

Matematica di base

Appunti e quesiti in preparazione
al test di ammissione alle Facoltà scientifico-tecniche

Luciano Battaia

Docente di Matematica
Liceo Scientifico Grigoletti
Pordenone

Pier Carlo Craighero

Docente di Matematica
Facoltà di Ingegneria
Università degli Studi di Udine

Copyright

© Centro Polifunzionale di Pordenone dell'Università degli Studi di Udine
Vietata ogni modifica anche parziale senza il consenso scritto degli autori

Versione del 24 agosto 2005

Indice

Premessa	iii
1 Logica, Insiemi, Probabilità	1
1.1 Note e osservazioni	1
1.1.1 Notazioni	1
1.2 Quesiti a risposta aperta	1
1.3 Quesiti a risposta multipla	9
2 Numeri naturali e interi	13
2.1 Note e osservazioni	13
2.1.1 Proprietà dell'addizione e moltiplicazione in $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}$	13
2.1.2 Relazione di divisibilità in \mathbb{N}	13
2.1.3 Teorema fondamentale dell'aritmetica (<i>Euclide</i>)	13
2.1.4 Divisione con resto negli interi non negativi	14
2.1.5 Divisioni successive - M.C.D. - Teorema fondamentale dell'aritmetica	14
2.2 Quesiti a risposta aperta	16
2.3 Quesiti a risposta multipla	29
3 Numeri razionali e reali	32
3.1 Note e osservazioni	32
3.1.1 Parte intera	32
3.1.2 Valore assoluto	32
3.1.3 Sul simbolo delle potenze	33
3.1.4 Numeri algebrici e trascendenti	34
3.2 Quesiti a risposta aperta	34
3.3 Quesiti a risposta multipla	50
4 Geometria analitica	54
4.1 Note e osservazioni	54
4.2 Quesiti a risposta aperta	54
4.3 Quesiti a risposta multipla	57
5 Potenze, Logaritmi ed esponenziali	61
5.1 Note e osservazioni	61
5.1.1 Logaritmo naturale. Notazioni	61
5.2 Quesiti a risposta aperta	61
5.3 Quesiti a risposta multipla	65

6	Polinomi, Frazioni algebriche, Equazioni, Disequazioni, Sistemi	69
6.1	Note e osservazioni	69
6.2	Quesiti a risposta aperta	69
6.3	Quesiti a risposta multipla	76
7	Trigonometria	81
7.1	Note e osservazioni	81
7.1.1	Misure degli angoli e calcolatrici	81
7.1.2	Notazioni	81
7.1.3	Funzioni periodiche	81
7.2	Quesiti a risposta aperta	81
7.3	Quesiti a risposta multipla	89
8	Geometria piana e solida	93
8.1	Note e osservazioni	93
8.1.1	Notazioni	93
8.1.2	Figure convesse	93
8.2	Quesiti a risposta aperta	93
8.3	Quesiti a risposta multipla	125

Premessa

Questo lavoro, inserito nel sito del Centro Polifunzionale di Pordenone dell'Università degli Studi di Udine, è dedicato ai giovani che si accingono ad affrontare una Facoltà universitaria nella quale la Matematica sia un requisito essenziale del processo formativo: Ingegneria, Informatica, Fisica, Matematica, ecc.

È ormai consuetudine che i candidati all'iscrizione ad una di queste Facoltà di tipo tecnico-scientifico si cimentino in un test di Matematica di base, contenente quesiti relativi agli argomenti matematici principali che sono stati oggetto del loro studio alle scuole medie superiori (calcolo differenziale ed integrale esclusi).

Il primo scopo di questo test è quello di rendere anzitutto i ragazzi stessi consapevoli di eventuali lacune, o carenze culturali, di Matematica elementare che, per essere tale, è nel contempo assolutamente necessaria e irrinunciabile.

Per questo si è pensato di mettere a disposizione dei giovani candidati un'ampia e articolata serie di quesiti e di esercizi che li metteranno in condizione, se affrontati col dovuto impegno e soprattutto con la dovuta tempestività, di trovarsi certamente più a loro agio in sede di test, e poi, ed è la cosa più importante, quando assisteranno con maggiore cognizione di causa e quindi senza disagio o imbarazzo alle prime lezioni universitarie.

Rivolgendoci a dei giovani, abbiamo cercato di rendere il contenuto di questo lavoro propositivo, sciolto, vario e vicace: come sono i giovani appunto.

Ci auguriamo che l'iniziativa incontri il loro favore, e ringraziamo fin d'ora tutti coloro, e i ragazzi stessi anzitutto, i quali, con il loro intelligente apporto e il colloquio cordiale e costruttivo, vorranno contribuire a rendere questo percorso formativo più ricco, fruttuoso e stimolante.

Capitolo 1

Logica, Insiemi, Probabilità

1.1 Note e osservazioni

1.1.1 Notazioni

- \mathbb{N} indica l'insieme dei numeri naturali (o interi positivi: $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$)
- \mathbb{Z} indica l'insieme dei numeri interi relativi: $\mathbb{Z} = \{0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots\}$
- \mathbb{Q} ed \mathbb{R} indicano, rispettivamente, l'insieme dei numeri razionali e dei reali.
- *Positivo* significa “maggiore di zero”.
- *Negativo* significa “minore di zero”.

1.2 Quesiti a risposta aperta

1. *Quesito* Le frasi

- esistono uova non bianche
- esiste un uovo non bianco
- esiste almeno un uovo non bianco
- non tutte le uova sono bianche
- le uova bianche non sono tutte le uova

sono tutte equivalenti alla negazione della frase *tutte le uova sono bianche* ?

2. *Quesito* Dire quali fra le seguenti implicazioni sono false e quali sono vere.

- (a) $2 \neq 2 \Rightarrow 3 = 3$
- (b) $2 = 2 \Rightarrow 3 \neq 4$
- (c) $2 \neq 2 \Rightarrow 3 > 4$
- (d) $3 < 4 \Rightarrow 1 < 2$
- (e) $2 \text{ divide } 6 \Rightarrow 6 \text{ divide } 12$
- (f) $6 \text{ non divide } 12 \Rightarrow 2 \text{ divide } 5$
- (g) $-2 < -1 \Rightarrow (-2)^2 < (-1)^2$
- (h) $\log_a b = \log_b a \Rightarrow a = b$
- (i) $A \cap B = A \cup B \Rightarrow A = B = \emptyset$ (=insieme vuoto)

3. **Quesito** Dire per quali $x \in \mathbb{R}$ le seguenti uguaglianze sono vere e per quali sono false.

- (a) $x < 1 \Rightarrow x^2 < x$
- (b) $x < 1 \Rightarrow x^3 < x^2$
- (c) $x^3 < x^2 \Rightarrow x < 1$
- (d) $x^4 < x^2 \Rightarrow -1 < x < 1$
- (e) $|x| + 1 = x^2 - 1 \Rightarrow \frac{|x|+1}{x^2-1} = 1$
- (f) $|x| + 1 = x^2 - 1 \Rightarrow x \in \{1, -1, 2, -2\}$
- (g) $|x| + 1 = x^2 - 1 \Rightarrow x \in \{2, -2\}$
- (h) $x \in \{1, -1, 2, -2\} \Rightarrow |x| + 1 = x^2 - 1$

4. **Quesito** Sono dati due numeri reali x_1 ed x_2 . Dire quale delle seguenti doppie implicazioni è corretta.

- (a) $\begin{cases} x_1 + x_2 > 0 \\ x_1 - x_2 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1^2 < x_2^2 \\ x_1 \geq 0 \end{cases}$
- (b) $\begin{cases} x_1 + x_2 > 0 \\ x_1 - x_2 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1^2 < x_2^2 \\ x_1 < x_2 \end{cases}$
- (c) $\begin{cases} x_1 + x_2 > 0 \\ x_1 - x_2 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1^2 < x_2^2 \\ x_1^3 < x_2^3 \end{cases}$

5. **Quesito** È data la proposizione

$$p = (A \text{ è bianco} \Rightarrow B \text{ è nero}).$$

Dire per quali delle seguenti proposizioni risulta vera l'implicazione

$$p \Rightarrow q_i, \quad (i = 1, 2, 3)$$

- $q_1 = (A \text{ è nero} \Rightarrow B \text{ non è nero})$
- $q_2 = (B \text{ è verde} \Rightarrow A \text{ non è bianco})$
- $q_3 = (B \text{ è nero} \Rightarrow A \text{ è bianco})$

6. **Quesito** Considera la proposizione “ p implica q ”, in simboli $p \Rightarrow q$. Quale delle seguenti affermazioni sono corrette e quali errate?

- (a) $p \Rightarrow q$ è vera se q è vera;
- (b) $p \Rightarrow q$ è vera solo se q è vera;
- (c) $p \Rightarrow q$ non è vera se p è falsa;
- (d) $p \Rightarrow q$ non è vera se p è falsa e q è vera;
- (e) $p \Rightarrow q$ è vera se p è vera e q è vera;
- (f) $p \Rightarrow q$ è falsa se p è vera e q è falsa;
- (g) $p \Rightarrow q$ è falsa solo se p è vera e q è falsa;

7. **Quesito** Si supponga di tenere, delle 40 carte della briscola, solo i 4 assi, i 4 due e i 4 tre. Quindi si procede al seguente solitario: si mescolano le 12 carte come al solito; si scoprono una dopo l'altra mettendole in fila su un tavolo; il solitario riesce se i 4 assi escono uno di seguito all'altro. Qual è la probabilità di riuscita, sapendo che le 12 carte si possono disporre in mazzo in $12! = 497\,001\,600$ modi diversi?
8. **Quesito** Costruire la tabella di verità della proposizione

$$p \Rightarrow (p \Rightarrow q).$$

Questa proposizione è *logicamente equivalente* alla proposizione

$$p \Rightarrow q \quad ?$$

9. **Quesito** Una cassa contiene delle tavolette di vari colori numerate da 1 a 2000; su di esse si sa che:
- (a) le tavolette verdi hanno tutte il numero > 1000 ;
 - (b) se il numero di tavoletta è pari, essa è o bianca o rossa;
 - (c) esistono tavolette gialle con il numero > 1000 .

Dire quali tra le seguenti affermazioni sono necessariamente vere o necessariamente false.

- A_1) la tavoletta col numero 528 non è gialla;
 - A_2) le tavolette verdi sono meno di 500;
 - A_3) la tavoletta col numero 1753 è rossa;
 - A_4) se non esistono tavolette rosse col numero > 1900 , allora le tavolette bianche non possono essere 40 in tutto;
 - A_5) se A_3) è vera, le tavolette verdi sono 499.
10. **Quesito** Per ogni $x \in \mathbb{R}$ considera le proposizioni

$$p(x) = \frac{x-1}{x-6} \leq 1$$

$$q(x) = \begin{cases} x-1 \leq x-6 \\ x-6 \neq 0 \end{cases}$$

Considerata poi la doppia implicazione

$$p(x) \Leftrightarrow q(x),$$

trova per quali x essa risulta vera e per quali falsa.

11. **Quesito** Ci sono tre vasi con dentro, rispettivamente,

27 caramelle rosse, 21 gialle, 16 verdi.

32 ragazzi possono prelevare non più di una caramella per vaso e non più di due in tutto. Se alla fine non restano caramelle nei vasi, quanti ragazzi si trovano con una caramella rossa e una gialla, quanti con una rossa e una verde, quanti con una gialla e una verde?

12. **Quesito** Sono date due proposizioni p e q e si sa che

la proposizione $p \Leftrightarrow q$ è falsa.

Si sa poi anche che *almeno una* delle seguenti due proposizioni

$$P = p \text{ è vera} \quad , \quad Q = q \text{ è falsa}$$

risulta *falsa*.

Individuare quali delle seguenti proposizioni sono vere e quali sono false.

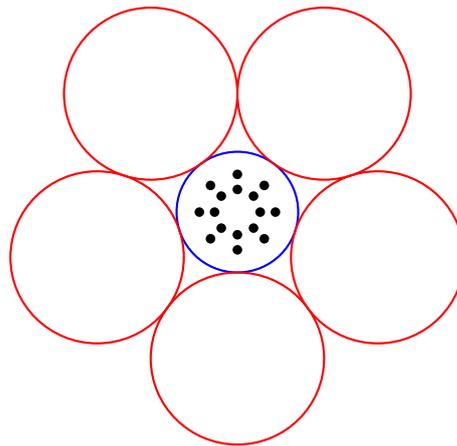
- (a) p è vera \wedge q è falsa
 - (b) p è falsa \wedge q è vera
 - (c) p è falsa \wedge q è falsa
 - (d) p è falsa
 - (e) p è vera \wedge q è vera
13. **Quesito** Ci sono 100 scatole: ogni scatola può contenere al più 49 cubetti, e ogni scatola contiene almeno un cubetto. Chiamiamo *singola* una scatola se non ne esiste un'altra con il suo stesso numero di cubetti: quante sono, almeno, le scatole che *non sono singole*?

14. **Quesito** Quante macchine si possono targare usando stringhe del tipo

107 - BHY

costituite da una terna (con eventuali ripetizioni) di cifre da 0 a 9, e da una terna di lettere dell'alfabeto inglese (26 lettere)?

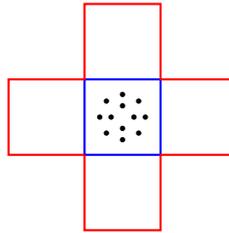
15. **Quesito** Considera la figura seguente



Quelle che vedi, in pianta, sono sei scatole cilindriche: una centrale e cinque periferiche. In quella centrale ci sono 16 palline. Queste vengono tutte trasferite nelle scatole periferiche con la seguente condizione: *in ogni scatola periferica deve trovarsi un numero positivo pari di palline non superiore a 6*.

Quali sono le distribuzioni possibili delle palline (a prescindere da una inessenziale permutazione delle scatole periferiche tra loro)?

Considera ora cinque scatole, cubiche, sempre una centrale e quattro periferiche, con 12 palline nella scatola centrale.



Le 12 palline vengono tutte trasferite nelle scatole periferiche con la condizione seguente: *in ogni scatola periferica deve trovarsi un numero positivo pari di palline, non superiore a 4.*

Quali sono questa volta le possibili distribuzioni delle 12 palline?

E se la condizione fosse: *in ogni scatola deve trovarsi un numero positivo dispari di palline non superiore a 5*, quali sarebbero le possibili soluzioni?

16. **Quesito** Per ogni $n \in \mathbb{N}$, considera l'intervallo aperto di numeri reali

$$I_n = \left] 0, \frac{1}{n} \right[.$$

Osserva che, chiaramente, risulta

$$I_1 \supset I_2 \supset \dots \supset I_n \supset I_{n+1} \supset \dots$$

e, in tale circostanza, gli (infiniti in questo caso) intervalli $I_n, \forall n \in \mathbb{N}$, si dicono

inscatolati.

Cosa puoi dire dei due insiemi

$$\bigcup_{n \in \mathbb{N}} I_n \quad \text{e} \quad \bigcap_{n \in \mathbb{N}} I_n \quad ?$$

17. **Quesito** E è un insieme di 28 elementi.

A è un sottoinsieme di E di 19 elementi.

B è un sottoinsieme di E di 23 elementi.

Riempi gli spazi punteggiati con i numeri adatti.

$A \cap B$ ha al massimo ... elementi.

$A \cap B$ ha almeno ... elementi.

$A \cup B$ ha al massimo ... elementi.

$A \cup B$ ha almeno ... elementi.

18. **Quesito** Come già saprai, se E è un insieme, e A un suo sottoinsieme, l'insieme denotato con

$$E \setminus A \quad \text{o anche} \quad \mathcal{C}(A)$$

è il sottoinsieme di E detto

il complementare di A rispetto ad E

ed è definito nel seguente modo

$$E \setminus A = \{x \in E : x \notin A\}$$

Insomma:

$E \setminus A$ è l'insieme di quegli elementi di E che non appartengono ad A .

Chiaramente si ha

$$E \setminus A = \emptyset \Leftrightarrow A = E$$

$$E \setminus A = E \Leftrightarrow A = \emptyset$$

Ora, se A e B sono sottoinsiemi dell'insieme E , precisa, caso per caso, come devono essere A e B perchè risulti, rispettivamente,

(a) $(E \setminus A) \cup (E \setminus B) = E$;

(b) $(E \setminus A) \cap (E \setminus B) = \emptyset$;

(c) $(E \setminus A) \subseteq (E \setminus B)$;

(d) $(E \setminus A) \cup B = E$;

(e) $(E \setminus A) \cap B = \emptyset$.

19. **Quesito** Sono dati i tre insiemi, ciascuno di 3 elementi,

$$A = \{1, 2, 3\}, B = \{4, 5, 6\}, C = \{7, 8, 9\}.$$

Trova quali coppie

$$(f, g)$$

di corrispondenze biunivoche, con

$$f : A \rightarrow B \quad \text{e} \quad g : A \rightarrow C$$

sono compatibili con le seguenti informazioni:

(a) $f(1) \neq 4$;

(b) $g(3) = 7$;

(c) $f^{-1}(5) = g^{-1}(8)$.

Per ogni coppia trovata completa la tabella seguente:

$$f(1) = \dots \quad , \quad g(1) = \dots$$

$$f(2) = \dots \quad , \quad g(2) = \dots$$

$$f(3) = \dots \quad , \quad g(3) = \dots$$

20. **Quesito** Sono dati i due insiemi

$$A = \{1, 2, 3\} \quad \text{e} \quad B = \{0, 4, 6, 8, 15, 19, 24\}$$

Quante corrispondenze $f : A \rightarrow B$ esistono tali che contemporaneamente si abbia

(a) $f(1) \leq f(2) \leq f(3)$

(b) $f(1) + f(2) + f(3) = 38$?

21. **Quesito** È dato l'insieme $E = \{1, 2, 3\}$. Una corrispondenza biunivoca di E in se stesso

$$f : E \rightarrow E$$

prende il nome di

permutazione dei tre oggetti 1,2,3.

Per assegnare una permutazione di 1, 2, 3 si usa, assai opportunamente, il simbolo

$$f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ f(1) & f(2) & f(3) \end{pmatrix}$$

Esempi:

$$f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

$$g = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Quante sono le permutazioni di 1, 2, 3 compresa l'identità?

Costruisci le inverse f^{-1} e g^{-1} , relativamente ai due esempi dati sopra: cosa puoi notare? Di conseguenza si avrà che $f \circ g$ e $g \circ f$ sono entrambe la permutazione

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}$$

Ora considera le due permutazioni

$$p = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad q = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

Costruisci p^{-1} e q^{-1} : cosa puoi notare?

Ci sono altre permutazioni che si comportano come la p e la q ?

Costruisci

$$f_1 = p \circ q \quad \text{e} \quad g_1 = q \circ p$$

Cosa puoi notare?

Se i tuoi conti sono giusti, si può concludere che l'operazione binaria di composizione fra le permutazioni di 1, 2, 3, che non sono altro che le corrispondenze biunivoche di E in se stesso,

non è commutativa.

Cosa si può dire circa l'***associatività*** di questa operazione, detta anche ***prodotto operatorio*** di due permutazioni? Concludi costruendo la tabella dell'operazione binaria di composizione tra le permutazioni di 1, 2, 3: otterrai un modello di

gruppo algebrico non commutativo

forse il primo che ti capita di incontrare.

Dopo aver assunto

$$f_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \quad f_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \quad f_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$f_4 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \quad f_5 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \quad f_6 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

procedi così:

\circ	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5	f_6
f_1	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5	f_6
f_2	f_2					
f_3	f_3					
f_4	f_4			f_1		
f_5	f_5				f_1	
f_6	f_6					f_1

Continua tu e completa la tabella dell'operazione "o".

Perché in ogni riga e in ogni colonna del quadrato dei risultati *non ci sono mai ripetizioni*? Cioè, sia pure in ordine diverso, le permutazioni appaiono ciascuna una volta sola?

Osservando attentamente la tabella dell'operazione di questo gruppo G , cerca di riconoscere qualche sottoinsieme di G che sia un suo

sottogruppo

cioè che sia chiuso rispetto all'operazione "o", contenga l'identità e l'inverso di ogni suo elemento (sicché, considerato isolatamente, è un vero e proprio gruppo algebrico).

Qual è il più piccolo sottoinsieme di G tale che i prodotti tramite "o" dei suoi elementi (anche di un elemento con se stesso) diano tutti gli elementi di G ? Un tale insieme è detto un

sottoinsieme di generatori di G .

22. **Quesito** Se $\mathbb{Q}^+(\times)$ indica il *gruppo moltiplicativo* dei numeri razionali positivi, un suo

sottoinsieme di generatori

è senz'altro l'insieme contenente tutti i numeri interi positivi

$$1, 2, 3, \dots, n, \dots$$

e tutti i reciproci dei numeri interi positivi

$$(1), \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots, \frac{1}{n}, \dots$$

Questo lo riconoscerai assai facilmente. Ma ora ti chiediamo: non esiste un *sottoinsieme di generatori* di $\mathbb{Q}^+(\times)$ che sia *strettamente contenuto* in quello sopra considerato? Anzi, dovresti individuarne uno che sia un *sottoinsieme minimale di generatori* di $\mathbb{Q}^+(\times)$.

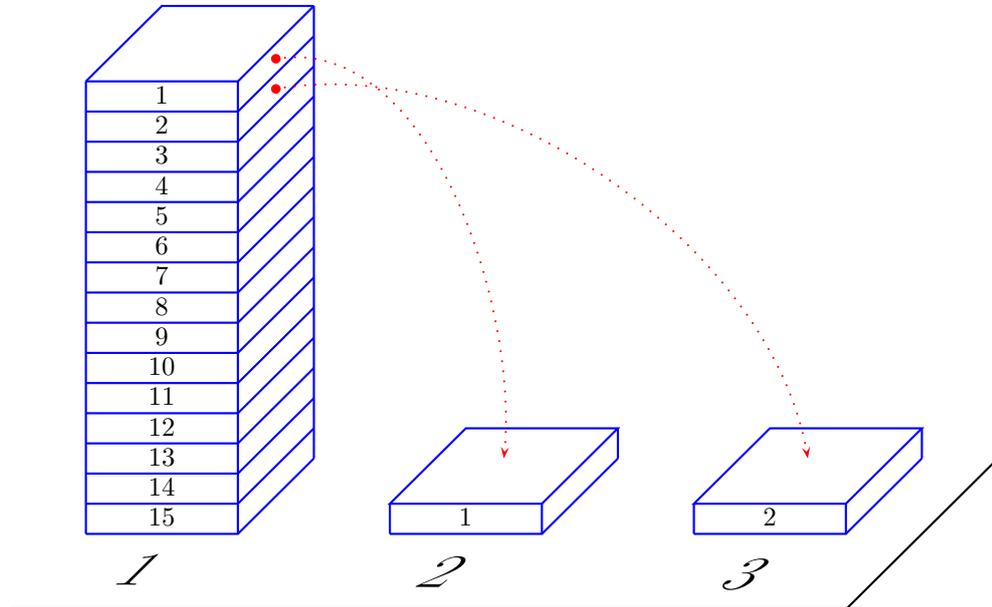
23. **Quesito** Dato un insieme di 4 elementi

$$E = \{x_1, x_2, x_3, x_4\}$$

in quanti modi si può pensare E come unione di due suoi sottoinsiemi A, B , non vuoti e disgiunti?

24. **Quesito** FRATI MONACI - NOTI FARMACI. Queste frasi sensate sono ottenute permutando, in uno degli 11! (39 916 800) modi possibili le lettere del titolo di una scienza modernissima. E chi sa se vi sono altre permutazioni le quali forniscono espressioni che hanno senso compiuto

25. **Quesito** Considera una pila di 15 tavolette numerate come in figura e situate nella posizione numero 1. Attua ora il seguente procedimento: la prima tavoletta la poni al posto 2 alla base di una nuova seconda pila, la seconda tavoletta al posto 3 alla base di una nuova terza pila e procedi alternativamente sino all'esaurimento della prima pila.



Ora con la terza pila procedi in modo analogo, ponendo la prima tavoletta sulla seconda pila, la seconda al posto 1 alla base di una nuova prima pila, fino ad esaurire la terza pila. Ricomincia smontando la nuova prima pila come prima, ecc.

Alla fine tutte le tavolette saranno impilate al secondo posto. Bene: quale numero ha la tavoletta in cima alla pila finale?

1.3 Quesiti a risposta multipla

1. **Quesito** Si consideri la proposizione “Tutti i cani mordono”. Dire che essa è *falsa* equivale a dire che
 - (a) Esiste un cane che non morde.
 - (b) Almeno un cane morde.
 - (c) Al più due cani mordono.
 - (d) Tutti i cani non mordono.
 - (e) Nessun cane morde.

2. **Quesito** Si dice *numero primo* un intero $n > 1$ divisibile solo per sè stesso e per 1. Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere e quali sono false.
 - (a) È necessario e sufficiente essere un dispari diverso da 1 o essere il 2 per essere un primo.
 - (b) Non è sufficiente essere un dispari diverso da 1 per essere un primo.
 - (c) Affinchè un numero sia primo è necessario che sia un dispari diverso da 1 o che sia il 2.

- (d) Non è necessario che un numero sia primo per essere dispari.
 (e) Affinchè un numero sia dispari diverso da 1 è sufficiente che sia un primo diverso da 2.
3. **Quesito** In una scuola il 70% degli studenti studia inglese e l'80% studia francese. Quale percentuale studia entrambe le lingue?
 (a) Non si può rispondere.
 (b) 65%
 (c) 30%
 (d) 50%
 (e) 40%
4. **Quesito** Se in una classe almeno uno studente non sarà promosso, quanti saranno gli studenti promossi?
 (a) Tutti
 (b) Sicuramente nessuno
 (c) Al più tutti meno due
 (d) Al più tutti meno uno
 (e) Sicuramente tutti meno uno
5. **Quesito** Quando è contento Francesco canta. Ne segue
 (a) Oggi Francesco canta, quindi è contento.
 (b) Oggi Francesco non canta, quindi non è contento.
 (c) Il figlio di Francesco ha preso un bel voto in matematica.
 (d) Oggi Francesco non è contento, quindi non canta.
 (e) Oggi Francesco non canta, quindi non si sa se sia contento o no.
6. **Quesito** Quale delle seguenti affermazioni è *errata*?
Affinché due frazioni siano di ugual valore:
 (a) non è necessario che abbiano numeratore e denominatore uguali.
 (b) è necessario e sufficiente che abbiano numeratori e denominatori proporzionali.
 (c) è sufficiente che abbiano lo stesso numeratore e lo stesso denominatore.
 (d) è necessario che abbiano uguale numeratore e denominatore.
 (e) è necessario che abbiano numeratori e denominatori proporzionali.

7. **Quesito** Cinque ragazzi

$$R_1, R_2, R_3, R_4, R_5$$

descrivono il gatto del loro vicino.

- R_1 dice: è *grigio*, con *occhi gialli*, di *2 anni*.
- R_2 dice: è *nero*, con *occhi gialli*, di *2 anni*.
- R_3 dice: è *nero*, con *occhi verdi*, di *3 anni*.
- R_4 dice: è *grigio*, con *occhi verdi*, di *2 anni*.
- R_5 dice: è *grigio*, con *occhi verdi*, di *3 anni*.

Sapendo che

uno solo ha detto il vero

e che ognuno degli altri ha detto

sia cose vere che cose false

individua chi dei cinque ha detto il vero.

8. **Quesito** Se “fare 12 al Totocalcio” significa indovinare 12 risultati e sbagliare il rimanente, quanti 12 si realizzano giocando tutte le combinazioni possibili, ciascuna una sola volta?
- (a) 13
 (b) 32
 (c) 48
 (d) 26
 (e) 64
9. **Quesito** Se nella schedina di qualche Totosport ci fossero solo 5 partite e si potessero usare solo l'1 e il 2, quante schedine diverse si dovrebbero giocare per essere sicuri di fare un 5?
- (a) 25
 (b) 115
 (c) 32
 (d) 64
 (e) 55
10. **Quesito** Sono date tre proposizioni, p_1, p_2, p_3 , di cui si sa che

p_1 è vera, p_2 è vera, p_3 è falsa.

Individua, tra le seguenti proposizioni, quali sono vere e quali sono false (\bar{p} indica la negazione di p).

- (a) $(p_1 \wedge p_2) \vee p_3 \vee (p_2 \wedge p_3)$
 (b) $\{(p_1 \wedge p_2) \vee (p_1 \wedge p_3)\} \wedge \bar{p}_3$
 (c) $(p_1 \wedge p_3) \vee (p_2 \wedge p_3)$
 (d) $(p_1 \vee p_2) \wedge (p_1 \vee p_3)$
 (e) $(\bar{p}_1 \vee p_3) \wedge (p_1 \vee \bar{p}_3)$

Suggerimento Costruisci, con pazienza, le tabelle di verità delle varie proposizioni.

11. **Quesito** Di due uomini si sa che
- uno dei due è *ventenne*, l'altro è *trentenne*;
 - uno dei due è *ricco*, l'altro è *povero*.

Il ventenne dice: “Io sono ricco”.

Il trentenne dice: “Io sono povero”.

Se

almeno uno dei due dice il falso

dire quale delle seguenti affermazioni sono vere.

- (a) Il ricco mente.
- (b) Solo il ricco mente.
- (c) Il ricco è trentenne.
- (d) Mente il ricco e mente il povero.
- (e) Mente il ricco o mente il povero.

12. **Quesito** È data una corrispondenza *suriettiva*

$$f : A \rightarrow B$$

(ricordiamo che ciò significa quanto segue: *ogni elemento di B è l'immagine, tramite f, di qualche elemento di A*).

Se A ha 36 elementi e B ne ha 17, indica, fra le affermazioni seguenti, quelle certamente vere.

- (a) Ogni elemento di B è l'immagine di almeno 2 elementi di A .
- (b) Esiste almeno un elemento di B che è l'immagine di più di 2 elementi di A .
- (c) Può esistere al più un elemento di B che sia l'immagine di un solo elemento di A .
- (d) Un elemento di B può essere l'immagine di al più 20 elementi di A .

13. **Quesito** Sono dati due numeri interi positivi

$$m \text{ ed } n.$$

Decidi quale di queste due implicazioni è vera

- (a) $\frac{m}{n} > 1 \Rightarrow \frac{m}{n} < \frac{m+1}{n+1}$
- (b) $\frac{m}{n} < 1 \Rightarrow \frac{m}{n} < \frac{m+1}{n+1}$

Capitolo 2

Numeri naturali e interi

2.1 Note e osservazioni

2.1.1 Proprietà dell'addizione e moltiplicazione in $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}$

Commutativa

- $x_1 + x_2 = x_2 + x_1, \forall x_1, x_2$
- $x_1 \cdot x_2 = x_2 \cdot x_1, \forall x_1, x_2$

Associativa

- $(x_1 + x_2) + x_3 = x_1 + (x_2 + x_3), \forall x_1, x_2, x_3$
- $(x_1 \cdot x_2) \cdot x_3 = x_1 \cdot (x_2 \cdot x_3), \forall x_1, x_2, x_3$

Distributiva della moltiplicazione rispetto alla somma

- $x_1(x_2 + x_3) = x_1x_2 + x_1x_3, \forall x_1, x_2, x_3$

2.1.2 Relazione di divisibilità in \mathbb{N}

Nell'insieme dei numeri naturali \mathbb{N} si definisce la relazione

$$m \mid n$$

(m divide n , o m è un divisore di n , o n è divisibile per m) ponendo

$$m \mid n \Leftrightarrow \exists q \in \mathbb{N} \text{ tale che } n = mq$$

2.1.3 Teorema fondamentale dell'aritmetica (Euclide)

Teorema Se un numero p è primo, e divide il prodotto $m \cdot n$ di due numeri m ed n , allora p divide almeno uno dei due numeri. In simboli:

$$p \text{ primo} \wedge p \mid (m \cdot n) \Rightarrow (p \mid m) \vee (p \mid n)$$

2.1.4 Divisione con resto negli interi non negativi

Nell'insieme dei numeri interi non negativi $\mathbb{N} \cup \{0\}$ è facile provare che, dati due numeri n, m con $1 \leq m \leq n$, esistono due numeri q, r tali che valga la relazione

$$(*) \quad n = mq + r, \text{ con } 0 \leq r < m$$

e, per di più, la coppia di numeri q, r che realizza $(*)$ è *unica*.

Il numero q si chiama *quoziente (parziale)* mentre il numero r si chiama *resto* della divisione di n per m . È chiaro che

$$m \mid n \Leftrightarrow \text{nella } (*) \text{ il resto è } 0$$

2.1.5 Divisioni successive - M.C.D. - Teorema fondamentale dell'aritmetica

Mostriamo, servendoci di un esempio, il procedimento delle divisioni successive e il suo uso per la ricerca del massimo comun divisore di due numeri.

Consideriamo la coppia di numeri (40278, 8494). Cominciamo con l'eseguire la divisione con resto di 40278 per 8494, ottenendo: $40278 = 8494 \cdot 4 + 6302$ (dunque 4 è il *quoziente* e 6302 è il *resto*). Procediamo eseguendo la divisione con resto tra il divisore precedente (8494) e il resto ottenuto: $8494 = 6302 \cdot 1 + 2192$. Iteriamo il procedimento fin quando troviamo il resto 0. Schematizzando possiamo scrivere:

$$\begin{array}{lclclcl} 1^a \text{ divisione} & : & 40278 & = & 8494 \cdot 4 & + & 6302 \\ 2^a \text{ divisione} & : & 8494 & = & 6302 \cdot 1 & + & 2192 \\ 3^a \text{ divisione} & : & 6302 & = & 2192 \cdot 2 & + & 1918 \\ 4^a \text{ divisione} & : & 2192 & = & 1918 \cdot 1 & + & 274 \\ 5^a \text{ divisione} & : & 1918 & = & 274 \cdot 7 & + & 0 \end{array}$$

Il numero 274, *ultimo resto non nullo della serie di divisioni successive* è il

Massimo Comun Divisore dei due numeri dati

e si scrive:

$$274 = M.C.D.(40278, 8494)$$

Vediamone il perché. Cominciamo col provare che 274 è un divisore comune di 40278 e di 8494. Se esaminiamo le divisioni scritte possiamo dedurre, risalendo dall'ultima alla prima, che

$$\begin{array}{l} 274 \mid 1918 \\ 274 \mid 274 \wedge 274 \mid 1918 \Rightarrow 274 \mid 2192 \\ 274 \mid 1918 \wedge 274 \mid 2192 \Rightarrow 274 \mid 6302 \\ 274 \mid 2192 \wedge 274 \mid 6302 \Rightarrow 274 \mid 8494 \\ 274 \mid 6302 \wedge 274 \mid 8494 \Rightarrow 274 \mid 40278 \end{array}$$

Questo basta per concludere che 274 è un divisore comune di 40278 e di 8494.

Per provare che è il massimo dei divisori comuni, basterà dimostrare che ogni altro divisore, d , dei due numeri dati divide anche 274:

$$d \mid 40278 \wedge d \mid 8494 \Rightarrow d \mid 274$$

La cosa si fa agevolmente ridiscendendo la serie di divisioni del processo, dalla prima alla quarta.

$$\begin{aligned} d \mid 40278 \wedge d \mid 8494 &\Rightarrow d \mid 6302 \\ d \mid 8494 \wedge d \mid 6302 &\Rightarrow d \mid 2192 \\ d \mid 6302 \wedge d \mid 2192 &\Rightarrow d \mid 1918 \\ d \mid 2192 \wedge d \mid 1918 &\Rightarrow d \mid 274 \end{aligned}$$

Se la penultima divisione del processo dà come resto 1, allora la coppia (m, n) di numeri in questione ha come Massimo Comun Divisore 1, e si dice che

m ed n sono **primi tra di loro** (inglese **coprimes**).

E' interessante osservare come la tecnica delle divisioni successive possa essere usata per la dimostrazione del *Teorema fondamentale dell'aritmetica*; è in effetti proprio così che fece Euclide.

Sia allora p un primo che divide il prodotto mn di due naturali m ed n : vogliamo provare che $p \mid m \vee p \mid n$.

Supponiamo che p non divida m ($p \nmid m$), allora applicando le divisioni successive nella penultima divisione otterremo resto 1 (in quanto 1 è il M.C.D. tra p ed m). Si può compilare il seguente schema:

$$\begin{array}{llll} 1^a \text{ divisione} & : & m & = & p \cdot q_1 & + & r_1 \\ 2^a \text{ divisione} & : & p & = & r_1 \cdot q_2 & + & r_2 \\ 3^a \text{ divisione} & : & r_1 & = & r_2 \cdot q_3 & + & r_3 \\ \dots & : & \dots & = & \dots & + & \dots \\ (h-1)^a \text{ divisione (penultima)} & : & r_{h-2} & = & r_{h-1} \cdot q_h & + & 1 \\ h^a \text{ divisione (ultima)} & : & r_{h-1} & = & r_{h-1} \cdot 1 & + & 0 \end{array}$$

Moltiplichiamo le relazioni precedenti (tranne l'ultima) per n , ottenendo:

$$\begin{aligned} m \cdot n &= (p \cdot n) \cdot q_1 + r_1 \cdot n \\ p \cdot n &= (r_1 \cdot n) \cdot q_2 + r_2 \cdot n \\ r_1 \cdot n &= (r_2 \cdot n) \cdot q_3 + r_3 \cdot n \\ \dots &= \dots + \dots \\ r_{h-2} \cdot n &= (r_{h-1} \cdot n) \cdot q_h + 1 \cdot n \end{aligned}$$

Si ricava poi successivamente:

$$\begin{array}{llll} \text{dalla prima riga} & p \mid (m \cdot n) \text{ (per ipotesi)} \wedge p \mid (p \cdot n) & \Rightarrow & p \mid (r_1 \cdot n) \\ \text{dalla seconda riga} & p \mid (p \cdot n) \wedge p \mid (r_1 \cdot n) & \Rightarrow & p \mid (r_2 \cdot n) \\ \text{dalla terza riga} & p \mid (r_1 \cdot n) \wedge p \mid (r_2 \cdot n) & \Rightarrow & p \mid (r_3 \cdot n) \\ \dots & \dots & \Rightarrow & \dots \\ \text{dall'ultima attuale riga} & p \mid (r_{h-2} \cdot n) \wedge p \mid (r_{h-1} \cdot n) & \Rightarrow & p \mid n \end{array}$$

Possiamo dunque concludere che se p non divide m deve dividere n : la conclusione è così raggiunta.

2.2 Quesiti a risposta aperta

1. **Quesito** Trova quali delle seguenti affermazioni si possono dedurre basandosi unicamente sulla proprietà *commutativa* dell'addizione e della moltiplicazione fra numeri interi positivi (o naturali).

(a) $n_1 + n_2 + n_3 = n_3 + n_2 + n_1, \forall n_1, n_2, n_3 \in \mathbb{N}$

(b) $n_1 \cdot n_2 \cdot n_3 = n_3 \cdot n_2 \cdot n_1, \forall n_1, n_2, n_3 \in \mathbb{N}$

(c) $n_1(n_2 + n_3) = (n_3 + n_2)n_1, \forall n_1, n_2, n_3 \in \mathbb{N}$

(d) $\exists n_1, n_2, n_3, n_4 \in \mathbb{N}$ tali che $n_1 + n_2 + n_3 + n_4 = n_4 + n_3 + n_2 + n_1$

(e) $\exists n_1, n_2, n_3, n_4 \in \mathbb{N}$ tali che $n_1 \cdot n_2 \cdot n_3 \cdot n_4 = n_4 \cdot n_3 \cdot n_2 \cdot n_1$

2. **Quesito** Basandoti unicamente sulle proprietà *commutativa e associativa* dell'addizione e della moltiplicazione fra numeri interi positivi (o naturali) dimostrare che

(a) cambiando l'ordine degli addendi di una addizione di r numeri la loro somma non cambia;

(b) cambiando l'ordine degli addendi di una moltiplicazione di r numeri il loro prodotto non cambia.

Suggerimento Comincia a considerare il caso $r = 3$.

3. **Quesito** Nell'insieme degli interi relativi \mathbb{Z} , con il simbolo $-z$ si indica quel numero tale che

$$z + (-z) = (-z) + z = 0$$

Come mai tale numero è unico? Ovvero: perché se z' e z'' sono due interi e per entrambi risulta

$$z + z' = z' + z = 0 = z + z'' = z'' + z$$

ne segue che $z' = z''$?

4. **Quesito** Trova perché, restando nell'ambito dei numeri naturali \mathbb{N} , valgono le doppie implicazioni

$$m + n_1 = m + n_2 \Leftrightarrow n_1 = n_2$$

$$n_1 < n_2 \Leftrightarrow m + n_1 < m + n_2$$

Suggerimento Ricorda cosa significa $n_1 < n_2$.

5. **Quesito** Utilizzando la proprietà distributiva della moltiplicazione rispetto alla somma in \mathbb{Z} prova la proprietà distributiva della moltiplicazione rispetto alla differenza, ovvero che

$$z_1(z_2 - z_3) = z_1z_2 - z_1z_3, \forall z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{Z}$$

6. **Quesito** Dimostra che la relazione $m \mid n$ nell'insieme dei numeri naturali \mathbb{N} è *riflessiva e transitiva*. Quale altra relazione riflessiva e transitiva è definita in \mathbb{N} ? Indica la differenza sostanziale tra le due relazioni.

7. **Quesito** Alla luce della relazione di divisibilità in \mathbb{N} , descrivi il concetto di *numero primo* e di coppia di numeri *primi tra di loro*.

8. **Quesito** Dimostra direttamente il teorema fondamentale dell'aritmetica nel caso dei primi 3 numeri primi, ovvero 2, 3, 5.
9. **Quesito** Esegui la divisione con resto (eventualmente aiutandoti con una calcolatrice) delle seguenti coppie di numeri (12328, 312513), (1051, 81075), (2137, 27781).
10. **Quesito** Enuncia il *criterio di divisibilità* per 3. Saresti in grado di giustificarlo? Normalmente questo criterio si considera come una *condizione sufficiente* perché un numero sia divisibile per 3. Secondo te è anche una *condizione necessaria*? Cioè se un numero è divisibile per 3, di necessità il numero che è la somma delle sue cifre è divisibile per 3?
11. **Quesito** Utilizzando l'algoritmo di Euclide delle divisioni successive, trova il *M.C.D.* delle seguenti coppie di numeri:
- (444444, 120731)
 - (43741, 22607)
 - (67609, 25092)
12. **Quesito** Utilizzando il teorema fondamentale dell'Aritmetica dimostra l'unicità della decomposizione di un numero intero positivo nel prodotto di potenze di numeri primi, considerando il caso particolare

$$n = p_1^{r_1} \cdot p_2^{r_2}$$

con p_1 e p_2 numeri primi ed r_1 e r_2 numeri interi positivi: perché n è esprimibile solo nel modo indicato?

Suggerimento Supponi il contrario e fai ricorso al Teorema fondamentale dell'aritmetica nei vari casi possibili.

13. **Quesito** Esistono coppie (m, n) di numeri naturali tali che

$$m \neq n \quad \wedge \quad m^n = n^m \quad ?$$

E se i due numeri appartenessero a \mathbb{Z} , vi sarebbero altre soluzioni?

14. **Quesito** I sottoinsiemi di 3 elementi di un insieme E di 5 elementi sono tanti quanti i sottoinsiemi di E di 2 elementi; dette rispettivamente \mathfrak{F}_2 e \mathfrak{F}_3 le famiglie dei sottoinsiemi di E con 2 e 3 elementi, costruisci una corrispondenza biunivoca $\mathfrak{F}_2 \leftrightarrow \mathfrak{F}_3$.
Generalizza il risultato precedente al caso di un insieme E di n elementi: il numero dei sottoinsiemi di E di k elementi è uguale al numero dei sottoinsiemi di E di \dots elementi.
15. **Quesito** Se un numero n è divisibile per 6615 e per 33957 qual è il massimo numero per cui esso sarà certamente divisibile?
16. **Quesito** Qual è il primo numero intero positivo tale che l'implicazione

$$2^n > n^2 \Rightarrow 2^{n+1} > (n+1)^2$$

risulta vera?

17. **Quesito** È vero che $n^2 - 9n + 20$ è sempre un numero positivo pari?
E $n^2 - 9n + 14$?
18. **Quesito** Calcola il *m.c.m.*(43401, 45103). Ricorda che *m.c.m.* sta per *minimo comune multiplo* ed è il più piccolo intero positivo multiplo comune dei due numeri dati.
- Suggerimento** Ricorda la relazione che lega il *m.c.m.* e il *M.C.D.* di due numeri.
19. **Quesito** In un club l'età media degli iscritti è di 38 anni. L'età media dei maschi è di 40 anni, quella delle femmine di 35 anni. Quanti sono i maschi, se le femmine sono 80?
20. **Quesito** Trova le coppie (m, n) di numeri interi positivi tali che $m^2 - n^2 = 21$.
21. **Quesito** Trova le coppie (m, n) di numeri interi positivi tali che $m^2 - n^2 = 105$.
22. **Quesito** Considera i numeri naturali del tipo $2^{2n-1}, \forall n \in \mathbb{N}$; se questi numeri sono espressi nel sistema decimale, per quali valori di n l'ultima loro cifra è il 2? Per gli altri valori di n , cosa si può dire dell'ultima cifra di 2^{2n-1} ?
23. **Quesito** Considera i numeri naturali del tipo $3^{2n-1}, \forall n \in \mathbb{N}$; se questi numeri sono espressi nel sistema decimale, per quali valori di n l'ultima loro cifra è il 3? Per gli altri valori di n , cosa si può dire dell'ultima cifra di 3^{2n-1} ? Qual è l'ultima cifra di ogni numero naturale del tipo $2^{2n-1} + 3^{2n-1}, \forall n \in \mathbb{N}$?
24. **Quesito** Trova i numeri di sei cifre $abcdef$ tali che $abcdef \cdot 3 = bcdefa$.
25. **Quesito** Se un anno è non bisestile e comincia con un martedì, con che giorno finirà? Quanti martedì ha quell'anno? E quanti lunedì?
26. **Quesito** Di una coppia di numeri interi (m, n) , con $m < n$, si sa che

$$\begin{aligned} M.C.D.(m, n) &= 21 \\ m.c.m.(m, n) &= 255\,255 \end{aligned}$$

e che, inoltre, m ed n hanno ciascuno 4 fattori primi semplici. Determina tutte le coppie (m, n) con queste proprietà.

27. **Quesito** Le facce di tre dadi sono numerate rispettivamente da 1 a 6, da 7 a 12, da 13 a 18. Qual è la totalità delle combinazioni che si ottengono tirando i tre dadi? Qual è la probabilità di ottenere, come somma dei tre numeri uscenti, il 35?
28. **Quesito** Esistono coppie (z_1, z_2) di numeri interi relativi soddisfacenti l'equazione

$$z_1 z_2 - 7z_2 + z_1 - 6 = 0?$$

Se sì, trovale tutte.

29. **Quesito** Risolvi senza la calcolatrice è in non più di 5 secondi il seguente quesito

7776 è la quinta potenza di ...

30. **Quesito** Per quali valori di $n \in \mathbb{N}$ accade che il numero

$$12n - 11$$

è il quadrato di un numero intero (positivo dispari)?

Suggerimento Poni $12n - 11 = (2p + 1)^2$.

31. **Quesito** Prova che, se n è un numero intero positivo, vale la seguente implicazione

$$n^{n+1} > (n + 1)^n \quad \Rightarrow \quad (n + 1)^{n+2} > (n + 2)^{n+1}$$

Sulla base di questo risultato trova per quali $n \in \mathbb{N}$ vale la disuguaglianza

$$n^{n+1} > (n + 1)^n.$$

Soluzione Si può procedere per assurdo, supponendo $(n + 2)^{n+1} \geq (n + 1)^{n+2}$. In base all'ipotesi si avrebbe allora:

$$\begin{cases} (n + 2)^{n+1} \geq (n + 1)^{n+2} \\ n^{n+1} > (n + 1)^n \end{cases} \Rightarrow (n(n + 1))^{n+1} > (n + 1)^{2n+2}$$

$$(n^2 + 2n)^{n+1} > (n + 1)^2)^{n+1}$$

Da quest'ultima disuguaglianza seguirebbe poi

$$n^2 + 2n > (n + 1)^2 = n^2 + 2n + 1,$$

palesamente assurda. . . . Ora prosegui tu.

32. **Quesito** Qual è il massimo numero di fattori primi distinti che può avere un numero intero positivo minore od uguale a 10^6 ?

33. **Quesito** Ogni numero intero $n \geq 2$ è, come è ben noto, esprimibile in **modo unico** come prodotto di potenze di fattori primi

$$n = p_1^{r_1} p_2^{r_2} \cdots p_h^{r_h} \quad (h \geq 1).$$

Qual è il massimo valore che può raggiungere la somma

$$r_1 + r_2 + \cdots + r_h$$

per i numeri n compresi tra 2 e 10^6 , che siano prodotti di potenze dei tre numeri 2, 3, 5?

34. **Quesito** Trova i numeri di 6 cifre del tipo

$$560aba$$

che sono divisibili per 11.

(N.B. Un numero è divisibile per 11 se e solo se la differenza della somma delle cifre di posto dispari e di posto pari è divisibile per 11).

35. **Quesito** Il numero 1729 è somma di due cubi:

$$1729 = 1000 + 729 = 10^3 + 9^3.$$

Esso è anche somma di altri due cubi: trovali.

Data la scomposizione $1729 = 1000 + 729 = 10^3 + 9^3$, ne segue che 1729 è divisibile per 19, perché?

36. **Quesito** La differenza dei cubi di due numeri interi positivi m, n può essere il cubo di un numero primo p

$$m^3 - n^3 = p^3 \quad ?$$

37. **Quesito** Considera gli insiemi di numeri interi

$$\{6h + 1, h = 0, 1, 2, \dots\}, \{6h + 3, h = 0, 1, 2, \dots\}, \{6h + 5, h = 0, 1, 2, \dots\}$$

Riconosci che la loro unione dà l'insieme di tutti gli interi positivi dispari.

Prova che ogni quadrato di un numero dispari $d \in \mathbb{N}$ si può scrivere sotto la seguente forma

$$12n - 11 \quad (n \in \mathbb{N})$$

a meno che non sia $d \in \{6h + 3, h = 0, 1, 2, \dots\}$.

38. **Quesito** Considera la seguente successione di numeri (razionali)

$$1, \frac{1}{2}, 2, \frac{1}{3}, 3, \frac{1}{3}, \dots, \frac{1}{n}, n, \dots$$

Quale posto occupa nella successione il numero $\frac{1}{999}$?

39. **Quesito** Trova con quanti zeri finisce il prodotto dei primi 50 numeri interi, cioè il numero $50!$

40. **Quesito** Dimostra che non esiste alcuna coppia (x, y) di \mathbb{Z}^2 che verifichi l'equazione

$$24x + 15y = 11.$$

41. **Quesito** Prova che il numero

$$n(n^2 + 8)$$

è un multiplo di 3, per ogni $n \in \mathbb{N}$.

Suggerimento Se $3 \mid n$ la cosa è ovvia; se $3 \nmid n$, allora n è del tipo \dots , o del tipo \dots , e dunque \dots .

42. **Quesito** Prova che il numero

$$n^5 - n$$

termina con almeno uno zero, per ogni $n \in \mathbb{N}$.

Trova poi il più piccolo n tale che $n^5 - n$ sia divisibile per 10^2 .

È ovvio che

$$1000^5 - 1000$$

è divisibile per 10^3 : secondo te esiste $n < 1000$ tale che $n^5 - n$ sia divisibile per 10^3 ?

La prima parte di questo quesito prova, in sostanza, che i numeri n ed n^5 terminano con la stessa cifra. Qual è la regola invece per l'ultima cifra di

$$n^3,$$

in relazione all'ultima cifra di n ?

43. **Quesito** Come si deve scegliere l'intero $n \geq 0$ affinché il numero

$$\frac{n+1}{n-2}$$

sia intero relativo?

44. **Quesito** Trova le soluzioni appartenenti a \mathbb{Z} del sistema di disequazioni

$$\begin{cases} \frac{z}{2} - 1 < z - 3 \\ 2z - 6 \leq z \end{cases}$$

45. **Quesito** Si dice *unitario* un numero che, in base 10, ha tutte le cifre uguali ad 1. Trova un multiplo unitario di 39 e di 91. Trova i sottomultipli del numero unitario 11111.

46. **Quesito** I numeri m ed n sono interi positivi tali che

$$m^3 = n^2.$$

Cosa si può dire del loro *massimo comun divisore* e del loro *minimo comune multiplo*?

47. **Quesito** Trova il numero che, moltiplicato per 23, dà il risultato indicato

$$\begin{array}{r} \dots \times \\ 23 = \\ \hline 100\,000\,000\,001 \end{array}$$

48. **Quesito** Sia n un numero di più di 1 cifra, con l'ultima cifra uguale a 5:

$$n = a_1 a_2 \cdots a_h 5 \quad (h \geq 1).$$

Considera il numero $a_1 a_2 \cdots a_h$ e il suo successivo $a_1 a_2 \cdots a_h + 1$. Indichiamo con $b_1 b_2 \cdots b_k$ il prodotto

$$b_1 b_2 \cdots b_k = (a_1 a_2 \cdots a_h)(a_1 a_2 \cdots a_h + 1).$$

Prova che per il quadrato di n vale l'espressione

$$n^2 = b_1 b_2 \cdots b_k 25.$$

Puoi preventivamente effettuare delle prove utilizzando una calcolatrice.

49. **Quesito** Un numero intero si dice *novenario* se tutte le sue cifre (in base 10) sono uguali a 9: 9, 99, 999, ecc.. Trova un multiplo novenario di ciascuno dei seguenti numeri

$$7, 13, 17, 37.$$

50. **Quesito** È dato un triangolo rettangolo *pitagorico*, cioè con i lati di misure intere, ad esempio 3, 4, 5 ($3^2 + 4^2 = 5^2$). Se a e b sono le misure dei cateti di tale triangolo, uno dei seguenti numeri interi (con eventualmente $a - b$ negativo)

$$a, b, a - b, a + b$$

è divisibile per 7. (Nell'esempio sopra proposto $7 \mid a + b = 3 + 4 = 7$). La dimostrazione di questa curiosa proprietà non è banale e ti proponiamo qui solo alcune idee.

Comincia con il tenere presente che tutte le coppie di misure intere di cateti di triangoli pitagorici si ottengono dalla semplice formula

$$(*) \quad (m^2 - n^2, 2mn), \quad \forall m, n \in \mathbb{N}, m > n$$

Puoi verificare che la somma dei quadrati dei due elementi della coppia è un quadrato perfetto, la cui base dà la misura dell'ipotenusa del relativo triangolo pitagorico.

Nell'esempio del triangolo di lati 3, 4, 5, basta scegliere nella (*) $m = 2$ ed $n = 1$:

$$3 = 2^2 - 1^2, \quad 4 = 2 \cdot (2 \cdot 1)$$

Scegliendo $m = 5$ ed $n = 3$ si trova $a = 16$ e $b = 30$. Si ha poi $7 \mid a - b = -14$.

Scegliendo $m = 9$ ed $n = 5$ si trova $a = 56$ e $b = 90$. Si ha poi $7 \mid a$.

Scegliendo $m = 11$ ed $n = 6$ si trova $a = 85$ e $b = 132$. Si ha poi $7 \mid a + b = 217$.

Se vuoi proseguire

51. **Quesito** Esistono numeri interi positivi n tali che

$$n^3 + n$$

sia, a sua volta, il cubo di un intero positivo?

52. **Quesito** Riconosci che, se m, n, q sono interi positivi, risulta

$$mn = q^2$$

se e solo se esistono interi positivi m_1, n_1, q_1 con $q_1 = 1$, oppure q_1 intero *primario* (cioè prodotto di numeri primi distinti), tali che

$$m = m_1^2 q_1, \quad n = n_1^2 q_1.$$

q_1 è forse il *M.C.D.*(m, n)?

53. **Quesito** È dato un numero intero positivo n . Il numero m sia un intero positivo tale che

$$n = mq - s, \quad \text{con } 0 \leq s \leq m.$$

Quali sono il quoziente e il resto della divisione di n per m ?

54. **Quesito** È dato un numero intero m tale che il resto della sua divisione per 7 è 2:

$$m = 7 \cdot q + 2.$$

Trova i quozienti e resti della divisione di m^2 e di m^3 per 7.

55. **Quesito** La divisione di un numero intero positivo n per l'intero positivo $m (> 1)$, dà come resto 1:

$$n = mq + 1.$$

Come risultano i resti della divisione per m di

$$n^2, n^3, \dots, n^r, \dots ?$$

56. **Quesito** Riconosci che ogni numero del tipo

$$(500 \cdot n + 38)^2, \quad n \in \mathbb{N}$$

ha gli ultimi tre numeri della sua scrittura in base dieci che sono uguali a 4.

57. **Quesito** Qual è la massima potenza di 2 che divide

$$(500 \cdot n + 38)^n, \quad n \in \mathbb{N}$$

per ogni assegnato $n \in \mathbb{N}$?

58. **Quesito** Per quali $n \in \mathbb{N}$ il numero

$$(500 \cdot n + 38)^{19}, \quad n \in \mathbb{N}$$

è divisibile per 19?

Esiste n per cui questo numero è divisibile per 19^{19} ?

Esiste n per cui questo numero è divisibile per 19^{20} ?

59. **Quesito** Il numero 979 è somma di 5 quarte potenze: trovale (problema molto semplice: usa la calcolatrice).

60. **Quesito** Il numero 1553 è somma di 3 quarte potenze: trovale.

61. **Quesito** Qual è il numero intero (espresso nel sistema decimale) che in base 12 si rappresenta con la cifra

$$1000 ?$$

E il numero intero 2768 come si rappresenta in base 12?

62. **Quesito** Moltiplica due numeri interi consecutivi, così:

$$n(n+1) \quad , \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

Il numero che ottieni può essere il quadrato di un numero intero?

63. **Quesito** Moltiplica tre numeri interi consecutivi, così:

$$n(n+1)(n+2) \quad , \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

Il numero che ottieni può essere il cubo di un numero intero?

Suggerimento Se fosse $n(n+1)(n+2) = m^3$, ne seguirebbe $m^3 - n^3 = 3n^2 + 2n$, ovvero $(m-n)(m^2 + mn + n^2) = 3n^2 + 2n$. Ma $m > n+1$, cosa che puoi provare, e dunque

64. **Quesito** Trova un intero n con le seguenti proprietà.

- (a) diviso per 2, dà resto 1;
- (b) diviso per 3, dà resto 2;
- (c) diviso per 4, dà resto 3;
- (d) diviso per 5, dà resto 4;
- (e) diviso per 6, dà resto 5;
- (f) diviso per 7, dà resto 0;

Risulta unico il numero richiesto con tali proprietà?

65. **Quesito** Trova tutte le coppie di numeri interi relativi che soddisfano l'equazione $7x - 6y = 0$. Quindi, considerata l'equazione

$$(*) \quad 7x - 6y = 5$$

che ha come soluzione la coppia di numeri

$$(17, 19),$$

valuta se $(*)$ ha altre coppie di numeri interi relativi che siano sue soluzioni.

66. **Quesito** Prova che il numero

$$n^3 + 11n, \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

è sempre divisibile per 2 e per 3.

67. **Quesito** Scomponi nel prodotto di potenze di fattori primi il numero

$$(4620)^{12}.$$

68. **Quesito** Se n è un intero pari, individua, al variare di n , quali delle seguenti proposizioni sono sempre vere, quali possono essere vere, quali sono sempre false.

- (a) $\frac{n^{10}}{1024}$ è un intero dispari.
- (b) $\frac{n^{11}}{1024}$ è un intero pari.
- (c) $\frac{n^9}{1024}$ non è mai un numero intero.
- (d) $\frac{n^{10}}{1024}$ è intero dispari $\Rightarrow \frac{n^9}{1024}$ non è intero.

69. **Quesito** Il numero intero

$$3n^2 + m^2,$$

con la condizione $0 < m < n$, può essere un quadrato perfetto? Osserva: se trovi un esempio ne trovi subito infiniti altri!

70. **Quesito** Completa il quadrato magico seguente con numeri interi positivi, in modo che la sua *costante* sia 30: la costante di un quadrato magico è il valore sempre uguale della somma degli elementi di una qualunque riga, di una qualunque colonna e delle due diagonali.

11	x_1	x_2
x_3	x_4	18
x_5	4	x_6

Di fronte a un problema del genere *non procedere a casaccio*. Devi risolvere un problema di matematica con sei incognite: chiama queste incognite (come suggerito dallo schema del quadrato magico) con

$$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6$$

Traduci le condizioni in sei equazioni lineari e risolvi *con ordine e con calma* il sistema lineare che hai così costruito.

In questo caso, in effetti, se riesci a trovare il valore anche di una sola delle incognite, la soluzione del problema è poi di facilissimo completamento.

A problema risolto, potrai costruire infiniti quadrati magici con costante S un numero qualunque del tipo

$$S = 3h \quad , \quad \text{con } h = 9, 11, 12, \dots$$

Come?

71. **Quesito** Un

quadrato pseudo-magico

è uno schema come il seguente

x_1	x_2	x_3
x_4	x_5	x_6
x_7	x_8	x_9

dove x_i , per $i = 1, 2, \dots, 9$, sono *numeri interi relativi* e la condizione è che

*la somma dei numeri di ciascuna delle tre righe,
di ciascuna delle tre colonne,
e di ciascuna delle due diagonali*

sia sempre lo stesso numero (intero relativo) S detto la costante del quadrato.

Le condizioni imposte si traducono subito in un sistema lineare in 9 incognite, con i termini noti tutti uguali a S .

Redigi questo sistema, mantenendo l'incolonnamento delle incognite: è una procedura di cui imparerai a suo tempo la grande utilità.

È impresa un po' impegnativa, ma tutt'altro che difficile, riconoscere che S deve essere *un intero relativo multiplo di 3*:

$$S = 3h, \quad \forall h \in \mathbb{Z}$$

Con ciò, ecco la soluzione generale del problema, dipendente da ben 3 *parametri interi relativi* α, β, h e dove, come potrai direttamente constatare, è $S = 3h$.

$2h - \beta$	$2h - \alpha$	$-h + \alpha + \beta$
$-2h + \alpha + 2\beta$	h	$4h - \alpha - 2\beta$
$3h - \alpha - \beta$	α	β

Ora prova a costruire qualche

quadrato magico vero

cioè formato tutto da numeri interi positivi. Tra questi ultimi sono apprezzati quelli nei quali i nove numeri sono a due a due distinti e, ancor più, quelli i cui 9 numeri costituenti sono 9 numeri interi consecutivi (ovviamente disposti in modo opportuno nel quadrato stesso). Sai già (vedi quesito 70 di questo stesso capitolo), costruito uno di questi quadrati, costruirne infiniti altri con le stesse prerogative.

Ora scopri qual è il valore minimo della *costante* $S = 3h$

- (a) per un quadrato magico vero;
- (b) per un quadrato magico con almeno due numeri distinti;
- (c) per un quadrato magico con almeno 3 numeri distinti;
- (d) per un quadrato magico con gli elementi distinti a due a due;
- (e) per un quadrato magico con gli elementi che sono 9 numeri consecutivi.

72. **Quesito** Dato un numero di tre cifre

$$abc = 100a + 10b + c$$

e considerato il numero

$$cab = 100c + 10a + b$$

dimostra la seguente implicazione

$$27 \mid abc \Rightarrow 27 \mid cab$$

Osservazione Questa implicazione vale anche se

$$c = 0$$

e cab si interpreta come il numero di due cifre

$$ab$$

anzi, vale anche se è $a = 0$, e il numero abc si interpreta come il numero di due cifre

$$bc$$

L'implicazione può applicarsi di nuovo a cab , dando di conseguenza che

$$27 \mid bca$$

Si osservi che il numero

$$cab$$

è ottenuto per *permutazione circolare* delle cifre di abc , e che il numero

$$bca$$

è analogamente ottenuto da cab . Per *permutazione circolare* si intende quella nella quale la 1^a cifra va al 2^o posto, la 2^a al 3^o, e la 3^a al 1^o.

73. **Quesito** Considera il seguente esempio

$$324 + 108 = 432$$

il quale si può commentare dicendo che

324 è un numero di 3 cifre, divisibile per 3, il quale, sommato alla sua terza parte, 108, dà il numero che si ottiene permutando circolarmente le cifre di 324, cioè 432.

Ci sono altri sette esempi di questo tipo: trovine qualcuno, e magari tutti

Suggerimento La proprietà descritta equivale alla seguente

$$3(abc) + abc = 3(cab)$$

che, riscritta così

$$abc = 3(cab - abc)$$

ci informa che abc è divisibile addirittura per . . . e dunque che $\frac{1}{3}(abc)$ è divisibile anch'esso per . . . e il traguardo è ormai vicino.

74. **Quesito** Verifica i seguenti calcoli

$$\begin{aligned} (10^1 + 1) \cdot 9 &= 99 \\ (10^2 + 1) \cdot 99 &= 9999 \\ (10^3 + 1) \cdot 999 &= 999999 \\ &\vdots \\ &\vdots \\ &\vdots \\ &\text{ecc.} \end{aligned}$$

Dopo aver convenuto di indicare il *numero novenario* di n cifre (tutte uguali al numero 9) col simbolo

$$\binom{(n)}{9},$$

si tratterebbe di provare la formula generale

$$(*) \quad (10^n + 1) \cdot \binom{(n)}{9} = \binom{(2n)}{9}, \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

e questo può essere fatto **per induzione** su n , procedimento che consiste di due momenti:

- (a) verifica della (*) per $n = 1$ (cosa già fatta);
- (b) dimostrazione dell'implicazione

$$(10^n + 1) \cdot \binom{(n)}{9} = \binom{(2n)}{9} \Rightarrow (10^{n+1} + 1) \cdot \binom{(n+1)}{9} = \binom{(2(n+1))}{9}$$

Come sappiamo questa implicazione procede supponendo la verità della “*premessa*” e deducendone la verità della “*conseguenza*”.

Un suggerimento per iniziare bene:

$$(10^{n+1} + 1) \cdot \binom{(n+1)}{9} = [10^n \cdot 10 + 1] \binom{(n)}{9} \cdot 10 + 9 = \dots$$

ora procedi tu, tenendo conto che $\binom{(m)}{9} \cdot 100 + 99 = \binom{(m+2)}{9} \dots$

75. **Quesito** Quali sono i numeri interi positivi ≤ 20 che non hanno un multiplo che sia *novenario* (cioè formato da cifre tutte uguali a 9)?

76. **Quesito** Per ogni valore dei parametri

$$S, a$$

variabili ad arbitrio nell'insieme \mathbb{Z} degli interi relativi, il seguente è un quadrato (in genere) pseudo-magico 4×4 con

costante S ,

come verificherai senz'altro:

9	4	$S - 13 - a$	a
$a - 10$	$S - 3 - a$	10	3
12	1	$a - 8$	$S - 5 - a$
$S - 11 - a$	$a - 2$	11	2

Ora devi trovare

- il valore minimo che deve avere S per un quadrato magico del tipo sopra indicato;
- il valore minimo che deve avere S per un quadrato magico del tipo sopra indicato, ma con i 16 elementi tutti diversi tra loro.

77. **Quesito** Considera il seguente quadrato

$-10 + a + b$	17	$17 - b$	$14 - a$
10	$21 - a - b$	$6 + b$	$1 + a$
$20 - a$	a	11	7
$18 - b$	b	4	16

Al variare della coppia di numeri interi relativi (a, b) , questo è in genere un quadrato pseudo-magico di costante 38, come verificherai immediatamente.

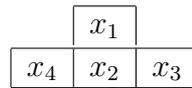
Trova ora

- per quali coppie (a, b) si ottiene un quadrato magico;
- per quali coppie (a, b) si ottiene un quadrato magico con i 16 elementi a due a due distinti;
- per quali coppie (a, b) si ottiene un quadrato magico con i 16 elementi che sono 16 numeri consecutivi.

78. **Quesito** Stabilisci, per ogni tipo di *quadrato magico* (q.m.) sotto elencato, qual è il *valore minimo* della relativa costante:

- q.m. 3×3 con almeno due elementi distinti;
- q.m. 3×3 con almeno tre elementi distinti;
- q.m. 4×4 con almeno due elementi distinti;
- q.m. 4×4 con almeno tre elementi distinti.

79. **Quesito** Lo schema che vedi



rappresenta 4 scatole di base quadrata, e facce laterali rettangolari, disposte come in figura.

In ogni scatola è contenuto un biglietto con su scritto un numero intero relativo, indicato rispettivamente con x_1, x_2, x_3, x_4 . La regola che si è imposto chi ha costruito questa struttura geometrico-algebrica è quella appresso descritta:

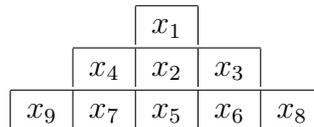
il numero che sta in una data scatola deve essere sempre la somma di quelli che stanno nelle scatole con essa interfacciate, aumentati di 2 se l'interfaccia è quadrata, di 1, invece, se l'interfaccia è rettangolare.

Avrà impostato quindi questo sistema di equazioni:

$$\begin{cases} x_1 = x_2 + 2 \\ x_2 = (x_1 + 2) + (x_3 + 1) + (x_4 + 1) \\ x_3 = x_2 + 1 \\ x_4 = x_2 + 1 \end{cases}$$

che tu risolverai. È un sistema lineare di 4 equazioni in 4 incognite: dunque ordina e incolonna queste ultime e risolvi il sistema, senza perdere pezzi per la strada (é una *pessima abitudine!*).

Passa quindi a considerare il seguente schema analogo al precedente, con la stessa regola costruttiva, che ti impegnerà un po' di più:



Si tratta comunque sempre di risolvere correttamente un sistema lineare, ma questa volta il sistema devi costruirlo tu, con la *dovuta attenta precisione*. Alla fine controlla che la regola sopra descritta sia soddisfatta dalla soluzione (9-pla di interi relativi) che avrai trovato.

80. **Quesito** Per ogni valore del parametro a , variabile nell'insieme dei numeri interi relativi \mathbb{Z} , il seguente

$8 - a$	$8 - a$	$-4 + 2a$
$-8 + 3a$	4	$16 - 3a$
$12 - 2a$	a	a

è, in genere, un quadrato pseudo-magico di costante 12. Sapresti indicare qual è il massimo numero di elementi distinti che un quadrato magico del tipo indicato può contenere?

81. **Quesito** Sapresti costruire un quadrato magico 4×4 con i soli numeri 1, 2, 3, 4?

2.3 Quesiti a risposta multipla

1. **Quesito** Individua, tra le seguenti, le uguaglianze errate:

- (a) $\left(2^{-\frac{2}{3}}\right)^2 = 4^{-\frac{2}{3}}$
- (b) $\left(2^{-\frac{2}{3}}\right)^2 = 2^{\frac{4}{9}}$
- (c) $\left(2^{-\frac{2}{3}}\right)^2 = 2^{-\frac{4}{9}}$
- (d) $\left(2^{-\frac{2}{3}}\right)^2 = 2^{-\frac{4}{3}}$

2. **Quesito** Qual è la cifra delle unità del numero $2^{(3^4)}$?

- (a) 1
- (b) 2
- (c) 4
- (d) 6
- (e) 8

3. **Quesito** Dei seguenti numeri uno solo è il prodotto tra un quadrato perfetto e un cubo perfetto, quale?

- (a) 792
- (b) 525
- (c) 1089
- (d) 968
- (e) 1155

4. **Quesito** Sia n un naturale pari. Allora $\frac{n^{13}}{1024}$

- (a) è sempre multiplo di 8;
- (b) può essere dispari;
- (c) è sempre divisibile per 16;
- (d) è sempre dispari.

5. **Quesito** $5^9 \cdot 5^5$ vale

- (a) 25^7
- (b) 25^{14}
- (c) 25^{45}
- (d) 5^{45}

6. **Quesito** I *triangoli pitagorici* sono i triangoli rettangoli aventi i lati di misura intera. Trova quali delle seguenti proposizioni sono corrette, motivando la risposta.

- (a) Non esistono triangoli pitagorici con i cateti ugualmente lunghi.
- (b) Esistono triangoli pitagorici con i cateti entrambi di misura un numero dispari.
- (c) Esistono triangoli pitagorici con i lati tutti di misura pari;
- (d) Al variare di n in $\mathbb{N} \setminus \{1\}$, tutti i triangoli con lati di misura

$$(n^2 - 1, 2n, n^2 + 1)$$

sono triangoli pitagorici.

(e) Vi sono triangoli pitagorici non contemplati al punto (d).

Suggerimento Può esserti utile, per alcune delle risposte richieste, dimostrare che se $n \geq 0$ è un intero, $4n + 2$ non può essere un quadrato perfetto.

7. **Quesito** In un cortile ci sono solo oche e conigli, e il numero delle oche è doppio di quello dei conigli. Se n è il numero totale delle zampe degli animali, trova quali di queste affermazioni sono giuste.

- (a) n deve essere un multiplo di 8.
- (b) n può essere un qualunque multiplo di 8.
- (c) Se n è un multiplo di 3, il numero delle oche è un multiplo di 12.
- (d) Se n è un multiplo di 15, il numero delle oche deve essere un multiplo di 30.
- (e) Se n è un multiplo di 10, le oche sono almeno 20.

8. **Quesito** Considera il numero

$$P(n) = n^3 + 6n^2 + 11n + 6 \quad , \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Trova quali affermazioni su $P(n)$ sono vere.

- (a) $P(n)$ è sempre un numero pari.
- (b) $P(n)$ è sempre divisibile per 4.
- (c) Se n è dispari $P(n)$ è divisibile per 4.
- (d) $P(n)$ è sempre divisibile per 3.
- (e) Se $P(n)$ è divisibile per 5, lo è anche per 30.

9. **Quesito** Un *numero unitario* è rappresentato in base 10 con cifre tutte uguali al numero 1. Trova quali delle seguenti affermazioni sono corrette.

Un numero unitario

- (a) è divisibile per 3 (rispettivamente 9) se e solo se il numero delle sue cifre è un multiplo di 3 (rispettivamente 9);
- (b) è divisibile per 7 se il numero delle sue cifre è un multiplo di 6;
- (c) è divisibile per 11 se il numero delle sue cifre è un multiplo di 10;
- (d) è divisibile per 27 solo se il numero delle sue cifre è divisibile per 27;
- (e) non è mai divisibile per 13;
- (f) se ha 15 cifre è divisibile per 41.

Capitolo 3

Numeri razionali e reali

3.1 Note e osservazioni

3.1.1 Parte intera

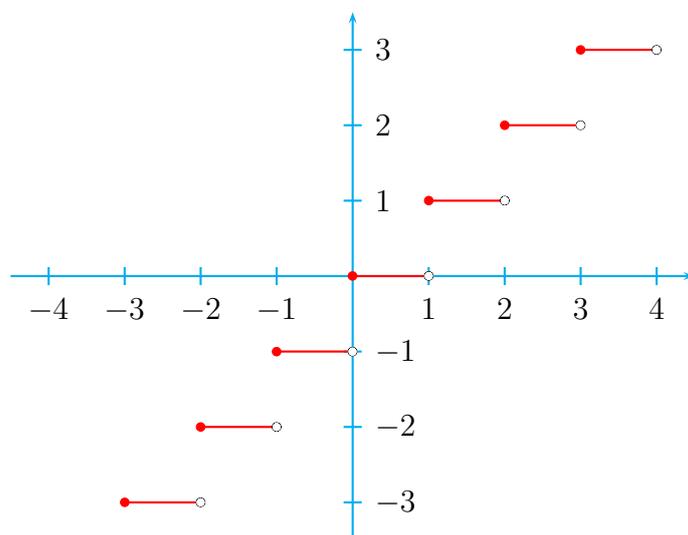
Per ogni numero reale x , con il simbolo

$$[x]$$

si denota la cosiddetta *parte intera* di x che è, per definizione,

$$\text{il più grande intero relativo } \leq x.$$

Il grafico della funzione $f(x) = [x]$ è, in parte, il seguente



3.1.2 Valore assoluto

Dato un reale x si chiama valore assoluto, o modulo, di x il numero

$$|x| = \begin{cases} x & \text{se } x \geq 0 \\ -x & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

Si noti che $|x| \geq 0, \forall x$ e che $|x| = 0 \Leftrightarrow x = 0$.

3.1.3 Sul simbolo delle potenze

Il simbolo

$$2^{2^{2^2}}$$

in assenza di precise convenzioni può venire interpretato in vari modi:

1. $[(2^2)^2]^2 = (4^2)^2 = 16^2 = 256$

2. $(2^2)^{(2^2)} = 4^4 = 256$

3. $[2^{(2^2)}]^2 = (2^4)^2 = 256$

4. $2\left[2^{(2^2)}\right] = 2^{(2^4)} = 2^{16} = 65536$

Come si vede, il valore differisce nel 4° caso rispetto agli altri tre.

Ma con altri valori di a il numero

$$a^{a^{a^a}}$$

può dare, a seconda delle interpretazioni, valori più diversificati: ad esempio con

$$a = 1,5$$

si trova, nei successivi casi,

1. $[(1,5^{1,5})^{1,5}]^{1,5} = 3,929234958\dots$

2. $(1,5^{1,5})^{(1,5^{1,5})} = 3,056683337\dots$

3. $[1,5^{(1,5^{1,5})}]^{1,5} = 3,056683337\dots$

4. $1,5\left[1,5^{(1,5^{1,5})}\right] = 2,349005319\dots$

Il sospetto che i casi 2) e 3) possano dare risultati uguali per ogni $a > 0$, come nei due esempi proposti, è confermato dal seguente calcolo:

$$(a^a)^{(a^a)} = a^{(a \cdot a^a)} = a^{(a^a \cdot a)} = [a^{(a^a)}]^a$$

L'interpretazione 1) è comune nelle calcolatrici tascabili e ci pare la più corretta: poichè si devono eseguire, in successione, tre elevamenti a potenza, ovvero tre operazioni che hanno la stessa precedenza, è logico iniziare dalla prima.

L'interpretazione 4) è invece standard in tutti i software di calcolo simbolico (Mathematica, Maple, Derive, ecc.); essa è anche quella comunemente adottata quando si scrivono espressioni del tipo

$$e^{x^2}.$$

In ogni caso è opportuno prestare la massima attenzione.

3.1.4 Numeri algebrici e trascendenti

Un numero reale α si chiama un

numero algebrico

se è zero di un polinomio non nullo a coefficienti interi relativi o, altrimenti detto, è *radice di un'equazione algebrica, non banale, a coefficienti interi relativi*:

$$z_m \alpha^m + z_{m-1} \alpha^{m-1} + \dots + z_1 \alpha + z_0 = 0 \quad , \quad z_i \in \mathbb{Z}, \quad i = 0, 1, \dots, m$$

Si dimostra che, se α e β sono numeri algebrici, lo sono anche

$$\alpha + \beta, \alpha - \beta, \alpha \cdot \beta \text{ e } \frac{\alpha}{\beta} \quad (\text{se } \beta \neq 0)$$

L'insieme dei numeri algebrici reali essendo *chiuso* rispetto alla somma, alla differenza, al prodotto e al quoziente, costituisce quello che viene chiamato

un sottocorpo del corpo dei numeri reali \mathbb{R} .

Esso è spesso indicato con \mathbb{A} e chiamato

il corpo dei numeri algebrici (reali).

Un numero reale che non sia algebrico, cioè che *non* è zero di alcun polinomio non nullo a coefficienti interi relativi, si dice un

numero trascendente.

I più famosi numeri trascendenti sono

$$\pi \quad \text{ed} \quad e$$

È interessante il fatto che e^π è trascendente, mentre di π^e non si sa nemmeno se sia razionale o irrazionale.

Un altro numero trascendente famoso è

$$2^{\sqrt{2}}.$$

3.2 Quesiti a risposta aperta

1. **Quesito** Il numero decimale costruito con la regola seguente:

$$2, 10110011100011110000\dots$$

è un numero razionale?

2. **Quesito** Sommando i numeri decimali

$$1, 90990099900099990000\dots$$

$$1, 09009900099900009999\dots$$

che numero si ottiene?

3. **Quesito** Se due numeri reali sono diversi, hanno ovviamente diverse espressioni decimali. È vero anche il viceversa?
4. **Quesito** Una equazione algebrica di 2° grado, con coefficienti non tutti razionali, può avere due radici razionali?
5. **Quesito** Una equazione algebrica di 2° grado, con coefficienti tutti razionali può avere una radice razionale e una irrazionale?
6. **Quesito** Determina il maggiore tra i due numeri

$$\frac{1}{1 + \frac{1}{1+\frac{1}{7}}} = \frac{8}{15} \quad \text{e} \quad \frac{1}{1 + \frac{1}{1-\frac{1}{7}}} = \frac{6}{13}$$

È possibile ragionare senza eseguire alcun calcolo?

7. **Quesito** Dividendo quali coppie di numeri interi si trova il numero decimale periodico

$$1, \overline{000001} \quad ?$$

8. **Quesito** Dividendo con una calcolatrice a dieci cifre 100 000 000 per 999 999 999 si trova 0,1. Esprimi con una frazione una stima per difetto dell'errore commesso.
9. **Quesito** Senza usare la calcolatrice, e sapendo che 3,1415 è un'approssimazione per difetto di π a meno di 10^{-4} , dimostra che π^3 non può essere un numero intero.
10. **Quesito** Eseguendo la divisione con la virgola del numero intero n per il numero $2^r \cdot 5^s$, con $r \geq 0$ e $s \geq 0$, perchè il risultato è un numero decimale finito?
11. **Quesito** Prova, mediante un esempio concreto che convinca anche chi è digiuno di matematica, che la frazione $\frac{6}{10}$ si può semplificare con il seguente calcolo

$$\frac{6}{10} = \frac{3 \cdot \cancel{2}}{5 \cdot \cancel{2}} = \frac{3}{5}$$

12. **Quesito** La seguente procedura

$$\frac{\cancel{a} + \cancel{a}b}{7 + \cancel{a}} = \frac{1 + b}{7 + 1}$$

è uno degli errori *bestiali* assolutamente da evitare.

Tuttavia l'uguaglianza

$$\frac{a + ab}{7 + a} = \frac{1 + b}{7 + 1}$$

vale in alcuni casi speciali: elenca questi casi.

13. **Quesito** La seguente procedura

$$\frac{a^2 + b^2}{a^2 + c^2} = \frac{a^{\cancel{2}} + b^{\cancel{2}}}{a^{\cancel{2}} + c^{\cancel{2}}}$$

è un altro degli errori *bestiali* assolutamente da evitare.

Tuttavia l'uguaglianza

$$\frac{a^2 + b^2}{a^2 + c^2} = \frac{a + b}{a + c}$$

vale in alcuni casi. Trovane uno sapendo che $a = 6$ e $b = 2$. In possesso di questo esempio puoi poi trovarne anche altri.

14. **Quesito** Usando la calcolatrice si trova

$$\sqrt[3]{2 + \sqrt{5}} + \sqrt[3]{2 - \sqrt{5}} = 1.$$

È vero, o c'è un'approssimazione così piccola che la calcolatrice non la registra?

15. **Quesito** Trova se il numero

$$\sqrt[3]{4} + \frac{2 - \sqrt[3]{-2}}{\sqrt[3]{4}} \sqrt[3]{-2}$$

appartiene o no a \mathbb{Z} .

16. **Quesito** Siano r ed s due numeri razionali distinti

$$r, s \in \mathbb{Q}, \quad r < s.$$

Dimostra che risulta sempre

$$r < \frac{r + s}{2} < s.$$

Se ne conclude che “Tra due numeri razionali distinti, per quanto vicini tra di loro, si trova sempre ...”.

17. **Quesito** Calcola, in base alla definizione di valore assoluto,

- (a) $|\sqrt[3]{-5}|$
- (b) $|\sqrt[3]{5} - \sqrt[4]{9}|$
- (c) $|\frac{2}{\sqrt{5}} - \frac{\pi}{6}|$
- (d) $|\log_3 10^3 - \log_3 10|$
- (e) $|\pi - 27^{\frac{5}{14}}|$
- (f) $|(-2)^6|$
- (g) $|1 - \frac{1}{e^{-1}}|$
- (h) $|\pi^{\frac{1}{10}} - \frac{1}{10^\pi}|$

18. **Quesito** Due numeri reali x ed y sono

- (a) entrambi non nulli
- (b) di segno opposto.

Trova quali delle seguenti relazioni sono vere in alcuni casi e false in altri, quali sono sempre vere, quali sono sempre false.

- (a) $|x| < |y|$
- (b) $|x| = |y|$

- (c) $|x| < y$
- (d) $|x + y| < |x| + |y|$
- (e) $x \leq y$
- (f) $|x - y| = |x| - |y|$
- (g) $||x| - |y|| = |x - y|$
- (h) $||x| - |y|| \leq |x - y|$
- (i) $||x| - |y|| > |x + y|$

19. **Quesito** Completa le seguenti espressioni con numeri decimali periodici.

- (a) $(1.1\overline{3})^2 = 1, \dots;$
- (b) $(3.\overline{03})^2 = 11, \dots;$
- (c) $(0.\overline{538461})^{-1} = 1, \dots;$
- (d) $(1.3\overline{61})^{\frac{1}{2}} = 1, \dots;$
- (e) $(1.\overline{6})^3 = 4, \dots;$
- (f) $(12.\overline{703})^{\frac{2}{3}} = 1, \dots;$
- (g) $(1.\overline{62}) + (1.\overline{38}) = 3, \dots;$
- (h) $(1.\overline{013})(26.\overline{96}) = 27, \dots;$
- (i) $\frac{12.\overline{1}}{1.1\overline{2}} = 10, \dots$

20. **Quesito** Di tre numeri reali α, β, γ si sa che

$$\begin{cases} \alpha - \beta - \gamma \in \mathbb{Q} \\ \beta - \gamma - \alpha \in \mathbb{Q} \\ \gamma - \alpha - \beta \in \mathbb{Q} \end{cases}$$

I tre numeri α, β, γ devono necessariamente appartenere tutti e tre a \mathbb{Q} ?

21. **Quesito** Per quali $n \in \mathbb{N}$ ha senso l'uguaglianza

$$\sqrt[n]{\sqrt{23} + 2\sqrt{6}} \sqrt[n]{\sqrt{23} - 2\sqrt{6}} = -1?$$

22. **Quesito** Completa la formula

$$\sqrt[7]{a} \sqrt[9]{b} = \sqrt[63]{?}$$

23. **Quesito** Decidi, senza l'uso della calcolatrice, qual è il più grande dei due numeri

$$\sqrt[5]{5} \quad , \quad \sqrt[6]{6}$$

24. **Quesito** Prova che, se n è un numero intero positivo, vale la seguente doppia implicazione

$$n^{\frac{1}{n}} \geq (n+1)^{\frac{1}{n+1}} \quad \Leftrightarrow \quad n^{n+1} \geq (n+1)^n.$$

Dimostra quindi, per assurdo, che vale la disuguaglianza

$$2^{\frac{1}{2}} < 3^{\frac{1}{3}}.$$

25. **Quesito** I seguenti numeri reali decimali illimitati

$$\begin{aligned}\alpha &= 2,5273(a_5a_6\dots a_n\dots) \\ \beta &= 3,1746(b_5b_6\dots b_n\dots)\end{aligned}$$

sono assegnati (approssimati per difetto) con 4^a cifra decimale esatta (le lettere numerate in parentesi sono le cifre dello sviluppo residuo). Apponi l'aggettivo *necessaria* o *sufficiente* nelle frasi seguenti.

Perché

$$\alpha + \beta = 5.7019\dots$$

sia così assegnato, approssimato per difetto, con 4^a cifra decimale esatta

- (a) è condizione ... che sia $a_5 + b_5 \leq 9$;
- (b) è condizione ... che sia $a_5 + b_5 < 9$;
- (c) è condizione ... che sia $a_n + b_n \leq 9, \forall n \geq 5$;
- (d) se $\exists n > 5$ tale che $a_n + b_n \geq 10$, è condizione ... che $\exists m$, con $5 \leq m < n$, tale che $a_m + b_m < 9$;
- (e) se n è il *primo* indice maggiore di 5 per cui $a_n + b_n \geq 10$, è condizione ... che $\exists m$, con $5 \leq m < n$, tale che $a_m + b_m < 9$.

26. **Quesito** Esprimi il numero

$$\sqrt{10 + 2\sqrt{24}}$$

come somma di due radicali semplici.

27. **Quesito** Due numeri irrazionali positivi α, β sono tali che

$$\alpha \cdot \beta \in \mathbb{Q} \quad , \quad \frac{\alpha}{\beta} \in \mathbb{Q}.$$

Esempio: se $\frac{m}{n}$ non è un quadrato perfetto e p, q sono interi di ugual segno, basta prendere

$$\alpha = \frac{p}{q}\sqrt{\frac{m}{n}} \quad , \quad \beta = \sqrt{\frac{m}{n}}.$$

È questo l'unico possibile esempio, a meno dell'ordine?

28. **Quesito** È vero che i due numeri

$$\sqrt[3]{4} + \sqrt[3]{6} + \sqrt[3]{9} \quad , \quad \sqrt[3]{3} + \sqrt[3]{-2}$$

sono reciproci?

29. **Quesito** Considera l'insieme dei numeri

$$E = \{n^{[(-1)^{(n+1)}]}, \forall n \in \mathbb{N}\}$$

E contiene numeri interi pari? Qual è il più grande numero non intero appartenente ad E ?

30. **Quesito** Tenendo conto del grafico della funzione $f(x) = [x]$ (funzione *parte intera*), risolvi l'equazione

$$[x] = -\frac{1}{5} + \frac{4}{5}x,$$

aiutandoti con il metodo detto *intersezione dei grafici*. Tieni conto del grafico riportato a pag. 32

31. **Quesito** Calcola, servendoti di una calcolatrice, il seguente numero:

$$\sqrt{6 + 4\sqrt{2}} + \sqrt{6 - 4\sqrt{2}}.$$

Successivamente *dimostra* che il risultato fornito dalla calcolatrice è corretto.

32. **Quesito** Usando la calcolatrice verifica che l'equazione

$$(*) \quad \sqrt{1-x} + \sqrt{3-x} = \sqrt{4+x}$$

ha la soluzione $\frac{4\sqrt{31}-8}{5}$.

Verifica poi che $\frac{4\sqrt{31}-8}{5}$ è soluzione della (*), senza l'uso della calcolatrice.

Verifica infine che $\frac{4\sqrt{31}-8}{5}$ è l'unica soluzione della (*).

33. **Quesito** Se a e b sono numeri reali, in quali casi l'implicazione

$$\begin{cases} a \leq b \\ b \neq 0 \end{cases} \Rightarrow \frac{a}{b} \leq 1$$

risulta vera, e in quali risulta falsa?

34. **Quesito** Se α e β sono numeri reali, in quali casi l'implicazione

$$\alpha^2 \leq \alpha\beta \Rightarrow \alpha \leq \beta$$

risulta vera, e in quali falsa?

35. **Quesito** Se due numeri reali a e b hanno segno opposto e inoltre risulta

$$a^2b - ab^2 > 0,$$

qual è il più grande dei due?

36. **Quesito** Completa il cosiddetto *Triangolo di Tartaglia* fino all'8^a riga

				1					0 ^a riga
				1		1			1 ^a riga
			1		2		1		2 ^a riga
		1		3		3		1	3 ^a riga
			1		6		6		
				1		10		10	
					1		15		15
						1		21	
							1		28

Controlla poi l'esattezza della formula che dà

$$(a+b)^7 \quad \text{e} \quad (a+b)^8$$

nel caso $a = b = 1$, e nel caso $a = 1, b = -1$.

37. **Quesito** Per quali n nello sviluppo di

$$(a+b)^n$$

si hanno due coefficienti di valore massimo, e per quali, invece, si ha un solo coefficiente di valore massimo? E, in questi ultimi casi, l'unico coefficiente di valore massimo può essere sia pari che dispari?

38. **Quesito** Se nello sviluppo di

$$(a + b)^n$$

tutti i coefficienti dal 2° al penultimo risultano numeri dispari, come risulteranno quelli dello sviluppo di

$$(a + b)^{n+1}$$

dal 2° al penultimo?

E quelli dello sviluppo

$$(a + b)^{n-1} \quad ?$$

Nell'ipotesi fatta, n è pari o dispari?

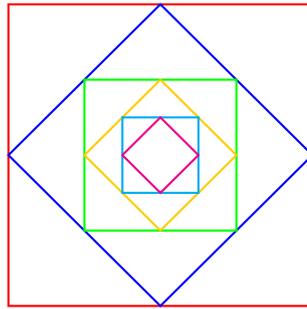
39. **Quesito** Se m, n, r sono numeri interi positivi tali che

$$(\sqrt{m} + \sqrt{n})^2 = r,$$

cosa si può concludere circa la parità del numero

$$r^2 - m - n \quad ?$$

40. **Quesito** Considera la famiglia di infiniti quadrati deducibile dalla figura seguente



Chiamiamo il primo quadrato Q_1 , il secondo Q_2 , ecc. Se Q_1 ha lato l , qual è il primo numero n per cui è

$$\text{area di } Q_n < 10^{-6} \cdot l^2 \quad ?$$

41. **Quesito** Trova il fattore mancante nel seguente prodotto, affinché il prodotto stesso non contenga più radicali:

$$(\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c}) (\sqrt{a} + \sqrt{b} - \sqrt{c}) (\dots).$$

42. **Quesito** Sapendo che, $\forall n \in \mathbb{N}$, i numeri

$$\frac{(1 + \sqrt{5})^n - (1 - \sqrt{5})^n}{\sqrt{5}} \quad \text{e} \quad (1 + \sqrt{5})^n + (1 - \sqrt{5})^n$$

sono numeri interi positivi, riconosci che sono numeri pari.

43. **Quesito** Considerati i due famosi numeri reali (irrazionali) π ed e , trova due interi positivi m ed n tali che

$$\frac{\pi}{m} \quad \text{ed} \quad \frac{e}{n}$$

differiscano fra loro per meno di 10^{-6} .

44. **Quesito** Ad una corsa partecipano 10 podisti: P_1, P_2, \dots, P_{10} , accompagnati da un camioncino. Ogni tratta di cinque chilometri tre di loro la percorrono in camioncino, dando il posto nella successiva ad altri tre, a turno circolare: $P_1P_2P_3$, poi $P_4P_5P_6$, ecc.. Se il tragitto è di $50km$, quanti chilometri ha corso ciascun podista? E se il tragitto effettuato è di $60km$?

45. **Quesito** Se α è un numero irrazionale, può darsi che, per qualche valore di $n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$, il numero

$$\sqrt[n]{\alpha}$$

risulti razionale?

46. **Quesito** Disponiamo le frazioni di numeri interi positivi secondo lo schema seguente

$$\begin{array}{cccccc} \frac{1}{1} & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{5} & \frac{1}{6} & \cdot \\ \frac{2}{1} & \frac{2}{2} & \frac{2}{3} & \frac{2}{4} & \cdot & \cdot & \\ \frac{3}{1} & \frac{3}{2} & \frac{3}{3} & \cdot & \cdot & & \\ \frac{4}{1} & \frac{4}{2} & \cdot & \cdot & & & \\ \frac{5}{1} & \cdot & \cdot & & & & \\ \frac{6}{1} & \cdot & & & & & \\ \cdot & & & & & & \end{array}$$

nel quale sono ordinatamente infilate nella diagonale n -esima ($n \geq 1$) tutte e sole le frazioni che hanno la somma del numeratore e del denominatore uguale a $n + 1$.

Numeriamo ora tali frazioni associando

$$\begin{array}{ccc} \frac{1}{1} & a & 1 \\ \frac{2}{1} & a & 2 \\ \frac{1}{2} & a & 3 \\ \frac{3}{1} & a & 4 \\ \frac{2}{2} & a & 5 \\ \frac{1}{3} & a & 6 \\ \frac{4}{1} & a & 7 \\ & & \text{ecc.} \end{array}$$

Si scopre così che l'insieme delle frazioni è

numerabile

cioè si può porre in corrispondenza biunivoca con l'insieme dei numeri interi positivi \mathbb{N} .

Individua ora a quale numero corrisponderanno le frazioni

$$\frac{9}{5}, \quad \frac{23}{7}, \quad \frac{41}{83}$$

ricordando che la somma dei primi n numeri interi positivi è data dalla formula

$$1 + 2 + \dots + n = \frac{n(n + 1)}{2}.$$

47. **Quesito** Se α è un numero reale, e si sa che

$$\alpha^{13}, \alpha^{14}, \dots, \alpha^n, \dots \quad (n \geq 13)$$

sono tutti numeri razionali, è corretto affermare allora che per ogni $n \geq 13$, α è la radice n -esima di un numero razionale?

48. **Quesito** Per quali valori reali di x ha senso il seguente calcolo

$$\frac{1}{||x - 1| + 1| - x} \quad ?$$

49. **Quesito** Dato il numero *irrazionale*

$$\alpha = 2 + \sqrt{3},$$

esiste qualche sua potenza α^n , con $n \in \mathbb{N}$, che sia *razionale*?

50. **Quesito** È dato il numero

$$n = 10^{27}.$$

Completa le seguenti uguaglianze.

(a) $\sqrt[3]{n} = \dots$

(b) $\frac{n}{1000} = \dots$

(c) $n^3 = \dots$

(d) $\log_{1000} n = \dots$

(e) $\frac{10^{30}}{n} = \dots$

51. **Quesito** Tra le seguenti trova le uguaglianze corrette e quelle no.

(a) $\sqrt{2\sqrt{2}} = (\sqrt{2})^{\sqrt{2}}$

(b) $\sqrt[3]{(-2)^{\sqrt[3]{-2}}} = 2^{-\sqrt[3]{2}}$

(c) $\left\{ \left[\left(\sqrt{2\sqrt{2}} \right)^{\sqrt{2}} \right]^{\sqrt{2}} \right\}^{\sqrt{2}} = 4$

(d) $\left(\sqrt[3]{\sqrt[4]{(\sqrt{2})^3}} \right)^{16} = 8$

52. **Quesito** Esprimi il numero

$$\sqrt{3} + \sqrt{5}$$

con un radicale doppio, cioè con un radicale del tipo $\sqrt{a + \sqrt{b}}$.

53. **Quesito** Di due sfere, \mathcal{S}_1 ed \mathcal{S}_2 , entrambe dello stesso materiale, si sanno i seguenti fatti:

(a) il raggio di \mathcal{S}_1 è la metà di quello di \mathcal{S}_2 ;

(b) il peso di \mathcal{S}_1 è il triplo di quello di \mathcal{S}_2 .

Determina quanto peserebbe, rispetto ad \mathcal{S}_2 , una sfera \mathcal{S}_3 , dello stesso materiale di \mathcal{S}_1 , ma con raggio uguale a quello di \mathcal{S}_2 .

54. **Quesito** Semplifica l'espressione

$$\frac{\sqrt[5]{-15625}}{5} \div \frac{\sqrt[25]{-625}}{\sqrt{5}}$$

55. **Quesito** È dato un numero razionale

$$a = \frac{m}{n}$$

con

- m ed n primi tra di loro;
- $n = \underbrace{99 \cdots 9}_{r \text{ cifre}}$: n novenario di r cifre.

Rappresentato r in forma decimale, stabilisci se è corretto affermare che a ha un periodo di almeno r cifre.

56. **Quesito** Dato il numero

$$a = 2,478052681$$

calcola, servendoti di una calcolatrice, le due potenze

$$3^a \text{ e } a^3.$$

Se qualcuno, vedendo il risultato che hai ottenuto, affermasse che

$$3^a = a^3,$$

quel tale si illude! Come lo dissuaderesti?

Suggerimento $a \in \mathbb{Q}$, dunque anche $a^3 \in \mathbb{Q}$, invece

57. **Quesito** Dato il numero reale positivo a , l'equazione

$$(*) \quad a^x = x^a$$

ha chiaramente sempre la soluzione a .

Se è

$$0 < a < 1$$

oltre alla soluzione a , la (*) può amettere anche altre soluzioni?

Ora calcola, servendoti di una calcolatrice,

$$(\sqrt{3})^{3\sqrt{3}}, \quad (3\sqrt{3})^{\sqrt{3}}$$

Adesso decidi: la calcolatrice ha torto, o ha ragione?

58. **Quesito** Sapendo che il numero

$$2^{\sqrt{2}} \text{ è irrazionale,}$$

prova che è irrazionale anche il numero

$$2^{\frac{1}{\sqrt{2}}}.$$

59. **Quesito** Senza usare la calcolatrice dimostra che i due numeri

$$\frac{1}{\sqrt{2}-1} \quad \text{e} \quad \sqrt{2}$$

hanno la stessa parte decimale. Stessa domanda per i due numeri

$$\frac{\sqrt{5}+1}{2} \quad \text{e} \quad \frac{\sqrt{5}-1}{2}$$

60. **Quesito** Un poligono regolare di 40 lati è costruibile con riga e compasso?

61. **Quesito** Dimostra che vale la disuguaglianza

$$(1,1)^7 < 2$$

ma non devi scrivere alcun numero con la virgola, né usare la calcolatrice per effettuare prodotti o potenze: usa invece il triangolo di Tartaglia (alla settima riga), ed eventualmente la calcolatrice per effettuare solo una somma di 7 numeri minori di 10.

Suggerimento $1,1 = \frac{10+1}{10} = \dots$

62. **Quesito** Rimpiazza il punto interrogativo col numero adatto

$$\sqrt[3]{\sqrt[5]{\sqrt[7]{32\frac{1}{17}}}} = \sqrt[357]{?}$$

63. **Quesito** Prova che, per ogni valore di $n \in \mathbb{N}$, per la somma degli $n + 1$ numeri

$$\frac{1}{n}, \frac{1}{n+1}, \dots, \frac{1}{n+n}$$

risulta sempre

$$\frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \dots + \frac{1}{n+n} > \frac{1}{2}$$

Suggerimento Poiché è

$$n+i < n+n, \quad \forall i \in \{0, 1, \dots, n-1\}$$

ne segue

$$\frac{1}{n+i} > \frac{1}{n+n}, \quad \forall i \in \{0, 1, \dots, n-1\}$$

e dunque ...

Otteniamo così successivamente

$$\frac{1}{1} + \frac{1}{2} > \frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} > \frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{7} + \frac{1}{8} + \dots + \frac{1}{13} + \frac{1}{14} > \frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{15} + \frac{1}{16} + \dots + \frac{1}{29} + \frac{1}{30} > \frac{1}{2}$$

...

ne segue chiaramente che

sommando un numero sufficientemente grande di reciproci di numeri interi successivi, si può ottenere un numero arbitrariamente grande.

Sapresti indicare, in base alla sequenza di disuguaglianze sopra indicate, per quale valori di n si trova sicuramente

$$1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} > 10 \quad ?$$

Crediamo tu abbia capito che, in effetti, si supera il 10 un bel po' prima del numero che hai trovato

64. **Quesito** È noto che il numero irrazionale

e

base dei logaritmi *naturali* o *neperiani*, è un

numero trascendente

il che significa che e

non è zero di alcun polinomio a coefficienti interi.

Tu prova che, di conseguenza, il numero

$\ln r$

è un *numero irrazionale*, per ogni valore del numero razionale r positivo e diverso da 1.

Prova anche che, per ogni numero irrazionale α che *non sia* del tipo $\ln r$, con $r \in \mathbb{Q}$, si ha che

e^α è irrazionale.

Quali sono, infine, i numeri i quali hanno il logaritmo che è un numero razionale?

65. **Quesito** Determina tutte le coppie di numeri interi relativi

(z_1, z_2)

tali che il radicale doppio

$\sqrt{z_1 + \sqrt{z_2}}$ risulti un numero razionale.

Suggerimento Le coppie in questione sono in effetti infinite: ad esempio ogni coppia del tipo

$$(n^2 - n, n^2) \quad , \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

verifica la condizione richiesta. Ma ce ne sono molte altre. Comincia la tua ricerca così:

$$\sqrt{z_1 + \sqrt{z_2}} \in \mathbb{Q} \quad \Leftrightarrow \quad \sqrt{z_1 + \sqrt{z_2}} = \frac{m}{n}$$

ove m ed n sono interi non negativi ($n \neq 0$) che si possono supporre primi tra di loro

66. **Quesito** A proposito degli esempi di coppie di numeri reali positivi (a, b) tali che risulti

$$a \neq b \quad \wedge \quad a^b = b^a$$

(vedi anche quesito 13 del capitolo 2), osserva questi esempi (controllando ognuno, s'intende)

$$\begin{aligned} (\sqrt{3})^{3\sqrt{3}} &= (3\sqrt{3})^3 \\ (\sqrt[3]{4})^{4\sqrt[3]{4}} &= (4\sqrt[3]{4})^{\sqrt[3]{4}} \\ (\sqrt[4]{5})^{5\sqrt[4]{5}} &= (5\sqrt[4]{5})^{\sqrt[4]{5}} \end{aligned}$$

Costruisci ora una formula che te ne fornisca infiniti di esempi, tra i quali questi tre:

$$\sqrt[n]{n} \dots, \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

La sorpresa è che il primo elemento della successione di esempi ($n = 1$), è il famoso

$$2^4 = 4^2$$

che, come si vede, è dunque un esempio assai “prolifico”

67. **Quesito** Purché n sia un intero positivo abbastanza grande, il numero (che è comunque minore di 1)

$$\frac{n}{n+1}$$

differisce da 1 per meno di un numero prefissato ad arbitrio. Se, ad esempio, si vuole che risulti

$$\frac{1}{10^r} < \frac{n}{n+1} (< 1)$$

basta scegliere

68. **Quesito** Spiega a uno che sa pochissimo di algebra numerica perché

$$\frac{1}{\left(\frac{1}{10}\right)^7} = 10^7.$$

Guarda che costui non sa nemmeno cosa significa $\frac{1}{10}$, 10^7 , ecc.

69. **Quesito** Il seguente numero reale α ha la parte decimale costruita con una regola, che scoprirai, assai semplice:

$$2, 1234567891011121314151617181920212223 \dots$$

α è un numero razionale o irrazionale?

Osserva che *un qualunque gruppo* iniziale di cifre dello sviluppo decimale si ripeterà *infinite* volte.

Qual è la 100^a cifra decimale di α ?

Le sequenze di numeri decimali (finiti) approssimanti per eccesso e per difetto α sono le seguenti due

2, 1	2, 2
2, 12	2, 13
2, 123	2, 124
2, 1234	2, 1235
.	.
.	.
.	.

Quali sono i rispettivi 9^i elementi delle due successioni?

70. **Quesito** Dato il numero razionale periodico

$$\alpha = 3, \overline{89909}$$

determina i primi 8 elementi delle due successioni di numeri razionali (finiti) approssimanti per difetto e per eccesso α .

71. **Quesito** Trova per quali numeri reali x e, in corrispondenza ad ogni x trovato, per quali coppie di numeri interi

$$(m, n), \quad \text{con } 2 \leq m \leq n,$$

vale l'uguaglianza

$$\sqrt[m]{\sqrt[n]{x^3}} = \sqrt[7]{x}$$

72. **Quesito** Trova un numero irrazionale α tale che

$$\alpha^{\frac{7}{3}} \in \mathbb{Q}$$

73. **Quesito** Trova per quali $x \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$ risulta che

$$\log_x 2 \in \mathbb{Q}$$

Se hai risposto a questo quesito, allora calcola, servendoti della calcolatrice,

$$\ln 2 \quad (= \log_e 2)$$

e troverai

$$\ln 2 = 0,69314718\dots$$

Ora, se qualcuno ti dicesse che, secondo lui, è

$$\ln 2 = 0, \overline{69314718}$$

tu dovresti contraddirlo, sapendo che il matematico Hermite nel 1873 dimostrò che

e è un numero trascendente

cioè che e non è zero di alcun polinomio non nullo a coefficienti interi relativi, e dunque, in particolare, che

$$e^n \notin \mathbb{N}, \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Osserva che se fosse $e^n = m \in \mathbb{N}$, e sarebbe zero del polinomio

$$x^n - m$$

i cui coefficienti sono gli interi relativi

$$1, \underbrace{0, \dots, 0}_{n-1 \text{ zeri}}, -m$$

74. **Quesito** Se τ è un numero reale *trascendente* positivo, come e e π , prova che anche

$$\frac{1}{\tau}, -\tau, \sqrt{\tau}, r\tau (\forall r \in \mathbb{Q})$$

sono numeri *trascendenti*.

75. **Quesito** Il numero

$$\frac{\sqrt{3} + \sqrt{2}}{\sqrt{3} - \sqrt{2}} (25 - 10\sqrt{6})$$

è razionale o irrazionale?

76. **Quesito** Dimostra, a parziale conferma delle proprietà dei numeri algebrici,

- (a) che $\sqrt{3} + \sqrt{5}$ e $\frac{1}{\sqrt{3} + \sqrt{5}}$ sono algebrici;
- (b) che $\sqrt{3} + \sqrt{7}$ e $\sqrt{3} - \sqrt{5}$ sono algebrici e così pure $(\sqrt{3} + \sqrt{7}) + (\sqrt{3} - \sqrt{5})$, $(\sqrt{3} + \sqrt{7}) - (\sqrt{3} - \sqrt{5})$, $(\sqrt{3} + \sqrt{7}) \cdot (\sqrt{3} - \sqrt{5})$, $\frac{\sqrt{3} + \sqrt{7}}{\sqrt{3} - \sqrt{5}}$;
- (c) α algebrico $\Rightarrow -\alpha$ algebrico;
- (d) α algebrico $\neq 0 \Rightarrow \frac{1}{\alpha}$ algebrico;
- (e) α algebrico $> 0 \Rightarrow \sqrt[n]{\alpha}$ algebrico, $\forall \alpha \in \mathbb{N}$;
- (f) α algebrico $< 0 \Rightarrow \sqrt[2n+1]{\alpha}$ algebrico, $\forall \alpha \in \mathbb{N}$.

77. **Quesito** Dopo aver riconosciuto che l'insieme dei numeri razionali è un sottoinsieme dell'insieme dei numeri algebrici

$$\mathbb{Q} \subset \mathbb{A}$$

sapresti riconoscere che il prodotto di un numero algebrico α per un numero trascendente τ è un numero *trascendente*?

(Osserva: i numeri trascendenti sono tutti i numeri reali elementi di $\mathbb{R} \setminus \mathbb{A}$).

Riconoscerai anche facilmente che il *prodotto* o la *somma* di *due numeri trascendenti può benissimo essere algebrico*: costruisci alcuni esempi usando numeri reali che conosci.

Qualcuno ha dimostrato che il numero

$$2^{\sqrt{2}}$$

non solo è irrazionale, ma addirittura trascendente. Cosa puoi dire allora del numero

$$\sqrt{2}^{\sqrt{2}} ?$$

78. **Quesito** dato un numero intero $h > 1$, i numeri razionali del tipo

$$\frac{n}{h},$$

con n non divisibile per h sono ovviamente
infiniti.

Secondo te, le successioni di cifre dopo la virgola delle loro rappresentazioni decimali, comprensive

di antiperiodo e di parte periodica,

possono essere anch'esse infinitamente varie?

79. **Quesito** Risulta, come subito verifichi,

$$\frac{1}{37} = 0,0\overline{27} \quad \text{e} \quad \frac{1}{27} = 0,0\overline{37}$$

Sapresti spiegare a cosa è dovuta questa strana coincidenza?

80. **Quesito** Perché i numeri razionali del tipo

$$\frac{n}{37}$$

con $37 \nmid n$, hanno tutti un periodo di solo 3 cifre?

81. **Quesito** Se calcoli un po' di numeri razionali del tipo

$$\frac{n}{11},$$

con $n \nmid 11$, ti convinci facilmente che i periodi di tutti questi numeri sono i seguenti:

09, 18, 27, 36, 45, 54, 63, 72, 81, 90

cioè, interpretando 09 come 9, sono i gruppi di due cifre che, in base 10, danno i primi

10 multipli di 9.

Sapresti indicare la causa di questo singolare fatto?

82. **Quesito** Considera il numero razionale

$$r = 0,123\overline{5748}.$$

Per quali valori dell'intero positivo n risulta che il numero

$$10^n \cdot r$$

ha lo stesso periodo di r ?

83. **Quesito** La seguente

$$0,777\overline{5777}$$

è la rappresentazione decimale normale di un numero razionale?

84. **Quesito** Considera il seguente esempio di divisione con quoziente di forma decimale:

$$\begin{array}{r} \widehat{678} \quad : \quad 23 = 29,4\dots \\ 218 \\ 110 \\ 18 \\ \dots \end{array}$$

Un tuo amico, spirito critico, vuol sapere (per il momento, perché ci sono altre cose da spiegare) cosa mai hai combinato inserendo al quoziente la virgola dopo il 9, apponendo in seguito uno 0 all'11 nella serie discendente dei resti, e continuando bel bello il procedimento di divisione con resto nel noto modo imparaticcio: tu con che argomento razionalmente accettabile glielo spieghi?

85. **Quesito** Stando alla calcolatrice (con 10 cifre) il numero

$$\frac{2 \cdot 10^9 + 1}{2 \cdot 10^9},$$

espresso in forma decimale, avrebbe come 9^a cifra dopo la virgola il numero 1, preceduto da 8 zeri: è vero o è falso?

3.3 Quesiti a risposta multipla

- Quesito** Quanto vale $\sqrt{(-1)^2}$?
 - 1
 - 1
 - non esiste
 - ± 1
 - $(\sqrt{-1})^2$
- Quesito** Quanto vale $\sqrt{x^2}$, se x è un numero reale?
 - x
 - $|x|$
 - $\pm x$
 - non esiste
 - nessuna delle altre risposte è corretta
- Quesito** Se a e b sono numeri reali con $b \neq 0$, l'uguaglianza

$$\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$$

è valida

- solo se n è dispari.
- sempre.
- se n è pari.

- (d) se n è dispari, oppure se n è pari e contemporaneamente a e b sono maggiori di zero.
 (e) solo se $a > 0$ e $b > 0$.

4. **Quesito** L'uguaglianza $\sqrt{a^2 + b^2} = a + b$:

- (a) è sempre falsa.
 (b) è vera se $a > 0$ e $b > 0$.
 (c) è vera se e solo se $(a = 0 \wedge b \geq 0) \vee (a \geq 0 \wedge b = 0)$.
 (d) è vera solo se $a = 0 \wedge b \geq 0$.
 (e) è sempre vera.

5. **Quesito** Quali delle seguenti definizioni di valore assoluto in \mathbb{R} è *errata*?

- (a) $|x| = \begin{cases} x & \text{se } x \geq 0 \\ -x & \text{se } x < 0 \end{cases}$
 (b) $|x|$ è il valore del numero privato del segno
 (c) $|x| = \sqrt{x^2}$
 (d) $|x| = \max(x, -x)$
 (e) posto $\text{sgn}(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x > 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \\ -1 & \text{se } x < 0 \end{cases}$, si ha $|x| = x \cdot \text{sgn}(x)$

6. **Quesito** Le seguenti affermazioni, tranne una, sono vere per tutti gli $x \in \mathbb{R}$. Quale non è sempre vera?

- (a) $-|x| \leq x \leq |x|$
 (b) $x > -|x|$
 (c) $x < |x| + 1$
 (d) $x \geq -|x|$
 (e) $x \leq |x|$

7. **Quesito** Quale delle seguenti affermazioni è vera per ogni x reale?

- (a) $|-x| \neq 0$
 (b) $|-x| > 0$
 (c) $|-x| = |x|$
 (d) $|x| \neq 0$
 (e) $|x| > 0$

8. **Quesito** Quale delle seguenti affermazioni non è sempre vera, se x è un numero reale?

- (a) $|-x^2| = x^2$
 (b) $|x^2 + 1| = x^2 + 1$
 (c) $|x^2 - 2x + 1| = x^2 - 2x + 1$
 (d) $|x^2 - 1| = x^2 - 1$
 (e) $|\sqrt{x}| = \sqrt{x}$, $x \geq 0$

9. **Quesito** Se a b sono numeri reali strettamente positivi

- (a) $\frac{1}{a+b} < \frac{1}{a} + \frac{1}{b}$
- (b) $\frac{1}{a+b} > \frac{1}{a} + \frac{1}{b}$
- (c) $\frac{1}{a+b} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b}$
- (d) le precedenti affermazioni sono tutte errate.

10. **Quesito** Se a, b sono numeri reali strettamente positivi

- (a) $\frac{a^3+b^3}{a+b} = a^2 + b^2$
- (b) $\frac{a^3+b^3}{a+b} < a^2 + b^2$
- (c) $\frac{a^3+b^3}{a+b} > a^2 + b^2$
- (d) le precedenti affermazioni sono tutte errate.

11. **Quesito** Se x è un numero reale, l'espressione

$$|2 + x| - |2 - x|$$

- (a) è sempre > 0
- (b) è sempre $\neq 0$
- (c) è sempre < 0
- (d) nessuna delle precedenti affermazioni è corretta.

12. **Quesito** È dato un numero intero positivo n . Trova quali delle seguenti affermazioni sono corrette.

- (a) $\frac{1}{n}$ è sempre razionale.
- (b) Se n ha h cifre (in base 10), $\frac{1}{n}$ ha un periodo di al più h cifre.
- (c) $\frac{1}{n}$ ha un periodo di al più $n - 1$ cifre.
- (d) $\frac{1}{n}$ può presentare antiperiodo.
- (e) L'antiperiodo eventuale di $\frac{1}{n}$ non può avere più di $h - 2$ cifre.

13. **Quesito** Qual è l'ordine crescente corretto tra le radici cubiche dei numeri

$$a = \left(\frac{15}{16}\right)^{27}, b = \left(\frac{15}{16}\right)^{28}, c = \left(\frac{16}{15}\right)^{27}, d = \left(\frac{16}{15}\right)^{28}$$

- (a) $\sqrt[3]{a}, \sqrt[3]{b}, \sqrt[3]{c}, \sqrt[3]{d}$
- (b) $\sqrt[3]{b}, \sqrt[3]{a}, \sqrt[3]{c}, \sqrt[3]{d}$
- (c) $\sqrt[3]{d}, \sqrt[3]{c}, \sqrt[3]{b}, \sqrt[3]{a}$
- (d) $\sqrt[3]{b}, \sqrt[3]{a}, \sqrt[3]{d}, \sqrt[3]{c}$

14. **Quesito** Se x , con $0 < x < 1$, è un numero reale

- (a) $\sqrt{x} < x$
- (b) $\sqrt{x} > x$
- (c) $\sqrt{x} < x^2$
- (d) $\sqrt{x} > 1$

15. **Quesito** Se a e b sono numeri reali con $a < b < 0$, allora

- (a) $\left(\frac{1}{3}\right)^a < \left(\frac{1}{3}\right)^b$

(b) $\left(\frac{1}{3}\right)^a > \left(\frac{1}{3}\right)^b$

(c) nessuna delle due precedenti affermazioni è corretta.

16. **Quesito** Il numero $\pi^{\sqrt{2}}$

(a) non ha significato;

(b) è uguale a $\sqrt{\pi^2}$;(c) è maggiore di π ;(d) è minore di π .

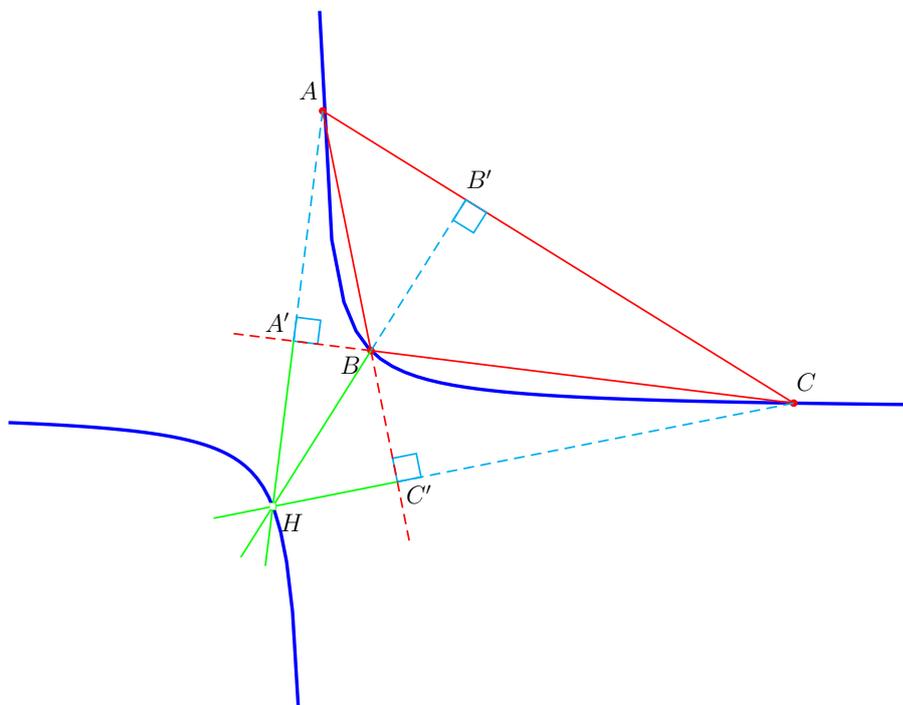
Capitolo 4

Geometria analitica

4.1 Note e osservazioni

4.2 Quesiti a risposta aperta

1. **Quesito** Nel piano cartesiano è data la circonferenza $\mathcal{C}: x^2 + y^2 + 2x = 0$. Trova le equazioni delle rette tangenti a \mathcal{C} passanti per il punto $A(0,3)$. Disegna \mathcal{C} e le rette tangenti trovate (in carta quadrettata scegli un'unità di misura di 4 quadretti).
2. **Quesito** Considera l'iperbole equilatera di equazione $xy = 1$. Siano $A(x_A, y_A)$, $B(x_B, y_B)$, $C(x_C, y_C)$ tre suoi punti qualunque. Prova che l'ortocentro H del triangolo (ABC) appartiene ancora all'iperbole. La figura seguente illustra questo fatto.



3. **Quesito** Per quali coppie (x, y) di numeri reali vale la disuguaglianza

$$x + y < x - y \quad ?$$

Come si visualizza nel piano cartesiano l'insieme di tali coppie di numeri?

4. **Quesito** Per quali coppie (x, y) di numeri reali vale la disuguaglianza

$$x + y > \sqrt{x^2 + y^2} \quad ?$$

Come si visualizza nel piano cartesiano l'insieme di tali coppie di numeri?

5. **Quesito** Cosa rappresenta nel piano cartesiano l'equazione

$$x + y = \sqrt{x^2 + y^2} \quad ?$$

6. **Quesito** Nel piano cartesiano è dato il circolo

$$\mathcal{C} : x^2 + y^2 - 2x - 2y = 0.$$

Trova il centro ed il raggio di \mathcal{C} , e la retta tangente a \mathcal{C} in O .

Trova i vertici del triangolo equilatero circoscritto a \mathcal{C} , ed avente uno dei suoi lati sulla retta $r : x + y = 0$.

Trova i vertici del triangolo equilatero inscritto in \mathcal{C} , con i lati paralleli a quelli del triangolo di cui sopra.

7. **Quesito** Nel piano cartesiano quanti punti in comune hanno i due luoghi

$$\mathcal{L}_1 : x^2 + y^2 = 1 \quad , \quad \mathcal{L}_2 : x^6 + y^6 = 1 \quad ?$$

Suggerimento Ricorda che tutte e sole le coppie soluzioni dell'equazione $x^2 + y^2 = 1$ sono del tipo $(\cos \alpha, \sin \alpha)$, con $0 \leq \alpha \leq 2\pi \dots$

8. **Quesito** È data una disequazione in due incognite

$$(*) \quad ax + by + c \geq 0 \quad , \quad \text{con } b \neq 0.$$

Sotto quale condizione la $(*)$ equivale alla

$$(**) \quad y \geq -\frac{a}{b}x - \frac{c}{b} \quad ?$$

E la $(**)$ da quali punti del piano cartesiano è soddisfatta?

9. **Quesito** È data la retta

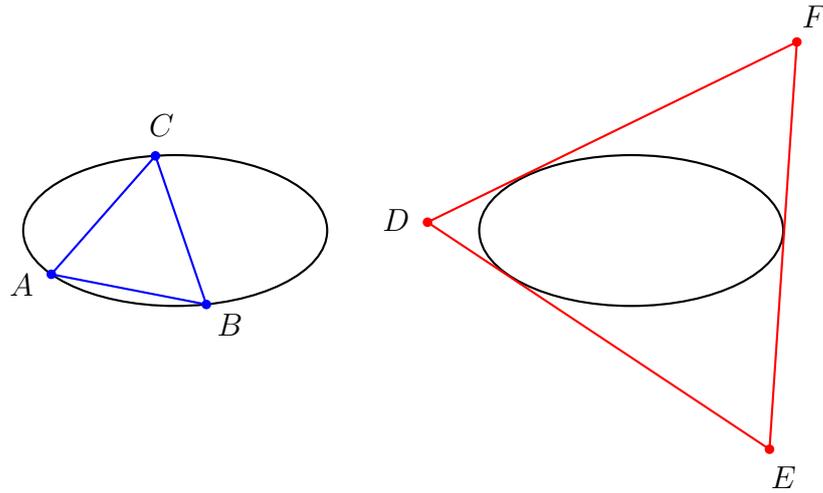
$$r : 2x - 3y + 6 = 0$$

Trova per quali valori del parametro $t \in \mathbb{R}$ il punto

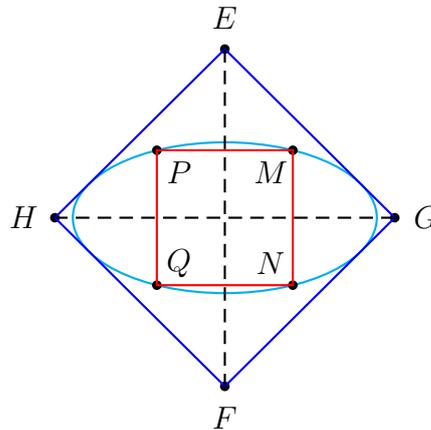
$$P(t) (-3 + 3t^2, 2t)$$

giace, rispetto a r , dalla stessa banda del punto $A(1, 1)$, e per quali, invece, giace dalla banda opposta.

10. **Quesito** Secondo te, in quanti modi si può inscrivere un triangolo equilatero in una ellisse? E in quanti modi si può circoscrivere un triangolo equilatero ad una ellisse? (v.figure)



11. **Quesito** Data un'ellisse \mathcal{E} di semiassi a e b , trova il rapporto tra le aree dei quadrati di figura, uno circoscritto ad \mathcal{E} e con i vertici sugli assi di \mathcal{E} , l'altro inscritto in \mathcal{E} e con i lati paralleli agli assi di \mathcal{E} .



12. **Quesito** Perché non si può inscrivere in una ellisse un poligono di più di 4 lati che sia inscritto in un cerchio?

Suggerimento I vertici di tale poligono avrebbero coppie di coordinate soddisfacenti sia all'equazione dell'ellisse che a quella del cerchio, cioè coppie di numeri soddisfacenti un sistema algebrico di grado $\dots \times \dots = \dots$, e le soluzioni di tale sistema possono essere al più \dots . Lo puoi dimostrare supponendo che l'ellisse sia

$$\mathcal{E} : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

e il cerchio sia

$$\mathcal{C} : x^2 + y^2 + px + qy + r = 0$$

sicché il sistema in questione è

$$\begin{cases} \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \\ x^2 + y^2 + px + qy + r = 0 \end{cases}$$

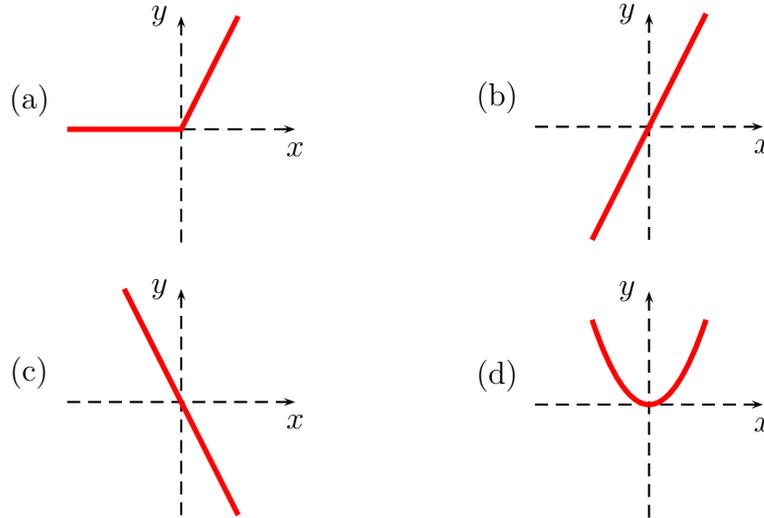
Per la risoluzione puoi procedere così:

$$\begin{cases} y^2 = \frac{b^2}{a^2}(a^2 - x^2) \\ x^2 + \frac{b^2}{a^2}(a^2 - x^2) + px + qy + r = 0 \end{cases} \sim \begin{cases} y^2 = \frac{b^2}{a^2}(a^2 - x^2) \\ y = \dots \end{cases}$$

$$\sim \begin{cases} \text{equazione risoltrice "nella sola } x \text{"} \text{ di grado } \dots \\ y = \dots \end{cases}$$

4.3 Quesiti a risposta multipla

1. **Quesito** Quale fra i seguenti grafici rappresenta la funzione $y = x + |x|$ in un riferimento cartesiano ortogonale?



2. **Quesito** L'equazione $x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$
- (a) Rappresenta sempre una circonferenza reale se $c > 0$.
 - (b) Può anche rappresentare una parabola con asse parallelo all'asse delle ordinate.
 - (c) Rappresenta sempre una circonferenza reale.
 - (d) Può anche avere una sola soluzione.
 - (e) Ha sempre infinite soluzioni.
3. **Quesito** Due parabole del tipo $y = ax^2 + bx + c$
- (a) Hanno al più due punti in comune.
 - (b) Possono avere più di due punti in comune.
 - (c) Hanno almeno un punto in comune quando $a > 0$ per entrambe.
 - (d) Hanno sempre almeno un punto in comune.
 - (e) Non possono mai essere tra di loro tangenti.
4. **Quesito** Una retta nel piano cartesiano
- (a) Non può essere verticale perchè le rette verticali non hanno coefficiente angolare.
 - (b) Interseca sempre l'asse delle y in un solo punto.
 - (c) Si può sempre rappresentare con un'equazione del tipo $y = mx + q$.
 - (d) Si può rappresentare con un'equazione del tipo $ax + by = 0$ se passa per l'origine.
 - (e) Ha un'equazione del tipo $y = q$ se è parallela all'asse delle y .

5. **Quesito** L'equazione $y = \sqrt{1 - x^2}$ rappresenta
- Un'ellisse.
 - Una semicirconferenza.
 - Una parabola.
 - Una circonferenza.
 - Una retta.
6. **Quesito** L'equazione $x^2 - y^2 = 0$ rappresenta
- Una coppia di rette parallele.
 - Una coppia di rette incidenti.
 - Una iperbole non degenera.
 - Solo il punto $(0, 0)$.
 - Una ellisse.
7. **Quesito** L'insieme delle soluzioni dell'equazione $xy = 1$
- È una parabola.
 - È costituito solo dai punti $(1, 1)$ e $(-1, -1)$.
 - È costituito dalle rette $x = 1$ ed $y = 1$.
 - Non ha punti sugli assi coordinati.
 - Contiene il punto $(0, 0)$.
8. **Quesito** Le rette $a_1x + b_1y + c_1 = 0$ e $a_2x + b_2y + c_2 = 0$
- Si incontrano in un punto se $a_1b_2 = a_2b_1$.
 - Si incontrano in un punto se $a_1b_2 \neq a_2b_1$.
 - Sono parallele solo se $a_1 = a_2 \wedge b_1 = b_2$.
 - Possono essere perpendicolari solo se $c_1 = c_2$.
9. **Quesito** L'ascissa del vertice della parabola $x = \pi y^2 + \pi y$ è
- $-\frac{1}{2}$
 - $-\frac{\pi}{4}$
 - $\frac{\pi}{4}$
 - $\frac{1}{2}$
10. **Quesito** Il coefficiente angolare della retta passante per $(-2, 1)$ e $(3, 5)$ è
- $\frac{5}{4}$
 - $-\frac{4}{5}$
 - $\frac{4}{5}$
 - 6
 - $\frac{1}{6}$
11. **Quesito** Il coefficiente angolare di una retta perpendicolare alla retta $2x - 3y + 5 = 0$ è
- $\frac{3}{2}$
 - $-\frac{3}{2}$

- (c) $\frac{2}{3}$
- (d) $-\frac{2}{3}$

12. **Quesito** Il luogo geometrico dei punti del piano equidistanti da un punto e da una retta è
- (a) Sempre una parabola.
 - (b) Può essere una retta perpendicolare alla retta data.
 - (c) Può essere una retta parallela alla retta data.
 - (d) Una circonferenza.
13. **Quesito** Il massimo numero di intersezioni tra due parabole aventi ciascuna l'asse parallelo a uno o all'altro degli assi coordinati è
- (a) 5
 - (b) 4
 - (c) 3
 - (d) 2
 - (e) 1
14. **Quesito** Il luogo geometrico dei punti del piano equidistanti da due rette incidenti è costituito da
- (a) Due rette non perpendicolari.
 - (b) Due rette perpendicolari.
 - (c) Una circonferenza.
 - (d) Un'iperbole.
15. **Quesito** Nel piano cartesiano considera la retta

$$r : x + y = 0.$$

Disegna r rispetto al sistema di riferimento. Considerati i due semipiani di origine r , entrambi privati della origine comune r , la parabola

$$\mathcal{P} : y = -2x^2 - x$$

- (a) sta tutta in uno dei due semipiani;
 - (b) ha punti in comune con entrambi i semipiani;
 - (c) ha punti in comune solo con uno dei due semipiani.
16. **Quesito** Nel piano cartesiano è data la retta

$$r : y = \frac{1}{\operatorname{tg}(66^\circ)}x.$$

La misura in *deg* dell'angolo α , avente vertice in O e per lati la semiretta positiva dell'asse Ox e la semiretta superiore di r , di origine O , è

- (a) 33
- (b) 66
- (c) 24

- (d) 114
- (e) 156

17. **Quesito** Nel piano cartesiano l'equazione $x^2 - x = 0$ rappresenta

- (a) una parabola con la concavità verso l'alto;
- (b) una retta;
- (c) una coppia di rette parallele;
- (d) una coppia di rette incidenti.

Capitolo 5

Potenze, Logaritmi ed esponenziali

5.1 Note e osservazioni

5.1.1 Logaritmo naturale. Notazioni

Si definisce, $\forall x \in \mathbb{R}^+$,

$$\log_e x = \ln x \stackrel{\text{def}}{=} y \quad : \quad e^y = x.$$

Per i logaritmi in base e è in uso anche la notazione “log” (senza indicazione esplicita della base). Per i logaritmi in base 10 sono in uso anche le notazioni “Log” (con la ‘L’ maiuscola e senza indicazione della base) e “log” (senza indicazione esplicita della base). Purtroppo questa differenza di convenzioni può creare confusione. In questo testo abbiamo preferito usare la notazione indicata più sopra (“ln”) per i logaritmi in base e (conformemente a quanto si fa su tutte le calcolatrici tascabili in commercio), mentre in tutti gli altri casi la base sarà esplicitamente indicata. Nei quesiti in cui la base non è indicata è implicito che essa non è influente per la risoluzione.

5.2 Quesiti a risposta aperta

1. **Quesito** In base alla definizione calcola

$$e^{\ln x} = \dots \quad , \quad \ln e^x = \dots$$

Si può dunque affermare che

$$e^{\ln x} = \ln e^x, \quad \forall x \in \mathbb{R} ?$$

2. **Quesito** Trova quanto vale a nelle seguenti situazioni.

- (a) $\log_a 100 = 4$
- (b) $\log_{100} a = 2$
- (c) $\log_{a^{-1}} 5 = -1$
- (d) $\log_a(2a) = 2$
- (e) $\log_{a^2} 10 = \frac{1}{10}$
- (f) $\log_{10} 10^{-a} = a^2 - 6$

3. **Quesito** Per quali valori di $t \in \mathbb{R}$ vale l'uguaglianza

$$\log(1+t) - \log(1-t) = \log \frac{1+t}{1-t} ?$$

E l'uguaglianza

$$\log|1+t| - \log|1-t| = \log \frac{1+t}{1-t} ?$$

E infine l'uguaglianza

$$\log(1-t^2) - \log(1-t) = \log \frac{1-t^2}{1-t} ?$$

4. **Quesito** È possibile che l'equazione

$$\log(1-x^4) - \log(1-x^2) = 1-x^4$$

abbia 3 soluzioni?

5. **Quesito** Trova i valori di $k \in \mathbb{R}$ tali che l'uguaglianza

$$(*) \quad \log(kx-2) + \log(kx+2) = \log(k^2x^2-4)$$

sia verificata per ogni $x < -4$.

(Attenzione: dire che $(*)$ è verificata per ogni $x < -4$ significa che tutti gli $x < -4$ la soddisfano, potendo però la $(*)$ essere soddisfatta anche da altri valori ...).

6. **Quesito** Risolvi l'equazione

$$\log \frac{x-2}{2} = \log \sqrt{x+6}.$$

7. **Quesito** Trova per quali valori di $x \in \mathbb{R}$ l'espressione seguente ha significato

$$\ln(\sqrt{2x^2-x^4}+1-x^2).$$

8. **Quesito** Risolvi l'equazione

$$2^{\sqrt{x-1}} \cdot 2^{\sqrt{x+1}} = 16^{\frac{1}{\sqrt{x+1}}}$$

9. **Quesito** Dimostra che per ogni terna di numeri reali positivi

$$(a, b, c) \quad a, b \neq 1$$

vale la formula

$$(\log_a b)(\log_b c) = \log_a c.$$

Da questa formula, fatto $c = x$, deriva la

$$\log_b x = \log_? \cdot \log_a x$$

che vale come formula di passaggio dal logaritmo in base a di un qualsiasi numero $x > 0$ al suo logaritmo in base b : la costante da precisare

$$\log_?$$

opera come un coefficiente fisso di trasformazione.

10. **Quesito** Quante soluzioni ha l'equazione

$$\ln x = \frac{1}{x-1} \quad ?$$

11. **Quesito** Trova le soluzioni dell'equazione

$$\log_{\frac{1}{81}}(x^2 - 1) = -\frac{1}{4}.$$

12. **Quesito** È giusto scrivere l'uguaglianza

$$(*) \quad \log(1 - x^2) = \log(1 - x) + \log(1 + x)$$

o esiste qualche x per cui il primo membro ha senso ma $(*)$ non vale, o, viceversa, il secondo membro ha senso ma $(*)$ non vale? Stessa questione a proposito dell'uguaglianza

$$\log(x^2 - 1) = \log(x - 1) + \log(x + 1).$$

13. **Quesito** Alcuni decenni fa è stato dimostrato che

il numero $2^{\sqrt{2}}$ è *irrazionale*.

Dimostra tu, ora, che

il numero $\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ è *irrazionale*.

Trova poi un esempio di due numeri irrazionali α e β tali che

α^β sia *razionale* !

14. **Quesito** Considera i seguenti 3 numeri interi

$$\log_{100} 10^8, \log_2 64, \log_3 6561.$$

Trovane il *M.C.D.* e il *m.c.m.*.

15. **Quesito** Stabilisci per quali valori del parametro reale a l'equazione

$$\log_x(2x^2 - 6x + a) = 2$$

ha, rispettivamente,

- (a) almeno una soluzione;
- (b) una sola soluzione;
- (c) più di una soluzione.

16. **Quesito** Stabilisci per quali $x \in \mathbb{R}$ risulta

$$\log_{|x^2-x|} 2 < \log_{|x^2-x|} 3$$

e per quali risulta invece

$$\log_{|x^2-x|} 2 > \log_{|x^2-x|} 3$$

17. **Quesito** Calcola, per ogni x positivo e diverso da 1

$$\log_x \{ \log_x [\log_x (x^x)] \} .$$

18. **Quesito** Dato un numero reale positivo $a > 1$, stabilisci per quali x reali positivi risulta rispettivamente

$$\log_a x > \log_x a$$

$$\log_a x = \log_x a$$

$$\log_a x < \log_x a$$

19. **Quesito** Trova le soluzioni della seguente equazione

$$\ln(x^{\ln x}) = 1$$

20. **Quesito** Risolvi l'equazione

$$\log_{\ln x} (\ln x^8) = 4$$

21. **Quesito** Risolvi l'equazione

$$\log_{|x-1|} (x+5) = 2$$

22. **Quesito** Risolvi l'equazione

$$|\ln |x|| = \ln^2 x$$

23. **Quesito** Risolvi l'equazione

$$\ln(x^4) = (\ln x^2)^2$$

24. **Quesito** Risolvi l'equazione

$$\log_{x^3} (\ln x) = \log_x (\ln x^{\sqrt[3]{4}})$$

25. **Quesito** Risolvi la disequazione

$$\log_x (\ln x) > \log_x 2$$

26. **Quesito** Calcola

$$\log_3 \left(\log_3 \sqrt[3]{\sqrt[3]{\sqrt[3]{3}}} \right)$$

27. **Quesito** Risolvi la disequazione

$$x^{2x-1} > x^{1-2x}$$

5.3 Quesiti a risposta multipla

1. **Quesito** La nota proprietà delle potenze $((a^b)^c = (a^{bc})$ è valida
 - (a) Solo se $a > 0$
 - (b) Se $a > 0$
 - (c) Sempre
 - (d) Mai
 - (e) Se e solo se $a > 0$

2. **Quesito** La nota proprietà delle potenze $(a^{b+c} = a^b \cdot a^c$ è valida
 - (a) Solo se $a > 0$
 - (b) Se $a > 0$
 - (c) Se $a < 0$
 - (d) Sempre
 - (e) Mai

3. **Quesito** Sia dato un numero reale x . La potenza $(x^2)^x$ si può calcolare
 - (a) per ogni x .
 - (b) solo per $x > 0$.
 - (c) solo per $x < 0$.
 - (d) per $x \neq 0$.
 - (e) solo se x è intero.

4. **Quesito** La nota proprietà delle potenze $(a \cdot b)^c = a^c \cdot b^c$ è valida
 - (a) se $a \cdot b > 0$
 - (b) sempre
 - (c) se $a > 0$ e $b > 0$
 - (d) solo se $a > 0$ e $b > 0$
 - (e) mai

5. **Quesito** Se $a > 0$ è un numero reale e $n \geq 0$ è un intero, la disuguaglianza $a^n \leq a$ è verificata
 - (a) solo se $a \leq 1$ e $n = 0$
 - (b) solo se $a \leq 1$ e $n > 1$
 - (c) se $a \leq 1$ e $n > 1$
 - (d) se e solo se $n = 1$
 - (e) se $a > 1$

6. **Quesito** Se a è un numero reale, la potenza a^a ha senso
 - (a) per qualunque a .
 - (b) solo per gli $a \neq 0$.
 - (c) solo per gli $a > 0$.
 - (d) solo se a è un numero intero non nullo.
 - (e) per tutti gli $a > 0$ e per a intero minore di zero.

7. **Quesito** Quale delle seguenti affermazioni è vera?

- (a) esistono due numeri reali x ed y tali che $\frac{2^{x+y}}{3^{x-y}} < 0$
- (b) $\frac{2^{x+y}}{3^{x-y}} = \left(\frac{2}{3}\right)^x 6^y, \forall x, y \in \mathbb{R}$
- (c) $\frac{2^{x+y}}{3^{x-y}} = \frac{2^x + 2^y}{3^x - 3^y}, \forall x, y \in \mathbb{R}$
- (d) $\frac{2^{x+y}}{3^{x-y}}$ non è definita se $x = y$

8. **Quesito** $3^{10} + 3^{10} + 3^{10}$ è uguale a

- (a) 3^{11}
- (b) 3^{30}
- (c) 9^{30}
- (d) 9^{10}
- (e) 27^{10}

9. **Quesito** Quanto vale $((-1)^2)^{\frac{1}{2}}$

- (a) Dipende dall'ordine in cui si eseguono le potenze.
- (b) Non è definito perchè non si può fare una potenza con base negativa.
- (c) -1 , perchè basta fare il prodotto degli esponenti, ottenendo $(-1)^1 = -1$.
- (d) Non è definito perchè equivale a $(\sqrt{(-1)})^2$
- (e) 1

10. **Quesito** L'equazione $2^x = 3^x$, nell'insieme dei numeri reali

- (a) non ha soluzioni;
- (b) ha 1 soluzione;
- (c) ha 2 soluzioni;
- (d) ha ∞ soluzioni.

11. **Quesito** L'equazione $\log_x 3 = 9$, nell'insieme dei numeri reali

- (a) non ha soluzioni;
- (b) ha la soluzione $x = \sqrt[9]{3}$;
- (c) ha la soluzione $x = \sqrt[3]{9}$;
- (d) ha la soluzione $x = 2$.

12. **Quesito** L'equazione $\log_2(x-1) + \log_2(x+1) = 3$, nell'insieme dei numeri reali

- (a) ha 1 soluzione;
- (b) ha 2 soluzioni;
- (c) non ha nessuna soluzione;
- (d) ha infinite soluzioni.

13. **Quesito** L'espressione $\log_{-2}(-8)$, nell'insieme dei numeri reali

- (a) vale 3;
- (b) non è definita;

(c) vale -3 .

14. **Quesito** Il numero $\log_5((-4)(-3))$ è uguale a

- (a) $\log_5 4 \cdot \log_5 3$
- (b) $\log_5(-4) + \log_5(-3)$
- (c) $\log_5 4 + \log_5 3$
- (d) $\frac{\log_5 4}{\log_5 3}$

15. **Quesito** L'uguaglianza $\log(x+5)^2 = 2\log(x+5)$ vale

- (a) per ogni x reale;
- (b) per $x \geq -5$;
- (c) per $x > -5$;
- (d) per $-5 < x < 5$.

16. **Quesito** Il numero $\frac{1}{2^{11}} + \frac{1}{2^{11}}$ è uguale a

- (a) $\frac{2}{2^{22}} = \frac{1}{2^{21}}$;
- (b) $\frac{1}{1024}$;
- (c) $\frac{1}{512}$;
- (d) $\frac{1}{256}$.

17. **Quesito** $\log_{\frac{9}{4}} \frac{2}{3}$ è uguale a

- (a) $\frac{1}{2}$;
- (b) $-\frac{1}{2}$
- (c) 2 ;
- (d) -2 .

18. **Quesito** Se x è un numero reale, il numero $2^{[(x+1)^2]}$ è uguale a

- (a) 4^{x+1}
- (b) $(2^{x+1})^2$
- (c) $4^x \cdot 2^{x^2+1}$
- (d) $(2^x + 2)^2$

19. **Quesito** L'uguaglianza

$$\left(\frac{1}{4}\right)^{\frac{1}{4}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

è

- (a) vera
- (b) falsa

20. **Quesito** L'uguaglianza

$$\left(\frac{1}{3\sqrt{3}}\right)^{\frac{1}{3\sqrt{3}}} = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^{\frac{1}{\sqrt{3}}}$$

è

- (a) vera

(b) falsa

21. **Quesito** È dato un numero reale positivo x . Trova quali di queste affermazioni sono corrette.

(a) $\sqrt{x} < x, \quad \forall x \neq 1$

(b) $x^x > x, \quad \forall x \neq 1$

(c) $x^x < x^{2x}, \quad \forall x \neq 1$

(d) $x^x < (2x)^{(2x)}, \quad \forall x$

(e) $x^x < (3x)^{(3x)}, \quad \forall x$

Capitolo 6

Polinomi, Frazioni algebriche, Equazioni, Disequazioni, Sistemi

6.1 Note e osservazioni

6.2 Quesiti a risposta aperta

1. **Quesito** Carlo inventa una divisione tra polinomi secondo la regola messa in luce dal seguente esempio, e applicabile ad ogni coppia di polinomi $(P(x), D(x))$, con $\text{grado}[D(x)] \leq \text{grado}[P(x)]$.

$$\begin{array}{r|l}
 \begin{array}{r}
 x^5 + 2x^4 + 3x^3 - x^2 + x + 2 \\
 -x^5 - x^4 \\
 \hline
 / \quad x^4 + 3x^3 - x^2 + x - 2 \\
 \quad -x^4 - x^3 \\
 \hline
 \quad \quad / \quad 2x^3 - x^2 + x + 2 \\
 \quad \quad \quad -2x^3 - 3x^2 \\
 \hline
 \quad \quad \quad \quad / \quad -4x^2 + x + 2 \\
 \quad \quad \quad \quad \quad 4x^2 - 4x \\
 \hline
 \quad \quad \quad \quad \quad \quad / \quad -3x + 2
 \end{array} &
 \begin{array}{l}
 x^2 + x - 1 \\
 \hline
 x^3 + x^2 + 2x - 4
 \end{array}
 \end{array}$$

Anche Carlo finisce, come si vede, per trovare un “quoziente” $x^3 + x^2 + 2x - 4$ e un “resto” $-3x + 2$. Trova perché la sua regola “non funziona”, a differenza della regola tradizionale. Carlo ha trovato il quoziente e il resto della divisione “vera” di due polinomi: quali?

2. **Quesito** Scomponi il polinomio $P(x) = x^4 + x^3 + x + 1$ nel prodotto di due fattori di 2° grado con coefficienti interi. Quanti zeri reali ha il polinomio $P(x)$?
3. **Quesito** Sono dati i due polinomi

$$P_k(x) = x^2 + kx + 1 \quad \text{e} \quad Q_k(x) = kx^2 + x - 2.$$

Trova se esiste qualche $k \in \mathbb{R}$ tale che $P_k(x)$ e $Q_k(x)$ abbiano $-\sqrt[3]{2}$ come zero comune.

4. **Quesito** Sono dati i due polinomi

$$P_k(x) = kx - 2k \quad \text{e} \quad Q_k(x) = x^2 - k^2.$$

Esiste qualche $k \in \mathbb{R}$ tale che $P_k(x)$ e $Q_k(x)$ hanno uno zero comune? Se sì, qual è questo zero, per ogni k trovato?

Risposta Sì, per $k = 0, 2, -2$. Per $k = 0$ lo zero comune è 0, per $k = 2$ lo zero comune è 2, per $k = -2$ lo zero comune è 2.

5. **Quesito** Per quali $\lambda \in \mathbb{R}$ la disequazione

$$\lambda x^2 + \lambda x + 6 \geq 7$$

non ha alcuna soluzione? Esiste qualche $\lambda \in \mathbb{R}$ tale che la disequazione abbia un n° finito di soluzioni? Per quali $\lambda \in \mathbb{R}$ la disequazione ha per insieme delle sue soluzioni un intervallo limitato di numeri reali?

6. **Quesito** Risolvi le disequazioni

- (a) $-2x < |8x^2 - 6|$
- (b) $-2x \leq |8x^2 - 6|$
- (c) $-2x \geq |8x^2 - 6|$
- (d) $-2x > |8x^2 - 6|$

7. **Quesito** Usando una calcolatrice, calcola $\alpha = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$. Sempre mediante la calcolatrice trova il reciproco, $\frac{1}{\alpha}$, del numero trovato: cosa si può osservare? Deduci che α è una radice dell'equazione algebrica di 2° grado

$$(*) \quad x^2 + x - 1 = 0.$$

Trova l'altra radice di (*) senza risolverla (usa Ruffini).

8. **Quesito** Trova un'equazione algebrica, a coefficienti interi, che abbia il numero $\alpha = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$ come radice doppia.

9. **Quesito** Risolvi l'equazione algebrica

$$x^4 - 24x^2 + 4 = 0.$$

Quale delle soluzioni trovate appartiene all'insieme

$$\{-2, \sqrt{5} - \sqrt{7}, 2, \sqrt{5} + \sqrt{7}\} ?$$

10. **Quesito** Uno dei due sistemi di disequazioni

$$\begin{cases} (x-1)(x+2) > 0 \\ (x+1)(x-2) < 0 \end{cases} \quad , \quad \begin{cases} (x-1)(x+1) > 0 \\ (x+2)(x-2) < 0 \end{cases}$$

è equivalente alla disequazione

$$(x^2 - 1)(x^2 - 4) < 0 \quad ?$$

11. **Quesito** Risolvi l'equazione

$$||x| - x| = 1.$$

12. **Quesito** Sapendo che il polinomio

$$x^5 - x^4 - 5x^3 + x^2 + 8x + 4$$

ha uno zero razionale doppio e uno triplo, fattorizzalo completamente.

13. **Quesito** Esiste qualche valore di k per cui il sistema lineare di 2 equazioni nelle 2 incognite x ed y

$$\begin{cases} kx + (k+1)y = k+3 \\ -6x + (k-1)y = k^2 + 5k + 9 \end{cases}$$

non ha alcuna soluzione?

14. **Quesito** Il polinomio

$$x^4 + 3x^2 + 4$$

è prodotto di due polinomi a coefficienti interi relativi, entrambi di grado positivo: trovali.

15. **Quesito** Quali sono le soluzioni reali dell'equazione

$$x^{100} - 1 = 0 \quad ?$$

16. **Quesito** Scomponi il polinomio

$$x^{100} + 1$$

nel prodotto di due polinomi dello stesso grado.

17. **Quesito** Risolvi l'equazione

$$\sqrt{x+1+2\sqrt{x}} - \sqrt{x+1-2\sqrt{x}} = 2\sqrt{x}.$$

18. **Quesito** Verifica che ogni terna di numeri del tipo

$$(t, -2t, t) \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

è una soluzione del sistema lineare

$$\Sigma : \begin{cases} x + 2y + 3z = 0 \\ 4x + 5y + 6z = 0 \\ 7x + 8y + 9z = 0 \end{cases}$$

Verifica anche che, oltre alle soluzioni sopra indicate, Σ non ha altre soluzioni.

19. **Quesito** Per ogni $k \in \mathbb{R}$ determina il numero (≥ 0) di soluzioni dell'equazione biquadratica nell'incognita x

$$x^4 - 2kx^2 + k^2 - 1 = 0.$$

20. **Quesito** Per ogni $x \neq 1$ la funzione razionale

$$\frac{-x^3 - 5x + 6}{1 - x^3}$$

ha lo stesso valore di un'altra funzione razionale definita su tutto \mathbb{R} : di quale funzione si tratta?

21. **Quesito** Trova le soluzioni delle equazioni seguenti

(a) $x^2 + 2x - 4 + |x^2 + 2x - 3| = -1$

(b) $|x^2 - 1| = x + 1$

(c) $||x| - 1| = |x + 1|$

22. **Quesito** Trova il polinomio massimo comun divisore dei due polinomi

$$P(x) = x^5 + x^4 - 2x^3 + x^2 + 3x - 2 \quad , \quad Q(x) = x^4 + 3x^3 - 2x^2 - 5x + 3.$$

Osservazione Il $M.C.D.(P(x), Q(x))$ (perfettamente determinato se lo si richiede col coefficiente di grado massimo uguale ad 1), si determina con lo stesso procedimento delle divisioni successive attuato per i numeri interi: solo che le divisioni sono tra polinomi, naturalmente, ... e ci vuole un po' di pazienza!

Risposta Si trova

$$M.C.D.(P(x), Q(x)) = x^2 + x - 1.$$

23. **Quesito** Trova per quali valori del parametro a il sistema lineare nelle due incognite x, y

$$\Sigma_a \quad : \quad \begin{cases} ax + ay = a \\ x + ay = a \end{cases}$$

risulta avere una sola soluzione (ciò significa che esiste una unica coppia (x_0, y_0) soddisfacente le due equazioni di Σ_a).

Che cosa succede poi per i valori di a per cui il sistema non ha una sola soluzione?

Attenzione: per ogni valore di a il sistema rimane a due incognite, per cui le sue soluzioni sono sempre *coppie di numeri reali*.

Risposta Il sistema ha una sola soluzione $\forall a \in \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$.

24. **Quesito** Trova per quali valori del parametro a il sistema lineare nelle tre incognite x, y, z

$$\Sigma_a \quad : \quad \begin{cases} ax + ay + az = a \\ x + ay + az = a \\ x + y + az = a \end{cases}$$

risulta avere una sola soluzione (ciò significa che esiste una unica terna (x_0, y_0, z_0) soddisfacente le tre equazioni di Σ_a).

Che cosa succede poi per i valori di a per cui il sistema non ha una sola soluzione?

Attenzione: per ogni valore di a il sistema rimane a tre incognite, per cui le sue soluzioni sono sempre *terne di numeri reali*.

Risposta Il sistema ha una sola soluzione $\forall a \in \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$.

25. **Quesito** Scomponi il polinomio

$$P(x) = x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$$

nel prodotto di due fattori di secondo grado a coefficienti reali:

$$x^4 + x^3 + x^2 + x + 1 = (x^2 + ax + c)(x^2 + bx + c)$$

A scomposizione avvenuta, valuta se il polinomio risulta avere zeri reali.

Si può risolvere quest'ultimo problema senza scomporre $P(x)$?

26. **Quesito** Trova una disequazione nell'incognita x che abbia il seguente insieme di soluzioni

$$-3 \leq x \leq -1 \quad \vee \quad 0 < x \leq 1, \quad x \in \mathbb{R}.$$

27. **Quesito** Risolvi l'equazione

$$\frac{\sqrt{1-2x} - \sqrt{x^2-1}}{\sqrt{1-2x} + \sqrt{1-x^2}} = 1.$$

28. **Quesito** Perché *non è corretto* risolvere la disequazione

$$(*) \quad 4x - 5 < \sqrt{16x^2 - 26x + 3}$$

nel seguente modo:

$$\begin{aligned} (*) \Leftrightarrow \begin{cases} 4x - 5 \geq 0 \\ (4x - 5)^2 < 16x^2 - 26x + 3 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq \frac{5}{4} \\ -40x + 25 < -26x + 3 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq \frac{5}{4} \\ -14x < -22 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq \frac{5}{4} \\ x > \frac{11}{7} \end{cases} \Leftrightarrow x > \frac{11}{7} \quad ? \end{aligned}$$

29. **Quesito** Per quali valori di $k \in \mathbb{R}$ il polinomio

$$P_k(x) = -kx^3 - x^2 + x + k$$

risulta divisibile per il polinomio

$$Q_k(x) = x + k \quad ?$$

30. **Quesito** L'equazione

$$\sqrt[3]{x^2 - 1} + \sqrt{5x} + \sqrt[3]{x^2 - 1} - \sqrt{5x} = 0$$

ammette per soluzione il numero 1?

Ammette soluzioni diverse da 1?

31. **Quesito** Risolvi il sistema lineare omogeneo in 3 incognite

$$\Sigma \quad : \quad \begin{cases} 2x - y + z = 0 \\ x + y - z = 0 \\ 2x + 5y - 5z = 0 \\ x - 2y + 2z = 0 \end{cases}$$

Osservazione Risolvere significa: trovare *tutte le terne* di numeri reali

$$(x, y, z)$$

che sono soluzioni di Σ , ciascuna terna essendo *una soluzione* di Σ .

32. **Quesito** Trova un'equazione algebrica a coefficienti interi relativi che abbia il numero

$$\alpha = \frac{\sqrt{2 + \sqrt{3}}}{2}$$

come sua soluzione.

Determina le altre soluzioni dell'equazione trovata. Accertati se esiste un'equazione, a coefficienti interi relativi, di grado inferiore a quello dell'equazione trovata, ed avente α come sua soluzione.

33. **Quesito** Verifica che il polinomio

$$p(x) = (x + 1) - \frac{(x - 1)(x - 2)(x - 3)}{1 \cdot 2 \cdot 3}(x + 1)$$

soddisfa le condizioni

$$(*) \quad P(1) = 2, \quad P(2) = 3, \quad P(3) = 4, \quad P(4) = 0.$$

Esistono polinomi di grado inferiore a quello di $p(x)$ soddisfacenti le stesse condizioni $(*)$?

In caso affermativo trova un polinomio di grado minimo soddisfacente alle condizioni $(*)$.

34. **Quesito** Verifica che l'equazione

$$(*) \quad ||x| - x| - x| = 1$$

ha la soluzione 1.

Ora trova, se ce ne sono, le soluzioni di $(*)$ diverse da 1.

35. **Quesito** Considera, per ogni $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, la disequazione

$$(*) \quad ax - 7a^2 > 0.$$

Trova per quali a la $(*)$ ha soluzioni appartenenti all'intervallo aperto di estremi

$$-a^2 \quad , \quad a^2.$$

36. **Quesito** È dato il polinomio

$$P(x) = x^7 + x^5 + x^3 + x - 4.$$

Verifica che

$$P(1) = 0.$$

Trova quindi il quoziente della divisione di $P(x)$ per $(x - 1)$, ma senza effettuare divisioni: scrivi, al posto di “-4”, “-1 - 1 - 1 - 1”, e quindi applica a $P(x) = x^7 - 1 + \dots$ i ben noti prodotti notevoli.

Il quoziente della divisione di $P(x)$ per $(x - 1)$ è un polinomio di 6° grado

$$Q(x) = x^6 + \dots$$

che subito riconoscerai non avere alcuno zero reale positivo.
Poiché ogni zero (reale) positivo di $P(x)$, diverso da 1, deve essere uno zero di $Q(x)$, in quanto

$$P(x) = (x - 1)Q(x),$$

ne concludi che $P(x)$, oltre a 1, non ha alcuno zero positivo. Ora dimostra che $P(x)$ non ha alcuno zero negativo o nullo, scrivendolo così

$$P(x) = x(\dots) - 4.$$

Sicché potrai concludere che

$$P(x), \text{ oltre a } 1, \text{ non ha } \dots$$

E' un caso di polinomio di 7° grado un po' sfortunato; quest'altro

$$x^7 - 14x^5 + 49x^3 - 36x$$

ha invece 7 zeri reali, e tutti interi: trovali.

37. **Quesito** Data l'equazione

$$(*) \quad x^2 + (a^2 + 1)x - \frac{a}{2} = 0$$

trova per quali valori di $a \in \mathbb{R}$ (*) ha

due soluzioni distinte e dello stesso segno.

38. **Quesito** Risolvi l'equazione

$$\sqrt{x-1} - \sqrt{x+3} + \sqrt{5-x} = 0$$

39. **Quesito** Risolvi le seguenti equazioni, se sono risolubili:

$$\sqrt{x-2} + \sqrt{x+5} = \sqrt{9-x}$$

$$\sqrt{x+3} + \sqrt{x-3} = \sqrt{7} + \sqrt{2x-7}$$

$$\sqrt{2x-4} + \sqrt{3-x} = \sqrt{6-x} - 1$$

$$\sqrt{x+4} + \sqrt{2-x} = \sqrt{x+1}$$

40. **Quesito** Risolvi l'equazione

$$x^{15} - 3x^{10} + 4 = 0$$

dopo aver verificato che ha per radice $\sqrt[5]{2}$.

41. **Quesito** Risolvi l'equazione

$$||x| - x| = |x| - x$$

42. **Quesito** Sai riconoscere che il polinomio

$$x^4 - x^3 + x^2 - x + 1$$

non ha alcuno zero reale?

Suggerimento Ricorda il prodotto notevole

$$x^5 + 1 = \dots$$

43. **Quesito** È vero che

$$x_1 < x_2 < 0 \Rightarrow x_1^5 - x_1^4 < x_2^5 - x_2^4 ?$$

44. **Quesito** Sapendo che l'equazione algebrica

$$x^3 - x^2 + 1 = 0$$

ha una radice α , con $-1 < \alpha < 0$, trova, con l'aiuto di una calcolatrice, le espressioni decimali approssimate per difetto e per eccesso di α , esatte fino alla 6^a cifra decimale.

45. **Quesito** È dato il seguente sistema lineare

$$\Sigma = \begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 3 \\ x_1 + 2x_2 - x_3 + 3x_4 = -1 \\ x_1 - x_2 - x_3 - x_4 = 2 \end{cases}$$

Ti si chiede se tra le soluzioni di Σ vi sono quaterne di numeri interi relativi con il prodotto dei 4 elementi uguale a

$$297$$

46. **Quesito** Per quali valori del parametro a l'equazione

$$10^6 x^2 + (10^7 - a)x - (2 \cdot 10^8 - 10) = 0$$

ha una soluzione che è un multiplo intero di 10?

6.3 Quesiti a risposta multipla

1. **Quesito** Verifica che l'equazione $(x^6 - x^2 - 1) = 0$ ha la soluzione reale

$$x_1 = \sqrt{\sqrt[3]{\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{23}}{6\sqrt{3}}} + \sqrt[3]{\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{23}}{6\sqrt{3}}}}$$

Ne sapresti trovare un'altra?

Considera poi la disequazione $(x^6 - x^2 - 1)(1 + x^2 - x^6) \leq 0$. Allora essa:

- (a) è verificata per $x > 0$.
- (b) è verificata per $x < 0$.
- (c) non è risolubile per radicali quadratici.
- (d) è sempre verificata.
- (e) non ha nessuna soluzione.

2. **Quesito** Considera le due disequazioni

$$\begin{aligned} (*) \quad & x > 1 \\ (**) \quad & x^2 > 1 \end{aligned}$$

- (a) Esse sono equivalenti perché il passaggio dalla prima alla seconda è avvenuto elevando al quadrato due membri positivi.
- (b) L'elevazione al quadrato ha fatto perdere soluzioni.
- (c) L'elevazione al quadrato ha introdotto soluzioni estranee.
- (d) La seconda disuguaglianza è vera per $x < -1$, mentre la prima solo per $x > 1$.
- (e) La seconda disequaglianza è sempre vera.

3. **Quesito** La disequazione $\frac{\sqrt{x-2}}{2-x} > 0$ è verificata

- (a) per $x > 2$.
- (b) per $x < 2$.
- (c) per $x \leq 2$,
- (d) per $x \geq 2$.
- (e) mai.

4. **Quesito** L'insieme di soluzioni della disequazione $\sqrt{-(x-1)^2} \geq 0$ è:

- (a) $x \geq 1$
- (b) $x \leq 1$
- (c) Vuoto perchè non esiste la radice quadrata di un numero negativo.
- (d) $\{1\}$
- (e) $x \neq 1$

5. **Quesito** L'insieme di soluzioni della disequazione $(\sqrt{2} - \sqrt{3})x < 0$ è:

- (a) $x \geq 0$
- (b) $x \leq 0$
- (c) $x > 0$
- (d) $x < 0$
- (e) \mathbb{R}

6. **Quesito** L'equazione $x^{100} + x^2 + 1 = 0$

- (a) ha 100 soluzioni reali;
- (b) ha 2 soluzioni reali;
- (c) non ha nessuna soluzione reale;
- (d) non si può decidere il numero di soluzioni perchè non è di secondo grado.

7. **Quesito** La disequazione $|x+1|(x-3) \geq 0$ ha come insieme di soluzioni:

- (a) $x \geq 3$
- (b) $x \geq 3 \vee x = -1$
- (c) $x > 3$
- (d) $x \geq 3 \wedge x \neq -1$

8. **Quesito** La disequazione $|x + 1|(x + 3) > 0$ ha come insieme di soluzioni:
- $x > -3$
 - $x > -1$
 - $-3 < x < -1 \vee x > -1$
 - $x < -3$
9. **Quesito** L'equazione $|x + 1| + \sqrt{x - 1} = 0$
- non ha alcuna soluzione;
 - ha come soluzione $x = 1$;
 - ha come soluzione $x = -1$;
 - nessuna delle precedenti risposte è corretta.
10. **Quesito** L'equazione $|x + 2| + |x + 4| = 2$ ha
- infinite soluzioni;
 - nessuna soluzione;
 - 1 soluzione;
 - 2 soluzioni.
11. **Quesito** La disequazione $|x^2 - 5x + 6| \leq x^2 - 5x + 6$
- non ha alcuna soluzione;
 - è verificata per ogni x reale;
 - è verificata per $x \leq 2 \vee x \geq 3$;
 - è verificata per $2 \leq x \leq 3$,
12. **Quesito** La disequazione $|x^2 + 10| \leq 11$
- è verificata per $-1 \leq x \leq 1$
 - è verificata per $0 \leq x \leq 1$
 - è verificata per $x \leq 1$
 - è verificata per $x \geq -1$
13. **Quesito** L'equazione $x + \sqrt{x^2} = 0$
- ha 1 soluzione;
 - ha 2 soluzioni;
 - ha infinite soluzioni;
 - non ha alcuna soluzione.
14. **Quesito** La disequazione $\sqrt{|x + 1||x + 2|} > 0$ ha come insieme di soluzioni
- \mathbb{R}
 - $\mathbb{R} \setminus \{-2, -1\}$
 - $x < -2 \vee x > -1$
 - $-2 < x < -1$
15. **Quesito** Se x è un numero reale, l'espressione $(x^2 + 2)^{-1}$ è uguale a
- $\frac{1}{x^2} + \frac{1}{2}$;

- (b) $\frac{1}{x^2} - \frac{1}{2}$;
 (c) $-x^2 - 2$;
 (d) nessuna delle precedenti.
16. **Quesito** Se x è un numero reale, l'espressione $(x + 1)^{-2}$ è uguale a
 (a) $x^{-2} + 2x^{-1} + 1$;
 (b) $\frac{1}{x^2} + 1$;
 (c) $x^{-2} - 2x^{-1} + 1$;
 (d) nessuna delle precedenti.
17. **Quesito** La disequazione $(x^2 - 16)(x^2 - 6x + 9) < 0$ è verificata
 (a) per $-4 < x < 4$
 (b) per $x < -4 \vee x > 4$
 (c) per $-4 < x < 3 \vee 3 < x < 4$
 (d) nessuna delle precedenti risposte è corretta.
18. **Quesito** L'espressione $(b - a)(ab - a^2 - b^2)$ equivale a
 (a) $(a - b)^3$
 (b) $(b - a)^3$
 (c) $a^3 - b^3$
 (d) $b^3 - a^3$
19. **Quesito** Un sistema di tre equazioni di primo grado nelle tre incognite x, y, z
 (a) può avere infinite soluzioni;
 (b) ha sempre una sola soluzione;
 (c) può avere esattamente tre soluzioni perché in complesso è un sistema di terzo grado;
 (d) può avere esattamente tre soluzioni perché è in tre incognite.
20. **Quesito** Per $x \neq 0$ l'espressione $\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{2x} + \frac{1}{3x}\right)^{-1}$ vale
 (a) $\frac{11}{6}x$
 (b) $\frac{6}{11}x$
 (c) $\frac{11}{6x}$
 (d) $\frac{6}{11x}$
21. **Quesito** Quali delle affermazioni seguenti sono corrette?
 Il polinomio
- $$x^{30} - 1$$
- (a) è divisibile per $x^2 + 1$;
 (b) è divisibile per $x^3 + 1$;
 (c) è divisibile per $x^3 - 1$;
 (d) è divisibile per $x^4 - 1$;
 (e) è divisibile per $x^5 + 1$.
- Non eseguire, possibilmente, divisioni esplicite: fai lavorare i prodotti notevoli.

22. **Quesito** Data la disequazione

$$(*) \quad \frac{1}{x} < 2$$

trova le affermazioni corrette e quelle errate

- (a) (*) ha soluzioni positive.
- (b) (*) ha soluzioni negative.
- (c) esistono numeri positivi che non sono soluzioni di (*)
- (d) esistono numeri negativi che non sono soluzioni di (*)
- (e) (*) equivale alla disequazione $x^2 < 2x^3$.

Capitolo 7

Trigonometria

7.1 Note e osservazioni

7.1.1 Misure degli angoli e calcolatrici

Le calcolatrici tascabili prevedono, di norma, tre diverse unità di misura per gli angoli:

1. *deg*: il grado *sessagesimale* = $\frac{1}{360}$ angolo giro = $\frac{1}{90}$ angolo retto.
2. *gra* o *grad*: il grado *centesimale* = $\frac{1}{400}$ angolo giro = $\frac{1}{100}$ angolo retto (da qui deriva il nome).
3. *rad*: il radiante, ovvero l'angolo al centro corrispondente ad un arco circolare lungo come il raggio dell'arco stesso.

7.1.2 Notazioni

1. $\cotg x \stackrel{def}{=} \frac{\cos x}{\sin x}, \quad \forall x \neq h\pi, h \in \mathbb{Z}$
2. $\operatorname{tg} x \stackrel{def}{=} \frac{\sin x}{\cos x}, \quad \forall x \neq (2h+1)\frac{\pi}{2}, h \in \mathbb{Z}$

7.1.3 Funzioni periodiche

Data una funzione f di dominio D , si dice che f è *periodica* di periodo T , con $T > 0$, se

$$f(x+T) = f(x) \quad \forall x \in D.$$

Avvertenza: una funzione può avere diversi periodi. Per esempio la funzione $f(x) = \sin^2 x$ ha come periodi tutti i numeri $\{k\pi, k \in \mathbb{N}\}$.

7.2 Quesiti a risposta aperta

1. **Quesito** Se a è la misura in *deg* di un angolo, qual è la sua misura in *gra*?
2. **Quesito** Se un angolo ha misura razionale rispetto al *deg*, come risulta la sua misura rispetto al *rad*?
3. **Quesito** Qual è la formula per passare dalla misura di un angolo α in *deg* a quella in *rad*? E viceversa?

4. **Quesito** Per quali valori di $a \in \mathbb{R}$ la quantità

$$\frac{a-1}{a+2}$$

può essere il seno di un angolo?

5. **Quesito** Ha senso il simbolo

$$\sin(+120)$$

senza alcuna altra informazione? Usando una calcolatrice calcolare il valore indicato, con l'ulteriore informazione che $\sin(+120)$ è il seno di un angolo di 120 radianti (usare il *mode rad* della calcolatrice). Qual è la misura in gradi sessagesimali di un angolo acuto che ha lo stesso valore del seno di quello appena trovato? Qual è la misura in gradi centesimali dello stesso angolo acuto?

6. **Quesito** Qual è la misura in *deg* di un angolo che misura 25 in *gra*?

7. **Quesito** Qual è la misura in *deg* e in *gra* di un angolo che misura 1 in *rad*, cioè dell'angolo radiante?

8. **Quesito** Qual è la misura in *gra* di un angolo che misura 1 in *deg*, cioè di un grado sessagesimale?

9. **Quesito** Qual è la misura in *deg* di un angolo che misura 1 in *gra*, cioè di un grado centesimale?

10. **Quesito** Individua le relazioni corrette

- (a) $1.5 \text{ rad} > 90 \text{ gra}$
- (b) $1.5 \text{ rad} > 90 \text{ deg}$
- (c) $1.5 \text{ rad} < 60 \text{ deg} + 30 \text{ gra}$
- (d) $2 \text{ rad} > 100 \text{ gra} + 20 \text{ deg}$
- (e) $333 \text{ gra} < 185 \text{ deg} + 2 \text{ rad}$
- (f) $2880 \text{ gra} + 2400 \text{ deg} = 21\pi \text{ rad}$
- (g) $56 \text{ deg} = 70 \text{ gra}$

11. **Quesito** Si conviene di adottare i simboli seguenti

$$\begin{aligned} \sin x^{(o)} &\stackrel{\text{def}}{=} \text{seno di un angolo di } x \text{ deg} \\ \sin x^{(g)} &\stackrel{\text{def}}{=} \text{seno di un angolo di } x \text{ gra} \end{aligned}$$

e così di seguito per le altre funzioni goniometriche.

- (a) Stabilisci qual è il primo intero positivo n per cui risulta, rispettivamente,
 - i. $\sin n^{(o)} = \sin n^{(g)}$
 - ii. $\cos n^{(o)} = \cos n^{(g)}$.
- (b) Stabilisci qual è il primo numero positivo x per cui risulta, rispettivamente,
 - i. $\sin x^{(o)} = \sin x^{(g)}$
 - ii. $\cos x^{(o)} = \cos x^{(g)}$.

Suggerimento Usa le formule di prostaferesi ed esprimi in *deg* l'angolo per cui valgono, nell'ordine, le quattro uguaglianze richieste.

12. **Quesito** Risolvi il sistema di disequazioni

$$\begin{cases} \cos^3\left(\frac{x+\pi}{2}\right) \leq -1 \\ |x| < \pi^2 \end{cases}$$

13. **Quesito** Trova per quali $x \in [0, 2\pi]$ vale l'uguaglianza

$$\sqrt{\frac{1 - \cos x}{2}} \sqrt{\frac{1 + \cos x}{2}} = \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2}.$$

14. **Quesito** Se un triangolo (ABC) è isoscele sulla base \overline{AB} e risulta

$$\frac{\overline{AC}}{\overline{AB}} = \frac{\sqrt{5 - \sqrt{5}}}{2},$$

quanto misura in *deg* l'angolo \widehat{ACB} ? (usa il teorema di Carnot e una calcolatrice o una tabella trigonometrica). Qual è la misura dell'angolo \widehat{ACB} in *rad* e in *gra*?

15. **Quesito** Prova che, se gli angoli sono misurati in radianti e

$$|m| \geq 1,$$

il numero 0 è l'unica soluzione dell'equazione

$$\sin x = mx.$$

16. **Quesito** Perché, se l'equazione

$$\sin x = mx$$

ha un numero finito di soluzioni (ciò accade, per esempio, per $m = \frac{2}{\pi}$, con $-\frac{\pi}{2}, 0, \frac{\pi}{2}$ come soluzioni), tale numero è sempre un numero dispari?

17. **Quesito** L'equazione

$$\sin^3 x + \sin^2 x + \sin x + 1 = 0$$

ha la soluzione $\frac{3\pi}{2}$. Vi sono altre soluzioni comprese tra 0 e 2π ?

18. **Quesito** Trova l'espressione approssimata delle misure in gradi sessagesimali (*deg*) degli angoli elementari soddisfacenti l'equazione

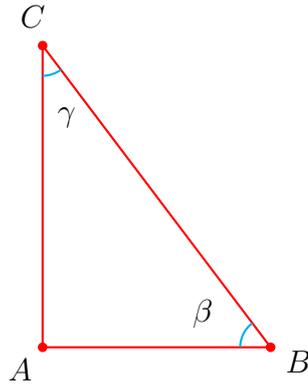
$$\sin x = \cos^2 x,$$

dove x è la misura in radianti di un angolo.

19. **Quesito** Risolvi l'equazione

$$\cos^2(x + 1) + \sin^2(x - 1) = 1.$$

20. **Quesito** Se (ABC) è un triangolo rettangolo come in figura



con angolo retto in A , detti β e γ gli angoli in B e C rispettivamente, verifica che vale l'uguaglianza

$$\cos \beta \sin \beta = \cos \gamma \sin \gamma.$$

21. **Quesito** Per quali coppie di numeri reali (x, y) risulta

$$\cos^2 x + \sin^2 y = 1 \quad ?$$

22. **Quesito** Riconosci che la disequazione

$$\sqrt{3} \cos x + 3 \sin x - 4 \geq 0$$

non ha alcuna soluzione.

Ne seguirà che la disequazione

$$\sqrt{3} \cos x + 3 \sin x - 4 < 0$$

ha per insieme delle soluzioni

23. **Quesito** Determina l'insieme P dei numeri $k \in \mathbb{R}$ tali che la seguente equazione

$$(*) \quad \sin^2 x + 2k \sin x + k^2 - 1 = 0$$

ammette soluzioni.

Dato un numero reale x qualunque, esso risulta sempre soluzione di qualcuna delle equazioni $(*)$?

24. **Quesito** Di un angolo convesso ottuso α si sa che

$$\sin \alpha = 2\sqrt{3} - 3$$

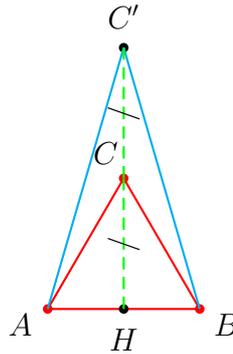
calcola $\cos \alpha$.

25. **Quesito** Riconosci che esiste un unico angolo elementare tale che

$$\cos \alpha = \sqrt{\frac{3}{7}} \quad \text{e} \quad \sin \alpha = \sqrt{\frac{4}{7}}.$$

Costruisci, con riga e compasso, l'angolo in questione.

26. **Quesito** È dato un triangolo equilatero (ABC) . Costruisci con riga e compasso, sulla base \overline{AB} , un triangolo isoscele con l'altezza doppia di quella di (ABC) .



Trova l'espressione approssimata, in *deg*, dell'angolo $\alpha = \widehat{AC'B}$.

27. **Quesito** Riconosci che, $\forall x \in \mathbb{R}$, vale l'uguaglianza

$$\sqrt{(\sin x + 3) + 2\sqrt{2}\sqrt{1 + \sin x}} \cdot \sqrt{(\sin x + 3) - 2\sqrt{2}\sqrt{1 + \sin x}} = 1 - \sin x.$$

(Attenzione: *non è vero*, in generale, che $\sqrt{x}\sqrt{y} = \sqrt{xy}$, ma in questo caso ...).

Quanto vale, di conseguenza, il numero (positivo)

$$\sqrt{(\sin x + 3) + 2\sqrt{2}\sqrt{1 + \sin x}} + \sqrt{(\sin x + 3) - 2\sqrt{2}\sqrt{1 + \sin x}}$$

$\forall x \in \mathbb{R}$?

(Ricorda: un numero positivo è la radice quadrata del suo quadrato ...).

28. **Quesito** Il numero

$$-\sin^3 x + \sin x - 1$$

è sempre negativo, $\forall x \in \mathbb{R}$?

29. **Quesito** Trova le soluzioni dell'equazione

$$\cotg x = 2 - 2\sin^2 x.$$

30. **Quesito** L'equazione nell'incognita x

$$(*) \quad \cos x = \frac{m - n}{m + n}$$

è risolubile per ogni $m, n \in \mathbb{N}$? Quante soluzioni ammette appartenenti all'intervallo $[0, \pi]$? E appartenenti all'intervallo $[0, 2\pi]$?

Se un numero razionale r è uguale a $\cos x$, per qualche $x \in \mathbb{R}$, esso è necessariamente della forma a secondo membro della (*) o c'è qualche eccezione?

31. **Quesito** Un arco di circonferenza \mathcal{C}_1 , di raggio r_1 , con angolo al centro corrispondente di 60 deg è lungo come un arco di circonferenza \mathcal{C}_2 , di raggio r_2 , con angolo al centro corrispondente di $183.\bar{3} \text{ gra}$. Qual è il rapporto dei due raggi?

32. **Quesito** Risolvi il sistema di disequazioni trigonometriche

$$\begin{cases} \cos 2x \geq -\sin x \\ \sin x \leq \cos 2x \end{cases}$$

33. **Quesito** Risolvi la seguente disequazione

$$2 \cos^2 \left(2x - \frac{\pi}{3} \right) + \cos \left(2x - \frac{\pi}{3} \right) \leq 1$$

Suggerimento Poni prima $y = 2x - \frac{\pi}{3}$; risolvi in y , quindi torna ad $x \dots$

34. **Quesito** Riconosci che, per ogni intero positivo $n \geq 2$, esistono due angoli *acuti*

$$\alpha \quad , \quad \beta$$

tali che

$$\sin \alpha = \sqrt{\frac{n - \sqrt{n+1}}{2n}} \quad , \quad \sin \beta = \sqrt{\frac{n + \sqrt{n+1}}{2n}}$$

Quanto valgono $\cos \alpha$ e $\cos \beta$?

Si può dunque dire che α e β sono due angoli \dots

35. **Quesito** Se, di un angolo elementare α (compreso tra quello nullo e quello giro) si sa che

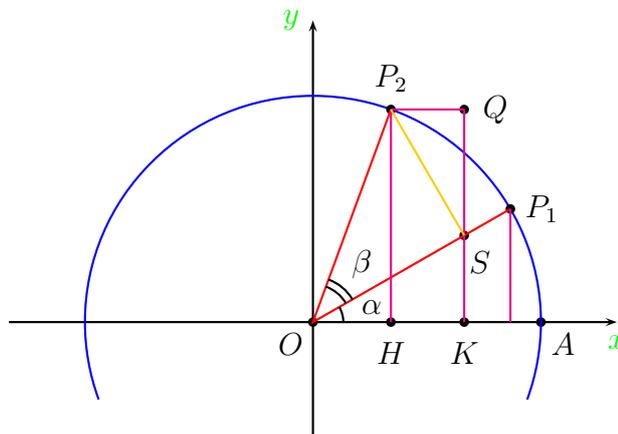
$$\sin \alpha = \frac{1}{\sqrt{10}} \quad ,$$

quali sono i possibili valori di $\operatorname{tg} \alpha$?

36. **Quesito** Avvalendoti della figura, dimostra la nota formula goniometrica

$$(*) \quad \sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta \quad ,$$

nel caso in cui α , β e pure la loro somma sono angoli acuti.



Dimostra poi la

$$(**) \quad \cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta$$

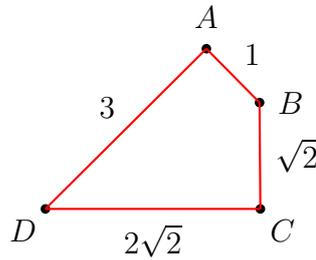
Suggerimento Dalla figura puoi ricavare

$$\| \overline{OS} \| = \cos \beta \quad , \quad \| \overline{P_2S} \| = \sin \beta$$

$$\| \overline{SK} \| = \| \overline{OS} \| \sin \alpha = \dots \quad , \quad P_2 \widehat{S} K = \dots$$

$$\sin(\alpha + \beta) = \| \overline{P_2H} \| = \| \overline{SK} \| + \| \overline{SQ} \| = \dots$$

37. **Quesito** Di un quadrilatero convesso ($ABCD$) si conoscono le misure dei lati successivi: $1, \sqrt{2}, 2\sqrt{2}, 3$ (vedi figura). Inoltre si sa che $\|\overline{AC}\| = \sqrt{5}$



Trova le misure degli angoli del quadrilatero e della diagonale \overline{DB}

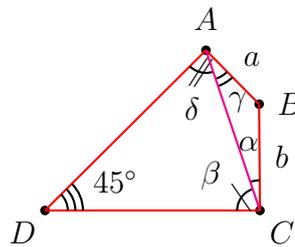
38. **Quesito** Se a e b sono numeri reali positivi, dimostra che i due numeri

$$\frac{a + \sqrt{2}b}{\sqrt{2}\sqrt{a^2 + b^2} + \sqrt{2}ab} \quad , \quad \frac{\sqrt{2}a + b}{\sqrt{2}\sqrt{a^2 + b^2} + \sqrt{2}ab}$$

sono i valori del coseno di due angoli acuti α, β tali che

$$\alpha + \beta = 45 \text{ deg.}$$

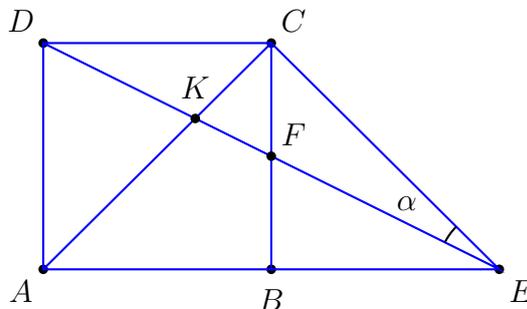
39. **Quesito** È dato un quadrilatero come in figura.



Sapendo che $\|\overline{AB}\| = a$, $\|\overline{BC}\| = b$, $\widehat{A} = \widehat{C} = 90 \text{ deg}$, $\widehat{D} = 45 \text{ deg}$, risolvi il quadrilatero (cioè trova i lati, l'angolo e la diagonale mancanti).

Suggerimento Trovato \widehat{B} , con Carnot trova $\|\overline{AC}\|$, $\cos \alpha$ e $\cos \beta$;

40. **Quesito** Considera la figura



È noto:

- che $(ABCD)$ è un quadrato;
- che $\overline{BE} \equiv \overline{AB}$.

Ti viene richiesto:

- (a) di calcolare $\operatorname{tg} \alpha$, ove $\alpha = \widehat{DEC}$;
- (b) di calcolare il rapporto fra i segmenti \overline{AK} e \overline{CK} ;
- (c) di calcolare il rapporto tra le aree del trapezio ($ABFD$) e del triangolo (CFE).

41. **Quesito** Tra gli angoli elementari α , compresi tra l'angolo nullo e quello giro, ve ne sono di tali che

$$\cos \alpha \quad \text{e} \quad \sin \alpha$$

sono entrambi numeri razionali: per esempio ogni angolo α tale che

$$\sin \alpha = \frac{2mn}{m^2 + n^2} \quad \forall (m, n) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \setminus \{0, 0\}$$

è di questo tipo, come puoi subito verificare, calcolando i possibili valori di $\cos \alpha$.

Osserva che questi angoli sono certamente costruibili con riga e compasso, ma che non sono certamente i soli, come dimostrano gli angoli di $\frac{\pi}{6} \text{ rad}$, $\frac{\pi}{4} \text{ rad}$, $\frac{\pi}{3} \text{ rad}$, ecc. che hanno il seno o il coseno o entrambi che sono numeri irrazionali, ma sono costruibili con riga e compasso.

La questione, ora, è la seguente: con la formula

$$\alpha = \arcsin \left(\frac{2mn}{m^2 + n^2} \right) + h \cdot \pi \text{ rad}, \quad h = 0, 1, \dots$$

al variare di $(m, n) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \setminus \{0, 0\}$, si ottengono proprio tutti gli angoli α con la proprietà che

$$\cos \alpha \quad \text{e} \quad \sin \alpha$$

sono entrambi numeri razionali, o qualcuno non si ottiene?

42. **Quesito** Due angoli acuti, o al massimo retti, α e β , sono tali che

$$2 \cos \alpha = \cos \beta.$$

Quale dei due angoli deve soddisfare ad una ulteriore limitazione, e qual è quest'ultima?

Qual è la relazione che lega $\sin \alpha$ e $\sin \beta$?

Questa relazione permette che $\sin \alpha$ e $\sin \beta$ siano entrambi razionali, a parte il caso banale $\alpha = \beta = \text{angolo retto}$, nel quale $\sin \alpha = \sin \beta = 1$?

43. **Quesito** Poni al posto dei tre punti il valore numerico o il simbolo adatto

- (a) $21 \text{ deg} = \dots \text{ rad}$
- (b) $84 \text{ deg} = \dots \text{ rad}$
- (c) $42 \text{ deg} = \dots \text{ rad}$
- (d) $6 \text{ deg} = \dots \text{ rad}$
- (e) $24 \text{ deg} = \dots \text{ rad}$
- (f) $54 \text{ deg} = \dots \text{ rad}$
- (g) $1 \text{ primo sessagesimale} = \dots \text{ gra}$
- (h) $\frac{1}{3240} \text{ gra} = \dots \text{ deg} = 1 \dots \text{ sessagesimale}$

44. **Quesito** Controlla con la calcolatrice l'esattezza delle uguaglianze seguenti

$$\begin{aligned}\sin(42 \text{ deg}) &= \sin\left(\frac{7\pi}{30} \text{ rad}\right) = \frac{\sqrt{9+\sqrt{5}-\sqrt{30-6\sqrt{5}}}}{4} \\ \cos(42 \text{ deg}) &= \cos\left(\frac{7\pi}{30} \text{ rad}\right) = \frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}+\sqrt{18-6\sqrt{5}}}}{8} \\ \sin(12 \text{ deg}) &= \sin\left(\frac{\pi}{15} \text{ rad}\right) = \frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}-\sqrt{18-6\sqrt{5}}}}{8} \\ \cos(12 \text{ deg}) &= \cos\left(\frac{\pi}{15} \text{ rad}\right) = \frac{\sqrt{30+6\sqrt{5}+\sqrt{6-2\sqrt{5}}}}{8}\end{aligned}$$

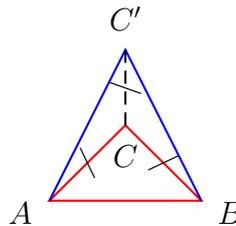
Ora calcola

$$\begin{aligned}\cos(84 \text{ deg}) &\text{ e } \sin(84 \text{ deg}) \\ \cos(24 \text{ deg}) &\text{ e } \sin(24 \text{ deg}) \\ \cos(21 \text{ deg}) &\text{ e } \sin(21 \text{ deg}) \\ \cos(3 \text{ deg}) &\text{ e } \sin(3 \text{ deg})\end{aligned}$$

45. **Quesito** Trova le valutazioni approssimate delle misure in *gra*, *deg* e *rad* degli angoli elementari α tali che

$$\text{tg } \alpha = 3$$

46. **Quesito** Dato il triangolo (ABC) rettangolo in C e isoscele



costruisci il triangolo (ABC') isoscele sulla base \overline{AB} e con $\overline{CC'} = \overline{AC}$. Calcola ora le misure in gradi sessagesimali e in radianti degli angoli di (ABC') e, applicando il teorema dei seni, calcola il rapporto

$$\frac{\|\overline{AC'}\|}{\|\overline{AB}\|}$$

47. **Quesito** Trova le soluzioni della disequazione goniometrica

$$2 \cos x + 2 \sin x \geq \sqrt{3} - 1$$

comprese nell'intervallo $[0, 2\pi]$.

7.3 Quesiti a risposta multipla

1. **Quesito** È data la funzione

$$f(x) = \cos^2(6x - 5).$$

Quali delle seguenti affermazioni sono corrette, se la misura degli angoli è in radianti?

$f(x)$ è periodica di periodo

- (a) π
- (b) $\frac{\pi}{2}$
- (c) $\frac{3\pi}{2}$
- (d) $\frac{2\pi}{3}$
- (e) $\frac{\pi}{6}$

2. **Quesito** Se la misura degli angoli è in radianti, l'equazione $\sin x = \sin \pi$ ha il seguente insieme di soluzioni

- (a) \mathbb{R}
- (b) \emptyset
- (c) $\{\pi\}$
- (d) $\{0\}$
- (e) $\{k\pi, k \text{ intero}\}$

3. **Quesito** Per i vari $x \in \mathbb{R}$ stabilisci quali delle seguenti espressioni sono corrette

- (a) $\sin(10x) \cdot \cos(10x)$ vale $\sin(20x)$
- (b) $\sin(10x) \cdot \cos(10x)$ vale $2 \cdot \sin(20x)$
- (c) $\sin(10x) \cdot \cos(10x)$ vale $\cos(20x)$
- (d) $\sin(10x) \cdot \cos(10x)$ vale $\sin^2(10x) - \cos^2(10x)$
- (e) $\sin(10x) \cdot \cos(10x)$ vale $0.5 \cdot \sin(20x)$

4. **Quesito** Se gli angoli sono misurati in radianti, data la funzione $f(x) = 2 \sin(2x) + 1$, trova quali delle seguenti affermazioni sono vere.

- (a) $f(x) \geq 0, \quad \forall x.$
- (b) L'equazione $f(x) = -1$ non ha soluzioni.
- (c) $\exists x$ tale che $f(x) > 3.$
- (d) f è periodica di periodo $\pi.$
- (e) f è periodica di periodo $2\pi.$

5. **Quesito** Se gli angoli sono misurati in radianti, quale delle seguenti affermazioni relative alla funzione $f(x) = \cos(x^2)$ è vera?

- (a) La funzione è periodica di periodo $2\pi.$
- (b) La funzione non è periodica.
- (c) La funzione è periodica di periodo $\sqrt{\pi}.$
- (d) La funzione è periodica di periodo $4\pi^2.$
- (e) La funzione non è calcolabile perchè non si può fare il quadrato di un angolo.

6. **Quesito** Se gli angoli sono misurati in radianti, quale delle seguenti affermazioni è vera?

- (a) Se $\cos(2x) = 0$, allora $\sin x = \frac{\sqrt{2}}{2}.$
- (b) Se $\sin x = 0$, allora $\cos x = 1.$
- (c) Se $\cos x = 0$, allora $\sin x = 1.$
- (d) Se $\sin x = 1$, allora $\cos x = 0.$

- (e) Se $\sin(2x) = 0$, allora $\cos x = 0 \wedge \sin x = 0$.
7. **Quesito** Se la misura degli angoli è in radianti, qual è l'insieme di definizione della funzione $\sqrt{\sin x - 1}$?
- $\{\frac{\pi}{2}\}$
 - \mathbb{R}
 - \emptyset
 - $\{\frac{\pi}{2} + k\pi, k \text{ intero}\}$
 - $\{\frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \text{ intero}\}$
8. **Quesito** Se gli angoli sono misurati in radianti, la disequazione $(\sin(6))x > 0$ è verificata
- per tutti gli x .
 - mai
 - per $x > 0$
 - per $x < 0$
 - per $x \neq 0$
9. **Quesito** Se gli angoli sono misurati in radianti, l'espressione $\cos^2 2 - \sin^2 2$ vale:
- $\frac{1}{2}$
 - 1
 - 0
 - $2 \cos 2 - 2 \sin 2$
 - $\cos 4$
10. **Quesito** Un triangolo rettangolo ha i cateti lunghi 3 e 4 rispettivamente. Detto α il più piccolo angolo del triangolo si ha:
- $\cos \alpha = \frac{3}{4}$
 - $\sin \alpha = \frac{4}{5}$
 - $\text{tg } \alpha = \frac{4}{3}$
 - $\cos \alpha = \frac{4}{5}$
 - $\sin \alpha = \frac{3}{4}$
11. **Quesito** Se x è la misura in radianti di un angolo, la funzione $f(x) = |\cos x|$ è:
- periodica di periodo $\frac{\pi}{2}$.
 - periodica di periodo π .
 - periodica di periodo 2π .
 - periodica di periodo 4π .
 - non periodica.
12. **Quesito** Sia x la misura in radianti di un angolo; le due funzioni

$$\cotg x \text{ e } \frac{1}{\text{tg } x}$$

assumono valori uguali

- (a) per ogni x reale;
- (b) per $x \neq (2k + 1)\frac{\pi}{2}$, $k \in \mathbb{Z}$;
- (c) per $x \neq k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$;
- (d) per $x \neq k\frac{\pi}{2}$, $k \in \mathbb{Z}$;

13. **Quesito** Sia α la misura in radianti di un angolo tale che $\operatorname{tg} \alpha = 1$. Allora

- (a) può essere $\sin \alpha = \frac{1}{2}$ e $\cos \alpha = \frac{1}{2}$
- (b) può essere $\sin \alpha = \frac{1}{2}$
- (c) può essere $\sin \alpha = -\frac{\sqrt{2}}{2}$
- (d) può essere $\sin \alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$

14. **Quesito** L'equazione $\sin^2 x \geq 1$

- (a) non ha soluzioni;
- (b) ha un numero finito di soluzioni;
- (c) ha come soluzioni i numeri $x = k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.
- (d) Nessuna delle precedenti risposte è corretta.

15. **Quesito** Se x indica la misura in radianti e x° la misura in gradi di un angolo

- (a) $\cos 1 < \cos 1^\circ$
- (b) $\cos 1 > \cos 1^\circ$
- (c) $\cos 1 = \cos 1^\circ$
- (d) $\cos 1$ e $\cos 1^\circ$ non si possono confrontare.

Capitolo 8

Geometria piana e solida

8.1 Note e osservazioni

8.1.1 Notazioni

- AB indica il segmento orientato di primo estremo A e secondo estremo B ; \overline{AB} indica il segmento non orientato di estremi A e B ; $\|\overline{AB}\|$ indica la misura del segmento \overline{AB} .

8.1.2 Figure convesse

Si dice *convessa* una figura F tale che valga l'implicazione

$$P_1, P_2 \in F \Rightarrow \overline{P_1P_2} \in F$$

8.2 Quesiti a risposta aperta

1. **Quesito** Se è assegnata una unità di misura delle lunghezze e vuoi conoscere il rapporto tra le lunghezze di due segmenti \overline{AB} e \overline{CD} , come procedi? Se, ad esempio, risultasse che la misura di \overline{AB} è $\sqrt{3}$ e quella di \overline{CD} è $\sqrt{12}$, quanto misurerebbe \overline{AB} , se venisse misurato rispetto alla lunghezza di \overline{CD} , assunta come unità di misura?
2. **Quesito** Che cosa significa dire che

due segmenti \overline{AB} e \overline{CD} sono fra loro commensurabili?

Se \overline{AB} e \overline{CD} sono fra loro commensurabili, è vero che, rispetto ad una opportuna unità di misura, la misura di \overline{AB} e quella di \overline{CD} risultano due numeri interi? È vero anche il viceversa?

Se, rispetto ad una unità di misura, \overline{CD} ha una misura non razionale, \overline{CD} e $\frac{5}{13}\overline{CD}$ risultano commensurabili?

3. **Quesito** Misurando una stessa lunghezza l rispetto a due unità di misura

$$l_1, l_2$$

si trovano i due numeri

$$\sqrt{315} \quad , \quad \sqrt{3375}$$

rispettivamente. Quanto vale il rapporto $\frac{l_2}{l_1}$?

Quanto valgono le misure di l_1 e di l_2 rispetto ad l , assunta come unità di misura?

Sapendo che vale la proporzione

$$l_2 : l_1 = l_3 : l_4$$

e che $l_3 = \sqrt{17}l_1$, qual'è la misura di l_4 rispetto ad l ?

4. **Quesito** È dato un trapezio T : la sua base maggiore misura 7, quella minore 3, l'altezza è 5. Per quali valori di k esiste un trapezio T' , equiesteso a T , con base maggiore di misura 7 e altezza $5k$?

5. **Quesito** Un triangolo isoscele ha i lati uguali di misura 3, e il terzo lato di misura 4. Quanto vale l'altezza relativa ad uno dei lati uguali?

6. **Quesito** Un quadrangolo convesso è un parallelogramma se e solo se le sue diagonali hanno lo stesso punto medio. Vero o no?

7. **Quesito** Di un triangolo \triangle sono note le misure

(a) di due lati e di uno degli angoli;

(b) di due degli angoli e di uno dei lati.

In entrambi i casi l'area di \triangle è determinabile?

8. **Quesito** Dato un triangolo, scrivi le definizioni di

baricentro, circocentro, incentro, ortocentro

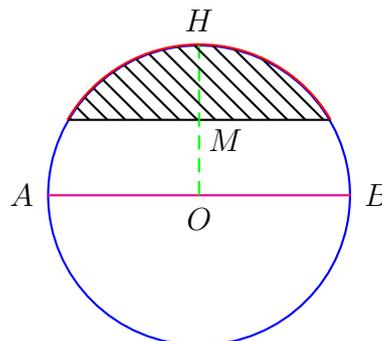
ad esso relativi. Quali di questi punti possono essere, in alcuni casi, esterni al triangolo? Precisare di quali casi si tratta.

9. **Quesito** I lati di un triangolo misurano

$$7, 11, 15.$$

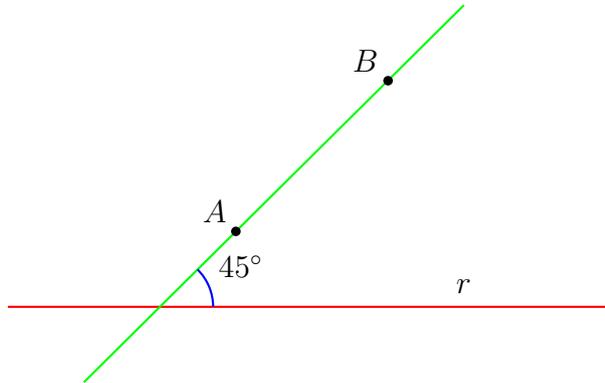
Quali sono le misure di un triangolo simile a quello sopra considerato e il cui perimetro misura 165?

10. **Quesito** Considera la figura:

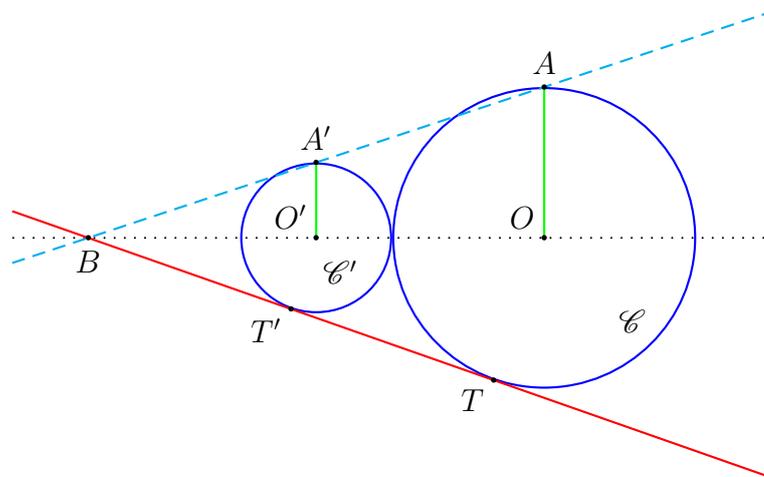


Valuta, in funzione del raggio r del cerchio, la misura del segmento circolare evidenziato, ove M è il punto medio di \overline{OH} e \overline{OH} è perpendicolare ad \overline{AB} .

11. **Quesito** Nella situazione illustrata nella figura, che angolo acuto con r devono formare le rette proiettanti di una proiezione parallela in modo che \overline{AB} si proietti su r in un segmento lungo come \overline{AB} ?



12. **Quesito** Se la terra fosse una sfera solida, e qualcuno, portando materiali da altri pianeti, ne coprisse tutta la superficie con uno strato alto un metro, di quanto crescerebbe la lunghezza dell'equatore?
13. **Quesito** Fra quali estremi deve essere compreso il numero l perché si possa costruire un triangolo di lati lunghi $4, 7, l$? Fra i triangoli costruiti quanti ve ne sono di rettangoli (a meno di congruenze)? E di isosceli? Realizza una semplice costruzione con la quale dimostrare che, per ogni l ammissibile, si può costruire un triangolo del tipo detto. Se siamo nel piano, fissato un l ammissibile, i triangoli di lati $4, 7, l$ sono tutti fra loro sovrapponibili? E se fossimo nello spazio?
14. **Quesito** Sono dati due cerchi \mathcal{C} e \mathcal{C}' , come in figura, tangenti esternamente uno all'altro.



Si sa inoltre che, detti O ed O' i centri dei due cerchi,

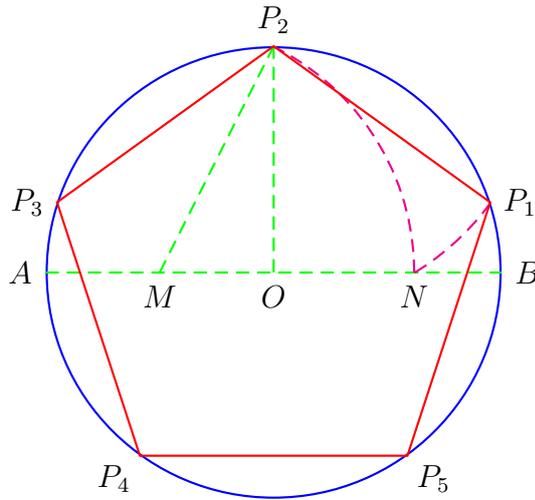
$$\overline{OA} \text{ ed } \overline{O'A'} \perp \overline{OO'}.$$

Prova che se dal punto B di intersezione delle rette AA' ed OO' si tira una tangente a uno dei due cerchi, essa risulta tangente anche all'altro.

15. **Quesito** Giustifica la costruzione, rappresentata in figura, del pentagono regolare inscritto nella circonferenza \mathcal{C} di centro O e raggio $\|\overline{OA}\| = r$, sapendo che

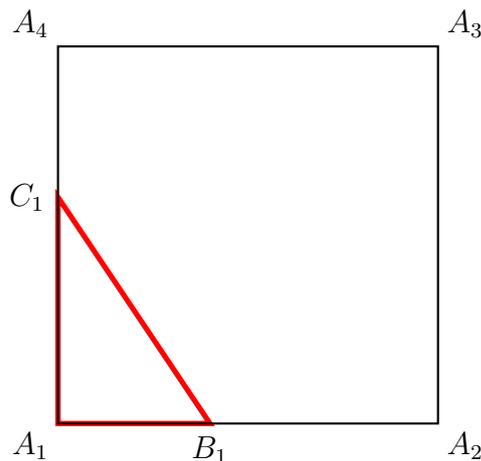
- M è il punto medio di \overline{AO} ;
- $\overline{OP_2} \perp \overline{AB}$;
- $\overline{MN} \equiv \overline{MP_2}$;
- $\overline{P_2N} \equiv \overline{P_2P_1}$.

(Si tratta di riconoscere che l'angolo $P_1\widehat{OP_2}$ è di $\frac{360}{5} = 72 \text{ deg}$).



16. **Quesito** È dato un triangolo $(A_1B_1C_1)$ rettangolo in A_1 ; viene quindi costruito il quadrato $(A_1A_2A_3A_4)$, essendo

$$\overline{B_1A_2} = \overline{A_1C_1} \quad \wedge \quad \overline{C_1A_4} = \overline{A_1B_1}.$$



Riconosci che il quadrato costruito sull'ipotenusa $\overline{B_1C_1}$ di $(A_1B_1C_1)$, risulta inscritto nel quadrato $(A_1A_2A_3A_4)$, cioè che gli ulteriori vertici B'_1 e C'_1 del quadrato costruito sull'ipotenusa appartengono al quadrato $(A_1A_2A_3A_4)$.

In quale situazione il rapporto tra l'area del quadrato $(A_1A_2A_3A_4)$ e quella del quadrato $(B_1C_1B'_1C'_1)$ risulta massima?

17. **Quesito** Dato un segmento \overline{AB} , sia P un suo punto interno. Riconosci che vale la doppia implicazione

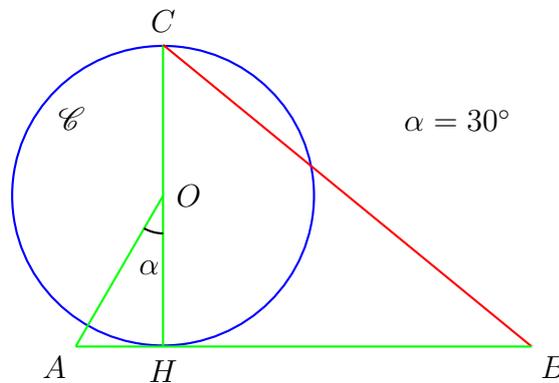
$$\frac{\overline{AP}}{\overline{AB}} = \frac{\sqrt{5} - 1}{2} \Leftrightarrow \overline{AB} : \overline{AP} = \overline{AP} : \overline{PB},$$

il che si suole esprimere dicendo che

\overline{AP} è la sezione aurea di \overline{AB}

(sezione è qui sinonimo di parte).

18. **Quesito** Dato un segmento \overline{AB} , costruisci la sua sezione aurea con riga e compasso.
 19. **Quesito** Considera la figura seguente



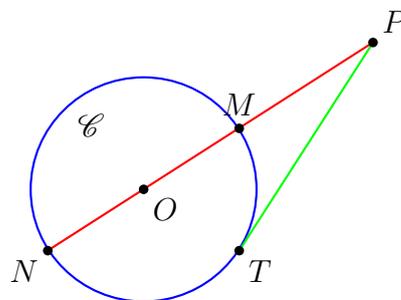
Sapendo che \overline{OH} è l'unità di misura delle lunghezze ($\|\overline{OH}\| = 1$), che \widehat{HOA} è un angolo di 30 deg, che \overline{AB} è tangente a \mathcal{C} in H , e $\|\overline{AB}\| = 3$, riconosci che

$$\|\overline{BC}\| = \sqrt{\frac{40 - 6\sqrt{3}}{3}}$$

(tieni presente che $\|\overline{OA}\| = 2\|\overline{AH}\|$ e che \widehat{AHO} è retto ...).

Calcola $\|\overline{BC}\|$ servendoti di una calcolatrice: si può dedurre che il segmento \overline{BC} è un'ottima approssimazione della ... rettificata.

20. **Quesito** Considera la figura seguente



dove

- \mathcal{C} è una circonferenza di centro O ;
- P è un punto esterno a \mathcal{C} ;

- \overline{PT} è tangente a \mathcal{C} in T ;
- M ed N sono i punti di intersezione di \mathcal{C} con la retta per P ed O .

Riconosci che, fissata un'arbitraria unità di misura delle lunghezze, risulta

$$\|\overline{PM}\| \cdot \|\overline{PN}\| = \|\overline{PT}\|^2.$$

21. **Quesito** Sono date tre lunghezze

$$l_1, \quad l_2, \quad l.$$

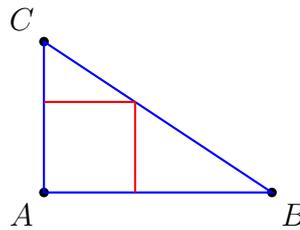
Sapendo che

- (a) l misura $\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}$ rispetto a l_1 ;
- (b) l misura $\frac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{\sqrt{12}}$ rispetto a l_2 ;

si vuole sapere

- (a) qual è la misura di l_2 rispetto ad l_1 ;
- (b) qual è la misura di l rispetto a $l_1 + l_2$.

22. **Quesito** (ABC) è un triangolo rettangolo in A , di cateti $b = \|\overline{AC}\|$ e $c = \|\overline{AB}\|$. Considera il quadrato di vertice A e con il vertice opposto ad A sull'ipotenusa \overline{BC} .

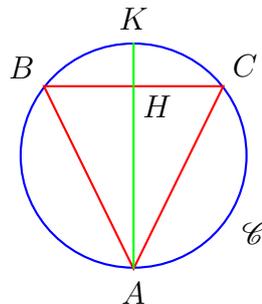


Riconosci che la misura del lato del quadrato in questione è

$$\frac{bc}{b+c}$$

e che, al massimo, il rapporto tra l'area del quadrato e quella del triangolo è $\frac{1}{2}$, e precisamente quando Tale rapporto ha anche minimo?

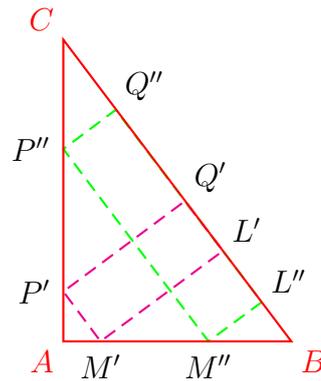
23. **Quesito** Un triangolo (ABC) , di base \overline{BC} , è inscritto nella circonferenza \mathcal{C} ; H sia il punto medio di \overline{BC} , e K l'ulteriore intersezione della retta per A e H con \mathcal{C} .



Riconosci che vale la proporzione

$$\overline{AH} : \overline{AB} = \overline{AB} : \overline{AK}.$$

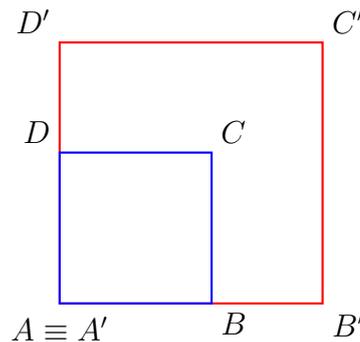
24. **Quesito** (ABC) è un triangolo rettangolo in A . Considera la figura



Osservando i due rettangoli $(L'M'P'Q')$ ed $(L''M''P''Q'')$, si può intuire che esiste un quadrato $(LMPQ)$ con il lato \overline{LQ} sull'ipotenusa e i due vertici M e P sui due cateti.

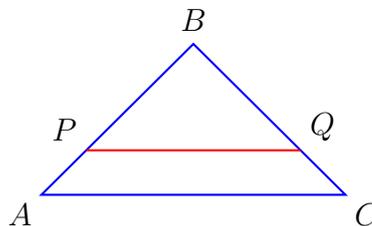
Costruisci $(LMPQ)$ nell'ipotesi che il triangolo (ABC) sia rettangolo isoscele. Con qualche sforzo in più potresti anche tentare la stessa costruzione nel caso di un triangolo rettangolo qualsiasi.

25. **Quesito** È dato un quadrato $(ABCD)$.



Costruiscine uno, $(A'B'C'D')$, come in figura, che abbia area tripla del primo, servendosi di riga e compasso.

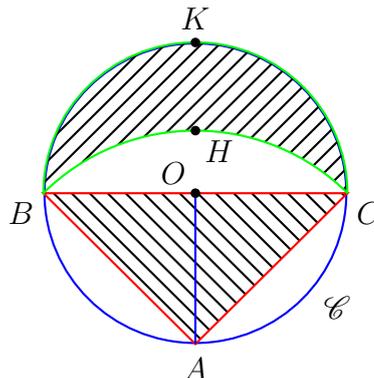
26. **Quesito** È dato il triangolo rettangolo isoscele (ABC) di vertice B .



Costruisci il segmento $\overline{PQ} \equiv \overline{AB}$.

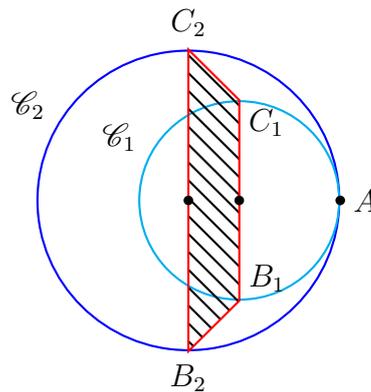
27. **Quesito** \overline{AB} e \overline{BC} sono due segmenti lunghi 6; l'angolo \widehat{ABC} misura 120° . Fra quali estremi può variare la distanza d di un punto D da B , perché il quadrangolo di vertici successivi A, B, C, D sia convesso e inscritto in una circonferenza?

28. **Quesito** La misura di un segmento \overline{AB} è $\sqrt{84}$. Per quali $n \in \mathbb{N}$ esiste una circonferenza di raggio n passante per A e B ? Tra questi n ne esiste uno per cui il centro della circonferenza abbia dalla retta passante per A e B una distanza espressa da un numero intero?
29. **Quesito** Quali delle seguenti affermazioni sono corrette?
- Un insieme con un unico punto non è una figura convessa.
 - L'intersezione di due figure convesse è una figura convessa.
 - L'unione di due figure convesse può essere convessa.
 - Se due figure non hanno alcun punto in comune, la loro unione non può essere convessa.
 - Una linea curva non è una figura convessa.
 - Un angolo è una figura convessa.
 - Un disco circolare è una figura convessa.
 - Un settore circolare è una figura convessa.
 - Un piano è una figura convessa.
 - Un semipiano è una figura convessa.
30. **Quesito** Una figura piana F ha la seguente proprietà: se contiene due punti P_1, P_2 , contiene almeno uno dei due semidischi circolari di diametro $\overline{P_1P_2}$. F è necessariamente un disco circolare?
31. **Quesito** Una figura piana F ha la seguente proprietà: se contiene due punti P_1, P_2 , contiene il disco circolare di diametro $\overline{P_1P_2}$. Di che figura si può trattare?
32. **Quesito** La somma degli angoli al vertice di un poligono convesso di 5 lati è sempre la stessa, qualunque sia il poligono (anche irregolare)? È comunque non inferiore a 500 deg ?
33. **Quesito** Un rettangolo è inscritto in una circonferenza \mathcal{C} di raggio r , avendo il lato maggiore di misura b e quello minore di misura a . Determina il valore del rapporto $\frac{b}{a}$, in modo che l'area del rettangolo valga r^2 . Esprimi, in tal caso, b ed a in funzione del raggio r della circonferenza.
34. **Quesito** Un triangolo rettangolo isoscele ha il perimetro di misura 10; quanto vale la sua area?
35. **Quesito** Nella figura è dato un circolo \mathcal{C} di centro O e \overline{BC} è il diametro di \mathcal{C} ortogonale ad \overline{OA} . Inoltre $\overline{AH} = \overline{AB}$.



Provare che la **lunula di Ippocrate** ($BHCK$) è equiestesa al triangolo (ABC).
 La lunula può avere per misura dell'area un qualunque numero intero n pur di assumere come unità di misura

36. **Quesito** Un trapezio ha base minore di misura 6 e base maggiore di misura 15. Le proiezioni dei lati obliqui sulla base maggiore sono una doppia dell'altra. Trovare i trapezi con le proprietà indicate, sapendo che uno dei lati obliqui ha per misura un numero intero.
37. **Quesito** Un circolo \mathcal{C}_1 , di raggio r_1 , è internamente tangente ad un circolo \mathcal{C}_2 , di raggio r_2 . Siano $\overline{B_1C_1}$ e $\overline{B_2C_2}$ i diametri di \mathcal{C}_1 e \mathcal{C}_2 ortogonali ai loro diametri per A .



- (a) Qual è la misura degli angoli del trapezio ($B_1C_1C_2B_2$)?
 (b) Al variare del circolo \mathcal{C}_1 i due punti descrivono, rispettivamente, . . . ,
 (c) Per quale valore del rapporto $\frac{r_2}{r_1}$ il trapezio ($B_1C_1C_2B_2$) ha l'area uguale
 i. a quella del triangolo (AB_1C_1)?
 ii. a quella del circolo \mathcal{C}_1 ?
38. **Quesito** Un trapezio isoscele ha le diagonali che sono tra loro ortogonali: qual è il rapporto tra la base maggiore e la base minore, se l'area del trapezio è $\frac{9}{16}$ di quella del quadrato costruito sulla base maggiore?
39. **Quesito** Sia E un insieme di punti dello spazio: cosa significa che il punto O è centro di simmetria per E ? Trova un esempio di un insieme E che abbia più di un centro di simmetria, ciascuno dei quali però non gli appartiene.
40. **Quesito** Riconosci che, dato un qualunque triangolo e detti a e b le misure di due suoi lati e h_a , h_b le misure delle rispettive altezze, vale la proporzione

$$(*) \quad a : h_b = b : h_a.$$

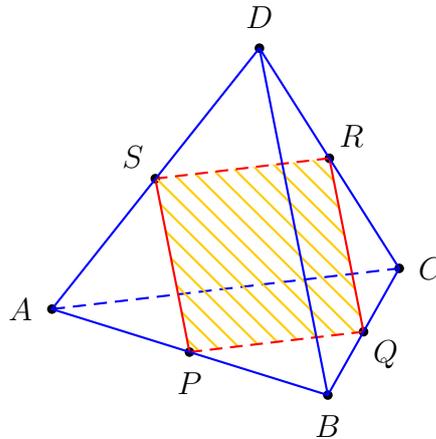
La proposizione (*) equivale alla

$$(**) \quad a : b = h_b : h_a \quad ?$$

La (**) può essere enunciata nel seguente modo:
il rapporto fra due lati è il reciproco del rapporto fra le rispettive altezze?

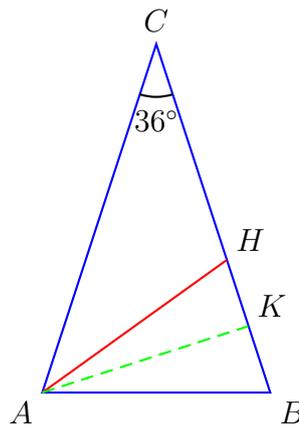
41. **Quesito** In quanti punti al più possono intersecarsi i perimetri di un cubo e di un triangolo, se non hanno infiniti punti in comune?

42. **Quesito** Dato un tetraedro regolare T (solido con 4 facce triangolari equilateri), esiste un piano α la cui sezione con T è un quadrato: quale può essere un tale piano?



E quanti sono in tutto i piani in questione?

43. **Quesito** Il triangolo (ABC) è isoscele sulla base \overline{AB} , e l'angolo \widehat{ACB} è di 36 deg .



Riconosci che, se \overline{AH} è il segmento di bisettrice dell'angolo \widehat{BAC} compreso tra A e il lato opposto \overline{BC} , il triangolo (ABH) è simile al triangolo (ABC) . Deduci che vale la proporzione

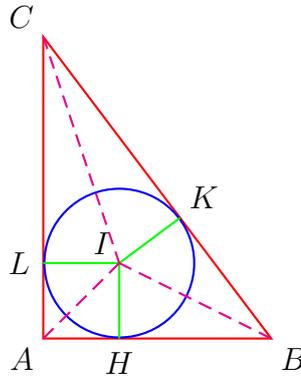
$$\overline{CB} : \overline{CH} = \overline{CH} : \overline{HB},$$

cioè che \overline{CH} è la *sezione aurea* di \overline{CB} , e quindi, essendo $\overline{CH} = \overline{AH} = \overline{AB}$, che \overline{AB} è la sezione aurea del lato obliquo di (ABC) .

Il segmento \overline{AB} è, dunque, **il lato del decagono regolare** inscritto nel cerchio di centro C e raggio \overline{AC} . L'altezza \overline{AK} del triangolo (ABH) con che poligono regolare è in relazione, di conseguenza?

44. **Quesito** Completa la seguente proposizione: Date due circonferenze nello spazio su piani non paralleli, esiste sempre una superficie sferica che le contiene se e solo se
45. **Quesito** Una retta, che non passa per alcuno dei vertici di un poligono regolare convesso di n lati, se ne interseca il perimetro, lo interseca in esattamente ... punti: sapresti giustificarlo razionalmente?

46. **Quesito** In quanti punti al più una superficie sferica può intersecare il complesso degli spigoli di un cubo?
47. **Quesito** Dato un triangolo (ABC) rettangolo in A , considera il circolo \mathcal{C} in esso inscritto, e siano H, K, L i punti di tangenza di \mathcal{C} con $\overline{AB}, \overline{AC}, \overline{BC}$ rispettivamente. Sia poi I l'incentro di (ABC) , ovvero il centro di \mathcal{C} .



Prova che l'area \mathcal{A} del triangolo (ABC) è data da

$$\mathcal{A} = \|\overline{KB}\| \cdot \|\overline{KC}\|.$$

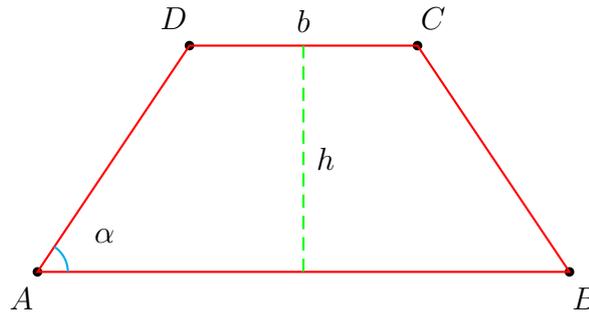
48. **Quesito** Completa la seguente proposizione: Date due circonferenze nello spazio su piani paralleli, esiste sempre una superficie sferica che le contiene se e solo se
49. **Quesito** Prova che esiste una superficie sferica \mathcal{S} che passa per tutti i punti medi degli spigoli di un cubo.
Perché \mathcal{S} è necessariamente tangente ad ogni spigolo del cubo?
 \mathcal{S} fuoriesce in parte dal cubo: chi racchiude maggior volume, \mathcal{S} o il cubo?
50. **Quesito** Quanti punti dello spazio, e in che configurazione, devono essere assegnati perché esista una unica superficie sferica passante per essi?
51. **Quesito** Se un triangolo rettangolo ha i cateti lunghi 12 e 16, qual è la misura dei raggi del circolo inscritto e di quello circoscritto al triangolo?
52. **Quesito** Un triangolo equilatero e un quadrato hanno la stessa area: quale dei due ha il perimetro maggiore?
53. **Quesito** Per quale rapporto tra i lati di due esagoni regolari accade che le loro aree sono doppie una dell'altra?
54. **Quesito** Dati due poligoni regolari di 5 ed 8 lati rispettivamente, a parità di perimetro, qual è il poligono avente area maggiore?
Ricorda: se l è la misura del lato di un poligono regolare \mathcal{P}_n di n lati, risulta

$$\text{area di } \mathcal{P}_n = \frac{1}{4}nl^2 \cotg \frac{\pi}{n}.$$

Sapresti giustificare questa formula?

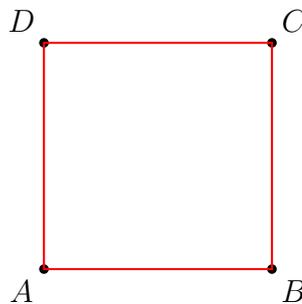
55. **Quesito** È dato un quadrilatero convesso $(ABCD)$. Sotto quale ipotesi esiste un punto che vede tutti e quattro i lati del quadrilatero sotto un angolo retto?

56. **Quesito** È dato un trapezio isoscele $(ABCD)$, di base minore \overline{CD} di misura b e di altezza $h = b$.



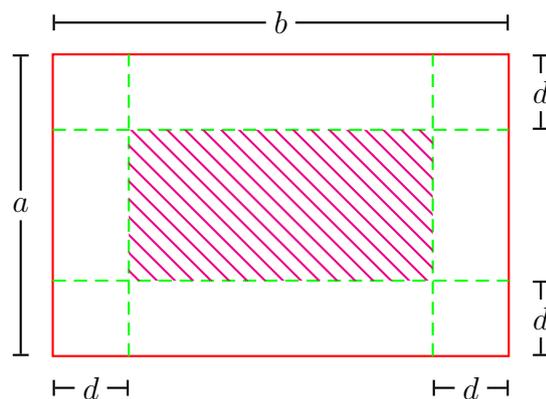
Qual è l'ampiezza minima dell'angolo (acuto) α perchè il centro O del cerchio circoscritto ad $(ABCD)$ non risulti esterno al trapezio?
Tale ampiezza è maggiore o minore di 1 rad ?

57. **Quesito** È dato il quadrato $(ABCD)$ in figura



Costruisci esternamente al quadrato, su ciascuno dei due lati \overline{AB} e \overline{AD} , un poligono regolare di n lati. Qual è il primo valore di n per cui i due poligoni hanno punti interni in comune?

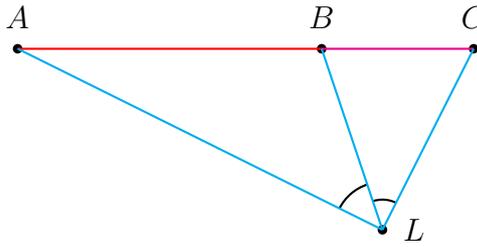
58. **Quesito** È dato un rettangolo di misure a e b , con $a < b$. Tira i segmenti paralleli ai lati, a distanza d da ciascuno di essi, come indicato in figura.



Esprimi, in funzione di a e b , quanto deve valere d perchè il rettangolo evidenziato abbia un'area che sia la metà di quella del primo rettangolo.

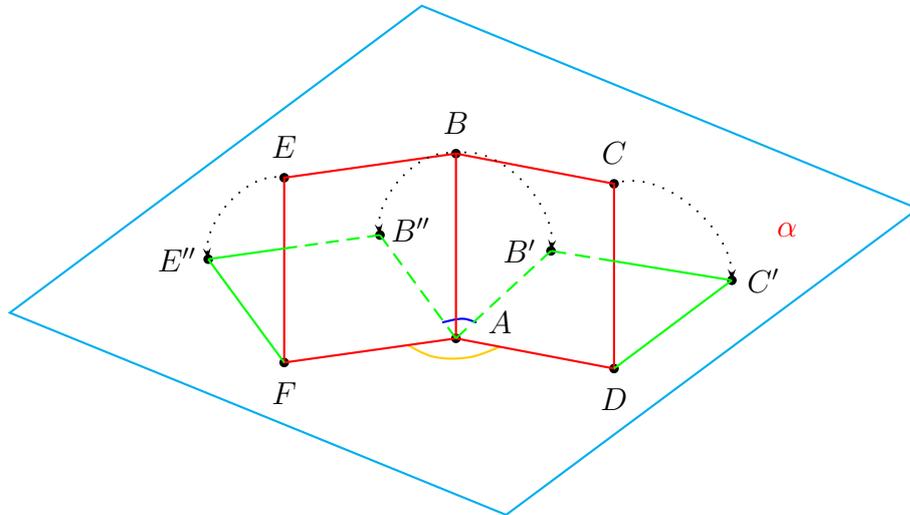
59. **Quesito** Dato un segmento \overline{AB} costruisci un triangolo isoscele su di esso, con angolo al vertice di 45° , servendoti di riga e compasso.
60. **Quesito** Un quadrilatero convesso $(ABCD)$ è tale che i punti medi dei suoi lati sono vertici di un quadrato. Di che quadrilatero si deve trattare?

61. **Quesito** Sono dati i due segmenti adiacenti \overline{AB} e \overline{BC} .



Costruisci un punto che veda sia \overline{AB} che \overline{BC} sotto un angolo di 45° .

62. **Quesito** Due quadrati sono disposti, come in figura, col lato comune \overline{AB} ortogonale al piano d'appoggio α , e l'angolo \widehat{FAD} è di 135° .

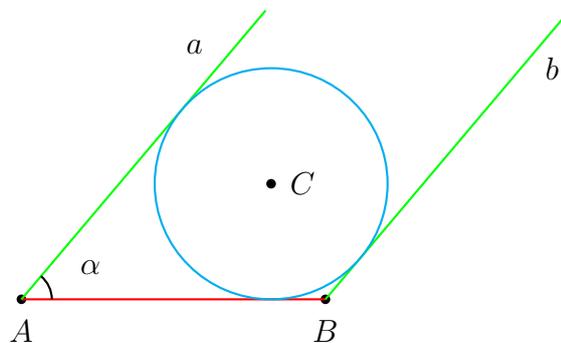


Ribaltandoli su α rispettivamente attorno ai lati \overline{AD} e \overline{AF} , si ottengono due quadrati $(ADC'B')$ e $(AFE''B'')$: qual è la misura dell'angolo $\widehat{B'AB''}$?

63. **Quesito** Un triangolo isoscele T ha l'altezza di misura 12 ed il lato obliquo di misura 20. Calcola la misura dei raggi del circolo circoscritto ed inscritto a T .

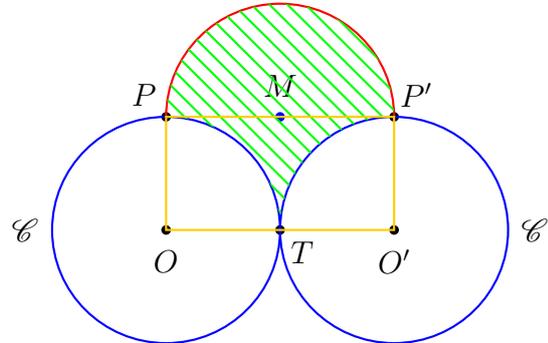
Risposta $(\frac{50}{3}; \frac{16}{3})$.

64. **Quesito** È dato un segmento \overline{AB} e due semirette parallele a e b di origini A e B , formanti un angolo acuto α con \overline{AB} come in figura.

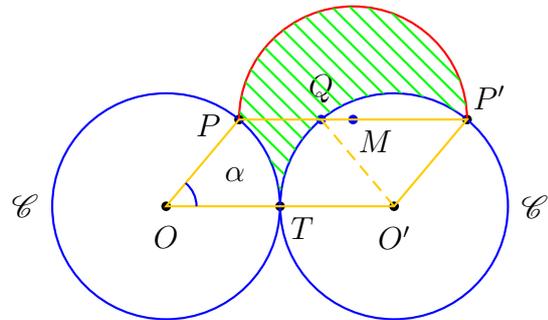


Costruisci, con riga e compasso, il circolo tangente ad a , b e al segmento \overline{AB} .

65. **Quesito** Date due circonferenze \mathcal{C} e \mathcal{C}' di ugual raggio r , di centri O e O' rispettivamente, tangenti esternamente in T , sul segmento $\overline{PP'}$ costruisci il semicerchio come in figura, e dimostra che la regione tratteggiata è equiestesa al rettangolo $(OPP'O')$ (basta una semplice osservazione ...).

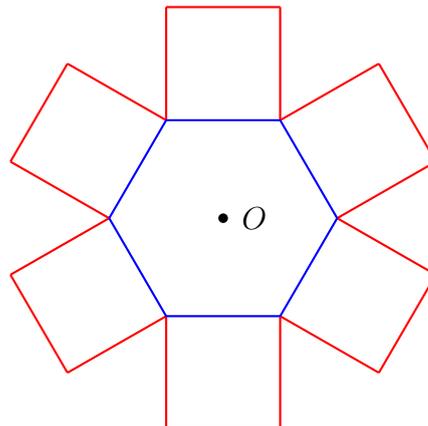


Considera poi la situazione in cui i due raggi OP ed $O'P'$, sempre paralleli, siano inclinati di un angolo α su OO' . Dimostra che la regione tratteggiata, \mathcal{R} , è equiestesa al parallelogramma $(OPP'O')$.

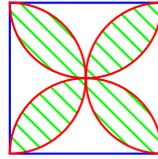


Suggerimento Puoi tenere conto dei seguenti fatti:

- (a) l'area del parallelogramma $(OPP'O')$ è di facile calcolo con un po' di trigonometria;
 - (b) la regione \mathcal{R} è ottenibile sottraendo tre settori circolari dalla regione \mathcal{R}_1 , unione del parallelogramma $(OPP'O')$ con il semidisco di diametro $\overline{PP'}$ costruitogli sopra
66. **Quesito** Su ognuno dei lati di un esagono regolare si costruisce, esternamente all'esagono, un quadrato come in figura: i 12 vertici esterni dei quadrati sono vertici di un poligono regolare?

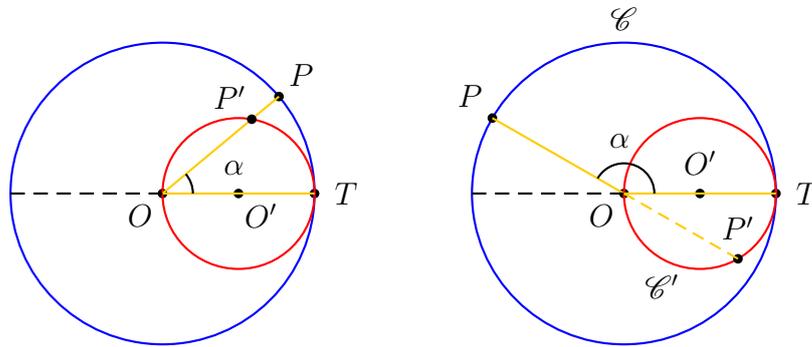


67. **Quesito** È dato un quadrato di lato l . Costruendo le quattro semicirconferenze su ciascuno dei lati, internamente al quadrato, si individua il quadrifoglio evidenziato in figura.



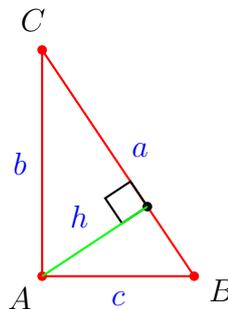
Calcola l'area del quadrifoglio, in funzione di l .
 Il quadrifoglio occupa più o meno di metà del quadrato?

68. **Quesito** Sono date due circonferenze \mathcal{C} e \mathcal{C}' , tangenti internamente in T , con raggi rispettivi r ed r' , e con $r = 2r'$ (vedi figura).



Considera, su \mathcal{C} , un punto P in modo che l'angolo $\alpha = \widehat{TOP}$ soddisfi la condizione $0^\circ \leq \alpha \leq 180^\circ$. Considera poi l'intersezione, P' , tra il raggio \overline{OP} , o il suo prolungamento, e la circonferenza \mathcal{C}' (se l'angolo α è retto, si assume $P' = O$). Considera poi i due archi di cerchio \widehat{TP} di \mathcal{C} e $\widehat{TP'}$ di \mathcal{C}' , essendo \widehat{TP} il più piccolo dei due archi su \mathcal{C} e $\widehat{TP'}$ il più piccolo o il più grande dei due archi su \mathcal{C}' , a seconda che α sia acuto od ottuso. Prova che i due archi citati sono sempre ugualmente lunghi.

69. **Quesito** È dato il triangolo (ABC) , rettangolo in A .

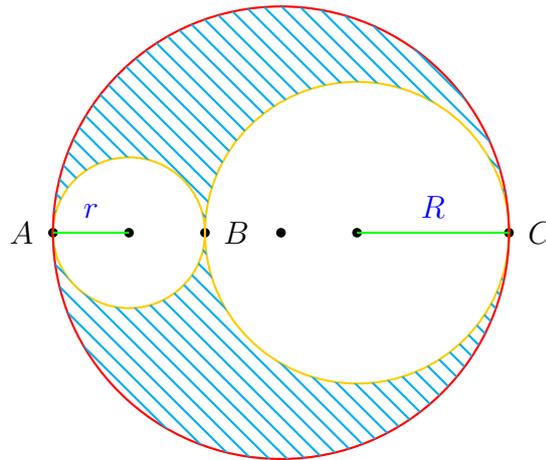


I cateti e l'ipotenusa hanno misure b, c, a rispettivamente; h è l'altezza relativa all'ipotenusa. Prova che vale l'uguaglianza:

$$\frac{1}{h^2} = \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}.$$

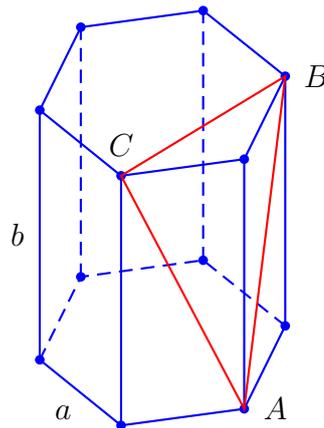
70. **Quesito** Una sfera è inscritta in un cubo: la sfera occupa più o meno della metà del cubo?

71. **Quesito** Considera tre circonferenze come in figura



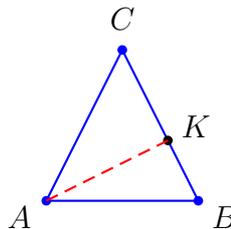
Per quale rapporto tra R e r ($< R$) l'area tratteggiata è la metà dell'area complessiva delle circonferenze minori? Costruisci la configurazione relativa.

72. **Quesito** È dato un prisma retto, con le basi esagonali e la superficie laterale costituita da 6 rettangoli congruenti; il lato degli esagoni misuri a e i lati verticali dei rettangoli b .



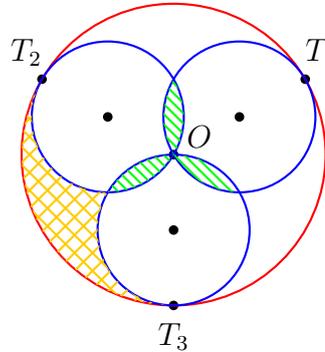
Trova il rapporto tra a e b tale che i triangoli ai vertici, cioè i triangoli come $l'(ABC)$ in figura, risultino equilateri.

73. **Quesito** È dato un triangolo (ABC) , isoscele sulla base \overline{AB} .

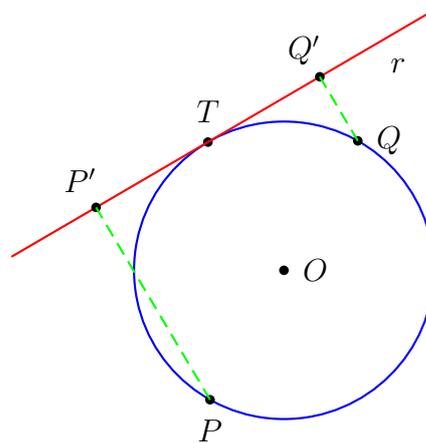


- Descrivi il solido generato per rotazione di (ABC) attorno ad un lato, per esempio \overline{BC} .
(È l'unione di ...).
- Se l è la misura del lato \overline{BC} e $\frac{\overline{AB}}{\overline{BC}} = \frac{4}{5}$, qual è il volume del solido di cui al punto precedente, espresso in funzione di l ?

74. **Quesito** Ad una circonferenza \mathcal{C} di raggio r e centro O sono tangenti internamente, in T_1, T_2, T_3 , 3 circonferenze di raggio $\frac{r}{2}$, con $T_1\widehat{O}T_2 = T_2\widehat{O}T_3 = T_3\widehat{O}T_1 = 120 \text{ deg}$.
 Calcola l'area di ognuno dei petali del trifoglio centrale, e di ognuno dei triangoli a lati curvilinei indicati in figura con tratteggio incrociato.

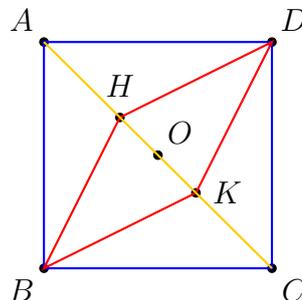


75. **Quesito** In un piano sono dati una retta r e due punti P e Q , tali che il cerchio di diametro \overline{PQ} è tangente a r in un punto T diverso da P e Q .



Costruisci le rette s che distano da P e Q quanto r .

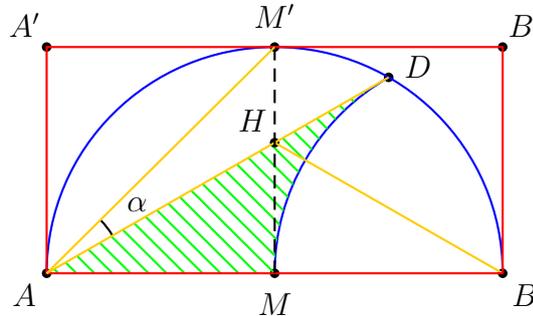
76. **Quesito** È dato un quadrato $(ABCD)$ di centro O e lato unitario. H e K sono sulla diagonale \overline{AC} e sono simmetrici rispetto ad O .



- Riconosci che il quadrilatero $(BHDK)$ è un rombo.
- Per quale valore del rapporto $\frac{HK}{AC}$ l'area del quadrato risulta n volte quella del rombo, con $n \in \mathbb{N}$?
- Per ogni valore di $n \in \mathbb{N}$, il rombo si può costruire con riga e compasso? Effettua tale costruzione per $n = 5$.

77. **Quesito** Della figura seguente si sa che:

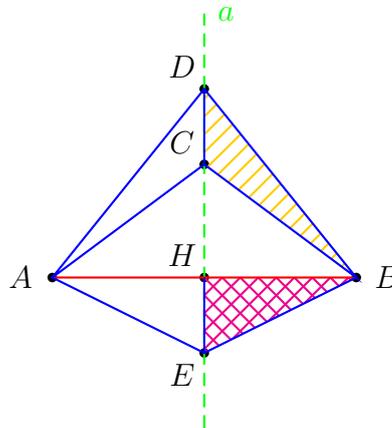
- (a) il quadrilatero $(ABB'A')$ è un rettangolo;
- (b) M ed M' sono i punti medi di \overline{AB} e $\overline{A'B'}$;
- (c) $\|\overline{MB}\| \equiv \|\overline{BD}\| = 1$.



Ti viene richiesto:

- (a) Se $H = \overline{MM'} \cap \overline{AD}$, $K = \overline{BH} \cap \widehat{MD}$ è il punto medio dell'arco circolare \widehat{MD} ?
 - (b) Qual è la misura in gradi dell'angolo $\alpha = \widehat{DAM}$?
 - (c) Qual è la misura dell'area del triangolo mistilineo di lati \overline{AD} , \overline{AM} , \widehat{MD} , evidenziato?
78. **Quesito** È dato un segmento \overline{AB} . Siano a l'asse e H il punto medio del segmento. Sull'asse a prendi 3 punti C, D, E , come in figura, in modo che

$$\overline{HE} = \overline{CD}.$$



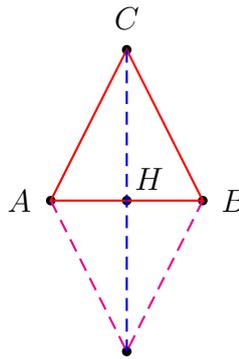
Ruotando attorno ad a , i due triangoli

$$(BCD) \text{ e } (BHE)$$

generano due solidi: che relazione c'è tra i loro volumi?

79. **Quesito** Che altezza deve avere un solido conico C inscritto in una sfera \mathcal{S} di raggio r (il vertice e la circonferenza di base di C stanno sulla superficie della sfera) perché il volume di C risulti un quarto di quello di \mathcal{S} ?
 È possibile che un cono inscritto in \mathcal{S} abbia un volume superiore a un quarto di quello di \mathcal{S} ?

80. **Quesito** È dato un triangolo isoscele (ABC) di base \overline{AB} .



- (a) Descrivi il solido generato dal triangolo in una rotazione attorno alla base \overline{AB} .
- (b) Se l è la misura del lato \overline{BC} e b quella della della base \overline{AB} , qual è la misura del volume del solido di cui al punto (a)?
- (c) Se il triangolo (AHC) ruota attorno all'altezza \overline{CH} , il solido ottenuto è un cono retto di base ... e altezza ..., dunque di volume
- (d) Trova per quale valore del rapporto

$$\frac{l}{b}$$

il volume dei due solidi di cui ai punti (a) e (c) risultano uguali.

81. **Quesito** Sapendo che i due angoli acuti

$$\alpha = 36 \text{ deg} \quad \text{e} \quad \beta = 60 \text{ deg}$$

si possono costruire con riga e compasso, trova

altri 27 angoli acuti, ciascuno di misura intera rispetto a deg,

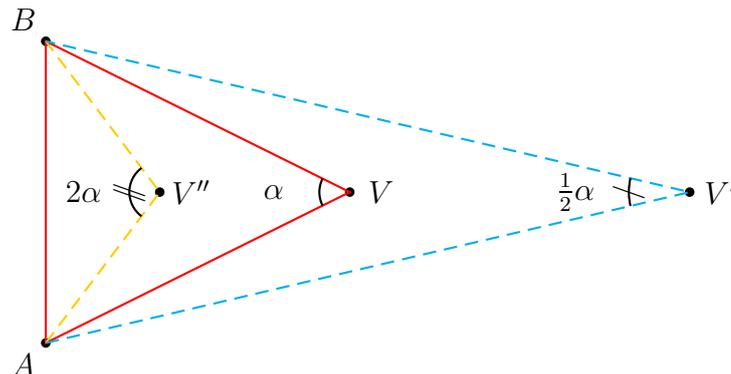
costruibili con riga e compasso.

Perché,

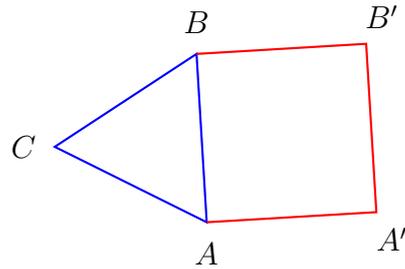
se l'angolo di 1 deg non si può costruire con riga e compasso,

non può esserlo nemmeno ciascun angolo acuto di misura in deg un numero intero pari che non sia un multiplo di 3?

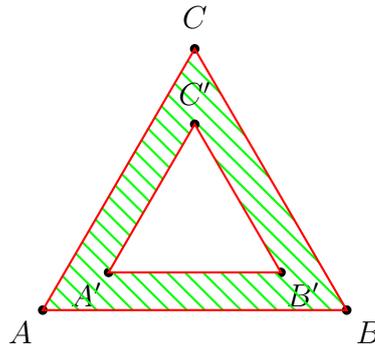
82. **Quesito** È dato un triangolo isoscele (ABC) di angolo α al vertice V , e di base \overline{AB} . Costruisci due triangoli, isosceli sulla stessa base \overline{AB} , e con angoli ai vertici V' e V'' di ampiezza $\frac{1}{2}\alpha$ e 2α rispettivamente.



83. **Quesito** Qual è il rapporto tra l'area di un triangolo equilatero e quella del quadrato costruito su un suo lato?



84. **Quesito** Considera una squadra equilatera, di vertici esterni A, B, C , e interni A', B', C' .



Qual è il rapporto tra un lato esterno ed uno interno, se la squadra ha una estensione pari a quella del suo foro triangolare? Qual è, in tal caso, la distanza tra ogni lato esterno e quello interno ad esso parallelo, espressa in funzione della misura l del lato esterno?

85. **Quesito** È data una superficie sferica \mathcal{S} di raggio r ; due piani ortogonali α e β tagliano su \mathcal{S} due cerchi \mathcal{C}_1 e \mathcal{C}_2 . Se

\mathcal{C}_1 ha raggio r_1 e \mathcal{C}_2 ha raggio r_2 ,

- esplicita la relazione cui devono soddisfare r_1 ed r_2 affinché \mathcal{C}_1 e \mathcal{C}_2 si intersechino;
- precisa quindi quando $\mathcal{C}_1 \cap \mathcal{C}_2$ è costituito da un solo punto e quando da due.
- Se r_1 ed r_2 sono entrambi minori di $\frac{r}{2}$, \mathcal{C}_1 e \mathcal{C}_2 si possono intersecare?
- Nel caso in cui $\mathcal{C}_1 \cap \mathcal{C}_2$ è costituito da due punti, P e Q , esprimi la lunghezza della corda \overline{PQ} in funzione di r_1 ed r_2 .

86. **Quesito** Sono dati nello spazio due piani non paralleli α e β ; sia $r = \alpha \cap \beta$ la loro retta comune.

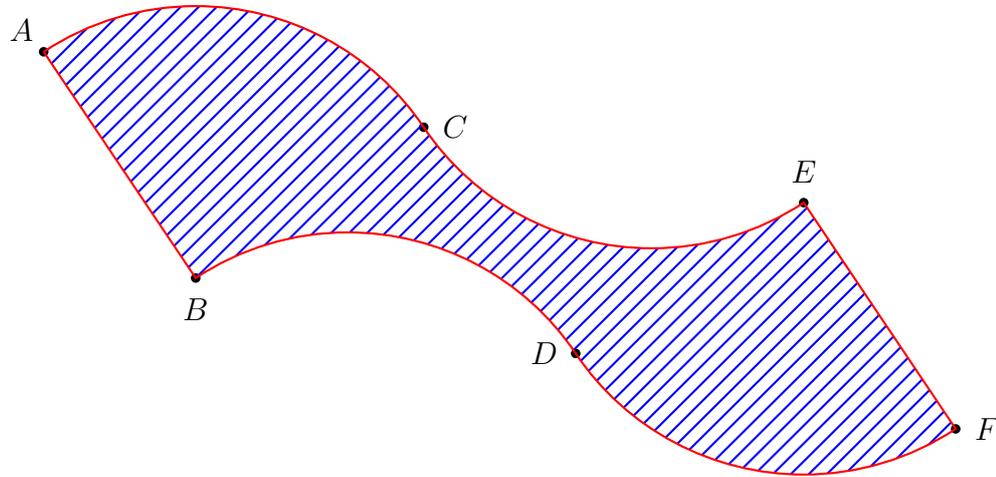
Dati due numeri positivi arbitrari

$$a, b$$

qual è il luogo dei punti P che distano contemporaneamente a da α e b da β ?
Se α e β , per di più, sono ortogonali, qual è la distanza di un punto P di cui sopra dalla retta r ?

87. **Quesito** Sono dati nello spazio tre punti A, B, C non allineati: qual è il luogo dei centri delle superfici sferiche passanti per A, B e C ?

88. **Quesito** Considera la figura seguente

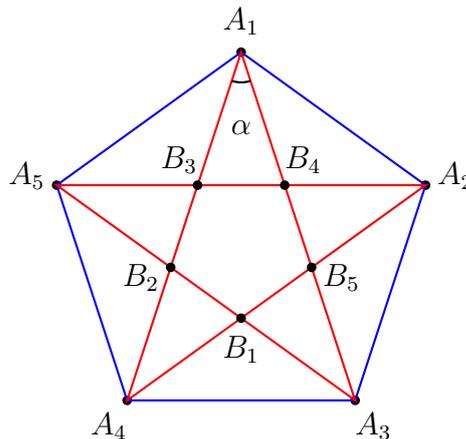


Di questa figura piana si sa:

- (a) che l'arco \widehat{AC} è un quarto del cerchio di centro B e raggio $\|AB\| = 1$;
- (b) che l'arco \widehat{CE} è il simmetrico di \widehat{AC} rispetto a C ;
- (c) che gli archi \widehat{BD} e \widehat{DF} sono i traslati di \widehat{AC} e \widehat{CE} secondo la traslazione che porta A in B .

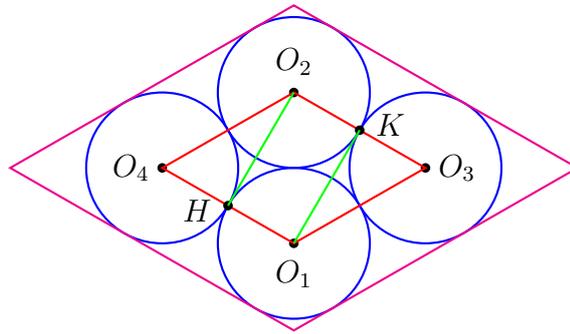
Ti viene richiesta la misura dell'area del quadrilatero mistilineo $(ACEFDB)$.

89. **Quesito** Un *pentagramma pitagorico* è la stella a cinque punte formata dalle diagonali di un pentagono regolare.



- (a) Quante sono le diagonali di un pentagono?
- (b) Quante sono, più in generale, le diagonali di un $n - agono$ regolare?
- (c) Qual'è la misura in gradi dell'angolo α nella figura, cioè l'apertura di ciascuna punta del pentagramma?
- (d) Qual è il rapporto tra ogni diagonale del pentagono, o lato della stella, e il raggio del cerchio in cui pentagono e stella sono inscritti?
- (e) Il pentagono di vertici B_1, B_2, B_3, B_4, B_5 , è regolare?

90. **Quesito** Quattro cerchi $\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2, \mathcal{C}_3, \mathcal{C}_4$, di centri rispettivi O_1, O_2, O_3, O_4 , e di ugual raggio r sono disposti come in figura: \mathcal{C}_1 e \mathcal{C}_2 sono tra loro tangenti e \mathcal{C}_3 e \mathcal{C}_4 sono entrambi tangenti sia a \mathcal{C}_1 che a \mathcal{C}_2 .



- Qual è l'area del quadrilatero $(O_1O_3O_2O_4)$?
 - Quali sono le misure degli angoli di $(O_1O_3O_2O_4)$?
 - Detti H e K rispettivamente i punti di contatto tra \mathcal{C}_1 e \mathcal{C}_4 e tra \mathcal{C}_3 e \mathcal{C}_2 , qual è l'area del quadrilatero di vertici (O_1KO_2H) ?
 - Qual è il rapporto delle aree del primo e secondo quadrilatero?
 - Qual è l'area del quadrilatero con i lati paralleli a quelli di $(O_1O_3O_2O_4)$ e circoscritto al complesso dei quattro cerchi?
91. **Quesito** Su un foglio di carta quadrettata scegli un'unità di misura di 12 quadretti. Costruisci quindi, con riga e compasso, un segmento di misura $\sqrt{\frac{2}{3}}$ e uno di misura $\sqrt{\frac{3}{2}}$. Controlla poi l'attendibilità dei risultati mediante una riga millimetrata e una calcolatrice.
92. **Quesito** È data una circonferenza \mathcal{C} di raggio r . Data una qualunque corda PQ di \mathcal{C} , che non sia un diametro, se a ($< 2r$) è la sua misura, e \mathcal{R} è il rettangolo inscritto in \mathcal{C} , con lato PQ , trova:
- qual è la misura dell'altro lato di \mathcal{R} ;
 - per quale valore di a \mathcal{R} è un quadrato;
 - per quale valore di a \mathcal{R} ha area massima;
 - per quale valore di a \mathcal{R} ha perimetro massimo;
 - per quale valore di a \mathcal{R} ha perimetro metà del massimo possibile;
 - per quale valore di a \mathcal{R} ha area metà della massima possibile.
- Poiché nelle ultime due domande si trovano due valori-soluzione, i corrispondenti rettangoli sono essenzialmente diversi?

93. **Quesito** Se nello spazio si danno due rette

$$a \text{ e } b$$

e su di essi si prendono due punti

$$A \in a \text{ e } B \in b,$$

precisa sotto quali condizioni è corretto affermare che

- esiste una e una sola sfera tangente a in A e b in B ;

- (b) non esiste alcuna sfera tangente a in A e b in B ;
- (c) esistono infinite sfere tangenti a in A e b in B .

94. **Quesito** Se tre rette nello spazio

$$a, b, c$$

sono a due a due distinte e a due a due incidenti, stanno sempre in uno stesso piano?

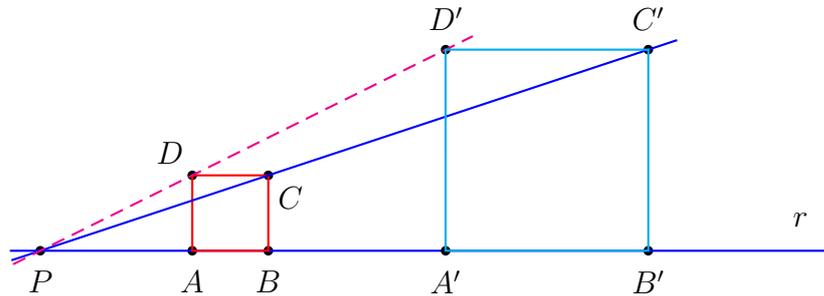
E se, per ipotesi suppletiva, a, b, c sono complanari (cioè stanno in uno stesso piano), sono le tre rette sostegno dei tre lati di un triangolo?

E se $a \cap b \neq b \cap c$, ne segue che le tre rette stanno su uno stesso piano e sono le rette sostegno dei tre lati di un triangolo?

95. **Quesito** Rispondi alle seguenti domande riguardanti i cerchi tracciabili su una data superficie sferica.

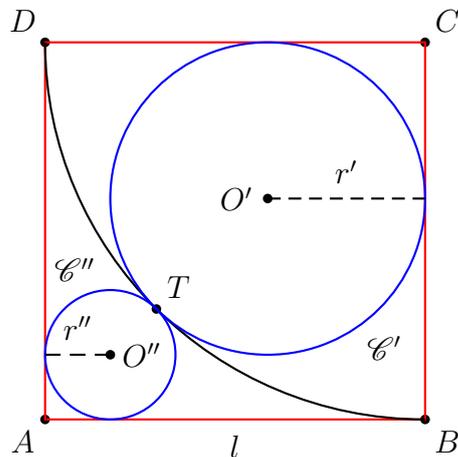
- (a) Perché due cerchi massimi distinti devono avere due punti distinti in comune?
- (b) Se due cerchi non sono entrambi cerchi massimi, possono non avere punti in comune?
- (c) Due cerchi possono avere un solo punto in comune?

96. **Quesito** Data una retta qualunque r , e costruito un quadrato $(ABCD)$ con il lato $\overline{AB} \subset r$,



scegli un punto $P \notin \overline{AB}$ e traccia la retta s per P e C come in figura. Ora, costruito un qualunque altro quadrato $(A'B'C'D')$, con $\overline{A'B'} \subset r$ e C' su s , prova che D e D' sono allineati con P .

97. **Quesito** È dato un quadrato $\mathcal{Q} = (ABCD)$, di lato l .



Tracciato l'arco \widehat{BTD} del circolo \mathcal{C} di centro C e raggio l , si intuisce l'esistenza dei due circoli (fra loro tangenti in T)

\mathcal{C}' , tangente internamente a \mathcal{C} in T e a \mathcal{Q} ,

\mathcal{C}'' , tangente internamente a \mathcal{Q} ed esternamente a \mathcal{C} in T .

Esprimi in funzione di l le misure dei raggi

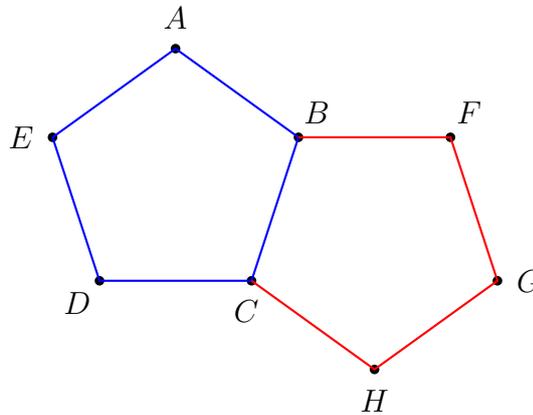
$$r' \text{ di } \mathcal{C}' \quad \text{ed} \quad r'' \text{ di } \mathcal{C}''.$$

E' evidente che r' è più del doppio di r'' : qual è il rapporto tra r' ed r'' e la sua espressione approssimata?

Verifica che T è il punto medio tra A ed O' .

Osservazione I due circoli \mathcal{C}' e \mathcal{C}'' possono agevolmente essere costruiti con riga e compasso, osservando che sono i circoli inscritti in due

98. **Quesito** Dato un pentagono regolare \mathcal{P}_1 , costruisci un altro pentagono regolare \mathcal{P}_2 , adiacente a \mathcal{P}_1 , e con il lato \overline{BC} in comune con esso come in figura.



I segmenti \overline{AB} e \overline{BF} sono i lati consecutivi di un poligono regolare? E se, al posto di pentagoni, si usassero esagoni, eptagoni, ottagoni, ecc. regolari, quali sarebbero, via via, le relative risposte?

99. **Quesito** (ABC) è un triangolo con i lati di misura

$$\|\overline{AB}\| = c, \quad \|\overline{AC}\| = b, \quad \|\overline{BC}\| = a.$$

Se (ABC) è rettangolo in A si sa, per Pitagora, che

$$(*) \quad a^2 = b^2 + c^2.$$

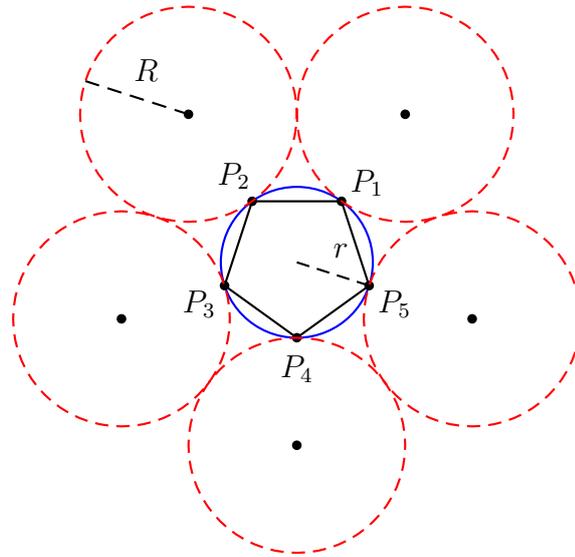
Viceversa, se $(*)$ vale, com'è che concludi che (ABC) è rettangolo in A ?

100. **Quesito** Fissata una unità di misura l_0 , per quale valore (della misura) del raggio di una sfera \mathcal{S} si ha rispettivamente

$$\text{misura della superficie di } \mathcal{S} \geq \text{misura del volume di } \mathcal{S} ?$$

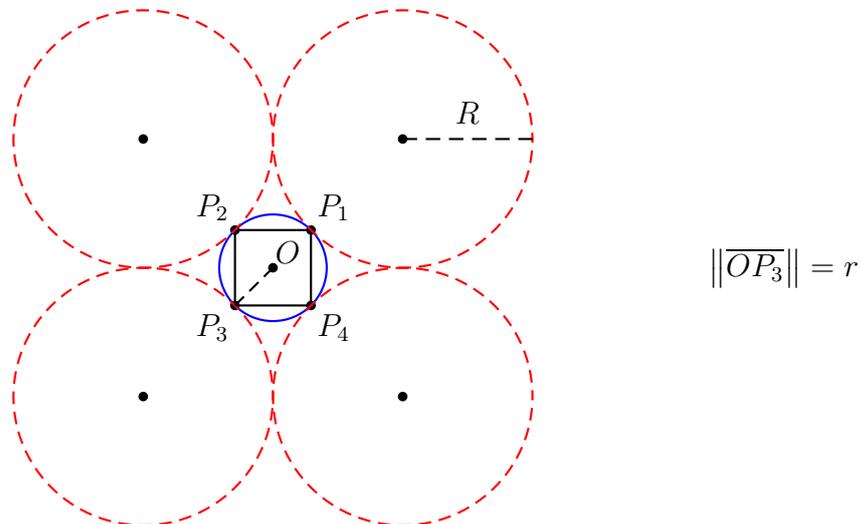
Se l'unità di misura viene cambiata, le tre categorie di sfere sopra individuate rimangono le stesse, o invece mutano?

101. **Quesito** È data una circonferenza \mathcal{C} di raggio r e in essa è inscritto il pentagono regolare $\mathcal{P}_5 = (P_1P_2P_3P_4P_5)$.



Se ora vuoi costruire, tangenti esternamente a \mathcal{C} nei vari vertici di \mathcal{P}_5 , cinque circonferenze \mathcal{C}_i ($i = 1, 2, 3, 4, 5$) di ugual raggio R , qual è il valore approssimato del rapporto $\frac{R}{r}$ per cui tali circonferenze risultano ognuna tangente alle due contigue?

102. **Quesito** È data una circonferenza \mathcal{C} , di raggio r , e in essa è inscritto il quadrato $\mathcal{Q} = (P_1P_2P_3P_4)$.



Se ora vuoi costruire, tangenti esternamente a \mathcal{C} nei quattro vertici di \mathcal{Q} , quattro circonferenze di ugual raggio R in modo che ognuna risulti tangente alle due contigue, per quale rapporto $\frac{R}{r}$ ci riuscirai?

103. **Quesito** Tuo zio Giovanni, abile misuratore in una dimensione, non è altrettanto forte nella misura delle aree (e quindi dei volumi). Non ha mai capito per esempio perchè, se un rettangolo ha i lati che misurano

$$\frac{3}{4} \text{ e } \frac{5}{7}$$

la misura dell'area del rettangolo è

$$\frac{3}{4} \cdot \frac{5}{7} = \frac{3 \cdot 5}{4 \cdot 7} = \frac{15}{28}.$$

Ora, se tu hai capito il vero perchè, devi spiegarglielo per bene, ma in modo pratico e convincente, senza giocare con formalismi che tuo zio non capirebbe. Comincia col procurarti un foglio quadrettato nel quale costruirai un quadrato di 28×28 quadretti di griglia: il suo lato sarà l'unità di misura delle lunghezze, ed esso stesso l'unità di misura delle aree, o quadrato unitario

104. **Quesito** Nel piano è fissata una unità di misura. Dato un segmento \overline{AB} , di misura 5, trova per quali coppie di numeri reali positivi (α, β) le seguenti proposizioni risultano vere.

- (a) Non esiste alcun triangolo con \overline{AB} per lato e gli altri due lati di misure α e β .
- (b) Esiste almeno un triangolo come al punto (a).
- (c) Esistono esattamente due triangoli come al punto (a).
- (d) Esistono più di due triangoli come al punto (a).
- (e) Esistono esattamente quattro triangoli come al punto (a).

Faresti bene a visualizzare gli insiemi di coppie (α, β) , trovati nei vari casi, come insiemi di punti di un piano cartesiano.

105. **Quesito** È dato un triangolo (ABC) rettangolo in A e isoscele. Trova per quali valori del numero reale positivo ρ esiste un triangolo $(A'B'C')$ con le seguenti due proprietà:

- (a) $(A'B'C')$ ha lo stesso perimetro di (ABC) ;
- (b) vale la proporzione $\overline{A'B'} : \overline{AB} = \overline{A'C'} : \overline{AC} = \rho$.
(Ovviamente il triangolo $(A'B'C')$ risulterà isoscele sulla base $\overline{B'C'}$).

106. **Quesito** Dato un triangolo (ABC) , qual è la condizione necessaria e sufficiente perché esista un triangolo rettangolo con l'ipotenusa congruente al lato più lungo di (ABC) e con la stessa area di (ABC) ?

E se si mutasse la frase “con la stessa area di (ABC) ” nella seguente “con lo stesso perimetro di (ABC) ”, quale sarebbe la soluzione?

107. **Quesito** Indica, secondo te, quali delle proposizioni sottoelencate equivalgono all'affermazione (che si sente ripetere spesso . . . senza vera cognizione di causa)

la quadratura del cerchio è impossibile

- (a) Non esiste un quadrato avente l'area uguale a quella di un assegnato cerchio.
- (b) $\sqrt{\pi}$ è irrazionale.
- (c) $\sqrt{\pi}$ è trascendente.
- (d) Non è possibile costruire, con riga e compasso, il lato di un quadrato il cui perimetro sia lungo quanto un'assegnata circonferenza.
- (e) Non è possibile costruire, con riga e compasso, il lato di un quadrato la cui area sia uguale a quella di un assegnato cerchio.

108. **Quesito** Esiste un triangolo (ABC) per i cui lati valga la proporzione

$$\overline{BC} : \overline{AC} : \overline{AB} = 3 : 2 : 1 \quad ?$$

109. **Quesito** È dato un triangolo (ABC) per i cui lati vale la proporzione

$$\overline{AB} : \overline{AC} : \overline{BC} = 2 : 4 : 5$$

Basta questa informazione per dedurre l'ampiezza degli angoli

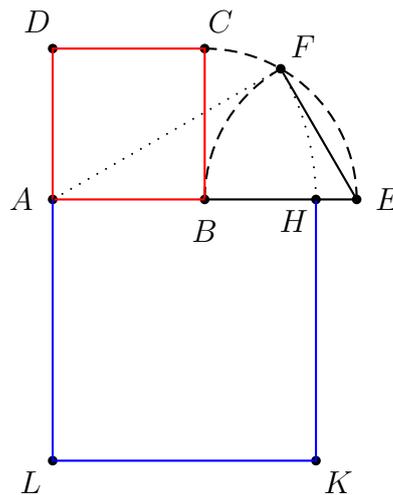
$$\widehat{A}, \widehat{B}, \widehat{C} \quad ?$$

Se, introdotta un'unità di misura, si aggiungesse la misura dell'area di (ABC) , si riuscirebbe a dedurre la misura di ciascun suo lato?

110. **Quesito** sapendo (vedi figura) che

- (a) $(ABCD)$ e $(AHKL)$ sono quadrati;
- (b) $\overline{BE} = \overline{AB} = \overline{EF}$;
- (c) $\overline{AF} = \overline{AH}$;

trova il rapporto tra l'area del quadrato $(AHKL)$ e quella di $(ABCD)$.



Dividi quindi $(AHKL)$ in tre figure equiestese, di cui due fra loro congruenti, confermando per altra via il risultato trovato.

111. **Quesito** *Duplicare, triplicare, e, in generale,*

n-plicare

un dato quadrato \mathcal{Q} , significa costruire un quadrato \mathcal{Q}_n (in pratica costruire il suo lato), tale che

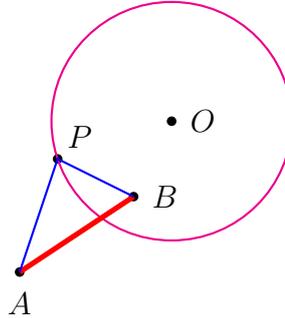
$$\text{area } \mathcal{Q}_n = n \cdot \text{area di } \mathcal{Q}.$$

Tu prova a *n-plicare* il quadrato unitario, nel modo più conveniente, per *n* uguale ai seguenti numeri:

2, 3, 7, 8, 11, 17, 26, 32, 41, 45, 58, 65, 73, 80, 84, 85, 89, 91, 96

In un foglio di carta quadrettata, l'unità può essere di quattro quadretti per i primi 8 casi, di due quadretti nei rimanenti.

112. **Quesito** Dato il segmento \overline{AB} e la circonferenza \mathcal{C} , come in figura, costruisci il triangolo con vertici A , B e $P \in \mathcal{C}$, che abbia, fra tutti quelli di questo tipo, area massima.



113. **Quesito** Dato un poligono convesso \mathcal{P} di n lati ($n \geq 3$), anche non regolare, ogni segmento che ha per estremi due vertici non consecutivi di \mathcal{P} si chiama una **diagonale** di \mathcal{P} .

È chiaro che un *triangolo* ($n = 3$) non ha diagonali; un *quadrangolo* ne ha 2, un *pentagono* 6, un *esagono* 9, come puoi verificare per conteggio diretto; In generale, detto

$$D(n)$$

il numero delle diagonali di un n -agono, si ha

$$(*) \quad D(n) = \frac{n(n-3)}{2}.$$

Questa formula si dimostra per *induzione* su $n(\geq 3)$, con la procedura che segue.

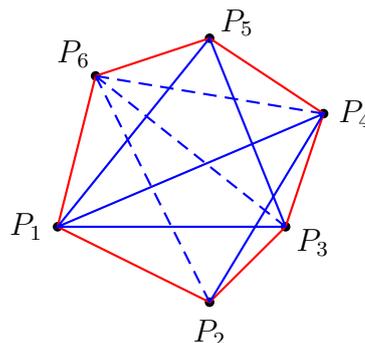
- (a) si verifica che la formula (*) vale per $n = 3$, e, infatti,

$$D(3) = 0;$$

- (b) supposto che la (*) valga per un numero $n \geq 3$, si dimostra che, di conseguenza, essa vale per $n + 1$.

Dimostriamo la seconda parte. Considerato un $(n+1)$ -agono convesso (in figura è $n = 5$, $n + 1 = 6$), escludendo l'ultimo vertice P_{n+1} , si ottiene un n -agono che resta convesso, il quale ha per ultimo lato

la *diagonale* $\overline{P_n P_1}$ dell' $(n + 1)$ -agono.

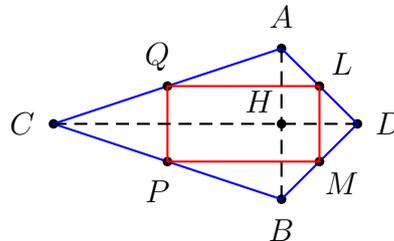


Le diagonali dell' n -agono sono tutte chiaramente diagonali dell' $(n + 1)$ -agono; in più quest'ultimo ha come diagonali la $\overline{P_n P_1}$ (in figura $\overline{P_5 P_1}$) e le altre $n - 2$ diagonali (in figura $5 - 2 = 3 : \overline{P_6 P_4}, \overline{P_6 P_3}, \overline{P_6 P_2}$) congiungenti P_{n+1} con gli $n - 2$ vertici diversi da P_n e P_1 (e da P_{n+1}), poiché P_n e P_1 sono contigui a P_{n+1} . Sicché ne segue che il numero delle diagonali dell' $(n + 1)$ -agono è $n - 1$ in più rispetto a quello delle diagonali dell' n -agono. Ne risulta

$$\begin{aligned}
 D(n + 1) &= D(n) + n - 1 &&= \frac{n(n-3)}{2} + n - 1 = \\
 &&&\uparrow \\
 &&&\text{per ipotesi induttiva} \\
 &= \frac{n^2 - 3n + 2n - 2}{2} = \frac{n^2 - n - 2}{2} = \frac{(n + 1)[(n + 1) - 3]}{2}.
 \end{aligned}$$

Questo conclude la dimostrazione di (b) e quindi prova che se la (*) vale per n , vale anche per $n + 1$.

114. **Quesito** Considera il quadrilatero ($ACBD$) in figura.

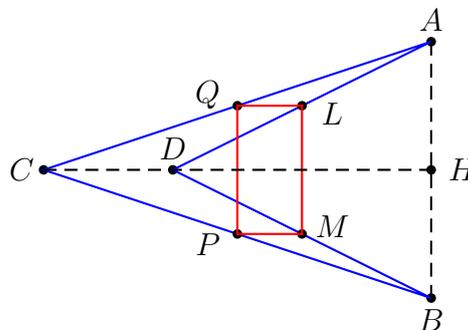


Sapendo che

- (a) $\overline{AB} \perp \overline{CD}$;
- (b) H è il punto medio di \overline{AB} ;
- (c) $\|\overline{AC}\| = \sqrt{10}$ e $\|\overline{AD}\| = \sqrt{2}$,

trova quanto deve valere $\|\overline{CD}\|$ affinché il rettangolo ($LMPQ$), i cui vertici sono i punti medi di \overline{AB} , \overline{DB} , \overline{BC} , \overline{CA} , nell'ordine, abbia il lato orizzontale doppio di quello verticale.

115. **Quesito** La questione è analoga a quella del quesito 114, solo che ora C e D non stanno da bande opposte rispetto alla retta per A e B .



I dati sono, ora,

- (a) $\overline{AB} \perp \overline{CD}$;
- (b) H , punto medio di \overline{AB} , sta sulla retta per C e D ;

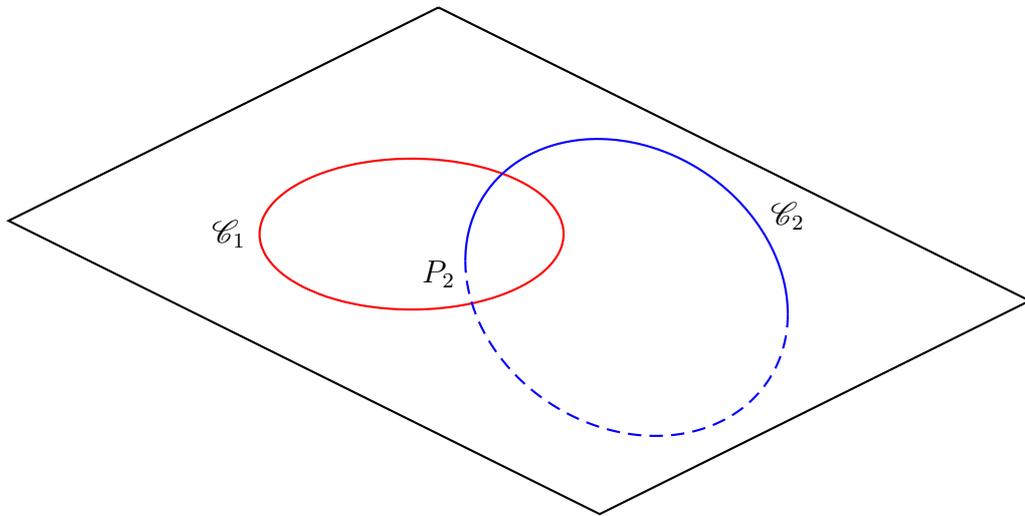
(c) $\|\overline{AC}\| = \sqrt{10}$ e $\|\overline{AD}\| = \sqrt{5}$.

Il compito è stabilire, questa volta, che misura deve avere \overline{CD} perchè il rettangolo ($LMPQ$), i cui vertici sono i punti medi di \overline{AB} , \overline{DB} , \overline{BC} , \overline{CA} , nell'ordine, abbia il lato verticale doppio di quello orizzontale.

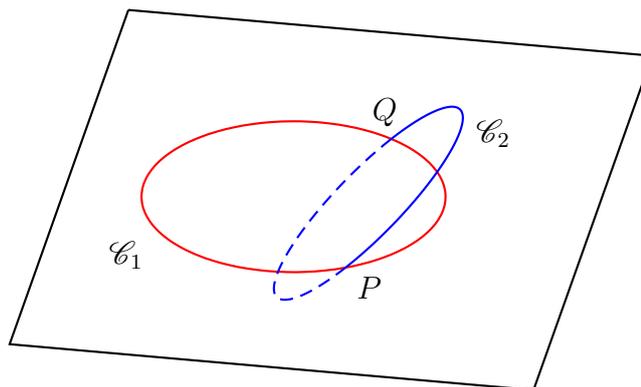
116. **Quesito** Se sono assegnati 4 punti distinti A, B, C, D , si possono trovare 4 superfici sferiche $\mathcal{S}_1, \mathcal{S}_2, \mathcal{S}_3, \mathcal{S}_4$ tali che

$$\mathcal{S}_1 \cap \mathcal{S}_2 \cap \mathcal{S}_3 \cap \mathcal{S}_4 = \{A, B, C, D\} \quad ?$$

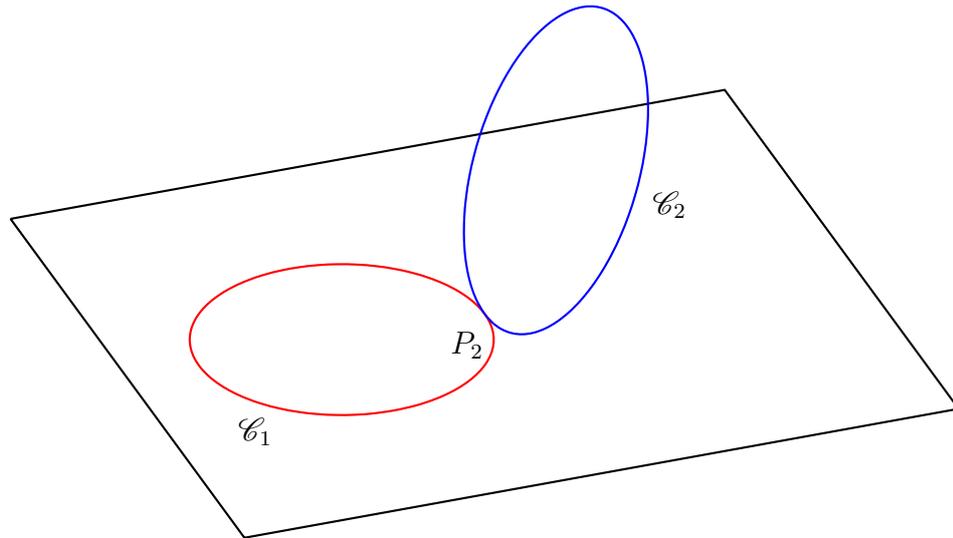
117. **Quesito** Se due circonferenze sono concatenate come in figura, con $P_2 \in \mathcal{C}_2$ interno al disco di bordo \mathcal{C}_1 (sul piano di \mathcal{C}_1)



può in qualche caso esistere una superficie sferica \mathcal{S} contenente \mathcal{C}_1 e \mathcal{C}_2 ?
 E se fosse $\mathcal{C}_1 \cap \mathcal{C}_2 = \{P, Q\}$ (con $P \neq Q$) e \mathcal{C}_1 e \mathcal{C}_2 non complanari, quale sarebbe la risposta?



E se, infine, fosse $\{P_2\} = \mathcal{C}_1 \cap \mathcal{C}_2$, con \mathcal{C}_1 e \mathcal{C}_2 fra loro tangenti in P_2 (v. la figura seguente), quale sarebbe la risposta?

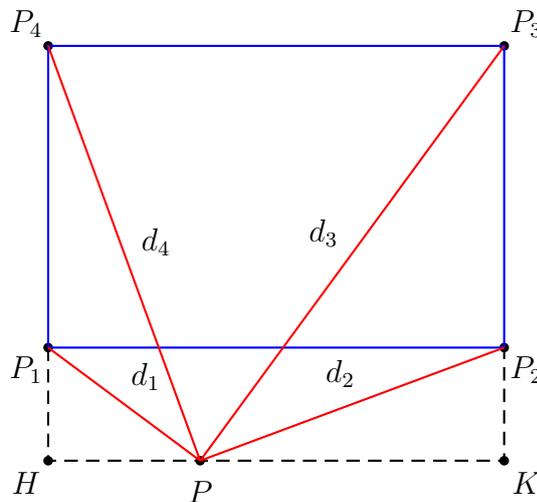


118. **Quesito** Sia fissata in un piano α una unità di misura. Se $(P_1P_2P_3P_4)$ è un qualunque rettangolo e P un punto scelto ad arbitrio nel piano α , posto

$$d_i = \|\overline{PP_i}\| = \text{misura della distanza di } P \text{ da } P_i, \quad i = 1, 2, 3, 4$$

si ha la *assai notevole relazione*

$$(*) \quad d_1^2 + d_3^2 = d_2^2 + d_4^2$$



Sapresti dimostrarla, sfruttando accortamente il teorema di Pitagora? Scegli P in qualche altra posizione, anche dentro al rettangolo, e ripeti il ragionamento. Se P sta sul perimetro del rettangolo la (*) diventa ancora più facile: verificalo.

N.B.: dalla (*) segue che non è lecito assegnare ad arbitrio tre numeri positivi, e pretendere che essi *siano le distanze di un certo punto P da tre prefissati vertici di un rettangolo*: perché? A quale condizione devono soddisfare i tre numeri per poter essere quello che sopra si è detto?

119. **Quesito** Un *tetraedro regolare* è un solido avente 4 facce *triangolari equilateri*. Se lo spigolo del tetraedro è assegnato, ad esempio è lungo come il segmento \overline{AB} di figura



sapresti costruire un poligono regolare equiesteso alla superficie laterale del tetraedro?

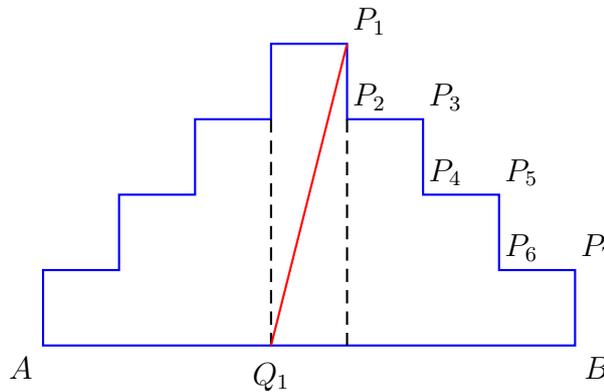
120. **Quesito** Fissata una unità di misura delle lunghezze, il segmento la cui misura è

$$\sqrt[8]{2}$$

si può costruire con riga e compasso?

121. **Quesito** Se un poligono regolare di n lati ha il lato di misura l , quanto vale la sua area? Quanti quadrati di lato l ci vogliono, almeno, per coprire un'area pari a quella di un dodecagono di lato l ?

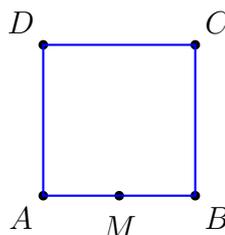
122. **Quesito** Considera la regione piana \mathcal{R} in figura, di perimetro costituito dal segmento \overline{AB} e da due spezzate a scala simmetriche. È evidente che il segmento $\overline{P_1Q_1}$ divide \mathcal{R} in due regioni equiestese.



Ora tu devi trovare il punto Q_2 , con $Q_2 \in \overline{AB}$, tale che il segmento $\overline{P_2Q_2}$ divide ancora \mathcal{R} in due regioni equiestese, e il punto Q_3 , sempre con $Q_3 \in \overline{AB}$, tale che il segmento $\overline{P_3Q_3}$ divide \mathcal{R} in due regioni equiestese. Si può continuare poi con $\overline{P_4Q_4}$, ecc. , o ci si deve fermare a P_3 ?

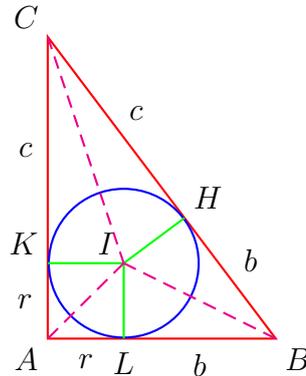
123. **Quesito**

Considera un quadrato $(ABCD)$, pensato come un recinto dalle pareti riflettenti. Un raggio di luce esce dal punto A , si riflette sul lato \overline{DC} , quindi prosegue riflettendosi sul lato \overline{BC} : in che punto deve toccare il lato \overline{DC} , se il raggio in questione deve ritoccare \overline{AB} nel suo punto medio M ?



Cosa succede in seguito, dopo altre tre riflessioni su \overline{AD} , \overline{DC} e \overline{BC} ?

124. **Quesito** È dato un triangolo rettangolo (ABC) . \mathcal{C} sia il circolo inscritto in (ABC) , I sia l'incentro di (ABC) , ovvero il centro di \mathcal{C} ; H, K, L (v.figura) siano i punti di tangenza di \mathcal{C} con i lati di (ABC) (H sull'ipotenusa e K, L sui cateti).



Detta r la misura del raggio di \mathcal{C} e posto

$$\|\overline{LB}\| = \|\overline{BH}\| = b \quad , \quad \|\overline{KC}\| = \|\overline{CH}\| = c,$$

si ha

$$\begin{aligned} \|\overline{AB}\| &= \|\overline{AL}\| + \|\overline{LB}\| = r + b \\ \|\overline{AC}\| &= \|\overline{AK}\| + \|\overline{KC}\| = r + c \\ \|\overline{BC}\| &= \|\overline{BH}\| + \|\overline{HC}\| = b + c \end{aligned}$$

Tu puoi ora provare la seguente relazione

$$(*) \quad r^2 = bc - br - cr$$

E dalla $(*)$ puoi dedurre, con un po' di lavoro algebrico certamente a tua portata,

il teorema di Pitagora

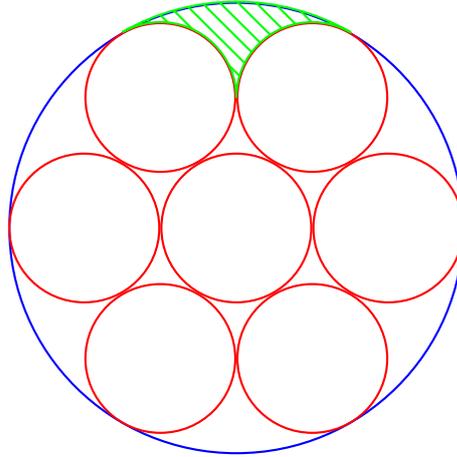
Suggerimento Per provare $(*)$ esprimi l'area di (ABC) in due modi diversi

125. **Quesito** Suddividi un quadrato in 16 quadrati, ma in modo che, scegliendone 5 fra essi ad arbitrio non siano tutti fra loro equiestesi.

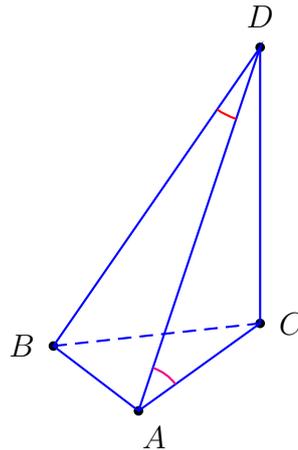
8.3 Quesiti a risposta multipla

1. **Quesito** Un quadrato $(ABCD)$ è inscritto in un circolo \mathcal{C} di raggio r ; quale delle seguenti affermazioni è vera $\forall r \in \mathbb{R}^+$
- $11 \times [\text{area di } (ABCD)] < 7 \times [\text{area di } \mathcal{C}]$;
 - area di $(ABCD) \in \mathbb{Q} \Rightarrow r \in \mathbb{Q}$;
 - $r \in \mathbb{Q} \Rightarrow$ area di $(ABCD) \in \mathbb{Q}$;
 - $\frac{\text{area di } (ABCD)}{\text{area di } \mathcal{C}} \notin \mathbb{Q}$;
 - $\sin \frac{\text{area di } \mathcal{C}}{\text{area di } (ABCD)} = 1$.

2. **Quesito** Se nella figura il raggio dei circoli piccoli è 1, quanto vale l'area tratteggiata?



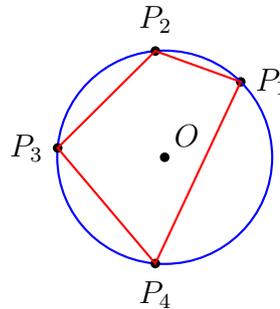
- (a) $\frac{\pi}{4}$
 (b) $\frac{\sqrt{3}}{2}$
 (c) $\frac{5\pi}{6} - \sqrt{3}$
 (d) $\frac{\pi}{3}$
 (e) Nessuna delle risposte precedenti.
3. **Quesito** Di quale dei seguenti angoli *non* si può costruire la terza parte, con riga e compasso?
- (a) 180 deg
 (b) 120 deg
 (c) 90 deg
 (d) 45 deg
 (e) 270 deg
4. **Quesito** Se un cubo è inscritto in una sfera di raggio R , qual è la misura del lato del cubo, espressa in funzione di R ?
- (a) $\frac{1}{\sqrt{3}}R$
 (b) $\frac{2}{\sqrt{3}}R$
 (c) $\frac{2}{2\sqrt{3}-1}R$
5. **Quesito** Di una piramide a base triangolare ($ABCD$) si sa che:
- \overline{DC} è ortogonale alla base (ABC);
 - il triangolo (ABD) è isoscele sulla base \overline{AB} ;
 - la misura di \overline{AB} è 1.



Riconosci quali delle condizioni sotto elencate permettono di *risolvere* la piramide (cioè di trovare tutti i restanti dati metrici: lunghezze dei lati, aree delle facce, volume, ...):

- (a) l'angolo \widehat{CAD} è di 47 deg;
- (b) l'angolo \widehat{ADB} è di 20 deg;
- (c) l'angolo \widehat{CAD} è di 47 deg e l'angolo \widehat{ADB} è di 20 deg;
- (d) $\|\overline{CD}\| = 2$;
- (e) l'angolo \widehat{ACB} è di 30 deg e l'angolo \widehat{ADB} è di 20 deg.

6. **Quesito** Una circonferenza di centro O è circoscritta ad un quadrilatero convesso \mathcal{Q} di vertici successivi P_1, P_2, P_3, P_4 .



Indichiamo con

$$\widehat{P_1}, \widehat{P_2}, \widehat{P_3}, \widehat{P_4}$$

gli *angoli completi* ai vertici di \mathcal{Q} . Trova quali delle seguenti affermazioni sono corrette.

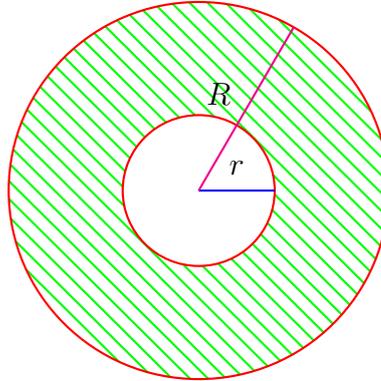
- (a) O è interno a \mathcal{Q} se è interno a 3 degli angoli al vertice di \mathcal{Q} ;
- (b) O è interno a \mathcal{Q} se è interno a 2 degli angoli al vertice di \mathcal{Q} ;
- (c) O è interno a \mathcal{Q} se è interno a 2 opportuni angoli al vertice di \mathcal{Q} .

7. **Quesito** Quale dei seguenti poligoni regolari *non* si può costruire con riga e compasso?

- (a) pentadecagono (poligono con 15 lati);
- (b) ennagono (poligono con 9 lati);
- (c) pentagono;

- (d) decagono;
- (e) esagono.

8. **Quesito** Una corona circolare ha raggio interno r e raggio esterno R .



Di quanto deve crescere r perché l'area della corona circolare dimezzi?

- (a) di $\frac{R-r}{2}$
 - (b) di $\frac{R-3r}{2}$
 - (c) di $\sqrt{\frac{R+r}{2}} - r$
 - (d) di $\sqrt{\frac{R-r}{2}} - r$
 - (e) di $\sqrt{\frac{R^2+r^2}{2}} - r$
9. **Quesito** Due rette non complanari nello spazio si dicono *sghembe*. Quale delle seguenti affermazioni è vera?
- (a) Due rette sghembe possono avere punti in comune.
 - (b) Due rette sghembe possono essere parallele.
 - (c) Due rette sghembe non hanno mai un punto in comune.
 - (d) Due rette sghembe possono essere perpendicolari.
10. **Quesito** In un tetraedro regolare di lato 1 l'altezza è
- (a) $\frac{\sqrt{3}}{2}$
 - (b) $\frac{\sqrt{3}}{3}$
 - (c) $\frac{\sqrt{6}}{2}$
 - (d) $\frac{\sqrt{6}}{3}$
11. **Quesito** Due rette perpendicolari allo stesso piano
- (a) possono essere sghembe;
 - (b) sono sempre complanari;
 - (c) possono essere complanari;
 - (d) sono sempre sghembe.
12. **Quesito** Un cilindro circoscritto ad una sfera
- (a) è equivalente ai $\frac{3}{2}$ della sfera;
 - (b) è equivalente ai $\frac{3}{4}$ della sfera;

- (c) ha l'area della superficie laterale uguale a quella della superficie sferica;
- (d) ha l'area della superficie laterale uguale ai $\frac{3}{4}$ dell'area della superficie sferica.

13. **Quesito** È data una superficie sferica \mathcal{S} di centro O e raggio r . \mathcal{Q}_1 e \mathcal{Q}_2 sono due quadrati inscritti in \mathcal{S} e appartenenti a piani α_1 e α_2 distinti e paralleli. Riconosci quali di queste affermazioni sono corrette.

- (a) \mathcal{Q}_1 e \mathcal{Q}_2 sono congruenti se e solo se α_1 e α_2 sono equidistanti da O .
- (b) I centri di \mathcal{Q}_1 e \mathcal{Q}_2 sono allineati con O .
- (c) Non sempre esiste una sfera \mathcal{S}' tangente agli otto lati di \mathcal{Q}_1 e \mathcal{Q}_2 .
- (d) Se la superficie sferica \mathcal{S}' di cui al punto precedente esiste, il suo centro coincide con O .
- (e) Se la superficie sferica \mathcal{S}' di cui al punto (c) esiste e r' è il suo raggio, si ha sempre

$$r' < \frac{2}{3}r.$$