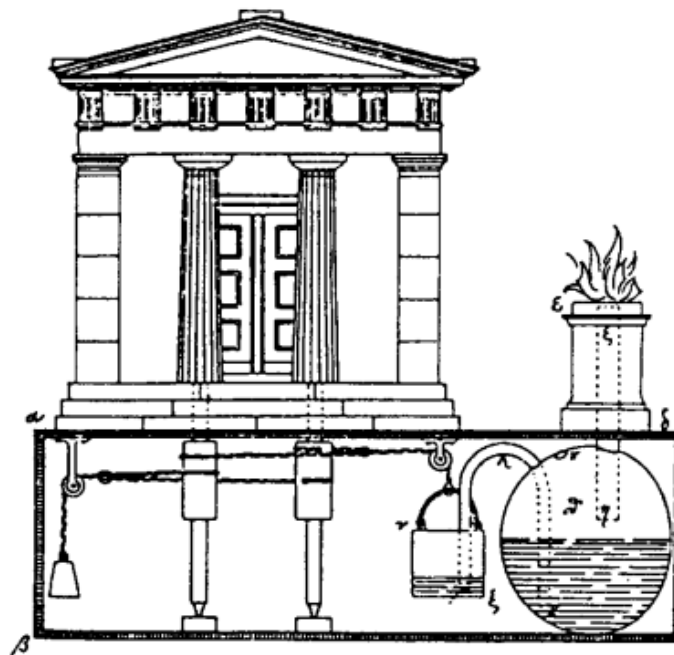




Università degli studi di Cagliari

Dipartimento di Ingegneria del territorio

# Appunti dal corso di **Fisica Tecnica**



„Tempeltüren öffnender Automat“ des Heron v. Alexandria  
(aus *Περὶ Αὐτοματοποιητικῆς* um 50 n. Chr.)

## Sommarario

### 1. Termodinamica Applicata

1

Sistema termodinamico  
Equilibrio termico  
Principio zero della termodinamica  
Concetto di temperatura e sua misurazione  
Temperatura del gas ideale  
Scala Celsius di temperatura  
Termometri  
Termometri a dilatazione  
Scala internazionale pratica di temperatura del 1968  
Scala Rankine e Fahrenheit  
Equilibrio termodinamico  
Equazione di stato  
Sistemi PVT  
Concetto di lavoro  
Lavoro per variare il volume di un sistema PVT  
Diagramma PV o dell'indicatore  
Lavoro e calore - concetto di calore  
Lavoro adiabatico ed energia interna  
Primo Principio della Termodinamica  
Unità di misura del calore  
Entalpia  
Capacità termica  
Serbatoio di calore o pozzo di energia termica  
Diagramma PV per una sostanza pura o diagramma di Clapeyron  
Diagramma PT per una sostanza pura  
Equazione di stato di un gas  
Energia interna di un gas  
Gas ideali  
Trasformazioni adiabatiche quasi statiche di un gas ideale  
Conversione di lavoro in calore e viceversa – Secondo Principio della Termodinamica  
Macchina frigorifera  
Equivalenza degli enunciati di Kelvin-Planck e Clausius  
La pompa di calore  
Ciclo frigorifero ad assorbimento  
Reversibilità e irreversibilità  
Ciclo di Carnot  
Ciclo di Carnot di un gas ideale  
Teorema di Carnot  
Temperatura Kelvin o temperatura termodinamica  
Eguaglianza tra la temperatura del gas ideale e la temperatura Kelvin  
Cicli termodinamici  
Dispositivi per la trasformazione di calore in lavoro  
Macchina di Stirling  
Macchina a vapore  
Ciclo Otto  
Ciclo Diesel  
Teorema di Clausius  
Entropia  
Entropia di un gas ideale  
Trasformazione isentropica quasi statica di un gas ideale  
Diagramma TS  
Principio dell'aumento di entropia  
Entropia ed exergia  
Bilanci energetici ed exergetici  
Principio dell'annichilimento dell'exergia totale  
Entropia e disordine  
Frigoriferi e pompe di calore  
Esercizio

### 2. Moto dei fluidi

33

Sistemi termodinamici chiusi  
Sistemi termodinamici aperti  
Viscosità  
Conservazione della massa  
Conservazione dell'energia  
Conservazione dell'energia: casi particolari  
Equazione di Bernoulli  
Equazione di Bernoulli: casi particolari  
Effetto Joule-Thomson  
Regime laminare e regime turbolento  
Calcolo delle perdite di carico nel moto dei fluidi in condotti

**3. Aria umida e psicrometria****42**

Cambiamenti di fase – vapori saturi e surriscaldati  
Equazione di Clapeyron  
Proprietà dei miscugli aria-vapor d'acqua  
Equazione di stato aria umida  
Diagramma psicrometrico  
Impiego del diagramma psicrometrico  
Condizioni di benessere  
Benessere ambientale  
Diagrammi di Mollier

**4. Trasmissione del calore****48**

Trasmissione del calore per conduttività interna  
Equazione di Fourier o del calore  
Lastra piana in regime stazionario  
Tubo cilindrico in regime stazionario  
Lastra piana in regime stazionario con sviluppo interno di calore  
Tubo cilindrico in regime stazionario con sviluppo interno di calore  
Parete composta multistrato  
Mezzo semi infinito in regime periodico stabilizzato  
Trasmissione del calore per convezione  
Trasmissione del calore per irraggiamento  
Corpo nero e sue proprietà  
Trasmissione di calore tra due corpi grigi affacciati  
Schermi di radiazione  
Trasmissione di calore tra due corpi grigi disposti in posizione qualunque  
Superfici selettive  
Effetto serra – pareti vetrate esposte a irraggiamento solare  
Effetto Francia  
Trasferimento di calore per adduzione  
Parete piana omogenea posta tra due fluidi in regime stazionario  
Parete piana non omogenea tra due fluidi in regime stazionario  
Parete con camera d'aria  
Parete opaca esposta ad irraggiamento solare  
Scambiatori di calore  
Parete piana tra due fluidi in regime periodico di temperatura  
Legge 373 e risparmio energetico  
Impostazione progettuale  
La condensa

**5. Illuminotecnica****73**

Introduzione  
Visibilità  
Flusso luminoso  
Illuminamento  
Radianza  
Intensità luminosa  
Luminanza  
Relazioni tra grandezze fotometriche  
Percezione del colore  
Apparecchi di illuminazione  
Illuminazione stradale e sua progettazione  
Metodo del flusso totale  
Illuminazione diurna  
Metodo del fattore finestra  
Metodo B.R.S.  
Illuminazione artificiale di un ambiente chiuso

**6. Acustica****83**

Introduzione  
Livello sonoro  
Livello sonoro di due sorgenti  
Spettri acustici - analisi acustica  
Audiogramma normale  
Mascheramento  
Correzione acustica  
Materiali fonoassorbenti  
Acustica degli ambienti chiusi  
Isolamento acustico  
Parete con intercapedine

# 1. Termodinamica Applicata

## Sistema termodinamico

Studiare un sistema termodinamico significa descriverlo mediante delle grandezze legate al suo comportamento. Per fare ciò esistono due metodologie. La prima presuppone un'analisi puntuale che può essere realizzata definendo in ogni punto delle grandezze microscopiche caratterizzanti il sistema, mentre la seconda fornisce dati medi e si basa su grandezze macroscopiche. Questo ultimo è il metodo più usato poiché comporta due vantaggi:

1. consente di studiare il comportamento del sistema mediante la definizione di un piccolo numero di grandezze
2. consente di mettere in evidenza e di studiare certe proprietà generali dei sistemi termodinamici senza entrare nella struttura atomica.

Le grandezze che vengono definite e che sono sufficienti a fornire una completa descrizione del sistema sono dette **coordinate termodinamiche**. Le grandezze macroscopiche sono la media di quelle microscopiche.

## Equilibrio termico

Consideriamo due sistemi termodinamici A e B. siano  $x, y$  le coordinate termodinamiche che descrivono il sistema A e  $x_1, y_1$  quelle che descrivono il sistema B.

Supponiamo di porre i due sistemi in comunicazione tramite una membrana adiabatica costituita da materiale isolante per la trasmissione del calore; i due sistemi mantengono invariato il proprio stato, ossia A e B saranno ancora definiti da  $x, y$  e  $x_1, y_1$ .

Supponiamo ora di porre i due sistemi in comunicazione tramite una membrana diatermica costituita da materiali conduttori per la trasmissione del calore; dopo un intervallo di tempo più o meno lungo entrambi i sistemi saranno identificabili dalle coordinate  $x'', y''$ . Raggiunta questa condizione e supposte nulle le interazioni col mondo esterno, si dice che i due sistemi sono in equilibrio termico.

**Equilibrio termico:** equilibrio raggiunto da due o più sistemi quando vengono messi a contatto mediante una parete diatermica

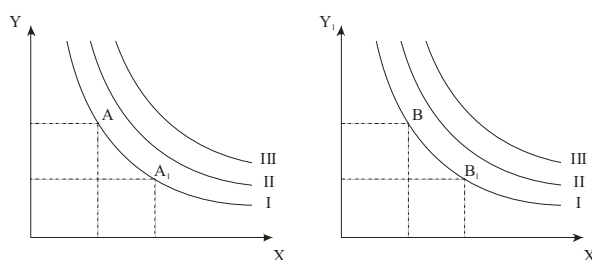
## Principio zero della termodinamica

Consideriamo due sistemi A e B separati da una parete adiabatica, ciascuno dei quali è a contatto mediante una parete diatermica con un sistema C. Dopo un certo tempo A e C raggiungono l'equilibrio termico e lo stesso succede per B e C. Possiamo affermare che anche A e B raggiungono l'equilibrio termico. Se ora pensiamo di sostituire la parete adiabatica con una diatermica e viceversa, A e B saranno ancora in equilibrio tra di loro, quindi:

**due sistemi in equilibrio termico con un terzo sono in equilibrio termico tra di loro.**

## Concetto di temperatura e sua misurazione

Consideriamo due sistemi A e B in equilibrio termico tra di loro. Si dimostra sperimentalmente che esiste almeno un altro stato di A, ad esempio  $A_1$ , che risulta in equilibrio con B. Per il principio zero  $A_1$  sarà in equilibrio termico con A. In modo analogo possiamo trovare un insieme di stati  $A_1, A_2, \dots, A_n$  che è in equilibrio termico con B. con questi valori possiamo costruire una curva detta *isoterma* che è il luogo dei punti che rappresentano stati in cui un sistema è in equilibrio termico con uno stato prefissato di un altro sistema.



Analogamente possiamo trovare uno stato  $B_1$  in equilibrio con A. Per il principio zero  $B_1$  sarà in equilibrio con B. Anche in questo caso possiamo costruire una curva isoterma chiamata **isoterma corrispondente**. A tali isoterme può essere associato un valore che le identifica e le individualizza chiamato **temperatura**.

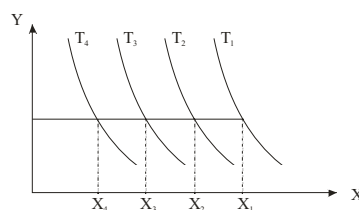
Pertanto **la temperatura di un sistema è quella proprietà che stabilisce se un sistema è o meno in equilibrio termico con altri sistemi**.

È chiaro che due sistemi sono in equilibrio termico quando hanno la stessa temperatura.

Va definita ora un'operazione che misuri la temperatura ossia che la esprima numericamente; il problema è quello di identificare un'isoterma mediante un valore numerico. Consideriamo un sistema qualunque definito dalle coordinate  $x, y$ . Vogliamo associare ad ogni isoterma un valore della temperatura, in modo da attribuire ad un qualunque altro sistema in equilibrio col precedente la stessa temperatura.

Supponiamo di tenere costante una delle due coordinate termodinamiche, ad es. la  $y$ . In questo modo la  $x$  esprime un valore che identifica ogni isoterma. È chiaro che le varie isoterme sono assegnate quando diamo  $x_1$  per  $T_1$ ,  $x_2$  per  $T_2$  ecc.

In questo modo abbiamo costruito un **termometro**.



La coordinata  $x$  prende il nome di **caratteristica termometrica**, mentre la scala di temperatura è fissata dalla forma della funzione termometrica  $\vartheta(x)$ . Indichiamo con  $x$  una qualunque delle caratteristiche termometriche (pressione, f.e.m., lunghezza...) e decidiamo arbitrariamente di definire la scala di temperatura in modo che la temperatura  $\vartheta$  sia direttamente proporzionale a  $x$ . Questo significa che la temperatura del termometro, e quindi di tutti i sistemi in equilibrio termico con esso, è fornita dalla relazione:

$$\vartheta(x) = ax \quad (y = \text{cost.})$$

Per conoscere la temperatura  $\vartheta$  occorre conoscere la costante di proporzionalità  $a$ . Si procede, per far ciò, alla taratura del termometro che consiste nello scegliere un opportuno punto di riferimento. Si fissa quindi una temperatura arbitraria a un fenomeno fisico perfettamente determinato e, nota la  $x$ , si ricava  $a$ .

Dal 1954 si prende come punto fisso il *punto triplo* dell'acqua. Alla temperatura di questo stato viene attribuito arbitrariamente il valore di 273,16 K. Quindi:

$$273,16 = a x_t \quad \Rightarrow \quad a = 273,16 \times \frac{1}{x_t}$$

dove  $x_t$  è il valore che assume la  $x$  alla temperatura del punto triplo. Si ricava:

$$\vartheta(x) = 273,16 \times \frac{x}{x_t}$$

Applicando questo risultato a termometri differenti otteniamo diversi modi di misurare la temperatura:

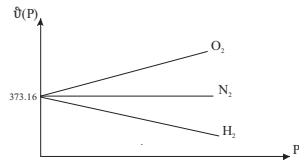
- $\vartheta(P) = 273,16 \times \frac{P}{P_t}$  termometro a gas (variazione di pressione a volume costante)
- $\vartheta(R) = 273,16 \times \frac{R}{R_t}$  termometro a resistore elettrico
- $\vartheta(e) = 273,16 \times \frac{e}{e_t}$  termometro a termocoppia
- $\vartheta(L) = 273,16 \times \frac{L}{L_t}$  termometro a liquido in capillare di vetro

La temperatura è una caratteristica del corpo e non può dipendere dal termometro utilizzato.

Supponiamo di misurare la temperatura di un dato sistema simultaneamente con i quattro termometri. I risultati mostrerebbero che questi forniscono risultati diversi.

## Temperatura del gas ideale

Consideriamo un termometro ad ossigeno, dove la temperatura del corpo venga misurata come la variazione di pressione a volume costante. Si è visto che a seconda del valore dato a  $P_t$  la temperatura misurata dal termometro era diversa. Le diverse temperature misurate stanno però su una comune retta e tendono a un preciso valore, per  $P_t$  che tende a zero. Uguale risultato si ottiene utilizzando un termometro ad azoto: i valori della temperatura variano al variare di  $P_t$ , ma per  $P_t \rightarrow 0$  essi tendono ad un valore uguale a quello trovato precedentemente.



Per fare in modo che la temperatura non dipenda né dal gas utilizzato né dalla pressione  $P_t$ , chiamata *pressione di precarica*, possiamo prendere il valore del limite:

$$T = 273,16 \times \frac{P}{\lim_{P_t \rightarrow 0} P_t}$$

Dato che il comportamento del gas, quando la pressione tende a zero è lo stesso, indipendentemente dalla sua natura, si considera questo comportamento come **ideale** e quindi la temperatura calcolata nel modo precedente è detta *temperatura del gas ideale*.

## Scala Celsius di temperatura

Utilizza un grado avente la stessa ampiezza di quello della scala del gas ideale, ma il suo zero è spostato in modo che la temperatura Celsius del punto triplo dell'acqua risulta  $0,01^\circ \text{Celsius}$ .

Indicando con  $t$  la temperatura Celsius si ha:

$$t(^{\circ}\text{C}) = T(\text{K}) - 273,15$$

Dato che la temperatura del vapor d'acqua in condensazione è  $373,15 \text{ K}$ , applicando la formula precedente si ha  $t = 100^{\circ}\text{C}$ . Analogamente si mostra che al punto del ghiaccio (ossia in cui acqua e ghiaccio sono in equilibrio alla pressione di  $1 \text{ atm}$ ) la temperatura è  $t = 0,0^{\circ}\text{C}$ .

## Termometri

Caratteristiche:

- sensibilità** – misurata dalla più piccola variazione di temperatura che lo strumento è in grado di misurare
- precisione** – misurata dalla differenza tra la temperatura indicata e quella effettiva
- campo di misura** – intervallo di temperatura entro il quale il termometro può operare
- prontezza** – misurata dall'intervallo di tempo necessario perché il termometro si porti in equilibrio termico col corpo o con l'ambiente d'interesse.

Termometri a dilatazione

**Termometro a liquido in capillare di vetro** – è costituito da un capillare di vetro a sezione costante connesso a un bulbo pieno di liquido. All'aumentare della temperatura il liquido si espande e sale lungo il capillare. La lunghezza  $L$  del capillare pieno di liquido è proporzionale alla temperatura e quindi può essere utilizzata come caratteristica termodinamica. La scala della temperatura è definita in modo tale che la temperatura  $t^*$  sia funzione lineare di  $L$ :

$$t^* = aL + b$$

Per ricavare  $a$  e  $b$  consideriamo due punti di riferimento  $L_1 = L(t_1^*)$  e  $L_2 = L(t_2^*)$ . Abbiamo:

$$\begin{cases} t_1^* = aL_1 + b \\ t_2^* = aL_2 + b \end{cases}$$

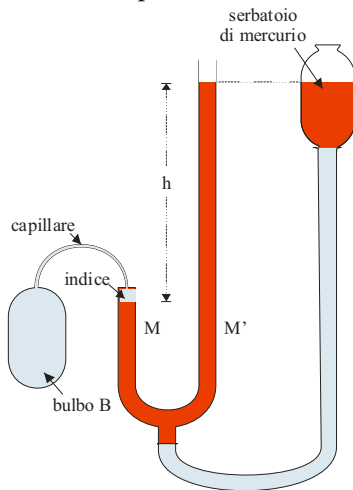
In maniera del tutto affine otteniamo:

$$t^* - t_2^* = a(L - L_2)$$

Dividendo le due espressioni trovate si ottiene:

$$\frac{t^* - t_2^*}{t_2^* - t_1^*} = \frac{L - L_2}{L_2 - L_1} \Rightarrow t^* = \frac{t_2^* (L - L_2) + t_1^* (L_2 - L_1)}{L_2 - L_1}$$

**Termometro a gas** – il gas è contenuto nel bulbo B che è in comunicazione con la colonna di mercurio M tramite un capillare. Il volume del gas può essere mantenuto costante alzando o abbassando il serbatoio in



modo da mantenere la superficie del mercurio nella colonna M a contatto con la punta di un piccolo indice posto al di sopra di M, in uno spazio che non viene mai riempito dal mercurio e che viene quindi detto SPAZIO MORTO o VOLUME INUTILIZZABILE.

Si misura la differenza di quota  $h$  tra le due colonne di mercurio quando il bulbo è a contatto termico con il sistema di cui si deve misurare la temperatura e quando è a contatto con acqua al punto triplo.

La pressione del gas nel bulbo B è uguale alla pressione atmosferica aumentata della pressione equivalente al dislivello di mercurio  $h$ . È possibile qualche errore sistematico. La temperatura è data da:

$$\vartheta(p) = 273,16 \frac{P}{P_i} \quad (V \text{ cost.})$$

**Termometri Elettrici** – sono basati sulla proprietà dei conduttori di presentare una resistenza variabile con la temperatura (termometro a resistenza) oppure si sfruttano le proprietà di una coppia termoelettrica (termometro a termocoppia). Nel primo caso il corpo termoelettrico è costituito da un filo metallico, nel quale si fa passare la corrente; la misurazione della resistenza si effettua con un ponte di Wheatstone. Nel secondo caso il corpo termoelettrico è costituito da una termocoppia la cui saldatura viene posta a contatto col corpo. Si genera una forza termoelettromotrice, legata in modo noto alla temperatura.

### Scala internazionale pratica di temperatura del 1968

La 7° Conferenza Internazionale dei Pesi e delle Misure ha adottato nel 1927 la **Scala Internazionale della Temperatura**, con lo scopo di facilitare la taratura di termometri da utilizzare per usi scientifici. Questa scala ha subito modifiche nel 1948, 1960, 1968 ed è costituita da un certo numero di punti fissi tra i quali si hanno:

- $T = 13,81 \text{ K}$  (punto triplo dell'idrogeno)
- $T = 273,16 \text{ K}$  (punto triplo dell'acqua)
- $T = 1337,58 \text{ K}$  (punto di fusione dell'oro)

L'intervallo tra 13,81 K e 1337,58 è diviso in tre parti:

- 1) da 13,81 K a 273,16 K si utilizza un termometro a resistenza di platino. La temperatura è ricavabile convertendo il valore di  $R_t$ :

$$R_t = R_0 (1 + At + Bt^2)$$

con  $R_0$ ,  $A$ ,  $B$  costanti che si determinano col termometro stesso al punto di fusione del ghiaccio, al punto di ebollizione dell'acqua e a quello dello zolfo.

- b. da 273,16 K a 903,89 K si utilizza lo stesso termometro di cui al punto precedente:

$$R_t = R_0 [1 + At + Bt^2 + C(t - 273,15)^3]$$

con  $C$  punto di ebollizione dell'ossigeno

- c. da 903,89 K a 1337,58 K si utilizza una termocoppia costituita un filo di platino e da uno di lega contenente il 90% di platino ed il 10% di rodio. La temperatura si ottiene dalla forza elettromotrice e dalla relazione:

$$e = a + bt + ct^2 \quad (\text{f.e.m.})$$

## Scala Rankine e Fahrenheit

In entrambe le scale si utilizza un grado che  $9/5$  del grado Kelvin e del grado Celsius. La scala Rankine è definita da:

$$T(^{\circ}\text{R}) = 1,8 \times T(\text{K})$$

La scala Fahrenheit è definita da:

$$T(^{\circ}\text{F}) = T(^{\circ}\text{R}) - 459,63$$

In base a ciò si ricava che al punto del ghiaccio la temperatura  $^{\circ}\text{R}$  è 491,67 mentre in  $^{\circ}\text{F}$  è 32. Al punto del vapor d'acqua si ha  $^{\circ}\text{R}$  671,67 mentre in  $^{\circ}\text{F}$  è 212. La temperatura Fahrenheit è legata a quella Celsius da:

$$T(^{\circ}\text{F}) = 1,8 \times t(^{\circ}\text{C}) + 32$$

## Equilibrio termodinamico

Esiste un certo numero di grandezze quali  $P$ ,  $V$ ,  $T$  ecc. che sono funzioni di stato; dipendono cioè dallo stato in cui si trova il sistema termodinamico nell'istante considerato, ma non dalle trasformazioni termodinamiche che il sistema ha subito per arrivare a tale stato.

Ogni volta che qualcuna di queste grandezze subisce una variazione, significa che sistema cui esse si riferiscono ha modificato il proprio stato, ossia ha subito una trasformazione termodinamica. Quando invece nessuna delle funzioni di stato modifica il suo valore significa che il sistema si trova in uno stato di **equilibrio termodinamico**.

Un sistema è in equilibrio meccanico quando non si esercitano forze non bilanciate né all'interno del sistema né tra il sistema e l'ambiente circostante; in equilibrio chimico quando non tende ad avvenire in essa alcuna modificazione di struttura; in equilibrio termico se le sue coordinate non cambiano dopo averlo separato con una parete diatermica dall'ambiente circostante. Quando tutti e tre i tipi suddetti di equilibrio avvengono contemporaneamente si dice che sistema si trova in equilibrio termodinamico.

## Equazione di stato

Per definire lo stato di sistema non è necessario assegnare i valori di tutte le grandezze di stato; infatti queste grandezze non sono indipendenti, ma legate da un certo numero di relazioni. Tali relazioni sono le equazioni di stato e hanno una forma del tipo:

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0$$

con  $x_1, x_2, \dots, x_n$  grandezze di stato

Consideriamo ad esempio un sistema  $PVT$ , ossia descritto mediante le tre coordinate termodinamiche pressione, volume e temperatura. Sperimentalmente si vede che se di un sistema conosciamo due di queste grandezze, all'equilibrio resta determinata la terza. Ciò significa che le tre grandezze non sono tra loro indipendenti ed esisterà una sola equazione di stato del tipo:

$$f(P, V, T) = 0$$

Nel caso dei gas perfetti l'equazione di stato assume la forma:

$$PV = RT$$

questa equazione vale anche per i gas reali quando le pressioni sono piccole. Se tali pressioni aumentano l'equazione di stato assume la forma:

$$\frac{PV}{RT} = 1 + \frac{B(T)}{V} + \frac{C(T)}{V^2} + \dots$$

## Sistemi PVT

Sono sistemi descrivibili a mezzo delle tre coordinate termodinamiche  $P, V, T$ . Appartengono a tali sistemi:

- 1) **sostanze pure** ossia costituite da una sola specie chimica
- 2) **miscele omogenee** di diverse specie chimiche



Supponiamo di che sistema subisca una piccola variazione di ogni singola grandezza rispetto al valore della grandezza stessa ma grande rispetto all'effetto prodotto da poche molecole.

Il volume può essere espresso come funzione di pressione e temperatura:

$$V = V(P, T)$$

differentiando:

$$dV = \left( \frac{\partial V}{\partial P} \right)_T dP + \left( \frac{\partial V}{\partial T} \right)_P dT$$

Si definisce: **coefficiente di dilatazione cubica**  $\beta$  il rapporto  $\beta = \frac{1}{V} \left( \frac{\partial V}{\partial T} \right)_P = 181 \times 10^{-6} K^{-1}$

**modulo di compressibilità isoterma**  $\chi$  il rapporto  $\chi = -\frac{1}{V} \left( \frac{\partial V}{\partial P} \right)_T = 3,88 \times 10^{-6} \text{ bar}^{-1}$

possiamo quindi legare le variazioni infinitesime di volume, pressione, temperatura utilizzando  $\beta$  e  $\chi$

$$dV = \beta V dP - \chi V dT$$

### Concetto di lavoro

Quando si parla di lavoro si intende lavoro esterno poiché, dovendo in termodinamica studiare sistemi in equilibrio, si può capire come il lavoro interno sia nullo.

$$\text{LAVORO } (W) = \begin{cases} \text{positivo se fatto sul sistema} \\ \text{negativo se fatto dal sistema} \end{cases}$$

Supponiamo di portare un sistema da un certo stato iniziale A ad uno finale B subendo una trasformazione: gli stati intermedi sono di **non equilibrio**. Supponiamo di voler descrivere gli stati intermedi attraverso coordinate termodinamiche. Dobbiamo pensare a una situazione ideale; la trasformazione può essere pensata come una successione di **stati di equilibrio**. Si parla in questo caso di **trasformazione quasi statica** (ideale). Le trasformazioni quasi statiche sono **reversibili** o **invertibili** e avvengono in un tempo infinito. Le trasformazioni irreversibili ossia reali avvengono in un tempo finito.

### Lavoro per variare il volume di un sistema PVT

Consideriamo un gas contenuto di un cilindro. Sul pistone mobile può agire sia l'ambiente esterno che il gas. Essendo  $A$  la sezione del cilindro e  $P$  la pressione, il gas esercita sul pistone una forza  $P \times A$ . Se vogliamo che il pistone si sposti di  $dx$  dobbiamo compiere un lavoro:

$$\delta W = P A dx \rightarrow \delta W = - P dV$$

Il segno  $-$  è giustificato dalla convenzione adottata sul segno del lavoro. Infatti, se il volume diminuisce, significa che compiamo lavoro sul sistema, ossia  $dV$  è negativo e quindi  $\delta W$  è positivo. Viceversa, se il volume aumenta, è il sistema che compie lavoro, ossia  $dV$  è positivo e quindi  $\delta W$  è negativo. Se la pressione esterna differisce di una quantità piccola ma finita da quella esercitata dal sistema sul pistone, possiamo pensare a una trasformazione quasi statica. Se il volume passa da  $V_1$  a  $V_2$ :

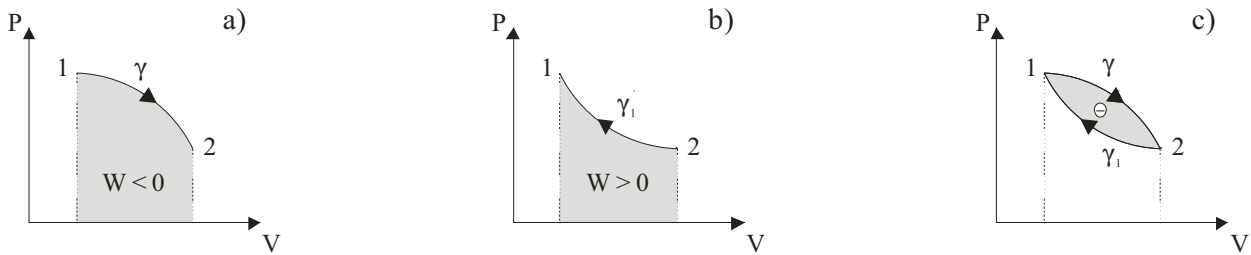
$$W_{12} = \int_{V_1}^{V_2} - P dV$$

Se vogliamo tornare allo stato iniziale dobbiamo compiere un lavoro:

$$W_{21} = \int_{V_2}^{V_1} - P dV$$

Ne deriva che se il percorso è quasi statico si ha  $W_{12} = W_{21}$

### Diagramma PV o dell'indicatore



- a) ESPANSIONE ( $1 \rightarrow 2$ ) – il volume aumenta; il lavoro è negativo. Il lavoro può essere interpretato come l'aria sotta dalla curva ( $W = \int P dV$ )
- b) COMPRESSIONE ( $2 \rightarrow 1$ ) – il volume diminuisce; il lavoro è positivo
- c) ESPANSIONE E COMPRESSIONE = CICLO – il ciclo è percorso in senso orario e corrisponde a un lavoro negativo fatto dal sistema

NOTA – il lavoro compiuto nello spostamento dal punto 1 al punto 2 dipende dal percorso seguito e non solo dal punto finale ed iniziale. Pertanto **il lavoro non è una variabile di stato**.

### Lavoro e calore - concetto di calore

Si considerino due sistemi A e B alle temperature differenti  $T_1$  e  $T_2$  che vengono messi a contatto con una parete diatermica. Ci accorgiamo che dopo un certo tempo essi raggiungono una temperatura intermedia. È possibile quindi che un sistema passi da uno stato 1 allo stato 2 senza compiere lavoro sull'esterno e senza che l'esterno compia lavoro sul sistema. Questo fenomeno veniva spiegato con l'esistenza, in ogni corpo, di una sostanza detta **calorico** o **calore**. Tale sostanza poteva essere ceduta o acquistata ponendo a contatto due corpi aventi differenti temperature.

Il calore è causa di un cambiamento di stato che si genera in conseguenza di una differenza di temperatura ovvero è l'ente che viene scambiato tra un sistema e l'ambiente circostante a causa di una differenza di temperatura.

### Lavoro adiabatico ed energia interna

il lavoro adiabatico è un particolare tipo di lavoro che si ha senza la presenza di flussi di calore. L'esperienza insegna che è possibile far passare un sistema da un dato stato iniziale a uno stato finale diverso compiendo solo lavoro adiabatico. L'esperienza insegna anche che il lavoro adiabatico è lo stesso lungo diversi percorsi che connettono due dati stati.

#### Postulato fondamentale della termodinamica:

se si fa passare un sistema da uno stato iniziale ad uno stato finale solo con mezzi adiabatici, il lavoro compiuto è lo stesso per tutti percorsi adiabatici che connettono questi due stati.

Se il lavoro adiabatico dipende solo dallo stato iniziale e dallo stato finale e non dal percorso che unisce tali stati, esso sarà una variabile di stato. Possiamo pertanto definire una funzione di stato la cui variazione è uguale al lavoro adiabatico. Tale funzione è chiamata **energia interna U**.

$$\Delta U_{12} = W_{12} \text{ (adiab.)}$$

### Primo Principio della Termodinamica

Consideriamo una trasformazione non adiabatica; la formula sopra perde la sua validità e dovrà essere modificata con l'aggiunta di una quantità derivante dal fatto che sistema non è più limitato da pareti adiabatiche. In particolare, supposta la temperatura del sistema diversa da quella dell'ambiente circostante, per la definizione di calore possiamo scrivere:

$$\Delta U_{12} = W_{12} + Q_{12}$$

Tale espressione rappresenta il primo principio della termodinamica. Il calore trasmesso al sistema è positivo mentre quello trasmesso dal sistema è negativo. L'esecuzione di un lavoro su un sistema puramente meccanico, cambia l'energia cinetica e quella potenziale. Quindi sarebbe più corretto scrivere:

$$\Delta E = W + Q \qquad \Delta E = \Delta U + \Delta V + \Delta T$$

il 1° principio può essere scritto anche in termini differenziali:

$$dU = \delta W + \delta Q$$

La scrittura precedente è giustificata dal fatto che  $dU$  è un differenziale esatto, ossia è una caratteristica del sistema che dipende solo dallo stato in cui si trova, mentre non lo sono né  $W$  né  $Q$ .

### Unità di misura del calore

Caloria (cal) – quantità di calore che, assorbita da 1g. di acqua a pressione atmosferica, ne aumenta la temperatura da 14,5° C a 15,5° C

Essendo il calore una forma di energia, si preferisce utilizzare come unità di misura il Joule

$$1 \text{ cal} = 4,186 \text{ Joule}$$

### Entalpia

L'entalpia è una funzione termodinamica ausiliaria che dipende dall'energia interna  $U$  e, come questa, è una funzione di stato. Per i sistemi  $PVT$  è definita come:

$$H = U + PV$$

differenziando si ha:  $dH = dU + d(PV) = dU + PdV + VdP$

ricordando che:  $dU = \delta W + \delta Q$

e che  $\delta W = - PdV$

otteniamo  $dH = \delta Q - PdV + PdV + VdP \rightarrow dH = \delta Q + VdP$

Se la trasformazione avviene a pressione costante allora  $dP = 0$  e quindi:

$$dH = \delta Q$$

Quindi l'entalpia è anche definita come il calore scambiato tra un sistema ed il mondo esterno a pressione costante.

### Capacità termica

Se viene ceduto del calore a (o da) un sistema, a seconda della trasformazione che ha luogo, si può avere o meno una variazione di temperatura. Se, a seguito della trasmissione di  $Q$  unità di calore, la temperatura del sistema passa da  $T_1$  a  $T_2$  si definiscono:

- **capacità termica media** di un corpo il rapporto tra il flusso di calore e la variazione di temperatura tra lo stato finale e quello iniziale (si può avere una variazione di  $T$  anche a causa di un flusso di lavoro)

$$C = \frac{Q}{T_2 - T_1}$$

- **capacità termica specifica** il rapporto tra la capacità termica media e la massa del corpo

$$C' = \frac{C}{m}$$

- **calore specifico o capacità termica istantanea** il flusso di calore per unità di temperatura

$$C_s = \lim_{T_2 \rightarrow T_1} \frac{Q}{T_2 - T_1} = \frac{\delta Q}{dT}$$

Il calore specifico può essere positivo, negativo, nullo od infinito. Un  $C_s > 0$  si può verificare quando un flusso di calore assorbito provoca un aumento di temperatura. Si può però avere un aumento di temperatura in seguito a un flusso di calore ceduto del sistema! Infatti, i flussi di calore non sono legati alla variazione di  $T$ , mentre la variazione di  $T$  è legata a quella di  $U$ . Essendo  $dU = \delta W + \delta Q$

potremmo avere  $\delta Q < 0$  ma  $\delta W + \delta Q > 0$  e quindi potrebbe aversi un aumento di temperatura in seguito a cessione di calore da parte del sistema verso il mondo esterno.

Non esiste un necessario legame tra le variazioni di temperatura e i flussi di calore.

$$\left. \begin{aligned} dU &= \delta Q + \delta W = \delta Q - PdV \\ dU &= \left( \frac{\partial U}{\partial T} \right)_V dT + \left( \frac{\partial U}{\partial V} \right)_T dV \end{aligned} \right\} \Rightarrow \delta Q - PdV = \left( \frac{\partial U}{\partial T} \right)_V dT + \left( \frac{\partial U}{\partial V} \right)_T dV$$

$$\Rightarrow \delta Q = \left( \frac{\partial U}{\partial T} \right)_V dT$$

$$\Rightarrow \frac{\delta Q}{dT} = C_v = \left( \frac{\partial U}{\partial T} \right)_V$$

La quantità  $C_v$  è detta **calore specifico a volume costante**.

$$\left. \begin{aligned} dH &= \delta Q + VdP \\ dH &= \left( \frac{\partial H}{\partial T} \right)_P dT + \left( \frac{\partial H}{\partial P} \right)_T dP \end{aligned} \right\} \Rightarrow \delta Q + VdP = \left( \frac{\partial H}{\partial T} \right)_P dT + \left( \frac{\partial H}{\partial P} \right)_T dP$$

$$\Rightarrow \delta Q = \left( \frac{\partial H}{\partial T} \right)_P dT$$

$$\Rightarrow \frac{\delta Q}{dT} = C_p = \left( \frac{\partial H}{\partial T} \right)_P$$

La quantità  $C_p$  è detta **calore specifico a pressione costante**.

Nel caso di un gas perfetto  $U = \frac{3}{2} kT$ . Nel caso più generale  $U$  aumenta quando  $\delta W + \delta Q > 0$  e quindi se si verifica questo la temperatura aumenta. In definitiva un aumento di temperatura si può verificare comunque siano i flussi di calore e di lavoro purché la loro somma determini un aumento dell'energia interna.

### Serbatoio di calore o pozzo di energia termica

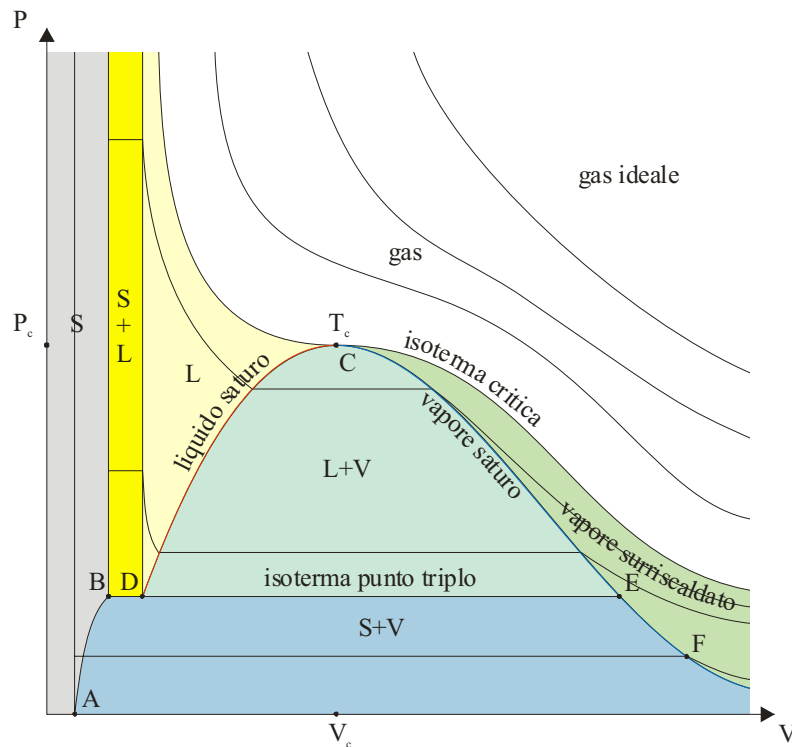
Un pozzo di energia termica è tale che un flusso di calore da esso uscente non determina una variazione di energia interna. Si tratta di corpi di massa talmente grande da poter assorbire o cedere qualunque quantità di calore senza che la sua temperatura e le sue altre coordinate termodinamiche subiscano variazioni apprezzabili.

Ogni trasformazione di un sistema a contatto con un serbatoio di calore è isoterma.

### Diagramma PV per una sostanza pura o diagramma di Clapeyron

Vediamo che forma assume nel caso di un solo componente. Vengono tracciate una serie di linee che delimitano le zone di esistenza delle tre fasi e dei sistemi bifase, oltre ad un certo numero di linee isoterme e tratteggiate.

Per temperature molto superiori alla temperatura critica, le isoterme hanno l'andamento di un ramo d'iperbole. Per temperature prossime alla  $T_c$ , le isoterme presentano invece un flesso che nell'isoterma critica diventa a tangente orizzontale. Il punto critico C rappresenta quello stato in cui le fasi di liquido (L) e di vapore (V) diventano indistinguibili, ossia la più alta temperatura e la più alta pressione a cui le fasi L e V possono coesistere in equilibrio.

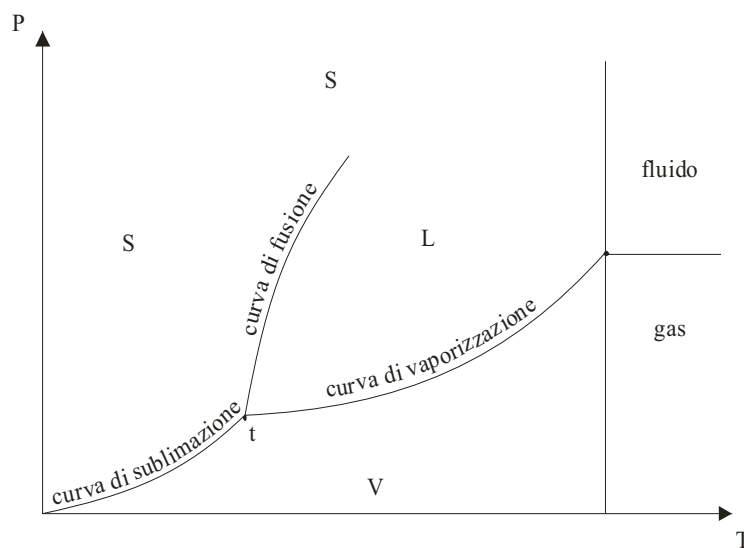


Quindi si ha:

$$\left( \frac{\partial P}{\partial V} \right)_{T_c} = 0 \quad \text{tangente orizzontale} \quad \left( \frac{\partial^2 P}{\partial V^2} \right)_{T_c} = 0 \quad \text{punto di flesso}$$

Per temperature inferiori a quella critica, l'andamento delle isoterme resta dello stesso tipo unicamente nelle zone di esistenza di una sola fase. Dove coesistono due fasi in equilibrio, le isoterme sono rappresentate da un segmento orizzontale. Questo sta a significare che per sistemi bifase una trasformazione isoterma è anche isobarica. Nel diagramma si evidenziano anche le zone di esistenza di sistemi bifase. Il segmento orizzontale BE separa la zona di esistenza del sistema solido-vapore da quella dei sistemi solido-liquido e liquido-vapore e corrisponde alla condizione del punto triplo ove le tre fasi coesistono in equilibrio. Pertanto, in un diagramma PV, il punto triplo non è rappresentato da un solo punto come nel diagramma PT.

### Diagramma PT per una sostanza pura



1. CURVA DI SUBLIMAZIONE (linea del gelo nel caso dell'acqua) – punti che rappresentano gli stati in cui coesistono solido e vapore

2. CURVA DI FUSIONE (linea del ghiaccio nel caso dell'acqua) – punti che rappresentano gli stati in cui coesistono liquido e solido
3. CURVA DI VAPORIZZAZIONE (linea del vapore d'acqua nel caso dell'acqua) – punti che rappresentano gli stati in cui coesistono liquido e vapore

Le curve 1 e 3 hanno sempre tendenza positiva mentre la 2 può avere tendenza positiva o negativa. In particolare, le sostanze che fondendo si contraggono (acqua) hanno pendenza negativa. Nel diagramma PT abbiamo un punto triplo  $t$ , mentre nel diagramma PV avevamo una linea punto triplo. Il punto C rappresenta il punto critico e l'isoterma che passa in C è isoterma critica. Per  $T > T_c$  e  $P > P_c$  non si può stabilire una netta distinzione tra gas e liquido; questa zona la chiameremo zona del fluido un gas può venire sempre condensato diminuendo la temperatura ma non sempre aumentando la pressione.

### Equazione di stato di un gas

Consideriamo l'evoluzione del prodotto  $PV$  in funzione di  $P$  per un certo gas mantenuto a  $T$  costante. Possiamo scrivere:

$$PV = A' (1 + B'P + C'P^2 + D'P^3 + \dots)$$

dove  $A', B', C', D'$  dipendono dalla temperatura e dalla natura del gas. Eseguiamo l'operazione di limite:

$$\lim_{P \rightarrow 0} PV = A \quad A = A(T) = RT$$

Si ottiene che è uguale ad  $A$  che era in funzione della temperatura ed è data dal prodotto  $RT$  con  $R$  la costante universale dei gas. Pertanto:

$$\frac{PV}{RT} = 1 + B'P + C'P^2 + D'P^3 + \dots$$

$$\text{definiamo} \quad \frac{PV}{RT} = Z \quad \text{fattore di compressibilità}$$

$$\text{definiamo sviluppi del viriale} \Rightarrow \begin{cases} Z = 1 + B'P + C'P^2 + D'P^3 + \dots \\ Z = 1 + \frac{B}{V} + \frac{C}{V^2} + \frac{D}{V^3} + \dots \end{cases}$$

con  $A', B', C', A, B, C$  coefficienti del viriale.

Per una sostanza pura i coefficienti dipendono solo dalla temperatura. I coefficienti del viriale nascono dall'interazione tra coppie di molecole, dall'interazione a tre corpi ecc. A basse pressioni possiamo scrivere:

$$Z = 1 + B'P = 1 + \frac{B}{V} = 1 + \frac{BP}{RT}$$

$$\text{sperimentalmente } B' = \frac{B}{RT}$$

### Energia interna di un gas

Consideriamo un gas che compie un'espansione libera. In tal caso non si compie lavoro né si trasmette calore ed essendo  $dU = \delta W + \delta Q \Rightarrow dU = 0$  ossia **l'energia interna non cambia**. Se  $dU = 0$  allora  $dT = 0$ , per cui:

$$\left. \begin{aligned} 0 = dU &= \left( \frac{\partial U}{\partial T} \right)_V dT + \left( \frac{\partial U}{\partial V} \right)_T dV = \left( \frac{\partial U}{\partial V} \right)_T dV \\ 0 = dU &= \left( \frac{\partial U}{\partial T} \right)_P dT + \left( \frac{\partial U}{\partial P} \right)_T dP = \left( \frac{\partial U}{\partial P} \right)_T dP \end{aligned} \right\} \Rightarrow U = U(T)$$

se durante un'espansione libera non si ha variazione di temperatura, significa che  $dU$  dipende solo da  $T$ .

In generale, si dimostra però che:

$$\left(\frac{\partial U}{\partial P}\right)_T = f(T) \text{ integrando } \Rightarrow U = f(T)P + F(T)$$

Ne deriva che l'energia interna di un gas è funzione della pressione e della temperatura.

### Gas ideali

I coefficienti del viriale dipendono dalle interazioni tra le molecole. Supponiamo che esista un gas per il quale le molecole non interagiscono, quindi:

$$Z = 1 \quad PV = RT$$

Un gas per il quale succede questo è un **gas ideale**; il gas reali si comportano come quelli ideali quando la pressione tende a zero. Sappiamo che l'energia interna dipende dalla temperatura e dalla pressione. La dipendenza dalla pressione è conseguenza dell'interazione tra le molecole. Questo significa che, nel caso del gas ideale,  $U$  dipende solo da  $T$ . Quindi si ha:

$$\left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_T = 0 \quad \left(\frac{\partial U}{\partial P}\right)_T = 0 \quad U = U(T)$$

Analogamente:

$$\left(\frac{\partial H}{\partial P}\right)_T = 0 \quad \left(\frac{\partial H}{\partial V}\right)_T = 0 \quad H = H(T)$$

Ricordando che  $C_v = \left(\frac{\delta Q}{dT}\right)_v = \left(\frac{\partial U}{\partial T}\right)_v$ , possiamo scrivere che la variazione di energia interna  $U$  vale

$dU = \left(\frac{\partial U}{\partial T}\right)_v dT + \left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_T dV = C_v dT + \cancel{\left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_T dV} = C_v dT$  e sostituendo nell'espressione del primo principio della termodinamica otteniamo:

$$\delta Q = dU + PdV = C_v dT + PdV \quad (1)$$

Analogamente, ricordando che  $dH = C_p dT + \cancel{\left(\frac{\partial H}{\partial P}\right)_T dP} = C_p dT$ , sostituendo nell'espressione della variazione del calore otteniamo:

$$\delta Q = dH - VdP = C_p dT - VdP \quad (2)$$

Eguagliando la (1) e la (2) otteniamo:

$$\delta Q = C_v dT + PdV = C_p dT - VdP \Rightarrow C_p dT - C_v dT = PdV + VdP = d(PV) = RdT \\ \Rightarrow \boxed{C_p - C_v = R}$$

### Trasformazioni adiabatiche quasi statiche di un gas ideale

In una trasformazioni adiabatica, essendo  $\delta Q = 0$ , la (1) e la (2) diventano  $C_v dT = -PdV$  e  $C_p dT = VdP$  per cui, dividendo membro a membro, otteniamo:

$$\frac{C_p dT}{C_v dT} = -\frac{VdP}{PdV} \Rightarrow \frac{dP}{P} = -\gamma \frac{dV}{V} \quad \text{con } \gamma = \frac{C_p}{C_v}$$

dove  $\gamma$  dipende da  $T$  ma se le variazioni di  $T$  sono piccole allora  $\gamma \cong \text{cost}$ . Integrando:

$$\lg P = -\gamma \lg V + \text{cost} = -\lg V^\gamma + \text{cost} \Rightarrow \boxed{PV^\gamma = \text{cost}}$$

### Conversione di lavoro in calore e viceversa – Secondo Principio della Termodinamica

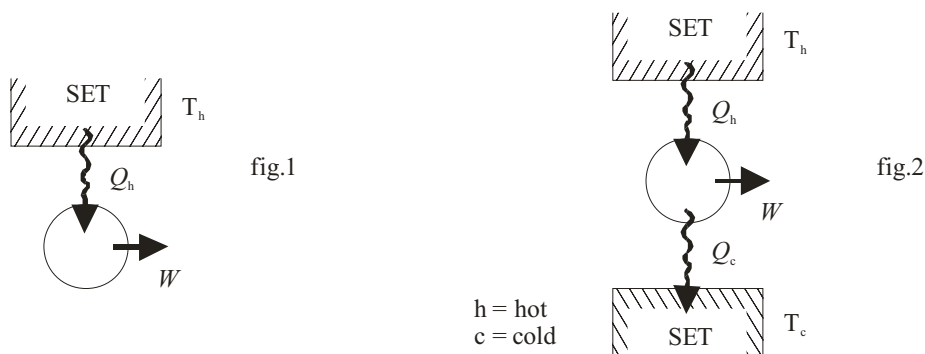
È possibile convertire totalmente il lavoro in flusso di calore. È anche possibile trasformare calore in lavoro, ma questa trasformazione non si ripete ciclicamente. Occorrerebbero continuamente dei flussi di calore, ossia è necessario avere qualcosa che fornisca continuamente **flussi di lavoro e quindi una trasformazione ciclica**. Sperimentalmente si mostra che per una trasformazione ciclica risulta che non tutto il calore viene trasformato in lavoro:

$$Q \neq -W$$

Su questo fatto è basato il **secondo principio della termodinamica** di cui diamo l'enunciato di Kelvin-Planck:

è impossibile realizzare delle trasformazioni cicliche che abbiano come unico risultato quello di assorbire calore da un set e convertirlo completamente in lavoro

Questo sta a significare che vi è sempre una parte di calore che viene assorbita da un set a temperatura minore. Rappresentiamo una macchina termica, ovvero quel dispositivo che converte il calore in lavoro.



Per quanto detto la situazione rappresentata in fig.1 è errata in quanto una parte del flusso di calore viene assorbita da un set a temperatura inferiore. La situazione reale è rappresentata in fig.2.

Durante una trasformazione ciclica si ha  $\Delta U = 0$ . Resta valido però il principio di conservazione dell'energia e quindi il calore fornito dal set a temperatura  $T_h$  deve essere uguale al lavoro fatto dalla macchina termica più il flusso di calore assorbito dal set a temperatura  $T_c$ :

$$\Rightarrow |Q_h| = |W| + |Q_c|$$

Se fosse  $Q_c = 0$  il calore verrebbe totalmente trasformato in lavoro. Il fatto che  $Q_c \neq 0$  è quanto affermato dal secondo principio della termodinamica. Sono stati utilizzati i valori assoluti. Se, per esempio,  $|Q_h| > |Q_c|$ , allora  $|W| < 0$  e quindi il lavoro è compiuto dal sistema.

Il dispositivo che fa compiere al sistema una trasformazione ciclica, e che quindi converte l'energia termica in lavoro, prende il nome di **macchina termica**.

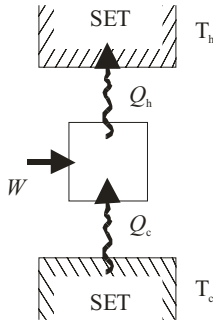
Il **rendimento di una macchina termica**  $\eta$  è il rapporto tra il lavoro che essa fornisce e la quantità di calore necessario a fornire tale lavoro.

$$\eta = \frac{|W|}{|Q_h|} = \frac{|Q_h| - |Q_c|}{|Q_h|} = 1 - \frac{|Q_c|}{|Q_h|} < 1$$

## Macchina frigorifera

Clausius studiò il modo con cui fluisce il calore notando che esso fluisce sempre da un livello termico maggiore ad uno inferiore. Se tra due set a temperatura rispettivamente di  $T_h$  e  $T_c$  (con  $T_h > T_c$ ) si interpone una **macchina frigorifera** a cui si fornisce un lavoro  $W$ , il flusso di calore si muove dal set a temperatura  $T_h$  al set temperatura  $T_c$ :





$$\Rightarrow |Q_h| = |Q_c| + |W|$$

Lo scopo di una macchina frigorifera è quello di estrarre la massima quantità di calore da un serbatoio freddo, spendendo la minima quantità di lavoro possibile.

In base a quanto detto, enunciamo il **Secondo Principio della Termodinamica** nella forma di Clausius:

Se ad una macchina frigorifera si fornisce lavoro, allora si sottrae calore ad un serbatoio a basso livello termico e si fornisce una quantità di calore diversa da quella sottratta ad un serbatoio d'alto livello termico

oppure

non è possibile realizzare una trasformazione il cui unico risultato sia quello di far passare del calore da un corpo più freddo a uno più caldo

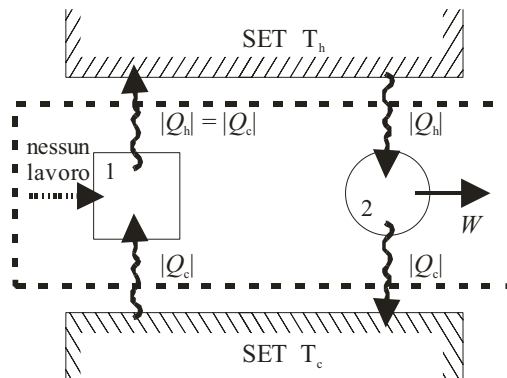
Abbiamo definito il rendimento di una macchina termica. Analogamente definiamo l'**efficienza di una macchina frigorifera**  $\omega$  come il rapporto tra il flusso di calore in uscita dal set a livello termico inferiore e il lavoro che si è dovuto fornire alla macchina per ottenere tale flusso.

$$\omega = \frac{|Q_c|}{|W|} = \frac{|Q_h| - |W|}{|W|} = \frac{|Q_h|}{|W|} - 1$$

### Equivalenza degli enunciati di Kelvin-Planck e Clausius

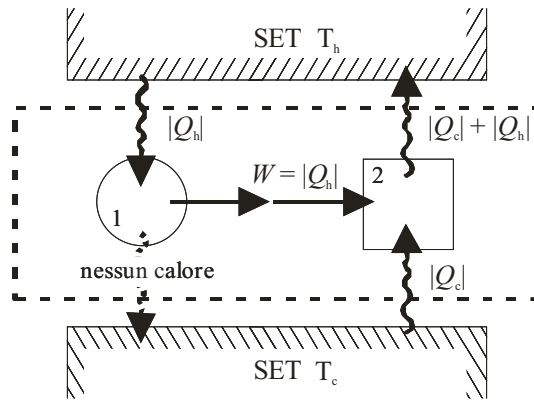
La veridicità dell'enunciato di Clausius implica quella di Kelvin e viceversa ed inoltre la negazione dell'enunciato di Clausius implica la negazione di quello di Kelvin e viceversa.

Dimostriamo che la veridicità dell'enunciato di Clausius implica quella di Kelvin.



Si supponga che  $Q_c$  passi tramite la macchina frigorifera 1 dal set a  $T_c$  a quello a  $T_h$  senza fornire alcun lavoro, in contraddizione con Clausius e quindi i due flussi siano uguali ( $|Q_h| = |Q_c|$ ). Si supponga poi che la macchina termica 2 trasformi un flusso  $|Q_h|$  in un lavoro  $W$  ed in un flusso  $|Q_c|$  ceduto al set a temperatura più bassa senza violare alcun principio. Consideriamo ora l'insieme delle macchine 1 e 2 (parte tratteggiata), costituenti un dispositivo che estrae un calore  $|Q_h| - |Q_c|$  dal set a  $T_h$  e lo converte totalmente in lavoro  $W = |Q_h| - |Q_c|$ . Quindi macchina termica frigorifera insieme violano l'enunciato Kelvin-Planck.

Dimostriamo ora che supposto falso l'enunciato di Kelvin risulta falso quello di Clausius.



Supponiamo che la macchina termica 1 assorbe dal set a  $T_h$  un flusso di calore  $|Q_h|$  e lo trasformi completamente in lavoro, ossia  $W = |Q_h|$ , in contraddizione con l'enunciato di Kelvin-Planck. Supponiamo ora di fornire questo lavoro alla macchina frigorifera 2, che assorbe un flusso di calore  $|Q_c|$  dal set a  $T_c$ . Per il principio di conservazione dell'energia, il frigorifero cede al livello termico  $T_h$  un calore pari a  $Q' = |Q_h| + |Q_c|$ . Il frigorifero non viola alcun principio. Consideriamo ora frigorifero e macchina termica insieme: essi costituiscono un dispositivo che assorbe un calore  $Q_c$  dal set a  $T_c$  e scarica un calore  $Q_h + Q_c - Q_h = Q_c$  al set a  $T_h$ . Insieme quindi violano l'enunciato di Clausius.

L'enunciato di Kelvin-Planck e quello di Clausius rappresentano una stessa realtà fisica e sono equivalenti.

### La pompa di calore

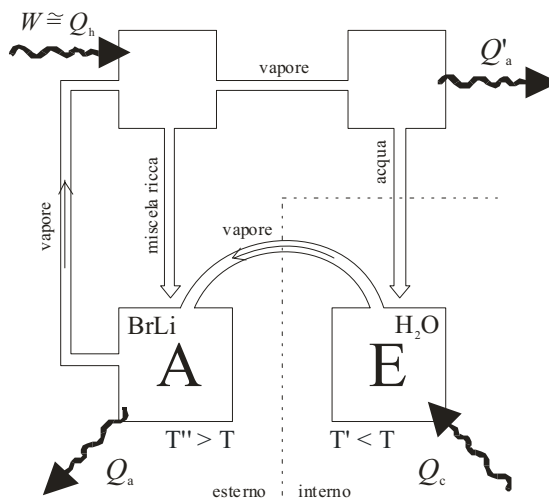
Le pompe di calore sono delle macchine frigorifere che seguono un ciclo frigorifero con la particolarità che nel caso delle pompe di calore siamo interessati non tanto al calore sottratto al serbatoio a temperatura  $T_c$  quanto a quello ceduto al serbatoio a temperatura  $T_h$ . Per questo motivo, si definisce per la pompa di calore un nuovo parametro: il COP (Coefficient Of Performance), che è il rapporto tra il calore che si fornisce al set a livello termico maggiore e il lavoro fornito alla macchina per avere tale flusso di calore.

$$\text{COP} = \frac{|Q_h|}{|W|} = \frac{|W| - |Q_c|}{|W|} = 1 - \frac{|Q_c|}{|W|} = 1 + \omega$$

Essendo  $|Q_h| = |W| + |Q_c| \Rightarrow |Q_h| > |W|$  ovvero è possibile ottenere, tramite una pompa di calore, un flusso di calore superiore al quantitativo di energia fornita alla macchina.

### Ciclo frigorifero ad assorbimento

Consideriamo un assorbitore (A) nel quale viene posta una soluzione di bromuro di litio in acqua e d'un evaporatore (E) nel quale viene posta dell'acqua.



Se i due contenitori sono separati, si verifica nell'evaporatore un passaggio d'acqua in fase vapore mentre nell'assorbitore si verifica un passaggio di soluzione in fase vapore. Ciò è legato all'interazione dell'acqua e della soluzione col mondo esterno. Si raggiunge un equilibrio liquido-vapore che determina, in ogni contenitore, una tensione di vapore saturo che sarà minore per la soluzione acquosa di bromuro di litio.

Quando i due contenitori vengono messi a contatto, in seguito alla differenza di tensione di vapore, passa vapore d'acqua da contenitore E a quello A. Questo passaggio determina una deficienza di vapore in E e quindi evapora dell'altra acqua. Pertanto diminuisce l'energia interna di E che si raffredda. In altri termini, si rompe l'equilibrio termico tra il contenitore E e l'esterno e quindi si ha un flusso di calore  $Q_c$  dall'esterno a E.

Il vapore d'acqua giunto in A satura l'ambiente e provoca condensazione di vapore cedendo calore di condensazione. Pertanto aumenta la temperatura di A che, non trovandosi più in equilibrio termico con l'ambiente esterno, cede un flusso di calore  $Q_A$ .

Se non si intervenisse sul processo, la miscela in A si arricchirebbe d'acqua al punto che la quantità di bromuro di litio in soluzione non avrebbe più influenza sulla tensione di vapore, quindi si stabilirebbe un equilibrio tra i due contenitori e di processo si arresterebbe. Se però si fa cadere la miscela diluita in un altro contenitore al quale si fornisce un flusso di calore  $Q_h$  alla temperatura  $T_h$ , si determina l'evaporazione della miscela contenuta in modo tale da separare una grande quantità d'acqua in fase vapore e una miscela ricca di bromuro di litio in fase liquida.

Fornendo ad opportuni contenitori queste due miscele si riattiva il processo, in quanto l'acqua in fase vapore passa in un nuovo contenitore dove condensa e viene riportato con un'opportuna condotta in E, mentre la soluzione ricca di bromuro viene riportata in A tramite un'altra condotta.

La macchina ottenuta assorbe un calore  $|Q_c|$ , quando si fornisce un'energia sotto forma di flusso di calore  $|Q_h|$ :

$$\omega = \frac{|Q_c|}{|Q_h|}$$

Se lo stesso processo si analizza considerando il calore fornito al set a temperatura maggiore, ossia  $|Q_a| + |Q'_a|$ :

$$\text{COP} = \frac{|Q_a| + |Q'_a|}{|Q_h|}$$

Per il primo principio si ha:  $|Q_a| + |Q'_a| = |Q_h| + |Q_c|$  e quindi  $|Q_a| + |Q'_a| > |Q_h|$  ossia **il calore in uscita è maggiore di quello in entrata**. Questo potrebbe sembrare paradossale, ma ciò avviene perché si sono considerati i flussi di energia senza associarli al livello termico da cui provengono o al quale vengono forniti. Va infatti considerato che:

- il livello termico a cui si trovano  $Q_a$  e  $Q'_a$  è minore di quello cui si trova  $Q_h$
- non si è considerato il calore  $Q_c$  in quanto questo flusso non è utilizzabile.

### Reversibilità e irreversibilità

- ambiente circostante locale – tutto ciò che interagisce direttamente con il sistema
- ambiente circostante ausiliario – tutto ciò che non appartiene l'ambiente circostante locale

Una trasformazione si dice reversibile quando si svolge in modo tale che alla fine il sistema e l'ambiente circostante locale possono essere riportati agli stati iniziali senza modificare l'ambiente circostante ausiliario.

Tutte le trasformazioni naturali sono irreversibili.

### Condizioni per la reversibilità

Le trasformazioni naturali sono irreversibili perché non sono soddisfatte le condizioni di equilibrio termodinamico e perché sono presenti effetti dissipativi. Se la trasformazione è quasi statica il sistema passa attraverso una successione di stati di equilibrio; inoltre, se non ci sono fenomeni dissipativi, il lavoro viene restituito quando si ritorna allo stato iniziale. Quindi:

una trasformazione per essere reversibile deve essere quasi statica e non devono essere presenti effetti dissipativi

Se si vuole sapere se una trasformazione è reversibile non bisogna guardare all'interno del sistema bensì occorre vedere cosa accade nel mondo esterno (ambiente circostante ausiliario).

## Ciclo di Carnot

Il ciclo di Carnot è una trasformazione reversibile costituita da due adiabatiche e due isoterme. Gli scambi di calore avvengono tra due set a diversi livelli termici e lungo le isoterme. Ogni altro ciclo possibile ha un rendimento che può al massimo essere uguale a quello di una macchina termica che lavora secondo il ciclo di Carnot. Una macchina che lavora secondo un ciclo di Carnot prende il nome di **macchina di Carnot** (fig.1).

Supponiamo che tale macchina lavori tra due serbatoi: tutto il calore assorbito viene assorbito a temperatura costante, uguale a quello del serbatoio a temperatura maggiore  $T_h$ , mentre il calore ceduto viene anche esso ceduto a temperatura costante, uguale a quella del serbatoio a temperatura minore  $T_c$ .

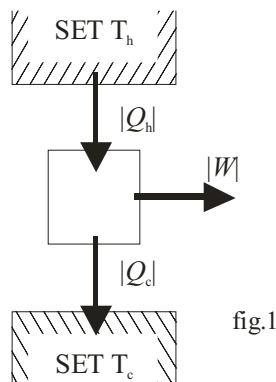


fig.1

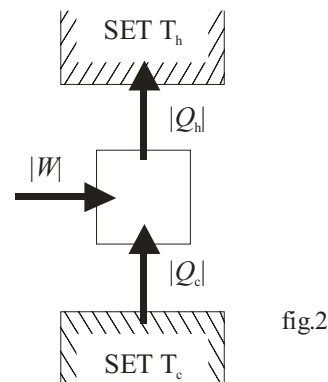


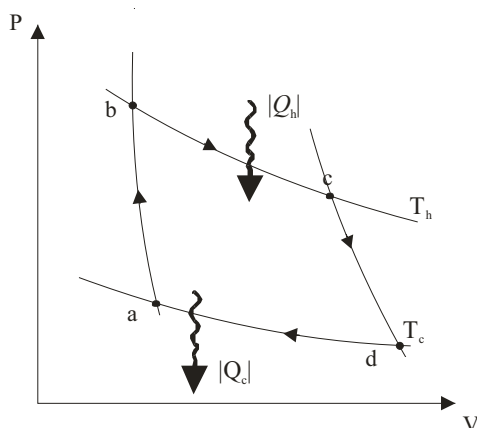
fig.2

Un ciclo di Carnot è costituito da 4 trasformazioni reversibili e quindi è reversibile. Per questo motivo, può essere percorso in un verso o nell'altro. Nel caso venga percorso in senso contrario, il ciclo di Carnot opera un ciclo di raffreddamento. In questo caso si parla di **frigorifero di Carnot** (fig.2).

Sia la macchina che il frigorifero di Carnot lavorano tra due soli serbatoi. La caratteristica dei frigoriferi reversibili sta nel fatto che i  $|Q_c|$ ,  $|Q_h|$  e  $|W|$  che entrano in gioco sono uguali a quelli che si hanno quando il ciclo è percorso in verso opposto.

## Ciclo di Carnot di un gas ideale

Illustriamo il ciclo in un diagramma PV. Ricordiamo che l'adiabatica è più pendente dell'isoterma.



Supponiamo che il gas si trovi inizialmente in  $a$ . Operiamo una compressione adiabatica reversibile ( $a \rightarrow b$ ); la temperatura aumenta passando da  $T_c$  a  $T_h$ . Successivamente, si opera una espansione isoterma ( $b \rightarrow c$ ). A partire da  $c$  si opera una espansione adiabatica reversibile ( $c \rightarrow d$ ). La temperatura diminuisce fino al valore  $T_c$ . Infine si opera una compressione isoterma reversibile ( $d \rightarrow a$ ).

Una macchina di Carnot funziona seguendo questo ciclo. Se si fa lavorare tale macchina tra due serbatoi si ha che, durante l'espansione isoterma ( $b \rightarrow c$ ), viene assorbito dal set a  $T_h$  il calore  $|Q_h|$ , mentre durante la compressione isoterma viene ceduto dal set a  $T_c$  il calore  $|Q_c|$ .

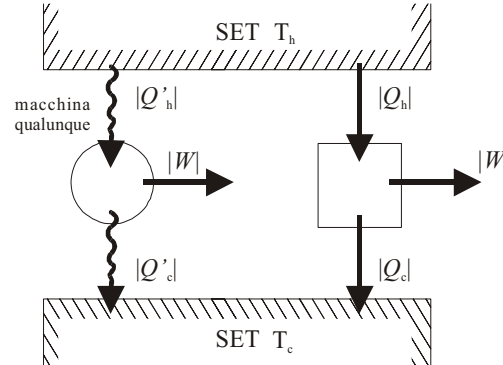
Se il ciclo è percorso in verso opposto, si ha un frigorifero di Carnot: pertanto lungo la  $a \rightarrow d$  (espansione isoterma) viene assorbito un calore  $|Q_c|$  mentre lungo la  $c \rightarrow b$  (compressione isoterma) viene ceduto un calore  $|Q_h|$ .

## Teorema di Carnot

Nessuna macchina che lavori tra due dati serbatoi può avere un rendimento superiore a quello di una macchina di Carnot che lavori tra gli stessi serbatoi.

### Dimostrazione:

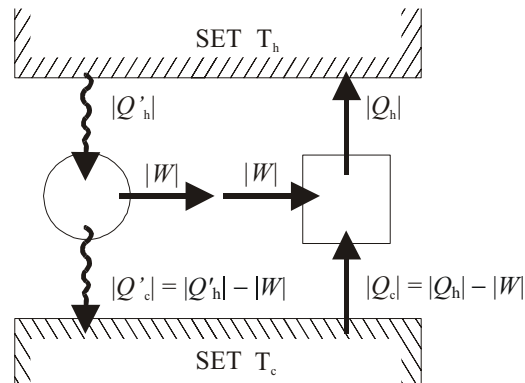
consideriamo una macchina di Carnot ed un'altra qualunque che lavorino tra due stessi serbatoi producendo una stessa quantità di lavoro  $W$ .



Supponiamo, per assurdo, che il rendimento della macchina qualunque sia superiore a quello della macchina di Carnot:

$$\eta > \eta_c \Rightarrow \frac{|W|}{|Q'_h|} > \frac{|W|}{|Q_h|} \Rightarrow |Q_h| > |Q'_h|$$

Supponiamo ora che la macchina qualunque produca un lavoro  $|W|$  che poi viene fornito alla macchina di Carnot per farla funzionare da frigorifero:



Il calore netto assorbito dal serbatoio freddo sarà:

$$|Q_c| + |Q'_c| = |Q_h| - |W| - |Q'_h| + |W| = |Q_h| - |Q'_h|$$

Se risulta  $\eta > \eta_c$  si ha  $|Q_h| > |Q'_h|$  e quindi il calore assorbito dal set a  $T_c$  deve essere positivo. Questo significa che il dispositivo costituito da macchina di Carnot e macchina qualunque fa passare una quantità di calore pari a  $|Q_c| + |Q'_c|$  dal set a  $T_c$  a quello a  $T_h$  ossia da quello freddo a quello caldo. Questo fatto è in contrasto con l'enunciato di Clausius del secondo principio e quindi non potrà mai essere  $\eta > \eta_c$ .

### Corollario:

Tutte le macchine di Carnot che lavorano tra gli stessi due serbatoi hanno lo stesso rendimento

### Dimostrazione:

consideriamo due macchine di Carnot  $C_1$  e  $C_2$  che lavorano tra gli stessi set e supponiamo che  $C_1$  alimenti  $C_2$  che funzionerà da frigorifero: si ha, per il teorema di Carnot, che  $\eta_{C_1} \leq \eta_{C_2}$ . Supponiamo ora che  $C_2$  alimenti  $C_1$  che lavora da frigorifero: si avrà  $\eta_{C_2} \leq \eta_{C_1}$ . Dovendo essere verificate contemporaneamente entrambe le condizioni risulta che  $\eta_{C_1} = \eta_{C_2}$ .

## Temperatura Kelvin o temperatura termodinamica

Il rendimento di una macchina di Carnot è indipendente dalla natura del fluido che percorre il ciclo ed è funzione solo delle temperature delle due isoterme. Pertanto:

$$\eta = 1 - \frac{|Q_1|}{|Q_2|} \quad \frac{|Q_1|}{|Q_2|} = f(T_1, T_2)$$

Quindi possiamo definire una **scala delle temperature** che non dipende dal fluido che compie il ciclo. Consideriamo una macchina di Carnot che lavora tra due set a  $T_c$  e  $T_h$  con  $T_h > T_c$ :

$$\eta_1 = 1 - \frac{|Q_c|}{|Q_h|} = \phi[T_h, T_c] \quad \frac{|Q_h|}{|Q_c|} = f[T_h, T_c]$$

Consideriamo una seconda macchina di Carnot che lavora tra due set a  $T_c$  e  $T_0$  con  $T_c > T_0$ :

$$\eta_2 = 1 - \frac{|Q_0|}{|Q_c|} = \phi[T_c, T_0] \quad \frac{|Q_c|}{|Q_0|} = f[T_c, T_0]$$

Consideriamo ora una terza macchina di Carnot che lavora tra due set a  $T_0$  e  $T_h$  con  $T_0 < T_h$ :

$$\eta_3 = 1 - \frac{|Q_0|}{|Q_h|} = \phi[T_0, T_h] \quad \frac{|Q_h|}{|Q_0|} = f[T_0, T_h]$$

Poiché  $\frac{|Q_h|}{|Q_c|} = \frac{|Q_h|}{|Q_0|} \cdot \frac{|Q_0|}{|Q_c|}$  possiamo scrivere  $\frac{|Q_h|}{|Q_c|} = f[T_h, T_c] = \frac{f[T_h, T_0]}{f[T_c, T_0]}$

Data l'arbitrarietà della  $T_0$  e dato che non compare al primo membro, possiamo eliminarla anche al secondo membro. Quindi:

$$\frac{|Q_h|}{|Q_c|} = \frac{f[T_h]}{f[T_c]}$$

Le funzioni incognite che si sono definite dipendono solo da  $T_c$  e  $T_h$ , ma non dipendono dalla sostanza utilizzata nel ciclo. Il rapporto tra queste due funzioni è il rapporto tra due temperature Kelvin:

$$\frac{|Q_h|}{|Q_c|} = \frac{T_h}{T_c}$$

Potrebbe sorgere il problema della misurazione della temperatura; infatti dovremmo considerare una temperatura di riferimento e graduare una scala sottoponendo una generica sostanza ad un ciclo di Carnot che però è una macchina ideale! Allora, si sopperisce a questa difficoltà facendo coincidere la scala termodinamica con la scala del termometro a gas ideale e prendendo come zero la temperatura 273,16 K.

Per una macchina di Carnot che lavora tra due serbatoi  $T$  e  $T' = 273,16$  K si ha:

$$\frac{|Q|}{|Q'|} = \frac{T'}{T} = \frac{T'}{273,16} \quad T' = 273,16 \times \frac{|Q|}{|Q'|}$$

## Eguaglianza tra la temperatura del gas ideale e la temperatura Kelvin

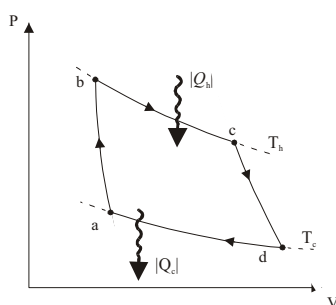
Consideriamo il ciclo di Carnot di un gas ideale:

–  $b \rightarrow c$  (espansione isoterma)  $PV = RT_h$

$$\delta Q = C_v dT + PdV = PdV$$

$$\Rightarrow |Q_h| = \int_b^c PdV = \int_b^c RT_h \frac{1}{V} dV = RT_h \lg \frac{V_c}{V_b}$$

(eq.1)



- d → a (compressione isoterma)  $PV=RT_c$

$$|Q_c| = \int_{V_d}^{V_a} P dV = \int_{V_d}^{V_a} RT_c \frac{1}{V} dV = RT_c \lg \frac{V_d}{V_a} \quad (\text{eq.2})$$

eseguendo il rapporto tra l'eq.1 e l'eq.2 si ottiene:

$$\frac{|Q_h|}{|Q_c|} = RT_h \lg \frac{V_c}{V_b} \cdot \frac{1}{RT_c \lg \frac{V_d}{V_a}} = \frac{T_h}{T_c} \cdot \frac{\lg \frac{V_c}{V_b}}{\lg \frac{V_d}{V_a}} \quad (\text{eq.3})$$

- a → b (compressione adiabatica)

$$\begin{aligned} \delta Q = C_v dT + P dV = 0 &\Rightarrow -C_v dT = P dV = \frac{RT}{V} dV \Rightarrow \\ \Rightarrow \int_{V_a}^{V_b} \frac{1}{V} dV = -\frac{1}{R} \int_{T_h}^{T_c} C_v \frac{dT}{T} &\Rightarrow \frac{1}{R} \int_{T_h}^{T_c} C_v \frac{dT}{T} = \lg \frac{V_a}{V_b} \end{aligned} \quad (\text{eq.4})$$

- c → d (espansione adiabatica)

$$\frac{1}{V} dV = -\frac{1}{R} C_v \frac{dT}{T} \Rightarrow \int_{V_c}^{V_d} \frac{1}{V} dV = -\frac{1}{R} \int_{T_h}^{T_c} C_v \frac{dT}{T} \Rightarrow \frac{1}{R} \int_{T_h}^{T_c} C_v \frac{dT}{T} = \lg \frac{V_d}{V_c} \quad (\text{eq.5})$$

Dalle eq.4 e 5 consegue che:

$$\lg \frac{V_d}{V_c} = \lg \frac{V_a}{V_b} \Rightarrow \lg V_d - \lg V_c = \lg V_a - \lg V_b \Rightarrow \lg \frac{V_d}{V_a} = \lg \frac{V_c}{V_b}$$

e, sostituendo questo risultato nell'eq.3, otteniamo:

$$\boxed{\frac{|Q_h|}{|Q_c|} = \frac{T_h}{T_c}}$$

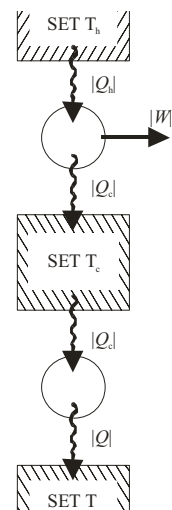
Il rapporto  $\frac{|Q_h|}{|Q_c|}$  è uguale a rapporto tra due temperature Kelvin; da questo deduciamo l'equivalenza tra le temperature Kelvin e le temperature a gas ideale.

## Zero assoluto

Abbiamo visto che lo zero termodinamico è dato dal punto triplo dell'acqua. Questo zero si arricchisce però di un nuovo significato insito nella definizione di temperatura termodinamica. Consideriamo infatti una trasformazione isoterma che avviene senza scambi di calore. La temperatura a cui ha luogo questa trasformazione è lo zero assoluto. Allo zero assoluto si ha una coincidenza tra adiabatica e isoterma.

## Cicli termodinamici

È chiaro che il calore restituito dalla macchina termica non può essere utilizzato per essere trasformato in lavoro. Potrebbe però essere utilizzato da un'altra macchina termica solo se si disponesse di un altro serbatoio a temperatura minore di  $T_c$  (ad esempio T). Il secondo principio, nell'enunciato di Clausius, ci dice che il calore si trasmette spontaneamente solo da un set a temperatura alta ad uno a temperatura bassa. Ne consegue che il limite inferiore di cui possiamo disporre è la temperatura ambiente.



Il rendimento di una macchina termica vale  $\eta = 1 - \frac{|Q_c|}{|Q_h|} < 1$

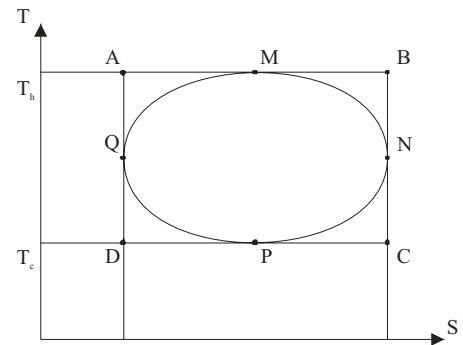
Il rendimento di una macchina di Carnot vale  $\eta_C = 1 - \frac{|T_c|}{|T_h|}$

Il rendimento di un ciclo di Carnot è il limite superiore per i rendimenti di qualunque altro ciclo compreso tra le temperature  $T_c$  e  $T_h$ .

### Dimostrazione:

essendo  $Q = \int T ds$  l'area in un diagramma TS rappresentante una quantità di calore. Consideriamo un generico ciclo reversibile MNPQ e il ciclo di Carnot ABCD che lo racchiude, costituito da due isoterme e due adiabatichette che risultano tangenti al ciclo MNPQ. Indichiamo con  $Q_h$  e  $Q_c$  i calori ricevuti e ceduti dal ciclo MNPQ e con  $Q_{hC}$  e  $Q_{cC}$  quelli ricevuti e ceduti dal ciclo di Carnot.

$$\text{Si vede che } \begin{cases} Q_{hC} > Q_h \\ Q_{cC} < Q_c \end{cases} \text{ ed essendo } \begin{cases} \eta_C = 1 - \frac{Q_{cC}}{Q_{hC}} \\ \eta = 1 - \frac{Q_c}{Q_h} \end{cases} \Rightarrow \eta_C > \eta$$



Pertanto la superiorità del ciclo di Carnot dipende dal fatto che in esso il calore viene ricevuto a temperatura più alta e restituito ad una temperatura più bassa rispetto ad un qualunque altro ciclo che lavora tra le stesse temperature.

Il rendimento di Carnot è  $\eta_C = 1 - \frac{|T_c|}{|T_h|}$  ed è tanto maggiore quanto minore è il rapporto  $\frac{|T_c|}{|T_h|}$ . Ne consegue che per ottenere un rendimento elevato occorre:

- rendere ampio intervallo di temperatura entro cui avviene il funzionamento, aumentando  $T_c$  e diminuendo  $T_h$
- una volta fissate le temperature esterne, avvicinare per qualche possibile la forma del ciclo a quella del ciclo di Carnot tra le stesse temperature.

### Dispositivi per la trasformazione di calore in lavoro

La trasformazione di calore il lavoro viene effettuata con i seguenti dispositivi:

{	Motori a combustione esterna	{	Macchina di Stirling
			Macchina a vapore
{	Motori a combustione interna	{	Ciclo a benzina (Otto)
			Ciclo Diesel

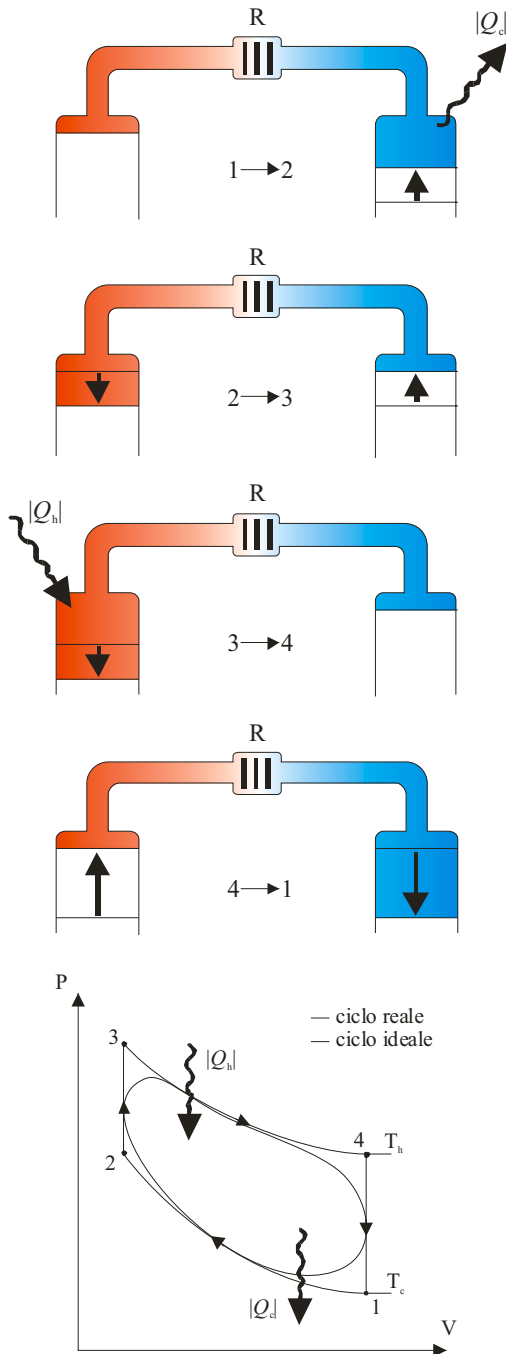
### Macchina di Stirling

È rappresentata da due pistoni collegati allo stesso albero che li fa muovere sfasati. Il volume tra i pistoni è pieno di gas; il volume di sinistra è a contatto con un set caldo, mentre quello di destra con uno freddo. Le due parti sono collegate da un rigeneratore (R), costituito da un insieme di trucioli d'acciaio oppure da una serie di schermi metallici che non consente la trasmissione di calore tra la parte calda e quella fredda, avendo una conducibilità termica piccola.

Viene utilizzata nella microcogenerazione e, secondo il ciclo inverso, per la produzione dell'aria liquida.

Il ciclo di Stirling è costituito dalle seguenti quattro trasformazioni:





1. il pistone a sinistra a fine corsa resta fermo, mentre quello di destra comprime il gas freddo, con conseguente cessione di calore  $Q_c$ . La trasformazione è praticamente isoterma

$$\Delta U = 0 \quad U = U(t)$$

$$|Q_c| = |W_{12}| \Rightarrow Q_c = -W_{12} =$$

$$= \int P dV = nRT_c \int_2^1 \frac{dV}{V} = nRT_c \lg \frac{V_1}{V_2} = -nRT_c \lg \frac{V_2}{V_1}$$

2. il pistone di sinistra scende mentre quello di destra sale in modo che  $V = \text{cost}$ . Una parte del gas freddo entra nella parte calda attraverso R ad una temperatura superiore dato che R cede ad esso calore

$$W_{23} = 0 \quad \Delta U = Q_{23}$$

$$\Delta U_{23} = \int_c^h C_v dT = C_v (T_h - T_c) > 0$$

3. il pistone di destra resta fermo a fine corsa mentre quello di sinistra si muove verso il basso. Il gas si espande e viene assorbito un calore  $Q_h$ . La trasformazione è praticamente isoterma

$$\Delta U = 0 \quad Q_h = -W_{34}$$

$$-W_{34} = -\int P dV = nRT_h \int_3^4 \frac{dV}{V} = -nRT_h \lg \frac{V_2}{V_1}$$

4. i due pistoni si muovono come figura in modo che  $V = \text{cost}$ . Una parte del gas caldo si mescola a quello freddo attraverso R

$$W_{41} = 0 \quad \Delta U = Q_c$$

$$\Delta U_{41} = \int_h^c C_v dT = C_v (T_c - T_h) < 0$$

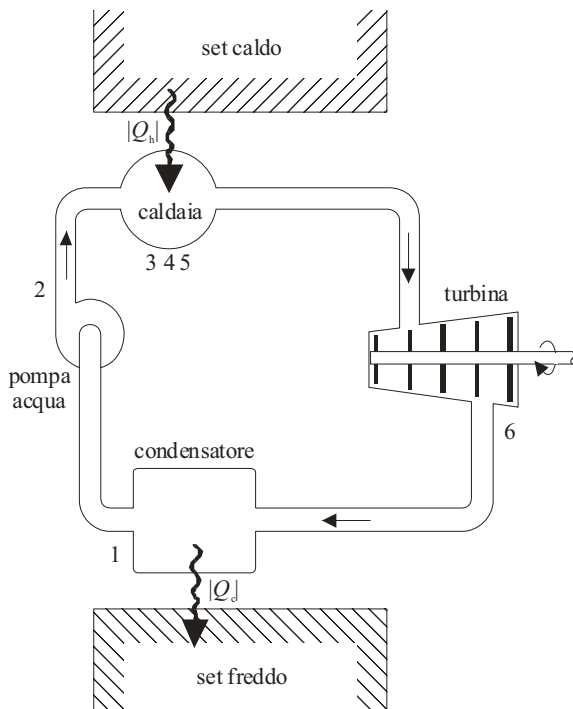
Il lavoro netto vale  $|W| = |Q_h| - |Q_c|$  mentre il rendimento è

$$\eta = \frac{|Q_h| - |Q_c|}{|Q_h|} = \frac{nR \lg \frac{V_2}{V_1} (T_h - T_c)}{nR \lg \frac{V_2}{V_1} T_h} = 1 - \frac{T_c}{T_h}$$

## Macchina a vapore

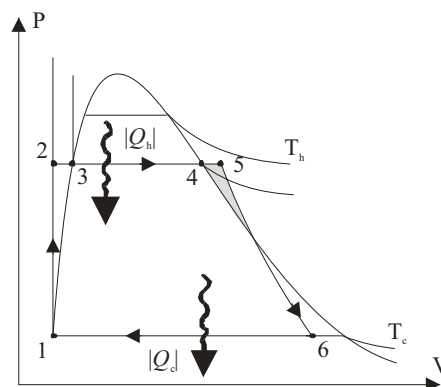
Consideriamo una massa unitaria di acqua in circolo. Nel condensatore l'acqua si trova ad una pressione inferiore a quella atmosferica ed a temperatura inferiore a quella del punto di ebollizione normale. La pompa spinge l'acqua nella caldaia dove pressione e temperatura sono molto alte. L'acqua raggiunge il punto di ebollizione e quindi evapora a pressione costante. Il vapore viene poi surriscaldato e passa nella turbina dove si espande adiabaticamente. Infine nel condensatore dove il vapore condensa.

Abbiamo trascurato attriti e perdite di calore ottenendo un **ciclo Rankine**.



- 1 → 2 compressione adiabatica dell'acqua alla pressione della caldaia
- 2 → 3 riscaldamento isobaro dell'acqua fino al punto di ebollizione
- 3 → 4 vaporizzazione isobaro e isoterma dell'acqua in vapore saturo
- 4 → 5 surriscaldamento isobaro del vapor d'acqua fino alla temperatura  $T_h$
- 5 → 6 espansione adiabatica del vapore in vapore umido
- 6 → 1 condensazione isobara e isoterma

Anche in questo caso non si può convertire totalmente il calore in lavoro.

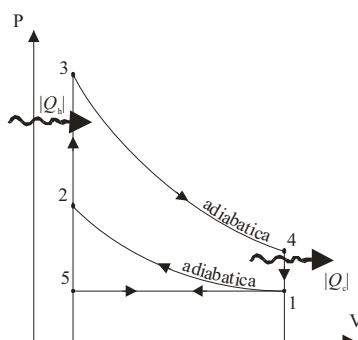


## Ciclo Otto

Il ciclo è costituito da sei trasformazioni chiamate **tempi** o **fasi**:

1. fase di aspirazione – una miscela di vapori di benzina e aria entra nel cilindro grazie al movimento di aspirazione del pistone  $P_{atm} > P_{pist}$
2. fase di compressione – la miscela viene compressa e quindi pressione e temperatura crescono notevolmente
3. scoppio – si ha la combustione molto rapida della miscela ad alta temperatura a causa di una scintilla elettrica
4. fase di potenza – i prodotti della combustione spingono il pistone verso l'esterno e quindi pressione e temperatura diminuiscono
5. scarico della valvola – alla fine della fase di potenza, pressione e temperatura sono ancora elevati e quindi una valvola fa fuoriuscire i gas fino a che la pressione non eguaglia quella atmosferica
6. fase di scarico – il pistone spinge fuori tutti prodotti della combustione.

Avendo trascurato attriti e perdite di calore, si ottiene il ciclo idealizzato a benzina o ciclo Otto:



- 5 → 1 aspirazione isobara quasi statica
- 1 → 2 compressione adiabatica quasi statica ( $T_1 V_1^{\gamma-1} = T_2 V_2^{\gamma-1}$ )
- 2 → 3 aumento isocoro quasi statico di  $P$  e  $T$  [ $Q_{23} = \Delta U_{23} = C_v(T_3 - T_2)$ ]
- 3 → 4 espansione adiabatica quasi statica ( $T_3 V_3^{\gamma-1} = T_4 V_4^{\gamma-1}$ )
- 4 → 1 caduta isocoro quasi statica di  $P$  e  $T$  [ $Q_{41} = \Delta U_{41} = C_v(T_4 - T_1)$ ]
- 1 → 5 scarico quasi statico e isobaro

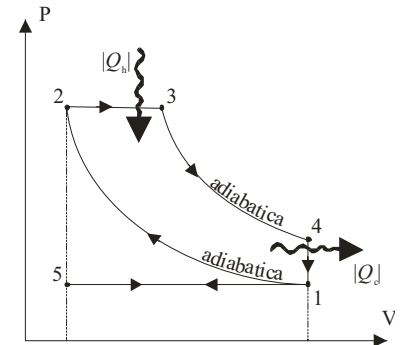
Il rendimento si ottiene considerando la  $T_1 V_1^{\gamma-1} = T_2 V_2^{\gamma-1}$  e la  $T_3 V_2^{\gamma-1} = T_4 V_1^{\gamma-1}$  da cui si ottiene:

$$\frac{T_4 - T_1}{T_3 - T_2} = \left( \frac{V_2}{V_1} \right)^{\gamma-1} \Rightarrow \eta = 1 - \frac{|Q_c|}{|Q_h|} = 1 - \frac{T_4 - T_1}{T_3 - T_2} = 1 - \frac{1}{(V_1/V_2)^{\gamma-1}}$$

ed essendo il rapporto di compressione  $r = V_1/V_2$  otteniamo  $\eta = 1 - \frac{1}{r^{\gamma-1}}$

## Ciclo Diesel

Nel ciclo Diesel viene aspirata solo aria che successivamente viene compressa adiabaticamente fino a quando alla temperatura è tale da causare la combustione spontanea del gasolio. Questo viene spruzzato nel cilindro alla fine della fase di compressione, in modo che la trasformazione (combustione) sia isobara. Il resto del ciclo (cioè la fase di potenza, la scarico della valvola e la fase di scarico) è identico a quello del motore a benzina. Anche in questo caso abbiamo trascurato attriti e perdite di calore ottenendo un ciclo ideale chiamato **ciclo diesel a gas ideale**.



## Teorema di Clausius

Consideriamo un diagramma generalizzato per il lavoro che è dato dal prodotto di una forma generalizzata Y per uno spostamento generalizzato X. Si consideri in esso una trasformazione reversibile ( $i \rightarrow f$ ) e si pensi di sostituirla con una trasformazione di due adiabatiche ed un'isoterma, tale che l'area sottesa sia la stessa in entrambi i casi. Questo significa che il lavoro compiuto lungo i due percorsi è lo stesso:

$$W_{if} = W_{iabf}$$

applicando il primo principio della termodinamica ad entrambe le trasformazioni:

$$W_{if} = \Delta U - Q_{if} = W_{iabf} = \Delta U - Q_{iabf} \Rightarrow Q_{if} = Q_{iabf}$$

Inoltre, essendo  $Q_{ia} = Q_{bf} = 0$  essendo adiabatiche, abbiamo che:

$$Q_{iabf} = Q_{ia} + Q_{ab} + Q_{bf} = Q_{ab}$$

pertanto il calore trasmesso lungo l'isoterma è uguale a quello trasmesso lungo la trasformazione considerata inizialmente.

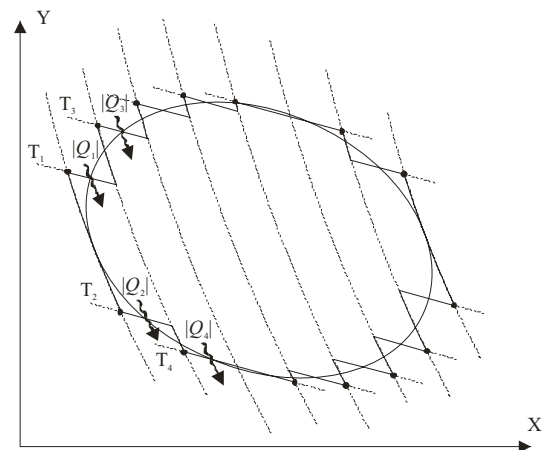
Consideriamo ora un ciclo reversibile che, per quanto visto precedentemente, possiamo sostituire con una spezzata costituita

da adiabatiche alternate ad isoterme. Si ottengono così tanti cicli di Carnot. Per essi si ha:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{|Q_1|}{|Q_2|} = \frac{T_1}{T_2} \\ \frac{|Q_3|}{|Q_4|} = \frac{T_3}{T_4} \\ \dots \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \frac{|Q_1|}{T_1} = \frac{|Q_2|}{T_2} \\ \frac{|Q_3|}{T_3} = \frac{|Q_4|}{T_4} \\ \dots \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \frac{Q_1}{T_1} + \frac{Q_2}{T_2} = 0 \\ \frac{Q_3}{T_3} + \frac{Q_4}{T_4} = 0 \\ \dots \end{array} \right.$$

avendo considerato positivo il calore assorbito e negativo quello ceduto:

$$\frac{Q_1}{T_1} + \frac{Q_2}{T_2} + \frac{Q_3}{T_3} + \frac{Q_4}{T_4} + \dots = 0$$



supponiamo ora di suddividere il ciclo in un numero molto grande di strisce: per trasformazioni infinitesime si ha la formulazione del teorema di Clausius:

$$\oint \frac{\delta Q}{T} = 0$$

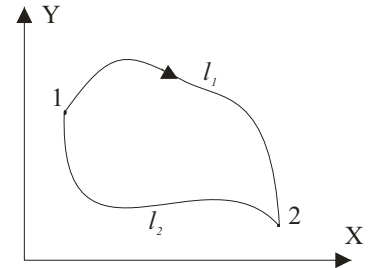
## Entropia

Si consideri un ciclo reversibile in un diagramma generalizzato per il lavoro. Abbiamo appena visto che per il teorema di Clausius abbiamo:

$$\oint \frac{\delta Q}{T} = 0$$

pertanto, possiamo anche scrivere:

$$\int \frac{\delta Q}{T} \Big|_{l_1} + \int \frac{\delta Q}{T} \Big|_{l_2} = 0 \Rightarrow \int \frac{\delta Q}{T} \Big|_{l_1} = \int \frac{\delta Q}{T} \Big|_{l_2}$$



questa quantità è indipendente dalla trasformazione reversibile che unisce lo stato 1 a quello 2, e si chiama entropia. Se  $S_i$  è l'entropia nello stato iniziale e  $S_f$  l'entropia nello stato finale, si ha:

$$S_i - S_f = \int \frac{\delta Q}{T} \quad \text{variazione di entropia}$$

se gli stati  $i$  e  $f$  sono infinitamente prossimi, si può eliminare il segno di integrale mentre la variazione di entropia diventa:

$$dS = \frac{\delta Q}{T}$$

**L'entropia è una proprietà termodinamica** di un sistema e quindi è funzione di tante coordinate termodinamiche quante ne servono per specificare lo stato del sistema.

## Entropia di un gas ideale

Per un gas ideale sappiamo che:

$$\begin{cases} \delta Q = C_p dT - V dP \\ \delta Q = C_v dT + P dV \end{cases} \quad (1) \quad (2)$$

Dividendo la (1) per  $T$  si ha:  $dS = \frac{\delta Q}{T} = C_p \frac{dT}{T} - \frac{V dP}{T} = C_p \frac{dT}{T} - R \frac{dP}{P}$

integrando:  $S = \int C_p \frac{dT}{T} - R \lg P + S_0$

integrando tra due stati particolari:  $\Delta S = \int_{T_1}^{T_2} C_p \frac{dT}{T} - R \lg \frac{P_2}{P_1}$

Consideriamo la (2). Dividendo la per  $T$  si ha:  $dS = \frac{\delta Q}{T} = C_v \frac{dT}{T} + \frac{P dV}{T} = C_v \frac{dT}{T} + R \frac{dV}{V}$

integrando:  $S = \int C_v \frac{dT}{T} + R \lg V + S_0$

integrando tra due stati particolari:  $\Delta S = \int_{T_1}^{T_2} C_v \frac{dT}{T} + R \lg \frac{V_2}{V_1}$

Si vede così che **l'entropia di un gas ideale è funzione di due variabili di stato** (ad es.  $T$  e  $P$  oppure  $T$  e  $V$ ), a differenza di quanto succede per l'energia interna  $U$  e l'entalpia  $H$ , che nel caso di gas ideale dipendono solo da  $T$ .

## Trasformazione isoentropica quasi statica di un gas ideale

Tenendo conto che  $dS = \frac{\delta Q}{T}$ , si vede che se  $\delta Q = 0$  allora  $dS = 0$  ossia **una trasformazione isoentropica è anche adiabatica**. Si deduce che l'equazione sarà (cfr. pag.12):

$$PV^\gamma = \text{cost}$$

Dimostriamolo: dall'equazione di stato si ha:  $PV = RT \Rightarrow \lg PV = \lg P + \lg V = \lg RT = \lg R + \lg T$

differenziando si ha:  $PV = RT \Rightarrow PdV + VdP = RdT \Rightarrow \frac{PdV}{PV} + \frac{VdP}{PV} = \frac{RdT}{RT} \Rightarrow \frac{dP}{P} + \frac{dV}{V} = \frac{dT}{T}$

e sostituendo nella espressione della variazione di entropia  $dS = C_p \frac{dT}{T} - R \frac{dP}{P}$  si ottiene:

$$dS = C_p \left( \frac{dT}{T} + \frac{dV}{V} \right) - R \frac{dP}{P} = \frac{dP}{P} (C_p - R) + C_p \frac{dV}{V}$$

considerando poi che  $dS = 0$  e che  $C_p - C_v = R$ , si ha:

$$C_v \frac{dP}{P} + C_p \frac{dV}{V} = 0 \Rightarrow \frac{dP}{P} + \gamma \frac{dV}{V} = 0$$

e successivamente integrando otteniamo:

$$\lg P + \gamma \lg V = \text{cost} \Rightarrow \lg PV^\gamma = \text{cost} \Rightarrow PV^\gamma = \text{cost}$$

## Diagramma TS

Una trasformazione isoterma è rappresentata un segmento orizzontale, una trasformazione isoentropica da un segmento verticale.

Consideriamo una trasformazione isocora reversibile:

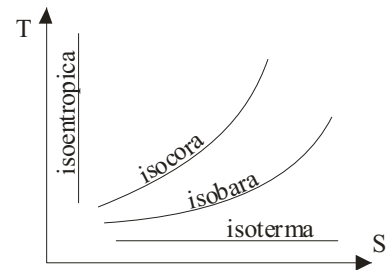
$$\delta Q = C_v dT = T dS$$

dividendo per  $dT$ :

$$\left( \frac{\delta Q}{dT} \right)_V = T \left( \frac{dS}{dT} \right)_V = C_v$$

Consideriamo ora una trasformazione isobara reversibile:

$$\left( \frac{\delta Q}{dT} \right)_P = T \left( \frac{dS}{dT} \right)_P = C_p$$



$\frac{dT}{dS}$  è la pendenza di una curva che rappresenta una certa trasformazione sul piano TS. Pertanto, essendo  $C_p \geq C_v$ , si deduce che **la pendenza dell'isocora è maggiore della pendenza dell'isobara**. Una trasformazione adiabatica reversibile avviene senza scambio di calore ( $\delta Q = 0$ ) e quindi  $dS = 0$ . Pertanto una trasformazione adiabatica è anche isoentropica. È per questo motivo che il ciclo di Carnot in un diagramma TS è rappresentato da un rettangolo.

## Principio dell'aumento di entropia

Si consideri una trasformazione reversibile. Sia  $\delta Q$  la quantità di calore che sistema riceve dall'ambiente circostante; la variazione di entropia sarà data da:

$$S_2 - S_1 = \int_1^2 \frac{\delta Q}{T}$$

Vogliamo però considerare la variazione totale di entropia che si ha in seguito ad una trasformazione reversibile. Consideriamo in particolare un serbatoio a temperatura  $T$  che assorbe il calore  $Q$  da un sistema con cui è a contatto. La variazione di entropia del serbatoio è  $Q/T$ . Si ha pertanto:

$$\begin{cases} dS_{\text{sistema}} = \frac{\delta Q}{T} \\ dS_{\text{serbatoio}} = -\frac{\delta Q}{T} \end{cases} \Rightarrow dS_{TOT} = 0 \quad \text{trasformazione reversibile}$$

pertanto quando avviene una trasformazione reversibile la variazione totale di entropia del sistema e dell'ambiente circostante è nulla.

Consideriamo ora una trasformazione irreversibile. In tal caso avremo che  $\delta Q$  è dato dalla somma del calore che sistema riceve dall'esterno e di quella che riceve dalle altre parti del sistema che si trovano a temperature diverse a causa degli squilibri caratteristici delle trasformazioni reali ed a causa di fenomeni di dissipazione interna che convertono in calore altre forme di energia.

Indicando con:

- $\delta Q_e$  la quantità di calore che il sistema riceve dall'esterno
- $\delta Q_i$  la quantità di calore ricevuta da altre parti del sistema
- $\delta Q_a$  la quantità di calore generata per trasformazione di altre forme di energia

si ha:  $S_2 - S_1 = \int \frac{\delta Q_e}{T} + \int \frac{\delta Q_i}{T} + \int \frac{\delta Q_a}{T}$

Dato che gli altri due termini al secondo membro sono intrinsecamente positivi, si ottiene quella che viene chiamata **inequazione di Clausius**:

$$S_2 - S_1 \geq \int \frac{\delta Q_e}{T}$$

dove il segno di uguaglianza vale nel caso di trasformazioni reversibili. Consideriamo ora la variazione totale di entropia, ossia quella del sistema e dell'ambiente circostante. A causa del contributo degli ultimi due termini possiamo affermare che l'entropia totale è maggiore di zero:

$$dS_{TOT} \geq 0$$

Questa espressione rappresenta il secondo principio della termodinamica. Il secondo principio risponde alla domanda: in che verso si svolge una trasformazione? La risposta è che ogni trasformazione procede nel verso in cui si ha un aumento delle entropia totale, cioè dell'entropia del sistema e dell'ambiente circostante.

NOTA: in base a quanto detto, affermiamo che le trasformazioni adiabatiche reversibili sono anche isoentropiche, mentre quelle adiabatiche irreversibili non sono isoentropiche ma ad entropia totale crescente.

## Entropia ed exergia

Consideriamo un sistema costituito da un serbatoio di calore a temperatura  $T$  che si trova immerso in un ambiente a temperatura  $T_0$ . Il calore che viene trasformato in lavoro con una macchina di Carnot è dato da:

$$|W| = |Q| \left( 1 - \frac{T_0}{T} \right)$$

questa rappresenta l'energia utilizzabile (exergia).

Immaginiamo ora che la quantità di calore  $Q$  sia trasmessa direttamente da un set a temperatura  $T_1$  a un set a  $T_2$  con  $T_1 > T_2$ , entrambi immersi in un ambiente di temperatura  $T_0 < T_1 < T_2$ . Il lavoro che si sarebbe potuto

ottenere, prima della trasmissione, è  $|W| = |Q| \left( 1 - \frac{T_0}{T_1} \right)$ , dopo la trasmissione il lavoro massimo ottenibile è

$|W| = |Q| \left( 1 - \frac{T_0}{T_2} \right)$ . Pertanto, a causa della trasmissione di calore irreversibile da  $T_1$  a  $T_2$ , la quantità di calore utilizzabile diminuisce. La differenza tra queste due quantità trovate rappresenta l'energia che prima della trasmissione poteva anch'essa essere trasformata in lavoro e che dopo la trasmissione non può più esserlo, ossia è inutilizzabile.

Allora si ha:

$$|Q| \left( 1 - \frac{T_0}{T_1} \right) - |Q| \left( 1 - \frac{T_0}{T_2} \right) = T_0 \left( \frac{|Q|}{T_2} - \frac{|Q|}{T_1} \right)$$

ed indicando con  $E'$  l'energia inutilizzabile si ha:

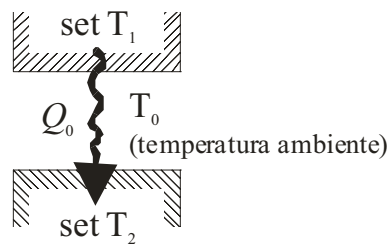
$$E' = T_0 \Delta S_{TOT}$$

dove  $\Delta S_{TOT}$  è la variazione di entropia totale dei due serbatoi. Maggiore è l'irreversibilità di una trasformazione, maggiore è l'aumento di entropia e quindi è maggiore l'energia inutilizzabile. Si capisce che l'energia utilizzabile diminuisce mentre l'energia inutilizzabile aumenta.

### Bilanci energetici ed exergetici

- bilanci energetici:** basati sulla quantità di energia
- bilanci exergetici:** basati sulla qualità dell'energia

Consideriamo due serbatoi termici alle temperature  $T_1$  e  $T_2$  con  $T_1 > T_2$  e sia  $Q_0$  il flusso di calore che passa dal set a  $T_1$  a quello a  $T_2$  per semplice conduzione e quindi senza compiere lavoro. Vogliamo valutare qual è la perdita di exergia.



L'exergia a livello termico  $T_1$  è quella che si realizzerebbe con un ciclo di Carnot e vale  $E_{X_1} = |Q_0| \left( 1 - \frac{T_0}{T_1} \right)$

mentre l'exergia a livello termico  $T_2$  è  $E_{X_2} = |Q_0| \left( 1 - \frac{T_0}{T_2} \right)$ . La perdita di exergia sarà:

$$\Delta E_X = E_{X_1} - E_{X_2} = |Q_0| \left( 1 - \frac{T_0}{T_1} - 1 + \frac{T_0}{T_2} \right) = |Q_0| T_0 \left( \frac{1}{T_2} - \frac{1}{T_1} \right) = T_0 \left( \frac{|Q_0|}{T_2} - \frac{|Q_0|}{T_1} \right)$$

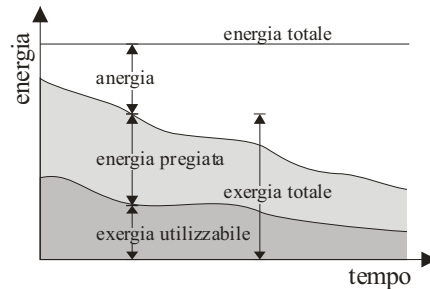
Vediamo ora qual è stata la variazione di entropia:

$$\left. \begin{array}{l} \frac{Q_0}{T_2} = S_2 \text{ (entropia in entrata: positiva)} \\ \frac{Q_0}{T_1} = S_1 \text{ (entropia in uscita: negativa)} \end{array} \right\} \Delta S = S_2 - S_1 = \frac{Q_0}{T_2} - \frac{Q_0}{T_1} > 0$$

Pertanto la variazione di exergia diventa  $\Delta E_X = T_0 \Delta S$ , ovvero ad una diminuzione di exergia corrisponde un aumento di entropia.

### Principio dell'annichilimento dell'exergia totale

Mentre l'energia totale si mantiene costante nel tempo, la qualità dell'energia di cui si dispone varia nel tempo e quindi varia anche la possibilità che essa possa essere utilizzata per fini pratici. In altri termini, varia l'exergia che è sempre in diminuzione, in quanto tutti i processi reali di conversione dell'energia non avvengono secondo cicli reversibili e quindi hanno come risultato la distruzione di exergia. Poiché nella realtà non è possibile operare secondo cicli reversibili, si ha una continua diminuzione di exergia nel tempo.



## Entropia e disordine

Vogliamo vedere come l'aumento di entropia è legato al passaggio da una condizione di ordine a una di disordine. Tutti i processi naturali tendono a procedere verso stati il cui disordine è sempre maggiore. L'entropia di un sistema aumenta all'aumentare del disordine. Pertanto un altro modo di enunciare il secondo principio della termodinamica è:

tutti i sistemi tendono verso lo stato di massimo disordine

## Frigoriferi e pompe di calore

Il rendimento di una macchina termica è  $\eta = 1 - T_c/T_h$  e sarà tanto maggiore quanto minore è il rapporto  $T_c/T_h$  che può essere ottenuto sia aumentando  $T_h$  che diminuendo  $T_c$ . Vediamo di capire quale è più conveniente.

Supponiamo di incrementare  $T_h$  di  $\Delta T$ : il rendimento diventa  $\eta' = 1 - \frac{T_c}{T_h + \Delta T}$

supponiamo di decrementare  $T_c$  di  $\Delta T$ : il rendimento diventa  $\eta'' = 1 - \frac{T_c - \Delta T}{T_h}$

eseguendo ora il rapporto otteniamo:

$$\frac{\eta'}{\eta''} = \frac{T_h + \Delta T - T_c}{T_h + \Delta T} \cdot \frac{T_h}{T_h - T_c + \Delta T} = \frac{T_h}{T_h + \Delta T} < 1 \Rightarrow \eta' < \eta''$$

da cui si vede che conviene abbassare il livello termico inferiore  $T_c$ .

Il lavoro prodotto da una macchina termica che lavora tra  $T_h$  e  $T_c$  è:

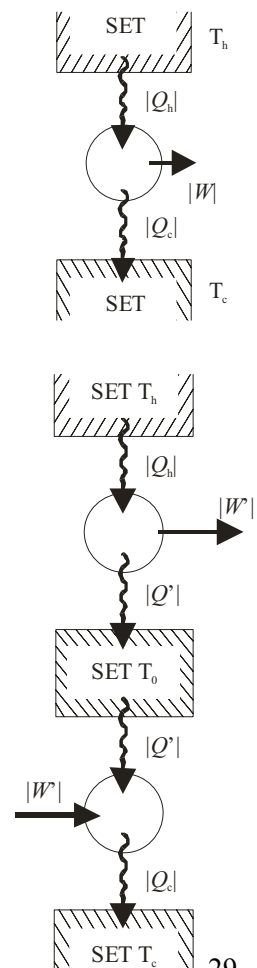
$$|W| = \eta |Q_h| = |Q_h - Q_c|$$

Abbassiamo il livello termico  $T_c$  al livello  $T_0$  con una macchina frigorifero. Abbiamo quindi una macchina termica che lavora tra  $T_h$  e  $T_c$  più una macchina frigorifero che lavora tra  $T_c$  e  $T_0$ , per mantenere la temperatura  $T_0 < T_h$ .

Per quanto già detto, avendo abbassato il livello termico inferiore, la macchina termica ha un rendimento maggiore. Consideriamo però il lavoro netto:

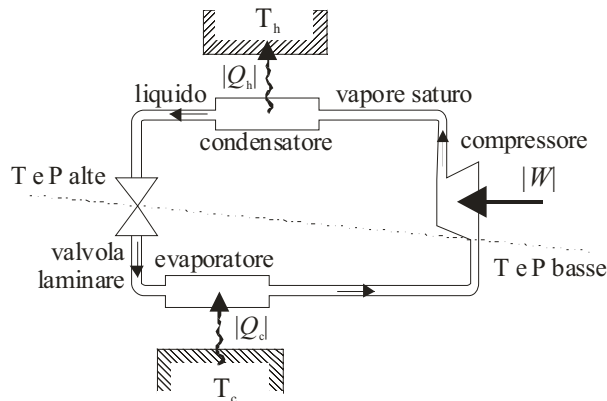
$$W' - W'' = Q_h - Q' - (Q_c - Q') = Q_h - Q_c$$

il lavoro di cui si dispone è in definitiva uguale a quello di cui si disponeva quando si aveva la sola macchina termica che lavorava tra  $T_h$  e  $T_c$ . In entrambi i casi si perde exergia comportando ulteriore diminuzione di lavoro disponibile.





Consideriamo una macchina frigorifero:



Il ciclo ha inizio nel compressore, dove al gas frigorifero viene fornito un lavoro  $W$  che porta la temperatura del gas a  $T'_h$ . Il gas va verso il condensatore che si trova a temperatura  $T_h < T'_h$  e quindi si ha un flusso di calore  $Q_h$  dal gas verso il set a temperatura maggiore. In seguito a questo flusso il gas si raffredda e passa in fase liquida.

Il liquido passa poi nella valvola laminare, la quale mantiene l'entalpia costante, mentre varia la pressione. Non si hanno scambi di calore e si ha la cosiddetta **laminazione isoentalpica** ( $H = U + PV = \text{cost}$ ). Parte del liquido evapora sottraendo calore a se stesso e quindi raffreddandosi e portandosi ad una temperatura  $T'_c < T_c$ . Nell'evaporatore la restante parte del liquido evapora e questo determina un aumento di  $U$  in quanto si ha un aumento di volume. Affinché avvengano flussi di calore è sempre necessaria una differenza di temperatura. Questi flussi di calore sono proporzionali non solo alla differenza di temperatura, ma anche alla superficie dei corpi:

$$Q = KSA\Delta T$$

inoltre, si nota che il ciclo reale avviene tra le temperature  $T'_h$  e  $T'_c$  e non tra le temperature di cui si dispone.

Tanto minore è il  $\Delta T$ , tanto maggiore è il COP, essendo  $\text{COP}_c = \frac{T_h}{T_h - T_c}$ . I COP reali, inoltre, sono sempre minori di quelli valutati secondo il ciclo di Carnot.

**Efficienza exergetica** – rapporto tra i valori di  $\eta$ , COP e  $\omega$  reali e quelli valutati secondo ciclo di Carnot:

$$\mathcal{E}_X = \frac{\eta_r}{\eta_i} \quad \mathcal{E}_X = \frac{\omega_r}{\omega_i} \quad \mathcal{E}_X = \frac{\text{COP}_r}{\text{COP}_i}$$

Tanto più  $T_h$  si avvicina a  $T_c$ , tanto più  $\omega$  aumenta:

$$\omega_c = \frac{T_c}{T_h - T_c} \Rightarrow \begin{cases} T_h = 2T_c & \omega_c = 1 \\ T_c < T_h < 2T_c & \omega_c > 1 \\ T_h = T_c & \omega_c \rightarrow \infty \\ T_h > 2T_c & \omega_c < 1 \end{cases}$$

## Esercizio

Supponiamo di dover scaldare un'abitazione di dimensioni ridotte. Vogliamo determinare quanto costa riscaldare questa casa con un impianto tradizionale (caldaia a gasolio) o con un sistema termodinamico (pompa di calore).

### ▪ Caldaia a gasolio

la produzione di calore avviene mediante un processo di combustione del gasolio. Al calore prodotto corrisponde anche un flusso di calore disperso per vari motivi (dissipazione di energia, non perfetta combustione ecc.). Occorre tener conto di un rendimento di combustione e di un rendimento di caldaia, che dipende dalla sua manutenzione. Per una caldaia che non ha un alto rendimento, non nuova e che si trova in uno stato di non particolare cura, si ha  $\eta_i = 0,65$

Supponiamo che il fabbisogno annuo sia di 5.000.000 kcal e sapendo che un chilo di gasolio ha un potere calorifico di 10.334 kcal/kg, l'energia primaria che si dovrà utilizzare sarà pari a:

$$\frac{Q_i}{H \cdot \eta_r} = \frac{5.000.000 \text{ kcal}}{10.334 \cdot 0,65 \text{ kcal/kg}} = 744 \text{ kg di gasolio}$$

se supponiamo che 1 kg di gasolio costi 1€, riscaldare questo appartamento occorrono 744 €.

### ▪ Pompa di calore

usiamo una pompa di calore aria-aria, supponendo che l'aria esterna sia a 0°C e quella interna a 20°C e che il fabbisogno sia sempre di  $Q_i = 5.000.000 \text{ kcal}$ . Il  $\text{COP}_R$  della nostra pompa non lo possiamo determinare; vediamo che il  $\text{COP}_C$  teorico che avrebbe la pompa di calore se lavorasse secondo il ciclo di Carnot è:

$$\left. \begin{array}{l} T_h = 20 + 273 = 293 \text{ K} \\ T_c = 273 \text{ K} \end{array} \right\} \text{COP}_C = \frac{T_h}{T_h - T_c} = \frac{293}{20} \cong 15$$

Nella realtà il  $\text{COP}_R$  non a questo valore. Operiamo quindi per via statistica; si tratta di sapere il  $\text{COP}_{\text{Ex}}$  delle pompe di calore normalmente in commercio:

- per le grosse pompe di calore:  $\text{COP}_{\text{Ex}} \approx 0,6$
- per le medie pompe di calore:  $\text{COP}_{\text{Ex}} \approx 0,5$
- per le piccole pompe di calore:  $\text{COP}_{\text{Ex}} \approx 0,4$

supponiamo di avere una piccola pompa di calore con un  $\text{COP}_{\text{Ex}} \approx 0,4$ . Ciò significa che:

$$\text{COP}_R = \text{COP}_{\text{Ex}} \times \text{COP}_C = 0,4 \times 15 \cong 6$$

Ora, noi sappiamo che  $\text{COP}_R = \frac{|Q_h|}{|W|}$ . Dato che il lavoro  $W$ , essendo le pompe di calore azionate dall'energia elettrica, è espresso in kWh, anche  $Q_h = Q_i$  dovrà essere espresso in kWh.

$$Q_i = 5.000.000 / 860 = 5814 \text{ kWh} \quad (\text{essendo } 1 \text{ kWh} = 860 \text{ kcal})^*$$

Pertanto si deve fornire all'ambiente un flusso di calore  $Q_i$  di 5814 kWh con una pompa di calore che ha un  $\text{COP}_R \cong 6$ . L'energia da spendere in lavoro sarà:

$$W = \frac{|Q_i|}{\text{COP}_R} = \frac{5814}{6} = 969 \text{ kWh}$$

Considerato che 1 kWh costa 0,15 € dobbiamo spendere 145,35 €.

\* sappiamo che l'equivalente meccanico della caloria è:

$$\left. \begin{array}{l} 1 \text{ cal} = 4,186 \text{ Joule} \Rightarrow 1 \text{ kcal} = 4,186 \cdot 10^3 \text{ J} \\ 1 \text{ Watt} = 1 \text{ J/s} \Rightarrow 1 \text{ kW} = 1000 \text{ J/s} \\ 1 \text{ kWh} = 3600 \times 1000 \text{ J} = 3600 \cdot 10^3 \text{ J} \end{array} \right\} 1 \text{ J} = \frac{1}{4,186} \cdot 10^{-3} \text{ kcal} \Rightarrow 1 \text{ kWh} = 3600 \cdot 10^3 \cdot \frac{1}{4,186} \cdot 10^{-3} = 860 \text{ kcal}$$

## 2. Moto dei fluidi

### Sistemi termodinamici chiusi

Si tratta di quei sistemi che possono scambiare energia, sotto forma di calore o lavoro, col mondo esterno, ma non possono scambiare massa. Pertanto la massa di questi sistemi resta costante.

A questi sistemi possiamo applicare il primo principio della termodinamica:  $\Delta U = Q + W$

Questa espressione può essere generalizzata nel caso in cui il sistema sia costituito da diverse parti, tenendo conto che ciascuna parte potrà interagire con mondo esterno. Pertanto avremo diversi termini di calore e diversi termini di lavoro:  $\Sigma \Delta U = \Sigma Q + \Sigma W$

tenendo conto che  $H = U + PV \Rightarrow \Sigma \Delta H = \Sigma \Delta U + \Sigma \Delta(PV)$

possiamo scrivere il bilancio energetico per tali sistemi:  $\Sigma \Delta H = \Sigma Q + \Sigma W + \Sigma \Delta(PV)$

se,  $P = \text{cost.}$ , essendo  $W = -P\Delta V$  otteniamo:  $\Sigma \Delta H = \Sigma Q + \Sigma(-P\Delta V) + \Sigma(P\Delta V) = \Sigma Q$

$$\boxed{\Sigma \Delta H = \Sigma Q}$$

### Sistemi termodinamici aperti

È un sistema termodinamico nel quale le interazioni col mezzo esterno non si limitano a scambi di energia ma comportano anche scambi di materia.

Ci limiteremo allo studio di un condotto percorso da un fluido (liquido ed aeriforme) in movimento, ammettendo che durante il percorso il fluido possa ricevere o cedere energia sotto forma meccanica e termica. Inoltre ci limiteremo al **regime stazionario**, ossia al regime in cui le grandezze termodinamiche che caratterizzano moto del fluido sono costanti nel tempo. In generale,  $P$ ,  $V$ ,  $T$  e  $u$  (velocità) avranno valori differenti nelle successive sezioni del condotto. In generale si ha quindi che:

- i valori delle grandezze di stato in una qualunque sezione del condotto si mantengono costanti nel tempo, anche se in generale saranno diversi da sezione a sezione
- un elemento di fluido che percorre il condotto subisce una trasformazione termodinamica passando per diversi stati ciascuno dei quali corrisponde ad una sezione del condotto

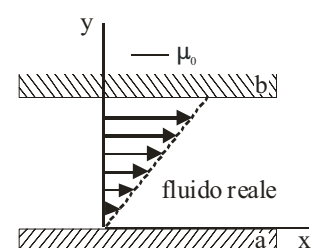
Per lo studio dei sistemi termodinamici aperti si prende come sistema un volume chiamato **volume di controllo**, ed a tale volume si applicano le leggi termodinamiche.

### Viscosità

I fluidi ideali possono trasmettere solo sforzi normali e quindi non trasmettono sforzi di taglio. I fluidi reali, al contrario, trasmettono sforzi di taglio, ossia sono dotati di viscosità.

Consideriamo due piastre separate da un fluido e supponiamo che una piastra scorra sull'altra. La distribuzione delle velocità è lineare. Dopo un certo tempo, se non intervenisse uno sforzo  $\tau$  esterno, si avrebbe un arresto del moto. Per mantenere  $b$  in movimento occorre applicare a tale piastra una forza  $\tau$  e ciò significa che esistono sforzi di taglio  $\tau$  proporzionali al gradiente di velocità  $dv/dy$  mediante un coefficiente di proporzionalità  $\mu$ :

$$\tau = \mu \frac{du}{dy} \quad \text{viscosità dinamica o assoluta [Kg/ms]}$$



Un'altra grandezza è la viscosità cinematica  $\nu$ , definita come il rapporto tra la viscosità dinamica e la densità:

$$\nu = \frac{\mu}{\rho}$$

Esistono due relazioni per interpolare i dati:

- relazione di Maxwell:  $\mu = K\sqrt{T}$  per i gas

- relazione di Arrhenius:  $\mu = Ae^{E/RT}$  per i liquidi

pertanto nei gas la viscosità è funzione crescente della temperatura, mentre nei liquidi diminuisce con l'aumentare della temperatura.

## Conservazione della massa

Essendo in regime stazionario la portata massica (massa del fluido che attraversa una sezione del condotto per unità di tempo) resta costante al variare del tempo. Inoltre se lungo il percorso non ci sono apporti o sottrazioni di fluido, la portata massica deve avere lo stesso valore in tutte le sezioni.

La **legge di conservazione della massa** dice che la portata massica o portata in massa è costante, ossia ha un valore che non dipende dalla sezione e dal tempo:

$$G = \bar{\rho}V = \text{cost}$$

con  $\bar{\rho}$  = densità media

$V$  = portata volumica (volume che attraversa una sezione dell'unità di tempo)

tenendo conto che  $V$  è data dal prodotto della velocità media  $\bar{u}$  in una data sezione per l'area della sezione:

$$G = \bar{\rho} \cdot \bar{u}S = \text{cost}$$

ed essendo  $\bar{\rho} = \frac{1}{\bar{v}}$ , con  $\bar{v}$  volume specifico medio, si ottiene:

$$G = \frac{\bar{u}S}{\bar{v}} = \text{cost}$$

NOTA – Le grandezze soprastegnate sono grandezze medie. Ad es.  $\bar{u} = \frac{1}{S} \int u dS$

## Conservazione dell'energia

Consideriamo una vena nella quale scorre un fluido. Possiamo definire la parte tratteggiata in figura come **volume di controllo**  $V$ . Nella condotta considerata si ha un solo ingresso ed una sola uscita, ma possiamo generalizzare tale discorso al caso di  $n$  entrate ed  $m$  uscite. Applichiamo a  $V$  la legge di conservazione dell'energia:

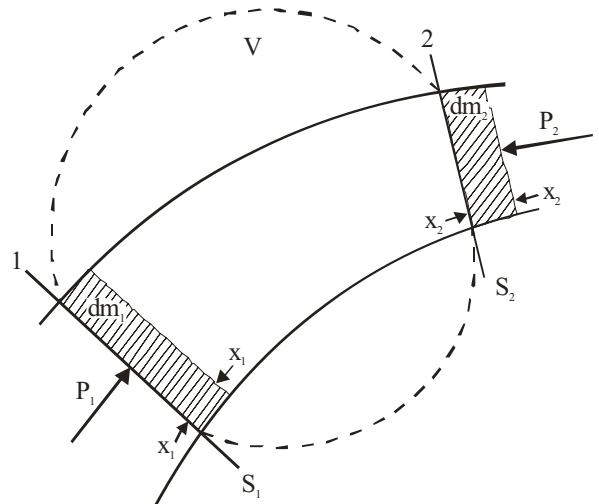
$$E_2 = E_1 + E_{12}$$

ossia l'energia del fluido nella sezione 2 è uguale all'energia totale nella sezione 1 più l'energia che il fluido riceve tra la sezione 1 e quella 2. Quindi l'energia che entra nel sistema dall'ingresso più quella scambiata dal sistema col mondo esterno è uguale a quella che esce dal sistema.

Consideriamo il caso in cui ogni sezione è attraversata da una massa unitaria. Se il fluido possiede energia interna  $U$ , energia potenziale  $qz$  ed energia cinetica  $\frac{1}{2} u^2$ , si ha che le energie totali nelle sezioni 1 e 2 valgono:

$$\begin{cases} E_1 = gz_1 + \frac{1}{2}u_1^2 + U_1 \\ E_2 = gz_2 + \frac{1}{2}u_2^2 + U_2 \end{cases}$$

Per calcolare l'energia potenziale si è tenuto conto della quota del baricentro delle sezioni estreme ( $z_1$  e  $z_2$ ) mentre per calcolare l'energia cinetica si è tenuto conto della velocità del fluido in tali sezioni. Il termine  $E_{12}$  misura l'energia ricevuta dal sistema e quindi comprende l'energia ricevuta sotto forma di calore  $Q_{12}$ , sotto



forma di lavoro meccanico  $W_{12}$  e, dato che il sistema è aperto, il lavoro che le pressioni  $P_1$  e  $P_2$  compiono in corrispondenza delle due sezioni per la massa unitaria. Quindi il lavoro sarà:

$$L = P_1 S_1 x_1 - P_2 S_2 x_2 = P_1 V_1 - P_2 V_2$$

È chiaro  $V_1$  e  $V_2$  che sono volumi specifici ossia riferiti all'unità di massa. Supponendo che le pareti nella condotta siano rigide e che quindi non possano subire spostamenti, non esiste alcun modo, oltre a quello precedente, per fornire lavoro al sistema. Possiamo pensare di operare un foro e di inserire un'elica che funziona da turbina e quindi può fornire o assorbire un'ulteriore quantità di lavoro  $W_{12}$ . L'ultimo modo di scambiare l'energia col mondo esterno è quello dello scambio di calore tra la condotta e l'esterno ( $Q_{12}$ ):

$$E_{12} = P_1 V_1 - P_2 V_2 + Q_{12} + W_{12}$$

Quindi il principio di conservazione dell'energia diventa:

$$\begin{aligned} E_2 = E_1 + E_{12} &\Rightarrow gz_2 + \frac{1}{2}u_2^2 + U_2 = gz_1 + \frac{1}{2}u_1^2 + U_1 + P_1 V_1 - P_2 V_2 + Q_{12} + W_{12} \\ &\Rightarrow g(z_2 - z_1) + \frac{1}{2}(u_2^2 - u_1^2) + [(U_2 + P_2 V_2) - (U_1 + P_1 V_1)] = Q_{12} + W_{12} \\ &\Rightarrow \boxed{g(z_2 - z_1) + \frac{1}{2}(u_2^2 - u_1^2) + [H_2 - H_1] = Q_{12} + W_{12}} \end{aligned}$$

la somma degli incrementi subiti dall'energia potenziale, dall'energia cinetica e dall'entalpia è uguale all'energia ricevuta sotto forma di calore e di lavoro.

## Conservazione dell'energia: casi particolari

### ▪ efflusso adiabatico in parete sottile

vogliamo determinare la velocità con cui esce il flusso da un foro praticato in una bombola. Sia  $P_1$  la pressione all'interno della bombola e  $P_2$  quella all'esterno. Come volume di controllo scegliamo quello tra  $S_1$  e  $S_2$  con  $S_1$  una sezione interna alla bombola e sufficientemente lontana dal foro ( $u_1 = 0$ ). Supponiamo inoltre che sia trascurabile la differenza di quota ( $z_1 - z_2 = 0$ ):

$$\frac{1}{2}u_2^2 + H_2 - H_1 = 0$$

Dato che il contenitore è isolato non c'è lavoro d'elica ( $W_{12} = 0$ ) e quindi:

$$u_2 = \sqrt{2(H_1 - H_2)} \quad (\text{eq.1})$$

Vediamo in che modo la velocità di efflusso dipende dalla pressione:

$$dU = \delta Q - PdV$$

ma poiché l'efflusso è adiabatico:

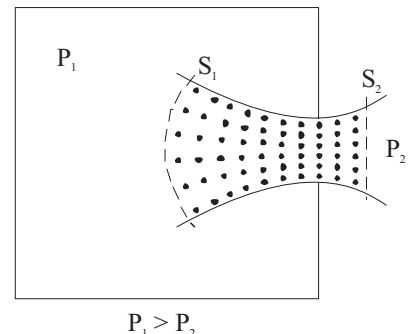
$$dU = -PdV \Rightarrow U_2 - U_1 = -\int P dV$$

$$\text{allora: } H = U + PV \Rightarrow dH = dU + d(PV) = -PdV + PdV + VdP = VdP \Rightarrow H_1 - H_2 = \int V dP$$

$$\text{L'eq.1 diventa: } u_2 = \sqrt{2 \int V dP}$$

Nel caso dei liquidi, in quanto incompressibili e quindi a  $V = \text{cost.}$ ,  $\boxed{u_2 = \sqrt{2V(P_1 - P_2)}}$

Per i gas, si è in grado di risolvere l'integrale solo se si conosce la relazione che intercorre tra  $P$  e  $V$ . tale relazione è rappresentabile tramite la politropica:



$$PV^m = \text{cost} \Rightarrow V = \text{cost}^{1/m} \cdot P^{-1/m}$$

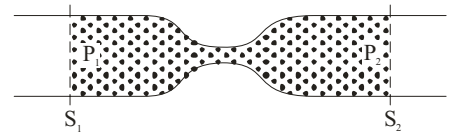
$$\int_2^1 V dP = \text{cost}^{1/m} \cdot \int_2^1 P^{-1/m} dP = \text{cost}^{1/m} \cdot \left[ \frac{P^{\frac{m-1}{m}}}{\frac{m-1}{m}} \right]_2^1$$

$$u_2 = \sqrt{2 \frac{m}{m-1} (P_1 V_1^m)^{1/m} \left[ P_1^{\frac{m-1}{m}} - P_2^{\frac{m-1}{m}} \right]} \quad \text{con } P_1 V_1^m = \text{cost}$$

$$u_2 = \sqrt{2 \frac{m}{m-1} P_1 V_1 \left[ 1 - \left( \frac{P_2}{P_1} \right)^{\frac{m-1}{m}} \right]}$$

### ▪ Efflusso attraverso un rubinetto

Consideriamo un fluido che passa attraverso un rubinetto dalla pressione  $P_1$  alla pressione  $P_2$ . Supponiamo che  $Q_{12} = 0$  e che  $W_{12} = 0$ , ossia che l'efflusso sia adiabatico e che non vi sia alcuna macchina che compie lavoro. Il volume di controllo scelto è quello compreso tra  $S_1$  e  $S_2$ . Immaginiamo trascurabile la differenza di quota ( $z_1 - z_2 = 0$ ). Allora avremo:



$$H_2 - H_1 = 0 \Rightarrow H_2 = H_1$$

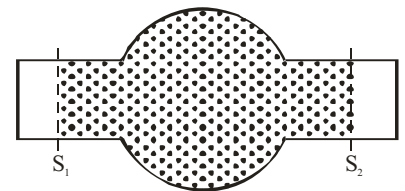
ovvero l'entalpia finale è uguale a quella iniziale.

### ▪ Lavoro in una macchina

Supponiamo che la macchina sia attraversata da un fluido in moto stazionario. Supponiamo inoltre che non ci siano scambi di calore ( $Q_{12} = 0$ ) e che  $z_1 = z_2$  e  $u_1 = u_2$ . Avremo allora:

$$W_{12} = H_2 - H_1$$

ovvero il lavoro assorbito o compiuto dalla macchina è dato dalla differenza di entalpia tra le due sezioni.



## Equazione di Bernoulli

Consideriamo l'equazione che esprime il principio di conservazione dell'energia:

$$g(z_2 - z_1) + \frac{1}{2}(u_2^2 - u_1^2) + [H_2 - H_1] = Q_{12} + W_{12}$$

$$\text{in forma differenziale:} \quad gdz + udu + dH = \delta Q_{12} + \delta W_{12} \quad (\text{eq.2})$$

considerando che  $H = U + PV$  e che  $dU = \delta Q - PdV$  si ottiene:

$$dH = dU + d(PV) = \delta Q - PdV + PdV + VdP = \delta Q + VdP$$

sostituendo nella eq.2 otteniamo:

$$gdz + udu + \delta Q + VdP = \delta Q_{12} + \delta W_{12}$$

NOTA –  $\delta Q_{12}$  rappresenta i flussi di calore scambiati tra la condotta e l'esterno.  $\delta Q$  rappresentano i flussi di calore realmente scambiati tra il sistema e l'ambiente circostante cioè quelli di prima più gli scambi di calore dovuti a fenomeni dissipativi (irreversibilità). Nel caso dei fluidi ideali si ha che  $\delta Q = \delta Q_{12}$ , mentre caso dei fluidi reali  $\delta Q = \delta Q_{12} + \delta Q_{IRR}$

$$gdz + udu + \delta Q_{12} + \delta Q_{IRR} + VdP = \delta Q_{12} + \delta W_{12}$$

$$g dz + u du + \delta Q_{IRR} + V dP = \delta W_{12}$$

ora prendiamo in considerazione la definizione dell'entropia  $\delta Q_{IRR} = T dS_i$  :

$$g dz + u du + T dS_i + V dP = \delta W_{12}$$

ed integrando:

$$g(z_2 - z_1) + \frac{1}{2}(u_2^2 - u_1^2) + \int_1^2 V dP + \int_1^2 T dS_i = W_{12}$$

Scritta in questa forma, l'espressione della conservazione dell'energia mette in evidenza sia il contributo della irreversibilità sia la dipendenza dalla pressione e dal volume specifico.

$$R = Q_{IRR} = \int_1^2 T dS_i$$

ovvero la perdita di carico è uguale all'energia persa nel cammino a causa delle irreversibilità.

In generale queste espressioni vanno applicate a quei tratti dove il lavoro d'elica è nullo ( $W_{12} = 0$ ):

$$g(z_2 - z_1) + \frac{1}{2}(u_2^2 - u_1^2) + \int_1^2 V dP + R = 0$$

consideriamo il caso di un fluido ideale ( $R = 0$ ) ed incomprimibile ( $V = \text{cost.}$ ):

$$g(z_2 - z_1) + \frac{1}{2}(u_2^2 - u_1^2) + V(P_2 - P_1) = 0$$

$$VP_1 + \frac{1}{2}u_1^2 + gz_1 = VP_2 + \frac{1}{2}u_2^2 + gz_2$$

questa è l'equazione di Bernoulli per un liquido ideale e dice che:

la somma dei termini  $VP + \frac{1}{2}u^2 + gz$  (trinomio di Bernoulli) è costante per ogni sezione.

Nella realtà, ovvero in caso di fluido reale, il trinomio di Bernoulli non è costante a causa della presenza di  $\delta Q_{IRR}$  che rappresenta la perdita di carico. In altri termini, un fluido reale che si muove a quota costante tende ad arrestarsi per le perdite di carico e quindi **se a parità di quota si vuole che il fluido si mantenga in moto si deve fornire un lavoro pari alla perdita di carico.**

## Equazione di Bernoulli: casi particolari

### ▪ calcolo di un cammino

schematizziamo un cammino come un condotto nel quale scorre un fluido a temperatura  $T_F$ , mentre la temperatura dell'aria è  $T_A$ . Il volume di controllo che consideriamo è quello tra  $S_1$  e  $S_2$  con  $S_1$  scelta lontano dall'imbocco del cammino in modo che  $u_1 = 0$ :

$$gH + \frac{1}{2}u_2^2 + V_F(P_2 - P_1) + R = 0$$

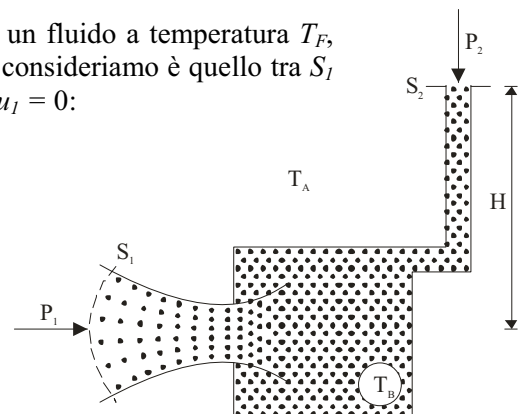
dove  $V_F$  è il volume specifico del fluido. Essendo:

$$(P_1 - P_2) V_A = gH$$

con  $V_A$  volume specifico dell'aria, otteniamo:

$$gH + \frac{1}{2}u_2^2 - g \frac{V_F}{V_A} H + R = 0$$

considerando che  $u_2 = \frac{V}{S}$  e  $R_c = \frac{1}{2}ru_2^2 = \frac{rV^2}{2S^2}$  con  $\left\{ \begin{array}{l} V \text{ portata volumica del fluido} \\ S \text{ sezione del cammino} \\ r \text{ numero adimensionale} \end{array} \right.$

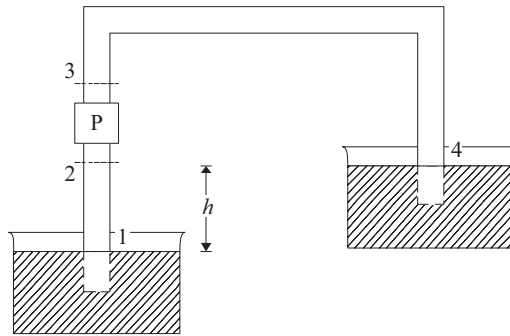


otteniamo: 
$$gH - g \frac{V_F}{V_A} H + \frac{V^2}{2S^2} + \frac{rV^2}{2S^2} = 0 \Rightarrow H \left( \frac{V_F}{V_A} - 1 \right) = \frac{V^2}{2gS^2} (r + 1)$$

da cui si ricava la sezione del camino: 
$$S = K \frac{V}{\sqrt{H}}$$
 con  $K$  costante determinata sperimentalmente

▪ **calcolo della prevalenza di una pompa in un circuito aperto**

Supponiamo di dover pompare dell'acqua da un serbatoio A ad un serbatoio B tra i quali vi è una differenza di quota  $h$ .



L'equazione di Bernoulli tra la sezione 1 che si trova al livello del liquido nel serbatoio inferiore e la sezione 2 all'ingresso della pompa diventa:

$$V(P_2 - P_1) + \frac{1}{2} u_2^2 + g(z_2 - z_1) + R_{12} = 0$$

mentre tra le sezioni 3 e 4 è:

$$V(P_4 - P_3) - \frac{1}{2} u_3^2 + g(z_4 - z_3) + R_{34} = 0$$

abbiamo supposto trascurabili  $u_1$  e  $u_4$  a causa delle grandi sezioni dei serbatoi. Sommando le due relazioni trovate, trascurando la differenza di quota tra 2 e 3 e la differenza di pressione atmosferica tra 1 e 4, si ha:

$$V(P_2 - P_3) + \frac{1}{2} (u_2^2 - u_3^2) + gh + R_{TOT} = 0$$

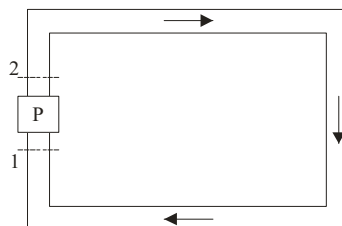
se le sezioni dei tratti del condotto sono uguali ( $u_2 = u_3$ ), si ha:

$$V(P_3 - P_2) = gh + R_{TOT}$$

quindi, nota la quota a cui si deve mandare il fluido e nota quanta energia si perde nel tragitto, si può valutare quale differenza di pressione deve fornire la pompa.

▪ **calcolo della prevalenza di una pompa in un circuito chiuso**

consideriamo un circuito chiuso nel quale è inserita una pompa che deve mantenere il liquido in circolazione.



Applichiamo Bernoulli tra 1 e 2. Trascurando la differenza di quota tra le due sezioni e supponendo uguali le sezioni del condotto, scriviamo:

$$\int_1^2 V dP + R_{12} = 0 \Rightarrow V(P_2 - P_1) + R_{12} = 0$$



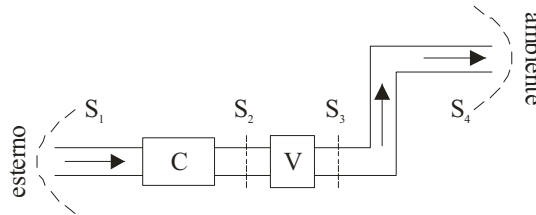
pertanto la pompa deve essere in grado di sopperire alle sole perdite che il fluido incontra nel suo moto. Si dimostra che:

$$R = 2 f_F \frac{u^2}{D} L$$

dove  $D$  e  $L$  sono il diametro e la lunghezza del condotto e  $f_F$  è detto **fattore di Fanning**

#### ▪ calcolo della prevalenza di un ventilatore

consideriamo un impianto di condizionamento d'aria rappresentato da un canale d'aspirazione dall'esterno, da un condizionatore in cui viene installato un ventilatore e da un canale di mandata nell'ambiente interno:



Applichiamo Bernoulli tra  $S_1$  e  $S_2$ :

$$V(P_2 - P_1) + \frac{1}{2} u_2^2 + g(z_2 - z_1) + R_{12} = 0$$

e tra  $S_3$  e  $S_4$ :

$$V(P_4 - P_3) - \frac{1}{2} u_3^2 + g(z_4 - z_3) + R_{43} = 0$$

abbiamo supposto  $S_1$  lontana dall'imbocco ( $u_1 = 0$ ) ed analogamente per  $S_4$  ( $u_4 = 0$ ). Sommando e tenendo conto che  $P_1 = P_4$  e che  $u_2 = u_3$ :

$$V(P_2 - P_3) + gH + R_{TOT} = 0 \quad \text{con } H = z_4 - z_1$$

Si noti che abbiamo utilizzato l'equazione di Bernoulli per i liquidi, nonostante l'aria sia un gas perché le differenze di pressione non superano qualche unità % della pressione atmosferica e quindi è lecito ammettere che il volume specifico dell'aria resti costante.

### Effetto Joule-Thomson

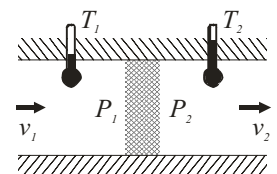
Consideriamo un fluido che scorre in una condotta nella quale è presente un'ostruzione:

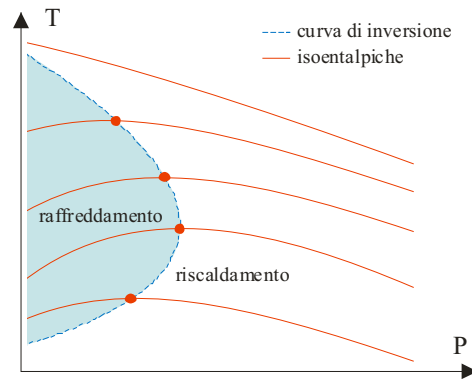
$$H_2 - H_1 = 0 \quad \Rightarrow \quad H_1 = H_2$$

Si ha un **fenomeno di strozzamento** o effetto Joule-Thomson che ci permette di ricavare alcune proprietà dei fluidi. Scegliamo una pressione  $P_1$  e d'una temperatura  $T_1$  dalla parte ad alta pressione del setto. Si fa in modo che dall'altra parte  $P_2 < P_1$  e si misura  $T_2$ . Riportando i dati in un diagramma  $PT$  otteniamo una curva isoentalpica. Facendo variare  $P_1$  e ripetendo lo stesso procedimento otteniamo un'altra curva isoentalpica e così via. Il luogo dei massimi delle curve isoentalpiche si chiama **curva di inversione**. La pendenza delle curve isoentalpiche si chiama **coefficiente di Joule-Thomson**:

$$\mu = \left( \frac{\partial T}{\partial P} \right)_n$$

per  $\mu > 0$  si ha la zona di raffreddamento mentre per  $\mu < 0$  si ha la zona di riscaldamento.





## Regime laminare e regime turbolento

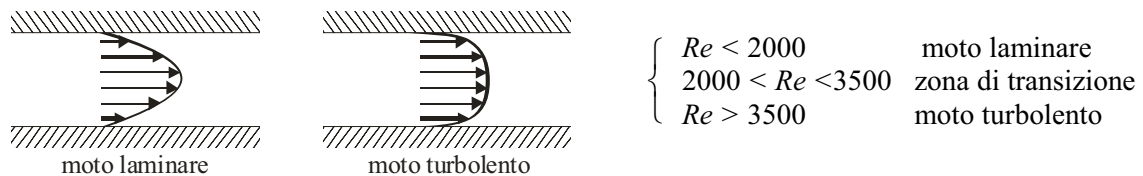
Analizziamo le modalità con cui può verificarsi il moto dei fluidi in un condotto attraverso gli esperimenti di Reynolds. Consideriamo un fluido in moto in una condotta e supponiamo di porvi un liquido colorato. È possibile che, a partire dal punto in cui il fluido è immesso, si formi un filo colorato che non si mescola con gli altri fili del fluido. Quindi gli elementi di massa del fluido hanno velocità parallela alla direzione del moto ma non hanno componenti radiali. Si parla in tal caso di **moto laminare**.

È possibile anche che il colore si diffonda rapidamente in tutta la massa del fluido in moto. Ciò significa che gli elementi di massa sono dotati di una componente parallela alla direzione del moto e di una componente radiali. In tal caso si parla di **moto turbolento**.

Introduciamo il **numero di Reynolds**  $Re$ :

$$Re = \frac{D\rho u}{\mu}$$

con  $D$  diametro del condotto,  $u$  velocità del fluido,  $\mu$  viscosità e  $\rho$  densità.



- in caso di moto laminare le perdite di carico sono proporzionali alla velocità del fluido:

$$R = Mu$$

e la velocità media è metà di quella massima

- in caso di moto turbolento le perdite di carico sono proporzionali al quadrato della velocità:

$$R = Mu^2$$

## Calcolo delle perdite di carico nel moto dei fluidi in condotti

perdite di carico  $\left\{ \begin{array}{l} \text{distribuite} - \text{dovute all'attrito interno e quello delle pareti del condotto} \\ \text{concentrate} - \text{dovute a cambiamenti di sezione, ostacoli ecc.} \end{array} \right.$

### ▪ Perdite distribuite

sono valutabili mediante il valore delle perdite di carico per unità di lunghezza e massa  $\frac{dR}{dx}$

il fenomeno è funzione delle seguenti grandezze:

$$\frac{dR}{dx} = \varphi(\mu, \rho, u, D, e) \quad [LT^{-2}]$$

con  $\mu$  viscosità dinamica [ML<sup>-1</sup>T<sup>-1</sup>],  $\rho$  densità [ML<sup>-3</sup>],  $u$  velocità media [MT<sup>-1</sup>],  $D$  diametro del condotto [L] e  $e$  scabrosità [L].

Si tratta di una relazione tra sei grandezze. Le grandezze fondamentali sono lunghezza, massa e tempo. In base al teorema di Buckingham:  $n = 6 - 3 = 3$  parametri adimensionali e indipendenti.

Col metodo degli indici si ottiene:

$$\mathcal{E} = \frac{e}{D}$$

scabrosità relativa

$$F_f = \frac{1}{2} \frac{dR}{dx} \frac{D}{u^2}$$

fattore di attrito di Fanning

$$Re = \frac{D\rho u}{\mu}$$

numero di Reynolds

Le perdite di carico possono essere studiate attraverso la interdipendenza di  $F_f$ ,  $Re$  e  $\varepsilon$ :

$$F_f = \varphi (Re, \varepsilon)$$

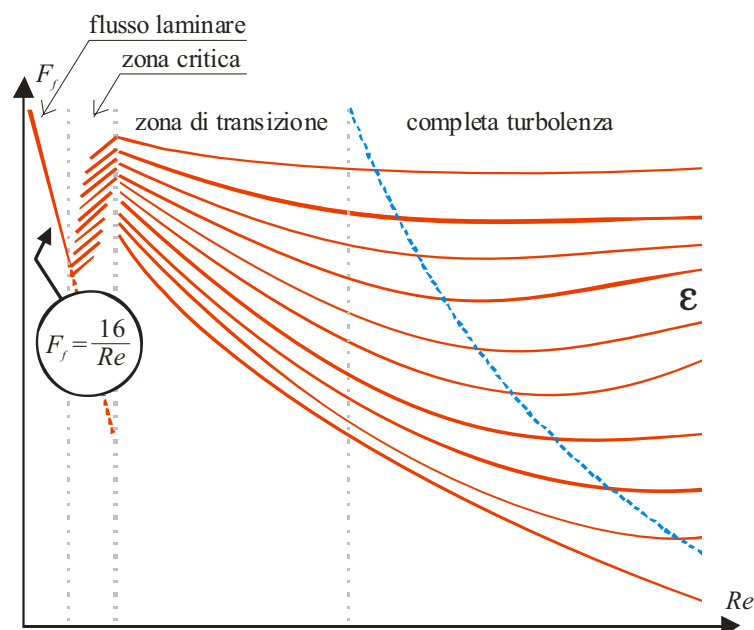
questa funzione viene rappresentata nel grafico sotto. I valori di  $\varepsilon$  sono adottati come parametro riportando una serie di curve corrispondenti ad alcuni valori. In base a questo diagramma possiamo ricavare le perdite di carico. Infatti per un certo valore di  $Re$  e di  $\varepsilon$  troviamo  $F_f$  che consente di determinare:

$$\frac{dR}{dx} = \frac{2F_f u^2}{D}$$

per piccoli valori di  $Re$  la scabrosità relativa  $\varepsilon$  non entra in gioco e quindi in corrispondenza del numero di  $Re$  esiste una retta e sulle ordinate leggeremo il  $F_f$ . Si dimostra che, in questo tratto:

$$F_f = \frac{16}{Re}$$

nel caso del moto turbolento invece  $\varepsilon$  è essenziale. Per alti valori del numero di Reynolds, la perdita di carico è indipendente da questo perché il moto è completamente sviluppato. Dalla definizione di  $F_f$  si deduce che in tale zona (essendo  $F_f$  indipendente da  $Re$ ) la perdita di carico è proporzionale al quadrato della velocità.



Nota: in alcuni diagrammi, noti come diagrammi di Moody, il fattore di Fanning è sostituito da un fattore di attrito  $\lambda = 4F_f$ . Il diagramma riportato in appendice è un diagramma di Moody.

### 3. Aria umida e psicrometria

#### Cambiamenti di fase – vapori saturi e surriscaldati

La **regola di Gibbs** o delle fasi  $V = n + 2 - f$  permette di determinare la varianza di un sistema ossia il numero di variabili alle quali possono essere attribuiti valori a piacere. Pertanto la varianza di un sistema costituito da  $n$  componenti indipendenti, comunque distribuiti tra  $f$  fasi e per il quale le uniche variabili fisiche siano  $T$  e  $P$ , è data dalla differenza tra il numero di dette componenti aumentato di 2 ed il numero delle fasi. Abbiamo tre casi:

1. una fase:  $V = 1 + 2 - 1 = 2$  (assegniamo  $T$  e  $P$ )
2. due fasi:  $V = 1 + 2 - 2 = 1$  (assegniamo o  $T$  o  $P$ )
3. tre fasi:  $V = 1 + 2 - 3 = 0$  (equilibrio possibile solo per un valore di  $T$  e uno di  $P \Rightarrow$  punto triplo)

**Vapori saturi:** miscugli di liquido-vapore di un solo componente

Questo sistema è monovariante. Prendiamo come variabile indipendente  $T$  ( $P$  sarà funzione di  $T$ ). Indichiamo con  $x$  la parte (titolo) in fase vapore e  $1 - x$  quella in fase liquida. Indichiamo con  $v_l$  e  $v_v$  i volumi specifici anch'essi funzione di  $T$ :

$$v = (1 - x)v_l(T) + xv_v(T) = v_l(T) + x[v_v(T) - v_l(T)]$$

Se forniamo al vapore saturo un calore  $Q$ , esso passa da uno stato  $(T, x)$  a uno  $(T + \Delta T, x + \Delta x)$ . Si ha:

$$\delta Q = r dx + C_x dT$$

con  $r$  calore latente di vaporizzazione e  $C_x$  calore specifico al titolo costante.

$r$  è la quantità di calore necessaria per far passare l'unità di massa dalla fase liquida a quella vapore a  $T$  costante.  $C_x$  rappresenta la somma delle quantità di calore che servono per far aumentare di  $1^\circ$  sia la temperatura della parte  $x$  nella fase vapore sia quella della parte  $1 - x$  nella fase liquida senza aver cambiamento di fase. Indicando con  $C_l$  e  $C_v$  i calori specifici al titolo costante delle due fasi:

$$C_x = (1 - x)C_l(T) + xC_v(T)$$

il calore latente di vaporizzazione  $r$  si ricava dal primo principio della termodinamica:

$$dU = \delta Q - PdV \Rightarrow \delta Q = dU + PdV$$

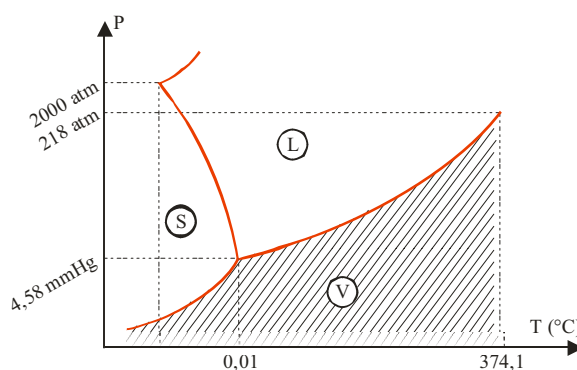
$$r(T) = (U_v - U_l) + P(T)[v_v(T) - v_l(T)]$$

#### Equazione di Clapeyron

La derivata della pressione rispetto alla temperatura è uguale all'entalpia associata al cambiamento di fase diviso il prodotto della temperatura assoluta per la variazione di volume tra fase iniziale e finale

$$\frac{dP}{dT} = \frac{\Delta H}{T\Delta V}$$

siamo quindi in grado di trovare  $P$  e  $T(P)$  e di tracciarli un diagramma come quello sotto, relativo al caso dell'acqua.



Aumentando la pressione, il punto di fusione si abbassa fino a 2000 atm dopo di che ricomincia a crescere. La curva di equilibrio L e V fornisce un punto preciso: il **punto critico**. La **temperatura critica** è la temperatura al di sopra della quale non è possibile trasformare la sostanza dallo stato aeriforme a quello liquido. Al di sopra si parla di gas.

Vediamo come si utilizza l'equazione di Clapeyron:

a. **passaggio solido-liquido** (fusione)

In questo processo occorre fornire calore e quindi  $\Delta H > 0$  essendo  $dH = \delta Q + VdP$

Il volume del liquido è minore di quello del solido  $\Delta V = V_{liq} - V_{sol} < 0$

ed infine, essendo  $T > 0$  (temperatura assoluta), si deduce da Clapeyron che  $\frac{dP}{dT} < 0$  ovvero la curva ha pendenza negativa. Questo discorso vale per pressioni fino a 2000 atm; infatti per  $P > 2000$  atm si ha:

$$V_{liq} > V_{sol} \Rightarrow \frac{dP}{dT} > 0$$

b. **passaggio liquido-vapore** (vaporizzazione)

essendo il volume del vapore molto maggiore di quello del liquido trascuriamo questo ultimo;

l'equazione di Clapeyron diventa allora  $\frac{dP}{dT} = \frac{\Delta H}{TV_{vap}}$

utilizzando l'equazione dei gas ideali otteniamo  $PV_{vap} = RT \Rightarrow \frac{dP}{dT} = \frac{\Delta H \cdot P}{RT^2}$

separando le variabili e integrando:  $\lg P = \frac{\Delta H}{R} \left( -\frac{1}{T} \right) + \text{cost}$

pertanto la relazione tra  $P$  e  $T$  è di tipo logaritmico

c. **passaggio solido-vapore** (sublimazione)

anche in questo caso la relazione tra  $P$  e  $T$  è di tipo logaritmico. Rispetto al caso precedente, varierà  $\Delta H$  e quindi la pendenza.

## Proprietà dei miscugli aria-vapor d'acqua

Consideriamo un sistema a più componenti, ossia quello costituito dai miscugli di aria e vapor d'acqua, quale può essere considerata l'aria atmosferica. Per la regola di Gibbs  $V = 2 + 2 - 1 = 3$  parametri necessari teoricamente, mentre nelle comuni applicazioni la pressione varia poco rispetto a quella atmosferica; pertanto il numero delle variabili si riduce a 2 e quindi possiamo utilizzare diagrammi piani.

Nell'aria atmosferica, la quantità di vapore d'acqua può variare. In altri termini, l'aria può essere più o meno umida. Definiamo i parametri atti a stabilire la quantità di vapor d'acqua presente nel sistema aria umida.

$$x = \frac{m_v}{m_{as}} \quad [\text{g/kg}]$$

L'umidità specifica è il rapporto tra il peso di vapor d'acqua contenuto di una massa d'aria ed il peso della rimanente massa, ossia il peso che avrebbe l'aria se fosse secca.

L'aria umida ha una pressione totale di 1 atm. Secondo la legge di Dalton la pressione totale del miscuglio è data dalla somma dei singoli componenti. Nell'aria atmosferica:

$$P = P_{as} + P_v$$

in condizioni ordinarie ( $P = 1$  atm;  $T = 0^\circ\text{C}$ ) le temperature dei vari componenti, fatta eccezione per il vapor d'acqua, sono costanti e quindi  $P_{as} = \text{cost}$ . La pressione del vapor d'acqua è invece variabile in quanto ne varia la quantità.

La pressione del vapor d'acqua ad una data temperatura può al massimo raggiungere il valore della tensione di vapore saturo alla stessa temperatura.

In genere il vapor d'acqua si trova sotto forma di vapore surriscaldato e quindi la sua pressione è sempre minore della tensione di vapore saturo.

$$\phi = \frac{P_v}{P_{vs}}$$

L'umidità relativa è il rapporto tra la pressione parziale del vapor d'acqua e la tensione di vapore saturo ad una certa temperatura.

La **temperatura di rugiada** dell'aria umida è la temperatura alla quale la tensione di vapore saturo è numericamente uguale alla pressione di vapor d'acqua.

L'umidità relativa dipende dalla temperatura infatti, aumentando la temperatura,  $P_v$  resta costante mentre  $P_{vs}$  aumenta e quindi l'umidità relativa diminuisce. Viceversa, diminuendo la temperatura l'umidità relativa aumenta.

Se portiamo l'aria alla temperatura di rugiada si ha  $P_v = P_{vs}$  e quindi  $\phi = 1$ . Pertanto se il vapor d'acqua contenuto nell'aria umida è surriscaldato si ha l'umidità relativa  $\phi < 100\%$  mentre se il vapor d'acqua è saturo si ha  $\phi = 100\%$ .

Ricaviamo l'espressione analitica dell'umidità specifica  $x$ :

$$P = P_{as} + P_v \Rightarrow P_{as} = P - P_v$$

essendo:  $P_{as} V_{as} = R_{as} T$  con  $R_{as} = 29,27 \text{ m}^3/\text{K}$  la costante dei gas per l'aria

$$\text{da cui otteniamo: } V_{as} = \frac{R_{as} T}{P_{as}} = \frac{R_{as} T}{P - P_v} \quad (\text{eq.1})$$

considerando che  $R_v = 47,1 \text{ m}^3/\text{K}$  è la costante dei gas per il vapor d'acqua, la quantità di vapore presente nel volume  $V_{as}$  è data da:

$$P_v V_{as} = x R_v T \Rightarrow x = \frac{P_v V_{as}}{R_v T} \quad (\text{eq.2})$$

combinando la (eq.1) e la (eq.2) si ha:

$$x = \frac{P_v R_{as} T}{(P - P_v) R_v T} \Rightarrow x = 0,622 \frac{P_v}{(P - P_v)}$$

$$\frac{0,622}{x} = \frac{P}{P_v} - 1 = \frac{P}{\phi P_{vs}} - 1 \Rightarrow x \left( \frac{P}{P_{vs}} \frac{1}{\phi} - 1 \right) = 0,622$$

## Equazione di stato aria umida

Le grandezze fondamentali atte a descrivere il sistema aria umida sono  $H$ ,  $P$ ,  $T$  e  $x$ , tra le quali esiste un legame funzionale e dunque una equazione di stato. Tenendo conto che  $P \approx 1 \text{ atm} = \text{cost}$ , dobbiamo cercare una relazione tra tre grandezze indipendenti. Ricordiamo che l'entalpia è stata definita a meno di una costante e quindi abbiamo bisogno di un riferimento. Convenzionalmente si è fissato a zero il valore delle entalpia dell'aria secca ( $x = 0$ ) alla temperatura di  $0^\circ\text{C}$ .

Essendo  $dH = \delta Q + VdP$ , abbiamo che  $dH = \delta Q$  perché la pressione è costante.

Immaginiamo di riferirci all'unità di massa e indichiamo con  $H_t$  l'entalpia allo stato  $(t, x)$ :

$$\delta Q = H_t - H_0 = C_{Pas} \Delta T \Rightarrow C_{Pas} = \left( \frac{\partial H}{\partial T} \right)_P$$

dove  $C_{Pas}$  è il calore specifico dell'aria a pressione costante. Immaginiamo di portar l'aria secca da  $0^\circ\text{C}$  a una temperatura  $t$ . In tal caso  $H_0 = 0$  e quindi il calore richiesto è:

$$\delta Q = H_t = C_{Pas} t$$

immaginiamo di far evaporare la massa  $x$  di acqua a  $0^\circ\text{C}$ . Si ha che il calore necessario sarà:

$$\delta Q = H = x r \quad \text{con } r \text{ calore latente di evaporazione}$$

si consideri la quantità di calore necessaria per portare il vapore così ottenuto da  $0^\circ\text{C}$  a  $t$ :

$$\delta Q = x C_{pv} t \quad \text{con } C_{pv} \text{ calore specifico del vapore a pressione costante}$$

Pertanto in tale processo si spende una quantità di calore uguale all'entalpia e data da:

$$H_t = C_{pas} t + x(C_{pv} t + r)$$

questa è l'equazione di stato per l'aria umida. Notiamo che le costanti valgono:

$$C_{pas} = 0,24 \text{ Kcal/Kg}^\circ\text{C}$$

$$C_{pv} = 0,46 \text{ Kcal/Kg}^\circ\text{C}$$

$$r = 595 \text{ Kcal/Kg}$$

Quindi:

$$H_t = 0,24 t + x(595 + 0,46 t)$$

## Diagramma psicrometrico

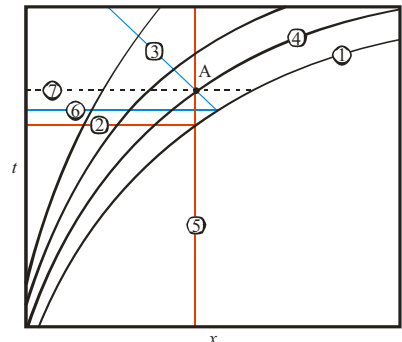
La psicrometria studia le proprietà dei miscugli di aria e di vapore con riguardo alle necessità ambientali umani e tecnologiche. Nello studio dei problemi di condizionamento dell'aria si ricorre a diagrammi psicrometrici o dell'aria umida. Tali diagrammi sono costruiti tutti a pressione costante ( $760 \text{ mmHg} = 1 \text{ atm}$ ).

Descriveremo un tipo di diagramma che utilizza come variabili indipendenti l'entalpia del miscuglio  $H$  e l'umidità specifica  $x$ . Ricordiamo che:

$$dH = dU + d(PV) = dU + VdP + PdV = \delta Q - PdV + PdV = \delta Q \Rightarrow dH = \delta Q$$

È semplice quindi leggere sul diagramma la quantità di calore ceduta o sottratta al miscuglio. Nel diagramma, l'umidità specifica è riportata nell'asse delle ascisse mentre l'entalpia in quello delle ordinate. Questi assi non sono ortogonali, infatti le linee isoentalpiche sono inclinate di  $40^\circ$  rispetto alla verticale verso sinistra per rappresentare meglio le grandezze che interessano:

1. linea di saturazione ( $\phi = 100\%$ )
2. temperatura di rugiada
3. entalpia  $H$
4. umidità relativa
5. umidità specifica  $x$
6. temperatura al bulbo umido
7. temperatura al bulbo asciutto



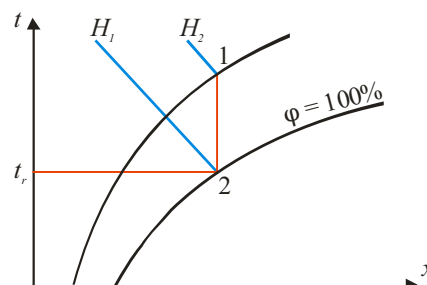
Tenendo conto che  $H_t = C_{pas} t + x(C_{pv} t + r)$  se la temperatura è costante si ottiene una relazione tra  $H$  e  $x$ , pertanto le isoterme sono rappresentate da rette. Inoltre  $C_{pv} = 0,46$  è trascurabile rispetto a  $r = 595$  e quindi tali rette sono praticamente parallele all'asse delle ascisse. È chiaro che l'unica isoterma veramente parallela alle ascisse è quella corrispondente a  $t = 0^\circ\text{C}$ .

Tracciamo ora le **linee di umidità relativa costante**. Per ogni temperatura possiamo ricavare la tensione di vapore saturo dall'incrocio tra un'isoterma e la linea di saturazione. In corrispondenza troviamo il valore dell'umidità specifica  $x$ . In corrispondenza avremo anche un valore di umidità relativa. Unendo i punti che hanno la stessa umidità relativa avremo le curve cercate.

## Impiego del diagramma psicrometrico

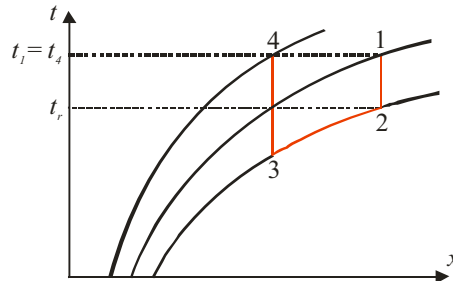
### ▪ Determinazione del punto di rugiada dell'aria umida

supponiamo che l'aria si trovi nello stato  $(t, x)$  (punto 1). Seguiamo la verticale fino al punto 2 che rappresenta lo stato  $(t_r, x)$  dato dall'intersezione di  $x = \text{cost}$  con la linea di saturazione ( $\phi = 100\%$ ). In questo modo leggiamo la temperatura di rugiada. Supponiamo di voler ricavare la quantità di calore ceduta all'aria: essa sarà data da  $H_1(t, x) - H_2(t_r, x)$



▪ **Riscaldamento o raffreddamento dell'aria umida** (a  $P$  cost e senza variare il peso del vapore)

la trasformazione sarà determinata da una linea verticale avente inizio in 1 ( $t_1, x$ ) e fine in 2 ( $t_2, x$ ). Anche qua la quantità di calore scambiato è  $H_1 - H_2$ . Questo vale fino a quando non si scende sotto la temperatura di rugiada  $t_r$ . Immaginiamo di raffreddare l'aria umida fino a una  $t < t_r$ . Dopo tale valore, dato che la pressione parziale non può superare la tensione di vapore saturo, una parte il vapor d'acqua dovrà condensare in modo che  $P_v = P_{vs}$ , pertanto il secondo tratto 2-3 è a  $\phi = 100\%$



è chiaro che alla fine della trasformazione 2-3,  $x$  sarà diminuita. Supponiamo di voler riportare l'aria umida alla temperatura iniziale mediante riscaldamento mantenendo  $x$  costante (3-4). Avremo la diminuzione dell'umidità relativa  $\phi$ .

Questo è il procedimento utilizzato per deumidificare l'aria, ossia per ottenere un'aria avente la stessa temperatura e un minor contenuto di vapor d'acqua, partendo da certe condizioni di temperatura e umidità.

▪ **Determinazione dello stato finale di una miscela tra due correnti d'aria**

la miscelazione avviene senza scambi di calore con l'esterno e in assenza di condensazioni o evaporazioni.

1. La portata in peso della miscela è uguale alla somma delle due portate ( $G_1$  e  $G_2$ ) delle correnti d'aria:

$$G_m = G_1 + G_2$$

2. per la conservazione dell'energia si ha:

$$G_1 (H_1 - H_m) + G_2 (H_2 - H_m) = 0 \quad \Rightarrow \quad G_m H_m = G_1 H_1 + G_2 H_2$$

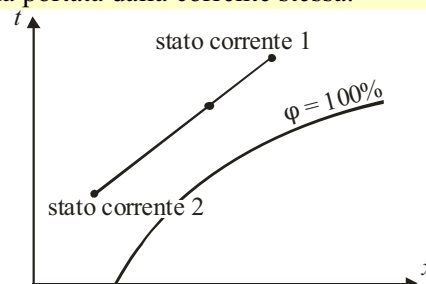
3. il peso del vapor d'acqua della miscela è uguale alla somma di quelli contenuti nelle due correnti d'aria:

$$G_m x_m = G_1 x_1 + G_2 x_2$$

combinando queste relazioni otteniamo:

$$\frac{H_2 - H_m}{H_m - H_1} = \frac{x_2 - x_m}{x_m - x_1} = \frac{G_1}{G_2}$$

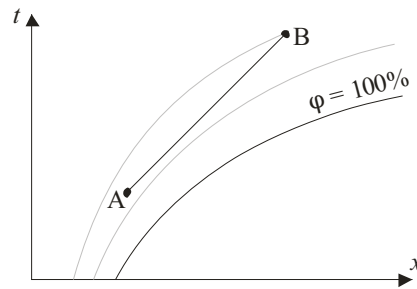
il punto che rappresenta lo stato finale si trova sulla congiungente i punti 1 e 2 e divide tale congiungente in parti inversamente proporzionali alla portata dalla corrente stessa.



▪ **Trasformazioni in cui il calore scambiato ( $\Delta Q = \Delta H$ ) è proporzionale alla variazione del contenuto di vapor d'acqua ( $\Delta H/\Delta x = \text{cost}$ )**

queste trasformazioni sono rappresentate da segmenti inchinati diversamente a seconda del rapporto  $\Delta H/\Delta x$  letto sul bordo del diagramma. Questa trasformazione avviene, per esempio, quando in un locale varia il numero di persone presenti.





### Condizioni di benessere

Attraverso gli impianti di condizionamento si creano le condizioni per la permanenza di un individuo in un ambiente. I parametri che regolano gli scambi di calore tra uomo e ambiente sono: temperatura, velocità, umidità relativa dell'aria.

Le condizioni di benessere hanno un carattere statistico poiché determinate attraverso le esperienze compiute da un campione di individui e riportate in un diagramma del benessere. Attraverso queste esperienze si è determinata la **temperatura effettiva**, ossia la temperatura dell'aria del locale contenente aria satura a velocità molto bassa:

$$\text{estate:} \quad T_{eff} = 21,5^{\circ}\text{C}$$

$$\text{inverno:} \quad T_{eff} = 19,5^{\circ}\text{C}$$

### Benessere ambientale

Il benessere termico si raggiunge quando il calore prodotto dal corpo umano viene rimosso nella stessa quantità in cui si produce.

Una rimozione del calore in quantità superiore a quella emessa produce una sensazione di freddo mentre una rimozione in quantità inferiore produce una sensazione di caldo.

### Diagrammi di Mollier

I diagrammi di Mollier sono diagrammi di stato nei quali una delle variabili scelte per gli assi coordinati è l'entalpia  $H$ .

## 4. Trasmissione del calore

### Trasmissione del calore per conduttività interna

Come è noto, il calore si trasmette all'interno di un corpo se e solo se la temperatura di questo non è uniforme, cioè se nel suo interno esistono dei gradienti termici non nulli. Il luogo dei punti che, entro il corpo, hanno in un dato istante la stessa temperatura è una **superficie isoterma**. La conoscenza dell'insieme delle superfici isoterme descrive perfettamente il campo termico esistente all'interno del corpo. In generale, la forma e le dimensioni di tali superfici si modificano continuamente essendo la temperatura funzione del tempo. Le traiettorie secondo le quali il calore si trasmette entro il corpo prendono il nome di linee di **flusso termico** o linee di trasmissione. Esse risultano, in ogni istante e in ogni loro punto, ortogonali alle superfici isoterme. In caso contrario, se la linea fosse obliqua, il flusso termico dovrebbe avere una componente parallela al piano tangente alla superficie isoterma, cosa che contrasta col fatto che il calore si trasmette solo se esistono differenze di temperatura.

Tramite la legge di Fourier siamo in grado di calcolare il flusso di calore uscente normalmente da una superficie, cioè quanta energia esce da una superficie, noto il  $\Delta T$  tra le due superfici. Indicando con  $dA$  l'area della porzione di superficie, con  $s$  la distanza tra le superfici e con  $d\tau$  il tempo in cui fluisce il calore, si ha:

$$\dot{Q} = \lambda \frac{dA \cdot \Delta T \cdot d\tau}{s} \Rightarrow \boxed{Q = \lambda \frac{A \cdot \Delta T \cdot d\tau}{s}} \quad \text{Legge di Fourier}$$

dove  $\lambda$  è la conduttività termica interna, che rappresenta le caratteristiche fisiche di un materiale. Per un corpo omogeneo ha valore costante:

$$[\lambda] = \left[ \frac{\text{W}}{\text{m} \cdot \text{K}} \right]$$

Definendo **potenza termica** il rapporto  $q = \frac{Q}{d\tau}$  la legge di Fourier assume la forma:

$$\boxed{q = A \frac{\lambda}{s} \Delta T}$$

possiamo quindi dire che la conduttività termica interna rappresenta la potenza termica scambiata tra due superfici unitarie poste alla distanza di un metro con una differenza di temperatura di 1K.

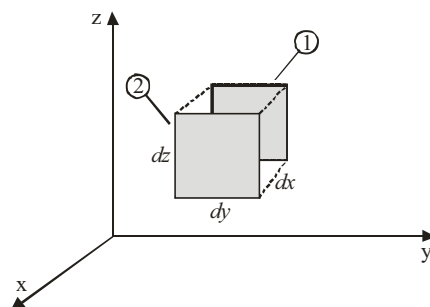
Alla base dello studio della trasmissione del calore per conduttività termica interna è il **postulato di Fourier**:

$$\boxed{dq = -\lambda A \frac{dT}{dx}} \quad dx \text{ distanza infinitesima tra le superfici}$$

che afferma che la potenza termica è proporzionale, oltre che ad  $A$ , alla derivata della temperatura fatta rispetto alla variabile geometrica, ossia al gradiente termico.

### Equazione di Fourier o del calore

Consideriamo un corpo di materiale omogeneo e isotropo, e si prenda al suo interno un elemento infinitesimo  $dV$ , avente forma di parallelepipedo con spigoli  $dx$ ,  $dy$ ,  $dz$ . Consideriamo un sistema di riferimento e supponiamo che gli spigoli siano paralleli agli assi.



Sappiamo che  $T = T(x, y, z)$  e che il calore si trasmette in qualunque direzione. Per questo, il flusso termico può essere composto in tre parti parallele ai tre assi cartesiani. Il flusso di calore che attraversa la faccia di coordinata  $x$  è data da:

$$q_x = -\lambda dydz \frac{\partial T}{\partial x}$$

la faccia di coordinata  $x + dx$  è attraversata invece da un flusso di calore:

$$q_{x+dx} = -\lambda dydz \left( \frac{\partial T}{\partial x} + \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} dx \right)$$

Pertanto resta nel volumetto un flusso di calore pari a:

$$q_x - q_{x+dx} = -\lambda dydz \frac{\partial T}{\partial x} + \lambda dydz \left( \frac{\partial T}{\partial x} + \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} dx \right) = \lambda dx dydz \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = \lambda dV \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}$$

ripetendo lo stesso procedimento per le altre due coppie di facce, si ha:

$$q_y - q_{y+dy} = \lambda dV \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \quad q_z - q_{z+dz} = \lambda dV \frac{\partial^2 T}{\partial z^2}$$

Il flusso totale di calore che è rimasto all'interno dell'elemento di volume è:

$$q = \lambda dV \left( \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right) = \lambda dV \cdot \nabla^2 T(x, y, z)$$

Se  $q$  è una potenza positiva in ingresso nel volumetto, la temperatura di tale volumetto è aumentata, mentre se la potenza è in uscita la temperatura è diminuita.

Indicando con  $\rho$  la densità del materiale e con  $c_s$  il calore specifico, si ha che la massa del volumetto è data da  $\rho dV$ , mentre la sua capacità termica è data da  $c_s \rho dV$ . La quantità di calore che nasce in seguito ad una differenza di temperatura  $dT$  e che fluisce in un generico intervallo di tempo è data da:

$$Q = \rho dV c_s dT$$

se  $dT$  è l'incremento di temperatura subito nel tempo  $d\tau$ , si ha che  $T = T(\tau)$  e quindi:

$$dT = \frac{\partial T}{\partial \tau} d\tau$$

possiamo quindi scrivere:

$$Q = \rho dV c_s \frac{\partial T}{\partial \tau} d\tau \Rightarrow q = \frac{Q}{d\tau} = \rho dV c_s \frac{\partial T}{\partial \tau}$$

Considerando l'espressione della potenza termica interna al volumetto si ha:

$$\lambda \nabla^2 T(x, y, z) = \rho c_s \frac{\partial T}{\partial \tau} \Rightarrow \frac{\lambda}{\rho c_s} \nabla^2 T = \frac{\partial T}{\partial \tau} \quad \text{Equazione di Fourier o del calore}$$

Introducendo la **diffusività termica**  $D$ , che è una costante fisica caratteristica del materiale:

$$D = \frac{\lambda}{\rho c_s} \quad \left[ \frac{\text{m}^2}{\text{s}} \right]$$

possiamo esprimere l'equazione di Fourier nel seguente modo:

$$D \nabla^2 T = \frac{\partial T}{\partial \tau}$$

Fino a questo momento, abbiamo supposto che all'interno del corpo non vi fosse né sviluppo né assorbimento di calore. Se accade il contrario, indicando con  $W$  la quantità di calore sviluppata per unità di volume e di tempo, l'equazione di Fourier diventa:

$$D \nabla^2 T + \frac{W}{\rho c_s} = \frac{\partial T}{\partial \tau}$$

e prende il nome di equazione di Fourier nel caso di sviluppo di calore all'interno del corpo.

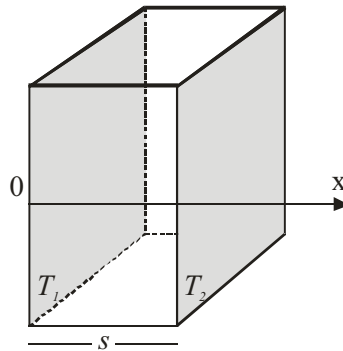
Si supponiamo che regime sia stazionario, ossia la distribuzione delle temperature ed il flusso termico trasmesso siano indipendenti dal tempo, avremo:

$$\frac{\partial T}{\partial \tau} = 0 \Rightarrow \nabla^2 T = 0$$

anche se nel caso di regime stazionario la diffusività termica  $D$  non compare, non possiamo affermare che la trasmissione del calore sia indipendente dalle proprietà fisiche del corpo.

### Lastra piana in regime stazionario

Consideriamo la trasmissione di calore attraverso uno strato di materiale omogeneo e isotropo delimitato da due facce piane, parallele, avute temperatura  $T_1$  e  $T_2$  con  $T_1 > T_2$ .



Supponiamo che il flusso sia unidirezionale o, meglio, perpendicolare alla parete. Essendo il regime stazionario:

$$\nabla^2 T = \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} = 0$$

nel nostro caso avremo:  $\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = 0$

integrando questa equazione differenziale otteniamo:  $T = c_1 x + c_2$

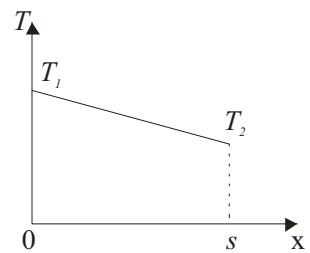
ricaviamo le costanti mediante le condizioni al contorno: 
$$\begin{cases} T(x=0) = T_1 \rightarrow c_2 = T_1 \\ T(x=s) = T_2 \rightarrow c_1 = \frac{T_2 - T_1}{s} \end{cases}$$

sostituendo:  $T = T_1 - \frac{T_1 - T_2}{s} x$  e integrando:  $\frac{dT}{dx} = -\frac{T_1 - T_2}{s} = \text{cost}$

Dopo aver constatato che il gradiente di temperatura resta costante, calcoliamo il flusso di calore tramite il postulato di Fourier:

$$dq = -\lambda A \frac{dT}{dx} \Rightarrow q = \lambda \frac{A}{s} (T_1 - T_2)$$

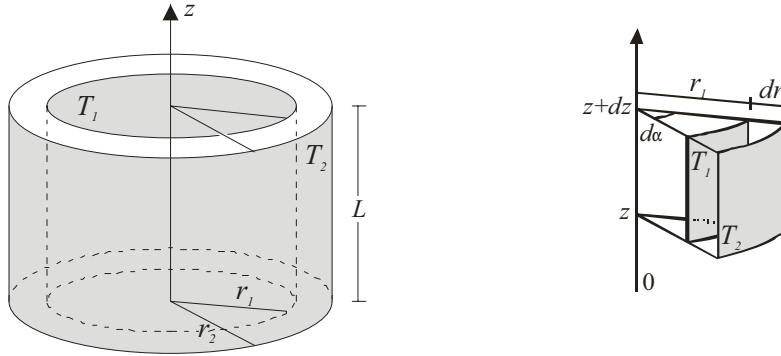
pertanto quando il regime è stazionario, il flusso di calore è unidirezionale e il mezzo è omogeneo ed isotropo, la distribuzione delle temperature non dipende dalle caratteristiche fisiche del materiale ma solo da  $T_1$  e  $T_2$ , ossia dalle condizioni al contorno.



## Tubo cilindrico in regime stazionario

Consideriamo un tubo cilindrico delimitato da due superfici coassiali a temperature  $T_1$  e  $T_2$  costanti. Fissiamo un sistema di coordinate cilindriche  $(r, \alpha, z)$ . L'equazione di Fourier in coordinate cilindriche è:

$$D \left( \frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 T}{\partial \alpha^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right) = \frac{\partial T}{\partial \tau}$$



Nel nostro caso, dato che  $T$  dipende da  $r$  e il regime è stazionario, l'equazione sarà:

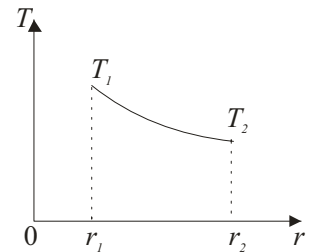
$$\frac{d^2 T}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dT}{dr} = 0$$

questa equazione differenziale è soddisfatta quando:  $\frac{dT}{dr} = \frac{c_1}{r} \Rightarrow dT = c_1 \frac{dr}{r} \Rightarrow T = c_1 \log r + c_2$

$$\begin{cases} T_1 = c_1 \log r_1 + c_2 \\ T_2 = c_1 \log r_2 + c_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c_1 = -\frac{T_1 - T_2}{\log(r_2/r_1)} \\ c_2 = \frac{T_1 \log r_2 - T_2 \log r_1}{\log(r_2/r_1)} \end{cases}$$

sostituendo nell'espressione della temperatura:

$$T = -\frac{T_1 - T_2}{\log(r_2/r_1)} \log r + \frac{T_1 \log r_2 - T_2 \log r_1}{\log(r_2/r_1)}$$



Il flusso di calore si determina tramite il postulato di Fourier:

$$dq = -\lambda A \frac{dT}{dr} = -\lambda 2\pi r L \frac{dT}{dr}$$

essendo  $c_1 = r dT/dr$  quindi  $q = -\lambda 2\pi L c_1 = \lambda 2\pi L \frac{T_1 - T_2}{\log(r_2/r_1)}$

posto  $A_{\log} = \frac{A_2 - A_1}{\log(A_2/A_1)} = 2\pi L \frac{r_2 - r_1}{\log(r_2/r_1)}$  che rappresenta la media logaritmica delle due superfici, si ha:

$$q = \lambda \frac{A_{\log}}{r_2 - r_1} (T_1 - T_2)$$

Possiamo verificare che l'equazione soprascritta è formalmente identica a quella trovata per la lastra piana in regime stazionario. Quindi il flusso termico che attraversa uno strato cilindrico è uguale a quello che attraversa uno strato piano avente area uguale alla media logaritmica delle due superfici dello strato cilindrico.

### Lastra piana in regime stazionario con sviluppo interno di calore

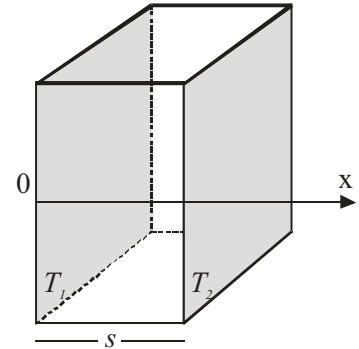
Sia  $W$  la quantità di calore sviluppato all'interno della lastra e sia questa costante.

Allora si ha:

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{W}{\lambda} = 0 \quad \frac{\partial T}{\partial x} = -\frac{W}{\lambda}x + c_1 \quad T = -\frac{W}{2\lambda}x^2 + c_1x + c_2$$

$$\begin{cases} T(x=0) = T_1 \\ T(x=s) = T_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c_1 = \frac{T_2 - T_1}{s} + \frac{Ws}{2\lambda} \\ c_2 = T_1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow T = T_1 + \left( \frac{T_2 - T_1}{s} + \frac{Ws}{2\lambda} \right)x - \frac{W}{2\lambda}x^2$$



I flussi termici relativi alle due parti della lastra li otteniamo tramite il postulato di Fourier:

$$q = -\lambda A \frac{dT}{dx} \quad \frac{dT}{dx} = -\frac{T_1 - T_2}{s} + \frac{W}{\lambda} \left( \frac{s}{2} - x \right) \Rightarrow q = \lambda A \frac{T_1 - T_2}{s} + WA \left( \frac{s}{2} - x \right)$$

$$\begin{cases} x=0 \Rightarrow q = \lambda A \frac{T_1 - T_2}{s} - \frac{s}{2} WA \\ x=s \Rightarrow q = \lambda A \frac{T_1 - T_2}{s} + \frac{s}{2} WA \end{cases}$$

### Tubo cilindrico in regime stazionario con sviluppo interno di calore

La formula di partenza è:

$$\frac{d^2 T}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dT}{dr} + \frac{W}{\lambda} = 0$$

posto  $G = \frac{dT}{dr}$ , questa assume la forma  $\frac{dG}{dr} + \frac{G}{r} = -\frac{W}{\lambda}$  da cui si ottiene:

$$rdG + Gdr = d(rG) = -\frac{W}{\lambda}rdr \Rightarrow rG = r \frac{dT}{dr} = -\frac{W}{2\lambda}r^2 + c_1$$

da cui otteniamo l'espressione della temperatura:

$$\frac{dT}{dr} = -\frac{W}{2\lambda}r + \frac{c_1}{r} \Rightarrow T = -\frac{W}{2\lambda} \frac{r^2}{2} + c_1 \log r + c_2$$

le condizioni al contorno sono:

$$\begin{cases} T = T_1 & \text{per } r = r_1 \\ T = T_2 & \text{per } r = r_2 \end{cases}$$

dato che per  $r = 0$  la temperatura ha valore finito si ottiene:

$$\begin{cases} c_1 = 0 \\ c_2 = T(0) \end{cases}$$

Otteniamo l'integrale particolare:

$$T = T(0) - \frac{W}{4\lambda}r^2$$

campo delle temperature

considerando che per  $r = R$  (temperatura esterna del cilindro a raggio  $R$  costante):

$$T_R = T(0) - \frac{W}{4\lambda}R^2$$

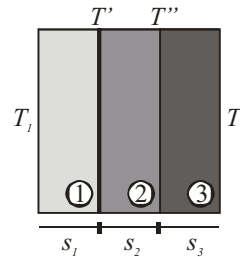
$$\Rightarrow T(0) = T_R + \frac{W}{4\lambda}R^2$$

temperatura sull'asse

### Parete composta multistrato

Supponiamo che il flusso di calore si propaghi attraverso tre strati differenti, sotto l'ipotesi di unidirezionalità e di regime stazionario. Supponiamo note le temperature  $T_1$  e  $T_2$ , mentre siano incognite  $T'$  e  $T''$ :

$$\begin{cases} q_1 = \frac{\lambda_1}{s_1} A(T_1 - T') \\ q_2 = \frac{\lambda_2}{s_2} A(T' - T'') \\ q_3 = \frac{\lambda_3}{s_3} A(T'' - T_2) \end{cases}$$



se il regime è stazionario:  $q = q_1 = q_2 = q_3$  quindi:

$$q \left( \frac{s_1}{\lambda_1} + \frac{s_2}{\lambda_2} + \frac{s_3}{\lambda_3} \right) = A(T_1 - T_2) \Rightarrow q = \frac{A(T_1 - T_2)}{\left( \frac{s_1}{\lambda_1} + \frac{s_2}{\lambda_2} + \frac{s_3}{\lambda_3} \right)}$$

in generale si ha la **relazione di Machey e Wright**:

$$q = \frac{1}{\sum_{i=1}^m \frac{s_i}{\lambda_i}} A(T_1 - T_2)$$

### Mezzo semi infinito in regime periodico stabilizzato

Consideriamo un mezzo semi infinito, ossia che occupa un semi-spazio, e supponiamo che la temperatura della faccia limite venga fatta variare con legge sinusoidale:

$$T_0 = T_m + \theta_o \sin \omega t$$

Normalmente, sulla faccia limite,  $T$  oscilla tra i valori  $T_m + \theta_o$  e  $T_m - \theta_o$ , ed il periodo di variazione è dato da  $\tau_0 = \frac{2\pi}{\omega}$ . A causa della variazione sinusoidale della temperatura sulla faccia limite, inizialmente si ha un

**periodo transitorio** ma dopo un certo tempo si raggiunge il **regime periodico stabilizzato**. Per capire cosa accade all'interno del mezzo, introduciamo la variabile  $\beta = \sqrt{\pi/D\tau_0}$  che è un fattore fisico avente dimensioni pari all'inverso di una lunghezza.

Si trova che la temperatura dell'generico piano isotermico interno al mezzo, distante  $x$  dalla faccia limite, varia nel tempo in base alla legge:

$$T(x) = T_m + \theta_o e^{-\beta x} \sin(\omega t - \beta x)$$

Pertanto, all'interno, la temperatura oscilla tra  $T_m + \theta_o e^{-\beta x}$  e  $T_m - \theta_o e^{-\beta x}$ , e quindi le oscillazioni sono tanto più smorzate quanto maggiore è  $x$ .  $\beta_x$  rappresenta il fattore di smorzamento, dipendente da  $x$ ,  $D$  e  $\tau_0$ , pertanto quando  $D$  e  $\tau_0$  sono piccoli le oscillazioni si smorzano rapidamente.

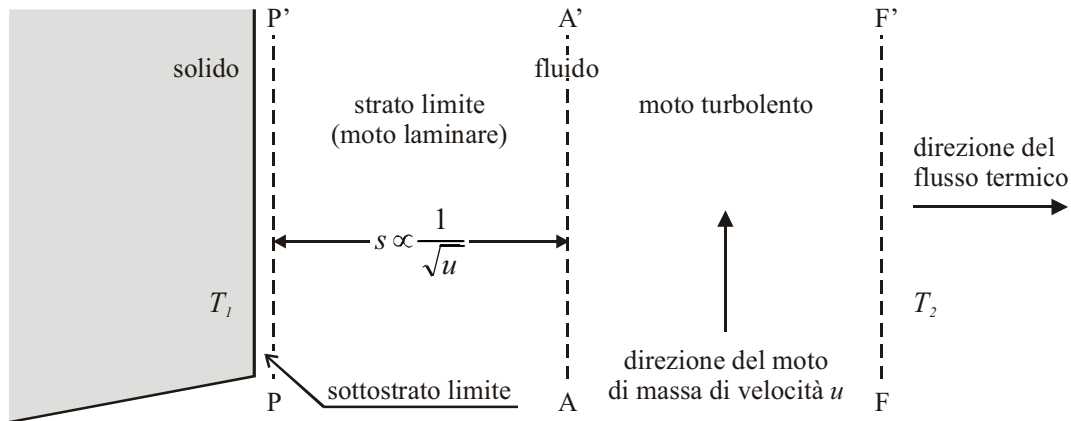
Nella realtà accade proprio che all'interno delle pareti non si ha lo stesso comportamento che si manifesta sulla superficie limite. Infatti lo smorzamento delle oscillazioni è tanto maggiore quanto più grossa è una parete e quanto più piccola è la diffusività termica.

## Trasmissione del calore per convezione

La trasmissione del calore per convezione avviene quando uno dei mezzi attraverso cui si scambia calore è un fluido. Essa può essere di due tipi:

1. **convezione naturale** – dovuta alle forze di gravità che provocano continuamente correnti convettive che portano a contatto parti della massa fluida che hanno differenti temperature, provocando la miscelazione e quindi la trasmissione del calore
2. **convezione forzata** – le correnti convettive sono generate in questo caso mediante mezzi meccanici (esempio pompa o ventilatore)

In entrambi i casi possiamo schematizzare il fenomeno nel modo seguente:



È necessario che  $T_1 \neq T_2$  questo perché vi sia un flusso di calore che passa dalla parete al fluido o viceversa. La direzione del flusso termico risulta essere ortogonale alla parete.

Come si nota, si ha sempre la presenza di uno **strato limite**, dove il fluido si muove di moto laminare essendo la velocità  $u$  bassa. All'interno di tale strato troveremo un **sottostrato limite**, dove il fluido resta fermo aderendo alla parete. Poiché nello strato limite il moto è laminare, cioè le particelle si muovono parallelamente alla parete lungo superfici isoterme, deduciamo che in questo tratto la trasmissione del calore non dipende dal moto delle particelle e quindi la trasmissione avviene per **conduttività termica interna**. Nello strato successivo il moto è turbolento e le particelle passano da una temperatura ad un'altra, determinando pertanto la trasmissione del calore.

Studi sperimentali hanno mostrato che la trasmissione di calore per convezione è proporzionale all'area della parete e alla differenza di temperatura.

Il flusso termico è dato da:

$$q = h_c A (T_1 - T_2)$$

dove  $h_c$  è detto coefficiente di convezione e mostra dipendenze differenti a seconda che si abbia convezione forzata o naturale.

### ▪ $h_c$ nella convezione forzata

$$h_c = f(l, u, \delta, \mu, \lambda, c_p)$$

in questo caso  $h_c$  dipende da  $l$  dimensione del sistema,  $u$  velocità,  $\delta$  densità,  $\mu$  viscosità dinamica,  $\lambda$  conduttività termica,  $c_p$  calore specifico a  $p$  costante, ma non dipende dalla differenza di temperatura  $\vartheta$ .

### ▪ $h_c$ nella convezione naturale

$$h_c = f(l, \delta, \mu, \lambda, c_p, ag, \vartheta)$$

in questo caso, oltre che da  $l, \delta, \mu, \lambda$  e  $c_p$ ,  $h_c$  dipende dalla differenza di temperatura  $\vartheta$  tra solido e fluido,  $g$  accelerazione di gravità e  $\alpha$  coefficiente di dilatazione cubica, ma non dipende dalla velocità  $u$ .

In questo caso:



$$h_c = K(T_1 - T_2)^{m-1} \Rightarrow q = KA(T_1 - T_2)^m$$

La dipendenza di  $h_c$  dalla temperatura deriva dal fatto che sia il flusso termico che la forza che genera i moti convettivi naturali dipendono dalla temperatura. In particolare, la forza è data dalla differenza tra le forze di gravità che agiscono sui volumi di fluido, i quali trovandosi a temperature diverse hanno diversa densità.

In generale,  $h_c$  rappresenta la quantità di calore che si trasmette per convezione attraverso un'area unitaria per unità di tempo e differenza di temperatura:

$$[h_c] = \left[ \frac{Q}{TL^2\vartheta} \right]$$

$h_c$  dipende da otto parametri ( $l, u, \delta, \mu, \lambda, c_p, ag, \vartheta$ ). Le grandezze fondamentali sono quattro: L, M,  $\tau$ , T. Per Buckingham:  $8 - 4 = 4$  sono i numeri adimensionali necessari per studiare il problema:

$Nu = \frac{h_c l}{\lambda}$	<b>numero di Nusselt</b>	È dato dal rapporto tra la quantità di calore effettivamente trasmessa per convezione ( $\propto h_c$ ) e quella che verrebbe trasmessa per sola conduzione interna ( $\propto \lambda/l$ )
$Pr = \frac{c_p \mu}{\lambda}$	<b>numero di Prandtl</b>	È dato da il rapporto tra la viscosità cinematica $\nu = \mu/\delta$ e la diffusività termica $D = \lambda/\rho c_s$
$Gr = \frac{ag \vartheta l^3 \delta^2}{\mu^2}$	<b>numero di Grashof</b>	È dato dal rapporto tra la forza di gravità per unità di area e la forza d'attrito viscoso per unità di area
$Re = \frac{ul\delta}{\mu}$	<b>numero di Reynolds</b>	È dato dal rapporto tra la quantità di moto che attraversa l'unità di area nel tempo unitario ( $\delta u^2$ ) e la forza di attrito viscoso per unità di area ( $\mu u/l$ )

Poiché nella convezione forzata  $h_c$  non dipende da  $a, g$  e  $\vartheta$ , non si considera il numero di Grashof ed inoltre il numero di Nusselt è funzione di Reynolds e Prandtl.

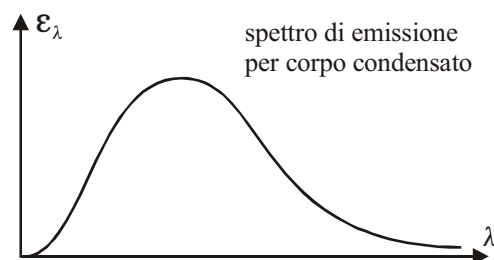
Nella convezione naturale,  $h_c$  non dipende da  $u$  e quindi Reynolds è trascurabile. Inoltre il numero di Nusselt è funzione di quelli di Grashof e Prandtl.

## Trasmissione del calore per irraggiamento

La trasmissione del calore per irraggiamento si ha quando due o più corpi aventi temperature diverse si trovano in presenza l'uno dell'altro, separati da un mezzo sufficientemente trasparente alle radiazioni.

Ciascuno dei corpi emette energia radiante e in pari tempo ne riceve dagli altri, assorbendo almeno in parte l'energia ricevuta. Naturalmente anche il mezzo, a meno che non si tratti dello spazio vuoto, prende parte viva allo scambio, emettendo ed assorbendo, sia pure in misura ridotta, l'energia radiante.

Quando si parla di emissione di energia radiante, ossia quella emessa per temperatura, occorre distinguere comportamenti differenti a seconda della sostanza. In particolare i corpi che si ritrovano allo stato condensato (solido, liquido) emettono uno spettro continuo, mentre i gas emettono uno spettro a righe.



Definiamo **emittanza globale**  $J$  l'energia radiante emessa per unità di tempo e per unità di area da un corpo:

$$J = \int_{\lambda=0}^{\infty} \varepsilon(\lambda) d\lambda$$

dove  $\varepsilon(\lambda)$  rappresenta l'**emittanza monocromatica**, ossia il rapporto tra  $dJ_s$  (energia emessa nell'intervallo di lunghezza d'onda) e  $d\lambda$  (ampiezza dell'intervallo).

Ogni corpo, come emettitore, ha un carattere direzionale e pertanto l'emittanza globale può anche essere descritta come:

$$J = \int_0^{2\pi} J_\alpha d\Omega \quad \text{con } d\Omega = \frac{dA}{r^2}$$

dove  $J_\alpha$  rappresenta l'**emittanza globale angolare**, ossia il rapporto tra l'energia radiante emessa per unità d'area e di tempo entro un angolo solido  $d\Omega$  e l'angolo solido stesso.

Per quanto detto, l'emittanza monocromatica può essere espressa nel seguente modo:

$$\varepsilon(\lambda) = \int_0^{2\pi} \varepsilon_\alpha d\Omega$$

dove  $\varepsilon_\alpha$  rappresenta l'**emittanza monocromatica angolare**, ossia il rapporto tra l'energia radiante emessa per unità d'area e di tempo in un intervallo  $d\lambda$  entro un angolo solido  $d\Omega$  e l'angolo solido stesso.

I corpi condensati emettono secondo la **legge di Lambert** o del coseno.

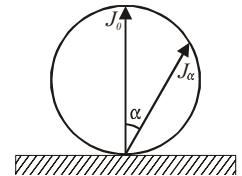
Posta  $J_0$  l'energia emessa in direzione normale, si ha:

$$J_\alpha = J_0 \cos \alpha$$

In base a quanto scritto, scriviamo le relazioni tra  $J$  e  $J_0$  e tra  $\varepsilon$  e  $\varepsilon_0$ :

$$J = J_0 \pi$$

$$\varepsilon = \varepsilon_0 \pi$$



Analizziamo ora il corpo come un sistema che riceve l'energia radiante. Sappiamo che una parte dell'energia viene riflessa, una parte assorbita e un'altra trasmessa:

$$r(\lambda) = \frac{E_r}{E_i} \quad \text{coefficiente di riflessione}$$

$$a(\lambda) = \frac{E_a}{E_i} \quad \text{coefficiente di assorbimento}$$

$$t(\lambda) = \frac{E_t}{E_i} \quad \text{coefficiente di trasparenza}$$

Per tutti di corpi, per qualunque lunghezza d'onda dell'energia incidente e, ricordando che tali coefficienti dipendono anche dalla temperatura totale del corpo, si ha:

$$r(\lambda, T) + a(\lambda, T) + t(\lambda, T) = 1$$

È opportuno rilevare che il fatto che un corpo si comporti come opaco ( $t = 0$ ) o come parzialmente trasparente per l'energia radiante dipende, oltre che dalla natura del materiale e dalla lunghezza d'onda, anche dallo spessore che deve essere attraversato. Infatti l'assorbimento di energia radiante all'interno di un corpo segue la **legge esponenziale di Bouguer**:

$$W(x) = W(0) e^{-\alpha x}$$

dove  $x$  è la spessore dello stato attraversato,  $W(0)$  è la potenza che penetra per  $x = 0$  e  $\alpha$  è una costante di assorbimento [ $L^{-1}$ ].

## Corpo nero e sue proprietà

Una particolare categoria di corpi è quella per cui risulta  $r = 0$  e  $t = 0$ , ossia  $a = 1$ , per tutte le lunghezze d'onda. Il comportamento del corpo nero come emettitore di energia radiante è caratterizzato dalla **legge di Planck**, che esprime la sua emittanza monocromatica in funzione di  $\lambda$  e di  $T$ :

$$\varepsilon_0 = \frac{c_1}{\lambda^5 (e^{c_2/\lambda T} - 1)}$$

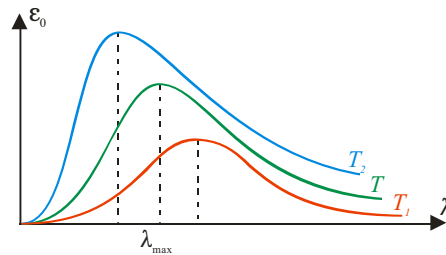
con  $c_1 = 3,7418 \times 10^{-16} [\text{W} \cdot \text{m}^2]$   $c_2 = 1,4388 \times 10^{-2} [\text{m} \cdot \text{K}]$   $\varepsilon_0 = [\text{W}/\text{m}^3]$

Da questa relazione può essere dedotta la **legge di Stefan-Boltzmann**, che fornisce valore dell'emittanza globale del corpo nero in funzione di  $T$ :

$$J_0 = T_0 T^4 \quad \text{con} \quad T_0 = 5,6696 \times 10^{-8} [\text{W} \cdot \text{m}^{-2} \text{K}^{-4}]$$

Ed ancora la **legge di Wien** o dello spostamento, che fornisce il valore della lunghezza d'onda  $\lambda_m$  per il quale è massima l'emittanza monocromatica:

$$\lambda_m = \frac{A}{T} \quad \text{con} \quad A = 2898 [\mu\text{m} \cdot \text{K}]$$



Dalla legge di Wien possiamo vedere come, aumentando la temperatura,  $\lambda_m$  diminuisce, ossia diminuisce la lunghezza d'onda per la quale si ha il massimo di emissione.

**Kirchhoff** ha trovato la relazione esistente tra l'emissione di un qualunque corpo ad una certa temperatura ed il suo assorbimento e l'assorbimento di un corpo nero alla stessa temperatura. Il principio dice che:

$$\frac{\varepsilon(\lambda, T)}{a(\lambda, T)} = f(\lambda, T)$$

dove  $f(\lambda, T)$  è una funzione che dipende solo da  $\lambda$  e da  $T$  e quindi prescinde dalla natura del corpo. Allora questo rapporto, a parità di  $\lambda$  e di  $T$ , è lo stesso per tutti i corpi.

Si noti che, quando  $a(\lambda, T) = 1$  allora  $f(\lambda, T) = \varepsilon(\lambda, T)$ , quindi posto  $f(\lambda, T) = \varepsilon_0(\lambda, T)$  si ha:

$$\frac{\varepsilon(\lambda, T)}{a(\lambda, T)} = \varepsilon_0(\lambda, T)$$

questa espressione può essere scritta anche nel modo seguente:

$$\frac{\varepsilon(\lambda, T)}{\varepsilon_0(\lambda, T)} = a(\lambda, T)$$

Tale rapporto ci dice quanta energia emette un qualunque corpo rapportata all'energia emessa dal corpo nero.

Chiamiamo **emissività monocromatica** il rapporto  $\eta_\lambda = \varepsilon(\lambda)/\varepsilon_0(\lambda) = a(\lambda)$  che afferma che, per qualunque corpo, l'emissività monocromatica è uguale al coefficiente di assorbimento.

Definiamo inoltre **emissività globale** il rapporto tra l'emittanza globale del corpo e quella del corpo nero:

$$\eta = \frac{J}{J_0} = \frac{\int_0^\infty \eta_\lambda \varepsilon_0(\lambda) d\lambda}{\int_0^\infty \varepsilon_0(\lambda) d\lambda}$$

considerando  $a(\lambda)$  costante, dalla legge di Stefan-Boltzmann si ha:

$$J = a \int_0^\infty \varepsilon_0(\lambda) d\lambda = a J_0 = a T_0 T^4$$

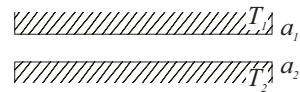
Questa formula rappresenta l'emittanza globale dei corpi grigi. Questi corpi sono caratterizzati dal fatto che il coefficiente d'assorbimento  $a$  è minore di 1, e si mantiene costante essendo indipendente dalla lunghezza d'onda  $\lambda$ . Da quando detto, si deduce che:

1. l'emissività spettrale  $\eta_\lambda$  è indipendente da  $\lambda$  e coincide numericamente con l'emissività globale  $\eta = a$

2. la lunghezza d'onda di massima emissione è uguale a quella del corpo nero a parità di temperatura (deducibile dal principio di Kirchhoff per  $a = \text{cost}$ )

### Trasmissione di calore tra due corpi grigi affacciati

consideriamo due superfici affacciate molto grande rispetto alla loro reciproca distanza. Per questo motivo possiamo allora trascurare le fughe di energia verso l'esterno.



l'emittanza globale del corpo 1 sarà:  $J_1 = a_1 T_1^4$

Questa energia incide sul corpo 2 e verrà in parte assorbita ed in parte riflessa. La parte assorbita sarà:

$$a_2 J_1 = a_1 a_2 T_1^4$$

supponiamo che entrambi i corpi siano opachi, cioè che  $t = 0$ . Allora  $r + a = 1$  e pertanto l'energia riflessa dal corpo 2 sarà:

$$r_2 J_1 = a_1 r_2 T_1^4$$

L'energia riflessa dal corpo 2 sarà a sua volta in parte riflessa ed in parte assorbita dal corpo 1; il processo continua in questo modo all'infinito. In definitiva, l'energia assorbita da un corpo (emessa dall'altro) può essere numericamente quantificata attraverso una progressione geometrica di ragione  $r_1 r_2$ , la cui somma è data da:

$$S = aJ \frac{1}{1 - r_1 r_2}$$

Indicando con  $E_{1-2}$  l'energia emessa dal corpo 1 ed assorbita dal corpo 2 e con  $E_{2-1}$  l'energia emessa dal corpo 2 ed assorbita dal corpo 1, si ha:

$$E_{1-2} = \frac{a_1 a_2 T_1^4}{1 - r_1 r_2} \quad E_{2-1} = \frac{a_1 a_2 T_2^4}{1 - r_1 r_2}$$

La differenza tra queste due espressioni ci dà l'energia che si sono scambiati i due corpi. Supposto  $T_1 \neq T_2$ , l'energia scambiata rappresenta il flusso di calore per unità di area.

$$q_{1-2} = E_{1-2} - E_{2-1} = \frac{a_1 a_2 T_o (T_1^4 - T_2^4)}{1 - r_1 r_2}$$

esprimendola in funzione dei coefficienti di assorbimento otteniamo:

$$q_{1-2} = \frac{T_o (T_1^4 - T_2^4)}{\frac{1}{a_2} + \frac{1}{a_1} - 1}$$

che è l'espressione del flusso di calore tra due corpi grigi affacciati con  $a_1 \neq a_2$ . Nel caso in cui i corpi hanno lo stesso coefficiente di assorbimento, il flusso di calore prende la forma:

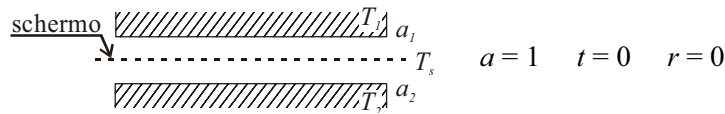
$$q_{1-2} = \frac{a T_o (T_1^4 - T_2^4)}{2 - a}$$

Nel caso in cui i corpi siano due corpi neri:

$$q_{1-2} = T_o (T_1^4 - T_2^4)$$

## Schermi di radiazione

Consideriamo due superfici piane e parallele le cui dimensioni lineari siano molto maggiori rispetto alla loro distanza. Supponiamo che si trovino a temperature  $T_1$  e  $T_2$  e che si comportino come corpi neri.



Sappiamo che il flusso di calore tra le due superfici è  $q_{1-2} = T_o (T_1^4 - T_2^4)$  per cui, interponendo una terza lastra piana chiamata schermo di radiazione, si avrà che tra la parete 1 e lo schermo il flusso di calore scambiato è:

$$q_{1-s} = T_o (T_1^4 - T_s^4)$$

tra lo schermo e la parete 2:

$$q_{s-2} = T_o (T_s^4 - T_2^4)$$

A regime, il flusso di calore che passa dalla superficie 1 allo schermo è uguale a quello che passa dallo schermo alla superficie 2. Sarà quindi verificata l'uguaglianza:

$$T_s^4 - T_2^4 = T_1^4 - T_s^4$$

da cui consegue che:

$$q_{1-s} = q_{s-2} = \frac{1}{2} q_{1-2}$$

utilizzando  $n$  schermi, il flusso di calore si riduce a  $\frac{q_{1-2}}{n+1}$

Supponiamo ora che i corpi siano grigi e supponiamo inoltre che i coefficienti di assorbimento siano uguali ( $a_1 = a_2 = a$ ), mentre sia  $a_s$  il coefficiente d'assorbimento dello schermo. Avremo:

$$q_{1-2} = \frac{a T_o (T_1^4 - T_2^4)}{2 - a}$$

mentre l'energia scambiata tra le superfici e lo schermo sarà:

$$q_{1-s} = \frac{a T_o (T_1^4 - T_s^4)}{\frac{1}{a} + \frac{1}{a_s} - 1} \quad q_{s-2} = \frac{a T_o (T_s^4 - T_2^4)}{\frac{1}{a} + \frac{1}{a_s} - 1}$$

a regime dovrà inoltre verificarsi che  $q_{1-s} = q_{s-2}$  per cui:

$$T_s^4 - T_2^4 = T_1^4 - T_s^4 \Rightarrow T_1^4 - T_2^4 = 2(T_s^4 - T_2^4) = 2T_s^4$$

Pertanto il rapporto tra il flusso termico trasmesso in presenza dello schermo e quello trasmesso in sua assenza è:

$$\frac{q_{1-s}}{q_{1-2}} = \frac{q_{s-2}}{q_{1-2}} = \frac{\frac{2}{a} - 1}{2 \left( \frac{1}{a} + \frac{1}{a_s} - 1 \right)}$$

Tale rapporto può essere maggiore uguale o minore di  $\frac{1}{2}$ , a seconda dell'emissività  $a_s$  dello schermo in relazione alle emissività  $a$  dei due piani paralleli. Quindi, più  $a_s$  è piccolo, più lo schermo è riflettente e quindi maggiore è l'efficacia di tale schermo.

## Trasmissione di calore tra due corpi grigi disposti in posizione qualunque

Immaginiamo due corpi grigi aventi forma, dimensioni e posizione reciproca tali che solo una parte dell'energia emessa da uno vada ad incidere sull'altro. Tenendo conto di quanto detto avremo:

$$E_{1-2} = a_1 a_2 h_{12} T_o T_1^4 \quad E_{2-1} = a_1 a_2 h_{21} T_o T_2^4$$

dove  $h_{12}$  e  $h_{21}$  sono dei coefficienti che tengono conto delle dimensioni dei due corpi e della loro reciproca posizione. Il calore scambiato sarà quindi:

$$q_{1-2} = a_1 a_2 T_o (h_{12} T_1^4 - h_{21} T_2^4)$$

abbiamo visto che se  $T_1 = T_2$  la trasmissione del calore è nulla per cui, ponendo  $h_{12} = h_{21} = H$ , si ha:

$$q_{1-2} = a_1 a_2 H T_o (T_1^4 - T_2^4)$$

questo è il flusso termico tra due corpi grigi disposti in posizione qualunque trascurando le successive riflessioni.  $H$  prende il nome di **fattore di vista** e dipende dalle dimensioni geometriche e dalla disposizione delle superfici. Se le superfici sono affacciate  $H = 1$ , altrimenti si trova dalle tabelle.

Fino ad ora abbiamo trascurato le successive riflessioni dell'energia. In realtà questo non sarebbe lecito, in quanto valido solo per i corpi neri. Considerando quindi le successive riflessioni si ha:

$$q_{1-2} = \varphi T_o (T_1^4 - T_2^4)$$

che rappresenta la trasmissione di calore per successive riflessioni. Il coefficiente  $\varphi$  tiene conto non solo delle dimensioni geometriche e della posizione dei due corpi, ma anche delle loro ammissività globali, ed ha le dimensioni di una superficie ed è funzione delle stesse superfici.

In generale, il flusso termico trasmesso per irraggiamento tra due corpi grigi di forma qualunque e comunque disposti nello spazio, supponendo di trascurare le successive riflessioni, è dato da:

$$q = h_r A (T_1 - T_2)$$

dove  $h_r$  è detto **fattore di radiazione**, e dipende dalle caratteristiche geometriche e dalle temperature  $T_1$  e  $T_2$  dei due corpi. Detto  $F$  il fattore di forma,  $h_r$  vale:

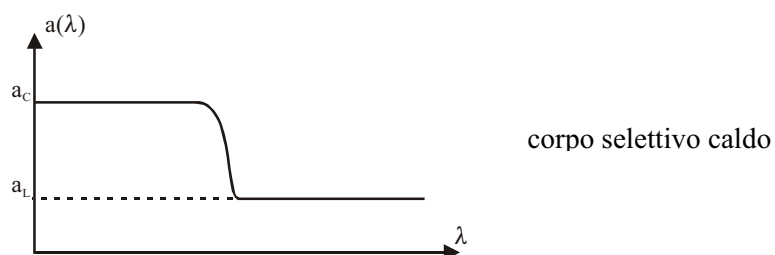
$$h_r = F a_1 a_2 T_o (T_1 + T_2) (T_1^2 + T_2^2)$$

## Superfici selettive

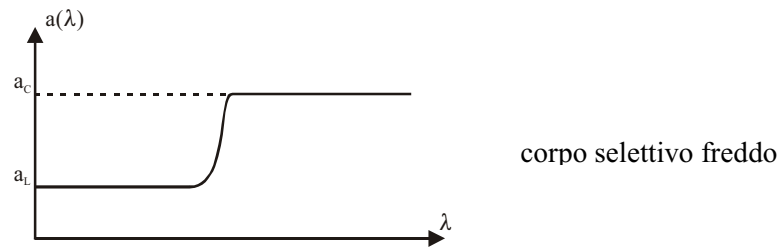
È molto importante ricavare la temperatura alla quale si portano i corpi quando sono esposti a irraggiamento solare. In merito sappiamo che la temperatura di equilibrio alla quale si porta un corpo grigio è lo stesso al quale si porterebbe un corpo nero se fosse sottoposto allo stesso irraggiamento:

$$W = T_o T^4 \Rightarrow T = \sqrt[4]{\frac{W}{T_o}}$$

Consideriamo ora una superficie unitaria, il cui coefficiente d'assorbimento abbia un valore alto per le corte lunghezze d'onda e abbia un valore basso per quelle lunghe:



Analogamente, consideriamo una superficie di cui coefficiente d'assorbimento abbia un valore basso per le corte lunghezze d'onda ed abbia un valore alto per quelle lunghe:



I corpi che hanno un coefficiente d'assorbimento caratterizzati da andamenti così distinti sono chiamati **corpi o superfici selettive**. Per essi si definisce un **grado di selettività** dato dal rapporto tra il coefficiente d'assorbimento alle lunghezze d'onda lunghe ed il coefficiente a quella corte:

$$g_s = a_L / a_C$$

Sappiamo che l'energia emessa dal sole è emessa alle corte lunghezza d'onda. La superficie selettiva assorbirà una quantità pari a  $a_C W$ . Sia tale superficie una parete ordinaria che emette alle lunghe lunghezze d'onda, per cui:

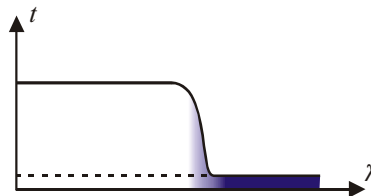
$$a_C W = a_L T_0 T^4 \Rightarrow W = \frac{a_L}{a_C} T_0 T^4$$

Nel caso di corpi selettivi caldi, essendo  $a_C \ll a_L$  e dovendo riottenere sempre la potenza  $W$ , la temperatura d'equilibrio sarà molto maggiore di quella alla quale si porterebbe un corpo nero o grigio sottoposto allo stesso irraggiamento solare.

Nel caso di corpi selettivi freddi, essendo  $a_L \ll a_C$ , la temperatura d'equilibrio sarà molto minore di una superficie calda di un corpo nero o grigio sottoposto allo stesso irraggiamento solare.

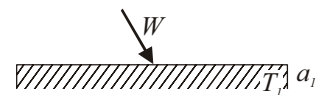
### Effetto serra – pareti vetrate esposte a irraggiamento solare

Consideriamo un vetro normale. Sappiamo che il vetro è trasparente alle corte lunghezza d'onda mentre è opaco a quelle lunghe.

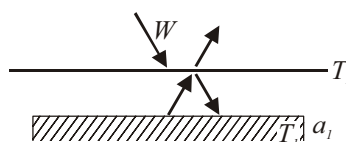


Consideriamo due superfici grigie sottoposte ad irraggiamento solare. Supponiamo che di fronte alla prima non ci sia nulla, mentre di fronte a seconda che sia una parete vetrata e sia  $W$  l'energia incidente. Nel primo caso il corpo grigio assorbe una quantità di energia pari a  $a_1 W$  e, all'equilibrio, rimetterà l'energia acquistata, pertanto:

$$a_1 W = a_1 T_0 T^4 \Rightarrow T_1 = \sqrt[4]{\frac{W}{T_0}}$$



Nel secondo caso il vetro, trasparente alle corte lunghezza d'onda, trasmette tutta l'energia  $W$  e quindi il corpo grigio ne assorbirà una quantità pari a  $a_1 W$ . All'equilibrio il corpo riemette l'energia assorbita, ma lo fa alle lunghe lunghezze d'onda per le quali il vetro è opaco e quindi assorbe tutta l'energia emessa dal corpo grigio. Assorbendo tale energia, il vetro si porta a una temperatura d'equilibrio  $T_2$ , emettendola a sua volta in entrambe le direzioni.



In conclusione, la maggior parte dell'energia radiante solare che ha attraversato la parete vetrata per trasparenza ed è entrata nell'ambiente interno non può più uscire per radiazione attraverso il vetro, con la conseguenza di far elevare apprezzabilmente la temperatura dell'ambiente stesso.

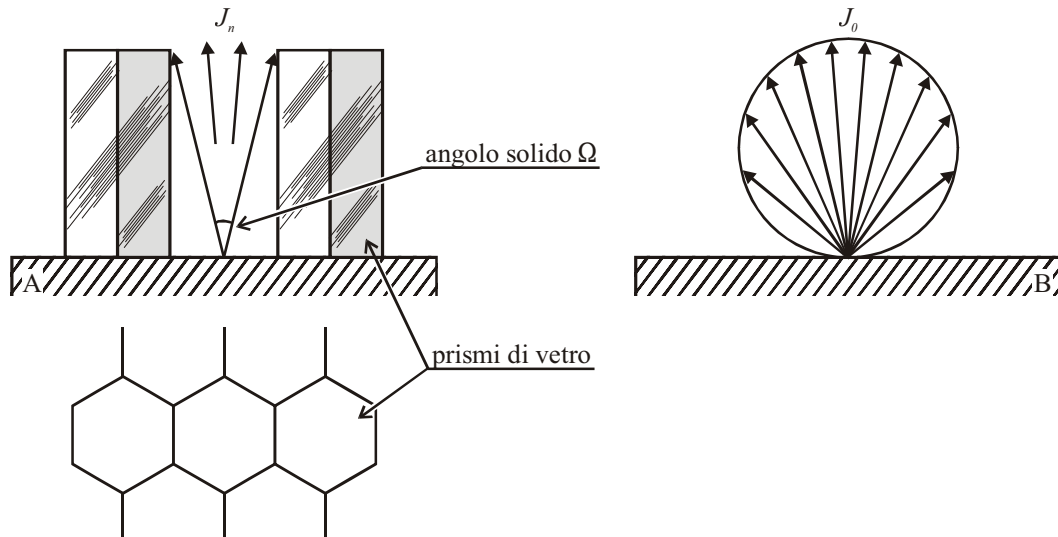
### Effetto Francia

Dopo aver parlato delle superfici selettive e dell'effetto serra come metodi utilizzati per modificare la temperatura di equilibrio di una parete, vediamo ora un metodo che raggiunge lo stesso scopo sfruttando le caratteristiche della direzionalità di emissione dell'energia. Ricordiamo infatti che l'emittanza globale è data da:

$$J = \int_0^{2\pi} J_\alpha d\Omega \quad (\text{cfr. pag. 55})$$

con  $J_\alpha = J_0 \cos \alpha$  e  $d\Omega$  angolo solido entro il quale si ha l'emissione.

Quanto detto è valido per quasi tutti i corpi, poiché quasi tutti i corpi emettono secondo la legge del coseno. Supponiamo allora di avere una superficie A sottoposta ad irraggiamento solare quindi da energia che arriva, come sappiamo, fondamentalmente alle corte lunghezza d'onda. Supponiamo inoltre che su questa superficie siano adagiati dei cilindri di cristallo anzi, più precisamente, per evitare spazi vuoti, dei prismi a base esagonale in vetro pirex e cavi internamente. Confrontiamo allora questa superficie con un'altra superficie B senza i prismi e sulla quale arrivi la stessa energia solare.



La superficie B assorbe e riemette, in funzione della sua temperatura di equilibrio  $T_B$ , secondo la legge del coseno in tutte le direzioni. Sulla superficie A, invece, l'energia che arriva dal sole, poiché il vetro pirex è completamente trasparente alle corte lunghezza d'onda, incide totalmente. Sulla superficie A arriverà quindi un'energia pari a  $W$  ed una quantità  $aW$  verrà assorbita e riemessa come se non fossero presenti i prismi a base esagonale. Ogni elementino di superficie dovrà allora assorbire e riemettere, secondo la legge del coseno, un certo quantitativo di energia pari a quello che assorbe ed emette un elementino della superficie B.

Nel caso A, però, le riemissioni vanno in parte ad incidere sulle pareti in vetro che alle lunghe lunghezze d'onda non sono più trasparenti. L'unica energia che riesce a uscire è quella irradiata dentro l'angolo solido  $\Omega$ . L'altra viene assorbita dalle pareti che poi la rimettono in tutte le direzioni. Una parte di questa energia potrebbe uscire attraverso  $\Omega$ , in relazione al rapporto tra altezza e base del prisma.

### Trasferimento di calore per adduzione

In molti casi e problemi, la trasmissione del calore per convezione e irraggiamento coesistono. In questi casi si è soliti parlare di trasmissione del calore per adduzione. La quantità di calore trasmessa nel tempo unitario può essere espressa:

$$q_A = \alpha A (T_1 - T_2)$$



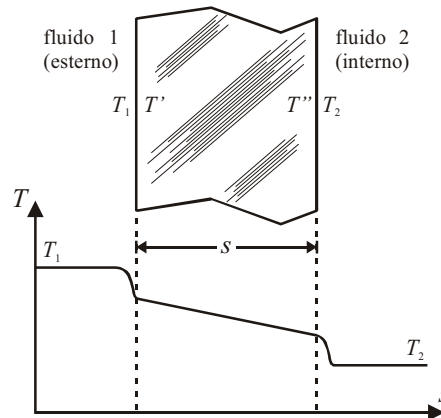
$\alpha$  è il **fattore di adduzione**, è data dalla somma del fattore di convezione  $h_c$  e di quello per irraggiamento  $h_r$  quando questi sono regolati dalle stesse temperature:

$$\alpha = h_c + h_r$$

È importante notare che, nonostante si parli di trasmissione del calore per adduzione, in realtà non si tratta di un particolare tipo di trasmissione ma solo di due tipi di trasmissione differenti (convezione e irraggiamento) quando tali trasmissioni avvengono per  $\Delta T$  limitate.

### Parete piana omogenea posta tra due fluidi in regime stazionario

Consideriamo due fluidi (ad esempio all'esterno e l'interno di un ambiente) tenuti a temperature diverse ma costanti nel tempo e separati da una parete:



Il calore trasmesso tra il fluido 1 e la faccia della parete a temperatura  $T'$  è dato dalla somma dei flussi di calore per convezione e irraggiamento:

$$\begin{cases} q_c = Ah_c(T_1 - T') \\ q_r = Ah_r(T_1 - T') \end{cases} \Rightarrow q_A = q_c + q_r = A(h_c + h_r)(T_1 - T') = \alpha_e A(T_1 - T')$$

ed, analogamente, il calore trasmesso tra la parete a temperatura  $T''$  e il fluido 2 è:

$$\begin{cases} q_c = Ah_c(T'' - T_2) \\ q_r = Ah_r(T'' - T_2) \end{cases} \Rightarrow q'_A = \alpha_i A(T'' - T_2)$$

Attraverso le due superfici della parete, a temperature  $T_1$  e  $T_2$ , il calore si trasmette per conduzione:

$$q_C = A \frac{\lambda}{s} (T' - T'')$$

A regime la quantità di calore che passa dal fluido 1 al divisorio deve essere uguale a quella che attraversa il divisorio e a quella che è ceduta al fluido 2, pertanto:

$$q = q_A = q'_A = q_C$$

Il calore che ha attraversato le varie parti della parete è dato da:

$$T_1 - T' = \frac{q_A}{\alpha_e A} \quad T'' - T_2 = \frac{q'_A}{\alpha_i A} \quad T' - T'' = \frac{q_C s}{A \lambda} \quad (\text{eq. 1})$$

e sommandole:

$$\begin{aligned} T_1 - T_2 &= q \left( \frac{1}{\alpha_e} + \frac{s}{\lambda} + \frac{1}{\alpha_i} \right) \frac{1}{A} \Rightarrow q = A \frac{1}{\left( \frac{1}{\alpha_e} + \frac{s}{\lambda} + \frac{1}{\alpha_i} \right)} (T_1 - T_2) \Rightarrow \\ &\Rightarrow \boxed{q = AK(T_1 - T_2)} \quad (\text{eq. 2}) \end{aligned}$$

La quantità  $K = \left( \frac{1}{\alpha_e} + \frac{s}{\lambda} + \frac{1}{\alpha_i} \right)^{-1}$  viene chiamata **trasmittanza** e rappresenta il calore che fluisce attraverso una superficie unitaria in un tempo unitario, quando la differenza di temperatura fra l'esterno e l'interno è di un grado, e dimensionalmente vale  $\left[ \frac{\text{W}}{\text{m}^2\text{K}} \right]$  oppure  $\left[ \frac{\text{Kcal}}{\text{m}^2\text{hK}} \right]$

Si definisce **resistenza termica** il rapporto tra la differenza di temperatura e il corrispondente flusso termico. La resistenza termica esterna si calcola considerando la trasmissione per adduzione:

$$R_{e_1} = \frac{T_1 - T'}{A \alpha_e (T_1 - T')} = \frac{1}{A \alpha_e} \quad R_{e_2} = \frac{T'' - T_2}{A \alpha_i (T'' - T_2)} = \frac{1}{A \alpha_i}$$

La resistenza termica interna si trova considerando la trasmissione per conduzione:

$$R_i = \frac{T' - T''}{A \frac{\lambda}{s} (T' - T'')} = \frac{s}{A \lambda}$$

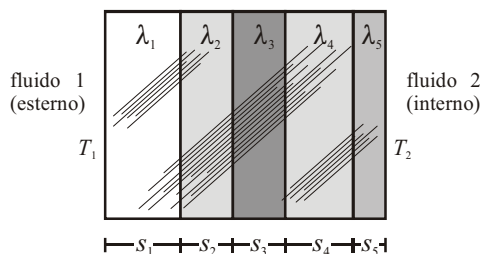
Le (eq. 1) diventano allora:

$$T_1 - T' = q_A R_{e_1} \quad T'' - T_2 = q'_A R_{e_2} \quad T' - T'' = q_C R_i$$

sostituendo nella (eq. 2), possiamo inoltre scrivere l'espressione della quantità di calore che attraversa la parete nella forma:

$$q = \frac{1}{R_i + R_{e_1} + R_{e_2}} (T_1 - T_2)$$

### Parete piana non omogenea tra due fluidi in regime stazionario

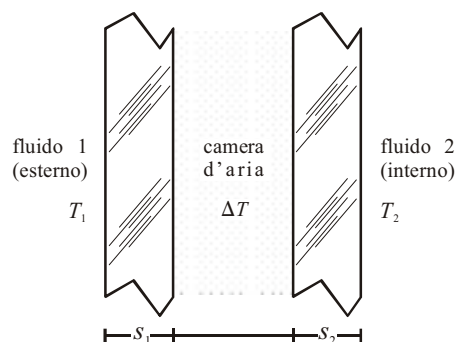


$$q = AK(T_1 - T_2)$$

$$\text{con } K = \left( \frac{1}{\alpha_e} + \sum_n \frac{s_n}{\lambda_n} + \frac{1}{\alpha_i} \right)^{-1}$$

### Parete con camera d'aria

consideriamo una parete costituita da due strati separati da un'intercapedine. È complicato stabilire che cosa avviene nella camera d'aria infatti, attraverso l'intercapedine, il calore si trasmette sia per conduzione, a conduttività termica interna, che per irraggiamento.



$\Delta T$  è la differenza di temperatura tra le pareti dell'intercapedine. Pertanto possiamo scrivere:

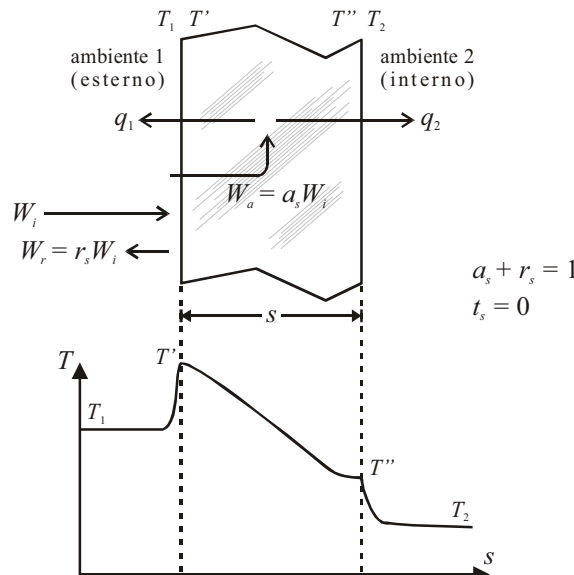
$$q = A \frac{1}{R_a} \Delta T \quad \text{dove } R_a \text{ è la resistenza termica specifica dell'intercapedine}$$

la trasmissione del calore attraverso tutta la parete contenente  $m$  intercapedini è data dalla:

$$q = AK(T_1 - T_2) \quad \text{con } K = \left( \frac{1}{\alpha_e} + \sum_n \frac{s_n}{\lambda_n} + \sum_m R_{a,m} + \frac{1}{\alpha_i} \right)^{-1}$$

### Parete opaca esposta ad irraggiamento solare

Consideriamo una parete opaca avente una faccia direttamente esposta alla radiazione solare. Questo è uno di quei tipici casi che non possono essere trattati unicamente ricorrendo al concetto di adduzione. Immaginiamo che sulla parete incida una potenza raggiante per unità d'area  $W_i$ :



Una parte dell'energia incidente  $W_i$  viene riflessa e un'altra parte viene assorbita. L'energia assorbita  $W_a$  (all'equilibrio) viene trasmessa in parte all'ambiente 1 ed in parte all'ambiente 2. Avremo quindi:

$$W_a = q_1 + q_2$$

dove il calore  $q_1$ , trasmesso dalla parete all'ambiente esterno, sarà appunto trasmesso per adduzione:

$$q_1 = \alpha_1 (T' - T_1)$$

il calore  $q_2$ , trasmesso dalla parete all'interno, è trasmesso per conduttività termica interna tra  $T'$  e  $T''$  e per adduzione tra  $T''$  e  $T_2$ , quindi:

$$\begin{cases} T' - T'' = q_2 \frac{s}{\lambda} \\ T'' - T_2 = q_2 \frac{1}{\alpha_2} \end{cases} \Rightarrow q_2 = \frac{T' - T_2}{\frac{s}{\lambda} + \frac{1}{\alpha_2}}$$

e potremo quindi scrivere:

$$W_a = a_s W_i = \alpha_1 (T' - T_1) + \frac{T' - T_2}{\frac{s}{\lambda} + \frac{1}{\alpha_2}} \quad (\text{eq. 3})$$

conoscendo le grandezze  $W_i$ ,  $T_1$  e  $T_2$  siamo in grado di ricavare  $T'$  e quindi il flusso  $q_2$  trasmesso all'ambiente interno.

Da un punto di vista pratico si procede per altra via, introducendo il concetto di **temperatura fittizia**  $T_f$  (detta anche temperatura al sole o temperatura equivalente).  $T_f$  è la temperatura uniforme che dovrebbe avere un ambiente fittizio esterno, in assenza di radiazioni solari dirette, affinché il flusso termico  $q_2$  trasmesso verso l'ambiente interno sia lo stesso che si ha nella situazione reale.

Dalla (eq. 3) si ha  $W_i a_s = q_1 + q_2$  da cui consegue che  $q_2 = W_i a_s - q_1 = W_i a_s - \alpha_1 (T' - T_1)$

Definendo una temperatura fittizia, il calore  $q_2$  trasmesso per adduzione sarà  $q_2 = \alpha_1 (T_f - T')$

Quindi il calore che realmente viene trasmesso attraverso il sistema è il calore che per adduzione arriva dalla parete. Eguagliando le due espressioni otteniamo:

$$\alpha_1 (T_f - T') = W_i a_s - \alpha_1 (T' - T_1) \Rightarrow T_f = T_1 + \frac{a_s W_i}{\alpha_1}$$

La temperatura fittizia  $T_f$  è la somma della temperatura dell'ambiente esterno  $T_1$  e di un secondo termine che tiene conto della potenza radiante solare assorbita dalla parete.

Una volta definita  $T_f$ , il problema della trasmissione del calore attraverso una parete opaca è riconducibile ad un problema di trasmissione per adduzione, pertanto il flusso che attraversa la parete è:

$$q = AK(T_f - T_2)$$

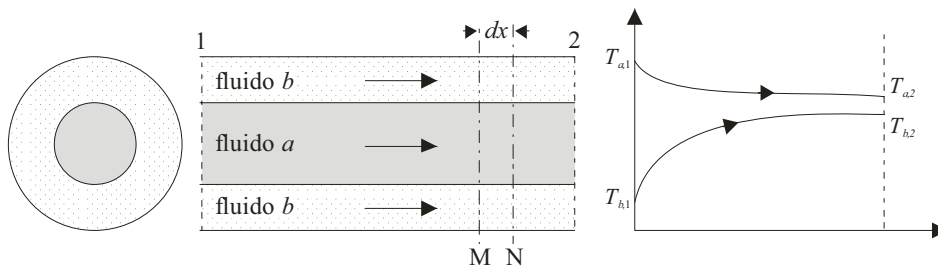
## Scambiatori di calore

Scambiatore o recuperatore di calore è costituito da due tubi coassiali: nel tubo interno scorre un fluido  $a$  mentre nello spazio anulare compreso tra i due tubi scorre il fluido  $b$ .

Consideriamo il regime stazionario in cui le portate in massa, ossia la massa di fluido che attraversa la sezione normale del tubo nel tempo unitario, siano costanti. Escludiamo ogni trasmissione di calore col mondo esterno. Abbiamo due tipi di scambiatore di calore.

### ▪ scambiatore di calore equicorrente

i due fluidi scorrono nella stessa direzione:



considerando l'elemento di scambiatore compreso tra le sezioni M e N, il calore tra i due fluidi si trasmette per adduzione dal fluido  $a$  al tubo, per conduttività termica interna nel tubo e per adduzione dal tubo al fluido  $b$ . Indicando  $dA$  la superficie che separa i due fluidi si ha:

$$dq = K dA (T_a - T_b) \quad (\text{eq. 4}) \quad T_a > T_b$$

analizziamo ora il fluido  $a$ . Considerando che esso subisce una variazione di temperatura  $dT_a$  e posto  $G_a$  la portata massica e  $C_a$  il calore specifico a pressione costante, e tenendo presente che il flusso di calore esce dal fluido  $a$ , si ha:

$$dq = -G_a C_a dT_a \quad dT_a = -\frac{1}{G_a C_a} dq \quad (\text{eq. 5})$$

analizziamo ora il fluido  $b$ . Esso subisce una variazione di temperatura  $dT_b$  e acquista un flusso di calore pari a:

$$dq = G_b C_b dT_b \quad dT_b = \frac{1}{G_b C_b} dq \quad (\text{eq. 6})$$

quindi dalle equazioni 5 e 6:

$$d(T_a - T_b) = -dq \left( \frac{1}{G_a C_a} + \frac{1}{G_b C_b} \right)$$

da cui ponendo  $W = \left( \frac{1}{G_a C_a} + \frac{1}{G_b C_b} \right)$  otteniamo:

$$d(T_a - T_b) = -dqW \Rightarrow dq = -\frac{d(T_a - T_b)}{W} = K dA (T_a - T_b) \Rightarrow \frac{d(T_a - T_b)}{(T_a - T_b)} = -WK dA$$

integrando tra la sezione 1 ed una sezione qualsiasi si ha:

$$\int_{T_{a1}, T_{b1}}^{T_a, T_b} \frac{d(T_a - T_b)}{(T_a - T_b)} = [\log(T_a - T_b)]_{T_{a1}, T_{b1}}^{T_a, T_b} = -WKA \Rightarrow \boxed{T_a - T_b = (T_{a1} - T_{b1}) e^{-WKA}}$$

integrando ora le equazioni 4,5 e 6 si ottengono le espressioni dei flussi di calore:

$$q = \frac{1}{W} (T_{a1} - T_{b1}) (1 - e^{-WKA}) \quad q = -G_a C_a (T_a - T_{a1}) \quad q = G_b C_b (T_b - T_{b1})$$

per ricavare  $T_a$  eguagliamo la prima e la seconda di queste espressioni:

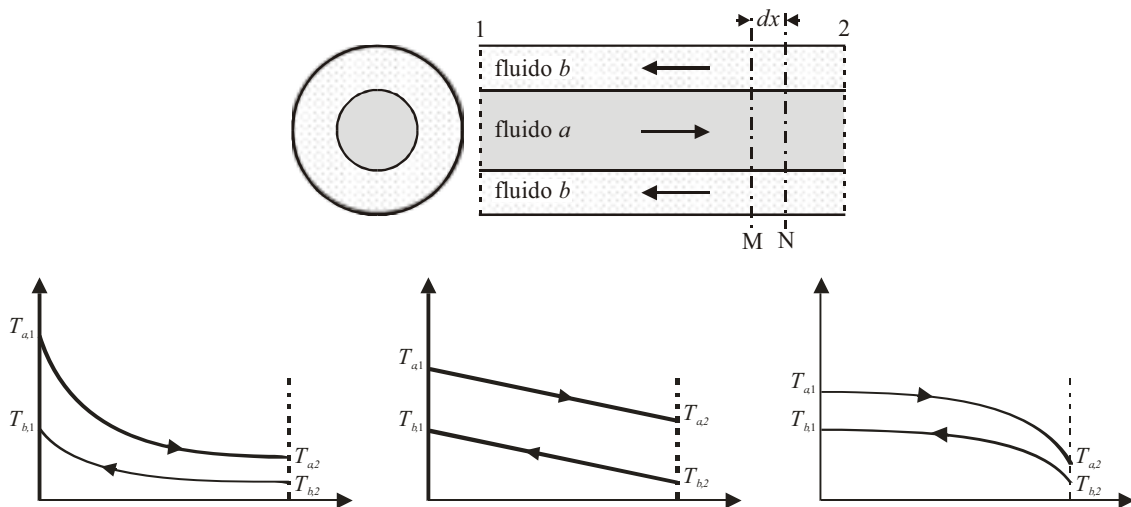
$$\boxed{T_a = T_{a1} - \frac{T_{a1} - T_{b1}}{G_a C_a W} (1 - e^{-WKA})}$$

e per ricavare  $T_b$  eguagliamo la prima e la terza:

$$\boxed{T_b = T_{b1} + \frac{T_{a1} - T_{b1}}{G_b C_b W} (1 - e^{-WKA})}$$

#### ▪ scambiatore di calore controcorrente

i due fluidi  $a$  e  $b$  scorrono in verso opposto:



similmente al caso precedente, otteniamo:

$$\left. \begin{aligned} dq &= K dA (T_a - T_b) \\ dq &= -G_a C_a dT_a \\ dq &= -G_b C_b dT_b \end{aligned} \right\} \Rightarrow T_a - T_b = (T_{a1} - T_{b1}) e^{-WKA}$$

Per integrazione:

$$q = \frac{1}{W} (T_{a1} - T_{b1}) (1 - e^{-WKA}) \quad q = -G_a C_a (T_a - T_{a1}) \quad q = -G_b C_b (T_b - T_{b1})$$

ed infine:

$$\boxed{T_a = T_{a1} - \frac{T_{a1} - T_{b1}}{G_a C_a W} (1 - e^{-WKA})}$$

$$\boxed{T_b = T_{b1} - \frac{T_{a1} - T_{b1}}{G_b C_b W} (1 - e^{-WKA})}$$

possiamo notare che negli scambiatori equicorrente, la temperatura in uscita del fluido riscaldato ( $T_{a2}$ ) è minore di quelle in uscita dal fluido riscaldante ( $T_{b2}$ ), mentre gli scambiatori controcorrente la temperatura in uscita del fluido riscaldato può essere maggiore di quella in uscita del fluido riscaldante.

### Parete piana tra due fluidi in regime periodico di temperatura

Questa trattazione rispecchia ciò che avviene nella realtà. Infatti nella realtà non ci troviamo mai in regime stazionario, in quanto la temperatura dell'area esterna sta continuamente variando.

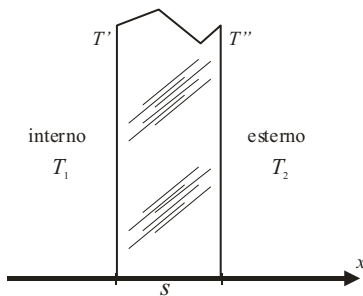
Essendo questa trattazione molto complessa, ci riferiamo ad ipotesi semplificative. Ci limitiamo a considerare variazioni sinusoidale di temperatura, supponiamo che la trasmissione sia unidirezionale ed inoltre che all'interno delle pareti non ci sia generazione di calore.

Analizzeremo il caso di una parete posta tra due fluidi di cui uno, quello interno, avente temperatura costante e l'altro, quel esterno, avente temperatura variabile. Una volta determinate le temperature esterna ed interna, il problema è quello di trovare le variazioni di temperatura delle facce della parete ed il flusso termico trasmesso, in modo da compensarle, per mantenere la temperatura interna costante.

Abbiamo già visto che, in generale, il **ritardo di fase** è dato da  $\beta x = x \sqrt{\frac{\pi}{D \tau_0}}$  dove  $\tau_0$  è il periodo delle

oscillazioni e  $D = \frac{\lambda}{\rho c}$  è la diffusività termica (cfr. pag.52).

Nel nostro caso:



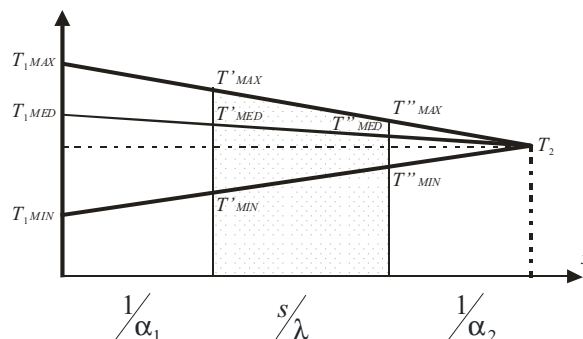
In corrispondenza della faccia interna della parete si ha:

$$\beta s = s \sqrt{\frac{\pi}{D \tau_0}}$$

Distinguiamo due casi:

- **regime quasi stazionario** ( $\beta s \ll 1$ )

questo si verifica quando  $\tau_0$  è molto grande (oscillazione lenta, ad esempio variazioni stagionali) e quando rapporto  $s/\sqrt{D}$  è molto piccolo, ossia le pareti sono molto sottili e aventi capacità termica piccola ( $D$  grande).



L'escursione termica sulla faccia interna è data da:

$$\Delta T'' = T''_{MAX} - T''_{MIN} = \frac{K}{\alpha_2} (T_{1MAX} - T_{1MIN})$$

a questo si arriva tenendo conto della relazione tra i triangoli  $(T_{1MAX} T_{1MIN} T_2)$  e  $(T''_{MAX} T''_{MIN} T_2)$ , infatti:

$$\frac{\Delta T'''}{\Delta T_1} = \frac{\frac{1}{\alpha_2}}{\frac{1}{\alpha_1} + \frac{s}{\lambda} + \frac{1}{\alpha_2}} = \frac{K}{\alpha_2} = \sigma \quad \text{fattore di riduzione}$$

▪ **regime non stazionario** ( $\beta s > 1$ )

si ha in caso di variazioni rapide, ad esempio giornaliere. In questo caso ci serviamo dei seguenti parametri adimensionali:

$$\beta_s \quad A = \frac{\alpha_2}{\alpha_1} \quad B = \frac{\alpha_1}{\lambda \beta}$$

quindi:

$$\text{fattore di riduzione } \sigma = \frac{e^{-\beta s}}{F(A, B)} \quad \text{ritardo di fase } \varphi = \beta s + G(A, B)$$

dove  $F$  e  $G$  sono funzioni tabellate in funzione di  $B$ , essendo  $A$  noto e costante.

### Legge 373 e risparmio energetico

la legge 373 del 30/4/1976 prevede che le dispersioni termiche di un edificio non superino certi valori. Questi valori sono definiti in relazione alle condizioni climatiche, le quali sono variabili da luogo a luogo sul territorio italiano. Questa legge divide il territorio nazionale in zone climatiche individuate attraverso l'utilizzo del parametro **Gradi-giorno**. La città di Cagliari è inserita nella zona C con 920 Gg

$$Gg = \sum_{i=1}^{n_g} (T_i - T_{eg}) \quad \text{Gradi-giorno}$$

$T_i$  – temperatura di riferimento fissa, assunta pari a 19°C

$T_{eg}$  – temperatura media esterna giornaliera calcolata, per ogni giorno e per un certo numero di anni, come media aritmetica dei valori di temperatura massima in minima di quel giorno e delle temperature alle ore 9 e 19

$n_g$  – sono i giorni del periodo annuale di riscaldamento, cioè del periodo dell'anno in cui la temperatura è inferiore ai 12°C (media giornaliera). Nel caso di Cagliari si ha  $n_g = 137$

conoscendo i  $Gg$  e  $n_g$ , siamo in grado di ricavare  $\Delta T$  medio tra l'esterno e l'interno per quel determinato periodo:

$$\Delta T_m = Gg / n_g$$

nel caso di Cagliari  $\Delta T_m = 920/137 \cong 8$

Naturalmente la legge fornisce i valori di  $Gg$  per i comuni principali quindi, se siamo interessati al valore dei  $Gg$  per un comune non tabellato, dobbiamo ragionare in questo modo: si considera il comune più vicino in linea d'aria per il quale è noto il valore dei  $Gg$  ed a tale valore si somma o sottrae un termine correttivo dato da:

$$\Delta Gg = \frac{n_g}{100} \Delta h$$

dove  $\Delta h$  è la differenza di quota tra il comune in esame e quello di riferimento. Se  $\Delta h < 100 \Rightarrow \Delta Gg = 0$

### Impostazione progettuale

La legge 10/91 prevede che il progettista dell'edificio rilasci la “certificazione energetica dell'edificio”, senza la quale non può essere venduto. Il calcolo del fabbisogno energetico viene fatto distinguendo le regime invernale dal regime estivo.

Le procedure di calcolo vengono dettate dalla legge 373. Essa stabilisce che la temperatura interna fornita da impianti di condizionamento non superi i 20°C. Per quanto riguarda la temperatura esterna, occorre riferirsi alla temperatura di progetto, ottenuta prendendo la media delle temperature più basse degli ultimi dieci anni. Cagliari a una temperatura pari a 3°C.

Consideriamo un edificio per il quale abbiamo stabilito la trasmittanza di tutte le pareti. Possiamo, quindi, stabilire qual è il flusso di calore che fluisce attraverso le stesse:

$$\sum q_i = \sum_{i=1}^N K_i S_i \Delta T_i$$

dove  $K_i$  è la trasmittanza delle varie pareti,  $S_i$  è la superficie e  $\Delta T$  la differenza di temperatura. Questa ultima può essere riferita anche tra ambienti interni di un edificio. La sommatoria  $\sum q_i$  viene indicata con:

$$P_d = \sum_{i=1}^N K_i S_i \Delta T_i \quad \text{potenza termica dispersa}$$

Oltre al calore disperso, bisogna tener conto del calore fornito nel riscaldare l'aria di rinnovo o di ventilazione. L'aria di rinnovo è l'aria che bisogna far entrare negli ambienti per garantirne il ricambio.

Indicando con  $V$  il volume d'aria che entra a temperatura  $T_e$  nell'ambiente e con  $\rho$  la densità dell'aria, la quantità di calore che occorre fornire per far subire all'aria entrante la variazione di temperatura  $T_i - T_e$  è data da:

$$Q_V = V \rho (T_i - T_e) C_p \quad \text{calore di ventilazione}$$

notare che in generale occorre garantire un ricambio d'aria pari a 30 m<sup>3</sup>/h a persona.

Il flusso di calore totale disperso sarà dato da:

$$Q_G = P_d + Q_V \quad \text{flusso di calore globale disperso}$$

La legge 373 prevede che gli edifici siano caratterizzati da dei coefficienti, anziché dai valori  $Q_G$ ,  $Q_V$  e  $P_d$ .

Tali coefficienti sono:

- **coefficiente di dispersione termica dell'edificio**

$$C_d = \frac{P_d}{V \Delta T}$$

$C_d$  è una caratteristica del nostro edificio ed è fornito dalla legge in funzione del coefficiente di forma, ossia il rapporto  $S/V$ , e dai Gg, mentre  $\Delta T$  è riferita alla temperatura di progetto.

Il coefficiente di dispersione trovato per il nostro edificio deve essere minore del  $C_d$  massimo fornito dalla legge:

$$C_d^* < C_{d \max} \Rightarrow P_d^* < P_{d \max} \quad P_d^* = \sum_n f_c K A \Delta T$$

con  $f_c$  fattore di correzione.

La normativa impone la seguente tabella per il calcolo del  $C_{d \max}$ , in funzione del rapporto  $S/V$  e della zona climatica:

	A	B	C	D	E	F
	fino a 600 Gg	601 - 900 Gg	901 - 1400 Gg	1401 - 2100 Gg	2101 - 3000 Gg	oltre 3000 Gg
$S/V \leq 0,2$	0,49	0,49 - 0,46	0,46 - 0,42	0,42 - 0,34	0,34 - 0,30	0,30
$S/V \geq 0,9$	1,16	1,16 - 1,08	1,08 - 0,95	0,95 - 0,78	0,78 - 0,73	0,73

Dove  $V$  è il volume lordo delle parti di edificio riscaldato e  $S$  è l'area della superficie che delimita verso l'esterno, ovvero verso ambienti non dotati di impianto di riscaldamento, il volume riscaldato.



Per valori intermedi fra 0,2 e 0,9 si procede per interpolazione lineare con la seguente formula:

$$Cd = Cd_1 - (Cd_1 - Cd_2) \times \frac{S/V - S/V_1}{S/V_2 - S/V_1}$$

- **coefficiente di potenza termica necessaria per il riscaldamento dell'aria di ricambio**

$$C_v = \frac{Q_v}{V \Delta T}$$

in genere, per questioni igieniche, il valore trovato è uguale a quello fornito dalla legge

- **coefficiente volumico globale di dispersione termica**

$$G_g = C_d + C_v \left[ \frac{W}{m^3 K} \right]$$

Anche il  $C_g$  trovato non deve superare il valore massimo imposto dalla legge.

Come sappiamo, la legge 373 è stata sostituita dalla legge n. 10 del 1991. Quest'ultima ricalca comunque i concetti della 373. La legge n. 10 si basa sul contenimento dei consumi energetici, non ponendo il limite alla quantità di materiale isolante ma al consumo massimo annuo di combustibile.

Essa impone la **potenza massima installabile**, determinata tramite la:

$$P = C_g V \Delta T$$

con  $V$  volume lordo delle pareti di edificio che vengono scaldate e  $\Delta T$  differenza di temperatura tra interno ed esterno (di progetto).

Una volta determinata la potenza massima installabile, è necessario determinare lo spessore dell'isolante, in modo che  $P$  possa sopprimere a tutte le funzioni dell'impianto. Occorre quindi impostare il seguente bilancio:

$$P = (Q_d^* + Q_v^*) b$$

$Q_v^*$  – potenza termica dispersa per ricambi d'aria considerata uguale alla  $Q_{VMAX}$

$Q_d^*$  – potenza termica dispersa per trasmissione, che tiene conto della Potenza disperso attraverso ponti termici, superfici vetrate, superfici opache

$b$  – coefficiente di intermittenza, tiene conto di una maggiorazione dello spessore di isolante in modo che la potenza disponibile possa soddisfare anche i problemi improvvisi (intermittenti)

In generale, il **fabbisogno energetico annuo** per un edificio è dato da:

$$F_{ris} = C_g^* V G_g^* 24 \epsilon \left[ \frac{kcal}{anno} \right] \text{ oppure } \left[ \frac{kW}{anno} \right]$$

24 – n. introdotto per riportare l'unità di tempo all'ora

$\epsilon$  – coefficiente di riduzione che tiene conto della intermittenza e dell'attenuazione notturna

$G_g^* = G_g + Kd$  dove  $d$  è la durata del periodo di riscaldamento e  $K$  è una temperatura da sommare alla differenza  $\Delta T$  tra interno ed esterno, a causa di particolari situazioni, ad apporti gratuiti di calore

Una volta calcolato il fabbisogno annuo, possiamo determinare il consumo annuo di combustibile:

$$C = \frac{F_{ris}}{H_i \eta}$$

dove  $H_i$  è il potere calorifico del combustibile e  $\eta$  è il rendimento dell'impianto.

## La condensa

Quando all'interno di un ambiente si realizza una pressione di vapore superiore a quella dell'esterno, tra l'interno e l'esterno si ha un flusso di vapore. In certe condizioni, questo vapore condensa. Ciò accade quando la pressione di vapore è uguale alla pressione di vapore saturo, ovvero quando incontra una superficie avente

una temperatura uguale o minore alla temperatura di rugiada. La condensa può essere superficiale, provocando inconvenienti di carattere estetico, oppure nascosta, provocando danni gravi ai materiali.

Se vogliamo che non si verifichi condensa sulla superficie interna di una parete, dobbiamo innanzitutto determinare la temperatura di rugiada  $T_R$ , e in quelle condizioni, tramite diagramma psicrometrici, progettare una parete che abbia una trasmittanza tale che  $T_{sup} > T_R$ .

La trasmittanza per la quale si ha formazione di condensa è data da:

$$q = K S (T_i - T_e)$$

in regime stazionario,  $q$  è uguale al flusso che per adduzione passa dall'interno della parete, quindi:

$$q = \alpha_i S (T_i - T')$$

per cui:

$$K S (T_i - T_e) = \alpha_i S (T_i - T') \Rightarrow K = \frac{\alpha_i (T_i - T')}{T_i - T_e}$$

per evitare la condensa la parete dovrà avere una trasmittanza  $K' < K$ .

Per una corretta progettazione, risulta importante la **legge di Fick** che dice che la portata di vapor d'acqua che si diffonde in un materiale preso in una certa direzione, in condizioni stazionarie, è proporzionale al gradiente di pressione e all'area della superficie nella direzione normale a quella considerata, attraverso un coefficiente dipendente dal materiale, chiamato **coefficiente di diffusione** o **permeabilità al vapore** ( $\delta$ )

la portata di vapore  $g$ , diffusa per unità d'area da una parete, è data da:

$$g = \frac{P_a - P_b}{\frac{1}{\beta'_a} + \frac{s}{\delta} + \frac{1}{\beta'_b}}$$

dove  $P_a$  e  $P_b$  sono le pressioni parziali del vapor d'acqua nei due ambienti e:

$$\delta = \frac{D}{\mu_r R^* T} \quad \text{permeabilità al vapore} \quad s \quad \text{spessore della parete}$$

$$\beta' = \frac{\beta}{R^* T} \quad \beta \text{ coefficiente liminare di diffusione} \quad R^* \quad \text{costante di elasticità del vapor d'acqua}$$

$$\frac{s}{\delta} = \rho \quad \text{resistenza alla diffusione} \quad \mu_r \quad \text{permeabilità relativa (parete, aria)}$$

si definisce **permeanza**  $P$ , per una parete non omogenea, l'espressione:

$$P = \left( \frac{1}{\beta'_a} + \sum_{i=1}^n \frac{s_n}{\delta_n} + \frac{1}{\beta'_b} \right)^{-1}$$

e quindi la portata di vapore diffusa per una parete non omogenea sarà:

$$g = P (P_a - P_b)$$

In genere  $\beta$  è trascurabile e quindi:

$$g = \frac{P_a - P_b}{\sum_{i=1}^n \frac{s_n}{\delta_n}} = \frac{P_a - P_b}{\sum_{i=1}^n \rho_n}$$

avendo definito la **resistenza alla diffusione** del vapore  $\rho = \frac{s}{\delta}$ .

Lo sviluppo del procedimento di calcolo e del controllo del pericolo di condensa si può articolare nei seguenti punti.

1. calcolo della trasmittanza e del flusso di calore che attraversa la parete con le relazioni:

$$K = \left( \frac{1}{\alpha_e} + \sum_n \frac{s_n}{\lambda_n} + \frac{1}{\alpha_i} \right)^{-1} \quad q = K \Delta T$$

2. calcolo della temperatura ad ogni superficie di separazione tra gli strati. Nel caso in cui  $t_i > t_e$  si ha per lo strato  $n$ -esimo:

$$t_n = t_i - K \Delta T \left( \frac{1}{\alpha_i} + \sum_{i=1}^{n-1} \frac{s_i}{\lambda_i} \right)$$

3. calcolo, col diagramma psicrometrico, delle pressioni di saturazione corrispondenti alle temperature calcolate al punto 2
4. calcolo delle temperature medie assolute per ogni strato. Per lo strato  $n$ -esimo:

$$T_n = \frac{t_n + t_{n+1}}{2} + 273$$

e dei relativi coefficienti di diffusione di volume del vapore nell'aria  $D$  e resistenze alla diffusione  $\varsigma$ :

$$D_n = \frac{2,306}{p_t} \left( \frac{T_n}{273} \right)^{1,81} = 8,89 \times 10^{-10} T^{1,81} \quad \text{con } p_t = 101325 \text{ Pa pressione barometrica}$$

$$\varsigma_n = \frac{s}{\delta} = s \mu_r \frac{R^* T_n}{D_n} \quad \text{con } R^* = 462 \frac{\text{J}}{\text{kg} \cdot \text{K}} \text{ cost. di elasticità del vapor d'acqua}$$

5. calcolo della permeanza totale della parete:

$$P = \left( \sum_{n=1}^N \varsigma_n \right)^{-1}$$

6. calcolo, col diagramma psicrometrico, delle pressioni parziali corrispondenti alle temperature degli ambienti esterno ed interno  $p_e$  e  $p_i$
7. calcolo delle pressioni parziali corrispondenti alle temperature ad ogni superficie di separazione tra gli strati. Per lo strato  $n$ -esimo:

$$p_n = p_i - P(p_i - p_e) \sum_{i=1}^{n-1} \varsigma_i$$

8. verifica che le pressioni parziali così calcolate siano inferiori alle pressioni di saturazione già calcolate al punto 3. Se ciò non si verifica esiste il pericolo della formazione di condensa.

Se la condizione è verificata si può calcolare la portata di vapore che attraversa la parete:

$$G = A P (p_e - p_i)$$

## 5. Illuminotecnica

### Introduzione

La luce è un particolare segnale elettromagnetico, o meglio una ristretta banda dello spettro elettromagnetico formata da lunghezze d'onda che vanno da 380nm a 780nm, lunghezze d'onda alle quali la retina umana è sensibile. Questo segnale si genera nei corpi come conseguenza delle oscillazioni delle cariche che lo costituiscono, le quali generano campi elettrici e magnetici.

La luce, essendo un'onda, è caratterizzata da:

**frequenza**  $\nu$  – è il numero di oscillazioni compiute nell'unità di tempo

**lunghezza d'onda**  $\lambda$  – distanza tra due massimi

**periodo**  $T$  – tempo per percorrere un'oscillazione completa  $T = 1/\nu$

Individuando con  $c = 299,79 \times 10^6$  m/s la velocità della luce nel vuoto si ha:

$$c = \frac{\lambda}{T} = \lambda \nu$$

Ricordiamo che lo spettro di emissione dei corpi condensati è continuo, mentre quello dei gas o corpi aeriformi è uno spettro discreto o discontinuo. Inoltre, l'energia raggiante dipende dalla direzione di emissione (cfr. pagg. 54-55):

$$J_\alpha = J_0 \cos \alpha \Rightarrow J = \int_0^{2\pi} J_u d\Omega$$

L'intensità della luce è caratterizzata in primo luogo dalla quantità di energia trasportata dalla luce stessa. La branca dell'ottica che si occupa della misurazione dell'intensità luminosa e delle sorgenti della luce si chiama **radiometria**.

Si utilizzano due tipi di unità di misura:

- radiometriche: tengono conto delle caratteristiche energetiche
- fotometriche: tengono conto solo della componente visibile

La CIE ha proposto la terminologia, le unità di misura ed i simboli per le grandezze e sia radiometriche che fotometriche:

grandezze		unità radiometriche	unità fotometriche
flusso luminoso	$\Phi$	watt	lumen (lm)
illuminamento	$E$	watt/m <sup>2</sup>	lux (lm/m <sup>2</sup> )
radianza	$I$	watt/ m <sup>2</sup>	lux s.b. (lm/m <sup>2</sup> ) *
intensità luminosa	$I_\alpha$	watt/ sr	candela (cd)
luminanza	$\sigma$	watt/m <sup>2</sup> sr	Cd/m <sup>2</sup>

Lo steradianne (sr) è l'unità di misura dell'angolo solido.

### Visibilità

La visibilità  $V(\lambda)$  rappresenta le modalità secondo le quali si manifesta la risposta del sistema visivo umano quando la retina è investita dalle radiazioni delle diverse lunghezze d'onda dello spettro visibile.

Per stabilire come varia la sensibilità dell'occhio umano al variare della lunghezza d'onda, si ricorre ad indagini statistiche. Una volta stabilita per quale lunghezza d'onda si ha la massima risposta, si determina la massima visibilità  $V_m = V(\lambda_{MAX})$ . Questa si ha in corrispondenza della lunghezza d'onda  $\lambda = 555$ nm.

---

\* sul bianco  
www.diee.tk

Si definisce **coefficiente di visibilità**:

$$v(\lambda) = \frac{V(\lambda)}{V_m} \quad 0 \leq v(\lambda) \leq 1$$

## Flusso luminoso

Il flusso luminoso  $\Phi = V(\lambda)P_\lambda$  è la grandezza a cui reagisce l'occhio umano. Esso è il prodotto della visibilità dovuta ad una determinata lunghezza d'onda per la potenza trasportata dall'onda stessa. Quindi il fenomeno luminoso dipende dalla potenza di emissione della lampada, e quindi dall'energia che le viene fornita, ma anche dalla visibilità, ossia dalle caratteristiche della lampada stessa.

Se  $\varepsilon(\lambda)$  è la potenza fornita per unità di lunghezza d'onda, il flusso luminoso dovuto a tutte le lunghezze d'onda comprese in un certo intervallo è dato da:

$$\Phi = \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} V(\lambda)\varepsilon(\lambda)d\lambda = V_m \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} v(\lambda)\varepsilon(\lambda)d\lambda$$

## Illuminamento

L'illuminamento  $E = \frac{d\Phi_{inc}}{dS}$  è il rapporto tra il flusso incidente sulla superficie e l'area della superficie

stessa. Conoscendo il flusso totale incidente, possiamo calcolare l'illuminamento medio  $E_m = \frac{\Phi_{inc}}{S}$

## Radianza

La radianza  $I = \frac{d\Phi_{em}}{dS}$  è il rapporto tra il flusso emesso dalla superficie e la sua area.

Come si può notare, radianza e illuminamento sono due grandezze fisicamente uguali. La prima, però, si usa per i corpi luminosi, mentre la seconda per i corpi illuminati. È più giusto dire che queste due grandezze sono collegate in quanto, come sappiamo, un corpo si comporta generalmente come ricevitore e come emettitore di flusso luminoso a seconda del proprio coefficiente di riflessione.

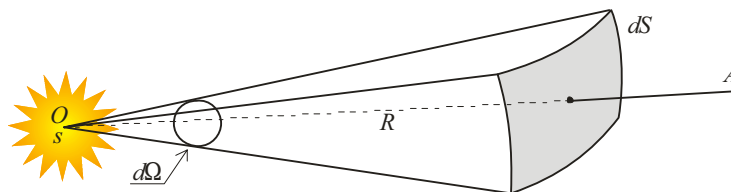
Per il principio di conservazione dell'energia si ha che  $\Phi_{em} = r\Phi_{inc}$  quindi:

$$\frac{\Delta\Phi_{em}}{\Delta S} = r \frac{\Delta\Phi_{inc}}{\Delta S} \Rightarrow I = rE$$

## Intensità luminosa

Si definisce intensità luminosa della sorgente  $s$  nella direzione individuata da  $\overline{OA}$ , il rapporto tra il flusso luminoso emesso dalla sorgente entro l'angolo solido infinitesimo  $d\Omega$  che contiene la direzione  $\overline{OA}$ , e l'ampiezza dell'angolo stesso.

$$I_\alpha = \frac{d\Phi}{d\Omega}$$



Si definisce **curva fotometrica** il luogo geometrico delle posizioni occupate dalla punta del vettore  $\vec{I}_\alpha$  (avente intensità  $d\Phi/d\Omega$ ) quando vi sono simmetrie nell'energia emessa dalla sorgente.

Si definisce **solido fotometrico** il luogo geometrico delle posizioni occupate dalla punta di  $\vec{I}_\alpha$  quando la sorgente luminosa non possiede simmetria.

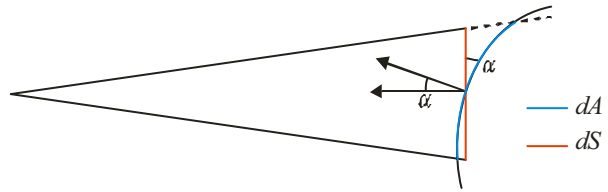
L'unità fondamentale del sistema assoluto fotometrico è la **candela**. Si definisce candela l'intensità luminosa di una sorgente campione avente una superficie di  $1/600.000 \text{ m}^2$  che si comporta come un corpo nero alla temperatura di fusione del platino (2046 K) ed alla pressione di 1atm in direzione normale.

## Luminanza

La luminanza è il rapporto tra l'intensità della sorgente in una certa direzione e l'area apparente della sorgente, vista da un osservatore nella stessa direzione.

$$\sigma = \frac{I_\alpha}{S_{app}}$$

$$dS = dA \cos \alpha \Rightarrow \sigma = \frac{I_\alpha}{dA \cos \alpha}$$



## Relazioni tra grandezze fotometriche

- relazione tra l'illuminamento  $E$  e l'intensità luminosa  $I_\alpha$ :

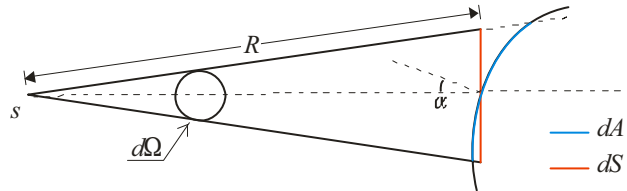
consideriamo una sorgente puntiforme  $s$  ed una porzione di superficie  $dA$ , indichiamo con  $dS = dA \cos \alpha$  la superficie apparente sotto cui si vede  $dA$ , e sia  $d\Omega$  l'angolo solido sotteso da  $dA$ .

L'illuminamento che la sorgente produce e l'intensità sono date dalle formule:

$$E = \frac{d\Phi}{dA} \quad I_\alpha = \frac{d\Phi}{d\Omega} \Rightarrow E = \frac{I_\alpha d\Omega}{dA}$$

essendo  $d\Omega = \frac{dS}{R^2} \equiv \frac{dA \cos \alpha}{R^2}$  otteniamo:

$$E = \frac{I_\alpha dA \cos \alpha}{R^2 dA} \Rightarrow E = \frac{I_\alpha \cos \alpha}{R^2}$$



essendo inoltre  $d\Phi = I_\alpha d\Omega$  deduciamo che  $1 \text{ lm} = \text{cd sr}$

- relazione tra l'illuminamento  $E$  e la luminanza  $\sigma$ :

$$\text{sappiamo che } E = \frac{d\Phi_{inc}}{dS} \quad \sigma = \frac{I_\alpha}{S_{app}} \quad \text{e ancora} \quad E = \frac{I_\alpha \cos \alpha}{R^2} \Rightarrow E = \frac{\sigma S_{app} \cos \alpha}{R^2}$$

se la direzione  $\alpha$ , sotto la quale l'osservatore vede  $dA$ , è normale alla superficie  $A$ , si ottiene:

$$E = \frac{\sigma S_{app} \cos \alpha}{R^2} = \sigma \frac{dS}{R^2} = \sigma d\Omega$$

da cui:

$$\sigma = \frac{E}{d\Omega}$$

- relazione tra l'energia  $W$  ed il flusso luminoso  $\Phi$ :

questa relazione dà origine a una nuova grandezza chiamata **efficienza luminosa specifica**, data dal rapporto tra il flusso termico emesso e l'energia, fornita alla sorgente, necessaria per determinare tale flusso. Si ha:

$$\eta = \frac{\Phi_{em}}{W}$$

La massima efficienza ottenuta da una sorgente monocromatica di luce di lunghezza d'onda  $\lambda = 550 \text{ nm}$  che converte tutta l'energia assorbita in flusso luminoso è di  $680 \text{ lm/W}$ .

$$\eta_l = \frac{\int_{380}^{780} \epsilon(\lambda) d\lambda}{W} \quad \text{rendimento luminoso}$$

$$\eta_s = \frac{\int_{380}^{780} \epsilon(\lambda) d\lambda}{\int_0^\infty \epsilon(\lambda) d\lambda} \quad \text{rendimento spettrale}$$

si chiama **sorgente luminosa** un corpo che emette energia radiante caratterizzata da lunghezza d'onda compresa almeno in parte nell'intervallo 400-700nm, con intensità sufficiente ad impressionare l'occhio umano. Le sorgenti luminose artificiali si distinguono in due categorie, a seconda del loro principio di funzionamento:

✓ **lampade ad incandescenza**

sono costituite da un bulbo di vetro all'interno del quale si trova un filamento opportunamente sistemato che viene scaldato in seguito al passaggio di corrente elettrica, emettendo quindi radiazioni luminose. Essendo il filamento un corpo condensato, l'aspetto di emissione è continuo, ossia la radiazione luminosa emessa ha lunghezza d'onda variabile con continuità. Il massimo dell'emissione si ha nell'infrarosso a  $\lambda = 1000\text{nm}$ .

Per il filamento delle lampade ad incandescenza è attualmente utilizzato il tungsteno, per il quale si ha emissione ad alta temperatura. Se la temperatura però aumenta troppo, la vita del filamento diminuisce in quanto, passando in fase vapore, si assottiglia velocemente rompendosi in breve tempo. Le temperature di funzionamento variano dai 2800°C per le lampade a riempimento di gas inerte, ai 3200 per quelle a ciclo di alogeni. Queste lampade hanno un indice di resa cromatica pari a 85.

- Le **lampade a riempimento di gas inerte** sono quelle in cui bulbo viene riempito da un gas inerte (neon, argon) con lo scopo di rallentare la volatilizzazione del tungsteno, aumentando quindi la vita del filamento e riducendo l'annerimento della lampada derivante dal deposito di tungsteno sul bulbo freddo. Queste lampade hanno un'efficienza luminosa bassa, tra i 10,5 e i 12,5 lm/W.
- Le **lampade a ciclo di alogeni** sono quelle in cui bulbo viene riempito da un alogeno (iodio, cloro, bromo) che alle alte temperature si trova in forma molecolare. Facendo lavorare il filamento alle alte temperature, si innescano una serie di reazioni chimiche tra l'alogeno e il tungsteno finalizzate al “ripristino” del filamento ed alla riduzione di depositi di tungsteno sul bulbo, con la conseguenza di aumentare la vita media della lampada come pure la sua efficienza luminosa (15-20 lm/W). L'aumento della temperatura determina una migliore resa cromatica.

✓ **lampade a scarica**

sono costituite da un bulbo protettivo al cui interno si trova un'ampolla di vetro o quarzo, chiamata tubo di scarico. Il bulbo è atto a resistere alle alte temperature raggiunte. Il gas utilizzato è in genere sodio o mercurio. Nell'ampolla, oltre al gas, sono posti due elettrodi. Tra questi due si instaura una differenza di potenziale che crea un campo elettrico che accelera gli elettroni e messi dal catodo riscaldato e quelli prodotti successivamente per urto. Questi elettroni accelerati urtano gli atomi di gas presente che vengono ionizzati ed eccitati con conseguente emissione di energia sotto forma di luce. Lo spettro di emissione sarà a bande.

La caratteristica di queste lampade è una grande durata, una maggiore conversione di energia elettrica in energia luminosa e quindi una migliore efficienza luminosa. La presenza di uno spettro a bande, però, fa in modo che la resa cromatica sia inferiore di quella delle lampade ad incandescenza.

- Le **lampade ai vapori di mercurio** si dividono essenzialmente in lampade ad alta pressione e lampade a bassa pressione.

Le lampade ad alta pressione sono caratterizzate dalla presenza di mercurio con pressione di 2-10atm e casi in cui  $P = 100\text{atm}$ . L'aumento della pressione favorisce la collisione tra gli atomi, aumentando la probabilità di eccitazione con conseguente aumento dell'emissione nello spettro del visibile. Esse hanno un'elevata efficienza luminosa  $\eta$ , che raggiunge i 60-70 lm/W e una vita di 10.000 ore. Vengono utilizzate dove si vuole avere una buona illuminazione a basso costo, sui campi da tennis, giardini o serre, grazie ad una componente nell'ultravioletto. La loro resa cromatica viene aumentata aggiungendo al mercurio degli elementi delle terre rare.

Le lampade a bassa pressione sono caratterizzate da una pressione di circa 0,665 Pascal, raggiungono efficienza luminosa di 80 lm/W e sono molto utilizzate negli impianti di illuminazione interna.

- Le **lampade ai vapori di sodio** si dividono anch'esse in lampade ad alta e bassa pressione

le lampade a bassa pressione hanno pressioni di circa 0,4 Pascal ed efficienza luminosa molto elevata ( $100 < \eta < 180$ ) dovuta all'emissione nel campo spettrale giallo. La resa di colore è molto scarsa, e per questo vengono utilizzate prevalentemente in strade, gallerie ecc. L'indice di resa cromatica è pari a 10.

– Le **lampade fluorescenti** sono praticamente delle lampade ai vapori di mercurio a bassa pressione, dove l'interno dell'ampollina è rivestito da particolari materiali fluorescenti come il tungstato di cadmio. Lo scopo è quello di aumentare l'efficienza luminosa, infatti  $65 < \eta < 96$  lm/W. L'indice di resa cromatica va da 68 a 99.

## Percezione del colore

Il colore è caratterizzato da un tono, una intensità ed una saturazione.

Il **tono** è quello che viene percepito dai nostri sensi e dipende dalla lunghezza d'onda predominante. Esso ci dà l'aspetto qualitativo del colore.

L'**intensità** è l'aspetto quantitativo.

La **saturazione** ci dà invece l'importanza percentuale della predominanza di una lunghezza d'onda rispetto alle altre.

L'effetto cromatico prodotto sull'occhio umano da una sorgente può essere descritto:

- mediante l'indicazione da lunghezza d'onda dominante, o mediante l'indicazione del fattore di saturazione
- tramite la **temperatura di colore** questa non è altro che la temperatura a cui si dovrebbe portare un corpo nero affinché la luce emessa produca sull'occhio umano una sensazione cromatica equivalente a quella prodotta da sorgente stessa.

Questi metodi però sono inadatti ad esprimere un giudizio sulla qualità di una sorgente per quanto riguarda la resa cromatica. Questo è dovuto al fatto che il corpo nero emette un certo campo di lunghezza d'onda a qualunque temperatura, ed ancora al fatto che due sorgenti possono avere diverse caratteristiche pur avendo la stessa temperatura di colore. Inoltre bisogna tenere presente che due luci apparentemente equivalenti dal punto di vista cromatico possono essere emesse da sorgenti caratterizzate da composizioni spettrali diverse.

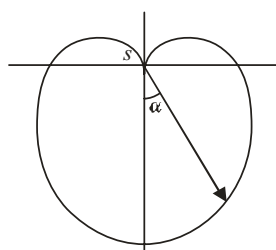
Definiamo **resa cromatica** l'attitudine che la sorgente ha a conservare una certa apparenza cromatica degli oggetti illuminati. Le qualità cromatiche di una sorgente vengono espresse mediante l'**indice di resa cromatica**, al quale, in condizioni standard di luce diurna, si dà il valore 100. L'indice delle varie sorgenti si misura per confronto tra la luce diurna e quella della sorgente stessa.

Stabilire il **colore di un oggetto** è un problema più complicato di quello della valutazione del colore di una radiazione. Infatti il colore un corpo, ovvero la percezione cromatica prodotta da una superficie illuminata, dipende da diversi fattori. Possiamo affermare che l'**aspetto cromatico** di una superficie dipende dalle qualità cromatiche dell'energia incidente, ovvero dalla composizione spettrale della radiazione, ma anche dalle proprietà fisiche della superficie del corpo che determinano fenomeni di rinvio o di trasmissione.

## Apparecchi di illuminazione

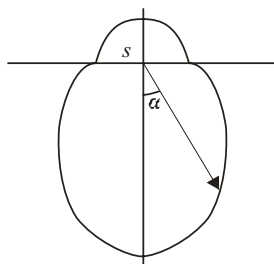
Agli apparecchi sono affidate funzioni di protezione e contenimento di carattere elettrico e soprattutto di carattere ottico. Essi vengono classificati in base al modo con cui la luce emessa si distribuisce nello spazio:

- apparecchi a luce diretta – il flusso luminoso viene emesso per il 90-100% nella direzione dell'oggetto che si vuole illuminare. La curva fotometrica è del tipo:

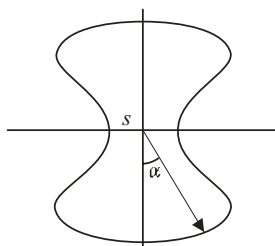




- apparecchi a luce semidiretta – il 60% circa della luce viene emessa verso l'oggetto, mentre la restante in direzione opposta o comunque diversa. La curva fotometrica è del tipo:



- apparecchi a luce diretta-indiretta – l'emissione è uguale nelle due direzioni opposte. La curva fotometrica è del tipo:



La scelta delle caratteristiche delle apparecchi da usare dipende dal tipo di attività che si deve svolgere nei luoghi da illuminare.

Come già detto, uno dei compiti di un apparecchio di illuminazione è di carattere ottico. In particolare, esso controlla la distribuzione nello spazio del flusso emesso dalla sorgente, in modo da adottare il solido fotometrico proprio della sorgente ad un preciso scopo illuminotecnico come schermare completamente o parzialmente la sorgente oppure modificare lo spettro della luce emessa per ottenere particolari effetti cromatici.

In base alle caratteristiche del sistema ottico delle apparecchi di illuminazione, diamo un'altra suddivisione degli stessi:

- **diffusori** – sono costituiti da un involucro traslucido che racchiude la sorgente. Hanno lo scopo di impedire la visione diretta della lampada e di ridurre le irregolarità del suo solido fotometrico
- **riflettori** – hanno lo scopo di modificare il solido fotometrico proprio della sorgente e di impedire la visione diretta di essa in alcune direzioni di osservazione. Sono costituiti da materiale opaco trattato diversamente a seconda che si vuole ottenere un rinvio diffuso, semidiffuso o speculare. Il materiale più utilizzato è l'alluminio
- **rifrattori** – sfruttano il fenomeno della diffrazione e della diffusione per deviare o convogliare la luce in direzioni preferenziali. Con i riflettori si riesce a modificare la curva fotometrica della sorgente in modo da ridurre le perdite di flusso
- **proiettori** – hanno lo scopo di concentrare la luce in una fascia contenuta in un piccolo angolo solido. Sono costituiti da lenti o da specchi.

## Illuminazione stradale e sua progettazione

Gli impianti di illuminazione stradale devono garantire un'adeguata visibilità nelle ore serali e notturne, affinché il traffico motorizzato e pedonale si svolga con sicurezza. L'illuminamento dipende dal particolare tipo di strada. Possiamo individuare i cinque classi di strade:

- classe A<sub>1</sub>      strade con traffico motorizzato intenso e veloce, scarso traffico pedonale (autostrade)
- classe A<sub>2</sub>      strade esterne a medio traffico
- classe B<sub>1</sub>      strade interne con intenso traffico motorizzato e forte traffico pedonale
- classe B<sub>2</sub>      strade urbane a scarso traffico motorizzato
- classe C        strade e viali residenziali o secondari a scarso traffico



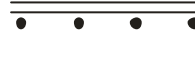
A questa suddivisione se ne aggiungono altri due. La prima viene fatta in base al materiale con cui è fatto il fondo stradale (chiaro o scuro) e in base a questa diamo i valori di illuminamento che devono essere rispettati. La seconda tiene conto dell'uniformità di illuminamento, dando il **coefficiente di uniformità** come rapporto tra illuminamento minimo e quello massimo:

$$c.u. = \frac{E_{MIN}}{E_{MAX}}$$

riassumiamo queste due classificazioni nella seguente tabella:

classe	illuminamento medio (lux)		c.u.
	fondo chiaro	fondo scuro	
A <sub>1</sub>	5 ÷ 8	11 ÷ 14	$\frac{1}{2,5}$
A <sub>2</sub>	3 ÷ 5	5 ÷ 8	$\frac{1}{3}$
B <sub>1</sub>	12 ÷ 15	17 ÷ 20	$\frac{1}{2}$
B <sub>2</sub>	3 ÷ 5	4 ÷ 6	$\frac{1}{4}$
C	1 ÷ 3	2 ÷ 4	qualunque

Dopo aver determinato le caratteristiche della strada e delle apparecchiature utilizzate, dobbiamo stabilire la geometria dell'impianto, ossia la disposizione dei corpi illuminanti e soprattutto dobbiamo calcolare la distanza tra due centri luminosi e l'altezza da terra di questi ultimi. In genere l'altezza dell'armatura è stabilita tenendo conto della disposizione geometrica utilizzata, infatti sia ha:

disposizione a quiconce	$l/1,5 < h < l$	
disposizione a centri opposti	$h < l/1,5$	
disposizione unilaterale	$h > l$	

Scelta la lampada da adottare ed il tipo di proiettore, ovvero gli apparecchi illuminanti, per continuare il progetto occorre avere i dati fotometrici degli apparecchi stessi. Questi sono:

1. **curve fotometriche** (polari o cartesiane) – sono i valori delle intensità luminose, riferite a 1000lm, emesse dall'apparecchio, giacenti su un piano. Generalmente vengono fornite solo quelle che giacciono sui due piani verticali, ortogonali tra di loro, e passanti per il centro ottico dall'apparecchio
2. **diagramma isolux** o isofote – rappresentano l'unione dei punti del piano aventi lo **stesso valore di illuminamento**. Qui l'apparecchio illuminante viene supposto normalizzato all'altezza di 1m, per una lampada di riferimento di 1000lm
3. **diagramma isocandela** – rappresentano le linee aventi **medesima intensità**, espressa in candele, individuate su una superficie sferica avente per centro l'apparecchio luminoso
4. **curve dei coefficienti di utilizzazione** ( $\eta_u$ ) – riguardano il flusso che l'apparecchio invia al suolo, rispetto al piano trasversale passante per il fuoco dell'apparecchio stesso, dal lato strada e dal lato marciapiede.

Vediamo il tutto ora da un punto di vista operativo.

### Metodo del flusso totale

Sappiamo che l'illuminamento che raggiunge un punto su una superficie è  $E_{fo} = \Phi/S$

L'illuminamento medio sarà dato da  $E_m = \frac{\Phi \eta_u m}{d \cdot l}$

dove  $d \cdot l$  superficie totale ( $d$  interdistanza;  $l$  larghezza della carreggiata),  $\eta_u$  coefficiente di utilizzazione, dato dalla somma di  $\eta_1$  e  $\eta_2$  riferiti a lato strada e lato marciapiede, e  $m$  coefficiente di manutenzione, che tiene conto del decadimento delle caratteristiche del flusso a passare del tempo e del fatto che la lampada possa (e tenda a) sporcarsi.

Nell'equazione scritta sopra l'unica incognita è proprio  $d$ , essendo gli altri valori tabellati in funzione del tipo di strada, illuminamento, armatura ecc. Quindi:

$$d = \frac{\Phi \eta_u m}{E_m l}$$

determinata la distanza  $d$ , occorre verificare se per essa sono effettivamente soddisfatte le ipotesi dalle quali siamo partiti. I metodi utilizzati per la verifica sono legate al diagramma utilizzato in progetto.

## Illuminazione diurna

È riferita alla luce solare che entra dalle finestre delle edifici. In una buona progettazione essa deve essere considerata preventivamente e, per alcuni edifici pubblici, è regolata dalla legge.

La sorgente che più viene considerata nei calcoli di illuminotecnica è il cielo, il quale è visto come una sorgente emisferica di dimensioni infinite e con valori di luminanza variabili tra giorno e notte e per diverse condizioni meteorologiche. Vengono definiti i due tipi di cielo:

1. **cielo coperto internazionale** (cielo standard) – è il cielo coperto da nubi bianche e nel quale la luminanza varia a seconda dell'altezza del punto dall'orizzonte
2. **cielo uniforme** – è quello in cui la luminanza è uniforme in ciascun punto. È paragonabile alla luminanza di cielo coperto da nubi scure, dove questo non dipende dall'altezza del punto sull'orizzonte. Sappiamo che l'illuminazione naturale degli ambienti è caratterizzata dal rapporto:

$$DF = \frac{E_i}{E_e} \quad \text{fattore di luce diurna (daylight factor)}$$

dato dal rapporto tra l'illuminamento interno ed il corrispettivo e contemporaneo illuminamento esterno di un punto schermato dai raggi del sole e disposto su una superficie orizzontale.

Generalmente il fattore di luce diurna è considerato come somma di tre componenti:

$$DF = SC + CRI + CRE$$

dove SC è la componente cielo (*sky component*), che rappresenta la quantità di luce che arriva sul punto direttamente dalla volta celeste; CRI è il coefficiente di riflessione interna, che rappresenta la quantità di luce che arriva sul punto per effetto delle riflessioni che si hanno all'interno dell'ambiente; CRE è il coefficiente di riflessione esterna, che rappresenta la quantità di luce che arriva sul punto per effetto delle riflessioni degli oggetti che si trovano all'esterno e che sono illuminati direttamente dalla volta celeste.

Esistono diversi metodi per la determinazione di DF, ma tutti partono dal presupposto che l'illuminamento totale sia dovuto a questi tre termini.

## Metodo del fattore finestra

definiamo **coefficiente di riflessione media** il rapporto:

$$r_m = \frac{\sum r_i A_i}{\sum A_i}$$

dove:  $\sum r_i A_i$  somma dei prodotti dei coefficienti di riflessione per le rispettive superfici delle pareti che stanno all'interno dell'ambiente

$\sum A_i$  somma delle superfici

definiamo inoltre il **flusso luminoso** che arriva all'interno dell'ambiente dalle aperture come:

$$\Phi_i = E_f A_f t$$

dove:  $E_f$  illuminamento della finestra

$A_f$  area della finestra

$t$  coefficiente di trasparenza

ed infine il **flusso circolante** nell'ambiente, dato dalla somma del flusso che entra nell'ambiente e dei flussi dovuti alle successive riflessioni:

$$\Phi_{circ} = \Phi_i \frac{1}{1 - r_m}$$

per definizione  $E_m = \frac{\Phi_{circ}}{A} = \frac{\Phi_i}{A(1 - r_m)} = \frac{E_f A_f t}{A(1 - r_m)}$  e quindi  $DF = \frac{E_f A_f t}{Al(1 - r_m)}$

dove  $l$  è la radianza della volta celeste. Posto  $\varepsilon = \frac{E_f}{l}$  come **fattore finestra**, otteniamo:

$$DF = \frac{A_f t}{A(1 - r_m)} \varepsilon$$

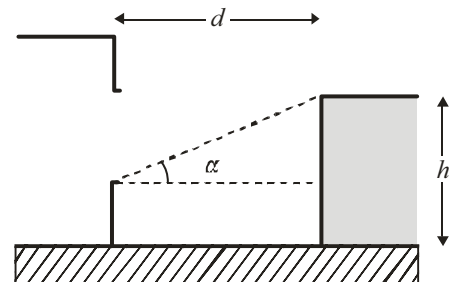
nel caso di semplice lucernario con finestra orizzontale abbiamo:

$$E = l \Rightarrow \varepsilon = 1$$

nel caso di finestra verticale che dà su di uno spazio sgombro:

$$\varepsilon = 1/2$$

nei casi in cui, di fronte alla finestra, vi siano degli "ostacoli",  $\varepsilon$  dipende dall'angolo di ostruzione  $\alpha$  dato dal rapporto tra il punto più alto di un'ostacolo antistante la finestra e la distanza  $d$  tra la finestra e l'ostacolo.

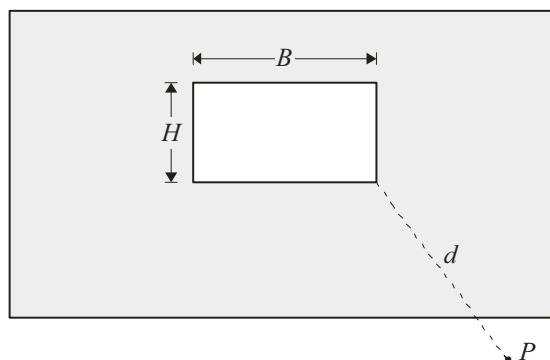


## Metodo B.R.S.

Consente di calcolare il valore del fattore di luce diurna per un punto qualsiasi che si trovi all'interno di un ambiente ed in qualunque posizione rispetto all'apertura. Si parte dal presupposto che la sorgente sia il cielo standard.

- Calcolo della componente cielo SC

consideriamo una parete dove è presente una finestra e consideriamo un punto  $P$  che giaccia su un piano passante per il lato inferiore della finestra ad una distanza  $d$  dalla stessa. Notiamo che  $d$  è l'ortogonale mandata da  $P$  sulla finestra.



I valori di SC sono stati ricavati sperimentalmente e tabellati. Per ricavare SC dalla tabella, occorre conoscere i valori di  $H/d$  e  $B/d$ .

Se il punto  $P$  non coincide con lo spigolo della finestra, si considera una finestra fittizia di apertura  $B$  e si determina SC in questo modo:

1. se  $P$  cade al di fuori della finestra si determinano:

SC' mediante  $(B+B')/d$  e  $H/d$

SC'' mediante  $B'/d$  e  $H/d$

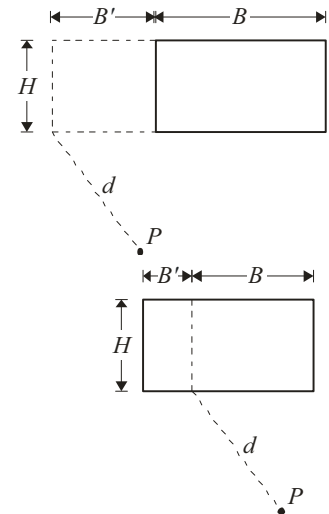
$$\Rightarrow SC = SC' - SC''$$

2. se  $P$  cade all'interno della finestra si determinano:

SC' mediante  $B'/d$  e  $H/d$

SC'' mediante  $B''/d$  e  $H/d$

$$\Rightarrow SC = SC' + SC''$$



in generale  $SC = SC(H, B, d)$

- calcolo del coefficiente di riflessione interna CRI

il calcolo di tale coefficiente è molto difficile e per questo vengono costruite sperimentalmente delle tabelle. I valori del CRI che si trovano nelle tabelle sono riferiti ad un ambiente prismatico di dimensioni  $9 \times 9 \times 3$ , nel quale il coefficiente di riflessione del soffitto è  $r = 70\%$ . Le tabelle sono realizzate in base al rapporto tra area vetrata e area del perimetro, in base al coefficiente di rinvio del pavimento (%) ed al coefficiente di rinvio delle pareti verticali.

Sfruttando le tabelle siamo in grado di ricavare il CRI in condizioni standard. Se siamo in situazioni differenti, bisogna moltiplicare il CRI per tre coefficienti correttivi:

$$CRI = CRI^* \times \eta^I \eta^{II} \eta^{III}$$

dove  $\eta^I$  tiene conto delle diverse dimensioni del locale,  $\eta^{II}$  tiene conto delle diverse riflessioni del tetto e  $\eta^{III}$  tiene conto della presenza di un edificio con un angolo di ostruzione diverso da  $20^\circ$

- calcolo del coefficiente di riflessione esterna CRE

è il responsabile della luce che arriva all'interno del locale dopo aver subito una riflessione su di un ostacolo esterno. L'ostruzione infatti ha un coefficiente di riflessione per cui si comporta come una sorgente emittente radiazione luminosa con una certa luminanza  $\sigma$ .

Per calcolare il CRE occorre prima determinare il fattore di configurazione dell'ostruzione (tabellato in funzione di  $B/d$  e  $\alpha$ ) e lo si moltiplica per i valori 0,1 (cielo uniforme) oppure 0,2 (cielo standard).

## Illuminazione artificiale di un ambiente chiuso

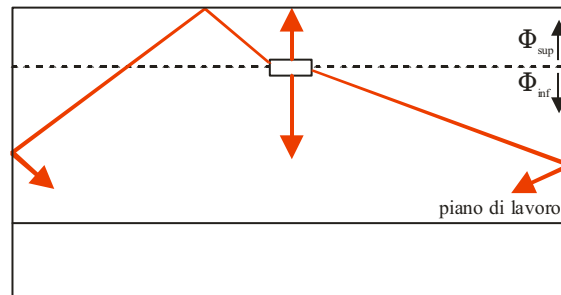
La progettazione di un impianto di illuminazione artificiale in un ambiente chiuso, cioè di un impianto che non ha come solo supporto la luce diurna, richiede una particolare attenzione. L'illuminamento medio  $E_m$  in genere è considerato sul piano utile, ossia su quel piano dove si svolge l'attività prevalente. Se l'ambiente risulta destinato a differenti attività, in prima approssimazione si considera il piano utile ad un'altezza media rispetto ai piani in cui si svolgono tale attività. Il calcolo tiene conto anche dell'utilizzo di sorgenti puntiformi o sorgenti ad estensione lineare.

Nella pratica si utilizza il **metodo di flusso totale** o del coefficiente di utilizzazione  $d$ :

$$E_m = \frac{\Phi m \eta}{A}$$

dove  $E_m$  è l'illuminamento medio desiderato sul piano di lavoro,  $A$  è la superficie del piano di lavoro,  $\Phi$  è il flusso luminoso emesso dalle lampade (incognito),  $m$  è il coefficiente di manutenzione e  $\eta$  è il coefficiente di utilizzazione.

Il calcolo si impernia sulla determinazione del coefficiente di utilizzazione. Fra i diversi metodi per calcolare  $\eta$ , ricordiamo il metodo BZ (*British zonal method*), che si basa sulla suddivisione dell'ambiente in zone:



Il flusso superiore  $\Phi_{sup}$ , emesso al di sopra dell'apparecchio, è diviso in flusso che arriva direttamente al soffitto e quello che arriva dal piano di lavoro dopo riflessione

Il flusso inferiore  $\Phi_{inf}$ , emesso al di sotto dell'apparecchio, è diviso in flusso che arriva direttamente al piano utile e quello che arriva dopo le riflessioni.

Si ha quindi:

$$\eta = \eta(r, K, \Phi_{sup}, \Phi_{inf})$$

dove:  $r = r_p + r_{pav} + r_s$  coefficiente di riflessione che tiene conto dei coefficienti di riflessione di pareti, pavimenti e soffitti

$K = \frac{ab}{h(a+b)}$  indice del locale, tiene conto delle dimensioni  $a, b$  del locale e della distanza  $h$  della sorgente dal piano di lavoro

stabilito quindi il valore di  $\eta$  (si trova tabellato), il flusso totale emesso è dato da:

$$\Phi = \frac{E_m A}{m \eta}$$

conoscendo  $\Phi$ , possiamo dedurre il numero di apparecchi da mettere in opera e studiare la loro disposizione nel soffitto. Il numero di apparecchi sarà dato da:

$$n_{app} = \frac{\Phi}{\Phi_i} = \frac{E_m A}{\Phi_i m \eta}$$

dove  $\Phi_i$  è il flusso emesso da ogni apparecchio.

**Acuità visuale:** è la proprietà dell'occhio di distinguere dettagli di piccole dimensioni nell'oggetto osservato. Se si pensa all'occhio come ad uno strumento ottico, possiamo dire che l'acuità visuale è il potere risolutivo, ossia l'angolo minimo che ci permette di distinguere due oggetti vicini.

**Fenomeno dell'abbagliamento:** è l'eccesso o la ripetizione non adeguata del flusso luminoso che, giungendo sulla retina, provoca uno stato di disordine.

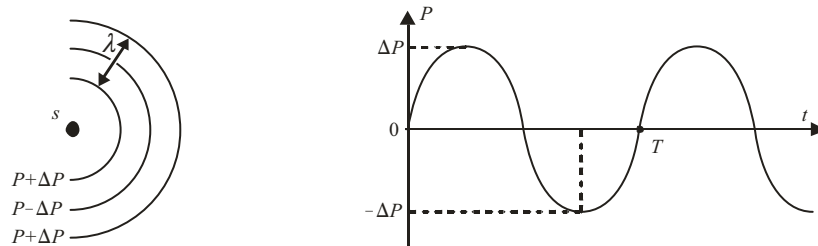
## 6. Acustica

### Introduzione

Il **suono** è la sensazione soggettiva che può essere definita come la trasmissione di energia attraverso mezzi elastici (solidi, liquidi o gas) sotto forma di vibrazione.

La sensazione che il suono produce nell'uomo è dovuta alle variazioni della pressione nell'aria, ossia con pressioni alternate a decompressioni, attorno al valore della pressione atmosferica. Le particelle che costituiscono il mezzo oscillano attorno alla posizione di equilibrio e quindi si ha una continua trasformazione di energia potenziale elastica in energia cinetica e viceversa. Se consideriamo uno straterello del mezzo, questo viene compresso e, a sua volta, comprime gli strati adiacenti propagando il suono. Alle vibrazioni è associato il suono solo se queste sono comprese tra i 20 ed i 20.000 cicli al secondo (Hz).

Se il mezzo è isotropo, l'onda ha la stessa velocità in tutte le direzioni e i fronti d'onda sono sferici.



La variazione di pressione segue una legge sinusoidale.

**Lunghezza d'onda** – distanza tra due fronti d'onda aventi la medesima pressione.

frequenza  $f = 1/T$

lunghezza d'onda  $\lambda = cT = c/f$

$c$  è la velocità di propagazione del suono nel mezzo e dipende dalle sue caratteristiche:

$$c = \sqrt{\frac{E}{\rho}}$$

con  $E = [\text{N/m}^2]$  modulo di elasticità o di Young e  $\rho$  densità del mezzo elastico.

Nell'aria, in condizioni ordinarie, abbiamo  $c = 340\text{m/s}$  mentre in acqua  $c = 1450\text{m/s}$ . La velocità  $c$  dipende da  $\rho$  e quindi dalla temperatura  $t$  e dall'umidità relativa  $\phi$ , ma quest'ultima varia molto poco ed allora dipende solo da  $t$ .

Se  $c_0$  è la velocità alla temperatura  $t_0 = 20^\circ\text{C}$ , la velocità del suono diventa:

$$c = c_0 \sqrt{\frac{t}{t_0}}$$

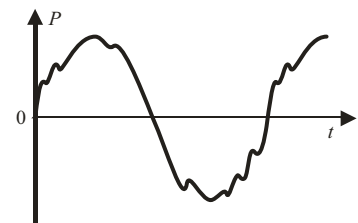
la velocità del suono aumenta di  $0,6\text{m/s}$  per ogni aumento di  $1^\circ\text{C}$ .

Il suono è puro se la perturbazione della pressione in funzione del tempo è sinusoidale. Nella realtà, però, i suoni non sono mai puri ma oscillazioni complesse che molto spesso conservano la periodicità.

Il **teorema di Fourier** ci permette di considerare un'oscillazione periodica complessa come la somma di suoni puri.

Le oscillazioni componenti hanno frequenze che sono multiple intere della più bassa di esse, detta **fondamentale**. Le oscillazioni semplici componenti sono chiamate **armoniche**.

Di importanza rilevante è il valore della perturbazione di pressione attorno al valore di riposo che la pressione ha nel mezzo, ossia la differenza di pressione che esiste tra la pressione  $P(t)$  in un dato istante e quella  $P_0$  che si avrebbe nello stesso punto e nello stesso istante in assenza del fenomeno sonoro. La differenza  $\Delta P(t) = P(t) - P_0$  è la **pressione acustica** o **pressione sonora**.



In acustica si utilizzano i valori efficaci e media quadratica delle grandezze. Per la pressione:

$$P_{eff} = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T \Delta P^2(\tau) d\tau} = \sqrt{\Delta P_{medio}^2}$$

se il suono è puro:

$$P_{eff} = \frac{P_{MAX}}{\sqrt{2}}$$

L'ordine di grandezza della pressione varia da  $2 \cdot 10^{-5}$  a  $120 \div 140 \text{ Pa}$  (soglia del dolore).

Alla trasmissione del suono è associato a una certa quantità di energia. L'**intensità sonora** è la potenza trasmessa per unità di area nella direzione del moto:

$$I = \frac{W}{S} \quad [I] = \left[ \frac{W}{m^2} \right]$$

dove  $W$  è la potenza sonora e  $S$  è la superficie del fronte d'onda. Essendo la pressione acustica e la velocità molecolare delle particelle ovunque in concordanza di fase, abbiamo:

$$P_{eff} = \rho \cdot c \cdot u$$

dove  $\rho$  è la densità,  $c$  è la velocità del suono e  $u$  è la velocità molecolare efficace. Allora la intensità nella direzione di propagazione diventa:

$$I = uP = \frac{P^2}{\rho c}$$

L'**impedenza acustica** viene definita come:

$$z = \rho c$$

e vale  $408 \frac{\text{Ns}}{\text{m}^3}$  per l'aria.

Consideriamo una sorgente che irradia nello spazio. Se il mezzo è isotropo, il fronte d'onda è sferico e la sua superficie è  $4\pi R^2$ , quindi:

$$I = \frac{W}{4\pi R^2}$$

allora la **potenza sonora**, eguagliando le espressioni dell'intensità così trovate, diventa:

$$W = \frac{4\pi R^2 P^2}{\rho c}$$

La densità acustica è l'energia sonora che in un dato istante è localizzata nell'unità di volume:

$$D = \frac{E}{V}$$

si dimostra che tra  $c$  e  $D$  esiste la relazione:

$$cD = I \Rightarrow D = \frac{I}{c}$$

## Livello sonoro

Legge di **Fechner e Weber**: la sensazione è proporzionale al logaritmo dell'eccitazione.

Tutte le grandezze acustiche vengono pertanto espresse sotto la definizione di **livello** che rappresenta il logaritmo di quella grandezza moltiplicato per 10:



- livello di potenza  $L_W = 10 \lg_{10} \frac{W}{W_0}$  [dB]  $W_0 = 1 \times 10^{-12}$  W (potenza di riferimento)
  - livello di intensità acustica  $L_I = 10 \lg_{10} \frac{I}{I_0}$  [dB]  $I_0 = 1 \times 10^{-12} \frac{W}{m^2}$  (intensità di riferimento)
  - livello di pressione o sonoro  $L_P = 10 \lg_{10} \frac{P^2}{P_0^2} = 20 \lg_{10} \frac{P}{P_0}$  [dB]  $P_0 = 2 \times 10^{-5}$  Pa (pressione di rif.)
- $$L_I = 10 \lg_{10} \frac{I}{I_0} = 10 \lg_{10} \frac{P^2}{\rho c I_0} = 10 \lg_{10} \frac{P^2 \cancel{\rho c}}{\cancel{\rho c} P_0^2} = 10 \lg_{10} \frac{P^2}{P_0^2} \Rightarrow L_I = L_P$$

### Livello sonoro di due sorgenti

Consideriamo due sorgenti  $A$  e  $B$  che emettono con una certa potenza ed immaginiamo che il livello sonoro di  $A$  nel punto  $P$  e in assenza di  $B$  sia:

$$L_A = 20 \lg_{10} \frac{P_A}{P_0}$$

immaginiamo invece che il livello sonoro di  $B$  nel punto  $P$  e in assenza di  $A$  sia:

$$L_B = 20 \lg_{10} \frac{P_B}{P_0}$$

la sovrapposizione di queste due pressioni sonore è:

$$L = 20 \lg_{10} \frac{P_A + P_B}{P_0} \quad L \neq L_A + L_B$$

al punto  $P$  arriva un solo livello sonoro  $L_P$  che vale:

$$L_P = 20 \lg_{10} \frac{P}{P_0}$$

cosa accade quando la pressione acustica in tale punto raddoppia? Avremo che:

$$L_{2P} = 20 \lg_{10} \frac{2P}{P_0} = 20 \lg_{10} 2 + 20 \lg_{10} \frac{P}{P_0} \Rightarrow L_{2P} = 6 + L_P$$

ossia quando la pressione raddoppia, il livello sonoro aumenta di 6 dB. Lo stesso può essere ripetuto per il livello di potenza:

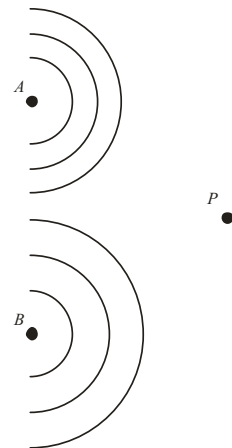
$$L_{2W} = 10 \lg_{10} \frac{2W}{W_0} = 10 \lg_{10} 2 + 10 \lg_{10} \frac{W}{W_0} \Rightarrow L_{2W} = 3 + L_W$$

ossia quando la potenza raddoppia, il livello di potenza aumenta di 3 dB.

### Spettri acustici - analisi acustica

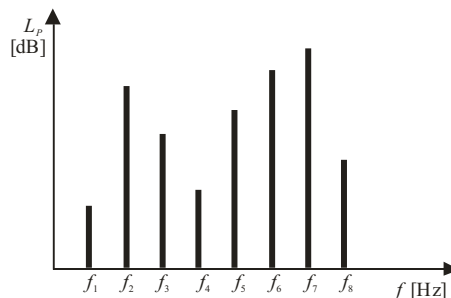
L'orecchio avverte principalmente le differenze di frequenza  $f$  e quelle di ampiezza di oscillazione, ma non quelle di fase. Allora si utilizzano diagrammi con le frequenze delle varie componenti sinusoidali e le corrispondenti intensità. Per l'ampiezza di oscillazione potremmo prendere quella della componente sinusoidale considerata o la pressione efficace.

Il concetto di potenza efficace è applicabile sia alle singole armoniche sia al fenomeno nel complesso ed in questo ultimo caso si ha:



$$P_{eff} = \sqrt{\sum_{n=1}^N P_n^2}$$

Il diagramma prende il nome di **spettro acustico**:



La prima riga sinistra è l'armonica fondamentale, la cui frequenza  $f_1$  è uguale a quella del suono complesso. Le altre righe hanno frequenze che sono multiple di quella fondamentale:

$$f_2 = 2 \times f_1 \quad f_3 = 3 \times f_1 \quad \text{ecc.}$$

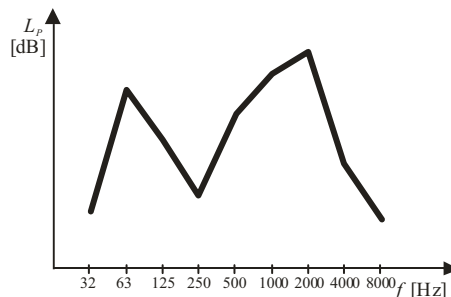
**NOTA** – le considerazioni fatte valgono solo per fenomeni oscillatori periodici in regime stazionario.

Un secondo metodo per l'analisi acustica è quello a **bande di ottava**. Il suono contiene numerose frequenze; escludiamo quindi quelli con frequenze al di sopra ed al di sotto di due determinate frequenze limite, ossia che delimitano una **banda di frequenza**. La differenza tra queste frequenze costituisce la **larghezza della banda**. La frequenza limite superiore è sempre il doppio di quella inferiore; queste delimitano l'intervallo chiamato **ottava**. Il centro di frequenza di ogni ottava è dato da:

$$f_c = \sqrt{f_1 f_2}$$

dove  $f_1$  e  $f_2$  sono le frequenze limite. Essendo  $f_1 = 2f_2 \Rightarrow f_c = f_1 \sqrt{2}$

Il livello di pressione di ogni ottava è chiamato livello della banda d'ottava e viene riportato al centro della banda. Procedendo in questo modo otteniamo lo **spettro sonoro**:



spesso le bande di frequenza utilizzate sono anche da 75 a 150, da 150 a 300 ecc. Se abbiamo bisogno di informazioni dettagliate sullo spettro di un rumore, ricorriamo a bande di mezza ottava o di terzi d'ottava.

## Audiogramma normale

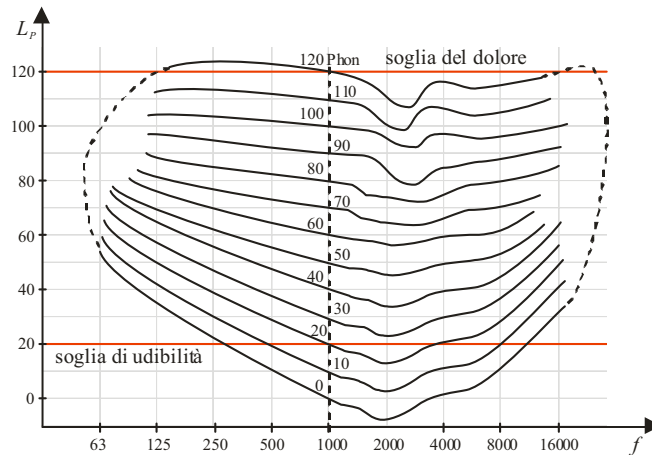
Per ottenere una sensazione uditiva è necessario:

- parte fisica { corpo vibrante con frequenze comprese tra 20 e 20.000 Hz  
mezzo elastico
- parte fisiologica { orecchio che assorbe le onde  
nervo che trasmette l'impulso al cervello
- parte psicologica – cervello che riceve l'impulso

Il suono è caratterizzato da:

- intensità                      energia che investe l'orecchio nell'unità di tempo
- altezza                        determinata dalla frequenza fondamentale
- timbro                         determinato nei rapporti di ampiezza delle armoniche

La sensazione sonora è influenzata anche dalla frequenza. Perciò si usa il **diagramma di Fletcher e Munson** (audiogramma normale):



In ascisse si riportano le frequenze ed in ordinate il livello di pressione. Le curve sono il luogo dei punti che corrispondono a sensazioni ugualmente intense (curve isofoniche). Si usa la **scala dei phon**. Il numero che esprime il phon coincide col numero che esprime  $L_p$  alla frequenza di 1000 Hz.

La misura della sensazione che un suono produce sull'uomo è difficoltosa poiché i microfoni hanno risposte lineari per tutte le frequenze e per questo si introducono le **curve di ponderazione** che traducono, ossia correggono. Abbiamo tre tipi di curve:

$$\text{curva} \begin{cases} A - \text{frequenze basse} \\ B - \text{frequenze medie} \\ C - \text{frequenze alte} \end{cases}$$

Il suono corretto si indica con la lettera A:  $L_p = 20 \text{ dBA}$

## Mascheramento

Quando due suoni aventi diverse frequenze sono ricevuti simultaneamente, l'uno può mascherare l'altro. Così, ad esempio, un suono con frequenza minore maschera quello con frequenza maggiore.

## Correzione acustica

Si tratta di creare all'interno dell'ambiente le condizioni per un **comfort acustico** che si ottiene garantendo condizioni costanti dal punto di vista acustico. Consiste nell'abbattimento dei livelli sonori di determinate frequenze rispetto ad altre in base alle attività che vengono svolte nell'ambiente. Il trattamento di un ambiente viene fatto rivestendolo con **materiali fonoassorbenti**.

Consideriamo un'onda sonora di potenza  $W$  che incide su un materiale. Essa viene in parte trasmessa ( $t$ ), in parte assorbita ( $a$ ) ed in parte riflessa ( $r$ ):

$$a + t + r = 1$$

Il **coefficiente di assorbimento apparente** è il rapporto tra la potenza assorbita sommata a quella trasmessa e la potenza incidente:

$$\alpha = \frac{W_a + W_t}{W}$$

Il coefficiente di assorbimento dipende da altre caratteristiche come la frequenza del onde incidenti:

$$\alpha = \alpha(f)$$

$\alpha$  rappresenta la quantità di suono assorbita dal materiale ad una data frequenza. La quantità di suono assorbita dipende inoltre anche dall'angolo di incidenza delle onde sonore ma, essendo queste numerose e provenienti da varie direzioni, si fa riferimento ad un valore medio di  $\alpha$ .

Il valore dell'assorbimento di una superficie è dovuto anche alla sua grandezza:

$$A = \alpha S$$

se  $S = 1\text{m}^2$ ,  $A$  è l'assorbimento dovuto a  $1\text{m}^2$  di superficie. L'energia sonora assorbita a quella frequenza sarà:

$$E = I \alpha S$$

I materiali porosi sono più assorbenti di quelli compatti.

## Materiali fonoassorbenti

### ▪ porosi e fibrosi

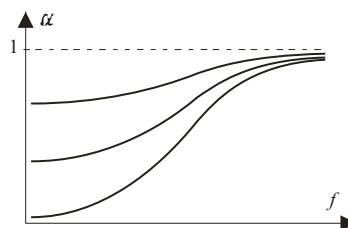
sono materiali che presentano dei canali nella loro struttura interna. Vediamo come funziona l'assorbimento: una parte dell'energia sonora che incide su una parete porosa si trasmette dall'aria ambientale a quella contenuta nei pori e nei canalicoli, per effetto della sovrapposizione. All'interno dei canalicoli, l'energia si trasforma in calore a causa degli attriti. L'assorbimento è legato a numerosi parametri:

- 1) flow resistance o resistenza al flusso – misura la resistenza che incontra l'aria nel passare attraverso il materiale ed è definita dal rapporto tra la caduta di pressione e la velocità dell'aria:

$$\text{F.R.} = \frac{P_1 - P_2}{V}$$

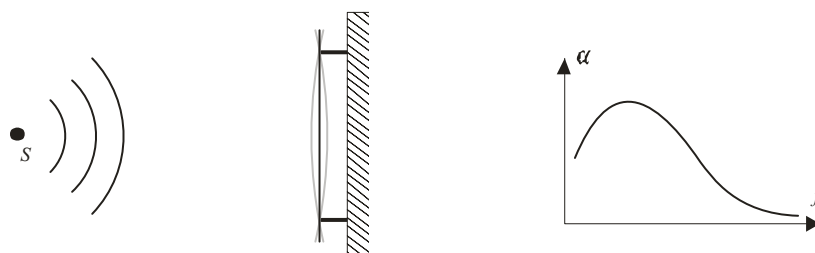
- 2) fattore struttura – tiene conto delle dimensioni dei canalicoli, del loro orientamento, dell'esistenza di cavità cieche e parallele alla superficie
- 3) porosità del materiale – è il rapporto tra il volume dei pori e quello totale dello stato poroso.

Il F.R. è il parametro più importante. Maggiori assorbimenti si hanno quando F.R. ha valori né grandi né piccoli. Infatti una resistenza al flusso elevata (canalicoli ciechi e tortuosi) impedisce all'aria il movimento mentre una F.R. bassa farà in modo che la parete sia attraversata dal suono. Il coefficiente di assorbimento dipende dallo spessore. Si potrebbe pensare che aumentando lo spessore aumenti anche  $\alpha$ . Questo è vero solo alle basse frequenze:



### ▪ membrane e pannelli vibranti

si tratta di materiali rigidi non porosi fissati con due supporti alle pareti e distanziati da esse in modo da lasciare un'intercapedine. L'onda che arriva sul pannello lo mette in movimento e si crea una sovrappressione; poi il pannello è richiamato nella posizione che aveva in precedenza e si crea una depressione. Quando l'onda incidente ha una frequenza vicina alla frequenza propria del sistema pannello-aria, si entra in condizioni di **risonanza** alla quale sia il massimo di assorbimento dell'energia incidente. In tal caso, l'energia che incide si trasforma in altre forme di energia.



il diagramma di  $\alpha$  è opposto a quello dei pannelli fibrosi e porosi, dato che il pannello vibrante presenta alle basse frequenze un miglior assorbimento mentre un materiale poroso presenta migliore assorbimento alle alte frequenze. Utilizzando entrambi i materiali possiamo coprire un vasto campo di frequenze.

La frequenza di risonanza è:

$$f_r = \frac{1}{2\pi\sqrt{MC}} \Rightarrow f_r = 60\sqrt{\frac{s}{Md}}$$

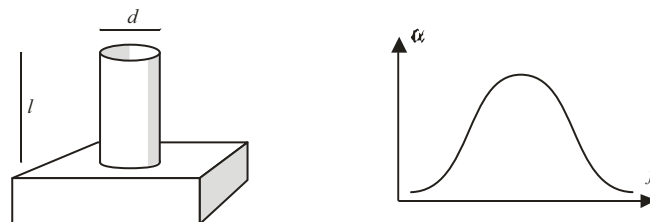
con  $M$  massa del pannello e  $C$  cedevolezza del pannello (deformazione/forza deformante):

$$C = \frac{d}{\rho c^2 s}$$

con  $d$  profondità intercapedine,  $s$  e  $\rho$  superficie e densità del pannello e  $c$  velocità del suono.

#### ▪ **risuonatori**

è costituito da una cavità (ventre) messa in comunicazione con l'esterno mediante uno stretto collo, ossia un cilindro di diametro  $d$  e di lunghezza  $l$ . Quando il risuonatore è investito da un fascio di onde sonore, l'onda di pressione mette in movimento le molecole che si trovano nel collo, le quali si muovono verso il ventre. In pratica, si trasmettono una serie di compressioni ed espansioni all'aria contenuta nella cavità. L'aria contenuta nel collo si comporta come una massa oscillante, mentre l'aria della cavità si comporta come una molla. Questi due sistemi costituiscono un unico sistema complesso di vibrazione. Quando l'onda incidente ha una frequenza uguale o vicina a quella del risuonatore, si ha il fenomeno della risonanza.



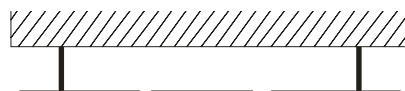
la frequenza di risonanza del risuonatore si trova con la formula:

$$f_r = \frac{c}{2\pi} \sqrt{\frac{s}{V(l + 0,8d)}}$$

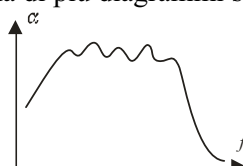
dove  $c$  velocità del suono,  $V$  volume della cavità,  $s$  e  $d$  area e diametro del collo.

I risuonatori assorbono meglio alle medie frequenze. Essi sono molto adoperati in quanto, modificando i valori dei parametri da cui dipende  $f_r$ , si può rendere massimo il potere fonoassorbente nella banda di frequenza desiderata.

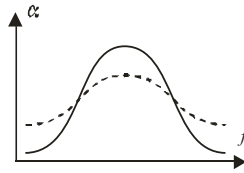
Quando l'assorbimento è richiesto per un'ampia banda di frequenze, si possono utilizzare diversi risuonatori aventi diverse frequenze di risonanza. Si consideri ad esempio un controsoffitto in cartongesso. Su di esso sono praticati dei fori che costituiscono il collo dei risuonatori, il cui ventre sia costituito dal volume d'area che compete a ciascun foro:



Utilizzando la tecnica di disporre fori aventi diametro differenti e a interdistanze diverse, abbiamo diagrammi di assorbimento dati dalla somma di più diagrammi semplici:

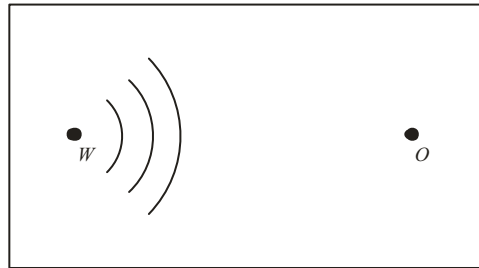


Se il risuonatore viene rivestito con materiale poroso aumenta lo smorzamento ma diminuisce il potere assorbente:



## Acustica degli ambienti chiusi

Consideriamo un ambiente nel quale vi sia una sorgente sonora di potenza  $W$  ed analizziamo il suono che arriva nel punto  $O$ .



Essendo un ambiente chiuso, all'onda diretta, avente le stesse caratteristiche di quelle in ambiente aperto, va aggiunta una certa quantità dovuta alla riflessione. Queste onde arrivano in  $O$  dopo aver subito un certo numero di riflessioni. Il numero di queste riflessioni dipende dalle dimensioni dell'ambiente, dalla direzionalità della sorgente e dalle caratteristiche assorbenti e riflettenti delle pareti.

Occorre analizzare come l'onda viene riflessa e ciò è complesso in quanto, alle riflessioni geometriche, si aggiungono i fenomeni di diffusione e interferenza. Per questo si utilizza un metodo semplificato: il **metodo dell'acustica statistica**, che permette di calcolare il valore medio statistico dei parametri che interessano nella trattazione di tale problema.

I fenomeni che possono presentarsi come conseguenza di queste riflessioni multiple all'interno di un ambiente, sono l'eco, la risonanza e la riverberazione.

### ▪ Eco

un ascoltatore posto in una certa posizione riceve un segnale acustico una volta direttamente dalla sorgente ed una seconda volta dopo essere stato riflesso che dopo un tempo tale da percepire il segnale riflesso come distinto da quello diretto.

Come noto, il suono viaggia a 340 m/s ed impiega un certo tempo a seconda del percorso per giungere a destinazione. L'orecchio ha un potere discriminante nei confronti dei suoni pari a 1/22 s. Pertanto il minimo ritardo con quale deve giungere il suono riflesso per essere percepito come distinto è di 1/22 secondi. In questa frazione di secondo, il suono potrà percorrere uno spazio pari a circa 15 metri. A causa delle riflessioni multiple può succedere che il suono arrivi in un tempo superiore a 1/22 s, ossia che l'onda riflessa percorra uno spazio maggiore di 15 metri. Si verifica in tal caso il fenomeno dell'eco, in quanto quei suoni vengono percepiti distinti. L'eco si verifica con più probabilità negli ambienti grandi ( $> 15$  m).

L'eco, per avere il suono riflesso, deve avere un'intensità tale, quanto giunge sul punto  $O$  considerato, da non essere mascherato dagli altri suoni presenti emessi successivamente dalla sorgente.

### ▪ Risonanza

quando le onde sonore urtano la struttura di una sala, essa è posta in uno stato di vibrazione più o meno forte a seconda della sua natura. I materiali vibrano alla stessa frequenza delle onde sonore incidenti ed emettono alternativamente suono d'entrambi i lati. Quest'ultimo fatto spiega come il suono venga udito attraverso le pareti. Pareti, soffitti, pavimenti si dice che entrano in **risonanza**.

A causa della risonanza, l'intensità sonora che giunge ad un osservatore sarà maggiore nell'ambiente chiuso rispetto a quella che, a pari distanza, giungerebbe in un ambiente aperto.

### ▪ Riverberazione

mentre la sorgente produce dei suoni, la stanza si riempie di onde riflesse. Supponiamo che la sorgente si fermi ad un certo momento: le onde riflesse non cesseranno in quel momento ma continueranno a viaggiare nella stanza. Ad ogni successiva riflessione, ogni onda perde una frazione di energia a causa dell'assorbimento. Immaginiamo di avere un ascoltatore nella stanza.

Le onde riflesse colpiranno il suo orecchio in una successione così rapida che egli non le udrà come distinte ripetizioni del suono originale, ma come un prolungamento di questo, dopo che la sorgente si sia fermata. Questo prolungamento del suono, che man mano si fa più debole fino a diventare non più udibile, è chiamato **coda sonora** o **riverberazione**.

Consideriamo la sorgente e un ascoltatore posto in un punto  $O$ . Se la sorgente ha una potenza  $W$ , l'onda che direttamente giunge in  $O$  è uguale a quella che vi giungerebbe nell'ambiente aperto:

$$I = \frac{W}{4\pi d^2}$$

dove  $d$  è la distanza della sorgente dal punto  $O$ . All'intensità sonora corrisponde un certo livello sonoro:

$$L_I = 10 \lg \frac{I}{I_0} = 10 \lg \frac{W}{4\pi d^2} \frac{1}{I_0} \cancel{W_0} \quad \text{essendo } W_0 \text{ e } I_0 \text{ uguali numericamente (cfr. pag.85)} \Rightarrow$$

$$L_I = 10 \lg \frac{W}{4\pi d^2} \frac{1}{W_0} = 10 \lg \frac{W}{W_0} - 10 \lg 4\pi d^2 = 10 \lg \frac{W}{W_0} - 10 \lg 4\pi - 10 \lg d^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow L_I = 10 L_W - 11 - 20 \lg d$$

Analizziamo ora il suono riflesso. Utilizziamo un metodo statistico e il **percorso libero medio** tra due successive incidenze sulle pareti dell'onda sonora: il percorso libero medio è la lunghezza media statistica dei cammini liberi delle diverse frazioni di energia sonora tra due successive incidenze sulle pareti. Questa lunghezza è calcolata come media ponderata di tutte le lunghezze dei percorsi consentiti, assumendo come pesi la probabilità che hanno tali lunghezze di essere effettivamente percorse.

Il percorso libero medio è:

$$L_m = \frac{4V}{S}$$

dove  $V$  volume dell'ambiente e  $S$  superficie che delimita l'ambiente.

il tempo libero medio è:

$$t_m = \frac{L_m}{c} = \frac{4V}{cS}$$

Considerazioni statistiche portano a definire il valore dell'energia sonora riflessa come:

$$I_r = \frac{4W}{A}$$

dove  $A$  è l'assorbimento complessivo:

$$A = \sum_{i=1}^N S_i \alpha_i$$

Il livello sonoro sarà:

$$L_{I_r} = 10 \lg \frac{I_r}{I_0} = 10 \lg \frac{4W}{A} \frac{1}{I_0} \cancel{W_0} = 10 \lg \frac{W}{W_0} - 10 \lg \frac{A}{4} = 10 \lg \frac{W}{W_0} - 10 \lg A + 10 \lg 4 \Rightarrow$$

$$L_{I_r} = L_W + 6 - 10 \lg A$$

In una stanza chiusa, l'energia sonora totale può essere considerata in ogni punto come somma dell'energia diretta e di quella riflessa:

$$I_{TOT} = I + I_r = \frac{W}{4\pi d^2} + \frac{4W}{A}$$

il livello di pressione totale non sarà dato dalla somma semplice di  $L$  e  $L_{I_r}$ , ma dalla somma logaritmica:

$$L_{TOT} = 10 \lg \left( \frac{I}{I_0} + \frac{I_r}{I_0} \right) \Rightarrow \left. \begin{array}{l} L = 10 \lg \frac{I}{I_0} \Rightarrow \frac{I}{I_0} = 10^{L/10} \\ L_{I_r} = 10 \lg \frac{I_r}{I_0} \Rightarrow \frac{I_r}{I_0} = 10^{L_{I_r}/10} \end{array} \right\} \Rightarrow \boxed{L_{TOT} = 10 \lg \left( 10^{L/10} + 10^{L_{I_r}/10} \right)}$$

Se il suono della sala è diffuso, fino ad una certa distanza dalla sorgente il suono diretto sarà maggiore di quello riflesso, mentre al di là di questa distanza il suono riflesso prevarrà. Questa distanza viene chiamata **raggio della sala** e ne troviamo l'espressione considerando il rapporto  $Rdr$  tra le intensità diretta e riflessa:

$$Rdr = \frac{I}{I_r} = \frac{W}{4\pi d^2} \cdot \frac{A}{4W} = \frac{A}{16\pi d^2} \quad \text{ponendo } Rdr = 1 \Rightarrow d^2 = \frac{A}{16\pi} \Rightarrow \boxed{d^* = \frac{\sqrt{A}}{7}}$$

Parliamo di:

1. **campo diretto** – il contributo delle onde dirette è maggiore e sarà dato dei punti interni alla sfera di raggio  $r = d^*$
2. **campo riverberato** – il contributo delle onde dirette è minore e sarà dato dei punti esterni alla sfera di raggio  $r = d^*$

Definiamo il **tempo di riverberazione** come il tempo necessario affinché il livello sonoro discenda di 60dB da quando la sorgente cessa di emettere, ossia il tempo necessario affinché l'intensità sonora diminuisca di un milionesimo dal momento in cui la sorgente cessa di emettere. La formula che ci dà il tempo di riverberazione è quella di **Sabine**:

$$\boxed{T_{60} = 0,163 \frac{V}{A}}$$

dove  $V$  volume dell'ambiente e  $A$  assorbimento complessivo. Se l'ambiente è molto grande bisogna tener conto dell'assorbimento dell'area mediante il suo coefficiente di assorbimento  $\alpha_a$ :

$$T_{60} = 0,163 \frac{V}{A + \alpha_a V}$$

La formula di Sabine è valida e universalmente riconosciuta ma ha un limite: cade in difetto quando si ha a che fare con ambienti fortemente assorbenti. Se avessimo un ambiente con  $A = 1$ , dovremmo avere tempi di riverberazione nulli mentre invece la formula non dà questo risultato. È stata così messa a punto da altri ricercatori un'altra formula, quella di Noeil:

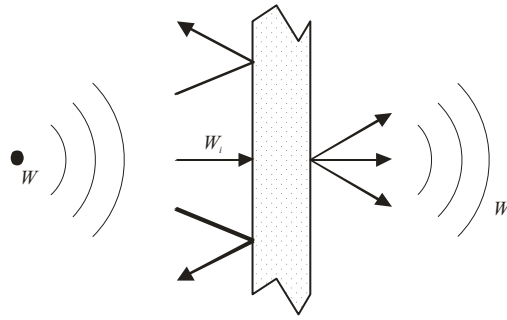
$$\boxed{T_{60} = \frac{V}{S \lg(1 - \alpha_m)}}$$

con  $\alpha_m$  coefficiente di assorbimento medio della sala. Da questa formula risulta che per  $A = 1$  si ottiene  $T_{60} = 0$ .

## Isolamento acustico

Consideriamo una sorgente di potenza  $W$  in un certo ambiente separato da un altro ambiente mediante una parete. In conseguenza della pressione esercitata sulla parete, questa vibra e irradia suono anche nell'ambiente in cui non vi è sorgente:





Possiamo dire che una parte dell'energia verrà riflessa, una parte assorbita ed una parte trasmessa. Il coefficiente di trasmissione è il rapporto tra energia incidente ed energia trasmessa:

$$t = \frac{W_t}{W_i}$$

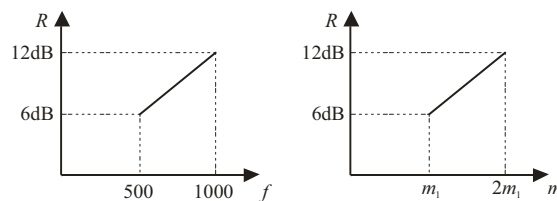
in luogo di  $t$  si usa  $\frac{1}{t}$ : maggiore è l'inverso di  $t$ , maggiore è la capacità di una parete di resistere ai suoni.

Definiamo il **potere fonoisolante** di una parete mediante la formula:

$$R = 10 \lg \frac{1}{t}$$

maggiore è  $R$ , maggiore è la capacità di quella parete di resistere all'attraversamento dei suoni.

Si è visto che prese una parete semplice omogenea e di rigidezza trascurabile, se il suono incidente è perpendicolare alla parete e di data frequenza, ad un raddoppio della massa corrisponde un aumento del potere fonoisolante di 6dB. Analogamente, ad un raddoppio di frequenza corrisponde ancora un aumento del potere fonoisolante di 6dB:



Da queste considerazioni scaturisce la **legge della massa**. In termini analitici:

$$R = 10 \lg \left[ 1 + \left( \frac{\pi f m_a}{\rho c} \right)^2 \right]$$

dove  $\rho c = 410 \text{ Kg/m}^2\text{s}$  è l'impedenza dell'aria e  $m_a$  è la massa d'aria. Essendo solitamente  $\left( \frac{\pi f m_a}{\rho c} \right)^2 \gg 1$  possiamo scriverla nella forma più compatta:

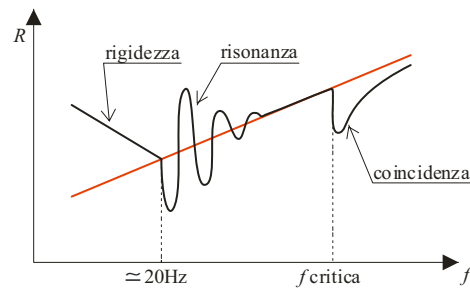
$$R = 20 \lg f m_a - 42,3$$

questa formula prende il nome di legge della massa, che dà il comportamento di una parete quando è investita da un suono. La legge della massa è valida nel caso di incidenza normale. Nei casi reali, in cui il suono è diffuso, si è trovato che il potere fonoisolante  $R$  è inferiore di circa 6dB rispetto al caso precedente:

$$R \cong 20 \lg f m_a - 48$$

quindi il potere fonoisolante non dipende dalle caratteristiche fonoisolanti degli ambienti e della parete che li divide.

Come visto, il potere fonoisolante dipende dalla frequenza.  $R = R(f)$  dovrebbe essere lineare come il grafico in alto. Nella realtà,  $R$  dipende da molti fattori ed ha un andamento del tipo:



Il primo fenomeno che si osserva è quello della **rigidezza**. Tutte le pareti hanno una certa rigidezza ed inoltre sono vincolate ai loro estremi. Questo comporta che  $R$  aumenta al diminuire di  $f$ . L'effetto della rigidezza predomina le basse frequenze, mentre quello della massa predomina alle alte.

Il secondo fenomeno è quello della **risonanza**, in corrispondenza della quale si verifica una notevole riduzione del potere fonoisolante. La frequenza di risonanza è tanto maggiore quanto maggiore è la rigidezza del pannello e quanto minore è la massa. La frequenza di risonanza è data da:

$$f_n = \left( \frac{p^2}{a^2} + \frac{q^2}{b^2} \right) \frac{\pi}{4} d \left[ \frac{E}{\sigma \rho (1 - \nu^2)} \right]$$

con  $a, b$  dimensioni pannello,  $d$  spessore,  $E$  modulo di Young,  $\nu$  modulo di Poisson.

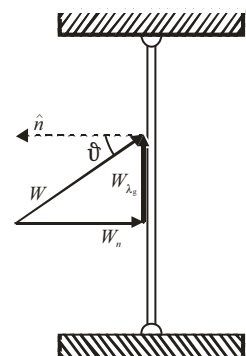
Dopo la frequenza di risonanza, il comportamento di  $R$  è ideale fino alla **frequenza critica**  $f_c$  dove si verifica un grande abbassamento del potere fonoisolante. Il fenomeno è chiamato **coincidenza**, ed è chiamato in questo modo perché si manifesta quando si ha coincidenza tra la lunghezza d'onda del suono nell'aria  $\lambda_a$  e la proiezione in direzione  $\theta$  della lunghezza d'onda flessionale sulla parete, con  $\theta$  l'angolo tra la normale alla parete e la direzione di incidenza:

$$\lambda_a = \lambda_q \cos \theta$$

A cosa dovuta la coincidenza? Una parete reale viene raggiunta da onde sonore le quali possono essere scomposte in onde tangenziali e onde normali. L'onda tangenziale farà vibrare la parete tra i due vincoli, mentre quella normale su piani ortogonali alla parete stessa. La frequenza di coincidenza è:

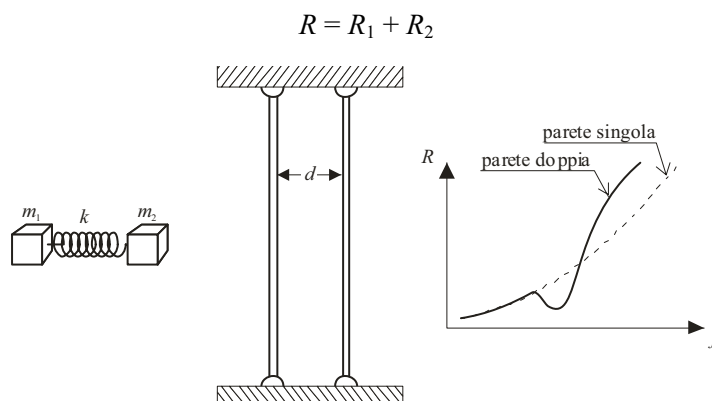
$$f_c = \frac{6,5 \times 10^{-4}}{d} \sqrt{\rho \frac{1 - \sigma^2}{E}}$$

dopo la frequenza critica, il comportamento di  $R$  tende asintoticamente a quello datoci dalla legge della massa.



## Parete con intercapedine

Occorrerebbe calcolare il potere fonoisolante di ciascuna parete e trovare poi quello della parete complessa:



La vicinanza tra le pareti fa in modo che questo non sia vero poiché le vibrazioni si trasmettono da una parete all'altra. Non è neanche possibile utilizzare la legge delle masse:

$$R_{12} = f(m_1 m_2)$$

Il comportamento reale ha una via di mezzo rispetto a quelli visti, ossia:

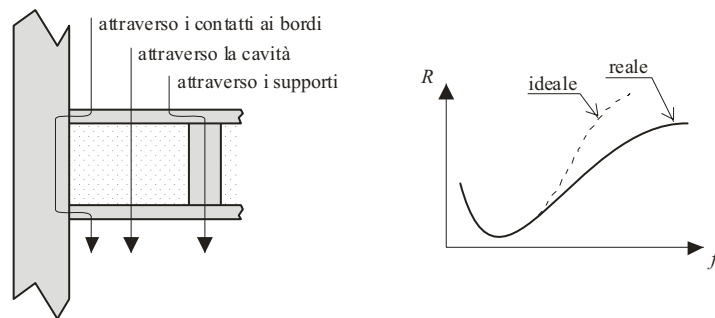
$$R_{12} < R < R_1 + R_2$$

l'andamento di  $R$  è quello del grafico, che si riferisce a pareti dello stesso materiale mentre nel caso di materiali differenti avremo due frequenze di risonanza. La frequenza la quale sia il fenomeno della coincidenza si calcola con la **formula di Schoch**:

$$f_0 = 1200 \sqrt{1/md}$$

con  $m$  massa dei due pannelli e  $d$  spazio d'aria tra i due pannelli. Al disopra di  $f_0$ ,  $R$  aumenta rapidamente e si approssima ad una pendenza doppia di quella data dalla legge delle masse per un singolo pannello.

È molto importante il collegamento di tali pareti. È inutile infatti utilizzare una parete multistrato se poi esse vengono collegate rigidamente l'una all'altra. In tal caso, essendo la deformazione di una strettamente collegata quella dell'altra, si ha una grande trasmissione dei rumori.



Se gli elementi di contatto hanno lo stesso coefficiente di resistenza dei pannelli, viene trasmessa molta energia e quindi per aumentare l'isolamento acustico bisogna inserire tra i materiali di contatto delle guarnizioni o supporti aventi coefficiente di resistenza diverso, per esempio gomma.