Corso di Matematica finanziaria

modulo "Fondamenti della valutazione finanziaria"

Eserciziario di Matematica finanziaria

Università degli studi Roma Tre

Indice

1 Grandezze finanziarie di base

Riferimenti bibliografici: [CDM] Cap. 1, Cap. 4

Esercizio 1.1

Si consideri al tempo $t = 0$ l'operazione finanzaria di durata 105 giorni con valore iniziale $x_t =$ 98.20 € e valore finale $x_s = 102.40$ €, essendo $s = 105$ giorni. Relativamente al periodo $(0, 105)$ giorni calcolare il fattore di sconto, il fattore montante, l'interesse, il tasso d'interesse periodale, il tasso di sconto, l'intensità d'interesse e l'intensità di sconto.

Soluzione

Il fattore di sconto è calcolato dalla:

$$v(0, 105) = \frac{x_t}{x_s} = \frac{98.20}{102.40} = 0.95898\,,$$

mentre il fattore montante, essendo il reciproco del fattore di sconto, si ottiene dalla:

$$m(0, 105) = \frac{x_s}{x_t} = \frac{102.40}{98.20} = 1.04277\,.$$

L'interesse è:

$$I(0, 105) = x_s - x_t = 102.40 - 98.20 = 4.20 \text{ €}.$$

Il tasso d'interesse periodale è dato dal rapporto tra l'interesse e il valore iniziale x_t, ossia:

$$j(0, 105) = \frac{x_s - x_t}{x_t} = \frac{102.40 - 98.20}{98.20} = 4.27699\%\,,$$

mentre il tasso di sconto periodale è ottenuto dal rapporto tra l'interesse e il valore finale x_s, ossia:

$$d(0, 105) = \frac{x_s - x_t}{x_s} = \frac{102.40 - 98.20}{102.40} = 4.10156\%\,.$$

L'intensità d'interesse e di sconto sono date dal rapporto, rispettivamente, tra il tasso di interesse periodale e l'ampiezza dell'orizzonte di scambio, e il tasso di sconto periodale e l'ampiezza dell'orizzonte di scambio, quindi:

$$\begin{aligned}\gamma(0, 105) &= \frac{j(0, 105)}{105}\,,\\ \alpha(0, 105) &= \frac{d(0, 105)}{105}\,,\end{aligned}$$

da cui si ottengono i valori:

$$\begin{aligned}\gamma(0, 105) &= 0.000407 \text{ giorni}^{-1}\,,\\ \alpha(0, 105) &= 0.000391 \text{ giorni}^{-1}\,.\end{aligned}$$

Esercizio 1.2

Si consideri l'operazione finanziaria dell'esercizio 1.1, si ipotizzi per l'anno la durata civile (365 giorni).
(a) Calcolare il tasso di interesse equivalente, su base annua e su base semestrale, al tasso di interesse periodale nel caso di legge esponenziale e nel caso di legge lineare.
(b) Calcolare l'intensità istantanea d'interesse su base annua e su base semestrale nel caso di legge esponenziale.

Soluzione

(a) Il tasso d'interesse su base annua, equivalente in legge esponenziale al tasso periodale $j(0, 105)$ (su base 105 giorni), si può calcolare tramite:

$$i = [1 + j(0, 105)]^q - 1\,,$$

dove q è il fattore di scala uguale a 365/105; quindi $i = 15.67156\%$.

Il tasso d'interesse su base semestrale è calcolato dal tasso di interesse su base annua essendo il fattore di scala $q = 1/2$, ossia:

$$i_s = (1 + 0.15672)^{\frac{1}{2}} - 1 = 7.55071\% \, .$$

Il tasso d'interesse su base annua equivalente in legge lineare al tasso periodale $j(0, 105)$ è calcolato dalla:

$$i = j(0, 105)\, \frac{365}{105} = 14.86762\% \, .$$

In maniera analoga il tasso d'interesse su base semestrale è:

$$i_s = \frac{1}{2}\; 0.1486762 = 7.43381\% \, .$$

(b) L'intensità istantanea d'interesse su base annua è:

$$\delta = \ln{(1 + i)} = 0.14559 \text{ anni}^{-1} \, ,$$

essendo i il tasso di interesse su base annua. Se nella precedente relazione si considera il tasso di interesse $i_s = 7.55071\%$ su base semestrale si otterrà l'intensità istantanea di interesse su base semestrale, $\delta_s = 0.07279 \text{ semestri}^{-1}$.

Esercizio 1.3

Si consideri l'operazione finanziaria che garantisce il raddoppio del capitale investito in 2 anni e 3 mesi; calcolare il tasso di interesse e il tasso di sconto su base periodale. Calcolare il tasso d'interesse equivalente su base annua e su base semestrale nel caso di legge esponenziale.

Soluzione

Si indichi con x_t il capitale investito nell'istante di tempo $t = 0$. Sia $s = 2.25$ anni, $x_s = 2\,x_t$ l'importo finale ottenuto dall'investimento del capitale; il tasso di interesse periodale è:

$$j(0, 2.25) = \frac{x_s - x_t}{x_t} = 100\% \, ,$$

mentre il tasso di sconto periodale è:

$$d(0, 2.25) = \frac{x_s - x_t}{x_s} = 50\% \, .$$

Nella legge esponenziale il tasso annuo d'interesse equivalente al tasso periodale si può calcolare tramite:

$$i = [1 + j(0, 2.25)]^{\frac{1}{2.25}} - 1 = 36.07900\% \, ,$$

mentre il tasso d'interesse su base semestrale, considerato che l'ampiezza dell'orizzonte di scambio è di 4.5 semestri, è ottenuto tramite: [1]

$$i = [1 + j(0, 2.25)]^{\frac{1}{4.5}} - 1 = 16.65290\% \, .$$

[1]Esprimendo l'ampiezza dell'orizzonte di scambio in mesi si può anche scrivere:

$$i = [1 + j(0, 2.25)]^{\frac{6}{27}} - 1 \, ;$$

anche il tasso di interesse su base annua può essere calcolato dalla:

$$i = [1 + j(0, 2.25)]^{\frac{12}{27}} - 1 \, .$$

Parte I
La valutazione in condizioni di certezza

2 La teoria delle leggi finanziarie

Riferimenti bibliografici: [CDM] Cap. 7

Esercizio 2.1

Si consideri l'operazione finanziaria consistente nell'investire all'istante $t = 0$ la somma $x_t = 120$ € per rientrare in possesso all'istante $s > t$ della somma $x_s = m(t, s)x_t$, essendo il tempo misurato in anni. Se il tasso di interesse annuo è pari a $i(0, 1) = 2\%$, si valuti la somma x_s secondo le leggi di capitalizzazione lineare, esponenziale, iperbolica, per $s = 3$ mesi e $s = 2$ anni.

Soluzione

- Capitalizzazione lineare:

Nella legge della capitalizzazione lineare il fattore montante $m(t, s)$ vale

$$m(t, s) = 1 + i(s - t),$$

con $i = 2\%$. Per $s = 3$ mesi $= \frac{1}{4}$ anni si ha

$$x_{\frac{1}{4}} = (1 + 0.02 \cdot \frac{1}{4}) \cdot 120 = 120.60000 \text{ €}$$

mentre per $s = 2$ anni

$$x_2 = (1 + 0.02 \cdot 2) \cdot 120 = 124.80000 \text{ €}.$$

- Capitalizzazione esponenziale

Nella legge della capitalizzazione esponenziale il fattore montante $m(t, s)$ vale

$$m(t, s) = (1 + i)^{s-t},$$

con $i = 2\%$. Per $s = \frac{1}{4}$ anni si ha

$$x_{\frac{1}{4}} = (1 + 0.02)^{\frac{1}{4}} \cdot 120 = 120.59500 \text{ €}$$

mentre per $s = 2$ anni risulta

$$x_2 = (1 + 0.02)^2 \cdot 120 = 124.85000 \text{ €}.$$

- Capitalizzazione iperbolica

Nella legge della capitalizzazione iperbolica il fattore montante $m(t, s)$ vale

$$m(t, s) = \frac{1}{1 - k(s - t)}, \quad 0 \leq s - t < \frac{1}{k}.$$

Il parametro k si può ottenere a partire dal tasso $i(0, 1)$ osservando che

$$i(0, 1) = m(0, 1) - 1 = \frac{1}{1 - k} - 1,$$

da cui

$$\frac{1}{1 - k} = 1 + i(0, 1) \to 1 - k = \frac{1}{1 + i(0, 1)} \to k = 1 - \frac{1}{1 + i(0, 1)} :$$

si ottiene quindi $k = \frac{i(0,1)}{1+i(0,1)} = \frac{0.02}{1+0.02} = 0.01961$. Per $s = \frac{1}{4}$ anni risulta

$$x_{\frac{1}{4}} = \frac{1}{1 - 0.01961 \cdot \frac{1}{4}} \cdot 120 = 120.59100 \text{ €}$$

mentre per $s = 2$ anni si ottiene

$$x_2 = \frac{1}{1 - 0.01961 \cdot 2} \cdot 120 = 124.90000 \text{ €}.$$

Ricapitolando:

s	$x_s = m_{lin}x_t$	$x_s = m_{esp}x_t$	$x_s = m_{ip}x_t$
1/4	120.60000	120.59500	120.59100
2	124.80000	124.85000	124.90000

Esercizio 2.2

Determinare l'intensità istantanea di interesse relativa al periodo $(0, 1)$ anni per le leggi finanziarie lineare, esponenziale ed iperbolica, assumendo per il tasso di interesse annuo il valore $i = 1\,\%$.

Soluzione

La relazione che lega l'intensità istantanea di interesse $\delta(t, s)$ al fattore montante $m(t, s)$ o al fattore di sconto $v(t, s)$ è

$$\delta(t, s) = \frac{\partial}{\partial s} \ln m(t, s) = -\frac{\partial}{\partial s} \ln v(t, s)$$

per cui si ha

- Legge lineare

$$m(t, s) = 1 + i(s - t):$$

$$\delta(t, s) = \frac{\partial}{\partial s} \ln[1 + i(s - t)] = \frac{i}{1 + i(s - t)},$$

da cui

$$\delta(0, 1) = \frac{0.01}{1 + 0.01 \cdot (1)} = 0.00990\,\text{anni}^{-1}.$$

- Legge esponenziale

$$m(t, s) = (1 + i)^{(s-t)}:$$

$$\delta(t, s) = \frac{\partial}{\partial s} \ln(1 + i)^{s-t} = \frac{\partial}{\partial s}(s - t) \cdot \ln(1 + i) = \ln(1 + i),$$

da cui si ottiene

$$\delta(0, 1) = \ln(1.01) = 0.00950\,\text{anni}^{-1}.$$

- Legge iperbolica

$$v(t, s) = 1 - k(s - t):$$

$$\delta(t, s) = -\frac{\partial}{\partial s} \ln[1 - k(s - t)] = -\frac{-k}{1 - k(s - t)} = \frac{k}{1 - k(s - t)}.$$

Ricordando la relazione dell'esercizio 2.1,

$$k = \frac{i}{1 + i} = 0.00990,$$

si ottiene

$$\delta(0, 1) = \frac{0.00990}{1 - 0.00990 \cdot 1} = 0.01000\,\text{anni}^{-1}.$$

Esercizio 2.3

Determinare l'intensità di rendimento a scadenza relativa al periodo $(0, \frac{1}{2})$ anni per le leggi finanziarie lineare, esponenziale ed iperbolica, assumendo un tasso di interesse annuo pari a $i = 2.3\,\%$.

Soluzione

La relazione che lega l'intensità di rendimento a scadenza $h(t, s)$ al fattore montante $m(t, s)$ o al fattore di sconto $v(t, s)$ è

$$h(t, s) = \frac{1}{s - t} \ln m(t, s) = -\frac{1}{s - t} \ln v(t, s)$$

per cui si ha

- Legge lineare

$$m(t,s) = 1 + i(s-t):$$
$$h(t,s) = \frac{1}{s-t}\ln[1 + i(s-t)],$$

da cui si ottiene

$$h(0,\frac{1}{2}) = \frac{1}{1/2}\ln(1 + 0.02300\cdot\frac{1}{2}) = 0.02287\,\text{anni}^{-1}$$

- Legge esponenziale

$$m(t,s) = (1+i)^{(s-t)}:$$
$$h(t,s) = \frac{1}{s-t}\ln(1+i)^{(s-t)} = \frac{1}{s-t}\cdot(s-t)\cdot\ln(1+i) = \ln(1+i),$$

da cui si ottiene

$$h(0,\frac{1}{2}) = \ln(1 + 0.02300) = 0.02274\,\text{anni}^{-1}$$

- Legge iperbolica

$$v(t,s) = 1 - k(s-t):$$
$$h(t,s) = -\frac{1}{s-t}\ln[1 - k(s-t)]$$

per cui, essendo

$$k = \frac{i}{1+i} = 0.02248,$$

si ha

$$h(0,\frac{1}{2}) = -\frac{1}{1/2}\ln(1 - 0.02248\cdot\frac{1}{2}) = 0.02261\,\text{anni}^{-1}.$$

Esercizio 2.4

Si consideri, nell'istante di valutazione $t = 0$, un mercato descritto dalla funzione intensità istantanea di interesse

$$\delta(0,s) = a + bs + cs^3,$$

essendo il tempo espresso in anni, con $a = 0.00750$, $b = 0.00030$ e $c = 0.00155$. Determinare il fattore montante, il fattore di sconto, il tasso di sconto, l'intensità di interesse e di sconto e l'intensità di rendimento a scadenza relativi al periodo $(0,1)$ anni.

Soluzione

- Fattore montante

La relazione che lega l'intensità istantanea di interesse $\delta(t,s)$ al fattore montante $m(t,s)$ è

$$m(t,s) = e^{\int_t^s \delta(t,u)du}.$$

Nel mercato in esame si avrà quindi

$$m(0,s) = e^{\int_0^s \delta(0,u)du} = e^{\int_0^s [a+bu+cu^3]du}$$
$$= e^{[au+b\frac{u^2}{2}+c\frac{u^4}{4}]_0^s} = e^{as+b\frac{s^2}{2}+c\frac{s^4}{4}}.$$

Relativamente al periodo $(0,1)$ si avrà

$$m(0,1) = e^{a+\frac{b}{2}+\frac{c}{4}} = 1.00807$$

- Fattore di sconto

Il fattore di sconto è calcolabile immediatamente come reciproco del fattore montante:

$$v(0,1) = \frac{1}{m(0,1)} = 0.99199$$

- Tasso di sconto

Il tasso di sconto $d(t,s)$ può essere calcolato, ad esempio, tramite la relazione che lo lega al fattore di sconto $v(t,s)$:

$$d(t,s) = \frac{x_s - x_t}{x_s} = \frac{x_s - x_s v(t,s)}{x_s} = 1 - v(t,s),$$

per cui

$$d(0,1) = 1 - v(0,1) = 0.00801$$

- Intensità di interesse

L'intensità di interesse $\gamma(t,s)$ può essere calcolata, ad esempio, tramite la relazione che la lega al fattore montante $m(t,s)$:

$$\gamma(t,s) = \frac{x_s - x_t}{x_t \cdot (s-t)} = \frac{x_t m(t,s) - x_t}{x_t \cdot (s-t)} = \frac{m(t,s)-1}{s-t}$$

e, quindi, nel caso in esame

$$\gamma(0,1) = \frac{m(0,1)-1}{1} = 0.00807\,\text{anni}^{-1}.$$

- Intensità di sconto

L'intensità di sconto $\alpha(t,s)$ può essere calcolata, ad esempio, tramite la relazione che la lega al fattore di sconto $v(t,s)$:

$$\alpha(t,s) = \frac{x_s - x_t}{x_s \cdot (s-t)} = \frac{x_s - x_s v(t,s)}{x_s \cdot (s-t)} = \frac{1-v(t,s)}{s-t},$$

da cui

$$\alpha(0,1) = \frac{1-v(0,1)}{1} = 0.00801\,\text{anni}^{-1}.$$

- Intensità di rendimento a scadenza

L'intensità di rendimento a scadenza $h(t,s)$ può essere calcolata, ad esempio, tramite la relazione che la lega al fattore di sconto $v(t,s)$:

$$h(t,s) = -\frac{1}{s-t}\ln v(t,s),$$

che dà immediatamente

$$h(0,1) = -\frac{1}{1}\ln v(0,1) = 0.00804\,\text{anni}^{-1}.$$

Esercizio 2.5

Si consideri, nell'istante di valutazione $t=0$, la legge finanziaria definita dall'intensità di rendimento a scadenza

$$h(0,s) = a + bs,$$

dove il tempo è misurato in anni e $a = 0.0015$, $b = 0.00075$. Si determinino il fattore di sconto, il fattore montante, il tasso di sconto e di interesse e l'intensità istantanea di interesse relativi al periodo $(0, 6\,\text{mesi})$.

Soluzione

- Fattore di sconto

Dalla relazione che lega l'intensità di rendimento a scadenza $h(t,s)$ al fattore di sconto $v(t,s)$,

$$v(t,s) = e^{-h(t,s)\cdot(s-t)},$$

si calcola il fattore di sconto relativo al periodo $(0,\frac{1}{2})$ anni:

$$v(0,\frac{1}{2}) = e^{-h(0,\frac{1}{2})\cdot\frac{1}{2}} = e^{-\frac{(a+b/2)}{2}} = 0.99906$$

- Fattore montante

Il fattore montante $m(t,s)$ può essere calcolato come reciproco del fattore di sconto $v(t,s)$:

$$m(0,\frac{1}{2}) = \frac{1}{v(0,\frac{1}{2})} = 1.00094$$

- Tasso di sconto

Dalla relazione che lega il fattore di sconto $v(t,s)$ al tasso di sconto $d(t,s)$,

$$d(t,s) = 1 - v(t,s),$$

è immediato calcolare quest'ultimo relativamente al periodo $(0,\frac{1}{2})$:

$$d(0,\frac{1}{2}) = 1 - v(0,\frac{1}{2}) = 0.00094$$

- Tasso di interesse

Per calcolare il tasso di interesse $j(t,s)$ si può, ad esempio, esprimerlo in termini di fattore di sconto $v(t,s)$, tramite la relazione

$$j(t,s) = \frac{x_s - x_t}{x_t} = \frac{x_s - x_s v(t,s)}{x_s v(t,s)} = \frac{1}{v(t,s)} - 1,$$

da cui

$$j(0,\frac{1}{2}) = \frac{1}{v(0,\frac{1}{2})} - 1 = 0.00094$$

- Intensità di interesse

L'intensità di interesse $\gamma(t,s)$ può essere calcolata, ad esempio, dopo averla espressa in termini del fattore montante $m(t,s)$, tramite la relazione

$$\gamma(t,s) = \frac{x_s - x_t}{x_t \cdot (s-t)} = \frac{x_t m(t,s) - x_t}{x_t \cdot (s-t)} = \frac{m(t,s) - 1}{s-t},$$

da cui

$$\gamma(0,\frac{1}{2}) = \frac{m(0,\frac{1}{2}) - 1}{1/2} = 0.00188\,\text{anni}^{-1}$$

- Intensità istantanea di interesse

L'intensità istantanea di interesse $\delta(t,s)$ può essere espressa direttamente in funzione dell'intensità di rendimento a scadenza $h(t,s)$:

$$\delta(t,s) = -\frac{\partial}{\partial s}\ln v(t,s) = -\frac{\partial}{\partial s}\ln e^{-h(t,s)\cdot(s-t)} = \frac{\partial}{\partial s}[h(t,s)\cdot(s-t)].$$

Nel caso in esame si ha, pertanto

$$\begin{aligned}\delta(0,s) &= \frac{\partial}{\partial s}[h(0,s)\cdot s] = \frac{\partial}{\partial s}[(a+bs)\cdot s] = \\ &= \frac{\partial}{\partial s}[as + bs^2] = a + 2bs,\end{aligned}$$

da cui

$$\delta(0,\frac{1}{2}) = a + 2b\frac{1}{2} = a + b = 0.00225\,\text{anni}^{-1}$$

3 Valore di contratti finanziari con flusso noto

Riferimenti bibliografici: [CDM] Cap. 7

Esercizio 3.1

Si determini, nell'istante di valutazione $t = 0$, il valore del flusso di importi:

$$\mathbf{x}/\mathbf{t} = \{100, 200, 300\}/\{t_1, t_2, t_3\}$$

sapendo che

$$v(0,t_1) = 0.98350\,,$$

$$v(0,t_2) = 0.96250\,,$$

$$v(0,t_3) = 0.94167\,.$$

Soluzione

Il valore in $t = 0$ del flusso $\mathbf{x}$ è:

$$\begin{aligned} W(0;\mathbf{x}) &= W(0;x_1) + W(0;x_2) + W(0;x_3) \\ &= v(0;t_1)x_1 + v(0;t_2)x_2 + v(0;t_3)x_3 = 573.35100\ €. \end{aligned}$$

4 Contratti di rendita e ammortamento di un capitale

Riferimenti bibliografici: [CDM] Cap. 5

Esercizio 4.1

Si consideri una rendita annua anticipata perpetua con rata $R = 525$ €; si determini il suo valore nell'istante di valutazione $t = 0$ in base alla legge esponenziale caratterizzata da:
(a) un tasso annuo di interesse $i = 10.2\%$;
(b) una intensità istantanea d'interesse $\delta_s = 0.07$ semestri^{-1};
(c) un tasso trimestrale di interesse $i_t = 2.7\%$.

Soluzione

(a) Si indichi con $\mathbf{r}$ il flusso delle poste generato dalla rendita annua anticipata perpetua con rata costante R. Il valore della rendita nell'istante di valutazione $t = 0$ è calcolato dalla seguente relazione:

$$W(0, \mathbf{r}) = R\,\frac{1+i}{i}\,,$$

dove i è il tasso di interesse su base annua. Si ottiene $W(0; \mathbf{r}) = 5672.05882$ €.
(b) Data l'intensità istantanea di interesse su base semestrale, si ha [2] :

$$W(0, \mathbf{r}) = R\frac{e^{0.07\cdot 2}}{e^{0.07\cdot 2}-1} = 4018.62300 \text{ €}.$$

(c) Se i_t è il tasso di interesse su base trimestrale si ha [3] :

$$W(0, \mathbf{r}) = R\frac{(1+i_t)^4}{(1+i_t)^4-1} = 5193.60617 \text{ €}.$$

Esercizio 4.2

Determinare il numero minimo di annualità con cui si può rimborsare al tasso annuo $i = 10.5\%$, in legge esponenziale, un debito $S = 17000$ € se si è in grado di pagare un importo non maggiore di 1800 € alla fine di ogni anno. Determinare inoltre il valore della rata R.

Soluzione

Per determinare il numero minimo di annualità si ipotizza di pagare una rata uguale all'importo massimo. Di conseguenza, dato il valore del debito, la ricerca del numero minimo di annualità consiste nella risoluzione dell'equazione:

$$S = R\frac{1-(1+i)^{-m}}{i}\,,$$

nell'incognita m (numero delle rate). Risulta:

$$m = -\frac{\ln(1-iS/R)}{\ln(1+i)}\,,$$

da cui si ottiene $m = 47.94908$.
Affinché l'importo della rata rispetto il vincolo, si può porre $m = 48$, e il valore della rata risulta:

---

[2] Infatti, data l'intensità istantanea di interesse su base semestrale, il tasso d'interesse su base annua, equivalente in legge esponenziale, risulta:

$$i = e^{0.07\cdot 2} - 1\,.$$

[3] Infatti, dato il tasso d'interesse trimestrale i_t, il tasso d'interesse su base annua, equivalente in legge esponenziale, risulta::

$$(1+i_t)^4 - 1\,.$$

$$R = \frac{i\,S}{1-(1+i)^{-48}} = 1799.92329 \text{ €}.$$

Esercizio 4.3

Si consideri l'ammortamento di una somma $S = 18000$ € in 3 anni e 285 giorni a rate annuali costanti posticipate, con rata di preammortamento, in legge lineare, pagabile dopo 285 giorni. Compilare il piano di ammortamento al tasso annuo $i = 12.5\%$, considerando per l'anno la durata civile.

Soluzione

La rata di preammortamento è interamente composta dalla quota interesse relativa alla frazione di anno 285/365, quindi è data da:

$$S\,i\,\frac{285}{365} = 1756.84932 \text{ €}.$$

La rata annua si ottiene dalla:

$$R = S\frac{i}{1-(1+i)^{-m}}\,,$$

che fornisce il valore $R = 7558.75576$ €.
Relativamente a ciascuna scadenza, la decomposizione della rata in quota interesse e quota capitale si ottiene dalle:

$$I_k = i\,D_{k-1}\,, \quad C_k = R - I_k\,,$$

essendo D_{k-1} il residuo debito all'inizio del periodo precedente. Il piano di ammortamento risulta:

t_k	R	I_k	C_k	D_k
285 g	1756.85	1756.85	0.00	18000.00
1 anno 285 g	7558.76	2250.00	5308.76	12691.24
1 anno 285 g	7558.76	1586.41	5972.35	6718.89
1 anno 285 g	7558.76	839.86	6718.89	0.00

essendo il tempo espresso in anni e il residuo debito $D_k = D_{k-1} - C_k$, per $k = 1, \ldots, 4$, con $D_0 = S$.

Esercizio 4.4

Si consideri l'ammortamento di una somma $S = 14000$ € in 3 anni e 189 giorni a quota capitale costante e rate annuali posticipate, con rata di preammortamento pagabile dopo 189 giorni, in legge esponenziale. Compilare il piano di ammortamento al tasso annuo $i = 8\%$, considerando per l'anno la durata civile.

Soluzione

La rata di preammortamento, composta interamente da quota interesse relativa alla frazione di anno 189/365, è calcolata in legge esponenziale, quindi si ha:

$$S\,[(1+i)^{\frac{189}{365}} - 1] = 569.18074 \text{ €}.$$

Poichè l'ammortamento è a quota capitale costante, ciascuna rata è ottenuta come somma della quota interesse $I_k = i\,D_{k-1}$, dove D_{k-1} è il residuo debito alla data precedente, e della quota capitale costante C data da:

$$C = \frac{S}{3} = 4666.66667 \text{ €}.$$

Il piano di ammortamento è:

t_k	R	I_k	C_k	D_k
0.51718	569.18	569.18	0.00	14000.00
1.51718	5786.67	1120.00	4666.67	9333.33
2.51718	5413.33	746.67	4666.67	4666.67
3.51718	5040.00	373.33	4666.67	0.00

essendo il tempo espresso in anni e il debito residuo $D_k = D_{k-1} - C$, per $k = 1, \ldots, 4$, con $D_0 = S$.

Esercizio 4.5

Un debito $S = 8000$ € viene ammortizzato con il metodo francese in 8 rate annue al tasso $i = 16\%$ annuo. Pagata la quinta rata, si conviene di estinguere il debito residuo mediante 2 versamenti di importo Z pagabili dopo 3 e 6 anni al medesimo tasso d'interesse; determinare l'importo Z.

Soluzione

Il debito residuo, D_5, dopo il pagamento della quinta rata è dato dalla seguente:

$$D_5 = R \sum_{k=5}^{7} [1+i]^{-(m-k)} \, ,$$

con $m = 8$ anni.

Calcolato il livello della rata R con la formula:

$$R = \frac{i\,S}{1-(1+i)^{-8}} = 1841.79408 \text{ €},$$

si ha $D_5 = 4136.46606$ €. Essendo:

$$D_5 = Z[(1+i)^{-3} + (1+i)^{-6}] \, ,$$

si ricava il valore $Z = 3935.36899$ €.

Esercizio 4.6

Si consideri l'ammortamento a quota capitale costante, con rata semestrale posticipata, di una somma $S = 10000$ € in 50 semestri al tasso annuo $i = 7\%$. Si determini, utilizzando la legge di equivalenza esponenziale, l'ammontare R_{21} della ventunesima rata, le componenti della ventunesima rata (la quota capitale, C, e la quota interesse, I_{21}), e il debito residuo , D_{21}, dopo il pagamento della ventunesima rata.

Soluzione

Poiché l'ammortamento è a quota capitale costante, la quota capitale si ricava dalla:

$$C_k = C = \frac{S}{m} \, ,$$

con $m = 50$ (numero delle quote capitale); risulta una quota capitale uguale a 200 €.
La quota interesse I_{21} si calcola tramite:

$$I_k = j\,S\left(1 - \frac{k-1}{m}\right) \, ,$$

dove j è il tasso di interesse su base semestrale equivalente in legge esponenziale al tasso annuo i: $j = (1+i)^{1/2} - 1 = 3.44080\%$; risulta una quota interesse uguale a 206.44826 €.
L'ammontare della ventunesima rata, somma della quota capitale C e della quota interesse I_{21}, è uguale a 406.44826 €.
Il residuo debito, D_{21}, si può calcolare tramite:

$$D_k = S\left(1 - \frac{k}{m}\right) \, ,$$

con $k = 21$; risulta un residuo debito uguale a 5800 €.

Esercizio 4.7

Si consideri una rendita semestrale posticipata di durata 2 anni e con rata $R = 75$ €; si determini il suo valore nell'istante di valutazione $t = 0$ in base ad una legge lineare caratterizzata da:
(a) un tasso annuo di interesse $i = 10.2\%$;
(b) un tasso trimestrale di interesse $i_t = 2.7\%$.

Soluzione

(a) Sia $\mathbf{r}$ il flusso di poste generato dalla rendita. Il valore della rendita nell'istante di valutazione $t = 0$ si ottiene dalla:

$$W(0; \mathbf{r}) = R \sum_{k=1}^{4} \left[1 + i\frac{k}{2}\right]^{-1} = 266.75875 \text{ €},$$

essendo i il tasso di interesse annuo. (b)In questo caso si ha:

$$W(0; \mathbf{r}) = R \sum_{k=1}^{4} [1 + i_t\, 2\, k]^{-1} = 265.06855 \text{ €}.$$

Esercizio 4.8

Si consideri l'ammortamento di una somma $S = 12000$ € in 50 mesi a rate annuali costanti posticipate, con rata di preammortamento pagabile dopo 2 mesi, in legge esponenziale. Compilare il piano di ammortamento al tasso annuo $i = 7.70\%$.

Soluzione

La rata di preammortamento R_p pagabile dopo 2 mesi $= 1/6$ anni è calcolabile come l'interesse, in legge esponenziale, dovuto all'istante $s = 1/6$ anni a fronte del prestito S ottenuto in $t = 0$

$$R_p = S[(1 + i)^{s-t} - 1] = 12000 \cdot [1.077^{1/6} - 1] = 149.28 \text{ €}.$$

Le rate annuali costanti R da corrispondere nei rimanenti 48 mesi $= 4$ anni, si ottengono dalla relazione

$$R = S\frac{i}{1 - (1 + i)^{-m}} =$$

$$= 12000 \cdot \frac{0.077}{1 - (1.077)^{-4}} = 3598.89 \text{ €}.$$

Il piano di ammortamento può essere ottenuto calcolando, relativamente a ciascuna scadenza k, la quota interesse I_k e la quota capitale C_k dalle relazioni

$$I_k = iD_{k-1}, \quad C_k = R - I_k,$$

essendo D_k il debito residuo alla fine del periodo $k-$esimo. Si ha:

t_k	R	I_k	C_k	D_k
1/6	149.28	149.28	0.00	12000.00
7/6	3598.89	924.00	2674.89	9325.11
13/6	3598.89	718.03	2880.86	6444.25
19/6	3598.89	496.21	3102.68	3341.59
25/6	3598.89	257.30	3341.59	0.00

5 Il tasso interno di rendimento

Riferimenti bibliografici: [CDM] Cap.6

Esercizio 5.1

Calcolare il tasso interno di rendimento i^* del contratto finanziario:

$$\mathbf{x}/\mathbf{t} = \{-85, 8, 8, 8, 8, 8, 8, 8, 93\}/\{0, 0.5, ..., 4\}\,,$$

essendo il tempo espresso in anni. Calcolare quindi il valore residuo del contratto nell'istante $H = 0.75$ anni in base alla legge esponenziale individuata da i^*.

Soluzione

Il contratto finanziario è un titolo a cedola fissa di durata 4 anni, con capitale nominale $C = 85$ € e cedola semestrale $I = 8$ € che quota alla pari. Quindi il tasso interno di rendimento su base semestrale è uguale al tasso cedolare, dato da:

$$\frac{I}{C} = \frac{8}{85} = 9.41176\%\,;$$

il tasso interno di rendimento su base annua risulta:

$$i^* = \left(1 + \frac{I}{C}\right)^2 - 1 = 19.70934\%\,.$$

Il valore di un contratto finanziario in un qualsiasi istante di tempo H ($t_0 \leq H \leq t_m$) può essere scomposto nella somma del montante delle poste scadute fino a H, $M(H, \mathbf{x})$, e del valore del flusso residuo delle poste con scadenza dopo H, $R(H, \mathbf{x})$; si ha:

$$W(H; \mathbf{x}) = M(H; \mathbf{x}) + R(H; \mathbf{x}) = \sum_{k:t_k \leq t} x_k m(t_k, H) + \sum_{k:t_k > t} x_k v(H, t_k)\,;$$

essendo l'operazione finanziaria equa secondo la legge esponenziale individuata da i^*, ($W(H; \mathbf{x}) = 0$), risulta:

$$M(H; \mathbf{x}) = -R(H; \mathbf{x})\,;$$

e quindi si ottiene:

$$R(0.75; \mathbf{x}) = -\left[-85(1 + i^*)^{0.75} + 8(1 + i^*)^{(0.75-0.5)}\right] = 88.91007 \text{ €}.$$

Esercizio 5.2

Calcolare il tasso interno di rendimento i^* del contratto finanziario:

$$\mathbf{x}/\mathbf{t} = \{-45, -40, 100\}/\{0, 1, 2\}$$

essendo il tempo espresso in anni. Determinare, inoltre, l'importo Δx_1 che bisogna sommare alla prima posta del flusso affinchè il tasso interno di rendimento della nuova operazione finanziaria sia $i^* = 12\%$.

Soluzione

Il tasso interno di rendimento i^* si determina risolvendo l'equazione di secondo grado nell'incognita v:

$$100v^2 - 40v - 45 = 0\,,$$

che ammette due soluzioni reali e distinte $v_1 = 0.9$ e $v_2 = -0.5$. La soluzione finanziariamente significativa è $v_1 = 0.9$, pertanto:

$$i^* = v_1^{-1} - 1 = 11.11111\%\,,$$

espresso su base annua.
L'importo Δx_1 da sommare alla prima posta del flusso affinché il tasso interno di rendimento sia uguale al 12%, si determina risolvendo l'equazione di primo grado:

$$(-45 + \Delta x_1) - 40(1.12)^{-1} + 100(1.12)^{-2} = 0\,,$$

nell'incognita Δx_1; risulta $\Delta x_1 = 0.99490$ €.

Esercizio 5.3

Si consideri il contratto finanziario $\mathbf{x}/\mathbf{t} = \{x_0, 25, 31\}/\{0, 1, 2\}$ essendo il tempo espresso in semestri. Determinare l'importo x_0 tale che il tasso interno di rendimento del contratto risulti non inferiore al 9% (annuo).

Soluzione

Esprimendo lo scadenzario di riferimento in anni, dalla definizione di tasso interno di rendimento, la soluzione dell'esercizio si può ottenere risolvendo l'equazione di primo grado:

$$x_0 + 25(1.09)^{-0.5} + 31(1.09)^{-1} = 0\,,$$

nell'incognita x_0; risulta $x_0 = -52.38602$ €. Affinchè il tasso interno di rendimento del contratto risulti non inferiore al 9% (annuo), l'importo x_0 dovrà essere non minore della soluzione.

Esercizio 5.4

Si consideri il contratto finanziario $\mathbf{x}/\mathbf{t} = \{-55, 10, 50\}/\{0, 0.5, t_2\}$ essendo il tempo espresso in anni. Determinare t_2 in modo che il contratto abbia un tasso interno di rendimento $i^* = 9\%$.

Soluzione

Dalla definizione di tasso interno di rendimento, il tempo t_2 deve soddisfare la seguente:

$$50(1.09)^{-t_2} + 10(1.09)^{-0.5} - 55 = 0\,,$$

da cui si ricava

$$-t_2 \ln(50(1.09)) = \ln(55 - 10(1.09)^{-0.5})$$

che fornisce il risultato $t_2 = 1.11435$ anni.

Esercizio 5.5

Si consideri l'operazione finanziaria $\mathbf{x}/\mathbf{t} = \{87, -50, -40\}/\{0, 2, 4\}$, essendo il tempo espresso in mesi; si determini:
(a) il tasso interno di rendimento i^* su base annua dell'operazione;
(b) la rata R di una rendita semestrale perpetua anticipata $\mathbf{r}$ che in base al tasso i^* ha valore 87 €.

Soluzione

(a) Il calcolo del tasso interno di rendimento si effettua risolvendo l'equazione:

$$-40(1 + i^*)^{-\frac{4}{12}} - 50(1 + i^*)^{-\frac{2}{12}} + 87 = 0\,;$$

ponendo $(1 + i^*)^{-\frac{2}{12}} = v$, l'equazione diventa:

$$40v^2 + 50v - 87 = 0\,,$$

che ammette come soluzione finanziariamente significativa $v = 0.97676$.
Il tasso interno di rendimento su base annua si ottiene esprimendo la soluzione nell'incognita i^*:

$$i^* = v^{-\frac{12}{2}} - 1 = 15.15458\%\,.$$

(b) Si utilizza la relazione:

$$87 = R\,\frac{1 + i_s}{i_s}\,,$$

essendo i_s il tasso d'interesse su base semestrale equivalente in legge esponenziale al tasso annuo i^*: $i = (1 + i^*)^{1/2} - 1 = 7.31010\%$. L'importo della rata risulta:

$$R = 87\,\frac{i_s}{1 + i_s} = 5.92655 \text{ €}.$$

Esercizio 5.6

Calcolare il tasso interno di rendimento espresso su base annua dell'operazione consistente nello scambio, in $t = 0$, della somma $S = 540$ € con una rendita perpetua anticipata di rata mensile costante $R = 6$ €.

Soluzione

Il tasso interno di rendimento i_m su base mensile si ottiene dalla:

$$S = R\frac{1 + i_m}{i_m}\,,$$

da cui si ha:

$$i_m = \frac{R}{S - R}\,.$$

Il tasso interno di rendimento i^* su base annua è:

$$i^* = (1 + i_m)^{12} - 1 = 14.34838\%\,.$$

Esercizio 5.7

Calcolare il tasso interno di rendimento i^* del contratto finanziario

$$\mathbf{x}/\mathbf{t} = \{-30, 18, 25\}/\{0, \frac{1}{2}, 1\},$$

essendo il tempo espresso in anni. Si determini inoltre l'importo Δx_1 che bisogna sommare alla prima posta del flusso affinché il tasso interno di rendimento della nuova operazione finanziaria sia $i^* = 11.5\%$.

Soluzione

Il tasso interno di rendimento i^* si determina risolvendo l'equazione:

$$-30 + 18(1 + i^*)^{-\frac{1}{2}} + 15(1 + i^*)^{-1} = 0\,.$$

Con la sostituzione

$$v = (1 + i^*)^{-\frac{1}{2}}$$

l'equazione precedente può essere ricondotta ad un'equazione di secondo grado nell'incognita v:

$$-30 + 18v + 15v^2 = 0.$$

Essa ammette le due soluzioni

$$v_1 = 0.93623 \qquad \text{e} \qquad v_2 = -2.13623,$$

di cui solo la prima è finanziariamente significativa. Da essa si ricava il tasso interno di rendimento

$$i^* = \frac{1}{v_1^2} - 1\ = 14.08667\,\%$$

espresso su base annua.
L'importo Δx_1 da sommare alla prima posta del flusso affinché il tasso interno di rendimento sia pari all'11.5% si determina risolvendo l'equazione di primo grado nell'incognita Δx_1:

$$(-30 + \Delta x_1) + 18(1.115)^{-\frac{1}{2}} + 15(1.115)^{-1} = 0\,,$$

che fornisce il valore $\Delta x_1 = -0.49941$ €.

Parte II
Le operazioni finanziarie nel mercato

6 La struttura per scadenza dei tassi di interesse

Riferimenti bibliografici: [CDM] Cap. 9

Esercizio 6.1

Siano $V(0;x_1) = 98.35$ €, $V(0;x_2) = 192.50$ € e $V(0;x_3) = 282.50$ € i prezzi di mercato al tempo $t = 0$ di tre *zero coupon bond* con valori di rimborso (nominali) $x_1 = 100$ €, $x_2 = 200$ € e $x_3 = 300$ €, esigibili ai tempi $t_1 = 0.5$ anni, $t_2 = 1$ anno e $t_3 = 1.5$ anni.
Calcolare la struttura per scadenza dei tassi di interesse a pronti e a termine uniperiodali corrispondente alla struttura dei prezzi assegnata, esprimendo i tassi su base annua.

Soluzione

Dai prezzi assegnati si calcolano i prezzi degli *zero coupon bond* unitari relativi allo scadenzario $\mathbf{t} = \{t_1, t_2, t_3\}$:

$$\begin{aligned} v(0,t_1) &= \frac{98.35}{100}, \\ v(0,t_2) &= \frac{192.50}{200}, \\ v(0,t_3) &= \frac{282.50}{300}. \end{aligned}$$

I tassi di interesse a pronti su base annua relativi allo scadenzario $\mathbf{t}$ si ottengono, in legge esponenziale, dalle espressioni

$$v(0,t_1) = [1 + i(0,t_1)]^{-t_1},$$

da cui si ottiene

$$i(0,t_1) = \left[\frac{1}{v(0,t_1)}\right]^{\frac{1}{t_1}} - 1$$

e, quindi,

$$\begin{aligned} i(0,t_1) &= \left(\frac{100}{98.35}\right)^2 - 1, \\ i(0,t_2) &= \left(\frac{200}{192.50}\right) - 1, \\ i(0,t_3) &= \left(\frac{300}{282.50}\right)^{2/3} - 1, \end{aligned}$$

da cui sono facilmente calcolabili i tassi a termine uniperiodali su base annua, infatti:

$$\begin{aligned} i(0,0,t_1) &= i(0,t_1), \\ i(0,t_1,t_2) &= [1 + i(0,t_2)]\left[\frac{1 + i(0,t_2)}{1 + i(0,t_1)}\right] - 1, \\ i(0,t_2,t_3) &= [1 + i(0,t_3)]\left[\frac{1 + i(0,t_3)}{1 + i(0,t_2)}\right]^2 - 1. \end{aligned}$$

Si ha:

$$\begin{aligned} i(0,t_1) &= 3.38351\,\%, & i(0,0,t_1) &= 3.38351\,\%, \\ i(0,t_2) &= 3.89610\,\%, & i(0,t_1,t_2) &= 4.41124\,\%, \\ i(0,t_3) &= 4.08829\,\%, & i(0,t_2,t_3) &= 4.47373\,\%. \end{aligned}$$

Esercizio 6.2

Siano $V(0;x_1) = 98.84$ €, $V(0;x_2) = 192.50$ € e $V(0;x_3) = 277.50$ € i prezzi di mercato al tempo $t = 0$ di tre *zero coupon bond* con valori di rimborso (nominali) $x_1 = 100$ €, $x_2 = 200$ € e $x_3 = 300$ €, esigibili ai tempi $t_1 = 65$ giorni, $t_2 = 187$ giorni e $t_3 = 365$ giorni.
Calcolare la struttura per scadenza dei tassi di interesse a pronti e a termine uniperiodali corrispondente alla struttura dei prezzi assegnata, esprimendo i tassi su base annua ed assumendo la durata civile dell'anno (365 giorni).

Soluzione

Essendo l'anno di 365 giorni, la struttura per scadenza dei tassi a pronti su base annua si ottiene dalle:

$$\begin{aligned}
i(0,t_1) &= [\frac{1}{v(0,t_1)}]^{\frac{1}{t_1}} - 1 = \left(\frac{100}{98.84}\right)^{\frac{365}{65}} - 1\,, \\
i(0,t_2) &= [\frac{1}{v(0,t_2)}]^{\frac{1}{t_2}} - 1 = \left(\frac{200}{192.50}\right)^{\frac{365}{187}} - 1\,, \\
i(0,t_3) &= [\frac{1}{v(0,t_3)}]^{\frac{1}{t_3}} - 1 = \frac{300}{277.50} - 1\,.
\end{aligned}$$

La struttura per scadenza dei tassi di interesse a termine uniperiodali è calcolata dai tassi a pronti con le seguenti:

$$\begin{aligned}
i(0,0,t_1) &= i(0,t_1)\,, \\
i(0,t_1,t_2) &= [1+i(0,t_2)]\left[\frac{1+i(0,t_2)}{1+i(0,t_1)}\right]^{\frac{65/365}{(187-65)/365}} - 1\,, \\
i(0,t_2,t_3) &= [1+i(0,t_3)]\left[\frac{1+i(0,t_3)}{1+i(0,t_2)}\right]^{\frac{187/365}{(365-187)/365}} - 1\,.
\end{aligned}$$

Si ha:

$$\begin{aligned}
i(0,t_1) &= 6.77132\,\%\,, & i(0,0,t_1) &= 6.77132\,\%\,, \\
i(0,t_2) &= 7.74562\,\%\,, & i(0,t_1,t_2) &= 8.26834\,\%\,, \\
i(0,t_3) &= 8.10811\,\%\,, & i(0,t_2,t_3) &= 8.49024\,\%\,.
\end{aligned}$$

Esercizio 6.3

Si consideri, nell'istante di valutazione $t = 0$, un mercato descritto dalla legge di equivalenza finanziaria:

$$v(0,s) = 1 - ks \qquad \text{con } s \text{ espresso in anni e } k = 0.07.$$

In riferimento allo scadenzario $\{1,2,3\}$ anni, si determinino le strutture per scadenza dei tassi di interesse a pronti, delle intensità istantanee di interesse e delle intensità di rendimento a scadenza, su base annua.

Soluzione

La struttura per scadenza dei tassi di interesse a pronti su base annua si calcola dall'espressione:

$$i(0,s) = [\frac{1}{v(0,s)}]^{\frac{1}{s}} - 1$$

per $s = 1, 2, 3$; quindi sostituendo il valore della costante k si ha:

$$\begin{aligned}
i(0,1) &= 7.52688\% \\
i(0,2) &= 7.83277\% \\
i(0,3) &= 8.17435\%
\end{aligned}$$

Essendo:

$$\delta(0,s) = -\frac{\partial}{\partial s} \log v(0,s)$$

si ricava l'espressione:

$$\delta(0,s) = \frac{k}{1-ks}$$

da cui:

$$\begin{aligned} \delta(0,1) &= 0.07527 \text{ anni}^{-1}, \\ \delta(0,2) &= 0.08140 \text{ anni}^{-1}, \\ \delta(0,3) &= 0.08861 \text{ anni}^{-1}. \end{aligned}$$

La struttura dell'intensità di rendimento a scadenza su base annua può essere calcolata con la formula:

$$h(0,s) = \log\left[1 + i(0,s)\right],$$

quindi si ha:

$$\begin{aligned} h(0,1) &= 0.07257 \text{ anni}^{-1}, \\ h(0,2) &= 0.07541 \text{ anni}^{-1}, \\ h(0,3) &= 0.07857 \text{ anni}^{-1}. \end{aligned}$$

Esercizio 6.4

Si consideri, nell'istante di valutazione $t = 0$, un mercato descritto dalla funzione intensità istantanea di interesse:

$$\delta(0,s) = 0.06 - 0.0025s, \qquad \text{per ogni } s \geq 0.$$

In riferimento allo scadenzario $\{1, 2, 3\}$ anni, si determinino le strutture per scadenza dei tassi di interesse a pronti e dei tassi di interesse a termine uniperiodali, esprimendo i tassi su base annua.

Soluzione

L'espressione del tasso di interesse in funzione dell'intensità istantanea di interesse si ricava a partire dalle espressioni:

$$m(0,s) = e^{\int_0^s \delta(0,u)du} = \left[1 + i(0,s)\right]^s,$$

da cui:

$$i(0,s) = e^{\frac{1}{s}\int_0^s \delta(0,u)du} - 1;$$

per $s = 1, 2, 3$, si ricava la struttura per scadenza dei tassi di interesse a pronti su base annua.
I tassi a termine uniperiodali si ottengono dalla:

$$i(0,s-1,s) = \left[1 + i(0,s)\right]\left[\frac{1 + i(0,s)}{1 + i(0,s-1)}\right]^{\frac{s-1}{1}} - 1,$$

ancora per $s = 1, 2, 3$.
Si ottiene:

$$\begin{aligned} i(0,1) &= 6.05101\,\%, & i(0,0,1) &= 6.05101\,\%, \\ i(0,2) &= 5.91853\,\%, & i(0,1,2) &= 5.78621\,\%, \\ i(0,3) &= 5.78621\,\%, & i(0,2,3) &= 5.52208\,\%. \end{aligned}$$

Esercizio 6.5

Si consideri, nell'istante di valutazione $t = 0$, un mercato descritto dalla funzione intensità istantanea di interesse:

$$\delta(0,s) = \alpha + \beta s^2 + \gamma s^3, \qquad \text{con } s > 0;$$

essendo il tempo espresso in anni, con $\alpha = 0.075$, $\beta = 0.0029$ e $\gamma = 0.0003$.
In riferimento allo scadenzario $\{1, 2, 3\}$ anni, si determinino le intensità di rendimento a scadenza a pronti e i tassi di interesse a pronti, esprimendo i tassi su base annua.

Soluzione

La relazione che esprime l'intensità di rendimento a scadenza a pronti in termini dell'intensità istantanea di interesse a pronti è:

$$h(0,s) = \frac{1}{s}\int_0^s \delta(0,u)du\,.$$

Risolvendo l'integrale si ottiene:

$$h(0,s) = \alpha + \beta\frac{s^2}{3} + \gamma\frac{s^3}{4}$$

Per $s = 1, 2, 3$ si ottengono le strutture delle intensità di rendimento a scadenza a pronti:

$$\begin{aligned} h(0,1) &= 0.07604 \text{ anni}^{-1}\,, \\ h(0,2) &= 0.07947 \text{ anni}^{-1}\,, \\ h(0,3) &= 0.08573 \text{ anni}^{-1}\,. \end{aligned}$$

I tassi di struttura a pronti si ricavano dalla:

$$i(0,s) = e^{h(0,s)} - 1\,,$$

e si ha:

$$\begin{aligned} i(0,1) &= 7.90075\%\,, \\ i(0,2) &= 8.27095\%\,, \\ i(0,3) &= 8.95067\%\,. \end{aligned}$$

Esercizio 6.6

Si consideri, nell'istante di valutazione $t = 0$, un mercato descritto dalla funzione intensità di rendimento a scadenza:

$$h(0,s) = \alpha + \beta s\,, \qquad \text{con } s > 0$$

essendo il tempo espresso in anni, $\alpha = 0.068$ e $\beta = 0.006$. In riferimento allo scadenzario $\{0.25, 0.5, 0.75, 1\}$ anni, si determinino le strutture per scadenza dei tassi di interesse a pronti e a termine uniperiodali, su base annua.

Soluzione

(a) Dalla relazione:

$$i(0,s) = e^{h(0,s)} - 1\,,$$

per $s = 0.25, 0.5, 0.75, 1$, si ottengono i tassi di interesse a pronti su base annua:

$$\begin{aligned} i(0,0.25) &= 7.19721\%\,, \\ i(0,0.5) &= 7.35812\%\,, \\ i(0,0.75) &= 7.51928\%\,, \\ i(0,1) &= 7.68068\%\,. \end{aligned}$$

I tassi di interesse a termine sono calcolati dai tassi di interesse a pronti; si ha:

$$\begin{aligned} i(0,0,0.25) &= i(0,0.25) &&= 7.19721\,\%\,, \\ i(0,0.25,0.5) &= [1+i(0,0.5)][\tfrac{1+i(0,0.5)}{1+i(0,0.25)}]^{\frac{0.25}{0.25}} - 1 &&= 7.51928\,\%\,, \\ i(0,0.5,0.75) &= [1+i(0,0.75)][\tfrac{1+i(0,0.75)}{1+i(0,0.5)}]^{\frac{0.5}{0.25}} - 1 &&= 7.84232\,\%\,, \\ i(0,0.75,1) &= [1+i(0,1)][\tfrac{1+i(0,1)}{1+i(0,0.75)}]^{\frac{0.75}{0.25}} - 1 &&= 8.16634\,\%\,. \end{aligned}$$

Esercizio 6.7

Siano $V(0;x_1) = 97.20$ €, $V(0;x_2) = 107.40$ € i prezzi di mercato al tempo $t = 0$ di due *zero coupon bond* con valori di rimborso $x_1 = 98.30$ € e $x_2 = 109.65$ € esigibili ai tempi $t_1 = 121$ giorni e $t_2 = 211$ giorni. Sia inoltre presente sul mercato un contratto a termine stipulato in $t = 0$ che prevede lo scambio di 80 € all'istante $t_1 = 121$ giorni con 84.90 € all'istante $t_3 = 312$ giorni. Relativamente allo scadenzario $\mathbf{t} = \{t_1, t_2, t_3\}$ calcolare la struttura per scadenza dei tassi di interesse a pronti e a termine uniperiodali corrispondente alla struttura dei prezzi assegnata, esprimendo i tassi su base annua (si ipotizzi per l'anno la durata civile).

Soluzione

Si ha, dal teorema di indipendenza dall'importo

$$\begin{aligned} V(0;x_1) &= x_1 v(0,t_1) \to v(0,t_1) = \frac{V(0;x_1)}{x_1} = 0.98881 \\ V(0;x_2) &= x_2 v(0,t_2) \to v(0,t_2) = \frac{V(0;x_2)}{x_2} = 0.97948 \\ V(0,t_1;x_3) &= x_3 v(0,t_1,t_3) \to v(0,t_1,t_3) = \frac{V(0,t_1;x_3)}{x_3} = 0.94228 \end{aligned}$$

e, dal teorema dei prezzi impliciti,

$$v(0,t_3) = v(0,t_1)v(0,t_1,t_3) = 0.93174$$

La struttura per scadenza dei tassi di interesse su base annua si può ottenere dalla relazione

$$i(t,s) = \left[\frac{1}{v(t,s)}\right]^{\frac{1}{s-t}} - 1,$$

dalla quale si ottiene

$$\begin{aligned} i(0,t_1) &= \left[\frac{1}{v(0,t_1)}\right]^{\frac{1}{t_1}} - 1 = 3.45280\% \\ i(0,t_2) &= \left[\frac{1}{v(0,t_2)}\right]^{\frac{1}{t_2}} - 1 = 3.65169\% \\ i(0,t_3) &= \left[\frac{1}{v(0,t_3)}\right]^{\frac{1}{t_3}} - 1 = 8.62286\% \end{aligned}$$

La struttura per scadenza dei tassi di interesse impliciti, espressi su base annua, si ottiene dalla relazione generale

$$i(t,T,s) = [1 + i(t,s)]\left[\frac{1+i(t,s)}{1+i(t,T)}\right]^{\frac{T-t}{s-T}} - 1,$$

che fornisce, nel caso in esame,

$$\begin{aligned} i(0,0,t_1) &= i(0,t_1) = 3.45280\% \\ i(0,t_1,t_2) &= [1+i(0,t_2)]\left[\frac{1+i(0,t_2)}{1+i(0,t_1)}\right]^{\frac{t_1}{t_2-t_1}} - 1 = 3.91969\% \\ i(0,t_2,t_3) &= [1+i(0,t_3)]\left[\frac{1+i(0,t_3)}{1+i(0,t_2)}\right]^{\frac{t_2}{t_3-t_2}} - 1 = 19.79090\% \end{aligned}$$

Esercizio 6.8

Sia dato un mercato descritto in $t = 0$ dall'intensità istantanea di interesse

$$\delta(0,s) = a + bs^2,$$

essendo il tempo espresso in anni, con $a = 0.03100$ e $b = 0.00175$. Relativamente allo scadenzario $\mathbf{t} = \{1, 2, 3\}$ mesi si determini la struttura per scadenza dei tassi di interesse a pronti e delle intensità di rendimento a scadenza a pronti, entrambe su base annua.

Soluzione

La struttura per scadenza dei tassi di interesse a pronti, espressi su base annua, può essere calcolata dalla relazione

$$i(0,s) = \left[\frac{1}{v(0,s)}\right]^{\frac{1}{s}} - 1,$$

essendo il tempo espresso in anni. Dall'intensità istantanea di interesse si ricava il fattore di sconto tramite la

$$v(0,s) = e^{-\int_0^s \delta(0,u)du} =$$
$$= e^{-\int_0^s [a+bu^2]du} = e^{-[as+bs^3/3]},$$

da cui, relativamente allo scadenzario $\mathbf{t} = \{\frac{1}{12}, \frac{1}{6}, \frac{1}{4}\}$, si ottiene

$$i(0,\frac{1}{12}) = \left[\frac{1}{v(0,\frac{1}{12})}\right]^{12} - 1 = 3.14855\%$$

$$i(0,\frac{1}{6}) = \left[\frac{1}{v(0,\frac{1}{6})}\right]^{6} - 1 = 3.15269\%$$

$$i(0,\frac{1}{4}) = \left[\frac{1}{v(0,\frac{1}{4})}\right]^{4} - 1 = 3.15269\%$$

La struttura per scadenza dell'intensità di rendimento a scadenza si può ottenere dalla relazione

$$h(0,s) = -\frac{1}{s}\ln v(0,s) = \frac{1}{s}[as + \frac{bs^3}{3}] = a + \frac{bs^2}{3},$$

da cui

$$h(0,\frac{1}{12}) = a + \frac{b}{3}(\frac{1}{12})^2 = 0.03100\,\text{anni}^{-1}$$
$$h(0,\frac{1}{6}) = a + \frac{b}{3}(\frac{1}{6})^2 = 0.03104\,\text{anni}^{-1}$$
$$h(0,\frac{1}{4}) = a + \frac{b}{3}(\frac{1}{4})^2 = 0.03104\,\text{anni}^{-1}$$

7 Valore e prezzo di mercato di contratti finanziari con flusso noto

Riferimenti bibliografici: [CDM] Cap. 8

Esercizio 7.1

Siano $V(0;x_1) = 98.84$ €, $V(0;x_2) = 192.50$ € e $V(0;x_3) = 277.50$ € i prezzi di mercato al tempo $t = 0$ di tre *zero coupon bond* con valori di rimborso (nominali) $x_1 = 100$ €, $x_2 = 200$ € e $x_3 = 300$ €, esigibili ai tempi $t_1 = 65$ giorni, $t_2 = 187$ giorni e $t_3 = 365$ giorni.

Si determini, nell'istante di valutazione $t = 0$, il valore del flusso di importi:

$$\mathbf{x}/\mathbf{t} = \{150, 230, 315\}/\{t_1, t_2, t_3\}$$

Soluzione

Il valore in $t = 0$ del flusso $\mathbf{x}$ è:

$$\begin{aligned} V(0;\mathbf{x}) &= 150[\frac{98.84}{100}] + 230[\frac{192.50}{200}] + 315[\frac{277.50}{300}] \\ &= 661.01000 \text{ €}. \end{aligned}$$

8 Il tasso di parità

Riferimenti bibliografici: [CDM] Cap. 9.4.2

Esercizio 8.1

Si supponga che, nell'istante di tempo $t = 0$, in riferimento allo scadenzario $\mathbf{t} = \{1, 2, 3, 4\}$ anni, sia in vigore la seguente struttura per scadenza dei tassi di interesse a pronti, espressi su base annua:

$$\begin{aligned} i(0,1) &= 4.50\%\,, \\ i(0,2) &= 4.95\%\,, \\ i(0,3) &= 5.43\%\,, \\ i(0,4) &= 5.85\%\,. \end{aligned}$$

Calcolare i tassi di parità (*par yield*) per le scadenze $\{1, 2, 3, 4\}$.

Soluzione

Indicando con $\overline{p}_m$ il tasso di parità per la scadenza m anni, si utilizza la formula:

$$\overline{p}_m = \frac{1 - [1 + i(0,m)]^{-m}}{\sum_{k=1}^{m} [1 + i(0,k)]^{-k}}\,,$$

per $m = 1, 2, 3, 4$. Si ricavano i valori:

$$\begin{aligned} \overline{p}_1 &= 4.50000\%\,, \\ \overline{p}_2 &= 4.93911\%\,, \\ \overline{p}_3 &= 5.39666\%\,, \\ \overline{p}_4 &= 5.78726\%\,. \end{aligned}$$

Esercizio 8.2

Si supponga che nell'istante di valutazione $t = 0$, in riferimento allo scadenzario $\mathbf{t} = \{1, 2, 3, 4\}$ anni, sia in vigore la seguente struttura per scadenza dei tassi di interesse a pronti, espressi su base annua:

$$\begin{aligned} i(0,1) &= 3.60\%\,, \\ i(0,2) &= 4.25\%\,, \\ i(0,3) &= 4.75\%\,, \\ i(0,4) &= 5.42\%\,. \end{aligned}$$

a) Calcolare il tasso di parità, $\overline{p}_4$, per la scadenza $m = 4$ anni.
b) Si supponga che al tempo $t = 0$ si voglia emettere un titolo a cedola fissa, di durata 4 anni e capitale nominale C, che paghi un tasso annuo cedolare uguale al 5.5%: tale titolo sarà emesso alla pari, sopra la pari o sotto la pari?

Soluzione

(a) Il livello del tasso di parità $\overline{p}_4$ si ottiene dalla seguente:

$$\overline{p}_4 = \frac{1 - [1 + i(0,4)]^{-4}}{\sum_{k=1}^{4} [1 + i(0,k)]^{-k}} = 5.33873\%\,.$$

(b) Poiché il tasso annuo pagato dal titolo è maggiore del tasso di parità $\overline{p}_4$, il titolo sarà emesso sopra la pari.

Esercizio 8.3

Si consideri un mercato definito al tempo $t = 0$ sullo scadenzario $\mathbf{t} = \{t_1, t_2, t_3\} = \{1, 2, 3\}$ anni; siano trattati sul mercato tre titoli obbligazionari:
· uno *zero coupon bond* con valore di rimborso $x = 100$ € in t_1 e prezzo a pronti di 95.75 €;
· uno *zero coupon bond* con valore di rimborso $y = 200$ € in t_2 e prezzo a termine, pattuito in t e pagabile in t_1, di 188 €;
· uno *zero coupon bond* con valore di rimborso $z = 200$ € in t_3 e prezzo a termine, pattuito in t e pagabile in t_1, di 173.5 €.
(a) Si calcolino le strutture per scadenza dei tassi di interesse a pronti e a termine uniperiodali corrispondenti ai prezzi di mercato osservati in t, esprimendo i tassi su base annua.
(b) Volendo emettere, in $t = 0$, un titolo a cedola fissa con scadenza 3 anni, che paghi un tasso annuo cedolare uguale al tasso di parità, determinare il livello della cedola I del titolo, considerando un valore di rimborso di 100 €.

Soluzione

(a) Dai prezzi dei contratti quotati sul mercato si ricavano i prezzi di non arbitraggio degli zero coupon bond unitari:

$$v(0, t_1) = \frac{95.75}{100} = 0.95750\,,$$
$$v(0, t_1, t_2) = \frac{188}{200} = 0.94000\,,$$
$$v(0, t_1, t_3) = \frac{173.5}{200} = 0.86750\,.$$

Utilizzando il teorema dei prezzi impliciti, è possibile ricavare i prezzi sulle scadenze "mancanti" (a pronti, a termine):

$$v(0, t_2) = v(0, t_1, t_2)v(0, t_1)\,,$$
$$v(0, t_3) = v(0, t_1, t_3)v(0, t_1)\,,$$
$$v(0, t_2, t_3) = \frac{v(0, t_3)}{v(0, t_2)}\,.$$

La struttura dei tassi a pronti si calcola dalla:

$$i(0, t_k) = v(0, t_k)^{-1/t_k} - 1 \quad k = 1, 2, 3\,,$$

e si ha:

$$i(0, t_1) = 4.43864\%\,,$$
$$i(0, t_2) = 5.40633\%\,,$$
$$i(0, t_3) = 6.38096\%\,.$$

Per la struttura dei tassi a termine uniperiodali si ha:

$$i(0, t_1, t_2) = 6.38298\%\,,$$
$$i(0, t_2, t_3) = 8.35735\%\,.$$

(b) Il livello della cedola I è individuato dal tasso tasso di parità, $\overline{p}_3$; data la struttura dei tassi di interesse a pronti, si ricava dalla:

$$\overline{p}_3 = \frac{1 - [1 + i(0, 3)]^{-t_3}}{\sum_{k=1}^{3} [1 + i(0, k)]^{-k}}\,,$$

da cui $I = 6.30049$ €.

Esercizio 8.4

Si supponga che nell'istante di valutazione $t = 0$, in riferimento allo scadenzario $\mathbf{t} = \{1, 2, 3, 4\}$ anni, sia in vigore la seguente struttura per scadenza dei tassi di interesse a pronti:

$$i(0, 1) = 2.25\%$$
$$i(0, 2) = 2.37\%$$
$$i(0, 3) = 3.01\%$$

$$i(0,4) = 3.35\%$$

essendo i tassi espressi su base annua.
a) Calcolare il tasso di parità $\overline{p}_3$ per la scadenza $m = 3$ anni.
b) Si supponga che al tempo $t = 0$ si voglia emettere un titolo a cedola fissa, di durata 3 anni e capitale nominale C, che paghi un tasso annuo cedolare uguale 1.75%. Tale titolo sarà emesso alla pari, sopra la pari o sotto la pari?

Soluzione

(a) Il tasso di parità $\overline{p}_3$ si ottiene dalla relazione

$$\overline{p}_3 = \frac{1 - [1 + i(0,3)]^{-3}}{\sum_{k=1}^{3}[1 + i(0,k)]^{-k}} = 2.28608\% \,.$$

(b) Poiché il tasso annuo pagato dal titolo è minore del tasso di parità $\overline{p}_3$, il titolo sarà emesso sotto la pari.

9 Indici temporali e di variabilità

Riferimenti bibliografici: [CDM] Cap. 10

Esercizio 9.1

Un titolo a cedola fissa $\mathbf{x}$ di durata 2 anni, capitale di 100 €, paga cedole ogni trimestre al tasso annuo nominale dell'8%. Nell'istante di valutazione $t = 0$, calcolare:
(a) la durata media finanziaria (*duration*), l'indice di dispersione e la dispersione standard rispetto a una struttura per scadenza piatta al livello $i = 8.30\%$ su base annua;
(b) la durata media finanziaria (*duration*), l'indice di dispersione e la dispersione standard rispetto alla seguente struttura per scadenza dei tassi di interesse a pronti espressi su base annua:

$$\begin{array}{rclrcl} i(0,0.25) & = & 4.50\%\,, & i(0,0.5) & = & 4.85\%\,, \\ i(0,0.75) & = & 5.25\%\,, & i(0,1) & = & 5.53\%\,, \\ i(0,1.25) & = & 5.75\%\,, & i(0,1.5) & = & 6.10\%\,, \\ i(0,1.75) & = & 6.35\%\,, & i(0,2) & = & 6.55\%\,. \end{array}$$

Soluzione

Il contratto finanziario $\mathbf{x}$ è rappresentato dal bivettore:

$$\{2,2,2,2,2,2,2,102\}/\{0.25,0.5,0.75,1,1.25,1.5,1.75,2\}\,.$$

(a) Nel caso di struttura piatta la *duration* è data dalla:

$$D(0;\mathbf{x}) = \frac{\sum_{k=1}^{m} t_k\, x_k\, (1+i)^{-t_k}}{V(0;\mathbf{x})}$$

ossia

$$D(0;\mathbf{x}) = \frac{\frac{1}{4}2(1+i)^{-1/4} + \frac{2}{4}2(1+i)^{-2/4} + ... + \frac{8}{4}2(1+i)^{-8/4} + \frac{8}{4}100(1+i)^{-8/4}}{V(0;\mathbf{x})}.$$

Essendo

$$V(0;\mathbf{x}) = 2\cdot(1+i)^{-1/4} + 2\cdot(1+i)^{-2/4} + ... + 2\cdot(1+i)^{-8/4} + 100\cdot(1+i)^{-8/4},$$

si ottiene:

$$D(0;\mathbf{x}) = 1.86792 \text{ anni.}$$

Utilizzando la relazione:

$$M^2(0;\mathbf{x}) = \frac{\sum_{k=1}^{m} (t_k - D_0)^2\, x_k\, (1+i)^{-t_k}}{V(0;\mathbf{x})},$$

essendo $D_0 = D(0;\mathbf{x})$, si ottiene:

$$M^2(0;\mathbf{x}) = \frac{(\frac{1}{4}-D_0)^2 2(1+i)^{-1/4} + ... + (\frac{8}{4}-D_0)^2 2(1+i)^{-8/4} + (\frac{8}{4}-D_0)^2 100(1+i)^{-8/4}}{V(0;\mathbf{x})}.$$

Eseguendo i calcoli si ottiene l'indice di dispersione:

$$M^{(2)}(0;\mathbf{x}) = 0.14961 \text{ anni}^2\,.$$

La dispersione standard è data da:

$$\sqrt{M^{(2)}(0;\mathbf{x})} = 0.38679 \text{ anni.}$$

(b) La durata media finanziaria del contratto finanziario $\mathbf{x}$ è data dalle relazione:

$$D(0;\mathbf{x}) = \frac{\sum_{k=1}^{m} t_k\, x_k\, (1+i(0,t_k))^{-t_k}}{V(0;\mathbf{x})},$$

cioè

$$D(0;\mathbf{x})=\frac{\frac{1}{4}2(1+i(0,1/4))^{-1/4}+...+\frac{8}{4}2(1+i(0,8/4))^{-8/4}+\frac{8}{4}100(1+i(0,8/4))^{-8/4}}{V(0;\mathbf{x})}.$$

Essendo

$V(0;\mathbf{x})=2(1+i(0,1/4))^{-1/4}+2(1+i(0,2/4))^{-2/4}+...+2(1+i(0,8/4))^{-8/4}+100(1+i(0,8/4))^{-8/4}$,

si ottiene:

$$D(0;\mathbf{x})=1.86948 \text{ anni}\,.$$

L'indice di dispersione è dato dalla formula:

$$M^2(0;\mathbf{x})=\frac{\sum_{k=1}^{m}(t_k-D_0)^2\,x_k\,(1+i(0,t_k))^{-t_k}}{V(0;\mathbf{x})},$$

essendo $D_0=D(0;\mathbf{x})$ o, più esplicitamente,

$$M^2(0;\mathbf{x})=\frac{(\frac{1}{4}-D_0)^2 2(1+i(0,1/4))^{-1/4}+...+(\frac{8}{4}-D_0)^2 102(1+i(0,8/4))^{-8/4}}{V(0;\mathbf{x})}.$$

Eseguendo i calcoli si ottiene:

$$M^{(2)}(0;\mathbf{x})=0.14762 \text{ anni}^2\,.$$

La dispersione standard è ottenuta dalla relazione:

$$\sqrt{M^{(2)}(0;\mathbf{x})}=0.38422 \text{ anni.}$$

Esercizio 9.2

Sia presente sul mercato, al tempo $t=0$, un titolo a cedola fissa $\mathbf{x}$ con scadenza pari a 1 anno e 6 mesi che rimborsa a scadenza il capitale nominale $C=400$ € e che paga cedole ogni bimestre al tasso annuo nominale $i_N=7.50\%$. Nell'istante di valutazione $t=0$, si determinino la durata media finanziaria, l'indice di dispersione e la dispersione standard rispetto a una struttura per scadenza piatta al livello $\delta=0.09075$ anni^{-1}

Soluzione

Per determinare il valore della cedola I si applica la relazione

$$I=\frac{i_N\cdot C}{6}=5.00 \quad €$$

Il contratto finanziario $\mathbf{x}$ è quindi rappresentato dal bivettore:

$$\{5,5,5,...,405\}/\{\frac{1}{6},\frac{2}{6},\frac{3}{6},...,\frac{3}{2}\}\,.$$

Il valore in $t=0$ del contratto a cedola fissa $\mathbf{x}$, $V(0;\mathbf{x})$, è dato dalla relazione

$$V(0;\mathbf{x})=Ie^{-\frac{\delta}{6}}+Ie^{-\frac{2\delta}{6}}+Ie^{-\frac{3\delta}{6}}+...+(C+I)e^{-\frac{9\delta}{6}}=390.84761 \;€.$$

La durata media finanziaria (*duration*) è data invece dalla relazione:

$$D(0;\mathbf{x})=\frac{I\frac{1}{6}e^{-\frac{\delta}{6}}+I\frac{2}{6}e^{-\frac{2\delta}{6}}+...+(C+I)\frac{9}{6}e^{-\frac{9\delta}{6}}}{V(0;\mathbf{x})}=1.42700\,\text{anni}$$

Utilizzando la relazione

$$M^{(2)}(0;\mathbf{x})=\frac{(\frac{1}{6}-D_0)^2 Ie^{-\frac{\delta}{6}}+(\frac{2}{6}-D_0)^2 Ie^{-\frac{2\delta}{6}}+...+(\frac{9}{6}-D_0)^2(C+I)e^{-\frac{9\delta}{6}}}{V(0;\mathbf{x})}$$

essendo $D_0=D(0,\mathbf{x})$, si calcolano l'indice di dispersione

$$M^{(2)}(0;\mathbf{x})=0.064337 \text{ anni}^2$$

e la dispersione standard

$$\sqrt{M^{(2)}(0;\mathbf{x})}=0.25365 \text{ anni.}$$

10 Strategie di arbitraggio

Riferimenti bibliografici: [CDM] Cap. 8

Esercizio 10.1

Sia t il giorno 31 gennaio 2001 e siano quotati sul mercato i seguenti *zero coupon bond*, con valore di rimborso di 100 €:

scadenza	durata gg	prezzo
14/03/01	42	99.54
15/05/01	104	98.64
15/07/01	165	97.65

(a) Determinare i prezzi di non arbitraggio, a pronti e a termine, dei titoli a cedola nulla unitari corrispondenti alla struttura dei prezzi assegnati.
(b) Facendo riferimento all'anno civile (365 giorni), calcolare la struttura per scadenza dei tassi a pronti e dei tassi a termine uniperiodali su base annua relativamente allo scadenzario $\{t_1, t_2, t_3\} = \{42, 104, 165\}$ giorni.
(c) Ipotizzando che gli zcb unitari siano quotati sul mercato, dire se il prezzo a termine $v(t_0, t_1, t_3) = 0.9856$ € consente o no arbitraggi non rischiosi, motivando la risposta e, in caso affermativo, determinare un'eventuale profitto G da arbitraggio.

Soluzione

(a) I prezzi dei titoli a cedola nulla unitari che scadono alle scadenze $\{t_1, t_2, t_3\}$ sono:

$$\begin{aligned} v(0,t_1) &= \frac{99.54}{100} &&= 0.99540\,, \\ v(0,t_2) &= \frac{98.64}{100} &&= 0.98640\,, \\ v(0,t_3) &= \frac{97.65}{100} &&= 0.97650\,. \end{aligned}$$

I prezzi a termine sono:

$$\begin{aligned} v(0,0,t_1) &= v(0,0,42) &&= 0.99540\,, \\ v(0,t_1,t_2) &= \frac{98.64}{99.54} &&= 0.99096\,, \\ v(0,t_2,t_3) &= \frac{97.65}{98.64} &&= 0.98996\,. \end{aligned}$$

(b) La struttura per scadenza dei tassi a pronti e a termine è:

$$\begin{aligned} i(0,t_1) &= 4.08820\,\%\,, & i(0,0,t_1) &= 4.08820\,\%\,, \\ i(0,t_2) &= 4.92318\,\%\,, & i(0,t_1,t_2) &= 5.49262\,\%\,, \\ i(0,t_3) &= 5.40137\,\%\,, & i(0,t_2,t_3) &= 6.22166\,\%\,. \end{aligned}$$

(c) Date le quotazioni degli *zero coupon bond*, il prezzo di non arbitraggio dello *zero coupon bond* pattuito in t e relativo all'orizzonte di scambio da t_1 a t_3 è:

$$v(t,t_1,t_3) = \frac{v(t,t_3)}{v(t,t_1)} = 0.98101 \text{ €},$$

quindi è possibile realizzare, per esempio, una strategia di arbitraggio che consente un guadagno certo in t di 0.00457 €. La strategia è composta dalle seguenti azioni:
– acquisto in t dello *zero coupon bond* unitario che scade in t_3;
– vendita allo scoperto in t di 0.9856 unità dello *zero coupon bond* che scade in t_1;
– vendita a termine in t per consegna in t_1 dello *zero coupon bond* unitario che scade in t_3.

Esercizio 10.2

Si consideri, nell'istante di valutazione $t = 0$, un mercato definito sullo scadenzario $\mathbf{t} = \{t_1, t_2\} = \{0.5, 1\}$, essendo il tempo misurato in anni. Siano trattati sul mercato due titoli a cedola nulla $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$ ed un contratto a termine $\mathbf{z}$: il contratto $\mathbf{x}$ paga 100 € in t_1 ed è scambiato in t a 98 €; il contratto $\mathbf{y}$ paga 52 € in t_2 con un prezzo in t di 49 €; il contratto $\mathbf{z}$ paga 106 € in t_2, al prezzo a termine, pattuito in t e pagato in t_1, di 100 €.
Verificare se sono possibili arbitraggi non rischiosi e costruire un'eventuale strategia di arbitraggio non rischioso.

Soluzione

Dati i prezzi dei titoli $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$ e $\mathbf{z}$, si possono calcolare i prezzi di non arbitraggio degli zero coupon bond unitari:

$$v(0, t_1) = \frac{98}{100} = 0.98000$$
$$v(0, t_2) = \frac{49}{52} = 0.94231$$
$$v(0, t_1, t_2) = \frac{100}{106} = 0.94340$$

Poichè $v(0, t_2)$ è diverso da $v(0, t_1)v(0, t_1, t_2)$ è possibile sul mercato realizzare arbitraggi non rischiosi.

Una possibile strategia di arbitraggio è definita dalle seguenti azioni:
– (A): acquisto a pronti, in 0, di una unità del titolo $\mathbf{x}$,
– (B): vendita allo scoperto, 0, di due unità del titolo $\mathbf{y}$,
– (C): acquisto a termine, per consegna in $t_1 = 0.5$, di una unità del titolo $\mathbf{z}$.

Il risultato della strategia è riportato nella tabella di *pay-off*:

	0	0.5	1
(A):	-98	+100	0
(B):	+98	0	-104
(C):	0	-100	+106
	0	0	+2

Esercizio 10.3

Sia dato, nell'istante di valutazione $t = 0$, un mercato definito sullo scadenzario $\mathbf{t} = \{t_1, t_2\} = \{\frac{1}{6}, \frac{1}{3}\}$, essendo il tempo misurato in anni. Siano trattati sul mercato due titoli a cedola nulla $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$ ed un contratto a termine $\mathbf{z}$: il contratto $\mathbf{x}$ paga 105 € in t_1 ed è scambiato in t a 87 €; il contratto $\mathbf{y}$ paga 33 € in t_2 con un prezzo in t di 29 € e il contratto $\mathbf{z}$ paga 107 € in t_2, al prezzo a termine (pattuito in t e pagabile in t_1) di 105 €. Verificare se sono possibili arbitraggi non rischiosi. In caso affermativo si costruisca una strategia di arbitraggio non rischioso.

Soluzione

Dati i prezzi degli *zero coupon bond* non unitari $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$ e $\mathbf{z}$, si possono calcolare i prezzi di non arbitraggio degli *zero coupon bond* unitari:

$$v(0, t_1) = \frac{87}{105} = 0.82857$$
$$v(0, t_2) = \frac{29}{33} = 0.87879$$
$$v(0, t_1, t_2) = \frac{105}{107} = 0.98131$$

Poiché risulta che $v(0, t_1, t_2) \neq \frac{v(0,t_2)}{v(0,t_1)}$ nel mercato in esame è possibile realizzare arbitraggi non rischiosi. Una possibile strategia di arbitraggio può essere:
– azione (A): acquistare a pronti in $t = 0$ una unità del titolo $\mathbf{x}$,
– azione (B): vendere allo scoperto in $t = 0$ 3 unità del titolo $\mathbf{y}$,
– azione (C): acquistare a termine per consegna in $t_1 = 1/6$ una unità del titolo $\mathbf{z}$.
Tale strategia è rappresentata nella tabella di *pay-off*:

	0	1/6	1/3
(A):	-87	+105	0
(B):	29·3=87	0	-33·3=-99
(C):	0	-105	+107
	0	0	+8

e rappresenta una strategia di arbitraggio a scadenza.

11 La misurazione della struttura per scadenza dei tassi di interesse

Riferimenti bibliografici: [CDM] Cap. 11

Esercizio 11.1

Nell'istante di tempo $t = 0$ siano quotati sul mercato i tassi *swap*

$$z_1 = 4.50\%$$
$$z_2 = 4.95\%$$
$$z_4 = 5.43\%$$
$$z_5 = 5.85\%$$

avendo indicato con z_m il tasso *swap*, quotato in t, per la generica scadenza m (anni).
In riferimento allo scadenzario $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ anni, calcolare le strutture per scadenza dei tassi di interesse a pronti e a termine uniperiodali, esprimendo i tassi su base annua.

Soluzione

Il tasso *swap*, z_m, per la generica scadenza m, è il tasso di parità di un titolo a cedola fissa annua, di durata m anni; vale quindi la relazione:

$$z_m \sum_{k=1}^{m} [1 + i(0, k)]^{-k} + [1 + i(0, m)]^{-m} = 1$$

da cui si ricava:

$$i(0, m) = \left\{ \frac{1 + z_m}{1 - z_m \sum_{k=1}^{m-1} [1 + i(0, k)]^{-k}} \right\}^{1/m} - 1\,.$$

Per la risoluzione dell'esercizio basta applicare l'espressione in modo iterativo, con la condizione $i(0, 1) = z_1$; il tasso *swap* a 3 anni, non quotato sul mercato, può essere determinato con interpolazione lineare:

$$z_3 = \frac{z_2 + z_4}{2} = 5.19\%\,.$$

La struttura per scadenza dei tassi di interesse a pronti, desunta dai tassi *swap*, è:

$$\begin{aligned} i(0, 1) &= 4.50000\,\%\,, \\ i(0, 2) &= 4.96119\,\%\,, \\ i(0, 3) &= 5.21059\,\%\,, \\ i(0, 4) &= 5.46667\,\%\,, \\ i(0, 5) &= 5.93493\,\%\,. \end{aligned}$$

La corrispondente struttura per scadenza dei tassi di interesse a termine uniperiodali è:

$$\begin{aligned} i(0, 0, 1) &= 4.50000\,\%\,, \\ i(0, 1, 2) &= 5.42441\,\%\,, \\ i(0, 2, 3) &= 5.71118\,\%\,, \\ i(0, 3, 4) &= 6.23866\,\%\,, \\ i(0, 4, 5) &= 7.82883\,\%\,. \end{aligned}$$

Esercizio 11.2

Nell'istante di tempo $t = 0$ siano quotati sul mercato i tassi *swap*:

$$z_1 = 4.53\%$$
$$z_2 = 4.85\%$$
$$z_5 = 5.95\%$$

avendo indicato con z_m il tasso *swap*, quotato in t, per la generica scadenza m (anni).
In riferimento allo scadenzario $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ anni, calcolare le strutture per scadenza dei tassi di interesse a pronti e a termine uniperiodali, esprimendo i tassi su base annua.

Soluzione

Come nell'esercizio precedente, non essendo assegnati i tassi *swap* per le scadenze 3 e 4 anni, si utilizza l'interpolazione lineare; dall'equazione della retta passante per i punti di coordinate $(2, z_2)$ e $(5, z_5)$, ossia

$$y = \frac{z_5 - z_2}{3}(x - 2) + z_2 \,,$$

si ha:

$$z_3 = 5.21667\% \,, \qquad z_4 = 5.58333\% \,.$$

La struttura dei tassi *zero coupon swap*, ottenuta con procedura iterativa, è:

$$\begin{aligned} i(0,1) &= 4.53000\,\% \,, \\ i(0,2) &= 4.85778\,\% \,, \\ i(0,3) &= 5.24187\,\% \,, \\ i(0,4) &= 5.63595\,\% \,, \\ i(0,5) &= 6.04246\,\% \,. \end{aligned}$$

La corrispondente struttura per scadenza dei tassi di interesse a termine uniperiodali è:

$$\begin{aligned} i(0,0,1) &= 4.53000\,\% \,, \\ i(0,1,2) &= 5.18660\,\% \,, \\ i(0,2,3) &= 6.01427\,\% \,, \\ i(0,3,4) &= 6.82708\,\% \,, \\ i(0,4,5) &= 7.68417\,\% \,. \end{aligned}$$

Esercizio 11.3

Nell'istante di tempo $t = 0$ sono trattati sul mercato i seguenti titoli:
· uno *zero coupon bond* con scadenza $t_1 = 1$ anno, valore nominale 100 €, prezzo a pronti uguale a 96.15 €;
· un titolo a cedola fissa di durata 2 anni che paga cedole annue al tasso annuo $i = 4\%$, con prezzo a pronti uguale a 99.87 €;
· un contratto di *interest rate swap*, di durata 3 anni, con $z_3 = 4.5\%$.
In riferimento allo scadenzario $\{1, 2, 3\}$ anni, calcolare:
(a) la struttura per scadenza dei prezzi a pronti e a termine;
(b) la struttura per scadenza dei tassi di interesse a pronti e a termine uniperiodali, esprimendo i tassi su base annua.

Soluzione

(a) La determinazione della struttura per scadenza dei prezzi a pronti segue dalla risoluzione del sistema di equazioni lineari:

$$\left\{ \begin{array}{rcrcrcr} 100\,v(0,1) & & & & & = & 96.15 \\ 4\,v(0,1) & + & 104\,v(0,2) & & & = & 99.87 \\ 4.5\,v(0,1) & + & 4.5\,v(0,2) & + & 104.5\,v(0,3) & = & 100 \end{array} \right.$$

Si ottiene:

$$\begin{aligned} v(0,1) &= 0.96150\,, \\ v(0,2) &= 0.92331\,, \\ v(0,3) &= 0.87577\,, \end{aligned}$$

da cui si calcolano i prezzi a termine:

$$\begin{aligned} v(0,0,1) &= 0.96150\,, \\ v(0,1,2) &= 0.96028\,, \\ v(0,2,3) &= 0.94851\,. \end{aligned}$$

Le strutture per scadenza dei tassi di interesse a pronti e a termine uniperiodali risultano:

$$\begin{aligned} i(0,1) &= 4.00416\,\%\,, & i(0,0,1) &= 4.00416\,\%\,, \\ i(0,2) &= 4.07029\,\%\,, & i(0,1,2) &= 4.13646\,\%\,, \\ i(0,3) &= 4.52079\,\%\,, & i(0,2,3) &= 5.42765\,\%\,. \end{aligned}$$

Esercizio 11.4

Nell'istante di tempo $t = 0$ siano quotati sul mercato i seguenti tassi *swap*:

$$z_1 = 3.72\%$$

$$z_3 = 4.01\%$$

$$z_4 = 4.12\%$$

avendo indicato con z_m il tasso *swap* relativo alla scadenza di m anni. In riferimento allo scadenzario $\{1, 2, 3, 4\}$ anni, calcolare le strutture per scadenza dei tassi di interesse a pronti, esprimendo i tassi su base annua.

Soluzione

Il tasso *swap* z_m per la scadenza m, è il tasso di parità di un titolo a cedola fissa annua, di durata m anni; vale quindi la relazione:

$$z_m \sum_{k=1}^{m} [1 + i(0,k)]^{-k} + [1 + i(0,m)]^{-m} = 1$$

da cui si ricava:

$$i(0,m) = \left\{ \frac{z_m}{1 - z_m \sum_{k=1}^{m-1} [1 + i(0,k)]^{-k}} \right\}^{1/m} - 1\,.$$

Per la risoluzione dell'esercizio basta applicare l'espressione in modo iterativo, con la condizione $i(0,1) = z_1$; il tasso *swap* a 2 anni, non quotato dal mercato, può essere determinato con interpolazione lineare:

$$z_2 = \frac{z_1 + z_3}{2} = 3.865\%\,.$$

La struttura per scadenza dei tassi di interesse a pronti, desunta dai tassi *swap*, è:

$$i(0,1) = z_1 = 3.72\%$$

$$i(0,2) = \left[\frac{1 + z_2}{1 - z_2 \cdot [1 + i(0,1)]^{-1}} \right]^{\frac{1}{2}} - 1 = 3.86780\%$$

$$i(0,3) = \left[\frac{1 + z_3}{1 - z_3 \cdot \{[1 + i(0,1)]^{-1} + [1 + i(0,2)]^{-2}\}} \right]^{\frac{1}{3}} - 1 = 4.01785\%$$

$$i(0,4) = \left[\frac{1 + z_4}{1 - z_4 \cdot \{[1 + i(0,1)]^{-1} + [1 + i(0,2)]^{-2} + [1 + i(0,3)]^{-3}\}} \right]^{\frac{1}{4}} - 1 = 4.13314\%$$

12 Valutazione di arbitraggio di piani a tasso variabile

Riferimenti bibliografici: [CDM] Cap. 12

Esercizio 12.1

Nell'istante di tempo $t = 0$ siano quotati sul mercato i tassi *swap*:

$$z_1 = 5.03\%$$

$$z_2 = 5.08\%$$

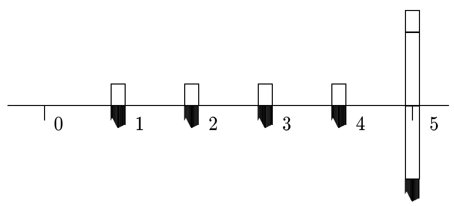
$$z_4 = 5.20\%$$

$$z_5 = 5.40\%$$

avendo indicato con z_m il tasso *swap*, quotato in t, per la generica scadenza m (anni).
Un'impresa, in t, ha un debito in-essere di 100 € a tasso fisso, con ammortamento in unica soluzione a scadenza; paga un interesse annuo uguale a 6 €, la durata residua è di 5 anni; per "trasformare" il suo debito da tasso fisso a tasso variabile decide di stipulare un contratto di *interest rate swap* a 5 anni come pagatore di tasso variabile e ricevitore di tasso fisso, su un capitale nozionale di 100 €.
(a) Calcolare lo *spread* annuo, σ, della passività "sintetica" a tasso variabile.
(b) Calcolare il valore della passività "sintetica" sapendo che il valore, in $t = 0$, di una rendita a rata annua costante posticipata, $\mathbf{r}$, di durata 5 anni, è $V(0; \mathbf{r}) = 2.58117$ €.

Soluzione

L'impresa sottoscrive un contratto *swap* a 5 anni nel quale paga "variabile" e riceve "fisso" (tasso quotato sul mercato per quella scadenza), su un capitale nozionale di 100 €; gli importi monetari generati dal contratto swap possono essere rappresentati con il seguente schema:



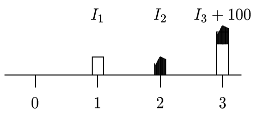
dato il tasso *swap* quotato, in $t = 0$, per la scadenza 5 anni ($z_5 = 5.40\%$), l'impresa riceve, alla fine di ciascun anno, un interesse fisso uguale a 5.40 € e, sempre alla fine di ciascun anno, paga un interesse aleatorio definito secondo lo schema contrattuale del titolo indicizzato "sincrono", con prima cedola aleatoria.
(a) Il tasso annuo del debito a tasso fisso è uguale 6%; lo *spread* annuo della passività "sintetica" è definito dalla differenza tra tasso fisso a debito e il tasso *swap* per la scadenza corrispondente, pertanto $\sigma = 0.60\%$.
(b) Il valore, in $t = 0$, della passività "sintetica", è fornito dalla somma del valore del flusso a tasso variabile dello swap (all'emissione) e del valore, in $t = 0$, del flusso *spread* (che coincide con il valore della rendita $\mathbf{r}$), uguale a 102.58117 €.

Esercizio 12.2

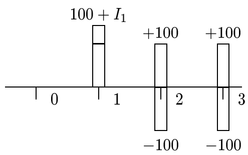
Nell'istante di valutazione $t = 0$ sia 195 € il prezzo di una rendita, $\mathbf{r}$, di rata annua costante $R = 100$ €, durata $m = 3$ anni. Siano $\mathbf{X}$ e $\mathbf{Y}$ due titoli indicizzati "sincroni", emessi da un'impresa in $t = 0$, di durata tre anni, che rimborsano un capitale di 100 € in unica soluzione a scadenza, e che corrispondono cedole annue essendo la prima cedola nota al livello $I_1 = 100\,i(0, 1)$; il titolo $\mathbf{X}$ ha uno *spread* uguale a zero, il titolo $\mathbf{Y}$ ha uno *spread* annuo $\sigma = 0.05\%$.
Sapendo che la durata media finanziaria in t della rendita $\mathbf{r}$ è uguale a 1.65 anni, calcolare il valore e la durata media finanziaria in t dei due titoli.

Soluzione

Il titolo $\mathbf{X}$ è caratterizzato dal flusso di importi:



che risulta equivalente al flusso deterministico:



Il titolo è replicato da un contratto del tipo *zero coupon bond* con scadenza uguale alla data di pagamento della prima cedola e valore nominale uguale alla somma del capitale (100 €) e dell'importo corrispondente alla prima cedola; il suo valore, in $t = 0$, è fornito dalla:

$$V(0; \mathbf{X}) = [100 + I_1][1 + i(0, 1)]^{-1} = 100 \text{ €}.$$

La durata media finanziaria del titolo è uguale a un anno.
Il titolo $\mathbf{Y}$ può essere considerato come un portafoglio composto da una unità del titolo $\mathbf{X}$ e da una rendita posticipata di durata 3 anni che corrisponde una rata annua uguale a 0.05 €; il suo valore in $t = 0$ risulta:

$$V(0; \mathbf{Y}) = V(0; \mathbf{X}) + V(0; \mathbf{s})\,.$$

Dato che:

$$V(0; \mathbf{r}) = 100 \sum_{k=1}^{3} v(0, k)$$

essendo $v(0, k)$ il fattore di sconto per la scadenza k anni in vigore sul mercato in $t = 0$, si ha che:

$$V(0; \mathbf{s}) = 0.05 \sum_{k=1}^{3} v(0, k) = 0.05 \frac{V(0; \mathbf{r})}{100} = 0.09750 \text{ €},$$

da cui si ottiene:

$$V(0; \mathbf{Y}) = 100.09750 \text{ €}\,.$$

La durata media finanziaria, in $t = 0$, del titolo $\mathbf{Y}$ risulta dalla:

$$D(0; \mathbf{Y}) = \frac{V(0; \mathbf{X})}{V(0; \mathbf{Y})} D(0; \mathbf{X}) + \frac{V(0; \mathbf{s})}{V(0; \mathbf{Y})} D(0; \mathbf{s})\,.$$

Per calcolare $D(0, \mathbf{s})$ basta considerare che la *duration* di una rendita a rata costante non dipende dal valore della rata; quindi la rendita $\mathbf{s}$ avrà una durata media finanziaria uguale a quella della rendita $\mathbf{r}$ (1.65 anni). Risulta pertanto:

$$D(0; \mathbf{Y}) = 1.00063 \text{ anni}.$$

Esercizio 12.3

Nell'istante di tempo $t = 0$ il mercato è descritto dalla struttura per scadenza dei tassi di interesse a pronti:

$$i(0, 0.5) = 3.85\% \qquad i(0, 1) = 4.25\% \qquad i(0, 1.5) = 4.75\% \qquad i(0, 2) = 5.10\%$$

essendo i tassi espressi su base annua.
In $t = 0$ è scambiato sul mercato un titolo indicizzato "sincrono", $\mathbf{X}'$, di durata 2 anni, che rimborsa un capitale di 100 € in unica soluzione alla scadenza e che paga cedole ogni semestre, essendo la prima cedola nota al livello definito dal tasso annuo $i(0, 0.5)$; il titolo corrisponde uno *spread* semestrale $\sigma = 0.15\%$. Calcolare, in $t = 0$:

(a) il valore del contratto;

(b) la duration del contratto;

(c) la dispersione standard del contratto.

Soluzione

(a) Si indichi con $\mathbf{X}$ il titolo indicizzato "sincrono" con stesse caratteristiche contrattuali del titolo $\mathbf{X}'$ ma con *spread* uguale a zero; sia $\mathbf{s}$ il flusso caratteristico di una rendita che paga ogni semestre un importo monetario uguale a $\sigma = 0.15$ € per 2 anni. Il valore in $t = 0$ del contratto $\mathbf{X}'$ è fornito dalla:

$$V(0; \mathbf{X}') = V(0; \mathbf{X}) + V(0; \mathbf{s}) = 100.56679\,,$$

essendo, per le argomentazioni dell'esercizio precedente:

$$V(0; \mathbf{X}) = 100 \text{ €}$$

e:

$$V(0; \mathbf{s}) = 0.15 \sum_{k=1}^{4} [1 + i(0, k/2)]^{-k/2} = 0.56679 \text{ €}.$$

(b) La durata media finanziaria del titolo $\mathbf{X}'$ è fornita dalla seguente:

$$D(0; \mathbf{X}') = \frac{V(0; \mathbf{X})}{V(0; \mathbf{X}')} D(0; \mathbf{X}) + \frac{V(0; \mathbf{s})}{V(0; \mathbf{X}')} D(0; \mathbf{s})\,,$$

essendo la *duration* del titolo $\mathbf{X}$, per le argomentazioni dell'esercizio precedente, uguale a 0.5 anni. La duration della rendita $\mathbf{s}$ è calcolata tramite la relazione:

$$D(0, \mathbf{s}) = \frac{0.15 \sum_{k=1}^{4} k/2\, [1 + i(0, k/2)]^{-k/2}}{V(0; \mathbf{s})} = 1.23317 \text{ anni}\,.$$

Si ha:

$$D(0; \mathbf{X}') = 0.50413 \text{ anni}.$$

(c) L'indice di dispersione del titolo $\mathbf{X}'$ è uguale all'indice di dispersione del suo portafoglio replicante certo; risulta:

$$M^{(2)}(0, \mathbf{X}') = 0.00477 \text{ anni}^2\,,$$

da cui $M(0; \mathbf{X}') = 0.06907$ anni.

Esercizio 12.4

Sia:

$$i(0, 0.5) = 5.20\%\,, \quad i(0, 1) = 5.35\%\,, \quad i(0, 1.5) = 5.63\%\,, \quad i(0, 2) = 5.84\%\,,$$

la struttura dei tassi di interesse a pronti espressa su base annua caratteristica del mercato nell'istante di valutazione $t = 0$. Sia scambiato sul mercato il titolo $\mathbf{x}/\mathbf{t} = \{8, 8, 8, 108\}/\{0.5, 1, 1.5, 2\}$, con prezzo, in $t = 0$ uguale a 119.17297 € e *duration* uguale a 1.80719 anni.
Si consideri il titolo da reinvestimento $\mathbf{Y}$ che paga in $s = 1.5$ anni l'importo $X = 100/v(1, 1.5)$. Indicato con $\mathbf{Z}$ il portafoglio costituito da α quote del titolo $\mathbf{x}$ e da β quote del titolo da reinvestimento $\mathbf{Y}$, determinare le quote di composizione α e β in modo che risulti $V(0; \mathbf{Z}) = 300$ e $D(0; \mathbf{Z}) = 1.2$ anni.

Soluzione

Per determinare la composizione del portafoglio **Z** occorre risolvere il sistema di equazioni lineari:

$$\begin{cases} \alpha V(0;\mathbf{x}) + \beta V(0;\mathbf{Y}) = 300 \\ \alpha V(0;\mathbf{x}) D(0;\mathbf{x}) + \beta V(0;\mathbf{Y}) D(0;\mathbf{Y}) = 1.2\, V(0;\mathbf{Z}) \end{cases}$$

dove la prima equazione deriva dalla condizione sul valore del portafoglio ($V(0;\mathbf{Z}) = 300$ €), mentre la seconda equazione deriva dalla condizione sul livello di *duration* del portafoglio ($D(0,\mathbf{Z}) = 1.2$ anni). Per il teorema del titolo di reinvestimento è:

$$V(0;\mathbf{Y}) = 100\, v(0,1) = 100\, [1 + i(0,1)]^{-1}$$

e:

$$D(0;\mathbf{y}) = 1 \text{ anno.}$$

Risolvendo il sistema per sostituzione si ottengono i valori:

$$\alpha = 0.62373, \quad \beta = 2.37741.$$

Riferimento bibliografico

[CDM] - Castellani, G., De Felice, M., Moriconi, F., *Manuale di Finanza* vol. I *Tassi d'interesse. Mutui e obbligazioni*, Il Mulino, Bologna, 2005