Le dispense del corso di Matematica

Argomenti:

Il teorema dell'esistenza degli zeri 1

Il teorema dell'esistenza dei valori intermedi 3

Funzioni continue invertibili 5

Il teorema di Cauchy 8

I teoremi di De L'Hôpital 9

La formula di Taylor 12

L'esponenziale complesso 15

Equazioni differenziali lineari 17

Equazioni differenziali lineari a coefficienti costanti 22

Prove d'esame 34

Programma del corso 52

Il teorema dell'esistenza degli zeri

Dimostriamo qui di seguito un teorema che riguarda la funzioni continue, definite su intervalli, che cambiano segno agli estremi dell'intervallo di definizione.

Teorema *Sia f una funzione continua definita sull'intervallo $[a, b]$, e sia $f(a) \cdot f(b) < 0$. Allora $\exists\, x_0 \in (a, b)$ tale che $f(x_0) = 0$.*

Dim. Per fissare le idee, possiamo supporre che sia $f(a) < 0$, $f(b) > 0$. Sia $c = \frac{1}{2}(a + b)$ il punto medio di $[a, b]$. Se $f(c) = 0$, abbiamo finito, perchè abbiamo trovato un punto interno all'intervallo $[a, b]$ tale che f si annulla in questo punto.

Se $f(c) \neq 0$, allora definiamo a_1, b_1 nel modo seguente:

$$[a_1, b_1] = \begin{cases} [a, c] & \text{se } f(c) > 0; \\ \\ [c, b] & \text{se } f(c) < 0. \end{cases} \tag{1}$$

Dalla definizione risulta che in entrambi i casi (sia $f(c) > 0$ o $f(c) < 0$) i punti a_1, b_1 godono delle seguenti proprietà:

$$\begin{aligned} & a \leq a_1 < b_1 \leq b; \\ & b_1 - a_1 = \frac{b - a}{2}; \\ & f(a_1) < 0;\ f(b_1) > 0. \end{aligned} \tag{2}$$

Abbiamo così costruito un intervallo $[a_1, b_1]$, metà dell'intervallo di partenza $[a, b]$, in cui si ripresentano le ipotesi iniziali, nel senso che $f(a_1) < 0$ e $f(b_1) > 0$.

Sia $c_1 = \frac{1}{2}(a_1 + b_1)$ il punto medio di $[a_1, b_1]$. Se $f(c_1) = 0$, abbiamo finito. Se $f(c_1) \neq 0$, allora definiamo a_2, b_2 nel modo seguente:

$$[a_2, b_2] = \begin{cases} [a_1, c_1] & \text{se } f(c_1) > 0; \\ \\ [c_1, b_1] & \text{se } f(c_1) < 0. \end{cases} \tag{3}$$

Come prima, dalla definizione risulta che in entrambi i casi (sia $f(c_1) > 0$ o $f(c_1) < 0$) i punti a_2, b_2 godono delle seguenti proprietà:

$$\begin{aligned} & a_1 \leq a_2 < b_2 \leq b_1; \\ & b_2 - a_2 = \frac{b_1 - a_1}{2} = \frac{b - a}{2^2}. \\ & f(a_2) < 0;\ f(b_2) > 0. \end{aligned} \tag{4}$$

Questo procedimento di può iterare per induzione. Una volta definito l'intervallo $[a_{n-1}, b_{n-1}]$, poniamo $c_{n-1} = \frac{1}{2}(a_{n-1} + b_{n-1})$. Se $f(c_{n-1}) = 0$ abbiamo finito. Se $f(c_{n-1}) \neq 0$, allora definiamo a_n, b_n nel modo seguente:

$$(5) \qquad [a_n, b_n] = \begin{cases} [a_{n-1}, c_{n-1}] & \text{se } f(c_{n-1}) > 0; \\ [c_{n-1}, b_{n-1}] & \text{se } f(c_{n-1}) < 0. \end{cases}$$

Dalla definizione risulta che in entrambi i casi (sia $f(c_{n-1}) > 0$ o $f(c_{n-1}) < 0$) i punti a_n, b_n godono delle seguenti proprietà:

$$(6) \qquad \begin{array}{ll} \text{i)} & a_{n-1} \leq a_n < b_n \leq b_{n-1}; \\ \text{ii)} & b_n - a_n = \dfrac{b_{n-1} - a_{n-1}}{2} = \dfrac{b-a}{2^n}. \\ \text{iii)} & f(a_n) < 0;\ f(b_n) > 0. \end{array}$$

Se $\exists\, n \in \mathbb{N}$ tale che $f(c_n) = 0$, questo procedimento si arresta, e $x_0 = c_n$ è il punto previsto dalla tesi del teorema. Altrimenti, si prosegue all'infinito, costruendo così due successioni, $\{a_n\}$ e $\{b_n\}$.

Dalla (6-i) si ricava che a_n è una successione monotóna non decrescente, mentre b_n è una successione monotóna non crescente. Inoltre, a_n e b_n sono successioni limitate, poichè $a \leq a_n \leq b$, $a \leq b_n \leq b\ \forall\, n \in \mathbb{N}$. Pertanto, per il teorema della regolarità delle successioni monotóne, $\exists \lim\limits_{n\to+\infty} a_n = \alpha$, $\exists \lim\limits_{n\to+\infty} b_n = \beta$, con $a \leq \alpha \leq \beta \leq b$.

Ma, dalla (6-ii), si ricava che $\lim\limits_{n\to+\infty} b_n - a_n = 0$; pertanto $\alpha = \beta$. Poniamo $x_0 = \alpha = \beta$. Risulta $a \leq x_0 \leq b$. Vogliamo far vedere che $f(x_0) = 0$.

Poichè $f(x)$ è continua, risulta

$$(7) \qquad \begin{array}{ll} \text{i)} & \lim\limits_{n\to+\infty} f(a_n) = f(\lim\limits_{n\to+\infty}(a_n)) = f(x_0); \\ \text{ii)} & \lim\limits_{n\to+\infty} f(b_n) = f(\lim\limits_{n\to+\infty}(b_n)) = f(x_0). \end{array}$$

Dalla (6-iii) sappiamo che $f(a_n) < 0\ \forall\, n \in \mathbb{N}$; pertanto, per il teorema della permanenza del segno, $f(x_0) = \lim\limits_{n\to+\infty} f(a_n) \leq 0$. Ma la (6-iii) dice anche che $f(b_n) > 0\ \forall\, n \in \mathbb{N}$, e quindi, sempre per il teorema della permanenza del segno, $f(x_0) = \lim\limits_{n\to+\infty} f(b_n) \geq 0$. In definitiva, $f(x_0) \leq 0$, $f(x_0) \geq 0$ e quindi $f(x_0) = 0$. Poichè $f(a) < 0$, $f(b) > 0$, x_0 non può coincidere con uno degli estremi dell'intervallo $[a, b]$, e dunque $x_0 \in (a, b)$ ■

In chiusura, notiamo che l'ipotesi di continuità di $f(x)$ è intervenuta nella (7), per poter commutare la f con l'operazione di limite; notiamo, inoltre, che il teorema dell'esistenza degli zeri si regge anche sull'assioma di completezza dei numeri reali, che interviene nel teorema di regolarità delle successioni monotóne, qui utilizzato.

Ad esempio, la funzione $f(x) = x^2 - 2$ definita sull'intervallo $[0, 2] \bigcap \mathbb{Q}$ è una funzione continua, e $f(0) = -2$, $f(2) = 2$, ma non c'è nessun numero razionale x_0 tale che $f(x_0) = 0$ (si veda l'irrazionalità di $\sqrt{2}$).

In altre parole, il teorema di esistenza degli zeri *non* è valido in assenza dell'assioma di completezza.

Il teorema dell'esistenza dei valori intermedi

Il teorema dell'esistenza degli zeri afferma, in sostanza, che se una funzione continua, definita in un intervallo, assume due valori $y_1 < 0 < y_2$, allora assume anche il valore zero. Questa proprietà si generalizza facilmente al caso in cui il valore intermedio tra y_1 e y_2 non sia più necessariamente zero, ma un generico $\overline{y}$.

Teorema (esistenza dei valori intermedi) *Sia $I \subset \mathbb{R}$ un intervallo, e $f(x) : I \to \mathbb{R}$ una funzione continua in I. Supponiamo che $f(x)$ assuma in I due valori y_1 e y_2, con $y_1 < y_2$. Allora f assume tutti i valori compresi tra y_1 e y_2.*

Dim. Siano x_1, x_2 due punti di I in cui $f(x)$ assume rispettivamente i valori y_1 e y_2. Detto J l'intervallo chiuso di estremi x_1 e x_2, sappiamo che $J \subset I$, essendo I un intervallo.

Sia ora $\overline{y}$ un generico valore compreso tra y_1 e y_2, e consideriamo la funzione $g(x) = f(x) - \overline{y}$. La funzione $g(x)$ è continua in J, e assume agli estremi di J valori discordi; infatti, risulta $g(x_1) = y_1 - \overline{y} < 0$, mentre $g(x_2) = y_2 - \overline{y} > 0$. Pertanto, il teorema degli zeri applicato a $g(x)$ in J implica che esiste un punto $\overline{x} \in J$ (e quindi $\overline{x} \in I$, perchè $J \subset I$), tale che $g(\overline{x}) = 0$. Ma questo equivale a dire che $f(\overline{x}) = \overline{y}$ ■

Ricordiamo la definizione di intervallo: un insieme $I \subset \mathbb{R}$ si dice un intervallo se, per ogni coppia di punti $t_1 \leq t_2$ di I, l'insieme $\{t \in \mathbb{R} : t_1 \leq t \leq t_2\}$ è contenuto in I. In altre parole, I è un intervallo se consta di un solo punto, oppure se ha la proprietà che, comunque scelti due suoi punti, tutti i punti compresi tra i due gli appartengono. Pertanto, il teorema dell'esistenza degli zeri si può riformulare affermando che

L'insieme immagine di un intervallo I tramite una funzione continua f è ancora un intervallo.

In altre parole, le funzioni continue mandano intervalli in intervalli.

Corollario 1 *Sia $I \subset \mathbb{R}$ un intervallo, e $f(x) : I \to \mathbb{R}$ una funzione continua in I; denotiamo con l e L rispettivamente l'inf e il sup di f in I. Allora f assume tutti i valori strettamente compresi tra l e L.*

Dim. Sia $\overline{y}$ un qualsiasi valore strettamente compreso tra l e L, e dunque $-\infty \leq l < \overline{y} < L \leq +\infty$.

Dalle proprietà dell'estremo superiore e dell'estremo inferiore segue che $f(x)$ deve assumere necessariamente un valore $y_1 < \overline{y}$ e un valore $y_2 > \overline{y}$; dal teorema dell'esistenza dei valori intermedi si ha, pertanto, che $\overline{y}$ è anch'esso un valore assunto da $f(x)$ ■

Corollario 2 *Sia $f(x) : (a, b) \to \mathbb{R}$ una funzione continua in (a, b), con $-\infty \leq a < b \leq +\infty$. Supponiamo che*

$$\lim_{x \to a^+} f(x) = -\infty; \quad \lim_{x \to b^-} f(x) = +\infty$$

o viceversa; allora $f(x)$ è surgettiva su $\mathbb{R}$.

Dim. Poiché la funzione $f(x)$ tende a $+\infty$ a un estremo del suo dominio e a $-\infty$ all'altro estremo, è evidente che il suo estremo inferiore è $-\infty$, mentre il suo estremo superiore è $+\infty$. Pertanto, dal corollario 1 discende che $f(x)$ assume ogni valore compreso tra $-\infty$ e $+\infty$, cioè $f(x)$ assume ogni valore reale ■

Corollario 3 *Sia $f(x) : [a, b] \to \mathbb{R}$ una funzione continua nell'intervallo limitato e chiuso $[a, b]$; denotiamo con m e M rispettivamente il valore minimo e il valore massimo di f in $[a, b]$. Allora l'insieme immagine di $[a, b]$ tramite f è l'intervallo $[m, M]$.*

Dim. Per il teorema di Weierstrass, f assume in $[a, b]$ minimo e massimo, cioè m e M; dal corollario 1, segue che f assume tutti i valori compresi tra m e M. D'altra parte, f non può assumere nessun valore al di sotto di m o al di sopra di M, per definizione di minimo e massimo. Pertanto, f assume tutti e soli i valori dell'intervallo $[m, M]$ ■

Mettendo insieme il teorema di esistenza degli zeri e il corollario 3, possiamo in definitiva affermare che

L'insieme immagine di un intervallo I tramite una funzione continua f è ancora un intervallo. Se I è limitato e chiuso, anche $f(I)$ è limitato e chiuso.

In altre parole, le funzioni continue mandano intervalli in intervalli, e intervalli limitati e chiusi in intervalli limitati e chiusi.

Funzioni continue invertibili

In questa sezione studieremo le funzioni continue invertibili definite su di un *intervallo*, con particolare riguardo al problema della continuità della funzione inversa. Dimostreremo il seguente

Teorema *Sia $f(x) : [a, b] \to \mathbb{R}$ una funzione continua e invertibile. Allora $f^{-1}(x)$ è anch'essa una funzione continua.*

La dimostrazione di questo teorema si articola in varie fasi. Cominciamo con l'enunciare e dimostrare la seguente

Proposizione 1. *Sia $f(x) : [a, b] \to \mathbb{R}$ una funzione continua e invertibile. Allora $f(x)$ è strettamente monotóna.*

Dim. Ragioniamo per assurdo, e supponiamo che $f(x)$ *non sia* strettamente monotóna. Allora, esistono tre punti x_1, x_2, x_3 in $[a, b]$ tali che $x_1 < x_2 < x_3$ ma il segno di diseguaglianza che intercorre tra $f(x_1)$ e $f(x_2)$ è *opposto* a quello che intercorre tra $f(x_2)$ e $f(x_3)$. Per fissare le idee, possiamo in concreto supporre che

$$(1) \qquad \begin{cases} x_1 < x_2 < x_3 \quad ; \\ \\ f(x_1) < f(x_2) \quad ; \quad f(x_2) > f(x_3) \quad . \end{cases}$$

(naturalmente, il ragionamento sarà del tutto analogo nel caso che sia $f(x_1) > f(x_2)$ e $f(x_2) < f(x_3)$).

Notiamo che i segni di diseguaglianza fra i vari $f(x_i)$ sono *stretti*; infatti, poiché $f(x)$ è invertibile, essa è iniettiva, e quindi non può mai assumere due volte lo stesso valore. Ciò esclude a priori la possibilità che due dei tre valori $f(x_1), f(x_2), f(x_3)$ siano uguali tra loro.

Per il teorema dell'esistenza dei valori intermedi, $f(x)$ assume, sull'intervallo $[x_1, x_2]$, tutti i valori compresi nell'intervallo $[f(x_1), f(x_2)]$, e, sull'intervallo $[x_2, x_3]$, tutti i valori compresi nell'intervallo $[f(x_3), f(x_2)]$. In particolare, posto $\bar{y} = \max\{f(x_1), f(x_3)\}$, risulta che i valori compresi nell'intervallo $[\bar{y}, f(x_2)]$ sono assunti sia nell'intervallo $[x_1, x_2]$, sia nell'intervallo $[x_2, x_3]$, e quindi sono assunti per lo meno due volte da $f(x)$ in $[a, b]$. Pertanto $f(x)$ non è iniettiva, e questo è assurdo ■

Dunque, una funzione continua e invertibile su un intervallo è sempre di un tipo molto speciale: precisamente, è una funzione strettamente monotóna. Dimostriamo, ora, una proposizione riguardante appunto le funzioni monotóne. Concettualmente, la proposizione che segue costituisce l'analogo, per le funzioni, del teorema di regolarità delle successioni monotóne.

Proposizione 2. *Sia $f(x) : [a,b] \to \mathbb{R}$ una funzione monotóna. Allora, $\forall\, x_0 \in (a,b)$, $\exists \lim_{x\to x_0^-} f(x)$, $\lim_{x\to x_0^+} f(x)$. Inoltre, $\exists \lim_{x\to a^+} f(x)$, $\lim_{x\to b^-} f(x)$.*

Dim. Per fissare le idee, supponiamo $f(x)$ *crescente*. Ovviamente, $f(a) \le f(x) \le f(b)$, per cui $f(x)$ è una funzione *limitata* su $[a,b]$.

Sia $x_0 \in (a,b)$. Poniamo $y_1 = \sup_{a<x<x_0} f(x)$, $y_2 = \inf_{x_0<x<b} f(x)$. Poiché $f(x)$ è una funzione limitata, y_1 e y_2 risultano essere due numeri reali. Faremo vedere che $\lim_{x\to x_0^-} f(x) = y_1$ e $\lim_{x\to x_0^+} f(x) = y_2$.

Fissiamo $\varepsilon > 0$. Poiché $y_1 = \sup_{a<x<x_0} f(x)$, per le proprietà dell'estremo superiore $\exists x_1 \in (a, x_0) : f(x_1) > y_1 - \varepsilon$. Ora, avendo noi supposto che $f(x)$ sia crescente, risulta che

$$(2) \qquad y_1 - \varepsilon < f(x_1) \le f(x) \qquad \forall\, x \in (x_1, x_0)\,;$$

d'altra parte, per definizione di estremo superiore,

$$(3) \qquad f(x) \le y_1 \qquad \forall\, x \in (x_1, x_0)\,.$$

In definitiva, fissato un $\varepsilon > 0$ abbiamo trovato un x_1 a sinistra di x_0 tale che, $\forall x \in (x_1, x_0)$, $y_1 - \varepsilon < f(x) \le y_1$, il che equivale a dire che $\lim_{x\to x_0^-} f(x) = y_1$.

In maniera del tutto analoga si dimostra che $\lim_{x\to x_0^+} f(x) = y_2$ e che $\lim_{x\to a^+} f(x) = \inf_{a<x<b} f(x)$, $\lim_{x\to b^-} f(x) = \sup_{a<x<b} f(x)$.

Osserviamo, infine, che i ruoli di sup e inf si scambiano, nella definizione di y_1 e y_2 nel caso in cui $f(x)$ sia decrescente ■

Notiamo che, se $f(x)$ è crescente, risulta sempre

$$(4) \qquad y_1 \le f(x_0) \le y_2 \qquad \forall x_0 \in (a,b) \quad .$$

Pertanto, facendo riferimento alla dimostrazione della proposizione 2, se $x_0 \in (a,b)$, si danno due casi possibili: o $y_1 = y_2$, e allora dalla (4) segue che $f(x)$ è continua nel punto x_0 (perchè $f(x_0)$ coincide con $\lim_{x\to x_0^-} f(x)$ e con $\lim_{x\to x_0^+} f(x)$), oppure $y_1 < y_2$, e allora $f(x)$ assumerà valori minori o uguali di y_1 a sinistra di x_0, valori maggiori o uguali di y_2 a destra di x_0, per cui non assumerà mai valori compresi tra y_1 e y_2. In particolare, in questo caso l'insieme dei valori assunti da $f(x)$ *non sarà* un intervallo. Analogamente si ragiona agli estremi dell'intervallo: per esempio, o f è continua in a, oppure $f(a) < y_2 = \inf_{a<x<b} f(x)$, e $f(x)$ non assumerà mai valori compresi tra $f(a)$ e y_2, e quindi anche in questo caso l'insieme dei valori assunti da $f(x)$ *non sarà* un intervallo. Ovviamente, discorsi del tutto analoghi valgono per funzioni decrescenti.

Immediata conseguenza della proposizione 2 è la seguente

Proposizione 3. *Sia $f(x) : [a, b] \to \mathbb{R}$ una funzione monotóna. Allora $f(x)$ è continua $\Longleftrightarrow$ l'insieme immagine $f([a, b])$ è un intervallo.*

Dim. Dobbiamo dimostrare solo l'implicazione $\Longleftarrow$, poiché sappiamo già che, se una funzione $f(x)$ è continua e definita su un intervallo, il suo insieme immagine è un intervallo (teorema di Bolzano – Weierstrass), a prescindere da qualsiasi ipotesi di monotonia.

Sia dunque $f(x)$ una funzione monotóna su $[a, b]$; per fissare le idee, come al solito, possiamo supporre che $f(x)$ sia crescente. Supponiamo che l'insieme dei valori assunti $f([a, b])$ sia un intervallo, ma supponiamo per assurdo che $f(x)$ *non* sia continua.

Allora, per quanto osservato in margine alla proposizione 2, se $f(x)$ non è continua in un punto $x_0 \in [a, b]$, questo implica che l'insieme dei valori assunti da $f(x)$ non è un intervallo, e questo è assurdo ■

Passiamo ora alla dimostrazione del teorema. Sia $f(x) : [a, b] \to \mathbb{R}$ una funzione continua e invertibile. Per i teoremi di Weierstrass e di Bolzano – Weierstrass, sappiamo che il suo insieme immagine è ancora un intervallo limitato e chiuso, che indicheremo con $[c, d]$. Pertanto, $f(x)$ è ua bigezione tra $[a, b]$ e $[c, d]$, e, quindi, $f^{-1}(x)$ è definita su $[c, d]$ e il suo insieme immagine è $[a, b]$.

Per la proposizione 1, $f(x)$ è strettamente monotóna, e quindi anche $f^{-1}(x)$ lo è; pertanto, si può applicare a $f^{-1}(x)$ la proposizione 3. Poichè l'insieme immagine di $f^{-1}(x)$ è un intervallo, precisamente l'intervallo $[a, b]$, $f^{-1}(x)$ è continua ■

Osservazione Nella dimostrazione di questo teorema non gioca nessun ruolo l'ipotesi che il dominio di $f(x)$ sia un intervallo *necessariamente limitato e chiuso* della forma $[a, b]$; è invece importante che il dominio di f sia un *intervallo.*

Il teorema di Cauchy

Questo teorema, diretta conseguenza del teorema di Rolle, per quanto ci riguarda, è in realtà un lemma che utilizzeremo nella dimostrazione dei teoremi di De l'Hôpital.

Teorema *Siano f, g due funzioni continue definite sull'intervallo $[a, b]$, derivabili nell'intervallo aperto (a, b), tali che $g(a) \neq g(b)$ e $f'(x)$ e $g'(x)$ non siano mai contemporaneamente nulle. Allora $\exists\, x_0 \in (a, b)$ tale che $g'(x_0) \neq 0$ e*

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(x_0)}{g'(x_0)} \qquad .$$

Dim. Definiamo una nuova funzione $h(x) = c_1 f(x) + c_2 g(x)$ sull'intervallo $[a, b]$, con $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$, e scegliamo c_1, c_2 in modo che $h(x)$ soddisfi la condizione $h(a) = h(b)$, per poi poter applicare ad $h(x)$ il teorema di Rolle. Risulta

$$h(a) = h(b) \Longleftrightarrow c_1 f(a) + c_2 g(a) = c_1 f(b) + c_2 g(b) \Longleftrightarrow c_1(f(a) - f(b)) = c_2(g(b) - g(a)) \quad .$$

Pertanto, scegliendo $c_1 = g(b) - g(a)$, $c_2 = f(a) - f(b)$, risulta $h(a) = h(b)$, e dunque, in virtù del teorema di Rolle, $\exists x_0 \in (a, b)$ tale che $h'(x_0) = 0$, ovvero, sostituendo a c_1 e a c_2 i loro valori nella definizione di $h(x)$,

$$(g(b) - g(a))f'(x_0) + (f(a) - f(b))g'(x_0) = 0 \qquad . \tag{1}$$

Esaminiamo quest'ultima relazione, e mostriamo che $g'(x_0) \neq 0$. Infatti, se $g'(x_0) = 0$, risulterebbe anche $(g(b) - g(a))f'(x_0) = 0$, e poichè, per ipotesi, $g(a) \neq g(b)$, dovrebbe necessariamente essere $f'(x_0) = 0$. Ma allora, in x_0, $f'(x)$ e $g'(x)$ si annullerebbero entrambe, contro l'ipotesi che $f'(x)$ e $g'(x)$ non si annullino mai contemporaneamente.

Quindi, $g'(x_0) \neq 0$, e dalla (1) si ricava

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(x_0)}{g'(x_0)} \qquad , \tag{2}$$

cioè la tesi ■

I teoremi di De L'Hôpital

Questa famiglia di teoremi è di particolare utilità per il calcolo dei limiti che si presentano in una forma indeterminata del tipo $\frac{0}{0}$ o $\frac{\infty}{\infty}$, o che sono riconducibili a una di queste forme. Cominciamo dal caso più semplice.

Teorema 1 (De L'Hôpital) *Sia $I \subset \mathbb{R}$ un intervallo, e $x_0 \in I$. Siano $f(x), g(x) : I \to \mathbb{R}$ due funzioni definite e continue in I, tali che $f(x_0) = g(x_0) = 0$. Su $f(x)$ e $g(x)$ formuleremo, inoltre, le seguenti ipotesi:*

- *$f(x), g(x)$ sono derivabili in $I \setminus \{x_0\}$;*
- *$g'(x) \neq 0 \, \forall x \in I \setminus \{x_0\}$;*
- *$\exists \lim\limits_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = l \in \overline{\mathbb{R}}$.*

Allora risulta $g(x) \neq 0 \, \forall x \in I \setminus \{x_0\}$, e $\exists \lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = l$.

Dim. Dimostriamo la prima parte della tesi, ovvero $g(x) \neq 0 \, \forall x \in I \setminus \{x_0\}$. Infatti, se per assurdo $\exists x_1 \neq x_0 : g(x_1) = 0$, allora, per il teorema di Rolle, $\exists x_2$ compreso tra x_0 e x_1 tale che $g'(x_2) = 0$, e questo contraddice l'ipotesi che $g'(x) \neq 0 \, \forall x \in I \setminus \{x_0\}$.

Allora, il quoziente $\frac{f(x)}{g(x)}$ è definito su $I \setminus \{x_0\}$, e ha senso porsi il problema se $\exists \lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$; a tal fine, utilizziamo la definizione di limite di funzione mediante successioni.

Sia pertanto $\{x_n\}$ una successione di punti di I, $x_n \neq x_0$, $x_n \to x_0$. Poichè $f(x_0) = g(x_0) = 0$, risulta

$$\frac{f(x_n)}{g(x_n)} = \frac{f(x_n) - f(x_0)}{g(x_n) - g(x_0)} = \frac{f'(y_n)}{g'(y_n)},$$

dove y_n è un punto compreso tra x_0 e x_n, e l'ultima eguaglianza sussiste in virtù del teorema di Cauchy.

Poichè $x_n \to x_0$, anche $y_n \to x_0$, e quindi $\frac{f'(y_n)}{g'(y_n)} \to l$. Ma $\frac{f(x_n)}{g(x_n)} = \frac{f'(y_n)}{g'(y_n)}$, e quindi $\frac{f(x_n)}{g(x_n)} \to l$. Per l'arbitrarietà della successione x_n, dalla definizione di limite per funzioni segue che $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = l$ ■

Osserviamo che il meccanismo fondamentale della dimostrazione del teorema precedente consiste nel mostrare che, per ogni successione $x_n \to x_0$, esiste una successione $y_n \to x_0$ tale che $\frac{f(x_n)}{g(x_n)} = \frac{f'(y_n)}{g'(y_n)}$. Questo rende evidente il fatto che, se esiste $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$, allora esiste anche $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$ e i due limiti coincidono.

Veniamo ora al caso in cui $f(x), g(x)$ sono entrambe *divergenti* quando $x \to x_0$. Ricordiamo che una funzione $h(x)$ si dice divergente (quando $x \to x_0$) se $\exists \lim_{x \to x_0} h(x) = +\infty$ (o $-\infty$).

Enunciamo, senza dimostrarlo, il teorema di De L'Hôpital per le forme $\frac{\infty}{\infty}$:

Teorema 2 (De L'Hôpital) *Sia $I \subset \mathbb{R}$ un intervallo, e $x_0 \in I$. Siano $f(x), g(x) : I \setminus \{x_0\} \to \mathbb{R}$ due funzioni sulle quali formuleremo le seguenti ipotesi:*

- *$f(x), g(x)$ sono divergenti quando $x \to x_0$;*
- *$f(x), g(x)$ sono derivabili in $I \setminus \{x_0\}$;*
- *$g'(x) \neq 0 \, \forall x \in I \setminus \{x_0\}$;*
- *$\exists \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = l \in \overline{\mathbb{R}}$.*

Allora $\exists \lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = l$.

Esaminiamo ora il caso in cui x_0 non sia più un numero reale, ma $\pm\infty$.

Teorema 3 (De L'Hôpital) *Sia I un intervallo di $\mathbb{R}$ non limitato superiormente, e siano $f(x), g(x)$ due funzioni derivabili in I. Su $f(x)$ e $g(x)$ formuleremo, inoltre, le seguenti ipotesi:*

- *$f(x), g(x)$ sono entrambe infinitesime quando $x \to +\infty$, oppure $f(x), g(x)$ divergono entrambe quando $x \to +\infty$;*
- *$g'(x) \neq 0 \, \forall x \in I$;*
- *$\exists \lim_{x \to +\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)} = l \in \overline{\mathbb{R}}$.*

Allora risulta $g(x) \neq 0$ in un intorno di $+\infty$, e $\exists \lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to +\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)} = l$.

Osservazione: il teorema 3 si può, naturalmente, riformulare nel caso in cui $x \to -\infty$. In questo caso supporremo che I sia un intervallo non limitato inferiormente.

Dim. Definiamo le funzioni

$$F(t) = f(\frac{1}{t}); \quad G(t) = g(\frac{1}{t}) \, .$$

Sono funzioni definite in un intorno destro di $t = 0$ (sinistro se I non è limitato inferiormente e i limiti si effettuano per $x \to -\infty$), per le quali valgono tutte le ipotesi del teorema 1 o del teorema 2 (a seconda che f, g siano infinitesime o divergenti quando $x \to +\infty$). Pertanto $G(t) \neq 0$ in un intorno destro di $x = 0$, il che corrisponde a dire che $g(x) \neq 0$ in un intorno di $+\infty$. Inoltre risulta

$$\frac{F'(t)}{G'(t)} = \frac{-f'(\frac{1}{t})(\frac{1}{t^2})}{-g'(\frac{1}{t})(\frac{1}{t^2})} = \frac{f'(\frac{1}{t})}{g'(\frac{1}{t})}$$

e pertanto, utilizzando il cambio di variabile $x = 1/t$,

$$\lim_{t\to 0^+} \frac{F'(t)}{G'(t)} = \lim_{t\to 0^+} \frac{f'(\frac{1}{t})}{g'(\frac{1}{t})} = \lim_{x\to +\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)} = l\,.$$

Dai precedenti teoremi sappiamo dunque che esiste $\lim\limits_{t\to 0^+} \frac{F(t)}{G(t)} = l$; ma allora, utilizzando ancora il cambio di variabile $x = 1/t$,

$$\lim_{x\to +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{t\to 0^+} \frac{f(\frac{1}{t})}{g(\frac{1}{t})} = \lim_{t\to 0^+} \frac{F(t)}{G(t)} = l \qquad \blacksquare$$

La formula di Taylor

In questa sezione affronteremo il seguente problema: assegnata una funzione $f(x)$ su un intervallo I e un punto $x_0 \in I$, si determini, fra tutti i polinomi di un grado prefissato, quello che meglio degli altri approssima $f(x)$ vicino a x_0.

Teorema (Taylor) *Sia $I \subset \mathbb{R}$ un intervallo, e $x_0 \in I$. Sia $f(x) : I \to \mathbb{R}$ una funzione derivabile n volte in I. Allora esiste uno e un solo polinomio $P(x)$ di grado minore o uguale di n tale che $f(x) - P(x) = o((x - x_0)^n)$. La formula esplicita di tale polinomio è data da*

$$\begin{aligned} P(x) &= f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{1}{2!} f''(x_0)(x - x_0)^2 + \ldots + \frac{1}{n!} f^{(n)}(x_0)(x - x_0)^n \\ &= \sum_{h=0}^{n} \frac{f^{(h)}(x_0)}{h!}(x - x_0)^h \end{aligned} \tag{1}$$

Il polinomio $P(x)$ definito da (1) prende il nome di *polinomio di Taylor* di *punto iniziale* x_0 e di grado n relativo alla funzione $f(x)$. Nella (1) si è convenuto di porre $f^{(0)}(x) = f(x)$ e $0! = 1$.

Prima di dimostrare il teorema di Taylor, sarà utile premettere alcune notazioni e alcuni lemmi. Stabiliamo innanzitutto un lemma che ci sarà utile per dimostrare *l'unicità* del polinomio di Taylor.

Lemma 1 *Sia $H(x)$ un polinomio di grado n, e supponiamo che esista un punto $\overline{x} \in \mathbb{R}$ tale che $H(x) = o((x - \overline{x})^n)$. Allora $H(x) \equiv 0$.*

Dim. Ragioniamo per induzione sul grado n. Per $n = 1$, $H(x)$ è l'equazione di una retta. Una retta che si annulla in un punto $\overline{x}$ ha la forma $H(x) = m(x - \overline{x})$; poiché per ipotesi $H = o(x - \overline{x})$, risulta $m = 0$, e quindi $H \equiv 0$.

Supponiamo ora il nostro lemma dimostrato per $n - 1$, e sia $H(x)$ di grado n. Poiché $H(\overline{x}) = 0$, dal teorema di Ruffini sappiamo che H è divisibile per $(x - \overline{x})$, cioè risulta

$$H(x) = (x - \overline{x}) H_1(x)\,,$$

dove $H_1(x)$ è un polinomio di grado $n - 1$.

Dato che $H(x) = o((x - \overline{x})^n)$, risulta $H_1(x) = o((x - \overline{x})^{n-1})$; dall'ipotesi induttiva, essendo il grado di H_1 pari a $n - 1$, sappiamo che $H_1 \equiv 0$, e quindi anche

$$H(x) = (x - \overline{x}) H_1(x) \equiv 0 \qquad \blacksquare$$

Conseguenza immediata è la dimostrazione dell'unicità del polinomio di Taylor; infatti, se P, Q sono due polinomi di grado minore o uguale a n tali che

$$f(x) = P(x) + o((x - x_0)^n)$$
$$f(x) = Q(x) + o((x - x_0)^n)$$

allora $P(x) - Q(x) = o((x - x_0)^n)$; d'altra parte, $P - Q$ è ancora un polinomio di grado minore o uguale a n, e pertanto, per il lemma 1, $P - Q \equiv 0$, ovvero $P(x) \equiv Q(x)$.

Nel seguito, denoteremo il polinomio definito da (1) come $P_n(f; x_0)(x)$. Osserviamo che, quando $n = 1$, $P_1(f; x_0)(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$ non è altro che la retta tangente al grafico di $f(x)$ nel punto x_0. Notiamo inoltre che, in generale, qualsiasi polinomio di Taylor, calcolato nel punto iniziale, vale quanto la funzione nel punto stesso; in altre parole, $P_m(g; x_0)(x) = g(x_0)$.

Il prossimo lemma calcola esplicitamente la derivata di un polinomio di Taylor.

Lemma 2 *Risulta*

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} P_n(f; x_0)(x) = P_{n-1}(f'; x_0)(x)$$

Dim. Si ha

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} P_n(f; x_0)(x) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[f(x_0) + \sum_{h=1}^{n} \frac{f^{(h)}(x_0)}{h!}(x - x_0)^h\right] = \sum_{h=1}^{n} \frac{f^{(h)}(x_0)}{h!} h(x - x_0)^{h-1} =$$
$$= \sum_{h=1}^{n} \frac{f^{(h)}(x_0)}{(h-1)!}(x - x_0)^{h-1} = \sum_{h=1}^{n} \frac{f'^{(h-1)}(x_0)}{(h-1)!}(x - x_0)^{h-1} =$$
$$= \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f'^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k = P_{n-1}(f'; x_0)(x) \qquad \blacksquare$$

Dimostrazione del Teorema di Taylor

L'unicità è già stata provata; resta da far vedere che il polinomio P definito da (1) soddisfa la condizione $f(x) - P(x) = o((x - x_0)^n)$. In altre parole, dobbiamo far vedere che

$$\exists \lim_{x \to x_0} r_0(x) = \frac{f(x) - P_n(f; x_0)(x)}{(x - x_0)^n} = 0\,. \tag{2}$$

Quando $x \to x_0$, l'espressione nella (2) assume la forma $\frac{0}{0}$; pertanto possiamo provare ad applicare il teorema di De L'Hôpital, derivando numeratore e denominatore della (2). Ricordando l'enunciato del lemma 2, siamo ricondotti a calcolare

$$\lim_{x \to x_0} r_1(x) = \frac{f'(x) - P_n'(f; x_0)(x)}{n(x - x_0)^{n-1}} = \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x) - P_{n-1}(f'; x_0)(x)}{n(x - x_0)^{n-1}}\,.$$

Quando $x \to x_0$, siamo evidentemente ancora in una forma $\frac{0}{0}$. Una reiterata applicazione (complessivamente $n-1$ volte) del teorema di De L'Hôpital conduce a considerare le espressioni (tutte nella forma $\frac{0}{0}$)

$$r_2(x) = \frac{f''(x) - P_{n-2}(f''; x_0)(x)}{n(n-1)(x-x_0)^{n-2}} \quad ; \quad r_3(x) = \frac{f^{(3)}(x) - P_{n-3}(f^{(3)}; x_0)(x)}{n(n-1)(n-2)(x-x_0)^{n-3}} \quad \dots$$

sino a

$$r_{n-1}(x) = \frac{f^{(n-1)}(x) - P_1(f^{(n-1)}; x_0)(x)}{n!(x-x_0)}\,; \tag{3}$$

se l'espressione (3) tende a zero quando $x \to x_0$, allora la (2) è verificata, e con essa il teorema di Taylor.

Sostituiamo nella (3) a P_1 la sua espressione esplicita; otteniamo

$$\frac{f^{(n-1)}(x) - [f^{(n-1)}(x_0) + f^{(n)}(x_0)(x-x_0)]}{n!(x-x_0)} = \frac{1}{n!}\Big(\frac{f^{(n-1)}(x) - f^{(n-1)}(x_0)}{x-x_0} - f^{(n)}(x_0)\Big)\,.$$

Quando $x \to x_0$, si ha

$$\frac{f^{(n-1)}(x) - f^{(n-1)}(x_0)}{x-x_0} \to f^{(n)}(x_0)\,,$$

e pertanto

$$\exists \lim_{x \to x_0} r_{n-1}(x) = \frac{f^{(n-1)}(x) - P_1(f^{(n-1)}; x_0)(x)}{n!(x-x_0)} = 0\,;$$

risalendo $n-1$ volte tramite il teorema di De L'Hôpital a tutte le espressioni $r_h(x)$ sino a $r_0(x)$, si verifica la (2), concludendo così la dimostrazione del teorema di Taylor ■

L'esponenziale complesso

In questa sezione ci occupiamo di dare un significato all'esponenziale di un numero complesso

Sia $\lambda \in \mathbb{C}$, $\lambda = a + ib$ un numero complesso; ricordiamo che a si dice *parte reale* di λ, mentre b si dice *parte immaginaria* di λ; a e b sono numeri reali, mentre i è l'*unità immaginaria*, definita dalla relazione $i^2 = -1$.

Per denotare la parte reale e la parte immaginaria di un numero complesso si usano anche le notazioni $a = \operatorname{Re}\lambda$, $b = \operatorname{Im}\lambda$. I numeri reali possono essere riguardati come un sottoinsieme dei numeri complessi: precisamente, i numeri reali non sono altro che i numeri complessi la cui parte immaginaria è nulla.

Diamo ora una definizione di esponenziale di un numero complesso. Definiamo

$$e^{\lambda} = e^{a}(\cos b + i \operatorname{sen} b)\,. \tag{1}$$

Osserviamo che la (1) costituisce un'estensione all'insieme dei numeri complessi della funzione esponenziale reale; questo vuol dire che se, in particolare, $\lambda = a$ è un numero reale (cioè la sua parte immaginaria b è nulla), allora la (1) restituisce il valore e^a. Pertanto l'esponenziale complesso coincide, sui numeri reali, con l'esponenziale reale.

Dalla definizione (1), e dalle proprietà dell'esponenziale reale e delle funzioni trigonometriche, segue immediatamente che

$$e^{\lambda_1} e^{\lambda_2} = e^{\lambda_1+\lambda_2} \quad \forall\, \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C}\,; \tag{2}$$

infatti, posto $\lambda_1 = a_1 + ib_1$, $\lambda_2 = a_2 + ib_2$, si ha

$$\begin{aligned} e^{\lambda_1} e^{\lambda_2} &= e^{a_1}(\cos b_1 + i \operatorname{sen} b_1)\, e^{a_2}(\cos b_2 + i \operatorname{sen} b_2) = \\ &= e^{a_1+a_2}(\cos b_1 \cos b_2 - \operatorname{sen} b_1 \operatorname{sen} b_2 + i(\operatorname{sen} b_1 \cos b_2 + \operatorname{sen} b_2 \cos b_1)) = \\ &= e^{a_1+a_2}(\cos(b_1 + b_2) + i \operatorname{sen}(b_1 + b_2)) = e^{\lambda_1+\lambda_2}\,. \end{aligned}$$

Sia ora $\lambda \in \mathbb{C}$, $\lambda = a + ib$. Coerentemente con la (1), definiamo la funzione *di variabile reale* $e^{\lambda x}$ nel modo seguente:

$$e^{\lambda x} = e^{ax}(\cos bx + i \operatorname{sen} bx)\,, \quad x \in \mathbb{R}\,. \tag{3}$$

La funzione $x \to e^{\lambda x}$ è una funzione definita su $\mathbb{R}$ a valori in $\mathbb{C}$. Dalla (3) abbiamo che

$$\operatorname{Re} e^{\lambda x} = e^{ax} \cos bx, \quad \operatorname{Im} e^{\lambda x} = e^{ax} \operatorname{sen} bx\,. \tag{4}$$

In generale, se $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ è una funzione di variabile reale a valori complessi, posto $u(x) = \operatorname{Re} f(x)$ e $v(x) = \operatorname{Im} f(x)$, si può scrivere $f(x) = u(x) + iv(x)$. La funzione f si

dice derivabile se e solo se le due funzioni reali u, v sono derivabili, e in questo caso si pone $f'(x) = u'(x) + iv'(x)$.

Calcoliamo ora la derivata di $e^{\lambda x}$. Si ha

$$
\begin{aligned}
& D(e^{\lambda x}) = D(e^{ax}\cos bx) + i\, D(e^{ax}\operatorname{sen} bx) = \\
& = a\, e^{ax}\cos bx - b\, e^{ax}\operatorname{sen} bx + i\,(a\, e^{ax}\operatorname{sen} bx + b\, e^{ax}\cos bx) = \\
& = e^{ax}\cos bx\,(a+ib) + ie^{ax}\operatorname{sen} bx\,(a+ib) = \lambda e^{\lambda x}\,.
\end{aligned} \tag{5}
$$

Pertanto, possiamo concludere che l'estensione dell'esponenziale ai numeri complessi preserva le usuali regole di calcolo valide in campo reale, sia algebriche (vedi la (2)), sia differenziali (vedi la (5)).

Equazioni differenziali lineari

Siano $a_1(x), \dots a_n(x)$ n funzioni continue a valori reali o complessi definite su un intervallo I, e consideriamo la seguente equazione differenziale lineare omogenea di ordine n:

$$y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \dots + a_{n-1}y' + a_n(x)y = 0 \tag{1}$$

Ci poniamo il problema di caratterizzare l'*integrale generale* della (1), cioè l'insieme di tutte le sue possibili soluzioni. A questo scopo, abbiamo prima bisogno di introdurre il concetto di *funzioni linearmente indipendenti*. Diamo perciò la seguente

Definizione *Siano $f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x)$ n funzioni a valori reali o complessi definite su un intervallo I. Le funzioni $f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x)$ si dicono* linearmente indipendenti *se e solo se vale la seguente coimplicazione:*

$$c_1 f_1(x) + c_2 f_2(x) + \dots + c_n f_n(x) = 0 \quad \forall\, x \in I \Longleftrightarrow c_1 = c_2 = \dots = c_n = 0 \tag{2}$$

In altre parole, le funzioni $f_1 \dots f_n$ sono linearmente indipendenti se non è possibile esprimere una qualsiasi di loro come combinazione lineare delle rimanenti $n-1$. Ad esempio, posto $I = \mathbb{R}$, le funzioni $1, x, x^2, \dots, x^n$ sono fra loro linearmente indipendenti. Invece, le tre funzioni $\operatorname{senh} x, \cosh x, e^x$ *non sono* linearmente indipendenti, perchè $e^x = \operatorname{senh} x + \cosh x$, e quindi $\operatorname{senh} x + \cosh x - e^x = 0\, \forall\, x \in \mathbb{R}$, violando la (2).

Siamo ora in grado di enunciare un teorema (di cui omettiamo la dimostrazione) che caratterizza la struttura dell'integrale generale della (1).

Teorema 1 *L'equazione differenziale* (1) *ha n soluzioni linearmente indipendenti $y_1(x), y_2(x) \dots y_n(x)$. L'integrale generale della* (1) *è dato da*

$$y(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) + \dots + c_n y_n(x) \tag{3}$$

al variare di $c_1, c_2, \dots, c_n$ fra le costanti.

Si dice che le funzioni $y_1 \dots y_n$ sono una *base* dell'integrale generale dell'equazione (1) (o anche si usa dire che $y_1 \dots y_n$ *generano* l'integrale generale (3)). Si dice anche che l'integrale generale dell'equazione omogenea (1) è uno *spazio lineare* di dimensione n, intendendo con ciò esattamente quanto prescritto dalla tesi del Teorema 1.

Occorre notare che, in generale, non esiste la possibilità di esprimere esplicitamente le funzioni $y_1 \dots y_n$ in termini dei coefficienti $a_1 \dots a_n$; in altri termini, per le equazioni differenziali lineari di ordine n, con $n \geq 2$, non c'è una formula risolutiva analoga a quella esistente per le equazioni lineari del primo ordine.

Esempio

L'equazione

$$y'' + y = 0 \tag{4}$$

è risolta da $y_1(x) = \operatorname{sen} x, y_2(x) = \cos x$, che sono linearmente indipendenti. Dato che l'equazione (4) è del secondo ordine, dal Teorema 1 sappiamo che il suo integrale generale ha dimensione 2, e quindi, avendo già trovato due soluzioni linearmente indipendenti, sappiamo che tutte le soluzioni della (4) sono combinazione lineare di y_1 e y_2. Pertanto l'integrale generale della (4) è dato da

$$y(x) = c_1 \operatorname{sen} x + c_2 \cos x \,. \tag{5}$$

Osserviamo che non c'è un unico modo di esprimere la base dell'integrale generale; ad esempio, le due funzioni $u_1(x) = \cos x + \operatorname{sen} x, u_2(x) = \cos x - \operatorname{sen} x$ sono due soluzioni linearmente indipendenti della (4). Anche loro generano l'integrale generale (5), perchè tutte le possibili combinazioni lineari di u_1 e u_2 ricoprono esattamente lo stesso insieme di tutte le possibili combinazioni lineari di y_1 e y_2.

Esempio

L'equazione

$$y''' = 0 \tag{6}$$

è risolta da $y_1(x) = 1$, $y_2(x) = x$, $y_3(x) = x^2$, tre funzioni linearmente indipendenti. Poichè la (6) è un'equazione del terzo ordine, il suo integrale generale è dato da

$$y(x) = c_1 + c_2 x + c_3 x^2$$

ovvero tutti i possibili polinomi di secondo grado.

Nel seguito sarà utile riscrivere l'equazione (1) ricorrendo al concetto di *operatore differenziale*. Ricordiamo che con il simbolo $C^n(I)$ indichiamo lo spazio delle funzioni definite su I a valori reali o complessi derivabili n volte con derivata n–sima continua.

Definiamo l'operatore differenziale L nel modo seguente:

$$L[u] = u^{(n)} + a_1(x)u^{(n-1)} + \ldots + a_{n-1}u' + a_n(x)u \quad \forall u \in C^n(I)\,. \tag{7}$$

In pratica, L è una trasformazione fra funzioni: L associa a ogni funzione u definita sull'intervallo I e derivabile n volte la funzione continua $L[u]$ definita dalla (7). Evidentemente, con questo simbolo, l'equazione (1) può molto più brevemente essere riscritta come $L[y] = 0$.

Osserviamo che L è *lineare*, cioè commuta con le combinazioni lineari: è infatti ovvio che $L[c_1u_1 + c_2u_2] = c_1L[u_1] + c_2L[u_2]$ per ogni scelta delle costanti c_1, c_2, per ogni coppia di funzioni $u_1, u_2 \in C^n(I)$.

A ogni equazione differenziale lineare di ordine n resta associato uno e un solo operatore differenziale lineare di ordine n, e viceversa. Ad esempio, l'operatore associato all'equazione $y'' + y = 0$ è $L[u] = u'' + u$, mentre l'operatore associato all'equazione $y''' = 0$ è $L[u] = u'''$.

Vogliamo ora studiare come si modifica l'integrale generale di un'equazione lineare quando passiamo dal caso omogeneo al caso non omogeneo. Sia $f(x)$ una funzione continua su I a valori reali o complessi, e consideriamo l'equazione

$$L[y] = y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \ldots + a_{n-1}y' + a_n(x)y = f(x) \tag{8}$$

La presenza del termine noto $f(x)$ differenzia la (8) (equazione non omogenea) dalla (1), in cui $f(x) \equiv 0$. La (1) prende il nome di *equazione omogenea associata* alla (8).

Vale il seguente

Teorema 2 *Siano $y_1, y_2, \ldots, y_n$ n soluzioni linearmente indipendenti dell'equazione omogenea associata* (1)*, e sia $\overline{y}$ una qualsiasi soluzione dell'equazione non omogenea* (8)*. Allora l'integrale generale dell'equazione* (8) *è dato da*

$$y(x) = \overline{y}(x) + c_1y_1(x) + c_2y_2(x) + \ldots + c_ny_n(x) \tag{9}$$

al variare di $c_1, c_2, \ldots, c_n$ fra le costanti.

Dim. Dire che l'integrale generale della (8) è espresso dalla (9) vuol dire che le funzioni nella (9) sono *tutte e sole* le soluzioni della (8). Pertanto, dobbiamo mostrare che:

a) una qualsiasi funzione y espressa dalla (9) è soluzione della (8);
b) ogni soluzione della (8) è espressa nella forma (9).

Verifichiamo a). Sia $y = \overline{y} + c_1y_1 + c_2y_2 + \ldots + c_ny_n$. Essendo L lineare, e ricordando che le y_i sono soluzioni dell'equazione omogenea associata (1), mentre $\overline{y}$ è soluzione della (8), abbiamo

$$L[\overline{y} + c_1y_1 + c_2y_2 + \ldots + c_ny_n] = L[\overline{y}] + c_1L[y_1] + \ldots c_nL[y_n] = L[\overline{y}] = f\,.$$

Verifichiamo b). Sia y una soluzione della (8), dunque $L[y] = f$. Essendo anche $L[\overline{y}] = f$, si ha

$$L[y - \overline{y}] = L[y] - L[\bar{[}y] = f - f = 0\,.$$

Pertanto, $y - \overline{y}$ è una soluzione dell'equazione omogenea associata (1), e dunque, in base al Teorema 1, è della forma (3), cioè esistono costanti $c_1, c_2, \ldots, c_n$ tali che

$$y - \overline{y} = c_1y_1 + c_2y_2 + \ldots + c_ny_n \Rightarrow y = \overline{y} + c_1y_1 + c_2y_2 + \ldots + c_ny_n \qquad \blacksquare$$

Il significato del Teorema 2 è che l'integrale generale di un'equazione non omogenea si ottiene addizionando a quello dell'omogenea associata una *qualsiasi* soluzione della non omogenea. La scelta della particolare soluzione $\overline{y}$ della non omogenea da inserire nella formula (9) è perfettamente irrilevante, dato che, come abbiamo visto nella verifica b) della dimostrazione appena conclusa, *due qualsiasi soluzioni dell'equazione non omogenea differiscono fra loro per una soluzione dell'omogenea associata.*

Osserviamo che l'equazione (1), che talvolta prende il nome di *equazione omogenea associata* alla (8), può evidentemente essere anche considerata come un caso particolare della (8), cioè la (1) non è altro che la (8) con il termine noto f identicamente nullo. Coerentemente, la formula (9) contiene, come caso particolare, la formula (3): se il termine noto è identicamente nullo, allora $\overline{y} \equiv 0$, e la (8) diventa la (3).

Esempio

Consideriamo l'equazione $y' = f$. Il suo integrale generale è dato dall'insieme delle primitive di f sull'intervallo I. L'omogenea associata è $y' = 0$, le cui soluzioni sono le funzioni costanti. Utilizzando il Teorema 2 in questo esempio particolare, ritroviamo concetti ben noti: le primitive di f (cioè l'integrale della non omogenea) sono uguali a una qualsiasi primitiva più tutte le possibili costanti additive (ovvero l'integrale dell'omogenea associata). Due primitive (ovvero due soluzioni della non omogenea) differiscono fra loro per una costante (ovvero per una soluzione dell'omogenea associata).

Esempio

Determiniamo l'integrale generale dell'equazione

$$y'' + y = x \tag{10}$$

L'equazione omogenea associata è la (4), il cui integrale generale è espresso dalla (5). Una soluzione particolare della (10) è evidentemente $\overline{y}(x) = x$. Pertanto l'integrale generale della (10) è dato da

$$y(x) = x + c_1 \operatorname{sen} x + c_2 \cos x$$

al variare di c_1, c_2 nelle costanti.

Mentre, come si è detto sopra, non è possibile determinare esplicitamente una base dell'integrale generale dell'equazione omogenea associata, è sempre possibile determinare una soluzione particolare $\overline{y}$ dell'equazione non omogenea in termini della base $y_1, y_2, \ldots, y_n$. Esiste un metodo, che consiste nel cercare $\overline{y}$ nella forma

$$\overline{y}(x) = c_1(x)y_1(x) + c_2(x)y_2(x) + \ldots + c_n(x)y_n(x)$$

dove, stavolta, $c_1(x), c_2(x), \ldots c_n(x)$ non sono più costanti, ma funzioni variabili opportunamente scelte (da qui il nome di *metodo della variazione delle costanti arbitrarie*).

Noi non illustreremo questo metodo, anche perchè la conoscenza esplicita delle $y_i(x)$, come si è appena ripetutto, in generale manca. C'è però un caso particolare, ma molto importante, in cui è possibile determinare esplicitamente le funzioni $y_1(x), y_2(x), \ldots, y_n(x)$, ed è il caso in cui i coefficienti $a_1(x), a_2(x), \ldots a_n(x)$ sono *costanti*. A questa situazione è dedicata la sezione *Equazioni differenziali lineari a coefficienti costanti*.

Il problema di Cauchy

Abbiamo visto che l'equazione (8) ha infinite soluzioni, fornite dalla (9). Le soluzioni si ottengono al variare di $c_1, \ldots, c_n$ fra tutte le possibili costanti; si usa dire, in situazioni del genere, che ci sono n *gradi di libertà*. È pertanto ragionevole ipotizzare che, assegnando n condizioni aggiuntive alla (8), ci possa essere una e una sola soluzione y che verifichi la (8) più le n condizioni aggiuntive.

In realtà ciò non è sempre vero, e dipende strettamente dal tipo di condizioni aggiuntive. Noi esamineremo qui di seguito solo un tipo di condizioni aggiuntive, le cosiddette *condizioni di Cauchy*.

Assegnare le condizioni di Cauchy per l'equazione (8) vuol dire, per definizione, fissare un punto $x_0 \in I$, dove – ricordiamo – I è l'intervallo in cui sono definiti coefficienti e soluzioni dell'equazione differenziale, e prescrivere nel punto x_0 gli n valori $y(x_0), y'(x_0), \ldots, y^{(n-1)}(x_0)$.

L'insieme dell'equazione (8) e delle condizioni di Cauchy prende il nome di *problema di Cauchy*. Dunque un problema di Cauchy per un'equazione differenziale lineare di ordine n ha la forma seguente:

$$\begin{cases} L[y] = y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \ldots + a_{n-1}y' + a_n(x)y = f(x) \\ y(x_0) = y_0 \\ y'(x_0) = y_1 \\ \ldots \\ y^{(n-1)}(x_0) = y_{n-1} \end{cases} \tag{11}$$

dove $x_0 \in I$, $y_0, y_1, \ldots, y_{n-1}$ sono numeri arbitrariamente assegnati, che prendono anche il nome di *valori iniziali*.

Per il problema di Cauchy (11) sussiste il seguente risultato, che non dimostreremo:

Teorema 3 *Il problema di Cauchy* (11) *ha una e una sola soluzione y per ogni scelta di $x_0 \in I$ e dei valori iniziali $y_0, y_1, \ldots, y_{n-1}$.*

Equazioni differenziali lineari a coefficienti costanti

Il caso omogeneo

Consideriamo l'equazione differenziale lineare omogenea a coefficienti costanti

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \ldots + a_{n-1} y' + a_n y = 0 \tag{1}$$

e sia L l'operatore differenziale associato all'equazione (1),

$$L[y] = y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \ldots + a_{n-1} y' + a_n y \,. \tag{2}$$

Il polinomio $P(z)$, definito su tutto il piano complesso come

$$P(z) = z^n + a_1 z^{(n-1)} + \ldots + a_{n-1} z + a_n \tag{3}$$

prende il nome di *polinomio associato all'operatore* L, o anche di *simbolo dell'operatore* L. Confrontando la (2) e la (3), si vede subito che il polinomio P associato a L si ottiene da L sostituendo formalmente i monomi alle derivazioni.

Vogliamo determinare una base dell'integrale generale della (1). A tale scopo, sia $\lambda \in \mathbb{C}$ e calcoliamo $L[e^{\lambda x}]$. Risulta

$$L[e^{\lambda x}] = \lambda^n e^{\lambda x} + a_1 \lambda^{n-1} e^{\lambda x} + \ldots + a_{n-1} \lambda e^{\lambda x} + a_n e^{\lambda x} = P(\lambda) e^{\lambda x} \,; \tag{4}$$

pertanto la funzione $y = e^{\lambda x}$ è soluzione di (1) se e solo se $P(\lambda) = 0$, vale a dire se e solo se λ è una radice del polinomio associato all'operatore L.

Osservando che il grado di P è n e ricordando che, in base al teorema fondamentale dell'algebra, un polinomio di grado n ha n radici (contate con la loro molteplicità), possiamo concludere che, se P ha n radici *differenti* $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$, le n funzioni linearmente indipendenti

$$e^{\lambda_1 x}, e^{\lambda_2 x}, \ldots, e^{\lambda_n x} \tag{5}$$

costituiscono una base per l'integrale generale della (1).

Esempio

Determiniamo l'integrale generale dell'equazione

$$y^{(3)} + y'' - 2y' = 0$$

Il polinomio associato $P(z) = z^3 + z^2 - 2z$ ha tre radici distinte, $z = -2$, $z = 0$, $z = 1$, a cui corrispondono tre soluzioni linearmente indipendenti e^{-2x}, 1, e^x; pertanto l'integrale generale dell'equazione proposta è dato da

$$y(x) = c_1 e^{-2x} + c_2 + c_3 e^x \,.$$

Abbiamo dunque risolto il nostro problema nel caso in cui il simbolo di L ha radici distinte; resta da esaminare la situazione in cui una o più radici di P sono multiple. In questo caso, le radici distinte sono in numero inferiore a n; dette $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_h$ le h radici distinte di P, con $h < n$, la tabella (5) di soluzioni linearmente indipendenti della (1) si riduce a h funzioni, e ne dobbiamo determinare altre $n-h$ indipendenti, per costruire una base dell'integrale generale della (1).

Definiamo $m_1, m_2, \ldots, m_h$ le molteplicità rispettivamente di $\lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_h$, di modo che – in base al teorema di Ruffini – vale la scomposizione

$$P(z) = (z-\lambda_1)^{m_1}(z-\lambda_2)^{m_2}\ldots(z-\lambda_h)^{m_h} \tag{6}$$

Alcuni fra i numeri m_i possono anche essere uguali a 1, il che vuol dire che le corrispondenti radici sono semplici (hanno cioè molteplicità pari a 1), ma la somma di tutte le molteplicità deve essere pari a n, come mostra la (6), dato che i gradi dei polinomi ai due membri dell'uguaglianza devono coincidere.

Mostreremo ora come ogni radice λ_j con molteplicità m_j contribuisca esattamente con m_j soluzioni linearmente indipendenti all'integrale generale della (1), di modo che, alla fine, avremo $m_1 + m_2 + \ldots + m_h = n$ soluzioni linearmente indipendenti, risolvendo completamente il problema di determinare l'integrale generale della (1).

Osserviamo preliminarmente che una radice λ_j di P ha molteplicità m_j se e solo se λ_j è radice di $P, P', \ldots, P^{(m_j-1)}$, cioè è radice di P e delle sue derivate sino all'ordine $m_j - 1$. Questo si ottiene facilmente da (6). Ad esempio, ragioniamo su λ_1, supponendo che abbia una molteplicità $m_1 > 1$.

Sappiamo che λ_1 è una radice di P, e infatti λ_1 annulla il membro di destra di (6). Deriviamo ora la (6), ponendo $Q(z) = (z-\lambda_2)^{m_2}\ldots(z-\lambda_h)^{m_h}$. Risulta

$$P'(z) = m_1(z-\lambda_1)^{(m_1-1)}Q(z) + (z-\lambda_1)^{m_1}Q'(z) \tag{7}$$

e dunque, a condizione che $m_1 - 1 \neq 0$, ovvero $m_1 \geq 2$, si ha che λ_1 è radice anche di $P'(z)$.

Ovviamente questo discorso si può iterare; se $m_1 \geq 3$, derivando a sua volta la (7) abbiamo

$$P''(z) = m_1(m_1-1)(z-\lambda_1)^{m_1-2}Q(z) + 2m_1(z-\lambda_1)^{(m_1-1)}Q'(z) + (z-\lambda_1)^{m_1}Q''(z)$$

da cui si vede che λ_1 è radice anche di $P''(z)$, e così via.

Fatta questa premessa, ragioniamo ancora (per fissare le idee) su λ_1, e supponiamo che $m_1 \geq 2$. Mostriamo che λ_1 contribuisce alla base dell'integrale generale di (1) esattamente con m_1 funzioni.

Già sappiamo che $L[e^{\lambda_1 x}] = 0$. Calcoliamo ora $L[xe^{\lambda_1 x}]$. Posto $y = xe^{\lambda_1 x}$, si ha

$$\begin{aligned}
y' &= e^{\lambda_1 x} + \lambda_1 x e^{\lambda_1 x} \\
y'' &= 2\lambda_1 e^{\lambda_1 x} + \lambda_1^2 x e^{\lambda_1 x} \\
y^{(3)} &= 3\lambda_1^2 e^{\lambda_1 x} + \lambda_1^3 x e^{\lambda_1 x} = \\
&\ldots \\
y^{(n)} &= n\lambda_1^{(n-1)} e^{\lambda_1 x} + \lambda_1^n x e^{\lambda_1 x}
\end{aligned}$$

da cui, ricordando che λ_1 è radice non solo di P, ma anche di P', dato che la sua molteplicità è $m_1 \geq 2$, si ha

(8)
$$\begin{aligned} L[xe^{\lambda_1 x}] &= e^{\lambda_1 x}(n\lambda_1^{(n-1)} + a_1(n-1)\lambda_1^{(n-2)} + \ldots + a_{n-1}) + \\ &\quad + xe^{\lambda_1 x}(\lambda_1^n + a_1\lambda_1^{n-1} + \ldots + a_{n-1}\lambda_1 + a_n) = P'(\lambda_1)e^{\lambda_1 x} + P(\lambda_1)xe^{\lambda_1 x} = 0\,. \end{aligned}$$

Abbiamo così dimostrato che, in corrispondenza della radice λ_1 per la quale stiamo ipotizzando una molteplicità $m_1 \geq 2$, ci sono due soluzioni indipendenti di (1): $e^{\lambda_1 x}$ e $xe^{\lambda_1 x}$.

Questo procedimento si può iterare per molteplicità ancora maggiori. Infatti, se calcoliamo l'operatore L nelle funzioni $x^2e^{\lambda_1 x}$, $x^3e^{\lambda_1 x}$, $x^4e^{\lambda_1 x}$ ... otteniamo, con calcoli analoghi a quelli sviluppati sopra,

$$\begin{aligned} L[x^2e^{\lambda_1 x}] &= (P''(\lambda_1) + 2P'(\lambda_1)x + P(\lambda_1)x^2)e^{\lambda_1 x} \\ L[x^3e^{\lambda_1 x}] &= (P^{(3)}(\lambda_1) + 3P''(\lambda_1)x + 3P'(\lambda_1)x^2 + P(\lambda_1)x^3)e^{\lambda_1 x} \\ L[x^4e^{\lambda_1 x}] &= (P^{(4)}(\lambda_1) + 4P^{(3)}(\lambda_1)x + 6P''(\lambda_1)x^2 + 4P'(\lambda_1)x^3 + P(\lambda_1)x^4)e^{\lambda_1 x} \\ &\ldots \end{aligned} \tag{9}$$

(si noti nella (9) la comparsa dei coefficienti binomiali). Pertanto, $L[x^2e^{\lambda_1 x}] = 0$ se e solo se contemporaneamente $P(\lambda_1) = 0$, $P'(\lambda_1) = 0$, $P''(\lambda_1) = 0$, cioè se e solo se λ_1 ha molteplicità $m_1 \geq 3$. Analogamente, $L[x^3e^{\lambda_1 x}] = 0$ se e solo se contemporaneamente $P(\lambda_1) = P'(\lambda_1) = P''(\lambda_1) = P^{(3)}(\lambda_1) = 0$, cioè se e solo se λ_1 ha molteplicità $m_1 \geq 4$.

In generale, $L[x^he^{\lambda_1 x}] = 0$ se e solo se $m_1 \geq h+1$. Pertanto, abbiamo ottenuto che la radice λ_1 (e ovviamente questo discorso vale per tutte le altre radici) contribuisce alla base dell'integrale generale dell'equazione (1) esattamente con un numero di funzioni linearmente indipendenti pari alla sua molteplicità: se λ_1 è semplice, contribuisce con la sola $e^{\lambda_1 x}$, altrimenti contribuisce con

$$e^{\lambda_1 x}, xe^{\lambda_1 x}, x^2e^{\lambda_1 x}, \ldots, x^{m_1-1}e^{\lambda_1 x}\,.$$

Siamo quindi pervenuti a dimostrare il seguente

Teorema 1 *L'integrale generale dell'equazione (1) è generato dalle seguenti n funzioni linearmente indipendenti:*

$$\begin{aligned} &e^{\lambda_1 x}, xe^{\lambda_1 x}, x^2e^{\lambda_1 x}, \ldots, x^{m_1-1}e^{\lambda_1 x} \\ &e^{\lambda_2 x}, xe^{\lambda_2 x}, x^2e^{\lambda_2 x}, \ldots, x^{m_2-1}e^{\lambda_2 x} \\ &\ldots \\ &e^{\lambda_h x}, xe^{\lambda_h x}, x^2e^{\lambda_h x}, \ldots, x^{m_h-1}e^{\lambda_h x} \end{aligned} \tag{10}$$

dove $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_h$ sono le radici del polinomio caratteristico dell'operatore L associato alla (1)*, con molteplicità rispettivamente $m_1, m_2, \ldots, m_h$.*

Esempio

Determiniamo l'integrale generale dell'equazione

$$y'' + 6y' + 9y = 0$$

Il polinomio associato $P(z) = z^2 + 6z + 9$ ha una radice $z = 3$ con molteplicità 2, dato che $P(z) = (z+3)^2$. A questa radice doppia corrispondono due soluzioni linearmente indipendenti e^{-3x}, xe^{-3x}; pertanto l'integrale generale dell'equazione proposta è dato da

$$y(x) = (c_1 + c_2 x)e^{-3x} .$$

Abbiamo dunque risolto il problema di determinare l'integrale generale dell'equazione omogenea (1): la tabella (10) fornisce n funzioni linearmente indipendenti, e le soluzioni di (1) sono tutte e sole le combinazioni lineari delle funzioni in (10).

Osserviamo che, anche nel caso particolare in cui i coefficienti a_h della (1) siano tutti numeri reali, e quindi il polinomio P sia a coefficienti reali, la tabella (10) – in generale – è costituita da funzioni a valori complessi: infatti, le radici $\lambda_1, \ldots, \lambda_h$ di P possono essere numeri complessi anche nel caso in cui P abbia coefficienti reali. È il caso, però, di osservare che, *se l'equazione* (1) *ha coefficienti reali, allora è possibile trovare una base dell'integrale generale di* (1) *costituita da funzioni a valori reali*.

Per verificare questa affermazione occorre prima dimostrare un risultato che riguarda le radici di un polinomio a coefficienti reali. Stabiliamo dapprima alcuni concetti preliminari.

Dato $z = a + ib$ un numero complesso, si dice *coniugato* di z, e si denota col simbolo $\overline{z}$, il numero complesso $\overline{z} = a - ib$. In altre parole, il coniugato di z è un numero complesso che ha stessa parte reale di z e parte immaginaria opposta a quella di z. Ovviamente, un numero complesso coincide col proprio coniugato se e solo se la sua parte immaginaria è nulla, cioè se è un numero reale. Altrettanto ovviamente, il coniugato di $\overline{z}$ è z.

Posto $z_1 = a_1 + ib_1$, $z_2 = a_2 + ib_2$, si ha

$$\begin{aligned} z_1 + z_2 &= (a_1 + ib_1) + (a_2 + ib_2) = (a_1 + a_2) + i(b_1 + b_2) \\ z_1 z_2 &= (a_1 + ib_1)(a_2 + ib_2) = (a_1 a_2 - b_1 b_2) + i(a_1 b_2 + a_2 b_1) \end{aligned}$$

da cui

$$\begin{aligned} \overline{z_1} + \overline{z_2} &= (a_1 - ib_1) + (a_2 - ib_2) = (a_1 + a_2) - i(b_1 + b_2) = \overline{z_1 + z_2} \\ \overline{z_1 z_2} &= (a_1 - ib_1)(a_2 - ib_2) = (a_1 a_2 - b_1 b_2) - i(a_1 b_2 + a_2 b_1) = \overline{z_1 z_2} \end{aligned}$$

cioè *il coniugato della somma è la somma dei coniugati, il coniugato del prodotto è il prodotto dei coniugati*. In altre parole, l'operazione di coniugio commuta con somma e prodotto.

Siamo ora in grado di dimostrare la seguente

Proposizione 1 *Sia $P(z) = z^n + a_1 z^{n-1} + \ldots + a_{n-1} z + a_n$ un polinomio a coefficienti* <u>reali</u>*. Allora, $\lambda \in \mathbb{C}$ è radice di P se e solo se $\overline{\lambda}$ è radice di P.*

Dim. Sia $P(\lambda) = 0$. Allora

$$\lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + \ldots + a_{n-1}\lambda + a_n = 0\,. \tag{11}$$

Coniughiamo ambo i membri della (11); ricordando che il coniugato di 0 è 0, che il coniugio commuta con somma e prodotto e che i coefficienti di P sono reali, e quindi coincidono con i propri coniugati, si ha

$$\overline{\lambda}^n + a_1 \overline{\lambda}^{n-1} + \ldots + a_{n-1}\overline{\lambda} + a_n = 0 \qquad \blacksquare$$

Dunque, un polinomio P a coefficienti reali può avere radici complesse, ma, in tal caso, queste sono a due a due coniugate.

Sia ora P il polinomio caratteristico dell'operatore L associato alla (1), e supponiamo che la (1) (e quindi P) abbia coefficienti reali. In base a quanto appena dimostrato, possiamo catalogare le radici di P come un gruppo di radici reali, denotate come $\lambda_1, \ldots, \lambda_p$, con molteplicità rispettivamente $m_1, \ldots, m_p$, e un gruppo di radici complesse a due a due coniugate, denotate come $\sigma_1, \overline{\sigma_1}, \ldots, \sigma_r, \overline{\sigma_r}$, con molteplicità rispettivamente $\mu_1, \ldots, \mu_r$.

I due gruppi di radici possono essere non vuoti, oppure uno dei due può essere vuoto (cioè il polinomio può avere solo radici reali, o solo radici complesse coniugate, o entrambe le tipologie); ovviamente, essendo n il grado di P, deve comunque risultare $m_1 + \ldots + m_p + 2\mu_1 + \ldots + 2\mu_r = n$ (si noti il fattore 2 che moltiplica le molteplicità delle radici complesse coniugate, perchè ogni μ_i è la molteplicità di una *coppia* di radici).

Vogliamo costruire, come preannunciato, una base dell'integrale generale della (1) fatta esclusivamente di funzioni a valori reali. Le radici reali λ_i generano, come spiegato sopra, funzioni a valori reali della forma $e^{\lambda_i x}$ e, in caso di molteplicità maggiore di 1, $xe^{\lambda_i x}$ e così via. Una radice complessa $\sigma_j = \alpha_j + i\beta_j$ genera una funzione a valori complessi della forma

$$e^{\sigma_j x} = e^{\alpha_j x}(\cos \beta_j x + i \operatorname{sen} \beta_j x) \tag{12}$$

e, se la sua molteplicità è maggiore di 1, genera anche le funzioni della forma $xe^{\sigma_j x}$ e così via. Ma ad ogni radice complessa σ_j corrisponde una radice coniugata $\overline{\sigma_j} = \alpha_j - i\beta_j$, che genera

$$e^{\overline{\sigma_j} x} = e^{\alpha_j x}(\cos \beta_j x - i \operatorname{sen} \beta_j x)\,. \tag{13}$$

Prendendo combinazioni lineari di (12) e (13), si possono isolare i termini con il solo coseno o con il solo seno. Più precisamente, se $\sigma_j, \overline{\sigma_j}$ sono due radici complesse coniugate di P, allora le due funzioni indicate in (12) e (13) sono soluzione della (1), ma anche le combinazioni lineari

$$\frac{1}{2}(e^{\sigma_j x} + e^{\overline{\sigma_j} x}) = e^{\alpha_j x} \cos \beta_j x\,, \qquad \frac{1}{2i}(e^{\sigma_j x} - e^{\overline{\sigma_j} x}) = e^{\alpha_j x} \operatorname{sen} \beta_j x \tag{14}$$

sono soluzioni linearmente indipendenti della (1), e, stavolta, sono a valori reali. Abbiamo così osservato che la coppia di radici complesse coniugate $\sigma_j, \overline{\sigma_j}$ genera due funzioni, soluzioni linearmente indipendenti di (1), a valori reali, espresse nella (14). Se poi la coppia $\sigma_j, \overline{\sigma_j}$ ha molteplicità 2, genera anche le altre due soluzioni $xe^{\sigma_j x}, xe^{\overline{\sigma_j} x}$ da cui, con le stesse combinazioni lineari della (14), ricaviamo altre due soluzioni a valori reali $xe^{\alpha_j x}\cos\beta_j x, xe^{\alpha_j x}\operatorname{sen}\beta_j x$, e così via per molteplicità superiori. In definitiva, abbiamo il seguente

Teorema 2 *Supponiamo che l'equazione* (1) *abbia coefficienti reali. Allora il suo integrale generale è generato dalle seguenti n funzioni linearmente indipendenti a valori reali:*

$$
\begin{aligned}
&e^{\lambda_1 x}, xe^{\lambda_1 x}, x^2 e^{\lambda_1 x}, \dots, x^{m_1-1}e^{\lambda_1 x}\\
&\dots\\
&e^{\lambda_p x}, xe^{\lambda_p x}, x^2 e^{\lambda_p x}, \dots, x^{m_p-1}e^{\lambda_p x}\\
&e^{\alpha_1 x}\cos\beta_1 x, xe^{\alpha_1 x}\cos\beta_1 x, \dots, x^{\mu_1-1}e^{\alpha_1 x}\cos\beta_1 x\\
&e^{\alpha_1 x}\operatorname{sen}\beta_1 x, xe^{\alpha_1 x}\operatorname{sen}\beta_1 x, \dots, x^{\mu_1-1}e^{\alpha_1 x}\operatorname{sen}\beta_1 x\\
&\dots\\
&e^{\alpha_r x}\cos\beta_r x, xe^{\alpha_r x}\cos\beta_r x, \dots, x^{\mu_r-1}e^{\alpha_r x}\cos\beta_r x\\
&e^{\alpha_r x}\operatorname{sen}\beta_r x, xe^{\alpha_r x}\operatorname{sen}\beta_r x, \dots, x^{\mu_r-1}e^{\alpha_r x}\operatorname{sen}\beta_r x
\end{aligned}
\tag{15}
$$

dove $\lambda_1 \dots, \lambda_p$ sono le radici reali e $\alpha_1 \pm i\beta_1, \dots, \alpha_r \pm i\beta_r$ le radici complesse coniugate del polinomio caratteristico dell'operatore L associato alla (1)*, con molteplicità rispettivamente $m_1, \dots, m_p$ e $\mu_1, \dots, \mu_r$.*

Esempio

Determiniamo l'integrale generale dell'equazione

$$y^{(4)} + 4y = 0 \tag{15}$$

Il polinomio associato $P(z) = z^4 + 4$ è di quarto grado; per risolvere l'equazione $P(z) = 0$, che è in forma biquadratica, poniamo $w = z^2$. Si ha $w^2 + 4 = 0$, da cui $w = \pm 2i$. Ora, dobbiamo risolvere le due equazioni

$$z^2 = 2i\,; \qquad z^2 = -2i\,.$$

Cominciamo con la prima; poniamo $z = a + ib$, e risolviamo $(a + ib)^2 = 2i$. Si ha

$$a^2 - b^2 + 2i\,ab = 2i \qquad \text{da cui} \quad \begin{cases} a^2 - b^2 = 0 \\ ab = 1 \end{cases}$$

che ha soluzioni $a = b = 1, a = b = -1$. Pertanto $z_1 = 1 + i$, $z_2 = -1 - i$ sono due radici di $P(z)$. Le altre due si ricavano analogamente risolvendo $z^2 = -2i$, oppure, ancor più semplicemente, ricordando che, in base alla Proposizione 1, anche $z_3 = \overline{z_1} = 1 - i$ e $z_4 = \overline{z_2} = -1 + i$ sono radici di di $P(z)$.

In definitiva, il polinomio di quarto grado $P(z)$ ha come radici le due coppie di numeri complessi coniugati $1 \pm i$, $-1 \pm i$. Sono quattro radici semplici, cui corrispondono le quattro soluzioni linearmente indipendenti della (15) $y(x) = e^x \cos x$, $e^x \operatorname{sen} x$, $e^{-x} \cos x$, $e^{-x} \operatorname{sen} x$. Pertanto l'integrale generale dell'equazione (15) è dato da

$$y(x) = e^x (c_1 \cos x + c_2 \operatorname{sen} x) + e^{-x} (c_3 \cos x + c_4 \operatorname{sen} x) \,.$$

Esempio

Determiniamo l'integrale generale dell'equazione

$$y^{(4)} + 2y'' + y = 0 \tag{16}$$

Il polinomio associato è $P(z) = z^4 + 2z^2 + 1 = (z^2+1)^2$, che ha radici $z = \pm i$, ciascuna con molteplicità pari a 2. Pertanto l'integrale generale dell'equazione (16) è dato da

$$y(x) = c_1 \operatorname{sen} x + c_2 \cos x + c_3 x \operatorname{sen} x + c_4 x \cos x \,.$$

Il caso non omogeneo

Studiamo ora il caso di un'equazione lineare di ordine n a coefficienti costanti non omogenea, vale a dire

$$L[y] = y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \ldots + a_{n-1} y' + a_n y = f(x) \,. \tag{17}$$

Come già sappiamo dalla teoria generale delle equazioni differenziali lineari, l'integrale generale della (17) si ottiene dall'integrale generale della (1) aggiungendo una qualsiasi soluzione particolare $\overline{y}$ della (17).

Abbiamo anche fatto un cenno all'esistenza di un metodo generale, detto *variazione delle costanti arbitrarie*, che, permette, noto l'integrale generale dell'equazione omogenea associata (1), di ottenere una soluzione particolare della (17), e quindi, in definitiva, di determinare l'integrale generale della (17).

Noi ci limiteremo a studiare il caso non omogeneo quando il termine noto $f(x)$ è di tipo particolare. Tratteremo il caso in cui $f(x) = Q(x) e^{\alpha x} \operatorname{sen} \beta x$ o $f(x) = Q(x) e^{\alpha x} \cos \beta x$, con α, β reali, dove $Q(x)$ è un qualsiasi polinomio, e forniremo un metodo per trovare una soluzione particolare $\overline{y}$ della (17).

Ovviamente rientrano in questa situazione i casi particolari in cui f è un polinomio (basta prendere $\alpha = \beta = 0$), oppure f è una funzione trigonometrica ($Q(x) \equiv 1, \alpha = 0$) o un esponenziale reale ($Q(x) \equiv 1, \beta = 0$).

$\underline{f(x) = Me^{\lambda x},\ P(\lambda) \neq 0}$

Sappiamo dalla (4) che $L[e^{\lambda x}] = P(\lambda)e^{\lambda x}$; pertanto, se $P(\lambda) \neq 0$, cioè se λ *non è* radice del polinomio caratteristico P, una soluzione particolare $\overline{y}$ della (17) è data da

$$\overline{y}(x) = \frac{M}{P(\lambda)} e^{\lambda x} .$$

Dunque, se $P(\lambda) \neq 0$, basta cercare una soluzione particolare $\overline{y}(x) = Ce^{\lambda x}$, sostituirla nella (17) e ricavare C. Questo metodo, ovviamente, va bene anche se λ è complesso; ad ogni modo, se $f(x) = Me^{\alpha x} \operatorname{sen} \beta x$ o $f(x) = Me^{\alpha x} \cos \beta x$, può essere desiderabile trovare una soluzione particolare a valori reali. In questo caso, adatteremo così la nostra ricerca: se $\alpha + i\beta$ *non è* radice del polinomio caratteristico P, cercheremo una soluzione particolare $\overline{y}(x) = Ae^{\alpha x} \operatorname{sen} \beta x + Be^{\alpha x} \cos \beta x$, sostituendola alla (17) e ricavando le costanti A e B.

Esempio

Determiniamo l'integrale generale dell'equazione

$$L[y] = y'' - y = 7e^{2x} \tag{18}$$

Il polinomio associato all'equazione (18) è $P(z) = z^2 - 1$, con radici $z = \pm 1$. pertanto l'integrale generale dell'omogenea associata alla (18) è dato da

$$y(x) = c_1 e^x + c_2 e^{-x} .$$

Cerchiamo ora una soluzione particolare della (18). Il termine noto è $f(x) = e^{2x}$, e 2 non è radice del polinomio associato. Pertanto cercheremo una soluzione particolare della forma $\overline{y} = Ce^{2x}$. Sostituendo nella (18) abbiamo

$$4Ce^{2x} - Ce^{2x} = 7e^{2x}$$

da cui $C = 7/3$. Pertanto l'integrale generale della (18) è dato da

$$y(x) = c_1 e^x + c_2 e^{-x} + \tfrac{7}{3} e^{2x} .$$

Esempio

Determiniamo l'integrale generale dell'equazione

$$L[y] = y'' + y = 3e^x \operatorname{sen} 2x \tag{19}$$

Il numero complesso $1 + 2i$ non è radice del polinomio $P(z) = z^2 + 1$ associato alla (19). Pertanto cerchiamo una soluzione particolare della forma

$$\overline{y}(x) = Ae^x \operatorname{sen} 2x + Be^x \cos 2x .$$

Sostituendo $\overline{y}$ nella (19) otteniamo

$$L[Ae^x \operatorname{sen} 2x + Be^x \cos 2x] = (4A - 2B)e^x \cos x - (2A + 4B)e^x \operatorname{sen} x = 3e^x \operatorname{sen} x$$

e quindi siamo ricondotti a risolvere il sistema algebrico

$$\begin{cases} 4A - 2B = 0 \\ -2A - 4B = 3 \end{cases} \quad \text{da cui} \quad A = -\frac{3}{10}, B = -\frac{3}{5}\,.$$

Pertanto una soluzione particolare della (19) è data da

$$\overline{y}(x) = -\tfrac{3}{10}e^x \operatorname{sen} 2x - \tfrac{3}{5}e^x \cos 2x$$

mentre l'integrale generale della (19) è

$$y(x) = c_1 \cos x + c_2 \operatorname{sen} x - \tfrac{3}{10}e^x \operatorname{sen} 2x - \tfrac{3}{5}e^x \cos 2x\,.$$

<u>$f(x) = Me^{\lambda x},\ P(\lambda) = 0$</u>

Nel caso in cui $f(x) = Me^{\lambda x}$ e λ è una radice del polinomio associato, ovviamente non è possibile avere una soluzione particolare della (17) della forma $\overline{y} = Ce^{\lambda x}$, dato che $L[Ce^{\lambda x}] = 0$. Dobbiamo allora ricordare che (si veda la (8)),

$$L[xe^{\lambda x}] = P'(\lambda)e^{\lambda x} + P(\lambda)xe^{\lambda x}\,.$$

Pertanto, se λ è una radice *semplice* di P, cioè di molteplicità pari a 1, risulta $P(\lambda) = 0, P'(\lambda) \neq 0$, e quindi una soluzione particolare $\overline{y}$ della (17) è data da

$$\overline{y}(x) = \frac{M}{P'(\lambda)}xe^{\lambda x}\,.$$

Dunque, se λ è una radice di $P(\lambda)$ di molteplicità pari a 1, basta cercare una soluzione particolare $\overline{y}(x) = Cxe^{\lambda x}$, sostituirla nella (17) e ricavare C.

Analogamente, considerando che (si veda la (9))

$$L[x^2e^{\lambda x}] = P''(\lambda)e^{\lambda x} + 2P(\lambda)xe^{\lambda x} + P(\lambda)x^2e^{\lambda x}$$

si ha che, se λ è una radice di $P(\lambda)$ di molteplicità pari a 2, e quindi $P(\lambda) = P'(\lambda) = 0$, $P''(\lambda) \neq 0$, risulta

$$L[x^2e^{\lambda x}] = P''(\lambda)e^{\lambda x}$$

e una soluzione particolare di (17) è data da

$$\overline{y}(x) = \frac{M}{P''(\lambda)}xe^{\lambda x}\,.$$

Dunque, se λ è una radice di $P(\lambda)$ di molteplicità pari a 2, basta cercare una soluzione particolare $\overline{y}(x) = Cx^2e^{\lambda x}$, sostituirla nella (17) e ricavare C.

Come ormai è chiaro, nel caso in cui λ è radice di P con molteplicità pari a k, basta cercare una soluzione particolare $\overline{y}(x) = Cx^ke^{\lambda x}$, sostituirla nella (17) e ricavare C.

Anche in questa situazione, così come nel caso in cui $P(\lambda) \neq 0$, il metodo esposto si applica anche se λ è complesso; d'altronde, come abbiamo osservato sopra, se $f(x) = Me^{\alpha x} \operatorname{sen} \beta x$ o $f(x) = Me^{\alpha x} \cos \beta x$, può essere desiderabile trovare una soluzione particolare a valori reali. In questo caso, adatteremo così la nostra ricerca: se $\alpha + i\beta$ è radice del polinomio caratteristico P con molteplicità k, cercheremo una soluzione particolare $\overline{y}(x) = x^k(Ae^{\alpha x} \operatorname{sen} \beta x + Be^{\alpha x} \cos \beta x)$, sostituendola nella (17) e ricavando le costanti A e B.

Esempio

Determiniamo l'integrale generale dell'equazione

$$y'' - y = 4e^x \tag{20}$$

Il termine noto è $f(x) = 4e^x$, e 1 è radice semplice del polinomio associato $P(z) = z^2 - 1$. Pertanto cercheremo una soluzione particolare della forma $\overline{y} = Cxe^x$. Sostituendo nella (20) abbiamo, dopo facili calcoli,

$$2Ce^x = 4e^x$$

da cui $C = 2$. Pertanto una soluzione particolare di (20) è data da $\overline{y} = 2xe^x$, mentre l'integrale generale dalla (20) è

$$y(x) = c_1e^x + c_2e^{-x} + 2xe^x\,.$$

Esempio

Determiniamo l'integrale generale dell'equazione

$$y^{(4)} + 2y'' + y = \operatorname{sen} x \tag{21}$$

Risulta $P(z) = z^4 + 2z^2 + 1 = (z^2 + 1)^2$, che ha radici $z = \pm i$, ciascuna con molteplicità pari a 2; pertanto, l'integrale generale dell'omogenea associata è dato da

$$y(x) = (c_1 + c_2x) \operatorname{sen} x + (c_3 + c_4x) \cos x\,.$$

Il termine noto $\operatorname{sen} x$ è parte dell'esponenziale complesso e^{ix}. Essendo i radice del polinomio associato con molteplicità pari a 2 e volendo determinare una soluzione particolare a valori reali, cerchiamo $\overline{y}(x)$ della forma $\overline{y}(x) = x^2(A \operatorname{sen} x + B \cos x)$. Sostituendo $\overline{y}(x)$ nella (21), dopo alcuni passaggi otteniamo

$$-8B \cos x - 8A \operatorname{sen} x = \operatorname{sen} x$$

da cui $B = 0, A = -1/8$. In definitiva, l'integrale generale della (21) risulta quindi

$$y(x) = (c_1 + c_2x) \operatorname{sen} x + (c_3 + c_4x) \cos x - \tfrac{1}{8}x^2 \operatorname{sen} x\,.$$

$\underline{f(x) = Q(x)e^{\lambda x},\ Q(x) \text{ polinomio}}$

Dalle discussioni precedenti, avendo studiato il comportamento di $L[x^h e^{\lambda x}]$, segue facilmente che, in questa situazione, occorre ricercare una soluzione particolare $\overline{y}$ della forma

$$\overline{y}(x) = R(x)e^{\lambda x}$$

se $P(\lambda) \neq 0$;

$$\overline{y}(x) = R(x)x^k e^{\lambda x}$$

se λ è radice di P di molteplicità pari a k, dove in entrambi i casi $R(x)$ è un generico polinomio dello stesso grado di $Q(x)$, i cui coefficienti vengono determinati sostituendo $\overline{y}(x)$ nella (17).

Analogamente a quanto visto in precedenza, se $f(x) = Q(x)e^{\alpha x} \operatorname{sen} \beta x$ o $f(x) = Q(x)e^{\alpha x} \cos \beta x$, cercheremo una soluzione particolare $\overline{y}$ della forma

$$\overline{y}(x) = R_1(x)e^{\alpha x} \operatorname{sen} \beta x + R_2(x)e^{\alpha x} \cos \beta x$$

se $\alpha + i\beta$ non è radice di P;

$$\overline{y}(x) = R_1(x)x^k e^{\alpha x} \operatorname{sen} \beta x + R_2(x)x^k e^{\alpha x} \cos \beta x$$

se $\alpha + i\beta$ è radice di P di molteplicità pari a k, dove in entrambi i casi $R_1(x), R_2(x)$ sono due generici polinomi dello stesso grado di $Q(x)$, i cui coefficienti vengono determinati sostituendo $\overline{y}(x)$ nella (17).

A conclusione, segnaliamo anche che, se il termine noto $f(x)$ della (17) si presenta nella forma $f(x) = f_1(x) + f_2(x) + \ldots + f_h(x)$, dove ciascuna delle $f_i(x)$ è di un tipo trattato in precedenza, la linearità dell'operatore L permette di procedere nel modo seguente: si cercano soluzioni particolari della (17) $\overline{y}_1, \overline{y}_2, \ldots, \overline{y}_h$ relative rispettivamente ai singoli termini noti $f_1, f_2, \ldots, f_h$; posto $\overline{y} = \overline{y}_1 + \overline{y}_2 + \ldots + \overline{y}_h$, si ha che $\overline{y}$ è soluzione della (17), in quanto

$$L[\overline{y}] = L[\overline{y}_1 + \ldots + \overline{y}_h] = L[\overline{y}_1] + \ldots + L[\overline{y}_h] = f_1(x) + \ldots + f_h(x) = f(x)\,.$$

Esempio

Determiniamo l'integrale generale dell'equazione

$$y^{(4)} - y = x \operatorname{sen} x \cos x \tag{22}$$

In questo caso $P(z) = z^4 - 1$, che ha radici $z = 1, -1, i, -i$. Pertanto l'integrale generale dell'omogenea associata è dato da

$$y(x) = c_1 e^x + c_2 e^{-x} + c_3 \operatorname{sen} x + c_4 \cos x\,.$$

Cerchiamo una soluzione particolare $\overline{y}$ della (22). Il termine noto $f(x) = x \operatorname{sen} x \cos x$ può essere riguardato come $f(x) = \frac{1}{2} x \operatorname{sen} 2x$. Dato che $2i$ non è radice di $P(z)$, cerchiamo una soluzione particolare della forma

$$\overline{y}(x) = (a_1 x + b_1) \operatorname{sen} 2x + (a_2 x + b_2) \cos 2x\,.$$

Dopo facili calcoli, otteniamo

$$\overline{y}^{(4)}(x) - \overline{y} = (-32a_1 + 15b_2 + 15a_2 x) \cos 2x + (32a_2 + 15b_1 + 15a_1 x) \operatorname{sen} 2x = \tfrac{1}{2} x \operatorname{sen} 2x$$

da cui ricaviamo

$$\begin{cases} 15a_1 = \frac{1}{2} \\ 15a_2 = 0 \\ -32a_1 + 15b_2 = 0 \\ 32a_2 + 15b_1 = 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} a_1 = \frac{1}{30} \\ a_2 = 0 \\ b_1 = 0 \\ b_2 = \frac{16}{225} \end{cases}$$

Pertanto l'integrale generale della (22) è dato da

$$y(x) = c_1 e^x + c_2 e^{-x} + c_3 \operatorname{sen} x + c_4 \cos x + \tfrac{1}{30} x \operatorname{sen} 2x + \tfrac{16}{225} \cos 2x$$

Prove d'esame

Matematica
prova d'esame dell'11/1/2005

Si consideri la funzione $f(x) : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ definita da

$$f(x) = 3x\sqrt{x} + x \log x + 5\sqrt{x} - \alpha x$$

dove α è un parametro reale.

– Si prolunghi $f(x)$ nell'origine ponendo $f(0) = 0$, e si dica se la funzione così ottenuta è derivabile o continua in $x = 0$;

– Si calcoli per quale valore di α risulta

$$\int_0^1 f(x)\, dx = 0\,;$$

– Si calcoli per quali valori di α la funzione $f(x)$ è iniettiva, e si disegni un grafico qualitativo di f al variare di α in $\mathbb{R}$;

– Si calcoli il numero delle radici di $f(x)$ al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$.

Matematica
prova d'esame del 25/1/2005

Si consideri la funzione $f(x) : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ definita da

$$f(x) = x\sqrt[3]{x}(2\log x - \alpha) + 4\sqrt[3]{x} - \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}$$

dove α è un parametro reale.

Si disegni, al variare di α, un grafico qualitativo di $f(x)$, calcolando, in particolare:

– i valori di α per i quali $f(x)$ è una bigezione;
– il numero delle radici di $f(x)$ al variare di α.

(Suggerimento: è conveniente studiare la funzione

$$g(x) = \frac{f'(x)}{\sqrt[3]{x}}\,;$$

per quanto riguarda il problema delle radici di $f(x)$, è opportuno disegnare il grafico di $f(x)$ per

$$\alpha = \overline{\alpha} = \sup\{\alpha : f(x) \text{ è una bigezione}\}\,;$$

occorre inoltre osservare che, se $\alpha_1 < \alpha_2$, il grafico di $f(x)$ per $\alpha = \alpha_1$ è al di sopra del grafico di $f(x)$ per $\alpha = \alpha_2$.)

Matematica
prova d'esame dell'8/2/2005

Si consideri la funzione $f(x) : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ definita da

$$f(x) = x^3 - 18x^2 + 66x\log x + 36\log x - \alpha(x-1) + 17$$

dove α è un parametro reale.

– Si calcoli per quali valori di α la funzione $f(x)$ è una bigezione;
– Si calcoli il numero delle radici di $f(x)$ per $\alpha \to +\infty$;
– Detto $\overline{\alpha}$ il valore di α per il quale risulta $f(3) = 0$, si calcoli il numero delle radici di $f(x)$ per $\alpha = \overline{\alpha}$.

(Suggerimento: Per rispondere al terzo quesito, è utile calcolare $f'(1)$ e $f'(3)$. Come valore numerico per $\log 3$ si può adottare il valore approssimato $\log 3 \simeq 1.1$ (valore reale: $\log 3 = 1.0986\ldots$))

Matematica
prova d'esame del 22/2/2005

Si consideri la funzione $f(x)$ definita da

$$f(x) = 2x \operatorname{arctg}(2x-1) + (x-1)\log(2x^2-2x+1) + \alpha x$$

dove α è un parametro reale.

– Detto X il campo di esistenza di $f(x)$, si calcoli per quali valori di α la funzione $f : X \to \mathbb{R}$ è una bigezione;

– Si calcoli il numero delle radici di $f(x)$ in X al variare di α.

Matematica
prova d'esame dell'8/3/2005

Si consideri la funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita da

$$f(x) = (x^4 + (12-3\alpha)x^2 + 24 + 3\alpha)\operatorname{senh} x - (4x^3 + (24-6\alpha)x)\cosh x$$

dove α è un parametro reale.

– Si calcoli per quali valori di α la funzione $f(x)$ risulta bigettiva;

– Si disegni un grafico *qualitativo* di $f(x)$ per gli α per i quali f *non è* iniettiva;

– Si calcoli il numero delle radici di $f(x)$ al variare di $\alpha \leq 0$;

– Si calcoli il numero delle radici di $f(x)$ per $\alpha \to +\infty$.

(Suggerimento: per rispondere all'ultima domanda, conviene calcolare $f(\sqrt{\alpha})$.)

Matematica
prova d'esame del 12/4/2005

Si consideri la funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita da

$$f(x) = x^3 + 3x^2 + \alpha x - 24x \operatorname{arctg} x + 12 \log \frac{1+x^2}{2} + 1$$

dove α è un parametro reale.

– Si calcoli per quali valori di α la funzione f è una bigezione;

– Si calcoli, al variare di α, il numero delle radici di $f(x)$,

(Suggerimento: Per rispondere alla seconda domanda, è opportuno:

– disegnare un grafico qualitativo di $f(x)$ al variare di α, e disegnare un grafico preciso per

$$\alpha = \overline{\alpha} = \inf\{\alpha : f(x) \text{ è una bigezione}\}\,;$$

– osservare che, quando $\alpha_1 < \alpha_2$, il grafico di f per $\alpha = \alpha_1$ è al di sotto del grafico di f per $\alpha = \alpha_2$ nella semiretta $\{x > 0\}$; il contrario accade nella semiretta $\{x < 0\}$, mentre il grafico resta fermo, al variare di α, in $x = 0$;

– osservare che esiste un α per il quale il grafico di $f(x)$ diventa tangente all'asse delle x nel punto $x = -1$, e calcolarlo.

Matematica
prova d'esame del 10/5/2005

Si consideri la funzione $f(x)$ definita da

$$f(x) = \alpha(x^2 - 1) - \log^2 x - (4x + 1) \log x$$

dove α è un parametro reale.

– Detto X il campo di esistenza di f, si determini per quali valori di α la funzione $f : X \to \mathbb{R}$ è una bigezione;

– Si disegni, al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$, un grafico qualitativo di f in X e, in particolare, si calcoli il numero delle radici di $f(x)$ al variare di α.

Suggerimento: Per risolvere questo problema, è utile studiare la funzione

$$g(x) = \frac{f'(x)}{x}\,.$$

Matematica
prova d'esame del 20/6/2005

Si consideri la funzione $f(x)$ definita da

$$f(x) = (x-1)(\log^2 x + \alpha) + (6x^3 - 4x^2 - 2x - 2)\log x - 5x^3 + 6x^2 - 1$$

dove α è un parametro reale.

– Detto X il campo di esistenza di f, si calcoli per quali calori di α la funzione $f : X \to \mathbb{R}$ è una bigezione;

– Si disegni un grafico qualitativo di f al variare di α, calcolando, in particolare, il numero delle radici.

Matematica
prova d'esame del 27/6/2005

Si consideri $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita da

$$f(x) = (12x^5 - 20x^3 + 20x)(\operatorname{arctg} x + \alpha) - 26\log(1+x^2) - 3x^4 + 16x^2$$

dove $\alpha \geq 0$ è un parametro reale *positivo*.

– Si calcoli:

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) \quad \text{per } \alpha = \frac{\pi}{2};$$

– Si calcoli per quali valori di $\alpha \geq 0$ la funzione $f(x)$ è iniettiva;

– Si calcoli per quali valori di $\alpha \geq 0$ la funzione $f(x)$ è surgettiva;

– Si disegni un grafico qualitativo di $f(x)$ al variare di α, distinguendo i seguenti casi:

$$\alpha > \frac{\pi}{2} \qquad 0 \leq \alpha \leq \frac{\pi}{2}$$

– Si dimostri che $f(-x, -\alpha) = f(x, \alpha)$. Alla luce di questa osservazione, come si estendono le risposte precedenti al caso $\alpha < 0$?

Matematica
prova d'esame del 5/7/2005

1) Si dimostri che

$$3x - 4\log x > 0 \qquad \forall\, x \in (0, +\infty)$$

2) Si consideri $f : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ definita da

$$f(x) = 12x^2 + (18 - 3\alpha)x + 4\alpha \log x$$

dove α è un parametro reale, e si calcoli per quali valori di α f è una bigezione.

3) Utilizzando il punto 1), e osservando che

$$f(x) = 12x^2 + 18x - \alpha(3x - 4\log x)$$

si disegni, al variare di α, un grafico qualitativo di f, calcolando – in particolare – il numero delle radici.

Matematica
prova d'esame del 19/7/2005

1) Si consideri la funzione

$$h(x) = \log \frac{x^2 + 2x + 2}{x^2 - 2x + 2} - 2\,\mathrm{arctg}(x + 1) - 2\,\mathrm{arctg}(x - 1)$$

Detto X il suo campo di esistenza, si studi la funzione $h : X \to \mathbb{R}$, evidenziando, in particolare, asintoti, intervalli di crescenza e decrescenza, intervalli di convessità e di concavità, eventuali proprietà di simmetria, e disegnandone il grafico.

2) Detto $Y = X \cap (0, +\infty)$, si calcoli per quali valori del parametro reale α la funzione $f : Y \to \mathbb{R}$ definita da

$$f(x) = h(x) + \alpha \log x$$

è una bigezione.

Matematica
prova d'esame del 6/9/2005

1) Si calcoli per quali valori di $c > 0$ la disequazione

$$\log x + \frac{c}{x}$$

è soddisfatta $\forall\, x \in (0, +\infty)$.

2) Si consideri la funzione $f : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ definita da

$$f(x) = (3x^3 + 9x + 36)\log x - x^3 + 18x^2 - 9x - 8 - \alpha(2x^2 \log x - x^2 + 16x - 15)$$

dove α è un parametro reale.

– Si calcolino

$$\lim_{x \to 0} f(x) \quad ; \quad \lim_{x \to +\infty} f(x)$$

giustificando le risposte ottenute.

– Si calcoli per quali valori di α la funzione $f(x)$ è una bigezione.

Suggerimento: Si osservi che la derivata $f'(x)$ contiene come fattore un'espressione del tipo

$$\log x + \frac{c}{x}$$

per un opportuno valore di c.

3) Tenendo conto del valore di $f(1)$ e di tutta la discussione precedente, si calcoli il numero delle radici di $f(x)$ al variare di α.

Matematica
prova d'esame del 13/9/2005

Si consideri la funzione $f : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ definita da

$$f(x) = 2x^3 - 12x^2 + 36x - 72\log(x+2) + \alpha \log \frac{x}{x+2}$$

dove α è un parametro reale.

– Si calcoli per quali valori di α la funzione $f : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ è una bigezione;

– Si disegni, al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$, un grafico qualitativo di $f : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$, esplicitando, in particolare, il caso $\alpha = 0$;

– Si calcoli, al variare di $\alpha > 0$, il numero delle radici di $f(x)$

Suggerimento: Si consideri il segno del termine $\alpha \log \frac{x}{x+2}$ per $\alpha > 0$.

Matematica
prova d'esame dell'11/10/2005

Si consideri la funzione $f(x)$ definita da

$$f(x) = 25\log(4x^3 + 3) - 12\log x - \alpha x^3$$

dove α è un parametro reale.

– Detto X il suo campo di esistenza, si calcoli per quali valori di α la funzione $f : X \to \mathbb{R}$ è una bigezione;

– Si calcoli, al variare di α, il numero delle radici di $f(x)$.

Suggerimento: Per rispondere alla seconda domanda, è utile tener conto delle seguenti osservazioni:

– Se $\alpha_1 < \alpha_2$, il grafico di $f(x)$ quando $\alpha = \alpha_1$ è *al di sopra* del grafico di $f(x)$ quando $\alpha = \alpha_2$;

– È utile disegnare il grafico di $f(x)$ per $\alpha = 0$;

– È utile disegnare il grafico di $f(x)$ per $\alpha = \overline{\alpha}$, dove $\overline{\alpha}$ è il valore di α al di là del quale si ha l'iniettività per $f(x)$.

Matematica
prova d'esame dell'8/11/2005

Si consideri la funzione $f : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ definita da

$$f(x) = x^3(6\log x - 5) - 9x^2(2\log x - 3) + 18x(\log^2 x - 2\log x + \alpha)$$

ove α è un parametro reale.

– Si calcoli per quali valori di α la funzione $f(x)$ è iniettiva;

– Si disegni, al variare di α, un grafico qualitativo di $f(x)$;

– Si risolva in $\mathbb{R}$ la disequazione $x^3 + 9x^2 - 36x \geq 0$; utilizzando questo risultato, si dimostri che $f(e) < 0$ per $\alpha = -1$;

– Si calcoli, per $\alpha \leq -1$, il numero delle radici di $f(x)$;

– Si descriva, per $\alpha \to -\infty$, il comportamento delle radici di $f(x)$.

Matematica
prova d'esame del 13/12/2005

Si consideri la funzione $f : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ definita da

$$f(x) = \alpha x^3 - 2x^2 \log x - 3x^2$$

dove $\alpha > 0$ è un parametro reale *positivo*.

– Si estenda $f(x)$ nel punto $x = 0$ definendo $f(0) = 0$ e si dica se la funzione così ottenuta è derivabile o continua in $x = 0$;

– Si calcoli per quali valori di α la funzione $f(x)$ è iniettiva;

– Si discuta, al variare di $\alpha > 0$, il numero delle radici di $f(x)$. A tale scopo, è utile risolvere il sistema

$$\begin{cases} f(x) = 0 \\ f'(x) = 0 \end{cases}$$

– Si disegni un grafico qualitativo di $f(x)$ per $\alpha \leq 0$.

Matematica
prova d'esame del 10/1/2006

Si consideri la funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita da

$$f(x) = 2x^3 + 12x - 3x^2 \cos x + 6x \operatorname{sen} x - \alpha(x^2 - x \cos x + \operatorname{sen} x)$$

dove α è un parametro reale.

– Si calcoli per quali valori del parametro α f è una bigezione;
– Si disegni, al variare di α, un grafico qualitativo di $f(x)$;
– Si calcoli numero e segno delle radici di $f(x)$ per $\alpha \to +\infty$ e per $\alpha \to -\infty$.

Matematica
prova d'esame del 24/1/2006

Si consideri la funzione $f(x) : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ definita da

$$f(x) = 16\sqrt{x} + 2x \log x + x^2 - \alpha x$$

dove α è un parametro reale.

– Si prolunghi $f(x)$ nell'origine ponendo $f(0) = 0$, e si dica se la funzione così ottenuta è derivabile o continua in $x = 0$;
– Si calcoli per quali valori di α la funzione $f(x)$ è iniettiva;
– Si disegni un grafico qualitativo di f al variare di α in $\mathbb{R}$;
– Si calcoli il numero delle radici di $f(x)$ per $\alpha \to +\infty$.

Matematica
prova d'esame del 7/2/2006

Si consideri la funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita da

$$f(x) = e^x + (x + \alpha)e^{2x}$$

dove α è un parametro reale.

– Si calcoli per quali valori di α la funzione $f(x)$ è iniettiva, e – in questo caso – si determini l'insieme immagine $f(\mathbb{R})$;
– Si disegni un grafico qualitativo di $f(x)$ al variare di α in $\mathbb{R}$;
– Si calcoli il numero delle radici reali di $f(x)$ al variare di α.

Suggerimento: Per determinarne il segno, è conveniente scrivere $f'(x)$ nella forma

$$f'(x) = \varphi(x)\big(\psi(x) + \alpha\big)$$

dove $\varphi(x), \psi(x)$ non dipendono da α.

Matematica
prova d'esame del 21/2/2006

TRACCIA A

Si consideri la funzione $f(x)$ definita da

$$f(x) = x^3 + 6\log x - \alpha \operatorname{arctg}(x - 1) - 1$$

dove $\alpha \geq 0$ è un parametro reale *positivo*.

– Detto X il campo di esistenza di f, si calcoli per quali valori di α la funzione $f : X \to \mathbb{R}$ è una bigezione;
– Si calcoli il numero delle radici di $f(x)$ al variare di $\alpha \geq 0$;
– Si calcoli il valore di α per il quale risulta

$$\int_0^1 f(x)\,dx = 0$$

Suggerimento: scritta $f'(x)$ nella forma $f'(x) = g(x) - \alpha h(x)$, conviene disegnare il grafico di $g(x)$ e di $h(x)$.

Matematica
prova d'esame del 21/2/2006

TRACCIA B

Si consideri la funzione $f(x)$ definita da

$$f(x) = x\sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt{x}} - \alpha \operatorname{arctg}(x-1)$$

dove $\alpha \geq 0$ è un parametro reale *positivo*.

– Detto X il campo di esistenza di f, si calcoli per quali valori di α la funzione $f : X \to \mathbb{R}$ è una bigezione;

– Si calcoli il numero delle radici di $f(x)$ al variare di $\alpha \geq 0$;

– Si calcoli il valore di α per il quale risulta

$$\int_0^1 f(x)\, dx = 0$$

Suggerimento: scritta $f'(x)$ nella forma $f'(x) = g(x) - \alpha h(x)$, conviene disegnare il grafico di $g(x)$ e di $h(x)$.

Matematica
prova d'esame del 1/3/2006

Si consideri la funzione $f(x) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita da

$$f(x) = \operatorname{arctg} x + \frac{x}{1+x^2} - \frac{\alpha}{(1+x^2)^2}$$

dove α è un parametro reale.

– Si calcoli per quali valori di α la funzione $f(x)$ risulta iniettiva rispettivamente in $\mathbb{R}$, in $[0, +\infty)$, in $(-\infty, 0]$ e si disegni il grafico di $f(x)$ per $\alpha = 1$ e $\alpha = -\frac{2}{\sqrt{3}}$;

– Si dimostri che, $\forall\, \alpha \in \mathbb{R}$, la funzione $f(x)$ ha un'unica radice reale x_α, e si calcoli $\lim\limits_{\alpha \to +\infty} x_\alpha$.

Suggerimento: per rispondere alla seconda domanda, conviene disegnare il grafico di $g(x) = (1+x^2)^2 \operatorname{arctg} x + x(1+x^2)$, e osservare che $f(x) = 0 \iff g(x) = \alpha$.

Matematica
prova d'esame del 4/4/2006

Si consideri la funzione $f(x)$ definita da

$$f(x) = \log \frac{x}{(x+1)^4} + \alpha x$$

dove α è un parametro reale.

– Detto X il suo campo di esistenza, si calcoli per quali valori di α la funzione $f : X \to \mathbb{R}$ è una bigezione;

– Si disegni, al variare di α, un grafico qualitativo di $f(x)$, distinguendo i casi: $\alpha < 0$, $\alpha = 0$, $\alpha > 0$ e f non bigettiva, f bigettiva, e calcolando in tutti i casi il numero delle radici di $f(x)$. È utile, a tal fine, osservare che, se $\alpha_1 < \alpha_2$, il grafico di $f(x)$ quando $\alpha = \alpha_1$ è *al di sotto* del grafico di $f(x)$ quando $\alpha = \alpha_2$.

Matematica
prova d'esame del 9/5/2006

Si consideri la funzione $f(x) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita da

$$f(x) = (2x^4 - 8x^3 + (\alpha - 1)x^2 - 2(\alpha - 1)x + 2\alpha)e^x + \frac{2}{3}x^3 + (\alpha - 27)x - (\alpha - 29)\operatorname{arctg} x$$

dove α è un parametro reale.

– Si calcoli per quali valori di α la funzione $f(x)$ è una bigezione;

– Si descriva qualitativamente il segno di $f'(x)$ per gli α per i quali f non è una bigezione;

– Si disegni un grafico qualitativo di $f(x)$ nel caso $\alpha = 0$, calcolando, in particolare, numero e segno delle radici; a questo scopo, può risultare utile considerare il segno dei seguenti valori numerici: $f(0), f'(0), f(1), f(-1)$.

N.B. È vietato l'uso della macchina calcolatrice.

Matematica
prova d'esame del 4/7/2006

a) Si dimostri che la funzione

$$h(x) = 32x^4 + 8x^3 - 3$$

ha una e una sola radice *positiva*, e la si calcoli esplicitamente (per il calcolo della radice è conveniente la sostituzione $x = t/2$).

b) Si consideri la funzione $f : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ definita da

$$f(x) = 18 \log x + 16x^4 + 8x^3 - \alpha(x - 1) - 24$$

dove α è un parametro reale.

– Si calcoli per quali valori di α la funzione $f : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ è una bigezione;

– Si calcoli i valori di α per i quali f ha radici $\overline{x} > 1$ e, in questo caso, si dica quante radici ha f complessivamente.

Matematica
prova d'esame del 18/7/2006

a) Si dimostri che

$$4x^4 - x^3 + \frac{1}{18} > 0 \qquad \forall\, x \in \mathbb{R}$$

b) Si consideri la funzione $f : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ definita da

$$f(x) = (12x^4 - 6x^3 - 2)\log x - \log^2 x - 7x^4 + 5x^3 + \alpha(x-1) + 2$$

dove α è un parametro reale.

– Si calcoli per quali valori di α la funzione $f : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ è una bigezione;

– Si disegni un grafico qualitativo di f al variare di α, calcolando, in particolare, il numero delle radici.

Avvertenza: Il calcolo di ogni limite deve essere esplicitamente giustificato.
Tutti i valori ritenuti rilevanti per risolvere i quesiti posti dovranno essere indicati senza ricorrere ad approssimazioni numeriche.

Matematica
prova d'esame del 5/9/2006

Si consideri la funzione $f : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ definita da

$$f(x) = (3x - 1)\log(1 + x^2) - 4x \log x + (2x + 6)\operatorname{arctg} x - \alpha x$$

dove α è un parametro reale.

– Si calcoli

$$\lim_{x\to 0} f(x)\,; \qquad \lim_{x\to +\infty} f(x)$$

giustificando esplicitamente i risultati ottenuti;

– Si calcoli per quali valori di α la funzione $f(x)$ risulta iniettiva;

– Si disegni un grafico *qualitativo* di $f(x)$ per gli α per i quali f *non è* iniettiva;

– Si calcoli, quando $\alpha \to +\infty$, il numero delle radici di $f(x)$. Detto N questo numero, si dia una stima del valore

$$\overline{\alpha} = \inf\{\alpha : f(x) \text{ ha } N \text{ radici}\}$$

Matematica
prova d'esame del 12/9/2006

Si consideri la funzione $f : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ definita da

$$f(x) = (x - 1)\log^2 x + 2(x^2 - x - 1)\log x - 3x^2 + \alpha(x - 1) + 3$$

dove α è un parametro reale.

– Si calcoli

$$\lim_{x\to 0} f(x)\,; \qquad \lim_{x\to +\infty} f(x)$$

giustificando esplicitamente i risultati ottenuti;

– Si calcoli per quali valori di α la funzione $f(x)$ è una bigezione;

– Si studi, al variare di α, il numero delle radici di $f(x)$.

Matematica
prova d'esame del 10/10/2006

Si consideri la funzione $f(x) : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ definita da

$$f(x) = (\log^2 x - \alpha)(x^2 - 1) - (x^2 - 4x + 1) \log x$$

dove α è un parametro reale.

– Si calcoli

$$\lim_{x \to 0} f(x)\,; \qquad \lim_{x \to +\infty} f(x)$$

giustificando esplicitamente i risultati ottenuti;

– Si determini per quali valori di α la funzione $f : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ è una bigezione;

– Si disegni, al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$, un grafico qualitativo di f in $(0, +\infty)$ e, in particolare, si calcoli il numero delle radici di $f(x)$ al variare di α.

Suggerimento: Per risolvere questo problema, è utile studiare la funzione

$$g(x) = \frac{f'(x)}{x}\,.$$

Matematica
prova d'esame del 7/11/2006

Si consideri la funzione $f : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ definita da

$$f(x) = 2\log^2 x + x^2 - \frac{2}{x^2} - \alpha \log x + 1$$

dove α è un parametro reale.

– Si calcoli

$$\lim_{x\to 0} f(x)\,; \qquad \lim_{x\to +\infty} f(x)$$

giustificando esplicitamente i risultati ottenuti;

– Si calcoli per quali valori di α la funzione $f(x)$ è una bigezione;

– Si calcoli il numero delle radici di $f(x)$ al variare di α, e si descriva il loro comportamento per $\alpha \to +\infty$.

Matematica
prova d'esame del 5/12/2006

Si consideri la funzione $f(x) : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ definita da

$$f(x) = (2x^2 - 24)\log x - 3(x^2 - 1) - 12\log^2 x + \alpha(1 - x)$$

dove α è un parametro reale.

– Si calcoli

$$\lim_{x\to 0} f(x)\,; \qquad \lim_{x\to +\infty} f(x)$$

giustificando esplicitamente i risultati ottenuti;

– Si determini per quali valori di α la funzione $f : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ è una bigezione;

– Si tracci un grafico qualitativo di $f(x)$ al variare di α; in particolare, si calcoli il numero delle radici di $f(x)$ in funzione di α e si descriva il comportamento al limite delle radici quando $\alpha \to +\infty$.

Facoltà di Farmacia - Corso di Laurea in C.T.F.

Programma del corso di Istituzioni di Matematiche

A.A. 2006–2007

Titolare: prof. Enrico Jannelli

Insiemi e numeri reali – Gli assiomi dei numeri reali. Numeri naturali, interi, razionali. Proprietà dei numeri reali. Disequazioni. Il principio di induzione. Massimo, minimo, estremo superiore, estremo inferiore.

Relazioni e funzioni – Il piano cartesiano. Relazioni e funzioni. Funzioni lineari. Funzioni elementari: polinomi, esponenziale, logaritmo, seno, coseno, tangente, funzioni razionali. Funzioni inverse. Visualizzazione grafica di alcune operazioni elementari sulle funzioni.

Limiti – Limiti di successioni. Teoremi e operazioni sui limiti. Forme indeterminate. Teoremi di confronto. Alcuni limiti notevoli. Successioni monotóne. Il numero e. Limiti di funzioni. Intorni. Punti di accumulazione. Principio di soppressione degli infinitesimi di ordine superiore e degli infiniti di ordine inferiore.

Funzioni continue – Concetto di funzione continua in un punto. Continuità delle funzioni elementari. Teoremi sulle funzioni continue: teorema della permanenza del segno, teorema dell'esistenza degli zeri, teorema dell'esistenza dei valori intermedi, teorema di Bolzano–Weierstrass, teorema di Weierstrass, continuità della funzione inversa.

Calcolo differenziale – Definizione di derivata e suo significato. Operazioni sulle derivate. Derivate delle funzioni composte e inverse. Derivate delle funzioni elementari. Retta tangente al grafico di una funzione. Teoremi fondamentali del calcolo differenziale: Rolle, Lagrange, Cauchy, De L'Hôpital. Criterio di monotonia. Criterio di convessità. Formula di Taylor con resto di Peano. Studio del grafico di una funzione.

Le funzioni integrabili secondo Riemann – Concetto di integrale. Le funzioni integrabili secondo Riemann. Proprietà dell'integrale di Riemann: linearità, positività, monotonia. Teorema di Cantor sull'uniforme continuità. Integrabilità delle funzioni continue.

Calcolo integrale – Teorema della media integrale. Teorema fondamentale e formula fondamentale del calcolo integrale. Primitive. L'integrale indefinito. Alcuni metodi di integrazione: per somma, per sostituzione, per parti. Integrazione delle funzioni razionali con denominatore di secondo grado.

$\longrightarrow$

Equazioni differenziali – Equazioni differenziali lineari del primo ordine: integrale generale, problema di Cauchy. Equazioni di Bernoulli. Equazioni del primo ordine a variabili separabili. Applicazioni delle equazioni differenziali del primo ordine ad alcuni modelli di dinamica delle popolazioni. Equazioni differenziali lineari omogenee a coefficienti costanti: integrale generale e problema di Cauchy. Equazioni differenziali lineari non omogenee a coefficienti costanti con secondo membro di tipo particolare. Applicazioni delle equazioni differenziali del secondo ordine ad alcuni modelli fisici.

Testi consigliati:

P. Marcellini & C. Sbordone – **Calcolo** – Liguori Editore, Napoli

P. Marcellini & C. Sbordone – **Esercizi di istituzioni di matematica**, vol. I, parte I e II – Liguori Editore, Napoli

A. Alvino, L. Carbone & G. Trombetti – **Esercitazioni di matematica**, vol. I, parte I e II – Liguori Editore, Napoli

Si vedano, inoltre, le dispense del prof. Enrico Jannelli.