Matematica per le Applicazioni Economiche e Finanziarie
Corso A - A.A. 2003-2004

Appunti di Matematica finanziaria

Sergio Margarita

Ottobre 2003

A. Calcolo finanziario

Introduzione

La matematica finanziaria prende in esame le operazioni finanziarie, che riguardano cioè lo scambio di somme di denaro disponibili in tempi diversi o con diverse scadenze.
Sono operazioni finanziarie, per esempio, l'accensione di un mutuo, l'acquisto o la vendita di obbligazioni che forniscono un reddito periodico e un ricavo all'atto del rimborso, il pagamento di un debito, la concessione di un prestito, l'acquisto di un bene strumentale in leasing.
La matematica finanziaria in senso stretto tratta

- operazioni *certe*, che non dipendono, cioè, da eventi aleatori che possono verificarsi oppure no
- solo il valore monetario dei beni e non i beni in sé.

Le operazioni finanziarie sono di due tipi (che dipendono essenzialmente dal punto di vista da cui ci si pone):

- operazioni di capitalizzazione
- operazioni di attualizzazione

Operazioni finanziarie

Nelle operazioni di **capitalizzazione il denaro è portato avanti nel tempo:** acquistando un titolo o concedendo un prestito rinuncio ad una disponibilità finanziaria immediata per ottenerne una futura.
Ad esempio

- rinuncio a 1000 oggi
- per ottenere 1050 fra un anno.

La simbologia in caso di capitalizzazione è la seguente:

- C **= capitale =** somma di denaro investita oggi
- M = **montante =** somma di denaro ottenuta (fra un anno)
- $\frac{M}{C} = f$ = **fattore di capitalizzazione (o di montante)**
- $I = M - C$ **= interesse**

Nelle operazioni di **attualizzazione il denaro è portato indietro nel tempo:** vendendo un titolo o ricevendo un prestito ottengo immediatamente una disponibilità finanziaria in cambio del pagamento di una somma in futuro.
Ad esempio

- ricevo 1000 oggi
- in cambio del pagamento di 1050 fra un anno

La simbologia in caso di attualizzazione è la seguente:

- A **= valore attuale o scontato =** somma di denaro ottenuta oggi
- S = **valore a scadenza o nominale =** somma di denaro che pagherò fra un anno
- $\frac{A}{S} = \phi$ = **fattore di attualizzazione (o di sconto)**
- $D = S - A$ **= sconto**

Si noti che, mentre nel linguaggio comune la parola 'sconto' è utilizzata come sinonimo di 'ribasso', nella matematica finanziaria essa viene utilizzata per indicare un pagamento anticipato (nel significato entra il fattore tempo).

I fattori f e ϕ si dicono **fattori finanziari.** In termini di fattori finanziari si ha, per la capitalizzazione:

$$M = Cf \text{ e } M = C + I \text{, quindi } I = C(f-1) \text{ e } f = 1 + \frac{I}{C}$$

e, per l'attualizzazione

$$A = S\phi \text{ e } A = S - D \text{, quindi } D = S(1-\phi) \text{ e } \phi = 1 - \frac{D}{S}.$$

Le operazioni di scambio (capitalizzazione/attualizzazione) sono **simmetriche**:

$$C \underset{\phi}{\overset{f}{\rightleftarrows}} M$$

e $(Cf)\phi = C$, quindi $f \cdot \phi = 1$.

Definizione
Quando $f \cdot \phi = 1$ si dice che i fattori finanziari sono **coniugati**.

I fattori finanziari f e ϕ sono funzioni

- del tempo $f(t)$, $\phi(t)$
  - **durata** dell'impiego (capitalizzazione)
  - **distanza** nel tempo (attualizzazione)
- della remunerazione dell'operazione (un parametro, α, β che governa l'evoluzione della somma) $f(t,\alpha)$, $\phi(t,\beta)$.

Remunerazione

Definizione
Una funzione $f(t,\alpha)$ o $\phi(t,\beta)$ si dice individuare un **regime finanziario** (di capitalizzazione o di attualizzazione).
Una funzione $f(t)$ o $\phi(t)$, ottenuta fissando il valore del parametro, si dice **legge finanziaria.**

Definizione
Si dice **tasso (annuo) di interesse** i l'interesse prodotto da 1 euro investito per 1 anno.

Poiché $C=1$, $I=M-C=Cf(1)-C=f(1)-1$, allora

$$i=f(1)-1$$

Definizione
Si dice **tasso (annuo) di sconto** d il compenso per chi anticipa la somma di 1 euro che scadrà tra 1 anno.

Poiché $S=1$, $D=S-A=S-S\phi(1)=1-\phi(1)$, allora

$$d=1-\phi(1)$$

Se f e ϕ sono coniugati, poiché $f(1)=1+i$, $\phi(1)=1-d$ e $f(1)\cdot\phi(1)=(1+i)(1-d)=1$, si ha

$$d=\frac{i}{1+i} \qquad \text{e} \qquad i=\frac{d}{1-d}.$$

1. Regimi finanziari usuali

Nel seguito tratteremo tre tipi di regimi finanziari:

- capitalizzazione semplice
- capitalizzazione composta
- sconto commerciale.

I regimi finanziari che saranno studiati danno luogo a leggi sia nel caso di capitalizzazione, sia nel caso di attualizzazione. Il nome che li individua è legato alla proprietà caratteristica di ciascuno di essi.

a. Capitalizzazione semplice (o dello sconto razionale)

La proprietà caratteristica di questo regime finanziario è che **l'interesse è proporzionale al capitale C impiegato e alla durata t dell'impiego**.
Si ha quindi

$$I=kCt$$

dove k è la costante di proporzionalità.
Ricordando il significato di tasso annuo di interesse i si ha $i=k\cdot 1\cdot 1$ e quindi

$$I=Cit$$

da cui seguono

$$M = C(1+it)$$
$$f(t,i) = 1+it$$

i è detto **tasso annuo d'interesse semplice**.

Esempio
Se un capitale C è impiegato al tasso d'interesse semplice i per un tempo t (con i dati numerici riportati sotto), calcolare il montante M.

$$C = 10000 \qquad i = 10\% = 0{,}10 \qquad t = 9 \text{ mesi } = \frac{9}{12} \text{ anno}$$

Si ha

$$M = 10000\left(1 + 0{,}10 \cdot \frac{9}{12}\right) = 10000(1+0{,}075) = 10750.$$

Osserviamo che $f(t,i) = 1+it$ è il fattore di montante nel regime di **capitalizzazione semplice**. Se $\phi(t,i)$ è il fattore di sconto coniugato, allora si parla di regime dello **sconto razionale** e $\phi(t,i) = \dfrac{1}{1+it}$.

Tassi non annui e tassi equivalenti

Se vogliamo misurare il tempo in mesi, poiché in t anni ci sono $12t$ mesi, per ottenere i_{12}, cioè il **tasso d'interesse mensile** in modo che la legge finanziaria di capitalizzazione sia la stessa, dovremo chiedere che

$$1 + it = 1 + i_{12} \cdot 12t \quad \text{da cui } i_{12} = \frac{i}{12}.$$

In generale, se si considera una frazione d'anno $\dfrac{1}{m}$, si ha il **tasso periodale** i_m

$$i_m = \frac{i}{m}.$$

i e i_m si dicono **tassi equivalenti in capitalizzazione semplice:** essi generano lo stesso fattore di capitalizzazione.

Titoli di puro sconto (zero-coupon bond)
Si chiama rendimento semplice a scadenza r (simple yield to maturity) il tasso di interesse semplice tale che il montante del prezzo di acquisto A uguagli il valore di rimborso N alla data T:

$$A(1+rT) = N$$

da cui

$$r = \frac{N-A}{AT} \qquad \text{e} \qquad A = N \cdot \frac{1}{1+rT}.$$

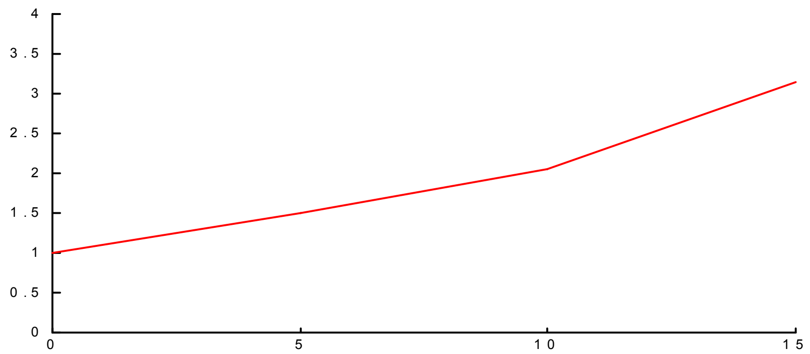
Esercizio
Si consideri una legge di capitalizzazione semplice il cui tasso varia con la durata secondo lo schema seguente:

t	i
$0-5$	10%
$5-10$	11%
$10-15$	12%

Scrivere l'espressione del fattore di capitalizzazione semplice $f(t)$.

Fattore di capitalizzazione semplice $f(t)=1+it$

$$f(t)=\begin{cases}1+0{,}10t & 0\le t\le 5\\ 1+0{,}10\cdot 5+0{,}11\cdot(t-5) & 5<t\le 10\\ 1+0{,}10\cdot 5+0{,}11\cdot 5+0{,}12\cdot(t-10) & t>10\end{cases}$$



Esercizio
Si consideri una legge di capitalizzazione semplice al tasso annuo del 12%. Si calcoli il tasso d'interesse trimestrale equivalente.
Ricordiamo la definizione: tassi equivalenti generano lo stesso fattore di capitalizzazione:

$$1+it=1+i_m\cdot m\cdot t$$

dove $\frac{1}{m}$ è la frazione d'anno.
Per un trimestre, si ha $m=4$, quindi

$$1+it=1+i_4\cdot 4t$$

$$i_4=\frac{i}{4}=3\%$$

Esercizio
- Si consideri una legge di capitalizzazione semplice nel tempo $0-T$
- si pensi di spezzare l'investimento al tempo x, $0<x<T$, e di rinvestire
- si consideri il tasso d'interesse annuo i.

1. Scrivere l’espressione del fattore di montante
2. Determinare l’interruzione ottima

1. Rappresentiamo la situazione sull’asse dei tempi:

$$\begin{array}{ccccc} 0 & & x & & T \\ \hline & i & & i & \\ C & & M_x & & M_T \end{array}$$

   Il montante al tempo x sia $M_x = C\left(1+ix\right)$; il montante alla fine dell’operazione sarà

$$M_T = M_x\left(1+i\left(T-x\right)\right) = C\left(1+ix\right)\left(1+i\left(T-x\right)\right)$$

   quindi il fattore di montante sarà

$$f\left(t\right) = \left(1+ix\right)\left(1+i\left(T-x\right)\right).$$

2. Si tratta di un semplice problema di ottimizzazione in una variabile (x):

$$\frac{dM_T}{dx} = Ci^2T - 2Ci^2x = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = \frac{T}{2}.$$

b. Capitalizzazione composta

La proprietà caratteristica della capitalizzazione composta è la *capitalizzazione degli interessi* maturati alla fine del periodo: essi diventano parte del capitale e fruttano interessi.
Se consideriamo inizialmente 1 euro, dopo un anno avremo $1+i$ (dove i è il tasso annuo di interesse semplice). Se consideriamo ora il capitale pari a $C = 1+i$, dopo un altro anno avremo $M = Cf\left(t\right) = \left(1+i\right)\left(1+i\right) = \left(1+i\right)^2$ e così via; dopo n anni avremo il montante di $M = \left(1+i\right)^n$ ottenuto da un capitale unitario. Possiamo quindi affermare che

- **il fattore di montante nel regime della capitalizzazione composta**

$$f\left(t,i\right) = \left(1+i\right)^t$$

- **il fattore di sconto nel regime dello sconto composto** (fattore coniugato) è

$$\phi\left(t,i\right) = \left(1+i\right)^{-t} = \frac{1}{\left(1+i\right)^t}$$

i si chiama **tasso annuo di interesse composto.**

Esempio (capitalizzazione)

$C = 1000$ $t = 3$ anni $i = 10\%$

Si ha

$$M = C(1+i)^3 = 1000 \cdot (1+0{,}10)^3 = 1331$$

Esempio (attualizzazione)

$S = 1000$ $t = 2$ **anni** $i = 10\%$
Si ha

$$A = S \cdot \phi(t,i) = S \cdot \frac{1}{(1+i)^2} = 1000 \cdot \frac{1}{(1+0{,}10)^2} = 826{,}45$$

Tassi non anni e tassi equivalenti

Il tasso periodale i_m, riferito a $\frac{1}{m}$ di anno, deve verificare l'uguaglianza

$$(1+i_m)^{mt} = (1+i)^t$$

Per $t = 1$ anno si ha

$$(1+i_m)^m = 1+i \quad \Rightarrow \quad i_m = (1+i)^{\frac{1}{m}} - 1 = \sqrt[m]{1+i} - 1$$

i e i_m si dicono **tassi equivalenti in capitalizzazione composta.**

Esiste un altro modo di calcolare l'equivalenza tra tasso annuale e periodale: si definisce j_m il rapporto tra il tasso periodale e l'ampiezza del periodo

$$j_m = \frac{i_m}{1/m} = m \cdot i_m$$

j_m si chiama **tasso annuo nominale convertibile** n **volte l'anno.**

Esercizio
Sia del 4% il tasso d'interesse quadrimestrale in capitalizzazione composta. Calcolare:
1. il tasso d'interesse annuo (detto effettivo)
2. il tasso d'interesse annuo nominale convertibile 4 volte l'anno.

1. $m = 3$, quindi

$$1+i = (1+i_3)^3$$

$$i = (1+i_3)^3 - 1 = (1+0{,}4)^3 - 1 = 0{,}12486$$

2. $m = 4$

$$1+i=\left(1+i_4\right)^4$$

$$i_4=\left(1+i\right)^{\frac{1}{4}}-1=\left(1+0{,}12486\right)^{\frac{1}{4}}-1=0{,}12486\ '$$

$$j_4=i_4\cdot 4=0{,}11941\,.$$

Esercizio
Qual è il più conveniente tra questi due investimenti:
1. 3 mesi, interessi semplici, tasso annuo 20%
2. 3 mesi, interessi composti, tasso annuo 22%?

Occorre confrontare i fattori di capitalizzazione $f\left(t\right)$:

1) Interessi semplici: $f\left(t\right)=1+it$

$$f\left(\frac{3}{12}\right)=1+0{,}20\cdot\frac{3}{12}=1{,}05$$

2) Interessi composti: $f\left(t\right)=\left(1+i\right)^t$

$$f\left(\frac{3}{12}\right)=\left(1+0{,}22\right)^{\frac{3}{12}}=1{,}051\,.$$

E' più conveniente il secondo.

Esercizio
In capitalizzazione composta si impiega un capitale per t anni al tasso periodale i_m ($\frac{1}{m}$ di anno).
1. Quanti anni occorrono perché il montante sia il doppio del capitale?
2. Qual è il tasso di interesse semplice che ha lo stesso effetto sulla stessa durata?
3. Calcolare il tempo di raddoppio se ogni $\frac{1}{m}$ di anno una frazione α degli interessi è ritenuta per le tasse.

1. Poiché $M=C\left(1+i\right)^t=C\left(1+i_m\right)^{mt}$ e si cerca $\left(1+i_m\right)^{mt}=2$, si ottiene $\bar{t}=\dfrac{\log 2}{m\log\left(1+i_m\right)}$.
2. Nella stessa situazione $M=C\left(1+i\bar{t}\right)$ e $1+i\bar{t}=2$, quindi $i=\dfrac{1}{\bar{t}}=\dfrac{m\log\left(1+i_m\right)}{\log 2}$.
3. $\bar{\bar{t}}=\dfrac{\log 2}{m\log\left(1+i_m\left(1-\alpha\right)\right)}$.

c. Sconto commerciale (e interessi semplici anticipati)

La proprietà caratteristica di questo regime finanziario è che **lo sconto è proporzionale alla somma a scadenza S e alla scadenza t dell'impiego**.
Si ha quindi

$$D = kS\,t$$

dove k è la costante di proporzionalità.
Ricordando il significato di tasso annuo di sconto d si ha $d = k \cdot 1 \cdot 1$ e quindi

$$D = Std$$

da cui seguono

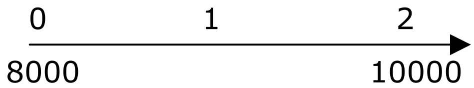
$$A = S - D = S - Std = S\left(1 - td\right)$$

$$\phi\left(t,d\right) = 1 - td \qquad \left(td < 1\right)$$

Il regime di attualizzazione con fattore di sconto $\phi\left(t,d\right) = 1 - td$ si dice **regime dello sconto commerciale**.

Il regime di capitalizzazione con fattore di interesse coniugato $f\left(t,i\right) = \dfrac{1}{1-td}$ si dice **regime di capitalizzazione ad interessi semplici anticipati.**

Esercizio
Un credito di 10000 viene scontato per 2 anni con valore attuale 8000. Qual è il tasso applicato all'operazione?



- Sconto semplice

$$10000 \cdot \frac{1}{1+it} = 8000$$

$$1 + it = \frac{10000}{8000} \quad \Rightarrow \quad 1 + 2i = \frac{5}{4} \quad \Rightarrow \quad 2i = \frac{5}{4} - 1 = \frac{1}{4}$$

$$i = \frac{1}{8} = 0{,}125 = 12{,}5\%$$

- Sconto composto

$$10000 \cdot \frac{1}{\left(1+i\right)^t} = 8000$$

$$\left(1+i\right)^2 = \frac{5}{4} \quad \Rightarrow \quad 1 + i = \sqrt{\frac{5}{4}} \quad \Rightarrow \quad i = \sqrt{\frac{5}{4}} - 1$$

$$i = 11{,}8\%$$

- Sconto commerciale

$$10000 \cdot (1 - td) = 8000$$
$$10000 \cdot (1 - 2d) = 8000$$
$$1 - 2d = \frac{4}{5} \quad \Rightarrow \quad 2d = 1 - \frac{4}{5} = \frac{1}{5}$$
$$d = \frac{1}{10} = 10\%$$

Esercizio

Un'impresa deve riscuotere 100000 fra 3 anni. Può scontare questo credito a sconto commerciale con tasso d.

- A quale tasso annuo di interesse composto i deve investire tale valore per ottenere 100000 fra 3 anni?
- A quale tasso annuo di interesse semplice j deve investire tale valore per ottenere 100000 fra 3 anni?

Si ha

$$A = 100000 \cdot (1 - 3d)$$

- interesse composto

$$A \cdot (1+i)^3 = 100000 \quad \Rightarrow \quad 100000 \cdot (1-3d)(1+i)^3 = 100000$$
$$(1-3d)(1+i)^3 = 1 \quad \Rightarrow \quad (1+i)^3 = \frac{1}{1-3d} \quad \Rightarrow \quad 1+i = \sqrt[3]{\frac{1}{1-3d}}$$
$$i = \sqrt[3]{\frac{1}{1-3d}} - 1$$

- interesse semplice

$$A \cdot (1+3j) = 100000 \quad \Rightarrow \quad 100000 \cdot (1-3d)(1+3j) = 100000$$
$$(1-3d)(1+3j) = 1 \quad \Rightarrow \quad 1+3j = \frac{1}{1-3d} \quad \Rightarrow \quad j = \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{1}{1-3d} - 1 \right) = \frac{1}{3} \cdot \frac{1-(1-3d)}{1-3d}$$
$$j = \frac{d}{1-3d}$$

2. Rendite

Si dice **rendita** una sequenza di somme di denaro $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$ (dello stesso segno, tutte in entrata o tutte in uscita) con diverse scadenze $t_1, t_2, t_3, \ldots, t_n$.
Ogni somma a_i è detta **rata**.
Se le scadenze sono equidistanti (anni, mesi), la rendita si dice **periodica.**

Il **valore attuale di una rendita** è la somma dei valori attuali delle rate calcolati in epoca anteriore a tutte le scadenze (o coincidente con la prima di esse):

$$A = \sum_{s=1}^{n} a_s \phi\left(t_s\right)$$

Il **montante di una rendita** è la somma dei montanti delle rate calcolati in epoca posteriore alla scadenza di tutte le rate (o coincidente con l'ultima di esse):

$$M = \sum_{s=1}^{n} a_s f\left(T - t_s\right)$$

dove $T \geq t_n$.

Nel regime dell'interesse semplice si ha

Sconto semplice

$$A = \sum_{s=1}^{n} a_s \frac{1}{1 + i t_s}$$

Montante a interessi semplici

$$A = \sum_{s=1}^{n} a_s \frac{1}{1 + i t_s}$$

$$M = \sum_{s=1}^{n} a_s \left(1 + i\left(T - t_s\right)\right)$$

Osservazione: la progressione geometrica.
Vogliamo calcolare la somma dei termini di una progressione geometrica:

$$1 + q + q^2 + q^3 + \cdots + q^{n-1}$$

Si ha

$$\sum_{k=0}^{n-1} q^k = \frac{q^n - 1}{q - 1} \quad \text{oppure} \quad \sum_{k=1}^{n} q^k = \frac{q^{n+1} - q}{q - 1} \qquad q \neq 1$$

Infatti

$$\sum_{k=1}^{n} q^k = \left(\sum_{k=0}^{n} q^k\right) - 1 = \left(\sum_{k=0}^{n-1} q^k\right) - 1 + q^n = \frac{q^n - 1}{q - 1} - 1 + q^n =$$

$$= \frac{q^n - 1 - \left(q - 1\right) + q^n\left(q - 1\right)}{q - 1} = \frac{\cancel{q^n} \cancel{-1} - q + \cancel{1} + q^{n+1} - \cancel{q^n}}{q - 1}$$

quindi

$$\sum_{k=1}^{n} q^k = \frac{q^{n+1}-q}{q-1}.$$

Rendite periodiche a rata costante
Consideriamo una rendita unitaria (in cui la rata è uguale ad 1 euro).
Essa si dice **posticipata** se il primo pagamento (o la prima riscossione) avviene alla fine del primo periodo, **anticipata** se avviene all'inizio del primo periodo.

- Rendita unitaria posticipata

	1	1	1	1	1
0	1	2	3	n-1	n

$$\text{montante } s_{\overline{n}|i} = (1+i)^{n-1} + (1+i)^{n-2} + \ldots + (1+i) + 1 = \frac{(1+i)^n - 1}{i}$$

$$\text{valore attuale } a_{\overline{n}|i} = \frac{1}{1+i} + \frac{1}{(1+i)^2} + \cdots + \frac{1}{(1+i)^n} = \frac{1-(1+i)^{-n}}{i}$$

che si leggono, rispettivamente, "esse figurato n al tasso i" e "a figurato n al tasso i".

La seconda uguaglianza del montante si ottiene applicando la formula della somma delle potenze da zero ad $n-1$ con $q = 1+i$; la seconda uguaglianza del valore attuale si ottiene applicando la formula della somma delle potenze da 1 a n con $q = \frac{1}{1+i}$ attraverso i passaggi seguenti:

$$\frac{1}{1+i} + \frac{1}{(1+i)^2} + \cdots + \frac{1}{(1+i)^n} = \frac{\frac{1}{(1+i)^{n+1}} - \frac{1}{1+i}}{\frac{1}{1+i} - 1} = \frac{\frac{1-(1+i)^n}{(1+i)^{n+1}}}{\frac{-i}{(1+i)}} =$$

$$= \frac{1-(1+i)^n}{(1+i)^{n+1}} \cdot \frac{1+i}{-i} = -\frac{1-(1+i)^n}{i(1+i)^n} = \frac{(1+i)^n - 1}{i(1+i)^n} = \frac{1-(1+i)^{-n}}{i}$$

Se la rata è costante e pari ad R, si ha

$$A = R a_{\overline{n}|i} \qquad \text{e} \qquad M = R s_{\overline{n}|i}$$

- Rendita unitaria anticipata:

1	1	1	1	1	
0	1	2	3	n-1	n

montante $\ddot{s}_{\overline{n}|\,i} = (1+i)^n + (1+i)^{n-2} + \ldots + (1+i) = \dfrac{(1+i)^n - 1}{d}$

valore attuale $\ddot{a}_{\overline{n}|\,i} = 1 + \dfrac{1}{1+i} + \dfrac{1}{(1+i)^2} + \cdots + \dfrac{1}{(1+i)^{n-1}} = \dfrac{1-(1+i)^{-n}}{d}$

che si leggono rispettivamente "esse anticipato figurato enne al tasso i" e "a anticipato figurato enne al tasso i". Osserviamo che d è il tasso di sconto

$$d = \frac{i}{1+i}$$

Infatti, per il montante si ha

$$(1+i)^n + (1+i)^{n-2} + \ldots + (1+i) = \frac{(1+i)^{n+1} - (1+i)}{i} = \frac{1+i}{i} \cdot \left[(1+i)^n - 1\right]$$

e, per il valore attuale,

$$1 + \frac{1}{1+i} + \frac{1}{(1+i)^2} + \cdots + \frac{1}{(1+i)^{n-1}} = \frac{\dfrac{1}{(1+i)^n} - 1}{\dfrac{1}{1+i} - 1} = \frac{\dfrac{1-(1+i)^n}{(1+i)^n}}{\dfrac{-i}{1+i}} =$$

$$= -\frac{1-(1+i)^n}{(1+i)^n} \cdot \frac{1+i}{i} = \frac{(1+i)^n - 1}{(1+i)^n} \cdot \frac{1+i}{i} = \left[1-(1+i)^{-n}\right] \cdot \frac{1+i}{i}$$

Esercizio

Data una rendita annua immediata posticipata a rata costante $R = 10000$ di durata pari a 6 anni, calcolare, al tasso annuo $i = 10\%$

- il valore attuale
- il montante.

	R	R	R	R	R	R
0	1	2	3	4	5	6

- Valore attuale

$$A = \frac{R}{1+i} + \frac{R}{(1+i)^2} + \cdots + \frac{R}{(1+i)^6} = R \cdot \sum_{t=1}^{6} \frac{1}{(1+i)^t} =$$

$$= 10000 \cdot \sum_{t=1}^{6} \frac{1}{(1{,}1)^t} = 10000 \cdot \frac{1-(1{,}1)^{-6}}{0{,}1} = 43535$$

- Montante

$$M = R + R(1+i) + R(1+i)^2 + \cdots + R(1+i)^5 = R \cdot \sum_{t=0}^{5} (1+i)^t =$$

$$= R \frac{(1+i)^6 - 1}{i} = 10000 \cdot \frac{(1{,}1)^6 - 1}{0{,}1} = 77100$$

Esercizio
Una rendita annua immediata posticipata a rata costante ha valore attuale pari a 100000. Se la durata è di 5 anni e il tasso annuo del 10%, calcolare la rata.
A quanto ammonterebbe la rata se la rendita fosse anticipata?

Poiché $A = R \cdot \sum_{t=1}^{n} \frac{1}{(1+i)^t} = R \cdot \sum_{t=1}^{5} \frac{1}{(1{,}1)^t}$, allora

$$R_{\text{post}} = \frac{A}{\sum_{t=1}^{n} \frac{1}{(1+i)^t}} = \frac{A}{\frac{1-(1+i)^{-n}}{i}} = \frac{100000}{\frac{1-(1{,}1)^{-5}}{0{,}1}} = 26380.$$

Se la rendita fosse anticipata, si avrebbe $d = 0{,}09$ e

$$R_{\text{ant}} = \frac{A}{\sum_{t=0}^{n-1} \frac{1}{(1+i)^t}} = \frac{A}{\frac{1-(1+i)^{-n}}{d}} = \frac{100000}{\frac{1-(1{,}1)^{-5}}{0{,}09}} = 23742.$$

3. Flussi di cassa variabili

Si consideri un'operazione finanziaria composta da scambi di somme di denaro a_0, a_1, $a_2, \dots a_n$ in tempi t_0, t_1, $t_2, \dots t_n$. Si ha $t_0 = 0$.
Le somme di denaro sono $a_s < 0$ se si tratta di un'uscita di cassa, $a_s > 0$ se si tratta di un'entrata di cassa.

Definizione
Il **Discounted Cash Flow (DCF)** dell'operazione è la somma dei valori scontati dei flussi di cassa calcolati in $t_0 = 0$ a tasso composto. È una funzione del tasso di attualizzazione x:

$$G(x) = a_0 + \frac{a_1}{(1+x)^{t_1}} + \frac{a_2}{(1+x)^{t_2}} + \cdots + \frac{a_n}{(1+x)^{t_n}}.$$

- Calcolato in $x = i$ rappresenta il valore dell'operazione per chi impiega i capitali al tasso i.
- $G(i)$ prende il nome di:
  VAN Valore Attuale Netto
  NPV Net Present Value
  REA Risultato Economico Attualizzato
- Un tasso x^* tale che $G(x^*) = 0$ si dice **tasso interno di rendimento (TIR)** dell'operazione o **Internal Rate of Return (IRR)**.

4. Ammortamento di un prestito

Si parla di ammortamento quando si prende in prestito un capitale S al tempo $t = 0$ e lo si rimborsa in n **rate di ammortamento** R_1, $R_2, \dots R_n$ ai tempi t_1, $t_2, \dots t_n$. Supponiamo che i pagamenti avvengano ad intervalli regolari di tempo (rate periodiche), quindi $t = 1, 2, \dots, n$.
Indichiamo con

D_t il debito residuo al tempo t (ovviamente $D_0 = S$)
$E_t = S - D_t$ il debito estinto al tempo t
R_t la rata di ammortamento pagata in t.

Osserviamo che la rata è composta da una quota di capitale rimborsato e da una quota di interessi sul capitale da rimborsare, pertanto

$$R_t = C_t + I_t$$

$\sum_{t=1}^{n} C_t = S$ (la somma delle quote di capitale esaurisce il debito)

$E_t = \sum_{s=1}^{t} C_s$ (il debito estinto al tempo t è la somma delle quote di capitale già versate)

$D_t = S - E_t = S - \sum_{s=1}^{t} C_s = \sum_{s=t+1}^{n} C_s$ (il debito residuo è la somma delle quote di capitale ancora da versare)

$I_t = i \cdot D_{t-1}$ (la quota di interesse è calcolata sul debito residuo all'inizio del periodo).

I due tipi di ammortamenti più comuni sono

- **ammortamento italiano (a quota di capitale costante)**
- **ammortamento francese (a rata costante)**

Ammortamento italiano

La quota di capitale è costante per ogni rata, cioè $C_t = C$, e poiché la somma delle quote di capitale deve dare S, avremo $n \cdot C = S$ e quindi

$$C = \frac{S}{n}.$$

Poiché le rate sono tutte uguali,

$$E_t = C \cdot t = \frac{S}{n} t$$

e quindi

$$D_t = S - E_t = S \frac{n-t}{t}.$$

Si può redigere un piano di ammortamento, cioè una tabella in cui compaiano i valori della quota di capitale, della quota di interesse, della rata, del debito estinto e di quello residuo per i vari anni.

Esempio.

Si rediga il piano di ammortamento italiano per il rimborso del capitale di 10000 euro in 10 rate al tasso del 10% ($i = 0{,}10$).

La quota di capitale (costante) è pari a $C = \frac{S}{n} = \frac{10000}{10} = 1000$ ed il piano è il seguente:

anni	quota capitale	quota interesse	rata	debito estinto	debito residuo
0					10000
1	1000	1000	2000	1000	9000
2	1000	900	1900	2000	8000
3	1000	800	1800	3000	7000
4	1000	700	1700	4000	6000
5	1000	600	1600	5000	5000
6	1000	500	1500	6000	4000
7	1000	400	1400	7000	3000
8	1000	300	1300	8000	2000
9	1000	200	1200	9000	1000
10	1000	100	1100	10000	0

Osserviamo che nell'ammortamento italiano:
- la quota di capitale è costante
- la quota di interesse è decrescente
- la rata di ammortamento è decrescente, ciò significa che è più onerosa nei primi anni e più 'leggera' negli ultimi.

Ammortamento francese

La rata è costante, $R_t = R, \quad \forall t$ e, poiché le rate costituiscono una rendita di valore attuale pari al debito contratto, si ha $Ra_{\overline{n}|i} = S$ e quindi

$$R = \frac{S}{a_{\overline{n}|i}}.$$

Si calcolano ricorsivamente la quota di interesse e quindi quella di capitale ed i debiti (estinto e residuo):

$$I_1 = i \cdot D_0 = i \cdot S$$
$$C_1 = R - I_1$$
$$D_1 = S - C_1 ....$$

Esempio

Si rediga il piano di ammortamento francese per il rimborso del capitale di 10000 euro in 10 rate al tasso del 10%.

anni	quota capitale	quota interesse	rata	debito estinto	debito residuo
0					10000
1	627,45	1000,00	1627,45	627,45	9372,55
2	690,20	937,25	1627,45	1317,65	8682,35
3	759,22	868,23	1627,45	2076,87	7923,13
4	835,14	792,31	1627,45	2912,01	7087,99
5	918,66	708,80	1627,45	3830,67	6169,33
6	1010,52	616,93	1627,45	4841,19	5158,81
7	1111,57	515,88	1627,45	5952,76	4047,24
8	1222,73	404,72	1627,45	7175,49	2824,51
9	1345,00	282,45	1627,45	8520,50	1479,50
10	1479,50	147,95	1627,45	10000,00	0,00

Si osservi che nell'ammortamento francese
- la quota di capitale è crescente
- la quota di interesse è decrescente
- la rata è costante, ed è per questo motivo che solitamente è preferito da chi chiede un prestito.

Se si considera un rimborso in cui **il tasso è variabile,** si costruisce il piano di ammortamento partendo dal debito residuo. Lo stesso procedimento si applica nel caso di rate non costanti o intervalli di tempo non costanti.

Esempio

Si rediga il piano di ammortamento di un debito di 1000 euro rimborsato in due rate annuali di 700 euro e 440 euro al tasso annuo del 10%.

$$D_0 = 1000$$
$$D_1 = D_0 \left(1 + 0{,}10\right) - R_1 = 1100 - 700 = 400$$
$$D_2 = D_1 \left(1 + 0{,}10\right) - R_2 = 440 - 440 = 0$$

$$C_1 = D_0 - D_1 = 1000 - 400 = 600$$
$$C_2 = D_1 - D_2 = 400 - 0 = 400$$

$$I_1 = R_1 - C_1 = 700 - 600 = 100$$
$$I_2 = R_2 - C_2 = 440 - 400 = 40$$

e quindi il piano di ammortamento diventa:

Data	Rata	Quota capitale	Quota interesse	Debito estinto	Debito residuo
0	-------	---	---	---	1000
1	700	600	100	600	400
2	440	400	40	1000	---

5. Titoli a reddito fisso

Si tratta ad esempio di
- raccolte di risparmi
- obbligazioni…

Il titolo si dice **collocato** al prezzo S (il prezzo di emissione o corso secco d'acquisto), mentre il suo **valore nominale** è N; gli interessi annui sono calcolati in regime semplice al **tasso cedolare** c sul valore N: $I = Nc$.

Le cedole possono essere annuali (e quindi l'interesse prodotto è $r = I$) oppure semestrali (perciò $r = I/2$). Indichiamo con R il valore di rimborso (cioè la somma che l'emittente del titolo pagherà alla scadenza). Quindi…**attenzione ai 3 prezzi!**

La situazione (per cedole annuali) si può rappresentare così:

```
      r   r   r                    r   r+R
0     1   2   3                   n-1   n
------------------------------------------->
-S
```

Quindi il DCF è dato da

$$G(x) = -S + \frac{r}{1+x} + \frac{r}{(1+x)^2} + \cdots + \frac{r+R}{(1+x)^n}.$$

Il tasso x per cui $G(x) = 0$ si chiama **rendimento effettivo del titolo (yield to maturity).**

Esempio

Emissione	$S = 990$
Nominale	$N = 1000$
Rimborso	$R = 1000$
Scadenza	$n = 2$ anni
Tasso cedolare	$c = 10\%$
Cedola annuale	$r = I = Nc = 1000 \cdot 0{,}10 = 100$

La situazione è la seguente:

```
                100         100+1000
0               1              2
---------------------------------------->
-990
```

$G(x) = -990 + \frac{100}{1+x} + \frac{1100}{(1+x)^2}$ si annulla in $x = 10{,}581\%$ (rendimento effettivo).

Se il titolo fosse stato acquistato al tempo $t = 4 \text{ mesi}$ (cioè dopo $1/3$ di anno), la situazione sarebbe stata la seguente:

```
               100          100+1000
 0              1               2
 ---------------------------------->
     -990
     -100·1/3
```

quindi $G(x) = -990 - \frac{100}{3} + \frac{100}{(1+x)^{1-\frac{1}{3}}} + \frac{1100}{(1+x)^{2-\frac{1}{3}}}$, che si annulla in $x = 10{,}609\%$.

In questo caso, $S\ (990)$ si chiama **corso secco** e $100 \cdot \frac{1}{3}$ si dice **rateo**; inoltre,

corso secco + rateo = corso tel quel.

Se le cedole fossero state semestrali, avremmo avuto

```
     50   50   50   50+1000
0    1    2    3    4
---------------------------->
-990
```

quindi $G(x) = -990 + \frac{50}{(1+x)^{1/2}} + \frac{50}{(1+x)} + \frac{50}{(1+x)^{3/2}} + \frac{50+1000}{(1+x)^2}$,

e si annulla in $x = 10{,}847\%$

B. Scelte finanziarie

Si chiama **investimento finanziario** una sequenza di entrate e uscite (dette anche **flussi finanziari**); spesso occorre un **metodo di valutazione** degli investimenti per
- valutare la convenienza di **una** proposta
- scegliere tra **più** investimenti.

Passeremo in rassegna alcuni metodi di valutazione (detti anche 'criteri') degli investimenti.

1. VAN(G) Valore Attuale Netto (Generalizzato)

Si tratta di decidere se è più conveniente una certa operazione finanziaria proposta (che comporta certe entrate e uscite a scadenze prefissate) oppure continuare ad impiegare il capitale a tasso i in regime di capitalizzazione composta.

La decisione si prende confrontando la situazione futura facendo/non facendo l'operazione.

Confrontiamo l'impiego di un capitale W_0 per un tempo T (figura a) e l'operazione finanziaria che richiede l'uscita di 1000 al tempo $t=0$ e l'entrata di 700 ed 800 rispettivamente al tempo $t=1$ e $t=2$ (figura b), calcolando il montante al tempo finale T (al tasso di interesse i):

a)

$$\begin{array}{cccc} W_0 & & & W_0(1+i)^T \\ \hline 0 & 1 & 2 & T \end{array}$$

b)

$$\begin{array}{cccc} -1000 & & & \\ W_0 & +700 & +800 & (W_0-1000)(1+i)^T+700(1+i)^{T-1}+800(1+i)^{T-2} \\ \hline 0 & 1 & 2 & T \end{array}$$

Conviene fare l'operazione se
$(W_0-1000)(1+i)^T+700(1+i)^{T-1}+800(1+i)^{T-2}>W_0(1+i)^T$, ossia se

$$-1000+\frac{700}{1+i}+\frac{800}{(1+i)^2}>0.$$

Ci si riconduce quindi al DCF dell'operazione: con le solite notazioni dev'essere
$G(x)=\sum_{s=1}^{n}\frac{a_s}{(1+x)^{t_s}}>0$, che calcolato in $x=i$ è il VAN.
Lo stesso discorso vale per il confronto tra due operazioni.

Osservazioni sul VAN:

- Introduce un elemento soggettivo (il tasso di attualizzazione i) che misura le condizioni di mercato del decisore.
- Il VAN dipende dal tasso scelto. I tassi che distinguono la convenienza dalla non convenienza (quegli x per cui $G(x)=0$) si chiamano **Tassi Interni di Rendimento TIR (o Internal Rate of Return IRR)**.
- Il VAN si può estendere a casi con tassi variabili (VANG):

$$G(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \sum_{s=1}^{n} \frac{a_s}{(1+x_s)^{t_s}} > 0$$

2. (G)APV (Generalized) Adjusted Present Value

È utilizzato quando vi sono capitali provenienti da fonti esterne. Consideriamo nuovamente l'operazione b) del paragrafo precedente, limitandoci ai primi due anni e supponiamo che nell'esborso iniziale (-1000) 400 siano di fonte esterna al tasso annuo del 15% e che l'anno successivo dovrà essere pagato il rimborso: $400(1+0{,}15)=460$).

La situazione è quindi la seguente:

-1000	+700	+800
+400	-460	
0	1	2

Si calcolano quindi i flussi di cassa **netti**

-600	+240	+800
0	1	2

e su questi si calcola il VAN al 10%: $-600 + \dfrac{240}{1+0{,}10} + \dfrac{800}{(1+0{,}10)^2}$.

Si può costruire un APV generalizzato (GAPV) se i tassi sono variabili.

3. Indici legali di redditività

Per legge il cliente deve essere preventivamente informato delle condizioni di impiego dei propri risparmi o di acquisto rateale (Legge n.54 del 17/02/92 sulla Trasparenza Bancaria e Legge n.142 del 19/02/92 sulla Tutela del Consumatore).

TAN

Chi raccoglie risparmio attraverso l'emissione di titoli di credito ha l'obbligo di indicare il TASSO ANNUO NOMINALE (TAN)

- nel caso di TITOLI CON CEDOLE è il tasso cedolare (tasso che applicato al valore nominale dà la massa di interesse)
- nel caso di TITOLI SENZA CEDOLA (zero-coupon bonds) tale tasso non può essere precisato.

TAEG

Chi offre credito deve dichiararne il TASSO ANNUO EFFETTIVO GLOBALE (TAEG):

- è il tasso interno dell’operazione vista dal lato del cliente
- comprende tutti gli esborsi e le trattenute.

C. Applicazioni finanziarie

1. Contratto di leasing

È un contratto stabilito tra una persona o una società (detta *locataria*) che riceve in uso da una società (detta *locatrice*) un bene (un'auto, un macchinario, ...) per un periodo prefissato, dietro pagamento di un *canone* con la facoltà di riscattare il bene al termine del contratto ad un prezzo prefissato.
Il vantaggio, per il locatario, è di avere in uso il bene senza acquistarlo subito (il che è positivo soprattutto in caso di un bene soggetto ad obsolescenza e di prezzo rilevante). La società di leasing resta proprietaria del bene fino all'eventuale riscatto.
I dati caratteristici di un contratto di leasing sono:

- Il prezzo del bene detto **valore di fornitura** A che viene erogato in un'unica soluzione in $t=0$ e rimborsato in modo **frazionato**: il valore di fornitura è il valore, scontato con sconto composto alla data di decorrenza del contratto, dei versamenti al tasso netto j fissato dalla società di leasing:

$$A = \frac{a_1}{(1+j)^{t_1}} + \frac{a_2}{(1+j)^{t_2}} + \cdots + \frac{a_n}{(1+j)^{t_n}}$$

- l'anticipo, versato dal locatario alla stipula del contratto, calcolato in uno dei due modi seguenti:
  - ✓ come **quota in contanti**, in percentuale su A, indicato con B
  - ✓ come **somma di r canoni futuri**, attribuiti alle ultime scadenze (anticipati), ma versati subito

- il **prezzo di riscatto** E
  - ✓ calcolato come percentuale di A
  - ✓ basso per invogliare al riscatto (tipicamente 2%)

- la **durata**
  - ✓ in mesi, m
  - ✓ se viene fornito il tasso annuo i, la durata espressa in anni sarà $m/12$

- i **canoni,** calcolati determinando
  - ✓ prima il **profilo temporale** (rapporti tra i vari canoni e il primo: $\rho_1 = 1$)
  - ✓ poi l'**importo dei canoni**

Esempio
Profilo: $[\rho_1 \quad \rho_2 \quad \rho_3 \quad \cdots \quad \rho_N]$
Canoni: $[C_1 \quad C_2 \quad C_3 \quad \cdots \quad C_N]$
dove N è il numero complessivo di canoni, compresi quelli anticipati, esclusa la quota in contanti:

$$C_2 = C_1 \cdot \rho_2; \quad C_3 = C_1 \cdot \rho_3 \ldots$$

Nei contratti con canoni costanti si avrà $\rho_1 = \rho_2 = \rho_3 = \cdots = \rho_N$.

La situazione è la seguente (gli ultimi r canoni sono quelli del riscatto):

n normali N-n=r anticipati

0 1 2 3 n n+1 N

Il **tasso contrattuale di interesse composto** (il TIR dell'operazione) rende uguali

- ✓ il **valore di fornitura meno gli anticipi**
- ✓ il **valore scontato dei canoni non anticipati e del valore di riscatto**

L'equazione di base di un contratto di leasing è la seguente:

$$A = B + \sum_{s=1}^{r} C_{n+s} + \sum_{s=1}^{n} C_s \left(1+i\right)^{-t_s} + E\left(1+i\right)^{-m/12}$$

Da qui si ricavano il **primo canone**

$$C_1 = \frac{A - B - E\Big/\left(1+i\right)^{m/12}}{\sum_{s=1}^{r} \rho_{n+s} + \sum_{s=1}^{n} \rho_s \Big/ \left(1+i\right)^{t_s}}$$ e tutti gli altri $C_s = C_1 \cdot \rho_s$.

2. Vendita rateale (credito al consumo)

E' un'operazione di rateazione.

- ➢ Valore del bene: A
- ➢ Anticipo: B
- ➢ Ammontare finanziato: $S = A - B$
- ➢ Scadenze: $t_1, t_2, \ldots t_n$
- ➢ Rate: $R_1, R_2, \ldots R_n$
- ➢ Legge (finanziaria) contrattuale caratterizzata dal fattore di sconto $\varphi(t)$

L'ammontare finanziato deve essere uguale al valore scontato delle rate:

$$S = \sum_{s=1}^{n} R_s \cdot \varphi\left(t_s\right).$$

- Se le rate sono tutte uguali, il loro valore può essere calcolato dall'equazione precedente in funzione dell'ammontare finanziato, della legge finanziaria e delle scadenze (soprattutto se le rate sono periodiche).

- Se le rate sono variabili (condizione più vantaggiosa per il cliente che non ha capacità di pagamento uniforme nel tempo) occorre stabilire un *profilo temporale* dei versamenti (il rapporto tra le varie rate e la prima):

$$\left[\rho_1 \quad \rho_2 \quad \rho_3 \quad \cdots \quad \rho_n\right] \text{ dove } \frac{R_1}{R_1} = \rho_1 = 1; \frac{R_2}{R_1} = \rho_2; \ldots; \frac{R_n}{R_1} = \rho_n \text{ e } R_s = R_1 \cdot \rho_s .$$

Possiamo quindi scrivere

$$S = \sum_{s=1}^{n} R_1 \cdot \rho_s \cdot \varphi(t_s)$$

e calcolare la prima rata

$$R_1 = \frac{S}{\sum_{s=1}^{n} \rho_s \cdot \varphi(t_s)} .$$

Nella pratica sono usate due leggi finanziarie contrattuali:

$$\varphi(t) = \begin{cases} (1+i)^{-t} & \text{capitalizzazione composta} \\ 1 - dt & \text{capitalizzazione ad interessi semplici anticipati} \end{cases}$$

e quindi la formula che permette di calcolare la prima rata diventa

$$R_1 = \begin{cases} \dfrac{S}{\sum_{s=1}^{n} \rho_s \cdot (1+i)^{-t_s}} & \text{capit. composta} \\ \dfrac{S}{\sum_{s=1}^{n} \rho_s \cdot (1-dt_s)} & \text{int. semplici ant.} \end{cases}$$

Bibliografia

E. Castagnoli, L. Peccati, LA MATEMATICA IN AZIENDA: STRUMENTI E MODELLI, 1. Calcolo finanziario con applicazioni, Seconda edizione, EGEA, 2001

A. Gambotto Manzone, B. Consolini, CONOSCERE E APPLICARE LA MATEMATICA, Vol. 1, Tramontana Editore