

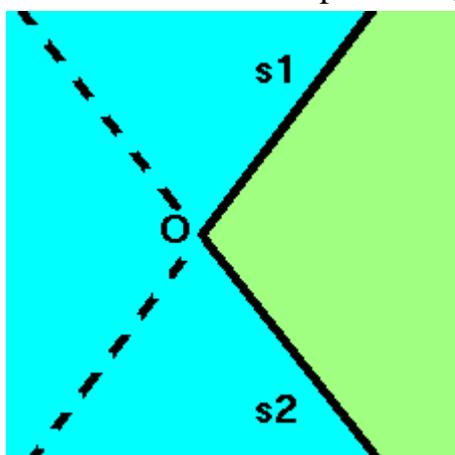
# Trigonometria

Angoli e archi.....	2
1) Misura di angoli e archi .....	2
2) Seno e coseno.....	5
3) Relazione fondamentale.....	5
4) Tangente e cotangente.....	6
5) Periodicità delle funzioni goniometriche .....	7
6) Grafico delle funzioni goniometriche .....	7
7) Segni e comportamenti delle funzioni goniometriche .....	9
8) Angoli notevoli .....	10
9) Angoli associati.....	11
10) Riduzione al primo quadrante e al primo ottante.....	11
11) <i>FORMULE FONDAMENTALI TRIGONOMETRICHE</i> .....	11
ADDIZIONE.....	12
DIFFERENZA .....	16
DUPLICAZIONE .....	17
BISEZIONE.....	18
a) PRIMA FORMULA DI BISEZIONE.....	19
b) SECONDA FORMULA DI BISEZIONE .....	19
c) TERZA FORMULA DI BISEZIONE .....	19
PROSTAFERESI.....	19
WERNER.....	20
PARAMETRICHE.....	20
12) Identità goniometriche .....	21
13) Equazioni goniometriche elementari .....	22
14) Equazioni goniometriche .....	22
15) Equazioni lineari in $\sin x$ e $\cos x$ .....	23
d) Primo metodo: formule parametriche .....	23
e) Secondo metodo: circonferenza associata.....	23
f) Terzo metodo .....	24
16) Equazioni omogenee in $\sin x$ e $\cos x$ .....	24
17) Sistema per rendere omogenee le equazioni e le disequazioni goniometriche .....	25
18) Disequazioni goniometriche elementari.....	26
19) Disequazioni goniometriche omogenee in $\sin x$ e $\cos x$ .....	26
Il grado di omogeneità sia pari.....	27
Il grado di omogeneità è dispari.....	27
20) Disequazioni goniometriche lineari in $\sin x$ e $\cos x$ .....	28
Con uso delle formule parametriche .....	28
Con uso della circonferenza goniometrica associata e orientamento di una retta .....	29
Metodo rapido.....	30
21) 1° Teorema sui triangoli rettangoli .....	30
22) 2° Teorema sui triangoli rettangoli .....	31
23) Teorema della corda.....	31
24) Teorema dei seni (o di Eulero).....	32
25) Teorema delle proiezioni .....	32
26) Teorema del coseno (o di Carnot).....	33

27)	Formule di Briggs .....	34
28)	Area di un triangolo noti i due lati e l'angolo tra essi compreso.....	35
29)	Area di un triangolo noti i lati (formula di Erone).....	36
30)	Misura del raggio della circonferenza inscritta in un triangolo noti 3 lati.....	36
31)	Misura del raggio della circonferenza circoscritta in un triangolo noto un lato e l'angolo opposto.....	37
32)	Misura del raggio della circonferenza circoscritta in un triangolo noti 3 lati.....	37
33)	Misura di una mediana noti i 3 lati .....	38
34)	Misura di una bisettrice noto angolo diviso e lati adiacenti.....	38
35)	Area di un quadrilatero qualunque note le diagonali e un angolo che esse formano.....	39

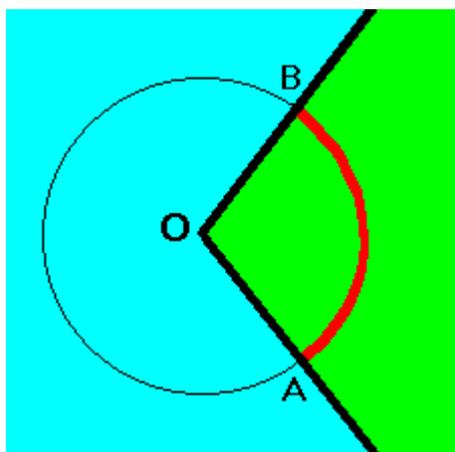
## Angoli e archi

Si chiama angolo ciascuna delle due parti del piano in cui esso è diviso da due semirette uscenti da uno stesso punto  $O$  (incluse queste due semirette).



Il punto  $O$  si chiama **vertice** dell'angolo e le due semirette  $s1$  e  $s2$  si dicono **lati** dell'angolo. I due angoli che si formano (parte celeste e parte verde) si dicono **esplementari** poiché sono distinti e hanno il contorno comune. L'angolo celeste si dice **concavo** in quanto contiene al suo interno i prolungamenti delle semirette (le linee tratteggiate). L'angolo verde al contrario si dice **convesso** poiché non contiene al suo interno i prolungamenti delle semirette.

Si chiama arco la parte di circonferenza inclusa in un angolo al centro della circonferenza stessa.



La linea curva rossa è l'intersezione tra la circonferenza di centro in  $O$  e l'angolo convesso  $A\hat{O}B$ . La linea rossa è detta **arco** sotteso dall'angolo  $A\hat{O}B$  alla circonferenza.

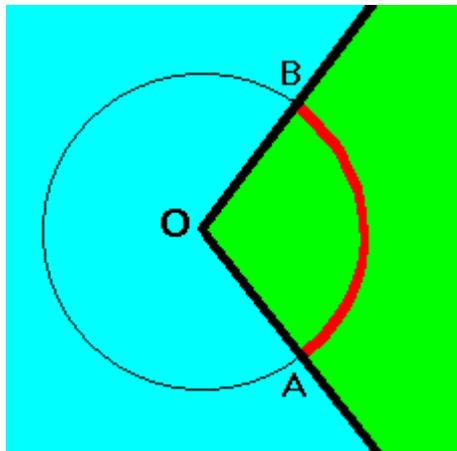
### 1) Misura di angoli e archi

Per misurare un angolo occorre fissarne l'unità di misura. Un'unità spesso usata è il **grado**. Si definisce il grado come la  $360^{\text{ma}}$  parte dell'angolo giro. La  $60^{\text{ma}}$  parte del grado si dice

*minuto primo* e la 60<sup>ma</sup> parte del minuto primo si dice *minuto secondo*.

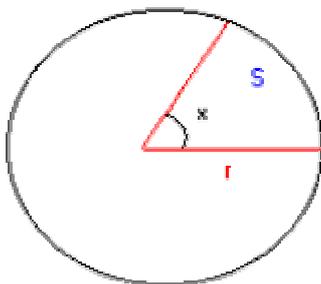
In tutte le questioni di matematica superiore si impone tuttavia una misura degli angoli diversa da quella dei gradi e ben più comoda: viene presa come unità fondamentale non il grado bensì il **radiante**.

Si definisce **angolo radiante** l'angolo al centro di una circonferenza di raggio arbitrario, che sottende un arco di lunghezza eguale al raggio della circonferenza.



L'angolo  $\widehat{AOB}$  è detto **angolo radiante** se l'arco sotteso, cioè la linea rossa, è lunga quanto il segmento  $OA$ .

Data dunque una circonferenza di raggio  $r$  ed in essa un arco di lunghezza  $S$  che sottenda un angolo di  $x$  gradi, la misura dell'angolo in radianti sarà pari a  $y = S/r$



Poiché gli archi sono proporzionali ai rispettivi angoli al centro possiamo scrivere la seguente proporzione:  $2\pi r/360 = S/x$  dalla quale, essendo  $y = S/r$ , si ricavano subito le seguenti formule di conversione:

$$y \text{ (rad)} = \frac{\pi}{180} x \text{ (gradi)} = 0,017453293 x \text{ (gradi)}$$

$$x \text{ (gradi)} = \frac{180}{\pi} y \text{ (rad)} = 57,295779513 y \text{ (rad)}$$

$$1 \text{ rad} = 57^{\circ}17'44'' \quad 180^{\circ} = \pi \text{ rad}$$

D'ora in poi useremo quasi esclusivamente i radianti per cui si userà sempre  $\pi$  moltiplicato per un determinato numero; ad esempio per dire  $60^\circ$ , scriveremo  $\pi/3$  (in quanto  $\pi$  è  $180^\circ$ ), o quando dovremo esprimere un angolo di  $135^\circ$ , scriveremo  $3\pi/4$ .

X (gradi)	Y (rad)
0	0
15	$\pi/12$
30	$\pi/6$
45	$\pi/4$
60	$\pi/3$
72	$\pi/5$
90	$\pi/2$
135	$3\pi/4$
180	$\pi$
270	$3\pi/2$
360	$2\pi$

Dobbiamo osservare che la misura dell'angolo in radianti è data da un comune numero reale, senza più lo scomodo uso dei primi e dei secondi. Allo scopo di un corretto uso delle formule di conversione occorre allora osservare che essendo  $y$  un numero reale, quando l'angolo  $x$  comprende primi ed eventualmente secondi occorre, prima della conversione, esprimere anche  $x$  come numero reale, senza primi e secondi e ciò si fa facilmente come mostrato dai seguenti due esempi:

$$x = 33^\circ, 36', 48'' = (33 + 36/60 + 48/3600)^\circ = 33,61333^\circ$$

$$x = 65^\circ, 30', 12'' = (65 + 30/60 + 12/3600)^\circ = 65,50333^\circ$$

Convertendo ora in radianti con la costante fissa si ha:

$$x = 33^\circ, 36', 48'' \rightarrow y = 33,61333 \cdot 0,017453293 = 0,58666328 \text{ rad}$$

$$x = 65^\circ, 30', 12'' \rightarrow y = 65,50333 \cdot 0,017453293 = 1,14324878 \text{ rad}$$

Dovendo fare il contrario (passaggio da radianti a gradi) si arriva ad esprimere un angolo in gradi, ma in notazione decimale, e qualora non si ottenga un numero intero può essere necessario passare dai gradi decimali ai gradi con primi e secondi. Partendo dal primo dei due esempi precedenti procediamo al contrario:

$$y = 0,58666328 \rightarrow x = 0,58666328 \cdot 57,295779513 = 33,61333$$

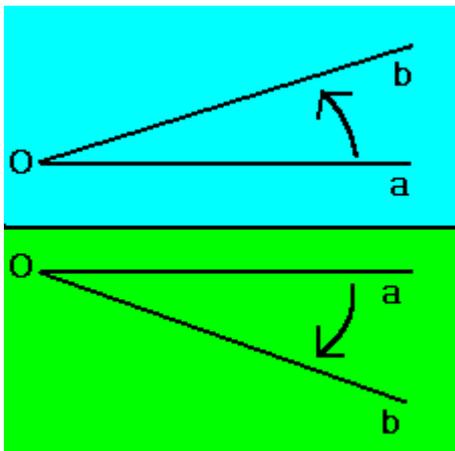
poiché i gradi contengono dei decimali vogliamo ora passare ai primi e ai secondi. Si ignora la parte intera e si moltiplica la parte decimale per 60, ottenendo:  $0,61333 \cdot 60 = 36,7998$ . I primi sono la parte intera del numero così ottenuto (36)

Si ignora ancora la parte intera e si moltiplica la parte decimale per 60, ottenendo:  $0,7998 \cdot 60 = 47,98 = \text{circa } 48$  ed i secondi sono la parte intera del numero ottenuto (48)

Alla fine si ha:  $x = 33^\circ 36' 48''$

La non esattezza dei risultati intermedi è semplicemente dovuta agli errori di arrotondamento nei calcoli, dovuti al fatto che le costanti fisse di conversione, pur espresse con molti decimali, non sono esatte, essendo le stesse numeri non razionali con infinite cifre. L'errore è comunque talmente piccolo da poter essere tranquillamente ignorato.

Anche per **misurare gli archi** occorre fissare un unità di misura. A tal scopo si assume come unità di misura l'arco il cui angolo al centro corrisponde all'unità di misura degli angoli. Così avremo:  
**l'arco grado, che è l'arco di circonferenza che corrisponde all'angolo al centro di un grado;**  
**l'arco radiante, che è l'arco di circonferenza che corrisponde all'angolo al centro di un radiante.**



Un angolo si dice **orientato** quando è stabilito quale dei due lati deve considerarsi come primo lato. In questi due disegni consideriamo  $a$  il **primo lato** e  $b$  il **lato origine**. Un angolo si dice **positivo** quando è descritto dal lato origine  $b$  mediante una rotazione antioraria attorno al punto  $O$  come nel disegno superiore; si dice invece **negativo** quando è descritto dal lato origine  $b$  mediante una rotazione oraria attorno al punto  $O$  come nel disegno in basso.

La misura di un angolo orientato  $\widehat{AOB}$  è la sua misura assoluta presa con il segno  $+ o -$  a seconda che l'angolo  $\widehat{AOB}$  sia positivo o negativo.

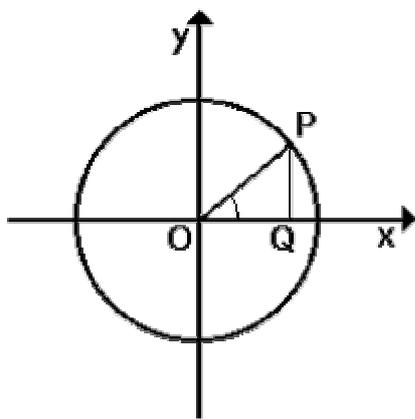
Se poi  $\widehat{AOB}$  è nullo, per definizione la sua misura è 0.

## 2) Seno e coseno

Sia data una circonferenza goniometrica: circonferenza di raggio unitario nel centro dell'origine.

L'equazione di questa circonferenza è:  $X^2+Y^2=1$

Consideriamo un qualsiasi angolo orientato  $\alpha$  con il primo lato coincidente col semiasse positivo  $x$ . Sia  $P$  il punto di intersezione del secondo lato dell'angolo con la circonferenza.



Si chiama seno dell'angolo orientato  $\widehat{QOP}$  e si scrive  $sen \widehat{QOP}$ , l'ordinata del punto  $P$ , dunque la lunghezza del segmento  $QP$ .

Si chiama coseno dell'angolo orientato  $\widehat{QOP}$  e si scrive  $cos \widehat{QOP}$ , l'ascissa del punto  $P$ , dunque la lunghezza del segmento  $OQ$ .

seno e coseno sono grandezze che dipendono esclusivamente dall'angolo considerato.

## 3) Relazione fondamentale

**La somma dei quadrati del seno e del coseno di uno stesso angolo orientato è uguale a 1.**

Infatti  $P$  appartiene alla circonferenza goniometrica e soddisfa quindi l'equazione  $X^2 + Y^2 = 1$ ; il

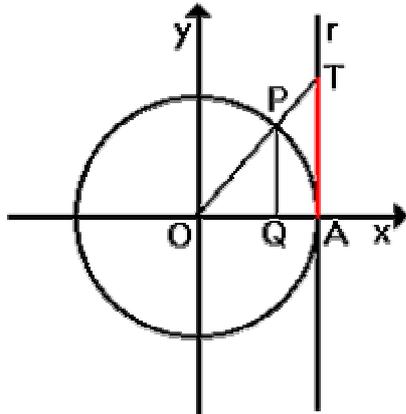
punto  $P$  è di coordinate  $(\cos x, \sin x)$  e quindi

$$P_x^2 + P_y^2 = 1 \rightarrow (\cos x)^2 + (\sin x)^2 = 1.$$

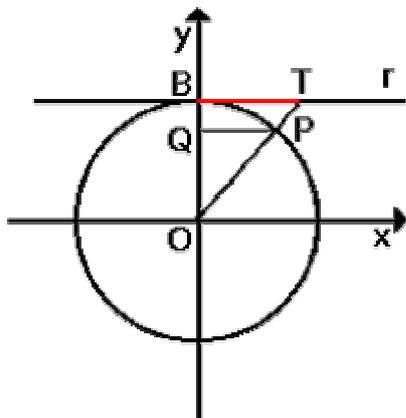
Ciò è dimostrabile anche dal Teorema di Pitagora: le misure di  $QP$  e  $OQ$ , che sono rispettivamente il seno e il coseno dell'angolo  $\widehat{QOP}$ , sono i cateti del triangolo rettangolo  $QOP$  la cui ipotenusa è uguale a 1 essendo il raggio unitario.

#### 4) Tangente e cotangente

Esistono due definizioni di **tangente di un angolo orientato**. Noi partiremo dalla più usata per poi dimostrare la validità dell'altra definizione.



Sia la retta  $r$  la tangente alla circonferenza nel punto  $A$ , si chiama **tangente goniometrica dell'angolo  $\widehat{AOP}$**  l'ordinata del punto  $T$  d'intersezione (quando esiste) tra la retta  $OP$  e la retta  $r$  e si indica con  $tg \widehat{AOP}$ . Nel disegno la tangente goniometrica dell'angolo  $\widehat{AOP}$  è la lunghezza del segmento  $AT$ , preso con il segno dovuto.



Sia la retta  $r$  la tangente alla circonferenza nel punto  $B$ , si chiama **cotangente goniometrica dell'angolo  $\widehat{AOP}$**  l'ascissa del punto  $T$  d'intersezione (quando esiste) tra la retta  $OP$  e la retta  $r$  e si indica con  $ctg \widehat{AOP}$ . Nel disegno la tangente goniometrica dell'angolo  $\widehat{AOP}$  è la lunghezza del segmento  $BT$ , preso con il segno dovuto.

Riferendoci al primo dei due disegni, notiamo che i triangoli  $AOT$  e  $QOP$  sono simili, avendo entrambi un angolo retto, un angolo in comune e un angolo uguale.

Si ha così la similitudine  $OA : TA = OQ : QP$ ; essendo  $OA = 1$ ,  $TA = tg(\widehat{AOP})$ ,  $OQ = \cos(\widehat{AOP})$ ,  $QP = \sin(\widehat{AOP})$ , si ha che  $tg(\widehat{AOP}) = \cos(\widehat{AOP}) : \sin(\widehat{AOP})$  e possiamo concludere generalizzando che:  $tg x = \sin x / \cos x$  (Questa spesso viene considerata come la definizione di tangente).

Possiamo applicare un discorso analogo alla cotangente nel secondo disegno: per la similitudine dei triangoli  $POQ$  e  $TOB$  si ha che  $OT : BT = OP : QP$  e dunque sostituendo e generalizzando  $ctg x = \cos x / \sin x$

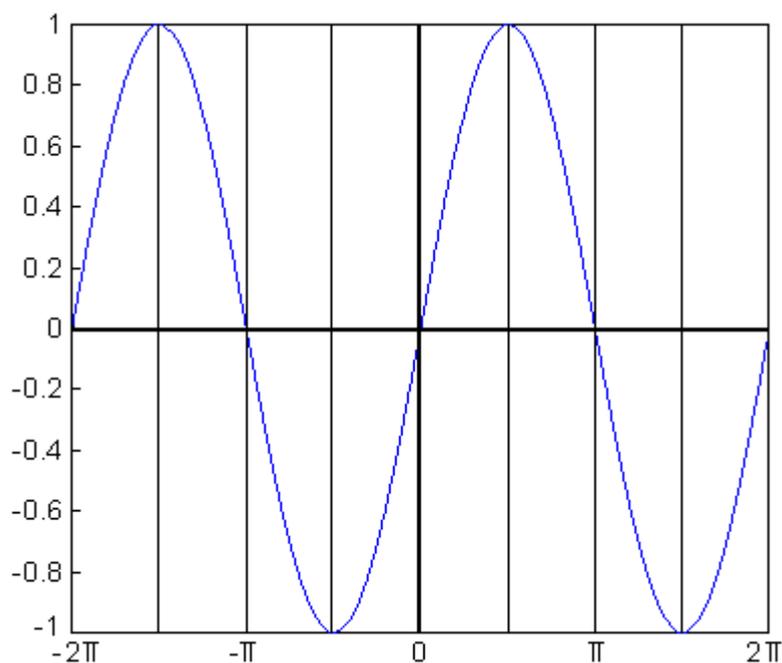
## 5) Periodicità delle funzioni goniometriche

Le funzioni goniometriche sono delle **funzioni periodiche**, cioè restituiscono valori uguali per angoli che differiscono tra loro di uno o più periodi. **Il seno e il coseno hanno un periodo di  $2\pi$** , cioè due angoli che differiscono di  $2\pi$  hanno lo stesso seno e coseno. Ad esempio  $3/2 \pi$  ha stesso seno e coseno di  $7/2 \pi$ ,  $11/2 \pi$  e così via dicendo. Dal momento che  $2\pi$  equivale a  $360^\circ$ , possiamo anche dire che  $\text{sen}(14^\circ) = \text{sen}(14^\circ + 360^\circ) = \text{sen}(374^\circ) = \text{sen}(734^\circ) = \text{ecc.}$  e lo stesso vale per il coseno.

**La tangente e la cotangente hanno invece un periodo uguale a  $\pi$** . Avendo quindi un periodo di  $180^\circ$ , possiamo ad esempio dire che  $\text{tg}(30^\circ) = \text{tg}(210^\circ) = \text{tg}(390^\circ) = \text{ecc.}$  Possiamo vedere la cosa in maniera chiara nei grafici delle funzioni.

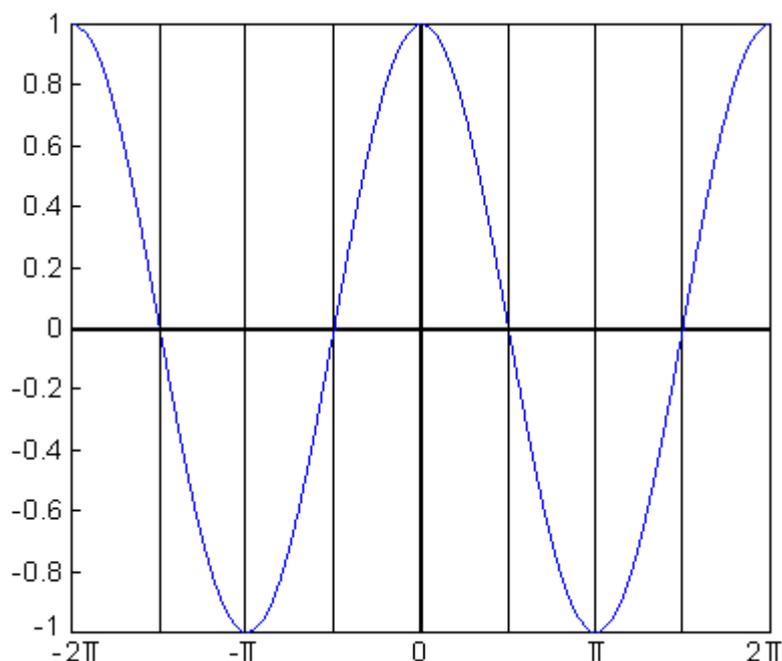
## 6) Grafico delle funzioni goniometriche

Grafico del seno



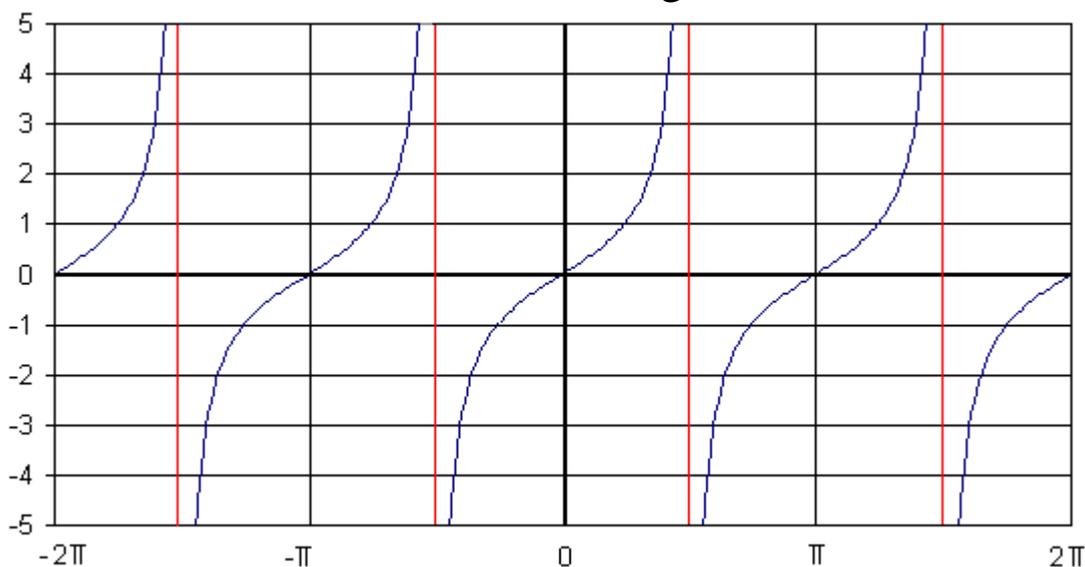
Con questo grafico si comprende bene la natura periodica del seno, come tutte le funzioni goniometriche. Si può notare come punti distanti tra loro di  $2\pi$  abbiano lo stesso seno. Il seno è una funzione *dispari* cioè  **$\text{sen}(-a) = -\text{sen}(a)$** . Il grafico di un seno viene chiamato senusoide.

## Grafico del coseno



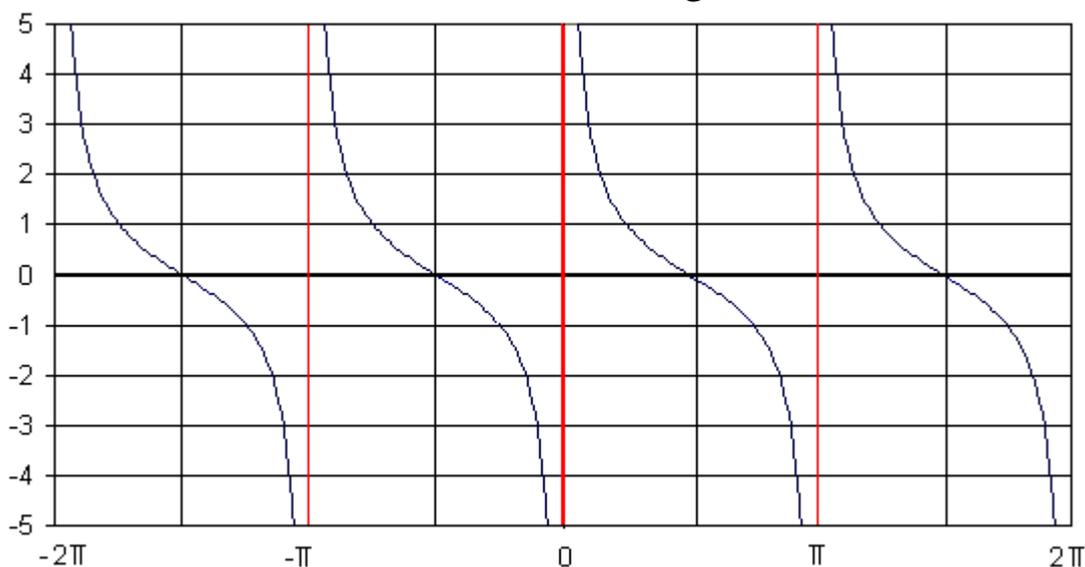
Anche nel coseno è palese la periodicità con modulo  $2\pi$ . E' inoltre riscontrabile che il coseno è una funzione *pari* cioè  $\cos(-a) = \cos(a)$ .

## Grafico della tangente



La tangente è una funzione ascendente fratta. Il fatto che sia ascendente è palese: in ogni punto la funzione tende a salire (Rigorosamente si deve dire che la retta tangente in ogni punto di questa funzione ha coefficiente angolare positivo, o ancor più rigorosamente che la derivata prima della tangente in ogni punto è positiva). Le rette verticali che passano a  $-\frac{3}{2}\pi$ , a  $-\frac{\pi}{2}$ , a  $\frac{\pi}{2}$  e a  $\frac{3}{2}\pi$  sono gli asintoti della funzione. La tangente quando si avvicina a quei valori tende a *inf* o a *-inf*. E' chiaro che essendo  $\tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$ , la tangente non esiste quando  $\cos(x)=0$  e quindi nei punti in cui passano gli asintoti (le linee rosse,  $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$ ). La tangente dunque non tocca mai gli asintoti se non all'infinito. La tangente è una funzione dispari.

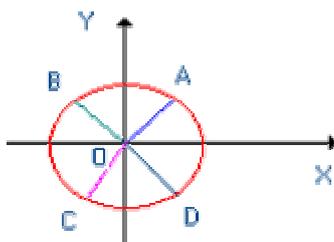
## Grafico della cotangente



La cotangente è una funzione discendente fratta. Anche la cotangente è una funzione dispari. Essendo  $\text{ctg}(x) = \cos(x)/\sin(x)$ , la cotangente non esiste quando il seno è nullo, quindi non tocca mai gli asintoti in  $x = k\pi$

## 7) Segni e comportamenti delle funzioni goniometriche

Diamo ora una breve sintesi dei segni assunti da  $\cos x$  e  $\sin x$  al variare dell'angolo  $x$  in  $[0;360]$  percorrendo i 4 quadranti del piano cartesiano.



- A è determinato da un angolo  $x \in [0;90]$  1° quadrante
- B è determinato da un angolo  $x \in [90;180]$  2° quadrante
- C è determinato da un angolo  $x \in [180;270]$  3° quadrante
- D è determinato da un angolo  $x \in [270;360]$  4° quadrante

### TABELLA DEI SEGNI DI SEN, COS, TG

quadrante	seno	coseno	tangente
1	+	+	+
2	+	-	-
3	-	-	+
4	-	+	-

Funzione	Quadrante I	Quadrante II	Quadrante III	Quadrante IV
Seno	Positivo crescente	Positivo decrescente	Negativo decrescente	Negativo crescente
Coseno	Positivo decrescente	Negativo decrescente	Negativo crescente	Positivo crescente
Tangente	Positivo crescente	Negativo crescente	Positivo crescente	Negativo crescente
Cotangente	Positivo decrescente	Negativo decrescente	Positivo decrescente	Negativo decrescente

Funzione	Dominio	Codominio
Seno	$] -\infty, \infty [$	$[-1, 1]$
Coseno	$] -\infty, \infty [$	$[-1, 1]$
Tangente	$X \neq (1+2k)\pi/2$	$] -\infty, \infty [$
Cotangente	$X \neq k\pi$	$] -\infty, \infty [$

Questa tabella indica il campo d'esistenza delle funzioni:  $\sin(x)$  e  $\cos(x)$  hanno significato sempre, mentre per  $\tan(x)$  e  $\cot(x)$ ,  $x$  deve essere diverso da alcuni valori che farebbero perdere significato alla funzione: per  $\tan x$ ,  $x$  deve essere diverso da  $(1+2k)\pi/2$  ossia deve avere un coseno diverso da zero; analogamente per  $\cot x$ ,  $x$  deve essere diverso da  $k\pi$ , valori che annullerebbero il seno. Per quanto riguarda il codominio, il seno e il coseno variano tra -1 e 1 come tra l'altro i grafici fanno notare; per la tangente e la cotangente invece il codominio è infinito cioè la tangente o la cotangente di un angolo possono assumere qualsiasi valore.

## 8) Angoli notevoli

In genere il seno di un angolo è un numero irrazionale non esprimibile mediante un'espressione finita tant'è che si ricorre all'approssimazione; per alcuni angoli tuttavia le funzioni goniometriche restituiscono risultati esprimibili mediante un'espressione più o meno semplice. Ecco qui un elenco di angoli notevoli.

Angolo	Seno	Coseno	Tangente	Cotangente
$0^\circ$	0	1	0	Non def.
$30^\circ$	$1/2$	$\sqrt{3}/2$	$1/\sqrt{3} = \sqrt{3}/3$	$\sqrt{3}$
$45^\circ$	$1/\sqrt{2} = \sqrt{2}/2$	$1/\sqrt{2} = \sqrt{2}/2$	1	1
$60^\circ$	$\sqrt{3}/2$	$1/2$	$\sqrt{3}$	$1/\sqrt{3} = \sqrt{3}/3$
$90^\circ$	1	0	Non def.	0
$180^\circ$	0	-1	0	Non def.
$270^\circ$	-1	0	Non def.	0
$360^\circ$	0	1	0	Non def.

## 9) Angoli associati

Se conosciamo il seno di un angolo  $\alpha$ , possiamo calcolarci il valore del seno del suo complementare, del suo supplementare e di altri angoli che hanno qualche relazione con  $\alpha$ . In questa tabella c'è una rapida trattazione di questi angoli.

$\beta$	Sen $\beta =$	Cos $\beta =$	Tg $\beta =$	Ctg $\beta =$
$\beta = 90^\circ - \alpha$	Cos $\alpha$	Sen $\alpha$	Ctg $\alpha$	Tg $\alpha$
$\beta = 90^\circ + \alpha$	Cos $\alpha$	-Sen $\alpha$	-Ctg $\alpha$	-Tg $\alpha$
$\beta = 180^\circ - \alpha$	Sen $\alpha$	-Cos $\alpha$	-Tg $\alpha$	-Ctg $\alpha$
$\beta = 180^\circ + \alpha$	-Sen $\alpha$	-Cos $\alpha$	Tg $\alpha$	Ctg $\alpha$
$\beta = 270^\circ - \alpha$	-Cos $\alpha$	-Sen $\alpha$	Ctg $\alpha$	Tg $\alpha$
$\beta = 270^\circ + \alpha$	-Cos $\alpha$	Sen $\alpha$	-Ctg $\alpha$	-Tg $\alpha$
$\beta = 360^\circ - \alpha$	-Sen $\alpha$	Cos $\alpha$	-Tg $\alpha$	-Ctg $\alpha$
$\beta = 360^\circ + \alpha$	Sen $\alpha$	Cos $\alpha$	Tg $\alpha$	Ctg $\alpha$
$\beta = -\alpha$	-Sen $\alpha$	Cos $\alpha$	-Tg $\alpha$	-Ctg $\alpha$

## 10) Riduzione al primo quadrante e al primo ottante

Alla luce della tabella sopra esposta, possiamo calcolarci il seno di un angolo in maniera un pò più semplice, ecco un esempio:

$$\text{sen}(284^\circ) = -\text{sen}(360^\circ - 284^\circ) = -\text{sen}(76^\circ)$$

ma sulla tavola dei logaritmi ci sono i valori dei seni che vanno da  $0^\circ$  a  $45^\circ$ . Ecco che siamo costretti ad operare un altro passaggio:

$$-\text{sen}(76^\circ) = -\text{cos}(90^\circ - 76^\circ) = -\text{cos}(24^\circ)$$

con questo sistema in pratica si può calcolare il valore di una funzione goniometrica di un angolo qualsiasi, conoscendo i valori solo per gli angoli del primo ottante (da  $0^\circ$  a  $45^\circ$ ).

Altri esempi:

$$\text{tg}(135^\circ) = \text{tg}(180^\circ - 45^\circ) = -\text{tg}(45^\circ) = -1$$

$$\text{cos}(210^\circ) = -\text{cos}(180^\circ + 30^\circ) = -\text{cos}(30^\circ) = -\sqrt{3}/2$$

$$\text{ctg}(300^\circ) = -\text{ctg}(360^\circ - 60^\circ) = -\text{ctg}(60^\circ) = -\text{tg}(90^\circ - 30^\circ) = -\text{tg}(30^\circ) = -\sqrt{3}$$

E' importante quindi notare che tutti i valori finali sono delle espressioni basate su angoli appartenenti al primo ottante.

## 11) FORMULE FONDAMENTALI TRIGONOMETRICHE

## Espressione di tutte le funzioni goniometriche di un dato angolo orientato mediante una sola di esse

	Funzione da esprimere			
	sen	cos x	tg x	ctg x
sen x	sen x	$\pm\sqrt{1-\text{sen}^2x}$	$(\text{sen } x)/\pm\sqrt{1-\text{sen}^2x}$	$\pm(\sqrt{1-\text{sen}^2x})/\text{sen } x$
cos x	$\pm\sqrt{1-\text{cos}^2x}$	cos x	$\pm(\sqrt{1-\text{cos}^2x})/\text{cos } x$	$(\text{cos } x)/\pm\sqrt{1-\text{cos}^2x}$
tg x	$(\text{tg } x)/\pm\sqrt{1+\text{tg}^2x}$	$1/\pm\sqrt{1+\text{tg}^2x}$	tg x	1/tg x
ctg x	$1/\pm\sqrt{1+\text{ctg}^2x}$	$(\text{ctg } x)/\pm\sqrt{1+\text{ctg}^2x}$	1/ctg x	ctg x

### Commentiamo questa tabella.

Con questa tabella si può calcolare il valore di una funzione goniometrica di un angolo  $\alpha$  a partire dal valore di un'altra funzione goniometrica; ad es.:

io so che  $\text{sen } x=0.6$  e mi voglio calcolare coseno, tangente e cotangente dello stesso angolo. Alla tabella vedo che per esprimere il coseno mediante il seno si deve applicare l'espressione  $\text{cos } x = \pm\sqrt{1-\text{sen}^2x}$  e sostituendo  $\text{sen } x$  con  $0.6$  che è il valore che conosciamo otteniamo  $\text{cos } x = \pm\sqrt{1-(0.6)^2} = \pm\sqrt{1-0.36} = \pm\sqrt{0.64} = \pm 0.8$

L'impossibilità di determinare il segno deriva dal fatto che non si conosce il quadrante a cui appartiene l'angolo. Infatti due angoli hanno seno  $0.6$  e questi possono avere coseno  $+0.8$  e  $-0.8$ . Si procede analogamente per il calcolo della tangente:  $\text{tg } x = (\text{sen } x)/\pm\sqrt{1-\text{sen}^2x} = 0.6/\pm\sqrt{1-0.6^2} = 0.6/\pm\sqrt{0.64} = \pm 0.75$

Per la verità già conoscevamo  $\text{cos } x$  e dunque avremmo potuto fare  $\text{tg } x = \text{sen } x/\text{cos } x$ .

Spero sia chiaro ora il significato della tabella ma ora vediamo di **dimostrarne** le varie espressioni.

### Dimostrazione

Per la relazione fondamentale della trigonometria si ha che:

$$\text{sen}^2x + \text{cos}^2x = 1 \implies \text{sen}^2x = 1 - \text{cos}^2x \implies \text{sen } x = \pm\sqrt{1 - \text{cos}^2x}$$

E per analogia:

$$\text{sen}^2x + \text{cos}^2x = 1 \implies \text{cos}^2x = 1 - \text{sen}^2x \implies \text{cos } x = \pm\sqrt{1 - \text{sen}^2x}$$

Di qui sono chiare le espressioni di  $\text{tg } x$  e  $\text{ctg } x$  a partire da  $\text{sen } x$  e  $\text{cos } x$ . Prendiamo ad esempio  $\text{tg } x$  espresso mediante  $\text{sen } x$ :

$$\text{tg } x = (\text{sen } x)/(\text{cos } x) = (\text{sen } x)/\pm\sqrt{1 - \text{sen}^2x}$$

Passando alle espressioni di  $\text{sen } x$  e  $\text{cos } x$  a partire da  $\text{tg } x$  e  $\text{ctg } x$ .

$$\text{sen}^2x = \text{sen}^2x \implies (\text{sen}^2x)/(\text{sen}^2x + \text{cos}^2x) = \text{sen}^2x$$

Fin qui è chiaro?  $\text{sen}^2x + \text{cos}^2x$  è uguale a 1 per la relazione fondamentale della trigonometria. Ora divido numeratore e denominatore per  $\text{cos}^2x$  e ottengo

$$(\text{tg}^2x)/(1 + \text{tg}^2x) = \text{sen}^2x \implies (\text{tg } x)/\pm\sqrt{1 + \text{tg}^2x} = \text{sen } x$$

E allo stesso modo:

$$\text{cos}^2x = \text{cos}^2x \implies (\text{cos}^2x)/(\text{sen}^2x + \text{cos}^2x) = \text{cos}^2x \implies 1/(1 + \text{tg}^2x) = \text{cos}^2x \implies 1/\pm\sqrt{1 + \text{tg}^2x} = \text{cos } x$$

per la cotangente la dimostrazione è molto simile: basta dividere nel passaggio intermedio per  $\text{sen}^2x$  invece che per  $\text{cos}^2x$ .

## Formule di sottrazione

$$\cos(x-y) = (\cos x)(\cos y) + (\sin x)(\sin y)$$

$$\sin(x-y) = (\sin x)(\cos y) - (\cos x)(\sin y)$$

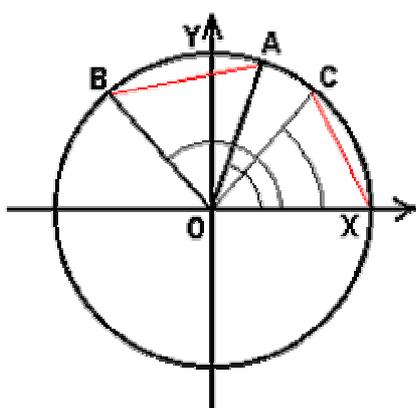
$$\operatorname{tg}(x-y) = (\operatorname{tg} x - \operatorname{tg} y) / (1 + (\operatorname{tg} x)(\operatorname{tg} y))$$

$$\operatorname{ctg}(x-y) = ((\operatorname{tg} x)(\operatorname{tg} y) + 1) / (\operatorname{ctg} y - \operatorname{ctg} x)$$

### DIMOSTRAZIONE

Sia  $a$  l'angolo  $\angle XOA$  e  $b$  l'angolo  $\angle XOB$ ; noi ci vogliamo calcolare seno e coseno dell'angolo  $(b-a)$  conoscendo il seno e il coseno di entrambi gli angoli. Chiamiamo  $c$  proprio la misura dell'angolo  $b-a$  e disegniamo l'angolo  $\angle XOC$  che sia di misura  $c$ .

Dal momento che gli angoli  $\angle AOB$  e  $\angle XOC$  sono uguali e dal momento che archi uguali sono sottesi da corde uguali, le corde  $AB$  e  $XC$  (le linee rosse) sono di egual lunghezza.



$AB=XC \implies$  e per il teorema di Pitagora:  $\sqrt{(B_x - A_x)^2 + (B_y - A_y)^2} = \sqrt{(X_x - C_x)^2 + (X_y - C_y)^2} \implies$   
 sostituendo ed elevando tutto al quadrato:  $(\cos b - \cos a)^2 + (\sin b - \sin a)^2 = (1 - \cos c)^2 + (0 - \sin c)^2 \implies$   
 $\cos^2 b + \cos^2 a - 2(\cos b)(\cos a) + \sin^2 b + \sin^2 a - 2(\sin a)(\sin b) = 1 + \cos^2 c - 2\cos c + \sin^2 c \implies$   
 essendo  $\sin^2 a + \cos^2 a = 1$  e  $\sin^2 b + \cos^2 b = 1$  e  $\sin^2 c + \cos^2 c = 1$  sostituiamo:  
 $2 - 2(\sin a)(\sin b) - 2(\cos a)(\cos b) = 2 - 2\cos c \implies$   
 sottraiamo 2 ad ambo i membri e dividiamo il tutto per -2 e abbiamo:  
 $\cos(b-a) = (\cos a)(\cos b) + (\sin a)(\sin b)$  C.V.D.

Per calcolare  $\sin c$  si adotta questo procedimento: noi sappiamo che

$$\sin c = \cos(c - \pi/2) = \cos((b-a) - \pi/2) = \cos((b-\pi/2) - a) =$$

applicando la formula di sottrazione del coseno...

$$\sin c = \cos(b-\pi/2) \cdot \cos a + \sin(b-\pi/2) \cdot \sin a = (\sin b)(\cos a) - (\cos b)(\sin a)$$

Ecco il procedimento per calcolare  $\operatorname{tg}(b-a)$

$$\operatorname{tg} c = (\sin c) / (\cos c) = ((\sin b)(\cos a) - (\cos b)(\sin a)) / ((\cos b)(\cos a) - (\sin b)(\sin a))$$

dividiamo ora numeratore e denominatore per  $(\cos b)(\cos a)$ ...

$$\operatorname{tg} c = ((\operatorname{tg} b) - (\operatorname{tg} a)) / (1 - (\operatorname{tg} b)(\operatorname{tg} a))$$

Infine ecco il procedimento per calcolare  $\operatorname{ctg}(b-a)$

$$\operatorname{ctg} c = (\cos c) / (\sin c) = ((\cos b)(\cos a) + (\sin b)(\sin a)) / ((\sin b)(\cos a) - (\cos b)(\sin a))$$

dividiamo ora numeratore e denominatore per  $(\sin b)(\sin a)$ ...

$$\operatorname{ctg} c = ((\operatorname{ctg} b)(\operatorname{ctg} a) + 1) / ((\operatorname{ctg} a)(\operatorname{ctg} b))$$

## Formule di addizione

$$\cos(x+y) = (\cos x)(\cos y) - (\sin x)(\sin y)$$

$$\sin(x+y) = (\sin x)(\cos y) + (\cos x)(\sin y)$$

$$\operatorname{tg}(x+y) = (\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y) / (1 + (\operatorname{tg} x)(\operatorname{tg} y))$$

$$\operatorname{ctg}(x+y) = ((\operatorname{ctg} x)(\operatorname{ctg} y) - 1) / (\operatorname{ctg} y + \operatorname{ctg} x)$$

### DIMOSTRAZIONE

Le dimostrazioni sono banali in quanto basta utilizzare le formule di sottrazione con una lieve modifica:

$$\cos(x+y) = \cos(x-(-y)) = (\cos x)(\cos(-y)) + (\sin x)(\sin(-y)) = (\cos x)(\cos y) - (\sin x)(\sin y)$$

$$\sin(x+y) = \sin(x-(-y)) = (\sin x)(\cos(-y)) + (\cos x)(\sin(-y)) = (\sin x)(\cos y) + (\cos x)(\sin y)$$

$$\operatorname{tg}(x+y) = \operatorname{tg}(x-(-y)) = (\operatorname{tg} x - \operatorname{tg}(-y)) / (1 + (\operatorname{tg} x)(\operatorname{tg}(-y))) = (\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y) / (1 - (\operatorname{tg} x)(\operatorname{tg} y))$$

$$\operatorname{ctg}(x+y) = \operatorname{ctg}(x-(-y)) = ((\operatorname{ctg} x)(\operatorname{ctg}(-y)) + 1) / (\operatorname{ctg}(-y) - \operatorname{ctg} x) = (-(\operatorname{ctg} x)(\operatorname{ctg} y) + 1) / (-\operatorname{ctg} y - \operatorname{ctg} x) = ((\operatorname{ctg} x)(\operatorname{ctg} y) - 1) / (\operatorname{ctg} y + \operatorname{ctg} x)$$

## Formule di duplicazione

$$\cos(2x) = \cos^2 x - \sin^2 x \text{ oppure } 1 - 2\sin^2 x \text{ oppure } 2\cos^2 x - 1$$

$$\sin(2x) = 2(\sin x)(\cos x)$$

$$\operatorname{tg}(2x) = (2\operatorname{tg} x) / (1 - \operatorname{tg}^2 x)$$

$$\operatorname{ctg}(2x) = (\operatorname{ctg}^2 x - 1) / (2\operatorname{ctg} x)$$

Anche in questo caso la dimostrazione è banale: basta utilizzare le formule di duplicazione:

$$\cos(2x) = \cos(x+x) = (\cos x)(\cos x) - (\sin x)(\sin x) = \cos^2 x - \sin^2 x$$

$$\sin(2x) = \sin(x+x) = (\sin x)(\cos x) + (\sin x)(\cos x) = 2(\sin x)(\cos x)$$

$$\operatorname{tg}(2x) = \operatorname{tg}(x+x) = (\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} x) / (1 - (\operatorname{tg} x)(\operatorname{tg} x)) = (2\operatorname{tg} x) / (1 - \operatorname{tg}^2 x)$$

$$\operatorname{ctg}(2x) = \operatorname{ctg}(x+x) = ((\operatorname{ctg} x)(\operatorname{ctg} x) - 1) / (\operatorname{ctg} x + \operatorname{ctg} x) = (\operatorname{ctg}^2 x - 1) / (2\operatorname{ctg} x)$$

## Formule di bisezione

$$\cos(x/2) = \pm \operatorname{sqr}((1 + \cos x) / 2)$$

$$\sin(x/2) = \pm \operatorname{sqr}((1 - \cos x) / 2)$$

$$\operatorname{tg}(x/2) = \pm \operatorname{sqr}((1 - \cos x) / (1 + \cos x))$$

$$\operatorname{ctg}(x/2) = \pm \operatorname{sqr}((1 + \cos x) / (1 - \cos x))$$

Queste formule si ricavano facilmente a partire dalle formule di duplicazione:

$$\cos x = \cos x \implies \cos(2 \cdot x/2) = \cos x \implies 2\cos^2(x/2) - 1 = \cos x \implies \cos^2(x/2) = (1 + \cos x) / 2 \implies \cos(x/2) = \pm \operatorname{sqr}((1 + \cos x) / 2)$$

$$\sin(x/2) = \pm \operatorname{sqr}(1 - \cos^2(x/2)) = \pm \operatorname{sqr}(1 - ((1 + \cos x) / 2)) = \pm \operatorname{sqr}((1 - \cos x) / 2)$$

$$\operatorname{tg}(x/2) = \sin(x/2) / \cos(x/2) = \pm \operatorname{sqr}((1 - \cos x) / 2) / \operatorname{sqr}((1 + \cos x) / 2) = \pm \operatorname{sqr}((1 - \cos x) / (1 + \cos x))$$

$$\operatorname{ctg}(x/2) = 1 / \operatorname{tg}(x/2) = \pm \operatorname{sqr}((1 + \cos x) / (1 - \cos x))$$

## Formule di prostaferesi

$$\sin x + \sin y = 2\sin\left(\frac{x+y}{2}\right)\cos\left(\frac{x-y}{2}\right)$$

$$\sin x - \cos y = 2\sin\left(\frac{x-y}{2}\right)\cos\left(\frac{x+y}{2}\right)$$

$$\cos x + \cos y = 2\cos\left(\frac{x+y}{2}\right)\cos\left(\frac{x-y}{2}\right)$$

$$\cos x - \cos y = -2\sin\left(\frac{x+y}{2}\right)\sin\left(\frac{x-y}{2}\right)$$

Le formule di prostaferesi permettono di fattorizzare una somma di due seni o coseni. La dimostrazione è la seguente:

Sia  $p+q=x$  e  $p-q=y$  segue che  $p=(x+y)/2$  e  $q=(x-y)/2$

$$\sin x = (\sin p)(\cos q) + (\sin q)(\cos p) \quad \sin y = (\sin p)(\cos q) - (\sin q)(\cos p)$$

$$\cos x = (\cos p)(\cos q) - (\sin p)(\sin q) \quad \cos y = (\cos p)(\cos q) + (\sin p)(\sin q)$$

$$\sin x + \sin y = 2(\sin p)(\cos q) = 2\sin\left(\frac{x+y}{2}\right)\cos\left(\frac{x-y}{2}\right)$$

$$\sin x - \sin y = 2(\sin q)(\cos p) = 2\sin\left(\frac{x-y}{2}\right)\cos\left(\frac{x+y}{2}\right)$$

$$\cos x + \cos y = 2(\cos p)(\cos q) = 2\cos\left(\frac{x+y}{2}\right)\cos\left(\frac{x-y}{2}\right)$$

$$\cos x - \cos y = -2(\sin p)(\sin q) = -2\sin\left(\frac{x+y}{2}\right)\sin\left(\frac{x-y}{2}\right)$$

## Formule di Werner

$$(\sin x)(\sin y) = \frac{1}{2}(\cos(x-y) - \cos(x+y))$$

$$(\cos x)(\cos y) = \frac{1}{2}(\cos(x+y) + \cos(x-y))$$

$$(\sin x)(\cos y) = \frac{1}{2}(\sin(x+y) + \sin(x-y))$$

Le formule di Werner svolgono praticamente l'opposto delle formule di prostaferesi

Anche in questo caso la dimostrazione di ognuna delle 3 formule è intuitiva...

**Dalla formula di prostaferesi si ha che:**

$$\cos(x+y) - \cos(x-y) = -2(\sin x)(\sin y) \implies (\sin x)(\sin y) = -\frac{1}{2}(\cos(x+y) - \cos(x-y)) = \frac{1}{2}(\cos(x-y) - \cos(x+y))$$

$$\cos(x+y) + \cos(x-y) = 2(\cos x)(\cos y) \implies (\cos x)(\cos y) = \frac{1}{2}(\cos(x+y) + \cos(x-y))$$

$$\sin(x+y) + \sin(x-y) = 2(\sin x)(\cos y) \implies (\sin x)(\cos y) = \frac{1}{2}(\sin(x+y) + \sin(x-y))$$

## Formule parametriche in $\text{tg}(x/2)$

$$\sin x = \frac{2\text{tg}(x/2)}{1+\text{tg}^2(x/2)}$$

$$\cos x = \frac{1-\text{tg}^2(x/2)}{1+\text{tg}^2(x/2)}$$

$$\text{tg} x = \frac{2\text{tg}(x/2)}{1-\text{tg}^2(x/2)}$$

$$\text{ctg} x = \frac{1-\text{tg}^2(x/2)}{2\text{tg}(x/2)}$$

La dimostrazione per  $\sin x$  è la seguente:

$$\sin x = \sin(2 \cdot x/2) = 2\sin(x/2)\cos(x/2) = \frac{2\sin(x/2)\cos(x/2)}{1} = \frac{2\sin(x/2)\cos(x/2)}{\sin^2(x/2) + \cos^2(x/2)}$$

ora dividiamo tutto per  $\cos^2(x/2)$  e otteniamo  
 $\sin x = 2\operatorname{tg}(x/2)/(1+\operatorname{tg}^2(x/2))$

Identica dimostrazione per  $\cos x$

$$\cos x = \cos(2 \cdot x/2) = (\cos^2(x/2) - \sin^2(x/2))/1 = (\cos^2(x/2) - \sin^2(x/2))/(\sin^2(x/2) + \cos^2(x/2))$$

ora dividiamo tutto per  $\cos^2(x/2)$  e otteniamo

$$\cos x = (1 - \operatorname{tg}^2(x/2))/(1 + \operatorname{tg}^2(x/2))$$

Per  $\operatorname{tg} x$  si ha...

$$\operatorname{tg} x = \sin x / \cos x = 2\operatorname{tg}(x/2)/(1 - \operatorname{tg}^2(x/2))$$

...e per  $\operatorname{ctg} x$  vediamo...

$$\operatorname{ctg} x = 1 / \operatorname{tg} x = (1 - \operatorname{tg}^2(x/2))/2\operatorname{tg}(x/2)$$

**N.B.** Quando si utilizzano queste formule si deve considerare l'esistenza di  $\operatorname{tg}(x/2)$  quindi si deve imporre:  $\cos(x/2) \neq 0 \implies (x/2) \neq (k+1/2)\pi \implies x \neq (2k+1)\pi$

### **ADDIZIONE**

Si indicano con tale nome quelle formule che servono ad esprimere seno, coseno e tangente della somma di due angoli, mediante seno, coseno e tangente degli angoli stessi.

$$\sin(x + y) = \sin x \cdot \cos y + \cos x \cdot \sin y$$

$$\cos(x + y) = \cos x \cdot \cos y - \sin x \cdot \sin y$$

$$\operatorname{tg}(x + y) = (\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y)/(1 - \operatorname{tg} x \cdot \operatorname{tg} y)$$

### **DIFFERENZA**

Si indicano con tale nome quelle formule che servono ad esprimere seno, coseno e tangente della differenza di due angoli, mediante seno, coseno e tangente degli angoli stessi.

$$\sin(x - y) = \sin x \cdot \cos y - \cos x \cdot \sin y$$

$$\cos(x - y) = \cos x \cdot \cos y + \sin x \cdot \sin y$$

$$\operatorname{tg}(x - y) = (\operatorname{tg} x - \operatorname{tg} y)/(1 + \operatorname{tg} x \cdot \operatorname{tg} y)$$

### **ESEMPIO 1:**

Calcoliamo  $\sin(75^\circ) = \sin(30^\circ + 45^\circ) = \sin(30^\circ) \cdot \cos(45^\circ) + \cos(30^\circ) \cdot \sin(45^\circ)$

$$\sin(75^\circ) = \frac{1}{2} \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{4} (1 + \sqrt{3}) = \frac{\sqrt{2} + \sqrt{6}}{4} = 0,965926$$

## ESEMPIO 2

Allo stesso modo calcoliamo  $\cos(75^\circ) = \cos(30^\circ + 45^\circ)$   
 $\cos(75^\circ) = \cos(30^\circ) \cdot \cos(45^\circ) - \sin(30^\circ) \cdot \sin(45^\circ)$

$$\cos(75^\circ) = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{6}}{4} - \frac{\sqrt{2}}{4} = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4} = 0,258819$$

## ESEMPIO 3

Calcoliamo infine  $\operatorname{tg}(105^\circ) = \operatorname{tg}(60^\circ + 45^\circ)$

$$\operatorname{tg}(105^\circ) = \frac{\operatorname{tg}(60^\circ) + \operatorname{tg}(45^\circ)}{1 - \operatorname{tg}(60^\circ) \cdot \operatorname{tg}(45^\circ)} = \frac{\sqrt{3} + 1}{1 - \sqrt{3}} = \frac{1 + \sqrt{3}}{1 - \sqrt{3}} = -3,732051$$

NB: in tutte le scomposizioni abbiamo dovuto spezzare un angolo come somma di due angoli più facili e dei quali erano noti seno, coseno e tangente.

Spezzare ad esempio  $105^\circ = 101^\circ + 4^\circ$  sarebbe stato del tutto inutile.

## NOTA

Abbiamo mostrato l'uso delle formule di somma e differenza per alcuni angoli semplici. Rimane però scontato il fatto che non è certo questo l'uso da ritenere oggi interessante delle formule date. Infatti per angolo numericamente assegnato siamo in grado di calcolare subito le corrispondenti funzioni trigonometriche con un comune calcolatore tascabile. L'uso interessante si presenta qualora si debbano affrontare equazioni trigonometriche del tipo:

$$\cos(30^\circ + x) - \sin(240^\circ + x) - \sqrt{3} = 0$$

Riconosciamo nella precedente equazione una equazione lineare, ma non nella forma che la teoria permette di trattare. Per poterla risolvere dobbiamo usare le formule di somma e otteniamo:

$$\cos(30^\circ) \cos(x) - \sin(30^\circ) \sin(x) - \sin(240^\circ) \cos(x) - \cos(240^\circ) \sin(x) - \sqrt{3} = 0$$

$$\frac{\sqrt{3}}{2} \cos(x) - \frac{1}{2} \sin(x) + \frac{\sqrt{3}}{2} \cos(x) + \frac{1}{2} \sin(x) - \sqrt{3} = 0$$

$$\sqrt{3} \cos(x) - \sqrt{3} = 0$$

$$\cos(x) = 1 \quad \text{che ha come soluzioni: } x = +k360^\circ$$

## DUPLICAZIONE

Come casi particolari delle formule di somma si hanno le formule di duplicazione:

$$\sin(x+x) = \sin(2x) = \sin(x)\cos(x) + \cos(x)\sin(x) = 2\sin(x)\cos(x)$$

$$\cos(x+x) = \cos(2x) = \cos(x)\cos(x) - \sin(x)\sin(x) \text{ da cui segue:}$$

$$\cos(2x) = \cos^2(x) - \sin^2(x)$$

e ricordando che  $\sin^2 + \cos^2 = 1 \rightarrow \sin^2 = 1 - \cos^2$  oppure  $\cos^2 = 1 - \sin^2$

$$\cos(2x) = 2\cos^2(x) - 1$$

$$\cos(2x) = 1 - 2\sin^2(x)$$

Abbiamo dunque a disposizione tre modi per esprimere  $\cos(2x)$

**Esempio** di uso delle formule: dobbiamo risolvere l'equazione:

$$\cos(2x) + \sin(x) = -1 \quad \text{sostituendo otteniamo:}$$

$$1 - 2\sin^2(x) + \sin(x) + 1 = 0$$

che diventa:

$$2\sin^2(x) - \sin(x) - 2 = 0$$

Questa si presenta come una equazione di grado 2 NELLA SOLA INCOGNITA  $\sin(x)$ . Ponendo allora  $\sin(x) = Z$  con  $Z$  accettabile solo se  $Z \in [-1; +1]$ , otteniamo l'equazione:

$$2Z^2 - Z - 2 = 0 \quad \text{che ha per soluzioni:}$$

$$Z_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{17}}{4}$$

$$Z_1 = \frac{1 - \sqrt{17}}{4}$$

$$Z_2 = \frac{1 + \sqrt{17}}{4}$$

$$Z_1 = -0,780776 \quad \text{da accettare}$$

$$Z_2 = 1,280776 \quad \text{da rifiutare poiché } Z > 1$$

Poiché  $Z = \sin(x)$  segue:

$$\sin(x) = -0,780776 \quad \text{che ha per soluzioni:}$$

$$x = (231,3317)^\circ + k360^\circ$$

$$x = (-51,3317)^\circ + k360^\circ$$

## **BISEZIONE**

Usando le formule di duplicazione in senso inverso otteniamo subito le formule di DIMEZZAMENTO (dette più propriamente di bisezione) degli angoli.

$$\cos(2x) = 2\cos^2(x) - 1$$

$$\text{Ponendo } 2x = y \rightarrow \cos(y) = 2\cos^2(y/2) - 1$$

Da cui segue :

### **a) PRIMA FORMULA DI BISEZIONE**

$$\cos^2\left(\frac{y}{2}\right) = \frac{1 + \cos(y)}{2}$$

$$\cos\left(\frac{y}{2}\right) = \pm \sqrt{\frac{1 + \cos(y)}{2}}$$

L'uso del + o del - dipende dal quadrante dove si vuol posizionare il coseno.

Con l'altra formula del coseno otteniamo:  $\cos(2x) = 1 - 2\sin^2(x)$

e con calcoli analoghi ai precedenti:

### **b) SECONDA FORMULA DI BISEZIONE**

$$\sin\left(\frac{y}{2}\right) = \pm \sqrt{\frac{1 - \cos(y)}{2}}$$

Con lo stesso commento sui segni prima della radice.

Ed infine si ottiene la:

### **c) TERZA FORMULA DI BISEZIONE**

$$\operatorname{tg}\left(\frac{y}{2}\right) = \pm \sqrt{\frac{1 - \cos(y)}{1 + \cos(y)}}$$

Con lo stesso commento sui segni prima della radice

## **PROSTAFERESI**

Altrettanto utili, ma di espressione algebrica più difficile sono le formule dette di PROSTAFERESI ed il cui scopo è quello di esprimere la somma di due funzioni trigonometriche o la loro differenza come prodotto di due altre funzioni trigonometriche.

**FORMULE DI PROSTAFERESI** con seno e coseno (solo entrambi)

$$\sin p + \sin q = 2 \sin\left(\frac{p+q}{2}\right) \cos\left(\frac{p-q}{2}\right)$$

$$\sin p - \sin q = 2 \sin\left(\frac{p-q}{2}\right) \cos\left(\frac{p+q}{2}\right)$$

$$\cos p + \cos q = 2 \cos\left(\frac{p+q}{2}\right) \cos\left(\frac{p-q}{2}\right)$$

$$\cos p - \cos q = -2 \sin\left(\frac{p+q}{2}\right) \sin\left(\frac{p-q}{2}\right)$$

**FORMULE DI PROSTAFERESI** con seno e coseno (mischiate)

Ricordando che:

$$\cos x = \sin(90-x)$$

$$\text{sen } x = \cos(90-x)$$

Possiamo ricavare formule del tipo:

$$\text{sen } p + \cos q = \text{sen } p + \text{sen}(90-q) = \dots \text{ ( quelle di prima con } 90-q \text{ al posto di } q \text{ )}$$

$$\text{sen } p - \cos q = \text{sen } p - \text{sen}(90-q) = \dots \text{ ( quelle di prima con } 90-q \text{ al posto di } q \text{ )}$$

$$\cos p + \text{sen } q = \cos p + \cos(90-q) = \dots \text{ ( quelle di prima con } 90-q \text{ al posto di } q \text{ )}$$

$$\cos p - \text{sen } q = \cos p - \text{sen}(90-q) = \dots \text{ ( quelle di prima con } 90-q \text{ al posto di } q \text{ )}$$

## FORMULE DI PROSTAFERESI con tangente

$$\text{tg } p + \text{tg } q = \frac{\text{sen}(p+q)}{\cos p \cos q}$$

$$\text{tg } p - \text{tg } q = \frac{\text{sen}(p-q)}{\cos p \cos q}$$

## WERNER

Si indicano con tale nome alcune formule che hanno lo scopo di esprimere il PRODOTTO di due funzioni trigonometriche mediante la somma di altre due.

FORMULE DI WERNER per seno, coseno

$$\text{sen } p \cos q = \frac{1}{2} [\text{sen}(p+q) + \text{sen}(p-q)]$$

$$\cos p \cos q = \frac{1}{2} [\cos(p+q) + \cos(p-q)]$$

$$\text{sen } p \text{ sen } q = \frac{1}{2} [\cos(p-q) - \cos(p+q)]$$

NB. Non serve dare le formule per la tg poiché ad esempio

$$\text{tg } p \cdot \text{tg } q = \frac{\text{sen } p}{\cos p} \cdot \frac{\text{sen } q}{\cos q}$$

e a numeratore come a denominatore appaiono le formule già date.

## PARAMETRICHE

Si indicano con questo nome tre formule che servono ad esprimere seno, coseno e tangente di un certo angolo mediante la sola tangente dello stesso angolo diviso per 2.

Sono utili per risolvere ad esempio le equazioni trigonometriche di tipo lineare.

FORMULE PARAMETRICHE

$$\sin x = \frac{2t}{1+t^2}$$

$$\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$$

$$\operatorname{tg} x = \frac{2t}{1-t^2}$$

dove  $t = \operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}\right)$

Tali formule hanno il loro limite di validità nel fatto che deve essere:

$$x/2 \neq 90^\circ \implies x \neq 180^\circ \quad \text{poiché non esiste la tg di } 90^\circ$$

Essendo inoltre presente il denominatore  $1-t^2$  deve essere:  $1-t^2 \neq 0$

vale a dire  $t \neq +1$  ;  $t \neq -1$

Quindi  $x \neq 90^\circ$  e anche  $x \neq 270^\circ$

Riassumendo: tali formule sono valide se

$$x \neq 90^\circ ; x \neq 180^\circ ; x \neq 270^\circ$$

## 12) Identità goniometriche

**Si definisce identità goniometrica ogni eguaglianza tra espressioni, che contengano funzioni goniometriche di uno o più angoli, verificata da qualunque valore si attribuisca alle misure degli angoli contenuti (esclusi quei valori per i quali almeno una delle due espressioni perde significato)**

Ad esempio un'identità potrebbe essere la seguente:

$$(\sin 2x)(\operatorname{tg} x) = 2\sin^2 x$$

La dimostrazione è abbastanza banale:

$$(\sin 2x)(\operatorname{tg} x) = 2(\sin x)(\cos x)(\sin x/\cos x) = 2\sin^2 x$$

Molte volte però si chiede di verificare identità di una complessità maggiore come la seguente:

$$\sin(2x)/(1+\cos(2x)) = \operatorname{tg} x$$

$$(\sin a - \sin b)/(\cos x + \cos y) = \operatorname{tg}((x-y)/2)$$

Ed ecco le dimostrazioni:

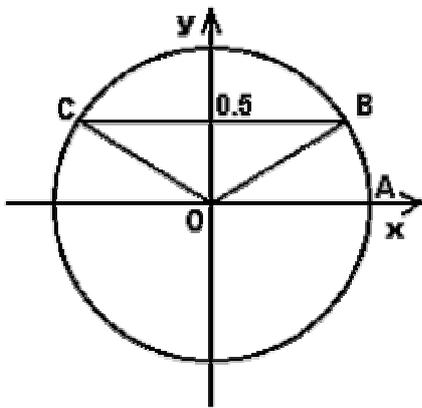
$$\begin{aligned} \sin(2x)/(1+\cos(2x)) &= 2(\sin x)(\cos x)/(2-2\sin^2 x) = (\sin x)(\cos x)/(1-\sin^2 x) = (\sin x)(\cos x)/(\cos^2 x) \\ &= \sin x/\cos x = \operatorname{tg} x \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (\sin x - \sin y)/(\cos x + \cos y) &= 2(\sin((x+y)/2))(\cos((x-y)/2)) / 2(\cos((x+y)/2))(\cos((x-y)/2)) = \\ \sin((x+y)/2)/\cos((x+y)/2) &= \operatorname{tg}((x+y)/2) \end{aligned}$$

### 13)Equazioni goniometriche elementari

Un'equazione lineare si dice semplice quando è un'equazione del tipo  
 $\text{sen } x=a$  oppure  $\text{cos } x=b$  ,  $\text{tg } x=c$  ,  $\text{ctg } x=d$

la risoluzione di un'equazione lineare semplice consiste nel trovare gli angoli che sostituiti nell'equazione la verificano. Ad es.:



$\text{sen } x = 0.5$  per risolvere tale equazione è necessario trovare tutti gli angoli che hanno seno pari a 0.5 .

Questi angoli sono  $\widehat{AOB}$  e  $\widehat{AOC}$  . Le misure di questi due angoli sono rispettivamente  $\pi/6$  e  $5\pi/6$  ( $30^\circ$  e  $150^\circ$ ). Le soluzioni dell'equazione sono dunque:

$$x = \pi/6 + 2k \pi$$

$$x = 5\pi/6 + 2k \pi$$

Il  $2k \pi$  sta ad indicare il periodo del seno. Infatti ogni  $2\pi$  il seno ritorna sugli stessi valori.

Se fosse stato  $\text{tg } x = \sqrt{3}$  allora avremmo avuto una soluzione:

$$x = \pi/3 + k \pi$$

poiché il periodo della tangente è  $\pi$  e non  $2\pi$

### 14)Equazioni goniometriche

Questo tipo di equazione pone una relazione tra due angoli o funzioni. Ad es.:

$$\text{sen}(3x+\pi) = \text{cos}(4x-\pi/2)$$

La risoluzione di questa equazione prevede l'utilizzo di questa tabella riassuntiva.

Equazione	Relazione tra le due funzioni $f$ e $g$
$\text{sen } f(x) = \text{sen } g(x)$	$f(x) = g(x) + 2k \pi$ $f(x) + g(x) = (2k+1)\pi$
$\text{sen } f(x) = -\text{sen } g(x)$	$f(x) + g(x) = 2k \pi$ $f(x) = g(x) + (2k+1)\pi$
$\text{cos } f(x) = \text{cos } g(x)$	$f(x) = g(x) + 2k \pi$ $f(x) + g(x) = 2k \pi$
$\text{cos } f(x) = -\text{cos } g(x)$	$f(x) + g(x) = (2k+1)\pi$ $f(x) - g(x) = (2k+1)\pi$
$\text{sen } f(x) = \text{cos } g(x)$	$f(x) + g(x) = (2k+1/2)\pi$ $f(x) - g(x) = (2k+1/2)\pi$

$\operatorname{tg} f(x) = \operatorname{tg} g(x)$	$f(x) = g(x) + k\pi$
$\operatorname{tg} f(x) = \operatorname{ctg} g(x)$	$f(x) + g(x) = (k + 1/2)\pi$

Dunque tornando alla nostra equazione  $\sin(3x + \pi) = \cos(4x - \pi/2)$ , vediamo che le soluzioni sono:

$$(3x + \pi) + (4x - \pi/2) = (2k + 1/2)\pi$$

$$(3x + \pi) - (4x - \pi/2) = (2k + 1/2)\pi$$

risolvendo la prima si ha:

$$7x + \pi/2 = \pi/2 + 2k\pi \rightarrow 7x = 2k\pi \rightarrow x = 2k\pi/7$$

e l'altra soluzione:

$$-x + 3\pi/2 = \pi/2 + 2k\pi \rightarrow -x = -\pi + 2k\pi \rightarrow x = \pi + 2k\pi \rightarrow x = (2k + 1)\pi$$

Probabilmente avrai notato che quando abbiamo cambiato entrambi i termini di segno, non abbiamo cambiato di segno  $2k\pi$  e ciò perché  $k$  è un numero intero relativo (...,-3,-2,-1,0,1,2,3,ecc..) e quindi non cambierebbe assolutamente nulla nel cambiare di segno il periodo.

## 15) Equazioni lineari in $\sin x$ e $\cos x$

Le equazioni lineari in  $\sin x$  e  $\cos x$  sono del tipo:

$$a \sin x + b \cos x = c$$

Ci sono 3 metodi per risolvere un'equazione lineare in  $\sin x$  e  $\cos x$ :

prendiamo come equazione  $\sin x + \sqrt{3} \cos x = 1$

### d) Primo metodo: formule parametriche

Utilizzando le formule parametriche l'equazione diventa:

$$t = \operatorname{tg}(x/2)$$

$$2t/(1+t^2) + \sqrt{3} (1-t^2)/(1+t^2) = (1+t^2)/(1+t^2)$$

eliminiamo il denominatore, uguale per tutti e tre gli addendi e diverso da zero

$$2t + \sqrt{3} - \sqrt{3} t^2 = 1 + t^2$$

$$(1 + \sqrt{3})t^2 - 2t + (1 - \sqrt{3}) = 0$$

risolvendo l'equazione di secondo grado si ottiene

$$t = 1 \text{ e } t = -2 + \sqrt{3}$$

$$\operatorname{tg}(x/2) = 1 \rightarrow x/2 = \pi/4 + k\pi \rightarrow x = \pi/2 + 2k\pi$$

$$\operatorname{tg}(x/2) = -2 + \sqrt{3} \rightarrow x/2 = -\pi/12 + k\pi \rightarrow x = -\pi/6 + 2k\pi$$

N.B. Con le formule parametriche si perde la potenziale soluzione  $x = (2k + 1)\pi$  per quanto spiegato al punto precedente. Infatti se alla fine della risoluzione si accede ad una equazione di primo grado e non di secondo, la seconda soluzione è rappresentata proprio da  $(2k + 1)\pi$ .

Comunque per maggior sicurezza è buona norma sostituire ad  $x$  il valore  $(2k + 1)\pi$  e vedere se l'equazione rimane verificata. In questo caso comunque avremmo  $-\sqrt{3} = 1$  in caso di sostituzione quindi siamo certi di non aver perso alcuna soluzione.

### e) Secondo metodo: circonferenza associata

Sia  $Y = \sin x$  e  $X = \cos x$  l'equazione diventa così:

$$Y + \sqrt{3} X = 1$$

si metta a sistema questa equazione con

$$X^2 + Y^2 = 1$$

quest'ultima non è altro che l'equazione della circonferenza goniometrica. Mettere a sistema significa trovare l'intersezione tra questa circonferenza e la retta  $Y + \sqrt{3} X = 1$ . Si risolve quindi il sistema...

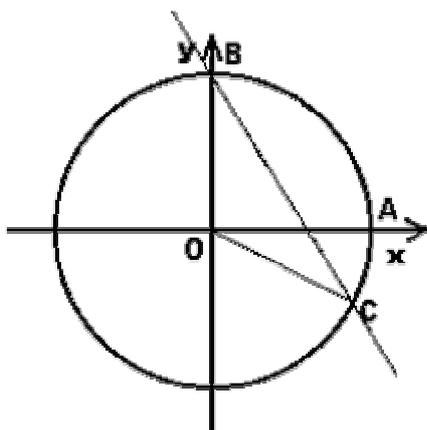
$Y = 1 - \sqrt{3} X \rightarrow$  sostituendo nell'equazione della circonferenza goniometrica  $\implies$

$$X^2 + (1 - \sqrt{3} X)^2 = 1 \rightarrow X^2 + 1 + 3X^2 - 2\sqrt{3} X = 1 \rightarrow 4X^2 - 2\sqrt{3} X = 0$$

ci sono due soluzioni per X:

$$X = 0 \rightarrow Y = 1 - \sqrt{3} \cdot 0 = 1$$

$$X = \sqrt{3} \cdot 2 \rightarrow Y = 1 - \sqrt{3} \cdot \sqrt{3} \cdot 2 = -0.5$$



I due punti d'intersezione tra la circonferenza goniometrica e la retta sono:  $B=(0,1)$  e  $C=(\sqrt{3}/2, -0.5)$ . I due angoli che verificano l'equazione sono dunque  $\pi/2$  (che infatti ha per seno 1 e per coseno 0) e  $-\pi/6$  (che ha per seno  $-1/2$  e per coseno  $\sqrt{3}$ ).

le due soluzioni sono dunque:

$$x = \pi/2 + 2k \pi$$

$$x = -\pi/6 + 2k \pi$$

Gli stessi risultati del primo metodo.

#### f) Terzo metodo

Questo è un metodo un pò meno rigoroso e che solo raramente può essere applicabile. La sua relativa semplicità però ci induce a trattarlo.

$$\text{sen } x + \sqrt{3} \cos x = 1$$

divido tutto per 2

$$1/2 \cdot \text{sen } x + \sqrt{3}/2 \cdot \cos x = 1/2$$

$1/2$  non è altro che il coseno di  $\pi/3$  e  $\sqrt{3}/2$  è il seno di  $\pi/3$ , dunque:

$$\cos(\pi/3) \text{sen } x + \text{sen}(\pi/3) \cos x = 1/2$$

ma il primo termine dell'uguaglianza non è altro che...

$$\text{sen}(\pi/3 + x) = 1/2$$

Due angoli hanno per seno  $1/2$ :  $\pi/6$  e  $5\pi/6$

$$\pi/3 + x = \pi/6 + 2k \pi \implies x = -\pi/6 + 2k \pi$$

$$\pi/3 + x = 5\pi/6 + 2k \pi \implies x = \pi/2 + 2k \pi$$

N.B. Quando invece  $(\text{sen } x)$  e  $(\cos x)$  hanno lo stesso coefficiente (occhio al segno!) è possibile dividere tutto affinché entrambi abbiano per coefficiente  $1/\sqrt{2}$ . Ad es.:

$$14 \text{sen } x + 14 \cos x = 6$$

divido tutto per  $14 \cdot \sqrt{2}$

$$(\text{sen } x)/\sqrt{2} + (\cos x)/\sqrt{2} = 6/(14\sqrt{2})$$

$$(\text{sen } x)(\cos \pi/4) + (\cos x)(\text{sen } \pi/4) = 3/(7\sqrt{2})$$

$$\text{sen}(x + \pi/4) = 3/(7\sqrt{2}) \text{ ecc....}$$

#### 16) Equazioni omogenee in $\text{sen } x$ e $\cos x$

Le equazioni omogenee presentano tutti gli addendi di uno stesso grado:

$$\text{sen}^2 x + 4(\text{sen } x)(\cos x) + 3\cos^2 x = 0$$

per risolvere questo tipo di equazioni di  $n^{\text{mo}}$  grado basta dividere tutto per  $\cos^n x$   
 $\text{tg}^2 x + 4\text{tg} x + 3 = 0$

le soluzioni di questa equazione sono:

$$\text{tg} x = -1 \rightarrow x = -\pi/4 + k \pi$$

$$\text{tg} x = -3 \rightarrow x = -\pi/3 + k \pi$$

Attenzione !!! Prima di dividere tutto per  $\cos^n x$  bisogna fattorizzare  $\cos x$  ovunque sia possibile farlo. S ad esempio abbiamo

$$2(\text{sen} x)(\cos x) + 5\cos^2 x = 0$$

è possibile fattorizzare  $\cos x$  e quindi l'equazione diventa:

$$(\cos x)(2\text{sen} x + 5\cos x) = 0$$

così per trovare le soluzioni eguagliamo a zero il primo e il secondo fattore.

Le equazioni omogenee in  $\text{sen} x$  e  $\cos x$  possono tranquillamente essere risolte se sono anche di grado superiore al secondo:

$$\text{sen}^4 x - 4(\text{sen}^2 x)(\cos^2 x) + 3\cos^4 x = 0$$

Dopo aver constatato l'impossibilità di fattorizzare  $\cos x$  si divide tutto per  $\cos^4 x$

$$\text{tg}^4 x - 4\text{tg}^2 x + 3 = 0$$

$$(\text{tg}^2 x - 3)(\text{tg}^2 x - 1) = 0$$

trovando 4 soluzioni:

- $\text{tg} x = \sqrt{3} \rightarrow x = \pi/3 + k \pi$
- $\text{tg} x = -\sqrt{3} \rightarrow x = -\pi/3 + k \pi$
- $\text{tg} x = 1 \rightarrow x = \pi/2 + k \pi$
- $\text{tg} x = -1 \rightarrow x = -\pi/2 + k \pi$

Risolviamo ora un'equazione di  $8^{\circ}$  grado:

$$(\text{sen}^6 x)(\cos^2 x) - 4(\text{sen}^4 x)(\cos^4 x) + 3(\text{sen}^2 x)(\cos^6 x) = 0$$

Sembra difficile...ma non lo è! Prima di tutto dobbiamo fattorizzare  $\cos^2 x$

$$(\cos^2 x) * ((\text{sen}^6 x) - 4(\text{sen}^4 x)(\cos^2 x) + 3(\text{sen}^2 x)(\cos^4 x)) = 0$$

ora dividiamo il secondo trinomio per  $\cos^4 x$

$$(\cos^2 x) * (\text{tg}^6 x - 4\text{tg}^4 x + 3\text{tg}^2 x) = 0$$

scomponiamo con Ruffini il trinomio e alla fine otteniamo

$$(\cos^2 x) * (\text{tg}^2 x)(\text{tg}^2 x - 1)(\text{tg}^2 x - 3) = 0$$

le soluzioni sono molteplici:

- $\cos x = 0 \rightarrow x = (k+1/2)\pi$
- $\text{tg} x = 0 \rightarrow x = k \pi$
- $\text{tg} x = +1 \rightarrow x = \pi/4 + k \pi$
- $\text{tg} x = -1 \rightarrow x = -\pi/4 + k \pi$
- $\text{tg} x = \sqrt{3} \rightarrow x = \pi/3 + k \pi$
- $\text{tg} x = -\sqrt{3} \rightarrow x = -\pi/3 + k \pi$

## 17) Sistema per rendere omogenee le equazioni e le disequazioni goniometriche

Purtroppo non capita molto spesso di avere a che fare con disequazioni omogenee in  $\text{sen} x$  e  $\cos x$ . Ad esempio.:

$$6\text{sen}^2 x + 3\cos^2 x - 5 = 0$$

Questa chiaramente non è un'equazione omogenea tuttavia c'è un sistema per farla diventare

tale: in questo caso basta moltiplicare il termine noto  $-5$  per  $\sin^2 x + \cos^2 x$ , quantità che per la prima relazione fondamentale della trigonometria è uguale a  $1$ , ed ecco il risultato:

$$6\sin^2 x + 3\cos^2 x - 5\sin^2 x - 5\cos^2 x = 0 \rightarrow \sin^2 x - 3\cos^2 x = 0$$

questo sistema è applicabile anche ad equazioni di grado più alto: possiamo moltiplicare tutto quello che ci pare per  $\sin^2 x + \cos^2 x$  senza problemi. Dunque facendo un altro esempio:

$$7\sin^4 x + 5\cos^4 x - 3 = 0$$

in questo caso dobbiamo portare tutto al  $4^\circ$  grado quindi devo moltiplicare il termine noto per  $(\sin^2 x + \cos^2 x)^2$

$$7\sin^4 x + 5\cos^4 x - 3\sin^4 x - 3\cos^4 x - 6(\sin^2 x)(\cos^2 x) = 0 \rightarrow$$

$$\rightarrow 4\sin^4 x - 6(\sin^2 x)(\cos^2 x) + 2\cos^4 x = 0$$

Facile vero? Potrebbe spesse tornare utile.

N.B. Questo sistema può essere utilizzato anche nelle disequazioni goniometriche.

## 18) Disequazioni goniometriche elementari

Si definisce disequazione goniometrica una disequazione in  $\sin x$  e/o  $\cos x$

*esempio:*

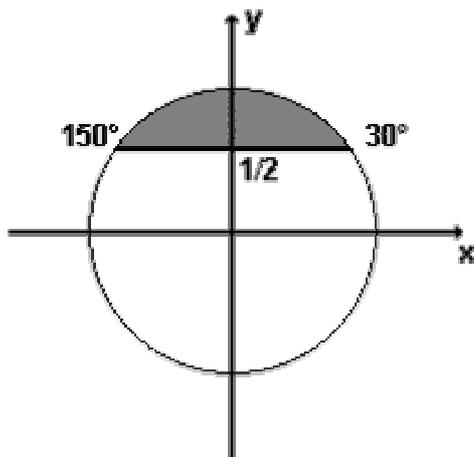
$$\sin x > 1/2$$

Per risolvere la precedente disequazione si possono utilizzare due differenti algoritmi:

a. Metodo della circonferenza goniometrica

Si disegna la circonferenza goniometrica e si intercettano su di essa gli angoli per i quali la disequazione è nulla;

basterà poi segnare, a partire da quegli angoli, l'arco per il quale è verificata la disequazione, cioè  $\sin x$  è maggiore di  $1/2$



b. La disequazione goniometrica è trattata come una normale disequazione  
(metodo preferibile nel caso di disequazioni goniometriche fratte)

---

## 19) Disequazioni goniometriche omogenee in $\sin x$ e $\cos x$

### ***Il grado di omogeneità sia pari***

$$\sqrt{3} \operatorname{sen}^2 x - 2 \operatorname{sen} x \cos x - \sqrt{3} \cos^2 x < 0$$

Si divide la disequazione per  $\cos^2 x$  che, essendo  $n=2$  pari, è un numero positivo,

$$\sqrt{3} \operatorname{tg}^2 x - 2 \operatorname{tg} x - \sqrt{3} < 0$$

$$\operatorname{tg} x = \sqrt{3}$$

$$\operatorname{tg} x = -1/\sqrt{3}$$

### **SOLUZIONI:**

$$-30^\circ + k180^\circ < x < 60^\circ + k180^\circ$$

#### **N.B.**

Se una disequazione in **tg x** comprende tra le soluzioni  $90^\circ$  e  $270^\circ$ , a causa del campo di esistenza della tangente, tali valori vanno esclusi;  
in una disequazione goniometrica omogenea intera in  $\operatorname{sen} x$  e  $\cos x$ , invece, la disequazione in **tg x** è uno stadio intermedio della disequazione:  
pertanto se  $90^\circ$  e  $270^\circ$  sono compresi tra le soluzioni **non vanno esclusi se, sostituiti alla disequazione, la verificano.**

### ***Il grado di omogeneità è dispari***

$$\operatorname{sen} x + \cos x > 0$$

Si divide per  $\cos^n x$ , con  $n$  grado di omogeneità dispari:

$\cos^n x$  è positivo se  $\cos x$  è *positivo*;

$\cos^n x$  è negativo se  $\cos x$  è *negativo*;

pertanto, quando dividiamo la disequazione data per  $\cos^n x$ , dobbiamo tener conto della possibile negatività del denominatore, e per questo la disequazione data genera due disequazioni in  $\operatorname{tg} x$ :

- una dello stesso segno della disequazione data, a sistema con  $\cos x > 0$  ;
- l'altra di segno opposto rispetto alla disequazione data, a sistema con  $\cos x < 0$  .

Il primo sistema sarà costituito dalle disequazioni:

$$\operatorname{tg} x + 1 > 0$$

$$\cos x > 0$$

### SOLUZIONI:

$$-45^\circ + 2k180^\circ < x < 90^\circ + 2k180^\circ$$

Il secondo sistema sarà costituito dalle disequazioni:

$$\mathbf{tgx + 1 < 0}$$

$$\mathbf{cosx < 0}$$

### SOLUZIONI:

$$90^\circ + 2k180^\circ < x < 135^\circ + 2k180^\circ$$

### SOLUZIONI DEL SISTEMA:

$$-45^\circ + 2k180^\circ < x < 135^\circ + 2k180^\circ$$

## 20)Disequazioni goniometriche lineari in sen x e cos x

### *Con uso delle formule parametriche*

$$\text{sen } x + \text{cos } x - 1 < 0$$

Usando le formule parametriche:

$$[2 \text{tg}x/2 + (1 - \text{tg}^2x/2) - (1 + \text{tg}^2x/2)] / (1 + \text{tg}^2x/2) < 0$$

Il binomio  $(1 + \text{tg}^2x/2)$  a denominatore può essere eliminato poiché positivo e diverso da zero, quindi

$$[2 \text{tg}x/2 + (1 - \text{tg}^2x/2) - (1 + \text{tg}^2x/2)] / (1 + \text{tg}^2x/2) < 0$$

$$- \text{tg}^2x/2 + \text{tg}x/2 < 0$$

## SOLUZIONI:

$$2k180^\circ < x < 90^\circ + 2k180^\circ$$

### Con uso della circonferenza goniometrica associata e orientamento di una retta

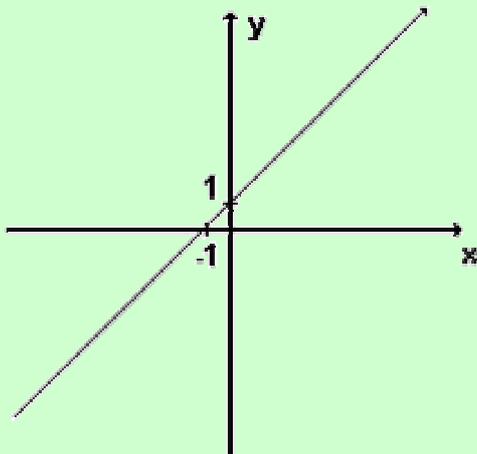
#### PREMESSA: "DISEQUAZIONI LINEARI A DUE INCOGNITE"

Ogni retta divide il piano in 3 parti:

- insieme dei punti che sostituiti nell'equazione della retta la rendono positiva (a *destra* del verso stabilito sulla retta);
- insieme dei punti che sostituiti nell'equazione della retta la rendono negativa (a *sinistra* del verso stabilito sulla retta);
- tutti i punti della retta che sostituiti all'equazione la rendono nulla.

*esempio:* Si consideri la retta  $2x - y + 1 < 0$  :

La suddetta retta intersecherà l'asse  $y$  in  $+1$ , e l'asse  $x$  in  $-1$ .



Disegnata la retta sul piano, si andranno a sostituire all'equazione le coordinate di un qualsiasi punto del piano non appartenente alla retta:

- se il punto renderà l'equazione *positiva*, dovremo fissare il verso della retta in modo tale che il suddetto punto si trovi alla sua *destra*;
- se il punto renderà l'equazione *negativa*, dovremo fissare il verso della retta in modo che il punto si trovi alla sua *sinistra*.

In questo caso tutti i punti a sinistra della retta, rispetto al verso fissato, soddisfano la disequazione

Utilizzando il metodo precedentemente descritto possiamo risolvere anche le disequazioni goniometriche lineari:

*esempio:*

Risolvere l'equazione  $\sin x + \cos x - 1 > 0$

Sia  $\sin x = Y$

$\cos x = X$

Di conseguenza la disequazione diventerà:

$X + Y - 1 > 0$  che risolta con il suddetto metodo, e messa a sistema con la *circonferenza goniometrica* ( $X^2 + Y^2 = 1$ ), ci fornirà l'intervallo desiderato.

**SOLUZIONI:**

$$2k180^\circ < x < 90^\circ + 2k180^\circ$$

**Metodo rapido**

In alcuni casi è possibile utilizzare degli espedienti per semplificare il calcolo.  
Nel nostro caso ad esempio dividendo l'equazione per  $\sqrt{2}$ , otteniamo l'equazione:

$$(\text{sen}x)/\sqrt{2} + (\text{cos}x)/\sqrt{2} > 1/\sqrt{2}$$

Ma questa equazione è riconducibile, considerando che  $1/\sqrt{2}$  è uguale a  $\text{sen}45^\circ$  e a  $\text{cos}45^\circ$ , all'equazione:

$$\text{sen}(x + 45^\circ) > 1/\sqrt{2}$$

Chiamando  $(x + 45^\circ) = y$ :

**SOLUZIONI:**

$$45^\circ + 2k180^\circ < y < 135^\circ + 2k180^\circ$$

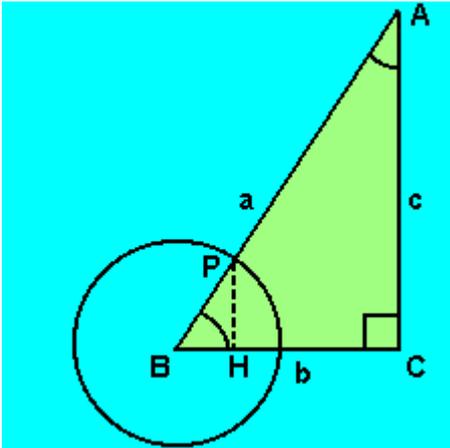
E quindi sostituendo nuovamente:

**SOLUZIONI:**

$$2k180^\circ < x < 90^\circ + 2k180^\circ$$

**21) 1° Teorema sui triangoli rettangoli**

In un triangolo rettangolo la misura di un cateto è uguale al prodotto della misura dell'ipotenusa per il seno dell'angolo ad esso opposto, o per il coseno dell'angolo ad esso adiacente



### DIMOSTRAZIONE

Con centro in  $B$  si costruisca la circonferenza goniometrica di raggio  $BP$ ; chiamata  $h$  la proiezione di  $P$  sul lato  $BC$ , allora:

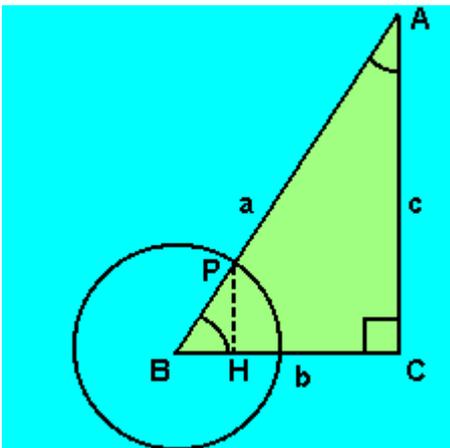
$B\hat{H}P$  è simile a  $B\hat{A}C$  (hanno 3 angoli uguali), quindi

$$AC : HP = BA : BP$$

$$c : \text{sen } A\hat{B}C = a : 1 \quad c = a \text{ sen } A\hat{B}C$$

### 22) 2° Teorema sui triangoli rettangoli

In un triangolo rettangolo la misura di un cateto è uguale alla misura dell'altro cateto per la tangente dell'angolo ad esso opposto, o per la cotangente dell'angolo ad esso adiacente.



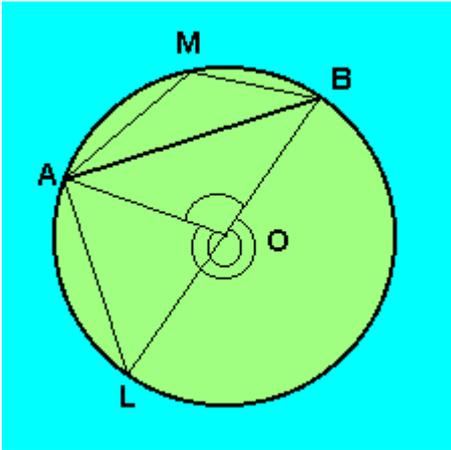
$$AC : CB = HP : HB$$

$$c : b = \text{sen } A\hat{B}C : \text{cos } A\hat{B}C$$

$$b = c \text{ cos } A\hat{B}C / \text{sen } A\hat{B}C$$

### 23) Teorema della corda

La lunghezza di una corda in una  $C$  (circonferenza) di raggio  $r$  è uguale al diametro della circonferenza per il seno dell'angolo alla circonferenza che insiste su uno dei due archi sottesi alla corda.



### DIMOSTRAZIONE

Per B o per A si conduca il diametro BL, si congiunga A con L;  $B\hat{A}L$  è rettangolo in A,  $A\hat{L}B$  è l'angolo alla circonferenza che insiste sull'arco minore AB, e quindi:

$$AB = BL \operatorname{sen} A\hat{L}O = 2r \operatorname{sen} A\hat{L}O$$

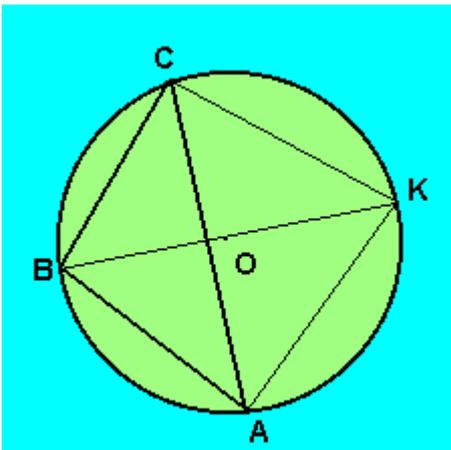
**N.B.:** Ogni angolo alla circonferenza è metà di un angolo al centro che insiste sullo stesso arco, quindi:

$$A\hat{O}B = 2 A\hat{M}B \quad 2 A\hat{M}B + 2 A\hat{L}B = 360^\circ$$

$$A\hat{M}B + A\hat{L}B = 180^\circ$$

## 24) Teorema dei seni (o di Eulero)

In un triangolo qualsiasi la misura dei lati è proporzionale al seno degli angoli opposti.



### DIMOSTRAZIONE

$$a = 2r \operatorname{sen} B\hat{A}C \quad (\text{Teorema della corda})$$

$$b = 2r \operatorname{sen} A\hat{B}C \quad (\text{Teorema della corda})$$

$$c = 2r \operatorname{sen} A\hat{C}B \quad (\text{Teorema della corda})$$

$$a / 2r \operatorname{sen} B\hat{A}C = b / 2r \operatorname{sen} A\hat{B}C = c / 2r \operatorname{sen} A\hat{C}B$$

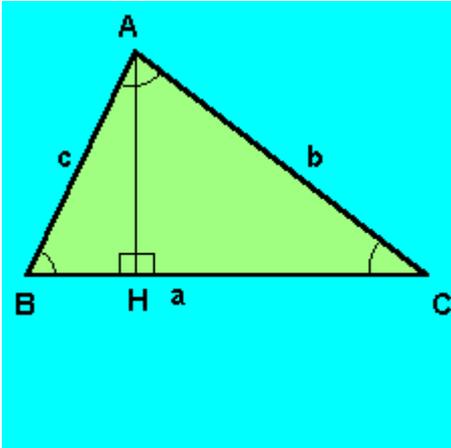
$$a / \operatorname{sen} B\hat{A}C = b / \operatorname{sen} A\hat{B}C = c / \operatorname{sen} A\hat{C}B$$

**N.B.:** In un triangolo qualsiasi il rapporto tra la misura di un lato e il seno dell'angolo opposto è uguale al diametro della circonferenza circoscritta al triangolo:

$$a / \operatorname{sen} B\hat{A}C = 2r$$

## 25) Teorema delle proiezioni

In un triangolo qualsiasi la misura di un lato è uguale alla somma algebrica delle proiezioni degli altri due lati su di esso, quindi alla somma dei prodotti delle misure di ciascuno degli altri due lati per il coseno dell'angolo che ognuno di essi forma con il lato considerato.



**DIMOSTRAZIONE**

$$BC = HB + HC$$

$$BC = c \cos \hat{A}BC + b \cos \hat{A}CB = a$$

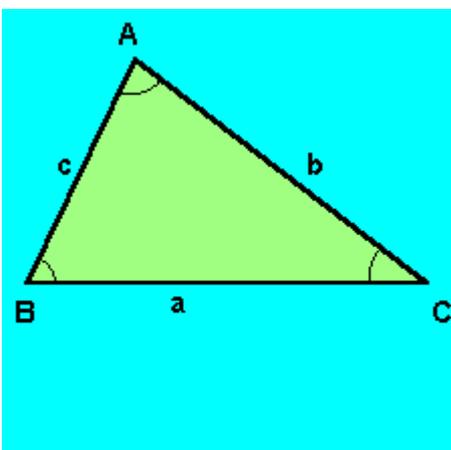
$$b = c \cos \hat{B}AC + a \cos \hat{A}CB$$

$$c = b \cos \hat{B}AC + a \cos \hat{A}BC$$

**N.B.:** Il teorema è valido per **tutti i triangoli**, compresi quelli ottusangoli.

**26) Teorema del coseno (o di Carnot)**

In un triangolo qualsiasi la misura al quadrato di un suo lato è uguale alla somma dei quadrati degli altri due diminuiti del doppio prodotto di essi per il coseno dell'angolo che questi ultimi due formano tra loro.



**DIMOSTRAZIONE**

$$a = c \cos \hat{A}BC + b \cos \hat{A}CB \text{ (Per teorema delle proiezioni)}$$

$$b = c \cos \hat{B}AC + a \cos \hat{A}CB \text{ (Per teorema delle proiezioni)}$$

$$c = b \cos \hat{B}AC + a \cos \hat{A}BC \text{ (Per teorema delle proiezioni)}$$

Moltiplicando prima, seconda e terza equazione rispettivamente per a, -b, -c, e successivamente sommando le tre equazioni, otteniamo che:

$$a^2 - b^2 - c^2 = -2bc \cos \hat{BAC}$$

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \hat{BAC}$$

**N.B.:** Il suddetto teorema non è altro che la generalizzazione del teorema di Pitagora ad un triangolo qualsiasi.

---

## 27) Formule di Briggs

Funzione	$\frac{\alpha}{2} = \frac{\hat{BAC}}{2}$	$\frac{\beta}{2} = \frac{\hat{ABC}}{2}$	$\frac{\gamma}{2} = \frac{\hat{ACB}}{2}$
Seno	$\sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{bc}}$	$\sqrt{\frac{(p-a)(p-c)}{ac}}$	$\sqrt{\frac{(p-a)(p-b)}{ab}}$
Coseno	$\sqrt{\frac{p(p-a)}{bc}}$	$\sqrt{\frac{p(p-b)}{ac}}$	$\sqrt{\frac{p(p-c)}{ab}}$

### DIMOSTRAZIONE

Posto  $a + b + c = 2p$  ( $p$  semiperimetro)

Per il teorema del coseno:

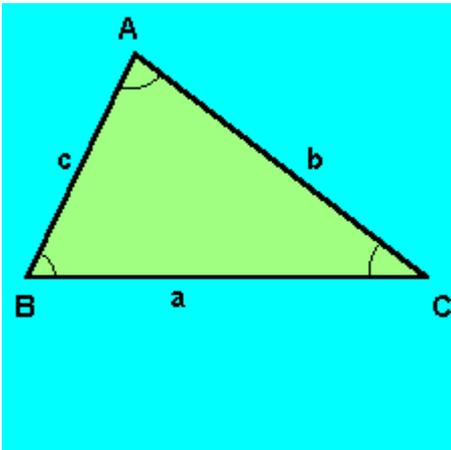
$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha, \text{ quindi } \cos \alpha = (b^2 + c^2 - a^2)/2bc$$

$$\begin{aligned} \sin \alpha/2 &= \sqrt{(2bc - b^2 - c^2 - a^2)/4bc} = \\ &= \sqrt{(a^2 - (b - c)^2)/4bc} = \\ &= \sqrt{((a + b - c)(a - b + c))/4bc} = \\ &= \sqrt{(2(p - c)2(p - b))/4bc} = \\ &= \sqrt{((p - c)(p - b))/bc} \end{aligned}$$

**N.B.:**

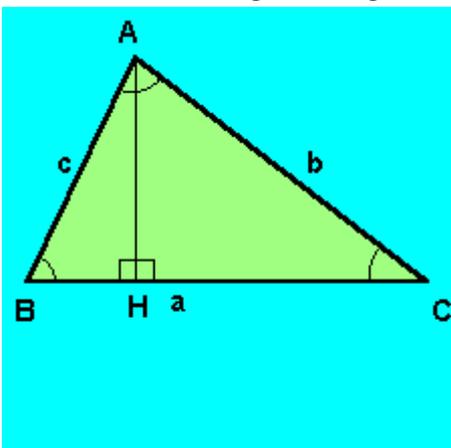
$$a + b - c = 2p - 2c = 2(p - c);$$

$$a - b + c = 2p - 2b = 2(p - b).$$



### **28) Area di un triangolo noti i due lati e l'angolo tra essi compreso**

L'area di un triangolo è uguale al semiprodotto dei lati per l'angolo tra essi compreso.



### DIMOSTRAZIONE

$$S = AB \cdot CH/2 = (cb \sin \hat{B}AC)/2 = 1/2 cb \sin \hat{B}AC$$

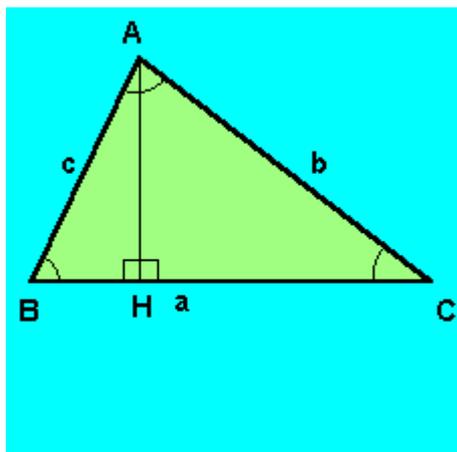
$$S = 1/2 cb \sin \alpha$$

---

### 29) Area di un triangolo noti i lati (formula di Erone)

L'area di un triangolo è uguale alla radice quadrata del prodotto tra semiperimetro per semiperimetro meno a, per semiperimetro meno b, per semiperimetro meno c.

#### DIMOSTRAZIONE



$$\sin \frac{\gamma}{2} = \sin \frac{\widehat{ACB}}{2} = \sqrt{\frac{(p-a)(p-b)}{ab}}$$

$$\cos \frac{\gamma}{2} = \cos \frac{\widehat{ACB}}{2} = \sqrt{\frac{p(p-c)}{ab}}$$

$$S = \frac{1}{2} ab \sin \gamma = \frac{1}{2} ab \sin 2(\gamma/2) =$$

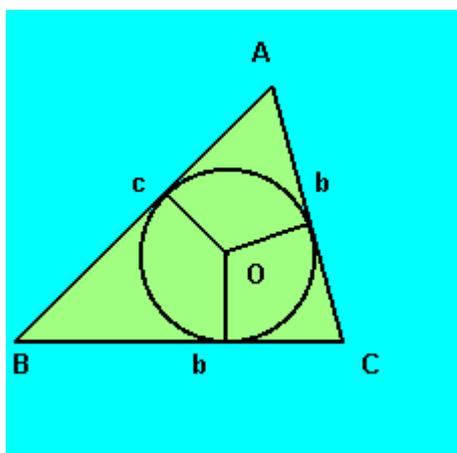
$$= ab \sin \gamma/2 \cos \gamma/2 =$$

$$= ab \sqrt{\frac{(p-a)(p-b)}{ab}} \sqrt{\frac{p(p-c)}{ab}} =$$

$$= \sqrt{\frac{p(p-a)(p-b)}{p-c}}$$

---

### 30) Misura del raggio della circonferenza inscritta in un triangolo noti 3 lati



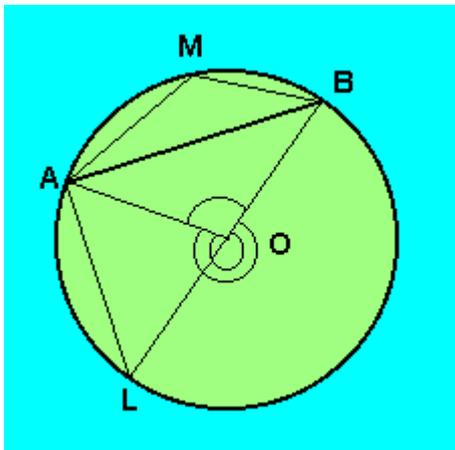
#### DIMOSTRAZIONE

$$S_{ABC} = S_{AOB} + S_{BOC} + S_{AOC} =$$

$$= \frac{1}{2} cr + \frac{1}{2} ar + \frac{1}{2} br = pr, \text{ quindi:}$$

$$r = S / p$$

**31) Misura del raggio della circonferenza circoscritta in un triangolo noto un lato e l'angolo opposto**



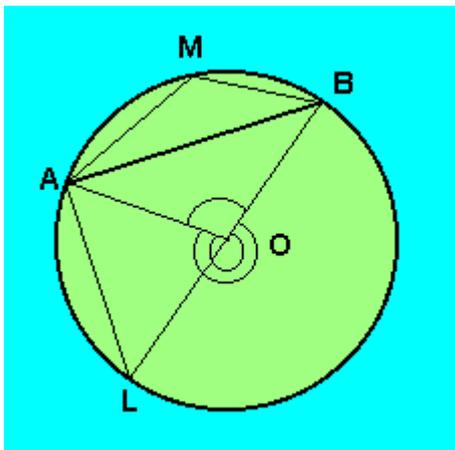
**DIMOSTRAZIONE**

$$r = a / 2\text{sen } \hat{BAC} = \frac{a}{2\text{sen}\alpha} \text{ (cfr. Teorema dei seni)}$$

$$r = b / 2\text{sen } \hat{ABC} = \frac{b}{2\text{sen}\beta} \text{ (cfr. Teorema dei seni)}$$

$$r = c / 2\text{sen } \hat{ACB} = \frac{c}{2\text{sen}\gamma} \text{ (cfr. Teorema dei seni)}$$

**32) Misura del raggio della circonferenza circoscritta in un triangolo noti 3 lati**

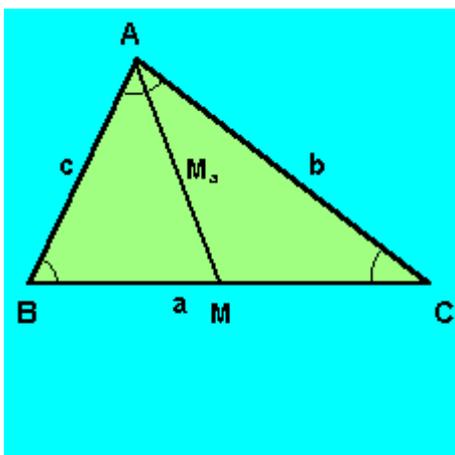


**DIMOSTRAZIONE**

$$\begin{aligned} r &= a / 2\text{sen } \hat{BAC} = \frac{a}{2\text{sen}\alpha} = \\ &= \frac{abc}{2bc \cdot \text{sen}\alpha} = \frac{abc}{2 \cdot 2S_{ABC}} = \frac{abc}{4S_{ABC}} \end{aligned}$$

---

### 33) Misura di una mediana noti i 3 lati



#### DIMOSTRAZIONE

$$c^2 = (a/2)^2 - 2(a/2)M_a \cos \widehat{BMA}$$

$$b^2 = (a/2)^2 - 2(a/2)M_a \cos(180^\circ - \widehat{BMA})$$

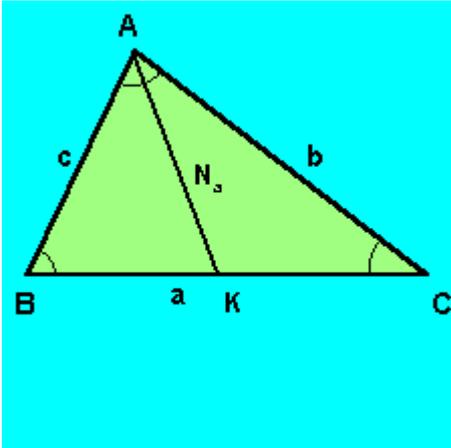
$$b^2 + c^2 = a^2/2 + 2M_a^2$$

quindi:

$$M_a = \frac{1}{2} \sqrt{2b^2 + 2c^2 - a^2}$$

---

### 34) Misura di una bisettrice noto angolo diviso e lati adiacenti



### DIMOSTRAZIONE

$$S = 1/2 bc \sin \hat{BAC} = \frac{1}{2} bc \cdot \sin \alpha = S_{ABK} + S_{AKC} =$$

$$= 1/2 c N_a \sin \alpha/2 + 1/2 b N_a \sin \alpha/2$$

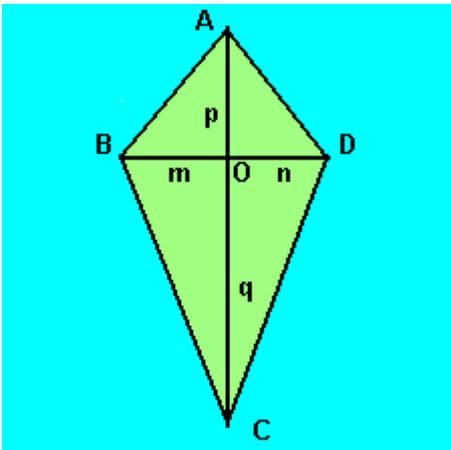
$$1/2 bc \sin \alpha = 1/2 N_a (b + c) \sin \alpha/2$$

quindi:

$$bc \cos \alpha/2 \sin \alpha/2 = N_a (b + c) \sin \alpha/2$$

$$N_a = 2 (bc \cos \alpha/2) / (b + c)$$

**35) Area di un quadrilatero qualunque note le diagonali e un angolo che esse formano**



### DIMOSTRAZIONE

$$S_{ABCD} = S_{ABO} + S_{BOC} + S_{COD} + S_{DOA}$$

$$S_{ABCD} = 1/2 mp \sin \hat{AOB} + 1/2 np \sin(180^\circ - \hat{AOB}) +$$

$$+ 1/2 mq \sin(180^\circ - \hat{AOB}) + 1/2 nq \sin \hat{AOB} =$$

$$= 1/2 \sin \hat{AOB} (mp + mq + np + nq) =$$

$$= 1/2 \sin \hat{AOB} (m(p + q) + n(p + q)) =$$

$$= 1/2 \sin \hat{AOB} ((p + q) + (m + n))$$

$$= 1/2 AC * BD \sin \hat{AOB}$$