

Introduzione alla meccanica quantistica

David Vitali

Dipartimento di Fisica, Unità INFN,
Università di Camerino



La meccanica quantistica ha rivoluzionato la descrizione dell'universo fisico; **il mondo microscopico (atomi, molecole, particelle) si comporta in modo bizzarro**, in maniera molto diversa da come si comportano gli oggetti macroscopici della nostra esperienza quotidiana. \Rightarrow **paradossi e bizzarrie**, tuttora un fertile argomento di ricerca in fisica.

Nascita della m.q. stimolata da una serie di **esperimenti inspiegabili** dal punto di vista classico (irraggiamento del corpo nero, righe spettrali atomiche, effetto fotoelettrico,...)

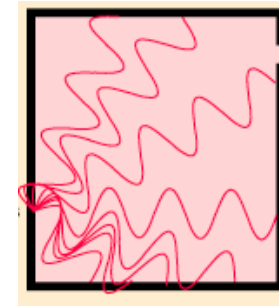
Fase “prequantistica” : 1900-1925: nuovi concetti vengono sviluppati ma **non inquadrati in uno schema** compiuto (quanti di Planck, atomo di Bohr, onde di materia di De Broglie.....).

Meccanica quantistica attuale: 1925-1930: Sviluppo di una **teoria coerente** in grado di fornire una descrizione consistente del mondo microscopico (Schrödinger, Heisenberg, Bohr, Born, Dirac....).

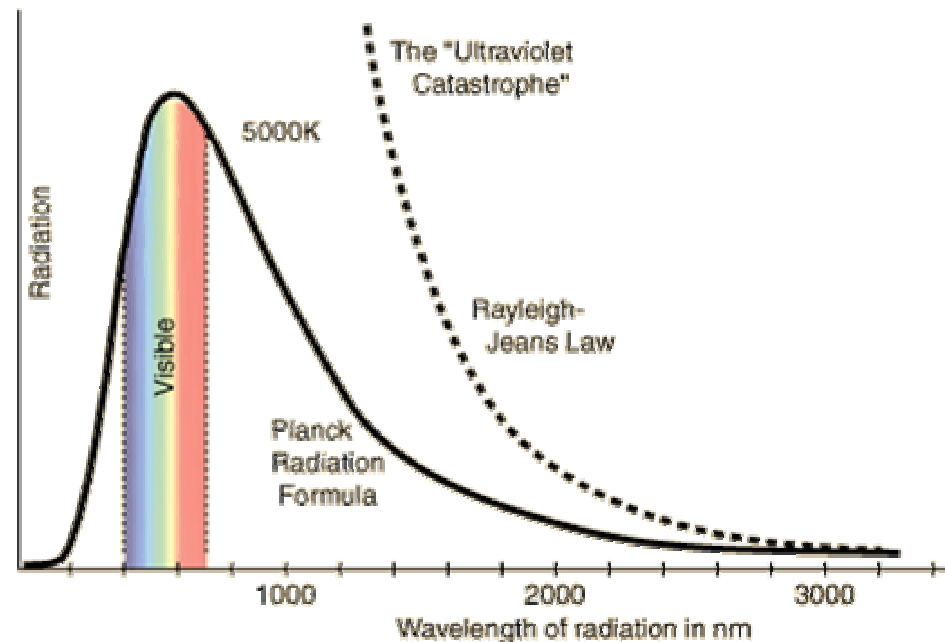
IL PROBLEMA DEL CORPO NERO

Irraggiamento termico: ogni corpo alla temperatura T emette radiazione elettromagnetica a tutte le frequenze, perché è composto di particelle cariche in moto accelerato a causa dell'agitazione termica.

Radiazione di corpo nero: quella emessa da un oggetto che assorbe TUTTA la radiazione incidente su di esso. E' indipendente dalla forma, dal materiale e dalla radiazione incidente. Ben descritto da una cavità.

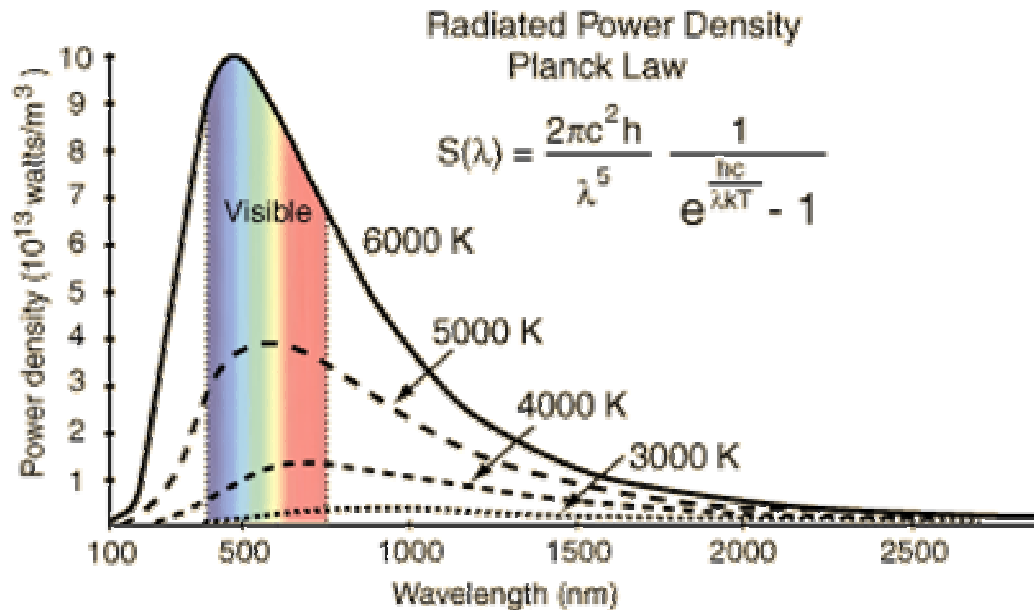
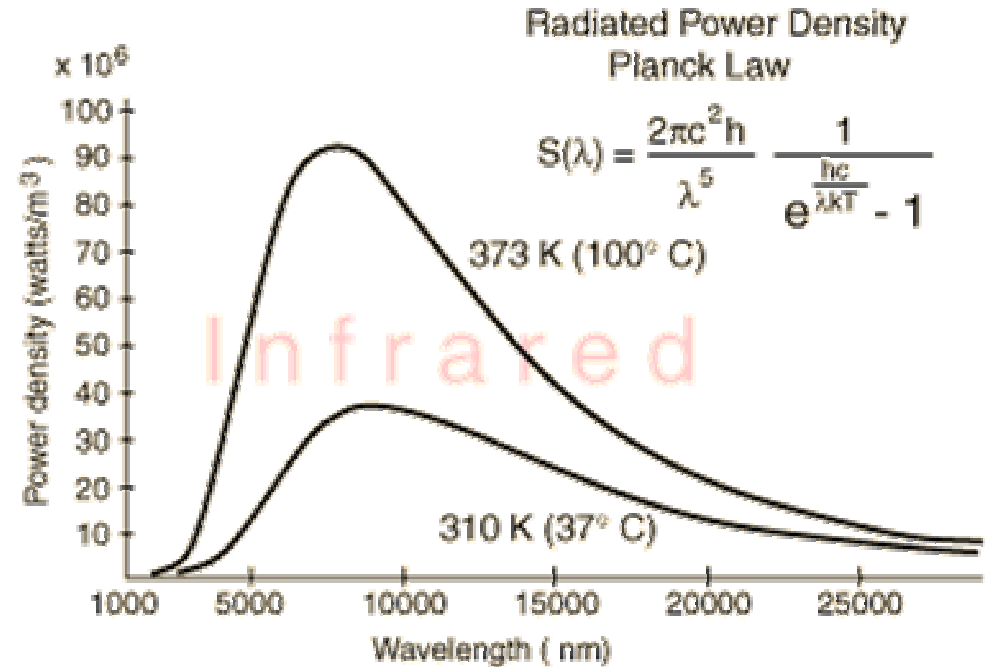


Ciò che non si riusciva a spiegare era la forma della **distribuzione spettrale dell'energia e.m. emessa** (potenza per unità di frequenza, o per unità di lunghezza d'onda) verificata sperimentalmente.



A temperatura ambiente, l'irraggiamento termico si concentra nella regione infrarossa dello spettro elettromagnetico.

Aumentando la temperatura, l'energia emessa si distribuisce su lunghezze d'onda minori.



Legge di Wien: L'energia e.m. emessa da un corpo a temperatura T è massima alla lunghezza d'onda:

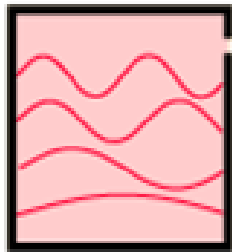
$$\lambda_m = \frac{2.898 \text{ mm} \cdot \text{K}}{T}$$

Nel 1900 Planck ricavò la distribuzione spettrale dell'irraggiamento termico che riproduceva perfettamente i dati sperimentali. Per ricavare tale espressione però doveva introdurre **un'ipotesi rivoluzionaria**: il corpo irraggiante emetteva e assorbiva energia elettromagnetica in **“pacchetti di energia”, in quantità discrete, detti quanti**. L'energia di un quanto è proporzionale alla frequenza della radiazione e.m., ν

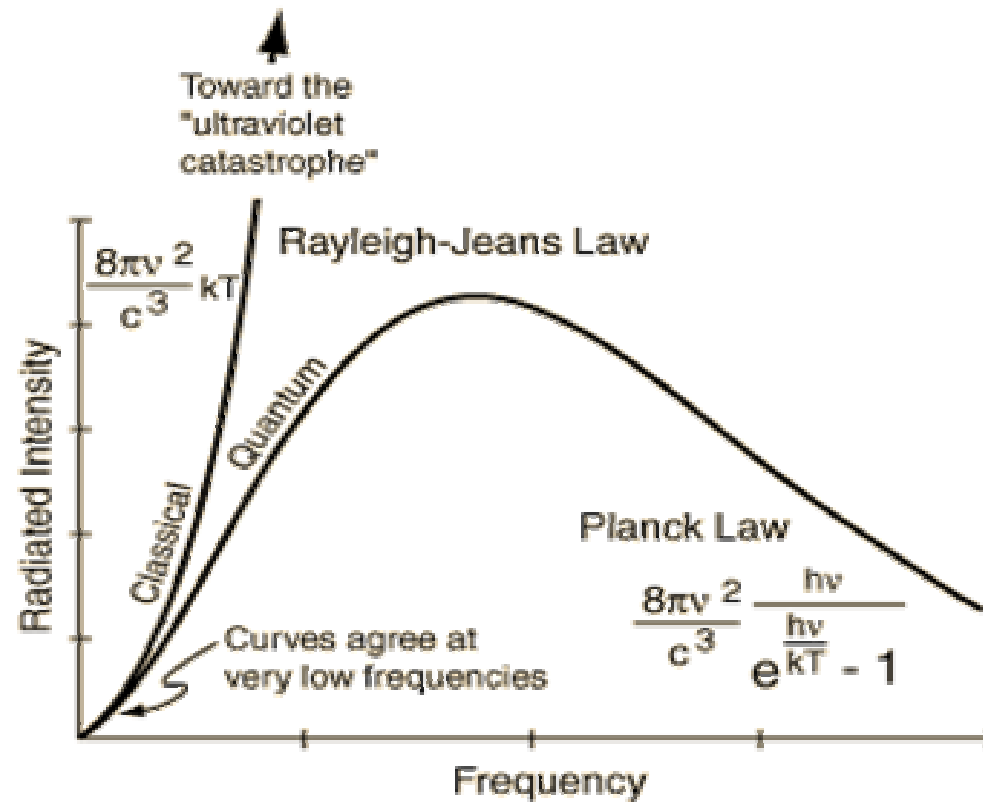
$$E = h\nu$$

$h = 6.626 \cdot 10^{-34} \text{ J}\cdot\text{s} \Rightarrow$ il quanto di energia è piccolo su scale macroscopiche, cioè **non ci accorgiamo della “granularità” dell'energia a livello macroscopico**

Radiation modes in a hot cavity provide a test of quantum theory



	#Modes per unit frequency per unit volume	Probability of occupying modes	Average energy per mode
CLASSICAL	$\frac{8\pi\nu^2}{c^3}$	Equal for all modes	kT
QUANTUM	$\frac{8\pi\nu^2}{c^3}$	Quantized modes: require $h\nu$ energy to excite upper modes, less probable	$\frac{h\nu}{e^{\frac{h\nu}{kT}} - 1}$



Viene introdotta per la prima volta l'idea che le **grandezze fisiche** (in questo caso l'energia, ma in seguito non solo questa) **siano quantizzate**, cioè possano assumere valori discreti e non più continui, come avveniva nella meccanica classica.

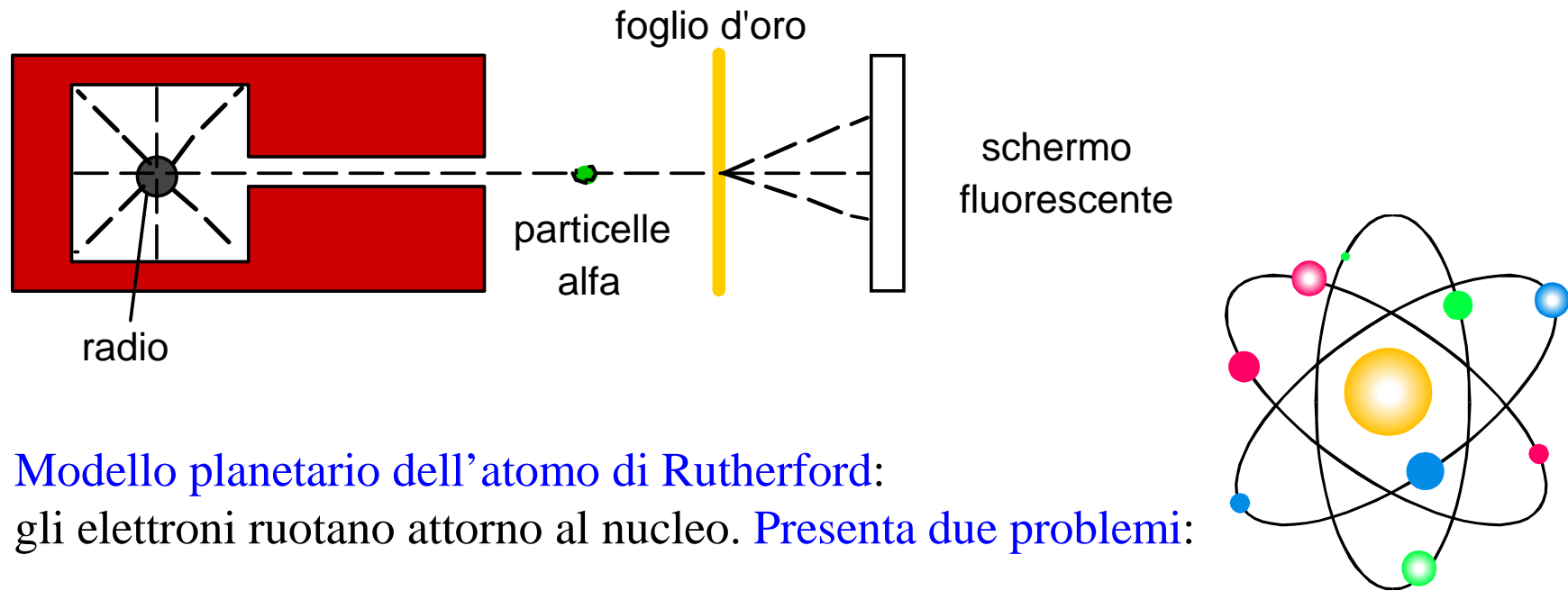
IL PROBLEMA DELL'ATOMO

Alla fine del 1800, l'idea che la materia fosse costituita da atomi era diffusa e applicata in fisica e chimica, ma non era ancora universalmente accettata (critiche di Mach e Ostwald). Non c'era nessun'indicazione sperimentale, per cui era considerata solo come un modello interpretativo

Conferma definitiva: spiegazione di Einstein (1905) del moto browniano (moto erratico e casuale di particelle di polline in sospensione in un liquido). Esso è causato dai continui urti della particella con gli atomi del liquido in agitazione termica. Le osservazioni suggerivano **atomi con un raggio dell'ordine di 1 Angstrom = 10^{-10} m.**

Scoperta dell'elettrone, carico negativamente, da parte di Thomson (1898).

Esperienza di Rutherford (1911): particelle alfa (nuclei di elio) emesse ad alta energia verso una lamina d'oro. La presenza di particelle deviate a grandi angoli suggerisce che la carica positiva sia concentrata in una **regione molto piccola (10^{-15} m) dell'atomo, il nucleo.**



Modello planetario dell'atomo di Rutherford:

gli elettroni ruotano attorno al nucleo. Presenta due problemi:

- 1) **Non è stabile**, perché gli elettroni ruotando, emettono radiazione elettromagnetica, perdendo energia e cadendo sul nucleo.
- 2) A causa di ciò **lo spettro della radiazione emessa dovrebbe essere continuo**. Invece, atomi di un gas eccitato da scariche elettriche emettono radiazione sottoforma di un **insieme discreto di righe spettrali**. Inoltre, dopo collisioni tra atomi le frequenze di emissione di tutti gli elettroni dovrebbero cambiare, invece un atomo di gas (10^8 collisioni/sec) emette sempre le stesse righe.

Problemi risolti da **Bohr (1913)** formulando un modello di atomo basato su **tre nuovi postulati** da aggiungere al modello planetario di Rutherford

1) Esiste un insieme discreto di orbite stabili, (**stati stazionari**) per gli elettroni, con energie E_n , in cui essi non irradiano.

2) L'atomo **irraggia solo nella transizione** da uno stato stazionario all'altro, emettendo radiazione di frequenza

$$\nu = \frac{E_f - E_i}{h}$$

3) Il **momento angolare** dell'elettrone nelle orbite stabili è **quantizzato** secondo la regola (orbite circolari)

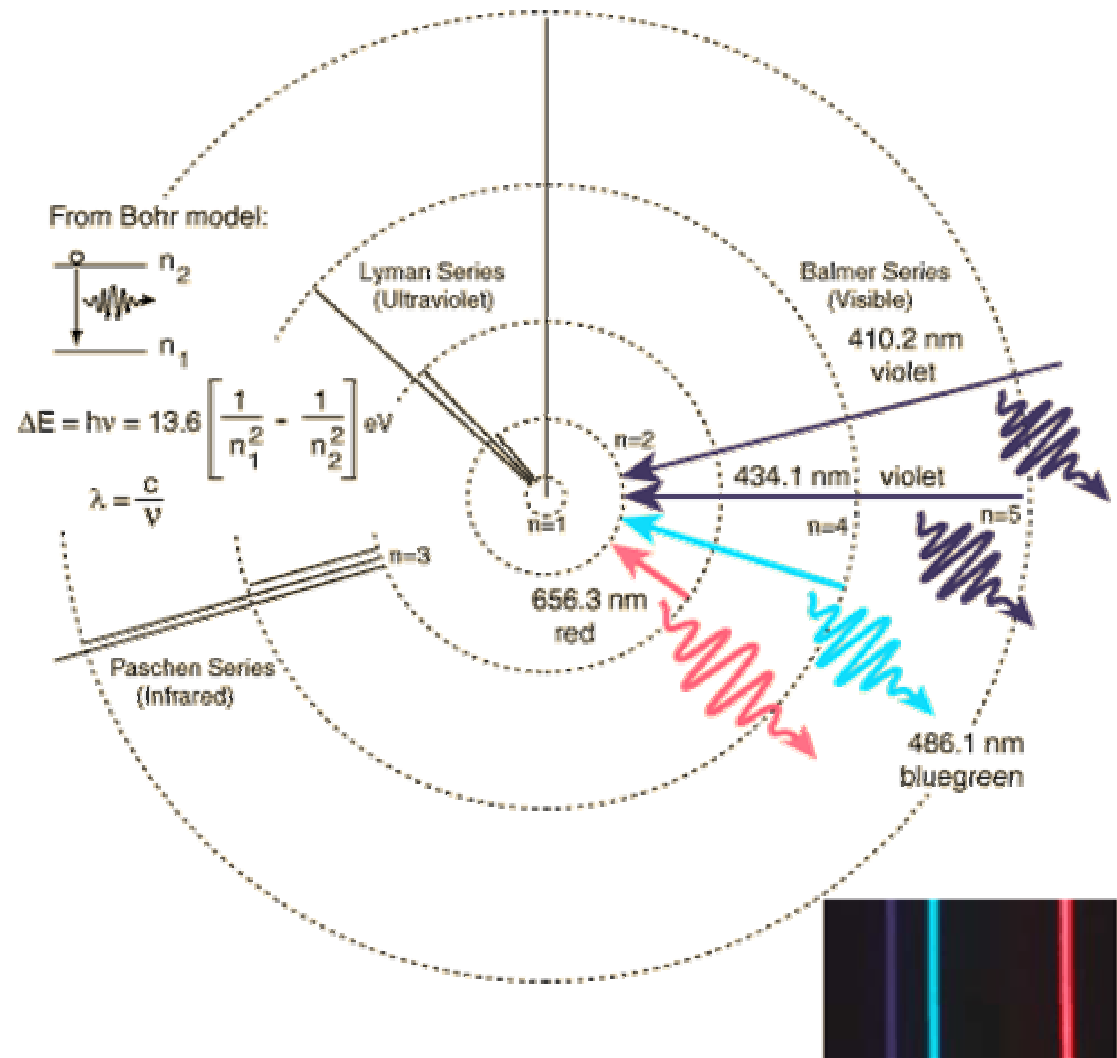
$$L_n = mv_n r_n = n\hbar = n \frac{h}{2\pi}$$

\Rightarrow quantizzazione dei raggi delle orbite circolari r_n e delle energie E_n

$$r_n = n^2 \frac{a_0}{Z} \quad a_0 = \frac{\hbar^2}{mke^2} = \text{raggio di Bohr} \quad E_n = -\frac{k^2 e^4 m}{\hbar^2} \frac{Z^2}{n^2}$$

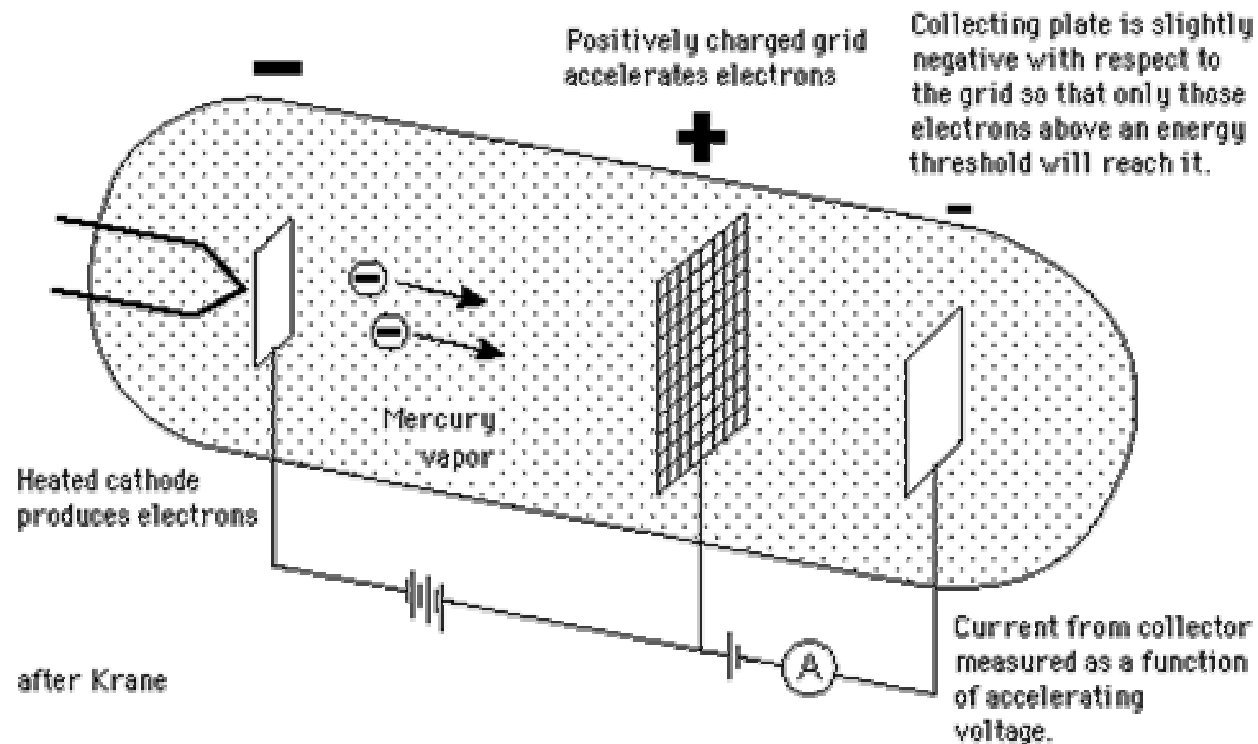
La formula empirica di Rydberg-Ritz per la frequenza delle righe spettrali dell'atomo di idrogeno viene così giustificata.

$$\nu = \frac{Z^2 k^2 e^4 m}{2\pi\hbar^3} \left(\frac{1}{n_1^2} - \frac{1}{n_2^2} \right)$$



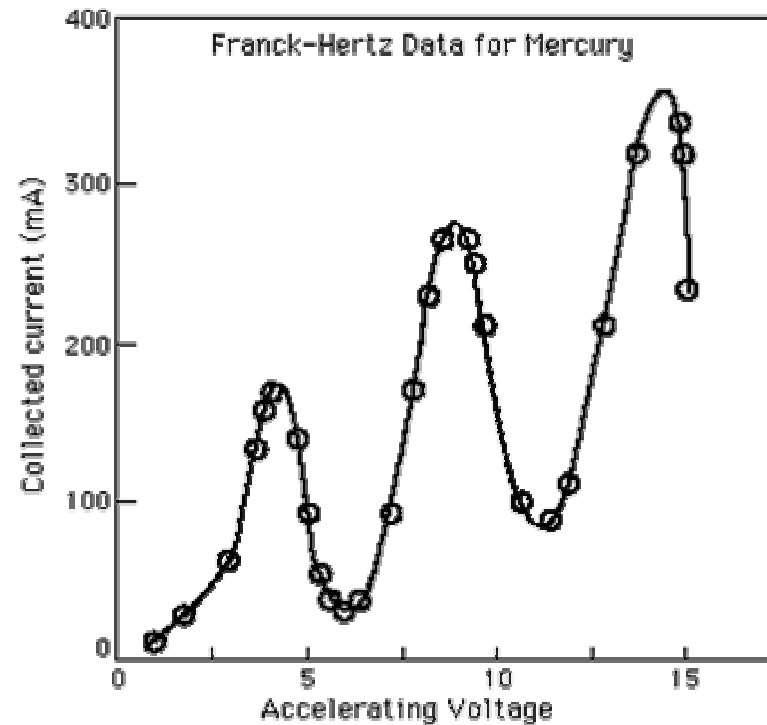
ESPERIMENTO DI FRANCK-HERTZ (1914)

Altra conferma teoria di Bohr: bombardando con elettroni gli atomi, essi possono prendere solo esattamente energie di eccitazione. J. Franck e G. Hertz in particolare usarono elettroni accelerati verso una griglia carica positivamente, che attraversava un tubo di vetro riempito di vapori di mercurio.



La corrente aumenta all'aumentare del voltaggio accelerante tra il catodo emittente e la griglia. Quando tale voltaggio raggiunge 4.9 volts, la corrente scende improvvisamente, indicando la presenza di un fenomeno che fa “scompare” l'energia cinetica degli elettroni e non fa loro raggiungere la griglia: **l'eccitazione per urto di un elettrone legato degli atomi di mercurio.**

I salti di corrente avvengono quindi per multipli di 4.9 volts, che corrisponde ad una transizione ultravioletta di lunghezza d'onda pari a 254 nm.

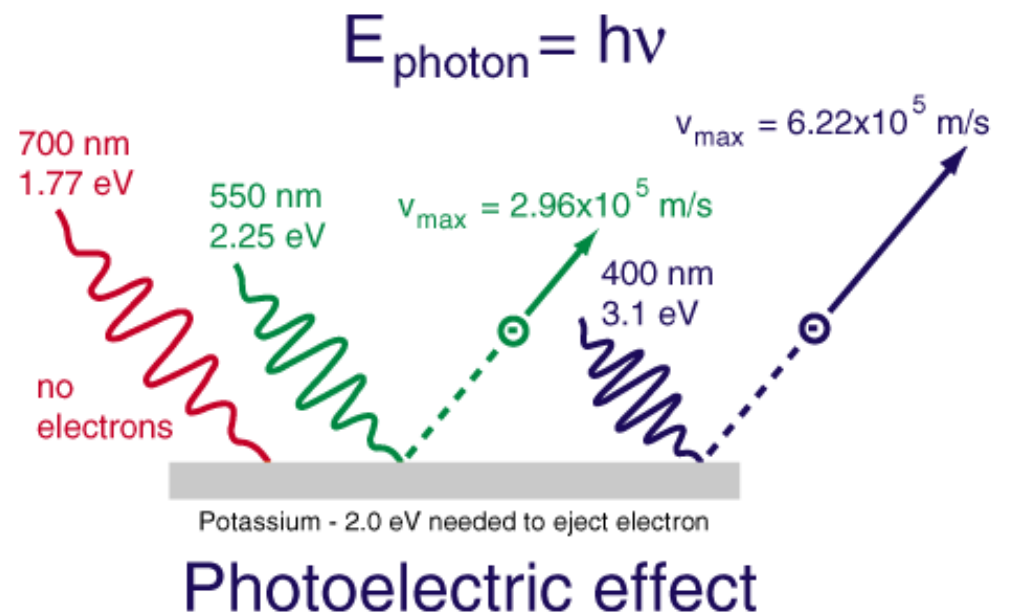


L'EFFETTO FOTOELETTRICO

Effetto fotoelettrico: emissione di elettroni da un metallo che si verifica quando esso è colpito da radiazione e.m. con una frequenza superiore ad un certo valore di soglia che dipende dal tipo di metallo. (Sfruttato oggi nelle cellule fotoelettriche e per l'uso dell'energia solare).

Fatti inspiegabili con l'usuale descrizione ondulatoria:

- 1) l'energia cinetica degli elettroni uscenti dipende solo dalla frequenza della radiazione e non dalla sua intensità.
- 2) L'emissione di elettroni avviene in maniera istantanea e non c'è mai ritardo, indipendentemente dalla intensità della radiazione



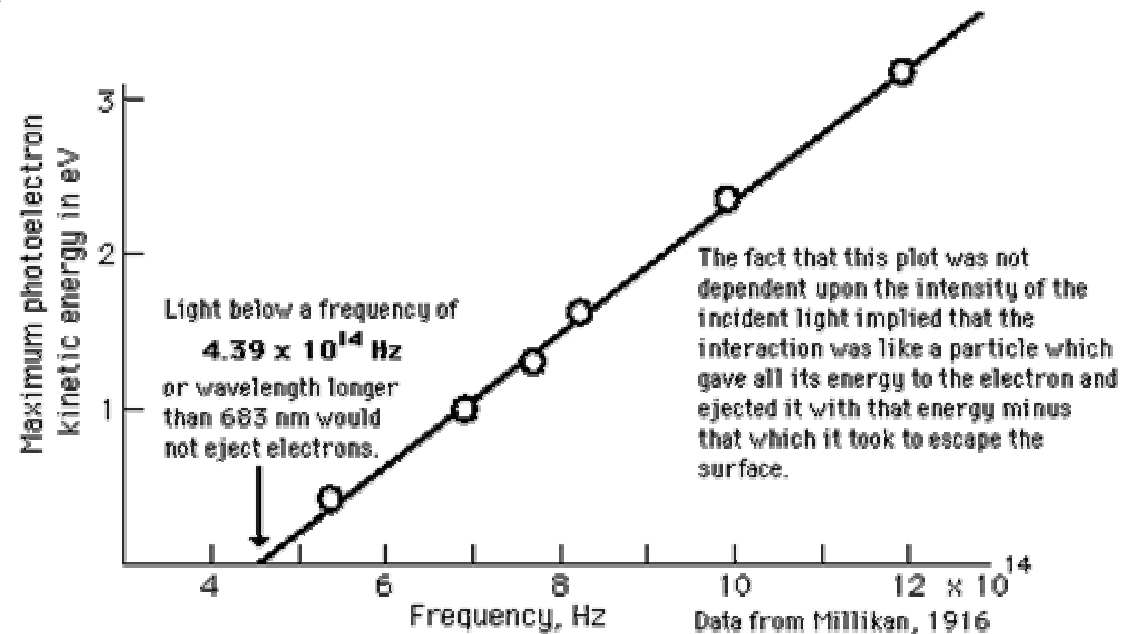
Einstein spiegò il fenomeno portando alle estreme conseguenze l'idea di quantizzazione di Planck: **la radiazione è costituita da quanti di energia, (“licht-quanten”) in seguito chiamati FOTONI.**

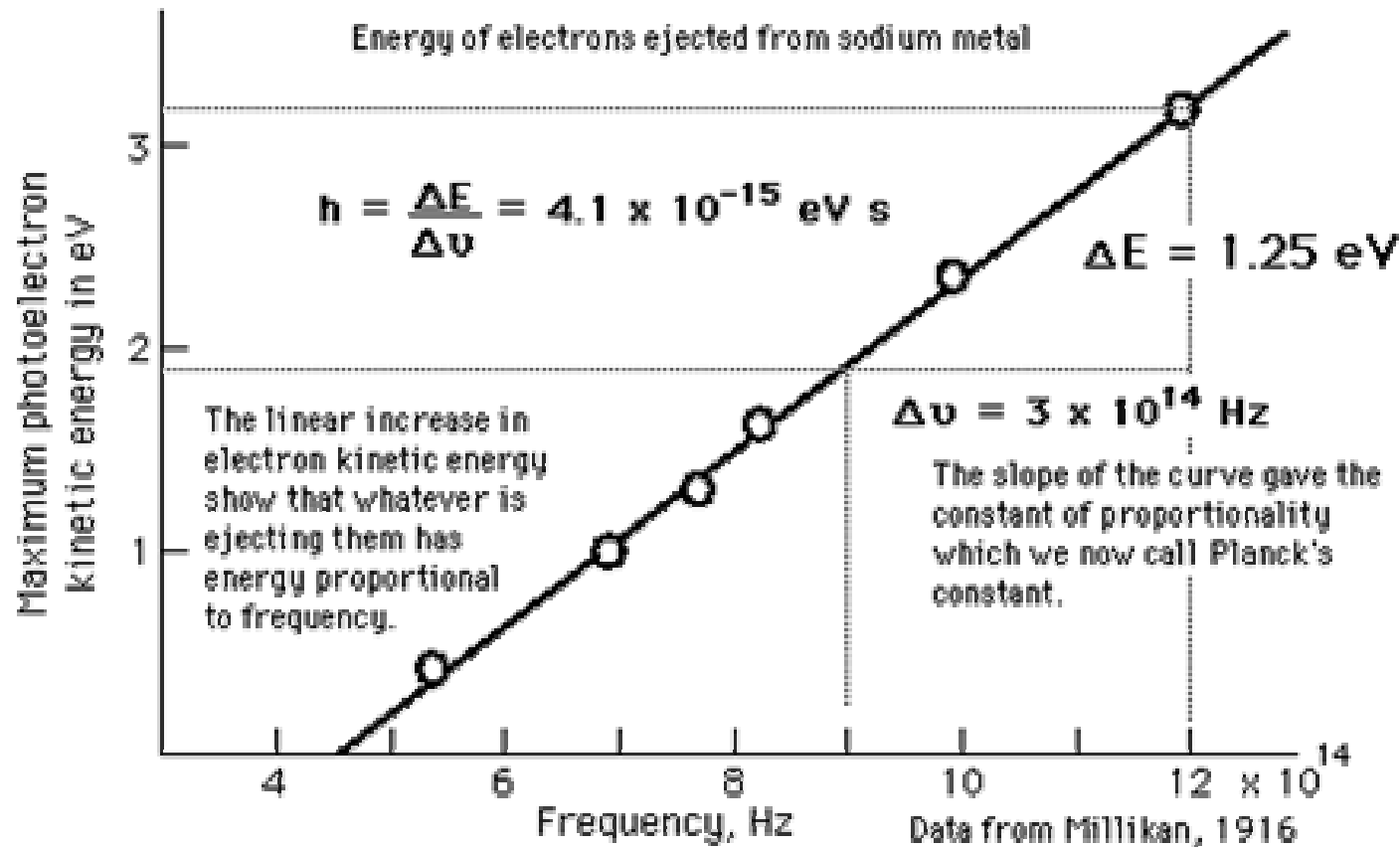
Spiegazione dell'effetto fotoelettrico: un elettrone assorbe un fotone di energia $h\nu$ e quando tale energia è superiore al lavoro di estrazione dal metallo W , viene espulso da questo $E_c^{\max} = h\nu - W$

La frequenza di soglia si ottiene quando $E_c^{\max} = 0$, e quindi

$$\nu_{th} = \frac{W}{h}$$

L'intensità della luce non influenza tale processo, ma solo la corrente, cioè il flusso d'elettroni.





Ritorno ad una descrizione corpuscolare della radiazione (Newton). Come è in accordo ciò con la descrizione dei fenomeni d'interferenza e diffrazione della luce, perfettamente spiegati dalla descrizione ondulatoria della radiazione?
Prima comparsa del dualismo onda-particella.

ONDE DI MATERIA DI DE BROGLIE (1924)

La radiazione elettromagnetica presenta sia aspetti ondulatori sia corpuscolari. Per simmetria ci si può aspettare che ciò accada anche per la materia.

Ipotesi di de Broglie (1924): la materia può comportarsi come un' onda: **ad ogni particella che si muove con quantità di moto p , viene associata un'onda piana di lunghezza d'onda**

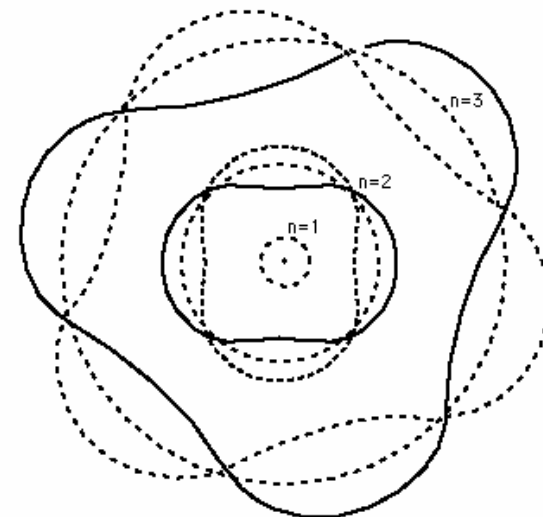
$$\lambda = \frac{h}{p} = \frac{h}{mv}$$

In tal modo la condizione di quantizzazione del momento angolare di Bohr equivaleva ad imporre la condizione di **onda stazionaria lungo la circonferenza dell'orbita**.

$$n\lambda = n \frac{h}{mv} = 2\pi r \quad \Rightarrow \quad mvr = n \frac{h}{2\pi}$$

Le particelle possono presentare quindi fenomeni di interferenza e diffrazione.

La diffrazione degli elettroni fu verificata sperimentalmente la prima volta nel 1927 da Davisson e Germer.

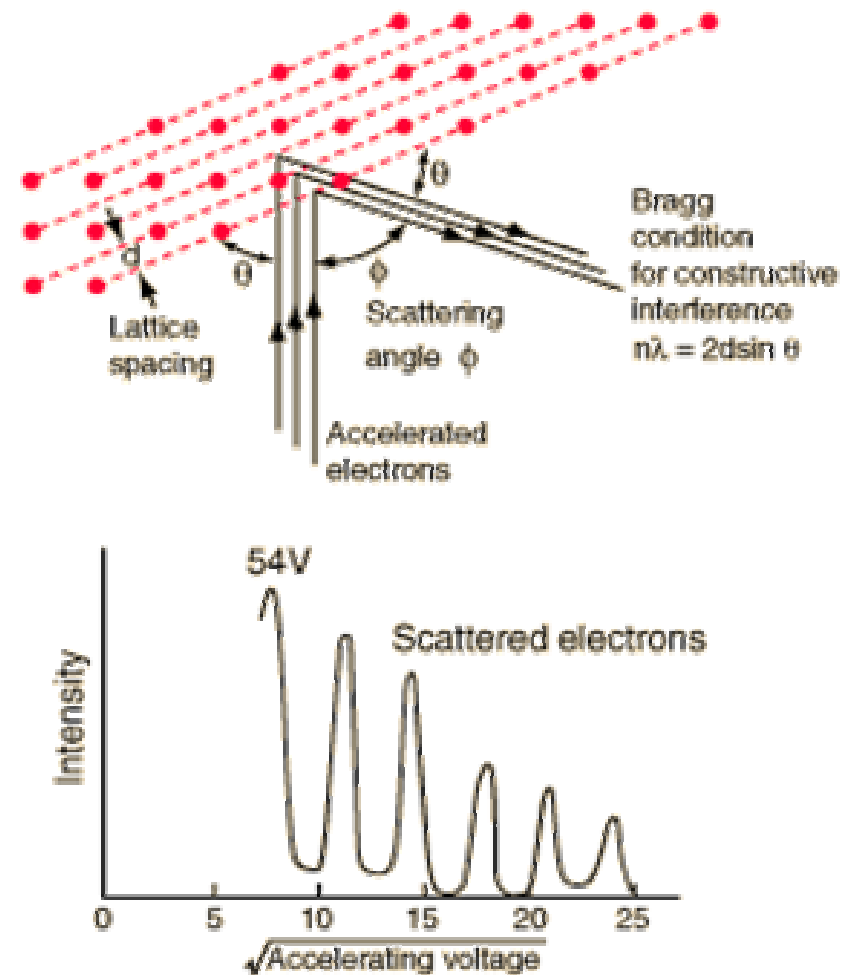


Esperimento di Davisson e Germer (1927)

Un fascio di elettroni era diretto verso il cristallo di nickel, che poteva essere ruotato per misurare la distribuzione angolare degli elettroni. Si trovò che a certi angoli si aveva un picco nell'intensità degli elettroni diffusi, in accordo con la condizione di interferenza costruttiva tra le “onde elettroniche” riflesse da diversi piani reticolari, in maniera identica a quello accade con i raggi X.

λ per fasci di elettroni:

Trascurando correzioni relativistiche, v è determinata da V del tubo catodico:
 $mv^2/2 = eV \Rightarrow \lambda = h/(2meV)^{1/2} = (150/V[\text{volt}])^{1/2} \text{ \AA}$, così a potenziale accelerante 10,000 volt $\Leftrightarrow \lambda = 0.122 \text{ \AA}$.
Stesso ordine dei RX duri



CONCETTI EMERSI NELLE TEORIE PREQUANTISTICHE

Quantizzazione: alcune variabili fisiche (energia, momento angolare) possono assumere valori discreti.

Dualismo onda-corpuscolo: la materia e la radiazione presentano comportamenti spiegabili talvolta in termini di moto ondulatorio e talvolta in termini di moto di particelle.

La meccanica quantistica fornisce una giustificazione più profonda di tali concetti e li inserisce in un quadro più generale, basato sul formalismo degli spazi di Hilbert.

Si può avere però un'idea del suo significato analizzando alcuni dei nuovi concetti fondamentali:

- **Funzione d'onda**
- **Principio di sovrapposizione**
- **Principio di complementarità**

LA FUNZIONE D'ONDA

Fisica classica: stato di una particella descritto dalla posizione r e dalla sua velocità v

Fisica quantistica: stato di una particella descritto dalla sua **FUNZIONE D'ONDA** $\psi(r)$, funzione complessa delle tre coordinate spaziali, che fornisce la chiave per spiegare il dualismo onda-particella

Significato fisico: il suo modulo quadrato dà la **PROBABILITÀ** di trovare la particella nel punto r .

La probabilità compare a livello fondamentale: la teoria quantistica fa **predizioni sulla probabilità dei possibili risultati** di una misura; non può predire **quale** sarà esattamente il risultato di tale misura. Le verifiche sperimentali devono essere sempre di natura statistica.

Particella può essere delocalizzata come un'onda: **“onda di probabilità”**

Le proprietà corpuscolari si manifestano al momento della misura della posizione: si osserva sempre un “puntino” (macchia in una lastra fotografica, traccia in una camera a bolle, “click” di contatori geiger)

Il processo di misura assume un'importanza fondamentale, che non aveva in fisica classica.

Misura: interazione con un apparato = sistema macroscopico, classico, che amplifica e rende rivelabili fenomeni microscopici. A causa della macroscopicità dell'apparato, la misura in genere perturba lo stato di una particella; ad esempio la misura della posizione localizza la particella (“collasso” della funzione d'onda)

Il concetto di funzione d'onda è anche alla base della quantizzazione: equazione di Schrödinger = equazione d'onda soddisfatta solo per valori discreti dell'energia (analogia con l'idea delle onde stazionarie nell'atomo di idrogeno di De Broglie)

PRINCIPIO DI SOVRAPPOSIZIONE

Se si considerano due stati possibili di una particella, $\psi(\vec{r}) = \psi_1(\vec{r}) + \psi_2(\vec{r})$
anche la loro sovrapposizione lineare è uno stato possibile

Tale proprietà è valida e naturale per le onde, mentre è di significato bizzarro per le particelle (una particella in due regioni dello spazio simultaneamente?)

Fisica classica: unica sovrapposizione concepibile è la **miscela statistica (sovrapposizione incoerente)** = particella nello stato 1 o in 2 (è in uno dei due stati, ma non so quale) \Rightarrow si sommano le probabilità $P_{12} = P_1 + P_2$.

Sovrapposizione quantistica (coerente): gli stati 1 e 2 non rappresentano due evenienze mutuamente esclusive, ma sono in un certo senso **simultaneamente presenti**. Manifestazione di tale simultanea presenza è la **capacità di mostrare fenomeni d'interferenza**. Si sommano le funzioni d'onda (ampiezze) e non le probabilità

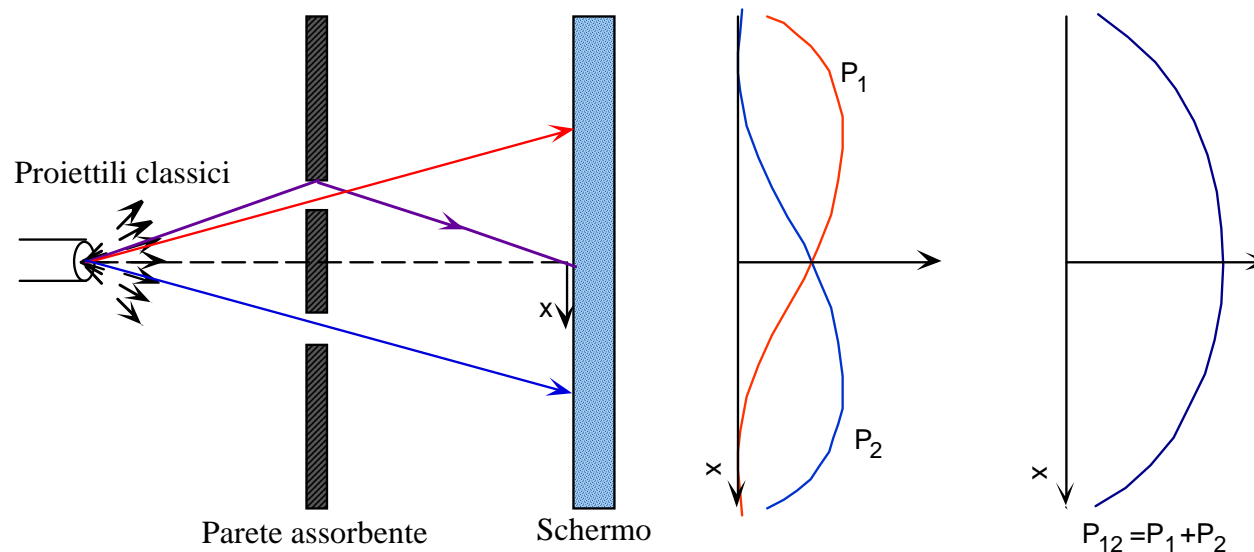
$$P_{12} = |\psi_1(\vec{r}) + \psi_2(\vec{r})|^2 = |\psi_1(\vec{r})|^2 + |\psi_2(\vec{r})|^2 + 2|\psi_1(\vec{r})||\psi_2(\vec{r})|\cos\delta \neq P_1 + P_2$$

ANALISI DELL'ESPERIMENTO DI INTERFERENZA CON DUE FENDITURE

Esperimento basilare che permette di descrivere l'essenza della meccanica quantistica (La Fisica di Feynman, vol. 3, Zanichelli 2001).

1) Esperimento fatto con “proiettili classici”

(particelle sufficientemente grandi) Sorgente non buona che emette le particelle su un grande angolo. P_1 (P_2) = distribuzione dei proiettili sullo schermo quando solo la fenditura in alto (in basso) è aperta. P_{12} = distribuzione dei proiettili sullo schermo quando sono aperte entrambe le fenditure. In questo caso **non si osserva interferenza**, cioè $P_{12} = P_1 + P_2$

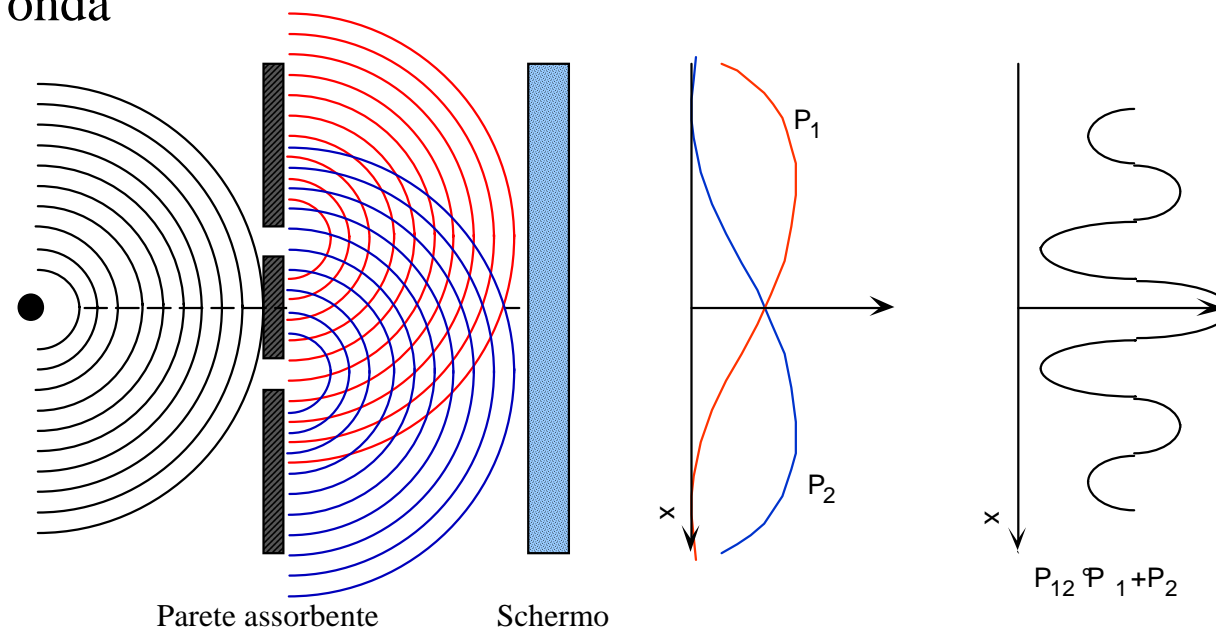


2) Esperimento con onde classiche: P_1 (P_2) = distribuzione dell'intensità dell'onda (energia per unità di tempo) sullo schermo quando solo la fenditura in alto (in basso) è aperta. P_{12} = distribuzione dell'intensità dell'onda sullo schermo quando sono aperte entrambe le fenditure.

$P_{12} \neq P_1 + P_2$ e quindi **si osserva interferenza**: $P_{12} = |A_1 + A_2|^2$ (A_1 e A_2 = ampiezze delle onde uscenti dalle due fenditure).

Massimi di P_{12} corrispondono ad interferenza costruttiva: le distanze del punto dello schermo dalle due fenditure differiscono di un numero intero di lunghezze d'onda.

Minimi di P_{12} corrispondono ad interferenza distruttiva: le distanze del punto dello schermo dalle due fenditure differiscono di un multiplo dispari di mezze lunghezze d'onda.



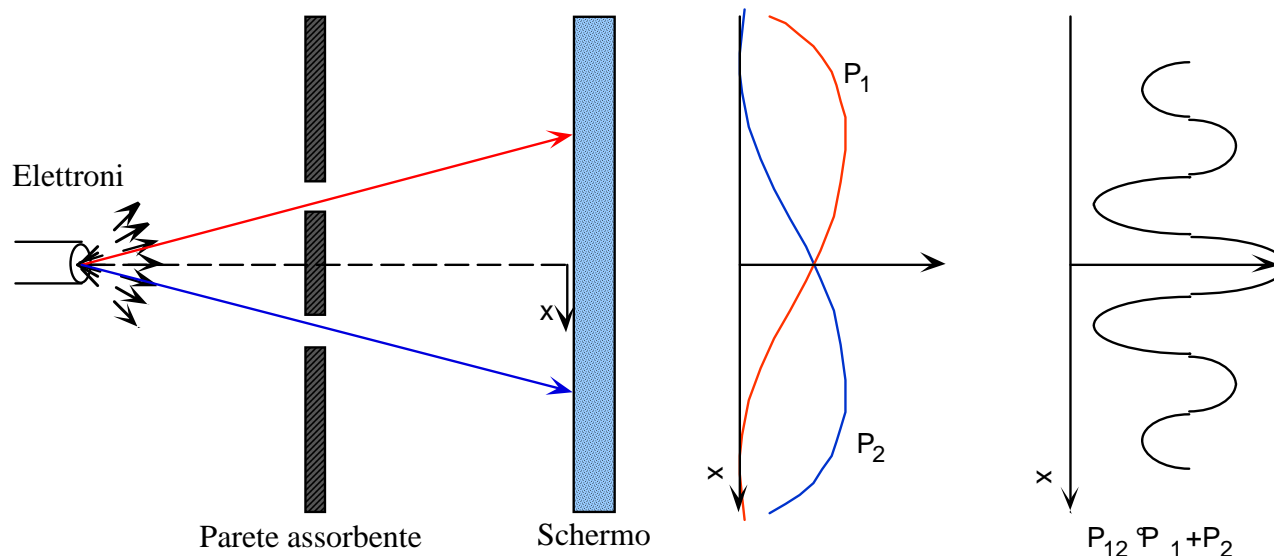
3) Esperimento con elettroni: (o anche fotoni, protoni, neutroni, atomi)

P_1 (P_2) = distribuzione degli elettroni sullo schermo quando solo la fenditura in alto (in basso) è aperta.

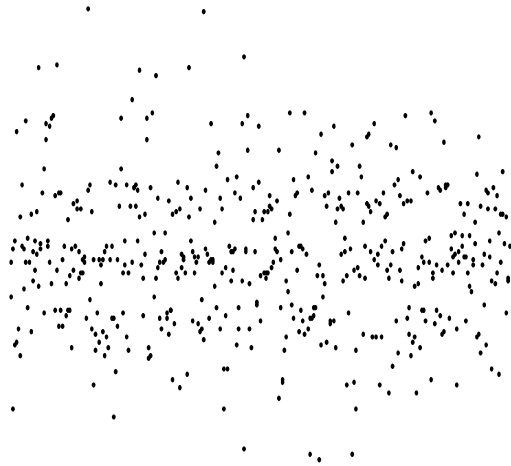
P_{12} = distribuzione degli elettroni sullo schermo quando sono aperte entrambe le fenditure. $P_{12} \neq P_1 + P_2$ e quindi **si osserva interferenza, in analogia con il caso ondulatorio**

$$P_{12} = |\psi_1(\vec{r}) + \psi_2(\vec{r})|^2 = |\psi_1(\vec{r})|^2 + |\psi_2(\vec{r})|^2 + 2|\psi_1(\vec{r})||\psi_2(\vec{r})|\cos\delta \neq P_1 + P_2$$

Però gli elettroni vengono rivelati uno alla volta, con dei “click” sul rivelatore, identici tra di loro, che si verificano a tempi casuali, ma con frequenza media costante dipendente dalla sorgente.



La figura di interferenza si forma lentamente, man mano che, **uno per volta**, gli elettroni si accumulano sullo schermo.



500 elettroni (simul.)

1500 elettroni (simul.)

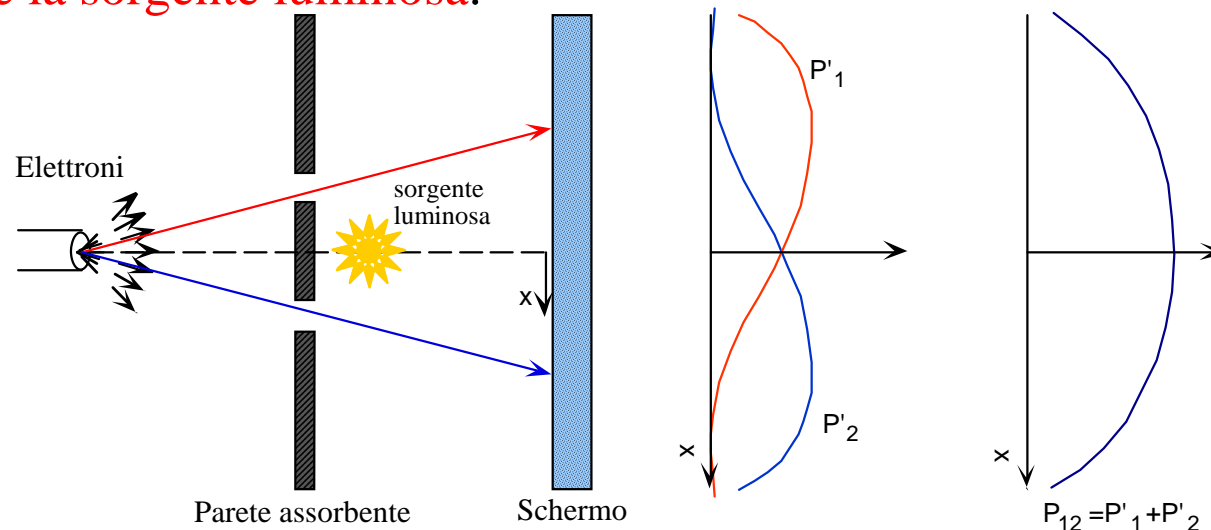
2500 elettroni (simul.)

Non si può affermare che ciascun elettrone passa o nella fenditura in alto o in quella in basso. Quando anche l'altra fenditura è aperta, essa influenza in modo complicato la distribuzione risultante sullo schermo: alcuni punti (ad esempio al centro) ricevono molti più elettroni a causa dell'interferenza costruttiva; altri punti, per interferenza distruttiva, ne ricevono meno.

PRINCIPI DI COMPLEMENTARITÀ E INDETERMINAZIONE

Modifichiamo ora l'esperimento per cercare di **sapere dove passa l'elettrone**. Aggiungiamo una sorgente luminosa dopo le due fenditure. L'elettrone, essendo carico, diffonde la luce: se passa in alto (1), la luce è deviata verso l'alto, se l'elettrone passa in basso (2), la luce è deviata verso il basso ("which-way information", luce = rivelatore di cammino).

P_1' (P_2') = distribuzione degli elettroni sullo schermo nel caso in cui la luce è deviata verso l'alto (il basso). **Anche se le fenditure sono entrambe aperte, si ha $P_1' \approx P_1$ e $P_2' \approx P_2$. Non si ha interferenza!** Stavolta P_{12} è semplicemente la distribuzione degli elettroni sullo schermo comunque sia stata deviata la luce, ed è uguale a $P_1 + P_2$ per definizione. **Si ottiene di nuovo l'interferenza se si spegne la sorgente luminosa.**



PRINCIPIO DI COMPLEMENTARITÀ: In ogni esperimento una particella manifesta o proprietà corpuscolari oppure ondulatorie, e ciascun comportamento esclude l'altro. L'interferenza (natura ondulatoria) si manifesta ogni volta che i due eventi sono possibili e indistinguibili. Essa scompare (si manifesta la natura corpuscolare) non appena diventa possibile, anche solo in principio, distinguere i due eventi (which-way information).

Di solito la complementarità è spiegata usando il

PRINCIPIO DI INDETERMINAZIONE: Non si può misurare nello stesso momento con arbitraria precisione la posizione e la quantità di moto di una particella.

$$\Delta x \Delta p \geq \frac{\hbar}{2}$$

Infatti la luce “misura” la posizione dell'elettrone con una incertezza $\Delta x \approx \lambda =$ lunghezza d'onda della radiazione usata. Tale localizzazione produce una incertezza nel momento $\Delta p_x = h/\lambda$.

λ grande: non si distingue dove passa l'elettrone, ma Δp_x è piccola e non distrugge la figura d'interferenza.

λ piccola: la posizione dell'elettrone è determinata con alta precisione, ma esso acquista una grande quantità di moto trasversale e di conseguenza la figura di interferenza è distrutta.

CONSIDERAZIONI DIDATTICHE

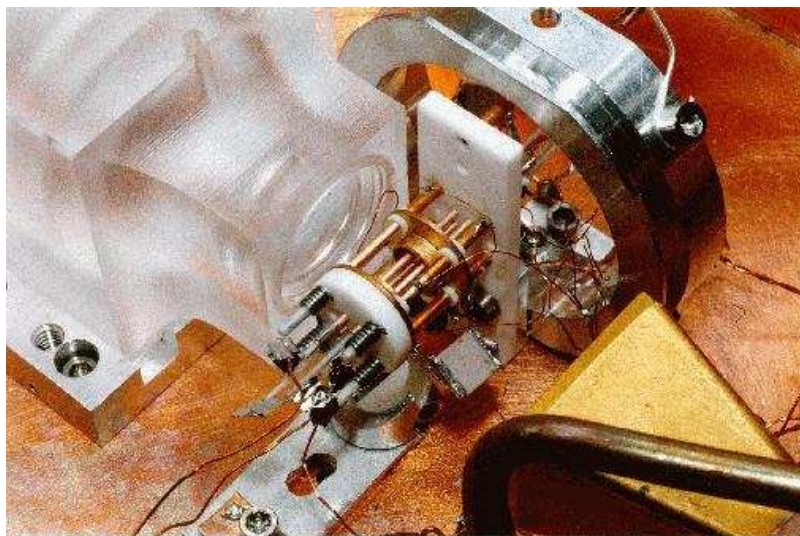
POSSIBILI PERCORSI:

- **Emissione ed assorbimento della radiazione:** corpo nero, righe spettrali atomiche, quantizzazione,.....
- **Dualismo onda-particella:** dall'ottica alla meccanica quantistica, principio di complementarità,....

INDICAZIONI GENERALI: Il contrasto tra mondo macroscopico classico e lo strano mondo quantistico può essere spiegato sottolineando **l'importanza degli ordini di grandezza**. Lo si può evidenziare studiando uno o due esperimenti, non necessariamente quelli “storicamente” importanti, ma anche **esperimenti molto recenti**, che hanno realizzato in laboratorio quelli che Einstein, Bohr, Heisenberg e Feynman consideravano “esperimenti concettuali”. Lo studio di esperimenti recenti ha lo scopo di **suscitare l'interesse dello studente**, mostrandogli che la fisica è una scienza viva, e che può entrare in contatto con i suoi **più recenti sviluppi**.

La realizzazione sperimentale di quelli che un tempo erano considerati esperimenti concettuali è stata resa possibile dai **notevoli progressi nella manipolazione dello stato quantistico di singoli atomi e di singoli fotoni.**

Esempio: **Atomi e ioni singoli vengono ora normalmente intrappolati e, opportunamente eccitati, sono visibili ad occhio nudo** (possono emettere 10^8 fotoni al secondo, l'occhio ne raccoglie circa mille e la retina ha una soglia di $7 \div 10$ fotoni)



Trappola per singoli ioni
(NIST, Boulder, USA)

Per vedere questa immagine
occorre QuickTime™ e un
decompressore GIF.

Immagine di 7 ioni
intrappolati (Innsbruck)

EMERGERE DELLA FISICA CLASSICA DALLA FISICA QUANTISTICA

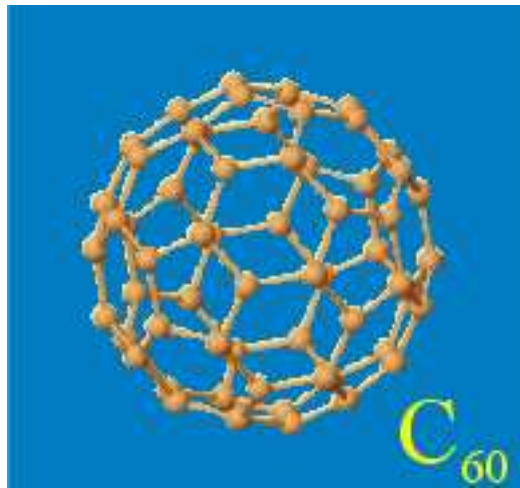
La meccanica quantistica ha avuto un gran numero di conferme sperimentali: è una teoria valida universalmente, che deve valere anche per gli oggetti macroscopici (proiettili dell'esperimento d'interferenza). **Perché non vediamo interferenza e comportamenti bizzarri a livello macroscopico?**

Innanzitutto è una **questione di ordini di grandezza**: la separazione delle frange d'interferenza (massimi della P_{12}) è proporzionale alla lunghezza d'onda di de Broglie della particella

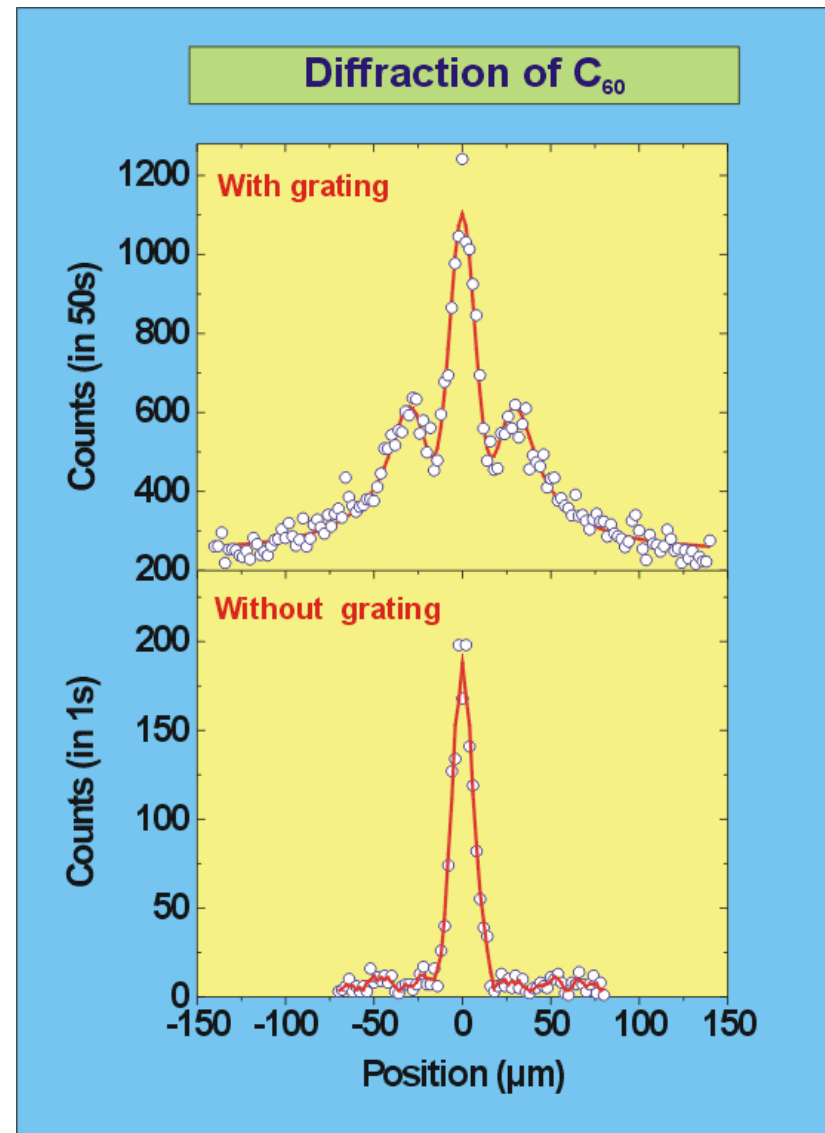
$$\begin{aligned} x_n &= \text{posizione dei massimi,} \\ L &= \text{distanza schermo-fenditure,} \\ d &= \text{distanza tra le due fenditure} \end{aligned} \quad x_n \approx n \frac{\lambda L}{d}$$

Per una particella macroscopica tale separazione è piccolissima ($=10^{-32}$ m per una particella di un grammo con $v=10\text{m/s!}$) \Rightarrow anche il proiettile classico produce interferenza, ma non la vediamo perché non esiste uno strumento con una risoluzione spaziale così elevata.

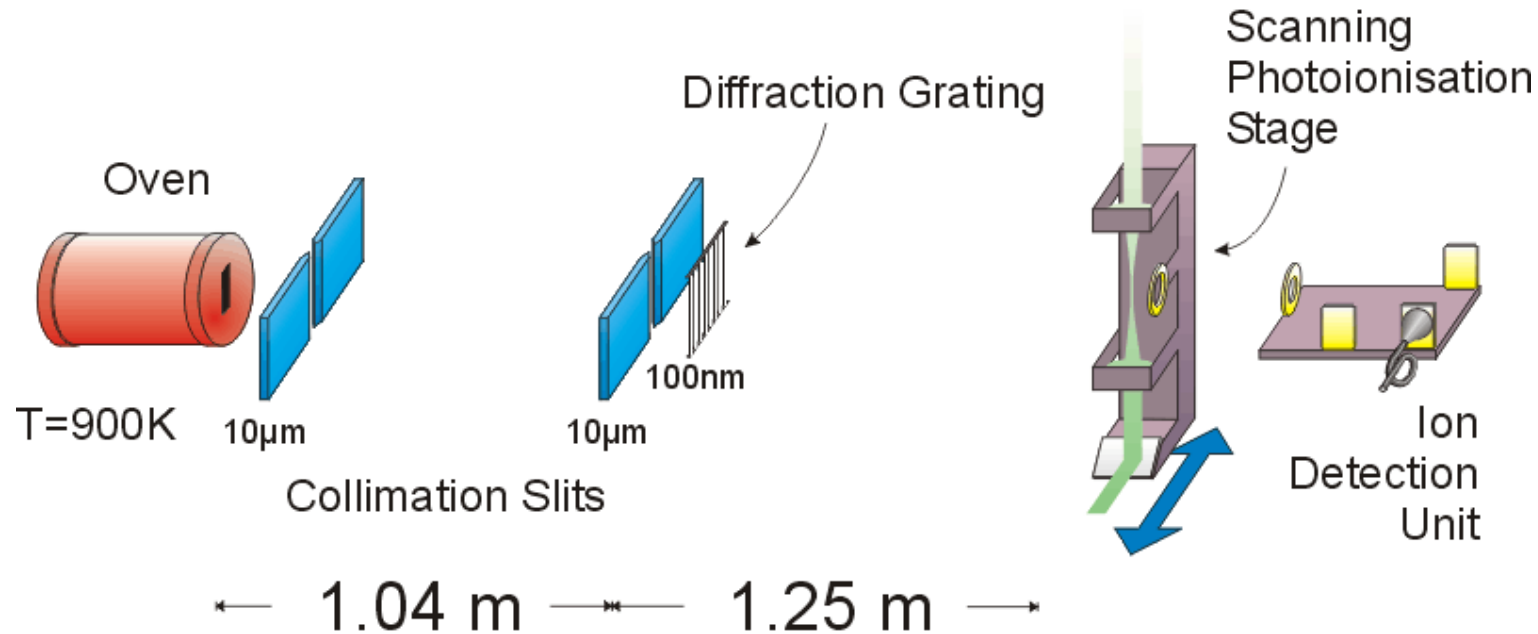
Fino a quale scala è possibile vedere effetti quantistici? Corsa verso il macroscopico: il record attuale è **l'osservazione della diffrazione di grandi molecole**: il fullerene C_{60} (1999), C_{70} (2000).



M. Arndt et al., Nature 401, 680 (1999)



Diametro della molecola = 10^{-9} m; lunghezza d'onda di de Broglie = $2.5 \cdot 10^{-12}$ m, 400 volte più piccola della molecola stessa! Larghezza delle fenditure e loro distanza $d = 5 \cdot 10^{-8}$ m.



Pressure $\sim 5 \cdot 10^{-7}$ mbar

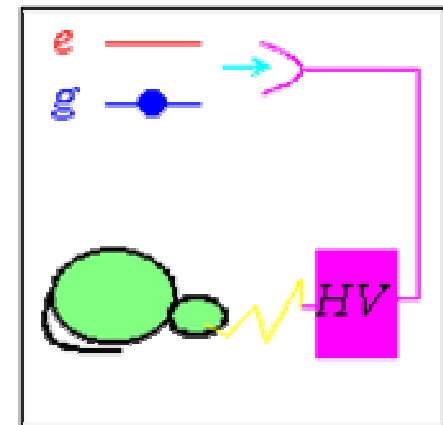
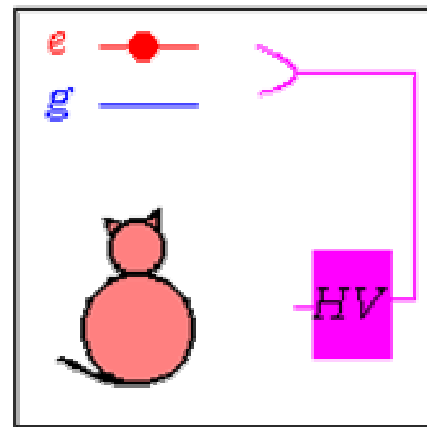
Tale fenomeno di diffrazione è dovuto al “passaggio simultaneo” della macromolecola in due fenditure del reticolo, descritto da uno **stato quantistico sovrapposizione di due stati spazialmente distinti (distano circa 50 nm)**.

Concettualmente si possono immaginare situazioni in cui un sistema fisico possa essere preparato in versioni macroscopiche (e di conseguenza paradossali) di tali sovrapposizioni: **le sovrapposizioni coerenti di stati macroscopicamente distinguibili. Il più famoso esempio di tali stati paradossali è il “gatto di Schrödinger” (1935).**

Versione moderna di tale paradosso: un gatto è intrappolato in una scatola insieme ad un atomo in uno stato eccitato. Il fotone emesso dall'atomo innesca una scarica ad alta tensione che uccide il gatto. Dato che lo stato generico dell'atomo è la sovrapposizione lineare di $|e\rangle$ e $|g\rangle$, anche il gatto è in una sovrapposizione degli stati “vivo” e “morto”

$$|\psi\rangle = |e\rangle|alive\rangle_{cat} + |g\rangle|dead\rangle_{cat}$$

Stato “entangled”, correlato, tra atomo e gatto



Perché tali stati paradossali, concettualmente possibili, visto che il principio di sovrapposizione deve valere anche per oggetti macroscopici, **non vengono osservati?**

Risposta: **decoerenza indotta dall'ambiente**. A differenza di quanto accade per i sistemi microscopici, **un sistema macroscopico non può mai essere completamente isolato dall'ambiente esterno** (atmosfera, radiazione solare, campi elettromagnetici....).

Esempio: in un oggetto macroscopico posto in una sovrapposizione di due posizioni distinte, **l'ambiente “misura” l'oggetto** in esame. Ad esempio, la luce solare viene deviata in modo diverso a seconda della posizione dell'oggetto e l'informazione sulle due posizioni viene in qualche modo **“registrata”** da essa.

Più in generale, l'ambiente si comporta in maniera identica al **“rivelatore di cammino” nell'esperimento d'interferenza**: si correla con stati diversi, $|a\rangle$ e $|d\rangle$, alle due componenti della sovrapposizione:

$$|\psi\rangle = |e\rangle |alive\rangle_{cat} |a\rangle_{env} + |g\rangle |dead\rangle_{cat} |d\rangle_{env}$$

Più gli stati $|\text{dead}\rangle$ e $|\text{alive}\rangle$ sono macroscopicamente diversi, quanto più gli stati dell'ambiente a loro correlati, $|d\rangle$ e $|a\rangle$, saranno distinguibili (ortogonali) $\Rightarrow \langle d|a\rangle = 0$, \Rightarrow ogni effetto di interferenza diventa inosservabile. Infatti, una qualunque probabilità osservabile si può scrivere

$$P_{cat} \approx |\psi_{alive}|^2 + |\psi_{dead}|^2 + \psi_{alive}^* \psi_{dead} \langle a|d\rangle + \psi_{dead}^* \psi_{alive} \langle d|a\rangle \approx |\psi_{alive}|^2 + |\psi_{dead}|^2$$

A causa della inevitabile “misura” effettuata dall'ambiente, la sovrapposizione coerente

$$|\psi\rangle = |e\rangle|\text{alive}\rangle_{cat} + |g\rangle|\text{dead}\rangle_{cat}$$

diventa la corrispondente miscela statistica (sovrapposizione classica)

$$|e\rangle|\text{alive}\rangle_{cat} \quad \textbf{oppure} \quad |g\rangle|\text{dead}\rangle_{cat}$$

Per gli oggetti macroscopici è praticamente impossibile eliminare l'interazione con l'ambiente e la conseguente “rivelazione di cammino” (cioè l'entanglement). Inoltre tale processo di decoerenza è praticamente istantaneo per sistemi macroscopici.

Modo equivalente di spiegare la decoerenza: “randomizzazione delle fasi”.
Nel caso di una sovrapposizione coerente, una probabilità osservabile è data da

$$P_{12} = |\psi_1 + \psi_2|^2 = |\psi_1|^2 + |\psi_2|^2 + 2|\psi_1||\psi_2|\cos \delta$$

Per un sistema macroscopico, l’ambiente agisce in modo da far variare casualmente la differenza di fase δ tra i due stati. **Il risultato sperimentale osservato corrisponde ad una media sulle fluttuazioni di tale fase \Rightarrow** il termine d’interferenza si media a zero e si ottiene il risultato classico

$$P_{12} = |\psi_1|^2 + |\psi_2|^2$$

Verifica sperimentale della decoerenza fatta su sistemi microscopici:

- 1) ione confinato in una trappola elettromagnetica preparato in una sovrapposizione lineare di due posizioni distinte (distanti 70 nm), C. Monroe et al., Science, 272, 1131 (1996).
- 2) Campo e.m. in una cavità a microonde con il campo elettrico avente simultaneamente due fasi distinte, M. Brune et al., Phys. Rev. Lett. 77, 4887 (1996).

COMPLEMENTARITA' E INDETERMINAZIONE SONO IN REALTA' PRINCIPI INDIPENDENTI

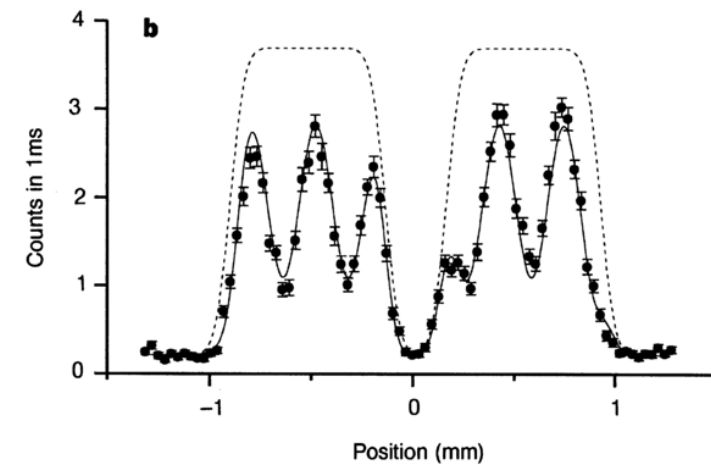
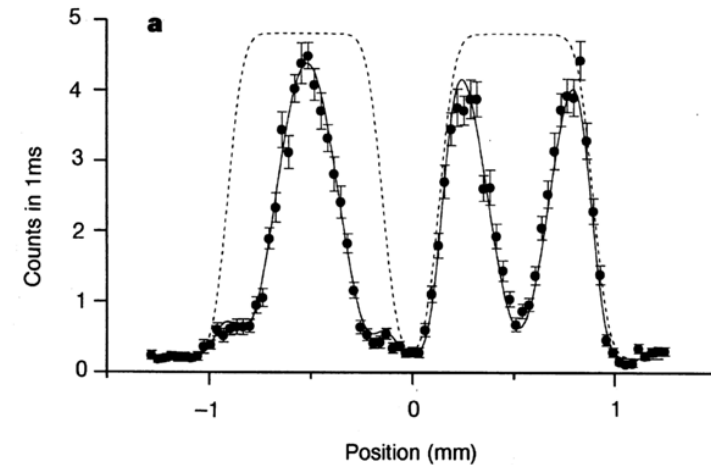
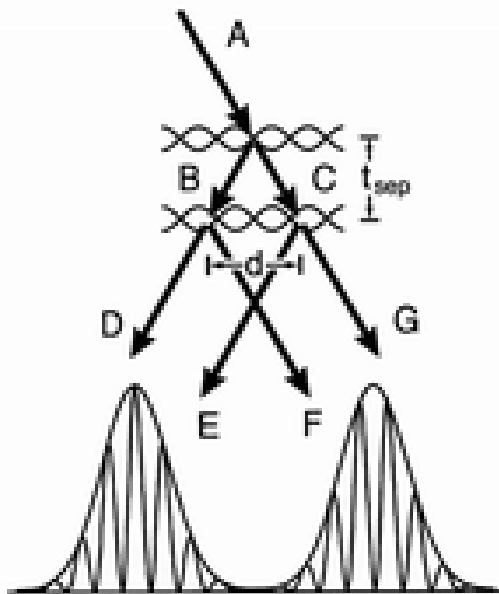
Recenti studi ed esperimenti hanno mostrato che in realtà, a differenza da quanto sostenuto da molti padri fondatori e libri di testo, complementarità e indeterminazione sono indipendenti.

La presenza o meno dell'interferenza tra due stati dipende esclusivamente dalla loro **indistinguibilità**. L'interferenza scompare non appena i due stati diventano distinguibili, cioè si correlano con un qualche grado di libertà, anche incontrollabile (come l'ambiente). L'indeterminazione non è necessariamente coinvolta.

Ciò è stato visto e dimostrato in alcuni recenti esperimenti. **Ciò che conta è l'esistenza o meno della “which-way information”, cioè di opportune correlazioni (entanglement) tra particella e rivelatore di cammino.**

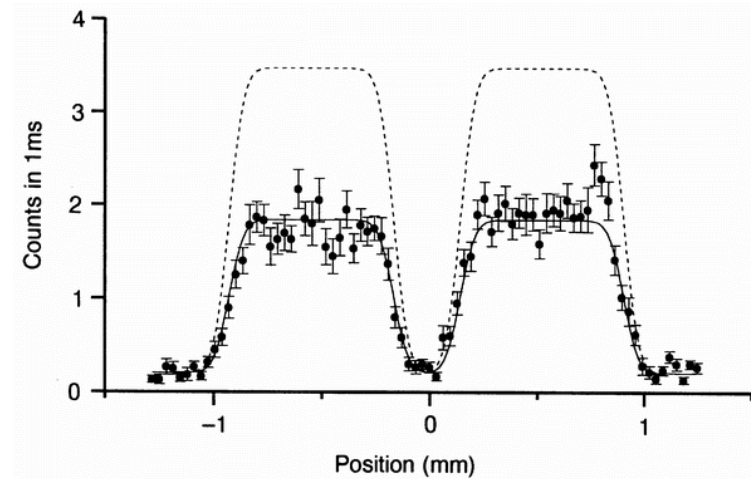
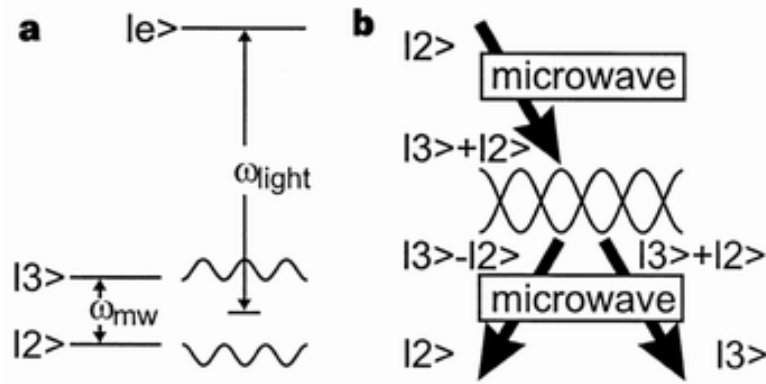
Esperimento di interferenza realizzato con fasci di atomi di Rb. Un sistema analogo a due fenditure distanti d è realizzato usando due onde stazionarie luminose intense, che realizzano un reticolo di diffrazione (S. Dürr et al., Nature, vol. 395, 33 (1998))

Due sistemi di frange appaiate:
uno realizzato dai fasci D ed E,
ed uno da F e G.



Franghe sperimentali

Inseriamo un rivelatore di cammino: campo a microonde $\Rightarrow \lambda$ grande \Rightarrow incertezza nel momento trasverso ed **effetto del principio di Heisenberg sulle frange, trascurabile**. Eppure le frange scompaiono lo stesso!



L'informazione sul cammino è contenuta negli stati interni $|2\rangle$ e $|3\rangle$ dell'atomo

$$|\psi\rangle = |\psi\rangle_c |3\rangle - |\psi\rangle_B |2\rangle$$

Dopo il secondo reticolo

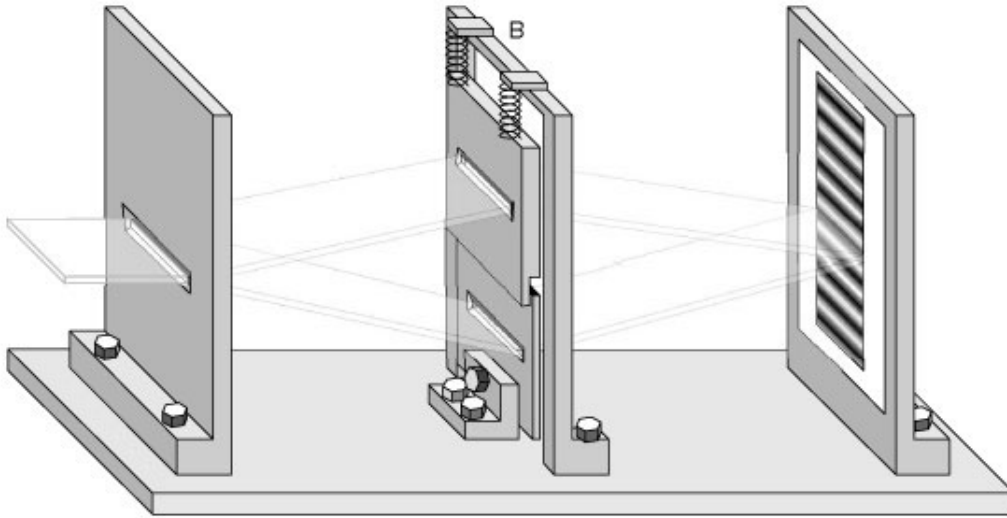
$$|\psi\rangle = \{|\psi\rangle_E + |\psi\rangle_G\} |3\rangle - \{|\psi\rangle_D - |\psi\rangle_F\} |2\rangle$$

Distribuz. di probabilità del picco di sinistra

$$P(x) = |\psi_D(x)|^2 + |\psi_E(x)|^2 - \psi_D^*(x)\psi_E(x)\langle 2|3\rangle - \psi_E^*(x)\psi_D(x)\langle 3|2\rangle$$

$\langle 2|3\rangle = 0 \Leftrightarrow$ cammini distinguibili \Rightarrow nessun interferenza

Si può anche vedere che l'interferenza scompare progressivamente man mano che la “which-way information” aumenta: esempio di Bohr della fenditura mobile.

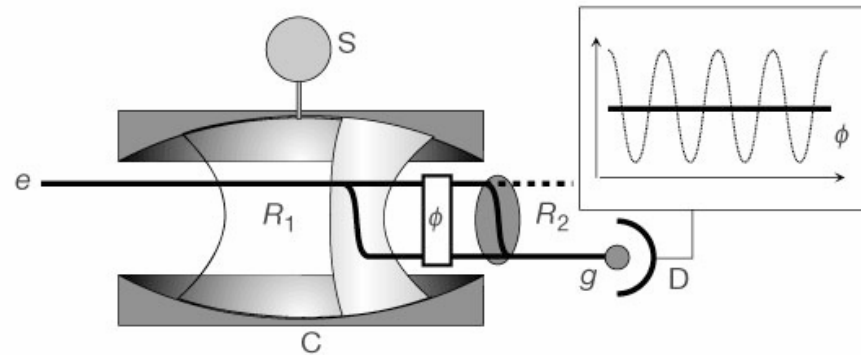


La fenditura in alto è attaccata a delle molle: se la sua massa è piccola a sufficienza, la variazione di momento impartita dalla particella deflessa è sufficiente a metterla in moto (a cambiare cioè il suo stato quantistico). Questo equivale ad una registrazione di “which-path information” e comporta la soppressione dell'interferenza.

Aumentando gradatamente la massa della fenditura è in principio possibile vedere la transizione continua alla situazione in cui lo stato della fenditura cambia in maniera insufficiente, non è cioè in grado di registrare il passaggio della particella e le frange riappaiono.

Recente dimostrazione sperimentale (P. Bertet et al., Nature 411, 166 (2001))

I due cammini sono sostituiti da due stati atomici interni $|e\rangle$ e $|g\rangle$ di un atomo di rubidio. “Which-way” information è fornita da un campo a microonde in una cavità C:



Dopo R_1 : $|e\rangle|\psi_e\rangle_C + e^{i\phi}|g\rangle|\psi_g\rangle_C$

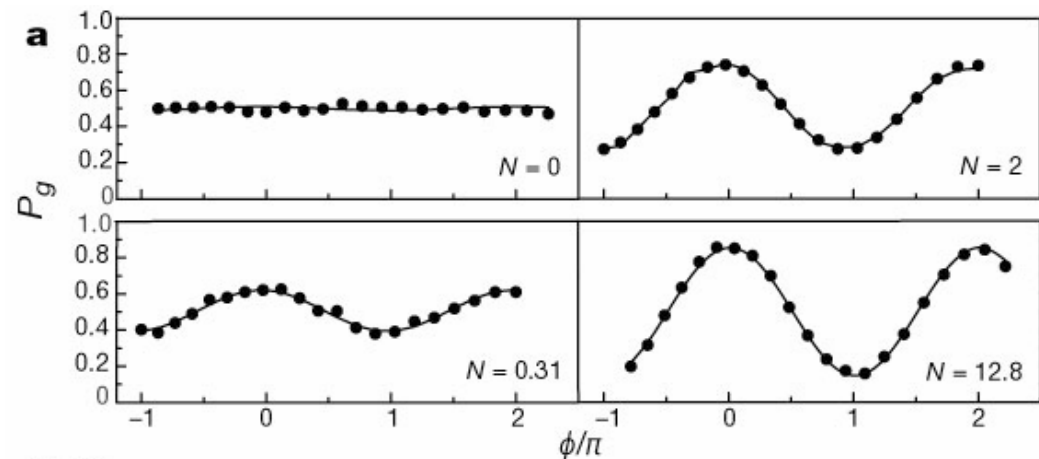
Dopo R_2 : $\{|e\rangle + |g\rangle\}|\psi_e\rangle_C + e^{i\phi}\{|g\rangle - |e\rangle\}|\psi_g\rangle_C$

Prob. di rivelare l'atomo in g:

$$P_g(\phi) = \frac{1}{2} \left[1 + \text{Re} \left\{ \langle \psi_e | \psi_g \rangle_C e^{i\phi} \right\} \right]$$

Numero di fotoni in cavità N piccolo, $\Rightarrow \langle \psi_e | \psi_g \rangle = 0 \Rightarrow$ path information;

N grande $\Rightarrow \psi_e \approx \psi_g \Rightarrow$ tale informazione si perde e compare l'interferenza.



ENTANGLEMENT

Il concetto di entanglement (correlazione non classica) è al cuore di tutti i concetti meno intuitivi della meccanica quantistica. È alla base di altri fenomeni paradossali, come l'apparente **non-località**:

Esempio di stato entangled

$$|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \{ |\uparrow\rangle_1 |\downarrow\rangle_2 - |\downarrow\rangle_1 |\uparrow\rangle_2 \}$$

Se si misura la particella 1 e la si trova in $|\uparrow\rangle$, allora **la particella 2 deve trovarsi in $|\downarrow\rangle$, a qualunque distanza da 1 essa si trovi** (non viola il postulato della relatività di Einstein a causa della sua natura probabilistica).

Negli ultimi anni ci si è resi conto che l'entanglement non è solo sorgente di paradossi, ma può essere una **risorsa**:

- 1) **Crittografia quantistica**: schemi di codifica delle informazioni intrinsecamente sicuri, usando stati entangled
- 2) **Teletrasporto**: ricostruzione ad una distanza remota, di uno stato quantistico ignoto