Disequazioni e sistemi di disequazioni

A. Disequazioni di I grado

1. $3x-1>x+5$ *Sol.* $(3,+\infty)$
2. $1-x\leq 2-\frac{x}{2}$ *Sol.* $[-2,+\infty)$
3. $2(x+1)-3x\geq 0$ *Sol.* $(-\infty,2]$
4. $5(x+2)+3(x+5)\leq 1$ *Sol.* $(-\infty,-3]$
5. $\frac{x+3}{6}+\frac{x-2}{3}>\frac{x+1}{2}-1$ *Sol.* $(-\infty,+\infty)$
6. $\frac{x+2}{2}+\frac{x+3}{2}-4>\frac{5}{6}x$ *Sol.* $(9,+\infty)$
7. $\frac{8-3x}{3}+\frac{25}{3}\leq\frac{17-x}{2}+2x$ *Sol.* $[1,+\infty)$
8. $(x-1)^2-3(x+1)<x(x+2)$ *Sol.* $(-\frac{2}{7},+\infty)$
9. $x-3(x-2)+8+2x^2\leq 2(x^2+2x)+5$ *Sol.* $[\frac{3}{2},+\infty)$
10. $\frac{x-2}{3}-\frac{x-3}{2}\geq\frac{1}{6}$ *Sol.* $(-\infty,4]$
11. $\frac{x-1}{2}-\frac{1-x}{4}<0$ *Sol.* $(-\infty,1)$
12. $\frac{x}{\sqrt{2}}-\frac{x}{\sqrt{3}}>1$ *Sol.* $(3\sqrt{2}-2\sqrt{3},+\infty)$
13. $\frac{x-\sqrt{3}}{2}<\frac{x+1-\sqrt{2}}{\sqrt{2}}$ *Sol.* $(\sqrt{2}-\sqrt{3}-\sqrt{6},+\infty)$

B. Disequazioni di II grado

1. $x^2-16>0$ *Sol.* $(-\infty,-4)\cup(4,+\infty)$
2. $25-x^2>0$ *Sol.* $(-5,5)$
3. $x^2-2x+1\leq 0$ *Sol.* $\{1\}$
4. $-x^2+8x-12\geq 0$ *Sol.* $[2,6]$
5. $2x^2+3x-2\geq 0$ *Sol.* $(-\infty,-2)\cup(\frac{1}{2},+\infty)$
6. $x^2-8x+16>0$ *Sol.* $(-\infty,4)\cup(4,+\infty)$
7. $2x^2-7x\geq 0$ *Sol.* $(-\infty,0)\cup(\frac{7}{2},+\infty)$
8. $-x^2+8x-7\geq 0$ *Sol.* $[1,7]$
9. $x-7x^2-2<0$ *Sol.* $(-\infty,+\infty)$
10. $4x^2-37x+9\geq 0$ *Sol.* $(-\infty,\frac{1}{4})\cup(9,+\infty)$
11. $9x^2+8x-1<0$ *Sol.* $(-1,\frac{1}{9})$
12. $2x^2-10x+25<0$ *Sol.* $\emptyset$
13. $4x(x-2)<11+(x-4)^2$ *Sol.* $(-3,3)$
14. $x^2<4\sqrt{3}(x-\sqrt{3})$ *Sol.* $\emptyset$
15. $(2x-1)(x-3)-(x-1)[2(2x-1)+x]<0$ *Sol.* $(-\infty,-\frac{\sqrt{3}}{3})\cup(\frac{\sqrt{3}}{3},+\infty)$
16. $(x+5)^2-(x-1)(2x+1)>13(x+2)$ *Sol.* $(-2,0)$
17. $(x+1)(5x+1)\leq 4(2+x)$ *Sol.* $[-\frac{7}{5},1]$
18. $3x^2-4\sqrt{3}x+4\leq 0$ *Sol.* $\{\frac{2}{\sqrt{3}}\}$

C. Disequazioni di grado superiore al II

1. $x(x+1)(x-1)\geq 0$ *Sol.* $[-1,0]\cup[1,+\infty)$
2. $x^2(x-1)(x-2)<0$ *Sol.* $(1,2)$
3. $x^4-1>0$ *Sol.* $(-\infty,-1)\cup(1,+\infty)$
4. $x^7-2x^5+x^3\leq 0$ *Sol.* $(-\infty,0]\cup\{1\}$
5. $x^3+3x^2-4x-12\geq 0$ *Sol.* $[-3,-2]\cup[2,+\infty)$
6. $x^3+5x-6<0$ *Sol.* $(-\infty,1)$
7. $x^4-5x^2+4\leq 0$ *Sol.* $[-2,-1]\cup[1,2]$
8. $x^5-7x^3+12x>0$ *Sol.* $(-2,-\sqrt{3})\cup(0,\sqrt{3})\cup(2,+\infty)$
9. $x^4-8x^2+16>0$ *Sol.* $(-\infty,-2)\cup(-2,2)\cup(2,+\infty)$
10. $2x^4-7x^2\geq 0$ *Sol.* $(-\infty,-\frac{\sqrt{14}}{2}]\cup[\frac{\sqrt{14}}{2},+\infty)$
11. $(x^2+x)(2x+1)^2(8x^2+7)<0$ *Sol.* $(-1,-\frac{1}{2})\cup(\frac{1}{2},0)$
12. $x(x-3)^2(x+4)\leq 0$ *Sol.* $[-4,0]\cup\{3\}$
13. $(x^2-3x+2)(x-3)\geq 0$ *Sol.* $[1,2]\cup[3,+\infty)$
14. $3x^4-3x^3-7x^2+x+2\geq 0$ *Sol.* $(-\infty,-1]\cup[-\frac{\sqrt{3}}{3},\frac{\sqrt{3}}{3}]\cup[2,+\infty)$
15. $(2x-5)(x^2-2x-3)(2x^2-3x+1)\leq 0$ *Sol.* $(-\infty,-1]\cup[\frac{1}{2},1]\cup[\frac{5}{2},3]$
16. $(-x^2+3x-8)(-x^2+2x+1)(-x^2-2)>0$ *Sol.* $(1-\sqrt{2},1+\sqrt{2})$
17. $(x^2-2x-2)(x^2+2x+3)(1-x)\leq 0$ *Sol.* $[1-\sqrt{3},1]\cup[1+\sqrt{3},+\infty)$
18. $x^3-2x^2-x+2\geq 0$ *Sol.* $[-1,1]\cup[2,+\infty)$

D. Sistemi di disequazioni

1. $\begin{cases} x+1 \geq 2-3x \\ 2x-1 < 1-x \end{cases}$ *Sol.* $[\frac{1}{4}, \frac{2}{3})$

2. $\begin{cases} 2x-1 \geq 0 \\ x+3 < 1 \\ x+1 \leq 0 \end{cases}$ *Sol.* $\emptyset$

3. $\begin{cases} x^2-1 \geq 0 \\ x+2 < 0 \end{cases}$ *Sol.* $(-\infty, -2)$

4. $\begin{cases} 1+2x \leq 0 \\ (x+1)(x-1) < 0 \end{cases}$ *Sol.* $(-1, -\frac{1}{2}]$

5. $\begin{cases} 1-x^2 > 0 \\ x(x+2) \leq 0 \end{cases}$ *Sol.* $(-1, 0]$

6. $\begin{cases} 2-x^2 \geq 1 \\ x^2-3x+2 < 0 \end{cases}$ *Sol.* $\emptyset$

7. $\begin{cases} x(x+1)(x-2) \geq 0 \\ x^3-1 < 0 \end{cases}$ *Sol.* $[-1, 0]$

8. $\begin{cases} x^4 \geq 1 \\ x^3+1 \leq 0 \\ x^2 \geq 1 \end{cases}$ *Sol.* $(-\infty, -1]$

9. $\begin{cases} x(x+1)(x+2) \leq 0 \\ (x+1)(x+2)(x+3) \geq 0 \end{cases}$ *Sol.* $[-3, -2] \cup [-1, 0]$

10. $\begin{cases} x^8-3x^4+2 \geq 0 \\ x^6-3x^3+2 \leq 0 \end{cases}$ *Sol.* $\{1\} \cup [\sqrt[4]{2}, \sqrt[3]{2}]$

E. Disequazioni razionali fratte

1. $\frac{x+1}{x-1} \geq \frac{1}{2}$ *Sol.* $(-\infty, -3] \cup (1, +\infty)$
2. $\frac{3x}{x+1} \geq 1$ *Sol.* $(-\infty, -1) \cup [\frac{1}{2}, +\infty)$
3. $\frac{2x-3}{x-4} \geq \frac{x}{x-2}$ *Sol.* $(-\infty, 2) \cup (4, +\infty)$
4. $\frac{x+1}{x} \leq \frac{x}{x-1}$ *Sol.* $(-\infty, 0) \cup (1, +\infty)$
5. $\frac{x+1}{x+3} \geq \frac{1}{x-2}$ *Sol.* $(-\infty, -3) \cup [1-\sqrt{6}, 2) \cup [1+\sqrt{6}, +\infty)$
6. $1 - \frac{1}{x+1} \geq 3 - \frac{2}{x-1}$ *Sol.* $[-\sqrt{2}, -1) \cup (1, \sqrt{2}]$
7. $1 + \frac{x}{x+2} - \frac{1-x}{x-2} < \frac{x+1}{x-2}$ *Sol.* $(-\infty, -2) \cup (1-\sqrt{5}, 2) \cup (1+\sqrt{5}, +\infty)$
8. $\frac{x^2}{x^2-1} \geq 0$ *Sol.* $(-\infty, -1) \cup \{0\} \cup (1, +\infty)$
9. $\frac{1}{x^3+1} \leq \frac{1}{1-x^2}$ *Sol.* $(-1, 1)$
10. $\frac{x}{x+3} - \frac{1}{4} < \frac{x-1}{2x}$ *Sol.* $(-3, 0) \cup (1, 6)$
11. $\frac{x+1}{x^2-4} - \frac{1}{x+2} - \frac{2-x}{x^2+4x+4} \geq 0$ *Sol.* $(2, +\infty)$
12. $\frac{x^2-9}{x^3+8} + \frac{1}{x+2} \leq \frac{x}{x^2-2x+4}$ *Sol.* $(-\infty, -2) \cup [-1, 5]$
13. $\frac{x^2-3}{x^2+3} - \frac{x^2+3}{x^2-3} > 0$ *Sol.* $(-\infty, -\sqrt{3}) \cup (\sqrt{3}, +\infty)$
14. $\frac{x^2+x+4}{(x-1)(x-2)(x-3)} + \frac{x+2}{x^2-3x+2} > \frac{x+1}{x^2-4x+3}$ *Sol.* $(-1, 0) \cup (1, 2) \cup (3, +\infty)$
15. $\frac{2x+3}{x-1} + \frac{x}{x^2-1} \leq \frac{1}{x-1}$ *Sol.* $[-2, -1) \cup [-\frac{1}{2}, 1)$
16. $\frac{x^2+x-2}{x^2-2x-15} \leq 0$ *Sol.* $(-3, -2] \cup [1, 5)$

F. Disequazioni irrazionali

1. $\sqrt[3]{2x-1} < 1$ *Sol.* $(-\infty, 1)$
2. $\sqrt[3]{x^3+1} < x+1$ *Sol.* $(-\infty, -1) \cup (0, +\infty)$
3. $\sqrt[3]{x^3+2} < x-1$ *Sol.* $(-\infty, +\infty)$
4. $\sqrt[3]{x^3-8} < x-2$ *Sol.* $(-\infty, -2) \cup (0, +\infty)$
5. $\sqrt{x-1} < 1$ *Sol.* $[1, 2)$
6. $\sqrt{x+3} < 4$ *Sol.* $[-3, 13)$
7. $\sqrt{1-x} \leq 1+x$ *Sol.* $[0, 1]$
8. $\sqrt{x^2-1} > x$ *Sol.* $(-\infty, 0)$
9. $x \geq 1 - \sqrt{x}$ *Sol.* $[\frac{3-\sqrt{5}}{2}, +\infty)$
10. $x < \sqrt{6+x-x^2} + 1$ *Sol.* $[-2, \frac{5}{2})$
11. $\sqrt{x} - \sqrt{x-1} > 0$ *Sol.* $[1, +\infty)$
12. $\sqrt{x} - \sqrt{x^2-1} > 0$ *Sol.* $[1, \frac{1+\sqrt{5}}{2})$
13. $\sqrt{x-4} - \sqrt{2x+1} < 0$ *Sol.* $[4, +\infty)$
14. $\sqrt{1-x^2} + \sqrt{x^2-1} \leq 0$ *Sol.* $\{-1, 1\}$
15. $\sqrt{x+1} + \sqrt{x-2} \geq 3$ *Sol.* $[3, +\infty)$
16. $\sqrt{2x+1} + \sqrt{x+1} > 1$ *Sol.* $(3-2\sqrt{3}, +\infty)$
17. $x\sqrt{x^2-1} \geq 0$ *Sol.* $\{-1\} \cup [1, +\infty)$
18. $\sqrt{x^2+1} - \sqrt{x^2-1} > 0$ *Sol.* $(-\frac{\sqrt{5}}{2}, -1) \cup (1, \frac{\sqrt{5}}{2})$

G. Disequazioni con valori assoluti

1. $|x| + 2x \leq 3$ *Sol.* $(-\infty, 1]$
2. $1 - |x+1| > 2x + 1$ *Sol.* $(-\infty, -\frac{1}{3})$
3. $|x+1| - 1 \leq x^2$ *Sol.* $(-\infty, 0] \cup [1, +\infty)$
4. $1 + x + x^2 < |x|$ *Sol.* $\emptyset$
5. $1 - |x^2 - 1| \geq x$ *Sol.* $[-2, 0] \cup \{1\}$
6. $1 + x \leq |1 + x + x^2|$ *Sol.* $(-\infty, +\infty)$
7. $|x+1| - 1 \geq |x|$ *Sol.* $[0, +\infty)$
8. $|x-1| + |x+1| \geq 3x + 2$ *Sol.* $(-\infty, 0]$
9. $|x| + |x^2 - 1| > 1$ *Sol.* $(-\infty, -1) \cup (-1, 0) \cup (0, 1) \cup (1, +\infty)$
10. $|x-1| \geq |x^2 - 3x + 2|$ *Sol.* $[1, 3]$
11. $|x^2 - x + 1| < |x^2 - 1|$ *Sol.* $(0, \frac{1}{2}) \cup (2, +\infty)$
12. $|1 - 2x + x^2| \geq |x + x^2|$ *Sol.* $(-\infty, \frac{1}{3}]$
13. $\frac{1}{|x|} \geq x$ *Sol.* $(-\infty, 0) \cup (0, \frac{\sqrt{5}-1}{2}]$
14. $\frac{x}{|x-1|} \geq x - 1$ *Sol.* $(-\infty, 1) \cup (1, 2 + \sqrt{2}]$
15. $\left|\frac{x+1}{x-1}\right| \geq 1$ *Sol.* $[0, 1) \cup (1, +\infty)$
16. $\left|\frac{x}{x-2}\right| \leq x$ *Sol.* $[0, 1] \cup [3, +\infty)$

I. Disequazioni esponenziali

1. $2^x \geq 3$ *Sol.* $[\log_2 3, +\infty)$
2. $3^{x+1} < 5$ *Sol.* $(-\infty, \log_3 5 - 1)$
3. $4^{x/3} > 2$ *Sol.* $(\frac{3}{2}, +\infty)$
4. $5^{1-2x} < 1$ *Sol.* $(\frac{1}{2}, +\infty)$
5. $2^{x-1} + 2^x + 2^{x+1} > 1$ *Sol.* $(\log_2\left(\frac{2}{7}\right), +\infty)$
6. $3^{x-1} + 3^x + 3^{x+1} - 3 \geq 0$ *Sol.* $[\log_3\left(\frac{9}{13}\right), +\infty)$
7. $3^{x^2-2x+1} \leq 1$ *Sol.* $\{1\}$
8. $2^{1-x^2} > 8$ *Sol.* $\emptyset$
9. $\left(\frac{1}{2}\right)^{3-x^2} \leq 1$ *Sol.* $(-\infty, -\sqrt{3}) \cup [\sqrt{3}, +\infty)$
10. $3^{2x} > 9 \cdot 3^x$ *Sol.* $(2, +\infty)$
11. $4^{2x-1} > 2^{2x+4}$ *Sol.* $(3, +\infty)$
12. $8^{2-x} - 4^{1+x} \leq 0$ *Sol.* $[\frac{4}{5}, +\infty)$
13. $3^x - 5 \cdot 2^{-x} \geq 0$ *Sol.* $[\log_6 5, +\infty)$
14. $3^{2x} - 3^{1+x} - 18 \leq 0$ *Sol.* $(-\infty, \log_3 6]$
15. $2^{2x} - 3 \cdot 2^x + 2 \leq 0$ *Sol.* $[0, 1]$
16. $3^{2x} - 2 \cdot 3^x - 2 > 1$ *Sol.* $(1, +\infty)$
17. $\frac{2^{2x} - 3^{3x}}{4^{4x} - 5^{5x}} \geq 0$ *Sol.* $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$
18. $\frac{2^x - 2^{-x}}{2^x + 2^{-x}} < 1$ *Sol.* $(-\infty, +\infty)$
19. $\frac{2^x}{3^x - 2^x} > 1$ *Sol.* $(0, \frac{1}{\log_2 3 - 1})$
20. $\frac{2^{2x} - 2^{x+1}}{2^x - 1} \leq 0$ *Sol.* $(0, 1]$
21. $2^{\frac{x+1}{x}} \geq 1$ *Sol.* $(-\infty, -1] \cup (0, +\infty)$
22. $\frac{2^x}{2^x - \sqrt{2 - 2^x}} > 0$ *Sol.* $(0, 1]$

H. Disequazioni logaritmiche

1. $\log_3 x \leq 3$ *Sol.* $(0, 27]$
2. $1 + \log_2 x \geq \frac{1}{2}$ *Sol.* $[\frac{1}{\sqrt{2}}, +\infty)$
3. $\log_{1/2}(x+1) \leq 1$ *Sol.* $[-\frac{1}{2}, +\infty)$
4. $\log_2(1 + x^2) > 2$ *Sol.* $(\sqrt{3}, +\infty)$
5. $\log_{10} x > \log_{10}(x - 1)$ *Sol.* $\emptyset$
6. $\log_3(x^2 - 2x) \leq 0$ *Sol.* $(0, \frac{1+\sqrt{5}}{2}]$
7. $\log_2(\log_3 x) > 0$ *Sol.* $(3, +\infty)$
8. $\log_2(1 + \log_2 x) > 1$ *Sol.* $(2, +\infty)$
9. $\log_{10}(\log_2\left(\frac{1}{x}\right)) > 0$ *Sol.* $(0, \frac{1}{2})$
10. $\log_2(x - x^2) - \log_2(1 - x) > 1$ *Sol.* $\emptyset$
11. $\log_{10}^2 x - 3\log_{10} x + 2 > 0$ *Sol.* $(0, 10) \cup (100, +\infty)$
12. $\log_2^2 x - 5\log_2 x + 6 \leq 0$ *Sol.* $[4, 8]$
13. $\log_3(1 - \sqrt{x}) \leq -1$ *Sol.* $[\frac{4}{9}, 1)$
14. $\log_2(x - \sqrt{1 - x^2}) < 0$ *Sol.* $(\frac{1}{\sqrt{2}}, 1)$
15. $\frac{1 - \log_2 x}{\log_2(1-x)} < 0$ *Sol.* $(0, 1)$
16. $\frac{\log_2 x}{\log_2^2 x - 1} < 0$ *Sol.* $(0, \frac{1}{2}) \cup (1, 2)$

Integrali per sostituzione

Talvolta il calcolo di un integrale si semplifica se si cambia la variabile di integrazione. Possiamo avere due casi:

- $$\int f\left(g\left(x\right)\right) g'\left(x\right) dx$$

  In tal caso osserviamo che posto

  $$y = g\left(x\right) \Longrightarrow dy = g'\left(x\right) dx$$

  abbiamo

  $$\int f\left(g\left(x\right)\right) g'\left(x\right) dx = \int f\left(y\right) dy$$

- $$\int f\left(x\right) dx$$

  Posto

  $$y = g\left(x\right) \Longrightarrow x = g^{-1}\left(y\right) \Longrightarrow dx = \left[g^{-1}\left(y\right)\right]' dy$$

  abbiamo

  $$\int f\left(x\right) dx = \int f\left(g^{-1}\left(y\right)\right) \left[g^{-1}\left(y\right)\right]' dy$$

Esercizio 0.0.1 *Calcolare il seguente integrale*

$$\int \sin^4 x \cos x dx$$

Effettuando la sostituzione

$$y = \sin x \Longrightarrow dy = \cos x dx$$

abbiamo:

$$\begin{aligned}\int \sin^4 x \cos x dx &= \int y^4 dy = \frac{1}{5} y^5 + c = \\ & \text{risostituendo } y \text{ come } \sin x \\ &= \frac{1}{5}\sin^5 x + c\end{aligned}$$

Esercizio 0.0.2 *Calcolare il seguente integrale*

$$\int \frac{\cos x}{1+\sin x} dx$$

Effettuando la sostituzione

$$y = 1 + \sin x \Longrightarrow dy = \cos x dx$$

abbiamo:

$$\begin{aligned}\int \frac{\cos x}{1+\sin x} dx &= \int \frac{1}{y} dy = \log|y| + c = \\ & \text{risostituendo } y \text{ come } 1+\sin x \\ &= \log|1+\sin x| + c\end{aligned}$$

Esercizio 0.0.3 *Calcolare il seguente integrale*

$$\int \frac{\sin \log|x|}{x} dx$$

Effettuando la sostituzione

$$y = \log|x| \Longrightarrow dy = \frac{1}{x} dx$$

abbiamo:

$$\begin{aligned}\int \frac{\sin \log|x|}{x} dx &= \int \sin y dy = -\cos y + c = \\ & \text{risostituendo } y \text{ come } \log|x| \\ &= -\cos \log|x| + c\end{aligned}$$

Esercizio 0.0.4 *Calcolare il seguente integrale*

$$\int \frac{3x^2}{1+x^6} dx$$

Effettuando la sostituzione

$$y = x^3 \Longrightarrow dy = 3x^2 dx$$

abbiamo:

$$\begin{aligned}
\int \frac{3x^2}{1+x^6} dx &= \int \frac{1}{1+y^2} dy = \arctan y + c = \\
&\quad \text{risostituendo } y \text{ come } x^3 \\
&= \arctan x^3 + c
\end{aligned}$$

Esercizio 0.0.5 *Calcolare il seguente integrale*

$$\int \frac{x \arcsin x^2}{\sqrt{1-x^4}} dx$$

Effettuando la sostituzione

$$y = \arcsin x^2 \Longrightarrow dy = \frac{2x}{\sqrt{1-x^4}} dx$$

abbiamo:

$$\begin{aligned}
\int \frac{x \arcsin x^2}{\sqrt{1-x^4}} dx &= \frac{1}{2} \int \frac{2x \arcsin x^2}{\sqrt{1-x^4}} dx = \\
&= \frac{1}{2} \int y dy = \\
&= \frac{1}{4} y^2 + c = \\
&\quad \text{risostituendo } y \text{ come } \arcsin x^2 \\
&= \frac{1}{4} \arcsin^2 x^2 + c
\end{aligned}$$

Esercizio 0.0.6 *Calcolare il seguente integrale*

$$\int \frac{1}{\sqrt{4-x^2}} dx$$

Osserviamo preliminarmente che possiamo scrivere

$$\int \frac{1}{\sqrt{4-x^2}} dx = \int \frac{1}{\sqrt{4\left(1-\frac{x^2}{4}\right)}} dx = \int \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{1-\frac{x^2}{4}}} dx$$

Effettuando la sostituzione

$$y = \frac{1}{2}x \Longrightarrow dy = \frac{1}{2}dx$$

abbiamo:

$$\begin{aligned}
\int \frac{1}{\sqrt{4-x^2}}dx &= \int \frac{1}{\sqrt{1-y^2}}dy = \\
&= \arcsin y + c = \\
& \quad \text{risostituendo } y \text{ come } \frac{1}{2}x \\
&= \arcsin \frac{x}{2} + c
\end{aligned}$$

Esercizio 0.0.7 *Calcolare il seguente integrale*

$$\int \sqrt{1+\cos^2 x}\sin 2x dx$$

Osserviamo preliminarmente che possiamo scrivere

$$\int \sqrt{1+\cos^2 x}\sin 2x dx = \int \sqrt{1+\cos^2 x}\left(2\sin x \cos x\right) dx$$

Effettuando la sostituzione

$$y = 1+\cos^2 x \Longrightarrow dy = -2\sin x \cos x dx$$

abbiamo:

$$\begin{aligned}
\int \sqrt{1+\cos^2 x}\sin 2x dx &= -\int y^{\frac{1}{2}} dy = \\
&= -\frac{2}{3}y^{\frac{3}{2}} + c = \\
& \quad \text{risostituendo } y \text{ come } 1+\cos^2 x \\
&= -\frac{2}{3}\left(1+\cos^2 x\right)^{\frac{3}{2}} + c
\end{aligned}$$

Esercizio 0.0.8 *Calcolare il seguente integrale*

$$\int \frac{\log x}{\left(1+\log^4 x\right)x}dx$$

Effettuando la sostituzione

$$y = \log^2 x \Longrightarrow dy = \frac{2\log x}{x}dx$$

abbiamo:

$$\begin{aligned}
\int \frac{\log x}{\left(1+\log^4 x\right)x}dx &= \frac{1}{2}\int \frac{2\log x}{\left(1+\log^4 x\right)x}dx = \\
&= \frac{1}{2}\int \frac{1}{1+y^2}dy = \\
&= \frac{1}{2}\arctan y + c \\
& \quad \text{risostituendo } y \text{ come } \log^2 x \\
&= \frac{1}{2}\arctan \log^2 x + c
\end{aligned}$$

Esercizio 0.0.9 *Calcolare il seguente integrale*

$$\int \frac{e^x}{\sqrt{e^x+1}} \sin\sqrt{e^x+1}dx$$

Effettuando la sostituzione

$$y = \sqrt{e^x+1} \Longrightarrow dy = \frac{e^x}{2\sqrt{e^x+1}}dx$$

abbiamo:

$$\begin{aligned}
\int \frac{e^x}{\sqrt{e^x+1}} \sin\sqrt{e^x+1}dx &= 2\int \frac{e^x}{2\sqrt{e^x+1}} \sin\sqrt{e^x+1}dx = \\
&= 2\int \sin y dy = \\
&= -2\cos y + c \\
& \quad \text{risostituendo } y \text{ come } \sqrt{e^x+1} \\
&= -2\cos\sqrt{e^x+1} + c
\end{aligned}$$

Esercizio 0.0.10 *Calcolare il seguente integrale*

$$\int \tan^4 x dx$$

Effettuando la sostituzione

$$y = \tan x \Longrightarrow x = \arctan y \Longrightarrow dx = \frac{1}{1+y^2}dy$$

abbiamo:

$$\begin{aligned}
\int \tan^4 x dx &= \int \frac{y^4}{1+y^2}dy = \\
&\quad \text{aggiungendo e sottraendo 1 al numeratore} \\
&= \int \frac{y^4 - 1 + 1}{1+y^2}dy = \\
&= \int \frac{(y^2+1)(y^2-1)+1}{1+y^2}dy = \\
&= \int \left(y^2 - 1 + \frac{1}{1+y^2}\right) dy = \\
&= \frac{1}{3}y^3 - y + \arctan y + c = \\
&\quad \text{risostituendo } y \text{ come } \tan x \\
&= \frac{1}{3}\tan^3 x - \tan x + x + c
\end{aligned}$$

Esercizio 0.0.11 *Calcolare il seguente integrale*

$$\int \sqrt{e^x - 1}dx$$

Effettuando la sostituzione

$$y = \sqrt{e^x - 1} \Longrightarrow e^x = y^2 + 1 \Longrightarrow x = \log\left(y^2+1\right) \Longrightarrow dx = \frac{2y}{1+y^2}dy$$

abbiamo:

$$\begin{aligned}
\int \sqrt{e^x - 1}dx &= 2\int \frac{y^2}{1+y^2}dy = \\
&\quad \text{aggiungendo e sottraendo 1 al numeratore} \\
&= 2\int \frac{y^2+1-1}{1+y^2}dy = \\
&= 2\int \left(1 - \frac{1}{1+y^2}\right) dy = \\
&= 2y - 2\arctan y + c = \\
&\quad \text{risostituendo } y \text{ come } \sqrt{e^x-1} \\
&= 2\sqrt{e^x - 1} - 2\arctan\sqrt{e^x-1} + c
\end{aligned}$$

Integrali per parti

Ricordiamo che la formula di integrazione per parti si applica all'integrale di un prodotto dove uno dei due fattori è visto come fattore differenziale, ovvero come derivata di una qualche funzione nota, mentre l'altro fattore viene chiamato finito. Si ha:

$$\int f(x)\, g'(x)\, dx = f(x)\, g(x) - \int f'(x)\, g(x)\, dx$$

Esercizio 0.0.1 *Calcolare il seguente integrale*

$$\int x e^{2x} dx$$

Scegliamo come fattore differenziale $v' = e^{2x}$ e come fattore intero $u = x$ da cui $v = \int e^{2x} dx = \frac{1}{2} \int 2e^{2x} dx = \frac{1}{2} e^{2x}$ e $u' = 1$. Applicando la formula di integrazione per parti abbiamo:

$$\int x e^{2x} dx = \frac{1}{2} x e^{2x} - \frac{1}{2} \int e^{2x} dx = \frac{1}{2} x e^{2x} - \frac{1}{4} e^{2x} + c$$

Esercizio 0.0.2 *Calcolare il seguente integrale*

$$\int e^{x} \sin(2x)\, dx$$

Scegliamo come fattore differenziale $v' = e^{x}$ e come fattore intero $u = \sin(2x)$ da cui $v = \int e^{x} dx = e^{x}$ e $u' = 2\cos(2x)$. Applicando la formula di integrazione per parti abbiamo:

$$\int e^{x} \sin(2x)\, dx = e^{x} \sin(2x) - 2 \int e^{x} \cos(2x)\, dx \tag{1}$$

Calcoliamo l'integrale che compare a secondo membro della (1) scegliendo come fattore differenziale $v' = e^{x}$ e come fattore intero $u = \cos(2x)$ da cui $v = \int e^{x} dx = e^{x}$ e $u' = -2\sin(2x)$, quindi abbiamo:

$$\int e^{x} \cos(2x)\, dx = e^{x} \cos(2x) + 2 \int e^{x} \sin(2x)\, dx$$

che sostituita nella (1) dà

$$\begin{aligned}\int e^x \sin(2x)\, dx &= e^x \sin(2x) - 2\left(e^x \cos(2x) + 2\int e^x \sin(2x)\, dx\right) = \\ &= e^x \sin(2x) - 2e^x \cos(2x) - 4\int e^x \sin(2x)\, dx\end{aligned}$$

Portando a primo membro il termine contenente l'integrale abbiamo

$$5\int e^x \sin(2x)\, dx = e^x \sin(2x) - 2e^x \cos(2x)$$

da cui dividendo ambo i membri per 5 otteniamo

$$\int e^x \sin(2x)\, dx = \frac{1}{5}e^x \sin(2x) - \frac{2}{5}e^x \cos(2x) + c$$

Esercizio 0.0.3 *Calcolare il seguente integrale*

$$\int \frac{x}{\cos^2 x} dx$$

Scegliamo come fattore differenziale $v' = \frac{1}{\cos^2 x}$ e come fattore intero $u = x$ da cui $v = \int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \tan x$ e $u' = 1$. Applicando la formula di integrazione per parti abbiamo:

$$\begin{aligned}\int \frac{x}{\cos^2 x} dx &= x\tan x - \int \tan x dx = \\ &= x\tan x + \int \frac{-\sin x}{\cos x} dx = \\ &= x\tan x + \log|\cos x| + c\end{aligned}$$

Esercizio 0.0.4 *Calcolare il seguente integrale*

$$\int x^3 \log|x|\, dx$$

Scegliamo come fattore differenziale $v' = x^3$ e come fattore intero $u = \log|x|$ da cui $v = \int x^3 dx = \frac{1}{4}x^4$ e $u' = \frac{1}{x}$. Applicando la formula di integrazione per parti abbiamo:

$$\begin{aligned}\int x^3 \log|x|\, dx &= \frac{1}{4}x^4 \log|x| - \frac{1}{4}\int \frac{x^4}{x} dx = \\ &= \frac{1}{4}x^4 \log|x| - \frac{1}{4}\frac{x^4}{4} = \\ &= \frac{1}{4}x^4 \log|x| - \frac{1}{16}x^4 + c\end{aligned}$$

Esercizio 0.0.5 *Calcolare il seguente integrale*

$$\int \sin^2 x dx$$

Scegliamo come fattore differenziale $v' = \sin x$ e come fattore intero $u = \sin x$ da cui $v = \int \sin x dx = -\cos x$ e $u' = \cos x$. Applicando la formula di integrazione per parti abbiamo:

$$\begin{aligned}
\int \sin^2 x dx &= -\sin x \cos x + \int \cos^2 x dx = \\
&= -\sin x \cos x + \int \left(1 - \sin^2 x\right) dx = \\
&= -\sin x \cos x + x - \int \sin^2 x dx
\end{aligned}$$

Portando a primo membro il termine contenente l'integrale abbiamo

$$2 \int \sin^2 x dx = -\sin x \cos x + x$$

da cui dividendo ambo i membri per 5 otteniamo

$$\int \sin^2 x dx = -\frac{1}{2} \sin x \cos x + \frac{1}{2} x + c$$

Esercizio 0.0.6 *Calcolare il seguente integrale*

$$\int x \arctan x dx$$

Scegliamo come fattore differenziale $v' = x$ e come fattore intero $u = \arctan x$ da cui $v = \int x dx = \frac{1}{2} x^2$ e $u' = \frac{1}{x^2+1}$. Applicando la formula di integrazione per parti abbiamo:

$$\begin{aligned}
\int x \arctan x dx &= \frac{1}{2} x^2 \arctan x - \frac{1}{2} \int \frac{x^2}{x^2+1} dx = \\
&\quad \text{aggiungendo e sottraendo 1 al numeratore della funzione integranda} \\
&= \frac{1}{2} x^2 \arctan x - \frac{1}{2} \int \frac{x^2+1-1}{x^2+1} dx = \\
&= \frac{1}{2} x^2 \arctan x - \frac{1}{2} \int \left(1 - \frac{1}{x^2+1}\right) dx = \\
&= \frac{1}{2} x^2 \arctan x - \frac{1}{2} x + \frac{1}{2} \arctan x + c
\end{aligned}$$

Integrali delle funzioni razionali fratte

Sia

$$f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$$

una funzione razionale fratta dove $P(x)$ è un polinomio di grado m e $Q(x)$ è un polinomio di grado n.

Per prima cosa se $m > n$, andiamo a effettuare la divisione dei polinomi ottenendo la decomposizione

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = T(x) + \frac{R(x)}{Q(x)}$$

dove $T(x)$ è il risultato della divisione e $R(x)$ è il resto e ha grado $r < n$.

Perciò considereremo solo il caso in cui il numeratore abbia grado inferiore a quello del denominatore, cioè $m < n$.

Distinguiamo quattro casi a seconda di che tipo di radici abbia il denominatore:

- **Radici reali e distinte**: supponiamo che $Q(x)$ abbia n radici reali e distinte, $x_1, ..., x_n$, allora vale l'identità

  $$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{A_1}{x - x_1} + \frac{A_2}{x - x_2} + ... + \frac{A_n}{x - x_n} \tag{1}$$

  dove $A_1, ..., A_n$ sono costanti reali da determinare mediante minimo comune multiplo a secondo membro e poi mediante uguaglianza tra i polinomi che si troveranno a numeratore del primo e del secondo membro.

L'integrale della funzione di partenza diventerà la somma degli integrali delle funzioni che compaiono a secondo membro della (1).

- **Radici reali con molteplicità maggiore di** 1: sopponiamo che $Q(x)$ abbia h radici reali, $x_1, ..., x_h$, di molteplicità algebrica rispettivamente $m_1, ..., m_h$, allora vale l'identità

$$\begin{aligned}\frac{P(x)}{Q(x)} &= \frac{A_1}{x-x_1} + \frac{A_2}{(x-x_1)^2} + ... + \frac{A_{m_1}}{(x-x_1)^{m_1}} + \frac{B_1}{x-x_2} + \\ &+ \frac{B_2}{(x-x_2)^2} + ... + \frac{B_{m_2}}{(x-x_2)^{m_2}} + ... + \frac{S_1}{x-x_h} + \\ &+ \frac{S_2}{(x-x_h)^2} + ... + \frac{S_{m_h}}{(x-x_h)^{m_h}} \qquad (2)\end{aligned}$$

dove $A_1, ..., A_{m_1}, B_1, ..., B_{m_2}, ..., S_1, ..., S_{m_h}$ sono costanti reali da determinare mediante minimo comune multiplo a secondo membro e poi mediante uguaglianza tra i polinomi che si troveranno a numeratore del primo e del secondo membro.

L'integrale della funzione di partenza diventerà la somma degli integrali delle funzioni che compaiono a secondo membro della (2).

- **Radici complesse e distinte**: sopponiamo che $Q(x) = H(x)F(x)...L(x)$ con $H(x), G(x), ..., L(x)$ polinomi a radici complesse semplici, allora vale l'identità

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{Ax+B}{H(x)} + \frac{Cx+D}{G(x)} + ... + \frac{Ex+F}{L(x)} \qquad (3)$$

dove $A, B, C, D, ..., E, F$ sono costanti reali da determinare mediante minimo comune multiplo a secondo membro e poi mediante uguaglianza tra i polinomi che si troveranno a numeratore del primo e del secondo membro.

L'integrale della funzione di partenza diventerà la somma degli integrali delle funzioni che compaiono a secondo membro della (3).

- **Radici complesse con molteplicità maggiore di** 1: $Q(x) = H(x)F(x)...L(x)$ con $H(x), G(x), ..., L(x)$ polinomi a radici complesse con molteplicità algebrica maggiore di 1, rispettivamente $\alpha, \beta, ...\delta$ allora vale l'identità

$$\begin{aligned}\frac{P(x)}{Q(x)} &= \frac{A_1x+B_1}{H(x)} + \frac{A_2x+B_2}{[H(x)]^2} + ... + \frac{A_\alpha x+B_\alpha}{[H(x)]^\alpha} + \frac{C_1x+D_1}{G(x)} + \\ &+ \frac{C_2x+D_2}{[G(x)]^2} + ... + \frac{C_\beta x+D_\beta}{[G(x)]^\beta} + ... + \frac{E_1x+F_1}{L(x)} + \\ &+ \frac{E_2x+F_2}{[L(x)]^2} + ... + \frac{E_\delta x+F_\delta}{[L(x)]^\delta} \qquad (4)\end{aligned}$$

dove $A_1, ..., A_\alpha, B_1, ..., B_\alpha, ...$ sono costanti reali da determinare mediante minimo comune multiplo a secondo membro e poi mediante uguaglianza tra i pominomi che si troveranno a numeratore del primo e del secondo membro.

L'integrale della funzione di partenza diventerà la somma degli integrali delle funzioni che compaiono a secondo membro della (2).

Esercizio 0.0.1 *Calcolare il seguente integrale*

$$\int \frac{x^2+2x+2}{x\,(x+1)\,(x+2)}dx$$

Osserviamo preliminarmente che il denominatore ha grado 3, maggiore del numeratore, e possiede tre radici reali e distinte che sono $x = 0$, $x = -1$, $x = -2$. Allora decomponiamo il quoziente da integrare come segue:

$$\frac{x^2+2x+2}{x\,(x+1)\,(x+2)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x+1} + \frac{C}{x+2} \tag{5}$$

dove A, B e C sono tre costanti reali da determinare. A tale scopo facciamo il minimo comune multiplo a secondo membro della (5) e otteniamo

$$\begin{aligned} \frac{x^2+2x+2}{x\,(x+1)\,(x+2)} &= \frac{A\,(x+1)\,(x+2)+Bx\,(x+2)+Cx\,(x+1)}{x\,(x+1)\,(x+2)} \\ &= \frac{A\,(x^2+3x+2)+B\,(x^2+2x)+C\,(x^2+x)}{x\,(x+1)\,(x+2)} = \\ &= \frac{(A+B+C)\,x^2+(3A+2B+C)\,x+2A}{x\,(x+1)\,(x+2)} \end{aligned} \tag{6}$$

Uguagliando primo e ultimo membro della (6) abbiamo un'uguaglianza tra frazioni con stesso denominatore, quindi queste sono uguali se e solo se lo sono i numeratori, pertanto abbiamo

$$x^2+2x+2 = (A+B+C)\,x^2+(3A+2B+C)\,x+2A \tag{7}$$

Ma la (7) è uguaglianza tra polinomi, e per il principio di identità dei polinomi, questi sono uguali se e solo se lo sono i coefficienti dei termini di grado uguale, quindi abbiamo

$$\begin{cases} A+B+C=1 \\ 3A+2B+C=2 \\ 2A=2 \end{cases} \tag{8}$$

Per risolvere il sistema (8) applichiamo il metodo di eliminazione di Gauss alla seguente matrice completa del sistema

$$A' = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Il pivot della prima riga è l'elemento 1 nella posizione $(1,1)$, abbiamo quindi le seguenti operazioni elementari sulle righe di A':

$$\begin{aligned} r_2 &\rightarrow r_2 - 3r_1 \\ r_3 &\rightarrow r_3 - 2r_1 \end{aligned}$$

e quindi la matrice si trasforma come segue:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -2 & -1 \\ 0 & -2 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

Il pivot della seconda riga è -1 nella posizione $(2,2)$ e le operazioni elementari da fare sono

$$r_3 \rightarrow r_3 - 2r_2$$

ottenendo

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

Il sistema ridotto a scalini corrispondente è quindi

$$\begin{cases} A + B + C = 1 \\ -B - 2C = -1 \\ 2C = 2 \end{cases}$$

che risolto per sostituzione all'indietro a partire dall'ultima equazione dà l'unica soluzione $(A, B, C) = (1, -1, 1)$.

A questo punto tornando alla (5) abbiamo

$$\frac{x^2 + 2x + 2}{x\,(x+1)\,(x+2)} = \frac{1}{x} - \frac{1}{x+1} + \frac{1}{x+2}$$

pertanto l'integrale di partenza diventa

$$\begin{aligned}
\int \frac{x^2+2x+2}{x\left(x+1\right)\left(x+2\right)}dx &= \int \left(\frac{1}{x}-\frac{1}{x+1}+\frac{1}{x+2}\right)dx = \\
&= \int \frac{1}{x}dx - \int \frac{1}{x+1}dx + \int \frac{1}{x+2}dx = \\
&= \log|x| - \log|x+1| + \log|x+2| = \\
&= \log\left|\frac{x\left(x+2\right)}{x+1}\right| + c
\end{aligned}$$

Esercizio 0.0.2 *Calcolare il seguente integrale*

$$\int \frac{x+1}{x^2\left(x-1\right)^2}dx$$

Osserviamo preliminarmente che il denominatore ha grado 4, maggiore del numeratore, e possiede due radici reali che sono $x=0$, $x=1$ con moltepicità agebrica 2 per entrambe. Allora decomponiamo il quoziente da integrare come segue

$$\frac{x+1}{x^2\left(x-1\right)^2} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{C}{x-1} + \frac{D}{\left(x-1\right)^2} \tag{9}$$

dove A, B, C e D sono costanti reali da determinare. A tale scopo facciamo il minimo comune multiplo a secondo membro della (9) e otteniamo

$$\begin{aligned}
\frac{x+1}{x^2\left(x-1\right)^2} &= \frac{Ax\left(x-1\right)^2 + B\left(x-1\right)^2 + Cx^2\left(x-1\right) + Dx^2}{x^2\left(x-1\right)^2} \\
&= \frac{\left(A+C\right)x^3 + \left(-2A+B-C+D\right)x^2 + \left(A-2B\right)x + B}{x^2\left(x-1\right)^2}
\end{aligned} \tag{10}$$

Uguagliando primo e ultimo membro della (10) abbiamo un'uguaglianza tra frazioni con stesso denominatore, quindi queste sono uguali se e solo se lo sono i numeratori, pertanto abbiamo

$$x+1 = \left(A+C\right)x^3 + \left(-2A+B-C+D\right)x^2 + \left(A-2B\right)x + B \tag{11}$$

Ma la (11) è uguaglianza tra polinomi, e per il principio di identità dei polinomi, questi sono uguali se e solo se lo sono i coefficienti dei termini di grado uguale, quindi abbiamo

$$\begin{cases} A+C=0 \\ -2A+B-C+D=0 \\ A-2B=1 \\ B=1 \end{cases} \tag{12}$$

Risolviamo il sistema (12) per sostituzione all'indietro a partire dall'ultima equazione ottenendo l'unica soluzione $(A, B, C, D) = (3, 1, -3, 2)$.

A questo punto tornando alla (9) abbiamo

$$\frac{x+1}{x^2 (x-1)^2} = \frac{3}{x} + \frac{1}{x^2} - \frac{3}{x-1} + \frac{2}{(x-1)^2}$$

pertanto l'integrale di partenza diventa

$$\begin{aligned} \int \frac{x+1}{x^2 (x-1)^2} dx &= \int \left(\frac{3}{x} + \frac{1}{x^2} - \frac{3}{x-1} + \frac{2}{(x-1)^2} \right) dx = \\ &= 3 \int \frac{1}{x} dx + \int x^{-2} dx - 3 \int \frac{1}{x-1} dx + 2 \int (x-1)^{-2} dx = \\ &= 3 \log |x| + \frac{x^{-2+1}}{-2+1} - 3 \log |x-1| + 2 \frac{(x-1)^{-2+1}}{-2+1} = \\ &= 3 \log \left| \frac{x}{x-1} \right| - \frac{1}{x} - \frac{2}{x-1} + c \end{aligned}$$

Esercizio 0.0.3 *Calcolare il seguente integrale*

$$\int \frac{4-3x}{(x-3)^2 (x^2+1)} dx$$

Osserviamo preliminarmente che il denominatore ha grado 4, maggiore del numeratore, e possiede una radice reale $x = 3$ di molteplicità algebrica 2 e due radici complesse coniugate $x = \pm i$ di molteplicità algebrica 1. Allora decomponiamo il quoziente da integrare come segue:

$$\frac{4-3x}{(x-3)^2 (x^2+1)} = \frac{A}{x-3} + \frac{B}{(x-3)^2} + \frac{Cx+D}{x^2+1} \tag{13}$$

dove A, B, C e D sono costanti reali da determinare. A tale scopo facciamo il minimo comune multiplo a secondo membro della (13) e otteniamo

$$\begin{aligned} \frac{4-3x}{(x-3)^2 (x^2+1)} &= \frac{A (x-3)(x^2+1) + B (x^2+1) + (Cx+D)(x-3)^2}{(x-3)^2 (x^2+1)} = \qquad (14) \\ &= \frac{(A+C) x^3 + (-3A+B-6C+D) x^2 + (A+9C-6D) x - 3A + B + 9D}{(x-3)^2 (x^2+1)} \end{aligned}$$

Uguagliando primo e ultimo membro della (14) abbiamo un'uguaglianza tra frazioni con stesso denominatore, quindi queste sono uguali se e solo se lo sono i numeratori, pertanto abbiamo

$$4 - 3x = (A + C)\, x^3 + (-3A + B - 6C + D)\, x^2 + (A + 9C - 6D)\, x - 3A + B + 9D \tag{15}$$

Ma la (15) è uguaglianza tra polinomi, e per il principio di identità dei polinomi, questi sono uguali se e solo se lo sono i coefficienti dei termini di grado uguale, quindi abbiamo

$$\begin{cases} A + C = 0 \\ -3A + B - 6C + D = 0 \\ A + 9C - 6D = -3 \\ -3A + B + 9D = 4 \end{cases} \tag{16}$$

Per risolvere il sistema (16) applichiamo il metodo di eliminazione di Gauss alla seguente matrice completa del sistema

$$A' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & -6 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 9 & -6 & -3 \\ -3 & 1 & 0 & 9 & 4 \end{pmatrix}$$

Il pivot della prima riga è l'elemento 1 nella posizione $(1, 1)$, abbiamo quindi le seguenti operazioni elementari sulle righe di A':

$$\begin{aligned} r_2 &\rightarrow r_2 + 3r_1 \\ r_3 &\rightarrow r_3 - r_1 \\ r_4 &\rightarrow r_4 + 3r_1 \end{aligned}$$

e quindi la matrice si trasforma come segue:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 8 & -6 & -3 \\ 0 & 1 & 3 & 9 & 4 \end{pmatrix}$$

Il pivot della seconda riga è 1 nella posizione $(2, 2)$ e le operazioni elementari da fare sono

$$r_4 \rightarrow r_4 - r_2$$

ottenendo

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 8 & -6 & -3 \\ 0 & 0 & 6 & 8 & 4 \end{pmatrix}$$

Il pivot della terza riga è 8 nella posizione $(3,3)$ e le operazioni elementari da fare sono

$$r_4 \to r_4 - \frac{6}{8} r_3$$

che può essere sostituita anche da

$$r_4 \to 4r_4 - 3r_3$$

ottenendo

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 8 & -6 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 50 & 25 \end{pmatrix}$$

Il sistema ridotto a scalini corrispondente è quindi

$$\begin{cases} A + C = 0 \\ B - 3C + D = 0 \\ 8C - 6D = -3 \\ 50D = 25 \end{cases}$$

che risolto per sostituzione all'indietro a partire dall'ultima equazione dà l'unica soluzione $(A, B, C, D) = \left(0, -\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}\right)$.

A questo punto tornando alla (13) abbiamo

$$\frac{4-3x}{(x-3)^2(x^2+1)} = \frac{-\frac{1}{2}}{(x-3)^2} + \frac{\frac{1}{2}}{x^2+1}$$

pertanto l'integrale di partenza diventa

$$\begin{aligned} \int \frac{4-3x}{(x-3)^2(x^2+1)} dx &= \int \left(\frac{-\frac{1}{2}}{(x-3)^2} + \frac{\frac{1}{2}}{x^2+1} \right) dx = \\ &= -\frac{1}{2} \int \frac{1}{(x-3)^2} dx + \frac{1}{2} \int \frac{1}{x^2+1} dx = \\ &= -\frac{1}{2} \frac{(x-3)^{-2+1}}{-2+1} + \frac{1}{2} \arctan x = \\ &= \frac{1}{2(x-3)} + \frac{1}{2} \arctan x + c \end{aligned}$$

Esercizio 0.0.4 *Calcolare il seguente integrale*

$$\int \frac{x^4 + x^3 + 4x + 4}{(x-2)^2 (x^2+2)^2} dx$$

Osserviamo preliminarmente che il denominatore ha grado 6, maggiore del numeratore, e possiede una radice reale $x = 2$ di molteplicità algebrica 2 e due radici complesse coniugate $x = \pm i\sqrt{2}$ di molteplicità algebrica 2. Allora decomponiamo il quoziente da integrare come segue:

$$\frac{x^4 + x^3 + 4x + 4}{(x-2)^2 (x^2+2)^2} = \frac{A}{x-2} + \frac{B}{(x-2)^2} + \frac{Cx+D}{x^2+2} + \frac{Ex+F}{(x^2+2)^2} \tag{17}$$

dove A, B, C, D, E, F sono costanti reali da determinare. A tale scopo facciamo il minimo comune multiplo a secondo membro della (17) e otteniamo

$$\frac{x^4 + x^3 + 4x + 4}{(x-2)^2 (x^2+2)^2} =$$

$$= \frac{A(x-2)(x^2+2)^2 + B(x^2+2)^2 + (Cx+D)(x-2)^2(x^2+2) + (Ex+F)(x-2)^2}{(x-2)^2(x^2+2)^2} =$$

$$= \frac{(A+C)x^5 + (-2A+B+D)x^4 + (4A+2C-4D+E)x^3}{x(x+1)(x+2)} +$$

$$+ \frac{(-8A+4B-8C+6D-4E+F)x^2 + (4A+8C-8D+4E-4F)x - 8A+4B+8D+4F}{x(x+1)(x+2)}$$

Uguagliando primo e ultimo membro abbiamo un'uguaglianza tra frazioni con stesso denominatore, quindi queste sono uguali se e solo se lo sono i numeratori, pertanto abbiamo

$$\begin{gathered} x^4 + x^3 + 4x + 4 = (A+C)x^5 + (-2A+B+D)x^4 + (4A+2C-4D+E)x^3 + \\ + (-8A+4B-8C+6D-4E+F)x^2 + (4A+8C-8D+4E-4F)x + \\ -8A+4B+8D+4F \end{gathered}$$

Ma la precedente è uguaglianza tra polinomi, e per il principio di identità dei polinomi, questi sono uguali se e solo se lo sono i coefficienti dei termini di grado uguale, quindi abbiamo

$$\begin{cases} A+C=0 \\ -2A+B+D=1 \\ 4A+2C-4D+E=1 \\ -8A+4B-8C+6D-4E+F=0 \\ 4A+8C-8D+4E-4F=4 \\ -8A+4B+8D+4F=4 \end{cases} \tag{18}$$

Per risolvere il sistema (18) applichiamo il metodo di eliminazione di Gauss alla seguente matrice completa del sistema

$$A' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 4 & 0 & 2 & -4 & 1 & 0 & 1 \\ -8 & 4 & -8 & 6 & -4 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 8 & -8 & 4 & -4 & 4 \\ -8 & 4 & 0 & 8 & 0 & 4 & 4 \end{pmatrix}$$

Il pivot della prima riga è l'elemento 1 nella posizione $(1,1)$, abbiamo quindi le seguenti operazioni elementari sulle righe di A':

$$\begin{aligned} r_2 &\rightarrow r_2 + 2r_1 \\ r_3 &\rightarrow r_3 - 4r_1 \\ r_4 &\rightarrow r_4 + 8r_1 \\ r_5 &\rightarrow r_5 - 4r_1 \\ r_6 &\rightarrow r_6 + 8r_1 \end{aligned}$$

e quindi la matrice si trasforma come segue:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & -4 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 4 & 0 & 6 & -4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & -8 & 4 & -4 & 4 \\ 0 & 4 & 8 & 8 & 0 & 4 & 4 \end{pmatrix}$$

Il pivot della seconda riga è 1 nella posizione $(2,2)$ e le operazioni elementari da fare sono

$$\begin{aligned} r_4 &\rightarrow r_4 - 4r_2 \\ r_6 &\rightarrow r_6 - 4r_2 \end{aligned}$$

ottenendo

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & -4 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -8 & 2 & -4 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 4 & -8 & 4 & -4 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 0 & 4 & 0 \end{pmatrix}$$

Il pivot della terza riga è -2 nella posizione $(3,3)$ e le operazioni elementari da fare sono

$$\begin{aligned} r_4 &\rightarrow r_4 - 4r_3 \\ r_5 &\rightarrow r_5 + 2r_3 \end{aligned}$$

ottenendo

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & -4 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 18 & -8 & 1 & -8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 6 & -4 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

Il pivot della quarta riga è 18 ma non ci sono operazioni da fare rispetto a tale pivot giacché gli elementi nella colonna che sono al di sotto del pivot sono già nulli. Pertanto passiamo alla riga successiva.Il pivot della quinta riga è 6 e si trova nella posizione $(5,5)$ e le operazioni elementari da fare sono

$$r_6 \rightarrow r_6 - \frac{4}{6} r_5$$

che può essere sostituita da

$$r_6 \rightarrow 3r_6 - 2r_5$$

ottenendo

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & -4 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 18 & -8 & 1 & -8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 6 & -4 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 8 & 0 \end{pmatrix}$$

Il sistema ridotto a scalini corrispondente è quindi

$$\begin{cases} A + C = 0 \\ B + 2C + D = 1 \\ -2C - 4D + E = 1 \\ 18D - 8E + F = -8 \\ 6E - 4F = 6 \\ 8F = 0 \end{cases}$$

che risolto per sostituzione all'indietro a partire dall'ultima equazione dà l'unica soluzione $(A, B, C, D, E, F) = (0, 1, 0, 0, 1, 0)$.

A questo punto tornando alla (17) abbiamo

$$\frac{x^4+x^3+4x+4}{(x-2)^2\left(x^2+2\right)^2}=\frac{1}{(x-2)^2}+\frac{x}{\left(x^2+2\right)^2}$$

pertanto l'integrale di partenza diventa

$$\begin{aligned}
\int \frac{x^4+x^3+4x+4}{(x-2)^2\left(x^2+2\right)^2}dx &= \int\left(\frac{1}{(x-2)^2}+\frac{x}{\left(x^2+2\right)^2}\right)dx= \\
&= \int \frac{1}{(x-2)^2}dx+\frac{1}{2}\int \frac{2x}{\left(x^2+2\right)^2}dx= \\
&= \frac{(x-2)^{-2+1}}{-2+1}+\frac{1}{2}\frac{\left(x^2+2\right)^{-2+1}}{-2+1}= \\
&= -\frac{1}{(x-2)}-\frac{1}{2\left(x^2+2\right)}+c
\end{aligned}$$

Esercizio 0.0.5 *Calcolare il seguente integrale*

$$\int \frac{x^5-7x^4+8x^3+15x^2-26x+13}{x^2-7x+10}dx$$

Osserviamo preliminarmente che il denominatore ha grado 2, minore del numeratore, quindi dobbiamo dapprima eseguire la divisione dei polinomi. Abbiamo:

$$\begin{array}{llllll|lll}
x^5 & -7x^4 & +8x^3 & +15x^2 & -26x & +13 & x^2 & -7x & +10 \\
-x^5 & +7x^4 & -10x^3 & & & & -- & -- & --- \\
-- & --- & --- & --- & & & x^3 & -2x & +1 \\
0 & 0 & -2x^3 & +15x^2 & -26x & & & & \\
 & & +2x^3 & -14x^2 & +20x & & & & \\
 & & --- & --- & --- & --- & & & \\
 & & 0 & x^2 & -6x & +13 & & & \\
 & & & -x^2 & +7x & -10 & & & \\
 & & & --- & --- & --- & & & \\
 & & & 0 & x & +3 & & &
\end{array}$$

che permette di scomporre la frazione integranda come segue:

$$\begin{aligned}
\int \frac{x^5-7x^4+8x^3+15x^2-26x+13}{x^2-7x+10}dx &= \int\left(x^3-2x+1+\frac{x+3}{x^2-7x+10}\right)dx= \\
&= \frac{1}{4}x^4-x^2+x+\int \frac{x+3}{x^2-7x+10}dx \quad (19)
\end{aligned}$$

A questo punto possiamo svolgere l'ultimo integrale che compare osservando che il denominatore possiede due radici reali e distinte che sono $x = 5$, $x = 2$. Allora decomponiamo il quoziente da integrare come segue:

$$\frac{x+3}{x^2-7x+10} = \frac{A}{x-5} + \frac{B}{x-2} \tag{20}$$

dove A, B sono costanti reali da determinare. A tale scopo facciamo il minimo comune multiplo a secondo membro della (20) e otteniamo

$$\begin{aligned} \frac{x+3}{x^2-7x+10} &= \frac{A(x-2)+B(x-5)}{(x-5)(x-2)} \\ &= \frac{(A+B)x-2A-5B}{(x-5)(x-2)} \end{aligned} \tag{21}$$

Uguagliando primo e ultimo membro della (21) abbiamo un'uguaglianza tra frazioni con stesso denominatore, quindi queste sono uguali se e solo se lo sono i numeratori, pertanto abbiamo

$$x+3 = (A+B)x - 2A - 5B \tag{22}$$

Ma la (22) è uguaglianza tra polinomi, e per il principio di identità dei polinomi, questi sono uguali se e solo se lo sono i coefficienti dei termini di grado uguale, quindi abbiamo

$$\begin{cases} A+B=1 \\ -2A-5B=3 \end{cases}$$

che risolto dà l'unica soluzione $(A, B) = \left(\frac{8}{3}, -\frac{5}{3}\right)$.

A questo punto tornando alla (20) abbiamo

$$\frac{x+3}{x^2-7x+10} = \frac{8}{3}\frac{1}{x-5} - \frac{5}{3}\frac{B}{x-2}$$

pertanto l'integrale di partenza dalla (19) diventa

$$\begin{aligned} \int \frac{x^5-7x^4+8x^3+15x^2-26x+13}{x^2-7x+10}dx &= \frac{1}{4}x^4 - x^2 + x + \int \frac{x+3}{x^2-7x+10}dx = \\ &= \frac{1}{4}x^4 - x^2 + x + \frac{8}{3}\int \frac{1}{x-5}dx - \frac{5}{3}\int \frac{1}{x-2}dx = \\ &= \frac{1}{4}x^4 - x^2 + x + \frac{8}{3}\log|x-5| - \frac{5}{3}\log|x-2| = \\ &= \frac{1}{4}x^4 - x^2 + x + \frac{\log|x-5|^{\frac{8}{3}}}{\log|x-2|^{\frac{5}{3}}} + c \end{aligned}$$

Integrali - esercizi vari

Esercizio 0.0.1 *Calcolare il seguente integrale*

$$\int \frac{x}{x+1}dx$$

Aggiungendo e sottraendo 1 al numeratore della funzione integranda abbiamo:

$$\begin{aligned}
\int \frac{x}{x+1}dx &= \int \frac{x+1-1}{x+1}dx = \\
&= \int \left(1 - \frac{1}{x+1}\right) dx = \\
&= x - \log|x+1| + c
\end{aligned}$$

Esercizio 0.0.2 *Calcolare il seguente integrale*

$$\int \frac{x^2+5x-1}{\sqrt{x}}dx$$

Scomponendo in somme la funzione integranda abbiamo:

$$\begin{aligned}
\int \frac{x^2+5x-1}{\sqrt{x}}dx &= \int \left(\frac{x^2}{\sqrt{x}} + \frac{5x}{\sqrt{x}} - \frac{1}{\sqrt{x}}\right) dx = \\
&= \int \left(x^{2-\frac{1}{2}} + 5x^{1-\frac{1}{2}} - x^{-\frac{1}{2}}\right) dx = \\
&= \frac{x^{\frac{3}{2}+1}}{\frac{3}{2}+1} + 5\frac{x^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1} - \frac{x^{-\frac{1}{2}+1}}{-\frac{1}{2}+1} = \\
&= \frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}} + \frac{10}{3}x^{\frac{3}{2}} - 2x^{\frac{1}{2}} = \\
&= \frac{2}{5}x^2\sqrt{x} + \frac{10}{3}|x|\sqrt{x} - 2\sqrt{x} + c
\end{aligned}$$

Esercizio 0.0.3 *Calcolare il seguente integrale*

$$\int \frac{1}{\sin^2 x \cos^2 x} dx$$

Ricordando che dalla trigonometria abbiamo $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$, sostituendo il numeratore della funzione integranda, abbiamo:

$$\begin{aligned}
\int \frac{1}{\sin^2 x \cos^2 x} dx &= \int \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\sin^2 x \cos^2 x} dx = \\
&\quad \text{scomponendo in somme} \\
&= \int \left(\frac{1}{\cos^2 x} + \frac{1}{\sin^2 x} \right) dx = \\
&= \tan x - \cot x + c
\end{aligned}$$

Esercizio 0.0.4 *Calcolare il seguente integrale*

$$\int \frac{1 + \log^3 x}{x} dx$$

Scomponendo in somme la funzione integranda abbiamo:

$$\begin{aligned}
\int \frac{1 + \log^3 x}{x} dx &= \int \left(\frac{1}{x} + \frac{\log^3 x}{x} \right) dx = \\
&\quad \text{osservando nel secondo addendo che } \frac{1}{x} \text{ è proprio la derivata di } \log x \\
&= \log |x| + \frac{\log^4 x}{4} + c
\end{aligned}$$

Esercizio 0.0.5 *Calcolare il seguente integrale*

$$\int \frac{e^{\tan x} - 1}{\cos^2 x} dx$$

Scomponendo in somme la funzione integranda abbiamo:

$$\begin{aligned}
\int \frac{e^{\tan x} - 1}{\cos^2 x} dx &= \int \left(\frac{e^{\tan x}}{\cos^2 x} - \frac{1}{\cos^2 x} \right) dx = \\
&\quad \text{osservando nel primo addendo che } \frac{1}{\cos^2 x} \text{è proprio la derivata di } \tan x \\
&= e^{\tan x} - \tan x + c
\end{aligned}$$

Esercizio 0.0.6 *Calcolare il seguente integrale*

$$\int x \tan^2 x dx$$

Abbiamo:

$$\begin{aligned}
\int x \tan^2 x dx &= \int x \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} dx = \\
&= \int x \frac{1-\cos^2 x}{\cos^2 x} dx = \\
&= \int \left(\frac{x}{\cos^2 x} - x \right) dx = \\
&= \int \frac{x}{\cos^2 x} dx - \frac{x^2}{2} \qquad (1)
\end{aligned}$$

Svolgiamo per parti l'ultimo integrale che compare, prendendo come fattore differenziale $v' = \frac{1}{\cos^2 x}$ e come fattore intero $u = x$ da cui $v = \int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \tan x$ e $u' = 1$, così abbiamo

$$\begin{aligned}
\int \frac{x}{\cos^2 x} dx &= x \tan x - \int \tan x dx = \\
&= x \tan x - \int \frac{\sin x}{\cos x} dx = \\
&= x \tan x + \log |\cos x|
\end{aligned}$$

che sostituita in (1) dà

$$\int x \tan^2 x dx = x \tan x + \log |\cos x| - \frac{x^2}{2} + c$$

Esercizio 0.0.7 *Calcolare il seguente integrale*

$$\int \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}} dx$$

Moltiplicando e dividendo la frazione integranda per -1 e aggiungendo e dividendo 1 a numeratore, abbiamo

$$\begin{aligned}
\int \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}dx &= -\int \frac{1-x^2-1}{\sqrt{1-x^2}}dx = \\
&= -\int \left(\frac{1-x^2}{\sqrt{1-x^2}} - \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\right)dx = \\
&= -\int \left(\sqrt{1-x^2} - \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\right)dx = \\
&= -\int \sqrt{1-x^2}dx + \arcsin x \qquad (2)
\end{aligned}$$

Svolgiamo per parti l'ultimo integrale che compare, prendendo come fattore differenziale $v' = 1$ e come fattore intero $u = \sqrt{1-x^2}$ da cui $v = x$ e $u' = -\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$, così abbiamo

$$\int \sqrt{1-x^2}dx = x\sqrt{1-x^2} + \int \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}dx$$

che sostituita in (2) dà

$$\int \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}dx = -x\sqrt{1-x^2} - \int \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}dx + \arcsin x$$

da cui, portando a primo membro l'integrale che compare a secondo membro, abbiamo

$$2\int \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}dx = -x\sqrt{1-x^2} + \arcsin x$$

perciò

$$\int \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}dx = -\frac{1}{2}x\sqrt{1-x^2} + \frac{1}{2}\arcsin x + c$$

Esercizio 0.0.8 *Calcolare il seguente integrale*

$$\int \frac{e^{2x}(e^x+3)}{e^{2x}-4}dx$$

Effettuando la sostituzione

$$y = e^x \Longrightarrow dy = e^x dx$$

abbiamo

$$\begin{aligned}\int \frac{e^{2x}(e^x+3)}{e^{2x}-4}dx &= \int \frac{e^{x}(e^x+3)}{e^{2x}-4}e^x dx = \\ &= \int \frac{y^2+3y}{y^2-4}dy\end{aligned}$$

Ci siamo quindi ridotti all'integrale di una funzione razionale fratta. Effettuiamo prima la divisione dei polinomi avendo

$$\begin{array}{llllll} y^2 & +3y & & \vert & y^2 & -4 \\ -y^2 & & 4 & -- & -- & -- \\ -- & -- & -- & \vert & 1 & \\ 0 & 3y & +4 & \vert & & \end{array}$$

da cui

$$\begin{aligned}\int \frac{y^2+3y}{y^2-4}dy &= \int \left(1+\frac{3y+4}{y^2-4}\right)dy = \\ &= y + \int \frac{3y+4}{y^2-4}dy\end{aligned}$$

Avendo il denominatore radici reali e distinte, abbiamo la seguente uguaglianza

$$\begin{aligned}\frac{3y+4}{y^2-4} &= \frac{A}{y+2}+\frac{B}{y-2} = \\ &= \frac{(A+B)y-2A+2B}{y^2-4}\end{aligned}$$

da cui il sistema

$$\begin{cases} A+B=3 \\ -2A+2B=4 \end{cases}$$

che ha l'unica soluzione $(A,B)=\left(\frac{1}{2},\frac{5}{2}\right)$ e perciò

$$\begin{aligned}\int \frac{3y+4}{y^2-4}dy &= \frac{1}{2}\int\frac{1}{y+2}dy+\frac{5}{2}\int\frac{1}{y-2}dy = \\ &= \frac{1}{2}\log|y+2|+\frac{5}{2}\log|y-2|\end{aligned}$$

Ritornando all'integrale di partenza e risostituendo $y=e^x$ abbiamo

$$\int \frac{e^{2x}(e^x+3)}{e^{2x}-4}dx = e^x+\frac{1}{2}\log|e^x+2|+\frac{5}{2}\log|e^x-2|+c$$

Esercizio 0.0.9 *Calcolare il seguente integrale*

$$\int \frac{e^{2x}\left(e^{2x}+2\right)}{e^{4x}-1}dx$$

Effettuando la sostituzione

$$y = e^{2x} \Longrightarrow dy = 2e^{2x}dx$$

abbiamo

$$\begin{aligned}\int \frac{e^{2x}\left(e^{2x}+2\right)}{e^{4x}-1}dx &= \frac{1}{2}\int \frac{e^{2x}+2}{e^{4x}-1}\left(2e^{2x}\right)dx = \\ &= \frac{1}{2}\int \frac{y+2}{y^2-1}dy\end{aligned}$$

Ci siamo quindi ridotti all'integrale di una funzione razionale fratta. Avendo il denominatore radici reali e distinte, abbiamo la seguente uguaglianza

$$\begin{aligned}\frac{y+2}{y^2-1} &= \frac{A}{y+1}+\frac{B}{y-1} = \\ &= \frac{(A+B)y-A+B}{y^2-1}\end{aligned}$$

da cui il sistema

$$\begin{cases} A+B=1 \\ -A+B=2 \end{cases}$$

che ha l'unica soluzione $(A,B) = \left(-\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right)$ e perciò

$$\begin{aligned}\int \frac{y+2}{y^2-1}dy &= -\frac{1}{2}\int \frac{1}{y+1}dy + \frac{3}{2}\int \frac{1}{y-1}dy = \\ &= -\frac{1}{2}\log|y+1| + \frac{3}{2}\log|y-1|\end{aligned}$$

Ritornando all'integrale di partenza e risostituendo $y = e^x$ abbiamo

$$\begin{aligned}\int \frac{e^{2x}\left(e^{2x}+2\right)}{e^{4x}-1}dx &= \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\log\left|e^{2x}+1\right| + \frac{3}{2}\log\left|e^{2x}-1\right|\right)+c = \\ &= -\frac{1}{4}\log\left|e^{2x}+1\right| + \frac{3}{4}\log\left|e^{2x}-1\right| + c\end{aligned}$$

Esercizio 0.0.10 *Calcolare il seguente integrale*

$$\int x\log(4x^2-9)dx$$

Applichiamo l'integrazione per parti prendendo come fattore differenziale $v' = x$ e come fattore intero $u = \log(4x^2 - 9)$ da cui $v = \frac{x^2}{2}$ e $u' = \frac{8x}{4x^2-9}$, così abbiamo

$$\int x \log(4x^2 - 9)dx = \frac{1}{2}x^2 \log(4x^2 - 9) - \int \frac{4x^3}{4x^2 - 9}dx \tag{3}$$

Svolgiamo separatamente l'integrale che compare a secondo membro della (3). Innanzitutto dividiamo i polinomi

$$\begin{array}{lll|ll} 4x^3 & & & 4x^2 & -9 \\ -4x^3 & +9x & & -- & -- \\ --- & --- & & x & \\ 0 & +9x & & & \end{array}$$

da cui

$$\begin{aligned} \int \frac{4x^3}{4x^2 - 9}dx &= \int \left(x + \frac{9x}{4x^2 - 9}\right) dx = \\ &= \frac{1}{2}x^2 + \int \frac{9x}{4x^2 - 9}dx \end{aligned} \tag{4}$$

Osserviamo che l'integrale che compare all'ultimo membro della (4) è l'integrale di una funzione razionale fratta dove $4x^2 - 9 = 4\left(x - \frac{3}{2}\right)\left(x + \frac{3}{2}\right)$ perciò vale

$$\frac{9x}{4x^2 - 9} = \frac{1}{4}\frac{9x}{x^2 - \frac{9}{4}} = \frac{1}{4}\left(\frac{A}{x - \frac{3}{2}} + \frac{B}{x + \frac{3}{2}}\right) \tag{5}$$

da cui l'uguaglianza

$$\frac{9x}{x^2 - \frac{9}{4}} = \frac{A}{x - \frac{3}{2}} + \frac{B}{x + \frac{3}{2}}$$

che dà il sistema

$$\begin{cases} A + B = 9 \\ \frac{3}{2}A - \frac{3}{2}B = 0 \end{cases}$$

con l'unica soluzione $(A, B) = \left(\frac{9}{2}, \frac{9}{2}\right)$ e perciò dalla (5) abbiamo

$$\begin{aligned} \int \frac{9x}{4x^2 - 9}dx &= \frac{1}{4}\left(\frac{9}{2}\int \frac{1}{x - \frac{3}{2}}dx + \frac{9}{2}\int \frac{1}{x + \frac{3}{2}}dx\right) = \\ &= \frac{9}{8}\left(\log\left|x - \frac{3}{2}\right| + \log\left|x + \frac{3}{2}\right|\right) = \\ &= \frac{9}{8}\log\left|x^2 - \frac{9}{4}\right| \end{aligned}$$

che infine sostituito in (4) permette di calcolare l'integrale di partenza avendo

$$\int x\log(4x^2-9)dx = \frac{1}{2}x^2\log(4x^2-9) - \frac{1}{2}x^2 - \frac{9}{8}\log\left|x^2-\frac{9}{4}\right| + c$$

Forma indeterminata $\frac{\infty}{\infty}$

Negli esercizi di seguito ometteremo di verificare che il calcolo del limite dato conduce alla forma inderminata $\frac{\infty}{\infty}$, per la quale basta sostituire il valore del punto di accumulazione a cui tende x nell'espressione della funzione.

Le funzioni più semplici che si presentano nella forma indeterminata in esame sono le funzioni razionali, cioè i rapporti di polinomi. Allora valgono le seguenti regole:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0}{b_m x^m + b_{m-1}x^{m-1} + ... + b_1 x + b_0} =$$
$$= \lim_{x\to+\infty}\frac{a_n x^n}{b_m x^m} = \begin{cases} 0 & \text{se } n < m \\ \frac{a_n}{b_m} & \text{se } n = m \\ \frac{a_n}{b_m}(+\infty) & \text{se } n > m \end{cases}$$

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0}{b_m x^m + b_{m-1}x^{m-1} + ... + b_1 x + b_0} =$$
$$= \lim_{x\to-\infty}\frac{a_n x^n}{b_m x^m} = \begin{cases} 0 & \text{se } n < m \\ \frac{a_n}{b_m} & \text{se } n = m \\ \frac{a_n}{b_m}(-\infty)^{n-m} & \text{se } n > m \end{cases}$$

Un procedimento analogo si usa nel caso di limiti del tipo

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$$

quando $f(x)$ è la somma di due o più funzioni divergenti una delle quali, diciamola $f^*(x)$, sia un infinito di ordine superiore rispetto agli altri, e analogamente per $g(x)$. In tale ragionamento si possono trascurare quegli addendi che sono funzioni limitate. Il calcolo del limite si riduce quindi a

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f^*(x)}{g^*(x)}$$

Esercizio 0.0.1 *Calcolare*

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{4x^2 + x - 1}{8x^3 + 3x^2 - 5}$$

Basta osservare che il numeratore ha grado inferiore al denominatore per concludere che

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{4x^2 + x - 1}{8x^3 + 3x^2 - 5} = 0$$

Esercizio 0.0.2 *Calcolare*

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{e^{3x} - 4e^{2x} + 2e^x - 1}{2e^{3x} + 6e^{2x} + 5}$$

Poniamo $e^x = y$, allora quando $x \to +\infty$, si ha $y \to +\infty$, quindi abbiamo

$$\begin{aligned} &\lim_{x \to +\infty} \frac{e^{3x} - 4e^{2x} + 2e^x - 1}{2e^{3x} + 6e^{2x} + 5} = \\ &= \lim_{y \to +\infty} \frac{y^3 - 4y^2 + 2y - 1}{2y^3 + 6y^2 + 5} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Esercizio 0.0.3 *Calcolare*

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{e^{2x} - 5e^x + 1}{e^{3x} + 7e^{2x} - e^x + 2}$$

Poniamo $e^x = y$, allora quando $x \to +\infty$, si ha $y \to +\infty$, quindi abbiamo

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{e^{2x} - 5e^x + 1}{e^{3x} + 7e^{2x} - e^x + 2} =$$
$$= \lim_{y\to+\infty} \frac{y^2 - 5y + 1}{y^3 + 7y^2 - y + 2} = 0$$

Esercizio 0.0.4 *Calcolare*

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{e^{5x} + 4e^{3x} + e^x + 1}{-2e^{3x} + e^x + 3}$$

Poniamo $e^x = y$, allora quando $x \to +\infty$, si ha $y \to +\infty$, quindi abbiamo

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{e^{5x} + 4e^{3x} + e^x + 1}{-2e^{3x} + e^x + 3} =$$
$$= \lim_{y\to+\infty} \frac{y^5 + 4y^3 + y + 1}{-2y^3 + y + 3} =$$
$$= -\frac{1}{2}(+\infty) = -\infty$$

Esercizio 0.0.5 *Calcolare*

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{e^{6x} + e^x + 2}{e^{4x} + 1}$$

Poniamo $e^x = y$, allora quando $x \to +\infty$, si ha $y \to +\infty$, quindi abbiamo

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{e^{6x} + e^x + 2}{e^{4x} + 1} =$$
$$= \lim_{y\to+\infty} \frac{y^6 + y + 2}{y^4 + 1} = +\infty$$

Esercizio 0.0.6 *Calcolare*

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{2\log x + 1}{3\log x + 5}$$

Poniamo $\log x = y$, allora quando $x \to 0^+$, si ha $y \to -\infty$, quindi abbiamo

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{2\log x + 1}{3\log x + 5} =$$
$$= \lim_{y\to -\infty} \frac{2y + 1}{3y + 5} = \frac{2}{3}$$

Esercizio 0.0.7 *Calcolare*

$$\lim_{x\to +\infty} \frac{2x + \sqrt{x^2 - 1}}{\sqrt[3]{3x^3 - 2x^2 + 1}}$$

Osserviamo che $\sqrt{x^2 - 1}$ si comporta come x e $\sqrt[3]{3x^3 - 2x^2 + 1}$ si comporta come $\sqrt[3]{3}x$, quindi abbiamo

$$\lim_{x\to +\infty} \frac{2x + \sqrt{x^2 - 1}}{\sqrt[3]{3x^3 - 2x^2 + 1}} =$$
$$= \lim_{x\to +\infty} \frac{3x}{\sqrt[3]{3}x} = \frac{3}{\sqrt[3]{3}}$$

Esercizio 0.0.8 *Calcolare*

$$\lim_{x\to +\infty} \frac{\sqrt{x^2 + 1} + 3x^2 + 2}{\sqrt{x^4 + 2x^2 + x + 3}}$$

Osserviamo che $\sqrt{x^2 + 1}$ si comporta come x e $\sqrt{x^4 + 2x^2 + x + 3}$ si comporta come x^2, quindi abbiamo

$$\lim_{x\to +\infty} \frac{\sqrt{x^2 + 1} + 3x^2 + 2}{\sqrt{x^4 + 2x^2 + x + 3}} =$$
$$= \lim_{x\to +\infty} \frac{3x^2}{x^2} = 3$$

Esercizio 0.0.9 *Calcolare*

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{5x^3+2\sqrt{x}+1}{2x^3+\sqrt[3]{x^2}+\sqrt{x+2}}$$

Osserviamo che ogni addendo al numeratore tende a $+\infty$ ma il termine x^3 vi tende con velocità maggiore di $\sqrt{x}$;analogamente accade per il denominatore, quindi si ha

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{5x^3+2\sqrt{x}+1}{2x^3+\sqrt[3]{x^2}+\sqrt{x+2}}=$$
$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{5x^3}{2x^3}=\frac{5}{2}$$

Esercizio 0.0.10 *Calcolare*

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{e^{3x}-5e^{2x}+\arctan(4x)}{2e^{3x}+1}$$

Osserviamo che essendo $\arctan(4x)$ limitata, possiamo scrivere

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{e^{3x}-5e^{2x}+\arctan(4x)}{2e^{3x}+1}=$$
$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{e^{3x}-5e^{2x}}{2e^{3x}+1}=\frac{1}{2}$$

Esercizio 0.0.11 *Calcolare*

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\log(x^5-3x^4+2x+1)}{\log(x^2+7x+8)}$$

Abbiamo

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\log(x^5)}{\log(x^2)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{5\log x}{2\log x}=\frac{5}{2}$$

Esercizio 0.0.12 *Calcolare*

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\log\left(e^x+x^3-7x^2+1\right)}{2x+1}$$

Abbiamo

$$\begin{aligned}&\lim_{x\to+\infty}\frac{\log\left(e^x+x^3-7x^2+1\right)}{2x+1}=\\&=\lim_{x\to+\infty}\frac{\log\left(e^x\right)}{2x+1}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x\log e}{2x+1}=\\&=\lim_{x\to+\infty}\frac{x\log e}{2x+1}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{2x+1}=\frac{1}{2}\end{aligned}$$

Esercizio 0.0.13 *Calcolare*

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{5x-\sqrt{x^2-2x+4}}{2\sqrt{x^2-1}+\sqrt{1-x}}$$

Osserviamo che, quando $x\to-\infty$, sia il termine $\sqrt{x^2-2x+4}$sia il termine $\sqrt{x^2-1}$si comportanocome $-x$, quindi abbiamo

$$\begin{aligned}&\lim_{x\to-\infty}\frac{5x-\sqrt{x^2-2x+4}}{2\sqrt{x^2-1}+\sqrt{1-x}}=\\&=\lim_{x\to-\infty}\frac{5x-(-x)}{2\left(-x\right)}=\\&=\lim_{x\to-\infty}\frac{6x}{-2x}=-3\end{aligned}$$

Esercizio 0.0.14 *Calcolare*

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x+\sqrt{x^2+5}}{\sqrt[3]{5x^3+4x+3}}$$

Osserviamo che, quando $x\to+\infty$, $\sqrt{x^2+5}$ si comporta come x e $\sqrt[3]{5x^3+4x+3}$

si comporta come $\sqrt[3]{5}x$, quindi abbiamo

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x+\sqrt{x^2+5}}{\sqrt[3]{5x^3+4x+3}} =$$
$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{2x}{\sqrt[3]{5}x} = \frac{2}{\sqrt[3]{5}}$$

Forma indeterminata $\infty - \infty$

Negli esercizi di seguito ometteremo di verificare che il calcolo del limite dato conduce alla forma inderminata $\infty - \infty$, per la quale basta sostituire il valore del punto di accumulazione a cui tende x nell'espressione della funzione.

Se il limite

$$\lim_{x \to x_0} f(x) - g(x)$$

si presenta nella forma $\infty - \infty$, si risolve mettendo in evidenza $g(x)$

$$\lim_{x \to x_0} g(x) \left(\frac{f(x)}{g(x)} - 1 \right)$$

In tal caso o si ottiene un limite non più in forma indeterminata oppure ci si riconduce alla forma indeterminata $0 \cdot \infty$.

Se il limite

$$\lim_{x \to x_0} \log f(x) - \log g(x)$$

si presenta nella forma $\infty - \infty$, si risolve tenendo conto della proprietà dei logaritmi per cui

$$\lim_{x \to x_0} \log f(x) - \log g(x) = \lim_{x \to x_0} \log \frac{f(x)}{g(x)}$$

Lo stesso dicasi per il caso

$$\lim_{x\to x_0} \log f(x) - g(x) = \lim_{x\to x_0} \log f(x) - \log e^{g(x)} = \lim_{x\to x_0} \log \frac{f(x)}{e^{g(x)}}$$

Esercizio 0.0.1 *Calcolare*

$$\lim_{x\to+\infty} \sqrt{3x^2+x+1} - \sqrt{x^2+5x+3}$$

Mettendo in evidenza $\sqrt{x^2+5x+3}$ *abbiamo*

$$\begin{aligned}
&\lim_{x\to+\infty} \sqrt{x^2+5x+3}\left(\sqrt{\frac{3x^2+x+1}{x^2+5x+3}} - 1\right) = \\
&= \lim_{x\to+\infty} \sqrt{x^2+5x+3}\left(\lim_{x\to+\infty}\sqrt{\frac{3x^2+x+1}{x^2+5x+3}} - 1\right) = \\
&= \lim_{x\to+\infty} \sqrt{x^2+5x+3}\left(\sqrt{3}-1\right) = \\
&= \left(\sqrt{3}-1\right)(+\infty) = +\infty
\end{aligned}$$

Esercizio 0.0.2 *Calcolare*

$$\lim_{x\to+\infty} \sqrt{x^2+3x+1} - x$$

Mettendo in evidenza x *si ha*

$$\begin{aligned}
&\lim_{x\to+\infty} x\left(\frac{\sqrt{x^2+3x+1}}{x} - 1\right) = \\
&= \lim_{x\to+\infty} x\left(\sqrt{\frac{x^2+3x+1}{x^2}} - 1\right) = \infty\cdot 0
\end{aligned}$$

Applichiamo ora la tecnica di risoluzione della forma indeterminata $\infty\cdot 0$ *con fun-*

zioni del tipo $g(x)[f(x)-1]$ *con* $f(x)\to 1$*:*

$$\begin{aligned}
&\lim_{x\to+\infty} x\left(\sqrt{\frac{x^2+3x+1}{x^2}}-1\right) = \\
&= \lim_{x\to+\infty} x\left(\sqrt{1+\frac{x^2+3x+1}{x^2}-1}-1\right) = \\
&= \lim_{x\to+\infty} x\left(\left(1+\frac{3x+1}{x^2}\right)^{\frac{1}{2}}-1\right) = \\
&= \lim_{x\to+\infty} x\frac{\left(1+\frac{3x+1}{x^2}\right)^{\frac{1}{2}}-1}{\frac{3x+1}{x^2}}\frac{3x+1}{x^2} = \\
&= \frac{1}{2}\lim_{x\to+\infty}\frac{3x^2+1}{x^2} = \frac{1}{2}\cdot 3 = \frac{3}{2}
\end{aligned}$$

Esercizio 0.0.3 *Calcolare*

$$\lim_{x\to+\infty} \log\left(5x^3+2\sqrt{x}+4\right)-\log\left(2x^3-\sqrt[3]{x^2}+\sqrt{x+1}\right)$$

Ricordando le proprietà dei logaritmi abbiamo

$$\begin{aligned}
&\lim_{x\to+\infty} \log\left(5x^3+2\sqrt{x}+4\right)-\log\left(2x^3-\sqrt[3]{x^2}+\sqrt{x+1}\right) = \\
&= \lim_{x\to+\infty} \log\left(\frac{5x^3+2\sqrt{x}+4}{2x^3-\sqrt[3]{x^2}+\sqrt{x+1}}\right) = \\
&= \log\left(\lim_{x\to+\infty}\frac{5x^3+2\sqrt{x}+4}{2x^3-\sqrt[3]{x^2}+\sqrt{x+1}}\right) = \\
&= \log\left(\frac{5}{2}\right)
\end{aligned}$$

Esercizio 0.0.4 *Calcolare*

$$\lim_{x\to+\infty} \log\left(e^x+x^4+3x^2+arc\tan x\right)-x$$

Osservando che $x = \log e^x$ *e ricordando le proprietà dei logaritmi abbiamo*

$$\begin{aligned}
&\lim_{x\to+\infty} \log\left(e^x + x^4 + 3x^2 + arc\tan x\right) - x = \\
&= \lim_{x\to+\infty} \log\left(e^x + x^4 + 3x^2 + arc\tan x\right) - \log e^x = \\
&= \lim_{x\to+\infty} \log\left(\frac{e^x + x^4 + 3x^2 + arc\tan x}{e^x}\right) = \\
&= \log\left(\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{e^x}\right) = \log 1 = 0
\end{aligned}$$

Esercizio 0.0.5 *Calcolare*

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^{x^2}}{x^2} - \frac{\cos x}{x^2}$$

Aggiungiamo e sottraiamo 1 *per ricondurci a limiti notevoli*

$$\begin{aligned}
&\lim_{x\to 0} \frac{e^{x^2}}{x^2} - \frac{\cos x}{x^2} = \\
&= \lim_{x\to 0} \frac{e^{x^2} - 1 + 1 - \cos x}{x^2} = \\
&= \lim_{x\to 0} \frac{e^{x^2} - 1}{x^2} + \lim_{x\to 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \\
&= 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}
\end{aligned}$$

Esercizio 0.0.6 *Calcolare*

$$\lim_{x\to 0} \frac{\cos^2 x}{x^2} - \frac{\cos x}{x^2}$$

Aggiungiamo e sottraiamo 1 *per ricondurci a limiti notevoli*

$$\begin{gathered}\lim_{x\to 0}\frac{\cos^2 x}{x^2}-\frac{\cos x}{x^2}= \\ =\lim_{x\to 0}\frac{\cos^2 x-1+1-\cos x}{x^2}= \\ =\lim_{x\to 0}\frac{\cos^2 x-1}{x^2}+\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}= \\ =\lim_{x\to 0}\left(-\frac{\sin^2 x}{x^2}\right)+\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}= \\ =-1+\frac{1}{2}=-\frac{1}{2}\end{gathered}$$

Forma indeterminata 0^0, ∞^0, 1^∞

Questo tipo di forma indeterminata si risolve osservando che vale la seguente uguaglianza:

$$f(x)^{g(x)} = e^{g(x)\log(f(x))}$$

e quindi

$$\lim_{x\to x_0} f(x)^{g(x)} = e^{\lim\limits_{x\to x_0} g(x)\log(f(x))}$$

Perciò il limite resta determinato o si riconduce a quelli del tipo $0 \cdot \infty$.

Esercizio 0.0.1 *Calcolare*

$$\lim_{x\to 0} (\sin(5x))^{1-\cos x}$$

Abbiamo

$$\lim_{x\to 0} (\sin(5x))^{1-\cos x} = 0^0$$

Per risolverlo calcoliamo

$$\lim_{x\to 0} (1-\cos x)\log(\sin(5x)) = 0\cdot\infty$$

con $\sin(5x) \to 0$, quindi cerchiamo di ricondurci a limiti notevoli

$$\begin{aligned}
&\lim_{x\to 0}(1-\cos x)\log(\sin(5x)) = \\
&= \lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}x^2\log\left(\frac{\sin(5x)}{5x}5x\right) = \\
&= \lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}\lim_{x\to 0}x^2\left(\log\frac{\sin(5x)}{5x}+\log(5x)\right) = \\
&= \frac{1}{2}\left(\lim_{x\to 0}x^2\log\frac{\sin(5x)}{5x}+\lim_{x\to 0}x^2\log(5x)\right) = \\
&= \frac{1}{2}(0\cdot 0+0) = 0
\end{aligned}$$

Abbiamo quindi

$$\lim_{x\to 0}(\sin(5x))^{1-\cos x} = e^{\lim\limits_{x\to 0}(1-\cos x)\log(\sin(5x))} = e^0 = 1$$

Esercizio 0.0.2 *Calcolare*

$$\lim_{x\to 0}(1-\cos(3x))^{\sin x}$$

Abbiamo

$$\lim_{x\to 0}(1-\cos(3x))^{\sin x} = 0^0$$

Per risolverlo calcoliamo

$$\lim_{x\to 0}\sin x\log(1-\cos(3x)) = 0\cdot\infty$$

con $1-\cos(3x)$, quindi cerchiamo di ricondurci a limiti notevoli

$$\begin{aligned}
&\lim_{x\to 0} \sin x \log(1-\cos(3x)) = \\
&= \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} x \log\left(\frac{1-\cos(3x)}{(3x)}(3x)^2\right) = \\
&= \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} \lim_{x\to 0} x \left(\log\frac{1-\cos(3x)}{(3x)} + \log(3x)^2\right) = \\
&= 1\cdot\left(\lim_{x\to 0} x \log\frac{1-\cos(3x)}{(3x)} + \lim_{x\to 0} x\log(3x)^2\right) = \\
&= 1\cdot\left(0\cdot\frac{1}{2}+0\right) = 0
\end{aligned}$$

Abbiamo quindi

$$\lim_{x\to 0}(1-\cos(3x))^{\sin x} = e^{\lim\limits_{x\to 0}\sin x\log(1-\cos(3x))} = e^0 = 1$$

Esercizio 0.0.3 *Calcolare*

$$\lim_{x\to-\infty}\left(\sqrt[5]{1+e^x}-1\right)^{\frac{3x+1}{x^2+5}}$$

Abbiamo

$$\lim_{x\to-\infty}\left(\sqrt[5]{1+e^x}-1\right)^{\frac{3x+1}{x^2+5}} = 0^0$$

Per risolverlo calcoliamo

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{3x+1}{x^2+5}\log\left(\sqrt[5]{1+e^x}-1\right) = 0\cdot\infty$$

con $\sqrt[5]{1+e^x}-1 \to 0$, quindi cerchiamo di ricondurci a limiti notevoli

$$\begin{aligned}
&\lim_{x\to-\infty} \frac{3x+1}{x^2+5} \log\left(\sqrt[5]{1+e^x}-1\right) = \\
&= \lim_{x\to-\infty} \frac{3x+1}{x^2+5} \log\left(\frac{\sqrt[5]{1+e^x}-1}{e^x} e^x\right) = \\
&= \lim_{x\to-\infty} \frac{3x+1}{x^2+5} \left(\log \frac{\sqrt[5]{1+e^x}-1}{e^x} + \log e^x\right) = \\
&= \lim_{x\to-\infty} \frac{3x+1}{x^2+5} \log \frac{\sqrt[5]{1+e^x}-1}{e^x} + \lim_{x\to-\infty} \frac{3x+1}{x^2+5} x = \\
&= \lim_{x\to-\infty} \frac{3x+1}{x^2+5} \cdot \frac{1}{5} + \lim_{x\to-\infty} \frac{3x^2}{x^2} = \\
&= 0 \cdot \frac{1}{5} + 3 = 3
\end{aligned}$$

Abbiamo quindi

$$\lim_{x\to-\infty} \left(\sqrt[5]{1+e^x}-1\right)^{\frac{3x+1}{x^2+5}} = e^{\lim_{x\to-\infty} \frac{3x+1}{x^2+5} \log\left(\sqrt[5]{1+e^x}-1\right)} = e^3$$

Esercizio 0.0.4 *Calcolare*

$$\lim_{x\to 0} \left(\frac{2^x+5^x}{3^x+4^x}\right)^{\frac{1}{x}}$$

Abbiamo

$$\lim_{x\to 0} \left(\frac{2^x+5^x}{3^x+4^x}\right)^{\frac{1}{x}} = 1^\infty$$

Per risolverlo calcoliamo

$$\lim_{x\to 0} \frac{1}{x} \log\left(\frac{2^x+5^x}{3^x+4^x}\right) = \infty \cdot 0$$

con $\frac{2^x+5^x}{3^x+4^x} \to 1$, quindi cerchiamo di ricondurci al limite notevole $\lim\limits_{y\to 0}\frac{\log(1+y)}{y} = 1$

$$\begin{aligned}
&\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\log\left(\frac{2^x+5^x}{3^x+4^x}\right) = \\
&= \lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\log\left(1+\frac{2^x+5^x}{3^x+4^x}-1\right) = \\
&= \lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\log\left(1+\frac{2^x+5^x-3^x-4^x}{3^x+4^x}\right) = \\
&= \lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\frac{\log\left(1+\frac{2^x+5^x-3^x-4^x}{3^x+4^x}\right)}{\frac{2^x+5^x-3^x-4^x}{3^x+4^x}}\frac{2^x+5^x-3^x-4^x}{3^x+4^x} = \\
&= \lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\cdot\frac{2^x+5^x-3^x-4^x}{3^x+4^x}
\end{aligned}$$

A questo punto vogliamo sfruttare il limite notevole $\lim\limits_{y\to 0}\frac{a^y-1}{y} = \log a$, per questo aggiungiamo e sottraiamo 2 a numeratore della frazione all'interno dell'argomento del logaritmo

$$\begin{aligned}
&\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\cdot\frac{2^x+5^x-3^x-4^x}{3^x+4^x} = \\
&= \lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\cdot\frac{2^x-1+5^x-1-3^x+1-4^x+1}{3^x+4^x} = \\
&= \lim_{x\to 0}\frac{1}{3^x+4^x}\cdot\frac{2^x-1+5^x-1-3^x+1-4^x+1}{x} = \\
&= \frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{2^x-1}{x}+\frac{5^x-1}{x}-\frac{3^x-1}{x}-\frac{4^x-1}{x} = \\
&= \frac{1}{2}\cdot(\log 2+\log 5-\log 3-\log 4) = \\
&= \frac{1}{2}\log\frac{10}{12} = \frac{1}{2}\log\frac{5}{6} = \log\sqrt{\frac{5}{6}}
\end{aligned}$$

Forma indeterminata $\frac{0}{0}$

Negli esercizi di seguito ometteremo di verificare che il calcolo del limite dato conduce alla forma inderminata $\frac{0}{0}$, per la quale basta sostituire il valore del punto di accumulazione a cui tende x nell'espressione della funzione.

La tecnica di risoluzione dei limiti che presentiamo nella forma indeterminata $\frac{0}{0}$ consiste nel trasformare il rapporto assegnato nel prodotto di due o più fattori, ciascuno avente limite finito e non nullo, per poi applicare il teorema sul limite del prodotto. A questo scopo si moltiplicherà e dividerà ciascun termine per una funzione opportuna in modo da ricondursi a limiti notevoli.

A volte sarà conveniente trasformare il rapporto dato in un altro rapporto, dividendo numeratore e denominatore per una funzione opportuna, in modo tale che, riconducendosi ancora a limiti notevoli, il nuovo rapporto non sia più in forma indeterminata.

Nel caso di funzioni razionali (rapporto di polinomi), o di funzioni che si possano ricondurre a queste, si procede andando a fattorizzare i polinomi che compaiono a numeratore e denominatore, in modo da semplificare il termine comune che porta la forma indeterminata, ovvero il termine che annulla entrambi i polinomi.

Esercizio 0.0.1 *Calcolare*

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2(5x)}{1-\cos x}$$

Andiamo a moltiplicare e dividere per $(5x)^2$ ottenendo

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2(5x)}{(5x)^2}(5x)^2\frac{1}{1-\cos x}= \tag{1}$$
$$=\lim_{x\to 0}25\left(\frac{\sin(5x)}{5x}\right)^2\frac{x^2}{1-\cos x}$$

Ricordando che

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin(5x)}{5x}\right)^2=1 \text{ e } \lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}=\frac{1}{2}$$

abbiamo che (1) diventa

$$25\cdot 1\cdot 2=50$$

Esercizio 0.0.2 *Calcolare*

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2(3x)\log(1+2x)}{(1-\cos 2x)\arctan x}$$

Andiamo a operare come segue

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2(3x)}{(3x)^2}(3x)^2\cdot\frac{\log(1+2x)}{2x}2x\cdot\frac{(2x)^2}{1-\cos 2x}\frac{1}{(2x)^2}\cdot\frac{x}{\arctan x}x \tag{2}$$

Osservando che

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin(3x)}{3x}\right)^2=1,\lim_{x\to 0}\frac{\log(1+2x)}{2x}=1,\ \lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}=\frac{1}{2},\ \lim_{x\to 0}\frac{\arctan x}{x}=1$$

la (2) diventa

$$\lim_{x\to 0}1\cdot 9\cdot 2\cdot 2\cdot\frac{1}{4}=9$$

Esercizio 0.0.3 *Calcolare*

$$\lim_{x\to 0}\frac{(3^x-1)^4\sin^2(2x)}{\tan x\log^5(1+x\log 3)}$$

Operiamo come segue

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{3^x-1}{x}\right)^4 x^4\cdot\left(\frac{\sin(2x)}{2x}\right)^2(2x)^2\cdot\frac{x}{\tan x}x\cdot\left(\frac{x\log 3}{\log\left(1+x\log 3\right)}\right)^5\frac{1}{\left(x\log 3\right)^5}\qquad(3)$$

Osservando che

$$\lim_{x\to 0}\frac{3^x-1}{x}=\log 3,\ \lim_{x\to 0}\frac{\sin(2x)}{2x}=1,\ \lim_{x\to 0}\frac{\tan x}{x}=1,\ \lim_{x\to 0}\frac{\log\left(1+x\log 3\right)}{x\log 3}=1$$

la (3) diventa

$$\lim_{x\to 0}\left(\log 3\right)^4\cdot 4\frac{1}{\left(\log 3\right)^5}=\frac{4}{\log 3}$$

Esercizio 0.0.4 *Calcolare*

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin\left(x\sqrt{3}\right)\cos^2 x\arctan^3(2x)}{\left(1-\cos(5x)\right)\left(2^x-1\right)^2}$$

Operiamo come segue:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin\left(x\sqrt{3}\right)}{x\sqrt{3}}x\sqrt{3}\cdot\cos^2 x\cdot\frac{\arctan^3\left(2x\right)}{\left(2x\right)^3}\left(2x\right)^3\cdot\frac{(5x)^2}{1-\cos(5x)}\frac{1}{(5x)^2}\cdot\frac{x^2}{\left(2^x-1\right)^2}\frac{1}{x^2}\qquad(4)$$

Ricordando i seguenti limiti notevoli

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin\left(x\sqrt{3}\right)}{x\sqrt{3}}=1,\ \lim_{x\to 0}\frac{\arctan\left(2x\right)}{2x}=1,\ \lim_{x\to 0}\frac{1-\cos(5x)}{(5x)^2}=\frac{1}{2},\ \lim_{x\to 0}\frac{2^x-1}{x}=\log 2$$

la (4) diventa

$$\lim_{x\to 0}\sqrt{3}\cdot 1\cdot 8\cdot 2\cdot\frac{1}{25}\cdot\frac{1}{\log 2}=\frac{16\sqrt{3}}{25\log 2}$$

Esercizio 0.0.5 *Calcolare*

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin\left(3x\right)+5x^2}{\arcsin\left(2x\right)+x^3}$$

Dividiamo numeratore e denominatore per x

$$\lim_{x\to 0}\frac{\frac{\sin(3x)}{x}+\frac{5x^2}{x}}{\frac{\arcsin(2x)}{x}+\frac{x^3}{x}}$$

Per ricondurci a limiti notevoli, moltiplichiamo e dividiamo il termine in sin per 3 e moltiplichiamo e dividiamo il termine arcsin per 2 ottenendo

$$\lim_{x\to 0}\frac{3\frac{\sin(3x)}{3x}+\frac{5x^2}{x}}{2\frac{\arcsin(2x)}{2x}+\frac{x^3}{x}} \tag{5}$$

Ricordando i limti notevoli

$$\lim\frac{\sin(3x)}{3x}=1,\ \lim_{x\to 0}\frac{\arcsin(2x)}{2x}=1$$

la (5) diventa

$$\lim_{x\to 0}\frac{3+5x}{2+x}=\frac{3}{2}$$

Esercizio 0.0.6 *Calcolare*

$$\lim_{x\to 0}\frac{3^{x^2}-\cos x}{\log(1+3x^2)}$$

Aggiungiamo e sottraiamo 1 a numeratore

$$\lim_{x\to 0}\frac{3^{x^2}-1+1-\cos x}{\log(1+3x^2)}$$

Dividiamo numeratore e denominatore per x^2

$$\lim_{x\to 0}\frac{\frac{3^{x^2}-1}{x^2}+\frac{1-\cos x}{x^2}}{\frac{\log(1+3x^2)}{x^2}}$$

Per ricondurci a limiti notevoli, moltiplichiamo e dividiamo il termine in log per 3

$$\lim_{x\to 0}\frac{\frac{3^{x^2}-1}{x^2}+\frac{1-\cos x}{x^2}}{3\frac{\log(1+3x^2)}{3x^2}} \tag{6}$$

Ricordando i limiti notevoli

$$\lim_{x\to 0}\frac{3^{x^2}-1}{x^2}=\log 3,\ \lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}=\frac{1}{2},\ \lim_{x\to 0}\frac{\log\left(1+3x^2\right)}{3x^2}=1$$

la (6) diventa

$$\lim_{x\to 0}\frac{\log 3+\frac{1}{2}}{3}=\frac{2\log 3+1}{6}$$

Esercizio 0.0.7 *Calcolare*

$$\lim_{x\to 0}\frac{2^x-3^x}{x+\sin x}$$

Aggiungiamo e sottraiamo 1 a numeratore

$$\lim_{x\to 0}\frac{2^x-1+1-3^x}{x+\sin x}$$

Dividiamo numeratore e denominatore per x

$$\lim_{x\to 0}\frac{\frac{2^x-1}{x}-\frac{3^x-1}{x}}{1+\frac{\sin x}{x}} \tag{7}$$

Ricordando i seguenti limtii notevoli

$$\lim_{x\to 0}\frac{2^x-1}{x}=\log 2,\ \lim_{x\to 0}\frac{3^x-1}{x}=\log 3,\ \lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$$

la (7) diventa

$$\lim_{x\to 0}\frac{\log 2-\log 3}{1+1}=\frac{1}{2}\log\frac{2}{3}$$

Esercizio 0.0.8 *Calcolare*

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{3^{\frac{1}{x^2}}-2^{\frac{1}{x^2}}}{\log\left(1+\frac{1}{x}\right)\tan\left(\frac{1}{x}\right)}$$

Aggiungiamo e sottraiamo 1 a numeratore

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{3^{\frac{1}{x^2}}-1+1-2^{\frac{1}{x^2}}}{\log\left(1+\frac{1}{x}\right)\tan\left(\frac{1}{x}\right)}$$

Dividiamo numeratore e denominatore per $\frac{1}{x^2}$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{3^{\frac{1}{x^2}}-1}{\frac{1}{x^2}}-\frac{2^{\frac{1}{x^2}}-1}{\frac{1}{x^2}}}{\frac{\log\left(1+\frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x}}\frac{\tan\left(\frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x}}} \tag{8}$$

Ricordando i seguenti limtii notevoli

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{2^{\frac{1}{x^2}}-1}{\frac{1}{x^2}}=\log 2,\ \lim_{x\to+\infty}\frac{3^{\frac{1}{x^2}}-1}{\frac{1}{x^2}}=\log 3,\ \lim_{x\to+\infty}\frac{\log\left(1+\frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x}}=1,\ \lim_{x\to+\infty}\frac{\tan\left(\frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x}}=1$$

la (8) diventa

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\log 3-\log 2}{1}=\log\frac{3}{2}$$

Esercizio 0.0.9 *Calcolare*

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^3-2x^2-4x+8}{x^3+x^2-2x-8}$$

Applichiamo la regola di Ruffini per scomporre sia il numeratore che il denominatore avendo

$$\lim_{x\to 2}\frac{(x-2)\left(x^2-4\right)}{(x-2)\left(x^2+3x+4\right)}=$$
$$=\lim_{x\to 2}\frac{x^2-4}{x^2+3x+4}=\frac{0}{14}=0$$

Esercizio 0.0.10 *Calcolare*

$$\lim_{x\to 1}\frac{x+\sqrt{x}-2}{x+2\sqrt{x}-3}$$

Poniamo $y=\sqrt{x}$ quindi il limite dato diventa

$$\lim_{y\to 1}\frac{y^2+y-2}{y^2+2y-3}$$

Scomponendo i polinomi sia a numeratore che a denominatore abbiamo

$$\lim_{y\to 1}\frac{(y-1)(y+2)}{(y-1)(y+3)}=\lim_{y\to 1}\frac{y+2}{y+3}=\frac{3}{4}$$

Esercizio 0.0.11 *Calcolare*

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\arctan^2 x-\frac{\pi}{4}}{\arctan^2 x+\left(1-\frac{\pi}{2}\right)\arctan x-\frac{\pi}{2}}$$

Poniamo $t=\arctan x$ quindi il limite dato diventa

$$\lim_{t\to\frac{\pi}{2}}\frac{t^2-\frac{\pi}{4}}{t^2+\left(1-\frac{\pi}{2}\right)t-\frac{\pi}{2}}$$

Scomponendo i polinomi sia a numeratore che a denominatore abbiamo

$$\lim_{t\to\frac{\pi}{2}}\frac{\left(t+\frac{\pi}{2}\right)\left(t-\frac{\pi}{2}\right)}{(t+1)\left(t-\frac{\pi}{2}\right)}=\lim_{t\to\frac{\pi}{2}}\frac{\left(t+\frac{\pi}{2}\right)}{(t+1)}=\frac{\pi}{\frac{\pi}{2}+1}=\frac{2\pi}{\pi+2}$$

Forma indeterminata $0 \cdot \infty$

Negli esercizi di seguito ometteremo di verificare che il calcolo del limite dato conduce alla forma inderminata $0 \cdot \infty$, per la quale basta sostituire il valore del punto di accumulazione a cui tende x nell'espressione della funzione.

In generale se abbiamo

$$\lim_{x \to x_0} f(x) g(x)$$

che si presenta nella forma indeterminata $0 \cdot \infty$, questa può essere ricondotta alle forme $\frac{0}{0}$ o $\frac{\infty}{\infty}$ mediante una delle trasformazioni

$$\lim_{x \to x_0} f(x) g(x) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{\frac{1}{g(x)}} \text{ oppure } \lim_{x \to x_0} f(x) g(x) = \lim_{x \to x_0} \frac{g(x)}{\frac{1}{f(x)}}$$

scegliendo l'una o l'altra trasformazione a seconda che sia più o meno facile da calcolare il limite che ne risulta.

Andiamo ora ad esaminare un caso che si può presentare, in cui è opportuno usare qualche artificio prima di applicare la trasformazione appena detta. Supponiamo di avere:

$$\lim_{x \to x_0} g(x) \left[(f(x))^{\alpha} - 1 \right]$$

dove $g(x)$ è un infinito e $f(x)$ tende a 1. In tal caso si effettua la sostituzione

$$(f(x))^\alpha - 1 = (1 + (f(x) - 1))^\alpha - 1$$

e ci si riconduce al limite notevole

$$\lim_{x \to x_0} \frac{(1 + (f(x) - 1))^\alpha - 1}{f(x) - 1} = \lim_{y \to 0} \frac{(1+y)^\alpha - 1}{y} = \alpha$$

A questo caso si riconducono i limiti del tipo

$$\lim_{x \to x_0} g(x) \left[(f(x))^\alpha - (h(x))^\alpha \right]$$

quando $f(x)$ e $h(x)$ tendono allo stesso limite l. Mettendo in evidenza $(h(x))^\alpha$ abbiamo che il limite da calcolare è

$$\lim_{x \to x_0} (h(x))^\alpha g(x) \left[\left(\frac{f(x)}{g(x)} \right)^\alpha - 1 \right] = l^\alpha \lim_{x \to x_0} g(x) \left[\left(\frac{f(x)}{g(x)} \right)^\alpha - 1 \right]$$

La stessa tecnica si applica per limiti del tipo

$$\lim_{x \to x_0} g(x) \left[(f(x))^\alpha - r(x) \right]$$

quando quando $f(x)$ tende al limite l e $r(x)$ tende a l^α.

Con tecniche perfettamente analoghe si procede per limiti del tipo

$$\lim_{x \to x_0} g(x) \left[a^{f(x)} - 1 \right]$$

dove $g(x)$ è un infinito e $f(x)$ tende a 0, riconducendosi al limite notevole

$$\lim_{x \to x_0} \frac{a^{f(x)} - 1}{f(x)} = \lim_{y \to 0} \frac{a^y - 1}{y} = a$$

Lo stesso per

$$\lim_{x \to x_0} g(x) \left[a^{f(x)} - a^{h(x)}\right] \quad \text{e} \lim_{x \to x_0} g(x) \left[a^{f(x)} - r(x)\right]$$

rispettivamente quando $f(x)$, $h(x)$ tendono allo stesso limite e quando $f(x) \to l$ e $r(x)$ tende a a^l. Si procede quindi mettendo in evidenza rispettivamente $a^{h(x)}$ o $r(x)$.

Esercizio 0.0.1 *Calcolare*

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{x^2+1}{3x+2} \left(\sqrt{\frac{x^2+x+1}{x^2-x+3}} - 1 \right)$$

Osserviamo che $\frac{x^2+x+1}{x^2-x+3}$ tende a 1 quando $x \to +\infty$. Aggiungiamo e sottraiamo 1 sotto radice e abbiamo

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{x^2+1}{3x+2} \left(\sqrt{\frac{x^2+x+1}{x^2-x+3}} - 1 \right) =$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{x^2+1}{3x+2} \left(\left(1 + \frac{x^2+x+1}{x^2-x+3} - 1 \right)^{\frac{1}{2}} - 1 \right) =$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{x^2+1}{3x+2} \left(\left(1 + \frac{2x-2}{x^2-x+3} \right)^{\frac{1}{2}} - 1 \right) =$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{x^2+1}{3x+2} \cdot \frac{\left(1 + \frac{2x-2}{x^2-x+3}\right)^{\frac{1}{2}} - 1}{\frac{2x-2}{x^2-x+3}} \cdot \frac{2x-2}{x^2-x+3}$$

Ricordando che

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\left(1+\frac{2x-2}{x^2-x+3}\right)^{\frac{1}{2}}-1}{\frac{2x-2}{x^2-x+3}} = \frac{1}{2}$$

e osservando che il prodotto dei due termini rimanenti ci dà un rapporto di polinomi di cui ci interessa solo il termine di ordine massimo sia al numeratore sia al denominatore, abbiamo

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^2+1}{3x+2}\left(\sqrt{\frac{x^2+x+1}{x^2-x+3}}-1\right) =$$
$$= \frac{1}{2}\lim_{x\to+\infty}\frac{2x^3}{3x^3} = \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3} = \frac{1}{3}$$

Esercizio 0.0.2 *Calcolare*

$$\lim_{x\to+\infty} x^2\left(\sqrt{\frac{x^2+1}{2x^2+3}}-\sqrt{\frac{x^3+5}{2x^3-1}}\right)$$

Osserviamo che $\frac{x^2+1}{2x^2+3}$ e $\frac{x^3+5}{2x^3-1}$ tendono entrambi a $\frac{1}{2}$quando $x\to+\infty$. Mettiamo in evidenza $\sqrt{\frac{x^3+5}{2x^3-1}}$ e abbiamo

$$\lim_{x\to+\infty} x^2\left(\sqrt{\frac{x^2+1}{2x^2+3}}-\sqrt{\frac{x^3+5}{2x^3-1}}\right) =$$
$$= \lim_{x\to+\infty} x^2\sqrt{\frac{x^3+5}{2x^3-1}}\left(\sqrt{\frac{x^2+1}{2x^2+3}\cdot\frac{2x^3-1}{x^3+5}}-1\right) =$$
$$= \lim_{x\to+\infty} x^2\sqrt{\frac{x^3+5}{2x^3-1}}\left(\sqrt{\frac{2x^5+2x^3-x^2-1}{2x^5+3x^3+10x^2+15}}-1\right) =$$
$$= \lim_{x\to+\infty}\sqrt{\frac{x^3+5}{2x^3-1}}\lim_{x\to+\infty} x^2\left(\sqrt{\frac{2x^5+2x^3-x^2-1}{2x^5+3x^3+10x^2+15}}-1\right) =$$
$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\lim_{x\to+\infty} x^2\left(\sqrt{\frac{2x^5+2x^3-x^2-1}{2x^5+3x^3+10x^2+15}}-1\right)$$

Calcoliamo

$$\lim_{x\to+\infty} x^2 \left(\sqrt{\frac{2x^5+2x^3-x^2-1}{2x^5+3x^3+10x^2+15}} - 1 \right) =$$

$$= \lim_{x\to+\infty} x^2 \left(\left(1 + \frac{2x^5+2x^3-x^2-1}{2x^5+3x^3+10x^2+15} - 1 \right)^{\frac{1}{2}} - 1 \right) =$$

$$= \lim_{x\to+\infty} x^2 \left(\frac{\left(1+\frac{-x^3-11x^2-16}{2x^5+3x^3+10x^2+15}\right)^{\frac{1}{2}} - 1}{\frac{-x^3-11x^2-16}{2x^5+3x^3+10x^2+15}} \cdot \frac{-x^3-11x^2-16}{2x^5+3x^3+10x^2+15} \right)$$

Ricordando che

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\left(1+\frac{-x^3-11x^2-16}{2x^5+3x^3+10x^2+15}\right)^{\frac{1}{2}} - 1}{\frac{-x^3-11x^2-16}{2x^5+3x^3+10x^2+15}} = \frac{1}{2}$$

e osservando che il prodotto dei due termini rimanenti ci dà un rapporto di polinomi di cui ci interessa solo il termine di ordine massimo sia al numeratore sia al denominatore, abbiamo

$$\lim_{x\to+\infty} x^2 \left(\sqrt{\frac{2x^5+2x^3-x^2-1}{2x^5+3x^3+10x^2+15}} - 1 \right) =$$

$$= \frac{1}{2} \lim_{x\to+\infty} \frac{-x^5}{2x^5} = \frac{1}{2} \cdot \left(-\frac{1}{2} \right) = -\frac{1}{4}$$

In definitiva il limite di partenza è

$$\lim_{x\to+\infty} x^2 \left(\sqrt{\frac{x^2+1}{2x^2+3}} - \sqrt{\frac{x^3+5}{2x^3-1}} \right) = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \left(-\frac{1}{4} \right) = -\frac{1}{4\sqrt{2}}$$

Esercizio 0.0.3 *Calcolare*

$$\lim_{x\to+\infty} x^2 \left(\sqrt{\frac{x^2+1}{4x^2+3}} - \frac{1}{2} \right)$$

Osserviamo che $\frac{x^2+1}{4x^2+3} \to \frac{1}{4}$ quando $x \to +\infty$, e la funzione costante a $\frac{1}{2}$ tende a $\frac{1}{2} = \sqrt{\frac{1}{4}} = \left(\frac{1}{4}\right)^{\frac{1}{2}}$quindi abbiamo

$$\lim_{x\to+\infty} x^2 \left(\sqrt{\frac{x^2+1}{4x^2+3}} - \frac{1}{2}\right) =$$
$$= \frac{1}{2}\lim_{x\to+\infty} x^2 \left(\sqrt{\frac{x^2+1}{4x^2+3}\cdot 4} - 1\right) =$$
$$= \frac{1}{2}\lim_{x\to+\infty} x^2 \left(\sqrt{\frac{4x^2+4}{4x^2+3}} - 1\right) =$$
$$= \frac{1}{2}\lim_{x\to+\infty} x^2 \left(\sqrt{1+\frac{4x^2+4}{4x^2+3} - 1} - 1\right) =$$
$$= \frac{1}{2}\lim_{x\to+\infty} x^2 \left(\sqrt{1+\frac{1}{4x^2+3}} - 1\right) =$$
$$= \frac{1}{2}\lim_{x\to+\infty} x^2 \cdot \frac{\left(1+\frac{1}{4x^2+3}\right)^{\frac{1}{2}} - 1}{\frac{1}{4x^2+3}} \cdot \frac{1}{4x^2+3}$$

Ricordando che

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\left(1+\frac{1}{4x^2+3}\right)^{\frac{1}{2}} - 1}{\frac{1}{4x^2+3}} = \frac{1}{2}$$

e osservando che il prodotto dei due termini rimanenti ci dà un rapporto di polinomi di cui ci interessa solo il termine di ordine massimo sia al numeratore sia al denominatore, abbiamo

$$\lim_{x\to+\infty} x^2 \left(\sqrt{\frac{x^2+1}{4x^2+3}} - \frac{1}{2}\right) =$$
$$= \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2}{4x^2} = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4} = \frac{1}{16}$$

Esercizio 0.0.4 *Calcolare*

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^2+5x+2}{x+\sin x}\left(2^{\arctan\frac{1}{x}}-1\right)$$

Moltiplichiamo e dividiamo per $\arctan\frac{1}{x}$ quindi abbiamo

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^2+5x+2}{x+\sin x}\left(\frac{2^{\arctan\frac{1}{x}}-1}{\arctan\frac{1}{x}}\arctan\frac{1}{x}\right)=$$
$$=\log 2\lim_{x\to+\infty} \frac{x^2+5x+2}{x+\sin x}\arctan\frac{1}{x}$$

Osserviamo che il limite restante è ancora della forma $\infty\cdot 0$ ma possiamo ancora sfruttare il limite notevole $\lim_{x\to 0}\frac{\arctan x}{x}=1$ quindi abbiamo

$$\log 2\lim_{x\to+\infty} \frac{x^2+5x+2}{x+\sin x}\arctan\frac{1}{x}=$$
$$=\log 2\lim_{x\to+\infty} \frac{x^2+5x+2}{x+\sin x}\cdot\frac{\arctan\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}}\cdot\frac{1}{x}=$$
$$=\log 2\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2}{x^2}=\log 2$$

Esercizio 0.0.5 *Calcolare*

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^4+3x^2+\cos^4 x}{x^2+\arctan x}\left(3^{\cos\frac{1}{x}}-3\right)$$

Mettiamo in evidenza 3 quindi abbiamo

$$\begin{aligned}
&\lim_{x\to+\infty} \frac{x^4+3x^2+\cos^4 x}{x^2+\arctan x}\left(3^{\cos\frac{1}{x}}-3\right) = \\
&= 3\lim_{x\to+\infty} \frac{x^4+3x^2+\cos^4 x}{x^2+\arctan x}\left(3^{\cos\frac{1}{x}-1}-1\right) = \\
&= 3\lim_{x\to+\infty} \frac{x^4+3x^2+\cos^4 x}{x^2+\arctan x}\cdot\frac{3^{\cos\frac{1}{x}-1}-1}{\cos\frac{1}{x}-1}\cdot\frac{\cos\frac{1}{x}-1}{\left(\frac{1}{x}\right)^2}\cdot\left(\frac{1}{x}\right)^2 = \\
&= 3\log 3\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)\cdot\lim_{x\to+\infty}\frac{x^4}{x^4} = -\frac{3\log 3}{2}
\end{aligned}$$

Forma indeterminata $0 \cdot \infty$

Negli esercizi di seguito ometteremo di verificare che il calcolo del limite dato conduce alla forma inderminata $0 \cdot \infty$, per la quale basta sostituire il valore del punto di accumulazione a cui tende x nell'espressione della funzione.

In generale se abbiamo

$$\lim_{x \to x_0} f(x) g(x)$$

che si presenta nella forma indeterminata $0 \cdot \infty$, questa può essere ricondotta alle forme $\frac{0}{0}$ o $\frac{\infty}{\infty}$ mediante una delle trasformazioni

$$\lim_{x \to x_0} f(x) g(x) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{\frac{1}{g(x)}} \text{ oppure } \lim_{x \to x_0} f(x) g(x) = \lim_{x \to x_0} \frac{g(x)}{\frac{1}{f(x)}}$$

scegliendo l'una o l'altra trasformazione a seconda che sia più o meno facile da calcolare il limite che ne risulta.

Andiamo ora ad esaminare un caso che si può presentare, in cui è opportuno usare qualche artificio prima di applicare la trasformazione appena detta. Supponiamo di avere:

$$\lim_{x \to x_0} g(x) \log(f(x))$$

Si possono ora distinguere tre sottocasi:

I sottocaso:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = +\infty$$

In tal caso, detto $f^*(x)$ il termine di ordine maggiore in $f(x)$, si considera

$$\lim_{x \to x_0} g(x) \log(f(x)) = \lim_{x \to x_0} g(x) \log(f^*(x))$$

II sottocaso:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = 0$$

In ta caso si moltiplica e divide $f(x)$ per una opportuna funzione $h(x)$ in modo da ottenere un limite fondamentale, quindi si ha

$$\lim_{x \to x_0} g(x) \log(f(x)) = \lim_{x \to x_0} g(x) \log\left(\frac{f(x)}{h(x)} h(x)\right) =$$
$$= \lim_{x \to x_0} g(x) \log\left(\frac{f(x)}{h(x)}\right) + \lim_{x \to x_0} g(x) \log(h(x))$$

III sottocaso:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = 1$$

In tal caso si aggiunge e sottrae a $f(x)$ il termine 1 e successivamente si moltiplica e divide per $f(x) - 1$, in modo da avere

$$\lim_{x \to x_0} g(x) \log(f(x)) = \lim_{x \to x_0} g(x) \log(1 + f(x) - 1) =$$
$$= \lim_{x \to x_0} g(x) \frac{\log(1 + f(x) - 1)}{f(x) - 1} (f(x) - 1)$$

Per lo studio dei limiti di cui sopra è bene ricordare il limite fondamentale

$$\lim_{x\to 0} x^\alpha \log x = 0 \ \forall\ \alpha > 0$$

Esercizio 0.0.1 *Calcolare*

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^2+3x\sqrt{x}+1}{2x^3-5x^2+3} \log\left(e^x+x^3+1\right)$$

Osserviamo che $e^x + x^3 + 1$ si comporta come e^x , perciò tende a $+\infty$ quando $x \to +\infty$,quindi abbiamo

$$\begin{aligned}
&\lim_{x\to+\infty} \frac{x^2+3x\sqrt{x}+1}{2x^3-5x^2+3} \log\left(e^x+x^3+1\right) = \\
&= \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2+3x\sqrt{x}+1}{2x^3-5x^2+3} \log\left(e^x\right) = \\
&= \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2+3x\sqrt{x}+1}{2x^3-5x^2+3} x = \\
&= \lim_{x\to+\infty} \frac{x^3}{2x^3} = \frac{1}{2}
\end{aligned}$$

Esercizio 0.0.2 *Calcolare*

$$\lim_{x\to 0} \left(3^x - 1\right) \log \arcsin x$$

Osserviamo che $\arcsin x \to 0$ quando $x \to 0$, quindi cerchiamo di ricondurci a limiti fondamentali. In questo caso moltiplichiamo e dividiamo $\arcsin x$ per x e

abbiamo

$$\begin{aligned}
&\lim_{x\to 0}(3^x-1)\log\arcsin x = \\
&= \lim_{x\to 0}\frac{3^x-1}{x}x\log\left(\frac{\arcsin x}{x}x\right) = \\
&= \lim_{x\to 0}\frac{3^x-1}{x}\cdot\lim_{x\to 0}x\left[\log\left(\frac{\arcsin x}{x}\right)+\log x\right] = \\
&= \log 3\lim_{x\to 0}\left(x\log\left(\frac{\arcsin x}{x}\right)+x\log x\right) = \\
&= \log 3\,(0\cdot\log 1+0) = 0
\end{aligned}$$

Esercizio 0.0.3 *Calcolare*

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^3+x+2}{x^2+x-4}\log\left(\frac{2x^3+3x-4}{2x^3-x^2+1}\right)$$

Osserviamo che $\frac{2x^3+3x-4}{2x^3-x^2+1}\to 1$ quando $x\to+\infty$, quindi abbiamo

$$\begin{aligned}
&\lim_{x\to+\infty}\frac{x^3+x+2}{x^2+x-4}\log\left(\frac{2x^3+3x-4}{2x^3-x^2+1}\right) = \\
&= \lim_{x\to+\infty}\frac{x^3+x+2}{x^2+x-4}\log\left(1+\frac{2x^3+3x-4}{2x^3-x^2+1}-1\right) = \\
&= \lim_{x\to+\infty}\frac{x^3+x+2}{x^2+x-4}\log\left(1+\frac{x^2+3x-5}{2x^3-x^2+1}\right) = \\
&= \lim_{x\to+\infty}\frac{x^3+x+2}{x^2+x-4}\frac{\log\left(1+\frac{x^2+3x-5}{2x^3-x^2+1}\right)}{\frac{x^2+3x-5}{2x^3-x^2+1}}\frac{x^2+3x-5}{2x^3-x^2+1} = \\
&= \lim_{x\to+\infty}\frac{x^3+x+2}{x^2+x-4}\cdot\frac{x^2+3x-5}{2x^3-x^2+1} = \\
&= \lim_{x\to+\infty}\frac{x^5}{2x^5} = \frac{1}{2}
\end{aligned}$$

Esercizio 0.0.4 *Calcolare*

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{x^2+x+1}}{5x^2+x+2} \log\left(x^4+3^x-2\arctan x\right)$$

Osserviamo che, siccome $\arctan x$ è limitata, $x^4+3^x-2\arctan x$ si comporta come 3^x quando $x\to+\infty$, cioè tende a $+\infty$, e inoltre il numeratore $\sqrt{x^2+x+1}$ si comporta come x, quindi abbiamo

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{x^2+x+1}}{5x^2+x+2} \log\left(x^4+3^x-2\arctan x\right) &= \\
= \lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{x^2+x+1}}{5x^2+x+2} \log\left(3^x\right) &= \\
= \lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{x^2+x+1}}{5x^2+x+2} x\log 3 &= \\
= \log 3 \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2}{5x^2+x+2} = \frac{1}{5}\log 3
\end{aligned}$$

Esercizio 0.0.5 *Calcolare*

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{x^2+x+\cos^2 x}{\sqrt{x^6+3x^2+1}} \log\left(e^{-2x}+\sin 5x+3\right)$$

Osserviamo che, quando $x\to-\infty$, siccome $\sin 5x$ è limitata, $e^{-2x}+\sin 5x+3$ si comporta come e^{-2x}, cioè tende a $+\infty$, il denominatore $\sqrt{x^6+3x^2+1}$ si comporta come $-x^3$ e, siccome $\cos^2 x$ è limitata, il numeratore si comporta come x^2, quindi

abbiamo

$$\begin{aligned}
&\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2+x+\cos^2 x}{\sqrt{x^6+3x^2+1}}\log\left(e^{-2x}+\sin 5x+3\right)= \\
&=\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2+x+\cos^2 x}{\sqrt{x^6+3x^2+1}}\log\left(e^{-2x}\right)= \\
&=\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2+x+\cos^2 x}{\sqrt{x^6+3x^2+1}}(-2x)\log e= \\
&=\lim_{x\to-\infty}\frac{-2x^3}{-x^3}=2
\end{aligned}$$

Esercizio 0.0.6 *Calcolare*

$$\lim_{x\to 0}\left(\sqrt[3]{1+2x}-1\right)\log\arctan x$$

Osserviamo che per $x\to 0$, $\arctan x\to 0$, quindi cercando di ricondurci a limiti fondamentali abbiamo

$$\begin{aligned}
&\lim_{x\to 0}\left(\sqrt[3]{1+2x}-1\right)\log\arctan x= \\
&=\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sqrt[3]{1+2x}-1}{2x}(2x)\right)\log\left(\frac{\arctan x}{x}x\right)= \\
&=\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sqrt[3]{1+2x}-1}{2x}(2x)\right)\log\left(\frac{\arctan x}{x}x\right)= \\
&=\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sqrt[3]{1+2x}-1}{2x}\right)\lim_{x\to 0}(2x)\lim_{x\to 0}\log\left(\frac{\arctan x}{x}x\right)= \\
&=\frac{1}{3}\left[\lim_{x\to 0}(2x)\log\left(\frac{\arctan x}{x}\right)+\lim_{x\to 0}2x\log x\right]= \\
&=\frac{1}{3}\left[0\cdot\log 1+0\right]=0
\end{aligned}$$

Esercizio 0.0.7 *Calcolare*

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{2x^3-4x^2+5\sin x}{x^4+\arctan x} \log\left(e^{-x}+1+3\arctan 8x\right)$$

Osserviamo che, quando $x \to -\infty$, siccome $\arctan 8x$ è limitata, $e^{-x}+1+3\arctan 8x$ si comporta come e^{-x}, cioè tende a $+\infty$, e, siccome $\sin x$ è limitata, il numeratore si comporta come $2x^3$, mentre, siccome $\arctan x$ è limitata, il denominatore si comporta come x^4, quindi abbiamo

$$\begin{aligned}
&\lim_{x\to-\infty} \frac{2x^3-4x^2+5\sin x}{x^4+\arctan x} \log\left(e^{-x}+1+3\arctan 8x\right) = \\
&= \lim_{x\to-\infty} \frac{2x^3-4x^2+5\sin x}{x^4+\arctan x} \log\left(e^{-x}\right) = \\
&= \lim_{x\to-\infty} \frac{2x^3-4x^2+5\sin x}{x^4+\arctan x} (-x)\log e = \\
&= \lim_{x\to-\infty} \frac{-2x^4}{x^4} = -2
\end{aligned}$$

Esercizio 0.0.8 *Calcolare*

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{x^2+x+2}{2x^3+x-4} \log\left(1-\cos\left(e^{3x}\right)\right)$$

Osserviamo che, quando $x \to -\infty$, e^{3x} tende a 0 e quindi $\cos\left(e^{3x}\right)$ tende a 1, pertanto $1-\cos\left(e^{3x}\right) \to 0$. Perciò cerchiamo di ricondurci a limiti fondamentali, moltiplicando e dividendo l'argomento del log per $\left(e^{3x}\right)^2$, quindi abbiamo

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2+x+2}{2x^3+x-4}\log\left(\frac{1-\cos\left(e^{3x}\right)}{\left(e^{3x}\right)^2}\left(e^{3x}\right)^2\right)=$$
$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2+x+2}{2x^3+x-4}\log\left(\frac{1-\cos\left(e^{3x}\right)}{\left(e^{3x}\right)^2}\right)+\frac{x^2+x+2}{2x^3+x-4}\log\left(e^{3x}\right)^2=$$
$$=0\cdot\log\frac{1}{2}+\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2+x+2}{2x^3+x-4}6x\log e=$$
$$=0\cdot\log\frac{1}{2}+\lim_{x\to-\infty}\frac{6x^3}{2x^3}=3$$

NUMERI COMPLESSI - EQUAZIONI

Esercizio 0.0.1 *Risolvere nel campo complesso l'equazione*

$$z^4 - 4z^2 + 1 = 0$$

L'equazione data è di tipo biquadratico e quindi si risolve ponendo $z^2 = t$ per cui l'equazione diventa

$$t^2 - 4t + 1 = 0$$

che ha per radici $t_1 = 2 + \sqrt{3}$ e $t_2 = 2 - \sqrt{3}$. Per la posizione fatta su z, per trovare le soluzioni dell'equazione iniziale, dobbiamo trovare le radici quadrate dei numeri t_1 e t_2 trovati.

Osserviamo che t_1 è un numero reale positivo, quindi il suo modulo coincide con se stesso e il suo argomento è 0, pertanto le radici quadrate di t_1 sono date da:

$$\omega_k = \left[\sqrt{2+\sqrt{3}}, \frac{2k\pi}{2}\right] = \left[\sqrt{2+\sqrt{3}}, k\pi\right], \quad k = 0, 1$$

quindi

$$\begin{aligned}\omega_0 &= \left[\sqrt{2+\sqrt{3}}, 0\right] = \sqrt{2+\sqrt{3}} \\ \omega_1 &= \left[\sqrt{2+\sqrt{3}}, \pi\right] = -\sqrt{2+\sqrt{3}}\end{aligned}$$

Allo stesso modo ragioniamo per t_2 le cui radici sono perciò date da:

$$\mu_k = \left[\sqrt{2-\sqrt{3}}, k\pi\right], \quad k = 0, 1$$

quindi

$$\begin{aligned}\mu_0 &= \left[\sqrt{2-\sqrt{3}}, 0\right] = \sqrt{2-\sqrt{3}} \\ \mu_1 &= \left[\sqrt{2-\sqrt{3}}, \pi\right] = -\sqrt{2-\sqrt{3}}\end{aligned}$$

Pertanto le soluzioni dell'equazione iniziale sono ω_0, ω_1, μ_0, μ_1.

Esercizio 0.0.2 *Risolvere nel campo complesso l'equazione*

$$z^4 - 2z^2 - 8 = 0$$

L'equazione data è di tipo biquadratico e quindi si risolve ponendo $z^2 = t$ per cui l'equazione diventa

$$t^2 - 2t - 8 = 0$$

che ha per radici $t_1 = 1 + \sqrt{3}$ e $t_2 = 1 - \sqrt{3}$. Per la posizione fatta su z, per trovare le soluzioni dell'equazione iniziale, dobbiamo trovare le radici quadrate dei numeri t_1 e t_2 trovati.

Osserviamo che t_1 è un numero reale positivo, quindi il suo modulo coincide con se stesso e il suo argomento è 0, pertanto le radici quadrate di t_1 sono date da:

$$\omega_k = \left[\sqrt{1+\sqrt{3}}, \frac{2k\pi}{2}\right] = \left[\sqrt{1+\sqrt{3}}, k\pi\right], \quad k = 0, 1$$

quindi

$$\begin{aligned}\omega_0 &= \left[\sqrt{1+\sqrt{3}}, 0\right] = \sqrt{1+\sqrt{3}} \\ \omega_1 &= \left[\sqrt{1+\sqrt{3}}, \pi\right] = -\sqrt{1+\sqrt{3}}\end{aligned}$$

Analogamente, osserviamo che t_2 è un numero reale negativo, quindi il suo modulo coincide con il valore assoluto di se stesso (ovvero il suo opposto, in questo caso) e il suo argomento è π, pertanto le radici quadrate di t_2 sono date da:

$$\mu_k = \left[\sqrt{1-\sqrt{3}}, \frac{\pi + 2k\pi}{2}\right], \quad k = 0, 1$$

quindi

$$\begin{aligned}\mu_0 &= \left[\sqrt{1-\sqrt{3}}, \frac{\pi}{2}\right] = \sqrt{1-\sqrt{3}}i \\ \mu_1 &= \left[\sqrt{1-\sqrt{3}}, \frac{3}{2}\pi\right] = -\sqrt{1-\sqrt{3}}i\end{aligned}$$

Pertanto le soluzioni dell'equazione iniziale sono ω_0, ω_1, μ_0, μ_1.

Esercizio 0.0.3 *Risolvere sul campo complesso l'equazione*

$$z^3 - 2z^2 + z - 2 = 0$$

Troviamo una soluzione dell'equazione data provando tra i divisori del termine noto. Si vede che 2 è soluzione, quindi applichiamo la regola di Ruffini e pertanto l'equazione diventa

$$(z-2)\left(z^2+1\right)=0$$

che ha per radici $z_1 = 2$, $z_2 = i$, $z_3 = -i$.

Esercizio 0.0.4 *Risolvere nel campo complesso l'equazione*

$$z^{12} - 3z^6 + 2 = 0$$

L'equazione data è di tipo biquadratico e quindi si risolve ponendo $z^6 = t$ per cui l'equazione diventa

$$t^2 - 3t + 2 = 0$$

che ha per radici $t_1 = 1$ e $t_2 = 2$. Per la posizione fatta su z, per trovare le soluzioni dell'equazione iniziale, dobbiamo trovare le radici seste dei numeri t_1 e t_2 trovati.

Osserviamo che t_1 è un numero reale positivo, quindi il suo modulo coincide con se stesso e il suo argomento è 0, pertanto le radici seste di t_1 sono date da:

$$\omega_k = \left[1, \frac{2k\pi}{6}\right] = \left[1, k\frac{\pi}{3}\right], \quad k = 0,1,2,3,4,5$$

quindi

$$
\begin{aligned}
\omega_0 &= [1,0] = 1 \\
\omega_1 &= \left[1, \frac{\pi}{3}\right] = \cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i \\
\omega_2 &= \left[1, \frac{2\pi}{3}\right] = \cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3} = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i \\
\omega_3 &= [1,\pi] = -1 \\
\omega_4 &= \left[1, \frac{4\pi}{3}\right] = \cos\frac{4\pi}{3} + i\sin\frac{4\pi}{3} = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i \\
\omega_5 &= \left[1, \frac{5\pi}{3}\right] = \cos\frac{5\pi}{3} + i\sin\frac{5\pi}{3} = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i
\end{aligned}
$$

Allo stesso modo ragioniamo per t_2 le cui radici seste sono perciò date da:

$$\mu_k = \left[\sqrt[6]{2}, k\frac{\pi}{3}\right], \quad k = 0,1,2,3,4,5$$

quindi

$$
\begin{aligned}
\mu_0 &= \left[\sqrt[6]{2}, 0\right] = \sqrt[6]{2} \\
\mu_1 &= \left[\sqrt[6]{2}, \frac{\pi}{3}\right] = \sqrt[6]{2}\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right) = \sqrt[6]{2}\left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) \\
\mu_2 &= \left[\sqrt[6]{2}, \frac{2\pi}{3}\right] = \sqrt[6]{2}\left(\cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}\right) = \sqrt[6]{2}\left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) \\
\mu_3 &= \left[\sqrt[6]{2}, \pi\right] = -\sqrt[6]{2} \\
\mu_4 &= \left[\sqrt[6]{2}, \frac{4\pi}{3}\right] = \sqrt[6]{2}\left(\cos\frac{4\pi}{3} + i\sin\frac{4\pi}{3}\right) = \sqrt[6]{2}\left(-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) \\
\mu_5 &= \left[\sqrt[6]{2}, \frac{5\pi}{3}\right] = \sqrt[6]{2}\left(\cos\frac{5\pi}{3} + i\sin\frac{5\pi}{3}\right) = \sqrt[6]{2}\left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)
\end{aligned}
$$

Pertanto le soluzioni dell'equazione iniziale sono $\omega_0, ..., \omega_5$, $\mu_0, ...,$ μ_5.

Esercizio 0.0.5 *Risolvere sul campo complesso l'equazione*

$$z^6 - z^3 + 1 = 0$$

L'equazione data è di tipo biquadratico e quindi si risolve ponendo $z^3 = t$ per cui l'equazione diventa

$$t^2 - t + 1 = 0$$

che ha per radici $t_1 = \frac{1+\sqrt{3}i}{2}$ e $t_2 = \frac{1-\sqrt{3}i}{2}$. Per la posizione fatta su z, per trovare le soluzioni dell'equazione iniziale, dobbiamo trovare le radici terze dei numeri t_1 e t_2 trovati.

Mettiamo t_1 in forma trigonometrica:

$$\rho = \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = 1$$

$$\cos\theta = \frac{1}{2},\ \sin\theta = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{3}$$

pertanto le radici terze di t_1 sono date da:

$$\omega_k = \left[1, \frac{\frac{\pi}{3} + 2k\pi}{3}\right], \quad k = 0, 1, 2$$

quindi

$$\begin{aligned}
\omega_0 &= \left[1, \frac{\pi}{9}\right] = \cos\frac{\pi}{9} + i\sin\frac{\pi}{9} \\
\omega_1 &= \left[1, \frac{7\pi}{9}\right] = \cos\frac{7\pi}{9} + i\sin\frac{7\pi}{9} \\
\omega_2 &= \left[1, \frac{13\pi}{9}\right] = \cos\frac{13\pi}{9} + i\sin\frac{13\pi}{9}
\end{aligned}$$

Analogamente, mettiamo t_2 in forma trigonometrica:

$$\rho = \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = 1$$

$$\cos\theta = \frac{1}{2},\ \sin\theta = -\frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \theta = -\frac{\pi}{3}$$

Allo stesso modo ragioniamo per t_2 le cui radici terze sono perciò date da:

$$\mu_k = \left[1, \frac{-\frac{\pi}{3} + 2k\pi}{3}\right], \quad k = 0, 1, 2$$

quindi

$$\begin{aligned}
\mu_0 &= \left[1, -\frac{\pi}{9}\right] = \cos\left(-\frac{\pi}{9}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{9}\right) \\
\mu_1 &= \left[1, \frac{5\pi}{3}\right] = \cos\frac{5\pi}{9} + i\sin\frac{5\pi}{9} \\
\mu_2 &= \left[1, \frac{11\pi}{3}\right] = \cos\frac{11\pi}{9} + i\sin\frac{11\pi}{9}
\end{aligned}$$

Pertanto le soluzioni dell'equazione iniziale sono $\omega_0, ..., \omega_2$, $\mu_0, ...,$ μ_2.

Esercizio 0.0.6 *Trovare il numero complesso z soddiasfacente le seguenti condizioni:*

$$|z| = 3 \ \ e \ \ |z + i| = 2$$

Ponendo $z = a + ib$, le condizioni date si scrivono come

$$\begin{cases} \sqrt{a^2 + b^2} = 3 \\ |a + (b + 1)i| = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \sqrt{a^2 + b^2} = 3 \\ \sqrt{a^2 + (b + 1)^2} = 2 \end{cases}$$

da cui

$$\begin{cases} a^2 + b^2 = 9 \\ a^2 + b^2 + 1 + 2b = 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a^2 + b^2 = 9 \\ 9 + 1 + 2b = 4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a^2 + 9 = 9 \\ b = -3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 0 \\ b = -3 \end{cases}$$

quindi il numero cercato è $z = -3i$.

Esercizio 0.0.7 *Determinare il numero o i numeri complessi z che soddisfino la relazione:*

$$|z - 1| + |z + 1| = 4$$

Ponendo $z = x + iy$, la condizione data si scrive come

$$|x - 1 + iy| + |x + 1 + iy| = 4$$

cioè

$$\sqrt{(x-1)^2+y^2}+\sqrt{(x+1)^2+y^2}=4$$
$$\sqrt{(x-1)^2+y^2}=4-\sqrt{(x+1)^2+y^2}$$
elevando al quadrato ambo i membri
$$x^2+1-2x+y^2=16+x^2+1+2x+y^2-8\sqrt{(x+1)^2+y^2}$$
$$8\sqrt{(x+1)^2+y^2}=4x+16$$
$$2\sqrt{(x+1)^2+y^2}=x+4$$
elevando al quadrato ambo i membri
$$4\left(x^2+y^2+1+2x\right)=x^2+16+8x$$
$$3x^2+4y^2-12=0$$

Pertanto i numeri cercati sono tutti i numeri complessi la cui parte reale x e la cui parte immaginaria y soddisfano la relazione $3x^2+4y^2-12=0$. Osserviamo che la relazione trovata rappresenta un'ellisse di equazione canonica $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$.

Esercizio 0.0.8 *Risolvere sul campo complesso la seguente equazione*

$$z^2\left|z\right|^2+\bar{z}=0$$

Per risolvere l'equazione moltiplichiamo tutto per z e, ricordando che $z\cdot\bar{z}=\left|z\right|^2$, abbiamo

$$\begin{aligned} z^3\left|z\right|^2+\left|z\right|^2 &= 0 \\ \left|z\right|^2\left(z^3+1\right) &= 0 \end{aligned}$$

da cui ricaviamo

$$|z|^2 = 0 \text{ oppure } z^3 + 1 = 0$$

La prima condizione ci dà la soluzione $z = 0$, mentre dalla seconda otteniamo le radici terze di -1, che sono date da

$$\omega_k = \left[1, \frac{\pi + 2k\pi}{3}\right], \quad k = 0, 1, 2$$

cioè

$$\begin{aligned}
\omega_0 &= \left[1, \frac{\pi}{3}\right] = \cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i \\
\omega_1 &= [1, \pi] = \cos\pi + i\sin\pi = -1 \\
\omega_2 &= \left[1, \frac{5\pi}{3}\right] = \cos\frac{5\pi}{3} + i\sin\frac{5\pi}{3} = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i
\end{aligned}$$

Esercizio 0.0.9 *Risolvere sul campo complesso la seguente equazione*

$$8\bar{z} = z^2 |z|^2$$

Per risolvere l'equazione moltiplichiamo tutto per z e, ricordando che $z \cdot \bar{z} = |z|^2$, abbiamo

$$\begin{aligned}
8|z|^2 &= z^3 |z|^2 \\
|z|^2 \left(z^3 - 8\right) &= 0
\end{aligned}$$

da cui ricaviamo

$$|z|^2 = 0 \text{ oppure } z^3 - 8 = 0$$

La prima condizione ci dà la soluzione $z = 0$, mentre dalla seconda otteniamo le radici terze di 8, che sono date da

$$\omega_k = \left[\sqrt[3]{8}, \frac{2k\pi}{3}\right] = \left[2, \frac{2k\pi}{3}\right], \quad k = 0, 1, 2$$

cioè

$$\begin{aligned}
\omega_0 &= [2, 0] = 2 \\
\omega_1 &= \left[2, \frac{2\pi}{3}\right] = 2\left(\cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}\right) = 2\left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) = -1 + \sqrt{3}i \\
\omega_2 &= \left[2, \frac{4\pi}{3}\right] = 2\left(\cos\frac{4\pi}{3} + i\sin\frac{4\pi}{3}\right) = 2\left(-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) = -1 - \sqrt{3}i
\end{aligned}$$

Esercizio 0.0.10 *Verificare la seguente uguaglianza*

$$\left(\sqrt{3} + i\right)^{215} = 2^{214}\left(\sqrt{3} - i\right)$$

Mettiamo in forma trigonometrica il numero a primo membro. Innanzitutto abbiamo

$$\rho = \sqrt{\left(\sqrt{3}\right)^2 + (1)^2} = 2$$
$$\cos\theta = \frac{\sqrt{3}}{2}, \ \sin\theta = \frac{1}{2} \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{6}$$

da cui

$$\left(\sqrt{3} + i\right)^{215} = \left[2, \frac{\pi}{6}\right]^{215} = \left[2^{215}, 215 \cdot \frac{\pi}{6}\right]$$

Poiché 2π è pari a 12 volte $\frac{\pi}{6}$, per ricondurre $215 \cdot \frac{\pi}{6}$ alla circonferenza unitaria, basta dividere 215 diviso 12 e prenderne il resto, che in questo caso è 11, quindi possiamo scrivere $215 \cdot \frac{\pi}{6} \simeq 11 \cdot \frac{\pi}{6} = \frac{11\pi}{6}$, da cui sostituendo nell'espressione precedente, abbiamo:

$$\left(\sqrt{3}+i\right)^{215} = \left[2^{215}, \frac{11\pi}{6}\right] \tag{1}$$

Procediamo analogamente per mettere in forma trigonometrica il numero a secondo membro. Abbiamo:

$$\begin{aligned}\sqrt{3}-i &= \left[2, -\frac{\pi}{6}\right] \\ 2^{214} &= \left[2^{214}, 0\right]\end{aligned}$$

da cui

$$2^{214}\left(\sqrt{3}-i\right) = \left[2^{214}, 0\right] \cdot \left[2, -\frac{\pi}{6}\right] = \left[2^{215}, -\frac{\pi}{6}\right] \tag{2}$$

Per concludere osserviamo che i numeri che compaiono in 1 e in 2 sono uguali: infatti, hanno lo stesso modulo e la differenza degli angoli è un multiplo di 2π, precisamente $\frac{11\pi}{6} - \left(-\frac{\pi}{6}\right) = \frac{12\pi}{6} = 2\pi$.

Esercizio 0.0.11 *Verificare la seguente uguaglianza*

$$\left(1+i\sqrt{3}\right)^{-47} = 2^{-48}\left(1+i\sqrt{3}\right)$$

Mettiamo in forma trigonometrica il numero a primo membro. Innanzitutto abbiamo

$$\rho = \sqrt{(1)^2 + \left(\sqrt{3}\right)^2} = 2$$

$$\cos\theta = \frac{1}{2},\ \sin\theta = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{3}$$

da cui

$$\left(1+i\sqrt{3}\right)^{-47} = \left[2, \frac{\pi}{3}\right]^{-47} = \left[2^{-47}, -47 \cdot \frac{\pi}{3}\right]$$

Poiché 2π è pari a 6 volte $\frac{\pi}{3}$, per ricondurre $47 \cdot \frac{\pi}{3}$ alla circonferenza unitaria, basta dividere 47 diviso 6 e prenderne il resto, che in questo caso è 5, quindi possiamo scrivere $47 \cdot \frac{\pi}{3} \simeq 5 \cdot \frac{\pi}{3} = \frac{5\pi}{3}$, da cui sostituendo nell'espressione precedente, abbiamo:

$$\left(1 + i\sqrt{3}\right)^{-47} = \left[2^{-47}, -\frac{5\pi}{3}\right] \tag{3}$$

Procediamo analogamente per mettere in forma trigonometrica il numero a secondo membro. Abbiamo:

$$2^{-48}\left(1 + i\sqrt{3}\right) = \left[2^{-48}, 0\right] \cdot \left[2, \frac{\pi}{3}\right] = \left[2^{-47}, \frac{\pi}{3}\right] \tag{4}$$

Per concludere osserviamo che i numeri che compaiono in 3 e in 4 sono uguali: infatti, hanno lo stesso modulo e la differenza degli angoli è un multiplo di 2π, precisamente $-\frac{5\pi}{3} - \frac{\pi}{3} = -\frac{6\pi}{3} = -2\pi$.

NUMERI COMPLESSI - OPERAZIONI

0.1 Potenza

Esercizio 0.1.1 *Calcolare*

$$\left(\sqrt{3}-i\right)^6$$

Mettiamo in forma trigonometrica il numero base della potenza da calcolare:

$$\rho = \sqrt{\left(\sqrt{3}\right)^2 + (-1)^2} = \sqrt{3+1} = 2$$

$$\cos\theta = \frac{\sqrt{3}}{2},\ \sin\theta = \frac{-1}{2} \Rightarrow \theta = -\frac{\pi}{6}$$

da cui abbiamo

$$\left[2, -\frac{\pi}{6}\right]^6 = \left[2^6, -6\cdot\frac{\pi}{6}\right] = \left[2^6, -\pi\right] = [64, -\pi]$$

cioè la potenza cercata, in forma trigonometrica prima e algebrica poi, si scrive come

$$64\left(\cos\left(-\pi\right) + i\sin\left(-\pi\right)\right) = -64$$

Esercizio 0.1.2 *Calcolare*

$$(1+i)^{65}$$

Mettiamo in forma trigonometrica il numero base della potenza da calcolare:

$$\rho = \sqrt{(1)^2 + (1)^2} = \sqrt{2}$$
$$\cos\theta = \frac{1}{\sqrt{2}},\ \sin\theta = \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{4}$$

da cui abbiamo

$$\left[\sqrt{2}, \frac{\pi}{4}\right]^{65} = \left[\left(\sqrt{2}\right)^{65}, 65 \cdot \frac{\pi}{4}\right] = \left[\sqrt{2^{64} \cdot 2}, 65 \cdot \frac{\pi}{4}\right]$$

Osservando che 2π è pari a 8 volte $\frac{\pi}{4}$, per ricondurre $65 \cdot \frac{\pi}{4}$ alla circonferenza unitaria, basta dividere 65 diviso 8 e prenderne il resto, che in questo caso è 1, quindi possiamo scrivere $65 \cdot \frac{\pi}{4} \simeq \frac{\pi}{4}$, da cui sostituendo nell'espressione precedente, abbiamo:

$$\left[2^{32}\sqrt{2}, \frac{\pi}{4}\right]$$

cioè la potenza cercata, in forma trigonometrica prima e algebrica poi, si scrive come

$$2^{32}\sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right) = 2^{32}\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 2^{32} + i2^{32}$$

Esercizio 0.1.3 *Calcolare*

$$i^{639}$$

Mettiamo in forma trigonometrica il numero base della potenza da calcolare:

$$\rho = \sqrt{(0)^2 + (1)^2} = 1$$
$$\cos\theta = 0,\ \sin\theta = 1 \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{2}$$

da cui abbiamo

$$\left[1, \frac{\pi}{2}\right]^{639} = \left[1^{639}, 639 \cdot \frac{\pi}{2}\right]$$

Osservando che 2π è pari a 4 volte $\frac{\pi}{2}$, per ricondurre $639 \cdot \frac{\pi}{2}$ alla circonferenza unitaria, basta dividere 639 diviso 4 e prenderne il resto, che in questo caso è 3, quindi possiamo scrivere $639 \cdot \frac{\pi}{2} \simeq \frac{3}{2}\pi$, da cui sostituendo nell'espressione precedente, abbiamo:

$$\left[1, \frac{3}{2}\pi\right]$$

cioè la potenza cercata, in forma trigonometrica prima e algebrica poi, si scrive come

$$\cos\left(\frac{3}{2}\pi\right) + i\sin\left(\frac{3}{2}\pi\right) = -i$$

Esercizio 0.1.4 *Calcolare*

$$\left(1 + \sqrt{3}i\right)^{16}$$

Mettiamo in forma trigonometrica il numero base della potenza da calcolare:

$$\rho = \sqrt{(1)^2 + \left(\sqrt{3}\right)^2} = 2$$
$$\cos\theta = \frac{1}{2},\ \sin\theta = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{3}$$

da cui abbiamo

$$\left[2, \frac{\pi}{3}\right]^{16} = \left[2^{16}, 16 \cdot \frac{\pi}{3}\right]$$

Osservando che 2π è pari a 6 volte $\frac{\pi}{3}$, per ricondurre $16 \cdot \frac{\pi}{3}$ alla circonferenza unitaria, basta dividere 16 diviso 6 e prenderne il resto, che in questo caso è 4, quindi possiamo scrivere $16 \cdot \frac{\pi}{3} \simeq \frac{4}{3}\pi$, da cui sostituendo nell'espressione precedente, abbiamo:

$$\left[2^{16}, \frac{4}{3}\pi\right]$$

cioè la potenza cercata, in forma trigonometrica prima e algebrica poi, si scrive come

$$2^{16}\left(\cos\left(\frac{4}{3}\pi\right) + i\sin\left(\frac{4}{3}\pi\right)\right) = 2^{16}\left(-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)$$

Esercizio 0.1.5 *Calcolare*

$$\left(\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^4$$

Mettiamo in forma trigonometrica il numero base della potenza da calcolare:

$$\rho = \sqrt{\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}} = 1$$

$$\cos\theta = \frac{\sqrt{2}}{2},\ \sin\theta = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{4}$$

da cui abbiamo

$$\left[1, \frac{\pi}{4}\right]^4 = \left[1, 4 \cdot \frac{\pi}{4}\right] = [1, \pi]$$

cioè la potenza cercata, in forma trigonometrica prima e algebrica poi, si scrive come

$$\cos(\pi) + i\sin(\pi) = -1$$

Esercizio 0.1.6 *Calcolare*

$$\left(\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^{100}$$

Mettiamo in forma trigonometrica il numero base della potenza da calcolare:

$$\rho = \sqrt{\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}} = 1$$

$$\cos\theta = \frac{\sqrt{2}}{2},\ \sin\theta = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{4}$$

da cui abbiamo

$$\left[1, \frac{\pi}{4}\right]^{100} = \left[1, 100 \cdot \frac{\pi}{4}\right]$$

Osservando che 2π è pari a 8 volte $\frac{\pi}{4}$, per ricondurre $100 \cdot \frac{\pi}{4}$ alla circonferenza unitaria, basta dividere 100 diviso 8 e prenderne il resto, che in questo caso è 4, quindi possiamo scrivere $100 \cdot \frac{\pi}{4} \simeq 4 \cdot \frac{\pi}{4} = \pi$, da cui sostituendo nell'espressione precedente, abbiamo:

$$[1, \pi]$$

cioè la potenza cercata, in forma trigonometrica prima e algebrica poi, si scrive come

$$\cos(\pi) + i\sin(\pi) = -1$$

Esercizio 0.1.7 *Calcolare*

$$\left(\frac{-1 + i\sqrt{3}}{2}\right)^{100}$$

Mettiamo in forma trigonometrica il numero base della potenza da calcolare:

$$\rho = \sqrt{\left(-\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = 1$$

$$\cos\theta = -\frac{1}{2},\ \sin\theta = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \theta = \frac{2\pi}{3}$$

da cui abbiamo

$$\left[1, 2 \cdot \frac{\pi}{3}\right]^{100} = \left[1, 200 \cdot \frac{\pi}{3}\right]$$

Osservando che 2π è pari a 6 volte $\frac{\pi}{3}$, per ricondurre $200 \cdot \frac{\pi}{3}$ alla circonferenza unitaria, basta dividere 200 diviso 6 e prenderne il resto, che in questo caso è 2, quindi possiamo scrivere $200 \cdot \frac{\pi}{3} \simeq \frac{2}{3}\pi$, da cui sostituendo nell'espressione precedente, abbiamo:

$$\left[1, \frac{2}{3}\pi\right]$$

cioè la potenza cercata, in forma trigonometrica prima e algebrica poi, si scrive come

$$\cos\left(\frac{2}{3}\pi\right) + i \sin\left(\frac{2}{3}\pi\right) = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} i$$

ovvero il numero di partenza!

0.2 Radici

Esercizio 0.2.1 *Calcolare*

$$\sqrt[4]{-1 + i\sqrt{3}}$$

Mettiamo in forma trigonometrica il numero di cui dobbiamo calcolare le radici:

$$\rho = \sqrt{(-1)^2 + \left(\sqrt{3}\right)^2} = \sqrt{1+3} = 2$$

$$\cos\theta = \frac{-1}{2}, \ \sin\theta = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \theta = \frac{2}{3}\pi$$

da cui abbiamo che le 4 radici che cerchiamo sono date da:

$$\omega_k = \left[\sqrt[4]{2}, \frac{\frac{2}{3}\pi + 2k\pi}{4}\right], \quad k = 0, 1, 2, 3$$

cioè

$$
\begin{aligned}
\omega_0 &= \left[\sqrt[4]{2}, \frac{\frac{2}{3}\pi}{4}\right] = \left[\sqrt[4]{2}, \frac{\pi}{6}\right] = \sqrt[4]{2}\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right) = \sqrt[4]{2}\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right) \\
\omega_1 &= \left[\sqrt[4]{2}, \frac{\frac{2}{3}\pi + 2\pi}{4}\right] = \left[\sqrt[4]{2}, \frac{2\pi}{3}\right] = \sqrt[4]{2}\left(\cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}\right) = \sqrt[4]{2}\left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) \\
\omega_2 &= \left[\sqrt[4]{2}, \frac{\frac{2}{3}\pi + 4\pi}{4}\right] = \left[\sqrt[4]{2}, \frac{7\pi}{6}\right] = \sqrt[4]{2}\left(\cos\frac{7\pi}{6} + i\sin\frac{7\pi}{6}\right) = \sqrt[4]{2}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i\right) \\
\omega_3 &= \left[\sqrt[4]{2}, \frac{\frac{2}{3}\pi + 6\pi}{4}\right] = \left[\sqrt[4]{2}, \frac{10\pi}{6}\right] = \sqrt[4]{2}\left(\cos\frac{10\pi}{6} + i\sin\frac{10\pi}{6}\right) = \sqrt[4]{2}\left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)
\end{aligned}
$$

Esercizio 0.2.2 *Calcolare*

$$\sqrt{1 + i\sqrt{3}}$$

Mettiamo in forma trigonometrica il numero di cui dobbiamo calcolare le radici:

$$\rho = \sqrt{(1)^2 + \left(\sqrt{3}\right)^2} = \sqrt{1+3} = 2$$

$$\cos\theta = \frac{1}{2},\ \sin\theta = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{3}$$

da cui abbiamo che le 2 radici che cerchiamo sono date da:

$$\omega_k = \left[\sqrt{2}, \frac{\frac{\pi}{3} + 2k\pi}{2}\right], \quad k = 0, 1$$

cioè

$$
\begin{aligned}
\omega_0 &= \left[\sqrt{2}, \frac{\frac{\pi}{3}}{2}\right] = \left[\sqrt{2}, \frac{\pi}{6}\right] = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right) = \sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right) \\
\omega_1 &= \left[\sqrt{2}, \frac{\frac{\pi}{3} + 2\pi}{2}\right] = \left[\sqrt{2}, \frac{7\pi}{6}\right] = \sqrt{2}\left(\cos\frac{7\pi}{6} + i\sin\frac{7\pi}{6}\right) = \sqrt{2}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i\right)
\end{aligned}
$$

Esercizio 0.2.3 *Calcolare*

$$\sqrt[15]{\frac{\sqrt{3}}{3}+\frac{1}{3}i}$$

Mettiamo in forma trigonometrica il numero di cui dobbiamo calcolare le radici:

$$\rho = \sqrt{\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2 + \left(\frac{1}{3}\right)^2} = \sqrt{\frac{3}{9}+\frac{1}{9}} = \frac{2}{3}$$

$$\cos\theta = \frac{\sqrt{3}}{3}\cdot\frac{3}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2},\ \sin\theta = \frac{1}{3}\cdot\frac{3}{2} = \frac{1}{2} \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{6}$$

da cui abbiamo che le 15 radici che cerchiamo sono date da:

$$\omega_k = \left[\sqrt[15]{\frac{2}{3}}, \frac{\frac{\pi}{6}+2k\pi}{15}\right], \quad k = 0, 1, ..., 14$$

Esercizio 0.2.4 *Calcolare le radici quarte dell'unità.*

Mettiamo in forma trigonometrica il numero 1 di cui dobbiamo calcolare le radici:

$$\rho = 1$$

$$\cos\theta = 1,\ \sin\theta = 0 \Rightarrow \theta = 0$$

da cui abbiamo che le 4 radici che cerchiamo sono date da:

$$\omega_k = \left[1, \frac{2k\pi}{4}\right] = \left[1, k\frac{\pi}{2}\right], \quad k = 0, 1, 2, 3$$

cioè

$$\omega_0 = [1, 0] = \cos 0 + i \sin 0 = 1$$
$$\omega_1 = \left[1, \frac{\pi}{2}\right] = \cos\frac{\pi}{2} + i \sin\frac{\pi}{2} = i$$
$$\omega_2 = [1, \pi] = \cos \pi + i \sin \pi = -1$$
$$\omega_3 = \left[1, \frac{3\pi}{2}\right] = \cos\frac{3\pi}{2} + i \sin\frac{3\pi}{2} = -i$$

Esercizio 0.2.5 *Calcolare*

$$\sqrt[5]{-1 + \sqrt{(|z| - 2)}i}, \qquad \textit{con} \quad z = 3 - 4i$$

Innanzitutto calcoliamo il modulo del numero z

$$|z| = \sqrt{3^2 + (-4)^2} = 5$$

Il numero di cui dobbiamo calcolare le radici quinte è $-1 + \sqrt{3}i$ la cui forma trigonometrica è data da

$$\rho = \sqrt{(-1)^2 + \left(\sqrt{3}\right)^2} = 2$$
$$\cos\theta = \frac{-1}{2}, \ \sin\theta = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \theta = \frac{2\pi}{3}$$

perciò le 5 radici che cerchiamo sono date da:

$$\omega_k = \left[\sqrt[5]{2}, \frac{\frac{2\pi}{3} + 2k\pi}{5}\right], \quad k = 0, 1, 2, 3, 4$$

cioè

$$\begin{aligned}
\omega_0 &= \left[\sqrt[5]{2}, \frac{\frac{2}{3}\pi}{5}\right] = \left[\sqrt[5]{2}, \frac{2\pi}{15}\right] = \sqrt[5]{2}\left(\cos\frac{2\pi}{15} + i\sin\frac{2\pi}{15}\right)\\
\omega_1 &= \left[\sqrt[5]{2}, \frac{\frac{2}{3}\pi + 2\pi}{5}\right] = \left[\sqrt[5]{2}, \frac{8\pi}{15}\right] = \sqrt[5]{2}\left(\cos\frac{8\pi}{15} + i\sin\frac{8\pi}{15}\right)\\
\omega_2 &= \left[\sqrt[5]{2}, \frac{\frac{2}{3}\pi + 4\pi}{5}\right] = \left[\sqrt[5]{2}, \frac{14\pi}{15}\right] = \sqrt[5]{2}\left(\cos\frac{14\pi}{15} + i\sin\frac{14\pi}{15}\right)\\
\omega_3 &= \left[\sqrt[5]{2}, \frac{\frac{2}{3}\pi + 6\pi}{5}\right] = \left[\sqrt[5]{2}, \frac{4\pi}{3}\right] = \sqrt[5]{2}\left(\cos\frac{4\pi}{3} + i\sin\frac{4\pi}{3}\right) = \sqrt[5]{2}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i\right)\\
\omega_4 &= \left[\sqrt[5]{2}, \frac{\frac{2}{3}\pi + 8\pi}{5}\right] = \left[\sqrt[5]{2}, \frac{26\pi}{15}\right] = \sqrt[5]{2}\left(\cos\frac{26\pi}{15} + i\sin\frac{26\pi}{15}\right)
\end{aligned}$$

Esercizio 0.2.6 *Calcolare* $\frac{w}{z}$ *dove* $w = i^{\frac{1}{4}}$ *e* $z = \left(\sqrt{3} - i\right)^5$.

Calcoliamo dapprima w che è l'insieme delle radici quarte di $i = \left[1, \frac{\pi}{2}\right]$ quindi

$$w_k = \left[1, \frac{\frac{\pi}{2} + 2k\pi}{4}\right], \quad k = 0, 1, 2, 3$$

cioè

$$\begin{aligned}
w_0 &= \left[1, \frac{\pi}{8}\right]\\
w_1 &= \left[1, \frac{\frac{\pi}{2} + 2\pi}{4}\right] = \left[1, \frac{5\pi}{8}\right]\\
w_2 &= \left[1, \frac{\frac{\pi}{2} + 4\pi}{4}\right] = \left[1, \frac{9\pi}{8}\right]\\
w_3 &= \left[1, \frac{\frac{\pi}{2} + 6\pi}{4}\right] = \left[1, \frac{13\pi}{8}\right]
\end{aligned}$$

Calcoliamo ora z e abbiamo che $\sqrt{3}-i$ in forma trigonometrica è

$$\rho = \sqrt{\left(\sqrt{3}\right)^2 + (-1)^2} = 2$$
$$\cos\theta = \frac{\sqrt{3}}{2},\ \sin\theta = -\frac{1}{2} \Rightarrow \theta = -\frac{\pi}{6}$$

quindi

$$z = \left[2, -\frac{\pi}{6}\right]^5 = \left[2^5, -\frac{5\pi}{6}\right]$$

Ora il quoziente richiesto è l'insieme delle radici quarte di w diviso z, perciò risulta

$$\begin{aligned}
\frac{w_0}{z} &= \frac{\left[1, \frac{\pi}{8}\right]}{\left[2^5, -\frac{5\pi}{6}\right]} = \left[2^{-5}, \frac{\pi}{8} - \left(-\frac{5\pi}{6}\right)\right] = \left[2^{-5}, \frac{17\pi}{24}\right] \\
\frac{w_1}{z} &= \frac{\left[1, \frac{5\pi}{8}\right]}{\left[2^5, -\frac{5\pi}{6}\right]} = \left[2^{-5}, \frac{5\pi}{8} - \left(-\frac{5\pi}{6}\right)\right] = \left[2^{-5}, \frac{25\pi}{24}\right] \\
\frac{w_2}{z} &= \frac{\left[1, \frac{9\pi}{8}\right]}{\left[2^5, -\frac{5\pi}{6}\right]} = \left[2^{-5}, \frac{9\pi}{8} - \left(-\frac{5\pi}{6}\right)\right] = \left[2^{-5}, \frac{33\pi}{24}\right] \\
\frac{w_3}{z} &= \frac{\left[1, \frac{13\pi}{8}\right]}{\left[2^5, -\frac{5\pi}{6}\right]} = \left[2^{-5}, \frac{13\pi}{8} - \left(-\frac{5\pi}{6}\right)\right] = \left[2^{-5}, \frac{69\pi}{24}\right]
\end{aligned}$$

1 Serie Numeriche

Esercizio 1 *Studiare il carattere della serie*

$$\sum_n \frac{1}{2^n + 1}$$

Basta osservare che $\frac{1}{2^n + 1} \le \frac{1}{2^n}$, $\forall\ n \in N$ e applicare il I criterio del confronto. Poichè $\sum_n \left(\frac{1}{2}\right)^n$ è una serie geometrica di ragione $\frac{1}{2}$, essa è convergente e quindi tale è anche la serie data.

Esercizio 2 *Studiare il carattere della serie*

$$\sum_n \frac{1}{\log n}$$

Osserviamo che $\frac{1}{\log n} > \frac{1}{n}$ e la serie $\sum_n \frac{1}{n}$ è divergente. Applicando il I criterio del confronto, si ha che anche la serie $\sum_n \frac{1}{\log n}$ è divergente.

Esercizio 3 *Studiare il carattere della serie*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3n - 1}$$

Confrontiamo la serie data con la serie armonica. Si ha: $\lim_n \frac{n}{3n - 1} = \frac{1}{3} \Rightarrow$ per il II teorema del confronto, poichè la serie armonica diverge, lo stesso vale per la serie data.

Esercizio 4 *Studiare il carattere della serie*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{2\ n + 1}\right)^n$$

Abbiamo

$$\sqrt[n]{a_n} = \sqrt[n]{\left(\frac{n}{2\ n + 1}\right)^n} = \frac{n}{2\ n + 1} \Rightarrow \lim_n \sqrt[n]{a_n} = \frac{1}{2} < 1$$

allora, per il criterio della radice, la serie data è convergente.

Esercizio 5 *Studiare il carattere della serie*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\log^n n}$$

Abbiamo

$$\sqrt[n]{a_n} = \sqrt{\frac{1}{\log^n n}} = \frac{1}{\log n} \Rightarrow \lim_n \sqrt{a_n} = 0 < 1$$

allora, per il criterio della radice, la serie data converge.

Esercizio 6 *Studiare il carattere della serie*

$$\sum_{n=1}^{\infty} e^{-\ n^4 +\ nx}, x \in \Re$$

Applicando il criterio della radice abbiamo

$$\sqrt[n]{a_n} = \sqrt[n]{e^{-\ n^4 +\ nx}} = \sqrt[n]{e^{n(-\ n^3 +\ x)}} = e^{-\ n^3\ +\ x} \Rightarrow \lim_n e^{-\ n^3 +\ x} = \lim_n \frac{e^x}{e^{n^3}} = 0 < 1$$

per cui la serie data converge.

Esercizio 7 *Studiare il carattere della serie*

$$\sum_n^{\infty} \left(\frac{10n^2\ +\ 7}{3n^2\ +\ 10} \right)^n$$

Osserviamo che non è verificata la condizione Necessaria, infatti

$$\lim_n \left(\frac{10n^2\ +\ 7}{3n^2\ +\ 10} \right)^n = +\infty$$

quindi la serie data diverge.

Esercizio 8 *Studiare il carattere della serie*

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^4 e^{-\ n^2}$$

Applicando il criterio del rapporto abbiamo

$$\begin{aligned} \lim_n \frac{a_{n\ +\ 1}}{a_n} &= \lim_n \frac{(n\ +\ 1)^4\, e^{-(n\ +\ 1)^2}}{n^4 e^{-n^2}} = \lim_n \left(\frac{n\ +\ 1}{n} \right)^4 e^{-n^2 - 1 - 2n\ +\ n^2} = \\ &= \lim_n \left(\frac{n\ +\ 1}{n} \right)^4 e^{-1-2n} = 1 \cdot 0 = 0 < 1 \end{aligned}$$

per cui la serie converge.

Esercizio 9 *Studiare il carattere della serie*

$$\sum_n \frac{1}{n!}$$

Applicando il criterio del rapporto abbiamo

$$\lim_n \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_n \frac{n!}{(n+1)!} = \lim_n \frac{n!}{(n+1)\ n!} = \lim_n \frac{1}{n+1} = 0 < 1$$

per cui la serie converge.

Esercizio 10 *Studiare il carattere della serie*

$$\sum_n \frac{n^{n+1}}{(n-1)!}$$

Applicando il criterio del rapporto abbiamo

$$\begin{aligned} \lim_n \frac{a_{n+1}}{a_n} &= \lim_n \left(\frac{(n+1)^{n+2}}{n!} \cdot \frac{(n-1)!}{n^{n+1}} \right) = \lim_n \frac{(n+1)^{n+2}}{n\,(n-1)!} \cdot \frac{(n-1)!}{n^{n+1}} = \\ &= \lim_n \frac{(n+1)^{n+2}}{n^{n+2}} = \lim_n \left[\left(\frac{n+1}{n} \right)^2 \cdot \left(\frac{n+1}{n} \right)^n \right] = 1 \cdot e = e > 1 \end{aligned}$$

perciò la serie diverge.

Esercizio 11 *Dire per quali valori di x la serie*

$$\sum_n \frac{x^n}{n}$$

converge.

Osserviamo che applicando il criterio del rapporto abbiamo

$$\lim_n \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_n \left(\frac{x^{n+1}}{n+1} \cdot \frac{n}{x^n} \right) = \lim_n \left(\frac{n}{n+1} \cdot x \right) = 1 \cdot x = x$$

per cui la serie converge per $0 < x < 1$.

Esercizio 12 *Studiare il carattere della serie*

$$\sum_n \frac{\left(n^2+1\right) \log (n+1)}{n^3+2}$$

Osserviamo che

$$\begin{aligned} \lim_n n \cdot \frac{\left(n^2+1\right) \log (n+1)}{n^3+2} &= \lim_n \left[\frac{n^3+n}{n^3+2} \cdot \log (n+1) \right] \\ &= 1 \cdot +\infty = +\infty \end{aligned}$$

per il criterio degli infinitesimi, deduciamo che la serie diverge perchè $\alpha = 1$ e $l \in]0, +\infty]$.

Esercizio 13 *Studiare il carattere della serie*

$$\sum_n \frac{n^2 + 1}{4n^4 + 5n - 6}$$

Osservando che

$$\lim_n n^2 \cdot \frac{n^2 + 1}{4n^4 + 5n - 6} = \frac{1}{4}$$

per il criterio degli infinitesimi, deduciamo che la serie converge, poichè $\alpha = 2$ e $l \in [0, +\infty[$.

Esercizio 14 *Studiare il carattere della serie*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$$

Osservando che la successione $\frac{1}{n}$ è decrescente e $\lim_n \frac{1}{n} = 0$, per il criterio di Leibnitz concludiamo che la serie data converge.

Esercizio 15 *Studiare il carattere della serie*

$$\sum_n \frac{(-1)^n n}{n^2 + 1}$$

Osserviamo che la successione $\frac{n}{n^2+1}$ è decrescente e $\lim_n \frac{n}{n^2+1} = 0$, quindi per il criterio di Leibnitz, abbiamo che la serie data è convergente.

Esercizio 16 *Studiare il carattere della serie*

$$\sum_{n \geq 3} \frac{9^{5-n}}{3^{n+1}}$$

e calcolare, se possibile, la somma.

Lavoriamo sul termine generico della serie. Abbiamo:

$$\frac{9^{5-n}}{3^{n+1}} = \frac{9^5}{3^1} \cdot \frac{9^{-n}}{3^n} = \frac{3^{2 \cdot 5}}{3} \cdot \frac{1}{3^n \cdot 3^{2n}} = 3^9 \cdot \frac{1}{3^{3n}} = 3^9 \left(\frac{1}{27}\right)^n$$

Quindi la nostra serie può essere riscritta, mettendo in evidenza il termine 3^9, come segue:

$$3^9 \sum_{n \geq 3} \left(\frac{1}{27}\right)^n$$

Osserviamo che

$$\sum_{n \geq 3} \left(\frac{1}{27}\right)^n = \left(\frac{1}{27}\right)^3 + \left(\frac{1}{27}\right)^4 + \left(\frac{1}{27}\right)^5 + ...$$

ma mettendo in evidenza il primo termine della somma abbiamo

$$\begin{aligned}\sum_{n\geq 3}\left(\frac{1}{27}\right)^n &= \left(\frac{1}{27}\right)^3\left[1+\left(\frac{1}{27}\right)^2+\left(\frac{1}{27}\right)^3+....\right]= \\ &= \left(\frac{1}{27}\right)^3\sum_{n\geq 0}\left(\frac{1}{27}\right)^n\end{aligned}$$

cioè a meno del termine $\left(\frac{1}{27}\right)^3$ abbiamo ritrovato la serie geometrica di ragione $\frac{1}{27}$ che è convergente e ha per somma $\frac{1}{1-\frac{1}{27}}=\frac{27}{26}$ quindi in definitiva abbiamo che la serie data può essere scritta come

$$\begin{aligned}\sum_{n\geq 3}\frac{9^{5-n}}{3^{n+1}} &= 3^9\sum_{n\geq 3}\left(\frac{1}{27}\right)^n = 3^9\left(\frac{1}{27}\right)^3\sum_{n\geq 0}\left(\frac{1}{27}\right)^n = \\ &= 3^9\left(\frac{1}{27}\right)^3\frac{27}{26}=\frac{27}{26}\end{aligned}$$

Esercizio 17 *Studiare il carattere della serie*

$$\sum_{n\geq 3}\frac{3^{3-2n}}{4^{n-1}}$$

e calcolare, se possibile, la somma.

Lavoriamo sul termine generico della serie. Abbiamo:

$$\frac{3^{3-2n}}{4^{n-1}}=\frac{3^3}{4^{-1}}\cdot\frac{3^{-2n}}{4^n}=4\cdot 3^3\cdot\frac{1}{4^n\cdot 3^{2n}}=4\cdot 3^3\left(\frac{1}{36}\right)^n$$

Quindi la nostra serie può essere riscritta, mettendo in evidenza il termine $4\cdot 3^3$, come segue:

$$4\cdot 3^3\sum_{n\geq 3}\left(\frac{1}{36}\right)^n$$

Osserviamo che

$$\sum_{n\geq 3}\left(\frac{1}{36}\right)^n=\left(\frac{1}{36}\right)^3+\left(\frac{1}{36}\right)^4+\left(\frac{1}{36}\right)^5+....$$

ma mettendo in evidenza il primo termine della somma abbiamo

$$\begin{aligned}\sum_{n\geq 3}\left(\frac{1}{36}\right)^n &= \left(\frac{1}{36}\right)^3\left[1+\left(\frac{1}{36}\right)^2+\left(\frac{1}{36}\right)^3+....\right]= \\ &= \left(\frac{1}{36}\right)^3\sum_{n\geq 0}\left(\frac{1}{36}\right)^n\end{aligned}$$

cioè a meno del termine $\left(\frac{1}{36}\right)^3$ abbiamo ritrovato la serie geometrica di ragione $\frac{1}{36}$ che è convergente e ha per somma $\frac{1}{1-\frac{1}{36}} = \frac{36}{35}$ quindi in definitiva abbiamo che la serie data può essere scritta come

$$\begin{aligned}\sum_{n\geq 3} \frac{3^{3-2n}}{4^{n-1}} &= 4\cdot 3^3 \sum_{n\geq 3}\left(\frac{1}{36}\right)^n = 4\cdot 3^3\left(\frac{1}{36}\right)^3 \sum_{n\geq 0}\left(\frac{1}{36}\right)^n = \\ &= 4\cdot 3^3\left(\frac{1}{36}\right)^3 \frac{36}{35} = \frac{1}{420}\end{aligned}$$

Esercizio 18 *Studiare il carattere della serie*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{7-6n}}{4^{3n+5}}$$

e calcolare, se possibile, la somma.

Lavoriamo sul termine generico della serie. Abbiamo:

$$\frac{2^{7-6n}}{4^{3n+5}} = \frac{2^7}{4^5}\cdot\frac{2^{-6n}}{4^{3n}} = \frac{1}{2^3}\cdot\frac{1}{2^{6n}\cdot 4^{3n}} = \frac{1}{2^3}\left(\frac{1}{2^{12}}\right)^n$$

Quindi la nostra serie può essere riscritta, mettendo in evidenza il termine $\frac{1}{2^3}$, come segue:

$$\frac{1}{2^3}\sum_{n\geq 1}\left(\frac{1}{2^{12}}\right)^n$$

Osserviamo che

$$\sum_{n\geq 1}\left(\frac{1}{2^{12}}\right)^n = \frac{1}{2^{12}} + \left(\frac{1}{2^{12}}\right)^2 + \left(\frac{1}{2^{12}}\right)^3 + ...$$

ma mettendo in evidenza il primo termine della somma abbiamo

$$\begin{aligned}\sum_{n\geq 1}\left(\frac{1}{2^{12}}\right)^n &= \frac{1}{2^{12}}\left[1 + \left(\frac{1}{2^{12}}\right)^2 + \left(\frac{1}{2^{12}}\right)^3 + ...\right] = \\ &= \frac{1}{2^{12}}\sum_{n\geq 0}\left(\frac{1}{2^{12}}\right)^n\end{aligned}$$

cioè a meno del termine $\frac{1}{2^{12}}$ abbiamo ritrovato la serie geometrica di ragione $\frac{1}{2^{12}}$ che è convergente e ha per somma $\frac{1}{1-\frac{1}{2^{12}}} = \frac{2^{12}}{2^{12}-1}$ quindi in definitiva abbiamo che la serie data può essere scritta come

$$\begin{aligned}\sum_{n\geq 1}\frac{2^{7-6n}}{4^{3n+5}} &= \frac{1}{2^3}\sum_{n\geq 1}\left(\frac{1}{2^{12}}\right)^n = \frac{1}{2^3}\cdot\frac{1}{2^{12}}\sum_{n\geq 1}\left(\frac{1}{2^{12}}\right)^n = \\ &= \frac{1}{2^3}\cdot\frac{1}{2^{12}}\cdot\frac{2^{12}}{2^{12}-1} = \frac{1}{32760}\end{aligned}$$

Esercizio 19 *Studiare il carattere della serie*

$$\sum_{n=5}^{\infty} \frac{2^{n-2}}{7^{n-1}}$$

e calcolare, se possibile, la somma.

Lavoriamo sul termine generico della serie. Abbiamo:

$$\frac{2^{n-2}}{7^{n-1}} = \frac{2^{-2}}{7^{-1}} \cdot \frac{2^n}{7^n} = \frac{7}{4}\left(\frac{2}{7}\right)^n$$

Quindi la nostra serie può essere riscritta, mettendo in evidenza il termine $\frac{7}{4}$, come segue:

$$\frac{7}{4}\sum_{n\geq 5}\left(\frac{2}{7}\right)^n$$

Osserviamo che

$$\sum_{n=5}^{\infty}\left(\frac{2}{7}\right)^n = \left(\frac{2}{7}\right)^5 + \left(\frac{2}{7}\right)^6 + \left(\frac{2}{7}\right)^7 ....$$

ma mettendo in evidenza il primo termine della somma abbiamo

$$\begin{aligned} \sum_{n\geq 5}\left(\frac{2}{7}\right)^n &= \left(\frac{2}{7}\right)^5\left[1 + \left(\frac{2}{7}\right)^2 + \left(\frac{2}{7}\right)^3 + ...\right] = \\ &= \left(\frac{2}{7}\right)^5 \sum_{n\geq 0}\left(\frac{2}{7}\right)^n \end{aligned}$$

cioè a meno del termine $\frac{2}{7}$ abbiamo ritrovato la serie geometrica di ragione $\frac{2}{7}$ che è convergente e ha per somma $\frac{1}{1-\frac{2}{7}} = \frac{7}{5}$ quindi in definitiva abbiamo che la serie data può essere scritta come

$$\begin{aligned} \sum_{n=5}^{\infty} \frac{2^{n-2}}{7^{n-1}} &= \frac{7}{4}\sum_{n\geq 5}\left(\frac{2}{7}\right)^n = \frac{7}{4}\cdot\left(\frac{2}{7}\right)^5 \sum_{n\geq 0}\left(\frac{2}{7}\right)^n = \\ &= \frac{7}{4}\cdot\left(\frac{2}{7}\right)^5 \cdot \frac{7}{5} = \frac{8}{1715} \end{aligned}$$