

TRIGONOMETRIA SFERICA

La trigonometria fornisce i teoremi utilizzati in campo spaziale per effettuare i cambi di sistemi di riferimento sulla sfera celeste.

A tale scopo, lo strumento principe è rappresentato dal triangolo sferico:

triangolo sferico: parte di superficie sferica delimitata da tre archi di *cerchio massimo* aventi gli estremi in comune a due a due

Per cerchio massimo si intende un generico cerchio appartenente alla sfera tale che il suo centro coincide con il centro della sfera stessa.

Un modo equivalente di definire il triangolo sferico è il seguente: parte di superficie sferica delimitata da tre archi di *geodetiche* aventi gli estremi in comune a due a due.

Un triangolo siffatto mantiene valide tutte le proprietà del triangolo piano.

Una geodetica rappresenta il percorso minimo tra due punti generici appartenenti alla superficie sferica ed è così definita:

Geodetica: linea piana per cui il versore della normale principale in un punto coincide, in direzione, con la normale alla superficie a cui la linea appartiene $\Rightarrow \vec{n} \equiv \vec{N}$

Si ricorda che la normale principale \vec{n} ad una linea corrisponde con la normale alla tangente alla linea nel punto, appartenente al piano della linea stessa, come mostrato in figura.

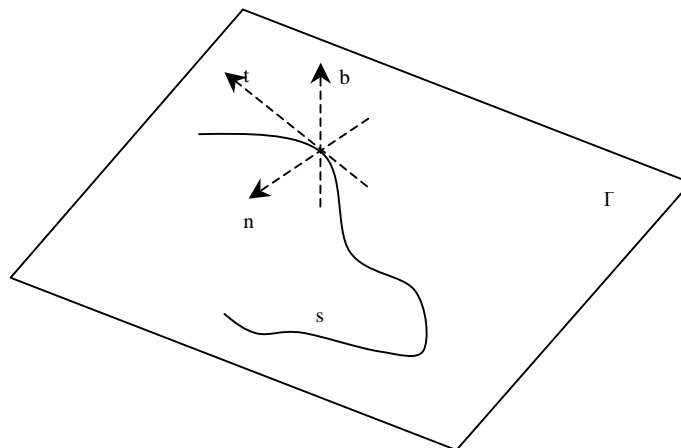


fig.1 terna intrinseca $\vec{t}, \vec{n}, \vec{b}$ di una linea s

Si osserva, quindi, che effettivamente un arco di cerchio massimo appartiene ad una geodetica della sfera. Infatti, tracciando una circonferenza appartenente alla superficie sferica, il cui centro coincide con il centro della sfera stessa, e tracciandone - in un punto generico P - la normale principale \vec{n} , essa coincide, in direzione, con il raggio della circonferenza stessa; considerando, ora, la superficie sferica a cui la linea appartiene si tracci per P la normale \vec{N} alla superficie; essa giacerà sulla direzione del raggio della sfera stessa. Ma per costruzione, il raggio della circonferenza in un punto coincide con il raggio della sfera nel medesimo punto, quindi, a meno del verso, \vec{n} ed \vec{N} coincidono, cioè la linea è una geodetica.

Operando allo stesso modo con un parallelo tracciato sulla superficie sferica, si osserva che il raggio della circonferenza corrispondente al parallelo - tracciato per un generico punto - non coincide con il raggio della sfera, quindi il parallelo non è una geodetica.

L'unico parallelo che presenta le proprietà di una geodetica è l'equatore.

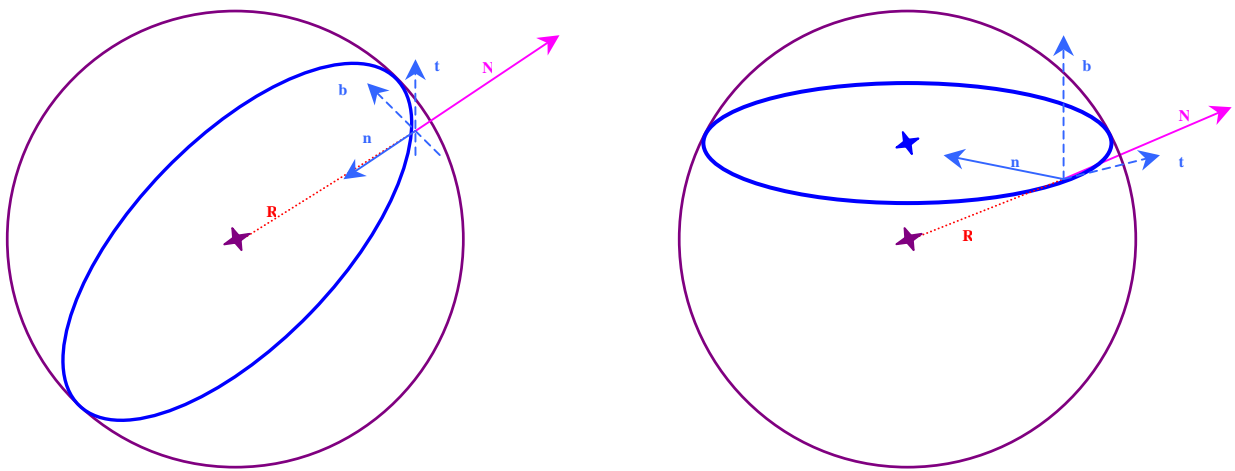


fig.2 Geodetiche sulla sfera

Quindi, per ottenere un triangolo sferico, è sufficiente tracciare tre cerchi massimi su una sfera: la loro intersezione genera un triangolo sferico, come riportato in fig.3.

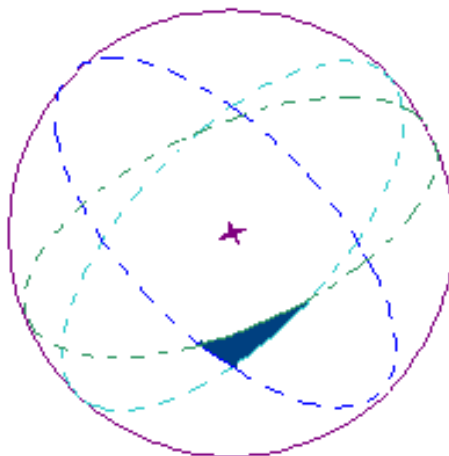


fig.3 generazione di un triangolo sferico

Allo scopo di dimostrare i due teoremi d'uso più frequente in campo spaziale, s'individuino tre punti A,B,C sulla superficie sferica e si uniscano tali punti con il centro O della sfera stessa; si traccino quindi, le circonferenze passanti per i punti, a due a due, e aventi come raggio il raggio della sfera appena tracciato. Si estragga, quindi, lo spicchio di sfera così ottenuto e riportato in fig.4.

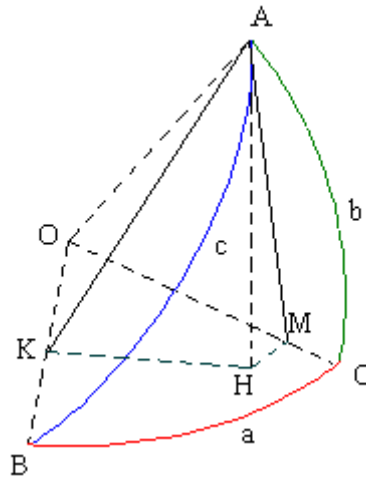


fig.4 Spicchio sferico e relativo triangolo sferico

TEOREMA DEL SENO

Si consideri il triangolo sferico di vertici ABC. Si tracci da \hat{A} la perpendicolare al piano definito dal settore circolare OBC e se ne chiami il piede H.

Si traccino, da H le normali ai raggi \overline{OC} e \overline{OB} e si chiamino le intersezioni, rispettivamente M e K.

Per il teorema delle tre perpendicolari¹, i segmenti \overline{AM} e \overline{AK} sono perpendicolari – rispettivamente - ai segmenti \overline{OC} e \overline{OB} .

Si consideri ora, il segmento \overline{AH} : si ha:

$$\begin{aligned} \text{triangolo rettangolo AMH} &\rightarrow \overline{AH} = \overline{AM} \sin(\hat{AMH}) \\ \text{triangolo rettangolo AKH} &\rightarrow \overline{AH} = \overline{AK} \sin(\hat{AKH}) \end{aligned} \quad (1) \Rightarrow \overline{AM} \sin(\hat{AMH}) = \overline{AK} \sin(\hat{AKH}) \quad (2)$$

Ma:



$$\begin{aligned} \text{triangolo rettangolo OAM} &\rightarrow \overline{AM} = \overline{OA} \sin(\hat{AOC}) \\ \text{triangolo rettangolo OAK} &\rightarrow \overline{AK} = \overline{OA} \sin(\hat{AOB}) \end{aligned} \quad (3) \Rightarrow \overline{OA} \sin(\hat{AOC}) \sin(\hat{AMH}) = \overline{OA} \sin(\hat{AOB}) \sin(\hat{AKH}) \quad (4)$$

angoli \hat{AMH} ; \hat{AKH} :

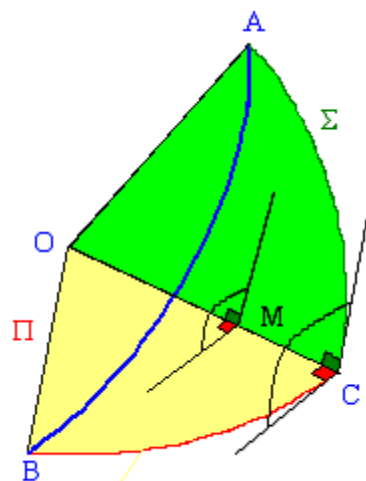


fig.5 Angolo diedro

(fig. 5): L'intersezione dei piani Σ e Π - a cui appartengono rispettivamente i settori circolari BOC e AOC - individua, nello spazio l'angolo diedro di spigolo \overline{OC} .

La misura di un angolo diedro - al fine di essere univocamente determinata - è associata all'angolo generato dalla sezione retta del diedro stesso.

Per sezione retta di un diedro si intende la sezione ottenuta intersecando il diedro stesso con un piano perpendicolare al suo spigolo; l'angolo individuato sul piano di sezione dalle due semirette - traccia della sezione dei piani del diedro - con origine su un punto dello spigolo è la misura dell'angolo diedro.

L'angolo in \hat{C} rappresenta la misura del diedro generato dai piani Π e Σ poiché il piano tangente in C alla superficie sferica è normale allo spigolo \overline{OC} essendo questo il raggio della sfera.

L'angolo \hat{AMH} è anch'esso una sezione retta del diedro di spigolo \overline{OC} , poiché i segmenti \overline{HM} e \overline{AM} - lati dell'angolo \hat{AMH} - sono entrambi normali ad \overline{OC} , quindi il piano da essi individuato è normale ad \overline{OC} , cioè genera una sezione retta del diedro.

Si può quindi concludere che: $\hat{AMH} \cong \hat{C}$

Con analogo ragionamento si giunge a dimostrare che: $\hat{AKH} \cong \hat{B}$

angoli \hat{AOC} ; \hat{AOB} :

Gli angoli al centro della sfera corrispondono, in radianti alla misura dell'arco di circonferenza da essi sotteso; in fig.6 si riportano gli angoli \hat{AOC} , \hat{AOB} , \hat{BOC} .

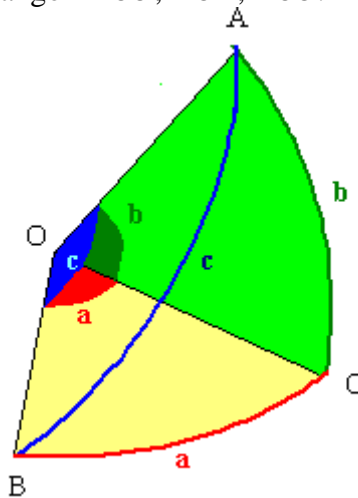


fig.6 angoli al centro ed archi corrispondenti

Quindi si può concludere:

$$\hat{AOC} \cong b$$

$$\hat{AOB} \cong c$$

$$\hat{BOC} \cong a$$

La relazione (4), relativa al triangolo sferico diventa, quindi:

$$\overline{OA} \sin b \sin \hat{C} = \overline{OA} \sin c \sin \hat{B} \quad (5)$$

Estendendo il procedimento ai tre vertici si ottengono tre equazioni - di cui due indipendenti -, espressione del teorema del seno:

$$\frac{\sin b}{\sin \hat{B}} = \frac{\sin c}{\sin \hat{C}} \quad (6)$$

$$\frac{\sin b}{\sin \hat{B}} = \frac{\sin a}{\sin \hat{A}}$$

TEOREMA DEL COSENO

Si consideri nuovamente il triangolo sferico di vertici ABC. Si tracci da \hat{A} la perpendicolare al piano definito dal settore circolare OBC e se ne chiami il piede H.

Si traccino, da H le normali ai raggi \overline{OC} e \overline{OB} e si chiamino le intersezioni, rispettivamente M e K.

Per il teorema delle tre perpendicolari¹, i segmenti \overline{AM} e \overline{AK} sono perpendicolari – rispettivamente – ai segmenti \overline{OC} e \overline{OB} .

Si tracci, da M la parallela al segmento \overline{HK} fino ad intersecare il raggio \overline{OB} nel punto L; si tracci, quindi da H la perpendicolare al segmento \overline{ML} in P (fig.7)

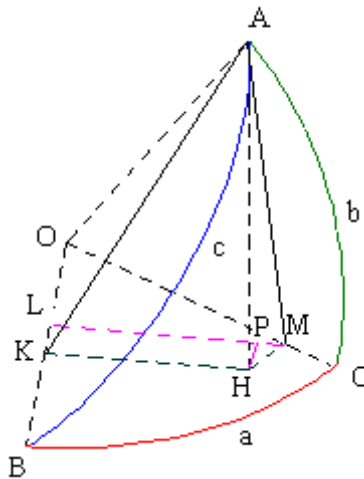


fig.7 rappresentazione grafica per il teorema del coseno

Si consideri ora, il segmento \overline{OK} : si ha:

$$\overline{OK} = \overline{OL} + \overline{LK}$$

segmento \overline{OL} :

$$\text{triangolo rettangolo OML} \rightarrow \overline{OL} = \overline{OM} \cos(\hat{C}OB) \quad (7)$$

\Downarrow

$$\text{triangolo rettangolo OAM} \rightarrow \overline{OM} = \overline{OA} \cos(\hat{A}OC) \quad (8)$$

$$\overline{OL} = \overline{OA} \cos(\hat{A}OC) \cos(\hat{C}OB) \Rightarrow \overline{OL} = \overline{OA} \cos b \cos a \quad (9)$$

segmento \overline{LK} :

$$\begin{aligned}
 \overline{LK} &\equiv \overline{HP} & (10) \\
 \text{triangolo rettangolo MHP} &\rightarrow \overline{HP} = \overline{MH} \sin(\hat{PMH}) \\
 &\downarrow \\
 &\text{triangolo rettangolo AMH} \rightarrow \overline{MH} = \overline{AM} \cos(\hat{AMH}) \\
 &\downarrow \\
 &\text{triangolo rettangolo AOM} \rightarrow \overline{AM} = \overline{AO} \sin(\hat{AOC}) \\
 \overline{LK} = \overline{HP} &= \overline{AO} \sin(\hat{AOC}) \cos(\hat{AMH}) \sin(\hat{PMH}) \Rightarrow \overline{LK} = \overline{AO} \sin b \cos \hat{C} \sin \alpha & (11)
 \end{aligned}$$

In particolare:

$\alpha \equiv a$ perché angoli formati da semirette mutuamente perpendicolari:

$$\begin{aligned}
 \overline{LM} &\perp \overline{OB} \\
 \overline{HM} &\perp \overline{OC} \\
 &\Rightarrow \hat{HML} \equiv \hat{BOC} \equiv a
 \end{aligned}$$

Quindi, per il segmento \overline{OK} si ottiene: $\overline{OL} = \overline{OA} \cos b \cos a$

$$\overline{OK} = \overline{AO} \cos a \cdot \cos b + \overline{AO} \sin a \cdot \sin b \cos \hat{C}$$

segmento \overline{OK} :

$$\text{triangolo rettangolo OAK} \rightarrow \overline{OK} = \overline{OA} \cos(\hat{AOB}) \Rightarrow \overline{OK} = \overline{OA} \cos c$$

Quindi, l'uguaglianza (10) diventa:

$$\overline{OA} \cos c = \overline{AO} \cos a \cdot \cos b + \overline{AO} \sin a \cdot \sin b \cos \hat{C}$$

Applicando lo stesso procedimento ai tre vertici del triangolo sferico si ottengono tre equazioni, di cui due indipendenti, esprimenti il teorema del coseno:

$$\boxed{
 \begin{aligned}
 \cos c &= \cos a \cdot \cos b + \sin a \cdot \sin b \cdot \cos \hat{C} \\
 \cos a &= \cos b \cdot \cos c + \sin b \cdot \sin c \cdot \cos \hat{A}
 \end{aligned}
 } \quad (12)$$

TEOREMA DELLA COTANGENTE

Senza fornirne la dimostrazione si evidenzia il risultato del teorema della cotangente, in quanto risulta di comoda applicazione per triangoli sferici con un angolo diedro a sezione retta di $\pi/2$.

Si dimostra che, dato il triangolo sferico di cui a fig. 7, si ha:

$$\begin{aligned} \sin a \cdot \operatorname{ctgb} &= \cos a \cdot \cos \hat{C} + \sin \hat{C} \cdot \operatorname{ctg} \hat{B} \\ \sin c \cdot \operatorname{ctga} &= \cos c \cdot \cos \hat{B} + \sin \hat{B} \cdot \operatorname{ctg} \hat{A} \end{aligned} \quad (13)$$

Supponendo di avere: $\hat{C} = \frac{\pi}{2}$, si ottiene, nel caso della prima formulazione:

$$\sin a \cdot \operatorname{ctgb} = \operatorname{ctg} \hat{B}$$

CONVERSIONE DI COORDINATE SFERICHE

Coordinate equatoriali celesti → coordinate orizzontali

Si considerino note le coordinate di un punto sulla sfera celeste nel riferimento equatoriale celeste (α , δ) e l'angolo orario t all'istante di osservazione. Si vogliano ricavare le coordinate del medesimo punto nel riferimento orizzontale di un osservatore posto ad una latitudine, nota, ϕ . Riportando sulla sfera celeste entrambi i riferimenti, si evidenzia un triangolo sferico (fig.8) in cui:

- I vertici sono rappresentati da:
Polo boreale-Zenith-punto osservato
- Gli archi di cerchio massimo sono rappresentati da:
PB = Z : arco di meridiano nel riferimento eq.celeste e nel riferimento locale passante per le rispettive normali al piano di riferimento
PB = S : arco di meridiano nel riferimento eq. Celeste passante per la normale al piano equatoriale e il punto osservato
Z = S : arco di meridiano nel riferimento locale passante per lo Zenith e per il punto osservato

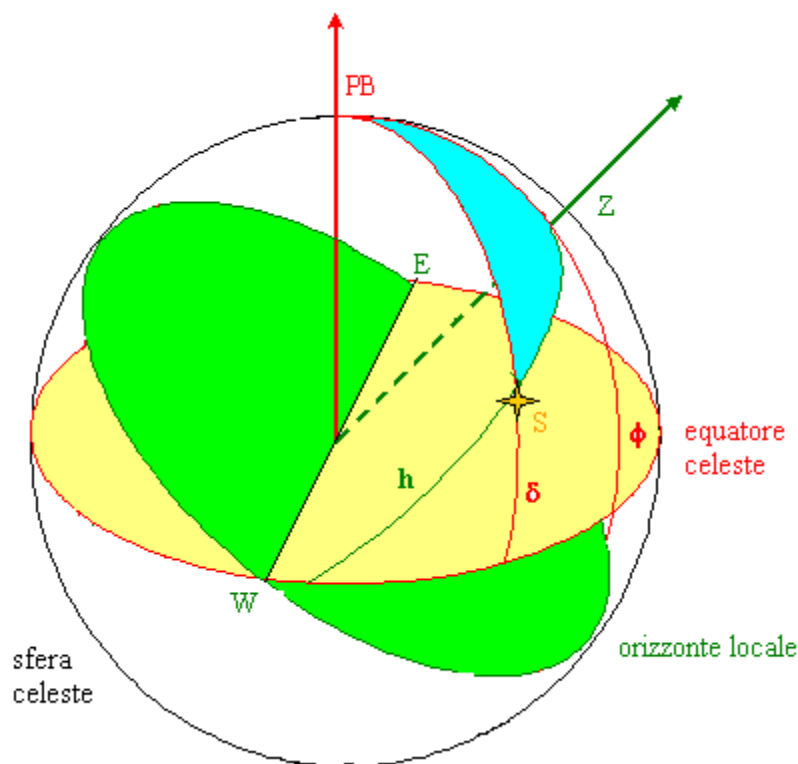


fig. 8 triangolo sferico individuato tra riferimento eq. celeste e rif. orizzontale

Al triangolo sferico così individuato è possibile applicare i teoremi della geometria sferica, al fine di individuare le due coordinate incognite, Azimuth e altezza (h).

In particolare, applicando il teorema del coseno prima, e il teorema del seno poi, si ottengono due equazioni in due incognite, cioè un sistema perfettamente determinato.

Dall'analisi di fig.9 si ha:

$$\cos(90^\circ - h) = \cos(90^\circ - \varphi) \cdot \cos(90^\circ - \delta) + \sin(90^\circ - \varphi) \cdot \sin(90^\circ - \delta) \cdot \cos t \quad (14)$$

$$\frac{\sin(360^\circ - Az)}{\sin(90^\circ - \delta)} = \frac{\sin t}{\sin(90^\circ - h)} \quad (15)$$

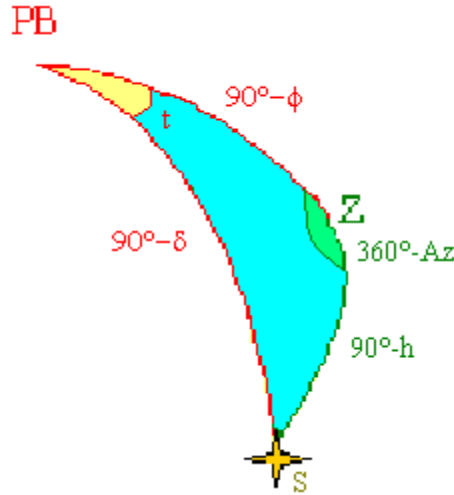


fig.9 Triangolo sferico risolutivo

Si presti attenzione al fatto che gli angoli evidenziati rimangono dipendenti sempre dalle medesime variabili, tuttavia la loro formulazione analitica dipende da come viene presa la direzione di Zenith sulla sfera celeste; se si fosse rappresentata una situazione assial-simmetrica rispetto all'asse boreale, l'angolo in Z sarebbe stato esattamente l'azimuth della stella; viceversa, l'angolo in PB sarebbe stato l'esplementare dell'angolo orario t .

Si osservi, inoltre che, trattandosi di equazioni trigonometriche in seno e coseno, presentano, due soluzioni e non una, per ciascuna incognita; analizzando con accuratezza la situazione corrente si è sempre in grado di selezionare la coppia di soluzioni corretta.

Coordinate orizzontali → coordinate equatoriali celesti

Si considerino note le coordinate di un punto sulla sfera celeste nel riferimento orizzontale (Az, h), l'angolo orario t all'istante di osservazione e la latitudine dell'osservatore φ . Si vogliano ricavare le coordinate del medesimo punto nel riferimento equatoriale celeste (α, δ).

Il triangolo sferico generato dall'intersezione dei meridiani relativi ai due sistemi di riferimento coincide con quello riportato in fig.9.

Si nota, tuttavia, che il triangolo permette di identificare solo una delle due coordinate equatoriali celesti, in particolare la declinazione della stella, attraverso il teorema del coseno:

$$\cos(90^\circ - \delta) = \cos(90^\circ - \varphi) \cdot \cos(90^\circ - h) + \sin(90^\circ - \varphi) \cdot \sin(90^\circ - h) \cdot \cos(360^\circ - Az)$$

La determinazione dell'ascensione retta richiede un'ulteriore informazione relativa al tempo sidereo dell'osservatore (LST). Infatti, noto il LST si ricava:

$$\alpha_{\text{stella}} = \text{LST} - t \quad (16)$$

Coordinate equatoriali celesti → coordinate eclittiche

TBI

NAVIGAZIONE INTERPLANETARIA

I sistemi di riferimento fin qui analizzati, assumono come centro della sfera celeste la Terra.

Laddove il moto del corpo in esame vada ben oltre la sfera d'influenza terrestre, è necessario considerare come origine del sistema di riferimento il Sole.

Un tipico esempio riguarda i viaggi interplanetari, quindi il moto di sonde quali la Viking (Marte-NASA), Magellan (Venere-NASA), Galileo (Giove-NASA), Mars Global Surveyor (Marte-NASA), Mars Express (Marte-ESA), Bepi Colombo (Mercurio-ESA) etc.

Il problema coinvolge sempre la determinazione di un corpo, pensato puntiforme, nello spazio. A differenza dei sistemi di riferimento fino ad ora considerati, per i quali la terza coordinata – r = distanza dal pianeta centrale – era assunta pari ad infinito, nella trattazione della navigazione interplanetaria diventa anch'essa un'incognita a tutti gli effetti.

Il piano di riferimento assunto coincide con il piano dell'eclittica; la direzione di riferimento, su tale piano, è ancora la direzione del punto d'Ariete γ .

Rimane la rappresentazione in coordinate sferiche, da cui la terna d'incognite è:

r = distanza del corpo dal sole (A.U.)

l_r = longitudine celeste del corpo = angolo nel piano dell'eclittica compreso tra la direzione di riferimento e la proiezione del vettore posizione sul piano dell'eclittica, contato in senso antiorario

b_r = latitudine celeste del corpo = angolo nel piano perpendicolare al piano dell'eclittica compreso tra la proiezione del vettore posizione sul piano dell'eclittica e il vettore posizione stesso

La determinazione della posizione della sonda in tale riferimento viene effettuata a bordo della sonda stessa, sia attraverso misurazioni dirette, sia attraverso elaborazione di misurazioni di bordo correlate alla terna incognita.

In particolare, a bordo della sonda è possibile effettuare misure di tipo angolare.

La sonda viene assunta, quindi come origine di un sistema di riferimento fittizio, con piano di riferimento parallelo al piano dell'eclittica e passante per la sonda e con direzione di riferimento parallela alla direzione individuata dalla congiungente sole-punto d'Ariete e passante per la sonda stessa (γ').

L'angolo β_r - latitudine fittizia della sole rispetto alla sonda - compreso tra la congiungente S-R e la proiezione di tale congiungente sul piano di riferimento fittizio viene direttamente misurato dalla strumentazione di bordo. Si ha, quindi, per la determinazione della prima coordinata incognita (fig.10):

$$b_r = -\beta_r \quad (17)$$

Il sistema di equazioni che permette di determinare le coordinate incognite rimanenti viene ricavato dalle ulteriori misure angolari effettuate a bordo, relative non solo alla posizione del sole rispetto alla sonda, ma anche di un ulteriore corpo celeste di cui siano note le Effemeridi.

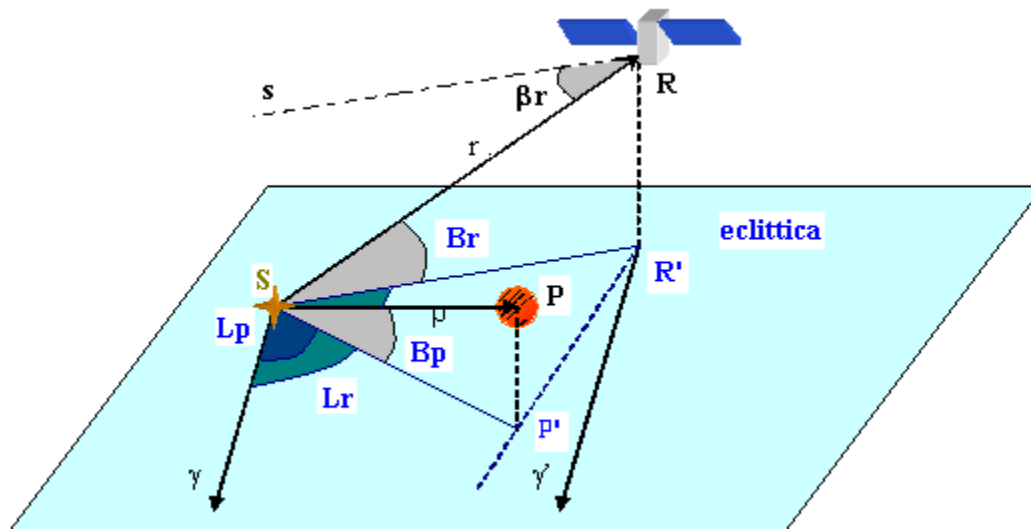


fig-10 Riferimento eliocentrico

Le Effemeridi tabulano, giorno per giorno, ascensione retta e declinazione dei pianeti del sistema solare. E' possibile reperire, con un grado d'incertezza maggiore, anche le Effemeridi d'asteroidi e comete.

Si faccia riferimento ad un generico pianeta, la cui posizione sia completamente nota all'istante d'osservazione, attraverso le sue tre coordinate (fig.10):

ρ = modulo della distanza sole - c.m. del pianeta (A.U.)

l_p = longitudine celeste del pianeta

b_p = latitudine celeste del pianeta

La sonda è in grado di misurare lo scostamento angolare della direzione $R'-P'$ dalla direzione fittizia del punto d'Ariete, γ' . Ugualmente, misura lo scostamento angolare della direzione $R'-S$ dalla direzione fittizia del punto d'Ariete.

In particolare si ottengono le seguenti ulteriori misure:

λ_s = longitudine apparente del sole = angolo misurato sul piano dell'eclittica, in senso antiorario, a partire dalla direzione fittizia del punto d'Ariete fino alla congiungente la proiezione della sonda sul piano eclittico (R') con il sole (S).

λ_p = longitudine apparente del pianeta = angolo misurato sul piano dell'eclittica, in senso antiorario, a partire dalla direzione fittizia del punto d'Ariete fino alla congiungente la proiezione della sonda sul piano eclittico (R') con la proiezione del pianeta sul piano eclittico (P').

Si consideri il triangolo piano $SR'P'$ ricavato da fig.10:

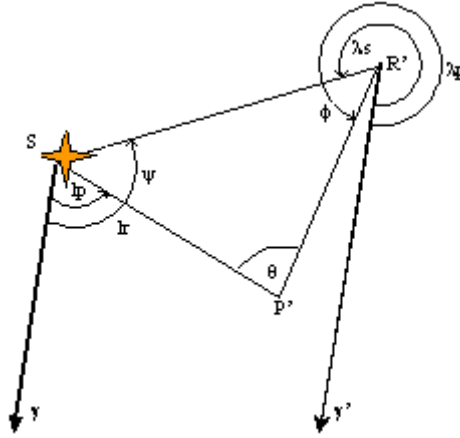


fig. 11 determinazione del modulo del vettore posizione

Per tale triangolo (fig.11) si possono scrivere le seguenti relazioni:

$$\begin{cases} \frac{\overline{SR'}}{\sin \vartheta} = \frac{\overline{SP'}}{\sin \phi} \\ \vartheta + \psi + \phi = \pi \\ \psi = l_r - l_p \\ \phi = \lambda_p - \lambda_s \end{cases} \quad (18)$$

Tuttavia tale sistema risulta indeterminato, essendo composto da quattro equazioni in cinque incognite ($\overline{SR'}$, ϕ , ϑ , θ , l_r).

L'equazione aggiuntiva può essere ricavata osservando che:

$$l_r + 2\pi - \lambda_s = \pi \quad (19)$$

in quanto gli angoli $\angle \hat{S}P'$ e $\angle \hat{R}'\gamma'$ sono coniugati interni delle rette parallele γ e γ' .

Dal sistema delle (18) e della (19) si ottiene:

$$\begin{cases} l_r = \lambda_s - \pi \\ \overline{SR'} = \sin(2\pi + l_p - \lambda_p) \frac{\overline{SP'}}{\sin(\lambda_p - \lambda_s)} \end{cases} \quad (20)$$

Da fig.10 si ricava facilmente che:

$$\overline{SR'} = r \cos(-\beta_r)$$

$$\overline{SP'} = \rho \cos(b_p)$$

Quindi le due coordinate incognite possono essere così derivate dalle misure effettuate a bordo della sonda:

$$\begin{cases} l_r = \lambda_s - \pi \\ r = \rho \frac{\cos b_p}{\cos \beta_r} \frac{\sin(l_p - \lambda_p)}{\sin(\lambda_p - \lambda_s)} \end{cases} \quad (21)$$

Effetti degli errori sistematici sugli errori di misura

Gli strumenti di bordo atti alle misurazioni angolari sono normalmente affetti da un errore sistematico noto ε .

La misura di una determinata variabile attraverso tali apparati comporta, quindi, una propagazione dell'errore fino alla grandezza derivata desiderata, in misura della sensitività della variabile finale alla variazione della variabile misurata.

L'errore finale sulla grandezza desiderata, viene valutato, quindi, in termini di errore quadratico medio, come segue:

$$\varepsilon_{\text{fin}} = \sqrt{\sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial g}{\partial x_i} \right)^2 \varepsilon_i^2} \quad (22)$$

dove:

g = grandezza finale derivata

\underline{x} = vettore (nx1) delle variabili misurate

$\underline{\varepsilon}$ = vettore (nx1) degli errori sistematici degli apparati atti a misurare le grandezze \underline{x}

Nel calcolo del modulo della distanza della sonda dal sole si ha:

$r = g$

$\underline{x} = [\beta_r \lambda_s \lambda_p]^T$

$\underline{\varepsilon} = [\varepsilon_r \varepsilon_s \varepsilon_p]^T$

Quindi, l'errore quadratico su r dovuto alle singole misure sarà dato dalla somma delle seguenti espressioni:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{r, \beta_r}^2 &= \left(\frac{\partial r}{\partial \beta_r} \right)^2 \varepsilon_{\beta_r}^2 = \left(\rho \cos b_p \frac{\sin(l_p - \lambda_p)}{\sin(\lambda_p - \lambda_s)} \frac{\sin \beta_r}{\cos^2 \beta_r} \right)^2 \varepsilon_{\beta_r}^2 \\ \varepsilon_{r, \lambda_s}^2 &= \left(\frac{\partial r}{\partial \lambda_s} \right)^2 \varepsilon_s^2 = \left(\frac{\rho \cos b_p}{\cos \beta_r} \frac{\sin(l_p - \lambda_p)}{\sin^2(\lambda_p - \lambda_s)} \cdot \cos(\lambda_p - \lambda_s) \right)^2 \varepsilon_s^2 \\ \varepsilon_{r, \lambda_p}^2 &= \left(\frac{\partial r}{\partial \lambda_p} \right)^2 \varepsilon_p^2 = \left(\frac{\rho \cos b_p}{\cos \beta_r} \frac{-\sin(l_p - \lambda_s)}{\sin^2(\lambda_p - \lambda_s)} \right)^2 \varepsilon_p^2 \end{aligned} \quad (23)$$

Volendo rendere minimo l'errore sulla derivazione della distanza dal sole, è necessario minimizzare i singoli addendi della sommatoria di cui alla (22), quindi:

L'errore dovuto alla misurazione della latitudine apparente della sonda è minimo quando la sonda si trova sul piano dell'eclittica ($\beta_r=0$).

Gli errori dovuti alla misurazione delle longitudini apparenti del sole e del pianeta sono entrambi minimi quando il pianeta e il sole si trovano, rispetto alla sonda, in quadratura ($\lambda_p - \lambda_s = \pi/2$).