

# Capitolo 1

## Cinematica dei corpi deformabili. Conservazione della massa

### 1.1 Corpi e configurazioni

Definiamo un corpo deformabile  $\mathcal{B}$  come insieme di particelle o punti materiali  $P$ . Una mappa continua e biunivoca di questo insieme nello spazio euclideo  $\mathcal{E}$ , dà luogo ad una configurazione del corpo  $\mathcal{B}$

$$\mathcal{D} = k(\mathcal{B}) \tag{1.1.1}$$

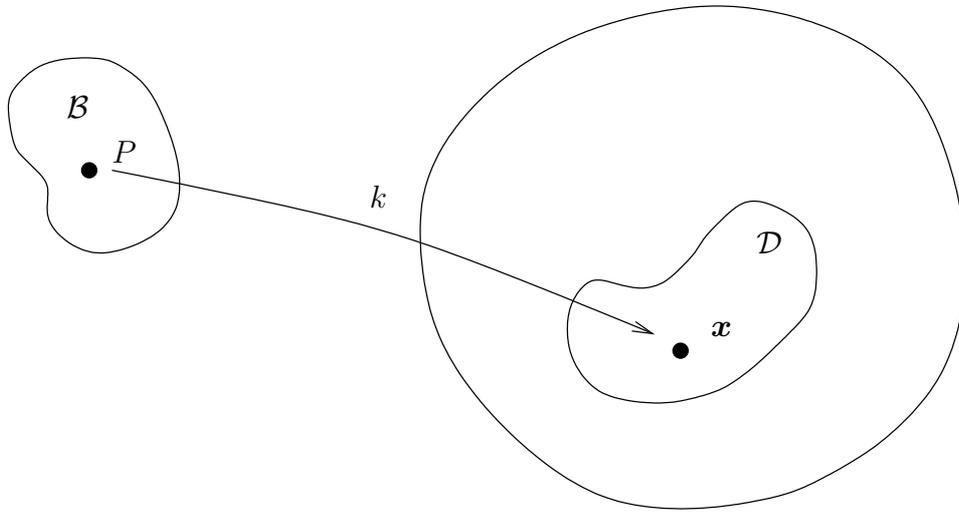
con

$$\boldsymbol{x} = k(P) \tag{1.1.2}$$

ed essendo la mappa continua e biunivoca e quindi invertibile

$$\mathcal{B} = k^{-1}(\mathcal{D}) \quad \text{e} \quad P = k^{-1}(\boldsymbol{x}) \tag{1.1.3}$$

cioè il punto  $\boldsymbol{x}$  di  $\mathcal{E}$  è il posto occupato dalla particella  $P$ , mentre  $P$  è la particella il cui posto in  $\mathcal{E}$  è  $\boldsymbol{x}$ . Analogamente per  $\mathcal{B}$  e  $\mathcal{D}$ . Figurativamente:



## 1.2 Moto e descrizione materiale

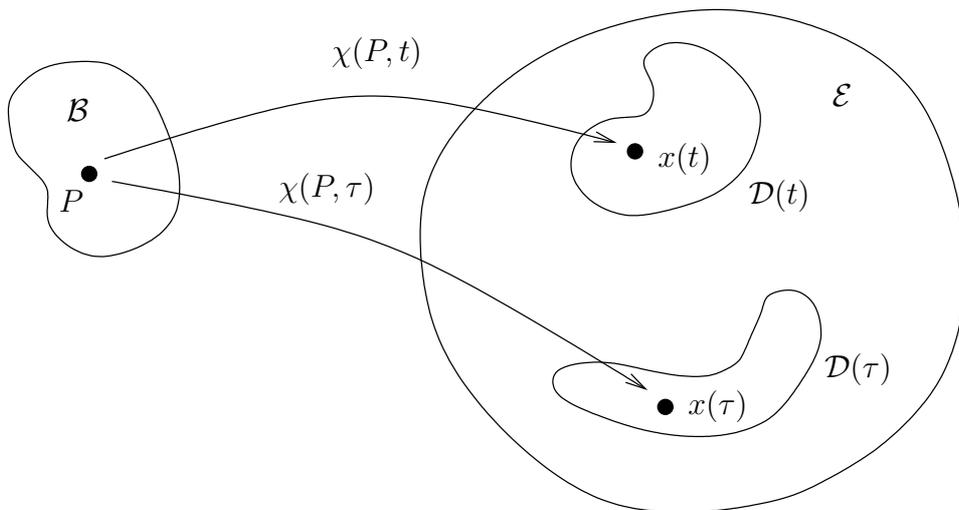
Il moto del corpo  $\mathcal{B}$  è dato da una famiglia di successive configurazioni con parametro il tempo  $t$

$$\mathbf{x} = \chi(P, t) \quad \text{con} \quad P = \chi^{-1}(\mathbf{x}, t) \quad (1.2.1)$$

per ogni istante  $t$ , la mappa del moto  $\chi$  dà la posizione attuale  $\mathbf{x}$  dei punti materiali  $P$  di  $\mathcal{B}$ . Se si applica la mappa  $\chi$  a tutto il corpo

$$\mathcal{D} = \chi(\mathcal{B}, t) \quad \text{con} \quad \mathcal{B} = \chi^{-1}(\mathcal{D}, t) \quad (1.2.2)$$

ove  $\mathcal{D}$  è la configurazione di  $\mathcal{B}$  al tempo  $t$ .



Non si deve confondere il corpo  $\mathcal{B}$  con le sue configurazioni spaziali  $\mathcal{D}$ . Lo stesso corpo  $\mathcal{B}$  può infatti assumere infinite diverse configurazioni. La descrizione (1.2.1) si definisce descrizione *materiale* del moto, in quanto impiega come variabili indipendenti i punti materiali  $P$  e il tempo  $t$ .

### 1.3 Descrizione referenziale

Il corpo è in effetti disponibile all'osservazione solo attraverso una delle sue configurazioni e quindi può essere conveniente assumere una di queste come configurazione di riferimento per individuare e specificare i punti materiali di  $\mathcal{B}$ . Tale configurazione di riferimento può essere una configurazione occupata dal corpo a un certo istante, anche se ciò non è strettamente necessario. Consideriamo la configurazione data da

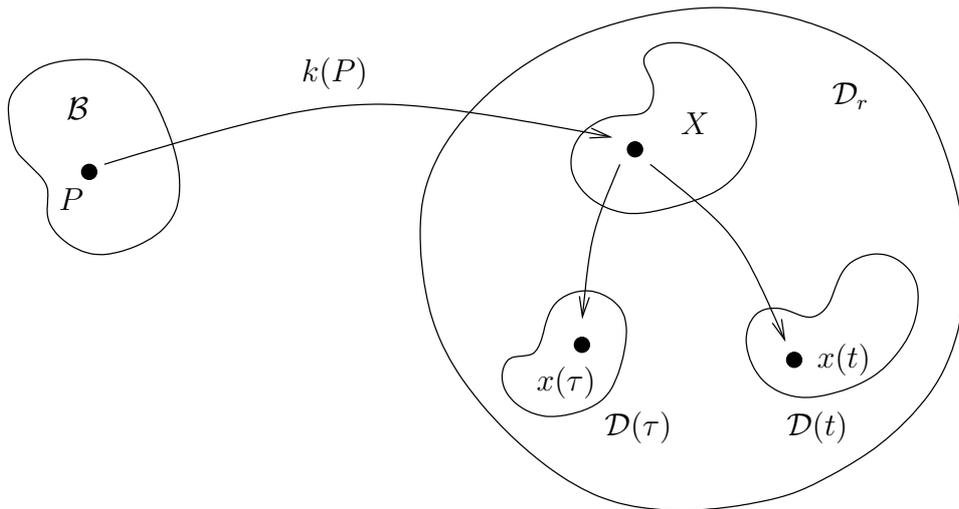
$$\mathbf{X} = k(P) \quad \text{con} \quad P = k^{-1}(\mathbf{X}) \quad (1.3.1)$$

come configurazione di riferimento.

Il moto del corpo si può quindi descrivere con

$$\mathbf{x} = \chi(P, t) = \chi(k^{-1}(\mathbf{X}), t) = \chi_k(\mathbf{X}, t) \quad (1.3.2)$$

dove  $\chi_k$  indica la mappa di moto con riferimento alla configurazione  $\mathcal{D}_r = k(\mathcal{B})$ . Questa si definisce come descrizione referenziale in quanto assume come variabili indipendenti le coordinate della posizione  $\mathbf{X}$  del punto materiale  $P$  nella configurazione di riferimento  $\mathcal{D}_r$ . Il vettore posizione  $\mathbf{X} = X_i \mathbf{e}_{(i)}$  definisce quindi la posizione di  $P$  nella configurazione di riferimento



L'espressione (1.3.1) definisce una famiglia di successive configurazioni *deformate* rispetto alla configurazione di riferimento.

Un riferimento particolarmente adottato è quello della configurazione del corpo per  $t = 0$ : la descrizione referenziale si chiama allora Lagrangiana.

Data una quantità scalare o tensoriale  $A$  funzione del tempo e dello spazio  $A(P, t) \equiv A(\mathbf{X}, t)$ ; la derivata di  $A$  rispetto al tempo seguendo il moto della particella materiale è data da

$$\dot{A} = \left( \frac{\partial A}{\partial t} \right)_P \equiv \left( \frac{\partial A}{\partial t} \right)_{\mathbf{X}} \quad (1.3.3)$$

In particolare la derivata prima e seconda della posizione, danno la velocità e l'accelerazione:

$$\mathbf{u} = \left[ \frac{\partial \chi(P, t)}{\partial t} \right]_P \equiv \dot{\chi}(P, t) \quad \mathbf{a} = \left[ \frac{\partial^2 \chi(P, t)}{\partial t^2} \right]_P \equiv \ddot{\chi}(P, t) \quad (1.3.4)$$

nella descrizione materiale e

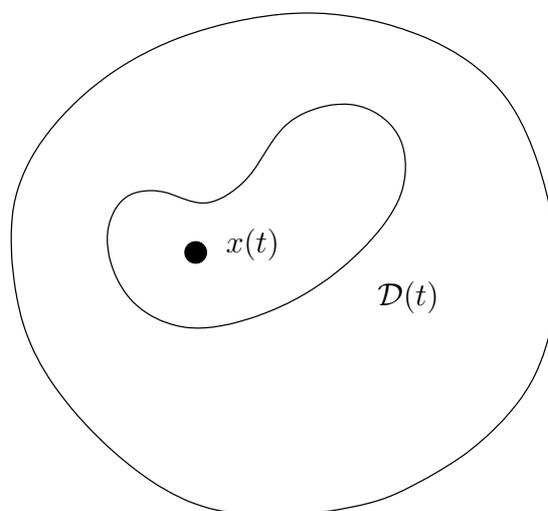
$$\mathbf{u} = \left[ \frac{\partial \chi_k(\mathbf{X}, t)}{\partial t} \right]_{\mathbf{X}} \equiv \dot{\chi}_k(\mathbf{X}, t) \quad \mathbf{a} = \left[ \frac{\partial^2 \chi_k(\mathbf{X}, t)}{\partial t^2} \right]_{\mathbf{X}} \equiv \ddot{\chi}_k(\mathbf{X}, t) \quad (1.3.5)$$

nella descrizione referenziale.

La descrizione materiale e referenziale sembrano le più naturali per studiare la dinamica dei fluidi in quanto si segue il moto della particella materiale cui sono applicate le forze. La differenza tra le due descrizioni è di scarsa rilevanza per lo studio dei fluidi però in alcuni settori della meccanica (per es. meccanica analitica, analisi di sistemi discreti) si usa distinguere le particelle non con la posizione da loro occupata ad un certo tempo (descrizione referenziale), ma con il proprio nome o numero (ad es.  $n$  particelle  $x_i, i = 1 \dots n$ ); in altri settori invece (per es. moto del corpo rigido) si usa la descrizione referenziale.

## 1.4 Descrizione spaziale

Può essere conveniente per lo studio di particelle fluide, che si deformano rapidamente “(...) non si sa da dove vengono e dove vanno, adottare una descrizione spaziale in cui si considera cosa succede al momento attuale davanti ai nostri occhi” (Ruscelli). Questa descrizione spaziale chiamata Euleriana (ma introdotta in effetti da Brill e D’Lambirete) considera la configurazione attuale  $\mathcal{D}$  del corpo  $\mathcal{B}$ , cioè assume come variabili indipendenti  $\mathbf{x}$  e  $t$ . Vi è quindi una sola descrizione spaziale, mentre come si è visto ci sono infinite possibili descrizioni referenziali.



Ogni funzione  $F(\mathbf{X}, t)$  può essere sostituita da una funzione  $f$  nelle variabili  $\mathbf{x}$ ,  $t$ , che ha lo stesso valore per  $\mathbf{X}$  e  $\mathbf{x}$  corrispondenti nella mappa del moto, cioè

$$F(\mathbf{X}, t) = F[\chi_k^{-1}(\mathbf{x}, t), t] \equiv f(\mathbf{x}, t) = f[\chi_k(\mathbf{X}, t), t] \quad (1.4.1)$$

La descrizione spaziale, cinematicamente conveniente, presenta dei problemi per lo studio della dinamica dei fluidi in quanto le leggi della dinamica si riferiscono ovviamente al corpo  $\mathcal{B}$  e non alla regione di spazio  $\mathcal{D}$  che il corpo occupa momentaneamente.

Per questo è necessario considerare anche una descrizione referenziale o materiale, per ambedue le quali è più semplice impostare lo studio della dinamica, evitando contorti ragionamenti che sarebbero necessari con la sola descrizione spaziale. Una qualunque quantità scalare o tensoriale  $A$  può essere quindi espressa in funzione delle variabili  $\mathbf{x}$  e  $t$ , in particolare la velocità e l'accelerazione

$$u = u(\mathbf{x}, t) \quad \mathbf{a} = \mathbf{a}(\mathbf{x}, t) \quad (1.4.2)$$

Se consideriamo la funzione  $f(\mathbf{x}, t)$  e vogliamo la derivata rispetto al tempo della  $f(\mathbf{x}, t)$  come proprietà della particella in esame e quindi seguendo il moto della particella, basandosi sulla uguaglianza (1.4.1) e sulla definizione (1.3.3) otteniamo in descrizione referenziale

$$\dot{F} = \left[ \frac{\partial F(\mathbf{X}, t)}{\partial t} \right]_{\mathbf{X}} \quad (1.4.3)$$

e in descrizione spaziale

$$\dot{f} = \left[ \frac{\partial f(\chi_k(\mathbf{X}, t), t)}{\partial t} \right]_{\mathbf{x}} \quad (1.4.4)$$

La (1.4.4) ricordando la (1.3.2) si può esprimere

$$\dot{f} = \frac{\partial f}{\partial t} + \nabla f \cdot \dot{\chi}_k = \frac{\partial f}{\partial t} + u_i \frac{\partial f}{\partial x_i} \quad (1.4.5)$$

per la (1.3.5). La (1.4.5) si definisce derivata materiale, cioè la derivata rispetto al tempo seguendo il moto della particella, e si può indicare per comodità con un simbolo diverso, cioè ripetendo la (1.4.5)

$$\frac{Df}{Dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + u_i \frac{\partial f}{\partial x_i} \quad (1.4.6)$$

Avendo ora a disposizione le diverse descrizioni del moto, cioè quella spaziale e almeno una tra materiale e referenziale vediamo ora di ricavare le equazioni che governano la dinamica dei fluidi cioè le equazioni di conservazione della massa, della quantità di moto e dell'energia.

## 1.5 Massa e densità di massa

Definiamo innanzitutto la massa  $M$  del corpo  $\mathcal{B}$  o di una parte di esso che indicheremo  $\mathcal{B}_n$ , come

$$M(\mathcal{B}_n) = \int_{k(\mathcal{B}_n)} \rho(k(P)) dV = \int_{\mathcal{D}} \rho_k(\mathbf{x}) dV \quad (1.5.1)$$

con  $\mathcal{D} = k(\mathcal{B}_n)$  e  $\mathbf{x} = k(P)$ . La densità di massa  $\rho(k(P))$ , indicata anche con  $\rho_k(\mathbf{x})$ , esiste ed è continua sul volume  $k(\mathcal{B}_n)$  e si definisce localmente come il valore limite del rapporto

$$\rho_k = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{M(\mathcal{B}_n)}{V(k(\mathcal{B}_n))} \quad (1.5.2)$$

con  $\mathcal{B}_{n+1} \subset \mathcal{B}_n$  e quindi  $V(k(\mathcal{B}_n)) \rightarrow 0$  per  $n \rightarrow \infty$ .

La parte di corpo  $\mathcal{B}_n$  ha la stessa massa  $M(\mathcal{B})$  per tutte le sue configurazioni  $k_1, k_2, \dots$ , etc essendo la massa una proprietà di  $\mathcal{B}_n$  e non della forma che esso assume nello spazio quindi

$$M(\mathcal{B}_n) = \int_{k_1(\mathcal{B}_n)} \rho_{k_1}(\mathbf{x}) dV_1 = \int_{k_2(\mathcal{B}_n)} \rho_{k_2}(\mathbf{x}) dV_2 \quad (1.5.3)$$

Vediamo che relazione c'è fra  $\rho_{k_1}$  e  $\rho_{k_2}$  cioè fra la densità di massa in due configurazioni diverse. Se si assume  $k_1(\mathcal{B}_n)$  come configurazione di riferimento e si indica con  $\mathbf{X} \in k_1(\mathcal{B}_n)$  il vettore posizione in questa configurazione; se inoltre  $J$  è lo Jacobiano della trasformazione  $x = \lambda(\mathbf{X})$  che mappa  $k_1(\mathcal{B}_n)$  in  $k_2(\mathcal{B}_n)$  e tale trasformazione è continua e biunivoca quindi invertibile con  $J$  ovunque  $\neq 0$ , si ha ricordando la (A.19.10)

$$\int_{k_1(\mathcal{B}_n)} \rho_{k_1}(\mathbf{X}) dV_1 = \int_{k_1(\mathcal{B}_n)} \rho_{k_2}(\lambda(\mathbf{X})) J(\mathbf{X}) dV_1 \quad (1.5.4)$$

cioè in ogni luogo

$$\rho_{k_1}(\mathbf{X}) = \rho_{k_2}(\lambda(\mathbf{X})) J(\mathbf{X}) \quad (1.5.5)$$

Quindi il campo di densità di massa su una configurazione di  $\mathcal{B}_n$  determina quello in tutte le altre configurazioni assunte da  $\mathcal{B}_n$  ed in particolare in quelle assunte durante il moto come si vedrà nei paragrafi successivi.

## 1.6 Conservazione della massa

Per il primo postulato della Meccanica di Newton la massa (a velocità molto inferiori a quelle della luce, quali si considerano qui) è indipendente dal tempo. Se quindi segniamo una parte  $\mathcal{B}_n$  del corpo  $\mathcal{B}$  attraverso una serie di configurazioni successive nel tempo, la massa di  $\mathcal{B}_n$  non varierà

$$M(\mathcal{B}_n) = \int_{\chi(\mathcal{B}_n, t)} \rho(\mathbf{x}, t) dV \quad (1.6.1)$$

dove l'integrale è ora esteso alla configurazione corrente  $\chi(\mathcal{B}_n, t)$  che è in funzione del tempo. Il postulato della costanza della massa, cioè la sua indipendenza dal tempo, si può esprimere con

$$\dot{M}(\mathcal{B}_n) = \frac{d}{dt} \int_{\chi(\mathcal{B}_n, t)} \rho(\mathbf{x}, t) dV = 0 \quad (1.6.2)$$

Per giungere alla formulazione della equazione di conservazione della massa, si deve ora vedere come fare la derivata rispetto al tempo di un integrale esteso a un volume che è funzione del tempo, nella descrizione spaziale.

## 1.7 Teorema del trasporto di Reynolds

Prendiamo una configurazione di riferimento, per esempio quella che assume il corpo al tempo  $t_0$

$$\mathcal{D}_n = k(\mathcal{B}_n) = \chi(\mathcal{B}_n, t_0)$$

che è alla base della descrizione referenziale lagrangiana del moto. Esprimiamo l'integrale della funzione generica  $f(\mathbf{x}, t)$  in questa descrizione, cioè nelle variabili  $\mathbf{X}, t$

$$\frac{d}{dt} \int_{\chi(\mathcal{B}_n, t)} f(\mathbf{x}, t) dV = \frac{d}{dt} \int_{\chi(\mathcal{B}_n, t_0)} f[\chi_k(\mathbf{X}, t), t] J(\mathbf{X}, t) dV_0 \quad (1.7.1)$$

dove  $J(\mathbf{X}, t)$  è lo Jacobiano della trasformazione che mappa la configurazione di riferimento  $\chi(\mathcal{B}_n, t_0)$  nella configurazione attuale  $\chi(\mathcal{B}_n, t)$  e per la (A.19.8)

$$dV = JdV_0$$

Inoltre valgono le relazioni

$$\begin{aligned} \mathbf{x} = \chi(P, t) \quad \mathbf{X} = \chi(P, t_0) \quad P = \chi^{-1}(\mathbf{X}, t_0) \\ \mathbf{x} = \chi[\chi^{-1}(\mathbf{X}, t_0), t] = \chi_k(\mathbf{X}, t) \end{aligned} \quad (1.7.2)$$

Ora l'integrale è esteso a un volume che non è più variabile nel tempo e quindi possiamo scambiare le operazioni di derivazione e integrazione

$$\frac{d}{dt} \int_{\chi(\mathcal{B}_n, t)} f(\mathbf{x}, t) dV = \int_{\chi(\mathcal{B}_n, t_0)} \frac{d}{dt} \{f[\chi_k(\mathbf{X}, t), t] J(\mathbf{X}, t)\} dV_0 \quad (1.7.3)$$

e ricordando la (1.4.6)

$$= \int_{\chi(\mathcal{B}_n, t_0)} \left[ \left( \frac{\partial f}{\partial t} + u_i \frac{\partial f}{\partial x_i} \right) J + f \frac{dJ}{dt} \right] dV_0 \quad (1.7.4)$$

Si deve ora esprimere la derivata rispetto al tempo dello Jacobiano che per la (A.19.7) è data da

$$J = \det \left( \frac{\partial x_i}{\partial X_j} \right) \quad (1.7.5)$$

Vediamo la derivata del singolo termine della matrice

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial x_i}{\partial X_j} \right) = \frac{\partial}{\partial X_j} \frac{dx_i}{dt} = \frac{\partial u_i}{\partial X_j} \quad (1.7.6)$$

essendo  $X_j$  indipendente dal tempo.

Considerando ora che  $u_i$  è funzione di  $x_k$  si può scrivere

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_i}{\partial X_j} &= \frac{\partial u_i}{\partial x_1} \frac{\partial x_1}{\partial X_j} + \frac{\partial u_i}{\partial x_2} \frac{\partial x_2}{\partial X_j} + \frac{\partial u_i}{\partial x_3} \frac{\partial x_3}{\partial X_j} \\ &= \frac{\partial u_i}{\partial x_k} \frac{\partial x_k}{\partial X_j} \end{aligned} \quad (1.7.7)$$

La derivata del determinante (1.7.5) è data dalla somma di tre determi-

nanti delle matrici in ciascuna delle quali una riga è derivata. Il primo di essi è dato da

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial u_i}{\partial x_k} \frac{\partial x_k}{\partial X_1} & \frac{\partial u_i}{\partial x_k} \frac{\partial x_k}{\partial X_2} & \frac{\partial u_i}{\partial x_k} \frac{\partial x_k}{\partial X_3} \\ \frac{\partial x_2}{\partial X_1} & \frac{\partial x_2}{\partial X_2} & \frac{\partial x_2}{\partial X_3} \\ \frac{\partial x_3}{\partial X_1} & \frac{\partial x_3}{\partial X_2} & \frac{\partial x_3}{\partial X_3} \end{vmatrix} \quad (1.7.8)$$

e analogamente, cambiando riga, gli altri due. Il primo determinante (1.7.8) dà un contributo  $\neq 0$  solo per  $k = 1$ , che, mettendo in evidenza  $\frac{\partial u_1}{\partial x_1}$ , è dato da  $\frac{\partial u_1}{\partial x_1} J$ . Per  $k = 2$  e  $k = 3$  si hanno rispettivamente  $\frac{\partial u_1}{\partial x_2}$  e  $\frac{\partial u_1}{\partial x_3}$  che moltiplicano determinanti di matrici con due righe uguali e quindi nulli.

Procedendo analogamente per gli altri due determinanti si ottiene

$$\begin{aligned} \frac{dJ}{dt} &= \left( \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} + \frac{\partial u_3}{\partial x_3} \right) J = \\ &= \frac{\partial u_i}{\partial x_i} J \equiv \operatorname{div} \mathbf{u} J \end{aligned} \quad (1.7.9)$$

Ritornando ora all'integrale (1.7.4) si ha

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_{\chi(\mathcal{B}_n, t)} f(\mathbf{x}, t) dV &= \int_{\chi(\mathcal{B}_n, t_0)} \left[ \left( \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial x_i} u_i \right) J + f \frac{\partial u_i}{\partial x_i} J \right] dV_0 \\ &= \int_{\chi(\mathcal{B}_n, t_0)} \left( \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial f u_i}{\partial x_i} \right) J dV_0 \end{aligned} \quad (1.7.10)$$

che è possibile ora riesprimere nella configurazione attuale  $\chi(\mathcal{B}_n, t)$  per la (1.7.1)

$$\frac{d}{dt} \int_{\chi(\mathcal{B}_n, t)} f(\mathbf{x}, t) dV = \int_{\chi(\mathcal{B}_n, t)} \left( \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial f u_i}{\partial x_i} \right) dV \quad (1.7.11)$$

La (1.7.11) dà la relazione conclusiva del teorema del trasporto di Reynolds. Altre forme si possono ricavare, applicando ad esempio il teorema di Green alla parte dell'integrale  $\frac{\partial f u_i}{\partial x_i}$ , per cui si ottiene

$$\frac{d}{dt} \int_{\chi(\mathcal{B}_n, t)} f(\mathbf{x}, t) dV = \int_{\chi(\mathcal{B}_n, t)} \frac{\partial f}{\partial t} dV + \int_{\partial \chi(\mathcal{B}_n, t)} f \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} dS \quad (1.7.12)$$

dove con  $\partial\chi(\mathcal{B}_n, t)$  si è indicato il contorno della  $\chi(\mathcal{B}_n, t)$ .

Un'altra forma si può ricavare a partire dalla (1.7.11) ricordando l'espressione della derivata materiale

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_{\chi(\mathcal{B}_n, t)} f(\mathbf{x}, t) dV &= \int_{\chi(\mathcal{B}_n, t)} \left[ \left( \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial x_i} u_i \right) + f \frac{\partial u_i}{\partial x_i} \right] dV \\ &= \int_{\chi(\mathcal{B}_n, t)} \left( \frac{Df}{Dt} + f \operatorname{div} \mathbf{u} \right) dV \end{aligned} \quad (1.7.13)$$

## 1.8 Equazione di Conservazione della Massa

Si può ora tornare alla formulazione della conservazione della massa in configurazioni successive assunte nel tempo dal corpo  $\mathcal{B}_n$ , espressa dalla (1.6.2). se a questa si applica il risultato del teorema di trasporto di Reynolds (1.7.11) con  $f(x) \equiv \rho(x, t)$  si ottiene

$$\dot{M}(\mathcal{B}_n) = \int_{\chi(\mathcal{B}_n, t)} \left( \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho u_i}{\partial x_i} \right) dV = 0 \quad (1.8.1)$$

ed essendo la (1.8.1) valida per un volume di integrazione arbitrario, deve essere ovunque nullo l'integrando cioè

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho u_i}{\partial x_i} \equiv \frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \rho \mathbf{u} = 0 \quad (1.8.2)$$

che è l'equazione di conservazione della massa in forma differenziale, detta anche equazione di continuità. Partendo dalla forma (1.7.13) si ottiene in modo analogo

$$\frac{D\rho}{Dt} + \rho \frac{\partial u_i}{\partial x_i} = \frac{D\rho}{Dt} + \rho \nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \quad (1.8.3)$$

da cui si vede immediatamente che per  $\rho = \text{cost.}$ , ipotesi di fluido incompressibile, la (1.8.3) si riduce alla

$$\nabla \cdot \mathbf{u} \equiv \operatorname{div} \mathbf{u} = 0 \quad (1.8.4)$$

Utilizzando l'equazione di continuità si può ricavare un'ulteriore forma del teorema del trasporto di Reynolds molto conveniente. Assumendo  $f = \rho F$  per la (1.7.13)

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt} \int_{\chi(\mathcal{B}_n, t)} (\rho F) dV &= \int_{\chi(\mathcal{B}_n, t)} \left( \frac{D(\rho F)}{Dt} + \rho F \operatorname{div} \mathbf{u} \right) dV \\
&= \int_{\chi(\mathcal{B}_n, t)} \left[ \rho \frac{DF}{Dt} + F \left( \frac{D\rho}{Dt} + \rho \operatorname{div} \mathbf{u} \right) \right] dV \quad (1.8.5) \\
&= \int_{\chi(\mathcal{B}_n, t)} \rho \frac{DF}{Dt} dV
\end{aligned}$$

ricordando la (1.8.3).

Prima di passare alle altre equazioni di conservazione della quantità di moto e della energia che governano il moto dei fluidi, è necessario dare ulteriori informazioni sulla cinematica della particella ed in particolare sulla deformazione locale, in funzione della quale saranno espresse le forze di contatto.

## 1.9 Deformazione locale

In descrizione referenziale la mappa di moto è data da

$$\mathbf{x} = \chi_k(\mathbf{X}, t) \quad (1.9.1)$$

dove  $\chi_k$  dà la trasposizione dei punti materiali dalla loro posizione  $\mathbf{X}$  nella configurazione  $K(\mathcal{B})$  di riferimento, alla loro attuale posizione  $\mathbf{x}$  al tempo  $t$ . Il gradiente di  $\chi_k(\mathbf{X}, t)$  dà la deformazione locale  $\mathbf{F}$

$$\mathbf{F} \equiv \mathbf{F}_k(\mathbf{X}, t) = \nabla \chi_k(\mathbf{X}, t) \quad (1.9.2)$$

definita come tensore gradiente di trasposizione. Una volta scelti i sistemi di coordinate nella configurazione di riferimento ed in quella attuale, le componenti di  $\mathbf{F}$  sono le nove derivate parziali delle componenti  $x_i$  rispetto alle componenti  $X_j$ , cioè

$$F_{ij} = \frac{\partial x_i}{\partial X_j} e_i e_j \quad (1.9.3)$$

$\mathbf{F}$  rappresenta l'approssimazione lineare della mappa  $\chi_k(\mathbf{X}, t)$

$$\chi_k(\mathbf{X}, t) - \chi_k(\mathbf{X}_0, t) = \mathbf{F}(\mathbf{X}_0, t)(\mathbf{X} - \mathbf{X}_0) + o(\mathbf{X} - \mathbf{X}_0)^2 \quad (1.9.4)$$

infatti la trasposizione  $\chi_k(\mathbf{X}, t)$  è approssimata da  $\mathbf{F}(\mathbf{X}_0, t)$  nell'intorno di  $\mathbf{X}_0$  a meno di un errore dell'ordine  $o(\mathbf{X} - \mathbf{X}_0)$ .

I concetti di trasposizione e di deformazione locale presuppongono una configurazione di riferimento, come si è visto per la formulazione delle (1.9.1)–(1.9.4).

Nello studio della fluidodinamica non vi è in generale una configurazione di carattere particolare (come per i solidi la configurazione indeformata) che possa essere utile assumere come riferimento. Ad esempio non è conveniente assumere la configurazione al tempo  $t_0$ , prima adottata, ma piuttosto la configurazione attuale, anche se questa è continuamente variabile nel tempo. Si ha allora una particolare descrizione referenziale detta *descrizione relativa*. In questa descrizione consideriamo oltre alla configurazione attuale data da

$$\mathbf{x} = \chi(\mathbf{X}, t) \quad (1.9.5)$$

anche la configurazione al tempo  $\tau$  immediatamente successivo a  $t$  ( $\tau = t + \varepsilon$  con  $\varepsilon \rightarrow 0$ )

$$\boldsymbol{\xi} = \chi(\mathbf{X}, \tau) \quad (1.9.6)$$

Esprimendo la (1.9.6) nella descrizione relativa

$$\boldsymbol{\xi} = \chi(\chi^{-1}(\mathbf{x}, t), \tau) \equiv \chi_t(\mathbf{x}, \tau) \quad (1.9.7)$$

ove  $\chi_t$  indica la trasposizione relativa e ovviamente per  $\tau = t$

$$\chi_t(\mathbf{x}, t) = \mathbf{x} \quad (1.9.8)$$

La derivata rispetto al tempo della trasposizione relativa (1.9.7) è data da

$$\partial_\tau \chi_t(\mathbf{x}, \tau) = \dot{\boldsymbol{\xi}}(\mathbf{x}, \tau) \quad (1.9.9)$$

e per  $\tau = t$

$$\partial_\tau \chi_t(\mathbf{x}, \tau) = \dot{\mathbf{x}}(\mathbf{x}, t) \quad (1.9.10)$$

Analogamente alla definizione (1.9.2), la deformazione locale relativa è data da

$$\mathbf{F}_t(\mathbf{x}, \tau) = \nabla \chi_t(\mathbf{x}, \tau) \equiv \partial_x \chi_t(\mathbf{x}, t) = \frac{\partial \xi_i}{\partial x_j} \mathbf{e}^{(i)} \mathbf{e}_{(j)} \quad (1.9.11)$$

e per  $\tau = t$

$$\mathbf{F}_t(\mathbf{x}, t) = \mathbf{I} \quad (1.9.12)$$

La derivata rispetto al tempo della deformazione locale relativa è data da

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{F}}_t &= \partial_\tau \mathbf{F}_t(\mathbf{x}, \tau) = \partial_\tau (\partial_x \chi_t(\mathbf{x}, \tau)) \\ &= \partial_x (\partial_\tau \chi_t(\mathbf{x}, \tau)) \end{aligned} \quad (1.9.13)$$

ponendo ora  $\tau = t$  per la (1.9.10)

$$\dot{\mathbf{F}}_t = [\partial_\tau F_t(x, \tau)]_{\tau=t} = \partial_x \dot{\mathbf{x}}(\mathbf{x}, t) = \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \mathbf{e}(i) \mathbf{e}(j) \quad (1.9.14)$$

denominato tensore gradiente di velocità, che corrisponde al tensore gradiente di spostamento adottato nella meccanica dei solidi per lo studio della deformazione. Vedremo che questo è il tensore più appropriato per descrivere la deformazione nei fluidi. Si può provare che  $\frac{\partial u_i}{\partial x_j}$  sono le componenti di un tensore del secondo ordine con la regola del quoziente (A.11.1) in quanto vale nell'intorno di un punto 0

$$du_i = \frac{\partial u_i}{\partial x_j} dx_j \quad (1.9.15)$$

che tramite  $\frac{\partial u_i}{\partial x_j}$  mette in relazione le tre componenti del vettore  $du_i$  con le tre componenti del vettore  $dx_j$ .

## 1.10 Analisi del moto relativo

Il tensore  $\frac{\partial u_i}{\partial x_j}$  si può scrivere per la (A.7.10) come somma di una parte simmetrica e di una antisimmetrica

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_j} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} - \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \quad (1.10.1)$$

$$= e_{ij} + \Omega_{ij} \quad (1.10.2)$$

avendo indicato con  $e_{ij}$  la parte simmetrica e con  $\Omega_{ij}$  la parte antisimmetrica. Per la (1.9.15) nell'intorno del punto 0 vale la

$$du_i = (e_{ij} + \Omega_{ij}) dx_j \quad (1.10.3)$$

Si è visto in precedenza (A.8) che se  $\Omega_{ij}$  è un tensore antisimmetrico e  $dx_j$  è il vettore posizione il termine  $\Omega_{ij} dx_j$  esprime una velocità di rotazione di corpo rigido con velocità angolare  $-\omega$ , che per la (A.8.3) vale

$$\begin{aligned} \omega_k &= -\frac{1}{2} \varepsilon_{ijk} \Omega_{ij} = \\ &= -\frac{1}{2} \varepsilon_{ijk} \left[ \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} - \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \right] \end{aligned} \quad (1.10.4)$$

e permutando opportunamente gli indici  $i$  e  $j$  si ottiene

$$\omega_k = \frac{1}{2} \varepsilon_{ijk} \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \quad (1.10.5)$$

cioè

$$\boldsymbol{\omega} = \frac{1}{2} \text{rot } \mathbf{u} \equiv \frac{1}{2} \boldsymbol{\zeta} \quad (1.10.6)$$

ricordando che  $\text{rot } \mathbf{u} = \varepsilon_{ijk} \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \mathbf{e}_{(k)}$ .

Il vettore  $\boldsymbol{\zeta}$  si chiama vorticità e il tensore  $\Omega_{ij}$  tensore di velocità angolare o di spin.

Se il moto è di traslazione con velocità  $\mathbf{u} = \mathbf{u}(t)$  allora  $\frac{\partial u_i}{\partial x_j} = 0$ , cioè il tensore gradiente di velocità è nullo.

Quindi se il moto della particella di fluido è dato da una traslazione più una rotazione di corpo rigido (cioè deformazione nulla), la parte simmetrica del tensore (1.10.1)  $e_{ij}$  è nulla. Per tale motivo  $e_{ij}$  si chiama tensore della velocità di deformazione o di stretching. Vediamo di interpretare fisicamente il tensore  $e_{ij}$  descrivendo il comportamento dell'intorno di 0 durante il moto. Consideriamo in particolare nella configurazione attuale (al tempo  $t$ ), assunta come configurazione di riferimento, i due segmenti  $OP$  e  $OQ$  uscenti da 0, di lunghezza  $ds$  e formanti tra loro un angolo  $\vartheta$ . Seguiamo il loro comportamento nel moto e quindi nella configurazione  $\mathcal{D}_\tau$  (al tempo  $\tau$ ).

Per  $OQ$  coincidente con  $OP$ , cioè  $\vartheta = 0$  si ottiene:

$$\frac{1}{ds} \frac{d}{dt}(ds) = e_{ij} \frac{dx_i}{ds} \frac{dx_j}{ds} \quad (1.10.7)$$

con  $\frac{dx_i}{ds}$  componente  $i$ -esima del vettore unitario tangente a  $OP$ . La (1.10.6) dice che la velocità di variazione della lunghezza di  $OP$ , in rapporto alla sua lunghezza è legata alla sua direzione tramite il tensore  $e_{ij}$ . In particolare se  $OP$  è parallelo all'asse 01 cioè

$$\frac{dx_i}{ds} = \delta_{i1} \quad \frac{dx_j}{ds} = \delta_{j1}$$

si ha

$$\frac{1}{ds_1} \frac{d}{dt}(ds_1) = e_{11} \quad (1.10.8)$$

e quindi  $e_{11}$  dà una velocità di deformazione di allungamento puro (*pure stretching*).

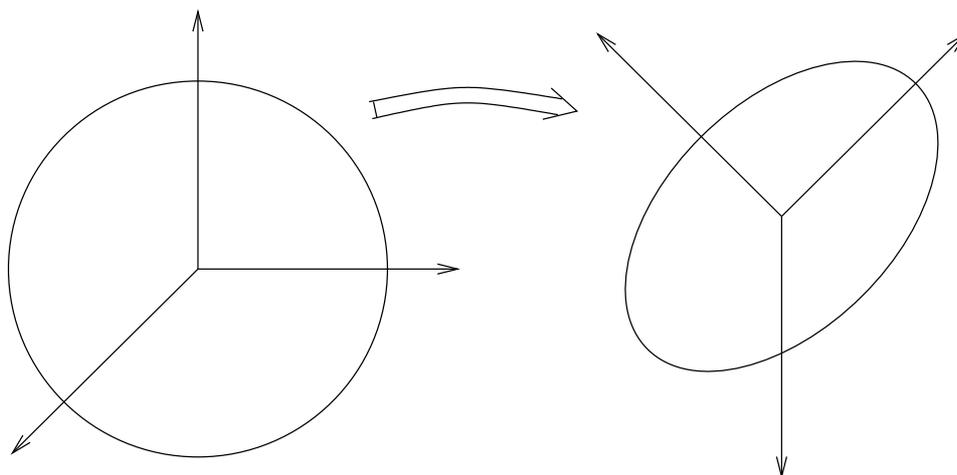
Se  $OP$  e  $OQ$  formano tra loro un angolo  $\vartheta \neq 0$ , derivando la (1.10.6) si ottiene

$$-\frac{d(\vartheta)_{12}}{dt} = 2e_{12} \tag{1.10.9}$$

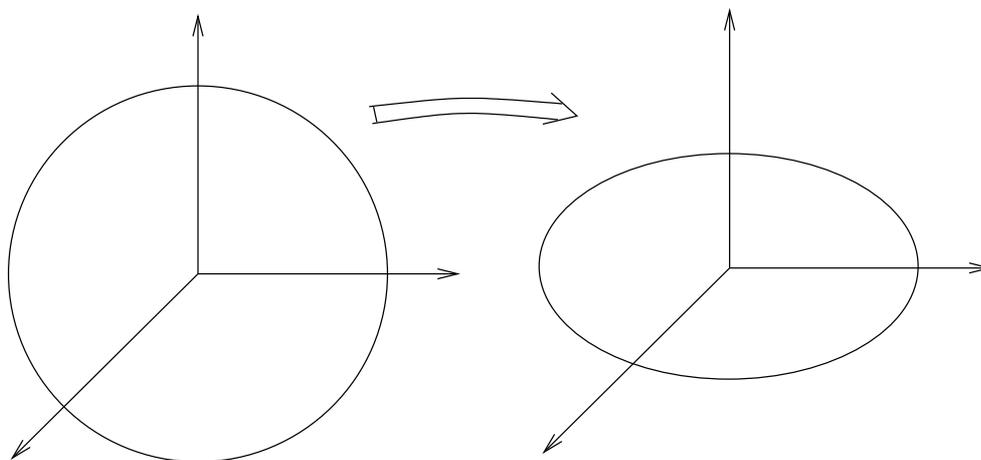
quindi  $e_{12}$  rappresenta la metà della velocità di variazione dell'angolo fra due segmenti inizialmente orientati come gli assi  $01$  e  $02$  cioè rappresenta una velocità di deformazione di scorrimento puro (*pure shear*).

In conclusione  $e_{ij}$  ha un significato cinematico ben preciso in quanto dà le componenti della velocità di deformazione.

Siccome  $e_{ij}$  è un tensore simmetrico è possibile, come si vedrà nell'Appendice A, individuare tre direzioni principali, tra loro ortogonali e i relativi valori principali del tensore. Se si prendono le direzioni principali come terna di assi del riferimento, il tensore assume forma diagonale, con  $e_{ij} \neq 0$  solo per  $i = j$ , e quindi si ha solo deformazione di allungamento puro lungo le tre direzioni principali. In base alla (1.10.2) si ha quindi che l'atto di moto nella configurazione attuale al tempo  $t$  si può decomporre oltre che in una velocità di traslazione uniforme, nella somma di una velocità di allungamento puro lungo i tre assi principali e di una velocità angolare di corpo rigido del riferimento individuato da questi tre assi. Questo è noto come teorema di *decomposizione di Cauchy–Stokes*. In generale avremo quindi, figurativamente, per la particella fluida una evoluzione come in figura se il moto è rotazionale e



e una evoluzione come in figura



se il moto è irrotazionale ( $\Omega_{ij} = 0$ )

### 1.11 Alcuni esempi di moto relativo

Il tensore velocità di deformazione è lineare nel campo di velocità: possiamo quindi sovrapporre due campi di velocità ottenendo un terzo campo il cui tensore velocità di deformazione è dato dalla somma dei corrispondenti tensori dei primi due.

Scelta una terna di assi 0123, se per esempio

$$u_i = C_1 x_1 \quad u_2 = 0 \quad u_3 = 0 \quad (1.11.1)$$

si ha  $\frac{\partial u_1}{\partial x_1} = C_1$  e le altre componenti di  $\frac{\partial u_i}{\partial x_j}$  sono tutte nulle. Si ha solo allungamento nella direzione 01. Se anche

$$u_2 = C_2 x_2 \quad u_3 = C_3 x_3 \quad (1.11.2)$$

si ha allungamento puro anche nelle direzioni 02, 03.

In tal caso il tensore gradiente di velocità vale

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_j} = \begin{vmatrix} \frac{\partial u_1}{\partial x_1} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial u_2}{\partial x_2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial u_3}{\partial x_3} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} C_1 & 0 & 0 \\ 0 & C_2 & 0 \\ 0 & 0 & C_3 \end{vmatrix} \quad (1.11.3)$$

ed essendo simmetrico vi è solo la parte tensore velocità di deformazione  $e_{ij}$  mentre il tensore velocità angolare  $\Omega_{ij}$  è nullo. Gli assi principali coincidono ovviamente con gli assi 01, 02, 03. Se si considerano direzioni non coincidenti

con gli assi principali si ha anche scorrimento, cioè possono essere diverse da zero le componenti fuori diagonale. Se consideriamo le componenti in un sistema di assi ruotato  $\bar{01}, \bar{02}, \bar{03}$  rispetto a quello originale, per la (A.7.1)

$$\bar{e}_{pq} = l_{ip}l_{jq}e_{ij} \quad (1.11.4)$$

Ad esempio nel caso piano

$$\bar{e}_{12} = l_{11}l_{12}e_{11} + l_{21}l_{22}e_{22}$$

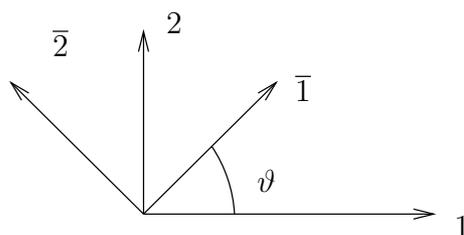
ed essendo per un angolo  $\vartheta = 45^\circ$  tra i due riferimenti

$$l_{11} = \frac{1}{\sqrt{2}} \quad l_{12} = \frac{1}{\sqrt{2}} \quad l_{21} = \frac{1}{\sqrt{2}} \quad l_{22} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

si ottiene

$$e_{12} = -\frac{1}{2}e_{11} + \frac{1}{2}e_{22} = \frac{1}{2}(C_2 - C_1) \quad (1.11.5)$$

ricordando che  $l_{ij}$  rappresenta il coseno dell'angolo tra il vecchio asse  $0i$  e il nuovo  $0j$  (§ A.1).

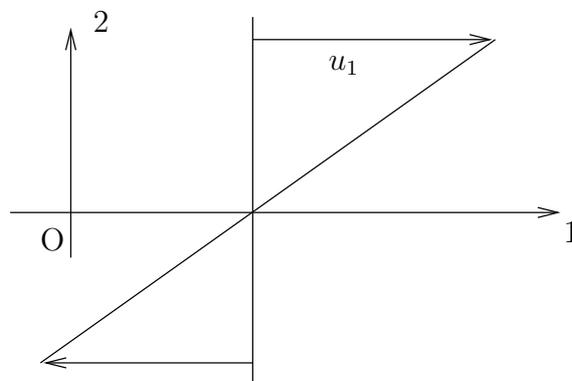


La (1.11.5) mostra che si ha scorrimento, cioè variazione di angolo tra due segmenti per direzioni non coincidenti con gli assi principali.

Facciamo ora un altro esempio: analizziamo il campo di velocità dato da

$$u_i = Cx_2 \quad u_2 = 0 \quad u_3 = 0 \quad (1.11.6)$$

per il quale la sola componente del tensore  $e_{ij}$  diversa da zero è  $\frac{\partial u_1}{\partial x_2}$ .



E' questo un campo di velocità molto comune in fluidodinamica: ad esempio strato limite, *mixing* e in generale *flusso di shear*.

Il tensore gradiente di velocità è dato da:

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_j} = \begin{vmatrix} 0 & \frac{\partial u_1}{\partial x_1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & C & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} \quad (1.11.7)$$

che decomponiamo in una parte simmetrica e in una antisimmetrica secondo la (1.10.1). Si ottiene

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_j} = \begin{vmatrix} 0 & \frac{1}{2} \frac{\partial u_1}{\partial x_2} & 0 \\ \frac{1}{2} \frac{\partial u_1}{\partial x_2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} + \Omega_{ij} = \begin{vmatrix} 0 & \frac{1}{2} \frac{\partial u_1}{\partial x_2} & 0 \\ -\frac{1}{2} \frac{\partial u_1}{\partial x_2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} \quad (1.11.8)$$

Dal tensore velocità angolare  $\Omega_{ij}$  ricaviamo il vettore velocità angolare

$$\omega_k = -\frac{1}{2} \varepsilon_{ijk} \Omega_{ij}$$

con

$$\omega_3 = -\frac{1}{2} \left( \frac{1}{2} \frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{1}{2} \frac{\partial u_1}{\partial x_2} \right) = -\frac{1}{2} \frac{\partial u_1}{\partial x_2} \quad (1.11.9)$$

$$\omega_2 = \omega_1 = 0$$

Il vettore velocità angolare  $\boldsymbol{\omega} = (0, 0, -\frac{1}{2} \frac{\partial u_1}{\partial x_2})$  dà l'entità della velocità di rotazione di corpo rigido che risulta essere in senso orario in quanto negativa.

Per il tensore velocità di deformazione  $e_{ij}$  ricaviamo gli assi principali con relativi allungamenti principali, considerando il sistema (A.9.2) ed imponendo la condizione (A.9.3). Nel caso in esame si ha per gli invarianti dati dalla (A.9.6)

$$I_1 = I_3 = 0 \quad I_2 = -\left( \frac{1}{2} \frac{\partial u_1}{\partial x_2} \right) \left( \frac{1}{2} \frac{\partial u_1}{\partial x_2} \right) = -\frac{1}{4} C^2$$

L'equazione caratteristica del tensore (A.9.5) diviene quindi

$$\lambda^3 - \frac{1}{4} C^2 \lambda = 0 \quad (1.11.10)$$

con radici

$$\lambda = 0 \qquad \lambda = \pm \frac{1}{2}C$$

che sono gli autovalori (allungamenti principali) del sistema considerato. Ricaviamo ora i corrispondenti autovettori (assi principali). Il sistema (A.9.3) insieme con la condizione (A.9.7) danno rispettivamente

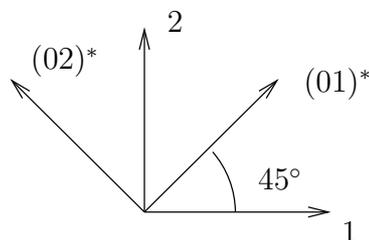
$$\begin{array}{llll} \text{per } \lambda = +\frac{1}{2}C & a_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} & a_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} & a_3 = 0 \\ \text{per } \lambda = -\frac{1}{2}C & a_1 = -\frac{1}{\sqrt{2}} & a_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} & a_3 = 0 \\ \text{per } \lambda = 0 & a_1 = 0 & a_2 = 0 & a_3 = 1 \end{array}$$

che sono le componenti su 01, 02, 03 dei 3 assi principali

$$(01)^* \equiv \left( \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0 \right)$$

$$(02)^* \equiv \left( -\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0 \right)$$

$$(03)^* \equiv (0, 0, 1)$$



In corrispondenza di  $(01)^*$  si ha allungamento  $\frac{1}{2}C$ , in corrispondenza a  $(02)^*$  si ha  $-\frac{1}{2}C$  ed infine in corrispondenza di  $(03)^*$  si ha allungamento nullo.

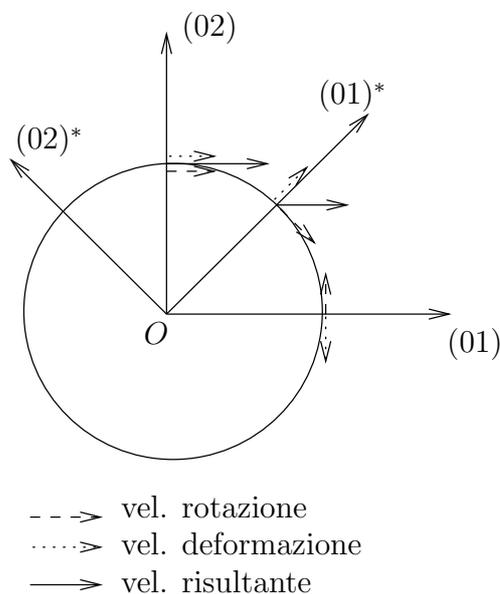
In corrispondenza degli assi di riferimento (01), (02) originali, si ha scorrimento che per quanto visto precedentemente, per un angolo di  $45^\circ$  vale per la (1.11.5)

$$e_{12} = \frac{1}{2} \left[ \frac{1}{2}C - \left( -\frac{1}{2}C \right) \right] = \frac{1}{2}C$$

valore già noto inizialmente dalla (1.11.8).

I contributi del moto di deformazione e di quello di rotazione si combinano per dare il moto di scorrimento (1.11.6) da cui siamo partiti, come si

può verificare facilmente dalla figura in cui si considera il moto dei punti di una circonferenza di raggio unitario nel piano 01, 02.



Quindi il moto si può decomporre in ciascun punto in una dilatazione lungo i 3 assi principali tra loro ortogonali e in una rotazione rigida della terna composta da di questi tre assi, oltre che in una traslazione uniforme in questo caso assente, come previsto dal teorema di Cauchy–Stokes.

### 1.12 Traiettorie, Linee di corrente, Linee di fumo

In base alle descrizioni del moto illustrate in § 1.2, 1.3, 1.4, si possono individuare nello spazio occupato dal fluido delle linee con particolare significato fisico.

La linea descritta nello spazio dalla particella materiale  $P$ , lungo il suo moto, si chiama *traiettoria* di  $P$ , che è data in descrizione referenziale da

$$\mathbf{x} = \chi_k(\mathbf{X}, t) \tag{1.12.1}$$

Nota la velocità, che è la derivata della posizione rispetto al tempo, seguendo una certa particella

$$\mathbf{u} = \left[ \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial t} \right]_{\mathbf{X}} = \left[ \frac{\partial \chi_k(\mathbf{X}, t)}{\partial t} \right]_{\mathbf{X}} = \dot{\chi}_k \tag{1.12.2}$$

si può determinare la linea tracciata dalla particella, risolvendo il sistema di equazioni differenziali:

$$\frac{dx_i}{dt} = u_i \tag{1.12.3}$$

con la condizione iniziale

$$\text{per } t = t_0 = 0 \quad x_i = X_i \quad (1.12.4)$$

**Esempio:** per il campo di velocità dato dalle

$$u_1 = \frac{x_1}{1+t} \quad u_2 = \frac{x_2}{1+2t} \quad u_3 = 0 \quad (1.12.5)$$

integrando le (1.12.3) tra  $t_0$  e  $t$  con la condizione iniziale (1.12.4) si ottiene

$$x_1 = X_1(1+t) \quad x_2 = X_2(1+2t)^{1/2} \quad x_3 = X_3 \quad (1.12.6)$$

•

Le linee che per un dato tempo  $t$  sono ovunque tangenti al campo di velocità si chiamano *linee di corrente*, e sono date dalla soluzione del sistema di equazioni differenziali

$$\frac{dx_i}{d\alpha} = u_i \quad (1.12.7)$$

con  $\alpha$  parametro arbitrario lungo le curve (in particolare se misura la lunghezza lungo la curva dà luogo a un vettore tangente unitario (A.19.3)). Le (1.12.7) si integrano a partire da una certa condizione iniziale data da  $x_i = x_{i0}$  per  $\alpha = 0$

**Esempio:** per il campo di velocità descritto dalle (1.12.5), integrando le (1.12.7) da  $x_{i0}$  a  $x_i$  e da 0 ad  $\alpha$  corrispondentemente, considerando  $t$  come parametro si ottengono

$$x_1 = x_{10}e^{\frac{\alpha}{1+t}} \quad x_2 = x_{20}e^{\frac{\alpha}{1+2t}} \quad x_3 = x_{30} \quad (1.12.8)$$

che assumono diversi valori al variare di  $t$  e  $x_{i0}$ . •

Oltre alle traiettorie e le linee di corrente si possono definire altre linee di interesse fisico, le *linee di fumo (streaklines)* nel seguente modo: la linea di fumo passante per  $x_0$  al tempo  $t$ , rappresenta le posizioni al tempo  $t$  delle particelle che a un tempo precedente  $\tau \leq t$  sono passate per  $x_0$ . Tali linee si possono osservare sperimentalmente se del fumo ad esempio viene iniettato continuamente in aria nella posizione  $x_0$ , mediante una fotografia al tempo  $t$ .

Se il moto è descritta dalla

$$\mathbf{x} = \chi_k(\mathbf{X}, t)$$

e

$$\mathbf{X} = \chi_k^{-1}(\mathbf{x}_0, t) \quad \text{con } \tau \leq t$$

allora

$$\mathbf{x} = \chi_k [\chi_k^{-1}(\mathbf{x}_0, \tau), t] \quad (1.12.9)$$

•

**Esempio:** per il campo di velocità descritto dalle (1.12.5) dalle traiettorie (1.12.5) si ha per le particelle che hanno occupato la posizione  $\mathbf{x}_0$  al tempo  $\tau$

$$x_{10} = X_1(1 + \tau) \quad x_{20} = X_2(1 + 2\tau) \quad x_{30} = X_3 \quad (1.12.10)$$

da cui si ricavano

$$X_1 = \frac{x_{10}}{1 + \tau} \quad X_2 = \frac{x_{20}}{1 + 2\tau} \quad X_3 = x_{30}$$

che sostituite nelle equazioni delle traiettorie (2.12.6) danno

$$x_1 = \frac{x_{10}}{1 + \tau}(1 + t) \quad x_2 = \frac{x_{20}}{1 + 2\tau}(1 + 2t) \quad x_3 = x_{30} \quad (1.12.11)$$

che sono le equazioni delle linee di fumo per il campo di velocità considerato.

•

Se il campo di velocità è stazionario, traiettorie, linee di corrente e linee di fumo coincidono.

## Bibliografia

1. Aris, R., *Vector, Tensors, and the Basic Equation of Fluid Mechanics*, Prentice Hall, 1962.
2. Slattery, J.C., *Momentum, Energy and Mass Transfer in Continua*, McGraw-Hill, 1972.
3. Truesdell, C., Toupin, R.A., "The Classical Field Theories", in *Handbuch der Physik* (Flügge S., Ed.), Springer-Verlag, 1960.
4. Truesdell, C., *A First Course in Rational Continuum Mechanics*, vol. I, Academic Press, 1977.
5. Lai, W.H., Rubin, D., Krempl, E., *Introduction to Continuum Mechanics*, Pergamon Press, 1978.

- 
6. Chorin, A.J., Marsden, J.E., *A Mathematical Introduction to Fluid Mechanics*, Springer verlag, 1979.
  7. Batchelor, G.K., *An Introduction to Fluid Dynamics*, Cambridge University Press, 1967.
  8. Pau-Chang, L., *Introduction to the Mechanics of Viscous Fluids*, Hemisphere Publ. Co., McGraw Hill, 1977.
  9. Kundu P.K., *Fluid Mechanics*, Academic Press, 1990.

## Capitolo 2

# Dinamica dei corpi deformabili. Conservazione della quantità di moto

### 2.1 Forze

Le forze che agiscono su un elemento  $\mathcal{B}_n$  del corpo  $B$  sono essenzialmente di due tipi:

- a) forze di massa che agiscono “direttamente” sul volume di  $\mathcal{B}_n$ , attraverso una interazione a grande distanza. Un esempio sono le forze di gravità e le forze elettromagnetiche. Tali forze agenti su  $\mathcal{B}_n$  si possono esprimere mediante l'integrale

$$\int_{\chi(\mathcal{B}_n,t)} \rho \mathbf{f} dV \quad (2.1.1)$$

con  $\mathbf{f}$  forza per unità di massa;

- b) forze di contatto che agiscono sul volume di  $\mathcal{B}_n$ , attraverso la superficie di contorno. Se l'elemento di fluido considerato ha una porzione di superficie libera, cioè di contorno per il fluido, le forze di contatto possono essere date ad esempio da una pressione applicata su questa superficie o da una forza tangenziale. Se l'elemento di volume è interno al fluido, le forze di contatto sono quelle esercitate sulla superficie dal materiale circostante. Indicando la forza di contatto per unità di area con  $\mathbf{t}_{(n)}$  dove con  $n$  si indica la normale uscente localmente dalla superficie, si ha

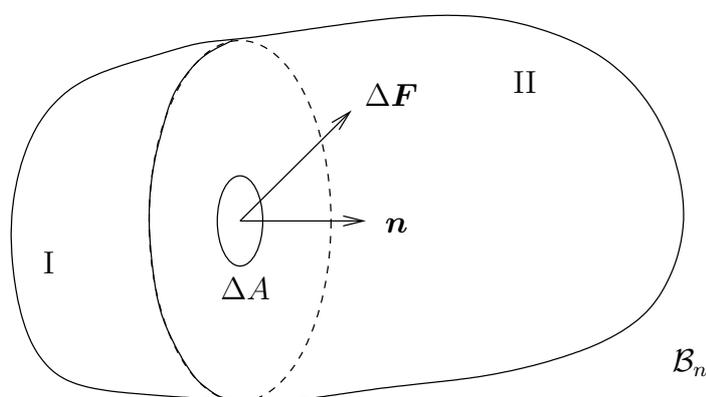
$$\mathbf{t}_{(n)} = \lim_{\Delta A \rightarrow 0} \frac{\Delta \mathbf{F}}{\Delta A}$$

agente sulla porzione  $I$  di  $\mathcal{B}_n$  con

$$\mathbf{t}_{(n)} = -\mathbf{t}_{(n)} \quad (2.1.2)$$

che esprime il lemma di Cauchy. La forza totale esercitata sul volume attraverso la sua superficie è data da

$$\int_{\partial\chi(\mathcal{B}_n,t)} \mathbf{t}_{(n)} dS \quad (2.1.3)$$



## 2.2 Conservazione della quantità di moto

Il principio di conservazione della quantità di moto della meccanica di Newton esprime l'uguaglianza della variazione nel tempo della quantità di moto con la somma delle forze, dei due tipi sopra visti, applicate al volume di fluido considerato.

Essendo la quantità di moto

$$\int_{\chi(\mathcal{B}_n,t)} \rho \mathbf{u} dV \quad (2.2.1)$$

L'equazione di conservazione della quantità di moto (o prima legge di Eulero) si esprime in forma vettoriale, mediante le (2.1.1), (2.1.3), (2.2.1)

$$\frac{d}{dt} \int_{\chi(\mathcal{B}_n,t)} \rho \mathbf{u} dV = \int_{\chi(\mathcal{B}_n,t)} \rho \mathbf{f} dV + \int_{\partial\chi(\mathcal{B}_n,t)} \mathbf{t}_{(n)} dS \quad (2.2.2)$$

per il teorema di trasporto di Reynolds nella forma (1.8.5) il primo termine della (2.2.2) diviene

$$\frac{d}{dt} \int_{\chi(\mathcal{B}_n,t)} \rho u_i dV = \int_{\chi(\mathcal{B}_n,t)} \rho \frac{Du_i}{Dt} dV = \int_{\chi(\mathcal{B}_n,t)} \left( \frac{\partial \rho u_i}{\partial t} + \frac{\partial \rho u_i u_j}{\partial x_j} \right) dV \quad (2.2.3)$$

Cerchiamo ora di analizzare l'integrale delle forze di contatto (2.1.3) e di esprimerlo in modo più appropriato.

Supponiamo che nell'eq. (2.2.2) la configurazione  $\chi(\mathcal{B}_n, t)$  abbia dimensione caratteristica  $d$ . Il volume è quindi proporzionale a  $d^3$  e l'area della superficie  $\partial\chi(\mathcal{B}_n, t)$  di contorno è proporzionale a  $d^2$ . Dividendo la (2.2.2) per  $d^2$  e considerando il limite per  $d \rightarrow 0$  si ottiene

$$\lim_{d \rightarrow 0} \frac{1}{d^2} \int_{\partial\chi(\mathcal{B}_n, t)} \mathbf{t}_{(n)} S = 0 \quad (2.2.4)$$

cioè le forze di contatto per unità di area, o tensioni, sono localmente in equilibrio.

### 2.3 Il tensore delle tensioni

Il vettore tensione  $\mathbf{t}_{(n)}$  relativo a un elemento di superficie, è associato al vettore normale alla superficie tramite il tensore delle tensioni  $T_{ij}$  che esprime una trasformazione lineare tra le due classi di vettori  $\mathbf{t}_{(n)}$  e  $\mathbf{n}$

$$t_{(n)i} = T_{ij} n_j \quad (2.3.1)$$

che ricordando la (A.7.15) si può scrivere:

$$\mathbf{t}_{(n)} = \mathbf{T} \cdot \mathbf{n} \quad (2.3.2)$$

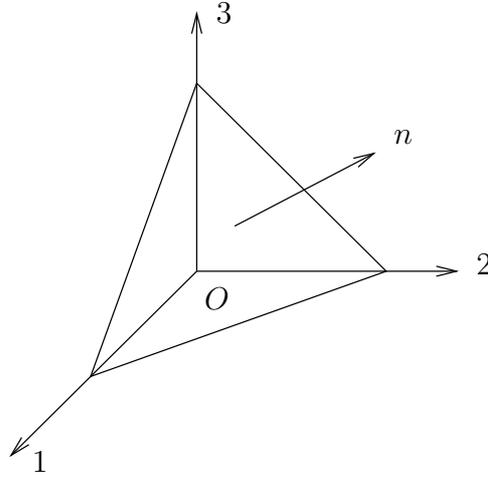
Per avere un'interpretazione fisica del tensore delle tensioni, seguiamo la dimostrazione di Cauchy.

Consideriamo il tetraedro (Fig. 2.2) con tre facce parallele ai piani coordinati del sistema con origine in 0 e la quarta faccia con normale  $\mathbf{n} = n_i \mathbf{e}_{(i)}$ .

Se  $dA$  è l'area della faccia obliqua, le altre facce  $\perp$  assi  $0_i$  sono date da

$$dA_i = n_i dA \quad (2.3.3)$$

con normale uscente  $\mathbf{e}_{(i)}$  e quindi la tensione è  $-\mathbf{t}_{(i)}$  per la (2.1.2) mentre  $\mathbf{t}_{(i)}$  corrisponde a normale uscente  $+\mathbf{e}_{(i)}$ .



Applicando l'equilibrio locale (2.2.4) al tetraedro di Fig. 2.2 con dimensione caratteristica  $d$  tendente a zero si ha

$$\mathbf{t}_{(n)}dA - \mathbf{t}_{(1)}dA_1 - \mathbf{t}_{(2)}dA_2 - \mathbf{t}_{(3)}dA_3 = 0 \quad (2.3.4)$$

e per la (2.3.3)

$$\mathbf{t}_{(n)} = \mathbf{t}_{(1)}n_1 + \mathbf{t}_{(2)}n_2 + \mathbf{t}_{(3)}n_3 \quad (2.3.5)$$

che dimostra che le tensioni in un punto  $O$  relative a 3 piani tra loro indipendenti (come quelli coordinati su cui è costruito il tetraedro in Fig. 2.2) determinano la tensione per qualunque superficie passante per quel punto.

Se indichiamo con  $T_{ij}$  la componente  $i$ -esima del vettore  $\mathbf{t}_{(j)}$  e con  $t_{(n)i}$  la componente  $i$ -esima di  $\mathbf{t}_{(n)}$ , possiamo riscrivere la (2.3.5) in termini di componenti

$$t_{(n)i} = T_{ij}n_j \quad (2.3.6)$$

ove  $T_{ij}$  associando le componenti del vettore  $\mathbf{t}_{(n)}$  alle componenti del vettore  $\mathbf{n}$  da esso indipendente, per la regola del quoziente (A.11.1), sono le componenti di un tensore del secondo ordine.

Lo stato delle tensioni in questo punto, la cui posizione è  $\mathbf{x}$ , è completamente individuato dalle nove componenti del tensore  $T_{ij}(\mathbf{x})$  e quindi in generale la (2.3.1) si scrive

$$\mathbf{t}(\mathbf{x}, \mathbf{n}) = \mathbf{T}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{n} \quad (2.3.7)$$

che, essendo una relazione tensoriale, è valida per una qualunque rotazione degli assi coordinati, limitandosi qui a sistemi di coordinate cartesiane.

## 2.4 Conservazione della quantità di moto in forma differenziale

Se si sostituisce la (2.3.1) nella (2.2.2), tenendo conto della (2.2.3) si ottiene

$$\int_{\chi(\mathcal{B}_{n,t})} \rho \frac{Du_i}{Dt} dV = \int_{\chi(\mathcal{B}_{n,t})} \rho f_i dV + \int_{\partial\chi(\mathcal{B}_{n,t})} T_{ij} n_j dS \quad (2.4.1)$$

e applicando all'integrale superficiale il teorema di Green nella forma (A.15.2)

$$\int_{\partial\chi(\mathcal{B}_{n,t})} T_{ij} n_j dS = \int_{\chi(\mathcal{B}_{n,t})} T_{ij,j} dV \quad (2.4.2)$$

Essendo ora tutti i termini dell'equazione costituiti da integrali estesi allo stesso volume, peraltro scelto arbitrariamente, l'equazione (2.4.1) può essere soddisfatta solo se è nullo l'integrando:

$$\rho \frac{Du_i}{Dt} = \rho f_i + T_{ij,j} \quad (2.4.3)$$

nota anche come equazione di Cauchy.

Adottando per il teorema di trasporto di Reynolds la seconda forma riportata in (2.2.3) si ha

$$\frac{\partial \rho u_i}{\partial t} + \frac{\partial \rho u_i u_j}{\partial x_j} = \rho f_i + \frac{\partial T_{ij}}{\partial x_j} \quad (2.4.4)$$

che si può scrivere

$$\frac{\partial \rho u_i}{\partial t} = \rho f_i + (T_{ij} - \rho u_i u_j)_j \quad (2.4.5)$$

Ricordando che l'accelerazione è la derivata materiale della velocità, la (2.4.3) diviene in forma vettoriale

$$\rho \mathbf{a} = \rho \mathbf{f} + \nabla \cdot \mathbf{T} \quad (2.4.6)$$

## 2.5 Conservazione del momento della quantità di moto

Se si assume che tutte le coppie applicate alla particella di fluido derivano da momenti di forze macroscopiche (*fluidi non-polari*) allora si può ricavare dalla (2.2.2) l'equazione di conservazione del momento della quantità di moto (o seconda legge del moto di Eulero)

$$\frac{d}{dt} \int_{\chi(\mathcal{B}_{n,t})} \rho (\mathbf{x} \times \mathbf{u}) dV = \int_{\chi(\mathcal{B}_{n,t})} \rho (\mathbf{x} \times \mathbf{f}) dV + \int_{\partial\chi(\mathcal{B}_{n,t})} \mathbf{x} \times \mathbf{t}_{(n)} dS \quad (2.5.1)$$

da cui si può dedurre la condizione di simmetria per il tensore delle tensioni  $\mathbf{T}$  nel caso considerato di fluidi non-polari.

Applicando al primo integrale e ricordando la (A.12.4)

$$\frac{d}{dt} \int_{\chi(\mathcal{B}_n, t)} \rho(\mathbf{x} \times \mathbf{u}) dV = \int_{\chi(\mathcal{B}_n, t)} \rho(\mathbf{x} \times \mathbf{a}) dV \quad (2.5.2)$$

essendo  $\mathbf{u} \times \mathbf{u} = 0$ .

L'ultimo integrale della (2.5.1) scritto per la componente  $i$ -esima, diviene per il teorema di Green e ricordando la (2.3.1)

$$\int_{\partial\chi(\mathcal{B}_n, t)} \varepsilon_{ijk} x_j t(n)_k dS = \int_{\partial\chi(\mathcal{B}_n, t)} \varepsilon_{ijk} x_j T_{kl} n_l dS = \quad (2.5.3)$$

$$\int_{\chi(\mathcal{B}_n, t)} \varepsilon_{ijk} (x_j T_{kl})_l dV = \int_{\chi(\mathcal{B}_n, t)} (\varepsilon_{ijk} x_j T_{kl, l} + \varepsilon_{ijk} T_{kj}) dV$$

essendo  $\varepsilon_{ijk, l} = 0$  e  $x_{j, l} = \delta_{jl}$ . Ritornando alla forma vettoriale si ha

$$\int_{\chi(\mathcal{B}_n, t)} \mathbf{x} \times (\nabla \cdot \mathbf{T}) dV + \int_{\chi(\mathcal{B}_n, t)} \varepsilon_{ijk} T_{kj} \mathbf{e}_{(i)} dV \quad (2.5.4)$$

Sostituendo le (2.5.2) e (2.5.4) nella (2.5.1) e raggruppando alcuni termini si ottiene

$$\int_{\chi(\mathcal{B}_n, t)} \mathbf{x} \times (\rho \mathbf{a} - \rho \mathbf{f} - \nabla \cdot \mathbf{T}) dV - \int_{\chi(\mathcal{B}_n, t)} \varepsilon_{ijk} T_{kj} \mathbf{e}_{(i)} dV = 0 \quad (2.5.5)$$

dove il primo integrale per la (2.4.5) è nullo. Essendo arbitrario il volume di integrazione, perché sia soddisfatta la (2.5.5) deve essere

$$\varepsilon_{ijk} T_{kj} \mathbf{e}_{(i)} = 0 \quad (2.5.6)$$

cioè devono essere indipendentemente uguali a zero tutte tre le componenti del vettore (2.5.6) e quindi

$$T_{32} - T_{23} = 0 \quad T_{13} - T_{31} = 0 \quad T_{21} - T_{12} = 0$$

cioè

$$T_{kj} = T_{jk} \quad (2.5.7)$$

che è la condizione di simmetria del tensore  $\mathbf{T}$ .

Nel caso di fluidi non polari si può quindi assumere il tensore delle tensioni simmetrico, e con tale assunzione non c'è più bisogno di considerare l'equazione di conservazione del momento della quantità di moto come

equazione indipendente. Essendo  $\mathbf{T}$  simmetrico vi sono tre direzioni principali fra loro ortogonali, rispetto alle quali il tensore assume forma diagonale, con i termini sulla diagonale dati dalle tensioni principali.

## 2.6 Fluidi polari

Si chiamano fluidi polari quei fluidi la cui microstruttura è meccanicamente importante. Per esempio: sospensioni gas-solido, liquido solido, fluidi con particelle cariche elettricamente soggetti a campi elettromagnetici esterni, etc. La microstruttura del fluido può essere meccanicamente importante anche se molto piccola, quando le dimensioni caratteristiche del problema sono dello stesso ordine di grandezza della microstruttura. Es.: strati sottili di lubrificanti, flussi superficiali, etc. In tutti questi casi una particella costituente la microstruttura può ruotare indipendentemente dal fluido circostante se ad essa viene direttamente applicata una coppia. Pertanto nello studio dei fluidi polari si introduce una variabile cinematica che dà la velocità angolare della particella indipendentemente dal campo di velocità circostante ed inoltre il tensore delle tensioni non è più simmetrico come per i fluidi non-polari. Si possono quindi introdurre coppie per unità di massa  $q$  applicate direttamente al volume (analoghe alle forze  $\mathbf{f}$ ) e tensioni di coppia  $\mathbf{c}_{(n)}$  agenti attraverso il contatto tramite la superficie di contorno (analoghe a  $\mathbf{t}_{(n)}$ ). Analogamente a quanto detto per  $\mathbf{t}_{(n)}$  in 2.3, si può definire il tensore  $\mathbf{C}$  tale che

$$\mathbf{c}_{(n)} = \mathbf{C} \cdot \mathbf{n} \quad (2.6.1)$$

L'equazione di conservazione del momento della quantità di moto si scrive

$$\frac{d}{dt} \int_{\chi(\mathcal{B}_n, t)} [\rho \mathbf{l} + \rho(\mathbf{x} \times \mathbf{u})] dV = \int_{\chi(\mathcal{B}_n, t)} \rho(\mathbf{q} + \mathbf{x} \times \mathbf{f}) dV + \int_{\chi(\mathcal{B}_n, t)} [\mathbf{c}_{(n)} + \mathbf{x} \times \mathbf{t}_{(n)}] dS \quad (2.6.2)$$

dove  $\rho \mathbf{l}$  è il momento della quantità di moto intrinseco delle particelle costituenti la microstruttura.

Ricordando la (2.5.2) e raggruppando i termini in modo da far apparire la (2.4.5) si ottiene, procedendo come in 2.5,

$$\int_{\chi(\mathcal{B}_n, t)} \mathbf{x} \times (\rho \mathbf{a} - \rho \mathbf{f} - \nabla \cdot \mathbf{T}) dV + \int_{\chi(\mathcal{B}_n, t)} \rho \frac{D\mathbf{l}}{Dt} dV + \int_{\chi(\mathcal{B}_n, t)} (\rho \mathbf{q} + \nabla \cdot \mathbf{C} + \varepsilon_{ijk} T_{kj} \mathbf{e}_{(i)}) dV = 0 \quad (2.6.3)$$

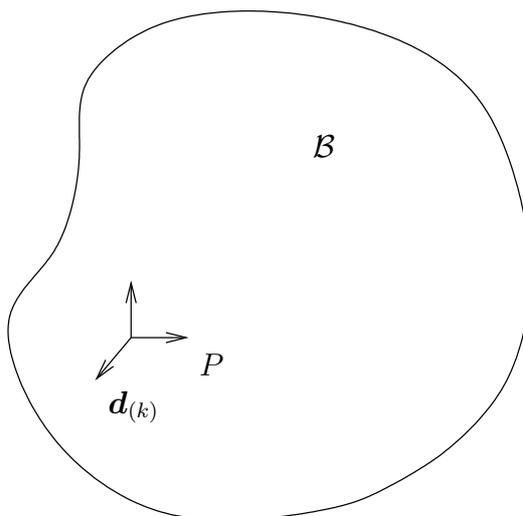
essendo per la (2.4.5) il primo integrale nullo ed essendo arbitrario il volume di integrazione, perché sia soddisfatta la (2.6.4) deve essere

$$\rho \frac{D\mathbf{l}}{Dt} = \rho \mathbf{q} + \nabla \cdot \mathbf{C} + \varepsilon_{ijk} T_{kj} \mathbf{e}_{(i)} \quad (2.6.4)$$

che si riduce alla (2.5.6) per  $\mathbf{l}, \mathbf{q}, \mathbf{C}$  nulli cioè per fluidi non-polari.

Nei fluidi polari quindi il tensore delle tensioni non è simmetrico ed è necessario considerare l'equazione di conservazione del momento della quantità di moto per ricavare le componenti della quantità di moto intrinseco  $\mathbf{l}$ . Il fluido polare, caratterizzato cinematicamente da un campo di velocità del continuo e da un campo di velocità angolare della microstruttura tra loro indipendenti, si può studiare associando a ciascuna particella materiale  $P$ , introdotta in 1.1, una terna rigida ortonormale costituita dai 3 direttori  $\mathbf{d}_{(k)}$ , che soddisfano la

$$\mathbf{d}_{(k)} \cdot \mathbf{d}_{(e)} = \delta_{kl} \quad (2.6.5)$$



Il moto del corpo  $\mathcal{B}$  è dato non solo dalla (1.2.1), ma dall'insieme delle due relazioni

$$\begin{cases} \mathbf{x} = \chi(P, t) \\ \mathbf{d}_{(k)} = \psi_k(P, t) \end{cases} \quad (2.6.6)$$

oltre che dalla (2.6.5). Ciascuna particella materiale è perciò una copia infinitesima di un corpo rigido con 6 gradi di libertà: 3 di posizione e 3 di orientamento. E' questo un particolare esempio di "Continuo di Cosserat", nel quale alla particella materiale possono essere associati gradi di libertà di vario genere.

## 2.7 Comportamento dei fluidi

Finora non si è ancora specificato nulla sul tipo di fluido che consideriamo e nel suo comportamento durante il moto. Le equazioni di conservazione di massa, quantità di moto e momento della quantità di moto sono valide in generale indipendentemente dal tipo di fluido considerato. Da un punto di vista matematico, si sono introdotte nel sistema di equazioni le seguenti incognite: le 3 componenti  $u_i$  del vettore velocità, le 6 componenti  $T_{ij}$  (per fluidi non polari) del tensore delle tensioni e la densità  $\rho$ , supponendo nota la forza di massa  $f$ . Corrispondentemente si hanno a disposizione solo 4 equazioni, escludendo per fluidi non polari l'equazione di conservazione del momento di quantità di moto, e cioè: le 3 componenti dell'equazione vettoriale della conservazione di quantità di moto e l'equazione scalare della conservazione della massa.

E' quindi necessario fornire ulteriori informazioni sul comportamento del fluido: in particolare sulla dipendenza delle forze di contatto (e quindi  $T_{ij}$ ) dal moto del corpo (e quindi  $u_i$ ). Tali relazioni tra forze di contatto e moto, dette *equazioni costitutive*, sono basate sui seguenti assiomi, introdotti da Noll:

- *principio di determinismo*: la tensione in un corpo è determinata dalla storia del moto che il corpo ha avuto fino al tempo  $t$ , e non è quindi influenzata dal moto futuro del corpo
- *principio di effetto locale*: il moto del fluido al di fuori di un intorno abbastanza piccolo di una particella materiale  $P$ , può essere ignorato nel determinare la tensione in quel punto. Cioè il moto di una parte del corpo non ha effetto sulla tensione in un'altra parte del corpo stesso.
- *principio di indifferenza al sistema di riferimento* della risposta del materiale: le equazioni costitutive devono risultare invarianti per cambi del sistema di riferimento e quindi dell'osservatore.

## 2.8 Relazioni costitutive

Gli assiomi illustrati in 2.7 si possono utilizzare nel modo seguente per la costruzione delle relazioni costitutive dei fluidi.

Si può soddisfare il principio di determinismo assumendo che il tensore  $T_{ij}$  dipende solo dallo stato attuale di moto del fluido. Vedremo in seguito come considerare la eventuale dipendenza dalla storia passata. Il principio di effetto locale è soddisfatto se si assume che  $T_{ij}$  in un punto dipende solo dalla velocità e dal tensore gradiente di velocità in quel punto, oltre che

dai valori locali delle variabili di stato termodinamico, che preciseremo nel cap. 3.

$$T_{ij} = H \left( u_i, \frac{\partial u_i}{\partial x_j}, \text{stato termodinamico} \right) \quad (2.8.1)$$

Come noto, dal § 1.10, il tensore  $\frac{\partial u_i}{\partial x_j}$  è dato da una parte simmetrica di velocità di deformazione e da una parte antisimmetrica di velocità di rotazione di corpo rigido (1.10.2)

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_j} = e_{ij} + \Omega_{ij} \quad (2.8.2)$$

Il principio di indifferenza dal sistema di riferimento impone che  $T_{ij}$  possa dipendere solo da  $e_{ij}$ . Consideriamo infatti un primo osservatore in un sistema di riferimento fisso con il laboratorio ed un secondo osservatore in un sistema di riferimento che trasla e ruota insieme al fluido per cui, rispetto a questo riferimento, il fluido ha  $u = 0$ ,  $\Omega_{ij} = 0$ . Assumendo valida la (2.8.1) il primo osservatore troverebbe una dipendenza di  $T_{ij}$  da  $u_i$  e  $\Omega_{ij}$ , il secondo no. Dovendo essere il comportamento del materiale lo stesso per ambedue gli osservatori, si deduce che

$$T_{ij} = H(e_{ij}, \text{stato termodinamico}) \quad (2.8.3)$$

cioè dipende solo dalla parte simmetrica del tensore gradiente di velocità.

Si può inoltre verificare sperimentalmente che un fluido a riposo presenta una particolare condizione di tensione: la tensione  $\mathbf{t}_{(n)}$  in un punto relativa ad un'area  $dS$ , è sempre diretta secondo la normale  $\mathbf{n}$  all'area stessa, ed ha un valore indipendente dall'orientamento dell'area stessa. Ciò significa che

$$\mathbf{t}_{(n)} = \mathbf{T} \cdot \mathbf{n} = -p\mathbf{n} \quad (2.8.4)$$

e quindi in forma indiciale

$$T_{ij}n_j = -pn_i = -p\delta_{ij}n_j$$

cioè è sempre verificata per ogni  $n$  la relazione (A.9.2)

$$(T_{ij} + p\delta_{ij})n_j = 0 \quad (2.8.5)$$

quindi ogni direzione è una direzione principale del tensore (cioè il tensore è sferico) e il suo valore principale  $-p$  è detto pressione idrostatica. Quindi per un fluido a riposo

$$T_{ij} = -p\delta_{ij} \quad (2.8.6)$$

La pressione idrostatica  $p$ , per un fluido compressibile a riposo si può identificare con la pressione termodinamica.

Si accenna infine alla possibile dipendenza di  $T_{ij}$  dal passato, oltre che dallo stato attuale di moto, sopra considerato. Si può in tal caso tener conto della storia temporale della deformazione mediante una funzione memoria  $\mathcal{M}(t-s)$ , ove  $t$  è il tempo attuale e  $s$  è un tempo precedente  $s \leq t$ . La funzione memoria può essere ad esempio data da un esponenziale negativo in  $(t-s)$ , tale per cui la storia recente risulta più importante di quella remota. La  $T_{ij}(t)$  si può allora esprimere in funzione di  $\mathcal{M}$  con relazione analoga alla (2.8.3)

$$T_{ij}(t) = H \left( \int_{-\infty}^t \mathcal{M}(t-s) e_{ij}(s) dS, \text{ stato termodinamico} \right) \quad (2.8.7)$$

## 2.9 Fluidi Stokesiani e Newtoniani

Si dice Stokesiano un fluido che verifica le seguenti ipotesi:

- a)  $T_{ij}$  è una funzione continua del tensore  $e_{ij}$  e dello stato termodinamico locale
- b) a riposo la tensione è data dalla pressione idrostatica cioè  $T_{ij} = -p\delta_{ij}$
- c) è isotropo, cioè non ha direzioni preferenziali e quindi la relazione funzionale tra tensioni e deformazioni è indipendente dall'orientamento
- d) è omogeneo, cioè non dipende esplicitamente da  $x$ , ma tramite la variazione di  $e_{ij}$  e delle variabili termodinamiche con la posizione.

Sotto tali ipotesi la relazione costitutiva si può esprimere in generale mediante una relazione tensoriale del tipo:

$$T_{ij} = A'_{ij} + A''_{ijkl} e_{kl} + A'''_{ijklmn} e_{kl} e_{mn} + \dots \quad (2.9.1)$$

dove  $A', A'', A'''$  sono, per l'ipotesi c), tensori isotropi del tipo considerato in A.10 ed inoltre, per l'ipotesi d), possono dipendere dallo stato termodinamico ma non direttamente dalla posizione.

Se si assume che siano prevalenti i primi due termini della (2.9.1), cioè  $T_{ij}$  è una funzione lineare di  $e_{ij}$ , si ha la sotto-classe dei Fluidi Newtoniani, che qui di seguito consideriamo.

Ricordando dal § A.10 che i tensori isotropi del 2° ordine sono dati da  $\delta_{ij}$  per una costante scalare e quelli del 4° ordine da una combinazione lineare dei prodotti  $\delta_{ij}\delta_{kl}$ ,  $\delta_{il}\delta_{jk}$ , e  $\delta_{ik}\delta_{jl}$ , si può scrivere:

$$T_{ij} = A_0\delta_{ij} + A_1\delta_{ij}\delta_{kl}e_{kl} + A_2\delta_{il}\delta_{jk}e_{kl} + A_3\delta_{ik}\delta_{jl}e_{kl} \quad (2.9.2)$$

$$\begin{aligned} &= A_0\delta_{ij} + A_1\delta_{ij}e_{kk} + (A_2 + A_3)e_{ij} \\ &= (A_0 + A_1e_{kk})\delta_{ij} + A_4e_{ij} \end{aligned} \quad (2.9.3)$$

Se si assumono per le ipotesi b) e d)

$$A_0 = -p \quad A_1 = \lambda \quad A_4 = 2\mu \quad (2.9.4)$$

dove  $p$  è la pressione termodinamica e  $\lambda, \mu$  sono coefficienti di viscosità, solitamente funzioni della temperatura, si ha

$$T_{ij} = (-p + \lambda e_{kk})\delta_{ij} + 2\mu e_{ij} \quad (2.9.5)$$

che in assenza di moto verifica l'ipotesi b). La (2.9.5) è la relazione costitutiva per un fluido Newtoniano.

Per fluidi Stokesiani, più in generale, si deve considerare anche il terzo termine della (2.9.1) e si hanno relazioni costitutive del tipo

$$T_{ij} = -p\delta_{ij} + \beta e_{ij} + \gamma e_{ik}e_{kj} \quad (2.9.6)$$

## 2.10 Pressione e tensione normale media

Se si considera il tensore tensione viscosa  $\sigma_{ij}$  la (2.9.5) si scrive

$$T_{ij} = -p\delta_{ij} + \sigma_{ij} \quad (2.10.1)$$

con

$$\sigma_{ij} = \lambda e_{kk}\delta_{ij} + 2\mu e_{ij} \quad (2.10.2)$$

La somma dei 3 valori sulla diagonale principale (traccia del tensore) per il tensore  $T_{ij}$  è data da:

$$T_{ii} = -3p + \sigma_{ij} \quad \text{con} \quad \sigma_{ij} = (3\lambda + 2\mu)e_{kk}$$

ed il valore medio

$$\frac{T_{ii}}{3} = -p + \left( \lambda + \frac{2}{3}\mu \right) e_{kk} \quad (2.10.3)$$

Per tensioni viscosse nulle, cioè in assenza di moto o nell'ipotesi di fluido perfetto

$$-p = \frac{1}{3}T_{ij} \equiv \frac{1}{3}(T_{11} + T_{22} + T_{33}) = -\bar{p} \quad (2.10.4)$$

cioè la pressione termodinamica è uguale alla tensione normale media  $\bar{p}$ .

Ciò è ancora valido se (vedi (2.10.3)) si considera (Stokes)

$$\lambda = -\frac{2}{3}\mu \quad (2.10.5)$$

che è una relazione molto particolare tra i due coefficienti di viscosità, valida in generale solo per gas monoatomici a bassa densità, oppure per le (1.10.1), (1.8.4)

$$e_{kk} = 0 \quad (2.10.6)$$

cioè per fluidi incompressibili ( $\rho = \text{cost.}$ ), In tal caso però  $p$ , perdendo il suo significato termodinamico, mantiene solo quello di tensione normale media.

In generale però dalla (2.10.3)

$$p - \bar{p} = \left( \lambda + \frac{2}{3}\mu \right) e_{kk} \quad (2.10.7)$$

dove  $(\lambda + \frac{2}{3}\mu)$  è il coefficiente di viscosità di massa (*bulk viscosity*) che lega la tensione viscosa alla velocità di variazione di volume. Ricordando la (1.8.3)

$$p - \bar{p} = - \left( \lambda + \frac{2}{3}\mu \right) \frac{1}{\rho} \frac{D\rho}{Dt} \quad (2.10.8)$$

Si noti che l'ipotesi (2.10.5) annulla la viscosità di massa, che può avere ha un'influenza rilevante.

## 2.11 Equazioni di Navier Stokes

Le relazioni costitutive illustrate nei paragrafi precedenti danno quelle ulteriori informazioni sul comportamento del fluido, necessarie per la determinazione delle incognite (infatti l'aggiunta delle sei componenti (2.9.5) porta ad un bilancio tra numero di equazioni e numero di incognite.

Le espressioni (2.9.5) di  $T_{ij}$  si possono anche sostituire nelle equazioni di conservazione della quantità di moto, ottenendo un sistema ad un numero minore di equazioni anche se più complesse.

Considerando le (2.4.3) si calcola mediante la (2.9.5)

$$\frac{\partial T_{ij}}{\partial x_j} = -\frac{\partial p}{\partial x_j} \delta_{ij} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \lambda \frac{\partial u_k}{\partial x_k} \right) \delta_{ij} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left( 2\mu \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \right) \quad (2.11.1)$$

assumendo  $\lambda = \text{cost.}$  e  $\mu = \text{cost.}$  si può ottenere una forma più compatta

$$\frac{\partial T_{ij}}{\partial x_j} = -\frac{\partial p}{\partial x_i} + (\lambda + \mu) \frac{\partial}{\partial x_i} \left( \frac{\partial u_k}{\partial x_k} \right) + \mu \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j \partial x_j} \quad (2.11.2)$$

sostituendo in (2.4.3) si ha

$$\rho \frac{Du_i}{Dt} = \rho f_i - \frac{\partial p}{\partial x_i} + (\lambda + \mu) \frac{\partial}{\partial x_i} \left( \frac{\partial u_k}{\partial x_k} \right) + \mu \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j \partial x_j} \quad (2.11.3)$$

o in forma vettoriale

$$\rho a = \rho f_i - \text{grad } p + (\lambda + \mu) \text{grad div } u + \mu \nabla^2 u \quad (2.11.4)$$

che è nota come equazione di Navier Stokes.

Se il fluido è incompressibile  $u_{k,k} = 0$  per la (1.8.4) e la (2.11.3) diviene

$$\rho \frac{Du_i}{Dt} = \rho f_i - \frac{\partial p}{\partial x_i} + \mu \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j \partial x_j} \quad (2.11.5)$$

## 2.12 Condizioni al contorno

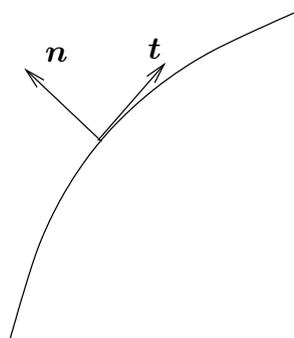
Il caso di contorno che separa il fluido da un solido è di particolare importanza nei problemi di fluidodinamica. In generale il fluido aderisce alle pareti solide con le quali viene a contatto per cui

$$u_i = U_i \quad \text{ovvero} \quad (U_{\text{rel}})_i = u_i - U_i = 0 \quad (2.12.1)$$

dove  $U_i$  è la velocità della parete solida. Alla relazione vettoriale (2.12.1) corrispondono le condizioni scalari

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_{\text{rel}} \cdot \mathbf{n} &= 0 \\ \mathbf{u}_{\text{rel}} \cdot \mathbf{t} &= 0 \end{aligned} \quad (2.12.2)$$

con  $\mathbf{n}, \mathbf{t}$  normale e tangente al contorno nel caso piano indicato in Fig. 2.4.



Per valori della densità del fluido molto piccoli, vi può essere una non-aderenza completa all'interfaccia fluido-solido cioè

$$\mathbf{u}_{\text{rel}} \cdot \mathbf{t} \neq 0 \quad (2.12.3)$$

queste condizioni si indicano col nome di *slip conditions*. La condizione di impermeabilità della interfaccia solido-fluido, rimane sempre valida, a meno di particolari condizioni di porosità delle pareti con iniezione o sezione di fluido, per le quali

$$\mathbf{u}_{\text{rel}} \cdot \mathbf{n} \neq 0 \quad (2.12.4)$$

queste condizioni sono di particolare importanza per problemi di raffreddamento di pareti, di distacco di strato limite, etc.

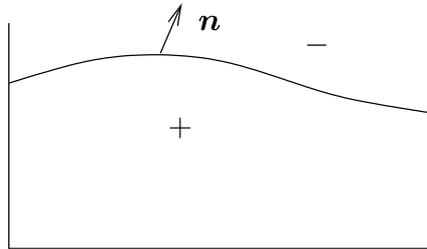
Molto importante nei problemi di fluidodinamica è anche il caso di contorno libero, cioè di interfaccia tra due fluidi non miscibili tra loro, ad es. liquido-liquido, liquido-gas. In tal caso la configurazione geometrica del contorno libero, dipende dalla soluzione del campo di velocità e di pressione, e viene quindi definita insieme con questi. Denominando con (+) e (-) i due fluidi, come nello schema di Fig. 2.5, si può scrivere come condizione all'interfaccia

$$[T_{ij}n_j]_{\pm}^{\pm} = \sigma H n_i \quad (2.12.5)$$

dove  $[ ]_{\pm}^{\pm}$  indica la differenza dei valori alla interfaccia della quantità in parentesi,  $\sigma$  è la tensione superficiale e

$$H = \left( \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) \quad (2.12.6)$$

con  $R_1$  e  $R_2$  raggi di curvatura della superficie di interfaccia in due piani ortogonali contenenti  $\mathbf{n}$ .



Nel caso di tensioni viscosive trascurabili

$$T_{ij}n_j = -pn_i$$

la (2.12.5) si riduce alla

$$[-p]_{\pm}^{\pm} = \sigma H \quad (2.12.7)$$

---

che dà la configurazione di una superficie libera tra due fluidi a riposo: la pressione è in questo caso uniforme in ciascuno dei due fluidi e il salto di pressione costante lungo l'interfaccia.

Nel caso che anche la tensione superficiale sia trascurabile, si ottiene dalla (2.12.6) una condizione al contorno per la pressione alla superficie libera

$$(p)^+ = (p)^- \quad (2.12.8)$$

Altre possibili condizioni al contorno per il campo fluidodinamico verranno esaminate nello studio dei singoli problemi.

## Bibliografia

1. Slattery, J.C., *Momentum, Energy and Mass Transfer in Continua*, McGraw-Hill, 1972.
2. Batchelor, G.K., *An Introduction to Fluid Dynamics*, Cambridge University Press, 1967.
3. Lai, W.H., Rubin, D., Krempl, E., *Introduction to Continuum Mechanics*, Pergamon Press, 1978.
4. Aris, R., *Vector, Tensors and the Basic Equations of Fluid Mechanics*, Prentice-Hall, 1962.
5. Cowin, S.C., *The Theory of Polar Fluids*, Advances in Applied Mechanics, no. 12, Academic Press, 1972.

## Capitolo 3

# Termodinamica dei continui. Conservazione dell'Energia. Produzione di Entropia

### 3.1 Equilibrio e non-equilibrio termodinamico

La termodinamica classica tratta generalmente stati di *equilibrio* o condizioni quasi statiche per le quali cioè non c'è moto, non ci sono variazioni macroscopiche delle variabili considerate (es. temperatura) e in generale non ci sono forze applicate. Si assume cioè che il fluido in condizioni di equilibrio, ad esempio in un recipiente, abbia nel suo complesso un valore unico delle grandezze termodinamiche (pressione, temperatura, energia interna, entropia, ...) e che tra queste grandezze globali esistano delle relazioni come I e II principio. Se come è necessario, nella descrizione di questi principi, si considerano delle trasformazioni del fluido, queste devono essere date da una successione di stati di equilibrio, per poter consentire la definizione delle variabili di stato termodinamico che sono definite all'equilibrio. Per queste ragioni la termodinamica classica è chiamata *termostatica* da alcuni autori.

I fluidi, trattati nei precedenti capitoli come continui deformabili, hanno forze applicate, si muovono, presentano una variazione continua delle grandezze meccaniche che li caratterizzano (velocità, densità di massa, etc.), sono cioè chiaramente in condizioni di *non-equilibrio* termodinamico. Le relazioni della termodinamica classica non sono quindi sufficienti per il loro studio, ma è necessario estendere alle variabili di stato termodinamico il concetto di campo adottato finora per le variabili meccaniche. Si passa dal recipiente con grandezze termodinamiche globali della *termostatica* ad un campo di tali grandezze, dove queste possono variare con continuità.

Per ciascuna particella materiale, delle dimensioni di quelle considerate per la validità della ipotesi di continuo, si può assumere un *equilibrio locale*

termodinamico, che ci consente di definire le grandezze termodinamiche nel modo abituale, attraverso i concetti della meccanica statistica di equilibrio.

Come visto per le grandezze meccaniche il campo di una qualsiasi variabile termodinamica si deve poter esprimere in funzione di “ $\mathbf{x}$  e  $t$ ” o di “ $\mathbf{X}$  e  $t$ ” a seconda del tipo di descrizione scelta. Questa estensione corrisponde a quella dalla meccanica del punto alla meccanica dei continui deformabili, operata da tempo per lo studio del moto dei fluidi.

### 3.2 Energia Interna ed Entropia

L’energia interna per unità di massa  $U$ , che tiene conto dell’energia cinetica a livello microscopico (vedi App.3.A), viene assunta come variabile termodinamica primaria e potrebbe essere data, per quanto detto alla fine del paragrafo precedente, da

$$U = g(\mathbf{x}, t) = g[\chi_k, (\mathbf{X}, t), t] = g_k(\mathbf{X}, t)$$

cioè per ogni  $\mathbf{X}$  e ogni  $t$  in funzione della mappa di moto  $g_k$ , esattamente come una variabile di tipo meccanico.

In effetti l’energia interna, come variabile termodinamica, si può determinare indipendentemente da luogo, tempo, moto, per ogni particella materiale  $\mathbf{X}$ ; in funzione di:

- a) substato termodinamico: individuato da variabili di carattere meccanico, per esempio la densità  $\rho$ , o il volume specifico  $v = \frac{1}{\rho}$ , per un fluido monocomponente;
- b) la variabile scalare entropia per unità di massa  $S$ , dimensionalmente indipendente dalle variabili di substato  $(M, L, T)$ , che tiene conto della storia termica della particella.

L’introduzione della variabile entropia consente di determinare l’energia interna indipendentemente dal moto della particella mediante la

$$U = \hat{U}(\rho, S, \mathbf{X}) \tag{3.2.1}$$

che si chiama “equazione calorica di stato” e rappresenta una equazione costitutiva per l’energia interna.

Se il fluido è termodinamicamente omogeneo, cioè la relazione funzionale è la stessa per ogni particella  $\mathbf{X}$  del fluido, la (3.2.1) diviene

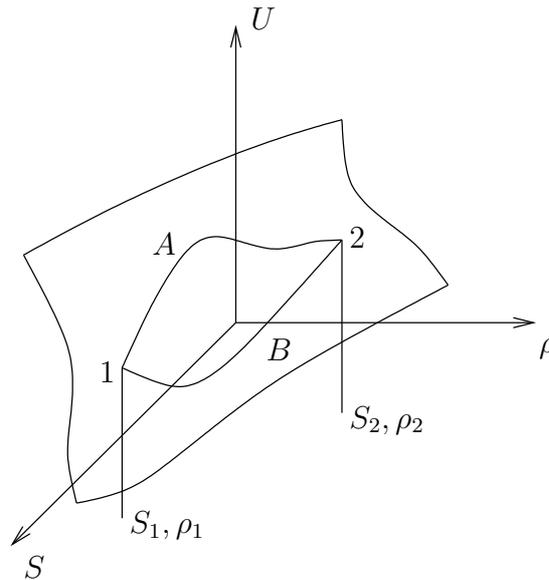
$$U = \hat{U}(\rho, S) \tag{3.2.2}$$

Ovviamente  $\rho$  ed  $S$ , che individuano lo *stato termodinamico*, saranno:

$$S = \hat{S}(\mathbf{x}, t) \qquad \rho = \hat{\rho}(\mathbf{x}, t)$$

e quindi  $U$  è funzione dello stato termodinamico, e solo attraverso di esso dello spazio e del tempo, cioè assume lo stesso valore, a pari valore di  $\rho$  ad  $S$ , indipendentemente dal percorso seguito dalla particella materiale in esame.

Rappresentiamo l'equazione calorica di stato (3.2.2) nel diagramma di Gibbs (fig. 3.1)



La relazione funzionale (3.2.2) è rappresentata dalla superficie in figura, unica per ogni fluido termodinamicamente omogeneo. Se la particella  $X$  va dallo stato  $S_1, \rho_1$  al tempo  $t_1$ , allo stato  $S_2, \rho_2$  al tempo  $t_2$ , si ha una variazione di  $S$  e  $\rho$  e corrispondentemente di  $U$  con il tempo. Il moto di  $X$  è mappato in una curva sulla superficie energia. Se due moti diversi  $A$  e  $B$ , portano allo stesso stato finale, la variazione di energia interna è la stessa, quindi  $U$  è una funzione di stato e il suo differenziale  $dU$  è un differenziale esatto.

Nota  $U$  si possono definire:

- la temperatura

$$\vartheta = \frac{\partial U}{\partial S} \qquad (3.2.3)$$

che misura la sensitività dell'energia interna a cambi di entropia

- la pressione

$$p = -\frac{\partial U}{\partial v} \qquad (3.2.4)$$

che misura la sensitività dell'energia interna a cambi di volume specifico.

Per una variazione dello stato termodinamico della particella  $X$  si ha

$$dU = \left( \frac{\partial U}{\partial S} \right)_v dS + \left( \frac{\partial U}{\partial v} \right)_S dv \quad (3.2.5)$$

cioè

$$dU = \vartheta dS - pdv \quad (3.2.6)$$

nota come *relazione di Gibbs*.

La temperatura e la pressione definite dalle (3.2.3) e (3.2.4), sono anch'esse funzioni dello stato termodinamico come la  $U$ , e quindi si possono esprimere mediante le equazioni di stato

$$\vartheta = \hat{\vartheta}(S, \rho) \quad (3.2.7)$$

$$p = \hat{p}(S, \rho) \quad (3.2.8)$$

La variazione  $dU$  per una certa  $\mathbf{X}$  espressa dalla (3.2.5) vale per qualunque percorso sulla superficie energia, in particolare per una curva su cui è mappato il moto reale della particella. In tal caso la variazione nel tempo, seguendo il moto, si esprime (§ 1.4) mediante la derivata materiale (A.4.6)

$$\frac{DU}{Dt} = \vartheta \frac{DS}{Dt} - p \frac{Dv}{Dt} \quad (3.2.9)$$

Per variazioni arbitrarie, cioè non seguendo il moto, si ha

nel tempo

$$\frac{\partial U}{\partial t} = \vartheta \frac{\partial S}{\partial t} - p \frac{\partial v}{\partial t} \quad (3.2.10)$$

o nello spazio

$$\frac{\partial U}{\partial x_i} = \vartheta \frac{\partial S}{\partial x_i} - p \frac{\partial v}{\partial x_i} \quad (3.2.11)$$

Se il fluido non è termodinamicamente omogeneo, cioè vale la  $U = \hat{U}(S, \rho, \mathbf{X})$  si ha rispettivamente:

$$\frac{\partial U}{\partial t} = \vartheta \frac{\partial S}{\partial t} - p \frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial U}{\partial X_k} \frac{\partial X_k}{\partial t}$$

$$\frac{\partial U}{\partial x_i} = \vartheta \frac{\partial S}{\partial x_i} - p \frac{\partial v}{\partial x_i} + \frac{\partial U}{\partial X_k} \frac{\partial X_k}{\partial x_i}$$

dove gli ultimi termini danno la variazione dovuta alla non omogeneità termodinamica del fluido, e sono nulli per fluidi omogenei.

Si assume che le relazioni fondamentali (3.2.2), (3.2.7), (3.2.8) che danno le equazioni di stato siano regolari, differenziabili ad ogni ordine e invertibili per consentire di esprimere ogni variabile termodinamica in funzione delle altre. In particolare si utilizzeranno le

$$S = \hat{S}(\vartheta, \rho) \quad (3.2.12)$$

$$\rho = \hat{\rho}(\vartheta, p) \quad (3.2.13)$$

### 3.3 Conservazione dell'energia

Consideriamo ancora la parte di corpo  $\mathcal{B}_n$  e la configurazione  $\chi(\mathcal{B}_n, t)$  che assume durante il moto. Facciamo quindi un bilancio d'energia per  $\mathcal{B}_n$ , cioè per il fluido contenuto in  $\chi(\mathcal{B}_n, t)$ . Nel § 2.2 per esprimere la conservazione della quantità di moto, si è visto che agiscono su  $\mathcal{B}_n$

$$\begin{aligned} \text{le forze di massa} & \quad \int_{\chi(\mathcal{B}_n, t)} \rho \mathbf{f} dV \\ \text{e le forze di contatto} & \quad \int_{\partial\chi(\mathcal{B}_n, t)} \mathbf{t}_{(n)} dS \end{aligned}$$

ambidue queste forze compiono un lavoro nell'unità di tempo, che va considerato nel bilancio di energia:

$$\int_{\chi(\mathcal{B}_n, t)} \rho \mathbf{f} \cdot \mathbf{u} dV + \int_{\partial\chi(\mathcal{B}_n, t)} \mathbf{t}_{(n)} \cdot \mathbf{u} dS$$

Analogamente si può considerare il calore trasmesso all'interno, direttamente al volume di fluido (es. radiazione), indicando con  $Q$  il calore trasmesso per unità di massa,

$$\int_{\chi(\mathcal{B}_n, t)} \rho Q dV$$

e quello trasmesso all'interno tramite la superficie di contorno

$$\int_{\partial\chi(\mathcal{B}_n, t)} h ds$$

Questi contributi danno luogo ad una variazione nel tempo dell'energia nelle due forme di energia cinetica macroscopica e microscopica (o energia interna, vedi App.3.A) della particella di fluido  $\mathcal{B}_n$

$$\frac{d}{dt} \int_{\chi(\mathcal{B}_n, t)} \rho \left( U + \frac{1}{2} u_i u_i \right) dV$$

Riunendo i vari termini, l'equazione di conservazione dell'energia risulta essere

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_{\chi(\mathcal{B}_n, t)} \rho \left( U + \frac{1}{2} u_i u_i \right) dV &= \int_{\chi(\mathcal{B}_n, t)} u_i \rho f_i dV + \int_{\partial\chi(\mathcal{B}_n, t)} u_i T_{ij} n_j ds \\ &+ \int_{\partial\chi(\mathcal{B}_n, t)} h ds + \int_{\chi(\mathcal{B}_n, t)} \rho Q dV \end{aligned} \quad (3.3.1)$$

Applicando il teorema di Green (A.15.2) agli integrali di superficie e il teorema di trasporto di Reynolds (1.8.5) al primo termine della (3.3.1), introducendo inoltre il vettore flusso di calore entrante  $\mathbf{q} = q_i \mathbf{e}_{(i)}$ , tale che  $h = -q_i n_i$ , si ottiene

$$\int_{\chi(\mathcal{B}_n, t)} \left[ \rho \frac{D}{Dt} \left( U + \frac{1}{2} u_i u_i \right) - u_i \rho f_i - \frac{\partial u_i T_{ij}}{\partial x_j} + \frac{\partial q_i}{\partial x_i} - \rho Q \right] dV = 0 \quad (3.3.2)$$

cioè, essendo  $\chi(\mathcal{B}_n, t)$  scelto arbitrariamente, deve essere, perché la (3.3.2) sia soddisfatta

$$\rho \frac{D}{Dt} \left( U + \frac{1}{2} u_i u_i \right) = u_i \rho f_i + \frac{\partial u_i T_{ij}}{\partial x_j} - \frac{\partial q_i}{\partial x_i} + \rho Q \quad (3.3.3)$$

o in forma vettoriale

$$\rho \frac{D}{Dt} \left( U + \frac{1}{2} |\mathbf{u}|^2 \right) = \rho (\mathbf{u} \cdot \mathbf{f}) + \operatorname{div} (\mathbf{u} \cdot \mathbf{T}) - \operatorname{div} \mathbf{q} + \rho Q \quad (3.3.4)$$

che è la forma differenziale dell'equazione di conservazione dell'energia totale.

### 3.4 Equazione di Bernoulli

Se si sostituisce la (2.10.1) nel termine della (3.3.3)

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_i T_{ij}}{\partial x_j} &= -\frac{\partial p u_i \delta_{ij}}{\partial x_j} + \frac{\partial u_i \sigma_{ij}}{\partial x_j} \\ &= -p \frac{\partial u_i}{\partial x_i} - u_i \frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{\partial u_i \sigma_{ij}}{\partial x_j} \end{aligned} \quad (3.4.1)$$

Per l'equazione di conservazione della massa (1.8.3)

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_i} = -\frac{1}{\rho} \frac{D\rho}{Dt} = \rho \frac{D(1/\rho)}{Dt} \quad (3.4.2)$$

mentre dalla definizione di derivata materiale (1.4.6)

$$u_i \frac{\partial p}{\partial x_i} = \frac{Dp}{Dt} - \frac{\partial p}{\partial t} \quad (3.4.3)$$

Sostituendo le (3.4.2) e (3.4.3) nella (3.4.1) si ottiene

$$\frac{\partial u_i T_{ij}}{\partial x_j} = -\rho \frac{Dp/\rho}{Dt} - \frac{Dp}{Dt} + \frac{\partial p}{\partial t} + \frac{\partial u_i \sigma_{ij}}{\partial x_j} \quad (3.4.4)$$

Se la forza  $\mathbf{f}$  è conservativa, per cui

$$f_i = -\frac{\partial \Psi}{\partial x_i}$$

cioè in base alla (1.4.6)

$$\rho f_i u_i = -\rho u_i \frac{\partial \Psi}{\partial x_i} = -\rho \frac{D\Psi}{Dt} + \rho \frac{\partial \Psi}{\partial t} \quad (3.4.5)$$

dove, se si assume che il potenziale della forza non dipenda dal tempo,  $\frac{\partial \Psi}{\partial t} = 0$ .

Sostituendo le (3.4.4) e (3.4.5) in (3.3.3) e raggruppando i termini del tipo  $\rho \frac{D(\quad)}{Dt}$  si ha

$$\rho \frac{D}{Dt} \left( U + \frac{1}{2} u_i u_i + \frac{p}{\rho} + \Psi \right) = \rho Q + \frac{\partial u_i \sigma_{ij}}{\partial x_j} - \frac{\partial q_i}{\partial x_i} + \frac{\partial p}{\partial t}$$

che è una forma utile, perché facilmente integrabile, sotto le particolari ipotesi:

- a) campo di pressione stazionario cioè  $\frac{\partial p}{\partial t} = 0$
- b) calore trasmesso nullo, nelle due forme descritte, cioè  $\rho Q = 0$ ,  $\frac{\partial q_i}{\partial x_i} = 0$
- c) lavoro delle forze viscoso nullo, cioè  $\frac{\partial u_i \sigma_{ij}}{\partial x_j} = 0$

Con queste ipotesi infatti

$$\rho \frac{D}{Dt} \left( U + \frac{1}{2} u_i u_i + \frac{p}{\rho} + \Psi \right) = 0$$

e quindi

$$H = U + \frac{1}{2}u_i u_i + \frac{p}{\rho} + \Psi = \text{cost} \quad (3.4.6)$$

per una particella materiale lungo il suo moto. Se il moto è stazionario  $H$  si mantiene costante lungo le linee di corrente.

Il fatto che  $H$  è costante lungo una linea di corrente per moto stazionario di un fluido non conducente e non viscoso (tale per cui sono rispettate le ipotesi a), b), e c)) è noto come teorema di Bernoulli. Chiameremo in generale equazioni alla Bernoulli la (3.4.6) e altre forme integrate di tipo analogo che ricaveremo in seguito.

### 3.5 Altre forme dell'equazione dell'energia

A partire dalla (3.3.3) sviluppando le derivate dei prodotti  $(u_i u_i)$  e  $(u_i T_{ij})$ , aggregando i termini che compaiono nell'equazione di conservazione della quantità di moto (2.4.3) per i quali vale la

$$\left( \rho \frac{D}{Dt} u_i - \frac{\partial T_{ij}}{\partial x_j} - \rho f_i \right) u_i = 0$$

che rappresenta un bilancio dell'energia meccanica, si ottiene una forma più semplice dell'equazione di conservazione dell'energia (termica)

$$\rho \frac{DU}{Dt} = T_{ij} \frac{\partial u_i}{\partial x_j} - \frac{\partial q_i}{\partial x_i} + \rho Q$$

sostituendo  $T_{ij}$  con la (2.10.1)

$$\rho \frac{DU}{Dt} = -p \frac{\partial u_i}{\partial x_i} + \sigma_{ij} \frac{\partial u_i}{\partial x_j} - \frac{\partial q_i}{\partial x_i} + \rho Q$$

e tenendo conto della conservazione di massa (3.4.2) si ottiene

$$\rho \left( \frac{DU}{Dt} + p \frac{D1/\rho}{Dt} \right) = \sigma_{ij} \frac{\partial u_i}{\partial x_j} - \frac{\partial q_i}{\partial x_i} + \rho Q \quad (3.5.1)$$

Se si introduce l'entalpia  $h = u + p/\rho$  da cui

$$\frac{Dh}{Dt} = \frac{DU}{Dt} + \frac{1}{\rho} \frac{Dp}{Dt} + p \frac{D1/\rho}{Dt}$$

e sostituendo nel primo termine della (3.5.1)

$$\rho \frac{Dh}{Dt} - \frac{Dp}{Dt} = \sigma_{ij} \frac{\partial u_i}{\partial x_j} - \frac{\partial q_i}{\partial x_i} + \rho Q \quad (3.5.2)$$

che è l'equazione dell'energia in forma entalpica. Introducendo  $h$ , l'equazione di Bernoulli (3.4.6) si scrive

$$H = h + \frac{1}{2}u_i u_i + \Psi = \text{cost}$$

### 3.6 Bilancio di entropia

Se si introduce la variazione di entropia mediante la relazione di Gibbs nella forma (3.2.9) nell'equazione dell'energia (3.5.1) si ha

$$\rho\vartheta \frac{DS}{Dt} = \sigma_{ij} \frac{\partial u_i}{\partial x_j} - \frac{\partial q_i}{\partial x_i} + \rho Q \quad (3.6.1)$$

Dividendo per  $\vartheta$  e sostituendo

$$\frac{1}{\vartheta} \frac{\partial q_i}{\partial x_i} = \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{q_i}{\vartheta} + \frac{q_i}{\vartheta^2} \frac{\partial \vartheta}{\partial x_i}$$

la (3.6.1) diviene

$$\rho \frac{DS}{Dt} = \frac{\sigma_{ij}}{\vartheta} \frac{\partial u_i}{\partial x_j} - \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{q_i}{\vartheta} - \frac{q_i}{\vartheta^2} \frac{\partial \vartheta}{\partial x_i} + \frac{\rho Q}{\vartheta} \quad (3.6.2)$$

Ripassando a una forma integrale mediante l'applicazione del teorema di Green e del trasporto di Reynolds in senso inverso a quanto fatto finora

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_{\chi(\mathcal{B}_n, t)} \rho S dV &= - \int_{\partial\chi(\mathcal{B}_n, t)} \frac{q_i}{\vartheta} n_i ds + \int_{\chi(\mathcal{B}_n, t)} \left( \frac{\sigma_{ij}}{\vartheta} \frac{\partial u_i}{\partial x_j} - \frac{q_i}{\vartheta^2} \frac{\partial \vartheta}{\partial x_i} \right) dV \\ &+ \int_{\chi(\mathcal{B}_n, t)} \rho \frac{Q}{\vartheta} dV \end{aligned} \quad (3.6.3)$$

che esprime il bilancio di entropia per la parte di corpo  $\mathcal{B}_n$ , con il seguente significato fisico dei termini dell'equazione (3.6.3)

- $\frac{d}{dt} \int_{\chi(\mathcal{B}_n, t)} \rho S dV$  variazione dell'entropia nel tempo
- $-\int_{\partial\chi(\mathcal{B}_n, t)} \frac{q_i}{\vartheta} n_i ds$  flusso di entropia attraverso la superficie di contorno
- $\int_{\chi(\mathcal{B}_n, t)} \left( \frac{\sigma_{ij}}{\vartheta} \frac{\partial u_i}{\partial x_j} - \frac{q_i}{\vartheta^2} \frac{\partial \vartheta}{\partial x_i} \right) dV = \mathcal{P}$  produzione locale di entropia dovuta a gradienti di temperatura e di velocità (nell'unità di tempo)
- $\int_{\chi(\mathcal{B}_n, t)} \rho \frac{Q}{\vartheta} dV$  sorgente di entropia dovuta a calore trasmesso direttamente al volume di fluido

Portando a primo membro i termini di flusso e sorgente di entropia, si ha la seguente forma del bilancio di entropia

$$\frac{d}{dt} \int_{\chi(\mathcal{B}_n, t)} \rho S dV + \int_{\partial\chi(\mathcal{B}_n, t)} \frac{q_i}{\vartheta} n_i dS - \int_{\chi(\mathcal{B}_n, t)} \rho \frac{Q}{\vartheta} dV = \mathcal{P} \quad (3.6.4)$$

A questo punto si può procedere in due modi sostanzialmente diversi:

1. Assumere come valido il 2° principio della termodinamica, in particolare nella forma di disuguaglianza di Clausius-Duhem per la quale dalla (3.6.3) deriva che deve essere

$$\mathcal{P} \geq 0 \quad (3.6.5)$$

e da questa assunzione ricavare le relazioni tra  $\sigma_{ij}$  e  $\frac{\partial u_i}{\partial x_j}$  e tra  $q_i$  e  $\frac{\partial \vartheta}{\partial x_i}$  cioè le relazioni costitutive di  $\sigma_{ij}$  e  $q_i$  e  $\frac{\partial \vartheta}{\partial x_i}$  cioè le relazioni costitutive di  $\sigma_{ij}$  e  $q_i$  tali che verifichino sempre la (3.6.5) oppure:

2. Ricavare mediante considerazioni di tipo logico-meccanico (§ 2.7) le relazioni costitutive, come già fatto per  $T_{ij}$  nel § 2.8, e dedurre, dalla loro sostituzione nel termine produzione di entropia, che  $\mathcal{P} \geq 0$  sempre, da cui risulta come conseguenza la disuguaglianza di Clausius-Duhem e quindi il secondo principio della termodinamica.

Qui seguiremo il procedimento schematizzato al punto 2. A tale scopo, prima di valutare il termine  $\mathcal{P}$  è necessario ricavare la relazione costitutiva per il flusso termico  $q_i$ , essendo quella per  $\sigma_{ij}$  data dalla (2.10.2).

### 3.7 Relazione costitutiva per il flusso di calore $q_i$

Gli assiomi illustrati nel § 2.7 si possono utilizzare nel modo seguente:

- il principio di determinismo si può soddisfare assumendo che il vettore  $q_i$  dipende solo dalla distribuzione attuale di temperatura nel fluido;
- il principio di azione locale è soddisfatto se si assume che  $q_i$  in un punto dipende solo dalla temperatura  $\vartheta$  in quel punto e dal suo gradiente  $\nabla\vartheta$

Entrambi questi principi sono soddisfatti se si assume

$$q_i = H \left( \vartheta, \frac{\partial \vartheta}{\partial x_i} \right) \quad (3.7.1)$$

Un cambiamento di riferimento opera nella stessa maniera sui vettori  $q_i$  e  $\frac{\partial \vartheta}{\partial x_i}$ , mentre  $\vartheta$ , essendo uno scalare è di per sè indifferente a un cambio di riferimento. Quindi la relazione (3.7.1) per soddisfare il principio di indifferenza al sistema di riferimento può essere espressa in generale mediante una relazione tensoriale del tipo (vedi § 2.9)

$$q_i = A \frac{\partial \vartheta}{\partial x_i} + A'_{ij} \frac{\partial \vartheta}{\partial x_j} + A''_{ijk} \frac{\partial \vartheta}{\partial x_j} \frac{\partial \vartheta}{\partial x_k} \dots \quad (3.7.2)$$

dove i tensori  $A', A'', A'''$  dipendono da  $\vartheta$  e sono isotropi se il materiale è isotropo. In tali condizioni, limitandosi ai primi due termini di (3.7.2) e ricordando la forma dei tensori isotropi del secondo ordine si ha

$$q_i = A(\vartheta) \frac{\partial \vartheta}{\partial x_i} + B(\vartheta) \delta_{ij} \frac{\partial \vartheta}{\partial x_j} = C(\vartheta) \delta_{ij} \frac{\partial \vartheta}{\partial x_i}$$

che coincide con la legge di Fourier abitualmente espressa nella forma

$$q_i = -K(\vartheta) \frac{\partial \vartheta}{\partial x_i} \quad (3.7.3)$$

dove il segno negativo tiene conto del fatto che il calore fluisce da parti del corpo a  $\vartheta$  maggiore a parti a  $\vartheta$  minore.

### 3.8 Produzione di entropia

Se si sostituiscono le equazioni costitutive di  $\sigma_{ij}$  (2.10.2) e di  $q_i$  (3.7.3) nella espressione della produzione locale di entropia nell'unità di tempo e per unità di volume che dalla (3.6.5) risulta essere

$$\left( \frac{\sigma_{ij}}{\vartheta} \frac{\partial u_i}{\partial x_j} - \frac{q_i}{\vartheta^2} \frac{\partial \vartheta}{\partial x_i} \right) \quad (3.8.1)$$

si può dedurre che questo termine è sempre positivo. Infatti il primo termine, proveniente dal lavoro delle tensioni viscosi, ricordando la (1.10.2) si esprime:

$$\frac{\sigma_{ij}}{\vartheta} (e_{ij} + \Omega_{ij})$$

nell'ipotesi di fluido non-polare, per il quale  $\sigma_{ij}$  è un tensore simmetrico, essendo  $\Omega_{ij}$  antisimmetrico, si verifica facilmente che

$$\sigma_{ij} \Omega_{ij} = 0$$

e pertanto rimane solo il contributo del termine

$$\sigma_{ij} e_{ij} = (\lambda e_{kk} \delta_{ij} + 2\mu e_{ij}) e_{ij}$$

dove si è sostituita la (2.10.2). Si può notare che

$$\sigma_{ij}e_{ij} = \lambda e_{kk}e_{ii} + 2\mu e_{ij}e_{ij} \quad (3.8.2)$$

è dato da una somma di termini quadratici ed è pertanto sempre positivo in valore. Dal punto di vista fisico ciò corrisponde ad una dissipazione della energia meccanica data dal lavoro delle tensioni viscosi, a cui consegue sempre un aumento di entropia.

La (3.8.2) si può esprimere mediante gli invarianti scalari  $I_1, I_2$  del tensore velocità di deformazione (A.9.6) con

$$e_{ij}e_{ij} = I_1^2 - 2I_2 \quad e_{ii} = I_1$$

da cui

$$\sigma_{ij}e_{ij} = (\lambda + 2\mu) I_1^2 - 4\mu I_2 \equiv \Phi \geq 0 \quad (3.8.3)$$

$\Phi$  è il simbolo con cui spesso si indica questo termine, sempre positivo, di dissipazione viscosa.

Il secondo termine della (3.8.1), proveniente dal calore di conduzione, ricordando la (3.7.3) si esprime

$$-\frac{q_i}{\vartheta^2} \frac{\partial \vartheta}{\partial x_i} = +\frac{k(\vartheta)}{\vartheta^2} \frac{\partial \vartheta}{\partial x_i} \frac{\partial \vartheta}{\partial x_i} \geq 0$$

anche questo termine è dato da una somma di termini quadratici ed è pertanto sempre positivo in valore. Risulta quindi dimostrato che, per le relazioni costitutive adottate, il termine di produzione locale di entropia è sempre positivo, per cui dalla (3.6.4) risulta

$$\frac{d}{dt} \int_{\chi(\mathcal{B}_n, t)} \rho S dV + \int_{\partial\chi(\mathcal{B}_n, t)} \frac{q_i}{\vartheta} n_i dS - \int_{\chi(\mathcal{B}_n, t)} \rho \frac{Q}{\vartheta} dV \geq 0 \quad (3.8.4)$$

che corrisponde alla disuguaglianza di Clausius-Duhem e quindi al secondo principio della termodinamica classica. Se si assume che viscosità e conducibilità termica sono trascurabili (Ip. fluido perfetto), ne consegue che il termine  $\mathcal{P} = 0$  per cui nella (3.8.4) vale il segno uguale. Si dice in tale caso che il processo è reversibile, se anche  $Q = 0$  l'entropia della parte di corpo  $\mathcal{B}_n$  rimane costante durante il moto, cioè dalla forma differenziale (3.6.2) si ottiene

$$\frac{DS}{Dt} = 0$$

che corrisponde ad un'evoluzione isentropica.

### 3.9 Equazione dell'energia in termini di temperatura

Se si vuole assumere come variabile la temperatura  $\vartheta$  di più diretto interesse nei problemi fluidodinamici, a partire dalla relazione costitutiva (3.2.12), si esprime il differenziale esatto  $dS$  come

$$dS = \left( \frac{\partial S}{\partial \vartheta} \right)_v d\vartheta + \left( \frac{\partial S}{\partial v} \right)_\vartheta dv$$

che sostituita nella relazione di Gibbs (3.2.6) dà

$$dU = \vartheta \left( \frac{\partial S}{\partial \vartheta} \right)_v d\vartheta + \left[ \vartheta \left( \frac{\partial S}{\partial v} \right)_\vartheta - p \right] dv$$

Ricordando la definizione di calori specifici a volume e pressione costante

$$c_v = \vartheta \left( \frac{\partial S}{\partial \vartheta} \right)_v \qquad c_p = \vartheta \left( \frac{\partial S}{\partial \vartheta} \right)_p \qquad (3.9.1)$$

e considerando la variazione di  $U$  nel tempo seguendo il moto della particella (3.2.9) si ottiene

$$\rho \frac{DU}{Dt} = \rho c_v \frac{D\vartheta}{Dt} + \left[ \vartheta \left( \frac{\partial p}{\partial \vartheta} \right)_v - p \right] \rho \frac{Dv}{Dt} \qquad (3.9.2)$$

dove si è anche sostituita la relazione di Maxwell

$$\left( \frac{\partial S}{\partial v} \right)_\vartheta = \left( \frac{\partial p}{\partial \vartheta} \right)_v$$

ricavata in App. 3.B. Dalla (3.9.2)

$$\rho \frac{DU}{Dt} + p\rho \frac{D1/\rho}{Dt} = \rho c_v \frac{D\vartheta}{Dt} + \vartheta \left( \frac{\partial p}{\partial \vartheta} \right)_v \rho \frac{D1/\rho}{Dt}$$

che sostituita nella equazione di conservazione dell'energia nella forma (3.5.1) dà

$$\rho c_v \frac{D\vartheta}{Dt} = - \frac{\partial u_i}{\partial x_i} \left[ \vartheta \left( \frac{\partial p}{\partial \vartheta} \right)_v \right] - \frac{\partial q_i}{\partial x_i} + \sigma_{ij} \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \rho Q$$

dove si è anche tenuto conto della (3.4.2).

Per fluido incompressibile, sostituendo la (3.7.3) e la (3.8.3) si ottiene la formulazione più comunemente usata

$$\rho c_v \frac{D\vartheta}{Dt} = + \frac{\partial}{\partial x_i} k \frac{\partial \vartheta}{\partial x_i} + \mu \Phi + \rho Q$$

Se si parte dalla equazione di conservazione dell'energia in termini di entalpia (3.5.2) e procedendo analogamente, ma esprimendo

$$dS = \left( \frac{\partial S}{\partial \vartheta} \right)_p d\vartheta + \left( \frac{\partial S}{\partial p} \right)_\vartheta dp$$

e sostituendo, tenendo conto di (3.9.1)

$$dh = \vartheta dS + v dp \quad (3.9.3)$$

$$\begin{aligned} &= \vartheta \left[ \left( \frac{\partial S}{\partial \vartheta} \right)_p d\vartheta + \left( \frac{\partial S}{\partial p} \right)_\vartheta dp \right] + v dp \\ &= c_p d\vartheta + \left[ 1 - \frac{\vartheta}{v} \left( \frac{\partial v}{\partial \vartheta} \right)_p \right] v dp \end{aligned} \quad (3.9.4)$$

dove si anche sostituita l'altra relazione di Maxwell ricavata in App.3.B

$$\left( \frac{\partial S}{\partial p} \right)_\vartheta = - \left( \frac{\partial v}{\partial \vartheta} \right)_p$$

Considerando a partire dalla (3.9.4) la variazione di  $h$  nel tempo e inserendola nella (3.5.2) si ha

$$\rho c_p \frac{D\vartheta}{Dt} = \left[ \frac{\vartheta}{v} \left( \frac{\partial v}{\partial \vartheta} \right)_p \right] \frac{Dp}{Dt} + \sigma_{ij} \frac{\partial u_i}{\partial x_j} - \frac{\partial q_i}{\partial x_i} + \rho Q$$

e definendo il coefficiente di espansione termica

$$\beta = \frac{1}{v} \left( \frac{\partial v}{\partial \vartheta} \right)_p$$

$$\rho c_p \frac{D\vartheta}{Dt} = \beta \vartheta \frac{Dp}{Dt} + \mu \Phi + \frac{\partial}{\partial x_i} k \frac{\partial \vartheta}{\partial x_i} + \rho Q \quad (3.9.5)$$

### 3.10 Le equazioni globali della termodinamica classica

Le equazioni della termodinamica classica si possono ottenere dalla precedente trattazione ipotizzando uno stato di equilibrio termodinamico, caratterizzato dalla assenza, a livello macroscopico, di moto e di variazione spaziale delle variabili considerate.

Sotto questa ipotesi, riesprimendo la (3.5.1) in forma integrale ed eliminando i termini nulli, si ottiene mediante una doppia integrazione nel tempo e su un volume  $v$  fisso nel tempo

$$\int_{t_0}^{t_1} \frac{d}{dt} \left( \int_v \rho U dV \right) dt + \int_{t_0}^{t_1} p \frac{d}{dt} \left( \int_v \rho \frac{1}{\rho} dV \right) dt = \int_{t_0}^{t_1} \left( \int_v \rho Q dV \right) dt \quad (3.10.1)$$

Definendo le grandezze globali

$$\mathcal{U} = \int_v \rho U dV \quad \mathcal{V} = \int_v dV \quad \mathcal{Q} = \int_{t_0}^{t_1} \int_v \rho Q dV dt \quad (3.10.2)$$

si ha per una variazione  $\Delta t$  nel tempo, cioè per  $t_1 = t_0 + \Delta t$

$$\Delta \mathcal{U} + p \Delta \mathcal{V} = \mathcal{Q} \quad (3.10.3)$$

che è l'espressione comunemente adottata per il primo principio della termodinamica.

Procedendo analogamente a partire dalla (3.6.3) definendo

$$\mathcal{S} = \int_v \rho S dV \quad (3.10.4)$$

si ottiene

$$\Delta \mathcal{S} - \frac{\mathcal{Q}}{\vartheta} = 0 \quad (3.10.5)$$

Se si considera la possibilità che i termini della (3.6.3) contenenti gradienti e quindi il termine produzione di entropia  $\mathcal{P}$ , definito in (3.6.5) non siano nulli (pur in contrasto con l'ipotesi base di equilibrio termodinamico) e ricordando che  $\mathcal{P}$ , se non è nullo, è sempre positivo per la (3.8.4) si ha

$$\Delta \mathcal{S} - \frac{\mathcal{Q}}{\vartheta} \geq 0 \quad (3.10.6)$$

cioè la disuguaglianza di Clausius-Duhem, che rappresenta analiticamente il secondo principio della termodinamica, e corrisponde alla forma integrale (3.8.4) prima ricavata nel caso più generale.

## Bibliografia

1. Truesdell, C., Toupin R.A., "The Classical Field Theories", in Handbuch der Physik (ed. S. Flügge), vol. 3/1, Springer Verlag, 1960.
2. Slattery, J.C., *Momentum, Energy and Mass Transfer in Continua*, McGraw-Hill, 1972.

3. Vincenti, W.G., Kruger, C.H., *Introduction to Physical Gas Dynamics*, John Wiley & Sons, 1965.
4. Serrin, J., "Mathematical Principles of Classical Fluid Mechanics", in *Handbuch der Physik* (ed. S. Flügge), vol. 8/1, Springer Verlag, 1959.
5. Batchelor, G.K., *An Introduction to Fluid Dynamics*, Cambridge University Press, 1967.
6. De Groot, S.R., Mazur, P., *Non-Equilibrium Thermodynamics*, North-Holland Publishing Co., 1962.
7. Ziegler, H., *An Introduction to Thermodynamics*, North-Holland Publishing Co., 1977.
8. Prigogine, *Introduction to thermodynamics of irreversible processes*, Interscience Publ., 1955.

### Appendice 3.A - Energia Interna $\mathcal{U}$ a livello microscopico

Si consideri una particella materiale  $P$  del continuo, composta a livello microscopico di  $N$  molecole uguali di massa  $m$ . La massa totale di  $P$  è  $H = Nm$ .

Le  $N$  molecole sono indicate con un numero  $\ell$  con  $\ell = 1, \dots, N$  (descrizione materiale) e per le velocità si assume:

$$\mathbf{u}^*(\ell) = \mathbf{u} + \mathbf{u}'(\ell) \quad (3.A.1)$$

con  $\mathbf{u}^*(\ell)$  velocità della  $\ell$ -esima molecola  
 $\mathbf{u}$  velocità media d'insieme per la particella materiale  $P$  (cioè la velocità che si è finora considerata)  
 $\mathbf{u}'(\ell)$  velocità di agitazione termica della  $\ell$ -esima molecola

da queste definizioni risulta:

$$\mathbf{u} = \frac{1}{N} \sum_{\ell=1}^N \mathbf{u}^*(\ell) \quad (3.A.2)$$

$$\sum_{\ell=1}^N \mathbf{u}'(\ell) = 0 \quad (3.A.3)$$

L'energia cinetica della particella si esprime con

$$E = \sum_{\ell=1}^N \frac{1}{2} m [\mathbf{u}^*(\ell) \cdot \mathbf{u}^*(\ell)] = \sum_{\ell=1}^N \frac{1}{2} m [|\mathbf{u}|^2 + |\mathbf{u}'(\ell)|^2 + 2\mathbf{u} \cdot \mathbf{u}'(\ell)] \quad (3.A.4)$$

Tenendo conto solo dell'energia cinetica traslazionale per la (3.A.3)

$$\begin{aligned} E &= \frac{1}{2}Nm|\mathbf{u}|^2 + \sum_{\ell=1}^N \frac{1}{2}m|\mathbf{u}'(\ell)|^2 \\ &= \frac{1}{2}M|\mathbf{u}|^2 + MU \end{aligned} \quad (3.A.5)$$

avendo definito l'energia interna  $\mathcal{U}$  per unità di massa con

$$\mathcal{U} = \sum_{\ell=1}^N \frac{\frac{1}{2}m|\mathbf{u}'(\ell)|^2}{Nm} \quad (3.A.6)$$

che dà una misura dell'energia cinetica a livello microscopico, una volta detratta l'energia cinetica d'insieme della particella  $\mathcal{P}$ .

L'energia per unità di volume da considerare nella (3.3.1) è data da

$$\frac{E}{V} = \rho \left( \frac{1}{2}|\mathbf{u}|^2 + \mathcal{U} \right) \quad (3.A.7)$$

## Appendice 3.B - Relazioni di Maxwell

Si ricordano brevemente le relazioni di Maxwell e la loro derivazione a partire dalle diverse funzioni termodinamiche di stato.

- Se si considera l'energia interna  $\mathcal{U}$  si ha per la relazione di Gibbs

$$d\mathcal{U} = \vartheta dS - pdv \quad (3.B.1)$$

che essendo un differenziale esatto soddisfa la condizione

$$\left( \frac{\partial \vartheta}{\partial v} \right)_s = - \left( \frac{\partial p}{\partial s} \right)_v \quad (3.B.2)$$

- Se si considera l'entalpia  $h = \mathcal{U} + pV$  si ha

$$\begin{aligned} dh &= d\mathcal{U} + pdV + Vdp \\ &= \vartheta dS + Vdp \end{aligned} \quad (3.B.3)$$

per la (3.B.1) e quindi per la medesima condizione

$$\left( \frac{\partial \vartheta}{\partial p} \right)_s = - \left( \frac{\partial V}{\partial s} \right)_p \quad (3.B.4)$$

- Se si considera l'energia libera di Helmholtz definita come  $A = \mathcal{U} - dS$  si ha

$$\begin{aligned} dA &= d\mathcal{U} - \vartheta dS - Sd\vartheta \\ &= -pdV - Sd\vartheta \end{aligned} \quad (3.B.5)$$

e quindi

$$\left(\frac{\partial p}{\partial \vartheta}\right)_v = -\left(\frac{\partial S}{\partial V}\right)_\vartheta \quad (3.B.6)$$

- Se si considera l'energia libera di Gibbs (o entalpia libera) definita come  $G = h - \vartheta S$  si ha

$$dG = d\mathcal{U} + pdV + Vdp - \vartheta dS - Sd\vartheta$$

e per la (3.B.1)

$$= Vdp - Sd\vartheta \quad (3.B.7)$$

da cui

$$-\left(\frac{\partial V}{\partial \vartheta}\right)_p = -\left(\frac{\partial S}{\partial p}\right)_\vartheta \quad (3.B.8)$$

Le (3.B.2), (3.B.4), (3.B.6), (3.B.8) sono note come relazioni di Maxwell.

## Capitolo 4

# Sistema completo di equazioni per la soluzione di campi fluidodinamici

### 4.1 Equazioni

Si richiamano qui le equazioni, nella loro forma più generale, ricavate nei capitoli precedenti. Per comodità di lettura si rinumerano le equazioni

- Equazione di conservazione della massa:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho u_i}{\partial x_i} = 0 \quad (4.1.1)$$

- Equazione di conservazione della quantità di moto:

$$\frac{\partial \rho u_i}{\partial t} + \frac{\partial \rho u_i u_j}{\partial x_j} = \rho f_i + \frac{\partial T_{ij}}{\partial x_j} \quad (4.1.2)$$

e si assume per  $T_{ij}$  la relazione costitutiva valida per fluidi newtoniani

$$T_{ij} = -p\delta_{ij} + \sigma_{ij} = (-p + \lambda e_{kk})\delta_{ij} + 2\mu e_{ij} \quad (4.1.3)$$

e si sostituisce nella (4.1.2), si ottiene per  $\lambda$  e  $\mu$  costanti

$$\frac{\partial \rho u_i}{\partial t} + \frac{\partial \rho u_i u_j}{\partial x_j} = \rho f_i - \frac{\partial p}{\partial x_i} + (\lambda + \mu) \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{\partial u_k}{\partial x_k} + \mu \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j \partial x_j} \quad (4.1.4)$$

- Equazione di conservazione dell'energia

$$\rho \left( \frac{DU}{Dt} + p \frac{D\frac{1}{\rho}}{Dt} \right) = \sigma_{ij} \frac{\partial u_i}{\partial x_j} - \frac{\partial q_i}{\partial x_i} + \rho Q = \rho \vartheta \frac{DS}{Dt} \quad (4.1.5)$$

con  $q_i$  flusso di calore che può essere dato dalla relazione costitutiva (Fourier)

$$q_i = -K \frac{\partial \vartheta}{\partial x_i} \quad (4.1.6)$$

nella variabile  $\vartheta$  si può esprimere nella forma

$$\rho c_v \frac{D\vartheta}{Dt} = -\frac{\partial u_i}{\partial x_i} \left[ \vartheta \left( \frac{\partial p}{\partial \vartheta} \right)_v \right] - \frac{\partial q_i}{\partial x_i} + \sigma_{ij} \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \rho Q \quad (4.1.7)$$

oppure a partire dalla forma entalpica

$$\rho c_p \frac{D\vartheta}{Dt} = \beta \vartheta \frac{Dp}{Dt} - \frac{\partial q_i}{\partial x_i} + \sigma_{ij} \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \rho Q \quad (4.1.8)$$

con

$$\beta = \frac{1}{V} \left( \frac{\partial V}{\partial \vartheta} \right)_p \quad c_p = \vartheta \left( \frac{\partial S}{\partial \vartheta} \right)_p \quad c_v = \vartheta \left( \frac{\partial S}{\partial \vartheta} \right)_v \quad (4.1.9)$$

- Equazione calorica di stato

$$U = \hat{U}(S, \rho) \quad (4.1.10)$$

o sue equivalenti  $\vartheta = \hat{\vartheta}(S, \rho)$ ,  $p = \hat{p}(S, \rho)$ ,  $U = \hat{U}(\vartheta, \rho)$

- Relazioni termodinamiche per i coefficienti di conduzione termica e viscosità

$$\begin{aligned} k &= \hat{k}(S, \rho) \\ \mu &= \hat{\mu}(S, \rho) \\ \lambda &= \hat{\lambda}(S, \rho) \end{aligned} \quad (4.1.11)$$

Se si assumono come incognite le variabili  $p, u_i, \rho, \vartheta$ , considerando come già sostituite le relazioni (4.1.9) e (4.1.11), si hanno a disposizione le equazioni (4.1.1), (4.1.4), (4.1.7 o 4.1.8) e (4.1.10). Si hanno cioè 6 incognite e 6 equazioni e il sistema pertanto è chiuso.

## 4.2 Metodi di soluzione

Il sistema completo di equazioni descritto nel paragrafo precedente è risolvibile analiticamente solo in alcuni casi particolari molto semplici e con ipotesi molto restrittive. Vedremo in seguito alcune di queste soluzioni esatte.

In generale si può risolvere il sistema con metodi numerici, ma, data la sua complessità, anche questi presentano molte difficoltà e limiti di vario genere. E' quindi necessario, anche se si adottano soluzioni numeriche, provvedere a semplificazioni del sistema generale, trascurando ove possibile i termini meno importanti, a seconda del caso in esame, e individuando le condizioni limite per le quali le equazioni si possono semplificare in modo significativo.

Lo studio dei campi fluidodinamici si affronta in generale attraverso una composizione di questi casi limite (es. flusso potenziale + strato limite + urto, ...) o mediante soluzioni numeriche del sistema completo, che tengano però conto della esistenza locale di tali condizioni. Alle volte è sufficiente trovare una soluzione per una particolare condizione limite e per una particolare zona del campo e non è necessario nè ricomporla con altre, nè affrontare soluzioni più complesse. Le condizioni limite cui si è sopra accennato sono più facilmente individuabili mediante un'analisi dimensionale delle equazioni del sistema.

## 4.3 Forma adimensionale delle equazioni

Le equazioni in tale forma, con l'introduzione dei gruppi o parametri adimensionali, hanno una notevole importanza in quanto facilitano:

- a) la semplificazione matematica delle equazioni. La soppressione di alcuni termini può anche modificare il tipo di equazione come si vedrà in seguito (es. da ellittica a parabolica)
- b) la corretta similitudine sperimentale, cioè la conduzione di esperimenti validi per diverse condizioni fisiche, ma a parità di valore del o dei parametri adimensionali più rilevanti nel caso fisico in esame;
- c) l'accuratezza delle soluzioni numeriche in quanto, con una opportuna scelta dei valori di riferimento, si possono avere per le variabili di calcolo tutti valori dell'0(1), concentrando le differenze numeriche nei parametri adimensionali.

Si definiscono le seguenti grandezze adimensionali  $( )^*$ , indicando con  $( )_0$  i valori di riferimento, che dovranno essere scelti in base alle caratteristiche fisiche del problema in esame:

$$\begin{aligned}
 \rho^* &= \frac{\rho}{\rho_0} & u_i^* &= \frac{u_i}{U_0} & p^* &= \frac{p}{p_0} \\
 t^* &= \frac{t}{t_0} & x_i^* &= \frac{x_i}{L_0} & f_i^* &= \frac{f_i}{f_0} \\
 \vartheta^* &= \frac{\vartheta}{\vartheta_0} & \mu^* &= \frac{\mu}{\mu_0} & \lambda^* &= \frac{\lambda}{\mu_0} \\
 k^* &= \frac{k}{k_0} & c_v^* &= \frac{c_v}{c_0} & c_p^* &= \frac{c_p}{c_0} \\
 \sigma_{ij}^* &= \sigma_{ij} \frac{L_0}{U_0 \mu_0} & e_{ij}^* &= e_{ij} \frac{L_0}{U_0}
 \end{aligned} \tag{4.3.1}$$

In queste variabili adimensionali l'equazione di conservazione di massa (4.1.1) diviene

$$\frac{\rho_0}{t_0} \frac{\partial \rho^*}{\partial t^*} + \frac{U_0 \rho_0}{L_0} \frac{\partial \rho^* u_i^*}{\partial x_i^*} = 0$$

che definendo il numero di Strouhal

$$St = \frac{t_0 U_0}{L_0} \tag{4.3.2}$$

si esprime

$$\frac{1}{St} \frac{\partial \rho^*}{\partial t^*} + \frac{\partial \rho^* u_i^*}{\partial x_i^*} = 0 \tag{4.3.3}$$

Il numero di Strouhal è il rapporto fra un tempo  $t_0$  caratteristico del fenomeno e un tempo caratteristico del campo fluidodinamico  $t_F = L_0/U_0$ . Se non si esaminano fenomeni periodici, si può assumere  $St = 1$  e cioè si prende  $t_F$  come tempo di riferimento  $t_0$ .

Analogamente l'equazione di conservazione della quantità di moto (4.1.4) si può scrivere, considerando  $\lambda$  e  $\mu$  costanti

$$\begin{aligned}
 \frac{U_0 \rho_0}{t_0} \frac{\partial \rho^* u_i^*}{\partial t^*} + \frac{\rho_0 U_0^2}{L_0} \frac{\partial \rho^* u_i^* u_j^*}{\partial x_j^*} = \\
 - \frac{p_0}{L_0} \frac{\partial p^*}{\partial x_i^*} + \rho_0 f_0 \rho^* f_i^* + \frac{\mu_0 U_0}{L_0^2} \left( \frac{\lambda_0}{\mu_0} + 1 \right) \frac{\partial}{\partial x_i^*} \left( \frac{\partial u_k^*}{\partial x_k^*} \right) + \frac{\mu_0 U_0}{L_0^2} \frac{\partial^2 u_i^*}{\partial x_j^* \partial x_j^*}
 \end{aligned} \tag{4.3.4}$$

che divisa per il coefficiente del termine convettivo  $\frac{\rho_0 U_0^2}{L_0}$  e definendo i parametri adimensionali:

#### 4 Sistema completo di equazioni per la soluzione di campi fluidodinamici

- numero di Reynolds

$$\text{Re} = \frac{\rho_0 U_0 L_0}{\mu_0} \quad (4.3.5)$$

che esprime il rapporto tra i termini convettivi e i termini viscosi dell'equazione

- numero di Froude

$$\text{Fr} = \frac{U_0^2}{f_0 L_0} \quad (4.3.6)$$

che esprime il rapporto tra i termini convettivi e il termine della forza di massa

- numero di Ruark

$$\text{Ru} = \frac{\rho_0 U_0^2}{p_0} \quad (4.3.7)$$

che esprime il rapporto tra i termini convettivi e il termine di pressione. Nella maggior parte dei casi i gradienti di pressione sono fortemente legati alle forze di inerzia e pertanto si può assumere  $\rho_0 U_0^2$  come pressione di riferimento e cioè  $\text{Ru} = 1$ .

Introducendo questi parametri adimensionali nell'equazione (4.3.4) si ottiene

$$\begin{aligned} \frac{1}{\text{St}} \frac{\partial \rho^* u_i^*}{\partial t^*} + \frac{\partial \rho^* u_i^* u_j^*}{\partial x_j^*} &= -\frac{1}{\text{Ru}} \frac{\partial p^*}{\partial x_i^*} + \frac{1}{\text{Fr}} \rho^* f_i^* \\ &+ \frac{1}{\text{Re}} \left( \frac{\lambda_0}{\mu_0} + 1 \right) \frac{\partial}{\partial x_i^*} \left( \frac{\partial u_k^*}{\partial x_k^*} \right) + \frac{1}{\text{Re}} \frac{\partial^2 u_i^*}{\partial x_j^* \partial x_j^*} \end{aligned} \quad (4.3.8)$$

L'equazione di conservazione dell'energia nella variabile  $\vartheta$  (4.1.7) si scrive per  $k = \text{cost}$

$$\begin{aligned} \frac{\vartheta_0 \rho_0 c_0}{t_0} \rho^* c_v^* \frac{\partial \vartheta^*}{\partial t^*} + \frac{\vartheta_0 \rho_0 c_0 U_0}{L_0} \rho^* c_v^* u_i^* \frac{\partial \vartheta^*}{\partial x_i^*} &= \frac{k_0 \vartheta_0}{L_0^2} \frac{\partial^2 \vartheta^*}{\partial x_j^* \partial x_j^*} \\ &+ \frac{U_0^2 \mu_0}{L_0^2} \sigma_{ij}^* \frac{\partial u_i^*}{\partial x_j^*} - \frac{p_0 U_0}{L_0} \left[ \vartheta^* \left( \frac{\partial p^*}{\partial \vartheta^*} \right)_v \right] \frac{\partial u_i^*}{\partial x_i^*} \end{aligned} \quad (4.3.9)$$

che divisa per il coefficiente del termine convettivo  $\frac{\rho_0 c_0 \vartheta_0 U_0}{L_0}$  e definendo i parametri adimensionali:

- numero di Prandtl

$$\text{Pr} = \frac{c_0 \mu_0}{k_0} \quad (4.3.10)$$

che esprime il rapporto tra la diffusività della quantità di moto e quella dell'energia

- numero di Péclet

$$\text{Pe} = \frac{c_0 \rho_0 U_0 L_0}{k_0} = \text{Pr} \cdot \text{Re} \quad (4.3.11)$$

che esprime il rapporto tra i termini convettivi e diffusivi (conduzione termica) dell'equazione

- numero di Brinkman

$$\text{Br} = \frac{U_0^2 \mu_0}{k_0 \vartheta_0} \quad (4.3.12)$$

che esprime il rapporto tra quantità di calore proveniente dalla dissipazione viscosa e la quantità di calore trasmessa per conduzione.

- numero di Eckert

$$\text{E} = \frac{U_0^2}{\vartheta_0 c_0} = \frac{\text{Br}}{\text{Pr}} \quad (4.3.13)$$

si può scrivere nella forma adimensionale:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\text{St}} \rho^* c_v^* \frac{\partial \vartheta^*}{\partial t^*} + \rho^* c_v^* u_i^* \frac{\partial \vartheta^*}{\partial x_i^*} &= \frac{1}{\text{Pe}} \frac{\partial}{\partial x_i^*} \frac{\partial \vartheta^*}{\partial x_i^*} + \frac{E}{\text{Re}} \sigma_{ij} \frac{\partial u_i^*}{\partial x_j^*} \\ &\quad - \frac{E}{\text{Ru}} \left[ \vartheta^* \left( \frac{\partial p^*}{\partial \vartheta^*} \right)_v \right] \frac{\partial u_i^*}{\partial x_i^*} \end{aligned} \quad (4.3.14)$$

#### 4.4 Convezione naturale. Approssimazione di Boussinesq

Si definiscono flussi a convezione naturale quelli in cui il moto è generato dalle forze di galleggiamento. Le differenze di temperatura vengono introdotte nel campo, per esempio, attraverso i contorni mantenuti a temperatura costante e le differenze di densità che si generano inducono il moto: il fluido caldo tende a salire e quello freddo a scendere.

Per studiare tali flussi si utilizza un sistema ridotto di equazioni ottenute a partire dal sistema completo di Navier-Stokes in cui si introducono alcune semplificazioni. Tali approssimazioni originariamente, proposte da Boussinesq, presuppongono che le variazioni di densità siano comunque molto piccole

$$\frac{\Delta\rho}{\rho} \ll 1,$$

in modo da poter considerare la densità costante in tutti i termini tranne che nel termine ove appare la forza di massa. Tale ipotesi si verifica se le differenze di temperatura caratteristiche del campo non sono molto elevate e le variazioni di pressione sono tali da poter trascurare gli effetti di comprimibilità. Sotto queste condizioni la densità si considera variabile con la temperatura ma non con la pressione ed è lecito esprimerne le variazioni facendone lo sviluppo in serie di Taylor e fermando lo sviluppo al primo ordine. Sotto tale ipotesi l'equazione di conservazione della massa si riduce alla sua forma valida per i flussi incomprimibili

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_i} = 0. \quad (4.4.1)$$

Per quanto riguarda l'equazione di conservazione della quantità di moto, la forza per unità di massa  $f_i$  è data dalla forza di gravità e pertanto si può esprimere in un sistema di assi cartesiani con  $z$  verticale verso l'alto come

$$f_i = (0, 0, -g_0) \quad (4.4.2)$$

e assumendo  $f_0 = g_0$  si ottiene

$$f_i^* = \frac{f_i}{f_0} = (0, 0, -1) \quad (4.4.3)$$

Introduciamo quindi nel termine in Fr dell'equazione (4.3.8) corrispondente alle forze di massa l'espressione per la densità che si ottiene facendone lo sviluppo in serie di Taylor e fermando lo sviluppo al primo termine

$$\rho = \rho|_{\vartheta=\vartheta_0} + \left. \frac{\partial\rho}{\partial\vartheta} \right|_{\vartheta=\vartheta_0} (\vartheta - \vartheta_0) + \dots \quad (4.4.4)$$

Assumendo che la variazione di  $\rho$  con  $\vartheta$  avvenga a  $p = \text{cost}$

$$\left. \frac{\partial \rho}{\partial \vartheta} \right|_{p=\text{cost}} = \left. \frac{\partial}{\partial \vartheta} \left( \frac{1}{v} \right) \right|_{p=\text{cost}} = -\frac{1}{v^2} \left( \frac{\partial v}{\partial \vartheta} \right) \Big|_{p=\text{cost}} \Big|_{\vartheta=\vartheta_0} = -\rho_0 \beta_0 \quad (4.4.5)$$

essendo  $\beta = \frac{1}{v} \left( \frac{\partial v}{\partial \vartheta} \right)_{p=\text{cost}}$  il coefficiente di espansione termica, e sostituendo nella (4.4.4), si ottiene

$$\rho = \rho_0 - \rho_0 \beta_0 (\vartheta - \vartheta_0) \quad (4.4.6)$$

e

$$\rho^* = 1 - \beta_0 \vartheta^* (\vartheta_1 - \vartheta_0) \quad (4.4.7)$$

in quanto la temperatura adimensionale si è definita come  $\vartheta^* = \frac{\vartheta - \vartheta_0}{\vartheta_1 - \vartheta_0} = \frac{\vartheta - \vartheta_0}{\Delta \vartheta_0}$ .

Il termine in Fr della (4.3.8) diviene:

$$\frac{1}{\text{Fr}} \rho^* f_i^* = \frac{f_i^*}{\text{Fr}} - \frac{\beta_0}{\text{Fr}} (\vartheta_1 - \vartheta_0) \vartheta^* f_i^* \quad (4.4.8)$$

Sostituendo l'espressione per il numero di Fr data dalla (4.3.6), l'ultimo termine vale

$$\frac{g_0 L_0}{U_0^2} \beta_0 \Delta \vartheta_0 \vartheta^* = \frac{g_0 \beta_0 \Delta \vartheta_0 \vartheta^* L_0^3}{\nu_0^2} \frac{\nu_0^2}{U_0^2 L_0^2} = \frac{\text{Gr}}{\text{Re}^2} \vartheta^* \quad (4.4.9)$$

avendo introdotto il

$$\text{numero di Grashof} \quad \text{Gr} = \frac{g_0 \beta_0 \Delta \vartheta_0 L_0^3}{\nu_0^2} \quad (4.4.10)$$

Si definisce inoltre il

$$\text{numero di Rayleigh} \quad \text{Ra} = \text{Gr} \cdot \text{Pr} \quad (4.4.11)$$

Il termine (4.4.8) si può quindi esprimere come

$$\frac{1}{\text{Fr}} \rho^* f_i^* = \frac{1}{\text{Fr}} f_i^* - \frac{\text{Gr}}{\text{Re}^2} \vartheta^* f_i^*. \quad (4.4.12)$$

A questo punto è necessaria una piccola digressione di validità generale. Vale infatti la pena ricordare che in un problema in cui le forze di massa

#### 4 Sistema completo di equazioni per la soluzione di campi fluidodinamici

siano conservative il termine  $\rho f_i$  si equilibra con il termine dovuto alla pressione idrostatica. L'espressione per quest'ultima si ottiene dall'equilibrio in assenza di moto espresso dalla

$$\rho f_i = \frac{\partial p_{id}}{\partial x_i} \quad (4.4.13)$$

che per forza conservativa  $f_i = -\frac{\partial \Psi}{\partial x_i}$  può essere soddisfatta certamente se  $\rho = \text{cost} = \rho_0$ . Se la densità non è costante, applicando il rotore alla (4.4.13) si ha

$$\varepsilon_{ijk} \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \rho \frac{\partial \Psi}{\partial x_k} \right) = \varepsilon_{ijk} \frac{\partial \rho}{\partial x_j} \frac{\partial \Psi}{\partial x_k} + \rho \varepsilon_{ijk} \frac{\partial}{\partial x_j} \frac{\partial \Psi}{\partial x_k} = 0$$

quindi

$$\nabla \rho \times \nabla \Psi = 0 \quad (4.4.14)$$

cioè  $\nabla \rho // \nabla \Psi$  e le superfici di livello di  $\rho$  e  $\Psi$  coincidono. Essendo  $\rho = \rho(\Psi)$  sarà anche  $p = p(\Psi)$  e quindi

$$\rho(\Psi) \frac{\partial \Psi}{\partial x_k} = \frac{\partial p}{\partial \Psi} \frac{\partial \Psi}{\partial x_k} \quad (4.4.15)$$

che ammette la soluzione per la pressione idrostatica

$$p_{id} = \int \rho(\Psi) d\Psi \quad (4.4.16)$$

che soddisfa la (4.4.13).

Ritornando quindi all'approssimazione di Boussinesq, il primo dei due termini dell'equazione (4.4.12) si equilibra con il termine dovuto alla pressione idrostatica e pertanto nell'equazione (4.3.8) rimane solo il termine in  $\text{Gr}/\text{Re}^2$ , mentre si considera la pressione a meno della pressione idrostatica,  $p' = p - p_{id}$ . L'equazione della quantità di moto in forma adimensionale avendo posto  $\text{St} = 1$  e  $\text{Ru} = 1$  diviene

$$\frac{\partial u_i^*}{\partial t^*} + u_j^* \frac{\partial u_i^*}{\partial x_j^*} = -\frac{\partial p'^*}{\partial x_i^*} - \frac{\text{Gr}}{\text{Re}^2} \vartheta^* f_i^* + \frac{1}{\text{Re}} \frac{\partial^2 u_i^*}{\partial x_j^* \partial x_j^*}. \quad (4.4.17)$$

Le approssimazioni di Boussinesq si completano considerando un'equazione per l'energia in forma di temperatura. Per ottenere la forma più appropriata si parte dall'equazione per l'entropia, introdotta nel capitolo 3

$$\rho \vartheta \frac{DS}{Dt} = \sigma_{ij} \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial}{\partial x_i} k \frac{\partial \vartheta}{\partial x_i} \quad (4.4.18)$$

nella quale abbiamo ipotizzato assenza di sorgenti di calore interne al campo ( $\rho Q = 0$ ) e sostituito al flusso termico l'espressione di Fourier. Avendo ipotizzato che le variazioni delle quantità termodinamiche dovute alla pressione siano trascurabili la variazione dell'entropia può essere semplificata in

$$dS = \left( \frac{\partial S}{\partial \vartheta} \right)_p d\vartheta + \left( \frac{\partial S}{\partial p} \right)_\vartheta dp \simeq \left( \frac{\partial S}{\partial \vartheta} \right)_p d\vartheta = \frac{c_p}{\vartheta} d\vartheta,$$

che sostituita nella (4.4.18) dà

$$\rho c_p \frac{D\vartheta}{Dt} = \frac{\partial}{\partial x_i} k \frac{\partial \vartheta}{\partial x_i} + \sigma_{ij} \frac{\partial u_i}{\partial x_j}. \quad (4.4.19)$$

Procedendo alla adimensionalizzazione l'equazione diventa

$$\frac{1}{St} \frac{\partial \vartheta^*}{\partial t^*} + u_i^* \frac{\partial \vartheta^*}{\partial x_i^*} = \frac{1}{Pr Re} \frac{\partial}{\partial x_i^*} \frac{\partial \vartheta^*}{\partial x_i^*} + \frac{E}{Re} \sigma_{ij}^* \frac{\partial u_i^*}{\partial x_j^*} \quad (4.4.20)$$

in cui si sono considerati la densità  $\rho$ , il calore specifico  $c_p$  e la conducibilità termica  $k$  costanti. Dalla (4.4.20) si osserva che il termine di produzione dovuto alla dissipazione di energia meccanica è moltiplicato per  $E/Re$ , cioè per il rapporto tra il numero di Eckert e il numero di Reynolds. Nella tabella 4.1 sono riportati i valori del  $c_p$  e  $\nu$  per l'acqua e l'aria e corrispondenti valori dei due parametri adimensionali ottenuti considerando  $\Delta\vartheta_0 = 10K$ ,  $U_0 = 1m/s$  e  $L_0 = 1m$ . Dai valori ottenuti si deduce che l'errore che si commette trascurando il termine di produzione  $\Phi$  è molto piccolo. A valle di tutte queste considerazioni il sistema completo di equazioni per la convezione naturale è riportato qui sotto in forma adimensionale, avendo posto  $St = 1$  e  $Ru = 1$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial u_i^*}{\partial x_i^*} = 0 \\ \frac{\partial u_i^*}{\partial t^*} + u_j \frac{\partial u_i^*}{\partial x_j^*} = -\frac{\partial p^*}{\partial x_i^*} - \frac{Gr}{Re^2} \vartheta^* f_i^* + \frac{1}{Re} \frac{\partial^2 u_i^*}{\partial x_j^* \partial x_j^*} \\ \frac{\partial \vartheta^*}{\partial t^*} + u_i^* \frac{\partial \vartheta^*}{\partial x_i^*} = \frac{1}{Pr Re} \frac{\partial}{\partial x_i^*} \frac{\partial \vartheta^*}{\partial x_i^*} \end{array} \right. \quad (4.4.21)$$

|              | Acqua                 | Aria                  |
|--------------|-----------------------|-----------------------|
| $c_p(J/KgK)$ | $4.18 \times 10^3$    | $1.01 \times 10^3$    |
| $\nu(m^2/s)$ | $1.00 \times 10^{-6}$ | $1.50 \times 10^{-5}$ |
| $Ec$         | $0.25 \times 10^{-4}$ | $1 \times 10^{-4}$    |
| $Re$         | $1.00 \times 10^6$    | $6. \times 10^4$      |

Tabella 4.1 Valori tipici di  $E/Re$  per acqua e aria

in questo sistema le equazioni del moto e dell'energia risultano accoppiate e quindi devono essere risolte simultaneamente.

Analizziamo ora il sistema (4.4.21), in cui appaiono i tre numeri adimensionali Gr, Re e Pr. La prima osservazione da fare è che i valori appropriati dei tre parametri non sono tra loro indipendenti e questo dal momento che la velocità caratteristica  $U_0$  che compare nel numero di Reynolds non è in generale nota a priori. In altri termini la velocità caratteristica del problema non è un parametro imposto, ad esempio, dalle condizioni al contorno, ma il suo valore caratteristico dipende complessivamente dagli altri parametri. Cerchiamo quindi un valore appropriato per  $U_0$ , tenendo però conto che nel problema in esame questa stima non è unica ma dipende dal regime di convezione naturale che si instaura, ossia dal valore del numero di Grashof. È possibile individuare due regimi limite, uno per  $Gr \ll 1$  e uno per  $Gr \gg 1$ .

Nel primo caso le forze di galleggiamento sono modeste e quindi le velocità risultanti saranno piccole. In questo limite è lecito ritenere che il termine di galleggiamento risulti dello stesso ordine di grandezza dei termini viscosi e cioè

$$\frac{1}{Re} \sim \frac{Gr}{Re^2} \quad Gr \sim Re \quad (4.4.22)$$

che porta alla stima

$$U_0 = \frac{\Delta\vartheta_0 L_0^2 \beta_0 g_0}{\nu_0}. \quad (4.4.23)$$

Nel secondo caso,  $Gr \gg 1$ , le forze di galleggiamento sono tali da generare un campo di moto con velocità caratteristiche più grandi. In questo limite si può supporre che i termini di galleggiamento siano dello stesso ordine di grandezza dei termini convettivi e quindi

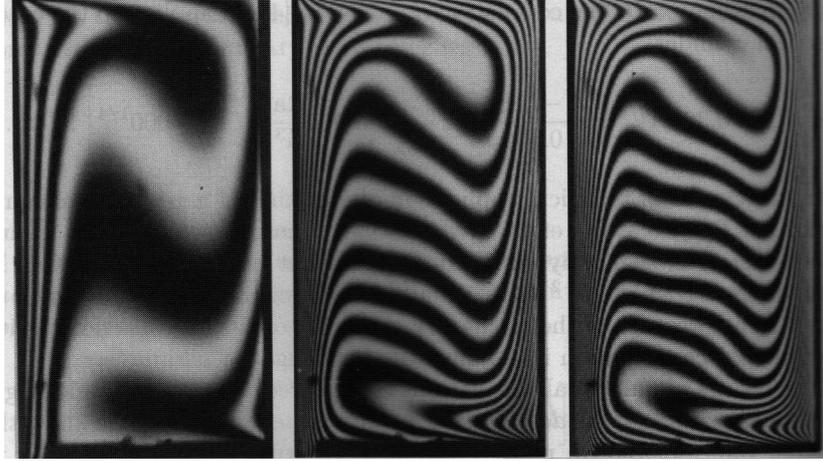
$$\frac{Gr}{Re^2} \sim 1 \quad Gr \sim Re^2 \quad (4.4.24)$$

questa posizione porta ad una stima della velocità caratteristica

$$U_0 = (\Delta\vartheta_0 L_0 \beta_0 g_0)^{1/2}. \quad (4.4.25)$$

Assumendo proprio questo ultimo valore per la velocità caratteristica i numeri di Gr e Re non sono più indipendenti e il sistema di equazioni può essere scritto in funzione di soli due parametri come segue

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial u_i^*}{\partial x_i^*} = 0 \\ \frac{\partial u_i^*}{\partial t^*} + u_j^* \frac{\partial u_i^*}{\partial x_j^*} = -\frac{\partial p^*}{\partial x_i^*} + \frac{1}{\sqrt{Gr}} \frac{\partial^2 u_i^*}{\partial x_j^* \partial x_j^*} - \vartheta^* f_i^* \\ \frac{\partial \vartheta^*}{\partial t^*} + u_i^* \frac{\partial \vartheta^*}{\partial x_i^*} = \frac{1}{Pr\sqrt{Gr}} \frac{\partial}{\partial x_i^*} \frac{\partial \vartheta^*}{\partial x_i^*} \end{array} \right. \quad (4.4.26)$$



**Figura 4.1** Profili di temperatura in un esperimento di convezione naturale. Grashof crescente da destra a sinistra

Si osservi che nei flussi nei quali è presente scambio termico è consuetudine definire un parametro adimensionale, il numero di Nusselt ( $Nu$ ) che caratterizza il flusso termico in presenza di convezione. Si prenda come esempio il flusso bidimensionale in una cavità rettangolare (vedi figura 4.1) le cui pareti orizzontali siano adiabatiche mentre quelle verticali siano mantenute a temperatura costante in modo tale che la differenza di temperatura tra le due pareti sia  $\Delta\vartheta_0$ . In questo caso  $Nu$ , definito come rapporto tra lo scambio termico effettivo  $H$  e quello dovuto a pura conduzione che avrebbe luogo se non ci fossero moti, è pari a

$$Nu = \frac{HL_0}{k\Delta\vartheta_0} \quad (4.4.27)$$

dove  $L_0$  è la distanza fra le due pareti verticali e  $k$  è la conducibilità termica. In generale nei flussi a convezione naturale il numero di Nusselt, che per definizione è  $\geq 1$ , può essere espresso come

$$Nu = f(Gr, Pr). \quad (4.4.28)$$

Va osservato che all'aumentare del numero di Grashof, cioè in presenza di forti moti convettivi  $Nu$  cresce e con esso, quindi, il coefficiente di scambio termico convettivo.

## Bibliografia

1. Slattery, J.C., *Momentum, Energy and Mass Transfer in Continua*, McGraw-Hill, 1972.
2. Batchelor, G.K., *An Introduction to Fluid Dynamics*, Cambridge University Press, 1967.
3. Acheson, D.J., *Elementary Fluid Dynamics*, Clarendon Press, Oxford, 1990.
4. Tritton, D.J., *Physical Fluid Dynamics*, Von Nostrand, 1981.
5. Landau, L.D., Lifschitz E.M., *Fluid mechanics*, Pergamon Press, 1959.

## Appendice 4.A - Soluzione numerica delle equazioni di Navier-Stokes nelle variabili $\psi - \zeta$

Si considerano fluido incompressibili per i quali l'equazione

$$\frac{\partial u_k}{\partial x_k} = 0 \quad (4.4.29)$$

e le equazioni di Navier-Stokes divengono

$$\rho \left( \frac{\partial u_i}{\partial t} + u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right) = - \frac{\partial p}{\partial x_i} + \mu \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j \partial x_j} + \rho f_i \quad (4.4.30)$$

Si considerano per semplicità moti bidimensionali nel piano  $xy$  per la (4.4.29) si scrive

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (4.4.31)$$

dove  $x_1 \equiv x, x_2 \equiv y, u_1 \equiv u, u_2 \equiv v$ , come abituale, se non si fa uso della notazione indiciale.

La (4.4.31) è la condizione per cui

$$d\psi = udy - vdx \quad (4.4.32)$$

è un differenziale esatto: infatti

$$\frac{\partial u}{\partial x} = - \frac{\partial v}{\partial y}$$

coincide con la (4.4.31)

Quindi, tenendo conto che  $d\psi$  è un differenziale esatto, valgono le

$$u = \frac{\partial \psi}{\partial y} \quad v = - \frac{\partial \psi}{\partial x} \quad (4.4.33)$$

e la funzione scalare  $\psi$  definita da

$$\psi - \psi_0 = \int_0^P (u dy - v dx) \quad (4.4.34)$$

viene chiamata funzione di corrente.

Nella (4.4.34)  $\psi_0$  è una costante e l'integrale è fatto lungo una linea arbitraria che collega  $O$ , punto di riferimento, con  $P$  dove vogliamo calcolare il valore di  $\psi$ . Il flusso dato dall'integrale, essendo  $d\psi$  un differenziale esatto, è indipendente dalla linea scelta per collegare  $O$  con  $P$  (se il campo è semplicemente connesso). Dalla (4.4.32) per  $d\psi = 0$  si ha

$$u dy - v dx = 0 \quad \text{cioè} \quad \frac{dx}{u} = \frac{dy}{v} \quad (4.4.35)$$

che è l'equazione delle linee di corrente definite come le linee ovunque tangenti al campo di velocità per un dato tempo  $t$ , cioè

$$\frac{dx_i}{d\alpha} = u_i \quad i = 1, 2, 3 \quad (4.4.36)$$

che coincidono con la (4.4.35). Quindi le  $\psi = \text{cost}$  sono le linee di corrente.

In tal modo si è usata l'equazione (4.4.31) di conservazione della massa per sostituire le due variabili dipendenti  $u$  e  $v$  con la unica variabile dipendente  $\psi$ .

Si può definire in funzione di  $\psi$  anche la vorticità  $\zeta = 2\omega$

$$\zeta = \nabla \times \mathbf{u} \quad (4.4.37)$$

, che nel caso bidimensionale ha una sola componente normale al piano  $xy$  del moto, che indicheremo con lo scalare  $\zeta$ .

$$\zeta_k \equiv \zeta = \left( \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) = -\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = -\nabla^2 \psi \quad (4.4.38)$$

Le equazioni di Navier-Stokes (4.4.30) si possono esprimere nella variabile  $\psi$  applicando ad esse l'operatore rotore. Prima di ciò rendiamo adimensionali le equazioni, come è sempre opportuno nelle soluzioni numeriche. Consideriamo le variabili adimensionali

$$\begin{aligned} u'_i &= \frac{u_i}{U_i} & \rho'_i &= \frac{\rho}{\rho_0} & p' &= \frac{p}{\rho_0 U_0^2} \\ t' &= \frac{t U_0}{L_0} & x'_i &= \frac{x_i}{L_0} & f'_i &= f \frac{L_0}{U_0^2} \end{aligned} \quad (4.4.39)$$

Sostituendo le espressioni (4.4.39) nella (4.4.30) ed eliminando dopo la sostituzione gli apici non più necessari, ricordando che ora le variabili sono adimensionali, si ottiene

$$\rho_0 \frac{U_0^2}{L_0} \left( \rho' \frac{\partial u'_i}{\partial t'} + \rho' u'_j \frac{\partial u'_i}{\partial x'_j} \right) = \rho' f' \rho_0 \frac{U_0^2}{L_0} - \rho_0 \frac{U_0^2}{L_0} \frac{\partial p'}{\partial x'_i} + \mu \frac{U_0^2}{L_0} \frac{\partial^2 u'_j}{\partial x'_j \partial x'_j}$$

#### 4 Sistema completo di equazioni per la soluzione di campi fluidodinamici

dividendo per  $\rho_0 \frac{U_0^2}{L_0}$

$$\rho \frac{\partial u_i}{\partial t} + \rho u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} = \rho f_i - \frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{\mu}{\rho_0 U_0 L_0} \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j \partial x_j} \quad (4.4.40)$$

dove il gruppo adimensionale  $\frac{\rho_0 U_0 L_0}{\mu_0}$  è il numero di Reynolds che da il rapporto tra le forze viscosive e le forze di inerzia.

Considerando che  $\rho = \rho_0$  per l'ipotesi di fluido incompressibile quindi  $\rho' = 1$  e le forze di massa conservative cioè

$$f_i = - \frac{\partial \Psi}{\partial x_i} \quad (4.4.41)$$

si ha per il rotore delle equazioni di Navier-Stokes nel caso bidimensionale:

$$\begin{aligned} - \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} \right) &= - \frac{\partial(p + \Psi)}{\partial x} + \mu \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) \\ + \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} \right) &= - \frac{\partial(p + \Psi)}{\partial x} + \mu \left( \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) \end{aligned}$$

che ricordando la (4.4.38) da luogo all'equazione

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \zeta + u \frac{\partial \zeta}{\partial x} + v \frac{\partial \zeta}{\partial y} + \zeta \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) &= \\ = \mu \left( \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \zeta}{\partial y^2} \right) \end{aligned} \quad (4.4.42)$$

da cui risulta eliminando il termine in  $(p + \Psi)$ .

Per la (4.4.33) e la (4.4.42) diviene

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} + u \frac{\partial \zeta}{\partial x} + v \frac{\partial \zeta}{\partial y} = \mu \nabla^2 \zeta \quad (4.4.43)$$

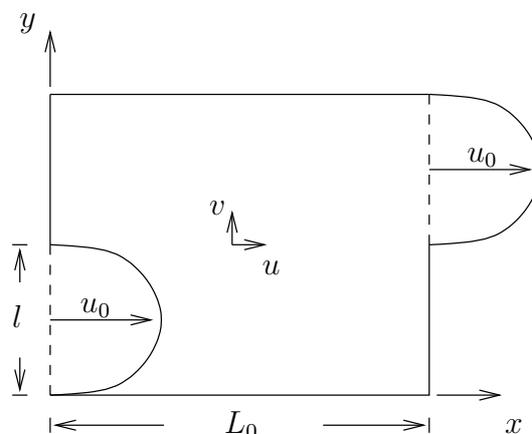
che va risolta insieme alla (4.4.38)

$$-\zeta = \nabla^2 \psi$$

ricordando le (4.4.33)

$$u = \frac{\partial \psi}{\partial y} \quad v = - \frac{\partial \psi}{\partial x}$$

si devono ora specificare, per ottenere delle soluzioni, le condizioni al contorno nelle variabili  $\psi$  e  $\zeta$ . Considerando per semplicità il problema fisico schematizzato in figura



che rappresenta un ambiente rettangolare con un flusso di entrata su un'apertura di lunghezza  $l$  e un flusso di uscita su una apertura di lunghezza  $l$  per ora ipotizzato di distribuzione identica al flusso di entrata.

Il sistema di equazioni (4.4.43) e (4.4.38) è costituito da due equazioni alle derivate parziali del secondo ordine nelle due incognite  $\psi$ ,  $\zeta$ , la (4.4.43) parabolica la (4.4.38) ellittica.

Come visto precedentemente è richiesta una condizione per ciascuna variabile, nel contorno del piano  $x,y$ , nel valore della variabile stessa o di sue derivate.

Nel problema fisico conosciamo di solito le condizioni per la velocità al contorno; in particolare sappiamo che alle pareti solide impermeabili

$$u = v = 0 \quad (4.4.44)$$

abbiamo inoltre imposto un profilo di entrata uguale a quello di uscita

$$u = \bar{u}(y) \quad (4.4.45)$$

senza fare per ora alcuna ipotesi per quanto riguarda la componente  $v$  in queste due sezioni.

Trasferiamo ora queste condizioni sulle variabili  $\psi$  e  $\zeta$  ricordando le loro definizioni (4.4.34) e (4.4.38). Per la (4.4.44) dalla (4.4.34) si ottiene alla parete inferiore

$$\psi = 0 \quad (4.4.46)$$

assumendo  $\psi_0 = 0$  nell'origine  $O$ , alla parete superiore

$$\psi = \text{costante} = \psi_1$$

dove  $\psi_1$  si calcola da

$$\psi_1 = \int_0^l u(y) dy \quad (4.4.47)$$

#### 4 Sistema completo di equazioni per la soluzione di campi fluidodinamici

---

ovvero considerando le variabili adimensionali  $y/l = \eta$

$$\psi_1 = \int_0^1 u(\eta) d\eta \quad (4.4.48)$$

assumiamo per il profilo d'entrata una parabola data da

$$u(\eta) = a\eta^2 + b\eta + c$$

tale che per

$$\begin{aligned} \eta = 0 & & u = 0 \\ \eta = 1 & & u = 0 \\ \eta = 1/2 & & u = U_0 \end{aligned}$$

quindi

$$u(\eta) = 4U_0(\eta - \eta^2) \quad (4.4.49)$$

e

$$\psi_1 = \int_0^1 4U_0(\eta - \eta^2) d\eta = \frac{2}{3}U_0 \quad (4.4.50)$$

e lungo le sezioni di entrata e di uscita

$$\psi = \int_0^\eta 4U_0(\eta - \eta^2) d\eta = 4U_0 \left( \frac{\eta^2}{2} - \frac{\eta^3}{3} \right) \quad (4.4.51)$$

In corrispondenza a queste due sezioni si può anche dare la condizione equivalente sulla derivata

$$\frac{\partial \psi}{\partial y} = \bar{u}(y) \quad (4.4.52)$$

Per le condizioni sulla variabile  $\zeta$  alle pareti orizzontali si ha dalla (4.4.38), considerando che  $\frac{\partial v}{\partial x} = 0$

$$\zeta = -\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} \quad (4.4.53)$$

analogamente nelle pareti verticali,  $\frac{\partial u}{\partial y} = 0$  quindi

$$\zeta = \frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} \quad (4.4.54)$$

Per le sezioni di entrata e uscita se per la componente  $v$ , non ancora specificata si fa l'ipotesi  $\frac{\partial v}{\partial x} = 0$  si ha

$$\zeta = -\frac{\partial u}{\partial y} \quad (4.4.55)$$

con  $u = \bar{u}(y)$  nota in quelle sezioni dalla (4.4.49).

Se si assumono altre ipotesi, per esempio

$$v = 0 \quad (4.4.56)$$

o

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = 0 \quad \text{cioè} \quad \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial v}{\partial x} \right) = 0 \quad (4.4.57)$$

si ricavano le corrispondenti condizioni leggermente più complicate della (4.4.55) dalla

$$\zeta = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}$$

Specificate le condizioni al contorno in  $\zeta$  e  $\psi$  vediamo come esprimerle alle differenze finite. La (4.4.46), (4.4.51), (4.4.55) non presentano difficoltà.

Per esprimere la (4.4.53) consideriamo lo sviluppo in serie di Taylor, per la variabili  $\psi$  nei punti del reticolo discreto, individuati da  $i$  e  $j$

$$\psi(i, j+1) = \psi(i, j) + \left. \frac{\partial \psi}{\partial y} \right|_{ij} \Delta y + \frac{1}{2} \left. \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} \right|_{ij} \Delta y^2 + O(\Delta y^3)$$

da cui consideriamo che  $\left. \frac{\partial \psi}{\partial y} \right|_{ij} = u(i, j) = 0$  alla parete

$$\left. \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} \right|_{ij} = \frac{2(\psi(i, j+1) - \psi(i, j))}{\Delta y^2} + O(\Delta y) \quad (4.4.58)$$

e per la (4.4.53)

$$\zeta|_p = - \frac{2(\psi(i, j+1) - \psi(i, j))}{\Delta y^2} \quad (4.4.59)$$

con

$$\begin{aligned} \psi(i, j) &= 0 \quad \text{alla parete inferiore} \\ &= \psi_1 \quad \text{alla parete superiore} \end{aligned}$$

La (4.4.58) dà la derivata seconda in avanti con errore  $O(\Delta y)$  del primo ordine.

Se si vuole una espressione più accurata bisogna considerare

$$\psi(i, j+1) = \psi(i, j) + \left. \frac{\partial \psi}{\partial y} \right|_{ij} \Delta y + \frac{1}{2} \left. \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} \right|_{ij} \Delta y^2 + \frac{1}{6} \left. \frac{\partial^3 \psi}{\partial y^3} \right|_{ij} \Delta y^3 + O(\Delta y^4)$$

$$\psi(i, j+2) = \psi(i, j) + \left. \frac{\partial \psi}{\partial y} \right|_{ij} 2\Delta y + \frac{1}{2} \left. \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} \right|_{ij} 4\Delta y^2 + \frac{1}{6} \left. \frac{\partial^3 \psi}{\partial y^3} \right|_{ij} 8\Delta y^3 + O(\Delta y^4)$$

#### 4 Sistema completo di equazioni per la soluzione di campi fluidodinamici

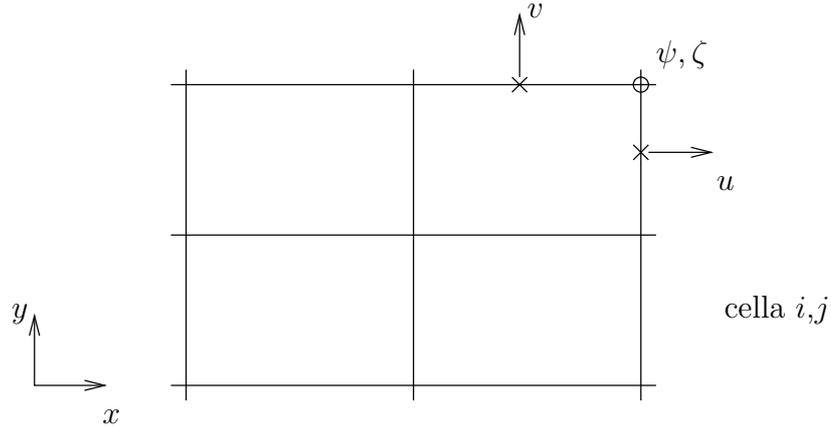
eliminando il termine in  $\Delta y^3$ , cioè sommando la seconda alla prima moltiplicata per  $-8$  si ottiene, considerando sempre  $\frac{\partial \psi}{\partial y} \Big|_{ij} = 0$

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} \Big|_{ij} = \frac{8\psi(i, j+1) - 7\psi(i, j) - \psi(i, j+2)}{2\Delta y^2} + O(\Delta y^2) \quad (4.4.60)$$

e quindi  $\zeta|_p = -\frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} \Big|_{ij}$  al secondo ordine.

In maniera del tutto analoga si possono ricavare le espressioni alle differenze finite per la (4.4.53) alla parete superiore, considerando gli sviluppi per  $\psi(i, j-1)$  e  $\psi(i, j-2)$  e per la (4.4.54) considerando gli sviluppi per  $\psi(i+1, j), \psi(i+2, j)$  o  $\psi(i-1, j), \psi(i-2, j)$  rispettivamente alle 2 pareti verticali.

Una scelta opportuna per la localizzazione delle variabili sul reticolo discreto è la seguente



cioè  $\psi$  e  $\zeta$  si definiscono ai nodi del reticolo di discretizzazione, mentre le componenti  $u, v$  della velocità si definiscono rispettivamente a metà del lato lungo  $x$  e lungo  $y$  della cella  $i, j$ . In tal modo è possibile esprimere nel modo più accurato le  $u, v$  in funzione di  $\psi$ , secondo le (4.4.33), con derivate centrate al secondo ordine

$$u(i, j) = \frac{\psi(i, j+1) - \psi(i, j)}{\Delta y} \quad (4.4.61)$$

$$v(i, j) = -\frac{\psi(i, j) - \psi(i-1, j)}{\Delta x} \quad (4.4.62)$$

, la  $\zeta$  in funzione di  $u, v$  mediante la

$$\zeta = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}$$

per analoghi motivi

$$\zeta_{ij} = \frac{v(i+1) - v(i,j)}{\Delta x} - \frac{u(i+1) - u(i,j)}{\Delta y} \quad (4.4.63)$$

, la  $\psi$  in funzione di  $u$  e  $v$  mediante la

$$d\psi = udy - vdz$$

per la quale la disposizione delle variabili indicata da la più accurata rappresentazione del flusso attraverso i lati della cella, lungo i quali può essere scelto il percorso di integrazione. Per le equazioni (4.4.38) e (4.4.43) si assumono derivate centrate nello spazio e in avanti nel tempo, per le considerazioni di accuratezza e stabilità viste in precedenza.

## Capitolo 5

# Flussi di Stokes $Re \rightarrow 0$ . Flussi viscosi

### 5.1 Equazioni di Stokes

Per campi con numeri di Reynolds molto piccoli, le equazioni di Navier Stokes si possono drasticamente semplificare, eliminando in particolare i termini convettivi non lineari che danno molte difficoltà per soluzioni sia analitiche che numeriche. Ricordando la definizione (4.3.5) del numero di Reynolds  $Re = \frac{U_0 L_0}{\nu_0}$  si possono avere valori di  $Re \rightarrow 0$  sia per basse velocità ( $U_0$ ) che per piccole dimensioni caratteristiche ( $L_0$ ) o alte viscosità cinematiche ( $\nu_0$ ).

Questa approssimazione può essere assunta per lo studio di molte applicazioni tecnologiche (sospensioni, lubrificazione, etc.).

Consideriamo le equazioni di conservazione di massa e di quantità di moto in forma adimensionale (4.3.3) e (4.3.8) e assumiamo

- flusso incompressibile
- assenza di fenomeni periodici ( $St = 1$ )
- forze di massa trascurabili ( $Fr \rightarrow \infty$ )

da cui si ottiene per le due equazioni

$$\frac{\partial u_i^*}{\partial x_i^*} = 0 \quad - \frac{1}{Ru} \frac{\partial p^*}{\partial x_i^*} + \frac{1}{Re} \frac{\partial^2 u_i^*}{\partial x_j^* \partial x_j^*} = 0 \quad (5.1.1)$$

Dalla seconda delle (5.1.1) si deduce che i numeri di  $Ru$  e  $Re$  devono essere dello stesso ordine di grandezze e pertanto  $Ru = \frac{\rho_0 U_0^2}{p_0} \rightarrow 0$ . Fatte

le semplificazioni, le equazioni (5.1.1) si possono riscrivere in forma dimensionale più comoda per la discussione successiva

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_i} = 0 \quad \mu \frac{\partial^2 u_i^*}{\partial x_j^* \partial x_j^*} - \frac{\partial p}{\partial x_i} = 0 \quad (5.1.2)$$

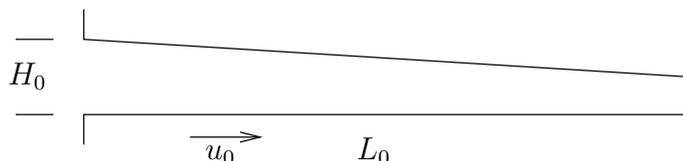
che sono note come equazioni di Stokes.

Come si vede, mancano, rispetto alle equazioni di Navier Stokes, i termini non lineari, mentre sono presenti i termini (viscosi) di ordine massimo dell'equazione. Le condizioni al contorno rimangono pertanto immutate. Essendo le equazioni lineari, si potranno adottare, per campi e geometrie regolari, metodi di soluzione analitica.

## 5.2 Lubrificazione

Una importante applicazione delle equazioni di Stokes riguarda i canali (meati) di lubrificazione che, come noto, hanno dimensione trasversale molto piccola rispetto alla dimensione longitudinale (lungo il flusso). E' opportuno in questo caso introdurre due lunghezze caratteristiche:  $H_0$  ed  $L_0$  (come indicato in figura) e introdurre il parametro adimensionale legato alla geometria

$$A = \frac{H_0}{L_0} \rightarrow 0 \quad (5.2.1)$$



nelle equazioni di Stokes in forma adimensionale con

$$x^* = \frac{x}{L_0} \quad \text{e} \quad y^* = \frac{y L_0}{H_0 L_0} = y^* \frac{1}{A} \quad (5.2.2)$$

Si ottiene per le componenti (caso 2-D) dell'equazione di conservazione della quantità di moto

$$\frac{1}{\text{Re}} \left( \frac{\partial^2 u^*}{\partial x^{*2}} + \frac{1}{A^2} \frac{\partial^2 u^*}{\partial y'^{*2}} \right) - \frac{1}{\text{Ru}} \frac{\partial p}{\partial x^*} = 0 \quad (5.2.3)$$

$$\frac{1}{\text{Re}} \left( \frac{\partial^2 v^*}{\partial x^{*2}} + \frac{1}{A^2} \frac{\partial^2 v^*}{\partial y'^{*2}} \right) - \frac{1}{\text{Ru}} \frac{1}{A} \frac{\partial p}{\partial y'^*} = 0$$

e per l'equazione di conservazione di massa

$$\frac{\partial u^*}{\partial x^*} + \frac{1}{A} \frac{\partial v^*}{\partial y'^*} = 0 \quad (5.2.4)$$

In quest'ultima equazione i due termini, per equilibrarsi, devono essere dello stesso ordine di grandezza, per cui è conveniente introdurre una velocità  $v'^* = \frac{v^*}{A}$  di ordine unitario. Per  $A \rightarrow 0$  si possono trascurare i termini di derivata seconda in  $x$ , mentre per l'equilibrio della prima delle (5.2.3) deve essere ora  $Ru$  dello stesso ordine di grandezza di  $A^2 Re$ . Si deduce, dalla seconda delle (5.2.3), sostituendo il valore di  $Ru$ , che

$$\frac{\partial p^*}{\partial y^*} = 0(A^2) \approx 0 \quad (5.2.5)$$

e quindi è trascurabile, per  $A \rightarrow 0$ .

Si ha pertanto  $p = \hat{p}(x)$ . Se si assume proprio

$$Ru = A^2 Re \quad \text{cioè} \quad p_0 = \mu \frac{U_0 L_0}{H_0^2} \quad (5.2.6)$$

la prima delle (5.2.3) si può scrivere, considerando le variabili adimensionalizzate come sopra indicato

$$\frac{dp'}{dx'} = \frac{\partial^2 u'}{\partial y'^2} \quad (5.2.7)$$

che è l'equazione adottata nella teoria classica della lubrificazione, insieme con le condizioni al contorno

$$\begin{aligned} p' &= p_e && \text{per } x' = 0 \text{ e } x' = 1 \\ u' &= 0 && \text{per } y' = h(x)' \\ u' &= 1 && \text{per } y = 0 \end{aligned} \quad (5.2.8)$$

dove  $h(x)$  è lo spessore del meato variabile in  $x$  adimensionalizzato rispetto ad  $H_0$ . Per la (5.2.7) con le (5.2.8) si può ottenere la soluzione analitica per la velocità

$$u = \left(1 - \frac{y}{h(x)}\right) - \frac{1}{2} \frac{dp}{dx} (h(x) - y) \quad (5.2.9)$$

e, introducendo la portata

$$Q = \int_0^{h(x)} u dy = \frac{h(x)}{2} - \frac{h^3(x)}{12} \frac{dp}{dx} \quad (5.2.10)$$

per il gradiente di pressione

$$\frac{dp}{dx} = \frac{12}{h(x)^3} \left( \frac{h(x)}{2} - Q \right) \quad (5.2.11)$$

Da questa espressione si deduce facilmente che si può avere una variazione di pressione lungo il meato solo se  $h$  non è costante. Scopo del campo fluidodinamico di lubrificazione è infatti quello di ottenere una forza di sostentamento, che si può esprimere come

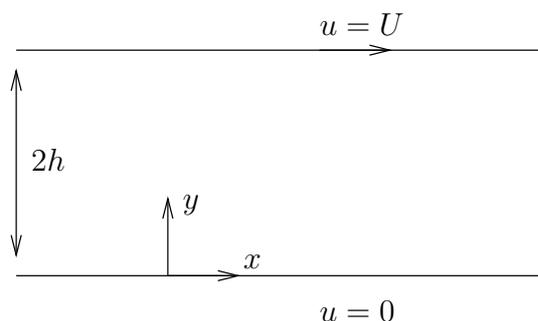
$$N = \int_0^1 p'(x') dx' \quad (5.2.12)$$

ed è diversa da zero per  $h = h(x)$  e positiva per  $h_1 > h_2$ , dove 1 e 2 indicano la sezione di entrata e di uscita rispettivamente.

### 5.3 Flussi di Poiseuille e di Couette

Si possono ottenere soluzioni in forma chiusa anche per le equazioni di Navier Stokes, con valori di Reynolds piccoli ma non necessariamente tendenti a zero, in geometrie per le quali i termini non lineari sono nulli. In tali condizioni l'equazione di conservazione della quantità di moto è formalmente la stessa che per i flussi di Stokes, in quanto mette in equilibrio forze viscosi con forze di pressione. Qui i termini inerziali sono identicamente nulli per effetto della geometria del campo, mentre per i flussi di Stokes sono trascurabili in quanto  $Re \rightarrow 0$ . In questi flussi i termini viscosi sono importanti in tutto il campo e non solo, come si vedrà in seguito, nelle zone, dette di strato limite, confinanti con pareti solide.

Consideriamo il flusso bidimensionale incomprimibile stazionario tra due lastre piane e parallele infinitamente estese in direzione  $x$ . La velocità delle piastre è imposta e può essere sia nulla che avere valore costante  $u$



In direzione  $y$  la distanza fra le due lastre è  $2h$ . Data la lunghezza delle lastre si considera un flusso pienamente sviluppato in direzione  $x$  per il quale si ha

$$\begin{aligned} u &= u(x) \\ v &= 0 \end{aligned}$$

Infatti per la conservazione della massa se  $x \frac{\partial u}{\partial x} = 0$  anche  $\frac{\partial v}{\partial y} = 0$  e dato che  $v = 0$  alle pareti, la  $v$  sarà nulla in tutto il campo.

Le equazioni di Navier Stokes diventano, per  $Ru = 1$ :

$$\begin{aligned} 0 &= -\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{1}{Re} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \\ 0 &= -\frac{\partial p}{\partial y} \end{aligned}$$

da cui  $p = \hat{p}(x)$ . Nella prima equazione il primo termine a secondo membro è solo funzione di  $x$  e il secondo è solo funzione di  $y$ , pertanto perché vi sia equilibrio in tutto il campo devono essere ambedue uguali e costanti. Si ha quindi in tali flussi

$$\frac{dp}{dx} = \text{cost}$$

Integrando la prima equazione in forma dimensionale

$$\mu u = \frac{dp}{dx} \frac{y^2}{2} + Ay + B$$

integrando la condizione al contorno  $u = 0$  per  $y = 0$  si ha

$$B = 0$$

e la condizione  $u = U$  per  $y = 2h$  si ottiene

$$A = -\frac{dp}{dx} h + \frac{\mu U}{2h}$$

per cui

$$u = \frac{Uy}{2h} - \frac{y}{\mu} \frac{dp}{dx} - \left( h - \frac{y}{2} \right) \quad (5.3.1)$$

La portata in volume per unità di profondità è data da:

$$Q = \int_0^{2h} u dy = Uh \left( 1 - \frac{2h^2}{3\mu U} \frac{dp}{dx} \right) \quad (5.3.2)$$

con valore medio della velocità nella sezione

$$\bar{u} = \frac{Q}{2h} = \frac{U}{2} \left( 1 - \frac{2h^2}{3\mu U} \frac{dp}{dx} \right) \quad (5.3.3)$$

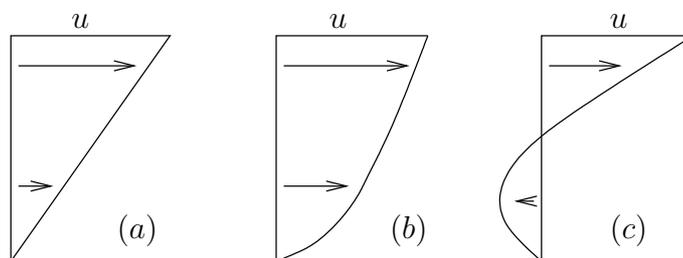
Se  $\frac{dp}{dx} = 0$ , si ottiene il flusso di Couette con profilo di velocità lineare (fig. a)

$$u = \frac{U}{2h}y \quad (5.3.4)$$

e tensione di taglio costante

$$\tau = \mu \frac{du}{dy} = \frac{\mu U}{2h} \quad (5.3.5)$$

Se il gradiente di pressione non è nullo



si ha per  $\frac{dp}{dx} < 0$  (fig.b) un profilo di velocità convesso e per  $\frac{dp}{dx} > 0$  (fig.c) un profilo concavo.

Se anche alla parete superiore si ha la condizione  $u = 0$  il profilo di velocità diviene parabolico (fig.d)

$$u = -\frac{y}{\mu} \frac{dp}{dx} \left( h - \frac{y}{2} \right) \quad (5.3.6)$$

con  $\frac{dp}{dx}$  negativo per mantenere il flusso in  $x$  positivo e la tensione di taglio

$$\tau = \mu \frac{du}{dy} = -(h - y) \frac{dp}{dx}$$

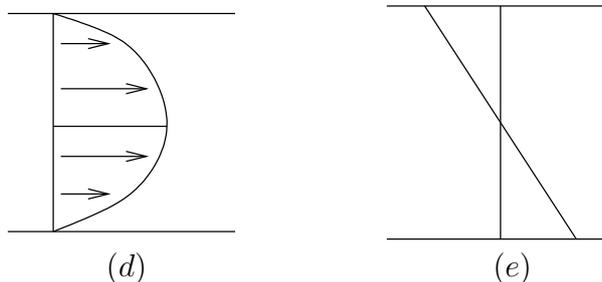
per  $y = 0$

$$\tau_w = -h \frac{dp}{dx} \quad (5.3.7)$$

da cui

$$\tau = \tau_w \left( 1 - \frac{y}{h} \right) \quad (5.3.8)$$

quindi la tensione di taglio ha un andamento lineare tra le due lastre (fig.e)



Se si assume l'origine sull'asse medio del canale si ottiene l'espressione più semplice  $u = -\frac{dp}{dx} \frac{(h^2 - y^2)}{2\mu}$ .

In modo del tutto analogo si può ricavare il flusso di Poiseuille in un tubo a sezione circolare. Adottando ora coordinate cilindriche  $(r, \vartheta, x)$  con origine sull'asse del cilindro si ha in maniera del tutto analoga:

$$0 = -\frac{dp}{dx} + \frac{\mu}{r} \frac{d}{dr} \left( r \frac{du}{dr} \right)$$

da cui  $p = \hat{p}(x)$ . Analogamente al caso piano si ottiene che deve essere necessariamente  $\frac{dp}{dx} = \text{cost.}$  Integrando due volte la prima equazione si ottiene:

$$u = \frac{r^2}{4\mu} \frac{dp}{dx} + A \ln r + B \quad (5.3.9)$$

Dovendo essere  $u$  limitato per  $r = 0$  (in corrispondenza dell'asse del cilindro) deve necessariamente essere  $A = 0$ .

Per la condizione al contorno  $u = 0$  per  $r = a$

$$B = -\frac{a^2}{4\mu} \frac{dp}{dx}$$

quindi la velocità assiale assume il profilo parabolico-

$$u = \frac{r^2 - a^2}{4\mu} \frac{dp}{dx} \quad (5.3.10)$$

e la tensione di taglio assume un andamento lineare in  $r$ :

$$\tau = \mu \frac{du}{dr} = \frac{r}{2} \frac{dp}{dx} \quad (5.3.11)$$

con valor massimo alla parete

$$\tau_w = \frac{a}{2} \frac{dp}{dx} \quad (5.3.12)$$

la portata in volume e data da

$$Q = \int_0^a u 2\pi r dr = -\frac{\pi a^4}{8\mu} \frac{dp}{dx} \quad (5.3.13)$$

e la velocità media sulla sezione

$$\bar{u} = \frac{Q}{\pi a^2} = -\frac{a^2}{8\mu} \frac{dp}{dx} \quad (5.3.14)$$

## 5.4 Lastra piana con partenza impulsiva

Analizziamo un altro problema per il quale si può ottenere una soluzione esatta, con la velocità che dipende non solo da una coordinata spaziale, ma anche dal tempo. Si consideri una lastra piana in  $y = 0$  con il fluido incomprimibile inizialmente fermo, nel semispazio superiore  $y > 0$  (primo problema di Stokes).

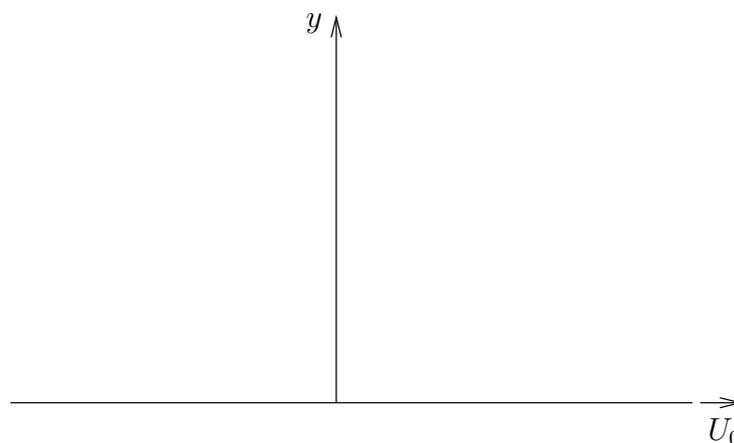
Per  $t = 0$  la lastra viene impulsivamente messa in moto con velocità  $U_0$ . Il flusso non ha variazioni in  $x$  e quindi dalla equazione di conservazione di massa si ha  $\frac{dv}{dy} = 0$  ed essendo  $v = 0$  alla parete, deve necessariamente essere  $v = 0$  ovunque. Dalla equazione di conservazione della quantità di moto si ottiene

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \quad (5.4.1)$$

dove

$$u = u(y, t) \quad (5.4.2)$$

rappresenta la componente della velocità del fluido parallela sia alla parete che alla direzione della velocità con cui la parete si sposta.



Le condizioni iniziali per la (5.4.1) sono

$$u(y, 0) = 0 \quad (5.4.3)$$

mentre la condizione al contorno

$$u(0, t) = U_0 \quad (5.4.4)$$

esprime la condizione di adesione del fluido alla parete. È poi necessaria una condizione per  $y \rightarrow \infty$  che esprime il fatto che l'effetto del moto della parete viene risentito sempre meno allontanandosi dalla parete.

$$\lim_{y \rightarrow \infty} u(y, t) = 0 \quad (5.4.5)$$

I parametri che definiscono il problema (5.4.1), (5.4.3), (5.4.4), (5.4.5) sono

$$y, t, U_0, \nu. \quad (5.4.6)$$

Come conseguenza la soluzione sarà del tipo

$$u = U(y, t; U_0, \nu) \quad (5.4.7)$$

cioè sarà funzione di  $y$  e  $t$  con la dipendenza parametrica de  $U_0$  e  $\nu$ .

Per la linearità del problema è evidente che deve essere

$$u = U(y, t; U_0, \nu) = U_0 \tilde{u}(y, t, \nu) \quad (5.4.8)$$

in cui la funzione  $\tilde{u}$  soddisfa le stesse equazioni con condizioni al contorno

$$\tilde{u}(0, t) = 1 \quad (5.4.9)$$

La soluzione (5.4.8) può essere riscritta nella forma

$$\tilde{u} = \frac{u}{U_0} = \tilde{u} \left( \frac{y}{2\sqrt{\nu t}}; \nu, t \right) \quad (5.4.10)$$

in cui il fattore  $1/2$  è di pura convenienza.

Nella (5.4.10) si è espressa la  $u$  rendendola adimensionale con  $U_0$  mentre  $y$  viene adimensionalizzato con  $\sqrt{\nu t}$ . La (5.4.10) esprime il fatto che il valore numerico di  $\tilde{u}$  viene a dipendere dal valore numerico di  $\frac{y}{2\sqrt{\nu t}}$  e da quello di  $\nu$  e  $t$ . Ora i valori numerici delle quantità adimensionali  $\tilde{u}$  e di  $\eta = \frac{y}{2\sqrt{\nu t}}$  sono quantità assolute, cioè indipendenti dal sistema di unità di misura adottato per esprimere lunghezze, tempi e velocità. Sono cioè quantità invarianti rispetto a scelte arbitrarie effettuate dall'osservatore che decide questa unità di misura adottata. I valori numerici di  $\nu$  e  $t$  dipendo invece dal sistema di unità di misura.

È evidente che essendo possibile variare arbitrariamente i valori numerici di  $\nu$  e  $t$  semplicemente variando le unità di misura di lunghezza e tempo dovrà essere:

$$\tilde{u} = \tilde{u}(\eta). \quad (5.4.11)$$

La (5.4.11) esprime il fatto che la soluzione del problema è di forma simile, dipende cioè da  $y$  e  $t$  solo tramite la variabile di similitudine  $\eta$ . In altre parole il valore di  $\tilde{u}$  è lo stesso sulla curva nel piano  $(y,t)$  che soddisfa l'equazione

$$y = \eta 2\sqrt{\nu t} \quad (5.4.12)$$

Sostituendo la struttura generale (5.4.11) nell'equazione differenziali alle derivate parziali (5.4.1) questa viene ricondotta ad un'equazione differenziale ordinaria.

Infatti

$$\frac{\partial \tilde{u}}{\partial t} = \frac{d\tilde{u}}{d\eta} \frac{\partial \eta}{\partial t} = \frac{d\tilde{u}}{d\eta} \left( -\frac{1}{2} \frac{\nu y}{2(\nu t)^{3/2}} \right) = -\frac{1}{2} \eta \frac{d\tilde{u}}{d\eta} \frac{1}{t} \quad (5.4.13a)$$

$$\frac{\partial \tilde{u}}{\partial y} = \frac{d\tilde{u}}{d\eta} \frac{\partial \eta}{\partial y} = \frac{d\tilde{u}}{d\eta} \frac{1}{2\sqrt{\nu t}} \quad (5.4.13b)$$

$$\frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial y^2} = \frac{d^2 \tilde{u}}{d\eta^2} \left( \frac{1}{2\sqrt{\nu t}} \right)^2 = \frac{d^2 \tilde{u}}{d\eta^2} \frac{1}{4\nu t} \quad (5.4.13c)$$

Sostituendo le (5.4.13) in (5.4.1) si ha

$$-2\eta \frac{d\tilde{u}}{d\eta} = \frac{d^2 \tilde{u}}{d\eta^2} \quad (5.4.14)$$

Per le condizioni iniziali osserviamo che si ha

$$\lim_{\substack{t \rightarrow 0 \\ y > 0}} \eta = +\infty \quad (5.4.15)$$

da cui otteniamo

$$\tilde{u}(y, 0) = \lim_{\substack{t \rightarrow 0 \\ y > 0}} \tilde{u}(\eta) = \lim_{\eta \rightarrow \infty} \tilde{u}(\eta) = 0 \quad (5.4.16)$$

Per le condizioni al contorno infine

$$\tilde{u}(0, t) = \lim_{\eta \rightarrow 0} \tilde{u}(\eta) = \tilde{u}(0) = 1 \quad (5.4.17)$$

$$\lim_{y \rightarrow \infty} \tilde{u}(y, t) = \lim_{\eta \rightarrow \infty} \tilde{u}(\eta) = 0 \quad (5.4.18)$$

La coincidenza tra la (5.4.18) e la (5.4.16) non deve stupire : esprime proprio il fatto che l'effetto del moto della parete non può risentirsi all'infinito, cioè per  $y \rightarrow \infty$  ci troviamo il valore che era assegnato a  $t = 0$ .

Il problema (5.4.14) completato con le condizioni

$$\tilde{u}(0) = 1 \quad (5.4.19)$$

$$\lim_{\eta \rightarrow \infty} \tilde{u}(\eta) = 0 \quad (5.4.20)$$

può essere risolto in forma analitica.

Poniamo

$$\tilde{\zeta} = -\frac{d\tilde{u}}{d\eta} \quad (5.4.21)$$

in modo da ottenere

$$-2\eta\tilde{\zeta} = \frac{d\tilde{\zeta}}{d\eta} \quad (5.4.22)$$

da cui

$$\tilde{\zeta}(\eta) = ae^{-\eta^2}. \quad (5.4.23)$$

Quindi la (5.4.21) si ha

$$\tilde{u}(\eta) = -a \int_0^\eta e^{-\eta^2} d\eta + b \quad (5.4.24)$$

Le costanti  $a$  e  $b$  sono allora determinate dalle condizioni al contorno (5.4.19) e (5.4.20):

$$\tilde{u}(0) = 1 = b \quad (5.4.25)$$

$$\lim_{\eta \rightarrow \infty} \tilde{u}(\eta) = 0 = -a \int_0^\infty e^{-\eta^2} d\eta + 1 \quad (5.4.26)$$

da cui

$$a = \frac{1}{\int_0^\infty e^{-\eta^2} d\eta} = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \quad (5.4.27)$$

In definitiva

$$\tilde{u}(\eta) = 1 - \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^\eta e^{-\eta^2} d\eta = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_\eta^\infty e^{-\eta^2} d\eta$$

La funzione degli errori

$$\operatorname{erf}(\eta) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_{\eta}^{\infty} e^{-\tilde{\eta}^2} d\tilde{\eta} \quad (5.4.28)$$

consente di esprimere la (5.4.27) come

$$\tilde{u}(\eta) = 1 - \operatorname{erf}(\eta) = \operatorname{erfc}(\eta) \quad (5.4.29)$$

in cui  $\operatorname{erfc}(\eta) = 1 - \operatorname{erf}(\eta)$ .

La soluzione del problema in forma dimensionale è dunque:

$$u(y, t) = U_0 \left\{ 1 - \operatorname{erf} \left( \frac{y}{2\sqrt{\nu t}} \right) \right\} \quad (5.4.30)$$

È interessante studiare il comportamento della vorticità di questo flusso. L'unica componente non nulla della vorticità è quella ortogonale al piano del moto

$$\zeta = \zeta_3 = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial u}{\partial y}. \quad (5.4.31)$$

Per la (5.4.30) dunque

$$\zeta = -U_0 \frac{d\tilde{u}}{d\eta} \frac{\partial \eta}{\partial y} = U_0 \tilde{\zeta} \frac{1}{2\sqrt{\nu t}} \quad (5.4.32)$$

in cui si è usata la (5.4.21) e la (5.4.13b). Tenendo conto di (5.4.29) e di (5.4.28) si ha

$$\begin{aligned} \zeta &= \frac{U_0}{2\sqrt{\nu t}} \frac{d\operatorname{erf}(\eta)}{d\eta} = \frac{2U_0}{\sqrt{4\pi\nu t}} e^{-\eta^2} = \frac{2U_0}{\sqrt{4\pi\nu t}} e^{-\frac{y^2}{4\nu t}} = \\ &= \frac{2U_0}{\sqrt{2\pi\sigma(t)}} e^{-\frac{y^2}{2\sigma^2(t)}} \end{aligned} \quad (5.4.33)$$

in cui

$$\sigma^2(t) = 2\nu t \quad (5.4.34)$$

In definitiva, la distribuzione di velocità ad ogni istante è una Gaussiana di varianza  $\sigma = \sqrt{2\nu t}$

Poichè la Gaussiana ha integrale unitario si ha:

$$\int_0^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} e^{-\frac{y^2}{2\sigma^2}} dy = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} e^{-\frac{y^2}{2\sigma^2}} dy = \frac{1}{2} \quad (5.4.35)$$

Ne segue che

$$\int_0^\infty \zeta(y, t) dy = U_0 \quad (5.4.36)$$

In altre parole, l'integrale della vorticità è costante nel tempo, ovvero tutta la vorticità è generata all'istante  $t = 0$ , quando la lastra viene messa in movimento in modo impulsivo.

Al limite per  $t \rightarrow 0$  la varianza della Gaussiana tende a zero, quindi, inizialmente tutta la vorticità è concentrata in prossimità della lastra in uno strato di ordine di grandezza  $\sigma$ . Al crescere di  $t$  la varianza cresce, il massimo della Gaussiana alla parete diminuisce e uno strato crescente del fluido viene invaso dalla vorticità che sta diffondendo dalla parete. In termini di velocità questa corrisponde al fatto che uno strato crescente di fluido è messo in movimento con velocità  $u$  data dalla (5.4.30).

Per la (5.4.33) la vorticità alla parete

$$\zeta(0, t) = \frac{U_0}{\sqrt{\pi\nu t}} \quad (5.4.37)$$

che tende evidentemente all'infinito per  $t \rightarrow 0$  per poi decrescere a zero al crescere di  $t$  con  $1/\sqrt{t}$ .

La tensione tangenziale esercitata sul fluido dalla parete vale

$$t_x = \mu \frac{\partial u}{\partial y} = \mu \frac{U_0}{\sqrt{\pi\nu t}} \quad (5.4.38)$$

Infatti il tensore delle tensioni ha come unica componente non nulla

$$T_{12} = 2\mu e_{12} = 2\mu \frac{1}{2} \frac{\partial u}{\partial y} = \mu \frac{\partial u}{\partial y} \quad (5.4.39)$$

Tenendo conto che la normale uscente al dominio del fluido è

$$n = (0, -1, 0) \quad (5.4.40)$$

si ha che la componente  $t_1$  del vettore tensione è

$$t_1 = -T_{12} = -\mu \frac{\partial u}{\partial y} = \mu \zeta \quad (5.4.41)$$

che per la (5.4.37) coincide con la (5.4.38).

L'azione sulla parete è:

$$\tau_w = -t_x = -\mu \frac{U_0}{\sqrt{\pi\nu t}} \quad (5.4.42)$$

L'impulso per unità di superficie comunicato al fluido nell'intervallo di tempo  $(0, \infty)$  è

$$I = \int_0^{\infty} t_x dt = \frac{\mu U_0}{\sqrt{\pi \nu t}} \int_0^{\infty} \frac{dt}{\sqrt{t}} = \frac{2\mu U_0}{\sqrt{\pi \nu t}} 2\sqrt{t} \Big|_0^{\infty} \rightarrow \infty \quad (5.4.43)$$

## 5.5 Formulazione in equazioni integrali di contorno

Introducendo la funzione di Green, si può ottenere una rappresentazione integrale della soluzione molto utile in particolare per equazioni lineari, quali le equazioni di Stokes (5.1.2) o le equazioni viste nel paragrafo precedente in cui i termini non lineari si annullano identicamente. Si considera dapprima un'equazione scalare più semplice (Poisson)

$$\nabla^2 f = a \quad (5.5.1)$$

per meglio comprendere il metodo nel suo insieme. Introduciamo la funzione  $g$  e definiamo il prodotto interno con la (5.5.1)

$$\int_{\chi} g \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_j} dV = \int_{\chi} g a dv \quad (5.5.2)$$

Integrando per parti il primo membro e associando i termini con la stessa struttura

$$\int_{\chi} \left( g \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_j} - f \frac{\partial^2 g}{\partial x_j \partial x_j} \right) dv = \int_{\chi} \frac{\partial}{\partial x_j} \left( g \frac{\partial f}{\partial x_j} - f \frac{\partial g}{\partial x_j} \right) dv \quad (5.5.3)$$

Applicando Green-Gauss al secondo integrale si ottiene

$$\int_{\chi} (g \nabla^2 f - f \nabla^2 g) dv = \int_{\partial \chi} \left( g \frac{\partial f}{\partial n} - f \frac{\partial g}{\partial n} \right) dS \quad (5.5.4)$$

Indicando in generale con  $L$  l'operatore lineare applicato ad  $f$ , e con  $\tilde{L}$  l'operatore lineare aggiunto, che risulta dalla integrazione per parti e che viene applicato a  $g$ , la (5.5.4) si può esprimere

$$\int_{\chi} (gLf - f\tilde{L}g) dV = \int_{\partial \chi} P(f \cdot g) \cdot ndS \quad (5.5.5)$$

In particolare per l'equazione (5.5.1) in esame risulta

$$L = \tilde{L} = \nabla^2 \quad (5.5.6)$$

cioè  $\tilde{L}$  è in questo caso auto-aggiunto mentre in generale potrà essere  $L \neq \tilde{L}$ .

Se ora si specifica la funzione  $g$  in modo tale che

$$\tilde{L}g = \delta(x - x^*) \quad (5.5.7)$$

con  $g = 0$  per  $x \rightarrow \infty$  con  $\delta(x - x^*)$  delta di Dirac definito dalla

$$\int_{\chi} \delta(x - x^*) f(x) dV = f(x^*) \quad (5.5.8)$$

si ottiene la soluzione fondamentale della equazione o funzione di Green di spazio libero (per la condizione al contorno di valore nullo per  $x \rightarrow \infty$ ).

Combinando la (5.5.7), (5.5.8) e la (5.5.2) con la (5.5.5) si ottiene

$$\int_{\chi} agdV - f(x^*) = \int_{\partial\chi} \left( g \frac{\partial f}{\partial n} - f \frac{\partial g}{\partial n} \right) dS \quad (5.5.9)$$

che è la formula di Green di rappresentazione integrale della soluzione. La (5.5.9) esprime infatti il valore di  $f$  in  $x^*$  in funzione di un integrale di volume di quantità note, e di un integrale sul contorno in cui appaiono la funzione  $f$  incognita e la sua derivata normale.

Se ci spostiamo con il punto  $x^*$  verso il contorno del campo, si ha che l'integrazione (5.5.8) viene estesa solo a mezzo angolo solido e ne risulta, corrispondentemente, un valore di  $\frac{1}{2}f(x^*)$  invece che  $f(x^*)$ .

Sul contorno quindi la (5.5.9) si esprime

$$\frac{1}{2}f(x^*) = \int_{\chi} agdV - \int_{\partial\chi} \left( g \frac{\partial f}{\partial n} - f \frac{\partial g}{\partial n} \right) dS \quad (5.5.10)$$

che è un'equazione integrale di Fredholm di prima o seconda specie a seconda che sia assegnato sul contorno  $f$  o  $\frac{\partial f}{\partial n}$  rispettivamente.

In generale le condizioni al contorno possono assegnare per il problema in esame la funzione o la sua derivata normale sul contorno, o in parte l'una e in parte l'altra.

Si immagini ad esempio un problema di conduzione interna con temperatura e flusso di calore assegnati su porzioni diverse dal contorno:

$$\begin{aligned} \nabla^2 \vartheta = Q & \quad \text{con } \vartheta = \bar{\vartheta} \quad \text{su } \partial_1 \chi & (5.5.11) \\ & \quad \frac{\partial \vartheta}{\partial n} = \bar{q} \quad \text{su } \partial_2 \chi \end{aligned}$$

Nota la funzione di Green  $g$ , soluzione della (5.5.7), è possibile ottenere dalla (5.5.10) la  $f$  e la  $\frac{\partial f}{\partial n}$  sul contorno, e quindi, tramite la (5.5.9) la  $f$  in tutto il campo.

## 5.6 Funzione di Green

Per quanto detto nel paragrafo precedente, per calcolare la  $f$  in tutto il campo è necessario ricavare la funzione di Green, che nel caso in esame deve soddisfare la

$$\nabla^2 g = \delta(x - x^*) \quad (5.6.1)$$

con

$$g = 0 \quad \text{per } x \rightarrow \infty \quad (5.6.2)$$

Il laplaciano  $\nabla^2$  è un operatore invariante per una rotazione di coordinate, la sorgente  $\delta(x - x^*)$  è puntuale, pertanto si può ipotizzare che la soluzione sia dipendente solo dalla distanza  $r$  dall'origine dove si considera localizzato il  $\delta(x - x^*)$ . Esprimendo la (5.6.1) in coordinate polari e considerando solamente la parte dell'equazione in  $r$  si ha, per il caso 3-D e per  $r > 0$

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial g}{\partial r} \right) = 0 \quad (5.6.3)$$

che ha per soluzione, tenendo conto della (5.6.2)

$$g = -\frac{A}{r} \quad (5.6.4)$$

per trovare il valore della costante  $A$ , integriamo la (5.6.1) su una piccola sfera con centro nell'origine

$$\int_{\chi} \nabla^2 g dV = \int_{\chi} \delta dV = 1 \quad (5.6.5)$$

e applicando Green-Gauss al primo integrale

$$\int_{\chi} \nabla^2 g dV = \int_{\partial\chi} \frac{\partial g}{\partial n} dS \quad (5.6.6)$$

che per la piccola sfera di raggio  $\varepsilon$  vale

$$\int_{\partial\chi} \frac{\partial g}{\partial n} dS = \int_{\partial\chi} \frac{A}{r^2} \Big|_{\varepsilon} dS = \frac{A}{\varepsilon^2} \int_{\partial\chi} d\sigma = \frac{A}{\varepsilon^2} 4\pi\varepsilon^2 \quad (5.6.7)$$

che sostituita in (5.6.5) dà

$$A = \frac{1}{4\pi} \quad (5.6.8)$$

e quindi per la (5.6.4)

$$g = -\frac{1}{4\pi r} \quad (5.6.9)$$

con  $r = |x - x^*|$ .

Nel caso 2D, l'equazione risulta

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial g}{\partial r} \right) = 0 \quad (5.6.10)$$

e seguendo lo stesso procedimento si ottiene

$$g = \frac{1}{2\pi} \ln r + c \quad (5.6.11)$$

la costante arbitraria si ricava imponendo che  $g$  sia nullo per  $r = R$  molto grande e pertanto

$$g = \frac{1}{2\pi} \ln \frac{r}{R} \quad (5.6.12)$$

Le espressioni della funzione di Green e della derivata normale, note in forma analitica possono essere inserite nella rappresentazione integrale (5.5.10).

## 5.7 Metodo della funzione di Green

Le equazioni (5.5.9) e (5.5.10) che danno una rappresentazione integrale della soluzione in un punto  $x^*$  interno o sul contorno, possono essere risolte numericamente con un procedimento di discretizzazione.

Supponiamo di approssimare il contorno con  $N$  elementi rettilinei ed il dominio interno con  $M$  celle, ad esempio triangolari. Si può inoltre assumere che la variabile  $f$  abbia un valore costante per ogni elemento di contorno o cella interna. Sotto tali ipotesi l'equazione integrale si può scrivere in forma discretizzata

$$\begin{aligned} Cf(x^*) &= \sum_{i=1}^N f(x_i) \int_{\sigma_i} \frac{\partial g}{\partial n}(x_i, x^*) dS - \sum_{i=1}^N \frac{\partial f}{\partial n}(x_i) \int_{\sigma_i} g(x_i, x^*) dS \\ &= + \sum_{j=1}^M a(x_i) \int_{V_j} g(x_j, x^*) dV \end{aligned} \quad (5.7.1)$$

con  $C = 1$  o  $\frac{1}{2}$  per  $x^*$  all'interno o sul contorno del dominio rispettivamente.

Si noti che gli integrali di  $\frac{\partial g}{\partial n}$  e  $g$  presenti nella (5.7.1) possono essere calcolati una volta nota l'espressione analitica della funzione di Green (vedi § 5.4).

Introduciamo pertanto, per semplicità, le seguenti funzioni note

$$\begin{aligned}
H(i) &= \int_{\sigma_i} \frac{\partial g}{\partial n}(x_i, x^*) dS \\
G(i) &= \int_{\sigma_i} g(x_i, x^*) dS \\
B(j) &= \int_{V_j} g(x_j, x^*) dS
\end{aligned} \tag{5.7.2}$$

che sostituite in (5.7.1) portano a

$$Cf(x^*) = \sum_{i=1}^N f(x_i)H(i) - \sum_{i=1}^N \frac{\partial f}{\partial n}(x_i)G(i) + \sum_{j=1}^M a(x_i)B(j) \tag{5.7.3}$$

Se consideriamo punti  $x^*$  del contorno si ottiene un sistema di  $N$  equazioni in  $N$  incognite, considerando nota una delle due incognite  $f$  o  $\frac{\partial f}{\partial n}$  presenti in (5.7.3), assegnata come condizione al contorno. Il sistema (5.7.3) si può scrivere in forma vettoriale

$$\left(\frac{1}{2}I - H\right)f + G\frac{\partial f}{\partial n} = b \tag{5.7.4}$$

con  $I$  matrice identità,  $H$  e  $G$  matrici dei coefficienti e  $b$  vettore dei termini noti. Il sistema (5.7.4) si può mettere anche nella forma ancora più semplice

$$Ax = d \tag{5.7.5}$$

dove  $x$  è il vettore delle grandezze incognite al contorno (siano esse  $f$  o  $\frac{\partial f}{\partial n}$ ),  $A$  è la matrice dei coefficienti e  $d$  il nuovo vettore dei termini noti, contenente anche le quantità assegnate mediante le condizioni al contorno. Il calcolo delle incognite  $x$  si riduce pertanto all'inversione della matrice  $A$  che risulta essere piena anche se di dimensione ridotta ( $N \times N$ ). Note tutte le quantità  $f$  e  $\frac{\partial f}{\partial n}$  al contorno, si può calcolare in modo esplicito la  $f$  all'interno del dominio mediante la (5.7.3) con  $C = 1$ , che assume quindi la forma

$$If = Hf|_c - G\frac{\partial f}{\partial n}|_c + b \tag{5.7.6}$$

dove  $f|_c$  e  $\frac{\partial f}{\partial n}|_c$  sono i valori al contorno precedentemente calcolati. Questo metodo, illustrato per l'equazione scalare (5.3.1), può essere esteso anche a equazioni vettoriali come l'equazione di Stokes.

## Bibliografia

1. Batchelor, G.K., *An Introduction to Fluid Dynamics*, Cambridge University Press, 1967.
2. Acheson, D.J., *Elementary Fluid Dynamics*, Clarendon Press, Oxford, 1990.
3. Tritton, D.J., *Physical Fluid Dynamics*, Von Nostrand, 1981.
4. Sobolev, S.L., *Partial Differential Equations of Mathematical Physics*, Pergamon Press, Oxford, 1964.

## Capitolo 6

# Soluzioni per $\text{Re} \rightarrow \infty$ . Strato limite

### 6.1 Problemi di perturbazione singolare

Consideriamo ora campi fluidodinamici per i quali

$$\text{Re} \rightarrow \infty \quad \text{cioè} \quad \frac{1}{\text{Re}} \rightarrow 0$$

In questo caso, se si trascurano i termini in  $\frac{1}{\text{Re}}$  si ha un problema di perturbazione singolare. Infatti nelle equazioni di Navier Stokes il coefficiente  $\frac{1}{\text{Re}}$  moltiplica i termini viscosi che sono i termini di ordine più alto dell'equazione. Se si trascurano questi termini, si ottengono le equazioni di Eulero

$$\frac{1}{\text{St}} \frac{\partial \rho u_i}{\partial t} + \frac{\partial \rho u_i u_j}{\partial x_j} = -\frac{1}{\text{Ru}} \frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{1}{\text{Fr}} \rho f_i \quad (6.1.1)$$

che sono di un'ordine più basso rispetto alle equazioni di Navier Stokes e quindi non si possono soddisfare tutte le condizioni al contorno del problema originale. Le (6.1.1) potranno essere valide, non in tutto il campo, ma, per Reynolds molto alti, quasi ovunque tranne che in una zona molto ristretta (tanto più ristretta quanto più alto è Reynolds) vicino a dove sono imposte le condizioni al contorno, che non si possono soddisfare con le equazioni di Eulero.

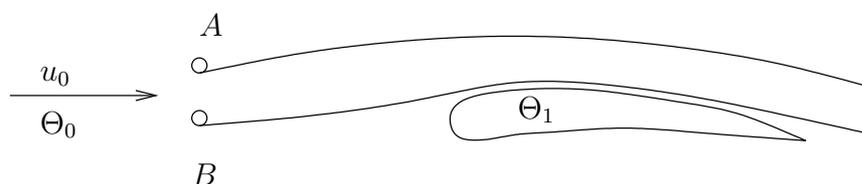
Analogamente per quanto riguarda l'equazione di conservazione dell'energia, che qui consideriamo per un flusso a  $\rho = \text{cost}$  con  $\text{St} = 1$

$$\frac{D\vartheta}{Dt} = \frac{1}{\text{RePr}} \nabla^2 \vartheta + \frac{E}{\text{Re}} \vartheta$$

che, per  $Re \rightarrow \infty$ , si riduce a

$$\frac{D\vartheta}{Dt} = 0 \quad (6.1.2)$$

con la soluzione immediata di  $\vartheta = \text{cost.}$  lungo il moto. Le condizioni al contorno per l'equazione completa sono dettate dal termine di ordine più alto, cioè dal Laplaciano, e quindi prescrivono o la temperatura o la sua derivata normale sul contorno del campo in esame. E' chiaro che la (6.1.2) non può soddisfare questa richiesta, potendo solo soddisfare una condizione iniziale per la particella e quindi una condizione per il flusso entrante. Se si considera ad esempio il flusso di aria fredda attorno a una paletta di turbina ad alta temperatura



per  $Re \rightarrow \infty$ , la soluzione della (6.1.2) potrà essere valida per particelle (come  $A$ ) sufficientemente lontane dal corpo, ma non per altre (come  $B$ ) che arrivano a piccola distanza dalla parete e per le quali si risente il valore più alto della temperatura della parete. In tali zone, infatti, si sviluppano gradienti molto alti e il termine viscoso prima trascurato torna ad assumere un ruolo essenziale.

Tale influenza si risentirà in modo significativo in una regione (tanto più ristretta quanto più alto è Reynolds), che chiameremo strato limite, e nella zona a valle del corpo dove confluiscono le particelle passate all'interno dello strato limite (scia). Per comprendere meglio da un punto di vista matematico la struttura dei problemi a perturbazione singolare, consideriamo prima il caso molto semplice dato dall'equazione prototipo alle derivate ordinarie

$$\frac{d\vartheta}{dx} + \varepsilon \frac{d^2\vartheta}{dx^2} = a \quad (6.1.3)$$

con condizioni al contorno

$$\vartheta(0) = 0 \quad (6.1.4)$$

$$\vartheta(1) = 1 \quad (6.1.5)$$

e studiamo la soluzione per  $\varepsilon \rightarrow 0$ , utilizzando il metodo del raccordo di soluzioni asintotiche adatto a risolvere problemi di perturbazione singolare.

Consideriamo dapprima la *soluzione esterna* che si ottiene ponendo  $\varepsilon = 0$  nell'equazione originale, ottenendo l'equazione del primo ordine

$$\frac{d\vartheta}{dx} = a \quad (6.1.6)$$

che può soddisfare solo una condizione al contorno, per esempio la

$$\vartheta(1) = 1$$

La soluzione esterna è quindi data da

$$\vartheta_e = ax + (1 - a) \quad (6.1.7)$$

che per  $x = 0$  vale  $(1 - a)$  invece di zero come previsto dalla (6.1.4). Per poter soddisfare anche questa condizione deve esserci necessariamente una zona, anche molto ristretta, vicino a quella parte del contorno ( $x = 0$ ) dove non si è soddisfatta la condizione, nella quale i termini di ordine più alto dell'equazione (6.1.3) rientrano in gioco, riacquistando un ordine di grandezza paragonabile agli altri.

Si considera a tal fine una regione di spessore di ordine  $\frac{1}{\varepsilon}$  e si opera una trasformazione di coordinate  $x' = x/\varepsilon$  che magnifichi la zona di interesse.

Introducendo  $x'$  nella (6.1.3) si ottiene

$$\frac{1}{\varepsilon} \frac{d\vartheta}{dx'} + \frac{\varepsilon}{\varepsilon^2} \frac{d^2\vartheta}{dx'^2} = a$$

e semplificando per  $\varepsilon \rightarrow 0$

$$\frac{d\vartheta}{dx'} + \frac{d^2\vartheta}{dx'^2} = 0 \quad (6.1.8)$$

che è l'equazione per la *soluzione interna* e deve soddisfare la condizione prima tralasciata

$$\vartheta(0) = 0$$

Ponendo la soluzione nella forma  $\vartheta = e^{rx}$  si ottiene, sostituendo, l'equazione caratteristica  $r + r^2 = 0$  con radici  $r = 0, -1$ , per cui

$$\vartheta = C_1 + C_2 e^{-x'}$$

e per  $x = 0$

$$C_2 = -C_1$$

La soluzione interna si può quindi esprimere nella forma

$$\vartheta_i = C_1(1 - e^{-x'})$$

e la costante  $C_1$  è determinata dalla condizione di raccordo della soluzione interna con quella esterna

$$\lim_{x \rightarrow 1} \vartheta_i = \lim_{x \rightarrow 0} \vartheta_e = 1 - a \quad (6.1.9)$$

da cui

$$C_1 = \frac{1 - a}{(1 - e^{-1/\varepsilon})}$$

La soluzione interna è quindi data da

$$\vartheta_i = \frac{1 - a}{(1 - e^{-1/\varepsilon})} \left(1 - e^{-\frac{x}{\varepsilon}}\right) \quad (6.1.10)$$

mentre la soluzione completa, valida in tutto il campo, assume la forma

$$\vartheta = \vartheta_i + \vartheta_e - \text{limite comune} \quad (6.1.11)$$

e quindi sostituendo

$$\vartheta = \frac{1 - a}{(1 - e^{-1/\varepsilon})} \left(1 - e^{-\frac{x}{\varepsilon}}\right) + ax \quad (6.1.12)$$

Esaminiamo da un punto di vista grafico la costruzione della soluzione come composizione di soluzione esterna ed interna.

Nel diagramma in figura sono rappresentate la soluzione interna (con linea punteggiata), la soluzione esterna (con linea tratteggiata) e la soluzione completa (con linea continua). Si noti il limite comune  $(1 - a)$  delle soluzioni esterna ed interna.

Per valori del parametro  $\varepsilon$  via via più piccoli la soluzione interna è sempre più ripida vicino alla parete dove soddisfa la condizione al contorno. Infatti per  $\varepsilon \rightarrow 0$  si ha  $e^{-\frac{1}{\varepsilon}} \rightarrow 0$  e la (6.1.12) diviene

$$\vartheta = (1 - a) \left(1 - e^{-\frac{x}{\varepsilon}}\right) + ax$$

Per  $x = 0(1)$  anche  $e^{-\frac{x}{\varepsilon}} \rightarrow 0$  e quindi si riottiene la soluzione esterna (6.1.7), mentre per  $x = 0(\varepsilon)$  per esempio  $x = \varepsilon$

$$\vartheta = (1 - a) \left(1 - \frac{1}{e}\right) + ax$$

e quindi la soluzione si discosta in modo significativo  $\left(\frac{1}{e}\right)$  dalla soluzione esterna. Per  $x = 2\varepsilon$  lo scostamento è proporzionale a  $\left(\frac{1}{e^2}\right)$  e diviene rapidamente insignificante per valori come  $x = 10\varepsilon$ . Con queste brevi considerazioni si può dedurre che la soluzione interna modifica la soluzione esterna, che è valida in quasi tutto il campo, in una zona di spessore dell'ordine di  $\varepsilon$ ,

per poter soddisfare la condizione al contorno. Tale spessore è quindi tanto minore quanto più piccolo è il parametro  $\varepsilon$  fino a generare una apparente discontinuità nella soluzione per valori di  $\varepsilon$  effettivamente tendenti a zero (es.:  $\varepsilon = 10^{-6}$ ).

## 6.2 Le equazioni dello strato limite

Possiamo ora riprendere in esame le equazioni della fluidodinamica e seguire per la loro soluzione (nel caso  $\frac{1}{\text{Re}} \rightarrow 0$ ) il procedimento di raccordo di soluzione interna ed esterna come per il caso semplice visto nel paragrafo precedente.

Consideriamo un flusso a  $\rho = \text{cost.}$ , con  $\text{Ru} = \text{St} = 1$ , forze di massa trascurabili, per cui si ha

$$\begin{aligned} \frac{Du_i}{Dt} &= -\frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{1}{\text{Re}} \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j \partial x_j} \\ \frac{\partial u_i}{\partial x_i} &= 0 \end{aligned} \tag{6.2.1}$$

con condizioni al contorno  $\mathbf{u} \cdot \mathbf{n} = 0$   $\mathbf{u} \cdot \boldsymbol{\tau} = 0$ .

Ponendo  $\text{Re} = \infty$  si ottengono le equazioni di Eulero che possono soddisfare una sola condizione e in particolare  $\mathbf{u} \cdot \mathbf{n} = 0$ . Questo è intuitivamente comprensibile per il fatto che nelle equazioni di Eulero sono assenti le forze viscosse che trasmettono all'interno del campo la condizione di aderenza sulla velocità tangenziale, mentre la condizione sulla componente normale di velocità è garantita dalla impermeabilità della parete.

Consideriamo per semplicità un flusso bidimensionale stazionario per cui le (6.2.1) si riscrivono in termini di componenti (con  $u_1 \equiv u$ ,  $u_2 \equiv v$ ,  $x_1 \equiv x$ ,  $x_2 \equiv y$ )

$$\begin{aligned} u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} &= -\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{1}{\text{Re}} \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) \\ u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} &= -\frac{\partial p}{\partial y} + \frac{1}{\text{Re}} \left( \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) \\ \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} &= 0 \end{aligned} \tag{6.2.2}$$

Si introduce ora una trasformazione di coordinate, tale da magnificare la distanza dalla parete su cui non si è potuta soddisfare con la soluzione esterna la condizione al contorno  $\mathbf{u} \cdot \boldsymbol{\tau} = 0$ .

Considerando una parete rettilinea parallela all'asse delle  $x$ , si introducono le nuove variabili indipendenti (in forma adimensionale)

$$y'^* = y^* \sqrt{\text{Re}} = \frac{y}{L} \frac{L}{\delta} = \frac{y}{\delta} \quad x'^* \equiv x \quad (6.2.3)$$

con  $\frac{\delta}{L} = \frac{1}{\sqrt{\text{Re}}}$  dimensione caratteristica dello spessore di strato limite.

Introducendo le nuove variabili nell'equazione di conservazione di massa, si ha

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \sqrt{\text{Re}} \frac{\partial v}{\partial y'} = 0 \quad (6.2.4)$$

per cui, come già visto nel paragrafo 5.2, poichè i due termini devono essere dello stesso ordine di grandezza, e non deve apparire il parametro adimensionale, si assume

$$v' = v \sqrt{\text{Re}}$$

che sarà dello stesso ordine della  $u$ . Sostituendo nella (6.2.2)

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v' \frac{\partial u}{\partial y'} = -\frac{\partial p}{\partial x'} + \frac{1}{\text{Re}} \frac{\partial^2 u}{\partial x'^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y'^2}$$

$$\frac{1}{\sqrt{\text{Re}}} \left( u \frac{\partial v'}{\partial x} + v' \frac{\partial v'}{\partial y'} \right) = -\frac{\partial p}{\partial y'} \sqrt{\text{Re}} + \frac{1}{\sqrt{\text{Re}}} \left( \frac{1}{\text{Re}} \frac{\partial^2 v'}{\partial x'^2} + \frac{\partial^2 v'}{\partial y'^2} \right)$$

nella prima delle quali si può trascurare il termine in  $\frac{1}{\text{Re}}$ , mentre dalla seconda si ottiene

$$\frac{\partial p}{\partial y'} = 0 \left( \frac{1}{\text{Re}} \right)$$

e quindi

$$p = \hat{p}(x) \equiv p_e(x, 0)$$

dove con  $p_e(x, 0)$  si è indicato il valore della pressione della soluzione esterna alla parete del corpo.

Il sistema (6.2.2) si riduce quindi alle equazioni di strato limite date da

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v' \frac{\partial u}{\partial y'} = -\frac{dp_e}{dx} + \frac{\partial^2 u}{\partial y'^2} \quad (6.2.5)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v'}{\partial y'} = 0$$

Si possono fare le seguenti considerazioni sul sistema di equazioni semplificato di soluzione interna:

- l'ordine dell'equazione di conservazione della quantità di moto non è diminuito rispetto a Navier Stokes e quindi si possono soddisfare ambedue le condizioni al contorno del corpo (sia  $\mathbf{u} \cdot \mathbf{n} = 0$  che  $\mathbf{u} \cdot \boldsymbol{\tau} = 0$ )
- la pressione è solo funzione di  $x$  e quindi è imposta dalla soluzione esterna, in particolare da Eulero in corrispondenza alla parete ( $v_e = 0$ )

$$\frac{dp}{dx} = \frac{dp_e}{dx} = -U_e \frac{dU_e}{dx} \quad (6.2.6)$$

dove si è indicata con  $U_e$  la  $u_e(x, 0)$

- la condizione di raccordo con la soluzione esterna impone l'uguaglianza della velocità  $u_i$  al limite esterno con la  $U_e$  alla parete

$$\lim_{y' \rightarrow \infty} u_i = \lim_{y' \rightarrow 0} U_e \quad (6.2.7)$$

- nel sistema di equazioni non appare più il numero di Reynolds. Il sistema è quindi valido per qualunque valore di Reynolds e la soluzione

$$u = \hat{u}(x, y') \quad (6.2.8)$$

$$v' = \hat{v}(x, y') \quad (6.2.9)$$

è indipendente da Reynolds. La dipendenza si riottiene quando si reintroducono le variabili fisiche  $y$  e  $v$

- la prima equazione delle (6.2.5) è ora di tipo parabolico (e non più ellittico come nella corrispondente forma completa (6.2.2)). Infatti nella variabile  $x$  è presente solo la derivata prima e quindi la  $x$ , nel caso stazionario, svolge un ruolo tipico della variabile temporale. Si richiede pertanto in  $u$  solo la condizione iniziale, esattamente come per la  $\vartheta$  data dall'equazione di Fourier in una dimensione spaziale

$$\frac{\partial \vartheta}{\partial t} = k \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial y^2}$$

più le due condizioni al contorno in  $y$ . L'equazione si può quindi risolvere con un metodo marciante in  $x$ , per stazioni successive, come si fa abitualmente per le integrazioni nel tempo.

### 6.3 Metodi di soluzione

Per integrare il sistema (6.2.5) è necessaria quindi la condizione iniziale

$$u = \bar{u}(y) \quad v = \bar{v}(y)$$

più le condizioni alla parete  $u = 0$  e al raccordo  $u = U_e$ .

La velocità normale  $v$  si può ricavare dall'equazione di conservazione di massa con la condizione alla parete  $v = 0$  e nessuna condizione di raccordo con la soluzione esterna.

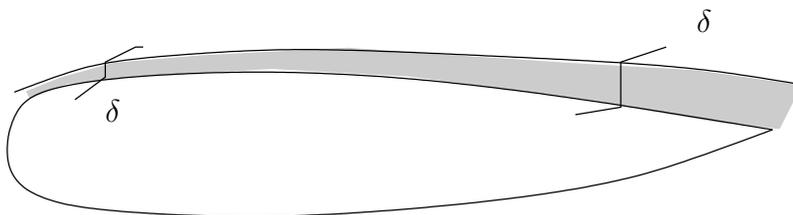
Quindi mentre

$$\lim_{y' \rightarrow 0} v_e = 0$$

si ha che in generale

$$\lim_{y' \rightarrow 0} v_i \neq 0$$

Lo spessore di strato limite continua a crescere cioè lo spessore  $\delta$  aumenta con  $x$ . Sulla parete del corpo si avrà in generale un andamento della zona occupata dallo strato limite del tipo



Per superare le difficoltà di calcolo legate alla variazione di spessore si introduce la trasformazione di coordinate

$$\xi = \frac{x}{L} = x^*$$

$$\eta = \frac{y}{\delta_L} = y \sqrt{\frac{U_e}{\nu x}} = \frac{y}{L} \sqrt{\frac{U_0 L U_e L}{\nu U_0 x}} \quad (6.3.1)$$

$$= y^* \sqrt{Re} \sqrt{\frac{U_e}{x^*}} = y'^* \sqrt{\frac{U_e^*}{x^*}} \equiv y'^* g(x^*) \quad (6.3.2)$$

in modo tale che l'ampiezza in  $y$  del dominio di integrazione rimanga fissa al crescere di  $x$  ( $0 \leq \eta \leq \eta_0$ ) pur corrispondendo ad altezze sempre maggiori di strato limite nel piano fisico ( $\delta$ ).

Si introduce inoltre la funzione di corrente nella forma

$$\psi^* = f(\eta, \xi)h(\xi) \quad (6.3.3)$$

che risulta più adatta per trovare le condizioni per cui si hanno *soluzioni simili*, che si definiscono soluzioni per le quali si ottiene  $f = \hat{f}(n)$  e inoltre

$$\frac{u}{U_e} = \frac{\partial f}{\partial \eta}$$

cioè il profilo di velocità tangenziale risulta essere solo funzione di  $\eta$  e non direttamente di  $\xi$ . Si noti che rimane una dipendenza dalla  $x^*$  tramite la definizione di  $\eta$ . Per maggiore chiarezza e per una più chiara sostituzione delle nuove variabili è opportuno indicare gli argomenti in modo esplicito:

$$\psi^* = f[\eta(y'^*, x^*), \xi(x^*)] h[\xi(x^*)]$$

Ne risulta

$$u^* = \frac{\partial \psi^*}{\partial y'^*} = \frac{\partial \psi^*}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial y'^*} = \frac{\partial f}{\partial \eta} hg$$

essendo la scelta di  $h$  arbitraria si può assumere  $h$  tale che

$$hg = U_e^* \quad \text{cioè} \quad h = \sqrt{U_e^* x^*}$$

in modo tale da soddisfare la condizione di profilo simile nel caso che si possa dimostrare che  $f = \hat{f}(n)$  come si vedrà in seguito. Inoltre

$$\begin{aligned} v'^* &= -\frac{\partial \psi^*}{\partial x^*} = -\frac{\partial \psi^*}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial x^*} - \frac{\partial \psi^*}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial x^*} \\ &= -\frac{\partial f}{\partial \eta} h \frac{\partial \eta}{\partial x^*} - f \frac{dh}{d\xi} - \frac{\partial f}{\partial \xi} h \end{aligned}$$

essendo  $\frac{d\xi}{dx^*} = 1$ . Le derivate presenti nell'eq. (6.2.5) risultano

$$\begin{aligned} \frac{\partial u^*}{\partial x^*} &= \frac{\partial}{\partial x^*} \left( \frac{\partial f}{\partial \eta} U_e^* \right) = \frac{\partial^2 f}{\partial \eta^2} U_e^* \frac{\partial \eta}{\partial x^*} + \frac{\partial f}{\partial \eta} \frac{\partial U_e^*}{\partial \xi} + \frac{\partial^2 f}{\partial \eta \partial \xi} U_e^* \\ \frac{\partial u^*}{\partial y'^*} &= \frac{\partial}{\partial y'^*} \left( \frac{\partial f}{\partial \eta} U_e^* \right) = \frac{\partial^2 f}{\partial \eta^2} U_e^* g \\ \frac{\partial^2 u^*}{\partial y'^*{}^2} &= \frac{\partial}{\partial y'^*} \left( \frac{\partial^2 f}{\partial \eta^2} U_e^* g \right) = \frac{\partial^3 f}{\partial \eta^3} U_e^* g^2 \end{aligned}$$

Sostituendo nell'eq. (6.2.5) di conservazione della quantità di moto e semplificando si ottiene

$$\begin{aligned} & \left( \frac{\partial f}{\partial \eta} \right)^2 U_e^* \frac{dU_e^*}{d\xi} + \frac{\partial^2 f}{\partial \eta \partial \xi} U_e^{*2} \frac{\partial^2 f}{\partial \eta^2} - \frac{\partial^2 f}{\partial \eta^2} U_e^* g f \frac{dh}{d\xi} - \frac{\partial f}{\partial \xi} U_e^{*2} \frac{\partial^2 f}{\partial \eta^2} \\ & = U_e^* \frac{dU_e^*}{d\xi} + \frac{\partial^3 f}{\partial \eta^3} g^2 U_e^* \end{aligned}$$

Infine, introducendo

$$\frac{dh}{d\xi} = \frac{1}{2} \frac{\left( \xi \frac{dU_e^*}{d\xi} + U_e^* \right)}{\sqrt{U_e^* \xi}} = \frac{1}{2g} \left( \frac{dU_e^*}{d\xi} + g^2 \right)$$

e moltiplicando per  $\frac{\xi}{U_e^{*2}}$  al fine di evidenziare il parametro

$$\beta = \frac{\xi}{U_e^{*2}} \frac{dU_e^*}{d\xi}$$

che dipende solo dalla soluzione esterna, si ha

$$\left( \frac{\partial f}{\partial \eta} \right)^2 \beta - f \frac{\partial^2 f}{\partial \eta^2} \frac{\beta + 1}{2} = \beta + \frac{\partial^3 f}{\partial \eta^3} + \xi \left( \frac{\partial^2 f}{\partial \eta \partial \xi} \frac{\partial f}{\partial \eta} - \frac{\partial f}{\partial \xi} \frac{\partial^2 f}{\partial \eta^2} \right) \quad (6.3.4)$$

che è la forma generale dell'equazione nel caso che  $f = \hat{f}(\eta, \xi)$ .

L'equazione di conservazione di massa è ora automaticamente soddisfatta (avendo introdotto la funzione di corrente) come si può facilmente verificare calcolando

$$\frac{\partial v'^*}{\partial y'^*} = - \frac{\partial^2 f}{\partial \eta^2} U_e^* \frac{\partial \eta}{\partial x^*} - \frac{\partial f}{\partial \eta} h \frac{dg}{d\xi} - \frac{\partial f}{\partial \eta} g \frac{dh}{d\xi} - \frac{\partial^2 f}{\partial \xi \partial \eta} U_e^*$$

A partire dall'equazione generale appena ricavata si può vedere che se  $f = \hat{f}(\eta)$ , l'ultimo termine a secondo membro si annulla, il parametro  $\beta$  deve essere necessariamente costante e la  $f$  risulta essere soluzione dell'equazione di Falkner-Skan

$$f''' + f f'' \left( \frac{\beta + 1}{2} \right) + \beta(1 - f'^2) = 0 \quad (6.3.5)$$

dove si sono indicate con apice le derivate ordinarie rispetto ad  $\eta$ .

Si ottiene così una classe di soluzioni simili per le quali, come si è detto

$$\frac{u}{U_e} = f'(\eta)$$

in corrispondenza a valori costanti del parametro  $\beta$  dipendente dalla soluzione esterna. In particolare per  $\beta = 0$  (corrente su lastra piana) si ha l'equazione di Blasius

$$f''' + \frac{1}{2} f f'' = 0 \quad (6.3.6)$$

In appendice l'equazione di Blasius (6.3.6) e' ricavata in modo piu' diretto a partire dalle equazioni di strato limite scritte in forma dimensionale.

Le condizioni al contorno (valide anche per l'equazione di Falkner-Skan) sono per

$$\eta = 0 \quad f' = 0 \quad f = 0$$

$$\eta \rightarrow \infty \quad f' = 1$$

che assicurano  $u = v = 0$  alla parete e  $u = U_e(x)$  per  $\eta \rightarrow \infty$  o in forma approssimata per  $\eta = \eta_0$  cioè per una distanza  $y = \eta_0 \delta$  della parete per la quale si può considerare trascurabile il contributo della soluzione interna di strato limite.

Prima di affrontare la soluzione delle equazioni appena ricavate, vediamo in quali casi si può avere  $\beta = \text{cost.}$  e quindi  $f = \hat{f}(\eta)$ . In generale per una soluzione esterna tale da dare in corrispondenza alla parete

$$U_e = c\xi^m$$

si ha

$$\beta \frac{\xi}{c\xi^m} cm\xi^{m-1} = m$$

Per  $m = 0$  si ha, come già visto, il flusso su lastra piana con angolo nullo di incidenza per il quale  $u_e = U_0$ .

Per  $m \neq 0$  si ha il flusso a potenziale sulla superficie di un diedro con semiangolo  $\pi \frac{m}{m+1}$  investito da una corrente con velocità  $U_0$  allineata con l'asse del diedro (l'origine delle  $x$  è nel vertice del diedro). Per  $m = 1$  si ha un flusso di ristagno su una superficie piana (la cui normale è allineata con la corrente) e l'equazione di Falkner Skan si riduce all'equazione di Navier Stokes in variabili simili, valida per trovare la soluzione nell'intorno del punto di ristagno.

Per determinare la velocità  $v'^*$  calcolo

$$\frac{\partial \eta}{\partial x^*} = y'^* \frac{1}{x^*} \frac{dU_e^*}{dx^*} - \frac{U_e^*}{x^{*2}} = \frac{\eta}{2} \left( \frac{1}{U_e^*} \frac{dU_e^*}{dx^*} - \frac{1}{x^*} \right)$$

da cui, per esempio per lastra piana ( $\beta = 0$ )

$$\begin{aligned}
U_e^* &= 1 \\
v'^* &= +f'\sqrt{x^*}\frac{\eta}{2x^*} - f\frac{g}{2} \\
&= \frac{1}{2}g(f'\eta - f) = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{x^*}}(f'\eta - f) \\
v^* &= \frac{1}{\sqrt{Re}}v'^* = \sqrt{\frac{\nu}{U_0L_0}}\frac{1}{2}\sqrt{\frac{L_0}{x}}(f'\eta - f) \\
v &= \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\nu U_0}{x}}(f'\eta - f)
\end{aligned}$$

mentre

$$\begin{aligned}
u &= U_0f' \\
\frac{\partial u}{\partial y} &= \frac{U_0}{L_0}\frac{\partial u^*}{\partial y^*} = \frac{U_0}{L_0}\sqrt{\frac{U_0L_0}{\nu}}\frac{\partial u^*}{\partial \eta}\frac{\partial \eta}{\partial y^*} = \frac{U_0}{L}\sqrt{\frac{U_0L}{\nu}}f''\sqrt{\frac{L}{x}}
\end{aligned}$$

e

$$\mu\left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_w = \rho U_0^2\sqrt{\frac{\nu}{U_0x}}f''(0)$$

che dà lo sforzo tangenziale alla parete.

## 6.4 Spessore dello strato limite

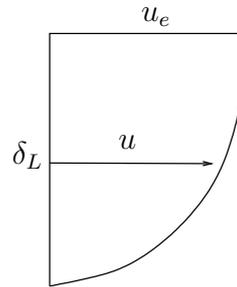
Lo spessore  $\delta$  dello strato limite è dato in termini di  $\delta_L$  (6.3.1) da

$$\begin{aligned}
\delta &= K\sqrt{\frac{\nu x}{U_e}} \equiv K\delta_L & K \cong 5 \\
\eta &= \frac{y}{\delta_L} & \text{per } y = \delta \eta = K
\end{aligned}$$

Comunque  $\delta$  è una grandezza poco significativa che si definisce come lo spessore al di là del quale la  $U$  non varia più dell'1%, cioè dove

$$u \cong .99u_e$$

$u = U_e$  solo asintoticamente per  $\eta \rightarrow \infty$ .



Una grandezza più significativa è lo spessore di spostamento (*displacement thickness*)

$$\rho U_e \delta_1 = \rho \int_{y=0}^{\infty} (U_e - u) dy \quad (6.4.1)$$

$$\delta_1 = \int_{y=0}^{\infty} \left(1 - \frac{u}{U_e}\right) dy$$

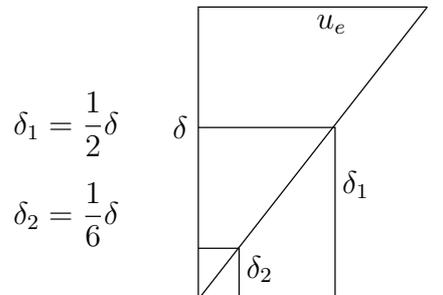
cioè lo spessore di cui si può considerare spostata la soluzione esterna per il difetto di flusso attraverso lo strato limite dovuto alle diminuite velocità vicino alla parete. Si può tenere conto di questo effetto, considerando il corpo *ingrossato* di  $\delta_1$  e ricalcolando per questo corpo modificato la soluzione esterna per una seconda approssimazione.

Un'altro spessore significativo è lo spessore di quantità di moto (*momentum thickness*)  $\delta_2$ . La perdita di quantità di moto che si ha nello strato limite rispetto al profilo della soluzione esterna è data da

$$\rho U_e^2 \delta_2 = \rho \int_{y=0}^{\infty} u(U_e - u) dy \quad (6.4.2)$$

$$\delta_2 = \int_{y=0}^{\infty} \frac{u}{U_e} \left(1 - \frac{u}{U_e}\right) dy$$

Per visualizzare meglio queste definizioni, se si assume per semplicità un profilo lineare, si ottiene



Tali parametri  $\delta_1, \delta_2$  possono essere direttamente ricavati mediante metodi integrali.

## 6.5 La separazione dello strato limite

Analizziamo il comportamento dei profili di velocità dello strato limite nella direzione  $x$  lungo il corpo al variare della pressione esterna e quindi del suo gradiente che appare nell'equazione

$$-\frac{dp_e}{dx} = U_2 \frac{dU_e}{dx}$$

se  $p_e \neq 0$  (per  $p_e = \text{cost.}$   $\beta = 0$ : lastra piana).

L'equazione di conservazione della quantità di moto alla parete dà

$$\frac{dp_e}{dx} = \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{1}{Re} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \quad (6.5.1)$$

considerando che  $\zeta = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}$  e che il suo valore alla parete è  $\zeta = -\frac{\partial u}{\partial y}$  si ha l'importante relazione

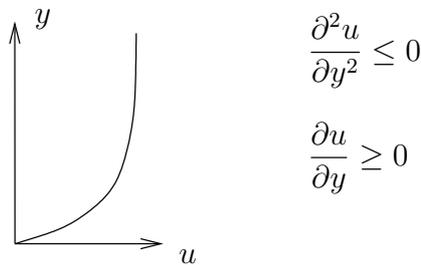
$$\frac{1}{Re} \frac{\partial \zeta}{\partial y} = -\frac{dp_e}{dx} \quad (6.5.2)$$

che lega la  $\frac{\partial \zeta}{\partial n}$  alla parete con la  $\frac{dp}{d\tau}$  lungo il corpo, cioè la generazione di vorticità con la variazione di pressione nel caso di flusso stazionario.

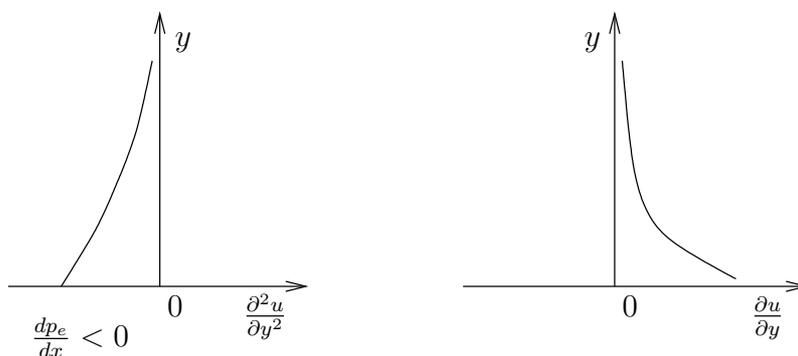
Si deduce quindi che se, la pressione è decrescente in  $x$

$$\left( \frac{dp_e}{dx} < 0 \right), \text{ ne segue}$$

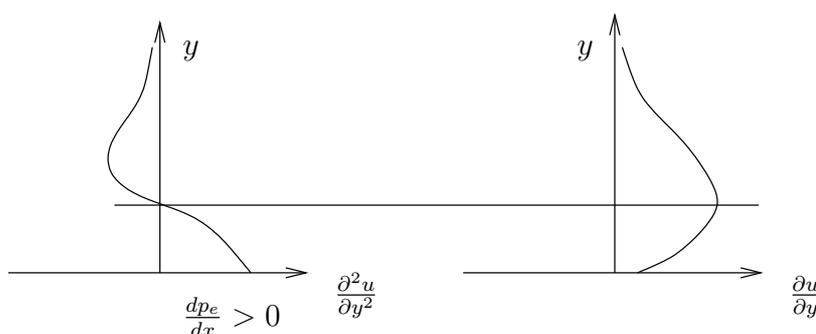
$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} < 0$  e poichè per  $\eta \rightarrow \infty$   $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$  tende a 0 da valori negativi, mentre  $\frac{\partial u}{\partial y}$ , per  $\eta \rightarrow \infty$ , tende a 0 da valori positivi, come si può dedurre dalla forma classica del profilo velocità per il quale



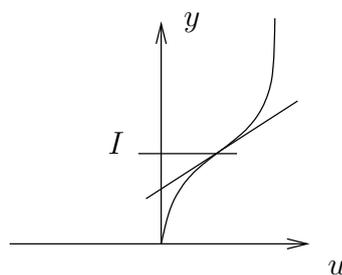
si ottengono qualitativamente i due seguenti profili in  $y$  per la derivata seconda e per la derivata prima



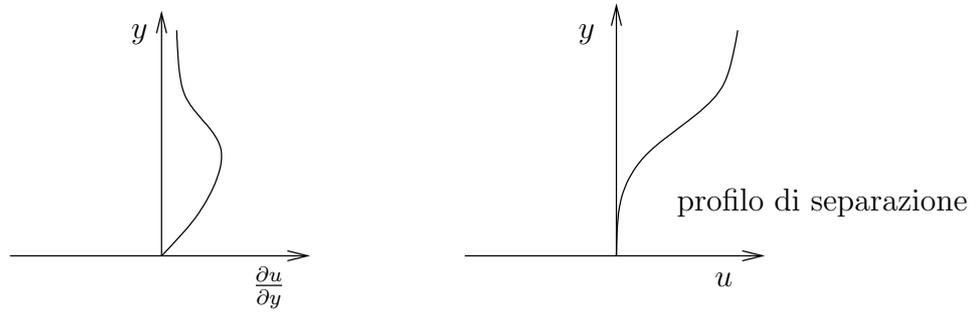
Se invece si considerano pressioni crescenti in  $x$  cioè  $\frac{dp_e}{dx} > 0$  quindi alla parete  $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} < 0$



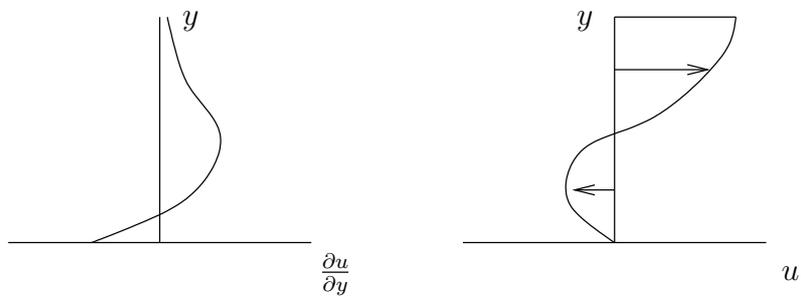
si ha necessariamente, considerato l'andamento per  $\eta \rightarrow \infty$  un valore di  $y$  per cui  $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$  quindi un massimo di  $\frac{\partial u}{\partial y}$  e un flesso nel profilo di  $u$  (punto  $I$  in cui si ha cambio di curvatura nel profilo di velocità).



A partire dalla stazione con  $\text{grad } p = 0$  si ha un progressivo innalzamento del punto di flesso  $I$  accompagnato da una diminuzione del valore di  $\frac{\partial u}{\partial y}$  alla parete fino a  $\frac{\partial u}{\partial y} = 0$  (punto di separazione  $S$ )



e successivamente  $\frac{\partial u}{\partial y} < 0$

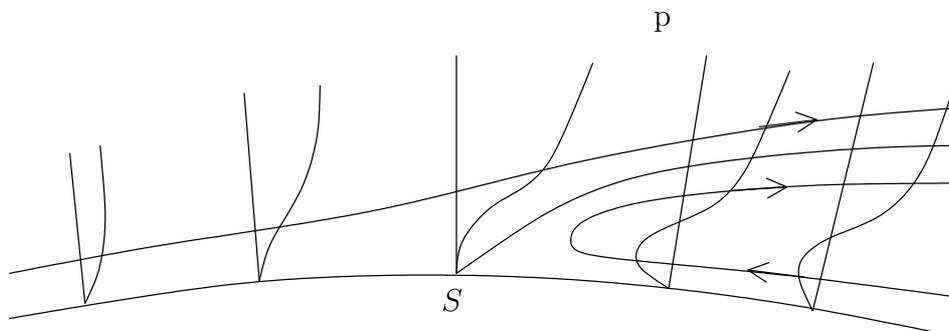


a cui corrisponde un flusso inverso che dà luogo a una regione di ricircolazione.

Ricostruendo la sequenza di profili su un corpo con pressione crescente.

$$\frac{dp_e}{dx} > 0$$

A partire dal punto di separazione le considerazioni fatte per ricavare le equazioni di strato limite non sono più valide e bisogna risolvere le equazioni di Navier Stokes.



## 6.6 Resistenza di attrito e di forma

Nota la soluzione dello strato limite e quindi il profilo di velocità si possono calcolare le forze scambiate alla parete. In particolare il vettore tensione sulla porzione di parete di normale  $n(\equiv y)$

$$t(n)_i = t_{ij}n_j = \left[ -p\delta_{ij} + \mu \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \right] n_j$$

$$t(n)_i = -pn_i + \mu \left( \frac{\partial u_i}{\partial n} + \frac{\partial u_n}{\partial x_i} \right)$$

da cui si ottiene

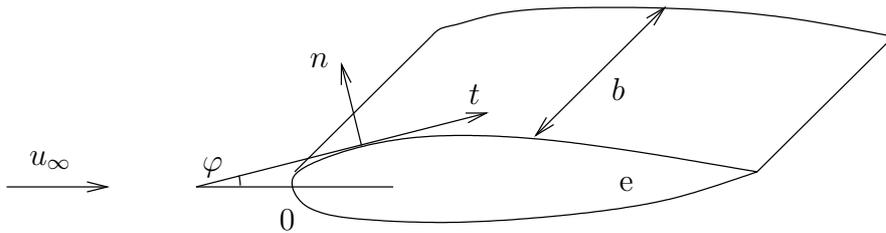
$$\text{componente tangenziale} \quad t(n)_\tau = \mu \frac{\partial u}{\partial n} \equiv \mu \frac{\partial u}{\partial y} \equiv \tau|_w$$

$$\text{componente normale} \quad t(n)_n = -p|_w$$

in quanto  $\frac{dv}{dx} = \frac{du}{dx} = 0$  e utilizzando l'equazione di continuità la resistenza di attrito si può calcolare dalla

$$D_A = 2b \int_0^L \tau|_w \cos \varphi dl = \int_0^L \mu \frac{\partial u}{\partial y} \cos \varphi dl \quad (6.6.1)$$

dove  $\varphi$  è l'angolo tra la tangente al corpo e l'asse della  $x$  e  $b$  è la larghezza nella direzione trasversale ( $z$ )



La resistenza di forma è data dalla componente secondo  $x$  della forza che si ottiene moltiplicando la tensione normale alla parete ( $\equiv p$ ) per la superficie e integrando su tutto il corpo

$$D_F = 2b \int_0^L p|_w \sin \varphi dl \quad (6.6.2)$$

Per strato limite sempre attaccato e  $p = p_e$  nella geometria reale del corpo si ha  $D_F$  nulla (paradosso di D'Alambert). Se si tiene conto dell'effetto

dello strato limite tramite lo spessore di spostamento e ancor più nel caso di strato limite separato si ha un recupero solo parziale di pressione nella parete posteriore del corpo e quindi una resistenza di forma positiva.

Analogamente si può calcolare la dissipazione di energia dovuta alla viscosità (per unità di tempo e di volume) dentro lo strato limite, data per fluido incomprimibile dal termine

$$\begin{aligned}\mu\Phi &= 2\mu e_{ij}e_{ij} \\ &\cong \mu \left( \frac{\partial u}{\partial y} \right)^2\end{aligned}$$

essendo  $\frac{\partial v}{\partial x}$  trascurabile rispetto a  $\frac{\partial u}{\partial y}$ .

## 6.7 Equazioni integrate dello strato limite

Spesso non è necessario in fase di progettazione conoscere la soluzione completa del campo di velocità all'interno dello strato limite, ma basta conoscere il valore di alcune quantità come  $\tau_w$ ,  $\delta_1$ ,  $\delta_2$ , prima introdotte. Si può allora ricavare una forma dell'equazione di conservazione della quantità di moto integrata in  $y$  da  $y = 0$  a  $y = \infty$

$$\int_0^\infty u \frac{\partial u}{\partial x} dy + \int_0^\infty v \frac{\partial u}{\partial y} dy = \int_0^\infty u_e \frac{du_e}{dx} dy + \int_0^\infty \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} dy$$

Consideriamo il 2° termine e integriamo per parti dopo aver sottratto la quantità nulla  $v \frac{\partial u_e}{\partial y}$

$$\int_0^\infty v \frac{\partial u}{\partial y} dy = \int_0^\infty v \frac{\partial(u - u_e)}{\partial y} dy = [v(u - u_e)]_0^\infty - \int_0^\infty (u - u_e) \frac{\partial v}{\partial y} dy$$

Il primo termine è nullo sia per  $y = \infty$  che per  $y = 0$  e introducendo l'equazione di conservazione di massa nel secondo termine, si ottiene

$$\int_0^\infty v \frac{\partial u}{\partial y} dy = \int_0^\infty (u - u_e) \frac{\partial u}{\partial x} dy$$

L'ultimo termine dà

$$\int_0^\infty \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} dy = \nu \left[ \frac{\partial u}{\partial y} \right]_0^\infty = -\nu \left. \frac{\partial u}{\partial y} \right|_0 = -\frac{\tau_w}{\rho}$$

Sostituendo nell'equazione

$$\int_0^\infty \left( u_e \frac{du_e}{dx} - u \frac{\partial u}{\partial x} - (u - u_e) \frac{\partial u}{\partial x} \right) dy = \frac{\tau_w}{\rho}$$

riscrivendo

$$(u - u_e) \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} [u(u - u_e)] - u \frac{\partial}{\partial x} (u - u_e)$$

si ottiene

$$\frac{\tau_w}{\rho} = \frac{d}{dx} \int_0^\infty u(u_e - u) dy + \frac{du_e}{dx} \int_0^\infty (u_e - u) dy \quad (6.7.1)$$

$$\frac{\tau_w}{\rho} = \frac{d}{dx} (u_e^2 \delta_2) + \frac{du_e}{dx} u_e \delta_1$$

dove  $\delta_2$  e  $\delta_1$  sono gli spessori di spostamento e di quantità di moto prima ricavati (6.4.1), (6.4.2).

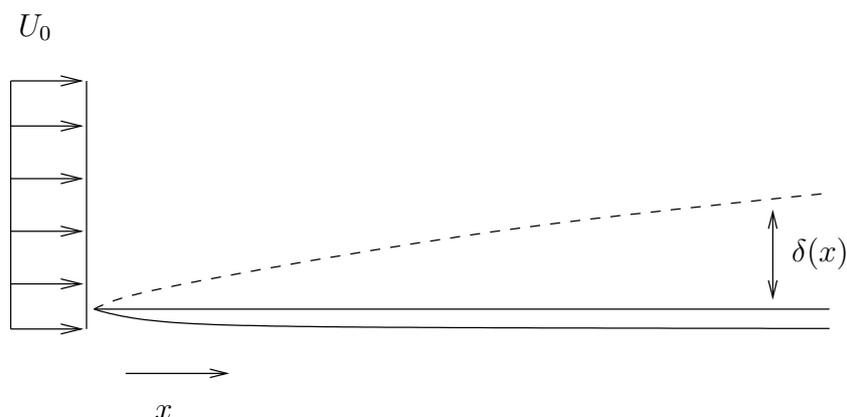
Questa equazione che esprime la conservazione della quantità di moto globalmente per tutto lo spessore dello strato limite, può essere direttamente risolta, assumendo che il profilo della velocità  $u$  nello strato limite possa essere dato da una certa funzione di forma (che soddisfi le condizioni alla parete e di raccordo con la soluzione esterna) in funzione di un parametro che diviene l'incognita da determinare con l'equazione differenziale ricavata (vedi ad esempio metodi approssimati tipo Karman e Pohlhausen).

## Bibliografia

1. Schlichting, H. *Boundary Layer Theory*, Mc Graw Hill, 1960.
2. Batchelor, G.K., *An Introduction to Fluid Dynamics*, Cambridge University Press, 1967.
3. Tritton, D.J., *Physical Fluid Dynamics*, Clarendon Press, 1988
4. Kundu P.K., *Fluid Mechanics*, Academic Press, 1990.

## Appendice 6.A - Equazione di Blasius

Consideriamo una lastra piana infinitamente lunga investita da una corrente uniforme  $U_0$ .



Lo spessore dello strato limite continua ad aumentare mano a mano che ci si muove verso valle per la diffusione della vorticità che si è generata al bordo d'attacco. per meglio comprendere la crescita dello spessore dello strato limite assumiamo come lunghezza di riferimento alla stazione locale  $x$  la quantità

$$\delta(x) = \sqrt{\frac{\nu x}{U_0}} \approx \sqrt{x} \quad (6.A.1)$$

che cresce come  $\sqrt{x}$ . Consideriamo poi variabile adimensionale

$$\eta = y/\delta(x) = y\sqrt{\frac{U_0}{\nu x}} \quad (6.A.2)$$

dove  $U_0$  è sostituita dal valore locale della velocità  $u_e$  nel caso più generale di corpo di forma qualsiasi.

Si può verificare che nel caso di lastra piana la nuova variabile  $\eta$  riscala la soluzione (e quindi il profilo di  $u$ ) secondo il valore  $\delta(x)$ , apportando una notevole semplificazione delle equazioni di strato limite. Poiché una scala caratteristica delle lunghezze in direzione  $x$  non è imposta dall'esterno, la soluzione alle varie stazioni  $x$  ha un profilo simile: cioè il profilo di velocità nelle variabili fisiche  $(x, y)$  ha una forma simile che diviene la stessa se riscalata con il valore locale di  $\delta(x)$ . Possiamo quindi porre  $g(\eta) = u/U_0$  salvo verificare che l'equazione non abbia una dipendenza diretta dalla variabile  $x$ .

Ricaviamo allora a partire dalle equazioni di strato limite scritte in forma dimensionale l'equazione di Blasius che permette di calcolare il profilo di velocità nella variabile  $\eta$ . Per semplicità consideriamo la funzione di corrente  $\psi$  che si può introdurre a partire dall'equazione di conservazione della massa nel caso 2D

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (6.A.3)$$

con  $u = +\frac{\partial \psi}{\partial y}$ ,  $v = -\frac{\partial \psi}{\partial x}$ . Consideriamo poi l'equazione della q.d.m. in

forma dimensionale con  $\frac{dP_e}{dx} = 0$

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \quad (6.A.4)$$

e sostituiamo le espressioni di  $u$  e  $v$  in termini delle derivate di  $\psi$

$$\frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} - \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial^2 \psi}{\partial y \partial y} = \nu \frac{\partial^3 \psi}{\partial y^3} \quad (6.A.5)$$

L'equazione 6.A.5 va risolta con le seguenti condizioni iniziali e al contorno

$$\begin{aligned} u = \frac{\partial \psi}{\partial y} = U_0 & \quad \text{per } x = 0 \quad (\text{non serve}) \\ \frac{\partial \psi}{\partial y} = \psi = 0 & \quad \text{per } y = 0 \quad (\text{aderenza ed impermeabilità}) \\ \frac{\partial \psi}{\partial y} = U_0 & \quad \text{per } y/\delta \rightarrow \infty \quad (\text{raccordo asintotico}) \end{aligned}$$

Poiché nello strato limite  $v = o(1/\sqrt{Re})$  la funzione di corrente  $\psi$  è data solo dalla componente  $u$  della velocità

$$\psi = \int_0^y u dy = \delta(x) \int_0^\eta u d\eta = U_0 \delta(x) \int_0^\eta g(\eta) d\eta = U_0 \delta(x) f(\eta)$$

dove abbiamo indicato con  $g(\eta) = df/d\eta = u/U_0$ .

A partire dall'espressione  $\psi = U_0 \delta(x) f(\eta)$  possiamo valutare tutte le derivate di  $\psi$  che compaiono nella 6.A.5

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} = U_0 \left( f \frac{d\delta}{dx} + \delta \frac{df}{d\eta} \frac{d\eta}{dx} \right)$$

tenendo conto che  $\frac{d\eta}{dx} = \frac{-y}{\delta^2} \frac{d\delta}{dx} = -\frac{\eta}{\delta} \frac{d\delta}{dx}$  abbiamo

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} = U_0 \frac{d\delta}{dx} (f - \eta f') \quad (6.A.6)$$

possiamo poi calcolare

$$\frac{\partial \psi}{\partial y} = U_0 \delta(x) \frac{df}{d\eta} = U_0 \delta(x) \frac{df}{d\eta} \frac{d\eta}{dy} = U_0 f' \quad (6.A.7)$$

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} = U_0 \frac{d\delta}{dx} \frac{d}{d\eta} (f - \eta f') \frac{d\eta}{dy} = -\frac{U_0}{\delta} \frac{d\delta}{dx} \eta f'' \quad (6.A.8)$$

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = \frac{U_0}{\delta} f'' \quad (6.A.9)$$

$$\frac{\partial^3 \psi}{\partial y^3} = \frac{U_0}{\delta^2} f''' \quad (6.A.10)$$

Sostituendo le 6.A.6 - 6.A.10 nell'equazione per  $\psi$  6.A.5 abbiamo

$$\begin{aligned} U_0 f' \left( -\frac{U_0 f'' \eta}{\delta} \frac{d\delta}{dx} \right) - U_0 \frac{d\delta}{dx} (f - \eta f') \frac{U_0 f''}{\delta} &= \nu \frac{U_0}{\delta^2} f''' \\ -U_0^2 f' f'' \frac{\eta}{\delta} \frac{d\delta}{dx} + U_0^2 f' f'' \frac{\eta}{\delta} \frac{d\delta}{dx} - U_0^2 \frac{f' f''}{\delta} \frac{d\delta}{dx} &= \nu \frac{U_0}{\delta^2} f''' \end{aligned}$$

cioè

$$f''' + \frac{\delta U_0}{\nu} f' f'' \frac{d\delta}{dx} = 0$$

tenendo conto che

$$\delta \frac{d\delta}{dx} = \frac{1}{2} \frac{d\delta^2}{dx} = \frac{1}{2} \frac{\nu}{U_0}$$

otteniamo l'equazione di Blasius

$$f''' + \frac{1}{2} f f'' = 0 \quad (6.A.11)$$

per la lastra piana. La 6.A.11 andrà risolta con le seguenti condizioni al contorno

$$\begin{array}{lll} f(0) = 0 & \text{impermeabilità} & (v = 0) \\ f'(0) = 0 & \text{aderenza} & (u = 0) \\ f'(\infty) & \text{raccordo asintotico} & \end{array}$$

Nella 6.A.11 non compare più esplicitamente la dipendenza da  $x$  ma solo quella della variabile simile  $\eta$ . La dipendenza da  $x$  è solo indiretta tramite la dipendenza da  $\eta = y/\delta(x)$ . Verifico quindi a posteriori la condizione richiesta all'inizio per poter porre  $g(\eta) = u/U_0$ . Il profilo di velocità può essere allora calcolato una sola volta nella variabile di similitudine  $\eta$  e poi, tramite la trasformazione di coordinate  $u(\eta) = u(y/\delta(x))$  è possibile riottenere tutti i profili di strato limite alle varie stazioni  $x$  a partire dal profilo soluzione dell'equazione di Blasius.

## Capitolo 7

# Re $\rightarrow \infty$ . Soluzioni esterne e vorticità

### 7.1 Flussi irrotazionali

Come si è già visto nel capitolo precedente per  $Re \rightarrow \infty$  si ha un problema di perturbazione singolare e la soluzione esterna si ottiene ponendo  $\frac{1}{Re} = 0$  nelle equazioni di Navier Stokes, cioè dalle equazioni di Eulero:

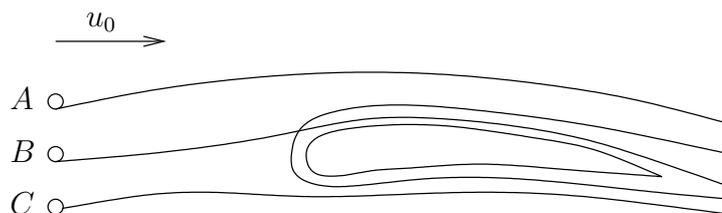
$$\rho \frac{D\mathbf{u}}{Dt} = -\nabla p + \rho \mathbf{F} \quad (7.1.1)$$

Applicando l'operatore rotore all'eq. (7.1.1) si ha, assumendo per ora per semplicità  $\mathbf{F} = -\nabla\Psi$ ,  $\rho = \text{cost.}$  e flusso bidimensionale (per il quale  $\zeta = \zeta(\mathbf{e}_{(s)})$ )

$$\frac{D\zeta}{Dt} = 0 \quad (7.1.2)$$

cioè la vorticità rimane costante lungo il moto e se era nulla all'istante iniziale tale rimane.

Se consideriamo un corpo affusolato (es. sezione di un'ala) investito da una corrente irrotazionale (cioè tale per cui  $\zeta = 0$  ovunque) ad alto Reynolds, la soluzione esterna vale in quasi tutto il campo tranne in una zona molto limitata (strato limite + scia), tanto più stretta quanto più  $Re$  è alto



Pertanto le particelle  $A$  e  $C$  restando al di fuori dello strato limite mantengono vorticità nulla, mentre la particella  $B$  entra nello strato limite e acquista una  $\zeta \neq 0$  che evolverà poi lungo la scia secondo l'equazione di trasporto della vorticità nella sua forma completa.

In tutta la parte di campo dove vale la soluzione esterna si può quindi assumere in questo, e in molti casi analoghi, che  $\zeta$  sia nulla.

Per ricavare le equazioni semplificate adatte a trattare il caso di moto irrotazionale conviene esprimere il termine di accelerazione della (7.1.1) nella forma di Lagrange. In generale considerando flussi tridimensionali (3D) si ha

$$\begin{aligned} \frac{Du_i}{Dt} &= \frac{\partial u_i}{\partial t} + u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \\ &= \frac{\partial u_i}{\partial t} + u_j \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} - \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) + u_j \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \\ &= \frac{\partial u_i}{\partial t} + 2u_j \Omega_{ij} + \frac{1}{2} \frac{\partial u_j u_j}{\partial x_i} \end{aligned}$$

dove

$$\Omega_{ij} = -\varepsilon_{ijk} \omega_k = -\frac{1}{2} \varepsilon_{ijk} \zeta_k$$

per cui

$$\frac{D\mathbf{u}}{Dt} = \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \frac{1}{2} \nabla u^2 - \mathbf{u} \times \boldsymbol{\zeta} \quad (7.1.3)$$

dove si è indicato con  $u = |\mathbf{u}|$ .

Se si può assumere  $\boldsymbol{\zeta} = 0$  (vedremo tra poco più precisamente in quali condizioni è lecito fare questa assunzione) allora posso porre

$$\mathbf{u} = \text{grad } \varphi \quad (7.1.4)$$

essendo

$$\boldsymbol{\zeta} = \nabla \times \mathbf{u} = \nabla \times \nabla \varphi \equiv 0$$

Nel caso di flusso a  $\rho = \text{cost.}$ , l'equazione di conservazione di massa diviene

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = \nabla \cdot \nabla \varphi = \nabla^2 \varphi = 0 \quad (7.1.5)$$

e la condizione al contorno alle pareti

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{n} = \frac{\partial \varphi}{\partial n} = 0 \quad (7.1.6)$$

che è una condizione al contorno per la soluzione della (7.1.5). Pertanto il campo di velocità è completamente determinato dalla soluzione della sola equazione di conservazione di massa. Sostituendo la posizione (7.1.4) e la forma di Lagrange (7.1.3) con  $\zeta = 0$  nell'equazione di Eulero per  $\rho = \text{cost.}$  e forze conservative si ha

$$\nabla \left( \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{1}{2} u^2 + \frac{p}{\rho} + \Psi \right) = 0$$

che è una forma particolare dell'equazione di Bernoulli (già ricavata nel capitolo 3) valida in tutto il campo e non solo lungo il moto come nel caso più generale. Infatti si può assumere

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{1}{2} u^2 + \frac{p}{\rho} + \Psi = \text{cost.} \quad (7.1.7)$$

o nel caso stazionario

$$\frac{1}{2} u^2 + \frac{p}{\rho} + \Psi = \text{cost.} \quad (7.1.8)$$

Dall'equazione di conservazione della quantità di moto nella forma integrata di Bernoulli, nota la velocità, si può ricavare la pressione e completare così la soluzione. Uno dei vantaggi principali delle soluzioni a potenziale è quello di separare la parte cinematica (la velocità  $u$  si ricava dalla conservazione di massa) dalla parte dinamica (la pressione  $p$  si ricava da Bernoulli) dell'equazione di Eulero.

## 7.2 Teorema di Kelvin

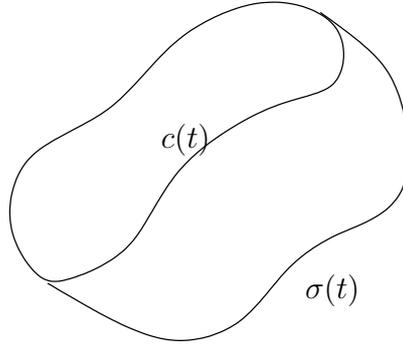
Vediamo ora quali sono le condizioni per assumere come valida l'ipotesi di  $\zeta = 0$  lungo il moto e quindi il moto a potenziale per le soluzioni esterne.

Per studiare l'evoluzione di una certa proprietà del fluido conviene considerare la  $\frac{d}{dt}$  di una quantità integrale estesa alla configurazione variabile nel tempo della particella fluida (come già fatto per ricavare le equazioni di conservazione).

Consideriamo la quantità definita come circolazione

$$\Gamma = \int_{c(t)} \mathbf{u} \cdot \boldsymbol{\tau} dx = \int_{\sigma(t)} \text{rot } \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} dS \quad (7.2.1)$$

dove  $c(t)$  è una linea chiusa arbitraria sulla superficie di contorno della particella e  $\sigma(t)$  è la parte di superficie della particella che ha  $c(t)$  per contorno.



Se la quantit  integrale  $\Gamma$    nulla e rimane tale, allora, essendo  $\sigma$  arbitrario, deve essere necessariamente  $\text{rot } \mathbf{u} = 0$ .

Ricerchiamo quindi le condizioni per cui

$$\frac{d}{dt}\Gamma = \frac{d}{dt} \int_{c(t)} u_i(\mathbf{x}, t) dx_i = 0 \quad (7.2.2)$$

che richiede la derivata rispetto al tempo di un integrale esteso a un dominio variabile nel tempo. Consideriamo a tal fine la configurazione di riferimento e il tensore gradiente di trasposizione  $\mathbf{F} = \nabla \chi_k(\mathbf{X}, t)$  di componenti  $F_{ij} = \frac{\partial x_i}{\partial X_j}$  per cui

$$dx_i = F_{ij} dX_j$$

e

$$\frac{d\Gamma}{dt} = \frac{d}{dt} \int_{c(t_0)} u_i [\chi_k(\mathbf{X}, t), t] F_{ij}(\mathbf{X}, t) dX_j$$

Si pu  ora portare  $\frac{d}{dt}$  sotto il segno di integrale

$$\frac{d\Gamma}{dt} = \int_{c(t_0)} \frac{Du_i}{Dt} F_{ij} dX_j + \int_{c(t_0)} u_i \frac{d}{dt} F_{ij}(x, t) dX_j$$

sostituendo

$$\frac{dF_{ij}}{dt} = \frac{d}{dt} \frac{\partial x_i}{\partial X_j} = \frac{\partial u_i}{\partial X_j} = \frac{\partial u_i}{\partial x_k} \frac{\partial x_k}{\partial x_j}$$

nel secondo integrale si ha

$$\int_{c(t_0)} u_i \frac{\partial u_i}{\partial x_k} \frac{\partial x_k}{\partial X_j} dX_j = \int_{c(t_0)} \frac{1}{2} \frac{\partial u_i u_i}{\partial x_k} F_{kj} dX_j = \int_{c(t_0)} \frac{1}{2} \frac{\partial u_i u_i}{\partial x_k} dx_k$$

e per il termine di Stokes

$$\int_{c(t)} \text{grad} \left( \frac{u^2}{2} \right) \cdot \boldsymbol{\tau} dx = \int_{\sigma(t)} \text{rot grad} \left( \frac{u^2}{2} \right) \cdot \mathbf{n} dS \equiv 0$$

Nel caso non si possa applicare il teorema di Stokes (campi non semplicemente connessi), basta assicurarsi che la funzione  $\left( \frac{u^2}{2} \right)$  sia continua su  $c(t)$ . Risulta pertanto

$$\frac{d\Gamma}{dt} = \int_{c(t)} \frac{D\mathbf{u}}{Dt} \cdot \boldsymbol{\tau} dx = \int_{c(t)} \mathbf{a} \cdot \boldsymbol{\tau} dx = \int_{\sigma(t)} \text{rot } \mathbf{a} \cdot \mathbf{n} dS \quad (7.2.3)$$

quindi la condizione perché  $\Gamma$  sia nulla e si mantenga tale è che l'accelerazione ammetta un potenziale

$$\mathbf{a} = \text{grad } \Lambda$$

in modo che  $\text{rot } \mathbf{a} \equiv 0$ , oltre alla  $\Gamma|_{t=0} = 0$  (teorema di persistenza del moto irrotazionale di Kelvin). Vediamo ora in quali condizioni si può esprimere sotto forma di gradiente l'accelerazione data da

$$a_i = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_i} + F_i + \nu \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j \partial x_j} \quad (7.2.4)$$

e in particolare si nota che

- a) il termine viscoso non si può esprimere in forma di gradiente e pertanto deve essere nullo
- b) il termine di pressione  $-\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_i}$  si può esprimere in forma di gradiente se il flusso è barotropico cioè se  $\rho = \hat{\rho}(p)$  è solo funzione della pressione, invece che data dalla forma più generale  $\rho = \hat{\rho}(p, S)$ . In tal caso infatti definita la

$$F(p) = \int \frac{dp}{\rho}$$

si ha

$$\frac{\partial}{\partial x_i} F(p) = \frac{\partial F(p)}{\partial p} \frac{\partial p}{\partial x_i} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_i}$$

Si può facilmente vedere che nel caso di flusso isentropico

$$\vartheta \frac{DS}{Dt} = \frac{Dh}{Dt} - \frac{1}{\rho} \frac{Dp}{Dt} = 0$$

e nel caso stazionario

$$\nabla h = \frac{1}{\rho} \nabla p \quad (7.2.5)$$

- c) il termine di massa  $F_i$ , si può esprimere in forma di gradiente se la forza è conservativa

$$\mathbf{F} = -\nabla \Psi$$

Se le tre condizioni a), b), c) sono verificate, allora

$$\mathbf{a} = -\nabla \int \frac{dp}{\rho} - \nabla \Psi$$

e quindi

$$\frac{d\Gamma}{dt} = \int_{c(t)} \text{rot } \mathbf{a} \cdot \mathbf{n} dS = 0$$

cioè  $\Gamma = \text{cost.}$  lungo il moto e in particolare  $\Gamma = 0$  se  $\Gamma|_{t=0} = 0$ .

Le tre quantità a secondo membro della (7.2.3) se non sono esprimibili in forma di gradiente danno luogo a una variazione di circolazione

$$\frac{d\Gamma}{dt} = \int_c \mathbf{F} \cdot \boldsymbol{\tau} dx - \int_c \frac{\nabla p}{\rho} \cdot \boldsymbol{\tau} dx + \int_c \nu \nabla^2 \mathbf{u} \cdot \boldsymbol{\tau} dx \quad (7.2.6)$$

e quindi a una variazione di  $\zeta$  per la particella in esame.

### 7.3 Equazione di trasporto della vorticità

Si può ricavare a partire dalla (7.2.4) una equazione di trasporto della vorticità che dia il valore puntuale di  $\zeta$  invece che l'integrale sulla particella. Si è già ricavata precedentemente una tale equazione per flussi 2-D a convezione naturale

$$\frac{D\zeta}{Dt} = \nu \nabla^2 \zeta \quad (7.3.1)$$

La forma più generale si ottiene applicando il teorema di Stokes alla (7.2.4) con la successiva eliminazione del comune integrale superficiale, ovvero applicando direttamente l'operatore rotore all'equazione di Navier Stokes, con l'accelerazione nella forma di Lagrange (7.1.2), cioè

$$\nabla \times \left( \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \frac{1}{2} \nabla u^2 - \mathbf{u} \times \boldsymbol{\zeta} \right) = \nabla \times \left( -\frac{1}{\rho} \nabla p + \mathbf{F} + \nu \nabla^2 \mathbf{u} \right) \quad (7.3.2)$$

da cui se si ricava

$$\nabla \times \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} = \frac{\partial \boldsymbol{\zeta}}{\partial t} \qquad \nabla \times \nabla^2 \mathbf{u} = \nabla^2 \boldsymbol{\zeta}$$

$$(\nabla \times \mathbf{u} \times \boldsymbol{\zeta}) = \boldsymbol{\zeta} \cdot \nabla \mathbf{u} + \mathbf{u} \nabla \cdot \boldsymbol{\zeta} - \boldsymbol{\zeta} \nabla \cdot \mathbf{u} - \mathbf{u} \cdot \nabla \boldsymbol{\zeta}$$

ricordando che  $\nabla \cdot \boldsymbol{\zeta} = 0$  e dalla conservazione di massa

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = -\frac{1}{\rho} \frac{D\rho}{Dt} = \rho \frac{D(1/\rho)}{Dt}$$

si ottiene

$$\frac{D\boldsymbol{\zeta}/\rho}{Dt} = \left( \frac{\boldsymbol{\zeta}}{\rho} \right) \cdot \nabla \mathbf{u} + \frac{1}{\rho} \left( \frac{\nabla \rho \times \nabla p}{\rho^2} + \nabla \times \mathbf{F} + \nu \nabla^2 \boldsymbol{\zeta} \right) \quad (7.3.3)$$

che è nota come equazione di Beltrami valida per flussi comprimibili tridimensionali. La (7.3.3) si riduce immediatamente alla (7.3.1) per flussi a  $\rho = \text{cost.}$ , soggetti a forze conservative, se si osserva che nel caso bidimensionale anche il termine  $\left( \frac{\boldsymbol{\zeta}}{\rho} \cdot \nabla \mathbf{u} \right)$ , denominato di “stretching e tilting” o di stiramento dei vortici, è nullo in quanto si ha sempre l’ortogonalità tra  $\boldsymbol{\zeta}$  e  $\nabla \mathbf{u}$ . Questo termine ha invece una grande importanza nei flussi tridimensionali dove forti variazioni di vorticità (quali ad esempio nei fenomeni di tromba d’aria in atmosfera o vortice di scarico in una vasca) sono principalmente indotte dalla presenza di forti gradienti delle componenti del vettore velocità allineati con la direzione del vettore vorticità già presente nel campo. Si ha stretching per la componente parallela e tilting per le componenti ortogonali al vettore vorticità. Si osservi inoltre che la generazione di vorticità dovuta al non parallelismo di  $\nabla \rho$  e  $\nabla p$  si annulla per  $\rho = \hat{\rho}(p)$  e cioè per flussi barotropici.

Analogamente si ha generazione di vorticità per la presenza di forze non conservative quali la forza di Coriolis nello studio di moti atmosferici nel riferimento rotante con la terra, o nell’evoluzione di fluidi conduttori soggetti a campi magnetici.

In assenza di questi due termini la generazione di vorticità è data esclusivamente dalla presenza di corpi solidi e dalla imposizione della condizione al contorno sulla componente tangenziale della velocità. In tale caso, come si vedrà meglio nel capitolo successivo, si forma uno strato vorticoso alla parete che poi diffonde per effetto della viscosità come indicato dall’ultimo termine della (7.3.3). Consideriamo ora il caso in cui siano soddisfatte tutte e tre le condizioni richieste dal teorema di Kelvin, che portano all’annullamento dei tre termini in parentesi nella (7.3.3). Si ha allora una forma semplificata,

ma molto importante della equazione di trasporto della vorticità, nota come equazione di Helmholtz

$$\frac{D\zeta/\rho}{Dt} = \frac{\zeta}{\rho} \cdot \nabla \mathbf{u} \quad (7.3.4)$$

che descrive l'evoluzione di vorticità, già presente nel campo, per effetto della comprimibilità e del termine di stretching e tilting, mantenendo costante la circolazione lungo una linea materiale chiusa. La (7.3.4) si riduce alla (7.1.2) per flusso bidimensionale a densità costante.

L'equazione di Helmholtz presenta una soluzione generale ricavata da Cauchy che in forma indiciale si esprime

$$\frac{\zeta_i}{\rho} = c_j(X) \frac{\partial x_i}{\partial X_j} \quad (7.3.5)$$

dove  $\frac{\partial x_i}{\partial X_j}$  è il termine gradiente di trasposizione e la  $c_j(X)$  può essere trovata scrivendo la (7.3.5) al tempo  $t_0$  nella configurazione di riferimento, dove  $\frac{\partial X_i}{\partial X_j} = \delta_{ij}$

$$\left. \frac{\zeta_i}{\rho} \right|_0 = c_j(X) \delta_{ij} = c_i(X)$$

sostituendo si ha l'espressione

$$\frac{\zeta_i}{\rho} = \left. \frac{\zeta_j}{\rho} \right|_0 \frac{\partial x_i}{\partial X_j} \quad (7.3.6)$$

che descrive l'evoluzione del rapporto  $\frac{\zeta}{\rho}$  in funzione del suo valore al tempo  $t = t_0$  e del tensore gradiente di trasposizione. La (7.3.6) è effettivamente una soluzione dell'equazione di Helmholtz, come si può verificare sostituendola sia a primo membro della (7.3.4) dove si ottiene per la componente  $i$ -esima

$$\frac{D}{Dt} \left( \frac{\zeta_i}{\rho} \right) = \left. \frac{\zeta_j}{\rho} \right|_0 \frac{\partial u_i}{\partial X_j}$$

che a secondo membro dove si ottiene

$$\frac{\zeta_k}{\rho} \frac{\partial u_i}{\partial x_k} = \left. \frac{\zeta_j}{\rho} \right|_0 \frac{\partial x_k}{\partial X_j} \frac{\partial u_i}{\partial x_k} = \left. \frac{\zeta_j}{\rho} \right|_0 \frac{\partial u_i}{\partial X_j} \quad (7.3.7)$$

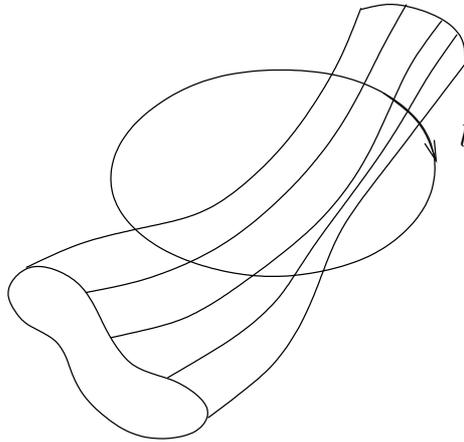
Dalla (7.3.6) si possono ricavare gran parte dei teoremi sul comportamento dei vortici nelle condizioni in cui vale il teorema di Kelvin e quindi anche l'equazione di Helmholtz.

## 7.4 Teoremi sui vortici

Definiamo dapprima una linea vorticoso come una linea che ha in ogni punto tangente parallela al vettore vorticità e quindi in analogia alla definizione di linea di corrente (2.12.7) si ha

$$\frac{dx_1}{\zeta_1} = \frac{dx_2}{\zeta_2} = \frac{dx_3}{\zeta_3} \quad (7.4.1)$$

Un fascio di linee vorticoso costituisce un tubo vorticoso che potrà avere in generale sezione variabile.



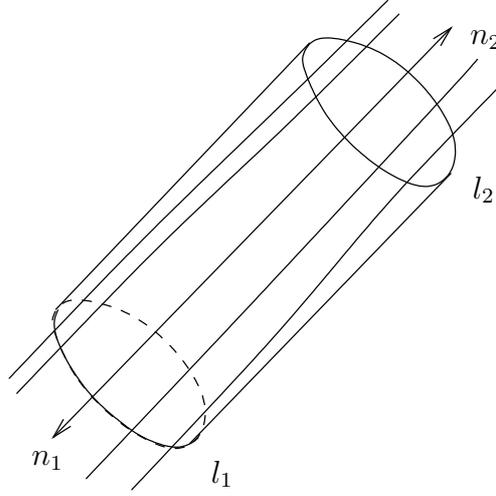
Vediamo subito però che la portata di vorticità, o intensità del vortice, data dalla circolazione su una linea chiusa che circonda il vortice stesso, ovvero tramite il teorema di Stokes, dalla

$$\Gamma = \int_{\sigma_l} \boldsymbol{\zeta} \cdot \mathbf{n} dS$$

è costante lungo il vortice. Tenendo conto infatti che  $\boldsymbol{\zeta}$  è solenoidale, per Gauss vale

$$\int_{\Omega} \nabla \cdot \boldsymbol{\zeta} dV = \int_{\sigma} \boldsymbol{\zeta} \cdot \mathbf{n} dS = 0$$

dove ora  $\sigma$  è una superficie chiusa che circonda un pezzo del vortice stesso.



Essendo nullo il flusso di vorticità per la superficie laterale che è costituita da linee vorticosi, non rimane che concludere (tenendo presente il verso della normale) che

$$\int_{\sigma_{l_1}} \zeta \cdot n dS = \int_{\sigma_{l_2}} \zeta \cdot n dS \quad (7.4.2)$$

e quindi la costanza dell'intensità lungo il tubo vorticoso (Primo teorema di Helmholtz). Se in particolare si considera un valore medio della vorticità per ogni sezione si ha

$$\zeta_1 A_1 = \zeta_2 A_2 \quad (7.4.3)$$

dove  $A_1$  e  $A_2$  sono sezioni normali del tubo vorticoso. Si ha quindi che la vorticità aumenta al diminuire della sezione, che può essere ad esempio generata da uno stiramento del tubo indotto da un gradiente di velocità, come indicato dal termine di stretching della (7.3.4). Si può inoltre dedurre dalla (7.4.2) che un vortice può essere o chiuso (anello vorticoso) o infinitamente lungo non potendo in ogni caso terminare in mezzo al campo.

Il secondo teorema di Helmholtz dice che le linee vorticosi rimangono tali durante la loro evoluzione nel tempo e quindi sono linee materiali.

Questo si può facilmente osservare soffiando ad esempio su un anello di fumo il quale viene convetto con la velocità del campo prima che la viscosità riesca a diffondere la vorticità nelle zone circostanti.

Per dimostrare questo secondo teorema si può considerare una linea vorticoso nella configurazione di riferimento e un vettore ad essa tangente che si esprime

$$dX_j = \zeta_j|_0 d\tau \quad (7.4.4)$$

La sua evoluzione cinematica è data tramite il tensore gradiente di trasposizione la sostituzione della (7.4.4) e l'utilizzazione della soluzione di Cauchy (7.3.6) dalla

$$dx_i = \frac{\partial x_i}{\partial X_j} dX_j = \frac{\partial x_i}{\partial X_j} \zeta_j|_0 d\tau = \frac{\rho_0}{\rho} \zeta_i d\tau \quad (7.4.5)$$

Il vettore considerato si mantiene quindi tangente al vettore vorticità lungo il moto con modulo che varia in funzione del rapporto di densità e quindi le linee vorticosi si comportano come linee materiali nelle ipotesi in cui è valida la soluzione di Cauchy. In particolare se assumiamo una coordinata curvilinea  $s$  corrente lungo la linea vorticosi, possiamo scrivere per un tratto materiale

$$\frac{\Delta s}{\Delta s_0} = \frac{\zeta/\rho}{\zeta_0/\rho_0}$$

e considerando la conservazione di massa ( $\rho A \Delta s = \rho_0 A_0 \Delta s_0$ )

$$\zeta(t) = \frac{\zeta_0 A_0}{A(t)} \quad (7.4.6)$$

si ricava di nuovo la costanza di intensità del vortice, ma questa volta lungo il moto per lo stesso tratto di linea vorticosi, mentre la (7.4.3) esprimeva questa proprietà tra diverse sezioni ad un certo istante di tempo, da un punto di vista puramente cinematico.

Questo risultato, noto come terzo teorema di Helmholtz, si può immediatamente dedurre applicando il teorema di Kelvin ad un circuito che circonda una sezione del vortice per il quale vale

$$\frac{d\Gamma}{dt} = \frac{d}{dt} \oint_c \mathbf{u} \cdot \boldsymbol{\tau} dl = \frac{d}{dt} \int_\sigma \boldsymbol{\zeta} \cdot \mathbf{n} dS = 0$$

## 7.5 Equazioni di Bernoulli e Crocco per campi con vorticità

Si può ottenere una forma di equazione alla Bernoulli anche per flussi a  $\boldsymbol{\zeta} \neq 0$  stazionari, se sono verificate le tre condizioni di validità del teorema di Kelvin. Proiettando infatti l'equazione di Eulero lungo la direzione della velocità, si ha per il termine in vorticità della (7.1.3)

$$\mathbf{u} \cdot (\mathbf{u} \times \boldsymbol{\zeta}) \equiv 0$$

e quindi per condizioni stazionarie  $\frac{D}{Dt}(\ ) = \mathbf{u} \cdot \nabla(\ )$

$$\frac{D}{Dt} \left( \frac{1}{2} u^2 + \Psi + \int \frac{dp}{\rho} \right) = 0$$

e quindi

$$\left(\frac{1}{2}u^2 + \Psi + \int \frac{dp}{\rho}\right) = C(\psi) \quad (7.5.1)$$

cioè il termine in parentesi è costante per ogni linea di corrente ed il valore della costante può essere diversa da una linea all'altra. Nelle condizioni di flusso isentropico richieste per la validità della (7.5.1) si ha per la (7.2.5) che l'energia totale

$$H = \left(h + \frac{1}{2}u^2 + \Psi\right)$$

è costante lungo una linea di corrente ma può avere valori diversi sulle varie linee

$$\nabla H = \nabla h + \frac{1}{2}\nabla u^2 + \nabla \Psi \quad (7.5.2)$$

Se il fluido ha la stessa composizione fisica si possono esprimere relazioni tra funzioni di stato relative a due particelle che stanno percorrendo due linee di corrente diverse

$$\nabla h = \nabla \left(U + \frac{p}{\rho}\right) = \vartheta \nabla S + \frac{1}{\rho} \nabla P$$

che sostituita nella (7.5.2) dà

$$\nabla H = \frac{1}{\rho} \nabla P + \vartheta \nabla S + \frac{1}{2} \nabla u^2 + \nabla \Psi \quad (7.5.3)$$

ma essendo per l'equazione di Eulero in condizioni stazionarie valida la

$$\frac{1}{2} \nabla u^2 + \nabla \Psi + \frac{1}{\rho} \nabla p = \mathbf{u} \times \boldsymbol{\zeta} \quad (7.5.4)$$

combinando la (7.5.3) con la 7.5.4) si ottiene l'importante relazione

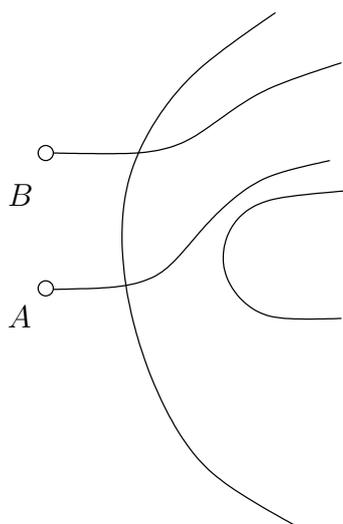
$$\nabla H = \vartheta \nabla S + \mathbf{u} \times \boldsymbol{\zeta} \quad (7.5.5)$$

che è nota come equazione di Crocco nel caso che siano presenti solo gradienti di entropia ma non di energia totale, cioè

$$\vartheta \nabla S = \boldsymbol{\zeta} \times \mathbf{u} \quad (7.5.6)$$

Si deduce dall'equazione di Crocco che se sono presenti gradienti (trasversali rispetto alle linee di corrente) di entropia il moto è necessariamente rotazionale. Si ha in questo caso un flusso isentropico ma non omentropico, cioè l'evoluzione della particella avviene a entropia costante (vale cioè la  $\frac{DS}{Dt} = 0$  lungo il moto) ma l'entropia non è costante nel campo in quanto può assumere valori diversi per altre particelle che percorrono linee di

corrente diverse. Una situazione del genere si presenta ad esempio in moto ipersonico a valle dell'urto curvo generato dalla presenza di un corpo tozzo. In tale caso infatti le due particelle subiscono un incremento di entropia diverso nel passaggio attraverso l'urto (normale e quindi più intenso per  $A$  e obliquo per  $B$ ) e nella evoluzione successiva di tipo isentropico mantengono inalterata la differenza di entropia. Nel campo dietro l'urto pertanto  $\zeta \neq 0$  e pertanto non si può introdurre un potenziale di velocità.



## Bibliografia

1. Lugt, H.J., *Vortex Flow in Nature and Technology*, John Wiley & Sons, New York, 1983.
2. Tritton D.J., *Physical Fluid Dynamics*, Von Nostrand, New York, 1977.
3. Serrin J., "Mathematical Principles of Classical Fluid Mechanics", *Handbuch für Physik*, Band VIII/1, 1963.
4. Batchelor, G.K., *An Introduction to Fluid Dynamics*, Cambridge University Press, 1967.

## Capitolo 8

# Soluzioni esterne: metodi di soluzione

### 8.1 Flussi a potenziale

Si è visto nel capitolo precedente che nell'ambito di soluzioni esterne se si può assumere  $\zeta = 0$  allora si può introdurre il potenziale e nel caso di flusso incomprimibile si ha il sistema

$$\nabla^2 \varphi = 0 \quad \text{con} \quad \frac{\partial \varphi}{\partial n} = -U_0 \cdot \mathbf{n} \quad (8.1.1)$$

da cui si può ricavare il campo cinematico

$$\mathbf{u} = \nabla \varphi$$

e l'equazione di Bernoulli nella forma

$$\left( \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{u^2}{2} + \frac{p}{\rho} + \Psi \right) = \text{cost} \quad (8.1.2)$$

dove  $u$  è il modulo di  $\mathbf{u}$ , da cui si ricava il campo di pressione. Nel caso invece che  $\zeta \neq 0$  nel campo anche se sono verificate le condizioni di Kelvin per cui  $\frac{d\Gamma}{dt} = 0$ , si deve risolvere l'equazione di Eulero o l'equazione di trasporto della vorticità e si hanno modelli di soluzione più complessi, basati su formulazioni in velocità.

Per la soluzione dell'equazione di Laplace con condizioni di Neumann si può adottare un metodo alle differenze finite che opera direttamente sull'equazione differenziale oppure un metodo agli elementi di contorno che discretizza l'equazione integrale corrispondente.

Consideriamo ora la rappresentazione integrale per l'equazione di Laplace già vista nel cap. 5, per il potenziale di perturbazione  $\varphi$  definito da

$$\Phi(\mathbf{x}) = U_0 x_1 + \varphi(\mathbf{x}) \quad (8.1.3)$$

ovvero

$$\mathbf{u} = \nabla\Phi = U_0\mathbf{e}_1 + \nabla\varphi$$

in modo da sottrarre il potenziale della corrente indisturbata e avere velocità di perturbazione nulle sul contorno di una sfera di raggio  $R$  con  $R \rightarrow \infty$ . Si può dimostrare che il contributo di questo contorno è una costante additiva al potenziale  $\varphi$  e quindi un effetto nullo sul campo di velocità (App 8.B). Rimane quindi il contorno sul corpo =  $\partial\chi$  e quindi la rappresentazione integrale:

$$\varphi(\mathbf{x}^*) = \int_{\partial\chi} \left( \varphi \frac{\partial g}{\partial n} - g \frac{\partial \varphi}{\partial n} \right) dS \quad (8.1.4)$$

con  $\mathbf{n}$  normale esterna al dominio occupato dal fluido.



La soluzione fondamentale (o funzione di Green di spazio libero)  $g(\mathbf{x}, \mathbf{x}^*)$  è data dalla

$$\nabla^2 g = \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}^*) \quad (8.1.5)$$

Per  $\mathbf{x}^* \rightarrow \partial\chi$  si ottiene l'equazione integrale

$$c\varphi(\mathbf{x}^*) = \int_{\partial\chi} \left( \varphi(\mathbf{x}^*) \frac{\partial g(\mathbf{x}, \mathbf{x}^*)}{\partial n} - g(\mathbf{x}, \mathbf{x}^*) \frac{\partial \varphi(\mathbf{x})}{\partial n} \right) dS \quad (8.1.6)$$

dove  $c = \frac{1}{2}$  se il contorno è liscio (vedi App 8.B).

Essendo noto  $\frac{\partial \varphi}{\partial n}$  in tutti i punti del contorno

$$\frac{\partial \Phi}{\partial n} = \mathbf{U}_0 \cdot \mathbf{n} + \frac{\partial \varphi}{\partial n} = 0$$

da cui

$$\frac{\partial \varphi}{\partial n} = -\mathbf{U}_0 \cdot \mathbf{n} \quad (8.1.7)$$

si ha un'equazione integrale di seconda specie dalla cui soluzione (tramite elementi di contorno) si può ricavare la  $\varphi$  su tutto il contorno. Tramite la rappresentazione integrale (8.1.4) si ha quindi in forma esplicita la  $\varphi$  e quindi la  $\mathbf{u}$  in tutti i punti del campo. Il procedimento sopra descritto viene abitualmente indicato come *metodo diretto* di soluzione.

Un approccio alternativo, che richiede una manipolazione delle equazioni, porta ai cosiddetti metodi indiretti.

Si considera un campo fluidodinamico fittizio all'interno del corpo descritto dall'equazione  $\nabla^2\varphi' = 0$  per il potenziale  $\varphi'$  che dà luogo a una rappresentazione integrale per un punto del campo esterno al corpo

$$0 = \int_{\partial\chi} \left( \varphi' \frac{\partial g}{\partial n'} - g \frac{\partial \varphi'}{\partial n'} \right) dS \quad (8.1.8)$$

dove  $n'$  è la normale esterna al corpo, per cui vale

$$\frac{\partial}{\partial n} = - \frac{\partial}{\partial n'}$$


Sommando le due rappresentazioni (8.1.4) e (8.1.8) si ottiene

$$\varphi(\mathbf{x}^*) = \int_{\partial\chi} \left[ (\varphi - \varphi') \frac{\partial g}{\partial n} - g \left( \frac{\partial \varphi}{\partial n} - \frac{\partial \varphi'}{\partial n} \right) \right] dS \quad (8.1.9)$$

Per la soluzione del problema in  $\varphi'$  siamo liberi di assegnare una condizione al contorno che può essere su  $\varphi'$  o su  $\frac{\partial \varphi'}{\partial n}$ . In particolare si può porre  $\varphi' = \varphi$  su  $\partial\chi$ ; in corrispondenza si avrà in generale  $\frac{\partial \varphi'}{\partial n} \neq \frac{\partial \varphi}{\partial n}$  per cui si può assumere come incognita proprio questa discontinuità sulla velocità normale (essendo  $\varphi = \varphi'$ , la velocità tangenziale è invece continua)

$$\sigma = \left( \frac{\partial \varphi}{\partial n} - \frac{\partial \varphi'}{\partial n} \right)$$

e la rappresentazione (8.1.9) diviene

$$\varphi(\mathbf{x}^*) = - \int_{\partial\chi} g(\mathbf{x}, \mathbf{x}^*) \sigma(\mathbf{x}) dS \quad (8.1.10)$$

che corrisponde a una formulazione in *semplice strato* in quanto l'incognita  $\sigma(\mathbf{x}^*)$  può essere interpretata come densità della distribuzione superficiale di sorgenti date da  $g$ . Applicando Gauss alla (8.1.5) integrata su un dominio  $\Omega$

$$\int_{\Omega} \nabla^2 g dV = \int_{\partial\Omega} \frac{\partial g}{\partial n} dS = \int_{\Omega} \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}^*) dV = 1$$

quindi la funzione  $g$  può essere considerata come il potenziale di un campo di velocità con flusso unitario attraverso  $\partial\Omega$ , che rappresenta una sorgente di portata unitaria. La funzione di Green di spazio libero  $g(\mathbf{x}, \mathbf{x}^*)$  è quindi interpretabile fisicamente come potenziale di sorgente e la  $\sigma$  come densità di semplice strato.

Analogamente se si assume come condizione al contorno per il problema  $\nabla^2 \varphi' = 0$  la  $\frac{\partial \varphi'}{\partial n} = \frac{\partial \varphi}{\partial n}$  su  $\partial\chi$  per cui si ha in generale  $\varphi' \neq \varphi$  e quindi una discontinuità sulla velocità tangenziale che si può assumere come incognita del problema

$$\mu = (\varphi - \varphi')$$

e la rappresentazione (8.1.9) diviene

$$\varphi(\mathbf{x}^*) = \int_{\partial\chi} \frac{\partial g}{\partial n}(\mathbf{x}, \mathbf{x}^*) \mu(\mathbf{x}) dS \quad (8.1.11)$$

che corrisponde a una formulazione in *doppio strato* in quanto l'incognita  $\mu$  può essere interpretata come densità di una distribuzione superficiale di doppiette date da  $\frac{\partial g}{\partial n}$ . Infatti

$$\frac{\partial g}{\partial n} = \lim_{\Delta n \rightarrow 0} \frac{g_1 - g_2}{\Delta n}$$

è interpretabile fisicamente come il limite del rapporto tra la somma di due sorgenti (una positiva e una negativa) e la loro distanza lungo la normale. La  $\mu(\mathbf{x})$  è la densità di questo strato di doppiette o densità di doppio strato.

Nel caso 3D

$$\frac{\partial g}{\partial n} = -\frac{1}{4\pi} \frac{\partial}{\partial n} \frac{1}{r} = \frac{1}{4\pi} \frac{1}{r^2} \frac{\partial r}{\partial n} = \frac{1}{4\pi} \frac{\boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{n}}{r^3} = \frac{1}{4\pi} \frac{\cos \vartheta}{r^2}$$

nel caso 2D

$$\frac{\partial g}{\partial n} = \frac{1}{2\pi} \frac{\partial}{\partial n} \ln r = \frac{1}{2\pi} \frac{\boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{n}}{r^2} = \frac{1}{2\pi} \frac{\cos \vartheta}{r}$$

Adottando la formulazione indiretta in semplice strato (8.1.10) o in doppio strato (8.1.11) si può sempre ottenere una equazione integrale di Fredholm di seconda specie.

Se si ha un problema di Dirichlet (con  $\varphi$  assegnato su  $\partial\chi$ ) e si adotta una formulazione in doppio strato (8.1.11), si ha

$$\varphi(\mathbf{x}^*) = \int_{\partial\chi} \mu \frac{\partial g}{\partial n} dS \quad (8.1.12)$$

e imponendo la condizione al contorno per  $x^* \rightarrow \partial\chi$  (vedi App 8.A)

$$\varphi(\mathbf{x}^*)|_b = \frac{\mu(\mathbf{x}^*)}{2} + \int_{\partial\chi} \mu(\mathbf{x}) \frac{\partial g(\mathbf{x}, \mathbf{x}^*)}{\partial n} dS(\mathbf{x}) \quad (8.1.13)$$

Se si ha un problema di Neumann (con  $\frac{\partial \varphi}{\partial n}$  assegnato su  $\partial \chi$ ) si adotta una formulazione in semplice strato (8.1.10) si ha

$$\frac{\partial \varphi(\mathbf{x}^*)}{\partial n^*} = - \int_{\partial \chi} \sigma(\mathbf{x}) \frac{\partial g(\mathbf{x}, \mathbf{x}^*)}{\partial n^*} dS(\mathbf{x}) \quad (8.1.14)$$

e imponendo la condizione al contorno (vedi App 8.A)  $x^* \rightarrow \partial \chi$  si ottiene

$$\left. \frac{\partial \varphi(\mathbf{x}^*)}{\partial n^*} \right|_b = + \frac{\sigma}{2}(\mathbf{x}^*) - \int_{\partial \chi} \sigma(\mathbf{x}) \frac{\partial g(\mathbf{x}, \mathbf{x}^*)}{\partial n^*} dS(\mathbf{x}) \quad (8.1.15)$$

L'incognita nelle equazioni (8.1.15) e (8.1.13) è la densità di strato, rispettivamente  $\sigma$  e  $\mu$  e quindi si ha in ambedue i casi una equazione di Fredholm di seconda specie.

Ricavate le densità  $\sigma$  e  $\mu$  dalla (8.1.15) o dalla (8.1.13) si può ottenere  $\varphi$  in tutti i punti  $x^*$  del campo mediante la (8.1.14) o la (8.1.12) rispettivamente.

Con la formulazione diretta (8.1.4) si ottiene invece una equazione di seconda specie per il problema di Neumann e una equazione di prima specie per il problema di Dirichlet.

La discretizzazione delle equazioni integrali mediante elementi di contorno (vedi cap. 5) porta ad un sistema di  $N$  equazioni algebriche in  $N$  incognite, con  $N$  numero di elementi in cui si è diviso il contorno. Il valore della variabile incognita sul contorno si ottiene con l'inversione della matrice dei coefficienti del sistema, che risulta essere piena, pur essendo di dimensioni ridotte rispetto a quelle che si ottengono con un metodo di discretizzazione delle equazioni differenziali nel dominio (es. differenze finite).

## 8.2 Estensione a flussi con vorticità e divergenza localmente non nulle

Finora abbiamo considerato solamente flussi a potenziale, cerchiamo ora di estendere la metodologia in modo da poter includere campi con regioni limitate dove  $\boldsymbol{\zeta} = \nabla \times \mathbf{u} \neq 0$  o  $Q = \nabla \cdot \mathbf{u} \neq 0$ . In particolare consideriamo ancora soluzioni esterne ma con  $\boldsymbol{\zeta} \neq 0$ , cioè campi per cui valgono ancora le tre ipotesi di Kelvin e quindi  $\text{rot } \mathbf{a} = 0$ , però con  $\boldsymbol{\zeta}$  iniziale (generata altrove) la cui dinamica è data dalla equazione di Helmholtz

$$\frac{D\boldsymbol{\zeta}/\rho}{Dt} = \frac{\boldsymbol{\zeta}}{\rho} \cdot \nabla \mathbf{u} \quad (8.2.1)$$

Si può disaccoppiare lo studio cinematico del campo dato da

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = Q \quad \text{e} \quad \nabla \times \mathbf{u} = \boldsymbol{\zeta}$$

una volta nota la posizione e l'intensità sia delle sorgenti di massa che delle zone di vorticità diversa da zero.

Si può adottare per il vettore velocità la decomposizione di Helmholtz

$$\mathbf{u} = \nabla\varphi + \nabla \times \mathbf{A} \quad (8.2.2)$$

con  $\varphi$  potenziale scalare e  $\mathbf{A}$  potenziale vettore. Il campo di velocità si può considerare dato da

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}_p + \mathbf{u}_s + \mathbf{u}_v \quad (8.2.3)$$

dove  $\mathbf{u}_p$  è dato dal campo a potenziale generato dalla corrente indisturbata che investe il corpo (problema esaminato in (8.1.1)),  $\mathbf{u}_s$  è dato dalla presenza delle sorgenti e  $\mathbf{u}_v$  dalla presenza delle zone di vorticità, ambedue considerate nello spazio libero, cioè in assenza del corpo. Si calcolano dapprima  $\mathbf{u}_s$  e  $\mathbf{u}_v$  e poi  $\mathbf{u}_p$  con la condizione al contorno

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{n} = \mathbf{U}_0 \cdot \mathbf{n} + \frac{\partial\varphi}{\partial n} + (\mathbf{u}_s + \mathbf{u}_v) \cdot \mathbf{n} = 0$$

dove  $\varphi$  è ora il potenziale di perturbazione che verrà calcolato da

$$\nabla^2\varphi = 0 \quad (8.2.4)$$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial n} = -\mathbf{U}_0 \cdot \mathbf{n} - (\mathbf{u}_s + \mathbf{u}_v) \cdot \mathbf{n}$$

La velocità dovuta alle sorgenti è esprimibile anch'essa in termini del potenziale (essendo  $\nabla \times \mathbf{u}_s = 0$ ) dato da

$$\varphi_s(x^*) = \int_{\mathbf{R}^3} Q(\mathbf{x})g(\mathbf{x}, x^*)dV \quad (8.2.5)$$

e cioè dall'integrale di volume presente nella rappresentazione integrale per l'equazione di Poisson, non essendo presente il contorno del corpo.

La velocità dovuta alla vorticità soddisfa le

$$\nabla \times \mathbf{u}_v = \boldsymbol{\zeta} \quad (8.2.6)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{u}_v = 0$$

e può essere espressa come

$$\mathbf{u}_v = \nabla \times \mathbf{A} \quad (8.2.7)$$

che sostituita nella prima delle (8.2.6) dà

$$\nabla \times \nabla \times \mathbf{A} = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{A}) - \nabla^2\mathbf{A} = \boldsymbol{\zeta}$$

Essendo  $\mathbf{A}$  definito a meno di un gradiente (cioè  $\mathbf{a} = \mathbf{A}' + \nabla\Psi$  perché  $\nabla \times \nabla\Psi = 0$  e quindi  $\nabla \times \mathbf{A} = \nabla \times \mathbf{A}'$ ) si può sempre scegliere  $\nabla\Psi$  in modo tale che sia soddisfatta la condizione di solenoidalità per il vettore  $\mathbf{A}$

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = \nabla \cdot (\mathbf{A}' + \nabla\Psi) = 0$$

Basta infatti che la  $\psi$  sia soluzione dell'equazione

$$\nabla^2\psi = -\nabla \cdot \mathbf{A}'$$

Il potenziale vettore è quindi dato da

$$\nabla^2\mathbf{A} = -\zeta \quad (8.2.8)$$

la cui soluzione nello spazio libero è

$$\mathbf{A}(\mathbf{x}^*) = - \int_{\mathbf{R}^3} \zeta(\mathbf{x})g(\mathbf{x}, \mathbf{x}^*)dV$$

e quindi la velocità  $\mathbf{u}_v$

$$\mathbf{u}_v(\mathbf{x}^*) = \nabla^* \times \mathbf{A}(\mathbf{x}^*) = \nabla^* \times \int_{\mathbf{R}^3} \frac{\zeta(\mathbf{x})}{4\pi r(\mathbf{x}, \mathbf{x}^*)}dV$$

passando  $\nabla^*$  sotto segno di integrale e tenendo conto che  $\nabla^* \times \zeta(\mathbf{x}) = 0$  si ha

$$\mathbf{u}_v(\mathbf{x}^*) = \frac{1}{4\pi} \int_{\mathbf{R}^3} \frac{\mathbf{r} \times \zeta(\mathbf{x})}{r^3}dV \quad (8.2.9)$$

(dove  $\mathbf{r} \equiv \mathbf{x} - \mathbf{x}^*$  è il vettore posizione), che dà la velocità indotta dalla vorticità  $\zeta$  distribuita nel volume. Se la vorticità  $\zeta$  è distribuita solo su uno strato superficiale  $W$  (strato di vortici) si può definire una densità  $\gamma$

$$\zeta dV = \zeta dndS = \gamma dS$$

dello strato vorticoso e la (8.2.9) diviene

$$\mathbf{u}_v(\mathbf{x}^*) = \frac{1}{4\pi} \int_W \frac{\mathbf{r} \times \gamma}{r^3}dS \quad (8.2.10)$$

Se la vorticità  $\zeta(x)$  è distribuita solo lungo una linea  $L$  (si ha cioè un tubo vorticoso) si può definire una intensità  $K$  del tubo vorticoso (o più semplicemente vortice) tale che

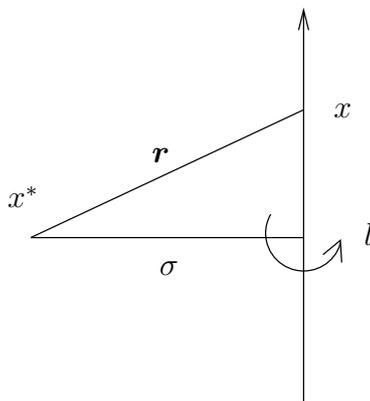
$$\zeta dV = \zeta dA\tau dl = K\tau dl$$

da cui si ottiene la formula di Biot-Savart generalizzata

$$\mathbf{u}_v = \frac{1}{4\pi} \oint \frac{\mathbf{r} \times K\tau}{r^3}dl = \frac{K}{4\pi} \oint \frac{\mathbf{r} \times \tau}{r^3}dl \quad (8.2.11)$$

essendo  $K = \text{cost}$  per il tubo vorticoso.

E' utile ottenere dalla (8.2.11) l'espressione per un vortice rettilineo infinitamente lungo, che dà luogo a un campo di velocità bidimensionale.



Assumendo un vortice in senso antiorario come indicato in figura, la (8.2.11) si può scrivere per il modulo della velocità indotta

$$u_v = \frac{K}{4\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sigma dl}{(\sigma^2 + l^2)^{3/2}} = \frac{K}{4\pi\sigma} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\left(\frac{l}{\sigma}\right)}{\left(1 + \left(\frac{l}{\sigma}\right)^2\right)^{3/2}}$$

posto  $\frac{l}{\sigma} = \tan x$  si ottiene

$$u_v = \frac{K}{4\pi\sigma} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos x dx = \frac{K}{4\pi\sigma} \cdot 2 = \frac{K}{2\pi\sigma} \quad (8.2.12)$$

che è il modulo della velocità indotta dal vortice nel piano normale ad esso a una distanza  $\sigma$ . Al di fuori del tubo vorticoso si può ipotizzare la presenza di un potenziale di velocità  $\varphi_v$

$$\varphi_v = \pm \frac{K}{2\pi} \vartheta$$

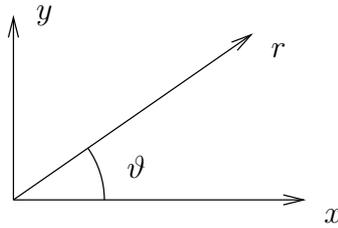
che dà la velocità periferica  $u_\vartheta$  (8.2.12) e il segno - vale per un vortice in senso orario.

Ritornando al problema (8.2.4), dopo essersi calcolati i valori di  $u_s$  e  $u_v$ , in particolare sul contorno del corpo, si può imporre la condizione al contorno e ricavare il potenziale  $\varphi$  che chiude il problema con un metodo numerico agli elementi di contorno. In alternativa si può adottare un metodo semplificato (metodo delle singolarità) che può affrontare lo studio di campi generati da una combinazione lineare di singolarità con un approccio di tipo inverso.

### 8.3 Metodo delle Singularità. Campo attorno al cilindro. Potenza e Resistenza

Consideriamo per semplicità il caso di moto bidimensionale e analizziamo i campi risultanti generati da

- corrente indisturbata  $U_0$  lungo l'asse  $x$



$$\varphi_0 = U_0 x = U_0 r \cos \vartheta \quad (8.3.1)$$

- sorgente posizionata sull'asse delle  $x$

$$\varphi_1 = \frac{\sigma}{2\pi} \ln r \quad (8.3.2)$$

- doppietta allineata con l'asse  $x$

$$\varphi_2 = \frac{\mu}{2\pi} \frac{\partial}{\partial n} (\ln r) = \frac{\mu}{2\pi} \frac{1}{r} \frac{r_n}{r} = \frac{\mu \cos \vartheta}{2\pi r} \quad (8.3.3)$$

- vortice rettilineo  $\perp$  al piano in esame

$$\varphi_3 = \pm \frac{K}{2\pi} \vartheta \quad (8.3.4)$$

Consideriamo dapprima la sovrapposizione di una corrente uniforme (8.3.1) e di una doppietta (8.3.3)

$$\varphi = U_0 r \cos \vartheta + \frac{\mu \cos \vartheta}{2\pi r} \quad (8.3.5)$$

da cui

$$u_r = \frac{\partial \varphi}{\partial r} = U_0 \cos \vartheta - \frac{\mu \cos \vartheta}{2\pi r^2}$$

$$u_\vartheta = \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial \vartheta} = -U_0 \sin \vartheta - \frac{\mu \sin \vartheta}{2\pi r^2}$$

Si ottiene in particolare  $u_r = 0$  su una circonferenza  $r = a$  tale che

$$\frac{\mu}{2\pi} = U_0 a^2 \quad (8.3.6)$$

ed essendo in tale caso  $u_r = \frac{\partial \varphi}{\partial n}$ , si verifica su tale circonferenza la condizione di impermeabilità  $u_n = 0$ . Con il potenziale (8.3.5) e la condizione (8.3.6) si ottiene quindi il flusso attorno a un cilindro di raggio  $a$

$$\varphi = U_0 \cos \vartheta \left( r + \frac{a^2}{r} \right)$$

da cui le componenti della velocità

$$\begin{aligned} u_r &= U_0 \cos \vartheta \left( 1 - \frac{a^2}{r^2} \right) \\ u_{\vartheta} &= -U_0 \sin \vartheta \left( 1 + \frac{a^2}{r^2} \right) \end{aligned}$$

In particolare sul corpo si ottiene oltre a  $u_r = 0$

$$u_{\vartheta} = -2U_0 \sin \vartheta \quad (8.3.7)$$

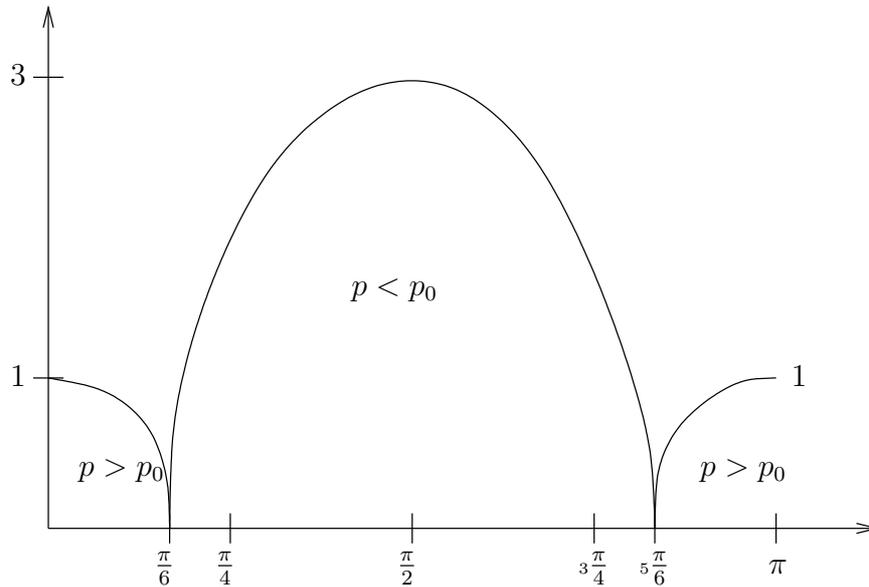
Dall'equazione di Bernoulli si ottiene la pressione

$$p - p_0 = \frac{1}{2} \rho U_0^2 \left[ 1 - \left( \frac{u}{U_0} \right)^2 \right]$$

che alla parete del corpo, dove  $u^2 = u_{\vartheta}^2$ , vale

$$p - p_0 = \frac{1}{2} \rho U_0^2 [1 - 4 \sin^2 \vartheta] \quad (8.3.8)$$

che dà luogo ad un diagramma



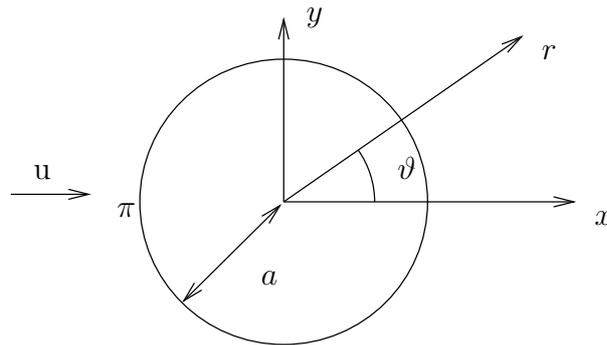
che è simmetrico sia rispetto all'asse  $x$  sia rispetto all'asse  $y$  ed ha due massimi

$$p - p_0 = \frac{1}{2} \rho U_0^2$$

in corrispondenza a  $\vartheta = 0$  e  $\vartheta = \pi$  e due minimi

$$p - p_0 = -\frac{3}{2} \rho U_0^2$$

in corrispondenza a  $\vartheta = \frac{\pi}{2}$  e  $\vartheta = \frac{3}{2}\pi$ .



Data la simmetria del diagramma di pressione la risultante delle forze è nulla e in particolare risultano nulle sia la componente lungo  $y$ , denominata portanza, data da

$$L = - \int_0^{2\pi} (p - p_0) a \sin \vartheta d\vartheta \quad (8.3.9)$$

sia la componente lungo  $x$ , denominata resistenza, data da

$$D = - \int_0^{2\pi} (p - p_0) a \cos \vartheta d\vartheta \quad (8.3.10)$$

L'annullamento della resistenza (paradosso di D'Alambert) è una conseguenza diretta del fatto che abbiamo considerato solo soluzioni esterne. L'annullamento della portanza è dovuto al fatto che si ha in questo caso un campo di pressione simmetrico anche rispetto all'asse delle  $x$ . Per generare una dissimetria si può aggiungere al potenziale (8.3.5), ricavato dalla precedente sovrapposizione, il potenziale  $\varphi_v$  dovuto a un vortice orario posizionato nell'origine. Si ottiene

$$\varphi = U_0 r \cos \vartheta + \frac{\mu}{2\pi} \frac{\cos \vartheta}{r} - \frac{K}{2\pi} \vartheta$$

La condizione su  $\frac{\partial \varphi}{\partial n} = 0$  non cambia in quanto  $\varphi_v$  non contribuisce alla  $u_r$  per cui

$$\varphi = U_0 \cos \vartheta \left( r + \frac{a^2}{r} \right) - \frac{K}{2\pi} \vartheta \quad (8.3.11)$$

$$u_r = U_0 \cos \vartheta \left( 1 - \frac{a^2}{r^2} \right)$$

$$u_\vartheta = -U_0 \sin \vartheta \left( 1 + \frac{a^2}{r^2} \right) - \frac{K}{2\pi} \frac{1}{r}$$

sul cilindro per  $r = a$

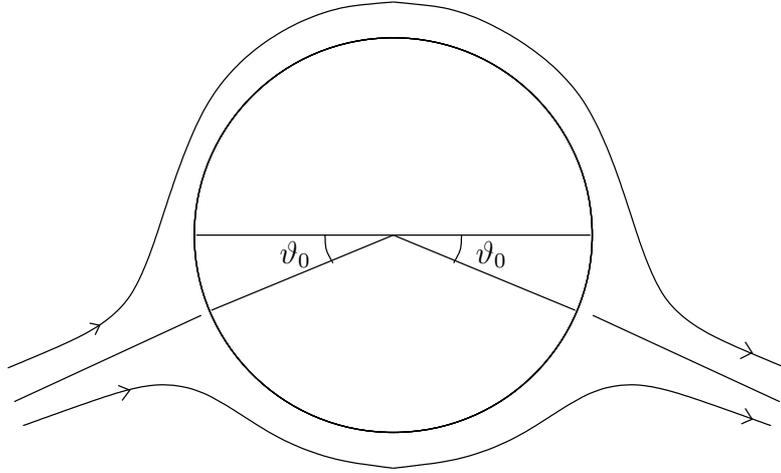
$$u_r = 0 \quad (8.3.12)$$

$$u_\vartheta = -2U_0 \sin \vartheta - \frac{K}{2\pi a} \quad (8.3.13)$$

I punti di ristagno (anche  $u_\vartheta = 0$ ) non si trovano più in corrispondenza a  $\vartheta = 0$  e  $\vartheta = \pi$  ma per

$$\sin \vartheta = -\frac{K}{4\pi U_0 a}$$

Si ha quindi a seconda del valore di  $K$  una configurazione delle linee di corrente del tipo



dove

$$\vartheta_0 = \arcsin \left( -\frac{K}{4\pi U_0 a} \right)$$

per  $\frac{K}{4\pi U_0 a} = 1$  i due punti di ristagno coincidono e sono posizionati in  $\vartheta = \frac{3}{2}\pi$ . Per  $\frac{K}{4\pi U_0 a} > 1$  il punto di ristagno non è più sulla parete del corpo, ma all'interno del campo fluido.

Dall'equazione di Bernoulli alla parete si ottiene

$$\begin{aligned} p - p_0 &= \frac{1}{2} \rho_0 U_0^2 \left[ 1 - \left( -\frac{K}{2\pi a U_0} - 2 \sin \vartheta \right)^2 \right] \\ &= \frac{1}{2} \rho_0 U_0^2 \left[ 1 - \left( \frac{K}{2\pi a U_0} \right)^2 - 4 \sin \vartheta - \frac{4K}{2\pi a U_0} \sin \vartheta \right] \end{aligned} \quad (8.3.14)$$

Se inseriamo questa espressione della pressione negli integrali (8.3.9) e (8.3.10) per il calcolo di portanza e resistenza si ottiene

$$\begin{aligned} D &= 0 \\ L &= \rho_0 U_0 K \end{aligned}$$

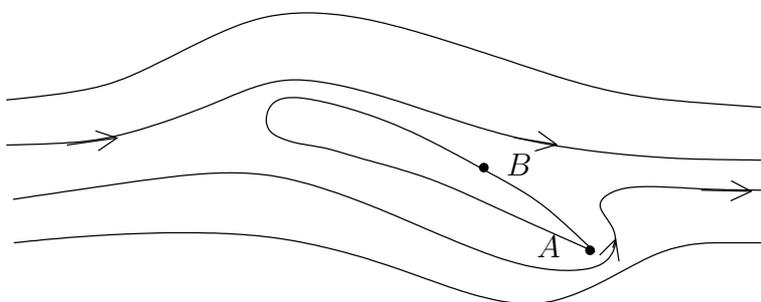
essendo tutti nulli gli integrali dei vari termini che appaiono in (8.3.14)

eccetto  $\int_0^{2\pi} \sin^2 \vartheta d\vartheta = \pi$ .

La dissimmetria del campo fluidodinamico che ha luogo alla portanza si è qui ottenuta mediante la sovrapposizione di un potenziale di vortice puntiforme posizionato nell'origine. Ne deriva una velocità  $u_\vartheta$  in tutto il campo e in particolare nella superficie del corpo.

## 8.4 Profili alari

Lo stesso fenomeno di dissimmetrizzazione del campo fluidodinamico che si è ottenuto per il cilindro rotante, si può generare con un profilo alare, cioè con un profilo dotato di una singolarità geometrica (punta) al bordo di uscita. Se il profilo ha un angolo d'attacco  $\alpha$  rispetto alla corrente indisturbata, la soluzione a potenziale dà un campo le cui linee di corrente sono tracciate in figura

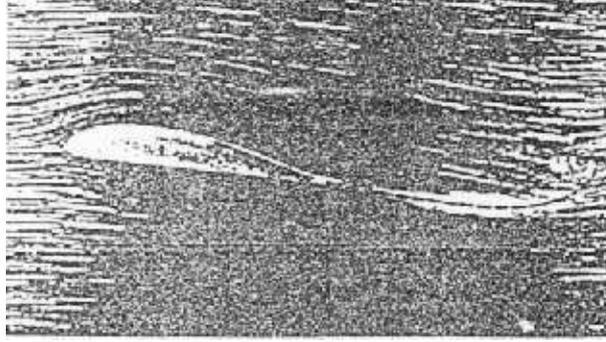


dove i punti di ristagno anteriore e posteriore (punto B) sono allineati e si ha un aggiramento della corrente a potenziale attorno alla punta che induce una velocità divergente per  $r \rightarrow 0$  con  $r$  distanza dalla punta nel campo fluido (vedi App 8.B).

La soluzione a potenziale si realizza istantaneamente al tempo  $t = 0^+$  per una partenza impulsiva del profilo, in quanto le forze viscosive hanno bisogno di tempo per cominciare ad agire e nel campo non è presente della vorticità.

Esaminiamo ora in dettaglio il fenomeno fisico, per tempi immediatamente successivi, sul dorso del profilo vicino alla punta considerando la presenza della soluzione interna di strato limite.

La velocità alla punta A (vedi figura) tende all'infinito con una forte diminuzione di pressione mentre al ristagno B tende a zero con un forte aumento di pressione. La nascita di un gradiente avverso di pressione  $dp/ds > 0$  per le particelle che vanno da A verso B porta rapidamente a una separazione dello strato limite sottostante. In queste queste condizioni non si ha più recupero di pressione e il punto di ristagno B non ha una posizione stabile, se non quando va a coincidere con A. La ricircolazione generata dal distacco dello strato limite dà luogo a un primo vortice che viene rilasciato dando luogo alla scia vorticoso come illustrato nell'esperimento in figura.



Per tenere conto di questo complesso fenomeno indotto dalla presenza dello strato limite, si può imporre nella soluzione esterna la condizione che la velocità alla punta abbia un valore finito (condizione di Kutta). In altri termini ciò equivale al fatto che la vorticità in corrispondenza alla punta sia nulla (caso stazionario) o sia rilasciata nella scia (caso non stazionario) come illustrato nel prossimo paragrafo 8.6.

## 8.5 Flussi rotazionali: formulazione in velocità

Introduciamo ora per il vettore velocità una forma esplicita della decomposizione di Helmholtz (8.2.2) che conduce alla formulazione integrale di Poincaré

$$\begin{aligned} \mathbf{u}(\mathbf{x}^*) &= \nabla^* \left[ - \int_{\partial\Omega} g(\mathbf{u} \cdot \mathbf{n}) dS + \int_{\Omega} gQ dV \right] \\ &= \nabla^* \times \left[ - \int_{\partial\Omega} g(\mathbf{u} \times \mathbf{n}) dS - \int_{\Omega} g\zeta dV \right] \end{aligned} \quad (8.5.1)$$

dove  $Q = \nabla \cdot \mathbf{u}$ ,  $\zeta = \nabla \times \mathbf{u}$ ,  $\Omega$  è il dominio fluido con contorno  $\partial\Omega$  e  $\mathbf{n}$  è la normale esterna.

Tale rappresentazione si può ottenere a partire dall'identità

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}^*) = \nabla^{*2} \int g(\mathbf{x}, \mathbf{x}^*) u(\mathbf{x}) dV$$

essendo  $\nabla^{*2} g \equiv \nabla^2 g = \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}^*)$ . Utilizzando la relazione vettoriale

$$\nabla \times \nabla \times \mathbf{B} = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{B}) - \nabla^2 \mathbf{B}$$

si ottiene

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}^*) = \nabla^* \int_{\Omega} \nabla^* \cdot g \mathbf{u} dV - \nabla^* \times \int_{\Omega} \nabla^* \times g \mathbf{u} dV \quad (8.5.2)$$

Consideriamo il primo integrale, dove

$$\nabla^* \cdot g\mathbf{u} = \nabla^* g \cdot \mathbf{u} = -\nabla g \cdot \mathbf{u}$$

e integrando per parti, ricordando che

$$\nabla \cdot g\mathbf{u} = g\nabla \cdot \mathbf{u} + \nabla g \cdot \mathbf{u}$$

si ottiene

$$\int \nabla^* \cdot g\mathbf{u} dV = - \int_{\partial\Omega} g\mathbf{u} \cdot \mathbf{n} dS + \int_{\Omega} g\nabla \cdot \mathbf{u} dV \quad (8.5.3)$$

Consideriamo ora il secondo integrale della (8.5.2), dove

$$\nabla^* \times g\mathbf{u} = \nabla^* g \times \mathbf{u} = -\nabla g \times \mathbf{u}$$

e integrando per parti, mediante la

$$\nabla g \times \mathbf{u} = \nabla \times g\mathbf{u} - g\nabla \times \mathbf{u}$$

si ha

$$\int_{\Omega} \nabla^* \times g\mathbf{u} dV = - \int_{\partial\Omega} g\mathbf{n} \times \mathbf{u} dS + \int_{\Omega} g\nabla \times \mathbf{u} dV \quad (8.5.4)$$

sostituendo la (8.5.3) e la (8.5.4) nella (8.5.2) si riottiene la (8.5.1) che è una forma esplicita della decomposizione di Helmholtz

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}^*) = \nabla^* \Phi + \nabla^* \times \mathbf{A}$$

con

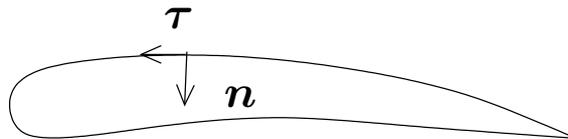
$$\Phi(\mathbf{x}^*) = \left[ - \int_{\partial\Omega} g(\mathbf{u} \cdot \mathbf{n}) dS + \int_{\Omega} g(\nabla \cdot \mathbf{u}) dV \right]$$

e

$$\mathbf{A}(\mathbf{x}^*) = \left[ - \int_{\partial\Omega} g(\mathbf{u} \times \mathbf{n}) dS - \int_{\Omega} g(\nabla \times \mathbf{u}) dV \right]$$

Applichiamo questa rappresentazione dapprima al caso già considerato di flusso bidimensionale attorno a un corpo con  $\zeta = Q = 0$ .

Si assume la normale  $\mathbf{n}$  esterna al campo fluido e la tangente  $\boldsymbol{\tau}$



tale che

$$\boldsymbol{\tau} \times \mathbf{n} = \mathbf{k}$$

risulta uscente dal foglio. Sostituendo

$$\mathbf{u} \times \mathbf{n} = u_\tau \mathbf{k}$$

si ottiene

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}^*) = -\nabla^* \int_{\partial\Omega} g u_n dS - \nabla^* \times \mathbf{k} \int_{\partial\Omega} g u_\tau dS \quad (8.5.5)$$

Sviluppando il prodotto vettoriale si hanno i due termini

$$\nabla^* \times \mathbf{k} \int_{\partial\Omega} g u_\tau dS = \boldsymbol{\tau} \frac{\partial}{\partial n^*} \int_{\partial\Omega} u_\tau g dS - \mathbf{n} \frac{\partial}{\partial \tau^*} \int_{\partial\Omega} u_\tau g dS$$

Se si fa tendere ora il punto  $\mathbf{x}^*$  al contorno del corpo e si proietta l'equazione sulla normale e la tangente al corpo nel punto cui tende  $\mathbf{x}^*$  si ottiene, come per le rappresentazioni precedenti

$$\frac{1}{2} u_n^* + \int_{\partial\Omega} u_n \frac{\partial g}{\partial n^*} dS = -\frac{\partial}{\partial \tau^*} \int_{\partial\Omega} u_\tau g dS \quad (8.5.6)$$

per la proiezione sulla normale e

$$\frac{1}{2} u_\tau^* + \int_{\partial\Omega} u_\tau \frac{\partial g}{\partial n^*} dS = -\frac{\partial}{\partial \tau^*} \int_{\partial\Omega} u_n g dS \quad (8.5.7)$$

per la proiezione sulla tangente della velocità  $\mathbf{u}(\mathbf{x}^*)$ .

Le due equazioni integrali possono avere come incognita o la  $u_n$  o la  $u_\tau$  a seconda della condizione al contorno che si impone. In particolare la proiezione normale (8.5.6) da una equazione integrale di seconda specie in  $u_n$  e di prima specie in  $u_\tau$ . Al contrario la proiezione tangenziale (8.5.7) dà un'equazione integrale di seconda specie in  $u_\tau$  e di prima specie in  $u_n$ .

## 8.6 Flussi attorno a corpi portanti

Per la soluzione esterna di un flusso attorno ad un corpo si deve imporre  $\mathbf{u} \cdot \mathbf{n} = -\mathbf{U}_0 \cdot \mathbf{n}$  con  $\mathbf{u}$  velocità di perturbazione. Pertanto se vogliamo risolvere una equazione di seconda specie adottiamo la (8.5.7) con incognita  $u_\tau$ . La soluzione di questa equazione si può porre nella forma

$$u_\tau = u_\tau^p + \alpha u_\tau^0 \quad (8.6.1)$$

Infatti l'equazione ammette una e una sola autosoluzione che si ottiene risolvendo il problema omogeneo

$$\frac{1}{2}u_\tau^{0*} + \int_{\partial\Omega} u_\tau^0 \frac{\partial g}{\partial n^*} dS = 0$$

equivalente all'equazione che si ha per un problema di Neumann con dati omogenei. Con la (8.5.7) si può affrontare il problema di flusso stazionario attorno ad un profilo alare per il quale si può imporre al bordo d'uscita ( $TE$ ) la condizione di Kutta

$$\gamma = [u_\tau^+ - u_\tau^-]_{TE} = 0 \quad (8.6.2)$$

dove con  $+$  e  $-$  si sono indicati il bordo superiore e il bordo inferiore del profilo rispettivamente. La condizione (8.6.2) che si può esprimere nella forma

$$(u_\tau^p + \alpha u_\tau^0)_{TE}^+ = (u_\tau^p + \alpha u_\tau^0)_{TE}^- \quad (8.6.3)$$

consente di determinare  $\alpha$  e quindi la soluzione  $u_\tau$ . In altri termini la (8.6.3) fornisce un'equazione aggiuntiva al sistema che si ottiene dalla discretizzazione della (8.5.7) consentendone la soluzione. Nota la  $u_\tau$  si può calcolare la circolazione attorno al profilo

$$\Gamma_b = \oint u_\tau dl$$

e quindi la forza portante.

Nel caso di flusso non stazionario (2D) corrispondente a partenza subitanea del profilo o variazione di assetto in manovra si ha rilascio di vorticità dal bordo di uscita. In questo caso si ha vorticità  $\zeta = \zeta \mathbf{k} \neq 0$  nella scia e bisogna considerare nella (8.5.1) anche il termine

$$-\nabla^* \times \mathbf{k} \int_{\Omega} g \zeta dV$$

che essendo non nullo solo lungo la superficie vorticoso che rappresenta (in questa approssimazione di soluzione esterna) la scia come discontinuità di velocità tangenziale, si può esprimere

$$-\nabla^* \times \mathbf{k} \int_{\Omega} g \zeta dV = \nabla^* \times \mathbf{k} \int_W g \gamma dS \quad (8.6.4)$$

dove  $W$  indica la superficie della scia e  $\gamma$  l'intensità dello strato vorticoso

$$\gamma = u_\tau^+ + u_\tau^- \equiv [u_\tau] \quad (8.6.5)$$

La stessa espressione (8.6.4) si può ricavare pensando la scia come un prolungamento del corpo e quindi come fluido con vorticità, estraneo però al campo  $\Omega$  che stiamo considerando. Sulla scia si ha infatti  $[u_n] = 0$  e

$[u_\tau] = \gamma \neq 0$ . La (8.5.1) diviene quindi procedendo come per ottenere la (8.5.5)

$$u(x^*) = -\nabla^* \int_{\partial\Omega} g u_n dS - \nabla^* \times \mathbf{k} \int_{\partial\Omega} u_\tau g dS - \nabla^* \times \mathbf{k} \int_W \gamma g dS \quad (8.6.6)$$

e per  $x^* \rightarrow \partial\Omega$  si ottiene, analogamente a prima, per la proiezione tangenziale

$$\frac{1}{2} u_\tau(x^*) + \int_{\partial\Omega} u_\tau \frac{\partial g}{\partial n^*} dS + \int_W \gamma \frac{\partial g}{\partial n^*} dS = -\frac{\partial}{\partial \tau^*} \int_{\partial\Omega} u_n g dS \quad (8.6.7)$$

che è l'equazione da risolvere per ricavare la  $u_\tau$  sul corpo. Oltre alla  $u_n$  in questo caso deve essere nota la  $\gamma$  lungo tutta la scia, che va quindi calcolata con una equazione che descriva il trasporto della vorticità della scia. E' quindi necessario ricavare la velocità  $\mathbf{w}$  dei punti appartenenti alla scia. Per  $x^* \rightarrow W$  e proiettando sulla normale alla scia in quel punto si ottiene

$$u_n^* + \int_{\partial\Omega} u_n \frac{\partial g}{\partial n^*} dS = \frac{\partial}{\partial \tau^*} \int_{\partial\Omega} u_\tau g dS + \frac{\partial}{\partial \tau^*} \int_W \gamma g dS \quad (8.6.8)$$

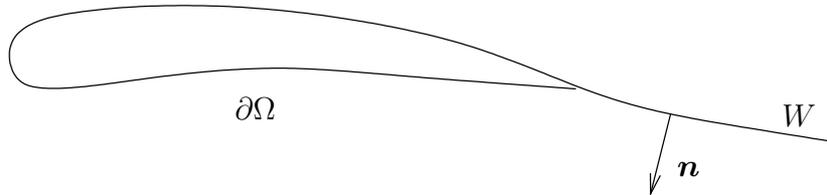
Si ha quindi lo stesso valore di  $u_n$  tendendo a  $W$  da sopra o da sotto e quindi

$$w_n = u_n^+ = u_n^-$$

Proiettando invece sulla tangente si ottiene

$$u_\tau^* + \int_{\partial\Omega} u_\tau \frac{\partial g}{\partial n^*} dS = -\frac{\partial}{\partial \tau^*} \int_{\partial\Omega} u_n g dS - \frac{\partial}{\partial n^*} \int_W \gamma g dS \pm \frac{\gamma}{2}$$

dove il termine  $\frac{\gamma}{2}$  ha segno positivo o negativo a seconda che si provenga da sopra ( $u_\tau^+$ ) o da sotto ( $u_\tau^-$ ), avendo definito la normale uscente verso il basso



Si ha quindi un valore univoco della velocità tangenziale dei punti di scia se si definisce

$$w_\tau = \frac{1}{2}(u_\tau^+ + u_\tau^-)$$

da cui

$$w_\tau = -\frac{\partial}{\partial \tau^*} \int_{\partial \Omega} u_n g dS - \frac{\partial}{\partial n^*} \int_{\partial \Omega} u_\tau g dS - \frac{\partial}{\partial n^*} \int_W \gamma g dS \quad (8.6.9)$$

In conclusione attraverso la scia si ha  $[u_n]_-^+ = 0$  e  $[u_\tau]_-^+ \neq 0$ , mentre il vettore velocità  $\mathbf{w}$  è dato da

$$\mathbf{w} = \frac{1}{2}(\mathbf{u}^+ + \mathbf{u}^-) \quad (8.6.10)$$

## 8.7 Modello di scia

La configurazione della scia è data dall'insieme dei punti materiali che a un tempo  $\sigma \leq t$  sono passati per il bordo d'uscita  $\mathbf{x}_{TE}$  e quindi

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}_w(\sigma, t) \quad 0 \leq \sigma \leq t \quad (8.7.1)$$

con  $\mathbf{x}_w(\sigma, \sigma) = \mathbf{x}_{TE}$ .

Al tempo  $t$  la scia si estende dal bordo di uscita  $\mathbf{x}_{TE} = \mathbf{x}_w(t, t)$  al punto terminale  $\mathbf{x}_{TW} = \mathbf{x}_w(0, t)$  che, nello schema considerato, è passato all'istante iniziale ( $t = 0$ ) da  $\mathbf{x}_{TE}$ . La scia si può quindi vedere come una linea di fumo, dove il punto  $\mathbf{x}_0$  della definizione (1.12.9) è qui dato da  $\mathbf{x}_{TE}$ . L'equazione cinematica per i punti della scia individuati nella (8.7.1) dal parametro  $\sigma$ , è data in forma lagrangiana da

$$\frac{\partial}{\partial t} \mathbf{x}_w(\sigma, t) = \mathbf{w}(\sigma, t) \quad (8.7.2)$$

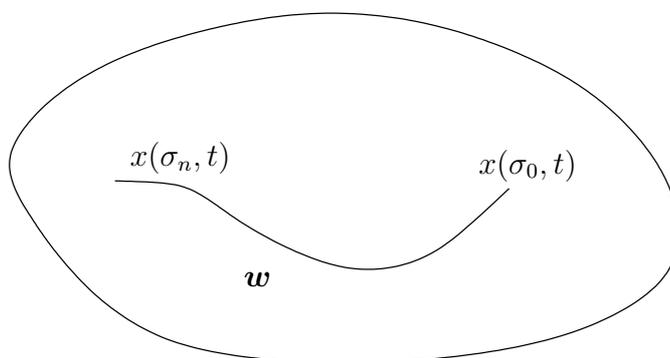
che determina la nuova configurazione della scia una volta nota la velocità nei punti di scia  $\mathbf{w}$  dalle (8.6.8) e (8.6.9).

Si deve determinare ora il valore della  $\gamma = [u_\tau]_-^+$  lungo la scia, utilizzando un'equazione dinamica di trasporto della vorticità. Consideriamo un tratto di superficie vorticoso in un campo bidimensionale e un circuito molto grande che la inglobi, su cui calcoliamo la circolazione in forma lagrangiana

$$\Gamma(t) = \int_{W(t)} \gamma dS = \int_{\sigma_0}^{\sigma_n} \gamma(\sigma, t) J(\sigma, t) d\sigma \quad (8.7.3)$$

dove  $\gamma(\sigma, t)$  è l'intensità dello strato vorticoso in  $\mathbf{x}_w(\sigma, t)$  e  $J(\sigma, t)$  è lo Jacobiano della linea supporto della scia vorticoso definita da

$$J = \left| \frac{\partial \mathbf{x}_w}{\partial \sigma} \right| \quad \text{con } J > 0 \quad (8.7.4)$$



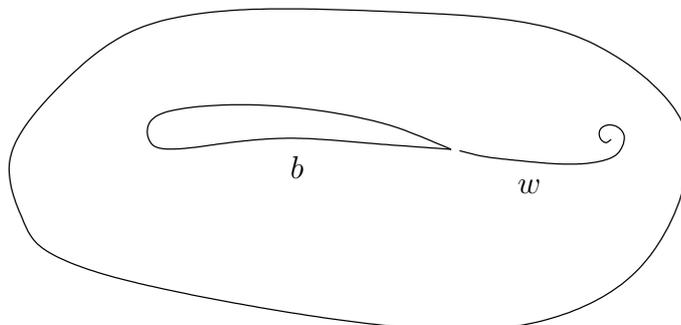
che ha le dimensioni di una velocità e dà, in termini di rapporto incrementale, la variazione di posizione relativa di due punti della scia rispetto alla differenza  $\Delta\sigma$  tra i due corrispondenti tempi di emissione e quindi la variazione di lunghezza di un pannello durante l'evoluzione.

Per il teorema di Kelvin si ha per il circuito considerato  $\frac{d\Gamma}{dt} = 0$  e quindi utilizzando la forma lagrangiana di  $\Gamma$

$$\frac{\partial}{\partial t}[\gamma(\sigma, t)J(\sigma, t)] = 0 \quad (8.7.5)$$

da cui

$$\gamma(\sigma, t)J(\sigma, t) = \gamma(\sigma, \sigma)J(\sigma, \sigma) \quad (8.7.6)$$



Calcoliamo ora la circolazione, sempre su un circuito molto grande che inglobi ora sia il corpo sia la scia

$$\Gamma(t) = \Gamma_b + \int_W \gamma dS$$

per il quale vale ancora  $\frac{d\Gamma}{dt} = 0$  e se  $\Gamma|_{t=0} = 0$

$$\Gamma_b(t) = - \int_W \gamma dS = - \int_0^t \gamma(\sigma, t)J(\sigma, t)d\sigma \quad (8.7.7)$$

Consideriamo che per un tratto di scia in evoluzione libera vale la (8.7.6), si può calcolare la circolazione con

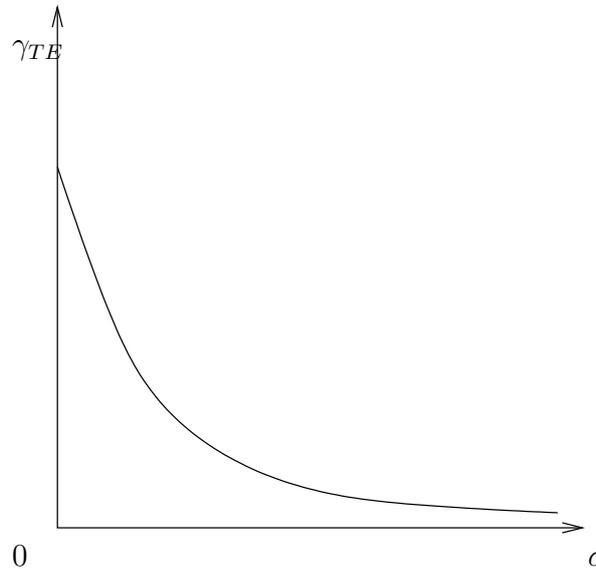
$$\Gamma(t) = - \int_0^t \gamma(\sigma, \sigma) J(\sigma, \sigma) d\sigma \quad (8.7.8)$$

cioè sommando, nella versione discreta, tutti i contributi di vorticità rilasciati in tempi successivi dal bordo d'uscita.

Se deriviamo la (8.7.7) rispetto al tempo si ha, tenendo conto della (8.7.5) e del teorema fondamentale del calcolo integrale

$$\begin{aligned} \frac{d\Gamma_b}{dt} &= -\gamma(t, t) J(t, t) \\ &= -\gamma_{TE} J(t, t) \end{aligned} \quad (8.7.9)$$

Si ha quindi un flusso stazionario, per cui la portanza non varia, solo per  $\gamma_{TE} = 0$  come ricavato precedentemente con la condizione di Kutta. Se calcoliamo il valore di  $\gamma$  rilasciato nel tempo per una partenza subitanea di un profilo si ottiene il diagramma in figura



dove  $\gamma_{TE}$  ha valore massimo per  $\sigma = 0$  e decresce rapidamente verso il valore nullo corrispondente al caso stazionario.

## 8.8 Schema di soluzione

Tornando alla soluzione del sistema che si ottiene dalla discretizzazione della (8.6.7), con il modello di scia appena descritto si può calcolare l'integrale

esteso alla scia, una volta nota la sua configurazione mediante la (8.7.2) e il valore di  $\gamma(\sigma, t)$ . Per quest'ultimo si utilizza la (8.7.6) con

$$\gamma(\sigma, \sigma) \equiv \gamma_{TE} = \lim_{x^\pm \rightarrow TE} [u_\tau(x^+, \sigma) - u_\tau(x^-, \sigma)] \quad (8.8.1)$$

dove il limite è fatto dalla parte del corpo e il rapporto  $J(\sigma, t)/J(\sigma, \sigma)$  tiene conto dello stiramento della linea di supporto della scia nel tempo e può essere calcolato, una volta nota l'evoluzione cinematica della scia. La condizione di raccordo (8.8.1) garantisce che la  $\gamma(\sigma, t)$  sia una funzione continua passando dal corpo alla scia e quindi non vi sia una ricircolazione al bordo d'uscita.

Mediante la (8.7.7) o in modo più semplice la (8.7.8) si può calcolare il valore di  $\Gamma_b(t)$  che soddisfa la condizione di Kelvin

$$\Gamma_b + \Gamma_w = 0$$

e che fornisce la condizione

$$\Gamma_b = \int u_\tau dl = \int u_\tau^p dl + \alpha \int u_\tau^c dl = -\Gamma_w \quad (8.8.2)$$

necessaria per ricavare  $\alpha$  in (8.7.1) e risolvere quindi il sistema.

La (8.8.2) è quindi corrispondente alla condizione di Kutta (8.6.2) valida per il caso stazionario, e consente di ottenere una soluzione unica per il sistema in esame nel caso di flusso transitorio.

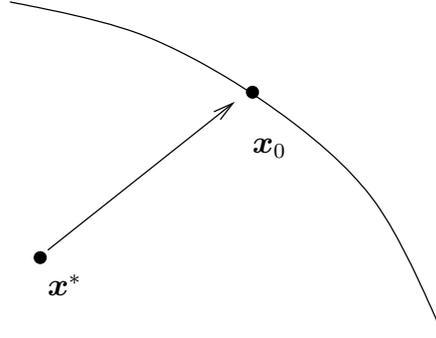
## Appendice 8.A - Limite per $x^* \rightarrow \partial\Omega$ della rappresentazione integrale

Abbiamo visto che sia  $g$  che  $\frac{\partial g}{\partial n}$  sono divergenti per  $r \rightarrow 0$  cioè per  $x^* \rightarrow x$  come accade nel caso che  $x^* \rightarrow \partial\Omega$ .

Consideriamo dapprima la rappresentazione integrale in forma diretta (8.1.4) ed esaminiamo il comportamento del termine in  $\varphi \frac{\partial g}{\partial n}$  che possiamo porre nella forma

$$\int_{\partial\Omega} \varphi \frac{\partial g}{\partial n} dS = \int_{\partial\Omega} (\varphi - \varphi_0) \frac{\partial g}{\partial n} dS + \int_{\partial\Omega} \varphi_0 \frac{\partial g}{\partial n} dS \quad (8.A.1)$$

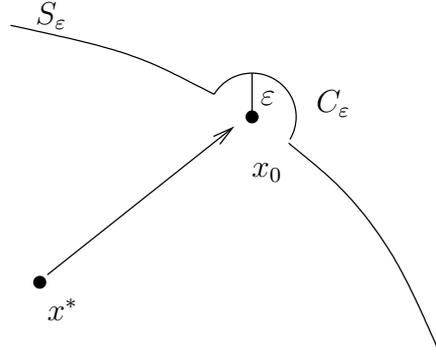
dove  $\varphi_0 = \varphi(\mathbf{x}_0)$  e  $\mathbf{x}_0$  è il punto del contorno di  $\partial\Omega$  dove tende  $x^*$  nel processo di limite



Si può dimostrare che il primo integrando è una funzione continua anche in  $x_0$  in quanto  $(\varphi - \varphi_0) \rightarrow 0$  e  $\frac{\partial g}{\partial n} \rightarrow \infty$  per  $x \rightarrow 0$  sulla superficie  $\partial\Omega$ . Il secondo integrale si può suddividere in due parti

$$\int_{\partial\Omega} \varphi_0 \frac{\partial g}{\partial n} dS = \int_{S_\varepsilon} \varphi_0 \frac{\partial g}{\partial n} dS + \int_{C_\varepsilon} \varphi_0 \frac{\partial g}{\partial n} dS$$

dove  $S_\varepsilon$  è il contorno  $\partial\Omega$  tranne l'area di un piccolo disco di raggio  $\varepsilon$  (in 3D) mentre  $C_\varepsilon$  è la superficie di una semisfera con centro  $x_0$  e raggio  $\varepsilon$ .



Se si considera ora il lim dei due contributi

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{S_\varepsilon} \varphi_0 \frac{\partial g}{\partial n} dS = \int_S \varphi_0 \frac{\partial g}{\partial n} dS \quad (8.A.2)$$

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{C_\varepsilon} \varphi_0 \frac{\partial g}{\partial n} dS = \varphi_0 \frac{1}{4\pi} \int_{C_\varepsilon} \frac{\cos \vartheta}{r^2} dS = \frac{\varphi_0}{2} \quad (8.A.3)$$

ricordando che  $\int_{C_\varepsilon} \frac{\cos \vartheta}{r^2} dS = \int_{C_\varepsilon} d\omega$ , dove  $d\omega$  rappresenta l'angolo solido della superficie  $C_\varepsilon$

Sostituendo la (2) e la (3) nella (1) si ha al limite per  $x^* \rightarrow \partial\Omega$

$$\lim_{x^* \rightarrow \partial\Omega} \int_{\partial\Omega} \varphi \frac{\partial g}{\partial n} dS = \int_{\partial\Omega} \varphi \frac{\partial g}{\partial n} dS + \frac{\varphi_0}{2} \quad (8.A.4)$$

Se consideriamo l'altro termine della rappresentazione integrale  $\int g \frac{\partial \varphi}{\partial n} dS$  e procedendo analogamente si ottiene

$$\lim_{\mathbf{x}^* \rightarrow \partial\Omega} \int_{\partial\Omega} g \frac{\partial \varphi}{\partial n} dS = \int_{\partial\Omega} g \frac{\partial \varphi}{\partial n} dS \quad (8.A.5)$$

essendo

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{C_\varepsilon} g dS = -\frac{2\pi\varepsilon^2}{4\pi\varepsilon} = 0$$

Sostituendo nella rappresentazione integrale si ha per  $\mathbf{x}^* \rightarrow \partial\Omega$  l'equazione integrale

$$\frac{\varphi(\mathbf{x}^*)}{2} = \int_{\partial\Omega} \varphi \frac{\partial g}{\partial n} dS - \int_{\partial\Omega} g \frac{\partial \varphi}{\partial n} dS \quad (8.A.6)$$

che coincide con la (8.1.6)

In modo analogo si può procedere, anche se con qualche maggiore difficoltà, nel caso di rappresentazione di semplice e di doppio strato. In questo caso non essendo  $\sigma$  e  $\mu$  definiti al di fuori della superficie di contorno, è necessario considerare  $\partial\Omega = S_\varepsilon + D_\varepsilon$  dove  $D_\varepsilon$  è il disco di raggio  $\varepsilon$ , senza più avvalersi della semisfera  $C_\varepsilon$  dove non sarebbero definite le quantità in esame.

In particolare consideriamo la rappresentazione in doppio strato (8.1.12)

$$\varphi(\mathbf{x}^*) = \int_{\partial\Omega} \mu \frac{\partial g}{\partial n} dS$$

che riscriviamo per valutare il limite per  $\mathbf{x}^* \rightarrow \partial\Omega$ , come

$$\varphi(\mathbf{x}^*) = \int_{\partial\Omega} (\mu - \mu_0) \frac{\partial g}{\partial n} + \int_{\partial\Omega} \mu_0 \frac{\partial g}{\partial n} dS \quad (8.A.7)$$

per quanto riguarda il primo degli integrali valgono le stesse considerazioni fatte precedentemente. Il secondo si suddivide in  $S_\varepsilon + D_\varepsilon$

$$\int_{\partial\Omega} \mu_0 \frac{\partial g}{\partial n} dS = \int_{S_\varepsilon} \mu_0 \frac{\partial g}{\partial n} dS + \int_{D_\varepsilon} \mu_0 \frac{\partial g}{\partial n} dS \quad (8.A.8)$$

ed essendo  $S_\varepsilon + D_\varepsilon$  una superficie chiusa se  $\mathbf{x}^* \rightarrow \partial\Omega$  dall'interno si ha

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left[ \int_{S_\varepsilon} \frac{\partial g}{\partial n} dS + \int_{D_\varepsilon} \frac{\partial g}{\partial n} dS \right] = 1 \quad (8.A.9)$$

Dato che per  $\varepsilon \rightarrow 0$  l'angolo solido sotteso da  $S_\varepsilon$  è  $2\pi$  (in 3D)

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{4\pi} \int_{S_\varepsilon} \frac{\cos \vartheta}{r^2} dS = \frac{1}{2}$$

e quindi per la (8.A.9) deve essere

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \mu_0 \int_{D_\varepsilon} \frac{\partial g}{\partial n} dS = \frac{\mu_0}{2} \quad (8.A.10)$$

considerando inoltre che per  $x^*$  ormai sulla  $\partial\Omega$

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{S_\varepsilon} \mu_0 \frac{\partial g}{\partial n} dS = \int_S \mu_0 \frac{\partial g}{\partial n} dS \quad (8.A.11)$$

Sostituendo la (8.A.10) e la (8.A.11) nella (8.A.7) si ha l'equazione integrale per  $x^* \rightarrow \partial\Omega$

$$\varphi(x^*) = \frac{\mu(x^*)}{2} + \int_{\partial\Omega} \mu \frac{\partial g}{\partial n} dS \quad (8.A.12)$$

che coincide con la (8.1.13).

Nell'ultimo caso di rappresentazione in semplice strato (8.1.10)

$$\varphi(x^*) = - \int_{\partial\Omega} \sigma g dS$$

si procede ancora in maniera analoga facendo attenzione, che per imporre la condizione al contorno

$$\frac{\partial \varphi}{\partial n^*} = - \int_{\partial\Omega} \sigma \frac{\partial g}{\partial n^*} dS \quad (8.A.13)$$

il nucleo diviene  $\frac{\partial g}{\partial n^*}$  invece che  $\frac{\partial g}{\partial n}$  come prima.

Introduciamo allora oltre che a  $\sigma_0$  anche  $\mathbf{n}_0 = \mathbf{n}(x)$  e procediamo per la (8.A.1) osservando che al limite per  $x^* \rightarrow x_0$

$$\frac{\partial g}{\partial n^*} = \mathbf{n}_0 \cdot \nabla^* g = [\mathbf{n} + (\mathbf{n}_0 - \mathbf{n})] \cdot \nabla g$$

Procedendo ora in modo analogo al caso di doppio strato, anche se con più termini, si ottiene

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \sigma_0 \int_{D_\varepsilon} \frac{\partial g}{\partial n} dS = \frac{\sigma_0}{2}$$

e quindi l'equazione integrale per  $x^* \rightarrow \partial\Omega$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial n^*} = \sigma \frac{\mu(x^*)}{2} - \int_{\partial\Omega} \sigma \frac{\partial g}{\partial n^*} dS$$

che coincide con la (8.1.15).

## Appendice 8.B - Contributo del contorno all'infinito

La rappresentazione integrale del potenziale per il flusso attorno a un corpo nello spazio libero, si esprime (nella forma diretta)

$$\varphi(x^*) = \int_{\partial\Omega_b} \left( \varphi \frac{\partial g}{\partial n} - g \frac{\partial \varphi}{\partial n} \right) dS + \int_{\partial\Omega_\infty} \left( \varphi \frac{\partial g}{\partial n} - g \frac{\partial \varphi}{\partial n} \right) dS \quad (8.B.1)$$

dove  $\partial\Omega_b$  è il contorno del corpo e  $\partial\Omega_\infty$  è il contorno dell'infinito. Per comodità consideriamo una sfera  $S_R$  di raggio  $R$  con  $R \rightarrow \infty$ . Si può vedere facilmente che il contributo di questa parte del contorno si riduce ad una costante e quindi si può trascurare essendo il potenziale in ogni caso definito a meno di una costante.

Il primo termine dell'integrale su  $\partial\Omega_\infty \equiv \partial S_R$

$$\int_{\partial S_R} \varphi \frac{1}{4\pi R^2} dS = \frac{1}{4\pi} \int_{\partial S_R} \varphi d\Omega = \bar{\varphi} \quad (8.B.2)$$

con  $d\Omega$  angolo solido.

Il secondo termine

$$\frac{1}{4\pi R} \int_{\partial S_R} \frac{\partial \varphi}{\partial n} dS = \frac{m}{4\pi R} \quad (8.B.3)$$

essendo per la divergenza nulla

$$\int_{\partial S_R} \frac{\partial \varphi}{\partial n} dS = \int_{\partial\Omega_b} \frac{\partial \varphi}{\partial n} dS = m \quad (8.B.4)$$

il flusso in volume uscente dal corpo.

Esprimendo il flusso della sfera come

$$\int_{\partial S_R} \frac{\partial \varphi}{\partial n} dS = \frac{4\pi}{4\pi} \int_{\partial S_R} R^2 \frac{\partial \varphi}{\partial R} dS = 4\pi R^2 \frac{\partial}{\partial R} \frac{1}{4\pi} \int_{\partial S_R} \varphi d\Omega = m$$

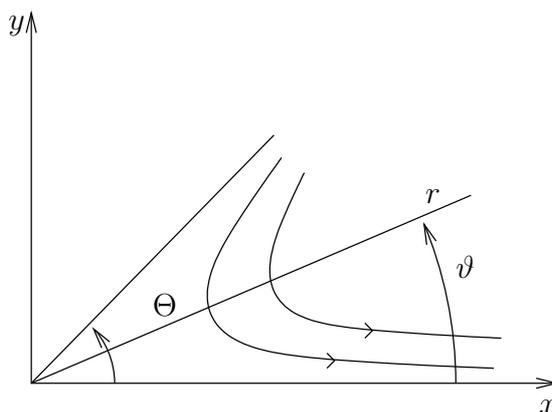
da cui  $\frac{\partial}{\partial R} \bar{\varphi} = \frac{m}{4\pi R^2}$  e integrando

$$\bar{\varphi} = -\frac{m}{4\pi R} + c \quad (8.B.5)$$

Sommando i due termini si ha che l'integrale nella superficie  $\partial\Omega_\infty$  si riduce a una costante.

## Appendice 8.C - Soluzione esterna per il flusso intorno ad un diedro

Cerchiamo la soluzione del flusso a potenziale nella regione riportata in figura. La formulazione del problema è:



$$\nabla^2 \varphi = 0 \quad \text{in } \Omega \quad (8.C.1)$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial n} = 0 \quad \text{su } \partial\Omega \quad (8.C.2)$$

in cui  $\Omega$  è la regione compresa nell'angolo  $\partial\Omega$  individuato dall'asse delle  $x$  e dalla retta  $y = \tan(\Theta)x$ .

Utilizzando coordinate polari l'equazione di Laplace (8.C.1) si scrive:

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial \varphi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \Theta^2} = 0 \quad (8.C.3)$$

Cerchiamo la soluzione nella forma (metodo della separazione delle variabili):

$$\varphi(r, \vartheta) = f(r)g(\vartheta) \quad (8.C.4)$$

Sostituendo in (8.C.3) si ottiene:

$$\frac{r}{f} \frac{d}{dr} \left( r \frac{df}{dr} \right) = -\frac{1}{g} \frac{d^2 g}{d\vartheta^2} \quad (8.C.5)$$

Poichè primo e secondo membro sono funzioni, rispettivamente, delle sole  $r$  e delle sole  $\vartheta$ , dovrà essere:

$$\frac{r}{f} \frac{d}{dr} \left( r \frac{df}{dr} \right) = \pm m^2 \quad (8.C.6)$$

$$\frac{1}{g} \frac{d^2 g}{d\vartheta^2} = \mp m^2 \quad (8.C.7)$$

in cui  $m^2$  è un numero positivo.

Risolviendo la (8.C.7) troviamo:

$$g(\vartheta) = \begin{cases} A \cos(m\vartheta) + B \sin(m\vartheta) & (8.C.8.a) \\ A \cosh(m\vartheta) + B \sinh(m\vartheta) & (8.C.8.b) \end{cases}$$

Imponiamo ora la condizione al contorno. Si osservi che, per la geometria in esame,

$$\frac{\partial \varphi}{\partial n} = f(r) \frac{1}{r} \frac{dg(\vartheta)}{d\vartheta} \quad (8.C.9)$$

Affinché sia soddisfatta la (8.C.3) si deve avere:

$$\frac{dg}{d\vartheta} = 0 \quad \text{per } \vartheta = 0, \vartheta = \Theta \quad (8.C.10)$$

Evidentemente le (8.C.10) non possono essere soddisfatte dalla (8.C.8.b), mentre utilizzando la (8.C.8.a) (che equivale a scegliere il segno positivo in (8.C.6), negativo in (8.C.7) si ha:

$$m[-A \sin(m\vartheta) + B \cos(m\vartheta)] = 0 \quad \text{per } \vartheta = 0, \Theta \quad (8.C.11)$$

Per  $\vartheta = 0$  si ottiene  $B = 0$ , mentre per  $\vartheta = \Theta$  si ha:

$$\sin(m\Theta) = 0 \quad (8.C.12)$$

ovvero:

$$m\Theta = \pi \Rightarrow m = \pi/\Theta \quad (8.C.13)$$

Per determinare la soluzione rimane da calcolare la  $f$  che soddisfa l'equazione (va scelto il segno positivo in (8.C.6)):

$$r \frac{d^2 f}{dr^2} + \frac{df}{dr} - m^2 \frac{f}{r} = 0 \quad (8.C.14)$$

Si verifica immediatamente che la soluzione della (8.C.14) è del tipo:

$$f(r) = r^m \quad (8.C.15)$$

La soluzione del problema è quindi:

$$\varphi(r, \vartheta) = f(r)g(\vartheta) = Ar^m \cos(m\vartheta) \quad (8.C.16)$$

Dalla (8.C.16) la componente tangenziale  $u_r = \frac{\partial \varphi}{\partial r}$  di velocità alla parete  $\vartheta = 0$  è data da:

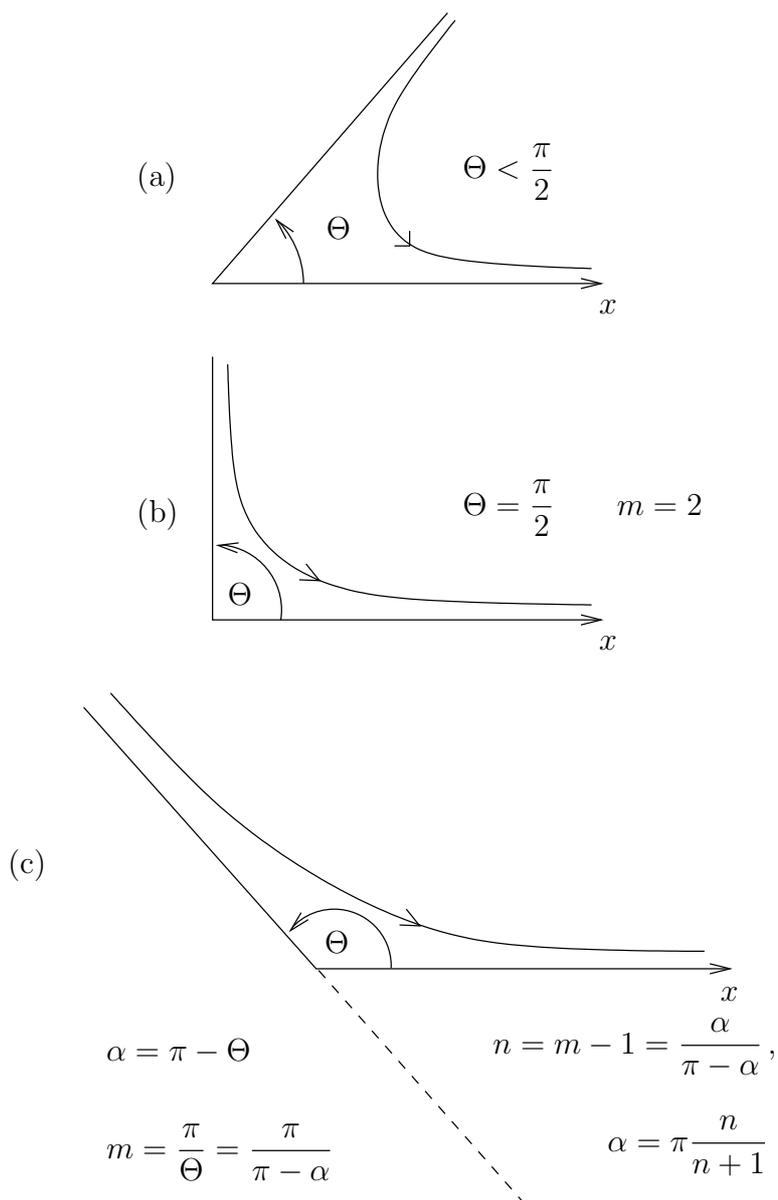
$$u_r = mA r^{m-1} \cos(m\vartheta)|_{\vartheta=0} = mA r^{m-1} = cr^n \quad (8.C.17)$$

in cui  $c = mA$ ,  $n = m - 1$

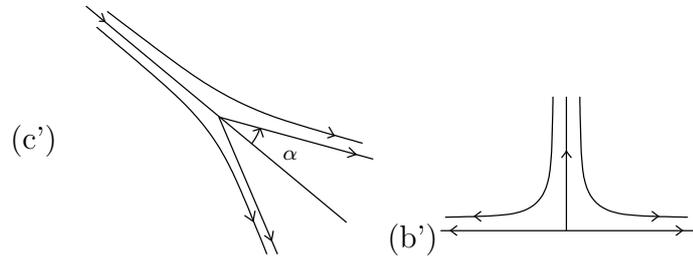
1. Per  $0 < \Theta \leq \pi$  si ha  $m > 1$ ,  $n > 0$ . Non si ha singolarità in  $u_r$  per  $r \rightarrow 0$ .

Dall'equazione di Bernoulli  $p = p_0 + \frac{1}{2}u_0^2 - \frac{1}{2}u^2 = p_0 + \frac{1}{2}u_0^2 - \frac{1}{2}[(u_r^2) + (u_\vartheta^2)] = p_0 + \frac{1}{2}u_0^2 - \frac{1}{2}u_r^2$  si vede che anche la pressione  $p$  alla parete è regolare per  $r \rightarrow 0$ .

La geometria è del tipo:



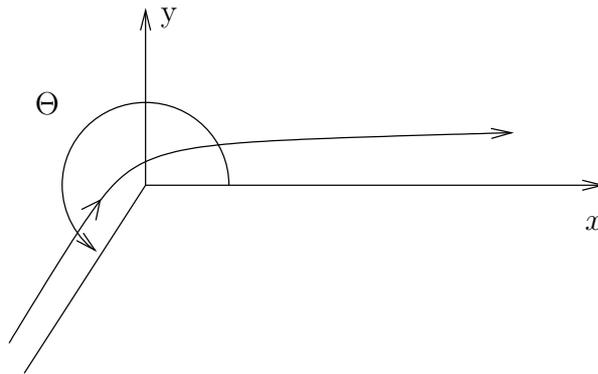
È interessante notare che, per simmetria, dai casi (b) e (c) si ottengono le soluzioni esterne per geometrie del tipo:



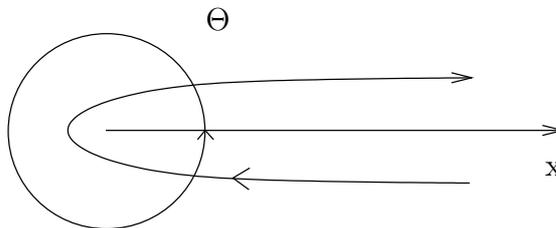
Il caso (b') è il flusso in prossimità di un punto di ristagno mentre il caso (c') è il flusso intorno ad un diedro di un'apertura  $\alpha$ .

2. Per  $\pi < \Theta \leq 2\pi$  si ha  $\frac{1}{2} < m < 1$ ,  $-\frac{1}{2} < n < 0$ . È presente una singolarità per  $r \rightarrow 0$  in  $u_r$  e di conseguenza in  $p = p_0 + \frac{1}{2}u_0^2 - \frac{1}{2}u_r^2$ . Si osserva che  $p = O(r^{-\alpha})$  con  $\alpha = 2n > -1$ .

La singolarità nella pressione è quindi integrabile.



3. Per  $\Theta = 2\pi$ ,  $m = \frac{1}{2}$ ,  $n = -\frac{1}{2}$ ,  $p = O(1/r)$  per  $r \rightarrow 0$ . In questo caso la singolarità nella pressione non è integrabile.



Questo caso rappresenta l'aggiramento di una punta.

In generale la componente tangenziale di velocità alla parete è data dalla (8.C.17).

Utilizzando la simbologia adottata per lo strato limite si ha:

$$U_e = c\xi^n$$

per cui nell'equazione di Faulkner-Skan  $\beta = \frac{\xi}{U_e} \frac{dU_e}{d\xi} = n$ .

La soluzione per il flusso interno al punto di ristagno corrispondente a  $\Theta = \pi/2$ ,  $m = 2$ ,  $n = 1$ ,  $U_e = c\xi$  può essere ottenuta anche in modo diretto.

Detto  $(x_0, y_0)$  il punto di ristagno (in cui  $\vec{U} = 0$ ), sviluppando il campo di velocità in serie di Taylor nell'intorno di  $(x_0, y_0)$  si ha:

$$U = U_0 + \left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_0 (x - x_0) + \left. \frac{\partial u}{\partial y} \right|_0 (y - y_0) + \dots$$

$$V = V_0 + \left. \frac{\partial v}{\partial x} \right|_0 (x - x_0) + \left. \frac{\partial v}{\partial y} \right|_0 (y - y_0) + \dots$$

Poichè il campo che interessa (soluzione esterna) è irrotazionale e soleinoidale si ha:

$$\left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_0 + \left. \frac{\partial v}{\partial y} \right|_0 = 0 \quad \Rightarrow \quad \text{Posto } \left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_0 = a \quad \Rightarrow \quad \left. \frac{\partial v}{\partial y} \right|_0 = -a$$

$$\left. \frac{\partial v}{\partial x} \right|_0 - \left. \frac{\partial u}{\partial y} \right|_0 = 0 \quad \Rightarrow \quad \text{Posto } \left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_0 = b \quad \Rightarrow \quad \left. \frac{\partial v}{\partial y} \right|_0 = b$$

Vicino al punto di ristagno quindi (essendo  $u_0 = v_0 = 0$ )

$$u \simeq a\tilde{x} + b\tilde{y} \quad \tilde{x} = x - x_0 \quad \tilde{y} = y - y_0$$

$$v \simeq b\tilde{x} - a\tilde{y}$$

Scegliendo l'asse  $x$  parallelo alla parete la condizione di impermeabilità  $v(\tilde{x}, 0) = 0$  richiedo che sia  $b = 0$ . Ne segue che la componente tangenziale la velocità è dato da:

$$u \simeq a\tilde{x} = c\xi$$

## Bibliografia

1. Batchelor, G.K., *An Introduction to Fluid Dynamics*, Cambridge University Press, 1967.
2. Tychonov, Somorsky *Equazioni della fisica matematica*, MIR
3. Sobolev, S.L., *Partial Differential Equations of Mathematical-Physics*, Pergamon Press, Oxford, 1964.

4. Lighthill, J., *An Informal Introduction to Theoretical Fluid Mechanics*, Oxford University Press, 1986.

## Capitolo 9

# Soluzioni esterne per flussi compressibili

### 9.1 Introduzione

Fino a questo momento abbiamo sempre trascurato gli effetti della variazione di densità dovuti alla pressione. In questo capitolo esamineremo invece alcuni casi in cui le variazioni di densità divengono rilevanti. Questa parte della dinamica dei fluidi viene chiamata *gasdinamica*. Verranno esaminati brevemente sia problemi di flussi interni (flussi in condotti con una descrizione quasi-monodimensionale) che di flussi esterni (flussi intorno a profili sottili). Gli effetti della comprimibilità sono determinati dal valore del *numero di Mach*,

$$M = \frac{u}{c} \quad (9.1.1)$$

definito come il rapporto tra la velocità del fluido e la velocità del suono locale. Tra i vari criteri di classificazione dei flussi compressibili c'è anche quello basato su numero di Mach, e viene normalmente in questo modo

- Flussi incomprimibili:  $M < 0.3$ .
- Flussi subsonici:  $0.3 < M < 1.0$
- Flussi transonici:  $0.8 < M < 1.2$
- Flussi supersonici:  $1.0 < M < 3.0$
- Flussi ipersonici:  $M > 3.0$

### 9.2 La velocità del suono

Nel paragrafo precedente abbiamo fatto uso del concetto di velocità del suono, cerchiamo ora una espressione per questa grandezza, ossia della velocità di propagazione di piccoli disturbi di pressione. In figura viene mostrato

un infinitesimo disturbo piano di pressione che si propaga verso destra con velocità  $c$  in un fluido in quiete. Le proprietà del fluido davanti all'onda sono  $p, \vartheta$  e  $\rho$ . Quelle del fluido dietro l'onda sono  $p + dp, \vartheta + d\vartheta$  e  $\rho + d\rho$ , mentre la sua velocità  $du$  è diretta verso sinistra, questa è cioè un'onda di compressione che come vedremo a breve deve muovere il fluido nella direzione di propagazione.

Mettiamoci ora in un sistema di riferimento stazionario sovrapponendo una velocità  $c$  diretta verso destra. Quindi la velocità del fluido a destra dell'onda sarà  $c - du$  mentre quella a sinistra  $c$ . Consideriamo un'area  $A$  sul fronte d'onda, il bilancio di massa ci dice che

$$A\rho c = A(\rho + d\rho)(c - du) \quad (9.2.1)$$

che trascurando i termini del second'ordine diventa

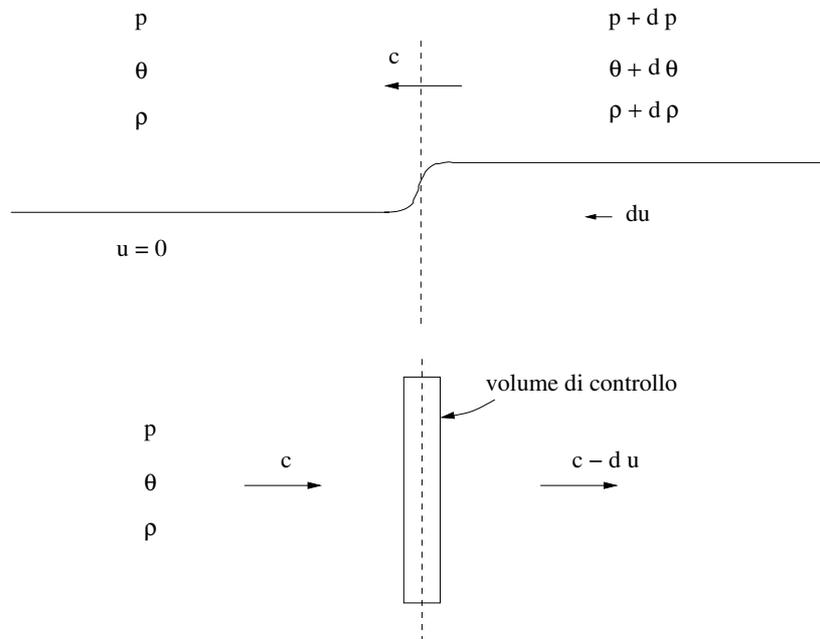
$$du = c \left( \frac{d\rho}{\rho} \right) \quad (9.2.2)$$

ciò mostra che se  $du > 0$  allora  $d\rho > 0$  cioè in un'onda di compressione il fluido si muove con l'onda. Appliciamo ora la conservazione della quantità di moto

$$pA - (p + dp)A = A\rho c(c - du) - A\rho cc, \quad (9.2.3)$$

semplificando otteniamo

$$dp = \rho c du. \quad (9.2.4)$$



Eliminando  $du$  tra le equazioni (9.2.2) e (9.2.4) otteniamo

$$c^2 = \frac{dp}{d\rho} \quad (9.2.5)$$

dal momento che le variazioni di pressione e temperatura sono infinitamente piccole il processo è quasi-reversibile, inoltre è anche abbastanza rapido da poter essere considerato adiabatico. Nel limite di onda infinitesima il processo può quindi essere considerato reversibile e adiabatico cioè isoentropico, quindi la velocità del suono si può esprimere come

$$c = \sqrt{\left(\frac{dp}{d\rho}\right)_s} \quad (9.2.6)$$

### 9.3 Equazioni

In tutto questo capitolo, a parte dove viene esplicitamente detto il contrario, consideriamo i termini viscosi e conduttivi  $\rightarrow 0$ . Per cui le equazioni sono:

- equazione di conservazione della quantità di moto

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} + u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_i} \quad (9.3.1)$$

- equazione di conservazione di massa

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_i}(\rho u_i) = 0 \quad (9.3.2)$$

- equazione di bilancio dell'entropia

$$\rho \frac{DS}{Dt} = 0 \quad (9.3.3)$$

essendo per soluzioni esterne  $\left(\sigma_{ij} \frac{\partial u_i}{\partial x_j} - \frac{\partial q_i}{\partial x_i}\right) = 0$  e si assume inoltre  $Q = 0$

- equazione di conservazione dell'energia per  $\frac{\partial p}{\partial t} = 0$

$$\rho \frac{D}{Dt} \left( U + \frac{p}{\rho} + \frac{1}{2} u_i u_i + \Psi \right) = 0$$

, se le forze esterne sono trascurabili, si ha

$$H = h + \frac{1}{2} u_i u_i = \text{cost.} \quad \text{lungo il moto}$$

Consideriamo dapprima un fluido a velocità nulla soggetto a un piccolo disturbo tale da far variare la densità, rispetto alla densità  $\rho_0$  del campo indisturbato, con la

$$\rho = \rho_0(1 + \sigma) \quad (9.3.4)$$

e

$$\frac{\rho_0 \sigma}{\rho} \ll 1$$

con  $\sigma$  piccola variazione percentuale di  $\rho$  dovuta al disturbo. Sono queste le ipotesi di base dell'Acustica. Inserendo la (9.3.4), la (9.3.2) diviene

$$\frac{\partial \rho_0(1 + \sigma)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_i} [\rho_0(1 + \sigma)u_i] = 0 \quad (9.3.5)$$

Si può assumere che le  $u_i$  che nascono in seguito alla variazione di densità  $\rho_0 \sigma$  siano dello stesso ordine di grandezza (cioè proporzionali a  $\sigma$ ). Trascurando i termini di ordine  $\sigma^2$  (quindi anche  $\sigma u_i$ ) la (9.3.5) diviene

$$\frac{\partial \sigma}{\partial t} + \frac{\partial u_i}{\partial x_i} = 0 \quad (9.3.6)$$

Analogamente l'eq. (9.1.1) diviene

$$\rho_0(1 + \sigma) \frac{\partial u_i}{\partial t} + u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} = - \frac{\partial p}{\partial x_i} \quad (9.3.7)$$

e quindi

$$\rho_0 \frac{\partial u_i}{\partial t} = - \frac{\partial p}{\partial x_i} \quad (9.3.8)$$

Essendo per la (9.3.3)  $p = p(\rho)$

$$\frac{\partial p}{\partial x_i} = \frac{dp}{d\rho} \Big|_{s=\text{cost}} \rho_0 \frac{\partial \sigma}{\partial x_i} \simeq \left( \frac{dp}{d\rho} \right)_0 \rho_0 \frac{\partial \sigma}{\partial x_i}$$

dove  $\left( \frac{dp}{d\rho} \right)_0$  calcolata per fluido indisturbato sappiamo essere la velocità del suono e la indichiamo con

$$c_0^2 = \left( \frac{dp}{d\rho} \right)_0 \quad (9.3.9)$$

sostituendo (9.3.9) in (9.3.8)

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} = -c_0^2 \frac{\partial \sigma}{\partial x_i} \quad (9.3.10)$$

Consideriamo il sistema (9.3.6)–(9.3.10) di equazioni lineari nelle variabili  $\sigma, u_i$ . Combinando le due equazioni si ottiene una equazione di secondo ordine in  $\sigma$ .

Derivando la (9.3.6) rispetto a  $t$

$$\frac{\partial^2 \sigma}{\partial t^2} = -\frac{\partial^2 u_i}{\partial x_i \partial t} \quad (9.3.11)$$

e la (9.3.10) rispetto a  $x_i$

$$\frac{\partial^2 u_i}{\partial x_i \partial t} = -c_0^2 \frac{\partial^2 \sigma}{\partial x_i \partial x_i} \quad (9.3.12)$$

sommando le (9.3.11) e (9.3.12) si ottiene

$$\frac{\partial^2 \sigma}{\partial t^2} - c_0^2 \frac{\partial^2 \sigma}{\partial x_i \partial x_i} = 0$$

ovvero

$$\frac{\partial^2 \sigma}{\partial t^2} = c_0^2 \nabla^2 \sigma \quad (9.3.13)$$

che è un'equazione iperbolica (equazione delle onde).

Se il moto è irrotazionale, essendo  $p = p(\rho)$ , e le altre ipotesi necessarie verificate, allora

$$u = \text{grad } \Phi$$

sostituendo in (9.3.10)

$$\frac{\partial}{\partial x_i} \left( \frac{\partial \Phi}{\partial t} + c_0^2 \sigma \right) = 0$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} + c_0^2 \sigma = f(t)$$

quindi incorporando  $f(t)$  in  $\Phi$

$$\sigma = -\frac{1}{c_0^2} \frac{\partial \Phi}{\partial t}$$

e sostituendo in (9.3.6)

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_j \partial x_j} - \frac{1}{c_0^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} = 0 \quad (9.3.14)$$

che è identica alla (9.3.13) per  $\sigma$ . Ovviamente  $\Phi$  è determinato a meno di una arbitraria ma irrilevante  $f(t)$  in quanto interessa solo

$$u_i = \frac{\partial \Phi}{\partial x_i}$$

Risolta l'equazione per  $\sigma$  o  $\Phi$ , la  $\rho$  e la  $p$  seguono dalle

$$\rho = \rho_0(1 + \sigma) = \rho_0 \left( 1 - \frac{1}{c_0^2} \frac{\partial \Phi}{\partial t} \right)$$

e

$$p - p_0 = c_0^2(\rho - \rho_0) = c_0^2 \rho_0 \sigma = -\rho_0 \frac{\partial \Phi}{\partial t}$$

ovviamente la  $c_0$  va calcolata a partire da una equazione di stato che lega  $p$  e  $\rho$ .

Ad esempio

$$\frac{p}{p_0} = \left( \frac{\rho}{\rho_0} \right)^\gamma \quad \text{e quindi} \quad c_0^2 = \left( \frac{dp}{d\rho} \right)_0 = \gamma \frac{p_0}{\rho_0}$$

essendo

$$p = \frac{p_0}{\rho_0^\gamma} \rho^\gamma = k \rho^\gamma \quad \text{e} \quad \frac{dp}{d\rho} = k \gamma \rho^{\gamma-1} = k \gamma \frac{\rho^\gamma}{\rho} = \gamma \frac{p}{\rho}$$

## 9.4 Soluzione dell'equazione delle onde

Analizziamo prima l'equazione per il caso unidimensionale

$$\frac{\partial^2 \sigma}{\partial x^2} = \frac{1}{c_0^2} \frac{\partial^2 \sigma}{\partial t^2} \quad (9.4.1)$$

che è risolta dalla

$$\sigma = f_1(x - c_0 t) + f_2(x + c_0 t) \quad (9.4.2)$$

infatti indicando con

$$\xi = x - c_0 t$$

$$\eta = x + c_0 t$$

i termini che appaiono nella (9.4.1) si possono esprimere

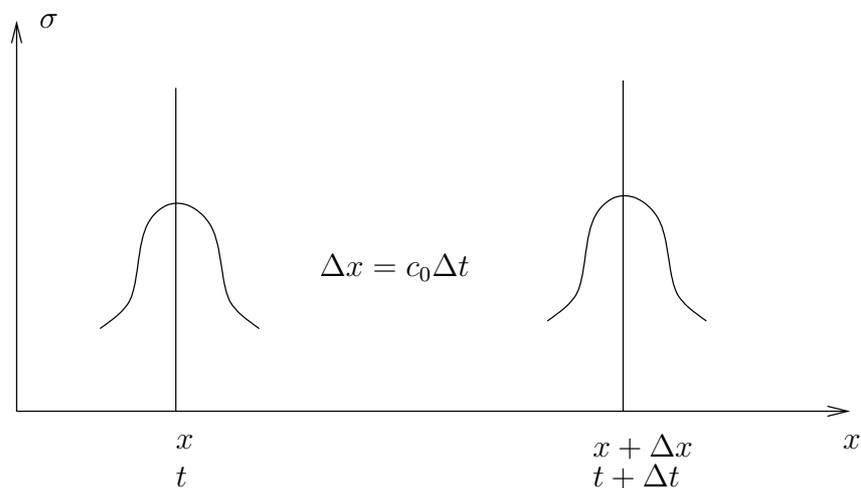
$$\frac{\partial^2 \sigma}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 f_1}{\partial \xi^2} \left( \frac{\partial \xi}{\partial t} \right)^2 + \frac{\partial^2 f_2}{\partial \eta^2} \left( \frac{\partial \eta}{\partial t} \right)^2$$

$$\frac{\partial^2 \sigma}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 f_1}{\partial \xi^2} \left( \frac{\partial \xi}{\partial x} \right)^2 + \frac{\partial^2 f_2}{\partial \eta^2} \left( \frac{\partial \eta}{\partial x} \right)^2$$

e sostituendo, si verifica che la (9.4.2) è soluzione dell'equazione

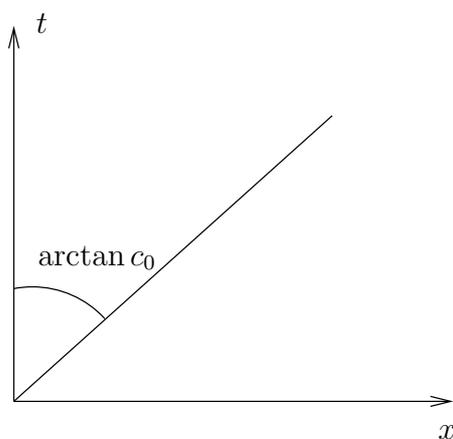
$$\frac{\partial^2 f_1}{\partial \xi^2} c_0^2 - c_0^2 \frac{\partial^2 f_1}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 f_2}{\partial \eta^2} c_0^2 - c_0^2 \frac{\partial^2 f_2}{\partial \eta^2} \equiv 0$$

Il significato fisico della soluzione (9.4.1) e' illustrato nella seguente figura per quanto riguarda  $f_1$



$$f_1(x + \Delta x - c_0(t + \Delta t)) = f_1(x - c_0 t)$$

essendo  $\Delta x = c_0 \Delta t$ .



la perturbazione si propaga lungo la  $(x - c_0t) = \text{cost}$  con velocità

$$\frac{dx}{dt} = +c_0$$

e lungo la  $(x + c_0t) = \text{cost}$  con velocità

$$\frac{dx}{dt} = -c_0$$

che sono le due linee caratteristiche (reali e distinte per equazioni iperboliche) dell'equazione (9.3.13) per onde piane. La (9.4.2) si può ottenere direttamente se si fa una trasformazione di coordinate che assume le linee caratteristiche come linee coordinate

$$\xi = x - c_0t \qquad \eta = x + c_0t \qquad (9.4.3)$$

si ha  $\xi_{,x} = 1, \eta_{,x} = 1, \xi_{,t} = -c_0, \eta_{,t} = c_0$  e quindi la (9.3.13), sostituendo

$$\begin{aligned} \sigma_{,xx} &= \sigma_{,\xi\xi}(\xi_{,x})^2 + \sigma_{,\eta\eta}(\eta_{,x})^2 + \sigma_{,\xi\eta}(\eta_{,x}\xi_{,x}) + \sigma_{,\eta\xi}(\eta_{,x}\xi_{,x}) \\ \sigma_{,tt} &= \sigma_{,\xi\xi}(\xi_{,t})^2 + \sigma_{,\eta\eta}(\eta_{,t})^2 + \sigma_{,\xi\eta}(\eta_{,t}\xi_{,t}) + \sigma_{,\eta\xi}(\eta_{,t}\xi_{,t}) \end{aligned}$$

diviene

$$(\sigma_{,\xi\xi} + \sigma_{,\eta\eta} + 2\sigma_{,\eta\xi})c_0^2 = (\sigma_{,\xi\xi} + \sigma_{,\eta\eta} - 2\sigma_{,\eta\xi})c_0^2$$

quindi

$$4c_0^2\sigma_{,m\xi} = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial\eta} \frac{\partial\sigma}{\partial\xi} = 0 \qquad \frac{\partial\sigma}{\partial\xi} = f_0(\xi) \qquad \sigma = \int f_0(\xi)d\xi + f(\eta) \qquad \sigma = f_1(\xi) + f_2(\eta)$$

e sostituendo le espressioni (9.4.3)

$$\sigma = f_1(x - c_0t) + f_2(x + c_0t) \qquad \text{onda piana}$$

Nel caso 3D si ha un'onda sferica per la simmetria sferica del campo  $\sigma = \hat{\sigma}(r, t)$  e il  $\nabla^2\sigma$  si esprime

$$\nabla^2\sigma = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial\sigma}{\partial r} \right)$$

assumendo come variabile  $\beta = \sigma r$  l'eq. (9.3.13) diviene

$$\begin{aligned} \frac{1}{c_0^2} \frac{1}{r} \frac{\partial^2 \beta}{\partial t^2} &= \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial \beta / r}{\partial r} \right) = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{1}{r} \frac{\partial \beta}{\partial r} - r^2 \beta \frac{1}{r^2} \right) \\ &= \frac{1}{r^2} \left[ \frac{\partial \beta}{\partial r} + r \frac{\partial^2 \beta}{\partial r^2} - \frac{\partial \beta}{\partial r} \right] = \frac{1}{r} \frac{\partial^2 \beta}{\partial r^2} \end{aligned}$$

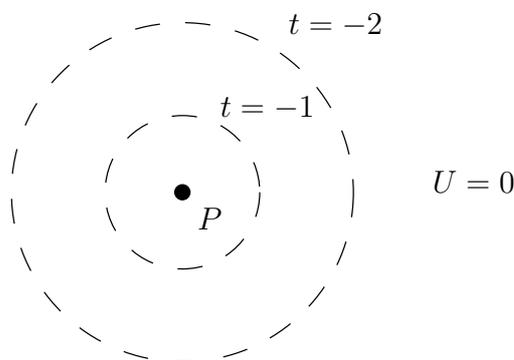
e semplificando

$$\frac{\partial^2 \beta}{\partial t^2} = c_0^2 \frac{\partial^2 \beta}{\partial r^2}$$

che coincide con la (9.4.1) e quindi la perturbazione

$$\sigma = \frac{\beta}{r} = \frac{1}{r} [f_1(r - c_0 t) + f_2(r + c_0 t)] \quad (9.4.4)$$

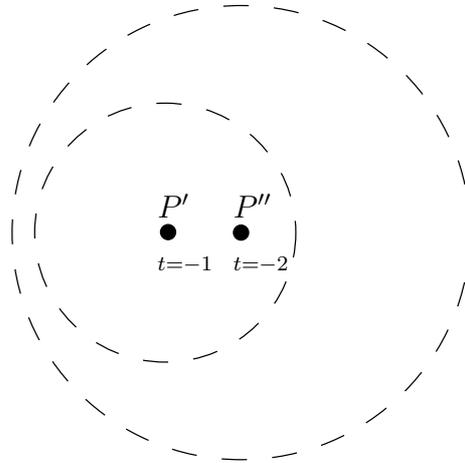
si attenua all'aumentare di  $r$ , contrariamente al caso di onda piana dove rimane costante nel tempo. Consideriamo una sorgente di perturbazione nel punto  $P$  fisso nello spazio al tempo  $t = 0$



Le onde sferiche emesse ai tempi  $t = -1, t = -2, t = -3$  sono rappresentate come sfere concentriche di raggio sempre maggiore. La perturbazione si propaga in tutto lo spazio in modo simmetrico, attenuando per la (9.4.4) la sua intensità come  $1/r$ .

Consideriamo ora il punto perturbatore  $P$  in movimento con velocità  $u < c_0$  cioè con  $\frac{U_0}{c_0} = M < 1$  cioè moto subsonico, ove  $M$  è il numero di Mach. Si indicano con  $P', P''$ , le posizioni del punto  $P$  al tempo  $t = -1$  e  $t = -2$  rispettivamente.

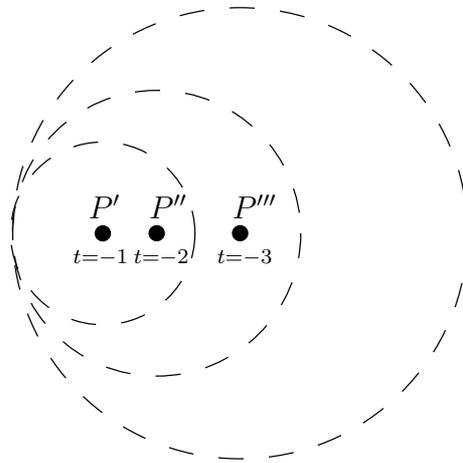
La perturbazione si propaga in tutto lo spazio circostante ma senza simmetria sferica. Le onde sferiche emesse ai vari tempi non hanno fra loro intersezioni.



Per  $U_0 = c_0$  le onde sferiche sono tutte tra loro tangenti in corrispondenza alla posizione attuale del punto perturbatore  $P$ .

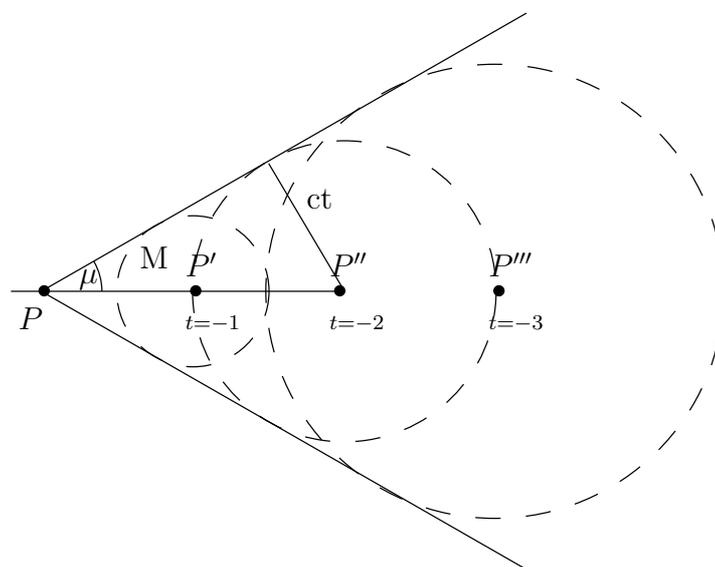
La perturbazione non raggiunge mai punti antistanti il punto  $P$  nella direzione del moto.

Lo spazio è diviso in due parti dalla retta determinata dall'involuppo delle circonferenze tangenti in  $P$ ; la perturbazione rimane confinata in uno dei due semispazi.



Se  $U_0 > c_0$  cioè  $M > 1$  (moto supersonico) il punto perturbatore va a velocità maggiore dell'onda sonora e quindi le onde si intersecano, determinando un cono di involuppo delle onde sferiche detto cono di Mach individuato dall'angolo

$$\sin \mu = \frac{c_0 t}{U_0 t} = \frac{1}{M}$$



La parte dello spazio al di fuori del cono non viene mai raggiunta dalla perturbazione.

Nei casi sopra considerati in cui il punto  $P$  è dotato di velocità relativa  $U_0$  rispetto al fluido circostante, si può trovare una equazione analoga alla (9.3.14) valida per velocità relativa nulla.

Dalla (9.3.7) si ricava, rimanendo valide le altre ipotesi

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} + U_0 \frac{\partial u_i}{\partial x} = -c_0^2 \frac{\partial \sigma}{\partial x_i}$$

che rispetto alla (9.3.10) ha in più il termine convettivo nella direzione di  $U_0$ . Per  $u = \text{grad } \Phi$

$$\frac{\partial}{\partial x_i} \left( \frac{\partial \Phi}{\partial t} + U_0 \frac{\partial \Phi}{\partial x} + c_0^2 \sigma \right) = 0$$

quindi con gli stessi ragionamenti fatti per la (9.3.14) si arriva a

$$\sigma = \frac{1}{c_0^2} \left( \frac{\partial}{\partial t} + U_0 \frac{\partial}{\partial x} \right) \Phi \quad (9.4.5)$$

Dalla (9.3.2) analogamente si ricava

$$\left( \frac{\partial}{\partial t} + U_0 \frac{\partial}{\partial x} \right) \sigma + \frac{\partial u_i}{\partial x_i} = 0 \quad (9.4.6)$$

invece della (9.3.6). Sostituendo la (9.4.5) nella (9.4.6) e indicando con

$$\frac{D}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + U_0 \frac{\partial}{\partial x}$$

si ottiene

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_i \partial x_i} - \frac{1}{c_0^2} \frac{D^2 \Phi}{Dt^2} = 0$$

detta *equazione aerodinamica del potenziale* per le sue applicazioni di tipo aeronautico.

## 9.5 Potenziale linearizzato

Si può tener conto più in generale anche della velocità di perturbazione nell'ambito del termine convettivo, e ottenere nel caso stazionario le equazioni del potenziale linearizzate o con termini di ordine superiore come è necessario per flussi transonici e ipersonici. Partendo dalla equazione della quantità di moto (9.3.1) scritta per un caso stazionario si ottiene

$$u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} = -\frac{1}{\rho} c^2 \frac{\partial \rho}{\partial x_i} \quad (9.5.1)$$

dove  $c^2 = \left( \frac{\partial p}{\partial \rho} \right)_{s=\text{cost}}$  è la velocità del suono.

E dalla conservazione della massa sempre stazionaria (9.3.2)

$$u_i \frac{\partial \rho}{\partial x_i} + \rho \frac{\partial u_i}{\partial x_i} = 0 \quad (9.5.2)$$

Combinando la (9.5.1), moltiplicata scalarmente per  $\mathbf{u}$  e la (9.5.2) si ha

$$u_i u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} = c^2 \frac{\partial u_i}{\partial x_i} = 0$$

e introducendo il potenziale  $\Phi$

$$c^2 \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_i \partial x_i} - u_i u_j \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_i \partial x_j} = 0 \quad (9.5.3)$$

che è una equazione non lineare per la presenza del coefficiente  $u_i u_j$  e di  $c^2$ .

Nel caso di piccole perturbazioni e quindi velocità del campo generato piccole rispetto alla velocità  $U_0$  del campo imperturbato, si pone

$$\begin{aligned} u &= U_0 + u' \\ v &= v' \\ w &= w' \end{aligned} \quad \text{con} \left( \frac{u'}{u'_\infty}, \frac{v'}{u'_\infty}, \frac{w'}{u'_\infty} \right) \ll 1 \quad (9.5.4)$$

e sostituendo nel termine  $u_i u_j$  si possono mantenere solo termini di ordine zero nella perturbazione ( $U_0$ ) o superiori a seconda del caso in esame. Sos-

tituendo le posizioni (9.5.4) nella (9.5.3) che, nel caso bidimensionale, si scrive

$$(c^2 - u^2) \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + (c^2 - v^2) \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} - 2uv \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} = 0 \quad (9.5.5)$$

dove con  $\varphi$  si intende ora il potenziale di perturbazione

$$\left[ c^2 - (U_0 + u')^2 \right] \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + [c^2 - v'^2] \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} - 2(U_0 + u') v' \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} = 0 \quad (9.5.6)$$

Si deve ora esprimere  $c$  in funzione del valore  $c_0$  (noto) in condizioni indisturbate. E' necessario fare un'ipotesi sul tipo di fluido, cioè sull'equazione di stato che lega le variabili termodinamiche.

Se consideriamo un gas ideale

$$\frac{p}{\rho} = R\vartheta$$

la velocità del suono  $c = \left( \frac{\partial p}{\partial \rho} \right)_{s=\text{cost}}$  vale

$$c^2 = \gamma \frac{p}{\rho} = \gamma R\vartheta \quad (9.5.7)$$

Per flusso compressibile isentropico vale lungo la traiettoria l'equazione di Bernoulli (in assenza di forze di massa)

$$\frac{1}{2}|u|^2 + h = \text{cost} \quad (9.5.8)$$

e per gas ideali con  $c_v = \text{cost}$

$$h = \mathcal{U} + \frac{p}{\rho} = c_v \vartheta + R\vartheta = c_p \vartheta$$

che sostituita nella (9.5.8) e ricordando che  $c_p = \frac{\gamma}{\gamma - 1} R$

$$\frac{1}{2}|u|^2 + \frac{\gamma R \vartheta}{\gamma - 1} = \text{cost}$$

quindi per la (9.5.7)

$$\frac{1}{2}|u|^2 + \frac{c^2}{\gamma - 1} = \frac{1}{2}U_0^2 + \frac{c_0^2}{\gamma - 1}$$

$$c^2 = c_0^2 - U_0 u' (\gamma - 1) - \frac{u'^2}{2} (\gamma - 1) \quad (9.5.9)$$

dove i termini del secondo ordine si possono in generale trascurare.

Sostituendo la (9.5.9) nella (9.5.6) e trascurando anche qui i termini superiori al primo ordine si ottiene

$$\begin{aligned} & [c_0^2 - U_0 u'(\gamma - 1) - U_0^2 - U_0^2 u'] \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \\ & [c_0^2 - U_0 u'(\gamma - 1)] \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} - 2U_0 v' \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} = 0 \end{aligned}$$

dividendo per  $c_0^2$  e introducendo  $M_0 = U_0/c_0$

$$\begin{aligned} & \left[ (1 - M_0^2) - (\gamma + 1) M_0^2 \frac{u'}{U_0} \right] \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \\ & \left[ 1 - (\gamma - 1) M_0^2 \frac{u'}{U_0} \right] \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} - M_0^2 \frac{v'}{U_0} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} = 0 \end{aligned} \tag{9.5.10}$$

Se si trascurano i termini del primo ordine come è possibile nel caso di corpi sottili in flusso subsonico o supersonico si ha

$$(1 - M_0^2) \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = 0 \tag{9.5.11}$$

che è una equazione (ellittica nel caso subsonico e iperbolica nel caso supersonico) lineare, per la quale è possibile trovare soluzioni analitiche nei casi semplici o numeriche (con il metodo della funzione di Green) per configurazioni geometriche più complesse.

Nel caso di flusso transonico ( $M_0 \simeq 1$ ) o ipersonico ( $M_0 \gg 1$ ) non è possibile trascurare i termini del primo ordine che possono diventare numericamente equivalenti ai termini di ordine zero, e si deve risolvere l'eq. (9.5.10). Anche per flussi supersonici o subsonici è necessario considerare l'eq. (9.5.10) invece della (9.5.11) nel caso di corpi non molto sottili.

## Flussi Subsonici

Soluzioni della eq. (9.5.11) che riscriviamo

$$\beta^2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = 0 \tag{9.5.11.a}$$

con  $\beta^2 = 1 - M_0^2$ .

La (9.5.11) si può ridurre all'equazione di Laplace (valida per flussi incompressibili) mediante la trasformazione

$$\begin{aligned}\xi &= \lambda_x x \\ \eta &= \lambda_y y \\ \psi(\xi, \eta) &= \lambda_\varphi \varphi(x, y)\end{aligned}\tag{9.5.12}$$

Sostituendo

$$\beta^2 \frac{\lambda_x^2}{\lambda_\varphi} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \xi^2} + \frac{\lambda_y^2}{\lambda_\varphi} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \eta^2} = 0$$

posto

$$\beta^2 = \frac{\lambda_y^2}{\lambda_x^2}\tag{9.5.13}$$

si ottiene l'equazione di Laplace per  $\psi$

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial \eta^2} = 0\tag{9.5.14}$$

con condizioni al contorno

$$\text{per } \mathbf{x} = \pm\infty \qquad \mathbf{u} = 0\tag{9.5.15}$$

alla parete del corpo

$$\left. \frac{dy}{dx} \right|_p = \frac{v'}{U_0 + u'} = \frac{v'}{U_0} = \frac{1}{U_0} \left. \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right|_p\tag{9.5.16}$$

trascurando  $u'$  rispetto ad  $U_0$ .

Nel piano trasformato la (9.5.16) si esprime

$$\left. \frac{\lambda_x}{\lambda_y} \frac{\partial \eta}{\partial \xi} \right|_p = \frac{1}{U_0} \frac{\lambda_y}{\lambda_\varphi} \left. \frac{\partial \psi}{\partial y} \right|_p$$

e assumendo

$$\lambda_y^2 = \lambda_x \lambda_\varphi\tag{9.5.17}$$

si ha

$$\left. \frac{\partial \eta}{\partial \xi} \right|_p = \frac{1}{U_0} \left. \frac{\partial \psi}{\partial \eta} \right|_p\tag{9.5.18}$$

che è la condizione al contorno sulla parete del corpo per l'eq. (9.5.14). Per lo studio di flussi subsonici si può quindi risolvere l'eq. (9.5.14) con le condizioni al contorno l'eq. (9.5.18) e l'eq. (9.4.24), cioè come se il flusso

fosse incompressibile ma attorno a un corpo deformato secondo le trasformazioni l'eq. (9.7.1). I parametri  $\lambda_x$ ,  $\lambda_y$  e  $\lambda_\varphi$  sono tra loro legati dalle (9.5.13) e (9.5.17), per cui fissato ad esempio  $\lambda_x = 1$  si ha

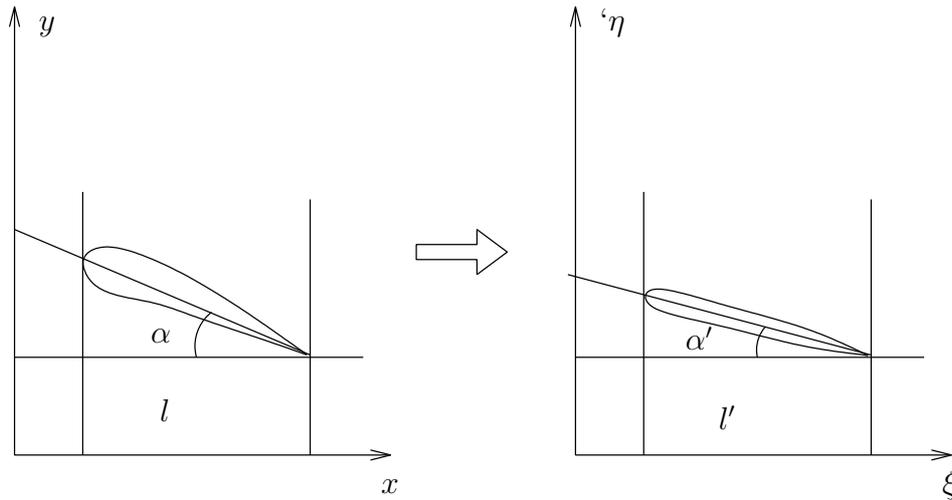
$$\lambda_y = \beta \quad (9.5.19)$$

$$\lambda_\varphi = \beta^2 \quad (9.5.20)$$

quindi

$$\begin{aligned} \xi &= x & \psi &= \beta^2 \varphi \\ \eta &= \beta y \end{aligned}$$

cioè nel campo trasformato (flusso incompressibile) si hanno, essendo  $\beta < 1$ , a parità di lunghezze, angolo d'attacco, spessore e curvatura minori. (Similitudine di Göthert).



$$l = l', \quad \frac{\alpha'}{\alpha} = \frac{\lambda_y}{\lambda_x} = \beta.$$

Per quanto riguarda le variazioni di pressione, nel caso esaminato di ordine zero,

$$\begin{aligned} \rho_0 U_0 \frac{\partial u}{\partial x} &= -\frac{\partial p}{\partial x} \\ \rho_0 U_0 (u - U_0) &= -(p - p_0) \\ p - p_0 &= -\rho U_0 u' \end{aligned}$$

e il coefficiente di pressione alla parete

$$C_p = \frac{p - p_0}{\frac{1}{2}\rho U_0^2} = -\frac{2u'}{U_0} = -\frac{2}{U_0} \left. \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right|_p$$

con  $\left. \frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{\lambda_x}{\lambda_\varphi} \frac{\partial \psi}{\partial \xi} \right|_p$   
 e per la (9.4.26)

$$C_p = -\frac{2}{U_0} \left. \frac{\partial \psi}{\partial \xi} \right|_p \frac{1}{\beta^2}$$

ovvero

$$C_p = C'_p \frac{1}{\beta^2}$$

cioè il  $C_P$  del compressibile è dato da  $C'_p$  per il profilo trasformato nel flusso incompressibile, moltiplicato per  $\frac{1}{\beta^2}$  che è un numero  $> 1$  essendo  $\beta < 1$ . E' ulteriormente possibile scrivere una relazione che lega il coefficiente di pressione del profilo modificato in un flusso incompressibile  $C'_p$  con quello del profilo originale in un flusso incompressibile  $C''_p$  che è la seguente

$$\frac{C''_p}{C'_p} = \frac{\alpha''}{\alpha'} \equiv \frac{\alpha}{\alpha'} \approx \frac{1}{\beta}$$

Quindi adottando lo stesso profilo si ha con buona approssimazione  $C_p = \frac{1}{\beta} C''_p$  (Prandtl-Glauert).

### Flussi Supersonici

L'equazione (9.5.11) si riscrive ora nella forma

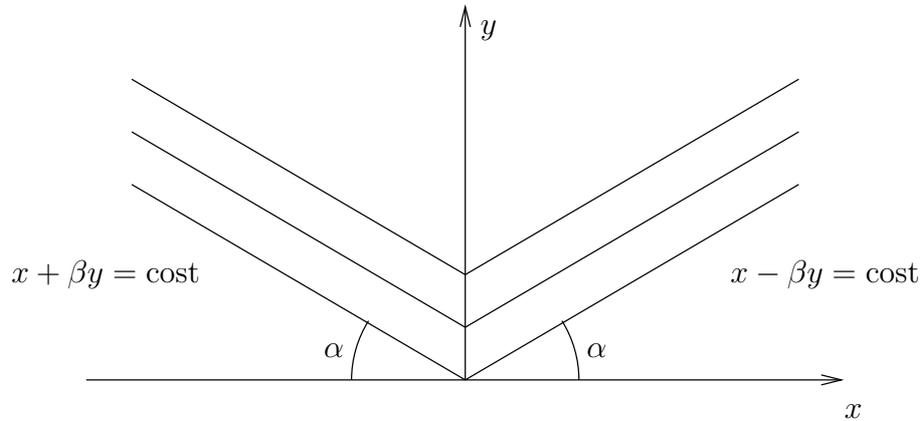
$$\beta^2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = 0 \tag{9.5.11.b}$$

con  $\beta^2 = M_0^2 - 1$ . La (9.5.11b) è un'equazione iperbolica, identica alla equazione delle onde (9.4.1) per  $\sigma$  valida nell'approssimazione acustica, con  $y$  che svolge il ruolo della variabile tempo. La soluzione è data da

$$\varphi = \varphi_1(x + \beta y) + \varphi_2(x - \beta y) \tag{9.5.21}$$

cioè la perturbazione si propaga lungo le linee caratteristiche

$$\begin{aligned} 1^\circ \text{famiglia : } (x + \beta y) &= \text{cost} & \frac{dx}{dy} &= -\beta = -\sqrt{M_0^2 - 1} \\ 2^\circ \text{famiglia : } (x - \beta y) &= \text{cost} & \frac{dx}{dy} &= +\beta = +\sqrt{M_0^2 - 1} \end{aligned}$$



$$\text{con } \tan \alpha = \frac{dx}{dy} = \frac{1}{\beta} = \frac{1}{\sqrt{M_0^2 - 1}}.$$

Per il cono di Mach visto prima  $\sin \alpha = \frac{1}{M_0}$



quindi  $\tan \alpha = \frac{1}{\sqrt{M_0^2 - 1}} = \frac{1}{\beta}$  cioè le linee che individuano il cono di Mach sono caratteristiche del campo.

Ricaviamo ora il campo di pressione attorno a un corpo. Riscriviamo la (9.5.21).

$$\varphi = U_0 f_1(\xi) + U_0 f_2(\eta)$$

con  $\xi = x + \beta y$ ,  $\eta = x - \beta y$  per cui

$$u' = \frac{\partial \varphi}{\partial x} = U_0 \left( \frac{\partial f_1}{\partial \xi} + \frac{\partial f_2}{\partial \eta} \right)$$

$$v' = \frac{\partial \varphi}{\partial y} = U_0 \beta \left( \frac{\partial f_1}{\partial \xi} - \frac{\partial f_2}{\partial \eta} \right)$$

al corpo

$$\left. \frac{dy}{dx} \right|_p = \frac{v'}{U_0 + u'} = U_0 \frac{\beta \left( \frac{\partial f_1}{\partial \xi} - \frac{\partial f_2}{\partial \eta} \right)}{U_0} \quad (9.5.22)$$

e il coefficiente di pressione

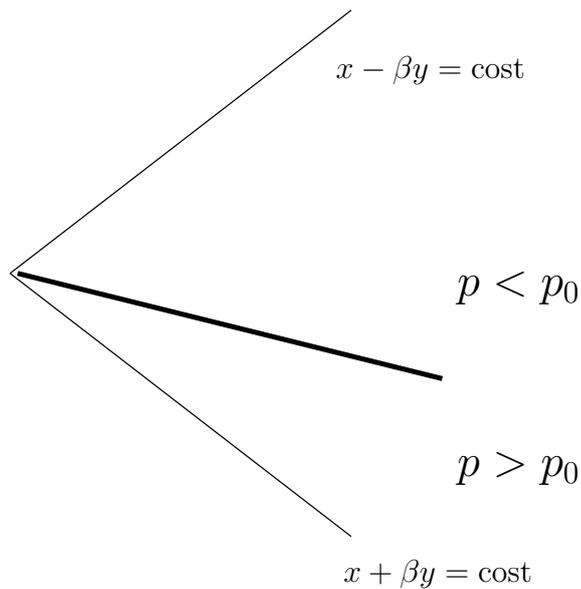
$$C_p = \frac{p - p_0}{\rho_0 \frac{U_0^2}{2}} = -\frac{2u'}{U_0} = -2 \left( \frac{\partial f_1}{\partial \xi} + \frac{\partial f_2}{\partial \eta} \right)$$

Per un profilo sottile (Teoria di Ackeret) dovendo le perturbazioni propagarsi solo verso valle vi saranno nella parte superiore solo caratteristiche della 2° famiglia, e nella parte inferiore solo caratteristiche della 1° famiglia, per cui nella parte superiore del profilo

$$C_{p_s} = -2 \frac{\partial f_2}{\partial \eta} = \frac{2}{\beta} \frac{dy}{dx} \Big|_p \quad (9.5.23)$$

per la (9.4.28) e nella parte inferiore

$$C_{p_i} = -2 \frac{\partial f_1}{\partial \xi} = -\frac{2}{\beta} \frac{dy}{dx} \Big|_p \quad (9.5.24)$$



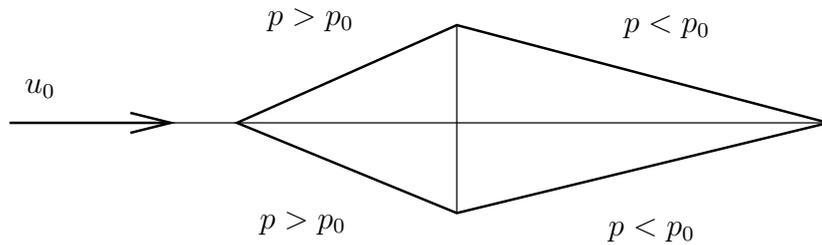
e per  $\frac{dy}{dx} \Big|_p < 0$  come per il profilo in figura si ha  $C_{p_s}$  negativo cioè  $p < p_0$  e  $C_{p_i}$  positivo cioè  $p > p_0$  e quindi una forza risultante portante. Attraverso la caratteristica si ha deviazione della linea di corrente in modo che il flusso lambisca il corpo. La velocità di perturbazione con cui si effettua questa deviazione attraverso la caratteristica, si propaga inalterata (nelle ipotesi qui assunte) lungo la caratteristica stessa.

Dalle (9.5.23) e (9.5.24) si può ottenere in generale

$$C_p = \frac{2}{\beta} \vartheta$$

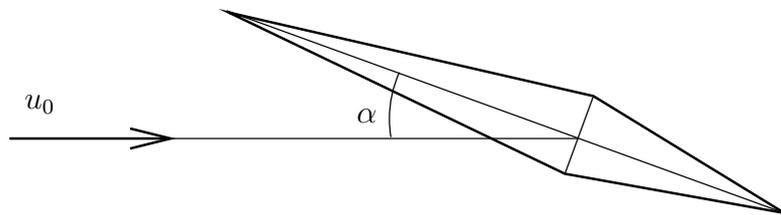
con  $\vartheta \approx \tan \vartheta$  pendenza locale della superficie del corpo rispetto alla velocità indisturbata  $U_0$ . L'angolo  $\vartheta$  è positivo se è minore di  $\pi$  e negativo se è maggiore.

Per un profilo dotato di spessore (forma a diedro) e senza angolo d'attacco



si ha una resistenza detta resistenza d'onda, che nel volo supersonico si aggiunge alle resistenze già viste di forma e di attrito.

In generale per un profilo con angolo d'attacco  $\alpha$  (tra  $U_0$  e linea media del profilo)



per la parte superiore ( $\vartheta_S$  angolo parete superiore rispetto a linea media)

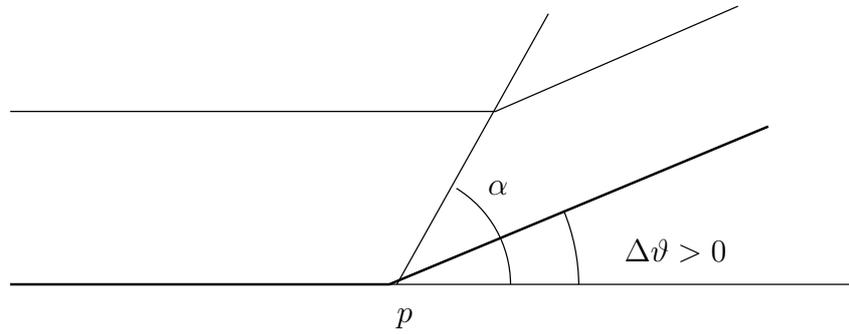
$$C_p = \frac{2}{\beta} (\vartheta_S - \alpha)$$

per la parte inferiore ( $\vartheta_i$  angolo parete inferiore rispetto a linea media)

$$C_p = \frac{2}{\beta} (\vartheta_i + \alpha)$$

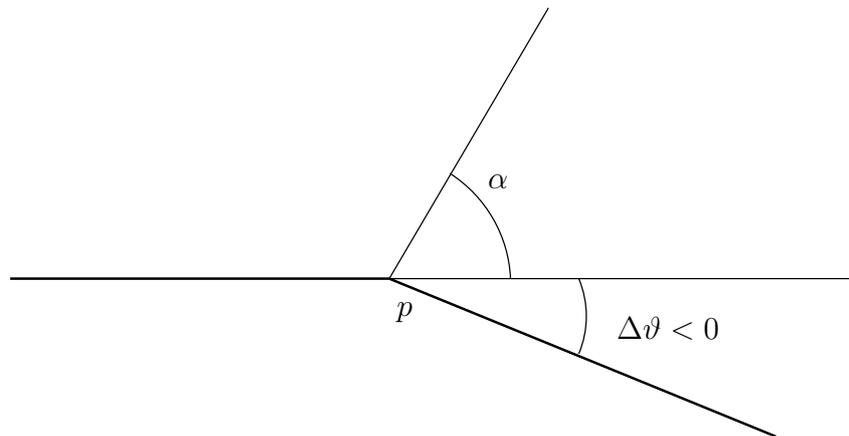
Esaminiamo ora un flusso supersonico su una superficie curva (che si considera generata da una successione di piccoli segmenti con diversa inclinazione).

Per una deviazione  $\Delta\vartheta > 0$  della parete



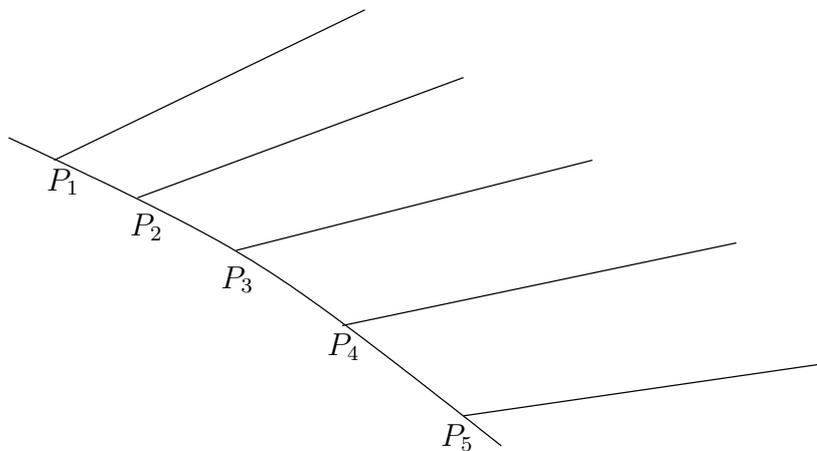
si ha una compressione e la linea di corrente viene deviata per soddisfare la condizione al contorno alla parete del corpo.

Per una deviazione  $\Delta\vartheta < 0$  della parete si ha un'espansione



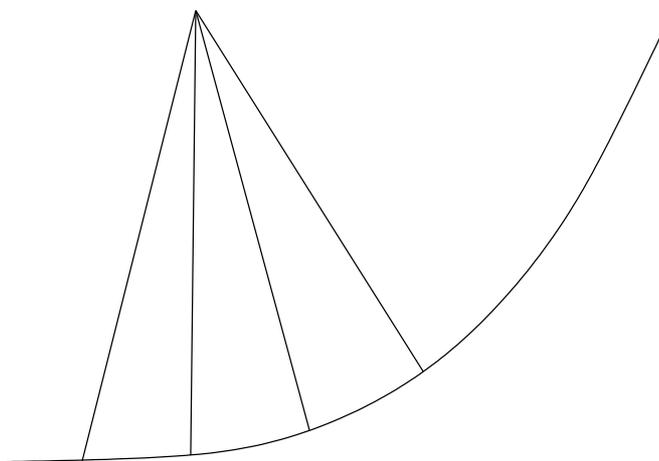
dal punto spigoloso  $P$  parte una caratteristica della seconda famiglia ( $x - \beta y = \text{cost}$ ).

Ripetendo il ragionamento per una successione di deviazioni negative (parete curva)



Attraverso ogni caratteristica oltre che una deviazione della corrente si ha un aumento di velocità. La successiva caratteristica forma quindi un angolo minore con la parete (essendo maggiore la velocità) e quindi le linee caratteristiche (e di conseguenza le linee di corrente) divergono in una espansione.

Per una successione di deviazioni positive si ha una compressione su una parete curva come illustrato in figura



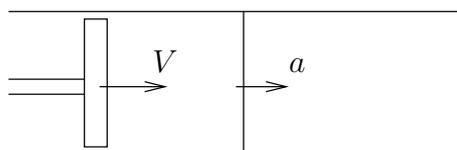
Attraverso ogni caratteristica si ha una deviazione e una diminuzione di velocità (angolo  $\alpha$  maggiore). Le caratteristiche quindi convergono per formare un'onda d'urto attraverso la quale si ha una variazione più consistente delle variabili fluidodinamiche e termodinamiche.

## 9.6 Urto

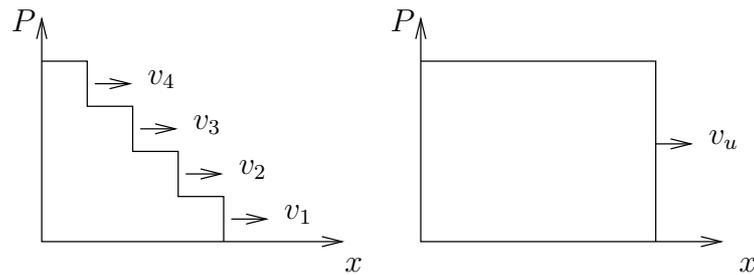
Si è visto che può nascere un urto per coalescenza di più caratteristiche nel caso di compressione su parete curva per flusso stazionario supersonico. Vediamo ora la nascita dell'urto in un caso non stazionario monodimensionale, per il quale vale l'equazione delle onde

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} = 0$$

Consideriamo in particolare un moto accelerato di uno stantuffo: per effetto di un primo aumento di velocità  $\Delta V_1$  parte un'onda di compressione che viaggia verso destra con velocità  $v_1$  pari alla velocità del suono  $a_1$  nelle condizioni del fluido imperturbato.



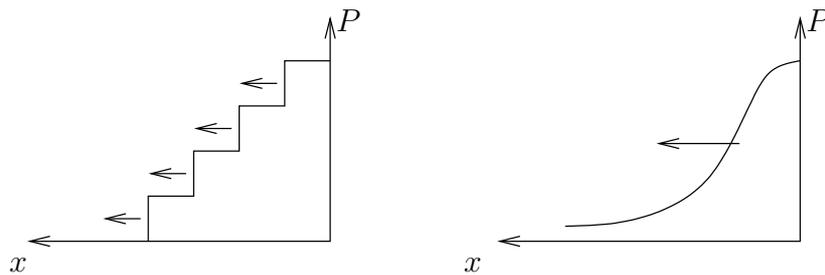
In seguito ad un secondo aumento di velocità  $\Delta V_2$  parte una seconda onda di compressione che viaggerà con velocità  $v_2 = a_2 + \Delta V_1$  con  $a_2$  velocità del suono nelle condizioni di pressione maggiori generate dalla prima onda (quindi  $a_2 > a_1$ ). Pertanto la seconda onda viaggia a velocità  $v_2 > v_1$  e tende a raggiungere la prima. Così la terza e le successive corrispondenti a successivi incrementi di velocità dello stantuffo.



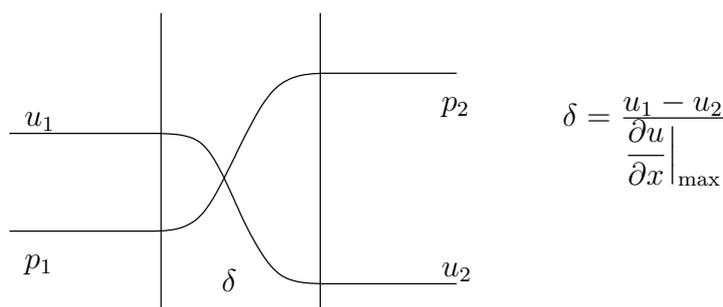
Quando la seconda onda raggiunge la prima continua a viaggiare con velocità intermedia  $\frac{v_2 + v_1}{2}$  e così per le successive.

Dopo avvenuta la coalescenza di molte onde si ha una perturbazione finita detta onda d'urto che viaggia con velocità media delle varie componenti  $v_n$ , certamente maggiore della velocità del suono in condizioni di fluido imperturbato, ed è tanto maggiore quanto più l'urto è forte.

A sinistra del pistone si propagano onde di espansione con velocità via via minori che quindi non coalescono. Non si può avere un urto di espansione, anzi l'onda tende a divenire sempre meno ripida.



Nel precedente esempio si è considerato l'urto come una discontinuità matematica e quindi di spessore nullo. In effetti la presenza di forti gradienti, come già visto per lo strato limite, rende i termini viscosi e conduttivi dello stesso ordine degli altri termini e quindi non più trascurabili. In effetti si ha una variazione delle variabili attraverso l'urto del tipo



dove con  $\delta$  si è indicato lo spessore dell'urto. In tale spessore è quindi necessario considerare le equazioni di Navier Stokes complete anche se drasticamente semplificate dalla lecita assunzione di flusso unidimensionale (equazione semplificata del flusso interno in uno schema di soluzione a perturbazione singolare). Consideriamo le equazioni di conservazione di massa, quantità di moto ed energia nella forma stazionaria, conservativa, unidimensionale.

$$\begin{aligned}\frac{\partial \rho u}{\partial x} &= 0 \\ \frac{\partial(\rho u u + p)}{\partial x} &= \frac{\partial \sigma_{11}}{\partial x} \\ \frac{\partial \rho u \left( h + \frac{u^2}{2} \right)}{\partial x} &= \frac{\partial u \sigma_{11}}{\partial x} - \frac{\partial q_1}{\partial x}\end{aligned}$$

Se integriamo tra due sezioni (1) e (2) la prima a monte e la seconda a valle dell'urto, si ha che in quelle sezioni sono nulli i termini conduttivi e viscosi e quindi si ottiene

$$\begin{aligned}[\rho u]_{\frac{1}{2}} &= 0 \\ [\rho u^2 + p]_{\frac{1}{2}} &= 0 \\ \left[ h + \frac{u^2}{2} \right]_{\frac{1}{2}} &= 0\end{aligned}\tag{9.6.1}$$

dove il simbolo  $[ ]_{\frac{1}{2}}$  indica il salto tra prima e dopo l'urto.

Per quest'ultima si è tenuto conto della validità della prima di queste relazioni.

Queste equazioni, dette di Rankine-Hugoniot, danno la continuità attraverso l'urto di una combinazione delle variabili ciascuna delle quali subisce attraverso l'urto una brusca variazione.

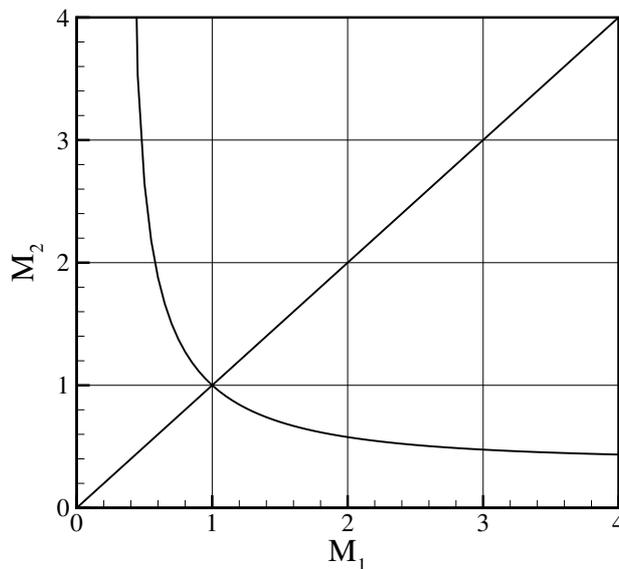
Le relazioni di salto legano le grandezza termodinamiche prima e dopo l'urto. Tenendo conto di queste e dell'equazione di stato per i gas perfetti otteniamo una relazione che lega il numero di Mach a monte dell'urto  $M_1$  con quello a valle dell'urto  $M_2$ , che è

$$M_2^2 = \frac{1 + \frac{\gamma-1}{2}M_1^2}{\gamma M_1^2 - \frac{\gamma-1}{2}} \quad (9.6.2)$$

Questa relazione fissato il numero di Mach  $M_1$  ha due soluzioni che sono riportate in figura. Una è la soluzione  $M_2 = M_1$  che tiene conto del fatto che attraverso la sezione non è avvenuto un urto. Si noti che questo è possibile dal momento che le relazioni di Rankine-Hugoniot sono state ottenute senza tenere esplicitamente conto di ciò che avviene tra le due sezioni. L'altra ci dice che se  $M_1 > 1$  allora  $M_2 < 1$  e se  $M_1 < 1$  allora  $M_2 > 1$ , ossia la soluzione attraverso l'urto è perfettamente simmetrica. Ciò non può essere e per isolare il comportamento corretto possiamo chiederci l'espressione del salto di entropia attraverso l'urto. Questo nell'ipotesi di  $M_1$  poco maggiore di 1

$$S_2 - S_1 = c_v \frac{2\gamma(\gamma-1)}{3(\gamma+1)^2} (M_1^2 - 1)^3 \quad (9.6.3)$$

Dal momento che l'urto è un fenomeno adiabatico l'entropia può solo crescere quindi deve essere  $M_1 > 0$  e quindi  $M_2 < 1$ . Attraverso un urto normale il flusso da supersonico diventa subsonico.

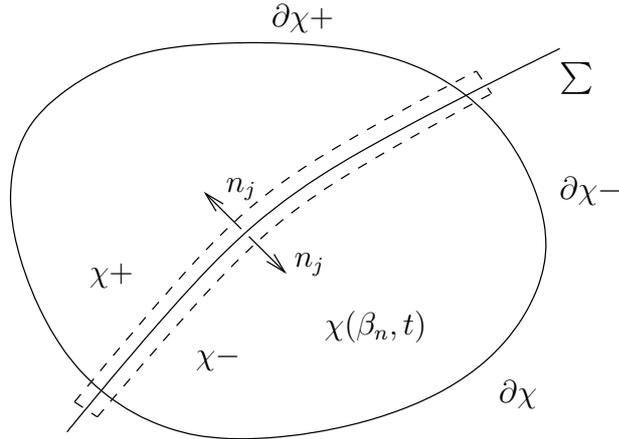


### Urto obliquo

Più in generale, se il flusso non è unidimensionale ma sempre stazionario, le equazioni di conservazione divengono

$$\begin{aligned}\frac{\partial \rho u_i}{\partial x_i} &= 0 \\ \frac{\partial (\rho u_i u_j - T_{ij})}{\partial x_j} &= 0 \\ \frac{\partial \rho u_j \left( \mathcal{U} + \frac{1}{2} u_i u_i + \frac{p}{\rho} \right)}{\partial x_j} &= \frac{\partial u_i \sigma_{ij}}{\partial x_j} - \frac{\partial q_i}{\partial i}\end{aligned}$$

Se consideriamo un volume di fluido  $\chi(\beta_n, t)$  attraversato da un urto e integriamo su un sottile volume che include l'urto, applicando Green–Gauss si ottiene, trascurando il contributo sui due lati piccoli del volume



$$\begin{aligned}[\rho u_i n_i]_{\frac{1}{2}} &= 0 \\ [\rho u_i u_j n_j - T_{ij} n_j]_{\frac{1}{2}} &= 0 \\ [\rho u_j n_j \left( h + \frac{1}{2} u_i u_j \right)]_{\frac{1}{2}} &= 0\end{aligned}$$

Da cui

$$\begin{aligned}[\rho u_n]_{\frac{1}{2}} &= 0 \\ [\rho u_i u_n - p n_i]_{\frac{1}{2}} &= 0\end{aligned}\tag{9.6.4}$$

essendo  $T_{ij} = -p\delta_{ij} + \sigma_{ij}$  con  $\sigma_{ij} = 0$  fuori dall'urto proiettando

$$[\rho u_n u_n - p]_{\frac{1}{2}} = 0$$

sulla direzione tangenziale all'urto e sulla direzione normale all'urto

$$[\rho u_t u_n]_{\frac{1}{2}} = 0$$

che combinata con la (9.6.4) dà

$$[u_t]_{\frac{1}{2}} = 0$$

per l'equazione di conservazione dell'energia si ha

$$[\rho u_i n_i \left( h + \frac{1}{2} u_j u_j \right)]_{\frac{1}{2}} = 0$$

che combinata con la (9.6.4) dà

$$\left[ h + \frac{1}{2} u_j u_j \right]_{\frac{1}{2}} = 0$$

Complessivamente attraverso l'urto valgono le relazioni

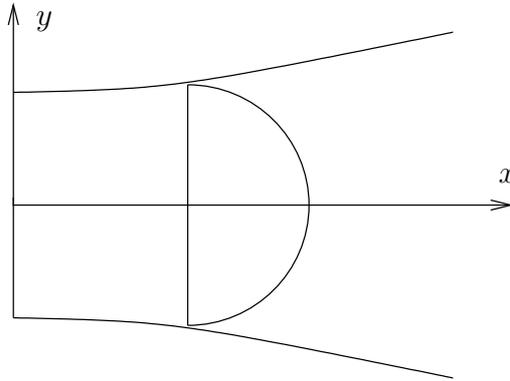
$$\begin{aligned} [\rho u_n]_{\frac{1}{2}} &= 0 \\ [\rho u_n^2 + p]_{\frac{1}{2}} &= 0 & [u_t]_{\frac{1}{2}} &= 0 & (9.6.5) \\ \left[ h + \frac{u^2}{2} \right]_{\frac{1}{2}} &= 0 \end{aligned}$$

analoghe alle (9.6.1) e valide per flussi multidimensionali.

## 9.7 Moto quasi-unidimensionale

Consideriamo il flusso in un condotto a sezione variabile, ma così debolmente che si possa considerare in prima approssimazione come flusso unidimensionale, tale cioè che tutte le variabili dipendenti risultino solo funzioni di  $x$ . In ogni sezione si viene quindi ad avere un valore costante (uguale al valore medio) di pressione, densità, temperatura e velocità.

Questa ipotesi semplificativa viene assunta in prima approssimazione per lo studio dei condotti interni delle macchine a fluido. Consideriamo ad esempio un canale debolmente divergente



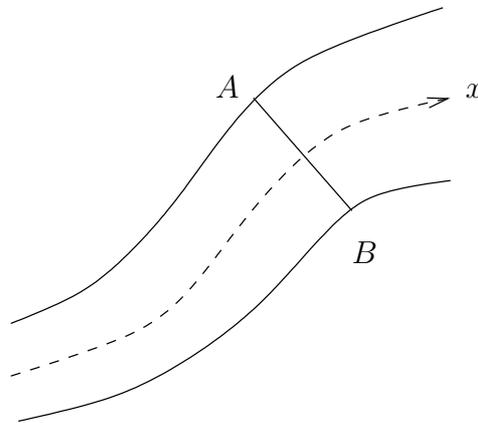
Integrando in  $Y$ , indicando con  $A$  la sezione del condotto, si ha per esempio:

$$\bar{u}(x) = \frac{1}{A} \int_A u(x, y, z) dA \quad (9.7.1)$$

Per condotti simmetrici

$$\bar{v}(x) = \frac{1}{A} \int_A v(x, y) dA = 0$$

Se si assume  $x$  come coordinata curvilinea lungo l'asse del canale con  $A$  sezione perpendicolare a questo asse



ci si può ridurre sempre al caso di asse rettilineo visto prima.

Integriamo le equazioni del campo in  $y$  (caso 2D).

Equazione di conservazione di massa  $\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho u}{\partial x} + \frac{\partial \rho v}{\partial y} = 0$

$$\int_{A(x)} \frac{\partial \rho}{\partial t} dy + \int_{A(x)} \frac{\partial \rho u}{\partial x} dy + \int_{A(x)} \frac{\partial \rho v}{\partial y} dy = 0$$

con  $A(x) = y_A - y_B$

$$\frac{\partial}{\partial x} \int_{y_B(x)}^{y_A(x)} \rho u dy = \int_{y_B(x)}^{y_A(x)} \frac{\partial \rho u}{\partial x} dy + \rho u(y_A) \frac{dy_A}{dx} - \rho u(y_B) \frac{dy_B}{dx}$$

cioè

$$\int_{y_B(x)}^{y_A(x)} \frac{\partial \rho u}{\partial x} dy = \frac{\partial}{\partial x} \int_{y_B(x)}^{y_A(x)} \rho u dy - \rho u(y_A) \frac{dy_A}{dx} + \rho u(y_B) \frac{dy_B}{dx}$$

ed essendo

$$\frac{dy_A}{dx} = \frac{v(y_A)}{u(y_A)} \quad \text{e} \quad \frac{dy_B}{dx} = \frac{v(x, y_A)}{u(x, y_A)}$$

per la condizione al contorno di tangenza della velocità. Sostituendo nella

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{y_B}^{y_A} \rho dy + \frac{\partial}{\partial x} \int_{y_B}^{y_A} \rho u dy - [\rho v]_{y_B}^{y_A} + [\rho v]_{y_B}^{y_A}$$

e per la (9.7.1), assumendo  $\overline{\rho u} = \bar{\rho} \bar{u}$ , si può scrivere l'equazione

$$\frac{\partial \rho A}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \rho u A = 0 \quad (9.7.2)$$

e per campi stazionari

$$\frac{d}{dx} (A \rho u) = 0$$

oppure

$$A \rho u = \text{cost}$$

Equazione di conservazione della quantità di moto

$$\begin{aligned} \int_{y_B(x)}^{y_A(x)} \left( \frac{\partial \rho u}{\partial t} + \frac{\partial \rho u^2}{\partial x} + \frac{\partial \rho u v}{\partial y} \right) dy &= \int_{y_B(x)}^{y_A(x)} -\frac{\partial p}{\partial x} dy \\ \frac{\partial}{\partial t} \int_{y_B}^{y_A} \rho u(x, y) dy + \frac{\partial}{\partial x} \int_{y_B}^{y_A} \rho u^2(x, y) dy - \rho u^2(x, y_A) \frac{\partial y_A}{\partial x} \\ &+ \rho u^2(x, y_B) \frac{\partial y_B}{\partial x} + [\rho u v]_{y_B}^{y_A} = - \int_{y_B}^{y_A} \frac{\partial p}{\partial x} dy \end{aligned}$$

e per la (9.7.1), assumendo anche  $\bar{u}^2 = \bar{u}^2$  si può scrivere per i valori medi l'equazione

$$\frac{\partial}{\partial t} \rho u A + \frac{\partial}{\partial x} \rho u^2 A = -\frac{\partial p}{\partial x} A$$

che combinata con l'equazione di conservazione di massa (9.7.2), moltiplicata per  $u$

$$u \frac{\partial \rho A}{\partial t} + u \frac{\partial}{\partial x} \rho u A = 0$$

dà l'equazione

$$\rho A \frac{\partial u}{\partial t} + \rho u A \frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{\partial p}{\partial x} A$$

e dividendo per  $A$  si ottiene

$$\rho \frac{\partial u}{\partial t} + \rho u \frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{\partial p}{\partial x}.$$

Analogamente può essere ottenuta un'equazione per l'energia. Quindi nel caso stazionario si ottengono le seguenti tre equazioni

$$\frac{u}{dx}(\rho u A) = 0 \quad (9.7.3)$$

$$u \frac{du}{dx} = -\frac{1}{\rho} \frac{dp}{dx} \quad (9.7.4)$$

$$\frac{d}{dx}(H) = 0 \quad (9.7.5)$$

dove si è introdotto il simbolo per l'entalpia totale  $H = h + 1/2u^2$ .

Nel caso in cui sia  $u = 0$ , come accade in un punto di ristagno, è opportuno definire delle grandezze che vengono appunto dette *di ristagno* e che vengono indicate con il pedice zero. In questo caso, sia l'entalpia che la temperatura di ristagno sono uguali alle omologhe grandezze totali. Val la pena notare che sia la temperatura di ristagno,  $\vartheta_0$  che l'entalpia di ristagno  $h_0$  sono costanti lungo il moto anche in presenza di un fenomeno non isentropico quale un'onda d'urto. Lo stesso non accade con la pressione di ristagno,  $p_0$ , che è costante e uguale alla pressione totale sono nel caso in cui il fenomeno sia isentropico. In presenza di fenomeni dissipativi non isoentropici, quali onde d'urto, è infatti corretto attendersi che la pressione totale, che misura l'energia meccanica del sistema, diminuisca.

Derivando la (9.7.3) si ha

$$u A d\rho + A \rho du + \rho u dA = 0$$

e dividendo per  $\rho u A$

$$\frac{d\rho}{\rho} + \frac{du}{u} + \frac{dA}{A} = 0 \quad (9.7.6)$$

Dalla (9.7.6)

$$\frac{du}{u} = -\frac{dp}{\rho u^2} \quad (9.7.7)$$

per cui la (7.5.5) dà

$$\begin{aligned} \frac{dA}{A} &= -\frac{d\rho}{\rho} - \frac{du}{u} = -\frac{d\rho}{\rho} + \frac{dp}{\rho u^2} = \frac{dp}{\rho u^2} \left(1 - \frac{d\rho}{dp} v^2\right) \\ \frac{dA}{A} &= \frac{dp}{\rho u^2} (1 - M^2) \end{aligned}$$

cioè

$$\frac{dA}{dp} = (1 - M^2) \frac{A}{\rho u^2}$$

e per la (9.7.7)

$$\frac{dA}{du} = -(1 - M^2) \frac{A}{u}$$

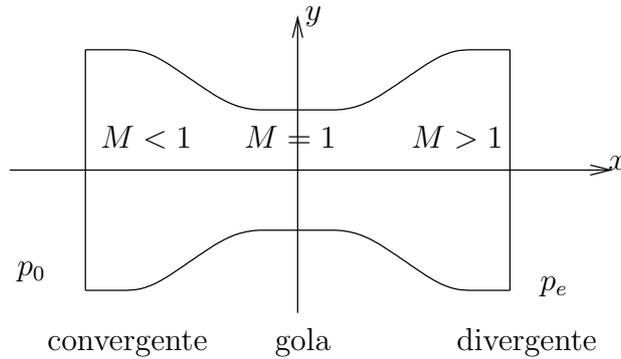
cioè per  $M < 1$

$$\frac{dA}{dp} > 0 \qquad \frac{dA}{du} < 0 \quad (9.7.8)$$

Un aumento di  $A$  ( $dA > 0$ ) produce un incremento di  $p$  ( $dp > 0$ ) e una diminuzione di  $u$  ( $du < 0$ ). Per  $M > 1$  invece

$$\frac{dA}{dp} < 0 \qquad \frac{dA}{du} > 0 \quad (9.7.9)$$

cioè  $A$  e  $u$  crescono insieme, e quindi per accelerare un flusso supersonico è necessario aumentare le aree a disposizione (canali divergenti). Per  $M = 1$  si ha  $\frac{dA}{A} = 0$  cioè il condotto ha sezione trasversale minima (gola). Ciò indica che l'esistenza di una sezione minima è una condizione necessaria per realizzare la transizione tra flusso subsonico e supersonico (o viceversa). Per accelerare un flusso subsonico si restringe la sezione trasversale, si ha una gola (per  $M = 1$ ) e poi la sezione si allarga secondo il seguente schema di ugello



In realtà in corrispondenza della sezione di gola si può sia realizzare la condizione  $M = 1$  e in questo caso la gola viene detta *efficace*, ma si può anche verificare la condizione per cui  $M$  è diverso da uno e  $dp = du = 0$ .

Esaminiamo ora il flusso nel condotto convergente-divergente (ugello) in funzione del salto di pressione tra sezione di ingresso ( $p_0$ ) e di uscita ( $p_e$ ), cioè del rapporto  $p_e/p_0$ . Consideriamo dapprima un salto molto piccolo (rapporto  $\sim 1$ ) si avrà moto ovunque subsonico con una diminuzione di pressione e un aumento di velocità nella parte convergente dell'ugello e viceversa nel divergente (9.7.8). Il flusso rimane qualitativamente analogo finché  $p_e = p_{\text{critica}}$  critica per la quale si ha  $M = 1$  nella gola dell'ugello e il flusso torna ad essere subsonico nel divergente. Per  $p_e < p_{\text{critica}}$  si ha un aumento di velocità anche a valle della gola con una diminuzione ulteriore di pressione in parte del divergente. Per soddisfare la condizione di pressione alla sezione di uscita è pertanto necessaria la presenza di un urto con una variazione a salto di pressione. Nella zona del divergente a valle dell'urto si ha ancora flusso subsonico. L'urto sarà tanto più a valle quanto minore è la pressione  $p_e$  (questa condizione è mostrata dal primo pannello della figura). Per  $p_e = p_{\text{limite}}$  si ha l'urto nella sezione di uscita e per  $p_e < p_{\text{limite}}$  l'urto è nella parete esterna (in forma di urti obliqui, come mostrato dal secondo pannello) e quindi si ha ancora una espansione all'esterno dell'ugello (free jet) per soddisfare la condizione di pressione esterna  $p_e$ . In questo caso l'ugello è detto sovraespanso. Per  $p_e = p_{\text{progetto}}$  il flusso si espande isoentropicamente fino alla pressione di progetto (terzo pannello) ed infine nel caso in cui la  $p_e < p_{\text{progetto}}$  l'espansione avviene all'esterno del divergente e in queste condizioni l'ugello viene detto sovraespanso (quarto pannello). Il diagramma di pressione in figura mostra qualitativamente i fenomeni sopra descritti.

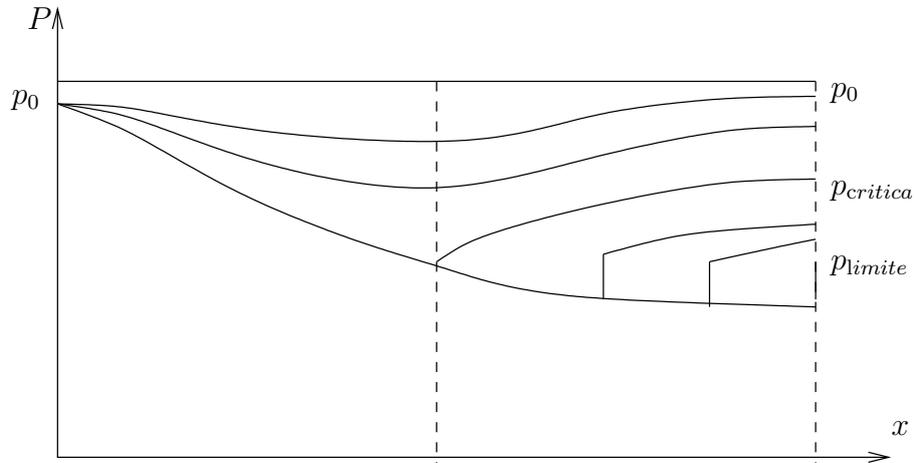
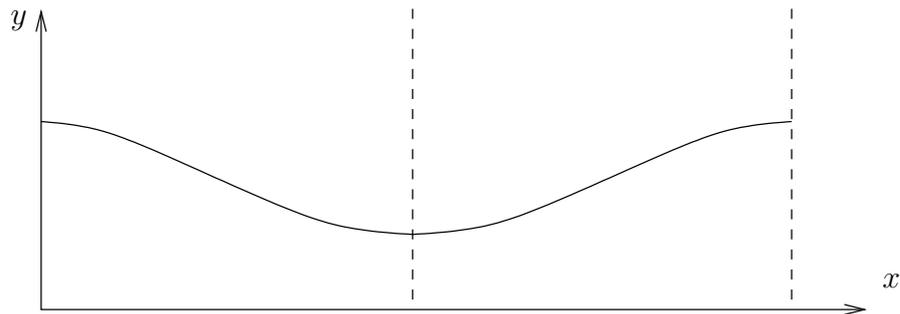


diagramma di pressione



configurazione geometrica

L'urto che consiste in una variazione brusca dei valori delle variabili fluidodinamiche e termodinamiche, viene qui considerato come una discontinuità, cioè una regione di spessore nullo attraverso la quale vi è un salto nei valori. Come nello strato limite ove sono presenti forti gradienti di velocità, anche nell'urto normale si passa in uno spessore  $\delta \rightarrow 0$  da corrente supersonica a corrente subsonica. Nell'urto si deve perciò riconsiderare la presenza dei termini viscosi e conduttivi (legati a termini in  $\frac{\partial u}{\partial x}$  o  $\frac{\partial \vartheta}{\partial x}$  invece che  $\frac{\partial u}{\partial y}$  o  $\frac{\partial \vartheta}{\partial y}$  come per strato limite).

La posizione dell'urto nell'ugello è determinata dalla condizione che deve essere soddisfatta in uscita, tenendo conto del salto nel valore delle variabili che dipende dall'intensità dell'urto stesso.

Nel salto si può calcolare a partire dalle equazioni di conservazione di massa, quantità di moto e energia.

## 9.8 Strato limite termico

La maggior parte della trattazione svolta in questo capitolo finora si è basata sull'ipotesi di fluido perfetto.

L'utilità di questa ipotesi viene completata dall'ipotesi di strato limite cioè dell'esistenza di un sottile strato vicino alle pareti dove i termini viscosi e di conduzione diventano rilevanti.

Prima di scrivere le equazioni di strato limite scriviamo quali sono le equazioni in forma completa che mostrano l'accoppiamento tra cinematica e termica.

Utilizziamo l'equazione per l'energia scritta in termini di temperatura che si ottiene dall'equazione per l'entalpia

$$\rho c_p \frac{D\vartheta}{Dt} = \frac{Dp}{Dt} + \sigma_{ij} \frac{\partial u_i}{\partial x_j} - \frac{\partial q_i}{\partial x_i} + \rho Q \quad (9.8.1)$$

che in forma adimensionale si scrive:

$$\rho^* c_p^* \frac{D\vartheta^*}{Dt} = E \frac{Dp^*}{Dt} + \frac{E}{Re} \sigma_{ij}^* \frac{\partial u_i^*}{\partial x_j} - \frac{1}{Pe} \frac{\partial}{\partial x_i} k \left( \frac{\partial \vartheta^*}{\partial x_i} \right) \quad (9.8.2)$$

Il numero di Eckardt  $E$ , che appare nell'equazione precedente, è definito come  $\frac{u_0^2}{\vartheta_0 c_0}$  e può essere messo in relazione con il numero di Mach ricordando che

$$c_p - c_v = R \quad ; \quad 1 - \frac{c_v}{c_p} = \frac{R}{c_p} \quad ; \quad \frac{\gamma - 1}{\gamma} = \frac{R}{c_p} \quad ; \quad c_p = \frac{\gamma R}{\gamma - 1}$$

$$\frac{u_0^2}{\gamma R \vartheta_0} (\gamma - 1) = M_0^2 (\gamma - 1) \quad (9.8.3)$$

E' quindi possibile semplificare le equazioni al variare del numero di Mach.

Quindi se consideriamo flussi a basso numero di Mach cadiamo nel caso incomprimitibile e le equazioni sono:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_i}{\partial x_i} &= 0 \\ \frac{Du_i}{Dt} &= -\frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{1}{Re} \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j \partial x_j} \\ \frac{D\vartheta}{Dt} &= \frac{1}{Re Pr} \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial x_j \partial x_j} \end{aligned} \quad (9.8.4)$$

In questo caso non c'è accoppiamento e il campo termico può essere

risolto a valle di quello cinematico. Nel caso di numero di Mach intermedio le equazioni diventano

$$\begin{aligned} \frac{D\rho}{Dt} + \rho \frac{\partial u_i}{\partial x_i} &= 0 \\ \rho \frac{Du_i}{Dt} &= \frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{1}{\text{Re}} \left[ \nabla^2 u_i + \left( 1 + \frac{\lambda}{\mu} \right) \frac{\partial}{\partial x_i} \left( \frac{\partial u_k}{\partial x_k} \right) \right] \\ \rho \frac{D\vartheta}{Dt} &= \frac{1}{\text{RePr}} \nabla^2 \vartheta + \text{E} \frac{Dp}{Dt} \end{aligned} \quad (9.8.5)$$

In questo caso la soluzione delle equazioni cinematico e termico risultano accoppiate attraverso la pressione ma questo accoppiamento svanisce nel caso dell'approssimazione di strato limite.

Nel caso di alti numeri di Mach invece le equazioni diventano

$$\begin{aligned} \frac{D\rho}{Dt} + \rho \frac{\partial u_i}{\partial x_i} &= 0 \\ \rho \frac{Du_i}{Dt} &= \frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{1}{\text{Re}} \left[ \nabla^2 u_i + \left( 1 + \frac{\lambda}{\mu} \right) \frac{\partial}{\partial x_i} \left( \frac{\partial u_k}{\partial x_k} \right) \right] \\ \rho \frac{D\vartheta}{Dt} &= \frac{1}{\text{RePr}} \nabla^2 \vartheta + \text{E} \frac{Dp}{Dt} + \frac{\text{E}}{\text{Re}} \sigma_{ij} \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \end{aligned} \quad (9.8.6)$$

Nel caso incomprimibile lo strato limite termico si ottiene dalle equazioni simili a quelle ottenute per la quantità di moto

$$u \frac{\partial \vartheta}{\partial x} + v \frac{\partial \vartheta}{\partial y} = \frac{1}{\text{Pe}} \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial y^2} \quad (9.8.7)$$

per cui

$$\frac{\delta}{\delta_T} = \sqrt{\text{Pr}} \quad (9.8.8)$$

quindi

$$\begin{aligned} \delta_T < \delta & \quad \text{nel caso di } \text{Pr} \gg 1 & \quad \text{oli minerali} \\ \delta_T = \delta & \quad \text{nel caso di } \text{Pr} \sim 1 & \quad \text{aria} \\ \delta_T < \delta & \quad \text{nel caso di } \text{Pr} \ll 1 & \quad \text{metalli fusi} \end{aligned} \quad (9.8.9)$$

che è la stessa soluzione anche per strato limite su lastra piana nel caso in cui il termine di produzione si possa trascurare. In questo caso con  $\text{Pr} = 1$  le equazioni per la velocità e per la temperatura risultano perciò identiche.

Nel caso di accoppiamento completo le equazioni per lo strato diventano

nel caso bidimensionale stazionario

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho u}{\partial x} + \frac{\partial \rho v}{\partial y} &= 0 \\ \rho \left( u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} \right) &= \frac{\partial}{\partial y} \left( k \frac{\partial u}{\partial y} \right) - \frac{\partial p}{\partial x} \\ \rho c_p \left( u \frac{\partial \vartheta}{\partial x} + v \frac{\partial \vartheta}{\partial y} \right) &= \frac{\partial}{\partial y} \left( k \frac{\partial \vartheta}{\partial y} \right) + u \frac{\partial p}{\partial x} + \mu \left( \frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 \end{aligned} \quad (9.8.10)$$

Si noti che nelle equazioni precedenti si è tenuto conto della variabilità di  $\mu$  e  $k$ . E' bene ancora notare che in questo caso la pressione non è incognita ma è fornita dalla soluzione esterna e che quindi le prime due equazioni risultano legate alla 3<sup>a</sup> solo tramite la variabilità  $\mu = \mu(\vartheta)$  e  $k = k(\vartheta)$ .

Nel caso generale ma nell'ipotesi di gas ideale con  $c_p = cost.$ ,  $k = cost.$  e  $\mu = cost.$  interessanti informazioni si possono ottenere dall'equazione dell'energia.

$$\rho \frac{D}{Dt} \left( h + \frac{1}{2} u^2 \right) = \frac{\partial u_i \sigma_{ij}}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j} k \frac{\partial \vartheta}{\partial x_j} \quad (9.8.11)$$

Introducendo la variabile temperatura totale

$$\Theta = \vartheta + \frac{u^2}{2c_p} \quad (9.8.12)$$

$$\begin{aligned} \rho c_p \frac{D\Theta}{Dt} &= \mu \frac{\partial^2 u^2 / 2}{\partial x_j \partial x_j} + k \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial x_j \partial x_j} \\ \rho \frac{D\Theta}{Dt} &= \left( \mu - \frac{k}{c_p} \right) \frac{\partial^2 u^2 / (2c_p)}{\partial x_j \partial x_j} + \frac{k}{c_p} \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial x_j \partial x_j} \\ \rho \frac{D\Theta}{Dt} &= \frac{k}{c_p} \left[ (\text{Pr} - 1) \frac{\partial^2 u^2 / (2c_p)}{\partial x_j \partial x_j} + \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial x_j \partial x_j} \right] \end{aligned} \quad (9.8.13)$$

Quindi nel caso di  $\text{Pr} = 1$  l'equazione diventa

$$\rho \frac{D\Theta}{Dt} = \mu \left[ \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial x_j \partial x_j} \right] \quad (9.8.14)$$

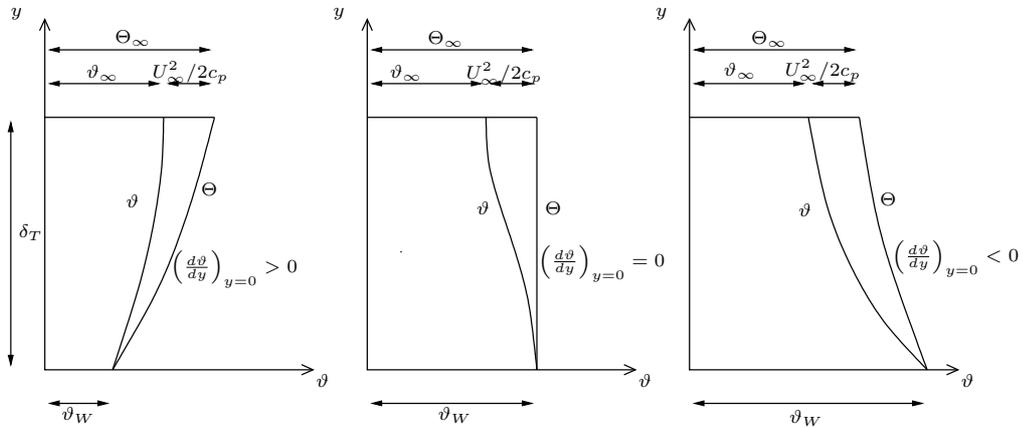
L'equazione è la stessa quindi la soluzione sarà

$$\Theta = au + b \quad (9.8.15)$$

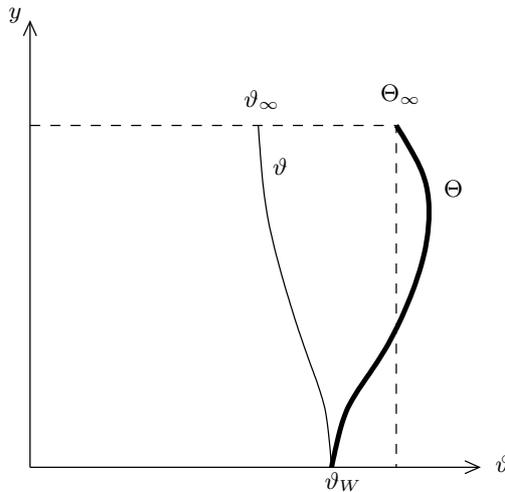
$a$  e  $b$  devono essere calcolate in modo da ripsettare le condizioni al contorno. In particolare

$$\begin{aligned} y = 0 \quad , \quad \Theta = \vartheta = \vartheta_W \quad , \quad u = 0 \\ y = \infty \quad , \quad \Theta = \Theta_\infty = \vartheta_\infty + \frac{U_\infty^2}{2c_p} \quad , \quad u = U_\infty \end{aligned} \quad (9.8.16)$$

$$\begin{aligned}
 \vartheta_W &= b \\
 \vartheta_\infty + \frac{U_\infty^2}{2c_p} &= aU_\infty + \vartheta_W = \Theta_\infty \\
 a &= \frac{\Theta_\infty - \vartheta_W}{U_\infty} \\
 \vartheta &= \Theta - \frac{u^2}{2c_p} = \vartheta_W + (\Theta_\infty - \vartheta_W) \frac{u}{U_\infty} - \frac{u^2}{2c_p} \\
 k \frac{d\vartheta}{dy} \Big|_{y=0} &= \frac{k}{U_\infty} (\vartheta_W - \Theta_\infty) \left( \frac{\partial u}{\partial y} \right)_{y=0}
 \end{aligned}
 \tag{9.8.17}$$



Per il caso adiabatico (b) il meccanismo è il seguente. Gli strati vicino alla parete sono sottoposti ad uno shear molto alto e si riscaldano ma questo calore tende ad essere trasmesso agli strati superiori. Il profilo che si ottiene è il profilo di equilibrio dove  $\vartheta_W > \vartheta_\infty$ .



La soluzione su lastra piana adiabatica vista nel paragrafo precedente è valida solo sotto l'ipotesi  $Pr = 1$ . Dal momento che per l'aria  $Pr < 1$  la soluzione  $\Theta = cost.$  non è più soluzione ma so che alla parete  $\frac{\partial^2 \Theta}{\partial y^2} > 0$  quindi il profilo di temperatura.

## Bibliografia

1. Curle & Davies, *Modern Fluid Dynamics - Vol. II: Compressible Flows*.
2. Von Mises, *Mathematical Theory of Compressible Fluid Flow*.
3. Corant, Friedrichs, *Supersonic Flow and Shock Waves*.
4. Shapiro, *The Dynamics and Thermodynamics of Compressible Fluid Flow*.
5. Charlton, *Textbook of Fluid Dynamics*.
6. Shih-I-Pai, *Introduction to the Theory of Compressible Flows*.
7. Ferri, *Supersonic Flow*

## Appendice 9.A - Richiami di termodinamica dei gas perfetti

Nella maggior parte dei problemi di gasdinamica si può assumere che il comportamento dei gas in esame sia prossimo a quello di un gas perfetto. L'equazione di stato di un gas perfetto è la seguente

$$p = \rho R \vartheta \quad (9.A.18)$$

in cui  $\vartheta$  è la temperatura assoluta e  $R$  è una costante che varia di gas in gas. Per i gas perfetti vale la seguente relazione

$$\left( \frac{\partial U}{\partial \rho} \right)_{\vartheta} = 0 \quad (9.A.19)$$

cioè l'energia interna di un gas perfetto non dipende dalla densità (o dal volume specifico) ma soltanto dalla temperatura. Quindi il differenziale di  $U(\rho, \vartheta)$  è uguale a

$$dU = \left( \frac{\partial U}{\partial \rho} \right)_{\vartheta} d\rho + \left( \frac{\partial U}{\partial \vartheta} \right)_{\rho} d\vartheta = \quad (9.A.20)$$

e analogamente per l'entalpia

$$dh = dU + d(p/\rho) = c_v d\vartheta + R d\vartheta = c_p d\vartheta \quad (9.A.21)$$

con le due precedenti relazioni abbiamo definito rispettivamente il calore specifico a volume e a pressione costante. Un'altra importante costante nei flussi dei gas perfetti è il rapporto tra i volumi specifici

$$\gamma = \frac{c_p}{c_v} \quad (9.A.22)$$

che per i gas perfetti è uguale a  $n + 2/n$  dove  $n$  è il numero di gradi di libertà delle molecole.

Spesso i processi isentropici sono presi come modelli per i processi adiabatici. Se l'entropia è costante durante una trasformazione questa si definisce isentropica e le grandezze termodinamiche per un gas perfetto seguono le seguenti relazioni

$$\frac{p}{\rho^\gamma} = \text{cost}; \quad \frac{\vartheta}{\rho^{\gamma-1}} = \text{cost}; \quad (9.A.23)$$

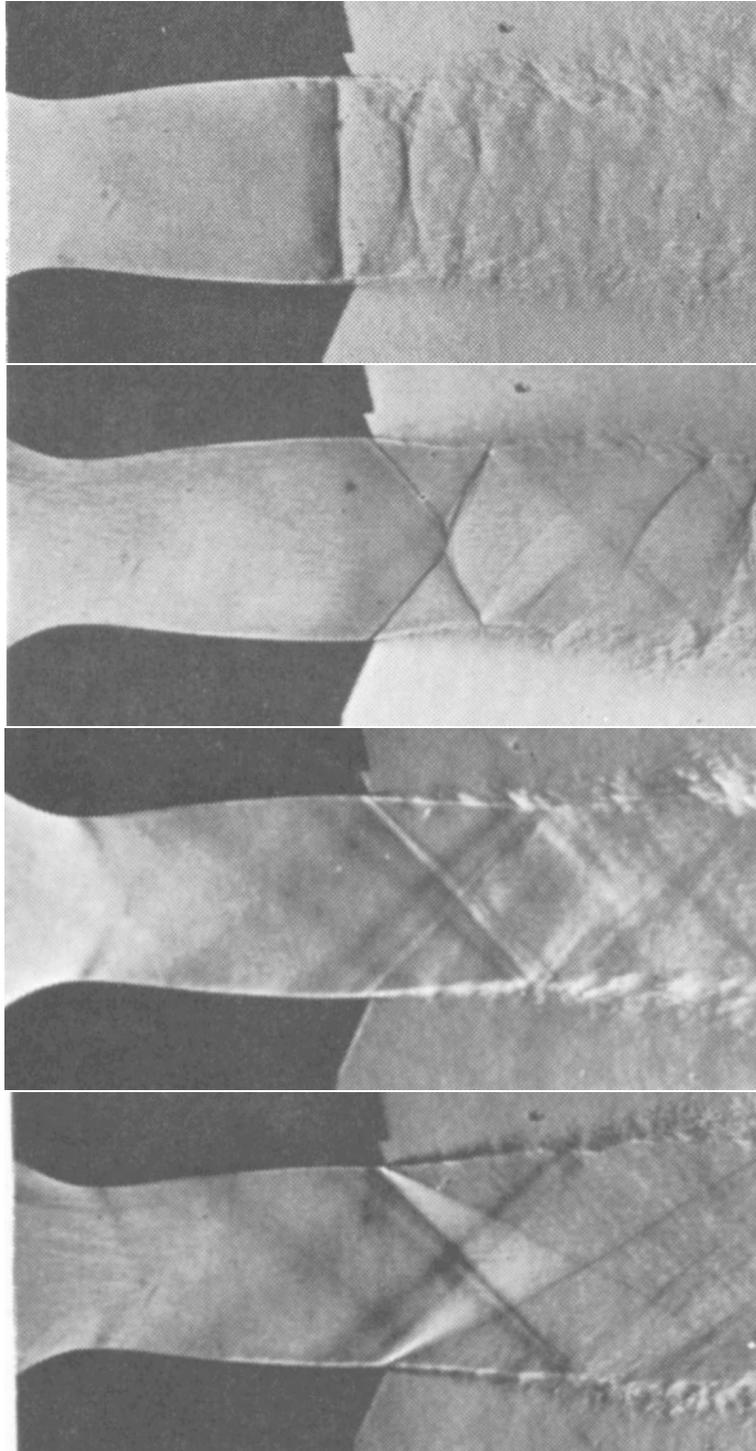


Figura 9.1 Immagini prese da Owczarek

## Capitolo 10

# Introduzione alla turbolenza

### 10.1 Caratteristiche fisiche della turbolenza

Con turbolenza si indica uno stato di moto del fluido che, pur essendo soluzione delle equazioni di Navier Stokes, presenta un alto livello di complessità rispetto al moto laminare considerato finora. Il problema è determinare la descrizione più opportuna di questo stato sia per la comprensione dei fenomeni fisici, sia per la modellizzazione necessaria a una loro predizione qualitativa.

Due proprietà della turbolenza di grande rilevanza per le applicazioni sono la capacità di mescolare due fluidi diversi (esempio combustione) o parti di fluido con temperature diverse (esempio trasmissione del calore) e la capacità di dissipare energia cinetica (esempio resistenza di corpi). Ambedue queste proprietà sono presenti anche in un flusso laminare, per effetto della diffusività molecolare (viscosità, conduzione etc), ma sono enormemente aumentate dal trasporto caotico di particelle di fluido che si realizza nei flussi turbolenti.

Se si risolvono le equazioni di Navier Stokes per numeri di Reynolds sufficientemente elevati e assegnate condizioni iniziali (c.i.), si ottiene un campo istantaneo (vedi figura 10.1) che può però essere molto diverso nei dettagli se si modificano anche di pochissimo le c.i. . Si dice in questo caso che il problema ha una forte dipendenza dalle c.i. .

Non potendo fissare in maniera esatta, ad esempio in un esperimento, le c.i. che sono di per sé casuali (seppure all'interno di un delimitato campo di variazione) e quindi imprevedibili, non resta che ottenere un numero molto grande di campi istantanei (ciascuno per c.i. di fatto leggermente diverse) o realizzazioni e fare poi una media che viene detta di ensemble: si ottiene così un campo di valori statistici che è in generale perfettamente predicibile. Per un fenomeno statisticamente stazionario, la media di ensemble si può ottenere con la media temporale di campi istantanei (realizzazioni) che si rilevano per tempi successivi (vedi analisi sperimentale di campi turbolenti).

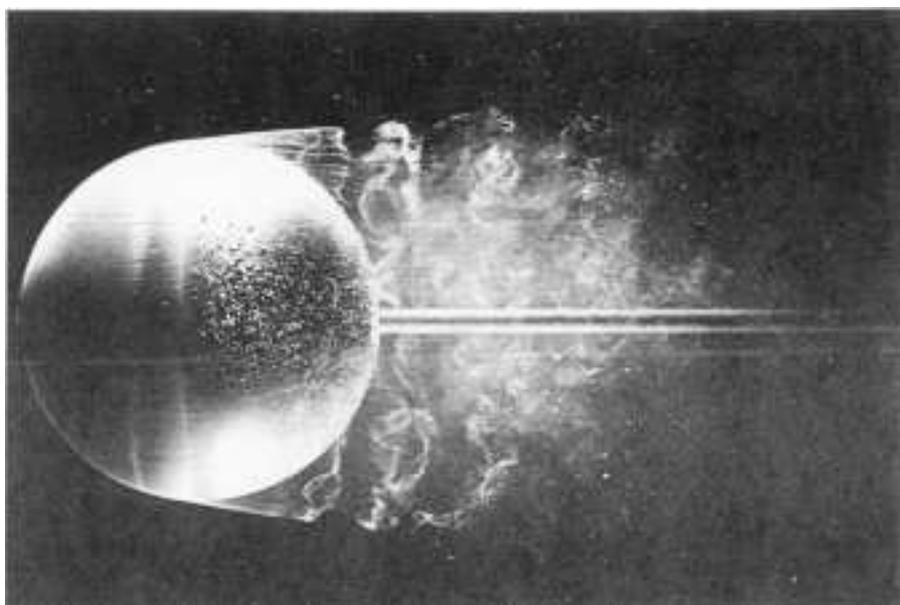


Figura 10.1

Quindi attraverso le media di ensemble spostiamo la richiesta di precidibilità del campo istantaneo (o singola realizzazione) a valori statistici del campo come il flusso medio (vedi figura 10.2).

Si può a questo punto pensare di risolvere direttamente delle equazioni per il campo medio, ma, essendo le equazioni di Navier Stokes non lineari, non si ottiene una formulazione chiusa, in quanto i termini quadratici richiedono un'altra equazione dove compaiono termini cubici e così via. Si ha cioè una gerarchia di equazioni per quantità mediate via via di ordine più alto. Se si introduce un modello di chiusura, ad esempio dei termini quadratici (Reynolds stress) della prima equazione, si ottiene una equazione approssimata (vedi modelli RANS) che può dare direttamente il campo medio. Ovviamente la soluzione è tanto più accurata quanto migliore o più adatto è il modello di chiusura.

Come si può osservare (figura 10.1) nei campi istantanei sono presenti moti (eddies) a diversa scala a partire da una legata alle dimensioni caratteristiche del fenomeno, dove abitualmente si fornisce l'energia, fino a scale sempre più piccole legate alla generazione di strutture vorticosi intense e localizzate, che consentono il forte aumento di energia dissipata. A tal fine svolge un ruolo cruciale il termine non lineare di stretching e tilting dell'equazione di trasporto delle vorticità, che porta a strutture via via più sottili e disordinate che favoriscono la presenza di forti gradienti e quindi l'aumento della energia dissipata per effetto della viscosità

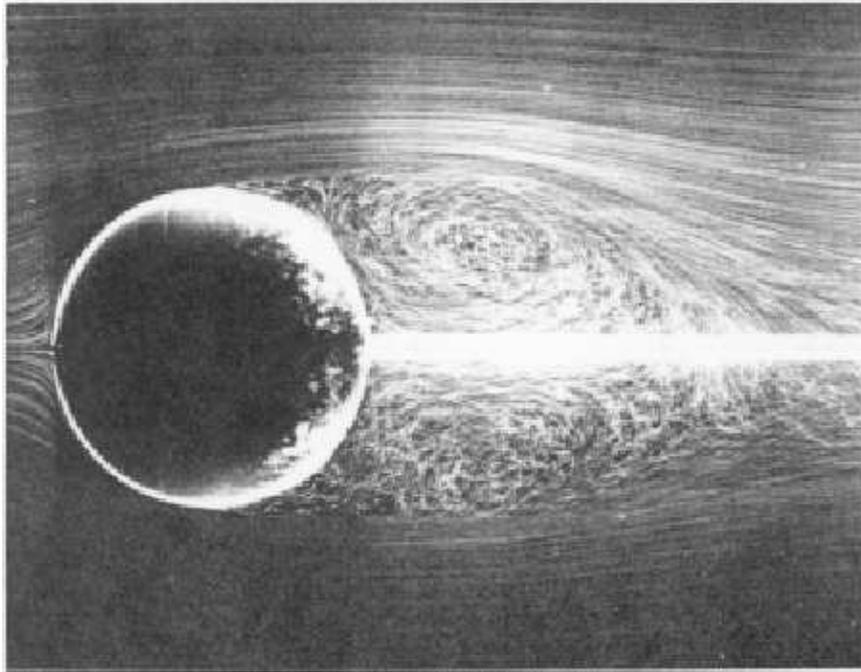


Figura 10.2

$$\varepsilon = 2\nu e_{ij}e_{ij}$$

Per visualizzare il ruolo delle strutture vorticose nell'aumento di  $\varepsilon$ , consideriamo un semplice esperimento che si può attuare con un frullino in un recipiente pieno di un liquido (acqua o olio: varia  $\nu$ ). Aumentando la potenza immessa, aumentano le strutture vorticose nel campo e diminuiscono le loro dimensioni caratteristiche al fine di consentire la dissipazione di tutta l'energia immessa per unità di tempo. Si può facilmente calcolare (par.5) la scala delle strutture più piccole che dissipano (scala di Kolmogorov).

In sintesi, i moti a più larga scala sono quelli che contengono la gran parte di energia cinetica. Tramite interazioni non lineari l'energia si trasferisce in parte a scale via via più piccole, fino a che l'energia viene dissipata per effetto della viscosità. Questo fenomeno si indica col nome di cascata di energia (Richardson).

Per Reynolds molto alti la dinamica delle scale più grandi e la cascata di energia sono essenzialmente fenomeni legati a termini inerziali e quindi poco sensibili al valore numerico di Re; solo la dinamica delle piccole scale è direttamente influenzata dal valore della viscosità (figura 10.3). Si può quindi ipotizzare che le proprietà macroscopiche della turbolenza sono insensibili a

cambi di viscosità: ad esempio l'energia dissipata raggiunge un limite finito per  $\nu \rightarrow 0$ .

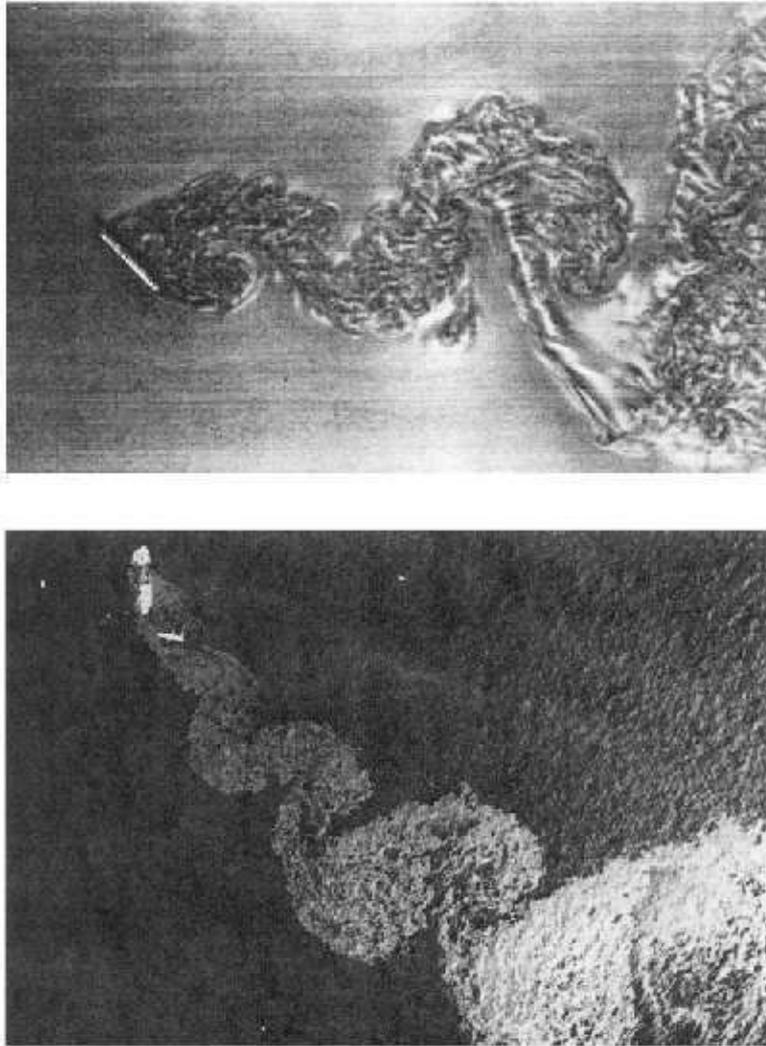


Figura 10.3

## 10.2 Decomposizione di Reynolds

Se vogliamo analizzare un flusso turbolento con un approccio statistico, conviene separare il campo fluidodinamico in una parte media e in una parte fluttuante come suggerito dalla decomposizione di Reynolds per le velocità

$$u_i(x, t) = U_i(x, t) + u'_i(x, t)$$

dove il campo medio  $U_i$  è definito dalla media di ensemble

$$U_i = \langle u_i(x, t) \rangle = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N u_i^{(n)}(x, t) \quad (10.2.1)$$

e  $N$  è il numero di realizzazioni. Ne segue che la media di ensemble della parte fluttuante

$$\langle u'_i(x, t) \rangle = 0$$

mentre

$$\langle u_i'^2(x, t) \rangle \neq 0$$

e definiamo il valore quadratico medio

$$u_{rms} = \left( \langle u_i'^2 \rangle \right)^{\frac{1}{2}}$$

come valore rappresentativo della fluttuazione.

La stessa decomposizione vale per la pressione

$$p(x, t) = P(x, t) + p'(x, t)$$

per il tensore delle tensioni

$$T_{ij}(x, t) = \bar{T}_{ij}(x, t) + T'_{ij}(x, t)$$

e relative equazioni costitutive

$$\bar{T}_{ij} = -P\delta_{ij} + 2\mu E_{ij} \quad T'_{ij} = -p'\delta_{ij} + 2\mu e'_{ij}$$

e per la forza

$$f_i = F_i + f'_i$$

con ovvio significato dei simboli.

Le derivate e gli integrali commutano con l'operazione di media di ensemble come è facile dimostrare utilizzando la 9.A.1

$$\begin{aligned} \left\langle \frac{\partial}{\partial t} u_i \right\rangle &= \frac{1}{N} \sum \frac{\partial u_i}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} \frac{1}{N} \sum u_i = \frac{\partial}{\partial t} \langle u_i \rangle \\ \left\langle \int u_i dx \right\rangle &= \int \langle u_i \rangle dx \end{aligned}$$

è utile osservare che

$$\langle U_i \rangle = U_i$$

e quindi

$$\langle u'_i U_i \rangle = \langle u'_i \rangle U_i = 0$$

### 10.3 Equazioni del campo medio

Sostituendo la decomposizione di Reynolds nelle equazioni di conservazione della quantità di moto e della massa si ottiene nel caso  $\rho = cost$

$$\begin{aligned} \rho \frac{\partial(U_i + u'_i)}{\partial t} + (U_j + u'_j) \frac{\partial(U_i + u'_i)}{\partial x_j} = \\ \rho(F_i + f'_i) + \frac{\partial(\bar{T}_{ij} + T'_{ij})}{\partial x_j} \\ \frac{\partial(U_i + u'_i)}{\partial x_i} = 0 \end{aligned} \quad (10.3.1)$$

facendo la media di ensemble ottengo le equazioni per il campo medio

$$\begin{aligned} \rho \frac{DU_i}{Dt} = \rho F_i + \frac{\partial}{\partial x_j} (\bar{T}_{ij} - \rho \langle u'_i u'_j \rangle) \\ \frac{\partial U_i}{\partial x_i} = 0 \end{aligned} \quad (10.3.2)$$

Il tensore risultante dalla media dei termini quadratici di natura inerziale (Reynolds stress) agisce come extra-tensione (infatti  $\langle u'_i u'_j \rangle$  in generale è negativo) che può essere di molto prevalente rispetto a  $\bar{T}_{ij}$ . Questo termine rappresenta il flusso di quantità di moto dovuto alle fluttuazione di velocità mediata ed è una nuova incognita del problema.

Se si vogliono risolvere direttamente le equazioni 9.A.2 dette RANS (Reynolds Averaged Navier Stokes) si deve adottare un modello di chiusura in funzione dei valori medi, e.g.  $U_i$ , che già compaiono come incognite nelle equazioni.

In particolare si può esprimere il Reynolds stress come la tensione viscosa (Boussinesq)

$$-\langle u'_i u'_j \rangle = \nu_T \left( \frac{\partial U_i}{\partial x_j} + \frac{\partial U_j}{\partial x_i} \right) \quad (10.3.3)$$

introducendo il coefficiente di viscosità turbolenta (eddy viscosity)  $\nu_T$ , in analogia con la teoria cinetica dei gas mediante la quale si riduce la viscosità. Con questa espressione l'energia cinetica media  $k = \frac{1}{2} \langle u'_i u'_i \rangle$  risulterebbe nulla in quanto

$$\langle u'_i u'_i \rangle = -2\nu_t \frac{\partial U_i}{\partial x_i} = 0$$

pertanto si introduce la correzione

$$-\langle u'_i u'_j \rangle = -\frac{2}{3}k\delta_{ij} + \nu_T \left( \frac{\partial U_i}{\partial x_j} + \frac{\partial U_j}{\partial x_i} \right) \quad (10.3.4)$$

che in ogni caso introduce la necessità di conoscere  $k$ . In generale si esprime

$$\nu_T = C \frac{k^2}{\varepsilon}$$

e si risolvono le equazioni di evoluzione per le quantità  $k$  e  $\varepsilon$  come indicato in seguito. Questa procedura, molto usata ma non sempre sufficientemente accurata, si indica come modello di chiusura  $k - \varepsilon$ . Modelli di chiusura più complessi, ma non necessariamente più accurati, sono basati su equazioni di evoluzione per le componenti  $\langle u'_i u'_j \rangle$  dello stress di Reynolds, che come detto in 9.A.1 contengono termini cubici del tipo  $\langle u'_i u'_j u'_k \rangle$  e richiederebbero quindi un modello di chiusura per questi termini.

Per ottenere l'equazione per l'energia del moto medio, moltiplico scalarmente la 9.A.2 per  $U_i$

$$\frac{\rho}{2} \frac{DU_i U_i}{Dt} = \rho F_i U_i + U_i \frac{\partial}{\partial x_j} (\bar{T}_{ij} - \rho \langle u'_i u'_j \rangle).$$

E' conveniente esprimere l'ultimo termine in modo che appaia un termine e divenga

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{DU_i U_i}{Dt} = & F_i U_i + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[ \frac{U_i}{\rho} (\bar{T}_{ij} - \rho \langle u'_i u'_j \rangle) \right] \\ & - 2\nu E_{ij} E_{ij} + \langle u'_i u'_j \rangle E_{ij} \end{aligned} \quad (10.3.5)$$

avendo tenuto conto della relazione costitutiva e della conservazione di massa per il moto medio. Inoltre per la simmetria del tensore  $\langle u'_i u'_j \rangle$ , il termine antisimmetrico della

$$\frac{\partial U_i}{\partial x_j} = E_{ij} + \bar{\Omega}_{ij}$$

non dà contributo.

Commentando la 9.A.5, i termini a secondo membro danno la variazione di energia cinetica del moto medio. Il primo è dato dal lavoro (per unità di tempo) della forzante esterna. Il secondo termine in forma di divergenza può solo redistribuire l'energia trasportandola da una parte all'altra del campo. Infatti se considero l'integrale su uno spazio confinato con condizione al contorno di velocità nulla, questi termini non danno contributo alla variazione globale di energia cinetica. Il terzo termine è una quantità definita positiva

e rappresenta la dissipazione viscosa. Il quarto termine rappresenta il flusso di energia tra moto medio e moto fluttuante e può essere in generale sia positivo che negativo. Vicino a una parete dove si ha  $\frac{\partial u}{\partial y} > 0$  il contributo di questo termine è dato da  $\frac{\partial U}{\partial y} \langle u'v' \rangle$  dove  $\langle u'v' \rangle$  è con alta probabilità negativo. Quindi, nello strato limite, questo termine ha lo stesso segno del precedente e rappresenta una perdita di energia cinetica, ma invece di dissipare direttamente, trasferisce energia al moto fluttuante. Infatti lo stesso termine (ma con il segno cambiato) lo ritroviamo come termine di produzione dell'equazione per l'energia cinetica del moto fluttuante. A parte una zona molto ristretta vicino alla parete (sottostrato viscoso) questo termine è di gran lunga prevalente rispetto alla dissipazione viscosa.

## 10.4 Equazioni del campo fluttuante

Le equazioni per il campo fluttuante si ottengono sottraendo alle 9.A.1 le equazioni 9.A.2 per il campo medio

$$\rho \left( \frac{Du'_i}{Dt} + u'_j \frac{\partial U_i}{\partial x_j} + u'_j \frac{\partial u'_i}{\partial x_j} \right) = \rho f'_i + \frac{\partial}{\partial x_j} (T'_{ij} + \rho \langle u'_i u'_j \rangle)$$

$$\frac{\partial u'_i}{\partial x_i} = 0 \quad (10.4.1)$$

dove la derivata materiale  $\frac{Du'_i}{Dt} = \frac{\partial u'_i}{\partial t} + U_j \frac{\partial u'_i}{\partial x_j}$ .

Per ricavare l'equazione dell'energia cinetica del moto fluttuante (energia cinetica turbolenta) si moltiplica la prima equazione per  $u'_i$  e facendo la media di ensemble, si ottiene

$$\rho \left( \frac{1}{2} \frac{D \langle u'_i u'_i \rangle}{Dt} + \langle u'_i u'_j \rangle \frac{\partial U_i}{\partial x_j} + \frac{1}{2} \frac{\partial \langle u'_i u'_i u'_j \rangle}{\partial x_j} \right) =$$

$$\rho \langle f'_i u'_i \rangle + \frac{\partial}{\partial x_j} \langle u'_i T'_{ij} \rangle - 2\mu \langle e'_{ij} e'_{ij} \rangle$$

avendo tenuto conto di

$$\langle u'_i \rangle \frac{\partial}{\partial x_j} \rho \langle u'_i u'_j \rangle = 0$$

$$\langle u'_i u'_j \frac{\partial u'_i}{\partial x_j} \rangle = \langle u'_i \frac{\partial u'_i u'_j}{\partial x_j} \rangle = \frac{1}{2} \frac{\partial \langle u'_i u'_j u'_i \rangle}{\partial x_j}$$

$$T'_{ij} = -p' \delta_{ij} + 2\mu e'_{ij} \quad \frac{\partial u'_i}{\partial x_j} = e'_{ij} + \Omega'_{ij}$$

$$\langle u'_i \frac{\partial}{\partial x_j} T'_{ij} \rangle = \frac{\partial}{\partial x_j} \langle u'_i T'_{ij} \rangle + \langle p' \frac{\partial u'_i}{\partial x_j} \rangle - 2\mu e'_{ij} e'_{ij}$$

che si può riscrivere nella forma

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{D \langle u'_i u'_j \rangle}{Dt} &= \langle f'_i u'_i \rangle + \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \langle u'_i T'_{ij} \rangle - \frac{1}{2} \langle u'_i u'_j u'_i \rangle \right) \\ &\quad - \langle u'_i u'_j \rangle E_{ij} - 2\nu \langle e'_{ij} e'_{ij} \rangle \end{aligned} \quad (10.4.2)$$

In questa equazione per l'energia cinetica turbolenta a parte i termini dovuti a forzante esterna fluttuante e termini in forma di divergenza che trasferiscono energia spazialmente e non contribuiscono a una variazione globale di energia, appaiono il termine di produzione e il termine di dissipazione. Il termine di produzione  $-\langle u'_i u'_j \rangle E_{ij}$  è lo stesso (col segno cambiato) dell'equazione per l'energia cinetica del moto medio e qui fornisce energia al campo fluttuante, se come discusso prima per un flusso con shear  $\frac{\partial u}{\partial y}$  il termine  $\langle u'_i u'_j \rangle$  è mediamente negativo. Il termine di dissipazione viscosa  $-2\mu e'_{ij} e'_{ij}$  (con  $e'_{ij} e'_{ij}$  definito positivo) ha qui un ruolo molto rilevante in quanto, essendosi trasferita energia su scale più piccole, si formano gradienti molto elevati. Se facciamo una stima dell'ordine di grandezza dei due termini dissipativi presenti nelle equazioni 9.A.2 e 9.A.5 rispettivamente si ottiene

$$\frac{2\nu e'_{ij} e'_{ij}}{2\nu E_{ij} E_{ij}} = \frac{\nu \left(\frac{U}{\delta}\right)^2}{\nu \left(\frac{U}{L}\right)^2} = \left(\frac{L}{\delta}\right)^2 = Re^2 \gg 1 \quad (10.4.3)$$

dove  $\delta$  è uno spessore caratteristico delle strutture vorticosi di piccola scala, in corrispondenza delle quali si formano gradienti del campo fluttuante. Si è inoltre assunto che la velocità  $u_{rms}$  rappresentativa del moto fluttuante, seppur minore, sia dell'ordine di  $U$  e che, come si vedrà nel prossimo paragrafo, il numero di Reynolds relativo a tale scala è unitario.

## 10.5 Le scale della Turbolenza

Nell'equazione per l'energia cinetica del moto medio (9.A.5) il termine di trasferimento al moto fluttuante è in generale prevalente rispetto al termine di produzione diretta. Per una stima degli ordini di grandezza, analogo a 9.A.3 si ha

$$\frac{2\nu E_{ij} E_{ij}}{\langle u'_i u'_j \rangle E_{ij}} = \frac{\nu \left(\frac{u}{L}\right)^2}{u^2 \frac{u}{L}} = \frac{\nu}{uL} = \frac{1}{Re} \ll 1 \quad (10.5.1)$$

Tranne che in una zona molto vicina alla parete dove hanno lo stesso ordine in quanto il Reynolds stress tende rapidamente a zero, avvicinandosi

alla parete. Quindi, l'energia cinetica del moto medio viene essenzialmente trasferita sul moto fluttuante dal termine detto di produzione e solo in piccola parte direttamente dissipata alle grandi scale. L'energia cinetica del moto fluttuante viene poi dissipata alle scale più piccole dal termine  $2\nu e'_{ij}e'_{ij}$ . Da questo meccanismo indicato come cascata di energia., ne segue che l'energia trasferite su scale via via più piccole non può che essere quella che poi viene dissipata. L'energia trasferita, che quindi indichiamo con  $\varepsilon$ , è determinata da meccanismi tipicamente non lineari e marginali del tipo stretching e tilting che sono assenti in moti bidimensionali. Il trasferimento di energia avviene per step intermedi infatti, rispetto a un eddy di riferimento, gli eddies leggermente più piccoli sono sottoposti a stretching e tilting, quelli molto più piccoli, sono semplicemente convetti. Se la  $u_{rms} \simeq U$  è una tipica velocità di fluttuazione, il tempo caratteristico per un eddy di grande scala  $L$  è  $t_c = L/U$  (eddy turnover time) e l'energia trasferita nell'unità di tempo è

$$\varepsilon = U^2 \frac{U}{L} = \frac{U^3}{L}$$

Ne segue che l'energia dissipata per unità di tempo è determinata da questa energia e non dal valore della  $\nu$  Posso quindi ricavare dall'equilibrio tra le due quantità la scala dissipativa  $\eta$  (prima ind.  $\delta$ )

$$\varepsilon = \frac{U^3}{L} = \nu \frac{U^2}{\eta^2} \quad (10.5.2)$$

considerando che alle scale dissipative  $Re = \frac{U\eta}{\nu} = 1$  si ottiene  $U = \frac{\nu}{\eta}$  che sostituito nella 9.A.2 da

$$\eta = \left( \frac{\nu^3}{\varepsilon} \right)^{\frac{1}{4}} \quad (10.5.3)$$

detta scala dissipativa o di Kolmogorov. Utilizzando questa espressione determino  $\eta$  per l'esempio del frullino in acqua (vedi introduzione) con potenza 100Watt

$$\begin{aligned} \varepsilon &= 100 \frac{\text{m}^2}{\text{sec}^3} \\ \nu &= 10^{-6} \frac{\text{m}^2}{\text{sec}} \\ \eta &= 10^{-5} \text{m} = 10^2 \text{mm} \end{aligned}$$

L'intervallo di scale per cui avviene trasferimento di energia senza che la dissipazione abbia un ruolo effettivo si indica come range inerziale della cascata di energia. L'intervallo di scale per cui avviene la dissipazione si indica come range dissipativo.

Se consideriamo il rapporto tra la scala integrale  $L$  relativa a eddies con il massimo contenuto energetico e la scala dissipativa

$$\left(\frac{L}{\eta}\right)^4 = \frac{\varepsilon L^4}{\nu^3} = \frac{\mu^3 L^3}{\nu^3} = Re^3$$

quindi

$$\frac{L}{\eta} = Re^{\frac{3}{4}}$$

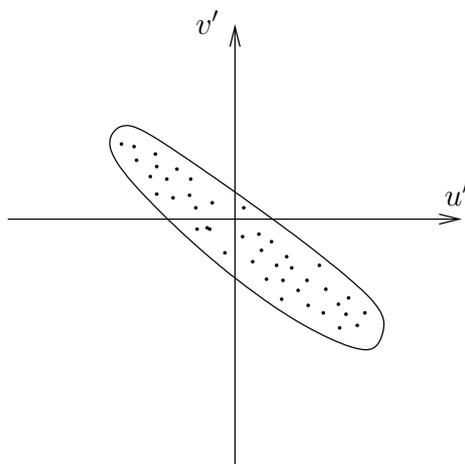
Se quindi voglio simulare tutte le scale significative in turbolenza devo avere un passo della griglia di dissipazione dell'ordine di  $\eta$  e quindi, se il passo è costante, in un reticolo  $3D$  di  $N$  nodi con

$$N = \left(\frac{L}{\eta}\right)^3 = Re^{\frac{9}{4}}$$

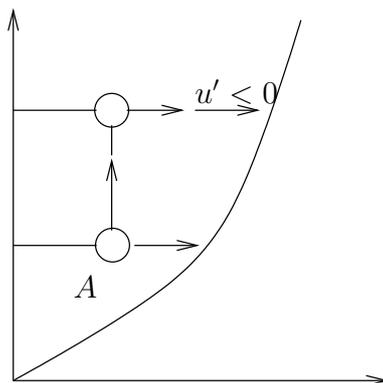
che si può realizzare solo per  $Re$  molto bassi ( $10^3 - 10^4$ ) rispetto alle esigenze applicative. In questo caso si ha una simulazione numerica diretta (DNS) delle equazioni di Navier Stokes con una rappresentazione esatta del campo turbolento e della sua evoluzione temporale. Per  $Re$  più elevati, si possono fare simulazioni meno risolte: non si arriva cioè a simulare moti a scala  $\eta$  e quindi si deve adottare un modello di sottogriglia che sostituisca gli eventi dissipativi che avvengono a scala  $< \Delta$  (scala risolta) e  $> \eta$  (scala che si dovrebbe risolvere per DNS). Questo tipo di simulazione si indica col nome di LES (Large Eddy Simulation) in quanto continua a simulare in maniera soddisfacente i moti a scala più grande purché il modello sottogriglia sia in grado di dissipare l'energia trasferita a scale  $< \Delta$ .

## 10.6 Produzione e strutture vorticose

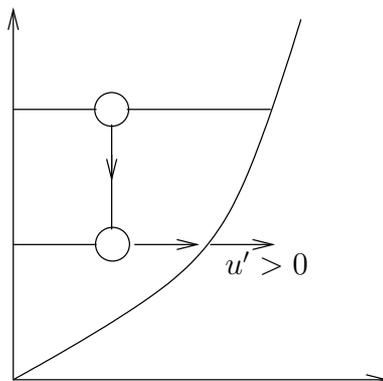
Si è detto precedentemente che vicino ad una parete dove  $\frac{\partial u}{\partial y} > 0$  per soddisfare la condizione di aderenza, la componente  $\rho\langle u'v' \rangle$  dello stress di Reynolds è generalmente negativa e quindi sottrae energia cinetica al moto medio. Se facciamo un'analisi dei dati relativi a ciascun punto (sia sperimentale che numerica) otteniamo un diagramma (scatter plot) dove appare una nuvola di punti disposti come in figura cui corrisponde con maggiore probabilità  $u' > 0$  per  $v' < 0$  oppure  $u' < 0$  per  $v' > 0$ .



È facile vedere che per  $\frac{\partial u}{\partial y} > 0$  una particella  $A$  dotata di  $v' > 0$  sale portandosi dietro una velocità  $u$  minore rispetto alla velocità  $u$  media dello strato dove arriva e ne risulta una  $u' < 0$ .



Al contrario una particella  $B$  dotata di  $v' < 0$  scende portandosi una velocità maggiore rispetto al valor medio dello strato di arrivo. Quindi  $u' > 0$ .



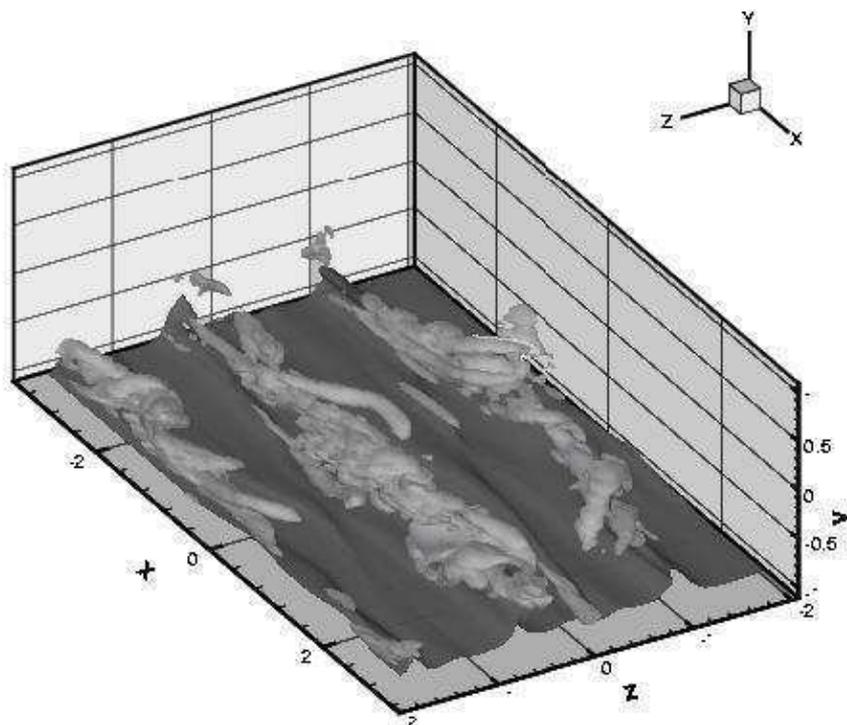
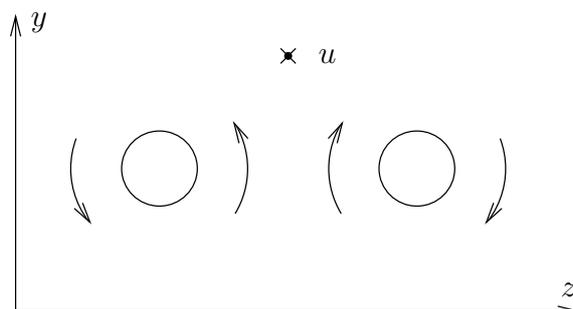


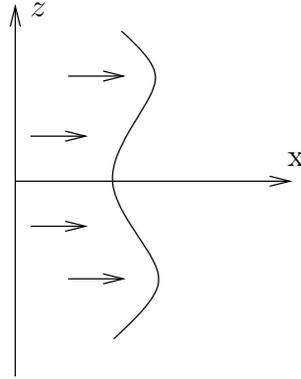
Figura 10.4

In particolare vicino alla parete si osserva che le strutture vorticose piú stabili sono vortici allineati con la corrente (streamwise) che inducono un gradiente trasversale  $\frac{\partial v}{\partial z}$  come mostrato nella sezione in figura



Nella zona intermedia tra i due vortici particelle dotate di velocità minore e provenienti da una zona piú vicina alla parete salgono. Un comportamento opposto hanno le particelle all'esterno. Si può vedere (figura 10.4) che la disposizione è molto regolare e i vortici si allineano, si destabilizzano,

scompaiono e si rigenerano secondo meccanismi legati ai termini non lineari che sostengono la turbolenza di parete. Nello schema precedente si formano, alternate tra loro (nella zona interna e esterna ai vortici rispettivamente) strisce ad alta e bassa velocità che inducono un gradiente trasversale  $\frac{\partial u}{\partial z}$



Se consideriamo che in flusso di shear cioè con  $\frac{\partial U}{\partial y} > 0$ , come nello strato limite, è presente un valore elevato di  $\zeta_z$ , e per la nascita di gradienti trasversali sia di  $u$  che di  $v$  i termini di stretching e tilting possono agire in modo tale che

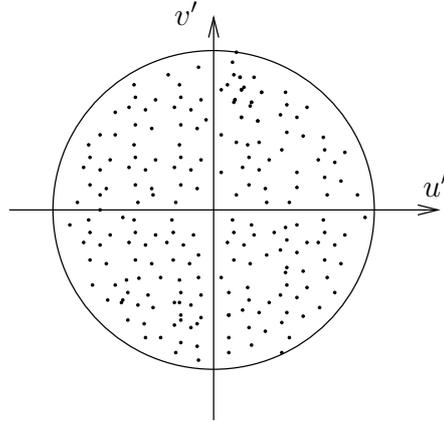
$$\frac{D}{Dt}\zeta_y = \zeta_z \frac{\partial v}{\partial z} \quad (10.6.1)$$

$$\frac{D}{Dt}\zeta_x = \zeta_z \frac{\partial u}{\partial z} + \zeta_y \frac{\partial U}{\partial y} \quad (10.6.2)$$

dando cioè luogo a un meccanismo di rigenerazione, che in realtà è più complicato per la presenza di fenomeni di instabilità delle strisce intermedie.

La presenza di un meccanismo di rigenerazione da una possibile spiegazione della alta probabilità di trovare una distribuzione statisticamente ordinata di vortici longitudinali.

Nel caso di turbolenza isotropa, cioè senza direzioni preferenziali, solo le componenti del tensore  $\langle u'_i u'_j \rangle$  sulla diagonale principale, cioè  $\langle u'^2 \rangle$ ,  $\langle v'^2 \rangle$ ,  $\langle w'^2 \rangle$  sono diverse da zero, uguali tra loro e rappresentano  $\frac{1}{3}$  dell'energia cinetica turbolenta.



Se osserviamo lo stesso diagramma, con le nuvole di punti corrispondenti a diverse misure nel campo, vediamo che per  $u' > 0$  posso avere con uguale probabilità  $v' > 0$  o  $v' < 0$ . Per avere produzione di energia fluttuante e quindi meccanismi di sostegno della turbolenza si deve sviluppare un'anisotropia nel campo: senza anisotropia non si può estrarre energia dal campo medio. Per sostenere una turbolenza isotropa è quindi necessario fornire energia mediante il termine  $\langle f'u' \rangle$ .

Se la turbolenza è omogenea, cioè non dipende dalla posizione se all'interno del campo

$$\frac{\partial}{\partial x} \langle u'_i u'_j \rangle = 0$$

cioè le componenti del tensore sono indipendenti dalla posizione. Ne segue che la turbolenza omogenea non ha influenza sul flusso medio.

Nel caso di turbolenza omogenea

$$\varepsilon = 2\nu \langle e'_{ij} e'_{ij} \rangle = \nu \langle \zeta'_k \zeta'_k \rangle$$

cioè è proporzionale alla media di ensemble delle densità di enstrofia fluttuante. Infatti

$$2\nu e'_{ij} e'_{ij} = \nu \left( \frac{\partial u'_i}{\partial x_j} \frac{\partial u'_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u'_j}{\partial x_i} \frac{\partial u'_i}{\partial x_j} \right)$$

ma

$$\begin{aligned} \zeta'_k \zeta'_k &= \varepsilon_{kli} \frac{\partial u'_i}{\partial x_l} \varepsilon_{kmj} \frac{\partial u'_j}{\partial x_m} = (\delta_{lm} \delta_{ij} - \delta_{lj} \delta_{mi}) \frac{\partial u'_i}{\partial x_l} \frac{\partial u'_j}{\partial x_m} = \\ &= \frac{\partial u'_i}{\partial x_m} \frac{\partial u'_i}{\partial x_m} - \frac{\partial u'_i}{\partial x_j} \frac{\partial u'_j}{\partial x_i} \end{aligned}$$

quindi

$$2\nu e'_{ij} e'_{ij} = \nu \left( \langle \zeta'_k \zeta'_k \rangle + 2 \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} \langle u'_i u'_j \rangle \right)$$

e per turbolenza omogenea  $\frac{\partial}{\partial x_j} \langle u'_i u'_j \rangle = 0$  quindi

$$\varepsilon = \nu \langle \zeta'_k \zeta'_k \rangle$$

Si ricorda che nel caso laminare l'equazione per l'enstrofia si costruisce a partire dall'equazioni di trasporto di vortice moltiplicata scalarmente per  $\zeta$

$$\left( \rho \frac{D}{Dt} \zeta_i = \rho \zeta_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \mu \frac{\partial^2 \zeta_i}{\partial x_j \partial x_j} \right) \zeta_i$$

$$\frac{1}{2} \rho \frac{D}{Dt} \zeta_i \zeta_i = \rho \zeta_i \zeta_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \mu \frac{\partial}{\partial x_j} \zeta_i \frac{\partial \zeta_i}{\partial x_j} - \mu \frac{\partial \zeta_i}{\partial x_j} \frac{\partial \zeta_i}{\partial x_j}$$

che in forma integrale dà la variazione di enstrofia  $\int_{\Omega} \frac{1}{2} \rho \zeta_i \zeta_i dV$

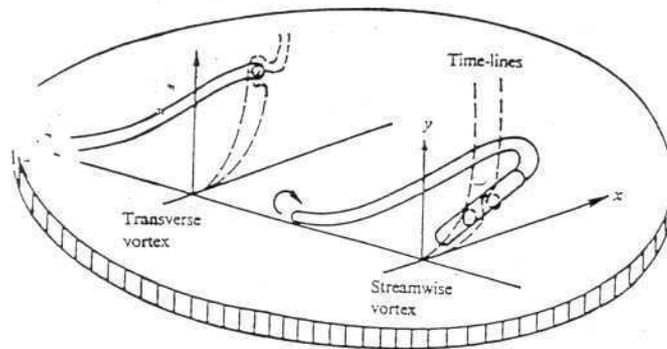
$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega} \frac{1}{2} \rho \zeta_i \zeta_i dV = \int \rho \zeta_i \zeta_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} dV + \frac{1}{2} \mu \int \zeta_i \zeta_j n_j dS - \mu \int \frac{\partial \zeta_i}{\partial x_j} \frac{\partial \zeta_i}{\partial x_j} dV$$

dove il primo termine a secondo membro è un fattore di stretching che può incrementare l'enstrofia il secondo è un flusso per diffusione attraverso il contorno e il terzo è una dissipazione di enstrofia. Questo ultimo termine indica che il processo di diffusione, in assenza di altri fenomeni tipo stretching, attenua i massimi di vorticità da cui risulta una diminuzione al livello globale e quindi una dissipazione di enstrofia.

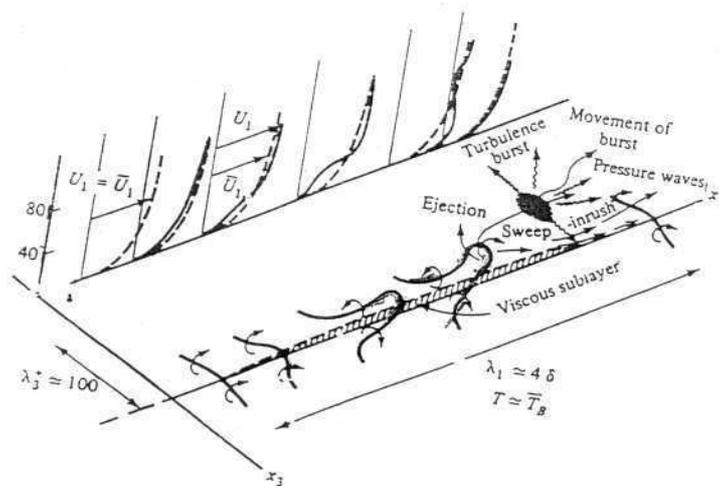
In 10.5 si riporta uno schema che rappresenta la formazione di un vortice a forcina (haerping vortex)

## 10.7 Turbolenza all'interno di un canale

Un importante caso di flusso confinato tra pareti solide in condizioni turbolente è quello del canale. La configurazione geometrica (vedi figura 10.7) è costituita da due pareti parallele poste a distanza (lungo  $y$ ) pari a  $2h$  ( $y = 0$  nella parete inferiore per fissare le idee) e infinitamente estese nelle due direzioni ( $x, z$ ). In alternativa, nel caso non ideale si può far riferimento a pareti con dimensioni  $L_x$  e  $L_z$  molto maggiori di  $h$  e comunque considerando punti sufficientemente lontano dai bordi in modo da considerare condizioni di turbolenza pienamente sviluppata: in tali condizioni si può supporre che si realizzi un flusso per cui le statistiche delle velocità (valori medi, stress di Reynolds, valori quadratici medi, ...) non dipendono dalle coordinate lungo le pareti  $x$  e  $z$  e nemmeno dal tempo (flusso statisticamente stazionario).



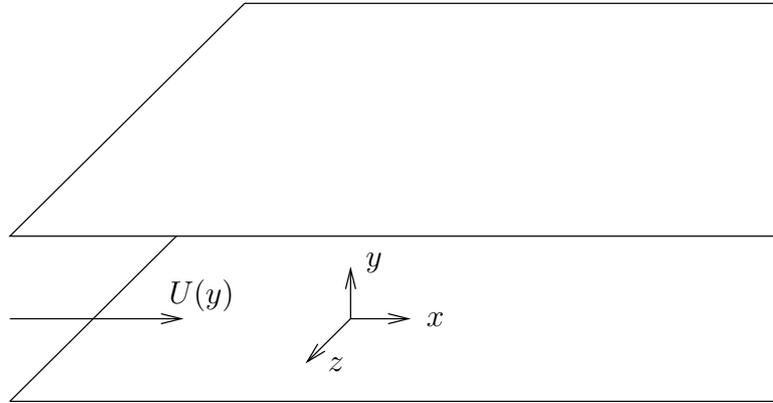
Offen & Kline 1975



Hinze 1975

Figura 10.5

Si osservi che, come si discuterà in seguito lo stesso non si può dire per le statistiche dell'altra variabile in gioco cioè la pressione. Riassumendo le statistiche delle velocità dipendono invece unicamente dalla coordinata  $y$ , ortogonale alla giacitura della pareti.



Si ha quindi

$$u = U(y) + u', v = V(y) + v', w = W(y) + w'$$

Le statistiche di velocità godono inoltre di proprietà di simmetria rispetto a qualunque piano con giacitura parallela ad  $x - y$  cosa che comporta subito  $W(y) = 0$  e rispetto al piano  $y = h$  medio tra le pareti.<sup>1</sup>

Dall'equazione di continuità per i valori medi si ottiene  $\frac{dV(y)}{dy} = 0$  che unita alla condizione al contorno alla parete per esempio inferiore  $V(0) = 0$  porta a concludere  $V(y) = 0$ . Quindi ricapitolando

$$u = U(y) + u', v = v', w = w'$$

Le equazioni di Navier-Stokes mediate alla Reynolds si scrivono (omettendo il contributo delle forze di massa) e ricordando che  $\frac{\partial U}{\partial t} = \frac{\partial U}{\partial x} = 0$

$$\rho \frac{DU_i}{Dt} = \frac{\partial}{\partial x_j} (\bar{T}_{ij} - \rho \langle u'_i u'_j \rangle)$$

dove

$$\frac{\partial \bar{T}_{ij}}{\partial x_j} = - \frac{\partial P}{\partial x_i} + \mu \frac{\partial^2 U_i}{\partial x_j \partial x_j}$$

proiettando sui tre assi, considerando che  $\frac{\partial U}{\partial t} = \frac{\partial U}{\partial x} = 0$  e che per simmetria  $\langle u'w' \rangle = \langle v'w' \rangle = 0$ <sup>2</sup> mentre  $\langle u'^2 \rangle, \langle v'^2 \rangle, \langle w'^2 \rangle$  sono solo funzioni di  $y$  si ottiene

<sup>1</sup>La condizione di simmetria comporta infatti per le grandezze vettoriali come la velocità l'uguaglianza delle statistiche della generica grandezza e della sua simmetrica in punti simmetrici: a livello di componenti in questo caso quindi uguali statistiche devono avere  $w$  e la componente del vettore simmetrico rispetto a un generico piano  $(x - y)$  che è  $-w$ , in punti simmetrici rispetto al medesimo piano. Facendo tendere il punto considerato al piano di simmetria si vede che la continuità per le statistiche di  $w$  comporta il risultato  $W = 0$ .

<sup>2</sup>In questo caso le componenti  $u'$  e  $v'$  appartengono alla giacitura del piano di simmetria  $(x - y)$  e quindi coincidono con le loro simmetriche mentre per  $w'$  valgono le considerazioni prima fatte: si può quindi concludere quanto affermato.

$$\begin{aligned}
0 &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x} + \nu \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} - \frac{\partial}{\partial y} \langle u'v' \rangle \\
0 &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial}{\partial y} \langle v'^2 \rangle \\
0 &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial z}
\end{aligned}$$

derivando le ultime due equazioni rispetto ad  $x$  si ha  $\frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial P}{\partial x} = 0$ ,  $\frac{\partial}{\partial z} \frac{\partial P}{\partial x} = 0$

da cui si conclude che  $\frac{\partial P}{\partial x}$  è solo funzione di  $x$ .

Riscriviamo la prima equazione introducendo

$$\tau_R = -\rho \langle u'v' \rangle \quad \tau_T = \mu \frac{\partial U}{\partial y} - \rho \langle u'v' \rangle$$

Si trova che

$$\frac{\partial P}{\partial x} - \frac{\partial \tau_T}{\partial y} = 0$$

e dato che il primo termine è solo funzione di  $x$  e il secondo è solo funzione di  $y$ , perché l'equazione sia soddisfatta non possono che essere ambedue costanti.

L'andamento di  $\tau_T$  in  $y$  è quindi lineare e deve inoltre soddisfare le condizioni al contorno alle pareti

$$\begin{aligned}
\text{per } y = 0 & \quad \tau_T(0) = \tau_w \\
\text{per } y = 2h & \quad \tau_T(2h) = -\tau_w
\end{aligned}$$

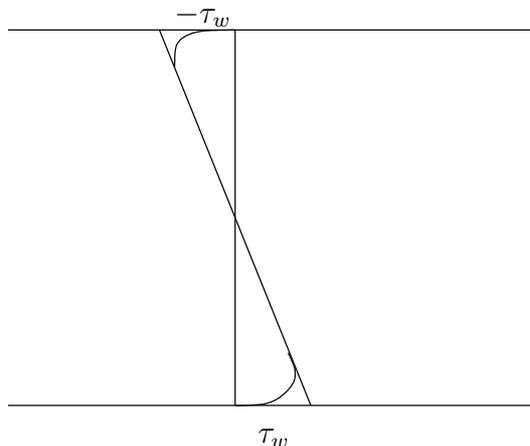
Imponendo le 2 condizioni e utilizzando il gradiente di pressione alla parete (per  $y = z = 0$ )  $\frac{dP_w}{dx}$  coincidente per quanto visto a quello per una generica coppia  $(x - z)$  ottengo

$$\begin{aligned}
\tau_T &= \frac{dP_w}{dx} y + \tau_w \\
-\tau_w &= \frac{dP_w}{dx} 2h + \tau_w \quad \tau_w = -\frac{dP_w}{dx} h \\
\tau_T &= -\frac{\tau_w}{h} y + \tau_w = \tau_w \left(1 - \frac{y}{h}\right)
\end{aligned}$$

ossia una forma più esplicita dell'andamento lineare in  $y$  della  $\tau_T$ .

Nel caso laminare essendo  $\tau_T = \tau_{VISC} = \mu \frac{\partial U}{\partial y}$  si può risolvere l'equazione per  $U$  e trovare il profilo di Poiseuille. Nel caso turbolento non si può trovare facilmente l'andamento per  $U$  perchè c'è una nuova incognita in

$\tau_T = \mu \frac{\partial U}{\partial y} - \rho \langle u'v' \rangle$  e sarebbe necessaria una chiusura per gli stress di Reynolds  $\langle u'v' \rangle$ . In alternativa si possono adottare strumenti classici di analisi dimensionale per trovare andamenti qualitativi.



Utilizzando l'analisi dimensionale si può porre

$$U = f\left(\frac{\tau_w}{\rho}, h, \nu, y\right)$$

dove  $u_* = \sqrt{\tau_w/\rho}$  è una velocità caratteristica della zona di parete (velocità di attrito). Sono presenti 5 quantità che si esprimono mediante due dimensioni tra loro indipendenti:  $L, T$ .

Per il teorema II di Buckingham esiste quindi una relazione tra  $(5-2) = 3$  quantità in forma adimensionale ovvero per esempio

$$u^+ = \mathcal{F}(\zeta, y^+) \quad (10.7.1)$$

in cui compaiono

$u^+$  : velocità di parete adimensionale pari al rapporto tra la velocità media  $U$  e la velocità di attrito  $\frac{U}{u_*}$

$\zeta = \frac{y}{h}$  : ordinata adimensionale pari al rapporto tra l'ordinata e una grandezza geometrica del canale  $h$ . Tale ordinata rappresenta in pratica un'ordinata dello stesso ordine di grandezza di quella effettiva dimensionale.

$y^+ = \frac{y}{\delta}$  : ordinata adimensionale pari al rapporto tra l'ordinata e uno spessore viscoso (viscous length) definito come  $\delta = \frac{\nu}{u_*}$ . Tale unità è detta comunemente unità di parete. Questa rappresenta invece un'ordinata (magnificata dalla scalatura con lo spessore viscoso che è piccolo) in grado quindi di rappresentare convenientemente le zone del campo molto vicino alla parete.

In alternativa è possibile far comparire per esempio il rapporto tra le due lunghezze caratteristiche usate ottenendo un importante numero di Reynolds  $\frac{u^* h}{\nu} = \text{Re}_\tau$ .

Tecniche classiche di teoria asintotica consentono di determinare leggi semplificate e le relative zone di validità per l'andamento adimensionale introdotto (9.A.1).

In particolare se esiste, è finito e diverso da 0 il limite per  $\zeta \rightarrow 0$  (cioè la variabile a scala originaria tendente a 0)

$$\lim_{\zeta \rightarrow 0} \mathcal{F}(\zeta, y^+) = f(y^+) \quad (10.7.2)$$

allora l'espressione ((9.A.1)) diviene

$$u^+ = f(y^+)$$

ossia ci troviamo in condizioni di cosiddetta similarità completa (indipendenza dalla seconda variabile e quindi da  $h$  della soluzione adimensionale nel modo visto, cioè opportunamente scalata): la zona in cui vale questa relazione è detta inner layer. In particolare se all'interno di questa zona ci troviamo ulteriormente vicino alla parete ( $\frac{y}{h} \simeq 0$ ) si trova che

$$\tau_T = \tau_w \left(1 - \frac{y}{h}\right) \simeq \tau_w = \mu \frac{dU}{dy} = \text{cost.} \quad (10.7.3)$$

ed è possibile dimostrare che l'andamento di  $U$  in queste condizioni è lineare in  $y^+$  con un'approssimazione fino al quarto ordine in tale variabile

$$U = \frac{\tau_w y}{\rho \nu} + \dots \quad \rightarrow \quad u^+ = y^+ + \dots + O[(y^+)^4]$$

Questa zona è dominata da effetti viscosi ed è detta viscous sublayer.

L'altro limite asintotico si cerca per  $y^+ \rightarrow \infty$  (cioè la variabile magnificata tendente a  $\infty$ ) In questo caso si cerca di eliminare la dipendenza dalla viscosità e a tal fine la grandezza da considerare è il cosiddetto difetto di velocità <sup>3</sup>, cioè la differenza rispetto alla velocità al centro del canale

$$\frac{U - U_0}{u^*} = F(\zeta)$$

L'ultima relazione è la legge di difetto di velocità (defect law) e caratterizza l'outer layer: la dipendenza dalla viscosità è stata dunque ipotizzata scomparsa e si è ipotizzato sempre che il limite asintotico considerato esista e sia diverso da 0.

Secondo la teoria di Millikan le due regioni introdotte, inner e outer layer, contengono un'area di sovrapposizione detta overlap region caratterizzata da

<sup>3</sup>Il motivo è che la viscosità...

entrambi i limiti  $\zeta \rightarrow 0$  e  $y^+ \rightarrow \infty$  e quindi dal fatto che entrambe le relazioni per  $U$  valgono. Calcolando quindi le derivate  $\frac{dU}{dy}$  con le formule relative alle 2 zone

$$\frac{dU}{dy} = u^* \frac{df}{dy^+} \frac{dy^+}{dy} = u^* \frac{u^*}{\nu} \frac{df}{dy^+} \quad (10.7.4)$$

$$\frac{dU}{dy} = u^* \frac{dF}{d\zeta} \frac{d\zeta}{dy} = u^* \frac{dF}{d\zeta} \frac{1}{h} \quad (10.7.5)$$

e moltiplicando per  $\frac{y}{u^*}$  per rendere adimensionali tali espressioni si trova

$$y^+ \frac{df}{dy^+} = \zeta \frac{dF}{d\zeta} = \text{const.} = \frac{1}{K} \quad (10.7.6)$$

Infatti primo e secondo membro della precedente devono essere costanti in quanto dipendono rispettivamente solo da  $y^+$  e da  $\zeta$ . La costante di pone pari all'inverso della cosiddetta costante  $K$  detta di Karman. Integrando la precedente equazione relativamente all'inner layer e all'outer layer rispettivamente si trova il cosiddetto profilo logaritmico

$$\begin{aligned} \frac{U}{u^*} &= \frac{1}{K} \log y^+ + A \\ \frac{U - U_0}{u^*} &= \frac{1}{K} \log \zeta + B \end{aligned}$$

in cui le costanti sono sperimentalmente note pari a circa  $K = 0.41$ ,  $A = 5.1$  e  $B = -1$ .

In conclusione l'analisi asintotica vista introduce due zone principali

**inner layer** : comprende una prima parte dominata da effetti viscosi detta viscous sublayer, una regione di raccordo detta buffer layer e una zona di overlap in comune con l'outer layer caratterizzata da profilo logaritmico (log-law layer)

**outer layer** : comprende la zona di overlap e e poi una successiva zona sempre controllata come velocità di parete solo da  $\zeta = y/h$

Nel caso turbolento la  $\left. \frac{\partial U}{\partial y} \right|_w$  è molto maggiore che nel caso laminare e il profilo è più pieno con conseguente minore perdita di quantità di moto ( $\delta_1$  è minore).

In figura 10.6 si riporta la DNS di un canale con struttura di enstrofia.

## Bibliografia

1. McComb W.D., *The Physics of Fluid Turbulence*, Oxford Science Publ. 1990.

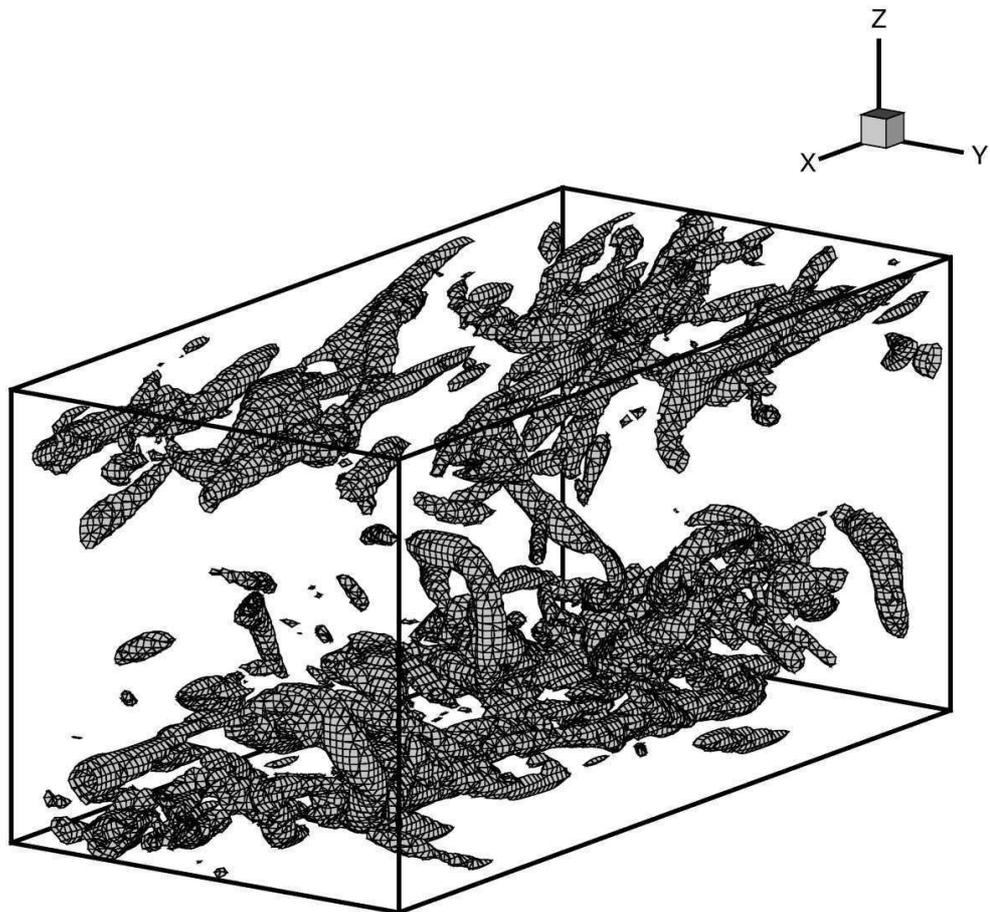


Figura 10.6

2. Mathieu J., Scott J., *An Introduction to Turbulent flow*, Cambridge Univ. Press 2000.
3. Frisch U., *Turbulence*, Cambridge Univ. Press 1995.
4. Hinze J.O., *Turbulence*, McGrawHill 1975.
5. Pope S.B., *Turbulent flow*, Cambridge Univ. Press 2000.
6. Lesieur M. *Turbulence in Fluids*, Kluwer Ac.Publ. 1997
7. Tennekes H., Lumley J.L. *A first course in turbulence*, MIT Press 1972

8. Monin As. Yaglom Am. *Statistical Fluid Mechanics*, MIT Press 1972
9. Kundu P.K. *Fluid Mechanics*, Ac. Press 1977
10. Durbim P.A. Petterson B.A. *Statistical Theory of Modeling Turbolent flow*, J.Wiley & S. 2000

## Capitolo 11

# Equazioni di bilancio per un volume di controllo

Deriviamo l'equazione di conservazione della massa, l'equazione di evoluzione della q.d.m, del momento della q.d.m e dell'energia in forma integrale per un volume di controllo  $V(t)$  che può muoversi e deformarsi con velocità  $U(t)$  da assumersi nota.

Consideriamo un volume materiale  $\chi(B_n, t)$ , il teorema di trasporto di Reynolds applicato a  $\chi(B_n, t)$  si scrive:

$$\frac{d}{dt} \int_{\chi(B_n, t)} f dV = \int_{\chi(B_n, t)} \left( \frac{\partial}{\partial t} f + \frac{\partial}{\partial x_i} (f u_i) \right) dV \quad (11.0.1)$$

dove  $f$  è una qualsiasi grandezza scalare, vettoriale o tensoriale.

In modo analogo il teorema di trasporto di Reynolds applicato al volume di controllo  $V(t)$  si scrive

$$\frac{d}{dt} \int_{V(t)} f dV = \int_{V(t)} \left( \frac{\partial}{\partial t} f + \frac{\partial}{\partial x_i} (f U_i) \right) dV \quad (11.0.2)$$

Scegliamo un particolare volume materiale  $\chi(B_n, t)$  che all'istante  $t$  coincide con il volume di controllo  $V(t)$ . Possiamo allora valutare la differenza tra la 9.A.1 e la 9.A.2 e scrivere

$$\frac{d}{dt} \int_{\chi(B_n, t)} f dV = \frac{d}{dt} \int_{V(t)} f dV + \oint_{\partial V(t)} f (u_j - U_j) n_j dS \quad (11.0.3)$$

La 9.A.3 mette in relazione la variazione della grandezza  $f$  lungo il moto alla variazione della stessa grandezza misurata nel volume di controllo  $V(t)$ . Partendo dalla 9.A.3 è possibile ricavare tutti i principi di conservazione per il volume di controllo  $V(t)$ .

## 11.1 Equazione di bilancio per la massa

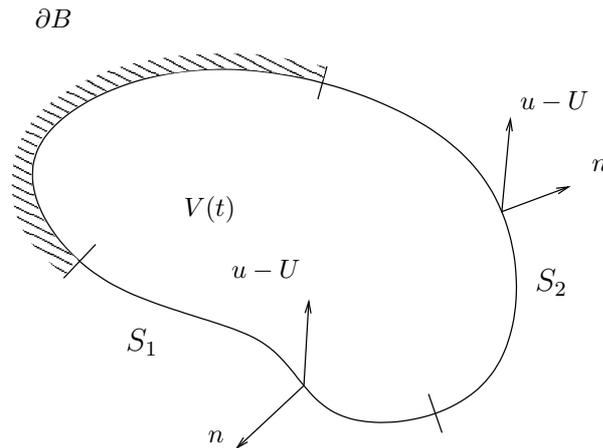
Specifichiamo la 9.A.3 nel caso in cui  $f \equiv \rho$

$$\frac{d}{dt} \int_{\chi(B_n, t)} \rho dV = \frac{d}{dt} \int_{V(t)} \rho dV + \oint_{\partial V(t)} \rho (u_j - U_j) n_j dS$$

per la conservazione della massa  $\frac{d}{dt} \int_{\chi(B_n, t)} \rho dV = 0$  da cui segue

$$\frac{d}{dt} \int_{V(t)} \rho dV + \oint_{\partial V(t)} \rho (u_j - U_j) n_j dS = 0 \quad (11.1.1)$$

che è l'equazione di conservazione della massa per il volume  $V(t)$ . Per comodità dividiamo la frontiera  $\partial V(t)$  in una porzione  $S_1$  dove il fluido entra  $[(u_j - U_j)n_j < 0]$ , in una porzione  $S_2$  dove il fluido esce  $[(u_j - U_j)n_j > 0]$  ed una porzione  $\partial B$  che può essere una parete solida impermeabile dove  $u = U$ .



Con questa scelta la 9.A.1 diventa

$$\frac{d}{dt} \int_{V(t)} \rho dV + \int_{S_1} \rho (u_j - U_j) n_j dS + \int_{S_2} \rho (u_j - U_j) n_j dS = 0$$

cioè

$$\frac{d}{dt} \int_{V(t)} \rho dV = - \int_{S_1} \rho (u_j - U_j) n_j dS - \int_{S_2} \rho (u_j - U_j) n_j dS \quad (11.1.2)$$

La variazione della massa all'interno del volume  $V(t)$  è data dalla differenza tra la portata in ingresso  $\dot{m}_1 = - \int_{S_1} (u_j - U_j) n_j dS$  e quella in uscita  $\dot{m}_2 = \int_{S_2} (u_j - U_j) n_j dS$ .

Formalmente

$$\frac{d}{dt} \int_{V(t)} \rho dV = \dot{m}_1 - \dot{m}_2 \quad (11.1.3)$$

## 11.2 Equazione di evoluzione per la quantità di moto

Specifichiamo la 9.A.3 al caso in cui  $f = \rho u_i$

$$\frac{d}{dt} \int_{\chi(B_n, t)} \rho u_i dV = \frac{d}{dt} \int_{V(t)} \rho u_i dV + \oint_{\partial V(t)} \rho u_i (u_j - U_j) n_j dS \quad (11.2.1)$$

Il bilancio della q.d.m relativo al volume materiale  $\chi(B_n, t)$  si scrive

$$\frac{d}{dt} \int_{\chi(B_n, t)} \rho u_i dV = \frac{d}{dt} \int_{\chi(B_n, t)} \rho f_i dV + \oint_{\chi(B_n, t)} t_i dS$$

quindi la 9.A.1 assume la forma

$$\frac{d}{dt} \int_{V(t)} \rho u_i dV + \oint_{\partial V(t)} \rho u_i (u_j - U_j) n_j dS = \int_{V(t)} \rho f_i dV + \oint_{\partial V(t)} t_i dS \quad (11.2.2)$$

che è l'equazione di evoluzione della q.d.m per il volume di controllo  $V(t)$ . Tenendo conto che  $\partial V = S_1 \cup S_2 \cup \partial B$  la 9.A.2 si riscrive

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_V \rho u_i dV + \int_{S_1 \cup S_2} \rho u_i (u_j - U_j) n_j dS = \\ \int_V \rho f_i dV + \int_{S_1 \cup S_2} t_i dS + \int_{\partial B} t_i dS \end{aligned} \quad (11.2.3)$$

Discutiamo il significato degli integrali dove compaiono le forze per unità di superficie  $t_i$ . Il termine  $\int_{S_1 \cup S_2} t_i dS = \int_{S_1 \cup S_2} -pn_i + \sigma_{ij} dS$  è il contributo delle forze di pressione e delle forze viscosse alla variazione della q.d.m. nel volume  $V$  dovuto al fluido che entra e che esce. Più significativo per le applicazioni è il termine  $\int_{\partial B} t_i dS$  che rappresenta globalmente le forze che la parete solida  $\partial B$  esercita sul fluido. Di conseguenza la forza che agisce sulla parete  $\partial B$  sarà

$$F_{B,i} = - \int_{\partial B} t_i dS$$

La 9.A.3 può risciversi come

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_V \rho u_i dV + \int_{S_1 \cup S_2} \rho u_i (u_j - U_j) n_j dS = \\ \int_V \rho f_i dV + \int_{S_1 \cup S_2} t_i dS - F_{B,i} \end{aligned} \quad (11.2.4)$$

che può essere direttamente utilizzata per valutare le forze  $F_{B,i}$  che agiscono sulle pareti  $\partial B$ . Osserviamo che nasce una forza  $F_{B,i}$  ogni volta che la variazione della q.d.m. del fluido contenuto nel volume  $V$  è non nulla.

Ad es. può esserci una variazione della q.d.m. dovuta ad un accumulo ( $d/dt \int_V \rho u_i dV$ ) oppure ad una differenza tra flussi entranti ed uscenti ( $\int_{S_1 \cup S_2} \rho u_i (u_j - U_j) n_j dS$ ), ad una differenza di pressione tra ingresso e uscita ( $\int_{S_1 \cup S_2} t_i dS$ ) o, infine, ad un campo di forze di massa ( $\int_V \rho f_i dV$ ) quali la gravità, forze di inerzia, forze elettromagnetiche.

### 11.3 Equazione di evoluzione del momento della q.d.m.

Specifichiamo la 9.A.3 per  $f = r \times \rho u$  dove  $r = x - x_0$  e  $x_0$  è il polo rispetto al quale valutiamo i momenti. L'equazione di evoluzione del momento della q.d.m. per il volume materiale  $\chi(B_n, t)$  si scrive

$$\frac{d}{dt} \int_{\chi(B_n, t)} r \times \rho u dV = \int_{\chi(B_n, t)} r \times \rho f dV + \oint_{\chi(B_n, t)} r \times t dS \quad (11.3.1)$$

Dalla 9.A.3 e dalla 9.A.1 segue il bilancio del momento della q.d.m. per il volume di controllo  $V(t)$

$$\frac{d}{dt} \int_{V(t)} r \times \rho u dV + \oint_{\partial V(t)} r \times \rho u (u - U) \cdot n dS = \int_{V(t)} r \times \rho f dV + \oint_{\partial V(t)} r \times t dS \quad (11.3.2)$$

Così come abbiamo fatto per l'equazione di bilancio della q.d.m. 9.A.3 conviene valutare gli integrali fatti sul contorno  $\partial V$  come somma degli integrali fatti su  $S_1 \cup S_2 \cup \partial B$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_V r \times \rho u dV + \int_{S_1 \cup S_2} r \times \rho u (u - U) \cdot n dS = \\ \int_V r \times \rho f dV + \int_{S_1 \cup S_2} r \times t dS + \int_{\partial B} r \times t dS \end{aligned} \quad (11.3.3)$$

Nella 9.A.3 possiamo riconoscere il momento prodotto dalle forze di massa, dalle forze di superficie in corrispondenza delle sezioni di ingresso e uscita e dalle forze di superficie che una parete solida esercita sul fluido. Analogamente possiamo valutare il momento che agisce sulla parete come

$$M_B = - \int_{\partial B} r \times t dS \quad (11.3.4)$$

L'equazione 9.A.3 assume allora la forma

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_V r \times \rho u dV + \int_{S_1 \cup S_2} r \times \rho u (u - U) \cdot n dS = \\ \int_V r \times \rho f dV + \int_{S_1 \cup S_2} r \times t dS - M_B \end{aligned} \quad (11.3.5)$$

Analogamente all'equazione di evoluzione della q.d.m. nella forma 9.A.4, la 9.A.5 può essere utilizzata per valutare il momento prodotto dalla variazione del momento della q.d.m. del fluido. Per questo motivo la 9.A.5 viene spesso utilizzata per valutare il momento torcente sull'asse delle turbomacchine (compressori e turbine).

## 11.4 Equazione di conservazione dell'energia

Ricaviamo in questo paragrafo l'equazione di conservazione dell'energia totale per il volume di controllo  $V(t)$ . A tale proposito consideriamo l'equazione di bilancio dell'energia totale per il volume materiale  $\chi(B_n, t)$

$$\frac{d}{dt} \int_{\chi(B_n, t)} \rho \left( \mathcal{U} - \frac{u^2}{2} \right) dV = \int_{\chi} \rho f_i u_i dV + \oint_{\partial\chi} t_i u_i dS - \oint_{\partial\chi} q_i u_i dS + \int_{\chi} \rho Q dV \quad (11.4.1)$$

Conviene decomporre il contributo delle forze di massa nella loro parte conservativa e non conservativa  $f_i = -\frac{\partial\psi}{\partial x_i} + f_i^{n.c.}$

$$\int_{\chi} \rho f_i u_i dV = - \int_{\chi} \rho \frac{\partial\psi}{\partial x_i} dV + \int_{\chi} \rho f_i^{n.c.} u_i dV$$

Nel caso di campi di potenziali  $\psi$  stazionari possiamo scrivere

$$\int_{\chi} \rho f_i u_i dV = - \int_{\chi} \rho \frac{D}{Dt} \psi dV + \int_{\chi} \rho f_i^{n.c.} u_i dV$$

e l'equazione di conservazione della massa 9.A.1, assieme al secondo teorema di trasporto di Reynolds, assume la forma

$$\frac{d}{dt} \int_{\chi} \rho \left( \mathcal{U} - \frac{u^2}{2} + \psi \right) dV = \int_{\chi} \rho f_i^{n.c.} u_i dV + \oint_{\partial\chi} t_i u_i dS - \oint_{\partial\chi} q_i u_i dS + \int_{\chi} \rho Q dV \quad (11.4.2)$$

Utilizzando la 9.A.2, la 9.A.3 scritta per la quantità  $f = \rho \left( \mathcal{U} + \frac{u^2}{2} + \psi \right)$  assume la forma

$$\frac{d}{dt} \int_V \rho \left( \mathcal{U} + \frac{u^2}{2} + \psi \right) dV + \oint_{\partial V} \rho \left( \mathcal{U} + \frac{u^2}{2} + \psi \right) (u_j - U_j) dS = \int_V \rho f_i^{n.c.} u_i dV + \oint_{\partial V} t_i u_i dS - \oint_{\partial V} q_i u_i dS + \int_V \rho Q dV \quad (11.4.3)$$

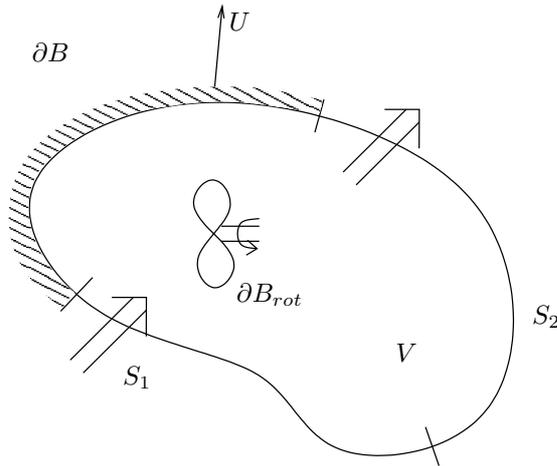
Nel termine  $\oint_{\partial V} t_i u_i dS$  conviene far apparire la velocità relativa  $(u - U)$  del fluido rispetto al volume di controllo e scrivere

$$\oint_{\partial V} t_i u_i dS = \int_{S_1 \cup S_2} t_i (u_i - U_i) dS + \oint_{\partial V} t_i U_i dS \quad (11.4.4)$$

Nella 9.A.4 l'integrale esteso a  $S_1 \cup S_2$  rappresenta quella che nelle applicazioni viene definita potenza di pulsione cioè la potenza spesa per far entrare il fluido nel volume di controllo oppure che si può ottenere quando il fluido esce dal volume di controllo. Tenendo conto che  $t_i = -pn_i + \sigma_{ij}n_j$  possiamo scrivere

$$\int_{S_1 \cup S_2} t_i (u_i - U_i) dS = \int_{S_1 \cup S_2} -pn_i (u_i - U_i) dS + \int_{S_1 \cup S_2} \sigma_{ij} n_j (u_i - U_i) dS \quad (11.4.5)$$

e riconoscere il lavoro compiuto nell'unità di tempo delle forze di pressione  $(-pdS)n_i$  (lavoro reversibile) e dalle forze viscosose  $\sigma_{ij}n_j dS$  (lavoro irreversibile) per far entrare o uscire il fluido dal volume di controllo. Infine nella 9.A.4 l'integrale  $\oint_{\partial V} t_i U_i dS$  può essere decomposto nella somma degli integrali fatti su  $S_1 \cup S_2$  e su  $\partial B$ . Il secondo contributo rappresenta la potenza dalle forze  $t_i dS$  in seguito al moto del contorno del dominio  $V$  o al moto di eventuali superfici mobili all'interno del volume di controllo. Per fare un esempio consideriamo un volume di controllo composto dalla frontiera  $S_1 \cup S_2$  attraverso le quali il fluido entra ed esce, di una porzione di frontiera  $\partial B$  che coincide con una parete solida la quale si muove con velocità  $U$  e all'interno di  $V$  esiste una parete mobile (rotante)  $\partial B_{rot}$ .



In questo caso avremo

$$\int_{\partial V} t_i U_i dV \equiv \int_{\partial B \cup \partial B_{rot}} t_i U_i dS + \int_{S_1 \cup S_2} t_i U_i dS \quad (11.4.6)$$

Dal punto di vista del sistema esterno potremo ottenere una potenza  $\dot{L} = -\int_{\partial B} t_i U_i dS$  in seguito alla traslazione della frontiera  $\partial B$  e una potenza  $\dot{\mathcal{L}} = -\int_{\partial B_{rot}} t_i U_i dS$  sull'asse di rotazione di  $\partial B_{rot}$ . il segno meno è giustificato dalla seguente convenzione: se  $\int_{\partial B} t_i U_i dS$  è positivo vuol dire che l'energia totale del fluido aumenta nel tempo quindi l'esterno sta compiendo lavoro sul fluido ( $\dot{L}$  e  $\dot{\mathcal{L}}$  negativi). Viceversa se  $\int_{\partial B} t_i U_i dS$  è negativo vuol dire che l'energia del fluido sta diminuendo nel tempo cioè il fluido sta compiendo lavoro sull'esterno ( $\dot{L}$  e  $\dot{\mathcal{L}}$  positivi).

Conveniamo allora di indicare con  $W = -\int_{\partial B \cup \partial B_{rot}} t_i U_i dS$  la potenza del fluido scambiata tra fluido e l'esterno in seguito al moto di superfici mobili. Con la convenzione dei segni prima discussa  $W$  è la potenza che un utilizzatore può ottenere dal volume di controllo  $V(t)$  in seguito alle trasformazioni che il fluido subisce. Se  $W > 0$  vuol dire che il fluido compie lavoro sull'esterno, se  $W < 0$  accade il viceversa cioè l'esterno compie lavoro sul fluido.

In definitiva utilizzando le espressioni 9.A.3, 9.A.4, 9.A.5 e 9.A.6 l'equazione di conservazione dell'energia totale 9.A.2 si può scrivere nella forma finale

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_V \rho \left( \mathcal{U} + \frac{u^2}{2} + \psi \right) dV + \int_{S_1 \cup S_2} \rho \left( \mathcal{U} + \frac{u^2}{2} + \frac{p}{\rho} + \psi \right) (u_j - U_j) n_j dS = \\ \int_V \rho f_i^{n.c.} u_i dV + \int_{S_1 \cup S_2} \sigma_{ij} (u_j - U_j) n_j dS + \int_{S_1 \cup S_2} t_i U_i dS - W + \dot{Q} \end{aligned} \quad (11.4.7)$$

dove abbiamo posto  $\dot{Q} = \oint_{\partial V} q_i u_i dS + \int_V p Q dV$ .

Forme semplificate dell'equazione 9.A.7 vengono abitualmente utilizzate nelle applicazioni per valutare ad esempio la potenza  $\dot{W}$  che si può ottenere sull'asse di una turbomacchina.

### 11.4.1 Sistemi Chiusi

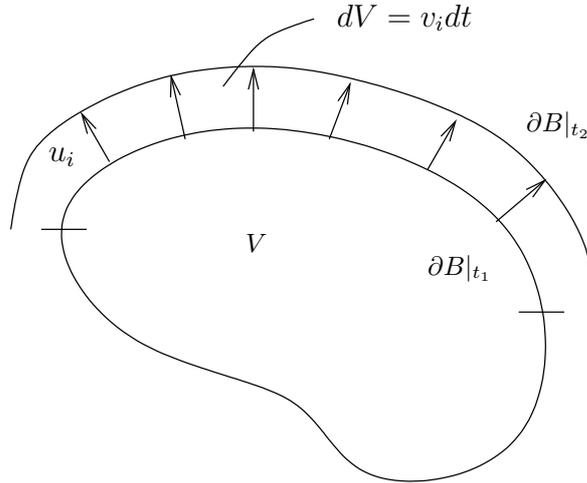
Deriviamo, a partire dalla forma generale dell'equazione dell'energia 9.A.7, un'equazione dell'energia valida per sistemi chiusi cioè per sistemi che non scambiano massa attraverso le sezioni di ingresso ed uscita  $S_1 \cup S_2$ , ma che possono variare la propria forma. Un esempio tipico è il motore a combustione interna durante la fase di scoppio ed espansione dai gas combusti. Supponiamo inoltre che non ci siano superfici rotanti all'interno del volume di controllo. Con questa ipotesi gli integrali estesi a  $S_1 \cup S_2$  sono nulli e l'equazione 9.A.7 si scrive

$$\frac{d}{dt} \int_V \rho \left( \mathcal{U} + \frac{u^2}{2} + \psi \right) dV = \int_V \rho f_i^{n.c.} u_i dV + \int_{\partial B} t_i U_i dS + \dot{Q} \quad (11.4.8)$$

se ora trascuriamo i contributi dovuti alle forze di massa, ipotizziamo che l'energia cinetica  $\frac{u^2}{2}$  sia molto minore dell'energia interna  $\mathcal{U}$  e trascuriamo

la componente irreversibile della potenza associata alle forze di superficie, la 9.A.8 si riscrive

$$\frac{d}{dt} \int_V \rho \mathcal{U} dV = - \int_{\partial B} p n_i U_i dS + \dot{Q}$$



cioè

$$\frac{d}{dt} \bar{\mathcal{U}} = - \int_{\partial B} p n_i U_i dS + \dot{Q}$$

dove  $\bar{\mathcal{U}} = \int_V \rho \mathcal{U} dV$  è l'energia interna del fluido contenuto nel volume  $V$ . Se ora integriamo tra  $t_1$  e  $t_2$  abbiamo

$$\Delta \bar{\mathcal{U}} = \int_1^2 \int_{\partial B} p n_i U_i dS dt + \Delta Q$$

$$\Delta \bar{\mathcal{U}} = \int_1^2 \rho \left( \int_{\partial B} n_i U_i dS \right) dt + \Delta Q$$

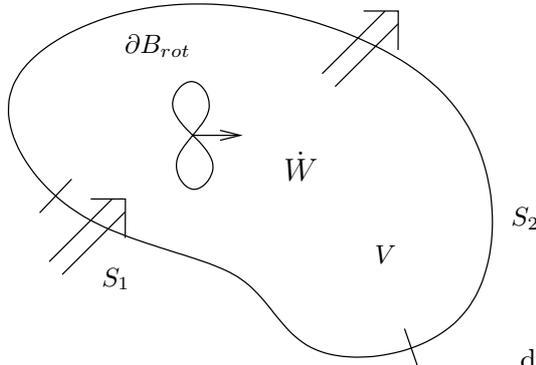
$$\Delta \bar{\mathcal{U}} = \int_1^2 p d\mathcal{V} + \Delta Q \quad (11.4.9)$$

che è la forma classica dell'equazione dell'energia per sistemi chiusi zero dimensionali.

### 11.4.2 Sistemi Aperti

Consideriamo un volume di controllo fisso che può scambiare massa attraverso la frontiera  $S_1 \cup S_2$ , ma contiene al suo interno una superficie rotante  $\partial B_{rot}$ . L'equazione dell'energia 9.A.7, nel caso stazionario si scrive

$$\int_{S_1 \cup S_2} \rho \left( \mathcal{U} + \frac{u^2}{2} + \frac{p}{\rho} \right) u_j n_j dS = -W + \dot{Q} \quad (11.4.10)$$



dove abbiamo trascurato i contributi delle forze di massa e delle parte irreversibile della potenza di pulsione. Assumendo una distribuzione costante delle grandezza su  $S_1 \cup S_2$  la 9.A.10 per essere riscritta come

$$\dot{m}_2 \left( h + \frac{u^2}{2} \right)_2 - \dot{m}_1 \left( h + \frac{u^2}{2} \right)_1 = -W + \dot{Q}$$

dove  $h = \mathcal{U} + \frac{p}{\rho}$  è l'entalpia per unità di massa. Nel caso stazionario  $\dot{m}_2 = \dot{m}_1 = \dot{m}$  e, in condizione adiabatiche ( $\dot{Q} = 0$ ), definendo l'entalpia totale  $H = h + \frac{u^2}{2}$

$$\Delta H = -W/\dot{m}$$

Ad esempio nel caso di una turbomacchina motrice (turbina) avremo  $W > 0$  cioè è possibile raccogliere una potenza utile sull'asse della macchina. Di conseguenza al salto dell'entalpia totale del fluido  $\Delta H$  è negativo. L'energia totale associata al fluido è diminuita perché il fluido ha compiuto lavoro sull'esterno. Nel caso di una turbomacchina operatrice (compressori e pompe) avremo  $W < 0$  cioè viene comunicata energia dall'esterno al fluido che incrementa il suo livello totale di energia ( $\Delta H$  è positivo).

## 11.5 Equazione per l'energia cinetica e l'energia interna

Nel paragrafo ??? abbiamo ricavato l'equazione di bilancio dell'energia totale per il volume di controllo  $V(t)$ . L'energia totale è data da un contributo termodinamico legato all'energia interna  $\mathcal{U}$  per unità di massa ed un contributo associato all'energia cinetica per unità di massa  $u^2/2$ . Vogliamo ricavare un'equazione di bilancio sia per l'energia cinetica che per l'energia interna. L'equazione di bilancio dell'energia cinetica può essere ricavata a partire dall'equazione differenziale di bilancio della q.d.m.

$$\rho \frac{Du_i}{Dt} = \rho f_i - \frac{\partial \rho}{\partial x_i} + \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} \quad (11.5.1)$$

Moltiplichiamo scalarmente per  $u_i$  la 9.A.1 e scriviamo

$$\rho \frac{D}{Dt} \left( \frac{u^2}{2} \right) = \rho f_i u_i - \frac{\partial(pu_i)}{\partial x_i} + p \frac{\partial u_i}{\partial x_i} + \frac{\partial(\sigma_{ij} u_i)}{\partial x_j} - \sigma_{ij} \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \quad (11.5.2)$$

dove abbiamo portato dentro il segno di derivata la  $u_i$  nel termine dove appare la pressione e le forze viscosive. Decomponiamo poi le forze di massa nella loro parte conservativa e non conservativa  $f = -\text{div } \psi + f^{n.c.}$ . Sostituendo nella 9.A.2 e integrando sul volume materiale  $\chi(B_n, t)$  otteniamo l'equazione di bilancio dell'energia cinetica

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_{\chi(B_n, t)} \rho \left( \frac{u^2}{2} + \psi \right) dV = \int_{\chi} \rho f_i^{n.c.} u_i dV - \oint_{\partial \chi} p u_i n_i dS + \\ \int_{\partial \chi} p \frac{\partial u_i}{\partial x_i} dV + \oint_{\chi} u_i \sigma_{ij} n_j dS - \int_{\chi} \sigma_{ij} \frac{\partial u_i}{\partial x_j} dV \end{aligned} \quad (11.5.3)$$

Nel ricavare la 9.A.3 abbiamo utilizzato il teorema di Gauss, per valutare i termini scritti in forma di divergenza come integrali sul contorno  $\partial \chi$ . Noto il bilancio dell'energia cinetica per il volume materiale  $\chi(B_n, t)$  possiamo ricavare utilizzando la 9.A.3 un analogo bilancio per il volume di controllo  $V(t)$  specificando la 9.A.3 per le quantità  $f = \rho \left( \frac{u^2}{2} + \psi \right)$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_{V(t)} \rho \left( \frac{u^2}{2} + \psi \right) dV + \oint_{\partial V} \rho \left( \frac{u^2}{2} + \psi \right) (u_j - U_j) dS = \\ \int_V \rho f_i^{n.c.} u_i dV - \oint_{\partial V} \rho u_i n_i dS + \\ \int_{\partial V} p \frac{\partial u_i}{\partial x_i} dV + \oint_{\partial V} u_i \sigma_{ij} n_j dS - \int_{\partial V} \sigma_{ij} \frac{\partial u_i}{\partial x_j} dV \end{aligned} \quad (11.5.4)$$

Prima di discutere il significato fisico dei vari termini che compaiono nella 9.A.4, conviene riscrivere i termini dove appaiono le forze per unità di superficie valutate sul contorno  $\partial V$  facendo apparire la velocità  $U$  del contorno:

$$- \oint_{\partial V} p u_i u_i dS = - \int_{S_1 \cup S_2} p (u_j - U_j) n_i dS - \int_{\partial V} p U_i n_i dS \quad (11.5.5)$$

e

$$\int_{\partial V} u_i \sigma_{ij} n_j dS = \int_{S_1 \cup S_2} \rho (u_j - U_j) \sigma_{ij} n_j dS + \int_{\partial V} U_i \sigma_{ij} u_j dS \quad (11.5.6)$$

Sostituiamo ora la 9.A.5 e la 9.A.6 nella 9.A.4 e accorpriamo gli integrali

su  $\partial B$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_{V(t)} \rho \left( \frac{u^2}{2} + \psi \right) dV + \int_{S_1 \cup S_2} \rho \left( \frac{u^2}{2} + \psi + \frac{p}{\rho} \right) (u_j - U_j) n_j dS = \\ \int_V \rho f_i^{n.c.} u_i dV + \int_V p \frac{\partial u_i}{\partial x_i} dV + \int_{\partial V} t_i U_i dS + \\ \int_{S_1 \cup S_2} (u_j - U_j) \sigma_{ij} n_j dS - \int_{\partial V} \sigma_{ij} \frac{\partial u_i}{\partial x_j} dV \quad (11.5.7) \end{aligned}$$

La 9.A.7 rappresenta il bilancio dell'energia meccanica relativa al volume di controllo  $V(t)$ . Discutiamo ora il significato fisico dei vari termini che compaiono nella 9.A.7.

Il primo termine a primo membro rappresenta la variazione nel tempo dell'energia meccanica (cinetica più potenziale) associata al volume di controllo. Il secondo termine rappresenta invece i flussi di energia entranti e uscenti dal volume. Osserviamo che, analogamente all'equazione per l'energia totale, compare il lavoro reversibile di pulsione associato alla pressione. A destra del segno uguale, analogamente all'equazione dell'energia totale, compare la potenza associata alle forze non conservative, il lavoro irreversibile per unità di tempo delle tensioni viscosi ( $\int (u_j - U_j) \sigma_{ij} n_j dS$ ) la potenza scambiata con eventuali superfici mobili ( $\int_{\partial B} t_i U_i dS$ ). Nel bilancio dell'energia cinetica appaiono a secondo membro due termini nuovi, uno legato alla pressione ( $\int_V p \frac{\partial u_i}{\partial x_i} dV$ ) e l'altro alle tensioni viscosi ( $-\int_{\partial V} \sigma_{ij} \frac{\partial u_i}{\partial x_j} dV$ ) che è opportuno commentare.

Il termine  $-\int_{\partial V} \sigma_{ij} \frac{\partial u_i}{\partial x_j} dV$  rappresenta la potenza meccanica che si trasforma in calore ad opera delle tensioni di natura viscosa. Questo termine descrive un processo di natura irreversibile infatti l'integrando  $\sigma_{ij} \frac{\partial u_i}{\partial x_j}$  è definito positivo quindi questo termine fa sempre diminuire l'energia meccanica del sistema. L'energia meccanica si converte in calore ma non può avvenire il viceversa. Osserviamo che l'integrando rappresenta proprio una parte del termine di produzione di entropia.

Viceversa il termine dove compare la pressione e la divergenza del campo di velocità non è definito in segno in quanto pur essendo  $p > 0$  in alcuni punti del campo può accadere che  $\nabla \cdot u > 0$  cioè in quel punto la densità sta diminuendo lungo il moto (espansione) oppure si può avere  $\nabla \cdot u < 0$  cioè la densità sta aumentando lungo il moto (compressione). In definitiva il termine  $\int_{\partial V} p \frac{\partial u_i}{\partial x_i} dV$  rappresenta il lavoro per unità di tempo compiuto all'interno del fluido dalle forze di pressione in seguito all'espansione/compressione locale del fluido. Al contrario del lavoro compiuto dalle forze viscosi, il lavoro associato alle forze di pressione è di tipo reversibile in quanto  $\nabla \cdot u$  non è definito in segno e in principio è possibile far compiere al fluido una trasfor-

mazione attraverso la quale  $p\nabla \cdot u > 0$  ed una dove  $p\nabla \cdot u < 0$  facendo tornare lo stato termodinamico nello stato iniziale di partenza. Il termine  $\int_V p \frac{\partial u_i}{\partial x_i} dV$  rappresenta uno scambio di energia tra la componente meccanica e quella interna.

Infatti, come vedremo, questo termine appare con il segno opposto nell'equazione di bilancio dell'energia interna. Poichè  $\nabla \cdot u$  non è definito in segno l'energia può essere convertita da meccanica in energia interna e viceversa. Al contrario poichè  $\sigma_{ij} \frac{\partial u_i}{\partial x_j} > 0$  è definito in segno rappresenta la conversione di energia meccanica in calore ad opera delle forze di natura viscosa e non può avvenire il viceversa (lavoro irreversibile).

Ricaviamo ora un'equazione per la sola energia interna  $\mathcal{U}$ . La sua derivazione è uguale in quanto basta sottrarre membro a membro dall'equazione di bilancio dell'energia totale 9.A.7 l'equazione dell'energia meccanica 9.A.7. Otteniamo così la seguente equazione

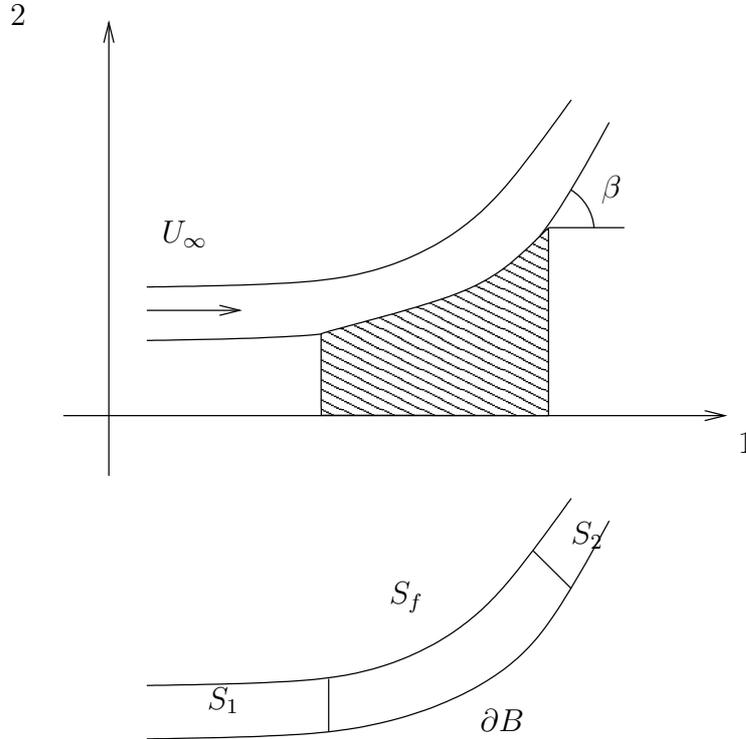
$$\frac{d}{dt} \int_{V(t)} \rho \mathcal{U} dV + \int_{S_1 \cup S_2} \rho \mathcal{U} (u_j - U_j) n_j dS = - \int_V p \frac{\partial u_i}{\partial x_i} dV + \int_V \sigma_{ij} \frac{\partial u_i}{\partial x_j} dV + \dot{Q} \quad (11.5.8)$$

Di nuovo osserviamo come il termine  $\sigma_{ij} \frac{\partial u_i}{\partial x_j}$  essendo positivo può solo far crescere l'energia interna mentre il termine  $p \frac{\partial u_i}{\partial x_i}$  non essendo definito in segno rappresenta un trasferimento di potenza di natura meccanica in energia interna e viceversa in seguito al lavoro compiuto dalle forze di pressione quando il fluido si comprime o si espande.

## 11.6 Calcolo di forze

### 11.6.1 Esempio 1

Come esempio di applicazione dell'equazione di conservazione della massa e del bilancio della q.d.m. calcoliamo le forze scambiate tra il fluido e il solido riportato in figura. Un getto investe con velocità  $U_\infty$  un corpo curvo che devia la direzione del flusso di un angolo  $\beta$ .



Supponiamo inoltre che il flusso sia stazionario ed il fluido incomprimibile. Prima di tutto scegliamo il volume di controllo  $V$  fisso la cui frontiera è costituita dalle sezioni di ingresso  $S_1$ , da quelle di uscita  $S_2$ , che si ipotizzano uguali, dal contorno del corpo  $\partial B$  e dalla superficie libera  $S_f$  del getto.

Le normali  $n$  nelle sezioni  $S_1$  e  $S_2$  sono date rispettivamente da  $n \equiv (-1, 0, 0)$  e  $n \equiv (\cos \beta, \sin \beta, 0)$ . Consideriamo l'equazione della massa 9.A.3, applicata al volume  $V$  scelto, si scrive  $\dot{m}_1 = \dot{m}_2$  ovvero

$$-\int_{S_1} \rho u \cdot n dS = \int_{S_2} \rho u \cdot n dS$$

tenendo conto del verso delle normali abbiamo

$$\rho U_\infty A = \rho u_{n,2} A \quad (11.6.1)$$

dove abbiamo indicato con  $u_{n,2} = u \cdot n$  la componente normale della velocità nella sezione  $S_2$ . Inoltre nel bilancio della massa non compaiono gli integrali estesi a  $\partial B$  e  $S_f$  in quanto su  $\partial B$  abbiamo  $u = 0$  e su  $S_f$  abbiamo  $u \cdot n = 0$  cioè  $S_f$  coincide con una linea di corrente.

Dalle 9.A.1 possiamo ricavare  $u_{n,2} = U_\infty$  e, per proiezione, le componenti di velocità  $u_2 = U_\infty \cos \beta$  e  $v_2 = U_\infty \sin \beta$  nella sezione  $S_2$ .

Valutiamo ora le forze che il fluido esercita sul corpo utilizzando l'equazione di bilancio della q.d.m. 9.A.4 che, nel caso stazionario, per un

volume di controllo fisso si scrive

$$\int_{S_1} \rho u(u \cdot n) dS + \int_{S_2} \rho u(u \cdot n) dS = \int_{S_1 \cup S_2 \cup S_f} t dS - F_B \quad (11.6.2)$$

dove  $F_B = - \int_{\partial B} t dS$  e  $t = -pn + \sigma \cdot u$ .

Con buona approssimazione la pressione su  $S_f$  può ritenersi costante pari al valore assunto su  $S_1$  (da ritenersi noto) e su  $S_2$ . Al contrario la pressione varierà su  $\partial B$  ma possiamo sempre scriverla come  $p = p_\infty + p'$  dove  $p_\infty$  è il valore costante assunto su  $S_1 \cup S_2 \cup S_f$ . Con questa scelta la 9.A.2 si scrive

$$\int_{S_1} \rho u(u \cdot n) dS + \int_{S_2} \rho u(u \cdot n) dS = \int_{\partial V} -p_\infty n dS + \int_{\partial B} -p' n + \sigma \cdot n dS \quad (11.6.3)$$

Nella 9.A.3 abbiamo trascurato gli effetti viscosi su  $S_1 \cup S_2 \cup S_f \cup \partial B$  e l'integrale di  $p_\infty$  su  $\partial V$  è nullo in quanto  $p_\infty$  è una costante e l'integrale di un vettore normale su un contorno chiuso è nullo.

La 9.A.3 ci fornisce allora l'espressione della forza  $F_B$  in termini della variazione del flusso della q.d.m. del fluido tra le sezioni di ingresso  $S_1$  e uscita  $S_2$

$$-F_B = - \int_{S_1} \rho u(u \cdot n) dS + \int_{S_2} \rho u(u \cdot n) dS \quad (11.6.4)$$

Gli integrali su  $S_1$  e  $S_2$  possono essere valutati come

$$\int_{S_1} \rho u(u \cdot n) dS = (-\rho U_\infty^2 A, 0, 0)$$

$$\int_{S_2} \rho u(u \cdot n) dS = \int_{S_2} \rho U_\infty^2 (\cos \beta, \sin \beta, 0) dS = \rho U_\infty^2 A (\cos \beta, \sin \beta, 0)$$

Sostituendo nella 9.A.4 abbiamo

$$(-F_{B,1}, -F_{B,2}) = \rho U_\infty^2 A (\cos \beta - 1, \sin \beta, 0)$$

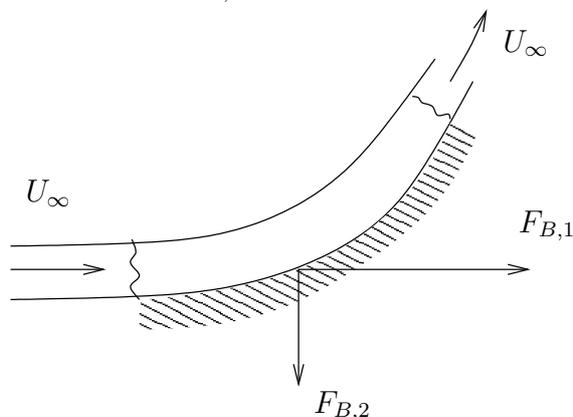
quindi

$$F_{B,1} = \rho U_\infty^2 A (1 - \cos \beta) \quad (11.6.5)$$

$$F_{B,2} = -\rho U_\infty^2 A \sin \beta \quad (11.6.6)$$

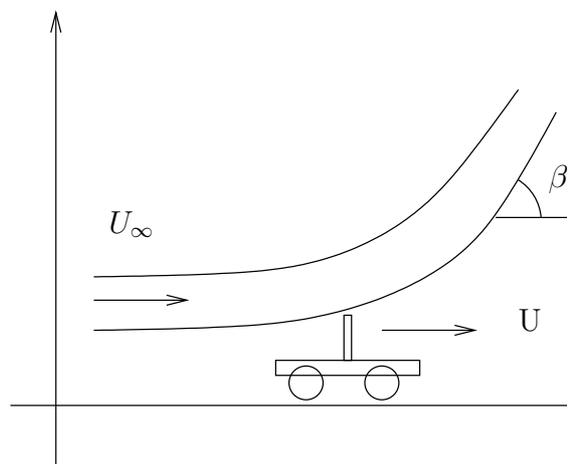
Osserviamo che  $F_{B,1}$  è positiva ovvero il fluido tende a trascinare con

se il corpo e  $F_{B,2}$  è negativa cioè il fluido spinge verso il basso il corpo.



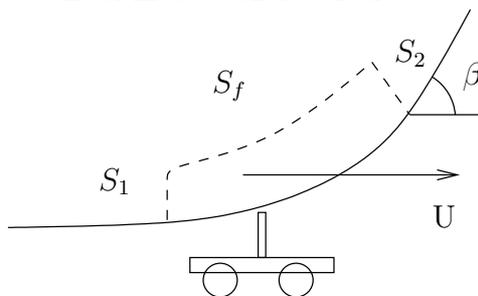
Consideriamo ora lo stesso problema nel caso in cui il corpo investito dal

2



getto si muove con velocità  $U \equiv (U, 0, 0)$  assegnata.

Anche in questo caso vogliamo determinare le forze che il fluido esercita sul corpo. Questo caso è molto più interessante dal punto di vista delle applicazioni in quanto coinvolge l'interazione tra una corrente fluida ed un corpo in movimento quali possono essere le pale di turbine o pompe. Conviene scegliere un volume di controllo  $V$  che si muove con la velocità  $U$  del corpo



come mostrato in figura.

Prima di tutto conviene valutare la velocità del fluido in  $S_2$  utilizzando

l'equazione di conservazione della massa

$$-\int_{S_1} \rho(u - U) \cdot ndS = \int_{S_2} \rho(u - U) \cdot ndS$$

tenendo conto dell'orientazione delle normali abbiamo

$$\rho(U_\infty - U)A = \rho W_{n,2}A \quad (11.6.7)$$

Nella 9.A.7 abbiamo indicato con  $W_{n,2} = (u - U) \cdot n$  la velocità relativa normale del fluido in  $S_2$  la quale risulta uguale a  $(U_\infty - U)$  cioè alla differenza tra la velocità del getto  $U_\infty$  e quella del corpo  $U$ . Nota  $W_{n,2}$  è possibile ricavare la velocità assoluta del fluido in  $S_2$ . Infatti la velocità relativa, in termini di componenti lungo la direzione 1 e 2 è data da

$$W = W_{n,2}(\cos \beta, \sin \beta) \Rightarrow W = (U_\infty - U)(\cos \beta, \sin \beta)$$

da cui è possibile ricavare la velocità assoluta  $u = U + W$  che ha le proiezioni  $u_1 = U + (U_\infty - U) \cos \beta$  e  $u_2 = (U_\infty - U) \sin \beta$  rispettivamente lungo le direzioni 1 e 2.

Noto il campo di velocità in  $S_1$  e  $S_2$  è possibile valutare le forze utilizzando il bilancio della q.d.m. 9.A.4 scritto per un volume di controllo che si muove con velocità  $U$

$$-F_B = \int_{S_1} \rho u(u - U) \cdot ndS + \int_{S_2} \rho u(u - U) \cdot ndS \quad (11.6.8)$$

tenendo conto dell'orientazione delle normali gli integrali possono essere valutati come

$$\int_{S_1} \rho u(u - U) \cdot ndS = (-\rho U_\infty (U_\infty - U)A, 0, 0)$$

$$\int_{S_2} \rho u(u - U) \cdot ndS = \left( \rho U (U_\infty - U)A + \rho (U_\infty - U)^2 A \cos \beta, \rho (U_\infty - U)^2 A \sin \beta, 0 \right)$$

La 9.A.8 fornisce allora l'espressione della forza che il fluido esercita sul corpo

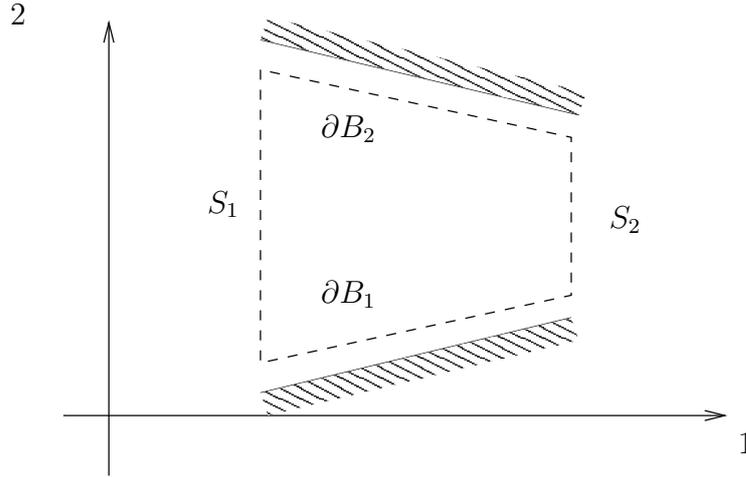
$$F_{B,1} = \rho (U_\infty - U)^2 A (1 - \cos \beta) \quad (11.6.9)$$

$$F_{B,2} = -\rho (U_\infty - U)^2 A \sin \beta \quad (11.6.10)$$

Le 9.A.9 e 9.A.10 sono le omologhe delle 9.A.5 e 9.A.6 e rappresentano la forza che il fluido esercita sul corpo in movimento con velocità  $U$ . Anche in questo caso ad una variazione della q.d.m (relativa) del fluido corrisponde una forza. In questo ultimo caso però la forza  $F_B$  può compiere lavoro e la potenza ad essa associata si calcola facilmente con  $P = F_B \cdot U = \rho U (U_\infty - U)^2 A (1 - \cos \beta)$ .

### 11.6.2 Esempio 2

Come ulteriore esempio di calcolo delle forze scambiate tra un fluido ed un corpo valutiamo le azioni che il fluido esercita sul condotto riportato in figura.



Il fluido entra nel condotto nella sezione  $S_1$  con velocità  $u_1$  e pressioni  $p_1$  note. Il volume di controllo  $V$  scelto è quello tratteggiato in figura (volume fisso), supponiamo inoltre il flusso stazionario ed il fluido incompressibile. Inoltre le normali  $n$  nelle sezioni  $S_1$  e  $S_2$  sono date rispettivamente da  $n = (-1, 0, 0)$  e  $n = (1, 0, 0)$ . Applichiamo l'equazione di bilancio della massa al volume  $V$

$$-\int_{S_1} \rho u \cdot n dS = \int_{S_2} \rho u \cdot n dS$$

ovvero

$$\rho u_1 A_1 = \rho u_2 A_2 \quad (11.6.11)$$

Nota il rapporto di contrazione  $A_1/A_2$  è possibile valutare la velocità del fluido nella sezione  $S_2$ . La pressione  $p_2$  in  $S_2$  può essere valutata utilizzando l'equazione di bilancio dell'energia meccanica 9.A.4 che si riduce, in assenza di forze di massa e per fluido non viscoso alla

$$\int_{S_1 \cup S_2} \rho \left( \frac{u^2}{2} + \psi + \frac{p}{\rho} \right) (u \cdot n) n_i dS$$

ovvero

$$-\left( \frac{u^2}{2} + \psi + \frac{p}{\rho} \right)_1 \dot{m} + \left( \frac{u^2}{2} + \psi + \frac{p}{\rho} \right)_2 \dot{m} = 0$$

dalla quale è possibile valutare la pressione  $p_2$

$$p_2 = p_1 - \frac{1}{2} \rho (u_2^2 - u_1^2) \quad (11.6.12)$$

Ad esempio per un rapporto di contrazione  $A_1/A_2 = 5$ , con  $u_1 = 3m/s$  e  $p_1 = 2atm$  dalla 9.A.12  $p_2 = 1,29atm$ . Osserviamo che  $u_2 > u_1$  e  $p_2 < p_1$  per la geometria in esame.

Infine la forza che il fluido esercita sul condotto può essere calcolata utilizzando il bilancio della q.d.m. scritto per il volume  $V$  scelto

$$\int_{S_1 \cup S_2} \rho u(u \cdot n) dS = \int_{S_1 \cup S_2} t dS - F_B \quad (11.6.13)$$

Nell'equazione 9.A.13 è non nulla sola la proiezione lungo l'asse del condotto. Se trascuriamo gli effetti viscosi in corrispondenza di  $S_1$  e  $S_2$  possiamo scrivere

$$\rho u_1^2 A_1 = \rho u_2^2 A_2 = p_1 A_1 - p_2 A_2 - F_{B,1}$$

ovvero

$$F_{B,1} = (p_1 A_1 - p_2 A_2) - \dot{m}(u_2 - u_1) \quad (11.6.14)$$

dove abbiamo fatto comparire la portata in massa  $\dot{m} = \rho u A$ . La forza  $F_{B,1}$  che il fluido esercita sul corpo si decompone in una parte dovuta alla variazione di pressione tra  $S_1$  e  $S_2$  ed una parte dovuta alla variazione di velocità tra  $S_1$  e  $S_2$ .

Ad esempio con  $A_1 = 0.015m^2$ , abbiamo

$$\dot{m} = 45kg/s$$

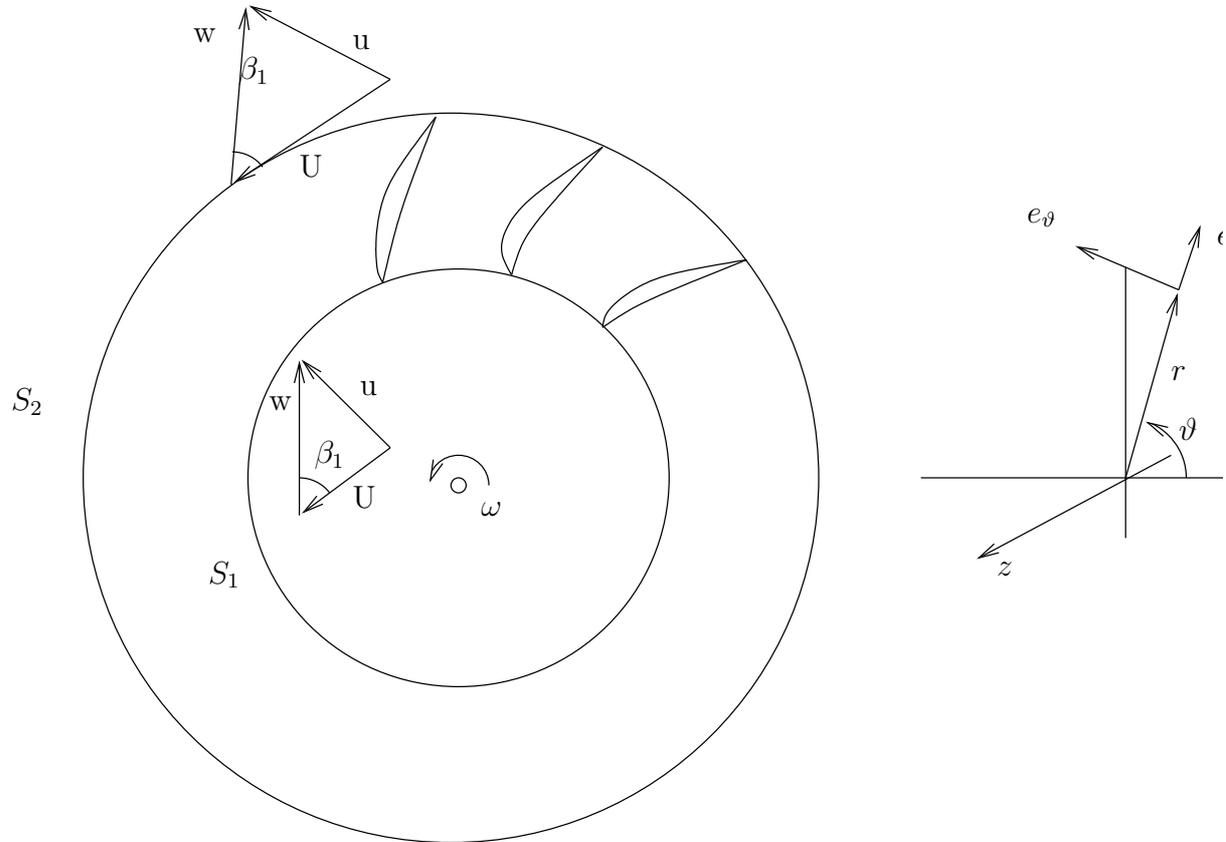
$$F_{B,1} = (3940 - 390) - 45(15 - 3)$$

$$F_{B,1} = 3550 - 540 \approx 3010N$$

La forza  $F_{B,1}$  è essenzialmente data dallo squilibrio delle pressioni tra ingresso e uscita mentre il contributo dovuto alla variazione della velocità è più piccolo. Ciò è evidente da un punto di vista fisico nella geometria in esame. Infatti la pressione più elevata ( $p_1$ ) agisce sulla superficie più grande ( $A_1$ ) mentre la pressione più piccola ( $p_2$ ) agisce su  $A_2$ . Risulta allora  $p_1 A_1 \gg p_2 A_2$  mentre  $u_2 \approx u_1$ . Osserviamo inoltre che il rapporto  $u_2/u_1$  è lineare nel rapporto di contrazioni  $A_1/A_2$  mentre dalla 9.A.12  $p_2$  diminuisce come  $(A_1/A_2)^2$ .

### 11.6.3 Compressore centrifugo

Come esempio di applicazione dell'equazione di bilancio del momento della q.d.m. ne illustriamo l'utilizzo nel campo delle turbomacchine ed in particolare per un compressore centrifugo. Uno schema della girante del compressore è riportato in figura.



Il principio di funzionamento della macchina è abbastanza semplice: un motore elettrico (o a combustione interna) provvede a mantenere in rotazione la girante con velocità angolare costante  $\omega$ . Il fluido entra nella girante nella sezione  $S_1$  ed esce nella sezione  $S_2$  dopo essere stato accelerato dalla girante stessa. In questa fase la girante incrementa il contenuto energetico del fluido. Il fluido accelerato che esce dalla sezione  $S_1$  viene poi decelerato attraverso un opportuno condotto (cassa spirale) dove l'energia cinetica viene convertita in un incremento di pressione del fluido. La cassa spirale si comporta dunque come un diffusore. Per questa configurazione vogliamo valutare le coppie scambiate tra la girante ed al fluido utilizzando l'equazione di bilancio del momento della q.d.m. 9.A.4. Data la geometria in esame conviene adottare un sistema di riferimento polare con l'asse polare  $z$  orientata secondo l'asse di rotazione della girante così che il vettore velocità angolare si scrive  $\omega = \omega_0 e_z$ . L'equazione vettoriale del bilancio del momento della q.d.m. si scrive

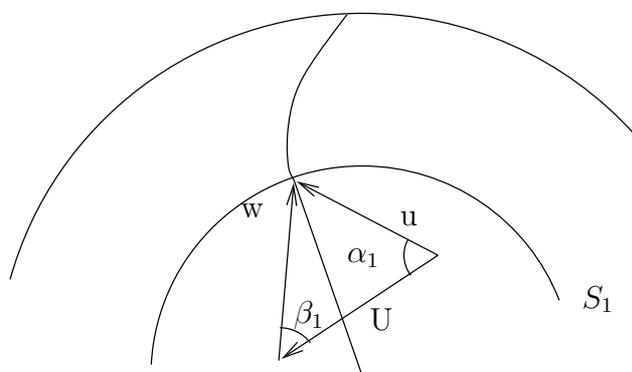
$$\int_{S_1 \cup S_2} r \times \rho u(u - U) \cdot n dS = \int_{S_1 \cup S_2} r \times t dS - M_B \quad (11.6.15)$$

Nella 9.A.15 abbiamo fatto le ipotesi di flusso stazionario e abbiamo trascurato il contributo delle forze di massa. Chiaramente il volume di con-

trollo scelto ruota rigidamente assieme alla girante e ha sezione di ingresso  $S_1$  e sezione di uscita  $S_2$ . Per semplicità supponiamo che le forze per unità di superficie  $t$  siano date solo dal contributo della pressione così che possiamo scrivere  $t = -pn$ .

Valutiamo ora gli integrali che compaiono nella 9.A.15. Nella sezione di ingresso  $S_1$  avremo  $r = R_1 e_r$ ,  $u = u_r e_r + u_\vartheta e_\vartheta$ ,  $n = -e_r$ . Indichiamo con  $w = u - U$  la velocità relativa del fluido rispetto alla girante. Possiamo allora calcolare

$$\int_{S_1} r \times \rho u (u - U) \cdot n dS = - \left( \int_{S_1} \rho R_1 u_\vartheta w_r dS \right) e_z \quad (11.6.16)$$



Con riferimento alla figura nella sezione di ingresso  $S_1$  i tre vettori  $w$ ,  $u$  ed  $U$  definiscono il triangolo di velocità all'ingresso della turbomacchina. In generale nelle sezione  $S_1$  il vettore  $u$  ed  $U$  sono noti così che si può calcolare il vettore velocità relativa  $w$ . Inoltre in  $S_1$  è noto anche lo stato termodinamico del fluido (pressione, temperatura, etc). Nella sezione di uscita  $S_2$  avremo  $r = R_2 e_r$ ,  $u = u_r e_r + u_\vartheta e_\vartheta$ ,  $n = e_r$ . Anche qui se indichiamo con  $w = u - U$  la velocità relativa del fluido rispetto alla girante possiamo calcolare

$$\int_{S_2} r \times \rho u (u - U) \cdot n dS = - \left( \int_{S_2} \rho R_2 u_\vartheta w_r dS \right) e_z \quad (11.6.17)$$

Valutiamo infine il momento prodotto dalle forze di pressione nella 9.A.15

$$\int_{S_1 \cup S_2} r \times -(pn) dS = 0 \quad (11.6.18)$$

in quanto  $r = R e_r$  e  $n = \pm e_r$ . Le forze di pressione non producono alcun momento.

Tenendo conto della 9.A.18, 9.A.17 e 9.A.16 la 9.A.15 si scrive

$$M_B = \left( \int_{S_1} \rho R_1 u_\vartheta w_r dS - \int_{S_2} \rho R_2 u_\vartheta w_r dS \right) e_z \quad (11.6.19)$$

La 9.A.19 fornisce l'espressione del momento assiale che agisce sulla palettatura in funzione della variazione del momento della q.d.m. del fluido ingresso e uscita. Nella 9.A.19 l'espressione del momento assiale dipende dalla distribuzione della velocità assoluta  $u_\vartheta$  o relative  $w_r$  nelle sezioni  $S_1$  e  $S_2$ . Per semplicità supponiamo che  $u_\vartheta$  sia uniforme. Con questa ipotesi è possibile far comparire nella 9.A.19 la portata  $\dot{m}$  elaborata dalla macchina. Nel caso di flusso stazionario l'equazione di conservazione della massa si scrive

$$\int_{S_1} \rho(u - U) \cdot ndS + \int_{S_2} \rho(u - U) \cdot ndS = 0$$

ovvero

$$-\int_{S_1} \rho w_r dS = \int_{S_2} \rho w_r dS = \dot{m} \quad (11.6.20)$$

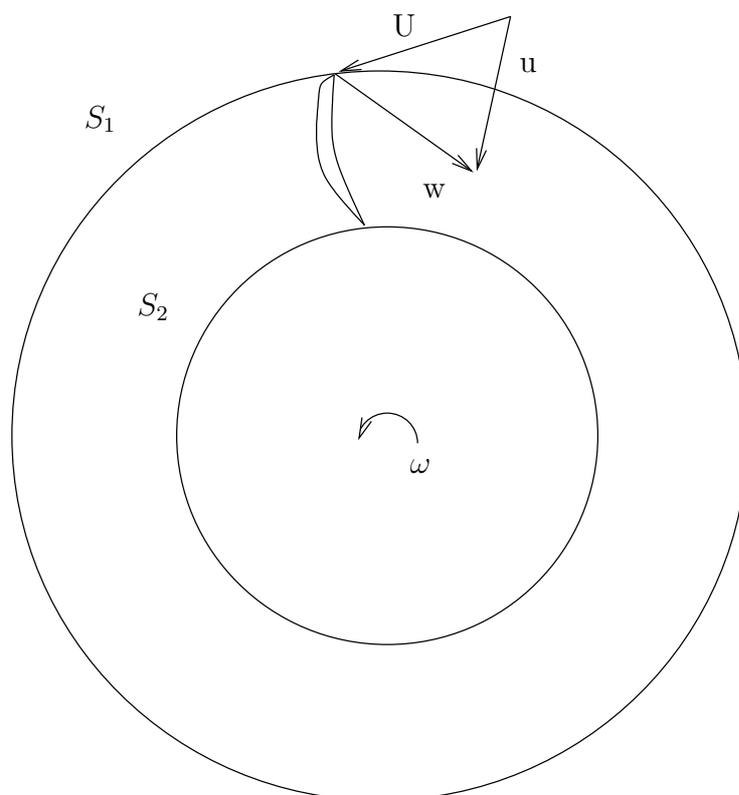
Utilizzando la 9.A.20 il momento assiale 9.A.19 si scrive

$$M_B = -\dot{m}(R_2 u_{\vartheta,2} - R_1 u_{\vartheta,1}) e_z$$

$$M_B = -\dot{m} \Delta(Ru_\vartheta) e_z \quad (11.6.21)$$

Nel caso di compressore centrifugo risulta  $R_2 u_{\vartheta,2} > R_1 u_{\vartheta,1}$  infatti il fluido viene accelerato passando da  $S_1$  a  $S_2$ . Nella 9.A.21 si ha  $\Delta(Ru_\vartheta) > 0$  quindi il momento assiale  $M_B$  risulta anti parallelo al vettore velocità angolare  $\omega = \omega_0 e_z$  e si comporta come un momento resistente. Al fine di rendere il sistema stazionario (come ipotizzato) dovremo necessariamente pensare alla presenza di un momento motore applicato sull'asse di rotazione che mantenga costante la velocità angolare della girante. L'energia fornita esternamente alla girante viene utilizzata per accelerare il fluido ( $\Delta(Ru_\vartheta) > 0$ ) e quindi per incrementare il suo livello energetico.

Lo stesso ragionamento fatto per il compressore centrifugo può essere ripetuto per una turbomacchina con la stessa geometria dove il fluido entra nella turbomacchina dalla sezione di raggio esterno ed esce da quella di raggio interno. Valutiamo la 9.A.15



Su  $S_1$  avremo  $r = R_1 e_r$ ,  $u = u_r e_r + u_\vartheta e_\vartheta$ ,  $n = e_r$  quindi

$$\int_{S_1} r \times \rho u(u - U) \cdot ndS = \left( \int_{S_1} \rho R_1 u_\vartheta w_r dS \right) e_z$$

tenendo conto che  $w_r$  è negativa avremo

$$\int_{S_1} r \times \rho u(u - U) \cdot ndS = - \left( \int_{S_1} \rho R_1 u_\vartheta |w_r| dS \right) e_z \quad (11.6.22)$$

Analogamente su  $S_2$  avremo  $r = R_2 e_r$ ,  $u = u_r e_r + u_\vartheta e_\vartheta$ ,  $n = -e_r$  quindi

$$\int_{S_2} r \times \rho u(u - U) \cdot ndS = - \left( \int_{S_2} \rho R_2 u_\vartheta w_r dS \right) e_z$$

anche tenendo conto che  $w_r$  è negativa avremo

$$\int_{S_2} r \times \rho u(u - U) \cdot ndS = \left( \int_{S_2} \rho R_2 u_\vartheta |w_r| dS \right) e_z \quad (11.6.23)$$

Sostituendo le 9.A.22 e 9.A.23 nella 9.A.15, nella ipotesi di distribuzione  $u_\vartheta$  costante su  $S_1$  e  $S_2$  otteniamo

$$M_B = \dot{m}(R_1 u_{\vartheta,1} - R_2 u_{\vartheta,2}) e_z \quad (11.6.24)$$

cioè

$$M_B = -\dot{m}(R_2 u_{\vartheta,2} - R_1 u_{\vartheta,1})e_z \quad (11.6.25)$$

che è l'espressione del momento assiale scambiato tra fluido e palettatura. La 9.A.25 è del tutto analoga alla 9.A.21 ricavata per compressore centrifugo. Al contrario, nel caso che stiamo esaminando adesso, il fluido entra nella sezione  $S_1$  di raggio più grande ad elevata velocità ed esce dalla sezione  $S_2$  di raggio più piccolo con velocità più bassa. Risulta pertanto  $R_1 u_{\vartheta,1} > R_2 u_{\vartheta,2}$  quindi  $M_B$  è equiverso al vettore velocità angolare  $\omega = \omega_0 e_z$  e tenderebbe a far accelerare la girante. Al fine di rendere il sistema stazionario (come ipotizzato inizialmente) è necessario pensare applicato all'asse della girante un momento resistente uguale e contrario la momento motore dato dalla 9.A.25.

Infine sia per il compressore, sia per la turbina è possibile valutare la potenza assorbita o erogata moltiplicando scalarmente la 9.A.21 o 9.A.25 per il vettore  $\omega$

$$W = -\dot{m}\Delta(Ru_{\vartheta})\omega_0$$

tenendo conto che  $U_{\vartheta} = R\omega_0$  abbiamo

$$W = -\dot{m}\Delta(Uu_{\vartheta}) \quad (11.6.26)$$

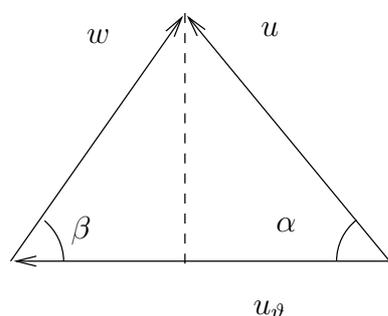
Nel caso del compressore  $W$  sarà negativa cioè la potenza sarà trasferita dal fluido alla girante ( $M_B$  è parallelo a  $\omega$ ).

È interessante confrontare l'espressione della potenza 9.A.26 ottenuta a partire dal bilancio del momento angolare con quella che si ottiene per un sistema aperto adiabatico a partire dall'equazione dell'energia ovvero con la 9.A.10. In questo modo possiamo legare tra loro aspetti essenzialmente dinamici legati alla variazione della quantità  $\Delta(Uu_{\vartheta})$  e aspetti termodinamici legati all'entalpia totale del fluido. Confrontando la 9.A.2 con la 9.A.10 abbiamo

$$\Delta H = \Delta(Uu_{\vartheta}) \quad (11.6.27)$$

con  $H = h + u^2/2$ . Dalla configurazione dei triangoli di velocità possiamo ricavare  $u_{\vartheta} = u \cos \alpha$  e  $w^2 = U^2 + u^2 - 2Uu \cos \alpha$  così che la 9.A.27 si può scrivere facendo comprimere la sola entalpia termodinamica  $h$

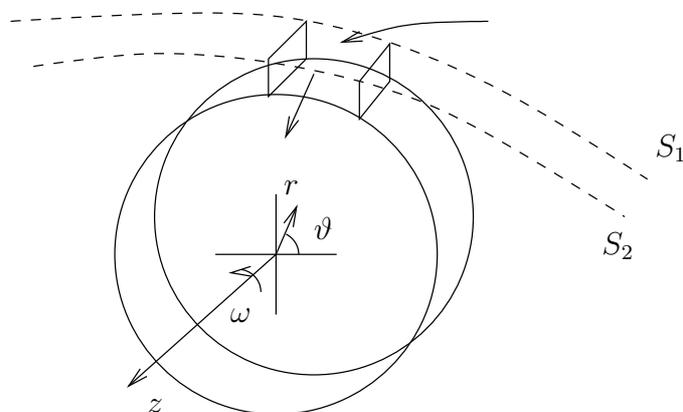
$$\Delta h = \Delta \left( \frac{u^2}{2} - \frac{w^2}{2} \right) \quad (11.6.28)$$



La 9.A.28 fornisce l'espressione del salto entalpico rotorico in funzione della variazione della velocità della girante  $U$  e della velocità relativa  $w$  del fluido  $e$ , insieme all'espressione del salto entalpico subito dal fluido nello statore ( $\Delta h_{stat} = -\Delta(u^2/2)$ ) serve a definire un importante parametro costruttivo delle turbomacchine che è il grado di reazione  $R = \Delta h_{rot}/(\Delta h_{stat} + \Delta h_{rot})$

#### 11.6.4 Macchine assiali

Le turbomacchine assiali si differenziano da quelle viste in precedenza in quanto la portata del fluido  $\dot{m}$  viene smaltita essenzialmente dalla componente assiale della velocità. Nelle macchine centripete o centrifughe invece era la componente radiale del campo ad assicurare la portata  $\dot{m}$ . Schematicamente una macchina assiale è rappresentata in figura.



Il fluido entra in direzione essenzialmente assiale nella sezione  $S_1$  ed esce dalla sezione  $S_2$  dopo aver scambiato lavoro con la girante. Data la geometria in esame conviene utilizzare un sistema di riferimento cilindrico con asse polare allineato con l'asse di rotazione della girante in modo tale che il vettore velocità angolare è dato da  $\omega = \omega_0 e_z$ .

Con il sistema di riferimento adottato in figura l'equazione di conservazione della massa si scrive

$$\int_{S_1 \cup S_2} \rho(u - U) \cdot n dS = 0$$

tenendo conto che in  $S_1$  abbiamo  $n = -e_z$  ed in  $S_2$   $n = +e_z$  si ha

$$-\int_{S_1} \rho W_z dS = \int_{S_2} \rho W_z dS = \dot{m} \quad (11.6.29)$$

Dalla 9.A.29 appare evidente come la portata in massa è assicurata dalla componente assiale della velocità relativa. Applichiamo ora l'equazione di bilancio del momento della q.dm. per valutare le coppie scambiate tra fluido e palettatura.

$$\int_{S_1 \cup S_2} r \times \rho u(u - U) \cdot ndS = \int_{S_1 \cup S_2} r \times t dS - M_B \quad (11.6.30)$$

Anche qui facciamo l'ipotesi di flusso stazionario e trascuriamo il contributo delle forze di massa e delle forze viscosse così che le tensioni  $t$  si possono scrivere come  $t = -pn$ . Possiamo ora valutare i termini che compaiono della 9.A.30. Nella sezione  $S_1$  avremo  $r = re_r$ ,  $u = u_\vartheta e_\vartheta + u_z e_z$  e  $n = -e_z$  quindi

$$\int_{S_1} r \times \rho u(u - U) \cdot ndS = - \left( \int_{S_1} \rho r u_\vartheta w_z dS \right) e_z + \left( \int_{S_1} \rho r u_z w_z dS \right) e_\vartheta \quad (11.6.31)$$

Osserviamo che nella 9.A.31  $r$  non può essere portato fuori dal segno di integrale in quanto variabile lungo  $S_1$ . Infatti

$$\int_{S_1} \dots dS = \int_{R-h/2}^{R+h/2} \int_0^{2\pi} \dots dS$$

dove abbiamo indicato con  $R$  il raggio medio della palettatura e con  $h$  l'altezza delle palette. In genere, nelle applicazioni si ha  $R \gg h$  e, in prima approssimazione è lecito ritenere  $r \simeq R$ . Con queste approssimazioni e ipotizzando  $u_\vartheta$  e  $u_z$  uniforme su  $S$ , la 9.A.31 si scrive

$$\int_{S_1} r \times \rho u(u - U) \cdot ndS = -\dot{m} R u_{\vartheta,1} e_z + -\dot{m} R u_{z,1} e_\vartheta \quad (11.6.32)$$

Osserviamo come nella 9.A.32 compare anche una componente della coppia lungo  $e_\vartheta$  cosa che non avveniva nelle macchine centrifughe dove il momento della q.d.m. associato al fluido produceva solo una coppia assiale. Se procediamo in modo analogo per  $S_2$  dove  $r = re_r$ ,  $u = u_\vartheta e_\vartheta + u_z e_z$  e  $n = e_z$  otteniamo

$$\int_{S_2} r \times \rho u(u - U) \cdot ndS = \dot{m} R u_{\vartheta,2} e_z - \dot{m} R u_{z,2} e_\vartheta \quad (11.6.33)$$

Resta da valutare il termine dove compare la pressione. In  $S_1$  avremo

$$\int_{S_1} r \times t = \int_{S_1} r e_r \times (p e_z) dS = -R p_1 A_1 e_\vartheta \quad (11.6.34)$$

mentre in  $S_2$

$$\int_{S_2} r \times t = \int_{S_2} r e_r \times (-p e_z) dS = +Rp_2 A_2 e_\vartheta \quad (11.6.35)$$

In questo caso anche le forze di pressione producono una coppia allineata lungo  $e_\vartheta$ . Sostituendo la 9.A.32, 9.A.33, 9.A.34 e 9.A.35 nell'espressione del momento 9.A.30 otteniamo l'espressione della coppia scambiata tra fluido e palettatura

$$M_B = -\dot{m}R\Delta u_\vartheta e_z + \dot{m}R\Delta(u_z + pA)e_\vartheta \quad (11.6.36)$$

Analogamente alle macchine radiali la variazione della componente  $u_\vartheta$  produce il momento assiale utile. Tuttavia nelle macchine assiali la variazione della componente assiale  $u_z$  e delle forze di pressione producono anche una coppia allineata su  $e_\vartheta$ .

Se ora moltiplichiamo scalarmente la 9.A.36 per il vettore velocità angolare  $\omega = \omega_0 e_z$  otteniamo l'espressione della potenza

$$W = -\dot{m}U\Delta u_\vartheta \quad (11.6.37)$$

Nel caso di una turbina il fluido cede energia alla girante: infatti avremo  $u_{\vartheta,1} > u_{\vartheta,2}$  e quindi  $W > 0$ . Viceversa nel caso di un compressore la girante trasmette energia al fluido: avremo pertanto  $u_{\vartheta,2} > u_{\vartheta,1}$  e quindi  $W < 0$ .

## Capitolo 12

# Turbolenza omogenea isotropa

### 12.1 Equazione di trasporto-diffusione: evoluzione e interazione di scale

Introduciamo il concetto di metodo spettrale per la soluzione di un'equazione differenziale considerando un esempio. Prendiamo in esame l'equazione di convezione diffusione lineare

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial t} + a \frac{\partial u}{\partial x} &= \nu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \\ u(l, t) &= u(-l, t) \\ u(x, 0) &= u_0(x)\end{aligned}\tag{12.1.1}$$

nel dominio  $x \in [-l, l]$  con condizioni al contorno periodiche e condizione iniziale  $u_0(x)$  nota. Nelle 12.1.1 " $a$ " è una costante nota positiva. La soluzione del problema 12.1.1 può essere trovata risolvendo direttamente l'equazione nello spazio fisico analiticamente, dove possibile, oppure con tecniche numeriche basate ad esempio sul metodo delle differenze finite.

Qui vogliamo risolvere la 12.1.1 utilizzando il fatto che la funzione  $u(x, t)$  è sviluppabile in serie di Fourier

$$u(x, t) = \sum_{p=-\infty}^{\infty} \hat{u}_p(t) e^{ik_p x}\tag{12.1.2}$$

poichè stiamo considerando funzioni  $u(x, t)$  i coefficienti di Fourier saranno funzioni del tempo in quanto lo sviluppo in serie è relativo alla coordinata

spaziale  $x$ . Sostituendo la 12.1.2 nella 12.1.1 e tenendo conto che

$$\begin{aligned}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_p &= ik_p \hat{u}_p \\ \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)_p &= -k_p^2 \hat{u}_p\end{aligned}$$

otteniamo la seguente equazione per i coefficienti di Fourier

$$\sum_{p=-\infty}^{\infty} \frac{d}{dt} \left( \hat{u}_p e^{ik_p x} \right) + \sum_p ik_p a \hat{u}_p e^{ik_p x} = -\nu \sum_p k_p^2 \hat{u}_p e^{ik_p x} \quad (12.1.3)$$

L'equazione 12.1.3 ha il vantaggio di essere un'equazione differenziale ordinaria, in questo caso anche lineare, per i coefficienti di Fourier  $\hat{u}_p$ . Nella 12.1.3 compare ancora la sommatoria su tutti i coefficienti di Fourier a numero d'onda  $k_p$ . La 12.1.3 può essere ulteriormente semplificata tenendo conto della relazione di ortogonalità dei polinomi trigonometrici

$$\left( e^{ik_p x}, e^{-ik_n x} \right) = \int_{-l}^l e^{ik_p x} e^{-ik_n x} dx = 2l \delta_{p,n}$$

Moltiplicando la 12.1.3 per  $e^{-ik_n x}$  ed integrando tra  $(-l, l)$  e tenendo conto della 12.1.3 otteniamo

$$\frac{d\hat{u}_n}{dt} + ik_n a \hat{u}_n = -\nu k_n^2 \hat{u}_n \quad (12.1.4)$$

La 12.1.4 è un'equazione differenziale ordinaria per il singolo coefficiente di Fourier. Nella 12.1.4 la derivata  $\partial \hat{u}_n / \partial t$  dipende solo dal coefficiente di Fourier  $\hat{u}_n$  e quindi può essere risolta autonomamente da tutte le altre. Difatti è possibile scrivere la 12.1.4 per  $n = -\infty \dots \infty$  e, per ciascun valore di  $n$ , integrare l'equazione differenziale corrispondente con la condizione iniziale

$$\hat{u}_{n,0} = \frac{1}{2l} \int_{-l}^l u_0(x) e^{-ik_n x} dx \quad (12.1.5)$$

nota dalla condizione iniziale  $u_0(x)$ .

Integrando analiticamente la 12.1.4 con la condizione iniziale 12.1.5 si ottiene la legge con cui cambiano nel tempo i coefficienti di Fourier

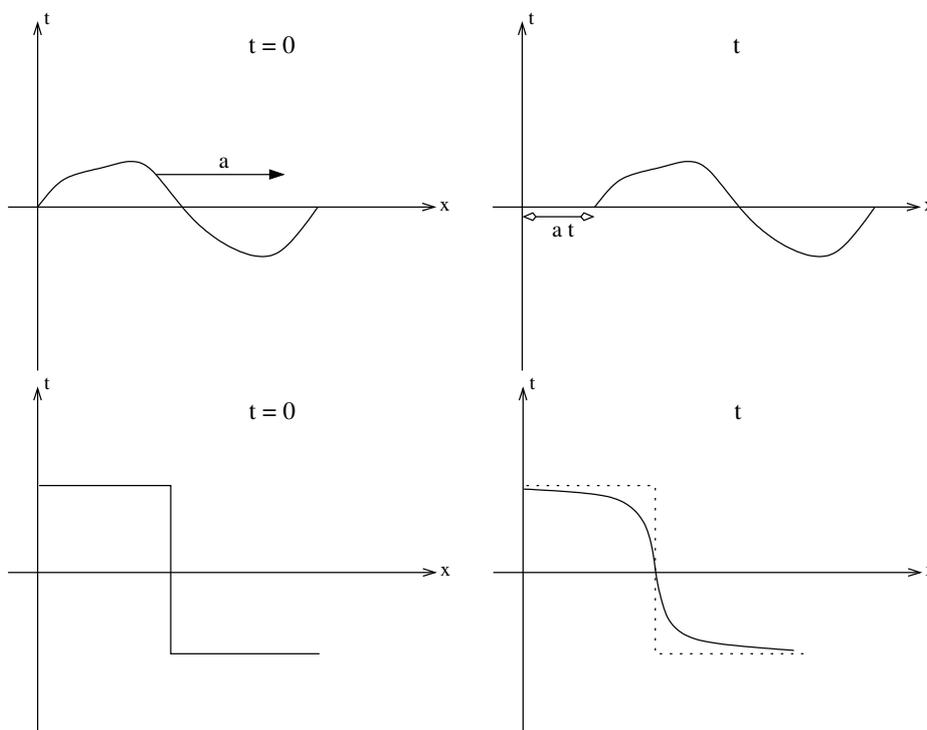
$$\hat{u}_n(t) = \hat{u}_{n,0} e^{-\nu k_n^2 t} e^{-iak_n t} \quad (12.1.6)$$

Infine la soluzione nello spazio fisico può essere ricostruita, una volta noti i coefficienti di Fourier mediante la serie

$$u(x, t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \hat{u}_{n,0} e^{-\nu k_n^2 t} e^{k_n(x-at)} \quad (12.1.7)$$

Discutiamo ora alcuni aspetti qualitativi e quantitativi della soluzione dell'equazione 12.1.1 e la loro interpretazione in termini di evoluzione dei coefficienti di Fourier.

La 12.1.1 è un'equazione di convezione-diffusione lineare. Nella 12.1.1 il termine convettivo  $a \frac{du}{dx}$  è responsabile della convezione con velocità costante "a" della condizione iniziale  $u_0(x)$ . Viceversa il termine diffusivo  $\nu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$  è responsabile della "diffusione" della condizione iniziale



**Figura 12.1** Soluzione dell'equazione di trasporto diffusione lineare: effetto della convezione (in alto) e della diffusione (in basso)

In definitiva la parte convettiva fornisce una soluzione costituita da un'onda il cui profilo è assegnato dalla condizione iniziale e che propaga con velocità "a", mentre la parte diffusiva fa sì che l'ampiezza vada diminuendo nel tempo.

Consideriamo la struttura della soluzione in termini di coefficienti di Fourier data dalla 12.1.7. La 12.1.7 stabilisce che la soluzione  $u(x, t)$  è ricostruita attraverso un certo numero di armoniche o onde che propagano tutte con velocità "a" ( $e^{ik_n(x-at)}$ ). In questo caso la velocità "a" assume il ruolo di velocità di fase ovvero di velocità con cui propaga ciascuna onda a numero d'onda  $k_n$  che compare nella 12.1.7. L'ampiezza di ciascuna onda è data dal valore del coefficiente di Fourier della condizione iniziale  $\hat{u}_{n,0}$  multi-

plicata per  $e^{-\nu k_n^2 t}$  che è una funzione decrescente del tempo. Il contenuto in frequenza della soluzione non cambia nel tempo ed è fissato dal contenuto in frequenza della condizione iniziale attraverso i suoi coefficienti di Fourier. Il termine convettivo fa sì che la forma della soluzione iniziale  $u_0(x)$  non viene modificata in quanto essendo la soluzione ricostruita con un certo numero di armoniche che propagano tutte con la stessa velocità di fase "a", la forma del segnale iniziale non viene perduta: la funzione  $u_0(x)$  risulta traslata, armonica per armonica, della stessa quantità  $a t$ . Per effetto del termine diffusivo, invece, l'ampiezza di ciascuna armonica decade esponenzialmente nel tempo ( $e^{-\nu k_n^2 t}$ ) e il decadimento è tanto più rapido tanto più di considerano armoniche a numero d'onda elevato. Per effetto di tale termine ne risulta dunque una forma sempre più smussata della condizione iniziale.

Nella prima figura 12.1 è stata riportata l'evoluzione nel tempo di un'onda di una forma generica causata dalla presenza del solo termine convettivo: come si vede la forma del profilo è inalterata mentre il profilo risulta traslato di una quantità  $\Delta x = a t$ . Nella seconda figura 12.1 invece per mostrare l'effetto del termine diffusivo sull'evoluzione della soluzione è stata scelta come condizione iniziale un'onda quadra, che come noto presenta modi non nulli a frequenze comunque elevate: l'effetto della diffusione è diminuire l'ampiezza dell'onda in modo sempre maggiore all'aumentare della frequenza del modo considerato. L'onda scelta sarà quindi particolarmente smorzata nelle zone ad alti gradienti (rappresentati dai modi a frequenze maggiori) mentre sarà sempre meno smorzata nelle zone ad andamento costante (rappresentati dai modi a frequenza più bassa).

Cerchiamo ora di ripetere gli stessi ragionamenti che ci hanno portato ad una soluzione analitica per l'equazione di convezione-diffusione lineare per un'equazione di convezione-diffusione non lineare

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} &= \nu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \\ u(l, t) &= u(-l, t) \\ u(x, 0) &= u_0(x) \end{aligned} \quad (12.1.8)$$

Nella 12.1.8 il termine convettivo è non lineare in quanto il campo  $u$  viene convetto con la velocità  $u$  stessa che è funzione (identità) della soluzione. Scriviamo la 12.1.8 in termini di coefficienti di Fourier. Tenendo conto che

$$\begin{aligned} (\widehat{f g})_m &= \sum_p \sum_q \hat{f}_p \hat{g}_q \delta_{p+q, m} \\ \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)_q &= i k_q \hat{u}_q \end{aligned}$$

la 12.1.8 si può riscrivere come

$$\sum_m \frac{d\hat{u}_m}{dt} e^{i k_m x} + \sum_m \sum_p \sum_q i k_q \hat{u}_p \hat{u}_q \delta_{p+q, m} e^{i k_m x} = -\nu \sum_m k_m^2 \hat{u}_m$$

moltiplicando per  $e^{-ik_n x}$  ed integrando tra  $(-l, l)$  otteniamo l'equazione di evoluzione per il coefficiente di Fourier  $\hat{u}_n$

$$\frac{d\hat{u}_n}{dt} + \sum_p \sum_q ik_q \hat{u}_p \hat{u}_q \delta_{p+q,n} = -\nu k_n^2 \hat{u}_n \quad (12.1.9)$$

L'equazione 12.1.9 può essere scritta per ciascun coefficiente di Fourier  $\hat{u}_n$ . Al contrario del caso lineare (cfr. eq. 12.1.4) l'equazione di evoluzione del coefficiente di Fourier  $\hat{u}_n$  dipende da tutti gli altri coefficienti di Fourier in virtù della doppia sommatoria dovuta al termine non lineare. Per questo motivo non può essere risolta autonomamente da tutte le altre come avveniva per il caso lineare ma è necessario ricorrere a tecniche di integrazione numerica nel tempo. E' possibile però analizzare anche se qualitativamente l'effetto del termine non-lineare sull'evoluzione di ciascun coefficiente di Fourier. Nella 12.1.9 possiamo introdurre l'indice  $s = p + q$  e riscrivere

$$\sum_p \sum_q ik_q \hat{u}_p \hat{u}_q \delta_{p+q,n} = \sum_s \sum_q ik_q \hat{u}_{s-q} \hat{u}_q \delta_{s,n} = \sum_q ik_q \hat{u}_{n-q} \hat{u}_q$$

Sostituendo nella 12.1.9 abbiamo

$$\frac{d\hat{u}_n}{dt} + \sum_q ik_q \hat{u}_{n-q} \hat{u}_q = -\nu k_n^2 \hat{u}_n \quad (12.1.10)$$

Nella 12.1.10 appare evidente la somma di convoluzione che accoppia tramite il termine non lineare tutte le equazioni di evoluzione dei coefficienti di Fourier.

Per fissare le idee supponiamo che all'istante iniziale la condizione iniziale sia  $u_0(x) = \sin(\frac{\pi}{l}x)$  e che quindi solo i coefficienti di Fourier  $\hat{u}_n^0$ ,  $n = \pm 1$ , ( $\hat{u}_n^0 = \hat{u}_{n,0}$ ) siano diversi da zero.

Discretizziamo ora la derivata temporale che compare nella 12.1.10 come

$$\frac{d\hat{u}_n}{dt} \Big|_{t=0} = \frac{\hat{u}_n^1 - \hat{u}_n^0}{Dt}$$

e riscriviamo la 12.1.10 come

$$\frac{\hat{u}_n^1 - \hat{u}_n^0}{Dt} + \sum_q ik_q \hat{u}_{n-q}^0 \hat{u}_q^0 = -\nu k_n^2 \hat{u}_n^0 \quad (12.1.11)$$

cioè valutando il termine non lineare e il termine diffusivo all'istante  $t = 0$ . La 12.1.11 permette così di calcolare i coefficienti di Fourier all'istante  $t =$

$Dt$ . Scriviamo ora la 12.1.11 per  $n = 0, 1, 2, \dots$

$$\begin{aligned} n = 0 & \quad \frac{\hat{u}_0^1 - \hat{u}_0^0}{Dt} = ik_1 \hat{u}_{-1} \hat{u}_1 + ik_{-1} \hat{u}_1 \hat{u}_{-1} = 0 \\ n = 1 & \quad \frac{\hat{u}_1^1 - \hat{u}_1^0}{Dt} = -\nu k_1^2 \hat{u}_1^0 \\ n = 2 & \quad \frac{\hat{u}_2^1 - \hat{u}_2^0}{Dt} + ik_1 \hat{u}_1^0 \hat{u}_1^0 = 0 \\ n = -1 & \quad \dots \\ n = -2 & \quad \dots \end{aligned}$$

<sup>1</sup> Osserviamo che all'istante  $t = Dt$  la soluzione ha due coefficienti di Fourier non nulli cioè  $\hat{u}_{\pm 1}^1$  e  $\hat{u}_{\pm 2}^1$  mentre all'istante  $t = 0$  solo il coefficiente di Fourier  $\hat{u}_{\pm 1}^0$  era diverso da zero. Se consideriamo l'equazione per  $n = 2$  osserviamo che il coefficiente di Fourier  $\hat{u}_2^1$  è stato prodotto dall'interazione quadratica  $ik_1 \hat{u}_1^0 \hat{u}_1^0$  dovuta al termine non lineare. Iterando questo tipo di ragionamento appare evidente che in virtù delle interazioni non lineari vengono prodotti sempre nuovi coefficienti di Fourier che all'istante precedente erano nulli. Nel caso di un'equazione non lineare partendo da una condizione iniziale che ha un solo coefficiente di Fourier non nullo  $\hat{u}_{\pm 1}^0$   $u^0 = \sin(\frac{\pi}{l}x)$  ben presto la soluzione all'istante  $t$  sarà costituita da un numero consistente di coefficienti di Fourier non nulli. Tutto ciò accade in virtù della presenza del termine convettivo non lineare che modifica, via interazioni triadiche, il contenuto in frequenza della soluzione  $u(x, t)$ . Tutto ciò era assente nel caso dell'equazione lineare dove il contenuto in frequenza della soluzione veniva imposto dalla condizione iniziale e non c'era alcun meccanismo che lo potesse alterare. Il termine non lineare al contrario riesce a modificare il contenuto in frequenza della soluzione e genera segnali  $u(x, t)$  caratterizzati da un ampio spettro cioè da un gran numero di coefficienti di Fourier non nulli. Chiaramente vi è un limite a questo meccanismo di generazione non lineare di frequenze elevate dovuto al termine diffusivo. Man mano che si considerano coefficienti o modi di Fourier a numero d'onda sempre più elevato l'ampiezza corrispondente è sempre più piccola in quanto decade in  $k_n$  come  $e^{-\nu k_n^2 t}$  in virtù del termine diffusivo. In questo modo le interazioni non lineari ad elevata frequenza avvengono tra modi a basso contenuto energetico cosicché i corrispondenti modi generati a frequenza ancor più elevata aggiungono un contributo energetico piccolo all'energia globale del segnale.

<sup>1</sup>Osserviamo per inciso che la generazione di componenti di Fourier ad opera del termine non lineare non può mai far nascere da zero il termine a numero d'onda nullo, cioè il valore medio, a causa della simmetria dei numeri d'onda. Per  $n = 0$  infatti l'operatore di convoluzione diviene

$$\sum_q k_q \hat{u}_{-q} \hat{u}_q = \sum_{q>0} k_q \hat{u}_{-q} \hat{u}_q + \sum_{q<0} k_q \hat{u}_{-q} \hat{u}_q = \sum_{q>0} (k_q + k_{-q}) \hat{u}_{-q} \hat{u}_q = 0 \quad (12.1.12)$$

Chiarito il ruolo del termine non lineare che appare nell'equazione 12.1.10, vediamo come questa equazione può essere risolta efficientemente con tecniche numeriche. Nella precedente discussione abbiamo già detto che l'integrazione temporale della 12.1.10 deve essere fatta necessariamente attraverso un metodo numerico (ad es. Runge-Kutta). L'operazione più onerosa dal punto di vista computazionale è il calcolo del termine non lineare

$$\hat{b}_n = - \sum_q ik_q \hat{u}_{n-q} \hat{u}_q \quad (12.1.13)$$

in quanto per ciascun modo che decidiamo di evolvere nel tempo è necessario valutare la sommatoria su tutti i modi di Fourier che appare nella 12.1.13. L'algoritmo di soluzione che ne risulta ha allora una complessità dell'ordine  $O(N^2)$  dove  $N$  è il numero di coefficienti di Fourier che decidiamo di evolvere. Tuttavia è possibile avvalersi di algoritmi più efficienti qualora il termine non lineare venga valutato come prodotto delle due funzioni  $u$  e  $\frac{\partial u}{\partial x}$  nello spazio fisico e poi successivamente trasformato nello spazio di Fourier. Le operazioni da compiere sono fondamentalmente le seguenti:

1. Calcolo del termine non lineare nello spazio fisico come  $h = -u \frac{\partial u}{\partial x}$
2. Calcolo dei coefficienti di Fourier del termine non lineare

$$\hat{h}_n = \frac{1}{2l} \int_{-l}^l h(x) e^{-ik_n x} dx$$

Un metodo di questo tipo è detto pseudo-spetttrale al contrario del metodo precedentemente illustrato che è detto spettrale. Nel metodo spettrale infatti l'equazione è risolta interamente nello spazio di Fourier compreso il calcolo del termine non lineare; al contrario in un metodo pseudo-spetttrale il calcolo del termine non lineare è effettuato nello spazio fisico e successivamente vengono valutati i suoi coefficienti di Fourier. Complessivamente un metodo pseudo-spetttrale ha complessità  $O(N \log N)$  in quanto per l'operazione più onerosa del calcolo dei coefficienti di Fourier del termine non lineare è possibile utilizzare algoritmi che permettono di valutare la sommatoria

$$\hat{h}_n = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^{N-1} h(x_j) e^{-ik_n x_j}$$

corrispondente alla versione discreta dell'integrale in modo più efficiente di quanto sia possibile valutare una somma di convoluzione.

## 12.2 Formulazione delle equazioni di Navier-Stokes per flussi turbolenti omogenei ed isotropi

I flussi turbolenti omogenei e isotropi rappresentano un caso ideale di flusso turbolento in cui la dinamica del moto del fluido non è influenzata dall'interazione del fluido con pareti solide o da eventuali flussi medi di velocità.

Le condizioni di turbolenza omogenea e isotropa si possono verificare solo nello spazio libero cioè per un fluido non confinato da alcuna parete e sul quale non viene imposto nessun campo medio di velocità se non quello uniforme. Solo in queste condizioni il moto caotico del fluido può svilupparsi liberamente secondo la dinamica imposta dalle equazioni del moto. I moti turbolenti che si verificano in tali condizioni vengono definiti omogenei e isotropi in quanto data l'assenza di condizioni al contorno o di flussi medi imposti esternamente la struttura del campo di velocità in termini di grandezze statistiche è invariante per traslazione (omogeneità) e rotazione (isotropia) del sistema di riferimento rispetto al quale si sta descrivendo il moto del fluido. Le condizioni di turbolenza omogenea ed isotropa sono pertanto delle condizioni ideali che raramente si verificano nelle applicazioni. Tuttavia proprio in virtù di tali condizioni è possibile avvalersi di un maggior numero di strumenti sia per la simulazione che per l'analisi dei campi turbolenti di questo tipo che in condizioni non omogenee e non isotrope non potrebbero essere utilizzati.

In definitiva un flusso omogeneo e isotropo rappresenta il candidato ideale per analizzare il comportamento intrinseco della dinamica della turbolenza da un punto di vista fisico in quanto tutti i risultati che si ottengono in queste condizioni sono riconducibili esclusivamente alla dinamica non-lineare del fluido e non a effetti esterni imposti ad esempio dalle condizioni al contorno. Inoltre nelle condizioni di omogeneità ed isotropia è possibile analizzare nelle condizioni più semplici possibili il comportamento di un flusso turbolento che è già di per sé molto complesso.

La simulazione di un flusso turbolento omogeneo e isotropo può essere effettuata in modo relativamente semplice e numericamente molto accurato avvalendosi di metodi pseudo-spettrali. Come abbiamo detto la turbolenza omogenea ed isotropa può svilupparsi solo in condizioni di spazio libero. Possiamo pertanto pensare di risolvere le equazioni del moto in un dominio  $V$  che rappresenta una porzione più piccola dello spazio libero dove la turbolenza si sviluppa. Resta ora da specificare con quali condizioni al contorno vanno risolte le equazioni del moto. Per fare ciò osserviamo il moto di una particella di fluido che attraversa il dominio  $V$ . Se il dominio  $V$  è sufficientemente grande può accadere che il moto delle particelle di fluido che entrano nel dominio, in virtù della natura caotica delle equazioni del moto, sia statisticamente scorrelato dal campo di moto che queste hanno quando abbandonano il volume  $V$ . Per questo motivo è possibile assumere

che le condizioni di ingresso siano uguali a quelle d'uscita quando il campo di moto tra ingresso e uscita è statisticamente scorrelato. Le condizioni al contorno naturali sono pertanto delle condizioni al contorno periodiche. L'unico vincolo da dover rispettare è quello delle dimensioni del dominio  $V$  che deve avere delle dimensioni caratteristiche maggiori della lunghezza di correlazione del campo di velocità una cui stima è fornita dalla scale integrale. Dal punto di vista delle strutture di vorticità il dominio deve poter contenere le strutture più grandi che contengono gran parte dell'energia per unità di volume del flusso.

In definitiva le equazioni di Navier-Stokes risolte in un dominio  $V = [-l_1, l_1] \times [-l_2, l_2] \times [-l_3, l_3]$  con condizioni al contorno periodiche permettono la simulazione di campi turbolenti omogenei e isotropi. Data la natura delle condizioni al contorno è naturale l'utilizzo di metodi pseudo-spettrali sia per la loro efficienza che soprattutto per l'accuratezza della soluzione trovata.

Risolviamo dunque le equazioni

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \text{grad } \mathbf{u} &= -\frac{1}{\rho} \text{grad } p + \nu \text{grad}^2 \mathbf{u} \\ \text{div } \mathbf{u} &= 0 \end{aligned} \quad (12.2.1)$$

in un dominio  $V$  con condizioni al contorno periodiche.

Consideriamo prima di tutto il bilancio di energia cinetica per unità di volume  $\frac{1}{2}u^2$ . Moltiplicando scalarmente la 12.2.1 per  $\mathbf{u}$  e integrando sul volume  $V$  si ottiene l'equazione

$$\frac{d}{dt} \int_V \frac{1}{2} \mathbf{u}^2 dV = -\nu \int_V \text{grad } \mathbf{u} : \text{grad } \mathbf{u} \quad (12.2.2)$$

Nella 12.2.2 in virtù delle condizioni al contorno periodiche e della condizione  $\text{div } \mathbf{u} = 0$  sia il termine non lineare che la pressione non danno alcun contributo. La 12.2.2 stabilisce che l'energia cinetica contenuta nel volume è una funzione decrescente nel tempo in quanto la quantità  $\nu \text{grad } \mathbf{u} : \text{grad } \mathbf{u}$  è definita positiva e rappresenta proprio la dissipazione di energia cinetica. In queste condizioni non è possibile realizzare un campo turbolento  $\mathbf{u}$  stazionario (statisticamente) nel tempo in quanto la sua energia per tempi grandi va a zero. Questo problema può essere risolto aggiungendo nell'equazione della quantità di moto un termine forzante  $\mathbf{f}$  che agisce solo sulla scala più grande del sistema e la rifornisce dell'energia cinetica perduta a causa della dissipazione viscosa. Chiaramente questo è un artificio che permette di ottenere flussi stazionari tuttavia se il termine forzante agisce solo sulla larga scala le scale intermedie e quelle più piccole non sono affette dal forzamento esterno e possono sviluppare la loro dinamica in base ai fenomeni di convezione e diffusione che sono gli unici presenti su scala intermedia e piccola.

Vogliamo dunque risolvere il seguente sistema di equazioni

$$\begin{aligned}\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \text{grad } \mathbf{u} &= -\frac{1}{\rho} \text{grad } p + \nu \text{grad}^2 \mathbf{u} + \mathbf{f} \\ \text{div } \mathbf{u} &= 0 \\ \text{c.c. periodiche}\end{aligned}\tag{12.2.3}$$

Dalle 12.2.3 segue subito che il bilancio di energia cinetica per il volume  $V$  è dato

$$\frac{d}{dt} \int_V \frac{1}{2} \mathbf{u}^2 dV = -\nu \int_V \text{grad } \mathbf{u} : \text{grad } \mathbf{u} dV + \int_V \mathbf{f} \cdot \mathbf{u} dV\tag{12.2.4}$$

Questa volta nella 12.2.4 oltre all'energia dissipata  $\varepsilon(t) = -\nu \int_V \text{grad } \mathbf{u} : \text{grad } \mathbf{u}$  compare anche la potenza immessa  $P(t) = \int_V \mathbf{f} \cdot \mathbf{u} dV$  che può bilanciare  $\varepsilon$  e rendere il flusso statisticamente stazionario. Difatti se facciamo una media temporale della 12.2.4, poichè l'energia (potenza) immessa non può che essere uguale a quella dissipata avremo che  $\bar{\varepsilon} \equiv \bar{P}$ .

A partire dalle equazioni 12.2.3 è possibile scrivere una equazione di evoluzione per i coefficienti di Fourier  $\hat{u}_i(k, t)$  del campo di velocità  $u_i(x, t)$ . Prima di ricavare questa equazione di evoluzione, data la natura vettoriale e tridimensionale dei campi che stiamo considerando conviene introdurre la seguente notazione riguardo i coefficienti di Fourier. Indichiamo con

$$\hat{u}_i(k_1^n, k_2^m, k_3^l, t) = \frac{1}{V} \int_V u_i(x_1, x_2, x_3, t) e^{-ik_1^n x_1} e^{-ik_2^m x_2} e^{-ik_3^l x_3} dV\tag{12.2.5}$$

i coefficienti di Fourier della velocità  $u_i$ . Per semplicità di notazione questi coefficienti verranno indicati con  $\hat{u}_i^{n,m,l}$  o più semplicemente con  $\hat{u}_i$  con l'avvertenza che con  $\hat{u}_i$  si intende il coefficiente di Fourier valutato in corrispondenza del vettore d'onda  $(k_1^n, k_2^m, k_3^l)$  all'istante  $t$ . Possiamo poi valutare i coefficienti di Fourier delle derivate di  $u_i$  come

$$\left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right)_{n,m,l} = ik_j \hat{u}_i^{n,m,l}\tag{12.2.6}$$

Nella 12.2.6 non abbiamo scritto esplicitamente la dipendenza dagli indici  $(n, m, l)$  del numero d'onda  $k_j$  e pertanto  $k_j$  va inteso come

$$k_j = \begin{cases} k_1^n & j = 1 \\ k_2^m & j = 2 \\ k_3^l & j = 3 \end{cases}\tag{12.2.7}$$

Spesso la 12.2.6 può essere ulteriormente scritta come  $\left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right) = ik_j \hat{u}_i$  intendendo che questa espressione va valutata a numero d'onda  $(k_1^n, k_2^m, k_3^l)$  all'istante  $t$  con  $k_j$  definito dalla 12.2.7.

Stabilita questa notazione possiamo ricavare l'equazione di evoluzione per  $\hat{u}_i$  a partire dalle 12.2.3 che, per convenienza riscriviamo come

$$\begin{aligned}\frac{\partial u_i}{\partial t} &= h_i - \frac{\partial p}{\partial x_i} + \nu \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j \partial x_j} + f_i \\ \frac{\partial u_i}{\partial x_i} &= 0\end{aligned}\quad (12.2.8)$$

c.c periodiche

avendo posto  $\rho = 1$  e  $h_i = -u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j}$ . Sostituiamo nella 12.2.8 l'espressione di ciascun termine scritto come la sua corrispondente serie di Fourier, ad esempio

$$u_i = \sum_{p,q,r} \hat{u}_i^{p,q,r} e^{ik_1^p x_1} e^{ik_2^q x_2} e^{ik_3^r x_3} \quad (12.2.9)$$

Moltiplicando l'equazione così ottenuta per la funzione  $e^{-ik_1^n x_1} e^{-ik_2^m x_2} e^{-ik_3^l x_3}$  ed integrando sul volume otteniamo la seguente equazione per il coefficiente di Fourier  $\hat{u}_i^{n,m,l}$

$$\frac{\partial \hat{u}_i}{\partial t} = \hat{h}_i - ik_i \hat{p} - \nu k^2 \hat{u}_i + \hat{f}_i \quad (12.2.10)$$

Nella 12.2.10 abbiamo indicato con  $k^2 = k_{n,m,l}^2 = (k_1^n)^2 + (k_2^m)^2 + (k_3^l)^2 = k_j k_j$ . Osserviamo che compare ancora la pressione  $\hat{p}^{n,m,l}$ . Questa può essere eliminata sfruttando la condizione di solenoidalità del campo  $u_i$ . Applicando l'operatore di divergenza alla 12.2.8 otteniamo un'equazione per la pressione

$$0 = \frac{\partial h_j}{\partial x_j} - \frac{\partial^2 p}{\partial x_j \partial x_j} + \frac{\partial f_j}{\partial x_j} \quad (12.2.11)$$

che in termini dei relativi coefficienti di Fourier si scrive

$$0 = ik_j \hat{h}_j + k^2 \hat{p} + ik_j \hat{f}_j \quad (12.2.12)$$

Dalla 12.2.12 è possibile ricavare analiticamente i coefficienti di Fourier associati al campo di pressione  $p$  che sono dati da

$$\hat{p} = -\frac{ik_j \hat{h}_j}{k^2} - \frac{ik_j \hat{f}_j}{k^2} \quad (12.2.13)$$

Sostituendo questa espressione di  $\hat{p}$  nella 12.2.10 e riarrangiando i termini, l'equazione per  $\hat{u}_i$  si scrive

$$\frac{\partial \hat{u}_i}{\partial t} = \left( \delta_{ij} - \frac{k_i k_j}{k^2} \right) \hat{h}_j - \nu k^2 \hat{u}_i + \left( \delta_{ij} - \frac{k_i k_j}{k^2} \right) \hat{f}_j \quad (12.2.14)$$

La variazione nel tempo di  $\hat{u}_i$  è dovuta a un contributo associato al termine non lineare  $\hat{h}_j$ , da un contributo associato al termine diffusivo e dal

forzamento esterno. Nella 12.2.14 non compare più la pressione che è stata eliminata sfruttando la condizione  $\text{div } \mathbf{u} = 0$ . Tuttavia sia il termine non lineare  $\hat{h}_j$  che il forzamento  $\hat{f}_j$  appaiono moltiplicati per l'operatore

$$P_s^{i,j} = \left( \delta_{ij} - \frac{k_i k_j}{k^2} \right) \quad (12.2.15)$$

di cui vogliamo discutere il significato fisico. In generale, anche per campi solenoidali, il termine non lineare  $h_i = u_p \frac{\partial u_i}{\partial x_p}$  e il forzamento  $f_i$  hanno divergenza diversa da zero. Ad esempio possiamo valutare

$$\frac{\partial h_i}{\partial x_i} = \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_p} (u_i u_p) \quad (12.2.16)$$

In termini di coefficienti di Fourier  $\text{div } h$  si scrive

$$(\widehat{\text{div } \mathbf{h}}) = ik_i \hat{h}_i \quad (12.2.17)$$

e in generale il corrispondente coefficiente di Fourier sarà diverso da zero. Proviamo ora a valutare  $\text{div } (P_s h)$  ovvero la divergenza del termine non lineare al quale abbiamo applicato l'operatore  $P_s$ . Nello spazio di Fourier avremo

$$[\text{div } (\widehat{P_s \mathbf{h}})] = ik_i P_s^{i,j} \hat{h}_j = ik_i \left( \delta_{ij} - \frac{k_i k_j}{k^2} \right) \hat{h}_j = 0 \quad (12.2.18)$$

L'operatore  $P_s$  ha dunque il ruolo di proiettare sia il termine non lineare  $\hat{h}$  che il forzamento  $\hat{f}$  su un sottospazio a divergenza nulla. Ciò non deve sorprendere in quanto l'operatore  $P_s$  nasce quando si elimina la pressione nella 12.2.10 imponendo la condizione  $\text{div } \mathbf{u} = 0$  (cfr eq. 12.2.11).

La pressione ha dunque il ruolo di mantenere solenoidale il campo di velocità ad ogni istante temporale. Dal punto di vista dei coefficienti di Fourier ciò si traduce nel fatto che il termine non lineare  $\mathbf{h}$  e il forzamento  $\mathbf{f}$  non possono modificare la divergenza del campo e difatti appaiono moltiplicati per l'operatore  $P_s$  proprio per assicurare la condizione di solenoidalità del campo di velocità e quindi dei suoi coefficienti di Fourier.

A partire dall'equazione 12.2.14 per i coefficienti di Fourier del campo di velocità  $\hat{u}_i$  deriviamo un'equazione di evoluzione per lo spettro  $E(k, t)$  del campo di velocità definito come

$$E(k, t) = \frac{1}{2} \sum_{n,m,l} \hat{u}_i \hat{u}_i^* / \Delta k \quad , \quad k - \Delta k/2 < \sqrt{k_n^2 + k_m^2 + k_l^2} < k + \Delta k/2 \quad (12.2.19)$$

Lo spettro  $E(k, t)$  misura la densità di energia associata ai modi di Fourier a numero d'onda  $k$  ed è tale che l'energia totale del fluido contenuta del volume  $V$  è data da

$$\mathcal{E}_V = \frac{1}{V} \int_V \frac{1}{2} u^2 dV = \int_0^\infty E(k, t) dk \quad (12.2.20)$$

La funzione  $E(k, t)$  fornisce dunque la distribuzione spettrale dell'energia cinetica ovvero la distribuzione scala-per-scala in quanto è possibile associare a ciascun numero d'onda  $k$  una scala caratteristica  $l = 2\pi/k$ .

Per ottenere un'equazione di evoluzione per  $E(k, t)$  è sufficiente considerare l'equazione di evoluzione dei coefficienti di Fourier 12.2.14 che riscriviamo nella forma più compatta

$$\frac{\partial \hat{u}_i}{\partial t} = \hat{H}_i - \nu k^2 \hat{u}_i + \hat{F}_i \quad (12.2.21)$$

dove abbiamo posto

$$\hat{H}_i = \left( \delta_{ij} - \frac{k_i k_j}{k^2} \right) \hat{h}_j \quad ; \quad \hat{F}_i = \left( \delta_{ij} - \frac{k_i k_j}{k^2} \right) \hat{f}_j \quad (12.2.22)$$

Possiamo poi scrivere l'equazione di evoluzione di  $\hat{u}_i^*$

$$\frac{\partial \hat{u}_i^*}{\partial t} = \hat{H}_i^* - \nu k^2 \hat{u}_i^* + \hat{F}_i^* \quad (12.2.23)$$

Se ora moltiplichiamo la 12.2.21 per  $\hat{u}_i^*$  e la 12.2.23 per  $\hat{u}_i$  e sommiamo le due equazioni otteniamo

$$\frac{\partial}{\partial t} (\hat{u}_i \hat{u}_i^*) = \left( \hat{H}_i \hat{u}_i^* + \hat{H}_i^* \hat{u}_i \right) - 2\nu k^2 \hat{u}_i \hat{u}_i^* + \left( \hat{F}_i \hat{u}_i^* + \hat{F}_i^* \hat{u}_i \right) \quad (12.2.24)$$

Possiamo ora sommare tutti i modi di Fourier sulla sfera di raggio  $k = \sqrt{k_n^2 + k_m^2 + k_l^2}$  e scrivere l'equazione di evoluzione per  $E(k, t)$  nella forma

$$\frac{\partial E}{\partial t} = T - 2\nu k^2 E + P \quad (12.2.25)$$

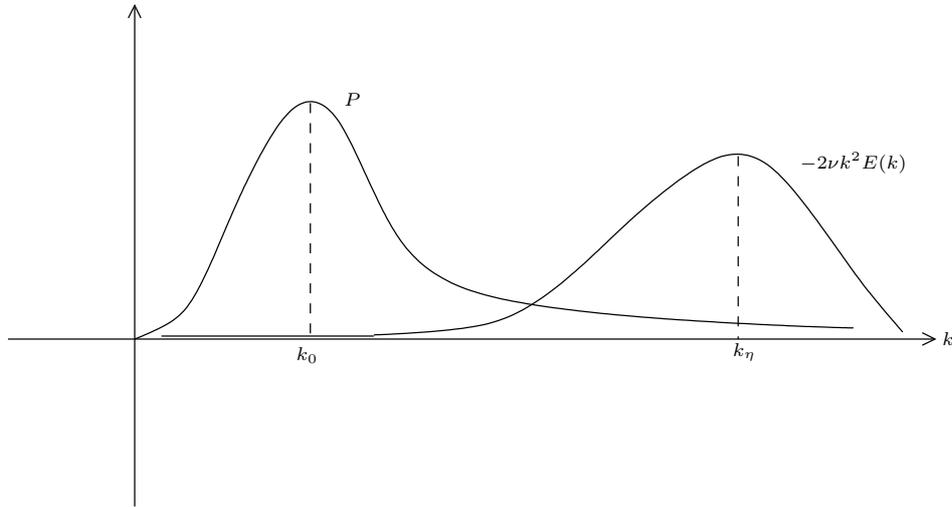
dove abbiamo definito

$$\begin{aligned} E(k, t) &= \frac{1}{\Delta k} \sum_{n,m,l} \frac{1}{2} \hat{u}_i^{n,m,l} \hat{u}_i^{*,n,m,l} \\ T(k, t) &= \frac{1}{\Delta k} \sum_{n,m,l} \frac{1}{2} \left( \hat{H}_i^{n,m,l} \hat{u}_i^{*,n,m,l} + \hat{H}_i^{*,n,m,l} \hat{u}_i^{n,m,l} \right) \\ P(k, t) &= \frac{1}{\Delta k} \sum_{n,m,l} \frac{1}{2} \left( \hat{F}_i^{n,m,l} \hat{u}_i^{*,n,m,l} + \hat{F}_i^{*,n,m,l} \hat{u}_i^{n,m,l} \right) \end{aligned} \quad (12.2.26)$$

con l'avvertenza di considerare nelle sommatorie solo i modi  $(k_n, k_m, k_l)$  tali che

$$k - \Delta k/2 < \sqrt{k_n^2 + k_m^2 + k_l^2} < k + \Delta k/2 \quad (12.2.27)$$

Nella 12.3.1 il termine  $T(k, t)$  è il contributo alla variazione dell'energia associata ai modi a numero d'onda  $k$  dovuto alle interazioni non lineari, il



termine  $P(k, t)$  fornisce il contributo dovuto al forzamento esterno mentre il termine  $-2\nu k^2 E$  rappresenta la dissipazione di energia cinetica dovuta alla viscosità. Osserviamo che in un flusso turbolento omogeneo ed isotropo il forzamento esterno  $\mathbf{f}$  agisce solo sulla grande scala del sistema. L'energia cinetica viene difatti fornita dall'esterno alle strutture di dimensione caratteristica dell'ordine della scala integrale  $l_0$ . In termini di coefficienti di Fourier  $\hat{\mathbf{f}}$  questi sono non nulli soltanto in un intervallo di numeri d'onda centrati in  $k_0 = 2\pi/l_0$ . Anche se il campo di velocità  $\hat{u}_i$  ha uno spettro di numeri d'onda molto ampio, ne risulta che il termine  $P(k, t)$  associato al forzamento esterno definito nella 12.2.26 è non nullo soltanto in un intorno del numero d'onda  $k$ . Viceversa il termine  $2\nu k^2 E(k, t)$  è responsabile della dissipazione viscosa dell'energia cinetica. Poichè la dissipazione viscosa avviene ad opera dei gradienti di velocità, ci aspettiamo che il grosso della dissipazione sia concentrata sulle scale più piccole. Ciò appare evidente dal fatto che la dissipazione è proporzionale a  $2\nu k^2 E(k, t)$  ovvero la dissipazione è tanto più importante tanto più si considerino modi a numero d'onda più elevato (piccole scale). La dissipazione è dunque concentrata nell'intorno delle scale più piccole del flusso una cui stima è fornita dalla scala di Kolmogorov  $\eta$ . Lo spettro della dissipazione è allora significativamente non nullo solo in un intorno del numero d'onda di Kolmogorov  $k_\eta = 2\pi/\eta$ . Qualitativamente per un flusso turbolento ad alto numero di Reynolds lo spettro del forzamento  $P$  e della dissipazione hanno l'andamento mostrato nella figura 12.2: La produzione di energia cinetica è localizzata sulla larga scala ( $k_0$ ) mentre la dissipazione è localizzata sulla piccola scala ( $k_\eta$ ). La separazione tra l'intervallo di scale in cui si ha produzione e quello in cui si ha dissipazione è tanto più elevato tanto più è alto il numero di Reynolds in

quanto

$$\frac{l_0}{\eta} = \frac{k_\eta}{k_0} = \text{Re}^{3/4} \quad (12.2.28)$$

Fino ad ora abbiamo discusso solo sulla natura dei termini  $P$  e  $-2\nu k^2 E$  che appaiono nella 12.3.1. Resta da capire il ruolo svolto dal termine  $T(k, t)$  associato al termine non lineare. A tale proposito consideriamo l'eq. 12.3.1 ed integriamola su tutti i numeri d'onda

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_0^\infty E(\xi, t) d\xi = \int_0^\infty T(\xi, t) d\xi - 2\nu \int_0^\infty \xi^2 E(\xi, t) d\xi + \int_0^\infty P(\xi, t) d\xi \quad (12.2.29)$$

Poichè

$$\mathcal{E}_V(t) = \int_0^\infty E(\xi, t) d\xi ; \quad P(t) = \int_0^\infty P(\xi, t) d\xi ; \quad \varepsilon(t) = -2\nu \int_0^\infty \xi^2 E(\xi, t) d\xi \quad (12.2.30)$$

otteniamo

$$\frac{\partial \mathcal{E}_V}{\partial t} = \int_0^\infty T(\xi, t) d\xi - \varepsilon(t) + P(t) \quad (12.2.31)$$

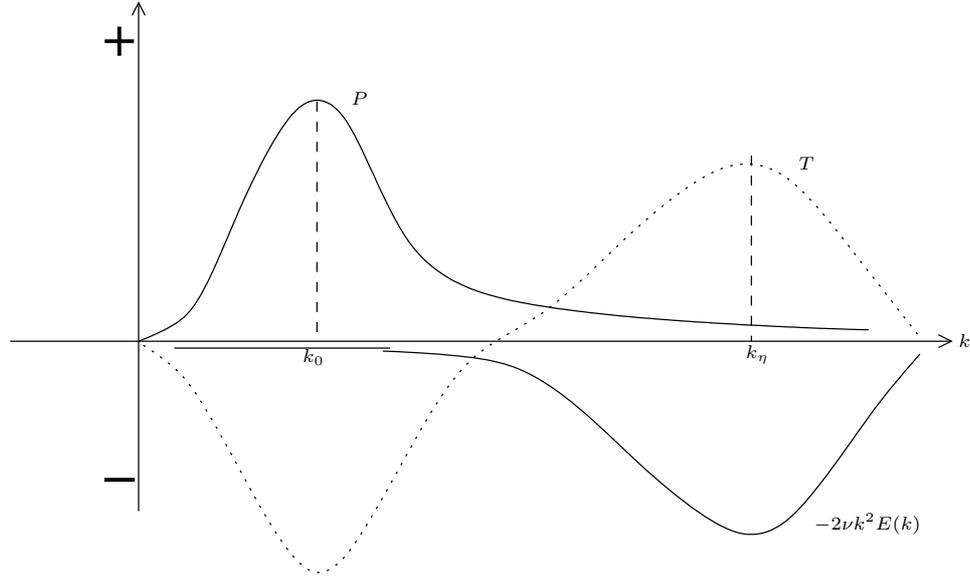
per flussi statisticamente stazionari  $\frac{\partial \mathcal{E}_V}{\partial t} = 0$  e  $\bar{\varepsilon} \equiv \bar{P}$  cioè statisticamente la potenza immessa è uguale a quella dissipata e l'energia totale contenuta nel volume  $V$  non cambia (statisticamente) nel tempo.

Nelle condizioni di turbolenza omogenea ed isotropa statisticamente stazionaria vale dunque la relazione

$$\int_0^\infty T(k) dk = 0 \quad (12.2.32)$$

Nella 12.2.32 non abbiamo più indicato la dipendenza da  $t$  della funzione  $T(k, t)$  in quanto ci siamo messi nella ipotesi di turbolenza statisticamente stazionaria.

La 12.2.32 stabilisce che l'integrale su tutti i numeri d'onda di  $T(k)$  è nullo quindi il termine non lineare non può contribuire alla variazione dell'energia totale contenuta nel volume. Il termine non lineare non può produrre o distruggere energia ma può solo redistribuirla attraverso delle interazioni non locali dei vari modi di Fourier ad altri modi. Infatti in  $T(k, t)$  appaiono delle somme di convoluzione del tipo  $\sum_p \hat{u}_p i k_{n-p} \hat{u}_{n-p}$  che rappresentano tutte le interazioni non locali dei modi di Fourier che contribuiscono alla variazione di energia del modo  $\hat{u}^n$ . Qualitativamente il termine  $T(k)$  per flussi omogenei e isotropi stazionari ha l'andamento riportato in figura 12.2. A grande scala  $T(k)$  è negativo e bilancia nella 12.3.1 il termine di produzione  $P(k)$ . Ciò vuol dire che l'energia immessa nel sistema dal forzamento esterno a scale dell'ordine  $k_0$  viene rimossa da quelle scale ad opera delle interazioni non lineari e viene spostata a scale più piccole. Viceversa a scale dell'ordine della scala di Kolmogorov  $k_\eta$  il termine  $T(k)$  è positivo e si bilancia con



il termine di dissipazione  $-2\nu k^2 E(k)$ . Ciò vuol dire che le interazioni non lineari forniscono energia alle scale più piccole che viene poi eliminata tramite il termine dissipativo. In definitiva il termine  $T(k)$  sulla grande scala rimuove l'energia immessa dal forzamento e la trasferisce alle piccole scale dove viene dissipata ad opera della viscosità. Per questo motivo la funzione  $T(k)$  è nota come trasferimento di energia.

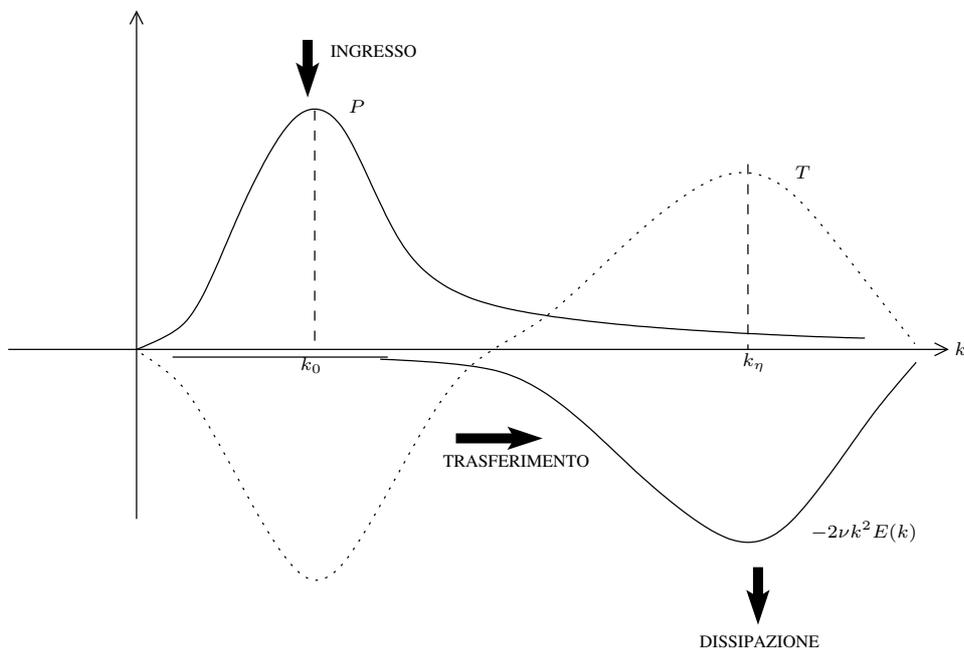
Dal quadro che abbiamo tracciato sopra appare chiara l'esistenza di un intervallo di scale dove l'energia viene immessa nel sistema ( $k_0$ ), un intervallo di scale dove l'energia viene dissipata ( $k_\eta$ ) ed un intervallo di scale dove l'energia viene solo trasferita ( $k_0 \ll k \ll k_\eta$ ). Tale intervallo di scale è noto come intervallo inerziale in quanto, in questo intervallo sia la produzione che la dissipazione sono assenti ed è presente solo il trasferimento di energia dovuto alle interazioni non lineari. Questa affermazione appare ancora più evidente se si considera l'equazione di evoluzione dell'energia fino alla scala  $k$  cioè l'equazione per l'energia  $\mathcal{E}_k$  definita come

$$\mathcal{E}_k = \int_0^k E(\xi, t) d\xi \quad (12.2.33)$$

Per ricavare l'equazione per  $\mathcal{E}_k(t)$  basta integrare fino a numero d'onda  $k$  la 12.3.1

$$\frac{\partial \mathcal{E}_k}{\partial t} = \int_0^k T(\xi, t) d\xi - 2\nu \int_0^k \xi^2 E(\xi, t) d\xi + \int_0^k P(\xi, t) d\xi \quad (12.2.34)$$

Nella 12.2.34 il termine  $\int_0^k P d\xi$  rappresenta l'ammontare totale dell'energia prodotta fino alla scala  $k$ ,  $-2\nu \int_0^k \xi^2 E d\xi$  rappresenta l'ammontare totale



dell'energia dissipata fino alla scala  $k$ . Infine il termine  $\Pi(k) = \int_0^k T(\xi)d\xi$  rappresenta l'ammontare totale dell'energia trasferita per interazioni non lineari fino alla scala  $k$ . Il termine  $\Pi(k)$  rappresenta dunque il flusso di energia attraverso la scala  $k$  dovuto alle interazioni non lineari. Questa grandezza è estremamente importante in turbolenza. Se il numero di Reynolds è sufficientemente elevato avremo che  $k_\eta \gg k_0$ . Possiamo pertanto valutare la 12.2.34 ad una scala  $k_\eta \ll k \ll k_0$ . Nell'ipotesi ulteriore di flusso stazionario avremo che  $\frac{\partial \mathcal{E}_k}{\partial t} = 0$  e

$$\int_0^k P(\xi)d\xi \approx P \equiv \bar{\varepsilon} \quad , \quad -2\nu \int_0^k k^2 E(\xi)d\xi \approx 0 \quad (12.2.35)$$

otteniamo così la relazione

$$\Pi(k) = \int_0^k T(\xi)d\xi = -\bar{\varepsilon} \quad (12.2.36)$$

cioè in un flusso stazionario omogeneo e isotropo nell'intervallo inerziale il flusso di energia attraverso la scala  $k$  è costante e pari al valor medio della dissipazione viscosa. La 12.2.36 è una naturale conseguenza del fatto che la produzione è confinata alle grandi scale e che la dissipazione è confinata alle piccole scale. Nell'intervallo di scale intermedie dove non vi è nè produzione nè dissipazione l'energia può essere solo trasferita ad opera del termine non lineare  $T(t)$  ed il flusso di energia ad esso associato è costante in base all'equazione 12.2.36. Questo tipo di comportamento fa sì che nell'intervallo inerziale la dinamica della turbolenza non risente del meccanismo di

forzamento esterno che può dipendere dalla configurazione geometrica così come non risente dei particolari meccanismi della dissipazione viscosa che a loro volta possono variare da flusso a flusso in base alla particolare configurazione utilizzata. Nell'intervallo inerziale la dinamica della turbolenza è caratterizzata essenzialmente dal flusso di energia associato alle interazioni non lineari che, nel caso di flussi omogenei e isotropi, è costante. Per questo motivo il flusso di energia  $\bar{\varepsilon}$  e la scala  $k$  appartenente all'intervallo inerziale diventano i due parametri più importanti attraverso i quali è possibile descrivere le proprietà statistiche della turbolenza. Supponiamo infatti di voler determinare la forma dello spettro d'energia  $E(k)$  nell'intervallo inerziale. Tutte le equazioni fin qui scritte permettono di determinare la sua evoluzione temporale (caso non stazionario) oppure per flussi stazionari stabiliscono semplicemente che  $\frac{\partial E}{\partial t} = 0$  ma non permettono di inferire alcunchè sulla dipendenza di  $E$  dal numero d'onda  $k$ . Le equazioni fin qui scritte stabiliscono però che nell'intervallo inerziale i due parametri fondamentali sono il flusso d'energia  $\bar{\varepsilon}$  ed il numero d'onda  $k$ . Possiamo pertanto scegliere queste due come parametri fondamentali dell'analisi dimensionale. Dimensionalmente avremo che

$$E = f(\bar{\varepsilon}, k, \nu, l_0) \quad (12.2.37)$$

ovvero

$$\frac{E}{\bar{\varepsilon}^\alpha k^\beta} = \varphi\left(\frac{\nu}{\bar{\varepsilon}^\gamma k^\delta}, \frac{l_0}{\bar{\varepsilon}^\sigma k^\tau}\right) \quad (12.2.38)$$

le costanti  $(\alpha, \beta)$ ,  $(\gamma, \delta)$  e  $(\sigma, \tau)$  vanno determinate in modo tale che tutti i gruppi scritti nell'equazione 12.2.38 siano adimensionali tenendo conto che

$$\begin{aligned} [E] &= U^2 L = L^3 T^{-2} \quad ; \quad [\bar{\varepsilon}] = U^3 L^{-1} = L^2 T^{-3} \\ [k] &= L^{-1} \quad ; \quad [\nu] = L^2 T^{-1} \quad ; \quad [l_0] = L \end{aligned} \quad (12.2.39)$$

La 12.2.38 si può scrivere come

$$\frac{E(k)}{\bar{\varepsilon}^{2/3} k^{-5/3}} = \varphi(k\eta, kl_0) \quad (12.2.40)$$

ovvero

$$\frac{E(k)}{\bar{\varepsilon}^{2/3} k^{-5/3}} = \varphi(k/k_\eta, k/k_0) \quad (12.2.41)$$

poichè nell'intervallo inerziale  $k \ll k_\eta$  e  $k \gg k_0$  (ad alto numero di Reynolds) si può passare al limite per  $k/k_\eta \rightarrow 0$  e  $k/k_0 \rightarrow \infty$ . Se poniamo

$$C_k = \lim_{\frac{k}{k_\eta} \rightarrow 0} \lim_{\frac{k}{k_0} \rightarrow \infty} \varphi\left(\frac{k}{k_\eta}, \frac{k}{k_0}\right) \quad (12.2.42)$$

lo spettro è dato da

$$E(k) = C_k \bar{\varepsilon}^{2/3} k^{-5/3} \quad (12.2.43)$$

La 12.2.43 seppur ottenuta solo con argomenti dimensionali è una relazione ben verificata dal punto di vista sperimentale.

## 12.3 Equazione di Kolmogorov per flussi omogenei

Abbiamo finora considerato per la turbolenza omogenea e isotropa in un box triperiodico, l'evoluzione delle equazioni di Navier-Stokes e dell'energia, mediante analisi spettrale che ha portato ad analizzare l'equazione per la densità spettrale di energia  $E(k)$ .

$$\frac{\partial E}{\partial t} = T - 2\nu k^2 E + P \quad (12.3.1)$$

cioè l'evoluzione della  $E$  (energia che appartiene ai modi di numero d'onda di intensità  $k$ ). Un metodo più generale, che consente anche l'estensione a flussi non isotropi (es. shear omogeneo) e non omogenei (es. presenza di una parete), considera la funzione di struttura di ordine due

$$\langle \delta u_i \rangle = \langle u_i(x_s + r_s) - u_i(x_s) \rangle = u'_i - u_i, \quad (12.3.2)$$

cioè la differenza di velocità tra due punti a distanza  $\mathbf{r}$ , e quella che si può definire una energia di scala  $\tau$  (scale energy)

$$\langle \delta u_i \delta u_i \rangle = \langle \delta u^2 \rangle \quad (12.3.3)$$

che dà l'energia di una struttura del campo (es. vorticoso) tale per cui a distanza  $r$  le velocità sono tra loro correlate (con  $r = \sqrt{r_i r_i}$ ) con

$$\langle \delta u^2 \rangle = \langle (u'_i - u_i)(u'_i - u_i) \rangle = \langle u'_i u'_i \rangle + \langle u_i u_i \rangle - 2\langle u'_i u_i \rangle \quad (12.3.4)$$

Questa si riduce per il caso omogeneo a 4 volte l'espressione dell'energia a singolo punto all'aumentare della lunghezza  $r$  fino a un  $r$  per cui le velocità sono scorrelate. A tal fine, introduciamo il tensore di correlazione

$$R_{ij}(r_s) = \langle u_i(x_s + r_s) u_j(x_s) \rangle \quad (12.3.5)$$

che nel caso stazionario e omogeneo dipende solo da  $r_s$  (dipenderà solo da  $r$  se isotropo). Per  $r \rightarrow 0$  la  $\frac{1}{2} R_{ii}$  dà l'energia cinetica del moto fluttuante che è pari a  $k = \frac{1}{2} \langle u_i u_i \rangle$ . Per quanto riguarda le componenti del tensore di correlazione si vede dal diagramma che si annullano per una certa distanza  $r$ , che è legata alla scala integrale  $L$ . Quindi da una certa distanza  $r$  in poi le velocità non sono più correlate e  $\langle \delta u^2 \rangle$  dà quattro volte l'energia cinetica del campo fluttuante.

Analizzando l'equazione per  $\langle \delta u^2 \rangle$  si ha quindi un bilancio scala per scala, che è legato fisicamente alla misura (numerica o sperimentale) della velocità in due punti a distanza  $r$  propria della scala considerata.

Ricaviamo un'equazione di evoluzione per la scale energy  $\langle \delta u^2 \rangle$  per un caso di turbolenza omogenea (caso immediatamente più semplice dopo la turbolenza omogenea e isotropa): il caso di interesse (in quanto legato a

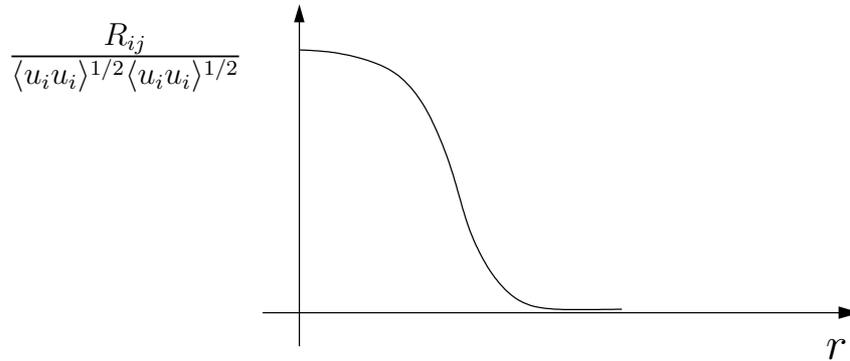


Figura 12.2

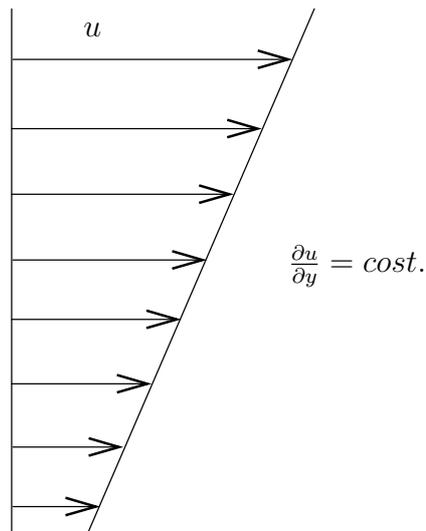


Figura 12.3

strato limite e flusso vicino a parete) è lo shear omogeneo: un campo infinitamente esteso con il gradiente della componente  $u$  di velocità in direzione  $x$  costante in direzione  $y$ .

Si ha quindi un'estensione per l'equazione dell'energia e nel caso isotropo ricaveremo l'equivalente nello spazio delle scale all'equazione per  $E(k)$  nello spazio dei numeri d'onda.

Scriviamo l'equazione per il moto fluttuante in  $x_i$  e in  $x'_i$

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} + u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + U_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + u_j \frac{\partial U_i}{\partial x_j} - \frac{\partial}{\partial x_j} \langle u_i u_j \rangle = \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_i} + \nu \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j \partial x_j} + f_i \quad (12.3.6)$$

$$\frac{\partial u'_i}{\partial t} + u'_j \frac{\partial u'_i}{\partial x'_j} + U'_j \frac{\partial u'_i}{\partial x'_j} + u'_j \frac{\partial U'_i}{\partial x'_j} - \frac{\partial}{\partial x'_j} \langle u'_i u'_j \rangle = \frac{1}{\rho} \frac{\partial p'}{\partial x'_i} + \nu \frac{\partial^2 u'_i}{\partial x'_j \partial x'_j} + f'_i \quad (12.3.7)$$

Sottraendo membro a membro le due precedenti equazioni si rielabora il risultato in modo che appaia ove possibile  $\delta u_i = u'_i - u_i$ . A tal fine si sfrutta la non dipendenza di una qualsiasi quantità  $f$  nel punto  $x_i$  dalla variazione  $x'_i$ , e viceversa, ovvero

$$\frac{\partial f_i}{\partial x'_j} = 0 \quad ; \quad \frac{\partial f'_i}{\partial x_j} = 0 \quad (12.3.8)$$

da cui ad esempio

$$u'_j \frac{\partial u'_i}{\partial x'_j} = u'_j \frac{\partial (u'_i - u_i)}{\partial x'_j} \quad (12.3.9)$$

Otteniamo

$$\begin{aligned} & \frac{\partial (u'_i - u_i)}{\partial t} + u'_j \frac{\partial (u'_i - u_i)}{\partial x'_j} - u_j \frac{\partial (u_i - u'_i)}{\partial x_j} + U'_j \frac{\partial (u'_i - u_i)}{\partial x'_j} - \\ & U_j \frac{\partial (u_i - u'_i)}{\partial x_j} + u'_j \frac{\partial (U'_i - U_i)}{\partial x'_j} - u_j \frac{\partial (U_i - U'_i)}{\partial x_j} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial (p' - p)}{\partial x'_i} + \\ & \frac{1}{\rho} \frac{\partial (p - p')}{\partial x_i} + \nu \frac{\partial^2 (u'_i - u_i)}{\partial x'_j \partial x'_j} - \nu \frac{\partial^2 (u_i - u'_i)}{\partial x_j \partial x_j} + \frac{\partial \langle u'_i u'_j \rangle}{\partial x'_j} - \frac{\partial \langle u_i u_j \rangle}{\partial x_j} + (f'_i - f_i) \end{aligned} \quad (12.3.10)$$

Se ora  $r_i = x'_i - x_i$  si ha che

$$\frac{\partial}{\partial x_i} = -\frac{\partial}{\partial r_i} \quad ; \quad \frac{\partial}{\partial x'_i} = \frac{\partial}{\partial r_i} \quad (12.3.11)$$

da cui invertendo le precedenti

$$\frac{\partial}{\partial r_i} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial}{\partial x'_i} - \frac{\partial}{\partial x_i} \right) \quad (12.3.12)$$

Sostituendo la variabile  $r$  e introducendo

$$\delta u_i = (u'_i - u_i) \quad (12.3.13)$$

otteniamo <sup>2</sup>

$$\begin{aligned} \frac{\partial(\delta u_i)}{\partial t} + \delta u_j \frac{\partial(\delta u_i)}{\partial r_j} + \delta U_j \frac{\partial(\delta u_i)}{\partial r_j} + \delta u_j \frac{\partial(\delta U_i)}{\partial r_j} = \\ 2\nu \frac{\partial^2(\delta u_i)}{\partial r_j \partial r_j} + \frac{\partial\langle u'_i u'_j \rangle}{\partial x'_j} - \frac{\partial\langle u_i u_j \rangle}{\partial x_j} + \delta f \end{aligned} \quad (12.3.14)$$

Se moltiplico la precedente per  $\delta u_k$  ottengo una prima equazione. Si scrive quindi l'equazione per  $\delta u_k$  e la si moltiplica per  $\delta u_i$  ottenendo una seconda equazione. Si esegue a questo punto la somma membro a membro tra le due equazioni. Si considera infine la traccia dell'equazione risultante, cioè per  $k = i$ , e si fa una media di ensemble. Indicando con  $\rightarrow$  l'operazione di traccia e media, i diversi termini vengono così trasformati,

$$\delta u_k \frac{\partial \delta u_i}{\partial t} + \delta u_i \frac{\partial \delta u_k}{\partial t} \rightarrow \frac{\partial \langle \delta u_i \delta u_i \rangle}{\partial t} \quad (12.3.15)$$

$$\delta u_k \delta u_j \frac{\partial \delta u_i}{\partial r_j} + \delta u_j \delta u_k \frac{\partial \delta u_i}{\partial r_j} \rightarrow \frac{\partial \langle \delta u_i \delta u_i \delta u_j \rangle}{\partial r_j} \quad (12.3.16)$$

dove si è utilizzata la conservazione della massa:

$$\delta u_k \delta U_j \frac{\partial \delta u_i}{\partial r_j} + \delta u_i \delta U_j \frac{\partial \delta u_i}{\partial r_j} \rightarrow \frac{\partial \langle \delta u_i \delta U_j \delta u_i \rangle}{\partial r_j} \quad (12.3.17)$$

$$\delta u_k \delta u_j \frac{\partial \delta U_i}{\partial r_j} + \delta u_i \delta u_j \frac{\partial \delta U_k}{\partial r_j} \rightarrow 2 \langle \delta u_i \delta u_j \rangle \frac{\partial \delta U_i}{\partial r_j} \quad (12.3.18)$$

Per quanto riguarda il termine viscoso:

$$2\nu \delta u_k \frac{\partial^2 \delta u_i}{\partial r_j \partial r_j} + 2\nu \delta u_i \frac{\partial^2 \delta u_k}{\partial r_j \partial r_j} \quad (12.3.19)$$

mettendo in evidenza il termine in divergenza

$$\frac{\partial}{\partial r_j} \left( \delta u_k \frac{\partial \delta u_i}{\partial r_j} \right) = \delta u_k \frac{\partial^2 \delta u_i}{\partial r_j \partial r_j} + \frac{\partial \delta u_k}{\partial r_j} \frac{\partial \delta u_i}{\partial r_j} \quad (12.3.20)$$

il primo termine diventa

$$2\nu \delta u_k \frac{\partial^2 \delta u_i}{\partial r_j \partial r_j} = 2\nu \left[ \frac{\partial}{\partial r_j} \left( \delta u_k \frac{\partial \delta u_i}{\partial r_j} \right) - \frac{\partial \delta u_k}{\partial r_j} \frac{\partial \delta u_i}{\partial r_j} \right] \quad (12.3.21)$$

<sup>2</sup> Sfruttando le precedenti:

$$\begin{aligned} u'_j \frac{\partial \delta u_i}{\partial r_j} - u_j \frac{\partial \delta u_i}{\partial r_j} &= \delta u_j \frac{\partial \delta u_i}{\partial r_j} \\ -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \delta p}{\partial r_j} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \delta p}{\partial r_j} &= 0 \\ \frac{\partial^2}{\partial x'_j \partial x'_j} &= \frac{\partial^2}{\partial x_j \partial x_j} = \frac{\partial^2}{\partial r_j \partial r_j} \end{aligned}$$

Sommando poi al corrispettivo (scambiando  $i$  e  $k$ ) si ottiene

$$2\nu \left[ \frac{\partial}{\partial r_j} \left( \delta u_i \frac{\partial \delta u_k}{\partial r_j} \right) - \frac{\partial \delta u_k}{\partial r_j} \frac{\partial \delta u_i}{\partial r_j} \right] \quad (12.3.22)$$

Sommando i due termini ed eseguendo la traccia e la media si ottiene

$$2\nu \left[ \frac{\partial^2}{\partial r_j \partial r_j} \langle \delta u_i \delta u_i \rangle - 2 \left\langle \frac{\partial \delta u_i}{\partial r_j} \frac{\partial \delta u_i}{\partial r_j} \right\rangle \right] \quad (12.3.23)$$

Vediamo cosa é il secondo termine osservando che

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial r_j} &= \frac{1}{2} \left( \frac{\partial}{\partial x'_j} - \frac{\partial}{\partial x_j} \right) \\ \frac{\partial \delta u_i}{\partial r_j} &= \left( \frac{\partial}{\partial x'_j} - \frac{\partial}{\partial x_j} \right) \frac{1}{2} (u'_i - u_i) = \left( \frac{\partial u'_i}{\partial x'_j} + \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right) \frac{1}{2} \end{aligned} \quad (12.3.24)$$

Introduciamo il valore medio della funzione tra  $x_i$  e  $x'_i$ :

$$\left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right)^* = \left( \frac{\partial u'_i}{\partial x'_j} + \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right) \frac{1}{2} \quad (12.3.25)$$

Avevamo già ricavato  $\varepsilon$  (vedi paragrafo 10.6)

$$\varepsilon = \langle 2\nu e_{ij} e_{ij} \rangle = \left\langle \nu \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \right\rangle = \nu \left\langle \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right\rangle + \frac{\partial^2 \langle u'_i u'_j \rangle}{\partial x_i \partial x_j} \quad (12.3.26)$$

in cui l'ultimo termine dell'ultimo membro si annulla nel caso omogeneo.

In conclusione:

$$\frac{\partial}{\partial t} \langle \delta u^2 \rangle + \frac{\partial}{\partial r_j} \langle \delta u^2 \delta u_j \rangle + \frac{\partial}{\partial r_j} \langle \delta u^2 \delta U_j \rangle + 2 \langle \delta u_i \delta u_j \rangle \frac{\partial \delta U_i}{\partial r_j} = -4 \langle \varepsilon^* \rangle + 2\nu \frac{\partial^2 \langle \delta u^2 \rangle}{\partial r_j \partial r_j} + 2 \langle \delta f_i \delta u_i \rangle \quad (12.3.27)$$

Nel caso in cui il campo medio  $U_i$  si annulla (condizione necessaria per l'isotropia), ricordando le (12.3.24) l'equazione (12.3.27) diventa nel caso stazionario

$$\frac{\partial}{\partial r_j} \langle \delta u^2 \delta u_j \rangle = -4 \langle \varepsilon^* \rangle + 2\nu \frac{\partial^2 \langle \delta u^2 \rangle}{\partial r_j \partial r_j} + 2 \langle \delta f_i \delta u_i \rangle. \quad (12.3.28)$$

Nel range di scale in cui i termini di forzamento e di correzione viscosa non contano (cioé nel range inerziale) si ha che il trasferimento alle scale piú piccole é dato da  $\langle \varepsilon^* \rangle$ , quantità che alla fine del processo viene dissipata. Integrando su un volume sferico di raggio  $r$ , applicando il teorema di Green-Gauss e dividendo per  $4\pi r^2$  si ottiene, in assenza di termine forzante

$$\frac{1}{4\pi r^2} \int_{\partial B} \langle \delta u^2 \delta u_j \rangle n_j dS = -\frac{4}{3} \langle \varepsilon^* \rangle r + 2\nu \frac{d}{dr} \frac{1}{4\pi r^2} \int_{\partial B} \langle \delta u^2 \rangle dS \quad (12.3.29)$$

L'ultima equazione (12.3.29) é la generalizzazione per il caso di flusso omogeneo ma non isotropo dell'equazione di Kolmogorov

$$\langle \delta u_{//}^3 \rangle = -\frac{4}{5} \langle \varepsilon^* \rangle r + 6\nu \frac{d}{dr} \langle \delta u_{//}^2 \rangle. \quad (12.3.30)$$

Quest'ultima si può ottenere dalla (12.3.29) sfruttando l'isotropia che consente di esprimere gli incrementi  $\delta u_i$  in termini degli incrementi paralleli  $\delta u_{//}$

$$\delta u_{//} = \delta u_i \frac{r_i}{r}. \quad (12.3.31)$$

L'equazione di Kolmogorov si riduce nel range inerziale alla semplice espressione

$$\langle \delta u_{//}^3 \rangle = -\frac{4}{5} \langle \varepsilon^* \rangle r \quad (12.3.32)$$

da cui si ottengono stime dimensionali (per il range inerziale) per gli incrementi

$$\langle \delta u_{//}^3 \rangle \sim \langle \varepsilon^* \rangle^{1/3} r^{1/3} \quad (12.3.33)$$

e per i gradienti

$$\frac{\delta u}{r} \sim \langle \varepsilon^* \rangle^{1/3} r^{-2/3}. \quad (12.3.34)$$

Si nota che i gradienti mostrano una singolarità per  $r \rightarrow 0$  che poi fisicamente non si verifica perché entra in gioco il termine viscoso che per bassi  $r$  tende a prevalere.

Se ora aggiungo i termini dovuti al campo medio nel caso piú semplice di shear omogeneo si ottiene l'equazione (si ricordino le (12.3.18))

$$\begin{aligned} \frac{1}{4\pi r^2} \int_{\partial B(r)} (\langle \delta u^2 \delta u_j \rangle + \langle \delta u^2 \delta U_j \rangle) n_j dS + \frac{2}{4\pi r^2} \int_{B(r)} \langle \delta u_i \delta u_j \rangle \left( \frac{\partial U_i}{\partial x_j} \right)^* dV = \\ -\frac{4}{3} \langle \varepsilon^* \rangle r + 2\nu \frac{d}{dr} \frac{1}{4\pi r^2} \int_{\partial B(r)} \langle \delta u^2 \rangle dS. \end{aligned} \quad (12.3.35)$$

Per shear omogeneo l'unico termine del gradiente medio  $\frac{\partial U_i}{\partial x_j}$  é  $S = \frac{dU}{dy}$ . Per  $r > L_S$  (scala di shear) il termine di produzione  $\int_{B(r)} \langle \delta u \delta v \rangle \frac{\partial U}{\partial y} dV$  prevale sul termine di trasferimento a piccola scala e non si ha range inerziale classico. Una stima di  $L_s$  si può ottenere da

$$Su^2 = \frac{u^3}{L_S} \quad \text{da cui} \quad L_s = \frac{U}{S} \quad (12.3.36)$$

Se stimiamo anche la produzione

$$\varepsilon^* = Su^2 \quad \text{da cui} \quad u = \sqrt{\frac{\varepsilon^*}{S^2}} \quad (12.3.37)$$

troviamo alla fine

$$L_s = \sqrt{\frac{\varepsilon^*}{S^3}} \quad (12.3.38)$$

Per  $r > L_s$  si ha range di produzione che é diverso dal range inerziale (si vedrá meglio in turbolenza di parete). Per turbolenza di parete  $S$  diviene molto grande vicino alla parete e quindi  $L_s$  molto piccolo fino quasi a raggiungere  $\eta$ , quindi non c'è separazione sufficiente per l'instaurarsi di un range inerziale. Questa é un'informazione importante ai fini della modellistica LES dove si modellano solo le piccole scale a partire da una scala di filtro  $L_\Delta$  che deve cadere nel range inerziale per poter fare modelli efficaci (si vedrá nelle lezioni di simulazione numerica).

## Appendice 12.A - Serie di Fourier per $f(x_1, x_2, x_3)$

La serie di Fourier può essere facilmente estesa al caso di funzioni di più variabili  $f(x_1, x_2, x_3)$  tramite le seguenti relazioni

$$f(x_1, x_2, x_3) = \sum_{n,m,l} \hat{f}(k_1^n, k_2^m, k_3^l) e^{ik_1^n x_1} e^{ik_2^m x_2} e^{ik_3^l x_3} \quad (12.3.39)$$

dove  $k_1^n = \frac{n\pi}{l_1}$ ,  $k_2^m = \frac{m\pi}{l_2}$  e  $k_3^l = \frac{l\pi}{l_3}$  sono le tre componenti del vettore d'onda  $(k_1^n, k_2^m, k_3^l)$  nelle tre direzioni coordinate.

I coefficienti di Fourier  $\hat{f}(k_1^n, k_2^m, k_3^l)$  sono invece dati dalla

$$\hat{f}(k_1^n, k_2^m, k_3^l) = \frac{1}{V} \int_V f(x_1, x_2, x_3) e^{-ik_1^n x_1} e^{-ik_2^m x_2} e^{-ik_3^l x_3} dV \quad (12.3.40)$$

dove  $V$  è il dominio  $[-l_1, l_1] \times [-l_2, l_2] \times [-l_3, l_3]$ .

Anche la relazione di ortogonalità tra i polinomi trigonometrici si estende al caso 3D

$$\int_V e^{ik_1^n x_1} e^{ik_2^m x_2} e^{ik_3^l x_3} e^{-ik_1^q x_1} e^{-ik_2^p x_2} e^{-ik_3^r x_3} dV = V \delta_{n,p} \delta_{m,q} \delta_{l,r} \quad (12.3.41)$$

Analogamente al caso 1D possiamo definire l'energia per unità di volume associata alla funzione  $f(x_1, x_2, x_3)$  come

$$\mathcal{E}_V = \frac{1}{2} \frac{\|f\|^2}{V} \quad (12.3.42)$$

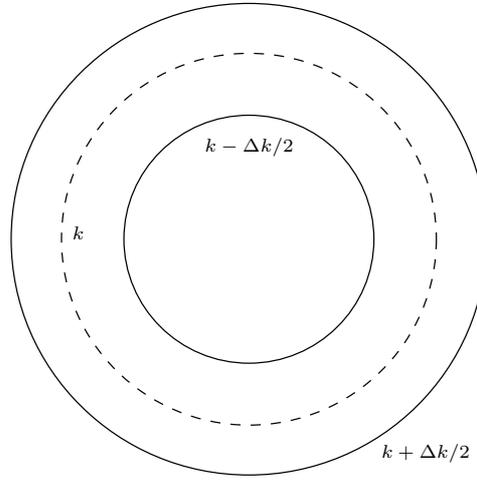
dove  $\|f\|^2 = (f, f^*) = \int_V f f^* dV$ .

Dalla 12.3.42 utilizzando la definizione di norma e la rappresentazione di  $f$  in serie di Fourier 12.3.39 è possibile scrivere l'uguaglianza di Parseval come

$$\mathcal{E}_V = \frac{1}{2} \frac{\|f\|^2}{V} = \frac{1}{2} \sum_{n,m,l} \hat{f}_{n,m,l} \hat{f}_{n,m,l}^* \quad (12.3.43)$$

Introduciamo ora il concetto di spettro del segnale o densità spettrale di energia a partire dall'uguaglianza 12.3.43. Nella 12.3.43 ciascun modo di Fourier a numero d'onda  $(k_1^n, k_2^m, k_3^l)$  contribuisce all'aumentare totale dell'energia del segnale della quantità  $\frac{1}{2} |\hat{f}_{n,m,l}|^2$  che possiamo considerare come la quotaparte di energia associata al numero d'onda  $(k_1^n, k_2^m, k_3^l)$ . Possiamo ora valutare quale è il contributo all'energia totale fornito da tutti quei modi tali che il modulo del vettore d'onda  $(k_1^n, k_2^m, k_3^l)$  sia compreso tra  $k - \frac{\Delta k}{2}$  e  $k + \frac{\Delta k}{2}$ . Tale contributo sarà dato dalla sommatoria

$$\sum_{n,m,l} \frac{1}{2} \hat{f}_{n,m,l} \hat{f}_{n,m,l}^* \quad (12.3.44)$$



nella quale dovremo prendere solo i modi tali che

$$k - \Delta k/2 < \sqrt{(k_1^n)^2 + (k_2^m)^3 + (k_3^l)^2} < k + \Delta k/2$$

Fissato un valore del modulo del numero d'onda  $k$  resta ad esso associato un contributo all'energia totale dato da tutti i modi il cui modulo del vettore d'onda è compreso tra  $k - \Delta k/2$  e  $k + \Delta k/2$  dato dalla 12.3.44. Possiamo pertanto definire la densità spettrale d'energia

$$E(k) = \frac{1}{\Delta k} \sum_{n,m,l} \frac{1}{2} \hat{f}_{n,m,l} \hat{f}_{n,m,l}^* \quad (12.3.45)$$

con  $k - \Delta k/2 < \sqrt{(k_1^n)^2 + (k_2^m)^3 + (k_3^l)^2} < k + \Delta k/2$ . La grandezza  $E(k)$  rappresenta la densità di energia associata alla sfera di raggio  $k$  che può essere valutata dividendo l'energia contenuta tra la sfera di raggio  $k - \Delta k/2$  e  $k + \Delta k/2$  per  $\Delta k$ . L'introduzione della densità spettrale di energia fa sì che l'energia totale del segnale  $\mathcal{E}_V$  possa essere valutata con

$$\mathcal{E}_V = \frac{1}{2} \frac{\|f\|^2}{V} = \int_0^\infty E(k) dk \quad (12.3.46)$$

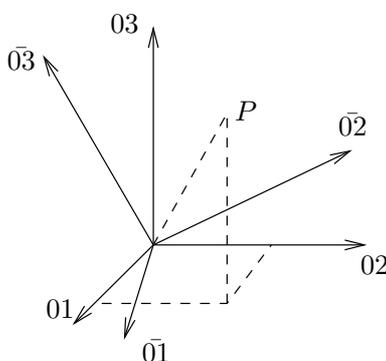
Difatti sostituendo nella 12.3.46 la definizione di  $E(k)$  e valutando l'integrale con una discretizzazione di  $E(k)$  costante a tratti così come è stato definito nella 12.3.45 si ritrova l'uguaglianza di Parseval 12.3.43. L'aver introdotto lo spettro di energia consente di avere un controllo più fine su quei modi che contribuiscono più degli altri a costruire l'ammontare totale di energia del segnale  $\mathcal{E}_V$ .

## Appendice A

# Richiami alla analisi tensoriale in coordinate cartesiane

### A.1 Tensori di primo ordine o vettori

Nello spazio euclideo tridimensionale la posizione di un punto  $P$  può essere specificata da tre coordinate cartesiane. Fissato un riferimento con origine in  $O$  e tre assi tra loro mutuamente ortogonali  $01, 02, 03$ , le coordinate cartesiane del punto  $P$  sono le lunghezze delle proiezioni di  $OP$  sui tre assi  $01, 02, 03$ . Tali lunghezze saranno rispettivamente  $x_1, x_2, x_3$



Supponiamo ora di ruotare il sistema di coordinate fino alla nuova posizione  $\bar{01}, \bar{02}, \bar{03}$ . In questo riferimento le nuove coordinate di  $P$  sono  $\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3$ . Se indichiamo con  $l_{ij}$  il coseno dell'angolo tra il vecchio asse  $0i$  e il nuovo  $0j$ , le nuove coordinate sono collegate alle vecchie da

$$\bar{x}_j = l_{1j}x_1 + l_{2j}x_2 + l_{3j}x_3 \quad \text{con } j = 1, 2, 3 \quad (\text{A.1.1})$$

e viceversa le vecchie coordinate in funzione delle nuove

$$x_i = l_{i1}\bar{x}_1 + l_{i2}\bar{x}_2 + l_{i3}\bar{x}_3 \quad \text{con } i = 1, 2, 3 \quad (\text{A.1.2})$$

Introduciamo ora nella simbologia la convenzione della somma: in ogni prodotto di termini l'indice ripetuto significa somma per i tre valori 1, 2, 3.

L'indice ripetuto però assumere ciascun valore 1, 2, 3. Le equazioni (A.1.1) e (A.1.2) si possono scrivere

$$\bar{x}_j = l_{ij}x_i \quad (\text{A.1.3})$$

$$x_i = l_{ij}\bar{x}_j \quad (\text{A.1.4})$$

Per l'indice ripetuto si può usare una qualsiasi lettera, ad esempio

$$l_{ij}x_j \equiv l_{ip}x_p$$

e questa sostituzione può essere conveniente in alcuni passaggi.

Definiremo quindi il vettore  $\mathbf{a}$  in tre dimensioni come una quantità con 3 componenti  $a_1, a_2, a_3$  nel riferimento cartesiano 0123, che per una rotazione del riferimento a  $0\bar{1}\bar{2}\bar{3}$ , divengono  $\bar{a}_1, \bar{a}_2, \bar{a}_3$  con

$$\bar{a}_j = l_{ij}a_i \quad (\text{A.1.5})$$

I vettori sono anche chiamati più in generale tensori del primo ordine.

Conviene introdurre subito il delta di Kronecker indicato con  $\delta_{ij}$  e dato da

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases} \quad (\text{A.1.6})$$

Se  $\delta_{ij}$  appare in una formula con indice ripetuto sostituisce l'indice ripetuto con l'altro, ad esempio

$$\delta_{ij}a_j = \delta_{i1}a_1 + \delta_{i2}a_2 + \delta_{i3}a_3 = a_i \quad (\text{A.1.7})$$

perché solo il termine con secondo indice uguale ad  $i$  è  $\neq 0$ .

La lunghezza del vettore  $\mathbf{a}$  è data da

$$|\mathbf{a}| = (a_i a_i)^{1/2} \quad (\text{A.1.8})$$

se  $|\mathbf{a}| = 1$  si dice che il vettore è unitario e le sue componenti coincidono con i coseni direttori del vettore.

Se il vettore posizione dipende dal tempo si può scrivere

$$x_i = x_i(t) \quad \text{e} \quad \bar{x}_j = \bar{x}_j(t)$$

con  $\bar{x}_j(t) = l_{ij}x_i(t)$  ed  $l_{ij}$  sono indipendenti dal tempo, quindi

$$\frac{d\bar{x}_j}{dt} = l_{ij} \frac{dx_i}{dt} \quad (\text{A.1.9})$$

cioè tutte le derivate del vettore posizione rispetto al tempo (velocità, accelerazione, ...) sono vettori secondo la definizione (A.1.5).

## A.2 Prodotto per uno scalare, addizione di vettori

Se  $\alpha$  è uno scalare, o tensore di ordine zero, il prodotto del vettore  $\mathbf{a}$  per  $\alpha$  è un vettore di componenti  $\alpha a_i$ . La moltiplicazione per uno scalare lascia inalterata la direzione del vettore e ne cambia la grandezza di un fattore  $\alpha$ .

Se  $\mathbf{a}$  e  $\mathbf{b}$  sono due vettori con componenti  $a_i$  e  $b_i$ , la loro somma è un vettore di componenti  $a_i + b_i$ . Nel riferimento  $0\bar{1}\bar{2}\bar{3}$  avremo

$$\bar{a}_j + \bar{b}_j = l_{ij}a_i + l_{ij}b_i = l_{ij}(a_i + b_i)$$

che mostra che la somma di due vettori è ancora un vettore.

La somma è indipendente dall'ordine di addizione dei vettori

$$\mathbf{a} + \mathbf{b} = \mathbf{b} + \mathbf{a} \quad (\text{A.2.1})$$

così come dall'ordine di associazione

$$(a + b) + c = a + (b + c) \quad (\text{A.2.2})$$

Possiamo definire la sottrazione di 2 vettori combinando l'operazione di somma con quella di moltiplicazione per lo scalare  $(-1)$

$$(a + b) + c = a + (-1)b$$

cioè un vettore di componenti  $a_i - b_i$ .

Ogni vettore che è nello stesso piano di  $\mathbf{a}$  e  $\mathbf{b}$  può essere rappresentato nella forma

$$\mathbf{c} = \alpha\mathbf{a} + \beta\mathbf{b}$$

che è un vettore di componenti  $c_i = \alpha a_i + \beta b_i$ .

## A.3 Vettori unitari e basi

Consideriamo i tre vettori unitari aventi una sola componente  $\neq 0$

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_{(1)} &= (1, 0, 0) \\ \mathbf{e}_{(2)} &= (0, 1, 0) \\ \mathbf{e}_{(3)} &= (0, 0, 1) \end{aligned} \quad (\text{A.3.1})$$

dove l'indice tra parentesi non denota una componente. La componente  $j$ -esima del vettore  $\mathbf{e}_{(i)}$  è data da

$$e_{(i)j} = \delta_{ij} \quad (\text{A.3.2})$$

I tre vettori unitari formano una base per la rappresentazione di ogni altro vettore.

Questi sono i vettori base più comunemente usati, ma tre vettori qualsiasi  $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$  possono essere adottati come vettori base, purché non giacciono sullo stesso piano.

Il vettore  $\mathbf{a}$  si può esprimere come

$$\begin{aligned} \mathbf{a} &= a_1 \mathbf{e}_{(1)} + a_2 \mathbf{e}_{(2)} + a_3 \mathbf{e}_{(3)} \\ &= a_i \mathbf{e}_{(i)} \end{aligned} \quad (\text{A.3.3})$$

applicando la convenzione della somma anche all'indice in parentesi.

## A.4 Prodotto scalare tra due vettori

Si definisce come

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = a_i b_i \quad (\text{A.4.1})$$

E' un invariante rispetto ad una rotazione degli assi e quindi è uno scalare

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{a}} \cdot \bar{\mathbf{b}} &= \bar{a}_j \bar{b}_j = l_{ij} a_i l_{pj} b_p = l_{ij} l_{pj} a_i b_p \\ &= \delta_{ip} a_i b_p = a_i b_i = \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} \end{aligned} \quad (\text{A.4.2})$$

essendo

$$l_{ij} l_{pj} = \delta_{ip} \quad (\text{A.4.3})$$

per l'ortogonalità delle due terne di assi considerate.

Infatti

$$l_{ij} l_{pj} = l_{i1}^2 + l_{i2}^2 + l_{i3}^2 = 1 \quad \text{per } i = p \quad (\text{A.4.4})$$

$$= l_{i1} l_{p1} + l_{i2} l_{p2} + l_{i3} l_{p3} = 0 \quad \text{per } i \neq p \quad (\text{A.4.5})$$

L'interpretazione geometrica del prodotto scalare è data dalla proiezione di uno dei due vettori sulla direzione dell'altro

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = |\mathbf{a}||\mathbf{b}| \cos \vartheta \quad (\text{A.4.6})$$

Se  $\vartheta = \frac{\pi}{2}$  i due vettori sono ortogonali e

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 0 \quad (\text{A.4.7})$$

che è la condizione di ortogonalità tra vettori.

## A.5 Prodotto vettoriale tra due vettori

Si definisce come

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \mathbf{c} \quad (\text{A.5.1})$$

dove  $\mathbf{c}$  è un vettore di componenti

$$c_i = \varepsilon_{ijk} a_j b_k \quad (\text{A.5.2})$$

dove il simbolo  $\varepsilon_{ijk}$  detto tensore di permutazione ha le seguenti proprietà:

$$e_{ijk} = \begin{cases} 0 & \text{se 2 indici sono uguali tra loro} \\ +1 & \text{se } ijk \text{ formano una permutazione pari di } 1,2,3 \\ -1 & \text{se } ijk \text{ formano una permutazione dispari di } 1,2,3 \end{cases} \quad (\text{A.5.3})$$

per cui ad esempio

$$\varepsilon_{122} = \varepsilon_{313} = \varepsilon_{211} = \dots = 0$$

$$\varepsilon_{123} = \varepsilon_{231} = \varepsilon_{312} = +1$$

$$\varepsilon_{132} = \varepsilon_{213} = \varepsilon_{321} = -1$$

Si possono allora valutare esplicitamente le componenti del vettore  $\mathbf{c}$ . Ad esempio per  $i = 1$ , le sole componenti di  $\varepsilon_{ijk} \neq 0$  sono  $\varepsilon_{123}$  e  $\varepsilon_{132}$  quindi per la (A.5.2)

$$c_1 = \varepsilon_{123} a_2 b_3 + \varepsilon_{132} a_3 b_2$$

per la (A.5.3)

$$= a_2 b_3 - a_3 b_2 \quad (\text{A.5.4})$$

così per le altre

$$c_2 = a_3b_1 - a_1b_3$$

$$c_3 = a_1b_2 - a_2b_1$$

Esprimendo  $\mathbf{c}$  in termini dei vettori base per la (A.3.3) si ha

$$\mathbf{c} = (a_2b_3 - a_3b_2)\mathbf{e}_{(1)} + (a_3b_1 - a_1b_3)\mathbf{e}_{(2)} + (a_1b_2 - a_2b_1)\mathbf{e}_{(3)} \quad (\text{A.5.5})$$

che, come è noto, si può rappresentare col determinante simbolico

$$= \begin{vmatrix} \mathbf{e}_{(1)} & \mathbf{e}_{(2)} & \mathbf{e}_{(3)} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} \quad (\text{A.5.6})$$

che risolta rispetto agli elementi della prima riga dà la (A.5.5).

Per la definizione (A.5.2) il prodotto vettoriale cambia di segno invertendo l'ordine dei vettori e quindi

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = (-\mathbf{b}) \times \mathbf{a} \quad (\text{A.5.7})$$

L'interpretazione geometrica del prodotto vettoriale è data da un vettore normale al piano di  $\mathbf{a}$  e  $\mathbf{b}$  di grandezza

$$|a||b| \sin \vartheta$$

che rappresenta l'area del parallelogramma di cui i due lati sono i vettori  $\mathbf{a}$  e  $\mathbf{b}$ .

Se i due vettori  $\mathbf{a}$  e  $\mathbf{b}$  sono paralleli:  $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = 0$ . E' utile ricordare che la velocità dovuta ad una rotazione di corpo rigido è data da un prodotto vettoriale tra il vettore velocità angolare  $\boldsymbol{\omega}$  e il vettore posizione  $\mathbf{x}$

$$\mathbf{v} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{x} \quad (\text{A.5.8})$$

## A.6 Prodotto scalare triplo

E' definito come il prodotto scalare di un vettore per il prodotto vettoriale degli altri due

$$\begin{aligned} \mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) &= a_i \varepsilon_{ijk} b_j c_k \\ &\equiv \varepsilon_{ijk} a_i b_j c_k \end{aligned} \quad (\text{A.6.1})$$

Se  $\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = 0$  significa che i tre vettori sono complanari; infatti  $\mathbf{a}$  è ortogonale alla normale al piano per  $\mathbf{b}$  e  $\mathbf{c}$  e quindi è nello stesso piano. Il prodotto scalare triplo si può interpretare geometricamente come il volume del parallelepipedo di lati  $\mathbf{a}$ ,  $\mathbf{b}$  e  $\mathbf{c}$ , infatti  $(\mathbf{b} \times \mathbf{c})$  è un vettore di grandezza uguale all'area di una faccia e direzione normale ad esso e  $(\mathbf{a} \cdot \mathbf{n})$  è l'altezza del parallelepipedo.

## A.7 Tensori del secondo ordine

Analogamente a quanto fatto per i tensori del primo ordine, si definisce un tensore del secondo ordine come un'entità avente nove componenti  $A_{ij}$  con  $i, j = 1, 2, 3$  nel riferimento cartesiano 0123 che per una rotazione del riferimento a  $0\bar{1}\bar{2}\bar{3}$  divengono

$$\bar{A}_{pq} = l_{ip}l_{jq}A_{ij} \quad (\text{A.7.1})$$

con la trasformazione inversa

$$A_{ij} = l_{ip}l_{jq}\bar{A}_{pq} \quad (\text{A.7.2})$$

Un tensore del secondo ordine o più semplicemente tensore può essere scritto come una matrice  $3 \times 3$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{bmatrix} \quad (\text{A.7.3})$$

Se  $A_{ij} = A_{ji}$  il tensore è simmetrico e quindi vi sono solo 6 componenti distinti. Se  $A_{ij} = -A_{ji}$  il tensore è antisimmetrico e ha solo 3 componenti distinte, dovendo essere nulli i termini diagonali.

Si chiama tensore trasposto il tensore che ha come componente  $ij$  l'elemento  $A_{ji}$ . Il determinante del tensore  $\mathbf{A}$  è il determinante della matrice  $\mathbf{A}$  che si esprime nella forma

$$\det \mathbf{A} = \varepsilon_{ijk} A_{1i} A_{2j} A_{3k} \quad (\text{A.7.4})$$

se si risolve rispetto alla prima riga, o nella forma

$$\det \mathbf{A} = \varepsilon_{ijk} A_{i1} A_{j2} A_{k3} \quad (\text{A.7.5})$$

se si risolve rispetto alla prima colonna.

Il delta di Kronecker definito in (A.1.6) è un tensore del secondo ordine con 6 componenti nulle e 3 componenti uguali ad uno. Si trasforma come un tensore dando luogo a

$$\bar{\delta}_{pq} = l_{ip}l_{jq}\delta_{ij} = l_{ip}l_{iq} = \delta_{pq} \quad (\text{A.7.6})$$

per la (A.1.7) e (A.4.3).

E' importante notare che le componenti di  $\delta_{ij}$  rimangono le stesse (= 1 se  $i = j$  e = 0 se  $i \neq j$ ) in tutti i sistemi di coordinate ottenuti per rotazione. Per questa proprietà  $\delta_{ij}$  è detto tensore isotropo; si vedrà in seguito l'importanza di questo ed altri tensori isotropi.

Se  $\mathbf{a}$  e  $\mathbf{b}$  sono due vettori il loro prodotto tensoriale è un tensore del secondo ordine le cui componenti sono

$$A_{ij} = a_i b_j \quad (\text{A.7.7})$$

Infatti

$$\begin{aligned} \bar{A}_{pq} &= \bar{a}_p \bar{b}_q = l_{ip} a_i l_{jq} b_j = l_{ip} l_{jq} (a_i b_j) \\ &= l_{ip} l_{jq} A_{ij} \end{aligned}$$

Se  $\alpha$  è uno scalare e  $\mathbf{A}$  un tensore il prodotto  $\alpha\mathbf{A}$  è un tensore le cui componenti sono di grandezza  $\alpha$  volte le componenti di  $\mathbf{A}$ .

La somma di due tensori  $A_{ij}$  e  $B_{ij}$  è un tensore  $\mathbf{C}$  le cui componenti sono date dalla somma delle componenti corrispondenti dei due tensori

$$C_{ij} = A_{ij} + B_{ij} \quad (\text{A.7.8})$$

La sottrazione si può definire mediante la moltiplicazione per lo scalare  $\alpha = -1$

$$C_{ij} = A_{ij} + (-1)B_{ij} \quad (\text{A.7.9})$$

Ciascun tensore si può rappresentare come la somma di una parte simmetrica e di una antisimmetrica

$$A_{ij} = \frac{1}{2}(A_{ij} + A_{ji}) + \frac{1}{2}(A_{ij} - A_{ji}) \quad (\text{A.7.10})$$

infatti scambiando  $i$  e  $j$  il primo termine a secondo membro rimane invariato mentre il secondo cambia di segno.

L'operazione di contrazione consiste nell'identificare due indici del tensore e quindi sommare rispetto a quell'indice. La contrazione su  $A_{ij}$  è

$$A_{ii} = A_{11} + A_{22} + A_{33} \quad (\text{A.7.11})$$

che è uno scalare e quindi invariante rispetto ad una rotazione degli assi, infatti

$$\bar{A}_{pp} = l_{ip}l_{jp}A_{ij} = \delta_{ij}A_{ij} = A_{ii} \quad (\text{A.7.12})$$

Lo scalare  $A_{ii}$  si chiama anche traccia del tensore  $A_{ij}$ .

Se si moltiplicano due tensori del secondo ordine  $A_{ij}$ ,  $B_{km}$  si ha un tensore del 4° ordine (cui corrispondono 81 componenti) definito da, in analogia con la (A.7.1)

$$\begin{aligned} \bar{A}_{pq}\bar{B}_{rs} &= l_{ip}l_{jq}A_{ij}l_{kr}l_{ms}B_{km} \\ &= l_{ip}l_{jq}l_{kr}l_{ms}A_{ij}B_{km} \end{aligned} \quad (\text{A.7.13})$$

Le contrazioni di tensori del quarto ordine sono tensori del secondo ordine, ad esempio

$$A_{ij}B_{ki}, A_{ij}B_{jm}, \text{ etc.} \quad (\text{A.7.14})$$

In generale l'operazione di contrazione su un tensore di ordine ( $p$ ) porta ad un tensore di ordine ( $p - 2$ ).

Il prodotto tensoriale di un tensore  $A_{ij}$  per un vettore  $a_k$  è un tensore del terzo ordine. Se si opera una contrazione si ha un vettore di componenti

$$b_i = A_{ij}a_j \quad (\text{A.7.15})$$

In notazione matriciale questo è dato dal prodotto di una matrice ( $3 \times 3$ ) per un vettore colonna ( $3 \times 1$ ). Analogamente si opera una diversa contrazione si ha

$$b_j = A_{ij}a_i \quad (\text{A.7.16})$$

che in notazione matriciale è dato dal prodotto di un vettore riga ( $1 \times 3$ ) per una matrice ( $3 \times 3$ ).

## A.8 Il vettore di un tensore antisimmetrico

Sia un vettore  $\omega$ , sia un tensore antisimmetrico  $\Omega$  hanno tre componenti indipendenti che si possono esprimere come segue

$$\omega = \begin{bmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \end{bmatrix} \quad \Omega = \begin{bmatrix} 0 & \omega_3 & -\omega_2 \\ -\omega_3 & 0 & \omega_1 \\ \omega_2 & -\omega_1 & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{A.8.1})$$

Le componenti di  $\Omega$  si possono scrivere

$$\Omega_{ij} = +\varepsilon_{ijk}\omega_k \quad (\text{A.8.2})$$

Se si vogliono invece derivare le componenti di  $\boldsymbol{\omega}$  da  $\boldsymbol{\Omega}$ , partiamo da  $\varepsilon_{ijk}\Omega_{ij}$  dove fissando  $k$  appaiono solo i termini con  $i \neq k, j \neq k$ ; ad esempio per  $k = 3$

$$\varepsilon_{ij3}\Omega_{ij} = \varepsilon_{123}\Omega_{12} + \varepsilon_{213}\Omega_{21} = \Omega_{12} - \Omega_{21} = 2\omega_3$$

da cui segue

$$\omega_k = \frac{1}{2}\varepsilon_{ijk}\Omega_{ij} \quad (\text{A.8.3})$$

che dà le componenti del vettore  $\boldsymbol{\omega}$ .

Il prodotto vettoriale di un qualsiasi vettore  $\mathbf{a}$  per il vettore  $\boldsymbol{\omega}$  è dato da (A.5.2) che per la (A.5.7) è uguale a

$$(-\boldsymbol{\omega}) \times \mathbf{a} = \mathbf{a} \times \boldsymbol{\omega} = \varepsilon_{ijk}a_j\omega_k\mathbf{e}_{(i)} \quad (\text{A.8.4})$$

La componente  $i$ -esima di (A.8.4) si può scrivere ricordando la (A.8.2)

$$\varepsilon_{ijk}a_j\omega_k \equiv \Omega_{ij}a_j \quad (\text{A.8.5})$$

che per la (A.7.15) è la componente  $i$ -esima di un vettore  $\boldsymbol{\Omega} \cdot \mathbf{a}$ .

Ora se  $\mathbf{a}$  è il vettore posizione  $\mathbf{x}$ , una velocità, come si vedrà in seguito, data dalla (A.8.5), sarà dovuta per la (A.5.8) ad una rotazione di corpo rigido con velocità angolare  $(-\boldsymbol{\omega})$ .

## A.9 Autovettori e Autovalori di un tensore $A_{ij}$

Se  $\mathbf{a}$  è un vettore,  $\mathbf{A} \cdot \mathbf{a}$  è anch'esso un vettore e per certi  $\mathbf{a}$  può avere la stessa direzione di  $\mathbf{a}$ . I due vettori  $\mathbf{A} \cdot \mathbf{a}$  e  $\mathbf{a}$  differiscono in tal caso solo per la loro grandezza e possiamo scrivere

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{a} = \lambda\mathbf{a} \quad (\text{A.9.1})$$

Si dice allora che  $\mathbf{a}$  è un autovettore di  $\mathbf{A}$  e  $\lambda$  il corrispondente autovalore.

Per la (A.9.1)  $\mathbf{a}$  potrebbe avere grandezza arbitraria, si considerano però, per definizione, solo autovettori di grandezza unitaria (vedi (A.9.7)).

Scrivendo la (A.9.1) in componenti

$$A_{ij}a_j = \lambda a_i = \lambda\delta_{ij}a_j$$

ovvero

$$(A_{ij} - \lambda\delta_{ij})a_j = 0 \quad (\text{A.9.2})$$

cioè in forma espansa

$$\begin{aligned}(A_{11} - \lambda)a_1 + A_{12}a_2 + A_{13}a_3 &= 0 \\ A_{21}a_1 + (A_{22} - \lambda)a_2 + A_{23}a_3 &= 0 \\ A_{31}a_1 + A_{32}a_2 + (A_{33} - \lambda)a_3 &= 0\end{aligned}\tag{A.9.3}$$

che è un sistema di tre equazioni omogenee nelle incognite  $a_j$  ed ha una soluzione non banale (cioè  $a_j \neq 0$ ), solo se il determinante dei coefficienti è uguale a zero, cioè

$$\det(A_{ij} - \lambda\delta_{ij}) = 0\tag{A.9.4}$$

Per valori noti di  $A_{ij}$  la (A.9.4) dà una equazione cubica in  $\lambda$

$$\lambda^3 - I_1\lambda^2 + I_2\lambda - I_3 = 0\tag{A.9.5}$$

che è chiamata equazione caratteristica del tensore, con  $I_1, I_2, I_3$ , invarianti scalari del tensore dati da

$$\begin{aligned}I_1 &= A_{11} + A_{22} + A_{33} = A_{ii} \\ I_2 &= \begin{vmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} A_{22} & A_{23} \\ A_{32} & A_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} A_{11} & A_{13} \\ A_{31} & A_{33} \end{vmatrix} \\ &= \frac{1}{2}(A_{ii}A_{jj} - A_{ij}A_{ji}) \\ I_3 &= \begin{vmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{vmatrix} = \det(A_{ij})\end{aligned}\tag{A.9.6}$$

I tre valori di  $\lambda$ , radici dell'equazione (A.9.5) sono i valori caratteristici o autovalori di  $\mathbf{A}$ , che indicheremo  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ . Per ciascun  $\lambda_i$ , si possono determinare le componenti del corrispondente autovettore  $\mathbf{a}$  del sistema di equazioni (A.9.3). Dato che due equazioni del sistema sono linearmente dipendenti, essendo il determinante = 0, occorre un'altra equazione per determinare le tre componenti  $a_1, a_2, a_3$ , e questa è data dalla imposizione per  $\mathbf{a}$  di essere un vettore unitario:

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{a} = a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 = 1\tag{A.9.7}$$

Si dimostra che se il tensore  $A_{ij}$  è simmetrico i tre autovalori sono reali e ad essi corrispondono tre autovettori tra loro ortogonali. Le tre direzioni individuate dagli autovettori sono note come direzioni (o assi) principali del tensore. I corrispondenti autovalori sono detti valori principali. Può essere utile, come si vedrà in seguito, fissare delle relazioni fra tensori su un riferimento i cui assi sono coincidenti con gli assi principali di uno dei tensori considerati. la relazione che si stabilisce, una volta espressa in forma tensoriale, sarà valida per qualunque riferimento.

Scelto il riferimento dato dagli assi principali il tensore simmetrico  $A_{ij}$  si riduce, nella espressione matriciale associata, alla forma diagonale

$$A_{ij} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{bmatrix} \quad (\text{A.9.8})$$

e gli invarianti scalari del tensore divengono

$$\begin{aligned} I_1 &= \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 \\ I_2 &= \lambda_1\lambda_2 + \lambda_2\lambda_3 + \lambda_3\lambda_1 \\ I_3 &= \lambda_1\lambda_2\lambda_3 \end{aligned} \quad (\text{A.9.9})$$

## A.10 Tensori isotropi

Si dicono isotropi i tensori le cui componenti restano invariate per una rotazione del sistema di riferimento.

I tensori di ordine 0, o scalari, sono tutti isotropi (vedi ad esempio (A.7.12)). Non vi sono tensori di ordine 1, o vettori, isotropi.

Il tensore del secondo ordine  $\delta_{ij}$  è un tensore isotropo, come si è dimostrato con la (A.7.6), ed è l'unico del secondo ordine a parte ovviamente i multipli scalari di  $\delta_{ij}$ . Il tensore di permutazione  $\varepsilon_{ijk}$  è l'unico (a meno di suoi multipli scalari) tensore isotropo del terzo ordine.

I tensori isotropi del quarto ordine si ottengono da combinazioni di prodotti di tensori isotropi del secondo ordine:

$$\delta_{ijk}\delta_{kl}, \delta_{ik}\delta_{jl}, \delta_{il}\delta_{jk} \quad (\text{A.10.1})$$

In generale un tensore isotropo del 4° ordine sarà dato da una combinazione lineare dei tre tensori isotropi (A.10.1) che si può dimostrare essere fra loro indipendenti.

## A.11 Regola del quoziente

Le trasformazioni (A.1.5), (A.7.1), (A.7.13) per una rotazione del sistema di riferimento, sono state finora adottate come prova che un insieme di un certo numero di quantità fosse l'insieme delle componenti di un tensore. Con la regola del quoziente possiamo provare più semplicemente il carattere tensoriale di un'entità. Se  $A_{ij}$  è un insieme di nove quantità e  $\mathbf{b}$  e  $\mathbf{c}$  sono vettori, con  $\mathbf{b}$  indipendente da  $A_{ij}$  e vale la

$$A_{ij}b_j = c_i \quad (\text{A.11.1})$$

allora  $A_{ij}$  sono le componenti di un tensore del secondo ordine  $\mathbf{A}$ .

## A.12 Tensori funzione della variabile tempo

Finora abbiamo considerato solo relazioni algebriche fra tensori. Vediamo ora il comportamento dei tensori quando sono funzioni di variabili continue. Nelle applicazioni di fluidodinamica infatti vettori e tensori sono, in generale, funzioni del tempo e delle coordinate spaziali. Consideriamo dapprima tensori le cui componenti sono solo funzioni del tempo cioè

$$A_{ij} = A_{ij}(t) \quad (\text{A.12.1})$$

che per una rotazione del riferimento di trasformano con le (A.7.1)

$$\bar{A}_{pq}(t) = l_{ip}l_{jq}A_{ij}(t) \quad (\text{A.12.2})$$

ed essendo  $l_{ij}$  indipendenti da  $t$ , le derivate di  $A_{ij}$  saranno anch'esse tensori; infatti, ad esempio, per la derivata prima si ha

$$\frac{d}{dt} [\bar{A}_{pq}(t)] = l_{ip}l_{jq} \frac{d}{dt} [A_{ij}(t)] \quad (\text{A.12.3})$$

La derivata di prodotti di tensori segue le regole note per la derivazione di prodotti. In particolare, ad esempio,

$$\frac{d}{dt}(a \cdot b) = \frac{da}{dt} \cdot b + a \cdot \frac{db}{dt} \quad (\text{A.12.4})$$

e

$$\frac{d}{dt}(a \times b) = \frac{da}{dt} \times b + a \times \frac{db}{dt}$$

## A.13 Campi vettoriali e tensoriali, l'operatore gradiente

Consideriamo ora tensori le cui componenti siano funzioni dello spazio: si hanno allora campi vettoriali o tensoriali. Per esempio nello studio della

fluidodinamica considereremo il campo di velocità, cioè una velocità che sarà funzione o solo dello spazio,  $\mathbf{u}(x_1, x_2, x_3)$ , o anche del tempo  $\mathbf{u}(x_1, x_2, x_3, t)$  per flussi non stazionari.

Per ogni campo vettoriale  $\mathbf{a}(x)$  si possono definire le sue traiettorie, cioè la famiglia di curve ovunque tangenti al valore locale di  $\mathbf{a}$ , date da

$$\frac{d\mathbf{x}}{ds} = \mathbf{a}(\mathbf{x}) \quad \text{in componenti} \quad \frac{dx_i}{ds} = a_i(x_1, x_2, x_3) \quad (\text{A.13.1})$$

dove  $s$  è un parametro definito lungo la traiettoria. Per un campo vettoriale dipendente dal tempo le traiettorie sono date da

$$\frac{dx_i}{ds} = a_i(x_1, x_2, x_3, t) \quad (\text{A.13.2})$$

Il vettore  $\nabla$  (detto delta o nabla) ha componenti  $\partial/\partial x_i$ . Se  $\nabla$  opera su uno scalare ( $\varphi$ ) funzione dello spazio, si ha un vettore  $\nabla\varphi$  di componenti  $\partial\varphi/\partial x_i$ . Infatti per una rotazione di riferimento da  $0123$  a  $0\bar{1}\bar{2}\bar{3}$  si ha

$$\frac{\partial\varphi}{\partial\bar{x}_j} = \frac{\partial\varphi}{\partial x_i} \frac{\partial x_i}{\partial\bar{x}_j} = l_{ij} \frac{\partial\varphi}{\partial x_i}$$

essendo  $x_i = l_{ij}\bar{x}_j$ .

Per la derivata parziale rispetto a  $x_i$  si usa talvolta la notazione “ $i$ ”, e spesso al posto di  $\nabla$  la notazione  $\text{grad}$ , per cui

$$\nabla\varphi = \text{grad}\varphi = \varphi_{,i} \quad (\text{A.13.3})$$

$$\nabla A = \text{grad}A = A_{ij,k}$$

E’ utile osservare che

$$\frac{\partial\varphi}{\partial n} = \nabla\varphi \cdot \mathbf{n} \quad (\text{A.13.4})$$

## A.14 La divergenza di un campo vettoriale

Si definisce come prodotto scalare del vettore  $\nabla$  per un vettore  $\mathbf{a}(x_1, x_2, x_3)$

$$\nabla \cdot \mathbf{a} = \text{div}\mathbf{a} = a_{i,i} = \frac{\partial a_1}{\partial x_1} + \frac{\partial a_2}{\partial x_2} + \frac{\partial a_3}{\partial x_3} \quad (\text{A.14.1})$$

ed è uno scalare essendo la contrazione del tensore del secondo ordine  $a_{i,j}$ .

Se  $\nabla \cdot \mathbf{a} = 0$  il campo si dice *solenoidale*.

Se  $\mathbf{a} = \nabla\varphi \equiv \text{grad}\varphi$

$$\nabla \cdot \mathbf{a} = \text{divgrad}\varphi = \nabla^2\varphi \quad (\text{A.14.2})$$

con

$$\nabla^2 \varphi = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_3^2} \quad (\text{A.14.3})$$

Se  $\mathbf{A}$  è un tensore del secondo ordine

$$\nabla \cdot \mathbf{A} \equiv \text{div} \mathbf{A} = A_{ij,i} \quad (\text{A.14.4})$$

## A.15 Teorema di Green

Se  $V$  è un volume finito con  $S$  superficie chiusa,  $\mathbf{a}$  è un campo vettoriale definito in  $V$  e su  $S$ ,  $\mathbf{n}$  è la normale uscente da  $\mathbf{A}$ , vale la

$$\int \int \int_V \nabla \cdot \mathbf{a} dV = \int \int_S \mathbf{a} \cdot \mathbf{n} dS \quad (\text{A.15.1})$$

cioè l'integrale di volume della divergenza è uguale all'integrale esteso alla superficie di contorno del flusso uscente di  $\mathbf{a}$ .

Il teorema di Green si può esprimere anche nella forma

$$\int \int \int_V F_{,i} dV = \int \int_S F n_i dS \quad (\text{A.15.2})$$

con  $F$  continuo con le sue derivate. Per  $F = a_i$  si ha

$$\int \int \int_V a_{i,i} dV = \int \int_S a_i n_i dS \quad (\text{A.15.3})$$

che equivale alla (A.15.1).

Se  $F = \varepsilon_{kij} a_j$ , ne segue  $F_{,i} = \varepsilon_{kij} a_{j,i}$  che è la componente  $k$ -esima di  $\nabla \times \mathbf{a}$  per la (A.16.1) mentre  $F n_i = \varepsilon_{kij} n_i a_j$  è la componente  $k$ -esima di  $\mathbf{n} \times \mathbf{a}$  per la (A.5.2) quindi per la (A.15.2)

$$\int \int \int_V (\nabla \times \mathbf{a}) dV = \int \int_S (\mathbf{n} \times \mathbf{a}) dS \quad (\text{A.15.4})$$

Se  $\mathbf{a} = \nabla \varphi$  per la (A.15.1) e la (A.14.4)

$$\begin{aligned} \int \int \int_V \nabla^2 \varphi dV &= \int \int_S \nabla \varphi \cdot \mathbf{n} dS \\ &= \int \int_S \frac{\partial \varphi}{\partial n} dS \end{aligned} \quad (\text{A.15.5})$$

per la (A.13.4).

## A.16 Rotore di un campo vettoriale

Si definisce come il prodotto vettoriale del vettore  $\nabla$  per un vettore  $\mathbf{a}(x_1, x_2, x_3)$

$$\nabla \times \mathbf{a} \equiv \text{rota} \mathbf{a} = \varepsilon_{ijk} a_{k,j} e_{(i)} \quad (\text{A.16.1})$$

che è un vettore di componenti

$$\left( \frac{\partial a_3}{\partial x_2} - \frac{\partial a_2}{\partial x_3} \right), \left( \frac{\partial a_1}{\partial x_3} - \frac{\partial a_3}{\partial x_1} \right), \left( \frac{\partial a_2}{\partial x_1} - \frac{\partial a_1}{\partial x_2} \right) \quad (\text{A.16.2})$$

## A.17 Teorema di Stokes

Se  $S$  è una superficie finita di normale  $\mathbf{n}$ , il cui contorno è dato dalla linea chiusa  $C$ , vale la

$$\oint_C \mathbf{a} \cdot t dS = \int \int_S (\nabla \times \mathbf{a}) \cdot \mathbf{n} dS \quad (\text{A.17.1})$$

cioè l'integrale superficiale della componente normale del  $\text{rota} \mathbf{a}$  è uguale alla circolazione di  $\mathbf{a}$  sul contorno  $C$ .

## A.18 Classificazione di campi vettoriali

Si sono già considerati campi vettoriali solenoidali (§ A.4) per i quali

$$\nabla \cdot \mathbf{a} = 0 \quad (\text{A.18.1})$$

e campi irrotazionali (§ A.6) per i quali

$$\nabla \times \mathbf{a} = 0 \quad (\text{A.18.2})$$

Se il vettore  $\mathbf{a}$  è dato dal gradiente di uno scalare  $\mathbf{a} = \nabla \varphi$  certamente

$$\nabla \times \nabla \varphi = 0 \quad (\text{A.18.3})$$

cioè il campo è irrotazionale, infatti

$$\nabla \times (\nabla \varphi) = \varepsilon_{ijk} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_j \partial x_k} = \varepsilon_{ijk} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_j \partial x_k} = \varepsilon_{ijk} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_k \partial x_j}$$

invertendo ora l'ordine di  $k$  e  $j$  in  $\varepsilon_{ijk}$  si ha un cambiamento di segno, e scambiando poi di nome agli indici ripetuti  $j$  e  $k$ , si ottiene

$$\varepsilon_{ijk} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_j \partial x_k} = \varepsilon_{ijk} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_k \partial x_j} = -\varepsilon_{ikj} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_k \partial x_j} = -\varepsilon_{ijk} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_j \partial x_k}$$

ed essendo la prima e la quarta espressione uguali e di segno opposto, il loro valore deve essere necessariamente zero.

Viceversa se  $\nabla \times \mathbf{a} = 0$  esiste sempre una funzione scalare  $\varphi$  tale che

$$\mathbf{a} = \nabla\varphi \quad (\text{A.18.4})$$

con  $\varphi$  potenziale di  $\mathbf{a}$ .

Si dice che il campo vettoriale è lamellare complesso se

$$\mathbf{a} \cdot (\nabla \times \mathbf{a}) = 0 \quad (\text{A.18.5})$$

cioè se il vettore  $\mathbf{a}$  è  $\perp$  al suo rotore.

Si ha invece un campo vettoriale di Beltrami se

$$\mathbf{a} \times (\nabla \times \mathbf{a}) = 0 \quad (\text{A.18.6})$$

se il vettore  $\mathbf{a}$  è cioè  $\parallel$  al suo rotore.

Se sono verificate ambedue le condizioni (A.18.5) e (A.18.6)  $\text{rot}\mathbf{a}$  dovrebbe essere contemporaneamente  $\perp$  e  $\parallel$  ad  $\mathbf{a}$  e quindi se  $\mathbf{a} \neq 0$  deve essere  $\text{rot}\mathbf{a} = 0$ .

Se il campo oltre che irrotazionale è anche solenoidale si dice Laplaciano e vale la

$$\nabla^2\varphi = 0 \quad (\text{A.18.7})$$

## A.19 Cambio di variabili negli integrali multipli

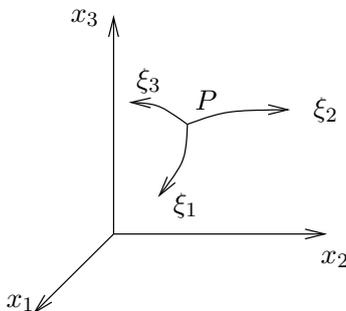
In coordinate cartesiane l'elemento di volume  $dV$  è semplicemente il volume del parallelepipedo rettangolo di lati  $dx_1, dx_2, dx_3$  e quindi

$$dV = dx_1 dx_2 dx_3 \quad (\text{A.19.1})$$

Se si passa ad altre coordinate, per esempio curvilinee,  $\xi_1, \xi_2, \xi_3$  mediante la trasformazione

$$x_i = x_i(\xi_1, \xi_2, \xi_3) \quad (\text{A.19.2})$$

con  $\mathbf{x} = x_i \mathbf{e}_{(i)}$  vettore posizione, si vuole conoscere l'elemento di volume nelle nuove coordinate, cioè associato a  $d\xi_1, d\xi_2, d\xi_3$ .



Consideriamo il vettore  $\mathbf{w}_1$  tangente alla coordinata  $\xi_1$

$$\mathbf{w}_1 = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \xi_1} = \frac{\partial x}{\partial s_1} \frac{\partial s_1}{\partial \xi_1} \quad (\text{A.19.3})$$

con  $s_1$  misura di lunghezza lungo la linea coordinata  $\xi_1$  per cui  $\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial s_1} = \mathbf{t}_1$  è il vettore unitario tangente a  $\xi$  e  $\frac{\partial s_1}{\partial \xi_1} = h_1$  è la lunghezza del vettore  $\mathbf{w}_1$  ed il lato corrispondente del volume elementare nelle nuove coordinate sarà dato da

$$\mathbf{t}_1 ds_1 = \mathbf{w}_1 d\xi_1 = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \xi_1} d\xi_1 \quad (\text{A.19.4})$$

ed analogamente per  $\xi_2$  e  $\xi_3$ .

L'elemento di volume nelle nuove coordinate sarà pertanto, ricordando quanto detto in § A.6

$$\begin{aligned} dV &= \mathbf{w}_1 d\xi_1 \cdot \mathbf{w}_2 d\xi_2 \times \mathbf{w}_3 d\xi_3 \\ &= (\mathbf{w}_1 \cdot \mathbf{w}_2 \times \mathbf{w}_3) d\xi_1 d\xi_2 d\xi_3 \end{aligned} \quad (\text{A.19.5})$$

e sostituendo la (A.19.3), per la (A.6.1)

$$(\mathbf{w}_1 \cdot \mathbf{w}_2 \times \mathbf{w}_3) = \varepsilon_{ijk} \frac{\partial x_i}{\partial \xi_1} \frac{\partial x_j}{\partial \xi_2} \frac{\partial x_k}{\partial \xi_3} \quad (\text{A.19.6})$$

$$= \det \left( \frac{\partial x_i}{\partial \xi_j} \right) = J \quad (\text{A.19.7})$$

per la (A.7.5), con  $J$  Jacobiano della trasformazione di coordinate. Pertanto

$$dV = J d\xi_1 d\xi_2 d\xi_3 \quad (\text{A.19.8})$$

Se le nuove coordinate sono mutuamente ortogonali, sostituendo nella (A.19.6)  $\mathbf{w}_1 = h_1 \mathbf{t}_1$ ,  $\mathbf{w}_2 = h_2 \mathbf{t}_2$ ,  $\mathbf{w}_3 = h_3 \mathbf{t}_3$  si ricava

$$J = h_1 h_2 h_3 \quad (\text{A.19.9})$$

essendo  $(\mathbf{t}_1 \cdot \mathbf{t}_2 \times \mathbf{t}_3) = 1$ .

Se si vuole quindi esprimere un integrale di volume nelle nuove coordinate  $\xi_1, \xi_2, \xi_3$  si ha

$$\int \int \int_R f(x_1, x_2, x_3) dx_1 dx_2 dx_3 = \int \int \int_{R^*} F(\xi_1 \xi_2 \xi_3) J d\xi_1 d\xi_2 d\xi_3 \quad (\text{A.19.10})$$

con  $F(\xi_1\xi_2\xi_3) = f[x_1(\xi_1\xi_2\xi_3), x_2(\xi_1\xi_2\xi_3), x_3(\xi_1\xi_2\xi_3)]$  ed  $R^*$  è la regione in cui si trasforma  $R$ . Analogamente nel caso bidimensionale si ha

$$\int \int_A f(x_1x_2)dx_1dx_2 = \int \int_{A^*} F(\xi_1\xi_2)Jd\xi_1d\xi_2 \quad (\text{A.19.11})$$

## Bibliografia

1. Aris, R., *Vector, Tensors and the Basic Equations of Fluid Mechanics*, Prentice-Hall, 1962.
2. Tyldesley, J.R., *An Introduction to Tensor Analysis*, Longman, 1975.
3. Marion, J., *Principles of Vector Analysis*, Academic Press, 1965.
4. Finzi B., Pastori, M., *Calcolo Tensoriale e Applicazioni*, Zanichelli, Bologna, 1961.
5. Lichnerowicz, A., *Elements of Tensor Calculus*, Methnen & Co. Monographs, London, 1962.

# Introduzione alle tecniche dell'analisi sperimentale

La caratterizzazione di un flusso avviene, nel caso di flusso incomprimibile ( $\rho = \text{cost}$ ) attraverso la determinazione della pressione e delle tre componenti del vettore velocità.

- Misura della pressione

Cominciamo dalle tecniche di misura della pressione, poichè esse consentono di misurare (indirettamente) anche la velocità.

Per determinare il valore della pressione in un punto P del campo fluidodinamico, si ricorre normalmente ad un tubo di piccolo ingombro allineato con la corrente, lambito cioè dal fluido (fig. 1).



Figura 1:

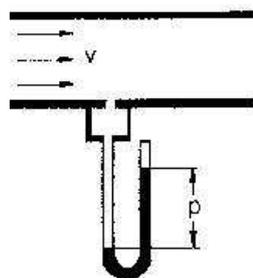


Figura 2:

La pressione misurata in P attraverso un foro radiale praticato nel tubicino è pari proprio alla pressione che si misurerebbe in un punto sulla verticale (Q) nella corrente uniforme e indisturbata, fuori dallo strato limite che si forma intorno al tubicino. Il foro radiale viene collegato ad un ramo di un tubo a U, e il dislivello  $h$  nei due rami del tubo è legato alla differenza di pressione nel punto P e nell'ambiente collegato all'altro ramo del manometro. Quest'ultima è generalmente nota e pari, normalmente, alla pressione atmosferica.

Quando interessa registrare delle pressioni rapidamente variabili nel tempo, come nel caso dei flussi turbolenti, è possibile sostituire il tubicino con un microfono, disposto anch'esso parallelamente alla corrente.

Se il fluido scorre lungo una parete, il valore della pressione in ogni punto della parete stessa si misura facilmente tramite una serie di fori, ognuno dei quali è collegato ad un manometro come nel caso precedente (fig. 2). In questo modo è possibile, ad esempio, controllare l'andamento del gradiente di pressione lungo un'ala (o una lastra piana), oppure, nel caso di un'ala, calcolarne approssimativamente la portanza misurando la differenza di pressione lungo la corda tra il ventre ed il dorso (fig. 3, 4).

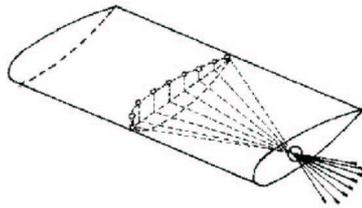


Figura 3:

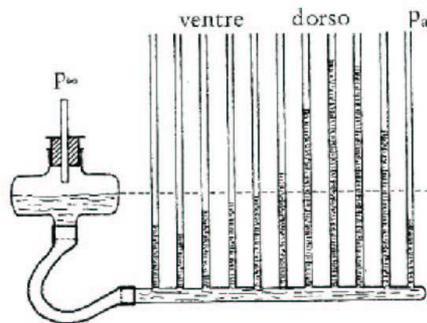


Figura 4:

Nei due esempi precedenti il foro per la misura della pressione ("termodinamica" o "statica") è allineato *precisamente* nella direzione della corrente. Il foro si può invece realizzare in corrispondenza della "testa" del tubicino (fig. 5), cioè in corrispondenza del punto di ristagno del flusso. In questo punto la velocità è nulla mentre la pressione raggiunge il valore  $p_R$  pari a:  $p_R = p_\infty + (1/2)\rho U_\infty^2$ . Se il foro viene collegato con un ramo del tubo ad U, la differenza di livello nel manometro permette di risalire alla differenza fra la cosiddetta "pressione dinamica"  $p_R$  e la pressione di riferimento dell'altro ramo del tubo.

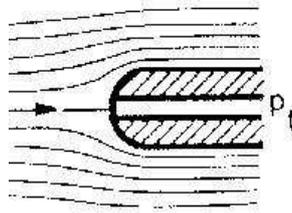


Figura 5:

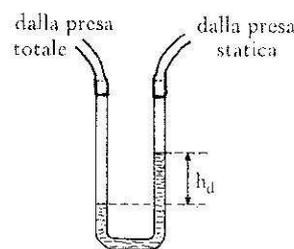


Figura 6:

- Misure di velocità

- Tubo di Pitot

Combinando le due configurazioni precedenti si ottiene il cosiddetto *Tubo di Pitot* (fig. 7), che permette di determinare il valore (di una o più componenti) della velocità in un determinato punto del campo. Come si vede dalla figura, il tubo di Pitot è costituito sostanzialmente da due tubicini coassiali: quello interno è dotato di un'apertura che misura la pressione di ristagno, mentre quello esterno è provvisto di uno o più fori radiali, che permettono di misurare la pressione  $p_\infty$ . In effetti i fori praticati sul mantello esterno sono posizionati sufficientemente lontano dal "becco" dello strumento, in modo tale che le condizioni del fluido siano tornate identiche a quelle a monte del Pitot: la velocità torna al suo valore "indisturbato"  $U_\infty$  e la pressione è pari a  $p_\infty$ . La differenza di pressione fra presa "statica" e presa "dinamica" è pari a  $1/2\rho U_\infty^2$ , e il dislivello fra i rami del manometro  $\Delta H_m$  permette di risalire alla velocità del flusso indisturbato (fig. 6):

$$\rho_m g \Delta H_m = (1/2) \rho_{fluido} U_\infty^2. \quad (1)$$

Questa semplice configurazione permette quindi di misurare la velocità di flussi monodimensionali, mentre versioni più sofisticate di questo strumento -tubi di Pitot a 5 fori- permettono di misurare tutte e tre le componenti della velocità.

La fig. 8 rappresenta la relazione tra l'ingresso e l'uscita di un tubo di Pitot, cioè tra velocità da misurare e differenza di pressione registrata dallo strumento. Come si vede, il maggiore difetto dello strumento è rappresentato dalla sua scarsa sensibilità alle

basse velocità, dove la curva di calibrazione è molto "piatta": in questo range, dunque, e' necessario che la velocità cambi considerevolmente per produrre una variazione di pressione differenziale che possa essere apprezzata dallo strumento. Gli altri difetti del tubo di Pitot sono:

- \* la sua limitata "risposta in frequenza" (incapacità di seguire rapide fluttuazioni del segnale di velocità, dovuta all'inerzia della massa d'aria contenuta all'interno dello strumento)
- \* il suo ingombro, che lo rende inadatto per quei casi in cui la velocità varia rapidamente da punto a punto nello spazio.

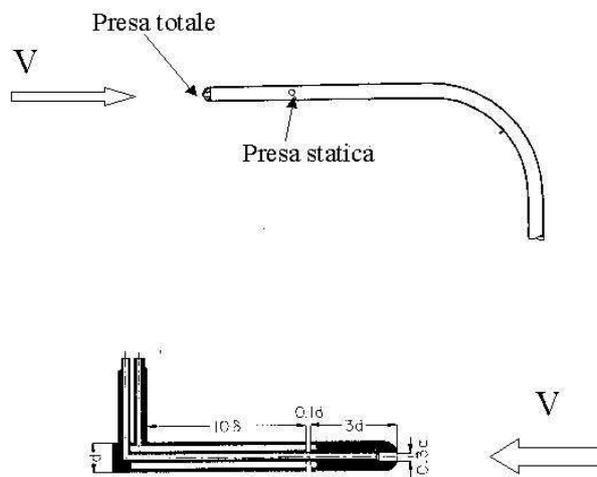


Figura 7:

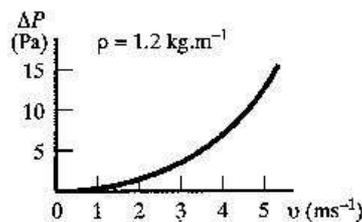


Figura 8:

### Trasduttori di pressione differenziale

Quasi sempre l'output di uno strumento di misura (nel nostro caso il tubo di Pitot) deve essere convertito in un segnale elettrico (una differenza di potenziale, una corrente...) per poter essere acquisito da un computer e successivamente analizzato.

Normalmente dunque, la differenza di pressione registrata dal tubo di Pitot non viene letta direttamente sulla canna barometrica, ma viene convertita in una tensione

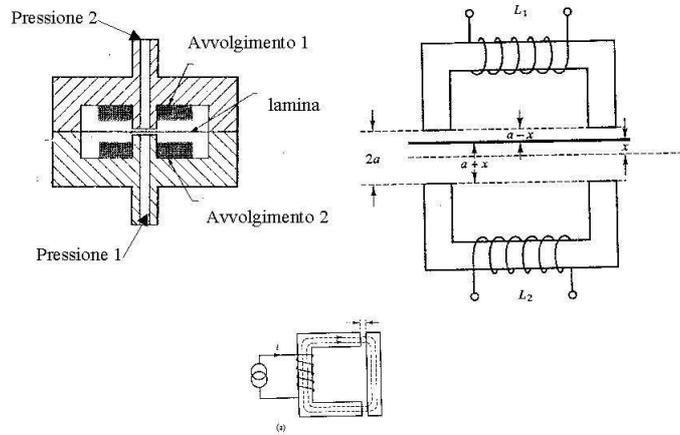


Figura 9: Per il semplice circuito ferromagnetico in basso della figura, la forza magnetomotrice  $ni$  deve uguagliare il prodotto  $\mathcal{R}i$ , dove  $\mathcal{R}$  è la riluttanza complessiva del circuito:  $\mathcal{R} = \mathcal{R}_{(magnete)} + \mathcal{R}_{(traferro)} = \mathcal{R}_{magn} + t/(\mu_0 S)$  Quindi l'induttanza del circuito sarà data da  $L = n\Phi/i = n^2/\mathcal{R} = L_0/(1 + \alpha t)$ , dove  $L_0$  e  $\alpha$  sono costanti e  $t$  è l'ampiezza del traferro. Lo stesso ragionamento può estendersi al circuito più complesso: l'induttanza  $L_1$  della parte superiore si può esprimere come  $L_1 = L_0/(1 + \alpha(a - x))$ , mentre l'induttanza  $L_2$  della parte inferiore si può esprimere come  $L_2 = L_0/(1 + \alpha(a + x))$ .

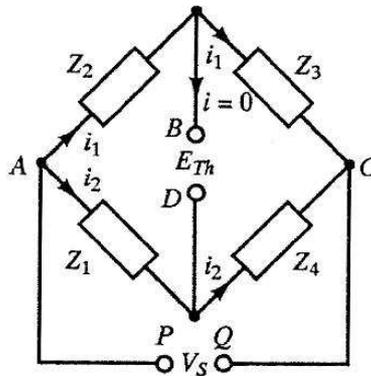


Figura 10: Il ponte è equilibrato quando la differenza di potenziale  $V$  fra i punti B e D è nulla, e analogamente la corrente  $i$  fra i due punti:  $V = 0, i = 0$ . Questa condizione si verifica (semplice applicazione del teorema di Thévenin) quando le quattro impedenze soddisfano la seguente relazione:  $\frac{Z_4}{Z_1} = \frac{Z_3}{Z_2}$  Quando una delle 4 impedenze (per es.  $Z_1$ ) varia rispetto al valore per cui il ponte è equilibrato, la differenza di potenziale fra i punti B e D (squilibrio del ponte) non è più nulla, e si avrà che:  $\frac{\Delta V}{V} = f(\frac{\Delta Z_1}{Z_1})$  Normalmente la legge di variazione di  $V$  con  $Z_1$  non è lineare (lo è soltanto localmente, per piccole variazioni di  $Z_1$ ). Tuttavia, nel particolare caso del trasduttore di pressione a induttanza variabile mostrato in figura (assumendo cioè che  $Z_1 = L_1$  e che  $Z_2 = L_2$ , si può dimostrare che la variazione di tensione  $\Delta V$  è proporzionale allo spostamento del diaframma  $x$ , cioè che  $\Delta V = kx = k'\Delta p$  per piccole deflessioni del diaframma.

tramite i cosiddetti trasduttori di pressione differenziale. Questi trasduttori sono costituiti sostanzialmente da uno o più elementi di un circuito elettrico (una resistenza, un'induttanza o una capacità) i cui valori dipendono, in qualche modo, dalla differenza di pressione che vogliamo misurare. Ad esempio, nel caso di una capacità (il cui valore è dato da  $C = kS/x$ ), la distanza  $x$  fra le armature può variare in funzione della differenza di pressione agente su di esse. I trasduttori di pressione comunemente usati sono del tipo a induttanza variabile, raffigurato in fig. 9. La variazione di impedenza di questi trasduttori viene misurata inserendo il trasduttore stesso in uno dei rami di un ponte di Wheatstone (fig. 10), che permette di convertire le (piccole) variazioni di impedenza in una tensione ad essa proporzionale.

Per poter essere acquisita da un computer, la tensione in uscita dal ponte di Wheatstone (rappresentata da un segnale continuo nel tempo,  $y(t)$ ) deve essere prima convertita in un segnale discreto, cioè in un insieme di campioni  $\{y_i, i = 1, \dots, N\}$  campionati ad intervalli regolari di tempo  $\{t_i = i * \Delta t, i = 1, \dots, N\}$ . L'intervallo di tempo  $\Delta t$  trascorso tra l'acquisizione di un campione ed il successivo rappresenta l'inverso della cosiddetta frequenza di campionamento  $f_s$ . Chiaramente, questa frequenza di campionamento deve essere scelta "sufficientemente grande" (rispetto alla frequenza massima del segnale) per evitare che il campionamento del segnale provochi una perdita di informazione. La fig. 11 illustra la condizione che permette di rappresentare un segnale continuo con un insieme discreto di campioni: la frequenza di campionamento deve essere almeno 2 volte la frequenza massima del segnale (teorema di Nyquist). Quando questa condizione è rispettata, il segnale può essere successivamente ricostituito a partire dai valori campionati. In caso contrario (fig. 12, dove il

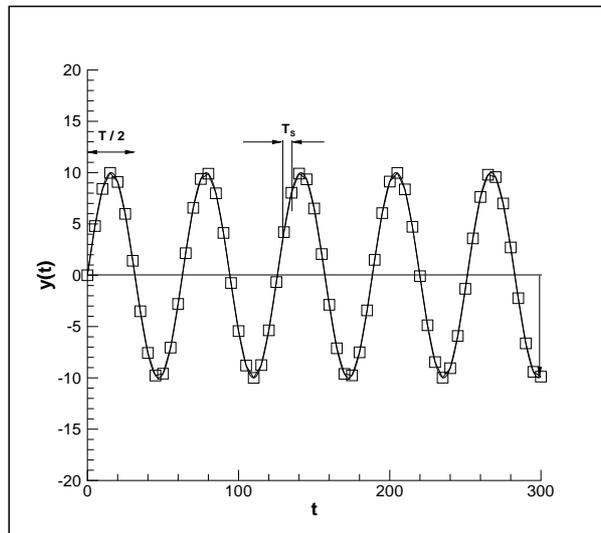


Figura 11:

segnale è campionato con una frequenza troppo bassa) la sinusoide di partenza viene riconosciuta come un segnale a frequenza più piccola (*aliasing*). L'operazione di campionamento (e la successiva codifica dei campioni acquisiti  $\{y_i\}$  in formato binario,

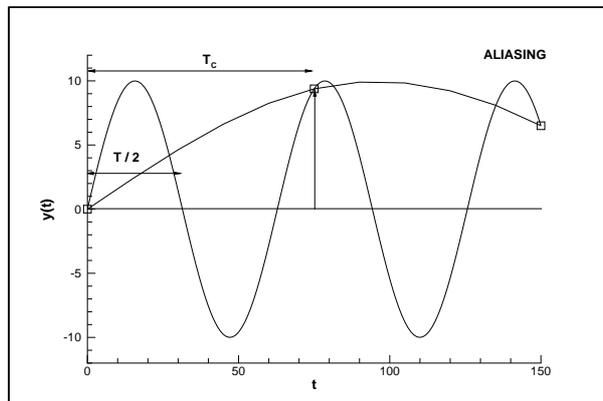


Figura 12:

cioè in una successione di 0 e 1 che approssimano il valore acquisito) viene effettuato dal convertitore analogico/digitale (vedi la fig. 13 dove è raffigurato una semplice catena di misura per la misura della velocità con un tubo di Pitot).

ESEMPIO DI CATENA DI MISURA

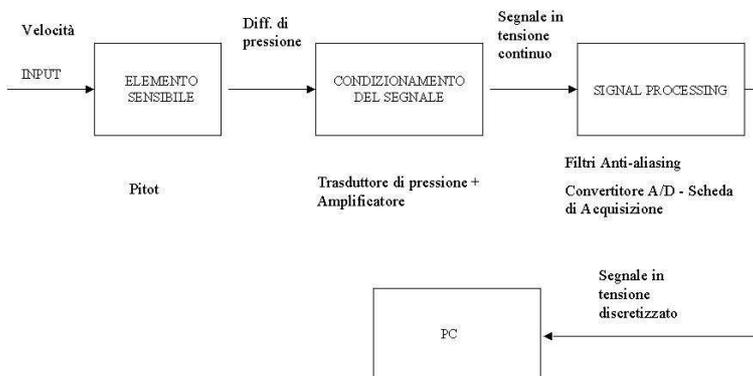


Figura 13:

– Anemometria a Filo Caldo

Nei casi in cui la velocità da misurare varia rapidamente nel tempo, o in cui il volume di misura debba avere dimensioni molto ridotte, il tubo di Pitot può rivelarsi inadatto, e si utilizzano altre tecniche. Tra queste una delle più diffuse, specie nel campo della turbolenza, è la cosiddetta "anemometria a filo caldo".

Il principio di funzionamento è il seguente: un filo estremamente piccolo e sottile di Tungsteno (la lunghezza non supera normalmente il millimetro, e il diametro è inferiore a 5 micron), teso tra due supporti ("rebbi"), viene investito da una corrente d'aria normale al filo stesso, con una velocità incognita (fig. 14, 15).

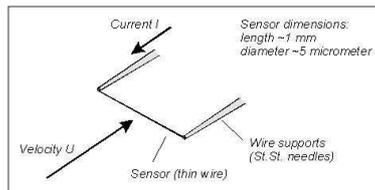


Figura 14:

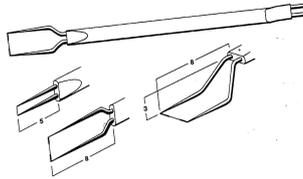


Figura 15:

Poichè nel filo, di resistenza  $R_w$ , circola una corrente  $i_w$ , esso si trova ad una temperatura molto più alta del fluido circostante (normalmente  $250\text{ }^{\circ}\text{C}$  se il fluido è aria a temperatura ambiente). In condizioni di equilibrio termico la stessa quantità di calore  $R_w i_w^2$  prodotta per effetto Joule nell'unità di tempo deve essere asportata dal filo, principalmente per convezione forzata ad opera del fluido circostante, ma anche per irraggiamento e per conduzione attraverso i rebbi.

Se la velocità del fluido aumenta rispetto alle condizioni iniziali di equilibrio, lo scambio convettivo aumenta anch'esso, e la temperatura del filo diminuisce fino al suo nuovo valore di equilibrio.

L'equazione che governa il fenomeno e' quindi la seguente:

$$dE_w/dt = W - H \quad (2)$$

dove  $E_w$  è l'energia termica immagazzinata nel filo ( $E_w = m_w c_w T_w$ , con  $m_w$  e  $c_w$  rispettivamente massa e capacità termica del filo),  $W$  è la potenza generata per effetto Joule ( $W = R_w I_w^2$ ), e  $H$  è la potenza scambiata fra filo caldo e esterno.  $H$  rappresenta dunque la somma di tre termini:

- \*  $H_1$  = calore scambiato per convezione con il fluido
- \*  $H_2$  = calore scambiato per conduzione attraverso i rebbi
- \*  $H_3$  = calore scambiato per irraggiamento

Partendo dall'equazione di bilancio termico è possibile risalire alla velocità del fluido misurando la differenza di tensione ai capi della sonda stessa, ammesso che la velocità sia l'unica variabile che influenzi lo scambio termico convettivo (le condizioni termodinamiche del fluido non devono cioè cambiare nel corso della misura).

Vediamo come si procede.

Normalmente, per la misura della velocità, il filo caldo viene utilizzato nella modalità a "Temperatura Costante", la temperatura del filo è cioè mantenuta sempre allo stesso valore mediante un opportuno sistema di controreazione. In pratica, se la velocità del fluido aumenta rispetto al valore iniziale (e la temperatura del filo tenderebbe dunque a diminuire per effetto del maggiore scambio termico fra filo e aria) il sistema di controreazione provvede a far circolare una corrente maggiore all'interno del filo, in modo da riaumentarne immediatamente la temperatura fino al valore di partenza. In questa situazione, la temperatura del filo, quindi anche la sua resistenza  $R_w = R_{w,0}(1 + \alpha\Delta T)$  rimane sempre la stessa, mentre la quantità di corrente  $I_w$  che circola nel filo cambia in funzione della velocità che investe la sonda. Cambia dunque la tensione  $E_w = R_w I_w$  ai capi della sonda. <sup>1</sup>

In condizioni di temperatura del filo costante, l'equazione di bilancio diventa:

$$W = H, \quad (3)$$

essendo  $dT/dt = 0$ . Trascurando il calore scambiato per irraggiamento, e nell'ipotesi che il calore scambiato per conduzione sia trascurabile rispetto a quello scambiato per convezione (ipotesi valida per rapporti  $l/d$  fra lunghezza e diametro del filo sufficientemente alti), e' possibile semplificare ulteriormente l'equazione, che diventa  $W = H_1$ , cioè:

$$I^2 R_w = h \cdot A \cdot (T_w - T_f), \quad (4)$$

ovvero

$$I^2 R_w = Nu \cdot k_f \cdot A \cdot (T_w - T_f) \quad (5)$$

con  $h$  = coefficiente di scambio termico convettivo

$A$  = superficie di scambio termico =  $2\pi d/2l$

$d, l$  = diametro e lunghezza del filo

$k_f$  = conducibilità termica del fluido

$Nu$  = numero di Nusselt =  $h/k_f$

$(T_w - T_f)$  = differenza di temperatura tra filo e fluido, fissata dal sistema di misura.

In regime di convezione forzata, ( $Re > Gr^{1/3}$ ) è possibile esprimere il numero di Nusselt in funzione del numero di Reynolds:

$$Nu = A_1 + B_1 \cdot Re^n = A_2 + B_2 \cdot U^n, \text{ con } n \simeq 0.5 \quad (6)$$

---

<sup>1</sup>si puo' anche utilizzare il filo caldo anche nella modalità a "corrente costante", ma in questo caso, a causa dell'inerzia termica della sonda, le fluttuazioni di velocità ad alta frequenza possono essere "smorzate"

Dunque l'equazione di bilancio diventa:

$$I^2 R_w^2 = (T_w - T_f)(A + B \cdot U^n) = a + b \cdot U^n \quad (7)$$

nota come "Legge di King". Essa permette di utilizzare la caduta di tensione  $E_w = R_w I_w$  ai capi della sonda a filo caldo come misura della velocità, una volta che siano note le due costanti  $a$  e  $b$  che intervengono nella relazione (7) (cioè che la sonda sia stata "calibrata"). Chiaramente questi valori dipendono sia dalle caratteristiche geometriche della sonda (lunghezza, diametro, posizione relativa della sonda rispetto al flusso) che dalle condizioni del fluido (viscosità, temperatura), da determinare di volta in volta. Prima di utilizzare una sonda a filo caldo si procede dunque alla sua calibrazione, cioè alla determinazione dei parametri che intervengono nella relazione (7). Per far ciò, si misura semplicemente la risposta dello strumento (cioè la tensione  $E_w$  ai capi della sonda) in corrispondenza di  $p$  velocità note ( $p \geq 2$ ),  $U_1, U_2, \dots, U_p$ .

Praticamente, la calibrazione avviene nella sezione di prova della galleria (dove la velocità del flusso è uniforme e può essere variata a piacimento) avvicinando alla sonda a filo caldo un tubo di Pitot. La velocità del flusso che investe la sonda a filo caldo può essere determinata tramite il tubo di Pitot, e contemporaneamente viene registrata la tensione  $E_w$  ai capi della sonda a filo caldo. Si ha così una prima coppia di punti  $(U_1, E_1)$  della relazione 7. Variando successivamente la velocità all'interno della sezione di prova è possibile, con la stessa procedura, ottenere altre coppie di punti  $(U_i, E_i)$ , e quindi determinare, con un'interpolazione ai minimi quadrati dei punti ottenuti, i valori dei parametri che intervengono nella relazione 7. La sonda è a questo punto calibrata (misurando la tensione ai capi della sonda è possibile cioè risalire alla velocità del flusso che investe la sonda stessa) e può essere utilizzata in tutte quelle situazioni dove l'utilizzo di un tubo di Pitot non è possibile (ad es. per misure all'interno di uno strato limite intorno ad un'ala, dove il Pitot sarebbe troppo "intrusivo", o nel caso di flussi turbolenti, caratterizzati quindi da rapide fluttuazioni nel tempo che il Pitot non sarebbe in grado di registrare).

Per misurare praticamente la tensione  $E_w$  ai capi della sonda a filo caldo si ricorre, come al solito, ad un ponte di Wheatstone (fig. 16), che permette di mantenere costante la resistenza del filo caldo, e quindi la sua temperatura. Il ponte viene infatti bilanciato inizialmente con la sonda a filo caldo inserita in uno dei suoi rami. Un eventuale squilibrio del ponte è dovuto al fatto che la temperatura, quindi la resistenza della sonda a filo caldo cambia per effetto di una variazione di velocità. Questo squilibrio, opportunamente amplificato, comanda un generatore di corrente, che modifica l'intensità di corrente che circola nel ponte in modo da riportare il valore della temperatura della sonda a quello iniziale, annullando così lo squilibrio stesso. La tensione ai capi della sonda  $E_w$  viene acquisita dal computer e successivamente convertita in velocità tramite la curva di calibrazione.

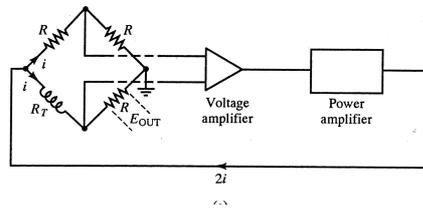


Figura 16:

– Laser Doppler

Un'altra tecnica comunemente usata per la misura di (una o più) componenti della velocità di flussi è l'anemometria Laser Doppler (LDA). Essa risulta particolarmente utile in quei casi in cui si rivela necessario l'uso di sonde non intrusive per minimizzare i disturbi, o in cui non è proprio possibile introdurre sonde all'interno del campo fluidodinamico (ad esempio, nel caso di flussi reagenti: combustori, motori a scoppio).

Il funzionamento del LDA si basa sul rilevamento della luce diffusa da particelle in-seminanti che attraversano una zona - il punto di misura- caratterizzata dalla presenza di frange d'interferenza prodotte dall'incrocio di due raggi laser (vedi fig. 17, 18, 19 )

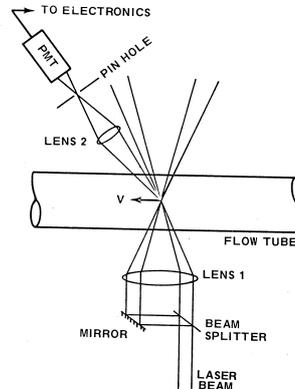


Figura 17:

La sorgente laser genera infatti un raggio monocromatico (composto cioè da treni d'onda caratterizzati da un'unica e ben determinata frequenza), che viene successivamente suddiviso in due. I due raggi vengono focalizzati mediante un sistema di lenti nel volume di misura (un ellissoide di  $1\text{mm}^3$  circa). In questa zona, l'interferenza dei due raggi per effetto della differenza di cammino ottico percorso, produce un'alternanza di strisce buie e strisce più luminose (vedi fig. 19, 21) Quando una particella in-seminante transita in questa zona di frange d'interferenza, attraversa in sequenza zone "luminose" e meno luminose ("buie"). La luce "diffusa" dalla particella ha dunque un andamento alternato: la sua intensità varia cioè con una certa frequenza  $f$  pari  $1/T$ , dove  $T$  è il tempo impiegato dalla particella per passare da una frangia luminosa alla

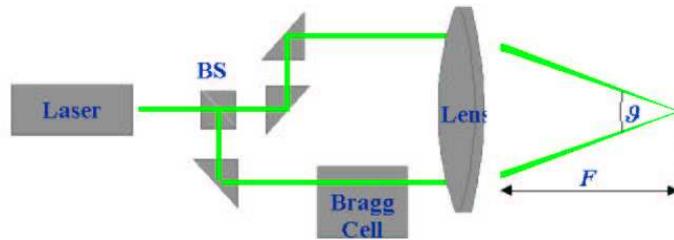


Figura 18:



Figura 19:

successiva. In definitiva:

$$T = \Delta/U, \quad (8)$$

con  $\Delta$  = spaziatura fra le frange e  $U$  = componente della velocità da misurare normale al sistema di frange.

E' chiaro quindi che la componente  $U$  (normale alle frange) puo' essere determinata conoscendo:

- \* la spaziatura fra le frange
- \* l'intervallo di tempo  $T$ .

L'intervallo di tempo  $T$  si determina facilmente registrando il segnale luminoso diffuso dalle particelle che attraversano il volume di misura. Per far cio' si utilizza un fotomoltiplicatore, cioe' un sensore che produce in uscita una tensione proporzionale all'intensità della luce che lo colpisce.

Una volta registrato questo segnale, il tempo  $T$  puo' essere facilmente misurato (ad es. con un'analisi in frequenza che ne evidenzi la componente fondamentale  $1/T$ ). Per quanto riguarda la distanza  $\Delta$ , e' facile dimostrare che essa è una caratteristica del sistema di misura, dipende cioè solamente dalla frequenza del laser e dall'angolo di incidenza fra i due raggi:  $\Delta = \frac{\lambda}{2 \sin \theta}$ <sup>2</sup>

La velocità delle particelle che attraversano il punto di misura (pari alla velocità del fluido nello stesso punto, per ipotesi) e' dunque dato da:

$$U = \Delta/T = \lambda/2T \cdot \sin \theta \quad (9)$$

<sup>2</sup>Per il calcolo della spaziatura fra le frange, fare riferimento alla fig. 20 e ai calcoli alla fine del paragrafo

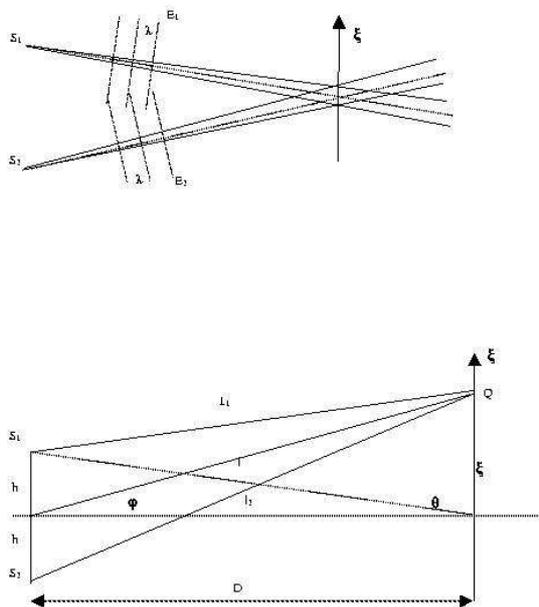


Figura 20:

La relazione fra velocità del flusso e frequenza del segnale rilevato è lineare e dipende solo dalle caratteristiche dell'apparato sperimentale. Il sistema è quindi da questo punto di vista molto stabile e non ha bisogno di taratura.

Notiamo che

- \* il segnale luminoso diffuso dalla particella è modulata da una curva gaussiana, (fig. 21). Questo è dovuto al fatto che l'intensità luminosa del raggio laser non è uniforme (su una sezione trasversale), ma decresce muovendosi dal centro del raggio verso l'esterno (fig. 22). Per questo motivo le frange centrali risultano più luminose di quelle laterali.
- \* Con il sistema appena illustrato, delle particelle che si muovano con la stessa velocità, ma in direzioni opposte, producono dei segnali (rilevati dal fotomoltiplicatore) identici (fig. 23). Per ovviare a quest'ambiguità direzionale, uno dei due raggi laser, prima di essere focalizzato nel punto di misura, passa attraverso la cosiddetta "cella di Bragg", che ne modifica leggermente la frequenza. In questo modo, il sistema di frange non è più fisso nello spazio, ma "scorre" con una velocità legata allo shift in frequenza fra i due raggi. La velocità assoluta delle particelle si ottiene semplicemente aggiungendo alla velocità relativa (misurata rispetto al sistema di frange) la velocità stessa delle frange.

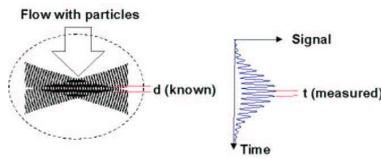


Figura 21:

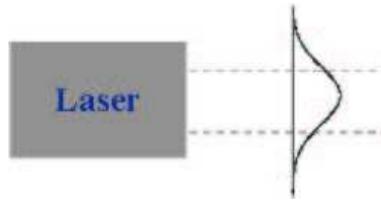


Figura 22:

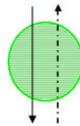


Figura 23:

Calcolo della spaziature delle frange (fig. 20)

$S_1$  e  $S_2$  sono i punti da cui provengono i due raggi laser, che, data la piccola apertura del cono, possono essere assimilati a due onde elettromagnetiche piane, di numero d'onda  $k = 2\pi/\lambda$ , con  $\lambda =$  lunghezza d'onda  $= cT = c/f$  ( $f$ =frequenza del laser). Ognuna delle due onde puo' essere espressa nella forma

$$E = A \sin(kx - \omega t + \delta) \quad (10)$$

o, equivalentemente, nella forma complessa

$$E = A e^{j(kx - \omega t + \delta)}. \quad (11)$$

Vediamo quali condizioni devono essere verificate per avere nel generico punto Q dell'asse  $\xi$ , una frangia luminosa (interferenza costruttiva, -le due onde arrivano in fase) o una frangia buia (interferenza distruttiva -le due onde arrivano in opposizione di fase).  $D$  rappresenta la distanza tra la lente che focalizza i due raggi nel punto di misura e il punto di misura stesso, gli angoli  $\phi$  e  $\theta$  sono, vista la geometria del sistema, entrambi molto piccoli, e permettono di semplificare le due distanze  $S_1Q$  e  $S_2Q$

$$\phi \ll \rightarrow S_1Q = l_1 = l - h \sin\phi \quad (12)$$

$$S_2Q = l_2 = l + h \sin\phi \quad (13)$$

Inoltre abbiamo che:

$$E_1 = A_1 \sin(kx - \omega t + \delta_1) \rightarrow A_1 e^{j(kx - \omega t + \delta_1)} \quad (14)$$

$$E_2 = A_2 \sin(kx - \omega t + \delta_2) \rightarrow A_2 e^{j(kx - \omega t + \delta_2)} \quad (15)$$

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} \quad \omega = 2\pi f \quad \lambda = cT = \frac{c}{f} \quad (16)$$

In  $Q$  all'istante  $t = 0$ , e assumendo  $\delta_1 = \delta_2 = 0$  abbiamo che:

$$E_1 = A_1 e^{jk(l-h \sin\phi)} \quad (17)$$

$$E_2 = A_2 e^{jk(l+h \sin\phi)} \quad (18)$$

$$E = E_1 + E_2 \quad I = |\vec{E}|^2 = E \cdot E^* = (E_1 + E_2) \cdot (E_1 + E_2)^* \quad (19)$$

L'intensità dell'onda risultante è data da:

$$I = (E_1 + E_2) \cdot (E_1 + E_2)^* = A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2 \cos\Delta = \quad (20)$$

$$= A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2 \cos(2kh \sin\phi) = \quad (21)$$

$$(22)$$

Essendo  $\phi \ll$ :  $\sin\phi \simeq \text{tg}\phi = \frac{\xi}{D}$

i punti in cui l'intensità è massima sono quelli caratterizzati da:

$$I = I_{MAX} \Rightarrow \cos\Delta = 1 \quad (23)$$

$$2hk \frac{\xi}{D} = 2n\pi \Rightarrow \xi_n = \frac{n\lambda D}{2h} \quad (24)$$

e quindi la distanza fra una frangia luminosa e la successiva è data dalla distanza  $\Delta_F$  fra 2 massimi relativi = larghezza frange

$$\Delta_F = \xi_n - \xi_{n-1} = \frac{\lambda D}{2h} \quad (25)$$

essendo  $\frac{h}{D} \ll 1$ ,  $\frac{h}{D} = \text{tg}\theta \simeq \sin\theta$  abbiamo che:

$$\Delta_F = \frac{\lambda}{2\sin\theta} \quad (26)$$

## – PIV (Particle Image Velocimetry)

I metodi fin qui esaminati permettono di misurare una o più componenti della velocità in un solo punto del dominio. La determinazione del campo di velocità in una regione estesa richiederebbe la disponibilità di un numero elevato di sonde, ovvero un'unica sonda con opportuni sistemi di movimentazione per spostarla (con ovvie complicazioni costruttive, ripercussioni anche sui tempi degli esperimenti e comunque l'impossibilità di misurare la velocità simultaneamente nei vari punti).

Tipicamente quindi le tecniche finora esaminate sono utilizzate per ottenere statistiche del campo fluidodinamico (valori medi e valori r.m.s per esempio) in pochi punti del dominio.

La Particle Image Velocimetry permette invece la misura simultanea di *due* componenti del vettore velocità in più punti appartenenti allo stesso piano. Più precisamente, le componenti di velocità che vengono rilevate sono quelle nel piano di misura (fig. 24).

La PIV è dunque particolarmente indicata per i flussi non stazionari, per studiare le caratteristiche del campo di velocità istantaneo (è utilizzata ad esempio per lo studio delle cosiddette "strutture coerenti" dei flussi turbolenti).

## Principio di funzionamento

Il principio di funzionamento è relativamente semplice (vedi fig. 24), anche se la tecnica PIV coinvolge molte discipline (fluidodinamica, ottica, image-processing, analisi del segnale). Esso consiste nel determinare lo spostamento, in un intervallo di tempo noto, di particelle traccianti con cui viene inseminato il fluido. Come nel caso del Laser Doppler, tipo e dimensioni delle particelle sono scelti in modo tale da non alterare le proprietà fisiche del fluido, e le particelle sono sufficientemente piccole da seguire fedelmente le variazioni di velocità del fluido stesso. Con questi presupposti, il moto delle particelle fluide può essere assimilato a quello delle particelle traccianti. I traccianti sono scelti inoltre in modo da poter diffondere la luce che li colpisce, emessa da una sorgente laser (non possono dunque essere *troppo* piccoli, altrimenti non diffonderebbero una quantità di luce sufficiente), e la loro posizione può dunque essere registrata su un opportuno dispositivo (macchina fotografica o telecamera, analogiche o digitali).

Nella PIV, dunque, le posizioni successive occupate dai traccianti vengono registrate almeno due volte, a brevissime distanze temporali (vedi fig. 25). Un software opportuno risale agli spostamenti delle particelle tra i due istanti. Se l'intervallo temporale fra i due "scatti" è sufficientemente piccolo, dunque, il campo di velocità si ottiene direttamente dividendo lo spostamento calcolato per l'intervallo di tempo corrispondente.

## Set-up

Un classico set-up PIV comprende quindi:

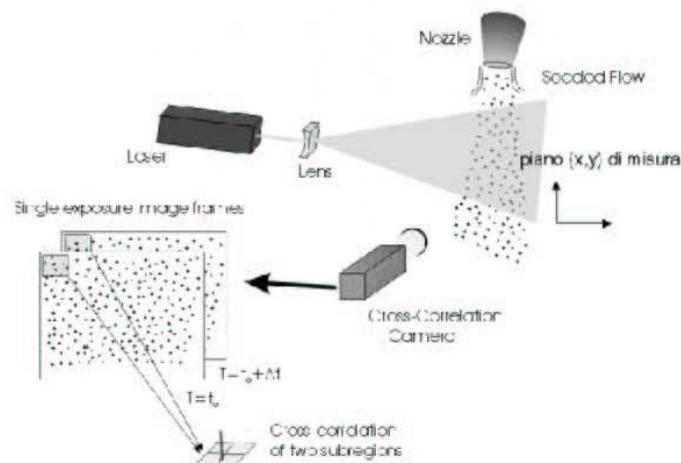


Figura 24:

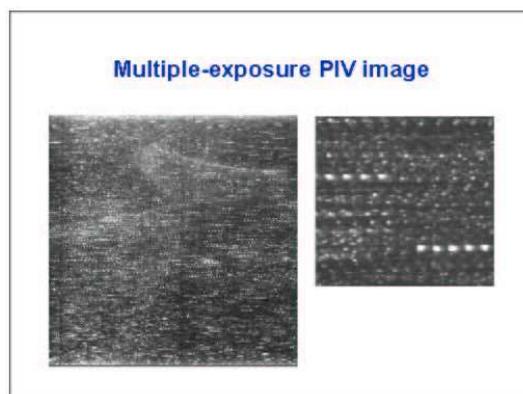


Figura 25:

- 1) un dispositivo di iniezione del fluido
- 2) una sorgente di luce che (tipicamente un laser pulsato, in grado cioè di emettere un raggio luminoso ad intervalli di tempo regolari. La presenza di un laser in realtà non è indispensabile: in alcuni casi è sufficiente ad esempio una luce stroboscopica)
- 3) dei dispositivi ottici per trasformare la sorgente di luce in un piano luminoso (tipicamente una lente cilindrica e una sferica nel caso in cui la sorgente di luce sia un raggio laser). Tale piano costituisce il vero e proprio piano di misura, dove cioè, punto per punto, saranno determinate le due componenti del vettore velocità.
- 4) un sistema di registrazione delle immagini delle particelle che si trovano nel piano di misura e che "riemettono" la luce del laser. La loro posizione viene registrata sulla pellicola di una macchina fotografica o di una telecamera.
- 5) un software opportuno per il calcolo del campo di velocità, che permetta cioè di stabilire la posizione di "ogni" particella in due istanti successivi, e ne calcoli quindi lo spostamento nell'intervallo di tempo corrispondente.

Come detto, le immagini delle particelle traccianti sono registrate almeno due volte in rapida successione. Nel caso della fig. 25 abbiamo cinque posizioni successive della particella in basso a destra.

Si possono in realta' seguire diverse strategie per l'acquisizione delle immagini delle particelle. In particolare possiamo avere:

1) un unico fotogramma con le posizioni successive delle singole particelle nei diversi istanti di tempo (single-frame, multi-exposure). Si ottiene con un laser pulsato ed un'unica esposizione della macchina fotografica. E' il caso rappresentato in fig. 31 , dove l'obiettivo della macchina fotografica viene lasciato aperto mentre il laser emette 5 impulsi.

2) due (o piu') fotogrammi, ognuno con la posizione delle particelle negli istanti di tempo considerati (multi-frame, single exposure). Si ottiene, per esempio, con un laser *continuo* e due (o piu') scatti della macchina fotografica (fig. 30).

## Analisi dell'immagine

Le immagini PIV sono analizzate suddividendole in tanti piccoli sottodomini (zone d'interrogazione), all'interno delle quali si considera il campo di velocita' uniforme (fig. 26). All'interno di ogni zona d'interrogazione verrà dunque determinato un solo vettore velocità. Per capire come ricavare il campo di velocità, possiamo considerare il

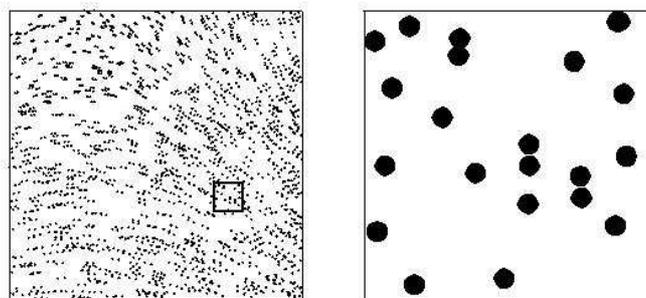


Figura 26:

semplice caso di una zona d'interrogazione estratta da due frames separati (modalita' "multi-esposizione")

Come si vede, in ogni zona di interrogazione sono normalmente presenti molte particelle (tipicamente piu' di 15-20), e non e' quindi possibile stabilire l'esatta posizione occupata da *ciascuna* particella negli istanti di tempo considerati (è questo il caso della PIV propriamente detta: gli spostamenti di ogni particella fra uno scatto e l'altro sono molto maggiori della distanza media fra le particelle, e quindi non possono essere determinati precisamente per *ogni* particella; nel caso della Particle Tracking ("inseguimento") Velocimetry, invece, la densita' di particelle insemminanti e' molto bassa, dunque gli spostamenti sono molto piu' piccoli della distanza media fra due

particelle, ed e' possibile "inseguire" le singole particelle). Nel caso della PIV, si ricorre allora ad un'indagine statistica, si determina cioè lo spostamento *più probabile* subito da *tutte* le particelle della singola zona d'interrogazione. Questa operazione viene normalmente realizzata tramite la funzione di correlazione (più precisamente una cross-correlazione nel caso di 2 o più frames e di un'autocorrelazione nel caso di un unico frame).

Più semplicemente, si può pensare di calcolare lo spostamento medio all'interno di una singola zona di interrogazione nel seguente modo: consideriamo una particella della zona d'interrogazione che all'istante iniziale  $t_1$  si trova nella posizione  $P_1$  e nella posizione  $P'_1$  all'istante successivo  $t'_1$  (fig. 27). Supponiamo inoltre che le altre particelle si siano spostate esattamente della stessa distanza (in questo caso particolare, che abbiano traslato della stessa quantità nella sola direzione orizzontale). Lo spostamento comune a tutte le particelle della zona d'interrogazione sarà dunque pari a  $(\Delta x, 0)$ .

Determiniamo l'istogramma dei possibili spostamenti in direzione orizzontale della particella che si trova in  $P_1$  all'istante iniziale. I possibili vettori spostamento sono, evidentemente, quelli rappresentati in fig. 27 e l'istogramma relativo a questi spostamenti assomiglierà a quello indicato in fig. 28. Lo stesso procedimento può essere applicato a tutte le altre particelle presenti nel primo frame (si può cioè costruire l'istogramma dei possibili spostamenti, sempre in direzione orizzontale, della particella che si trova in  $P_2$  all'istante iniziale, e sommarlo all'istogramma precedente. Costruendo l'istogramma relativo a tutte le particelle, i contributi relativi allo spostamento comune a tutte le particelle tenderanno a sommarsi, e l'istogramma presenterà un massimo in corrispondenza dello spostamento effettivo (fig. 29). Lo spostamento orizzontale (per ipotesi uniforme in tutta la zona di interrogazione) potrà dunque essere calcolato partendo dal picco dell'istogramma. Analogamente si può procedere per calcolare l'istogramma relativo agli spostamenti verticali delle particelle della singola zona d'interrogazione (e l'istogramma presenterebbe in questo caso un massimo in corrispondenza dello zero).

Nella realtà si utilizza, come accennato, la funzione di cross-correlazione. L'immagine viene cioè digitalizzata, e quindi e' possibile calcolare, per ciascuno dei frames, la funzione  $I(x,y)$  (con  $I$  intero compreso fra 0 e 255) rappresentante l'intensità luminosa nel generico punto  $(x,y)$  (fig. 30). Semplificando le cose, la funzione  $W(x,y)$  raggiungerà il suo valore massimo in ogni punto ("pixel")  $(\bar{x}, \bar{y})$  dove si trova una particella ("nero"), mentre raggiungerà il suo valore minimo ("bianco") in ogni pixel dove non ci sono particelle. Disponendo di due frames separati avremo due funzioni  $W_1(x, y)$  e  $W_2(x, y)$ , relative al primo e al secondo frame rispettivamente. Si può quindi calcolare la cross-correlazione fra le due funzioni  $W_1$  e  $W_2$ , definita come

$$R(\Delta x, \Delta y) = \int \int W_1(x, y) W_2(x + \Delta x, y + \Delta y) dx dy. \quad (27)$$

Se *tutte* le particelle si sono spostate della stessa quantità  $(\overline{\Delta x}, \overline{\Delta y})$ , allora la funzione di cross-correlazione sarà ovunque zero, tranne in corrispondenza dello shift  $(\Delta x, \Delta y) = (\overline{\Delta x}, \overline{\Delta y})$ . Lo spostamento può dunque essere ricavato individuando il

massimo della funzione di cross-correlazione (nella realtà, fig. 30, la funzione di cross-correlazione avrà un andamento più complicato di quello appena descritto, per via del fatto che non tutte le particelle si saranno spostate della stessa quantità, che alcune particelle saranno uscite dalla zona d'interrogazione o addirittura fuori dal piano di misura, del rumore di fondo.... Tuttavia, continuerà a presentare un massimo in corrispondenza dello spostamento più probabile subito dalle particelle della zona d'interrogazione)

Nel caso di un singolo frame, con più esposizioni (fig. 31), si procede al calcolo della funzione di autocorrelazione di  $W_1(x, y)$ :

$$R(\Delta x, \Delta y) = \int \int W_1(x, y) W_1(x + \Delta x, y + \Delta y) dx dy. \quad (28)$$

La funzione di (auto)correlazione presenterà sicuramente un massimo in corrispondenza dello spostamento (0,0), ma esisteranno anche altri due picchi più piccoli, corrispondenti al valore dello spostamento (più o meno uniforme) delle particelle della zona di interrogazione (in effetti, con un solo frame, il verso dello spostamento rimane indeterminato).

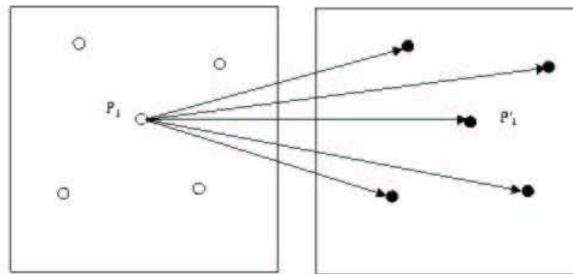


Figura 27:

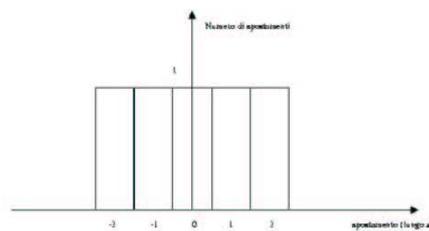


Figura 28:

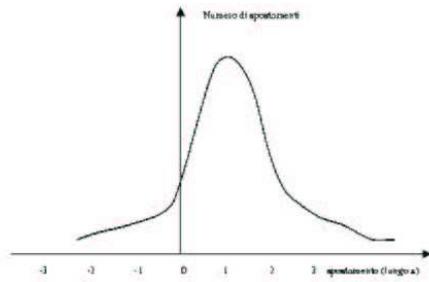


Figura 29:

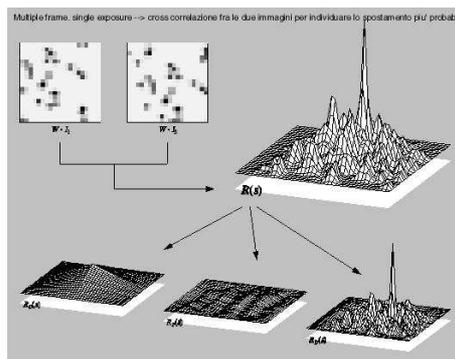


Figura 30:

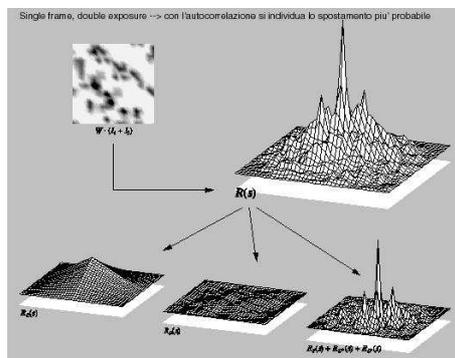


Figura 31:

# Errata Corrige

30 dicembre 2002

- pag.33** 2.4.4 manca un + a secondo membro tra  $\rho f_i$  e  $\frac{\partial T_{ij}}{\partial x_j}$
- pag.33** 2.5.1 c'è una  $\rho$  in più nell'ultimo integrale
- pag.34** 2.5.3 manca  $x_j$  nel primo integrale
- pag.34** 2.5.3  $T_{kl}$  invece di  $T_{ke}$
- pag.34** x
- pag.38** 8 righe dalla fine “compressibile” invece di “comporessibile”
- pag.39** punto c “indnipendente” invece di “indnipendente”
- pag.40** terza riga 2.9.5 invece di 2.9.4
- pag.41** ultima riga del 2.10 cancellare “ha”
- pag.51** 3.4.4  $x_j$  invece di  $x_i$  al denominatore del primo membro
- pag.55** 4 righe dalla fine 3.6.3 invece di 3.6.5
- pag.63** 4.1.4  $-\frac{\partial p}{\partial x_i}$  invece di  $+\frac{\partial p}{\partial x_i}$
- pag.64** 4.1.8  $c_p$  invece di  $c_v$
- pag.67** 4.3.6  $U_0^2$  invece di  $U_0$
- pag.68** 4.3.14 togliere  $K^*$
- pag.71** prima riga “fluidi” invece di “fluido”
- pag.72** 2 righe dopo la 4.5.10 “applicando” invece di “aplicando”
- pag.72** 4.5.12 ultimo termine  $\mu \frac{U_0}{L_0^2}$  invece di  $\mu \frac{U_0^2}{L_0}$
- pag.72** prima riga dopo 4.5.12  $\frac{\rho_0 U_0 L_0}{\mu}$  invece di  $\frac{\mu_0}{\rho_0 U_0 L_0}$
- pag.72** x