto il *più grande* dei due...). Ma vedremo ora un altro insieme, apparentemente *miserello*, ma in realtà potente come \mathbb{R} . (Non ci stiamo *lambiccando* con cose astruse, questo insieme ha caratteristiche che risultano molto importanti nella modellizzazione di numerosi fenomeni naturali).

3.3.1 L'insieme di Cantor

L'insieme che ora presentiamo è il *prototipo* di una categoria d'insiemi molto particolari, i cosiddetti *frattali*. Tanto per darne una descrizione intuitiva, possiamo dire che un insieme *frattale* (non solo in \mathbb{R} , ma anche nel piano, \mathbb{R}^2 , o in altri ambienti ancora più generali) ha questa caratteristica: è possibile suddividerlo in un numero finito di parti, ciascuna delle quali è perfettamente *simile* all'insieme iniziale, cioè può essere a sua volta suddivisa allo stesso modo e ciascuna ulteriore *frazione* è perfettamente *simile* a *tutto* l'insieme iniziale, e così via all'infinito... In altre parole, se *ingrandiamo* una qualunque porzione di un insieme frattale, questa si presenta perfettamente identica all'insieme totale.

Ma veniamo all'insieme di Cantor: questo insieme sarà denotato con C , ed è ottenuto intersecando una successione decrescente di particolari sottoinsiemi C_n di $[0,1]$.

Per definire i C_n , conviene anche utilizzare i loro complementari, che denoteremo con U_n : dunque, $[0, 1] \setminus C_n = U_n$, per ogni n .

Poniamo ora: $U_1 =]\frac{1}{3}, \frac{2}{3}[$, e quindi $C_1 = [0, \frac{1}{3}] \cup [\frac{2}{3}, 1]$: in altre parole, C_1 è ottenuto dividendo $[0,1]$ in 3 parti uguali, e *togliendo* quella di mezzo. Ora, C_1 è fatto di due *pezzi*, ciascuno dei quali è un intervallo chiuso, di lunghezza $1/3$. Per determinare C_2 , operiamo allo stesso modo in ciascuno dei due *pezzi* di C_1 , e otterremo stavolta 4 *pezzi* ciascuno di lunghezza $\frac{1}{9}$: all'intervallo $[0, 1]$ abbiamo tolto $U_2 =]\frac{1}{3}, \frac{2}{3}[\cup]\frac{1}{9}, \frac{2}{9}[\cup]\frac{7}{9}, \frac{8}{9}[$. I quattro pezzi residui, la cui unione costituisce C_2 , hanno lunghezza complessiva pari a $\frac{4}{9}$.

Procediamo ancora, dividendo in 3 parti ciascuno dei 4 intervalli di C_2 , e togliendo sempre quella di mezzo: dunque, C_3 sarà unione di 8 pezzi, ciascuno di lunghezza $\frac{1}{27}$, e quindi la lunghezza complessiva di C_3 è $\frac{8}{27} = (\frac{2}{3})^3$.

In tal modo, si costruisce la successione decrescente (C_n) , la cui *intersezione* è il nostro insieme di Cantor, C . Attenzione! C non è vuoto! Anche se la lunghezza dei C_n è sempre più piccola, fino a tendere a 0 (e quindi si può giustamente dire che C ha misura nulla), l'insieme di Cantor contiene *molti* punti: intanto, contiene gli *estremi* degli intervalli che costituiscono i vari C_n (infatti, dato che si toglie la *parte di mezzo*, gli estremi rimangono...).

Inoltre, C è costituito da tanti punti quanti sono i numeri reali! In altre parole, C è in corrispondenza biunivoca con $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$. Per vedere questa cosa, bisogna dare una descrizione diversa di C , che può anche servire per capire meglio com'è fatto questo insieme.

Costruzione diversa

Sappiamo già che possiamo rappresentare i numeri di $[0, 1]$ attraverso successioni di 0 e 1 (rappresentazione *binaria*: è quella con cui operano i computers). Ma si può anche usare la rappresentazione *ternaria*, rappresentando cioè ogni numero in $[0,1]$ con una successione di 0,1,2. Si procede come segue: denotiamo con x un generico numero reale, compreso fra 0 e 1. Se $x \in [0, \frac{1}{3}[$, la prima cifra sia 0; se $x \in]\frac{1}{3}, \frac{2}{3}[$, la prima cifra sia 1; altrimenti, la prima cifra sia 2. Dunque, se la prima cifra di x è 1, $x \in U_1 =]\frac{1}{3}, \frac{2}{3}[$, altrimenti $x \in C_1$.

Stabilita la prima cifra, abbiamo automaticamente individuato un intervallo di ampiezza $\frac{1}{3}$, al quale x appartiene certamente: o $[\frac{1}{3}, \frac{2}{3}]$, o $[0, \frac{1}{3}]$, o $[\frac{2}{3}, 1]$; sia $[a, b]$ tale intervallo. Per definire la seconda cifra, dividiamo $[a, b]$ in tre parti uguali, e vediamo dove cade x : se esso sta in quello di sinistra, la seconda cifra sarà 0, se sta nella parte centrale, la seconda cifra

sarà 1, altrimenti sarà 2. Ancora, se x sta in C , né la prima, né la seconda cifra possono essere 1.

Andando avanti con questo sistema, si capisce come costruire la successione di 0,1 e 2 che costituisce la rappresentazione ternaria di x .

Facciamo un esempio: supponiamo che sia $x = 0,259695481\dots$. Essendo $x < \frac{1}{3}$, la prima cifra della rappresentazione ternaria è 0. Per trovare la seconda cifra, dobbiamo ora capire se x appartiene a $[0, \frac{1}{9}]$, $]\frac{1}{9}, \frac{2}{9}[$, o $[\frac{2}{9}, \frac{1}{3}]$. Essendo $\frac{2}{9} = 0,2222 < x$, è chiaro che la seconda cifra di x è 2. Per trovare la terza cifra, dividiamo in tre l'intervallo $[\frac{2}{9}, \frac{1}{3}]$, e vediamo a quale dei tre appartiene x : poichè $\frac{7}{27} = 0,259259259\dots$ e $\frac{8}{27} = 0,296296296\dots$, è chiaro che x sta nell'intervallo mediano, e quindi la terza cifra è 1; ma è facile capire, confrontando x con $\frac{7}{27}$, che la quarta cifra sarà 0, e anche la quinta; ma dopo un po', cambierà di nuovo... Allora la rappresentazione ternaria (approssimata) di x è: 02100...

Viceversa, supponiamo che la rappresentazione ternaria di x sia 1210102...

Allora

$$x = \frac{1}{3} + \frac{2}{9} + \frac{1}{27} + \frac{0}{81} + \frac{1}{243} + \frac{0}{729} + \frac{2}{2187} + \dots$$

(Basta pensarci un attimo!).

Ora, l'insieme di Cantor è esattamente l'insieme di quegli x la cui rappresentazione ternaria *non presenta alcun 1*. E viceversa, ogni sequenza di 0 e 2 individua un ben preciso punto di C : proprio questo spiega la corrispondenza biunivoca che c'è tra C e $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$.

L'insieme di Cantor può essere descritto in maniera ancora diversa, introducendo proprio il macchinario dei frattali. Definiamo due applicazioni, f_1 e f_2 , da $[0,1]$ in $[0,1]$, come segue:

$$f_1(x) = \frac{x}{3}; \quad f_2(x) = \frac{x}{3} + \frac{2}{3}.$$

Come si può vedere, f_1 e f_2 sono iniettive, ma non suriettive: i due codomini sono disgiunti, e la loro unione dà, guarda caso, l'insieme C_1 . Se ora pensiamo $f_1 : C_1 \rightarrow [0,1]$, e $f_2 : C_1 \rightarrow [0,1]$ i due codomini sono ancora disgiunti, e la loro unione coincide con C_2 ... Dunque, partendo da un intervallo $J \subset [0,1]$, si ha $f_1(J) \cup f_2(J) \subsetneq J$. Sostituendo J con $J_1 = f_1(J) \cup f_2(J)$, si ha $f_1(J_1) \cup f_2(J_1) \subsetneq J_1$. Ponendo ora

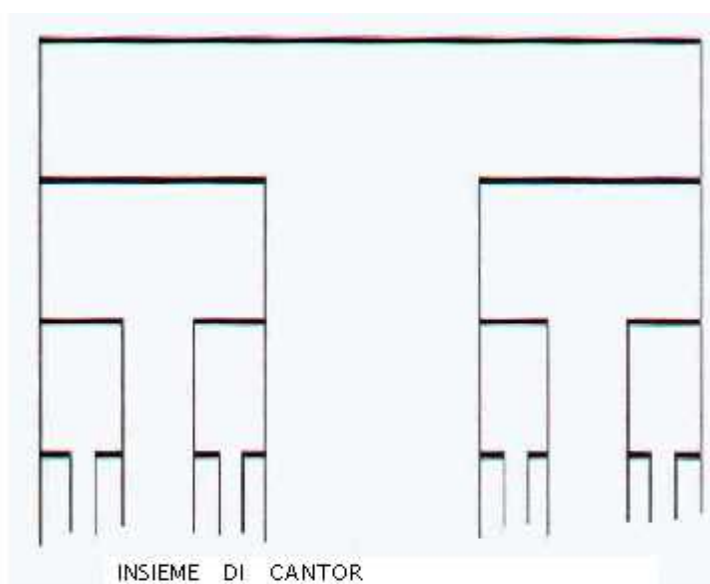
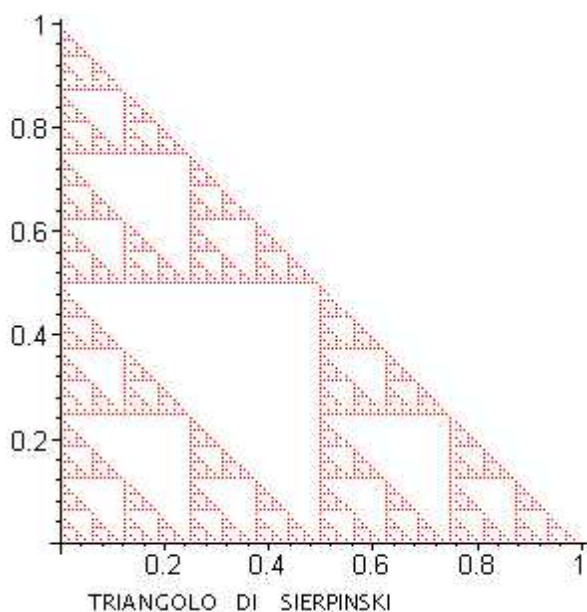
$$J_2 = f_1(J_1) \cup f_2(J_1), \text{ si ha ancora } f_1(J_2) \cup f_2(J_2) \subsetneq J_2\dots$$

La conclusione è fornita dal seguente teorema, dovuto a Hutchinson.

Teorema 3.13 *L'insieme di Cantor C è l'unico sottoinsieme chiuso non vuoto di $[0,1]$, per il quale si abbia:*

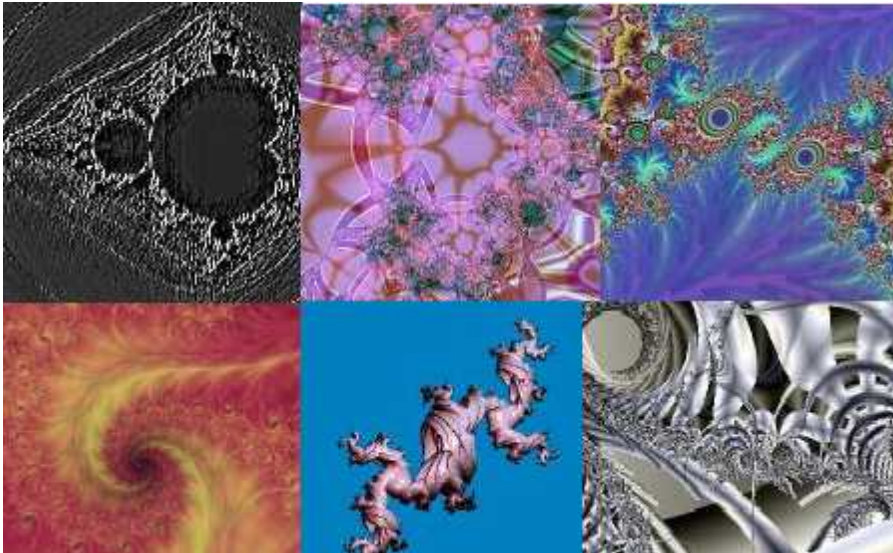
$$C = f_1(C) \cup f_2(C).$$

Non riportiamo la dimostrazione, ma precisiamo che, nell'enunciato del teorema precedente, la parola *chiuso* ha un significato ben preciso: non significa necessariamente che C sia un *intervallo* chiuso (non lo è, anzi da un certo punto di vista C è quanto di più *spappolato* si possa pensare, mentre un intervallo è un "tutt'uno"). Insieme *chiuso* qui significa che esso è il *complementare* di un insieme *aperto*, ossia di un insieme (di solito, anch'esso "spappolato), che sia unione di intervalli aperti, (anche infiniti), a due a due disgiunti.



Come dicevamo, l'insieme di Cantor è solo un *prototipo* dei frattali.

Esempi più significativi si possono trovare in \mathbb{R}^2 , o meglio in $[0,1]^2$: scegliamo 3 funzioni, f_1, f_2, f_3 , di $[0,1]^2$ in sé: $f_1(x,y) = (\frac{x}{2}, \frac{y}{2})$, $f_2(x,y) = (\frac{x}{2} + 0,5, \frac{y}{2})$, $f_3(x,y) = (\frac{x}{2}, \frac{y}{2} + 0,5)$. Se partiamo da $J = [0,1]^2$, e poniamo $J_1 = f_1(J) \cup f_2(J) \cup f_3(J)$, osserviamo che J_1 è strettamente contenuto in J : definendo poi J_2 come $f_1(J_1) \cup f_2(J_1) \cup f_3(J_1)$, otteniamo un insieme ancora più piccolo. Continuando questo processo all'infinito, si arriverà ad un insieme frattale, detto *triangolo di Sierpinski*. Altri frattali sono nei grafici.



Bibliografia

- [1] E.W. Beth: *I fondamenti logici della matematica* Feltrinelli (1963).
- [2] F. Cianflone: *L'Algebra di Boole e i circuiti logici* ETAS KOMPASS (1970).
- [3] B.B. Mandelbrot: *The fractal geometry of nature*, Freeman (1983).

Indice

1	Logica Matematica	2
1.1	Atomi e Operatori	2
1.2	Regole Fondamentali	5
1.3	Esempi di sistemi logici	6
1.4	Strutture logiche e algebriche	9
2	Schemi logici	21
2.1	Blocchi logici	23
2.2	Tavole di Verita'	27
2.3	Rappresentazione numerica delle funzioni Booleane	31
2.4	Rappresentazione algebrica delle funzioni booleane	34
3	Insiemi, funzioni, relazioni	38
3.1	Generalita'	39
3.2	Relazioni	41
3.3	Varietà di insiemi in \mathbb{R}	54
3.3.1	L'insieme di Cantor	55

Dispense di Matematica Applicata

Domenico Candeloro

Introduzione.

La nascita ufficiale del Calcolo delle Probabilità si fa risalire al XVII secolo (benché studi di tal genere fossero già stati affrontati precedentemente da Luca Pacioli, Gerolamo Cardano, Galileo Galilei). Nel 1654 un certo Cavalier de Meré propose a Pascal una *stranezza* da lui riscontrata giocando d'azzardo, e considerata quasi un paradosso: egli aveva riscontrato che, puntando sull'uscita di almeno un 6 in 4 lanci di un dado (onesto), riusciva più facile vincere che perdere, e quindi l'evento assumeva probabilità maggiore di $\frac{1}{2}$; mentre, puntando sull'uscita di almeno un doppio 6 in 24 lanci di due dadi, accadeva il contrario, per cui l'evento in questione doveva avere probabilità minore di $\frac{1}{2}$. Dato che il rapporto (4 : 6) tra numero di lanci e numero di risultati possibili era lo stesso in entrambi i giochi, il de Meré riteneva (e non lui solo) che i due eventi dovessero avere invece uguale probabilità. Pascal, con ragionamento rigoroso, provò che la Matematica non contrasta affatto con l'esperienza: la probabilità di ottenere almeno un 6 in 4 lanci di un dado è circa 0.518 (ma non certo $\frac{4}{6}$), mentre la probabilità di riscontrare almeno un doppio 6 in 24 lanci di una coppia di dadi risulta uguale a circa 0.492.

Impareremo presto a calcolare probabilità di eventi come questi, servendoci del Principio di Laplace: fu questi infatti, già nel XVIII secolo, a dare un primo assetto rigoroso a tutta la teoria, anche se ancora in maniera imperfetta.

La difficoltà principale che s'incontra, quando si affronta questa disciplina, è la *definizione* stessa di probabilità. Il merito del Laplace fu di aver introdotto un algoritmo per il calcolo concreto, almeno in certi casi, grazie al cosiddetto *principio di equiprobabilità*. Questo principio presuppone che in ogni problema di tipo probabilistico si possano distinguere un certo numero di eventi *elementari*, da considerarsi tutti con la stessa probabilità, a due a due incompatibili, e tali che almeno uno di essi sicuramente si verifica; qui, per *evento elementare* si intende un evento che non possa essere conseguenza di alcun altro evento possibile, diverso da lui stesso: ad esempio, se si lancia un dado 2 volte, vi sono esat-

tamente $6^2 = 36$ eventi elementari, cioè tutte le coppie del tipo (r_1, r_2) , ove gli r_i sono numeri interi, variabili da 1 a 6. L'evento $r_1 + r_2 = 4$ invece non é elementare, in quanto ad esempio consegue dall'evento $(1, 3)$ o anche da $(2, 2)$, che certamente sono diversi. Ogni evento E puo' essere perfettamente descritto, semplicemente elencando tutti quegli eventi elementari di cui E é conseguenza: quindi, nell'esempio di cui sopra, l'evento $r_1 + r_2 = 4$ si descrive indicando i 3 eventi elementari $(1, 3)$, $(2, 2)$, $(3, 1)$; gli eventi elementari di cui E é conseguenza vengono spesso detti *favorevoli* ad E . Ora, se il numero di tutti gli eventi elementari é N , e $f(E)$ é il numero degli eventi elementari favorevoli ad E , la *probabilita'* di E é *definita* come il rapporto

$$P(E) = \frac{f(E)}{N}. \quad (1)$$

Da qui si vede subito, ad esempio, che tutti gli eventi elementari hanno la stessa probabilita': $\frac{1}{N}$, in quanto ciascun evento elementare implica sé stesso, ovviamente, ma nessun evento elementare puo' implicarne un altro.

Il principio di equiprobabilita', nonostante la sua indubbia utilita', fu molto criticato, e per vari motivi. Intanto, esso potrebbe dar luogo ad una definizione *circolare* di probabilita', visto che essa risiede sul concetto di *equiprobabilita'*, che sembra poco chiaro, senza sapere gia' cos'é la probabilita'.

Inoltre, questo principio non puo' essere adoperato in situazioni appena piu' generali di quelle prima descritte: ad esempio, se immaginiamo di lanciare infinite volte un dado, gli eventi elementari sono chiaramente infiniti, e quindi la formula 1 non ha piu' senso, e dunque saremmo in difficolta' anche nel valutare probabilita' di eventi assai semplici, come il primo 5 al terzo lancio. Non solo, ma anche quando gli eventi elementari sono in numero finito, non é sempre ragionevole considerarli equiprobabili: basta pensare al caso di una moneta truccata.

Nel XIX secolo, furono escogitate e adottate molte definizioni diverse di probabilita', spesso in aperto contrasto l'una con l'altra: citeremo solo la definizione *frequentista* (ideata dal Venn), quella *soggettivista* (dovuta a De Morgan), e quella *logicista* (a opera di Boole). Il cosiddetto Problema dei *Fondamenti* del Calcolo delle Probabilita' consiste proprio nel

superare le barriere che separano questi filoni di pensiero. I contrasti si protrassero anche nel XX secolo, che vide la ripresa dei filoni suddetti, ad opera di von Mises e Reichenbach per quanto riguarda il frequentismo, di Wittgenstein e Keynes per il logicismo, e di Lord Ramsey e il nostro de Finetti per il soggettivismo. Tuttora il problema é insoluto, ma per fortuna la Teoria delle Probabilita' si é sviluppata indipendentemente dai suoi Fondamenti, grazie alla rivoluzionaria opera del russo N. Kolmogorov, che nel 1933 propose un'assiomatica comune a tutte le ideologie: in questo modo, il Calcolo delle Probabilita' divenne una vera e propria teoria matematica, sorprendentemente vicina a quella ben nota dell'Integrazione. Cio', oltre a provocare un vero e proprio *decollo* del Calcolo delle Probabilita', permise e permette tuttora di interpretare i vari problemi di una teoria nel linguaggio dell'altra, e di individuare soluzioni e nuovi arricchimenti dell'una grazie ai progressi dell'altra.

Capitolo 1

L'assiomatica di Kolmogorov

L'idea di base del Kolmogorov consiste nel considerare la totalità degli eventi elementari come un vero e proprio insieme: tale insieme, denotato solitamente con Ω , viene detto *spazio campionario*, o anche *spazio degli eventi*. Abbiamo già osservato che ogni evento E è perfettamente descritto quando siano individuati ed elencati tutti gli eventi elementari favorevoli ad E , dunque l'evento E si può *identificare* con il sottoinsieme di Ω , costituito proprio dagli eventi elementari favorevoli a E .

D'altra parte, comunque si scelga un sottoinsieme A di Ω , si può senz'altro prendere in considerazione il seguente evento: *si verifica uno degli eventi elementari che fanno parte di A* . Se denotiamo questo evento con \tilde{A} , è chiaro che A è proprio l'insieme degli eventi elementari favorevoli ad \tilde{A} .

Possiamo cioè *confondere* ogni sottoinsieme di Ω con il corrispondente evento, e viceversa; in particolare, denoteremo con il simbolo \emptyset l'evento impossibile (in qualunque modo lo si voglia descrivere), e con il simbolo Ω l'evento certo: infatti, è *certo* che almeno uno degli elementi di Ω si verifica, per definizione stessa di Ω .

1.1 L'algebra degli eventi

Ora, diventa importante trasformare il linguaggio corrente, mediante il quale si descrivono gli eventi, in termini di insiemistica. Infatti, un evento E può essere descritto in molti

modi differenti, mentre l'insieme che lo rappresenta é unico (una volta individuato lo spazio campionario Ω). Per comodita', in questi primi approcci, indicheremo con le lettere E, F, \dots gli eventi, e rispettivamente con E^*, F^*, \dots gli insiemi che li rappresentano. Quali regole bisogna seguire per descrivere *combinazioni* di due o piu' eventi? Vediamo alcuni primi esempi.

1. Se A e B sono due eventi, si ha la regola:

$$(A \text{ oppure } B)^* = A^* \cup B^*.$$

L'evento in questione viene a volte chiamato *disgiunzione* di A e B .

2. Nella situazione di cui sopra, si ha:

$$(A \text{ e } B)^* = A^* \cap B^*.$$

Questo evento si chiama di solito *congiunzione* di A e B . Se la congiunzione di A e B é impossibile, cioé se $A^* \cap B^* = \emptyset$, allora si dice che A e B sono *incompatibili*.

3. Per ogni evento A , si ha:

$$(A \text{ non si verifica})^* = (A^*)^c.$$

Questo evento si dice *negazione* di A .

4. Supponiamo che l'evento B si verifichi tutte le volte che si verifica l'evento A ; allora diremo che A *implica* B , e risulta

$$A^* \subset B^*.$$

In questo caso, le negazioni dei due eventi stanno in relazione inversa: se *non* si verifica B , allora *non* si verifica A , e quindi $(B^*)^c \subset (A^*)^c$, in accordo con le leggi di de Morgan.

5. Se A e B sono due eventi qualsiasi, si ha

$$(A, \text{ ma non } B)^* = A^* \setminus B^*.$$

D'ora in poi, identificheremo senz'altro ciascun evento con il sottoinsieme che gli corrisponde, eliminando la notazione con l'asterisco. Così, diremo che \emptyset é l'evento impossibile, che Ω é l'evento certo, che A^c é la negazione dell'evento A , etc. A titolo d'esempio, consideriamo le seguenti formule d'insiemistica:

- a) $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$;
- b) $A \cup B = A \cup (B \setminus A)$;
- c) $B \setminus A = B \setminus (A \cap B)$;
- d) $(A \setminus B) \cup (B \setminus A) = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$.

Come si traducono queste formule, se riguardiamo A e B come eventi? Diamo qui di seguito le risposte, ma invitiamo il lettore a rifletterci su, per convincersi.

a) Se non é vero che si verifica uno dei due eventi, allora né A né B si verifica (e viceversa).

b) L'evento ' A oppure B ' é descrivibile come congiunzione di due eventi incompatibili: o 'si verifica A ', oppure ' A non si verifica, ma si verifica B '.

c) L'evento ' B si verifica, ma A no' si puo' esprimere equivalentemente dicendo che ' B si verifica, ma non insieme ad A '.

d) L'evento in questione é 'uno solo tra A e B si verifica', e puo' essere espresso dicendo 'si verifica almeno uno dei due, ma non entrambi'. Questo evento é detto anche *differenza simmetrica* tra A e B , e si denota anche con $A \Delta B$.

Presentiamo ora qualche problma opposto. Siano A, B, C tre eventi, e considerimo le seguenti proposizioni:

- e) 'Si verifica A , ma nessuno degli altri due'.
- f) 'Si verifica A , e almeno uno degli altri due'.
- g) 'Si verifica A , e si verifica esattamente uno degli altri due'.
- h) 'Si verificano B e C , ma non A '.

i) ‘Si verifica uno solo dei tre’.

l) ‘Si verifica al massimo uno dei tre’.

Come si rappresentano insiemisticamente gli eventi descritti? Di seguito, daremo le risposte, ma consigliamo il lettore di consultarle solo **dopo** aver formulato le sue.

e) $A \setminus (B \cup C)$; **f)** $A \cap (B \cup C)$; **g)** $A \cap (B \Delta C)$; **h)** $(B \cap C) \setminus A$;

i) $(A \cup B \cup C) \setminus ((A \cap B) \cup (B \cap C) \cup (C \cap A))$; **l)** $((A \cap B) \cup (B \cap C) \cup (C \cap A))^c$.

1.2 La Probabilità

Avendo rappresentato gli eventi come sottoinsiemi dello spazio campionario Ω , assegnare una probabilità a tali eventi significa definire una funzione d'insieme $P : \mathcal{P}(\Omega) \rightarrow [0, 1]$. In questo modo, ogni evento avrebbe la sua probabilità, a patto che certe condizioni siano soddisfatte. Una di tali condizioni è che l'evento \emptyset abbia probabilità nulla, e l'evento certo probabilità 1. Un'altra condizione è la monotonia: se l'evento A implica l'evento B , vuol dire che B si verifica più facilmente di A , e quindi dovrà avere probabilità maggiore. Dunque, dev'essere soddisfatta la seguente implicazione: $A \subset B \Rightarrow P(A) \leq P(B)$.

Ma, oltre a queste richieste intuitive e irrinunciabili, l'assiomatica di Kolmogorov raccoglie altre caratteristiche comuni a tutte le definizioni *sensate* che sono scaturite dai vari filoni di pensiero, anche al fine di avere strumenti più potenti di calcolo. Come primo approccio, si può formulare la seguente definizione.

Definizione 1.1 Dato uno spazio campionario Ω , una *probabilità* su Ω è un'applicazione $P : \mathcal{P}(\Omega) \rightarrow [0, 1]$ che goda delle seguenti proprietà'.

i) $P(\Omega) = 1$.

ii) $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$ per ogni $A, B \subset \Omega$, con $A \cap B = \emptyset$.

La seconda condizione è detta *additività* (semplice), e da essa deriva sia che $P(\emptyset) = 0$ (basta porre $A = B = \emptyset$), sia la monotonia: se $A \subset B$, allora $B = A \cup (B \setminus A)$ e quindi $P(B) = P(A) + P(B \setminus A) \geq P(A)$.

E' poi chiaro che, per induzione, la condizione ii) si trasporta anche al caso di unioni finite d'insiemi a due a due disgiunti.

In seguito, avremo bisogno di rafforzare la ii), estendendola anche al caso di unioni *numerabili* d'insiemi a due a due disgiunti (additivita' numerabile), ma per ora ne faremo a meno.

Prima di passare ad esempi concreti di calcolo, diamo un teorema che raggruppa alcune proprieta' elementari di una probabilita', che verifichi le condizioni i) e ii) della definizione 1.1.

Teorema 1.2 *Sia Ω uno spazio campionario, e sia $P : \mathcal{P}(\Omega) \rightarrow [0, 1]$ una probabilita' su tale spazio. Allora si ha:*

(1) *Se A e B sono due eventi, con $A \subset B$, allora $P(A) \leq P(B)$, e inoltre $P(B \setminus A) = P(B) - P(A)$.*

(2) *Se A_1, \dots, A_n sono n eventi, a due a due incompatibili, si ha*

$$P\left(\bigcup_{i=1}^n A_i\right) = \sum_{i=1}^n P(A_i).$$

(3) *Se A e B sono due eventi qualsiasi, risulta*

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B).$$

(4) *Se A_1, A_2, \dots, A_n sono eventi qualsiasi, si ha*

$$\begin{aligned} P\left(\bigcup_{i=1}^n A_i\right) &= \sum_i P(A_i) - \sum_{i < j} P(A_i \cap A_j) + \\ &+ \sum_{i < j < l} P(A_i \cap A_j \cap A_l) - \dots + (-1)^{n+1} P(A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n). \end{aligned}$$

Dimostrazione. Le (1) e (2) sono gia' state provate. Per quanto riguarda la (3), notiamo che si ha $A \cup B = A \cup (B \setminus A)$: in questo modo l'evento $A \cup B$ si presenta come disgiunzione di due eventi incompatibili, per cui

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B \setminus A).$$

Ora, si ha $B \setminus A = B \setminus (A \cap B)$: così l'insieme $B \setminus A$ si rappresenta come differenza di due insiemi, uno contenuto nell'altro; per la proprietà (1), si ha allora

$$P(B \setminus A) = P(B) - P(B \cap A)$$

e infine

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B).$$

Resta da provare la (4): anziché presentare una dimostrazione esaustiva, proveremo tale formula solo per il caso $n = 3$, lasciando al lettore il compito di dimostrare (se vuole) la formula in tutta generalità, servendosi del principio d'induzione.

Intanto, osserviamo che la (4) vale per il caso $n = 2$: infatti, in tale situazione, la (4) si riduce alla (3). Proviamo allora la (4), per il caso di tre eventi, A, B, C . Si ha

$$A \cup B \cup C = (A \cup B) \cup C$$

e quindi, per la (2), si ha

$$\begin{aligned} P(A \cup B \cup C) &= P(A \cup B) + P(C) - P((A \cup B) \cap C) = \\ &= P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) - P((A \cap C) \cup (B \cap C)) = \\ &= P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) - (P(A \cap C) + P(B \cap C) - P(A \cap B \cap C)) = \\ &= P(A) + P(B) + P(C) - [P(A \cap B) + P(B \cap C) + P(C \cap A)] + P(A \cap B \cap C). \end{aligned}$$

□

La formula espressa nella (4) prende il nome di *principio d'inclusione-esclusione*, per ovvii motivi di immagine. Per quanto possa sembrare complicata, essa é uno strumento molto efficace per il calcolo di certe probabilità, e comunque può essere usata come verifica, qualora il calcolo venga effettuato con metodi alternativi.

Capitolo 2

Applicazioni del Calcolo Combinatorio

In questo capitolo vedremo alcuni primi esempi di problemi probabilistici, che si possono risolvere mediante il Calcolo Combinatorio. In tutti questi problemi adopereremo il Principio di Equiprobabilità di Laplace, e vedremo l'utilità delle formule trovate nel capitolo precedente.

Esempio 1 Qual'è la probabilità di fare 13 al totocalcio, giocando 10 *fisse* e 3 *triple*?

Gli eventi elementari sono tutte le possibili colonne di risultati, e quindi si tratta di tutte le *disposizioni* di 3 oggetti a 13 a 13: il loro numero è 3^{13} .

Ora, giocando 10 fisse e 3 triple, possiamo far tredici se si verificano i dieci pronostici che abbiamo fissato, mentre le altre 3 partite possono sortire qualunque risultato: queste sono dunque le 3^3 possibilità favorevoli, pertanto la probabilità cercata è $\frac{3^3}{3^{13}} = \frac{1}{3^{10}}$.

Esempio 2 Si scelgano a caso 6 carte da un mazzo di 40 napoletane. Qual'è la probabilità di avere l'asso di denari? E di avere almeno un asso?

Qui, gli eventi elementari sono tutte le possibili scelte delle 6 carte in nostro possesso. Supponendo, come di solito accade, che l'ordine in cui riceviamo le 6 carte non abbia

importanza, gli eventi elementari sono tanti quante le *combinazioni* di 40 oggetti a 6 a 6, cioè il numero $\binom{40}{6} = \frac{40!}{6!34!}$.

In quanti modi si può verificare che abbiamo l'asso di denari? Tolto l'asso in questione, restano 39 carte, delle quali se ne debbono scegliere 5: abbiamo dunque $\binom{39}{5} = \frac{39!}{5!34!}$ possibilità a favore. La probabilità cercata è dunque il rapporto $\frac{\binom{39}{5}}{\binom{40}{6}} = \frac{6}{40}$.

Passiamo ora al secondo problema. Qui, conviene calcolare la probabilità della *negazione* dell'evento in questione: cioè, la probabilità di non avere alcun asso. Gli eventi elementari sono sempre gli stessi, e quelli favorevoli sono invece $\binom{36}{6}$, cioè tutte le combinazioni, a 6 a 6, delle 36 carte che non sono assi. Dunque, la probabilità di non avere alcun asso è $\frac{\binom{36}{6}}{\binom{40}{6}}$, cioè circa 0.507. La probabilità di avere almeno un asso è allora circa $1 - 0.507$, cioè 0.493.

Esempio 3 Nella stessa situazione dell'esempio precedente, calcolare la probabilità che abbiamo in mano esattamente 2 assi.

Qui, conviene scindere il problema, e risolverne prima uno più semplice: indichiamo con $E(d, c)$ l'evento 'Abbiamo in mano l'asso di denari e quello di coppe, e nessun altro asso'. La probabilità di $E(d, c)$ si calcola come quella dell'asso di denari:

$$P(E(d, c)) = \frac{\binom{36}{4}}{\binom{40}{6}}.$$

Ora, l'evento che interessa noi è l'unione di 6 eventi disgiunti: gli eventi del tipo $E(d, c)$, $E(d, s)$, $E(d, b)$ etc., che sono ottenuti precisando ogni volta quali sono i due assi che abbiamo in mano. Si tratta di 6 eventi, perché ciascuno di essi corrisponde a una combinazione di 4 oggetti (gli assi) a due a due. Chiaramente, la probabilità di ciascuno dei 6 eventi è sempre $\frac{\binom{36}{4}}{\binom{40}{6}}$, e quindi la probabilità cercata è $6 \frac{\binom{36}{4}}{\binom{40}{6}} \approx 0.092$.

Esempio 4 Nella stessa situazione dell'esempio precedente, calcolare la probabilità che abbiamo in mano esattamente 3 assi.

Il procedimento è simile al precedente. Tenendo conto che i tre assi si possono scegliere in 4 modi diversi, e che la probabilità di avere, poniamo, gli assi di denari, coppe

e spade, e nessun altro asso, vale $\frac{\binom{36}{3}}{\binom{40}{6}}$, se ne deduce che l'evento in questione ha probabilita' $\frac{4\binom{36}{3}}{\binom{40}{6}} \approx 0.00744$.

Gli esercizi precedenti ci portano a concludere che, almeno con una certa approssimazione, avere qualche asso o non averne nessuno hanno circa la stessa probabilita', e che averne piu' di due é quasi impossibile.

Esempio 5 Si lanci 10 volte una moneta non truccata. Qual' é la probabilita' dei seguenti eventi:

- a) osservare 7 teste e 3 croci;
- b) osservare almeno 8 teste;
- c) la prima testa appare al 6° lancio;
- d) al nono lancio appare testa per la terza volta?

a) Gli eventi elementari sono 2^{10} , tante quante le disposizioni con ripetizioni di due oggetti a 10 a 10. Per determinare gli eventi favorevoli, basta in pratica individuare i tre lanci in cui escono le croci, e questo si puo' fare in $\binom{10}{3}$ modi diversi. La probabilita' cercata é dunque: $\frac{\binom{10}{3}}{2^{10}} \approx 0.117$.

b) 'Almeno 8 teste' é l'unione degli eventi: 'esattamente 8 teste', 'esattamente 9 teste', 'esattamente 10 teste', i quali sono ovviamente incompatibili. La probabilita' di ciascuno di questi si trova analogamente a quella del punto a), per cui

$$P(\text{almeno 8 teste}) = \frac{\binom{10}{8} + \binom{10}{9} + 1}{2^{10}} \approx 0.0547$$

Come si vede, é molto piu' probabile che escano esattamente 7 teste, che almeno 8.

c) Basta osservare che l'evento descritto si verifica se e solo se esce sempre croce, nei primi 5 lanci, ed esce testa al sesto. La probabilita' é dunque $2^{-6} \approx 0.0156$.

d) L'evento si descrive richiedendo che al nono lancio esca testa, e che nei primi 8 lanci si siano avute esattamente 2 teste. Il numero degli eventi favorevoli é allora $2\binom{8}{2}$: per ciascuna delle $\binom{8}{2}$ scelte dei due lanci in cui esce testa, abbiamo ancora

da scegliere se al decimo lancio esce testa o croce. La probabilit  cercata   quindi $\frac{\binom{8}{2}}{2^9} \approx 0.0547$.

Esempio 6 In un lago vi sono N pesci, con N incognito. Se ne pescano 100, che vengono marchiati e poi rimessi nel lago in buona salute. Dopo qualche tempo si torna a pesca, e si prendono 24 pesci, dei quali 6 recano il marchio della prima pescata. Qual   il valore di N per cui il numero (6) di pesci marchiati risulti il piu' probabile?

Per ogni N , si denoti con $f(N)$ la probabilit  che, nella seconda pesca, i pesci marchiati siano 6. Risulta:

$$f(N) = \frac{\binom{100}{6} \binom{N-100}{18}}{\binom{N}{24}} = \frac{100!24!(N-100)!(N-24)!}{6!94!18!N!(N-118)!}$$

Valutando il rapporto $\frac{f(N+1)}{f(N)}$, abbiamo

$$\frac{f(N+1)}{f(N)} = \frac{(N-99)!(N-23)!N!(N-118)!}{(N-117)!(N+1)!(N-100)!(N-24)!} = \frac{(N-99)(N-23)}{(N+1)(N-117)}.$$

Imponendo la condizione $\frac{f(N+1)}{f(N)} \geq 1$, otteniamo

$$\frac{f(N+1)}{f(N)} \geq 1 \Leftrightarrow N \leq 399$$

il che significa che $f(N)$ va crescendo, finch  N non raggiunge il valore 399, raggiunge il massimo per $N = 400$, e poi decresce.

In definitiva, il valore di N per cui l'evento osservato assume probabilit  massima   400.

Esempio 7 Si devono sistemare 10 palline numerate in 16 scatole. Ogni scatola puo' contenere al massimo una pallina. Calcolare la probabilit  dei seguenti eventi:

- a) la prima scatola resta vuota;
- b) le prime tre scatole restano vuote;
- c) tra le prime 8 scatole, esattamente 2 restano vuote;
- d) le palline si distribuiscono in 10 scatole consecutive;

e) l'ultima scatola occupata é la numero 13.

Intanto, il numero degli eventi elementari é $\frac{16!}{6!}$, cioè quello di tutte le disposizioni di 16 oggetti a 10 a 10: si elencano, in ordine, le scatole occupate, senza ammettere ripetizioni.

a) l'evento descritto equivale a disporre le 10 palline nelle ultime 15 scatole, e quindi vi sono $\frac{15!}{5!}$ eventi elementari a favore. La probabilita' richiesta é pertanto data dal rapporto

$$\frac{\frac{15!}{5!}}{\frac{16!}{6!}} = \frac{3}{8};$$

b) analogamente, gli eventi favorevoli sono $\frac{13!}{3!}$, e quindi la probabilita' é

$$\frac{\frac{13!}{3!}}{\frac{16!}{6!}} = \frac{1}{28};$$

c) vi sono esattamente $\binom{8}{2}$ modi per scegliere, tra le prime 8, le due scatole che restano vuote. Per ciascuna di tali scelte, si hanno poi $\binom{8}{4}$ modi per scegliere le altre 4 scatole occupate; una volta scelte le 10 scatole occupate, esistono ancora $10!$ modi per distribuire le 10 palline in queste 10 scatole. Si ottiene perciò

$$f(c) = \binom{8}{2} \binom{8}{4} 10!$$

e la probabilita' cercata vale

$$P(c) = \binom{8}{2} \frac{\frac{8!}{4!} \frac{10!}{4!}}{\frac{16!}{6!}} = \frac{35}{143} \approx .2447552448;$$

d) basta notare che esistono 6 possibili elenchi di 10 scatole consecutive, a ciascuno dei quali competono $10!$ eventi elementari favorevoli. La probabilita' cercata é dunque

$$6 \frac{10!6!}{16!};$$

e) l'evento in questione si descrive richiedendo che la tredicesima scatola sia occupata, e che dalla quattordicesima alla sedicesima siano tutte vuote: vi sono $\binom{12}{3}$ modi per scegliere le 9 scatole occupate, tra le prime 12, e per ciascuna di tali scelte vi

sono $10!$ modi per distribuire le 10 palline nelle dieci scatole prescelte. La probabilit  cercata   dunque

$$P(e) = \frac{\binom{12}{3} 10!}{\frac{16!}{6!}} = \frac{5}{182}.$$

L'ultimo esempio visto puo' essere generalizzato, per esempio cercando la probabilit  che la *penultima* scatola piena sia la k^{ma} , per k variabile tra 9 e 15.

I problemi fin qui presentati sono solo alcuni esempi nella vasta gamma che riguarda il Calcolo Combinatorio, e non sono certo i piu' complicati. Noi non entreremo nella discussione di problemi piu' complessi, anche per motivi di spazio; ci limitiamo a presentare alcune formule, che possono essere utili.

$$\begin{aligned} \binom{n+1}{h} &= \binom{n}{h} + \binom{n}{h-1}; \\ \binom{n+k}{m} &= \sum_{j=0}^m \binom{n}{j} \binom{k}{m-j}, \quad (0 \leq m \leq k); \\ \binom{n+k}{k} &= \sum_{j=0}^n \binom{j+k-1}{j} = \sum_{j=0}^k \binom{j+n-1}{j}; \\ \binom{n+k}{k} &= \sum_{j=0}^k \binom{j+k}{k} \binom{n-1-j}{k-j}, \quad (k < n). \end{aligned}$$

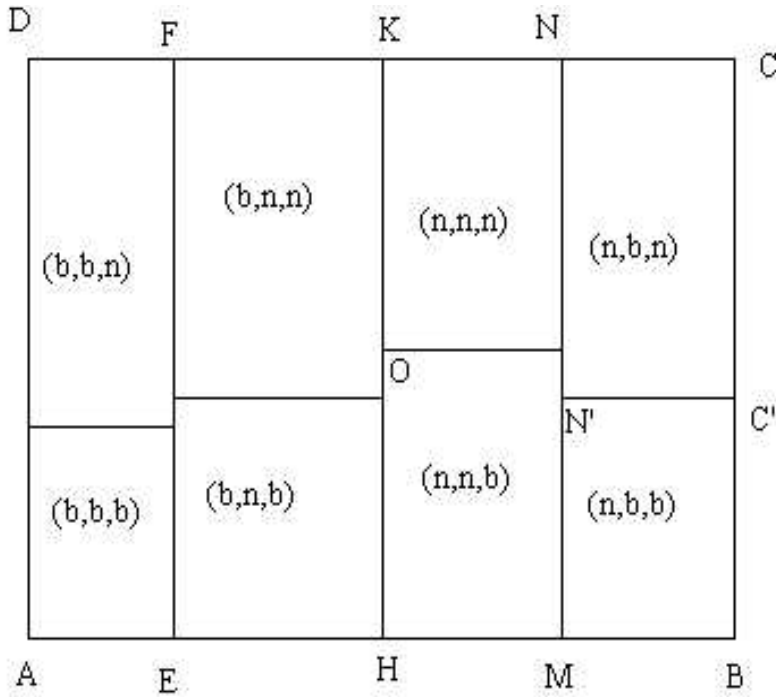
Capitolo 3

Probabilità condizionate e Indipendenza

Si consideri il seguente problema. In un recipiente sono contenute 4 palline bianche e 4 nere; da esso estraiamo a caso tre palline, una alla volta, con l'avvertenza di rimettere a posto le eventuali palline nere, man mano che escono, e di lasciare fuori invece quelle bianche. Qual'è la probabilità che la terza palla estratta sia bianca?

Questo problema non è formulato in termini di equiprobabilità: gli eventi elementari dovrebbero essere 8, cioè tutte le disposizioni dei 2 colori a 3 a 3; ma la terna (b, b, b) è indubbiamente meno probabile della terna (n, n, n) .

Cio' accade perché, a seconda del risultato della prima estrazione, le probabilità di b e n cambiano, e quindi sono *condizionate* da quello che è accaduto in precedenza. Il problema potrebbe essere interpretato graficamente come segue. Immaginiamo che lo spazio Ω sia raffigurato dal rettangolo $ABCD$ in figura, e interpretiamo ogni evento come un sottoretangolo di Ω , avente area proporzionale alla probabilità dell'evento in questione. Dunque, per rappresentare i due risultati della prima estrazione dividiamo Ω in due sottoretangoli uguali, $AHKD$ e $HBCK$: il primo rappresenta l'evento prima estratta bianca e il secondo l'evento prima estratta nera. Passando alla seconda estrazione, suddivideremo il rettangolo $HBCK$ in due parti uguali, $HMNK$ e $MBCN$, mentre il rettangolo $AHKD$ andrà suddiviso in due parti di area diversa: $AEFD$ rappresenta l'evento prima estratta bianca e



seconda bianca, e $EHKF$ l'evento prima estratta bianca e seconda nera; l'area di $AEFD$ dovrà essere $\frac{3}{7}$ di quella di $AHKD$, mentre l'area di $EHKF$ sarà $\frac{4}{7}$ dell'area di $AHKD$: infatti, in questo modo si rispettano le proporzioni tra le probabilità di questi due eventi, *dato che* la prima palla estratta sia bianca. Abbiamo così rappresentati i quattro eventi, (b, b) , (b, n) , (n, b) , (n, n) , con altrettanti rettangoli, e possiamo dedurre che

$$P(b, b) = \frac{3}{14}, \quad P(b, n) = \frac{4}{14}, \quad P(n, b) = P(n, n) = \frac{1}{4}.$$

Passando alla terza estrazione, suddivideremo in maniera analoga i quattro rettangoli $AEFD$, $EHKF$, $HMNK$, $MBCN$, a seconda del risultato delle prime due estrazioni: ad esempio, per rappresentare l'evento (n, b, b) e l'evento (n, b, n) divideremo il rettangolo $MBCN$ (corrispondente all'evento (n, b)) in due parti, $MBC'N'$ e $N'C'CN$: la prima corrisponde all'evento terza estratta bianca, e quindi avrà area pari a $\frac{3}{7}$ di quella di $MBCN$ mentre l'altra, corrispondente all'evento terza estratta nera, avrà area pari a $\frac{4}{7}$ dell'area di $MBCN$. Corrispondentemente, otteniamo: $P(n, b, b) = \frac{3}{28}$, $P(n, b, n) = \frac{4}{28} = \frac{1}{7}$. Procedendo così, rappresenteremo tutte le 8 terne, e avremo di ciascuna la giusta probabilità. Ad esempio, $P(b, b, b) = \frac{2}{6} \frac{3}{14} = \frac{1}{14}$ e $P(n, n, n) = \frac{1}{8}$. Come si vede, l'evento (n, n, n) non è il più probabile degli 8: si ha infatti $P(b, n, n) = \frac{4}{7} \frac{4}{14} = \frac{8}{49} > \frac{1}{7}$.

Infine, se si vuole la probabilita' che la terza estratta sia bianca, bisogna calcolare

$$P(B_3) = P(b, b, b) + P(b, n, b) + P(n, n, b) + P(n, b, b) = \frac{1}{14} + \frac{6}{49} + \frac{1}{8} + \frac{3}{28} \approx 0.426$$

ove B_3 denota l'evento terza estratta bianca.

3.1 Probabilita' condizionate

Ora, generalizziamo il discorso. Supponiamo che vi sia un evento A del quale non conosciamo a priori la probabilita', ma che sia intersezione di due eventi E e F , di cui si sappia:

1) la probabilita' di F ;

2) la probabilita' che si verifichi E , una volta che sia verificato F : tale *nuova* probabilita' viene denotata con $P(E|F)$ e viene detta *probabilita' condizionata* di E , *dato* F .

Ad esempio, nel problema precedente, A potrebbe essere l'evento 'bianca nella prima e nella seconda estrazione', E l'evento 'bianca nella seconda estrazione' ed F l'evento 'bianca nella prima estrazione'.

Il procedimento seguito in precedenza ci porta a concludere che

$$P(A) = P(E \cap F) = P(F)P(E|F). \quad (3.1)$$

La formula 3.1 porta a *definire* la probabilita' $P(E|F)$ come il rapporto $\frac{P(E \cap F)}{P(F)}$, secondo la seguente

Definizione 3.1 Data una probabilita' P su uno spazio Ω , e dati due eventi A e B in Ω , con $P(B) > 0$, si dice *probabilita' condizionata* di A rispetto a B (o anche di A , *dato* B) la quantita'

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}. \quad (3.2)$$

Si noti che la definizione 3.1 e la formula 3.2 non hanno senso quando $P(B) = 0$, mentre la formula 3.1 risulta verificata anche in questo caso, indipendentemente dal valore (reale) che si voglia attribuire a $P(E|F)$.

Dal punto di vista teorico, la relazione 3.2 individua una vera e propria probabilit  sullo spazio B : in effetti, *dato* che B si verifica, lo spazio di probabilit  Ω si *riduce*, restringendosi al solo evento B , che dunque diventa certo (e infatti $P(B|B) = 1$); similmente, ogni evento A si *depura* di cio' che non   compatibile con B , restringendosi dunque ad $A \cap B$, e la nuova probabilit  di A diventa proporzionale a $P(A \cap B)$.

Le conseguenze piu' importanti di questo nuovo concetto sono tre teoremi, non difficili ma molto utili: la *regola moltiplicativa*, il teorema di *probabilit  globale* e la *regola di Bayes*.

Teorema 3.2 (Regola Moltiplicativa) *In uno spazio di probabilit  (Ω, P) siano dati n eventi A_1, \dots, A_n , tali che $P(A_1 \cap \dots \cap A_{n-1}) > 0$. Allora si ha*

$$P\left(\bigcap_{i=1}^n A_i\right) = P(A_n | \bigcap_{i=1}^{n-1} A_i) P(A_{n-1} | \bigcap_{i=1}^{n-2} A_i) \dots P(A_2 | A_1) P(A_1). \quad (3.3)$$

Dimostrazione. Per il caso $n = 2$, l'enunciato del teorema si riduce alla definizione stessa di probabilit  condizionata, v. 3.1. In generale, si puo' procedere per induzione: supponendo che la formula 3.3 valga per un certo n , la proveremo valida per $n + 1$. Siano dunque A_1, \dots, A_n, A_{n+1} eventi di Ω , tali che $P(\cap_{i=1}^n A_i) > 0$. Intanto, possiamo dire che

$$P\left(\bigcap_{i=1}^{n+1} A_i\right) = P(E \cap A_{n+1}) = P(A_{n+1} | E) P(E),$$

avendo denotato con E l'evento $E = \cap_{i=1}^n A_i$. Utilizziamo per E la formula 3.3, (che supponiamo valida per induzione):

$$P(E) = P(A_n | \bigcap_{i=1}^{n-1} A_i) P(A_{n-1} | \bigcap_{i=1}^{n-2} A_i) \dots P(A_2 | A_1) P(A_1).$$

Si ha pertanto

$$P\left(\bigcap_{i=1}^{n+1} A_i\right) = P(A_{n+1} | \bigcap_{i=1}^n A_i) P(A_n | \bigcap_{i=1}^{n-1} A_i) P(A_{n-1} | \bigcap_{i=1}^{n-2} A_i) \dots P(A_2 | A_1) P(A_1)$$

che   appunto la formula 3.3 per il caso di $n + 1$ eventi. \square

Vedremo presto importanti applicazioni di questa regola, nel caso di indipendenza. Per il momento, possiamo osservare che essa puo' essere adoperata ad esempio nel problema di urna visto in precedenza, per calcolare rapidamente la probabilit  di eventi del tipo 'palla

nera nelle prime due estrazioni, e bianca nelle due estrazioni successive': un evento del genere é infatti intersezione di 4 eventi A_1, A_2, A_3 e A_4 , A_i riferito all'estrazione i -esima, ciascuno dei quali stabilisce il colore della palla estratta nella estrazione a cui é riferito:

$$P(A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4) = \frac{1}{2} \frac{1}{2} \frac{1}{2} \frac{3}{7}.$$

Teorema 3.3 (Probabilita' Globale)

Supponiamo che A_1, A_2, \dots, A_n siano n eventi, a due a due incompatibili, tutti con probabilita' non nulla, e tali che $\cup_{i=1}^n A_i = \Omega$. Allora, per ogni evento E , risulta

$$P(E) = \sum_{i=1}^n P(E|A_i)P(A_i).$$

Dimostrazione. Essendo $\cup_{i=1}^n A_i = \Omega$, si ha anche

$$\bigcup_{i=1}^n (E \cap A_i) = E \cap \Omega = E.$$

Dall'ipotesi d'incompatibilita' segue

$$P(E) = \sum_{i=1}^n P(E \cap A_i) = \sum_{i=1}^n P(E|A_i)P(A_i),$$

l'ultima relazione valendo per la (3.1). \square

Ad esempio, supponiamo di lanciare due volte un dado onesto. Qual'é la probabilita' che la *somma* S dei due numeri usciti sia 5? Per $i = 1, 2, \dots, 6$, denotiamo con A_i l'evento 'al primo lancio esce la faccia i '. Allora, si ha

$$P("S = 5") = \sum_{i=1}^6 P("S = 5"|A_i)P(A_i) = \sum_{i=1}^4 P("S = 5"|A_i)P(A_i) = 4 \frac{1}{36} = \frac{1}{9}.$$

Teorema 3.4 (Bayes) *Siano A_1, A_2, \dots, A_n eventi come nel teorema precedente. Fissato un qualsiasi evento B in Ω , con $P(B) > 0$, risulta*

$$P(A_j|B) = \frac{P(B|A_j)P(A_j)}{\sum_{i=1}^n P(B|A_i)P(A_i)},$$

per qualsiasi indice j tra 1 e n .

Dimostrazione. Fissato j , si ha, al solito:

$$P(A_j|B) = \frac{P(B \cap A_j)}{P(B)} = \frac{P(B|A_j)P(A_j)}{P(B)},$$

applicando il teorema 3.3, ricaviamo

$$P(B) = \sum_{i=1}^n P(B|A_i)P(A_i)$$

e quindi immediatamente l'asserto. \square

Il teorema di Bayes si puo' interpretare come un primo strumento per fare *inferenza*, ossia dedurre informazioni (in termini di probabilita') su eventi poco conosciuti, mediante l'osservazione di certi fenomeni (l'evento B nell'enunciato funge proprio da fenomeno osservato). Ad esempio, ritornando all'esperimento precedente dell'urna, con 4 palle bianche e 4 nere, immaginiamo di giungere sul posto dell'esperimento un po' in ritardo, e di assistere soltanto alla terza estrazione; noi sappiamo quante palle c'erano nell'urna all'inizio, e qual'è la regola con cui si procede, dopo ogni estrazione, ma non vediamo le palle estratte prima: l'unica cosa che vediamo è la palla estratta per terza, e notiamo che essa è bianca; allora ci chiediamo: visto che la terza palla estratta è bianca, qual'è la probabilita' che le prime due palle estratte fossero bianche?

Possiamo indicare con (bb) , (bn) , (nb) , (nn) i quattro eventi incompatibili, che descrivono il risultato delle prime due estrazioni. L'evento osservato sarà denotato con B . Applicando il teorema di Bayes, avremo

$$\begin{aligned} P((bb)|B) &= \frac{P(B|(bb))P(bb)}{P(B|(bb))P(bb) + P(B|(bn))P(bn) + P(B|(nb))P(nb) + P(B|(nn))P(nn)} = \\ &= \frac{1/14}{1/14 + 3/28 + 6/49 + 1/8} = \frac{28}{167} = 0.167665. \end{aligned}$$

3.2 Indipendenza

Veniamo ora ad un concetto d'importanza fondamentale, collegato con le probabilita' condizionate: l'**indipendenza**.

Definizione 3.5 Dati due eventi A e B in uno spazio di probabilit  Ω , diremo che essi sono (mutuamente) *indipendenti* se risulta

$$P(A \cap B) = P(A)P(B). \quad (3.4)$$

In base alla definizione di probabilit  condizionata,   chiaro che, nel caso $P(B) > 0$, l'indipendenza tra A e B equivale alla relazione

$$P(A|B) = P(A), \quad (3.5)$$

ossia il verificarsi di B non modifica la probabilit  di A . Lo stesso si pu  dire, scambiando il ruolo dei due eventi, se $P(A) > 0$. La formula 3.4 svolge una doppia funzione: essa rende simmetrica la nozione in esame, e tiene in considerazione anche gli eventi di probabilit  nulla:   facile vedere infatti che, se un evento A ha probabilit  nulla, esso   indipendente da *tutti* gli eventi di Ω (incluso A stesso, per quanto possa apparire strano).

Ad esempio, se consideriamo l'esperimento di lanciare 15 volte una moneta, l'evento $A = \text{'testa al 4}^{\text{o}} \text{ lancio}'$ e l'evento $B = \text{'croce al 2}^{\text{o}} \text{'}$ sono indipendenti: questo   facile da controllare se la moneta   onesta, e quindi si pu  ricorrere al principio di equiprobabilit  di Laplace; ma negli altri casi, l'indipendenza tra eventi relativi a lanci differenti (come avviene appunto con A e B)   piuttosto un dato del problema, ossia si presume gi  soddisfatta, per come viene effettuato l'esperimento stesso. Se ad esempio si presume che tutti i lanci avvengano sempre nelle medesime condizioni,   chiaro che nessun risultato di un singolo lancio potr  modificare le probabilit  dei risultati di altri lanci; anzi, se si considerano due *gruppi* di lanci disgiunti (ad esempio, dal primo al settimo e dal decimo al quindicesimo), ogni evento relativo ai risultati del primo gruppo sar  indipendente da ogni evento relativo ai lanci del secondo gruppo (ad esempio, l'evento 'nei primi sette lanci escono almeno 4 teste'   senz'altro indipendente dall'evento 'nei lanci dal decimo al quindicesimo esce una sola testa'); mentre non si ha in genere indipendenza tra eventi relativi a gruppi di lanci sovrappoventisi: ad esempio, il verificarsi dell'evento 'esce sempre testa nei primi 7 lanci' aumentera' di molto la probabilit  dell'evento 'sempre testa nei primi 8 lanci', e render  invece impossibile l'evento 'esattamente 6 teste nei primi 9 lanci'.

Si lascia al lettore la dimostrazione del seguente teorema

Teorema 3.6 *Siano A e B due eventi in Ω . Allora si ha:*

1. *Se $P(B) = 0$, oppure $P(B) = 1$, allora A e B sono indipendenti, qualunque sia A .*
2. *Se $A \subset B$, e $0 < P(A) \leq P(B) < 1$, allora A e B non sono indipendenti.*
3. *Se $A \cap B = \emptyset$, allora A e B sono indipendenti se e solo se uno dei due ha probabilit  nulla.*
4. *Se A e B sono indipendenti, allora sono indipendenti anche le seguenti coppie di eventi:
 $(A, B^c), (A^c, B), (A^c, B^c)$.*

Studiamo ora la seguente situazione: si lanci un dado onesto due volte, in condizioni di indipendenza, e si considerino i seguenti eventi:

A = 'il primo numero uscito   dispari';

B = 'il secondo numero uscito   dispari';

C = 'la somma dei due numeri usciti   3'.

Si vede facilmente che A e B sono indipendenti, e hanno probabilit  $\frac{1}{2}$; si ha poi $P(C) = \frac{1}{18}$ (gli eventi favorevoli sono $(1, 2)$ e $(2, 1)$). E' anche immediato controllare che $P(A \cap C) = P((1, 2)) = P(A)P(C)$ e che $P(B \cap C) = P((2, 1)) = P(B)P(C)$, dunque i tre eventi in questione sono indipendenti a due a due. Tuttavia, *non vale* la legge moltiplicativa $P(A \cap B \cap C) = P(A)P(B)P(C)$, dato che $A \cap B \cap C$   impossibile. Dunque,   possibile che la formula moltiplicativa 3.4 valga per alcuni eventi, presi a due a due, ma non per tutti globalmente. Per ragioni pratiche, quando si debbono trattare piu' di due eventi, una condizione di effettiva indipendenza *globale* deve richiedere non solo che essi siano indipendenti a due a due, ma anche che ciascuno di loro sia indipendente da qualsiasi *combinazione* degli altri: per esempio, nel caso di tre eventi A, B, C , vorremmo che A fosse indipendente da B , da C , ma anche da $B \cap C$, da $B \cup C$, da $B \setminus C$ etc., e analogamente B dovra' essere indipendente da tutte le combinazioni di A e C , e lo stesso per C .

Si pensi quanto potrebbe esser complicata questa richiesta, quando si debbano prendere in considerazione numerosi eventi (anche infiniti, a volte!). Tuttavia, si puo' dimostrare che

l'indipendenza *globale* di cui stiamo parlando si riduce essenzialmente a richiedere nient'altro che la validità della regola moltiplicativa, estesa a un qualunque numero (finito) degli eventi in esame. Si perviene così alla seguente definizione.

Definizione 3.7 Sia \mathcal{A} una famiglia qualunque di eventi nello spazio Ω . Diciamo che gli eventi di tale famiglia sono (stocasticamente) *globalmente indipendenti* se risulta

$$P(A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n) = P(A_1)P(A_2)\dots P(A_n)$$

per qualsiasi famiglia finita d'insiemi A_1, A_2, \dots, A_n presi in \mathcal{A} .

Come abbiamo già detto, la condizione espressa nella definizione 3.7 equivale a richiedere che ognuno degli eventi della famiglia \mathcal{A} è indipendente da qualunque *combinazione* degli altri eventi della famiglia. Non faremo dimostrazioni, ma ci limitiamo a precisare che solitamente la situazione di indipendenza globale si verifica quando l'esperimento in questione consiste di svariate ripetizioni (anche infinite) di uno stesso fenomeno, purché ciascuna prova venga effettuata nelle stesse condizioni: ad esempio, se si suppone di fare 150 lanci di una coppia di dadi, si possono ottenere 150 eventi globalmente indipendenti, A_1, \dots, A_{150} , imponendo che A_i sia l'evento 'al lancio i -esimo la somma dei risultati è 5' (più in generale, A_i può descrivere un qualsiasi risultato, purché riguardante esclusivamente il lancio i -esimo).

Esercizi 3.8 1. Una coppia di sposi ha due bambini, di cui non conosciamo il sesso.

Qual'è la probabilità che uno solo dei figli sia maschio, dato che il primo è maschio?

Qual'è la probabilità che uno solo dei figli sia maschio, dato che almeno uno è maschio?

2. Un recipiente contiene r palle rosse e n palle nere. Si estrae una palla a caso, e la si rimette nel recipiente insieme con altre c palle uguali (r , n e c sono numeri interi maggiori di 1). Dopo tre estrazioni, qual'è la probabilità che:

- a) si sia estratta sempre palla rossa?
- b) si sia estratta una sola palla rossa?
- c) la terza palla estratta sia nera?

3. Con riferimento al punto a) del problema precedente, si supponga di poter aumentare indefinitamente il numero delle estrazioni; si provi che la probabilit  di estrarre k palle rosse in k estrazioni tende a 0 quando k diverge a $+\infty$.
4. Un dado truccato viene lanciato due volte. Supponiamo che la probabilit  delle facce di posto pari sia $\frac{1}{4}$ e quella delle facce dispari sia $\frac{1}{12}$, e denotiamo con A_j l'evento 'al primo lancio esce la faccia j ' e con B_j l'evento analogo riferito al secondo lancio. Si denoti poi con X la somma (variabile) delle due facce uscite. Per quali valori di $j \in \{1, 2, \dots, 6\}$ e di $k \in \{2, 3, \dots, 12\}$ l'evento " $X = k$ " e l'evento A_j sono indipendenti?
5. Un dado onesto viene lanciato 16 volte. Qual'  la probabilit  di osservare:
 - a) che il 6 esce almeno 3 volte;
 - b) che il 6 esca non piu' di 3 volte;
 - c) esattamente 5 numeri pari;
 - d) che il primo numero maggiore di 4 esce al quinto lancio;
 - e) 6 al sesto lancio, dato che esce almeno un 6;
 - f) il primo 6 al sesto lancio, dato che esce almeno un 6.
6. Un recipiente contiene 3 palle bianche e una palla nera. Si effettuano estrazioni, una palla alla volta, con questa regola: se viene estratta una palla bianca, questa viene sostituita nel recipiente con una palla nera; se invece esce una palla nera, questa viene rimessa nel recipiente senza modifiche. L'esperimento finisce quando viene estratta l'ultima palla bianca.

Qual'  la probabilit  che alla quarta estrazione esca una palla bianca?

Qual'  la probabilit  che l'ultima estrazione sia la sesta?
7. Quattro stabilimenti, S_1, S_2, S_3, S_4 , producono cioccolatini per una stessa ditta. S_1 produce il 20% dell'intero fatturato, S_2 produce il 15%, S_3 il 25% e S_4 il rimanente 40%. Ciascuna delle prime tre fabbriche produce in media un cioccolatino difettoso

ogni 100, mentre la quarta ditta ha una frequenza di un difetto ogni 150 pezzi. Supponiamo di assaggiare un cioccolatino di questa ditta, e di constatare che é difettoso. Qual'é la provenienza piu' probabile del cioccolatino?

8. In uno spazio di probabilita' (Ω, P) , sia A un evento, con $0 < P(A) < 1$. Sia poi B un altro evento generico. Dimostrare che la relazione

$$P(A|B) = P(A^c|B)$$

é equivalente alla condizione

$$P(A \cap B) = \frac{P(B)}{2}.$$

9. In uno spazio (Ω, P) , siano A_1, A_2, \dots, A_n eventi a due a due incompatibili, tutti con probabilita' positiva, e tali che la somma delle loro probabilita' sia 1. Sia poi B un generico evento nello stesso spazio.

Trovare una condizione, analoga a quella indicata nell'esercizio precedente, che sia necessaria e sufficiente perché il verificarsi di B renda equiprobabili tutti gli A_j .

10. C'é un test clinico per accertare se una persona é affetta da cancro. Questo test ha una percentuale di errore dell'1%, sia in senso positivo, che negativo. Con questo test si esamina un individuo di una certa popolazione, nella quale l'incidenza media del cancro é dello 0.05%. Supponendo che il test dia esito positivo, quale probabilita' dobbiamo attribuire all'evento che l'individuo esaminato sia malato veramente?
11. Si fa un gioco con 6 carte speciali, stampate su entrambe le facce. Su una carta é stampato 1 su una faccia e 2 sull'altra. Altre due carte hanno stampato 2 su una faccia e 3 sull'altra. Le rimanenti 3 carte hanno 3 su una faccia e 4 sull'altra. Si estrae a caso una carta, e la si pone ritta tra due giocatori, in modo che ciascuno veda solo la faccia che gli sta dinanzi: vince chi dei due ha davanti il numero piu' piccolo. Supponendo che la carta estratta sia del tipo 2/3, qual'é la probabilita' di vittoria che ciascun giocatore puo' attribuire a sé stesso?

12. Si sono costruiti due missili, dotati di un nuovo tipo di motore, le cui caratteristiche sono ancora segrete. Il primo missile é dotato di due motori, mentre il secondo di quattro; si puo' presumere che i vari motori siano perfettamente identici, e funzionino indipendentemente l'uno dall'altro; inoltre, é noto che ciascuno dei due missili sara' utilizzabile finché funziona almeno la meta' dei motori di cui é fornito.

Un ingegnere, che conosce le caratteristiche del motore, parlando con un estraneo, si lascia sfuggire l'informazione che i due missili hanno la stessa probabilita' di fallire una missione. A questo punto, l'estraneo afferma che egli puo' calcolare la probabilita' (finora tenuta segreta) che il nuovo motore si guasti.

Qual'é tale probabilita'?

13. Due amici, A e B , vivono in due citta' diverse, ma collegate tramite ferrovia con 6 treni al giorno. Il signor A invita il signor B a casa sua, per un certo giorno. Il signor B , di cui é nota l'eccentricita', risponde che affidera' la risposta ad una monetina (onesta): testa per il si', croce per il no. Comunque, anche in caso affermativo, B decidera' quale treno scegliere sulla base di un altro esperimento aleatorio, cioé il lancio di un dado (onesto). Alla vigilia del giorno stabilito, un guasto ai telefoni impedisce al signor B di contattare A , per informarlo sull'esito dei propri esperimenti aleatorii. Allora A , il giorno fissato, si dispone ad aspettare alla stazione ferroviaria tutti i treni provenienti dalla citta' di B . Dopo lunga attesa, sono arrivati i primi 5 treni, ma il signor B non é comparso.

Qual'é ora la probabilita' che egli non venga piu'?

14. Un giocatore d'azzardo possiede N euro, e tenta di raddoppiare il suo capitale giocando alla roulette. Egli punta continuamente 1 euro sul rosso, e quindi ogni volta ha probabilita' p (un po' meno di $\frac{1}{2}$) di vincere un euro. Per ogni intero $M \geq N$ si valuti la probabilita' dei seguenti eventi:

- a) all' M -esima giocata egli raddoppia il suo capitale;
- b) all' M -esima giocata il suo capitale si riduce a 0.

Capitolo 4

Distribuzioni

In questo capitolo tratteremo uno dei temi piu' utili (e pertanto importanti) del Calcolo delle Probabilita', quello delle *variabili aleatorie* e delle loro *distribuzioni*. Lo scopo principale di questi strumenti é quello di ricondurre problemi anche complicati ai loro aspetti essenziali, svincolandoli dalle difficolta' inerenti la descrizione dello spazio Ω , e riconducendo i calcoli essenzialmente a due operazioni fondamentali: somme di serie e calcolo d'integrali. Questo discorso sara' piu' chiaro dopo che avremo introdotto il concetto di variabile aleatoria e dato alcuni esempi.

4.1 Variabili aleatorie

Studiamo questo problema: se lanciamo 24 volte un dado (onesto), quante volte uscirá il 6?

Ormai sappiamo come regolarci. In definitiva, é come se lanciassimo 24 volte una monetina truccata, per la quale la probabilita' di testa é $\frac{1}{6}$: il numero di teste uscite varia da 0 a 24, e le probabilita' seguono la legge *binomiale*:

$$P(N(T) = k) = \binom{24}{k} \left(\frac{1}{6}\right)^k \left(\frac{5}{6}\right)^{24-k},$$

ove $N(T)$ significa numero di teste e k varia tra 0 e 24, come gia' detto.

Lo spazio di probabilita' é $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}^{24}$, ma non *ci serve* di conoscere a menadito tutte le probabilita' di tutti i (numerosi) eventi in questo spazio: in un certo senso,

siamo interessati ad uno spazio piu' semplice, che ha solo 24 elementi, i valori che puo' assumere $N(T)$.

In termini tecnici, $N(T)$ é quella che si chiama una *variabile aleatoria*: essa puo' essere vista come una *funzione*, definita su Ω e a valori reali. Ogni volta che si effettua l'esperimento di lanciare 24 volte il dado, si ottiene un risultato per $N(T)$: dunque, $N(T)$ é funzione del risultato dell'esperimento, cioé dipende da quelli che sono gli elementi di Ω .

Ora, se siamo interessati solo a $N(T)$, tutto quello che ci serve di sapere sono le probabilita' dei 25 eventi " $N(T) = k$ ", con $k = 0, 1, \dots, 24$. Se si vuole calcolare ad esempio $P("N(T) > 3")$ basta fare

$$\begin{aligned} P("N(T) > 3") &= 1 - P("N(T) \leq 3") = \\ &= 1 - P("N(T) = 0") - P("N(T) = 1") - P("N(T) = 2") - P("N(T) = 3"). \end{aligned}$$

Spesso, una variabile aleatoria permette di ridurre lo spazio Ω in maniera considerevole, liberandoci anche da problemi a volte assai delicati. Studiamo ad esempio questo problema: se lanciamo tante volte un dado (onesto), dopo quanti lanci uscirá il primo 6?

Naturalmente, non possiamo dare una risposta sicura. Possiamo prevedere che, dopo un certo numero di lanci (25-30), un 6 sara' uscito quasi certamente, ma non é escluso che, per qualche caso strano, si debbano aspettare anche piu' di 100 lanci; di solito, se accade un fatto del genere, si pianta tutto li', e si conclude che il dado non é onesto. Poi magari si ricomincia, sempre con lo stesso dado, e i risultati rientrano nella normalita', per cui l'onesta' del dado viene rivalutata.

Se ci pensiamo bene, non possiamo escludere, a priori, di dover lanciare un dado anche un numero enorme di volte, prima di osservare un 6. Del resto, se i lanci avvengono veramente tutti nelle stesse condizioni, ogni volta la probabilita' che esca il 6 vale $\frac{1}{6}$, il che non é molto. Nulla *costringe* il caso a far uscire il 6, solo perché in centomila lanci precedenti non é mai uscito: il processo, come si dice, *non ha memoria*.

In altre parole, qualunque sia il numero k che scegliamo, per quanto grande o cabalistico, non possiamo sostenere con assoluta certezza che nei primi k lanci esca almeno un 6: c'é sempre una piccolissima probabilita' (piccola, ma non nulla) che il primo 6 esca *dopo* k

lanci. Per esempio, la probabilit  che il primo 6 appaia dopo il 75^o lancio   di circa un milionesimo: indubbiamente molto bassa, ma forse superiore alla probabilit  che ciascuno di noi ha di vincere alla lotteria di Capodanno, eppure ci proviamo sempre...

Allora, se vogliamo inquadrare il problema suddetto in uno spazio di probabilit  esauriente, dovremo assumere $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}^{\mathbb{N}}$, cio  lo spazio che corrisponde all'esperimento (teorico) di lanciare un dado infinite volte.

E stavolta descrivere tutte le probabilit  di tutti gli eventi in tale spazio diventa veramente proibitivo. Ma, *per fortuna*, la variabile aleatoria cui siamo interessati ora (cio , il numero corrispondente al lancio in cui esce il primo 6) assume solo un'infinit  numerabile di valori, e sappiamo calcolare la probabilit  di ciascuno. Detta TdA tale variabile (TdA ='tempo di attesa') si ha

$$P("TdA = j") = \frac{1}{6} \left(\frac{5}{6}\right)^{j-1}$$

per $k = 1, 2, \dots$. In questo problema possiamo anche porci la domanda: e se il 6 non uscisse *mai*? L'evento non   impossibile: ad esempio la successione $(3, 4, 3, 4, 3, 4, \dots)$   un evento elementare favorevole, e non   l'unico, chiaramente. Tuttavia, si pu  dimostrare abbastanza facilmente che l'evento in esame ha probabilit  nulla: esso implica infatti tutti gli eventi del tipo " $TdA > k$ ", per k intero positivo, e quindi la sua probabilit    senz'altro minore di quella di tali eventi. Ma si vede facilmente che $P("TdA > k") = \left(\frac{5}{6}\right)^k$, e l'unico numero non negativo minore di tutte queste quantita'   0.

Come si vede, anche in questo caso basta conoscere le probabilit  degli eventi del tipo " $TdA = k$ " (o anche degli eventi del tipo " $TdA > k$ ") per poter ricavare tutte le informazioni che ci servono sulla variabile aleatoria TdA .

Prima di passare alla definizione formale di variabile aleatoria,   opportuno che diamo un altro esempio, che servira' di riferimento per il seguito. Supponiamo di lasciar cadere un ago per terra; il pavimento dove l'ago cade   piastrellato con normali mattonelle, una delle quali viene scelta come riferimento: uno dei suoi lati viene designato come asse x , e il lato adiacente come asse y . Si denoti con B l'angolo, espresso in radianti, che l'ago caduto (o il suo ideale prolungamento) forma con l'asse x designato. Chiaramente, B   una quantita' aleatoria, che pu  variare tra 0 e 2π . Lo spazio Ω pu  essere interpretato come l'intervallo

$[0, 2\pi]$ e la probabilit  su tale spazio come una funzione lineare della *lunghezza*: in altre parole, stiamo assumendo che

$$P("B \in [\alpha, \beta]") = \frac{\beta - \alpha}{2\pi}$$

per qualunque intervallo $[\alpha, \beta] \subset [0, 2\pi]$. Questo tipo di esperimento viene detto *ago di Buffon*, e ci fa capire che esistono anche variabili aleatorie (come la B in questo caso), che possono assumere infiniti valori, ma nessuno di questi con probabilit  positiva. Infatti, se consideriamo l'evento " $B = \frac{\pi}{2}$ ", questo chiaramente implica tutti gli eventi del tipo " $B \in [\frac{n\pi}{2n+1}, \frac{n\pi}{2n-1}]$ ", che hanno probabilit  uguali a $\frac{n}{4n^2-1}$. Dunque, la probabilit  che B sia *esattamente* uguale a $\frac{\pi}{2}$   minore di $\frac{n}{4n^2-1}$ per ogni n , e cio'   possibile solo se tale probabilit    nulla.

Di conseguenza, per quanto riguarda la variabile aleatoria B (e anche altre variabili simili, di cui tratteremo presto), quello che ci serve conoscere non   tanto la probabilit  che B sia *uguale* a un valore ben preciso, ma piuttosto la probabilit  che B sia *compresa* in un certo intervallo, o magari *maggiore* di un certo angolo α .

Si perviene cos  alla seguente definizione.

Definizione 4.1 Dato uno spazio di probabilit  (Ω, P) , una *variabile aleatoria* (scalare)   una qualunque applicazione $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, per la quale siano assegnate tutte le probabilit  di eventi del tipo $X > \alpha$, con $\alpha \in \mathbb{R}$.

La precisazione riguardante la probabilit  degli eventi " $X > \alpha$ "   secondaria, ma non del tutto superflua. Infatti, abbiamo detto che a volte lo spazio Ω risulta piuttosto complicato, per cui non   facile determinare le probabilit  di tutti gli eventi che ci possono interessare; anzi, in certi casi, non   neanche *possibile* definire il numero $P(E)$ per *tutti* gli eventi E , in maniera da soddisfare a certe richieste.

Non entreremo nei dettagli, ma gi  l'esempio dell'ago di Buffon presenta una situazione di questo tipo: l'idea   che, in sostanza, gli eventi sono tutti i sottoinsiemi dell'intervallo $[0, 2\pi]$, e le probabilit  sono proporzionali alla *lunghezza* degli insiemi; ora, quella che normalmente s'intende per *lunghezza* (o anche *misura*) di un insieme puo' essere facilmente definita per intervalli, o unioni finite di intervalli, e altre *combinazioni* semplici di tali

insiemi, ma non si può definire (in maniera del tutto soddisfacente) per *tutti* i sottoinsiemi di $[0, 2\pi]$. In altre parole, esistono dei sottoinsiemi *pestiferi* di $[0, 2\pi]$ (e quindi di qualsiasi intervallo reale) per i quali non si può parlare di *lunghezza*, e di conseguenza non si parla di probabilità per tali insiemi, quando li si riguarda come eventi. Se denotiamo con H un tale insieme, sia X la funzione *indicatrice* 1_H (cioè quella funzione che vale 1 nei punti di H e 0 nei punti fuori di H): ebbene, l'evento " $X > 0.5$ " coincide con H (ossia si verifica se e solo se si verifica H), e quindi dovrebbe avere la stessa probabilità di H , se questa fosse definita. Ma, siccome H è *pestifero*, questa probabilità non è definita, e X non è una variabile aleatoria.

Questi esempi per fortuna sono estremamente complicati e artificiosi, per cui non capiterà mai che *spunti fuori* da qualche problema concreto una qualche funzione come l'ultima che abbiamo descritto.

Viceversa, gli insiemi *buoni*, per i quali è possibile definire la *lunghezza* in maniera soddisfacente, sono detti *Boreliani*, o anche *insiemi di Borel*: essi sono in sostanza tutti quegli insiemi che si possono ottenere facendo tutte le possibili operazioni algebriche (unione, intersezione, differenza, etc.) a partire dalla famiglia degli intervalli, ed eventualmente iterando tali operazioni un numero finito o anche un'infinità numerabile di volte.

Data una variabile aleatoria (abbreviato: v.a.) X , una volta che si conoscano le probabilità di tutti gli eventi del tipo " $X > \alpha$ ", praticamente si hanno tutte le informazioni che si possono desiderare sulla v.a. stessa. Così, se X è una variabile che può assumere solo un numero finito di valori, ad esempio $1, 2, 3, \dots, N$, e si vuole conoscere la probabilità dell'evento " $X = 3$ ", basta calcolare $P("X > 2") - P("X > 3")$: infatti, dire " $X = 3$ " equivale a sostenere che " $X > 2$ " ma non " $X > 3$ ". È questo il senso della prossima definizione.

Definizione 4.2 Data una v.a. $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, si denota con $F_X : \mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$ la funzione definita da

$$F_X(x) = P("X \leq x")$$

per ogni x reale. Tale funzione viene detta *funzione di ripartizione* della variabile X .

Il prossimo teorema stabilisce quelle che sono le proprietà *caratteristiche* della funzione di ripartizione: ogni funzione di ripartizione gode di tali proprietà, e ogni funzione che goda di tali proprietà è la funzione di ripartizione di qualche v.a.. Non riporteremo la dimostrazione, benché alcune proprietà non siano difficili da provare.

Teorema 4.3 *Sia $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ una qualsiasi v.a., e sia F la sua funzione di ripartizione. Allora $F : \mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$ verifica le seguenti proprietà:*

- i) F è monotona non-decrescente.*
- ii) $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = 1$; $\lim_{x \rightarrow -\infty} F(x) = 0$.*
- iii) F è continua a destra in ogni punto.*

Inoltre, per ogni $x \in \mathbb{R}$, si ha:

$$P("X = x'') = F(x) - \lim_{h \rightarrow 0^-} F(x + h).$$

(Questo significa che i punti di discontinuità di F sono tutti e soli gli x tali che $P("X = x'') \neq 0$, e tale probabilità coincide con il *salto* della F nel punto x).

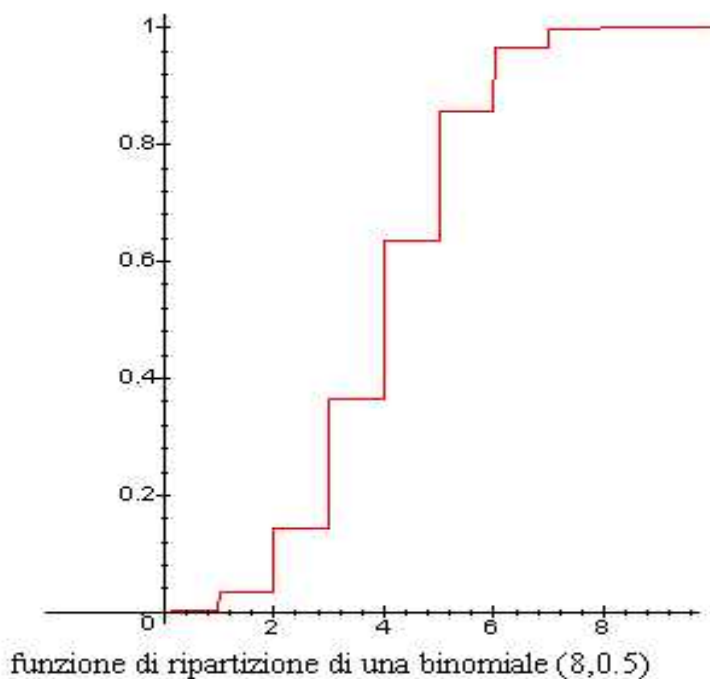
Viceversa, ogni funzione $F : \mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$, che verifichi le (i), (ii), (iii) precedenti, è la funzione di ripartizione di qualche v.a. X , su qualche spazio Ω .

Come abbiamo già annunciato, e come si vedrà anche negli esempi successivi, le funzioni di ripartizione permettono di descrivere bene quella che è la *distribuzione* di una v.a.; con questo termine s'intende una vera e propria probabilità su \mathbb{R} , che viene denotata con P_X : per ogni insieme *boreliano* $B \subset \mathbb{R}$, $P_X(B)$ rappresenta la probabilità che X faccia parte di B . Così, in base alla definizione di funzione di ripartizione, si ha

$$P_X([-\infty, x]) = F_X(x)$$

per ogni $x \in \mathbb{R}$. Per quanto riguarda i *singoletti*, cioè gli insiemi del tipo $\{x\}$, con $x \in \mathbb{R}$, il teorema 4.3 ci permette di valutare $P_X(\{x\})$, cioè $P("X = x'')$: se x è punto di continuità per F_X , allora $P("X = x'') = 0$, altrimenti è $P_X(\{x\}) = F_X(x) - F_X(x - 0)$. Date le proprietà delle funzioni monotone, F_X può avere al massimo un'infinità numerabile di punti di discontinuità; quindi, qualunque sia la v.a. X , al massimo esistono un'infinità numerabile di punti x_k tali che $P("X = x_k'') > 0$.

Definizione 4.4 Una v.a. X ha distribuzione *discreta* se esiste un numero finito o un'infinita' numerabile di punti x_k in \mathbb{R} tali che $P(X = x_k) > 0$ per ogni k , e inoltre $\sum_k P(X = x_k) = 1$. La funzione di ripartizione di una tale variabile aleatoria é in pratica una funzione a gradinata: supponendo ad esempio che gli x_k siano un numero finito $(x_1, x_2, \dots, x_n, \text{ in ordine crescente})$ e denotando con p_k la probabilita' $P(X = x_k)$ per ogni $k = 1, \dots, n$, la funzione F_X vale 0 in $]-\infty, x_1[$, poi vale costantemente p_1 nell'intervallo $[x_1, x_2[$, poi $p_1 + p_2$ in $[x_2, x_3[$, poi $p_1 + p_2 + p_3$ in $[x_3, x_4[$, etc., fino all'intervallo $[x_{n-1}, x_n[$, ove vale costantemente $1 - p_n$, e infine vale 1 in $[x_n, +\infty[$.



Antitetiche alle distribuzioni discrete sono le cosiddette distribuzioni *continue*.

Definizione 4.5 Una v.a. X ha distribuzione *continua* (o meglio, *assolutamente continua*), se esiste una funzione $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_0^+$, integrabile in s.g., tale che risulti

$$P(X \in]a, b]) = \int_a^b f(x) dx$$

per ogni intervallo $]a, b[$ di \mathbb{R} (con $-\infty \leq a < b \leq +\infty$). Una tale funzione f verifica, evidentemente, la condizione

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = 1$$

e viene detta *densita'* della distribuzione di X .

Quando una v.a. ha distribuzione continua, la definizione stessa di densita' comporta che

$$F_X(x) = P("X \leq x") = \int_{-\infty}^x f(x)dx$$

per ogni x reale. E' chiaro allora che, almeno quando la densita' f é una funzione *continua*, essa é la *derivata* della funzione di ripartizione F_X . Questo fatto spesso aiuta a comprendere qual'é la distribuzione di certe variabili aleatorie, che sono ottenute modificando in qualche modo altre variabili aleatorie con distribuzione conosciuta.

Piu' in generale si dimostra in Analisi che, se una v.a. ha una distribuzione continua, allora la sua funzione di ripartizione é derivabile *quasi ovunque*, e la sua derivata (nei punti ove esiste) coincide con la densita' f , anche se questa non é continua dappertutto. Per chi fosse curioso, precisiamo qui che la locuzione *quasi ovunque* sta a significare *a meno di un insieme rinchiudibile* (v. Dispense di Analisi Matematica I, II parte): nella stragrande maggioranza dei casi concreti, la densita' di una distribuzione continua sara' discontinua in uno o due punti al massimo, ma si possono fornire esempi (utili solo in quanto tali) di densita' che hanno anche infiniti punti di discontinuita'.

L'antitesi di cui si é parlato poc'anzi si puo' spiegare meglio osservando quanto segue.

Nel caso di una distribuzione discreta, si puo' dire che *tutta* la distribuzione P_X é *concentrata* su un numero finito (o un'infinita' numerabile) di punti, al limite anche in un punto solo (questo accade se X é costante); quando invece si ha a che fare con una distribuzione continua (e quindi con una densita' f), la distribuzione é in un certo senso *dispersa*, in quanto hanno probabilita' nulla tutti gli eventi del tipo " $X = x_0$ ", o anche " $X \in I$ ", e persino " $X \in \mathbb{Q}$ ".

Quest'ultima affermazione puo' apparire paradossale, se si considera che in genere le variabili aleatorie utili nelle applicazioni provengono da misure, da osservazioni empiriche e rielaborazioni matematiche, il cui risultato numerico concreto é necessariamente un numero razionale! Ma bisogna sempre tener presente che, specialmente nel caso di distribuzioni continue, queste sono quasi sempre dei *modelli* matematici, che approssimano molto bene la

realta' anche se *non sono* la realta'. Quando avremo introdotto alcune nozioni di convergenza, e avremo studiato i principali teoremi in quell'ambito, troveremo chiarimenti e conferme di questo fatto.

4.2 Principali distribuzioni discrete

Daremo ora una panoramica delle varie distribuzioni di tipo discreto, che si possono incontrare piu' frequentemente nelle applicazioni.

1: Distribuzione concentrata E' il caso piu' banale: quando una v.a. e' *costante*, poniamo $X \equiv c$, la distribuzione di X si dice *concentrata* in c : a volte essa viene denotata anche con δ_c e detta *delta di Dirac*. E' chiaro che risulta

$$P_X(A) = \begin{cases} 1, & \text{se } c \in A, \\ 0, & \text{se } c \notin A, \end{cases}$$

per ogni insieme $A \subset \mathbb{R}$. La funzione di ripartizione di X non e' altro che la funzione indicatrice della semiretta $[c, +\infty[$, cioe' quella funzione che vale 0 se $x < c$ e 1 se $x \geq c$. E' ovvio che l'unica discontinuita' si ha in c , e il *salto* di F_X in tale punto e' esattamente 1, cioe' la probabilita' che risulti $X = c$.

2: Distribuzione di Bernoulli Questa e' la distribuzione della v.a. che registra il risultato del lancio di una monetina: se esce *testa*, la v.a. assume il valore 1, altrimenti il valore 0. Detta p la probabilita' di *testa*, questa distribuzione si denota con $B(1, p)$. Se dunque X ha distribuzione $B(1, p)$ (cio' che si denota anche scrivendo $X \sim B(1, p)$), la v.a. assume solo due valori, 0 con probabilita' $1 - p$ e 1 con probabilita' p . Conseguentemente, si ha

$$F_X(x) = \begin{cases} 0, & \text{se } x < 0 \\ 1 - p, & \text{se } 0 \leq x < 1 \\ 1, & \text{se } x \geq 1 \end{cases}$$

3: Distribuzione binomiale Quando si effettua l'esperimento di lanciare una monetina n volte, la v.a. X che registra il numero di *teste* uscite ha quella che si dice

distribuzione binomiale, che viene denotata con $B(n, p)$ (ove al solito p é la probabilita' che esca *testa* in un singolo lancio). Nel grafico precedente é tracciata la funzione di ripartizione per una v.a. di questo tipo. Ricordiamo anche i valori delle probabilita' dei singoli valori della X :

$$P("X = k") = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

per $k = 0, 1, \dots, n$. Notiamo anche che una v.a. $X \sim B(n, p)$ é la *somma* di n v.a. X_1, \dots, X_k , tutte di tipo $B(1, p)$: la v.a. X_k registra 1 se al k^{mo} lancio esce *testa* e 0 altrimenti. (Va precisato che, in questo tipo di esperimento, si presume che la moneta venga lanciata sempre nelle stesse condizioni, e quindi il risultato di ogni lancio sia indipendente dai risultati degli altri. Sarebbe tutto un altro discorso se si trattasse di una moneta *fragile*, che si deforma un po' ogni volta che viene lanciata...).

4: Distribuzione Uniforme Questa é la distribuzione della v.a. che registra il risultato del lancio di un dado onesto: si presume che i valori possibili siano N (i primi N numeri interi positivi) tutti con uguale probabilita' ($\frac{1}{N}$). La distribuzione viene denotata con $U(N)$, e la funzione di ripartizione é simile a quella di una binomiale, con la differenza che i *salti* cominciano da 1 anziché da 0, e sono tutti di uguale ampiezza ($\frac{1}{N}$, per quanto gia' detto).

5: Distribuzione Geometrica Quando si effettuano vari lanci di una moneta, si puo' essere interessati al momento in cui esce *testa* per la prima volta. Se X denota il lancio in cui esce la prima *testa*, si dice che X ha distribuzione *geometrica*, e si scrive $X \sim NB(1, p)$, ove al solito p é la probabilita' di *testa* in un singolo lancio. A differenza degli esempi precedenti, una tale v.a. puo' assumere infiniti valori (esclusi i casi banalissimi in cui $p = 0$ o $p = 1$). Si ha

$$P("X = k") = p(1-p)^{k-1}$$

per ogni $k > 0$. Sempre supponendo $0 < p < 1$, in linea puramente teorica potrebbe anche accadere che *testa* non esca mai: ossia, in infiniti lanci di moneta esca sempre

croce. Ma un tale evento (come già visto in precedenza) ha probabilità nulla, e quindi possiamo impunemente supporre che non si verifichi mai.

La funzione di ripartizione di una v.a. con tale distribuzione presenta infiniti gradini, avendo discontinuità in tutti i numeri interi positivi; ma l'ampiezza dei salti va rapidamente diminuendo man mano che il punto di discontinuità cresce, e quindi da un certo punto in poi il grafico della F_X diventa praticamente indistinguibile dall'asintoto orizzontale $y = 1$.

6: Distribuzione binomiale negativa L'esperimento che descrive questa distribuzione è simile al caso precedente: stavolta però siamo interessati all'uscita della k^{ma} *testa*, con $k \geq 1$.

Variabili aleatorie di questo tipo vengono anche dette *tempi d'attesa*, per ovvii motivi, e la distribuzione viene denotata con $NB(k, p)$.

E' chiaro che, se si attende l'uscita della k^{ma} *testa*, bisogna effettuare almeno k lanci; dunque, una v.a. con distribuzione $NB(k, p)$ può assumere tutti i valori interi, maggiori o uguali a k . Le probabilità sono date dalla formula:

$$P(X = n) = \binom{n-1}{k-1} p^k (1-p)^{n-k}$$

per $n \geq k$. Infatti, se $X = n$, deve accadere che nei primi $n - 1$ lanci siano uscite esattamente $k - 1$ teste, e al lancio n^{mo} esca ancora *testa* (e viceversa).

Anche in questo caso, supponendo al solito $0 < p < 1$, l'evento che la k^{ma} *testa* non esca mai ha probabilità nulla: ossia, in infiniti lanci di moneta, non è matematicamente possibile che escano meno di k teste (qualunque sia il numero k). Questo fatto, benché abbastanza intuitivo, è meno facile da dimostrare rigorosamente. Tra l'altro, esso implica che, nelle condizioni dette, immaginando un esperimento in cui si lanci infinite volte una moneta, *certamente* usciranno infinite *teste*, e questo anche se p è piccolissima (purché non nulla). Addirittura si può dimostrare che, lanciando infinite volte una moneta con $p \neq 0$, con probabilità 1 si osserverà prima o poi una sequenza di un milione di *teste* consecutive: questo, anche se $p < 10^{-6}$!

Senza proseguire su questa strada, limitiamoci a registrare una conseguenza numerica che deriva da questo tipo di distribuzione: siccome abbiamo detto che certamente X assume uno dei valori maggiori o uguali a k , si ha la formula:

$$\sum_{n=k}^{+\infty} \binom{n-1}{k-1} p^k (1-p)^{n-k} = 1$$

per ogni $p \in]0, 1[$.

7: Distribuzione ipergeometrica Questa é la distribuzione tipica dei processi di campionamento: si presume che una certa popolazione (ad esempio, gli Italiani) sia costituita da N elementi, dei quali N_1 appartengono ad una certa categoria C (ad esempio, quelli nati in Abruzzo), e $N_2 = N - N_1$ siano gli altri. Per avere informazioni su N , sul rapporto $\frac{N_1}{N}$, o su altri parametri d'interesse, si fa una scelta casuale di n individui della popolazione in esame, e si controlla quanti di questi appartengono alla categoria C . Chiaramente, n dev'essere minore di N (e di solito sara' anche nettamente minore sia di N_1 che di N_2). Il *campionamento* consiste proprio nella scelta degli n individui, e si presume che essi vengano scelti senza possibilita' di ripetizioni e senza tener conto dell'ordine. (L'ultima condizione é molto naturale in questi casi, mentre é forse piu' difficile controllare che uno stesso individuo non venga testato piu' volte, ma vedremo tra poco che, se anche non si fa attenzione a questi aspetti, in molte situazioni pratiche le conclusioni che si possono trarre da questi test non cambiano in maniera sensibile.)

Supponiamo dunque di aver fissato i numeri N , N_1 e N_2 (ripetiamo: con $N = N_1 + N_2$), e di scegliere a caso n individui tra gli N totali, senza ripetizioni e senza tener conto dell'ordine: sia X il numero degli individui, tra gli n esaminati, che appartengono alla categoria C . Allora X é una v.a. che puo' assumere tutti i valori interi, compresi fra 0 e n , con le seguenti probabilita':

$$P(X = k) = \frac{\binom{N_1}{k} \binom{N_2}{n-k}}{\binom{N}{n}},$$

per $k = 0, 1, \dots, n$. Qualora n fosse piu' grande di N_1 o di N_2 vi sarebbero dei valori di k per i quali uno dei coefficienti binomiali a numeratore non é definito: ad esempio,

se $N = 100, N_1 = 20, n = 25$, prendendo $k = 21$ non sarebbe definito il numero $\binom{N_1}{k}$; similmente, fermi restando N e n , se fosse $N_1 = 80$, per $k = 4$ non sarebbe definito $\binom{N_2}{n-k}$; ma in tali casi é ovvio che $P("X = k") = 0$, e quindi i coefficienti binomiali non definiti si possono assumere uguali a 0.

Con tali convenzioni, una v.a. X con questa distribuzione si dice di tipo *ipergeometrico* e si denota con la scrittura: $X \equiv H(N_1, N_2, n.)$

A proposito delle condizioni in cui il campionamento viene effettuato, abbiamo già accennato al fatto che spesso non si fa molta attenzione a evitare ripetizioni: questo accade perché, sotto certe ipotesi, quando i numeri N_1 e N_2 sono molto grandi, i valori delle probabilità $P("X = k")$ tendono a essere gli stessi che si avrebbero se gli n individui campione venissero scelti uno alla volta, in condizioni di totale indipendenza. In altre parole, nelle ipotesi dette, un campionamento di n individui equivale praticamente a effettuare n lanci di moneta, in cui l'evento *testa* corrisponda all'evento *l'individuo scelto appartiene alla categoria C*, e quindi la probabilità di *testa* sia uguale a $\frac{N_1}{N}$, e infine l'evento $X=k$ corrisponda all'evento *esattamente k teste*.

Si ha infatti il seguente risultato, che non dimostreremo.

Teorema 4.6 *Sia X una v.a. di tipo $H(N_1, N_2, n)$. Si fissi n , e si facciano variare N_1 e N_2 in modo che il rapporto $\frac{N_1}{N_1+N_2}$ rimanga costante. Detto p tale rapporto (con $0 < p < 1$), si ha*

$$\lim_{N_1 \rightarrow +\infty} P("X = k") = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}.$$

Si osservi comunque che la convergenza stabilita nel teorema 4.6 non é molto *veloce*: ad esempio, scegliendo $n = 10, k = 4$ e $N_1 = N_2$, si ricava ovviamente $p = \frac{1}{2}$, e quindi

$$\binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} = \binom{10}{4} \frac{1}{2^{10}} \approx 0.205078$$

mentre le probabilità $P("X = 4")$, in corrispondenza a valori crescenti di N_1 (con $N_2 = N_1$) sono le seguenti:

$$N_1 = 50 \Rightarrow P("X = 4") \approx 0.211413,$$

$$N_1 = 500 \Rightarrow P(X = 4) \approx 0.2057,$$

$$N_1 = 10000 \Rightarrow P(X = 4) \approx 0.2051.$$

Cio' che veramente accomuna la distribuzione $B(n, p)$ e quella $H(N_1, N_2, n)$ quando $p = \frac{N_1}{N_1 + N_2}$ e N_1 é *grande* é la *forma* della curva che rappresenta i valori delle probabilita' in corrispondenza ai possibili valori k compresi fra 0 e n . Poiché molte deduzioni importanti dipendono da parametri caratteristici di queste curve (il punto di massimo, ad esempio), non é necessario che, in una ipergeometrica, i valori di N_1 e N_2 siano proprio *giganteschi* in confronto con n , per poter *fare finta* che la distribuzione sia invece binomiale. Di solito, basta che n sia circa $\frac{1}{30}$ di N_1 per poter tranquillamente confondere le due distribuzioni.

8: Distribuzione di Poisson Anche questa distribuzione discreta si puo' interpretare come un caso limite della Binomiale. Usualmente la si introduce come la distribuzione di una v.a. che *conta*, in un determinato intervallo di tempo, quante volte si verifica un fenomeno F , che abbia le stesse caratteristiche di un'emissione radioattiva, o di una chiamata a un centralino telefonico, o di una persona che si aggiunga a una fila, etc.: in sostanza, si richiede che F si verifichi in maniera *istantanea*, e che, per intervalli di tempo I e J disgiunti, il numero di realizzazioni di F in I sia indipendente dal numero di realizzazioni di F in J ; un'altra caratteristica di F é che la probabilita' che esso si verifichi (una volta) in un generico intervallo di tempo I sia proporzionale alla lunghezza di I , mentre la probabilita' che esso si verifichi piu' di una volta tenda a 0, quando la lunghezza $L(I)$ tende a 0, e sia un infinitesimo di ordine superiore rispetto a $L(I)$. Supponendo di iniziare lo studio di F in un certo istante 0, per ogni istante $t > 0$ si ha una v.a. X_t che conta quante volte F si é verificato in $[0, t]$. Da un altro punto di vista, per ogni intero $n > 0$, si puo' introdurre la v.a. Y_n che indica l'istante t in cui F si verifica per l' n^a volta. Le v.a. Y_n verranno esaminate piu' in la', mentre le v.a. X_t sono quelle che ci interessano ora: nel loro complesso, esse costituiscono quello che si chiama *Processo di Poisson*, ma per il momento non ci occuperemo dell'intero processo, se non quanto basta per comprendere la distribuzione di una generica X_t .

Date le premesse, nel generico intervallo $[0, t]$ potranno aver luogo ben poche realizzazioni di F , ma questo vale solo *in pratica*. In linea teorica, come già accadeva per la distribuzione binomiale negativa, non possiamo escludere a priori che X_t possa assumere anche valori molto alti, sia pure con probabilità bassissime: non per nulla la distribuzione di Poisson è anche detta *Legge degli eventi rari*.

Vediamo allora come si può ricavare la distribuzione di una generica X_t . Fissato $t > 0$, per *contare* quante volte F si è manifestato in $[0, t]$, immaginiamo di suddividere tale intervallo in un gran numero (diciamo, N) di sottointervalli di uguale ampiezza, ma tanto piccoli che si possa realmente considerare nulla la probabilità che F si possa realizzare più di una volta in uno di questi. Ovviamente, anche la probabilità che F si realizzi *una* volta è molto piccola: per le condizioni imposte sul fenomeno, tale probabilità è proporzionale all'ampiezza $\frac{t}{N}$ dell'intervallino generico, e quindi in definitiva è proporzionale a $\frac{1}{N}$: detta λ la costante di proporzionalità, e detto I_j il generico intervallino della suddivisione, la probabilità che F si verifichi *esattamente* una volta in I_j è uguale a $\frac{\lambda}{N}$, mentre la probabilità che F *non* si verifichi in I_j è uguale a $1 - \frac{\lambda}{N}$. In pratica, *scorrendo* gli N intervallini, per ognuno di essi l'eventualità che F si verifichi è come l'uscita di *testa* nel lancio di una moneta, ove però $P(T)$ sia molto bassa: $P(T) = \frac{\lambda}{N}$ per ogni intervallino. Dunque, per ciascun intervallino I_j , possiamo segnare 1 se ivi il fenomeno F si verifica, e 0 se invece non si verifica. La somma di tutti gli 1 che avremo segnato scorrendo tutti gli intervallini ci darà il valore di X_t , tanto più preciso quanto più N sarà scelto grande. In pratica, X_t si può considerare come una v.a. $B(N, p)$, ove $p = \frac{\lambda}{N}$, e dove N va scelto *più grande possibile*. Dunque, fissato un numero intero k , la probabilità che X sia uguale a k vale approssimativamente

$$P(X = k) = \binom{N}{k} \left(\frac{\lambda}{N}\right)^k \left(1 - \frac{\lambda}{N}\right)^{N-k}$$

almeno per $N > k$. Al limite, quando $N \rightarrow +\infty$, non è difficile provare che tale probabilità ha limite:

$$\lim_{N \rightarrow +\infty} \binom{N}{k} \left(\frac{\lambda}{N}\right)^k \left(1 - \frac{\lambda}{N}\right)^{N-k} = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}.$$

Quest'ultimo valore trovato fornisce in definitiva la distribuzione di X_t : si dice dunque che una v.a. discreta X ha distribuzione *di Poisson* di intensità λ , e si scrive $X \sim P(\lambda)$, se risulta

$$P("X = k") = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$$

per ogni $k \in \mathbb{N}$. Si noti che, per la nota legge della serie *esponenziale*, si ha $\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\lambda^k}{k!} = e^\lambda$, da cui si vede chiaramente che le probabilità con cui X può assumere i vari valori possibili hanno somma complessiva uguale a 1, come ci si deve giustamente aspettare da una distribuzione di probabilità discreta. Inoltre, si osservi che

$$P("X = 0") = e^{-\lambda}, \quad P("X = 1") = \lambda e^{-\lambda},$$

etc.: per cui, se ad es. $\lambda = 1$, $P("X = 0")$ e $P("X = 1")$ sono uguali (a $\frac{1}{e}$), mentre $P("X = 2") = P("X = 1")/2$, e tutte le altre probabilità sono molto più piccole, com'era da aspettarsi. Più grande è λ (questo parametro è detto anche *intensità* della distribuzione), più è probabile che X assuma valori maggiori: in genere, il massimo valore delle probabilità $P("X = k")$ si ha quando k raggiunge la *parte intera* di λ . Ma, dopo quel valore, le probabilità decrescono molto rapidamente al crescere di k .

All'atto pratico, la distribuzione $P(\lambda)$ si può adoperare in problemi molto più concreti di quanto si possa credere a prima vista. Di solito, tutte le volte che si deve trattare una v.a. con distribuzione $B(n, p)$, con n molto grande e p molto piccola, si può sostituire la legge binomiale con una Poisson d'intensità $\lambda = pn$.

Ad esempio, si pensi al seguente problema: in una lotteria, la probabilità di acquistare un biglietto vincente è $\frac{1}{10000}$. Comperando 1000 biglietti, qual'è la probabilità che almeno uno di questi sia vincente?

Per ognuno dei 1000 biglietti acquistati possiamo dire che esso è *fortunato* con probabilità $\frac{1}{10000}$, e quindi la probabilità che esattamente k di essi siano fortunati segue la legge binomiale $B(1000, \frac{1}{10000})$: dato il grande valore di n e il piccolo valore di p si può assumere che il problema in questione sia trattabile come una distribuzione di

Poisson, con parametro $\lambda = \frac{1}{10}$. Allora, detta X la v.a. numero dei biglietti vincenti, la probabilit  cercata   assimilabile a:

$$P("X \geq 1") = 1 - P("X = 0") = 1 - e^{-\lambda} = 1 - \frac{1}{e^{1/10}} \approx 0.095.$$

Dunque, la probabilit  cercata   circa del 95 per mille.

Possiamo vedere un altro esempio: supponiamo che una ditta produca bulloni d'acciaio, di una ben precisa dimensione. La probabilit  che un pezzo prodotto sia difettoso (cio , di dimensioni inaccettabili)   0.002. Una fabbrica di macchinari deve acquistare un grosso quantitativo di tali bulloni, ma, volendo testare l'attendibilit  della ditta, decide di esaminare preventivamente un campione di 500 bulloni: se tra questi se ne trova piu' di uno difettoso, la fabbrica decide di annullare l'ordinazione. E' questa una buona strategia per testare la frequenza di pezzi difettosi?

Nel campione di 500 bulloni, ciascun pezzo ha probabilit  $0.002 = \frac{1}{500}$ di essere difettoso. Calcoliamo la probabilit  che i pezzi difettosi, tra i 500 testati, siano piu' di 1: detto X il numero di bulloni difettosi riscontrati, avremo $X \sim P(1)$, per cui

$$P("X > 1") = 1 - P("X = 0") - P("X = 1") = 1 - e^{-1} - e^{-1} = 0.264,$$

un valore basso, ma non troppo; se accade una tale eventualit , prima di rivolgersi a un'altra ditta potrebbe forse convenire di fare un altro test con altri 500 bulloni, oppure *preventivare* un test con caratteristiche diverse: ad esempio, esaminare solo 250 bulloni, e decidere di cambiare ditta solo se il numero di bulloni difettosi supera 1; in questo caso, l'evento sgradito avrebbe probabilit 

$$P("X > 1") = 1 - e^{-0.5} - 0.5e^{-0.5} \approx 0.09$$

dunque attorno al 9%: questo si potrebbe considerare un po' troppo insolito, e quindi se un tale evento si verificasse si potrebbe seriamente sospettare che la frequenza dichiarata di 0.002 pezzi difettosi sia ingannevole.

4.3 Principali distribuzioni continue

Come già abbiamo precisato in precedenza, una distribuzione di tipo continuo è perfettamente individuata, una volta che sia assegnata la sua funzione di densità; infatti, se denotiamo con f tale funzione, possiamo ricavare:

$$P(X \in B) = \int_B f(t)dt$$

per qualunque Boreliano $B \subset \mathbb{R}$. In particolare, la funzione di ripartizione di X è ricavata come segue:

$$F_X(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^x f(t)dt$$

per qualsiasi $x \in \mathbb{R}$. Pertanto, descriveremo tali distribuzioni dando semplicemente la legge delle densità. Prima di procedere in maniera sistematica, osserviamo che solitamente le distribuzioni continue sono raggruppate in vari tipi, ciascuno dei quali dipendente da uno o più parametri; vedremo in seguito che tali parametri hanno un ruolo importante nell'indicare particolari comportamenti delle distribuzioni a cui si riferiscono.

1.: Distribuzione uniforme Fissato un intervallo non degenere $[a, b] \subset \mathbb{R}$, la distribuzione *uniforme* (denotata con $U(a, b)$) ha come densità la funzione

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a}, & \text{se } x \in [a, b] \\ 0, & \text{se } x \notin [a, b]. \end{cases}$$

Ad esempio, la distribuzione $U(0, 2\pi)$ è quella che compete alla v.a. dell'angolo di Buffon: l'angolo X è un qualsiasi valore compreso fra 0 e 2π , e la probabilità che l'angolo sia compreso fra due qualsiasi valori α e β (con $0 \leq \alpha < \beta \leq 2\pi$) è proporzionale a $\beta - \alpha$.

Un *esercizio istruttivo*, a questo punto, è il seguente: data una v.a. X con distribuzione $U(a, b)$, e date due costanti u e v , con $u > 0$, qual'è la distribuzione di $Y := uX + v$? Intuitivamente, la risposta più naturale è che anche Y è di tipo uniforme; inoltre, siccome X può variare tra a e b , è chiaro che Y può variare tra $au + v$ e $bu + v$, dunque dev'essere $Y \sim U(au + v, bu + v)$. Per dimostrarlo rigorosamente,

dobbiamo però valutare la funzione di ripartizione di Y ; intanto, l'osservazione precedente ci permette di dire subito che $F_Y(x) = 0$, se $x < au + v$, e che $F_Y(x) = 1$ se $x > bu + v$. Poi, per x compresa fra $au + v$ e $bu + v$, si ha

$$F_Y(x) = P(uX + v \leq x) = P\left(X \leq \frac{x - v}{u}\right) = \int_a^{\frac{x-v}{u}} \frac{1}{b-a} dt = \frac{x - v - au}{u(b-a)};$$

la derivata di tale funzione rispetto a x ci darà la densità cercata: essendo

$$F_Y'(x) = \begin{cases} \frac{1}{u(b-a)}, & \text{se } x \in [au + v, bu + v] \\ 0, & \text{altrimenti} \end{cases}$$

è provato che $Y \sim U(au + v, bu + v)$.

2: Distribuzione Gamma Questa distribuzione dipende da due parametri, entrambi positivi, denotati con α e β , e la forma della densità, come vedremo, dipende molto dai valori che tali parametri possono assumere. Il parametro β ha un significato di *intensità*, all'incirca come il parametro λ della distribuzione di Poisson; invece, il parametro α ha un ruolo più di *conteggio*, anche se a volte può assumere valori non interi. La distribuzione viene denotata con $\Gamma(\alpha, \beta)$, e la densità viene definita dalla seguente funzione:

$$f_{(\alpha, \beta)}(x) = \begin{cases} 0, & \text{se } x < 0, \\ \frac{x^{\alpha-1}}{\beta^\alpha \Gamma(\alpha)} e^{-\frac{x}{\beta}}, & \text{se } x \geq 0. \end{cases}$$

Per quanto riguarda la definizione della funzione Γ , rimandiamo all'Appendice, ma ricordiamo qui che essa non è altro che un'estensione del fattoriale a tutti i numeri reali positivi: risulta infatti $\Gamma(n) = (n-1)!$ per ogni intero positivo n , e inoltre si ha $\Gamma(t+1) = t\Gamma(t)$ per ogni reale $t > 0$.

Ai fini delle applicazioni vere e proprie, i valori di α che più ci interessano sono quelli interi e quelli *seminteri*, cioè insomma tutti quelli del tipo $\alpha = \frac{n}{2}$ con n intero positivo. Per il momento, daremo una descrizione delle distribuzioni del tipo $\Gamma(n, \beta)$ con n intero, rimandando gli altri casi interessanti a un momento successivo.

Intanto, osserviamo che, nel caso $\alpha = 1$, la distribuzione $\Gamma(1, \beta)$ ha questa densità:

$$f_{(1, \beta)}(x) = \begin{cases} 0, & \text{se } x < 0, \\ \frac{1}{\beta} e^{-\frac{x}{\beta}}, & \text{se } x \geq 0. \end{cases}$$

In questo caso, evidentemente piu' semplice, si dice che X ha distribuzione *esponenziale* con intensita' β^{-1} . Tali distribuzioni sono molto frequenti, come ora vedremo.

Per iniziare, supponiamo che X sia una v.a. di tipo $U(0, 1)$. Dunque la densita' di X é la funzione che vale 1 in $[0, 1]$ e 0 altrove. Studiamo ora la v.a. $Z := -\log X$. Qual'é la distribuzione di Z ?

Preliminarmente, osserviamo che, essendo $0 < X \leq 1$, $\log X$ puo' assumere tutti e soli i valori reali negativi, e quindi Z é (quasi) certamente a valori reali positivi. Ora, calcoliamo la funzione di ripartizione di Z . Per quanto appena detto, si ha certamente $F_Z(z) = 0$, per ogni $z < 0$. Nel caso $z \geq 0$, si ha

$$P([Z \leq z]) = P([-\log X \leq z]) = P([X \geq e^{-z}]) = P([e^{-z} \leq X \leq 1]) = 1 - e^{-z}.$$

Derivando rispetto a z , troviamo la densita' f_Z :

$$f_Z(z) = \begin{cases} 0, & \text{se } z < 0 \\ e^{-z}, & \text{se } z \geq 0. \end{cases}$$

Confrontando con la legge della distribuzione Γ , vediamo che Z ha distribuzione $\Gamma(1, 1)$, e quindi esponenziale.

Un esempio piu' importante é collegato al processo di Poisson, di cui abbiamo parlato nel paragrafo precedente. Al punto 8 di tale paragrafo si sono introdotte le v.a. Y_n , che indicano il momento in cui il fenomeno F si verifica per l' n^a volta.

Ad esempio, se prendiamo $n = 1$, e utilizziamo le notazioni introdotte a proposito del processo di Poisson, si ha, per ogni $t > 0$:

$$P("Y_1 \leq t") = 1 - P("Y_1 > t") = 1 - P("X_t = 0") = 1 - e^{-\lambda t}$$

avendo indicato con λ la costante di proporzionalita' relativa all'intervallo di tempo $[0, 1]$. Vediamo dunque che la v.a. Y_1 relativa al processo di Poisson, che puo' essere denominata il *tempo d'attesa* per la prima realizzazione del fenomeno F , ha distribuzione esponenziale $\Gamma(1, \lambda^{-1})$.

Possiamo procedere in maniera analoga, per determinare la distribuzione di Y_n , con $n > 1$; per ogni $t > 0$, si ha:

$$P(Y_n \leq t) = 1 - P(Y_n > t) = 1 - P(X_t \leq n - 1) = 1 - \sum_{j=0}^{n-1} \frac{(\lambda t)^j e^{-\lambda t}}{j!},$$

avendo adoperato la distribuzione di Poisson con parametro λt per la v.a. X_t .

Derivando rispetto a t , si ottiene

$$\begin{aligned} F_{Y_n}'(t) &= \sum_{j=0}^{n-1} \frac{(\lambda t)^j \lambda e^{-\lambda t}}{j!} - \sum_{j=0}^{n-1} \frac{j \lambda^j t^{j-1} e^{-\lambda t}}{j!} = \sum_{j=0}^{n-1} \frac{\lambda^{j+1} t^j}{j!} e^{-\lambda t} - \sum_{j=1}^{n-1} \frac{\lambda^j t^{j-1}}{(j-1)!} e^{-\lambda t} = \\ &= \sum_{j=0}^{n-1} \frac{\lambda^{j+1} t^j}{j!} e^{-\lambda t} - \sum_{i=0}^{n-2} \frac{\lambda^{i+1} t^i}{i!} e^{-\lambda t} = \frac{\lambda^n t^{n-1}}{(n-1)!} e^{-\lambda t}, \end{aligned}$$

da cui si deduce immediatamente che $Y_n \sim \Gamma(n, \frac{1}{\lambda})$.

Vedremo piu' in la' un'altra descrizione di questo tipo di distribuzione, almeno per il caso $n \in \mathbb{N}$.

3: Distribuzione Beta Questo tipo di distribuzione, che pure dipende da due parametri positivi, ha utilita' in varie situazioni, sia perche' racchiude funzioni densita' con andamenti molto diversificati, sia per la possibilita' di applicazioni in problemi di inferenza. Le variabili aleatorie con tale distribuzione possono avere valori soltanto in $[0, 1]$: gli esempi tipici sono *rapporti* tra quantita' positive, di cui il numeratore e' minore del denominatore, per esempio frequenze relative; ma ogni v.a. positiva e *limitata* puo' essere linearmente trasformata in una v.a. a valori in $[0, 1]$, e quindi studiata anche per mezzo di questo tipo di distribuzioni.

Cominciamo con il notare che, per α e β parametri reali positivi, la funzione $\varphi(x) = x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1}$ e' integrabile in $[0, 1]$, anche se uno dei parametri (o persino tutti e due) e' minore di 1.

Tale integrale si denota con $B(\alpha, \beta)$, e si chiama *funzione Beta*: dunque

$$B(\alpha, \beta) = \int_0^1 x^{\alpha-1} (1-x)^{\beta-1} dx$$

per ogni $\alpha > 0$ e ogni $\beta > 0$. Diciamo allora che una v.a. X ha *distribuzione Beta*, e scriviamo $X \sim Be(\alpha, \beta)$, se la densita' di X é la seguente funzione:

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{se } x \notin [0, 1] \\ \frac{x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1}}{B(\alpha, \beta)}, & \text{se } x \in [0, 1]. \end{cases}$$

Per vedere esempi di questo tipo di distribuzione, supponiamo ancora che X sia una v.a. con distribuzione $U(0, 1)$, e sia k un qualunque numero reale positivo. La v.a. $Y = X^k$ ha distribuzione Beta: infatti, osserviamo prima di tutto che Y assume necessariamente valori compresi fra 0 e 1. Dunque la densita' di Y sara' senz'altro nulla, fuori di $[0, 1]$. Per $y \in [0, 1]$, si ha poi

$$F_Y(y) = P([X^k \leq y]) = P([X \leq y^{1/k}]) = y^{1/k}.$$

Derivando, si ottiene la densita' f_Y :

$$f_Y(y) = \frac{1}{k} y^{1/k-1}$$

per ogni $y \in [0, 1]$, da cui si vede subito che $Y \sim Be(\frac{1}{k}, 1)$. Ancora un altro esempio: supponendo $X \sim U(0, \pi/2)$, consideriamo la v.a. $Z = \sin^2 X$. Chiaramente Z assume valori in $[0, 1]$. Considerando la sua funzione di ripartizione, avremo

$$F_Z(z) = P("X \leq \arcsin \sqrt{z} ") = \frac{2}{\pi} \arcsin \sqrt{z}$$

per $z \in [0, 1]$, e la densita' f_Z é data da:

$$f_Z(z) = \frac{1}{\pi} z^{-1/2} (1-z)^{-1/2}$$

(ovviamente per $z \in [0, 1]$, altrimenti é nulla). Questo prova che $Z \sim Be(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$.

Per quanto apparentemente molto diverse l'una dall'altra, le funzioni *Gamma* e *Beta* hanno in comune una formula (che non dimostreremo), spesso molto utile a livello di calcoli. La formula é la seguente:

$$B(\alpha, \beta) = \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha + \beta)}. \quad (4.1)$$

Ad esempio, se si vuole calcolare la quantità $\int_0^1 x^6(1-x)^9 dx$, non c'è bisogno di svolgere la potenza del binomio $(1-x)^9$: si ha infatti

$$\int_0^1 x^6(1-x)^9 dx = B(7, 10) = \frac{6!9!}{16!} = \frac{1}{80080}.$$

A tale proposito, l'ultima distribuzione che abbiamo calcolato ci mostra che

$$B\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) = \pi$$

da cui, usando (4.1), otteniamo

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}.$$

(Si veda anche l'Appendice).

Gli esempi finora incontrati ci hanno mostrato che spesso è importante ricavare la distribuzione di variabili aleatorie, che si ottengono come funzioni di altre v.a. con distribuzione nota. Nel caso continuo, possiamo usare la seguente regola (detta *formula di distribuzione composta*).

Data una v.a. X con distribuzione continua e densità f , per ogni funzione $\phi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ che sia strettamente monotona e di classe C^1 a tratti, la v.a. $Y := \phi(X)$ ha distribuzione continua, e densità

$$f_Y(y) = f(\phi^{-1}(y)) (\phi^{-1})'(y).$$

4: Distribuzione di Cauchy Mettiamo subito in pratica la regola precedente, in questa situazione: supponiamo $X \sim U(-\pi/2, \pi/2)$, e consideriamo la v.a. $Y := \tan X$. Nell'intervallo di variabilità di X , la Y è funzione crescente di X , e quindi si ha

$$f_Y(y) = f_X(\arctan y) \frac{1}{1+y^2} = \frac{1}{\pi} \frac{1}{1+y^2}$$

per ogni $y \in \mathbb{R}$, dato che $f(x)$ è costante in $] -\pi/2, \pi/2[$.

Se poi scegliamo un qualunque numero $c \neq 0$, la v.a. $Z = Y/c$ ha come densità

$$f_Z(z) = \frac{1}{|c|} \frac{1}{\pi} \frac{1}{1+y^2/c^2} = \frac{1}{\pi} \frac{|c|}{c^2 + y^2}$$

Questo tipo di densità, che dipende dal parametro c , è detta *densità di Cauchy*, e la distribuzione (denominata allo stesso modo) si denota con $C(c)$.

5: Distribuzione Gaussiana La distribuzione *gaussiana*, o anche *normale*, é la piu' importante di tutte: essa viene usata come modello per moltissime situazioni, specialmente quando la casualita' dei valori della v.a. X dipende da numerose concause, anche poco conosciute, ma ciascuna influente in piccola misura. L'esempio tipico é la distribuzione degli *errori* di misurazione, almeno quando questi non dipendano da veri e propri difetti degli strumenti o degli osservatori.

La distribuzione normale dipende da due parametri, μ e σ : il primo puo' variare in tutto \mathbb{R} , mentre il secondo é strettamente positivo. La distribuzione viene denotata con $N(\mu, \sigma)$, e la densita' é cosi' definita:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

per ogni $x \in \mathbb{R}$.

(Si tenga conto dell'integrale notevole

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi} :$$

da questo, con una semplice integrazione per sostituzione, si ricava

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} dx = \sqrt{2\pi\sigma^2},$$

cosi' abbiamo verificato che la funzione f é una densita').

Nel caso $\mu = 0$ e $\sigma = 1$, si ha la distribuzione *normale standard*: la forma del grafico é quella tipica a campana, con massimo in 0 e quasi sovrapposto all'asse x quando $|x| > 4$. La distribuzione $N(0, 1)$ é particolarmente importante, e i valori della funzione di ripartizione sono in genere tabulati, perché essa non ha un'espressione elementare.

Ritornando alla distribuzione normale generale, il parametro μ é anche detto *media*, e rappresenta in un certo senso il *centro* dei valori che la v.a. puo' assumere. (Nel prossimo paragrafo studieremo piu' in dettaglio questo e altri parametri di riferimento). Quando μ é diverso da 0, il grafico della densita' si sposta orizzontalmente, centrando il punto di massimo in μ ; quando σ é minore di 1, il grafico si fa piu'

stretto attorno al massimo e piu' schiacciato a 0 *nelle code*, cioè per $|x| \rightarrow \infty$; il contrario accade per $\sigma > 1$. In un certo senso (che in seguito chiariremo meglio), il parametro σ ci dice quanto la v.a. X si puo' discostare dal *centro* μ , e viene detto *scarto quadratico*, secondo una terminologia che presto tratteremo.

Utilizzando la formula della distribuzione composta, e semplici integrazioni per sostituzione, é facile ricavare la seguente

Proposizione 4.7 *Se $X \sim N(\mu, \sigma)$, per ogni numero reale $a > 0$ e ogni numero reale b , la v.a. $Y = aX + b$ ha distribuzione $N(a\mu + b, a\sigma)$. In particolare, $X \sim N(\mu, \sigma)$ se e solo se $\frac{X-\mu}{\sigma} \sim N(0, 1)$.*

Un altro importante risultato lega la distribuzione normale alla Gamma. Precisamente

Teorema 4.8 *Sia X una v.a. con distribuzione $N(0, 1)$. Allora $X^2 \sim \Gamma(\frac{1}{2}, 2)$.*

Dimostrazione. Dato che la funzione $x \rightarrow x^2$ non é strettamente monotona, non si puo' adoperare immediatamente la regola della distribuzione composta. Ponendo $Y = X^2$, si ha

$$P(Y \leq y) = \begin{cases} 0, & \text{se } y < 0 \\ P(|X| \leq \sqrt{y}), & \text{se } y \geq 0. \end{cases}$$

Per $y \geq 0$, avremo allora

$$F_Y(y) = \int_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}} f(x) dx = 2 \int_0^{\sqrt{y}} f(x) dx$$

dove f é la densita' della normale standard, l'ultima relazione valendo in quanto f é una funzione *pari*. Denotata dunque con Φ la funzione di ripartizione della distribuzione normale standard, si ha

$$F_Y(y) = 2(\Phi(\sqrt{y}) - \Phi(0)) = 2\Phi(\sqrt{y}) - 1$$

sempre per $y \geq 0$. Derivando, si ottiene

$$f_Y(y) = 2f(\sqrt{y}) \frac{1}{2\sqrt{y}} = \frac{y^{-1/2} e^{-y/2}}{2^{1/2} \sqrt{\pi}}$$

per $y \geq 0$, e ovviamente $f_Y(y) = 0$ per $y < 0$. Tenendo presente che $\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$, si riconosce che $Y \sim \Gamma(\frac{1}{2}, 2)$. \square

La distribuzione $\Gamma(\frac{1}{2}, 2)$ prende il nome di *Chi Quadro* e si denota con χ_1^2 . Più in generale, la $\Gamma(\frac{n}{2}, 2)$ prende il nome di distribuzione *Chi Quadro a n gradi di libertà*, e viene denotata con χ_n^2 . (Vedremo in seguito l'importanza di tali distribuzioni).

- Esercizi 4.9 1:** Si consideri l'esperimento di lanciare un dado onesto 4 volte, e sia X la v.a. discreta che conta quante volte esce il 5. Qual'è la distribuzione di X ?
- 2:** Si consideri l'esperimento di lanciare un dado onesto 3 volte, e sia X la v.a. che descrive la somma dei tre risultati. Si trovi la distribuzione di X .
- 3:** Si supponga di lanciare 10 volte una moneta, in cui la probabilità di *testa* è p . Si denoti con X la v.a. numero di teste e con Y la v.a. numero di croci, e si determini la distribuzione di $X - Y$. (Sugg.: si scriva $Y = n - X$...)
- 4:** In un recipiente sono contenute r palline rosse e b palline bianche. Ogni minuto si lancia una moneta, con $P(T) = p$: se esce croce, non si fa nulla; se esce testa, si estrae una palla a caso dal recipiente, e poi la si rimette dentro. Si denoti con X la v.a. che segna il minuto in cui per la prima volta esce una palla rossa. Si dimostri che $X \sim NB(1, \frac{pr}{r+b})$.
- 5:** Nella stessa situazione descritta nell'esercizio 4, sia Y la v.a. che indica il minuto in cui palla rossa esce per la k^a volta: qual'è la distribuzione di Y ?
- 6:** Una ditta produce cioccolatini di pregiata qualità: la frequenza di cioccolatini difettosi è dello 0.1%. Qual'è la probabilità che, in una partita di 4500 cioccolatini, ve ne siano almeno 3 difettosi?
- 7:** In un processo di Poisson con intensità λ , si denoti con Y la v.a. che indica l'istante t in cui il fenomeno F si verifica per la prima volta: per quanto visto in precedenza, $Y \sim \Gamma(1, \frac{1}{\lambda})$. Si dimostri che si ha

$$P("Y > t + u" | "Y > t") = P("Y > u")$$

per qualunque scelta di u e t in $]0, +\infty[$.

N.B: Questa proprietà è *caratteristica* della distribuzione esponenziale, e viene detta *manca di memoria*: in termini più suggestivi, se Y rappresenta il tempo d'attesa per un certo evento F (ad es., l'uscita di un dato numero al lotto), il fatto di aver già atteso un certo tempo t non fa diminuire (né aumentare) la probabilità che si debba ancora aspettare almeno un ulteriore tempo u , come se il tempo già passato *non contasse niente*.

- 8:** Sia X una v.a. con distribuzione continua, di tipo $U(0, 1)$. Si determini la densità della v.a. $Y := e^X$, e quella di $Z := \frac{1}{X}$.
- 9:** Sia A il punto $(-1, 0)$, e si consideri il cerchio C di equazione $x^2 + y^2 = 1$. Scelto a caso un angolo θ tra 0 e 2π , (con distribuzione $U(0, 2\pi)$), si tracci la corda che unisce A con il punto $(\cos \theta, \sin \theta) \in C$. Detta L la lunghezza di tale corda, si trovi la distribuzione di L .
- 10:** Si fissi il punto $P \equiv (0, 1)$ e si scelga a caso, con distribuzione normale standard, un numero reale X ; detta D la distanza tra P e $(X, 0)$, si trovi la densità di D .
- 11:** Sia X una v.a. con distribuzione $U(0, 2\pi)$: qual è la densità di $S := \sin X$? E quella di $Z := \cos X$?
- 12:** Sia $X \sim N(0, \sigma)$. Si dimostri che $X^2 \sim \Gamma(\frac{1}{2}, 2\sigma^2)$.

4.4 Percentili, valor medio, varianza, momenti

Molte volte una v.a. X può essere descritta in modo efficace, semplicemente indicando alcuni *parametri* di riferimento. Questo è ovvio, se ad esempio si sa che X è di tipo uniforme discreta, per cui l'unico parametro che interessa conoscere è N , oppure se già si sa che X è di tipo normale, e allora basta conoscere i parametri μ e σ . Ma a volte, anche senza informazioni circa la distribuzione di X , la conoscenza di relativamente pochi parametri

permette di dedurre esattamente la distribuzione incognita, o almeno le probabilita' di importanti eventi legati alla X .

Tutti questi parametri sono legati alla distribuzione di X : alcuni sono riferiti piu' direttamente alla forma della funzione F_X , altri sono parametri *di locazione* della X , preposti cioe' ad indicare *da che parte* dell'asse reale si collocano principalmente i valori di X . Noi ci limiteremo qui ad indicare alcuni di questi ultimi.

Inizieremo con il concetto di *mediana*. Questo si puo' descrivere, data una v.a. X , come quel valore $m \in \mathbb{R}$ tale che

$$P("X < m") \leq \frac{1}{2}, \quad \text{e} \quad P("X > m") \leq \frac{1}{2}. \quad (4.2)$$

Equivalentemente, la condizione (4.2) si puo' scrivere

$$P("X < m") \leq \frac{1}{2}, \quad \text{e} \quad P("X \leq m") \geq \frac{1}{2}. \quad (4.3)$$

L'idea che queste condizioni suggeriscono e' che m sia un *punto di equilibrio* della distribuzione di X : la situazione ideale sarebbe che nella (4.2) le disuguaglianze fossero uguaglianze, o equivalentemente $F_X(m) = \frac{1}{2} = F_X(m-0)$, ma questo non e' sempre possibile.

Comunque, precisiamo che un punto m che verifichi la (4.3) esiste sempre (anche se non e' unico). Ad esempio, si ponga

$$x^* = \inf\{x \in \mathbb{R} : F_X(x) \geq \frac{1}{2}\}.$$

Poiche' F_X e' continua a destra, e' chiaro che $F_X(x^*) \geq \frac{1}{2}$. D'altra parte, se $t < x^*$ non puo' essere $F_X(t) \geq \frac{1}{2}$ e quindi $P([X < x^*]) = \lim_{t \rightarrow (x^*)^-} F_X(t) \leq \frac{1}{2}$.

In genere, se esistono piu' valori m per cui vale la (4.2), si puo' facilmente provare che essi costituiscono un intervallo.

Definizione 4.10 Data una v.a. X , si dice *mediana* di X , o di F_X , quel numero m (se unico) che verifica la (4.2). Se m non e' unico, abbiamo gia' osservato che esiste tutto un intervallo (m_1, m_2) di valori per cui la (4.2) e' verificata, e allora si definisce *mediana* il punto medio di tale intervallo: $m = \frac{m_1 + m_2}{2}$.

In maniera analoga si definiscono i *quartili* e piu' in generale i *percentili* di una distribuzione.

Definizione 4.11 Sia data una variabile aleatoria X , e scegliamo un qualsiasi valore $p \in]0, 1[$. Come visto in precedenza, si puo' provare che esiste almeno un valore $x_p \in \mathbb{R}$ tale che

$$P("X < x_p") \leq p, \quad \text{e} \quad P("X > x_p") \leq 1 - p. \quad (4.4)$$

Se x_p non é unico, esiste tutto un intervallo $[x_1, x_2]$ di punti con tale proprieta', e in tal caso si pone $x_p = \frac{x_1 + x_2}{2}$.

Ad esempio, si chiamano *quartili* i tre numeri $x_{\frac{1}{4}}$, $x_{\frac{1}{2}}$, $x_{\frac{3}{4}}$: il secondo non é altro che la mediana, gia' introdotta, il primo e il terzo sono detti rispettivamente *primo* e *terzo quartile*. Ad esempio, dire che un valore x osservato per X é *al disopra del terzo quartile* vuol dire che $P("X > x") \leq \frac{1}{4}$.

Nel caso p sia espresso tramite una percentuale, il valore x_p prende il nome di *percentile*: ad esempio se $p = 12\%$, allora il valore corrispondente x_p é il *dodicesimo percentile* della distribuzione. Quindi, la mediana é il 50^0 percentile, e il primo quartile é il 25^0 percentile.

La ricerca dei percentili é abbastanza semplice, se la distribuzione di X é elementare, oppure se F_X é strettamente monotona e continua, e la sua inversa é esprimibile in termini elementari.

Ad esempio, se X ha distribuzione $U(a, b)$, il 15^0 percentile é dato da $x_{\frac{15}{100}} = a + \frac{15}{100}(b-a)$; oppure, se si vuole trovare x_p nel caso di una distribuzione esponenziale $\Gamma(1, \beta)$, basta osservare che $F_X(x) = 1 - e^{-\frac{x}{\beta}}$ per $x > 0$ (e nulla per $x \leq 0$), e ottenere x_p dall'inversa di F_X : ossia $x_p = \beta \log \frac{1}{1-p}$ (la mediana allora sarebbe $m = \beta \log 2$).

Nel caso X abbia distribuzione discreta, la ricerca dei percentili non é sempre agevole. Se la distribuzione é *uniforme*, il discorso é pero' molto semplice (e ha notevoli applicazioni): ad esempio, supponiamo che X assuma i valori x_1, x_2, \dots, x_N , tutti con la stessa probabilita', e supponiamo di voler calcolare la mediana di X ; allora, basta *ordinare* le X_i in maniera crescente, e prendere il valore centrale (se N é dispari, esso é univoco, altrimenti si prende la media dei due valori centrali). Se la distribuzione non fosse uniforme, si potrebbe procedere

operativamente assumendo che le varie probabilit  $P(X = x_i'')$ siano espresse da numeri *razionali*, e quindi ricondotte tutte a frazioni del tipo $\frac{n_i}{m}$ con lo stesso denominatore: a questo punto, si procede elencando (in ordine crescente) i vari valori della X , *ripetendo* ciascuna delle x_i per n_i volte. Il valore centrale che si ottiene in questo modo sarebbe la mediana.

Anche nel caso continuo, si hanno situazioni complicate: ad esempio, la funzione di ripartizione della distribuzione $N(0, 1)$ non   di tipo elementare, e quindi i suoi valori (e quelli della sua inversa) sono tabulati. Fortunatamente, nell'epoca in cui viviamo, dal punto di vista operativo il calcolo   quasi sempre demandabile ai computer. Comunque, conviene anche formulare i problemi in maniera opportuna, in modo da evitare lungaggini inutili. Ad esempio, se si vuole calcolare il 16^o percentile di una v.a. X con distribuzione $N(\mu, \sigma)$, basta ricordare che $X = \sigma X^* + \mu$, dove $X^* \sim N(0, 1)$, e quindi cercare con le tavole il 16^o percentile di X^* : se questo   t , allora quello cercato per X sar  dato da $\sigma t + \mu$.

Il parametro di riferimento di maggiore importanza   il *valor medio*. Bench  sia possibile darne una definizione generale, presenteremo questo concetto (e anche gli altri che tratteremo) solo nei casi di distribuzione discreta e di distribuzione continua, specificando le formule necessarie per il calcolo.

Per introdurre la definizione formale, immaginiamo un gioco d'azzardo di questo tipo: il direttore del gioco lancia una moneta onesta 6 volte, e il giocatore scommette ogni volta sull'uscita di *testa*, vincendo 3 euro se esce *testa* e perdendo 2 euro se esce *croce*. Chiaramente, senza altre regole, il giocatore sarebbe avvantaggiato, e quindi si stabilisce che egli, prima che il gioco inizi, versi un *piatto* che renda il gioco *equo*: in altre parole, questo piatto deve bilanciare la sua vincita *prevista*. Per stabilire quale sia il piatto, bisogna dunque chiedersi quale sia questa presunta vincita del giocatore (si noti che si parla di vincita *ipotetica*, perche' la moneta, pur essendo onesta, potrebbe fare grossi scherzi...). Ebbene, per capire quale sia la vincita presunta, basta *immaginare* una situazione ideale, in cui la frequenza effettiva di *teste* uscite sia esattamente quella definita da p (in questo caso, $p = \frac{1}{2}$): se cos   , si puo' prevedere che escano 3 *teste* e 3 *croci*, per cui il giocatore vincer  3 euro. Questa   dunque la vincita presunta, e questo sar  il piatto da versare

in anticipo: poi, se il giocatore sara' *fortunato*, ci saranno piu' teste che croci, e quindi vincerà comunque qualcosa, nonostante la spesa del piatto; se invece sara' *sfortunato*, non recupererà che una parte del piatto o addirittura dovrà pagare qualcosa *oltre* al piatto.

Ora, lasciando da parte il piatto, denotiamo con X la variabile aleatoria *vincita* del giocatore, intesa sia in senso positivo che negativo: chiaramente, il valore di X dipende dal numero N di *teste* uscite nei 6 lanci: ad es., se $N = 0$ si ha $X = -12$, se $N = 3$ si ha $X = 3$, se $N = 5$ si ha $X = 5 \times 3 - 1 \times 2 = 13$, etc. In generale, si ha

$$X = 3N - 2(6 - N) = 5N - 12.$$

Dunque, X può assumere i valori:

$$-12, -7, -2, 3, 8, 13, 18$$

con probabilita' rispettivamente:

$$\frac{1}{2^6}, \frac{6}{2^6}, \frac{15}{2^6}, \frac{20}{2^6}, \frac{15}{2^6}, \frac{6}{2^6}, \frac{1}{2^6}.$$

Questo discorso si può interpretare dicendo che, se questo gioco si ripetesse un gran numero di volte, poniamo M volte, *grosso modo* la vincita del giocatore sarebbe -12 circa $\frac{1}{2^6} \times M$ volte, -7 circa $\frac{1}{2^6} \times M$ volte, etc., per un totale di

$$M(-12\frac{1}{2^6} - 7\frac{6}{2^6} - 5\frac{15}{2^6} + 3\frac{20}{2^6} + 8\frac{15}{2^6} + 13\frac{6}{2^6} + 18\frac{1}{2^6}) = M \sum_{N=0}^6 (5N - 12) \frac{\binom{6}{N}}{2^6} = 3M.$$

In questo senso, la vincita presunta (3 *euro*) é la vincita *media* ottenuta dividendo per M l'ipotetica vincita globale nelle M successive ripetizioni del gioco.

Definizione 4.12 L'ultima formula scritta porta a definire il concetto di *valor medio*, almeno nel caso discreto: se X é una v.a. che può assumere i valori x_1, x_2, \dots, x_n , ciascuno con probabilita' p_1, p_2, \dots, p_n , il *valor medio* di X é la quantita':

$$E(X) = \sum_{i=1}^n x_i p_i.$$

Tale quantita' si può interpretare come la media (aritmetica) dei valori che X assume, supponendo di *iterare* un gran numero di volte l'esperimento da cui dipendono i vari valori

della X : come abbiamo fatto prima, se l'esperimento si ripete M volte, approssimativamente $p_1 M$ volte X assumerà il valore x_1 , $p_2 M$ volte il valore x_2 , etc., per una somma complessiva pari a $ME(X)$.

Nel caso in cui X possa assumere infiniti valori x_n , con $n \in \mathbb{N}$, ciascuno con probabilità p_n , il valor medio va definito mediante una *serie*, $\sum_{n=1}^{+\infty} x_n p_n$: ma naturalmente questa serie potrebbe non essere convergente; non solo, ma in teoria potrebbe anche trattarsi di una serie a segno variabile, nel qual caso anche una convergenza *semplice* potrebbe essere inadeguata: ricordiamo infatti che, se una serie di segno variabile non è assolutamente convergente, è possibile modificare l'ordine dei termini nella serie in modo da ottenere serie semplicemente convergenti, ma con somme completamente diverse l'una dall'altra; questo significa che il valor medio di una variabile aleatoria X potrebbe dipendere dall'ordine con cui i suoi valori sono elencati (ferma restando la distribuzione di X): decisamente inaccettabile! Si parla dunque di *valor medio* per una v.a. discreta X soltanto se la serie $\sum x_n p_n$ è *assolutamente convergente*: in tal caso, è ben noto che la serie converge anche *incondizionatamente* (ossia, la somma è sempre la stessa, comunque si riordinino i termini). Si pone quindi

$$E(X) = \sum_{n=1}^{\infty} x_n p_n.$$

Questa definizione comprende anche il caso di serie a termini positivi: se tutti gli x_n sono positivi, si vuole *comunque* che la serie definente $E(X)$ sia convergente: in altri termini, non si accetta un valor medio *infinito*. (Vedremo in seguito qualche esempio interessante in tal senso).

Vediamo alcuni esempi.

- 1:** Supponiamo $X \sim B(1, p)$: i valori possibili sono 0 e 1, il primo con probabilità $1 - p$, il secondo con probabilità p . È chiaro allora che

$$E(X) = p.$$

- 2:** Supponiamo $X \sim U(N)$: i valori possibili sono $1, 2, \dots, N$, tutti con probabilità $\frac{1}{N}$. È allora

$$E(X) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N i = \frac{N+1}{2}.$$

- 3: Supponiamo $X \sim B(n, p)$: i valori possibili sono $0, 1, \dots, n$, e si ha $P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$, per ogni k . Il calcolo di $E(X)$ é un po' piu' delicato, benché il risultato sia prevedibile, dato il significato della variabile aleatoria in questione. Riportiamo qui un calcolo succinto, avvertendo comunque che l'espressione di $E(X)$ puo' anche essere ricavata in maniera elegante e rapida, usando semplici teoremi.

$$\begin{aligned} E(X) &= \sum_{k=0}^n k \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} = \sum_{k=1}^n p n \binom{n-1}{k-1} p^{k-1} (1-p)^{(n-1)-(k-1)} = \\ &= p n \sum_{j=0}^{n-1} \binom{n-1}{j} p^j (1-p)^{n-1-j} = p n, \end{aligned}$$

avendo usato l'indice $j = k - 1$ e la formula binomiale $\sum_{j=0}^m p^j (1-p)^{m-j} = 1$.

- 4: Supponiamo ora $X \sim NB(1, p)$. In questo caso, X assume infiniti valori, e quindi si porra' un problema di convergenza di serie; la serie in questione é:

$$\sum_{k=1}^{\infty} k p (1-p)^{k-1}.$$

Si tratta di una serie a termini positivi, e si vede facilmente, ad esempio con il criterio del rapporto, che essa é convergente. Resta ora il problema di calcolarne la somma. A questo scopo, ricordiamo una proprieta' degli *sviluppi in serie di Taylor*: sappiamo che, se una funzione $f(x)$ é sviluppabile in serie di Taylor, anche la sua derivata, $f'(x)$, é sviluppabile, e i termini della serie derivata non sono altro che le derivate dei termini della serie di $f(x)$. Il caso che qui ci interessa é quello della funzione $f(x) = \frac{1}{1-x}$: per $|x| < 1$ tale funzione é sviluppabile in serie di Taylor, e si ha:

$$f(x) = \frac{1}{1-x} = \sum_{k=0}^{\infty} x^k.$$

Passiamo alla derivata:

$$f'(x) = \frac{1}{(1-x)^2} = \sum_{k=0}^{\infty} k x^{k-1} = \sum_{k=1}^{\infty} k x^{k-1}.$$

Prendendo $x = 1 - p$, avremo

$$E(X) = \sum_{k=1}^{\infty} k p (1-p)^{k-1} = p \frac{1}{(1-(1-p))^2} = \frac{1}{p}.$$

Anche questo risultato non é strano: é logico che, se *testa* é poco probabile, bisogna attendere molto tempo prima che esca; viceversa, se la probabilita' di *testa* é prossima a 1, il tempo medio di attesa é vicino a 1, ossia presumibilmente la prima *testa* apparira' gia' al primo lancio.

- 5: Proponiamo ora il valor medio della distribuzione di Poisson $P(\lambda)$: i valori possibili per X sono tutti i numeri interi non-negativi, con $P(X = k) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}$, per $k = 0, 1, 2, \dots$

Risulta

$$E(X) = \sum_{k=0}^{\infty} k e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!} = \sum_{k=1}^{\infty} k e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!} = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda e^{-\lambda} \frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!} = \lambda :$$

l'intensita' λ del processo non é altro che il numero medio di realizzazioni del fenomeno nell'intervallo unitario di tempo.

- 6: L'ultimo esempio (per ora) illustra quello che una volta era chiamato il *Paradosso di S. Pietroburgo*. Si tratta di una v.a. discreta, che *avrebbe* valor medio infinito (e quindi *non ha* valor medio). Anche questa é ricavata dai giochi d'azzardo: supponiamo di lanciare ripetutamente una moneta onesta, finché non compare la prima *testa*. Se la prima *testa* appare al k^o lancio, il giocatore vince 2^k euro. Qual'é il *piatto* che bisogna sborsare anticipatamente, perché il gioco sia equo?

La vincita X é una v.a. che assume i valori: $2, 2^2, 2^3, \dots$, ciascuno con probabilita' rispettive $\frac{1}{2}, \frac{1}{2^2}, \frac{1}{2^3}, \dots$. La serie che dovrebbe fornire il valor medio é allora

$$\sum_{k=1}^{\infty} 2^k \frac{1}{2^k} = \sum_{k=1}^{\infty} 1 = +\infty :$$

in teoria, non esiste alcun piatto ragionevole, e il gioco é *troppo favorevole* al giocatore! Si parla (o parlava) di un *paradosso* perché un tempo questo gioco era abbastanza diffuso, e, *tutto sommato*, un piatto di 6 o 7 euro (in valuta dell'epoca) sembrava funzionare; d'altra parte, benché teoricamente possibili, eventi come l'uscita di 9 o 10 *croci* consecutive sono molto rari, e difficilmente il gioco veniva ripetuto tante volte, da presentare una tale evenienza.

Nel caso di v.a. continua il discorso diviene piu' delicato : come si fa a definire il valor medio di una v.a., se essa assume infiniti valori (ben piu' di un'infinita' numerabile), e tutti con probabilita' nulla?

Per orientarci, conviene ricordare che le distribuzioni continue sono state introdotte principalmente per fornire dei *modelli* di variabili che *sarebbero discrete, se uno le lasciasse stare*: ad esempio, la distribuzione uniforme $U(a, b)$ é una buona approssimazione per una v.a. discreta, che assume un gran numero di valori compresi tra a e b , tutti con la stessa probabilita'. Allora, se si vuole definire in maniera adeguata il valor medio (v.m. in breve) per una v.a. con distribuzione continua, conviene *fare un passo indietro* e assimilare questa distribuzione a quella di una v.a. di tipo discreto che le *somiglia* molto.

Per fissare le idee, supponiamo che X abbia densita' f , e supponiamo che f sia nulla al di fuori di un certo intervallo $[a, b]$, e continua in $[a, b]$. Scegliamo un intero N molto grande, e dividiamo l'intervallo $[a, b]$ in N intervallini J_i di uguale ampiezza; ora, denotiamo con t_i , $i = 1, \dots, N$, gli estremi destri degli intervalli J_i , e associamo ad X una v.a. discreta Y_N , che assume i valori t_1, t_2, \dots, t_N , ciascuno con probabilita' proporzionale a $f(t_i)$: si vuole insomma che Y_N assuma i valori t_i in *rappresentanza* dei valori che puo' assumere la X , e la probabilita' che Y_N sia uguale a t_i é a sua volta *rappresentativa* di $f(t_i)$. Facendo i conti, si ha

$$P(Y_N = t_i) = \frac{f(t_i)}{\sum_{k=1}^N f(t_k)} = \frac{\frac{b-a}{N} f(t_i)}{\sum_{k=1}^N \frac{b-a}{N} f(t_k)}$$

(vedremo tra poco il perche' della *complicazione* fatta inserendo il termine $\frac{b-a}{N}$ a numeratore e a denominatore). Se ne deduce

$$E(Y_N) = \frac{\sum_{i=1}^N t_i \frac{b-a}{N} f(t_i)}{\sum_{k=1}^N \frac{b-a}{N} f(t_k)}.$$

Ora, se facciamo crescere N , mandandolo a $+\infty$, il numeratore tendera' all'integrale di Riemann: $\int_a^b t f(t) dt$ (ecco il motivo della *complicazione* fatta poc'anzi); e il denominatore tendera' a $\int_a^b f(t) dt$, che é uguale a 1, poiché f é una densita' di probabilita'. Pertanto, si perviene a

$$\lim_{N \rightarrow \infty} E(Y_N) = \int_a^b x f(x) dx.$$

Questa é al tempo stesso una definizione e una regola di calcolo per $E(X)$: in termini rigorosi, l'operazione descritta potrebbe essere effettuata, *mutatis mutandis*, per qualsiasi v.a. X , con *qualsiasi* distribuzione (anche non continua), e il risultato é quello che si chiama *integrale* di X rispetto a P . Ma a noi non interessa trattare il caso generale, per cui ci limiteremo alla seguente

Definizione 4.13 Data una v.a. X , con distribuzione continua e densita' f , diremo che X *ammette* valor medio (v.m.) se la funzione $|x|f(x)$ é integrabile (in senso generalizzato) su tutto \mathbb{R} , e in tal caso si pone

$$E(X) = \int_{\mathbb{R}} xf(x) dx.$$

Piu' in generale, data una qualsiasi funzione continua $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, si puo' dire che la v.a. $g(X)$ (cioé la *composizione* $g \circ X$) ammette valor medio se e solo se la funzione $|g(x)|f(x)$ é integrabile in senso generalizzato, e in tal caso risulta

$$E(g(X)) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(x)f(x) dx.$$

Si noti che, anche nel caso continuo, potrebbe accadere che qualche v.a. non ammette valor medio: ad esempio, la distribuzione di Cauchy ha questo inconveniente; infatti, la densita' essendo proporzionale a $\frac{1}{1+x^2}$, il prodotto $|x|f(x)$ ha integrale infinito, in senso generalizzato.

Vediamo ora altri importanti esempi.

1: Nel caso $X = U(a, b)$, il calcolo del v.m. é semplice:

$$E(X) = \frac{1}{b-a} \int_a^b x dx = \frac{a+b}{2} :$$

piuttosto prevedibile! Usando la seconda parte della definizione 4.13, ricaviamo anche

$$E(X^2) = \frac{1}{b-a} \int_a^b x^2 dx = \frac{1}{3} \frac{b^3 - a^3}{b-a} = \frac{a^2 + ab + b^2}{3}.$$

2: Supponiamo ora $X \sim \Gamma(\alpha, \beta)$. Si ha

$$E(X) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)\beta^\alpha} \int_0^{+\infty} x^\alpha e^{-x/\beta} dx = \frac{\Gamma(\alpha+1)\beta^{\alpha+1}}{\Gamma(\alpha)\beta^\alpha} = \alpha\beta.$$

Se si ripensa al significato di X , almeno quando α é intero positivo, questo risultato non é certo sorprendente: fermo restando α , se il fenomeno di Poisson ha intensita' λ molto alta, é logico che si debba aspettare poco perché esso si verifichi (si ricordi che il parametro β é il reciproco di λ); pero', ferma restando l'intensita', il tempo d'attesa cresce proporzionalmente con α : insomma, se si aspetta la seconda realizzazione del fenomeno, é come se si aspettasse due volte di seguito la prima realizzazione.

- 3:** Anche nel caso di distribuzione Beta, non é difficile calcolare il valor medio: per $X \sim Be(\alpha, \beta)$, si ha

$$E(X) = \frac{\int_0^1 x^\alpha (1-x)^{\beta-1} dx}{B(\alpha, \beta)} = \frac{B(\alpha+1, \beta)}{B(\alpha, \beta)} = \frac{\Gamma(\alpha+1)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta+1)} \frac{\Gamma(\alpha+\beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} = \frac{\alpha}{\alpha+\beta}.$$

- 4:** Nel caso della distribuzione normale, il valor medio é proprio il parametro μ . Si ha infatti

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} x e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} dx &= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} (x-\mu) e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} dx + \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \mu e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} dx = \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} u e^{-\frac{u^2}{2\sigma^2}} du + \mu = \mu, \end{aligned}$$

in quanto l'ultima integranda é una funzione dispari.

Se invece si vuole $E(X^2)$, occorre fare l'integrale

$$E(X^2) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} dx.$$

Per semplicita', ci limiteremo a calcolare tale valor medio nel caso $\mu = 0$. Allora avremo

$$E(X^2) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} dx = 2 \int_0^{+\infty} x^2 \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} dx.$$

Con la sostituzione $x = \sqrt{2\sigma^2}v$, l'integrale diviene

$$E(X^2) = \frac{2\sigma^2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{+\infty} v^{1/2} e^{-v} dv = \frac{2\sigma^2}{\sqrt{\pi}} \Gamma\left(\frac{3}{2}\right) = \sigma^2.$$

Dunque, se $X \sim N(0, \sigma^2)$, il parametro σ^2 non é altro che il valor medio di X^2 . In effetti, questo risultato poteva essere dedotto piu' facilmente se si fosse osservato che, essendo $X \sim N(0, \sigma^2)$, risulta $X^2 \sim \Gamma(\frac{1}{2}, 2\sigma^2)$ per l'Esercizio n.12 della sezione precedente, e quindi $E(X^2) = \frac{1}{2} \cdot 2\sigma^2 = \sigma^2$.

Dunque, il valor medio di una v.a. é un punto di riferimento piuttosto importante, e non troppo difficile da calcolare. Per di piu', vi sono dei teoremi che permettono di ricavare abbastanza facilmente il valor medio, anche per variabili aleatorie piuttosto complicate. Noi non daremo che poche dimostrazioni: certi risultati esprimono proprieta' tipiche degli integrali (o delle serie), e quindi non é sorprendente che valgano anche per il valor medio, viste le formule che si usano per calcolarlo.

Teorema 4.14 *Date due v.a., X e Y , che ammettano valor medio, allora anche $X + Y$ ammette v.m. e si ha*

$$E(X + Y) = E(X) + E(Y).$$

Se poi risulta $X \leq Y$, si ha anche $E(X) \leq E(Y)$.

Inoltre, per ogni costante $c \in \mathbb{R}$, si ha

$$E(cX) = cE(X)$$

.

Una conseguenza di questo teorema é si ha per esempio nel ricavare elegantemente il valor medio di una v.a. con distribuzione $B(n, p)$, o anche con distribuzione $NB(k, p)$: abbiamo gia' calcolato la prima, ma in maniera molto tecnica, mentre alla seconda non abbiamo ancora accennato. Ora, tenendo presente che una v.a. di tipo binomiale $B(n, p)$ é la *somma* di n v.a. di tipo $B(1, p)$ (ciascuna relativa a un singolo lancio di moneta), basta sommare gli n valori medi: e poiché questi sono tutti uguali a p , il risultato é semplice: $E(X) = np$.

Nel caso $NB(k, p)$ si puo' ragionare in maniera analoga: se infatti Y é la v.a. che conta quanti lanci occorrono per la k^a testa, possiamo riguardare Y come la somma di k v.a. di tipo $NB(1, p)$: la prima é il tempo di attesa per la prima testa, la seconda é il tempo di attesa, dopo l'uscita della prima testa, ancora per l'uscita della (nuova) prima testa; la terza sara' il tempo di attesa, dopo l'uscita della seconda testa, per l'uscita della (nuova) prima testa, e cosi' via. Sommando tutti questi tempi di attesa, si arriva a Y , e quindi $E(Y) = \frac{k}{p}$.

La proprieta' di monotonia, espressa nel teorema 4.14, puo' essere vista anche sotto un altro aspetto. Occorre pero' qualche definizione.

Definizione 4.15 Sia X una generica variabile aleatoria, che ammette valor medio. Per ogni evento A in Ω , denotiamo con X_A la variabile X *ristretta* ad A : ossia

$$X_A(\omega) := \begin{cases} X(\omega), & \text{se } \omega \in A \\ 0, & \text{se } \omega \notin A. \end{cases}$$

Quando A ha probabilita' non nulla, si puo' definire il *valor medio condizionato* di X rispetto ad A , nel modo seguente:

$$E(X|A) = \frac{E(X_A)}{P(A)}.$$

In pratica, e' come se tutta la probabilita' si concentrasse su A , (v. la definizione di probabilita' condizionata, 3.1) e quindi si fa il v.m. di X rispetto alla probabilita' condizionata $P(\cdot|A)$.

Anche per questo concetto si hanno teoremi tecnici importanti nelle applicazioni. Ne enunciamo qui alcuni, sempre senza dimostrazioni.

Teorema 4.16 *Sia data una v.a. X , che ammetta valor medio. Supponiamo che A_1, A_2, \dots, A_n siano eventi a due a due incompatibili, tutti con probabilita' positiva, e tali che $\Omega = \cup_{i=1}^n A_i$. Si ha allora*

$$E(X) = \sum_{i=1}^n E(X|A_i)P(A_i)$$

(Si confronti questo teorema con la formula di probabilita' globale, 3.3).

Teorema 4.17 *Sia X una variabile aleatoria limitata, e sia A un evento con probabilita' positiva. Si ha*

$$m(X, A) \leq E(X|A) \leq M(X, A)$$

dove $m(X, A) = \inf\{X(\omega) : \omega \in A\}$, e $M(X, A) = \sup\{X(\omega) : \omega \in A\}$.

Il teorema 4.17 esprime forse piu' compiutamente il senso del termine *valor medio*: in effetti $E(X|A)$ é comunque un valore intermedio tra quelli che X puo' assumere, dato che si verifica A . Si puo' vedere una grande somiglianza tra il teorema 4.17 e il teorema detto *della media* che riguarda l'integrale di Riemann (e infatti anche la dimostrazione si puo' dare secondo le stesse linee).

Una conseguenza di questo teorema é la celebre *disuguaglianza di Markov*, che viene spesso in aiuto proprio nel valutare l'esattezza di certe *previsioni*.

Corollario 4.18 *Sia X una v.a. positiva, che ammette valor medio. Posto $E(X) = \mu$, si ha:*

$$P("X > \alpha") \leq \frac{\mu}{\alpha}$$

per ogni $\alpha > 0$ (*Disuguaglianza di Markov*).

Dimostrazione: Si fissi $\alpha > 0$ e si denoti con A l'evento " $X > \alpha$ ". Se $P(A) = 0$, l'asserto é ovvio. Altrimenti, per il teorema 4.17, risulta

$$E(X|A) \geq \alpha.$$

Ora, essendo per definizione

$$E(X|A) = \frac{E(X_A)}{P(A)} \leq \frac{E(X)}{P(A)},$$

segue

$$\frac{E(X)}{P(A)} \geq E(X|A) \geq \alpha$$

da cui chiaramente

$$P(A) \leq \frac{E(X)}{\alpha}$$

cioé l'asserto. \square

Il senso di questo teorema é il seguente: supponiamo che X sia positiva, ma abbia valor medio piuttosto basso, diciamo 0.1. Allora é assai poco probabile che X possa assumere valori molto alti, diciamo maggiori di 100: infatti, in tale situazione il corollario 4.18 garantisce che $P("X > 100") \leq 0.001$.

Un'applicazione piu' importante si ha nella cosiddetta *disuguaglianza di Tchebyshev*, che permette di stimare in un certo senso *quanto vicina* puo' essere una v.a. al suo valor medio. Per introdurre questa nuova disuguaglianza, occorre pero' qualche nuova definizione.

Definizione 4.19 Sia $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ una v.a. qualunque. Per ogni numero reale $r \geq 1$, si dice che X ammette *momento* di *ordine* r , se la v.a. $|X|^r$ ammette valor medio. In tal caso, il valore $E(|X|^r)$ si chiama *momento assoluto* di X , di *ordine* r . Di solito, lo spazio di tutte le v.a. che ammettono momento di ordine r viene denotato con L_r . Nel caso in cui r sia intero, e $X \in L_r$, si vede facilmente che X^r ammette valor medio: la quantita' $E(X^r)$ viene detta semplicemente *momento* di ordine r di X . Ad esempio, X ammette valor medio se e solo se $X \in L_1$, e in tal caso il valor medio di X non é altro che il suo momento di ordine 1.

Di solito accade che una v.a. X ammetta valor medio, ma non ammetta momento di ordine r , per qualche $r > 1$: ad esempio, sia $X \sim U(0, 1)$ e poniamo $Y = \frac{1}{\sqrt{X}}$. Dalla definizione 4.13, ricaviamo che risulta

$$E(Y) = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}} dx = 2$$

ma, scegliendo $r = 2$, dovremmo calcolare $\int_0^1 \frac{1}{x} dx$, che non é finito: dunque la nostra Y é in L_1 ma non in L_2 .

(Ci sono anche esempi di v.a. X , che sono in L_1 ma non sono in *nessun* L_r con $r > 1$!)

Comunque, se una v.a. X ammette momento di ordine $r > 1$, si puo' dimostrare abbastanza facilmente che X ammette momento di qualsiasi ordine s , con $1 \leq s \leq r$. Ad esempio, se X ammette momento di ordine 2, essa ammette valor medio (vedremo tra poco una dimostrazione di questo fatto).

Si vede poi facilmente che, se X é *limitata*, allora X ammette momenti di *qualsiasi* ordine.

Un altro fatto importante riguarda la *linearita'* degli spazi L_r : in altre parole, se X e Y sono entrambe in L_r , allora anche $X + Y \in L_r$. Questo si puo' provare facilmente, osservando che

$$|X + Y| \leq |X| + |Y| \leq 2(|X| \vee |Y|) \leq 2(|X| + |Y|)$$

ove $u \vee v$ denota il *massimo* tra i due numeri u e v . Allora $E(|X + Y|^r) \leq 2^r(E(|X|^r) + E(|Y|^r)) < +\infty$.

Definizione 4.20 Se X ammette momento di ordine intero r , le quantità

$$E((X - E(X))^2), E((X - E(X))^3), \dots, E((X - E(X))^r)$$

esistono e prendono il nome di *momenti centrali* di X di ordine $2, 3, \dots, r$ rispettivamente. (Notiamo che banalmente $E(X - E(X)) = 0$ per il teorema 4.14). In particolare, il momento centrale di ordine 2, cioè $E((X - E(X))^2)$, viene anche detto *varianza* di X , e ha importanza fondamentale proprio nel valutare quanto la X si discosti dal suo v.m.. Di solito, la varianza di una v.a. X si denota con $V(X)$ o anche con $Var(X)$. Le variabili aleatorie in L_2 vengono anche dette *a quadrato sommabile*.

Il prossimo teorema chiarisce alcuni aspetti tecnici legati al concetto di varianza.

Teorema 4.21 Supponiamo che $X \in L_2$. Allora X ammette valor medio e varianza, e si ha

$$V(X) = E(X^2) - E^2(X).$$

Se a e b sono costanti reali, allora $Y = aX + b$ ammette momento di ordine 2, e si ha

$$V(aX + b) = a^2 V(X).$$

Se X ha distribuzione continua, con densità f , allora la sua varianza può essere calcolata anche tramite la formula

$$V(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - \mu)^2 f(x) dx$$

dove μ denota al solito il valor medio di X .

Dimostrazione: Per provare che X ammette valor medio, dobbiamo far vedere che $E(|X|)$ non è infinito, ossia $X \in L_1$. Si denoti con A l'evento " $|X| < 1$ ". Allora $|X|_A$ è limitata, e quindi il suo valor medio esiste finito. Si denoti ora con B l'evento negazione di A : $B = "$ $X \geq 1$ ". Allora $|X|_B \leq X_B^2$ e quindi $E(|X|_B) \leq E(X_B^2) \leq E(X^2) < +\infty$. Pertanto, $|X| = |X|_A + |X|_B$ ammette valor medio finito.

Ora, la prima formula si dimostra facilmente:

$$V(X) = E((X - \mu)^2) = E(X^2) - 2E(\mu X) + E(\mu^2) = E(X^2) - 2\mu E(X) + \mu^2 = E(X^2) - \mu^2.$$

Quanto alla varianza di $Y = aX + b$, osserviamo che si ha $E(Y) = aE(X) + b$, per cui

$$V(Y) = E((aX + b - aE(X) - b)^2) = E((aX - aE(X))^2) = a^2 E((X - E(X))^2) = a^2 V(X).$$

Infine, l'ultima formula deriva dal fatto che la varianza non é altro che il v.m. di una *funzione* di X : basta cioé porre $g(x) = (x - \mu)^2$ e applicare la formula data nella definizione 4.13. \square

Possiamo ora presentare la disuguaglianza di Tchebyshev.

Teorema 4.22 *Sia X una v.a. in L_2 . Allora, per ogni $\alpha > 0$ si ha*

$$P(|X - E(X)| > \alpha) \leq \frac{V(X)}{\alpha^2}.$$

Dimostrazione: Si osservi intanto che si ha

$$[|X - E(X)| > \alpha] = [(X - E(X))^2 > \alpha^2].$$

Allora, applicando la disuguaglianza di Markov (v. 4.18) alla v.a. $Y = (X - E(X))^2$ con α^2 al posto di α , si ottiene esattamente la disuguaglianza annunciata. \square

Un altro importante risultato, riguardante le variabili aleatorie di quadrato sommabile, é il seguente.

Teorema 4.23 (Disuguaglianza di Schwartz) *Siano X e Y due v.a. di L_2 . Allora il prodotto XY é in L_1 , e si ha*

$$|E(XY)| \leq \sqrt{E(X^2)E(Y^2)} \quad (4.5)$$

l'uguaglianza valendo se e solo se esistono costanti a e b tali che $aX + bY = 0$ quasi certamente.

Dimostrazione. Fissato un qualunque $t \in \mathbb{R}$, osserviamo che si ha:

$$0 \leq (|X| - t|Y|)^2 = X^2 + t^2Y^2 - 2t|XY|. \quad (4.6)$$

Se ne deduce subito, ponendo $t = 1$, che

$$|XY| \leq \frac{X^2 + Y^2}{2}$$

e quindi $|XY| \in L_1$. Ora, calcolando il valor medio nella disuguaglianza (4.6) si perviene a

$$E(X^2) + t^2E(Y^2) - 2tE(|XY|) \geq 0$$

per ogni $t \in \mathbb{R}$: se ne deduce che il discriminante del trinomio $E(X^2) + t^2E(Y^2) - 2tE(|XY|)$ é negativo o nullo:

$$E(|XY|)^2 - E(X^2)E(Y^2) \leq 0, \text{ da cui } E(|XY|)^2 \leq E(X^2)E(Y^2).$$

Estraendo ora le radici quadrate, si ottiene la (4.5). L'ultima affermazione discende anch'essa dalle proprietà del discriminante: infatti, se nella (4.5) sussiste l'uguaglianza, si ha

$$0 = E(X^2)E(Y^2) - E^2(XY)$$

da cui si deduce che il trinomio

$$E(Y^2)t^2 - 2E(XY)t + E(X^2) = E((X - tY)^2)$$

ha una radice doppia per un certo valore di t : dunque, per tale valore di t la v.a. $(X - tY)^2$ ha valor medio nullo; ma siccome tale v.a. é non negativa, cio' é possibile se e solo se essa é nulla quasi certamente, e quindi $X - tY = 0$ quasi certamente. \square

Esempi 4.24 1. Supponiamo $X \sim B(1, p)$. Essendo $X^2 = X$, si ha chiaramente $E(X^2) = E(X) = p$, e allora $V(X) = p - p^2 = p(1 - p)$.

Considerato che $p \in [0, 1]$, un semplice studio di funzione mostra che la varianza di X risulta *massima* per $p = \frac{1}{2}$, e minima per $p = 0$ o $p = 1$: infatti, se la probabilità di *testa* é molto alta, il risultato di un lancio é assai piu' facile da prevedere, mentre se la moneta é perfettamente bilanciata c'è la massima incertezza sul risultato.

Nel caso di binomiale $B(n, p)$, la varianza é $np(1 - p)$: non faremo ora i calcoli per provarlo, poiché questo risultato sara' una facile conseguenza di un prossimo teorema.

2. Supponiamo ora $X \sim U(N)$, ossia che X abbia distribuzione uniforme discreta: sappiamo già che $E(X) = \frac{N+1}{2}$ (v. esempi successivi alla definizione 4.12). Per il calcolo di $E(X^2)$, osserviamo che si ha

$$\sum_{i=1}^N i^2 = \frac{2N^3 + 3N^2 + N}{6}$$

(dimostrabile per induzione su N). Allora risulta

$$E(X^2) = \sum_{i=1}^N \frac{i^2}{N} = \frac{2N^2 + 3N + 1}{6}$$

e di conseguenza

$$V(X) = \frac{2N^2 + 3N + 1}{6} - \frac{N^2 + 2N + 1}{4} = \frac{N^2 - 1}{12}.$$

3. Nel caso $X \sim NB(1, p)$, si ha

$$E(X^2) = \sum_{k=1}^{+\infty} k^2 p(1-p)^{k-1} = \sum_{k=1}^{+\infty} (k^2 - k)p(1-p)^{k-1} + \sum_{k=1}^{+\infty} kp(1-p)^{k-1}.$$

Per quanto riguarda $\sum_{k=1}^{+\infty} kp(1-p)^{k-1}$, già sappiamo che tale somma fornisce $E(X) = \frac{1}{p}$, quindi esaminiamo solo la sommatoria:

$$\sum_{k=1}^{+\infty} (k^2 - k)p(1-p)^{k-1} = p(1-p) \sum_{k=2}^{+\infty} k(k-1)(1-p)^{k-2}.$$

Tenendo presente che

$$\sum_{k=2}^{+\infty} k(k-1)q^{k-2} = \sum_{k=2}^{+\infty} \frac{d^2}{dq^2} q^k = \frac{d^2}{dq^2} \left(\frac{1}{1-q} - 1 - q \right) = \frac{2}{(1-q)^3}$$

e sostituendo $q = 1 - p$, otteniamo

$$E(X^2) = p(1-p) \frac{2}{p^3} + \frac{1}{p} = \frac{2-p}{p^2}$$

e infine

$$V(X) = \frac{2-p}{p^2} - \frac{1}{p^2} = \frac{1-p}{p^2}.$$

Stavolta, un semplice studio di funzione ci dice che, come funzione di p , la varianza va *decrecendo* al crescere di p : in pratica, se *testa* è molto probabile, sappiamo già

che dovremo aspettare molto poco per la prima uscita di tale faccia; se invece *testa* é poco probabile, non solo dovremo attendere parecchio per osservare la prima *testa*, ma c'è anche molta incertezza su quale sara' il lancio in cui cio' avverra'.

Nel caso $NB(k, p)$, il valore della varianza é $\frac{k(1-p)}{p}$, ma rimandiamo la verifica a un secondo momento (scusandoci per il bisticcio di parole: varianza e *secondo momento* sono quasi sinonimi).

4. Esaminiamo ora il caso $X \sim P(\lambda)$. Sappiamo gia' che il valor medio é λ . Per il calcolo della varianza, osserviamo che si ha

$$E(X^2) = \sum_{k=0}^{+\infty} k^2 \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} = \sum_{k=1}^{+\infty} k \frac{\lambda^k}{(k-1)!} e^{-\lambda} = \lambda \sum_{j=0}^{+\infty} (j+1) \frac{\lambda^j}{j!} e^{-\lambda}$$

avendo sostituito $j = k - 1$. Allora si deduce facilmente

$$E(X^2) = \lambda \sum_{j=0}^{+\infty} j \frac{\lambda^j}{j!} e^{-\lambda} + \lambda \sum_{j=0}^{+\infty} \frac{\lambda^j}{j!} e^{-\lambda} = \lambda^2 + \lambda$$

e di conseguenza

$$V(X) = \lambda = E(X).$$

5. Sia ora $X \sim U(a, b)$. Si tratta di distribuzione continua, quindi per calcolare $E(X^2)$ possiamo usare la formula data in 4.13:

$$E(X^2) = \int_a^b x^2 \frac{1}{b-a} dx = \frac{b^3 - a^3}{3(b-a)} = \frac{b^2 + ab + a^2}{3}$$

e quindi

$$V(X) = \frac{b^2 + ab + a^2}{3} - \frac{(a+b)^2}{4} = \frac{(b-a)^2}{12}.$$

(si confronti questa formula con quella trovata nel caso *discreto* uniforme).

6. Esaminiamo ora la distribuzione *Gamma*: se $X \sim \Gamma(\alpha, \beta)$ si ha

$$E(X^2) = \frac{1}{\beta^\alpha \Gamma(\alpha)} \int_0^{+\infty} x^{\alpha+1} e^{-\frac{x}{\beta}} dx = \frac{1}{\beta^\alpha \Gamma(\alpha)} \Gamma(\alpha+2) \beta^{\alpha+2} = \alpha(\alpha+1) \beta^2$$

e di conseguenza

$$V(X) = \alpha(\alpha+1) \beta^2 - \alpha^2 \beta^2 = \alpha \beta^2.$$

7. Negli esempi successivi alla definizione 4.13, abbiamo calcolato il momento $E(X^2)$ nel caso $X \sim N(0, \sigma)$, e abbiamo visto che, in tal caso, $E(X^2) = \sigma^2$. Poiché $E(X) = 0$, si deduce anche che $V(X) = \sigma^2$. Più in generale, se $X \sim N(\mu, \sigma)$, sappiamo che $Y = X - \mu$ ha distribuzione $N(0, \sigma)$ e quindi $V(Y) = \sigma^2$. Per il teorema 4.21, si ha $V(X) = V(Y + \mu) = V(Y) = \sigma^2$.

Dunque, in generale, se $X \sim N(\mu, \sigma)$, si ha $E(X) = \mu$ e $V(X) = \sigma^2$.

Ne possiamo anche dedurre $E(X^2)$: infatti, da $V(X) = E(X^2) - E^2(X)$ ricaviamo

$$E(X^2) = \sigma^2 + \mu^2.$$

Chidiamo questo paragrafo con una definizione, che sarà utile in seguito.

Definizione 4.25 Sia X una v.a. con momenti di ordine 2, e supponiamo che $V(X) > 0$ (il caso $V(X) = 0$ è banale: si veda l'esercizio [4] più avanti). Si dice *standardizzata* di X la v.a.

$$X^* := \frac{X - E(X)}{\sigma(X)}$$

ove $\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$ si dice *scarto quadratico* di X .

È facile verificare che, qualunque sia X , la standardizzata X^* ha valor medio nullo e varianza 1. Di conseguenza, si dice che una v.a. X è *standard* se essa ha valor medio nullo e varianza 1, ossia se $X = X^*$.

Esercizi 4.26

- 1:** Supponiamo che X sia una v.a. con distribuzione $U(-1, 1)$: calcolare tutti i momenti di X , e tutti i momenti centrali.
- 2:** Sia X una v.a. con distribuzione di Bernoulli, $B(1, p)$: si dimostri che tutti i momenti di X sono uguali.
- 3:** Sia X una v.a. quasi certamente costante, ossia $P(X = c) = 1$ per una costante reale c , e si dimostri che
 - a) $E(X^n) = c^n$ per ogni $n \in \mathbb{N}$, $n > 0$.
 - b) $V(X) = 0$.

4: Se X é una v.a. che ammetta momenti di ordine 2, si provi che $E(X)^2 \leq E(X^2)$, usando 4.21; adoperando poi la disuguaglianza di Tchebyshev e l'esercizio 3, si deduca che X é quasi certamente costante se e solo se $V(X) = 0$.

5: Sia X una v.a. che ammetta momenti di ordine 2. Se risulta $E(X) = E(X^2) = \mu$ si provi che $0 \leq \mu \leq 1$.

6: Sia X una v.a. con distribuzione discreta. Se tutti i momenti $E(X^n)$ sono uguali a una quantita' μ , mostrare che si ha $X \sim B(1, \mu)$.

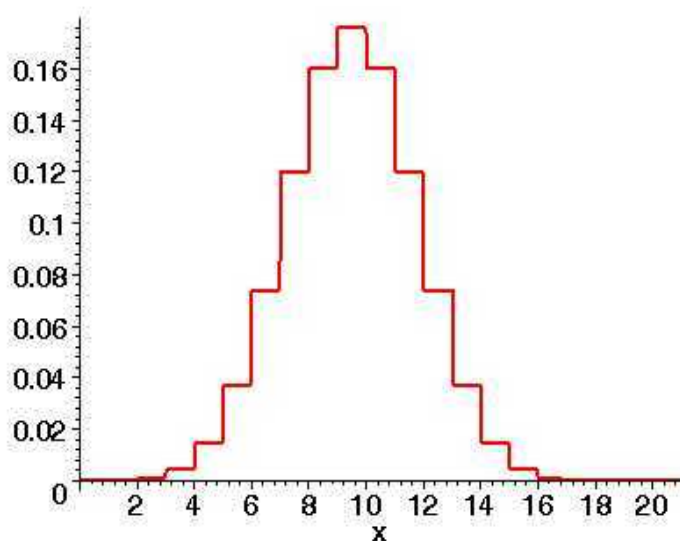
7: Si calcolino tutti i momenti della distribuzione $\Gamma(\alpha, \beta)$.

8: Si calcolino tutti i momenti della distribuzione $Be(\alpha, \beta)$.

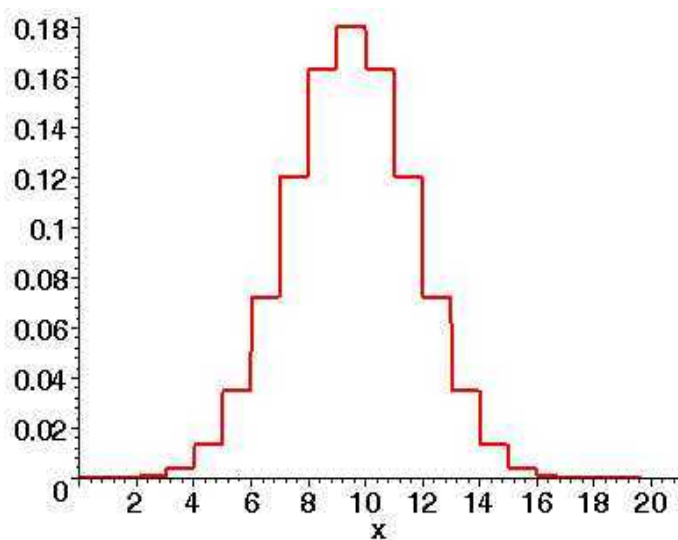
9: Si provi che, per ogni intero $n > 0$, il momento M_{2n} di ordine $2n$ della distribuzione $N(0, 1)$ é dato da

$$M_{2n} = \frac{(2n)! \sqrt{2}}{n! 2^n}.$$

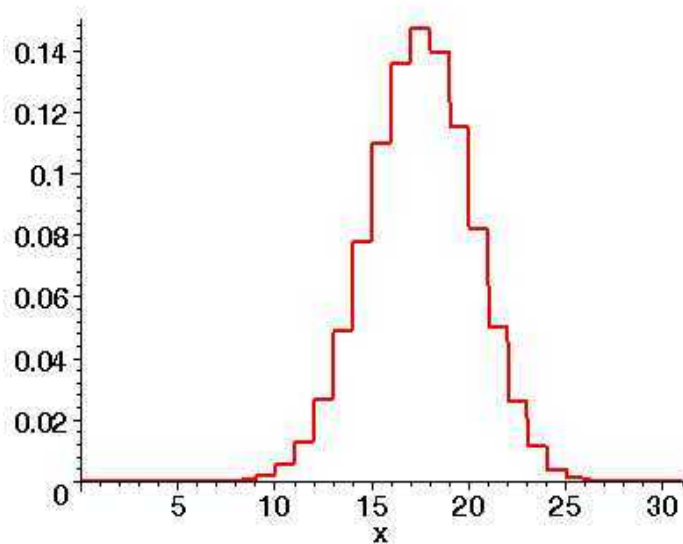
10: Si trovino tutti i momenti della distribuzione $N(\mu, \sigma)$.



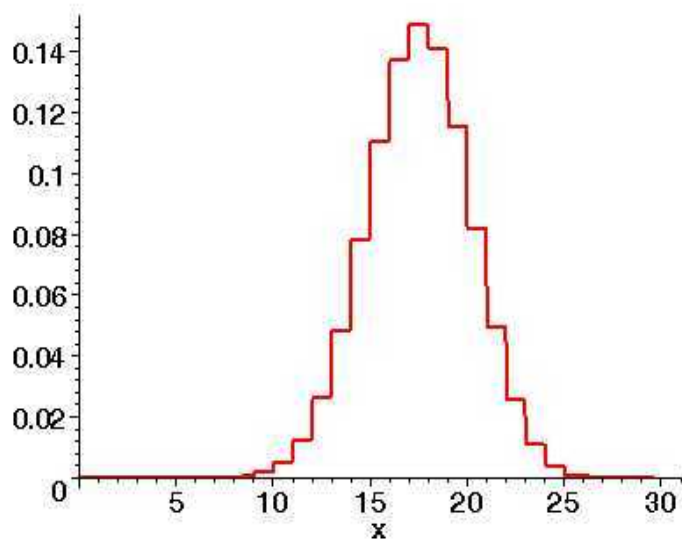
Curva rappresentativa di $B(20, 0.5)$



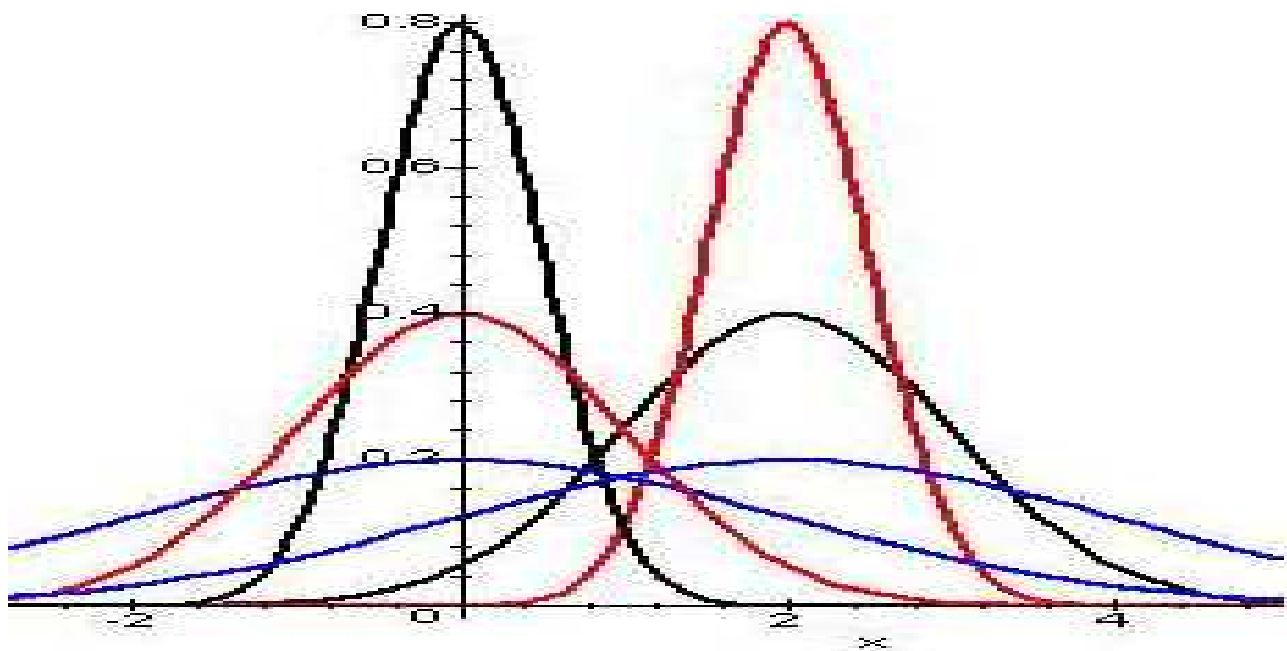
Curva rappresentativa di $H(200, 100, 20)$



Curva rappresentativa di $B(30, 3/5)$



Curva rappresentativa di $H(900, 600, 30)$



Capitolo 5

Vettori aleatorii

Spesso é importante individuare legami o interrelazioni tra due o piu' v.a., allo scopo dedurre le implicazioni o comunque l'incidenza di un determinato fenomeno nei confronti di un altro. Per esempio, si conosce ormai una forte correlazione tra il numero di fumatori e quello di persone affette di cancro ai polmoni (in numerose popolazioni) e questo permette ormai di stabilire con grande sicurezza la nocivita' delle sigarette, anche a causa del solo fumo passivo.

Tuttavia, nonostante la grande quantita' di situazioni possibili, e i numerosi strumenti tecnici utilizzati per studiarle, per semplicita' presenteremo solo alcuni di tali strumenti.

5.1 Distribuzioni multivariate

Intanto, cominciamo col dire che tutte le informazioni che ci possono servire sono contenute nella cosiddetta *distribuzione congiunta*: date due (o piu') v.a., diciamo X e Y , possiamo riguardare la coppia (X, Y) come un *vettore* aleatorio, e come tale dotato di una propria distribuzione. Diciamo subito pero', per non smentirci, che non é certo facile sviscerare dalla distribuzione del vettore (X, Y) tutte quelle informazioni che ci potrebbero interessare, e quindi dovremo in un certo senso *contentarci* solo di alcuni elementi, comunque importanti.

Definizione 5.1 Siano X_1, X_2, \dots, X_n delle variabili aleatorie su uno spazio (Ω, \mathcal{A}, P) . Diciamo *distribuzione* del vettore $\underline{X} := (X_1, \dots, X_n)$ la probabilit 

$$P_{\underline{X}} : \mathcal{B}^n \rightarrow [0, 1]$$

definita sui boreliani di \mathbb{R}^n nel modo seguente:

$$P_{\underline{X}}(B) = P(\underline{X} \in B)$$

per ogni $B \in \mathcal{B}^n$.

Come nel caso di una singola v.a., la distribuzione di un vettore aleatorio puo' essere completamente individuata per mezzo della *funzione di ripartizione congiunta*: essa si definisce come la funzione

$$F_{\underline{X}} : \mathbb{R}^n \rightarrow [0, 1]$$

data dalla legge

$$F_{\underline{X}}(\underline{x}) = F_{\underline{X}}(x_1, \dots, x_n) = P(X_1 \leq x_1, X_2 \leq x_2, \dots, X_n \leq x_n).$$

In altre parole

$$F_{\underline{X}}(\underline{x}) = P_{\underline{X}}([-\infty, x_1] \times [-\infty, x_2] \times \dots \times [-\infty, x_n]).$$

Noi non lo proveremo, ma l'equivalenza sostanziale tra $P_{\underline{X}}$ e $F_{\underline{X}}$   un risultato molto importante (e non facile, ma esistono dimostrazioni molto eleganti). Limitandosi al caso $n = 2$, dalla sola conoscenza di $F_{\underline{X}}$ si puo' *in linea teorica* calcolare la probabilit  (ad esempio) che il punto (X_1, X_2) appartenga al disco unitario, oppure che sia interno alla cardioide classica, o addirittura che faccia parte dell'insieme frattale di Mandelbrot!

Un'altra importante operazione che si puo' fare, partendo dalla distribuzione congiunta,   la cosiddetta *marginalizzazione*. Premettiamo una definizione.

Definizione 5.2 Dato un vettore aleatorio $\underline{X} := (X_1, \dots, X_n)$, le distribuzioni delle v.a. X_1, X_2, \dots, X_n (intese separatamente) sono dette le distribuzioni *marginali* del vettore \underline{X} . In senso piu' lato, si considerano marginali anche le distribuzioni di *vettori* ottenuti da \underline{X} eliminando alcune componenti. Ad esempio, $P_{(X_1, X_3)}$   una *marginale* di $P_{\underline{X}}$.

Non é difficile ricavare le marginali di una distribuzione, una volta che si conosca $P_{\underline{X}}$. Ad esempio, se $\underline{X} = (X_1, X_2)$, la funzione di ripartizione di X_1 si ottiene da:

$$F_{X_1}(x_1) = \lim_{x_2 \rightarrow +\infty} F_{\underline{X}}(x_1, x_2). \quad (5.1)$$

Nel caso si abbia $\underline{X} = (X_1, X_2, X_3)$, si ha poi

$$F_{X_1}(x_1) = \lim_{x_2, x_3 \rightarrow +\infty} F_{\underline{X}}(x_1, x_2, x_3).$$

In genere, pero', la conoscenza delle distribuzioni marginali non é sufficiente per ricavare la distribuzione congiunta di un vettore aleatorio. Ed é proprio qui che entrano in gioco le *relazioni* esistenti tra le varie v.a. componenti.

Iniziamo con il concetto di *indipendenza*.

Definizione 5.3 Siano X_1, \dots, X_n variabili aleatorie su uno spazio (Ω, \mathcal{A}, P) . Diciamo che esse sono *stocasticamente indipendenti* se risulta

$$F_{(X_1, \dots, X_n)}(x_1, \dots, x_n) = F_{X_1}(x_1)F_{X_2}(x_2)\dots F_{X_n}(x_n) \quad (5.2)$$

per ogni scelta di $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$.

In pratica, se X_1 e X_2 sono indipendenti, questo vuol dire che sono indipendenti tutti gli eventi del tipo " $X_1 \in [a, b]$ " e " $X_2 \in [c, d]$ ", al variare di $[a, b]$ e $[c, d]$ in \mathbb{R} .

Ad esempio, se si immagina di lanciare un dado due volte, la v.a. X_1 , definita come il numero uscito al primo lancio, é indipendente dalla v.a. X_2 , definita come il risultato del secondo lancio.

Alla luce di questa definizione, é abbastanza chiaro che, conoscendo le distribuzioni di due v.a. X_1 e X_2 , e *sapendo* a priori che esse sono indipendenti, la distribuzione congiunta é univocamente determinata: questo perché la funzione di ripartizione congiunta deve verificare la condizione 5.2, e a sua volta essa individua perfettamente la distribuzione congiunta.

Ma questo é solo un caso estremo, da considerare particolarmente fortunato. Di solito, quando si considerano diverse v.a., si puo' sempre individuare qualche legame tra loro,

e questo si rispecchia nella funzione di ripartizione congiunta (e viceversa: abbiamo già detto che la distribuzione congiunta racchiude tutte le informazioni riguardanti le singole marginali e anche i loro eventuali legami).

Un tipo di legame che si può presentare è quello funzionale: se due variabili aleatorie X e Y sono legate da una relazione del tipo

$$f(X, Y) = 0$$

per qualche funzione (continua) f , si ha una situazione abbastanza facile: in tal caso, infatti, il vettore (X, Y) occupa nel piano il grafico della *curva* di equazione $f(x, y) = 0$. Ad esempio, supponiamo che θ sia una v.a. con distribuzione uniforme continua in $[0, 2\pi]$, e scegliamo $X = \cos \theta$, $Y = \sin \theta$: allora, è chiaro che (X, Y) descrive il cerchio unitario $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\}$, e la distribuzione congiunta sarà di conseguenza *concentrata* su tale curva. (Si noti che, in generale, la distribuzione congiunta di un vettore (X_1, X_2) è una probabilità su tutto il piano \mathbb{R}^2 : tuttavia, nel caso appena descritto, essa si annulla su insiemi molto grandi, come ad esempio *l'interno* del cerchio suddetto, e anche tutto *l'esterno*, e si concentra tutta sulla circonferenza unitaria, insieme che invece sarebbe trascurabile secondo l'integrazione classica nel piano).

Benché l'esempio fatto faccia capire che legami di tipo funzionale siano in un certo senso anch'essi casi estremi, possiamo dire che essi costituiscano un *punto di riferimento*: date due v.a. X e Y (possibilmente non indipendenti), si cerca spesso di trovare qualche *funzione* dell'una che *somigli* in qualche modo all'altra; in altre parole, si cerca spesso una funzione reale g , tale che si possa scrivere

$$Y = g(X) + Z$$

dove Z sia una qualche v.a. che esprima in un certo senso un *disturbo* puramente casuale.

Questo è un problema molto importante nelle applicazioni della Statistica, e ne vedremo degli esempi. Ma per il momento limitiamoci alla ricerca di eventuali legami *lineari* tra due v.a., o meglio alla *misura di linearità*: due variabili X e Y sono linearmente collegate se esistono costanti a, b, c tali che risulti $aX + bY + c = 0$ quasi certamente. Ad esempio, se consideriamo 10 lanci di una moneta, la variabile aleatoria $X =$ numero di Teste è legata

linearmente alla v.a. $Y = \text{numero di croci}$: infatti si ha $X + Y - 10 = 0$. In condizioni abbastanza generali, si possono introdurre dei parametri che aiutano a capire se due v.a. sono piu' o meno linearmente collegate.

Definizione 5.4 Date due v.a. X e Y in L_2 , si dice *covarianza* di X e Y la quantita':

$$\text{cov}(X, Y) = E((X - E(X))(Y - E(Y))).$$

Nel caso X e Y non siano quasi certamente costanti, si chiama *coefficiente di correlazione* tra X e Y la quantita'

$$\rho(X, Y) = \frac{\text{cov}(X, Y)}{\sqrt{V(X)V(Y)}}$$

Qualora $\text{cov}(X, Y) = 0$ si dice che X e Y sono *non correlate*.

Si osservi che, in virtu' di quanto detto nel paragrafo precedente, $\text{cov}(X, Y)$ é ben definita, e si ha

$$\text{cov}(X, Y) = E(XY) - E(X)E(Y).$$

Inoltre, in virtu' della disuguaglianza di Schwartz (v. 4.23), si vede facilmente che si ha

$$-1 \leq \rho(X, Y) \leq 1$$

(purché $V(X)$ e $V(Y)$ siano non nulle), e si ha l'uguaglianza se e solo se X e Y sono linearmente dipendenti. In particolare, se $\rho(X, Y) = 1$, allora esistono una costante reale a e una costante positiva t tale che $X = tY + a$ quasi certamente. (Si controllino i dettagli per esercizio!)

Un altro facile esercizio é il seguente: date due v.a. X e Y in L_2 , entrambe con varianza non nulla, risulta

$$\rho(X, Y) = E(X^*Y^*)$$

(ricordiamo che X^* é la standardizzata di $X := X^* = \frac{X - E(X)}{\sqrt{V(X)}}$).

Dunque, la conoscenza di $\rho(X, Y)$ permette di stabilire quanto X e Y siano lontane dall'essere legate linearmente: piu' $|\rho|$ é vicino a 1, piu' esse si potranno considerare legate linearmente; piu' ρ é vicino a 0, meno legami lineari ci possono essere.

Vale comunque la pena di fare alcune distinzioni. Intanto, cosa succede se X e Y sono indipendenti? L'intuizione suggerisce che non può esistere alcun legame di tipo lineare tra le due, e quindi la covarianza dev'essere nulla. E infatti il prossimo teorema stabilisce proprio questo fatto.

Teorema 5.5 *Siano X e Y due v.a. indipendenti, entrambe di quadrato sommabile. Allora risulta*

$$\text{cov}(X, Y) = 0$$

Dimostrazione. Daremo solo la dimostrazione nel caso discreto: supponiamo che X possa assumere i valori x_1, \dots, x_n , con probabilità rispettivamente p_1, \dots, p_n e Y possa assumere i valori y_1, \dots, y_m , con probabilità rispettivamente q_1, \dots, q_m . Allora XY può assumere i valori $x_i y_j$, con $i = 1, \dots, n$, e $j = 1, \dots, m$, ciascuno con probabilità $p_i q_j$, a causa dell'indipendenza. Si ha perciò

$$E(XY) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m x_i y_j p_i q_j = \sum_{i=1}^n x_i p_i \sum_{j=1}^m y_j q_j = E(X)E(Y).$$

Essendo $E(XY) - E(X)E(Y) = \text{cov}(X, Y)$, si deduce che X e Y sono non correlate. \square

Un'altra osservazione importante da fare è che l'indipendenza implica in realtà una *totale* mancanza di legami, e quindi rappresenta una condizione ben più forte della non-correlazione: quest'ultima infatti si limita a escludere legami di tipo lineare, ma non altri tipi di dipendenza. Facciamo un esempio.

Sia $X \sim N(0, 1)$, e scegliamo $Y = X^2$. È ovvio che X e Y non sono indipendenti: infatti Y è funzione di X (si lascia al lettore di trovare, a titolo di esercizio, due intervalli, $[a, b]$ e $[c, d]$, tali che $P("X \in [a, b]" \cap "Y \in [c, d]") \neq P("X \in [a, b]")P("Y \in [c, d]");$ tuttavia, essendo $E(X) = E(X^3) = 0$, si ha chiaramente $E(XY) = E(X)E(Y)$, dunque X e X^2 risultano non correlate!

Ma oramai è giunto il momento di presentare alcuni esempi importanti di vettori aleatorii, sia per maggiore concretezza, sia per futuri riferimenti.

5.2 Esempi di vettori aleatorii

Presenteremo solo alcuni esempi, sia pure fondamentali, di distribuzioni congiunte finito-dimensionali. Anche nel caso vettoriale, si distinguono distribuzioni *discrete* e distribuzioni *continue*, secondo la seguente definizione.

Definizione 5.6 Si dice che un vettore aleatorio $\underline{X} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ ha distribuzione *discreta* se esiste un insieme finito o numerabile $F \subset \mathbb{R}^n$, con tale che $P(\underline{X} = \underline{x}) > 0$ per ogni $\underline{x} \in F$, e inoltre

$$\sum_{\underline{x} \in F} P(\underline{X} = \underline{x}) = 1.$$

In altri termini, un vettore aleatorio ha distribuzione discreta se esso può assumere solo un numero finito di valori, o al più un'infinita numerabile.

Diciamo invece che \underline{X} ha distribuzione *continua* se esiste una funzione integrabile (in s.g.) $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}_0^+$, tale che

$$P(\underline{X} \in B) = \int_B f(\underline{x}) d\mathbf{x}$$

per ogni boreliano B in \mathbb{R}^n . Equivalentemente, la funzione f (che viene detta *densità*) deve verificare la condizione

$$F_{\underline{X}}(\underline{x}) = \int_{-\infty}^{x_1} \dots \int_{-\infty}^{x_n} f(x_1, \dots, x_n) dx_1 \dots dx_n$$

per ogni $\underline{x} := (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$.

Chiaramente, se X e Y sono due v.a. indipendenti, con distribuzione continua, la coppia (X, Y) ha distribuzione continua, e la densità della coppia è uguale al prodotto delle densità marginali, ossia

$$f_{(X,Y)}(x, y) = f_X(x) f_Y(y)$$

per ogni coppia $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Vedremo comunque che ci sono anche altre situazioni, di grande interesse.

Veniamo ora agli esempi che abbiamo annunciato. Iniziamo, come di consueto, con il caso discreto.

Esempio 5.7 (Distribuzione multinomiale)

E' il tipo di distribuzione che s'incontra, quando s'immagina di lanciare n volte un dado, e si vuole tener conto di quante volte esce la faccia 1, quante volte la faccia 2, etc. In questa semplice descrizione, il vettore \underline{X} é composto di 6 variabili scalari, X_1, \dots, X_6 , dove la v.a. X_j indica quante volte é uscita la faccia numero j . Si vede facilmente che la distribuzione della marginale X_j é di tipo $B(n, \frac{1}{6})$ (supponendo che il dado sia onesto): infatti, l'uscita della faccia j equivale all'uscita di Testa in un lancio di monetina, con $P(T) = \frac{1}{6}$, tutte le altre facce essendo *collassate* e considerate come insuccesso. Ora, mentre il risultato di ciascun lancio é indipendente da tutti gli altri, le v.a. X_j *non* sono tra loro indipendenti. Infatti, é chiaro ad esempio che la somma $X_1 + \dots + X_6$ é sempre uguale a n : pertanto, date ad esempio X_1, \dots, X_5 , il valore di X_6 a questo punto é univocamente determinato. Ma, anche prescindendo da questo indubbio legame lineare, é ovvio che certi eventi riguardanti X_1 possono condizionare fortemente le probabilita' degli eventi relativi alle altre X_j : ad esempio, se si sa che $X_1 = n - 1$ (evento molto raro, ma non impossibile), non restano poi molte possibilita' per le altre X_j , il che é chiaramente un forte condizionamento. Ora, determiniamo la distribuzione congiunta del vettore $\underline{X} := (X_1, \dots, X_6)$. Scelti 6 numeri interi, x_1, \dots, x_6 , compresi fra 0 e n , valutiamo la probabilita' $P("X_1 = x_1, X_2 = x_2, \dots, X_6 = x_6")$. Chiaramente, tale probabilita' é 0, se la somma $x_1 + \dots + x_6$ non é n . Dunque, il calcolo diventa significativo solo quando tale condizione é soddisfatta. Supponiamo dunque che la somma degli x_j sia n , e valutiamo la probabilita' richiesta. Per fare cio', possiamo chiederci in quanti modi si puo' avere x_1 volte la faccia 1, e, per ciascuno di questi, in quanti modi si puo' avere x_2 volte la faccia 2, etc.. E le risposte sono ormai familiari: ci sono $\binom{n}{x_1}$ modi per scegliere gli x_1 lanci in cui esce la faccia numero 1; per ciascuno di questi, esistono poi $\binom{n-x_1}{x_2}$ modi per scegliere i lanci in cui esce la faccia numero 2, etc. Infine, una volta scelti i posti in cui collocare gli 1, i 2, i 3 etc., esiste un solo evento elementare favorevole a tale collocazione, dunque avremo

$$P("X_1 = x_1, X_2 = x_2, \dots, X_6 = x_6") = 6^{-n} \binom{n}{x_1} \binom{n-x_1}{x_2} \dots \binom{n-x_1-x_2}{x_3} \dots \binom{x_5+x_6}{x_5}.$$

Un facile calcolo porta a semplificare molti fattoriali, per cui alla fine si ha

$$P("X_1 = x_1, X_2 = x_2, \dots, X_6 = x_6") = 6^{-n} \frac{n!}{x_1!x_2!\dots x_6!}.$$

In maniera piu' generale, si puo' dire che un vettore aleatorio $\underline{X} := (X_1, \dots, X_k)$ ha distribuzione *multinomiale* se

i) ciascuna X_i ha distribuzione $B(n, p_i)$, con $\sum_i p_i = 1$;

ii) $P("X_1 = x_1, \dots, X_k = x_k") = \frac{n!}{x_1!x_2!\dots x_k!} p_1^{x_1} \dots p_k^{x_k}$ ogniqualvolta x_1, \dots, x_k sono numeri interi compresi fra 1 e n , con somma uguale a n .

A titolo di esempio, valutiamo la covarianza di due v.a. marginali di un vettore aleatorio multinomiale. Scegliamo le marginali X_1 e X_2 , e calcoliamo la loro covarianza, tramite la formula

$$\text{cov}(X_1, X_2) = E(X_1 X_2) - E(X_1)E(X_2).$$

Poiché ciascuna X_i ha distribuzione $B(n, p_i)$, é chiaro che $E(X_i) = np_i$ per ogni i . Resta solo da calcolare $E(X_1 X_2)$. A tale scopo, useremo il teorema del valor medio iterato, (v. 4.16), ossia

$$E(X_1 X_2) = \sum_{i=1}^n E(X_1 X_2 | "X_1 = i") P("X_1 = i") = \sum_{i=1}^n i E(X_2 | "X_1 = i") \binom{n}{i} p_1^i (1 - p_1)^{n-i}.$$

Per calcolare $E(X_2 | "X_1 = i")$ calcoliamo, per ogni valore di h tra 0 e $n - i$, la probabilita' $P("X_2 = h" | "X_1 = i") = \frac{P("X_1=i" \cap "X_2=h")}{P("X_1=i")}$. Essendo

$$P("X_1 = i" \cap "X_2 = h") = \frac{n!}{i!h!(n-i-h)!} p_1^i p_2^h (1 - p_1 - p_2)^{n-i-h}$$

e

$$P("X_1 = i") = \frac{n!}{i!(n-i)!} p_1^i (1 - p_1)^{n-i}$$

otteniamo

$$\begin{aligned} P("X_2 = h" | "X_1 = i") &= \frac{(n-i)!}{h!(n-i-h)!} p_2^h \frac{(1 - p_1 - p_2)^{n-i-h}}{(1 - p_1)^{n-i-h} (1 - p_1)^h} = \\ &= \binom{n-i}{n-i-h} \left(\frac{p_2}{1-p_1}\right)^h \left(1 - \frac{p_2}{1-p_1}\right)^{n-i-h} \end{aligned}$$

da cui deduciamo che, dato l'evento $"X_1 = i"$, la distribuzione di X_2 diventa di tipo $B(n - i, \frac{p_2}{1-p_1})$, e quindi

$$E(X_2 | "X_1 = i") = (n - i) \frac{p_2}{1 - p_1}.$$

Allora risulta

$$\begin{aligned}
E(X_1 X_2) &= \sum_{i=1}^n i(n-i) \frac{p_2}{1-p_1} \binom{n}{i} p_1^i (1-p_1)^{n-i} = \\
&= n \frac{p_2}{1-p_1} \sum_{i=1}^n i \binom{n}{i} p_1^i (1-p_1)^{n-i} - \frac{p_2}{1-p_1} \sum_{i=1}^n i^2 \binom{n}{i} p_1^i (1-p_1)^{n-i} = \\
&= n \frac{p_2}{1-p_1} E(X_1) - \frac{p_2}{1-p_1} E(X_1^2) = \frac{p_2}{1-p_1} (n^2 p_1 - n(n-1)p_1^2 - np_1) = \\
&= \frac{p_2}{1-p_1} np_1 (n - (n-1)p_1 - 1) = np_1 p_2 (n-1).
\end{aligned}$$

Di conseguenza, avremo

$$\text{cov}(X_1, X_2) = np_1 p_2 (n-1) - n^2 p_1 p_2 = -np_1 p_2.$$

Da qui, si deduce facilmente anche il coefficiente di correlazione:

$$\rho(X_1, X_2) = -\frac{np_1 p_2}{n \sqrt{p_1(1-p_1)p_2(1-p_2)}} = -\sqrt{\frac{p_1 p_2}{(1-p_1)(1-p_2)}}.$$

Il fatto che la covarianza sia negativa rispecchia una forma di *antagonismo* tra le due v.a.: se una delle due diventa grande, l'altra tenderà a diventare piccola (dato il vincolo $X_1 + X_2 \leq n$, cio' era prevedibile). Il coefficiente di correlazione non é mai nullo (esclusi casi degeneri), e risulta uguale a -1 se e solo se $p_1 + p_2 = 1$, e quindi solo se $n = 2$: in tal caso, é chiaro che $X_1 + X_2 = n$, e quindi tra le due v.a. c'è un legame lineare.

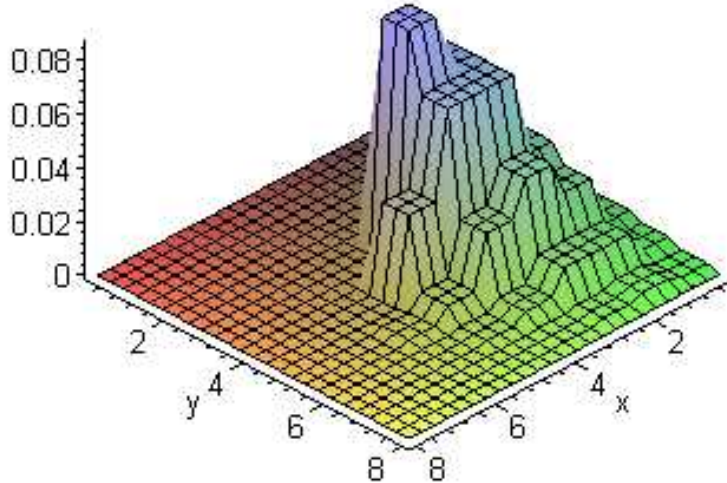
Il prossimo esempio é nel caso continuo. Esso é ancora piu' importante, in quanto rappresenta il corrispondente multidimensionale della distribuzione normale.

Esempio 5.8 Si dice che un vettore aleatorio $\underline{X} := (X_1, \dots, X_n)$ ha distribuzione *normale multivariata*, o semplicemente *gaussiana*, e si denota con $\underline{X} \sim MVN$, se essa ha come densita' la funzione

$$f(\underline{x}) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2} (\det \mathbf{V})^{1/2}} \exp \left\{ -\frac{1}{2} (\underline{x} - \mu)^t \mathbf{V}^{-1} (\underline{x} - \mu) \right\} \quad (5.3)$$

con $\underline{x} \in \mathbb{R}^n$, ove μ é il vettore (μ_1, \dots, μ_n) , le cui componenti sono le medie $E(X_i)$, $i = 1, \dots, n$, (in notazione matriciale, \underline{x} é inteso come vettore colonna, e la notazione \underline{x}^t denota il *trasposto* di \underline{x} , ossia lo stesso vettore pensato come vettore riga); inoltre \mathbf{V} é una matrice

Distribuzione multinomiale a 3 dimensioni, con $p=1/3$



$n \times n$, simmetrica e definita positiva, detta la *matrice covarianza*: gli elementi $v_{i,j}$ di \mathbf{V} non sono altro che le covarianze $cov(X_i, X_j)$.

(La teoria delle matrici assicura che, sotto tali condizioni, $\det \mathbf{V}$ é diverso da 0, e quindi l'inversa \mathbf{V}^{-1} esiste ed ha caratteristiche simili; ne consegue che la quantita' ad esponente é in pratica una forma quadratica definita positiva.)

Nel caso $n = 2$, l'espressione della densita' ha una forma piu' comprensibile. Per semplificare ancora, supponiamo che sia $\mu = 0$ (il che non cambia molto la sostanza) e scriviamo

$$\mathbf{V} = \begin{pmatrix} \sigma_1^2 & \rho\sigma_1\sigma_2 \\ \rho\sigma_1\sigma_2 & \sigma_2^2 \end{pmatrix}$$

intendendo che ρ é il coefficiente di correlazione $\rho(X_1, X_2)$ tra le due v.a. marginali, e σ_1^2, σ_2^2 sono le loro rispettive varianze (supposte non nulle).

Lasciando per esercizio al lettore i calcoli del caso, si ottiene

$$f_{X_1, X_2}(x_1, x_2) = \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}} \exp \left\{ -\frac{1}{2} \frac{\sigma_2^2 x_1^2 - 2\rho\sigma_1\sigma_2 x_1 x_2 + \sigma_1^2 x_2^2}{\sigma_1\sigma_2(1-\rho^2)} \right\}$$

Qui si puo' vedere facilmente che sia X_1 che X_2 hanno distribuzione normale (questo accade in generale, in qualsiasi dimensione), e che, nel caso $\rho = 0$, si ottiene l'indipendenza

tra X_1 e X_2 (anche questo é un fatto tipico della distribuzione gaussiana, ma non vale per altre distribuzioni).

In generale, si puo' dimostrare il seguente importante teorema.

Teorema 5.9 1) *Dato un vettore aleatorio $\underline{X} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$, $\underline{X} := (X_1, \dots, X_n)$, condizione necessaria e sufficiente affinché \underline{X} abbia distribuzione gaussiana é che ogni combinazione lineare delle X_i abbia distribuzione normale.*

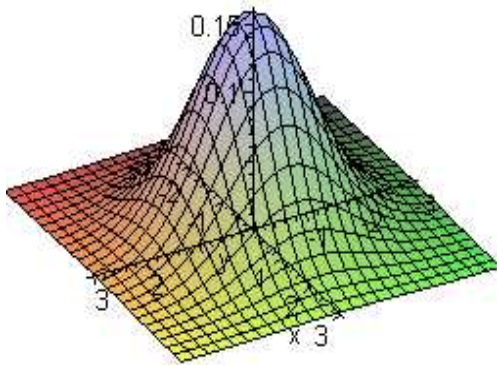
2) *Dato un vettore aleatorio $\underline{X} := (X_1, \dots, X_n)$ con distribuzione gaussiana, esiste un sistema di riferimento opportuno in \mathbb{R}^n rispetto al quale le nuove componenti di \underline{X} costituiscono un vettore gaussiano indipendente.*

Non diamo la dimostrazione di questo teorema; osserviamo solo che la seconda parte dell'enunciato equivale a dire che esiste un'opportuna matrice unitaria $n \times n$ \mathbf{U} (le matrici unitarie sono appunto quelle dei cambiamenti di coordinate) tale che il vettore $\mathbf{U}\underline{X}$ ha distribuzione gaussiana e le sue marginali sono indipendenti. (In questo caso, indipendenza significa che la matrice covarianza é diagonale).

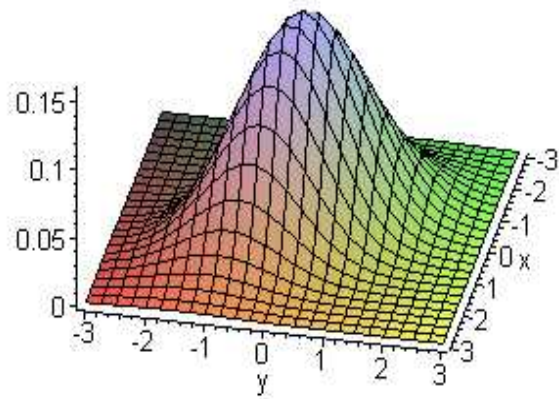
Un'altra conseguenza di questo teorema é che, dato un vettore aleatorio gaussiano \underline{X} , per ogni matrice non degenera \mathbf{A} , il vettore aleatorio $\mathbf{A}\underline{X}$ ha ancora distribuzione gaussiana.

Nel grafico seguente possiamo notare la forma della funzione densita' di una gaussiana 2-dimensionale, con $\sigma_1 = \sigma_2 = 1$ e $\mu = 0$, al variare di ρ .

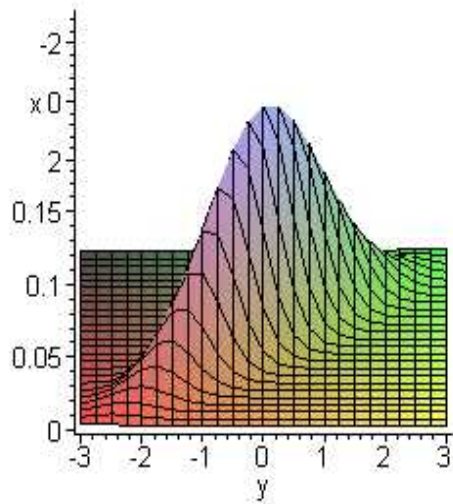
$\rho=0$: indipendenza



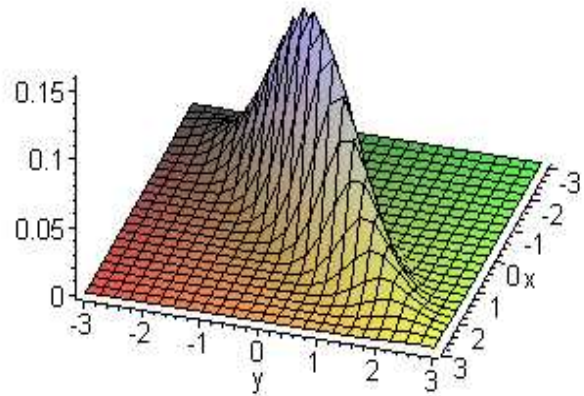
$\rho = -0.5$, covarianza negativa



$\rho=-0.9$: prossimi a legame lineare



$\rho=0.9$: orientamento simmetrico



Capitolo 6

Prodotto di convoluzione

In questo breve capitolo introdurremo una formula particolare, che permette, in certi casi, di ricavare la distribuzione della *somma* di due variabili aleatorie X e Y .

Osserviamo, preliminarmente, che in generale *non basta* conoscere la distribuzione di X e quella di Y per poter dedurre con sicurezza la distribuzione di $X + Y$.

Ad esempio, sia X una generica v.a. con distribuzione $N(0, 1)$. Poiché la densità di X è una funzione pari, anche la variabile aleatoria $-X$ ha la stessa distribuzione di X . Dunque, in questo caso, $X + (-X) = 0$, e la distribuzione di questa somma è ovviamente discreta, anzi concentrata. Ora, se consideriamo la somma $X + X$, anche in questo caso le due v.a. hanno le stesse distribuzioni delle due precedenti, ma chiaramente la v.a. $2X$ ha tutt'altra distribuzione rispetto a quella di 0.

In generale, per risolvere adeguatamente il problema, occorre conoscere la distribuzione *congiunta* della coppia (X, Y) : questa infatti contiene tutte le informazioni riguardanti non solo le singole v.a. ma anche le loro possibili combinazioni. Vedremo ora, in alcuni casi particolari, in che modo questo discorso si concretizza.

1. La prima situazione che esamineremo riguarda il caso discreto: supporremo che la coppia (X, Y) abbia distribuzione discreta, con un numero finito di valori possibili. In altre parole, supponiamo che esistano n numeri reali x_1, x_2, \dots, x_n , m numeri reali y_1, y_2, \dots, y_m , e nm valori di probabilità $p_{i,j}$, con $i = 1, \dots, n$ e $j = 1, \dots, m$, tali che

$\sum_{i,j} p_{i,j} = 1$ e tali soprattutto che

$$p_{i,j} = P(^{\prime\prime\prime}X = i, Y = j^{\prime\prime\prime}),$$

per ogni coppia (i, j) . (Si noti che non richiediamo che tutti i $p_{i,j}$ siano diversi da 0, ma solo che la loro somma sia 1).

In tale situazione, la v.a. $Z = X + Y$ é ovviamente ancora discreta, e i valori che essa puo' assumere sono le somme $x_i + y_j$ (o meglio, solo quelle per le quali i corrispondenti $p_{i,j}$ sono diversi da 0). Se indichiamo con u un generico valore che Z puo' assumere, puo' accadere che u sia la somma di diverse coppie (x_i, y_j) , quindi la probabilita' che sia $Z = u$ puo' essere cosi' calcolata:

$$P(^{\prime\prime\prime}Z = u^{\prime\prime\prime}) = \sum_{i=1}^n P(^{\prime\prime\prime}X = x_i, Y = u - x_i^{\prime\prime\prime}) = \sum_{j=1}^m P(^{\prime\prime\prime}X = u - y_j, Y = y_j^{\prime\prime\prime});$$

queste due formule sono perfettamente interscambiabili, grazie alla proprieta' commutativa.

Ad esempio, supponiamo di lanciare un dado (onesto) due volte, e denotiamo con X la variabile che conta il numero di *uno* usciti, mentre Y denota il numero di *sei* usciti. Chiaramente, X e Y hanno entrambe distribuzione binomiale $B(2, \frac{1}{6})$, e $Z := X + Y$ puo' assumere (in prima analisi) i valori 0, 1, 2, 3, 4 con le seguenti probabilita':

$$P(^{\prime\prime\prime}Z = 0^{\prime\prime\prime}) = P(^{\prime\prime\prime}X = 0, Y = 0^{\prime\prime\prime}) = \frac{4^2}{6^2} = \frac{4}{9},$$

$$P(^{\prime\prime\prime}Z = 1^{\prime\prime\prime}) = P(^{\prime\prime\prime}X = 0, Y = 1^{\prime\prime\prime}) + P(^{\prime\prime\prime}X = 1, Y = 0^{\prime\prime\prime}) = 2 \times 2 \times \frac{4}{36} = \frac{4}{9},$$

$$\begin{aligned} P(^{\prime\prime\prime}Z = 2^{\prime\prime\prime}) &= P(^{\prime\prime\prime}X = 0, Y = 2^{\prime\prime\prime}) + P(^{\prime\prime\prime}X = 1, Y = 1^{\prime\prime\prime}) + P(^{\prime\prime\prime}X = 2, Y = 0^{\prime\prime\prime}) \\ &= \frac{1}{36} + \frac{2}{36} + \frac{1}{36} = \frac{1}{9}, \end{aligned}$$

$$P(^{\prime\prime\prime}Z = 3^{\prime\prime\prime}) = P(^{\prime\prime\prime}X = 1, Y = 2^{\prime\prime\prime}) + P(^{\prime\prime\prime}X = 2, Y = 1^{\prime\prime\prime}) = 0 = P(^{\prime\prime\prime}Z = 4^{\prime\prime\prime}).$$

Dunque, a conti fatti, vediamo che in realta' i valori possibili per Z sono solo 3:0,1,2, con le probabilita' indicate.

2. Esaminiamo ora il caso discreto, in condizioni di indipendenza: in queste ipotesi, basta conoscere le due distribuzioni marginali per avere anche quella congiunta. La formula precedente diviene

$$P({}''Z = u''') = \sum_{i=1}^n P({}''X = x_i'') P({}''Y = u - x_i''') = \sum_{j=1}^m P({}''X = u - y_j''') P({}''Y = y_j''').$$

Naturalmente, se poniamo $p_i = P({}''X = x_i'')$, $q_j = P({}''Y = y_j''')$, si può anche scrivere

$$P({}''Z = u''') = \sum_{x_i + y_j = u} p_i q_j,$$

ove, chiaramente, la somma s'intende estesa a tutte le coppie (i, j) tali che $x_i + y_j = u$.

Ad esempio, sempre nell'esperimento di due lanci di un dado, sia X il risultato del primo lancio, e Y quello del secondo lancio. Stavolta X e Y hanno distribuzione uniforme discreta, $U(6)$, e sono indipendenti. Se poniamo $X + Y = Z$, i valori possibili di Z sono tutti i numeri interi da 2 a 12. Ora, se si vuole ad esempio la probabilità $P({}''Z = 4''')$, ci chiederemo quali sono i valori possibili di X e Y perché ciò accada: ovviamente, le coppie possibili sono 3, cioè $(1, 3)$, $(2, 2)$, $(3, 1)$. Ciascuno di questi ha probabilità $\frac{1}{36}$, e quindi $P({}''Z = 4''') = \frac{3}{36}$. Lo stesso valore compete a $P({}''Z = 10''')$. In maniera analoga si vede che $P({}''Z = 5''') = P({}''Z = 9''') = \frac{4}{36}$, $P({}''Z = 6''') = P({}''Z = 8''') = \frac{5}{36}$, $P({}''Z = 7''') = \frac{1}{6}$, e si lascia al lettore di determinare le probabilità rimanenti.

3. Vediamo ora il caso continuo. Supponiamo che la coppia (X, Y) abbia densità congiunta $f(x, y)$. Se si vuole determinare la distribuzione di $Z = X + Y$, al solito conviene cercare la funzione di ripartizione di tale v.a.. Fissato ad arbitrio un qualsiasi numero reale u , la probabilità $P({}''X + Y \leq u''') = P({}''(X, Y) \in H_u''')$, dove H_u denota il semipiano descritto ad esempio come segue:

$$H_u = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : -\infty < x < +\infty, y \leq u - x\}.$$

Per le proprietà della densità, si ha ora

$$P({}''(X, Y) \in H_u''') = \int \int_{H_u} f(x, y) dx dy = \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\int_{-\infty}^{u-x} f(x, y) dy \right) dx.$$

Nell'integrale interno, poniamo $v = y + x$: allora $y = v - x$, e v varia tra $-\infty$ e u , e quindi otteniamo

$$\begin{aligned} P('Z \leq u''') &= P(''(X, Y) \in H_u''') = \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\int_{-\infty}^u f(x, v - x) dv \right) dx = \\ &= \int_{-\infty}^u \left(\int_{-\infty}^{+\infty} f(x, v - x) dx \right) dv, \end{aligned}$$

l'ultima scrittura essendo motivata dal teorema di Fubini. Se ora si vuole la densita' f_Z di Z , basta derivare rispetto ad u : ma si tratta di derivare una funzione integrale, per cui il calcolo é assai semplice:

$$f_Z(u) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, u - x) dx.$$

4. L'ultima formula scritta somiglia molto a quelle del caso discreto: basta sostituire le somme con gli integrali, e le probabilita' congiunte con la densita' congiunta.

Nel caso continuo, una situazione importante si ha quando X e Y sono indipendenti: note le densita' f_X e f_Y , si ha chiaramente $f_{(X,Y)}(x, y) = f_X(x)f_Y(y)$, e quindi l'ultima formula diviene

$$f_{X+Y}(u) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x)f_Y(u - x)dx (= \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(u - y)f_Y(y)dy).$$

Queste formule prendono il nome di *prodotti di convoluzione*, ed esprimono una vera e propria *operazione* tra le due densita' f_X e f_Y : spesso il risultato di tale operazione viene denotato con $f_X * f_Y$, per cui

$$f_{X+Y}(u) = (f_X * f_Y)(u).$$

Queste operazioni non sempre sono semplici: anche se le densita' f_X e f_Y sono funzioni elementari, spesso il prodotto di convoluzione richiede dei ragionamenti non automatici. Vediamo alcuni esempi.

5. Siano X e Y indipendenti, entrambe con distribuzione uniforme continua $U(0, 1)$. Denotando con f la densita' comune alle due v.a., avremo dunque

$$f_{X+Y}(u) = (f * f)(u) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)f(u - x)dx.$$

Ora, tenendo presente che f assume il valore 1 in $[0, 1]$ e il valore 0 altrove, si ha

$$(f * f)(u) = \int_0^1 f(u-x) dx.$$

Ma ora osserviamo che $f(u-x)$ é non nulla solo se $0 \leq u-x \leq 1$: dunque, fissata u , cio' puo' accadere solo se $u-1 \leq x \leq u$. Ma anche dobbiamo avere $0 \leq x \leq 1$ per quanto detto in precedenza, dunque si ha

$$(f * f)(u) = \int_{(u-1) \vee 0}^{u \wedge 1} dx = u \wedge 1 - (u-1) \vee 0,$$

ove il simbolo \vee sta per *max* e il simbolo \wedge per *min*. Per meglio interpretare l'espressione trovata, distingueremo il caso $u \leq 1$ dal caso $u > 1$: infatti, se X e Y variano tra 0 e 1, allora $X + Y$ puo' variare tra 0 e 2. Ora, se $0 \leq u \leq 1$, si ha $(f * f)(u) = u - 0 = u$; e se $1 \leq u \leq 2$, si ha $(f * f)(u) = 1 - (u-1) = 2 - u$. Quindi, in definitiva, la densita' di $X + Y$ in questo caso é la funzione *tenda* definita da

$$f_{X+Y}(u) = \begin{cases} u, & 0 \leq u \leq 1 \\ 2 - u, & 1 \leq u \leq 2 \end{cases}$$

Dunque, vediamo che la somma $X + Y$ si concentra maggiormente sui valori *centrali* dell'intervallo $[0, 2]$, cosi' come accadeva con la somma di due variabili discrete uniformi $U(6)$ visto al punto (2.)

6. Un altro esempio importante riguarda le distribuzioni Γ . Supponiamo che X e Y siano indipendenti, con $X \sim \Gamma(\alpha_1, \beta)$, $Y \sim \Gamma(\alpha_2, \beta)$. Allora si ha che $X + Y \sim \Gamma(\alpha_1 + \alpha_2, \beta)$. Per semplicita', faremo il calcolo solo nel caso $\beta = 1$. In tal caso, avremo

$$f_X(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha_1)} x^{\alpha_1-1} e^{-x} \mathbf{1}_{[0, \infty[}(x),$$

e analogamente per f_Y . Anche qui, bisognera' stare attenti al fatto che queste densita' si annullano se l'argomento non é positivo. Abbiamo dunque, per $u > 0$, e con opportuni passaggi nell'integrazione:

$$\begin{aligned} f_{X+Y}(u) &= \int_0^u \frac{1}{\Gamma(\alpha_1)\Gamma(\alpha_2)} x^{\alpha_1-1} (u-x)^{\alpha_2-1} e^{-u} dx = \\ &= \frac{e^{-u}}{\Gamma(\alpha_1)\Gamma(\alpha_2)} \int_0^1 t^{\alpha_1-1} (1-t)^{\alpha_2-1} u^{\alpha_1+\alpha_2-1} dt = \end{aligned}$$

$$= u^{\alpha_1+\alpha_2-1} e^{-u} \frac{Be(\alpha_1, \alpha_2)}{\Gamma(\alpha_1)\Gamma(\alpha_2)} = \frac{u^{\alpha_1+\alpha_2-1}}{\Gamma(\alpha_1 + \alpha_2)} e^{-u},$$

per note relazioni tra le funzioni Γ e *Beta*.

7. Come ultimo esempio, citeremo, senza fare dimostrazioni, il caso normale: se X e Y sono indipendenti, con $X \sim N(\mu_1, \sigma_1^2)$, $Y \sim N(\mu_2, \sigma_2^2)$, allora $X+Y \sim N(\mu_1+\mu_2, \sigma_1^2+\sigma_2^2)$.

Capitolo 7

Teoremi di convergenza

Data una successione di v.a. scalari, é spesso molto importante esaminarne il comportamento al limite, cioè studiare se la successione data converge, in qualche senso, a qualche limite. In questo capitolo, prenderemo in esame vari modi di convergenza, studiandone le caratteristiche essenziali e i possibili collegamenti. Quali esempi (nonché importanti applicazioni) tratteremo i principali teoremi ai limiti, cioè le Leggi dei Grandi Numeri e il Teorema del Limite Centrale.

7.1 Modi di Convergenza

Iniziamo presentando le piu' importanti forme di convergenza, e le loro interrelazioni.

Definizione 7.1 Data una successione $(X_n)_n$ di v.a., diremo che X_n converge a X_0 *quasi certamente* se é nulla la probabilita' che X_n non converga a X_0 : in altre parole, si vuole che esista un evento N con probabilita' nulla, tale che si abbia

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} X_n(\omega) = X_0(\omega)$$

per ogni $\omega \notin N$.

Se cio' accade, scriveremo $X_n \rightarrow X_0$ *q.c.*. La convergenza quasi certa puo' essere caratterizzata anche descrivendo direttamente l'evento N in cui *non* si ha convergenza: si puo'

infatti dimostrare che

$$N = \bigcup_{\varepsilon > 0} \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \bigcup_{m > n} A_m(\varepsilon)$$

ove $A_m(\varepsilon)$ é l'evento " $|X_m - X_0| > \varepsilon$ "; basta pensarci un attimo: se $X_n(\omega)$ non converge a $X(\omega)$, esiste almeno un $\varepsilon > 0$ tale che *infinite volte* si ha $|X_m(\omega) - X(\omega)| > \varepsilon$; e la locuzione *infinite volte* significa che *per ogni intero n ce n'è almeno uno, diciamo m , maggiore di n , per cui la condizione $|X_m(\omega) - X(\omega)| > \varepsilon$ é verificata.*

Dunque, $X_n \rightarrow X_0$ q.c. se e solo se per ogni $\varepsilon > 0$ l'evento

$$\bigcap_{n \in \mathbb{N}} \bigcup_{m > n} "|X_m(\omega) - X(\omega)| > \varepsilon"$$

ha probabilita' nulla.

Come si vede da queste formule, la convergenza quasi certa non é sempre agevole da dimostrare, specialmente se si pensa che di solito lo spazio Ω resta misterioso, e tutti gli strumenti con i quali si puo' lavorare sono le distribuzioni delle X_n . Nel prossimo teorema si presenta una situazione in cui non é troppo difficile dedurre la convergenza quasi certa.

Teorema 7.2 *Sia $(X_n)_n$ una successione di v.a. in L_2 , e supponiamo che sia convergente la serie*

$$\sum_{n=1}^{\infty} V(X_n).$$

Supposto che tutte le v.a. X_n abbiano valor medio nullo, allora risulta

$$X_n \rightarrow 0 \text{ q.c.}$$

Dimostrazione. In virtu' della definizione 7.1, dobbiamo dimostrare che per ogni $\varepsilon > 0$ si ha

$$P\left(\bigcap_{n \in \mathbb{N}} \bigcup_{m > n} "|X_m| > \varepsilon''\right) = 0.$$

Fissiamo dunque $\varepsilon > 0$. Per ogni $n \in \mathbb{N}$, si ha

$$P\left(\bigcup_{m > n} "|X_m| > \varepsilon''\right) \leq \sum_{m > n} P(|X_m| > \varepsilon'').$$

Applicando la disuguaglianza di Markov (o di Tchebyshev, v. 4.18 oppure 4.22), si ha

$$\sum_{m>n} P(|X_m| > \varepsilon'') \leq \sum_{m>n} \frac{V(X_m)}{\varepsilon^2}$$

e quindi

$$P\left(\bigcup_{m>n} |X_m| > \varepsilon''\right) \leq \frac{1}{\varepsilon^2} \sum_{m>n} V(X_m).$$

L'ultima somma scritta é il resto n^0 di una serie convergente, e quindi tende a 0 per $n \rightarrow \infty$.

Allora

$$\begin{aligned} P\left(\bigcap_{n \in \mathbb{N}} \bigcup_{m>n} |X_m| > \varepsilon''\right) &= \lim_{n \rightarrow \infty} P\left(\bigcup_{m>n} |X_m| > \varepsilon''\right) \leq \\ &\leq \frac{1}{\varepsilon^2} \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{m>n} V(X_m) = 0. \end{aligned}$$

Poiché cio' accade per ogni $\varepsilon > 0$ si ha l'asserto. \square

L'ipotesi fatta nel teorema 7.2, sulla convergenza della serie delle varianze, ovviamente implica che le varianze $V(X_n)$ tendono a 0. Ma questa condizione piu' debole in generale *non basta* per la convergenza q.c.. A tale proposito puo' essere istruttivo l'esempio seguente.

Esempio 7.3 Immaginiamo di avere a disposizione infinite urne, $U_1, U_2, \dots, U_n, \dots$, e che per ogni intero j l'urna U_j contenga esattamente j palline, numerate da 1 a j . Ora, definiamo la successione $(X_n)_n$ in questo modo: la v.a. X_1 é costantemente uguale a 1; le v.a. X_2 e X_3 si riferiscono all'esperimento di estrarre a caso una palla da U_2 : X_2 vale 1, se esce la palla n. 1, e 0 altrimenti, mentre X_3 vale 1 se esce la palla n. 2 e 0 altrimenti; le v.a. X_4, X_5, X_6 si riferiscono all'esperimento di estrarre una palla dall'urna U_3 : X_4 vale 1 se esce la palla numero 1 e 0 altrimenti, X_5 vale 1 se esce la palla numero 2 e 0 altrimenti, X_6 vale 1 se esce la palla n.3 e 0 altrimenti; e cosi' via. In definitiva, tutte le v.a. X_n sono di Bernoulli, $X_n \sim B(1, p_n)$, ed é chiaro che la successione $(p_n)_n$ é monotona non crescente e tende a 0. Allora, essendo $V(X_n) = p_n(1 - p_n)$, é evidente che $\lim_n V(X_n) = 0$. Notiamo che, in tutti i casi possibili, ogni urna U_j ci fornisce una v.a. X_m che vale 1 e altre $j - 1$ v.a. che valgono 0: pertanto, $X_n(\omega)$ vale 0 infinite volte, e 1 infinite volte, e percio' non puo' tendere né a 0, né a 1, qualunque sia ω , e ogni altro valore é fuori causa. Dunque, *certamente* $X_n(\omega)$ non tende a niente. Poniamo ora:

$$Y_n := X_n - E(X_n) = X_n - p_n.$$

Risulta ovviamente $E(Y_n) = 0$ e $V(Y_n) = V(X_n)$ per ogni n . Dunque, le v.a. Y_n sono in L_2 , hanno media nulla e varianze infinitesime. Ma esse non convergono quasi certamente. Infatti, dato che $p_n \rightarrow 0$, le Y_n convergono se e solo se le X_n convergono, e abbiamo già visto che ciò è impossibile.

L'ipotesi $V(X_n) \rightarrow 0$ conduce comunque a un altro tipo di convergenza, più *debole* di quella quasi certa.

Definizione 7.4 Una successione di v.a. scalari $(X_n)_n$ converge *in Probabilità* a un limite X_0 , e si scrive $X_n \rightarrow X_0$ in P , se risulta

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P(|X_n - X| > \varepsilon) = 0$$

per ogni $\varepsilon > 0$.

Chiaramente, sempre in virtù della disuguaglianza di Tchebyshev, si può dire che $\lim_n V(X_n) = 0$ implica la convergenza in P della successione $(X_n - E(X_n))_n$.

È chiaro anche, confrontando questa definizione con la 7.1, che la convergenza quasi certa implica quella in Probabilità, mentre l'esempio precedente prova che la convergenza in P non implica in genere quella quasi certa.

Il prossimo teorema, che non dimostreremo, mostra che, tutto sommato, queste due forme di convergenza sono abbastanza *imparentate*. In sostanza, esso prova che, se una successione $(X_n)_n$ converge in P a una v.a. X_0 , allora esiste una sottosuccessione $(X_{n_k})_k$ la quale converge q.c. a X_0 .

Teorema 7.5 Sia $(X_n)_n$ una successione di v.a.

- a) Se $X_n \rightarrow X_0$ in P , e $X_n \rightarrow Y_0$ in P , allora $X_0 = Y_0$ q.c.
- b) $(X_n)_n$ è convergente in P se e solo se per ogni $\varepsilon > 0$ esiste un intero n_0 tale che

$$P(|X_n - X_k| > \varepsilon) < \varepsilon \quad \forall n, k > n_0.$$

- c) Condizione necessaria e sufficiente perché $X_n \rightarrow X_0$ in P è che ogni sottosuccessione $(X_{n_k})_k$ ammetta un'ulteriore sottosuccessione $(X_{n_{k_j}})_{j \geq 1}$ che converga a X_0 quasi certamente.

I due tipi di convergenza finora introdotti non garantiscono il *passaggio al limite* del valor medio: vediamo un altro esempio.

Esempio 7.6 Supponiamo che X sia una v.a. del tipo $NB(1, p)$: cioè X indica il numero di lanci di moneta occorrenti per la prima uscita di *testa*, supponendo che la probabilità di *testa* sia p , con $0 < p < 1$. Definiamo ora la successione $(X_n)_n$ ponendo

$$X_n = \begin{cases} (1-p)^{-n}, & \text{se } X > n, \\ 0, & \text{se } X \leq n. \end{cases}$$

E' chiaro che $E(X_n) = (1-p)^{-n}P("X > n") = 1$ per ogni n (" $X > n$ " vuol dire che nei primi n lanci esce sempre croce). Dunque $\lim_n E(X_n) = 1$. Proviamo ora che, invece, X_n converge a 0 q.c.: infatti, per ogni $\varepsilon > 0$ (con $\varepsilon < 1$), l'evento " $X_n > \varepsilon$ infinite volte" significa " $X > n$ " infinite volte, e $X > n$ per infiniti valori di n equivale a dire $X = +\infty$, evento impossibile (o trascurabile, dato che corrisponderebbe a dire che esce *sempre* croce a ogni lancio).

Si noti che, nell'esempio precedente, le varianze $V(X_n)$ tendono a $+\infty$: dunque si può avere convergenza q.c. (e quindi in P.) anche se le varianze non hanno limite. Questa osservazione, assieme alla opportunità (a volte) di avere anche il passaggio a limite del valor medio, conduce ad un'altra definizione di convergenza.

Definizione 7.7 Sia data una successione di v.a. X_n appartenenti ad uno stesso spazio L_r , con $r \geq 1$. Diciamo che la successione $(X_n)_n$ *converge in media r -esima* (o anche che *converge in L_r*) a X_0 se risulta

$$\lim_{n \rightarrow \infty} E(|X_n - X_0|^r) = 0.$$

Nel caso $r = 1$ si parla semplicemente di *convergenza in media*; nel caso $r = 2$ si parla di *convergenza in media quadratica*.

Teorema 7.8 Supponiamo che una successione $(X_n)_n$ converga a X_0 in L_r . Allora si ha anche che X_n converge a X_0 in L_p , per ogni p compreso fra 1 e r .

Dimostrazione. Intanto, osserviamo che, se X_n e X_0 sono in L_r , esse sono anche in L_p , per ogni $p \in [1, r]$ (si vedano i commenti successivi alla definizione 4.19). Ora, si fissi $p < r$ e si scelga arbitrariamente $\varepsilon > 0$. Si ha, per ogni n :

$$E(|X_n - X_0|^p) = E(|X_n - X_0|^p 1_{F(n, \varepsilon)}) + E(|X_n - X_0|^p 1_{F(n, \varepsilon)^c})$$

ove $F(n, \varepsilon) := \{|X_n - X_0| > \varepsilon\}$. Ora, se $|X_n - X_0| > \varepsilon$, si ha

$$\frac{|X_n - X_0|}{\varepsilon} > 1, \quad \text{e quindi} \quad \left(\frac{|X_n - X_0|}{\varepsilon}\right)^p < \left(\frac{|X_n - X_0|}{\varepsilon}\right)^r$$

per cui

$$E(|X_n - X_0|^p 1_{F(n, \varepsilon)}) \leq \frac{\varepsilon^p}{\varepsilon^r} E(|X_n - X_0|^r).$$

Si ha poi

$$E(|X_n - X_0|^p 1_{F(n, \varepsilon)^c}) \leq E(|X_n - X_0|^r 1_{F(n, \varepsilon)^c}) \leq E(|X_n - X_0|^r).$$

In definitiva, per ogni n risulta

$$E(|X_n - X_0|^p) \leq \left(1 + \frac{\varepsilon^p}{\varepsilon^r}\right) E(|X_n - X_0|^r).$$

Si scelga ora n_0 tale che $E(|X_n - X_0|^r) < \frac{\varepsilon^p}{\varepsilon^p + \varepsilon^r} \varepsilon$ per ogni $n > n_0$. Chiaramente allora si ha

$$E(|X_n - X_0|^p) \leq \varepsilon$$

per ogni $n > n_0$, e la dimostrazione é conclusa. \square

Una conseguenza immediata di questo teorema é che, non appena si abbia convergenza in L_r per qualche $r > 1$, si ha automaticamente convergenza in L_1 . A sua volta, questa garantisce il passaggio a limite del valor medio: infatti, si ha sempre

$$|E(X_n) - E(X_0)| = |E(X_n - X_0)| \leq E(|X_n - X_0|)$$

e quindi, se l'ultimo membro tende a 0, a maggior ragione tende 0 il primo.

Ancora, grazie alla disuguaglianza di Markov, la convergenza in L_1 implica quella in P.: ricordiamo infatti che, per ogni n e ogni $\varepsilon > 0$

$$P(|X_n - X_0| > \varepsilon) \leq \frac{E(|X_n - X_0|)}{\varepsilon}.$$

Il seguente corollario é ora prevedibile, anche se la dimostrazione completa non é molto semplice, e verra' omessa.

Corollario 7.9 *Sia data una successione $(X_n)_n$ in L_2 , e supponiamo che $E(X_n) = \mu$ per ogni n . Allora, se si ha*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} V(X_n) = 0$$

le X_n convergono a μ in P e in L_p , per ogni $p \in [1, 2]$, e per tali p risulta

$$\lim_{n \rightarrow \infty} E(|X_n|^p) = E(|X|^p).$$

Abbiamo cosi' esaminato alcuni tipi di convergenza per variabili aleatorie, e vedremo presto come tali convergenze intervengano in alcune situazioni importanti. I concetti di convergenza finora introdotti (quasi certa, in Probabilita', in L_p) riguardano le variabili aleatorie in quanto *funzioni* $X_n : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, e come tali godono delle usuali proprieta' di una convergenza: unicita' del limite (a parte l'uguaglianza quasi certa), condizione di Cauchy, linearita' del limite, etc.

Tuttavia, a volte le questioni di convergenza si presentano piu' direttamente sulle *distribuzioni* delle X_n , in modo tale che nessuno dei concetti precedentemente introdotti sia utilizzabile. La *convergenza in distribuzione* é uno strumento per trattare queste situazioni.

Definizione 7.10 Data una successione $(X_n)_n$ di variabili aleatorie scalari (anche definite su spazi diversi), diciamo che esse convergono *in distribuzione* a una v.a. X se risulta

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} F_{X_n}(x) = F_X(x)$$

per ogni punto $x \in \mathbb{R}$, nel quale F_X sia continua.

Quando questo accade, si scrive $X_n \rightarrow X$ in D .

Commentiamo un momento la condizione espressa nella definizione 7.10: si vuole che le funzioni di ripartizione delle X_n convergano puntualmente alla funzione di ripartizione di X , ma *non necessariamente* in tutti i punti; se F_X é discontinua in qualche punto x_0 , non si pretende che $\lim_n F_{X_n}(x_0) = F_X(x_0)$.

Ora, sappiamo che qualsiasi funzione di ripartizione é monotona non decrescente, e come tale puo' avere al massimo un'infinita' numerabile di discontinuita': ogni punto di discontinuita' x_0 per F_X é un valore che la v.a. X puo' assumere con probabilita' positiva, e si ha

$$P(X = x_0) = F_X(x_0) - \lim_{x \rightarrow x_0^-} F_X(x).$$

(Anzi, l'ultima relazione scritta vale per *qualsunque* numero reale x_0 , che sia o no di continuita' per F_X .)

Dunque, la convergenza in distribuzione richiede che le funzioni F_{X_n} convergano in tutti gli $x \in \mathbb{R}$, tranne al piu' un'infinita' numerabile, che corrisponde agli (eventuali) punti di discontinuita' di F_X .

Nel prossimo esempio si chiarisce il significato di questa condizione.

Esempio 7.11 Sia $X_n \sim U(-\frac{1}{n}, \frac{1}{n})$, per ogni n : in altri termini, X_n sia uniformemente distribuita in $[-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}]$. Da questo si capisce subito che $|X_n| \leq \frac{1}{n}$ per ogni n , e quindi la successione $(X_n)_n$ converge *uniformemente* a 0. (Non abbiamo parlato in questi appunti di convergenza uniforme, ma il concetto é lo stesso che si studia nei corsi di base, e comunque implica la convergenza q.c. e in L_p .)

In tale situazione, c'é da aspettarsi che *qualsunque* forma di convergenza sia soddisfatta. Pero', se controlliamo le funzioni di ripartizione delle X_n , vediamo che

$$F_{X_n}(x) = \begin{cases} 0, & x \leq -\frac{1}{n} \\ \frac{n}{2}(x + \frac{1}{n}), & -\frac{1}{n} \leq x \leq \frac{1}{n} \\ 1, & x \geq \frac{1}{n} \end{cases}$$

per ogni $n \in \mathbb{N}$. Notiamo che risulta

$$F_{X_n}(0) = \frac{1}{2}$$

per ogni n , e quindi si ha

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} F_{X_n}(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ \frac{1}{2}, & x = 0, \\ 1, & x > 0 \end{cases}$$

sicché, persino in questo caso, la successione delle funzioni di ripartizione non converge in *tutti* i punti di \mathbb{R} alla funzione di ripartizione del limite, che invece coincide con la funzione di Heaviside:

$$F_X(x) = F_0(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ 1, & x \geq 0; \end{cases}$$

nel punto 0, che é di discontinuità per F_X , non si ha convergenza delle F_{X_n} a F_X . Ma si può comunque concludere che la successione data $(X_n)_n$ converge a 0 in distribuzione.

La convergenza in distribuzione, come facilmente si può capire, ha caratteristiche diverse da quelle di una convergenza usuale. Ad esempio, é possibile che una stessa successione converga in distribuzione a due variabili aleatorie completamente diverse: si consideri un lancio di moneta onesta, e sia X la variabile aleatoria che vale 1, se esce *testa*, 0 se esce *croce*; si prenda poi $Y = 1 - X$; chiaramente, sia X che Y hanno la stessa distribuzione $B(1, \frac{1}{2})$, e quindi sono entrambe *limite* della successione $(X_n)_n$ definita da

$$X_n = X$$

per ogni n . E questo, nonostante che $P(X = Y) = 0$.

Questo esempio prova anche che la convergenza in distribuzione non implica in genere nemmeno la convergenza in probabilità.

Il prossimo teorema, del quale non diamo la dimostrazione, completa il discorso riguardante le relazioni tra i vari tipi di convergenza introdotti.

Teorema 7.12 *a) Sia $(X_n)_n$ una successione di v.a.. Se $X_n \rightarrow X_0$ in probabilità, allora $X_n \rightarrow X_0$ anche in distribuzione.*

b) Sia $(X_n)_n$ una successione di v.a. convergenti in distribuzione a una v.a. X_0 . Se X_0 é costante q.c., allora $X_n \rightarrow X$ in probabilità.

7.2 Teoremi di convergenza

In questo paragrafo presenteremo i teoremi più importanti di convergenza, per successioni di v.a.. Eviteremo le dimostrazioni più pesanti, ma cercheremo di fornire varie interpre-

tazioni e conseguenze di questi teoremi, sia per illustrarne al meglio il significato, sia per descriverne alcune possibili applicazioni, specialmente in Statistica.

Iniziamo con i teoremi riguardanti i primi tipi di convergenza, cioè quella q.c., quella in P. e quella in media. Si tratta di due teoremi fondamentali, che prendono il nome di *Leggi dei Grandi Numeri*, e il loro scopo é quello di giustificare (entro certi limiti) l'uso del *principio di frequenza*. Per dirla alla buona, il principio di frequenza permette di individuare la probabilita' di un evento E (ad esempio, l'uscita di *testa*) ripetendo varie volte l'esperimento in cui l'evento E si puo' verificare (nell'esempio detto, i lanci di moneta), e facendo il rapporto (*frequenza*, appunto) tra il numero di volte in cui E si é verificato e il numero totale di prove effettuate. A lungo andare, la frequenza di E si avvicinerà sempre piu' alla probabilita' cercata.

Il primo teorema che giustifica tale principio é la cosiddetta *Legge Debole* dei Grandi Numeri.

Premettiamo comunque una definizione.

Definizione 7.13 Data una successione di v.a. X_n , tutte definite nel medesimo spazio di probabilita' (Ω, \mathcal{A}, P) , diremo *media campionaria* la variabile aleatoria \bar{X}_n , definita da

$$\bar{X}_n := \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i.$$

Ad esempio, se $X_n = 1_{E_n}$, con $E_n \in \mathcal{A}$ per ogni n , la v.a. $n\bar{X}_n$ ci dice quanti degli eventi E_j (tra i primi n) si sono verificati, e la media campionaria non é altro che la *frequenza* con cui gli E_j si verificano, fino all' n -esimo.

Teorema 7.14 Sia $(X_n)_n$ una successione di v.a. in L_2 , tutte aventi lo stesso valor medio, μ . Supponiamo inoltre che esse siano a due a due non correlate, e che le varianze $V(X_n)$ si mantengano limitate.

Allora la successione $(\bar{X}_n)_n$ delle medie campionarie converge a μ in L_2 .

Dimostrazione. Chiaramente, la generica media campionaria \bar{X}_n é anch'essa in L_2 , in quanto somma di v.a. in L_2 . Si ha inoltre

$$V(\bar{X}_n) = \frac{1}{n^2} V\left(\sum_{j=1}^n X_j\right) = \frac{1}{n^2} \sum_{j=1}^n V(X_j),$$

l'ultima relazione valendo perché le v.a. X_n sono non correlate. Ora, poiché le varianze $V(X_n)$ sono limitate, esiste una costante $K > 0$ tale che

$$V(\bar{X}_n) \leq \frac{1}{n^2} nK \leq \frac{K}{n}$$

per ogni n . Ora, per dimostrare la convergenza in L_2 , bisogna osservare che $E(\bar{X}_n) = \mu$ per ogni n , e quindi $E((\bar{X}_n - \mu)^2) = V(\bar{X}_n)$ per ogni n . Avendo già visto che le varianze $V(\bar{X}_n)$ sono infinitesime, l'asserto è provato. \square

In particolare, la legge debole garantisce la convergenza delle medie campionarie, se le X_n hanno tutte la stessa varianza (oltre ad essere non correlate e ad avere lo stesso valor medio). A maggior ragione si ha l'asserto, se le X_n hanno tutte la stessa distribuzione.

Cerchiamo di comprendere un po' meglio come il teorema 7.14 si può applicare. Supponiamo di non conoscere la probabilità di un certo evento E (si pensi sempre all'uscita di *testa* in un lancio di moneta), ma di poter effettuare un gran numero di volte l'esperimento in cui l'evento E potrebbe verificarsi. Supponiamo allora di effettuare tale esperimento un gran numero di volte, ogni volta in maniera indipendente dalle altre. In relazione all'esperimento n -esimo, si denoti con X_n la funzione indicatrice dell'evento E : cioè, X_n vale 1 se E si verifica nella prova n -esima, 0 se ciò non accade. Ogni X_n ha distribuzione $B(1, p)$, ove p è la probabilità (incognita) di E . Chiaramente $E(X_n) = p$ e $V(X_n) = p(1 - p)$ per ogni n . L'indipendenza da noi supposta nell'effettuare le varie prove ci garantisce che la successione (X_n) verifica tutte le ipotesi della legge debole dei grandi numeri. Si può quindi concludere che le frequenze \bar{X}_n convergono in L_2 all'incognita $\mu = p$ (pensata come v.a. costante). In altri termini, *per n molto grande*, il valore (osservabile) di \bar{X}_n è molto vicino a p (o perlomeno è molto difficile che sia sensibilmente diverso da p).

L'ultima frase scritta tra parentesi racchiude tutta la differenza tra la convergenza in probabilità e quella quasi certa: se le \bar{X}_n convergessero q.c., si potrebbe dire che è *impossibile* che il valore osservato di \bar{X}_n possa essere sensibilmente lontano da μ , almeno per n abbastanza grande.

Ricordiamo che la convergenza in L_2 implica quella in probabilità, ma non quella quasi certa. Lo scopo della seconda Legge dei Grandi Numeri, detta *Legge Forte*, è proprio quello di ottenere la convergenza quasi certa di \bar{X}_n a μ . Bisogna però precisare che tale teorema,

oltre a richiedere ipotesi piu' forti della Legge Debole, ha una dimostrazione notevolmente piu' complicata, che percio' verra' omessa.

Teorema 7.15 *Sia $(X_n)_n$ una successione di v.a. in L_2 , tutte con lo stesso valor medio μ , e con varianze limitate da una costante positiva K . Supponiamo che, per ogni intero n , le v.a. X_1, \dots, X_n siano globalmente indipendenti.*

Allora le medie \bar{X}_n convergono q.c. a μ .

Come si vede, l'ipotesi di indipendenza introdotta nel teorema 7.15 é piu' forte della non-correlazione usata nel teorema 7.14. Tuttavia, ritornando al discorso delle frequenze, se gli esperimenti si svolgono in maniera indipendente, le medie \bar{X}_n convergono a μ sia in L_2 che q.c., quindi il risultato *congiunto* delle due leggi in tale situazione é abbastanza soddisfacente.

Come ulteriore esempio, supponiamo di voler conoscere un parametro relativo ad una particolare distribuzione, ad esempio l'intensita' λ di un processo di Poisson: ricordiamo che un processo del genere modella fenomeni del tipo di emissioni radioattive, incidenti stradali, connessioni ad un sito web, etc., e che il numero X di realizzazioni di tale fenomeno, avvenute in un dato lasso di tempo, segue la legge

$$P(X = k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$$

per ogni $k \geq 0$. Per individuare λ , supponiamo di registrare, in vari intervalli di tempo disgiunti e della stessa durata, i successivi valori di X . In questo modo, otteniamo una *realizzazione* di una successione IID di variabili aleatorie, globalmente indipendenti e con distribuzione $P(\lambda)$. Detti X_1, \dots, X_n i successivi valori della X , la loro media campionaria \bar{X}_n sara' molto vicina, in base alle Leggi dei Grandi Numeri, al valore (sconosciuto) di λ . Piu' n é grande, piu' tale media sara' vicina a λ . Di solito, non si puo' dire con certezza *quale* valore di n garantisce ad esempio che $|\bar{X}_n - \lambda|$ sia minore di 10^{-3} , ma si puo' individuare n in modo tale che questo evento (ossia $|\bar{X}_n - \lambda| < 10^{-3}$) abbia almeno probabilita' $1 - 10^{-3}$.

L'ultimo teorema che riportiamo, anch'esso senza dimostrazione, é il *Teorema del Limite Centrale*. Esso fornisce, tra l'altro, una valida motivazione per l'importanza straordinaria

della distribuzione normale. Benché esso stabilisca solo la convergenza in distribuzione, la sua utilità è pressoché universale. Ciò sarà chiaro dopo che avremo enunciato il teorema, e discusso sulle sue implicazioni.

Teorema 7.16 (Limite Centrale) *Sia $(X_n)_n$ una successione di v.a. in L_2 , tutte con la stessa distribuzione e globalmente indipendenti. Denotati con μ il valor medio comune a tutte le X_n e con σ^2 la loro comune varianza (che supporremo non nulla), le variabili aleatorie standardizzate S_n^* convergono in distribuzione alla legge $N(0, 1)$, ove*

$$S_n = n\bar{X}_n = \sum_{j=1}^n X_j$$

per ogni $n \in \mathbb{N}$.

Il senso di questo teorema è il seguente: supponiamo che una v.a. S , con distribuzione sconosciuta, sia esprimibile come somma di tante v.a. X_i , tutte *all'incirca* con la stessa distribuzione, e indipendenti (l'ipotesi poi si può generalizzare in qualche senso, richiedendo soltanto che le X_i siano ciascuna di minima importanza, e quindi nessuna di loro sia in qualche modo *privilegiata* tra le altre); si può allora ritenere che S^* sia di tipo $N(0, 1)$, e quindi che S abbia in definitiva distribuzione normale.

Si osservi che la distribuzione delle v.a. X_i può anche essere di tipo discreto: ciò che ha importanza è che esse siano indipendenti, o comunque abbiano tutte minima importanza.

Questo spiega perché, spesso, gli errori di misurazione vengono trattati come v.a. di tipo normale: di solito, un errore casuale viene determinato come somma algebrica di molti piccolissimi errori, sia in eccesso che in difetto, ciascuno dovuto ad una causa diversa e di per sé quasi trascurabile.

Corollario 7.17 *Sia $X_n \sim B(n, p)$, e denotiamo con X_n^* la standardizzata di X_n : ossia*

$$X_n^* = \frac{X_n - np}{\sqrt{np(1-p)}}.$$

Allora la successione $(X_n^)_n$ converge in distribuzione alla legge $N(0, 1)$.*

Dimostrazione. Basta ricordare che ogni v.a. X_n è somma di n v.a. Y_i indipendenti, di tipo $B(1, p)$: dunque l'asserto segue dal teorema del Limite Centrale, applicato alle Y_n . \square

Si confrontino, a conferma di tale risultato, i grafici relativi alla distribuzione binomiale (specialmente quelli con n molto grande) con i grafici relativi alla densità gaussiana.

7.3 Esercizi

- 1: Si provino le affermazioni lasciate al lettore, o comunque dichiarate ovvie.
- 2: Sia $X_n \sim B(n, \frac{\lambda}{n})$ per ogni n . Provare che $(X_n)_n$ converge in distribuzione a una v.a. di tipo $P(\lambda)$.
- 3: Trovare una successione $(X_n)_n$ convergente in P. ma non in L_1 .
- 4: Se una successione $(X_n)_n$ converge in distribuzione a una v.a. X e a una v.a. Y , mostrare che si ha $F_X = F_Y$.
- 5: Sia $(X_n)_n$ una successione di v.a. convergenti in distribuzione ad una v.a. X . Provare che $(|X_n|)_n$ converge in distribuzione a $|X|$, e che $X_n + K$ converge in distribuzione a $X + K$, ove K sia una qualunque costante reale.
- 6: Trovare due successioni, $(X_n)_n$ e $(Y_n)_n$, tali che $X_n \rightarrow X_0$ in distribuzione e $Y_n \rightarrow Y_0$ in distribuzione, ma tali che $X_n + Y_n$ non converga in distribuzione a $X_0 + Y_0$.
- 7: Sia X una qualunque v.a.. Trovare una successione di v.a. X_n di tipo discreto, convergenti a X q.c..
- 8: Supponiamo di lanciare infinite volte una moneta onesta. Per ogni n sia S_n la v.a. numero di *teste* meno numero di *croci* nei primi n lanci. Provare che $E(S_n) = 0$ per ogni n , che $V(S_n) = n$ per ogni n , e che $\frac{S_n}{n}$ tende a 0 in L_2 . Si può dire che $\frac{S_n}{n}$ tende a 0 q.c.? Si può dire che $\frac{S_n}{\sqrt{n}}$ tende in distribuzione a una v.a. di tipo $N(0, 1)$?
- 9: Sia $(X_n)_n$ una successione di v.a. indipendenti, con identica distribuzione, e in L_2 . Se $E(X_1) = 0$, provare che $\frac{S_n}{n^{2/3}}$ converge in P. a 0, ove $S_n = X_1 + \dots + X_n$ per ogni n .
- 10: Si lanci molte volte una moneta, con $P(T) = p$, incognita. Sia \bar{X}_n la v.a. che denota la frequenza di *testa* dopo n lanci. Si può decidere in anticipo quante prove bisogna

effettuare per essere certi che la frequenza osservata \bar{X}_n differisca da p per meno di 10^{-3} ? E se, invece della certezza, ci si limita a richiedere che $P(|\bar{X}_n - p| > 10^{-3})$ sia minore di 10^{-3} ?

- 11:** Sia $X_n \sim \Gamma(n, 1)$. Calcolare la densita' di X_n^* e provare direttamente che, al divergere di n , tali densita' convergono puntualmente a quella della distribuzione $N(0, 1)$.
- 12:** Sia θ il valore vero (incognito) di una certa grandezza fisica. Si effettuano delle esperienze, indipendenti tra loro, per valutare θ : sia X_n il risultato della prova n -esima. Supponiamo che, per ragioni teoriche, si possa assumere $X_n \sim N(\theta, 1)$, per ogni n . Si denoti con Y_n l'*errore quadratico*: $Y_n = (X_n - \theta)^2$, e si provi che le medie campionarie \bar{Y}_n convergono a 1 q.c. , mentre le v.a. $\frac{\bar{Y}_n - 1}{\sqrt{n/2}}$ tendono a $N(0, 1)$ in distribuzione.

Indice

1	L'assiomatica di Kolmogorov	4
1.1	L'algebra degli eventi	4
1.2	La Probabilita'	7
2	Applicazioni del Calcolo Combinatorio	10
3	Probabilita' condizionate e Indipendenza	16
3.1	Probabilita' condizionate	18
3.2	Indipendenza	21
4	Distribuzioni	28
4.1	Variabili aleatorie	28
4.2	Principali distribuzioni discrete	36
4.3	Principali distribuzioni continue	45
4.4	Percentili, valor medio, varianza, momenti	54
5	Vettori aleatorii	78
5.1	Distribuzioni multivariate	78
5.2	Esempi di vettori aleatorii	84
6	Prodotto di convoluzione	91
7	Teoremi di convergenza	97
7.1	Modi di Convergenza	97

7.2	Teoremi di convergenza	105
7.3	Esercizi	110

Appunti di Probabilità 2

D. Candeloro

June 7, 2009

1 Introduzione

In questi appunti si riportano gli argomenti trattati in alcuni corsi tenuti presso l'Università degli Studi di Perugia, su temi riguardanti Processi aleatori ed Integrazione Stocastica. Essendo un corso per studenti di II livello universitario, gli elementi di base di Calcolo delle Probabilità sono supposti come già acquisiti, anche se nei primi 4 capitoli vengono ripresi, più che altro sotto forma di esempi, alcuni temi di particolare interesse: abbiamo infatti ritenuto opportuna una digressione sulle principali distribuzioni in più dimensioni, un richiamo di quei risultati che riguardano le *trasformazioni* di variabili aleatorie, e una panoramica di problemi concreti relativi al calcolo del valor medio condizionato, in varie situazioni che possono poi presentarsi nello studio di alcuni processi.

Abbiamo quindi trattato una serie di processi più o meno classici: passeggiate aleatorie, processi *branching*, catene di Markov; altri processi di più ampio respiro sono stati trattati più a grandi linee: processi stazionari, martingale, processi gaussiani sono visti in forma generale, corredati dei principali teoremi, anche se non tutte le dimostrazioni sono state inserite.

Un discorso a parte è stato riservato al Moto Browniano, che quasi da solo occupa i capitoli finali, a partire dal cenno (inevitabilmente superficiale) ai concetti riguardanti la convergenza in distribuzione negli spazi polacchi, proseguendo poi con una veloce panoramica delle principali caratteristiche di questo processo, come la Legge dell'Arcoseno o quella del Logaritmo Iterato, e approdando infine nell'ampio settore relativo all'Integrazione Stocastica e alle Equazioni Differenziali Stocastiche:

qui, piu' che affrontare in dettaglio le numerose e pesanti questioni teoriche, abbiamo preferito incentrare l'attenzione sui metodi risolutivi delle equazioni lineari, basati principalmente sulle Formule di Itô, e naturalmente corredando il tutto con diversi esempi dei vari casi studiati.

2 Distribuzioni Multidimensionali

In questo capitolo presentiamo alcuni esempi di distribuzioni in dimensione maggiore di 1. Essenzialmente tratteremo un caso di tipo discreto (le distribuzioni multinomiali) e uno di tipo continuo (la normale multivariata, naturalmente). Per i risultati che riportiamo senza dimostrazione, si puo' consultare il testo [6] o altro testo classico di Calcolo delle Probabilita'.

A tal proposito, segnaliamo una *abbreviazione* che adopreremo spesso per denotare le marginali finito-dimensionali di un processo: assegnata una famiglia qualunque (anche infinita) $(X_t)_t$ di variabili aleatorie, ogni sottofamiglia finita $(X_{t_1}, \dots, X_{t_n})$ ha una sua distribuzione n -dimensionale. Tale distribuzione é una marginale di tutta la famiglia $(X_t)_t$, e prende il nome di *distribuzione finito-dimensionale*: questa denominazione spesso sara' abbreviata in *fidi*, o al plurale *fidi's*.

Esempio 2.1 (Distribuzione multinomiale)

E' il tipo di distribuzione che s'incontra quando s'immagina di lanciare n volte un dado, e si vuole tener conto di quante volte esce la faccia 1, quante volte la faccia 2, etc. In questa semplice descrizione, il vettore \underline{X} é composto di 6 variabili scalari, X_1, \dots, X_6 , dove la v.a. X_j indica quante volte é uscita la faccia col numero j . Si vede facilmente che la distribuzione della marginale X_j é di tipo $B(n, \frac{1}{6})$ (supponendo che il dado sia onesto): infatti, l'uscita della faccia j equivale all'uscita di "Testa" in un lancio di moneta, con $P(T) = \frac{1}{6}$, tutte le altre facce essendo *collassate* e considerate come "insuccesso". Ora, mentre il risultato di ciascun lancio é indipendente da tutti gli altri, le v.a. X_j *non* sono tra loro indipendenti. Infatti, é chiaro ad esempio che la somma $X_1 + \dots + X_6$ é sempre uguale a n : pertanto, date ad esempio X_1, \dots, X_5 , il valore di X_6 a questo punto é univocamente determinato.

Ma, anche prescindendo da questo indubbio legame lineare, é ovvio che certi eventi riguardanti X_1 possono condizionare fortemente le probabilita' degli eventi relativi alle altre X_j : ad esempio, se si sa che $X_1 = n - 1$ (evento molto raro, ma non impossibile), non restano poi molte possibilita' per le altre X_j , il che é chiaramente un forte condizionamento. Ora, determiniamo la distribuzione congiunta del vettore $\underline{X} := (X_1, \dots, X_6)$. Scelti 6 numeri interi, x_1, \dots, x_6 , compresi fra 0 e n , valutiamo la probabilita' $P("X_1 = x_1, X_2 = x_2, \dots, X_6 = x_6")$. Chiaramente, tale probabilita' é diversa da 0 solo se risulta $x_1 + \dots + x_6 = n$. Dunque, supponiamo che la somma degli x_j sia n , e valutiamo la probabilita' richiesta. Per fare cio', possiamo chiederci in quanti modi si puo' avere x_1 volte la faccia 1, e, per ciascuno di questi, in quanti modi si puo' avere x_2 volte la faccia 2, etc.. Le risposte sono familiari: ci sono $\binom{n}{x_1}$ modi per scegliere gli x_1 lanci in cui esce la faccia numero 1; per ciascuno di questi, esistono poi $\binom{n-x_1}{x_2}$ modi per scegliere i lanci in cui esce la faccia numero 2, etc. Infine, una volta scelti i "posti" in cui collocare gli 1, i 2, i 3 etc., esiste un solo evento elementare favorevole a tale collocazione, dunque avremo

$$P("X_1 = x_1, X_2 = x_2, \dots, X_6 = x_6") = 6^{-n} \binom{n}{x_1} \binom{n-x_1}{x_2} \dots \binom{n-x_1-x_2}{x_3} \dots \binom{x_5+x_6}{x_5}.$$

Un facile calcolo porta a semplificare molti fattoriali, per cui alla fine si ha

$$P("X_1 = x_1, X_2 = x_2, \dots, X_6 = x_6") = 6^{-n} \frac{n!}{x_1!x_2!\dots x_6!}.$$

In maniera piu' generale, si puo' dire che un vettore aleatorio $\underline{X} := (X_1, \dots, X_k)$ ha distribuzione *multinomiale* se

- i) ciascuna X_i ha distribuzione $B(n, p_i)$, con $\sum_i p_i = 1$;
- ii) $P("X_1 = x_1, \dots, X_k = x_k") = \frac{n!}{x_1!x_2!\dots x_k!} p_1^{x_1} \dots p_k^{x_k}$ ogniquale volta x_1, \dots, x_k sono numeri interi compresi fra 0 e n , con somma uguale a n .

A titolo di esempio, valutiamo la covarianza di due v.a. marginali di un vettore aleatorio multinomiale. Scegliamo le marginali X_1 e X_2 , e calcoliamo la loro covarianza, tramite la formula

$$cov(X_1, X_2) = E(X_1 X_2) - E(X_1)E(X_2).$$

Qui, il problema principale é nel calcolo della quantita' $E(X_1X_2)$. Mediante il teorema del valor medio iterato, si puo' scrivere

$$E(X_1X_2) = \sum_{i=0}^n E(X_2i|[X_1 = i])P([X_1 = i]) = \sum_{i=1}^n ip_iE(X_2|[X_1 = i]) = \sum_{i=1}^n ip_i(n-i)p_2/(1-p_1),$$

l'ultima relazione essendo dovuta al fatto che, se $X_i = i$, allora le altre variabili possono assumere valori compresi fra 0 e $n - i$, con probabilita' proporzionali a quelle originarie. Avremo allora

$$E(X_1X_2) = \frac{np_2}{1-p_1}E(X_1) - \frac{p_2}{1-p_1}E(X_1^2) = np_1p_2(n-1).$$

Di conseguenza, avremo

$$\text{cov}(X_1, X_2) = np_1p_2(n-1) - n^2p_1p_2 = -np_1p_2.$$

Da qui, si deduce facilmente anche il coefficiente di correlazione:

$$\rho(X_1, X_2) = -\frac{np_1p_2}{n\sqrt{p_1(1-p_1)p_2(1-p_2)}} = -\sqrt{\frac{p_1p_2}{(1-p_1)(1-p_2)}}.$$

Il fatto che la covarianza sia negativa rispecchia una forma di *antagonismo* tra le due v.a.: se una delle due diventa grande, l'altra tendera' a diventare piccola (dato il vincolo $X_1 + X_2 \leq n$, cio' era prevedibile). Il coefficiente di correlazione non é mai nullo (esclusi casi degeneri), e risulta uguale a -1 se e solo se $p_1 + p_2 = 1$, e quindi solo se $n = 2$: in tal caso, é chiaro che $X_1 + X_2 = n$, e quindi tra le due v.a. c'é un legame lineare.

Il prossimo esempio é nel caso continuo. Esso é ancora piu' importante, in quanto rappresenta il corrispondente multidimensionale della distribuzione normale.

Esempio 2.2 Si dice che un vettore aleatorio $\underline{X} := (X_1, \dots, X_n)$ ha distribuzione *normale multivariata*, o semplicemente *gaussiana*, e si denota con $\underline{X} \sim MVN$, se essa ha come densita' la funzione

$$f(\underline{x}) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}(\det \mathbf{V})^{1/2}} \exp \left\{ -\frac{1}{2}(\underline{x} - \mu)^t \mathbf{V}^{-1}(\underline{x} - \mu) \right\} \quad (1)$$

con $\underline{x} \in \mathbb{R}^n$, ove μ é il vettore (μ_1, \dots, μ_n) , le cui componenti sono le medie $E(X_i)$, $i = 1, \dots, n$, (in notazione matriciale, \underline{x} é inteso come vettore colonna, e la notazione \underline{x}^t

denota il *trasposto* di \underline{x} , ossia lo stesso vettore pensato come vettore riga); inoltre \mathbf{V} é una matrice $n \times n$, simmetrica e definita positiva, detta la *matrice covarianza*: gli elementi $v_{i,j}$ di \mathbf{V} non sono altro che le covarianze $\text{cov}(X_i, X_j)$.

(La teoria delle matrici assicura che, sotto tali condizioni, $\det \mathbf{V}$ é diverso da 0, e quindi l'inversa \mathbf{V}^{-1} esiste ed ha caratteristiche simili; ne consegue che la quantita' ad esponente é in pratica una forma quadratica definita positiva.)

Nel caso $n = 2$, l'espressione della densita' ha una forma piu' comprensibile. Per semplificare ancora, supponiamo che sia $\mu = 0$ (il che non cambia molto la sostanza) e scriviamo

$$\mathbf{V} = \begin{pmatrix} \sigma_1^2 & \rho\sigma_1\sigma_2 \\ \rho\sigma_1\sigma_2 & \sigma_2^2 \end{pmatrix}$$

intendendo che ρ é il coefficiente di correlazione $\rho(X_1, X_2)$ tra le due v.a. marginali, e σ_1^2, σ_2^2 sono le loro rispettive varianze (supposte non nulle).

Lasciando per esercizio al lettore i calcoli del caso, si ottiene

$$f_{X_1, X_2}(x_1, x_2) = \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}} \exp \left\{ -\frac{1}{2} \frac{\sigma_2^2 x_1^2 - 2\rho\sigma_1\sigma_2 x_1 x_2 + \sigma_1^2 x_2^2}{\sigma_1^2 \sigma_2^2 (1-\rho^2)} \right\} \quad (2)$$

Qui si puo' vedere facilmente che sia X_1 che X_2 hanno distribuzione normale (questo accade in generale, in qualsiasi dimensione), e che, nel caso $\rho = 0$, si ottiene l'indipendenza tra X_1 e X_2 (anche questo é un fatto tipico della distribuzione gaussiana, ma non vale per altre distribuzioni).

In generale, si puo' dimostrare il seguente importante teorema.

Teorema 2.3 1) Dato un vettore aleatorio $\underline{X} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$, $\underline{X} := (X_1, \dots, X_n)$, condizione necessaria e sufficiente affinché \underline{X} abbia distribuzione gaussiana é che ogni combinazione lineare delle X_i abbia distribuzione normale.

2) Dato un vettore aleatorio $\underline{X} := (X_1, \dots, X_n)$ con distribuzione gaussiana, esiste un sistema di riferimento opportuno in \mathbb{R}^n rispetto al quale le nuove componenti di \underline{X} costituiscono un vettore gaussiano indipendente.

Non diamo la dimostrazione di questo teorema; osserviamo solo che la seconda parte dell'enunciato equivale a dire che esiste un'opportuna matrice unitaria $n \times n$

\mathbf{U} (le matrici unitarie sono appunto quelle dei cambiamenti di coordinate) tale che il vettore $\mathbf{U}\underline{X}$ ha distribuzione gaussiana e le sue marginali sono indipendenti. (In questo caso, indipendenza significa che la matrice covarianza é diagonale).

3 Trasformazioni

In questa sezione, richiameremo una tecnica molto utile per studiare variabili aleatorie che si possano ricavare da altre attraverso opportune operazioni. Benché la tecnica abbia senso in tutta generalità, noi ci occuperemo quasi esclusivamente del caso continuo.

Rimandiamo al testo [6] o altro testo classico per le dimostrazioni non inserite qui.

L'esempio più semplice riguarda le variabili aleatorie scalari: tutti sappiamo che, ad esempio, il *quadrato* di una v.a. di tipo uniforme continuo *non ha distribuzione uniforme*, in generale.

Ancora, qualunque sia la variabile aleatoria X , purché la sua funzione di ripartizione F_X sia continua, sappiamo che la v.a. $F_X(X)$ ha distribuzione uniforme in $[0, 1]$.

Dunque, trasformando opportunamente una v.a. X di tipo continuo, si può ottenere una v.a. di tipo continuo, ma completamente diverso.

Questa osservazione può tornare molto utile, quando si voglia *simulare* una distribuzione (continua), senza disporre di un pacchetto informatico di Statistica...

Procedendo con ordine, supponiamo che X sia una v.a. di tipo continuo, e quindi con densità f_X . Supponiamo poi che $T : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ sia una funzione invertibile e di classe C^1 , con derivata mai nulla. (Per noti teoremi, questo comporta che anche l'inversa, T^{-1} , sia di classe C^1). La domanda che ci poniamo é:

Qual'è la distribuzione di $Y := T(X)$?

Nel caso che T sia crescente, basta applicare la definizione, per avere:

$$F_Y(y) = P(X \in T^{-1}(y)) = F_X(T^{-1}(y)).$$

Qualora T sia decrescente, un ragionamento analogo porta a

$$F_Y(y) = 1 - P(X \in T^{-1}(y)) = 1 - F_X(T^{-1}(y)).$$

In ogni caso, derivando:

$$f_Y(y) = f_X(T^{-1}(y)) |(T^{-1})'(y)| = \frac{f_X(x)}{|T'(x)|}, \quad (3)$$

ove $x = T^{-1}(y)$.

Ad esempio, se X ha distribuzione $U(0, 1)$, la densita' di $Y = e^X$ é data da

$$f_Y(y) = \begin{cases} \frac{1}{y}, & y \in [1, e] \\ 0, & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

Ora, formule analoghe alla (3) si possono ottenere anche nel caso di *vettori* aleatorii, ossia per distribuzioni in piu' dimensioni.

Senza introdurre formule astratte, tratteremo direttamente il caso continuo n -dimensionale e ci limiteremo a una formulazione alquanto restrittiva, per quanto riguarda la trasformazione T (vedremo poi in alcuni esempi come sia possibile adoperare le stesse formule anche in casi un po' piu' generali).

A tale scopo, richiamiamo un concetto di Analisi, quello di *Jacobiano*.

Definizione 3.1 Sia $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^k$ una funzione vettoriale di piu' variabili. Potremo descrivere i valori di F ponendo

$$F(x_1, \dots, x_n) = (F_1(x_1, \dots, x_n), F_2(x_1, \dots, x_n), \dots, F_k(x_1, \dots, x_n))$$

per ogni $\underline{x} := (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$. Diremo che F é di classe C^1 se tali sono tutte le funzioni F_1, \dots, F_k . In tale situazione, denoteremo con J la matrice $k \times n$ definita da

$$J_{i,j} = \frac{\partial F_i}{\partial x_j}$$

per $i = 1, \dots, k$ e $j = 1, \dots, n$, ossia

$$J = \begin{pmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x_1} & \frac{\partial F_1}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial F_1}{\partial x_n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial F_k}{\partial x_1} & \frac{\partial F_k}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial F_k}{\partial x_n} \end{pmatrix}$$

Teorema 3.2 Sia $\underline{X} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ un vettore aleatorio, con densita' $f(\underline{x})$. Sia poi $T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ una trasformazione biiettiva (dunque invertibile), e di classe C^1 con la sua inversa. Allora il vettore aleatorio $\underline{Y} := T(\underline{X})$, ottenuto come composizione di T dopo \underline{X} , ha ancora distribuzione continua, e la sua densita' é data da

$$f_{\underline{Y}}(\underline{y}) = f(T^{-1}(\underline{y}))|det J_{-1}(\underline{y})|. \quad (4)$$

dove J_{-1} denota la matrice jacobiana (quadrata) di T^{-1} .

In termini molto semplicistici, si puo' dire che la formula (4) si puo' ricavare dalla formula (3) semplicemente sostituendo la derivata di T^{-1} con il determinante Jacobiano di T^{-1} .

Vedremo ora alcune applicazioni di questo teorema, in situazioni abbastanza semplici, ma comunque significative.

4 Applicazioni

Trasformazioni di variabili gaussiane Il teorema 2.3 potrebbe essere (parzialmente) riformulato dicendo che, dato un vettore aleatorio gaussiano \underline{X} , con vettore media μ e matrice covarianza V , per ogni matrice non degenere \mathbf{A} , il vettore aleatorio $\mathbf{A}\underline{X}$ ha ancora distribuzione gaussiana, con vettore $\mu' = A\mu$ come media, e matrice covarianza $AV A^t$.

Dimostrazione (cenno). Assumeremo s.p.g. $\mu = 0$. Dobbiamo provare che, se \underline{X} ha distribuzione MVN, con media nulla e matrice covarianza \mathbf{V} , allora, per ogni matrice non degenere \mathbf{A} , il vettore aleatorio $\underline{Y} = \mathbf{A}\underline{X}$ ha ancora distribuzione gaussiana, e la sua matrice covarianza é $AV A^t$.

Da $\underline{Y} = \mathbf{A}\underline{X}$, ricaviamo $\underline{X} = \mathbf{A}^{-1}\underline{Y}$, e quindi la formula di trasformazione fornisce

$$\begin{aligned} f_{\underline{Y}}(\underline{y}) &= f_{\underline{X}}(\mathbf{A}^{-1}\underline{y})|det(\mathbf{A}^{-1})| = \frac{\exp\left(-\frac{1}{2}(\mathbf{A}^{-1}\underline{y})^t \mathbf{V}^{-1}(\mathbf{A}^{-1}\underline{y})\right)}{(2\pi)^{n/2} |det \mathbf{V}|^{1/2} |det \mathbf{A}|} = \\ &= \frac{\exp\left(-\frac{1}{2}\underline{y}^t \mathbf{W}^{-1}\underline{y}\right)}{(2\pi)^{n/2} |det \mathbf{W}|^{1/2}} \end{aligned}$$

essendo $\mathbf{W} = \mathbf{A}\mathbf{V}\mathbf{A}^t$.

Distribuzione della somma. Supponiamo che $\underline{X} := (X_1, X_2)$ sia un vettore aleatorio in due dimensioni, (che supporremo con distribuzione continua) e sia $f_{\underline{X}}(\underline{x})$ la sua densita'. Poniamo ora:

$$T(x_1, x_2) = (x_1 + x_2, x_2), \text{ e quindi } \underline{Y} = T(\underline{X}) = (X_1 + X_2, X_2).$$

Per ricavare la distribuzione di \underline{Y} , quello che occorre é la trasformazione inversa, T^{-1} . Facilmente si vede che

$$T^{-1}(y_1, y_2) = (y_1 - y_2, y_2)$$

e quindi la matrice Jacobiana di T^{-1} é

$$J_{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Si vede subito che il determinante di tale matrice é 1, per cui la formula (4) fornisce

$$f_{\underline{Y}}(y_1, y_2) = f_{\underline{X}}(y_1 - y_2, y_2)$$

per ogni $(y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2$.

A questo punto, marginalizzando la densita' di \underline{Y} , si trova quella di $Y_1 = X_1 + X_2$:

$$f_{Y_1}(y_1) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{\underline{X}}(y_1 - t, t) dt. \quad (5)$$

In altri termini, l'ultima formula trovata ci permette di ricavare la distribuzione di $X_1 + X_2$ semplicemente conoscendo la distribuzione *congiunta* di (X_1, X_2) .

Convolutioni. Applicheremo qui la formula (5) al caso in cui X_1 e X_2 siano *indipendenti*. Denotando con f_1 la densita' di X_1 e con f_2 quella di X_2 , chiaramente la densita' di (X_1, X_2) é data dal prodotto delle due:

$$f_{(X_1, X_2)}(x_1, x_2) = f_{X_1}(x_1) f_{X_2}(x_2).$$

Pertanto, la formula (5) porta direttamente alla cosiddetta regola della *convoluzione*:

$$f_{X_1+X_2}(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{X_1}(x-t) f_{X_2}(t) dt.$$

Ricordiamo che, date due funzioni integrabili f_1 e f_2 su tutto \mathbb{R} , la *convoluzione* di f_1 con f_2 é la funzione $f_1 * f_2$, definita da

$$(f_1 * f_2)(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_1(x-t)f_2(t)dt,$$

quindi la densita' della somma i due v.a. indipendenti, e con densita' f_1 e f_2 rispettivamente, é data dalla *convoluzione* $f_1 * f_2$.

Proponiamo qui un semplice esempio, riguardante la distribuzione uniforme.

Supponiamo che X_1 e X_2 siano due variabili aleatorie indipendenti, entrambe con distribuzione uniforme in $[0, 1]$. Calcoleremo la densita' della somma $Y = X_1 + X_2$ per mezzo della convoluzione. Tenendo conto del fatto che $f_{X_2}(t) = 0$ quando $t \notin [0, 1]$, si ha

$$f_Y(y) = \int_0^1 f_{X_1}(y-t)dt$$

per $y \in [0, 2]$ (E' facile controllare che Y non puo' assumere valori esterni all'intervallo $[0, 2]$). Tenendo presente che $f_{X_1}(x)$ é nulla per $x \notin [0, 1]$, e vale 1 altrove, l'integranda $f_{X_1}(y-t)$ é diversa da 0 (e quindi vale 1) solo se $0 \leq y-t \leq 1$, ossia se $t \in [y-1, y]$. Ma deve anche essere $t \in [0, 1]$ per quanto detto prima, dunque

$$f_Y(y) = \int_{(y-1) \vee 0}^{1 \wedge y} dt = 1 \wedge y - (y-1) \vee 0.$$

In altre parole, per $y \in [0, 1]$, si ha $f_Y(y) = y$, e per $y \in [1, 2]$ é $f_Y(y) = 2 - y$. La densita' di Y cresce linearmente, per y che va da 0 a 1, fino a raggiungere il massimo di 1 per $y = 1$, dopodiché decresce, sempre linearmente in maniera simmetrica, per y tra 1 e 2.

Un altro esempio utile riguarda la *differenza* di due v.a.: naturalmente, se (X, Y) é un vettore aleatorio con densita' $f(x, y)$, la densita' di $U = X - Y$ é data dalla seguente formula:

$$f_U(u) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(u+y, y)dy,$$

come facilmente si deduce partendo dalla trasformazione $T(x, y) = (x - y, y)$ e marginalizzando rispetto alla prima variabile. Possiamo applicare questa formula nel caso di un vettore MVN (X, Y) a media nulla, supponendo che la matrice covarianza sia la seguente:

$$V = \begin{pmatrix} s & s \\ s & t \end{pmatrix},$$

con $0 < s < t$. In altre parole, assumeremo $X \sim N(0, s)$, $Y \sim N(0, t)$, $cov(X, Y) = s$, con $s < t$. Sappiamo già che la v.a. $Y - X$ ha distribuzione normale, e possiamo calcolare facilmente la sua varianza :

$$Var(Y - X) = Var(X) + Var(Y) - 2cov(X, Y) = t - s.$$

La formula della densita' di una differenza ci permette di verificare direttamente che $Y - X$ ha effettivamente distribuzione normale:

$$f_{Y-X}(u) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{(X,Y)}(x, u+x) dx.$$

Con riferimento alla formula (2), avremo in questo caso

$$\rho = \frac{s}{\sqrt{st}} = \sqrt{\frac{s}{t}}; \quad \sigma_1 \sigma_2 \sqrt{1 - \rho^2} = \sqrt{s(t-s)}; \quad \rho \sigma_1 \sigma_2 = s,$$

per cui

$$\begin{aligned} f_{(X,Y)}(x, u+x) &= \frac{1}{2\pi\sqrt{s(t-s)}} \exp\left(-\frac{1}{2s(t-s)}(tx^2 - 2sx(u+x) + s(u+x)^2)\right) = \\ &= \frac{1}{2\pi\sqrt{s(t-s)}} \exp\left(-\frac{1}{2s(t-s)}((t-s)x^2 + su^2)\right) = \frac{1}{2\pi\sqrt{s(t-s)}} e^{-\frac{u^2}{2(t-s)}} e^{-\frac{x^2}{2s}}. \end{aligned}$$

Ora, integrando rispetto a x fra $-\infty$ e $+\infty$, si ottiene facilmente il risultato:

$$f_{Y-X}(u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi(t-s)}} e^{-\frac{u^2}{2(t-s)}},$$

e quindi $Y - X \sim N(0, t - s)$. Poiché $cov(X, Y - X) = 0$, é evidente che X e $Y - X$ sono indipendenti. Dunque, in questo esempio si vede anche quale trasformazione lineare muta la coppia (X, Y) in una coppia indipendente (v. teorema 2.3).

Densita' di un prodotto. In maniera simile a quanto fatto in precedenza per la somma, si puo' valutare la densita' del *prodotto* di due v.a., delle quali si conosca la densita' congiunta. A tale scopo, denotate con X_1 e X_2 le variabili aleatorie in esame, e con $f_{\underline{X}}$ la loro densita' congiunta, adoperiamo la trasformazione:

$$T(x_1, x_2) = (x_1 x_2, x_2).$$

(Qui, dobbiamo precisare che questa trasformazione non é biiettiva, a rigore: lo diventa solo se *escludiamo* dal suo dominio tutti i punti del tipo $(x_1, 0)$. Tuttavia, poich  tale insieme   una retta, esso ha *misura nulla* nel piano, e quindi non compromette la validita' delle formule che abbiamo usato finora). Chiaramente, la trasformazione inversa di T sara':

$$T^{-1}(y_1, y_2) = \left(\frac{y_1}{y_2}, y_2\right)$$

il cui Jacobiano   dato da:

$$J_{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{y_2} & -\frac{y_1}{y_2^2} \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

e il suo determinante vale $\frac{1}{y_2}$. Pertanto, la formula (4) fornisce

$$f_{T(\underline{X})}(y_1, y_2) = f_{\underline{X}}\left(\frac{y_1}{y_2}, y_2\right) \frac{1}{|y_2|}.$$

Dunque, la densita' del prodotto   data da

$$f_{X_1 X_2}(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{\underline{X}}\left(\frac{x}{t}, t\right) \frac{1}{|t|} dt.$$

Chiaramente, nel caso di indipendenza, denotate con f_1 e f_2 le densita' di X_1 e X_2 rispettivamente, si ha

$$f_{X_1 X_2}(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_1\left(\frac{x}{t}\right) f_2(t) \frac{1}{|t|} dt, \quad (6)$$

la quale formula ha diverse analogie con quella della convoluzione.

Vedremo qui un primo esempio di applicazione, calcolando la densita' del prodotto $Y := X_1 X_2$, quando X_1 e X_2 siano v.a. indipendenti, entrambe

con densita' uniformi in $[0, 1]$. Ovviamente, il prodotto Y assume solo valori in $[0, 1]$, e quindi valuteremo la densita' $f_Y(y)$ solo per $y \in [0, 1]$. La formula (6) fornisce

$$f_Y(y) = \int_0^1 f_1\left(\frac{y}{t}\right) \frac{1}{t} dt = \int_y^1 \frac{1}{t} dt = -\log y$$

(tenendo presente che $\frac{y}{t} < 1$ solo se $t > y$, tutte le quantita' essendo positive). Si vede subito quindi che Y assume piuttosto facilmente valori bassi (vicini a 0) e molto piu' raramente valori prossimi a 1.

Simulazione normale Come applicazione dei discorsi precedenti, proveremo ora che il prodotto tra due opportune v.a. indipendenti ha distribuzione normale standard. Denotiamo con Z e W due v.a. indipendenti, con $W \sim U(0, 2\pi)$, e $Z \sim \Gamma(1, \frac{1}{2})$. Avremo dunque

$$f_W = \frac{1}{2\pi} 1_{[0, 2\pi]}, \quad f_Z(z) = \frac{1}{2} e^{-z/2} 1_{[0, +\infty[}(z).$$

Poniamo poi

$$X_1 := \cos W, \quad X_2 := \sqrt{Z} :$$

poiché Z e W sono indipendenti, anche X_1 e X_2 lo sono. Dimostriamo ora che $Y = X_1 X_2$ ha distribuzione normale standard. Facili calcoli forniscono le densita' f_1 e f_2 di X_1 e X_2 rispettivamente:

$$f_1(x_1) = \frac{1}{\pi \sqrt{1 - x_1^2}}, \quad -1 < x_1 < 1$$

$$f_2(x_2) = x_2 e^{-\frac{x_2^2}{2}}, \quad x_2 > 0.$$

Usando la formula (6), avremo:

$$f_Y(y) = \frac{1}{\pi} \int_{|y|}^{\infty} \frac{x_2}{\sqrt{x_2^2 - y^2}} x_2 e^{-\frac{x_2^2}{2}} \frac{1}{x_2} dx_2 = \frac{1}{\pi} \int_{|y|}^{\infty} \frac{t}{\sqrt{t^2 - y^2}} e^{-\frac{t^2}{2}} dt,$$

dopo semplificazioni varie. Si ha ora, con la sostituzione $t^2 - y^2 = z$:

$$\frac{1}{\pi} \int_y^{\infty} \frac{t}{\sqrt{t^2 - y^2}} e^{-\frac{t^2}{2}} dt = \frac{e^{-y^2/2}}{2\pi} \int_0^{+\infty} z^{-1/2} e^{-z/2} dz = \frac{e^{-y^2/2}}{\sqrt{2\pi}};$$

Abbiamo dunque provato quanto asserito: $Y \sim N(0, 1)$.

5 Esempi di calcolo del VMC

Allo scopo di esprimere piu' chiaramente i concetti che seguono, conviene richiamare la nozione di *misurabilita'* e discuterla. Usualmente, se (Ω, \mathcal{A}) é uno spazio misurabile, si dice che una funzione $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ é *misurabile* se fanno parte di \mathcal{A} tutti gli insiemi del tipo $\{\omega : X(\omega) > \alpha\}$, per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$.

Come sappiamo, questo implica che tutti gli insiemi del tipo $\{\omega : X(\omega) \in B\}$ stanno in \mathcal{A} , per qualsiasi insieme *boreliano* $B \subset \mathbb{R}$.

Quando si ha uno spazio di probabilita' (Ω, \mathcal{A}, P) , una funzione misurabile $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ si dice anche *variabile aleatoria*, e ogni insieme del tipo $\{\omega : X(\omega) \in B\}$ puo' essere riguardato come l'evento $[X \in B]$: tale evento sta in \mathcal{A} , e pertanto la sua probabilita' é assegnata. Tuttavia, gli eventi del tipo suddetto, al variare di B nella σ -algebra di Borel, descrivono un'altra σ -algebra, che di solito é strettamente contenuta in \mathcal{A} . Tale sotto- σ -algebra viene denotata con σ_X , e viene detta la σ -algebra *indotta* da X : ogni evento di tale σ -algebra descrive una condizione ben precisa su X , e viceversa qualsiasi condizione si richieda su X essa individua un elemento di σ_X .

Spesso si dice anche che σ_X contiene la *storia* di X (vedremo in seguito che in effetti si puo' parlare di *storia* anche per una famiglia $\{X_t\}$ di variabili aleatorie, che evolvono con il tempo t).

Piu' in generale, data una sotto- σ -algebra \mathcal{F} di \mathcal{A} , e una v.a. $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, diremo che X é *\mathcal{F} -misurabile* se $\sigma_X \subset \mathcal{F}$, cioé se tutti gli eventi del tipo $[X \in B]$ fanno parte non solo di \mathcal{A} ma anche di \mathcal{F} : dato che \mathcal{F} é piu' piccola in generale di \mathcal{A} , una tale condizione non é sempre verificata.

Tuttavia, vedremo ora che, anche se X non é \mathcal{F} -misurabile, in un certo senso si puo' *sostituire* la X (almeno per certi fini) con un'opportuna v.a. \mathcal{F} -misurabile, che viene detta il *valor medio condizionato* di X rispetto a \mathcal{F} .

Riportiamo qui le definizioni e le principali proprieta' relative al concetto di *valor medio condizionato*, rimandando ai testi classici per le dimostrazioni mancanti.

Definizione 5.1 Data una v.a. X in uno spazio (Ω, \mathcal{A}, P) , dotata di valor medio, e data una qualsiasi σ -algebra $\mathcal{F} \subset \mathcal{A}$, possiamo definire una misura $\mu : \mathcal{F} \rightarrow \mathbb{R}$,

come segue

$$\mu(F) = \int_F X \, dP = E(X|F)P(F),$$

per ogni $F \in \mathcal{F}$ (l'ultima relazione valendo ovviamente se $P(F) > 0$). E' chiaro che μ , pensata come misura su \mathcal{F} , é assolutamente continua rispetto a P (anch'essa pensata solo su \mathcal{F}). Allora, per il teorema di Radon-Nikodym, esiste una e una sola funzione $Z : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, \mathcal{F} -misurabile e in L_1 , tale da aversi

$$\int_F Z \, dP = \mu(F) = \int_F X \, dP,$$

per ogni $F \in \mathcal{F}$. Tale variabile Z viene denotata con $E(X|\mathcal{F})$, e puo' essere descritta come l'unica v.a. in L_1 con le seguenti proprieta':

1) $E(X|\mathcal{F})$ é \mathcal{F} -misurabile; 2) $E(X|F) = E(E(X|\mathcal{F})|F)$, per ogni $F \in \mathcal{F}$ con $P(F) > 0$.

La v.a. $E(X|\mathcal{F})$ viene detta *valor medio condizionato* di X , rispetto a \mathcal{F} .

Chiaramente, se X stessa fosse \mathcal{F} -misurabile, allora Z coinciderebbe con X , e non ci sarebbe altro da dire.

Nel caso \mathcal{F} sia la σ -algebra indotta da una v.a. $Y : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^k$, e dunque $\mathcal{F} = \sigma_Y$, allora la v.a. $E(X|\sigma_Y)$ si denota anche con $E(X|Y)$ e si ha

$$E(X|Y) = g(Y),$$

per un'opportuna funzione misurabile $g : \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}$, detta *regressione* di X su Y (cio' perché ogni funzione σ_Y -misurabile é in realta' una funzione di Y , e viceversa, per noti teoremi).

Le principali proprieta' del valor medio condizionato sono riunite nella seguente proposizione.

Proposizione 5.2 a) Fissata la σ -algebra \mathcal{F} , il Valor Medio Condizionato (VMC) é un operatore lineare e monotono di L_1 in sé, e si ha $\|E(X|\mathcal{F})\|_1 \leq \|X\|_1$, per ogni $X \in L_1$.

b) Il VMC é anche un operatore idempotente (ossia $E(E(X|\mathcal{F})|\mathcal{F}) = E(X|\mathcal{F})$).

c) Se \mathcal{G} e \mathcal{F} sono sotto- σ -algre di \mathcal{A} , e $\mathcal{G} \subset \mathcal{F}$, allora si ha

$$E(X|\mathcal{G}) = E(E(X|\mathcal{F})|\mathcal{G})$$

(proprietà di torre).

d) Se Y è una v.a. \mathcal{F} -misurabile, e se X e XY sono in L_1 , allora si ha

$$E(XY|\mathcal{F}) = YE(X|\mathcal{F}).$$

e) Se X e Y sono indipendenti, e $X \in L_1$, allora $E(X|Y) = E(X)$ (costante).

f) Se X e Y sono in L_2 , e risulta $E(X|Y) = E(X)$, allora X e Y sono non-correlate.

g) Se X è una v.a. in L_2 , e se \mathcal{F} è una sotto- σ -algebra di \mathcal{A} , la v.a. $Z = E(X|\mathcal{F})$ è in L_2 e, tra tutte le v.a. \mathcal{F} -misurabili in L_2 è quella più vicina a X nella distanza di L_2 : in altre parole, si ha

$$E(X - U)^2 \geq E(X - Z)^2,$$

per ogni $U \in L_2$, con U \mathcal{F} -misurabile.

h) Se $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ è una funzione convessa, e se X e $g(X)$ sono in L_1 , allora risulta

$$g(E(X|\mathcal{F})) \leq E(g(X)|\mathcal{F}) \quad (\text{disuguaglianza di Jensen}).$$

Commentando la proprietà (e), cioè che se X e Y sono indipendenti, risulta $E(X|Y) = E(X)$ (costante), tale relazione viene detta *ergodicità* di X su Y ; essa dice in un certo senso che X e Y non sono legate attraverso una funzione; comunque in generale non equivale all'indipendenza (v. esempi successivi).

Per dimostrare che l'indipendenza tra X e Y implica l'ergodicità, si osservi che, per ogni boreliano A , risulta:

$$1_{Y^{-1}(A)} = 1_A(Y);$$

Questa formula, apparentemente strana, significa semplicemente che un elemento $\omega \in \Omega$ si trova in $Y^{-1}(A)$ se e solo se $Y(\omega) \in A$.

Allora, se X e Y sono indipendenti, si ha anche indipendenza tra X e $1_A(Y)$ (per lo stesso motivo per cui ad es. anche X e Y^2 sono indipendenti) e allora

$$E(X1_A(Y)) = E(X)E(1_A(Y)) = E(X)P([Y \in A]) :$$

dunque, $E(X|[Y \in A]) = E(X)$ per ogni boreliano A . Dunque la costante $E(X)$ ha tutte le proprietà richieste per il valor medio condizionato $E(X|Y)$.

L'ergodicità implica invece la non correlazione, almeno se X e Y sono in L_2 : questo è un facile esercizio, basato sulla seguente proprietà:

$$E(XY) = E(E(X|Y)Y),$$

che a sua volta deriva dalla (d) di cui sopra, condizionando su Y .

1. Iniziamo con un esempio molto semplice, ma comunque istruttivo. Supponiamo che X sia una v.a. di tipo $U(-1, 1)$, e scegliamo $Y := X^2$. Evidentemente, si ha

$$E(Y|X) = Y$$

in quanto Y è funzione di X . Ci proponiamo ora di determinare $E(X|Y)$. A tale scopo, scegliamo arbitrariamente $t \geq 0$, e poniamo $B(t) := Y^{-1}([0, t])$. Chiaramente, si ha anche $B(t) = X^{-1}([-\sqrt{t}, \sqrt{t}])$. Dunque

$$\int_{B(t)} X dP = \int_{[-\sqrt{t}, \sqrt{t}]} x f_X(x) dx = 0$$

in quanto $xf_X(x)$ è una funzione *dispari*. A questo punto, possiamo dedurre la seguente conclusione:

$$E(X|Y) = 0,$$

ossia che X è *ergodica* su Y ! Infatti, gli insiemi $B(t)$ generano, al variare di $t \geq 0$, l'intera σ -algebra $\sigma(Y)$, e quindi la relazione

$$\int_B X dP = 0$$

risulta verificata per ogni evento $B \in \sigma(Y)$.

2. Supponiamo di lanciare n volte un dado onesto, e denotiamo, per $i = 1, 2, \dots, 6$, con X_i la v.a. che conta quante volte esce la faccia i . Vogliamo calcolare i seguenti V.M. condizionati:

$$E(X_1|X_2); \quad E(X_j|X_i); \quad E(X_6|X_1, X_2, X_3).$$

Supponendo che $X_2 = h$, con $0 \leq h \leq n$, possiamo ricavare informazioni su X_1 , immaginando di lanciare $n - h$ volte un dado, per il quale il 2 non esce mai e le altre facce sono equiprobabili. In altre parole, *dato* $X_2 = h$, si ha $X_1 \sim B(n - h, \frac{1}{5})$, e quindi $E(X_1|X_2 = h) = \frac{n-h}{5}$; se ne conclude che $E(X_1|X_2) = \frac{n-X_2}{5}$. Analogamente, la regressione di X_j su X_i , per $i \neq j$, sarà sempre la stessa funzione, per cui

$$E(X_j|X_i) = \frac{n - X_i}{5}.$$

Si può ora ragionare in maniera simile anche per la terza richiesta, $E(X_6|X_1, X_2, X_3)$: basta conoscere la somma $s = X_1 + X_2 + X_3$, per dedurre che $E(X_6|s) = \frac{n-s}{3}$.

Di conseguenza, si ha

$$E(X_6|X_1, X_2, X_3) = \frac{n - (X_1 + X_2 + X_3)}{3}$$

- 3.** Veniamo ora ad un esempio un po' più articolato. Supponiamo di effettuare una successione di lanci di monetina, con $P(T) = p$. Si denoti con X_k la v.a. che conta il numero di lanci necessari per la k^a uscita di T . Come sappiamo, le X_k hanno distribuzione Binomiale Negativa $NB(k, p)$, e quindi

$$P(X_k = n) = \binom{n-1}{k-1} p^k (1-p)^{n-k}$$

per $n \geq k$. Ci proponiamo di determinare $E(X_{(k+j)}|X_j)$, al variare di k e j .

Iniziamo con $k = j = 1$. Si ha

$$E(X_2|X_1 = n) = n + E(X_1) = n + \frac{1}{p}$$

in quanto, se $X_1 = n$, attendere X_2 è la stessa cosa che attendere la *prima* uscita di T dopo il lancio n^o . Dunque, si conclude facilmente

$$E(X_2|X_1) = X_1 + \frac{1}{p}.$$

Passiamo ora a $k = 1$ e j generico, ossia $E(X_{j+1}|X_j)$. Un ragionamento analogo porta a concludere

$$E(X_{j+1}|X_j) = X_j + \frac{1}{p}.$$

A questo punto é chiaro che $E(X_{k+j}|X_j) = f_k(X_j)$, ove f_k é la *regressione* di X_{k+1} su X_1 , ossia quella funzione che verifica

$$E(X_{k+1}|X_1) = f_k(X_1).$$

Ora, se vogliamo (ad esempio) $E(X_3|X_1)$, possiamo usare la proprieta' di *torre*, cioé

$$E(X_3|X_1) = E(E(X_3|X_2, X_1)|X_1) :$$

facilmente si vede che $E(X_3|X_2, X_1) = X_2 + \frac{1}{p}$, quindi

$$E(X_3|X_1) = X_1 + \frac{2}{p}.$$

Similmente, per k generico

$$E(X_{k+1}|X_1) = X_1 + \frac{k}{p}$$

e infine

$$E(X_{k+j}|X_j) = X_j + \frac{k}{p}.$$

4. Nell'ambito precedente, valutiamo ora $E(X_1|X_2)$. Anche questo é un problema interessante. A tale scopo, conviene esaminare la probabilita' congiunta $P(X_1 = j, X_2 = n)$, al variare di n e j , con $1 \leq j < n$. Si ha facilmente

$$P(X_1 = j, X_2 = n) = p^2(1-p)^{n-2}$$

e quindi

$$P(X_1 = j|X_2 = n) = \frac{1}{n-1} :$$

in altre parole, dato $X_2 = n$, gli $n-1$ valori possibili per X_1 risultano equiprobabili. Allora é immediato concludere

$$E(X_1|X_2 = n) = \sum_{j=1}^{n-1} jP(X_1 = j|X_2 = n) = \sum_{j=1}^{n-1} \frac{j}{n-1} = \frac{n}{2}$$

da cui $E(X_1|X_2) = \frac{X_2}{2}$.

Il calcolo di altre medie condizionate, ad es. $E(X_1|X_3)$, procede in maniera simile, e lo si lascia per esercizio.

5. Veniamo ora alla situazione descritta nel Processo di Poisson, con intensita' λ : possiamo denotare con X_k la v.a. che denota il tempo d'attesa per la k^a realizzazione del fenomeno *raro* E , e con Z_t la v.a. che conta il numero di realizzazioni di E nell'intervallo $[0, t]$. Sappiamo che $X_k \sim \Gamma(k, \lambda)$, e che $Z_t \sim P(\lambda t)$. Sappiamo inoltre che, per $0 \leq r < s < t$, le v.a. $Z_t - Z_s$ e $Z_s - Z_r$ sono indipendenti, e hanno distribuzione $P(\lambda(t-s))$ e $P(\lambda(s-r))$ rispettivamente. Analogamente, per $k < n < m$, le v.a. $X_m - X_n$ e $X_n - X_k$ sono indipendenti, e hanno distribuzione $\Gamma(m-n, \lambda)$ e $\Gamma(n-k, \lambda)$ rispettivamente.

Valutiamo ora $E(X_{k+j}|X_j)$: ragionamenti analoghi a quelli del punto 2 ci conducono al risultato

$$E(X_{k+j}|X_j = s) = s + \frac{k}{\lambda}, \quad \text{ossia } E(X_{k+j}|X_j) = X_j + \frac{k}{\lambda}.$$

Cerchiamo ora $E(Z_t|Z_s)$, per $0 < s < t$. Possiamo porre $Z_t = Z_t - Z_s + Z_s$, e osservare che $Z_t - Z_s$ é indipendente da Z_s e ha la stessa distribuzione di Z_{t-s} ; dunque

$$E(Z_t|Z_s) = Z_s + E(Z_{t-s}) = Z_s + \lambda(t-s).$$

Cerchiamo infine anche $E(Z_s|Z_t)$, per $0 < s < t$. Qui, conviene cercare prima la probabilita' congiunta:

$$\begin{aligned} P(Z_s = j, Z_t = j+k) &= P(Z_s = j, Z_t - Z_s = k) = P(Z_s = j)P(Z_{t-s} = k) = \\ &= e^{-\lambda s} e^{-\lambda(t-s)} \frac{(\lambda s)^j \lambda^k (t-s)^k}{j!k!} = e^{-\lambda t} \frac{\lambda^{j+k} s^j (t-s)^k}{j!k!}. \end{aligned}$$

Si deduce subito, allora:

$$P(Z_s = j|Z_t = j+k) = \binom{j+k}{j} \left(\frac{s}{t}\right)^j \left(1 - \frac{s}{t}\right)^k.$$

In altre parole, dato $Z_t = n$, si ha $Z_s \sim B(n, \frac{s}{t})$. Ne deriva pertanto

$$E(Z_s|Z_t = n) = n \frac{s}{t}, \quad \text{e quindi } E(Z_s|Z_t) = \frac{s}{t} Z_t.$$

6. Supponiamo ora che (X_1, X_2) sia una v.a. continua, con distribuzione MVN , a media nulla. Denotate con σ_1^2 , σ_2^2 , ρ , rispettivamente la varianza di X_1 , quella

di X_2 , e il coefficiente di correlazione tra le due v.a., la densita' congiunta é data da:

$$f_{X_1, X_2}(x_1, x_2) = \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}} \exp\left\{-\frac{1}{2} \frac{\sigma_2^2 x_1^2 - 2\rho\sigma_1\sigma_2 x_1 x_2 + \sigma_1^2 x_2^2}{\sigma_1^2 \sigma_2^2 (1-\rho^2)}\right\}.$$

Dividendo tale densita' per quella di X_2 , si ottiene una funzione che, per ciascun valore fissato della x_2 , risulta essere una densita', come funzione di x_1 : tale densita' é detta la *densita' condizionale* di X_1 , *dato* $X_2 = x_2$. Nella prossima formula si esprime anche la notazione per tale densita' condizionale:

$$\begin{aligned} f_{(X_1|X_2)}(x_1|x_2) &= \frac{f_{(X_1, X_2)}(x_1, x_2)}{f_{X_2}(x_2)} = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_1^2(1-\rho^2)}} \exp\left\{-\frac{(\sigma_2 x_1 - \sigma_1 \rho x_2)^2}{2\sigma_1^2 \sigma_2^2 (1-\rho^2)}\right\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_1^2(1-\rho^2)}} \exp\left\{-\frac{(x_1 - \frac{\sigma_1}{\sigma_2} \rho x_2)^2}{2\sigma_1^2(1-\rho^2)}\right\}. \end{aligned}$$

Nell'ultima espressione (pensando fissa x_2) si riconosce facilmente una densita' normale, con media $\frac{\sigma_1}{\sigma_2} \rho x_2$ e varianza $\sigma_1^2(1-\rho^2)$. Se ne deduce allora che

$$E(X_1|X_2) = \frac{\sigma_1}{\sigma_2} \rho X_2.$$

Come si vede facilmente, in questo caso la regressione é lineare, ossia $E(X_1|X_2)$ é una funzione lineare di X_2 . Nel caso $\rho = 0$, la regressione é nulla (e infatti in tal caso X_1 e X_2 sono indipendenti); invece in questo esempio non si puo' avere $\rho = \pm 1$, in quanto in tal caso X_1 e X_2 sarebbero legate linearmente, e questo é in contrasto con il concetto di distribuzione continua (in due dimensioni).

6 Passeggiata Aleatoria semplice: alcuni aspetti

Da questo capitolo, iniziamo a trattare vari processi stocastici di tipo *discreto*, ossia *successioni* di v.a. discrete. Per studiare tali tipi di processi sono spesso adoperate le *funzioni generatrici* di probabilita', definite come segue.

Definizione 6.1 Sia X una v.a. discreta, a valori in \mathbb{N} . Per ogni $n \in \mathbb{N}$ si ponga $p_n = P([X = n])$. Si chiama *funzione generatrice* di probabilita' di X la funzione

$G_X :] - \alpha, \alpha[\rightarrow \mathbb{R}$ definita da

$$G_X(s) = E(s^X) = \sum_{n=0}^{+\infty} s^n p_n :$$

α non é altro che il raggio di convergenza della serie di potenze (nella variabile s) che definisce G_X : naturalmente, poiché le p_n tendono a 0, il Teorema di Cauchy-Hadamard ci assicura che il raggio di convergenza é non minore di 1.

Ad esempio, se X assume solo il valore costante c , risulta

$$G_X(s) = s^c$$

per ogni s reale. Ancora, se X ha distribuzione uniforme nell'insieme $\{1, \dots, N\}$, allora

$$G_X(s) = \frac{s + s^2 + \dots + s^N}{N}$$

ancora per ogni s . Se X ha distribuzione geometrica $NB(1, \frac{1}{2})$, allora

$$G_X(s) = \frac{s}{2 - s}$$

valida per $|s| < 2$. Dalle proprietà delle serie di potenze, discendono facilmente le seguenti caratteristiche della funzione generatrice.

Teorema 6.2 *Supposto che la serie di potenze $\sum_{n=0}^{+\infty} s^n p_n$ abbia raggio di convergenza $\alpha > 0$, si ha*

$$(a) \quad G_X(1) = 1, \quad G_X(0) = P([X = 0]);$$

$$(b) \quad P([X = n]) = \frac{G_X^{(n)}(0)}{n!};$$

$$(c) \quad E(X) = G'_X(1);$$

$$(d) \quad V(X) = G''_X(1) + G'_X(1) - G'_X(1)^2,$$

le ultime due relazioni valendo se e solo se in esse il primo membro esiste.

N.B. La prima relazione della (a) non sussiste, se si ammette che la v.a. X possa assumere valore infinito con probabilit  positiva: in questo caso, si ha $G_X(1) = P([X < +\infty])$, (e naturalmente $E(X) = +\infty$).

Un altro importante risultato riguarda la funzione generatrice della somma di due v.a. *indipendenti*.

Teorema 6.3 *Se X e Y sono indipendenti, allora si ha*

$$G_{X+Y}(s) = G_X(s)G_Y(s)$$

nell'intervallo di convergenza comune.

Dimostrazione. Una maniera elegante di dimostrare il teorema consiste nell'osservare che anche s^X e s^Y sono indipendenti, e quindi

$$G_X(s)G_Y(s) = E(s^X)E(s^Y) = E(s^X s^Y) = E(s^{X+Y}) = G_{X+Y}(s).$$

Tuttavia, per futuro riferimento, presentiamo anche una dimostrazione piu' tecnica, basata sul prodotto di due serie.

Si ponga, per ogni n :

$$p_n := P([X = n]), \quad q_n := P([Y = n]), \quad z_n := P([X + Y = n]).$$

Poich  X e Y sono indipendenti, risulta per ogni n :

$$z_n = \sum_{h=0}^n p_h q_{n-h}, \quad \text{e quindi} \quad s^n z_n = \sum_{h=0}^n (s^h p_h)(s^{n-h} q_{n-h}).$$

Dunque, $s^n z_n$ non   altro che il termine generico della serie *prodotto alla Cauchy* delle due serie di potenze che definiscono G_X e G_Y . Pertanto, laddove entrambe queste ultime convergono, si ha

$$G_{X+Y}(s) = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} s^n p_n \right) \left(\sum_{n=0}^{+\infty} s^n q_n \right) = G_X(s)G_Y(s). \quad \square$$

Torniamo ora al concetto di Passeggiata Aleatoria semplice, come successione di variabili aleatorie.

Definizione 6.4 Sia data una successione $(U_n)_n$ di v.a. I.I.D., di tipo $B(1, p)$. Per ogni $n \geq 1$, consideriamo la v.a. $X_n = 2U_n - 1$: le v.a. X_n sono anch'esse indipendenti e con identica distribuzione; inoltre, ciascuna X_n può assumere i valori 1 e -1 , con probabilità p e $q = 1 - p$ rispettivamente. Si chiama *Passeggiata Aleatoria Semplice* la successione $(S_n)_n$, ove si ponga

$$S_0 = 0, \quad S_n := S_{n-1} + X_n$$

per $n \geq 1$. Quando $p = q (= \frac{1}{2})$, si dice che la Passeggiata è *simmetrica*, altrimenti essa è *asimmetrica*.

Ovviamente, essendo $X_n = 2U_n - 1$, risulterà $S_n = 2B_n - n$, ove B_n ha distribuzione binomiale $B(n, p)$. Dunque S_n può assumere i valori

$$-n, 2 - n, 4 - n, \dots, n - 4, n - 2, n$$

e si ha

$$P([S_n = 2k - n]) = \binom{n}{k} p^k q^{n-k}$$

per ogni $k = 0, 1, \dots, n$. In particolare, se n è pari, $n = 2h$, si ha

$$P([S_n = 0]) = P([S_{2h} = 0]) = \binom{2h}{h} (pq)^h.$$

A tale proposito, osserviamo che ad ogni evento del tipo $[S_n = k]$ corrispondono $\binom{n}{\frac{n+k}{2}}$ eventi elementari favorevoli (ovviamente se $n + k$ è pari, altrimenti nessuno): ciascuno di tali eventi elementari (visti come successioni di *teste* e *croci*) è un *cammino* o *traiettoria* della nostra passeggiata aleatoria, che *porta* alla posizione k dopo n *passi* (non necessariamente per la prima volta). Usualmente, l'evento $[S_n = j]$ si esprime dicendo che *la passeggiata si trova nella posizione j* , o anche che *visita la posizione j* . Una prima osservazione che possiamo fare, basata sul Lemma di Borel-Cantelli, è che nelle passeggiate asimmetriche la probabilità di *passare da 0 infinite volte* è nulla. In altre parole, denotato con Z_n l'evento $[S_n = 0]$, si ha il seguente risultato

Lemma 6.5 *Se la passeggiata aleatoria non è simmetrica, risulta*

$$P(\limsup Z_n) = 0$$

Dimostrazione. Per definizione, si ha

$$\limsup Z_n = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \left(\bigcup_{m \geq n} Z_m \right),$$

e corrisponde precisamente alla richiesta che S_n sia 0 per infiniti valori di n . Il lemma di Borel-Cantelli stabilisce che tale probabilit      nulla, non appena sia convergente la serie

$$\sum_{n \in \mathbb{N}} P(Z_n).$$

Se la passeggiata    asimmetrica, si ha $p \neq 1 - p$, e quindi $p(1 - p) < \frac{1}{4}$. Applicando il criterio del rapporto alla serie

$$\sum_{n \in \mathbb{N}} P(Z_n) = \sum_{h \in \mathbb{N}} \binom{2h}{h} (pq)^h$$

si vede facilmente che il limite del rapporto coincide con $4pq$: poich   tale limite    minore strettamente di 1, ne consegue l'asserto. \square

Affronteremo successivamente il problema nel caso simmetrico: se $p = q$ il criterio del rapporto non da' risultato, e comunque la serie diverge, per cui il Lemma di Borel-Cantelli non    d'aiuto. Per studiare adeguatamente questo e altri problemi connessi, tratteremo delle nuove variabili aleatorie, collegate al nostro processo. Ma prima    opportuno fare un'osservazione, che illustra un'importante proprieta' delle passeggiate aleatorie, ossia la *propriet   di Markov*.

Osservazione 6.6 Supponiamo di conoscere la posizione s raggiunta dalla nostra passeggiata aleatoria al tempo k . Allora la variabile aleatoria $S_{n+k} - s$ ha la stessa distribuzione di S_n : infatti, a partire dal k -esimo passo, le S_j possono discostarsi dalla posizione s esattamente con le stesse leggi con cui le S_{j-k} si possono discostare da 0.

Di piu', si puo' dire che l'intero processo $(S_{k+n} - S_k)$ (con k fissato) ha le stesse caratteristiche di (S_n) , e le variabili aleatorie che lo costituiscono sono globalmente indipendenti da (S_1, \dots, S_k) .

Tratteremo ora quelle v.a. che prendono il nome di *tempo di primo passaggio* o *tempo di primo ritorno*.

Definizione 6.7 Sia $(S_n)_n$ una passeggiata aleatoria semplice. Per ogni intero $r \geq 0$ si ponga

$$T_r = \min\{n > 0 : S_n = r\}.$$

Per $r = 0$, la variabile aleatoria T_0 si chiama *tempo di primo ritorno* in 0. Per $r > 0$ essa viene detta *tempo di primo passaggio* per la posizione r . Si noti che le v.a. T_r potrebbero anche assumere valore infinito, nel caso la passeggiata non passi mai da r .

Per studiare queste variabili aleatorie, useremo anche le loro *funzioni generatrici* di probabilit :

$$F_r(s) = \sum_{n=1}^{+\infty} s^n P([T_r = n]).$$

Notiamo che, in generale, $F_r(1) = P([T_r \neq \infty])$. Nel caso l'evento $[T_r = \infty]$ abbia probabilit  positiva, ovviamente non ci porremo il problema di determinare il valor medio $E(T_r)$.

Per i prossimi teoremi, abbiamo bisogno di ricordare alcuni sviluppi in serie di funzioni irrazionali.

Esempi 6.8

1. Lo sviluppo in serie di Taylor della funzione $y = \sqrt{1+x}$   il seguente:

$$\sqrt{1+x} = 1 + 2 \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k4^k} \binom{2k-2}{k-1} x^k,$$

limitatamente al caso $x > -1$.

Questo deriva dall'espressione delle derivate successive della funzione data in 0:

$$y'(0) = \frac{1}{2}; \quad y^{(n+1)}(0) = (-1)^n \left(n - \frac{1}{2}\right) y^{(n)}(0), \quad \text{per } n > 0;$$

osservando che

$$n - \frac{1}{2} = \frac{\Gamma(n + \frac{1}{2})}{\Gamma(n - \frac{1}{2})},$$

si deduce per induzione

$$y^{(n+1)}(0) = (-1)^n \frac{\Gamma(n + \frac{1}{2})}{\Gamma(\frac{1}{2})} y'(0) = \frac{(-1)^n}{2\sqrt{\pi}} \Gamma(n + \frac{1}{2}).$$

Essendo poi

$$\Gamma\left(n + \frac{1}{2}\right) = \frac{(2n)!}{n!4^n} \sqrt{\pi},$$

ne segue

$$y^{(n+1)}(0) = \frac{(-1)^n}{2} \frac{(2n)!}{n!4^n},$$

e da qui facilmente si ricava lo sviluppo annunciato.

2. Conseguentemente, per derivazione si ottiene

$$\frac{1}{\sqrt{1-x}} = \sum_{k=0}^{+\infty} \binom{2k}{k} \frac{x^k}{4^k}.$$

Di conseguenza, abbiamo il seguente Lemma.

Lemma 6.9 Data una passeggiata aleatoria $(S_n)_n$, poniamo

$$G(s) = \sum_{n=0}^{\infty} s^n P(Z_n),$$

ove al solito Z_n denota l'evento $[S_n = 0]$. Risulta

$$G(s) = \frac{1}{\sqrt{1-4pqs^2}},$$

per $s^2 < \frac{1}{4pq}$.

Dimostrazione. Risulta, dai calcoli precedenti:

$$\begin{aligned} G(s) &= \sum_{h=0}^{\infty} s^{2h} \binom{2h}{h} (pq)^h = \\ &= \sum_{h=0}^{\infty} \binom{2h}{h} \frac{1}{4^h} (4pqs^2)^h = \frac{1}{\sqrt{1-4pqs^2}}, \end{aligned}$$

da cui l'asserto. \square

A questo punto, possiamo ricavare un'espressione anche per la funzione generatrice F_0 .

Teorema 6.10 *La funzione generatrice F_0 della variabile tempo di primo ritorno in 0 é data da*

$$F_0(s) = 1 - \sqrt{1 - 4pqs^2}$$

e il suo sviluppo é

$$F_0(s) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2}{k} (pq)^k \binom{2k-2}{k-1} s^{2k}.$$

Dimostrazione. Possiamo procedere come segue: per ogni intero positivo k , valutiamo

$$\begin{aligned} P(Z_k) &= P([S_k = 0]) = \sum_{h=1}^k P(Z_k | [T_0 = h]) P([T_0 = h]) = \\ &= \sum_{h=1}^k P(Z_{k-h}) P([T_0 = h]). \end{aligned}$$

Da questa relazione, e dalle proprietà della funzione generatrice, ricaviamo

$$G(s) = 1 + G(s)F_0(s)$$

da cui

$$F_0(s) = \frac{G(s) - 1}{G(s)} = 1 - \sqrt{1 - 4pqs^2}$$

in virtù del lemma 6.9. Per lo sviluppo di $y = \sqrt{1 - x}$ (facilmente deducibile da 6.8), si deduce infine lo sviluppo di $F_0(s)$. \square

Raggruppiamo in un Corollario le prime importanti conseguenze.

Corollario 6.11 *Data una passeggiata aleatoria $(S_n)_n$, risulta:*

$$P([T_0 = 2k]) = \frac{2}{k} (pq)^k \binom{2k-2}{k-1},$$

per $k = 1, 2, \dots$; inoltre, la probabilità che la passeggiata non ritorni mai nell'origine é uguale a $|p - q|$, dunque nulla solo nel caso simmetrico.

Nel caso simmetrico, il tempo medio per il primo ritorno a 0 é infinito, pur essendo certo che vi saranno infiniti passaggi per 0.

Dimostrazione. Dalle formule trovate in 6.10, ricaviamo subito

$$P([T_0 = 2k]) = \frac{2}{k}(pq)^k \binom{2k-2}{k-1}$$

per $k = 1, 2, \dots$. La quantita' $F_0(1) = 1 - |p - q|$ (come gia' osservato in precedenza) fornisce la probabilita' che la passeggiata ritorni prima o poi nell'origine: dunque, la probabilita' che T_0 sia infinita é nulla se e solo se $p = q$. In tutti gli altri casi, non é certo che la passeggiata ripassi prima o poi dall'origine. Inoltre, nel caso simmetrico si ha

$$F_0(s) = 1 - \sqrt{1 - s^2},$$

per cui

$$E(T_0) = F'_0(1) = +\infty :$$

dunque, anche nel caso in cui il ritorno all'origine é sicuro, il tempo medio per tale ritorno é comunque infinito.

Sempre nel caso simmetrico, valutiamo la probabilita' di avere almeno k passaggi per l'origine, come segue. Denotato con E_k l'evento che si abbiano almeno k passaggi per l'origine, si ha

$$P(E_k) = \sum_{i=1}^{+\infty} P(E_k | [T_0 = i]) P([T_0 = i]) = \sum_{i=1}^{+\infty} P(E_{k-1}) P([T_0 = i]),$$

per la proprieta' di Markov. Poiché $\sum_{i=1}^{+\infty} P([T_0 = i]) = 1$, si deduce $P(E_k) = P(E_{k-1})$ per ogni $k \geq 1$. Ma sappiamo che $P(E_1) = 1$, dunque $P(E_k) = 1$ per ogni k . Ne segue che

$$P\left(\bigcap_{k=1}^{+\infty} E_k\right) = \lim_{k \rightarrow \infty} P(E_k) = 1$$

il che dimostra che certamente, nel caso simmetrico, la passeggiata ripassera' infinite volte per la posizione iniziale. \square

Passiamo ora a trattare le v.a. T_r , con $r > 0$. Detta F_r la funzione generatrice di T_r , abbiamo i seguenti risultati.

Teorema 6.12

$$F_r(s) = F_1(s)^r;$$

$$F_1(s) = \frac{1 - \sqrt{1 - 4pqs^2}}{2qs} = \frac{F_0(s)}{2qs} = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(pq)^k}{kq} \binom{2k-2}{k-1} s^{2k-1}.$$

Dimostrazione. Sia $r > 1$, e condizioniamo i valori di T_r a quelli di T_1 . Troveremo

$$P([T_r = n]) = \sum_{h=1}^{n-1} P([T_r = n] | [T_1 = h]) P([T_1 = h]) = \sum_{h=1}^{n-1} P([T_{r-1} = n-h]) P([T_1 = h]),$$

per omogeneita' e la Proprieta' di Markov. Ne segue, per le proprieta' della funzione generatrice, che $F_r(s) = F_{r-1}(s)F_1(s)$ e quindi, per induzione:

$$F_r(s) = F_1(s)^r.$$

Per individuare F_1 , procediamo come segue: intanto, é ovvio che $P([T_1 = 1]) = p$. Poi, per $n > 1$, abbiamo

$$\begin{aligned} P([T_1 = n]) &= P([T_1 = n] | [X_1 = 1])p + P([T_1 = n] | [X_1 = -1])q = \\ &= P([T_1 = n] | [X_1 = -1])q = P([T_2 = n-1])q, \end{aligned}$$

per i soliti motivi. Calcolando la funzione generatrice, troviamo

$$F_1(s) = sp + s^2qP([T_2 = 1]) + s^3qP([T_2 = 2]) + \dots = sp + qsF_2(s) = sp + sqF_1(s)^2.$$

Ricavando $F_1(s)$ avremo due possibilita':

$$F_1(s) = \frac{1 \pm \sqrt{1 - 4pqs^2}}{2qs}.$$

Tuttavia, se si scegliesse il segno $+$, si troverebbe poi $F_1(0^+) = +\infty$, il che é inaccettabile. Resta dunque la formula enunciata. Lo sviluppo segue poi facilmente da quello di F_0 . \square

Raccogliamo ora alcune importanti conseguenze nel prossimo Corollario.

Corollario 6.13 *Per ogni intero $k \geq 1$, si ha*

$$P([T_1 = 2k-1]) = \frac{(pq)^k}{kq} \binom{2k-2}{k-1}.$$

Nel caso simmetrico, per $h \geq 0$:

$$P([T_1 = 2h+1]) = P([T_0 = 2h+2]) = \frac{1}{2(h+1)4^h} \binom{2h}{h},$$

e quindi

$$P([T_1 < +\infty]) = F_1(1) = 1,$$

$$E(T_1) = F'_1(1) = +\infty.$$

Nel caso generale, la probabilita' che la passeggiata raggiunga almeno una volta i valori positivi é

$$P([T_1 < +\infty]) = F_1(1) = \frac{1 - |p - q|}{2q} = \begin{cases} 1, & p \geq q \\ p/q, & p \leq q. \end{cases}$$

Di conseguenza, se $p < \frac{1}{2}$, si ha $E(T_1) = +\infty$, mentre risulta $E(T_1) = \frac{1}{p-q}$ quando $p > \frac{1}{2}$.

Dimostrazione. Per quanto riguarda le probabilita' $P([T_1 = 2k - 1])$, basta ricollegarsi al Teorema 6.12 e alle formule ivi ricavate. Il caso simmetrico deriva per semplice sostituzione, e per confronto con il Corollario 6.11. Tutte le altre relazioni sono facilmente deducibili dall'espressione trovata per F_1 , e in particolare per quella relativa al caso simmetrico: $F_1(s) = \frac{1 - \sqrt{1-s^2}}{s}$. \square

Uno degli aspetti piu' importanti delle passeggiate aleatorie é il cosiddetto *principio di riflessione*, che ora enunceremo.

Teorema 6.14 Sia $(S_n)_n$ una passeggiata aleatoria, con parametri p e q , e si denoti con $(S_n^*)_n$ la passeggiata aleatoria duale, ottenuta scambiando il valore di p con quello di q . Assegnati ad arbitrio due istanti k ed n , con $k < n$, e due posizioni a e b , si ha

$$P([S_n = b] | [S_k = a]) = P([S_n^* = -b] | [S_k^* = -a]).$$

Dimostrazione. Chiaramente,

$$P([S_n = b] | [S_k = a]) = P([S_{n-k} = b-a]) = \binom{n-k}{(n-k+b-a)/2} p^{(n-k+b-a)/2} q^{(n-k-b+a)/2}.$$

D'altra parte

$$P([S_n^* = -b] | [S_k^* = -a]) = P([S_{n-k}^* = a-b]) = \binom{n-k}{(n-k-b+a)/2} q^{(n-k-b+a)/2} p^{(n-k+b-a)/2}.$$

Per le proprietà dei coefficienti binomiali, si ha

$$\binom{n-k}{(n-k+b-a)/2} = \binom{n-k}{(n-k-b+a)/2},$$

e quindi le due probabilità calcolate coincidono. \square

Il significato di questo principio si può riassumere intuitivamente dicendo che ad ogni traiettoria che porta dalla posizione a alla posizione b in m passi, corrisponde biunivocamente una traiettoria *speculare* che porta dalla posizione $-a$ alla $-b$ in m passi. La probabilità di ciascuna traiettoria del primo tipo coincide con quella della corrispondente traiettoria del secondo tipo, pur di scambiare il ruolo di p con quello di q (ovviamente le probabilità coincidono nel caso simmetrico).

È ora possibile dedurre direttamente la distribuzione dei tempi di primo passaggio anche per r negativi. Si ha dunque

Proposizione 6.15 *Sia r un intero positivo fissato, e si denoti con T_{-r} la v.a.*

$$T_{-r} = \min\{n : S_n = -r\}.$$

Detta F_{-r} la funzione generatrice di T_{-r} , si ha

$$F_{-r}(s) = \left(\frac{1 - \sqrt{1 - 4pqs^2}}{2ps} \right)^r.$$

In particolare, per $r = 1$, si ha

$$P([T_{-1} = 2k - 1]) = \frac{1}{pk} \binom{2k-2}{k-1} (pq)^k,$$

per ogni $k > 0$.

Una diversa interpretazione di questo principio conduce al seguente

Lemma 6.16 *Sia $(S_n)_n$ una passeggiata aleatoria semplice; per ogni scelta dei tempi k, n , con $k < n$ e delle posizioni a, b positive, si denoti con $N_{n-k}(-a, b)$ il numero di traiettorie che portano dalla posizione $-a$ (raggiunta al tempo k) alla posizione b (raggiunta al tempo n). Si denoti poi con $N_{n-k}^0(a, b)$ il numero delle traiettorie che conducono dalla posizione a (al tempo k) nella posizione b (al tempo n) in modo da toccare almeno una volta la posizione 0 . Allora risulta:*

$$N_{n-k}(-a, b) = N_{n-k}^0(a, b).$$

Dimostrazione. Si consideri una qualsiasi traiettoria π che conduce da $-a$ a b dopo $n - k$ passi: necessariamente tale traiettoria passa per 0 in un certo istante $k + u$. A questa traiettoria associamo la traiettoria π' che coincide con la π dal tempo $k + u$ al tempo finale n e che invece *riflette* la traiettoria π simmetricamente rispetto all'asse x nei tempi tra k e $k + u$. La corrispondenza $\pi \mapsto \pi'$ é biunivoca, e trasforma una qualsiasi traiettoria che va da $-a$ a b in $n - k$ passi in una traiettoria che va da a a b in $n - k$ passi e tocca almeno una volta la posizione 0. Per la biunivocita' di tale corrispondenza, il numero delle traiettorie di un tipo coincide con quello delle traiettorie dell'altro tipo. \square

Vediamo ora alcune conseguenze di questo principio.

Lemma 6.17 *Se $b > 0$, il numero di cammini da $(0, 0)$ a (n, b) che non ritornano nell'origine é dato da*

$$\binom{n-1}{(n+b)/2-1} - \binom{n-1}{(n+b)/2}.$$

(Ovviamente, se $n + b$ non é pari, il numero si annulla).

Dimostrazione. Ciascuno dei cammini in questione deve passare necessariamente per il punto $(1, 1)$. Per il lemma 6.16, il numero di quelle traiettorie che partono da $(1, 1)$ e arrivano in (n, b) toccando almeno una volta la posizione 0 é dato da $N_{n-1}(-1, b)$. Per differenza, il numero di traiettorie che partono da $(1, 1)$ e non toccano la posizione 0 é

$$N_{n-1}(1, b) - N_{n-1}(-1, b) = \binom{n-1}{(n+b-2)/2} - \binom{n-1}{(n+b)/2},$$

in virtu' della definizione stessa di passeggiata aleatoria. \square

Teorema 6.18 *Sia $(S_n)_n$ una passeggiata aleatoria simmetrica. Si fissi un numero intero positivo n e si consideri l'evento $A = [S_2 \neq 0] \cap [S_4 \neq 0] \cap \dots \cap [S_{2n} \neq 0]$. Allora si ha*

$$P(A) = P([S_{2n} = 0]) = \binom{2n}{n} 4^{-n}.$$

Dimostrazione. Chiaramente, si ha

$$P(A \cap [S_{2n} > 0]) = P(A \cap [S_{2n} < 0]), \text{ per cui } P(A) = 2P(A \cap [S_{2n} > 0]).$$

Ora,

$$\begin{aligned} P(A) &= 2P(A \cap [S_{2n} > 0]) = 2 \sum_{r=1}^n (P(A \cap [S_{2n} = 2r])) = \\ &= \frac{2}{4^n} \sum_{r=1}^n \left(\binom{2n-1}{n+r-1} - \binom{2n-1}{n+r} \right) \end{aligned}$$

in virtù del Lemma 6.17. Ora, i termini della sommatoria sono di tipo telescopico, per cui si ottiene facilmente

$$P(A) = \frac{2}{4^n} \binom{2n-1}{n} = \binom{2n}{n} 4^{-n},$$

grazie anche alla relazione

$$\binom{2n}{n} = \frac{2n}{n} \binom{2n-1}{n-1} = 2 \binom{2n-1}{n-1}.$$

Il teorema é così dimostrato. \square

Si può dare una descrizione interessante di questo teorema asserendo che, nel caso simmetrico, la probabilità che la passeggiata non sia ancora ritornata in 0 dopo $2n$ passi coincide con la probabilità che essa sia in 0 dopo $2n$ passi!

Si può dedurre anche un'interessante conseguenza numerica: l'evento A di cui al teorema 6.18 si può identificare con l'evento $[T_0 > 2n]$, per cui si deduce la seguente relazione:

$$\binom{2n}{n} = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{4^{n-k}}{2k-1} \binom{2k}{k}.$$

(Lasciamo per esercizio i dettagli della dimostrazione.)

Un altro tipo di *riflessione* può essere individuato, invertendo il *passato* con il *futuro*. In tal caso, non si deve neanche scambiare il ruolo di p con quello di $1-p$. Il principio può essere denominato *inversione temporale* e descritto come segue.

Teorema 6.19 *Data una passeggiata aleatoria semplice (S_n) , e fissato ad arbitrio un intero positivo n , consideriamo le due v.a. n -dimensionali:*

$$\underline{S} = \{S_1, S_2, \dots, S_n\}, \quad \underline{\Sigma} = \{X_n, X_n + X_{n-1}, \dots, S_n - X_1, S_n\}.$$

Tali v.a. hanno la stessa distribuzione congiunta.

Dimostrazione. Infatti, sia \underline{S} che $\underline{\Sigma}$ si ottengono come successioni di somme parziali di v.a. $B(1, p)$ globalmente indipendenti. \square

Il senso di questo principio é che una passeggiata aleatoria puo' anche esser vista *all'indietro*: supposto che $S_m = 0$, la passeggiata che si ottiene *andando in senso opposto* a partire da $(m, 0)$ ha sostanzialmente le stesse caratteristiche di probabilita' della passeggiata *diretta*.

Vediamo ora un'interessante conseguenza di tale principio.

Teorema 6.20 *Sia $(S_n)_n$ una passeggiata aleatoria semplice, simmetrica. Per ogni intero $r \neq 0$, si denoti con Y_r il numero (aleatorio) di visite nella posizione r prima di ritornare in 0. Allora risulta $E(Y_r) = 1$.*

Dimostrazione. Senza perdita di generalita', possiamo supporre $r > 0$, in virtu' del principio di riflessione. Pertanto, se la passeggiata passa da r al tempo n senza essere ritornata prima in 0, cio' comporta che S_1, S_2, \dots, S_{n-1} sono tutte positive.

Dato che la passeggiata é simmetrica, sappiamo che $P([T_0 < +\infty]) = F_0(1) = 1$, dunque é certo che prima o poi si ripassa da 0, e pertanto Y_r non puo' essere infinito. Ora, per ogni intero positivo n , sia A_n l'intersezione degli eventi $S_1 > 0, S_2 > 0, \dots, S_{n-1} > 0, S_n = r$. Il valore di Y_r coincide con il numero degli A_n che si avverano, ossia

$$Y_r = \sum_{n=1}^{+\infty} I_n$$

ove I_n denota la funzione indicatrice di A_n . Di conseguenza,

$$E(Y_r) = \sum_{n=1}^{+\infty} P(A_n).$$

Ora, in virtu' del principio d'inversione temporale, si ha, per ogni $n > 0$:

$$\begin{aligned} P(A_n) &= P([X_n > 0, X_n + X_{n-1} > 0, \dots, S_n - X_1 > 0, S_n = r]) = \\ &= P([S_n = r, S_{n-1} < r, S_{n-2} < r, \dots, X_1 < r]), \end{aligned}$$

e quest'ultima quantita' coincide con $P([T_r = n])$. Dunque

$$E(Y_r) = \sum_{n=1}^{+\infty} P([T_r = n]) = F_r(1) = F_1(1)^r = 1.$$

Il teorema é cosi' dimostrato. \square

Il risultato del teorema precedente puo' essere dedotto anche per via diretta, almeno per valori semplici di r . Ad esempio, proveremo qui a dedurre la distribuzione di Y_1 , e quindi, come conseguenza, il suo valor medio.

Per iniziare, é ovvio che $Y_1 = 0$ se e solo se $X_1 = -1$; ancora, é facile verificare che $Y_1 = 1$ se e solo se $X_1 = 1$ e $X_2 = 0$. Pertanto

$$P([Y_1 = 0]) = \frac{1}{2}, \quad P([Y_1 = 1]) = \frac{1}{4}.$$

Per gli altri valori della distribuzione, conviene usare la proprieta' di Markov: fissato $k > 0$, consideriamo l'evento

$$C_k := [S_1 = 1] \cap [S_2 > 1] \cap \dots \cap [S_{2k} > 1] \cap [S_{2k+1} = 1] \cap [S_{2k+2} = 0].$$

Chiaramente, si ha

$$P([Y_1 = 2]) = \sum_{k=1}^{+\infty} P(C_k).$$

Adoperando la proprieta' di Markov, si vede facilmente che

$$\begin{aligned} P(C_k) &= \frac{1}{2} P([S_1 = 1] \cap [S_2 > 1] \cap \dots \cap [S_{2k} > 1] \cap [S_{2k+1} = 1]) = \\ &= \frac{1}{2} P([T_0 = 2k]) P([S_1 = 1]) = \frac{1}{4} P([T_0 = 2k]). \end{aligned}$$

Sommando, avremo

$$P([Y_1 = 2]) = \frac{1}{4} P([T_0 > 2]) = \frac{1}{8},$$

essendo facile controllare che $P([T_0 = 2]) = \frac{1}{2}$.

Possiamo ragionare in maniera analoga, per valutare $P([Y_1 = 3])$, e gli altri valori di probabilita' per Y_1 . Infatti, possiamo ottenere

$$P([Y_1 = 3]) = \sum_{k \geq 2} P(E_k),$$

dove E_k é l'evento

$$E_k = [S_1 = 1] \cap [S_2 \geq 1] \cap \dots \cap [S_{2k} \geq 1] \cap [S_{2k+1} = 1] \cap [S_{2k+2} = 0] \cap G_k,$$

ove G_k é l'evento *esattamente 1 passaggio per 1 tra S_3 e S_{2k-1}* . Usando la proprieta' di Markov, otteniamo

$$P(E_k) = \frac{1}{4}P([T_0^{(2)} = 2k]),$$

ove $T_0^{(2)}$ é il tempo del secondo ritorno in 0. Si deduce

$$P(Y_1 = 3) = \frac{1}{4}P([T_0^{(2)} > 4]) = \frac{1}{16},$$

essendo facile verificare che $P([T_0^{(2)} \leq 4]) = P([T_0^{(2)} = 4]) = \frac{1}{4}$.

Procedendo in maniera analoga, si puo' verificare in generale che

$$P([Y_1 = j]) = \frac{1}{2^{j+1}},$$

ossia $Y_1 + 1 \sim NB(1, \frac{1}{2})$: a questo punto, é semplice controllare che $E(Y_1) = 1$.

7 Processi a cascata

I Processi *a cascata* (in Inglese *branching processes*) sono quelli che descrivono (in maniera schematica, ovviamente) l'evoluzione di una popolazione che si riproduce secondo regole probabilistiche ad ogni generazione.

Prima di avviare la trattazione di questi processi, conviene pero' discutere brevemente di una proprieta' delle funzioni generatrici.

Proposizione 7.1 *Supponiamo che $(X_n)_{n>0}$ sia una successione di v.a. I.I.D., con funzione generatrice comune G . Sia poi N una v.a. a valori interi non negativi, con funzione generatrice F , indipendente dalle X_n . Poniamo ora*

$$Y = \sum_{i=0}^N X_i :$$

naturalmente, Y é una variabile aleatoria i cui valori dipendono, oltre che da quelli delle X_i , anche dal numero N ; inoltre, se $N = 0$, s'intende $Y = 0$.

Allora la funzione generatrice di Y é data da:

$$F_Y(s) = F(G(s)),$$

in un opportuno intorno di 0.

Dimostrazione. Sia r il raggio di convergenza della serie

$$F(s) = \sum_{n=0}^{+\infty} s^n P([N = n]).$$

Poiché la funzione G é continua, esiste un $t > 0$ tale che $|G(x)| < r$ non appena $|x| < t$. Sia dunque τ il minimo tra t e il raggio di convergenza di G , e fissiamo s con $|s| < \tau$: avremo

$$\begin{aligned} E(s^Y) &= \sum_{n=0}^{+\infty} E(s^Y | [N = n]) P([N = n]) = \sum_{n=0}^{+\infty} E(s^{X_0} s^{X_1} \dots s^{X_n}) P([N = n]) = \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} G(s)^n P([N = n]) = F(G(s)). \end{aligned}$$

Ritorniamo ora ai processi a cascata.

In questa trattazione, ci limiteremo a supporre che ciascun individuo della popolazione possa riprodursi dando origine a un numero Z di nuovi elementi (lui compreso), indipendentemente dagli altri individui, e sempre con le stesse regole di probabilit  (ossia Z ha la stessa distribuzione per ciascun individuo e per ciascuna generazione). Dunque, se la popolazione é composta ad un certo momento h da K individui, nella generazione successiva gli individui saranno complessivamente

$$Z_{h+1} = N_1 + N_2 + N_3 + \dots + N_K,$$

ove le N_i sono indipendenti e hanno tutte la stessa distribuzione di Z .

Il primo problema da affrontare riguarda appunto la distribuzione di Z_2 e poi, successivamente, quella di Z_3 relativa alla terza generazione, etc. Supporremo fissata la distribuzione di $Z_1 = Z$, e, salvo esplicito avviso contrario, supporremo che inizialmente (istante 0) la popolazione consista di un solo individuo. Denoteremo poi con G la funzione generatrice di Z_1 , con G_2 quella di Z_2 , etc.

Teorema 7.2 *Se G_n denota la funzione generatrice relativa al numero di individui presenti dopo la n^a generazione, risulta*

$$G_n(s) = G(G_{n-1}(s)).$$

In altre parole, la funzione generatrice G_n si ottiene iterando n volte la funzione G .

Dimostrazione. Iniziamo con G_2 . Possiamo scrivere

$$Z_2 = X_1 + X_2 + \dots + X_{Z_1}$$

dove X_i denota il numero dei discendenti dell' i -esimo elemento della prima generazione. Poiché le X_i sono indipendenti e identicamente distribuite, per quanto visto nella precedente proposizione la funzione generatrice di Z_2 è la composizione della funzione generatrice di Z_1 con quella delle X_i . Ma questa è ancora quella di Z_1 , per il modello scelto, dunque $G_2(s) = G(G(s))$.

A questo punto, supposto che la relazione data valga per G_n , possiamo verificarla per G_{n+1} , con lo stesso procedimento:

$$Z_{n+1} = X_1 + X_2 + \dots + X_{Z_n},$$

dove le X_i sono le v.a. che denotano il numero dei discendenti di ciascun individuo della generazione n -esima. Dunque

$$G_{n+1}(s) = G_n(G(s)),$$

come volevasi dimostrare. \square

Solitamente, il teorema 7.2 è di difficile applicazione. Vedremo ora alcuni esempi non troppo complicati, lasciando da parte gli altri, che presentano difficoltà notevoli.

1. Come primo esempio ammettiamo che ogni individuo generi con certezza esattamente k nuovi elementi. Allora, Z è costantemente uguale a k , e $G(s) = s^k$. In virtù del Teorema 7.2, segue che $G_2(s) = (s^k)^k = s^{k^2}$, $G_3(s) = s^{k^3}$, ..., etc. In altri termini, alla j -esima generazione gli individui presenti saranno certamente k^j (il che era deducibile anche per via diretta).
2. Supponiamo ora che Z abbia distribuzione bernoulliana, $B(1, p)$. Allora risulta $G(s) = q + ps$, con $q = 1 - p$, e avremo

$$G_2(s) = q + p(q + ps) = 1 - p + p(1 - p) + p^2s = 1 - p^2 + p^2s,$$

dunque $Z_2 \sim B(1, p^2)$. Analogamente, $Z_n \sim B(1, p^n)$. È ovvio che, se $p \neq 1$, la successione Z_n tende a 0 in probabilità (ma anche quasi certamente: perché?).

Il problema si fa un po' piu' interessante, se supponiamo che, inizialmente, non vi sia un solo individuo, ma che ne esistano un certo numero M ben preciso. Allora, sempre per le proprieta' della funzione generatrice, si ha

$$G_n^*(s) = G_0(G_n(s)) = (G_n(s))^M = (1 - p^n + p^n s)^M$$

ove $G_0(s)$ denota la funzione generatrice s^M del numero iniziale di individui, e G_n^* quella del numero finale, mentre G_n é quella che compete alla $B(1, p^n)$ trovata in precedenza. Anche in questo caso, comunque, possiamo osservare che $P([Z_n = 0]) = (1 - p^n)^M$ tende a 1 non appena $p \neq 1$.

- 3.** In questo esempio, supporremo che Z abbia distribuzione $NB(1, p) - 1$, cioé risulti $P([Z = n]) = q^n p$, per $n = 0, 1, 2, \dots$. Possiamo facilmente valutare la funzione generatrice:

$$G(s) = \frac{p}{1 - qs},$$

ma le iterate sono meno elementari. Inizialmente trattiamo il caso $p = q$: risulta allora $G(s) = \frac{1}{2-s}$. Iterando, troviamo

$$G_2(s) = \frac{1}{2 - \frac{1}{2-s}} = \frac{2-s}{3-2s}.$$

A questo punto, é facile dedurre e provare per induzione che

$$G_n(s) = \frac{n - (n-1)s}{n + 1 - ns},$$

per ogni intero $n \geq 1$.

Il caso asimmetrico é piu' delicato: forniamo qui la formulazione precisa per G_n , limitandoci a provarla per induzione.

$$G_n(s) = p \frac{q^n - p^n - qs(q^{n-1} - p^{n-1})}{q^{n+1} - p^{n+1} - qs(q^n - p^n)}. \quad (7)$$

Se applichiamo tale formula al caso $n = 1$, troviamo infatti

$$G_1(s) = p \frac{q - p}{q^2 - p^2 - qs(q - p)} = p \frac{1}{p + q - qs} = \frac{p}{1 - qs},$$

che é appunto la funzione generatrice di Z , in questo esempio.

Supponiamo ora che la (7) sia vera per un certo n , e dimostriamola per $n + 1$:

$$\begin{aligned} G_{n+1}(s) &= G_n(G(s)) = p \frac{q^n - p^n - q \frac{p}{1-qs} (q^{n-1} - p^{n-1})}{q^{n+1} - p^{n+1} - q \frac{p}{1-qs} (q^n - p^n)} = \\ &= p \frac{q^n - p^n - q^{n+1}s + qp^n s - qp(q^{n-1} - p^{n-1})}{q^{n+1} - p^{n+1} - q^{n+2}s + qp^{n+1}s - qp(q^n - p^n)} = \\ &= p \frac{-qs(q^n - p^n) + q^{n+1} - p^{n+1}}{-qs(q^{n+1} - p^{n+1}) + q^{n+2} - p^{n+2}}, \end{aligned}$$

che é appunto la formula (7) per $n + 1$.

Passiamo ora a dare un altro risultato generale.

Teorema 7.3 *Si denoti con μ la media di Z e con σ^2 la sua varianza. Si denoti poi con μ_n la media di Z_n e con σ_n^2 la sua varianza, per $n > 1$.*

Risulta, per ogni n :

$$\mu_n = \mu^n, \quad \sigma_n^2 = \sigma^2 \mu^{n-1} (1 + \mu + \mu^2 + \dots + \mu^{n-1}).$$

In particolare, se $\mu = 1$, allora $\sigma_n^2 = n\sigma^2$.

Dimostrazione. Ricordiamo che risulta, in generale:

$$\mu_n = G'_n(1), \quad \sigma_n^2 = G''_n(1) + \mu_n - \mu_n^2.$$

Ora, si ha

$$G'_{n+1}(s) = G'(G_n(s))G'_n(s), \quad \text{e} \quad G'_{n+1}(1) = G'(1)G'_n(1) = \mu\mu_n.$$

A questo punto, é facile dedurre $\mu_n = \mu^n$ per induzione.

Passando alle varianze, avremo:

$$\begin{aligned} G''_{n+1}(s) &= G''(G_n(s))G'_n(s)^2 + G'(G_n(s))G''_n(s), \quad \text{e} \quad G''_{n+1}(1) = G''(1)G'_n(1)^2 + G'(1)G''_n(1) = \\ &= (\sigma^2 - \mu + \mu^2)\mu^{2n} + \mu(\sigma_n^2 - \mu^n + \mu^{2n}) = \sigma^2 \mu^{2n} + \mu^{2n+2} + \mu\sigma_n^2 - \mu^{n+1}. \end{aligned}$$

Ne segue che

$$\sigma_{n+1}^2 = G''_{n+1}(1) + \mu^{n+1} - \mu^{2n+2} = \sigma^2 \mu^{2n} + \mu\sigma_n^2.$$

Dunque, partendo da σ_2^2 , troveremo

$$\sigma_2^2 = \mu\sigma^2(1 + \mu), \quad \sigma_3^2 = \sigma^2\mu^4 + \mu\sigma_2^2 = \mu^2\sigma^2(1 + \mu + \mu^3), \dots$$

e lasciamo le conclusioni al lettore. \square

Studieremo ora il problema dell'*estinzione* del processo: in altre parole, cercheremo di valutare (almeno in alcuni casi) qual'è la probabilità che prima o poi risulti $Z_n = 0$. Osserviamo subito che, se $Z_n = 0$ ad un certo istante n , resterà $Z_m = 0$ per ogni $m > n$. Dunque, data la monotonia degli eventi in questione, il problema dell'estinzione si riduce al calcolo del limite

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P([Z_n = 0]) = \lim_{n \rightarrow \infty} G_n(0).$$

Se torniamo per un attimo agli esempi trattati in precedenza, vediamo subito che nel primo caso Z_n cresce esponenzialmente, dunque non vi è possibilità di estinzione. Nel secondo esempio l'estinzione è certa. Infine, nel terzo esempio, si vede abbastanza facilmente che si ha

$$\lim_{n \rightarrow \infty} G_n(0) = \begin{cases} 1, & \text{se } q \leq p \\ \frac{p}{q}, & \text{se } p < q \end{cases}$$

Notiamo che, nel terzo esempio, si ha comunque $E(Z) = \frac{q}{p}$: la probabilità di estinzione è minore di 1 se e solo se $E(Z) > 1$.

Cio' corrisponde anche al risultato stabilito nel prossimo teorema.

Teorema 7.4 *Si ha*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P([Z_n = 0]) = \pi,$$

ove π è la più piccola radice non negativa dell'equazione $\pi = G(\pi)$. Inoltre, si può anche dedurre che $\pi = 1$ se e solo se $\mu \leq 1$.

Dimostrazione. Intanto osserviamo che, per sua stessa definizione, la funzione $G(s)$ è crescente e convessa per $s > 0$.

Poniamo $\pi_n = P([Z_n = 0])$, per ogni n . Per quanto osservato in precedenza, abbiamo $0 \leq \pi_n \leq \pi_{n+1} \leq 1$ per ogni n , dunque $\lim_n \pi_n = \pi$ esiste sempre in

$[0, 1]$. Per la continuit  della funzione G ,   poi chiaro che $G(\pi) = \pi$. Inoltre, se u   un'altra soluzione positiva di tale equazione, abbiamo

$$\pi_1 = G(0) \leq G(u) = u, \quad \pi_2 = G(\pi_1) \leq G(u) = u, \quad \text{etc ...}$$

per la monotonia della funzione G . Mandando a limite, troviamo $\pi \leq u$.

Per dimostrare l'ultima parte, distingueremo alcuni casi:

1) Intanto, se $G(0) = 0$,   conseguenza di quanto appena detto che $\pi = 0$. D'altra parte, poich  comunque   $G(1) = 1$, esiste certamente, per il teorema di Lagrange, un punto $v \in]0, 1[$ tale che $G'(v) = 1$, e quindi, per la stretta convessita' di G , si deve avere $G'(1) = E(Z) > 1$.

2) Se invece $G(0) > 0$, sono possibili due alternative: $\pi < 1$ e $\pi = 1$. Nel caso $\pi < 1$, applicando il teorema di Lagrange in $[\pi, 1]$ vediamo che esiste un punto $w \in]\pi, 1[$ con $G(w) = 1$, e quindi, per convessita', $G'(1) = \mu > 1$.

Nel caso $G(0) > 0$, $\pi = 1$, mostriamo che non puo' essere $E(Z) > 1$: infatti, se cos  fosse, esisterebbe un punto $z < 1$ tale che $G'(s) > 1$ per ogni $s \in [z, 1]$, e quindi, per $s \in [z, 1]$

$$G(s) - G(z) = \int_z^s G'(t) dt > s - z,$$

da cui $G(s) - s > G(z) - z$ per $s \in [z, 1]$. Scegliendo $s = 1$, troveremo allora $G(z) < z$, ma se cio' fosse vero esisterebbe un altro punto fisso per G , compreso fra 0 e z , il che   escluso.

Dunque, in tutti i casi esaminati, quando accade che $\mu = G'(1) > 1$ allora risulta sempre $\pi < 1$, e viceversa, se $\pi < 1$, allora $\mu > 1$.

8 Catene di Markov

I processi stocastici che abbiamo esaminato finora sono esempi di quella vasta categoria di processi che prendono il nome di Processi Markoviani.

Come vedremo, si possono considerare markoviani determinati processi discreti in tempi discreti (queste sono le *catene* di Markov), oppure certi processi discreti in

tempi continui, (ma anche continui in tempi discreti), e infine processi continui in tempi continui.

Per quanto riguarda questi argomenti, abbiamo tratto spunto dal testo [6], al quale rimandiamo per eventuali approfondimenti, o completamenti.

Per il momento ci limitiamo a trattare le Catene di Markov, ossia successioni $(X_n)_{n \geq 0}$ di v.a. discrete: per uniformità di trattazione, assumeremo che ciascuna X_n possa assumere valori nell'insieme \mathcal{N} (a volte anche \mathbb{Z}), con determinata distribuzione π_n , ma in questa classe sono comprese anche le catene *finite*, cioè quelle per cui le X_n non possono assumere più di un certo numero M di valori (che quindi saranno indicati con i simboli $1, 2, \dots, M-1, M$).

Ciascuno dei valori che le X_n possono assumere prende il nome di *stato* della catena, e l'insieme di tali valori a volte si denota anche con S (benché come abbiamo detto esso è di solito \mathcal{N} o un suo sottoinsieme), e viene detto *spazio degli stati*.

Abbiamo così la seguente definizione.

Definizione 8.1 Una successione $(X_n)_n$ di v.a. a valori in \mathcal{N} si dice una *catena di Markov* se essa verifica la seguente condizione (*proprietà di Markov*):

$$P([X_n = s_n] | [X_0 = s_0, X_1 = s_1, \dots, X_{n-1} = s_{n-1}]) = P([X_n = s_n] | [X_{n-1} = s_{n-1}]), \quad (8)$$

per ogni $n > 0$.

La proprietà di Markov (come vedremo) permette di ricavare le distribuzioni finito-dimensionali del processo, non appena si conosca quella iniziale (cioè π_0 , distribuzione di X_0), e le *funzioni di transizione*

$$P_n(i, j) = P([X_n = j] | [X_{n-1} = i])$$

al variare di $n \in \mathcal{N}$ e di i, j in S .

Per evitare ulteriori complicazioni, ci occuperemo solo delle catene di Markov *omogenee*, cioè quelle per cui le funzioni di transizione siano le stesse, per ogni n . Quindi, per una catena di Markov omogenea, oltre alla distribuzione iniziale, tutto ciò che occorre conoscere è la *Matrice di transizione*, denotata con P , i cui elementi sono le probabilità condizionate:

$$p_{i,j} = P([X_1 = j] | [X_0 = i]) = P([X_{n+1} = j] | [X_n = i]) :$$

Notiamo che, per ogni valore di i (ossia per ogni *riga* della matrice P), la somma dei termini $p_{i,j}$, al variare di j in S , é sempre 1. (Una matrice a termini non-negativi e con tale proprieta' é infatti detta *matrice di transizione*, anche quando non é direttamente collegata a qualche catena markoviana).

Data una catena di Markov omogenea, con distribuzione iniziale π_0 e matrice di transizione P , come si fa a trovare la distribuzione di ciascuna delle X_n , e poi tutte le *fidi's*?

Una prima risposta riguarda la distribuzione di X_1 , che di solito denotiamo con π_1 :

$$\pi_1(h) = \sum_{i=1}^{+\infty} P([X_1 = h] | [X_0 = i]) P([X_0 = i]) = \sum_i \pi_i p_{i,h}.$$

Dunque, se pensiamo alla distribuzione π_n come un vettore-riga, possiamo scrivere in forma compatta

$$\pi_1 = \pi_0 P,$$

e, per induzione:

$$\pi_2 = \pi_1 P = \pi_0 P^2, \dots, \pi_n = \pi_0 P^n,$$

etc. Questo risultato prende il nome di *Teorema di Chapman-Kolmogorov*, e puo' essere enunciato in forma leggermente piu' generale come segue.

Teorema 8.2 *Data una catena di Markov omogenea con matrice di transizione P , per ogni coppia di stati i, j e ogni intero n , sia $p_{i,j}(n)$ la probabilita' di transizione in n passi, ossia*

$$p_{i,j}(n) = P([X_{n+k} = j] | [X_k = i])$$

(con k arbitrario): essa é regolata dalla relazione (di Chapman-Kolmogorov)

$$p_{i,j}(m+n) = \sum_h p_{i,h}(m) p_{h,j}(n)$$

La dimostrazione é semplice.

A questo punto, anche una qualsiasi distribuzione finito-dimensionale puo' essere facilmente ricavata:

$$P([X_0 = s_0, X_1 = s_1, \dots, X_n = s_n]) =$$

$$\begin{aligned}
&= P([X_n = s_n] | [X_0 = s_0, X_1 = s_1, \dots, X_{n-1} = s_{n-1}]) P([X_0 = s_0, X_1 = s_1, \dots, X_{n-1} = s_{n-1}]) = \\
&= p_{s_{n-1}, s_n} P([X_{n-1} = s_{n-1}] | [X_0 = s_0, X_1 = s_1, \dots, X_{n-2} = s_{n-2}]) = \\
&\dots = p_{s_{n-1}, s_n} p_{s_{n-2}, s_{n-1}} \dots p_{s_0, s_1} p_{s_0}.
\end{aligned}$$

I processi a cascata rientrano tra le catene di Markov, benché la matrice di transizione non sia semplicissima da descrivere: ciascuno stato in tale processo è esattamente il numero degli individui presenti dopo una certa generazione; dunque, se il vettore β rappresenta la distribuzione della variabile Z , la probabilità di transizione $p_{i,j}$ corrisponde a $(\beta^{*i})_j$, cioè la componente di posto j del prodotto di convoluzione i -esimo di β con sé stessa.

Ad esempio, possiamo vedere alcuni elementi della matrice di transizione di un processo a cascata $(X_n)_n$, in cui la distribuzione di X_1 sia uniforme tra i valori 0, 1, 2: in tale situazione, è chiaro ad esempio che, se $X_n = 0$, allora $X_{n+1} = 0$ con probabilità 1, e quindi la prima riga della matrice di transizione consiste di un 1 al primo posto, e poi tutti 0. Se poi il valore della generica X_n fosse 1, allora si ha $P(X_{n+1} = 0) = P(X_{n+1} = 1) = P(X_{n+1} = 2) = \frac{1}{3}$. In generale, se $X_n = k$, X_{n+1} al massimo può valere $2k$. La matrice di transizione si presenta come segue:

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \dots \\ p & p & p & 0 & 0 & 0 & 0 \dots \\ p^2 & 2p^2 & 3p^2 & 2p^2 & p^2 & 0 & 0 \dots \\ p^3 & 3p^3 & 6p^3 & 7p^3 & 6p^3 & 3p^3 & p^3 & 0 \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix},$$

avendo posto $p = \frac{1}{3}$.

Anche le passeggiate aleatorie, benché l'insieme degli stati comprenda anche gli interi negativi, si possono considerare catene markoviane: la matrice di transizione è una matrice tridiagonale, in cui gli elementi lungo la diagonale principale sono tutti 0 (infatti, in una passeggiata aleatoria semplice, $p_{i,i} = 0$ per definizione).

Varianti delle passeggiate aleatorie semplici sono quelle con *barriere*: per semplificare al massimo, possiamo supporre che le barriere siano le posizioni -2 e 2 , e che esse siano *assorbenti*: cioè, quando la passeggiata raggiunge una di tali posizioni, lì

rimane per sempre. Avremo dunque la seguente matrice di transizione:

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ q & 0 & p & 0 & 0 \\ 0 & q & 0 & p & 0 \\ 0 & 0 & q & 0 & p \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Una situazione un po' diversa si presenta con le barriere *riflettenti*: giunta in uno dei due estremi, la passeggiata viene respinta con probabilita' 1 nello stato adiacente. Lasciando come prima in -2 e 2 le barriere, avremo la seguente matrice:

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ q & 0 & p & 0 & 0 \\ 0 & q & 0 & p & 0 \\ 0 & 0 & q & 0 & p \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Per studiare l'evoluzione di una catena di Markov, é opportuno classificare adeguatamente gli stati, in maniera da distinguere quelli che hanno probabilita' positiva di presentarsi infinite volte (e determinarne eventualmente la frequenza) da quelli che invece hanno probabilita' nulla di essere toccati infinite volte. A tale scopo si introduce la seguente definizione.

Definizione 8.3 Data una catena di Markov omogenea (X_n) , diremo che uno stato i é *ricorrente* (o anche *persistente*) se

$$P(\cup_{n=1}^{+\infty} [X_n = i] | [X_0 = i]) = 1.$$

Dunque lo stato i é ricorrente se é certo che, partendo inizialmente da i , il processo prima o poi tornera' in i . Se lo stato i non é persistente, allora si dice *transiente*.

Quando abbiamo trattato le passeggiate aleatorie, abbiamo visto che tutti gli stati sono transienti se $p \neq q$, e tutti sono ricorrenti se $p = q$. Nel caso di barriere assorbenti, questi sono due stati persistenti, mentre gli altri sono transienti (esclusi

i casi banali $p = 0$ o $p = 1$). Nel caso di un processo a cascata, se $P([Z = 0]) > 0$, allora da ogni stato si può passare allo stato 0 con probabilità positiva, dopodiché il processo resta in 0 definitivamente, dunque 0 è uno stato persistente, mentre tutti gli altri sono transienti.

Per individuare gli stati ricorrenti, possiamo procedere come già abbiamo fatto per le passeggiate aleatorie. Per ogni coppia di stati (i, j) , poniamo

$$f_{i,j}(1) = P([X_1 = j] | [X_0 = i]),$$

e, per ogni intero $n \geq 2$, poniamo

$$f_{i,j}(n) = P([X_1 \neq j, X_2 \neq j, \dots, X_{n-1} \neq j, X_n = j] | [X_0 = i]).$$

Poniamo anche

$$f_{i,j} = \sum_n f_{i,j}(n).$$

Questa è la probabilità che la catena visiti almeno una volta lo stato j , partendo da i . Nel caso $i = j$, si parlerà di *ritorni* anziché di *visite*. Chiaramente, lo stato i sarà ricorrente se $f_{i,i} = 1$, altrimenti esso è transiente. Useremo poi anche le funzioni generatrici:

$$P_{i,j}(s) = \sum_n s^n p_{i,j}(n), \quad F_{i,j}(s) = \sum_n f_{i,j}(n) s^n.$$

Ovviamente, avremo $p_{i,j}(0) = 0$ se e solo se $i \neq j$, altrimenti esso vale 1. Inoltre, conveniamo di porre $f_{i,j}(0) = 0$ per ogni i, j . Notiamo anche che $F_{i,i}(1) = f_{i,i}$.

Sulla base del procedimento già adoperato per le passeggiate aleatorie, possiamo ricavare il seguente risultato.

Teorema 8.4

$$(a) \quad P_{i,i}(s) = 1 + F_{i,i}(s)P_{i,i}(s); \quad (b) \quad P_{i,j}(s) = F_{i,j}(s)P_{j,j}(s), \quad i \neq j.$$

Se ne ricava subito il seguente Corollario

Corollario 8.5 *Lo stato i è persistente se e solo se $\sum_n p_{i,i}(n) = +\infty$.*

Se j è persistente, allora $\sum_n p_{i,j}(n) = +\infty$ non appena $f_{i,j} \neq 0$. Se j è transiente, allora $\sum_n p_{i,j}(n) < +\infty$ per ogni i .

Dimostrazione. Dal teorema 8.4, si ricava

$$P_{i,i}(s) = \frac{1}{1 - F_{i,i}(s)}, \text{ e } P_{i,i}(1) = \frac{1}{1 - F_{i,i}(1)} :$$

ora, lo stato i é persistente se e solo se $F_{i,i}(1) = 1$, ossia $P_{i,i}(1) = \infty$, il che significa la divergenza della serie $\sum_n p_{i,i}(n)$.

Inoltre, se j é persistente, e $f_{i,j} \neq 0$, dalla (b) di 8.4 si ricava $P_{i,j}(1) = +\infty$, ossia la divergenza della serie $\sum_n p_{i,j}(n)$. L'asserzione fatta per j transiente si dimostra in modo analogo. \square

Come per le passeggiate aleatorie, anche per le catene di Markov omogenee si puo' provare che, per uno stato ricorrente i , é certo che, partendo da tale stato, il processo lo visitera' infinite volte. Infatti, poniamo

$$E_n = [X_h = i \text{ almeno } n \text{ volte}], \text{ e } G_k =: [X_k = i, X_1 \neq i, \dots, X_{k-1} \neq i] :$$

avremo

$$P(E_2|[X_0 = i]) = \sum_{k=1}^{\infty} P(E_2|[X_0 = i] \cap G_k) P(G_k|[X_0 = i]) = \sum_{k=1}^{\infty} P(E_1|[X_0 = i]) f_{i,i}(k),$$

a causa della proprieta' di Markov. Poiché $\sum_k f_{i,i}(k) = P([E_1|[X_0 = 1]]) = 1$, ne segue

$$P(E_2|[X_0 = i]) = P([E_1|[X_0 = i]]) = 1, \text{ e } P(E_n|[X_0 = i]) = 1$$

per induzione su n . Allora, $\lim_{n \rightarrow \infty} P(E_n|[X_0 = i]) = 1$, e questo é proprio quanto volevasi.

Una conseguenza diretta di questo risultato é che una catena di Markov *finita* non puo' avere tutti stati transienti (questo é intuitivo, ma una dimostrazione rigorosa é sempre opportuna).

Teorema 8.6 *Se S é un insieme finito, allora esiste almeno uno stato ricorrente.*

Dimostrazione. Supponiamo che tutti gli stati siano transienti. Allora si deve avere

$$\sum_n p_{i,j}(n) < +\infty$$

per ogni indice i e ogni indice j , in virtu' del Corollario 8.5, e dunque $\lim_{n \rightarrow \infty} p_{i,j}(n) = 0$, per ogni i e ogni j . Sommando su j , avremo allora

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_j p_{i,j}(n) = 0$$

il che contraddice il fatto che per ogni n e ogni i si deve avere $\sum_j p_{i,j}(n) = 1$. L'assurdo trovato conclude la dimostrazione. \square

I risultati riguardanti un generico stato ricorrente i sono validi a condizione che il processo *inizialmente* sia nella posizione i . Ad esempio, pur essendo certo in generale che una catena di Markov $(X_n)_n$, *partendo* da i , poi ritorna in i infinite volte, in generale non é certo che il processo *passi* da i qualche volta. Basti pensare alla situazione banale in cui P sia la matrice identita' (ad esempio 2×2), e la distribuzione iniziale sia $\pi = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$: e' chiaro che i due stati sono ricorrenti, ma é anche vero che ciascuno dei due ha probabilita' $\frac{1}{2}$ di non verificarsi mai. I prossimi concetti serviranno a capire meglio e possibilmente semplificare situazioni del genere.

Definizione 8.7 Data una catena di Markov omogenea, diremo che uno stato i *comunica* con uno stato j se esiste un $m \geq 0$ tale che $p_{i,j}(m) > 0$. Se poi i comunica con j e j comunica con i , diremo che i due stati sono *comunicanti*, o anche *equivalenti*. Se i comunica con j , scriveremo $i \rightarrow j$; se i due stati sono comunicanti, scriveremo $i \leftrightarrow j$.

E' un facile esercizio provare che la relazione \leftrightarrow é proprio una relazione di equivalenza, che permette quindi di suddividere lo spazio S in classi di equivalenza. In una stessa classe, tutti gli stati sono dello stesso tipo. Si ha infatti

Teorema 8.8 *Siano i e j due stati comunicanti. Allora i é ricorrente se e solo se lo é j .*

Dimostrazione. Siccome $i \leftrightarrow j$, esistono due interi non-negativi m e n tali che $c := p_{i,j}(m)p_{j,i}(n) > 0$. Allora, per la regola di Chapman-Kolmogorov, si ha

$$p_{i,i}(m+n+r) \geq p_{i,j}(m)p_{j,j}(r)p_{j,i}(n) = cp_{j,j}(r)$$

per ogni $r > 0$. Pertanto, se la serie $\sum p_{j,j}(r)$ diverge, la stesso accade per la serie $\sum p_{i,i}(r)$. Dunque, se j é ricorrente, lo é anche i . Per simmetria, si ha anche l'implicazione inversa, e dunque il teorema é dimostrato. \square

Per dedurre alcune conseguenze da questa relazione di equivalenza diamo alcune nuove definizioni.

Definizioni 8.9 Sia C un sottoinsieme non vuoto di S . Diremo che C é *chiuso* se nessun elemento di C comunica con elementi fuori di C .

Diremo poi che C é *irriducibile* se $i \leftrightarrow j$ per ogni i, j in C .

Se un insieme chiuso C contiene un solo stato i , tale stato si dice *assorbente*, per ovvie ragioni. Se tutti gli elementi di C sono transienti, allora C si dice *transiente*, e analogamente se tutti gli stati di C sono ricorrenti.

Se C é una classe di equivalenza per \leftrightarrow , allora C é senz'altro irriducibile.

Non é difficile ora, applicando le definizioni precedenti, stabilire il seguente risultato.

Teorema 8.10 *In ogni catena di Markov omogenea, lo spazio S puo' essere decomposto univocamente come segue:*

$$S = T \cup C_1 \cup C_2 \cup \dots$$

ove T é l'insieme degli stati transienti, e i C_i sono tutti insiemi chiusi e irriducibili di stati persistenti.

Dimostrazione. La decomposizione si ottiene tramite il quoziente di $S \setminus T$ rispetto alla relazione di equivalenza \leftrightarrow : cio' che bisogna ancora dimostrare é che tutti gli insiemi C_i sono chiusi. D'altra parte, se j é uno stato in C_i , e k uno stato fuori di C_i , ammettendo che $j \rightarrow k$, non si puo' poi avere $k \rightarrow j$: ma allora, se si verifica l'evento (di probabilita' positiva) che in m passi si vada da j a k , poi non si puo' piu' ritornare in j : non sarebbe dunque certo che il processo ritorni nello stato j infinite volte. Cio' contrasta con la persistenza di j (v. nota successiva al corollario 8.5). \square

Il teorema di decomposizione precedente afferma, in pratica, che in ogni catena di Markov omogenea si possono individuare un certo numero di stati transienti, e una

famiglia di sottoinsiemi C_i , ciascuno dei quali non interagisce con gli altri. Pertanto, una volta che il processo entra in uno dei C_i (o inizialmente, o provenendo da uno stato transiente) la' rimane per sempre. E' anche possibile, per certe catene, che tutti gli stati siano transienti, e dunque non vi sia alcun C_i : é questo il caso della passeggiata aleatoria asimmetrica, ad esempio.

Ricordiamo, tuttavia, che qualora la catena sia *finita*, allora necessariamente esistono degli stati ricorrenti (v. 8.6).

Il prossimo problema che tratteremo riguarda la possibilita' di studiare l'evoluzione di una catena di Markov, e di individuare, ove possibile, una distribuzione *stazionaria*, ossia una distribuzione che, in un certo senso, descriva l'andamento delle X_n per valori molto grandi di n , o, come si dice, *a regime*.

Infatti, mentre solitamente non ci si puo' attendere che le X_n convergano (quasi certamente) a qualche v.a., spesso le loro distribuzioni hanno limite (in distribuzione, ovviamente): se cio' accade, la distribuzione limite é quella che puo' considerarsi la situazione *a regime* del nostro processo.

Definizione 8.11 Una distribuzione π su S si dice *invariante* se accade che

$$\pi P = \pi :$$

in altre parole, se la v.a. X_0 ha distribuzione π , allora ogni X_n ha la stessa distribuzione. Per questo motivo le distribuzioni invarianti spesso si dicono anche stazionarie.

Osserviamo che, se π é una distribuzione invariante per la matrice di transizione P , la catena di Markov che scaturisce assegnando distribuzione π a X_0 ed é soggetta alla matrice P risulta essere un processo *stazionario*, nel senso che non solo le X_n hanno tutte la stessa distribuzione, ma tutte le distribuzioni finito-dimensionali sono invarianti per traslazione, ossia

$$P_{(X_0, X_1, \dots, X_n)} = P_{(X_m, X_{1+m}, \dots, X_{n+m})}$$

per ogni n e ogni m . (Si lascia al lettore la dimostrazione).

Un risultato teorico, che possiamo stabilire subito, é il seguente.

Teorema 8.12 *Supponiamo che le v.a. X_n convergano in distribuzione ad una v.a. X , ancora a valori in S . Allora la distribuzione di X é invariante.*

Dimostrazione. Ricordiamo che S é per noi l'insieme \mathbb{N} degli interi naturali. Dunque, per ogni intero k e ogni numero reale $u \in]0, 1[$, la funzione di ripartizione di X é continua nel punto $k + u$. Di conseguenza,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P([X_n \leq k + u]) = P([X \leq k + u]),$$

da cui

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P([X_n \leq k]) = P([X \leq k]),$$

per ogni k . Ne segue, per differenza:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P([X_n = k]) = P([X = k]),$$

per ogni stato k . Indicando con π_n la distribuzione di X_n e con π quella di X , abbiamo dimostrato che

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (\pi_n)(j) = \pi(j)$$

per ogni stato j . Come secondo passo, proveremo una convergenza analoga per la successione $(\pi_n P)_n$ alla distribuzione πP . Fissiamo un numero reale $\varepsilon > 0$, e osserviamo che esiste un intero positivo N tale che

$$\sum_{j > N} \pi(j) < \varepsilon.$$

In relazione a questo N , esiste un intero positivo n_0 tale che

$$\sum_{i=0}^N |\pi_n(i) - \pi(i)| < \varepsilon,$$

per ogni $n > n_0$. Allora, per ogni $n > n_0$ si ha

$$\sum_{j=0}^N \pi_n(j) > \sum_{j=0}^N \pi(j) - \varepsilon > 1 - 2\varepsilon.$$

Di conseguenza, sempre per $n > n_0$ troviamo

$$\sum_{j=0}^{\infty} |\pi_n(j) - \pi(j)| \leq \sum_{j=0}^N |\pi_n(j) - \pi(j)| + 3\varepsilon \leq 4\varepsilon.$$

Ora, per ogni stato h ,

$$|(\pi_n P)(h) - (\pi P)(h)| \leq \sum_{j=0}^{+\infty} |\pi_n(j) - \pi(j)| P_{j,h} \leq \sum_{j=0}^{+\infty} |\pi_n(j) - \pi(j)| \leq 4\varepsilon,$$

non appena $n > n_0$. Quindi la successione $(\pi_n P)(h)$ converge a $(\pi P)(h)$ per n che diverge, qualunque sia h . Ma $\pi_n P = \pi_{n+1}$, quindi il limite di $(\pi_n P)(h)$ coincide con quello di $\pi_{n+1}(h)$, cioè con $\pi(h)$. Dunque $\pi P = \pi$. \square

Purtroppo, dobbiamo far notare che

- 1) non sempre le distribuzioni delle v.a. (X_n) sono convergenti;
- 2) non sempre una distribuzione invariante esiste;
- 3) non sempre la distribuzione invariante è unica.

Ad esempio, se consideriamo $S = \{1, 2\}$, e la matrice P è tale che $P_{1,2} = P_{2,1} = 1$, la distribuzione di X_n è di tipo concentrato, ma su due valori diversi a seconda che n sia pari o dispari. In tal caso, tuttavia, la distribuzione uniforme $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ è senz'altro invariante (e non ve ne sono altre).

Nella passeggiata aleatoria una distribuzione invariante non esiste: questo sarà esaminato meglio in seguito, ma per il momento possiamo accettare che, almeno nel caso simmetrico, una distribuzione invariante dovrebbe essere equidistribuita. Ma, poiché gli stati sono infiniti, questo è impossibile.

Un esempio più concreto è dato dalle passeggiate con una barriera *parzialmente assorbente*: esso verrà presentato tra poco.

Nel caso di passeggiata con due barriere assorbenti, è facile vedere che qualunque distribuzione concentrata sull'insieme delle due barriere è invariante.

Veniamo ora a stabilire alcuni risultati positivi. Il prossimo risultato è poco enfatizzato, ma vale la pena di segnalarlo se non altro per la semplicità del suo enunciato.

Teorema 8.13 *Se S è un insieme finito, allora una distribuzione invariante esiste sempre, una volta fissata la matrice di transizione P .*

Dimostrazione.

Sia π_0 una qualunque distribuzione iniziale. Per ogni n sia poi π_n la distribuzione di X_n , ossia $\pi_n = \pi_0 P^n$. Poniamo poi

$$\bar{\pi}_n = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \pi_j$$

per ogni n . Denotando con M la cardinalità di S , la successione $(\bar{\pi}_n)_n$ è contenuta nel compatto $[0, 1]^M$, e quindi ammette una sottosuccessione convergente. Se denotiamo con π_∞ il vettore limite di tale sottosuccessione, non è difficile controllare che esso corrisponde a una distribuzione su S (ossia le componenti di π_∞ sono non-negative e hanno somma 1). Per verificare che tale distribuzione è stazionaria, denotiamo con $(\bar{\pi}_k)_k$ la sottosuccessione di $(\bar{\pi}_n)_n$ che converge a π_∞ : per ogni k risulta

$$|(\bar{\pi}_k P)(h) - \bar{\pi}_k(h)| \leq \frac{2}{k}$$

per ogni stato h . Dunque anche la successione $(\bar{\pi}_k P)$ converge a π_∞ . Ma ovviamente la successione $(\bar{\pi}_k P)$ converge, per linearità, a $\pi_\infty P$, e quindi π_∞ è invariante. \square

Torniamo ora al caso più generale, e vediamo in quali casi si hanno delle distribuzioni invarianti.

D'ora in poi useremo spesso *confondere* la catena con lo spazio S degli stati: in realtà, dicendo che S è una catena di Markov, implicitamente supporremo assegnata una matrice di transizione P , e (quando occorre) una distribuzione iniziale π_0 .

Lemma 8.14 *Supponiamo che S sia un unico insieme irriducibile. (In tal caso si dice che la catena stessa è irriducibile). Se π è una distribuzione stazionaria, allora si deve avere $\pi_j > 0$ per ogni j .*

Dimostrazione. Supponiamo $\pi_j = 0$ per un certo stato j . Allora

$$0 = \pi_j = \sum_{h \in S} \pi_h p_{h,j}(n) \geq \pi_h p_{h,j}(n)$$

per ogni h e ogni n . Dunque, se $h \rightarrow j$, si deve avere $\pi_h = 0$. Ma *tutti* gli stati sono comunicanti, e allora si dedurrebbe $\pi = 0$, il che è impossibile. \square

Ora, facciamo vedere che una catena irriducibile non può ammettere una distribuzione invariante se i suoi stati sono tutti transienti.

Lemma 8.15 *Supponiamo che S sia irriducibile. Se esiste una distribuzione invariante, tutti gli elementi di S sono ricorrenti.*

Dimostrazione. Chiaramente, basta far vedere che non é possibile che tutti gli elementi di S siano transienti. Infatti, se essi fossero transienti, dovremmo avere $\lim_{n \rightarrow \infty} p_{i,j}(n) = 0$ per ogni i e j . Da questo si dedurrá ora che

$$\pi_j = \lim_n \sum_i \pi_i p_{i,j}(n) = 0,$$

da cui la contraddizione. Per provare il limite suddetto, notiamo che, per ogni insieme finito $F \subset S$ si ha

$$\sum_i \pi_i p_{i,j}(n) \leq \sum_{i \in F} \pi_i p_{i,j}(n) + \sum_{i \notin F} \pi_i.$$

Ora, come nella dimostrazione di 8.12, si puo' scegliere F in modo che l'ultimo addendo sia trascurabile, e di conseguenza si puo' scegliere n in modo che le somme finite $\sum_{i \in F} \pi_i p_{i,j}(n)$ siano piccole quanto si vuole. Dunque l'asserto, per l'assurdo trovato. \square

Una conseguenza diretta di questo lemma é che, almeno nelle passeggiate aleatorie asimmetriche, non puo' esistere alcuna distribuzione invariante: infatti, sappiamo che in una tale passeggiata aleatoria, nessuna posizione é ricorrente.

Un'altra conseguenza semplice riguarda le catene *finite*: se S é finito, e se (fissata la matrice di transizione P) la catena é irriducibile, allora gli stati sono tutti ricorrenti; infatti, per il teorema 8.13 una distribuzione invariante certamente esiste, e quindi, applicando il lemma precedente, si ha quanto asserito.

Il prossimo lemma stabilisce gia' un'espressione esplicita per una distribuzione stazionaria. Occorre pero' qualche notazione.

Osserviamo che, come per le passeggiate aleatorie, anche per le catene di Markov si puo' parlare di *tempo di ricorrenza*, secondo la seguente definizione.

Definizione 8.16 Sia $(X_n)_n$ una catena di Markov omogenea, e poniamo, per ogni coppia (i, j) di stati:

$$T_{i,j} = \min\{n \geq 1 : X_n = j\} 1_{[X_0=i]}.$$

(Questa scrittura sta a significare che la v.a. $T_{i,j}$ é non nulla solo se $[X_0 = i]$.) Implicitamente, si assume che $T_{i,j} = +\infty$ se per caso non esiste alcun intero n tale che $[X_n = j]$ nell'ipotesi $[X_0 = i]$.) Sappiamo gia' che, per definizione,

$$P([T_{i,j} = n] | [X_0 = i]) = f_{i,j}(n),$$

dunque la quantita'

$$E(T_{i,j} | [X_0 = i]) = \sum_n n f_{i,j}(n)$$

prende il nome di *tempo medio per una visita* allo stato j , partendo dallo stato i . In particolare, quando $j = i$, la quantita' $E(T_{i,i})$ viene denotata μ_i e prende il nome di *tempo medio di ricorrenza*: esso é senz'altro infinito se i é transiente (in tal caso infatti $P([T_{i,i} = \infty]) = 1 - f_{i,i} > 0$). Tuttavia, μ_i puo' essere infinita anche se i é ricorrente (cio' accade ad es. nelle passeggiate aleatorie simmetriche). Dunque, diremo che uno stato i é *ricorrente nullo* se esso é ricorrente ma il suo tempo medio di ricorrenza é infinito. Altrimenti, diremo che i é *ricorrente positivo* o *non-nullo*.

Vi sono situazioni anche piuttosto banali in cui tutti gli stati sono ricorrenti positivi. Ad esempio, se lo spazio degli stati consiste di due soli elementi, diciamo 1 e 2, e la matrice P (2×2) presenta 0 nella diagonale principale e 1 nelle altre posizioni: cio' vuol dire che per ciascuno stato i si ha $f_{i,i}(2) = 1$ (e quindi $f_{i,i}(n) = 0$ per gli altri valori di n), per cui $\mu_i = 2$ per entrambi gli stati.

Definizione 8.17 Supponiamo che la catena sia irriducibile, e che k sia uno stato ricorrente non nullo. Per ogni altro stato i , denoteremo con $\rho_i(k)$ il *numero medio di visite allo stato i tra due visite successive allo stato k* . In altri termini

$$\begin{aligned} \rho_i(k) &= E\left(\sum_{n=0}^{+\infty} I_{[X_n=i] \cap [T_{k,k}>n]} | [X_0=k]\right) = \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} P([X_n=i] \cap [T_{k,k}>n] | [X_0=k]). \end{aligned}$$

A questo proposito, notiamo che, quando $i = k$, tutti gli eventi del tipo $[X_n = k, T_{k,k} > n] \cap [X_0 = k]$ sono impossibili, ad eccezione di quello corrispondente al caso $n = 0$, il quale coincide con $[X_0 = k]$. Dunque, $\rho_k(k) = 1$ per ogni k . Al

contrario, se $i \neq k$, l'evento $[X_0 = i, T_{k,k} > 0] \cap [X_0 = k]$ é ovviamente impossibile; quindi, se $i \neq k$, si puo' anche scrivere

$$\rho_i(k) = \sum_{n=1}^{+\infty} P([X_n = i] \cap [T_{k,k} > n] | [X_0 = k]).$$

Inoltre, sempre per $i \neq k$, si puo' osservare che l'evento $[T_{k,k} > n] \cap [X_n = i]$ coincide con l'evento $[T_{k,k} > n-1] \cap [X_n = i]$, almeno per $n \geq 1$. Dunque, possiamo dedurre anche che, per $i \neq k$,

$$\rho_i(k) = \sum_{n=1}^{+\infty} P([X_n = i] \cap [T_{k,k} > n-1] | [X_0 = k]) = \sum_{n=0}^{+\infty} P([X_{n+1} = i] \cap [T_{k,k} > n] | [X_0 = k]).$$

Lemma 8.18 *Se k é uno stato non-nullo di una catena irriducibile e ricorrente, allora esiste una distribuzione invariante π , i cui elementi sono dati da:*

$$\pi_i = \frac{\rho_i(k)}{\mu_k}.$$

(Ricordiamo che μ_k é il *tempo medio di primo ritorno* nello stato k).

Dimostrazione. Innanzitutto, mostriamo che π é una distribuzione di probabilita', ossia che la somma delle sue componenti é 1. Cio' equivale a provare che

$$\sum_{i \in S} \rho_i(k) = \mu_k.$$

Ma abbiamo

$$\begin{aligned} \mu_k &= E(T_{k,k} | [X_0 = k]) = \sum_{h \in \mathbb{N}} P([T_{k,k} > h] | [X_0 = k]) = \sum_{h \in \mathbb{N}} \sum_{i \in S} P([X_h = i, T_{k,k} > h] | [X_0 = k]) = \\ &= \sum_{i \in S} \sum_{h \in \mathbb{N}} P([X_h = i, T_{k,k} > h] | [X_0 = k]) = \sum_{i \in S} \rho_i(k). \end{aligned}$$

Facciamo ora vedere che π é invariante. Cio' si riduce a provare che

$$\rho_j(k) = \sum_{i \in S} \rho_i(k) p_{i,j} \tag{9}$$

per ciascun $j \in S$. Inizieremo col provare tale relazione per $j \neq k$. Abbiamo, per $j \neq k$:

$$\rho_j(k) = \sum_{n=0}^{+\infty} P([X_{n+1} = j, T_{k,k} > n] | [X_0 = k]) =$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{i \in S} P([X_{n+1} = j, X_n = i, T_{k,k} > n] | [X_0 = k]) = \\
&= \sum_{i \in S} \sum_{n=0}^{+\infty} p_{i,j} P([X_n = i, T_{k,k} > n] | [X_0 = k]) = \sum_{i \in S} p_{i,j} \rho_i(k).
\end{aligned}$$

La relazione (9) é dunque provata, per ogni $j \neq k$. Il caso $j = k$ si puo' dimostrare semplicemente per *differenza*, e quindi viene lasciato al lettore. \square

Vediamo ora un teorema che stabilisce una condizione necessaria e sufficiente per l'esistenza di una distribuzione stazionaria π , e una espressione per π .

Teorema 8.19 *Supponiamo che S sia irriducibile. Condizione necessaria e sufficiente perché esista una distribuzione stazionaria π é che tutti gli stati siano ricorrenti non-nulli. In questo caso, π é unica, ed é data da:*

$$\pi_i = \frac{1}{\mu_i}$$

per ogni stato i .

Dimostrazione. Supponiamo dapprima che esista una distribuzione invariante. Dato che la catena é irriducibile, per il lemma 8.15 tutti gli stati sono ricorrenti. Mostriamo ora che tali stati sono non nulli. Se X_0 ha distribuzione invariante π , il processo diventa stazionario. Dunque avremo

$$\pi_j \mu_j = \sum_{n=1}^{+\infty} P([T_{j,j} \geq n] | [X_0 = j]) P([X_0 = j]) = \sum_{n=1}^{+\infty} P([T_{j,j} \geq n] \cap [X_0 = j]).$$

Ora, poniamo

$$a_n = P\left(\bigcap_{0 \leq m \leq n} [X_m \neq j]\right).$$

Avremo:

$$P([T_{j,j} \geq 1, X_0 = j]) = P([X_0 = j]),$$

ovviamente, e, per $n > 1$:

$$\begin{aligned}
&P([T_{j,j} > n, X_0 = j]) = P([X_0 = j, X_m \neq j, 1 \leq m \leq n-1]) = \\
&= P([X_m \neq j, 1 \leq m \leq n-1]) - P([X_m \neq j, 0 \leq m \leq n-1]) = a_{n-2} - a_{n-1}
\end{aligned}$$

per omogeneita'. Sommando al variare di n , e mandando a limite, si ottiene

$$\pi_j \mu_j = P([X_0 = j]) + P([X_0 \neq j]) - \lim_n a_n = 1$$

in quanto j é ricorrente (v. esercizi). Dunque necessariamente si deve avere

$$\pi_j = \frac{1}{\mu_j}$$

e quindi $\mu_i \neq \infty$ per il lemma 8.14. Cio' mostra anche che π é unica, se esiste.

Per quanto riguarda il viceversa, nel lemma 8.18 gia' si é dimostrato che una distribuzione invariante esiste certamente se gli stati sono ricorrenti non-nulli, e quindi il teorema é completamente provato. \square

Una semplice conseguenza di questo teorema riguarda la *passeggiata aleatoria* semplice: per questo processo *non esiste alcuna distribuzione stazionaria*, in quanto, pur trattandosi di una catena irriducibile, non esistono stati ricorrenti non-nulli. Infatti, nel caso asimmetrico, gli stati sono tutti transienti, e nel caso simmetrico, pur essendo ricorrenti, gli stati sono tutti nulli.

Un'altra conseguenza riguarda proprio la possibilita' di stabilire se gli stati della catena sono ricorrenti nulli o meno: ad esempio, la passeggiata aleatoria con barriere riflettenti (gia' esaminata in precedenza) presenta una distribuzione invariante abbastanza facile da trovare (esclusi i casi banali in cui $p = 0$ o $p = 1$): tale distribuzione ha tutte le componenti non nulle, dunque tutti gli stati sono ricorrenti non-nulli.

Un altro interessante corollario é il seguente.

Corollario 8.20 *Sia S irriducibile e persistente. Allora gli stati di S sono tutti nulli oppure tutti non-nulli. Nel caso gli stati siano non-nulli, si ha*

$$\rho_j(k) = \frac{\mu_k}{\mu_j},$$

per ogni coppia di stati (j, k) .

Dimostrazione. Supponiamo che gli stati non siano tutti nulli. Allora esiste uno stato j non nullo, e quindi, in virtu' del Lemma 8.18, una distribuzione invariante π . Allora, per il teorema 8.19, tutti gli stati sono non-nulli.

Supponendo ora che gli stati siano ricorrenti non-nulli, per il Teorema 8.19 esiste una sola distribuzione stazionaria, π , le cui componenti sono le quantità $\frac{1}{\mu_j}$, per ogni stato j . D'altra parte, per il Lemma 8.18, fissato uno stato k , una distribuzione stazionaria ha come componenti le quantità $\frac{\rho_j(k)}{\mu_k}$, con $j \in S$. Di conseguenza, per l'unica distribuzione stazionaria π si deve avere

$$\pi(j) = \frac{1}{\mu_j} = \frac{\rho_j(k)}{\mu_k},$$

per ogni j , da cui l'asserto. \square

Una catena di Markov molto interessante, a questo riguardo, è la passeggiata aleatoria con barriera (una sola) parzialmente assorbente: gli stati in questione sono tutte le posizioni da 0 in poi, e le regole sono le solite della passeggiata semplice, con la differenza che, partendo dallo stato 0, si può passare allo stato 1 con probabilità p , oppure restare in 0, con probabilità q . Dunque, la matrice di transizione P è infinita:

$$P = \begin{pmatrix} q & p & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \dots \\ q & 0 & p & 0 & 0 & 0 & 0 \dots \\ 0 & q & 0 & p & 0 & 0 & 0 \dots \\ 0 & 0 & q & 0 & p & 0 & 0 \dots \\ 0 & 0 & 0 & q & 0 & p & 0 \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}.$$

Intanto, è facile verificare che la catena è irriducibile. Ora, usando i soliti sistemi, non è difficile ricavare una distribuzione invariante π (se esiste). Infatti, detti π_j i termini di tale distribuzione, si deve avere

$$\pi_j = \left(\frac{p}{q}\right)^j \pi_0,$$

per ogni j . Una tale distribuzione esiste se e solo se la serie $\sum_j \left(\frac{p}{q}\right)^j$ è convergente, e cioè è possibile se e solo se $p < q$. Dunque, nel caso $p \geq q$, gli stati sono tutti transienti, o ricorrenti nulli, e non esiste alcuna distribuzione invariante. Se invece $p < q$, gli stati sono tutti ricorrenti non-nulli, e la distribuzione stazionaria è data da

$$\pi = \left(1 - \frac{p}{q}, \frac{p}{q} - \frac{p^2}{q^2}, \frac{p^2}{q^2} - \frac{p^3}{q^3}, \dots\right).$$

Ad esempio, se $q = \frac{2}{3}$, si vede facilmente che il tempo medio di ricorrenza per un generico stato n è 2^{n+1} .

L'ultimo esempio conduce anche ad una domanda: nel caso $q \leq p$, sappiamo che la passeggiata aleatoria con barriera parzialmente assorbente è transiente o ricorrente nulla. Ma quale dei due casi è quello giusto?

In quella situazione particolare, non è particolarmente difficile dedurre direttamente (grazie anche a quanto sappiamo a proposito della passeggiata aleatoria semplice) come stanno le cose: quando $p = q$, la catena è ricorrente, altrimenti è transiente.

Ma, in situazioni più generali, può esser utile un criterio, che ora enunceremo, ma senza riportarne la dimostrazione.

Teorema 8.21 *Sia S una catena irriducibile, e sia s un suo stato qualsiasi. La catena è transiente se e solo se esiste almeno una soluzione non nulla $\{y_j, j \neq s\}$ al sistema di equazioni*

$$y_j = \sum_{i \neq s} p_{j,i} y_i,$$

e tale soluzione verifichi la condizione $|y_j| \leq 1 \ \forall j$.

Esistono anche teoremi di convergenza diretta della successione P^n , sotto certe ipotesi. Noi ne enunceremo uno, e vedremo poi con maggiori dettagli il caso di catene finite. Occorre una definizione.

Definizione 8.22 Sia s uno stato generico di una catena di Markov. Denotiamo con $d(s)$ il *massimo comun divisore* di tutti gli interi positivi k per cui $(P^k)_{s,s} > 0$. La quantità $d(s)$ viene detta il *periodo* dello stato s . Se $d(s) > 1$ si dice che s è *periodico*. Se invece $d(s) = 1$ si dice che s è *aperiodico*.

Ad esempio, è chiaro che, se $P_{s,s} > 0$, allora s è aperiodico. Nella passeggiata aleatoria semplice, tutti gli stati hanno periodo 2.

Proposizione 8.23 *Supponiamo che i e j siano due stati comunicanti di una stessa Catena di Markov. Allora essi hanno lo stesso periodo.*

Dimostrazione. Denotiamo con d il periodo di i , e consideriamo un intero h , tale che $p_{i,j}(h) > 0$, e un intero k , tale che $p_{j,i}(k) > 0$. Dunque, $p_{i,i}(h+k) > 0$, e pertanto $h+k$ é multiplo di d . Sia ora m un intero positivo tale che $p_{j,j}(m) > 0$, e quindi multiplo di $d(j)$. Allora é possibile passare da i a i in $h+m+k$ passi, e quindi $m+h+k$ é multiplo di d . Poiché anche $h+k$ é multiplo di d , ne segue che m é multiplo di d . Dunque m é multiplo sia di $d(j)$ che di d : per l'arbitrarietà di m , ne segue che $d(j) \geq d$. Ma, ragionando in maniera simmetrica, si può analogamente provare che $d \geq d(j)$, e dunque i due periodi coincidono. \square

Ovviamente, se esiste uno stato i tale che $p_{i,i} > 0$, e la catena é irriducibile, allora essa é anche aperiodica. Tuttavia, esistono anche catene irriducibili e aperiodiche la cui matrice P abbia tutti 0 nella diagonale principale (basta pensare alla matrice 3×3 che ha 0 sulla diagonale e $\frac{1}{2}$ sulle altre posizioni).

Teorema 8.24 *Se una catena di Markov é irriducibile e aperiodica, allora*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (P^n)_{i,j} = \frac{1}{\mu_j},$$

per ogni coppia di stati (i, j) .

Non riportiamo qui la dimostrazione. Facciamo notare, comunque, che la convergenza di P^n comporta automaticamente la convergenza delle componenti di $\pi_n = P_{X_n}$: naturalmente, se gli stati sono nulli o transienti, il limite deve intendersi nullo, e quindi non si può parlare di distribuzione invariante. Se invece la catena é irriducibile e non-nulla, e tutti gli stati sono aperiodici, la matrice limite di P^n ha tutte le righe uguali, e pertanto, *qualunque sia la distribuzione iniziale*, la distribuzione limite (e invariante) é sempre la stessa, e naturalmente segue la legge stabilita nel teorema 8.19; inoltre, se si sostituisce la matrice di transizione P con la matrice limite di P^n , allora, quale che sia la distribuzione di X_0 , quella di X_1 diventa immediatamente invariante, e la successione $(X_n)_n$ diviene globalmente *indipendente*.

Il risultato descritto nel teorema 8.24 può esser meglio descritto, se la catena in questione é una catena finita, e quindi la matrice P é una matrice quadrata

$N \times N$, ove N é la cardinalita' di S . Notiamo che, anche in questo caso, non é detto in generale che la successione P^n sia convergente (anche se, come sappiamo, una distribuzione invariante esiste sempre): infatti, se P é la matrice 2×2 che presenta 1 nelle posizioni $P_{1,2}$ e $P_{2,1}$, si vede facilmente che $P^{2k} = I$ (matrice identita') e $P^{2k+1} = P$ per ogni k . Tuttavia, possiamo far riferimento ad un celebre teorema sulle matrici (teorema di Frobenius-Perron), che permette di decomporre una matrice di transizione finita (nel caso aperiodico) in senso canonico.

Teorema 8.25 *Sia P la matrice di transizione $N \times N$ di una catena finita, irriducibile e aperiodica. Allora P ammette N autovalori reali (contando eventuali molteplicita'), uno dei quali é 1, e gli altri di modulo strettamente minore di 1. Dunque esiste una matrice invertibile U (cambiamento di base) e una matrice diagonale D tale da aversi (decomposizione canonica)*

$$P = U \times D \times U^{-1},$$

(gli elementi diagonali di D non sono altro che gli autovalori di P , e la matrice U ha come colonne gli autovettori di P) e di conseguenza la successione $(P^n)_n$ ammette limite.

Anche di questo teorema non riportiamo la dimostrazione. Ma possiamo far notare che, grazie alla decomposizione canonica di P , si vede subito che

$$P^n = U \times D^n \times U^{-1}$$

per ogni n , e dunque la successione $(P^n)_n$ ammette limite, perché gli elementi di D^n hanno tutti limite (1 o 0).

Questo discorso si puo' ripetere anche nei casi periodici, purché la matrice P ammetta *comunque* una decomposizione canonica: ad esempio, cio' accade se la matrice é simmetrica e definita positiva.

Riporteremo ora, come esempio, la decomposizione di una matrice stocastica 2×2 , con elementi tutti positivi. Si fissino dunque due numeri reali a e b , strettamente compresi fra 0 e 1, e si ponga: $a' = 1 - a$, $b' = 1 - b$, con $a \geq b$. Sia poi

$$P := \begin{pmatrix} a & a' \\ b & b' \end{pmatrix}$$

la generica matrice stocastica. Gli autovalori sono 1 e $a - b$, per cui si ha

$$D := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & a - b \end{pmatrix}.$$

Scegliamo come autovettori i seguenti:

$$v_1 = \left(\frac{b}{a' + b}, \frac{b}{a' + b} \right), \quad v_2 = \left(\frac{a'}{a' + b}, \frac{-b}{a' + b} \right):$$

allora la matrice U sarà

$$U = \begin{pmatrix} \frac{b}{a' + b} & \frac{a'}{a' + b} \\ \frac{b}{a' + b} & \frac{-b}{a' + b} \end{pmatrix},$$

da cui

$$U^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{a'}{b} \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Calcoli usuali confermano che risulta

$$P = UDU^{-1},$$

e quindi

$$P^n = UD^nU^{-1},$$

da cui

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P^n = UD_0U^{-1},$$

dove

$$D_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Chiaramente, questo comporta che

$$\lim_n P^n = \begin{pmatrix} \frac{b}{a' + b} & \frac{a'}{a' + b} \\ \frac{b}{a' + b} & \frac{a'}{a' + b} \end{pmatrix}:$$

ciascuna riga esprime l'unica distribuzione invariante per P .

9 Catene di Markov in tempo continuo

Prima di trattare in maniera sistematica questo argomento, presentiamo alcuni esempi concreti di processi di questo genere. Il prototipo di una catena di Markov in tempo continuo é il *processo di Poisson*: supponendo di voler registrare con un contatore Geiger le emissioni di una qualche sostanza radioattiva a partire da un certo istante iniziale (che porremo uguale a 0 per convenzione), si puo' denotare per ogni istante $t > 0$ con $N(t)$ il numero di particelle emesse fino all'istante t . Le v.a. $N(t)$ possono assumere naturalmente valori interi non-negativi, e sono soggette ad alcune condizioni di tipo teorico, ma abbastanza ragionevoli. Tali condizioni si possono cosi' riassumere (con $t, h > 0$ e $m, n \in \mathbb{N}$):

$$\left\{ \begin{array}{l} N(0) = 0, \quad s < t \Rightarrow N(s) \leq N(t) \\ P([N(t+h) = m] | [N(t) = n]) = \begin{cases} o(h), & m > n+1 \\ \lambda h + o(h), & m = n+1 \\ 1 - \lambda h + o(h), & m = n \end{cases} \\ \text{se } s < t, N(t) - N(s) \text{ sia indipendente da } \mathcal{F}_s, \end{array} \right.$$

dove \mathcal{F}_s denota la σ -algebra indotta dalle $X(\tau)$, con $\tau \leq s$, λ é una quantita' positiva fissata (intensita' del processo) e la scrittura $o(h)$ denota una quantita' infinitesima (con h) di ordine superiore a h .

Intanto, osserviamo che la seconda condizione fornisce una forma di omogeneita' temporale: infatti, le quantita' a secondo membro non dipendono da t . Per individuare le distribuzioni delle $N(t)$, poniamo, per $s < t$ e $i \leq j$:

$$P_{i,j}(s, t) = P([N(t) = j] | [N(s) = i])$$

e valutiamo (per h infinitesimo)

$$\begin{aligned} P_{i,j}(s, t+h) &= P([N(t+h) = j] | [N(s) = i, N(t) = j])P([N(t) = j] | [N(s) = i]) + \\ &+ P([N(t+h) = j] | [N(s) = i, N(t) = j-1])P([N(t) = j-1] | [N(s) = i]) + o(h) = \\ &P_{i,j}(s, t)(1 - h\lambda) + P_{i,j-1}(s, t)h\lambda + o(h). \end{aligned}$$

Sottraendo $P_{i,j}(s, t)$ e dividendo per h , si ha

$$\frac{P_{i,j}(s, t+h) - P_{i,j}(s, t)}{h} = P_{i,j-1}(s, t)\lambda - P_{i,j}(s, t)\lambda + O(h),$$

da cui, tenendo fissa s :

$$\frac{d}{dt}P_{i,j}(s, t) = \lambda P_{i,j-1}(s, t) - \lambda P_{i,j}(s, t). \quad (10)$$

Queste equazioni differenziali sono dette *equazioni forward*, e permettono di ricavare le distribuzioni delle $N(t)$: assumendo $i = s = 0$, si ha chiaramente $P_{0,j}(0, t) = P([N(t) = j])$, e tenendo presente che per $j = i$ si ha comunque $P_{i,j-1}(s, t) = 0$, ricaviamo

$$P'_{0,0}(0, t) = -\lambda P_{0,0}(0, t),$$

il che fornisce subito $P([N(t) = 0]) = e^{-\lambda t}$. Passando ora a $j = 1$, troviamo

$$P'_{0,1}(0, t) = \lambda P_{0,0}(0, t) - \lambda P_{0,1}(0, t),$$

da cui, con metodi soliti, si ricava

$$P([N(t) = 1]) = \lambda t e^{-\lambda t}.$$

Procedendo con gli altri valori di j , vediamo che possiamo assumere, per induzione,

$$P([N(t) = j]) = \frac{\lambda^j t^j}{j!} e^{-\lambda t} :$$

se ne ricava facilmente per $j + 1$ l'equazione

$$P'_{0,j+1}(0, t) = \lambda \frac{t^j}{j!} e^{-\lambda t} - \lambda P_{0,j+1}(0, t) :$$

risolvendo l'equazione con i soliti metodi, troviamo $P([N(t) = j + 1]) = H t^{j+1} e^{-\lambda t}$, e $H = \frac{\lambda^{j+1}}{(j+1)!}$. L'ipotesi di ricorrenza é così confermata, e in definitiva avremo

$$P([N(t) = j]) = \frac{\lambda^j t^j}{j!} e^{-\lambda t}$$

(come del resto usualmente si ritiene sia distribuita la v.a. $N(t)$). Un altro modo per discutere questo processo consiste nel calcolare le *probabilità di transizione* $P_{i,j}(t)$, definite come le quantità

$$P_{i,j}(t) = P([N(t+s) = j] | [N(s) = i]),$$

che sappiamo essere indipendenti da s . Le equazioni forward diventano ora

$$P'_{i,j}(t) = \lambda P_{i,j-1}(t) - \lambda P_{i,j}(t)$$

e si risolvono riconducendole alle precedenti:

$$P_{i,j}(t) = P([N(t) = j - i]) = \frac{(\lambda t)^{j-i}}{(j-i)!} e^{-\lambda t}.$$

Una generalizzazione del processo di Poisson prende il nome di *processo di nascita* ed é definito come una famiglia $N(t)$ di v.a. a valori interi non-negativi, soddisfacente alle seguenti condizioni teoriche:

$$\left\{ \begin{array}{l} N(0) = 0, \quad s < t \Rightarrow N(s) \leq N(t) \\ P([N(t+h) = m] | [N(t) = n]) = \begin{cases} o(h), & m > n+1 \\ \lambda_n h + o(h), & m = n+1 \\ 1 - \lambda_n h + o(h), & m = n \end{cases} \\ \text{se } s < t, N(t) - N(s) \text{ sia indipendente da } \mathcal{F}_s, \end{array} \right. \quad (11)$$

La differenza rispetto al processo di Poisson sta nel fatto che qui si ha una intensita' dipendente dal numero n di eventi registrati. Ma naturalmente la probabilita' $P([N(t+h) = m] | [N(t) = n])$ resta comunque indipendente da t . Di nuovo possiamo definire le quantita'

$$P_{i,j}(t) = P([N(t+s) = j] | [N(s) = i])$$

e ricavare le *equazioni forward*:

$$P'_{i,j}(t) = \lambda_{j-1} P_{i,j-1}(t) - \lambda_j P_{i,j}(t).$$

Adottando la convenzione $P_{i,i-1} = 0$ e la condizione ovvia $P_{i,j}(0) = \delta_{i,j}$, si vede dapprima che queste equazioni, per $j = i$, diventano

$$P'_{i,i}(t) = -\lambda_i P_{i,i}(t)$$

e quindi ammettono la soluzione

$$P_{i,i}(t) = e^{-\lambda_i t}.$$

Di seguito, sostituendo di volta in volta $j = i+1$, $j = i+2$, etc., si perviene a quella che é l'unica soluzione delle equazioni forward trovate.

Non é difficile provare (grazie anche a teoremi di regolarita' delle soluzioni delle equazioni differenziali lineari), che tutte le soluzioni in questione sono di classe C^∞ , e quindi si puo' dedurre che

$$\lim_{t \rightarrow 0} P_{i,j}(t) = \delta_{i,j}.$$

Inoltre, sostituendo $t = 0$ nelle equazioni forward, troviamo direttamente

$$P'_{i,j}(0) = \begin{cases} \lambda_i, & \text{se } j = i + 1 \\ -\lambda_i, & \text{se } j = i \\ 0, & \text{negli altri casi .} \end{cases}$$

Come vedremo presto, la matrice $P'(0)$, i cui elementi sono le quantita' $P'_{i,j}$, viene detta *generatore* delle transizioni $P_{i,j}(t)$, e denotata solitamente con G .

Possiamo finalmente iniziare la trattazione delle catene di Markov in tempi continui. Un tale processo viene solitamente denotato con $(X(t))_{t>0}$, e le v.a. sono supposte a valori in N : come in precedenza, lo spazio degli stati sara' denotato con S . La *condizione di Markov* che qui viene imposta si formula come segue:

$$\begin{aligned} P([X(t_n) = j_n] | [X(t_1) = j_1, X(t_2) = j_2, \dots, X(t_{n-1}) = j_{n-1}]) = \\ = P([X(t_n) = j_n] | [X(t_{n-1}) = j_{n-1}]), \end{aligned}$$

non appena $t_1 < t_2 < \dots < t_{n-1} < t_n$, e quali che siano le quantita' j_1, j_2, \dots, j_n . Naturalmente, questa condizione porta a definire, come nel caso discreto, le *probabilita' di transizione* nel modo seguente:

$$P_{i,j}(s, t) = P([X(t) = j] | [X(s) = i]),$$

a patto che $s < t$. Come nel caso discreto, anche qui assumeremo una ipotesi di *omogeneita'*, ossia che $P_{i,j}(s, t) = P_{i,j}(0, t - s)$: il passaggio dallo stato i nell'istante s allo stato j nell'istante t ha la stessa probabilita' del passaggio dallo stato i nell'istante iniziale allo stato j in tempo $t - s$. Cio' semplifica la trattazione, e riduce la matrice di transizione alla forma

$$P_{i,j}(t) := P_{i,j}(s, s + t),$$

quale che sia l'istante s .

D'ora in poi, una catena Markoviana in tempi continui sara' un processo $(X(t))$ come sopra, markoviano e omogeneo, e sara' caratterizzato dalla distribuzione *iniziale* di $X(0)$ e dalla matrice di transizione $P(t)$.

Infatti, possiamo veder subito che, fissata la distribuzione $\pi(0)$ di $X(0)$, la distribuzione $\pi(t)$ di $X(t)$ é ricavata dalla relazione

$$\pi(t) = \pi(0) P(t).$$

(Notiamo subito che la matrice $P(0)$ *non* rappresenta la distribuzione di $X(0)$: essa non é altro che la matrice identita'.) Analogamente a quanto fatto per le catene discrete, anche nel caso continuo si puo' determinare qualsiasi *fidi* del processo, semplicemente a partire da $\pi(0)$ e dalle matrici $P(t)$: lasciamo al lettore la facile verifica del caso.

Giungiamo ora ad un'importante concetto: quello di *semigruppato stocastico*. La famiglia $P(t)$ viene usualmente detta un semigruppato stocastico, in quanto verifica le seguenti condizioni:

- 1) $P(0) = I$, matrice identita';
- 2) $\sum_j P_{i,j}(t) = 1 \ \forall i, t$;
- 3) $P(s+t) = P_s P_t, \ \forall s, t > 0$.

L'ultima condizione non é altro che una nuova versione del Teorema di Chapman-Kolmogorov, e ne lasciamo al lettore la facile dimostrazione. Tale proprieta' esprime proprio il carattere di *semigruppato* della famiglia $P(t)$, e permette di ricavare importanti proprieta' del processo stesso (anche se eviteremo di riportare dimostrazioni complicate).

Tuttavia, per dedurre risultati simili a quelli gia' trovati per i processi di Poisson e di nascita, occorrono altre condizioni, che assumeremo sempre verificate.

Definizioni 9.1 Un semigruppato stocastico é detto *standard* se risulta

$$\lim_{t \rightarrow 0} P(t) = I$$

(componente per componente). Se poi il limite suddetto ha luogo uniformemente rispetto ai termini della diagonale di $P(t)$ (e quindi rispetto a tutti gli altri termini), si parla di semigruppato *uniforme*.

Diremo poi che il semigruppó *é regolare* se esiste finita la derivata $P'_{i,j}(0) := G_{i,j}$ per ogni i e j . Quando cio' accade, la matrice G *é detta il generatore infinitesimale* del semigruppó.

Ogni processo di Poisson ha matrice stocastica uniforme e regolare. I processi di nascita non hanno la regolarita', quando le intensita' λ_j sono illimitate superiormente. Si ha infatti il seguente teorema, che non dimostreremo.

Teorema 9.2 *Un semigruppó $P(t)$ *é uniforme se e solo se le derivate $P'_{i,j}(0)$ esistono finite e sono uniformemente limitate.**

Alcune delle difficoltá nella dimostrazione del teorema 9.2 derivano dal fatto che S solitamente *é infinito*. Nel caso finito tutti i concetti relativi alla uniformita' e alla equilimitatezza naturalmente si banalizzano, e conseguentemente la parte piu' significativa (e comunque non banale) del teorema consiste nel provare che basta la continuita' in 0 (ossia la condizione *standard*) perché il semigruppó sia regolare. Comunque di questi fatti non daremo dimostrazione, limitandoci in ogni occorrenza ad *assumere* semplicemente che il semigruppó sia uniforme.

Per dimostrare il prossimo teorema occorrono alcuni concetti e fatti preliminari, su cui non ci dilungheremo: ci limiteremo a descrivere i risultati essenziali, che servono per chiarire alcuni aspetti tecnici. Iniziamo con alcune definizioni.

Definizioni 9.3 Sia $M = (m_{i,j})$ una generica matrice quadrata $n \times n$, e denotiamo con $|M|$ la quantita'

$$|M| = \max \left\{ \sum_{j=1}^n |m_{i,j}| : i = 1, 2, \dots, n \right\}.$$

La quantita' $|M|$ viene spesso detta la *norma* di M , e chiaramente *é sempre una quantita' non-negativa e finita*. Facilmente si vede che $|M| = 0$ se e solo se M *é la matrice nulla*, che $|tM| = |t||M|$ non appena t *é una costante reale*, e che $|M + N| \leq |M| + |N|$ non appena M e N sono due matrici $n \times n$. Dunque, effettivamente $|M|$ definisce una vera e propria norma nello spazio delle matrici $n \times n$. A proposito di questa norma, possiamo verificare facilmente che, data una

successione $(M_h)_h$ di matrici quadrate $n \times n$, (con n fisso), tale successione converge termine a termine ad una matrice limite M se e solo se la norma $|M_h - M|$ tende a 0, per $h \rightarrow +\infty$. Se poi consideriamo un'altra matrice $N = (n_{i,j})$, di tipo $n \times n$, il prodotto $M \times N$ é ancora una matrice $n \times n$, e si ha

$$\begin{aligned} |M \times N| &\leq \max_i \sum_j \sum_k |m_{i,k}| |n_{k,j}| = \max_i \sum_k \left[\sum_j |n_{k,j}| \right] |m_{i,k}| \leq \\ &\leq \max_i \sum_k |N| |m_{i,k}| = |M| |N|. \end{aligned}$$

Dunque, in particolare avremo $|M \times M| \leq M^2$, e anche $|M^s| \leq |M|^s$, per ogni intero positivo s . Si ha dunque, per ogni intero fissato $s > 0$:

$$\left| \sum_{j=0}^s \frac{M^j}{j!} \right| \leq \sum_{j=0}^s \frac{|M|^j}{j!},$$

(ove s'intenda $M^0 = I$, matrice identita' $n \times n$). Da cio' si comprende facilmente che la *serie* di matrici

$$\sum_{j=0}^{+\infty} \frac{M^j}{j!}$$

converge termine a termine ad una matrice, che per ovvie ragioni verra' denotata con e^M , e detta *matrice esponenziale* di M . Non entreremo nel merito delle dimostrazioni, ma l'esponenziale qui definito ha tutte le proprieta' algebriche della funzione esponenziale: ad esempio si ha $e^{M+N} = e^M \times e^N = e^N \times e^M$ (notiamo qui che le due matrici e^M ed e^N commutano rispetto al prodotto righe per colonne).

Un'altra proprieta' significativa riguarda le derivate: fissata la matrice M $n \times n$, possiamo definire la funzione $t \mapsto e^{tM}$, da \mathbb{R} a valori nello spazio di tutte le matrici $n \times n$. Senza la pretesa di fare tutti i passaggi, ci limiteremo ad osservare che si puo' *derivare per serie* rispetto a t , ottenendo:

$$\frac{d}{dt} e^{tM} = \sum_{j=0}^{+\infty} \frac{d}{dt} \left[\frac{M^j t^j}{j!} \right] = \sum_{j=1}^{+\infty} \left[\frac{M^j t^{j-1}}{(j-1)!} \right] = M e^{tM} :$$

esattamente la formula di derivazione della funzione $t \mapsto e^{mt}$, con m costante reale. (Qui va comunque osservato che la derivata di una funzione $t \mapsto M(t)$ a valori

matrici si *definisce* esattamente come quella di una funzione reale, ossia come limite del rapporto incrementale

$$M'(t) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{M(t+h) - M(t)}{h},$$

ove il limite s'intenda fatto termine a termine, o equivalentemente usando la norma suddetta).

Un procedimento simile si può ripetere anche per matrici *infinite*, come le matrici di transizione di una catena di Markov: l'unica differenza è che in genere una matrice infinita non ha sempre *norma* finita, e quindi bisogna limitare la trattazione allo spazio \mathcal{M} di quelle matrici infinite $M = (m_{i,j})$ per le quali si ha

$$|M| = \sup_{i \in \mathbb{N}} \sum_{j \in \mathbb{N}} |m_{i,j}| < +\infty.$$

Lo spazio \mathcal{M} è uno spazio vettoriale, e la norma $|M|$ ivi definita è una vera e propria norma, che corrisponde ad una convergenza più forte di quella termine a termine, anzi più forte della convergenza *uniforme* rispetto ai termini delle varie matrici.

Per quanto riguarda le matrici di transizione di una catena di Markov, è ovvio che esse facciano parte di \mathcal{M} ; inoltre, se una successione $(M^n)_n$ di matrici di transizione converge rispetto alla norma ad una qualche matrice M , allora anche M è una matrice di transizione.

Non riportiamo dimostrazioni, ma osserviamo che lo spazio \mathcal{M} è anche *completo* rispetto alla convergenza in norma. Dunque, all'incirca con gli stessi passaggi fatti in precedenza, possiamo definire l'*esponenziale* di una matrice $M \in \mathcal{M}$, e tale esponenziale, sempre denotato con e^M , è ancora in \mathcal{M} e gode di tutte le proprietà algebriche e analitiche dell'esponenziale reale.

Possiamo ora caratterizzare i semigrupp stocastici per mezzo dei loro generatori infinitesimali, secondo i seguenti teoremi.

Teorema 9.4 *Sia $P(t)$ un semigrupp stocastico uniforme, e sia G il suo generatore infinitesimale. Allora, per ogni indice i risulta:*

$$G_{i,j} \geq 0, \quad i \neq j, \quad \text{e} \quad \sum_j G_{i,j} = 0.$$

Viceversa, se G é una matrice che verifica le condizioni di cui sopra, e se $G \in \mathcal{M}$, allora G é il generatore infinitesimale di un semigruppó uniforme.

Dimostrazione. Le proprieta'

$$G_{i,j} \geq 0, \quad i \neq j, \quad \text{e} \quad \sum_j G_{i,j} = 0$$

sono facili conseguenze dell'esistenza di G . La parte piu' interessante é la costruzione di un semigruppó uniforme a partire da G , ossia la seconda asserzione del teorema. A tale scopo, basta porre

$$Q(t) = e^{tG}$$

per ogni reale $t \geq 0$, e mostrare che $Q(t)$ definisce effettivamente un semigruppó uniforme di transizione. Per provare che tutti i termini di $Q(t)$ sono positivi, bastera' mostrare che e^M ha tale proprieta', per ogni matrice $M \in \mathcal{M}$. Intanto, la cosa é ovvia se i termini di M sono tutti positivi o nulli. Poi, se i termini di M sono tutti negativi, risulta comunque $-M \leq |M|I$ (la disuguaglianza essendo intesa termine a termine), e quindi $e^{-M} \leq e^{|M|I} = e^{|M|}I$. Allora, passando alle inverse:

$$e^M \geq e^{-|M|}I > 0.$$

In generale, poiché ogni matrice $M \in \mathcal{M}$ si puo' esprimere come differenza di due matrici positive in \mathcal{M} , M^+ e M^- , ne segue che

$$e^M = e^{M^+} e^{-M^-} > 0.$$

Per quanto riguarda la somma dei termini di ogni riga della matrice $Q(t)$, dato il tipo di convergenza della serie esponenziale basta provare che risulta

$$\sum_j G_{i,j}^n = 0$$

per ogni potenza n della matrice G . A questo scopo, osserviamo intanto che la serie doppia $\sum_j \sum_k |G_{i,j} G_{j,k}|$ risulta convergente per ogni i , e la somma é dominata da $|G|^2$. Da cio' segue che

$$\sum_j \sum_k G_{i,j} G_{j,k} = \sum_j G_{i,j} \left[\sum_k G_{j,k} \right] = 0.$$

Dunque G^2 ha la proprietà richiesta, e per induzione si prova facilmente che ogni potenza G^n gode della stessa proprietà'.

Infine, la dimostrazione che $Q(t)$ è uniforme deriva dal Teorema 9.2 e dal fatto che $Q'(0) = G \in \mathcal{M}$. \square

Il prossimo risultato mostra sostanzialmente che il semigruppoo $Q(t) = e^{Gt}$ trovato nel teorema precedente non è altro che il semigruppoo $P(t)$: in altre parole, la formula $P(t) = e^{Gt}$ permette di ricavare $P(t)$ dalla conoscenza del generatore G (nel caso uniforme).

Teorema 9.5 *Supponiamo che il semigruppoo uniforme $P(t)$ ammetta generatore infinitesimale G . Allora si ha:*

$$P'(t) = P(t)G \quad (\text{equazione forward}),$$

$$P'(t) = GP(t) \quad (\text{equazione backward}).$$

Conseguentemente si ricava

$$P(t) = e^{Gt}.$$

Dimostrazione. Per ogni positivo t , e ogni h infinitesimo positivo, si ha $P(t+h) = P(t)P(h)$, da cui $P(t+h) - P(t) = P(t)(P(h) - I)$. Dividendo per h , e mandando a limite, si ottiene esattamente l'equazione forward. Iniziando invece con la scrittura $P(t+h) = P(h)P(t)$, e procedendo in maniera analoga, si perviene all'equazione backward. La formula esplicita per $P(t)$ deriva dal metodo usuale di risoluzione dei sistemi di equazioni differenziali lineari (applicato nello spazio \mathcal{M}). \square

Esempio 9.6 Vale la pena, a questo punto, di individuare con ragionevoli esempi l'esponenziale almeno di matrici finite. Nel caso di dimensione 2, la forma usuale di un generatore è la seguente:

$$G = \begin{pmatrix} -a & a \\ b & -b \end{pmatrix},$$

con a e b positivi. Un semplice calcolo fornisce il quadrato di G :

$$G^2 = -(a+b)G.$$

Da cio' deriva subito l'espressione generale per G^n :

$$G^n = (-1)^{n-1}(a+b)^{n-1}G,$$

con $n \geq 1$. Di conseguenza

$$e^{tG} = I + \sum_{n=1}^{+\infty} t^n \frac{(-1)^{n-1}(a+b)^{n-1}}{n!} G = I - \frac{e^{-(a+b)t} - 1}{a+b} G.$$

Derivando (con le usuali regole) rispetto a t , troviamo

$$\frac{d}{dt} e^{tG} = e^{-(a+b)t} G.$$

Per verificare le equazioni backward e forward, valutiamo ora:

$$G e^{tG} = e^{tG} G = G - \frac{G^2}{(a+b)} (e^{-(a+b)t} - 1) = G + G(e^{-(a+b)t} - 1) = e^{-(a+b)t} G,$$

da cui l'equazione forward. L'altra é analoga.

Come per il Processo di Poisson, anche per un'arbitraria catena di Markov in tempi continui si puo' parlare di *tempo di soggiorno*, nel senso seguente.

Definizione 9.7 Sia $(X_t)_t$ una catena di Markov in tempi continui, con matrice stocastica $P(t)$, e supponiamo che il semigrupp $P(t)$ sia uniformemente continuo. Per ogni $i \in S$, poniamo

$$Y_i := \inf\{t > 0 : [X(t) \neq i] | [X(0) = i]\}.$$

La v.a. Y_i é detta *tempo di soggiorno* nello stato i .

Si provi (per esercizio) che effettivamente Y_i é una v.a.. Risulta:

Teorema 9.8 La v.a. Y_i é distribuita esponenzialmente, con intensita' $-G_{i,i}$, ove G é il generatore di $P(t)$.

Dimostrazione. Poniamo, per ogni reale $t > 0$:

$$q(t) = P([Y_i > t] | [X(0) = i]).$$

Per $s, t > 0$ si ha l'implicazione: $[Y_i > t + s] \Rightarrow [Y_i > t]$, dunque

$$\begin{aligned} q(t + s) &= P([Y_i > t + s] | [X(0) = i]) = P([Y_i > t + s] \cap [Y_i > t] | [X(0) = i]) = \\ &= P([Y_i > t + s] | [Y_i > t] \cap [X(0) = i]) P([Y_i > t] | [X(0) = i]). \end{aligned}$$

Per la proprietà di Markov e l'omogeneità, si ha poi

$$P([Y_i > t + s] | [Y_i > t] \cap [X(0) = i]) = P([Y_i > t + s] | [Y_i > t] \cap [X(t) = i]) = q(s)$$

per cui

$$q(t + s) = q(t)q(s).$$

Dalla teoria delle equazioni funzionali, sappiamo che l'ultima condizione è verificata solo dalla funzione $q(t) = e^{kt}$, con k costante reale. Dobbiamo ora dimostrare che $k = G_{ii}$: ma chiaramente si ha $k = q'(0)$, e, dalla definizione di q :

$$q'(0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{P([Y_i > h] | [X(0) = i]) - P([Y_i > 0] | [X(0) = i])}{h}.$$

Ora, si ha $P([Y_i > 0] | [X(0) = i]) = q(0) = 1$, per quanto sappiamo di q . Inoltre, possiamo scrivere

$$\begin{aligned} P([Y_i > h] | [X(0) = i]) &= \lim_{N \rightarrow \infty} P\left([X(\frac{1}{N}h) = i, X(\frac{2}{N}h) = i, \dots, X(\frac{N}{N}h) = i] \right) = \\ &= \lim_{N \rightarrow \infty} P([X(\frac{1}{N}h) = i] | [X(0) = i]) \times P([X(\frac{1}{N}h) = i] | [X(0) = i]) \times \dots \\ &\times P([X(\frac{1}{N}h) = i] | [X(0) = i]) = \lim_N (P_{i,i}(\frac{h}{N}))^N \sim (1 + \frac{hG_{ii}}{N})^N = e^{hG_{ii}}, \end{aligned}$$

dove il simbolo \sim sta a significare "a meno d'infinitesimi di ordine superiore".

Dunque,

$$q'(0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^{hG_{ii}} - 1}{h} = G_{i,i} \quad \square$$

Passiamo ora a studiare l'esistenza o meno di distribuzioni stazionarie.

Si ha la seguente definizione.

Definizione 9.9 Una distribuzione π per una catena di Markov in tempi continui è detta *invariante* (o *stazionaria*) se risulta

$$\pi = \pi P(t)$$

per ogni $t > 0$.

Ovviamente, se $X(0)$ ha distribuzione invariante π , allora il processo $X(t)$ diventa stazionario. Si ha la seguente caratterizzazione.

Teorema 9.10 *Nel caso di un semigrupp uniformemente continuo, una distribuzione π é invariante se e solo se risulta*

$$\pi G = 0,$$

ove G é il generatore del semigrupp $P(t)$.

Dimostrazione. Supponiamo che risulti $\pi G = 0$ per una distribuzione π su S . Allora si ha $\pi G^n = 0$ per ogni $n > 0$ e

$$\pi P(t) = \pi e^{Gt} = \pi I + \sum_{j=1}^{+\infty} \frac{\pi G^j}{j!} t^j = \pi.$$

Dunque π é invariante. Viceversa, supponiamo che π sia invariante. Allora si ha

$$\pi G = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\pi P(h) - \pi I}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\pi - \pi}{h} = 0.$$

L'asserto é cosi' completamente provato. \square

Chiaramente, se lo spazio S degli stati é finito, nel teorema precedente basta l'ipotesi che il semigrupp sia standard. E, come gia' accadeva nel caso discreto, quando S é finito possiamo dedurre comunque l'esistenza di una distribuzione invariante (purché il semigrupp sia standard).

Proposizione 9.11 *Se S é finito, e se la catena $X(t)$ ha semigrupp standard, allora esiste almeno una distribuzione invariante.*

Dimostrazione. Fissiamo un generico intero $N > 0$, e consideriamo la catena di Markov

$$Y_n^{(N)} := X\left(\frac{n}{2^N}\right),$$

per $n \in \mathbb{N}$. Per tale catena (discreta), la matrice di transizione é $P(2^{-N})$, e certamente esiste una distribuzione invariante π_N , in virtu' di 8.13. Per la proprieta' di semigrupp, la distribuzione π_N é invariante anche per la catena $Y_n^{(N-1)}$, essendo

$$\pi_N P\left(\frac{1}{2^{N-1}}\right) = \pi_N P\left(\frac{1}{2^N}\right) P\left(\frac{1}{2^N}\right) = \pi_N.$$

Ora, al variare di N , le distribuzioni π_N costituiscono una successione nello spazio compatto $[0, 1]^S$, e quindi ammettono una sottosuccessione π_{N_k} convergente: sia dunque π il limite di tale successione. E' ovvio, dato che S é finito, che π é ancora una distribuzione di probabilita' su S . Mostriamo ora che essa é invariante. Si ha, per ogni intero positivo k :

$$\pi P\left(\frac{1}{2^{N_k}}\right) = \lim_{j \rightarrow \infty} \pi_{N_j} P\left(\frac{1}{2^{N_k}}\right) = \lim_j \pi_{N_j} = \pi,$$

per quanto gia' osservato circa l'invarianza di π_N rispetto alle catene $Y_n^{(M)}$, con $M < N$. Dunque, π é invariante rispetto a ogni catena $Y^{(N)}$. Si ha allora

$$\pi G = \lim_{N \rightarrow \infty} 2^N (\pi P(\frac{1}{2^N}) - \pi I) = \lim_{N \rightarrow \infty} 2^N (\pi - \pi) = 0.$$

In virtu' del teorema precedente, si ha l'asserto. \square

Possiamo anche formulare un teorema di convergenza, per catene irriducibili, secondo la seguente definizione:

Definizione 9.12 Una catena di Markov in tempi continui é detta *irriducibile* se, per ogni coppia di stati i e j , esiste un numero positivo t tale che $P_{i,j}(t) > 0$.

Teorema 9.13 *Supponiamo che la catena $(X(t))$ sia irriducibile, e il semigruppoo $P(t)$ sia standard. (Non occorre uniformita'). Si hanno le due seguenti alternative:*

a) Se esiste una distribuzione stazionaria π essa é unica, e si ha

$$\lim_{t \rightarrow \infty} P_{i,j}(t) = \pi(j),$$

per ogni i e j in S .

b) Se non esistono distribuzioni stazionarie, allora $\lim_{t \rightarrow \infty} P_{i,j}(t) = 0$ per ogni i e j .

Esempio 9.14 Consideriamo la catena di Markov regolata dal generatore infinitesimale dell'esempio 9.6:

$$G = \begin{pmatrix} -a & a \\ b & -b \end{pmatrix},$$

con a e b positivi. Abbiamo visto che risulta

$$P(t) = I - \frac{G}{a+b}(e^{-(a+b)t} - 1),$$

e quindi una semplice operazione di limite fornisce:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} P(t) = I + \frac{G}{a+b} = \frac{1}{a+b} \begin{pmatrix} b & a \\ b & a \end{pmatrix},$$

dunque la distribuzione invariante é data da

$$\pi = \left(\frac{b}{a+b}, \frac{a}{a+b} \right).$$

D'altra parte, un facile calcolo prova che effettivamente π é l'unica distribuzione che soddisfa $\pi G = 0$.

Esempio 9.15 Mostreremo ora un esempio di catena infinita in tempi continui, e cercheremo (se esiste) la distribuzione invariante. Il processo prende il nome di *processo di immigrazione-emigrazione*, ed é una semplice variante del processo di Poisson. In ogni istante t di tempo, si ha una popolazione di $X(t)$ individui, con $X(t) \in \mathbb{N}$. Si suppone che, se $X(t) = j$ (con $j > 0$), in un istante appena successivo $t + h$ la popolazione possa essere aumentata di una unita', con probabilita' $\lambda_1 h + o(h)$, oppure diminuita di una unita', con probabilita' $\lambda_2 h + o(h)$, o infine rimanere invariata, con probabilita' $1 - (\lambda_1 + \lambda_2)h + o(h)$.

Nel caso $X(t) = 0$, si presume che nell'istante successivo $t + h$ si possa avere comunque un'*immigrazione* (e quindi passare a 1 individuo) con probabilita' $\lambda_1 h + o(h)$, oppure non avere incrementi, e quindi restare a 0, con probabilita' $1 - \lambda_1 h + o(h)$. Facili conti, sulla falsariga di quelli svolti per il Processo di Poisson, conducono al seguente generatore:

$$G_{i,j} = \begin{cases} \lambda_2, & j = i - 1, i \neq 0 \\ -(\lambda_1 + \lambda_2), & j = i, i \neq 0 \\ \lambda_1, & j = i + 1, \\ -\lambda_1, & j = i = 0 \end{cases}$$

e ovviamente $G_{i,j} = 0$ negli altri casi. Per trovare la distribuzione invariante, imponiamo la condizione $\pi G = 0$. Impostando e risolvendo di volta in volta le varie equazioni, si perviene infine alle seguenti condizioni:

$$\pi(1) = \rho\pi(0), \pi(2) = \rho^2\pi(0), \dots, \pi(n) = \rho^n\pi(0), \dots$$

ove $\rho = \frac{\lambda_1}{\lambda_2}$. Ovviamente, una distribuzione del genere esiste (ed é unica) se e solo se $\rho < 1$. Cio' vuol dire in pratica che la popolazione tendera' ad una distribuzione stabile solo qualora l'intensita' di immigrazione (λ_1) sia inferiore a quella di emigrazione (cioé λ_2). In questo caso, poiché il processo é comunque irriducibile, la distribuzione invariante é anche il limite delle transizioni $P_{i,j}(t)$, al tendere di t a $+\infty$.

10 Martingale

Quella delle Martingale é un'altra vasta famiglia di Processi Stocastici, dotata di importanti proprieta' e ricca di notevoli applicazioni, in vari settori della Matematica.

In generale, il concetto di Martingala si basa su quello di *filtrazione*, che viene cosi' definito.

Definizione 10.1 Sia (Ω, \mathcal{A}, P) un spazio di probabilita', e sia T un numero reale positivo, possibilmente anche $+\infty$. Si dice *filtrazione* su tale spazio una famiglia crescente $(\mathcal{F}_t)_{0 \leq t \leq T}$ di sotto- σ -algebre di \mathcal{A} .

Ad esempio, nel caso (X_t) sia un processo in tempi continui, esso individua in maniera naturale la filtrazione definita da

$$\mathcal{F}_t = \sigma\{X_s : s \leq t\} :$$

in altri termini, \mathcal{F}_t denota la *storia* del processo fino all'istante t . Tale filtrazione spesso viene detta *filtrazione naturale* associata al processo (X_t) .

Un'altra maniera, piu' concreta, per costruire una filtrazione, consiste nel costruire una serie di partizioni di Ω , sempre piu' raffinate, ciascuna delle quali individui

una σ -algebra. Ad esempio, supponendo che sia $\Omega = [0, 1]$, potremmo definire \mathcal{F}_1 come la σ -algebra indotta dalla partizione di Ω nei due sottointervalli $[0, \frac{1}{2}]$ e $]\frac{1}{2}, 1]$. Poi definiamo \mathcal{F}_2 come la σ -algebra generata dalla partizione ottenuta suddividendo in due sottointervalli di uguale ampiezza ciascuno degli intervalli della prima partizione. E in maniera simile costruiamo $\mathcal{F}_3, \mathcal{F}_4, \dots$ etc. Per quanto riguarda i valori di t compresi fra 0 e 1, quelli compresi fra 1 e 2, etc., possiamo definire \mathcal{F}_t coincidente con $\mathcal{F}_{[t]}$, ove $[t]$ denota la *parte intera* di t . La filtrazione così ottenuta potrebbe anche esser vista come la storia di un qualche processo, ma di solito viene trattata a sé, e prende il nome di *filtrazione per raffinamenti*.

Per quanto visto sopra, spesso si considerano filtrazioni anche semplici *successioni* crescenti di sotto- σ -algebre di \mathcal{A} .

Oltre che al concetto di filtrazione, le martingale sono legate a quello di *valor medio condizionato*, di cui abbiamo già trattato nella Sezione 4.

Possiamo ora dare la definizione di Martingala, nel modo seguente.

Definizione 10.2 Data una filtrazione (\mathcal{F}_t) su (Ω, \mathcal{A}, P) , un processo stocastico (X_t) si dice *adattato* alla filtrazione se ogni X_t è misurabile rispetto a \mathcal{F}_t . Un processo (X_t) adattato a (\mathcal{F}_t) si dice una *martingala* rispetto alla filtrazione assegnata, se accade quanto segue:

- a) $X_t \in L_1$ per ogni $t > 0$.
- b) $E(X_t | \mathcal{F}_s) = X_s$, per ogni $s, t > 0, s < t$.

Qualora (\mathcal{F}_t) sia la filtrazione naturale associata a (X_t) , diremo che (X_t) è una martingala *in sé*, o semplicemente una *martingala*, quando non vi sia pericolo di fraintendimenti.

Passiamo ora a fornire alcuni esempi di Martingale, di tipo discreto: dunque, per il momento, ci limiteremo a successioni del tipo $(S_n)_n$, che siano martingale rispetto a determinate filtrazioni $(\mathcal{F}_n)_n$.

Esempio 10.3 Supponiamo che $(X_n)_n$ sia una successione di variabili aleatorie, indipendenti, dotate di momenti di ordine 1, e aventi tutte media nulla. Denotiamo poi con (\mathcal{F}_n) la filtrazione naturale di questa successione. Chiaramente, sappiamo

che $E(X_{n+1}|\mathcal{F}_n) = 0$, dunque la successione (X_n) non é una martingala. Lo é pero' la successione (S_n) definita da

$$S_n = \sum_{i=1}^n X_i.$$

Infatti, abbiamo

$$E(S_{n+1}|\mathcal{F}_n) = E(X_{n+1}|\mathcal{F}_n) + E(S_n|\mathcal{F}_n) = E(X_n) + S_n = S_n.$$

Notiamo anche che (S_n) é una martingala in sé, in quanto la σ -algebra naturale della successione (S_n) é la stessa della successione (X_n) : infatti, ogni X_n si puo' ricavare, per differenza, dalla conoscenza di S_n e S_{n-1} .

Come caso particolare, possiamo dedurre che la passeggiata aleatoria semplice simmetrica é una martingala in sé.

Esempio 10.4 Consideriamo un processo *a cascata* regolato dalla variabile aleatoria Z che descrive il numero di individui generato da ciascun membro della popolazione. Denotiamo con μ il valor medio di Z , e indichiamo come al solito con Z_n il numero di individui presenti dopo l' n -esima generazione; possiamo asserire che

$$E(Z_{n+1}|(Z_1, \dots, Z_n)) = E(Z_{n+1}|Z_n) = \mu Z_n$$

e dunque la successione (Z_n) non é una martingala, a meno che non sia $\mu = 1$. Ma, ponendo $W_n = \frac{Z_n}{\mu^n}$, allora otteniamo una martingala: basta ricordare che, nei processi a cascata, si ha $E(Z_n) = \mu^n$.

Esempio 10.5 Una catena di Markov di solito non é una martingala, ma una sua *funzione* lo puo' diventare. Supponiamo che $(X_n)_n$ sia una catena di Markov discreta, con spazio degli stati S . Supponiamo che esista una funzione $\phi : S \rightarrow \mathbb{R}$ tale da aversi

$$\phi(i) = \sum_j p_{i,j} \phi(j),$$

(qui $p_{i,j}$ sono gli elementi della matrice di transizione). Un esempio banale si ottiene scegliendo ϕ costante. Si possono pero' trovare anche funzioni diverse, in certi casi. Ad esempio, se la matrice di transizione P fosse l'identita', *ogni* scelta di ϕ andrebbe bene.

Poniamo ora

$$S_n = \phi(X_n),$$

e mostriamo che $(S_n)_n$ é una martingala rispetto alla filtrazione naturale del processo (X_n) . Si ha infatti:

$$\begin{aligned} E(S_{n+1} | (X_1, \dots, X_n)) &= E(\phi(X_{n+1}) | (X_1, \dots, X_n)) = \sum_{i \in S} \phi(i) P([X_{n+1} = i] | (X_1, \dots, X_n)) = \\ &= \sum_{i \in S} \phi(i) p_{X_n, i} = \phi(X_n). \end{aligned}$$

Un'altra classica via per costruire martingale, adattate a qualche filtrazione, conduce poi a una caratterizzazione di questi processi.

Esempio 10.6 Data una filtrazione $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$, e data una v.a. $X \in L_1$, poniamo

$$S_t = E(X | \mathcal{F}_t).$$

In sostanza, la famiglia (S_t) , vista al crescere di t , costituisce una maniera di *approssimare* X sempre meglio, mediando i valori della X su partizioni sempre piu' fini. Per mostrare che (S_t) é una martingala rispetto a \mathcal{F}_t , basta usare la proprieta' di torre: per $0 < s < t$ abbiamo

$$E(S_t | \mathcal{F}_s) = E(E(X | \mathcal{F}_t) | \mathcal{F}_s) = E(X | \mathcal{F}_s) = S_s.$$

Si puo' anche dimostrare che (S_t) é una martingala in sé: se denotiamo con \mathcal{G}_t la σ -algebra indotta dalle v.a. S_u , con $u \leq t$, avremo, per $0 < s < t$:

$$E(S_t | \mathcal{G}_s) = E(E(X | \mathcal{F}_t) | \mathcal{G}_s) = E(X | \mathcal{G}_s) = S_s :$$

l'ultima uguaglianza deriva dal fatto che X_s é misurabile rispetto a \mathcal{G}_s , dall'inclusione $\mathcal{G}_s \subset \mathcal{F}_s$, e dalla proprieta' di torre.

Osservazione 10.7 Questo procedimento, con l'uso della proprieta' di torre, permette di dimostrare, piu' generalmente, che, se (X_t) é una martingala rispetto ad una certa filtrazione (\mathcal{F}_t) , allora essa é anche una martingala in sé.

Esempio 10.8 Una generalizzazione del primo esempio si puo' ottenere rielaborando il processo di Poisson: supponiamo che $(X_t)_t$ sia un processo stocastico con v.a. in L_1 , e avente *incrementi indipendenti*, ossia tale che la v.a. $X_t - X_s$ sia indipendente dalla σ -algebra \mathcal{F}_s indotta da tutte le X_u , con $u \leq s$, non appena $0 < s < t$. Allora $(X_t - E(X_t))_t$ é una martingala in sé. Infatti, per $s < t$, si ha

$$\begin{aligned} E(X_t - E(X_t)|\mathcal{F}_s) &= E(X_t - X_s|\mathcal{F}_s) - E(X_t) + X_s = \\ &= E(X_t - X_s) + X_s - E(X_t) = X_s - E(X_s). \end{aligned}$$

Ora, daremo un importante teorema di convergenza per martingale. Per semplicità, il teorema verterà formulato per martingale in tempi discreti (ossia, successioni di v.a.) e con ipotesi alquanto sovrabbondanti: ma già in tale formulazione il risultato ha notevoli conseguenze dal punto di vista delle applicazioni. Premettiamo alcune considerazioni, che saranno utili al fine della dimostrazione e anche per ulteriori scopi.

Proposizione 10.9 Sia $(S_n)_n$ una Martingala rispetto ad una filtrazione $(\mathcal{F}_n)_n$, e supponiamo che $S_n \in L_2$ per ogni n . Si ha allora, per $k > n$:

$$E((S_k - S_n)^2 I_F) = E(S_k^2 I_F) - E(S_n^2 I_F),$$

qualunque sia $F \in \mathcal{F}_n$.

Dimostrazione. Calcoliamo il momento $E((S_k - S_n)^2 I_F)$, come segue:

$$E((S_k - S_n)^2 I_F) = E(S_k^2 I_F) + E(S_n^2 I_F) - 2E(S_k S_n I_F).$$

Per dimostrare l'asserto, basterà dunque far vedere che

$$E(S_k S_n I_F) = E(S_n^2 I_F),$$

per ogni $F \in \mathcal{F}_n$. Ma ciò deriva facilmente dalla relazione

$$E(S_k S_n | \mathcal{F}_n) = S_n E(S_k | \mathcal{F}_n) = S_n^2.$$

□

Una delle conseguenze della Proposizione precedente é che la successione $(E(S_n^2))_n$ é non-decrescente, nelle ipotesi assunte: basta scegliere $F = \Omega$. Un'altra conseguenza, piu' significativa, é che

$$E(S_k^2 - S_n^2 | \mathcal{F}_n) = E((S_k - S_n)^2 | \mathcal{F}_n),$$

sempre per $k > n$.

Veniamo ora a stabilire un'importante disuguaglianza, sempre relativa a Martingale che soddisfano alle ipotesi precedenti.

Lemma 10.10 *Sia $(S_n)_n$ una Martingala rispetto ad una filtrazione $(\mathcal{F}_n)_n$, e supponiamo che $S_n \in L_2$ per ogni n . Per ogni intero $n > 0$ e ogni $\varepsilon > 0$, si ha*

$$P([\max_{1 \leq i \leq n} |S_i| \geq \varepsilon]) \leq \frac{E(S_n^2)}{\varepsilon^2}.$$

Dimostrazione. Fissiamo n e $\varepsilon > 0$. Sia poi F l'evento $[\max_{1 \leq i \leq n} |S_i| < \varepsilon]$. Per ogni indice i compreso fra 1 e n , si ponga poi

$$B_i = \left(\bigcap_{1 \leq j \leq i-1} [|S_j| \geq \varepsilon] \right) \cap [|S_i| < \varepsilon]:$$

chiaramente, si ha $B_i \in \mathcal{F}_i$ per ogni indice i , e

$$F = \bigcup_{1 \leq i \leq n} B_i.$$

Allora possiamo scrivere

$$E(S_n^2) \geq E(S_n^2 I_F) = \sum_{i=1}^n E(S_n^2 I_{B_i}).$$

In virtu' della Proposizione 10.9, si ha

$$E(S_n^2 I_{B_i}) = E((S_n^2 - S_i^2) I_{B_i}) + E(S_i^2 I_{B_i}) \geq E((S_n - S_i)^2 I_{B_i}) + \varepsilon^2 P(B_i) \geq \varepsilon^2 P(B_i).$$

Sommando su i , si ottiene infine

$$E(S_n^2) \geq \varepsilon^2 P(F),$$

ossia l'asserto. \square

Possiamo ora formulare un teorema di convergenza per martingale.

Teorema 10.11 *Sia $(S_n)_n$ una martingala, rispetto alla filtrazione \mathcal{F}_n , e supponiamo che $S_n \in L_2$ per ogni n . Se inoltre si ha $\sup_n E(S_n^2) = M < +\infty$, allora la successione (S_n) converge q.c. e in norma quadratica ad una v.a. X integrabile, e risulta per ogni n*

$$S_n = E(X|\mathcal{F}_n).$$

Dimostrazione. In virtu' della Proposizione 10.9, si ha

$$E((S_{n+k} - S_n)^2) = E(S_{n+k}^2) - E(S_n^2) \geq 0,$$

per ogni coppia d'interi positivi n e k . Da cio' si ricava

$$E((S_{n+k} - S_n)^2) \leq M - E(S_n^2),$$

per ogni k , e quindi, essendo $M = \sup_n E(S_n^2) = \lim_n E(S_n^2)$, si ha

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_k E((S_{n+k} - S_n)^2) = 0.$$

Questa non é altro che la condizione di Cauchy per la convergenza in L_2 , (o media quadratica). Poiché lo spazio L_2 é completo per tale convergenza, la successione $(S_n)_n$ é dunque convergente in L_2 ad una variabile aleatoria X . Ora, poiché le S_n e X sono in L_2 , esse sono anche in L_1 , e dalla convergenza in L_2 deriva anche quella in L_1 , come conseguenza della disuguaglianza di Hölder. Allora, fissato un intero positivo n e un generico elemento $F \in \mathcal{F}_n$, avremo

$$E(XI_F) = \lim_{j \rightarrow \infty} E(S_j I_F) = \lim_j E(S_n I_F) = E(S_n I_F).$$

Dunque, per ogni n , la v.a. S_n é \mathcal{F}_n -misurabile e verifica la relazione $E(X|F) = E(S_n|F)$ per ogni $F \in \mathcal{F}_n$, con $P(F) > 0$. Cio' implica che $S_n = E(X|\mathcal{F}_n)$.

Resta ancora da dimostrare la convergenza quasi certa. Questa é la parte piu' tecnica, e richiede di applicare il Lemma 10.10. Anche in questo caso mostreremo che la successione (S_n) é di Cauchy per la convergenza in questione. Fissiamo un generico intero $m > 0$, e consideriamo il processo

$$S_{n,m} := S_{n+m} - S_m;$$

verifichiamo intanto che questo processo é una martingala in sé: detta \mathcal{G}_k la σ -algebra indotta dalle $S_{j,m}$, $j = 1, \dots, k$, si ha chiaramente $\mathcal{G}_k \subset \mathcal{F}_{m+k}$ per ogni k , e quindi

$$E(S_{n+1,m}|\mathcal{G}_n) = E(E(S_{n+1,m}|\mathcal{F}_{m+n})|\mathcal{G}_n) = E(S_{n+m} - S_m|\mathcal{G}_n) = E(S_{n,m}|\mathcal{G}_n) = S_{n,m},$$

per definizione di \mathcal{G}_n . Dunque, $(S_{n,m})_n$ é una martingala in sé, e quindi verifica le ipotesi del Lemma 10.10. Allora, fissato ad arbitrio un $\varepsilon > 0$, risulta

$$P([\max_{1 \leq i \leq n} |S_{i,m}| \geq \varepsilon]) = P(\bigcup_{1 \leq i \leq n} [|S_{i,m}| \geq \varepsilon]) \leq \frac{E(S_{n,m}^2)}{\varepsilon^2} \leq \frac{M - E(S_m^2)}{\varepsilon^2},$$

anche in virtu' di 10.9. Prendendo l'estremo superiore al variare di n , avremo allora

$$P(\bigcup_{i \geq 1} [|S_{i,m}| \geq \varepsilon]) \leq \frac{M - E(S_m^2)}{\varepsilon^2}$$

ossia

$$P(\bigcup_k [|S_m - S_{m+k}| \geq \varepsilon]) \leq \frac{M - E(S_m^2)}{\varepsilon^2}.$$

Ora, se esistono k e k' tali che $|S_{m+k'} - S_{m+k}| \geq 2\varepsilon$, si deve avere necessariamente $|S_{m+k'} - S_m| \geq \varepsilon$ oppure $|S_{m+k} - S_m| \geq \varepsilon$: dunque l'evento $\cup_{k,k'} [|S_{m+k'} - S_{m+k}| \geq 2\varepsilon]$ implica l'evento $\cup_j [|S_{m+j} - S_m| \geq \varepsilon]$. Di conseguenza, possiamo dedurre che

$$P(\bigcup_{k,k'} [|S_{m+k'} - S_{m+k}| \geq 2\varepsilon]) \leq \frac{M - E(S_m^2)}{\varepsilon^2}.$$

Pertanto, mandando a limite su m , troviamo

$$P(\bigcap_{m \in \mathbb{N}} \bigcup_{j,j' \geq m} [|S_j - S_{j'}| \geq \varepsilon]) = 0,$$

o anche

$$P(\bigcup_{m \in \mathbb{N}} \bigcap_{j,j' \geq m} [|S_j - S_{j'}| < \varepsilon]) = 1,$$

per ogni $\varepsilon > 0$. Dunque possiamo dire che, con probabilita' 1, per ogni $\varepsilon > 0$ (ad esempio ε razionale), esiste un intero m tale che, per ogni j e k maggiori di m risulta $|S_j - S_k| \leq 2\varepsilon$. Cio' non é altro che la condizione di Cauchy per la convergenza quasi certa. Pertanto é dimostrato che la successione $(S_n)_n$ é convergente quasi

certamente. Poiché la convergenza in L_2 a X comporta che una sottosuccessione converga anche q.c. a X , ne segue che il limite quasi certo altri non è che la stessa v.a. X . La dimostrazione è così conclusa. \square

Possiamo ora esaminare i vari tipi di martingale recentemente incontrati, al fine di individuare (se esistono) i loro limiti.

1. Il primo esempio che abbiamo incontrato è la passeggiata aleatoria simmetrica.

Detta S_n la generica variabile, sappiamo che $E(S_n) = 0$, $E(S_n^2) = V(S_n) = n$. Pertanto questa martingala non verifica l'ipotesi di limitatezza dei momenti di ordine 2. Da ciò non possiamo concludere nulla, ma non è difficile, ragionando direttamente sul processo, provare che la successione $(S_n)_n$ non può convergere (né q.c. né in L_2), per la semplice ragione che non converge in Distribuzione. Se infatti si avesse convergenza in Distribuzione il limite fornirebbe una distribuzione invariante, ma già sappiamo che la passeggiata aleatoria semplice non può avere nessuna distribuzione invariante (conseguenza del teorema 8.19).

2. Il secondo esempio è preso dai processi a cascata: detto Z_n il numero degli individui presenti dopo la n -esima generazione, e supponendo che il valor medio di Z_1 sia $\mu > 1$, allora la successione (W_n) definita ponendo $W_n = \frac{Z_n}{\mu^n}$ si comporta come una martingala in sé. Per il teorema 7.3, si ha per ogni n :

$$\sigma_n^2 = \sigma^2 \mu^{n-1} (1 + \mu + \mu^2 + \dots + \mu^{n-1}),$$

dove σ_n^2 denota la varianza di Z_n e σ^2 quella di Z_1 . Ora, essendo $V(W_n) = \frac{V(Z_n)}{\mu^{2n}}$, si vede facilmente che l'ipotesi di equilimitatezza dei momenti secondi è soddisfatta. Dunque la successione $(W_n)_n$ converge puntualmente e in L_2 ad una v.a. limite, che denotiamo con W . Non entriamo nei dettagli, ma solitamente la v.a. W , pur essendo limite di variabili di tipo discreto, non ha distribuzione discreta.

Sempre in virtù del teorema 10.11, possiamo dedurre che

$$E(W|\mathcal{F}_n) = W_n, \quad \text{ossia} \quad Z_n = \mu^n E(W|\mathcal{F}_n),$$

per ogni n .

3. Il terzo esempio riguarda le catene di Markov: supponiamo che la catena $(X_n)_n$ sia irriducibile e persistente, e sia $\phi : S \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione limitata che soddisfi a

$$\phi(i) = \sum_{j \in S} P_{i,j} \phi(j),$$

dove P denota la matrice di transizione. Posto $S_n = \phi(X_n)$, sappiamo che (S_n) é una martingala rispetto alla filtrazione indotta dalle X_n , e inoltre

$$E(S_n^2) = \sum_i \phi(i)^2 P([X_n = i]) \leq M^2,$$

ove M é un maggiorante per i valori $|\phi(i)|$, con $i \in S$. Dunque, per il teorema 10.11 possiamo dedurre che il processo $(S_n)_n$ é convergente in L_2 e *q.c.* ad una v.a. S .

Ora, fissiamo un qualunque stato i : per ipotesi, esso é persistente, dunque $P(\limsup_n [X_n = i]) = 1$. Di conseguenza,

$$P(\limsup_n [S_n = \phi(i)]) = 1.$$

Dunque, per ogni i l'evento $[S_n = \phi(i)]$ si verifica certamente infinite volte, e quindi $\lim_n S_n = \phi(i)$. Cio' chiaramente é possibile solo se i valori $\phi(i)$ sono tutti uguali per ogni i , ossia se ϕ é costante.

In altre parole, se la funzione ϕ di cui sopra é limitata, essa necessariamente dev'essere costante. Cio' accade sempre, ad esempio, se S é finito (e la catena é ricorrente).

4. L'ultimo esempio che tratteremo riguarda le martingale del tipo

$$S_n = E(X | \mathcal{F}_n),$$

dove $(\mathcal{F}_n)_n$ é una filtrazione assegnata, e X é una v.a. che supporremo in L_2 .

In virtu' della *disuguaglianza di Jensen*, si puo' dedurre che

$$[E(X | \mathcal{G})]^2 \leq E(X^2 | \mathcal{G}),$$

per qualunque σ -algebra $\mathcal{G} \subset \mathcal{A}$: in particolare, scegliendo $\mathcal{G} = \mathcal{F}_n$ troveremo

$$S_n^2 \leq E(X^2|\mathcal{F}_n).$$

pertanto $E(S_n^2) \leq E(X^2)$ per ogni n . Dunque, le ipotesi del teorema 10.11 sono verificate, e la successione S_n converge ad una v.a. Y . Tale variabile aleatoria Y é in L_2 , e verifica

$$E(Y|\mathcal{F}_n) = S_n = E(X|\mathcal{F}_n),$$

per ogni n . Ma in generale Y non coincide con X , a meno che X non sia misurabile rispetto alla σ -algebra \mathcal{F}_∞ generata da tutte le \mathcal{F}_n . Altrimenti, si ha

$$Y = E(X|\mathcal{F}_\infty).$$

A questo proposito possiamo aggiungere anche la seguente osservazione:

Supponiamo che $X \in L_2$, e che la filtrazione $(\mathcal{F}_n)_n$ generi l'intera σ -algebra \mathcal{A} . Allora, ponendo $Y_n = E(X|\mathcal{F}_n)$ per ogni n , la martingala $(Y_n)_n$ converge a X in L_2 in maniera *ottimale*, nel senso che, per ogni valore di n , Y_n é la variabile \mathcal{F}_n -misurabile che é *piu' vicina* a X (nella distanza di L_2). In altre parole, fissato n , e scelta una qualsiasi v.a. Z che sia in L_2 e \mathcal{F}_n -misurabile, risulta

$$E((X - Y_n)^2) \leq E((X - Z)^2) :$$

infatti, essendo $Y_n = E(X|\mathcal{F}_n)$, si ha $E(XZ|\mathcal{F}_n) = Y_n Z$, e $E(XY_n|\mathcal{F}_n) = Y_n^2$, e quindi

$$\begin{aligned} E((X - Z)^2) &= E(X^2) - 2E(XZ) + E(Z^2) = E(X^2) - E(Y_n^2) + E(Y_n^2) - 2E(Y_n Z) + E(Z^2) = \\ &= E((X - Y_n)^2) + E(Y_n^2) - 2E(Y_n Z) + E(Z^2) = E((X - Y_n)^2) + E((Y_n - Z)^2) \geq E((X - Y_n)^2). \end{aligned}$$

Uno degli strumenti piu' utili che intervengono nello studio delle martingale, e anche di altri processi stocastici, é quello dei *tempi d'arresto*: qualora s'interpretasse la martingala come l'andamento del capitale di un giocatore che scommette ad es. sull'uscita di Testa o Croce, un tempo d'arresto si potrebbe vedere come una strategia in base alla quale il giocatore puo' decidere di interrompere il gioco ad un certo

istante T (per lui vantaggioso). Ad esempio, T potrebbe essere il primo istante in cui il capitale C_n raggiunge il valore 10, oppure l'ultimo istante in cui il suo capitale sta sopra il valore 50, etc. Chiaramente, il primo esempio é piu' verosimile, perché si puo' stimare, di giocata in giocata, se la condizione richiesta si é verificata o no, mentre nel secondo esempio bisogna conoscere tutto l'andamento del gioco (anche il futuro), per sapere qual é il valore di T .

In altri termini, se esaminiamo la prima strategia, possiamo dire questo: ad ogni istante n , conoscendo la storia del processo fino all'istante n , siamo in grado di dire se $T = n$ oppure no. Nel secondo caso cio' é impossibile.

Possiamo dunque dare la seguente definizione.

Definizione 10.12 Dato un generico processo stocastico $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$, adattato a una filtrazione \mathcal{F}_n , un tempo d'arresto é una v.a. $T : \Omega \rightarrow S$ tale che

$$[T = n] \in \mathcal{F}_n$$

per ogni $n \in \mathbb{N}$. Chiaramente, se $(X_n)_n$ é un processo stocastico, e T é un tempo d'arresto per tale processo, si denota con X_T la variabile aleatoria che assume il valore X_s non appena $T = s$. Useremo spesso l'abbreviazione *tda* per denotare un generico tempo d'arresto.

Uno dei risultati piu' significativi della teoria dei tempi d'arresto dice in sostanza che, se il gioco é equo (ossia se l'andamento del capitale rispetta le condizioni di una martingala), non esistono tempi d'arresto *ragionevoli* che permettano al giocatore di migliorare le sue vincite.

Le condizioni di *ragionevolezza* sono elencate nella prossima definizione.

Definizione 10.13 Dato un processo stocastico $(X_n)_n$, e un t.d.a. T per tale processo, diremo che T é *opzionale* se risulta

- (1) $P([T < +\infty]) = 1$;
- (2) $E(|X_T|) < +\infty$;
- (3) $\lim_{n \rightarrow \infty} E(X_n | [T > n]) P([T > n]) = 0$.

Teorema 10.14 (Teorema opzionale) Supponiamo che $(X_n)_n$ sia una martingala in sé, con variabili in L_1 , e che T sia un tda opzionale per essa. Allora risulta

$$E(X_T) = E(X_1).$$

Dimostrazione. Fissiamo un generico intero positivo n , e calcoliamo

$$E(X_1) = E(X_n) = E(X_n \mathbf{1}_{[T \leq n]}) + E(X_n \mathbf{1}_{[T > n]}) = \sum_{i=1}^n E(X_n \mathbf{1}_{[T=i]}) + E(X_n \mathbf{1}_{[T > n]}).$$

ora, poiché l'evento $[T = i]$ si trova in \mathcal{F}_i , per $i \leq n$ si deve avere $E(X_n \mathbf{1}_{[T=i]}) = E(X_i \mathbf{1}_{[T=i]})$ per la proprietà di martingala. Dunque

$$E(X_n \mathbf{1}_{[T \leq n]}) = \sum_{i=1}^n E(X_i \mathbf{1}_{[T=i]}) = \sum_{i=1}^n E(X_i | [T = i]) P([T = i]).$$

Ne segue, per ogni n :

$$E(X_1) = E(X_n) = \sum_{i=1}^n E(X_i | [T = i]) P([T = i]) + E(X_n | [T > n]) P([T > n])$$

da cui

$$E(X_1) = \sum_{i=1}^n E(X_T | [T = i]) P([T = i]) + E(X_n | [T > n]) P([T > n]). \quad (12)$$

Ora, la serie $\sum_{i=1}^{+\infty} E(|X_T| | [T = i]) P([T = i])$ risulta convergente a $E(|X_T|)$, ed è maggiorante della serie assoluta di $\sum_i E(X_T | [T = i]) P([T = i])$, dunque quest'ultima converge; e poiché

$$\lim_{n \rightarrow \infty} E(X_n | [T > n]) P([T > n]) = 0,$$

si ha necessariamente

$$E(X_1) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n E(X_T | [T = i]) P([T = i]) = E(X_T). \quad \square$$

Vedremo ora, tramite alcuni esempi, le implicazioni di questo teorema.

Esempi 10.15 1. Iniziamo con la passeggiata aleatoria simmetrica, che come al solito denoteremo con (S_n) . Abbiamo già visto che questa è una martingala, e le variabili S_n sono tutte in L_1 . Scelti due numeri positivi a e b , indichiamo con

T il primo intero n per cui accade che $S_n = -a$ oppure $S_n = b$ (ovviamente, supponendo che $S_0 = 0$). Non é difficile controllare che T é un tda: se si conoscono tutte le S_j , per $j \leq n$, possiamo senz'altro dire se $T = n$ o no. Verifichiamo che T é opzionale.

Poiché la passeggiata é simmetrica, tutti gli stati sono ricorrenti, dunque é certo che prima o poi si avrá $S_n = b$. L'evento $T < +\infty$ é implicato dall'evento $[S_n = b \text{ infinite volte}]$, e quindi ha probabilita' 1.

Verifichiamo ora che $E(|S_T|) < +\infty$. Certamente si ha

$$E(|S_T|) = \sum_{i=1}^{\infty} E(|S_i| | [T = i]) P([T = i]) \leq (a+b) \sum_{i=1}^{\infty} P([T = i]) = a+b.$$

Infine, essendo $E(S_n | [T > n]) \leq (a+b)$, e $P([T > n]) \rightarrow 0$ per $n \rightarrow \infty$, tutte le ipotesi del teorema opzionale sono verificate, e allora possiamo dedurre che $E(S_T) = E(S_1) = 0$. Ora, possiamo utilizzare $E(S_T)$ per calcolare la probabilita' p_a che la passeggiata passi per la posizione $-a$ prima che per la posizione b . Se denotiamo con F_a tale evento, si ha

$$E(S_T) = E(S_T | F_a) p_a + E(S_T | F_a^c) (1 - p_a) = -a p_a + b (1 - p_a) = b - (a+b) p_a.$$

Ne deduciamo in conclusione

$$p_a = \frac{b}{a+b}.$$

Ovviamente, nel caso $a = b$, E_a ha probabilita' $\frac{1}{2}$ per il principio di riflessione. Ma in generale il risultato sarebbe meno facile da ottenere.

2. Consideriamo sempre la passeggiata aleatoria di prima, ma stavolta scegliamo come martingala la successione $(Y_n)_n$ definita da

$$Y_n = S_n^2 - n,$$

per ogni n . (Si dimostri per esercizio che $(Y_n)_n$ é una martingala in L_2 , rispetto alla filtrazione indotta dalle S_n). Sia ora T il tempo d'arresto definito come il primo valore di $n > 0$ per cui $S_n > S_{n-1}$.

Ricordando il significato di S_n come somma di variabili X_j di tipo bernouliano, non é difficile controllare che $T = n$ significa che $X_n = 1$ e $X_j = -1$ per ogni $j < n$. In altri termini, nel caso simmetrico, $P([T = n]) = 2^{-n}$. Dunque T ha distribuzione geometrica, per cui $T < \infty$ quasi certamente, e $E(T) = 2$. Valutiamo ora $E(|Y_T|)$:

$$E(|Y_T|) \leq E(S_T^2) + E(T) = E(S_T^2) + 2.$$

Ora, se $T = k$, si ha evidentemente $S_k = -(k-1) + 1 = 2 - k$. Pertanto

$$E(S_T^2) = \sum_{k=1}^{\infty} E(S_k^2 | [T = k]) P([T = k]) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(2-k)^2}{2^k}.$$

Poiché tale serie converge, $E(|Y_T|) < \infty$.

Fissato poi $n \in \mathbb{N}$, si ha $E(Y_n | [T > n]) = n^2 - n$, da cui

$$\lim_n E(Y_n | [T > n]) P([T > n]) = \lim (n^2 - n) 2^{-n} = 0.$$

Dunque T é opzionale, e per il teorema 10.14 si ha allora

$$E(Y_T) = E(Y_1) = 0.$$

D'altra parte,

$$E(Y_T) = E(S_T^2) - 2,$$

e, per quanto appena visto, si conclude

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(2-k)^2}{2^k} = 2 :$$

la somma di questa serie si puo' trovare per altra via, come conferma del risultato trovato.

- 3.** Nell'esempio precedente, con la Martingala $Y_n = S_n^2 - n$, consideriamo il tda T_b , definito come l'istante del primo passaggio per b ($b > 0$ ovviamente). In questo caso, T_b non é opzionale: si ha infatti

$$E(|Y_{T_b}|) = E(|S_{T_b}^2 - T_b|) = E(|b^2 - T_b|) \geq E(T_b) - b^2 :$$

ma sappiamo che lo stato b é ricorrente nullo, dunque $E(T_b) = +\infty$.

4. Supponiamo che $(X_n)_n$ sia una successione di v.a. di tipo IID, e assumiamo che ogni X_n sia limitata. Denotiamo con μ il valor medio di ciascuna X_n , e con $(\mathcal{F}_n)_n$ la filtrazione naturale delle (X_n) . Poniamo ora per ogni n :

$$S_n = \sum_{j=1}^n X_j, \quad Z_n = S_n - n\mu.$$

Non é difficile provare che (Z_n) é una martingala rispetto a (\mathcal{F}_n) . Sia poi T un generico tda con media finita. Cio' comporta direttamente che $P([T < \infty]) = 1$. Verifichiamo che $E(|Z_T|) < +\infty$. Si ha infatti

$$\begin{aligned} E(|Z_T|) &\leq \sum_{n=1}^{+\infty} E(|S_n| | [T = n]) P([T = n]) + |\mu| E(T) \leq \\ &\leq K \sum_{n=1}^{+\infty} n P([T = n]) + |\mu| E(T) = (K + |\mu|) E(T), \end{aligned}$$

ove K é un maggiorante per $|X_1|$. Lasciamo per esercizio la verifica dell'ultima condizione $E(Z_n | [T > n]) P([T > n]) \rightarrow 0$. Dunque possiamo applicare il teorema opzionale, e dedurre che $E(Z_T) = E(Z_1) = 0$. Cio' comporta che

$$E(S_T) = \mu E(T).$$

Questo risultato (spesso detto *equazione di Wald*) si puo' commentare dicendo che sommando un numero aleatorio T delle X_i si ottiene una v.a. con la stessa media che essa avrebbe se T e le X_i fossero indipendenti.

5. L'equazione di Wald si puo' verificare anche in altre situazioni. Siano $(X_n)_n$ variabili di tipo $B(1, p)$, indipendenti e con identica distribuzione. Poniamo poi

$$S_n = \sum_{i=1}^n X_i$$

per ogni intero positivo n . Chiaramente, le S_n non sono una martingala rispetto alla filtrazione (\mathcal{F}_n) indotta dalle X_n , $n \in \mathbb{N}$. Per ogni $t \in \mathbb{R}$, si ponga

$$M(t) = E(e^{tX_1}) = 1 + (e^t - 1)p,$$

e si definisca la successione $(Y_n)_n$ come segue:

$$Y_n = \frac{e^{tS_n}}{M(t)^n},$$

e verifichiamo che $(Y_n)_n$ é una martingala rispetto alla filtrazione indotta dalle X_n :

$$\begin{aligned} E(Y_{n+1} | (X_1, \dots, X_n)) &= \frac{1}{M(t)^{n+1}} E(e^{tX_{n+1}} e^{tS_n} | (X_1, \dots, X_n)) = \\ &= \frac{e^{tS_n}}{M(t)^{n+1}} E(e^{tX_1}) = \frac{e^{tS_n}}{M(t)^n} = Y_n. \end{aligned}$$

Ora, definiamo un tda T come il primo istante n per cui $X_n = 1$ per la terza volta. Chiaramente, T é finito quasi certamente, e ha media $E(T) = \frac{3}{p}$. Inoltre, osservando che $M(t) \geq 1$ per ogni $t \geq 0$, possiamo dedurre

$$\begin{aligned} E(|Y_T|) = E(Y_T) &\leq E(e^{tS_T}) = \sum_{n=3}^{\infty} E(e^{tS_n} | [T = n]) P([T = n]) = \\ &= \sum_{n=3}^{+\infty} e^{t(6-n)} \binom{n-1}{2} p^3 (1-p)^{n-3}, \end{aligned}$$

in quanto l'evento $T = n$ comporta che la passeggiata ha fatto $n - 3$ passi verso sinistra e 3 verso destra, e dunque al passo n si trova nella posizione $6 - n$. La serie converge, come facilmente si vede, per ogni t . Dunque abbiamo $E(|Y_T|) < \infty$.

La terza condizione dell'opzionalita' viene lasciata per esercizio, come nell'esempio precedente.

Allora risulta, per il teorema opzionale, $E(Y_T) = E(Y_1) = 1$. Tenendo conto che la quantita' $E(Y_T)$ in teoria dipende da t , cio' vuol dire che essa é invece costante, e quindi la sua derivata in t si annulla. Svolgendo i calcoli, avremo

$$\frac{d}{dt} E\left(\frac{e^{tS_T}}{M(t)^T}\right) = E\left(\frac{S_T e^{tS_T} M(t)^T - T M(t)^{T-1} M'(t) e^{tS_T}}{M(t)^{2T}}\right) = 0.$$

Valutando in $t = 0$, e tenendo presente che $M(0) = 1, M'(0) = p$, troviamo infine

$$0 = E(S_T - Tp), \quad \text{ossia} \quad E(S_T) = E(T)E(X_1).$$

Dunque, anche se S_n non é una martingala, la media di S_T é di nuovo ottenibile come la media di X_1 moltiplicata per quella di T .

6. Supponiamo che X sia una v.a. di tipo $P(\lambda)$ (Poisson, con parametro λ), e definiamo un processo X_n ponendo $X_n = X$ per ogni n . Non é difficile controllare che tale processo é una martingala in sé. Scegliamo poi un tempo d'arresto, ponendo $T = X$: ancora, osservando che $X_T = X$, é facile verificare che T é un tda opzionale. Ad esempio, la terza condizione si prova come segue:

$$E(X_n|[T > n])P([T > n]) = E(X|[X > n])P([X > n]),$$

e tale quantita' é infinitesima, per $n \rightarrow \infty$, perché $X \in L_1$. Il teorema opzionale, in questo caso, non dice molto: infatti, essendo $X_T = X$, é evidente che $E(X_T) = E(X_1) = E(X)$. Tuttavia, in questo caso, se poniamo

$$S_T = \sum_{i=1}^T X_i,$$

non é vero che $E(S_T) = E(T)E(X)$. Per svolgere i calcoli, si puo' procedere come segue:

$$S_T = \sum_{i=1}^T X_i = \sum_{i=1}^T X = TX = X^2.$$

Evidentemente, $E(X^2) = V(X) + E^2(X) = \lambda + \lambda^2 \neq E(T)E(X) = \lambda^2$.

11 Processi Stazionari

In questo breve capitolo accenneremo ad alcune proprieta' dei Processi Stazionari, daremo l'enunciato del Teorema Ergodico (nella forma forte e nella forma debole), e vedremo alcuni esempi e collegamenti con altri risultati conosciuti. Non riporteremo le dimostrazioni piu' complesse: si rimanda ai testi [6],[2],[7] per le dimostrazioni e altri ragguagli.

Abbiamo gia' incontrato il concetto di *stazionarieta'*, ma ora lo definiamo di nuovo, formalmente. I processi che prenderemo in considerazione saranno in tempo continuo o in tempo discreto: in ogni caso denoteremo con T l'insieme degli indici delle variabili X_t .

Definizione 11.1 Un processo stocastico $(X_t)_{t \in T}$ é *fortemente stazionario* se, per ogni $h \in T$, e ogni $\{t_1, t_2, \dots, t_n\} \subset T$, con $t_1 < t_2 < \dots < t_n$, si ha

$$P_{X(t_1, \dots, t_n)} = P_{X(t_1+h, t_2+h, \dots, t_n+h)},$$

ove $X(t_1, \dots, t_n)$ qui denota il vettore $(X_{t_1}, \dots, X_{t_n})$ e naturalmente P_X denota la distribuzione del vettore aleatorio X .

Cio' naturalmente implica che tutte le X_t hanno la stessa distribuzione: basta porre $n = 1$.

Qualora (X_t) sia fortemente stazionario, e le X_t siano tutte in L_2 , si puo' facilmente controllare che

$$E(X_t) = E(X_s), \text{ e } cov(X_{t+h}, X_{s+h}) = cov(X_t, X_s), \quad (13)$$

non appena $s, t, h \in T$. Diremo che un processo (X_t) con variabili in L_2 é *debolmente stazionario*, se esso verifica le condizioni (13).

Se un processo (X_t) é debolmente stazionario, si puo' definire una funzione c su T , detta *funzione di autocovarianza*, come segue:

$$c(h) = cov(X_t, X_{t+h}),$$

naturalmente qualunque sia t .

Esempi 11.2

1. Supponiamo che $(X_n)_n$ sia una successione I.I.D.: dunque, tutte le X_n hanno la stessa distribuzione. Inoltre, adoperando opportunamente l'operazione di convoluzione, é facile controllare che tutte le distribuzioni a due a due coincidono, e lo stesso vale per le distribuzioni a tre a tre, etc. Dunque, il processo é fortemente stazionario. In questa situazione, peraltro, si puo' riconoscere che, ad esempio, non solo la distribuzione di (X_1, X_2) coincide con quella di (X_4, X_5) , ($h = 3$), ma anche con quella di (X_4, X_8) , o (X_3, X_{10}) , etc.

Un discorso analogo sussiste per il caso di processi in tempo continuo, di tipo I.I.D..

2. Un'altra situazione banale si ha quando X_t é *sempre* la stessa variabile X (non solo la stessa distribuzione, ma proprio la *stessa* X). Anche in questo caso, tutti le *fidi* della stessa dimensione hanno la stessa distribuzione.
3. Una situazione meno banale si ha nelle catene di Markov: sia $P(t)$ un semigrupp standard per una catena di Markov in tempi continui irriducibile e supponiamo che esista una distribuzione invariante π . Allora, attribuendo a X_0 la distribuzione π , il processo risultante (X_t) é fortemente stazionario.
4. Esistono anche processi debolmente stazionari, che non lo sono fortemente. Un esempio si ottiene scegliendo due v.a. A e B , standardizzate, che siano non-correlate. Fissato $\lambda \in [0, 2\pi]$, e ponendo

$$X_n = A \cos(\lambda n) + B \sin(\lambda n),$$

si ottiene un processo debolmente stazionario (si svolgano i calcoli per esercizio). Scegliendo poi (ad es.) $\lambda = \frac{\pi}{2}$, si ha

$$(X_1, X_2, \dots) = (A, B, -A, -B, \dots),$$

da cui discende facilmente che la stazionarieta' non é forte: basta che A e B non abbiano la stessa distribuzione.

Come dicevamo, per i processi stazionari sussistono svariati risultati interessanti, ma noi ci limiteremo a segnalare un solo teorema di convergenza (sia pure in due forme, *forte* e *debole*), e ad esaminarne alcune conseguenze. Il teorema in questione prende il nome di *Teorema Ergodico*, e si puo' interpretare come una generalizzazione delle Leggi dei Grandi Numeri: a differenza di queste, pero', in generale il limite non é una costante.

Vediamo quali sono le due formulazioni.

Teorema 11.3 (Teorema Ergodico: forma forte) *Sia $(X_n)_n$ un processo fortemente stazionario, con variabili in L_1 . Allora esiste una v.a. $Y \in L_1$ tale che*

$$Y = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i,$$

quasi certamente e in L_1 .

Come si vede subito, questo teorema generalizza la versione piu' comune della Legge dei Grandi Numeri nella sua forma forte: se le X_n sono IID e in L_1 , sappiamo che le medie campionarie convergono a $\mu = E(X_1)$: in tal caso, Y é costante.

Un esempio banale si ha anche nel caso in cui le X_n siano tutte la stessa X : é ovvio allora che le medie campionarie convergano (in qualunque modo) a X , e quindi in tal caso $Y = X$ (dunque non costante).

Vedremo in seguito conseguenze meno banali. Passiamo ora alla forma debole.

Teorema 11.4 (Teorema Ergodico: forma debole) *Sia $(X_n)_n$ un processo debolmente stazionario, (e quindi con variabili in L_2). Allora esiste una v.a. $Y \in L_2$ tale che*

$$Y = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i,$$

in L_2 .

Chiaramente, questo teorema generalizza qualche versione della legge debole dei grandi numeri.

Si puo' stabilire, nell'ambito del teorema debole, una condizione necessaria e sufficiente perché il limite Y sia costante.

Proposizione 11.5 *Supponiamo che $(X_n)_n$ sia un processo debolmente stazionario, con funzione di autocovarianza $c(h)$, $h \in \mathbb{N}$. Supponiamo che tutte le X_n abbiano media μ . Allora le medie campionarie $\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$ convergono in L_2 a μ se e solo se si ha*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{j=1}^n \frac{(n-j)c(j)}{n^2} = 0.$$

La dimostrazione é una semplice applicazione della formula che fornisce la varianza di una somma di v.a. in L_2 . In particolare, la condizione espressa in questa proposizione é verificata se $\lim_n c(n) = 0$.

Passiamo a vedere, con alcuni esempi, come si puo' descrivere il limite Y in certi casi.

1. Supponiamo che P sia la matrice di transizione di una catena di Markov irriducibile ed ergodica (ossia aperiodica), e sia π la sua distribuzione invariante. Sappiamo, per il teorema 8.24, che risulta $\lim_n p_{i,k}(n) = \pi(k)$ per ogni i e k , ove al solito $p_{i,k}(n)$ é l'elemento di posto (i, k) della matrice P^n . Se assegniamo alla v.a. X_0 la distribuzione π , sappiamo che il processo markoviano (X_n) é fortemente stazionario. Se assumiamo che $\sum_{j \in S} j^2 \pi(j) < +\infty$, allora le X_n sono tutte in L_2 , e quindi le medie campionarie

$$\overline{X_n} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$$

convergono in L_2 e q.c. a una variabile Y , tale che $E(Y) = E(X_1)$. In tale situazione, il limite Y é costante. Noi verificheremo cio' nel caso piu' semplice in cui S sia un insieme finito: allora, sappiamo che $\pi(j) = \lim_{n \rightarrow \infty} p_{i,j}(n)$ per ogni i e j . Si ha poi

$$E(X_0 X_h) = \sum_i \sum_j ij P([X_h = j] | [X_0 = i]) P([X_0 = i]) = \sum_i \sum_j ij p_{i,j}(h) \pi(i).$$

Ora, per $h \rightarrow \infty$, risulta chiaramente

$$\lim_{h \rightarrow \infty} E(X_0 X_h) = \sum_i \sum_j ij \pi(j) \pi(i) = E(X_0)^2.$$

Cio' vuol dire che $c(h)$ tende a 0, per $h \rightarrow \infty$, e quindi é verificata l'ipotesi di 11.5.

2. Il fenomeno descritto nell'esempio precedente puo' essere utilizzato per avere una stima della media di X_0 , quando questa abbia distribuzione invariante, cosi' come si applica (sotto altre ipotesi) la Legge Forte dei Grandi Numeri: in pratica, si *osserva* la successione (X_n) che via via gli esperimenti forniscono, si calcola per ogni n la media campionaria, e, *per n abbastanza grande*, la media campionaria limite sara' molto vicina a μ , con probabilita' 1. Lo stesso metodo si puo' usare per individuare i *momenti* della stessa variabile, e quindi in definitiva la sua distribuzione (che abbiamo supposto essere quella invariante, ma non necessariamente nota). Ad esempio, se si vuole calcolare il momento

secondo, $E(X_0^2)$, si esamina la successione (X_n^2) , e se ne calcola la media campionaria: anche la successione (X_n^2) é un processo stazionario, naturalmente, e le medie campionarie di questo processo convergeranno q.c. a quella di X_0^2 , sempre per lo stesso risultato 11.5: basta ripetere, *mutatis mutandis*, il calcolo svolto nell'esempio 1.

3. Rimanendo nello stesso ambito, anziché indagare direttamente sulla Y , fissiamo un generico stato k , e poniamo

$$J_n = 1_{[X_n=k]} :$$

in altre parole, J_n é quella v.a. che vale 1 se $X_n = k$, altrimenti vale 0. Chiaramente, $J_n \sim B(1, \pi(k))$ per ogni n . Non é difficile dimostrare che (J_n) é un processo fortemente stazionario, e la sua funzione di autocovarianza é

$$c(h) = \text{cov}(J_n, J_{n+h}) = \pi(k)p_{kk}(h) - \pi(k)^2.$$

Ora, le medie campionarie $\overline{J_n}$ denotano per ogni n la *frequenza* osservata dello stato k : ossia il rapporto tra il numero di visite allo stato k nei primi n passi e il numero n . Sappiamo dal Teorema Ergodico che tali variabili convergono ad una v.a. J in L_2 e quasi certamente, e che $E(J) = \pi(k)$. Possiamo adoperare la proposizione 11.5 per provare che in effetti J é costante: infatti, in tal caso si ha $\lim_{h \rightarrow \infty} c(h) = 0$, per il teorema 8.24.

4. Possiamo anche fornire un esempio di catena markoviana, in cui il limite Y non é costante. A tale scopo, bastera' definire opportunamente la matrice di transizione P ; noi scegliamo questa:

$$P = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

E' evidente che la catena non é irriducibile, e vi sono infinite distribuzioni stazionarie: per ogni $\alpha > 0$ si puo' scegliere

$$\pi = \left(\frac{1}{2(1+\alpha)}, \frac{1}{2(1+\alpha)}, \frac{\alpha}{2(1+\alpha)}, \frac{\alpha}{2(1+\alpha)} \right).$$

Se gli stati sono (nell'ordine) 1, 2, 3, 4, é evidente che la catena non é irriducibile: se si incomincia da uno dei primi due, si rimane sempre in $\{1, 2\}$, e analogamente se si comincia da uno degli altri due. Allora é chiaro che, scelta la distribuzione iniziale (cioé di X_0) come una di quelle invarianti sopra descritte, se $X_0(\omega) \in \{1, 2\}$, allora $\overline{X(\omega)}_n \rightarrow \frac{1}{2}(1 + 2) = \frac{3}{2}$ quasi certamente; se invece $X_0(\omega) \in \{3, 4\}$, allora $\overline{X(\omega)}_n \rightarrow \frac{1}{2}(3 + 4) = \frac{7}{2}$ q.c.: dunque, se ad es. $\alpha = 1$, Y puo' assumere due valori distinti, ciascuno con probabilita' $\frac{1}{2}$.

5. Esiste un altro tipo interessante di processo stazionario, che é markoviano ma in maniera piuttosto banale. Esso puo' esser descritto come segue. Sia S un sottoinsieme di \mathbb{R} , o di \mathbb{R}^n , e $G : S \rightarrow S$ una generica applicazione. Definiamo una v.a. X a valori in S , e poniamo

$$X_0 = X, \quad X_{n+1} = G(X_n),$$

per induzione. Il processo (X_n) é markoviano (anche se S non é numerabile), in quanto X_{n+1} dipende funzionalmente da X_n , e quindi la distribuzione di X_{n+1} , date le variabili X_0, X_1, \dots, X_n , é concentrata sul valore $G(X_n)$. Il processo (X_n) cosi' costruito é stazionario se X_0 ha una distribuzione *invariante* per G : ossia si deve avere

$$P([X_0 \in B]) = P([X_0 \in G^{-1}(B)]),$$

per ogni boreliano $B \subset S$. In effetti, per la definizione stessa di X_1 , si ha $P([X_0 \in G^{-1}(B)]) = P([X_1 \in B])$.

Ad esempio, se $\Omega = S = [0, 1]$ e $G(x) = 1 - 2|x - \frac{1}{2}|$, si puo' verificare facilmente che la misura di Lebesgue é una probabilita' invariante per G , e quindi si puo' prendere X_0 come l'identita': $X_0(x) = x$. Il processo che ne vien fuori é tutt'altro che prevedibile, ma é fortemente stazionario e le medie campionarie delle X_n convergono comunque a una costante (quale?): anche in questo caso, si puo' usare la proposizione 11.5. In effetti, proveremo che la funzione di autocovarianza di un tale processo é nulla, per $h > 0$.

Intanto, osserviamo che $E(X_0) = \int_0^1 x dx = \frac{1}{2}$, e questo é ovviamente il valor medio di tutte le X_n . Calcoliamo ora la quantita' $c(h) = cov(X_0 X_h)$. Chiara-

mente, si ha $c(h) = E(X_0 X_h) - \frac{1}{4}$, per cui bastera' provare che $E(X_0 X_h) = \frac{1}{4}$ per ogni $h > 0$. Sia dunque $h \geq 0$ e proviamo che questa relazione vale per $h + 1$. Risulta

$$E(X_0 X_{h+1}) = \int_0^1 x G(G^{(h)}(x)) dx = \int_0^{1/2} x G(G^{(h)}(x)) dx + \int_{1/2}^1 x G(G^{(h)}(x)) dx.$$

In ciascuno dei due integrali possiamo operare la sostituzione $x = G^{-1}(t)$, con $t \in [0, 1]$, ottenendo

$$E(X_0 X_{h+1}) = \int_0^1 \frac{t}{2} G^{(h)}(t) \frac{dt}{2} + \int_0^1 (1 - \frac{t}{2}) G^{(h)}(t) \frac{dt}{2}.$$

Semplificando, resta

$$E(X_0 X_{h+1}) = \frac{1}{2} \int_0^1 G^{(h)}(x) dx = \frac{1}{2} E(X_h) = \frac{1}{4}.$$

Dunque, la funzione di autocovarianza é nulla per ogni $h > 0$, come si voleva provare.

Fissiamo ora un numero $t > 0$: per ogni intero n , poniamo

$$J_n = 1_{X_n \in [0, t]} :$$

come in precedenza, si verifica facilmente che $(J_n)_n$ é un processo fortemente stazionario, e risulta $E(J_n) = t$, in quanto J_n é bernoulliana di parametro $\lambda([0, t])$. Si ha poi:

$$\begin{aligned} E(J_0 J_1) &= P([X_0 \in [0, t]] \cap [X_0 \in G^{-1}([0, t])]) = \lambda([0, t] \cap G^{-1}([0, t])) = \\ &= \lambda([0, t] \cap ([0, \frac{t}{2}] \cup [1 - \frac{t}{2}, 1])) = \frac{t}{2}. \end{aligned}$$

Dunque, $cov(J_n, J_{n+1}) = \frac{t}{2} - t^2$. Procedendo con l'indagine su c , vediamo che il valor medio del prodotto $J_0 J_h$, con h grande, si avvicina sempre piu' a t^2 , e quindi la covarianza $c(h)$ tende a 0. Per spiegare questo fatto, bisogna tener presente che il grafico della $(h+1)$ -esima iterata di G si presenta come un insieme di 2^h copie successive del grafo di G , ma molto piu' strette: la derivata di $G^{(h+1)}$ in valore assoluto (nei punti ove esiste) é uguale a 2^{h+1} . Ora, se t si

trova nell'intervallo $[\frac{u}{2^h}, \frac{u+1}{2^h}]$, (con u intero compreso fra 0 e $2^h - 1$), e vogliamo che sia x che $G^{h+1}(x)$ siano minori di t , il punto x può appartenere solo agli intervalli diadici $[\frac{v}{2^h}, \frac{v+1}{2^h}]$ con $v < u$, e a un pezzetto dell'intervallo $[\frac{u}{2^h}, \frac{u+1}{2^h}]$ che contiene t . Trascurando quest'ultimo intervallino, e restringendo l'attenzione ad uno dei vari intervalli diadici $[\frac{v}{2^h}, \frac{v+1}{2^h}]$ precedenti t , in questi intervalli la x può occupare o una posizione compresa fra l'estremo sinistro ($\frac{v}{2^h}$) e la prima contro-immagine di t a questo successiva (cioè il punto $\frac{v}{2^h} + \frac{t}{2^{h+1}}$), oppure una posizione compresa fra la contro-immagine successiva (cioè $\frac{v+1}{2^h} - \frac{t}{2^{h+1}}$) e l'estremo destro, $\frac{v+1}{2^h}$: la somma delle ampiezze di questi due intervallini è esattamente $\frac{t}{2^h}$, e, sommando per tutti i v consentiti, avremo una misura complessiva pari a $u \frac{t}{2^h}$. Dunque, perché risulti contemporaneamente $X_0 \leq t$ e $X_{h+1} \leq t$, la variabile X_0 (che non è altro che la x) deve stare in un insieme che, a parte uno scarto al massimo di $2^{-(h+1)}$, ha misura t^2 . Per $h \rightarrow \infty$, si ottiene infine $\lim_h c(h) = 0$, il che comporta, grazie a 11.5, che, le medie campionarie delle J_n tendono alla costante t : in altre parole, per ogni $t > 0$, la frequenza con cui le X_n cadono in $[0, t]$ tende quasi certamente e in L_2 a t .

Questo discorso, ragionando per differenze, si può applicare a qualsiasi intervallo contenuto in $[0, 1]$, e, con naturali procedure algebriche, si può estendere a qualsiasi insieme dell'algebra generata da tutti gli intervalli di $[0, 1]$.

Dunque, se si applica iterativamente la funzione G (avendo l'accortezza di iniziare da un numero irrazionale, o comunque da un numero con periodo decimale molto lungo, tipo $10/47$), la sequenza che si genera somiglia molto come andamento a quello che ci si aspetterebbe se i numeri della successione venissero scelti del tutto a caso: questo fatto viene spesso adoperato per mettere a punto procedure di generazione di sequenze *pseudo-casuali* mediante computer.

L'ultimo esempio segnalato è solo un caso molto particolare di una vasta classe di processi (e di svariate problematiche ad essi connesse), che portano il nome di *Schemi di Funzioni Iterate*, abbreviato in *IFS*.

Definizione 11.6 Sia $S \subset \mathbb{R}^k$, con l'usuale σ -algebra \mathcal{B} di Borel, e assumiamo che su S sia assegnata una misura di probabilit  P (ad esempio, quella di Lebesgue normalizzata se S   limitato). Supponiamo poi che $T_i : S \rightarrow S$ sia un'arbitraria funzione misurabile, per $i = 1, \dots, m$, m fissato. Inoltre, sia π una distribuzione di probabilit  (anch'essa fissata), definita su $\{1, \dots, m\}$: in altri termini, π   una legge di probabilit  sulle m funzioni T_i . Scelta arbitrariamente una distribuzione iniziale π_0 su S (ad esempio la distribuzione concentrata in un punto s), si dice *schema di funzioni iterate* il processo X_n a valori in S definito scegliendo come X_0 una v.a. con distribuzione π_0 e, una volta stabilito X_n , determinando X_{n+1} come quella v.a. che assume il valore $T_i(X_n)$ con probabilit  $\pi(i)$, con $i = 1, \dots, m$, ciascuna scelta essendo indipendente dalle X_i precedenti. In altre parole, se ad esempio si sceglie $X_0 \equiv s$ (costante), per X_1 sono possibili gli m valori $T_1(s), T_2(s), \dots, T_m(s)$, ciascuno con probabilit  dettata da π . Una volta stabilita X_1 , per X_2 sono possibili solo m valori: $T_1(X_1), \dots, T_m(X_1)$, con le stesse probabilit  e indipendentemente da quanto accaduto prima. E cos  via.

Non   difficile provare che il processo X_n cos  ottenuto   di tipo Markoviano: non appena sia noto il valore di X_n , la distribuzione di X_{n+1}   perfettamente individuata, essendo possibili solo i valori $T_1(X_n), T_2(X_n), \dots, T_m(X_n)$, con rispettive probabilit  π_1, \dots, π_m . Tale processo sara' *stazionario* se la distribuzione iniziale π_0   invariante, ossia se $P_{X_1} = P_{X_0}$. L'esistenza di una distribuzione invariante   garantita dal seguente teorema.

Teorema 11.7 *Se lo spazio S   compatto, allora per ogni IFS su S esiste una distribuzione π invariante. Se inoltre S   convesso, allora, supponendo che la variabile iniziale X_0 abbia distribuzione π , la successione $n \mapsto \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} X_i$ converge in L_1 e q.c. ad una variabile aleatoria Y , ancora a valori in S .*

Nel caso $m = 1$, abbiamo gia' visto esempi. In questo caso, inoltre, il teorema ergodico di convergenza stabilisce anche un modo di caratterizzare il limite.

Definizione 11.8 Sia S un sottoinsieme di \mathbb{R}^k , sia data un'applicazione misurabile $T : S \rightarrow S$, e sia π una distribuzione invariante su S . Dato un insieme misurabile

$A \subset S$, diciamo che A é T -invariante se $\pi(A \Delta T^{-1}(A)) = 0$. In altre parole, A é invariante se tale insieme coincide con la propria immagine inversa $T^{-1}(A)$ a meno di un sottoinsieme di probabilitá nulla. Non é difficile verificare che la famiglia degli insiemi invarianti é una sotto- σ -algebra di \mathcal{B} , che denoteremo con \mathcal{I} : essa é detta la σ -algebra T -invariante.

Sussiste il seguente teorema, essenzialmente dovuto a Birkhoff (si veda anche [2]).

Teorema 11.9 *Sia S compatto e convesso, e sia assegnata una funzione misurabile $T : S \rightarrow S$. Fissata una distribuzione invariante π su S , e costruito l'IFS (con la sola funzione T) a partire da una X_0 con distribuzione π , la successione $n \mapsto \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} X_i$ converge in L_1 e q.c. alla variabile aleatoria $Y = E(X_0|\mathcal{I})$.*

Negli esempi che abbiamo visto in precedenza, ove il limite Y risulta essere una costante, la σ -algebra \mathcal{I} é banale, ossia é costituita di tutti gli insiemi di misura 0 oppure 1. Tale fatto si esprime anche dicendo che T é una trasformazione *ergodica* di S in sé.

Vediamo ora un esempio in cui le trasformazioni T_i siano piu' di una.

Sia $S = [0, 1]$, e siano T_1, T_2 le funzioni cosi' definite:

$$T_1(x) = \frac{x}{3}, \quad T_2(x) = \frac{x+2}{3}.$$

In termini elementari, T_1 riduce tutto a un terzo, mentre T_2 restringe a un terzo, e trasla poi di $\frac{2}{3}$ verso destra. Pertanto, il codominio di T_1 é $[0, \frac{1}{3}]$, mentre quello di T_2 é $[\frac{2}{3}, 1]$. Supponendo che le due trasformazioni vengano scelte ciascuna con probabilitá $\frac{1}{2}$, e iniziando il processo ad esempio con $X_0 \equiv 0$, si puo' osservare (tramite computer) che i valori successivi delle X_n vanno a distribuirsi in maniera pressoché uniforme lungo l'insieme di Cantor: il limite della successione \bar{X}_n assume infatti valori solo in tale insieme, distribuiti in maniera sostanzialmente *uniforme* (non intendiamo entrare qui nel merito di tale concetto).

La determinazione dell'insieme di Cantor non é casuale: in situazioni molto generali, é possibile dimostrare l'esistenza di insiemi *invarianti* rispetto alle trasformazioni T_i , i quali svolgano poi il ruolo della σ -algebra \mathcal{I} del teorema ergodico. Il

risultato che ora enunceremo (Teorema di Hutchinson) sta alla base della moderna concezione di *insieme frattale*.

Teorema 11.10 *Supponiamo che S sia compatto, e che le trasformazioni $T_i : S \rightarrow S$ siano contrattive: ossia esista una costante $h \in]0, 1[$ tale che*

$$|T_i(s_1) - T_i(s_2)| \leq h|s_1 - s_2|$$

per ogni $s_1, s_2 \in S$, e $i = 1, \dots, m$. Allora esiste uno e un solo insieme compatto $K \in S$, che goda della seguente proprietà di invarianza:

$$K = \bigcup_{i=1}^m T_i(K).$$

L'insieme K di cui tratta il teorema di Hutchinson é invariante nel senso che, se il processo *IFS* regolato dalle trasformazioni T_i inizia con un punto di K , esso rimane in tale insieme per sempre. Insiemi di questo tipo sono detti anche *autosimili* (oltre che *frattali*), per la semplice ragione che si possono dividere in un certo numero di parti che sono tutte *simili* all'insieme intero.

Terminiamo qui questa trattazione, invitando il lettore a controllare, mediante computer, l'evoluzione del processo *IFS* sul quadrato unitario $[0, 1]$, regolato dalle seguenti 3 trasformazioni (supposte equiprobabili):

$$T_1(x, y) = (\frac{x}{2}, \frac{y}{2}), \quad T_2(x, y) = (\frac{x}{2}, \frac{y+1}{2}), \quad T_3(x, y) = (\frac{x+1}{2}, \frac{y}{2}),$$

partendo ad esempio dal punto $(0, 0)$.

12 Processi Gaussiani

Come sappiamo, il Teorema del Limite Centrale illustra molto chiaramente l'importanza della distribuzione normale (o gaussiana) in svariati problemi applicativi. Ovviamente, tale teorema ha anche versioni in piu' dimensioni, che dimostrano la grande utilita' della distribuzione normale multivariata. Lo stesso discorso si puo' ripetere per i processi aleatori, pur nella varieta' di situazioni che il passaggio a dimensione infinita presenta.

Un processo stocastico che abbia *fidi's* normali viene detto *processo gaussiano*. Noi tratteremo in questa sezione solo una parte dei processi gaussiani in tempi continui, avendo in vista successivamente lo studio piu' particolareggiato del Moto Browniano.

Bisogna tuttavia premettere una breve discussione sull'*esistenza* di processi stocastici, che abbiano determinate distribuzioni finito-dimensionali. Rimandiamo ai testi [6], [3], [4] per approfondimenti.

Per affrontare questo discorso, conviene riguardare un processo stocastico $(X_t)_{t \in T}$ come una funzione $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^T$, ove T di solito é \mathbb{N} oppure un intervallo $[0, H]$ (con H possibilmente infinito). Per parlare di *distribuzione* di X , occorre introdurre un'opportuna σ -algebra su \mathbb{R}^T , e definire su di essa un'opportuna misura di probabilita'. La costruzione di \mathcal{B} avviene a partire dai cosiddetti *cilindri*: per cilindro s'intende un insieme C che sia prodotto cartesiano di infiniti boreliani di \mathbb{R} (uno per ogni $t \in T$), dei quali pero' solo un numero finito siano distinti da tutto \mathbb{R} . In altre parole, se interpretiamo (com'é giusto) gli elementi di \mathbb{R}^T come funzioni, definite su T e a valori reali, un *cilindro* é l'insieme di tutte le funzioni che in un numero finito di punti $t_i \in T$ debbono soddisfare a determinate condizioni, mentre non sono soggette ad alcuna condizione per quanto riguarda gli altri punti. I punti *privilegiati* t_i saranno detti i *punti coordinati* di C . Si definisce dunque \mathcal{B} come la minima σ -algebra su \mathbb{R}^T , che contenga tutti i cilindri. In maniera piu' intuitiva, si puo' dire che gli eventi di \mathcal{B} sono tutti quelli che si ottengono combinando tra loro condizioni su un numero finito o anche un'infinita' numerabile delle X_t . Ora, vediamo come definire la *distribuzione* di X , come misura di probabilita' su \mathcal{B} . Intanto, é chiaro che, se un cilindro C ha come punti coordinati t_1, \dots, t_n , dire che $X \in C$ significa che le v.a. X_{t_1}, \dots, X_{t_n} debbono soddisfare a determinate condizioni (prescritte nella natura dell'insieme C): condizioni che si possono formulare scrivendo ad es. $[X_{t_1} \in A_1] \cap [X_{t_2} \in A_2] \cap \dots [X_{t_n} \in A_n]$. La probabilita' di un tale evento é determinata dalla *fidi* di X che riguarda il vettore $(X_{t_1}, \dots, X_{t_n})$. Pertanto la conoscenza di tale *fidi* automaticamente attribuisce un valore di probabilita' a tutti i cilindri che hanno i punti coordinati t_1, \dots, t_n . Quindi, note tutte le *fidi's* di X , vengono automaticamente attribuiti i valori di probabilita' a tutti i cilindri di \mathcal{B} . A questo punto, si adopera

un classico teorema di Teoria della Misura, il quale afferma che, attribuiti (nel modo che abbiamo visto) i valori di probabilit  ai cilindri, **esiste ed   unica** una probabilit  P_X su tutta \mathcal{B} , che assegni a tutti i cilindri i valori prescritti. Dunque, la distribuzione di X non   altro che l'unica misura di probabilit  P_x su \mathcal{B} che assegni a tutti i cilindri le probabilit  che a questi sono attribuiti dalle *fidi*'s del processo.

Il discorso si complica un po', se noi non abbiamo a priori un processo X , ma conosciamo soltanto quelle che dovrebbero essere le sue *fidi*'s: in altri termini, disponiamo di tutta la famiglia di distribuzioni finito-dimensionali $P_{(t_1, \dots, t_n)}$, per tutte le scelte possibili dei vari punti t_1, \dots, t_n , e cerchiamo un qualche processo stocastico X , definito su qualche spazio Ω , che abbia come *fidi*'s proprio quelle distribuzioni finito-dimensionali assegnate.

Il problema sembra complicato, ma la soluzione   molto semplice, grazie al celebre *Teorema di Kolmogorov*. Questo teorema da' risposta affermativa al quesito, a patto che la famiglia di distribuzioni finito-dimensionali $P_{(t_1, \dots, t_n)}$ soddisfi a due condizioni (*invarianza e consistenza*) molto naturali.

La *invarianza* consiste nel richiedere che, scambiando in qualunque modo l'ordine dei punti nella n -upla (t_1, \dots, t_n) , e scambiando allo stesso modo gli insiemi boreliani corrispondenti a tali punti, il valore della probabilit  finito-dimensionale non cambi. Ad esempio, la relazione

$$P_{(t_1, t_2)}(A_1 \times A_2) = P_{(t_2, t_1)}(A_2 \times A_1)$$

deve valere per tutte le coppie (t_1, t_2) e tutte le coppie (A_1, A_2) .

Chiaramente, questa condizione   sempre verificata, se le distribuzioni finito-dimensionali di cui disponiamo sono *gi * le *fidi*'s di qualche processo.

La condizione di *consistenza*   altrettanto naturale: essa richiede che la distribuzione $P_{(t_1, \dots, t_n)}$ si possa sempre ricavare per *marginalizzazione* da qualunque distribuzione del tipo $P_{(t_1, \dots, t_n, t_{n+1})}$: ad esempio

$$P_{(t_1, t_2)}(A_1 \times A_2) = P_{(t_1, t_2, t_3)}(A_1 \times A_2 \times \mathbb{R})$$

deve valere per ogni scelta di t_1, t_2, t_3 e di A_1, A_2 .

Dunque, il teorema di Kolmogorov si puo' cosi' formulare.

Teorema 12.1 *Assegnata una famiglia di distribuzioni finito-dimensionali $P_{(t_1, \dots, t_n)}$ per tutte le n -uple di punti t_1, \dots, t_n in T (e per tutti gli $n > 0$), condizione necessaria e sufficiente perché esse siano le fidi's di qualche processo stocastico X é che tale famiglia sia invariante e consistente.*

Veniamo ora alla definizione di processo gaussiano.

Definizione 12.2 Dato un qualsiasi processo $(X_t)_{t \in T}$, diremo che esso é *gaussiano* se le sue fidi's sono tutte di tipo normale multivariato. Solitamente, richiederemo che la matrice di varianza-covarianza delle fidi's sia sempre definita positiva, salvo quelle coinvolgenti la v.a. iniziale X_0 (che spesso si assume concentrata). Data una n -upla (t_1, t_2, \dots, t_n) , essa sara' di solito denotata con \mathbf{t} , e la matrice di varianza-covarianza ad essa associata sara' denotata con $\mathbf{V}(\mathbf{t})$.

Assumeremo anche, di solito, che le medie delle X_n siano tutte nulle: cio' solo per semplicita' di trattazione, in quanto la generalita' si recupera sempre molto facilmente.

Questo ci permette anche di descrivere esattamente le fidi's del nostro processo gaussiano, non appena si conoscano le quantita' $E(X_{t_1} X_{t_2}) = \text{cov}(X_{t_1}, X_{t_2})$, al variare di t_1 e t_2 , con $t_1 \leq t_2$. Infatti, per la proprieta' d'invarianza, la conoscenza di queste quantita' individua perfettamente le fidi's di dimensione 2; viceversa, le fidi's di qualunque dimensione sono univocamente determinate dalle matrici di covarianza, i cui elementi (per la consistenza) sono a loro volta univocamente determinati.

Dunque, la descrizione di un processo gaussiano non é molto difficile: se ammettiamo che tutte le medie siano nulle, basta individuare le covarianze delle X_t .

Al fine di abbreviare i calcoli successivi, ricordiamo alcuni risultati tecnici relativi alle v.a. con distribuzione Normale Multivariata (v. anche Capp. 2 e 5).

Proposizione 12.3 *Sia (X, Y) una v.a. con distribuzione normale bivariata, con $E(X) = \mu_X$, $E(Y) = \mu_Y$, $V(X) = \sigma_X^2$, $V(Y) = \sigma_Y^2$, $\text{cov}(X, Y) = \rho \sigma_X \sigma_Y$. Allora risulta*

$$X|[Y = y] \sim N(\mu_X + \rho \frac{\sigma_X}{\sigma_Y}(y - \mu_Y), \sigma_X^2(1 - \rho^2)),$$

da cui

$$E(X|Y) = \mu_X + \rho \frac{\sigma_X}{\sigma_Y} (Y - \mu_Y).$$

Di solito, un processo gaussiano non é stazionario. Un modo per caratterizzare la stazionarieta' di un tale processo é stabilito nel seguente teorema, di facile dimostrazione.

Teorema 12.4 *Il processo gaussiano (X_t) é stazionario se e solo se $E(X_t)$ é costante e la matrice $\mathbf{V}(\mathbf{t})$ verifica la relazione $\mathbf{V}(\mathbf{t}) = \mathbf{V}(\mathbf{t} + \mathbf{h})$ per ogni $h > 0$, ove $\mathbf{t} + \mathbf{h}$ denota la n -upla $(t_1 + h, t_2 + h, \dots, t_n + h)$.*

Evidentemente, in un processo gaussiano stazionario, basta assegnare la media (comune a tutte le variabili) e la *funzione di autocovarianza*, cioé la funzione

$$c(h) = \text{cov}(X_t, X_{t+h})$$

(indipendente da t), per ciascun $h \geq 0$.

E' anche interessante porsi il problema se un determinato processo gaussiano sia di Markov, ossia se sussista la relazione

$$P(X_t | \mathcal{F}_s) = P(X_t | X_s)$$

per ogni $0 < s < t$. (Si raccomanda al lettore di attribuire il *giusto* significato ad espressioni come $P(X_t | X_s)$ in situazioni generali come quella che stiamo trattando). Si ha il seguente risultato, di cui non riportiamo la dimostrazione.

Teorema 12.5 *Un processo gaussiano (X_t) é markoviano se e solo se risulta*

$$E(X_t | \mathcal{F}_s) = E(X_t | X_s),$$

con $0 < s < t$.

Esempi 12.6 1) Vediamo come si presentano i Processi Gaussiani, che siano simultaneamente Markoviani e stazionari.

Per semplicità, supporremo $E(X_t) = 0$ per ogni t , e denoteremo con c la funzione di autocovarianza: $c(h) = \text{cov}(X_t, X_{t+h})$. In particolare, $c(0) = V(X_t)$, costante e positivo per ogni t . Utilizzando il risultato di 12.3, possiamo dedurre, per $0 < s, t$:

$$E(X_{t+s}|X_s) = \rho(X_{t+s}, X_t)X_s = \frac{c(t)}{c(0)}X_s.$$

Di conseguenza,

$$\begin{aligned} c(t+s) &= \text{cov}(X_0, X_{t+s}) = E(X_0 X_{t+s}) = E(E(X_0 X_{t+s} | \mathcal{F}_s)) = \\ &= E(X_0 E(X_{t+s} | \mathcal{F}_s)) = E(X_0 E(X_{t+s} | X_s)) = E(X_0 X_s) \frac{c(t)}{c(0)} = \frac{c(s)c(t)}{c(0)}. \end{aligned}$$

Allora, la funzione di autocovarianza verifica l'equazione funzionale

$$c(t+s) = \frac{c(t)c(s)}{c(0)}.$$

Considerato che $c(0)$ è una costante positiva, si deduce che

$$c(t) = c(0)e^{\alpha t}$$

con α costante opportuna. Questa condizione caratterizza completamente (a meno della costante $c(0)$ e della costante α) il processo in questione, che viene detto *Processo di Ornstein-Uhlenbeck*.

2) Un altro processo gaussiano particolarmente interessante è il *processo di Wiener* $(W_t)_{t \geq 0}$, caratterizzato dalle seguenti condizioni:

$$W_0 = 0, \quad E(W_t) = 0 \quad \forall t, \quad \text{cov}(W_t, W_s) = \min\{s, t\} \quad \forall s, t > 0.$$

Queste proprietà individuano perfettamente le caratteristiche distribuzionali di $(W_t)_t$, e permettono di stabilire i seguenti fatti:

1) $V(W_t) = t$: ciò è immediata conseguenza della condizione sulle covarianze, e chiarisce che il processo di Wiener non è stazionario.

2) Il processo di Wiener ha *incrementi indipendenti e stazionari*, in quanto

$$W_t - W_s \quad \text{indipendente da} \quad W_v - W_u$$

non appena $u < v \leq s < t$, e $W_t - W_s \sim N(0, t - s)$, il che comporta appunto che la distribuzione dell'incremento $W_t - W_s$ non dipende che da $t - s$.

Per provare queste cose, osserviamo che si ha

$$E((W_t - W_s)(W_v - W_u)) = v - v - u + u = 0$$

per $u < v \leq s < t$, da cui l'indipendenza (trattandosi di processi gaussiani), e $V(W_t - W_s) = E(W_t^2) + E(W_s^2) - 2E(W_t W_s) = t + s - 2s = t - s$: cio' basta per dedurre la stazionarieta' degli incrementi.

(Di fatto, si puo' provare che le condizioni (1) e (2) disopra caratterizzano, tra i processi gaussiani, quello di Wiener, nel senso che da esse si puo' dedurre la legge delle covarianze: si lascia per esercizio la facile verifica).

3) Una banale conseguenza delle precedenti osservazioni é che $(W_t)_t$ é una *Martingala*: infatti

$$E(W_t | \mathcal{F}_s) = E(W_t - W_s | \mathcal{F}_s) + E(W_s | \mathcal{F}_s) = W_s$$

a causa dell'indipendenza degli incrementi e della condizione $E(W_t) = 0$.

Anche a questo proposito si puo' dire che (W_t) é l'unico processo gaussiano che (partendo da 0 e con variabili centrate) sia una martingala e che verifichi $V(W_t) = t$: infatti, anche in questo caso basta dimostrare che $E(W_t W_s) = s$, non appena $s < t$, e tale relazione si ottiene come segue:

$$E(W_t W_s) = E(E(W_t W_s | \mathcal{F}_s)) = E(W_s E(W_t | \mathcal{F}_s)) = E(W_s^2) = s.$$

4) Un'altra importante caratteristica del processo di Wiener é la cosiddetta *invarianza di scala*: detto $(W_t)_{t \geq 0}$ il processo di Wiener, e fissato un qualunque numero reale $H > 0$, si consideri il processo

$$(W_t^{(H)})_t = (\frac{1}{\sqrt{H}} W_{Ht})_t :$$

non é difficile controllare che $W_t^{(H)}$ ha la stessa distribuzione di W_t , e anzi si puo' facilmente verificare che anche tutte le *fidi's* dei due processi coincidono; basta a tale scopo provare che

$$E(W_t^{(H)} W_s^{(H)}) = s \wedge t$$

per $s, t > 0$: lasciamo la verifica al lettore.

Notiamo che l'invarianza di scala porta ad un altro tipo di invarianza: si ha infatti (solo formalmente per $t > 0$):

$$(W_t)_t \sim (tW_{1/t})_t, \quad \text{o anche} \quad (W_{1/t})_t \sim \left(\frac{1}{t}W_t\right)_t :$$

anche in questo caso lasciamo al lettore il semplice calcolo delle covarianze. L'ultima relazione scritta permette (intuitivamente) di assimilare l'andamento di W_t per *grandi* valori di t a quello dello stesso processo nei punti $\frac{1}{t}$, moltiplicato per t .

Vedremo in seguito altre importanti caratteristiche di questo processo.

Il processo di Wiener, così come l'abbiamo descritto, in realtà *non* è unico: come esistono molte v.a., sostanzialmente diverse ma tutte con la stessa distribuzione, così esistono svariati processi stocastici, che hanno le stesse *fidi's* di un processo di Wiener: non staremo qui a dare esempi, la teoria in proposito è molto ricca di bei risultati, ma anche molto complicata! Diremo comunque che, assegnata una famiglia *coerente* di *fidi's*, ogni processo stocastico che abbia esattamente quelle *fidi's* è detto essere una *versione* di quella particolare distribuzione. (Ricordiamo che una famiglia di *fidi's* è coerente, se essa soddisfa alle condizioni del celebre Teorema di Kolmogorov, e pertanto, come conseguenza di quel teorema, essa è effettivamente la famiglia delle *fidi's* di qualche processo stocastico, e come tale individua perfettamente la distribuzione di quel processo, e dunque di ogni sua *versione*). In base a queste osservazioni, l'interesse fondamentale che tali processi rivestono è infatti dovuto principalmente al fatto che esistono versioni (una sola, stavolta!) del processo di Wiener, le quali abbiano *traiettorie continue*. Sappiamo che un determinato processo stocastico $(X_t)_{t \in T}$ può essere riguardato come un'applicazione $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^T$, intendendo che $X(\omega)$ è l'applicazione che ad ogni $t \in T$ associa il numero $X_t(\omega)$. Fissato $\omega \in \Omega$, l'applicazione $X(\omega) : T \rightarrow \mathbb{R}$ prende il nome di *traiettoria* del processo. Ebbene, è possibile definire un processo stocastico, che denoteremo con $(B_t)_{t > 0}$, che abbia le stesse *fidi's* del processo di Wiener, e che abbia (quasi tutte) le traiettorie continue: questo processo è detto *Moto Browniano*, e verrà studiato più in dettaglio nei prossimi paragrafi.

13 Convergenza in distribuzione

Lo scopo di questa sezione é quello di descrivere la procedura tipica da seguire per *costruire* il Processo che va sotto il nome di *Moto Browniano*. Poiché, come già detto, si vuole che questo processo abbia traiettorie continue, conviene interpretarlo come un limite (in qualche senso) di processi $X_t^{(n)}$ che sono già a traiettorie continue: occorre dunque un'opportuna nozione di convergenza per processi di questo tipo, e occorrono anche teoremi che garantiscano la convergenza in questione.

Naturalmente, non appesantiremo questa trattazione con dimostrazioni troppo tecniche o delicate: quando sarà possibile, cercheremo di *dare un'idea* di come stanno le cose, senza la pretesa di essere estremamente rigorosi e precisi. Il lettore interessato potrà trovare ragguagli e ulteriori approfondimenti nel testo [4].

Iniziamo con alcune definizioni e notazioni.

Definizione 13.1 Fissato un intervallo $[0, T]$ della retta reale, denoteremo con $C([0, T])$, o anche solo con C se non vi é pericolo di confusione, lo spazio di tutte le funzioni reali, continue su $[0, T]$. Comé ben noto, $C([0, T])$ é uno spazio vettoriale, rispetto alle operazioni usuali con le funzioni. Su tale spazio introduciamo la *norma della convergenza uniforme*: $\|f\| = \max_{t \in [0, T]} |f(t)|$. E' noto che, con tale norma, lo spazio C é *completo* e separabile (ossia, esiste un sottoinsieme denso numerabile): spazi di tal genere vengono anche detti spazi *polacchi*.

La famiglia degli insiemi aperti in C genera una σ -algebra, che viene detta *σ -algebra di Borel*: su questa σ -algebra, che di solito viene denotata con $\mathcal{B}(C)$, o anche solo \mathcal{B} , vedremo che si possono introdurre delle misure di probabilitá, che saranno riguardate come le *distribuzioni* di processi stocastici con traiettorie continue: il processo $X(t, \omega)$, in altri termini, viene interpretato come una sorta di *variabile aleatoria* a valori in C : ad ogni ω la X associa la *traiettoria* $X(\cdot, \omega)$.

Ad esempio, fissata una particolare funzione continua x in C , la misura *concentrata* in x é una distribuzione su $\mathcal{B}(C)$: essa é la distribuzione di quel processo $(X_t)_{t \in [0, T]}$ che ad ogni ω associa la funzione x , (e quindi ad ogni t associa la v.a. costante $x(t)$).

Naturalmente, esistono altre distribuzioni su $\mathcal{B}(C)$, che ora cercheremo di descrivere.

Definizione 13.2 Data una misura di probabilit  P su $\mathcal{B}(C)$, per ogni $t \in [0, T]$ poniamo

$$P_t(A) = P([x(t) \in A])$$

per ogni aperto $A \subset \mathbb{R}$. Tale definizione   ben posta, poich  l'evento $[X_t \in A]$ non   altro che l'insieme delle $x \in C$ tali che $x(t) \in A$: poich  tale insieme   aperto nella topologia che abbiamo introdotto su C , esso fa parte dei boreliani di C , e quindi ha una sua probabilit . Analogamente si pu  porre

$$P_t(B) = P([x(t) \in B])$$

per ogni boreliano $B \subset \mathbb{R}$: l'insieme delle $x \in C$ tali che $x(t) \in B$ forse non   un aperto, ma fa certo parte della σ -algebra generata dagli aperti, ossia di $\mathcal{B}(C)$. Piu' in generale, per ogni scelta di k punti t_1, \dots, t_k in $[0, T]$, e per ogni boreliano $H \subset \mathbb{R}^k$, ha senso porre

$$P_{(t_1, \dots, t_k)}(H) = P(\{x \in C : (x(t_1), \dots, x(t_k)) \in H\})$$

in quanto l'insieme descritto a secondo membro   un boreliano in C . Ovviamente, le misure $P_{(t_1, \dots, t_k)}$ sono una famiglia di *fidi's* che verificano le condizioni di Kolmogorov: queste sono dette le *proiezioni* della distribuzione P .

Proposizione 13.3 *Date due distribuzioni $P^{(1)}$ e $P^{(2)}$ in $\mathcal{B}(C)$, se esse hanno le stesse proiezioni, allora necessariamente coincidono.*

Cenno di dimostrazione. Proveremo dapprima che, se $P^{(1)}$ e $P^{(2)}$ hanno le stesse proiezioni, allora, per ogni fissata funzione $x \in C$ e ogni fissato $\varepsilon > 0$, risulta $P^{(1)}(B(x, \varepsilon)) = P^{(2)}(B(x, \varepsilon))$, ove $B(x, \varepsilon) = \{y \in C : \|y - x\| \leq \varepsilon\}$. A tale scopo, osserviamo che si ha

$$B(x, \varepsilon) = \bigcap_{t \in \mathbb{Q}} \{y \in C : |y(t) - x(t)| \leq \varepsilon\}.$$

Enumeriamo i numeri razionali in $[0, T]$, scrivendo $\mathbb{Q} = \{q_1, q_2, \dots, q_n, \dots\}$; per ogni n sia poi A_n il seguente chiuso di C :

$$A_n = \bigcap_{i=1}^n \{y \in C : |y(q_i) - x(q_i)| \leq \varepsilon\}.$$

Allora

$$B(x, \varepsilon) = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n.$$

Poiché

$$P^{(1)}(A_n) = P_{(q_1, \dots, q_n)}^{(1)}([x(q_1) - \varepsilon, x(q_1) + \varepsilon] \times \dots \times [x(q_n) - \varepsilon, x(q_n) + \varepsilon])$$

e analogamente per $P^{(2)}$, dall'uguaglianza delle proiezioni segue che $P^{(1)}(A_n) = P^{(2)}(A_n)$ per ogni n , e infine che $P^{(1)}(B(x, \varepsilon)) = P^{(2)}(B(x, \varepsilon))$.

Ora, procedendo in maniera analoga, si può dimostrare che, scelti ad arbitrio un numero finito di elementi di C , x_1, \dots, x_j , e corrispondenti numeri positivi $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_j$, risulta anche

$$P^{(1)}(B(x_1, \varepsilon_1) \cap \dots \cap B(x_j, \varepsilon_j)) = P^{(2)}(B(x_1, \varepsilon_1) \cap \dots \cap B(x_j, \varepsilon_j)).$$

Questo prova che $P^{(1)}$ e $P^{(2)}$ coincidono sulla σ -algebra \mathcal{F} generata da tutte le *palle* del tipo $B(x, \varepsilon)$ (v. anche [1]).

Si fissi ora un generico insieme aperto non vuoto A in C : poiché C è separabile, A può essere ottenuto come unione al più numerabile di elementi di \mathcal{F} , e quindi fa parte di \mathcal{F} . Ma allora anche la σ -algebra dei boreliani fa parte di \mathcal{F} , e quindi in definitiva $P^{(1)}(B) = P^{(2)}(B)$ per ogni boreliano B , e ciò conclude la dimostrazione.

□

Tuttavia, la Proposizione 13.3 non garantisce che, data una qualunque famiglia di *fidi's*, sia pure soddisfacente alle condizioni di coerenza e consistenza del Kolmogorov, *esista* veramente una distribuzione P sui boreliani di C , che abbia quelle assegnate *fidi's* come proiezioni.

Ad esempio, consideriamo il processo stocastico $X(t, \omega)$ definito da

$$X(t, \omega) = \begin{cases} 1, & \text{se } t < \frac{T}{2}, \\ -1 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

Chiaramente, le *fidi's* di questo processo sono coerenti e consistenti, ma sono anche *banali*: per ogni t , è certo quale dev'essere il valore di $X(t)$; e chiaramente la traiettoria (l'unica possibile in questo caso) è discontinua.

Per individuare quale ulteriore condizione dev'essere verificata dalle *fidi's* assegnate, occorre qualche altra considerazione.

Come abbiamo osservato in precedenza, lo spazio C é metrico, completo e separabile. Dunque esso ha la *proprietà di Lindelöf*: ogni ricoprimento aperto di tale spazio ammette un sottoricoprimento numerabile. Allora, per ogni intero positivo k , é possibile ricoprire C con una successione di bocce aperte del tipo $B(x_n(k), \frac{1}{k})$, (al variare di n), e quindi, fissato $\varepsilon > 0$, esiste un intero $N(k)$ tale che

$$P\left(\bigcup_{n \leq N(k)} B(x_n(k), \frac{1}{k})\right) > 1 - \frac{\varepsilon}{2^k}.$$

Ponendo

$$K := \bigcap_k \left(\bigcup_{n \leq N(k)} B(x_n(k), \frac{1}{k}) \right),$$

si prova facilmente che $P(K) > 1 - \varepsilon$, e che K é totalmente limitato. Dunque, la chiusura di K in C é un insieme compatto in C .

In definitiva, abbiamo dimostrato quanto segue:

Teorema 13.4 *Per ogni probabilit  P su C , e per ogni $\varepsilon > 0$, esiste in C un compatto K tale che $P(K) > 1 - \varepsilon$.*

Solitamente, una misura di probabilit  con tale propriet  é detta *tight*: ad esempio, ogni misura di probabilit  definita sui boreliani di \mathbb{R} , o di \mathbb{R}^n , é certamente *tight*, in quanto tali spazi sono σ -compatti.

A proposito degli insiemi compatti in C , sussiste la seguente proposizione.

Proposizione 13.5 *Sia H un sottoinsieme di C . La chiusura di H é compatta se e solo se sussistono le due condizioni seguenti:*

$$(1) \sup_{x \in H} |x(0)| < +\infty.$$

2 per ogni $\varepsilon > 0$ esiste un $\delta > 0$ tale che

$$\sup_{x \in H} \rho_x(\delta) < \varepsilon,$$

dove ρ_x é il modulo di continuit  di x , ossia la funzione $\rho_x : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ definita da

$$\rho_x(r) = \sup\{|x(v) - x(u)| : u, v \in [0, T], |u - v| < r\},$$

per ogni $r > 0$.

(L'uniforme continuità di x equivale alla condizione $\lim_{r \rightarrow 0} \rho_x(r) = 0$).

Non riportiamo la dimostrazione di tale proposizione; osserviamo però che la seconda condizione è una formulazione alternativa del concetto di *equicontinuità* per gli elementi di H , e che questa, unita alla prima condizione, implica la *equilimitatezza* degli elementi di H : dunque, la parte sufficiente della dimostrazione è contenuta nel teorema di Ascoli-Arzelà.

Unendo i risultati di 13.4 e 13.5, giungiamo alla seguente conclusione.

Teorema 13.6 *Fissata una distribuzione P su C , per ogni $\varepsilon > 0$ esiste un insieme equilimitato ed equicontinuo $H \subset C$, tale che $P(H) > 1 - \varepsilon$.*

Di conseguenza, perché una famiglia di *fidi's* (coerenti e consistenti secondo Kolmogorov) sia la famiglia delle proiezioni di una distribuzione P in C , è necessario che accada quanto segue:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : P(\{x \in C([0, T]) : \rho_x(\delta) > \varepsilon\}) < \varepsilon,$$

dove la quantità $P(\{x \in C([0, T]) : \rho_x(\delta) > \varepsilon\})$ va calcolata tramite le *fidi's* assegnate, e *assumendo* traiettorie continue (dunque il modulo di continuità si può valutare usando solo le *fidi's* relative a indici razionali).

La sufficienza di tale condizione verrà provata solo in un caso particolare, che poi è quello che ci interessa più da vicino: il Moto Browniano.

A tale scopo, conviene comunque introdurre il concetto di *convergenza in distribuzione* nello spazio C .

Definizione 13.7 Data una successione di distribuzioni $(P_n)_n$ in C , diremo che essa converge in distribuzione alla P_0 se risulta

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_C f dP_n = \int_C f dP_0$$

per ogni funzione continua e limitata $f : C \rightarrow \mathbb{R}$. Tale fatto sarà denotato con la scrittura: $P_n \Rightarrow P_0$. (Ricordiamo qui che su C la topologia è quella della convergenza uniforme, quindi la continuità della f è riferita a tale topologia).

Per illustrare meglio tale definizione, riportiamo il seguente Teorema, detto *Teorema di Portmanteau*, che esprime alcune condizioni equivalenti. La dimostrazione verrebbe omessa.

Teorema 13.8 *Le seguenti condizioni sono equivalenti:*

- 1) $P_n \Rightarrow P_0$;
- 2) $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_C f dP_n = \int_C f dP_0$ per ogni funzione limitata e uniformemente continua f ;
- 3) $\limsup_n P_n(F) \leq P_0(F)$ per ogni insieme chiuso $F \subset C$;
- 4) $\liminf_n P_n(G) \leq P_0(G)$ per ogni insieme aperto $G \subset C$;
- 5) $\lim_n P_n(A) = P_0(A)$ per ogni boreliano $A \subset C$ tale che $P_0(\partial A) = 0$.

La condizione (5) del teorema precedente implica che, in caso di convergenza in distribuzione delle P_n a P_0 , le distribuzioni finito-dimensionali delle P_n convergono (in distribuzione) alle omologhe distribuzioni di P_0 : infatti, scegliamo ad arbitrio dei punti t_1, \dots, t_k in $[0, T]$, e corrispondenti valori reali x_1, \dots, x_k , e indichiamo con A l'evento

$$A = \{x \in C([0, T]) : x(t_1) \leq x_1, \dots, x(t_k) \leq x_k\}.$$

Allora, A è chiaramente un insieme chiuso in C , e quindi boreliano. Ora, denotiamo con \bar{X} la variabile vettoriale $(x(t_1), \dots, x(t_k))$, e con F la funzione di ripartizione di \bar{X} , relativamente alla distribuzione P_0 : se F è continua nel punto (x_1, \dots, x_k) , la frontiera dell'insieme A ha misura nulla secondo P_0 , in quanto tale frontiera è contenuta nell'unione degli eventi $[x(t_i) = x_i]$, per $i = 1, \dots, k$. Pertanto, la convergenza in Distribuzione delle P_k a P_0 comporta che $\lim_n P_n(A) = P_0(A)$, ossia $\lim_n F_n(x_1, \dots, x_k) = F(x_1, \dots, x_k)$, dove F_n è la funzione di ripartizione di \bar{X} relativamente alla distribuzione P_n . Per l'arbitrarietà di (x_1, \dots, x_k) (soggetta solo alla condizione che tale punto sia di continuità per F), ne segue che le distribuzioni finito-dimensionali relative alle P_n convergono in Distribuzione alle loro omologhe relative a P_0 .

Ma questo non è sufficiente, in genere, per ottenere la convergenza in distribuzione nel nostro spazio C . Infatti, scegliamo una qualsiasi successione $(z_n)_n$ di funzioni non

negative e continue su $[0, T]$, ciascuna avente massimo valore 1, convergenti puntualmente ma non uniformemente a 0, e definiamo P_n come la distribuzione concentrata su z_n e con P_0 quella su 0: allora, data la convergenza puntuale, é facile provare che le *fidi's* delle P_n convergono a quelle di P_0 . Posto $f(x) = 1 \wedge \max_{t \in [0, T]} |x(t)|$, non é difficile provare che f é una funzione continua e limitata su C , tuttavia non puo' accadere che le quantita' $\int_C f dP_n = f(z_n)$ convergano a 0, dato che le z_n non convergono uniformemente.

Un importante strumento per dimostrare la convergenza in distribuzione é il Teorema di Prohorov, la cui formulazione é basata sul seguente principio: supponiamo che le proiezioni delle P_n convergano a quelle corrispondenti di P_0 , e che la successione $(P_n)_n$ sia *relativamente compatta* rispetto alla convergenza in distribuzione; in altri termini, supponiamo di sapere che una sottosuccessione della $((P_n)_n$ converga in distribuzione: allora certamente quella sottosuccessione avra' come limite proprio P_0 , visto che le *fidi's* del limite sono gia' state individuate. Non solo, ma possiamo anche dire che *ogni* sottosuccessione di (P_n) é relativamente compatta, e quindi possiede un'ulteriore sottosuccessione convergente a P_0 in distribuzione: ebbene, quando cio' accade, in base a un noto principio topologico, é la successione intera che converge in distribuzione a P_0 .

Resta dunque da individuare, nell'insieme di tutte le distribuzioni su C , quali siano le successioni relativamente compatte. Il teorema di Prohorov afferma in pratica che una successione (P_n) di probabilita' su C é relativamente compatta se e solo se per ogni $\varepsilon > 0$ esiste un compatto $H \subset C$ tale che $P_n(H) > 1 - \varepsilon$ per ogni n .

Di conseguenza, il teorema di Prohorov si puo' formulare come segue.

Teorema 13.9 *Data una successione $(P_n)_n$ di probabilita' su C , condizione necessaria e sufficiente affinché essa sia relativamente compatta é che sussistano le due condizioni seguenti:*

- (1) $\forall \varepsilon > 0 \exists K > 0 : \sup_n P_n(|x(0)| > K) < \varepsilon$,
- (2) $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : \sup_n P_n([\rho_x(\delta) > \varepsilon]) < \varepsilon$.

In ultima analisi, il teorema di Prohorov ci dice che la successione (P_n) é relati-

vamente compatta solo e quando tutte le P_n sono quasi interamente concentrate su un insieme equilimitato ed equicontinuo di elementi di C .

La dimostrazione é troppo complessa e delicata tecnicamente per riportarla qui. Noi ora ci limiteremo a vedere come il teorema di Prohorov, 13.9, possa essere adoperato per costruire *concretamente* il Processo Moto Browniano.

L'idea di base é la seguente. Partiamo da una successione X_n di v.a. IID del tipo $B(1, \frac{1}{2})$, e poniamo $Y_n = 2X_n - 1$: allora le Y_n sono IID, ciascuna puo' assumere solo il valore 1 oppure -1 , entrambi con eguale probabilita', e sono anche standard. Poniamo poi $S_0 = 0$, e $S_n = \sum_{1 \leq i \leq n} Y_i$ per $n > 0$: come sappiamo, il processo $(S_n)_n$ altro non é che la passeggiata aleatoria semplice, che parte da 0. Ora, fissato arbitrariamente $t \in [0, T]$, definiamo

$$Z_n(t) = \frac{1}{\sqrt{n}} S_{[nt]} + (nt - [nt]) \frac{1}{\sqrt{n}} Y_{[nt]+1}$$

per ogni $n > 0$, e $Z_0 = 0$: quando t assume i valori $\frac{j}{n}$, con j intero minore di nT , il valore $Z_n(t)$ non é altro che $\frac{S_j}{\sqrt{n}}$. Negli intervalli $]\frac{j}{n}, \frac{j+1}{n}[$, la funzione Z_n é definita linearmente, in modo da presentarsi come una linea *spezzata*, ma comunque continua. Al crescere di n , i punti del tipo $\frac{j}{n}$ diventeranno molto numerosi, e la spezzata Z_n rappresentera' piu' marcatamente l'andamento della passeggiata aleatoria, sia pure *riscalata*, per via del denominatore \sqrt{n} . Il senso del prossimo teorema (che porta il nome di Donsker) é che la successione $(Z_n)_n$ di processi a valori in C , (e quindi la successione (P_n) delle relative distribuzioni) converge in distribuzione esattamente al Moto Browniano.

Teorema 13.10 *La successione (P_n) delle distribuzioni dei processi Z_n (descritti in precedenza) converge in distribuzione al Moto Browniano.*

Cenno di dimostrazione. In virtu' del teorema di Prohorov, e dei risultati precedenti, bisogna provare che

- 1) le *fidi's* delle P_n convergono in distribuzione alle *fidi's* omologhe del Processo di Wiener, e
- 2) la successione (P_n) é relativamente compatta.

Per quanto riguarda il punto (1), proveremo dapprima che le distribuzioni unidimensionali delle P_n convergono alle corrispondenti distribuzioni unidimensionali del processo di Wiener: in altri termini, la successione $(Z_n(t))_n$ converge in D. (fissato t) alla $N(0, t)$. A tal fine, utilizzeremo il Teorema del Limite Centrale. Fissiamo $t \in [0, T]$, e sia N un generico intero positivo. Certamente esiste un intero j tale che $\frac{j}{N} \leq t < \frac{j+1}{N}$, e quindi $[Nt] = j$. Allora si ha

$$Z_N(t) = \frac{1}{\sqrt{N}}S_j + \frac{1}{\sqrt{N}}(Nt - j)Y_{j+1}.$$

Notiamo che $\frac{1}{\sqrt{N}}(Nt - j)|Y_{j+1}| \leq \frac{1}{\sqrt{N}}$, per cui basta provare che la successione $U_N := \frac{1}{\sqrt{N}}S_{[Nt]}$ converge in D. alla $N(0, t)$. Possiamo scrivere ora

$$U_N = \frac{\sqrt{[Nt]}}{\sqrt{N}} \frac{1}{\sqrt{[Nt]}} S_{[Nt]} :$$

osserviamo che $\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{[Nt]}{N} = t$. Dunque basterà solo provare che $\lim_N \frac{1}{\sqrt{[Nt]}} S_{[Nt]} = N(0, 1)$ in D: ma questo è proprio ciò che afferma il Teorema del Limite Centrale, dato che l'intero $[Nt]$ va all'infinito quando $N \rightarrow \infty$.

Ora, cominciamo a considerare le distribuzioni 2-dimensionali: fissiamo $s < t$, $s > 0$, ed esaminiamo la coppia di v.a.

$$(Z_n(s), Z_n(t) - Z_n(s)) = \frac{1}{\sqrt{n}}(S_{[ns]}, S_{[nt]} - S_{[ns]}) + O(n^{-1/2}),$$

dove $O(n^{-1/2})$ denota una coppia di v.a. dominate da $n^{-1/2}$, e che quindi tende a 0 q.c. per $n \rightarrow \infty$. Poiché le v.a. $S_{[ns]}$ e $S_{[nt]} - S_{[ns]}$ sono indipendenti, e convergono in D. rispettivamente a $N(0, s)$ e $N(0, t - s)$, la coppia $(Z_n(s), Z_n(t) - Z_n(s))$ converge in D. a una coppia (N_1, N_2) di normali indipendenti, di media nulla e varianza risp. s e $t - s$. Ne segue che la distribuzione limite di (Z_s, Z_t) è appunto quella della coppia (W_s, W_t) del Processo di Wiener. Un'analoga trattazione permette di dimostrare che anche le *fidi's* tri-dimensionali, e in genere quelle di qualsiasi dimensione, convergono alle omologhe *fidi's* del processo di Wiener.

Il passo successivo ora concerne il punto (2): far vedere che la successione $(P_n)_n$ è relativamente compatta. A tale scopo adopereremo il teorema di Prohorov, 13.9. Intanto, poiché abbiamo posto $Z_0 = 0$, la prima condizione di quel teorema è banalmente verificata.

Daremo solo un cenno della prova della seconda condizione, riguardante i moduli di continuit . Fissiamo $\varepsilon > 0$, fissiamo $N \in \mathbb{N}$, e consideriamo due punti s, t in $[0, T]$, della forma $s = \frac{i}{N}, t = \frac{j}{N}$, e $i < j$. Allora $s - t = \frac{j-i}{N}$. Osserviamo ora che

$$P\left(\left|\frac{1}{\sqrt{N}}(S_j - S_i)\right| > \varepsilon\right) \leq \frac{E(S_{j-i}^2)}{N\varepsilon^2} = \frac{j-i}{N\varepsilon^2} = \frac{t-s}{\varepsilon^2}$$

in virt  della disuguaglianza di Tchebyshev. La stima trovata permette di dominare la probabilit  che $[\rho_{Z_N}(\delta) > \varepsilon]$, (con $\delta < \varepsilon^3$), anche se si rimuove la (comoda) ipotesi che Nt e Ns siano interi. Dunque, scegliendo δ abbastanza piccolo, (dell'ordine di ε^3), avremo

$$P([\rho_{Z_N}(\delta) > \varepsilon]) < \varepsilon$$

qualunque sia N , da cui l'asserto. \square

Precisiamo, a questo punto, che la costruzione fatta della successione (Z_n) e il conseguente risultato del teorema 13.10 si possono ottenere anche a partire da una qualsiasi successione $(Y_n^*)_n$, anzich  la $(Y_n)_n$ che produce poi la passeggiata aleatoria: l'importante   che le Y_n^* siano IID e standard.

14 Alcune propriet  del Moto Browniano

In questo paragrafo, accenneremo ad alcune tra le piu' interessanti propriet  del processo Moto Browniano, $(B_t)_{t>0}$. Non riporteremo molte dimostrazioni: il lettore interessato potra' trovare dettagli nei testi in bibliografia, in particolare in [5]. Intanto, ricordiamo che tale processo ha la distribuzione del Processo di Wiener, e le traiettorie continue (quasi tutte, perlomeno).

Dunque, alcune prime propriet  derivano dal Processo di Wiener, e le possiamo qui riassumere:

1. $B_0 = 0$, $E(B_t) = 0 \ \forall t > 0$.
2. Le *fidi's* sono gaussiane, e $cov(B_s, B_t) = s \wedge t$.
3. $(B_t)_t$   una martingala in s , e un processo markoviano.
4. $(B_t)_t$   un processo ad incrementi indipendenti e stazionari.

5. (principio d'invarianza): per ogni reale $H > 0$, il processo $(\frac{1}{\sqrt{H}}B_{Ht})_t$ é anch'esso un Moto Browniano.

Una proprieta' sorprendente riguarda le traiettorie del Moto Browniano: benché tali funzioni siano continue, esse sono quasi tutte non derivabili in ogni punto.

Sussiste insomma il seguente risultato.

Teorema 14.1 *Sia $(B_t)_{t>0}$ un Moto Browniano. Allora ha probabilita' 0 l'evento che qualche traiettoria sia derivabile in qualche punto t :*

$$P(\bigcup_{t>0} [B. \text{ derivabile in } t]) = 0.$$

Anziché dimostrare questo teorema, per il quale si rimanda al testo di Breiman [5], proveremo che é nulla la probabilita' che qualche traiettoria sia derivabile in 0. Da questo, data la stazionarieta' degli incrementi, seguira' che, per ciascun punto t , la probabilita' che qualche traiettoria sia derivabile in t é nulla (tale risultato tuttavia é meno significativo del Teorema 14.1, perché?).

Per provare la non derivabilita' in 0, faremo vedere che, per ogni intero $K > 0$, risulta

$$P([\limsup_{h \rightarrow 0} |\frac{B_h}{h}| > K]) = 1.$$

Cio' sara' provato se mostreremo che, per $K > 0$, si ha

$$P(\bigcap_{n \in \mathbb{N}} [\sup_{h \leq 1/n} |\frac{B_h}{h}| > 2K]) = 1.$$

Cio' equivale a provare che

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P([\sup_{h \leq 1/n} |\frac{B_h}{h}| > 2K]) = 1.$$

Per dimostrare questa condizione, bastera' ovviamente provare che

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P([\frac{|B_{1/n}|}{1/n} > 2K]) = 1,$$

ossia che

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P([\frac{|B_{1/n}|}{1/n} > \frac{2K}{n}]) = 1,$$

Ora, $B_{1/n} \sim \frac{1}{\sqrt{n}} B_1$, per cui

$$P(|B_{1/n}| > \frac{2K}{n}) = P(|B_1| > \frac{2K}{\sqrt{n}}) :$$

ovviamente quest'ultima quantita' tende a 1 per $n \rightarrow \infty$.

Un risultato ancora piu' importante, che riguarda proprio le oscillazioni delle traiettorie, é contenuto nella *Legge del Logaritmo Iterato*: questo risultato, assai profondo e delicato, mostra che, in ultima analisi, le traiettorie del Moto Browniano hanno in ogni punto rapporti incrementali che, almeno in valore assoluto, vanno ad infinito con ordine molto simile a $\frac{1}{2}$. Noi enunceremo soltanto il risultato.

Teorema 14.2 *Dato un Moto Browniano (B_t) , si ha*

$$P(\limsup_{h \rightarrow 0^+} \frac{|B_h|}{\sqrt{2h \log |\log h|}} = 1) = 1.$$

Alla luce del teorema 14.2, é ovvio che quasi nessuna traiettoria puo' essere derivabile in 0.

Prima di esaminare alcune distribuzioni interessanti, relative al Moto Browniano, riportiamo (senza dimostrazione) una formulazione del *principio di riflessione*: cio' non deve sorprendere, poiché il Moto Browniano puo' essere ottenuto come limite in distribuzione di processi molto legati alle passeggiate aleatorie; naturalmente, il principio ora va adeguato ad un processo in tempi continui.

Teorema 14.3 *Sia $(B_t)_{t \in [0, \infty[}$ il Moto Browniano standard, e sia $(\mathcal{F}_t)_t$ la filtrazione naturale ad esso associata. Dato un qualsiasi tempo d'arresto τ relativo a tale filtrazione, (ossia una v.a. $\tau : \Omega \rightarrow [0, \infty[$ tale che ogni evento del tipo $[\tau \leq t]$ faccia parte di \mathcal{F}_t), si consideri il processo $(B_t^*)_{t \in [0, \infty[}$ definito da*

$$B_t^* := B_{t+\tau} - B_\tau,$$

per ogni $t \in [0, T]$. Allora il processo $(B_t^*)_t$ e il processo $(-B_t^*)_t$ sono ancora il Moto Browniano standard. In particolare, per ogni $t > 0$ risulta $P([B_t^* > 0]) = P([B_t^* < 0])$.

Usando questo principio, possiamo ora stabilire un risultato molto utile, e che a prima vista puo' apparire sorprendente. Per ogni numero positivo t , sia $M(t)$ il massimo valore raggiunto dalla traiettoria $B(\omega, \cdot)$ nell'intervallo $[0, t]$. Chiaramente, $M(t)$ é una v.a. non-negativa, e, al variare di t , monotona non-decrescente. Nel prossimo teorema (*Teorema del Massimo*), si dimostra che la distribuzione di $M(t)$ coincide con quella di $|B(t)|$.

Teorema 14.4 *La v.a. $M(t)$ ha distribuzione continua, e la sua densita' é data da*

$$f(x) = \frac{2}{\sqrt{2\pi t}} e^{-\frac{x^2}{2t}},$$

ovviamente per $x > 0$.

Dimostrazione. Fissiamo un generico reale positivo x , e poniamo

$$T(x) = \inf\{u > 0 : B(u) \geq x\} :$$

In sostanza, $T(x)$ é il primo istante in cui il processo $(B_t)_t$ tocca la posizione x . Non é difficile controllare che $T(x)$ é un *tempo d'arresto*, nel senso che, per ogni valore positivo u , l'evento $[T(x) \leq u]$ fa parte della σ -algebra \mathcal{F}_u , determinata da tutte le v.a. B_s con $s \leq u$. Grazie anche alla continuita' delle traiettorie, si vede anche facilmente che $B_{T(x)} = x$. Inoltre, $T(x)$ é legata ovviamente a $M(t)$ nel modo seguente:

$$[M(t) \geq x] \Leftrightarrow [T(x) \leq t].$$

Si ha ora, per $x > 0$:

$$\begin{aligned} P([M(t) \geq x]) &= P([M(t) \geq x] \cap [B(t) \geq x]) + P([M(t) \geq x] \cap [B(t) \leq x]) = \\ &= P([B(t) \geq x]) + P([M(t) \geq x] \cap [B(t) \leq x]). \end{aligned}$$

Si ha poi

$$\begin{aligned} P([M(t) \geq x] \cap [B(t) \leq x]) &= P([B(t) \leq x] \cap [T(x) \leq t]) = \\ &= P([B(t) - B_{T(x)} \leq 0] | [T(x) \leq t]) P([T(x) \leq t]). \end{aligned}$$

Invocando il principio di riflessione, si puo' affermare che, nell'ipotesi di conoscere il valore di $T(x)$, l'evento successivo $[B(t) - B_{T(x)} \leq 0]$ ha la stessa probabilita' del suo contrario, dunque:

$$\begin{aligned} P([M(t) \geq x] \cap [B(t) \leq x]) &= P([B(t) - B_{T(x)} \geq 0] | [T(x) \leq t]) P([T(x) \leq t]) = \\ &= P([B(t) - B_{T(x)} \geq 0] \cap [T(x) \leq t]) = P([B(t) \geq x] \cap [M(t) \geq x]) = P([B(t) \geq x]). \end{aligned}$$

Ricapitolando, abbiamo trovato che

$$P([M(t) \geq x]) = 2P([B(t) \geq x]) :$$

Ne segue ovviamente che $M(t)$ ha distribuzione continua, e, valutando l'antiderivata, si trova facilmente la densita', che evidentemente coincide con il doppio della densita' di $B(t)$, ma naturalmente solo per $x > 0$. \square

Concludiamo questa panoramica sul Moto Browniano con un'altra Legge famosa, la *Legge dell'Arcoseno*: questo risultato, che non dimostreremo, risolve il problema di valutare (in termini di distribuzione) il *tempo* che il Moto Browniano trascorre in *territorio positivo*. Considerando che il Moto Browniano puo' anche essere usato per approssimare l'andamento del capitale di un giocatore d'azzardo che punta regolarmente un euro sull'uscita di Testa ad ogni lancio di una moneta onesta, allora il *territorio positivo* significa *saldo attivo*, e quindi appare evidente l'importanza della variabile aleatoria in questione.

Abbiamo dunque il seguente teorema.

Teorema 14.5 *Dato il Moto Browniano $B(t)_t$, si denoti con A l'insieme (aleatorio) dei numeri reali $t \in [0, 1]$ tali che $B(t) \geq 0$; l'insieme A é (quasi certamente) chiuso, quindi misurabile. La misura di Lebesgue di A venga denotata con Z : allora Z é una v.a., la sua distribuzione é continua (in $[0, 1]$), e la sua densita' é data da:*

$$f_Z(z) = \frac{1}{\pi} \frac{1}{\sqrt{x}} \frac{1}{\sqrt{1-x}},$$

naturalmente per $0 \leq x \leq 1$.

Il nome *legge dell'Arcoseno* discende dalla funzione di ripartizione F_Z , che si ottiene integrando la densita':

$$F_Z(z) = \frac{2}{\pi} \arcsin \sqrt{z}.$$

15 Integrazione Stocastica

D'ora in poi, ulteriori dettagli sugli argomenti trattati si possono reperire nel testo [8], e nelle opere ivi indicate in bibliografia.

Il problema che affronteremo qui puo' essere introdotto attraverso il seguente esempio.

Supponiamo di aver investito un certo capitale X in titoli rischiosi: ammettiamo che il tasso d'interesse sia soggetto a variazioni regolate da certi parametri di borsa, che presentano un andamento assimilabile a quello di un Moto Browniano standard, B_t . In definitiva, assumeremo che le variazioni ΔX del capitale seguano la legge:

$$\Delta X = \mu X \delta t + \sigma X \Delta B, \quad (14)$$

ossia che, in un breve intervallo di tempo $[t, t+\delta t]$, il capitale variera' di una quantita' ΔX , parte della quale e' direttamente proporzionale al capitale stesso al tempo t , e un'altra parte e' soggetta ad un fattore di proporzionalita' variabile, $\sigma \Delta B$ (che puo' anche esser negativo), dovuto appunto alle fluttuazioni di quei parametri aleatori di borsa.

Ora, volendo interpretare l'equazione (14) in termini piu' concreti, conviene valutare il capitale $X(T)$ al tempo T supponendo di suddividere l'intervallo $[0, T]$ in tanti intervallini di ampiezza δt , e sommare i vari incrementi di X in ciascuno di tali intervallini. In sostanza, supponendo ad esempio che l'intervallo $[0, T]$ venga suddiviso in N intervallini di uguale ampiezza, avremo $\delta t = \frac{T}{N}$, e

$$X(T) - X(0) = \sum_{i=1}^N \mu X(t_{i-1})(t_i - t_{i-1}) + \sum_{i=1}^N \sigma X(t_{i-1})(B(t_i) - B(t_{i-1}))$$

avendo posto per brevitaa' $t_i = i\frac{T}{N}$ per ogni $i = 0, 1, \dots, N$. Le ultime somme scritte acquistano la forma di integrali purché esse abbiano limite quando $N \rightarrow +\infty$: qualora cio' accada, si scrivera' quindi

$$X(T) - X(0) = \int_0^T \mu X(t) dt + \int_0^T \sigma X(t) dB(t).$$

(Beninteso, questa espressione *non* ci consente di *scoprire* l'andamento di X , ma solo di esprimere la condizione (14) sotto altra forma).

Il problema che nasce ora riguarda principalmente l'ultimo integrale: qui il limite delle somme

$$\sum_{i=1}^N \sigma X(t_{i-1})(B(t_i) - B(t_{i-1}))$$

non esiste in generale, perlomeno non nel senso che usualmente si dà a questo concetto.

Cio' dipende essenzialmente dal fatto che il Moto Browniano standard ha traiettorie di variazione illimitata in ogni intervallo (a parte eventi trascurabili).

Occorre dunque stabilire una *definizione* opportuna del limite da fare, in maniera tale da ottenere un integrale a tutti gli effetti, e successivamente ricavare strumenti anche per risolvere l'equazione (14) (e altre simili) trovando esplicitamente un'espressione per il processo incognito X .

A tale scopo, introdurremo una breve trattazione del cosiddetto *integrale di Riemann-Stieltjes*, al quale poi agganceremo quella dell' *integrale stocastico*.

Definizioni 15.1 Si denoti con $[a, b]$ un arbitrario intervallo nella retta reale. Chiameremo *divisione* di $[a, b]$ ogni scelta di n punti di tale intervallo, t_0, t_1, \dots, t_n , tali che $a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b$. Si chiamerà *divisione* anche la famiglia di intervallini $\{[a, t_1], [t_1, t_2], \dots, [t_{n-1}, b]\}$ che tali punti vengono a individuare. Per brevità, spesso una tale divisione verterà denotata con la lettera D . Per ognuna di tali divisioni D , si chiama *mesh* di D , e si denota con $\delta(D)$, l'ampiezza massima degli intervallini di D .

E' ovvio che si possono ottenere divisioni (e quindi decomposizioni) di $[a, b]$ aventi mesh piccola quanto si vuole. Inoltre, date due divisioni qualsiasi, D_1 e D_2 , ne esiste sempre una *piu' fine* di entrambe (ossia che comprenda, tra i propri punti di suddivisione, tutti quelli di D_1 e di D_2), e quindi avente mesh piu' piccola.

Denoteremo con \mathcal{I} la totalità degli intervalli $[u, v] \subset [a, b]$ e con \mathcal{D} la totalità delle divisioni di $[a, b]$. Introduciamo ora il concetto d'integrale per *funzioni d'intervallo*. Per ogni funzione $\phi : \mathcal{I} \rightarrow \mathbb{R}$, e per ogni divisione $D = \{t_0, t_1, \dots, t_n\}$ di $[a, b]$, poniamo

$$S(\phi, D) = \sum_{i=1}^n \phi([t_{i-1}, t_i]).$$

Diremo che ϕ é *integrabile* in $[a, b]$ se esiste finito il limite

$$\lim_{\delta(D) \rightarrow 0} S(\phi, D) = L.$$

Tale limite verra' poi denotato con $\int_a^b \phi$.

Ad esempio, una funzione ϕ é banalmente integrabile se essa é *additiva*, ossia se $\phi([\alpha, \beta]) = \phi([\alpha, c]) + \phi([c, \beta])$ per ogni punto $c \in]\alpha, \beta[$. In tal caso, $\int_a^b \phi = \phi(b) - \phi(a)$. Situazioni di questo tipo si hanno se e solo se risulta $\phi([u, v]) = f(v) - f(u)$ per qualche funzione $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$.

Useremo spesso la notazione $\Delta(f)$ per intendere la funzione d'intervallo $\Delta(f)([u, v]) = f(v) - f(u)$.

Un altro esempio, piu' interessante e molto utile, é nel seguente teorema.

Teorema 15.2 *Sia $\phi : \mathcal{I} \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione d'intervallo, che verifichi la condizione:*

$$|\phi([u, v])| \leq K|v - u|,$$

per un'opportuna costante $K > 0$. Allora la funzione ϕ^2 é integrabile e ha integrale nullo.

Dimostrazione. Basta provare che la funzione $\psi([u, v]) = (v - u)^2$ ha integrale nullo. Per ogni divisione $D \in \mathcal{D}$, $D = \{t_0, t_1, \dots, t_n\}$ si ha

$$S(\psi, D) = \sum_{i=1}^n (t_i - t_{i-1})^2 \leq \delta(D) \sum_{i=1}^n (t_i - t_{i-1}) = \delta(D)(b - a).$$

Pertanto, quando $\delta(D) \rightarrow 0$, é chiaro che $S(\psi, D)$ tende a 0, e cio' é appunto l'asserto.

□

Non staremo a scrivere enunciati e dimostrazioni, ma si puo' provare che l'integrale qui introdotto é lineare e monotono rispetto alle funzioni ϕ ; inoltre, data una funzione $\phi : \mathcal{I} \rightarrow \mathbb{R}$ integrabile in $[a, b]$, essa risulta integrabile in qualsiasi sottointervallo $[u, v] \subset [a, b]$, e la *funzione integrale* $\Phi([u, v]) = \int_u^v \phi$ é una funzione additiva rispetto agli intervalli.

Un risultato generale é contenuto nel prossimo teorema, del quale non daremo dimostrazione.

Teorema 15.3 Sia $\phi : \mathcal{I} \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione integrabile. Allora, denotata con Φ la funzione integrale di ϕ , la funzione $|\phi - \Phi|$ ha integrale nullo. In altre parole, ϕ é sempre la somma di una funzione additiva e di una funzione con integrale nullo.

Definizioni 15.4 Data una divisione D di $[a, b]$ tramite i punti t_0, t_1, \dots, t_n , ad essa si puo' associare un insieme T di n punti, $\{\tau_1, \dots, \tau_n\}$, detti *punti di scelta*, a patto che τ_i faccia parte dell'intervallo $[t_{i-1}, t_i]$, per ogni i . La coppia (D, T) cosi' ottenuta (divisione + scelta) verra' detta *decomposizione* di $[a, b]$ e denotata di solito con la lettera E . Qualunque sia la scelta T , si dice *mesh* di una decomposizione $E = (D, T)$ la mesh di D , e si usa la stessa notazione, $\delta(E) = \delta(D)$.

Siano $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ e $\phi : \mathcal{I} \rightarrow \mathbb{R}$ due funzioni assegnate. Per ogni decomposizione $E = (D, T)$ di $[a, b]$, con $D = \{t_0, t_1, \dots, t_n\}$ e $T = \{\tau_1, \dots, \tau_n\}$, scriveremo

$$S(f, \phi; E) = \sum_{i=1}^n f(\tau_i) \phi([t_{i-1}, t_i])$$

Diremo che f é *integrabile alla Riemann-Stieltjes* rispetto a ϕ se esiste finito il limite

$$\lim_{\delta(E) \rightarrow 0} S(f, \phi; E) = L,$$

uniformemente rispetto alle scelte T . In altre parole, deve accadere che, per ogni $\varepsilon > 0$ sia possibile determinare un $\sigma > 0$ tale che

$$|S(f, \phi; E) - L| < \varepsilon$$

per ogni decomposizione $E = (D, T)$, con $\delta(D) \leq \sigma$.

Se cio' accade, scriveremo

$$L = \int_a^b f d\phi.$$

Da questa definizione discende subito il concetto classico di integrale di Riemann-Stieltjes di una funzione f rispetto a un'altra funzione g : date due funzioni f, g , definite su $[a, b]$ e a valori reali, diremo che f é *integrabile alla Riemann-Stieltjes rispetto a g* se f é integrabile rispetto alla funzione d'intervallo $\Delta(g)$.

In tal caso, si pone

$$\int_a^b f dg = \int_a^b f d\Delta(g).$$

Di nuovo, non staremo a enunciare teoremi e a fornire dimostrazioni, ma ci limitiamo a precisare che anche l'integrale di Riemann-Stieltjes é lineare rispetto a f (e rispetto alla g), e *passa* ai sottointervalli di $[a, b]$ in maniera additiva.

Un risultato generale, che discende da 15.3, é il seguente.

Teorema 15.5 *Supponiamo che $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ sia limitata, e che $\phi : \mathcal{I} \rightarrow \mathbb{R}$ sia integrabile. Si ponga poi*

$$g(x) = \int_a^x d\phi$$

per $x \in [a, b]$. Allora, f é integrabile alla Riemann-Stieltjes rispetto a ϕ se e solo se lo é rispetto a g , e i due integrali coincidono.

I prossimi teoremi, che forniremo senza dimostrazione, stabiliscono condizioni necessarie o sufficienti, per l'esistenza dell'integrale di Riemann-Stieltjes.

Teorema 15.6 *Siano $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ e $\phi : \mathcal{I} \rightarrow \mathbb{R}$ due funzioni, tali che esiste $\int_a^b f d\phi$. Allora la funzione d'intervallo $|\Delta(f)||\phi|$ ha integrale nullo.*

Teorema 15.7 *Siano f, g due funzioni definite su $[a, b]$ e a valori in \mathbb{R} . Se esiste $\int_a^b f dg$ allora esiste anche $\int_a^b g df$ e si ha*

$$\int_a^b g df = f(b)g(b) - f(a)g(a) - \int_a^b f dg$$

(formula d'integrazione per parti).

Teorema 15.8 *Nelle stesse ipotesi del teorema 15.7, f e g non possono avere punti di discontinuità in comune.*

Teorema 15.9 *Siano f, g due funzioni, definite in $[a, b]$ e a valori reali. Se f é continua e g é a variazione limitata, allora esiste $\int_a^b f dg$ (e quindi anche $\int_a^b g df$).*

Esistono alcuni raffinamenti del teorema 15.9, alcuni dei quali hanno applicazioni anche nel Calcolo Stocastico, ma noi non li tratteremo.

Passiamo ora a trattare l'integrale stocastico, prendendo spunto da quanto visto finora.

Il nostro scopo é quello di definire (e calcolare, quando possibile) integrali del tipo

$$\int_a^b X(t)dB(t)$$

ove X e B sono processi stocastici, e in particolare B é il Moto Browniano Standard. La novita' *formale* che qui s'incontra sta nel fatto che le funzioni $X(t)$, $B(t)$ non sono a valori reali: sappiamo che per ogni $t \in [a, b]$ X_t e B_t sono variabili aleatorie. In particolare, $B_t \sim N(0, t)$. Dunque, conviene riguardare un processo stocastico X come una funzione $X : [a, b] \rightarrow M$, ove M é lo spazio di tutte le variabili aleatorie (misurabili). Per semplificare il discorso, supporremo spesso che i nostri processi siano almeno a valori in L_2 , (ossia che le v.a. X_t siano dotate di valor medio e varianza, come del resto accade nel caso del Moto Browniano).

Possiamo dunque riproporre le definizioni di *integrale* per una funzione d'intervallo ϕ a valori in M e di integrale di Riemann-Stieltjes per funzioni f, g oppure f, ϕ , definite sullo stesso intervallo $[a, b]$ ma a valori in M .

L'unica (sostanziale) modifica di cui occorre tener conto riguarda la *topologia*: cosa significa fare il limite delle somme $S(\phi)$, oppure $S(f, \phi)$, in questo caso? Tali somme sono a valori in M , e in tale spazio ci sono vari possibili tipi di convergenza, ossia di limiti. Noi ne prenderemo in considerazione solo due, la convergenza in misura e quella quasi certa, ma quando i processi in gioco hanno valori in L_2 , useremo anche la convergenza in L_2 .

Possiamo dunque formulare le due definizioni seguenti.

Definizione 15.10 Per ogni funzione $\phi : \mathcal{I} \rightarrow M$, e per ogni divisione $D = \{t_0, t_1, \dots, t_n\}$ di $[a, b]$, poniamo

$$S(\phi, D) = \sum_{i=1}^n \phi([t_{i-1}, t_i]).$$

Diremo che ϕ é *P-integrabile* in $[a, b]$ se esiste un elemento $Y \in M$ (cioé, una variabile aleatoria Y), tale che

$$\lim_{\delta(D) \rightarrow 0} S(\phi, D) = Y$$

in misura: cio' significa che, per ogni $\varepsilon > 0$ esiste un $\sigma > 0$ tale che

$$P(|S(\phi, D) - Y| > \varepsilon) < \varepsilon$$

per ogni divisione D di $[a, b]$, con $\delta(D) < \sigma$. Tale circostanza verrà poi indicata con la scrittura: $(P) - \int_a^b \phi = Y$.

Parleremo invece di $(Q.C.)$ -integrale, se il limite di cui sopra sussiste quasi certamente, ossia se

$$P([\lim_{\delta(D) \rightarrow 0} S(\phi, D) = Y]) = 1.$$

Infine, se ϕ é a valori in L_2 , si parlerà di (L_2) -integrale se il limite sussiste in L_2 (e quindi anche $Y \in L_2$). Ciò accade se, per ogni $\varepsilon > 0$ esiste un $\sigma > 0$ tale che

$$\int_{\Omega} |S(\phi, D) - Y|^2 dP \leq \varepsilon$$

per ogni $D \in \mathcal{D}$ con $\delta(D) \leq \sigma$.

Definizione 15.11 Per ogni funzione $\phi : \mathcal{I} \rightarrow M$, per ogni funzione $f : [a, b] \rightarrow M$, e per ogni decomposizione $E = (D, T)$, con $D = \{t_0, t_1, \dots, t_n\}$ e $T = \{\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_n\}$, poniamo

$$S(f, \phi; E) = \sum_{i=1}^n f(\tau_i) \phi([t_{i-1}, t_i]).$$

Diremo che f é P -integrabile rispetto a ϕ in $[a, b]$ se esiste un elemento $Y \in M$ tale che

$$\lim_{\delta(E) \rightarrow 0} S(f, \phi, E) = Y$$

in misura: ciò significa che, per ogni $\varepsilon > 0$ esiste un $\sigma > 0$ tale che

$$P("|S(f, \phi; E) - Y| > \varepsilon") < \varepsilon$$

per ogni decomposizione E di $[a, b]$, con $\delta(E) < \sigma$. Tale circostanza verrà poi indicata con la scrittura: $(P) - \int_a^b f d\phi = Y$.

Parleremo invece di $(Q.C.)$ -integrale, se il limite di cui sopra sussiste quasi certamente.

Infine, qualora tutte le somme $S(f, \phi, E)$ risultino a valori in L_2 , si parlerà di (L_2) -integrale se il limite sussiste in L_2 (e quindi anche $Y \in L_2$).

Gli integrali ora definiti prendono il nome di *integrali stocastici*: facciamo notare che l'integrale alla Stieltjes comprende anche il caso di $\int f dg$, con $g : [a, b] \rightarrow M$, semplicemente ponendo $\phi = \Delta(g)$.

Tuttavia, nei casi di maggiore interesse in Probabilità, non sempre l'integrale di Riemann-Stieltjes esiste, sia pure rispetto alla convergenza più debole, ossia quella in misura. Vedremo presto alcuni esempi, sia in positivo che in negativo.

Alla luce di tali esempi, saremo indotti a definire un nuovo tipo d'integrale di Stieltjes, un po' più debole di quello introdotto poc'anzi.

Esempi 15.12 1.) Supponiamo che $(X_t)_{t \in [0, T]}$ sia un processo con traiettorie aventi variazione limitata. Allora, detto $(B_t)_t$ il moto Browniano standard in $[0, T]$, l'integrale stocastico $\int_0^T X(t)dB(t)$ esiste sia nel senso quasi certo, sia in misura. Infatti, quasi certamente le traiettorie di B e quelle di X soddisfano al teorema 15.9, e quindi esiste $\int_0^T B(t)dX(t)$; ma allora, per il teorema 15.7, esiste anche l'integrale $\int_0^T X(t)dB(t)$. L'esistenza dell'integrale in misura è conseguenza di quello quasi certo.

2.) Supponiamo che $(W_t)_{t \in [0, T]}$ sia un processo ad incrementi indipendenti e stazionari. Supponiamo poi che $W_t \in L_4$ per ogni t , e che per ogni $t > 0$ risulti

$$E(W_t) = 0, \quad E(W_t^2) = ht, \quad E(W_t^4) = kt^2$$

per opportune costanti reali positive h e k . Allora si ha che

$$(L_2) - \int_a^b (\Delta(W_t))^2 = h(b - a)$$

per ogni intervallo $[a, b] \subset [0, T]$.

In altre parole, la funzione d'intervallo $\phi([u, v]) = (W(v) - W(u))^2$ risulta integrabile nel senso di L_2 (e quindi anche in misura), e la sua funzione integrale è proporzionale a $\Delta(t)$. Per dimostrare questo fatto, fissiamo arbitrariamente una divisione $D = \{t_0, t_1, \dots, t_n\}$ di $[a, b]$, e poniamo, come al solito: $S(\phi, D) = \sum_{i=1}^n \phi([t_{i-1}, t_i])$. Se calcoliamo la media della variabile aleatoria $S(\phi, D)$, avremo

$$E(S(\phi, D)) = \sum_{i=1}^n E[(W(t_i) - W(t_{i-1}))^2] = \sum_{i=1}^n E[(W(t_i - t_{i-1}))^2],$$

a causa della stazionarietà degli incrementi. Si ha quindi, in virtù delle ipotesi:

$$E(S(\phi, D)) = \sum_{i=1}^n h(t_i - t_{i-1}) = h(b - a).$$

Dunque, le medie delle somme $S(\phi, D)$ risultano costanti. Mostreremo ora che le varianze di tali somme tendono a 0: cio' sara' sufficiente per provare quanto asserito. A causa dell'indipendenza degli incrementi, la varianza di $S(\phi, D)$ é data da

$$\begin{aligned} V(S(\phi, D)) &= \sum_{i=1}^n V[(W(t_i) - W(t_{i-1}))^2] = \sum_{i=1}^n V[(W(t_i - t_{i-1}))^2] = \\ &= \sum_{i=1}^n \{E[(W(t_i - t_{i-1}))^4] - E^2[(W(t_i - t_{i-1}))^2]\} = \\ &= \sum_{i=1}^n [k(t_i - t_{i-1})^2 - h^2(t_i - t_{i-1})^2] = kS(\psi, D) - h^2S(\psi, D) \end{aligned}$$

ove $\psi([u, v]) = (v - u)^2$. In virtu' del teorema 15.2, ψ ha integrale nullo, e quindi le varianze di $S(\phi, D)$ tendono a 0. Ne consegue l'integrabilita' annunciata.

Notiamo che il Moto Browniano standard é un processo che verifica esattamente le condizioni prescritte per W in questo esempio, con $h = 1$ e $k = 3$, per cui la funzione d'intervallo $\Delta^2(B_t)$ ha integrale uguale a $\Delta(t)$.

In virtu' del teorema 15.5 (che sussiste anche nel presente assetto piu' astratto), ne segue che, dato un processo stocastico X_t , l'integrabilita' in misura di X_t rispetto a $\Delta^2(B_t)$ equivale all'integrabilita' in misura di X_t rispetto a dt : ad esempio, nel caso X_t abbia traiettorie continue, questo é ovvio, anzi in tal caso X_t é integrabile quasi certamente.

3.) Veniamo ora all'integrabilita' alla Stieltjes del processo $B(t)$ (Moto Browniano standard) rispetto a sé stesso. Se ci limitiamo a considerare l'integrale in senso quasi certo, dobbiamo constatare che le traiettorie non sono mai a variazione limitata, dunque non abbiamo strumenti per dedurre l'integrabilita'.

D'altra parte, se le usuali formule di calcolo valessero anche in questo caso, si dovrebbe avere $\int_a^b B(t)dB(t) = \frac{1}{2}(B(b)^2 - B(a)^2)$.

Possiamo prendere le mosse dall'ultima espressione scritta, per dedurre una spiacevole sorpresa. Scelta infatti un'arbitraria divisione $D = \{t_0, t_1, \dots, t_n\}$ dell'intervallo $[a, b]$, si ha

$$B^2(b) - B^2(a) = \sum_{i=1}^n (B^2(t_i) - B^2(t_{i-1})) = \sum_{i=1}^n [B(t_i) - B(t_{i-1})]^2 +$$

$$\begin{aligned}
& +2 \sum_{i=1}^n B(t_i)B(t_{i-1}) - 2 \sum_{i=1}^n B(t_{i-1})^2 = \\
& = \sum_{i=1}^n [B(t_i) - B(t_{i-1})]^2 + 2 \sum_{i=1}^n B(t_{i-1})[B(t_i) - B(t_{i-1})] = S(\psi, D) + 2S(B, B, E)
\end{aligned}$$

avendo denotato con ψ la funzione $\Delta^2(B_t)$ e avendo scelto i punti τ_i coincidenti con gli estremi *sinistri* degli intervalli $[t_{i-1}, t_i]$ per formare la decomposizione E .

Ne segue dunque

$$S(B, B; E) = \frac{1}{2}(B^2(b) - B^2(a)) - \frac{1}{2}S(\psi, D).$$

Mandando a limite per $\delta(D) \rightarrow 0$, il secondo membro tende in misura a $\frac{1}{2}(B^2(b) - B^2(a)) - \frac{1}{2}(b-a)$ a causa dell'esempio 2.) precedente. Quindi, a patto di restringere la *scelta* dei punti τ_i agli estremi sinistri degli intervalli di suddivisione, si avrebbe un'integrabilit  in misura, ma il risultato non sarebbe quello classico: esso se ne discosta per il termine $-\frac{b-a}{2}$.

Ma cosa accadrebbe se i punti di scelta fossero presi altrove negli intervalli di suddivisione, ad esempio sempre nell'estremo destro?

Ripetendo inizialmente il procedimento precedente, otteniamo:

$$B^2(b) - B^2(a) = \sum_{i=1}^n (B^2(t_i) - B^2(t_{i-1})) = \sum_{i=1}^n (B(t_i) + B(t_{i-1}))(B(t_i) - B(t_{i-1})),$$

da cui

$$\sum_{i=1}^n (B(t_i))(B(t_i) - B(t_{i-1})) = B^2(b) - B^2(a) - \sum_{i=1}^n (B(t_{i-1}))(B(t_i) - B(t_{i-1})).$$

Mandando a limite per $\delta(D) \rightarrow 0$, troviamo:

$$\begin{aligned}
\lim_{\delta(D) \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n (B(t_i))(B(t_i) - B(t_{i-1})) & = B^2(b) - B^2(a) - \frac{1}{2}\{B^2(b) - B^2(a) - (b-a)\} = \\
& = \frac{B^2(b) - B^2(a)}{2} + \frac{b-a}{2}.
\end{aligned}$$

Dunque, cambiando la scelta dei punti τ_i il risultato dell'integrale puo' cambiare! Cio'   in contraddizione con la definizione di integrale alla Riemann-Stieltjes, e quindi dobbiamo concludere che $\int_a^b B(t)dB(t)$ non esiste (nemmeno in misura), nel senso di Riemann-Stieltjes.

Il fatto negativo riscontrato nell'ultimo esempio trattato ci obbliga a modificare la definizione di integrale stocastico, rendendolo meno restrittivo e tenendo conto anche dei diversi risultati possibili, a seconda della scelta dei punti τ_i . Infatti, come vedremo, l'integrale stocastico di Itô farà riferimento esclusivamente alla scelta che prevede τ_i sempre nell'estremo sinistro degli intervalli di suddivisione. ma non sono esclusi altri tipi d'integrali, come quello che richiede invece τ_i sempre coincidente con l'estremo destro. (Tale integrale è detto *Backward*). Vi sono anche scelte dei punti τ_i che portano a formule di calcolo coincidenti con quelle classiche (integrali di Stratonovich), ma per alcuni motivi l'integrale preferito in molte applicazioni è quello di Itô. Sarà compito dello studioso individuare di volta in volta il tipo più adatto di integrale (anche a seconda dei risultati attesi), e quindi applicare opportune formule di calcolo solitamente differenti da quelle classiche, dette appunto *formule di Itô*.

Definizioni 15.13 Date due funzioni $f, g : [a, b] \rightarrow M$, diremo che f è *integrabile alla Itô* rispetto a g , se esiste in M il limite in misura

$$\lim_{\delta(D) \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(t_{i-1}) \Delta(g)([t_{i-1}, t_i]),$$

avendo posto al solito $D = \{t_0, t_1, \dots, t_n\}$.

Quando ciò accade, il limite verrà denotato con $(I) - \int_a^b f(t) dg(t)$.

Diremo invece che f è integrabile in senso *Backward* se esiste in M il limite in misura

$$\lim_{\delta(D) \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(t_i) \Delta(g)([t_{i-1}, t_i]),$$

limite che verrà denotato con $(B) - \int_a^b f(t) dg(t)$.

Più in generale, fissato un arbitrario numero $\lambda \in [0, 1]$, diremo che f è (λ) -integrabile rispetto a g se esiste in M il limite in misura

$$\lim_{\delta(D) \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n (f(\lambda t_{i-1}) + (1 - \lambda) f(t_i)) \Delta(g)([t_{i-1}, t_i]),$$

limite che verrà denotato con $(\lambda) - \int_a^b f(t) dg(t)$.

Nel caso $\lambda = \frac{1}{2}$ si parla di *integrale di Stratonovich*.

Come abbiamo visto (sia pure parzialmente) negli esempi 15.12, per una stessa coppia di funzioni (f, g) i (λ) -integrali di solito esistono tutti, ma sono diversi al variare di λ . La loro diversità comporta che di solito non si può parlare di integrale di Riemann-Stieltjes. Chiaramente, l'integrale di Itô corrisponde al (λ) -integrale relativo al valore $\lambda = 1$, quello Backward invece corrisponde a $\lambda = 0$. Dunque, riprendendo in esame l'esempio 3. di (15.12), si può dire che

$$(I) \int_a^b B(t)dB(t) = \frac{(B^2(b) - B^2(a))}{2} - \frac{b-a}{2}, \text{ e } (B) \int_a^b B(t)dB(t) = \frac{(B^2(b) - B^2(a))}{2} + \frac{b-a}{2}.$$

Più in generale, si può provare che

$$(\lambda) - \int_a^b B(t)dB(t) = \frac{(B^2(b) - B^2(a))}{2} - (\lambda - \frac{1}{2})(b-a).$$

(Torneremo su questo punto quando avremo discusso della Formula di Itô).

Il vantaggio dell'integrale di Itô ai fini delle possibili applicazioni in svariati settori, è che, nel caso di funzioni collegate al Moto Browniano, esso dà luogo ad una Martingala, adattata al Moto Browniano stesso. Ciò sarà provato nei prossimi teoremi.

Teorema 15.14 *Supponiamo che $(B_t)_{t \in [0, T]}$ sia un Moto Browniano standard, e sia $(\mathcal{F}_t)_t$ la filtrazione naturale associata a tale processo.*

Sia poi $(Y_t)_{t \in [0, T]}$ un processo adattato a tale filtrazione, con $Y_t \in L_2$.

Si fissi una divisione $D = \{t_0, t_1, \dots, t_n\}$ in $[0, T]$, e per ogni $s \in [0, T]$ si denoti con $N(s)$ il massimo indice per cui $t_{N(s)} \leq s$. Poniamo poi

$$Z_s = \sum_{i \leq N(s)} Y(t_{i-1})\Delta(B)([t_{i-1}, t_i]) + Y(t_{N(s)})\Delta(B)([t_{N(s)}, s]).$$

Il processo (Z_t) è una Martingala rispetto alla filtrazione \mathcal{F}_t .

Dimostrazione. Fissiamo s e t in $[0, T]$, con $s < t$. Supponendo che sia $N(s) < N(t)$, si ha (utilizzando opportunamente la proprietà di torre)

$$E(Z_t | \mathcal{F}_s) = \sum_{i \leq N(s)} Y(t_{i-1})(B(t_i) - B(t_{i-1})) + Y(t_{N(s)})E[(B(t_{N(s)+1}) - B(t_{N(s)})) | \mathcal{F}_s] =$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{i \leq N(s)} Y(t_{i-1})(B(t_i) - B(t_{i-1})) + \\
&+ Y(t_{N(s)})E[(B(t_{N(s)+1}) - B(s))|\mathcal{F}_s] + Y(t_{N(s)})E[(B(s) - B(t_{N(s)}))|\mathcal{F}_s] = \\
&= \sum_{i \leq N(s)} Y(t_{i-1})(B(t_i) - B(t_{i-1})) + Y(t_{N(s)})(B(s) - B(t_{N(s)})) = Z_s.
\end{aligned}$$

Qualora $N(s) = N(t)$, un procedimento analogo conduce alla stessa conclusione.

□

Teorema 15.15 *Supponiamo che $(B_t)_{t \in [0, T]}$ sia un Moto Browniano standard, e sia $(\mathcal{F}_t)_t$ la filtrazione naturale associata a tale processo.*

Sia poi $(Y_t)_{t \in [0, T]}$ un processo adattato a tale filtrazione, con $Y_t \in L_2$.

Se esiste in L_2 l'integrale di Itô, $(I) \int_0^T Y(t)dB(t)$, allora il processo

$$J_t = (I) \int_0^t Y(s)dB(s)$$

è una Martingala rispetto alla filtrazione naturale di (B_t) .

Dimostrazione. Per ogni divisione D di $[0, T]$, si denoti con Z_s^D il processo introdotto nel teorema 15.14. Per l'ipotesi fatta di esistenza in L_2 dell'integrale di Itô $\int_0^T Y(s)dB(s)$, la v.a. J_t è limite in L_2 delle variabili aleatorie Z_t^D , quando $\delta(D) \rightarrow 0$. Dalla convergenza in L_2 discende quella in L_1 e quindi anche quella delle medie condizionali: per $s < t$ si ha

$$E(J_t|\mathcal{F}_s) = \lim_{\delta(D) \rightarrow 0} E(Z_t^D|\mathcal{F}_s) = \lim_{\delta(D) \rightarrow 0} Z_s^D = J_s.$$

Il teorema è così dimostrato. □

16 Formula di Itô

A questo punto, è opportuno controllare quali processi possono essere integrati rispetto al Moto Browniano, e quali formule si possono applicare per valutare l'integrale.

Gli ultimi teoremi trattati inducono a delle condizioni sufficienti per l'integrabilità alla Itô: una prima classe di processi senz'altro integrabili sono quelli di tipo *semplice*, ossia quelli le cui traiettorie siano funzioni a gradinata. Poi, si potrà dedurre

l'integrabilit  per quei processi che siano *limiti* in qualche opportuna topologia di quelli semplici.

Definizioni 16.1 Sia $(Y_t)_{t \in [0, T]}$ un processo stocastico, adattato alla filtrazione naturale del Moto Browniano, B . Diremo che Y   *semplice* se esistono una divisione $\{t_0, t_1, \dots, t_n\}$ di $[0, T]$ ed un numero finito di variabili aleatorie limitate Z_0, Z_1, \dots, Z_{n-1} tali che Z_i sia misurabile rispetto a \mathcal{F}_{t_i} per ogni i , e

$$Y(t, \omega) = \sum_{i=1}^n Z_{i-1}(\omega) 1_{[t_{i-1}, t_i]}(t)$$

per ogni $t \in [0, T]$ e ogni $\omega \in \Omega$.

Per una tale variabile aleatoria Y , l'integrale stocastico $(I) \int_0^T Y_t dB_t$ esiste, e si ha

$$(I) \int_0^T Y_t dB_t = \sum_{i=1}^n Z_{i-1}(B(t_i) - B(t_{i-1})).$$

Se Y   un processo semplice, il processo *Integrale Stocastico*

$$J_t = \int_0^t Y(s) dB(s) = \sum_{t_i < t} Z_{i-1}(B(t_i) - B(t_{i-1})) + Z_i(B(t) - B(t_i)),$$

definito per $0 < t \leq T$,   una martingala a variabili in L_2 .

Definizione 16.2 Un processo stocastico $(Y_t)_{t \in [0, T]}$, adattato alla filtrazione naturale del Moto Browniano,   detto *approssimabile* se $Y_t \in L_2$ per ogni t e se esiste una successione di processi semplici $(Y^n)_n$ in L_2 tali che in L_2 le traiettorie $(Y^n(t))$ convergono uniformemente a $Y(t)$: in altri termini, per ogni $\varepsilon > 0$, esiste un intero $N > 0$ tale che $E(|Y^n(t) - Y(t)|^2) < \varepsilon$ per ogni $n > N$ e ogni $t \in [0, T]$.

Ad esempio, un processo $(Y_t)_{t \in [0, T]}$, $T < \infty$,   approssimabile se esso   adattato, se $Y_t \in L_2$ e le sue traiettorie sono continue. Infatti, si puo' dimostrare che, sotto le ipotesi fatte, Y puo' essere visto come una funzione continua $Y : [0, T] \rightarrow L_2$ (rispetto alla topologia solita di $[0, T]$ e a quella in norma di L_2). Dato che $[0, T]$   compatto, tale funzione   uniformemente continua, e cio' consente di determinare, per ogni $\varepsilon > 0$, una divisione di $[0, T]$ con mesh sufficientemente piccola, tale che,

in ciascuno dei sottointervalli $[t_i, t_{i+1}]$, la Y_t disti in L_2 per meno di ε dalla variabile Y_{t_i} .

Non aggiungiamo altri dettagli, e procediamo subito verso il prossimo teorema, che fornisce un'importante condizione sufficiente per l'integrabilit  di un processo Y rispetto al moto Browniano.

Teorema 16.3 *Sia $Y = (Y_t)_{t \in [0, T]}$ un processo stocastico, adattato alla filtrazione naturale del Moto Browniano B . Se Y   approssimabile, allora esiste l'integrale stocastico*

$$(I) \int_0^T Y(t) dB(t)$$

in L_2 .

Dimostrazione. Dato che Y   approssimabile, sia $(Y^n)_n$ una successione di processi semplici, in L_2 , che approssimano Y in L_2 uniformemente. Fissiamo $\varepsilon > 0$, e scegliamo un intero naturale N tale che risulti $E(|Y^n(t) - Y(t)|^2) \leq \varepsilon$ per ogni $n \geq N$. Fissiamo ora un qualunque intero $n > N$, e una generica divisione $D = \{t_0, t_1, \dots, t_k\}$ di $[0, T]$. Avremo:

$$S(Y^n, D) - S(Y, D) = \sum_{i=0}^{k-1} (Y^n(t_i) - Y(t_i))(B(t_{i+1}) - B(t_i)).$$

Ne possiamo facilmente dedurre che $E(S(Y^n, D) - S(Y, D)) = 0$, per l'indipendenza tra il termine $B(t_{i+1}) - B(t_i)$ e il termine $Y^n(t_i) - Y(t_i)$ per ogni i . Dunque,

$$\begin{aligned} E[(S(Y^n, D) - S(Y, D))^2] &= V(S(Y^n, D) - S(Y, D)) = \\ &= \sum_{i=0}^{k-1} V[(Y^n(t_i) - Y(t_i))(B(t_{i+1}) - B(t_i))] = \sum_{i=0}^{k-1} E[(Y^n(t_i) - Y(t_i))^2] E[(B(t_{i+1}) - B(t_i))]^2, \end{aligned}$$

sempre per l'indipendenza. Adoperando l'approssimazione detta, ricaviamo:

$$E[(S(Y^n, D) - S(Y, D))^2] \leq \sum_{i=0}^{k-1} \varepsilon(t_{i+1} - t_i) = \varepsilon T.$$

In maniera analoga, sostituendo Y con la generica Y^m , $m > N$, troveremo anche

$$E[(S(Y^n, D) - S(Y^m, D))^2] \leq \varepsilon T,$$

per qualunque decomposizione D : mandando a limite per $\delta(D) \rightarrow 0$, troveremo allora

$$\| \int_0^T Y^n dB(t) - \int_0^T Y^m dB(t) \| \leq \varepsilon T,$$

non appena $n, m > N$. Cio' comporta che gli integrali stocastici $\int Y^n dB(t)$ convergono in L_2 . Ora, per qualunque $n > N$, se scegliamo $\delta(D)$ abbastanza piccola, poniamo $\delta(D) \leq \eta$, otterremo facilmente

$$E[(\int_0^T Y^n dB(t) - S(Y^n, D))^2] \leq \varepsilon$$

e quindi in definitiva, quando $\delta(D) \leq \eta$ risulta

$$\|S(Y, D) - \int_0^T Y^n dB(t)\|_2 \leq \sqrt{T\varepsilon} + \sqrt{\varepsilon}$$

il che dimostra l'esistenza dell'integrale in L_2 del processo Y e inoltre che tale integrale coincide con il limite in L_2 degli integrali di Y^n . \square

Come dicevamo in precedenza, é importante ora trovare delle formule, che permettano di calcolare esplicitamente l'integrale stocastico, almeno per processi Y di tipo particolare.

Tali formule, che prendono il nome di *Formule di Itô*, permettono in genere di esprimere l'integrale stocastico di un processo Y , che sia *funzione* del Moto Browniano stesso. Tali formule riguardano non solo l'integrale di Itô, ma anche il λ -integrale, come vedremo.

Iniziamo con una prima situazione abbastanza semplice.

Teorema 16.4 (I Formula di Itô) *Si consideri il Moto Browniano Standard B in $[0, T]$, e sia $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una generica funzione di classe C^3 . Risulta*

$$(I) \int_a^b f'(B(t)) dB(t) = f(B(b)) - f(B(a)) - \frac{1}{2} \int_a^b f''(B(t)) dt, \quad (15)$$

per ogni intervallo $[a, b] \subset [0, T]$.

Dimostrazione. Intanto, osserviamo che il processo $Y_t = f'(B_t)$ é senz'altro adattato e con traiettorie continue, dunque l'integrale di Itô rispetto a B esiste.

Per calcolare tale integrale, fissiamo arbitrariamente una divisione D di $[a, b]$, $D = \{t_0, t_1, \dots, t_n\}$, e scriviamo

$$f(B(b)) - f(B(a)) = \sum_{i=1}^n (f(B(t_i)) - f(B(t_{i-1}))).$$

Ora, per ciascun indice i , applicando la Formula di Taylor (con resto di Lagrange) arrestata al terzo termine, risulta

$$f(B(t_i)) - f(B(t_{i-1})) = (B(t_i) - B(t_{i-1}))f'(B(t_{i-1})) + \frac{1}{2}(B(t_i) - B(t_{i-1}))^2 f''(B(t_{i-1})) + \frac{1}{6}(B(t_i) - B(t_{i-1}))^3 f'''(B(\tau_i)),$$

ove τ_i é un opportuno punto (aleatorio) compreso fra t_{i-1} e t_i . Ora, poiché la funzione d'intervallo $q(I) = (\Delta(B)(I))^2$ é integrabile e ha integrale coincidente con $\Delta(t)$ (v. Esempio 2. di 15.12), se ne deduce che, al tendere di $\delta(D)$ a 0:

a) le somme

$$\sum_{i=1}^n f''(B(t_{i-1}))(B(t_i) - B(t_{i-1}))^2$$

convergono in L_2 all'integrale $\int_a^b f''(B(t))dt$;

b) le somme $\sum_{i=1}^n |B(t_i) - B(t_{i-1})|^3$ tendono a 0, insieme con le somme

$$\sum_{i=1}^n \frac{1}{6}(B(t_i) - B(t_{i-1}))^3 f'''(B(\tau_i)).$$

Resta pertanto dimostrata la convergenza delle somme

$$\sum_{i=1}^n f'(B(t_{i-1}))\Delta(B)([t_{i-1}, t_i])$$

alla quantita'

$$(I) \int_a^b f'(B(t))dB(t) = f(B(b)) - f(B(a)) - \frac{1}{2} \int_a^b f''(B(t))dt. \quad \square$$

Ritroviamo cosí il risultato dell'Esempio 3 di 15.12: poiché in quel caso si ha $f(x) = x^2$, otteniamo

$$\int_a^b 2B(t)dB(t) = B(b)^2 - B(a)^2 - \int_a^b dt = B(b)^2 - B(a)^2 - (b - a).$$

Cio' mostra anche, in virtu' del teorema 15.15, che il processo $Y_t = B_t^2 - t$ é una martingala.

Analogamente, si trova:

$$\int_a^b B(t)^2 dB(t) = \frac{B^3(b) - B^3(a)}{3} - \int_a^b B(t) dt$$

(l'ultimo integrale esistendo anche puntualmente).

Similmente:

$$\int_a^b \cos(B(t)) dB(t) = \sin(B(b)) - \sin(B(a)) + \frac{1}{2} \int_a^b \sin(B(t)) dt.$$

Un risultato analogo si puo' ricavare per quanto riguarda il (λ) -integrale.

Teorema 16.5 *Si consideri il Moto Browniano Standard B in $[0, T]$, e sia $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una generica funzione di classe C^3 . Risulta*

$$(\lambda) \int_a^b f'(B(t)) dB(t) = f(B(b)) - f(B(a)) - \frac{1}{2}(2\lambda - 1) \int_a^b f''(B(t)) dt, \quad (16)$$

per ogni intervallo $[a, b] \subset [0, T]$.

Di questo teorema non riportiamo la dimostrazione completa: per ricavare la formula, si puo' seguire la stessa tecnica usata per provare 16.4, ma con l'accortezza di porre:

$$f(B(t_i)) - f(B(t_{i-1})) = [f(B(t_i)) - f(B(t_\lambda))] - [f(B(t_{i-1})) - f(B(t_\lambda))]$$

ove $t_\lambda = \lambda t_{i-1} + (1 - \lambda)t_i$, e poi usare la formula di Taylor in entrambi gli addendi, centrata sempre in $B(t_\lambda)$... Infine, al momento di passare al limite, occorre osservare che le somme delle quantita' $(B(t_i) - B(t_\lambda))^2$ si comportano come le somme di $\lambda(t_i - t_{i-1})$ e le somme delle quantita' $-(B(t_{i-1}) - B(t_\lambda))^2$ si comportano come le somme di $-(1 - \lambda)(t_i - t_{i-1})$.

Un'altra situazione importante in cui la Formula di Itô risulta molto utile si ha quando il processo Y_t é funzione sia di B che di t . La formula é contenuta nel seguente teorema, di cui accenneremo appena la dimostrazione.

Teorema 16.6 Sia data una funzione $f : [0, T] \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f = f(t, x)$, e sia $Y(t) = \frac{\partial f}{\partial x}(t, B(t))$. Se la funzione f é di classe C^3 , il processo Y é integrabile rispetto a $B(t)$ e si ha:

$$\begin{aligned} f(b, B(b)) - f(a, B(a)) &= \int_a^b \frac{\partial f}{\partial x}(t, B(t)) dB(t) + \\ &+ \int_a^b \frac{\partial f}{\partial t}(t, B(t)) dt + \frac{1}{2} \int_a^b \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(t, B(t)) dt. \end{aligned} \quad (17)$$

Come abbiamo detto, la dimostrazione verra' appena accennata, anche perché la tecnica non é molto diversa da quella usata nel provare 16.4: il *trucco* consiste nel valutare espressioni del tipo $f(t_i, B(t_i)) - f(t_{i-1}, B(t_{i-1}))$ mediante la formula di Taylor, arrestata al termine di terzo grado:

$$\begin{aligned} f(t_i, B(t_i)) - f(t_{i-1}, B(t_{i-1})) &= \frac{\partial f}{\partial t}(t_{i-1}, B(t_{i-1}))(t_i - t_{i-1}) + \\ &+ \frac{\partial f}{\partial x}(t_{i-1}, B(t_{i-1}))(B(t_i) - B(t_{i-1})) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(t_{i-1}, B(t_{i-1}))(B(t_i) - B(t_{i-1}))^2 + \\ &+ \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial t^2}(t_{i-1}, B(t_{i-1}))(t_i - t_{i-1})^2 + \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial x}(t_{i-1}, B(t_{i-1}))(t_i - t_{i-1})(B(t_i) - B(t_{i-1})) + \dots \end{aligned}$$

dove gli addendi non scritti coinvolgono le derivate terze, e danno contributo nullo all'integrale, così' come accade nel caso del Teorema 16.4. Anche gli ultimi due addendi qui riportati danno comunque contributo nullo, in quanto coinvolgono funzioni d'intervallo del tipo $(\Delta t)^2$ e $(\Delta t)(\Delta B(t))$, le quali appunto hanno integrale nullo. Restano dunque solo i primi tre addendi, che (sommati), convergono agli integrali indicati nella formula (17).

Un esempio facile, ma istruttivo, é il seguente:

$$\int_0^T 2tB(t)dB(t) = TB^2(T) - \int_0^T B(t)^2 dt - \frac{T^2}{2}.$$

A titolo di esercizio, valutiamo il seguente integrale stocastico:

$$\int_0^T \cos(tB(t))dB(t).$$

Per poter applicare la formula (17), occorre trovare una primitiva (rispetto a x) della funzione $\cos(tx)$; una tale primitiva é:

$$f(t, x) = \frac{1}{t} \sin(tx),$$

intendendo anche $f(0, x) = x$ per continuit . Per poter applicare il teorema 16.6, dobbiamo controllare che la nostra f sia di classe C^3 : a prima vista, questo potrebbe costituire una difficolt , dato il denominatore. Tuttavia, basta usare lo sviluppo di McLaurin della funzione $\sin x$, per convincersi facilmente che tutte le propriet  richieste sono soddisfatte. Allora, applicando la formula (17), troveremo:

$$\begin{aligned} \int_0^T \cos(tB(t))dB(t) = \\ = \frac{\sin(TB(T))}{T} - \int_0^T \left(\frac{tB(t) \cos(tB(t)) - \sin(tB(t))}{t^2} + \frac{1}{2}t \sin(tB(t)) \right) dt \end{aligned}$$

17 Differenziale stocastico

Spesso, le formule di It  assumono una formulazione piu' semplice, se si ricorre alla notazione in termini di *differenziale stocastico*.

Ad esempio, il teorema 16.6 puo' essere riformulato, dicendo che il processo $Y(t) = f(t, B(t))$ si puo' ottenere come somma di integrali stocastici e integrali di Riemann, e come tale esso stesso puo' essere trattato da processo *integratore*, in luogo del Moto Browniano. Insomma, se Z fosse un altro processo approssimabile e adattato, si avrebbe

$$\begin{aligned} \int Z(t)dY(t) = \int Z(t)df(t, B(t)) = \int Z(t)f'_x(t, B(t))dB(t) + \\ + \int Z(t)[f'_t(t, B(t)) + \frac{1}{2}f''_{xx}(t, B(t))]dt. \end{aligned}$$

Non entreremo nei dettagli dimostrativi, ma tutto   insito nell'applicazione della Formula di Taylor (arrestata al terzo termine) per valutare la differenza $f(t+\delta t, B(t+\delta t)) - f(t, B(t))$. In altri termini, si puo' dare la seguente definizione.

Definizione 17.1 Sia dato un processo $Y = (Y(t))_{t \in [0, T]}$, adattato alla filtrazione naturale del Moto Browniano. Diciamo che Y   un *processo di It * se esistono un processo $\mu(t)$ con traiettorie integrabili alla Riemann e un processo $\sigma(t)$ integrabile alla It  rispetto al Moto Browniano, tali che

$$Y(t) = Y(0) + \int_0^t \mu(s)ds + \int_0^t \sigma(s)dB(s)$$

per ogni $t \in [0, T]$. Quando cio' accade, si chiama *differenziale stocastico* di Y l'espressione

$$dY(t) = \mu(t)dt + \sigma(t)dB(t). \quad (18)$$

Il processo $\mu(t)$ é detto anche *coefficiente di drift* di Y , mentre il processo $\sigma(t)$ prende il nome di *coefficiente di disturbo* o anche di *rumore* (dall'inglese *noise*).

Dunque, le formule di Itô studiate finora affermano che

$$df(B(t)) = f'(B(t))dB(t) + \frac{1}{2}f''(B(t))dt,$$

$$df(t, B(t)) = [f'_t(t, B(t)) + \frac{1}{2}f''_{xx}(t, B(t))]dt + f'_x(t, B(t))dB(t)$$

(naturalmente nelle ipotesi di regolarita' richieste nei teoremi 16.4 e 16.6).

Applicando adeguatamente la formula di Taylor, si possono ottenere molte formule di Itô, piu' o meno utili, a seconda del particolare processo Y che si vuole trattare come integratore. Noi ne vedremo solo alcune, tra le piu' importanti.

Formula 1 . Sia dato un processo di Itô Y , con differenziale stocastico $dY(t) = \mu(t)dt + \sigma(t)dB(t)$. Per ogni funzione $f \in C^3(\mathbb{R})$, il processo $Z(t) = f(Y(t))$ é ancora un processo di Itô, e risulta

$$dZ(t) = df(Y(t)) = f'(Y(t))dY(t) + \frac{1}{2}\sigma(t)^2 f''(Y(t))dt.$$

Tale risultato si puo' ricavare come segue:

$$\begin{aligned} Z(t+dt) - Z(t) &= f(Y(t+dt)) - f(Y(t)) = \\ &= f'(Y(t))(Y(t+dt) - Y(t)) + \frac{1}{2}f''(Y(t))(Y(t+dt) - Y(t))^2 + \dots \end{aligned}$$

dove al solito i termini di ordine maggiore di 2 saranno trascurati. Ora, l'espressione $Y(t+dt) - Y(t)$ puo' essere sostituita con dY , mentre il suo quadrato va sostituito con $(dY)^2$, ossia con

$$(\mu(t)dt + \sigma(t)dB(t))^2 = \mu(t)^2(dt)^2 + 2\mu(t)\sigma(t)(dt)(dB(t)) + \sigma(t)^2(dB(t))^2 :$$

a questo punto, basta osservare che i termini in $(dt)^2$ o $(dt)(dB(t))$ daranno contributo nullo ai fini dell'integrazione, mentre $(dB(t))^2$ sappiamo comportarsi come dt ; quindi $(dY)^2$ si puo' assimilare a $\sigma(t)^2 dt$ e otteniamo la Formula 1.

Ad esempio, supponiamo che sia $Y(t) = \int_0^t \cos(B(s))dB(s)$, per $t \in [0, T]$. Dunque $dY(t) = \cos(B(t))dB(t)$. Supponiamo ora di voler calcolare l'integrale stocastico $\int_0^T B(t)dY^3(t)$: la Formula 1 di cui sopra ci dice che

$$\begin{aligned} dY^3(t) &= 3Y^2(t)dY(t) + 3Y(t)\cos^2(B(t))dt = \\ &= 3Y^2(t)\cos(B(t))dB(t) + 3Y(t)\cos^2(B(t))dt. \end{aligned}$$

Pertanto,

$$\begin{aligned} \int_0^T B(t)dY^3(t) &= 3 \int_0^T B(t)Y^2(t)\cos(B(t))dB(t) + \\ &+ 3 \int_0^T B(t)Y(t)\cos^2(B(t))dt. \end{aligned}$$

In tale espressione naturalmente la Y puo' essere sostituita dalla seguente

$$Y(t) = \sin(B(t)) + \frac{1}{2} \int_0^t \sin(B(s))ds$$

che coinvolge solo funzioni del Moto Browniano e loro integrali di Riemann.

Formula 2. Sia Y come sopra, ma supponiamo che $f = f(t, x)$ sia funzione di classe C^3 di due variabili. Posto $Z(t) = f(t, Y(t))$, avremo

$$dZ(t) = f'_x(t, Y(t))dY(t) + [f'_t(t, Y(t)) + \frac{1}{2}\sigma(t)^2 f''_{xx}(t, Y(t))]dt,$$

in modo analogo alla formula (17).

Per esempio, si consideri il processo $Y(t) = \int_0^t s dB(s)$. Chiaramente, $dY(t) = t dB(t)$. Poniamo $Z(t) = \sin(tY(t))$: si ha allora

$$dZ(t) = Y(t)\cos(tY(t))dt + t^2\cos(tY(t))dB(t) - \frac{1}{2}t^4\sin(tY(t))dt.$$

Naturalmente, anche in queste espressioni Y puo' essere scritto come

$$Y(t) = tB(t) - \int_0^t B(s)ds$$

con $t \in [0, T]$.

Formula 3. Questa formula riguarda il prodotto di due processi di Itô: supponiamo che X e Y siano due processi di Itô. Denotando con $\sigma_X(t)$ e con $\sigma_Y(t)$ rispettivamente i coefficienti di rumore di X e di Y , allora si ha

$$d(X(t)Y(t)) = X(t)dY(t) + Y(t)dX(t) + \sigma_X(t)\sigma_Y(t)dt.$$

La dimostrazione, che qui accenneremo soltanto, percorre le seguenti linee:

$$\begin{aligned} dX(t)Y(t) &= X(t+dt)Y(t+dt) - X(t)Y(t) = [X(t+dt) - X(t)]Y(t+dt) + \\ &+ X(t)[Y(t+dt) - Y(t)] = [X(t+dt) - X(t)][Y(t+dt) - Y(t)] + Y(t)[X(t+dt) - X(t)] + \\ &+ X(t)[Y(t+dt) - Y(t)] = dX dY + Y(t)dX(t) + X(t)dY(t); \end{aligned}$$

La formula si ottiene poi dal prodotto $dX dY$ (ove si adopera per dX e dY l'espressione tipica del differenziale stocastico (18)), eliminando tutti i termini in cui compaiono $dB(t)dt$ o $(dt)^2$, e sostituendo come al solito il termine $(dB(t))^2$ con dt .

Ad esempio, supponiamo che sia $X(t) = B^2(t)$, e $Y(t) = \int_0^t B^2(s)dB(s)$, si ha

$$dX(t)Y(t) = B^4(t)dB(t) + 2B(t)Y(t)dB(t) + Y(t)dt + 2B^3(t)dt.$$

Essendo $Y(t) = \frac{1}{3}B^3(t) - \int_0^t B(s)ds$, si deduce

$$d(X(t)Y(t)) = \frac{5}{3}B^4(t)dB(t) - 2B(t)\left(\int_0^t B(s)ds\right)dB(t) + \frac{8}{3}B^3(t)dt - 2\left(\int_0^t B(s)ds\right)dt.$$

18 Cenni alle equazioni differenziali stocastiche

Il problema con cui abbiamo aperto il capitolo sull'integrale stocastico in realtà è una vera e propria equazione differenziale stocastica (e presto studieremo un metodo per risolverla rapidamente). Quell'esempio dunque, oltre a fornire lo spunto per trattare l'integrazione stocastica, sta anche a dimostrare l'utilità delle equazioni differenziali di Itô in vari problemi applicativi, così come sono utili le equazioni differenziali classiche. E, come nel caso classico, anche per quelle stocastiche esistono varie forme e si danno vari teoremi di esistenza e unicità. Noi qui ci limiteremo a

riportare una formulazione di tali teoremi, senza dimostrazioni, e poi affronteremo piu' concretamente i metodi di risoluzione di quelle che vengono dette *equazioni lineari*.

Solitamente, un'*equazione differenziale stocastica* (EDS d'ora in poi) si presenta come una richiesta del tipo

$$dX_t = a(t, X_t)dt + b(t, X_t)dB_t, \quad X_0 = Y \quad (19)$$

dove, come al solito, $(B_t)_t$ denota il Moto Browniano, le funzioni $a(t, x)$, $b(t, x)$ sono funzioni reali di due variabili, $t \in [0, T]$ e $x \in \mathbb{R}$, e Y é una fissata v.a. reale.

La condizione (19) si puo' riformulare come segue:

$$X_t = Y + \int_0^t a(s, X_s)ds + \int_0^t b(s, X_s)dB_s \quad (20)$$

a patto che l'integrale classico in ds e quello stocastico (in dB_s) abbiano senso ed esistano.

Richiederemo inoltre che la soluzione X sia un processo *adattato* alla filtrazione naturale del Moto Browniano, e che le *traiettorie* di X dipendano in maniera univoca da quelle del Moto Browniano (e naturalmente dalle funzioni a e b): queste ulteriori richieste si esprimono dicendo che X é una soluzione *in senso forte* dell'EDS (19). Si incontrano spesso anche equazioni con soluzioni in senso *debole*, cioé caratterizzate solo attraverso la distribuzione, ma di queste non ci occuperemo.

Riportiamo ora il teorema di esistenza ed unicitá per (19), che piu' *somiglia* al teorema classico per le equazioni differenziali usuali.

Teorema 18.1 *Supponiamo che la v.a. iniziale Y sia in L_2 e indipendente dal Processo $(B_t)_t$.*

Supponiamo poi che le funzioni a e b siano continue nel complesso delle loro variabili.

Supponiamo infine che a e b soddisfino a una condizione di Lipschitz rispetto alla seconda variabile, uniforme rispetto alla prima:

$$|a(t, x_1) - a(t, x_2)| + |b(t, x_1) - b(t, x_2)| \leq K|x_1 - x_2|$$

per opportuna costante positiva K , quali che siano t, x_1, x_2 .

Allora l'EDS (19), o equivalentemente (20), ammette una e una sola soluzione in senso forte, nell'intervallo $[0, T]$.

Osserviamo che, nella tesi del Teorema precedente, é implicita l'integrabilita' alla Itô di $b(t, X_t)$, e si asserisce che X é un processo adattato.

Ovviamente, qualora fosse $b = 0$, l'equazione (19) si riduce ad un'equazione differenziale classica, e in tal caso il teorema 18.1 si riduce al classico risultato di Picard-Peano.

Affronteremo ora alcuni metodi concreti di risoluzione, per particolari EDS. Ci limiteremo al caso delle equazioni *lineari*, ossia della forma

$$dX_t = (a(t)X_t + b(t))dt + (\sigma(t)X_t + \mu(t))dB_t, \quad X_0 = x_0$$

intendendo che $a(t), b(t), \sigma(t), \mu(t)$ sono funzioni *deterministiche* regolari di t , $(X_t)_t$ (l'incognita) sia un generico processo di Itô, $(B_t)_t$ denoti come al solito il Moto Browniano Standard, e x_0 rappresenti la condizione iniziale (che puo' anche essere una v.a.).

Grazie al teorema di esistenza e unicita' 18.1, sappiamo gia' che la soluzione esiste ed é unica. Ci occuperemo dunque di descrivere i metodi di risoluzione, che sono basati essenzialmente sulle varie formule di Itô studiate.

Inizieremo con l'equazione piu' semplice, quella cosiddetta *di Langevin*.

1. (Equazione di Langevin) Questa equazione ha la forma

$$dX_t = a(t)X_t dt + \sigma(t)dB_t, \quad X(0) = X_0.$$

Per risolvere questa equazione, poniamo

$$X_t = e^{A(t)}Y_t$$

ove $A(t)$ é un'opportuna funzione deterministica, e Y_t un opportuno processo di Itô, avente differenziale $dY_t = f(t)dt + \phi(t)dB_t$.

In altri termini, dobbiamo determinare le funzioni $A(t)$, $f(t)$, $\phi(t)$, in modo che il processo $X_t = e^{A(t)}Y(t)$ verifichi l'equazione data.

Dall'espressione $X_t = e^{A(t)}Y(t)$, ricaviamo

$$dX_t = A'(t)e^{A(t)}Y(t)dt + e^{A(t)}dY(t) = A'(t)X_tdt + e^{A(t)}f(t)dt + e^{A(t)}\phi(t)dB_t.$$

Confrontando questa espressione con quella data dall'equazione originaria, vediamo subito che deve risultare

$$e^{A(t)}\phi(t) = \sigma(t), \quad A'(t) = a(t), \quad f(t) = 0$$

dunque

$$\phi(t) = \sigma(t)e^{-\int_0^t a(s)ds}$$

da cui

$$Y_t = \int_0^t \sigma(\tau)e^{-\int_0^\tau a(s)ds} dB_\tau + Y_0$$

dove $Y_0 = X_0$, e in definitiva

$$X_t = e^{\int_0^t a(s)ds} \left(\int_0^t \sigma(\tau)e^{-\int_0^\tau a(s)ds} dB_\tau + X_0 \right).$$

Per fornire un esempio concreto, assumiamo che sia $X_0 = 1$, $a(t) = 2$, $\sigma(t) = e^t$, in modo che l'equazione diventi

$$dX = 2X(t)dt + e^t dB(t), \quad X(0) = 1.$$

La soluzione sara' allora:

$$\begin{aligned} X(t) &= e^{2t} \left(1 + \int_0^t e^{-\tau} dB(\tau) \right) = \\ &= e^{2t} + e^t B(t) + e^{2t} \int_0^t B(\tau) e^{-\tau} d\tau. \end{aligned}$$

Esempio 18.2 Per comprendere meglio la forma della soluzione, trattiamo un esempio abbastanza semplice, ma piuttosto interessante: esso é ripreso dal cosiddetto *modello di Vasicek* per l'evoluzione dei tassi d'interesse.

$$dX_t = (\mu - X_t)dt + \sigma dB_t, \quad X_0 = \mu,$$

con μ e σ costanti generiche.

Prima di applicare formule, adoperiamo una sostituzione: poniamo $X_t^* = X_t - \mu$: l'equazione diventa allora

$$dX_t^* = -X_t^* + \sigma dB_t, \quad X_0^* = 0.$$

Essendo $a(t) = -1$, é ovviamente $A(t) = -t$, e quindi per X^* avremo l'espressione

$$X_t^* = \sigma e^{-t} \int_0^t e^\tau dB_\tau$$

e quindi

$$X_t = \mu + \sigma e^{-t} \int_0^t e^\tau dB_\tau.$$

2. (Equazione Omogenea). Sono dette *omogenee* le equazioni del tipo

$$dX_t = a(t)X(t)dt + \sigma(t)X(t)dB_t, \quad X_0 = x_0 > 0$$

(La condizione $X_0 = 0$ porterebbe alla soluzione banale $X_t \equiv 0$, e una condizione con $x_0 < 0$ si riconduce facilmente al caso precedente sostituendo X con $-X$).

Per risolvere tale equazione, si pone: $X_t = e^{Y_t}$, con $dY_t = f(t)dt + \phi(t)dB_t$, e $Y_0 = \log x_0$. Applicando la formula di Itô al differenziale di X , troviamo

$$dX_t = X_t dY_t + \frac{1}{2} X_t \phi^2(t) dt = X_t (f(t) + \frac{1}{2} \phi^2(t)) dt + X_t \phi(t) dB_t.$$

L'equazione omogenea iniziale é allora soddisfatta se

$$\phi(t) = \sigma(t), \quad f(t) = a(t) - \frac{1}{2} \sigma^2(t).$$

Dunque

$$Y_t = \int_0^t [a(s) - \frac{1}{2} \sigma^2(s)] ds + \int_0^t \sigma(s) dB_s + \log x_0,$$

e infine

$$X_t = x_0 e^{\int_0^t [a(s) - \frac{1}{2} \sigma^2(s)] ds + \int_0^t \sigma(s) dB_s}.$$

Esempio 18.3 Impostiamo la seguente equazione:

$$dX_t = 5t^2 X_t dt + 2t X_t dB_t, \quad X_0 = 1.$$

Essendo $a(t) - \frac{1}{2}\sigma^2(t) = 3t^2$, dalla formula risolutiva del punto 2. precedente otteniamo

$$X_t = e^{t^3 + 2 \int_0^t s dB_s} = e^{t^3 + 2tB_t - 2 \int_0^t B_s ds}.$$

3. (Equazione generale)] Consideriamo infine l'equazione lineare generale:

$$dX_t = (a(t)X_t + b(t))dt + (\sigma(t)X_t + \mu(t))dB_t, \quad X_0 = x_0.$$

Per risolvere tali equazioni, si può porre $X_t = Z(t)Y(t)$, ove Y_t è soluzione dell'equazione *omogenea associata*

$$dY_t = a(t)Y_t dt + \sigma(t)Y_t dB_t, \quad Y_0 = 1$$

e $(Z_t)_t$ è un opportuno processo di Itô, il cui differenziale stocastico può essere valutato con una Formula di Itô. Infatti, essendo $Z_t = \frac{X_t}{Y_t}$, basta calcolare il differenziale di $\frac{1}{Y_t}$, e applicare la formula per il differenziale del prodotto di due processi di Itô. Intanto, si ha:

$$d\left(\frac{1}{Y_t}\right) = -\frac{dY_t}{Y_t^2} + \frac{\sigma^2(t)Y_t^2(t)dt}{Y_t^3} = \frac{\sigma^2(t) - a(t)}{Y_t}dt - \frac{\sigma(t)}{Y_t}dB_t.$$

Applicando la Formula di Itô per il prodotto di due processi, avremo

$$dZ_t = X_t d\left(\frac{1}{Y_t}\right) + \frac{1}{Y_t} dX_t - (\sigma(t)X_t + \mu(t))\frac{\sigma(t)}{Y_t}dt, \quad (21)$$

ossia

$$\begin{aligned} dZ_t = & X_t \left(\frac{\sigma^2(t) - a(t)}{Y_t} dt - \frac{\sigma(t)}{Y_t} dB_t \right) + \frac{1}{Y_t} (a(t)X_t + b(t))dt + \\ & + \frac{1}{Y_t} (\sigma(t)X_t + \mu(t))dB_t - \frac{\sigma^2(t)X_t}{Y_t} dt - \frac{\sigma^2(t)\mu(t)}{Y_t} dt = \frac{b(t) - \sigma(t)\mu(t)}{Y_t} dt + \frac{\mu(t)}{Y_t} dB_t, \end{aligned}$$

avendo applicato l'espressione fornita dall'equazione generale per dX_t e quella dell'omogenea per dY_t .

Se ne deduce subito l'espressione per Z :

$$Z_t = \int_0^t \frac{b(s) - \sigma(s)\mu(s)}{Y_s} ds + \int_0^t \frac{\mu(s)}{Y_s} dB_s + x_0,$$

e in definitiva:

$$X_t = Y_t \left(\int_0^t \frac{b(s) - \sigma(s)\mu(s)}{Y_s} ds + \int_0^t \frac{\mu(s)}{Y_s} dB_s + x_0 \right)$$

dove, ricordiamo, Y_t é soluzione dell'equazione omogenea associata, con dato iniziale $Y_0 = 1$, cioè

$$Y_t = e^{\int_0^t [a(s) - \frac{1}{2}\sigma^2(s)] ds + \int_0^t \sigma(s) dB_s}.$$

Esempio 18.4 Iniziamo con un'equazione abbastanza semplice:

$$dX_t = (aX_t + b)dt + \sigma(t)dB_t, \quad X_0 = x_0.$$

L'equazione omogenea associata non é stocastica: $dY_t = aY_t dt$ ha soluzione

$$Y_t = e^{at},$$

(la condizione iniziale $Y_0 = 1$ é facilmente soddisfatta). La soluzione allora ha la forma

$$X_t = e^{at} \left(\frac{b}{a} (1 - e^{-at}) + \int_0^t \mu e^{-as} dB_s + x_0 \right).$$

Esempio 18.5 Consideriamo ora l'equazione seguente:

$$dX_t = (t + X_t)dB_t, \quad X_0 = 1.$$

Stavolta, l'equazione omogenea associata é $dY_t = Y_t dB_t$, e la soluzione é data dal Moto Browniano Geometrico

$$Y_t = e^{-\frac{1}{2}t + B_t}$$

(*esponenziale stocastico*). Essendo $a = b = 0, \sigma = 1, \mu(t) = t$, la soluzione cercata é

$$X_t = e^{-\frac{1}{2}t + B_t} \left(\int_0^t s e^{s/2 - B_s} dB_s - \int_0^t s e^{s/2 - B_s} ds + 1 \right)$$

Esempio 18.6 In maniera analoga alle equazioni lineari, possono talvolta essere trattati anche i *sistemi* lineari di due o piu' equazioni. Presenteremo qui un esempio piuttosto elementare, che puo' pero' dare un'idea dei procedimenti da usare in questi casi. Il sistema é una variante semplificata del cosiddetto *modello preda-predatore*, e si presenta come segue:

$$\begin{cases} dX_t = (aX_t - bY_t)dt + \sigma_1 dB_t, & X(0) = X_0, \\ dY_t = (cX_t + dY_t)dt + \sigma_2 dB_t, & Y_0 = Y_0. \end{cases}$$

Le costanti a, b, c, d, σ_1 e σ_2 sono tutte positive, come X_0 e Y_0 . Il sistema puo' essere visto in forma vettoriale, cioé

$$d\underline{X} = A \times \underline{X} dt + \underline{\sigma} dB_t, \quad \underline{X}(0) = (X_0, Y_0),$$

dove $\underline{\sigma}$ é naturalmente il vettore (σ_1, σ_2) , e A denota la matrice

$$A = \begin{pmatrix} a & -b \\ c & d \end{pmatrix}.$$

Procedendo formalmente come nella risoluzione del problema di Langevin, si puo' porre

$$\underline{X} = e^{At} \underline{U},$$

ove $\underline{U} = (U_1, U_2)$ é una coppia di processi di Itô, con differenziali

$$dU_i = \mu_i(t) dB_t,$$

per $i = 1, 2$. La soluzione si presenta allora nella forma

$$\underline{X} = \underline{X}(0) + e^{At} \int_0^t e^{-As} \underline{\sigma} dB_s.$$

Chiaramente, il problema piu' complesso a questo punto diventa il calcolo dell'esponenziale della matrice At . Il problema é agevole quando ci si puo' valere della *decomposizione di Jordan* della matrice A , ossia quando si riescono a trovare due matrici, P e J , con P invertibile, e J diagonale (o triangolare), in modo da avere

$$A = P^{-1}JP.$$

Ad esempio, se scegliamo le costanti seguenti:

$$a = \frac{1}{2}, \quad b = 1, \quad c = 1, \quad d = \frac{5}{2},$$

si trova

$$P = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad J = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} & 1 \\ 0 & \frac{3}{2} \end{pmatrix}, \quad P^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Similmente, si ha

$$At = P^{-1} Jt P,$$

per ogni $t > 0$. Esaminando le potenze successive di J e di Jt , si ottiene

$$J^n t^n = \begin{pmatrix} (\frac{3}{2}t)^n & nt(\frac{3}{2}t)^{n-1} \\ 0 & (\frac{3}{2}t)^n \end{pmatrix},$$

da cui

$$e^{At} = P e^{Jt} P^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{\frac{3}{2}t} & te^{\frac{3}{2}t} \\ 0 & e^{\frac{3}{2}t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Svolgendo i calcoli, si ottiene

$$e^{At} = \begin{pmatrix} (1-t)e^{\frac{3}{2}t} & -te^{\frac{3}{2}t} \\ te^{\frac{3}{2}t} & (1+t)e^{\frac{3}{2}t} \end{pmatrix},$$

e anche (semplicemente invertendo):

$$e^{-At} = \begin{pmatrix} (1+t)e^{-\frac{3}{2}t} & te^{-\frac{3}{2}t} \\ -te^{-\frac{3}{2}t} & (1-t)e^{-\frac{3}{2}t} \end{pmatrix}.$$

Sostituendo le espressioni trovate nella formula risolutiva per \underline{X} , e ricavando poi le componenti X e Y , si ottiene infine

$$X_t = X_0 + (1-t)e^{\frac{3}{2}t} \int_0^t [\sigma_1 + \tau(\sigma_1 + \sigma_2)] e^{-\frac{3}{2}\tau} dB_\tau - te^{\frac{3}{2}t} \int_0^t [\sigma_2 - \tau(\sigma_1 + \sigma_2)] e^{-\frac{3}{2}\tau} dB_\tau,$$

$$Y_t = Y_0 + te^{\frac{3}{2}t} \int_0^t [\sigma_1 + \tau(\sigma_1 + \sigma_2)] e^{-\frac{3}{2}\tau} dB_\tau + (1+t)e^{\frac{3}{2}t} \int_0^t [\sigma_2 - \tau(\sigma_1 + \sigma_2)] e^{-\frac{3}{2}\tau} dB_\tau.$$

References

- [1] H. BAUER, *Probability Theory and Elements of Measure Theory*; Holt, Rinehart and Winston, Inc. (1972).
- [2] P. BENVENUTI, *Sul problema ergodico relativo ad una singola funzione*; Accad. Naz. Lincei, Classe Sci.Fis.Mat.Nat., Ser. 8, **42**, pp. 368-372.
- [3] P. BILLINGSLEY, *Probability and Measure*; Wiley, New York (1986).
- [4] P. BILLINGSLEY, *Convergence of probability measures*; Wiley Series in Probability and Statistics, Wiley (1999).
- [5] P. BREIMAN, *Probability*; Addison-Wesley, Reading (1968).
- [6] G.R. GRIMMETT, D.R. STIRZAKER, *Probability and random processes*; Clarendon Press, Oxford (1982).
- [7] P.R. HALMOS, *Lectures in ergodic theory*; Chelsea (1956).
- [8] T. MIKOSCH, *Elementary Stochastic Calculus*; World Scientific Publ. Co., Singapore (1998).

Dispense di Analisi Matematica I (Prima Parte)

Domenico Candeloro

Introduzione

Durante il Corso modulare di Analisi Matematica I, alcuni argomenti sono trattati in maniera diversa da come appaiono nei testi usuali. Questo é dovuto a due ordini di motivi.

Da una parte, si é scelto di fornire una trattazione concisa, e possibilmente unitaria: ciò ha portato a ricondurre per quanto possibile vari concetti diversi ad uno stesso denominatore comune, e a semplificare o addirittura eliminare le dimostrazioni, preferendo a volte fornire una nutrita quantita' di esempi e controesempi.

Dall'altra parte, si é voluta cogliere l'occasione per introdurre, sia pure in forma concisa e ridotta, alcuni dei temi più attuali, suggeriti dalla presenza sempre più avvertita del computer nella nostra vita: abbiamo dunque introdotto alcuni cenni alle successioni definite per ricorrenza, alcune formule di approssimazione, una discussione delle rappresentazioni alternative dei numeri reali, e abbiamo dedicato una certa cura allo studio delle serie.

Piú in dettaglio, gli argomenti trattati comprendono:

nel Capitolo 1, i concetti di relazione, con i vari casi particolari di ordinamento, - equivalenza, funzione, ed alcune conseguenze nella teoria degli insiemi, come il concetto di cardinalità, esaminata più in particolare nell'ambito degli insiemi che maggiormente ci interesseranno durante il corso; un discorso a parte é stato fatto per le diverse rappresentazioni dei numeri reali, e dell'insieme di Cantor, visto sia come un insieme strano di numeri reali, sia come esempio di insieme risultante dalla rappresentazione ternaria, sia come prototipo di insieme frattale;

nel Capitolo 2, il calcolo combinatorio, introdotto in maniera formale, ma discusso anche nei suoi aspetti più tecnici;

nel Capitolo 3, il concetto di successione, e vari esempi che di tali oggetti si possono incontrare, ed il concetto di limite per una successione, anche qui con vari esempi significativi;

nel Capitolo 4, i limiti in generale, preceduti da alcune considerazioni di tipo topologico:

si fornisce una definizione del concetto leggermente più astratta di quanto sia strettamente necessario, ma essa riuscirà utile nei corsi successivi. Inoltre, ivi sono compresi anche il concetto di limite infinito e di limite all'infinito, che qui sono anche confrontati con i concetti incontrati nel Cap.3. Oltre ai teoremi elementari, e ad alcuni limiti notevoli, sono anche trattati brevemente i concetti di "infinito e "infinitesimo;

nel Capitolo 5, i teoremi fondamentali sulle funzioni continue: dal teorema dei valori intermedi a quello di Weierstrass, con alcune utili applicazioni, e le proprietà delle funzioni inverse: qui, le dimostrazioni sono svincolate dai metodi topologici, e ridotte all'essenziale;

Nel Capitolo 6, le serie, con particolare risalto per quelle a termini positivi, e vari esempi di applicazione dei criteri principali.

Capitolo 1

INSIEMI, FUNZIONI, RELAZIONI

1.1 Relazioni

Quali sono gli strumenti con i quali dovremo continuamente lavorare nel corso?

Intanto, i vari tipi di numeri: interi, razionali, reali e complessi: ciascuna di queste categorie costituisce un *insieme* ben noto: $\mathbb{N}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$ rispettivamente. Poi, enti geometrici: vettori, matrici, triangoli, cerchi, ma anche piani e spazi vettoriali. Questi oggetti sono ambientati in insiemi che sono *prodotti* di \mathbb{R} con sè stesso; quindi dobbiamo studiare forme e proprietà anche di *sottoinsiemi* e *prodotti* di insiemi elementari. Altri strumenti che adopreremo sono le cosiddette *relazioni*, ossia legami, più o meno stretti, tra oggetti di uno stesso insieme, o anche tra oggetti di insiemi diversi: ad esempio, relazioni di *ordine*, o di *equivalenza*, riguardano elementi di uno stesso insieme (ma anche *sottoinsiemi* di uno stesso insieme); mentre le *funzioni* sono tipicamente legami tra oggetti di insiemi differenti.

Dare definizioni rigorose di tutti questi strumenti può apparire difficile, e forse inutile: vedremo invece che, in fondo, non è tanto difficile; quanto all'utilità, oltre a fornire spesso una visione geometrica chiara dell'ente che si sta introducendo, una rigorosa definizione matematica elimina il rischio di fraintendimenti, che potrebbero provocare errori nelle applicazioni e negli esercizi. Tanto per fare un esempio, non si può confondere una funzione reale, di una variabile reale, con una generica *curva* del piano: da questo punto di vista, il *cerchio* non è affatto una funzione.

Ma è bene procedere per gradi, e iniziare dal concetto di *prodotto cartesiano*. Dati due insiemi (non vuoti) A e B , il *prodotto cartesiano* $A \times B$ è l'insieme di tutte le *coppie ordinate* (a, b) , con $a \in A$, $b \in B$. (Non sottilizziamo sul significato dell'espressione "coppie ordinate": vuol dire semplicemente che la coppia (b, a) (ammesso che abbia senso) è distinta dalla coppia (a, b)). Dunque

$$A \times B = \{(a, b) : a \in A, b \in B\}.$$

Ora, una *relazione* tra gli elementi di A e quelli di B non è altro che un sottoinsieme (non vuoto), di $A \times B$. A seconda delle proprietà di tale insieme, la *relazione* acquisisce differenti significati e denominazioni.

Definizione 1.1 Dato un insieme non vuoto A , e una relazione $R \subset A \times A$, si dice che R è un *ordinamento* su A quando le seguenti condizioni sono soddisfatte:

- o1) $(x, x) \in R$ per ogni $x \in A$ (proprietà *riflessiva*);
- o2) $(x, y) \in R$ e $(y, x) \in R \Rightarrow x = y$ (proprietà *antisimmetrica*);
- o3) $(x, y) \in R$ e $(y, z) \in R \Rightarrow (x, z) \in R$ (proprietà *transitiva*).

Vediamo subito un esempio: supponiamo $A = \mathbb{R}$, e poniamo

$$R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \leq y\}.$$

E' evidente che le tre proprietà di cui sopra sono verificate. Si poteva anche definire R come l'insieme di tutte le coppie (x, y) tali che $y \leq x$: l'ordinamento sarebbe stato diverso, ma comunque le tre proprietà suddette sarebbero verificate. (In questi esempi si capisce anche l'importanza di avere coppie *ordinate* nel prodotto $\mathbb{R} \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^2$).

Un altro esempio si può costruire come segue:

Sia \mathbb{N}^* l'insieme degli interi positivi, e poniamo:

$$R = \{(n, m) \in \mathbb{N}^{*2} : m|n\}$$

(La scrittura $m|n$ sta a significare che n è un multiplo di m). Ancora, si vede facilmente che questo è un ordinamento su \mathbb{N}^* .

Ancora un altro esempio:

Sia X un insieme non vuoto qualunque, e $A = \wp(X)$ (cioè, l'insieme di tutti i sottoinsiemi di X). La relazione R può essere definita così: $(S, T) \in R$ quando $S \subset T$ (ovviamente, qui S e T sono due qualsiasi sottoinsiemi di X).

Ormai, sarà chiaro come interviene l'insieme $R \subset A \times A$ per definire l'ordinamento su A , e pertanto, d'ora in poi tralasceremo il riferimento a R : insomma, per dire che una coppia $(a, b) \in R$, diremo semplicemente che a è *minore o uguale* a b , e scriveremo $a \leq b$.

Ovviamente, la relazione d'ordine più importante è quella usuale su \mathbb{R} . Basti pensare ai numerosi problemi che comportano la ricerca di massimi e minimi, per funzioni reali di una o più variabili. Inoltre, come vedremo presto, l'ordinamento usuale su \mathbb{R} ha importanti applicazioni nella ricerca dei limiti.

Al fine di evidenziare gli aspetti principali che riguardano questa relazione d'ordine, diamo alcune definizioni.

Definizioni 1.2 Sia (X, \leq) un insieme con una relazione d'ordine, e sia $A \subset X$ un insieme non vuoto. Diremo che A è *limitato superiormente* se esiste un elemento $M \in X$ tale che $a \leq M$ per ogni $a \in A$. Qualora ciò accada, gli elementi M con tale proprietà (potrebbero essercene molti), sono detti *maggioranti* per A .

Analogamente, diremo che A è *limitato inferiormente* se esiste un elemento $m \in X$ tale che $m \leq a$ per ogni $a \in A$. Gli elementi m con tale proprietà sono detti *minoranti* per A .

Se A è limitato sia inferiormente sia superiormente, diremo brevemente che A è *limitato*.

Ad esempio, in \mathbb{R} con l'ordinamento usuale, l'insieme \mathbb{N} è limitato inferiormente ma non superiormente. \mathbb{N} ammette infiniti minoranti (tutti i numeri minori o uguali a 0).

Se invece X è l'insieme delle parti di un insieme non vuoto S , con l'ordinamento dato dall'inclusione, un qualunque sottoinsieme $A \subset X$ è in pratica una famiglia di sottoinsiemi di S : tanto per fare un esempio, A potrebbe essere l'insieme di tutti i sottoinsiemi di S che contengono un punto fissato $s \in S$. Ebbene, qualunque sia A , esso è sempre un insieme limitato in X : infatti, \emptyset è certamente un elemento di X , che è contenuto in ogni insieme/elemento di A , e S stesso è un elemento di X , che maggiora A .

Definizioni 1.3 Al solito, sia (X, \leq) un insieme ordinato, e sia $A \subset X$ un sottoinsieme non vuoto, limitato superiormente. Se tra i maggioranti di A c'è un qualche elemento $a \in A$, diremo che tale elemento è *il massimo* elemento di A , e viene denotato con $\max(A)$. (Si vede facilmente che il massimo, se esiste, è unico).

Se invece A è limitato inferiormente, e tra i minoranti c'è qualche elemento $\alpha \in A$, diremo che α è *il minimo* elemento di A , e lo denoteremo con la scrittura $\alpha = \min(A)$.

In \mathbb{R} , l'insieme $A =]0, 1]$ ammette massimo, ma non ammette minimo. Il massimo è 1, ovvio. Come si fa a vedere che non c'è il minimo? Basta tener presente che il minimo (come il massimo) è sempre un elemento di A (se esiste). Ora, se x è un qualunque elemento di $]0, 1]$, x non può essere un minorante, in quanto esiste almeno un punto di A (ad esempio, $\frac{x}{2}$) che è più piccolo di x .

Quando il massimo o il minimo non esistono, possono essere presi in considerazione dei *surrogati*, cioè *l'estremo superiore* e *l'estremo inferiore*.

Dato un insieme $A \subset X$, limitato superiormente, può accadere che l'insieme dei maggioranti di A ammetta minimo: se ciò accade, tale minimo si denota $\sup A$ e si chiama *estremo superiore* di A .

Essendo un minimo, il \sup è unico (purché esista). Inoltre, qualora A ammetta massimo, è chiaro che tale massimo è più piccolo di tutti i maggioranti (per definizione di maggiorante), e quindi esso è anche l'estremo superiore di A . Quello che va osservato, però, è che l'estremo superiore esiste in molte situazioni importanti, anche se non esiste il massimo. Vedremo presto i dettagli.

Analogamente, se A è limitato inferiormente, l'*estremo inferiore* di A , (se esiste) è il massimo dei minoranti.

Anch'esso è unico (se esiste), e coincide col minimo, se A ha minimo elemento.

Ad esempio, in \mathbb{R} l'insieme $]0, 1]$ ammette 1 come \sup (essendo anche massimo), e 0 come \inf (anche se esso non è minimo).

Vediamo ora alcuni interessanti esempi di \inf e \sup che a volte non sono massimi.

1) Si consideri l'insieme \mathbb{N}^* , con l'ordinamento dato da:

$$m \leq n \iff \frac{n}{m} \in \mathbb{N}^*.$$

(Ossia, $m \leq n$ se m é un *divisore* di n). L'insieme $A = \{8, 12\}$ ha come estremo superiore il numero 24 (cioé il $mcm(8, 12)$), e come estremo inferiore il numero $4 = MCD(8, 12)$. Chiaramente, non c'è né massimo né minimo.

2) Al contrario, in \mathbb{R} , con l'ordinamento usuale, ogni sottoinsieme finito (non vuoto) ammette massimo e minimo. Tuttavia l'insieme \mathbb{N} non ha estremo superiore in \mathbb{R} , essendo illimitato superiormente.

3) Se X é l'insieme delle parti di un insieme non vuoto S , con l'ordinamento dato dall'inclusione, sia s un fissato elemento di S , e sia A la famiglia dei sottoinsiemi di S che contengono s . Chiaramente, S stesso fa parte di A , e quindi é il massimo elemento di A . Inoltre, l'estremo inferiore di A é anche il minimo, ed é l'insieme puntiforme $\{s\}$. Però, se S é un insieme infinito, e A^* denota la famiglia di tutti i sottoinsiemi infiniti di S , contenenti s , il massimo di A^* é sempre S , ma A^* non ammette minimo, mentre l'insieme puntiforme $\{s\}$ é l'estremo inferiore: infatti, é chiaro che $\{s\}$ é un minorante; se B é un sottoinsieme di S , ed é un minorante per A^* , B non può contenere nessun elemento $y \neq s$, altrimenti non sarebbe *minore* di $S \setminus \{y\}$, che invece fa parte di A^* . Dunque, un eventuale minorante per A^* non può contenere altri punti che s . Questo prova che $\{s\}$ é il massimo dei minoranti, e anche che A^* non ha minimo, in quanto l'estremo inferiore non é un elemento di A^* .

Per quanto riguarda l'ordinamento usuale su \mathbb{R} , un teorema molto importante, legato alla cosiddetta *completezza* di \mathbb{R} , assicura l'esistenza di *inf* e *sup*, per tutti gli insiemi limitati. Non riportiamo la dimostrazione: la validità di tale teorema *confina* con l'assiomatica stessa dei numeri reali.

Teorema 1.4 *Sia $A \subset \mathbb{R}$ un sottoinsieme non vuoto, limitato superiormente. Allora esiste l'estremo superiore di A , in \mathbb{R} . Analogamente, se A é limitato inferiormente, esiste l'estremo inferiore.*

Aniché dimostrare questo teorema, diamo un procedimento *tecnico* per verificare, quando occorra, che un certo numero reale x é estremo superiore, o inferiore, per un insieme A .

Teorema 1.5 *Sia $A \subset \mathbb{R}$ un sottoinsieme non vuoto, limitato superiormente, e sia s un maggiorante per A . Le seguenti condizioni sono equivalenti:*

1) $s = \sup A$.

2) per ogni reale $\varepsilon > 0$ esiste un elemento $a \in A$ tale che $a > s - \varepsilon$.

Dimostrazione. Supponiamo $s = \sup A$. Allora, s é il minimo dei maggioranti. Questo vuol dire che $s - \varepsilon$ non é piu' un maggiorante, quale che sia $\varepsilon > 0$, e dunque deve esistere qualche elemento di A che sia maggiore di $s - \varepsilon$.

Per dimostrare il viceversa, si puo' fare lo stesso ragionamento: se é vero che $s - \varepsilon$ non é maggiorante di A , qualunque sia $\varepsilon > 0$, il maggiorante piu' piccolo dev'essere s . \square

Ovviamente, c'è anche una caratterizzazione simile per l'estremo inferiore. Di questa, naturalmente, non diamo la dimostrazione.

Teorema 1.6 Sia $A \subset \mathbb{R}$ un sottoinsieme non vuoto, limitato inferiormente, e sia i un minorante per A . Le seguenti condizioni sono equivalenti:

1) $i = \inf A$.

2) per ogni reale $\varepsilon > 0$ esiste un elemento $a \in A$ tale che $a < i + \varepsilon$.

Un esempio puo' essere utile. Sia $E = \{x \in \mathbb{R} : |x| > 2\}$, e sia $A = \{\log(x^2 + 1) : x \in E\}$. Trovare l'estremo inferiore di A .

Intanto, osserviamo che $x^2 + 1 > 5$ per ogni $x \in E$. Dunque, $\log x > \log 5$ per ogni $x \in E$, e questo vuol dire che A é limitato inferiormente, e $\log 5$ é un suo minorante. Proviamo ora che $\log 5$ é proprio l'inf di A .

Fissato $\varepsilon > 0$, dobbiamo trovare un elemento $x \in E$ tale che $\log(x^2 + 1) < \log 5 + \varepsilon$. scriviamo $\varepsilon = \log(e^\varepsilon)$, cosi' $\log 5 + \varepsilon = \log(5e^\varepsilon)$. Dunque, cerchiamo $x \in E$ tale che

$$\log(x^2 + 1) < \log(5e^\varepsilon).$$

Ovviamente, questa relazione é verificata se $x^2 + 1 = 5e^{\varepsilon/2}$, ossia ad esempio $x = \sqrt{5e^{\varepsilon/2} - 1}$; inoltre, per tale valore di x , é chiaramente $x^2 + 1 > 5$, e quindi $x > 2$. Pertanto, la verifica é completa.

Passiamo ora alle relazioni di equivalenza, e alle loro varie applicazioni.

Definizione 1.7 Una relazione $R \subset A \times A$ è un' *equivalenza* se

- e1) $(x, x) \in R \quad \forall x \in A$; (proprietà *riflessiva*)
- e2) $(x, y) \in R \Rightarrow (y, x) \in R$; (proprietà *simmetrica*)
- e3) $(x, y) \in R$ e $(y, z) \in R \Rightarrow (x, z) \in R$ (proprietà *transitiva*).

Si noti la somiglianza di tali proprietà con le o1),o2),o3): soltanto l'antisimmetrica qui viene sostituita dalla simmetrica, ma si ottiene un concetto completamente diverso. Vediamo degli esempi.

Esempio E1. Sia $A = \mathbb{R}$, e poniamo: $(x, y) \in R$ se e solo se $|x| = |y|$.

Qui, è chiaro che due numeri reali sono "equivalenti" (secondo questa relazione) se e solo se sono uguali, oppure differiscono solo per il segno.

Esempio E2. Sia $A = \mathbb{R} \setminus \{0\}$, e poniamo: $(x, y) \in R$ se e solo se $xy > 0$. E' facile vedere che due elementi x e y sono "equivalenti" se hanno lo stesso segno (per questo abbiamo escluso lo 0).

Esempio E3. Sia $A = \mathbb{R}^2$. Poniamo $((x, y), (u, v)) \in R$ se e solo se $x + y = u + v$.

E' ormai abbastanza chiaro quante equivalenze si possono definire, tutte più o meno interessanti. D'ora in poi, ometteremo il riferimento a R , dicendo semplicemente che x e y sono *equivalenti* (se $(x, y) \in R$), e scriveremo: $x \approx y$.

A proposito di relazioni di equivalenza, dobbiamo ora precisare alcuni fatti: intanto, quando si ha una relazione di equivalenza R su un insieme A , ad ogni elemento $x \in A$ si associa una *classe di equivalenza*, cioè l'insieme di tutti gli elementi $y \in A$ che sono equivalenti ad x . La classe di equivalenza di x viene denotata con $[x]$, e non è mai vuota (almeno x è equivalente a sè stesso). Inoltre, se x e y sono due elementi di A , $[x]$ e $[y]$ sono coincidenti, oppure disgiunte: sono coincidenti, se $x \approx y$; disgiunte, altrimenti (infatti, per la e3, se z fosse un qualunque elemento di A , appartenente sia a $[x]$ sia a $[y]$, si avrebbe $x \approx z \approx y$, e quindi $[x] = [z] = [y]$).

Di conseguenza, ogni relazione di equivalenza in A individua una *partizione* di A : le varie classi di equivalenza sono infatti a due a due disgiunte, e la loro unione è tutto A (nel senso che ogni elemento x di A appartiene a qualche classe di equivalenza, cioè a

$[x]$). Da un altro punto di vista, potremmo considerare ciascuna classe di equivalenza come un unico elemento, come ad "incollare" tra loro i punti di una stessa classe, e quindi l'intero insieme A si trova come "affettato", ogni "fetta" essendo una classe di equivalenza. Così, se torniamo all'esempio E1), l'insieme \mathbb{R} viene come "ripiegato" su sè stesso, facendo ruotare il semiasse negativo attorno a 0, fino a sovrapporlo al semiasse positivo: x viene "incollato" a $-x$, per ciascun x reale, e quindi le classi di equivalenza sono tutti gli insiemi del tipo $\{x, -x\}$. Una situazione in certo senso duale si ha nell'esempio E2: qui, le classi di equivalenza sono solo due: la semiretta $]-\infty, 0[$ e la semiretta $]0, +\infty[$. Nell'esempio E3, le "fette" in cui il piano \mathbb{R}^2 viene suddiviso sono tutte le rette di equazione: $x + y = r$, al variare di r in \mathbb{R} .

Al di là della visione geometrica più o meno suggestiva, ciò che risulta dalla suddivisione di A in tante "fette", e dall'identificazione di tutti gli elementi di una singola "fetta", viene detto il *quoziente* di A , *modulo* la relazione di equivalenza \approx , e si denota con A / \approx : in termini rigorosi, A / \approx è l'*insieme* di tutte le classi di equivalenza $[x]$, con $x \in A$.

Un ultimo, importante esempio: in \mathbb{R} , poniamo $x \approx y$ se $x - y \in \mathbb{Z}$: in altre parole, si ha $[x] = \{x, x - 1, x - 2, \dots, x - n, \dots, x + 1, x + 2, x + 3, \dots, x + n, \dots\}$, per ogni $x \in \mathbb{R}$. Cosa sarà allora il *quoziente*? Basta osservare che in ogni classe di equivalenza c'è sempre un numero in $[0, 1]$, con l'accortezza di considerare 0 e 1 *equivalenti* tra loro: così,

$$\mathbb{R} / \approx = \{[x] : 0 < x < 1\} \cup [0]$$

(Notiamo che formalmente $[0] = \mathbb{Z}$). Dunque, identificando con x ($x \in]0, 1[$) tutti gli elementi di $[x]$, e *incollando* 0 a 1, il quoziente cercato si può assimilare a un *cerchio*: il cerchio virtualmente percorso da qualcuno che, partendo da 0, tocca tutti i punti di $]0, 1[$ e poi si ritrova in 0. Questa similitudine diverrà più concreta in seguito.

Definizione 1.8 Dati due insiemi (non vuoti) A e B , una *applicazione* di A in B è un sottoinsieme G di $A \times B$, tale che:

$$\text{a) } \forall a \in A \exists ! b \in B \text{ tale che } (a, b) \in G.$$

Di solito, le applicazioni si denotano con scritture del tipo $f : A \rightarrow B$, intendendo che f è quel *meccanismo* che permette di individuare, per ciascun elemento $a \in A$, quell'unico elemento $b \in B$ tale che $(a, b) \in G$: si scrive allora $b = f(a)$, e si usa confondere la *legge*

f con l'insieme G , dicendo che l'applicazione è f (sotto questo punto di vista, G viene descritto semplicemente come il *grafico* di f).

Di solito, la legge f si descrive attraverso un'espressione, del tipo $f(x) = x^2$, e questo può anche esser sufficiente, per individuare completamente l'applicazione, ma bisogna a volte dare delle specificazioni particolari, o sull'insieme A , o su certi valori particolari di $f(x)$. Ad esempio, la legge $f(x) = \frac{1}{x}$ non è definita per tutti gli $x \in \mathbb{R}$, e quindi, se non si specifica altro, si deve intendere che, in tal caso, sia $A = \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Ma si potrebbe definire *di ufficio* il valore $f(0)$, ad esempio ponendo $f(0) = 0$. In tal caso, si preferisce scrivere la legge di f in questo modo:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x}, & \text{per } x \neq 0 \\ 0, & \text{per } x = 0 \end{cases}$$

Un altro esempio, piuttosto importante, è dato dalle seguente funzione φ , definita anch'essa su tutto \mathbb{R} (e naturalmente a valori in \mathbb{R}) :

$$\phi(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x}, & \text{per } x \neq 0 \\ 1, & \text{per } x = 0 \end{cases}$$

Come si può facilmente capire, la nostra definizione di *applicazione* non fa molta distinzione tra la *legge* f e il *grafico* G : e in genere il grafico è una curva del piano: in fondo riportiamo i grafici delle due funzioni $f(x) = \frac{1}{x}$, e $\phi(x) = \frac{\sin x}{x}$

Questo però non vuol dire che ogni curva del piano può essere interpretata come il grafico di qualche funzione: il cerchio di equazione $x^2 + y^2 = 1$ può essere rappresentato solo in parte, ad esempio ponendo $y = f(x) = \sqrt{1 - x^2}$, con $x \in [-1, 1]$.

Altre importanti applicazioni sono le *successioni*: una successione in un insieme A è una generica applicazione $\phi : \mathbb{N} \rightarrow A$. Di solito, data una tale successione, si preferisce scrivere a_n al posto di $\phi(n)$, e si usa la scrittura (a_n) per rappresentare l'intera successione. Ad esempio, $(\frac{1}{n})$ è la successione che, ad ogni intero positivo n , associa il numero reale (o, se si preferisce, razionale) $\frac{1}{n}$.

A volte, le successioni vengono anche definite per *ricorrenza*, ossia si assegna il valore a_0 , e poi si dà una "legge di passaggio" (detta appunto "legge di ricorrenza") da a_n ad a_{n+1} :

in questo modo, nota a_0 , la legge di ricorrenza ci permette di ricavare a_1 ; da questa si ricava poi a_2 , e così via, all'infinito.

Possiamo porre ad esempio: $a_0 = 1, a_{n+1} = \frac{a_n}{2}$. Otteniamo così la successione di numeri: $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \dots$, e in generale $a_n = \frac{1}{2^n}$.

Ancora, si potrebbe porre: $a_0=1$, e dare la legge: $a_{n+1} = a_n + 1/(n+1)$. Si ottiene così la seguente successione di valori: $1, 1+1, 1+1+1/2, 1+1+1/2+1/3$, etc. In genere, quando una successione è definita per ricorrenza, non si può pretendere di trovare un'espressione elementare del termine generale a_n . E infatti, nell'ultimo esempio che abbiamo dato, non siamo arrivati a un'espressione per a_n .

Un altro esempio interessante è la successione dei *numeri di Fibonacci*; i termini sono i seguenti:

$$1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, \dots$$

ognuno dei quali risultando dalla somma dei due precedenti. Dunque, per definire esaurientemente tale successione occorrono *due* punti iniziali: $a_0 = 1$ e $a_1 = 1$, e poi la legge di ricorrenza:

$$a_{n+1} = a_n + a_{n-1},$$

valida per $n > 0$.

Passiamo ora ad alcuni sviluppi dei concetti di applicazione iniettiva, suriettiva, bi-iettiva, che ci permetteranno di capire meglio alcune relazioni tra gli insiemi numerici fondamentali per il nostro corso.

Definizione 1.9 Data un'applicazione $h : A \rightarrow B$, si dice che h è *iniettiva* se sussiste la seguente implicazione:

$$h(a_1) = h(a_2) \Rightarrow a_1 = a_2.$$

In altre parole, se h è iniettiva, non è possibile che a due distinti elementi di A corrisponda lo stesso elemento di B : ciò esclude, ad esempio, funzioni come $\phi(x) = \sin x$, oppure $g(x) = x^2$, almeno se pensate definite su tutto \mathbb{R} . Invece, sono iniettive le funzioni $h(x) = x^3$, oppure $\psi(x) = e^x$.

Diciamo invece che h è *suriettiva* se ogni elemento $b \in B$ è immagine di qualche elemento $a \in A$, cioè se per ogni $b \in B$ esiste $a \in A$ tale che $h(a) = b$. Chiaramente, la funzione $\phi(x) = \sin x$ non è suriettiva, se si vuole $B = \mathbb{R}$, ma lo diventa, se si restringe B a $[-1,1]$. E questo si può fare per ogni funzione: basta sostituire B con un suo sottoinsieme, cioè il *codominio* di h ; tale insieme, denotato con $h(A)$, si descrive così:

$$h(A) = \{h(a) : a \in A\} = \{b \in B : b = h(a) \text{ per qualche } a \in A\}.$$

Diremo infine che $h : A \rightarrow B$ è *biiettiva*, quando essa è sia iniettiva che suriettiva. Se h è biiettiva, si può dire che l'equazione $h(x) = b$ ammette una e una sola soluzione, per ciascun $b \in B$. Tale soluzione viene di solito denotata con $h^{-1}(b)$: in effetti, questo porta proprio a definire un'altra applicazione, denotata con $h^{-1} : B \rightarrow A$, detta l'*inversa* di h . Di conseguenza, si suole anche chiamare *invertibili* tutte le funzioni biettive. Notiamo che si ha, allora :

$$h^{-1}(h(a)) = a, \text{ e anche } h(h^{-1}(b)) = b$$

per ogni $a \in A$ e ogni $b \in B$. Evidentemente, anche h^{-1} è biiettiva, e la sua inversa è h .

A titolo di esempio, sia $A = [0, +\infty[$, $B = [1, +\infty[$, e $h : A \rightarrow B$ sia definita da:

$$h(x) = \sqrt{x^2 + 1}.$$

E' facile controllare che tale funzione è biiettiva, e risulta: $h^{-1}(y) = \sqrt{y^2 - 1}$, per ogni $y \in B$.

Ma non si pensi che sia sempre facile descrivere l'inversa di una funzione biiettiva; a volte bisogna contentarsi di saperne qualcosa, almeno quanto basta per poterci lavorare: si pensi alla funzione $k(x) = e^x + x$, definita su $A = \mathbb{R}$, e a valori in $B = \mathbb{R}$. Si vede subito che, se $x_1 < x_2$, allora $k(x_1) < k(x_2)$, dunque k è iniettiva. La suriettività è un po' più difficile: ce ne possiamo convincere, considerando che $k(x)$ assume valori negativi, sempre più piccoli, man mano che x decresce a $-\infty$, e viceversa valori sempre più grandi, man mano che x cresce verso $+\infty$. Bene; avendo concluso che k è invertibile, ci possiamo chiedere: che funzione è k^{-1} ? E la risposta è: *Chi lo sa?* Non esiste una rappresentazione di tale inversa in termini conosciuti, e quindi k^{-1} rimane **non meglio identificata**.

Definizione 1.10 Attraverso il concetto di applicazione, si possono stabilire alcune importanti relazioni tra gli insiemi. Ad esempio, una *definizione* alquanto curiosa è quella di *insieme infinito*: noi siamo abituati a considerare questa nozione come intuitiva, ma in Matematica non ci si accontenta di questo, e allora si dice che un insieme A è *infinito* se si può trovare un insieme $B \subset A$, con $\emptyset \neq B \neq A$, in modo che esista un'applicazione biiettiva $\phi : B \rightarrow A$.

Per farsi un'idea della situazione, si pensi ad $A = \mathbb{N}$, e $B = \mathbb{P}$, insieme dei numeri pari non negativi: una biiezione $\phi : \mathbb{P} \rightarrow \mathbb{N}$ è ad esempio data da $\phi(p) = \frac{p}{2}$, $\forall p \in \mathbb{P}$.

Ancora, dati due insiemi A e B (finiti o infiniti), si dice che A è *più potente* di B se esiste un'applicazione iniettiva $J : B \rightarrow A$. (In parole povere, *più potente* significa *con un maggior numero di elementi*, intendendo anche *maggiore o uguale*). Questa definizione sembra ovvia, se gli insiemi sono finiti, ma diventa interessante se gli insiemi sono infiniti. Si dice poi che i due insiemi sono *equipotenti* (ossia che hanno lo stesso "numero di elementi"), se esiste una biiezione $\phi : A \rightarrow B$. Un fatto importante è espresso dal seguente teorema, dovuto a Bernstein. Benché l'enunciato sembri esprimere un fatto ovvio, la dimostrazione rigorosa, basata sulle definizioni precedenti, non è affatto facile, e noi la ometteremo.

Teorema 1.11 *Dati due insiemi A e B , se A è più potente di B , e B è più potente di A , allora A e B sono equipotenti.*

In definitiva, questa nozione di *potenza* può essere usata per stabilire un ordinamento tra insiemi, e inoltre il concetto di equipotenza può indurre una relazione di equivalenza: diciamo che due insiemi sono *equivalenti* riguardo alla potenza se esiste una biiezione dall'uno all'altro. Le *classi di equivalenza* sono le cosiddette *cardinalità*: in altre parole, *cardinalità* di un insieme A non è altro che il *numero* dei suoi elementi, intendendo per *numero* il concetto ben noto, nel caso che l'insieme A sia finito, mentre altrimenti il *numero* rappresenta la classe di tutti quegli insiemi che sono equivalenti ad A , nel senso che esiste una biiezione tra loro ed A . Di solito, la cardinalità di un insieme A è denotata con $\#(A)$. A questo punto potrebbe sorgere un dubbio: finché si lavora con insiemi finiti, tutto sommato non si è fatto nulla di nuovo, anzi si è reso più complicato un concetto così

”naturale” come quello di numero. Dunque questo discorso dice qualcosa di nuovo solo nel caso di insiemi infiniti. Tuttavia, già la definizione di insieme infinito ci fa capire che è ”molto facile” costruire biiezioni tra insiemi infiniti, anche tra un insieme come \mathbb{N} e una sua ”metà”: e se ”tutti” gli insiemi infiniti fossero equipotenti? Avremmo fatto un bel buco nell’acqua! In realtà, le cose non stanno così, e in effetti c’è un modo molto semplice per costruire, dato un insieme infinito qualunque A , un insieme B che è più potente di A , e non equipotente ad A : basta scegliere $B = \wp(A)$, cioè l’insieme di tutti i sottoinsiemi di A . Nel prossimo teorema, di cui riportiamo la dimostrazione solo per maggiore chiarezza, si evidenzia questo fatto.

Teorema 1.12 *Dato un qualunque insieme A , esiste un’applicazione iniettiva $J : A \rightarrow \wp(A)$, ma i due insiemi non sono equipotenti.*

Dimostrazione. Ponendo $J(x) = \{x\}$, per ogni $x \in A$, è evidente che J è un’applicazione iniettiva, di A in $\wp(A)$. Proviamo ora che non può esistere alcuna biiezione $\phi : A \rightarrow \wp(A)$. Infatti, se una tale biiezione ϕ esistesse, potremmo considerare il seguente sottoinsieme $H \subset A$:

$$H = \{x \in A : x \in \phi(x)\}.$$

Possiamo vedere facilmente che H è non vuoto: infatti, siccome ϕ è biiettiva, al sottoinsieme A di A corrisponde un elemento $x \in A$ tale che $\phi(x) = A$, e allora $x \in \phi(x)$. Anche il complementare H^c è non vuoto: siccome ϕ per ipotesi è suriettiva, esiste anche un $y \in A$ tale che $\phi(y) = \emptyset$, e allora chiaramente non può essere $y \in \phi(y)$. Ora, veniamo all’assurdo. Siccome H^c è un sottoinsieme di A , e ϕ è biiettiva, c’è sicuramente un elemento $a \in A$ tale che $\phi(a) = H^c$. Ora, necessariamente dev’essere $a \in H$, oppure $a \in H^c$. Ma, se $a \in H$, si deve avere $a \in \phi(a)$, per la definizione stessa di H . Dunque, se $a \in H$, si deve avere $a \in \phi(a) = H^c$, impossibile. Resta l’alternativa $a \in H^c$: ma, per definizione di H , se $a \in H^c$, ossia $a \notin H$, non può essere $a \in \phi(a) = H^c$! Dunque, anche se $a \in H^c$, arriviamo ad una contraddizione. In conclusione, a non può stare nè in H , nè in H^c , e questo è assurdo.

Le considerazioni finora svolte diventano un po' più concrete, quando si comincia a lavorare con gli insiemi infiniti che conosciamo meglio: \mathbb{N} , \mathbb{Z} , \mathbb{Q} , \mathbb{R} : si può dimostrare che \mathbb{N} , \mathbb{Z} , e \mathbb{Q} hanno la stessa cardinalità, e questa è la *più piccola* tra le cardinalità infinite. Invece, \mathbb{R} ha cardinalità strettamente maggiore: infatti, \mathbb{R} ha la stessa cardinalità di $\wp(\mathbb{N})$. Questo fatto può essere spiegato, ripensando alla rappresentazione *binaria* dei numeri reali: ossia, ogni numero reale può essere espresso come una successione infinita di *zeri* e *uni*, cioè come un elemento di $\{0, 1\}^{\mathbb{N}}$ (torneremo più tardi su questo punto). Ma anche ogni elemento di $\wp(\mathbb{N})$ può essere espresso come un elemento di $\{0, 1\}^{\mathbb{N}}$: infatti, se $A \subset \mathbb{N}$, possiamo "scorrere" gli elementi n di \mathbb{N} , segnando *uno* se $n \in A$, *zero* se $n \notin A$. Alla fine, avremo una sequenza di *zeri* e *uni*, che caratterizza perfettamente l'insieme A : ad esempio, la sequenza (0111001101001...) caratterizza l'insieme $\{1, 2, 3, 6, 7, 9, 12, \dots\}$, avendo iniziato a scorrere da 0 (che non appartiene ad A , perchè il primo elemento della sequenza è 0), e poi via via tutti gli altri.

1.2 Varietà di insiemi in \mathbb{R}

In questa sezione, ci interesseremo principalmente di stabilire legami intercorrenti tra vari sottinsiemi di \mathbb{R} , mostrando come molti di essi siano più *grossi* di quel che sembra, e che altri sono più *piccoli* di quanto si possa credere.

Inizieremo, mostrando che *tutti* gli intervalli hanno la stessa cardinalità.

Esempio 2.1 Sia $[a, b]$ un generico intervallo chiuso di \mathbb{R} , e mostriamo che esiste una biiezione $\phi : [0, 1] \rightarrow [a, b]$. Basta porre infatti: $\phi(t) = a + t(b - a)$. La legge è molto semplice, e quindi lasciamo al lettore la verifica della biiettività, e anche la ricerca dell'inversa, $\phi^{-1} : [a, b] \rightarrow [0, 1]$. Grazie a questo fatto, si vede facilmente che due *qualsiasi* intervalli chiusi, $[a, b]$ e $[u, v]$, sono equipotenti.

Esempio 2.2 Sia $]a, b[$ un generico intervallo aperto: allora esiste una biiezione tra $]a, b[$ e $]0, 1[$ (quale?). Ne consegue che due qualsiasi intervalli aperti sono equipotenti.

Ora, è abbastanza ragionevole aspettarsi che un intervallo chiuso $[a, b]$ sia equipotente con il corrispondente intervallo aperto $]a, b[$. Tuttavia, invece di mostrare direttamente una

biiezione, ci limitiamo a osservare che $]a, b[$ ha senz'altro cardinalità minore o uguale a $[a, b]$, ma che anche $[a, b]$ ha cardinalità minore o uguale a $]a - 1, b + 1[$ (che lo contiene); ma la cardinalità di quest'ultimo è la stessa di $]a, b[$ (perchè sono entrambi intervalli aperti), e quindi abbiamo $\#([a, b]) \geq \#(]a, b[) = \#(]a - 1, b + 1[) \geq \#([a, b])$. (Ricordiamo che la scrittura $\#(A)$ rappresenta la *cardinalità* dell'insieme A). Poichè questa relazione d'ordine è antisimmetrica (teorema di Bernstein), le disuguaglianze sono tutte uguaglianze.

Esempio 2.3 A questo punto è abbastanza evidente che *tutti* gli intervalli (aperti, semi-aperti, chiusi) hanno la stessa cardinalità (purchè *non-degeneri*). Possiamo anche far vedere che essi hanno la stessa cardinalità di \mathbb{R} , tramite un'altra interessante funzione biiettiva. Definiamo $\psi : \mathbb{R} \rightarrow]-1, 1[$ in questo modo: $\psi(x) = \frac{x|x|}{1+x^2}$. Mostriamo che ψ è iniettiva: supponendo $x \leq 0$, si ha $\psi(x) = -\frac{x^2}{1+x^2} = \frac{1}{1+x^2} - 1$: se ne deduce facilmente che ψ è negativa e *crescente* per $x < 0$, e nulla per $x = 0$. Invece, per $x > 0$ si ha

$\psi(x) = \frac{x^2}{1+x^2} = 1 - \frac{1}{1+x^2}$, da cui si vede che ψ è positiva e ancora crescente. Questo basta per dedurre l'iniettività.

Proviamo ora che ψ è suriettiva. Sia $y \in]-1, 1[$, e supponiamo $y \geq 0$: troveremo un $x \geq 0$ tale che $\psi(x) = y$. Dato che dev'essere $x \geq 0$, l'equazione da risolvere è:

$$\frac{x^2}{1+x^2} = y, \text{ da cui facilmente si trova } x^2 = \frac{y}{1-y}, \text{ e l'unica soluzione positiva è } x = \sqrt{\frac{y}{1-y}}.$$

Se invece scegliamo $y < 0$, scriviamo $y = -|y|$, e poniamo $x^* = -\sqrt{\frac{|y|}{1-|y|}}$ (stiamo usando il fatto che ψ è *dispari* cioè $\psi(-x) = -\psi(x)$).

Dunque, tutti gli intervalli in \mathbb{R} hanno la stessa cardinalità, e questa cardinalità coincide con quella di \mathbb{R} . Ma ci sono molti altri sottoinsiemi di \mathbb{R} , che hanno la stessa cardinalità: ad esempio, l'insieme degli *irrazionali*, $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. (perchè già \mathbb{Q} è *solo* numerabile, se anche $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ avesse potenza minore di \mathbb{R} , l'unione di questi due *non potrebbe* avere la cardinalità di \mathbb{R} : è un discorso un po' strano, ma per le cardinalità infinite la *somma* di due oggetti è soltanto il *più grande* dei due...). Ma vedremo ora un altro insieme, apparentemente *miserello*, ma in realtà potente come \mathbb{R} . (Non ci stiamo *lambiccando* con cose astruse, questo insieme ha caratteristiche che risultano molto importanti nella modellizzazione di numerosi fenomeni naturali).

1.2.1 L'insieme di Cantor

L'insieme che ora presentiamo è il *prototipo* di una categoria d'insiemi molto particolari, i cosiddetti *frattali*. Tanto per darne una descrizione intuitiva, possiamo dire che un insieme *frattale* (non solo in \mathbb{R} , ma anche nel piano, \mathbb{R}^2 , o in altri ambienti ancora più generali) ha questa caratteristica: è possibile suddividerlo in un numero finito di parti, ciascuna delle quali è perfettamente *simile* all'insieme iniziale, cioè può essere a sua volta suddivisa allo stesso modo e ciascuna ulteriore *frazione* è perfettamente *simile* a *tutto* l'insieme iniziale, e così via all'infinito... In altre parole, se *ingrandiamo* una qualunque porzione di un insieme frattale, questa si presenta perfettamente identica all'insieme totale.

Ma veniamo all'insieme di Cantor: questo insieme sarà denotato con C , ed è ottenuto intersecando una successione decrescente di particolari sottoinsiemi C_n di $[0,1]$.

Per definire i C_n , conviene anche utilizzare i loro complementari, che denoteremo con U_n : dunque, $[0,1] \setminus C_n = U_n$, per ogni n .

Poniamo ora: $U_1 =]\frac{1}{3}, \frac{2}{3}[$, e quindi $C_1 = [0, \frac{1}{3}] \cup [\frac{2}{3}, 1]$: in altre parole, C_1 è ottenuto dividendo $[0,1]$ in 3 parti uguali, e *togliendo* quella di mezzo. Ora, C_1 è fatto di due *pezzi*, ciascuno dei quali è un intervallo chiuso, di lunghezza $1/3$. Per determinare C_2 , operiamo allo stesso modo in ciascuno dei due *pezzi* di C_1 , e otterremo stavolta 4 *pezzi* ciascuno di lunghezza $\frac{1}{9}$: all'intervallo $[0,1]$ abbiamo tolto $U_2 =]\frac{1}{3}, \frac{2}{3}[\cup]\frac{1}{9}, \frac{2}{9}[\cup]\frac{7}{9}, \frac{8}{9}[$. I quattro pezzi residui, la cui unione costituisce C_2 , hanno lunghezza complessiva pari a $\frac{4}{9}$.

Procediamo ancora, dividendo in 3 parti ciascuno dei 4 intervalli di C_2 , e togliendo sempre quella di mezzo: dunque, C_3 sarà unione di 8 pezzi, ciascuno di lunghezza $\frac{1}{27}$, e quindi la lunghezza complessiva di C_3 è $\frac{8}{27} = (\frac{2}{3})^3$.

In tal modo, si costruisce la successione decrescente (C_n) , la cui *intersezione* è il nostro insieme di Cantor, C . Attenzione! C non è vuoto! Anche se la lunghezza dei C_n è sempre più piccola, fino a tendere a 0 (e quindi si può giustamente dire che C ha misura nulla), l'insieme di Cantor contiene *molte* punti: intanto, contiene gli *estremi* degli intervalli che costituiscono i vari C_n (infatti, dato che si toglie la *parte di mezzo*, gli estremi rimangono...).

Inoltre, C è costituito da tanti punti quanti sono i numeri reali! In altre parole, C è in corrispondenza biunivoca con $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$. Per vedere questa cosa, bisogna dare una descrizione

diversa di C , che può anche servire per capire meglio com'è fatto questo insieme.

Costruzione diversa

Sappiamo già che possiamo rappresentare i numeri di $[0, 1]$ attraverso successioni di 0 e 1 (rappresentazione *binaria*: è quella con cui operano i computers). Ma si può anche usare la rappresentazione *ternaria*, rappresentando cioè ogni numero in $[0, 1]$ con una successione di 0, 1, 2. Si procede come segue: denotiamo con x un generico numero reale, compreso fra 0 e 1. Se $x \in [0, \frac{1}{3}]$, la prima cifra sia 0; se $x \in]\frac{1}{3}, \frac{2}{3}]$, la prima cifra sia 1; altrimenti, la prima cifra sia 2. dunque, se la prima cifra di x è 1, $x \in U_1 =]\frac{1}{3}, \frac{2}{3}]$, altrimenti $x \in C_1$.

Stabilita la prima cifra, abbiamo automaticamente individuato un intervallo di ampiezza $\frac{1}{3}$, al quale x appartiene certamente: o $[\frac{1}{3}, \frac{2}{3}]$, o $[0, \frac{1}{3}]$, o $[\frac{2}{3}, 1]$; sia $[a, b]$ tale intervallo. Per definire la seconda cifra, dividiamo $[a, b]$ in tre parti uguali, e vediamo dove cade x : se esso sta in quello di sinistra, la seconda cifra sarà 1, se sta nella parte centrale, la seconda cifra sarà 1, altrimenti sarà 2. Ancora, se x sta in C , nè la prima, nè la seconda cifra possono essere 1.

Andando avanti con questo sistema, si capisce come costruire la successione di 0, 1 e 2 che costituisce la rappresentazione ternaria di x .

Facciamo un esempio: supponiamo che sia $x = 0,259695481\dots$. Essendo $x < \frac{1}{3}$, la prima cifra della rappresentazione ternaria è 0. Per trovare la seconda cifra, dobbiamo ora capire se x appartiene a $[0, \frac{1}{9}]$, $[\frac{1}{9}, \frac{2}{9}]$, o $[\frac{2}{9}, \frac{1}{3}]$. Essendo $\frac{2}{9} = 0,2222 < x$, è chiaro che la seconda cifra di x è 2. Per trovare la terza cifra, dividiamo in tre l'intervallo $[\frac{2}{9}, \frac{1}{3}]$, e vediamo a quale dei tre appartiene x : poichè $\frac{7}{27} = 0,259259259\dots$ e $\frac{8}{27} = 0,296296296\dots$, è chiaro che x sta nell'intervallo mediano, e quindi la terza cifra è 1; ma è facile capire, confrontando x con $\frac{7}{27}$, che la quarta cifra sarà 0, e anche la quinta; ma dopo un po', cambierà di nuovo... Allora la rappresentazione ternaria (approssimata) di x è: 02100...

Viceversa, supponiamo che la rappresentazione ternaria di x sia 1210102...

Allora

$$x = \frac{1}{3} + \frac{2}{9} + \frac{1}{27} + \frac{0}{81} + \frac{1}{243} + \frac{0}{729} + \frac{2}{2187} + \dots$$

(Basta pensarci un attimo!).

Ora, l'insieme di Cantor è esattamente l'insieme di quegli x la cui rappresentazione ternaria *non presenta alcun 1*. E viceversa, ogni sequenza di 0 e 2 individua un ben preciso punto di C : proprio questo spiega la corrispondenza biettiva che c'è tra C e $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$.

L'insieme di Cantor può essere descritto in maniera ancora diversa, introducendo proprio il macchinario dei frattali. Definiamo due applicazioni, f_1 e f_2 , da $[0,1]$ in $[0,1]$, come segue:

$$f_1(x) = \frac{x}{3}; \quad f_2(x) = \frac{x}{3} + \frac{2}{3}.$$

Come si può vedere, f_1 e f_2 sono iniettive, ma non suriettive: i due codomini sono disgiunti, e la loro unione dà, guarda caso, l'insieme C_1 . Se ora pensiamo $f_1 : C_1 \rightarrow [0,1]$, e $f_2 : C_1 \rightarrow [0,1]$ i due codomini sono ancora disgiunti, e la loro unione coincide con C_2 ... Dunque, partendo da un intervallo $J \subset [0,1]$, si ha $f_1(J) \cup f_2(J) \subsetneq J$. Sostituendo J con $J_1 = f_1(J) \cup f_2(J)$, si ha $f_1(J_1) \cup f_2(J_1) \subsetneq J_1$. Ponendo ora

$$J_2 = f_1(J_1) \cup f_2(J_1), \text{ si ha ancora } f_1(J_2) \cup f_2(J_2) \subsetneq J_2 \dots$$

La conclusione è fornita dal seguente teorema, dovuto a Hutchinson.

Teorema 1.13 *L'insieme di Cantor C è l'unico sottoinsieme chiuso non vuoto di $[0,1]$, per il quale si abbia:*

$$C = f_1(C) \cup f_2(C).$$

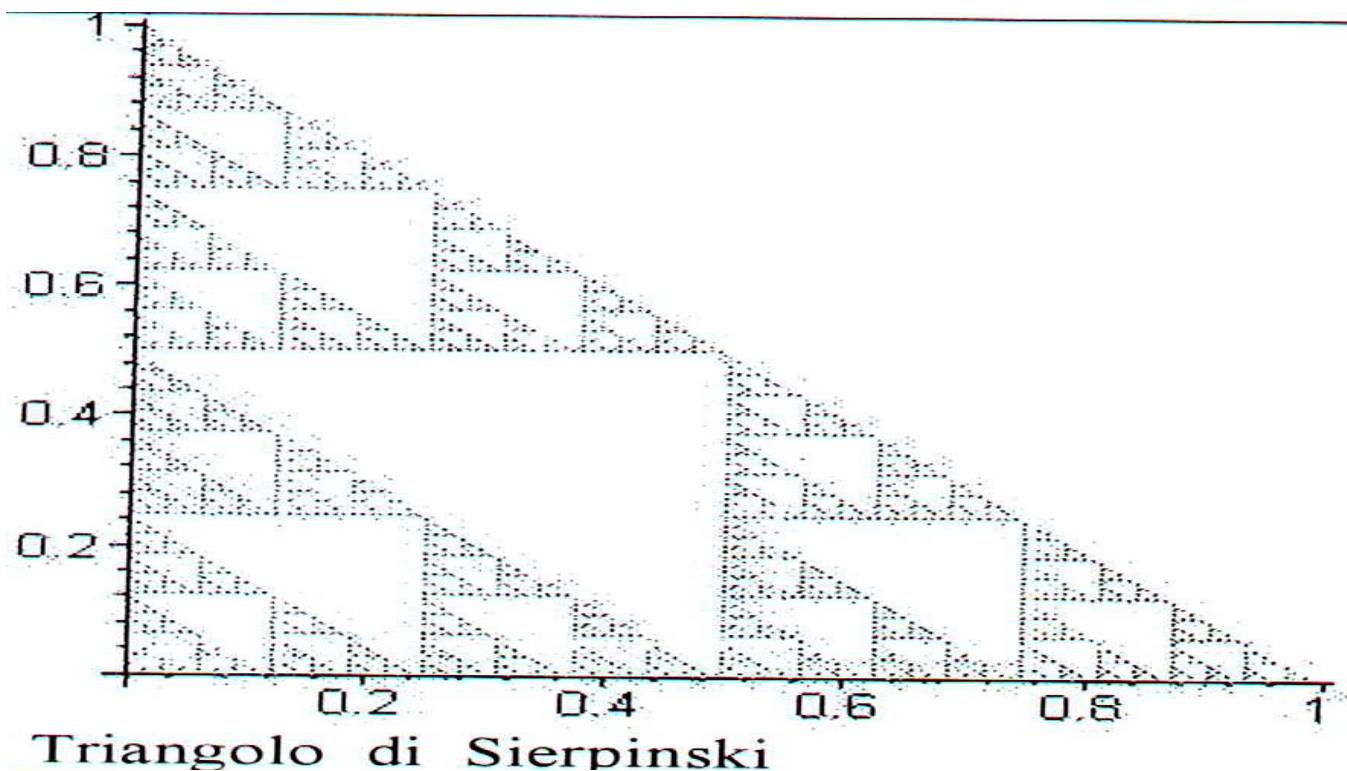
Non riportiamo la dimostrazione, ma precisiamo che, nell'enunciato del teorema precedente, la parola *chiuso* ha un significato ben preciso: non significa necessariamente che C sia un *intervallo* chiuso (non lo è, anzi da un certo punto di vista C è quanto di più *spappolato* si possa pensare, mentre un intervallo è un "tutt'uno"). Insieme *chiuso* qui significa che esso è il *complementare* di un insieme *aperto*, ossia di un insieme (di solito, anch'esso "spappolato"), che sia unione di intervalli aperti, (anche infiniti), a due a due disgiunti. Su questo argomento torneremo brevemente nel capitolo dei *limiti*, quando daremo cenni di *Topologia*.

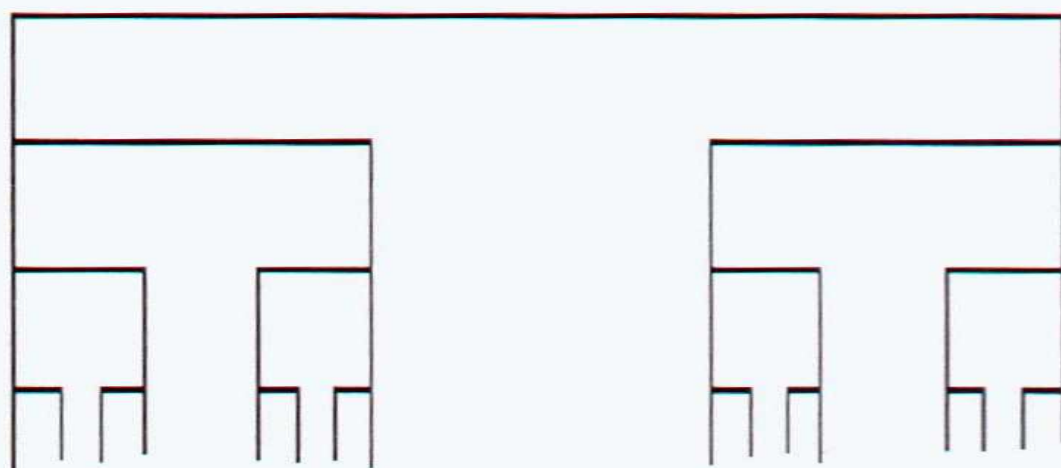
Come dicevamo, l'insieme di Cantor è solo un *prototipo* dei frattali.

Esempi più significativi si possono trovare in \mathbb{R}^2 , o meglio in $[0,1]^2$: scegliamo 3 funzioni,

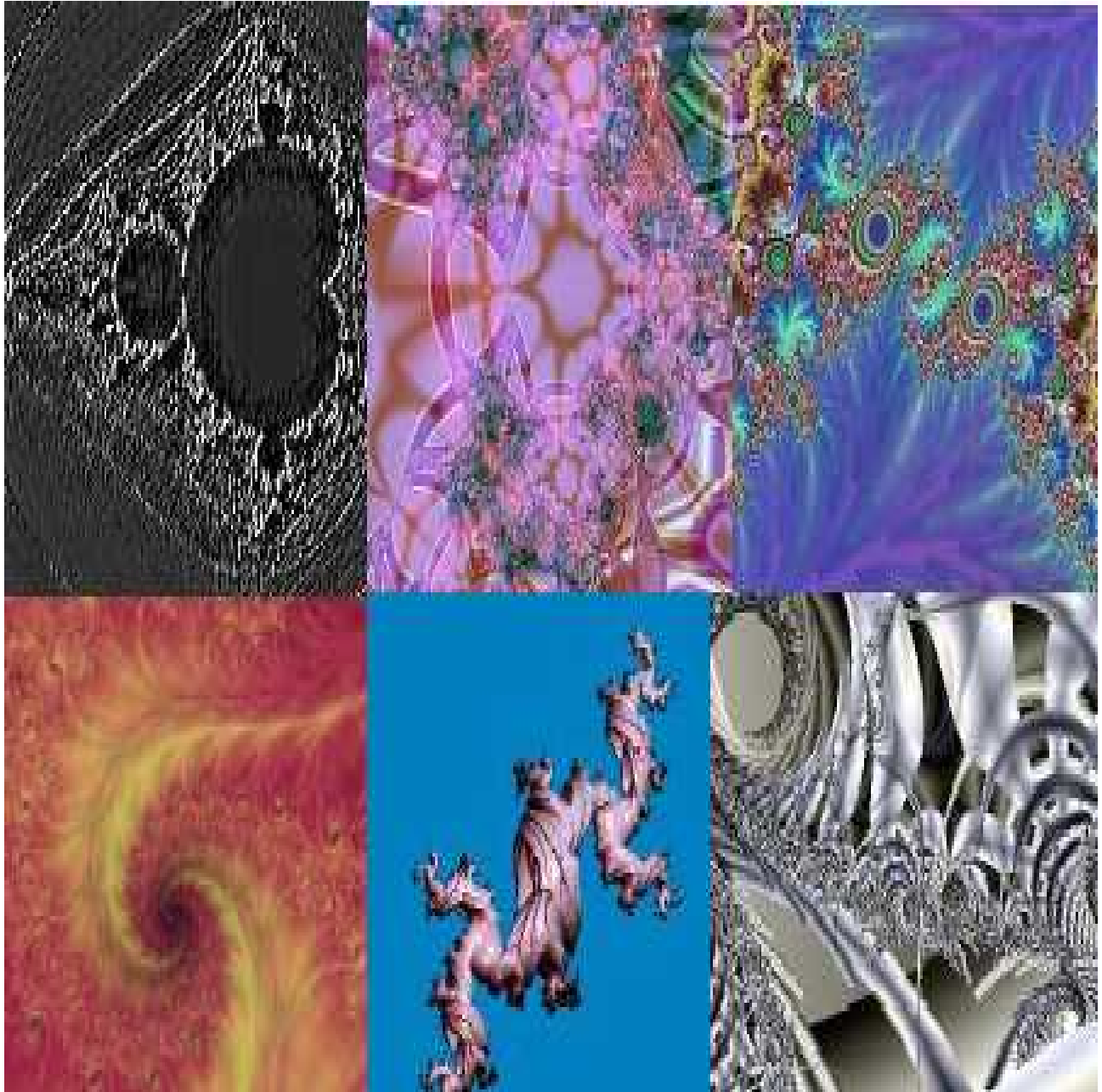
f_1, f_2, f_3 , di $[0, 1]^2$ in sé: $f_1(x, y) = (\frac{x}{2}, \frac{y}{2})$, $f_2(x, y) = (\frac{x}{2} + 0,5, \frac{y}{2})$, $f_3(x, y) = (\frac{x}{2}, \frac{y}{2} + 0,5)$.

Se partiamo da $J = [0, 1]^2$, e poniamo $J_1 = f_1(J) \cup f_2(J) \cup f_3(J)$, osserviamo che J_1 é strettamente contenuto in J : definendo poi J_2 come $f_1(J_1) \cup f_2(J_1) \cup f_3(J_1)$, otteniamo un insieme ancora piú piccolo. Continuando questo processo all'infinito, si arriverá ad un insieme frattale, detto *triangolo di Sierpinski*. Altri frattali sono nei grafici.





Insieme di Cantor: I tratti orizzontali corrispondono ai C_n . Scendendo lungo le colonne, si ritrova continuamente la stessa figura.



Capitolo 2

CALCOLO COMBINATORIO

2.1 Potenze e Disposizioni

Per quanto possa apparire strano a chi ne ha già sentito parlare, il Calcolo Combinatorio può essere introdotto in maniera molto naturale, tramite le applicazioni tra insiemi finiti.

Definizione 2.1 Siano A e B due insiemi finiti, poniamo $A = \{a_1, \dots, a_n\}$ e $B = \{b_1, \dots, b_m\}$. L'insieme di tutte le applicazioni $\phi : A \rightarrow B$ è denotato con B^A , e può essere concretamente descritto come il prodotto B^n , n essendo il numero di elementi di A .

Ogni applicazione siffatta ϕ può essere individuata perfettamente elencando n elementi di B , in un certo ordine, ed eventualmente anche con ripetizioni.

Ad esempio, se $A = \{1, 2, 3\}$, e $B = \{\alpha, \beta, \gamma, \delta\}$, l'elenco (α, β, δ) rappresenta quella funzione che associa α ad 1, β a 2, δ a 3; se avessimo scritto (β, δ, α) cambiando l'ordine, avremmo rappresentato un'altra funzione, cioè quella che associa β a 1, δ a 2, α a 3.

Scrivendo invece (α, α, γ) , avremmo la funzione che associa α a 1, α a 2, e γ a 3.

A questo punto, sarà chiaro che l'insieme B^A è identificabile con l'insieme di tutte le n -uple ordinate di elementi di B (con ripetizioni), e cioè con B^n .

Conclusione: *L'insieme B^A di tutte le applicazioni di un insieme A costituito da n elementi, a valori in un insieme B costituito di m elementi, conta esattamente m^n oggetti.*

Definizione 2.2 Nella situazione descritta nella *conclusione* precedente, gli elementi di B^A sono detti *disposizioni con ripetizioni* di m oggetti a n a n .

Definizione 2.3 Siano A e B due insiemi come sopra, ma stavolta supponiamo che sia $n \leq m$, ossia che A abbia meno elementi di B (o al più, lo stesso numero). Diciamo *disposizioni semplici* (cioè: senza ripetizioni) tutte le applicazioni *iniettive* di A in B . (La richiesta $n \leq m$ è dovuta proprio alla necessità di avere *qualche* funzione iniettiva).

L'insieme di tali applicazioni può essere denotato con $D_{m,n}$, e ogni suo elemento può essere descritto, come sopra, mediante una n -*upla* di elementi di B , in un certo ordine, ma senza ripetizioni.

Quanti sono gli elementi di $D_{m,n}$? Rifacciamoci all'esempio precedente: $A = \{1, 2, 3\}$, e $B = \{\alpha, \beta, \gamma, \delta\}$. Volendo descrivere una generica funzione iniettiva ϕ di A in B , possiamo cominciare scegliendo $\phi(1)$: per fare ciò abbiamo 4 scelte possibili. Poi, per ciascuna di tali scelte, dovremo individuare $\phi(2)$ tra gli *altri* elementi di B , e quindi abbiamo stavolta 3 scelte diverse; per ciascuna delle 4×3 scelte fin qui individuate, abbiamo poi 2 possibili alternative per l'ultimo valore da scegliere, cioè $\phi(3)$. In definitiva avremo $4 \times 3 \times 2$ possibili funzioni iniettive. Generalizzando il numero degli elementi di A e di B , si ha:

Conclusione $D_{m,n}$ contiene esattamente $m \times (m-1) \times \dots \times (m-n+1) = \frac{m!}{(m-n)!}$ elementi, e quindi le *disposizioni semplici* di m elementi a n a n ($n \leq m$) sono $\frac{m!}{(m-n)!}$.

Definizione 2.4 Ricordiamo che la scrittura $m!$ sta a denotare il prodotto dei primi m numeri interi positivi, e che, in virtù delle precedenti conclusioni, rappresenta il numero di tutte le applicazioni iniettive $\phi: A \rightarrow B$, nell'ipotesi che A e B abbiano lo stesso numero (m) di elementi: in tale situazione, non è difficile osservare che ogni applicazione iniettiva è anche necessariamente biiettiva, ed è descritta semplicemente elencando *tutti* gli elementi di B in qualsiasi ordine: questa operazione dicesi anche una *permutazione* degli m elementi di B (un po' come fare un *anagramma* della "parola" $\alpha\beta\gamma\delta$, con riferimento all'esempio sopra descritto).

Di conseguenza, il numero $m!$ ci dice quante sono le *permutazioni* possibili di tutti gli elementi di B , ammesso che B abbia esattamente m elementi. D'ora in poi, per evitare

di dilungarci troppo nel discorso, riprenderemo la scrittura $\#(B)$ per denotare il *numero* degli elementi dell'insieme B .

2.2 Combinazioni e Formule

Ancora tramite i concetti riguardanti applicazioni tra insiemi finiti, possiamo introdurre le cosiddette *combinazioni*, di m oggetti a n a n , sia con ripetizioni che senza. Per i nostri scopi, ci interesseremo principalmente delle *combinazioni senza ripetizioni*, per le quali occorre che sia $n \leq m$.

Definizione 2.5 Dati due insiemi A e B , A con n elementi e B con m elementi, $n \leq m$, introduciamo, nell'insieme $D_{m,n}$ di tutte le applicazioni iniettive $f : A \rightarrow B$, una relazione di equivalenza:

poniamo $f \sim f^*$ quando f e f^* hanno lo stesso *codominio*, cioè se $f(A) = f^*(A)$. (Ricordiamo che $f(A) = \{f(a) : a \in A\}$).

Se ci rifacciamo all'esempio precedente, con $A = \{1, 2, 3\}$ e $B = \{\alpha, \beta, \gamma, \delta\}$, due funzioni equivalenti sono (α, β, δ) e (δ, α, β) , ma anche (α, δ, β) , e così via, prendendo tutte le *permutazioni* possibili degli elementi α, β, δ .

Tornando al discorso generale, le *classi di equivalenza*, secondo tale relazione, sono dette le *combinazioni semplici* di m elementi (quelli di B) a n a n . Il *numero* di tutte le combinazioni semplici è denotato $C_{m,n}$.

Avendo posto $\#(A) = n$, il codominio di una qualsiasi funzione iniettiva ϕ di A in B è necessariamente un sottoinsieme di B , costituito da n elementi: ogni permutazione di tali n elementi di B dà luogo ad un'applicazione equivalente (e viceversa, ogni funzione ϕ^* equivalente a ϕ è ottenuta elencando in modo diverso gli n elementi che formano il codominio di ϕ). Dunque, ogni classe di equivalenza conta $n!$ elementi. Poichè inoltre le classi di equivalenza sono (sempre!) a due a due disgiunte, e la loro unione riempie tutto $D_{m,n}$, il *numero* di tali classi equivalenza si ottiene dividendo il numero degli elementi di $D_{m,n}$ (cioè $\frac{m!}{(m-n)!}$) per il numero di elementi in ciascuna classe, cioè $n!$. Si deduce dunque:

$$C_{m,n} = \frac{m!}{(m-n)!n!}.$$

Dai discorsi fatti sinora, si può *sintetizzare* quanto segue:

le **disposizioni con ripetizioni** di m oggetti a n a n sono rappresentabili come gli elementi di B^n , ove $\#(B) = m$, e quindi il loro numero è m^n ;

le **disposizioni semplici** di m oggetti a n a n (con $n \leq m$) sono rappresentabili come n - *uple ordinate* degli m oggetti a n a n , a condizione che nessun elemento compaia più di una volta, e il loro numero è $\frac{m!}{(m-n)!}$;

le **combinazioni semplici** di m oggetti a n a n (con $n \leq m$), sono rappresentabili semplicemente come *sottoinsiemi* (ciascuno con n elementi) dell'insieme B costituito dagli m oggetti. Ognuno di tali sottoinsiemi è infatti il codominio di qualche applicazione iniettiva di A in B , dove A è un qualsiasi insieme con n elementi. Il numero $C_{m,n}$ ci dice anche quanti sono i sottoinsiemi di B , aventi esattamente n oggetti. Si usa spesso anche la seguente notazione: $C_{m,n} = \binom{m}{n} = \frac{m!}{(m-n)!n!}$

(Per convenzione, si pone anche $0! = 1$, così la scrittura precedente include anche il caso $n = 0$).

Possiamo ora elencare alcune formule riguardanti i numeri $\binom{m}{n}$, detti anche *coefficienti binomiali*.

Intanto, è chiaro che risulta $\binom{m}{n} = \binom{m}{m-n}$. Si ha poi facilmente: $\binom{m}{n} = \binom{m-1}{n-1} \frac{m}{n}$ quando $n \neq 0$.

Infine, segnaliamo l'importante formula nota con il nome di *binomio di Newton*:

$$(a + b)^m = \sum_{n=0}^m \binom{m}{n} a^n b^{m-n}.$$

Non diamo la dimostrazione, ma osserviamo che, per $a = b = 1$ risulta:

$$2^m = \sum_{n=0}^m \binom{m}{n}$$

Quest'ultima formula può essere dimostrata indipendentemente, *contando* i sottoinsiemi di un generico insieme B con m elementi: vi sono esattamente $\binom{m}{n}$ sottoinsiemi con n elementi, per $n = 0, 1, \dots, m$, e quindi, sommando tutti questi numeri, per n che varia tra 0 e m , si ottiene $\#(\wp(B))$. D'altra parte, $\#(\wp(B))$ può anche esser calcolato contando

tutte le possibili applicazioni $\phi : B \rightarrow \{0, 1\}$: sappiamo che queste sono 2^m , e ciascuna può venir associata ad un ben preciso sottoinsieme di B , che la individua univocamente, cioè l'insieme di quei punti $b \in B$ per i quali si ha $\phi(b) = 1$. Dunque, $\#(B) = 2^m = \sum_{n=0}^m \binom{m}{n}$.

I coefficienti binomiali intervengono in molte formule, alcune delle quali prevedono valori molto alti sia per m , che per n (ciò accade di solito in problemi di probabilità). In tali casi, possono essere utili formule di approssimazione, del tipo di quella di Stirling: (v. ultimo esempio del capitolo 3).

Ad esempio, $\binom{2n}{n}$ viene approssimato con $\frac{4^n}{\sqrt{\pi n}}$, non appena n superi 8.

Oltre alle combinazioni semplici, si possono anche considerare quelle *con ripetizioni*: queste in pratica sono elenchi di m oggetti a n a n , (qui, può anche essere $n > m$), anche con ripetizioni, ma senza possibilità di cambiare l'ordine.

Il loro numero si denota con $C_{m,n}^r$, e si dimostra la formula:

$$C_{m,n}^r = \binom{m+n-1}{n}$$

Facciamo un esempio.

Si sa che in un libro di 100 pagine vi sono 10 errori: in quanti modi questi errori si possono esser distribuiti lungo le varie pagine?

Per esempio, potremmo scrivere l'elenco (1,1,5,5,58,65,78,78,78,98) per intendere che a pagina 1 vi sono due errori, come a pagina 5, poi c'è un errore a pagina 58, uno a pag.65, tre a pagina 78, e un altro a pagina 98. E' chiaro a cosa servono le ripetizioni, e che l'ordine non ha alcuna importanza: la stessa distribuzione degli errori si avrebbe scrivendo l'elenco (5,1,78,58,65,98,1,5,78,78).

Un altro modo di descrivere una simile distribuzione di errori consiste nello scrivere, al posto del numero di pagina, la somma tra il numero stesso e il numero di errori riscontrati **fino** a quella pagina (compresa). Così, la lista precedente verrebbe sostituita da:

(3,4,5,6,9,10,11,12,13,...61,63,64,65,66,...69,71,72,73,... 83,86,87,88,...106,108,109,110)

che è una lista di 110 elementi, in ordine crescente (senza ripetizioni) l'ultimo dei quali è perfettamente inutile (in quanto sarebbe lo stesso per tutte le distribuzioni possibili dei 10

errori nelle 100 pagine).

Ecco così che le *combinazioni con ripetizioni* di 100 oggetti a 10 a 10 sono tante quante le *combinazioni semplici* di 109 oggetti a 10 a 10 (cfr. la formula $C_{m,n}^r = \binom{m+n-1}{n}$).

Capitolo 3

LIMITI DI SUCCESSIONI

3.1 Esempi introduttivi

Abbiamo già parlato di successioni nel capitolo 1: esse sono applicazioni di \mathbb{N} a valori in qualche insieme A : ma naturalmente l'insieme di *arrivo* che più ci interessa è \mathbb{R} o suoi sottoinsiemi, o sue *potenze*.

Abbiamo anche visto alcuni esempi di successioni, sia definite mediante una formula diretta che esprime il termine generale a_n in funzione di n , sia definite per *ricorrenza*. In genere, comunque, una successione potrebbe non esser definita su tutto \mathbb{N} , ma da un certo \bar{n} in poi: ad esempio, la legge $a_n = \frac{1}{n(n-1)(n-2)}$ è definita solo per $n \geq 3$, e di conseguenza s'intende che il dominio è $\{3, 4, \dots\}$. Quasi sempre questo ci basterà. Approfittiamo di questa occasione per introdurre una locuzione: quando una certa proprietà, riguardante i numeri interi, è verificata da un certo \bar{n} in poi, si dice che essa vale *definitivamente*. Ad esempio, la disuguaglianza $n^2 \geq 3n$ vale definitivamente, infatti è verificata per $n = 0$, per $n = 3$, e per tutti gli n successivi a 3. Vedremo presto che è molto importante stabilire che certe disuguaglianze valgono definitivamente: citiamone alcune.

$2n < n^2$, $n^2 < 2^n$, $2^n < n!$, $\frac{1}{n^4} > e^{-n}$, $\log n < \sqrt[12]{n}$, ... Per dimostrare queste e altre relazioni è molto utile il *principio di induzione*: se si vuole dimostrare che una certa proprietà (P), riguardante i numeri interi, vale da un certo N in poi, si procede in due passi:

1) prima, si dimostra che (P) é vera per N ;

2) poi, *assumendo* che (P) sia già stata dimostrata per un certo $n \geq N$, la si dimostra per $n + 1$.

Ad esempio, dimostriamo che la proprietà $2^n < n!$ sussiste da un certo N in poi. Con poche prove, si vede che essa non vale per 1, per 2, per 3, ma vale per $n = 4$. Proviamo ora che essa vale per ogni $n \geq 4$: il primo passo, cioè provare la (P) per $N = 4$, é già fatto; supponiamo allora che la (P) valga per un certo $n \geq 4$, e verifichiamola per $n + 1$: $2^{n+1} = 2 \cdot 2^n < 2 \cdot n! < (n + 1) \cdot n! = (n + 1)!$

Tra breve utilizzeremo questa relazione, valida per $a > -1$, e per *tutti* gli $n \in \mathbb{N}$:

$$(1 + a)^n \geq 1 + na.$$

Anche questa si può facilmente provare per induzione: infatti, essa é ovvia per $n = 0$, e inoltre, supposto che sia vera per un certo n , si ottiene

$$(1 + a)^{n+1} = (1 + a)(1 + a)^n \geq (1 + a)(1 + na) \geq 1 + (n + 1)a.$$

Un'altra utile relazione, che si può dimostrare per induzione, riguarda la somma dei primi n numeri interi: si ha: $1 + 2 + \dots + n = \frac{n^2+n}{2}$, valida per ogni intero positivo n .

Ancora: $\sum_{i=1}^n i^2 = \frac{2n^3+3n^2+n}{6}$, valida per ogni $n > 0$.

Anche le successioni definite per ricorrenza possono tralasciare alcuni numeri interi: ad esempio, si potrebbe porre: $a_5 = \frac{5}{3}$, e $a_{n+1} = \frac{1}{a_n+1}$. I primi 5 termini della successione non sono definiti, e pazienza: si comincia con $\frac{5}{3}$, poi c'è $\frac{8}{5}$, $\frac{13}{8}$, $\frac{21}{13}$, $\frac{34}{21}$, ... Si capisce ora facilmente qual è il termine successivo, e quello dopo ancora, e così via, ma non è immediato (per ora) capire se questi numeri si avvicinano sempre più a qualcosa, e anche a che cosa: proviamo a confrontarli con la famosa proporzione divina $\varphi = \frac{\sqrt{5}+1}{2} = 1.61803?$

Facendo i conti (meglio se con una calcolatrice), si può notare che, magari lentamente, i nostri termini si avvicinano sempre più al valore che abbiamo *indovinato*. Presto sveleremo l'arcano: per il momento, limitiamoci ad osservare che la successione che stiamo studiando deriva da quella dei numeri di Fibonacci: 1,1,2,3,5,8... in cui ogni nuovo termine é la somma dei due che lo precedono. Infatti, la successione (a_n) precedente non é altro che la sequenza

dei *rapporti* tra ciascun numero di Fibonacci e quello immediatamente precedente, a partire dal quinto).

Un altro esempio interessante è il seguente: poniamo

$$q_0 = 2; \quad q_{n+1} = \frac{1}{2}\left(q_n + \frac{2}{q_n}\right).$$

(Abbiamo usato la scrittura q_n perchè i termini di questa successione sono tutti razionali). I valori che tale successione assume sono: $2, \frac{3}{2}, 1.4166, 1.414215, 1.414213\dots$: sembra proprio che ci avviciniamo a $\sqrt{2}$ (numero notoriamente irrazionale)! Qui possiamo provare a dare una spiegazione decisiva: se i termini della nostra successione si avvicinano tutti a un valore α , a un certo punto q_n e q_{n+1} saranno *sempre* più vicini tra loro, al punto che il computer non sarà più in grado di distinguerli: avremo cioè raggiunto un valore q , tale che, calcolando $\frac{1}{2}(q + \frac{2}{q})$, si ottiene ancora q . Allora q risolve l'equazione $q = \frac{1}{2}(q + \frac{2}{q})$, il che porta a $q^2 = 2\dots$

Adesso, si vede chiaramente anche come funziona l'esempio precedente: $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$ è l'unica soluzione accettabile dell'equazione $q = \frac{1}{q+1}$.

Ma non è il caso di prenderla tanto allegramente: la maggior parte delle successioni definite per ricorrenza sono molto più difficili da risolvere. Facciamo un paio di esempi *cattivi*.

Esempi

1) Poniamo $a_0 = \frac{3}{5}$, $a_{n+1} = 4a_n(1 - a_n)$ (successione *logistica*). Qui, la situazione è assai diversa: anche scrivendo i primi 18 termini, i valori che si ottengono sono del tutto caotici, e danno l'idea che non si avvicinano a nulla (e così é, infatti). Eppure, l'equazione $x = 4x(1 - x)$ ha come soluzioni i numeri 0 e $\frac{3}{4}$.

2) Poniamo: $a_0 = 1$, $a_{n+1} = a_n + \frac{1}{2^n + n}$. Qui, si può vedere subito che la successione (a_n) è monotona crescente, e inoltre: $a_{n+1} = 1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{3} + \frac{1}{6} + \frac{1}{11} + \dots + \frac{1}{2^n + n} \leq 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2^n} \leq 3$ per ogni n . Dunque, è prevedibile che il *sup* degli a_n sia il *limite* che cerchiamo: infatti è proprio così, e lo si può controllare valutando i primi 10 o 12 termini della successione. Ma trovare esplicitamente una semplice espressione per tale numero non è cosa facile. E *non serve a nulla* provare ad impostare l'equazione $x = x + \frac{1}{2^n + n}$: da una parte questa dipende da n , e dall'altra non ha certo soluzioni pensando n fisso.

In conclusione, possiamo osservare che le successioni hanno comportamenti di tutti i tipi: ci sono addirittura dei casi estremi, di successioni che *riempiono* tutto \mathbb{Q} ! (ricordiamo che \mathbb{Q} è *numerabile*, cioè ha la stessa cardinalità di \mathbb{N} !)

Pertanto, è importante esaminare attentamente almeno alcuni tipi di successioni, che si comportano abbastanza bene, e che hanno particolare importanza sia nella Matematica, sia nelle sue applicazioni.

3.2 Successioni infinitesime e limiti

In questo paragrafo, inizieremo col trattare le successioni *infinitesime* (cioè, quelle convergenti a 0), e poi daremo il concetto generale di *successione convergente*.

Sia (a_n) una successione in \mathbb{R} . Diremo che (a_n) *decresce a 0*, se risulta $a_n \geq a_{n+1}$ per ogni n , e inoltre $\inf a_n = 0$. (Dunque, $a_n \geq 0$ per ogni n).

Definizione 3.1 Data una successione (x_n) in \mathbb{R} , diremo che essa è *infinitesima* se esiste una successione (a_n) , decrescente a 0, e tale che $|x_n| \leq a_n$ per ogni n . Se ciò accade, scriveremo $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$, e diremo che x_n *tende a 0*, o che ha *limite 0*.

Evidentemente, ogni successione decrescente a 0 ha limite 0, ma vi sono molte successioni infinitesime, che non sono decrescenti: ad esempio $a_n = \frac{(-1)^n}{n}$, o anche $x_n = \frac{\sin(n+1)}{n+2}$.

Una definizione alternativa è la seguente:

(DL) " (x_n) tende a 0 se, per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $\bar{n} \in \mathbb{N}$ tale che $|x_n| < \varepsilon$ per ogni $n \geq \bar{n}$.

In effetti, se supponiamo che la (DL) sia verificata, per ogni n sia $a_n = \sup\{|x_k| : k \geq n\}$.

Si vede subito che (a_n) è non negativa, e decrescente. Il suo estremo inferiore è 0, proprio a causa della (DL), e per le proprietà caratteristiche dell'inf (v. Teorema 1.6). Viceversa, se esiste una successione (a_n) decrescente a 0, tale che $|x_n| \leq a_n$ per ogni n , possiamo facilmente verificare la (DL) relativamente alla (a_n) , e di conseguenza anche alla (x_n) , proprio in virtù della relazione $|x_n| \leq a_n$.

Le successioni infinitesime possono essere utilizzate per definire il limite anche per altre successioni.

Definizione 3.2 Data una successione (x_n) , e dato un numero reale r , diremo che (x_n) ammette limite r se la successione $(x_n - r)$ è infinitesima. Ossia se la seguente condizione è verificata:

(DL) Per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $\bar{n} \in \mathbb{N}$ tale che $|x_n - r| < \varepsilon$ per ogni $n \geq \bar{n}$.

Se questo accade, si dice anche che la successione (x_n) converge (a r).

Una conseguenza di queste definizioni riguarda le successioni *monotone*:

Proposizione 3.3 Se (a_n) è una successione monotona (a valori in \mathbb{R}), e limitata, cioè esiste un reale $K > 0$ tale che $|a_n| < K$ per ogni n , allora (a_n) è convergente. In particolare, se (a_n) è monotona non decrescente, il suo limite è $L = \sup\{a_n : n \in \mathbb{N}\}$; se invece (a_n) è non crescente, allora il limite è l'estremo inferiore dei valori a_n .

Dimostrazione Proveremo l'asserto solo nel caso di monotonia non decrescente.

Dentato con L l'estremo superiore della successione, consideriamo la successione $b_n = L - a_n$: si vede facilmente che tale successione è non crescente, e ha come estremo inferiore $L - L$, cioè 0. Dunque, per definizione di limite di una successione non crescente, si ha $0 = \lim a_n$. Essendo poi $|a_n - L| = L - a_n = b_n$, a_n risulta convergente a L per definizione. \square

Teorema 3.4 Una successione (x_n) è convergente se e solo se la seguente condizione (detta di *Cauchy*) è verificata:

(C) Per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $\bar{n} \in \mathbb{N}$ tale che $|x_n - x_m| < \varepsilon$ per ogni $n, m \geq \bar{n}$.

Dimostrazione. Proveremo solo la condizione necessaria. Supposto che (x_n) converga a r , si fissi $\varepsilon > 0$, e si determini \bar{n} tale che $|x_n - r| < \varepsilon/2$, per $n \geq \bar{n}$: allora, scelti comunque n e m più grandi di \bar{n} , si ha: $|x_n - x_m| < |x_n - r| + |r - x_m| < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon$. \square

L'importanza del teorema di Cauchy sta nel fatto che esso ci consente di dedurre l'esistenza del limite *senza* necessariamente conoscere il limite stesso: ciò sarà utile ad

esempio nel trattare le successioni definite per ricorrenza, come nello studio delle *serie*; ma il criterio di Cauchy è anche utile nel dimostrare che una data successione *non* converge (quando è questo il caso). Vedremo poi degli esempi.

Un tipo diverso di limite, ma ugualmente importante, si ha nel caso di successioni *divergenti*.

Definizione 3.5 Data una successione (a_n) in \mathbb{R} , diremo che essa *diverge a* $+\infty$, se accade quanto segue:

”Per ogni $M > 0$ esiste un intero $\bar{n} \in \mathbb{N}$ tale che $a_n > M$ per ogni $n \geq \bar{n}$.”

Diremo invece che (a_n) *diverge a* $-\infty$ quando si ha:

”Per ogni $M > 0$ esiste un intero $\bar{n} \in \mathbb{N}$ tale che $a_n < -M$ per ogni $n \geq \bar{n}$.”

Un buon esercizio consiste nel provare la seguente affermazione: *se (a_n) diverge a $+\infty$ oppure a $-\infty$, allora $\frac{1}{a_n}$ è infinitesima. Viceversa, se (a_n) è infinitesima, ed ha segno definitivamente positivo, allora $\frac{1}{a_n}$ diverge a $+\infty$. Se poi (a_n) è infinitesima, ed ha segno definitivamente negativo, allora $\frac{1}{a_n}$ diverge a $-\infty$. Invece $(\frac{1}{a_n})$ non ammette limite se accade che (a_n) è infinitesima, ma non ha segno definitivamente costante: ad esempio, la successione $a_n = \frac{\sin(\frac{n\pi}{2})}{n}$ è infinitesima (perchè $|a_n| \leq \frac{1}{n}$), ma assume valori positivi per infiniti valori di $n : n = 4k + 1$, con $k \in \mathbb{N}$, e valori negativi per altri (infiniti) valori di $n : n = 4k + 3$, con $k \in \mathbb{N}$. Pertanto, la successione reciproca $\frac{1}{a_n} = \frac{n}{\sin(\frac{n\pi}{2})}$ non ha limite.*

Un altro utile risultato, che si aggiunge alla Proposizione 3.3, e del quale omettiamo la semplice dimostrazione, riguarda le successioni monotone *illimitate*:

Ogni successione monotona non decrescente, illimitata superiormente, risulta divergente a $+\infty$.

Ogni successione monotona non crescente, illimitata inferiormente, risulta divergente a $-\infty$.

Esempi Alcune successioni convergenti sono tra le seguenti:

1) $a_n = \frac{n-1}{n}$, convergente a 1: si ha infatti $|\frac{n-1}{n} - 1| = \frac{1}{n}$, e ciò basta, in quanto $(\frac{1}{n})$ è infinitesima, ovviamente.

2) $a_n = \frac{n}{n^2+1}$, che ha limite 0: come dimostrazione, si può osservare che $0 < \frac{n}{n^2+1} < \frac{n}{n^2} = \frac{1}{n}$, e di nuovo abbiamo una successione infinitesima che migliora $|a_n - l|$ (qui, $l = 0$).

3) $a_n = x^n$: qui, la successione è infinitesima per $|x| < 1$, è *costante* per $x = 1$, è divergente a $+\infty$ per $x > 1$, e non ammette limite per $x < -1$. Intanto, nel caso $x = 1$, si ha $a_n = 1$ per ogni n , e in tal caso il limite è banale, e coincide con la costante 1. Nel caso $x > 1$, si può porre: $x = 1 + h$, con $h > 0$, e la relazione $(1+h)^n > nh$ (dimostrata già per induzione) mostra come, scegliendo arbitrariamente $M > 0$, e prendendo $\bar{n} > \frac{M}{h}$ risulta $x^n = (1+h)^n > nh > \bar{n}h > M$ per ogni $n > \bar{n}$. Per il caso $0 < x < 1$, possiamo osservare che $\frac{1}{x^n} = (\frac{1}{x})^n$ rientra nel caso precedente, e allora tende a $+\infty$: ora, se $\frac{1}{a_n}$ tende a $+\infty$, ne segue che a_n tende a 0, e dunque x^n tende a 0. Un'altra osservazione utile è questa: se (a_n) tende a 0, allora $(|a_n|)$ tende a 0 (e viceversa); e allora, se abbiamo $-1 < x < 0$, la successione (x^n) tende ancora a 0. Ovviamente per $x = 0$ la successione è costante, e uguale a 0. Infine, per $x \leq -1$, la successione (x^n) è *indeterminata*, cioè *non convergente*: questa può essere una buona occasione per usare il criterio di Cauchy, sia pure in chiave negativa; in altri termini, facciamo vedere che la condizione di Cauchy non è verificata. La *negazione* di tale condizione si può formulare così: *esiste un $\varepsilon > 0$ tale che, comunque si scelga \bar{n} , si possono trovare due interi, n e k , più grandi di \bar{n} , tali che $|a_n - a_k| > \varepsilon$* . Proviamo dunque tale proprietà: prendiamo $\varepsilon = 1$, e facciamo vedere che l'affermazione precedente è vera: e infatti, comunque si scelga \bar{n} , possiamo prendere $n = 2\bar{n} + 1$ e $k = n + 1$. Allora, sia n che k sono maggiori di \bar{n} , n è dispari e k è pari: e proprio questa diversità porta ad avere $a_n = x^n \leq -1$, ma $a_k = x^k \geq 1$, sicchè $|a_n - a_k| > \varepsilon = 1$. Resta ancora da dimostrare che, nel caso $x < -1$, il limite non può essere nemmeno infinito (né $+\infty$, né $-\infty$). Ma anche qui, se si volesse provare che $\lim_{n \rightarrow \infty} x^n = +\infty$ si dovrebbe avere che x^n è perlomeno *positivo* definitivamente (il che però non è), e analogamente, se si volesse provare che il limite è $-\infty$, si dovrebbe almeno avere che x^n è *negativo* definitivamente (ancora non è così).

4) $a_n = (1 + \frac{1}{n})^n$: qui la risposta non è tanto facile; usando la formula del binomio di Newton (v. Capitolo 2), possiamo scrivere

$$(1 + \frac{1}{n})^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \frac{1}{n^k} = 1 + 1 + \binom{n}{2} \frac{1}{n^2} + \binom{n}{3} \frac{1}{n^3} \dots + n \frac{1}{n^{n-1}} + \frac{1}{n^n}.$$

Con qualche artificio tecnico, si può dimostrare che la successione data è crescente, e sempre compresa fra 2 e 3. Ora, grazie a 3.3, tale successione converge al suo *estremo superiore*, il quale viene denotato con il simbolo e , e viene detto *numero di Nepero*. Approssimativamente, si ha: $e = 2,718281828\dots$ (ma non si tratta di numero periodico).

5) $a_n = \frac{n}{a^n}$: la cosa è interessante per $|a| > 1$ (il lettore può controllare facilmente cosa accade per $a = 1$, e anche per $0 < a < 1$, mentre il caso $a = 0$ non può essere trattato). Ora, se è $a > 1$, numeratore e denominatore tendono entrambi a $+\infty$. Ma possiamo provare che risulta $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{a^n} = 0$, in questo caso. Poniamo $a = 1 + \varepsilon$, con $\varepsilon > 0$, e osserviamo che $a^n = (1 + \varepsilon)^n > 1 + n\varepsilon + \binom{n}{2}\varepsilon^2$, ancora grazie al binomio di Newton. Allora $\frac{n}{a^n} < \frac{n}{\binom{n}{2}\varepsilon^2} = \frac{2}{n+1}\varepsilon^{-2}$, e ora il limite è evidente. Ora, se $a < -1$, avremo ancora che il limite è 0, studiando la successione $(|a_n|)$.

6) $a_n = \frac{2^n}{n!}$. Anche questa successione è infinitesima. Proviamo, per induzione, che risulta $\frac{2^n}{n!} < \frac{3}{n}$ almeno per $n \geq 4$. Infatti, la disuguaglianza è valida, per $n = 4$. Supponendo che essa sia valida per un certo intero n , verifichiamola per $n+1$: $\frac{2^{n+1}}{(n+1)!} = \frac{2}{n+1} \frac{2^n}{n!} < \frac{2}{n+1} \frac{3}{n} < \frac{3}{n+1}$. Ora, la disuguaglianza vale per ogni $n \geq 4$, e da questa si deduce immediatamente il limite detto. (Con tecniche simili, si può provare lo stesso risultato, anche se il numero 2 viene sostituito con qualunque altro intero > 1).

7) Si ha ancora: $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n!}{n^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^n}{(2n)!} = 0$. (Non dimostriamo per ora tali risultati, perchè saranno dedotti facilmente dopo aver discusso delle *serie*).

8) Un altro limite di notevole importanza (e difficoltà) è la cosiddetta *Formula di Stirling*:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n! e^n}{n^n \sqrt{2\pi n}} = 1.$$

Non diamo neanche un cenno della dimostrazione, ma osserviamo che tale formula consente, almeno per valori di n abbastanza grandi (di solito, superiori a 7), di approssimare $n!$ con $\frac{n^n \sqrt{2\pi n}}{e^n}$.

Capitolo 4

LIMITI DELLE FUNZIONI REALI

4.1 Introduzione

I capitoli precedenti forniscono strumenti (sia di tipo tecnico che teorico) per trattare al meglio il concetto di *limite* per una funzione reale. Tuttavia, occorre ancora qualche nozione teorica, che riguarda un tema molto suggestivo (ma difficile) della Matematica moderna, cioè la Topologia. Noi vedremo solo alcuni concetti, tra i più elementari; ma, data la loro utilità in un prossimo futuro, li presentiamo in una forma leggermente più generale di quanto sia strettamente necessario *ora*. Successivamente, introdurremo il concetto di limite per funzioni reali, lo confronteremo con quello già presentato per le successioni, e ovviamente studieremo anche vari *trucchi* per calcolare i limiti più frequenti nelle applicazioni. Verrà dato infine un cenno anche al tema degli *infiniti* e *infinitesimi*: si tratta di concetti relativamente semplici dal punto di vista teorico, ma molto utili all'atto pratico, in numerose applicazioni.

4.2 Nozioni di Topologia

La Topologia è quella parte della Matematica che studia i concetti di vicinanza, e simili, allo scopo di utilizzarli in maniera rigorosa nell'affrontare numerosi problemi, che possono riguardare le più svariate applicazioni (quali appunto i limiti).

Come già anticipato, daremo solo alcuni concetti elementari, nella forma che piu' si presta ai nostri scopi.

Uno dei concetti cruciali é quello di *distanza*. Quando si lavora con numeri reali, o punti del piano, di solito non ci sono difficoltà nel parlare di distanza. Ma vale la pena di *astrarre* le caratteristiche fondamentali di questo concetto, poiché esso si presta a interessanti interpretazioni: ad esempio, é possibile definire (in maniera utile, s'intende) la distanza tra un numero reale e $+\infty$, oppure la distanza tra due *funzioni*, e cosi' via...Né bisogna pensare che di distanza ce ne sia *una sola*, come la mamma; tanto per fare un esempio, la distanza *euclidea* tra punti del piano (cioé $d((x_1, y_1), (x_2, y_2)) = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$) non é poi la più *bella* che ci sia: sotto certi aspetti, sarebbe meglio usare quest'altra: $d_1((x_1, y_1), (x_2, y_2)) = |x_1 - x_2| + |y_1 - y_2|$.

E' pur vero che il nostro principale obiettivo riguarda le funzioni di *una* variabile reale, e quindi i punti del piano (o di \mathbb{R}^3) c'interessano poco, ma intanto il *grafico* di una funzione di una sola variabile reale é contenuto nel piano, (che piaccia o no), e poi nel corso successivo le funzioni di più variabili non potranno essere trascurate. Dunque non sarà fuori luogo una visione leggermente piu' generale di quello che ci serve strettamente per ora .

Definizione 4.1 Dato un insieme astratto (non vuoto) X , si dice *distanza* (oppure *metrica*) su X un'applicazione $d : X^2 \rightarrow \mathbb{R}_0^+$ che verifichi le seguenti condizioni:

- d1) $d(x, y) = d(y, x)$ (*simmetria*);
- d2) $d(x, y) = 0 \iff x = y$;
- d3) $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$ per ogni x, y, z in X (*proprietá triangolare*).

Quando X é munito di una distanza d , si dice che la *coppia* (X, d) é uno *spazio metrico*.

Le proprietá d1), d2), d3) sono le *minime* condizioni che si richiedono per assegnare una distanza fra i punti di X . Ad esempio, se $X = \mathbb{R}$, la distanza usuale $d(x, y) = |x - y|$ verifica ovviamente tali condizioni. Anche la distanza euclidea, nel piano, le verifica (ma la dimostrazione della proprietá triangolare non é poi cosi' facile...). La distanza che abbiamo introdotto dianzi, e denotata con d_1 (sempre nel piano) ha anch'essa tutte le caratteristiche richieste (e stavolta é facile controllarlo).

Accanto al concetto di distanza, si introducono in modo naturale quelli di palla e di intorno.

Definizione 4.2 Dato uno spazio metrico (X, d) , per ogni punto $x \in X$ e per ogni numero reale $r > 0$, si dice *palla* di centro x e raggio r l'insieme:

$$B(x, r) = \{u \in X : d(u, x) < r\}.$$

Spesso, $B(x, r)$ viene anche detta *palla aperta*, per distinguerla dalla *palla chiusa*, che denoteremo con $\overline{B}(x, r)$, e che é definita così:

$$\overline{B}(x, r) = \{u \in X : d(u, x) \leq r\}.$$

Si dice poi *intorno* di x ogni insieme $U \subset X$ che contenga almeno una palla (aperta o chiusa, é indifferente) centrata in x .

Osservazione 4.3 Si badi che, nella definizione di *palla*, il numero r deve essere *positivo*, quindi sempre diverso da 0. In tal modo, *in genere* una palla (aperta o chiusa che sia) contiene x e anche *altri* punti, i punti *vicini* a x .

Vediamo alcuni esempi: nello spazio \mathbb{R} , con la solita distanza, *palla* é sinonimo di *intervallo*: la *palla* aperta centrata in 4 e di raggio 2 é l'intervallo $]2, 6[$, mentre quella chiusa é l'intervallo $[2, 6]$. Nello stesso spazio, l'insieme $[0, 3]$ é un intorno di 2.5 (in quanto contiene la palla aperta, centrata in 2.5 e di raggio 0.5), ed é anche un intorno di 2.99, (basta scegliere un raggio minore di $1/100$) ma *non* é un intorno del punto 3 : ogni palla, centrata in 3, necessariamente *sborda* oltre $[0, 3]$.

Nello stesso spazio, l'insieme \mathbb{N} dei numeri interi naturali non é intorno di nessun punto: infatti, non contiene nessun intervallo.

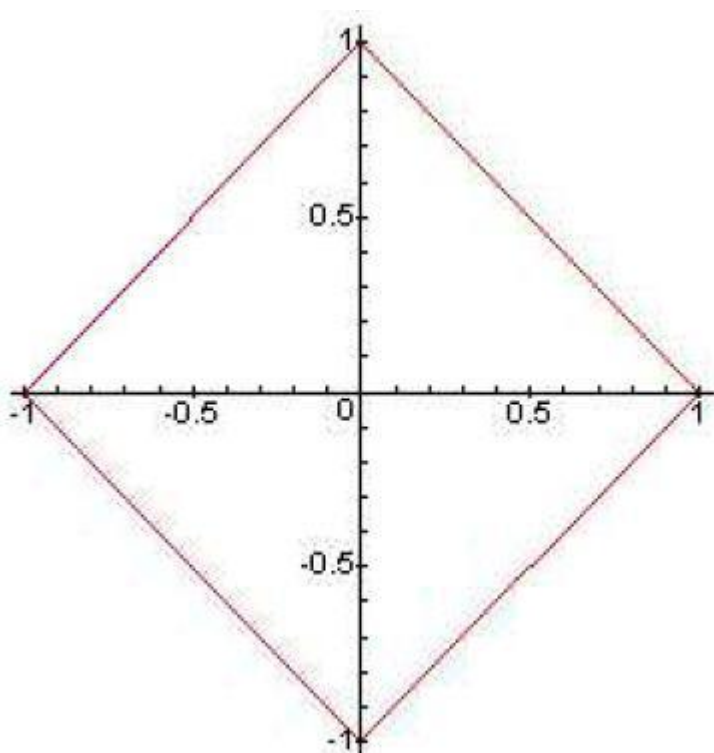
Lo stesso si può dire dell'insieme dei razionali (e di quello degli irrazionali), ma naturalmente tutto \mathbb{R} é intorno di *ogni* suo punto.

Se ci facciamo caso, esistono molti insiemi che sono interni di ogni loro punto: ad esempio, ogni intervallo aperto (non vuoto) é intorno di ogni suo punto (anche se, per punti molto vicini agli estremi dell'intervallo, occorre prendere palle con raggio molto piccolo...)

Nel piano (\mathbb{R}^2), la forma delle palle dipende dalla distanza che si sceglie: se d é l'usuale distanza euclidea, una palla non é altro che un *disco* (pieno). Se invece si scegliesse la distanza d_1 di cui sopra, le palle sono *quadrate*: ad esempio,

$$\{(x, y) : d_1((x, y), (0, 0)) \leq 1\} = \{(x, y) : |x| + |y| \leq 1\}$$

é la regione di piano delimitata dalle rette $y = x + 1$, $y = 1 - x$, $y = -1 - x$, $y = x - 1$ (v. figura piu' in basso). Pero', se ci pensiamo bene, gli *intorni* dei punti sono sempre gli stessi: ogni disco contiene un quadrato (con lo stesso centro), e viceversa.



Passiamo ora ad alcune definizioni, forse un po' noiose, che pero' ci permetteranno di interpretare meglio certe relazioni tra insiemi e punti dello spazio.

Definizioni 4.4 Dato uno spazio metrico (X, d) , diciamo che un sottoinsieme $A \subset X$ é *aperto* se esso é vuoto, oppure se é intorno di ogni suo punto. Ad esempio, se $X = \mathbb{R}$, si puo' vedere che gli insiemi aperti (non vuoti) sono tutti gli intervalli aperti, (comprese le semirette, e anche l'intero spazio \mathbb{R}), e tutti gli insiemi che si ottengono facendo unioni (finite, o anche infinite) di intervalli aperti.

Non ce ne sono altri (ma questo richiede una dimostrazione piuttosto tecnica, che tralasciamo).

In altri spazi, come ad es. \mathbb{R}^2 , la descrizione degli insiemi aperti non é altrettanto semplice.

Diremo invece che un insieme $H \subset X$ é *chiuso* se il suo complementare $X \setminus H$ é aperto. Dunque, in \mathbb{R} , tutti gli intervalli chiusi sono *chiusi*, ma ci sono insiemi chiusi che non sono intervalli: ad esempio, ogni singolo punto $\{x\}$ costituisce un insieme chiuso; ogni insieme finito, $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ é un chiuso; anche \mathbb{N} é un chiuso, e tutto \mathbb{R} (essendo complementare del vuoto); ma *non* l'insieme \mathbb{Q} dei razionali: infatti, abbiamo gia' visto che il suo complementare non é intorno di nessun punto, e quindi non puo' certo essere aperto.

Dunque, \mathbb{Q} e $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ sono insiemi che non risultano né aperti né chiusi; altri esempi, piu' semplici, sono gli intervalli *semiaperti*, come $]3, 8]$, oppure $[1, \pi[$.

Un altro *bel campione* di insiemi chiusi é l'insieme di Cantor, gia' descritto in 1.2.1. Meglio non proseguire su questa strada...

E' ora il momento di utilizzare i concetti finora introdotti, in modo da inquadrare l'operazione di *limite* in una teoria ben precisa.

Definizioni 4.5 In uno spazio metrico (X, d) , sia dato un sottoinsieme (non vuoto) $A \subset X$, e sia x un punto fissato di A .

Diremo che x é *interno* ad A se A é intorno di x .

Ad esempio, se A é aperto, tutti i punti di A sono punti interni.

Dato un insieme $A \subset X$, l'insieme dei punti interni ad A é detto *l'interno* di A , ed é denotato con A^0 .

E' chiaro che A^0 é sempre contenuto in A , e puo' anche essere vuoto (ad esempio, per $X = \mathbb{R}$, l'insieme dei razionali ha interno vuoto). Viceversa, se $A^0 = A$, allora A é aperto. Si puo' anche dimostrare che, *qualunque sia* A , A^0 é aperto.

Diciamo invece che x é un punto *isolato* di A , se esiste un intorno U di x , tale che $U \cap A = \{x\}$.

L'insieme dei punti isolati di A é spesso denotato con $Is(A)$: in \mathbb{R} , se A é un intervallo non degenerare $[a, b]$, esso non ha punti isolati, ossia $Is([a, b]) = \emptyset$.

Al contrario, ogni insieme finito $\{x_1, \dots, x_n\}$ é fatto tutto di punti isolati; lo stesso si puo' dire di insiemi infiniti quali \mathbb{N} . Invece \mathbb{Q} non contiene alcun punto isolato.

A questo punto, vale la pena di notare che i concetti di *punto interno* e *punto isolato* sono in un certo senso *antitetici*, com' é facile intuire: se $X = \mathbb{R}$, oppure $X = \mathbb{R}^n$, e A é un sottoinsieme non vuoto di X , se a é un punto interno per A , non é possibile che a sia isolato (e viceversa).

Tuttavia, facciamo notare che cio' é vero finché X é uno spazio euclideo: in X , gli intorno di un punto contengono *molti* altri punti *vicini*. Esistono pero' spazi X meno *ricchi* di punti, per i quali questo discorso non vale, e in tali spazi un insieme puo' avere punti interni, che sono anche isolati. Non portiamo avanti questo discorso, per evitare complicazioni inutili: ci limitiamo a suggerire al lettore di *andarci coi piedi di piombo* nell'esame di questi concetti topologici.

Prima di andare avanti, vorremmo chiarire che non stiamo facendo *pura accademia*: questi concetti sono utili anche all'atto pratico, per quanto cio' possa apparire strano. Infatti, uno dei problemi principali che si affrontano nel nostro corso é quello dello *studio di funzioni*, ossia tutta quella serie di operazioni (sia algebriche che analitiche) volte a individuare le proprietà salienti di una data funzione, comprenderne l'andamento e disegnarne il grafico, nel modo piu' fedele possibile alla realta'.

Ora, il *primo passo* di tutta questa serie di operazioni é la ricerca del *campo di esistenza* (o, semplicemente, *dominio*) della funzione stessa: in altre parole, data un' espressione per $f(x)$, determinare quei valori *reali* di x per cui l'espressione $f(x)$ ha senso. Ad esempio, il *campo di esistenza* della funzione $\log(x+1)$ é l'insieme di tutte le x tali che $x+1 > 0$, e dunque esso é l'insieme *aperto* $] -1, +\infty[$.

Consideriamo ora la funzione

$$f(x) = \sqrt{x} + \sqrt{x(x-1)}.$$

Il campo di esistenza consiste nell'insieme di quei punti x tali che risulti *simultaneamente* $x \geq 0$ e anche $x(x-1) \geq 0$; un facile esame della situazione porta al risultato: il dominio di f é l'insieme $\{0\} \cup [1, +\infty[$. Si tratta di un insieme chiuso, che contiene un *punto isolato*,

cioé 0. In altri termini, f é definita in 0 (e $f(0) = 0$), ma c'è tutto un intervallo, *intorno* a 0, nel quale f non ha significato. Vedremo presto come regolarci in tali circostanze: per ora, l'importante é capire che insiemi con punti isolati non sono affatto oggetti *esotici*.

Se ancora occorresse un esempio, si provi a individuare il campo di esistenza della funzione $h(x) = \sqrt{\cos^2 x - 1}$; poiché l'integranda dev'essere non negativa, gli unici punti x nei quali h é definita sono quelli per i quali si ha $\cos x = \pm 1$, ossia $x = k\pi$, con $k = \pm 1, \pm 2, \dots$: il campo di esistenza é *tutto* costituito di punti isolati!

Definizioni 4.6 In uno spazio metrico (X, d) , sia dato un insieme (non vuoto) A , e sia assegnato un punto $t \in X$: a differenza delle definizioni precedenti, t non é necessariamente un punto di A .

Diciamo che t é un punto *aderente* per A se ogni intorno U di t contiene qualche punto di A .

L'insieme dei punti aderenti ad A é detto *aderenza*, o anche *chiusura* di A , e viene denotato con \overline{A} .

Ad esempio, é ovvio che ogni punto a di A é anche aderente ad A , visto che ogni intorno di a contiene almeno a . Ma potrebbe accadere che A presenti punti di aderenza, che non appartengono ad A : ad esempio, sempre in \mathbb{R} , l'intervallo aperto $]a, b[$ non contiene i punti a e b , ma essi sono entrambi aderenti ad $]a, b[$. Invece, l'intervallo chiuso $[a, b]$ coincide con la sua *aderenza*.

In genere, si puo' dimostrare che \overline{A} é sempre chiuso, e anzi che esso é il *piu' piccolo* insieme chiuso contenente A (dicendo il *piu' piccolo*, intendiamo che esso é l'intersezione di tutti gli insiemi chiusi contenuti in X che contengono A).

A volte, la chiusura di un insieme A puo' essere molto piu' grande di A : ad esempio, in \mathbb{R} la chiusura di \mathbb{Q} é tutto \mathbb{R} .

Si dice infatti che un sottoinsieme $A \subset X$ é *denso* se $\overline{A} = X$. Dunque, \mathbb{Q} é denso in \mathbb{R} .

In virtu' delle osservazioni fatte prima, é facile capire che la *chiusura* di un intervallo A in \mathbb{R} é comunque l'intervallo chiuso, indipendentemente se l'intervallo A era aperto, semiaperto, o chiuso.

I punti di aderenza di A sono, come si può immaginare, tutti i punti di A , più quei punti $x \in X$ che possono essere *approssimati* mediante punti di A : per esempio, se $A =]0, 4[\setminus \{2, 3\}$, nello spazio \mathbb{R} , l'aderenza di A è tutto l'intervallo chiuso $[0, 4]$: i punti $0, 2, 3, 4$ non fanno parte di A , ma sono punti di aderenza per A , in quanto esistono punti di A vicini quanto si vuole a 0 , e altri, vicini quanto si vuole a 2 , etc.

Una ragionevole distinzione tra i punti di aderenza per un insieme A consiste nell'ev-
idenziare quelli che non sono isolati: è chiaro che un eventuale punto isolato a per A è
ovviamente vicino quanto si vuole a qualche punto di A (anzi, a *un solo* punto di A : a
stesso); ma questo modo di *avvicinarsi* ad a non è molto naturale.

Nasce così il concetto di punto di *accumulazione*.

Dato un insieme A e fissato un punto $x \in X$, diremo che x è punto di *accumulazione* per
 A se ogni intorno U di x contiene punti di A , *diversi da* x .

Chiaramente, questo significa che, se x è punto di accumulazione per A , *ci possiamo*
avvicinare a x quanto vogliamo, con punti di A che siano *diversi* da x .

L'insieme dei punti di accumulazione per A è detto il *derivato* di A , e di solito denotato
con A' .

Non è difficile notare che $A' \subset \overline{A}$, e che la differenza tra i due insiemi è esattamente
 $Is(A)$.

Concludiamo questa *sfilza* di definizioni, con un concetto, non meno importante dei
precedenti, e che (per fortuna) ha un ovvio significato intuitivo.

Dato un insieme $A \subset X$, un punto $x \in X$ si dice punto di *frontiera* per A se ogni intorno
di x contiene sia punti di A che punti di A^c . L'insieme dei punti di frontiera di A è detto
essere *la frontiera* di A , e viene di solito denotato con $Fr(A)$ oppure, con più fantasia, con
 ∂A .

In base alle definizioni date prima, è evidente che, se x è punto di frontiera per A , x
appartiene all'aderenza di A e anche all'aderenza di A^c . E' vero anche il viceversa, per cui
avremo:

$$Fr(A) = \overline{A} \cap \overline{A^c}.$$

Un'osservazione importante, a questo proposito, é che un punto interno per A non puo' essere di frontiera per A (e viceversa).

Per completezza, scriviamo alcune formule (che a rigore si dovrebbero considerare dei veri e propri *teoremi*), delle quali non diamo dimostrazione: a questo riguardo, A si suppone essere un qualunque sottoinsieme (non vuoto) di uno spazio metrico X .

- 1) $\overline{A} = A' \cup Is(A) = A' \cup A$
- 2) $\overline{A} = A^0 \cup Fr(A)$
- 3) $A = \overline{A} \iff A \text{ chiuso} \iff A' \subset A$
- 4) $Fr(A) = \overline{A} \cap \overline{A^c} \subset \overline{A}$
- 5) $(\overline{A})^c = (A^c)^0, (A^0)^c = \overline{A^c}$.

Un discorso a parte merita, a questo proposito, il caso dell' *estremo superiore* e dell' *estremo inferiore*.

Tratteremo solo il primo, in quanto il secondo é perfettamente analogo.

Proposizione 4.7 *Sia $A \subset \mathbb{R}$ un insieme limitato superiormente. Allora l'estremo superiore di A é punto di aderenza per A .*

Inoltre, se $\sup A \notin A$, esso é punto di accumulazione per A .

Dimostrazione Si denoti con S l'estremo superiore per A .

Dobbiamo dimostrare che, per ogni $\varepsilon > 0$, nell'intorno $]S - \varepsilon, S + \varepsilon[$ cadono punti di A .

Per le proprietà di *sup*, fissato $\varepsilon > 0$, sappiamo che esiste certamente un elemento $a \in A$ tale che $a > S - \varepsilon$. D'altra parte, a non puo' certo superare S , e quindi a é un elemento di A contenuto in $]S - \varepsilon, S + \varepsilon[$.

Questo prova che $S \in \overline{A}$.

Per provare la seconda parte dell'enunciato, basta osservare che un punto di aderenza per A , se non appartiene ad A , é necessariamente un punto di accumulazione per A (v. formula (1) piu' sopra). \square .

Osservazione 4.8 I discorsi precedenti possono essere estesi anche al caso in cui si voglia prendere in esame il punto $+\infty$ oppure $-\infty$ (pensando ovviamente $X = \mathbb{R}$). Basta considerare *intorni* del punto $+\infty$ tutti gli insiemi contenenti semirette del tipo $S =]M, +\infty[$,

con $M > 0$, e intorno di $-\infty$ tutti gli insiemi contenenti semirette del tipo $Z =]-\infty, -M[$, con $M > 0$.

Ne risulta che un insieme $A \in \mathcal{R}$ ha $+\infty$ come punto di accumulazione non appena A sia *illimitato* superiormente: infatti, in tal caso, ogni semiretta del tipo $]S, +\infty[$ contiene punti di A . Vale anche il viceversa, ovviamente. E un discorso analogo si può fare con $-\infty$. Va però *escluso* che $+\infty$ o $-\infty$ siano punti interni, o isolati, per A : finché A è preso in \mathcal{R} , esso non può contenere tali punti.

Anche la proposizione 4.7 continua a valere, nel caso $\sup A = +\infty$, con l'ulteriore precisazione che, in tale evenienza, $+\infty$ è *comunque* punto di accumulazione per A .

A tale proposito, facciamo notare che a buon diritto $+\infty$ è considerato *l'unico* punto di accumulazione di \mathcal{N} : infatti, benché \mathcal{N} non abbia punti di accumulazione in \mathcal{R} (cioè, *al finito*), se si lavora nello spazio $\tilde{\mathcal{R}}$, il punto $+\infty$ diventa il *sup* di \mathcal{N} , e *il* punto di accumulazione per tale insieme.

Siamo ora in grado di introdurre, e discutere, il concetto di *limite*, per una funzione reale.

4.3 Limiti

Come già abbiamo visto nel capitolo delle successioni, l'idea di *limite* s'introduce, in Analisi, al fine di rendere precisa l'idea di approssimare quanto si vuole un determinato valore, mediante una successione od una funzione. Vedremo presto che, data una particolare funzione reale $f(x)$, (di quelle che s'incontrano più frequentemente), sono ben pochi i limiti di un certo interesse: ad esempio, non è tanto interessante sapere che, quando x si avvicina a 3, la funzione $x^2 - 8$ si avvicina a 1; questo fatto può benissimo essere rappresentato come un limite, ma in fondo tale limite non ha nulla di sorprendente, né fornisce informazioni nuove sulla funzione in esame. E' già più interessante notare che la funzione $\frac{1+x}{1-x}$ si avvicina a -1 quando x *tende a* $+\infty$ (vedremo presto che questo tendere di x a $+\infty$ non ha nulla di nuovo rispetto allo stesso concetto già incontrato per la variabile n delle successioni).

Altri limiti sono quasi dei *rompicapo*, se non si adopera qualche strumento raffinato per determinarli: ad esempio, quando x si avvicina a 0, la funzione $\frac{x-\sin x}{x^3}$ ha come limite $\frac{1}{6}$: per il momento, l'unico modo per convincersi di questo fatto, é di provare con una calcolatrice.

E infine, vi sono dei limiti (anche solo di successioni) per i quali non c'è nulla da fare: si sa che il limite esiste, spesso lo si descrive con molta precisione, ma non é possibile darne un'espressione in termini elementari, e in tanti casi si ignora persino se si tratti di un numero razionale, o no! Bisogna contentarsi...

Ma ora affrontiamo l'argomento in maniera piu' sistematica.

Per fissare le idee, d'ora in poi supporremo sempre, in questo capitolo, che A sia un fissato sottoinsieme non vuoto di uno spazio metrico (X, d) e che $x_0 \in X$ sia un punto di accumulazione per A (assumendo implicitamente che un tale punto *esista*).

Definizione 4.9 Diremo che un numero L é il *limite* di $f(x)$, per x *tendente* a x_0 , e scriveremo:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L$$

se accade quanto segue.

Per ogni intorno V di L esiste un intorno U di x_0 tale che, per ogni $x \in (A \cap U) \setminus \{x_0\}$ si abbia

$$f(x) \in V.$$

Una formulazione analoga, ma meno generale, é la seguente:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L$$

significa che

Per ogni $\varepsilon > 0$ esiste un $\delta > 0$ tale che, per ogni $x \in A$, con $0 < d(x, x_0) < \delta$, si abbia

$$|f(x) - L| < \varepsilon$$

.

Escludendo i casi $x_0 = \pm\infty$ o $L = \pm\infty$, la seconda formulazione non é altro che la *traduzione* della prima, in termini di distanza, sia su X che su \mathbb{R} .

Esiste anche una formulazione piu' *concreta* quando $L = +\infty$ oppure $x_0 = +\infty$, etc.

Ad esempio,

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty$$

(con $x_0 \in X$) significa che

per ogni $M > 0$ esiste $\delta > 0$ tale che, per ogni $x \in A$, con $0 < |x - x_0| < \delta$, risulti

$$f(x) > M.$$

Oppure,

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$$

significa che

per ogni $M > 0$ esiste $K > 0$ tale che, per ogni $x \in A$, con $x < -K$, risulti

$$f(x) > M$$

Si confrontino tali formulazioni con le definizioni di limite date a suo tempo per le successioni (v. Cap. 3): non ci sono novita'...

Vogliamo ora ribadire l'importanza, in entrambe le formulazioni, della correlazione tra gli intorno V ed U (oppure tra i numeri ε e δ), e della condizione imposta su x di essere sempre *diverso* da x_0 (nella prima formulazione, questo viene espresso con la richiesta $x \in (A \cap U) \setminus \{x_0\}$, e nella seconda con la disuguaglianza $|x - x_0| > 0$).

Infatti, la correlazione tra gli intorno sta a significare che i valori $f(x)$ debbono essere vicini quanto si voglia a L , non appena x sia abbastanza vicino a x_0 , (benché sempre diverso): di regola, piu' si fissa piccolo V , piu' sara' piccolo U ; del resto, studiando i limiti delle successioni, abbiamo gia' notato che uno degli scopi di questi concetti consiste nell'approssimare il piu' possibile certe quantita' L , che sono note solo come *limite* di qualche successione (a_n) (si pensi ad esempio al numero e): se si vuole che a_n sia molto vicino a L , al punto da poter *confondere* L con a_n , il valore di n va preso molto grande (ossia molto vicino a $+\infty$).

E' logico che, trattando di successioni, il valore di n non puo' mai essere uguale a $+\infty$, dunque, per questo tipo di limiti, la richiesta che x si mantenga comunque diverso da

x_0 é automaticamente soddisfatta. In generale, comunque, la distinzione tra x e x_0 ha importanza per (almeno) due motivi: da una parte rende piu' *facile* l'esistenza del limite, e dall'altra la rende insensibile ai possibili *capricci* che potrebbe fare la funzione in un singolo punto. (Negli esempi concreti vedremo meglio questo aspetto). Un modo piu' suggestivo per puntualizzare questo fatto é il seguente: nel fare il limite di una funzione $f(x)$ in un punto x_0 , *non ha alcuna rilevanza* il valore $f(x_0)$ (ammesso che f sia definita anche in x_0), e quindi il limite (se esiste), é *sempre lo stesso* anche se si cambia il valore $f(x_0)$.

E' ormai tempo di abbandonare le *chiacchiere* e affrontare in concreto alcuni esempi, almeno per capire a grandi linee quali e dove sono i problemi *veri* nel calcolo dei limiti.

Esempi 4.10 1) Intanto, se $A = \mathbb{N}$, ogni funzione definita su A é una successione: dunque, calcolare il limite di una funzione definita su \mathbb{N} non vuol dire nient'altro che calcolare il limite di una successione: e poiché abbiamo gia' osservato che $+\infty$ é l'unico punto di accumulazione per \mathbb{N} , l'unica possibilita' di scelta di x_0 é $+\infty$; dunque, a questo livello, non c'é proprio nulla di nuovo da dire, tranne magari andare a *ripassare* quanto é stato detto nel Cap. 3.

2) I problemi e i metodi, che si sono incontrati studiando i limiti delle successioni, sono spesso di grande aiuto anche nello studio di limiti di funzioni. Ad esempio, si voglia calcolare il limite:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3+x}{4+3x}.$$

Sappiamo bene che, se al posto di x ci fosse n , il limite cercato sarebbe $L = \frac{1}{3}$. Ebbene, le stesse tecniche usate con la successione $\frac{3+n}{4+3n}$ funzionano anche qui, e il limite é lo stesso. Anche la *verifica* in fondo non é molto diversa: secondo la definizione, bisogna far vedere che, per ogni fissato $\varepsilon > 0$ esiste un numero $M > 0$ tale che $|\frac{3+x}{4+3x} - \frac{1}{3}| < \varepsilon$, non appena $x > M$: La quantita' in modulo é uguale a $\frac{5}{3} \frac{1}{4+3x}$, che risulta sempre positiva, almeno per $x > 0$. Dunque, la disequazione da risolvere diventa:

$$\frac{1}{4+3x} < \frac{3}{5}\varepsilon.$$

Questa si risolve facilmente, dando $x > \frac{5}{9\varepsilon} - \frac{4}{3}$. Possiamo scegliere allora $M = \frac{5}{9\varepsilon}$: se $x > M$, la disuguaglianza di cui sopra é verificata, e la dimostrazione é conclusa.

Meno facile é controllare la validita', per funzioni reali, di certi limiti notevoli, gia' incontrati nelle successioni.

Ad esempio, risulta:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^{12}}{(1.2)^x} = 0,$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\log x}{\sqrt{x}} = 0,$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e,$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e,$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{a}{x}\right)^x = e^a.$$

(Di questi risultati non diamo dimostrazione).

3) Proviamo un limite *facile*:

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{4 - x^2}{2 - x}.$$

Cosa si deve fare? Prima di tutto, bisogna controllare che il problema sia ben posto, ossia che x si possa *avvicinare* a 1: questo vuol dire che 1 dev'essere punto di accumulazione per il dominio della funzione. Ora, é facile vedere che il dominio in questione é $D = \mathbb{R} \setminus \{2\}$, e quindi il punto 1 é addirittura un punto interno a D : dunque, il limite ha senso.

Come secondo passo, occorre *indovinare* (se possibile) il valore del limite. Senza sforzare troppo la fantasia, andiamo a sostituire 1 al posto di x : troviamo $f(1) = 3$. Sara' questo il limite? La risposta é: si', il limite é proprio $f(1)$, cioé $f(x_0)$.

Bell'affare! Dopo tutta quella *tiritera* sul fatto che il limite non ha niente a che fare con $f(x_0)$, e tutte quelle complicate definizioni con gli ε e δ , va a finire che il limite non é altro che $f(x_0)$?

Ebbene si'. Ma solo qualche volta. Non dimentichiamo che stiamo presentando, per ora, gli esempi piu' facili! E' evidente che questo esempio rientra in quella categoria di

limiti che non hanno grande importanza, proprio perché facilmente prevedibili: come dire, "se non son cose difficili, non ci piacciono..."

Comunque, dobbiamo ancora assicurarci di avere *visto giusto!* Un conto é *indovinare* il limite, e tutt'altro compito é *dimostrarlo* rigorosamente.

La verifica qui si riconduce a risolvere la disequazione:

$$\frac{|x^2 - 3x + 2|}{|x - 2|} < \varepsilon,$$

e mostrare che c'è un intorno (anche piccolo) di 1 nel quale essa sia verificata. Intanto, osserviamo che, quando x é piuttosto vicino a 1, il denominatore $x - 2$ si mantiene abbondantemente negativo: dunque, $|x - 2| = 2 - x$; questo é vero almeno se $|x - 1| < 1$, quindi la semplificazione si puo' attuare, a patto di scegliere il δ piu' piccolo di 1: nulla di male! Quanto al numeratore, esso é positivo per $x < 1$, negativo per x compreso fra 1 e 2: valori piu' grandi di x non ci interessano, noi vogliamo x vicino a 1. Allora, la disequazione diventa:

$$\begin{aligned} \frac{x^2 - 3x + 2}{2 - x} &< \varepsilon, & \text{per } x < 1 \\ \frac{-x^2 + 3x - 2}{2 - x} &< \varepsilon, & \text{per } x > 1. \end{aligned}$$

La prima disequazione é soddisfatta per $1 - \varepsilon < x < 1$, e la seconda per $1 < x < 1 + \varepsilon$.

(Abbiamo trascurato, nella prima disequazione, i valori di x maggiori di 1, e nella seconda quelli minori di 1).

Dunque, se x é compreso fra $1 - \varepsilon$ e $1 + \varepsilon$, la disequazione originaria é soddisfatta, per cui si puo' prendere $\delta = \varepsilon$, e la verifica é completa.

4) Stesso limite del punto 3, ma con $x_0 = 2$. Prima domanda: si potrà fare? Si', dato che 2, pur non facendo parte del dominio, é comunque punto di accumulazione. E ora: quanto vale il limite?

Se andiamo a sostituire, troviamo una *forma indeterminata* del tipo $\frac{0}{0}$: che si fa?

Si osserva che la *forma indeterminata* é *determinata* dal fatto che 2 annulla sia il numeratore che il denominatore: dunque, numeratore e denominatore sono *divisibili* per $2 - x$: e dividendo numeratore e denominatore per $2 - x$, il limite diventa:

$$\lim_{x \rightarrow 2} (2 + x).$$

Ora, possiamo sostituire, e troviamo $L = 4$. La verifica é molto semplice.

C'è un'osservazione da fare: nei passaggi precedenti, abbiamo diviso numeratore e denominatore per $2 - x$; l'operazione é lecita, in quanto non é possibile che $2 - x$ si annulli: infatti, nella ricerca di un limite, si deve sempre presumere x *diverso* da x_0 . Solo in certi casi la ricerca si esaurisce calcolando $f(x_0)$, e vedremo presto quali sono questi casi *fortunati*. Gli esempi piu' interessanti sono invece quelli in cui il valore di f in x_0 non ha senso, o comunque non é il limite cercato.

5) Cerchiamo ora il limite:

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x}{x-1} :$$

qui occorre solo *buon senso*. Dato che il numeratore é vicino a 1, e il denominatore é vicino a 0, i valori che assume il rapporto in questione tendono ad essere molto elevati. Viene dunque il sospetto che il limite sia *infinito*: la sensazione é giusta, ma non dobbiamo trarre conclusioni errate! Se si vuole asserire che un certo limite é *infinito*, bisogna comunque stabilirne il *segno*: si tratta di $+\infty$ o di $-\infty$? Non possiamo ammettere due limiti diversi! (Questo sara' meglio precisato in un teorema). E allora?

Allora il limite in questo caso *non esiste*: se fosse $+\infty$, dovremmo trovare un intorno di 1 nel quale i valori della funzione siano tutti maggiori di 1, ad esempio. Ma, a sinistra di 1, i valori della funzione sono tutti negativi (possiamo ben presumere $x > 0$!). Viceversa, se il limite fosse $-\infty$, in un intorno opportuno di 1 tutti i valori della funzione dovrebbero essere minori di -1 , e stavolta i punti a destra di 1 giocano contro.

Altri valori L , come limite, sono del tutto fuori luogo: questo é oramai piuttosto evidente, ma vediamo cosa accade, se tentiamo di impostare la solita disequazione di verifica, con un valore finito L come limite; la disequazione sarebbe:

$$L - 1 - \varepsilon < \frac{1}{x-1} < L - 1 + \varepsilon.$$

Ora, limitiamoci a considerare $x > 1$: allora gia' dobbiamo escludere $L < 1$: altrimenti, per ε sufficientemente piccolo, sarebbe $L - 1 + \varepsilon < 0$, e quindi non potremmo avere mai $\frac{1}{x-1} < L - 1 + \varepsilon$.

Supponendo allora $L \geq 1$, avremmo $L - 1 + \varepsilon > 0$, e quindi $\frac{1}{x-1} < L - 1 + \varepsilon$ equivale a $x - 1 > \frac{1}{L-1+\varepsilon}$, ossia $x > \frac{L+\varepsilon}{L-1+\varepsilon}$.

Ma chiaramente $\frac{L+\varepsilon}{L+\varepsilon-1} > 1$, e quindi in tutti i punti x , compresi tra 1 e $\frac{L+\varepsilon}{L+\varepsilon-1}$, la disequazione iniziale non é soddisfatta. In altre parole, la risoluzione della disequazione di verifica non ha portato a un intorno di 1.

Dunque, L non puo' nemmeno essere maggiore o uguale a 1, e quindi la conclusione é che il limite cercato non esiste finito.

N.B. Se si vuole mettere in evidenza il fatto, comunque vero, che la funzione data assume valori molto grandi in valore assoluto, possiamo correttamente asserire che:

$$\lim_{x \rightarrow 1} \left| \frac{x}{x-1} \right| = +\infty.$$

L'ultimo esempio trattato fornisce lo spunto per introdurre una nuova definizione, ma solo per funzioni definite su intervalli di \mathbb{R} .

Definizione 4.11 Sia $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione assegnata, e sia x_0 un punto interno ad $[a, b]$. Si dice che L é il *limite destro* (o anche *limite da destra*) di f in x_0 , se, per ogni intorno V di L , esiste un $\delta > 0$ tale che $f(x) \in V$ per ogni $x \in]x_0, x_0 + \delta[$.

Se questo accade, si scrive:

$$\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = L.$$

Analogamente si definisce il *limite da sinistra*, che viene denotato con la scrittura

$$\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x).$$

Ovviamente, nei punti estremi a e b , si puo' fare uno solo dei due limiti *direzionali*.

Usando questa definizione, possiamo dire, in riferimento all'esempio n.5, che si ha:

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x}{x-1} = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x}{x-1} = -\infty$$

A questo punto, é chiaro che, per funzioni definite su intervalli, si puo' dire che esiste il limite in un punto interno x_0 se e solo se il limite da destra e quello da sinistra esistono entrambi e sono uguali (questo vale anche se il limite in questione é $+\infty$, oppure $-\infty$, purché *lo stesso* sia da destra che da sinistra).

4.4 Teoremi sui limiti

Vediamo ora alcuni teoremi, molto elementari, sui limiti: le dimostrazioni sono piuttosto semplici, per cui saranno date in forma concisa, o anche solo accennata.

Tali teoremi sono utili sia sotto l'aspetto teorico, sia sotto quello piu' spiccatamente pratico: lo scopo principale sara' quello di ridurre al minimo indispensabile gli sforzi per trovare il limite, e per effettuare la verifica.

Come gia' detto, supporremo sempre in questo capitolo che le funzioni in gioco siano definite su un sottoinsieme non vuoto $A \subset X$, ove (X, d) é un generico spazio metrico. (Non ci sono sostanziali differenze tra questa impostazione, un pochino astratta, e quella piu' comune nella pratica, in cui $X = \mathbb{R}$: l'unica differenza é che la distanza tra due elementi x, y di X sara' denotata con $d(x, y)$ anziché con $|x - y|$).

Il primo risultato riguarda l'*unicita'* del limite.

Teorema 4.12 *Sia $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione, definita su un insieme non vuoto $A \subset X$, e sia $x_0 \in A'$. Allora, se risulta*

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L_1, \quad \text{e} \quad \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L_2,$$

necessariamente si ha $L_1 = L_2$

Dimostrazione. Per brevitá, supporremo L_1 e L_2 entrambi finiti, lasciando gli altri casi al lettore.

Possiamo procedere per assurdo, supponendo $L_1 \neq L_2$: allora, il numero $\varepsilon = |L_1 - L_2|$ é positivo. A causa del primo limite, in corrispondenza di ε esiste un intorno U di x_0 tale che $|f(x) - L_1| < \varepsilon/3$, non appena $x \in A \cap U$, $x \neq x_0$.

Analogamente, a causa del secondo limite, esiste un intorno U' di x_0 tale che $|f(x) - L_2| < \varepsilon/3$, non appena $x \in A \cap U'$, $x \neq x_0$.

Ora, scegliamo un punto $x \in A \cap U \cap U'$, $x \neq x_0$:

si deve avere $|f(x) - L_1| < \varepsilon/3$ e $|f(x) - L_2| < \varepsilon/3$.

Ma allora, per le proprietà del valore assoluto, troviamo:

$$|L_1 - L_2| \leq |L_1 - f(x)| + |f(x) - L_2| < 2\varepsilon/3 < \varepsilon,$$

il che é assurdo, in quanto già sappiamo che $|L_1 - L_2| = \varepsilon$. \square

Un altro risultato importante riguarda la *permanenza del segno*.

Teorema 4.13 *Sia data una funzione $f : A \rightarrow \mathbb{R}$, e sia x_0 un punto di accumulazione per A . Supponiamo che esista il limite $L = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ e che tale limite sia diverso da 0. Allora esiste un intorno U di x_0 tale che $f(x)$ si mantiene dello stesso segno di L , per ogni $x \in A \cap U$, $x \neq x_0$.*

Dimostrazione Faremo la dimostrazione solo per il caso $L > 0$. Poniamo $\varepsilon = L/2$: per la definizione di limite, c'è un intorno U di x_0 tale che $f(x) \in]L - \varepsilon, L + \varepsilon[$ per ogni $x \in A \cap U$, $x \neq x_0$. Tale intorno é quello cercato: infatti, se $f(x) > L - \varepsilon$, si ha $f(x) > L/2 > 0$. \square .

Un discorso a parte merita invece il comportamento delle *funzioni monotone*, come del resto già si é visto a suo tempo per quanto riguarda le successioni.

Supponiamo che $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ sia monotona (di qualunque genere: crescente, non crescente, decrescente, non decrescente). Allora in *ogni punto* dell'intervallo aperto $]a, b[$ esistono sia il limite da destra che il limite da sinistra di f , e tali limiti sono finiti. Nel punto a esiste (ovviamente) solo il limite da destra, ed é finito, nel punto b esiste solo il limite da sinistra (ed é finito). Il fatto che tali limiti siano tutti finiti dipende dalla *limitatezza* di una tale funzione: infatti, se f é non decrescente, $f(a)$ e $f(b)$ sono rispettivamente il minimo e il massimo valore che f puo' assumere. Qualora f sia invece definita e monotona in un intervallo aperto $]a, b[$, di sicuro avra' limite destro e sinistro (finiti) in tutti i punti interni; esistono anche i limiti in a e b , ma questi possono anche essere infiniti.

Diamo un unico teorema, che comunque fornisce il procedimento base per provare tutte le precedenti asserzioni.

Teorema 4.14 *Sia $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione monotona non decrescente. Allora esiste finito il limite da destra di f in a , e risulta:*

$$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \inf \{f(x) : x > a\}.$$

Dimostrazione Denotiamo con l il numero: $l = \inf \{f(x) : x > a\}$. Essendo $f(a) \leq l \leq f(b)$, é chiaro che l é finito. Per dimostrare l'asserto del teorema, fissiamo $\varepsilon > 0$, e facciamo vedere che esiste un intorno destro di a , ossia un intervallo $]a, a + \delta[$, tale che

$$l - \varepsilon \leq f(x) \leq l + \varepsilon$$

per ogni $x \in]a, a + \delta[$. Ora, é chiaro che, per la definizione di l , necessariamente risulta $f(x) \geq l > l - \varepsilon$, per ogni $x > a$, dunque la relazione che resta da dimostrare é che $f(x) \leq l + \varepsilon$ per x in un opportuno intorno destro di a . Per questo scopo, occorre utilizzare una proprieta' caratteristica dell'estremo inferiore: se $l = \inf \{f(x) : x > a\}$, allora per ogni $\varepsilon > 0$ esiste un elemento $x_0 > a$ tale che $f(x_0) < l + \varepsilon$ (questo porta infatti a dire che l é un minorante per l'insieme in questione, ma $l + \varepsilon$ non lo é, per qualsiasi $\varepsilon > 0$).

Prendiamo dunque tale x_0 , e poniamo $\delta = x_0 - a$: in altri termini, l'intorno destro cercato di a é semplicemente $]a, x_0[$. Infatti, se x appartiene a tale intorno, si ha $f(x) \leq f(x_0) \leq l + \varepsilon$, e questo é proprio quanto si voleva. \square

Non staremo qui a dare tutti i risultati analoghi al teorema 4.14: bastera' segnalare che, nel caso di funzioni monotone crescenti o non decrescenti, definite in un intervallo $[a, b]$, il limite da *destra* in ogni punto interno x_0 coincide con l'estremo inferiore dei valori di $f(x)$, per $x > x_0$ (si noti la disuguaglianza stretta: $x \neq x_0$); il limite da sinistra coincide con il sup dei valori $f(x)$, con $x < x_0$.

Puo' ben accadere che il limite da destra sia *diverso* dal limite da sinistra (e quindi il limite *globale* non esista). Si consideri ad esempio la funzione

$$H(x) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ 1, & x \geq 0 \end{cases} \quad (\text{Funzione di Heaviside})$$

Tale funzione, definita su tutto \mathbb{R} , é monotona non decrescente, e ammette limite in tutti i punti, tranne che in 0. Infatti, se $t > 0$, c'é tutto un intorno di t nel quale f é costantemente uguale a 1, e allora $\lim_{x \rightarrow t} f(x) = \lim_{x \rightarrow t} 1 = 1$, mentre per $t < 0$ per la stessa ragione il limite é 0.

Ma per $t = 0$, il limite da destra é 1 (coincidente con $f(0)$), mentre il limite da sinistra é 0.

Torneremo in seguito su questi aspetti, quando parleremo di continuità (e *discontinuità*).

Ci dedicheremo ora a dedurre alcuni limiti *considerati ovvii*, ma che, come tutto in Matematica, vanno comunque dimostrati. Si tratta dei limiti dei polinomi, delle funzioni razionali, e delle funzioni trigonometriche, logaritmiche, esponenziali, in punti x_0 del loro campo di esistenza: tali funzioni, come vedremo, non *fanno scherzi*, nel senso che il limite é comunque il valore della funzione stessa nel punto x_0 .

Premettiamo un teorema molto tecnico, ma anche piuttosto semplice.

Teorema 4.15 *Siano date due funzioni f e g , entrambe definite su A e a valori in \mathbb{R} . Sia poi x_0 un punto di accumulazione per A . Se esistono i limiti*

$$L_1 = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x), \quad \text{e} \quad L_2 = \lim_{x \rightarrow x_0} g(x),$$

e se tali limiti sono finiti, allora si ha

$$\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) + g(x)) = L_1 + L_2$$

e si ha anche

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)g(x) = L_1 L_2.$$

Se inoltre risulta $L_2 \neq 0$, si ha infine

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{L_1}{L_2}.$$

(Questo teorema spesso si esprime dicendo che *il limite di una somma é la somma dei limiti*, e analogamente per il prodotto e il rapporto, fatte le debite ipotesi).

Dimostrazione Per dimostrare la prima relazione, si fissi un $\varepsilon > 0$. Per ipotesi, esiste un intorno U di x_0 tale che, quando $x \in U \cap A$, $x \neq x_0$, risulta simultaneamente $|f(x) - L_1| < \varepsilon/2$ e $|g(x) - L_2| < \varepsilon/2$. Allora, per tali valori di x , si ha

$$|(f + g)(x) - (L_1 + L_2)| \leq |f(x) - L_1| + |g(x) - L_2| < \varepsilon$$

e questo conclude la verifica. Quanto alla seconda relazione, osserviamo intanto che, scegliendo $\varepsilon = 1$, possiamo determinare un intorno U^* di x_0 tale che $|f(x) - L_1| < 1$ per ogni $x \in U^* \cap A$, $x \neq x_0$. Per tali valori di x , risulta dunque $|f(x)| < |L_1| + 1$. Ora,

si scelga $\varepsilon > 0$ arbitrario. Per ipotesi, esiste un intorno U di x_0 , (intorno che possiamo supporre contenuto in U^*), tale che $|f(x) - L_1| < \frac{\varepsilon}{2(|L_2|+1)}$ e $|g(x) - L_2| < \frac{\varepsilon}{2(|L_1|+1)}$ per ogni $x \in U \cap A$, $x \neq x_0$.

Avremo allora, per tali valori di x :

$$|f(x)g(x) - L_1 L_2| = |f(x)(g(x) - L_2) + L_2(f(x) - L_1)| \leq |f(x)||g(x) - L_2| + |L_2||f(x) - L_1| \leq \varepsilon.$$

Passiamo all'ultima relazione. Grazie alla precedente formula trovata, possiamo limitarci a supporre $f(x) = 1$ per ogni x . Dunque, non dobbiamo far altro che dimostrare che $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{1}{g(x)} = \frac{1}{L_2}$ a patto, naturalmente, che sia $L_2 \neq 0$.

Supporremo, senza perdita di generalità, che sia $L_2 > 0$. Applicando il teorema 4.13, sappiamo che esiste un intorno U^* di x_0 tale che $g(x) > L_2/2$ per ogni $x \in U^* \cap A$, $x \neq x_0$. Fissiamo ora $\varepsilon > 0$: esiste certamente un intorno U di x_0 , (intorno che possiamo supporre contenuto in U^*), tale che $|g(x) - L_2| < \frac{L_2^2 \varepsilon}{2}$, non appena $x \in U \cap A$, $x \neq x_0$. Per tali valori di x , avremo

$$\left| \frac{1}{g(x)} - \frac{1}{L_2} \right| = \frac{|g(x) - L_2|}{g(x)L_2} < 2 \frac{|g(x) - L_2|}{L_2^2} < \varepsilon,$$

e ciò conclude la dimostrazione. \square .

Esempi 4.16 0) Conseguenza facile di tali teoremi è che tutti i polinomi $P(x)$ hanno limite $P(x_0)$ in qualsiasi punto $x_0 \in \mathbb{R}$: basta osservare che il polinomio x tende ovviamente a x_0 , e che ogni *costante* k ha come limite lo stesso valore k in ogni punto; poiché ogni polinomio è somma di prodotti di costanti per la funzione x , e di costanti per potenze di x (a loro volta ottenute come prodotti di x con sé stessa), la conclusione è immediata.

Analogamente, ogni funzione razionale $R(x)$ ha come limite $R(x_0)$ purché x_0 non annulli il denominatore di R .

1) $\lim_{x \rightarrow 0} \sin x = 0$.

Dato che la funzione $\sin x$ è dispari, basta valutare il limite da destra. Inoltre, visto che il limite si fa in 0, possiamo restringere la funzione all'intervallo $[0, \pi/2[$: abbiamo così il vantaggio di lavorare con una funzione monotona crescente, e quindi, per il teorema 4.14

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \sin x = \inf \{ \sin x : 0 < x < \pi/2 \}.$$

Chiaramente, si ha $\sin x > 0$ per ogni $x \in]0, \pi/2[$, e quindi l'estremo inferiore in questione é certamente non negativo. Ma noi vogliamo dimostrare che esso é proprio 0. A tale scopo, osserviamo che si ha $\sin x < x$ per ogni $x \in]0, \pi/2[$, e che ovviamente $\inf\{x : x > 0\} = 0$. Pertanto, $0 \leq \lim_{x \rightarrow 0^+} \sin x = \inf\{\sin x : 0 < x < \pi/2\} \leq \inf\{x : x > 0\} = 0$.

$$2) \lim_{x \rightarrow \pi/2} \cos x = 0.$$

Ancora per simmetria, notiamo che é sufficiente il solo limite da sinistra, e, ancora una volta, possiamo restringere la funzione all'intervallo $]0, \pi/2[$. Stavolta, la funzione é decrescente, quindi:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \pi/2^-} \cos x &= \inf\{\cos x : 0 < x < \pi/2\} = \\ \inf\{\sin(\pi/2 - x) : 0 < x < \pi/2\} &= \inf\{\sin u : 0 < u < \pi/2\} = 0. \end{aligned}$$

(Abbiamo denotato con u la quantità $\pi/2 - x$, che comunque varia in $]0, \pi/2[...$)

3) Con procedimenti simili, si puo' dimostrare anche che

$$\lim_{x \rightarrow \pi/2} \sin x = \lim_{x \rightarrow 0} \cos x = 1.$$

$$4) \lim_{x \rightarrow x_0} \sin x = \sin x_0 \text{ (qualunque sia } x_0 \in \mathbb{R}).$$

Infatti, ponendo $x - x_0 = u$, avremo $x = x_0 + u$, e chiaramente, se $x \rightarrow x_0$ si ha $u \rightarrow 0$.

Dunque:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \sin x = \lim_{u \rightarrow 0} \sin(x_0 + u) = \lim_{u \rightarrow 0} (\sin x_0 \cos u + \cos x_0 \sin u) = \sin x_0$$

(Qui, abbiamo adoperato i limiti dei punti precedenti, e il teorema 4.15).

Va da sé che risultati analoghi sussistono per la funzione *coseno*, *tangente* etc., purché il punto x_0 faccia comunque parte dell'insieme di definizione della funzione in questione.

$$5) \lim_{x \rightarrow 0} e^x = 1.$$

Qui, oltre al fatto che e^x é una funzione monotona, e quindi che il limite esiste comunque, per calcolarlo basta ricordare che $\lim_{n \rightarrow +\infty} e^{\frac{1}{n}} = 1$.

$$6) \lim_{x \rightarrow 1} \log x = 0.$$

Questo risultato potrebbe esser dedotto dai teoremi sulle funzioni continue (Capitolo

5). Ma é interessante vedere come lo si puo' ricavare *a mano*.

Intanto, essendo $\log \frac{1}{x} = -\log x$ (per $x > 0$, beninteso), se si prova che il limite da destra é 0, la sostituzione $u = \frac{1}{x}$ porta a ricavare che anche il limite da sinistra é 0.

Inoltre, data la monotonia della funzione in questione, é

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \log x = \inf\{\log x : x > 1\}.$$

Ora, per definizione stessa di *logaritmo*, si ha $\log x > 0$ per ogni $x > 1$, quindi l'estremo inferiore cercato é certamente non-negativo.

Ora, facciamo vedere che esso é proprio 0. Infatti, fissato un numero positivo r qualunque (piccolo a piacere), faremo vedere che esiste almeno un numero $x > 1$, tale che $\log x < r$. (Cio' sara' sufficiente per i nostri scopi). Dunque, fissiamo $r > 0$: certamente, risulta $e^{r/2} > 1$, e allora possiamo scegliere $x = e^{r/2}$: é infatti $x > 1$ e $\log x = r/2 < r$.

$$7) \lim_{x \rightarrow x_0} e^x = e^{x_0},$$

(qualunque sia $x_0 \in \mathbb{R}$). Infatti, si ha

$$e^x = e^{(x-x_0)+x_0} = e^{x_0} e^{x-x_0}.$$

A questo punto, poiché $u = x - x_0$ tende a 0, basta applicare il limite (5).

Risultati analoghi sussistono anche per la funzione *logaritmo* (ovviamente, con $x_0 > 0$), e per esponenziali e logaritmi di qualunque base (purché positiva).

Il teorema 4.15 puo', in parte, essere esteso anche al caso in cui uno dei due limiti sia infinito. Non riportiamo enunciati precisi, né tantomeno dimostrazioni: cercheremo di rendere abbastanza chiaramente l'idea, con formule sintetiche.

a) Se $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty$ e g si mantiene limitata in un intorno di x_0 , allora

$$\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) + g(x)) = +\infty$$

(Stessa cosa se il limite di f é $-\infty$. Osserviamo che per tali risultati non si richiede che g abbia limite: ad esempio, $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sin x + x^3) = +\infty$)

b) Se $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty$ e $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = +\infty$ allora

$$\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) + g(x)) = +\infty$$

(Risultato analogo se i due limiti sono entrambi $-\infty$. Non si puo' dedurre niente, se f tende a $+\infty$ e g a $-\infty$: $\infty - \infty$ é una *forma indeterminata*).

c) Se $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty$ e se esiste una costante positiva k tale che $g(x) > k$ in un intorno di x_0 , allora

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)g(x) = +\infty.$$

Per il teorema della permanenza del segno, la condizione imposta su g é soddisfatta, non appena g abbia limite positivo (strettamente) o $+\infty$. Non si puo' dire nulla, invece, se $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = 0$: infatti, anche $\infty \cdot 0$ é una *forma indeterminata*.

d) Se $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = 0$, e se esiste un intorno di x_0 nel quale $1/f$ si mantiene limitata, e nel quale il rapporto $\frac{f(x)}{g(x)}$ si mantiene di segno costantemente positivo, (ad eccezione del singolo punto x_0), allora

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = +\infty.$$

Qui, la condizione imposta su $1/f$ vuol dire che f non puo' avvicinarsi a 0: la forma $\frac{0}{0}$ é ancora indeterminata, e infatti di solito essa da' luogo a molti limiti di notevole interesse; basti pensare che, quando studieremo le *derivate*, ci accorgeremo che *ogni* derivata é in effetti il risultato di una forma indeterminata $\frac{0}{0}$.

Un esempio interessante puo' essere il limite seguente:

$$\lim_{x \rightarrow \pi/4} \frac{\cos 4x}{|\sin x - \cos x|} = -\infty.$$

Infatti, é ben vero che $f(x) = \cos 4x$ puo' avvicinarsi a 0, ma non in un intorno di $\pi/4$: ad esempio, per $x \in]\frac{3}{16}\pi, \frac{5}{16}\pi[$, $\cos 4x$ si mantiene minore di $-\frac{\sqrt{2}}{2}$, e il rapporto $\frac{\cos 4x}{|\sin x - \cos x|}$ si mantiene negativo (si esclude il punto $\pi/4$, al solito).

Altri risultati utili, ai fini della determinazione di certi limiti, sono i seguenti.

e) Se $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0$, e se g si mantiene *limitata* in un intorno di x_0 , allora

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)g(x) = 0$$

Ad esempio, $\lim_{x \rightarrow 0} x \sin \frac{1}{x} = 0$

f) (Teorema dei *tre carabinieri*): Se f, h, g sono tre funzioni, con $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$ almeno in un intorno del punto x_0 , e se f e h ammettono lo stesso limite l per $x \rightarrow x_0$, (anche se $l = \infty$), allora anche g ammette limite, e il limite di g é ancora l .

In effetti, il punto **(e)** é un caso particolare di **(f)**.

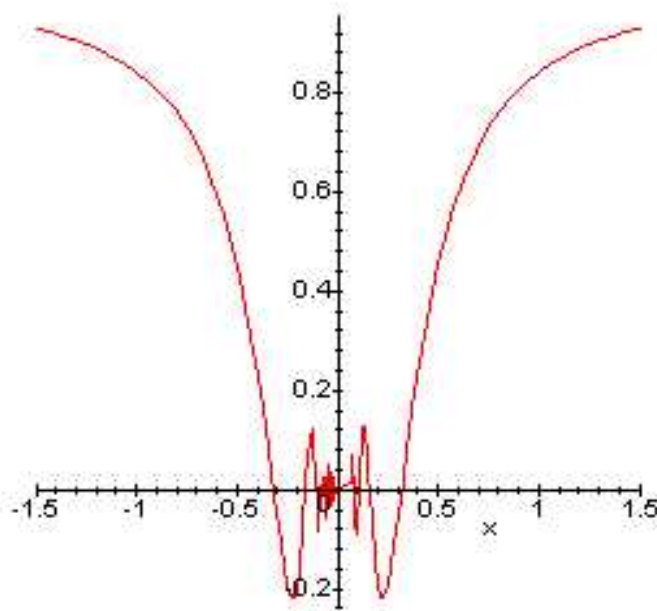
Un esempio concreto é il limite:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 \cos \frac{1}{x} = +\infty :$$

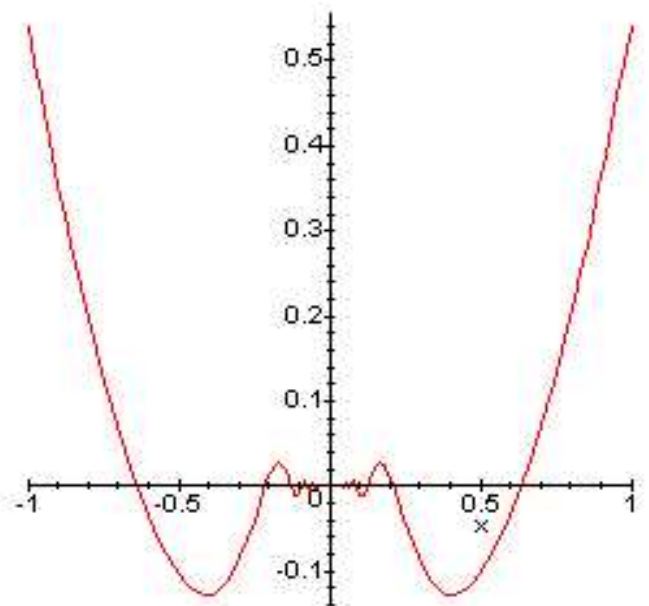
infatti, si puo' scegliere $h(x) = x^2$ e $f(x) = \frac{x^2}{2}$, poiche' risulta

$$x^2 \geq x^2 \cos \frac{1}{x} \geq \frac{x^2}{2}$$

per $x > \frac{3}{\pi}$.



$$y = x \sin(1/x)$$



$$y = x^2 \cos(1/x)$$

Vedremo in seguito altri *trucchi* per risolvere determinati limiti: ma in fondo, ad eccezione di alcune forme indeterminate ben precise, che vedremo nella prossima sezione, l'uso delle regole precedenti e *un po' di buon senso* permettono spesso di pervenire rapidamente alla conclusione esatta.

4.5 Limiti notevoli

Come piu' volte abbiamo accennato, spesso s'incontrano dei limiti *diabolici*, per i quali occorrono tecniche particolari, ma la loro utilita' é tale che non é possibile ignorarli. Presenteremo qui solo alcuni dei piu' importanti, anche perché questi poi si possono utilizzare per risolverne molti altri.

Cominceremo con quello piu' famoso, cioè

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x}.$$

É facile vedere che esso si presenta come una *forma indeterminata* $\frac{0}{0}$, e quindi bisogna ricorrere a qualche stratagemma particolare.

Una prima idea consiste nell'osservare che la funzione data é *pari*, e di segno positivo, almeno per $x \in [-\pi/2, \pi/2]$ (0 escluso, ovviamente).

Dunque, se esiste il limite da destra in 0, anche il limite da sinistra esisterá, ed avrà lo stesso valore.

Supponiamo dunque senz'altro $x > 0$, e osserviamo che, per $0 < x < \pi/2$, risulta $\sin x < x$ (per motivi geometrici). D'altra parte, sempre per motivi geometrici, in quello stesso intervallo risulta anche $x < \tan x$. Avremo quindi:

$$\frac{\sin x}{\tan x} \leq \frac{\sin x}{x} \leq 1$$

per $x \in]0, \pi/2$. Essendo $\frac{\sin x}{\tan x} = \cos x$, ed essendo poi $\lim_{x \rightarrow 0} \cos x = 1$, basta applicare il teorema dei tre carabinieri, per dedurre:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

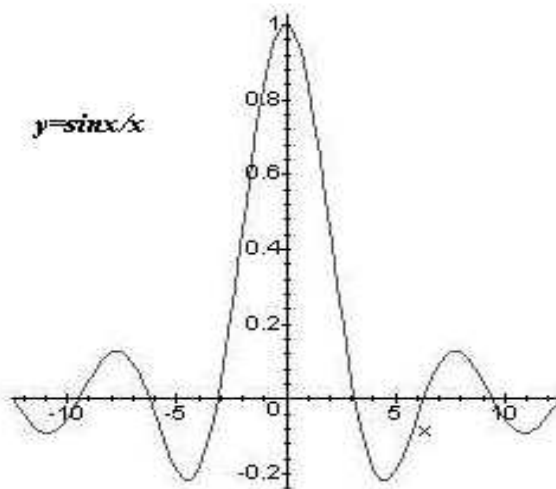
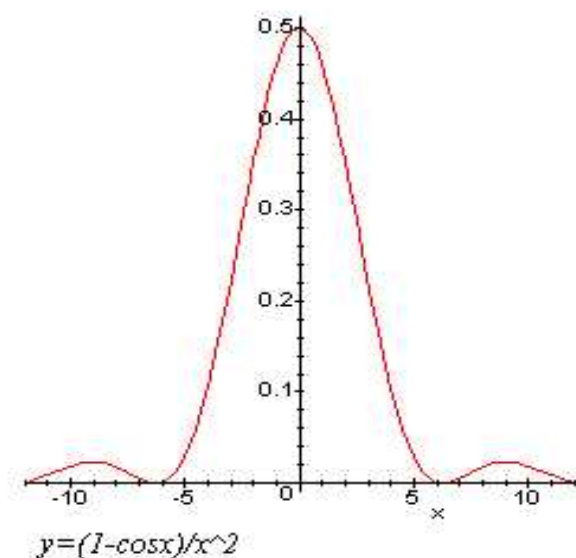
.

Una prima applicazione di questo limite si ha nel calcolo di:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x \sin \frac{1}{x}.$$

La posizione $y = \frac{1}{x}$ trasforma questo limite come segue:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x \sin \frac{1}{x} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{1}{y} \sin y = 1$$



e il calcolo é concluso.

Un'interessante conseguenza di questo limite notevole é un *altro* limite notevole:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{1}{2}.$$

Infatti, ricordando le *formule di bisezione*, abbiamo: $1 - \cos x = 2 \sin^2 \frac{x}{2}$, e quindi

$$\frac{1 - \cos x}{x^2} = 2 \left(\frac{\sin \frac{x}{2}}{x} \right)^2 = \frac{1}{2} \left(\frac{\sin \frac{x}{2}}{\frac{x}{2}} \right)^2.$$

A questo punto, é chiaro che x tende a 0 se e solo se $\frac{x}{2}$ tende a 0, e dunque

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin \frac{x}{2}}{\frac{x}{2}} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin t}{t} = 1.$$

Ovviamente, allora,

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin \frac{x}{2}}{\frac{x}{2}} \right)^2 = 1$$

e finalmente

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin \frac{x}{2}}{\frac{x}{2}} \right)^2 = \frac{1}{2}.$$

Il numero e ha gia' fatto la sua comparsa, nel capitolo delle successioni, e lo abbiamo ritrovato anche in questo capitolo, ad esempio come limite, per $x \rightarrow +\infty$, della funzione $f(x) = (1 + \frac{1}{x})^x$. Vedremo ora che da questo hanno origine due altri limiti di notevole

importanza. Uno é il seguente:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log_a(x+1)}{x} = \log_a e,$$

valido per $a > 0$. Per dimostrare tale limite, si ponga: $u = \frac{1}{x}$. Chiaramente, x tende a 0 da destra se e solo se u tende a $+\infty$. La posizione fatta porta allora a:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\log_a(x+1)}{x} = \lim_{u \rightarrow +\infty} u \log_a\left(1 + \frac{1}{u}\right) = \lim_{u \rightarrow +\infty} \log_a\left(1 + \frac{1}{u}\right)^u = \log_a(e)$$

Analogamente, si prova che anche il limite da sinistra é lo stesso.

L'altro limite notevole che possiamo segnalare qui é:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - 1}{x} = \log a$$

valido per $a > 0$, e il logaritmo é in base e (manco a dirlo).

La dimostrazione procede anche qui per *sostituzione*: si pone cioè $a^x - 1 = t$, da cui $x = \log_a(t+1)$. Dunque,

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - 1}{x} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t}{\log_a(t+1)} = \frac{1}{\log_a e} = \log_e a.$$

(Nel penultimo passaggio abbiamo adoperato il limite ottenuto in precedenza).

Un'altra forma indeterminata, a volte sottovalutata, é 1^∞ : ad esempio, qual é il limite

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} (\cos x)^{\frac{1}{x}}?$$

Potrebbe venire la *tentazione* di sbrigarsela in questo modo:

"Dato che $\cos x$ tende a 1, e dato che 1 elevato a *qualunque cosa* fa sempre 1, il limite cercato é 1.

Niente di piu' sbagliato. Se questo ragionamento fosse giusto, allora dovremmo concludere che $e = 1$! Infatti, anche il limite che fornisce il numero e si presenta come una forma 1^∞ .

Come si fa, allora? Supponiamo che f e g siano due funzioni reali, e che $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 1$, $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = +\infty$: se vogliamo studiare il limite $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)^{g(x)}$, si puo' osservare che f é senz'altro positiva, almeno in un intorno di x_0 (vedi 4.13), e scrivere $f(x)^{g(x)} =$

$e^{g(x) \log f(x)}$. Il problema si riconduce quindi al calcolo del limite dell' *esponente*, cioè $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) \log f(x)$, che si presenta nella forma $0 \cdot \infty$, ma a questo punto abbiamo piu' speranze di giungere alla conclusione. Se il limite L dell'esponente esiste, allora il limite cercato é e^L , nel caso L sia finito, é invece 0, nel caso $L = -\infty$, e infine $+\infty$ nel caso $L = +\infty$.

Ad esempio, il limite

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} (1+x)^{\frac{1}{3x}}$$

si riconduce a

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{3x} \log(1+x) = \frac{1}{3}$$

(v. limiti notevoli precedenti). Dunque,

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} (1+x)^{\frac{1}{3x}} = e^{\frac{1}{3}}.$$

Piu' interessante é questo limite:

$$\lim_{x \rightarrow 0} (1 + \sin x)^{\frac{1}{x}}.$$

Con la solita trasformazione, ci riconduciamo a:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} \log(1 + \sin x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\log(1 + \sin x)}{\sin x} \frac{\sin x}{x}.$$

Ora, $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$, e

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log(1 + \sin x)}{\sin x} = \lim_{u \rightarrow 0} \frac{\log(1 + u)}{u} = 1$$

dunque

$$\lim_{x \rightarrow 0} (1 + \sin x)^{\frac{1}{x}} = e^1 = e.$$

Infine, *divertiamoci* con questo limite:

$$\lim_{x \rightarrow 0} (\cos x)^{\log x}.$$

La forma indeterminata é sempre quella, poiché $\log x$ tende a $-\infty$. Il trucco solito ci riconduce al limite:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \log x \log(\cos x) = \lim_{x \rightarrow 0} \log x \log(1 + (\cos x - 1)) = \lim_{x \rightarrow 0} \log x \frac{\log(1 + (\cos x - 1))}{\cos x - 1} (\cos x - 1)$$

Ora, nell'ultimo membro, il fattore centrale tende a 1, come applicazione del limite notevole

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log(1+x)}{x}.$$

Possiamo dunque scrivere:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \log x \log(\cos x) = \lim_{x \rightarrow 0} \log x (\cos x - 1) = \lim_{x \rightarrow 0} \log x \frac{(\cos x - 1)}{x^2} x^2.$$

Di nuovo, il fattore centrale ha per limite $-\frac{1}{2}$ e quindi tutto si riduce a:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \log x \log(\cos x) = -\frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow 0} x^2 \log x.$$

Ma sappiamo già che

$$\lim_{x \rightarrow 0} x^\alpha \log x = 0$$

per qualunque numero positivo α , in quanto esso si riduce a

$$\lim_{y \rightarrow +\infty} \frac{\log y}{y^\alpha} = 0$$

con la sostituzione $x = \frac{1}{y}$ (Ricordiamo che $\log \frac{1}{y} = -\log y$, per $y > 0$).

Dunque, risulta

$$\lim_{x \rightarrow 0} \log x \log(\cos x) = 0$$

e quindi

$$\lim_{x \rightarrow 0} (\cos x)^{\log x} = 1.$$

4.6 Esempi vari

Vedremo qui alcuni esempi di limiti, più o meno impegnativi, a mo' di riepilogo.

$$1) \quad \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x} - 1}{x\sqrt{x} - 1}.$$

Si tratta di una forma indeterminata del tipo $\frac{0}{0}$: se le espressioni a numeratore e denominatore fossero polinomi, potremmo dividere entrambi per $x - 1$ e si eliminerebbe l'indeterminatezza.

La presenza della radice non ci deve scoraggiare: basta porre $t = \sqrt{x}$, e il limite diventa:

$$\lim_{t \rightarrow 1} \frac{t - 1}{t^3 - 1} = \lim_{t \rightarrow 1} \frac{1}{t^2 + t + 1} = \frac{1}{3}.$$

$$2) \quad \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{2x - \pi}.$$

Ancora, siamo dinanzi a una forma $\frac{0}{0}$, e dobbiamo ricondurci a qualche limite notevole. Per esempio, possiamo porre $t = 2x - \pi$, e quindi, ricavando $x = \frac{t+\pi}{2}$, il limite si riporta nella forma:

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\cos \frac{t+\pi}{2}}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1 + \cos(t + \pi)}}{t\sqrt{2}} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{\sqrt{1 - \cos t}}{t} = \frac{1}{2}$$

avendo applicato la formula di bisezione del coseno, e il limite notevole $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{1 - \cos t}{t^2} = \frac{1}{2}$.

$$3) \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 + x} - x \log x).$$

Questa é una forma $\infty - \infty$, apparentemente assai ostica. Mettendo in evidenza x , si ricava:

$$\sqrt{x^2 + x} - x \log x = x \left(\sqrt{1 + \frac{1}{x}} - \log x \right).$$

Ora, l'espressione tra parentesi tende a $-\infty$, chiaramente, e quindi il limite cercato vale $-\infty$, come si vede facilmente applicando i risultati già studiati sui limiti dei prodotti.

$$4) \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} (\log(x + 1) - \log x).$$

Basta usare le proprietà dei logaritmi, per riconoscere che il limite dato si riduce a

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \log \frac{x + 1}{x} = 0.$$

Il limite precedente può essere adoperato per risolverne uno più difficile:

$$5) \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\log(x + 1)}{\log x}.$$

Un *ignobile trucco* riconduce alla ragione anche questo: aggiungendo e sottraendo 1 il limite diventa:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\log(x + 1) - \log x) + 1}{\log x} = 1.$$

(Infatti, il primo addendo é nella forma $\frac{0}{\infty} = 0 \cdot 0$ e quindi tende a 0 senza problemi).

$$6) \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\log(e^x + 2^x)}{x}.$$

Convienne mettere in evidenza e^x nell'argomento del logaritmo:

$$\log(e^x + 2^x) = x + \log\left(1 + \left(\frac{2}{e}\right)^x\right).$$

Poiché $\log\left(1 + \left(\frac{2}{e}\right)^x\right)$ tende chiaramente a $\log 1 = 0$, é facile adesso dedurre che il limite cercato vale 1.

$$7) \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} (\log(e^x + 2^x) - x)$$

Si potrebbe ancora usare l'accorgimento precedente; tuttavia, suggeriamo un procedimento diverso, per maggiore varietà: possiamo scrivere

$$(\log(e^x + 2^x) - x) = \log(e^x + 2^x) - \log e^x = \log \frac{e^x + 2^x}{e^x} :$$

stavolta, l'argomento del logaritmo tende a 1, e quindi il limite cercato é $\log 1 = 0$.

Osserviamo che gli ultimi due limiti trovati sono il procedimento tipico della ricerca del cosiddetto *asintoto obliquo*: infatti, se una funzione f ammette limite infinito per x che tende a $+\infty$ (o a $-\infty$, in analogia), potrebbe esistere una retta *obliqua* $y = mx + p$, alla quale la f si *appoggia*, per cosi' dire, quando x tende a $+\infty$. Piu' precisamente, si vuole che risulti

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - (mx + p)) = 0.$$

Per sapere se tale retta esiste, e conoscerne i parametri m e p , si valutano, in successione, due limiti. Il primo é

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}.$$

Se tale limite non esiste, oppure é 0 oppure é infinito, l'asintoto obliquo di sicuro non esiste, e la ricerca termina li'. Se invece il limite esiste, diverso da 0 e da infinito, esso viene denotato con m , e si procede al limite successivo, cioé

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - mx).$$

Se tale limite non esiste, oppure é infinito, l'asintoto obliquo di sicuro non esiste. Altrimenti, detto p tale limite (anche $p = 0$ é accettabile), allora l'asintoto obliquo esiste e ha equazione $y = mx + p$.

Pertanto, gli ultimi due limiti effettuati ci dicono che la funzione $f(x) = \log(e^x + 2^x)$ ha asintoto obliquo $y = x$ quando x tende a $+\infty$.

Domanda: si puo' parlare di asintoto per tale funzione, quando x tende a $-\infty$? Vediamo. Intanto

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \log(e^x + 2^x) = -\infty$$

perché l'argomento del logaritmo stavolta tende a 0. Tentiamo allora la ricerca di m :

$$8) \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\log(e^x + 2^x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x + \log(1 + \frac{2^x}{e^x})}{x}.$$

Dato che x tende a $-\infty$, il rapporto $\frac{2^x}{e^x}$ é tende a $+\infty$: ponendo $a = \frac{e}{2}$, si puo' scrivere $\frac{2^x}{e^x} = a^{|x|}$, e ora il discorso é abbastanza chiaro. Il limite che ci interessa si scrive allora:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-|x| + \log(1 + a^{|x|})}{-|x|} = \lim_{x \rightarrow -\infty} (1 - \frac{\log(1 + a^{|x|})}{|x|}).$$

Concentriamoci ora sul limite

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\log(1 + a^{|x|})}{|x|} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\log(1 + a^{|x|})}{(\log_a e) \log a^{|x|}}.$$

Ora, poiché $a^{|x|}$ tende a $+\infty$, il limite calcolato al n.5) ci permette di dedurre che

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\log(1 + a^{|x|})}{|x|} = \frac{1}{\log_a e} = \log a$$

e pertanto

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\log(e^x + 2^x)}{x} = 1 - \log a = \log \frac{e}{a} = \log 2.$$

Dunque l'asintoto, se esiste, ha coefficiente angolare $m = \log 2$.

Per trovare il parametro p (se esiste), occorre fare ora il limite:

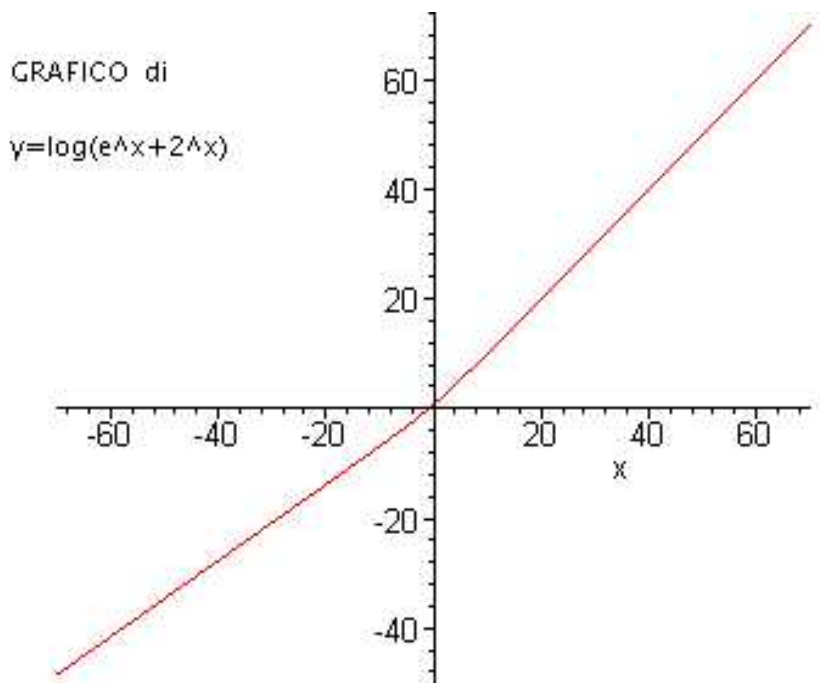
$$9) \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} (\log(e^x + 2^x) - x \log 2).$$

Stavolta, i calcoli sono sorprendentemente semplici: poiché $x \log 2 = \log 2^x$, il limite del punto 9) diviene

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \log \frac{e^x + 2^x}{2^x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \log(1 + \frac{e^x}{2^x}) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \log(1 + a^x) = \log 1 = 0$$

essendo al solito $a > 1$ e x tendente a $-\infty$.

Dunque, l'asintoto obliquo esiste anche per x che tende a $-\infty$, ed é la retta $y = x \log 2$.



Concludiamo con un altro paio di limiti interessanti:

$$10) \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} x^{\frac{1}{x}}$$

e anche

$$11) \quad \lim_{x \rightarrow 0} x^x.$$

Con la posizione $x^u = e^{u \log x}$, il primo limite si riconduce a:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\log x}{x} = 0,$$

per un risultato oramai acquisito. Dunque

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x^{\frac{1}{x}} = 1.$$

Con la posizione $y = \frac{1}{x}$, e utilizzando il limite appena calcolato, si ha anche

$$\lim_{x \rightarrow 0} x \log x = 0, \quad \text{e} \quad \lim_{x \rightarrow 0} x^x = 1.$$

4.7 Infinitesimi e Infiniti

Nei paragrafi precedenti, e anche nel Capitolo 3, abbiamo incontrato e risolto molte forme indeterminate del tipo $\frac{0}{0}$ o $\frac{\infty}{\infty}$: alcune di queste si presentano in un certo senso come *confronto* tra due funzioni che tendono entrambe a 0, oppure entrambe a $+\infty$. L'idea di *confronto* si traduce qui in termini di *rapporto* tra le due funzioni, e in un certo senso possiamo vedere che *vince* il confronto quella che, per così dire, va a limite più *velocemente*. Ad esempio, se consideriamo il rapporto $\frac{\log x}{x}$, per x che tende a $+\infty$, la funzione più grande è x , che sta a denominatore, e quindi essa *comanda*, nel senso che il limite del rapporto $\frac{\log x}{x}$ (che è 0) è lo stesso che si avrebbe se il logaritmo non ci fosse, e ad esempio al suo posto ci fosse una costante.

Analogamente, se studiamo il limite

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt{x}}{\sin x},$$

questo deriva dal confronto di \sqrt{x} e $\sin x$ che tendono entrambe a 0 : chi *comanda*?

Basta ricordarsi il limite notevole $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$, per capire che $\sin x$ è un po' più *veloce* di \sqrt{x} :

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt{x}}{\sin x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt{x}}{x} \frac{x}{\sin x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt{x}}{x} = +\infty,$$

esattamente come se al posto di \sqrt{x} ci fosse 1.

Ora, formalizzeremo più precisamente questi discorsi, e stabiliremo un teorema ("Principio di Sostituzione) che permetterà di *sbrigare* in fretta numerose forme indeterminate.

Definizioni 4.17 Data una funzione $f : A \rightarrow \mathbb{R}$, e dato un punto $x_0 \in A'$, si dice che f è un *infinitesimo* per $x \rightarrow x_0$ se $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0$. Diremo invece che f è un *infinito* in x_0 se $\lim_{x \rightarrow x_0} |f(x)| = +\infty$.

(Attenzione, f può essere un *infinito* anche se il limite di $f(x)$ per $x \rightarrow x_0$ non esiste).

Dati due infinitesimi, f e g , per $x \rightarrow x_0$, diremo che f é di *ordine superiore* rispetto a g se $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$.

Analogamente, dati due infiniti, f e g , per $x \rightarrow x_0$, diremo che f é un infinito di *ordine superiore* rispetto a g se $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{g(x)}{f(x)} = 0$.

Diremo che due infinitesimi f e g sono *dello stesso ordine* se $\lim_{x \rightarrow x_0} \left| \frac{f(x)}{g(x)} \right|$ é un numero reale, diverso sia da 0 che da ∞ .

Analogamente, se f e g sono due infiniti, diremo che f e g sono *dello stesso ordine* se $\lim_{x \rightarrow x_0} \left| \frac{f(x)}{g(x)} \right|$ é un numero reale, diverso sia da 0 che da ∞ .

Allora, le funzioni $\sin x$ e x sono infinitesimi dello stesso ordine, per $x \rightarrow 0$. Ancora, $1 - \cos x$ é infinitesimo, per x che tende a 0, dello stesso ordine di x^2 , e quindi di ordine superiore rispetto a x . Invece, $\log x$ é un infinito di ordine inferiore rispetto a qualsiasi potenza, e anche qualsiasi radice, di x . Dunque anche $\log(1+x)$ é infinito di ordine inferiore rispetto a x , per x che tende a $+\infty$. Tuttavia, $\log(1+x)$ e x sono *infinitesimi dello stesso ordine*, per $x \rightarrow 0$. La funzione e^x é un infinito (per $x \rightarrow +\infty$) di ordine superiore rispetto a qualsiasi potenza di x , ed é anche un *infinitesimo* per $x \rightarrow -\infty$ di ordine superiore rispetto a qualsiasi potenza di $\frac{1}{x}$.

Vediamo quindi che molti confronti ci possono venire in aiuto, nel calcolare vari limiti, che si presentano come forme indeterminate.

Per esempio,

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^{10} \log x}{2^x} = 0$$

in quanto ad esempio il numeratore é un infinito di ordine inferiore rispetto a x^{11} , mentre il denominatore é senz'altro di ordine superiore rispetto a x^{11} .

Definizioni 4.18 Data una funzione $f : A \rightarrow \mathbb{R}$, che sia un infinitesimo per $x \rightarrow x_0$, con x_0 numero *reale*, diremo che f é un infinitesimo *di ordine* α (qui, $\alpha > 0$) se f é dello stesso ordine di $(x - x_0)^\alpha$. Nel caso $x_0 = +\infty$, f é *di ordine* α se essa é infinitesimo dello stesso ordine di $\frac{1}{x^\alpha}$.

Analogamente, se f é un infinito in x_0 , diremo che *l'ordine* di infinito é α se f é dello stesso ordine di $\frac{1}{(x - x_0)^\alpha}$, nel caso x_0 sia finito, e dello stesso ordine di $|x|^\alpha$ se $x_0 = \infty$.

Siamo ora pronti per l'annunciato Principio di Sostituzione.

Teorema 4.19 *Siano date 4 funzioni, f, g, h, k , definite in A e a valori in \mathbb{R} , e supponiamo che tali funzioni siano tutti infinitesimi, per $x \rightarrow x_0$, ove $x_0 \in A'$. Supponiamo infine che f sia di ordine superiore rispetto a g , e che h sia di ordine superiore rispetto a k . Allora, si ha:*

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) + g(x)}{h(x) + k(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{g(x)}{k(x)},$$

non appena uno dei due limiti esista.

(In altre parole, nel valutare un limite come quello descritto nell'enunciato del teorema, si possono *trascurare* gli infinitesimi di ordine superiore, in quanto *troppo piccoli* rispetto agli altri).

Dimostrazione. Non c'è praticamente nulla di originale da fare: partendo dal rapporto $\frac{f(x)+g(x)}{h(x)+k(x)}$, si divida e si moltiplichi il numeratore per $g(x)$, e il denominatore per $k(x)$: si otterrà

$$\frac{f(x) + g(x)}{h(x) + k(x)} = \frac{g(x)}{k(x)} \frac{1 + \frac{f(x)}{g(x)}}{1 + \frac{h(x)}{k(x)}}$$

e l'ultimo rapporto tende a 1, per definizione di *infinitesimo di ordine superiore*. \square

Un teorema analogo sussiste per quanto riguarda gli infiniti.

Teorema 4.20 *Siano date 4 funzioni, f, g, h, k , definite in A e a valori in \mathbb{R} , e supponiamo che tali funzioni siano tutti infiniti, per $x \rightarrow x_0$, ove $x_0 \in A'$. Supponiamo infine che f sia di ordine inferiore rispetto a g , e che h sia di ordine inferiore rispetto a k . Allora, si ha:*

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) + g(x)}{h(x) + k(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{g(x)}{k(x)},$$

non appena uno dei due limiti esista.

(Anche qui, la filosofia è la stessa: si possono trascurare gli infiniti di ordine inferiore, in quanto *troppo piccoli* rispetto alle altre funzioni). Non riportiamo la dimostrazione, in quanto perfettamente analoga a quella di 4.19.

A proposito di quest'ultimo teorema, possiamo estendere la sua validità anche al caso di funzioni che non siano necessariamente infiniti: ad esempio, se per caso f avesse limite

finito per $x \rightarrow x_0$, a maggior ragione essa sarà trascurabile rispetto a g , purché almeno g sia un infinito.

Ad esempio, possiamo facilmente dedurre che:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^8 + (1.5)^x + \log x}{2^x + 1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(1.5)^x}{2^x} = 0$$

avendo eliminato a numeratore x^8 e $\log x$, che sono di ordine inferiore rispetto all'esponenziale $(1.5)^x$, e a denominatore la costante 1, chiaramente trascurabile di fronte all'infinito 2^x .

Ancora:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3 + x^2 \sin x + \log(1+x)}{1 - \cos x + 2x} = \frac{1}{2}$$

in quanto a numeratore x^3 e $x^2 \sin x$ sono entrambi infinitesimi di ordine 3, mentre $\log(1+x)$ è di ordine 1, e $1 - \cos x$ risulta infinitesimo di ordine 2.

Dunque, questo metodo è piuttosto potente, quando a numeratore e denominatore vi siano *somme* di infinitesimi (o infiniti), di cui *si conosca bene* l'ordine. Qualche volta si può avere qualche brutta sorpresa, se si sottovaluta l'ordine di certi infinitesimi, poco noti.

Ad esempio, si consideri il limite seguente:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\tan x - \sin x + x^2}{x^2 \sqrt{x}}.$$

Chiaramente, il denominatore è infinitesimo di ordine 2.5, mentre a numeratore abbiamo x^2 , di ordine 2, $\tan x$ e $-\sin x$, entrambi di ordine 1. La *filosofia* del principio di sostituzione suggerirebbe di trascurare x^2 a numeratore, e valutare il limite $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x - \sin x}{x^2 \sqrt{x}}$.

A questo punto, *se i conti si fanno bene*, si scopre che quest'ultimo limite è 0 (vedremo tra un attimo perché): di conseguenza, applicando 4.19, troveremmo

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\tan x - \sin x + x^2}{x^2 \sqrt{x}} = 0$$

il che è **sbagliato**.

Perché, sbagliato? Perché quello che abbiamo trascurato a numeratore *non era* di ordine superiore rispetto a ciò che restava: infatti, la funzione $\tan x - \sin x$ è un infinitesimo **di**

ordine 3 :

$$\frac{\tan x - \sin x}{x^3} = \frac{\sin x}{x} \frac{1 - \cos x}{\cos x} \frac{1}{x^2} = \frac{\sin x}{x} \frac{1 - \cos x}{x^2} \frac{1}{\cos x}$$

e quindi, considerato che i primi due fattori all'ultimo membro sono limiti notevoli, che danno $\frac{1}{2}$, e che l'ultimo fattore tende a 1, ne consegue che $\tan x - \sin x$ é di ordine superiore rispetto a x^2 . Dunque, non era x^2 l'infinitesimo da trascurare, bensì $\tan x - \sin x$, e di conseguenza

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\tan x - \sin x + x^2}{x^2 \sqrt{x}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^2}{x^2 \sqrt{x}} = +\infty.$$

Capitolo 5

TEOREMI SULLE FUNZIONI CONTINUE

5.1 Introduzione

In questo capitolo delle nostre dispense daremo alcuni importanti teoremi sulle funzioni continue, di una variabile reale, allo scopo di motivare, in maniera rigorosa, alcune proprietà intuitive di tali funzioni, e mostrare alcune notevoli conseguenze di tali proprietà.

Un primo importante risultato riguarda la proprietà dei *valori intermedi*, dalla quale è spesso facile dedurre l'esistenza di soluzioni per equazioni tecnicamente molto difficili da trattare. Conseguenze di tale teorema sono: il teorema degli zeri, il teorema del punto fisso, e (sotto altra forma), alcuni metodi di approssimazione per le soluzioni di equazioni, non risolvibili in termini elementari.

Un altro teorema importante, che tratteremo qui, è il *teorema di Weierstrass*: esso permette di dimostrare l'esistenza di massimi e minimi, sotto certe ipotesi, e quindi, unito al teorema precedente, può fornire decisive indicazioni su quello che è il codominio della funzione stessa.

Come applicazione dei vari teoremi qui riportati si hanno infine proprietà di continuità per la *funzione inversa*, nel caso questa esista.

Ma, per iniziare, è opportuno chiarire il concetto di *funzione continua*, soprattutto nel

caso di funzioni reali, definite in sottoinsiemi di \mathbb{R}^n .

Definizione 5.1 Data una funzione $f : A \rightarrow \mathbb{R}$, con $A \subset \mathbb{R}^n$, e dato un punto $x_0 \in A$, diremo che f é *continua in* x_0 se vale la proprieta' seguente:

Per ogni intorno V di $f(x_0)$ esiste un intorno U di x_0 tale che

$$f(x) \in V \quad \text{per ogni } x \in U \cap A.$$

E' evidente che, nel caso $x_0 \in A' \cap A$, la condizione di continuita' ora data equivale a dire che $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$, ma precisiamo che per la continuita' si richiede *sempre* che x_0 *appartenga* ad A . Non e' richiesto invece, in generale, che x_0 sia punto di accumulazione per A : infatti, se x_0 é un *punto isolato* per A , qualsiasi funzione definita in A risulta *automaticamente* continua in x_0 . (Infatti, in tal caso per verificare la definizione di continuita', basta prendere, come intorno U di x_0 , un qualsiasi intorno che verifichi $U \cap A = \{x_0\}$).

Diremo poi che f é *continua in* A se f é continua in ogni punto $x_0 \in A$. In genere, dicendo che una data funzione f é *continua* (tout court), s'intende che essa é continua in tutto il suo insieme di definizione.

Esempi di funzioni continue, definite su sottoinsiemi di \mathbb{R} , sono: tutti i polinomi, le funzioni razionali (ovviamente, definite e continue laddove il denominatore non sia nullo), le funzioni trigonometriche (per quanto riguarda tangente e cotangente, vanno comunque esclusi i punti ove si annulla il denominatore), le funzioni logaritmiche (per $x > 0$), le funzioni esponenziali.

Inoltre, notiamo che la somma di due funzioni continue é continua, il prodotto di due funzioni continue é continuo, e la composizione di funzioni continue é ancora continua: tutto cio' deriva da analoghi teoremi sui limiti. Quindi, operando somme, prodotti, etc. tra funzioni polinomiali, esponenziali, logaritmiche etc., si ottengono sempre funzioni continue (laddove definite, beninteso).

5.2 Classificazione delle discontinuita'

Da quanto finora emerso, sembra che tutte le funzioni finora studiate siano continue (perlomeno, laddove siano definite tramite una *formula* matematica).

Ma allora, quali sarebbero le funzioni *discontinue*? Intanto, notiamo che una funzione f \acute{e} discontinua (cio \acute{e} , *non continua*) in A , non appena esista un punto x_0 di A nel quale f non risulti continua. Per quanto detto in precedenza sui punti isolati, un tal punto deve necessariamente essere di accumulazione per A , e quindi una discontinuit \acute{a} in tale punto si puo' avere in piu' modi: puo' accadere che $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ non esista, oppure che esso esista, ma sia *diverso* da $f(x_0)$. Ad esempio, se poniamo

$$f(x) = \begin{cases} \sin \frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

tale funzione \acute{e} definita in tutto \mathbb{R} , ma non \acute{e} continua in 0, in quanto \acute{e} facile vedere che essa non ha limite per $x \rightarrow 0$.

Un'altra situazione si ha in questo caso:

$$g(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

La g ammette limite in 0 (\acute{e} un limite notevole, e vale 1), ma $g(0)$ \acute{e} uguale a 0, dunque 0 \acute{e} un punto di discontinuit \acute{a} , per g .

In casi come questo, si dice anche che x_0 \acute{e} un punto di *discontinuit \acute{a} eliminabile*: infatti, basta definire diversamente $g(0)$, ponendo $g(0) = 1$, per recuperare la continuit \acute{a} .

Altre situazioni in cui il limite non esiste, come ben sappiamo, si danno quando il limite da destra \acute{e} diverso dal limite da sinistra. Queste situazioni sono formalizzate attraverso una definizione.

Definizioni 5.2 Sia $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione reale, e sia x_0 un punto *interno* all'intervallo $[a, b]$. Si dice che f presenta in x_0 una discontinuit \acute{a} di *prima specie* se esistono, finiti, il limite da destra e quello da sinistra, della f in x_0 , ma tali limiti sono diversi.

L'esempio tipico \acute{e} la funzione di Heaviside, gia' incontrata:

$$H(x) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ 1, & x \geq 0 \end{cases}$$

In questo caso, il punto di discontinuit \acute{a} di prima specie \acute{e} 0, essendo $\lim_{x \rightarrow 0^+} H(x) = 1 \neq \lim_{x \rightarrow 0^-} H(x) = 0$.

In tale situazione, essendo $H(0) = \lim_{x \rightarrow 0^+} H(x) = 1$, si dice anche che H é *continua da destra* in 0. (Si parlerebbe invece di *continuità da sinistra*, se fosse $H(0) = 0$, mentre, se $H(0)$ fosse diverso da 0 e da 1, non ci sarebbe alcun tipo di continuità).

Qualora uno dei due limiti laterali non esista, o sia infinito, si parla di *discontinuità di seconda specie*.

E' quello che accade ad esempio con la funzione

$$h(x) = \begin{cases} e^{\frac{1}{x}}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

In questo caso, il punto critico é 0, e si tratta di *discontinuità di seconda specie*, in quanto il limite da destra é $+\infty$, mentre quello da sinistra é 0. Anche in questo caso, si può parlare di *continuità da sinistra* in 0.

Per concludere questa parte preliminare, facciamo osservare che, tradizionalmente, il concetto di *discontinuità* sarebbe leggermente più ampio di quanto finora descritto: si usa infatti considerare come punti di *discontinuità*, per una funzione f , anche quei punti che fanno parte di A' , ma non di A : ad esempio, si suole dire che la funzione $f(x) = \frac{1}{x}$ é *discontinua* in 0. Cio' ha un chiaro significato, perché in 0 la f non può essere continua (in qualsiasi modo si voglia eventualmente *definire* $f(0)$).

Tuttavia, considerazioni del genere potrebbero indurre a sostenere che la medesima funzione $f(x) = \frac{1}{x}$ non é una funzione continua. Cio' é errato, in quanto la definizione di *continuità* richiede semplicemente che f sia continua in tutto il suo insieme di definizione: per cui, se l'insieme di definizione *non comprende* 0, non si deve pretendere la *continuità* anche in 0!

In conclusione, per quanto strano possa apparire, la funzione $f(x) = \frac{1}{x}$ (e ovviamente tanti casi simili), sono funzioni *continue* (nel loro insieme di definizione, s'intende), anche se hanno dei punti di *discontinuità*. Dunque, dire che una funzione ha punti di *discontinuità* non significa necessariamente *negare* che la funzione stessa sia continua.

Questa *sottigliezza* non é poi tanto capziosa: proprio nei teoremi che seguono, vedremo elencate delle proprietà di cui godono tutte le funzioni continue, anche quelle definite su

intervalli o semirette aperte, e sarebbe **errato** sostenere che tali teoremi non si possono applicare ad esempio a $\log x$, perché $\log x$ é discontinua in 0!

5.3 La proprieta' dei valori intermedi

In questo paragrafo, studieremo alcune proprieta' delle funzioni continue, collegate con l'idea *cartesiana* di continuita': una funzione é continua se *il suo grafico puo' essere tracciato senza mai sollevare la matita dal foglio...* Ovviamente, questa pseudo-definizione non tiene conto delle moderne tecnologie elettroniche.

I risultati di questo e dei paragrafi successivi andrebbero inquadrati in un assetto topologico ben piu' ampio: questo permetterebbe di comprenderne appieno la portata e la generalita', ma renderebbe molto delicati i concetti da trattare e anche molto difficili alcune dimostrazioni. Ci limiteremo invece a una trattazione elementare, allo scopo di semplificare le dimostrazioni, o almeno di renderle piu' intuitive, e daremo solo dei cenni alle formulazioni piu' generali.

Definizione 5.3 Dato un insieme $A \subset \mathbb{R}$, diremo che esso é un *connesso* se, presi comunque due elementi a e b in A , con $a \leq b$, risulta $[a, b] \subset A$.

Pertanto, risultano *connessi* tutti gli intervalli veri e propri (chiusi, aperti, semiaperti), tutte le semirette (aperte o chiuse), tutti gli insiemi puntiformi (cioé del tipo $\{x\}$, $x \in \mathbb{R}$), e anche \mathbb{R} stesso. (Altri insiemi connessi in \mathbb{R} non ve ne sono).

Definizione 5.4 Dato un insieme connesso $A \subset \mathbb{R}$, e una funzione $f : A \rightarrow \mathbb{R}$, diremo che f ha la proprieta' dei *valori intermedi* se, per ogni scelta di $a \in A$ e di $b \in A$, con $f(a) < f(b)$, il codominio di $f|_{[a,b]}$ contiene tutto l'intervallo $[f(a), f(b)]$. In altre parole, deve accadere che, comunque si scelga un valore $y \in [f(a), f(b)]$, esiste $x \in [a, b]$ tale che $f(x) = y$.

La definizione 5.4 comporta che, se una funzione f é definita su un connesso A , e ha la proprieta' dei valori intermedi, allora il codominio di f é un connesso. Il viceversa é falso:

esistono molte funzioni che hanno il codominio connesso, ma non hanno la proprietà dei valori intermedi; un esempio è la funzione $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definita da:

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{se } x < 0, \\ x, & \text{se } x \geq 0. \end{cases}$$

Il codominio di f è tutta la semiretta $[0, +\infty[$, ma f non ha la proprietà dei valori intermedi: se scegliamo $a = -1, b = 0$, non esiste nessun $x \in]a, b[$ tale che $f(x) = \frac{1}{2}$, benché $\frac{1}{2}$ sia un valore intermedio tra $f(a) = 1$ e $f(b) = 0$. Il prossimo teorema stabilisce una condizione sufficiente per ottenere la proprietà dei valori intermedi.

Teorema 5.5 *Sia $A \subset \mathbb{R}$ un insieme connesso, e $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione continua in A . Allora f ha la proprietà dei valori intermedi.*

Dimostrazione Supponiamo che a e b siano due elementi di A , tali che $f(a) < f(b)$; per fissare le idee, supponiamo anche che sia $a < b$. Scegliamo arbitrariamente $y \in]f(a), f(b)[$, e mostriamo che esiste $x \in]a, b[$ tale che $f(x) = y$. Poniamo

$$H = \{t \in [a, b] : f(t) < y\}.$$

Certamente $a \in H$ mentre $b \in H^c$. Sia poi $x = \sup H$, e proviamo che x è il punto richiesto, ossia che $f(x) = y$. Intanto, proviamo che si ha $f(x) \leq y$: infatti, fissato comunque un intero $n > 0$, esiste $x_n \in H$, tale che $|x_n - x| < \frac{1}{n}$, per la proprietà di sup. Allora, per la continuità di f in x , si ha

$$f(x) = \lim_n f(x_n) \leq y.$$

Questo prova anche che non può essere $x = b$, poiché $f(b) > y$. Allora, per tutti i punti $z \in]x, b]$ si deve avere $f(z) \geq y$. Perciò, avremo anche

$$f(x) = \lim_{z \rightarrow x^+} f(z) \geq y.$$

Le due disuguaglianze trovate provano l'asserto. \square

Vediamo subito alcuni corollari.

Corollario 5.6 *Sia $A \subset \mathbb{R}$ un insieme connesso, e $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione continua in A . Se risulta $f(a) < 0$ per qualche punto $a \in A$ e anche $f(b) > 0$ per qualche $b \in A$, allora esiste un elemento $x \in A$, compreso fra a e b , tale che $f(x) = 0$.*

Dimostrazione. E' ovvia: in virtú del teorema 5.5, tutti i valori compresi fra $f(a)$ e $f(b)$ devono essere nel codominio di f , e quindi anche 0. \square

Corollario 5.7 *Ogni polinomio di grado dispari ha almeno una radice reale in \mathbb{R} .*

Dimostrazione. Ogni polinomio di grado dispari é una funzione continua $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, definita su un connesso. Ora, supponendo che il coefficiente di grado massimo sia positivo, avremo

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$

e

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty.$$

Pertanto, per il teorema della permanenza del segno, esiste senz'altro un numero $a < 0$ tale che $f(a) < 0$ e anche un numero $b > 0$ tale che $f(b) > 0$. Applicando allora il teorema 5.6, si ha l'asserto. \square

Il corollario 5.7 ci mostra un'importante conseguenza dei teoremi precedenti: anche se $f(x)$ ha un'espressione complicata, "basta poco per poter affermare che l'equazione $f(x) = 0$ ammette almeno una soluzione.

Oltre ai polinomi, possono entrare in gioco funzioni ben piú difficili da trattare: ad esempio, l'equazione $x + \log x = 0$, oppure $\sin x + e^x = 0$, non sono risolvibili in termini elementari, però possiamo dimostrare che esse ammettono delle soluzioni; infatti, la funzione $x + \log x$ é negativa nel punto $x = \frac{1}{e}$ (in quanto $\frac{1}{e} < 1$), e positiva nel punto $x = 1$: di conseguenza, l'equazione $x + \log x = 0$ ammette una soluzione, compresa fra $\frac{1}{e}$ e 1. Quanto all'equazione $\sin x + e^x = 0$, essa ammette una soluzione compresa fra $-3\pi/2$ e 0, per motivi analoghi.

Un'altra importante conseguenza dei teoremi precedenti riguarda il problema del *punto fisso*: data una funzione $f : [a, b] \rightarrow [a, b]$, esiste un punto $x \in [a, b]$ tale che $f(x) = x$? Anche qui, la continuitá permette di rispondere affermativamente.

Corollario 5.8 *Data una funzione continua $f : [a, b] \rightarrow [a, b]$, esiste un punto $x \in [a, b]$ tale che $f(x) = x$.*

Dimostrazione. Poniamo $g(x) = f(x) - x$, $\forall x \in [a, b]$. Allora g é una funzione continua, definita in un connesso. Poiché $f(a) \geq a$ e $f(b) \leq b$, si ha di conseguenza:

$$g(a) \geq 0, \text{ e } g(b) \leq 0$$

Ora, se $g(a) = 0$, oppure $g(b) = 0$, il punto x cercato coincide con a , oppure con b , e abbiamo concluso. Altrimenti, si avrà $g(a) > 0$ e $g(b) < 0$. Quindi, applicando a g il teorema 5.6, possiamo dire che esiste $x \in]a, b[$ tale che $g(x) = 0$, ossia $f(x) = x$. \square

I teoremi precedenti, tuttavia, non forniscono un metodo per trovare la soluzione dell'equazione $f(x) = 0$, oppure $f(x) = x$ (ammesso che esista). In generale, non esiste una "formula risolutiva, ma si può individuare qualche procedimento per approssimare la soluzione a meno di un errore piccolo a piacere. Riportiamo qui un metodo, detto "metodo delle bisezioni", che ha una buona applicabilità.

Procedimento 5.9 Supponiamo che $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ sia una funzione continua, e che si abbia $f(a) > 0$, $f(b) < 0$. Sia ora c il punto medio di $[a, b]$, ossia $c = \frac{a+b}{2}$. Se $f(c) = 0$, ci fermiamo, avendo trovato la soluzione. Altrimenti, si avrà $f(c) > 0$ oppure $f(c) < 0$. Nel primo caso, poniamo $a_1 = c$, e $b_1 = b$; nel secondo caso, poniamo invece $a_1 = a$ e $b_1 = c$. In entrambi i casi, avremo individuato un intervallo $[a_1, b_1]$ che soddisfa alle ipotesi del teorema degli zeri (5.6), e che ha ampiezza $\frac{b-a}{2}$. Dunque, certamente una soluzione dell'equazione $f(x) = 0$ si trova in $[a_1, b_1]$. Ora, rifacciamo lo stesso ragionamento, in $[a_1, b_1]$, prendendo $c_1 = \frac{a_1+b_1}{2}$, e andando a vedere il segno di $f(c_1)$: se $f(c_1) = 0$, abbiamo concluso, altrimenti porremo $[a_2, b_2] = [a_1, c_1]$, nel caso in cui $f(c_1)$ sia concorde con $f(b_1)$, e porremo invece $[a_2, b_2] = [c_1, b_1]$ qualora il segno di $f(c_1)$ sia lo stesso di $f(a_1)$. In tal modo, l'intervallo $[a_2, b_2]$ soddisferá alle ipotesi di 5.6, e avrà ampiezza $\frac{b-a}{2^2}$. Procedendo ancora così, costruiremo una successione di intervalli $([a_n, b_n])$, decrescente, di ampiezza $\frac{b-a}{2^n}$, in ciascuno dei quali c'è una soluzione dell'equazione $f(x) = 0$ (a meno che non si trovi a un certo punto che $f(c_n) = 0$, nel qual caso terminiamo lí): si ha sempre infatti $f(a_n) > 0$ e $f(b_n) < 0$. Ora, poiché la successione (a_n) é crescente, essa ammette limite: sia $x = \lim_{n \rightarrow +\infty} a_n$. Analogamente, la successione (b_n) ammette limite, e tale limite é lo stesso numero x (infatti, $(b_n - a_n)$ tende a 0). Poiché f é continua in x , si deve avere

$$f(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} f(a_n) \geq 0$$

e anche

$$f(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} f(b_n) \leq 0.$$

Ne consegue che $f(x) = 0$, e quindi il punto x é una soluzione cercata. Poiché le successioni (a_n) e (b_n) tendono a x , scegliendo n sufficientemente grande, si può approssimare il valore di x sia con a_n che con b_n (o anche con c_n): l'errore che si commette é inferiore a $\frac{b-a}{2^n}$.

Il metodo delle bisezioni può essere applicato, ad esempio, per trovare una buona approssimazione della radice dell'equazione

$$x + \log x = 0 \tag{5.1}$$

Iniziamo scegliendo $a_1 = \frac{1}{e}$, e $b_1 = 1$. Ponendo $f(x) = x + \log x$, risulta $f(a_1) < 0$ e $f(b_1) > 0$. Denotando con c_1 il punto di mezzo, si ottiene $f(c_1) = f(0.684) = 0.304 > 0$, dunque $a_2 = a_1$ e $b_2 = c_1$. Ora, abbiamo $c_2 = 0.5259$, con $f(c_2) = -.1167 < 0$, e allora porremo $a_3 = c_2$, e $b_3 = b_2$. Ora, troveremo $c_3 = 0.6049$ con $f(c_3) = .1022 > 0$. Dunque, $a_4 = a_3$, mentre $b_4 = c_3$. Procedendo in questo modo, otteniamo i seguenti valori per i punti c_n :

$$c_4 = .5654, \ c_5 = .58517, \ c_6 = .5753, \ c_7 = .57035, \ c_8 = .5678863368, \ c_9 = .56665,$$

$$c_{10} = .56726, \ c_{11} = .56696, \ c_{12} = .5671, \ c_{13} = .56719, \ c_{14} = .56715, \ c_{15} = .56713,$$

$$c_{16} = .56714, \ c_{17} = .567138, \ c_{18} = .567141, \ c_{19} = .567142, \ c_{20} = .567143, \ c_{21} = .567143...$$

Siamo ormai praticamente giunti alla soluzione cercata. Se andiamo a calcolare $f(c_{21})$, troveremo un numero del tipo 0,0000007....

5.4 Il teorema di Weierstrass

Ora, ci occuperemo del teorema di *Weierstrass*, che garantisce l'esistenza del massimo e del minimo per una funzione continua, purché definita su un intervallo *chiuso e limitato*.

La tecnica della dimostrazione richiamerà quella del procedimento 5.9, anche se, stavolta, non si tratta di un corollario dei teoremi precedenti.

Teorema 5.10 *Sia $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ una generica funzione continua. Allora f ammette in tale intervallo il massimo e il minimo valore; cioè esistono in $[a, b]$ due punti, α e β , tali che $f(\alpha) \leq f(x) \leq f(\beta)$ per ogni $x \in [a, b]$.*

Dimostrazione. Proveremo soltanto l'esistenza del *massimo*, in quanto per il minimo si potrà usare lo stesso procedimento. Per semplificare le notazioni, per ogni intervallo $J \subset [a, b]$ denoteremo con $M(J)$ l'estremo superiore della f in J , ossia $M(J) = \sup_{x \in J} f(x)$. (Ovviamente, nel caso f fosse superiormente illimitata in J , sarà $M(J) = +\infty$...Ma nel corso della dimostrazione vedremo che ciò non può verificarsi): per cominciare, denotiamo con M il numero $M([a, b])$ (finito o $+\infty$). Un'altra utile notazione è la seguente: dati due numeri reali, x e y , scriviamo $x \vee y$ per intendere il più grande dei due (similmente, la scrittura $x \wedge y$ denota il più piccolo). Tale notazione viene usata con ovvio significato anche se uno dei due numeri (o entrambi) è infinito. Ora, poniamo $J^s = [a, \frac{a+b}{2}]$, e $J^d = [\frac{a+b}{2}, b]$. E' chiaro che $M = M(J^s) \vee M(J^d)$. Se risulta $M = M(J^s)$, porremo $J_1 = J^s$; altrimenti, porremo $J_1 = J^d$. Se chiamiamo con a_1 e b_1 gli estremi di J_1 , e denotiamo con c_1 il punto medio di J_1 , possiamo definire J_1^s e J_1^d come gli intervalli $J_1^s = [a_1, c_1]$, $J_1^d = [c_1, b_1]$. Ancora, è $M = M(J_1) = M(J_1^s) \vee M(J_1^d)$. Di nuovo, se $M = M(J_1^s)$, porremo $J_2 = J_1^s$, altrimenti porremo $J_2 = J_1^d$. In questo modo, J_2 è un intervallo di ampiezza $\frac{b-a}{2^2}$, tale che $M = M(J_2)$. Procedendo così, troveremo una successione decrescente di intervalli (J_n) , $J_n = [a_n, b_n]$, con $b_n - a_n = \frac{b-a}{2^n}$, e tali che $M = M(J_n)$. Poiché la successione (a_n) è crescente, essa avrà un limite, che denotiamo con β . Anche la successione (b_n) , essendo decrescente, ammette limite, e tale limite è lo stesso numero β , poiché $b_n - a_n$ tende a 0. Ora, f è continua in β , e quindi essa ammette limite $f(\beta)$ in tale punto. Allora, esiste un $\delta > 0$ tale che $|f(x) - f(\beta)| < 1$ per $x \in [\beta - \delta, \beta + \delta]$ e pertanto f è limitata in $[\beta - \delta, \beta + \delta]$. Poiché $a_n \rightarrow \beta$, e $b_n \rightarrow \beta$, necessariamente $J_n \subset [\beta - \delta, \beta + \delta]$ definitivamente, e allora

$$M = M(J_n) \leq M([\beta - \delta, \beta + \delta]) < +\infty.$$

Questo dimostra intanto che f é limitata superiormente in $[a, b]$. Proviamo ora che $M = f(\beta)$.

Per le proprietà di estremo superiore, si può affermare che, per ogni $n \in \mathbb{N}$, esiste un punto $t_n \in J_n$, tale che $f(t_n) > M(J_n) - \frac{1}{2^n} = M - \frac{1}{2^n}$. Ora, essendo $a_n \leq t_n \leq b_n$, per il teorema dei carabinieri si ha che $t_n \rightarrow \beta$, e allora, sempre per la continuità di f in β , si ha

$$M \geq f(\beta) = \lim_{n \rightarrow +\infty} f(t_n) \geq \lim_{n \rightarrow +\infty} (M - \frac{1}{2^n}) = M.$$

Dunque, $f(\beta)$ é il massimo valore della f in $[a, b]$. \square

Sfruttando l'asserto del teorema 5.5 e del teorema 5.10, si può caratterizzare abbastanza precisamente il *codominio* di una funzione continua $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$.

Corollario 5.11 *Data una funzione continua $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, il codominio di f é un intervallo chiuso $[c, d]$ (eventualmente degenerare in un singolo punto).*

Dimostrazione Per il teorema di Weierstrass (5.10), il codominio di f é un insieme limitato. Per il teorema 5.5, possiamo dire che tale codominio é allora un intervallo (aperto, semi- aperto, o chiuso). Ma, ancora grazie a 5.10, tale insieme deve avere minimo e massimo elemento, e quindi non può esser altro che un intervallo chiuso (eventualmente degenerare: se f é costante, il codominio é costituito da un singolo punto). \square

Concludiamo questo paragrafo con un accenno al *teorema di Heine*, che fornisce, sotto certe ipotesi, un'interpretazione diversa della continuità'. Premettiamo una definizione.

Definizione 5.12 *Sia $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione, definita in uno spazio metrico A . Diciamo che f é uniformemente continua se, per ogni $\varepsilon > 0$, esiste un $\delta > 0$ tale che valga l'implicazione*

$$d(u, v) < \delta \Rightarrow |f(u) - f(v)| < \varepsilon$$

per u, v in A .

E' facile vedere che ogni funzione uniformemente continua é anche continua, in tutti i punti di A . Ma la continuità' uniforme é una condizione piu' forte: ad esempio, la funzione

$f(x) = x^2$ non é uniformemente continua, su \mathbb{R} , infatti i punti $u_n = n, v_n = n + \frac{1}{n}$ sono a distanza sempre piu' piccola, ma $|f(v_n) - f(u_n)| \geq 2$ per ogni n .

Diamo ora l'enunciato del teorema di Heine.

Teorema 5.13 *Sia $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione continua. Se A é un sottoinsieme chiuso e limitato di \mathbb{R}^n , allora f é uniformemente continua.*

Dunque, ogni funzione continua $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ é uniformemente continua. Quindi, anche la funzione $x \rightarrow x^2$ é uniformemente continua, purché ristretta a qualsiasi intervallo limitato.

Ancora, la funzione $g :]0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ definita da $g(x) = \frac{1}{x}$ é continua, ma non uniformemente continua: infatti, i punti $u_n = \frac{1}{n}, v_n = \frac{1}{2n}$ sono a distanza sempre piu' piccola, ma addirittura $|g(u_n) - g(v_n)|$ tende a $+\infty$!

5.5 Funzioni inverse

L'ultimo risultato che tratteremo qui riguarda la continuità della *funzione inversa*, nel caso questa esista.

Preliminarmente, osserviamo che, se $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ é una funzione continua, essa é iniettiva se e solo se é strettamente monotona. Infatti, é evidente che la stretta monotonia implica l'iniettività (anche se f non é continua).

Quanto al viceversa, se f é continua ma non monotona, si possono determinare 3 punti in $[a, b]$, diciamo x, y, z , nei quali risulti: $x < y < z$, e $f(x) < f(y) > f(z)$ (oppure: $f(x) > f(y) < f(z)$: ma non tratteremo questo caso, che é perfettamente analogo all'altro.) Ora, supponendo che sia $f(x) < f(z)$, nell'intervallo $]x, y[$ esiste un punto t , tale che $f(t) = f(z)$, per il teorema 5.5, e questo implica che f non é iniettiva (un discorso simile si può fare, se invece si avesse $f(z) < f(x)$). Dunque, se f é continua, e iniettiva, essa necessariamente é strettamente monotona.

Un'altra osservazione che ci sara' utile é la seguente: se $g : [c, d] \rightarrow \mathbb{R}$ é una funzione monotona (ad es. crescente), e il suo codominio é un intervallo, allora f é continua. Infatti, se $y \in]c, d[$ fosse un punto di discontinuità per g , il codominio di g non potrebbe contenere

l'intervallo che ha per estremi il limite da sinistra e quello da destra della g in y ; analogo ragionamento si può ripetere se $y = c$ oppure $y = d$.

Possiamo ora stabilire il teorema di continuità per le funzioni inverse.

Teorema 5.14 *Sia $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione continua e iniettiva. Denotato con $[c, d]$ il codominio di f , la funzione inversa $f^{-1} : [c, d] \rightarrow [a, b]$ è continua.*

Dimostrazione. In virtù del corollario 5.11, il codominio di f è un intervallo chiuso $[c, d]$, sicuramente non degenerare (poiché f non è costante). Inoltre, per quanto visto in precedenza, f , e quindi anche f^{-1} , sono strettamente monotone (le due funzioni sono monotone nello stesso senso).

Allora f^{-1} è continua, dato che il suo codominio è tutto l'intervallo $[a, b]$ (v. ultima osservazione precedente). \square

Il teorema 5.14 permette di trattare senza troppi problemi funzioni come $\arcsin x$, oppure $\arctg x$, ma anche le inverse di funzioni meno note, come l'inversa di $\varphi(x) = x + e^x \dots$

Esempio 5.15 *Si voglia calcolare il limite*

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\arctg x - \frac{\pi}{4}}{x - 1}$$

Si vede subito che, grazie alla continuità della funzione *arcotangente*, siamo in presenza di una forma indeterminata del tipo $\frac{0}{0}$, e che questa può essere risolta cambiando variabile, ossia ponendo $\arctg x = t$: il limite diventa allora:

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\arctg x - \frac{\pi}{4}}{x - 1} = \lim_{t \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{t - \frac{\pi}{4}}{\tg t - 1}.$$

Ponendo ora $u = t - \frac{\pi}{4}$, e applicando le formule di addizione della trigonometria, avremo

$$\lim_{t \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{t - \frac{\pi}{4}}{\tg t - 1} = \lim_{u \rightarrow 0} \frac{u(\cos u - \sin u)}{2 \sin u} = \frac{1}{2}$$

in virtù del limite notevole:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1.$$

Capitolo 6

SERIE

6.1 Generalità

Il concetto di *serie* in Matematica si introduce allo scopo di dare un senso all'idea di - sommare infiniti numeri; a prima vista, l'argomento appare piuttosto tecnico, e anche difficile, ma le applicazioni sono straordinariamente vaste e a volte conducono a risultati sorprendenti.

Tanto per dare un esempio significativo, ricordiamo un celebre problema di Filosofia classica: il paradosso di Achille e la tartaruga.

Il problema si puo' formulare come segue: Achille piú veloce viene sfidato a una gara di corsa da una tartaruga, notevolmente piú lenta di lui; per fissar le idee, supponiamo che la velocità di Achille sia di 10m/sec, e quella della tartaruga sia di 0.1 m/sec. L'unica concessione che la tartaruga chiede é di poter partire con 10 m di vantaggio. Il paradosso vorrebbe che Achille, partendo 10 m piu' indietro, non possa *mai* raggiungere l'animale: infatti, egli impiegherà 1 secondo a coprire i 10 metri iniziali, ma nel frattempo la tartaruga avrà percorso 0.1 metri, e quindi sarà ancora davanti a lui. Achille impiegherà pochissimo tempo per percorrere questi 0.1 metri, ma intanto la tartaruga avrà fatto un altro piccolissimo percorso, e quindi sarà ancora davanti a lui... E questo si puo' (almeno in teoria) proseguire all'infinito. Il paradosso é generato dal fatto che, seguendo questo ragionamento, si presume che i piccolissimi intervalli di tempo impiegati ogni volta da Achille, sommati

insieme, diano un tempo infinito, e quindi il pié veloce non raggiunga mai la lenta bestiola.

Ma proviamo a calcolare questi minimi intervalli di tempo: il primo, come abbiamo visto, é 1 sec. Il secondo intervallo sarà 0.01 sec.: é infatti questo il tempo che gli occorre per fare 0.1 metri. In 0.01 secondi, la tartaruga ha intanto percorso 0.001 metri, e allora il terzo intervallo di tempo sarà 0.0001 sec. Dunque, se indichiamo con t_n il generico intervallo di tempo, avremo: $t_n = (\frac{1}{100})^{n-1}$, $n=1,2,\dots$

Sommando i vari t_n , si ha:

$$\sum t_n = 1 + \frac{1}{100} + \frac{1}{10000} + \dots = 1.01010101\dots$$

per definizione stessa del numero reale periodico 1.010101...

Quindi, *non é vero* che il tempo complessivo impiegato da Achille sia infinito: espresso in secondi, tale tempo é meno di 1.02.

E' ora giunto il momento di dare qualche definizione precisa.

Definizione 6.1 Data una successione (a_n) in \mathbb{R} , si chiama *serie* associata a tale successione, e si denota con $\sum a_n$, la seguente successione (s_n) :

$$s_n = a_0 + \dots + a_n,$$

per ogni $n = 0, 1, \dots$

I termini s_n vengono anche detti *somme parziali*, o *ridotte* della successione data (a_n) .

In contrapposizione, il termine a_n é detto *termine generale* della serie.

Si puo' facilmente notare che la successione (s_n) é definita per ricorrenza:

$$s_0 := a_0, \quad s_{n+1} = s_n + a_{n+1},$$

per $n > 0$.

Ad esempio, se si ha $a_n = n$ per ogni n , la somma parziale $s_n = a_0 + a_1 + \dots + a_n$ é data da: $s_n = 0 + 1 + 2 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$.

(Si vedano le formule provate per induzione, nel Cap.3) Chiaramente, la successione (s_n) tende a $+\infty$.

Ancora, se $a_n = 10^{-n}$ per $n = 0, 1, \dots$, allora si ha: $s_0 = a_0 = 1$; $s_1 = 1 + 0.1 = 1.1$; $s_2 = 1.11$; $s_3 = 1.111$, etc.

In quest'ultimo caso, possiamo vedere facilmente che la successione s_n ha come limite il numero (periodico) $1.1111\dots = \frac{10}{9}$. Infatti, $\frac{10}{9} - s_n \leq 10^{-n}$ per ogni n .

Un ultimo esempio, apparentemente innocuo, é il seguente: $a_n = (-1)^n, n = 0, 1, 2, \dots$

Avremo allora: $s_0 = 1, s_1 = 0, s_2 = 1, s_3 = 0$, etc.

Vediamo quindi che s_n questa volta non ammette limite: la cosa può sembrare strana, perché, sommando gli a_n , si potrebbe essere tentati di *raggrupparli* a due a due, ottenendo $\sum a_n = (1 - 1) + (1 - 1) + (1 - 1) \dots$ con la prevedibile conclusione (errata) che la somma complessiva sia nulla.

Perché *errata*? Perché un *bastian contrario* potrebbe *divertirsi* a sommare così: $\sum a_n = 1 + (-1 + 1) + (-1 + 1) + (-1 + 1) + \dots$ con l'altrettanto prevedibile (e sbagliata) conclusione che la somma totale sia 1.

Da quanto abbiamo visto, data una serie $\sum a_n$, la successione (s_n) può avere diversi comportamenti. La prossima definizione classifica le serie, a seconda di tale comportamento.

Definizione 6.2 Data una serie $\sum a_n$, essa viene detta *convergente* se la successione (s_n) ammette limite finito, S . In tal caso, il numero S é detto la *somma* della serie, e si scrive anche: $\sum a_n = S$.

Qualora invece (s_n) tenda a $+\infty$ (oppure $-\infty$ rispettivamente) la serie $\sum a_n$ viene detta *divergente* a $+\infty$ (o a $-\infty$ rispettivamente).

Infine, se la successione (s_n) non ammette limite, la serie $\sum a_n$ é detta essere *oscillante* o anche *indeterminata*.

Diciamo subito che il *comportamento* di una serie, (ossia l'essere o meno convergente, divergente od oscillante), può essere studiato anche se alcuni termini (un numero finito) sono sconosciuti, o vengono alterati. Si ha infatti il seguente risultato.

Teorema 6.3 Data una serie $\sum a_n$, si denoti con $\sum b_n$ la serie ottenuta sostituendo a_i con 0, per un numero finito di indici i , e lasciando inalterati gli altri. Allora la serie $\sum a_n$ ha lo stesso comportamento della serie $\sum b_n$.

Dimostrazione Supponiamo che si abbia: $b_i = 0$ per $i \leq N$, e $b_i = a_i$ per $i > N$. Denotiamo con (S_n) la successione delle somme parziali di $\sum a_n$, e con (T_n) quella relativa a $\sum b_n$.

Chiaramente, si ha: $T_j = 0$, per $j \leq N$, e $T_{N+k} = S_{N+k} - S_N$ per ogni $k \in \mathbb{N}$. Se la serie $\sum a_n$ converge, esiste finito il limite

$$S := \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{k \rightarrow \infty} S_{N+k}$$

e allora

$$\lim_{n \rightarrow \infty} T_n = \lim_{k \rightarrow \infty} T_{N+k} = S - S_N.$$

Ciò chiaramente significa che $\sum b_n$ converge. Analogamente si ragiona se $\sum a_n$ diverge o é indeterminata. E chiaramente vale anche il viceversa. \square

A parte pochi esempi fortunati, di solito é difficile, se non impossibile, avere un'espressione sintetica del termine s_n , anche se a_n ha un'espressione relativamente semplice: ad esempio, se $a_n = \frac{1}{n}$ (serie *armonica*), non si puo' trovare un'espressione semplice per $s_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots$

Questo é l'aspetto piú delicato della teoria delle serie: come si puo' individuare il comportamento della successione (s_n) , senza conoscerne un'espressione esplicita?

Vedremo tra poco alcuni criteri concreti, per stabilire perlomeno se una data serie converge o no. Per il momento, facciamo una breve panoramica di alcune situazioni favorevoli, alle quali potremo far riferimento in seguito.

6.2 Alcune serie fondamentali

Iniziamo con le cosiddette *serie telescopiche*: si tratta di serie della forma:

$$\sum a_n = \sum (b_n - b_{n+1})$$

ove (b_n) sia una successione il cui andamento sia noto.

Ad esempio, la serie $\sum \log(1 + \frac{1}{n})$ é di tale tipo: infatti,

$$\log(1 + \frac{1}{n}) = \log \frac{n+1}{n} = \log(n+1) - \log n.$$

In tal caso, é $b_n = -\log n$.

Se si calcola la somma parziale n -esima di una serie telescopica, si trova:

$$s_n = a_0 + a_1 + \dots + a_n = b_0 - b_1 + b_1 - b_2 + \dots + b_n - b_{n+1} = b_0 - b_{n+1}.$$

Dunque, il comportamento della successione (s_n) é chiaro, non appena si conosca il limite della successione (b_n) .

Cosí, nell'esempio precedente, (ove si ponga $a_0 = 0$), la serie é divergente a $+\infty$.

Un altro esempio utile é il seguente:

$$\sum \frac{1}{n(n+1)} = \sum \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right).$$

(Qui, supponiamo che n vada da 1 a ∞). La serie stavolta converge, essendo $s_n = 1 - \frac{1}{n+1}$, e la somma é 1.

Da un certo punto di vista, ogni serie $\sum a_n$ si potrebbe pensare come telescopica: infatti, si ha sempre $a_n = s_n - s_{n-1}$, e quindi basterebbe porre $b_n = -s_{n-1}$. Ma, chiaramente, se non si sa in partenza come si comporta la successione (b_n) (cioé, la (s_n)), scrivere $\sum a_n$ in forma telescopica non serve a molto.

Un'altro tipo di serie, particolarmente importante, é quello delle *serie geometriche*, cioè le serie del tipo $\sum q^n$, ove q é un fissato parametro reale. Per tali serie, si conosce l'espressione delle somme parziali: si ha infatti, per $q \neq 1$

$$1 + q + q^2 + \dots + q^n = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$$

mentre per $q = 1$ si ha ovviamente $s_n = n + 1$.

Dunque, tutto dipende dal numero q , detto la *ragione* della serie.

Ora, appare chiaro che una serie geometrica, di ragione q , risulta

divergente, se $q \geq 1$,

convergente, se $|q| < 1$,

indeterminata, se $q \leq -1$

(basta ricordare il limite della successione (q^n) , già studiata a suo tempo).

In particolare, se $|q| < 1$, risulta:

$$\sum_{n=0}^{\infty} q^n = \frac{1}{1 - q}.$$

Ad esempio, la serie $\sum \frac{1}{2^n}$ ha per somma $\frac{1}{1-\frac{1}{2}} = 2$.

Osserviamo che queste formule riguardano le somme per n che va da 0 a ∞ : si può dedurre facilmente, per sottrazione, che $\sum_{n=1}^{\infty} q^n = \frac{q}{1-q}$, sempre per $|q| < 1$.

Piú in generale, risulta

$$\sum_{n=k}^{\infty} q^n = q^k + q^{k+1} + \dots = q^k(1 + q + \dots) = \frac{q^k}{1-q}$$

per k intero naturale arbitrario.

Un'interessante applicazione delle serie geometriche si ha nella rappresentazione frazionaria dei numeri decimali periodici: ad esempio, il numero $x = 1.3333\dots$ coincide con la frazione $\frac{4}{3}$. Infatti, tale numero periodico si può scrivere come una serie:

$$x = 1 + 3\left(\frac{1}{10} + \frac{1}{100} + \frac{1}{1000} + \dots\right) = 1 + 3\left(\frac{1}{10} \frac{10}{9}\right) = 1 + \frac{1}{3}.$$

Questo spiega quella *formulina* che si insegna nelle scuole medie per trasformare un numero periodico in una frazione equivalente.

6.3 Criterio di Cauchy

Supponiamo di voler studiare la serie $\sum a_n$: dobbiamo allora stabilire se la successione associata (s_n) converge o meno. A tale scopo, si può utilizzare il *criterio di Cauchy*: la successione (s_n) converge se e solo se

per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $n(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ tale che

$$|s_k - s_n| < \varepsilon$$

per ogni n e k maggiori di $n(\varepsilon)$.

La formulazione può assumere un aspetto un po' diverso, se ivi si suppone $k \geq n$ (il che non lede la generalità), e si pone $k = n + p$, con p intero naturale arbitrario: la condizione di Cauchy diventa allora:

per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $n(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ tale che

$$|s_{n+p} - s_n| < \varepsilon$$

per ogni n maggiore di $n(\varepsilon)$ e ogni $p \in \mathbb{N}$.

Se ora adoperiamo la *definizione* di s_n (e di s_{n+p}) abbiamo :

$$s_{n+p} = a_0 + a_1 + \dots a_n + a_{n+1} + \dots a_{n+p} = s_n + a_{n+1} + \dots a_{n+p}$$

dunque

$$s_{n+p} - s_n = a_{n+1} + a_{n+2} + \dots + a_{n+p}$$

.

Si deduce ora immediatamente il

Teorema 6.4 *Data una serie $\sum a_n$, condizione necessaria e sufficiente perché tale serie sia convergente é che*

per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $n(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ tale che

$$|a_{n+1} + a_{n+2} + \dots + a_{n+p}| < \varepsilon$$

per ogni n maggiore di $n(\varepsilon)$ e ogni $p \in \mathbb{N}$.

Da questo criterio, si deduce facilmente una condizione *necessaria* per la convergenza di una serie.

Corollario 6.5 *Se la serie $\sum a_n$ converge, allora si ha $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$.*

Dimostrazione Si fissi $\varepsilon > 0$. Dato che la serie assegnata converge, applicando il criterio di Cauchy possiamo trovare un intero $n(\varepsilon) > 0$ tale che

$$|a_{n+1}| < \varepsilon$$

per ogni $n > n(\varepsilon)$: basta prendere $p = 1$. Quanto trovato permette di dire che $\lim_{n \rightarrow \infty} a_{n+1} = 0$, e quindi anche $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$. \square

Si noti che la condizione espressa dal Corollario 6.5 é solo *necessaria* per la convergenza, ma non sufficiente: ad esempio, abbiamo già incontrato la serie $\sum \log(1 + \frac{1}{n})$ (serie telescopica): tale serie diverge a $+\infty$, anche se il termine generale $a_n = \log(1 + \frac{1}{n})$ tende a 0.

Come tutte le condizioni necessarie, quella espressa dal Corollario 6.5 risulta utile piu' che altro in chiave *negativa*: se essa non é soddisfatta, la serie certamente *non converge*.

Ad esempio, la serie $\sum \frac{n}{n+1}$ certamente *non converge*, in quanto il suo termine generale tende a 1; anzi, si puo' vedere facilmente che tale serie *diverge* a $+\infty$: a partire da a_1 , tutti i termini sono maggiori o uguali a $\frac{1}{2}$, e quindi s_n risulta maggiore di $n/2$; questo basta per concludere che $\lim s_n = +\infty$.

Il criterio di Cauchy permette anche di stabilire condizioni *sufficienti* per la convergenza di una serie.

Corollario 6.6 *Siano date due serie, $\sum a_n$ e $\sum b_n$, soddisfacenti alle seguenti condizioni:*

i) $b_n > 0$ per ogni n

ii) $|a_n| \leq b_n$ per ogni n .

Allora, se la serie $\sum b_n$ risulta convergente, anche la serie $\sum a_n$ lo é.

Dimostrazione Proviamo che la serie $\sum a_n$ verifica la condizione di Cauchy. Fissato $\varepsilon > 0$, per la convergenza di $\sum b_n$ esiste un $n(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ tale che

$$b_{n+1} + b_{n+2} + \dots + b_{n+p} < \varepsilon$$

per ogni n maggiore di $n(\varepsilon)$ e ogni $p \in \mathbb{N}$. (Non abbiamo adoperato il valore assoluto, perché $b_n > 0$ per ogni n). Ora, si ha

$$|a_{n+1} + a_{n+2} + \dots + a_{n+p}| \leq |a_{n+1}| + |a_{n+2}| + \dots + |a_{n+p}| \leq b_{n+1} + b_{n+2} + \dots + b_{n+p} < \varepsilon$$

per ogni $n > n(\varepsilon)$ e ogni $p \in \mathbb{N}$.

Dunque, $\sum a_n$ verifica la condizione di Cauchy, e pertanto converge. \square

Ad esempio, consideriamo la serie $\sum \frac{\sin(n^2)}{2^n}$. Per tale serie, é ben difficile valutare le somme parziali, (si noti oltretutto che i valori di $\sin(n^2)$ non hanno espressioni elementari) e dunque una verifica *diretta* della convergenza sarebbe proibitiva. Tuttavia, é facile notare che

$$\left| \frac{\sin(n^2)}{2^n} \right| \leq \frac{1}{2^n}.$$

La serie $\sum \frac{1}{2^n}$ é geometrica, di ragione $\frac{1}{2}$, dunque convergente. Applicando allora il corollario 6.6, si deduce subito la convergenza della serie $\sum \frac{\sin(n^2)}{2^n}$.

Un'altra importante conseguenza di tali teoremi si ha nel caso di *convergenza assoluta*.

Definizione 6.7 Data una serie $\sum a_n$, si dice *serie assoluta* di questa la serie $\sum |a_n|$. Se la serie assoluta converge, grazie al Corollario 6.6 anche la serie $\sum a_n$ converge: in tal caso, si dice che $\sum a_n$ converge assolutamente.

Ad esempio, la serie studiata precedentemente, $\sum \frac{\sin(n^2)}{2^n}$, risulta convergente assolutamente: infatti, posto

$$a_n = \left| \frac{\sin(n^2)}{2^n} \right|, \text{ e } b_n = \frac{1}{2^n},$$

risulta chiaramente $|a_n| = a_n \leq b_n$, e quindi per il corollario 6.6 la serie $\sum a_n$ converge.

Notiamo però che esistono serie convergenti, che non sono convergenti assolutamente: in altre parole, la convergenza assoluta é solo una *condizione sufficiente*, ma in generale non é necessaria, per la convergenza semplice: vedremo in seguito degli esempi.

6.4 Serie a termini positivi

Quando i termini di una serie sono di segno costante, il comportamento é piu' facile da studiare: vedremo infatti che in tal caso la serie non può essere oscillante. Per ovvi motivi, ci limiteremo a considerare solo le serie a termini positivi.

Definizione 6.8 Una serie $\sum a_n$ é detta *a termini positivi* se risulta $a_n \geq 0$ per ogni $n \in \mathbb{N}$.

In virtu' del teorema 6.3, potremo comunque applicare i risultati di questa sezione anche a quelle serie per le quali la relazione $a_n \geq 0$ sussiste solo da un certo indice n in poi.

Se $\sum a_n$ é una serie a termini positivi, la relazione $s_{n+1} = s_n + a_{n+1} \geq s_n$ mostra che la successione delle somme parziali (s_n) é monotona non decrescente. Pertanto, $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = \sup\{s_n\}$ esiste comunque, finito o $+\infty$.

Questa osservazione porta immediatamente al seguente risultato.

Teorema 6.9 Se $\sum a_n$ é una serie a termini positivi, allora essa risulta convergente, oppure divergente a $+\infty$, a seconda che la successione (s_n) delle somme parziali sia limitata oppure no.

Come già detto in precedenza, tale conclusione riguarda anche quelle serie $\sum a_n$ per le quali il segno di a_n sia non negativo da un certo n in poi. (Analogo risultato vale, ovviamente, per le serie a termini negativi, o negativi da un certo n in poi, con l'unica differenza che in questo caso l'alternativa alla convergenza é la divergenza a $-\infty$.)

Corollario 6.10 *Sia data una serie $\sum a_n$. Se risulta $\lim_n a_n \neq 0$, la serie data é certamente divergente.*

Dimostrazione Implicitamente, nelle ipotesi si suppone che il limite $\lim a_n$ esista. Qualora tale limite sia diverso da 0, la serie certamente non converge, a causa di 6.5. Supponendo, ad es., che il limite sia positivo, per il teorema della permanenza del segno, si può dedurre che risulta $a_n > 0$ da un certo n_0 in poi. Dunque, la serie si può considerare a termini positivi, e pertanto non può essere oscillante. Resta l'unica possibilità che sia divergente. Analogo ragionamento si può fare, nel caso il limite del termine generale sia negativo. \square .

Dal corollario precedente, si deduce che, in definitiva, le serie più interessanti sono proprio quelle per le quali il limite del termine generale é 0.

Per tali serie, anche se a termini positivi, resta dunque il dilemma se trattasi di serie convergenti o meno. Nel caso di serie a termini positivi, vari criteri possono essere di aiuto, fermo restando il fatto che *non esiste* un criterio valido in generale, e quindi in un certo senso ogni serie (anche se a termini positivi), va studiata come un caso a sé.

Il primo criterio che segnaliamo qui, per le serie a termini positivi, é quello del confronto, che discende come corollario del teorema 6.6

Teorema 6.11 (Criterio del Confronto) *Siano date due serie a termini positivi, $\sum a_n$ e $\sum b_n$, e supponiamo che risulti $a_n \leq b_n$ almeno da un certo n in poi. Allora si ha:*

- a) Se la serie $\sum b_n$ é convergente, lo é anche la serie $\sum a_n$.*
- b) Se la serie $\sum a_n$ é divergente, lo stesso si può dire di $\sum b_n$.*

Dimostrazione La parte a) deriva direttamente da 6.6 osservando che $|a_n| = a_n$. La parte b) si può provare per assurdo: se $\sum b_n$ non divergesse, allora convergerebbe; per la parte a), sarebbe allora convergente la serie $\sum a_n$: assurdo. \square .

Vediamo un esempio. Consideriamo la serie telescopica $\sum \frac{1}{n^2-n}$.

Essendo $\frac{1}{n^2-n} = \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}$, per $n > 1$, per le somme parziali s_n si ha: $s_n = 1 - \frac{1}{n}$, e quindi la serie converge.

Ora, la serie $\sum \frac{1}{n^2}$ è *maggiorata* dalla serie precedente, (ossia $\frac{1}{n^2-n} \geq \frac{1}{n^2}$), e quindi converge, per il criterio del confronto.

(Osserviamo che tale criterio non permette di dire *nulla* circa la somma della serie $\sum a_n$, anche se si conosce la somma della serie $\sum b_n$. Tanto per curiosità, segnaliamo qui che risulta $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$).

Lo stesso criterio prova inoltre che tutte le serie del tipo $\sum \frac{1}{n^\alpha}$ sono *convergenti*, per lo meno quando è $\alpha \geq 2$.

Mediante i criteri successivi, vedremo il comportamento di *tutte* le serie del tipo $\sum \frac{1}{n^\alpha}$ (serie *armoniche*), per $\alpha \geq 0$ (il caso $\alpha \leq 0$ è banale).

Tuttavia, vale la pena di mostrare un ragionamento particolare per far vedere che la serie armonica $\sum \frac{1}{n}$ è *divergente*.

Tale serie può essere scritta:

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} \dots,$$

ed è ovviamente maggiorante della serie

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} \dots,$$

che denoteremo con $\sum b_n$. Ovviamente, la serie armonica $\sum \frac{1}{n}$ è anche maggiorante della serie

$$1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \dots,$$

che denoteremo con $\sum d_n$. Se per assurdo la serie armonica convergesse, entrambe le serie $\sum b_n$ e $\sum d_n$ convergerebbero, per confronto; e chiaramente, dette A, B e D rispettivamente le somme della serie armonica, della serie $\sum b_n$ e della serie $\sum d_n$, sarebbe $A = B + D$. Ora, è anche evidente che dev'essere $A = 2B$, e quindi $B = D$. Tuttavia, confrontando le serie $\sum b_n$ e $\sum d_n$, si vede chiaramente che risulta $T_n > S_n + \frac{1}{2}$, ove T_n denota la somm parziale di $\sum d_n$ e S_n la somma parziale di $\sum b_n$: ne segue che dev'essere $D > B + \frac{1}{2}$:impossibile.

Usando ora il criterio del confronto, segue che sono *divergenti* tutte le serie armoniche, con $\alpha \leq 1$.

Un altro criterio, molto utile per certi tipi di serie a termini positivi, é quello del *rapporto*.

Teorema 6.12 (Criterio del Rapporto) *Sia data una serie $\sum a_n$ a termini positivi e mai nulli. Se esiste un numero reale $k \in [0, 1]$ tale che risulti*

$$(a) \quad \frac{a_{n+1}}{a_n} \leq k$$

almeno da un certo n in poi, allora la serie data converge. Se invece risulta $\frac{a_{n+1}}{a_n} \geq 1$ da un certo n in poi, allora la serie data diverge.

Dimostrazione Proviamo la prima asserzione. Grazie al teorema 6.3, possiamo assumere che la relazione

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq k$$

valga per ogni intero n . Allora avremo: $a_2 \leq ka_1$, $a_3 \leq ka_2 \leq k^2a_1, \dots$ e in generale: $a_n \leq k^{n-1}a_1$. La serie data risulta allora maggiorata dalla serie $\sum k^{n-1}a_1$ che converge, perché $\sum k^{n-1}$ é una serie geometrica, di ragione positiva e minore di 1. Per il criterio del confronto, la serie $\sum a_n$ converge.

Quanto alla seconda asserzione, se $a_{n+1} \geq a_n$ per ogni n (di nuovo facciamo valere 6.3), si ha: $a_1 \leq a_2 \leq a_3 \dots$ e quindi la successione (a_n) ammette limite, essendo monotona. Ma tale limite non può essere 0, dato che, per ipotesi, già a_1 é positivo. Dunque, la serie non può convergere, e allora diverge. \square .

Solitamente, il criterio del rapporto trova applicazione mediante il seguente corollario.

Corollario 6.13 *Sia $\sum a_n$ una serie a termini positivi e mai nulli. Si supponga che esiste il limite: $l = \lim \frac{a_{n+1}}{a_n}$.*

a) se risulta $l < 1$, allora la serie data converge.

b) se risulta $l > 1$, allora la serie data diverge.

(Se $l = 1$, non si può dire nulla, in generale.)

Dimostrazione Per la parte a), faremo uso del teorema della permanenza del segno: essendo $l < 1$, denotiamo con k il punto medio tra l e 1: $k = \frac{1+l}{2}$. Allora $l < k < 1$. La successione $(\frac{a_{n+1}}{a_n} - k)$ ha limite $l - k < 0$, dunque esiste un intero j tale che

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} - k < 0, \text{ cioè } \frac{a_{n+1}}{a_n} < k$$

per ogni $n > j$, e quindi la convergenza segue dal criterio 6.12.

Per quanto riguarda la parte b), ancora il teorema della permanenza del segno assicura che $\frac{a_{n+1}}{a_n} > 1$ da un certo n in poi, e quindi la serie data diverge, sempre per 6.12. \square .

Per quanto riguarda il caso in cui il limite del rapporto sia 1, le serie armoniche sono tutti esempi di serie di tale tipo: alcune di esse convergono (ad es. per $\alpha \geq 2$) mentre altre divergono (ad es. per $\alpha \leq 1$). Dunque, sapere che il limite del rapporto $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ vale 1 non dà informazioni certe sul comportamento della serie.

Questo esempio mostra anche che, nel teorema 6.12 l'ipotesi (a) non può essere sostituita con la condizione $\frac{a_{n+1}}{a_n} < 1$ per ogni n : la serie armonica $\sum \frac{1}{n}$ soddisfa tale richiesta, ma diverge.

Esempi 6.14

1. Studiamo il comportamento della serie : $\sum nx^n$, per $x > 0$.

Chiaramente, trattasi di serie a termini positivi. Applicando il criterio del rapporto, avremo:

$$\lim \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim \frac{n+1}{n}x = x.$$

Pertanto, la serie data converge, per $x < 1$ e diverge, se $x > 1$. Resta incerto il caso $x = 1$. Ma questo si può trattare facilmente a parte: per $x = 1$ la serie diventa $\sum n$, e chiaramente diverge.

2. Studiamo la serie $\sum \frac{x^{2n}}{n^x}$, per $x \in \mathbb{R}$.

Ancora, la serie è a termini positivi, ma va considerata per $n > 0$. Applicando il criterio del rapporto, avremo:

$$\lim \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim x^2 \left(\frac{n}{n+1} \right)^x = x^2$$

dunque la serie converge, per $|x| < 1$ e diverge per $|x| > 1$. Il caso $|x| = 1$ si tratta a parte: per $x = 1$, la serie diviene $\sum \frac{1}{n}$, e quindi diverge; per $x = -1$, la serie diviene $\sum n$, e ancora diverge.

3. Studiamo la serie $\sum \frac{x^n}{n!}$, per $x \in \mathbb{R}$. (Serie *esponenziale*).

Cominciamo, esaminando il caso $x \geq 0$. Allora, la serie é a termini positivi, e possiamo applicare il criterio del rapporto. Avremo:

$$\lim \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim \frac{x}{n} = 0$$

e quindi si ha sempre convergenza.

Nel caso $x < 0$, studiamo la serie assoluta, cioè $\sum \frac{|x|^n}{n!}$. Questa rientra nel primo caso studiato, e quindi converge. Allora, la serie iniziale converge anche per $x < 0$.

(Vedremo in seguito che la *somma* di tale serie, con n che va da 0 a ∞ , é la quantita' e^x).

4. Studiamo la serie $\sum \frac{n!x^n}{n^n}$, per $x > 0$.

La serie é a termini positivi. Il criterio del rapporto fornisce:

$$\lim \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim x(n+1) \frac{n^n}{(n+1)^{n+1}} = \lim x \left(\frac{n}{n+1} \right)^n = \frac{x}{e}$$

dunque la serie converge, per $x < e$, e diverge per $x > e$. Il caso $x = e$ resta incerto, ma applicando la formula di Stirling si riconosce che il termine generale $\frac{n!e^n}{n^n}$ ha limite $+\infty$ e quindi la serie non puo' che divergere.

Un altro criterio utile, che a volte é preferibile a quello del rapporto, é quello della *radice*.

Teorema 6.15 Criterio della Radice *Sia data una serie a termini positivi $\sum a_n$. Se esiste una costante k in $]0, 1[$ tale che*

$$(a) \quad (a_n)^{1/n} \leq k$$

almeno da un certo n in poi, allora la serie data converge. Se invece risulta

$$(a_n)^{1/n} > 1$$

da un certo n in poi, la serie data diverge.

Dimostrazione Supponiamo che la condizione (a) sia verificata: allora risulta $a_n \leq k^n$ da un certo n in poi, e quindi il criterio del confronto assicura la convergenza. Qualora risultasse $(a_n)^{1/n} > 1$, chiaramente si avrebbe $a_n > 1$, e quindi per 6.5 si può dedurre immediatamente la divergenza della serie. \square .

Anche questo criterio, come il precedente, si applica solitamente esaminando il limite della quantità $(a_n)^{1/n}$. Enunciamo il Corollario, ma omettiamo la dimostrazione, ormai prevedibile.

Corollario 6.16 *Sia data una serie a termini positivi $\sum a_n$, tale che esiste il limite*

$$l := \lim (a_n)^{1/n}.$$

Se $l < 1$, la serie data converge. Se $l > 1$, essa diverge. Se $l = 1$, non si può dire nulla.

In tutte le serie armoniche il limite della radice risulta 1, e quindi vediamo che il comportamento di una serie non può essere dedotto con certezza, se sappiamo solo che $\lim (a_n)^{1/n} = 1$.

Esempi 6.17 1) Consideriamo la serie $\sum (\frac{n-1}{2n})^{n/2}$: la serie si può considerare a termini positivi, e il criterio della radice fornisce:

$$\lim a_n^{1/n} = \lim \left(\frac{n-1}{2n} \right)^{1/2} = \frac{\sqrt{2}}{2} < 1$$

e quindi la serie data converge.

2) Si consideri la serie: $\sum (\frac{xn+1}{2n})^{nx}$, per $x > 0$. Ancora, questa è a termini positivi. Applicando il criterio della radice, avremo:

$$\lim a_n^{1/n} = \left(\frac{x}{2} \right)^x = e^{x \log \frac{x}{2}}.$$

Tale quantità è minore di 1 per $x \log \frac{x}{2} < 0$, ossia per $\frac{x}{2} < 1$. Dunque, la serie data converge per $x < 2$, e diverge per $x > 2$.

Nel caso $x = 2$, il criterio della radice non fornisce informazioni, ma il termine generale della serie si può scrivere:

$$a_n = \left(1 + \frac{1}{2n} \right)^{2n}$$

e allora $\lim a_n = e \neq 0$, per cui la serie non può che divergere.

Un raffinamento del criterio del confronto, basato su 6.3, é il seguente:

Teorema 6.18 (Confronto Asintotico) *Siano date due serie a termini positivi, $\sum a_n$ e $\sum b_n$. Supponiamo che $\lim \frac{a_n}{b_n} := L$ esista, e sia diverso da 0 e da $+\infty$. Allora le due serie hanno lo stesso comportamento.*

Dimostrazione Essendo $L > 0$, per la definizione di limite, esiste un $n_0 \in \mathbb{N}$ tale che

$$\frac{L}{2} \leq \frac{a_n}{b_n} \leq \frac{3L}{2},$$

per ogni $n > n_0$. Da cio' segue subito che

$$\frac{L}{2}b_n \leq a_n \leq \frac{3L}{2}b_n,$$

per $n > n_0$, e quindi l'asserto, per il teorema del confronto. \square .

Il teorema 6.18 puo' essere facilmente integrato, come segue:

Se $\lim \frac{a_n}{b_n} = 0$, allora la convergenza di $\sum b_n$ implica quella di $\sum a_n$, viceversa l'eventuale divergenza di $\sum a_n$ comporta quella di $\sum b_n$.

Ad esempio, ponendo $a_n = \frac{\log n}{n^4}$, la serie $\sum \frac{\log n}{n^4}$ converge, in quanto, posto $b_n = \frac{1}{n^2}$, risulta $\lim \frac{a_n}{b_n} = 0$, e come sappiamo la serie armonica $\sum b_n$ é convergente.

Il criterio del confronto asintotico puo' essere molto utile per studiare serie mediante lo studio degli *infinitesimi*: infatti, solitamente, una serie $\sum a_n$ é interessante da studiare solo se $\lim a_n = 0$; ammesso che cio' accada, la serie risultera' convergente se l'ordine di infinitesimo di (a_n) non é troppo basso: se ad esempio, (a_n) é dello stesso ordine di $(\frac{1}{n})$, proprio il criterio del confronto asintotico porta a concludere che $\sum a_n$ diverge. Cio' accade con serie del tipo:

$$\sum \sin \frac{1}{n}, \quad \sum (e^{1/n} - 1), \quad \sum n(1 - \cos \frac{1}{n})$$

Possiamo fare un altro esempio.

Consideriamo le due serie $\sum(\sqrt{n^4+2} - n^2)$ e $\sum(\sqrt{n^4+n+2} - n^2)$.

Per quanto riguarda la prima, si ha:

$$\sqrt{n^4+2} - n^2 = \frac{2}{\sqrt{n^4+2} + n^2}.$$

Da cio' si vede facilmente che il termine generale é dello stesso ordine di $(1/n^2)$, e quindi la serie converge.

Quanto alla seconda serie, abbiamo invece

$$\sqrt{n^4 + n^2 + 2} - n^2 = \frac{n + 2}{\sqrt{n^4 + n^2 + 2} + n^2}$$

da cui si vede che, stavolta, l'ordine di infinitesimo é 1, ossia la serie si puo' confrontare con $\sum \frac{1}{n}$, e quindi diverge.

Concludiamo con un criterio ancora abbastanza utile, ma non cosí generale come gli altri. Il criterio é dovuto a Cauchy, ma (per evitare confusione con i tanti criteri e teoremi che da Cauchy prendono il nome), verra' chiamato *criterio di condensazione*.

Teorema 6.19 *Sia $\sum a_n$ una serie a termini positivi, tale che la successione (a_n) sia non-crescente. Allora la serie data ha lo stesso comportamento della serie $\sum 2^n a_{2^n}$.*

Dimostrazione Scriviamo entrambe le serie in forma estesa: la prima é

$$a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + a_6 + a_7 + a_8 + \dots$$

e la seconda é:

$$a_1 + 2a_2 + 4a_4 + 8a_8 + \dots$$

Denotiamo con (S_n) la successione delle somme parziali della prima serie, e con (T_n) la successione delle somme parziali dell'altra.

Confrontando i primi addendi delle due serie, e adoperando l'ipotesi di monotonia, si vede facilmente che:

$$S_3 \leq T_2, \quad S_7 \leq T_3, \dots, S_{2^k-1} \leq T_k, \dots$$

Allora, se $\sum 2^n a_{2^n}$ converge, lo stesso si puo' dire di $\sum a_n$.

D'altra parte, sempre confrontando gli addendi delle due serie, si trova anche:

$$T_2 - a_1 = 2a_2 \leq S_2, \quad T_3 - a_1 = 2a_2 + 4a_4 \leq 2S_4, \quad T_4 - a_1 \leq 2S_8, \quad \dots, \quad T_k - a_1 \leq 2S_{2^{k-1} \dots}$$

e questo dimostra che la convergenza di $\sum a_n$ implica quella di $\sum 2^n a_{2^n}$. \square .

Un'importante applicazione di questo criterio si ha nelle serie armoniche:

Posto $a_n = \frac{1}{n^\alpha}$, si ha

$$2^n a_{2^n} = \frac{2^n}{2^{n\alpha}} = \left(\frac{1}{2^{\alpha-1}}\right)^n.$$

Dunque, la serie *condensata* non é altro che una serie geometrica, di ragione $\frac{1}{2^{\alpha-1}}$. Tale ragione é minore di 1 solo e quando $\alpha > 1$, quindi la serie armonica $\sum \frac{1}{n^\alpha}$ é convergente se $\alpha > 1$, divergente se $\alpha \leq 1$.

(In precedenza avevamo esaminato tutti i casi, salvo quelli con $1 < \alpha < 2$).

Un'altra serie significativa é la seguente: $\sum \frac{1}{n \log n}$. La serie é a termini positivi (si parte da $n = 2$), decrescenti, e tendenti a 0. L'ordine di infinitesimo pero' non puo' aiutarci: il termine generale é infinitesimo di ordine inferiore rispetto a quello delle serie armoniche convergenti (cioé del tipo $\sum \frac{1}{n^\alpha}$) e di ordine superiore rispetto al quello della serie $\sum \frac{1}{n}$: un confronto asintotico con tali serie non da' esito.

Applicando invece il criterio di condensazione, abbiamo:

$$2^n a_{2^n} = \frac{1}{\log 2^n} = \frac{1}{n \log 2} :$$

la serie condensata non é altro che un multiplo della serie divergente $\sum \frac{1}{n}$. Dunque la serie in questione diverge.

Suggeriamo ora al lettore di applicare lo stesso criterio alla serie $\sum \frac{1}{n \log^2 n}$: si vedrá, con analoghi calcoli, che la serie condensata é multiplo di $\sum \frac{1}{n^2}$ e quindi stavolta si ha convergenza.

6.5 Serie a segni alterni

Quando una serie $\sum a_n$ non é a termini positivi, si conoscono relativamente pochi criteri di convergenza. Uno di questi é quello della *convergenza assoluta*: abbiamo già visto che, se una serie $\sum a_n$ converge assolutamente, (ossia se $\sum |a_n|$ converge) allora essa converge. Questo é solo un criterio *sufficiente*, in quanto, come vedremo presto, esistono serie convergenti semplicemente, ma non assolutamente.

Un altro criterio che spesso si rivela utile é quello di Leibniz: esso si applica alle serie *a segni alterni*, ossia alle serie della forma:

$$\sum (-1)^n a_n$$

ove gli a_n sono numeri positivi, per ogni n .

Teorema 6.20 (Criterio di Leibniz) Sia $\sum (-1)^n a_n$ una serie a segni alterni. Supponiamo che i termini positivi a_n soddisfino alle seguenti ipotesi:

i) $a_n \geq a_{n+1}$ per ogni n .

ii) $\lim a_n = 0$.

Allora, la serie $\sum a_n$ è convergente, e la somma S verifica la seguente stima:

$$|S - s_n| \leq a_n$$

per ogni intero $n > 0$.

Dimostrazione Senza perdita di generalità, supponiamo che la serie si scriva per esteso come segue:

$$a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + \dots$$

(L'altra possibilità è che la serie inizi con il segno meno).

Se consideriamo le somme parziali di posto *dispari*, vediamo che:

$$s_1 = a_1, s_3 = s_1 + a_2 - a_3 \leq s_1, s_5 = s_3 + a_4 - a_5 \leq s_3, \dots$$

in virtù della monotonia (condizione i)). Dunque, si ha $s_1 \geq s_3 \geq s_5 \dots \geq 0$: essendo una successione non crescente, (s_{2n+1}) ammette limite finito (e non-negativo).

Ora, passiamo alle somme di posto *pari*:

$$s_2 = a_1 - a_2, s_4 = s_2 + a_3 - a_4 \geq s_2, s_6 = s_4 + a_5 - a_6 \geq s_4 \dots$$

sempre per la monotonia. Dunque, si ha $0 \leq s_2 \leq s_4 \leq s_6 \dots$

Allora, anche la successione (s_{2n}) ammette limite non negativo; tale limite è finito, perché minore o uguale a a_1 , essendo $s_{2n} \leq s_{2n+1} \leq a_1$ per ogni n .

Ora, la successione (s_n) converge, se $\lim s_{2n}$ e $\lim s_{2n+1}$ sono uguali (abbiamo già notato che essi sono finiti). Facilmente si può osservare che $s_{2n+1} - s_{2n} = a_{2n+1}$, e allora

$$\lim s_{2n+1} - \lim s_{2n} = \lim a_{2n+1} = 0$$

per l'ipotesi ii).

Questo prova la convergenza della serie. Quanto all'ultima asserzione, denotata con S la somma della serie, si ha chiaramente:

$$s_{2n} \leq S \leq s_{2n+1}$$

per ogni n , e quindi

$$S - s_{2n} \leq s_{2n+1} - s_{2n} = a_{2n+1} \leq a_{2n},$$

$$s_{2n+1} - S \leq s_{2n+1} - s_{2n} = a_{2n+1} :$$

In ogni caso, si ha

$$|S - s_k| \leq a_k$$

sia per k dispari, che per k pari. \square

Come esempio, consideriamo la serie *armonica a segni alterni* :

$$\sum \frac{(-1)^n}{n} :$$

Essendo $a_n = \frac{1}{n}$, é chiaro che le ipotesi i) e ii) del teorema 6.20 sono verificate, e quindi la serie data converge. L'affermazione finale del teorema dice che, se si vuole un'approssimazione della somma S di tale serie con un margine di errore minore di $\frac{1}{100}$, occorre sommare almeno i primi cento termini: chiaramente, l'ordine di convergenza in questo caso non é molto buono. Per chi fosse curioso, possiamo dare questo risultato:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} = \log 2.$$

Comunque, la serie armonica a segni alterni é un esempio di serie che converge semplicemente, ma non assolutamente: la serie armonica classica, $\sum \frac{1}{n}$, é infatti divergente.

Una serie di segno variabile, collegata alla serie armonica, é la seguente:

$$\sum \frac{\cos(\frac{\pi}{2}n)}{n} :$$

Scrivendo i termini di seguito, per $n \geq 1$, avremo:

$$0 - \frac{1}{2} + 0 + \frac{1}{4} + 0 - \frac{1}{6} + 0 \dots$$

Escludendo gli inutili zeri, la serie si può scrivere:

$$-\frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{6} + \frac{1}{8} \dots = -\frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots \right)$$

da cui si deduce chiaramente la convergenza della serie e la somma: $S = -\frac{1}{2} \log 2$.

Indice

1	INSIEMI, FUNZIONI, RELAZIONI	3
1.1	Relazioni	3
1.2	Varietà di insiemi in \mathbb{R}	16
1.2.1	L'insieme di Cantor	18
2	CALCOLO COMBINATORIO	24
2.1	Potenze e Disposizioni	24
2.2	Combinazioni e Formule	26
3	LIMITI DI SUCCESSIONI	30
3.1	Esempi introduttivi	30
3.2	Successioni infinitesime e limiti	33
4	LIMITI DELLE FUNZIONI REALI	38
4.1	Introduzione	38
4.2	Nozioni di Topologia	38
4.3	Limiti	47
4.4	Teoremi sui limiti	55
4.5	Limiti notevoli	64
4.6	Esempi vari	68
4.7	Infinitesimi e Infiniti	73
5	TEOREMI SULLE FUNZIONI CONTINUE	78

5.1	Introduzione	78
5.2	Classificazione delle discontinuità'	79
5.3	La proprietà dei valori intermedi	82
5.4	Il teorema di Weierstrass	86
5.5	Funzioni inverse	89
6	SERIE	91
6.1	Generalità	91
6.2	Alcune serie fondamentali	94
6.3	Criterio di Cauchy	96
6.4	Serie a termini positivi	99
6.5	Serie a segni alterni	108

Dispense di Analisi Matematica I (Seconda Parte)

Domenico Candeloro

Introduzione

La seconda parte di queste dispense tratta i classici sviluppi dei concetti fin qui studiati: derivazione, studio di funzioni, integrazione. Ognuno di questi argomenti si compone di una parte consistente di tipo teorico, e una parte, ancora piu' copiosa e articolata, di tipo applicato. Come gia' é accaduto nei capitoli precedenti, i vari argomenti si collegano e si integrano l'un l'altro, e vanno a interagire anche con quelli della prima parte; quindi consigliamo vivamente il lettore, in ogni fase del suo studio, di tenere sempre presenti le varie problematiche affrontate in precedenza, e per ognuna le strategie e le soluzioni adottate. Questo atteggiamento, oltre a favorire la migliore comprensione dei vari argomenti, permettera' anche di impadronirsi piu' facilmente delle tecniche e degli strumenti di altri corsi, come quello di Geometria e di Fisica, e sara' particolarmente utile nel seguito, data la notevole quantita' di problemi che si affronteranno nel corso di Analisi Matematica II.

I capitoli sono suddivisi come segue: il n. 7 tratta della derivazione in generale, sotto vari aspetti, e delinea le principali regole di derivazione, e deduce le derivate delle funzioni piu' importanti. Il capitolo n. 8 tratta delle applicazioni piu' importanti delle derivate, finalizzate principalmente agli studi di funzioni, e in particolare alla ricerca dei massimi e minimi relativi. Il capitolo n.9 (che é contrassegnato con un asterisco) presenta alcuni aspetti meno elementari della teoria della derivazione, che una volta erano parte integrante dei programmi di Analisi Matematica I: teoremi di Darboux, formule e serie di Taylor, punti di flesso, etc. Le dimostrazioni sono spesso accennate o parziali, puntando piu' che altro a rendere l'idea principale. Il capitolo n.10 introduce e tratta la teoria dell'Integrazione, fino alla Formula Fondamentale (Torricelli-Barrow), mentre la parte di tipo piu' pratico (ricerca di primitive, e metodi specifici) viene affrontata nel capitolo n.11. L'ultimo capitolo (intitolato Etcetera...) accenna a ulteriori problemi che sorgono in teoria dell'integrazione, e delinea altri sviluppi e applicazioni, anche in vista del modulo di Analisi Matematica II.

Capitolo 7

Derivazione

La derivazione é forse il tema piu' importante di tutta la Matematica, sia come potente strumento applicativo, sia come sorgente di nuove problematiche, che a loro volta danno origine a vere e proprie ricerche avanzate.

Lo scopo *apparente* di questo strumento é quello di esaminare, per una data funzione $f(x)$, il suo modo di variare a seconda della x , e in particolare come e quanto tale funzione cresce o decresce.

Diciamo *apparente* perché in realta' sono tanti e tali gli sviluppi possibili, che praticamente non si puo' individuare uno scopo specifico. Pertanto, ci limiteremo a descrivere, man mano che li incontreremo, alcuni dei problemi che si possono affrontare e risolvere tramite tale concetto, senza pretendere di volerli trattare tutti.

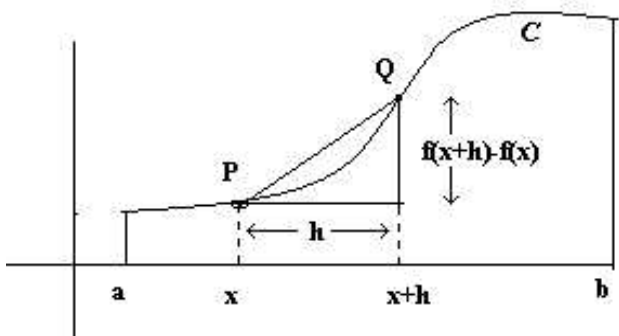
Studieremo alcune prime applicazioni, quali i concetti di *retta tangente*, *velocita'* e *densita'*; tratteremo studi di funzioni secondo le linee classiche; vedremo anche alcuni metodi di approssimazione (serie di Taylor); infine, nel Capitolo dell'Integrazione, *scopriremo* quel *misterioso* meccanismo che permette di calcolare aree e volumi (e quant'altro) mediante il procedimento *inverso* alla derivazione.

7.1 Definizioni e Preliminari

Il metodo piu' immediato per introdurre il concetto di *derivata* é quello che prende le mosse dalla ricerca della *retta tangente*.

Data una funzione $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, consideriamo la curva grafico di f , e chiamiamola \mathcal{C} . Scelto un punto $(x, f(x)) \in \mathcal{C}$, vogliamo definire la *retta tangente* a \mathcal{C} in tale punto (purché cio' abbia senso), e quindi determinarne l'equazione.

L'idea che vogliamo seguire é che la retta tangente, *se esiste*, é in un certo senso un *limite* di rette: fissato il punto $x \in [a, b]$, e quindi il punto $P := (x, f(x)) \in \mathcal{C}$, facciamo variare un secondo punto $Q \in \mathcal{C}$, tracciando per ogni posizione di Q la retta *secante* PQ . La retta tangente, che vogliamo definire, sarebbe la posizione *limite* della retta PQ , al tendere di Q a P (diciamo *sarebbe* perché bisogna pure che il limite di cui si parla esista).



Ora, per procedere con maggiore chiarezza, scriviamo $Q := (x + h, f(x + h))$, dove h é detto *incremento* e non é altro che un numero reale, positivo o negativo, tale che $x + h \in [a, b]$: dire che Q si avvicina a P significa in pratica che h tende a 0. A questo punto, dobbiamo precisare cosa vuol dire che la retta secante PQ *tende* a una retta *non meglio identificata*: a tale scopo, osserviamo che tutte queste rette secanti, e anche la retta tangente (*limite*) passano per P : dunque, per individuarle, é sufficiente conoscerne il coefficiente angolare m , che in fondo non é che un numero. E m dipende da h : infatti, se $P := (x, f(x))$ e $Q := (x + h, f(x + h))$, il coefficiente angolare m della retta PQ é dato da:

$$m := \frac{f(x + h) - f(x)}{h}.$$

La quantita' che compare a secondo membro é detta *rapporto incrementale*, per ovvi motivi.

Questo ci porta alla definizione di *derivata*.

Definizione 7.1 Fissata una funzione $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, e fissato un punto $x \in [a, b]$, diremo che f é *derivabile* in x se esiste *finito* il limite del *rapporto incrementale* $\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$, al tendere di h a 0 (in modo, beninteso, che $x+h \in [a, b]$). Tale limite, se esiste, é detto la *derivata* di f in x e viene denotato con $f'(x)$, o con $\frac{df}{dx}(x)$ (o altri simboli ancora, meno frequenti):

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}.$$

Il concetto di derivata si applica anche agli estremi, a e b : per questi punti, pero', il limite del rapporto incrementale si puo' fare solo *da destra* (in a) o *da sinistra* (in b). Per i punti interni, si richiede invece che il limite *globale* esista; tuttavia, a volte si puo' parlare anche di *derivata destra* o di *derivata sinistra* in x , a seconda che esista (finito) il limite del rapporto incrementale da destra, o da sinistra, e si usano le notazioni seguenti:

$$f'_d(x) = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}, \quad f'_s(x) = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}.$$

Chiaramente, se x é un punto interno ad $[a, b]$, la derivata $f'(x)$ esiste se e solo se esistono la derivata destra e la derivata sinistra in x , e sono uguali.

Se accade che una funzione f sia derivabile in tutti i punti x del suo campo di definizione, diremo semplicemente che f é una *funzione derivabile*.

Si noti che esistono funzioni che, in qualche punto, ammettono derivata destra e derivata sinistra, ma esse sono diverse. Ad esempio, la funzione $f(x) = |x|$ ha esattamente questo comportamento in 0: $f'_d(0) = 1$, $f'_s(0) = -1$. In casi come questo, si dice che il punto in questione é un *punto angoloso*.

Ritornando al discorso della tangente, a questo punto é chiaro come definirla e qual'é la sua equazione: dato un punto $x_0 \in [a, b]$, se $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ é derivabile in x_0 , la curva grafico di f ammette la *retta tangente* in x_0 , e tale retta ha equazione:

$$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0).$$

A questo punto s'impone qualche esempio, anche a verifica dell'adeguatezza di questa definizione.

Esempi 7.2 (1) Nel caso f sia lineare, cioè $f(x) = ax + b$, con a e b costanti reali, intuitivamente la retta tangente in ogni punto dev'essere la stessa retta r , grafico di f , ossia $y = ax + b$. E infatti, se calcoliamo il rapporto incrementale, troviamo:

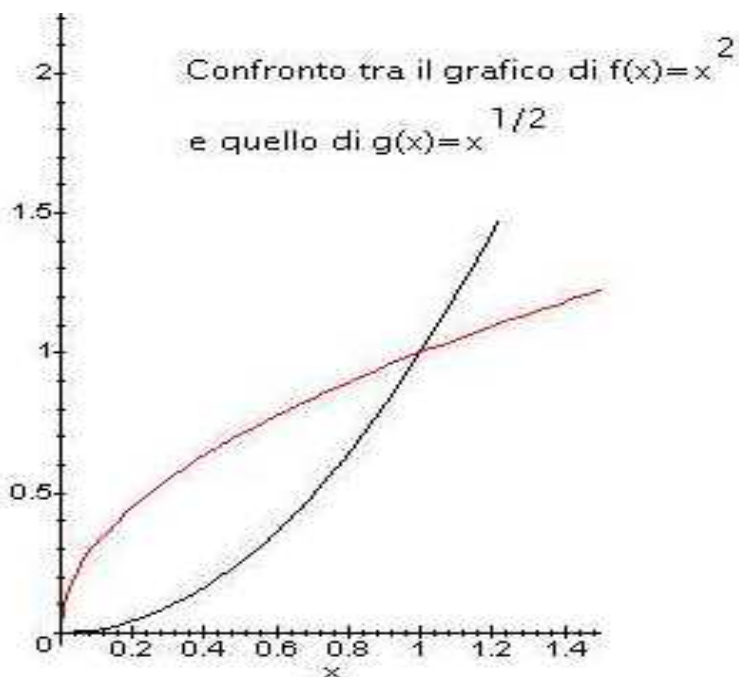
$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \frac{ax + ah + b - ax - b}{h} = a.$$

(Questo significa che tutte le secanti sono parallele, anzi coincidono con r .) Il limite dunque banalmente esiste, e coincide con a : $f'(x) = a \forall x \in [a, b]$. Ne consegue che l'equazione della retta tangente in qualsiasi punto x_0 è $y - (ax_0 + b) = a(x - x_0)$, ossia $y = ax + b$.

Ad esempio, se $f(x) = c$, funzione costante, si ha $f'(x) = 0$ per ogni x . Oppure, se $f(x) = x$ (identità), si ha $f'(x) = 1$.

(2) Un altro esempio interessante è la funzione $f(x) = x^2$ (parabola): qui, si vede facilmente che

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \frac{h^2 + 2hx}{h} = h + 2x$$



e dunque $f'(x) = 2x$, per ogni $x \in \mathbb{R}$. Così, avremo $f'(0) = 0$: nel vertice, come sappiamo, la tangente è orizzontale. Poi, possiamo notare che, per $x > 0$, la derivata è positiva: questo vuol dire che la tangente è orientata in modo da formare un angolo acuto

con il semiasse positivo delle ascisse; dal punto di vista analitico, si può dire che la curva $y = x^2$ va *crescendo* quando $x > 0$, ed è invece decrescente, per $x < 0$: non solo, ma più x cresce in valore assoluto, più la tangente si avvicina ad essere verticale, ossia la curva tende ad andare verso l'alto. Un'osservazione importante riguarda la funzione *inversa*: $g(x) = \sqrt{x}$, limitatamente ai punti $x \geq 0$. Infatti, il grafico di f e quello di g hanno identiche proprietà geometriche, essendo ottenuti l'uno dall'altro con semplice riflessione e rotazione di 90: tornando a considerare il punto $(0, 0)$, il grafico della g deve avere ivi tangente verticale (dato che la f ha tangente orizzontale). Se cerchiamo la derivata in 0 della g , troveremo

$$\frac{g(h) - g(0)}{h} = \frac{1}{\sqrt{h}}$$

e quindi il limite del rapporto incrementale (da destra) esiste, ma è infinito: dunque non si può parlare di derivata della g in 0, anche se *geometricamente* la tangente in tale punto esiste ed è l'asse y .

(3) La geometria fornisce un altro esempio significativo: il cerchio. Sappiamo infatti che, in ogni punto della circonferenza, la tangente è perpendicolare al raggio. Il concetto di derivata permette di verificare questa proprietà analiticamente. Per semplicità, prendiamo in considerazione il cerchio unitario: $x^2 + y^2 = 1$. Ricaviamo la y in funzione di x , limitatamente al semipiano $y > 0$: $y = \sqrt{1 - x^2}$, e cerchiamo la derivata di questa funzione, cioè $f(x) = \sqrt{1 - x^2}$, in un generico punto x , compreso tra -1 e 1 . Si ha:

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \frac{\sqrt{1 - (x+h)^2} - \sqrt{1 - x^2}}{h} = -\frac{h + 2x}{\sqrt{1 - (x+h)^2} + \sqrt{1 - x^2}}$$

(grazie ai soliti *trucchi* del mestiere...) , da cui

$$f'(x) = -\frac{x}{\sqrt{1 - x^2}}.$$

Cosa possiamo dedurre? Intanto, osserviamo che $f'(x)$ *non esiste* quando $x = 1$ oppure $x = -1$: in questi punti, infatti, il denominatore si annulla; dal punto di vista puramente geometrico, la retta tangente c'è, ma è *verticale*: dunque, abbiamo di nuovo una situazione in cui la derivata non esiste, ma esiste la retta tangente (e possiamo osservare che, nei punti considerati, cioè $(-1, 0)$ e $(1, 0)$, la retta tangente è comunque ortogonale al raggio).

Negli altri punti, ossia per $x \in]-1, 1[$, la derivata esiste, e si ha questa relazione:

$$f'(x) = -\frac{x}{f(x)}.$$

Ora, il raggio uscente da $(0, 0)$ e passante per il punto $(x, f(x))$ é una retta che ha coefficiente angolare $m = \frac{f(x)}{x}$, e quindi risulta ortogonale alla retta tangente (che ha come coefficiente angolare $f'(x)$).

Dunque, anche nel cerchio, il concetto di derivata porta a confermare proprieta' elementari ben note.

(4) L'esempio portato al n.2 ci puo' fornire lo spunto per dare un'altra interpretazione del concetto di derivata; infatti, come dicevamo anche nell'introduzione, la derivata ha anche un importante significato *fisico*. Immaginiamo di seguire il moto di un oggetto puntiforme P , che percorre una retta orientata, partendo ad esempio dal punto 0. Col passare del tempo, l'oggetto occuperà varie posizioni lungo la retta, ciascuna individuata dalla propria ascissa x , che dipende dunque dal tempo t : ad ogni istante t , il nostro oggetto si trova nella posizione $x(t)$; all'atto pratico, $x(t)$ non é altro che una funzione reale, definita per $t \geq 0$, che puo' avere qualsiasi legge. Ad esempio, se ad ogni istante t risulta $x(t) = 3t$, vuol dire che P va a *velocita' costante*, ossia copre percorsi uguali in tempi uguali (moto *uniforme*). Ma la velocita' potrebbe essere variabile, ossia ad ogni istante t potrebbe corrispondere una velocita' $v(t)$ dipendente da t : ebbene, in tal caso possiamo interpretare $v(t)$ come la derivata di $x(t)$ al tempo t ; infatti, se si vuole definire la velocita' *all'istante* t , bisognerà calcolare il rapporto $\frac{x(t+h)-x(t)}{h}$ per valori di h molto piccoli (positivi o negativi), e fare il *limite* (se esiste), quando h tende a 0. Tale rapporto é infatti la velocita' *media* in un piccolissimo intervallo di tempo $([t, t+h])$, e quindi é quanto di piu' vicino alla velocita' *all'istante* t .

Chiaramente, nel caso di moto *uniforme*, la legge $x(t)$ é lineare e quindi, come abbiamo visto negli esempi precedenti, v é costante. Si puo' pero' avere un moto *accelerato*, come quello di un corpo pesante che cade in verticale: in tal caso, come sappiamo, la legge $x(t)$ é di tipo quadratico: $x(t) = ht^2 + kt + q$ in generale (con h, k, q costanti) e allora la velocita' istantanea si calcola semplicemente facendo la derivata: $v(t) = x'(t) = 2ht + k$ (il calcolo non presenta difficolta'). Quando v é variabile, entra in gioco anche il concetto di

accelerazione: questa si denota con $a(t)$ e non é altro che la *velocita' della velocita'*, cioe' la derivata (a sua volta) di $v(t)$. Ad esempio, se $x(t) = ht^2 + kt + q$, si ha $v(t) = 2ht + k$ e $a(t) = 2h$.

(5) Anche il concetto di *densita'* si puo' ricondurre a quello di derivata. Supponiamo ad esempio che una *sbarretta* di lunghezza l sia costituita di un certo materiale omogeneo (per esempio, ferro), con densita' (lineare) ρ . Possiamo assimilare la sbarretta al segmento $[0, l]$ dell'asse reale, e quindi attribuire ad ogni punto di essa un'ascissa ben precisa $x \in [0, l]$. Un *pezzo* di tale sbarretta puo' essere individuato dai suoi estremi: ad esempio, $[t_1, t_2]$ rappresenta la porzione di sbarretta compresa fra t_1 e t_2 , naturalmente supponendo $0 \leq t_1 \leq t_2 \leq l$, e la *massa* di tale porzione é data da $m([t_1, t_2]) = \rho(t_2 - t_1)$ (per il significato stesso di densita' lineare). Allo stesso modo, la *massa* della porzione $[0, t]$, con $t < l$, sara' data da: $m([0, t]) = \rho t$: ora se scriviamo $m[0, t] = M(t)$ gia' vediamo che $M'(t) = \rho$, ossia la densita' é la derivata della funzione $M(t)$.

Ma ora supponiamo che la densita' non sia costante, bensì vari da punto a punto. Allora, conoscendo la massa $m(t)$ della porzione $[0, t]$, possiamo valutare la densita' $\rho(t)$ proprio come *limite* del rapporto $\frac{m([t, t+h])}{h}$ tra la massa della porzione (piccolissima) $[t, t+h]$ e la lunghezza h : dato che $m([t, t+h]) = M(t+h) - M(t)$, il rapporto in questione non é altro che il rapporto incrementale della funzione $M(t)$, e il suo limite (se esiste) altro non é che $M'(t)$: dunque, la *densita' puntuale* $\rho(t)$ coincide con la derivata di $M(t)$ nel punto t (se questa esiste).

Notiamo che il calcolo della massa della Terra fu uno dei problemi che indusse Newton a *inventare* l'intero calcolo infinitesimale (contemporaneamente a Leibnitz), e fu proprio questa interpretazione della densita' (variabile con la profondita') che gli permise di ottenere un'approssimazione molto buona del valore cercato.

7.2 Regole di Calcolo

Vedremo ora alcune semplici regole di calcolo, che permetteranno di trovare rapidamente, *senza fare limiti*, la derivata praticamente di tutte le funzioni che ci possono interessare.

- 1 Intanto, osserviamo subito che la derivazione é un'operazione lineare: cioé, se due funzioni f e g sono derivabili in un punto x , allora anche $f + g$ é derivabile in x , e risulta $(f + g)'(x) = f'(x) + g'(x)$; inoltre, se f é derivabile in x e k é una costante reale, allora kf é derivabile in x , e risulta $(kf)'(x) = kf'(x)$. (Tutto cio' é molto facile da dimostrare).
- 2 Dunque, se f é una funzione derivabile in un certo punto x , e c é una costante reale, $f + c$ é derivabile in x , e ha la stessa derivata di f (infatti, le costanti hanno derivata nulla).
- 3 Prima di proseguire, é opportuno stabilire un teorema, semplice ma importante.

Teorema 7.3 *Sia $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione derivabile in un punto $x \in [a, b]$. Allora f é continua in x .*

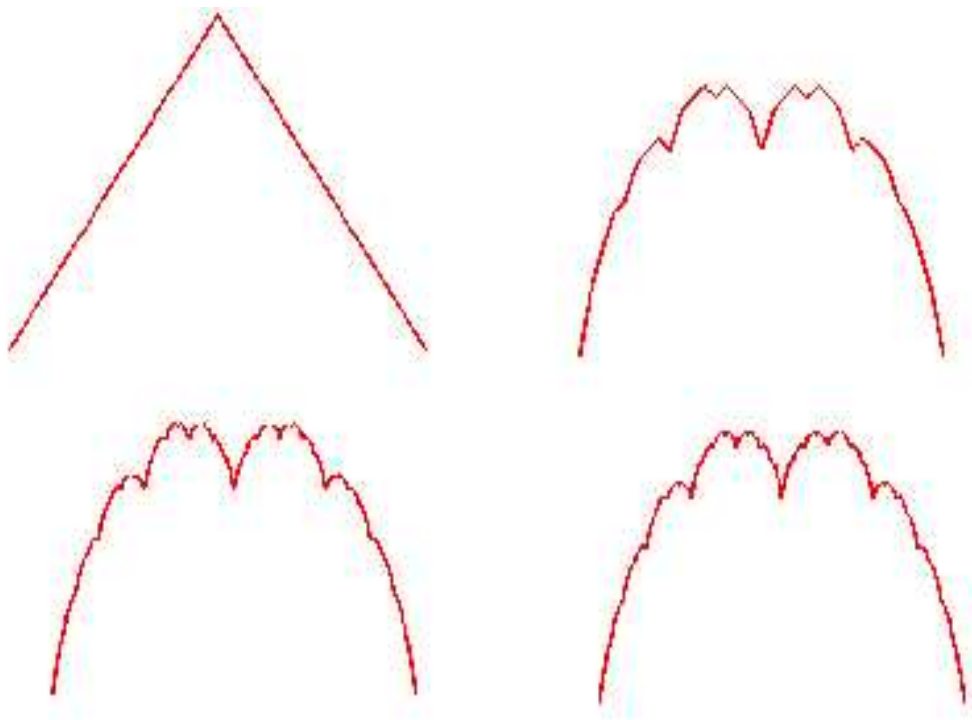
Dimostrazione Dobbiamo dimostrare che $\lim_{h \rightarrow 0} f(x + h) = f(x)$: a questo scopo, scriviamo

$$f(x + h) - f(x) = h \frac{f(x + h) - f(x)}{h}.$$

Quando h tende a 0, il rapporto incrementale $\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ tende a $f'(x)$, e allora $h \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ tende a 0. Dunque, $\lim_{h \rightarrow 0} (f(x + h) - f(x)) = 0$ e cio' é proprio quanto si voleva. \square

N.B. Naturalmente, questo teorema non puo' essere invertito: se una funzione é continua, essa in genere non é derivabile: abbiamo gia' visto alcuni esempi, come $f(x) = |x|$ oppure $g(x) = \sqrt{x}$; ma addirittura esistono (e hanno grande importanza in certe applicazioni della Matematica all'Economia) funzioni che sono continue in tutto \mathbb{R} e non derivabili in *nessun punto* di \mathbb{R} : una descrizione adeguata di tali funzioni sara' possibile solo nei corsi successivi, per cui non ci dilunghiamo su questo punto: presentiamo solo un grafico in cui si fa vedere come una funzione del tipo di $|x|$ puo' *evolvere* fino a diventare un esempio di quelli ora menzionati (funzioni di van der Værden).

Riprendiamo ora le regole di calcolo.



- 4 La regola di derivazione del *prodotto* di due funzioni derivabili é un po' meno elementare, ma tutto sommato ancora facile; il rapporto incrementale di fg si puo' scrivere cosi':

$$\begin{aligned} \frac{f(x+h)g(x+h) - f(x)g(x)}{h} &= \\ \frac{f(x+h)g(x+h) - f(x+h)g(x)}{h} + \frac{f(x+h)g(x) - f(x)g(x)}{h} &= \\ f(x+h)\frac{g(x+h) - g(x)}{h} + g(x)\frac{f(x+h) - f(x)}{h}. \end{aligned}$$

Ne deriva subito la conclusione:

$$(fg)'(x) = f(x)g'(x) + f'(x)g(x),$$

sicuramente valida se f e g sono entrambe derivabili in x .

Per esempio, la derivata di $x^3 = x \cdot x^2$ é data da:

$$Dx^3 = x^2 \cdot 1 + 2x \cdot x = 3x^2$$

(Si noti la scrittura: $Df(x)$, per intendere ancora la derivata di f). Con un procedimento d'induzione, si potrebbe anche dimostrare la regola:

$$Dx^n = nx^{n-1}$$

valida per ogni $n \in \mathbb{N}$. (Regola di derivazione delle potenze). Ritroveremo comunque tale regola piu' avanti.

Sfruttando le regole finora ottenute, vediamo che si puo' calcolare la derivata di ogni polinomio, in ogni punto x : ad esempio, $D(x^4 - 2x^2 + x + 5) = 4x^3 - 4x + 1$.

- 5 Passiamo ora alla funzione $\sin x$. Cominciamo a controllare la derivabilita' in 0. Il rapporto incrementale in tale punto é: $\frac{\sin x}{x}$; Dunque, basta applicare un famoso *limite notevole*, per dedurre che la derivata di $\sin x$ in 0 esiste ed é uguale a 1. Cosa si puo' dire degli altri punti? In un generico punto x si ha:

$$\frac{\sin(x+h) - \sin x}{h} = \frac{\sin x \cos h + \sin h \cos x - \sin x}{h} = \sin x \frac{\cos h - 1}{h} + \cos x \frac{\sin h}{h}.$$

Allora, grazie anche al limite notevole $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{1 - \cos h}{h^2} = \frac{1}{2}$, si ha chiaramente

$$D \sin x = \cos x$$

per ogni punto $x \in \mathbb{R}$.

Be', se ci abbiamo *preso gusto*, possiamo anche ricavare la derivata del *coseno*, in maniera analoga, e trovare

$$D \cos x = -\sin x$$

per ogni $x \in \mathbb{R}$. (Ritroveremo questo risultato anche in seguito, per cui non riportiamo i dettagli, peraltro assai semplici).

E' anche possibile calcolare in maniera analoga $D(\operatorname{tg}(x))$, nei punti ove tale funzione é definita:

$$\begin{aligned} D(\operatorname{tg}(x)) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg}(x+h) - \operatorname{tg}(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \left(\frac{\operatorname{tg}(x) + \operatorname{tg}(h)}{1 - \operatorname{tg}(x)\operatorname{tg}(h)} - \operatorname{tg}(x) \right) = \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg}(h)(1 + \operatorname{tg}^2(x))}{h(1 - \operatorname{tg}(x)\operatorname{tg}(h))} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg}(h)}{h} \frac{1 + \operatorname{tg}^2(x)}{1 - \operatorname{tg}(x)\operatorname{tg}(h)} = 1 + \operatorname{tg}^2(x), \end{aligned}$$

in virtu' delle formule di addizione e del limite notevole $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg}(h)}{h} = 1$.

6 Veniamo ora alla funzione *esponenziale*: $f(x) = e^x$: risulta

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \frac{e^x e^h - e^x}{h} = e^x \frac{e^h - 1}{h}.$$

Ancora grazie a limiti notevoli, ricaviamo

$$De^x = e^x.$$

Questa é una proprieta' che quasi *caratterizza* la funzione esponenziale: essa é l'unica funzione (a meno di multipli) che *coincida* con la sua derivata.

In maniera analoga, si puo' dedurre:

$$Da^x = a^x \log a$$

valida per qualsiasi *base* $a > 0$ e ogni $x \in \mathbb{R}$.

Gia' che ci siamo, facciamo un ultimo (per ora) sforzo, ed esaminiamo la funzione *logaritmo*. Ponendo $\phi(x) = \log x$ (logaritmo naturale), si ha:

$$\frac{\phi(x+h) - \phi(x)}{h} = \frac{1}{h} \log \frac{x+h}{x} = \frac{1}{h} \log \left(1 + \frac{h}{x}\right)$$

per ogni $x > 0$ e per ogni h tale che $h+x > 0$. Sfruttando ancora i limiti notevoli, avremo

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\phi(x+h) - \phi(x)}{h} = \lim_{u \rightarrow 0} \frac{1}{x} \frac{\log(1+u)}{u} = \frac{1}{x}$$

avendo posto $\frac{h}{x} = u$. Dunque, anche la funzione *logaritmo* é derivabile, e si ha

$$D \log x = \frac{1}{x}, \quad \forall x > 0.$$

Se si considera una base a diversa da e , passaggi analoghi mostrano che

$$D \log_a x = (\log_a e) \frac{1}{x} = \frac{1}{x \log_e a}, \quad \forall x > 0.$$

7 Sia f una funzione derivabile in un punto x_0 . Cosa si puo' dire di $g(x) = \frac{1}{f(x)}$? Una prima condizione da imporre é che risulti $f(x_0) \neq 0$, altrimenti g neanche sarebbe definita in x_0 . Supponendo dunque $f(x_0) \neq 0$, e ricordando che la derivabilita' di f

implica la continuità (teorema 7.3), ne segue che f è diversa da 0 anche in tutto un intorno di x_0 , e quindi in tale intorno g è ben definita (e continua). Dunque, ha senso porsi il problema della derivabilità di $g(x) = \frac{1}{x}$ almeno in x_0 . Si ha:

$$\begin{aligned}\frac{g(x_0 + h) - g(x_0)}{h} &= \frac{f(x_0) - f(x_0 + h)}{h} \frac{1}{f(x_0)f(x_0 + h)} = \\ &= -\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \frac{1}{f(x_0)f(x_0 + h)}.\end{aligned}$$

La continuità di f in x_0 e il fatto che $f(x_0) \neq 0$, comportano che

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{f(x_0)f(x_0 + h)} = \frac{1}{f(x_0)^2},$$

e questo fatto, assieme alla derivabilità di f in x_0 , ci porta a concludere:

$$\left(\frac{1}{f}\right)'(x_0) = -\frac{f'(x_0)}{f(x_0)^2}.$$

Ad esempio, la derivata di $\frac{1}{x}$ è uguale a $-\frac{1}{x^2}$, e la derivata di $\frac{1}{x^2}$ è uguale a $-\frac{2}{x^3}$. In generale, usando la regola di derivazione delle potenze, troveremo

$$D \frac{1}{x^n} = -n \frac{1}{x^{n+1}},$$

in accordo con la relazione

$$Dx^k = kx^{k+1}$$

valida per ogni intero k , *positivo o negativo*.

- 8 Ora, possiamo facilmente dedurre la regola di derivazione di un rapporto di due funzioni: supponendo che f e g siano entrambe derivabili in un punto x , e supponendo che sia $g(x) \neq 0$, il rapporto $\frac{f}{g}$ è derivabile in x_0 e si ha:

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g(x)^2}.$$

(Basta applicare la regola di derivazione del prodotto, relativamente alle due funzioni f e $\frac{1}{g}$).

Ad esempio, si potrebbe usare questa formula per ricavare di nuovo la derivata della funzione $tg(x)$: avremo

$$D tg(x) = D \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}.$$

(Separando i due addendi a numeratore si ritrova la forma equivalente

$$D \, tg(x) = 1 + tg^2(x),$$

già trovata per altra via al punto 5) precedente).

A questo punto, possiamo trovare facilmente la derivata di ogni funzione razionale, ossia della forma $f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$, ove p e q siano polinomi, con la sola avvertenza di escludere quei punti nei quali $q(x)$ si annulla (che comunque sono punti in cui f non è definita).

Ad esempio, si ha

$$D \frac{x^3 + x - 1}{x + 4} = \frac{(3x^2 + 1)(x + 4) - (x^3 + x - 1)}{(x + 4)^2} = \frac{2x^3 + 12x^2 + 5}{(x + 4)^2}$$

in tutti i punti x , tranne che per $x = -4$.

Pertanto, se si vuole calcolare l'equazione della retta tangente al grafico di questa funzione nel punto $(0, -\frac{1}{4})$, basta valutare $f'(0)$ (per sostituzione), ottenendo $f'(0) = \frac{5}{4}$, e quindi la retta tangente è

$$y = \frac{5}{4}x + \frac{1}{4}$$

Suggeriamo al lettore, che debba ancora impraticarsi con queste formule, di esercitarsi nel calcolo delle derivate di *tutte* le funzioni razionali che gli vengono in mente, finché non ritiene di aver raggiunto sufficienti padronanza e rapidità.

Prima di passare al calcolo di derivate per altre funzioni, meno elementari, conviene dare un'occhiata a qualche altro teorema, che può essere di una certa utilità.

Teorema 7.4 *Supponiamo che una funzione $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ sia derivabile in un certo punto $x_0 \in [a, b]$. Allora, esiste una funzione infinitesima $\sigma(h)$ (infinitesima per $h \rightarrow 0$), tale che*

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + hf'(x_0) + h\sigma(h) \tag{7.1}$$

Dimostrazione Per definizione di derivata, si ha

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = f'(x_0), \text{ da cui } \lim_{h \rightarrow 0} \left(\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} - f'(x_0) \right) = 0.$$

Dunque, se poniamo $\sigma(h) = \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} - f'(x_0)$, é evidente che σ é infinitesima per $h \rightarrow 0$, e chiaramente, dalla definizione stessa di σ , risulta $f(x_0 + h) = f(x_0) + hf'(x_0) + h\sigma(h)$.

□

Qual é il senso di questo teorema? La funzione $h\sigma(h)$ é chiaramente un infinitesimo di *ordine superiore* rispetto ad h ; ora, in base al teorema 7.4, la quantita' $f(x_0 + h) - f(x_0)$ (detto *incremento* della funzione) puo' essere considerata *molto vicina* a $hf'(x_0)$, nel senso che le due quantita' differiscono per un infinitesimo (appunto, $h\sigma(h)$) trascurabile rispetto ad h .

Questo discorso porta a dire che, *in vicinanza* di un punto x_0 , nel quale la f sia derivabile, la f stessa quasi si confonde con la retta tangente. Infatti, ponendo $x_0 + h = x$, confrontiamo l'equazione della retta tangente,

$$y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$$

e l'espressione (7.1)

$$f(x) = f(x_0) + (x - x_0)f'(x_0) + h\sigma(h) :$$

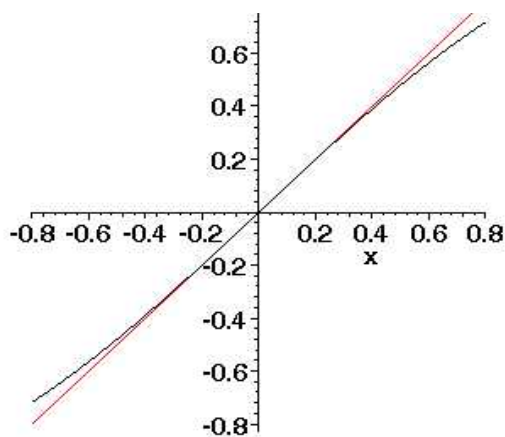
vediamo che l'unica differenza tra y e $f(x)$ sta nell'infinitesimo $h\sigma(h)$, che, come gia' detto, é trascurabile rispetto ad h , e quindi *tende a scomparire* quanto piu' h é piccolo, ossia quanto piu' x si avvicina a x_0 .

Osservazione 7.5 La relazione (7.1) si esprime dicendo che f é *differenziabile* nel punto x_0 : intuitivamente, f é differenziabile in un punto se, in vicinanza di quel punto, f tende a *confondersi* con la retta tangente al suo grafico in quel punto. Quando questo accade, la quantita' $f'(x_0)h$ viene anche denotata con $f'(x_0)dx$ e anche con $df(x)$ (sottintendendo x_0): tale quantita' prende il nome di *differenziale* di f in x_0 .

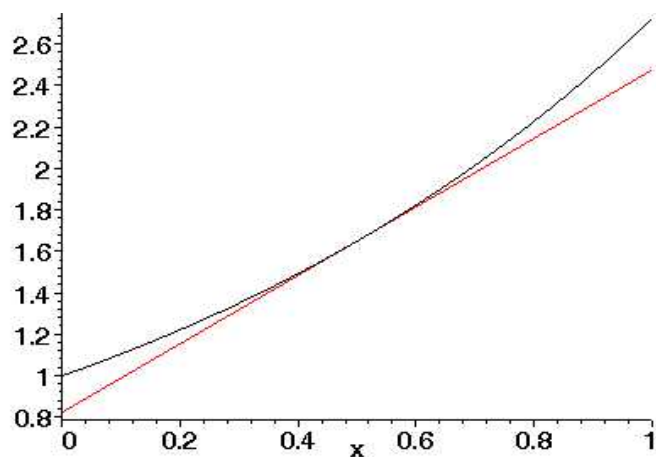
Dunque, il teorema 7.4 ci dice che una funzione derivabile é anche differenziabile; ma vale anche il viceversa, nel senso seguente: supponiamo che esista una costante A reale, tale che risulti $f(x_0 + h) = f(x_0) + Ah + h\sigma(h)$, con σ infinitesima; ebbene, allora f é derivabile in x_0 e risulta $f'(x_0) = A$.

Questa interpretazione della derivabilita' é molto importante in problemi di approssimazione: quando si conosce poco una certa funzione, puo' essere molto utile sostituirla

(quando possibile) con una funzione piu' semplice (come una funzione lineare), a meno di errori *di poco conto*. Ad esempio, vedremo presto che la funzione $\sin x$ é derivabile in ogni punto, in particolare per $x = 0$: vedremo anche che, in questo punto particolare, l'infinitesimo σ é gia' di ordine piuttosto elevato (per l'esattezza, 3), e quindi l'errore che si commette nel sostituire $\sin x$ con la sua retta tangente (in 0), é veramente minimo, almeno finché $|x|$ non é troppo grande. Questo fatto *autorizza* i Fisici, (Galileo per primo) a trattare il moto del pendolo come un moto sostanzialmente armonico, con le conseguenze che ben conosciamo. La figura presenta alcuni esempi significativi di tale approssimazione.



Confronto fra $\sin(x)$ e x intorno a 0: le due curve si distinguono solo per $|x| > 0.4$



Confronto (non in scala) tra $\exp(x)$ e retta tangente in un intorno di $(.5, \exp(.5))$.

Il teorema 7.4 ha anche delle conseguenze dirette nel calcolo di derivate non immediate, cioè nella derivazione di *funzioni composte*.

Teorema 7.6 Supponiamo che $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ sia una funzione, derivabile in un certo punto x_0 . Supponiamo che $f(x) \in [c, d]$ per ogni $x \in [a, b]$, e sia $g : [c, d] \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione, derivabile nel punto $y_0 = f(x_0)$. Allora, la funzione composta $g \circ f$ risulta derivabile in x_0 e si ha:

$$(g \circ f)'(x_0) = g'(y_0)f'(x_0) = g'(f(x_0))f'(x_0) \quad (7.2)$$

(Regola della catena).

Dimostrazione. Per ogni incremento h , poniamo $k = f(x_0+h) - f(x_0)$. Chiaramente, k é infinitesimo con h . Consideriamo ora il rapporto incrementale

$$\begin{aligned} \frac{g \circ f(x_0 + h) - g \circ f(x_0)}{h} &= \frac{g(f(x_0 + h)) - g(f(x_0))}{h} = \frac{g(f(x_0) + k) - g(f(x_0))}{h} = \\ &= \frac{g(y_0 + k) - g(y_0)}{h} = \frac{kg'(y_0) + k\sigma(k)}{h}, \end{aligned}$$

(tenuto conto della differenziabilit  di g in y_0). Ora, mandando a limite:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{g \circ f(x_0 + h) - g \circ f(x_0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} (g'(y_0) + \sigma(k)) = f'(x_0)g'(f(x_0)),$$

cio  appunto la regola (7.2). \square

Esempi 7.7

(1) Consideriamo la funzione $g(x) = \sin x$ e la funzione $f(x) = 2x$: avremo allora $g \circ f(x) = \sin 2x$. La derivata di tale funzione si pu  ricavare sia mediante la regola di derivazione di un *prodotto*, essendo $\sin 2x = 2 \sin x \cos x$, sia con la regola della catena: usando questa, poich  $D(2x) = 2$ e $D \sin x = \cos x$, troviamo subito $D \sin 2x = 2 \cos 2x$ (si rammenti sempre che la derivata di g va calcolata in $f(x)$, e poi moltiplicata per $f'(x)$).

(2) Valutiamo ora $D \sin(8x)$: stavolta proprio non conviene applicare le formule di duplicazione del seno, ma la regola della catena fornisce subito

$$D(\sin 8x) = 8 \cos 8x.$$

Piu' in generale, $D(\sin Mx) = M \cos Mx$, per ogni costante reale M .

(3) Un'altra facile applicazione della formula (7.2) si ha nel calcolo della derivata di $\cos x$, a partire da quella di $\sin x$: essendo infatti $\cos x = \sin(\frac{\pi}{2} - x)$ (e viceversa) si deduce $D \cos x = \cos(\frac{\pi}{2} - x) \cdot (-1) = -\sin x$.

(4) Data una qualunque funzione f , derivabile, si ha $D(f(x))^k = kf(x)^{k-1}f'(x)$ per ogni k intero. Ad esempio, $D \sin^2 x = 2 \sin x \cos x$ e $D \cos^2 x = -2 \sin x \cos x$: si noti che le due derivate sono l'una l'opposta dell'altra, come accade quando le due funzioni hanno somma *costante* ($\sin^2 x + \cos^2 x = 1$).

Come altra applicazione, si può valutare rapidamente la derivata di $(x^2 - x)^{12}$, senza sviluppare la potenza:

$$D(x^2 - x)^{12} = 12(x^2 - x)^{11}(2x - 1).$$

Ancora, $D(e^{4x}) = D((e^x)^4)$: possiamo usare la regola della catena in due modi differenti, ottenendo

$$D(e^{4x}) = 4e^{4x}, D((e^x)^4) = 4e^{3x} \cdot e^x = 4e^{4x}.$$

(5) Valutiamo direttamente la derivata di a^x , con $a > 0$ costante: essendo $a^x = e^{x \log a}$, ricaviamo

$$Da^x = e^{x \log a} \cdot \log a = a^x \log a.$$

(6) Un altro esempio interessante riguarda la funzione $\log x$: applicando la regola della catena a $\log x^k$, con k intero, abbiamo

$$D(\log x^k) = \frac{1}{x^k} kx^{k-1} = \frac{k}{x} = Dk \log x :$$

nulla di strano, dato che $\log x^k$ e $k \log x$ sono la stessa funzione, per $x > 0$. Similmente, per $k > 0$ si ha

$$D(\log kx) = \frac{k}{kx} = \frac{1}{x} = D \log x :$$

nulla di strano, infatti $\log kx = \log k + \log x$ e chiaramente $\log k$ ha derivata nulla, essendo costante.

(7) In generale, se $f(x) > 0$ per ogni x , e f è derivabile, si ha

$$D(\log f(x)) = \frac{f'(x)}{f(x)}.$$

Ad esempio, $D \log(x^4 + 1) = \frac{4x^3}{x^4 + 1}$, e $D \log(\cos x) = -\tan x$.

Si noti anche che $D \log e^x = \frac{e^x}{e^x} = 1$, com'è ovvio, essendo $\log e^x = x$ per ogni $x \in \mathbb{R}$.

(8) Una trattazione a parte meritano le funzioni del tipo $f(x)^{g(x)}$, con $f(x) > 0 \forall x$. Per definizione, si ha infatti

$$f(x)^{g(x)} = e^{g(x) \log f(x)},$$

da cui

$$D(f(x)^{g(x)}) = D(e^{g(x) \log f(x)}) = e^{g(x) \log f(x)} D(g(x) \log f(x)) =$$

$$= f(x)^{g(x)}(g'(x) \log f(x) + \frac{g(x)f'(x)}{f(x)}) = f(x)^{g(x)-1} \left(f(x)g'(x) \log f(x) + f'(x)g(x) \right).$$

Ad esempio, per $x > 0$, si ha $Dx^x = x^x(\log x + 1)$.

Una conseguenza importante si ha nella derivazione delle *potenze* con esponente reale qualunque: abbiamo infatti già incontrato la regola

$$Dx^n = nx^{n-1}$$

valida per n intero, e per ogni x nel campo di definizione della funzione (il che vuol dire per ogni x reale, tranne $x = 0$ quando $n < 0$).

Se la funzione fosse x^a , con a numero reale qualsiasi, prima di tutto bisogna stabilire il campo di esistenza: a tale scopo, basta ricordare che $x^a = e^{a \log x}$, e quindi la funzione ha senso per $x > 0$. (Tuttavia, almeno per $a \geq 0$, è interessante notare che $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^a = 0$).

La regola della catena fornisce allora:

$$Dx^a = De^{a \log x} = e^{a \log x} \frac{a}{x} = x^a \frac{a}{x} = ax^{a-1}.$$

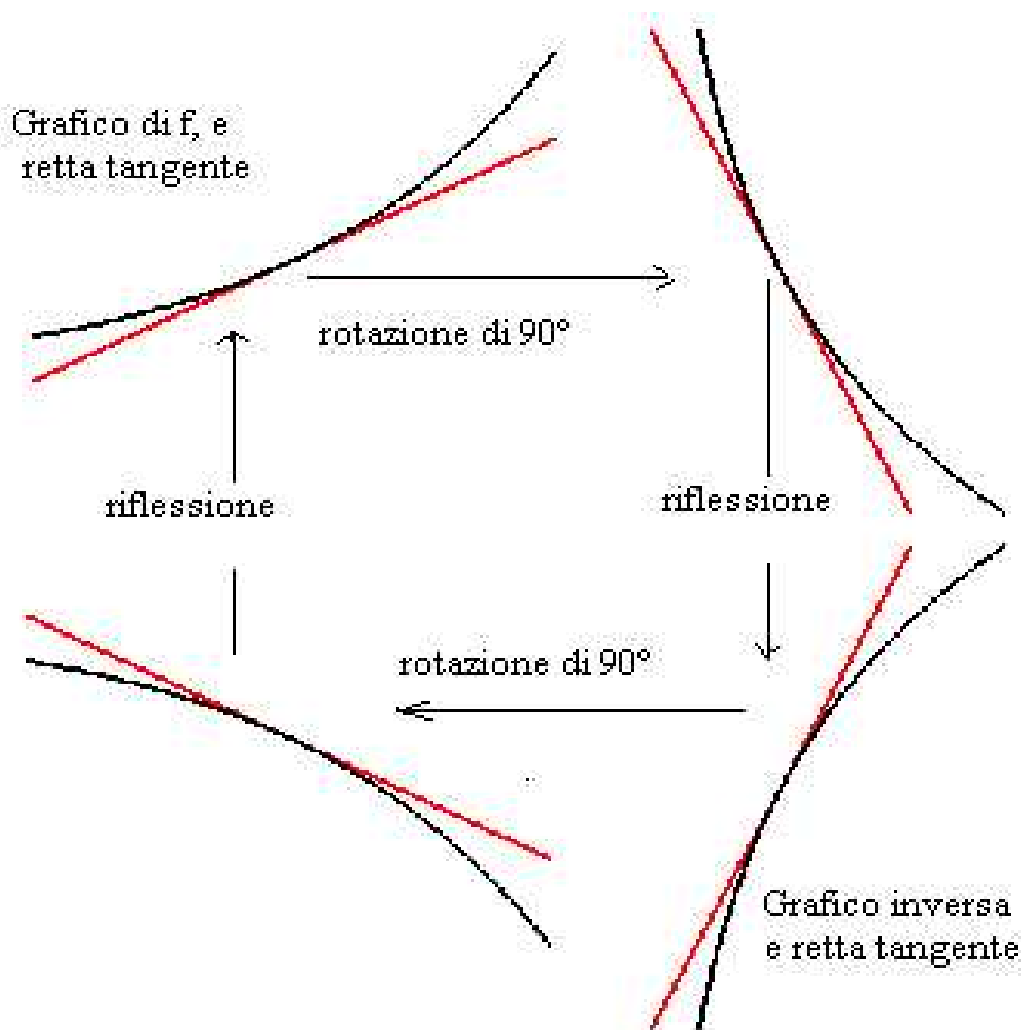
Dunque, la regola di derivazione delle potenze è sempre la stessa, qualunque sia l'esponente a . In particolare

$$D\sqrt{x} = \frac{1}{2\sqrt{x}},$$

ovviamente per $x > 0$. (Si riveda ora l'esempio (3) di 7.2.)

A questo punto, abbiamo quasi esaurito la carrellata di tutte le regole di derivazione, e (teoricamente) abbiamo gli strumenti per calcolare la derivata di quasi tutte le funzioni interessanti: manca solo una *categoria* di funzioni, che ancora non abbiamo preso in considerazione, cioè quella delle funzioni *inverse*.

A dire il vero, non è che manchino molte funzioni *importanti* all'appello: in fondo, l'inversa della funzione esponenziale è il logaritmo, l'inversa della potenza è la radice, e di queste funzioni già sappiamo *tutto*. Restano *solo* le inverse delle funzioni trigonometriche (arcoseno, arcotangente, etc.), e anche quelle delle trigonometriche iperboliche (sette seno iperbolico, etc.). Ma proprio queste funzioni hanno derivate talmente importanti ai fini dell'integrazione, che non è possibile passarle sotto silenzio.



Per fortuna la Geometria ci viene in aiuto, e ci eviterà', come vedremo, di dilungarci in noiose dimostrazioni.

Infatti, come sono collegati il grafico di una funzione invertibile f e quello della funzione inversa, f^{-1} ? Bé, sappiamo che si ottengono l'uno dall'altro operando una rotazione di 90° (in senso antiorario) e poi una *riflessione* (simmetria) rispetto all'asse \vec{x} . (V. grafico).

Dunque, é chiaro che, se il grafico di f ammette tangente in un punto $(x, f(x))$, il grafico dell'inversa ammette tangente nel punto $(f(x), x)$ (trattasi sempre dello stesso punto del piano, la notazione diversa é dovuta solo al fatto che, per f^{-1} , ascissa e ordinata si scambiano i ruoli). Inoltre, grazie al gioco di rotazione e riflessione, la tangente per l'inversa si ottiene da quella di f per rotazione di 90° e riflessione: analiticamente, cio'

comporta che

$$(f^{-1})'(f(x)) = \frac{1}{f'(x)} \quad (7.3)$$

almeno nei punti ove $f'(x) \neq 0$. D'altra parte, se $f'(x) = 0$, la tangente in $(x, f(x))$ al grafico di f é orizzontale, e allora quella relativa al grafico di f^{-1} sarebbe verticale, il che sappiamo non consente di parlare di derivata.

Chi volesse un'ulteriore conferma (piu' analitica) della regola (7.3), puo' anche applicare la regola della catena alla relazione:

$$x = f^{-1}(f(x))$$

(facendo finta di sapere gia' che f^{-1} é derivabile) ottenendo

$$1 = (f^{-1})'(f(x))f'(x)$$

e quindi (7.3).

Esempi 7.8

(1) Facciamo qualche verifica: sappiamo ad esempio che \sqrt{x} é l'inversa di x^2 , nel semiasse $x > 0$. Poiché la derivata di $f(x) = x^2$ é $2x$, la regola (7.3) ci dice che

$$(D\sqrt{\cdot})(f(x)) = \frac{1}{2x} \Rightarrow D\sqrt{y} = \frac{1}{2\sqrt{y}}$$

avendo posto $y = x^2$. Ancora, sapendo che $\log x$ é l'inversa di $g(x) = e^x$, avremo

$$(D\log)(g(x)) = \frac{1}{e^x} \Rightarrow D\log y = \frac{1}{y}$$

essendo qui $y = e^x$. Una curiosita' riguarda la funzione $h(x) = \frac{1}{x}$, per $x \neq 0$. Questa funzione é l'inversa di sé stessa. La regola (7.3) vale ancora? Vediamo.

$$(h^{-1})'(h(x)) = \frac{1}{h'(x)} = -x^2 \Rightarrow (h^{-1})'(y) = -\left(\frac{1}{y}\right)^2 :$$

dunque, coerentemente, $h^{-1} = h$ ha la stessa derivata di h .

(2) Passiamo ora a funzioni *nuove*. Sappiamo gia' che le funzioni $\sin x$ e $\cos x$ si possono invertire in intervalli ove siano strettamente monotone. Per quanto riguarda $\sin x$,

convenzionalmente si sceglie $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, mentre per $\cos x$ si sceglie $[0, \pi]$. Di conseguenza, le funzioni $\arcsin y$ e $\arccos y$ sono definite entrambe in $[-1, 1]$, ma la prima ha valori in $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, mentre la seconda ha valori in $[0, \pi]$. Quale sara' la derivata di $\arcsin y$? Intanto, bisogna stare attenti che $D(\sin x)$ non sia nulla: cio' accade esattamente agli estremi, ossia per $y = 1$ oppure $y = -1$. Ora, la regola (7.3) fornisce, per $y \neq \pm 1$

$$D \arcsin y = \frac{1}{\cos x}$$

essendo $y = \sin x$. Per ricavare una formula piu' semplice, notiamo che, nell'intervallo $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, si ha $\cos x = \sqrt{1 - \sin^2 x} = \sqrt{1 - y^2}$; da qui la regola

$$D \arcsin y = \frac{1}{\sqrt{1 - y^2}} \quad (7.4)$$

chiaramente valida solo per $|y| < 1$. Analogamente, si ottiene

$$D \arccos y = -\frac{1}{\sqrt{1 - y^2}}$$

ricavata allo stesso modo, ma con la variante del segno *meno*, poich  $D \cos x = -\sin x$.

(Notiamo che $\arcsin x + \arccos x$ ha derivata nulla, *come se* fosse costante. E infatti, tale funzione   costante: si ha $\arcsin x = \frac{\pi}{2} - \arccos x$.)

Molto importante   anche l'arcotangente: tale funzione   definita su tutto \mathbb{R} , ed ha valori in $] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$, risultando sempre crescente. Per calcolarne la derivata, ricordiamo prima che $D(tgx) = 1 + tg^2(x)$. Allora, si ha

$$D(\arctan y) = \frac{1}{1 + tg^2(x)} \Rightarrow D(\arctan y) = \frac{1}{1 + y^2}.$$

(3) Occupiamoci ora delle funzioni trigonometriche iperboliche:

$$\sinh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}, \quad \cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}, \quad \tanh(x) = \frac{\sinh(x)}{\cosh(x)}.$$

Per queste funzioni, le inverse si possono esplicitare, ma assumono una forma un po' complicata. Intanto, ricordiamo che, mentre $\sinh x$   crescente e suriettiva, e quindi invertibile *tout court*, la funzione $\cosh x$ decresce per $x < 0$ e cresce per $x > 0$, ed ha minimo assoluto in 0 : $\cosh 0 = 1$. Per convenzione, l'inversa di tale funzione si definisce in $[1, +\infty[$ e ha

valori in $[0, +\infty[$. Quanto a $\tanh x$, essa é crescente, ma ha come codominio l'intervallo $] -1, 1[$, e dunque l'inversa é definita in tale intervallo.

Per la cronaca, si ha

$$\operatorname{arcsinh}(y) = \log(y + \sqrt{y^2 + 1}), \quad \operatorname{arccosh}(y) = \log(y + \sqrt{y^2 - 1}), \quad \operatorname{arctanh}(y) = \frac{1}{2} \log\left(\frac{1+y}{1-y}\right).$$

Dunque, le derivate di tali funzioni si possono calcolare direttamente, facendo uso delle varie regole di calcolo studiate, oppure mediante la formula (7.3), pur di conoscere le derivate delle funzioni $\sinh x$, $\cosh x$, $\tanh x$. Semplici calcoli forniscono:

$$D \sinh x = \cosh x, \quad D \cosh x = \sinh x, \quad D \tanh x = 1 - \tanh^2 x.$$

In base a tali risultati, e usando la (7.3) come s'è già fatto per le funzioni trigonometriche, si ottiene:

$$D(\operatorname{arcsinh})(y) = \frac{1}{\sqrt{1+y^2}}, \quad D(\operatorname{arccosh})(y) = \frac{1}{\sqrt{y^2-1}}, \quad D(\operatorname{arctanh})(y) = \frac{1}{1-y^2}.$$

Definizione 7.9 Come abbiamo visto negli esempi precedenti, molte funzioni di uso comune sono derivabili dappertutto nel loro campo di definizione. Quando questo accade, si può considerare la derivata f' come una nuova funzione, definita nello stesso intervallo di definizione di f . Tale nuova funzione prende il nome di *derivata prima* (o semplicemente *derivata*) di f . Così, la derivata prima di $\sin x$ é $\cos x$, oppure la derivata di e^x é ancora e^x , e così via. Ovviamente, anche la derivata prima può essere derivabile, a sua volta, in tutto il suo insieme di definizione: se ciò accade, la derivata di f' prende il nome di *derivata seconda* di f , o anche derivata di *ordine 2* di f , e si denota con f'' o con $\frac{d^2 f}{dx^2}$. Chiaramente, la derivata seconda di $\sin x$ é $-\sin x$, e la derivata seconda di x^4 é $12x^2$.

Il discorso naturalmente si può portare avanti, definendo, quando esistano, le derivate di *ordine* k : per induzione, se f ammette derivata di ordine $k-1$, questa viene denotata con $\frac{d^{k-1} f}{dx^{k-1}}$ o anche con $f^{(k-1)}$; e se tale derivata é a sua volta derivabile, la sua derivata viene detta *derivata di ordine* k di f , e denotata con $\frac{d^k f}{dx^k}$ o con $f^{(k)}$.

Ad esempio, la derivata quarta di $\sin x$ é ancora $\sin x$, mentre la derivata quinta di x^4 é 0: sia $\sin x$ sia x^4 ammettono derivate di tutti gli ordini, con la differenza che quelle di

$\sin x$ si ripetono periodicamente, mentre quelle di x^4 sono tutte nulle, a partire da quella di ordine 5.

Se una funzione f ammette derivate fino all'ordine k , ad esempio nell'intervallo $[a, b]$, è chiaro che tutte le derivate, fino all'ordine $k - 1$, sono continue. Se anche $f^{(k)}$ è continua, si dice che f è di classe $C^k([a, b])$. Se poi f ammette derivate di tutti gli ordini in $[a, b]$, esse sono necessariamente tutte continue, e si scrive $f \in C^\infty([a, b])$.

Chiudiamo questo capitolo con un teorema molto utile, come vedremo: si tratta della cosiddetta *regola dell'Hospital*. Per il momento, ne daremo una formulazione non del tutto generale.

Teorema 7.10 *Siano f e g due funzioni, definite in un intervallo $[a, b]$, e a valori in \mathbb{R} . Supponiamo che entrambe siano continue in $[a, b]$, ammettano derivata in a , e che si abbia:*

$$f(a) = g(a) = 0, \quad g'(a) \neq 0, \quad g(x) \neq 0 \text{ in } [a, b].$$

Allora, risulta

$$\lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(a)}{g'(a)}. \quad (7.5)$$

Dimostrazione. Poiché $g(x) \neq 0$, ha senso cercare il limite nella formula (7.5). Si ha allora:

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x) - f(a)}{g(x) - g(a)} = \frac{\frac{f(x)-f(a)}{x-a}}{\frac{g(x)-g(a)}{x-a}}.$$

Basta ora applicare la definizione stessa di derivata, e le ipotesi del teorema, per dedurre immediatamente l'asserto. \square

Questo teorema ha grande importanza nel calcolo di limiti notevoli, almeno nella forma $\frac{0}{0}$; (ma vedremo in seguito che la sua applicabilità è ben più ampia). Ad esempio, consideriamo le funzioni $f(x) = \arctan x$ e $g(x) = x + \sin x$.

Applicando la regola di L'Hospital, avremo

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\arctan x}{x + \sin x} = \left[\frac{1}{(1+x^2)(1+\cos x)} \right]_{x=0} = \frac{1}{2}.$$

La regola di L'Hospital puo' essere applicata anche quando $f'(a)$ e $g'(a)$ non esistono o sono uguali a 0: vedremo in seguito un risultato di maggiore applicabilita', in base al quale si ha

$$\lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f'(x)}{g'(x)} \quad (7.6)$$

non appena le funzioni e il limite a secondo membro esistano: in effetti, questa é la formula cui di solito ci si riferisce parlando della regola di L'Hospital.

Ad esempio, se si vuole calcolare il limite

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin x}{x^3}$$

vediamo subito che sia la funzione a numeratore sia quella a denominatore hanno derivata nulla in 0, e quindi la formula (7.5) non puo' essere applicata. Possiamo usare invece la (7.6):

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin x}{x^3} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{3x^2}.$$

Siamo ancora di nuovo in presenza di una forma indeterminata $\frac{0}{0}$. Abbiamo gia' incontrato il limite notevole

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{1}{2}$$

quindi il limite cercato vale $\frac{1}{6}$, ma possiamo *far finta* di non ricordarlo, e, a titolo esemplificativo, applichiamo di nuovo la regola di L'Hospital (7.6), ottenendo:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin x}{x^3} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{3x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{6x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x}{6} = \frac{1}{6}.$$

Dunque, la regola di L'Hospital é un valido strumento per risolvere limiti nella forma $\frac{0}{0}$, anche se va detto che *non poteva* essere adoperato per quei limiti (come $\frac{\sin x}{x}$ oppure $\frac{1-e^x}{x}$ per $x \rightarrow 0$) che servono proprio per calcolare la derivata delle funzioni elementari, quali $\sin x$ e e^x .

Precisiamo infine che tale regola puo' essere applicata *anche* per risolvere la forma indeterminata $\frac{\infty}{\infty}$, e (per entrambe le forme indeterminate) non solo per x che tende a un valore finito, ma anche per $x \rightarrow \infty$. Ad esempio,

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\log(x+1)}{\log x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{x+1} = 1$$

o anche (per la forma $0 \cdot \infty$):

$$\lim_{x \rightarrow 0} x \log x = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log x}{1/x} = \lim_{x \rightarrow 0} -\frac{1}{x} x^2 = 0.$$

Capitolo 8

Studio di funzioni

Oramai, si conoscono praticamente tutte le regole per ricavare la derivata di qualsiasi funzione di uso comune, (purché derivabile). Ciò non toglie che restano numerose funzioni, per le quali il calcolo della derivata si può effettuare solo con la definizione, ossia valutando il limite del rapporto incrementale. Vedremo in seguito qualche esempio, ma ora occupiamoci piuttosto delle *applicazioni* del concetto di derivata. Abbiamo già osservato, nell'esempio (2) di 7.2, che il segno della derivata di una funzione f può fornire indicazioni sulla monotonia di f . Questa possibilità sarà esaminata in dettaglio, e permetterà, assieme ad altre indagini più o meno dettagliate, di *studiare la funzione* f , ossia a comprenderne l'andamento, individuarne il massimo e il minimo valore (se esistono), e chiarire tutti i possibili aspetti geometrici, fino a disegnarne il grafico con sufficiente precisione.

Questo è di notevole importanza nelle applicazioni, in quanto spesso una funzione reale rappresenta svariati fenomeni fisici, stocastici, economici, etc., e quindi conoscere bene una funzione significa avere un'idea precisa di come un determinato fenomeno si è sviluppato e come evolverà in futuro.

Cominciamo dunque, con alcuni risultati molto semplici.

Teorema 8.1 *Sia $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione monotona crescente (o non-decrescente). Se f è derivabile in un punto $x_0 \in [a, b]$, allora risulta $f'(x_0) \geq 0$.*

Dimostrazione. Consideriamo il rapporto incrementale $\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$, naturalmente per quei valori di h per i quali si ha $x_0+h \in [a, b]$: tale rapporto incrementale è sempre maggiore

di 0, per f crescente, e comunque non-negativo, per f non-decrescente. Dunque, facendo il limite, per $h \rightarrow 0$, il risultato é comunque non-negativo. \square

N.B. Si noti che, anche nell'ipotesi che f sia strettamente crescente, non si puo' in generale affermare che $f'(x_0)$ sia strettamente positiva: ad esempio, la funzione x^3 é strettamente crescente, ma ha derivata nulla in 0.

Comunque, quando si deve studiare una funzione f , di solito é piu' difficile stabilire se e in quali intervalli essa é monotona, che studiare il segno di f' . Dunque occorrerebbe un risultato che *inverte* il teorema 8.1: un tale teorema esiste, e lo studieremo tra breve. Si tratta di un problema molto importante: é chiaro che qualsiasi metodo utile a individuare intervalli di monotonia di f permette di trovare anche i punti di massimo e minimo, per f ; ad esempio, se una funzione continua f cresce in un intervallo $[a, c[$ e decresce nell'intervallo $]c, b]$, nel punto c essa raggiunge un massimo. E quindi conviene esaminare un po' da vicino come si comporta f' , nei punti in cui f raggiunge un massimo, o un minimo. Da questa indagine scaturira' tutta una messe di conseguenze, per mezzo delle quali il comportamento di una funzione derivabile puo' essere descritto perfettamente, semplicemente studiando proprieta' algebriche della funzione derivata (e magari anche delle derivate di ordine maggiore di 1).

8.1 Massimi e minimi relativi

Uno dei problemi piu' importanti in Matematica é trovare il massimo o il minimo valore di certe funzioni, quando questi esistono. I prossimi risultati ci daranno alcuni metodi per individuare i valori di x che rendono massima o minima una data funzione. Tra i risultati che troveremo saranno compresi anche dei metodi per individuare intervalli in cui una funzione é crescente o decrescente, e ancora altri algoritmi, che torneranno utili per svariati problemi.

Definizione 8.2 Data una funzione $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, e un punto $x_0 \in [a, b]$, diremo che x_0 é *punto di massimo relativo* per f , se esiste un numero $\delta > 0$ tale che

$$f(x) \leq f(x_0) \quad \forall x \in]x_0 - \delta, x_0 + \delta[\cap [a, b].$$

Diremo poi che x_0 é un *punto di massimo assoluto* per f se risulta

$$f(x) \leq f(x_0) \quad \forall x \in [a, b].$$

Chiaramente, un punto di massimo assoluto é anche relativo, ma il viceversa non vale, in generale.

In maniera analoga si definiscono i concetti di *punto di minimo relativo* e *punto di minimo assoluto*: si puo' anche dire che x_0 é punto di minimo relativo (o assoluto) per f quando x_0 é punto di massimo (relativo o assoluto, rispettivamente) per $-f$.

Di solito, i punti di massimo o minimo relativo per f sono anche detti *punti estremanti* di f .

Quando x_0 é punto di massimo relativo per f , il valore $f(x_0)$ é detto un *massimo relativo* per f . Similmente si definiscono i concetti di *massimo assoluto*, *minimo relativo*, *minimo assoluto*.

Teorema 8.3 Sia $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione, derivabile in un punto $x_0 \in]a, b[$. Se x_0 é punto di massimo (o minimo) relativo per f , allora si ha $f'(x_0) = 0$.

Dimostrazione Supponiamo che x_0 sia punto di massimo relativo. Per ipotesi x_0 é interno ad $]a, b[$, e allora esiste un $\delta > 0$ tale che $]x_0 - \delta, x_0 + \delta[\subset]a, b[$, e tale anche da aversi $f(x) \leq f(x_0)$ per ogni $x \in]x_0 - \delta, x_0 + \delta[$. Per dimostrare che $f'(x_0) = 0$, valutiamo $f'(x_0)$ prima come derivata destra, poi come derivata sinistra. Si ha:

$$f'_d(x_0) = \lim_{h \rightarrow x_0^+} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \leq 0$$

in quanto i rapporti incrementali sono tutti negativi, per $0 < h < \delta$. Analogamente

$$f'_s(x_0) = \lim_{h \rightarrow x_0^-} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \geq 0$$

poiché il rapporto incrementale stavolta é sempre positivo, per $0 > h > -\delta$. Poiché f é derivabile, derivata destra e derivata sinistra devono essere uguali, e cio' é possibile solo se sono entrambe nulle.

Nel caso x_0 sia punto di minimo relativo, si puo' ragionare in maniera analoga, o anche applicare il risultato precedente alla funzione $-f$, che ha in x_0 un punto di massimo relativo.

□

N.B. I punti x per i quali risulta $f'(x) = 0$ si dicono *punti critici* della funzione f .

Osservazioni 8.4

(1) Nel teorema precedente, l'ipotesi che x_0 sia interno ad $]a, b[$ é necessaria: si consideri ad esempio la funzione $f(x) = x$, in $[0, 1]$; per tale funzione, $x = 0$ é punto di minimo assoluto (e quindi anche relativo), e $x = 1$ é punto di massimo assoluto, tuttavia é ovvio che $f'(0) = f'(1) = 1$.

(2) L'importanza del teorema 8.3 é evidente: se si ricercano i punti di minimo o di massimo di una funzione f , derivabile in tutto il suo campo di esistenza, basta restringere la ricerca a quei punti nei quali f' si annulla, cioè ai punti critici.

Ad esempio, cerchiamo il massimo e il minimo assoluti della funzione $f(x) = \frac{x}{x^2+1}$, al variare di $x \in \mathbb{R}$.

La funzione é definita e derivabile in tutto \mathbb{R} , e la derivata é:

$$f'(x) = \frac{1 - x^2}{(x^2 + 1)^2}$$

e si annulla solo per $x = 1$ e $x = -1$. Nei punti critici si ha: $f(1) = \frac{1}{2}$, $f(-1) = -\frac{1}{2}$. Ora, risolvendo la disequazione $\frac{x}{x^2+1} \leq \frac{1}{2}$, vediamo che essa é sempre verificata, quindi $x = 1$ é punto di massimo assoluto. Similmente si prova che -1 é punto di minimo assoluto (cio' si puo' dedurre anche grazie al fatto che f é *dispari*).

Poiché non vi sono altri punti critici, é chiaro che 1 é l'unico punto di massimo e -1 é l'unico punto di minimo per f .

Un problema classico, che si risolve con l'uso della derivata, é quello cosiddetto *isoperimetrico*: ad esempio, tra tutti i triangoli isosceli, di perimetro fissato $2p$, qual é quello di area massima?

Possiamo indicare con x la lunghezza di due dei lati del triangolo, cosi' che l'altro lato misura $b = 2p - 2x$. Allora, la formula di Erone ci fornisce l'area cercata, in funzione delle misure dei lati:

$$A = \sqrt{p(p-x)(p-x)(p-b)}$$

ossia anche

$$A^2 = p(p-x)^2(2x-p) :$$

chiaramente, massimizzare A oppure A^2 é lo stesso. Derivando, si ha:

$$D(A^2) = p[2(p-x)(p-2x) + 2(p-x)^2] = 2p(p-x)(2p-3x)$$

e chiaramente la derivata si annulla per $x = p$ e per $x = \frac{2}{3}p$. L'eventualita' $x = p$ corrisponde a un triangolo degenere (si vede subito che l'area é nulla). Dunque il massimo cercato corrisponde al caso $x = \frac{2}{3}p$, ossia al triangolo equilatero.

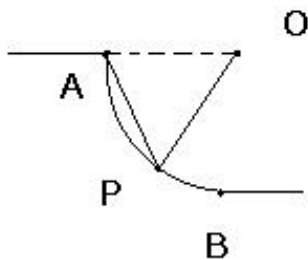
(3) Notiamo comunque che non sempre un punto critico per una funzione f é un punto di massimo o di minimo. Ad esempio, la funzione $g(x) = x^3$ ammette 0 come punto critico, ma tale funzione é sempre crescente, dunque non puo' avere punti di minimo o di massimo relativi, ne' tantomeno assoluti. A tale proposito, riteniamo istruttivo presentare un problema di minimo tempo, che potrebbe facilmente *indurre in tentazione*.

Problema di minimo. Supponiamo di percorrere a piedi un tratto di costa rettilinea alla velocita' costante v . A un certo punto, la costa presenta una rientranza, e forma un quarto di cerchio perfetto, avente raggio R . Dunque, giunti al termine del rettilineo, abbiamo la seguente alternativa: percorrere l'intero quarto di cerchio, sempre a velocita' v , oppure tuffarci, e percorrere in acqua una corda del cerchio, fino a raggiungere un punto intermedio del quarto di cerchio, e da questo punto riprendere la corsa a piedi, percorrendo la parte rimanente del quarto di cerchio. Naturalmente, la nostra velocita' a nuoto ha un valore $w < v$, dunque la minore lunghezza della corda é bilanciata dalla maggiore lentezza a nuoto. La domanda é: quale corda dobbiamo percorrere a nuoto, per rendere minimo il tempo che occorre a raggiungere l'altro estremo del quarto di cerchio?

Facendo riferimento alla figura, dobbiamo scegliere il punto P in modo tale che, partendo da A e percorrendo a nuoto la corda AP , e poi percorrendo a piedi l'arco di cerchio che unisce P a B , il tempo complessivo impiegato sia minimo.

Possiamo denotare con x l'angolo $A\hat{O}P$, e calcolare tutti i dati che occorrono in funzione di x : la corda AP é lunga $2R \sin \frac{x}{2}$, e quindi il tempo T_1 impiegato a nuoto sara' dato da $T_1 = \frac{2R \sin \frac{x}{2}}{w}$. L'arco di cerchio rimanente é lungo $R(\frac{\pi}{2} - x)$ (l'arco x é espresso in radianti): dunque il tempo che occorre per concludere il percorso é $T_2 = \frac{R(\frac{\pi}{2} - x)}{v}$. Il tempo complessivo é dato dunque da

$$T(x) = T_1 + T_2 = \frac{2R \sin \frac{x}{2}}{w} + \frac{R(\frac{\pi}{2} - x)}{v}.$$



Calcoliamo la derivata:

$$T'(x) = R \frac{\cos \frac{x}{2}}{w} - \frac{R}{v}.$$

Poiché $T'(x) = 0$ se e solo se $x = 2 \arccos \frac{w}{v}$, **sembrerebbe** che questo sia il valore cercato dell'angolo. Invece, se scegliessimo il punto P in modo che l'angolo x sia uguale a $2 \arccos \frac{w}{v}$, faremmo la *scelta peggiore* possibile: esso é infatti il valore che rende *massimo* il tempo complessivo!

Infatti, se si trattasse di un minimo, la funzione $T(x)$ dovrebbe decrescere per $x < 2 \arccos \frac{w}{v}$ e crescere per $x > 2 \arccos \frac{w}{v}$, dunque la derivata $T'(x)$ dovrebbe essere negativa *prima*, e positiva *dopo* tale punto: invece accade esattamente il contrario!

Il minimo tempo si ottiene in realta' scegliendo uno dei due casi estremi: o si fa *tutto* a nuoto (quindi, $x = \frac{\pi}{2}$), oppure si fa tutto a piedi (ossia, $x = 0$), a seconda che la quantita' $T(0) = T_2(0)$ sia maggiore o minore di $T(\frac{\pi}{2}) = T_1(\frac{\pi}{2})$: in conclusione, se $\frac{\sqrt{2}}{w} < \frac{\pi}{2v}$, conviene fare a nuoto la corda massima possibile, altrimenti conviene fare tutto a piedi. Tenuto conto che l'ultima condizione significa $w > \frac{2\sqrt{2}}{\pi}v \approx 0.9v$, ci vuole praticamente un Rosolino, per farcela a nuoto!

(4) Un'altra osservazione da fare é che non é sempre facile capire, una volta trovati i punti critici, quali fra essi sono di massimo, quali di minimo, e se ce ne sono alcuni che non sono né di massimo né di minimo.

Occorrono dunque altri strumenti, che ci permettano di comprendere la natura dei punti critici. Un metodo efficace puo' essere lo studio della monotonia della funzione stessa (il

caso di x^3 é emblematico, a questo riguardo). Se una funzione continua f é crescente in un intervallo $]a, x_0[$ e decrescente in un intervallo del tipo $]x_0, b[$, é chiaro che f ammette massimo relativo in x_0 (anche se f non é derivabile in x_0 : si pensi alla funzione $1 - |x|$, che ha massimo in 0).

Lo studio della monotonia di una funzione derivabile puo' essere condotto studiando il segno della derivata, come vedremo nei prossimi importanti teoremi.

Teorema 8.5 (Rolle) *Sia $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione che verifichi le seguenti condizioni:*

- (i) f é continua in $[a, b]$;
- (ii) f é derivabile almeno in $]a, b[$;
- (iii) $f(a) = f(b)$.

Allora, esiste un punto critico ed estremante $c \in]a, b[$.

Dimostrazione Poiché f é continua, per il teorema di Weierstrass (v. I parte, teorema 5.10), f ammette minimo e massimo valore in $[a, b]$. Detti m e M il minimo e il massimo valore, rispettivamente, di f in $[a, b]$, si danno due possibilita': o risulta $m < M$ oppure $m = M$; nel secondo caso, é ovvio che f é costante, e allora ogni punto in $]a, b[$ é punto estremante e critico, dunque il teorema é banalmente verificato. Esaminiamo ora il primo caso, ossia $m < M$. Essendo per ipotesi $f(a) = f(b)$, non é possibile che entrambi gli estremi a e b siano estremanti per f . Dunque esiste un punto estremante $c \in]a, b[$. Il teorema 8.3 assicura infine che c é anche critico. \square

Osservazioni 8.6

(1) Il significato geometrico del teorema di Rolle é abbastanza chiaro: se si percorre un cammino, partendo da una certa quota, e si conclude in un punto alla stessa quota, necessariamente a un certo momento si é raggiunta l'altezza massima, oppure l'altezza minima.

(2) Si noti che tutte le ipotesi del teorema di Rolle sono necessarie. Ad esempio, si consideri nell'intervallo $[0, 1]$ la funzione

$$f(x) = \begin{cases} x, & \text{per } x > 0 \\ 1, & \text{per } x = 0 \end{cases}.$$

Tale funzione é derivabile in $]0, 1[$, verifica $f(0) = f(1)$, ed é continua in tutti i punti, tranne che in 0. Chiaramente, non esiste alcun punto in $]0, 1[$ ove la derivata si annulli.

Un altro esempio é fornito dalla funzione $g(x) = 1 - |x|$, con $x \in [-1, 1]$: in questo caso, sono verificate tutte le ipotesi, con l'unica eccezione del punto 0, nel quale g , pur essendo continua, non é derivabile: questa funzione ammette punto estrema proprio in $x = 0$, ma chiaramente 0 non puo' essere punto critico.

(3) Il teorema di Rolle ha una formulazione anche nel caso in cui la funzione f sia definita in una semiretta, oppure in tutto \mathbb{R} ; senza fornire la dimostrazione, diamo l'enunciato per quest'ultimo caso:

Se $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ é derivabile in ogni punto, e se esistono e sono uguali i limiti di f a $+\infty$ e a $-\infty$, allora esiste almeno un punto estrema e critico $c \in \mathbb{R}$.

Teorema 8.7 (Lagrange) *Sia $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione che soddisfa alle seguenti condizioni:*

(i) *f é continua in $[a, b]$;*

(ii) *f é derivabile almeno in $]a, b[$;*

Allora, esiste un punto $c \in]a, b[$ tale che $f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$.

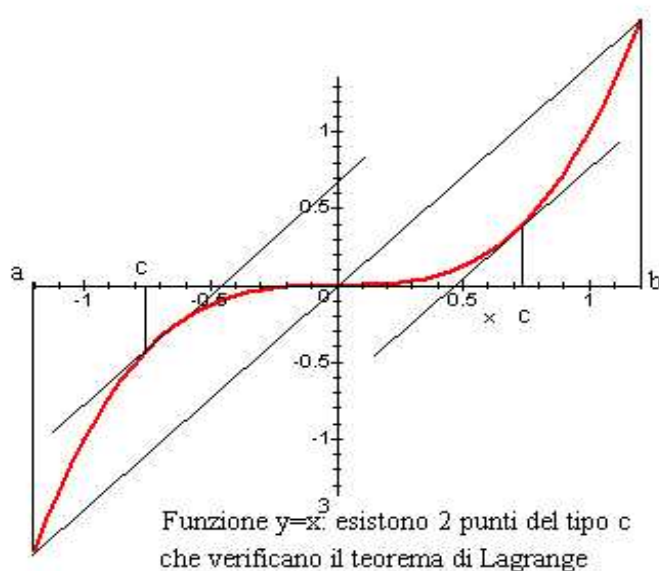
Dimostrazione. Basta applicare il teorema di Rolle alla funzione

$$F(x) = f(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a).$$

Infatti, F verifica le prime due ipotesi del teorema 8.5 perché differenza di due funzioni (f e la retta $y = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x - a)$) che le verificano; inoltre, un semplice calcolo mostra che $F(a) = F(b) = f(a)$. Dunque, per il teorema di Rolle, esiste un punto $c \in]a, b[$ tale che $F'(c) = 0$. Essendo $F'(x) = f(x) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$, l'asserto é ovvio. \square

Il teorema di Lagrange é il risultato piu' importante di questo capitolo. Dal punto di vista geometrico, esso ha un'interpretazione piuttosto semplice: se si tiene presente il fatto che $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ é il coefficiente angolare della retta congiungente i due punti estremi del grafico di f , e si ricorda il significato geometrico di derivata, non é difficile comprendere che tale teorema garantisce, sotto le ipotesi (i) e (ii), l'esistenza di almeno un punto della curva grafico, cioé il punto $(c, f(c))$, nel quale la retta tangente é parallela alla retta che congiunge gli estremi della curva stessa. (Vedi figura).

Chiaramente, se $f(b) = f(a)$, la retta congiungente gli estremi della curva é orizzontale, e quindi in tal caso ritroviamo l'asserto del teorema di Rolle.



Tuttavia, dal punto di vista analitico, il teorema di Lagrange ha delle implicazioni molto piu' significative: usando semplicemente la definizione 7.1, non si puo' dire altro che la derivata é il limite del rapporto incrementale; ma adoperando il teorema 8.7, si puo' praticamente asserire che il rapporto incrementale stesso, *senza fare il limite*, é gia' la derivata in un certo punto. Infatti, se si suppone che $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ verifichi le ipotesi del teorema di Lagrange, e si prende un qualsiasi punto $x_0 \in]a, b[$, si puo' considerare la f ristretta all'intervallo $[x_0, x_0 + h]$, purché $x_0 + h < b$. Applicando il teorema di Lagrange nell'intervallo $[x_0, x_0 + h]$ troviamo

$$\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = f'(c)$$

per qualche *opportuno* punto $c \in]x_0, x_0 + h[$.

Ad esempio, consideriamo la funzione $g(x) = \log x$, in $[7, 8]$. Chiaramente, g verifica tutte le ipotesi del teorema di Lagrange, in tale intervallo. Avremo dunque:

$$\log 8 - \log 7 = \frac{1}{c}$$

dove c é un opportuno punto compreso fra 7 e 8. In altri termini

$$\frac{1}{8} < \log \frac{8}{7} < \frac{1}{7}.$$

Questa relazione stabilisce una discreta approssimazione per il valore $\log \frac{8}{7}$: il punto medio dell'intervallo $[\frac{1}{8}, \frac{1}{7}]$, cioè il valore $\frac{15}{112}$, approssima la quantità $\log \frac{8}{7}$ per meno di $(\frac{1}{7} - \frac{1}{8})/2$ ossia con un errore inferiore a $\frac{1}{112}$. (Per la cronaca, il computer fornisce per $\log \frac{8}{7}$ il valore .1335313927, e per $\frac{15}{112}$ il valore .1339285714.)

La bontà di queste approssimazioni é anche confermata dalle conclusioni cui siamo pervenuti considerando la *differenziabilità*: questo concetto si esprime dicendo che $f(x_0 + h) - f(x_0) = hf'(x_0) + h\varepsilon h$, mentre il teorema di Lagrange ci permette di dedurre (purché le sue ipotesi siano soddisfatte) che $f(x_0 + h) - f(x_0) = hf'(c)$, ove c é un valore opportuno compreso fra x_0 e $x_0 + h$. Un confronto diretto tra le due formule ci dice che, in definitiva, $f'(c)$ differisce da $f'(x_0)$ per un infinitesimo (teniamo presente che, se h varia, varia anche c). Ciò non significa necessariamente che $x \rightarrow f'(x)$ sia una funzione continua, ma non siamo molto lontani.

Vediamo ora un corollario del teorema di Lagrange: tale corollario é un teorema *inverso* al teorema 8.1.

Corollario 8.8 *Supponiamo che la funzione $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ verifichi le ipotesi del teorema di Lagrange. Se accade che $f'(x) > 0$ per ogni $x \in]a, b[$ allora f é strettamente crescente in $[a, b]$.*

Dimostrazione. Dobbiamo verificare la seguente implicazione:

$$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$$

per $x_1, x_2 \in [a, b]$. Fissiamo dunque x_1 e x_2 in $[a, b]$, con $x_1 < x_2$, e applichiamo il teorema 8.7 nell'intervallo $[x_1, x_2]$. Avremo

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = f'(c)$$

per opportuno $c \in]x_1, x_2[$. Essendo $x_2 - x_1 > 0$, e dato che per ipotesi si ha $f'(c) > 0$, necessariamente risulta $f(x_2) - f(x_1) > 0$, e quindi l'asserto. \square

Il teorema 8.8 ci fornisce uno strumento potente per studiare la monotonia di una funzione derivabile. Ad esempio, si consideri la funzione $h(x) = 2x - \sin x$, in tutto \mathbb{R} . Si ha $h'(x) = 2 - \cos x > 0$ per ogni x . Questo ci permette di concludere subito che h è crescente: una dimostrazione diretta, tramite disuguaglianze, sarebbe assai più difficile.

Senza riportare dimostrazioni (ovvie, a questo punto), completiamo il discorso precisando che il teorema 8.8 vale anche nel caso risulti $f'(x) \geq 0$ per ogni x : l'unica differenza è che, in tale ipotesi, si può solo dire che f è *non-decrescente*. Passando poi da f a $-f$, si può dedurre che f è *strettamente decrescente* se sappiamo che $f'(x) < 0$ per ogni x , e che f è *non-crescente* se sappiamo che $f'(x) \leq 0$ per ogni x .

Un corollario importante, apparentemente ovvio, è il seguente:

Corollario 8.9 *Sia $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione che verifica tutte le ipotesi del teorema di Lagrange. Se si ha $f'(x) = 0$ per ogni $x \in]a, b[$, allora f è costante.*

La dimostrazione è ovvia, dopo i discorsi precedenti: $f'(x) = 0$ per ogni x comporta sia che $f'(x) \geq 0$ per ogni x , sia che $f'(x) \leq 0$ per ogni x , e allora f risulta contemporaneamente non-crescente e non-decrescente; l'unica possibilità perché ciò abbia senso è che f sia costante.

Non è invece logicamente accettabile la seguente spiegazione semplicistica, che a volte si trova persino in libri o dispense: *una funzione che ha derivata nulla è costante, perché tutte le costanti hanno derivata nulla*. Sarebbe come dire: *Del Piero (che porta la casacca bianconera) gioca nell'Udinese, perché tutti quelli che giocano nell'Udinese hanno la casacca bianconera*.

Se non sono soddisfatte *tutte* le ipotesi, il risultato del Corollario 8.9 non è esatto: ad esempio, si consideri la funzione $h(x) = \arctan x + \arctan \frac{1}{x}$, definita e derivabile in tutto

$\mathbb{R} \setminus \{0\}$. Ricordando che $D(\arctan x) = \frac{1}{x^2+1}$, e che $D(\frac{1}{x}) = -\frac{1}{x^2}$, e adoperando la regola della catena, si ottiene facilmente che $h'(x) = 0$ per ogni $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Ma la funzione h **non** é costante: infatti, si ha $h(1) = \frac{\pi}{2}$ e $h(-1) = -\frac{\pi}{2}$; piu' precisamente, h é costante (e uguale a $\frac{\pi}{2}$) nella semiretta $x > 0$, e costante (ma uguale a $-\frac{\pi}{2}$) nella semiretta $x < 0$. Cosa c'è che non va, con questa funzione? L'unica ipotesi che non é verificata é che h non é definita in un intervallo: il *buco* che si crea in 0 provoca l'inconveniente; infatti, se restringiamo h ad una delle due semirette, $x > 0$ o $x < 0$, il risultato di 8.9 resta valido.

Un discorso analogo si puo' fare per il teorema 8.8: la funzione $f(x) = -\frac{1}{x}$ ha per derivata $\frac{1}{x^2}$, dunque $f'(x) > 0$ per ogni x nel quale f é definita. Tuttavia f non é crescente in tutto il suo insieme di definizione, cioé in $\mathbb{R} \setminus \{0\}$: essa é crescente in $] -\infty, 0[$ e in $]0, +\infty[$, ma si ha anche $f(-1) > f(1)$.

Come abbiamo gia' detto, conoscere gli intervalli di monotonia di una funzione f permette di decidere se certi punti critici sono estremali o meno; e, in caso siano estremali, se trattasi di punti di massimo o di minimo.

Facciamo un esempio: la funzione $f(x) = x^5 - x$ presenta minimi o massimi relativi? la derivata é: $f'(x) = 5x^4 - 1$, e tale funzione si annulla per $x = \pm \frac{1}{5^{1/4}}$. Per semplicita', poniamo $x_1 = \frac{1}{5^{1/4}}$, $x_2 = -\frac{1}{5^{1/4}}$. Ora, se vogliamo capire la natura di questi punti critici, studiamo il segno di f' : notiamo che si puo' scrivere:

$$f'(x) = (x^2 + \frac{1}{5^{1/2}})(x^2 - \frac{1}{5^{1/2}})$$

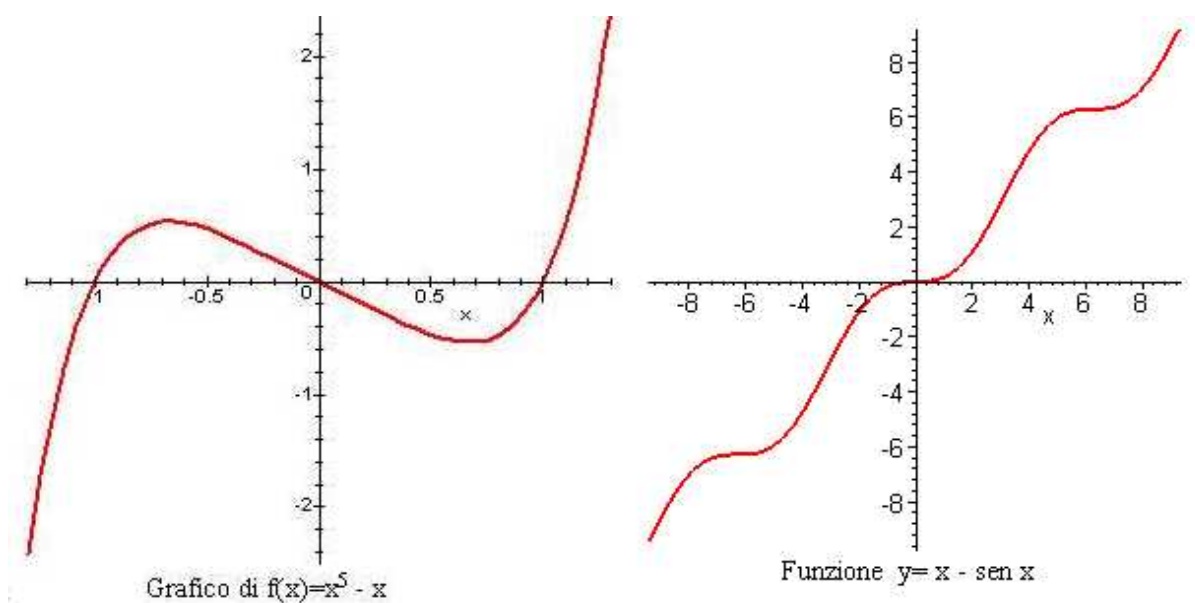
e il segno di f' dipende dunque dal segno di $(x^2 - \frac{1}{5^{1/2}})$. Allora, $f'(x)$ é positiva per valori esterni all'intervallo $[x_2, x_1]$, e negativa per valori interni. Otteniamo dunque questo risultato: $f(x)$ cresce per $x < x_2$, decresce per $x \in]x_2, x_1[$, cresce di nuovo per $x > x_1$. Pertanto, x_2 é punto di massimo relativo, e x_1 é punto di minimo relativo.

Si veda il prossimo grafico .

Un altro esempio istruttivo é il seguente: consideriamo la funzione

$$f(x) = x - \sin x$$

definita in tutto \mathbb{R} . La derivata é: $f'(x) = 1 - \cos x$. E' facile vedere che $f'(x) \geq 0$ per ogni x , e che $f'(x) = 0$ se e solo se $x = 2k\pi$, con k intero (positivo o negativo). Per il Corollario



8.8, f é non decrescente, dunque i punti critici, che sono tutti isolati, non possono essere né di massimo né di minimo. (Vedere grafico)

Gli strumenti sin qui acquisiti ci permettono di affrontare uno studio di funzione, al punto da disegnarne il grafico con sufficiente approssimazione (naturalmente senza far uso di computer). Nel prossimo paragrafo vedremo alcuni esempi di studi di funzioni, concepiti allo scopo di mostrare l'utilità delle varie tecniche, e anche al fine, non trascurabile, di rinfrescare e collegare quanto appreso nella prima parte del corso.

8.2 Alcuni esempi di studi di funzioni

Come annunciato, proporremo qui un certo numero di funzioni, da studiare sistematicamente al fine di disegnarne il grafico. Si tratta come di una *pausa* nella trattazione matematica, che riteniamo opportuna adesso, anche se alcuni aspetti geometrici (concavità, flessi, etc.) non possano ancora essere trattati, e attenderanno un paragrafo successivo.

Esempio 1 Studiare la funzione

$$f(x) = \frac{x^2 + 1}{x - 1}$$

Esempio 2 Studiare la funzione

$$f(x) = \sqrt{x^2 + 1} - \sqrt{x^2 - 1}$$

Esempio 3 Studiare la funzione

$$f(x) = \frac{\sin x + \cos x}{\sin x + 1}$$

Esempio 4 Studiare la funzione

$$f(x) = \frac{\sqrt{|x-1|}}{x+1}$$

Esempio 5 Studiare la funzione

$$f(x) = \frac{|x-1| - x}{|x+1| + x}$$

Esempio 6 Studiare la funzione

$$f(x) = \sqrt{x^2 + |1 - 2x|}$$

Esempio 7 Studiare la funzione

$$f(x) = \log(e^{2x} + e^x + 1)$$

Esempio 8 Studiare la funzione

$$f(x) = e^{\frac{x+1}{x^2+1}}$$

Esempio 9 Studiare la funzione

$$f(x) = \arctan(x^2 - 1)$$

Esempio 10 Studiare la funzione

$$f(x) = \log(e^{2x} + |2e^x - 1|)$$

Esempio 11 Studiare le funzioni

$$f(x) = \arcsin(\sin x), \quad \text{e} \quad h(x) = \sin(\arcsin x)$$

Esempio 12 Studiare la funzione

$$f(x) = e^{\frac{\sin x + \cos x}{2 + \sin x}}$$

Daremo dei cenni di risoluzione dei vari studi di funzione proposti, lasciando il dettaglio dei calcoli al lettore. In fondo, sono riportati i vari grafici.

Esempio 1. $f(x) = \frac{x^2+1}{x-1}$.

La funzione é definita in $\mathbb{R} \setminus \{1\}$. La retta $x = 1$ é asintoto verticale, essendo

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = -\infty.$$

Risulta poi

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty.$$

Non esistono asintoti orizzontali, ma c'è asintoto obliquo: infatti, si ha

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = 1, \quad \lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) - x = 1$$

e quindi la retta $y = x + 1$ é asintoto obliquo.

La derivata é: $f'(x) = \frac{x^2-2x-1}{(x-1)^2}$, e quindi f risulta crescente per $x < 1 - \sqrt{2}$, decrescente per $1 - \sqrt{2} < x < 1$, e ancora per $1 < x < 1 + \sqrt{2}$, di nuovo crescente per $x > 1 + \sqrt{2}$: pertanto $1 - \sqrt{2}$ é punto di massimo relativo per f , mentre $1 + \sqrt{2}$ é punto di minimo relativo.

Esempio 2. $f(x) = \sqrt{x^2+1} - \sqrt{x^2-1}$.

La funzione é definita in $] -\infty, -1] \cup [1, +\infty[$, e verifica il limite:

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = +\infty,$$

dunque $x = 1$ e $x = -1$ sono due asintoti verticali.

La funzione é *pari*, perciò può essere studiata solo per $x > 0$. Risulta poi

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0,$$

dunque $y = 0$ é asintoto orizzontale. Quanto alla derivata, si ha

$$f'(x) = -x \frac{\sqrt{x^2+1} - \sqrt{x^2-1}}{\sqrt{x^2+1}\sqrt{x^2-1}}.$$

Essendo comunque $\sqrt{x^2+1} - \sqrt{x^2-1} > 0$, il segno della derivata é positivo per $x < -1$, negativo per $x > -1$, dunque non esistono punti estremanti.

Esempio 3. $f(x) = \frac{\sin x + \cos x}{\sin x + 1}$.

La funzione é definita per tutti gli x tali che $\sin x \neq -1$, ossia per $x \neq 2k\pi - \frac{\pi}{2}$, con k intero arbitrario. Poiché la f é periodica, di periodo 2π , bastera' studiarla in $[0, 2\pi]$, e ovviamente non potra' presentare asintoti orizzontali né obliqui. La retta $x = \frac{3}{2}\pi$ é asintoto verticale, essendo

$$\lim_{x \rightarrow \frac{3}{2}\pi} f(x) = -\infty$$

(sia da destra che da sinistra). La derivata é

$$f'(x) = \frac{1 - \cos x + \sin x}{1 + 2 \sin x + \sin^2 x}.$$

Chiaramente, il denominatore é sempre positivo, per $x \neq \frac{3}{2}\pi$, e il numeratore si puo' studiare osservando che

$$\sin x - \cos x = \sqrt{2}(\sin x \cos(\pi/4) - \cos x \sin(\pi/4)) = \sqrt{2} \sin(x - \pi/4).$$

Si ottiene che f é decrescente da 0 a $\frac{3}{2}\pi$, crescente per $\frac{3}{2}\pi < x < 2\pi$. Dunque si hanno massimi nei punti 0, 2π .

Esempio 4. $f(x) = \frac{\sqrt{|x-1|}}{x+1}$.

Il campo di esistenza é $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$, e $x = -1$ é asintoto verticale, risultando

$$\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = -\infty.$$

Si ha poi facilmente $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = 0$, dunque $y = 0$ é asintoto orizzontale.

La derivata é data da:

$$f'(x) = \begin{cases} \frac{3-x}{(x+1)^2\sqrt{x-1}}, & x > 1 \\ \frac{x-3}{(x+1)^2\sqrt{1-x}}, & x < 1 \end{cases}$$

da cui si deduce che f é decrescente per $x < -1$, e anche per $-1 < x < 1$, poi crescente per $1 < x < 3$, e infine decrescente per $x > 3$: dunque, $x = 3$ é l'unico punto di massimo relativo, e $x = 1$ é l'unico punto di minimo relativo, nel quale pero' la derivata non esiste.

Esempio 5. $f(x) = \frac{|x-1|-x}{|x+1|+x}$.

Una rapida indagine mostra che il denominatore si annulla per $x = -\frac{1}{2}$: dunque il campo di esistenza é $\mathbb{R} \setminus \{-\frac{1}{2}\}$. La retta $x = -\frac{1}{2}$ é asintoto verticale (i limiti da destra e da sinistra si possono dedurre dal grafico). Si ha poi

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$$

(si noti che $f(x) = 2x - 1$, per $x < -1$). Se ne deduce che $y = 0$ é asintoto orizzontale (a destra) e $y = 2x - 1$ é asintoto obliquo (a sinistra). Per il calcolo della derivata, e per altre proprieta' notevoli, conviene studiare la funzione in vari sottointervalli, in base al seguente specchietto:

$$f(x) = \begin{cases} 2x - 1, & x < -1 \\ \frac{1-2x}{1+2x}, & -1 < x < 1 \\ -\frac{1}{2x+1}, & x > 1. \end{cases}$$

Chiaramente, allora, f é senz'altro crescente in $] -\infty, -1[$; studiando la derivata di $\frac{1-2x}{1+2x}$, si vede poi che f é decrescente tra -1 e $-\frac{1}{2}$, e tra $-\frac{1}{2}$ e 1 . Infine, l'ultimo tratto é chiaramente crescente. In definitiva, esiste un solo massimo relativo, per $x = -1$, nel quale pero' f non é derivabile. Anche nel punto $x = 1$, ove c'è minimo relativo, la derivata non esiste: nel grafico si mostra un ingrandimento attorno a tale punto.

Esempio 6. $f(x) = \sqrt{x^2 + |1 - 2x|}$.

Il radicando é sempre positivo: infatti, essendo somma di due quantita' non-negative, esso non é mai negativo, e puo' annullarsi solo se entrambi gli addendi si annullano; ma cio' non é possibile in questo caso. Di conseguenza, la funzione data é definita e continua in tutto \mathbb{R} . Non vi sono asintoti verticali, né asintoti orizzontali, dato che $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} = +\infty$. Per studiare piu' dettagliatamente la funzione, scindiamo la sua definizione a seconda del valore assoluto:

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{x^2 - 2x + 1} = |x - 1|, & x < \frac{1}{2} \\ \sqrt{x^2 + 2x - 1}, & x > \frac{1}{2} \end{cases}$$

Se ne deduce subito l'asintoto obliquo $y = 1 - x$, per $x \rightarrow -\infty$, e poi, abbastanza facilmente, l'asintoto obliquo $y = x + 1$ per $x \rightarrow +\infty$. Studiando la derivata di $\sqrt{x^2 + 2x - 1}$ per $x > \frac{1}{2}$,

si vede poi chiaramente che $x = \frac{1}{2}$ é punto di minimo relativo (e anche assoluto) per f , benché in tale punto f non sia derivabile.

Esempio 7. $f(x) = \log(e^{2x} + e^x + 1)$. Se si pone $v = e^x$, l'argomento del logaritmo assume la forma $v^2 + v + 1$, che risulta sempre positiva. Dunque la funzione data é definita e continua in tutto \mathbb{R} . Non esistono perciò asintoti verticali. Valutando i limiti all'infinito, avremo:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$

dunque $y = 0$ é asintoto orizzontale (a $-\infty$). La ricerca di asintoti obliqui fornisce i seguenti risultati.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = 2, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - 2x) = 0$$

(E' piu' facile provare prima il secondo limite, e poi da questo dedurre il primo).

Dunque la retta $y = 2x$ é asintoto obliquo, a $+\infty$. Lo studio della derivata fornisce

$$f'(x) = \frac{2e^{2x} + e^x}{e^{2x} + e^x + 1},$$

da cui si deduce che f é sempre crescente.

Esempio 8. $f(x) = e^{\frac{x+1}{x^2+1}}$.

Poiché $x^2 + 1 > 0 \forall x$, f risulta definita e continua su tutto \mathbb{R} . Non esistono dunque asintoti verticali. Calcolando il limite a $+\infty$ e $-\infty$ si ottiene

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 1$$

quindi la retta $y = 1$ é asintoto orizzontale bilatero. Per studiare crescita, decrescenza, eventuali massimi e minimi, basta limitarsi alla funzione $g(x) = \frac{x+1}{x^2+1}$: data la stretta monotonia di e^x , f e g hanno infatti lo stesso comportamento, sotto questo aspetto. Avremo dunque

$$g'(x) = -\frac{x^2 - 1 + 2x}{(x^2 + 1)^2}$$

da cui si vede che g (e quindi f) é decrescente per $x < -1 - \sqrt{2}$, crescente per $-1 - \sqrt{2} < x < -1 + \sqrt{2}$, di nuovo decrescente per $x > -1 + \sqrt{2}$. Quindi f ammette un minimo relativo nel punto $-1 - \sqrt{2}$ e un massimo relativo nel punto $-1 + \sqrt{2}$.

Esempio 9. $f(x) = \arctan(x^2 - 1)$. Poiché la funzione \arctan è definita e continua in tutto \mathbb{R} , la sua composizione con $h(x) = x^2 - 1$ (cioè f) è definita e continua su tutto \mathbb{R} , e quindi f non ha asintoti verticali. Il limite agli estremi fornisce

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \frac{\pi}{2}$$

e quindi la retta $y = \frac{\pi}{2}$ è asintoto orizzontale bilatero. Per quanto riguarda crescita e decrescenza, di nuovo si può limitare lo studio alla funzione h , dato che \arctan è strettamente crescente. Facilmente allora si trova $h'(x) = 2x$, e quindi f sarà decrescente per $x < 0$, crescente per $x > 0$. Dunque $x = 0$ è punto di minimo relativo (e assoluto) per f .

Esempio 10 $f(x) = \log(e^{2x} + |2e^x - 1|)$.

Notiamo che l'argomento del logaritmo è senz'altro una funzione sempre strettamente positiva, dunque f è definita e continua in tutto \mathbb{R} . Non esistono quindi asintoti verticali. Facendo il limite agli estremi, si ha

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$$

per cui $y = 0$ è asintoto orizzontale a $-\infty$. Per quanto riguarda l'eventuale asintoto obliquo (a $+\infty$) si ha

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} 2 \frac{\log(e^{2x} + 2e^x - 1)}{\log e^{2x}} = 2,$$

e inoltre

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) - 2x = \lim_{x \rightarrow +\infty} \log\left(\frac{e^{2x} + |2e^x - 1|}{e^{2x}}\right) = 0$$

per cui $y = 2x$ è asintoto obliquo a $+\infty$. Per quanto riguarda crescita e decrescenza, possiamo limitarci a studiare la funzione

$$\phi(x) = e^{2x} + |2e^x - 1| = \begin{cases} e^{2x} + 2e^x - 1, & x > -\log 2 \\ (e^x - 1)^2, & x < -\log 2 \end{cases}$$

dato che la funzione logaritmo è sempre crescente. Per $x > -\log 2$ si ha $\phi'(x) = 2e^{2x} + 2e^x = 2e^x(e^x + 1) > 0$ sempre. Per $x < -\log 2$ avremo $\phi'(x) = 2e^x(e^x - 1) < 0$ sempre (in quanto $-\log 2 < 0$). Dunque l'unico punto di minimo (relativo e assoluto) è $x = -\log 2$, ove f non è derivabile.

Esempio 11. $f(x) = \arcsin(\sin x)$ $h(x) = \sin(\arcsin x)$.

Per quanto riguarda f , tale funzione é definita e continua per ogni $x \in \mathbb{R}$: infatti, la funzione interna, $\sin x$, é definita e continua dappertutto, e ha valori in $[-1, 1]$. In tale intervallo é appunto definita la funzione $\arcsin x$, e quindi la composizione f risulta definita e continua in tutto \mathbb{R} . Nonostante la funzione \arcsin sia spesso definita come l'inversa della funzione $\sin x$ non si puo' dire che f sia la funzione identita': lo é, solo fintanto che $x \in [-\pi/2, \pi/2]$. Per il resto, bisogna tener presente che la funzione $\arcsin x$ assume valori solo tra $-\pi/2$ e $\pi/2$. Così, quando $x \in [\pi/2, 3\pi/2]$, si ha $f(x) = \arcsin(\sin(\pi - x)) = \pi - x$. E per il resto basta ricordare che $\sin x$ é periodica di periodo 2π per dedurre facilmente che anche f lo é.

Il calcolo della derivata (dove esiste) conferma queste deduzioni: é infatti

$$f'(x) = \frac{\cos x}{\sqrt{1 - \sin^2 x}} = \frac{\cos x}{|\cos x|}$$

(ovviamente per $x \neq \pi/2 + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$). Dunque, f risulta crescente negli intervalli ove $\cos x > 0$, ($f'(x) = 1$), decrescente negli altri ($f'(x) = -1$).

Passando alla h , essa é definita solo per $x \in [-\pi/2, \pi/2]$, e in tale intervallo si ha $h(x) = x$. Anche lo studio della derivata di h lo conferma:

$$h'(x) = \frac{\cos(\arcsin x)}{\sqrt{1 - x^2}} = \frac{\sqrt{1 - x^2}}{\sqrt{1 - x^2}} = 1$$

(ricordiamo che $\arcsin x$ é compreso tra $-\pi/2$ e $\pi/2$, dove la funzione $\cos x$ é costantemente positiva).

Esempio 12 $f(x) = e^{\frac{\sin x + \cos x}{2 + \sin x}}$.

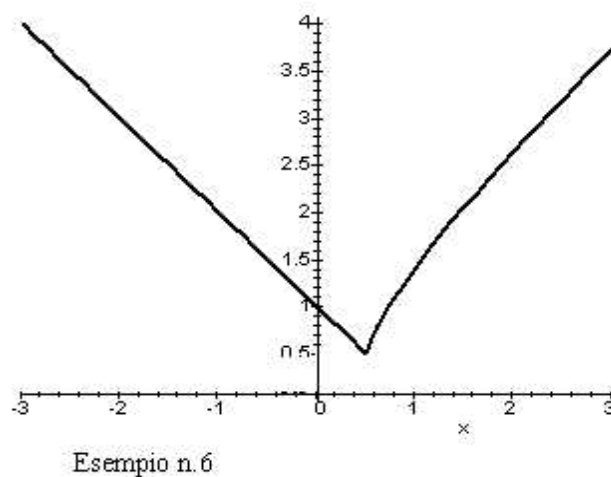
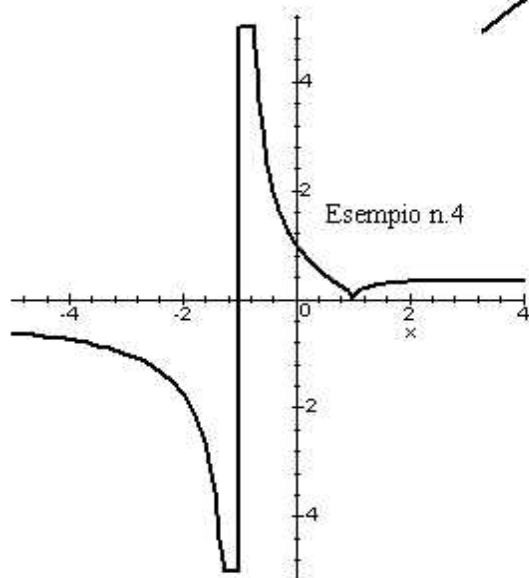
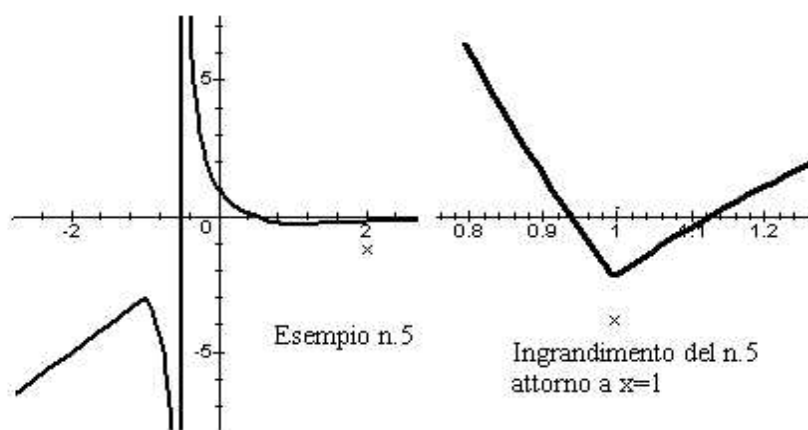
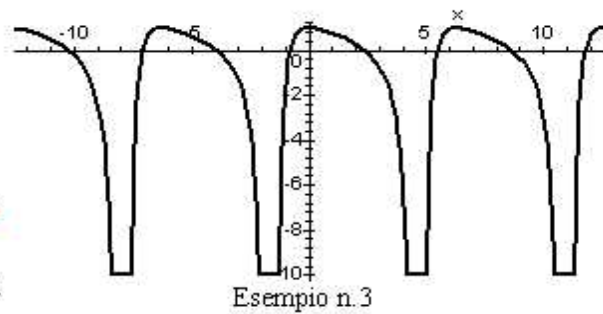
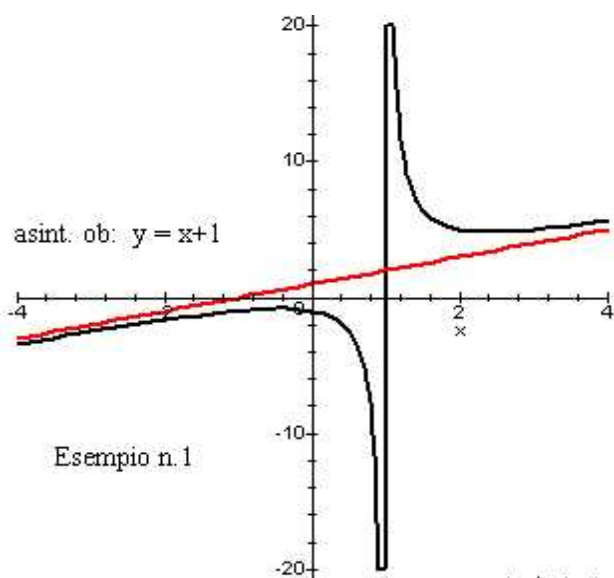
L'esponente é una funzione razionale in $\sin x$ e $\cos x$, con denominatore sempre positivo. Dunque f é sempre definita, continua e derivabile. Non esistono pertanto asintoti verticali. Poiché f é chiaramente periodica, di periodo 2π , non vi sono asintoti orizzontali od obliqui. Bastera' anzi studiare tale funzione per $x \in [0, 2\pi]$. Per individuare eventuali punti di massimo o minimo, possiamo limitarci a studiare la funzione esponente, cioé

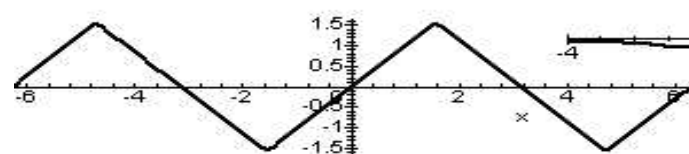
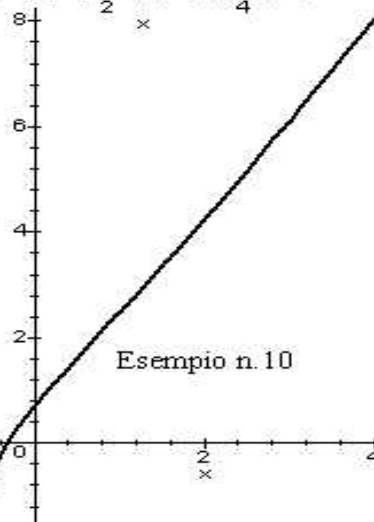
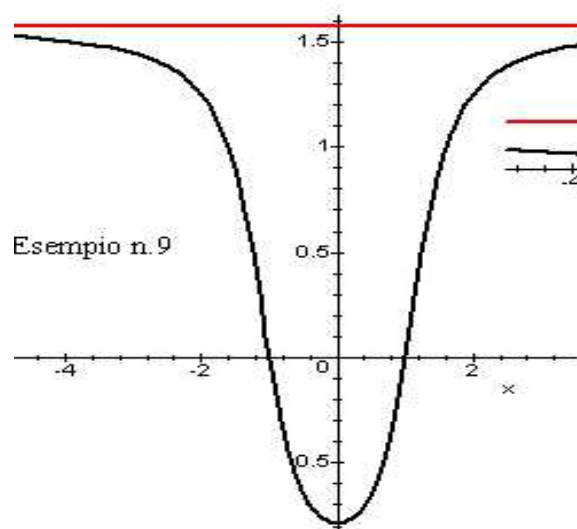
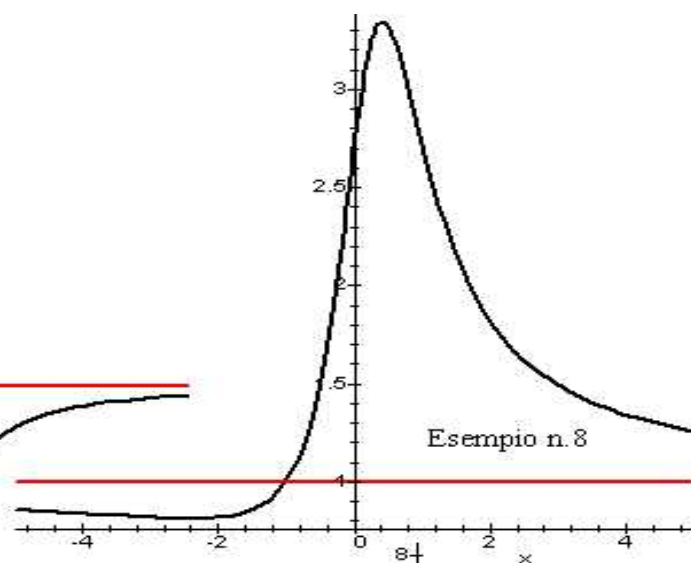
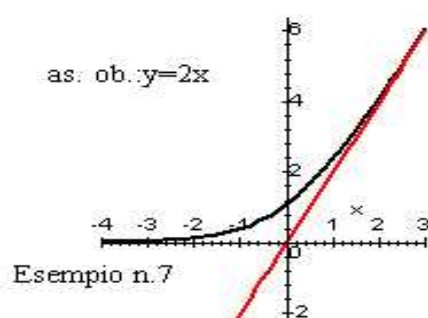
$$\phi(x) = \frac{\sin x + \cos x}{2 + \sin x}$$

dato che e^x é strettamente crescente. Si ha

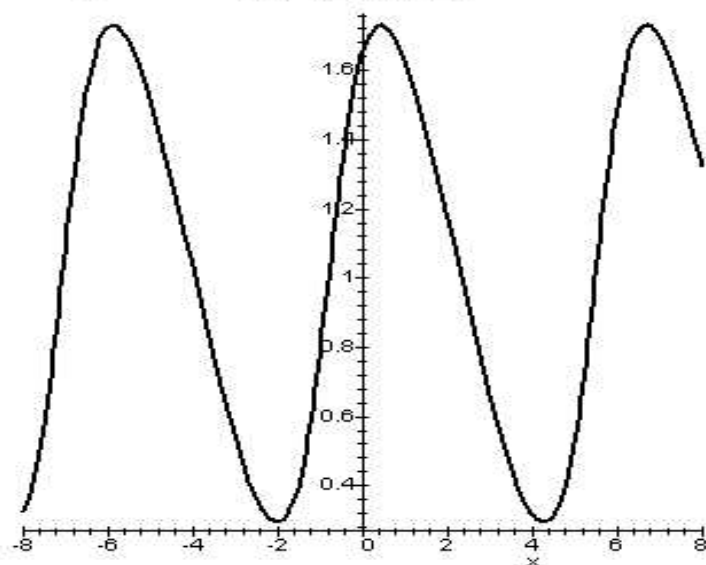
$$\phi'(x) = \frac{2 \cos x - 2 \sin x - 1}{(2 + \sin x)^2}.$$

Risolvendo l'equazione $2 \cos x - 2 \sin x - 1 = 0$ (ad esempio, tramite le formule parametriche), e poi la disequazione $2 \cos x - 2 \sin x - 1 > 0$, si trova che i punti critici sono $x_1 = \arctan \frac{4-\sqrt{7}}{3} \approx 0.424$ e $x_2 = \arctan \frac{4+\sqrt{7}}{3} + \pi \approx 4.288$: il primo é punto di massimo, il secondo é punto di minimo.





$$f(x) = \arcsin(\sin x)$$



Capitolo 9

Alcuni approfondimenti (*)

In questo capitolo presenteremo alcuni sviluppi dei concetti fin qui trattati; in particolare vedremo certe importanti conseguenze del teorema di Lagrange (tra cui ad esempio la regola di L'Hospital nella sua forma piu' generale, o il teorema di Darboux), tratteremo le formule e gli sviluppi di Taylor, per funzioni indefinitamente derivabili, e ci occuperemo di altri aspetti geometrici che possono interessare nello studio di funzioni (convessita' e flessi).

Benché tali argomenti siano ormai fuori luogo nei corsi di laurea triennali, essi hanno numerose applicazioni in problemi piu' avanzati, sia in teoria che in pratica.

Proprio allo scopo di fornire almeno un punto di riferimento per necessita' future, presenteremo qui essenzialmente quegli aspetti che piu' frequentemente vengono utilizzati nelle applicazioni, senza insistere su generalizzazioni estreme, o dimostrazioni complicate.

9.1 Ulteriori conseguenze del teorema di Lagrange

Iniziamo con un teorema, che portera' a dimostrare rapidamente la formula di L'Hospital, nella versione di maggiore applicabilita' (v. formula (7.6)), e che sara' anche utile nella trattazione della formula di Taylor.

Teorema 9.1 (Cauchy) *Siano date due funzioni, f e g , definite in $[a, b]$ e a valori in \mathbb{R} , entrambe soddisfacenti alle ipotesi del teorema di Lagrange (continue in $[a, b]$ e derivabili almeno in $]a, b[$). Supponiamo che risulti*

(i) $g(b) \neq g(a)$.

(ii) $g'(x) \neq 0 \quad \forall x \in]a, b[$.

Esiste allora un punto $c \in]a, b[$ tale che

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}. \quad (9.1)$$

Dimostrazione. Consideriamo la funzione ausiliaria

$$F(x) = (f(b) - f(a))(g(x) - g(a)) - (g(b) - g(a))(f(x) - f(a)) :$$

tale funzione verifica ovviamente le ipotesi del teorema di Lagrange. Dunque, in base a tale teorema, esiste un punto $c \in]a, b[$ tale che

$$F'(c) = \frac{F(b) - F(a)}{b - a} = 0$$

in quanto $F(b)=F(a)=0$. Ora, essendo $F'(c) = (f(b) - f(a))g'(c) - (g(b) - g(a))f'(c) = 0$, si ottiene facilmente l'asserto. \square

Corollario 9.2 (L'Hospital) *Siano f e g due funzioni definite in $[a, b]$ e a valori in \mathbb{R} , entrambe soddisfacenti alle ipotesi del teorema di Lagrange. Supponiamo che si abbia:*

(i) $f(a) = g(a) = 0$.

(ii) $g(x) \neq 0 \quad \forall x \in]a, b[$.

(iii) $g'(x) \neq 0 \quad \forall x \in]a, b[$.

Allora, risulta

$$\lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

non appena il limite a secondo membro esista (finito o meno).

Dimostrazione. Poniamo $\lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L$.

Fissiamo ad arbitrio un punto $x \in]a, b[$. Si ha ovviamente

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x) - f(a)}{g(x) - g(a)}.$$

Allora, applicando il teorema 9.1 in $[a, x]$, vediamo che esiste un punto $c_x \in]a, x[$ tale da aversi

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(c_x)}{g'(c_x)}$$

Ora, quando x tende ad a , anche c_x tende ad a , e allora

$$\lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f'(c_x)}{g'(c_x)} = L.$$

Cio' conclude la dimostrazione. \square

Osservazioni 9.3 Come abbiamo gia' detto in occasione della formula (7.6), esistono versioni analoghe del corollario 9.2, anche per le forme $\frac{\infty}{\infty}$, e non solo per x che tende ad un limite finito, ma anche per $x \rightarrow \infty$. Precisiamo pero' che la regola di L'Hospital *non vale* in genere, se non si é in presenza di una forma indeterminata. Questa puo' apparire una preoccupazione superflua, ma essa é purtroppo ben motivata da esperienze didattiche: specialmente nell' applicare iterativamente la regola, puo' accadere di *non accorgersi* che la forma indeterminata scompare, e dunque continuare a derivare numeratore e denominatore, pervenendo a limiti che non hanno nulla a che fare con quello iniziale. Vediamo qualche esempio. Il limite

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x - \log x}{x + \log x}$$

puo' facilmente essere risolto, ricorrendo al principio di sostituzione degli infiniti: il risultato é 1. Applicando la regola di L'Hospital, avremo

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x - \log x}{x + \log x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1 - 1/x}{1 + 1/x}$$

e ora non dovrebbero esserci dubbi. Pero', se applichiamo ancora la (7.6), otteniamo un **errore**:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1 - 1/x}{1 + 1/x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1/x^2}{-1/x^2} = -1.$$

Questo é accaduto perché l'ultima volta che abbiamo applicato la regola di L'Hospital non eravamo in presenza di una forma indeterminata. Un altro esempio significativo é il seguente:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^x + \sin x}{e^x - \sin x}$$

anch'esso risolvibile immediatamente, tramite il principio di sostituzione: di nuovo, il risultato é 1. Se applichiamo la regola di L'Hospital, avremo invece

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^x + \sin x}{e^x - \sin x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^x + \cos x}{e^x - \cos x}$$

e la difficoltà non è cambiata minimamente. Proseguendo in questo modo, si vede bene che non si arriva a capo di niente. Un ultimo esempio, che può servire per riflettere sulle ipotesi del teorema 9.2:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x + \sin x}{x - \sin x} = 1$$

come si vede facilmente, dividendo tutto per x . Applicando invece la regola di L'Hospital, troviamo un assurdo:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x + \sin x}{x - \sin x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1 + \cos x}{1 - \cos x}.$$

L'assurdo consiste nel fatto che il limite a secondo membro *non esiste*. In altri termini, la regola di L'Hospital funziona solo se esiste il limite di $\frac{f'(x)}{g'(x)}$.

Passiamo ora ad altre conseguenze del teorema di Lagrange. Una di queste sarà molto utile nel trattare gli integrali, sia pure in chiave negativa. Il problema è il seguente: data una funzione $h : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, sotto quali condizioni si può affermare che h è la derivata di qualche funzione $H : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$?

Il quesito è tutt'altro che irrilevante, come vedremo nel capitolo dell'integrazione.

Il problema porta intanto a dare una definizione.

Definizione 9.4 Data una funzione $h : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, si dice che h ammette *primitiva* se esiste una funzione $H : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, derivabile, e tale che $H'(x) = h(x)$ per ogni $x \in [a, b]$. Se ciò accade, diremo che H è una *primitiva* per h .

Il Corollario 8.9 ci permette intanto di chiarire quante primitive ci sono per una stessa funzione h .

Proposizione 9.5 Sia $h : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione che ammette primitiva H . Allora, h ammette infinite primitive, ciascuna delle quali differisce da H per un'opportuna costante.

Dimostrazione. Supponiamo che G sia un'altra primitiva di h , oltre a H . Allora la funzione $U := G - H$ è derivabile, e ha derivata nulla. Grazie al corollario 8.9, risulta $U = \text{costante}$ e quindi l'asserto. \square

Non ci occuperemo ora di fornire condizioni sufficienti per l'esistenza di una primitiva, perché ci mancano degli strumenti cruciali. Possiamo però stabilire, per ora, una condizione *necessaria*.

Teorema 9.6 Sia $H : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione continua in $[a, b]$ e derivabile in $]a, b[$, e si denoti con h la sua derivata. Se esiste finito il limite

$$\lim_{x \rightarrow a^+} h(x) := \alpha$$

allora necessariamente esiste $H'(a)$ e risulta $H'(a) = \alpha$.

Dimostrazione. Grazie al teorema di Lagrange, per ogni punto $x \in]a, b[$ esiste un punto $c_x \in]a, x[$ tale che

$$\frac{H(x) - H(a)}{x - a} = H'(c_x).$$

Ora, quando x tende ad a , anche c_x tende ad a , e dunque

$$\lim_{x \rightarrow a^+} \frac{H(x) - H(a)}{x - a} = \lim_{x \rightarrow a^+} H'(c_x) = \alpha$$

e cio' conclude la dimostrazione. \square

Il senso di questo teorema é che, non appena h ammette una primitiva, *h non puo' avere discontinuita' di I specie*: se il limite da destra (o da sinistra: il teorema 9.6 vale anche per i limiti da sinistra) di h in un certo punto t esiste, tale limite deve essere uguale a $h(t)$.

Questo ci permette subito di escludere dal discorso tutte le funzioni che abbiano discontinuita' di I specie: ad esempio, la funzione di *Heaviside* h , definita su tutto \mathbb{R} da

$$h(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ 1, & x \geq 0 \end{cases}$$

non puo' essere la derivata di nessuna funzione H definita su \mathbb{R} .

Esistono comunque funzioni *discontinue*, che ammettono primitiva. Per dare un esempio, consideriamo la funzione

$$H(x) = \begin{cases} x^2 \sin(\frac{1}{x}), & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

Chiaramente, H é derivabile in tutti i punti diversi da 0: in tali punti, si ha

$$H'(x) = 2x \sin(\frac{1}{x}) - \cos(\frac{1}{x}).$$

Facendo il limite del rapporto incrementale, si vede facilmente che H é derivabile anche in 0, con $H'(0) = 0$. Dunque, la funzione

$$h(x) = H'(x) = \begin{cases} 2x \sin(\frac{1}{x}) - \cos(\frac{1}{x}), & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

ammette primitiva, ma non ammette limite per $x \rightarrow 0$ (discontinuità di II specie).

Concludiamo, enunciando un teorema un po' più raffinato di 9.6, che va sotto il nome di *teorema di Darboux*. Non daremo la dimostrazione.

Teorema 9.7 *Sia $H : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione derivabile in tutto $[a, b]$, e si denoti con h la sua derivata. Allora h gode della proprietà dei valori intermedi, ossia, per ogni coppia di valori $h(\alpha)$ e $h(\beta)$, con $a \leq \alpha < \beta \leq b$, e per ogni valore t compreso fra $h(\alpha)$ e $h(\beta)$, esiste almeno un punto $\theta \in [\alpha, \beta]$ tale che $t = h(\theta)$.*

Nell'ultimo esempio presentato, la funzione h non ammette limite in 0, ma compie molte oscillazioni in vicinanza di tale punto, rispettando in tal modo l'asserto del teorema di Darboux. Ancora, grazie a questo teorema, possiamo dedurre che la *tremenda* funzione di Dirichlet non ha primitive: tale funzione ha solo discontinuità di II specie, per cui il teorema 9.6 non si può usare, ma essa assume solo due valori, 0 e 1, e quindi non gode della proprietà dei valori intermedi.

9.2 Sviluppi di Taylor

Quando abbiamo parlato di differenziale, abbiamo notato che la retta tangente ad una curva del tipo $y = f(x)$, in un punto $(x_0, f(x_0))$ può servire come approssimazione per la funzione stessa: la differenza tra $f(x)$ e tale retta é un infinitesimo di ordine superiore rispetto a $x - x_0$. Ora, se f ammette derivate di ordine maggiore di 1, un'approssimazione migliore può essere ottenuta mediante opportuni *polinomi*, di grado uguale all'ordine massimo di derivabilità in x_0 . Possiamo vedere subito, ad esempio, cosa accade quando f stessa é un polinomio: $f(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n$. Notiamo che risulta

$$f(0) = a_0, \quad f'(0) = a_1, \quad f''(0) = 2a_2, \quad \dots \quad f^{(n)}(0) = n!a_n,$$

le derivate successive essendo tutte nulle. Ne deduciamo

$$a_j = \frac{f^{(j)}(0)}{j!}, \quad j = 0, 1, \dots, n$$

(ponendo $f^{(0)} = f$ per convenzione). Dunque, l'espressione di f può essere così cambiata:

$$f(x) = f^{(0)}(0) + \dots + \frac{f^{(j)}(0)}{j!}x^j + \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n = \sum_{j=0}^n \frac{f^{(j)}(0)}{j!}x^j.$$

Questa formula è in un certo senso il *prototipo* della Formula di Taylor, che stabiliremo in seguito. Il passo successivo consiste nel cambiare il *punto di vista*, ossia nello spostare l'attenzione dal punto 0 a un punto x_0 qualunque.

Dato il polinomio $f(x) = a_0 + a_1(x) + \dots + a_n x^n$, e fissato un numero reale x_0 diverso da 0, poniamo

$$g(t) = f(x_0 + t), \quad \text{ossia} \quad f(x) = g(x - x_0).$$

Evidentemente, g è un altro polinomio, e dunque si ha

$$g(t) = \sum_{j=0}^n \frac{g^{(j)}(0)}{j!}t^j.$$

Ora, risulta chiaramente $g(0) = f(x_0)$, $g'(0) = f'(x_0)$, $g''(0) = f''(x_0)$ etc., per cui

$$g(t) = \sum_{j=0}^n \frac{f^{(j)}(x_0)}{j!}t^j$$

e infine

$$f(x_0 + t) = f(x_0) + \dots + \frac{f^{(j)}(x_0)}{j!}t^j + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}t^n = \sum_{j=0}^n \frac{f^{(j)}(x_0)}{j!}t^j$$

In definitiva, se si cambia *punto di vista*, l'espressione dello *stesso* polinomio f assume tutta un'altra forma: ponendo $x = x_0 + t$, la formula precedente diviene

$$f(x) = \sum_{j=0}^n \frac{f^{(j)}(x_0)}{j!}(x - x_0)^j.$$

Ad esempio, scegliendo $x_0 = -1$, il polinomio $f(x) = x^3 + x^2 + x + 1$ può essere espresso così:

$$x^3 + x^2 + x + 1 = 2(x + 1) - 2(x + 1)^2 + (x + 1)^3.$$

Prima di stabilire la formula di Taylor per funzioni generiche, premettiamo un lemma, semplice ma molto utile.

Lemma 9.8 Sia $g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione di classe $C^n([a, b])$, tale che

$$g(a) = g'(a) = \dots = g^{(n)}(a) = 0.$$

Allora, g é un infinitesimo, per $x \rightarrow a$, di ordine superiore rispetto a $(x - a)^n$.

Dimostrazione. Sostanzialmente, dobbiamo provare che si ha

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{g(x)}{(x - a)^n} = 0.$$

Questo limite si presenta, chiaramente, nella forma indeterminata $\frac{0}{0}$, e quindi può essere risolto usando la Regola di L'Hospital:

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{g(x)}{(x - a)^n} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{g'(x)}{n(x - a)^{n-1}}.$$

Poiché siamo ancora dinanzi ad una forma indeterminata $\frac{0}{0}$, applichiamo di nuovo la stessa regola, più e più volte, fino a giungere alla derivata di ordine n :

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{g(x)}{(x - a)^n} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{g'(x)}{n(x - a)^{n-1}} = \dots \lim_{x \rightarrow a} \frac{g^{(n)}(x)}{n!} = 0.$$

Il lemma é così dimostrato. \square

Possiamo ora stabilire la formula di Taylor.

Teorema 9.9 Sia $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione di classe $C^n([a, b])$. Per ogni $x \in]a, b]$ si ha

$$\begin{aligned} f(x) &= f(a) + (x - a)f'(a) + \frac{(x - a)^2}{2}f''(a) + \dots + \frac{(x - a)^n}{n!}f^{(n)}(a) + (x - a)^n\varepsilon(x - a) = \\ &= \sum_{j=0}^n \frac{(x - a)^j}{j!}f^{(j)}(a) + (x - a)^n\varepsilon(x - a), \end{aligned}$$

dove $\varepsilon(h)$ é un infinitesimo per h che tende a 0.

Dimostrazione. Sia $P(x)$ il polinomio

$$P(x) = f(a) + (x - a)f'(a) + \frac{(x - a)^2}{2}f''(a) + \dots + \frac{(x - a)^n}{n!}f^{(n)}(a).$$

Dobbiamo praticamente dimostrare che la funzione $g(x) = f(x) - P(x)$ é un infinitesimo di ordine superiore rispetto a $(x - a)^n$.

A tale scopo, basta osservare che si ha $g(a) = g'(a) = \dots = g^{(n)}(a) = 0$, e quindi applicare il Lemma 9.8. \square

Nel teorema precedente, la funzione $g(x) = (x - a)^n \varepsilon(x - a)$ viene detto *resto* della formula di Taylor, e praticamente rappresenta l'errore che si commette nel sostituire la funzione $f(x)$ con il polinomio $P(x)$: il senso del teorema 9.9 é che, quanto piu' é regolare f (ossia, quanto piu' grande si puo' prendere n), tanto piu' $f(x)$ sara' simile a $P(x)$, almeno in vicinanza di a .

Chiaramente, avere un'espressione meno vaga per il resto $g(x)$ permetterebbe di rappresentare meglio $f - P$, e in definitiva anche f . A tale scopo, esistono varie espressioni per il resto, a seconda delle ipotesi che si hanno su f . Noi ne presentiamo una sola, (detta *resto di Lagrange*) che forse é la piu' significativa, anche se richiede ipotesi un po' piu' forti su f .

Teorema 9.10 *Sia $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione di classe $C^{n+1}([a, b])$. Allora si ha*

$$f(x) = \sum_{j=0}^n \frac{(x-a)^j}{j!} f^{(j)}(a) + \frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(c_x)$$

ove c_x é un punto opportuno (dipendente da x) compreso fra a e x .

Dimostrazione. Come sopra, sia

$$g(x) = f(x) - \sum_{j=0}^n \frac{(x-a)^j}{j!} f^{(j)}(a)$$

e valutiamo il rapporto

$$\frac{g(x)}{(x-a)^{n+1}} = \frac{g(x) - g(a)}{(x-a)^{n+1}}$$

Applicando il teorema 9.1, avremo

$$\frac{g(x) - g(a)}{(x-a)^{n+1}} = \frac{g'(c_x^1)}{(n+1)c_x^{1n}} = \frac{g'(c_x^1) - g'(a)}{(n+1)c_x^{1n}}$$

ove c_x^1 é un punto opportuno compreso fra a e x .

Possiamo ancora usare il teorema 9.1, e ottenere

$$\frac{g(x) - g(a)}{(x-a)^{n+1}} = \frac{g'(c_x^1) - g'(a)}{(n+1)c_x^{1n}} = \frac{g''(c_x^2) - g''(a)}{(n+1)nc_x^{2n-1}}$$

ove c_x^2 é un punto opportuno compreso fra a e c_x^1 . Così procedendo, dopo n passi avremo

$$\frac{g(x)}{(x-a)^{n+1}} = \frac{g^{(n)}(c_x^n)}{(n+1)!c_x^n}$$

ove c_x^n é un opportuno punto compreso fra a e c_x^{n-1} . Infine, al passo successivo, troveremo

$$\frac{g(x)}{(x-a)^{n+1}} = \frac{g^{(n+1)}(c_x)}{(n+1)!}$$

dove c_x é un opportuno punto in $]a, c_x^n[$.

La dimostrazione é così terminata. \square

Qual' é l'utilità di una formula come quella di Taylor? Finora, quello che possiamo dire é che, a meno di infinitesimi di ordine superiore (e ferme restando le ipotesi su f) la nostra funzione può essere assimilata ad un polinomio di grado sufficientemente alto. Questo a prima vista non é un grosso vantaggio, ma apre la strada a ulteriori sviluppi.

Intanto, ci permette di stabilire un criterio concreto, per riconoscere la natura dei punti critici di f : noi sappiamo che, quando $f'(x_0) = 0$, in x_0 si può avere un massimo relativo, oppure un minimo, oppure né l'uno né l'altro. Di solito, studiando il segno della derivata, si riesce a comprendere in quale caso ci troviamo. Ma a volte risolvere disuguaglianze può essere difficile: ad esempio, la funzione $f(x) = x^2 + 4 \cos x$ ammette il punto $x_0 = 0$ come punto critico, essendo $f'(x) = 2x - 4 \sin x$. A questo punto, non é molto facile risolvere la disuguaglianza $x > 2 \sin x$ per capire in quali intervalli f é crescente.

Invece, se scriviamo la formula di Taylor per f , centrata in 0, e con $n = 2$, avremo:

$$f(x) = f(0) + \frac{x^2}{2} f''(0) + x^2 \varepsilon(x) = 4 - x^2 + x^2 \varepsilon(x)$$

essendo $f'(0) = 0$ e $f''(0) = 2 - 4 \cos 0 = -2$. Ne ricaviamo

$$f(x) - f(0) = -x^2(1 - \varepsilon(x)).$$

Ora, tenendo presente che $\varepsilon(x)$ é certamente minore di 1, almeno per x abbastanza vicino a 0, ne segue che, in un intorno di 0, si ha $f(x) - f(0) \leq 0$ e quindi in questo caso 0 é un punto di *massimo* locale.

In sostanza, il punto cruciale é che, pur essendo $f'(0) = 0$, la derivata seconda é diversa da 0, e il segno di $f''(x_0)$ condiziona quello di $f(x) - f(x_0)$ almeno in vicinanza di x_0 .

(Chiaramente, se avessimo esaminato la funzione $-f(x)$, avremmo trovato un punto di *minimo* locale in 0, e ovviamente con derivata seconda positiva in 0).

Non é finita: cosa succede, se anche la derivata seconda si annulla nel punto critico? Ragionando in maniera analoga, e supponendo che il punto critico x_0 sia come prima *interno* al campo di definizione di f , si va a vedere come si comporta la derivata terza (ammesso che esista). Qui pero', se ammettiamo che $f'''(x_0)$ sia diversa da 0, perveniamo a una conclusione diversa: la formula di Taylor, arrestata alla derivata terza, diviene:

$$f(x) = f(x_0) + \frac{(x - x_0)^3}{3!} f'''(x_0) + (x - x_0)^3 \varepsilon(x - x_0) = f(x_0) + (x - x_0)^3 (f'''(x_0) + \varepsilon(x - x_0)).$$

Ora, é ancora vero che il segno di $f'''(x_0)$ condiziona quello di $(f'''(x_0 + \varepsilon))$, ma questa quantita' viene poi moltiplicata per una potenza *dispari* di $x - x_0$, il che fa cambiare il segno non appena x si sposta dalla sinistra alla destra di x_0 : in altri termini, ammettendo che $f'''(x_0)$ sia positiva, (e naturalmente le prime due derivate nulle, in x_0), avremo che, in un opportuno intorno di x_0 , risulta

$$f(x) - f(x_0) > 0, \text{ per } x > x_0, \text{ e } f(x) - f(x_0) < 0, \text{ per } x < x_0.$$

(Si pensi, per farsi un'idea, alla funzione $f(x) = x^3$, con $x_0 = 0$). In questo caso, il punto x_0 non é né punto di massimo né punto di minimo *interno*. (Chiaramente, se x_0 fosse un punto estremo del campo di definizione di f , si potrebbe ancora dedurre che esso é punto di minimo o massimo relativo, a seconda del segno di f''' e della posizione di x_0 : ma per ora ci limiteremo a esaminare le cose solo per i punti critici interni).

Nell'eventualita' suddetta, quando cioé nel punto critico interno x_0 si annullano le prime due derivate, e non la terza, si puo' comunque dedurre che x_0 é punto di massimo o di minimo per la funzione f' : infatti, cio' che per f é la derivata terza, per f' é la derivata seconda, e cio' che per f é la derivata seconda, per f' é la derivata prima; dunque, se $f''(x_0) = 0$ e $f'''(x_0) \neq 0$ si puo' dire che x_0 é punto critico per f' , ma la derivata *seconda* di f' in x_0 é diversa da 0, per cui x_0 sara' senz'altro punto di massimo o di minimo relativo per f' : una tale situazione si esprime spesso dicendo che x_0 é *punto di flesso* per f . Non faremo un discorso piu' preciso, per quanto riguarda i punti di flesso, e ci limitiamo a questa terminologia, osservando solo che, geometricamente, nei punti di flesso (se ve ne sono) una

funzione si comporta come la funzione x^3 in 0, o anche come la funzione $x - \sin x$ nei suoi numerosi punti critici (che sono tutti punti di flesso, dato che la funzione in questione é sempre crescente, v. grafico alla fine del par. 8.1). Aggiungiamo comunque che, come i punti di massimo e minimo relativo si possono riconoscere studiando il segno di f' , ($f' > 0$ significa f crescente etc.), cosi' i punti di flesso si possono riconoscere studiando il segno di f'' , per vedere se e dove f' cresce o decresce: dove f' ammette massimo o minimo relativo, li' f presenta un flesso. E dove f' risulta crescente (risp. decrescente), li' si dice che f é *convessa* (risp. *concava*). Dunque i punti di flesso x_0 per f possono anche essere descritti come quei punti ove la f *cambia concavita'*, passando da concava a convessa o viceversa.

Dunque, sinora abbiamo potuto constatare che, nel caso x_0 sia un punto critico per f , interno al campo di definizione, x_0 puo' essere punto di massimo, o punto di minimo, o punto di flesso, a seconda se la derivata seconda si annulla o no, e supponendo che la derivata terza sia diversa da 0, in x_0 . Ma, siccome al peggio non c'é mai fine, non possiamo ritenere conclusa la disamina: cosa succede, se *anche* la derivata terza si annulla? Se vogliamo ragionare come sopra, mediante la formula di Taylor, dobbiamo supporre che almeno $f^{(4)}(x_0)$ sia non nulla: le cose si presentano allora come nel primo caso studiato, quando $f'(x_0) = 0$, ma $f''(x_0) \neq 0$, e percio' possiamo dedurre che il punto x_0 é senz'altro di massimo o di minimo. Se invece anche $f^{(4)}(x_0) = 0$ (somma sfortuna!), bisognerà scomodare la derivata quinta, e (ormai cominciamo a farci furbi...) se questa é diversa da 0, ecco che inevitabilmente x_0 é punto di flesso. Ragionando in questo modo, si perviene al seguente teorema, che sintetizza le regole da seguire.

Teorema 9.11 *Sia $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione di classe $C^{(n+1)}([a, b])$, e sia x_0 un punto interno ad $[a, b]$. Supponiamo che risulti:*

$$f'(x_0) = f''(x_0) = \dots = f^{(n)}(x_0) = 0, \quad f^{(n+1)}(x_0) \neq 0.$$

Allora, si hanno le seguenti alternative:

- 1) se n é dispari, allora x_0 é punto di massimo o di minimo relativo, a seconda che $f^{(n+1)}(x_0)$ sia minore o maggiore di 0, rispettivamente;*
- 2) se n é pari, allora x_0 é punto di flesso per f .*

Osservazione 9.12 *Si osservi comunque che anche questo metodo a volte puo' risultare difficoltoso: ad esempio, se consideriamo la funzione $f(x) = x^4 \sin x^3$, che si annulla in 0, é abbastanza facile dedurre che 0 é un punto critico, ma é piuttosto complicato stare a calcolare svariate derivate successive, perché le loro espressioni si fanno via via piu' complesse, e c'è quindi un discreto rischio di commettere errori. In casi del genere é piu' vantaggioso controllare l'ordine di infinitesimo della f in 0. In questo caso, la funzione f é il prodotto di due infinitesimi, uno di ordine 4 e l'altro di ordine 3, e quindi essa é infinitesimo di ordine 7. Cio' consente di assimilare la nostra f , almeno in un intorno di 0, come la funzione x^7 , che chiaramente presenta ivi un flesso. Cio' basta per dedurre che anche la nostra f presenta un punto di flesso in 0. Questo si puo' ripetere, ogni volta che l'ordine di infinitesimo sia un numero dispari. Quando invece l'ordine é pari, siamo in presenza di un punto estremante, che puo' essere di massimo o di minimo.*

Oltre a questo metodo per lo studio dei minimi, dei massimi e dei flessi, la formula di Taylor ha anche un'importante conseguenza nell'approssimazione di f ; se supponiamo che f sia di classe C^∞ in $[a, b]$, si possono ottenere approssimazioni di f sempre piu' buone (ossia, con errori sempre piu' piccoli), mediante polinomi di Taylor di grado sempre piu' alto. Nasce dunque la questione, se sia possibile *prolungare* il polinomio all'infinito, riducendo l'errore a 0! Ora, dal punto di vista tecnico, il polinomio *prolungato* all'infinito non é altro che una serie, detta *serie di Taylor*, e l'eliminazione completa dell'errore significa che $f(x)$ dev'essere la somma totale della serie di Taylor; in formule:

$$f(x) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(x-a)^j}{j!} f^{(j)}(a) \quad (9.2)$$

almeno per x in un intorno di a . Se la formula 9.2 é verificata, si dice che f é *svilupabile* in serie di Taylor, *attorno* al punto a . Chiaramente, un risultato del genere sussiste solo a certe condizioni, ossia non basta che f sia di classe $C^\infty([a, b])$, per poter affermare che essa é svilupabile. Non presentiamo qui controesempi, ma ne esistono diversi. Daremo invece l'enunciato di un teorema, che stabilisce alcune condizioni sufficienti, e permette di riconoscere facilmente la svilupabilita' di molte funzioni importanti.

Teorema 9.13 Sia $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione di classe $C^\infty([a, b])$.

I parte) Se esistono due costanti positive M e K tali che

$$|f^{(n)}(x)| \leq K^n + M$$

per ogni n e ogni $x \in [a, b]$, allora f é sviluppabile in serie di Taylor, attorno a qualsiasi punto $x_0 \in [a, b]$.

II parte) Se risulta:

$$f(x) = \sum_{j=0}^{\infty} a_j (x - x_0)^j$$

per tutti i punti x di un certo intorno di x_0 , allora f é sviluppabile in serie di Taylor attorno a x_0 , e **necessariamente** si ha $a_j = \frac{f^{(j)}(x_0)}{j!}$ per ogni j .

III parte) f é sviluppabile in serie di Taylor attorno a x_0 , se e solo se f' lo é, e lo sviluppo di f' si ottiene derivando termine a termine gli addendi dello sviluppo di f .

Non diamo la dimostrazione di questo teorema: la prima parte potrebbe essere dimostrata usando la formula di Taylor, con il resto di Lagrange; per la seconda e la terza, occorrono tecniche piu' raffinate.

Possiamo pero' usare il teorema 9.13: ad esempio, la funzione $f(x) = \sin x$ ha tutte le derivate limitate da 1, e quindi verifica le ipotesi della prima parte. Lo stesso vale per $\cos x$, e anche per e^x , (purché ci si limiti a considerarla in un qualsiasi intervallo *limitato*). Otteniamo così, abbastanza facilmente, gli sviluppi di queste funzioni, attorno al punto 0:

$$\sin x = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7!} + \dots = \sum_{j=0}^{\infty} (-1)^j \frac{x^{2j+1}}{(2j+1)!}$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots = \sum_{j=0}^{\infty} (-1)^j \frac{x^{2j}}{(2j)!}$$

$$e^x = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{x^j}{j!}$$

(si ricordi la *serie esponenziale*!)

Possiamo poi usare il secondo enunciato per dedurre sviluppabilità e sviluppo, ad esempio, di e^{x^2} : nello sviluppo di e^x , basta sostituire x con x^2 e si ottiene

$$e^{x^2} = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{x^{2j}}{j!}$$

(si noti che i coefficienti di posto dispari sono nulli, in accordo con il fatto che le derivate di posto dispari di e^{x^2} si annullano tutte, in 0.)

Un'altra conseguenza del secondo enunciato è lo sviluppo di $\frac{1}{1-x}$, attorno a 0, valido per $|x| < 1$:

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{j=0}^{\infty} x^j$$

(serie geometrica!). Similmente

$$\frac{1}{1+x} = \sum_{j=0}^{\infty} (-1)^j x^j$$

e ancora

$$\frac{1}{1+x^2} = \sum_{j=0}^{\infty} (-1)^j x^{2j}$$

sempre per $|x| < 1$.

Adoperando poi la terza parte, e ricordando che $\frac{1}{1+x^2}$ è la derivata di $\arctan x$, si trova anche

$$\arctan x = \sum_{j=0}^{\infty} (-1)^j \frac{x^{2j+1}}{2j+1}$$

sempre per $|x| < 1$, e analogamente

$$\log(1+x) = \sum_{j=0}^{\infty} (-1)^j \frac{x^{j+1}}{j+1}$$

ancora per $|x| < 1$ (ma si dimostra anche che

$$\log 2 = \log(1+1) = \sum_{j=0}^{\infty} (-1)^j \frac{1}{j+1} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots)$$

Capitolo 10

Integrazione

In questo capitolo, tratteremo esclusivamente la teoria dell'Integrazione secondo Riemann. Come già' abbiamo osservato a proposito della derivazione, anche i concetti e i metodi che questa teoria sviluppa hanno come scopo la determinazione di entita' geometriche (aree, volumi, lunghezze, etc.), entita' fisiche (masse, lavori, cariche elettriche...), persino entita' probabilistiche o finanziarie, su cui per ora non possiamo soffermarci. Come vedremo, le entita' da ricercare non sempre assumono l'aspetto di un *numero*, ma spesso vanno determinate sotto forma di *funzioni*: ad esempio, la *legge oraria* di un moto é una classica applicazione dell'integrale.

E in effetti non é un caso che la teoria della derivazione e quella dell'integrazione abbiano applicazioni negli stessi settori: vedremo infatti che, nonostante l'apparente grande differenza tra le due teorie, esse sono come due facce di una stessa medaglia, un po' come la divisione e la moltiplicazione sono due aspetti complementari della aritmetica elementare. E come la divisione e la moltiplicazione sono operazioni *l'una inversa dell'altra*, cosi' si tende a riguardare l'integrazione come l'algoritmo *inverso* della derivazione; senza stare a cercare il classico pelo nell'uovo, riteniamo che tali parallelismi possano aiutare a inquadrare meglio quelli che sono gli aspetti fondamentali della teoria, e soprattutto le svariate applicazioni.

Per meglio rendere l'idea, riprendiamo in esame l'esempio, fornito all'inizio del capitolo precedente (esempio (5), dopo la definizione 7.1): supponiamo di avere una sbarretta di una certa lunghezza, composta di materiale vario, e variamente distribuito lungo la sbarretta

stessa. Stavolta però supponiamo di conoscere non il peso, ma la densità (punto per punto) della sbarretta stessa, e ci proponiamo di determinarne la massa. Come abbiamo visto nell'esempio (5) suddetto, se noi assimiliamo la sbarretta all'intervallo $[0, 1]$, e denotiamo con $M(t)$ la massa della sbarretta dall'estremo in 0 all'estremo in t (con $t \in [0, 1]$), la densità $\rho(t)$ non è altro che la derivata $M'(t)$. Viceversa, se noi supponiamo di conoscere $\rho(t)$ (per ogni punto t), per trovare $M(t)$ dobbiamo fare in un certo senso l'*operazione inversa* della derivata, ossia dobbiamo trovare una funzione $M(t)$, la cui derivata sia la funzione nota $\rho(t)$. (In maniera sbrigativa, e con una certa forzatura dei termini, si dice spesso che $M(t)$ è l'*integrale* di $\rho(t)$).

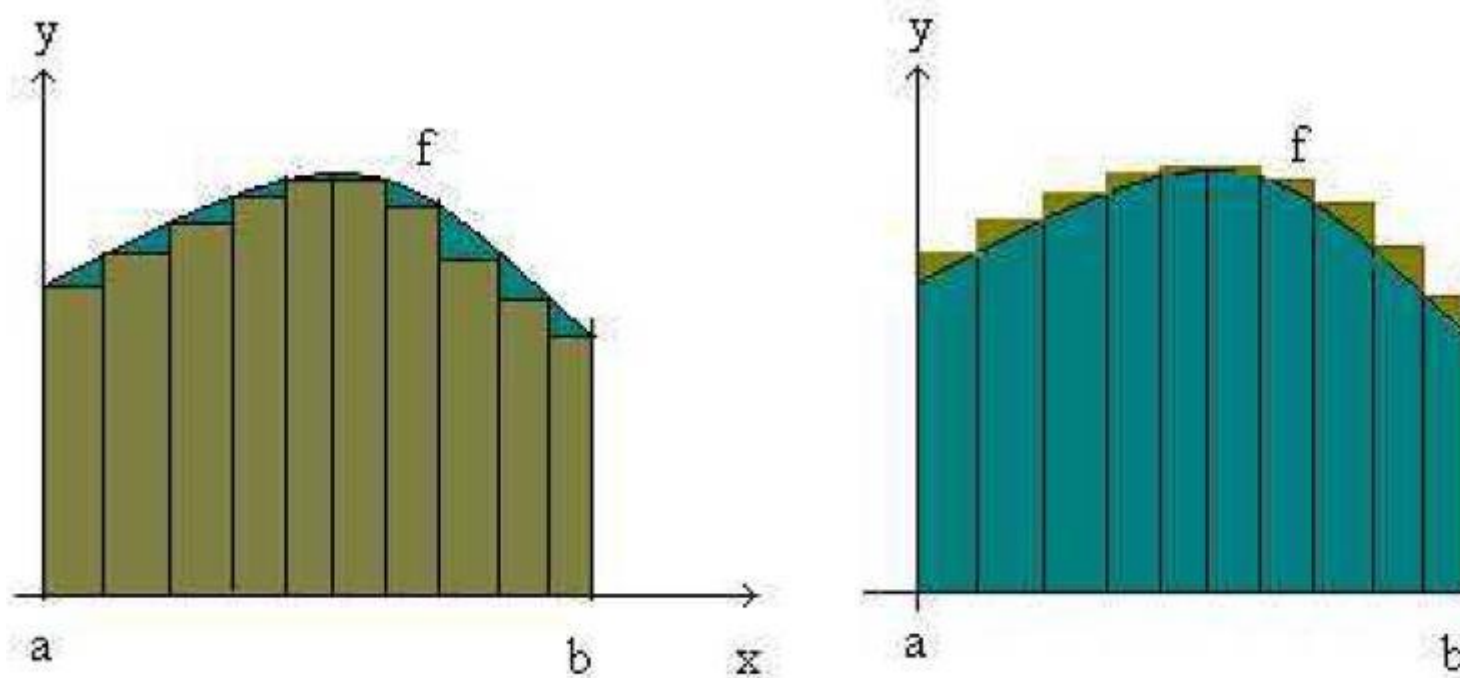
Tuttavia, gli aspetti teorici non sono così semplicistici: l'esperienza ormai ci insegna che non tutto ciò che appare facile è facile, e non tutto ciò che appare difficile è veramente difficile. Per quanto riguarda l'integrazione, la verità sta nel mezzo: quando la teoria *solleva il velo* e mostra chiaramente la strada da seguire nella pratica, la pratica non è sempre *praticabile* e bisogna accontentarsi di ciò che si riesce a ottenere.

10.1 Definizioni e proprietà elementari

Il concetto che sta alla base della teoria dell'integrazione alla Riemann si richiama al *metodo di esaustione di Eudosso*, utilizzato fin dai tempi dei Greci antichi per approssimare aree di figure piane non elementari (anche il cerchio è da considerare non elementare, a questo stadio).

Il problema può essere formulato così: data una funzione $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, che temporaneamente supporremo *positiva*, come si può definire e calcolare l'area della regione di piano E delimitata dalle rette $x = a$, $x = b$, $y = 0$ e dalla curva grafico di f ? (Per convenienza di trattazione, tale regione verrà detta *sottografico* di f .)

Il metodo è quello di *esaustione*: si approssima E con delle regioni elementari, costituite da *plurirettangoli*, ossia da insiemi ottenuti come sottografici di funzioni costanti a tratti. Di regola, si usano due classi di plurirettangoli: quelli contenuti nella regione E , e quelli contenenti E . Chiaramente, se R_1 è un plurirettangolo contenuto in E , l'area (naturale) di R_1 è minore di quella di E (ammesso che abbia senso parlare di tale area); viceversa, se



Nella figura di sinistra, si confronta il sottografico di f con un plurirettangolo contenuto, e di destra, lo si confronta con un plurirettangolo contenente.

R_2 è un plurirettangolo contenente E , l'area di R_2 è maggiore di quella di E . (Si veda la figura).

Pertanto, l'area di E risulta minore o uguale all'estremo inferiore di tutte le aree dei plurirettangoli contenenti E : denotiamo con A^* tale inf. Ma essa risulta anche maggiore o uguale all'estremo superiore di tutte le aree dei plurirettangoli contenuti in E , estremo superiore che denotiamo con A_* . Dunque, il valore di tale area è univocamente individuato se $A^* = A_*$, nel qual caso l'area di E è il valore comune ai due numeri. In altre parole, per poter parlare di *area* di E , bisogna che siano *contigue* le due classi numeriche costituite dalle aree dei plurirettangoli contenenti E e dalle aree dei plurirettangoli contenuti in E .

Per certe funzioni f un po' troppo *selvagge*, la differenza tra l'area di qualunque plurirettangolo contenente E e quella di qualunque plurirettangolo contenuto in E non è mai inferiore a una certa quantità positiva: in altre parole, si verifica che A^* sia strettamente maggiore di A_* . Se questo accade, non si può parlare di *area* di E .

Questi discorsi verranno ora resi più rigorosi e approfonditi, tramite alcune definizioni

e alcuni risultati *elementari*. Elimineremo anche la condizione che la nostra f sia positiva, per cui le *aree* verranno prese *con il segno*, senza che cio' crei particolari complicazioni.

Definizioni 10.1 Fissato un qualunque intervallo $[a, b] \subset \mathbb{R}$, si dice *decomposizione* (o anche *divisione*) di $[a, b]$ una famiglia finita di sottointervalli chiusi, a due a due senza punti interni in comune, e aventi tutto $[a, b]$ come unione. Di solito, una decomposizione D si rappresenta elencando i punti di suddivisione:

$$D = \{t_0, t_1, \dots, t_n\}$$

ove $a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b$; chiaramente, da qui si possono ricavare immediatamente gli intervalli della decomposizione: $[a, t_1], [t_1, t_2], \dots, [t_{n-1}, b]$.

Ora, data una funzione $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, diremo che essa é una *funzione a gradinata* se esiste una *decomposizione* dell'intervallo $[a, b]$, individuata da punti del tipo $a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b$, tale che f sia costante all'interno di ciascun intervallo $[t_i, t_{i+1}]$, $i = 0, 1, \dots, n-1$. Una tale funzione é spesso detta anche *costante a tratti*. Data una funzione a gradinata, esistono molte decomposizioni, tali che f sia costante all'interno di ciascun intervallino: appena se ne trova una, basta suddividere ulteriormente uno o piu' dei suoi intervalli, per trovarne un'altra, piu' fine. Tutte le decomposizioni di questo tipo si dicono *divisioni ammissibili* per la f . Questa osservazione ha una conseguenza importante: date due funzioni a gradinata, esiste sempre una decomposizione, che sia ammissibile per entrambe: da questo discende ad esempio il fatto che la *somma* di due funzioni a gradinata é ancora a gradinata, e lo stesso vale per il prodotto.

Quando f é a gradinata, chiaramente f é limitata, assume solo un numero finito di valori, ed é discontinua al piu' in un numero finito di punti (quelli di suddivisione di una decomposizione ammissibile), le discontinuita' essendo comunque di I specie.

Solitamente, per rappresentare una funzione f a gradinata, usiamo la seguente convenzione: scegliamo una decomposizione ammissibile, $D := \{t_0, \dots, t_n\}$, e denotiamo con c_0, c_2, \dots, c_{n-1} rispettivamente i valori costanti che f assume in $]t_0, t_1[,]t_1, t_2[, \dots,]t_{n-1}, t_n[$; allora scriviamo

$$f = \sum_{i=0}^{n-1} c_i 1_{]t_i, t_{i+1}[}.$$

Questa scrittura non dà informazioni sui valori che f assume proprio nei punti t_i , ma vedremo che questi valori non hanno alcuna influenza sui concetti e sulle quantità di cui ci occupiamo qui.

Ovviamente, una funzione a gradinata ha come sottografico un plurirettangolo (fatta eccezione per i valori ininfluenti che f assume nei punti di suddivisione). L'area di tale plurirettangolo costituisce il *mattone* con cui si costruisce l'integrale.

Definizione 10.2 Sia $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ una generica funzione a gradinata, con rappresentazione

$$f = \sum_{i=0}^{n-1} c_i 1_{]t_i, t_{i+1}[}.$$

Si definisce *integrale* di f in $[a, b]$ il numero

$$\int_a^b f(x) dx := \sum_{i=0}^{n-1} c_i (t_{i+1} - t_i)$$

(che è appunto l'area del plurirettangolo sottografico di f , almeno per $f > 0$).

A completamento di questa definizione, va precisato che l'integrale di una funzione a gradinata f **non dipende** dalla particolare decomposizione ammissibile, scelta per rappresentare la f : *ogni* divisione ammissibile per f dà luogo allo stesso integrale. Ometteremo la dimostrazione (pur facile) di questo fatto, lasciando al lettore volenteroso il compito di ricavarcela per esercizio.

Questa definizione di integrale ha delle conseguenze facili, ma importanti. Le elencheremo nel seguente teorema, del quale non diamo dimostrazione, per lo stesso motivo di cui poco sopra: ricordiamo solo, per agevolare il *volenteroso* lettore, che per due funzioni a gradinata si può sempre facilmente trovare una medesima decomposizione ammissibile.

Teorema 10.3 Siano f e g due funzioni a gradinata, definite in $[a, b]$.

- i) Se $f \leq g$, allora $\int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b g(x) dx$.
- ii) $\int_a^b (f + g)(x) dx = \int_a^b f(x) dx + \int_a^b g(x) dx$.
- iii) Se g è costante, $\int_a^b g(x) f(x) dx = g(a) \int_a^b f(x) dx$.
- iv) Per ogni $c \in]a, b[$, si ha $\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx$.

La prima proprietà espressa dal teorema 10.3 viene detta *positività* dell'integrale (per il fatto che ogni funzione a gradinata non-negativa ha integrale non-negativo); la seconda e la terza vengono espresse dicendo che l'integrale è un funzionale *lineare*; la quarta è la proprietà di *additività* dell'integrale rispetto agli intervalli.

Possiamo ora rivolgere la nostra attenzione alle funzioni più generali, allo scopo di definire l'integrale in analogia con il metodo di esaustione. L'unica condizione che imponremo alle funzioni in questione è la *limitatezza*: infatti, se f non fosse limitata (ad esempio superiormente), non sarebbe possibile parlare di plurirettangoli *contenenti* il sottografico di f . Denotando con R tale sottografico, il metodo di esaustione ci permetterà di stabilire se si può parlare di *area* per R : in caso affermativo, diremo che f è *integrabile*, e l'area di R sarà l'*integrale* di f . Per formulare adeguatamente questi concetti, abbiamo bisogno di alcune definizioni preliminari.

Definizioni 10.4 Sia $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione limitata. Si denota con S_f l'insieme di tutte le funzioni a gradinata $s : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, tali che $s \leq f$; poiché f è limitata, S_f è non vuoto: infatti, se m è un qualunque numero reale, tale che $m \leq f(x)$ per ogni x , la funzione *costante* $s(x) \equiv m$ è un elemento di S_f . Analogamente, si denota con T_f l'insieme di tutte le funzioni a gradinata $t : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, tali che $f \leq t$; poiché f è limitata, T_f è non vuoto: infatti, se M è un qualunque numero reale, tale che $M \geq f(x)$ per ogni x , la funzione *costante* $t(x) \equiv M$ è un elemento di T_f .

Ogni elemento di S_f ha per sottografico un plurirettangolo contenuto nel sottografico di f , e ogni elemento di T_f ha per sottografico un plurirettangolo contenente il sottografico di f : stiamo quindi seguendo l'idea del metodo di esaustione. Quello che occorre, per poter parlare di *area* del sottografico di f , e quindi di *integrale* per f , è che siano contigue le due classi numeriche, costituite l'una dagli integrali degli elementi di S_f (aree dei plurirettangoli contenuti in R), e l'altra dagli integrali degli elementi di T_f (aree dei plurirettangoli contenenti R).

Osserviamo che ogni elemento $s \in S_f$ è minore o uguale a ciascun elemento $t \in T_f$: si ha dunque $\int_a^b s(x)dx \leq \int_a^b t(x)dx$ per ogni scelta di $s \in S_f$ e di $t \in T_f$. Pertanto, la classe $\{\int_a^b s(x)dx : s \in S_f\}$ è limitata superiormente (da qualunque numero del tipo $\int_a^b t(x)dx$, con $t \in T_f$), e la classe $\{\int_a^b t(x)dx : t \in T_f\}$ è limitata inferiormente. Ha senso dunque

porre:

$$* \int_a^b f(x) dx = \inf \left\{ \int_a^b t(x) dx : t \in T_f \right\} \quad , \quad * \int_a^b f(x) dx = \sup \left\{ \int_a^b s(x) dx : s \in S_f \right\}.$$

Il numero $* \int_a^b f(x) dx$ é detto *integrale superiore* della f , mentre il numero $* \int_a^b f(x) dx$ é detto *integrale inferiore* della f .

Ovviamente, risulta *sempre* $* \int_a^b f(x) dx \leq * \int_a^b f(x) dx$.

Qualora risulti $* \int_a^b f(x) dx = * \int_a^b f(x) dx$, diremo che f é *integrabile* in $[a, b]$, e chiameremo *integrale* di f il valore comune delle due quantita':

$$\int_a^b f(x) dx := * \int_a^b f(x) dx = * \int_a^b f(x) dx.$$

A questo punto, facciamo subito due riflessioni. La prima riguarda le funzioni a gradinata: se f é una funzione a gradinata, essa appartiene sia alla classe S_f che alla classe T_f , per cui l'integrale *elementare* di f , come é stato definito in 10.2, coincide sia con l'integrale superiore di f , sia con il suo integrale inferiore, e quindi f é integrabile anche secondo la definizione 10.4, e i due integrali coincidono. (Sarebbe una gran confusione, se qualche funzione a gradinata non risultasse integrabile!)

Esistono pero' delle funzioni limitate, che *non sono* integrabili: questa é l'altra riflessione da fare. L'esempio classico, a tale scopo, é la *funzione di Dirichlet*, $D : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, definita come segue:

$$D(x) = \begin{cases} 1, & \text{se } x \in \mathbb{Q} \\ 0, & \text{se } x \notin \mathbb{Q}. \end{cases}$$

Ora, ogni funzione a gradinata minorante D dev'essere necessariamente minore o uguale a 0, e ogni funzione a gradinata maggiorante D dev'essere maggiore o uguale a 1: infatti, ogni intervallo contiene sia punti razionali che punti irrazionali.

Allora, si ha, chiaramente: $* \int_a^b D(x) dx = b - a$, $* \int_a^b D(x) dx = 0$.

Ricordiamo che la funzione di Dirichlet é *discontinua in ogni punto*.

Stabiliamo ora alcune proprieta' *elementari* dell'integrale, in perfetta analogia con quelle espresse nel teorema 10.3.

Teorema 10.5 Siano f e g due funzioni limitate, definite in $[a, b]$, e ivi integrabili. Allora $f + g$ é integrabile, e si hanno le proprietà seguenti.

i) Se $f \leq g$, allora $\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx$.

ii) $\int_a^b (f + g)(x)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$.

iii) Se g é costante, $g(x)f(x)$ é integrabile e si ha $\int_a^b g(x)f(x)dx = g(a) \int_a^b f(x)dx$.

iv) Per ogni $c \in]a, b[$, f é integrabile anche in $[a, c]$, e si ha $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$.

Dimostrazione. Dimostreremo solo alcuni punti critici del teorema, dando delle indicazioni più sommarie per gli altri.

Intanto, la (i) é molto semplice: basta notare che la classe S_f é contenuta in S_g , se $f \leq g$. Per dimostrare l'integrabilità di $f + g$, e la validità della (ii), scegliamo arbitrariamente un elemento $s_1 \in S_f$ e un elemento $s_2 \in S_g$: allora si ha $s_1 + s_2 \in S_{f+g}$, e quindi

$$\int_a^b s_1(x)dx + \int_a^b s_2(x)dx = \int_a^b (s_1 + s_2)(x)dx \leq \int_a^b (f + g)(x)dx.$$

Poiché s_1 é arbitraria in S_f , passando a sup nell'ultima relazione, al variare di s_1 , troviamo

$$\int_a^b f(x)dx + \int_a^b s_2(x)dx \leq \int_a^b (f + g)(x)dx.$$

Anche qui, possiamo ora passare a sup, per $s_2 \in S_g$, e otteniamo:

$$\int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx \leq \int_a^b (f + g)(x)dx,$$

ossia, data l'integrabilità di f e g :

$$\int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx \leq \int_a^b (f + g)(x)dx.$$

Ragionando analogamente, con due funzioni arbitrarie, $t_1 \in T_f$ e $t_2 \in T_g$, si perviene a

$$\int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx \geq \int_a^b (f + g)(x)dx,$$

che, assieme alla relazione precedente, fornisce l'integrabilità di $f + g$ e anche la (ii).

Quanto alla (iii), essa é banale, nel caso g sia una costante positiva. Ora, supponiamo $g(x) \equiv -1$: dobbiamo provare che $-f$ é integrabile e che $\int_a^b (-f)(x)dx = -\int_a^b f(x)dx$.

Basta osservare che la classe S_{-f} coincide con la classe $-T_f$ (ossia, con tutte le funzioni in T_f cambiate di segno), e la classe T_{-f} coincide con $-S_f$: a questo punto, si ha

$$\begin{aligned} {}^* \int_a^b (-f)(x) dx &= \inf \left\{ - \int_a^b s(x) dx : s \in S_f \right\} = \\ &= - \sup \left\{ \int_a^b s(x) dx : s \in S_f \right\} = - {}^* \int_a^b f(x) dx = - \int_a^b f(x) dx \end{aligned}$$

e analogamente

$${}^* \int_a^b (-f)(x) dx = - {}^* \int_a^b f(x) dx = - \int_a^b f(x) dx.$$

Dunque, se $g(x) \equiv -1$ la (iv) é provata. Nel caso g sia una costante negativa diversa da -1 , ossia $g(x) \equiv -k$ con $k > 0$, possiamo scrivere $g(x)f(x) = -(kf(x))$ e usare i punti precedentemente provati.

Non dimostreremo la (iv), ma ci limitiamo a precisare che la proprieta' di additivita' ivi indicata sussiste gia' per l'integrale inferiore e per quello superiore; si ha cioé:

$${}^* \int_a^b f(x) dx = {}^* \int_a^c f(x) dx + {}^* \int_c^b f(x) dx$$

e similmente

$${}^* \int_a^b f(x) dx = {}^* \int_a^c f(x) dx + {}^* \int_c^b f(x) dx. \quad \square$$

Notiamo anche, a proposito della (iv), che essa puo' essere vista anche in *senso inverso*: se f risulta integrabile in $[a, c]$ e in $[c, b]$ allora si puo' dedurre che f é integrabile in tutto $[a, b]$ (con la consueta additivita').

Sussistono altre proprieta' importanti dell'integrale: ad esempio, il *prodotto* di due funzioni integrabili é sempre integrabile (benché poi l'integrale del prodotto non coincida quasi mai con il prodotto degli integrali); ancora, se una funzione f é integrabile, anche $|f|$ lo é, e si vede facilmente che

$$\left| \int_a^b f(x) dx \right| \leq \int_a^b |f(x)| dx$$

(basta usare la monotonia). Tuttavia, non diamo per ora le dimostrazioni di queste proprieta' (si potranno ritrovare in seguito, come conseguenza del teorema di Vitali-Lebesgue).

10.2 Classi di funzioni integrabili

Passiamo ora a individuare alcune classi di funzioni integrabili: al di là delle funzioni a gradinata, esistono infatti molte funzioni importanti, che sono integrabili, e per le quali è molto utile conoscere l'integrale. Un esempio che può venire subito in mente è la funzione *identità*: $f(x) = x$, in un qualsiasi intervallo $[a, b]$: dato che il sottografico di una tale funzione è un trapezio (o anche un triangolo), l'integrale è già noto (dalle elementari), ma l'integrabilità non è così facile da stabilire.

Per semplicità, supponiamo che sia $a = 0$, così il sottografico è un triangolo rettangolo isoscele, di area $\frac{b^2}{2}$. Dunque, l'integrale è già calcolato? Sì, purché ci assicuriamo dell'*integrabilità* della nostra funzione; abbiamo già osservato che questo significa verificare che sono *contigue* le due classi numeriche, costituite l'una dagli integrali delle funzioni a gradinata minoranti, e l'altra dagli integrali delle funzioni a gradinata maggioranti. E per questo, basterà far vedere che esistono sempre una funzione a gradinata maggiorante e una minorante, tali che i loro integrali siano vicini quanto si vuole. Procederemo così: fissata una qualunque quantità positiva d , faremo vedere che si possono trovare una funzione a gradinata $s(x)$ più bassa di $f(x) = x$ e una a gradinata più alta $t(x)$, tali che

$$\int_0^b t(x)dx - \int_0^b s(x)dx < d.$$

Per trovare s e t , dividiamo $[0, b]$ in un certo numero N di parti uguali, tramite i punti $0, \frac{1}{N}b, \frac{2}{N}b, \dots, \frac{N-1}{N}b, b$, scegliendo N in modo che $\frac{b^2}{N} < d$.

Poi, nell'intervallo $]0, \frac{1}{N}b[$, poniamo $s(x) = 0, t(x) = \frac{1}{N}b$; nell'intervallo successivo, poniamo $s(x) = \frac{1}{N}b, t(x) = \frac{2}{N}b$; nel terzo intervallo, porremo $s(x) = \frac{2}{N}b, t(x) = \frac{3}{N}b$ e così via. Vediamo subito che si ha $s(x) \leq x \leq t(x)$ per ogni x , e, facendo i conti, si ottiene facilmente

$$\int_0^b t(x)dx = \frac{1}{N}b \sum_{i=1}^N \frac{i}{N}b = \frac{1}{N^2}b^2 \sum_{i=1}^N i = \frac{N(N+1)}{2N^2}b^2 = \frac{N+1}{2N}b^2.$$

(Qui abbiamo utilizzato la formula che fornisce la somma dei primi N numeri interi, si veda il Capitolo Limiti di successioni nella I Parte). Similmente

$$\int_0^b s(x)dx = \frac{1}{N}b \sum_{i=1}^{N-1} \frac{i}{N}b = \frac{1}{N^2}b^2 \sum_{i=1}^{N-1} i = \frac{N(N-1)}{2N^2}b^2 = \frac{N-1}{2N}b^2.$$

Ne ricaviamo subito

$$\int_0^b t(x)dx - \int_0^b s(x)dx = \frac{b^2}{N} < d$$

Dunque, le due classi numeriche sono contigue, e l'integrale di x si può ottenere facilmente, mandando a limite, per $N \rightarrow +\infty$, o l'integrale di $s(x)$ o quello di $t(x)$.

I conti, molto facili, confermano che $\int_0^b xdx = \frac{b^2}{2}$, come previsto.

Ripetendo in maniera simile questo procedimento, è possibile dimostrare il seguente teorema.

Teorema 10.6 *Ogni funzione monotona $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ è integrabile.*

Dimostrazione Senza perdita di generalità, supponiamo che f sia monotona *non-decrescente*.

Basta far vedere che, fissato ad arbitrio un numero $d > 0$, è possibile costruire una funzione $s \in S_f$ ed una funzione $t \in T_f$ tali che

$$\int_a^b (t(x) - s(x))dx < d.$$

A tale scopo, fissiamo $N \in \mathbb{N}$, abbastanza grande perché risulti

$$\frac{b-a}{N}(f(b) - f(a)) < d$$

e fissiamo la suddivisione di $[a, b]$ ottenuta con i punti

$$t_0 = a, t_1 = a + \frac{b-a}{N}, t_2 = a + 2\frac{b-a}{N}, t_3 = a + 3\frac{b-a}{N}, \dots, t_N = b.$$

Definiamo ora $s(x)$ in modo che in ogni intervallo $[t_i, t_{i+1}[$ essa assuma il valore $f(t_i)$; nel punto b poniamo $s(b) = f(b)$. Similmente, definiamo $t(x)$ in modo che in ogni intervallo $]t_i, t_{i+1}]$ essa assuma il valore $f(t_{i+1})$, e nel punto a si abbia $t(a) = f(a)$. Confrontando l'integrale

$$\int_a^b t(x)dx = \frac{b-a}{N}\{f(t_1) + f(t_2) + \dots + f(t_{N-1}) + f(b)\}$$

con l'integrale

$$\int_a^b s(x)dx = \frac{b-a}{N}\{f(t_1) + f(t_2) + \dots + f(t_{N-1}) + f(a)\},$$

vediamo facilmente che $\int_a^b (t(x) - s(x))dx = \frac{b-a}{N}(f(b) - f(a))$, e questa quantita' é minore di d , per la scelta di N . \square

Questo teorema ha come conseguenza che le funzioni limitate piu' comunemente usate sono tutte integrabili: infatti tutti i polinomi, le funzioni trigonometriche, esponenziali, etc. sono monotone *a tratti* (beninteso, purché siano definite su un intervallo). Dunque, esse sono integrabili in ciascun tratto ove siano monotone, e pertanto integrabili *tout-court*, per quanto detto a proposito della (iv) del teorema 10.5.

Faremo ora vedere che tutte le funzioni *continue* sono integrabili. Questo risultato, e altri ancora piu' generali, richiedono procedimenti dimostrativi piuttosto delicati, se si vuole rispettare il giusto rigore matematico. Daremo qui la dimostrazione solo del primo asserto, sia pure in maniera alquanto concisa.

Teorema 10.7 *Se $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ é continua, allora f é integrabile.*

Dimostrazione. Intanto, ricordiamo che f é limitata, in virtu' del teorema di Weierstrass (I parte, 5.10). Inoltre, in virtu' del teorema di Heine (I parte, 5.12), f é anche uniformemente continua.

Allora, fissato $\varepsilon > 0$ esiste un $\delta > 0$ tale che valga l'implicazione

$$|u - v| < \delta \Rightarrow |f(u) - f(v)| < \varepsilon.$$

Costruiamo allora una decomposizione di $[a, b]$ in N intervalli tutti della stessa ampiezza r , con $r < \delta$. Si denoti con $\{I_1, I_2, \dots, I_N\}$ tale decomposizione; inoltre, per ogni $j = 1, \dots, N$, si denoti con m_j il minimo valore di f in I_j , e con M_j il massimo valore di f in I_j . Per la condizione di uniforme continuita', si ha $M_j - m_j < \varepsilon$ per ogni j . Costruiamo ora una funzione $s \in S_f$ e una funzione $t \in T_f$, in modo che s assuma in ogni intervallo aperto I_j^0 il valore m_j , e t assuma in ogni aperto I_j il valore M_j . Si ha pertanto

$$\int_a^b t(x)dx - \int_a^b s(x)dx = \sum_{j=1}^N r(M_j - m_j) \leq (b-a)\varepsilon.$$

Ne segue ora

$$* \int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b t(x)dx \leq \int_a^b s(x)dx + (b-a)\varepsilon \leq * \int_a^b f(x)dx + (b-a)\varepsilon.$$

Dunque, per ogni $\varepsilon > 0$ risulta

$$*\int_a^b f(x)dx - *\int_a^b f(x)dx < (b-a)\varepsilon.$$

Per l'arbitrarietà di ε , questo vuol dire che l'integrale superiore e quello inferiore della f sono uguali. \square

Il teorema 10.7 ha anche numerose generalizzazioni: una di queste afferma che:

Una funzione limitata $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ è integrabile, se essa non ha più di un'infinita numerabile di punti di discontinuità.

Questo sarebbe già un risultato di ampia portata, ma è ulteriormente affinabile: sotto questo aspetto, il teorema più generale possibile è il prossimo teorema, che comunque non dimostreremo.

Premettiamo che il teorema del quale stiamo parlando (Teorema di Vitali-Lebesgue) permette di descrivere esattamente quanto può essere *grande* l'insieme dei punti di discontinuità di una funzione limitata, se si vuole che questa sia integrabile: dunque, semplicemente controllando *quanti* sono i punti di discontinuità di f (se ce ne sono), si può stabilire direttamente se f è integrabile o no.

Per enunciare questo teorema occorre l'introduzione di un nuovo concetto, quello di insieme rinchiudibile.

Definizione 10.8 Un insieme $A \subset [a, b]$ è detto *rinchiudibile* (o anche *di misura nulla*), se, per ogni $\varepsilon > 0$ esiste una successione $(] \alpha_n, \beta_n [)_n$ di intervalli aperti di \mathbb{R} , a due a due disgiunti, tali che A sia contenuto nella loro unione, e tali inoltre che risulti

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (\beta_n - \alpha_n) < \varepsilon.$$

Supponiamo che A sia rinchiudibile, e fissiamo $\varepsilon > 0$. Allora esiste una successione $(] \alpha_n, \beta_n [)_n$ come sopra. Dato che gli intervalli $] \alpha_n, \beta_n [$ debbono essere disgiunti, la somma della serie $\sum_{n=1}^{+\infty} (\beta_n - \alpha_n)$ evidentemente rappresenta la *misura* della loro unione, che a sua volta contiene A : dunque, se si può parlare della misura di A , questa dev'essere minore di ε . E siccome questo deve avvenire per *ogni* ε , l'unica possibilità è che la *misura* di A sia nulla.

Questo discorso spiega un po' la terminologia, che parla di *misura nulla*, e rende anche l'idea di *piccolezza* di un insieme rinchiudibile: ad esempio, ogni insieme *singoletto* $\{x\}$ risulta rinchiudibile (fissato ε , basta scegliere *un* solo intervallo, ad esempio $]x - \frac{\varepsilon}{3}, x + \frac{\varepsilon}{3}[$, e il gioco é fatto). Si vede ora facilmente che ogni insieme *finito* $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ é rinchiudibile; meno immediato é constatare che ogni insieme *numerabile* é rinchiudibile, ma anche questo é vero. Sono anche vere le seguenti proprieta' intuitive:

i) Se A é rinchiudibile, ogni sottoinsieme di A é rinchiudibile.

ii) L'unione di un numero finito, o anche una successione, di insiemi rinchiudibili é ancora rinchiudibile.

Esistono anche insiemi rinchiudibili non numerabili: l'insieme di Cantor, gia' studiato nella I parte, é un esempio di questo tipo. Un esempio molto piu' *visibile* si potrebbe portare in dimensione 2, purché si definisca il concetto di insieme rinchiudibile sostituendo gli intervalli con rettangoli, e la lunghezza con l'area: allora, la *diagonale* di un quadrato risulta rinchiudibile (area nulla), ma certamente non numerabile.

Veniamo ora al teorema di Vitali-Lebesgue.

Teorema 10.9 *Sia $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione limitata, e si denoti con A l'insieme dei suoi punti di discontinuita'. Condizione necessaria e sufficiente perché f sia integrabile alla Riemann é che A sia rinchiudibile.*

Osservazione 10.10 Chiaramente, se f é continua, allora A é vuoto, e dunque essa é integrabile. Ancora, se f ha solo un numero finito o un'infinita' numerabile di punti di discontinuita' (ed é limitata, beninteso!), essa é integrabile. Esistono anche esempi (tutt'altro che cervellotici!) di funzioni limitate, che sono discontinue in tutti e soli i numeri razionali! Tali funzioni sono integrabili, proprio grazie al teorema di Vitali-Lebesgue, e si possono facilmente definire con tecniche di natura probabilistica.

Si badi pero' di non fare confusione con la funzione di Dirichlet: quella *non* é integrabile, perché é discontinua in tutto $[a, b]$ (e chiaramente tutto $[a, b]$ ha misura $b - a > 0$). E' pero' vero che la funzione di Dirichlet puo' essere *modificata* in \mathbb{Q} , in modo da risultare poi integrabile.

Il teorema di Vitali-Lebesgue ha delle immediate applicazioni in alcuni problemi che abbiamo lasciato in sospeso.

Corollario 10.11 *Siano f e g due funzioni, definite su $[a, b]$ e a valori in \mathbb{R} , entrambe integrabili alla Riemann. Allora anche il prodotto $f \times g$ é integrabile, e anche la funzione $|f|$ é integrabile.*

Dimostrazione. Ovviamente, se f e g sono integrabili, esse devono essere limitate, e allora anche $f \times g$ lo é. Denotiamo ora con $N(f)$ l'insieme dei punti di discontinuità di f , con $N(g)$ quello relativo a g , e con $N(f \times g)$ quello relativo a $f \times g$. E' facile controllare che $N(f \times g)$ é contenuto in $N(f) \cup N(g)$: infatti, se f e g sono entrambe continue in un punto x , anche $f \times g$ lo é. Ma $N(f)$ e $N(g)$ sono rinchiudibili, per 10.9, e dunque anche la loro unione lo é. Di conseguenza, $N(f \times g)$, essendo contenuto in un insieme rinchiudibile, é rinchiudibile anch'esso. Applicando ancora il teorema 10.9, otteniamo l'integrabilità di $f \times g$.

La seconda parte é analoga: poiché $N(|f|) \subset N(f)$, se $N(f)$ é rinchiudibile anche $N(|f|)$ lo é. \square

Veniamo ora ai problemi piu' concreti dell'integrazione: una volta provato che una certa funzione é integrabile, come si puo' calcolare il suo integrale?

Gli esempi che abbiamo visto a suo tempo non sono molto incoraggianti: al di là delle funzioni a gradinata, la definizione dell'integrale si presta poco a fornire una valutazione rapida e precisa, anche per funzioni semplici come $f(x) = x$.

Per risolvere questo problema, ci viene in aiuto una formula molto importante, che va sotto i nomi di Torricelli e Barrow: questa formula, detta anche *Formula Fondamentale* del Calcolo Integrale, mette in relazione il calcolo degli integrali con il calcolo differenziale, in particolare con la ricerca di *primitive* della funzione da integrare (v. definizione 9.4).

Viene così alla luce il *misterioso* legame che esiste tra due operazioni matematiche apparentemente scollegate: il calcolo di un'area e la ricerca di una primitiva. Il *trait d'union* é fornito da quella che prende il nome di *funzione integrale*.

Tuttavia, prima di trattare sistematicamente questa funzione, é opportuno stabilire qualche risultato tecnico, che ci servira' in seguito. Il prossimo teorema viene detto *Teorema della Media*, e si basa sul seguente concetto, fondamentale in numerose applicazioni.

Definizione 10.12 Data una generica funzione integrabile $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, la quantita'

$$\theta(f) := \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) \, dx$$

viene detta *media integrale* di f .

Ad esempio, se la funzione in questione fosse $f(x) = x$, definita in un generico intervallo $[0, b]$, la *media integrale* di f in tale intervallo é $\theta(f) = \frac{1}{b} \frac{b^2}{2} = \frac{b}{2}$, (cioé proprio il punto di mezzo dell'intervallo $[0, b]$). Piu' in generale, il seguente teorema chiarisce meglio il significato della media integrale.

Teorema 10.13 Sia $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ una generica funzione integrabile, e si denotino rispettivamente con m e M il suo estremo inferiore e superiore, in $[a, b]$. Allora risulta

$$m \leq \theta(f) \leq M.$$

Dimostrazione. Prima di tutto, osserviamo che si ha

$$m \leq f(x) \leq M$$

per ogni x , e quindi, integrando:

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x) \, dx \leq M(b-a).$$

A questo punto, dividendo i tre membri per $(b-a)$, si ricava .

$$m \leq \frac{\int_a^b f(x) \, dx}{b-a} \leq M$$

cioé l'asserto. \square

Il teorema acquista una forma piu' significativa, se si suppone f continua. Infatti, per il teorema di Weierstrass, in tal caso m e M sono in realta' il minimo e il massimo valore della

f ; inoltre, per il teorema dei valori intermedi, la media $\theta(f)$, che é compresa fra il minimo e il massimo della f , é sicuramente l'immagine di qualche punto $t_0 \in [a, b]$: $\theta = f(t_0)$.

Dunque, se f é continua, possiamo dire che esiste sempre un punto t_0 in $[a, b]$, in modo tale che

$$\int_a^b f(x)dx = f(t_0)(b - a).$$

Definizione 10.14 Sia data una funzione integrabile $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$. Sappiamo che essa é integrabile in ogni intervallo del tipo $[a, x]$, per qualunque $x \in]a, b]$: v. teorema 10.5. Possiamo allora considerare l'integrale di f tra a e x come una nuova funzione, definita perlomeno in $]a, b]$. Essa viene detta *funzione integrale* di f , si denota come segue:

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt$$

per ogni $x \in]a, b]$. (Si noti che non abbiamo scritto $\int_a^x f(x)dx$, perché la x che compare come estremo di integrazione ha un ruolo ben diverso da quella che compare nell'integranda: per ogni x compresa fra a e b , con il ruolo di estremo d'integrazione, la variabile t può variare solo tra a e x).

Per completezza, si definisce poi $F(a) = 0$, in sintonia con altre convenzioni già adottate: $\int_a^a f(x)dx = 0$, e $\int_b^a f(x)dx = -\int_a^b f(x)dx$.

Quali sono le proprietà della funzione integrale? Tanto per cominciare, se supponiamo che f sia non-negativa, F é non-decrescente: infatti, in tal caso l'area compresa fra a e x_1 é senz'altro maggiore o uguale a quella compresa fra a e x_2 , non appena $x_1 < x_2$. Ma la funzione integrale gode anche di importanti proprietà di regolarità, come attesta il seguente teorema.

Teorema 10.15 Per ogni funzione integrabile $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, la sua funzione integrale é continua su tutto $[a, b]$.

Dimostrazione Poiché f é integrabile, essa é limitata, dunque esiste una costante $M > 0$ tale che $|f(x)| \leq M$ per ogni $x \in [a, b]$. Consideriamo due punti, x_1 e x_2 , nell'intervallo $[a, b]$, con $x_1 < x_2$: risulta

$$F(x_2) - F(x_1) = \int_{x_1}^{x_2} f(t)dt$$

da cui

$$|F(x_2) - F(x_1)| \leq \int_{x_1}^{x_2} |f(t)| dt \leq M(x_2 - x_1) = M|x_2 - x_1|.$$

Questo prova che F é continua in ogni punto di $[a, b]$. \square

Un altro teorema, ancora piu' significativo, riguarda la derivabilita' di F . Ne presenteremo qui una dimostrazione non del tutto generale, per motivi di semplicita', ma il procedimento sara' comunque sufficientemente significativo.

Teorema 10.16 *Sia $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ integrabile alla Riemann, e si fissi un punto $x_0 \in [a, b]$. Se f é continua in x_0 , allora F é derivabile in x_0 , e si ha*

$$F'(x_0) = f(x_0).$$

Dimostrazione. Come annunciato, presenteremo la dimostrazione sotto un'ipotesi ulteriore: supporremo cioé che f sia continua dappertutto in $[a, b]$. Questo ci permettera' di utilizzare la formulazione del teorema della media stabilita per il caso in cui f sia continua. Fissiamo dunque il punto x_0 , e valutiamo il rapporto incrementale di F :

$$\frac{F(x_0 + h) - F(x_0)}{h} = \frac{\int_{x_0}^{x_0+h} f(t) dt}{h}.$$

Usando come detto il teorema della media, nell'intervallo $[x_0, x_0 + h]$, vediamo che esiste un punto τ , compreso fra x_0 e $x_0 + h$, tale che $\int_{x_0}^{x_0+h} f(t) dt = hf(\tau)$. Dunque, il rapporto incrementale diventa:

$$\frac{F(x_0 + h) - F(x_0)}{h} = f(\tau)$$

ove τ varia con h , ma é compreso sempre fra x_0 e $x_0 + h$. Ora, quando h tende a 0, chiaramente $x_0 + h$ tende a x_0 e quindi, per il teorema dei carabinieri, anche τ tende a x_0 . Ma f é continua in x_0 , e allora $f(\tau)$ deve tendere a $f(x_0)$, quando h tende a 0. Ne deriva quindi che

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{F(x_0 + h) - F(x_0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} f(\tau) = f(x_0)$$

da cui l'asserto. \square

In particolare, se f é continua in tutto $[a, b]$, la sua funzione integrale é **sempre** una sua primitiva. Dunque:

Corollario 10.17 *Data una funzione continua $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, essa ammette sempre almeno una primitiva. Le sue primitive G sono date dalla seguente espressione:*

$$G(x) = \int_a^x f(t)dt + k$$

con k costante arbitraria.

Dimostrazione. Per il teorema 10.16, f ammette senz'altro una primitiva: ad esempio, la sua funzione integrale, F . Inoltre, é chiaro che $F + k$ é ancora una primitiva, qualunque sia la costante k . Resta solo da dimostrare che *tutte* le primitive di f sono della forma $F + k$: questa sara' una conseguenza del corollario 8.9. Infatti, se G é una qualunque primitiva di f , risulta chiaramente $(F - G)' = f - f = 0$. Quindi, $F - G$ verifica tutte le ipotesi di 8.9 e di conseguenza é costante. Ne segue che $G = F + k$, per un'opportuna costante k . \square

Il corollario precedente conduce ad una definizione.

Definizione 10.18 Data una qualunque funzione continua $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, si chiama *integrale indefinito* l'insieme di tutte le sue primitive, che, come gia' visto, ha la forma $F + k : k \in \mathbb{R}$. Tale insieme si suole denotare con la scrittura $\int f(x)dx$ (senza indicare gli estremi), e quindi si ha la relazione

$$\int f(x)dx = F(x) + k$$

dove al posto di F si puo' scrivere una qualunque primitiva di f (non necessariamente la funzione integrale). La scrittura $\int f(x) dx$, e il concetto da essa rappresentato, prendono il nome di *integrale indefinito* di f .

Ad esempio, si ha

$$\int 4x^3 dx = x^4 + k$$

o anche

$$\int \cos x \, dx = \sin x + k$$

etc.

Siamo ora pronti per il teorema fondamentale del Calcolo Integrale.

Teorema 10.19 Sia $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione continua, e si scelga una sua qualsiasi primitiva G . Risulta allora

$$\int_a^b f(x)dx = G(b) - G(a).$$

Dimostrazione. Sia G una qualunque primitiva di f . Per il corollario 10.17, esiste una costante k tale che $G = F + k$, ove F é la funzione integrale di f . Ora, essendo $F(a) = 0$, risulta $G(a) = k$. Chiaramente allora si ha:

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) = G(b) - k = G(b) - G(a).$$

Cio' conclude la dimostrazione. \square

Il teorema 10.19 é effettivamente la *chiave di volta* per effettuare in modo sbrigativo molti integrali, anche non banali. Ad esempio, ricordando che la derivata di $f(x) = \frac{x^3}{3}$ é esattamente la funzione $f'(x) = x^2$, possiamo ricavare facilmente l'area del *segmento di parabola*: essendo

$$\int_{-a}^a x^2 dx = \frac{a^3}{3} - \frac{-a^3}{3} = \frac{2}{3}a^3,$$

la regione di piano compresa fra la curva $y = x^2$ e la retta $y = a^2$ ha dunque area $A = 2a^3 - \frac{2}{3}a^3 = \frac{4}{3}a^3$.

Un altro problema interessante é dato dal calcolo del lavoro compiuto da un gas perfetto durante una trasformazione a temperatura costante: la legge che lega la pressione P al volume V puo' essere scritta come segue:

$$PV = K$$

con K costante (di fatto, K dipende dalla temperatura). Supponendo ad esempio che si abbia una dilatazione del gas, dal volume v_1 al volume $v_2 > v_1 > 0$, il lavoro cercato é dato da

$$L = \int_{v_1}^{v_2} PdV = \int_{v_1}^{v_2} \frac{K}{V} dV.$$

Poiché la funzione $g(x) = \frac{1}{x}$ é la derivata di $\log x$ (almeno, per $x > 0$), la formula fondamentale fornisce

$$L = K(\log(v_2) - \log(v_1)) = K \log \frac{v_2}{v_1},$$

il logaritmo essendo inteso in base e .

Utilizzare la definizione d'integrale negli esempi precedenti sarebbe stato possibile, ma assai piu' laborioso.

Ovviamente, la formula in questione si puo' applicare (*cum grano salis*) anche se l'integranda non é continua: basta che essa sia almeno *continua a tratti*, cioé che l'intervallo $[a, b]$ si suddivida in un numero finito di sottointervalli, in ciascuno dei quali f sia continua (ad eccezione dei punti estremi). Ad esempio, consideriamo la funzione $h(x) = \frac{x}{|x|} + x^2$, definita in $[-2, 3]$ (nel punto 0 possiamo porre $h(0) = 0$, o qualunque altro valore, tanto l'integrale sara' lo stesso). Possiamo notare che $h(x) = x^2 - 1$, per $x < 0$, e $h(x) = x^2 + 1$, per $x > 0$. Dunque,

$$\begin{aligned}\int_{-2}^3 h(x)dx &= \int_{-2}^0 h(x)dx + \int_0^3 h(x)dx = \int_{-2}^0 (x^2 - 1)dx + \int_0^3 (x^2 + 1)dx = \\ &= G(0) - G(-2) + H(3) - H(0)\end{aligned}$$

ove $G(x) = \frac{x^3}{3} - x$, $H(x) = \frac{x^3}{3} + x$, e quindi

$$\int_{-2}^3 h(x)dx = \frac{27 + 8}{3} + 1 = \frac{38}{3}.$$

Torneremo in seguito su questo punto, con qualche esempio piu' significativo.

Alla luce del teorema 10.19, é chiaro che diventa cruciale la possibilita' di calcolare, per ogni funzione continua f , almeno una delle sue primitive.

A tale scopo, precisiamo che il problema concreto é quello di *esprimere* la primitiva con una formula esplicita; infatti, il teorema 10.17 ci assicura l'esistenza di una (e quindi infinite) primitive di f , non appena f sia continua, ma non fornisce un'espressione esplicita di tale primitiva: é un po' come il gatto che si morde la coda, perché la funzione integrale é una primitiva, ma per *calcolare* la funzione integrale occorre il teorema 10.19, e quindi ci serve una primitiva...

Per di piu', esistono molte funzioni continue, anche in forma relativamente semplice, per le quali é *impossibile* dare un'espressione elementare della funzione integrale, per quanto ci si possa *lambiccare* il cervello. Dunque, c'é anche il rischio di perdere molto tempo senza cavare un ragno dal buco. Daremo in seguito alcuni di questi esempi (i piu' importanti), ma

avvertiamo fin da ora che *non esiste* un metodo sicuro e rapido per riconoscere se una data funzione continua ammette primitiva esprimibile in termini elementari: entro certi limiti, le funzioni *ragionevoli* sono raggruppate in classi, e per ciascuna classe c'è un metodo *ad hoc*, che sarà descritto nel capitolo seguente; ma per il resto bisogna affidarsi all'esperienza, o alla buona sorte...

Capitolo 11

La ricerca delle primitive

Daremo ora alcune regole per riconoscere, tra le funzioni continue piu' importanti, quali sono quelle che ammettono primitiva esprimibile in termini elementari; e, per ciascun caso, vedremo come fare per trovare l'espressione cercata.

Cominciamo con i casi piu' semplici, cioé i cosiddetti *integrali immediati*.

11.1 Gli integrali immediati.

Si tratta di quelle funzioni continue, per le quali é pressoché evidente qual'è l'espressione di una primitiva: ad esempio, la funzione $h(x) = x$ ammette come primitiva la funzione $H(x) = \frac{x^2}{2}$, oppure, la funzione $h(x) = e^x$ ammette come primitiva sé stessa... Elenchiamo di seguito gli esempi in questione.

Esempi 11.1 1. Sia $f(x) = x^n$, con n numero intero (positivo, nullo o negativo): é evidente che, escluso il caso $n = -1$, una primitiva é data da

$$F(x) = \frac{x^{n+1}}{n+1}$$

(definita per ogni x , se $n \geq 0$, o per $x \neq 0$, se $n < 0$). D'altra parte, se $n = -1$ una primitiva é data da $\phi(x) = \log x$ (logaritmo naturale), o anche, per maggiore generalita': $\phi(x) = \log |x|$ (Chiaramente, dovendo essere $x \neq 0$, la formula fondamentale puo' essere adoperata solo in intervalli contenuti in $]0, +\infty[$ o in $] - \infty, 0[$).

Ora, é chiaro come trovare una primitiva per ogni polinomio, e anche per ogni funzione fratta, che sia combinazione lineare di potenze ad esponente negativo: ad esempio, una primitiva di $f(x) = \frac{x-1}{x^2} = \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2}$ é data da: $F(x) = \log|x| + \frac{1}{x}$. E quindi si puo' scrivere

$$\int \frac{x-1}{x^2} dx = \log|x| + \frac{1}{x} + C$$

con C costante arbitraria.

Tra le funzioni fratte, ha un ruolo importante la $\rho(x) = \frac{1}{1+x^2}$: si ha ovviamente

$$\int \frac{1}{1+x^2} dx = \arctg x + C.$$

Anche la funzione $\psi(x) = |x|$ ha una primitiva (essendo continua), e tale primitiva é facile da esprimere:

$$\int |x| dx = \frac{x|x|}{2} + C$$

(basta fare i conti, per $x > 0$, $x < 0$, e $x = 0$...).

2. Sia $f(x) = x^a$, con a costante qualsiasi, $a \neq -1$, e $x > 0$: per quanto visto nel capitolo delle derivate, una primitiva di tale funzione é data da: $F(x) = \frac{x^{a+1}}{a+1}$. Ad esempio,

$$\int (3\sqrt{x} + x\sqrt{x}) dx = 2x\sqrt{x} + \frac{2}{5}x^2\sqrt{x} + C$$

(ovviamente per $x \geq 0$).

3. Per quanto riguarda le funzioni trigonometriche, é ovvio che

$$\int \sin x dx = C - \cos x, \quad \int \cos x dx = \sin x + C,$$

ma é meno evidente quale sia la primitiva di funzioni quali $\sin 3x$, oppure $\cos^2 x$, oppure $\tan x$: per queste e altre situazioni possiamo utilizzare le osservazioni dei prossimi esempi.

4. Supponiamo di conoscere una primitiva, F , della funzione continua f . Come possiamo calcolare una primitiva di $f(kx)$, con k costante (non nulla)?

Se scriviamo $F_k(x) = F(kx)$, é chiaro che $F'_k(x) = kF'(kx) = kf(kx)$. Allora, scrivendo $G(x) = \frac{1}{k}F(kx)$, avremo $G'(x) = f(kx)$, e quindi

$$\int f(kx) dx = \frac{1}{k}F(kx) + C.$$

Ad esempio, si ha

$$\int \cos 4x dx = \frac{1}{4} \sin 4x + C$$

o anche

$$\int \sin \frac{x}{3} dx = -3 \cos \frac{x}{3} + C.$$

Ancora,

$$\int e^{3x} dx = \frac{1}{3} e^{3x} + C.$$

Se poi si vuole una primitiva, ad esempio, di $h(x) = 2^x$, basta scrivere $h(x) = e^{x \log 2}$, e quindi

$$\int 2^x dx = \int e^{x \log 2} dx = \frac{1}{\log 2} e^{x \log 2} + C = (\log_2 e) 2^x + C.$$

Un ragionamento analogo si puo' seguire, per trovare la primitiva di una *traslata*. Ad esempio

$$\int \cos(x - \alpha) dx = \sin(x - \alpha) + C$$

qualunque sia la costante α . E' chiaro allora che

$$\int \frac{1}{(x+3)^4} dx = -\frac{1}{3} \frac{1}{(x+3)^3} + C$$

o che

$$\int (x-12)^{17} dx = \frac{1}{18} (x-12)^{18} + C,$$

o ancora

$$\int \frac{1}{2\sqrt{1+x}} dx = \sqrt{1+x} + C.$$

Attenzione, pero':

$$\int e^{1-x} dx = -e^{1-x} + C$$

perché qui, prima della traslazione, si moltiplica x per -1 .

Queste osservazioni ci servono anche per calcolare la primitiva di funzioni quali $\cos^2 x$, $\sin^2 x$ e simili: infatti, essendo $\cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2}$, e $\sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2}$ abbiamo

$$\int \cos^2 x dx = \frac{x + \frac{\sin 2x}{2}}{2} = \frac{x + \sin x \cos x}{2} + C$$

e

$$\int \sin^2 x dx = \frac{x - \sin x \cos x}{2} + C.$$

Un'altra utile applicazione si ha in integrali del tipo

$$\int \frac{1}{x^2 + a^2} dx$$

ove a é un numero reale positivo. Il denominatore puo' essere scritto come segue: $x^2 + a^2 = a^2(1 + (\frac{x}{a})^2)$, e quindi

$$\int \frac{1}{x^2 + a^2} dx = \int \frac{1}{a^2} \frac{1}{1 + (\frac{x}{a})^2} dx = \frac{1}{a} \arctan \frac{x}{a} + C.$$

5. Supponiamo ora che $f \in C^1$, e che si voglia calcolare

$$\int f'(x)f(x)dx, \quad \text{oppure} \quad \int \frac{f'(x)}{f(x)}dx$$

(il secondo ovviamente per $f \neq 0$).

Osservando che la derivata di $f(x)^2$ é $2f(x)f'(x)$, e che la derivata di $\log(|f(x)|)$ é $\frac{f'(x)}{f(x)}$, (quest'ultima valida per $f \neq 0$), si ha

$$\int f'(x)f(x)dx = \frac{f^2(x)}{2} + C, \quad \int \frac{f'(x)}{f(x)}dx = \log(|f(x)|) + C.$$

Ad esempio, si ha

$$\int \tan x dx = - \int \frac{d \cos x}{\cos x} = - \log |\cos x| + C :$$

abbiamo usato qui il concetto di *differenziale*: $f'(x)dx = df(x)$.

Ancora:

$$\int \sin x \cos x dx = \frac{\sin^2 x}{2} + C,$$

(si poteva anche usare la formula $\sin x \cos x = \frac{\sin 2x}{2}$).

Proponiamo anche i due seguenti esempi:

$$\int \frac{\log x}{x} dx = \log^2 |x| + C, \quad \int \frac{1}{x \log x} dx = \log(|\log |x||) + C$$

il logaritmo essendo in base e .

6. Piu' in generale, se $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ é una funzione continua, di cui si conosce una primitiva G , si ha

$$\int g(f(x))f'(x)dx = G(f(x)) + C$$

grazie alla regola della catena. Ad esempio

$$\int \cos^4 x \sin x dx = -\frac{\cos^5 x}{5} + C$$

oppure

$$\int \cos^3 x \sin^2 x dx = \int \cos x \sin^2 x (1 - \sin^2 x) dx = \frac{\sin^3 x}{3} - \frac{\sin^5 x}{5} + C.$$

Queste situazioni si ritroveranno presto, quando parleremo del metodo di *integrazione per sostituzione*, e delle sue applicazioni.

7. Tra gli integrali immediati trovano posto anche alcune situazioni che non possono essere considerate *facili*, perché occorrono opportune trasformazioni prima di riconoscere un'integrazione elementare. Faremo alcuni esempi, che possono servire più che altro da avvertimento: un esercizio apparentemente difficile può capitare, ma c'è sempre un modo per risolverlo. Il primo esemplare è questo:

$$\int \sqrt{1 + \cos x} dx.$$

Qui, in realtà, il problema si risolve facilmente, se si ricordano le formule di bisezione: $\sqrt{1 + \cos x} = \sqrt{2} \cos \frac{x}{2}$, e allora

$$\int \sqrt{1 + \cos x} dx = \sqrt{2} \int \cos \frac{x}{2} dx = 2\sqrt{2} \sin \frac{x}{2} + C.$$

Ora, si risolve facilmente anche

$$\int \sqrt{1 + \sin x} dx$$

tenendo presente che $\sin x = \cos(\frac{\pi}{2} - x)$:

$$\int \sqrt{1 + \sin x} dx = \int \sqrt{1 + \cos(\frac{\pi}{2} - x)} dx = -2\sqrt{2} \sin(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2}) + C = 2\sqrt{2} \sin(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{4}) + C.$$

Il prossimo esempio è un po' più delicato:

$$\int \frac{1}{\sin x} dx.$$

Qui, occorre un trucco alquanto lambiccato: conviene scrivere il numeratore come $\sin^2 \frac{x}{2} + \cos^2 \frac{x}{2}$, e il denominatore come $2 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2}$; allora ne deriva

$$\int \frac{1}{\sin x} dx = \frac{1}{2} \int (tg \frac{x}{2} + cotg \frac{x}{2}) dx =$$

$$= -\log \left| \cos \frac{x}{2} \right| + \log \left| \sin \frac{x}{2} \right| + C.$$

Un discorso simile a quello precedente si può fare per

$$\int \frac{1}{\cos x} dx :$$

tuttavia, vedremo che questi ultimi due integrali rientrano in una categoria di funzioni che possono essere trattate con un'opportuna trasformazione, e integrate per sostituzione.

11.2 Integrazione per parti

Questo è un metodo molto semplice, che in diverse situazioni permette di risolvere velocemente anche integrali delicati.

Supponiamo di avere due funzioni, f e g , entrambe di classe C^1 , e supponiamo di voler calcolare l'integrale:

$$\int f(x)g'(x)dx.$$

Tenendo presente che la derivata di $f \times g$ è $f' \times g + f \times g'$, si ha facilmente

$$\int f(x)g'(x)dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)dx.$$

Questa formula naturalmente torna utile, se si è in grado di calcolare $\int f'(x)g(x)dx$. In effetti, la regola d'integrazione per parti va intesa così: supponiamo di dover integrare il prodotto di due funzioni di classe C^1 , ϕ e ψ , e supponiamo di conoscere una primitiva di ϕ : sia g tale primitiva; allora possiamo scrivere

$$\int \phi(x)\psi(x)dx = \psi(x)g(x) - \int \psi(x)g'(x)dx$$

(sperando di saper almeno calcolare l'ultimo integrale scritto). Ad esempio, si ha

$$\int x \cos x dx = x \sin x - \int \sin x dx = x \sin x + \cos x + C.$$

Notiamo che qui abbiamo *scelto* di prendere $g'(x) = \cos x$, ossia $g(x) = \sin x$: potevamo anche scegliere $g'(x) = x$, perché sappiamo integrare la funzione x , ma se avessimo operato quest'ultima scelta il secondo integrale da calcolare sarebbe stato più complicato del primo, e quindi avremmo peggiorato la situazione.

Dei due fattori, quello che si sa integrare (e si sceglie di integrare) viene detto *fattore differenziale*, mentre l'altro viene detto *fattore finito*. Dunque, nell'esempio precedente, il fattore finito era x , e il fattore differenziale era $\cos x$.

Proviamo ora questo integrale.

$$\int \log x \, dx :$$

qui non c'è un prodotto! Come si fa?! In casi del genere, un prodotto si può sempre *inventare*! Infatti, si ha ovviamente $\log x = 1 \times \log x$. Poniamo $g(x) = x$, e ovviamente prendiamo $\log x$ come fattore finito. Si ha

$$\int 1 \times \log x \, dx = x \log x - \int x \frac{1}{x} dx = x \log x - x + C.$$

(Derivare per credere!)

Analogamente:

$$\int \arctan x \, dx = x \arctan x - \int \frac{x}{1+x^2} dx.$$

Ora, si ha

$$\int \frac{x}{1+x^2} dx = \frac{1}{2} \int \frac{d(1+x^2)}{1+x^2} = \frac{1}{2} \log(1+x^2) + C$$

(basta riguardare l'esempio 6 del paragrafo precedente, con $g(x) = \frac{1}{x}$ e $f(x) = 1+x^2$). Si ricava allora

$$\int \arctan x \, dx = x \arctan x - \log \sqrt{1+x^2} + C.$$

Lasciamo al lettore il facile compito di integrare funzioni quali:

$$x^k \log x, \quad x^3 e^x, \quad x^2 \sin x$$

con k intero positivo.

L'integrazione per parti, opportunamente svolta, permette di risolvere certi integrali tramite equazioni. Vediamo un esempio.

$$\int \sin x e^x \, dx :$$

qui possiamo scegliere indifferentemente $\sin x$ o e^x come fattore differenziale: la situazione cambia di poco. Scegliamo e^x :

$$\int \sin x e^x \, dx = \sin x e^x - \int \cos x e^x \, dx = \sin x e^x - (\cos x e^x + \int \sin x e^x \, dx).$$

Notiamo che abbiamo applicato due volte l'integrazione per parti: l'operazione é lecita, ma bisogna stare attenti a *non cambiare* il fattore differenziale; noi abbiamo scelto e^x e a quello siamo rimasti fedeli, ma se avessimo deciso, per il secondo integrale, di scegliere $\cos x$ come fattore differenziale, ci saremmo trovati dinanzi a un...buco nell'acqua, del tipo $y = y$).

Proseguendo i calcoli, abbiamo:

$$\int \sin x e^x dx = \sin x e^x - \cos x e^x - \int \sin x e^x dx.$$

E' vero che abbiamo ritrovato, a secondo membro, di nuovo la nostra incognita, cioé $\int \sin x e^x dx$, ma, portandola ora a primo membro, troveremo

$$2 \int \sin x e^x dx = (\sin x - \cos x) e^x$$

e quindi $\int \sin x e^x dx = \frac{1}{2}(\sin x - \cos x) e^x + C$.

Lo stesso integrale poteva essere risolto mediante un procedimento diverso: partendo da

$$\int (e^x + \sin x)(e^x + \cos x) dx = \frac{(e^x + \sin x)^2}{2} + C$$

e da

$$\int (e^x + \sin x)(e^x - \cos x) dx = \frac{(e^x - \cos x)^2}{2} + C$$

(integrali immediati, del tipo $\int f(x)f'(x)dx$), e sommando membro a membro, si ha

$$\int 2e^x(e^x + \sin x)dx = \frac{1}{2} + e^{2x} + (\sin x - \cos x)e^x + C$$

da cui, per sottrazione

$$\int 2e^x \sin x dx = \frac{1}{2} + (\sin x - \cos x)e^x + C$$

Dividendo per 2, e *conglobando* la costante $\frac{1}{4}$ nella C , si ritrova esattamente il risultato precedente.

Lasciamo ancora al lettore il calcolo di

$$\int (\log x)^2 dx, \quad \int x \arctan x dx, \quad \int \sqrt{x} \log x dx.$$

11.3 Regola di Hermite

In questo paragrafo tratteremo sistematicamente gli integrali delle funzioni razionali, cioè dei rapporti di due polinomi.

Data una funzione $f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$, dove P e Q sono due polinomi, supponiamo di voler trovare una primitiva di f , in qualche intervallo che non contenga zeri di $Q(x)$. Per cominciare, possiamo supporre direttamente che il grado di P sia strettamente minore del grado di Q : altrimenti, si può operare una divisione tra polinomi, con un risultato del tipo:

$$P(x) = A(x)Q(x) + R(x)$$

ove $A(x)$ è un polinomio, e R è un polinomio di grado minore rispetto a Q . Chiaramente, avremo allora $f(x) = A(x) + \frac{R(x)}{Q(x)}$, e $A(x)$ non dà problemi ai fini dell'integrale.

Facciamo un esempio: calcoliamo $\int \frac{x^2}{x^2+1}$. Il grado di $P(x) = x^2$ è uguale al grado di Q : operando la divisione, si ottiene facilmente: $x^2 = x^2 + 1 - 1$, da cui $\frac{x^2}{x^2+1} = 1 - \frac{1}{x^2+1}$, e ora l'integrale è semplice: $\int \frac{x^2}{x^2+1} = x - \arctan x + C$.

Dunque, supponiamo che il grado di P sia minore del grado di Q , e vediamo i vari metodi che, a seconda delle situazioni, possono rendere agevole il calcolo della primitiva.

I casi più semplici sono quelli in cui il denominatore è di grado 1 (e il numeratore è una costante: non c'è altra possibilità). Chiaramente, si ha

$$\int \frac{k}{x+b} dx = k \log |x+b| + C$$

come già si è visto tra gli integrali immediati; e questo in pratica risolve tutti i casi in cui $Q(x)$ è di grado 1; ma è anche assai utile, quando $Q(x)$ ha grado maggiore di 1, e presenta solo radici reali, e questa è la seconda situazione che ora tratteremo:

$$\int \frac{P(x)}{(x-x_1)(x-x_2)\dots(x-x_n)} dx,$$

dove $P(x)$ è un polinomio di grado minore di n . Distinguiamo due casi: le radici di $Q(x)$ sono tutte semplici, oppure ve ne siano di multiple.

Se le radici di Q sono tutte semplici, si può scrivere

$$\frac{P(x)}{(x-x_1)(x-x_2)\dots(x-x_n)} = \frac{A_1}{x-x_1} + \frac{A_2}{x-x_2} + \dots + \frac{A_n}{x-x_n},$$

dove le costanti A_j si possono ricavare per il principio d'identita' dei polinomi. Quindi il calcolo dell'integrale si riduce a quello di piu' funzioni razionali del tipo $\frac{k}{x-x_j}$, di cui abbiamo gia' discusso. Facciamo un esempio.

$$\begin{aligned} \int \frac{2x^2 - 3x + 2}{x^3 + 3x^2 + 2x} dx &= \int \frac{2x^2 - 3x + 2}{x(x-1)(x-2)} dx = \\ &= \int \left(\frac{1}{x} + \frac{2}{x-2} - \frac{1}{x-1} \right) dx = \log |x| + 2 \log |x-2| - \log |x-1| + C. \end{aligned}$$

Nel caso alcune radici di $Q(x)$ siano multiple (ma comunque tutte reali), si puo' ancora decomporre $\frac{P(x)}{Q(x)}$ in una somma finita di funzioni facilmente integrabili; per semplicita' di esposizione, diamo a $Q(x)$ un'espressione effettiva: $Q(x) = (x-2)^2(x-3)(x-1)^3$. Allora si puo' sempre avere

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{A_1}{x-2} + \frac{A_2}{(x-2)^2} + \frac{A_3}{x-3} + \frac{A_4}{x-1} + \frac{A_5}{(x-1)^2} + \frac{A_6}{(x-1)^3}$$

ove le costanti $A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6$ sono da determinarsi attraverso il principio d'identita' dei polinomi.

Chiaramente, ogni integrale del tipo $\int \frac{A_j}{(x-x_j)^k} dx$ é elementare.

Dunque, se le radici di $Q(x)$ sono tutte reali (e note), abbiamo un metodo per trovare una primitiva di $\frac{P(x)}{Q(x)}$. Come regolarsi, se esistono radici complesse?

Intanto, ricordiamo che, se esiste una radice complessa z , anche il coniugato \bar{z} é radice (perché i coefficienti del polinomio sono reali), e quindi il prodotto $(x-z)(x-\bar{z})$ é un divisore di $Q(x)$; ma é noto che il prodotto $(x-z)(x-\bar{z})$ é un polinomio reale di II grado irriducibile, del tipo $x^2 + px + q$.

Allora, é chiaro che sara' importante calcolare integrali del tipo

$$\int \frac{1}{x^2 + px + q} dx$$

dove il denominatore non ha radici reali. Ancora, l'algebra ci viene in aiuto: ogni espressione irriducibile del tipo $x^2 + px + q$ si puo' scrivere nella forma

$$x^2 + px + q = (x + \alpha)^2 + \beta^2$$

dove α e β sono opportune costanti reali, con $\beta \neq 0$. (Per trovare α e β , basta imporre l'identita' dei polinomi $x^2 + px + q$ e $x^2 + 2\alpha x + \alpha^2 + \beta^2$, e quindi ricavare $\alpha = \frac{p}{2}$, $\beta^2 =$

$q - \frac{p^2}{4} > 0$ per l'irriducibilit ). Ora, rimane da calcolare

$$\int \frac{1}{(x - \alpha)^2 + \beta^2} dx = \frac{1}{\beta^2} \int \frac{1}{(\frac{x}{\beta} - \frac{\alpha}{\beta})^2 + 1} dx = \frac{1}{\beta} \arctan\left(\frac{x - \alpha}{\beta}\right) + C.$$

Dunque, possiamo considerare *archiviato* il caso in cui $Q(x)$ sia di grado 2 (irriducibile), e $P(x)$ sia costante.

Come fare, se $Q(x)$   di secondo grado, irriducibile, e $P(x)$   di I grado? Lo vediamo con un esempio.

$$\begin{aligned} \int \frac{x + 3}{x^2 + x + 2} dx &= \frac{1}{2} \int \frac{2x + 6}{x^2 + x + 2} = \frac{1}{2} \int \frac{2x + 1 + 5}{x^2 + x + 2} = \\ &= \frac{1}{2} (\log(x^2 + x + 2) + \int \frac{5}{x^2 + x + 2} dx) \end{aligned}$$

e chiaramente l'ultimo integrale si risolve con un'arcotangente.

Dunque, se $Q(x)$   di secondo grado irriducibile, e $P(x)$   di I grado,   sempre possibile, con operazioni lineari, trasformare il numeratore in una costante piu' la derivata del denominatore.

Dobbiamo ancora prendere in esame il caso piu' generale, in cui $Q(x)$ sia di grado superiore a 2.

Intanto, ricordiamo che, in base al teorema fondamentale dell'Algebra, il polinomio $Q(x)$ puo' scriversi come il prodotto di termini del tipo $(x - x_j)^{k_j}$ (corrispondenti alle radici reali x_j , con la loro molteplicit  k_j), e di termini di secondo grado irriducibili, del tipo $(x^2 + p_i x + q_i)$, ciascuno eventualmente ripetuto tante volte, a seconda della molteplicit .

Ora, se le radici complesse sono semplici, ad esempio se si ha

$$Q(x) = (x - 1)^2(x^2 + x + 1)(x^2 + 4),$$

si puo' sempre scrivere

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{A_1}{x - 1} + \frac{A_2}{(x - 1)^2} + \frac{B_1 x + C_1}{x^2 + x + 1} + \frac{B_2 x + C_2}{x^2 + 4}$$

ric conducendo l'integrazione ai casi precedenti.

Se invece alcune radici complesse sono multiple, occorre una formula, detta *Regola di Hermite*, che permette di scomporre $\frac{P(x)}{Q(x)}$ in modo efficace.

Teorema 11.2 (Regola di Hermite) *Supponiamo che $P(x)$ e $Q(x)$ siano polinomi a coefficienti reali, e che il grado di P sia minore di quello di Q . Supponiamo che Q ammetta la seguente scomposizione, in base alle sue radici:*

$$Q(x) = (x - x_1)^{k_1} \dots (x - x_n)^{k_n} (x^2 + p_1x + q_1)^{h_1} \dots (x^2 + p_mx + q_m)^{h_m}$$

dove k_i denota la molteplicità della radice reale x_i , mentre h_j denota la molteplicità della radice complessa z_j . Allora si può scrivere

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \sum_{i=1}^n \left(\frac{A_i}{(x - x_i)} + \sum_{j=1}^m \frac{B_jx + C_j}{(x^2 + p_jx + q_j)} + \right. \\ \left. + \frac{d}{dx} \left(\frac{T(x)}{(x - x_1)^{k_1-1} \dots (x - x_n)^{k_n-1} (x^2 + p_1x + q_1)^{h_1-1} \dots (x^2 + p_mx + q_m)^{h_m-1}} \right) \right)$$

dove i coefficienti A_i, B_j, C_j sono da determinarsi con il principio d'identità dei polinomi, e $T(x)$ è un polinomio di grado inferiore di 1 rispetto a quello del denominatore, ovviamente anche T da determinarsi con il principio di identità dei polinomi.

Certo, la formula è assai complicata, e applicarla vuol dire spesso fare una gran mole di calcoli, ma negli esercizi di solito non accade di aver a che fare con espressioni troppo laboriose. Qualora occorresse in qualche problema applicativo di dover risolvere un integrale con questa formula, e cioè richiedesse molta fatica per esempio per determinare il polinomio $T(x)$, esistono ormai pacchetti software di calcolo simbolico molto raffinati, che in pochi secondi danno la soluzione cercata: l'inconveniente è che di solito l'espressione fornita dal computer è assai più complessa del necessario, e quindi c'è un certo rischio di perdere di vista qualche proprietà importante della soluzione.

Vediamo qui, a titolo di esempio, un problema non troppo difficile:

$$\int \frac{1}{(x^2 + 1)^3} dx.$$

Secondo la formula, si deve avere

$$\frac{1}{(x^2 + 1)^3} = \frac{ax + b}{x^2 + 1} + \frac{d}{dx} \left(\frac{cx^3 + dx^2 + ex + f}{(x^2 + 1)^2} \right),$$

dove i parametri a, b, c, d, e, f sono da determinarsi, con il principio di identità dei polinomi.

Una volta trovati tali coefficienti, l'integrazione sarà facile: il primo addendo è di un tipo

già' studiato, mentre il secondo é già' espresso come la derivata di una certa funzione razionale R , per cui una sua primitiva non é altro che R .

Per trovare i parametri, svolgiamo la derivata:

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{cx^3 + dx^2 + ex + f}{(x^2 + 1)^2}\right) = -(cx^4 - 3cx^2 + 2dx^3 - 2dx + 3ex^2 - e + 4xf)/(x^2 + 1)^3$$

e sommiamo:

$$\frac{1}{(x^2 + 1)^3} = \frac{ax^5 + 2ax^3 + ax + bx^4 + 2bx^2 + b - cx^4 + 3cx^2 - 2dx^3 + 2dx - 3ex^2 + e - 4xf}{(x^2 + 1)^3}.$$

Uguagliando i numeratori, e applicando il principio d'identita' si trova

$$a = 0, b = c, 2d = 2a = 0, 5b = 3e, f = 0, b + e = 1$$

cioé $a = d = f = 0, b = c = \frac{3}{8}, e = \frac{5}{8}$. Dunque,

$$\frac{1}{(x^2 + 1)^3} = \frac{3}{8} \frac{1}{x^2 + 1} + \frac{d}{dx} \frac{3x^3 + 5x}{8(x^2 + 1)^2}$$

e quindi

$$\int \frac{1}{(x^2 + 1)^3} dx = \frac{3}{8} \arctan x + \frac{3x^3 + 5x}{8(x^2 + 1)^2} + C.$$

Prima di concludere questo paragrafo, puntualizziamo che i metodi qui forniti sono tutti contenuti nella Regola di Hermite, ma naturalmente quest'ultima va adoperata solo quando non se ne puo' fare a meno, cioé quando il denominatore $Q(x)$ presenta delle radici complesse multiple. In tutti gli altri casi, quella formula si puo' evitare.

11.4 Integrazione per Sostituzione

La tecnica che qui presenteremo permette di trovare primitive di funzioni composte, (in certi casi, ovviamente) ma anche di trovare primitive di funzioni irrazionali, specialmente quelle coinvolgenti radicali.

Il punto di partenza é molto semplice, e già' lo abbiamo incontrato: se si deve trovare la primitiva di una funzione del tipo $f(g(x))g'(x)$, basta conoscere una primitiva F per f , e si avra'

$$\int f(g(x))g'(x) dx = F(g(x)) + C.$$

Il punto é che non sempre il termine $g'(x)$ é presente: un conto é trovare una primitiva di $\frac{2x}{(x^2+1)^3}$ (qui, $g(x) = x^2 + 1$), e tutt'altra cosa (come abbiamo visto poc'anzi) é trovare una primitiva di $\frac{1}{(x^2+1)^3}$.

In casi del genere, conviene fare una *posizione* del tipo: $x = \phi(t)$, introducendo in pratica una nuova variabile (t), e interpretando la x come una funzione (opportuna) di t . Facendo cosi', l'espressione dx diviene $\phi'(t)dt$, essendo un differenziale. Si ha in sostanza questo risultato:

$$\int_{\phi(a)}^{\phi(b)} f(x)dx = \int_a^b f(\phi(t))\phi'(t) dt.$$

Infatti, se F denota una primitiva di f , il primo integrale é dato da $F(\phi(b)) - F(\phi(a))$, e la seconda integranda é la derivata di $G(t) := F(\phi(t))$, per cui la formula fondamentale assicura che il secondo integrale definito coincide con il primo.

All'atto pratico, si procede come nell'esempio seguente.

$$\int \cos \sqrt{x} \, dx = \int 2t \cos t \, dt$$

avendo posto $x = t^2$, e ovviamente $dx = 2t dt$: il risultato finale discendera' dall'integrazione (per parti) di $2t \cos t$, e dalla ri-sostituzione $t = \sqrt{x}$:

$$\int \cos \sqrt{x} \, dx = 2 \cos(\sqrt{x}) + 2\sqrt{x} \sin(\sqrt{x}) + C.$$

Di solito, il metodo di sostituzione funziona abbastanza bene se l'integranda é funzione diretta di \sqrt{x} o di e^x , e varianti. Ad esempio:

$$\int \frac{1 + \sqrt{x}}{1 - \sqrt{x}} \, dx = 2 \int \frac{1 + y}{1 - y} \, y dy$$

avendo operato la sostituzione $x = y^2$. L'integrale in y é di tipo razionale:

$$2 \int \frac{1 + y}{1 - y} \, y dy = -y^2 - 4y - 4 \log(|y - 1|) + C$$

e poi, sostituendo di nuovo $y = \sqrt{x}$, si perviene alla conclusione.

Si possono anche *combinare* radici di indice diverso (ma razionale):

$$\int \frac{x^{1/4}}{x^{1/3} - 1} \, dx = 12 \int \frac{t^3}{t^4 - 1} \, t^{11} dt$$

avendo posto $x = t^{12}$. Operando la divisione tra polinomi, si ottiene

$$\int \frac{t^3}{t^4 - 1} t^{11} dt = \int (t^{10} + t^6 + t^2) dt + \int \frac{t^2}{t^4 - 1} dt.$$

Il primo integrale é di facile risoluzione, mentre il secondo richiede le tecniche del paragrafo precedente: tenendo presente che $t^4 - 1 = (t^2 + 1)(t + 1)(t - 1)$ si ricava

$$\int \frac{t^2}{t^4 - 1} dt = (1/4) \log(|t - 1|) - (1/4) \log(|t + 1|) + (1/2) \arctan t + C.$$

Il resto é normale amministrazione.

Proviamo ancora un esempio.

$$\int \sqrt{1 + e^x} dx = \int \frac{\sqrt{1 + t}}{t} dt$$

avendo sostituito $e^x = t$. Poniamo ora: $1 + t = u^2$, ossia $t = u^2 - 1$, cosi' avremo

$$\int \frac{\sqrt{1 + t}}{t} dt = \int \frac{2u^2}{u^2 - 1} du$$

e di nuovo siamo ricondotti a una facile funzione razionale.

$$\int \frac{2u^2}{u^2 - 1} du = 2u + \log(u - 1) - \log(1 + u) + C$$

dove poi va sostituito $u = \sqrt{1 + t} = \sqrt{1 + e^x}$.

A volte, occorre trovare primitive di funzioni razionali in $\sin x$ e $\cos x$, ad esempio:

$$\int \frac{1 + \cos x}{2 - \sin x} dx, \quad \text{o} \quad \int \frac{3 + \cos^2 x}{2 - \sin x} dx.$$

In situazioni simili, possono essere d'aiuto le *formule parametriche*:

$$\cos x = \frac{1 - t^2}{1 + t^2}, \quad \sin x = \frac{2t}{1 + t^2}$$

ove $t = \tan \frac{x}{2}$.

Dunque, la sostituzione $x = 2 \arctan t$ di solito riconduce gli integrali detti a quelli di funzioni razionali, per le quali si possono applicare le tecniche studiate in precedenza. Ad esempio,

$$\int \frac{1 + \cos x}{2 - \sin x} dx = \int \frac{1 + t^2 + 1 - t^2}{1 + t^2} \frac{1 + t^2}{2 + 2t^2 - 2t} \frac{2dt}{1 + t^2} =$$

$$\begin{aligned}
&= \int \frac{2dt}{(1+t^2-t)(1+t^2)} = \int \frac{2t}{t^2+1} dt - \int \frac{2t-2}{t^2-t+1} dt = \\
&= \log(t^2+1) - \int \frac{2t-1}{t^2-t+1} dt + \int \frac{1}{t^2-t+1} dt = \\
&= \log(t^2+1) - \log(t^2-t+1) + \int \frac{1}{(t-\frac{1}{2})^2 + \frac{3}{4}} dt = \\
&= \log(t^2+1) - \log(t^2-t+1) + \frac{2}{\sqrt{3}} \arctan \frac{2t-1}{\sqrt{3}} + C
\end{aligned}$$

e la sostituzione $t = \tan \frac{x}{2}$ fornisce l'integrale cercato.

Affrontiamo anche l'altro esempio proposto:

$$\int \frac{3 + \cos^2 x}{2 - \sin x} dx.$$

Con la sostituzione precedente, si perviene a

$$\int \frac{3 + \cos^2 x}{2 - \sin x} dx = 4 \int \frac{t^4 + t^2 + 1}{(1+t^2)^2(t^2-t+1)} dt :$$

l'espressione sembra scoraggiante, tuttavia notiamo che

$$\frac{t^4 + t^2 + 1}{t^2 - t + 1} = t^2 + t + 1$$

e quindi si arriva facilmente a

$$4 \int \frac{t^4 + t^2 + 1}{(1+t^2)^2(t^2-t+1)} dt = 4 \arctan t - \frac{2}{t^2+1} + C.$$

Tenendo presente che $t = \tan \frac{x}{2}$, si ha $\frac{2}{t^2+1} = 2 \cos^2 \frac{x}{2} = 1 + \cos x$, si ottiene

$$\int \frac{3 + \cos^2 x}{2 - \sin x} dx = 2x - \cos x + C.$$

Il risultato é cosi' semplice che nasce un sospetto: non si poteva risolvere molto piu' rapidamente, per altra via? Infatti é cosi', e invitiamo il lettore a scoprire da solo il *trucco*.

Un discorso a parte va fatto, inoltre, per funzioni irrazionali del tipo

$$\sqrt{1-x^2}, \quad \sqrt{1+x^2}, \quad \sqrt{x^2-1}$$

e le loro reciproche. Cominciamo con

$$\int \sqrt{1-x^2} \, dx = \int \cos^2 t \, dt$$

avendo posto $x = \sin t$ (e supponendo che x vari tra 0 e $\pi/2$). Ricordando che

$$\int \cos^2 t \, dt = \frac{t + \sin t \cos t}{2} + C$$

troveremo

$$\int \sqrt{1-x^2} \, dx = \frac{x\sqrt{1-x^2} + \arcsin x}{2} + C.$$

Per quanto riguarda l'integrale di $\sqrt{1+x^2}$, la sostituzione piu' opportuna é $x = \sinh t$, poich  $\sqrt{1+\sinh^2 t} = \cosh t$, e il risultato finale  

$$\int \sqrt{1+x^2} \, dx = (1/2)x\sqrt{1+x^2} + (1/2)\operatorname{arcsinh}(x) + C$$

essendo $\operatorname{arcsinh}(x) = \log(x + \sqrt{x^2+1})$.

Invece, per integrare $\sqrt{x^2-1}$, conviene porre $x = \cosh t$: si avr 

$$\int \sqrt{x^2-1} \, dx = \frac{x\sqrt{x^2-1} - \operatorname{arccosh}(x)}{2} + C,$$

essendo $\operatorname{arccosh}(x) = (1/2)\log(x + \sqrt{x^2-1})$.

Quanto alle funzioni reciproche, il problema   piu' semplice. Ad esempio

$$\int \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} \, dx = \int \frac{1}{\cosh t} \cosh t \, dt = t + C = \operatorname{arcsinh}(x) + C$$

e

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2-1}} \, dx = \operatorname{arccosh}(x) + C$$

mentre chiaramente

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \, dx = \arcsin x + C.$$

Gli ultimi integrali trattati possono essere utilizzati per trovare una primitiva di qualunque funzione del tipo $\sqrt{ax^2+bx+c}$, con $a \neq 0$.

Infatti, se l'equazione $ax^2+bx+c=0$ ha due radici reali distinte, x_1 e x_2 , si puo' sempre scrivere

$$ax^2+bx+c = a(x-\mu_1)^2 - a\mu_2^2$$

ove $\mu_1 = \frac{x_1+x_2}{2}$ e $\mu_2 = \frac{\sqrt{x_1^2+x_2^2}}{2}$. Pertanto, se $a > 0$, si ottiene

$$\sqrt{ax^2 + bx + c} = \mu_2 \sqrt{\left(\frac{\sqrt{a}x}{\mu_2} - \frac{\sqrt{a}\mu_1}{\mu_2}\right)^2 - 1}.$$

Dunque, una sostituzione lineare ($t = \frac{\sqrt{a}x}{\mu_2} - \frac{\sqrt{a}\mu_1}{\mu_2}$) riconduce l'integrale a quello di $\sqrt{t^2 - 1}$.

Invece, nel caso $a < 0$, si può porre

$$ax^2 + bx + c = -(-ax^2 - bx - c) = -(|a|x^2 - bx - c)$$

(con le stesse radici), e ottenere come prima

$$ax^2 + bx + c = |a|\mu_2^2 - |a|(x - \mu_1)^2$$

da cui

$$\sqrt{ax^2 + bx + c} = \mu_2 \sqrt{\left(1 - \left(\frac{\sqrt{|a|x}}{\mu_2} - \frac{\sqrt{|a|\mu_1}}{\mu_2}\right)^2\right)}.$$

Ovviamente, ora l'integrale è ricondotto a quello di $\sqrt{1 - x^2}$.

Passiamo ora al caso in cui le radici siano complesse: in questa situazione, il trinomio $ax^2 + bx + c$ è sempre positivo (se $a > 0$), oppure sempre negativo (se $a < 0$). Siccome però dobbiamo considerare la radice quadrata, il caso $a < 0$ non si può verificare, e quindi il trinomio può scriversi nella forma:

$$ax^2 + bx + c = (\sqrt{a}x + \beta_1)^2 + \beta_2$$

ove $\beta_1 = \frac{b}{2\sqrt{a}}$ e $\beta_2 = c - \frac{b^2}{4a}$: osserviamo che $\beta_2 > 0$ essendo $b^2 - 4ac < 0$ per ipotesi.

Dunque, anche in questo ultimo caso, una trasformazione lineare riconduce l'integrale di $\sqrt{ax^2 + bx + c}$ a quello di $\sqrt{1 + t^2}$.

In maniera simile si possono calcolare gli integrali delle *reciproche* di queste funzioni.

Diamo alcuni esempi.

$$(1) \int \sqrt{x^2 - 4x + 3} dx = \int \sqrt{(x-2)^2 - 1} dx = \frac{(x-2)\sqrt{(x-2)^2 - 1} - \operatorname{arccosh}(x-2)}{2} + C.$$

$$(2) \int \frac{1}{\sqrt{x^2 - 2x + 3}} dx = \int \frac{1}{\sqrt{(x-1)^2 + 2}} dx = \operatorname{arcsinh}\left(\frac{x-1}{\sqrt{2}}\right) + C.$$

$$\begin{aligned}
(3) \quad \int \frac{1}{\sqrt{x-x^2}} dx &= \int \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{4} - (x - \frac{1}{2})^2}} dx = \int \frac{2 dx}{\sqrt{1 - (2x-1)^2}} = \\
&= \int \frac{d(2x-1)}{\sqrt{1 - (2x-1)^2}} = \arcsin(2x-1) + C.
\end{aligned}$$

Lo stesso integrale si poteva svolgere nel modo seguente:

$$\int \frac{1}{\sqrt{x-x^2}} dx = \int \frac{1}{\sqrt{x}\sqrt{1-x}} dx = \int \frac{2 \sin t \cos t dt}{\sin t \cos t}$$

avendo posto $x = \sin^2 t$. Ne deriva subito

$$\int \frac{1}{\sqrt{x-x^2}} dx = 2t + C = 2 \arcsin \sqrt{x} + C.$$

Questo risultato non é in contrasto con quello precedente: dal confronto dei due si deduce che, nell'ambito del campo di esistenza di entrambe le funzioni, la differenza tra $2 \arcsin \sqrt{x}$ e $\arcsin(2x-1)$ é una costante: si ha infatti

$$\arcsin(2x-1) + \frac{\pi}{2} = 2 \arcsin \sqrt{x}.$$

Capitolo 12

Etcetera...

A questo punto, possiamo anche considerare esaurita la panoramica dei vari metodi d'integrazione, e quindi archiviare l'argomento, tuttavia riteniamo utile per lo studente fornire alcuni ulteriori ragguagli, un po' per illustrare importanti applicazioni del concetto d'integrale, e un po' anche per evidenziare dei limiti che i metodi suddetti presentano.

12.1 Integrando funzioni discontinue

Come sappiamo, la formula fondamentale si puo' applicare quando la funzione integranda é continua. A volte, pero', bisogna calcolare integrali di funzioni discontinue, e quindi occorre attenzione nell'adoperare gli strumenti che conosciamo. Ad esempio, se una funzione f ammette un numero finito di discontinuita', tutte di I specie, basta suddividere l'intervallo di definizione in un numero finito di sottointervalli, in ciascuno dei quali f é continua (o ha una discontinuita' eliminabile), e applicare l'additivita' dell'integrale. Ma a volte una singolarita' del genere puo' *sfuggire*. Facciamo un esempio. Consideriamo il seguente integrale indefinito:

$$\int \arctan \frac{x}{x-1} dx.$$

Procedendo per parti, otteniamo

$$\int \arctan \frac{x}{x-1} dx = x \arctan \frac{x}{x-1} + \int \frac{x}{2x^2 - 2x + 1} dx.$$

Ora, si ha

$$\begin{aligned}\int \frac{x}{2x^2 - 2x + 1} dx &= \int \frac{2x}{1 + (2x - 1)^2} dx = \int \frac{2x - 1}{(2x - 1)^2 + 1} dx + \int \frac{1}{(2x - 1)^2 + 1} dx = \\ &= \frac{1}{4} \log(1 + (2x - 1)^2) + \frac{1}{2} \arctan(2x - 1) + C,\end{aligned}$$

per cui

$$\int \arctan \frac{x}{x-1} dx = x \arctan \frac{x}{x-1} + \frac{1}{4} \log(1 + (2x - 1)^2) + \frac{1}{2} \arctan(2x - 1) + C.$$

Indichiamo con F la primitiva che corrisponde a $C = 0$, e proviamo a calcolarci l'integrale definito $\int_0^2 \arctan \frac{x}{x-1} dx$: applicando *senza riflettere* la formula fondamentale, troviamo:

$$\begin{aligned}\int_0^2 \arctan \frac{x}{x-1} dx &= F(2) - F(0) = \\ &= 2 \arctan 2 + \frac{1}{4} \log 10 + \frac{1}{2} \arctan 3 - \frac{1}{4} \log 2 + \frac{\pi}{8} \approx 3.633878882.\end{aligned}$$

Ora, pero', osserviamo che la funzione integranda é discontinua in 1, essendo

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \arctan \frac{x}{x-1} = \frac{\pi}{2}, \quad \lim_{x \rightarrow 1^-} \arctan \frac{x}{x-1} = -\frac{\pi}{2}.$$

Se spezziamo l'integrale in due addendi, uno relativo all'intervallo $[0, 1]$, e l'altro all'intervallo $[1, 2]$, si ottiene:

$$\int_0^1 \arctan \frac{x}{x-1} dx = -\frac{\pi}{2} + \frac{1}{4} \log 2 + \frac{\pi}{8} - \frac{1}{4} \log 2 + \frac{\pi}{8} = -\frac{\pi}{4}$$

(avendo valutato il limite da sinistra, in 1, della primitiva trovata prima), e

$$\begin{aligned}\int_1^2 \arctan \frac{x}{x-1} dx &= 2 \arctan 2 + \frac{1}{4} \log 10 + \frac{1}{2} \arctan 3 - \frac{\pi}{2} - \frac{1}{4} \log 2 - \frac{\pi}{8} = \\ &= 2 \arctan 2 + \frac{1}{4} \log 5 + \frac{1}{2} \arctan 3 - \frac{5}{8} \pi\end{aligned}$$

(stavolta, valutando il limite da destra, in 1). Sommando i due risultati, si ricava

$$\int_0^2 \arctan \frac{x}{x-1} dx = 2 \arctan 2 + \frac{1}{4} \log 5 + \frac{1}{2} \arctan 3 - \frac{7}{8} \pi \approx .492286228.$$

E' questo il valore esatto dell'integrale cercato: come si vede, esso é ben diverso da quello ottenuto prima, calcolando semplicemente $F(2) - F(0)$.

L'errore é dovuto al fatto che la funzione F non é continua in 1: per evitare tutto il guaio, sarebbe stato sufficiente, nell'integrazione per parti, iniziare scegliendo $x-1$ al posto di x , come primitiva del fattore differenziale 1. Un altro modo per evitare questi problemi (e forse anche fare meno calcoli) sarebbe stato integrare per sostituzione, ponendo $t = \frac{x}{x-1}$: ma queste cose si imparano *col senno di poi*...

Un'altra osservazione da fare, a proposito delle funzioni discontinue, riguarda il caso delle discontinuità di II specie: in fondo, se f ha una discontinuità di I specie, ad esempio nell'estremo a , basta sostituire $f(a)$ con il valore $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x)$, perché la nuova funzione risulti continua, senza che l'integrale venga modificato. Quando però f ha discontinuità di II specie, questo trucco non si può applicare. Una primitiva si può sempre trovare, ma solo in intervalli chiusi che non contengano il punto di discontinuità. Ad esempio, la funzione $g(x) = \sin(\log x)$ é integrabile in $[0, 1]$, ma non può essere definita in 0 in modo da ottenere una funzione continua. In questi casi, conviene comunque trovare una primitiva con i metodi d'integrazione conosciuti, e calcolare l'integrale tra 0 e 1 come segue:

$$\int_0^1 \sin(\log x) \, dx = \lim_{t \rightarrow 0^+} \int_t^1 \sin(\log x) \, dx.$$

Infatti, la continuità della funzione integrale garantisce la validità di questa relazione. Ora, integrando per parti, si ha:

$$\int \sin(\log x) \, dx = x \sin(\log x) - \int \cos(\log x) \, dx.$$

Integrando di nuovo per parti, si perviene a

$$\int \sin(\log x) \, dx = x \sin(\log x) - x \cos(\log x) - \int \sin(\log x) \, dx$$

da cui

$$\int \sin(\log x) \, dx = \frac{x \sin(\log x) - x \cos(\log x)}{2} + C.$$

Infine

$$\int_0^1 \sin(\log x) \, dx = -\frac{1}{2} - \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{2} (\sin(\log x) - \cos(\log x)) = -\frac{1}{2}.$$

(Non si tratta di funzioni *lambiccate*, studiate apposta: esse costituiscono la base principale per le soluzioni di importanti equazioni differenziali).

12.2 Volumi e lunghezze

Veniamo ora ad alcune applicazioni importanti degli integrali: con tali strumenti si possono calcolare non solo aree, ma anche volumi, lunghezze di curve, e altre quantità geometriche, fisiche, perfino probabilistiche ed economiche. Noi qui daremo solo un paio di formule, con qualche esempio.

Superficie di rotazione.

Supponiamo che $y = f(x)$ sia il grafico di una funzione $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, non negativa e continua. Facendo ruotare tale grafico attorno all'asse x , si ottiene un solido di rotazione, che chiameremo S . Il volume di tale solido è dato da:

$$V(S) = \pi \int_a^b f(x)^2 dx.$$

Ad esempio, se $f(x) = \sqrt{R^2 - x^2}$, per $x \in [-R, R]$, la curva in questione è un semicerchio, e il solido S è la sfera, di centro l'origine e raggio R . La formula su scritta fornisce

$$V(S) = \pi \int_{-R}^R (R^2 - x^2) dx = \pi(2R^3 - 2\frac{R^3}{3}) = \frac{4}{3}\pi R^3$$

come sappiamo dalle elementari.

Se poi $f(x) = mx$, con $x \in [0, h]$, il solido di rotazione è il cono circolare retto C , di altezza h , e raggio di base mh . Il suo volume è dato da:

$$V(C) = \pi \int_0^h m^2 x^2 dx = \frac{1}{3}\pi m^2 h^3 = \frac{1}{3}hA(B)$$

dove $A(B)$ denota l'area di base del cono.

Ancora, supponiamo di voler trovare il volume di un *paraboloide*: conviene scegliere $f(x) = \sqrt{x}$, con $x \in [0, h]$. Il volume è dato da

$$V = \pi \int_0^h x dx = \frac{1}{2}\pi h^2 = \frac{1}{2}hA(B)$$

dove $A(B)$ denota l'area di base, ma stavolta la base ha raggio \sqrt{h} .

Lunghezza di curve

Supponiamo come prima che $y = f(x)$ sia la curva grafico di una funzione $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, e supponiamo che $f \in C^1([a, b])$. La lunghezza della curva è data da:

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + f'(x)^2} dx.$$

Ad esempio, riprendiamo in esame la semicirconferenza precedente: si ha

$$L = \int_{-R}^R \sqrt{1 + \frac{x^2}{R^2 - x^2}} dx = \int_{-R}^R \frac{R}{\sqrt{R^2 - x^2}} dx = 2 \int_0^R \frac{R}{\sqrt{R^2 - x^2}} dx,$$

per motivi di simmetria. Ora, una semplice sostituzione, $x = Rt$, porta a

$$L = 2R \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1 - t^2}} dt = 2R \arcsin 1 = \pi R,$$

come sappiamo. Lasciamo al lettore il calcolo della lunghezza del segmento di retta $y = mx$, con $x \in [0, h]$, e trattiamo invece la lunghezza dell'arco di parabola.

Sia $y = x^2$ la parabola in questione, con $x \in [0, a]$: avremo

$$L = \int_0^a \sqrt{1 + 4x^2} dx = \int_0^{2a} \sqrt{1 + t^2} \frac{dt}{2}$$

avendo sostituito $x = \frac{t}{2}$. Ricordando che

$$\int \sqrt{1 + x^2} dx = (1/2)x\sqrt{1 + x^2} + (1/2)\operatorname{arcsinh}(x) + C,$$

si ha

$$L = \frac{a}{2}\sqrt{1 + 4a^2} + \frac{1}{2}\operatorname{arcsinh}(2a).$$

Non consigliamo, invece, di calcolare la lunghezza dell'**ellisse**: l'equazione dell'ellisse, che ha semiassi a e b , é

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

da cui

$$y = b\sqrt{1 - \frac{c^2 x^2}{a^2}} dx$$

descrive la semiellisse con $y > 0$, ove $c = \frac{b}{a}$. L'integrale da svolgere sarebbe

$$\int \sqrt{1 + \frac{c^4 x^2}{1 - c^2 x^2}} dx$$

e questo non puo' essere trattato con metodi elementari, a meno che non sia $c = 1$, ossia se l'ellisse diventa un cerchio.

12.3 Integrali non elementari

Il problema della lunghezza dell'ellisse apre il discorso sugli integrali *impossibili*, cioè quelli che non possono essere calcolati con formule finite. La funzione integranda é continua, almeno in un certo intervallo, ma la sua funzione integrale non é calcolabile in termini elementari: questa funzione, insieme con altre che a questa si possono ricondurre, viene detta *funzione ellittica*.

Ma esistono molti altri integrali che presentano questa difficoltá'. Ne citiamo alcuni.

$$\int \sqrt{1 + \cos^2 x} \, dx,$$

(lunghezza della senoide: anche questa é di tipo ellittico).

$$\int e^{-x^2} \, dx$$

(funzione *gaussiana*: questa é addirittura fondamentale in probabilitá', e la sua funzione integrale é denotata con il simbolo *erf*).

$$\int \frac{\sin x}{x} \, dx$$

(la funzione integrale é denotata con *sinc*: analoga é quella con il *coseno* al posto del seno).

$$\int \frac{\log x}{x+1} dx, \quad \int \frac{e^x}{x} \, dx, \quad \int \sin x^2 \, dx$$

sono altri esempi di integrali che richiedono strumenti non elementari.

A volte, pero', l'integrale *sembra* impossibile, e invece si puo' risolvere. Ad esempio, si consideri

$$\int \left(\frac{e^x}{x} - \frac{e^x}{x^2} \right) dx.$$

Né il primo addendo, né il secondo, sono integrande trattabili. Tuttavia, basta integrare per parti il primo addendo, e si scopre che

$$\int \left(\frac{e^x}{x} - \frac{e^x}{x^2} \right) dx = \frac{e^x}{x} + C.$$

Concludiamo qui questa breve rassegna, anche perché lo studio di alcuni di questi integrali sarà oggetto di altri corsi. Vogliamo solo osservare che, benché a volte il calcolo integrale presenti grosse difficoltà, esso ha comunque l'enorme vantaggio di condurre alla definizione di nuove, importanti funzioni: vi sono molti problemi di Fisica, di Economia, di Probabilità, di notevole interesse in varie situazioni, la cui risoluzione si riconduce ad uno degli integrali *impossibili* come quelli che qui abbiamo trattato, ed è tanto più esauriente quanto meglio si riescono a descrivere le funzioni *misteriose* che nascono con tali integrali.

Indice

7	Derivazione	2
7.1	Definizioni e Preliminari	3
7.2	Regole di Calcolo	8
8	Studio di funzioni	27
8.1	Massimi e minimi relativi	28
8.2	Alcuni esempi di studi di funzioni	39
9	Alcuni approfondimenti (*)	50
9.1	Ulteriori conseguenze del teorema di Lagrange	50
9.2	Sviluppi di Taylor	55
10	Integrazione	65
10.1	Definizioni e proprietà elementari	66
10.2	Classi di funzioni integrabili	74
11	La ricerca delle primitive	87
11.1	Gli integrali immediati.	87
11.2	Integrazione per parti	92
11.3	Regola di Hermite	95
11.4	Integrazione per Sostituzione	99
12	Etcetera...	106
12.1	Integrando funzioni discontinue	106

12.2 Volumi e lunghezze	109
12.3 Integrali non elementari	111