PRECORSO DI MATEMATICA
PER I CORSI DI LAUREA IN BIOLOGIA E BIOTECNOLOGIE

FRANCESCA PRINARI

1. Potenze, polinomi, radici, esponenziali, logaritmi

1.1. **Potenze con esponente intero.** Sia $a \in \mathbb{R}$ e $n \in \mathbb{N}$. Si definisce

$$a^n = a \cdots a \quad (n \text{ volte }).$$

Se $a \neq 0$ definiamo

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}.$$

Si pone

$$a^0 = 1.$$

Proprietá delle potenze. Per ogni $a, b \in \mathbb{R}$ e per ogni $n, m \in \mathbb{Z}$ valgono le seguenti proprietá:

(1) $a^n \cdot a^m = a^{n+m}$
(2) $a^n : a^m = a^{n-m}$
(3) $(a^n)^m = a^{nm}$
(4) $a^n \cdot b^n = (ab)^n$
(5) Se $b \neq 0$ allora $a^n : b^n = (\frac{a}{b})^n$

1.2. **Polinomi.** Sia $n \in \mathbb{N}$. Dati $(n+1)$ numeri reali $a_0, a_1, \cdots, a_n$ (detti **coefficienti**) con $a_n \neq 0$, si definisce **polinomio di grado n** l'espressione algebrica

$$P(x) = a_0 + a_1 x + \cdots a_n x^n.$$

Il termine a_0 si dice **termine noto**. Se $a_n = 1$ il polinomio si dice **monico**. I polinomi di grado 0 sono del tipo $P(x) = a_0$ ossia sono costanti. Definiamo **polinomio nullo** il polinomio con coefficienti tutti nulli.

Divisione tra polinomi.

Siano P_n e P_m due polinomi di grado $n \geq m > 0$ rispettivamente. Allora esistono e sono unici due polinomi Q (detto quoziente) e R (detto resto) con $grado(R) < m$ tali che

$$P_n = P_m \cdot Q + R.$$

In particolare Q e R sono tali che

$$\frac{P_n}{P_m} = Q + \frac{R}{P_m}.$$

Se $R = 0$ si dice che P_n é divisibile per P_m o equivalentemente che P_m divide P_n. In tal caso P_n viene scomposto in fattori come $P_n = P_m \cdot Q$.

Preliminary version – October 29, 2008 – 13:35

Esempio 1.1. Dividendo $6x^4 - x + 4$ per $2x^2 - x + 1$ si ottiene come quoziente $3x^2 + \frac{3}{2}x - \frac{3}{4}$ e come resto $-\frac{13}{4}x + \frac{19}{4}$ e quindi

$$\frac{6x^4 - x + 4}{2x^2 - x + 1} = 3x^2 + \frac{3}{2}x - \frac{3}{4} - \frac{13x - 19}{4(2x^2 - x + 1)}$$

Proposizione 1.2 (**Teorema del resto**). *Sia P un polinomio di grado n e $x_0 \in \mathbb{R}$. Allora $P(x_0)$ é il resto della divisione $P : (x - x_0)$. In particolare*

$$P(x_0) = 0 \Leftrightarrow \quad P \textit{ é divisibile per } (x - x_0)$$

Dimostrazione. Siano $c \in \mathbb{R}$ il resto e Q il quoziente della divisione di P per $(x - x_0)$. Allora per ogni $x \in \mathbb{R}$ vale che $P(x) = Q(x) \cdot (x - x_0) + c$. In particolare per $x = x_0$ si ottiene $P(x_0) = 0 + c$ ossia $c = P(x_0)$.

Sia P un polinomio e $x_0 \in \mathbb{R}$ tale che $P(x_0) = 0$. Allora diremo x_0 **radice** o **zero** del polinomio P.

Ricordiamo che se x_0 é una radice intera (ossia se $x_0 \in \mathbb{Z}$) di P allora a_0 é divisibile per x_0 (ossia $a_0/x_0 \in \mathbb{Z}$). Quindi eventuali radici intere di un polinomio vanno cercate nell'insieme dei divisori (positivi e negativi) di a_0.

Il seguente teorema stabilisce il numero massimo di radici distinte che ammette un polinomio di grado n.

Teorema 1.3. *Sia $n \in \mathbb{N}$ e sia P un polinomio di grado n non identicamente nullo. Allora P ammette al piú n radici distinte.*

Dimostrazione. Supponiamo che P ammetta $n+1$ radici distinte $x_1, x_2, \cdots, x_{n+1}$. Allora grazie al teorema del resto esso é divisibile per $(x - x_1) \cdot (x - x_2) \cdots (x - x_{n+1})$. In particolare esiste un polinomio Q tale che

$$P(x) = (x - x_1) \cdot (x - x_2) \cdots (x - x_{n+1}) \cdot Q.$$

Questo implica che il grado di P é maggiore di n. Assurdo!

Infine enunciamo il seguente principio di identitá.

Proposizione 1.4 (**Principio di identitá dei polinomi**). *Siano P, Q due polinomi. Allora*

$$P(x) = Q(x)\ \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow P \textit{ e } Q \textit{ hanno gli stessi coefficienti.}$$

In particolare

$$P(x) = 0\ \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \textit{i coefficienti di } P(x) \textit{ sono nulli.}$$

Corollario 1.5. Assegnate $n + 1$ coppie di numeri reali $(x_0, \alpha_0), (x_1, \alpha_1) \cdots (x_n, \alpha_n)$ esiste un'unico polinomio di grado $m \leq n$ tale che $P(x_i) = \alpha_i$ per ogni $i \in \{0, 1, \cdots, n\}$.

1.3. **Radici n-me.** Sia $n \in \mathbb{N}$.
Se n é dispari definiamo $\sqrt[n]{x}$ l'unico numero reale y tale che $y^n = x$.
Se n é pari e $x \geq 0$ definiamo $\sqrt[n]{x}$ l'unico numero reale **positivo** y tale che $y^n = x$. Quindi

- se n é dispari $\sqrt[n]{x}$ é definita per ogni $x \in \mathbb{R}$ ed ha il segno di x;
- se n é pari $\sqrt[n]{x}$ é definita per ogni $x \geq 0$ ed é sempre ≥ 0.

Esempio 1.6. (1) $\sqrt[3]{27} = 3$;
(2) $\sqrt[3]{-27} = -3$;
(3) $\sqrt[2]{4} = 2$;
(4) $-\sqrt[2]{4} = -2$;
(5) $\sqrt[2]{-4}$ *non esiste;*
(6) $\sqrt[3]{x}$ *esiste per ogni* $x \in \mathbb{R}$*;*
(7) $\sqrt{x}$ *esiste per ogni* $x \geq 0$*;*
(8) $\sqrt[3]{-x}$ *esiste per ogni* $x \in \mathbb{R}$*;*
(9) $\sqrt{-x}$ *esiste per ogni* $-x \geq 0$ *(ossia per* $x \leq 0$ *come dedurremo dalle proprieta' delle disequazioni che vedremo in una sezione successiva);*

Osservazione 1.7. (1) Se $n \in \mathbb{N}$ é dispari

$$\sqrt[n]{-x} = -\sqrt[n]{x}.$$

Quindi, per esempio, $\sqrt[3]{2x-1} = -\sqrt[3]{1-2x}$. Questa proprietá non vale per le radici $\sqrt[n]{\cdot}$ con n pari (dal momento che per ogni $x \neq 0$ o esiste $\sqrt[n]{x}$ o esiste $\sqrt[n]{-x}$.)

(2) Se n é dispari allora $\forall a, x \in \mathbb{R}$ vale che

$$a\sqrt[n]{x} = \sqrt[n]{a^n x}.$$

Se invece n é pari e $x \geq 0$ allora

$$a\sqrt[n]{x} = \begin{cases} \sqrt[n]{a^n x} & \text{se } a > 0, \\ -\sqrt[n]{a^n x} & \text{se } a < 0. \end{cases}$$

(3) Se n é dispari allora $\forall a, x \in \mathbb{R}$ vale che

$$\sqrt[n]{a^n x} = a\sqrt[n]{x}$$

e

$$\sqrt[n]{x^n} = x.$$

Se invece n é pari allora, introducendo il valore assoluto (vedi la sezione 2.4), si ha che

$$\sqrt[n]{a^n x} = |a|\sqrt[n]{x} \quad \forall x \geq 0$$

e

$$\sqrt[n]{x^n} = |x| \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Esempio 1.8. (1) $-2\sqrt[3]{3} = -\sqrt[3]{2^3 \cdot 3} = \sqrt[3]{-2^3 \cdot 3}$;
(2) $-3\sqrt[2]{2} = -\sqrt[2]{3^2 \cdot 2}$;
(3) $\sqrt{x^2} = |x|$

1.4. **Potenze con esponente razionale.** Sia $a \in \mathbb{R}$, $a \geq 0$ e siano $n, m \in \mathbb{N}$ con $n \neq 0$. Si pone

$$a^{m/n} = \sqrt[n]{a^m}.$$

Le proprietá delle potenze espresse nel caso di esponente intero si estendono nel caso di esponente razionale: per ogni $a, b \geq 0$ e per ogni $p, q \in \mathbb{Q}$ valgono le seguenti proprietá:

(1) $a^p \cdot a^q = a^{p+q}$
(2) $a^p : a^q = a^{p-q}$
(3) $(a^p)^q = a^{pq}$
(4) $a^p \cdot b^p = (ab)^p$
(5) Se $b \neq 0$ allora $a^p : b^p = (\frac{a}{b})^p$

Esempio 1.9. Non dovete avere dubbi riguardo i seguenti esempi:

(1) $a^2 \cdot a^2 = a^4$ mentre $a^2 + a^2 = 2a^2$
(2) $(a^3)^2 = a^6$ mentre $a^3 \cdot a^2 = a^5$
(3) $(\frac{a}{b})^{-3} = (\frac{b}{a})^3$ mentre $(\frac{a}{b})^{-1/3} = \sqrt[3]{\frac{b}{a}}$
(4) $a^2 \cdot a^{-2} = a^{2-2} = a^0 = 1$

Osservazione 1.10. Le operazioni con le radici risultano piu' semplici se si scrivono le radici come potenze con esponente frazionario. Cosí si ottiene facilmente che per ogni $a, b \geq 0$

$$\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = (a^{1/m})^{1/n} = a^{1/m \cdot 1/n} = a^{1/mn} = \sqrt[mn]{a}$$

$$\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = a^{1/n} \cdot b^{1/n} = (ab)^{1/n} = \sqrt[n]{ab}.$$

$$\sqrt[n]{a^{mn}} = (a^{mn})^{1/n} = a^{mn \cdot \frac{1}{n}} = a^m$$

$$\sqrt[n]{a^{mn+q}} = (a^{mn+q})^{1/n} = a^{(mn+q)\cdot\frac{1}{n}} = a^{mn\cdot\frac{1}{n}} \cdot a^{\frac{q}{n}} = a^m \sqrt[n]{a^q}$$

1.5. **Esponenziali.** Sia $a \in \mathbb{R}$, $a > 0$ e sia $x \in \mathbb{R}$. Allora é possibile estendere la precedente definizione di potenza e definire il numero reale **positivo** a^x in modo che per ogni $a, b > 0$ e per ogni $y \in \mathbb{R}$ valgono le seguenti proprietá:

(1) $a^x \cdot a^y = a^{x+y}$
(2) $a^x : a^y = a^{x-y}$
(3) $(a^x)^y = a^{xy}$
(4) $a^x \cdot b^x = (ab)^x$
(5) $a^x : b^x = (\frac{a}{b})^x$.

Esempio 1.11. Non dovete avere dubbi riguardo i seguenti esempi:

(1) $(a^x)^2 = a^{2x} \neq a^{x^2}$
(2) $a^x + a^x = 2a^x \neq a^{2x}$
(3) $a^x + a^{-x} = a^x + \frac{1}{a^x} = \frac{a^x \cdot a^x + 1}{a^x} = \frac{a^{2x}+1}{a^x}$

1.6. **Logaritmi.** Sia $a > 0, a \neq 1$ e $b > 0$. Si definisce logaritmo in base a di b (e si scrive $\log_a b$) l'unico numero reale x tale che $a^x = b$. Ossia

$$x = \log_a b \Leftrightarrow a^x = b.$$

Dalla sua definizione e dalle proprietá delle potenze con esponente reale segue che per ogni $b, c > 0$ e per ogni $r \in \mathbb{R}$:

(1) $\log_a (bc) = \log_a b + \log_a c$
(2) $\log_a b^r = r \log_a b$
(3) $\log_a (b/c) = \log_a b - \log_a c$
(4) $\log_a 1 = 0$
(5) $\log_a a = 1$

Osservazione 1.12. Si ricordi che **non esiste il logaritmo di** 0.

Esempio 1.13. (1) $\log_a^2 x = (\log_a x)^2 = (\log_a x) \cdot (\log_a x) \neq \log x^2$;

(2) $\log_a x^3 = 3 \log x$ per ogni $x > 0$;

(3) $\log_a x^2 = \log_a (x \cdot x) = 2 \log x$ per ogni $x > 0$;

(4) $\log_a^2 x \neq \log x^2$;

(5) $\log_a \frac{1}{x} \neq \frac{1}{\log_a x}$. Invece $\log_a \frac{1}{x} = \log_a (x)^{-1} = -\log_a x$

(6) $\frac{\log_a x}{b} \neq \log_a (\frac{x}{b})$. Quindi $\frac{\log 3}{2} \neq \log \frac{3}{2}$ e $\frac{\log(2x^3)}{4x} \neq \frac{\log(x^2)}{2}$!!!

Osservazione 1.14. (1) Si osservi che in generale se n é dispari

$$\log_a x^n = n \log_a x \quad \text{per ogni } x > 0.$$

Invece se n é pari la funzione $f(x) = \log_a x^n$ é diversa dalla funzione $g(x) = n \log_a x$. Infatti la prima é definita per ogni $x \neq 0$ mentre la seconda é definita per ogni $x > 0$. Se n é pari la giusta relazione é la seguente:

$$\log_a x^n = n \log_a |x| \quad \text{per ogni } x \neq 0.$$

(2) In generale ogni numero reale $b \in \mathbb{R}$ puó essere scritto come

$$b = \log_a a^b.$$

Inoltre ogni numero reale $b > 0$ puó essere scritto anche come

$$b = a^{\log_a b}.$$

Esempio 1.15. Riflettete sulle seguenti uguaglianze*:*

(1) $e^{\log x} = x$;

(2) $e^{-2 \log x} = e^{\log(x^{-2})} = x^{-2} = \frac{1}{x^2}$;

(3) $e^{x + 3 \log x} = e^x \cdot e^{\log x^3} = x^3 e^x$;

(4) $e^{-x + \log(2x+1)} = e^{-x} \cdot e^{\log(2x+1)} = (2x+1)e^{-x}$.

2. Equazioni

Due equazioni si dicono equivalenti se hanno lo stesso insieme di soluzioni.

Nella risoluzione delle equazioni si applicano i seguenti principi:

(1) **Addizionando o sottraendo** ad entrambi i membri di un'equazione uno stesso numero reale si ottiene un'equazione equivalente a quella data;
(2) **Moltiplicando o dividendo** entrambi i membri di un'equazione per uno stesso numero reale **diverso da zero** si ottiene un'equazione equivalente a quella data.

2.1. Equazioni di primo grado.

Sono della forma

$$ax + b = 0 \tag{2.1}$$

con $a \neq 0$.
Ammettono un'unica soluzione data da

$$x = -\frac{b}{a}.$$

2.2. Equazioni di secondo grado.

Sono della forma

$$ax^2 + bx + c = 0 \tag{2.2}$$

con $a > 0$ (infatti se $a < 0$ basta moltiplicare tutto per -1).

Nella risoluzione di (2.2) occorre distinguere 3 casi:

(1) I caso: $\mathbf{\Delta = b^2 - 4ac > 0}$.
In questo caso l'equazione data $ax^2 + bx + c = 0$ ammette 2 radici reali e distinte $x_1 < x_2$ date da

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$$

e il trinomio $p(x) = ax^2 + bx + c$ si decompone come

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2).$$

Esempio 2.1. (a) Le equazioni del tipo $x^2 = k$ con $k > 0$ cadono nella classe delle equazioni con $\Delta > 0$. Quindi ammettono le 2 soluzioni $x = \pm\sqrt{k}$. Inoltre il binomio $x^2 - k$ puó essere fattorizzato come $(x - \sqrt{k})(x + \sqrt{k})$. Per esempio l'equazione $x^2 - 4 = 0$ si puó scrivere come $x^2 = 4$ e si trova che ammette le 2 soluzioni $x = \pm 2$. Inoltre il binomio $x^2 - 4$ puó essere fattorizzato come $(x - 2)(x + 2)$.
(b) Se $c = 0$ l'equazione $ax^2 + bx = 0$ ammette le 2 soluzioni $x = 0$ e $x = -\frac{b}{a}$.

(2) II caso: $\mathbf{\Delta = b^2 - 4ac = 0}$. In questo caso l'equazione $ax^2 + bx + c = 0$ ammette 2 radici reali e coincidenti x_1, x_2 date da

$$x_{1,2} = -\frac{b}{2a}$$

e il trinomio $p(x) = ax^2 + bx + c$ si decompone come

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)^2.$$

(3) III caso: $\mathbf{\Delta = b^2 - 4ac < 0}$.

In questo caso l'equazione $ax^2 + bx + c = 0$ non ammette soluzioni reali ossia é impossibile. Il trinomio $ax^2 + bx + c$ non puó essere fattorizzato. Puó essere peró scritto come somma di 2 quadrati: infatti

$$ax^2 + bx + c = (\sqrt{a}x + \frac{b}{2\sqrt{a}})^2 + \frac{4ac - b^2}{4a}$$

dove $\frac{4ac-b^2}{4a} > 0$.

Esempio 2.2. Le equazioni del tipo $x^2 = k$ con $k < 0$ cadono nella classe delle equazioni con $\Delta < 0$. Quindi non ammettono soluzioni (reali) e il binomio $x^2 - k$ non puó essere fattorizzato. Per esempio l'equazione $x^2 + 4 = 0$ si puó riscrivere come $x^2 = -4$ ed é impossibile. Il binomio $x^2 + 4$ non puó essere fattorizzato.

Osservazione 2.3. Una particolare classe di equazioni di grado superiore al secondo e riconducibili a quelle di secondo grado é costituita dalle equazioni biquadratiche. Esse sono del tipo:

$$ax^4 + bx^2 + c = 0 \tag{2.3}$$

Se $b^2 - 4ac < 0$ tale equazione non ha soluzioni. Se $b^2 - 4ac \geq 0$ si opera il cambio di variabile $y = x^2$ e si scelgono (se esistono) le soluzioni positive y_1, y_2 (eventualmente coincidenti) dell'equazione:

$$ay^2 + by + c = 0.$$

Le soluzioni di (2.3) saranno date da $\pm\sqrt{y_1}, \pm\sqrt{y_2}$.

2.3. **Equazioni fratte e equazioni con prodotti.** Le prime si riconducono alla forma

$$F(x) = \frac{N(x)}{D(x)} = 0.$$

Le soluzioni di questa equazione coincidono con le soluzioni dell'equazione $N(x) = 0$ escluso gli eventuali zeri del denominatore D.

Esempio 2.4. $\frac{x^2-4x+3}{4-x^2} = 0 \Leftrightarrow x^2 - 4x + 3 = 0 \Leftrightarrow (x-1)(x-3) = 0 \Leftrightarrow x = 1 \vee x = 3.$

Invece l'insieme delle soluzioni di un'equazione del tipo

$$P(x) = P_1(x) \cdot P_2(x) \cdot \ldots \cdot P_n(x) = 0$$

sará dato dall'unione degli insiemi delle soluzioni delle singole equazioni $P_i(x) = 0$.

Esempio 2.5. $(x^2 - 4x + 3)(4 - x^2) = 0 \Leftrightarrow x^2 - 4x + 3 = 0 \vee x^2 - 4 = 0 \Leftrightarrow (x-1)(x-3) = 0 \vee (x-2)(x+2) = 0 \Leftrightarrow x \in \{-2, 1, 2, 3\}$.

2.4. **Equazioni con un valore assoluto.** Ricordiamo che il valore assoluto si definisce come

$$|P(x)| := \begin{cases} P(x) & \text{se } P(x) \geq 0, \\ -P(x) & \text{se } P(x) \leq 0. \end{cases}$$

Esso soddisfa le seguenti proprietá:

(1) $|x| \geq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$;

(2) $|x| = 0 \Leftrightarrow x = 0$;

(3) $|x+y| \leq |x| + |y| \quad \forall x, y \in \mathbb{R}$;

(4) $||x| - |y|| \leq |x - y| \quad \forall x, y \in \mathbb{R}$;

(5) $|xy| = |x||y| \quad \forall x, y \in \mathbb{R}$. In particolare $|x|^2 = x^2 \quad \forall x \in \mathbb{R}$.

Poiché $|P(x)| = |-P(x)| \geq 0$ si ha che

$$|P(x)| = a \Leftrightarrow \begin{cases} P(x) = \pm a & \text{se } a \geq 0, \\ \text{per nessun valore di } x & \text{se } a < 0, \end{cases}$$

e

$$|P(x)| = |Q(x)| \Leftrightarrow P(x) = \pm Q(x).$$

Esempio 2.6. (1) $|x| = 4 \Leftrightarrow x = \pm 4$;

(2) $|2x - 1| = 3 \Leftrightarrow 2x - 1 = \pm 3 \Leftrightarrow 2x = 4 \vee 2x = -2 \Leftrightarrow x = 2 \vee x = -1$;

(3) $|-x-5| = -10$ per nessun valore di x *dal momento che il valore assoluto é sempre positivo;*

(4) $|2x^2 - 4x| = 0 \Leftrightarrow 2x^2 - 4x = 0 \Leftrightarrow 2x(x-2) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee x = 2$;

(5) $|5 - |x^2|| = 4 \Leftrightarrow 5 - |x^2| = \pm 4 \Leftrightarrow |x^2| = 9 \vee |x^2| = 1 \Leftrightarrow x = \pm 3 \vee x = \pm 1$;

(6) $|2x - 3| = |4x - 5| \Leftrightarrow 2x - 3 = \pm(4x - 5) \Leftrightarrow 2x = 2 \vee 6x = 8 \Leftrightarrow x = 1 \vee x = \frac{4}{3}$;

Lo studio dell'equazione

$$|P(x)| = Q(x)$$

risulta invece piú complicato. Infatti tale uguaglianza pone un vincolo sul segno di Q, ossia $|P(x)| = Q(x) \Rightarrow Q(x) \geq 0$. Allora

$$|P(x)| = Q(x) \Leftrightarrow \begin{cases} P(x) = \pm Q(x) \\ Q(x) \geq 0 \end{cases}$$

da risolvere nell'insieme di definizione di P e Q.

2.5. **Equazioni irrazionali.** Supponiamo di dover risolvere l'equazione

$$\sqrt[n]{f(x)} = g(x). \tag{2.4}$$

(1) se n é **dispari** allora essa é equivalente a $f(x) = (g(x))^n$ (da risolvere nell'insieme dove le funzioni f, g sono definite);
(2) se n é **pari** é necessario imporre delle condizioni sul segno di f e di g. Esattamente l'equazione (2.4) é equivalente al sistema

$$\begin{cases} f(x) \geq 0 \\ g(x) \geq 0 \\ f(x) = (g(x))^n. \end{cases}$$

(da risolvere nell'insieme dove f, g sono definite).

2.6. **Equazioni esponenziali.** Sia $a > 0, a \neq 1$ e $x \in \mathbb{R}$. Allora **se** $b > 0$ si ha che

$$a^x = b \quad \Leftrightarrow x = \log_a b,$$

$$a^{f(x)} = b \quad \Leftrightarrow f(x) = \log_a b$$

(da risolvere nell'insieme di definizione di f) mentre se $b \leq 0$ tali equazioni non ammettono alcun a soluzione reale. Inoltre

$$a^{f(x)} = a^{g(x)} \Leftrightarrow f(x) = g(x)$$

(da risolvere nell'insieme di definizione di f e di g).

Esempio 2.7. (1) $e^x = -1$ é impossibile poiché l'esponenziale e^x é sempre positivo;
(2) $e^{-x} = -1$ é impossibile poiché l'esponenziale e^{-x} é sempre positivo (anche se ad esponente trovi $-x$!;
(3) $2^x = 16 \Leftrightarrow 2^x = 2^4 \Leftrightarrow x = 4$;
(4) $2^{3x} = 8 \Leftrightarrow 2^{3x} = 2^3 \Leftrightarrow 3x = 3 \Leftrightarrow x = 1$;
(5) $3^{x^2} = 9 \Leftrightarrow 3^{x^2} = 3^2 \Leftrightarrow x^2 = 2 \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{2}$;
(6) $3^{2x} + 6 \cdot 3^x - 27 > 0 \Leftrightarrow 3^x = \frac{-3 \pm \sqrt{9+27}}{2}$. Otteniamo cosí le due equazioni: $3^x = -9/2$ e $3^x = 3/2$. La prima equazione é impossibile, mentre la seconda é verificata per $x = \log_3(3/2)$.
(7) $4^x - 5 \cdot 2^x + 4 = 0 \Leftrightarrow 2^{2x} - 5 \cdot 2^x + 4 = 0 \Leftrightarrow 2^x = \frac{5 \pm \sqrt{25-16}}{2}$. Otteniamo cosí le due equazioni: $2^x = 1$ e $2^x = 4$. La prima equazione ha come soluzione $x = 0$, mentre la seconda é verificata per $x = 2$.
(8) $4^x - 4 \cdot 2^x + 5 = 0 \Leftrightarrow 2^{2x} - 4 \cdot 2^x + 5 = 0$. Poiché $\Delta = 16 - 20 < 0$ tale equazione é impossibile.

(9) $2^x - 3 \cdot 2^{-x} + 2 = 0 \Leftrightarrow 2^{2x} + 2 \cdot 2^x - 3 = 0 \Leftrightarrow 2^x = \frac{-2 \pm \sqrt{4+12}}{2}$. Otteniamo cosí le due equazioni: $2^x = -3$ e $2^x = 1$. La prima equazione é impossibile, mentre la seconda é verificata per $x = 0$.

(10) $2^x = 3^{1-x^2} \Leftrightarrow 2^x = 2^{(1-x^2) \cdot \log_2 3} \Leftrightarrow x = (1 - x^2) \cdot \log_2 3 \Leftrightarrow (\log_2 3)x^2 + x - \log_2 3 = 0$ $\Leftrightarrow x_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1+4(\log_2 3)^2}}{2 \log_2 3}$.

(11) $4 \cdot 2^{x^2} = 8^x \Leftrightarrow 2^{(x^2+2)} = 2^{3x} \Leftrightarrow x^2 + 2 = 3x \Leftrightarrow x = 1 \vee x = 2$.

(12) $e^x = 2 \Leftrightarrow x = \log 2$;

(13) $e^{-x+1} = 3 \Leftrightarrow -x + 1 = \log 3$ ossia $x = -\log 3 + 1$;

(14) $e^{x^2} = 5 \Leftrightarrow x^2 = \log 5 \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{\log 5}$;

(15) $e^{2x} = 5 \Leftrightarrow 2x = \log 5 \Leftrightarrow x = \frac{\log 5}{2}$.

2.7. **Equazioni logaritmiche.** Sia $a > 0, \quad a \neq 1$ e $b \in \mathbb{R}$. Allora

$$\log_a x = b \quad \Leftrightarrow x = a^b$$

e

$$\log_a f(x) = b \quad \Leftrightarrow f(x) = a^b$$

(da risolvere nell'insieme di definizione di f).

Si noti che nelle due precedenti equazioni non é necessario imporre le condizioni di esistenza $x > 0$ e $f(x) > 0$ in quanto sono conseguenza delle uguaglianze $x = a^b$ e $f(x) = a^b$.

Si osservi invece che

$$\log_a f(x) = \log_a g(x) \quad \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = g(x) \\ \\ f(x) > 0 \end{cases}$$

da risolvere nell'insieme di definizione di f e di g.

Esempio 2.8. (1) $\log_2(x-1) = 3 \Leftrightarrow x - 1 = 2^3 \Leftrightarrow x = 9$;

(2) $\log_2 x^2 = 3 \Leftrightarrow x^2 = 2^3 \Leftrightarrow x^2 = 8 \Leftrightarrow x = \pm 2\sqrt{2}$;

(3) $2 \log_2 x = 3 \Leftrightarrow \log_2 x = 3/2 \Leftrightarrow x = 2^{3/2} = 2\sqrt{2}$

(4) $\log(x^2 - 1) = 0 \Leftrightarrow \log(x^2 - 1) = \log 1 \Leftrightarrow x^2 - 1 = 1 \Leftrightarrow x^2 = 2 \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{2}$;

(5) $\log^2(x^2-1) = 4 \Leftrightarrow \log(x^2-1) = \pm 2 \Leftrightarrow x^2-1 = e^{\pm 2} \Leftrightarrow x^2 = 1+e^{\pm 2} \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{1 + e^{\pm 2}}$;

(6) $\log^2 x - 3 \log x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ \\ \log x(\log x - 3) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ \\ \log x = 0 \quad \vee \quad \log x = 3 \end{cases}$

$\Leftrightarrow x = 1 \vee x = e^3$

(7) $\log(|x-3|) = 0 \Leftrightarrow \log(|x-3|) = \log 1 \Leftrightarrow |x-3| = 1 \Leftrightarrow x-3 = \pm 1 \Leftrightarrow x = 4 \quad \vee \quad x = 2$;

(8) $\log(|x^2-3|) = 4 \Leftrightarrow |x^2-3| = e^4 \Leftrightarrow x^2 - 3 = \pm e^4 \Leftrightarrow x^2 = -e^4 + 3 \quad \vee \quad x^2 = e^4 + 3.$
La prima equazione é impossibile essendo $3 - e^4 < 0$. La seconda é soddisfatta per $x = \pm\sqrt{e^4+3}$

(9) $|\log_3(x+1)| = 2 \Leftrightarrow \log_3(x+1) = \pm 2 \Leftrightarrow x+1 = 3^{\pm 2} \Leftrightarrow x = 3^{\pm 2} - 1$;

(10) $\log_2[(x-2)(x-3)] = 1 \Leftrightarrow (x-2)(x-3) = 2 \Leftrightarrow x = 1, x = 4$;

(11) $\log_2(x-2) + \log_2(x-3) = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} x-2>0 \\ x-3>0 \\ \log_2[(x-2)(x-3)] = 1 \end{cases}$
dove le prime 2 condizioni sono le condizioni di esistenza dei due logaritmi e consentono di applicare la nota proprietá dei logaritmi

$$\log_a c + \log_a b = \log(bc)$$

valida per $b, c > 0$. Cosí si ottiene il sistema

$$\begin{cases} x>2 \\ x>3 \\ (x-2)(x-3) = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x>2 \\ x>3 \\ x^2-5x+4 = 0 \end{cases}$$

Le soluzioni dell'equazione $x^2 - 5x + 4 = 0$ sono $x = 1, x = 4$. Solo la seconda soddisfa le altre condizioni del sistema ed é accettabile.

3. Disequazioni

Due disequazioni si dicono equivalenti se hanno lo stesso insieme di soluzioni.

Nella risoluzione delle disequazioni si applicano i seguenti principi:

(1) **Addizionando o sottraendo** ad entrambi i membri di una disequazione uno stesso numero reale si ottiene una disequazione equivalente a quella data;
(2) **Moltiplicando o dividendo** entrambi i membri di una disequazione per uno stesso numero reale **positivo** si ottiene una disequazione equivalente a quella data.

Se invece si moltiplicano o si dividono entrambi i membri di una disequazione per uno stesso numero reale **negativo** al fine di ottenere una disequazione equivalente a quella data é necessario **cambiare il verso** della diseguaglianza.

3.1. Disequazioni di primo grado.

Sono della forma

$$ax + b \geq 0 \quad (\text{ o } \quad ax + b \leq 0) \tag{3.1}$$

con $a \neq 0$.
Se $a > 0$ allora la (3.1) é equivalente a

$$x \geq -\frac{b}{a} \quad (\text{ o } \quad x \leq -\frac{b}{a}).$$

Se $a < 0$ allora la (3.1) é equivalente a

$$x \leq -\frac{b}{a} \quad (\text{ o } \quad x \geq -\frac{b}{a}).$$

3.2. Disequazioni di secondo grado.

Sono della forma

$$ax^2 + bx + c \geq 0 \quad (\text{ o } \quad ax^2 + bx + c \leq 0) \tag{3.2}$$

con $a > 0$ (infatti se $a < 0$ basta moltiplicare tutto per -1 e invertire il verso della disequazione).

Occorre distinguere 3 casi:

(1) I caso: $\mathbf{\Delta = b^2 - 4ac > 0}$.
In questo caso esistono $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ tali che il trinomio $p(x) = ax^2 + bx + c$ si decompone come
$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2).$$
Allora se $a > 0$ il segno di p e' determinato dal *prodotto dei segni* di $(x - x_1)$ e di $(x - x_2)$. Ossia
  (a) p é positivo se $(x - x_1)$ e $(x - x_2)$ sono entrambi positivi o entrambi negativi
  (b) p é negativo se $(x - x_1)$ e $(x - x_2)$ sono discordi.

  Allo scopo di studiare la (3.2) si puó allora
  (a) studiare quando $(x-x_1)$ e $(x-x_2)$ sono positivi (ossia rispettivamente per $x \geq x_1$ e $x \geq x_2$);

  (b) rappresentare sulla retta reale i 2 valori x_1, x_2, e disegnare una semiretta per ciascun intervallo $x \geq x_1$ e $x \geq x_2$ (tratteggiando le semirette opposte ad indicare che negli intervalli $x \leq x_1$e $x \leq x_2$ i fattori $(x - x_1)$ e $(x - x_2)$ sono negativi);

(c) su ogni intervallo $x \le x_1$, $x_1 \le x \le x_2$, $x \ge x_2$ moltiplicare i segni di $(x - x_1)$, $(x - x_2)$ ottenendo cosí il segno di $p(x)$.

Si ottiene cosí il seguente risultato generale:

se $a > 0$ **e** $\Delta > 0$ **il trinomio** $p(x)$ **é positivo negli intervalli** $x \le x_1$ **e** $x \ge x_2$**, ossia negli intervalli esterni all'intervallo delle radici, mentre il trinomio é negativo nell'intervallo interno alle radici** (x_1, x_2)**.**

In particolare

$$ax^2 + bx + c \ge 0 \iff x \le x_1 \ \vee \ x \ge x_2,$$

mentre

$$ax^2 + bx + c \le 0 \iff x_1 \le x \le x_2.$$

Esempio 3.1. $\forall a > 0$

$$x^2 - a^2 \le 0 \Leftrightarrow -a \le x \le a$$

$$x^2 - a^2 \ge 0 \Leftrightarrow x \le -a \vee x \ge a.$$

Basta infatti osservare che $x^2 - a^2 = (x - a)(x + a)$ e applicare la regola precedente.

Esempio 3.2. $-5x^2 + 6x + 8 < 0 \Leftrightarrow 5x^2 - 6x - 8 > 0$.
Poiché $\Delta/4 = 49$ si possono calcolare $x_1 = -\frac{4}{5}$ e $x_2 = 2$.
Quindi $5x^2 - 6x - 8 = 5(x + \frac{4}{5})(x - 2) > 0 \Leftrightarrow x < -\frac{4}{5} \vee x > 2$.

(2) II caso: $\mathbf{\Delta = b^2 - 4ac = 0}$. In questo caso esiste $x_1 \in \mathbb{R}$ tale che il trinomio $p(x) = ax^2 + bx + c$ si decompone come

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)^2.$$

Allora **se** $a > 0$ **e** $\Delta = 0$ **il trinomio é sempre positivo e si annulla solo nel punto** $x = x_1$**.** Ossia se $a > 0$ vale che

$$\begin{aligned} ax^2 + bx + c &\ \ge\ 0\ \forall x \in \mathbb{R} \\ ax^2 + bx + c &\ \le\ 0 \iff x = x_1 \\ ax^2 + bx + c &\ >\ 0 \Leftrightarrow \forall x \neq x_1 \\ ax^2 + bx + c &\ <\ 0 \text{ per nessun valore di } x. \end{aligned}$$

Esempio 3.3. Poiché $9x^2 - 6x + 1 = (x + \frac{1}{3})^2$ vale che
$9x^2 - 6x + 1 > 0 \Leftrightarrow x \neq \frac{1}{3}$, $9x^2 - 6x + 1 \le 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{3}$, $9x^2 - 6x + 1 \ge 0\ \forall x \in \mathbb{R}$, $9x^2 - 6x + 1 < 0$ per nessun valore di x.

(3) III caso: $\mathbf{\Delta = b^2 - 4ac < 0}$.

In questo caso l'equazione $ax^2+bx+c=0$ non ammette radici reali e **se** $a>0$ **il trinomio é sempre strettamente positivo.** Quindi, in particolare, se $a>0$

$$\begin{aligned} ax^2+bx+c &> 0\ \forall x\in\mathbb{R};\\ ax^2+bx+c &\leq 0 \text{ per nessun valore di } x;\\ ax^2+bx+c &\geq 0\ \forall x\in\mathbb{R};\\ ax^2+bx+c &< 0 \text{ per nessun valore di } x. \end{aligned}$$

Esempio 3.4. $\forall a\neq 0$

$$\begin{aligned} x^2+a^2 &\geq 0\ \forall x\in\mathbb{R}\\ x^2+a^2 &\leq 0 \text{ per nessun valore di } x. \end{aligned}$$

3.3. **Disequazioni fratte e disequazioni con prodotti.** Le prime si riconducono alla forma

$$F(x)=\frac{N(x)}{D(x)}\geq 0(\text{ o } \leq 0).$$

Il segno della frazione F sará dato dal **prodotto dei segni** di N e di D ossia

(a) F é positiva se N e D sono entrambi positivi o entrambi negativi;
(b) F é negativo se N e D hanno segno discorde.

Un metodo per studiare il segno di F é il seguente:

(1) si determinano gli insiemi S e T in cui rispettivamente $N\geq 0$ e $D>0$;

(2) si traccia la retta reale e si rappresentano **con una linea piena e uno sotto l'altro** ciascun insieme S e T, **tratteggiando gli insiemi complementari** ad indicare che se $x\notin S$ (o $x\notin T$) allora $N(x)\leq 0$ (rispettivamente, $D(x)<0$);

(3) su ogni sottoinsieme della retta reale determinati da S e T si moltiplicano i segni di N e D, ottenendo cosí il segno di F.

Esempio 3.5. Studiamo quando

$$\frac{x^2-4x+3}{4-x^2}\geq 0.$$

Ora $N(x)=x^2-4x+3\geq 0 \Leftrightarrow (x-1)(x-3)\geq 0 \Leftrightarrow x\leq 1 \vee x\geq 3$
mentre $D(x)=4-x^2>0 \Leftrightarrow x^2-4<0 \Leftrightarrow -2<x<2$.
Quindi

(1) per $x<-2$ si ha che $F(x)\leq 0$,
(2) per $-2<x\leq 1$ si ha che $F(x)\geq 0$,
(3) per $1\leq x<2$ $F(x)\leq 0$,
(4) per $2<x\leq 3$ $F(x)\geq 0$,
(5) per $x\geq 3$ $F(x)\leq 0$.

Lo stesso procedimento si mette in atto se si vuole studiare una disequazione del tipo

$$P(x)=P_1(x)\cdot P_2(x)\cdot ...P_n(x)\geq 0(\text{ o } \leq 0).$$

Il segno di P sará dato dal **prodotto dei segni** dei vari P_i. Quindi

(1) si determinano gli insiemi $S_1, S_2, \cdot, ..S_n$ in cui sono verificate rispettivamente $P_1(x) \geq 0, P_2(x) \geq 0, ..., P_n(x) \geq 0$;

(2) si traccia la retta reale e si rappresentano **con una linea piena e uno sotto l'altro** ciascun insieme S_1, **tratteggiando gli insiemi complementari** ad indicare che se $x \notin S_i$ allora $P_i(x) \leq 0$;

(3) su ogni sottoinsieme della retta reale determinati dai vari S_i si moltiplicano i segni dei fattori P_i ottenendo cosi' il segno di P.

Osservazione 3.6. Sia $n \in \mathbb{N}$ e siano f, g due funzioni reali di variabile reale.
Allora $t^{2n} \geq 0\ \forall t \in \mathbb{R}$ implica che

$$(f(x))^{2n} \geq 0\ \forall x \in dom(f),$$

dove $dom(f)$ é l'insieme di definizione di f, mentre $t^{2n+1} \geq 0 \Leftrightarrow t \geq 0$ implica che

$$(f(x))^{2n+1} \geq 0 \Leftrightarrow f(x) \geq 0.$$

Infine

$$f(x)^{2n} g(x) \geq 0 \Leftrightarrow g(x) \geq 0 \vee f(x) = 0.$$

3.4. **Sistemi di disequazioni.** Risolvere un sistema di disequazioni significa determinare i sottoinsiemi di $\mathbb{R}$ nei quali sono verificate **contemporaneamente** le disequazioni del sistema. Ossia se il sistema che dobbiamo risolvere e' costituito da n disequazioni

$$\begin{cases} P_1(x) \geq 0 \quad (\text{ o} \leq 0) \\ P_2(x) \geq 0 \quad (\text{ o } \leq 0) \\ \quad ... \\ P_n(x) \geq 0 \quad (\text{ o } \leq 0) \end{cases}$$

e S_1 é l'insieme in cui e' verificata la prima disequazione del sistema,..., S_n l'insieme in cui e' verificata l'ultima disequazione del sistema, allora l'insieme S delle soluzioni del sistema é uguale a

$$S = S_1 \cap S_2 \cap ... \cap S_n.$$

Al fine di determinare l'insieme S

(1) si determinano gli insiemi S_i;

(2) si traccia la retta reale e si rappresentano **con una linea piena e uno sotto l'altro** gli insiemi S_i;

(3) si selezionano i sottoinsiemi **comuni** a tutti gli S_i.

Si noti la differenza con il metodo che si applica per studiare il segno di un prodotto o di una frazione.

Esempio 3.7. (1) Il sistema

$$\begin{cases} x-1 \geq 0 \\ -2x+1 \geq 0 \end{cases}$$

e' equivalente al sistema (ossia ha il suo stesso insieme di soluzioni)

$$\begin{cases} x \geq 1 \\ x \leq \frac{1}{2} \end{cases}$$

ossia $S_1 = (1, +\infty)$ e $S_2 = (-\infty, \frac{1}{2})$. Allora l'insieme delle soluzioni del sistema e' dato da $S = S_1 \cap S_2 = \emptyset$.

(2) Il sistema

$$\begin{cases} x-1 \leq 0 \\ -2x+1 \geq 0 \end{cases}$$

e' equivalente al sistema

$$\begin{cases} x \leq 1 \\ x \leq \frac{1}{2} \end{cases}$$

ossia $S_1 = (-\infty, 1)$ e $S_2 = (-\infty, \frac{1}{2})$. Allora l'insieme delle soluzioni del sistema e' dato da $S = S_1 \cap S_2 = S_2$.

(3) Il sistema

$$\begin{cases} x-1 \leq 0 \\ -2x+1 \leq 0 \end{cases}$$

e' equivalente al sistema

$$\begin{cases} x \leq 1 \\ x \geq \frac{1}{2} \end{cases}$$

ossia $S_1 = (-\infty, 1)$ e $S_2 = (\frac{1}{2}, +\infty)$. Allora l'insieme delle soluzioni del sistema e' dato da $S = S_1 \cap S_2 = (\frac{1}{2}, 1)$.

(4) Il sistema

$$\begin{cases} x-1 \geq 0 \\ -2x+1 \leq 0 \end{cases}$$

e' equivalente al sistema $\begin{cases} x \geq 1 \\ x \geq \frac{1}{2} \end{cases}$

ossia $S_1 = (1, +\infty)$ e $S_2 = (\frac{1}{2}, +\infty)$. Allora l'insieme delle soluzioni del sistema e' dato da $S = S_1 \cap S_2 = S_1$.

(5)

$$\begin{cases} 6x^2 + 7x + 2 < 0 \\ x^2 + 3x - 4 > 0 \end{cases}$$

Poiché $6x^2+7x+2=0 \Leftrightarrow x_{1,2}=\frac{-7\pm\sqrt{49-48}}{12} \Leftrightarrow x=-\frac{2}{3} \vee x=-\frac{1}{2}$ si ha che $6x^2+7x+2<0 \Leftrightarrow -\frac{2}{3}<x<-\frac{1}{2}$ ossia $S_1=(-\frac{2}{3},-\frac{1}{2})$.
Poiché $x^2+3x-4=(x-1)(x+4)$ si ha che $x^2+3x-4>0 \Leftrightarrow x<-4 \vee x>1$ ossia $S_2=(-\infty,-4)\cup(1,+\infty)$.

3.5. **Disequazioni con un valore assoluto.** Le disequazioni della forma

$$|P(x)| \le a \quad (\text{ o } \ge a)$$

con $a\in\mathbb{R}$ si risolvono facilmente. Infatti

$$|P(x)| \;\ge\; a \Leftrightarrow \begin{cases} P(x)\le -a \vee P(x)\ge a & \text{se } a>0,\\ \forall x & \text{se } a\le 0,\end{cases}$$

mentre

$$|P(x)| \;<\; a \Leftrightarrow \begin{cases} -a<P(x)<a & \text{se } a>0,\\ \text{per nessun valore di } x & \text{se } a\le 0,\end{cases}$$

$$|P(x)| \;>\; a \Leftrightarrow \begin{cases} P(x)< -a \vee P(x)> a & \text{se } a>0,\\ \forall x & \text{se } a< 0,\\ \forall x \text{ tale che } P(x)\neq 0 & \text{se } a=0,\end{cases}$$

Esempio 3.8. (1) $|x^2-10|<1 \Leftrightarrow -1<(x^2-10)<1 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2-10<1\\ x^2-10>-1\end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2<11\\ x^2>9\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -\sqrt{11}<x<\sqrt{11}\\ x>3 \vee x<-3.\end{cases}$

Intersecando gli insiemi $S_1=(-\infty,-3)\cup(3,+\infty)$ e $S_2=(-\sqrt{11},\sqrt{11})$ si ottiene che l'insieme delle soluzioni della disequazione iniziale é $S=(-\sqrt{11},-3)\cup(\sqrt{11},3)$.

(2) $|x^2+10|\le 11 \Leftrightarrow x^2+10\le 11 \Leftrightarrow x^2\le 1 \Leftrightarrow -1<x<1$;

(3) $||x|-2|>3 \Leftrightarrow |x|-2>3 \vee |x|-2<-3 \Leftrightarrow |x|>5 \vee |x|<-1$. Poiché la disequazione $|x|<-1$ é impossibile, l'insieme delle soluzioni della disequazione iniziale é dato solo da $x>5 \vee x<-5$.

3.6. **Disequazioni irrazionali.** In questa sezione ci occupiamo della risoluzione di disequazioni del tipo:

$$\sqrt[n]{\mathbf{f(x)}} < \sqrt[n]{\mathbf{g(x)}} \quad (\text{o} > \sqrt[n]{\mathbf{g(x)}})) \tag{3.3}$$

e

$$\sqrt[n]{\mathbf{f(x)}} < \mathbf{g(x)} \quad (\text{o } > \mathbf{g(x)})) \tag{3.4}$$

Distinguiamo il caso n dispari dal caso n pari:

- n **dispari:** in questo caso $\forall x, y$

$$\sqrt[n]{x} \le \sqrt[n]{y} \Leftrightarrow x \le y;$$

e

$$\sqrt[n]{x} < y \Leftrightarrow x < y^n.$$

Da queste osservazioni segue che

$$\mathbf{(3.3)} \Leftrightarrow \mathbf{f(x)} \le \mathbf{g(x)} \quad (\text{ o } \mathbf{f(x)} \ge \mathbf{g(x)})$$

mentre

$$\mathbf{(3.4)} \Leftrightarrow \mathbf{f(x)} \le \mathbf{g^n(x)} \quad (\text{ o } \mathbf{f(x)} \ge \mathbf{g^n(x)})$$

da risolvere nell'insieme dove f, g sono definite.

- n **pari:** in questo caso

$$\text{se } x, y \ge 0 \quad \begin{cases} \sqrt[n]{x} \le \sqrt[n]{y} \Leftrightarrow x \le y \\ \sqrt[n]{x} < y \Leftrightarrow x < y^n; \\ \sqrt[n]{x} > y \Leftrightarrow x > y^n; \end{cases}$$

mentre

$$\text{se } y < 0 \quad \begin{cases} \sqrt[n]{x} > y \quad \forall x \ge 0; \\ \sqrt[n]{x} < y \text{ per nessun valore di } x. \end{cases}$$

Da queste osservazioni segue che

$$\mathbf{(3.3)} \Leftrightarrow \begin{cases} \mathbf{f(x)} \ge \mathbf{0} \\ \mathbf{g(x)} \ge \mathbf{0} \\ \mathbf{f(x)} < \mathbf{g(x)} \quad (\text{o} > \mathbf{g(x)}) \end{cases}$$

mentre (supponiamo $n = 2$)

$$\sqrt{\mathbf{f(x)}} < \mathbf{g(x)} \Leftrightarrow \begin{cases} \mathbf{f(x)} \ge \mathbf{0} \\ \mathbf{g(x)} > \mathbf{0} \\ \mathbf{f(x)} < \mathbf{g^2(x)} \end{cases}$$

e

$$\sqrt{\mathbf{f(x)}} > \mathbf{g(x)} \Leftrightarrow \begin{cases} \mathbf{f(x)} \ge \mathbf{0} \\ \mathbf{g(x)} < \mathbf{0} \end{cases} \bigcup \begin{cases} \mathbf{g(x)} \ge \mathbf{0} \\ \mathbf{f(x)} > \mathbf{g^2(x)} \end{cases}.$$

Esempio 3.9. (1) $\sqrt[3]{x-1} \le 3 \Leftrightarrow x - 1 \le 3^3;$

(2) $\sqrt[2]{x-1} \leq 3 \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 1 \\ x-1 \leq 3^2 \end{cases} \Leftrightarrow 1 \leq x \leq 10;$

(3) $\sqrt[2]{-1-4x} \leq -1$ per nessun valore di x poiché $\sqrt[2]{-1-4x} \geq 0;$

(4) $\sqrt[3]{-1-4x} \leq -1 \Leftrightarrow -1-4x \leq (-1)^3 \Leftrightarrow x \geq 0;$

(5) $\sqrt[3]{x-1} \leq \sqrt[3]{-1+2x} \Leftrightarrow x-1 \leq -1+2x \Leftrightarrow x \geq 0;$

(6) $\sqrt[2]{x-1} \leq \sqrt[2]{-1+2x} \Leftrightarrow \begin{cases} x-1 \geq 0 \\ 2x-1 \geq 0 \\ x-1 \leq -1+2x \end{cases} \Leftrightarrow x \geq 1.$

(7) $\sqrt[2]{x^2-1} \geq -2 \Leftrightarrow x^2-1 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 1 \vee x \leq -1.$

(8) $\sqrt[2]{x^2-4x+3} < 3-2x \Leftrightarrow \begin{cases} x^2-4x+3 \geq 0 \\ 3-2x > 0 \\ x^2-4x+3 < (3-2x)^2 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 3 \vee x \leq 1 \\ x < \frac{3}{2} \\ \forall x \end{cases} \Leftrightarrow x \leq 1$

(9) $\sqrt{x^2-8x+15} \; > \; x \, - \, 4 \;\Leftrightarrow\; \begin{cases} x^2-8x+15 \geq 0 \\ x-4 < 0 \end{cases} \bigcup \begin{cases} x-4 \geq 0 \\ x^2-8x+15 > (x-4)^2 \end{cases} \Leftrightarrow$

$\begin{cases} x \geq 5 \vee x \leq 3 \\ x < 4 \end{cases} \bigcup \begin{cases} x \geq 4 \\ 1 < 0 \end{cases}.$

Poiché il secondo sistema é impossibile l' insieme delle soluzioni della disequazione coincide con l' insieme delle soluzioni del primo sistema ossia é l'insieme $x \leq 3$.

3.7. **Disequazioni esponenziali.** Siano $x, y \in \mathbb{R}$. Allora

- se $a > 1$
$$x \leq y \quad \Leftrightarrow \quad a^x \leq a^y.$$
- se $0 < a < 1$
$$x \leq y \quad \Leftrightarrow \quad a^x \geq a^y$$
(ossia la disuguaglianza si inverte).

In particolare se $b > 0$ e

- se $a > 1$ allora

$$\mathbf{a^x > b \quad \Leftrightarrow \quad x > \log_a b}$$

$$\mathbf{a^x < b \quad \Leftrightarrow \quad x < \log_a b}.$$

- se $0 < a < 1$

$$\mathbf{a^x > b \quad \Leftrightarrow \quad x < \log_a b}$$

$$\mathbf{a^x < b \quad \Leftrightarrow \quad x > \log_a b}.$$

Infine dalle proprietá degli esponenziali si ha che per ogni $a \neq 1$ e per ogni $b \leq 0$

$$\mathbf{a^x > b \quad \forall x \in \mathbb{R}}$$

$$\mathbf{a^x < b \quad \text{non é mai soddisfatta}}.$$

Per esercizio dare l'insieme delle soluzioni delle disequazioni

$$a^{f(x)} > b, \quad a^{f(x)} > a^{g(x)}$$

e

$$a^{f(x)} < b \quad a^{f(x)} < a^{g(x)}$$

distinguendo i casi $a > 1$, $0 < a < 1$, $b > 0, b \leq 0$.

Esempio 3.10. (1) $2^x > 16 \Leftrightarrow 2^x > 2^4 \Leftrightarrow x > 4$;

(2) $(\frac{1}{2})^{3x} > 8 \Leftrightarrow (\frac{1}{2})^{3x} > (\frac{1}{2})^{-3} \Leftrightarrow 3x < -3 \Leftrightarrow x < -1$; oppure

$$(\tfrac{1}{2})^{3x} > 8 \Leftrightarrow 2^{-3x} > 2^3 \Leftrightarrow -3x > 3 \Leftrightarrow x < -1$$

(3) $3^{x^2} < 9 \Leftrightarrow 3^{x^2} < 3^2 \Leftrightarrow x^2 < 2 \Leftrightarrow -\sqrt{2} < x < \sqrt{2}$;

(4) $3^{2x} + 6 \cdot 3^x - 27 > 0 \Leftrightarrow 3^x < \frac{-3-\sqrt{9+27}}{2} = -9/2 \quad \vee \quad 3^x > \frac{-3+\sqrt{9+27}}{2} = 3/2$. La prima disequazione é impossibile, mentre la seconda é verificata per $x > \log_3(3/2)$.

(5) $4^x - 5 \cdot 2^x + 4 < 0 \Leftrightarrow 2^{2x} - 5 \cdot 2^x + 4 < 0 \Leftrightarrow 1 < 2^x < 4 \Leftrightarrow 0 < x < 2$.

(6) $4^x - 4 \cdot 2^x + 5 > 0 \Leftrightarrow 2^{2x} - 4 \cdot 2^x + 5 > 0$. Poiché $\Delta = 16 - 20 < 0$ tale equazione é verificata per ogni $x \in \mathbb{R}$.

(7) $2^x - 3 \cdot 2^{-x} + 2 < 0 \Leftrightarrow 2^{2x} + 2 \cdot 2^x - 3 < 0 \Leftrightarrow \frac{-2-\sqrt{4+12}}{2} < 2^x < \frac{-2+\sqrt{4+12}}{2} \Leftrightarrow -3 < 2^x < 1$. Poiché $2^x > -3$ per ogni $x \in \mathbb{R}$, si ha che $-3 < 2^x < 1 \Leftrightarrow 2^x < 1 \Leftrightarrow x < 0$.

(8) $e^{-x^2} + 1 > 0$ per ogni $x \in \mathbb{R}$.

3.8. **Disequazioni logaritmiche.** Per ogni $x, y > 0$ vale che

- se $a > 1$
$$x \le y \quad \Leftrightarrow \quad \log_a x \le \log_a y;$$
- se $0 < a < 1$
$$x \le y \quad \Leftrightarrow \quad \log_a x \ge \log_a y$$
ossia il verso della disuguaglianza si inverte.

In particolare per ogni $b \in \mathbb{R}$ si ha che

- se $a > 1$
$$\mathbf{\log_a x > b \quad \Leftrightarrow \quad x > a^b}$$
$$\mathbf{\log_a x < b \quad \Leftrightarrow \quad 0 < x < a^b}.$$
- se $0 < a < 1$
$$\mathbf{\log_a x > b \quad \Leftrightarrow \quad 0 < x < a^b}$$
$$\mathbf{\log_a x < b \quad \Leftrightarrow \quad x > a^b}.$$

Quindi, per esempio, vale che per ogni $b \in \mathbb{R}$ si ha che

- se $a > 1$
$$\log_a f(x) > b \quad \Leftrightarrow \quad f(x) > a^b$$
$$\log_a f(x) < b \quad \Leftrightarrow \quad 0 < f(x) < a^b;$$
- se $0 < a < 1$
$$\log_a f(x) > b \quad \Leftrightarrow \quad 0 < f(x) < a^b$$
$$\log_a f(x) < b \quad \Leftrightarrow \quad f(x) > a^b$$

(da risolvere nell'insieme di definizione di f).

Esempio 3.11. (1) $\log_2(x-1) > 3 \Leftrightarrow x - 1 > 2^3 \Leftrightarrow x > 9$;

(2) $\log_2 x^2 < 3 \Leftrightarrow x^2 < 2^3 \Leftrightarrow x^2 < 8 \Leftrightarrow -2\sqrt{2} < x < 2\sqrt{2}$;

(3) $2\log_2 x < 3 \Leftrightarrow \log_2 x < 3/2 \Leftrightarrow x < 2^{3/2} = 2\sqrt{2}$

(4) $\log(x^2-1) > 0 \Leftrightarrow \log(x^2-1) > \log 1 \Leftrightarrow x^2 - 1 > 1 \Leftrightarrow x^2 > 2 \Leftrightarrow x < -\sqrt{2}, x > \sqrt{2}$;

(5) $\log^2(x^2-1) < 4 \Leftrightarrow -2 < \log(x^2-1) < 2 \Leftrightarrow e^{-2} < x^2 - 1 < e^2 \Leftrightarrow e^{-2} + 1 < x^2 < e^2 + 1 \Leftrightarrow \sqrt{e^{-2}+1} < x < \sqrt{e^2+1} \quad \vee \quad -\sqrt{e^2+1} < x < -\sqrt{e^{-2}+1}$

(6) $\log^2 x - 3\log x > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ \log x(\log x - 3) > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ \log x < 0 \vee \log x > 3 \end{cases}$
$\Leftrightarrow 0 < x < 1 \vee x > e^3$

(7) $\log(|x-3|) < 0 \Leftrightarrow \log(|x-3|) < \log 1 \Leftrightarrow 0 < |x-3| < 1 \Leftrightarrow -1 < x-3 < 1, \quad x \neq 3 \Leftrightarrow 2 < x < 4, \quad x \neq 3;$

(8) $\log(|x^2-3|) > 4 \Leftrightarrow |x^2-3| > e^4 \Leftrightarrow x^2 - 3 > e^4 \quad \vee \quad x^2 - 3 < -e^4$
$\Leftrightarrow x^2 < -e^4 + 3 \quad \vee \quad x^2 > e^4 + 3$. La prima equazione é impossibile. La seconda é soddisfatta per $x > \sqrt{e^4+3} \quad \vee \quad x < -\sqrt{e^4+3}$:

(9) $\log_2[(x-2)(x-3)] > 1 \Leftrightarrow (x-2)(x-3) > 2 \Leftrightarrow x^2 - 5x + 4 > 0 \Leftrightarrow x < 1, x > 4;$

(10) $\log_2(x-2) + \log_2(x-3) > 1 \Leftrightarrow \begin{cases} x - 2 > 0 \\ x - 3 > 0 \\ \log_2[(x-2)(x-3)] > 1 \end{cases}$
dove le prime 2 condizioni sono le condizioni di esistenza dei due logaritmi e consentono di applicare la nota proprietá dei logaritmi

$$\log_a c + \log_a b = \log(bc)$$

valida per $b, c > 0$. Cosi' si ottiene il sistema (vedi esercizio precedente)

$$\begin{cases} x > 2 \\ x > 3 \\ x < 1, x > 4 \end{cases}$$

che ha come soluzione l'intervallo $x > 4$.

4. **Esercizi**

4.1. **Polinomi.**

(1) Calcolare il quoziente $Q(x)$ e il resto $R(x)$ delle seguenti divisioni:

(a) $(x^2 - 1) : (x + 1)$

$(Q(x) = x - 1, R(x) = 0)$

(b) $(x^4 - 1) : (x + 1)$

$(Q(x) = (x - 1)(x^2 + 1), R(x) = 0)$

(c) $(x^4 + 1) : (x^2 - 1)$

$(Q(x) = x^2 + 1, R(x) = 2)$

(d) $(x^2 + 5x + 6) : (x^2 - 1)$

$(Q(x) = 1, R(x) = 5x + 7)$

(e) $(x^2 + 5x + 6) : (2x^2 + x + 1)$

$(Q(x) = \frac{1}{2}, R(x) = \frac{9}{2}x + \frac{11}{2})$

(f) $(x^3 + 5x + 6) : (x^2 + x + 1)$

$(Q(x) = x - 1, R(x) = 5x + 7)$

(g) $(x^3 - 4x + 6) : (3x^2 + x + 1)$

$(Q(x) = \frac{1}{3}x - \frac{1}{9}, R(x) = -\frac{38}{9}x + \frac{55}{9})$

(h) $(x^6 - 1) : (x^3 - 1)$

$(Q(x) = x^3 + 1, R(x) = 0)$

(i) $(x^5 + x^3 + 3) : (x^2 - 2x)$

$(Q(x) = x^3 + 2x^2 + 5x + 10, R(x) = 20x + 3)$

(2) Scrivere le seguenti frazioni $\frac{N(x)}{D(x)}$ nella forma $Q(x) + \frac{R(x)}{D(x)}$ dove $Q(x)$ e $R(x)$ sono rispettivamente quoziente e resto della divisione $N : D$.

(a) $\frac{x^4+1}{x^2-1}$

$(x^2 + 1 + \frac{2}{x^2-1})$

(b) $\frac{x^2+5x+6}{x^2-1}$

$(1 + \frac{5x+7}{x^2-1})$

(c) $\frac{x^2+5x+6}{2x^2+x+1}$

$(\frac{1}{2} + \frac{9x+11}{2(2x^2+x+1)})$

(d) $\frac{x^3+5x+6}{x^2+x+1}$

$(x - 1 + \frac{5x+7}{x^2+x+1}$

(e) $\frac{x^3-4x+6}{3x^2+x+1}$

$(\frac{1}{3}x - \frac{1}{9} + \frac{-38x+55}{9(3x^2+x+1)})$

(f) $\frac{x^5+x^3+3}{x^2-2x}$

$(x^3 + 2x^2 + 5x + 10 + \frac{20x+3}{x^2-2x})$

(g) $\frac{x^2-2}{x+1}$

$(x - 1 - \frac{1}{x+1})$

(h) $\frac{x^3-2x+1}{x^2+2x+3}$

$(x - 2 + \frac{7-x}{x^2+2x+3})$

(i) $\frac{x^3-5x+6}{2x^2+x-4}$

$\left(\frac{1}{2}x - \frac{1}{4} + \frac{-11x+20}{4(2x^2+x-4)}\right)$

(j) $\frac{x^4-5x}{x^2-3x+1}$

$\left(x^2 + 3x + 8 + \frac{18x+8}{x^2-3x+1}\right)$

4.2. **Equazioni di primo e secondo grado.** Risolvere le seguenti equazioni:

(1) $x - 3 = 0$

$(x = 3)$

(2) $2x - 8 = 0$

$(x = 4)$

(3) $2x^2 - 8 = 0$

$(x = \pm 2)$

(4) $2x^2 - 8x = 0$

$(x = 0, x = 4)$

(5) $2x^2 - 8x + 8 = 0$

$(x = 2)$

(6) $x^2 - 7x + 12 = 0$

$(x = 3, x = 4)$

(7) $2x^2 + 5x - 3 = 0$

$(x = -3, x = 1/2)$

(8) $-4x^2 + 12x - 9 = 0$

$(x = 3/2)$

(9) $x^2 - x + 1 = 0$

(eq. impossibile)

(10) $x^2 + 4 = 0$

(eq. impossibile)

(11) $x^2 + 3x + 9 = 0$

(eq. impossibile)

(12) $2x^4 - 8 = 0$

$(x = \pm\sqrt{2})$

(13) $2x^4 - 8x^2 = 0$

$(x = 0, x = \pm 2)$

(14) $2x^4 - 8x^2 + 8 = 0$

$(x = \pm\sqrt{2})$

(15) $x^4 - 7x^2 + 12 = 0$

$(x = \pm\sqrt{3}, x = \pm 2)$

(16) $2x^4 + 5x^2 - 3 = 0$

$(x = \pm 1/\sqrt{2})$

(17) $-4x^4 + 12x^2 - 9 = 0$

$(x = \pm\sqrt{3/2})$

(18) $x^4 - x^2 + 1 = 0$

(eq. impossibile)

(19) $x^4 + 4 = 0$

(eq. impossibile)

(20) $x^4 + 3x^2 + 9 = 0$

(eq. impossibile)

4.3. **Disequazioni di primo e secondo grado.** Risolvere le seguenti disequazioni:

(1) $x - 3 > 0$

($x > 3$)

(2) $2x - 8 < 0$

($x < 4$)

(3) $-2x - 8 < 0$

($x > -4$)

(4) $2x^2 - 8 \leq 0$

($2 \leq x \leq 2$)

(5) $2x^2 - 8x \geq 0$

($x \leq 0, x \geq 4$)

(6) $2x^2 - 8x + 8 \geq 0$

($\forall x \in \mathbb{R}$)

(7) $2x^2 - 8x + 8 > 0$

($\forall x \in \mathbb{R} x \neq 2$)

(8) $2x^2 - 8x + 8 \leq 0$

($x = 2$)

(9) $2x^2 - 8x + 8 < 0$

(dis. impossibile)

(10) $x^2 - 7x + 12 > 0$

($x < 3, x > 4$)

(11) $2x^2 + 5x - 3 \leq 0$

($-3 \leq x \leq 1/2$)

(12) $-4x^2 + 12x - 9 \geq 0$

($x = 3/2$)

(13) $x^2 - x + 1 > 0$

($\forall x \in \mathbb{R}$)

(14) $x^2 - x + 1 \geq 0$

($\forall x \in \mathbb{R}$)

(15) $x^2 - x + 1 < 0$

(dis. impossibile)

(16) $x^2 - x + 1 \leq 0$

(dis. impossibile)

(17) $x^2 + 4 < 0$

(diseq. impossibile)

(18) $x^2 + 3x + 9 > 0$

$(\forall x \in \mathbb{R})$

(19) $2x^4 - 8 \leq 0$

$(-\sqrt{2} \leq x \leq \sqrt{2})$

(20) $2x^4 - 8x^2 \geq 0$

$(x = 0, x \geq 2, x \leq -2)$

(21) $2x^4 - 8x^2 + 8 > 0$

$(x \neq \pm\sqrt{2})$

(22) $x^4 - 7x^2 + 12 \geq 0$

$(x \leq -2, -\sqrt{3} \leq x \leq \sqrt{3}, x \geq 2)$

(23) $2x^4 + 5x^2 - 3 \leq 0$

$(-1/\sqrt{2} \leq x \leq 1/\sqrt{2})$

(24) $-4x^4 + 12x^2 - 9 < 0$

$(x \neq \pm\sqrt{3/2})$

(25) $x^4 - x^2 + 1 > 0$

$(\forall x \in \mathbb{R})$

(26) $x^4 + 4 < 0$

(diseq. impossibile)

(27) $x^4 + 3x^2 + 9 < 0$

(diseq. impossibile)

4.4. **Disequazioni con prodotti, potenze e quozienti.**

(1) $(x - 1)(x - 2)(-x - 3) < 0$

$(1 < x < 2, x > 3)$

(2) $(x - 1)(x - 2)(x + 3) > 0$

$(1 < x < 2, x > 3)$

(3) $(x - 1)(x - 2)(x^2 + 3) > 0$

$(x < 1, x > 2)$

(4) $(x - 1)(x - 2)(x^2 - 9) > 0$

$(x < -3, 1 < x < 2, x > 3)$

(5) $(x + 1)^2 < 0$

(dis. impossibile)

(6) $(x + 1)^4 > 0$

$(\forall x \neq -1)$

(7) $(2x + 1)^2 \geq 0$

$(\forall x \in \mathbb{R})$

(8) $(x - 1)^3 > 0$

$(x > 1)$

(9) $(2x-1)^2(3x-1)^3 \leq 0$

$(x \leq 1/3, x = 1/2)$

(10) $(2x-1)^3(3x-1)^2 \leq 0$

$(x \leq 1/2)$

(11) $(2x-1)^2(3x-1)^2 \leq 0$

$(x = 1/3, x = 1/2)$

(12) $(2x-1)^3(3x-1)^3 \leq 0$

$(1/3 \leq x \leq 1/2)$

(13) $\frac{x^2-2x-3}{x^2-6x+5} \geq 0$

$(x \leq -1, 1 < x \leq 3, x > 5)$

(14) $\frac{x^2-2x-3}{x^2-5x+6} \geq 0$

$(x \leq -1, x > 2, x \neq 3)$

(15) $\frac{x^2+2x+1}{x^2-2x+1} \geq 0$

$(\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{1\})$

(16) $\frac{x^2+5x+6}{x^2-5x+6} \leq 0$

$(-3 \leq x \leq -2, 2 < x < 3)$

(17) $\frac{x^2+11x-12}{x^2-3x-4} < 0$

$(-12 < x < -1, 1 < x < 4)$

4.5. **Sistemi di disequazioni.** Risolvere i seguenti sistemi di disequazioni:

(1) $\begin{cases} x^2-2x-3 \geq 0 \\ x^2-6x+5 < 0 \end{cases}$

$(3 \leq x < 5)$

(2) $\begin{cases} x^2-4x+5 \geq 0 \\ x^2-6x+9 \geq 0 \end{cases}$

$(\forall x \in \mathbb{R})$

(3) $\begin{cases} x^2-2x+4 \geq 0 \\ x^2-6x+8 \geq 0 \end{cases}$

$(x \leq 2, x \geq 4)$

(4) $\begin{cases} x^2-11x-12 \geq 0 \\ x^2-6x+8 \geq 0 \end{cases}$

$(x \leq -1, x \geq 12)$

(5) $\begin{cases} x^2-2x+4 \leq 0 \\ x^2-6x+8 \geq 0 \end{cases}$

(sistema impossibile)

(6) $\begin{cases} x^2-2x+4 \geq 0 \\ x^2-4x+4 \geq 0 \end{cases}$

$(\forall x \in \mathbb{R})$

4.6. **Equazioni e disequazioni irrazionali.** Risolvere le seguenti equazioni e disequazioni:

(1) $\sqrt{x-3} = 2$

($x = 7$)

(2) $\sqrt{2x+8} = -2$

(eq. impossibile)

(3) $\sqrt{-2x-8} = 2$

($x = -6$)

(4) $\sqrt{x-1} < 2$

($1 \leq x < 5$)

(5) $\sqrt{x+3} > 2$

($x > 1$)

(6) $\sqrt{x^2-x} > 1-x$

($x > 1$)

(7) $\sqrt{x^2-5x+4} < 2x-3$

($x \geq 4$)

(8) $\sqrt{x^2+3x-10} > x-20$

($x \leq -5, x > 2$)

(9) $\sqrt{-x^2+25} < 7-x$

($-5 \leq x < 3, 4 < x \leq 5$)

(10) $\sqrt[3]{x-1} > 2$

($x > 9$)

(11) $\sqrt[3]{x^3-9x} > x-3$

($x > 1, x < 3$)

(12) $\sqrt{\frac{x-1}{x+1}} > 2$

($-5/3 < x < -1$)

4.7. **Equazioni esponenziali e logaritmiche.**

(1) $5^x = 25$

($x = 2$)

(2) $5^x = -25$

(eq. impossibile)

(3) $5^x = 1$

($x = 0$)

(4) $e^x = 9$

($x = \log 9$)

(5) $e^{x^2} = e^4$

($x = \pm 2$)

(6) $e^{x^2} = 4$

($x = \pm\sqrt{\log 4}$)

(7) $(e^x)^2 = 4$ $(x = (\log 4)/2)$

(8) $e^x \cdot e^x = 4$ $(x = (\log 4)/2)$

(9) $e^{2x} = 4$ $(x = (\log 4)/2)$

(10) $3e^x = 4$ $(x = (\log 4/3))$

(11) $9^{2x} = 27$ $(x = 3/4)$

(12) $3^{5x-2} = 1/27$ $(x = -1/5)$

(13) $25^{x-3} = 125$ $(x = 9/2)$

(14) $2^{x^2-4x} = 32$ $(x = -1, x = 5)$

(15) $5^{x^2-3x} = 625$ $(x = -1, x = 4)$

(16) $e^x \cdot e^x - 2e^x - e^x + 2 = 0$ $(x = 0, x = \log 2)$

(17) $5^{2x} - 7 \cdot 5^x = 450$ $(x = 2)$

(18) $3^{x+2} + 3^{2-x} = 30$ $(x = \pm 1)$

(19) $3^{x+1} + 3^{1-x} = 10$ $(x = \pm 1)$

(20) $2^x + 4^x = 272$ $(x = 4)$

(21) $3^{2x} - 4 \cdot 3^x + 3 = 0$ $(x = 0, x = 1)$

(22) $8 \cdot 2^x + 8 \cdot 2^{-x} = 65$ $(x = \pm 3)$

(23) $5^x \cdot 5^x - 7 \cdot 5^x = 450$ $(x = 2)$

(24) $\log x^2 = \log 4$ $(x = \pm 2)$

(25) $2 \log x = \log 4$ $(x = 2)$

(26) $\log^2 x = 4$

($x = e^2, x = e^{-2}$)

(27) $\log^3 x = 27$

($x = e^3$)

(28) $\log x^3 = 27$

($x = e^9$)

(29) $\log_2(x+1) + \log_2(x-1) = 3$

($x = 3$)

(30) $\log_2(x+1)(x-1) = 3$

($x = \pm 3$)

(31) $\log(x^2+3) - 2\log 2x = \log 2 - \log(x^2-3)$

($x = 3$)

(32) $\log(x^2-1) - \log(x^2-7x+12) = \log 4$

($x = 7/3, x = 7$)

(33) $\log(x^2-7) = 2\log(x+3)$

($x = -8/3$)

(34) $\log(x^2-1) - \log(x^2-7x+12) = \log 4$

($x = 7/3, x = 7$)

(35) $2\log(2x-3) = \log 8 + \log x$

($x = 9/2$)

(36) $\log(2x-3)^2 = \log 8 + \log x$

($x = 9/2, x = 1/2$)

4.8. **Disequazioni esponenziali e logaritmiche.** Risolvere le seguenti disequazioni:

(1) $5^x > 25$

($x > 2$)

(2) $5^x < -25$

(eq. impossibile)

(3) $5^x > -25$

($\forall x \in \mathbb{R}$)

(4) $5^x < 1$

($x < 0$)

(5) $e^x > 5$

($x > \log 5$)

(6) $e^{x^2} < e^9$

($-3 < x < 3$)

(7) $e^{x^2} > 6$

($x > \sqrt{\log 6}, x < -\sqrt{\log 6}$)

(8) $e^{2x} < 4$

($x < (\log 4)/2$)

(9) $3e^x < 7$

$(x < (\log 7/3))$

(10) $2^{5x-2} < 1/8$

$(x < -1/5)$

(11) $(1/2)^{2x} < 16$

$(x > -2)$

(12) $(1/3)^{5x-2} > 1/27$

$(x < -1)$

(13) $25^{x-3} < 125$

$(x < 9/2)$

(14) $2^{x^2-4x} > 32$

$(x < -1, x > 5)$

(15) $5^{x^2-3x} < 625$

$(-1 < x < 4)$

(16) $e^x \cdot e^x - 2e^x - e^x + 2 > 0$

$(x < 0, x > \log 2)$

(17) $5^{2x} - 7 \cdot 5^x > 450$

$(x > 2)$

(18) $3^{x+2} + 3^{2-x} < 30$

$(-1 < x < 1)$

(19) $3^{x+1} + 3^{1-x} > 10$

$(x > 1, x < -1)$

(20) $2^x + 4^x = 272$

$(x > 4)$

(21) $3^{2x} - 4 \cdot 3^x + 3 < 0$

$(0 < x < 1)$

(22) $\log x^2 > \log 4$

$(x > 2, x < -2)$

(23) $2 \log x > \log 4$

$(x > 2)$

(24) $\log_2(x + 1) + \log_2(x - 1) > 3$

$(x > 3)$

(25) $\log_2(x + 1)(x - 1) > 3$

$(x > 3, x < -3)$

(26) $\log(x^2 + 3) - 2 \log 2x > \log 2 - \log(x^2 - 3)$

$(x > 3)$

(27) $\log(x^2 - 7) = 2 \log(x + 3)$

$(x = -8/3)$

(28) $\log(x^2 - 1) - \log(x^2 - 7x + 12) > \log 4$

$(7/3 < x < 3 \text{ e } 4 < x < 7)$

(29) $2\log(2x-3) > \log 8 + \log x$

$(x > 9/2)$

(30) $\log(2x-3)^2 > \log 8 + \log x$

$(x > 9/2, 0 < x < 1/2)$

(31) $\log^2(2x-3) > 4$

$(x > \frac{3+e^2}{2}$ e $\frac{3}{2} < x < \frac{3+e^{-2}}{2})$

(32) $\log^2(2x-3) < 4$

$(\frac{3+e^{-2}}{2} < x < \frac{3+e^2}{2})$

4.9. **Disequazioni tratte dai compiti.** Studiare le seguenti disequazioni:

(1) $\frac{-8xe^{x^2}}{(e^{x^2}-2)^2} - 2x \geq 0$

$(x \leq 0, x \neq -\sqrt{\log 2})$

(2) $\frac{-4e^{2x}}{(e^{2x}-3)^2} \leq 0$

$\forall x \neq \log 3/2$

;

(3)
$$\frac{\frac{1}{x}(\log^2 x - 4) - 2\frac{1}{x}\log x(\log x - 1)}{(\log^2 x - 4)^2} \geq 0$$

Mai

;

(Francesca Prinari) Dipartimento di Matematica, Universitá di Lecce, Via Prov.le Lecce-Arnesano, 73100 Lecce, Italy

E-mail address, Francesca Prinari: francesca.prinari@unile.it