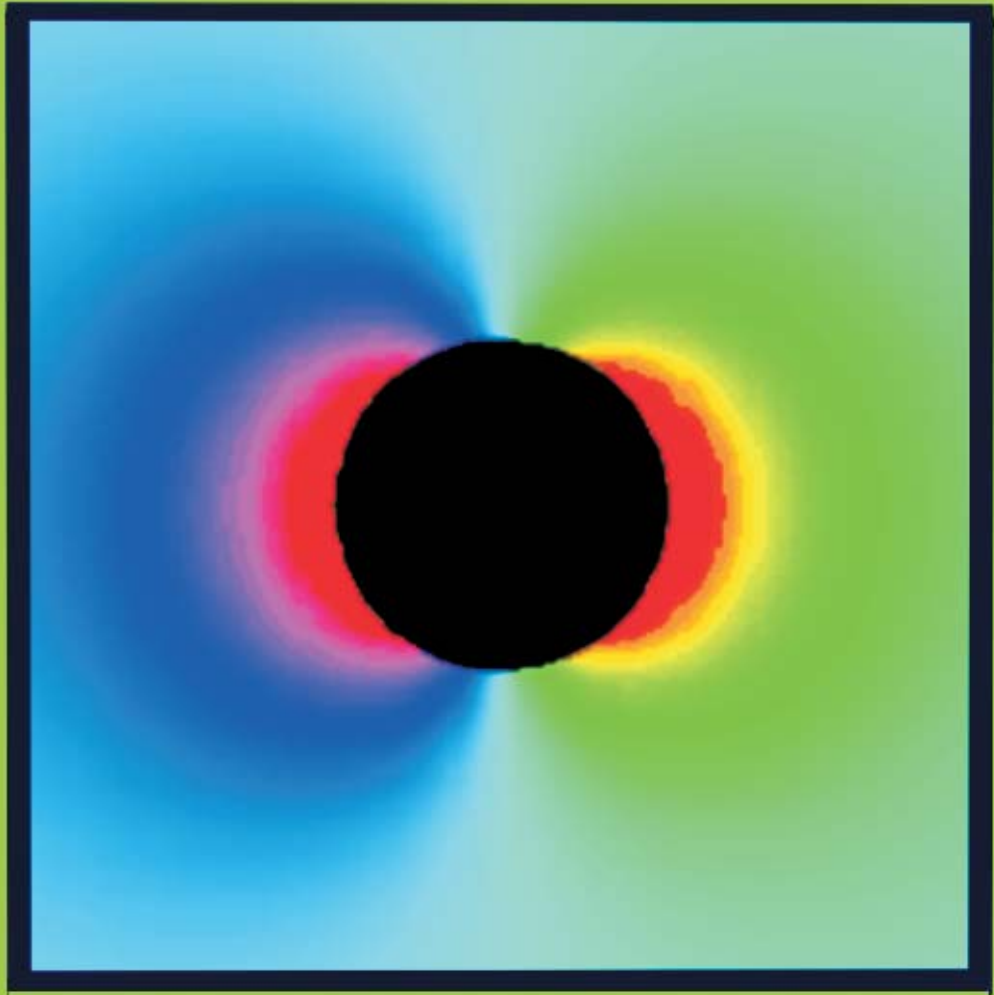


Luciano Nobili

ELEMENTI DI FLUIDODINAMICA



ELEMENTI DI FLUIDODINAMICA

(8 Marzo 2006)

Luciano Nobili
Università di Padova

INDICE

I - PROPRIETÀ FISICHE DEI FLUIDI	1
1.1 Introduzione	1
1.2 Fluidi reali	3
1.3 Viscosità assoluta e viscosità cinematica	5
1.4 Tensore degli sforzi	9
1.5 Tensore viscoso	12
1.6 Tensione superficiale	14
II - SIMILARITÀ DINAMICA E ANALISI DIMENSIONALE	19
2.1 Introduzione	19
2.2 Similarità dinamica	22
2.3 Relazioni adimensionali	24
2.4 Gruppi adimensionali	26
2.5 Numero di Mach	28
III - LEGGI INTEGRALI	29
3.1 Introduzione	29
3.2 Volume di controllo	30
3.3 Equazione del trasporto di Rankine	32
3.4 Visuali Euleriana e Lagrangiana	34
3.5 Conservazione della massa	35
3.6 Equazione del momento	37
3.7 Equazione dell'energia	39
3.8 Equazione di Bernoulli	41
3.9 Getto Fluido su un piano	42
IV - LE LEGGI DEL MOTO	45
4.1 Introduzione	45
4.2 Equazione di continuità	46
4.3 Flusso del momento	47
4.4 Equazioni di Navier–Stokes	49
4.5 Proprietà delle equazione del moto	52
4.6 Condizioni al contorno	52
4.7 Grandi e piccoli numeri di Reynolds	55
4.8 Compressibilità	58

V - LINEE DI CORRENTE, FLUSSO POTENZIALE E VORTICITÀ	73
5.1 Introduzione	73
5.2 Funzione di corrente	74
5.3 Potenziale di velocità	76
5.4 Flusso uniforme	78
5.5 Vorticità	79
5.6 Equazione di Laplace	81
5.7 Punto di stagnazione	82
5.8 Diedro	84
5.9 Sorgente e pozzo	85
5.10 Doppietto	88
5.11 Flusso uniforme attorno ad un cilindro	91
5.12 Flusso uniforme attorno ad una sfera	93
5.13 Vortice libero	95
5.14 Cilindro con circolazione	97
5.15 Profilo alare	99
5.16 Flusso irrotazionale con circolazione	101
VI - SOLUZIONI ESATTE DELLE EQUAZIONI DEL MOTO	87
6.1 Introduzione	87
6.2 Moti unidirezionali stazionari	90
6.3 Flusso bidimensionale	91
6.4 Flusso di Poiseuille	94
6.5 Flusso tra due cilindri ruotanti	96
6.6 Instabilità nei fluidi ruotanti	97
6.7 Flusso sopra un disco ruotante	100
6.8 Teoria della lubrificazione	102
VII - SOLUZIONI APPROSSIMATE	107
7.1 Introduzione.	107
7.2 Flusso di Stokes	108
7.3 Flusso attraverso un cilindro	111
7.4 Moto geostrofico	114
VIII - STRATO LIMITE	117
8.1 Introduzione.	117
8.2 Teoria dello strato limite	118
8.3 Strato limite di Blasius	122
8.4 Strato limite turbolento	127
8.5 Strato limite di Ekman	128
8.6 Flusso ortogonale ad un piano	132

8.7	Separazione dello strato limite	136
8.8	Flusso attraverso corpi arrotondati	139
8.9	Flusso attorno ad un cilindro	142
8.10	Scia	146
8.11	Condotto con sezione discontinua	148
8.12	Effetto Coanda	150
IX	- FLUIDI COMPRIMIBILI	151
9.1	Introduzione.	151
9.2	Velocità del suono	151
9.3	Equazione dell'energia	153
9.4	Ugello di Laval	156
9.5	Flusso supersonico	158
9.6	Onde d'urto piane	160
APPENDICE A	165
APPENDICE B	167
APPENDICE C	168
APPENDICE D	169
APPENDICE E	171
Indice analitico	175

CAPITOLO I

PROPRIETÀ FISICHE DEI FLUIDI

1.1 Introduzione

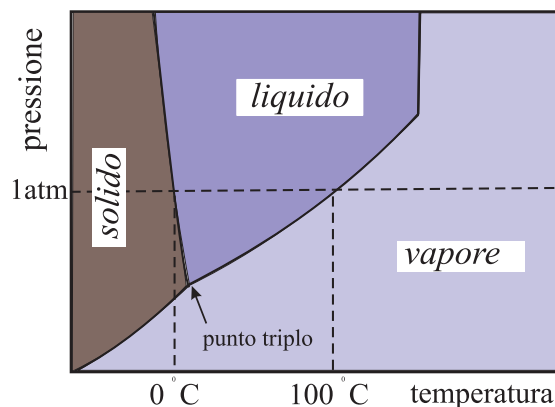


Figura 1.1 Stati dell'acqua

Dal punto di vista macroscopico la materia si può trovare in tre differenti stati: *solido*, *liquido* e *gassoso* ^[1]. Questa classificazione è nota fin dall'antichità e trae origine dal diverso comportamento della materia rispetto al recipiente in cui è contenuta. In particolare, un solido mantiene il proprio volume e la propria forma, mentre un liquido può cambiare forma adattandosi al recipiente, ma non può cambiare volume, ed infine un gas non possiede nè una forma nè volume propri, e tende ad occupare l'intero volume del recipiente. A rigore, anche i solidi e i liquidi possono subire variazioni di volume qualora vengano sottoposti a pressioni molto elevate, ma le variazioni relative $\Delta V/V$ sono talmente piccole da poter essere quasi sempre trascurate.

[1] Più recentemente sono stati introdotti due nuovi regimi che si instaurano quando la materia viene sottoposta a condizioni estreme di temperatura. Per temperature molto elevate ($T \gg 10000$ K), la formazione di atomi fortemente ionizzati rende la materia particolarmente reattiva ai campi elettrici e magnetici. In questo caso si parla di *plasma*, o anche di *quarto stato*. Al contrario, il *quinto stato*, o *condensazione di Bose-Einstein*, si forma per temperature prossime allo zero assoluto, come conseguenza di effetti quantomeccanici

Il differente comportamento della materia nei tre stati riflette una diversità della struttura atomica o molecolare. Nei solidi gli spostamenti relativi delle molecole sono mediamente nulli, mentre nei liquidi e nei gas le posizioni delle particelle cambiano continuamente. Transizioni da uno stato all'altro possono avvenire variando la temperatura o la pressione (Figura 1.1).

Sebbene i liquidi differiscano dai gas per numerose caratteristiche fisiche, quali ad esempio la comprimibilità, da un punto di vista dinamico essi obbediscono alle medesime leggi. Per questo motivo questi due stati vengono classificati genericamente come *fluidi*, e la scienza che ne studia il moto e i suoi effetti viene chiamata *fluidodinamica*.

L'opportunità di mantenere invece una netta distinzione tra solidi e fluidi appare evidente se immaginiamo di sottoporre un elemento di materia all'azione di *forze di taglio*, cioè di forze che hanno componenti tangenti alla sua superficie. Un solido reagisce deformandosi, e l'entità della deformazione è proporzionale allo sforzo applicato secondo la *Legge di Hook*

$$[\text{Forza/superficie}] = \mu \times [\text{deformazione}], \quad (1.1.1)$$

dove μ è il *modulo di shear*. La deformazione e la reazione esercitata dal volume nel nuovo equilibrio persistono finchè dura l'azione della forza deformante.

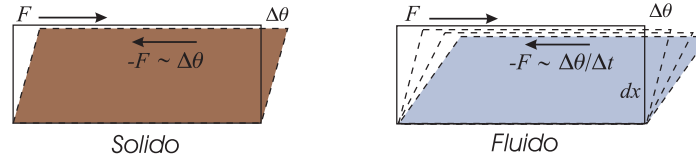


Figura 1.2 La figura mostra il differente comportamento tra solidi e fluidi quando vengono sottoposti all'azione di una forza di taglio F .

Al contrario, un fluido sottoposto ad un analogo sforzo di taglio non riesce mai a raggiungere l'equilibrio statico poichè la deformazione aumenta nel tempo. Inoltre, diversamente dai solidi, la reazione che l'elemento di fluido esercita dipende (linearmente nei cosiddetti fluidi newtoniani, v. il §1.3) dalla *rate* di deformazione, ma non direttamente dalla deformazione stessa (cfr. la 1.1.1). Vale cioè una relazione del tipo

$$[\text{Forza/superficie}] \propto [\text{deformazione}]/[\text{tempo}]. \quad (1.1.2)$$

Questo differente modo di reagire tra i solidi e i fluidi è illustrato schematicamente nella Figura 1.2.

Poichè nei fluidi l'azione degli sforzi di taglio è accompagnata da un movimento degli strati di materia, risulta più significativo esprimere la deformazione angolare infinitesima $\Delta\theta$ in termini della variazione di velocità dv tra la superficie su cui si esercita la forza e una superficie parallela distante dx . Poichè $\Delta\theta = dv \Delta t/dx$, la (1.1.2) diventa

$$[\text{Forza/superficie}] \propto dv/dx. \quad (1.1.3)$$

In altre parole, una forza che agisce su un fluido provoca l'insorgere di un gradiente trasversale della velocità.

1.2 Fluidi reali

All'interno di un fluido in movimento consideriamo due porzioni contigue, A e B , in contatto tra loro attraverso la superficie comune S (Figura 1.3). Siano \mathbf{p}_A e \mathbf{p}_B le rispettive quantità di moto mentre \mathbf{F}_A e \mathbf{F}_B siano le forze esercitate dal fluido circostante e da eventuali campi esterni su ciascuna delle due porzioni. Indichiamo infine con \mathbf{F}_{AB} e \mathbf{F}_{BA} le forze esercitate rispettivamente da A su B e da B su A . Scritte separatamente le equazioni del moto sono

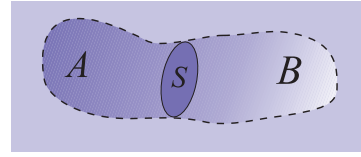


Figura 1.3 Lo sforzo esercitato dalle due parti di fluido è simmetrico.

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{p}_A}{dt} &= \mathbf{F}_A + \mathbf{F}_{AB} \\ \frac{d\mathbf{p}_B}{dt} &= \mathbf{F}_B + \mathbf{F}_{BA}, \end{aligned}$$

mentre l'equazione relativa all'intero sistema è

$$\mathbf{F}_A + \mathbf{F}_B = \frac{d\mathbf{p}_{\text{tot}}}{dt} = \frac{d\mathbf{p}_A}{dt} + \frac{d\mathbf{p}_B}{dt} = \mathbf{F}_A + \mathbf{F}_B + \mathbf{F}_{AB} + \mathbf{F}_{BA}.$$

Dal confronto tra il membro a sinistra e quello a destra si trova dunque

$$\mathbf{F}_{BA} = -\mathbf{F}_{AB},$$

cioè le forze che agiscono sulle due facce di qualunque superficie immaginaria immersa nel fluido devono essere eguali ed opposte.

Tali forze non sono necessariamente ortogonali alla superficie. Come vedremo, nei solidi e nei fluidi molto viscosi le componenti delle forze

tangenti alla superficie possono produrre effetti dinamici molto importanti. La forza è invece sempre normale alla superficie se è verificata una delle seguenti condizioni:

- 1) se il fluido si trova in equilibrio;
- 2) se, pur essendo in movimento, il fluido è privo di viscosità (*fluido ideale*).

La componente della forza ortogonale alla superficie unitaria viene chiamata *pressione*. Nel caso di fluidi non omogenei la pressione in un punto generico è definita dal limite

$$p = \lim_{S \rightarrow 0} F_{\perp}/S, \quad (1.2.1)$$

Un teorema enunciato da Eulero prova che in ogni punto interno ad un fluido in equilibrio la pressione è isotropa, cioè non dipende dall'orientazione della superficie.

Consideriamo infatti una sottile porzione cilindrica di materia di sezione ortogonale S . Supponiamo che i due lati estremi siano obliqui ed abbiano area rispettivamente S_A e S_B (Figura 1.4). La pressione media su ciascuna estremità è $p_A = F_A/S_A$ e $p_B = F_B/S_B$. La forza totale sul cilindro ha una componente nella direzione dell'asse del cilindro data da $F_A S/S_A - F_B S/S_B = (p_A - p_B) S$ (sulla superficie laterale la componente in questa direzione è nulla). Poichè la forza deve essere proporzionale alla massa contenuta nel volume $V = S\ell$, dove ℓ è la distanza media tra le facce oblique, si ha $(p_A - p_B) S \propto \ell S$, e quindi

$$p_A - p_B \propto \ell.$$

Facendo tendere a zero l'altezza del cilindro le pressioni p_A e p_B tendono alle pressioni esercitate su due superfici oblique passanti per il medesimo punto. Dovrà dunque risultare $p_A = p_B$ per $\ell \rightarrow 0$.

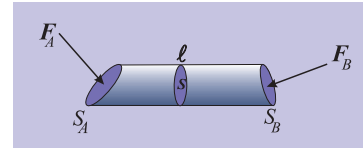


Figura 1.4 In ogni punto del fluido la pressione è isotropa.

1.3 Viscosità assoluta e viscosità cinematica

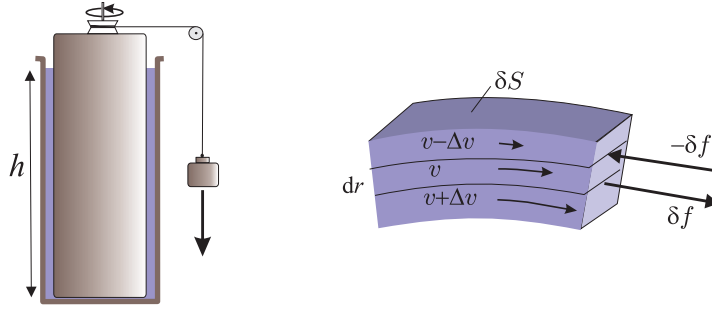


Figura 1.5 Viscosimetro.

La proprietà di un fluido di esercitare solo sforzi normali alla superficie non vale quando il fluido è reale ed è in movimento. Infatti se gli strati adiacenti di fluido possiedono un moto differenziale, essi sono sottoposti ad una forza di attrito che dipende dalla rapidità con cui varia la velocità nella direzione ortogonale agli strati stessi.

Un semplice apparato sperimentale in grado di misurare queste forze di attrito è dato dal *viscosimetro*, ed è illustrato nella Figura 1.5. Esso è formato da due cilindri coassiali di raggi rispettivamente R e $R + \Delta r$, con $\Delta r \ll R$, la cui intercapedine viene riempita con un fluido viscoso (acqua, olio, ecc.) fino ad un livello h . Si osserva che per mantenere la rotazione costante occorre applicare un momento assiale \mathcal{M} il cui valore dipende direttamente dalla velocità angolare relativa ω e dall'area laterale $S = 2\pi h R$ dello strato di fluido a contatto con la superficie. Inoltre \mathcal{M} varia inversamente con lo spessore dell'intercapedine Δr . Ripetendo l'esperimento usando fluidi con caratteristiche differenti si nota che, a parità di condizioni geometriche, il valore di \mathcal{M} dipende dalla natura del mezzo. Il fenomeno si spiega ammettendo che il fluido eserciti sui cilindri un sistema di sforzi tangenti che si oppongono al movimento, e tali che

$$\mathcal{M} = \mu R S \left(\frac{\Delta v}{\Delta r} \right), \quad (1.3.1)$$

dove $\Delta v = \omega R$ è la velocità relativa tra i bordi esterno ed interno dell'intercapedine. Il coefficiente μ dipende dalle proprietà chimico-fisiche del fluido, e prende il nome di *viscosità assoluta*.

A regime, i momenti esercitati dai due cilindri sul fluido si fanno equilibrio. Possiamo allora immaginare di suddividere il fluido in strati cilindrici coassiali, ciascuno con spessore infinitesimo dr , e in grado di trasmettere agli strati via via successivi sforzi tangenziali con momento

(1.3.1). Possiamo quindi concludere che ogni elemento di fluido di superficie laterale δS è sottoposto all'azione di una forza viscosa che dipende dal gradiente della velocità nella direzione radiale secondo l'equazione

$$\delta f = \mu \delta S \frac{dv}{dr} \quad (1.3.2)$$

La (1.3.2) è nota come **formula di Newton**, e viene generalizzata affermando che:

quando due elementi di volume di fluido scorrono uno rispetto all'altro, lo sforzo attraverso la superficie di contatto possiede, oltre alla componente normale, anche una componente tangenziale:

$$t = \mu \frac{dv}{dn}. \quad (1.3.3)$$

proporzionale alla derivata dv/dn della velocità rispetto alla normale \mathbf{n} alla superficie

Il verso dello sforzo di taglio è tale da opporsi al movimento, cioè tende ad accelerare gli strati più lenti e a ritardare quelli più veloci.

La semplice proporzionalità tra lo sforzo di taglio e il gradiente di velocità espressa dall'equazione (1.3.3) è caratteristica dei *fluidi newtoniani*, così chiamati perchè fu proposta per la prima volta da Newton. Sebbene la maggior parte dei fluidi abbia caratteristiche newtoniane, esistono fluidi nei quali la dipendenza dello sforzo dalla velocità è molto più complessa, non descrivibile con formule semplici. Il differente comportamento di questi fluidi, detti *non-newtoniani*, è dovuto spesso alla presenza di macromolecole, come nei polimeri o nelle proteine, oppure di particelle macroscopiche (non fluide), come avviene nel sangue.

Nel Sistema Internazionale (SI) l'unità di misura della viscosità assoluta è il $\text{kg m}^{-1} \text{s}^{-1}$, o "Pascal · secondo" ($\text{Pa} \cdot \text{s}$). Nel sistema CGS la viscosità viene misurata in *poise*, equivalente a $1 \text{ g cm}^{-1} \text{s}^{-1}$, pari a 0.1 volte l'unità definita nel SI.

La viscosità dipende poco dalla pressione ma, come mostra la Figura 1.6a, varia sensibilmente con la temperatura. Tale dipendenza è più pronunciata nei liquidi, i quali sono caratterizzati da valori della viscosità molto più elevati rispetto ai gas. Un'ulteriore differenza tra questi due stati è data dal fatto che nei gas la viscosità tende ad aumentare con la temperatura, mentre nei liquidi accade il contrario. Il motivo di questo diverso comportamento è legato alla natura microscopica dell'attrito. Infatti, nei gas la viscosità è dovuta principalmente alle collisioni tra le molecole. Questo fa sì che al crescere della temperatura (e quindi del momento medio delle particelle) si verifica

anche un aumento del momento trasferito negli urti e, in definitiva, della forza trasmessa tra gli strati di fluido. Una formula approssimata della dipendenza della viscosità dei gas dalla temperatura può essere data dalla seguente legge di potenza

$$\mu \approx a T^n, \quad (1.3.4)$$

con a e n fissati empiricamente. Ad esempio, nel caso dell'acqua tra 0°C e 100°C si può usare l'espressione $\mu \approx 1.85 \cdot 10^{-5} (T_K/300)^{0.75}$

Nei liquidi, invece, la resistenza al moto dipende solo in parte dalle collisioni molecolari. A causa della maggiore vicinanza tra le particelle, l'interazione deriva principalmente dalle forze di coesione, che però diventano meno importanti al crescere della temperatura.

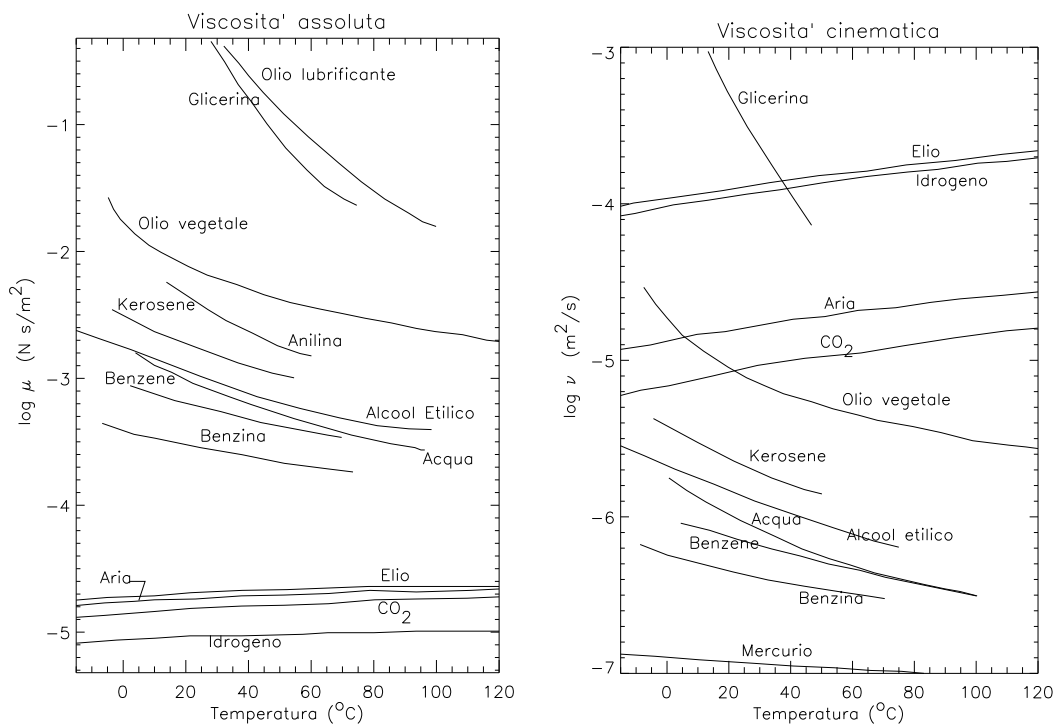


Figura 1.6 Andamento delle viscosità assoluta e dinamica di alcune sostanze semplici con la temperatura.

Dai grafici della Figura 1.6 si può notare come gli oli lubrificanti abbiano una elevata viscosità. Infatti, lo scopo principale di un lubrificante è quello di impedire che due superfici solide in movimento vengano a contatto diretto con il conseguente insorgere di un forte attrito dinamico. La separazione viene mantenuta interponendo tra loro un sottile strato liquido. Tanto più viscoso è il lubrificante, tanto più elevata risulta la forza di attrito, che tuttavia rimane molto inferiore all'attrito radente tra solidi. Questo effetto viene però compensato

dalla maggiore capacità del fluido di mantenere separate le due superfici (v. il paragrafo 6.8). Una maggiore viscosità rallenta anche l'instaurarsi moti vorticosi all'interno del fluido, conferendo maggiore stabilità al movimento, impedendo che le superfici possano toccarsi occasionalmente.

Tab.1.1 – Proprietà dei fluidi alla pressione atmosferica e $T = 20^\circ\text{C}$

	ρ kg/m ³	μ Pa · s	ν m ² /s	$d \ln \mu / dT$ K ⁻¹
<i>Liquidi:</i>				
Acqua	1.0×10^3	1.0×10^{-3}	1.0×10^{-6}	-2.8×10^{-2}
Alcol etilico	7.9×10^2	1.2×10^{-3}	1.5×10^{-6}	-1.9×10^{-2}
Benzene	8.8×10^2	6.5×10^{-4}	7.4×10^{-7}	-1.6×10^{-2}
Glicerina	1.3×10^3	1.5	1.2×10^{-3}	-9.2×10^{-2}
Mercurio	1.4×10^4	1.5×10^{-3}	1.1×10^{-7}	-3.7×10^{-3}
<i>Gas:</i>				
Aria	1.20	1.8×10^{-5}	1.5×10^{-5}	2.6×10^{-3}
Idrogeno	8.4×10^{-2}	8.8×10^{-6}	1.0×10^{-4}	3.9×10^{-3}
Elio	1.7×10^{-1}	1.9×10^{-5}	1.2×10^{-4}	2.1×10^{-3}
Vapore d'acqua	7.5×10^{-1}	9.6×10^{-6}	1.3×10^{-5}	3.7×10^{-3}
Azoto	1.65	1.8×10^{-5}	1.5×10^{-5}	2.5×10^{-3}
Ossigeno	1.33	2.0×10^{-5}	1.5×10^{-5}	2.6×10^{-3}
CO ₂	1.83	1.5×10^{-5}	8×10^{-6}	3.1×10^{-3}

Molto spesso nelle equazioni della fluidodinamica compaiono termini che contengono il rapporto tra la viscosità e la densità del fluido. Per questo motivo si introduce anche la *viscosità dinamica*

$$\nu = \frac{\mu}{\rho}. \quad (1.3.5)$$

La viscosità dinamica viene misurata in m² s⁻¹ nel SI e in cm² s⁻¹ nel CGS (Figura 1.6b). La tabella 1 mostra i valori della densità, delle viscosità assolute e cinematiche di alcuni fluidi alla temperatura $T = 20^\circ\text{C}$. Nell'ultima colonna è riportata la dipendenza della viscosità con T . Usando questa derivata è possibile calcolare il valore di μ in un intorno della temperatura ambiente tramite la formula

$$\mu(T_C) = \mu(20^\circ\text{C}) \exp \left[(T_C - 20) \frac{d\mu}{dT} \right]. \quad (1.3.6)$$

La viscosità dinamica è indicativa della rapidità con la quale un elemento di fluido riesce a muoversi all'interno del fluido stesso. Infatti

la forza viscosa è proporzionale a μ , mentre l'inerzia di una porzione di fluido dipende dalla sua densità. In questo senso il mercurio, per il quale $\mu \approx 1.5 \times 10^{-3} \text{ Pa s}$, e $\nu \approx 10^{-7} \text{ m}^2/\text{s}$, è molto “meno” viscoso dell'aria ($\mu \approx 2 \times 10^{-5} \text{ Pa s}$, $\nu \approx 10^{-5} \text{ m}^2/\text{s}$).

1.4 Tensore degli sforzi

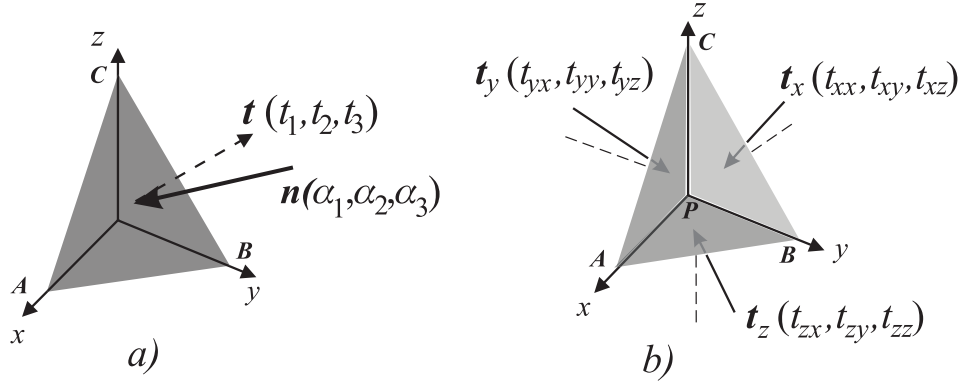


Figura 1.7 a) Sforzo \mathbf{t} sulla superficie triangolare ABC di area S . In generale lo sforzo *non* è ortogonale alla superficie. b) Sforzi \mathbf{t}_x , \mathbf{t}_y , \mathbf{t}_z , sulle superfici triangolari PCB , PAC e PAB di area rispettivamente S_x , S_y e S_z . La forza $\mathbf{t}S + \mathbf{t}_x S_x + \mathbf{t}_y S_y + \mathbf{t}_z S_z$ individua la forza totale che il fluido esercita sulla superficie del tetraedro.

Come abbiamo visto nel paragrafo precedente, lo sforzo esercitato su un elemento di superficie immaginaria situata all'interno di un mezzo continuo può avere componenti parallele alla superficie stessa. Queste *forze di taglio* si manifestano non solo nei solidi, ma anche nei fluidi in movimento, e in minor misura nei gas rispetto ai liquidi.

Consideriamo una piccola superficie triangolare di area S , i cui vertici A, B, C appartengono rispettivamente ai tre assi di un riferimento cartesiano centrato su un generico punto P del mezzo continuo (Figura 1.7). Sia ρ la densità media nell'intorno di questo punto. Indichiamo con $\mathbf{n}(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ il versore normale alla superficie S diretto verso l'esterno e con $\mathbf{t}[t_1, t_2, t_3]$ la forza per unità di superficie. I punti P, A, B e C sono i vertici di un tetraedro di volume $V = hS/3$, dove h è l'altezza del tetraedro relativa alla faccia obliqua. Le tre facce PBC , PCA e PAB sono ortogonali agli assi x, y, z , ed hanno aree rispettivamente $S_x = S\alpha_1$, $S_y = S\alpha_2$ e $S_z = S\alpha_3$. La risultante delle forze che agisce su tetraedro è eguale al prodotto della massa ρV per l'accelerazione \mathbf{a} . Si ha cioè

$$\begin{aligned} \mathbf{f}V + \mathbf{t}S + \mathbf{t}_x S_x + \mathbf{t}_y S_y + \mathbf{t}_z S_z = \\ (\mathbf{f}h/3 + \mathbf{t} + \mathbf{t}_x \alpha_1 + \mathbf{t}_y \alpha_2 + \mathbf{t}_z \alpha_3)S = \rho h S \mathbf{a} / 3 \end{aligned} \quad (1.4.1)$$

dove \mathbf{f} è la densità della forza di volume dovuta agli eventuali campi esterni (per esempio, nel caso della gravità $\mathbf{f} = \varrho \mathbf{g}$), e \mathbf{t}_x , \mathbf{t}_y e \mathbf{t}_z sono le forze per superficie unitaria agenti sulle facce non oblique [2]. Se dividiamo entrambi i membri della (1.4.1) per S e facciamo tendere a zero il volume del tetraedro passando al limite $h \rightarrow 0$, si trova che il membro a destra e il primo termine a sinistra dell'equazione si annullano. Ossia

$$-\mathbf{t} = \mathbf{t}_x \alpha_1 + \mathbf{t}_y \alpha_2 + \mathbf{t}_z \alpha_3. \quad (1.4.2)$$

Nel limite di volume infinitesimo la faccia ABC del tetraedro diventa una superficie infinitesima passante per P , con orientazione $\mathbf{n}[\alpha_x, \alpha_y, \alpha_z]$. Data la generalità della direzione \mathbf{n} possiamo concludere che la forza \mathbf{t} che agisce su una qualsiasi superficie immersa nel fluido è sempre esprimibile come combinazione lineare delle tre forze presenti sulle facce ortogonali agli assi cartesiani. Scrivendo la (1.4.2) in termini delle componenti delle forze si ottiene

$$\begin{cases} -t_1 = t_{xx}\alpha_1 + t_{xy}\alpha_2 + t_{xz}\alpha_3 \\ -t_2 = t_{yx}\alpha_1 + t_{yy}\alpha_2 + t_{yz}\alpha_3 \\ -t_3 = t_{zx}\alpha_1 + t_{zy}\alpha_2 + t_{zz}\alpha_3, \end{cases} \quad (1.4.3)$$

dove t_{kx} (con $k = x, y, z$) è la componente nella direzione dell'asse x della forza \mathbf{t}_k ortogonale all'asse k -esimo, ecc. La grandezza definita dalla matrice

$$\begin{pmatrix} t_{xx} & t_{xy} & t_{xz} \\ t_{yx} & t_{yy} & t_{yz} \\ t_{zx} & t_{zy} & t_{zz} \end{pmatrix} \quad (1.4.4)$$

viene chiamata **tensore degli sforzi**, e definisce completamente le proprietà meccaniche interne del mezzo.

Le componenti diagonali t_{xx}, t_{yy}, t_{zz} sono gli **sforzi normali**, nel senso che ciascuna di esse fornisce la componente *ortogonale* della forza che agisce sulla superficie piana elementare normale ad ogni asse coordinato. Le sei componenti non diagonali $t_{xy}, t_{xz}, t_{yz} \dots$ sono invece gli **sforzi di taglio** tangenti alle superfici elementari, e si manifestano quando strati paralleli adiacenti di materia vengono spostati (nei solidi) o scorrono uno rispetto all'altro (nei fluidi). Le Figure 1.8 a e b mostra le forze di superficie presenti sulle facce ortogonali all'asse z di un piccolo elemento rettangolare.

[2] Gli indici x, y, z non indicano componenti vettoriali, ma servono solo per identificare la faccia cui si riferisce ciascun vettore.

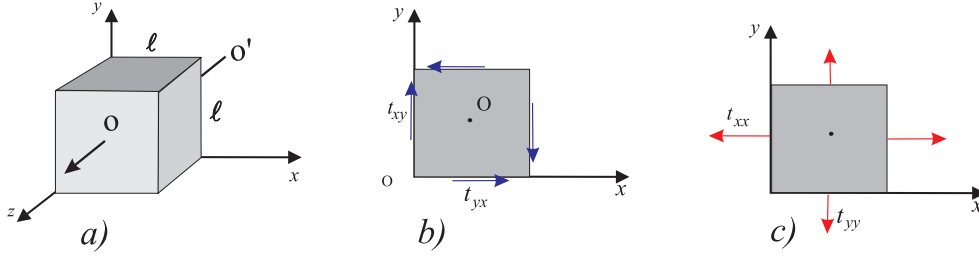


Figura 1.8 Componenti del tensore degli sforzi sulle facce di un piccolo cubo.

Possiamo dimostrare facilmente che il tensore è simmetrico (cioè $t_{ik} = t_{ki}$). Consideriamo infatti un piccolo cubo di lato ℓ , volume $V = \ell^3$, massa $M = \rho V$ e momento d'inerzia $I = M\ell^2/6 = \rho\ell^5/6$ (Figura 1.8a). Rispetto all'asse OO' passante per il centro C e parallelo all'asse z l'equazione del momento assiale è

$$\begin{aligned} \ell^2 \left[-t_{xy} \frac{\ell}{2} - \left(t_{xy} + \frac{\partial t_{xy}}{\partial x} \ell \right) \frac{\ell}{2} \right] + \\ + \ell^2 \left[t_{yx} \frac{\ell}{2} + \left(t_{yx} + \frac{\partial t_{yx}}{\partial y} \ell \right) \frac{\ell}{2} \right] = \frac{\ell^5}{6} \rho \dot{\omega} \end{aligned}$$

Sviluppando e semplificando

$$(t_{yx} - t_{xy}) + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial t_{yx}}{\partial x} - \frac{\partial t_{xy}}{\partial y} \right) \ell = \frac{\ell^2}{6} \rho \dot{\omega}.$$

Facendo tendere ℓ a zero si trova $t_{xy} = t_{yx}$. In modo analogo, considerando i momenti assiali nelle rimanenti direzioni si ricavano le proprietà di simmetria di t_{xz} e t_{yz} .

1.5 Tensore viscoso

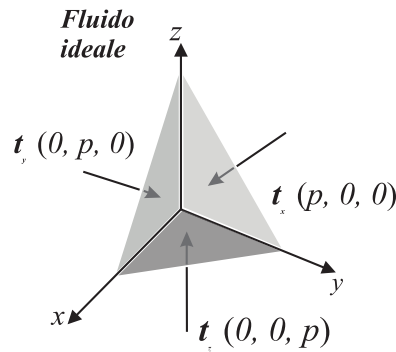


Figura 1.9 Sforzi ortogonali alle superfici nei fluidi in equilibrio.

Il tensore degli sforzi svolge un ruolo fondamentale nello studio di tutti i mezzi continui, anche se la sua forma può essere molto diversa nei solidi e nei fluidi. Infatti, sotto l'effetto di una forza esterna i solidi reagiscono deformandosi fino ad equilibrare la forza che causa la perturbazione.

Nei fluidi invece le forze di taglio provocano un movimento della materia piuttosto che una sua deformazione. Per questo motivo, in generale le componenti del tensore dipendono in maniera non semplice sia dai parametri di stato del fluido sia dalle caratteristiche cinematiche. Tuttavia, per quanto si è detto nei paragrafi 1.2 e 1.3, risulta che:

nei fluidi viscosi in equilibrio e nei fluidi ideali (anche se in movimento differenziale) lo sforzo \mathbf{t} su un qualsiasi elemento di superficie S immaginato immerso nel fluido è sempre ortogonale a S .

Pertanto, se sono soddisfatte queste condizioni, la matrice (1.4.3) risulta diagonale, cioè $t_{xy} = t_{yz} = t_{zx} = 0$. Inoltre, poichè la pressione è isotropa, le componenti non nulle del tensore non devono dipendere dall'orientazione della superficie (o, equivalentemente, da come sono orientati gli assi). Questo significa che gli elementi diagonali devono anche essere eguali tra loro, cioè $t_{xx} = t_{yy} = t_{zz}$. È immediato verificare che il valore comune di queste componenti coincide proprio con la definizione di pressione data precedentemente. In altre parole il tensore degli sforzi di un fluido in equilibrio dipende unicamente dalla pressione ed ha la forma

$$\begin{pmatrix} p & 0 & 0 \\ 0 & p & 0 \\ 0 & 0 & p \end{pmatrix}. \quad (1.5.4)$$

Nei mezzi viscosi in movimento la situazione è invece più complessa, poichè ora gli strati fluidi sono in grado di esercitare, oltre alla pres-

sione, anche sforzi con componenti parallele alle superfici. La formula di Newton (1.3.3) lega proprio lo sforzo al gradiente normale della velocità. Tuttavia questa formula è valida solo nell'ipotesi che il movimento avvenga nella medesima direzione della superficie su cui si misura lo sforzo, ma è evidentemente non adatta a descrivere situazioni più complesse, come quando la superficie viene attraversata dal fluido e il gradiente di velocità ha componenti non nulle nelle tre direzioni coordinate.

La generalizzazione della formula di Newton a configurazioni qualsiasi può essere ricavata scrivendo le componenti del tensore degli sforzi sulle tre superfici indipendenti ortogonali agli assi in funzione dei gradienti di velocità. La derivazione rigorosa della formula non è immediata, per cui qui ci limiteremo a riportare il risultato valido solo per fluidi *newtoniani e incomprimibili*. Si dimostra infatti che per queste sostanze valgono le seguenti relazioni

$$t_{xy} = t_{yx} = \mu \left[\frac{\partial v_x}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial x} \right] \quad (1.5.5a)$$

$$t_{xz} = t_{zx} = \mu \left[\frac{\partial v_x}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial x} \right] \quad (1.5.5b)$$

$$t_{yz} = t_{zy} = \mu \left[\frac{\partial v_y}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial y} \right] \quad (1.5.5c)$$

$$t_{xx} = 2\mu \frac{\partial v_x}{\partial x} - p \quad (1.5.5d)$$

$$t_{yy} = 2\mu \frac{\partial v_y}{\partial y} - p \quad (1.5.5e)$$

$$t_{zz} = 2\mu \frac{\partial v_z}{\partial z} - p \quad (1.5.5f)$$

Si osservi che nei termini diagonali compaiono i contributi dovuti sia all'azione viscosa sia alla pressione, in accordo con il fatto che queste componenti rappresentano lo sforzo ortogonale alla superficie.

Se il fluido è comprimibile, nel tensore compaiono alcuni termini addizionali. Tuttavia, poichè nei problemi da noi esaminati questi risultano del tutto trascurabili, nel seguito useremo le espressioni (1.5.5) anche nel caso dei gas.

1.6 Tensione superficiale

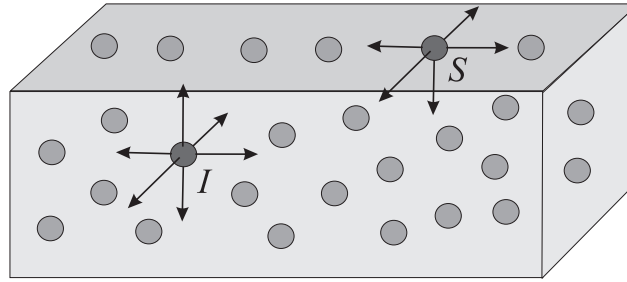


Figura 1.10 Rappresentazione schematica delle forze di coesione tra le molecole di un fluido. Nelle molecole interne (I) le forze sono bilanciate, mentre nelle molecole superficiali (S) manca un legame su sei.

Nell'interfaccia che separa un liquido dall'ambiente circostante (per esempio la superficie tra due liquidi di natura differente, o tra un liquido e un solido o, infine, tra un liquido e un gas) alcune proprietà possono manifestarsi in forma diversa che non all'interno del liquido stesso. Su questa regione si accumula infatti una forma di energia che mantiene la superficie in uno stato di tensione che si oppone a eventuali variazioni di area.

Da un punto di vista microscopico il fenomeno è causato dal diverso modo con cui sono arrangiate le forze coesive delle molecole nell'interno del fluido rispetto alla superficie. Infatti, lontano dall'interfaccia ogni molecola è sottoposta a un grande numero di forze attrattive da parte delle particelle circostanti (Figura 1.10). L'effetto è mediamente nullo e mantiene le particelle in equilibrio. Al contrario, vicino alla superficie di separazione tra due distinti mezzi materiali le forze non hanno una distribuzione isotropa poichè l'affinità tra le molecole è differente se le particelle sono identiche o se sono di natura diversa. Anche la differente densità dei mezzi può svolgere un ruolo. Ad esempio, l'interazione tra le molecole di un liquido e quelle, più rarefatte, dell'aria è molto debole.

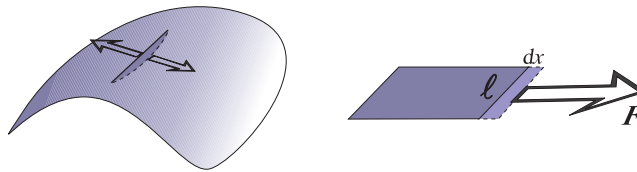


Figura 1.11 Misura empirica della tensione superficiale.

Ad ogni aumento della superficie vi è un aumento del numero di legami molecolari non bilanciati. Poichè l'energia di interazione tra le

molecole è negativa, l'aumento di area comporta una liberazione di energia che deve essere compensato da un lavoro meccanico esterno. Tra l'altro, a causa della proprietà dei sistemi di minimizzare il loro contenuto energetico, i fluidi tendono verso configurazioni che hanno il minor numero di legami mancanti e che hanno quindi l'area superficiale più piccola. Questo spiega anche la tendenza dei liquidi a formare gocce sferiche.

L'energia per unità d'area τ di un fluido, chiamata *tensione superficiale*, viene misurata in erg cm^{-2} ($= \text{dyne/cm}$) nel sistema CGS, o in joule/m^2 ($= \text{N/m}$) nel SI. Il suo valore può essere approssimativamente stimato mediante la formula

$$\tau \approx \frac{[\text{\#molecole}]}{[\text{area}]} \times \left[\frac{\text{Energia di lega-}}{\text{me molecolare}} \right] \times [\% \text{ di legami mancanti}]$$

Normalmente la frazione di legami mancanti è circa $1/6$ (equivalente a una faccia sui sei di un cubo, Figura 1.10).

Ad esempio, nel caso dell'acqua la distanza media tra le molecole è $\approx 3 \times 10^{-8} \text{ cm}$ [3], e l'energia di legame è $\approx 6 \times 10^{-13} \text{ erg}$ [4]. Si ottiene

$$\tau = \frac{1}{(3 \times 10^{-8})^2} \times 6 \times 10^{-13} \times \frac{1}{6} \approx 111 \text{ erg cm}^{-2}. \quad (1.6.1)$$

Il valore corretto alla temperatura ambiente è $\tau = 72 \text{ erg cm}^{-2}$.

Su scala macroscopica la tensione superficiale si manifesta tramite la comparsa di una forza di reazione tangente alla superficie del liquido quando si tenta di aumentare l'area. Ad esempio, se tracciamo una linea immaginaria sulla superficie libera di un liquido e supponiamo di applicare una forza F ortogonale in modo da provocare una variazione di area $dS = \ell dx$ (Figura 1.11). viene fatto un lavoro $dE = F dx$ che va ad aumentare l'energia del sistema. Questo ci permette di ricavare il valore di τ direttamente da misure macroscopiche. Si ha infatti

$$\tau = dE/dS = F dx/dS = F/\ell,$$

Perciò la tensione superficiale può essere interpretata anche come la forza per unità di lunghezza che il fluido esercita su ogni linea immaginaria appartenente alla superficie.

[3] In 18 cm^3 di acqua ($=1 \text{ mole} = 18 \text{ grammi}$) ci sono $N_A = 6.02 \times 10^{23}$ molecole.

[4] Deducibile dal calore di vaporizzazione $c_f = 540 \text{ cal/g} = 2.27 \times 10^{10} \text{ erg/g}$.

Tab.1.2 – Tensione superficiale di alcune sostanze comuni (in N/m)

Acqua	0.073
Benzina	0.022
Alcol Etilico	0.023
Olio di oliva	0.035
Glicerina	0.063
Mercurio	0.480
Trementina	0.029

CAPITOLO II

SIMILARITÀ DINAMICA E ANALISI DIMENSIONALE

2.1 Introduzione

In alcuni casi lo studio dei problemi fluidodinamici viene facilitato da considerazioni di natura dimensionale e dalla ricerca di *soluzioni autosimilari* relative a configurazioni che hanno proprietà geometriche e fisiche simili tra loro. Possiamo chiederci, infatti, se e sotto quali condizioni due sistemi fisicamente confrontabili, ma aventi dimensioni molto differenti, danno luogo a flussi simili. Ad esempio, se in una galleria a vento sottoponiamo un modello di aereo alle medesime condizioni fisiche di un vero aereo (stessa velocità, identiche pressione, densità, viscosità dell'aria, ecc.) otteniamo una configurazione del flusso ben diversa da quella osservata nel volo libero. Se però il fluido utilizzato in laboratorio possiede valori di velocità, densità, viscosità, ecc., opportunamente scelte, il flusso manifesta un andamento simile a quello osservato nell'aereo in volo nell'atmosfera, a parte naturalmente la differente scala.

L'idea di base è quella di sostituire le variabili principali del problema con grandezze equivalenti espresse in forma adimensionale. Le equazioni scritte mediante le nuove variabili permettono di ricavare importanti informazioni sul comportamento generale del flusso. Un semplice esempio è fornito dalla soluzione di Poiseuille di un fluido che scorre in un condotto di sezione circolare di raggio R . Come vedremo nel paragrafo 6.4, la soluzione analitica è nota ed è data da

$$u(r) = u_{max} (R^2 - r^2)/R^2. \quad (2.1.1)$$

Essa contiene come parametri il raggio del condotto e la velocità (massima) del fluido lungo la linea di corrente centrale. Usando le variabili adimensionali $u' = u/u_{max}$ e $r' = r/R$, la (2.1.1) diventa

$$u' = 1 - r'^2. \quad (2.1.2)$$

Espressa in questa forma l'equazione non contiene alcuna informazione né sulle dimensioni del condotto né sulla particolare velocità del fluido.

La (2.1. 2) descrive dunque una soluzione autosimilare, rappresentativa cioè di tutte le configurazioni di questo tipo.

In questo capitolo prenderemo in considerazione solo flussi stazionari di fluidi con densità e viscosità ovunque costanti. Indicheremo inoltre con L , M , T ^[1] le unità di misura fondamentali rispettivamente della lunghezza, della massa e del tempo. In generale tali unità dipendono dal sistema metrico adottato, come ad esempio il *Sistema Internazionale*, o il sistema *cgs-gauss*, o altri ancora con unità esotiche come *pollici*, *libbre*, *anni-luce*, ecc. Ogni grandezza fisica può essere espressa dimensionalmente come combinazione di potenze di queste unità.

Nel seguito un'espressione racchiusa tra le parentesi [...] avrà il significato "unità di ...". Si tenga presente che nei problemi in cui intervengono processi termodinamici, la temperatura viene espressa più convenientemente nelle unità di energia. Questo viene fatto scrivendo le equazioni in termini di kT , dove k è la costante di Boltzmann. Ad esempio, se scriviamo l'equazione dei gas ideali nella forma

$$p = \frac{\varrho}{m_0}(kT)$$

dove m_0 è la massa media delle molecole, i singoli termini hanno le dimensioni

$$p = [\text{Forza}]/[\text{superficie}] = M L^{-1} T^{-2}$$

$$\varrho = [\text{Massa}]/[\text{Volume}] = M L^{-3}$$

$$m_0 = [\text{massa}] = M$$

$$kT = [\text{energia}] = M L^2 T^{-2}$$

Nella Tabella 2.1 sono riportate le dimensioni di un certo numero di grandezze che ricorrono più frequentemente nei problemi fisici.

[1] Poichè siamo interessati a problemi in cui non intervengono campi elettromagnetici, ignoriamo l'unità della carica.

Tab. 2.1 – Unità delle principali grandezze fisiche

Grandezza	Simbolo	Unità
<i>Geometrica:</i>		
Lunghezza	L	L
Superficie	S	L^2
Volume	V	L^3
Angolo lineare	$\alpha, \beta, \theta, \varphi$, ecc	—
Angolo solido	Ω	—
<i>Cinematica:</i>		
Velocità lineare	v	$L T^{-1}$
Velocità angolare	ω	T^{-1}
Accelerazione lineare	a	$L T^{-2}$
Accelerazione angolare	$\dot{\omega}$	T^{-2}
<i>Meccanica:</i>		
Quantità di moto (o momento lineare)	mv	$ML T^{-1}$
Momento angolare	$I\omega$	$ML^2 T^{-1}$
Momento d'inerzia	I	ML^2
Forza	F	$ML T^{-2}$
Momento della forza	\mathcal{M}	$ML^2 T^{-2}$
Energia, Lavoro, Calore	E, W, Q	$ML^2 T^{-2}$
<i>Fluidi:</i>		
Densità	ϱ	ML^{-3}
Pressione	p	$ML^{-1} T^{-2}$
Temperatura (kT)	T	$ML^2 T^{-2}$
Tensore degli sforzi	t	$ML^2 T^{-2}$
Viscosità assoluta	μ	$ML^{-1} T^{-1}$
Viscosità cinematica	ν	$L^2 T^{-1}$
Tensione superficiale	σ	MT^{-1}
Energia specifica	ϵ	$L^2 T^{-2}$
Entalpia specifica	h	$L^2 T^{-2}$
Densità di energia	u	$ML^{-1} T^{-2}$

2.2 Similarità dinamica

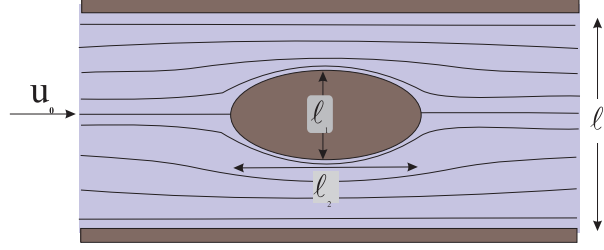


Figura 2.1 Parametri geometrici di un flusso.

In generale le equazioni della fluidodinamica contengono come funzioni incognite la velocità \mathbf{v} e la pressione p , mentre la densità ϱ e la viscosità μ entrano solo come parametri, considerati quasi sempre costanti. La soluzione di un particolare problema, come ad esempio lo studio di un fluido in moto attorno ad un ostacolo o all'interno di un condotto, richiede che vengano precisate la geometria e la velocità $\mathbf{u}_0(t, x, y, z)$ del flusso in una qualche regione (per esempio un punto molto lontano dall'ostacolo, o all'esterno del condotto, ecc.).

Naturalmente la geometria della configurazione è strettamente legata al problema in esame, e in particolare dipende dalla forma e dalle dimensioni dell'ostacolo o del contenitore. Tuttavia possiamo semplificare il problema immaginando in maniera del tutto schematica che i parametri geometrici dipendano dalle dimensioni caratteristiche nelle diverse direzioni, ℓ_1, ℓ_2, \dots , o dalla distanza ℓ_0 tra le pareti del contenitore, come è illustrato nella Figura 2.1.

Ogni proprietà \mathcal{P} del fluido sarà dunque una funzione della posizione \mathbf{r} e conterrà come parametri la velocità u_0 del flusso incidente, la densità, la viscosità e infine le dimensioni della configurazione. Possiamo scrivere genericamente

$$\mathcal{P} = \mathcal{P}(\mathbf{r}, u_0, \varrho, \nu, \ell_0, \ell_1, \dots) \quad (2.2.1)$$

Consideriamo ora due configurazioni geometricamente simili, ma di differente scala L . Il principio di *similarità dinamica* parte dal presupposto che nei punti corrispondenti di due sistemi autosimili la velocità del fluido scali come le dimensioni lineari. Più esattamente, si assume che le componenti adimensionali u/u_0 , v/u_0 e w/w_0 abbiano valori identici in entrambi i sistemi nei punti in cui i valori di x/L , y/L e z/L sono gli stessi. Questa proprietà può essere estesa ad ogni grandezza, purché venga opportunamente ridotta in forma adimensionale. La soluzione autosimile viene quindi trovata scrivendo la relazione (2.2.1) nella forma

$$\frac{\mathcal{P}}{\overline{\mathcal{P}}} = f\left(\frac{\mathbf{r}}{L}, \frac{\nu}{\overline{\nu}}, \frac{\ell_0}{L}, \frac{\ell_1}{L}, \dots\right), \quad (2.2.2)$$

dove f è una funzione *adimensionale* di quantità che sono a loro volta prive di dimensioni. Proprio in virtù di questa sua caratteristica, la funzione f è adatta a descrivere il comportamento di sistemi dinamicamente simili. Si noti che nella (2.2.2) non compare esplicitamente la variabile ϱ . Questo è possibile perchè la densità può essere assorbita nel parametro di viscosità $\bar{\nu}$.

Evidentemente il coefficiente $\bar{\mathcal{P}}$ deve essere dimensionalmente omogeneo con \mathcal{P} e nello stesso tempo contenere i parametri rilevanti del problema. Nel prossimo paragrafo descriveremo una regola pratica per ricavare tale coefficiente. Per il momento fissiamo l'attenzione sulla quantità $\bar{\nu}$ che rende adimensionale il termine viscoso. Non è difficile trovare tale fattore usando esclusivamente i rimanenti due parametri u_0 e L . Infatti, poichè la viscosità cinematica ha le dimensioni $L^2 T^{-1}$ (v. tabella 2.1), mentre $[u_0] = L T^{-1}$ e $[L] = L$, se ne deduce che l'unica combinazione indipendente che abbia le dimensioni della viscosità è data dal prodotto

$$\bar{\nu} \equiv u_0 L .$$

Il rapporto adimensionale

$$\text{Re} = \frac{u_0 L}{\nu} = \frac{\varrho u_0 L}{\mu} \quad (2.2.3)$$

viene chiamato **Numero di Reynolds**, ed è di fondamentale importanza nello studio della dinamica dei fluidi. Valori del numero di Reynolds molto piccoli implicano flussi altamente viscosi. Viceversa, dove vale la condizione $\text{Re} \gg 1$ il fluido si comporta come se fosse ideale.

Si noti che, a causa dell'adimensionalità del numero dei Reynolds, l'affermazione “molto grande” o “molto piccolo” (rispetto a 1) acquista un significato assoluto, nel senso che le conseguenze di questa assunzione sono indipendenti da quanto è grande la configurazione, o dai valori della densità, composizione, temperatura, ecc. del fluido. L'equazione (2.2.2) può quindi essere scritta nella forma

$$\mathcal{P} = \bar{\mathcal{P}} f \left(\frac{\mathbf{r}}{L}, \text{Re}, \frac{\ell_0}{L}, \frac{\ell_1}{L}, \dots \right) , \quad (2.2.4)$$

2.3 Relazioni adimensionali

La ricerca dei rapporti adimensionali di grandezze fisiche si basa su un procedimento del tutto generale e trova molte applicazioni anche in settori diversi dalla fluidodinamica. Immaginiamo di dover esaminare un problema nel quale sono coinvolte un certo numero di grandezze fisiche che riteniamo rilevanti, e che chiameremo perciò *grandezze primarie*. Ad esempio, nello studio del moto del pendolo potrebbero essere quantità primarie il periodo P , il peso Mg e le dimensioni lineari L del corpo. Nel caso del moto di una carica sceglieremo invece il campo elettrico E , la carica q , la velocità v e la massa m della particella. In fluidodinamica le quantità primarie sono le dimensioni L , la velocità u_0 , la viscosità ν e la densità ϱ (o la pressione p), e così via. Fissiamo ora l'attenzione su una data proprietà fisica \mathcal{P} , le cui dimensioni in termini della unità fondamentali *lunghezza*, *tempo* e *massa* sono

$$[\mathcal{P}] = L^a T^b M^c, \quad (2.3.1)$$

dove a, b, c sono numeri assegnati che dipendono dalla natura di \mathcal{P} (v. Tabella 2.1). Si vuole ora costruire una grandezza $\overline{\mathcal{P}}$ formata invece da prodotti di potenze dei soli parametri primari ma tale da avere le stesse dimensioni di \mathcal{P} . In altri termini, cerchiamo una funzione che ha la forma

$$\overline{\mathcal{P}} = u_0^i \nu^j L^k \varrho^m, \quad (2.3.2)$$

in cui i, j, k, m sono esponenti numerici che devono essere determinati in maniera che il rapporto

$$\frac{\overline{\mathcal{P}}}{\mathcal{P}} = f$$

risulti dimensionale. Sostituendo nella (2.3.2) le dimensioni relative di ciascun termine si ottiene l'equazione

$$\begin{aligned} [\overline{\mathcal{P}}] &= [u_0]^i [\nu]^j [L]^k [\varrho]^m = \left(\frac{L}{T}\right)^i \left(\frac{L^2}{T}\right)^j L^k \left(\frac{M}{L^3}\right)^m \\ &= L^{i+2j+k-3m} T^{-i-j} M^m. \end{aligned} \quad (2.3.3)$$

Il confronto tra la (2.3.1) e la (2.3.3) conduce al seguente sistema di equazioni algebriche

$$\begin{cases} i + 2j + k - 3m = a \\ i + j = -b \\ m = c, \end{cases}$$

che ci permette di eliminare due delle tre variabili i , j e k . Ad esempio, scegliendo di esprimere i e k in funzione di j la (2.3.2) diventa

$$\begin{aligned}\overline{\mathcal{P}} &= u_0^{-i-b} \nu^j L^{-j+(a+b+3c)} \varrho^c \\ &= u_0^{-b} \varrho^c L^{(a+b+3c)} \left(\frac{\nu}{u_0 L} \right)^j .\end{aligned}$$

L'ultimo fattore a destra è adimensionale (v. 2.2.3) e quindi può essere ignorato (o eventualmente incluso nella funzione f). Possiamo allora esprimere il parametro cercato nella forma

$$\overline{\mathcal{P}} = u_0^{-b} \varrho^c L^{(a+b+3c)} , \quad (2.3.4)$$

che contiene come unici parametri la velocità del fluido, la densità e le dimensioni lineari del sistema.

Se ora applichiamo questi risultati alla (2.2.4), si ottiene

$$\mathcal{P} = u_0^{-b} \varrho^c L^{(a+b+3c)} f\left(\frac{\mathbf{r}}{L}, \text{Re}, \frac{\ell_0}{L}, \frac{\ell_1}{L}, \dots\right) . \quad (2.3.5)$$

Si noti che il medesimo procedimento può essere ripetuto esprimendo però gli esponenti j e k in funzione di i . In questo caso si ottiene l'espressione

$$\mathcal{P} = \nu^{-b} \varrho^c L^{(a+2b+3c)} f\left(\frac{\mathbf{r}}{L}, \text{Re}, \frac{\ell_0}{L}, \frac{\ell_1}{L}, \dots\right) , \quad (2.3.6)$$

il cui coefficiente dipende ora solo dalla viscosità, dalla densità e dalla scala. Le due scomposizioni (2.3.5) e (2.3.6) sono del tutto equivalenti. La scelta di usare una o l'altra è del tutto arbitraria e dipende dalle particolari esigenze che di volta in volta sorgono in un problema. Più frequente è l'uso della (2.3.5), in cui appare esplicitamente la velocità. Infatti, a differenza della viscosità, il movimento è un ingrediente fondamentale di tutti i flussi, sia ideali che viscosi ^[2].

Un semplice esempio del procedimento descritto è dato dalla forza F che un fluido esercita quando attraversa un ostacolo. Poichè dimensionalmente si ha $[F] = \text{L T}^{-2} \text{M}$ (v. Tabella 2.1), gli esponenti da sostituire nelle (2.3.5) sono $a = 1, b = -2, c = 1$, e quindi

$$F = (\varrho u_0^2 L^2) f(\mathbf{r}/L, \dots) . \quad (2.3.7)$$

[2] Naturalmente vengono escluse le configurazioni idrostatiche. D'altra parte, se il fluido è ovunque in quiete, perde di senso l'intero approccio basato sulla similarità dei flussi.

Il prodotto $\varrho u_0^2 L^2$ esprime dunque la grandezza più naturale per poter generare rapporti adimensionali delle forze. Possiamo notare che questo fattore individua la *forza inerziale* ($= ma$) del fluido. Infatti, scrivendo l'inerzia come combinazione dei parametri principali del flusso, si ottiene

$$\begin{aligned} \text{forza in.} &= \text{massa} \times \text{accelerazione} = (\varrho L^3) (u_0/t) = \\ &= (\varrho L^3) [u_0/(L/u_0)] = \varrho u_0^2 L^2 \end{aligned} \quad (2.3.8)$$

Il rapporto adimensionale

$$C_F = \frac{F}{\frac{1}{2} \varrho u_0^2 L^2} \quad (2.3.9)$$

tra la forza e l'inerzia del fluido viene comunemente chiamato *Coefficiente della forza* ^[3]. Le tre principali forze che un fluido può esercitare su un'ostacolo sono:

- 1) la forza di pressione,
 - 2) la forza nella direzione del moto in seguito alla viscosità o a causa della deviazione delle linee di corrente (*Resistenza* o *drag*),
 - 3) la forza ortogonale alla velocità del flusso (*portanza* o *lift*),
- perciò in corrispondenza potremo definire il *Coefficiente di pressione* C_p , *Coefficiente di resistenza* C_R e *Coefficiente di portanza* C_L . In particolare il primo viene scritto più spesso nella forma

$$C_p = \frac{p}{\frac{1}{2} \varrho u_0^2} . \quad (2.3.10)$$

2.4 Gruppi adimensionali

In passato, via via che progrediva lo studio teorico della fluidodinamica, ci si imbatteva in certi rapporti adimensionali che ricorrevano spesso nelle soluzioni. L'importanza di questi numeri è legata al fatto che alcuni termini delle equazioni che regolano la dinamica dei fluidi diventano trascurabili se essi sono molto grandi oppure molto piccoli. Inoltre in certi casi si osserva che determinati processi possono avvenire o meno a seconda del valore numerico di un qualche parametro adimensionale rispetto ad un valore critico, che di solito viene valutato empiricamente.

^[3] Il fattore $1/2$ viene introdotto solo per convenienza.

Il parametro più noto è senz'altro il numero di Reynolds

$$\text{Re} = \frac{u_0 L}{\nu} \quad (2.4.1)$$

che abbiamo incontrato nel paragrafo 2.2. Possiamo verificare facilmente che esso è eguale anche al rapporto tra la forza inerziale (2.4.8) e la forza viscosa

$$\text{Forza viscosa} = \mu L^2 u_0 / L = \mu L u_0$$

deducibile dalla relazione di Newton (1.3.1). Come vedremo, numeri di Reynolds elevati comportano la possibilità di trascurare i termini legati alla viscosità. Inoltre, gli esperimenti mostrano che un flusso caratterizzato da numeri di Reynolds molto più grandi del valore critico 2000 diventa fortemente instabile, e da luogo facilmente alla formazione di moti disordinati (*turbolenza*).

Il *Numero di Froude* Fr è un altro parametro adimensionale che ricorre spesso quando si studiano flussi soggetti ad un campo di forza peso. Poichè l'accelerazione di gravità ha le dimensioni $[g] = LT^{-2}$, gli esponenti nella (2.4.5) sono $a = 1$, $b = -2$, $c = 0$. Si ottiene quindi il rapporto adimensionale

$$\text{Fr} = \frac{u_0^2}{gL}, \quad (2.4.10)$$

Il numero di Froude trova applicazione nello studio della propagazione delle onde marine superficiali, ed è tanto più piccolo quanto maggiori sono gli effetti del peso sul moto del fluido.

Un'importante applicazione della fluidodinamica riguarda il moto dei fluidi ruotanti. Il questo caso un parametro rilevante è dato dalla velocità angolare Ω . Poichè dimensionalmente $[\Omega] = T^{-1}$, e $a = 0$, $b = -1$, $c = 0$, la scala della velocità è data dal rapporto

$$\text{Ro} = \frac{u_0}{\Omega L}. \quad (2.4.11)$$

Ro viene chiamato *Numero di Rossby* e sottolinea l'importanza dell'accelerazione di Coriolis rispetto agli effetti dinamici. Alle volte è utile confrontare direttamente le forze di Coriolis con le forze viscosi. Questo viene fatto ricavando la scala del processo mediante la formula (2.4.6). In quest modo si ottiene il *Numero di Ekman*

$$\text{Ek} = \frac{\nu}{\Omega L}. \quad (2.4.12)$$

Un certo numero di rapporti adimensionali è riportato nella Tabella 2.1 (per un elenco dei più importanti gruppi adimensionali si veda l'Appendice E).

Tabella 2.1 – Rapporti adimensionali

Nome	Simbolo	Significato
Coefficiente di resistenza	$C_D = \frac{F_D}{\frac{1}{2}\rho u_0^2 L^2}$	Rapporto tra la forza su un ostacolo e l'inerzia del fluido
Numero di Reynolds	$Re = \frac{u_0 L}{\nu}$	Rapporto tra forze inerziali e forze viscosi
Numero di Weber	$We = \frac{\rho u_0^2 L}{\sigma}$	Rapporto tra forze inerziali e tensione superficiale
Numero di Froude	$Fr = \frac{u_0^2}{gL}$	Rapporto tra le forze inerziali e la gravità
Numero di Rossby	$Ro = \frac{u_0}{\Omega L}$	Rapporto tra le forze inerziali e le forze di Coriolis
Numero di Ekman	$Ek = \frac{\nu}{\Omega L^2}$	Rapporto tra forze viscosi e forze di Coriolis

2.5 Numero di Mach

Oltre ai rapporti adimensionali visti nel paragrafo precedente, definiamo qui per completezza un altro parametro che riveste una notevole importanza nello studio dei moti fluidi. Esso è formato dal rapporto tra la velocità del fluido u e la velocità del suono a :

$$M = \frac{u}{a}. \quad (2.5.1)$$

e viene chiamato *Numero di Mach*. La velocità del suono è legata alle proprietà termodinamiche del mezzo (v. Capitolo 9). Nel caso di un fluido ideale con un rapporto dei calori specifici $\gamma = c_p/c_v$ si ha ^[4]

$$a^2 = \gamma \frac{p}{\rho} = \gamma \frac{kT}{m_0}. \quad (2.5.2)$$

^[4] In condizioni normali di temperatura e pressione la velocità del suono nell'aria risulta $a \approx 300 \text{ m s}^{-1}$.

Si noti che

$$M^2 = \frac{\varrho v^2}{\gamma p} \approx \frac{\varrho u_0^2}{p} = \frac{1}{2C_p}, \quad (2.5.3)$$

cioè il quadrato del numero di Mach è dello stesso ordine di grandezza dell'inverso del coefficiente di pressione (2.4.8). Poichè quest'ultimo è quasi quasi sempre molto piccolo, in generale è più comodo usare il parametro M invece di C_p .

Se $M < 1$ il flusso viene detto *subsonico*. Quando $M \approx 1$, il flusso viene chiamato *transonico*. Si chiama invece *supersonico* un flusso con $M > 1$. Infine si parla di flusso *ipersonico* se la velocità è molto maggiore di quella del suono.

Il numero di Mach è legato anche alla compressibilità dei fluidi. Spesso nello studio della fluidodinamica si suppone che la densità del mezzo sia costante. Con questa approssimazione non solo il tensore viscoso ma, come vedremo, anche le equazioni che governano il moto dei fluidi diventano più semplici. Chiaramente nei liquidi la condizione $\varrho = \text{costante}$ è ampiamente soddisfatta. Nei gas il problema è invece meno evidente, ed è lecito chiederci fino a che punto questa ipotesi possa essere mantenuta. Anticipiamo qui un importante risultato che verrà dimostrato più avanti (v. il §4.8). Nonostante p e ϱ siano direttamente legati dall'equazione di stato, quando all'interno di un fluido sono presenti dei gradienti di pressione, questi inducono più facilmente delle variazioni di velocità piuttosto che di densità. La condizione

$$\frac{\Delta \varrho}{\varrho} \ll 1 \quad (2.5.4)$$

è in realtà soddisfatta solo nelle regioni nelle quali

$$M \ll 1. \quad (2.5.5)$$

Ciò significa che quando la velocità è molto più piccola della velocità del suono la densità del fluido può essere considerata costante senza che questo comporti un sensibile errore. Ad esempio, poichè nell'aria alla temperatura ambiente la velocità del suono è $a \approx 300 \text{ m s}^{-1}$, fluidi che hanno velocità anche di parecchi metri al secondo possono essere trattati come incompressibili. I liquidi invece hanno una velocità del suono talmente elevata da essere di fatto incompressibili in tutte le condizioni.

CAPITOLO III

LEGGI INTEGRALI

3.1 Introduzione

In fluidodinamica teorica si analizzano le soluzioni di un certo numero di equazioni, che possono essere differenziali oppure integrali, e che vengono ricavate adattando ai mezzi continui le leggi fondamentali della meccanica. Tra le leggi più importanti ricordiamo

- 1 – la conservazione della massa;
- 2 – l’equazione di Newton: *forza* = *massa* \times *accelerazione*;
- 3– la legge di conservazione dell’energia.

Diversamente dalla meccanica dei corpi rigidi, le cui dimensioni sono limitate ed hanno una forma ben definita, i fluidi possono occupare regioni molto estese (alle volte vengono considerati “infinitamente” estesi) e presentano spesso complicati movimenti interni dovuti ai reciproci sforzi tra le diverse parti del sistema stesso.

Per superare queste difficoltà sono stati proposti due differenti approcci: nel primo si sceglie una porzione molto piccola (infinitesima) di materia, ma grande abbastanza da mantenere le caratteristiche proprie dei fluidi, come la continuità, la possibilità di definire localmente la pressione, la densità, ecc. A questo elemento vengono applicate le usuali leggi della meccanica in modo da ottenere le equazioni differenziali che governano il movimento del fluido in ogni suo punto. Tuttavia, rispetto all’ordinaria meccanica del punto materiale, le equazioni del moto contengono ora le derivate parziali rispetto alle tre direzioni coordinate e al tempo. Questo metodo verrà trattato nel Capitolo 4.

Nel secondo approccio, qui esaminato, vengono calcolate invece le variazioni delle proprietà fisiche fondamentali trasportate da una quantità finita di fluido contenuta all’interno di un volume ideale esteso. In questo modo, per ogni legge di conservazione si ottiene una corrispondente equazione integrale di bilancio, valida globalmente per l’intero volume in esame. L’inevitabile perdita di informazioni sulle proprietà del fluido in ogni singolo punto interno al volume viene compensata dall’indubbio vantaggio di manipolare equazioni finite.

3.2 Volume di controllo.

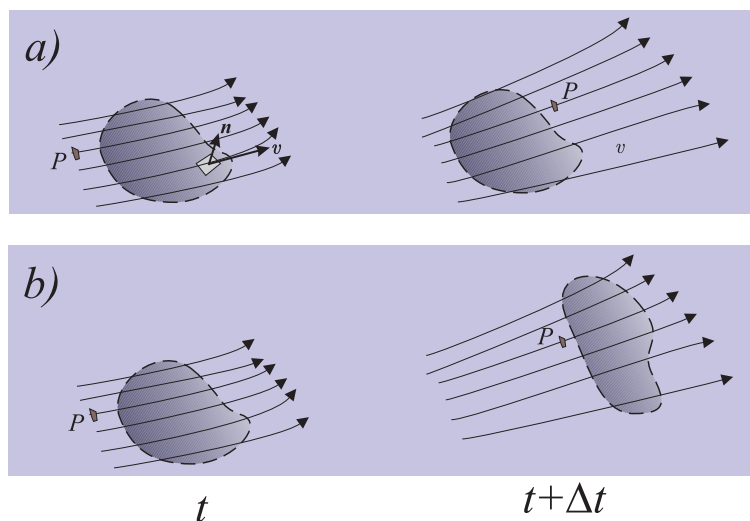


Figura 3.1 Volume di controllo in due istanti successivi. Nella figura *a*) il volume è immaginato fisso, ed è continuamente attraversato dal fluido. Le particelle entrano o escono attraverso la superficie di controllo trasportando le diverse proprietà termodinamiche (massa, entropia, ecc.). Nella figura *b*) il volume di controllo si muove in maniera solidale col fluido, e può quindi cambiare la propria forma nel tempo, sebbene la massa contenuta nel suo interno rimanga costante.

Tracciamo all'interno del fluido in movimento un immaginario volume finito V_c , che chiameremo *volume di controllo*, racchiuso da una *superficie di controllo* S_c . Il volume può essere fisso rispetto al riferimento, e in questo caso viene continuamente attraversato dal fluido (Figura 3.1a), oppure può muoversi assieme al fluido in modo da contenere sempre le medesime particelle (Figura 3.1b). Sebbene in linea di principio il volume di controllo possa avere una forma qualsiasi, nella maggior parte dei casi esso viene costruito in modo da rispettare le eventuali simmetrie del problema. Ad esempio, se la configurazione prevede coordinate cartesiane rettangolari, conviene scegliere un volume di controllo avente la forma di un parallelogramma con i lati paralleli agli assi (Figura 3.2b). Se invece il flusso ha simmetria sferica, il volume di controllo sarà formato dalla regione compresa tra due superfici sferiche concentriche (Figura 3.2c), e così via. In generale le proprietà fisiche del fluido all'interno del volume di controllo (massa totale, quantità di moto, energia interna, ecc.) possono variare nel tempo, in parte perchè cambiano le caratteristiche locali del fluido e in parte a causa degli scambi di materia attraverso la superficie di controllo. Evidentemente il bilancio complessivo può essere positivo, negativo oppure nullo.

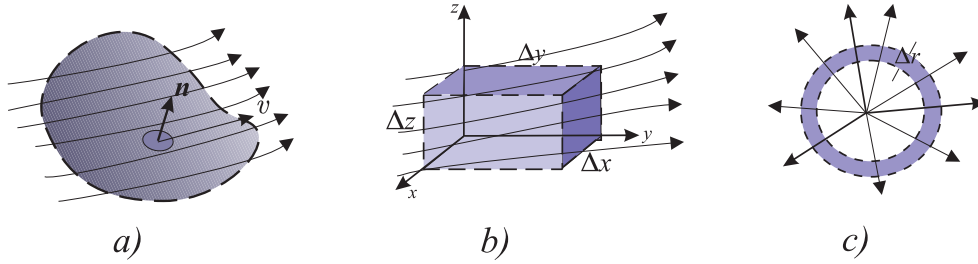


Figura 3.2 In linea di principio il volume di controllo può avere una forma qualsiasi (figura a). Spesso però si preferisce rispettare le simmetrie del sistema (figure b,c).

Calcoliamo ora la *portata di volume* δQ_V , cioè il volume dV di fluido che nel tempo Δt transita attraverso una porzione di superficie dS . Per semplicità supporremo che dS sia circolare e sufficientemente piccola da poter assumere uniforme la velocità del fluido che la attraversa (Figura 3.2a). In tal caso dV coincide con il volume del tronco di cilindro compreso tra le superfici dS' e dS , separate da una distanza $v\Delta t$ nella direzione del moto (Figura 3.3a). Indicando con \mathbf{n} il versore ortogonale alla superficie, si ha $dV = dS \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} \Delta t = dS v \cos \theta \Delta t$. Dividendo per Δt si ottiene

$$\delta Q_V = \frac{dV}{\Delta t} = v dS \cos \theta \quad (3.2.1)$$

La (3.2.1) può essere facilmente generalizzata al caso di una superficie estesa attraversata da un flusso *non* uniforme (Figura 3.3b). In questo caso la portata è data dall'integrale

$$Q_V = \int_S \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} dS. \quad (3.2.12)$$

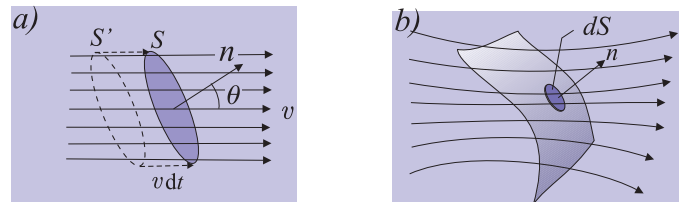


Figura 3.3 Portata di volume.

Evidentemente il segno dipende dal modo con cui viene scelta l'orientazione del versore \mathbf{n} . Si tenga presente che, qualora dS appartenga ad una superficie chiusa si usa orientare \mathbf{n} nella direzione esterna al volume. Con questa convenzione la portata è localmente positiva se il flusso è entrante, ed è negativa se la materia esce dal volume. Quando invece la superficie è aperta la scelta dell'orientazione rimane arbitraria.

3.3 Equazione del trasporto di Rankine

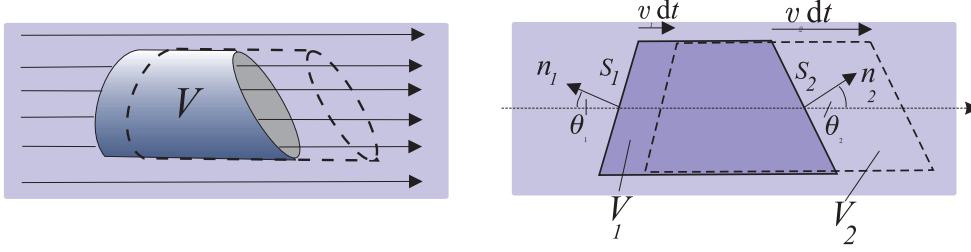


Figura 3.4 Volume di controllo in regime unidimensionale

Consideriamo un volume di controllo fermo attraversato da un flusso uniforme con velocità \mathbf{u} nella direzione x , come è illustrato in Figura 3.4. Il volume sia formato da un tronco di cilindro coassiale con l'asse x ed abbia le due basi S_1 e S_2 orientate in maniera generica. Siano rispettivamente \mathbf{n}_1 e \mathbf{n}_2 i versori normali a queste superfici.

Immaginiamo che le particelle di fluido trasportino una generica proprietà *estensiva* Q associata alla proprietà *intensiva* q ^[1]. La proprietà Q contenuta nel volume di controllo nell'istante t è

$$Q(t) = \int q \, dm = \int_V q \, \varrho \, dV \quad (3.3.1)$$

Vogliamo calcolare la variazione di Q nel tempo. Esaminiamo prima la situazione più semplice in cui anche il fluido è ovunque in quiete. In questo caso si ha semplicemente

$$\frac{dQ}{dt} = \frac{d}{dt} \int q \, \varrho \, dV. \quad (3.3.2)$$

Cioè la proprietà cambia solo se essa viene generata o distrutta nella parte di fluido che si trova all'interno del volume. Se la grandezza in esame è una quantità conservata, come la massa o l'energia, Q rimane costante, mentre, ad esempio, l'entropia varia solo se nell'interno del volume avvengono processi dissipativi.

Supponiamo ora che il fluido attraversi il volume di controllo muovendosi nella direzione x . Occorre allora includere nel bilancio anche la parte positiva della proprietà Q che entra nel cilindro attraverso la

^[1] Vengono chiamate *estensive* le proprietà che dipendono dalla quantità di materia, mentre le proprietà *intensive* sono indipendenti dal volume della porzione di fluido considerata. Ad esempio, la temperatura, la pressione e la densità sono grandezze intensive, mentre la massa, l'energia interna, l'entropia, ecc., sono quantità estensive. Dividendo una grandezza estensiva Q per la massa si ottiene la corrispondente proprietà intensiva q .

faccia S_1 e quella, negativa, che invece defluisce attraverso la faccia S_2 . Attraverso superficie laterale del cilindro non avviene invece alcun trasporto di materia poichè la componente della velocità in questa direzione è nulla. Pertanto l'ammontare netto di Q che attraversa la superficie di controllo nel tempo dt è

$$\begin{aligned} q_1 \varrho_1 V_1 - q_2 \varrho_2 V_2 &= (S q \varrho v \cos \theta)_1 dt - (S q \varrho v \cos \theta)_2 dt = \\ &= [(S q \varrho \mathbf{v} \cdot \mathbf{n})_1 + (S q \varrho \mathbf{v} \cdot \mathbf{n})_2] dt . \end{aligned} \quad (3.3.3)$$

Se a questo aggiungiamo anche il contributo (3.3.2) dovuto alla sola variazione interna, si ottiene il bilancio completo relativo alla variazione di Q :

$$\begin{aligned} \frac{dQ}{dt} &= \frac{d}{dt} \int_V q \varrho dV + (S q \varrho \mathbf{v} \cdot \mathbf{n})_1 + (S q \varrho \mathbf{v} \cdot \mathbf{n})_2 \\ &= \int_V \frac{\partial(q \varrho)}{\partial t} dV + \int_{S_1+S_2} (\varrho q \mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) dS \end{aligned} \quad (3.3.4)$$

L'estensione di questi risultati al caso di flussi non uniformi che attraversano volumi chiusi di forma qualsiasi è immediata. Si ha infatti

$$\frac{dQ}{dt} = \int_V \frac{\partial(q \varrho)}{\partial t} dV + \int_{S_V} (\varrho q \mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) dS , \quad (3.3.5)$$

dove S_V indica la superficie che delimita il volume e \mathbf{n} è il vettore unitario localmente ortogonale ad essa (Figura 3.2a).

La (3.3.5) è nota come **equazione del trasporto di Rankine** e la sua importanza è legata proprio alla sua forma del tutto generale. Infatti, cambiando di volta in volta il significato fisico della proprietà intensiva q si ottengono le equazioni integrali che regolano il comportamento dinamico dei fluidi.

Una situazione di particolare interesse è quella che si presenta quando la proprietà Q si conserva (cioè $dQ/dt = 0$). In questo caso la (3.3.5) diventa

$$\int_V \frac{\partial(q \varrho)}{\partial t} dV = - \int_{S_V} (\varrho q \mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) dS . \quad (3.3.6)$$

3.4 Visuali Euleriana e Lagrangiana

Come si può osservare, nell'equazione del trasporto di Rankine (3.4.5) compaiono due derivate temporali che agiscono essenzialmente sulla stessa quantità. Il membro di sinistra contiene la derivata totale della proprietà estensiva Q , eguagliata al membro di destra che a sua volta include una derivata parziale della proprietà intensiva sommata al flusso attraverso la superficie. Le due derivate temporali rispecchiano i due diversi modi con i quali è possibile seguire l'evoluzione del fluido.

Fissiamo l'attenzione sulle particelle di fluido che in un istante t sono contenute nel volume V (Figura 3.5a). A causa del movimento del fluido, in un istante successivo $t + \Delta t$ le particelle che prima erano contenute in V , occupano ora un volume $V(t + \Delta t)$ situato in una regione differente ed eventualmente deformato rispetto alla situazione iniziale. Durante il movimento, le proprietà del fluido quali la pressione, la densità, la temperatura, ecc., cambiano, mentre la massa di questa porzione di fluido rimane invariata. Questo approccio viene comunemente indicato come *visuale Lagrangiana*.

Un differente modo di affrontare il problema è quello illustrato schematicamente nella Figura 3.5b. Si considera ora una regione *fissa* nello spazio, e si analizzano le variazioni temporali delle proprietà del fluido contenuto in tale volume. Diversamente dalla visuale Lagrangiana, al trascorrere del tempo le particelle di fluido contenute nel volume non sono le medesime, perchè una parte di materia esce o entra attraverso la superficie di controllo. In questo caso, oltre alle variabili termodinamiche, anche la massa contenuta nel volume V varia nel tempo. Questo punto di vista è noto come *visuale Euleriana*. L'equazione del trasporto (3.4.5) mette proprio in evidenza la relazione che esiste tra la stessa proprietà misurata con le due differenti modalità. Infatti, la derivata temporale a sinistra dell'eguaglianza rappresenta la variazione della proprietà estensiva contenuta nel volume V nell'ipotesi che questo si muova assieme alle particelle. Il termine a destra dell'equazione, invece, mostra come varia la stessa grandezza in una regione fissa dello spazio. Evidentemente la distinzione tra i due approcci è superflua quando la velocità del fluido è ovunque nulla.

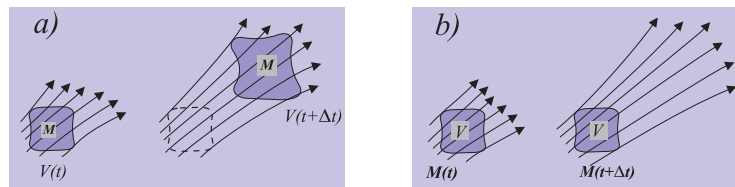


Figura 3.5 Punti di vista Lagrangiano (a) ed Euleriano (b).

3.5 Conservazione della massa

Applichiamo l'equazione (3.3.5) considerando come proprietà estensiva la stessa massa M del fluido. Evidentemente la corrispondente proprietà intensiva q (massa per unità di massa) risulta eguale a 1. In questo caso l'equazione del trasporto diventa

$$\frac{dM}{dt} = \int_V \frac{\partial \varrho}{\partial t} dV + \int_{S_V} \varrho (\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) dS . \quad (3.5.1)$$

Uno dei principi fondamentali della fisica afferma che la massa deve essere conservata, cioè $dM/dt = 0$. La (3.5.1) diventa allora (v. anche la 3.3.6)

$$\int_V \frac{\partial \varrho}{\partial t} dV = - \int_{S_V} \varrho (\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) dS . \quad (3.5.2)$$

L'integrale nel membro a sinistra della (3.5.2) rappresenta la massa complessiva che attraversa l'intera superficie nell'unità di tempo. Nelle configurazioni stazionarie le derivate temporali parziali sono nulle (la quantità di materia contenuta nel volume rimane costante). Dalla (3.5.1) si ottiene allora

$$\int_{S_V} \varrho (\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) dS = 0 , \quad (3.5.3)$$

cioè il flusso stazionario di massa attraverso l'intero volume di controllo è nullo.

L'integrale (3.5.3) viene definito anche nel caso di superfici aperte S (come, ad esempio, una sezione di un condotto) e prende il nome di *portata di massa* \dot{m} del condotto attraverso S (Figura 3.6a). Si pone cioè

$$\dot{m} = \int_S \varrho (\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) dS = \int_S \varrho v \cos \theta dS , \quad (3.5.4)$$

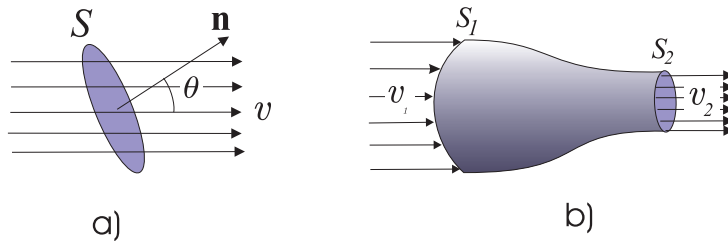


Figura 3.6 a) Portata di massa attraverso la superficie S . b) Flusso in un condotto con sezione variabile.

dove θ è l'angolo tra la normale alla superficie elementare dS e la direzione della velocità locale.

La funzione integranda

$$Q_m = \varrho v \cos \theta \quad (3.5.4)$$

rappresenta invece il *flusso di massa* ed è eguale alla quantità di materia che attraversa ortogonalmente l'unità di superficie nell'unità di tempo.

Una situazione di particolare interesse riguarda il moto di un fluido stazionario all'interno di un condotto con pareti rigide. Il flusso di materia può avvenire solo attraverso le due sezioni S_1 e S_2 del condotto, essendo nullo il flusso attraverso la parete laterale S_L . Possiamo allora separare l'integrale (3.5.3) nella somma di due soli integrali

$$\dot{m} = \int_{S_1} \varrho_1 v_1 \cos \theta_1 dS = \int_{S_2} \varrho_2 v_2 \cos \theta_2 dS. \quad (3.5.6)$$

Questa equazione mostra che *in condizioni stazionarie la portata di massa attraverso una sezione qualsiasi del condotto è costante*. Se poi le sezioni di ingresso e di uscita sono sufficientemente piccole da poter assumere velocità uniforme, l'equazione di conservazione della massa (3.5.6) diventa

$$\dot{m} = \varrho_1 v_1 S_1 \cos \theta_1 = \varrho_2 v_2 S_2 \cos \theta_2. \quad (3.5.7)$$

Nel caso illustrato in Figura 3.6b, in cui le sezioni sono entrambe ortogonali alla direzione del flusso, la (3.5.8) si semplifica ulteriormente e diventa

$$\dot{m} = \varrho_1 v_1 S_1 = \varrho_2 v_2 S_2. \quad (3.5.8)$$

Infine, nel caso dei fluidi incompressibili ($\varrho_1 = \varrho_2$) si ha

$$S_1 v_1 = S_2 v_2, \quad (3.5.9)$$

cioè la velocità varia inversamente con la sezione del condotto. La legge (3.5.8) rimane valida anche quando attraverso la sezione del condotto la distribuzione della velocità non è uniforme, purchè si sostituiscano le velocità con i rispettivi valori medi definiti da

$$\bar{v} = \frac{1}{S} \int v dS. \quad (3.5.10)$$

3.6 Equazione del momento

Introduciamo ora la quantità di moto (o *momento* ^[2]) $M\mathbf{v}$ come grandezza intensiva dell'equazione del trasporto (3.3.3). In questo caso l'equazione del bilancio si applica a ciascuna componente vettoriale. Tenendo presente che la proprietà intensiva associata è data da $\varrho\mathbf{v}$, si ottiene la seguente *equazione del momento*

$$\mathbf{F} = \frac{d(M\mathbf{v})}{dt} = \int_V \frac{\partial \varrho}{\partial t} \mathbf{v} dV + \int_{S_V} \varrho \mathbf{v} (\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) dS, \quad (3.6.1)$$

dove \mathbf{F} è la forza netta esercitata sul volume di controllo. La (3.6.1) esprime la seconda legge di Newton applicata ai fluidi. Infatti, il primo integrale a destra dell'equazione contiene la variazione di momento in seguito alla variazione della massa di fluido contenuta nel volume, mentre il secondo integrale è eguale al momento trasportato dal fluido attraverso la superficie di controllo. Nei flussi stazionari l'equazione (3.6.1) diventa semplicemente

$$\begin{aligned} \mathbf{F} &= \int_{S_V} \varrho \mathbf{v} (\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) dS = \\ &= \int_{S_V} \varrho \mathbf{v} v \cos \theta dS, \end{aligned} \quad (3.6.2)$$

dove \mathbf{F} è la risultante di tutte le forze che agiscono sul volume. Queste forze possono essere localizzate sulla superficie di controllo (come la pressione, la viscosità o le forze esercitate da eventuali ostacoli solidi) oppure possono essere forze di volume qualora siano presenti campi esterni (per esempio, la gravità). Se le forze sono complessivamente bilanciate, il momento entrante dovrà essere uguale al momento uscente (conservazione della quantità di moto).

In un dato problema l'utilità di usare l'equazione del momento è condizionata in parte dalla possibilità di scegliere il volume di controllo in modo che siano facilmente calcolabili gli integrali di superficie. Per questo motivo di solito si traccia la superficie in modo che una sua parte sia delimitata dalle linee di corrente, lungo le quali $\mathbf{v} \cdot \mathbf{n} = 0$. Perciò attraverso questa frazione di superficie il flusso di massa e di momento sono identicamente nulli. Inoltre si fa in modo che la parte rimanente della superficie sia formata da piani che intercettano il flusso in regioni in cui la velocità è sufficientemente uniforme. Nell'esempio

[2] Verranno qui usati come sinonimi i termini *quantità di moto* e *momento* anche se quest'ultimo può essere confuso con il *momento di un vettore* (prodotto di una distanza per il vettore). In ogni caso la distinzione dovrebbe risultare chiara dal contesto della frase.

illustrato nella Figura 3.7 il volume di controllo è stato scelto in modo che il flusso sia diverso da zero solo attraverso le superfici S_0 , S_1 e S_2 (v. anche il §3.9).

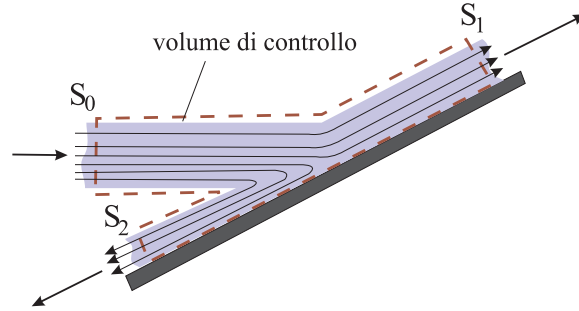


Figura 3.7 Esempio di un volume di controllo applicato ad un getto incidente su un piano inclinato.

Consideriamo ora il fluido contenuto tra due sezioni del medesimo tubo di flusso (Figura 3.8a). Dall'equazione (3.6.2) e dalla legge di conservazione della massa (3.5.7) si trova che la forza che agisce sul volume di controllo è data da

$$\mathbf{F} = -S_1 \varrho \mathbf{v}_1 v_1 \cos \theta_1 + S_2 \varrho \mathbf{v}_2 v_2 \cos \theta_2 = \dot{m} (\mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_1). \quad (3.6.3)$$

Essa è causata dalla differenza di pressione tra le due estremità del tubo di flusso e dalle eventuali forze di volume. Si noti che $\mathbf{F} = 0$ solo se le velocità di entrata e di uscita sono vettorialmente eguali.

Nel caso del moto “quasi-unidirezionale” della Figura 3.8b, si suppone che lo spessore del condotto non vari bruscamente e che il moto avvenga prevalentemente in un'unica direzione. Scegliamo le sezioni di entrata e di uscita in modo che siano ortogonali alla velocità e separiamo la forza di pressione sugli estremi del tubo di flusso dalla forza rimanente \mathbf{F}_0 , data dalla somma della forza di volume e della forza (mediamente nulla) sulla superficie laterale S_L . Dalla (3.6.3) segue

$$F_0 = (p_2 + \varrho v_2^2) S_2 - (p_1 + \varrho v_1^2) S_1 \quad (3.6.4)$$

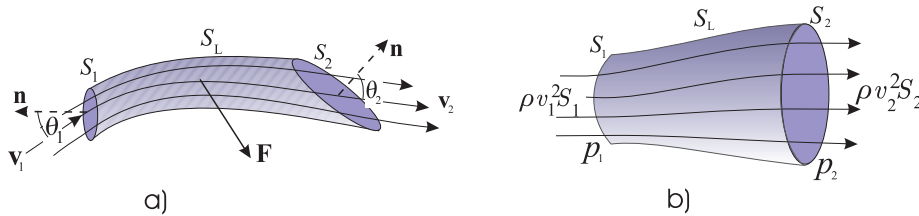


Figura 3.8 a) Tubo di flusso. b) Flusso “quasi-unidirezionale”.

3.7 Equazione dell'energia

La terza e fondamentale equazione integrale che regola il comportamento dei fluidi deriva direttamente dal primo principio della termodinamica. Come è noto questa legge afferma che la differenza tra il calore \mathcal{Q} scambiato da un corpo ed il lavoro \mathcal{W} che esso compie sull'ambiente esterno è eguale alla variazione dell'energia totale. Quest'ultima comprende l'energia interna U e, se il corpo è in movimento, l'energia cinetica del moto macroscopico E_k . Espressa in termini di variazioni nell'unità di tempo, l'equazione del primo principio prende la forma

$$\dot{\mathcal{Q}} - \dot{\mathcal{W}} = \dot{E}_k + \dot{U}, \quad (3.7.1)$$

dove il punto indica derivazione rispetto al tempo.

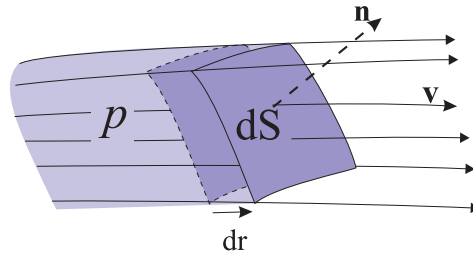


Figura 3.9 Lavoro fatto dalla pressione in seguito allo spostamento di una porzione infinitesima della superficie di controllo.

Gli scambi di calore $\dot{\mathcal{Q}}$ avvengono attraverso la superficie di controllo e comprendono l'irraggiamento, la conduzione e la diffusione termica.

Il lavoro meccanico in un fluido è invece dato dalla somma di tre principali contributi:

- 1) il lavoro $\dot{\mathcal{W}}_p$ fatto dalla pressione;
- 2) Il lavoro $\dot{\mathcal{W}}_{cons}$ delle forze di volume conservative, come la forza peso, la forza elettrica, ecc.
- 3) Il lavoro $\dot{\mathcal{W}}_{visc}$ compiuto dalle forze viscosive non conservative.

Il termine $\dot{\mathcal{W}}_p$ compare solo se vi è un movimento della superficie di controllo. In particolare, se una superficie elementare dS si sposta di un tratto $d\mathbf{r} = \mathbf{v} dt$ (Figura 3.9), il lavoro fatto dalle forze di pressione *sull'ambiente esterno* al volume è dato da $-p dS \mathbf{n} \cdot d\mathbf{r} = -p \mathbf{n} \cdot \mathbf{v} dt dS$. Sommando sull'intera superficie di controllo

$$\dot{\mathcal{W}}_p = - \int_S p \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} dS \quad (3.7.2)$$

Il lavoro conservativo $\dot{\mathcal{W}}_{cons}$ viene espresso più convenientemente come variazione di energia potenziale E_p , e quindi può essere incluso nel termine di destra dell'equazione (3.7.1). Se introduciamo allora l'energia

totale $E = E_k + E_p + U$, come somma dell'energia cinetica, energia potenziale ed energia interna, il primo principio (3.7.1) diventa

$$\dot{Q} - \dot{W}_{visc} + \int_S p \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} dS = \dot{E}. \quad (3.7.3)$$

Usiamo ora l'energia \dot{E} come grandezza estensiva nell'equazione del trasporto (3.3.3), cui corrisponde come grandezza intensiva l'*energia totale specifica*

$$\frac{1}{2} v^2 + \varepsilon_p + u. \quad (3.7.4)$$

composta dall'energia cinetica, dall'energia potenziale delle forze di volume e dall'energia interna dell'unità di massa del fluido. Tenendo presente la (3.7.3), l'equazione del trasporto (3.3.3) diventa

$$\begin{aligned} \dot{Q} - \dot{W}_{visc} + \int_S p \mathbf{v} \cdot d\mathbf{S} &= \int_V \frac{\partial}{\partial t} \left[\varrho \left(\frac{1}{2} v^2 + \varepsilon_p + u \right) \right] + \\ &+ \int_S \varrho \left(\frac{1}{2} v^2 + \varepsilon_p + u \right) \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} dS \end{aligned} \quad (3.7.5)$$

oppure, portando il termine di pressione a destra dell'eguaglianza,

$$\begin{aligned} \dot{Q} - \dot{W}_{visc} &= \int_V \frac{\partial}{\partial t} \left[\varrho \left(\frac{1}{2} v^2 + \varepsilon_p + u \right) \right] + \\ &+ \int_S \varrho \left(\frac{1}{2} v^2 + \varepsilon_p + u + \frac{p}{\varrho} \right) \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} dS. \end{aligned} \quad (3.7.6)$$

Infine, se il flusso è stazionario, l'equazione si semplifica in

$$\dot{Q} - \dot{W}_{visc} = \int_S \varrho \left(\frac{1}{2} v^2 + \varepsilon_p + h \right) \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} dS. \quad (3.7.7)$$

dove

$$h = u + p/\varrho \quad (3.7.8)$$

è la *densità di entalpia*.

Una semplice applicazione, ma di particolare interesse in fluidodinamica, riguarda il moto in un tubo di flusso come quello illustrato nella Figura 3.8a. Se le sezioni S_1 e S_2 sono abbastanza piccole da poter considerare uniforme il fluido che le attraversa, la (3.7.7) diventa

$$\dot{Q} - \dot{W}_{visc} = \left[\frac{1}{2} v^2 + \varepsilon_p + h \right]_1 \dot{m} - \left[\frac{1}{2} v^2 + \varepsilon_p + h \right]_2 \dot{m} \quad (3.7.9)$$

dove si è usata la (3.5.6). Dividendo entrambi i membri per \dot{m} , si ottiene

$$q - w_v = \left[\frac{1}{2} v^2 + \varepsilon_p + h \right]_1 - \left[\frac{1}{2} v^2 + \varepsilon_p + h \right]_2 \quad (3.7.10)$$

dove q e w_v sono rispettivamente il calore scambiato ed il lavoro dissipato dall'unità di massa del fluido.

3.8 Equazione di Bernoulli

Scriviamo l'equazione dell'energia (3.7.7) supponendo che la lunghezza del tubo di flusso sia infinitesima. Si ha

$$\delta q - \delta w_v = d\left(\frac{1}{2}v^2 + \varepsilon_p + h\right) = v dv + d\varepsilon_p + dh. \quad (3.8.1)$$

Assumiamo inoltre che il fluido sia inviscido e che il calore venga scambiato in maniera reversibile. Una delle relazioni termodinamiche fondamentali mostra che ^[3]

$$\delta q_{rev} = T ds = dh - dp/\varrho. \quad (3.8.2)$$

Sostituendo nella (3.8.1) con $\delta w_v = 0$, si ottiene

$$v dv + d\varepsilon_p + dp/\varrho = 0. \quad (3.8.3)$$

Integrando *lungo la medesima linea di corrente* si ottiene

$$\frac{1}{2}v^2 + \varepsilon_p + \int \frac{dp}{\varrho} = \text{costante} \quad (3.8.4)$$

che costituisce il **teorema di Bernoulli**. Esso afferma che:

in assenza di dissipazione viscosa e di scambi termici irreversibili, la somma delle energie cinetica e potenziale per unità di massa e dell'integrale del rapporto tra la variazione di pressione e la densità è costante lungo la medesima linea di corrente.

Se il fluido è anche incompressibile si ha

$$\int \frac{dp}{\varrho} = \frac{p}{\varrho} + \text{cost}, \quad (3.8.5)$$

e in questo caso l'equazione di Bernoulli diventa semplicemente

$$\frac{1}{2}v^2 + \varepsilon_p + \frac{p}{\varrho} = \text{costante}. \quad (3.8.6)$$

Se infine il fluido è comprimibile ma adiabatico (assenza di scambi termici), possiamo applicare le relazioni di Poisson $p = K \varrho^\gamma$, dove γ è il rapporto dei calori specifici. Perciò

$$\int \frac{dp}{\varrho} = K\gamma \int \varrho^{\gamma-1} d\varrho = \frac{\gamma}{\gamma-1} K \varrho^{\gamma-1} = \frac{\gamma}{\gamma-1} \frac{p}{\varrho}. \quad (3.8.7)$$

L'equazione (3.8.4) diventa allora

$$\frac{1}{2}v^2 + \varepsilon_p + \left(\frac{\gamma}{\gamma-1}\right) \frac{p}{\varrho} = \text{costante}. \quad (3.8.8)$$

^[3] Il primo principio afferma che per una trasformazione reversibile vale l'equazione $T ds = du + p d(1/\varrho)$, dove s , u e $1/\varrho$ sono rispettivamente l'entropia, l'energia interna ed il volume per unità di massa. D'altra parte, il differenziale dell'entropia $h = u + p/\varrho$ è $dh = du + p d(1/\varrho) + dp/\varrho$. Combinando le due equazioni si ottiene la (3.8.2).

3.9 Getto Fluidico su un piano

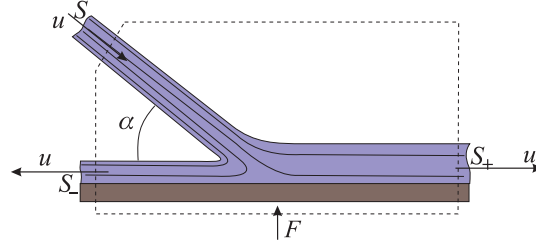


Figura 3.10 Getto liquido diretto verso una superficie piana.
La curva tratteggiata delinea un volume di controllo.

Come è illustrato nella Figura 3.10, un getto di un fluido che colpisce una superficie solida si separa in due flussi opposti che si allontanano dalla regione di impatto. Se il fluido è ideale e incomprimibile, il problema può essere risolto facilmente tramite le sole leggi integrali.

Consideriamo un piccolo intorno della regione di impatto in modo da poter approssimare la superficie con un piano e indichiamo con α l'angolo che il getto incidente, di sezione S e velocità u , forma con la direzione x tangente al piano. Assumiamo inoltre che u sia sufficientemente elevata da poter trascurare gli effetti dovuti alla forza peso.

A causa dell'assenza di attriti tra il fluido ed il piano, la componente x della quantità di moto trasportata dal getto attraverso il volume di controllo tratteggiato nella figura deve essere nullo. Affinchè questo sia possibile occorre che il fluido si divida in due opposte correnti, che supporremo di sezione rispettivamente S_+ e S_- . Si ottiene dunque

$$\rho u^2 S \cos \alpha = \rho u^2 S_+ - \rho u^2 S_- , \quad (3.9.1)$$

nella quale si sono poste eguali le velocità nei tre rami. Quest'ultima proprietà deriva dal teorema di Bernoulli applicato lungo linee di flusso che, partendo dal getto iniziale, entrano in uno o nell'altro ramo.

D'altra parte, dalla conservazione della massa segue che

$$\rho u S = \rho u S_+ + \rho u S_- \quad (3.9.2)$$

Combinando quindi le equazioni (3.9.1) e (3.9.2) si ricava che la seguente relazione tra le sezioni delle ramificazioni

$$S_{\pm} = \frac{S}{2}(1 \pm \cos \alpha). \quad (3.9.3)$$

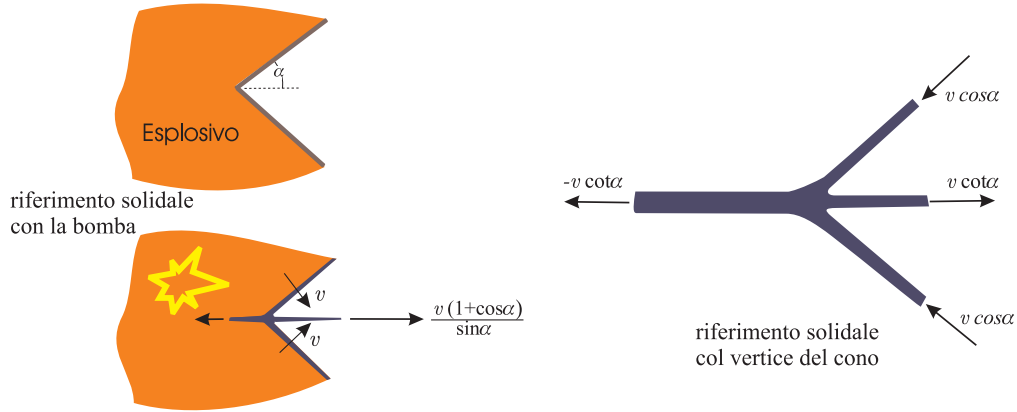


Figura 3.11 Formazione di un getto veloce in un proiettile ad elevata penetrazione. A destra è mostrata schematicamente la struttura dell'ogiva conica in un riferimento solidale con il vertice.

La forza che il fluido esercita sull'ostacolo è uguale alla componente del flusso di momento ortogonale alla direzione x , cioè

$$\rho u^2 S \sin \alpha = F . \quad (3.9.4)$$

Un'applicazione bellica della separazione di un getto in due parti è illustrata nella Figura 3.11. L'ogiva di certi proiettili è costruita in modo da formare un'incavo conico, circondato dalla carica esplosiva. Nel momento dell'esplosione le pareti metalliche del cono vengono spinte dall'enorme pressione verso l'incavo e acquistano una velocità v , normale alle pareti, come mostra la figura. In queste condizioni il metallo diventa plastico, e si comporta come un fluido di alta densità. L'ogiva mantiene approssimativamente la forma conica, mentre nel vertice del cono si genera un'accumulo di metallo fuso che viene proiettato parte in avanti e parte verso l'interno.

In un riferimento che si muove con la velocità $v/\sin \alpha$ del vertice del cono la configurazione appare simile a quella del problema illustrato in Figura 3.10. Pertanto, il metallo delle pareti si muove verso il vertice con una velocità $u = v \cot \alpha$, dando origine a due getti che hanno la stessa velocità ma direzione opposta.

Nel riferimento solidale con il proiettile il getto più sottile è diretto in avanti ed ha una velocità $u + v/\sin \alpha = v(1 + \cos \alpha)/\sin \alpha$. Se l'angolo α è abbastanza piccolo, il metallo dell'ogiva può acquistare una velocità elevatissima e quindi una grande capacità di penetrazione.

CAPITOLO IV

LE LEGGI DEL MOTO

4.1 Introduzione

Le leggi integrali del moto, ricavate nel capitolo precedente, hanno il vantaggio di fornire direttamente e in maniera semplice una serie di informazioni generali sul flusso. Ad esempio, supponendo noto lo stato del sistema in un certo istante e in una certa regione, è possibile conoscere lo stato del flusso in una regione lontana tramite sole operazioni elementari. Il procedimento è simile a quello usato nell'ordinaria meccanica dei corpi rigidi quando si usano i teoremi di conservazione. Questo approccio ha come limite l'impossibilità di conoscere i dettagli del moto nelle regioni intermedie del flusso.

Una completa conoscenza dell'evoluzione spaziale e temporale del flusso si ottiene invece risolvendo le corrispondenti equazioni differenziali che, in ogni istante, governano il moto di una piccolissima porzione di fluido. Purtroppo l'integrazione di queste equazioni è solitamente molto complicata, tanto che sono pochissimi i problemi di fluidodinamica di cui si conosce la soluzione matematica esatta. Spesso per poter affrontare il problema vengono introdotte alcune semplificazioni che possono coinvolgere le proprietà fisiche del fluido (per esempio, l'equazione di stato, la viscosità, ecc.), oppure la stessa struttura matematica delle equazioni (ignorando i termini poco importanti) o, ancora, la geometria della configurazione.

Nei prossimi paragrafi ricaveremo le equazioni differenziali del moto seguendo un procedimento sostanzialmente simile a quello usato per le equazioni integrali, ma facendo uso di volumi di controllo infinitesimi. Per comodità, questi saranno scelti in modo da formare parallelogrammi con facce parallele ai piani coordinati di un riferimento cartesiano $[x, y, z]$. Infine indicheremo con $[u, v, w]$ le componenti cartesiane della velocità \mathbf{v} del fluido invece della usuale notazione $[v_x, v_y, v_z]$.

4.2 Equazione di continuità

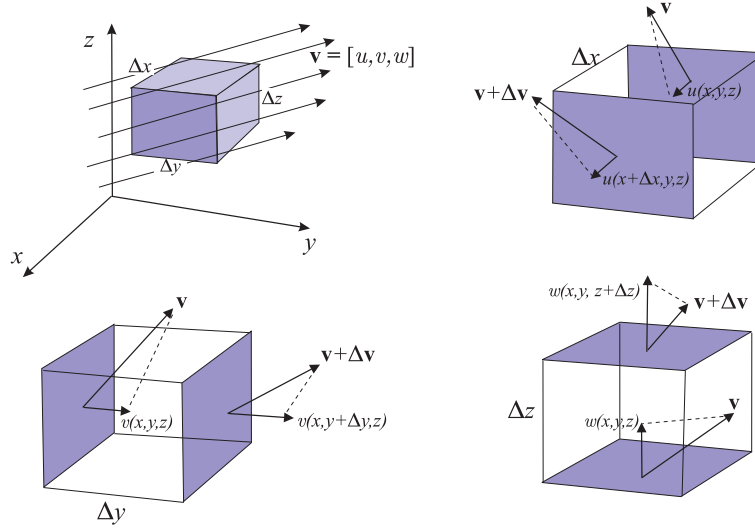


Figura 4.1 Flusso attraverso le sei facce di un parallelepipedo.

Calcoliamo il flusso di materia attraverso le sei facce del parallelepipedo illustrato nella Figura 4.1. La massa che nell'unità di tempo attraversa le due facce ortogonali all'asse x , distanti tra loro Δx ed entrambe di area $S_x = \Delta y \Delta z$, è

$$\begin{aligned} \dot{m}_x &= [\rho \mathbf{v} \cdot \mathbf{n}]_1 S_x + [\rho \mathbf{v} \cdot \mathbf{n}]_2 S_x = \\ &= [-\rho(x, y, z)u(x, y, z) + \rho(x + \Delta x, y, z)u(x + \Delta x, y, z)]\Delta y \Delta z = \\ &= \left[\frac{\partial(\rho u)}{\partial x} \Delta x + O(\Delta x^2) \right] \Delta y \Delta z . \end{aligned}$$

Passando al limite per $\Delta x \rightarrow 0$ e trascurando gli infinitesimi di ordine superiore, si ottiene

$$\dot{m}_x = \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} \Delta x \Delta y \Delta z$$

In maniera analoga i flussi attraverso le facce ortogonali agli assi y e z sono rispettivamente

$$\dot{m}_y = \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} \Delta x \Delta y \Delta z , \quad \dot{m}_z = \frac{\partial(\rho w)}{\partial z} \Delta x \Delta y \Delta z .$$

Un flusso positivo attraverso la superficie del volume di controllo corrisponde a materia sottratta dal suo interno. Pertanto, grazie alla legge di conservazione della massa, la somma $\dot{m}_x + \dot{m}_y + \dot{m}_z$ deve essere

eguale ed opposta alla variazione $\partial(\varrho\Delta V)/\partial t$ della massa contenuta nel volume. Si ha quindi

$$-\frac{\partial\varrho}{\partial t}\Delta x\Delta y\Delta z = \frac{\partial(\varrho u)}{\partial x}\Delta x\Delta y\Delta z + \frac{\partial(\varrho v)}{\partial y}\Delta x\Delta y\Delta z + \frac{\partial(\varrho w)}{\partial z}\Delta x\Delta y\Delta z.$$

Data la generalità del volume di controllo, possiamo affermare che in ogni punto del fluido deve valere la seguente relazione

$$\frac{\partial\varrho}{\partial t} + \frac{\partial(\varrho u)}{\partial x} + \frac{\partial(\varrho v)}{\partial y} + \frac{\partial(\varrho w)}{\partial z} = 0, \quad (4.2.1)$$

che rappresenta la versione differenziale della legge di conservazione (3.5.4). La (4.2.1) è nota anche come **equazione di continuità** e, nel caso di flussi stazionari di fluidi incomprimibili, assume la forma semplice

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0. \quad (4.2.2)$$

4.3 Flusso del momento

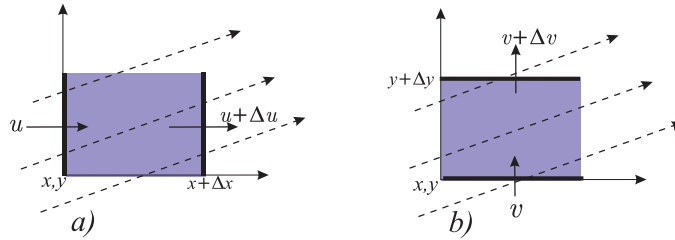


Figura 4.2 Flusso attraverso le sei facce di un parallelogramma.

L'equazione di Rankine ricavata nel paragrafo 3.3 usando un volume di controllo finito esprime un bilancio integrale di una generica quantità trasportata dal fluido. Usando un volume infinitesimo è possibile trovare un'equivalente espressione differenziale. Indichiamo con $\Phi = \varrho q$ la densità di una proprietà intensiva del fluido e calcoliamo la sua variazione all'interno del parallelogramma infinitesimo seguendo il medesimo procedimento del paragrafo precedente. Come nel caso dell'equazione (3.3.2), alla variazione di Φ contribuiscono principalmente due termini. Il primo è legato alla proprietà accumulata nell'interno del volume, ed è eguale a

$$\frac{\partial\Phi}{\partial t}. \quad (4.3.1)$$

Il secondo termine è invece eguale alla proprietà che defluisce (se positiva) o entra (se negativa) attraverso la superficie di controllo. Fissiamo prima l'attenzione sulla due facce ortogonali all'asse x e distanti tra loro Δx (Figura 4.2a). Il flusso di materia che attraversa ciascuna superficie è eguale al prodotto della componente ortogonale della velocità per l'area $\Delta y \Delta z$. La proprietà Φ trasportata è quindi

$$[-\Phi(x)u(x) + \Phi(x + \Delta x)u(x + \Delta x)] \Delta y \Delta z = \frac{\partial(\Phi u)}{\partial x} \Delta x \Delta y \Delta z$$

In maniera simile, la quantità della proprietà che attraversa le due superfici normali all'asse y è (Figura 4.2b)

$$[-\Phi(y)v(y) + \Phi(y + \Delta y)v(y + \Delta y)] \Delta x \Delta z = \frac{\partial(\Phi v)}{\partial y} \Delta x \Delta y \Delta z .$$

Considerando le rimanenti due facce del parallelepipedo, sommando i tre contributi e dividendo per il volume $\Delta V = \Delta x \Delta y \Delta z$, si trova infine il flusso attraverso l'intera superficie

$$\frac{\partial(\Phi u)}{\partial x} + \frac{\partial(\Phi v)}{\partial y} + \frac{\partial(\Phi w)}{\partial z} .$$

Se sommiamo a questo il contributo (4.3.1) si ottiene la *rate* della variazione complessiva della grandezza in esame, cioè

$$\frac{D\Phi}{Dt} = \frac{\partial\Phi}{\partial t} + \frac{\partial(\Phi u)}{\partial x} + \frac{\partial(\Phi v)}{\partial y} + \frac{\partial(\Phi w)}{\partial z} . \quad (4.3.2)$$

L'operatore D/Dt così definito si incontra spesso in fluidodinamica. Esso indica la variazione della proprietà Φ "vista" inseguendo il fluido (v. il paragrafo 3.4), e viene chiamata *derivata convettiva*.

Più significativa, ed anche più frequentemente usata, è l'equazione che si ottiene dalla (4.3.2) esprimendo nel membro di destra la proprietà estensiva Φ in termini dell'equivalente grandezza intensiva $q = \Phi/\varrho$. Abbiamo infatti

$$\begin{aligned} \frac{D\Phi}{Dt} &= \varrho \left(\frac{\partial q}{\partial t} + u \frac{\partial q}{\partial x} + v \frac{\partial q}{\partial y} + w \frac{\partial q}{\partial z} \right) + \\ &+ q \left(\frac{\partial \varrho}{\partial t} + \frac{\partial(\varrho u)}{\partial x} + \frac{\partial(\varrho v)}{\partial y} + \frac{\partial(\varrho w)}{\partial z} \right) . \end{aligned}$$

L'ultimo termine è nullo in virtù dell'equazione di continuità (3.5.1), perciò

$$\frac{D\Phi}{Dt} = \varrho \left(\frac{\partial q}{\partial t} + u \frac{\partial q}{\partial x} + v \frac{\partial q}{\partial y} + w \frac{\partial q}{\partial z} \right) . \quad (4.3.3)$$

Un'importante applicazione si ottiene scegliendo come grandezza intensiva q la quantità di moto per unità di massa, eguale evidentemente al vettore velocità \mathbf{v} . La *rate* di variazione della densità di quantità di moto del fluido è

$$\frac{D(\varrho \mathbf{v})}{Dt} = \varrho \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \varrho \left(u \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial x} + v \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial y} + w \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial z} \right). \quad (4.3.4)$$

Se il fluido è incomprimibile ed il flusso è stazionario, questa relazione diventa

$$\varrho \frac{D\mathbf{v}}{Dt} = \varrho \left(u \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial x} + v \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial y} + w \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial z} \right). \quad (4.3.5)$$

4.4 Equazioni di Navier–Stokes

Ricaviamo ora la forma differenziale dell'equazione del momento nel caso più semplice di un fluido incomprimibile e stazionario.

La forza complessiva \mathbf{F}_T che agisce sul parallelepipedo è data dalla somma delle forze di volume \mathbf{F}_v , di pressione \mathbf{F}_p e viscosi \mathbf{F}_{visc} . Consideriamo solo la componente nella direzione x poichè le formule relative alle altre due direzioni sono del tutto simili ed esaminiamo separatamente queste tre forze.

La forza di volume che più spesso si incontra nei problemi di fluidodinamica è quella esercitata dalla gravità. Nello studio dei mezzi continui conviene introdurre il concetto di forza per unità di massa del fluido, che indicheremo con \mathbf{f} , oppure la densità di forza $\varrho \mathbf{f} = \mathbf{F}_v / \Delta V$. Nel caso della forza peso si ha $\mathbf{f} = \mathbf{g}$.

Per quanto riguarda la pressione, questa esercita su ciascuna delle due facce ortogonali all'asse x le forze $p(x)S_x$ e $-p(x + \Delta x)S_x$. Per $\Delta x \rightarrow 0$ e trascurando nuovamente gli infinitesimi di ordine superiore, la componente della forza di pressione nella direzione dell'asse x è

$$F_{p_x} = [p(x) - p(x + \Delta x)] \Delta y \Delta z = -(\partial p / \partial x) \Delta V. \quad (4.4.1)$$

Evidentemente la pressione sulle rimanenti facce non dà alcun contributo alla componente x della forza.

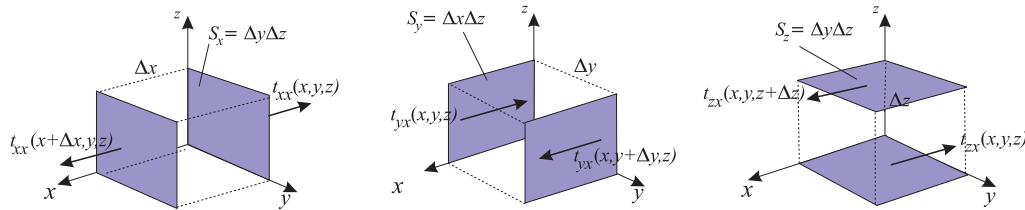


Figura 4.3 Componenti degli sforzi viscosi nella direzione x

Esaminiamo infine l'azione esercitata dalla viscosità. Diversamente dalla pressione, la forza viscosa ha componenti sia tangenziali sia ortogonali a ciascuna faccia. Perciò la componente della forza nella direzione x risulta dalla somma degli sforzi esercitati su tutte le sei facce del parallelepipedo. Raggruppando gli sforzi due a due, si ottiene (v. Figura 4.3)

$$\begin{aligned} -t_{xx}(x)\Delta y\Delta z + t_{xx}(x+\Delta x)\Delta y\Delta z &= \frac{\partial t_{xx}}{\partial x}\Delta V \\ -t_{xy}(y)\Delta x\Delta z + t_{xy}(y+\Delta y)\Delta x\Delta z &= \frac{\partial t_{xy}}{\partial y}\Delta V \\ -t_{xz}(z)\Delta x\Delta y + t_{xz}(z+\Delta z)\Delta x\Delta y &= \frac{\partial t_{xz}}{\partial z}\Delta V . \end{aligned}$$

Conviene esprimere la componente della forza viscosa in termini dei gradienti di velocità del fluido. Usando le relazioni (1.5.5), prive del termine di pressione ^[1], si ricava per la componente x dello sforzo viscoso

$$\begin{aligned} \frac{\partial t_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial t_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial t_{xz}}{\partial z} &= \\ &= 2\mu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \mu \frac{\partial}{\partial y} \left[\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right] + \mu \frac{\partial}{\partial z} \left[\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right] = \\ &= \mu \left[2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y\partial x} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z\partial x} \right] = \\ &= \mu \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) + \mu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) = \\ &= \mu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) . \end{aligned} \quad (4.4.2)$$

Nell'ultimo passaggio si è usata l'equazione di continuità (4.2.2) valida per un flusso stazionario incomprimibile.

In definitiva, la densità della forza totale che agisce su un generico elemento di fluido nella direzione x è data dalla somma

$$\frac{F_{Tx}}{\Delta V} = -\frac{\partial p}{\partial x} + \mu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) + \varrho f_x . \quad (4.4.3)$$

^[1] In generale il tensore degli sforzi (1.5.5) comprende tutte le forze interne. Tuttavia qui per comodità si è preferito esaminare separatamente gli effetti della sola forza viscosa da quelli dovuti alla pressione. (v. la 4.4.1)

Per la seconda legge di Newton, questa grandezza deve essere uguale alla variazione della densità di quantità di moto (4.3.4) se il flusso varia nel tempo, oppure alla (4.3.5) se il moto è stazionario. In quest'ultimo caso, eguagliando la (4.4.3) e la (4.3.5) e dividendo per la densità si ottiene la seguente equazione

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) + f_x. \quad (4.4.4a)$$

dove $\nu = \mu/\rho$ è la viscosità cinematica (v. il §1.3). In maniera analoga si possono ricavare le rimanenti componenti nelle direzioni y e z

$$u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + \nu \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \right) + f_y \quad (4.4.4b)$$

$$u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} + \nu \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \right) + f_z \quad (4.4.4c)$$

Le (4.4.4) sono note come **equazioni di Navier–Stokes** nella forma stazionaria, ed esprimono fondamentalmente la seconda legge di Newton applicata al moto di un fluido con densità costante. Il membro a sinistra dell'eguaglianza contiene le proprietà inerziali del fluido (se moltiplicato per la densità, corrisponde proprio al prodotto della massa per l'accelerazione) e quindi può essere assimilato alla “forza inerziale” che agisce localmente sul mezzo fluido. Le equazioni (4.4.4) affermano che, in condizioni stazionarie, questo termine deve essere bilanciato in ogni istante dalle forze di pressione, viscosi e di volume.

Le equazioni di Navier–Stokes scritte nella forma (4.4.4) sono valide solo in coordinate cartesiane e vengono usate soprattutto quando si studiano flussi piani. Talvolta, però, il problema presenta delle simmetrie che matematicamente vengono affrontate meglio introducendo le coordinate curvilinee che sono più adatte alla geometria della configurazione (ad esempio, coordinate sferiche, cilindriche, ecc). Nell'Appendice A sono riportate le equazioni di Navier–Stokes espresse nei tre principali sistemi di riferimento.

4.5 Proprietà delle equazione del moto

Le equazioni di Navier–Stokes (4.4.4) e l’equazione di continuità (4.2.1) formano un sistema di *quattro* equazioni alle derivate parziali nelle *cinque* variabili u, v, w, ϱ, p . Per chiudere il sistema è necessario aggiungere un’equazione costitutiva di stato $E(p, \varrho) = 0$ che fissa il legame tra la densità e la pressione ^[2] Il numero di incognite diventa in questo modo coerente con il numero di equazioni.

Si noti che le equazioni di Navier–Stokes *non sono lineari* nella velocità. Questo dipende dal fatto che, diversamente dal moto dei corpi rigidi, nei fluidi la velocità esercita un doppio ruolo: da un lato agisce come grandezza che cambia coerentemente col movimento degli elementi di fluido soggetti alle forze circostanti, e dall’altro contribuisce essa stessa a governare la rapidità di queste variazioni. La non linearità comporta una considerevole complicazione matematica poichè, diversamente da quanto accade in altri settori della fisica, impedisce di poter usare la regola di sovrapposizione delle soluzioni. Ad esempio, è noto che le equazioni che governano il campo elettrico sono lineari. Questo significa che il campo elettrico di un dipolo può essere ricondotto alla somma dei campi prodotti separatamente dalle due cariche. Al contrario, il moto di un fluido che incontra due ostacoli sferici non è affatto riducibile alla somma di due flussi indipendenti che attraversano ciascuno una singola sfera.

La non linearità fa sì che siano poche soluzioni esatte dei moti fluidi, tanto che la nostra conoscenza dei processi fluidodinamici deriva solo in parte dalle indagini teoriche. Infatti, molti sviluppi sono stati possibili grazie a misure empiriche dirette. In altri casi ci si è avvalsi di soluzioni autosimilari, o dell’analisi di flussi in regimi molto particolari, per i quali è possibile ignorare alcuni termini delle equazioni di Navier–Stokes, ed ottenendo quindi delle soluzioni approssimate (v. il paragrafo 4.7).

4.6 Condizioni al contorno

Come in ogni problema governato da equazioni differenziali, la soluzione di un moto fluido richiede l’assegnazione di specifiche condizioni al contorno. Questi vincoli sono strettamente legati al problema in

[2] Se la densità è costante, ϱ diventa un parametro, e non più una variabile, del problema. Nel caso più generale, l’equazione di stato coinvolge, oltre alla densità e alla pressione, anche la temperatura. La presenza di una sesta funzione incognita richiede allora l’introduzione di un’ulteriore equazione, che di solito è la legge di diffusione del calore. Tuttavia nel seguito noi escluderemo questa possibilità.

esame, e quindi possono essere molto diversi tra loro. Tuttavia, se si fa astrazione dai dettagli geometrici, le condizioni al contorno presentano spesso alcuni aspetti che sono comuni a tutte le configurazioni fluide.

Una richiesta che ricorre spesso riguarda l'impermeabilità del fluido nei riguardi degli ostacoli (pareti del recipiente, corpi immersi nel fluido, ecc.). Formalmente questa viene fatta imponendo che sulla superficie dell'ostacolo la componente ortogonale della velocità relativa sia nulla. Se l'ostacolo è fermo, la condizione al contorno è

$$\mathbf{v} \cdot \mathbf{n} = 0 \quad (4.6.1)$$

dove \mathbf{n} è il versore normale alla superficie. Questa condizione viene violata solo in situazioni molto particolari, come sulle superfici porose.

Un'altro vincolo deriva dalla richiesta che il fluido immediatamente a contatto con l'ostacolo rigido non abbia velocità relativa nella direzione tangente alla superficie (*scorrimento nullo* o *no-slip condition*). Matematicamente ciò significa che

$$\mathbf{v} \times \mathbf{n} = 0 . \quad (4.6.2)$$

Occorre sottolineare che questa condizione ha un'origine molto diversa dalla richiesta di impermeabilità. Infatti l'assenza di scorrimento deriva dalla tacita ammissione che la viscosità sia una proprietà universale dei fluidi. In realtà questa condizione trova la sua piena giustificazione soprattutto sulla base delle osservazioni. D'altra parte, se supponiamo che la viscosità soddisfi alla legge empirica di Newton, una discontinuità della velocità in prossimità della parete rigida comporterebbe l'insorgere di sforzi infiniti, tali da annullare rapidamente la discontinuità stessa ^[3].

Usando coordinate cartesiane con $\mathbf{v} \equiv [u, v, w]$, le (4.6.1) e (4.6.2) sono equivalenti alle equazioni

$$u = v = w = 0 . \quad (4.6.3)$$

Non sempre le condizioni di eguale velocità relativa nella regione di contatto tra due differenti mezzi è una condizione sufficiente. Se, ad esempio, un fluido newtoniano è a contatto con un secondo fluido dotato di un differente movimento (Figura 4.4), sulle due facce della superficie di separazione non solo le velocità devono essere eguali, ma in

^[3] A rigore la *no-slip condition* viene violata quando il cammino libero medio delle molecole è paragonabile alle dimensioni del sistema. Ma in questo caso perdono la loro validità anche le equazioni della fluidodinamica fenomenologica, in quanto fondate sul modello dei mezzi continui.

ogni punto devono essere bilanciati anche gli sforzi viscosi esercitati dai due fluidi. Perciò se i due fluidi hanno viscosità rispettivamente μ_1 e μ_2 , occorre completare le condizioni al contorno imponendo l'ulteriore equazione

$$\mu_1 \frac{du_1}{dy} = \mu_2 \frac{du_2}{dy}, \quad (4.6.3)$$

dove y indica la direzione verticale alla superficie. Evidentemente i gradienti sono eguali se anche le viscosità sono eguali.

Alle volte i vincoli vengono assegnati in parti ben definite del flusso, come le superfici di separazione con altri corpi. In altri casi occorre invece precisare lo stato del fluido in regioni “infinitamente” lontane. Queste ultime condizioni possono avere, ad esempio, la forma

$$\mathbf{v} \rightarrow \mathbf{u}_\infty \quad \text{per} \quad r \rightarrow \infty, \quad (4.6.4)$$

dove u_∞ è un prefissato campo di velocità.

Anche la pressione (o la densità), in quanto funzione incognita del problema, richiede l'assegnazione di opportune condizioni al contorno. Queste però dipendono strettamente dal problema in esame e spesso sono legate allo stato del mezzo nelle regioni dove il flusso è sufficientemente regolare (infinito, regioni a velocità nulla, ecc.).

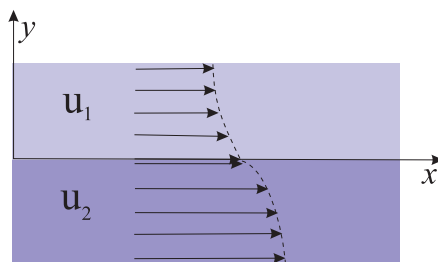


Figura 4.4 Profilo di velocità in due differenti flussi adiacenti.

4.7 Grandi e piccoli numeri di Reynolds

Le equazioni di Navier–Stokes, anche nella forma stazionaria ^[4], sono talmente complicate da limitare il numero di soluzioni esatte solo a pochissimi casi geometricamente semplici (v. il Capitolo 6). L’approccio che è stato seguito, soprattutto in passato, per comprendere meglio la fisica dei fluidi consiste nella semplificazione matematica delle equazioni del moto operata mediante l’eliminazione dei termini che sono dinamicamente poco importanti. Il metodo si basa sulle seguenti considerazioni che, per semplicità, saranno limitate a flussi bidimensionali non soggetti a forze di volume. Le corrispondenti equazioni di Navier–Stokes semplificate sono

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) \quad (4.7.1a)$$

$$u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + \nu \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) \quad (4.7.1b)$$

Indichiamo con U la velocità caratteristica del flusso e con L la scala delle distanze lungo le quali dove avvengono variazioni significative della velocità come, ad esempio, la dimensione di un ostacolo, il diametro di un condotto, ecc. Se esaminiamo l’ordine di grandezza dei due termini rispettivamente inerziale e viscoso della (4.7.1a) otteniamo

$$\text{forze inerziali:} \quad \left| u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} \right| \approx \frac{U^2}{L} \quad (4.7.2a)$$

$$\text{forze viscosi:} \quad \nu \left| \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right| \approx \frac{\nu U}{L^2} . \quad (4.7.2b)$$

Un risultato identico vale per l’equazione (4.7.1b). Il rapporto

$$\frac{[\text{forze inerziali}]}{[\text{forze viscosi}]} \approx \frac{UL}{\nu} = \text{Re} \quad (4.7.3)$$

fissa l’importanza relativa dei due principali processi dinamici ed è eguale al numero di Reynolds introdotto nel paragrafo 2.2. Esaminiamo ora più in dettaglio quali conseguenze comporta il fatto di assumere flussi che hanno un valore del numero di Reynolds nei due limiti estremi molto minore e molto maggiore dell’unità.

^[4] La mancanza di stazionarietà comporta la comparsa in ciascuna delle equazioni (4.4.4) di un termine addizionale contenente la derivata temporale della velocità, rispettivamente $\partial u/\partial t$, $\partial v/\partial t$ e $\partial w/\partial t$. Questo naturalmente aumenta ancor più la complessità delle equazioni.

Nelle regioni nelle quali $Re \ll 1$ la forza viscosa è dominante rispetto alla forza inerziale, e i corrispondenti termini nelle equazioni di Navier–Stokes possono essere trascurati. In particolare le equazioni (4.7.1) diventano

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} = \nu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) \quad (4.7.4a)$$

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} = \nu \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) . \quad (4.7.4b)$$

I flussi di questo genere sono detti **moti di scorrimento** (o *creeping motion*), e sono caratterizzati da un sostanziale equilibrio tra le forze viscosi e le forze di pressione (più le eventuali forze di volume). Questa situazione è equivalente alla condizione meccanica di bilancio delle forze esterne su un corpo solido con accelerazione nulla. Pur essendo del secondo ordine, l'equazione (4.7.4) ha il vantaggio di essere lineare ed è quindi più facilmente risolvibile. Si conoscono infatti un certo numero di soluzioni esatte dei flussi a basso numero di Reynolds, alcune delle quali verranno discusse nel Capitolo 6. Sebbene dal punto di vista teorico i flussi con basso numero di Reynolds siano più semplici da studiare, essi hanno uno scarso interesse pratico. Infatti i moti di scorrimento richiedono velocità talmente basse da essere difficilmente realizzabili anche in laboratorio.

Nel limite opposto $Re \gg 1$ i termini viscosi sono trascurabili rispetto a quelli inerziali. Le equazioni di Navier–Stokes mantengono la non linearità ma diventano del primo ordine. Ad esempio, le (4.7.1) prendono la forma

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} \quad (4.7.5a)$$

$$u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} , \quad (4.7.5b)$$

e sono note come **equazioni di Eulero**. Il comportamento del flusso diventa identico a quello dei fluidi ideali il cui moto è determinato esclusivamente dal gradiente di pressione e dalle forze di volume.

I flussi con elevato numero di Reynolds sono molto più complessi da studiare rispetto ai flussi di scorrimento. Questo succede da un lato perchè le equazioni non sono lineari e dall'altro a causa della scomparsa del termine contenente le derivate seconde. Il fatto che l'abbassamento dell'ordine comporti uno svantaggio anzichè una semplificazione può sembrare paradossale. Questo è legato non tanto all'aspetto matematico del problema, ma piuttosto all'interpretazione fisica che può essere

attribuita all'eventuale soluzione delle equazioni semplificate. Infatti l'abbassamento dell'ordine comporta necessariamente anche una simultanea riduzione del numero di condizioni al contorno. D'altronde una parte di questi vincoli contengono informazioni proprio sulla natura e sulla modalità dell'interazione tra il fluido e le superfici solide come, ad esempio, la *no-slip condition* sull'annullarsi della velocità nella regione a contatto tra i due mezzi. Perciò il fatto di eliminare il contributo legato alla viscosità implica che automaticamente vengono a mancare alcune informazioni fondamentali sul flusso.

Possiamo allora porci la domanda: quale significato fisico dobbiamo attribuire alle soluzioni delle equazioni di Eulero? I modelli di fluidi inviscidi possono fornire una descrizione ragionevole della realtà? In passato questo problema ha generato una notevole confusione e ha dato origine ad una serie di paradossi, tra i quali il più noto è il *paradosso di d'Alembert* (v. il §5.11).

Gli aspetti matematici e fisici della controversia sono stati chiariti completamente solo nella prima metà del 1900 nei seguenti termini: quando il numero di Reynolds è molto grande le equazioni di Eulero forniscono una risposta sufficientemente corretta del flusso *in tutte le regioni lontane* dai corpi sui quali vengono imposte le condizioni al contorno. Tuttavia in prossimità della superficie del solido vi è una regione, chiamata *strato limite*, dove i termini viscosi rimangono comunque importanti, indipendentemente dal valore di Re . All'interno dello strato limite il fluido deve essere studiato partendo necessariamente dalle equazioni contenenti anche le derivate secondo ordine, e risolvendo quindi il problema con l'appropriato numero di condizioni al contorno.

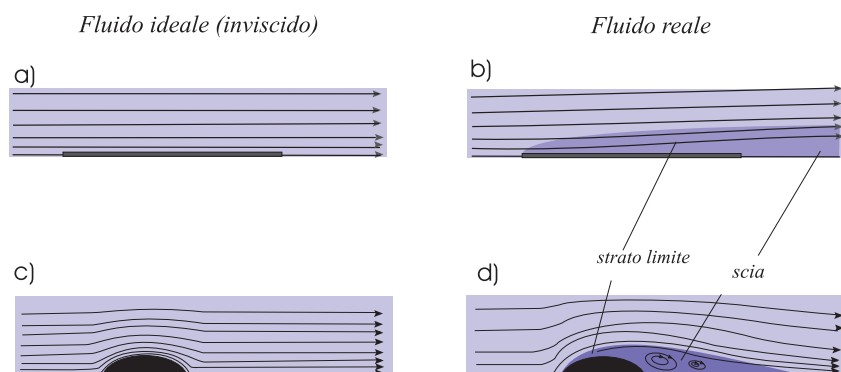


Figura 4.5 A sinistra: flusso ideale attraverso una lamina (a) o un corpo arrotondato (c). A destra: Gli stessi corpi attraversati da un fluido reale.

La teoria dello strato limite sarà studiata in dettaglio nel Capitolo 8. Come vedremo, sebbene lo spessore dello strato tenda a zero quando

$Re \rightarrow \infty$, il comportamento generale del flusso può essere molto diverso da quello inviscido. Infatti, alle volte la presenza dello strato è in grado di alterare indirettamente l'intera configurazione, provocando la deviazione delle linee di corrente anche a grande distanza dagli ostacoli. Inoltre lo strato viscoso genera alle spalle dell'ostacolo una *scia* all'interno della quale la distribuzione del flusso differisce notevolmente da quella che si avrebbe se il fluido fosse effettivamente ideale. Nella Figura 4.5 sono mostrati due esempi che mettono a confronto le situazioni reali e ideali di un flusso che investe una piastra o un corpo bombato.

4.8 Compressibilità

Nei precedenti paragrafi si è fatta spesso l'ipotesi restrittiva che la densità del fluido sia costante. Come abbiamo anticipato nel paragrafo 2.5, questa approssimazione risulta accettabile in tutte le regioni di fluido in cui la velocità è molto inferiore alla velocità del suono a .

La dimostrazione si basa sulla ricerca di un criterio generale di validità della disuguaglianza

$$\Delta \varrho / \varrho \ll 1 . \quad (4.8.1)$$

Per prima cosa osserviamo che ogni variazione di densità $\Delta \varrho$ rispetto alla densità locale è necessariamente accompagnata da una variazione di pressione Δp , dal momento che pressione e densità sono legate tra loro dall'equazione di stato del fluido. In particolare vale relazione approssimata (cfr. la 2.5.2)

$$\frac{\Delta p}{\Delta \varrho} \approx \frac{p}{\varrho} \approx a^2 . \quad (4.8.2)$$

D'altra parte, le equazioni di Eulero (4.7.5) ci dicono che il termine contenente la pressione e quello che coinvolge la velocità del fluido devono essere ovunque bilanciati ^[5], e quindi dovremo avere come ordine di grandezza

$$\Delta p / \varrho \approx u \Delta u \lesssim u^2 , \quad (4.8.3)$$

nella quale si è tenuto conto del fatto che la massima variazione di velocità non può essere maggiore della stessa velocità del flusso. Confrontando la (4.8.2) e la (4.8.3) si trova allora che in ogni regione del fluido deve valere la disuguaglianza

$$\frac{\Delta \varrho}{\varrho} \lesssim \frac{u^2}{a^2}$$

[5] Trascuriamo qui la viscosità assumendo un numero di Reynolds maggiore di uno, che corrisponde anche alla situazione più frequente.

La condizione (4.8.1) è chiaramente soddisfatta se

$$M \ll 1, \quad (4.8.4)$$

dove $M = u/a$ è il numero di Mach definito nel §2.5.

Viceversa quando esistono regioni del fluido dove $M \gtrsim 1$ si rende necessario includere nelle equazioni anche la densità come variabile e non più come parametro costante.

Fatta eccezione degli argomenti trattati nel Capitolo 9, dove studieremo in forma semplificata alcune proprietà dei flussi transonici o supersonici, nei prossimi capitoli prenderemo in esame fluidi (liquidi o gassosi) per i quali vale la condizione (4.8.4) e che pertanto potranno essere considerati di fatto incompressibili.

CAPITOLO V

LINEE DI CORRENTE, FLUSSO

POTENZIALE E VORTICITÀ

5.1 Introduzione

Lo studio dei fluidi incompressibili viene spesso facilitato dall' introduzione di alcune funzioni ausiliarie che verranno descritte in questo Capitolo.

A seconda della simmetria del problema useremo di volta in volta coordinate cartesiane rettangolari, cilindriche o sferiche, sopprimendo per semplicità almeno una delle componenti della velocità (flussi uni- o bi-dimensionali).

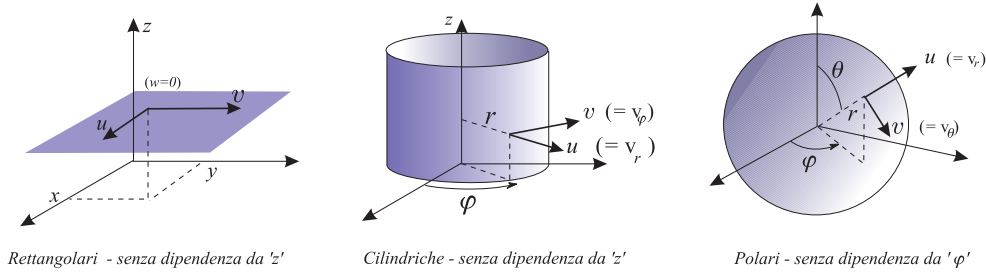


Figura 5.1 Coordinate rettangolari, cilindriche e polari in flussi bidimensionali.

Per comodità riportiamo qui sotto la forma dell'equazione di continuità nei tre principali riferimenti (v. Figura 5.1).

$$\text{coordinate cartesiane: } \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (5.1.1)$$

$$\text{coordinate cilindriche: } \frac{1}{r} \frac{\partial(r u)}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \varphi} = 0 \quad (5.1.2)$$

$$\text{coordinate sferiche: } \frac{1}{r^2} \frac{\partial(r^2 u)}{\partial r} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial(v \sin \theta)}{\partial \theta} = 0 \quad (5.1.3)$$

5.2 Funzione di corrente

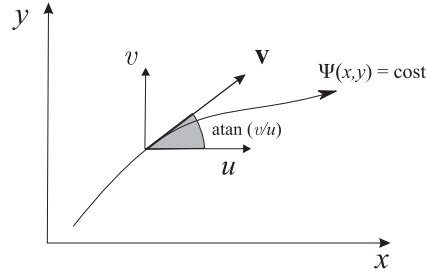


Figura 5.2 La direzione della velocità è tangente alle linee di flusso.

Un'importante caratteristica dei fluidi incompruibili è data dalla possibilità di definire una funzione scalare $\Psi(x, y)$ della sola posizione legata alle componenti della velocità dalle equazioni

$$u = \frac{\partial \Psi(x, y)}{\partial y} \quad (5.2.1a)$$

$$v = -\frac{\partial \Psi(x, y)}{\partial x} . \quad (5.2.1b)$$

Questa proprietà deriva direttamente dall'equazione di continuità

$$\frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{\partial v}{\partial y} . \quad (5.2.2)$$

Possiamo notare, infatti, che la (5.2.2) rappresenta anche la condizione necessaria e sufficiente affinché la forma differenziale

$$d\Psi = u \, dy - v \, dx \quad (5.2.3)$$

sia esatta. Dalle (5.2.2) e (5.2.3) seguono evidentemente le (5.2.1). La funzione scalare

$$\Psi(x, y) = \int (u \, dy - v \, dx) + \Psi_0 , \quad (5.2.4)$$

dove Ψ_0 è una costante arbitraria, prende il nome di *funzione di corrente* o di *flusso* ed è misurabile in $\text{m}^2 \text{s}^{-1}$. Uno dei vantaggi dell'introduzione della funzione di corrente nello studio dei moti bidimensionali è quella di sostituire le due componenti indipendenti della velocità u e v con una singola funzione. Il metodo permette anche

di avere una immediata visualizzazione dell'andamento del flusso mediante la rappresentazione grafica delle *linee di corrente*. Queste linee, che possono essere associate alle traiettorie effettive delle particelle di fluido, sono geometricamente definite dall'equazione

$$\Psi(x, y) = k, \quad (5.2.5)$$

al variare del parametro costante k .

Il valore (arbitrario) assegnato alla costante di integrazione Ψ_0 fissa automaticamente la linea di riferimento convenzionale che ha il valore $\Psi = 0$. Lungo le curve $\Psi = \text{costante}$ si ha

$$0 = d\Psi = \frac{\partial \Psi}{\partial x} dx + \frac{\partial \Psi}{\partial y} dy = -v dx + u dy, \quad (5.2.6)$$

ossia

$$\left(\frac{dy}{dx} \right)_{\Psi=\text{cost}} = \frac{v}{u}. \quad (5.2.7)$$

La tangente alle linee di corrente coincide dunque con la direzione della velocità istantanea del fluido (v. Figura 5.2).

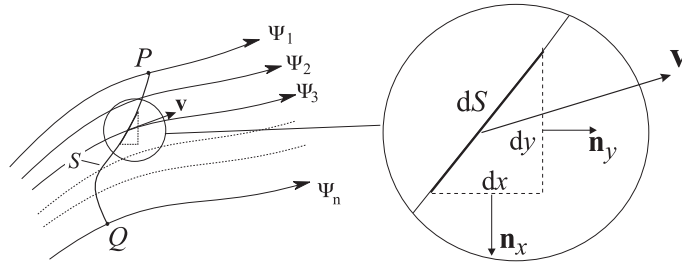


Figura 5.3 Linee di flusso

Le linee di corrente hanno anche un'altra interessante proprietà legata alla portata del flusso. Facendo riferimento alla Figura 5.3 tracciamo una generica curva PQ che collega due linee qualsiasi Ψ_1 e Ψ_n . Questa curva identifica una superficie S che supponiamo abbia uno spessore Δz nella direzione ortogonale al piano del disegno. La quantità di fluido che attraversa nell'unità di tempo un elemento infinitesimo di area dS di questa superficie è dato da $(u dy - v dx) \Delta z$. Integrando sull'intera superficie e dividendo il risultato per Δz si ottiene

$$\begin{aligned} \frac{Q}{\Delta z} &= \int_P^Q (u dy - v dx) = \int_P^Q \left(\frac{\partial \Psi}{\partial y} dy + \frac{\partial \Psi}{\partial x} dx \right) = \\ &= \int d\Psi = \Psi_n - \Psi_1, \end{aligned} \quad (5.2.8)$$

cioè la portata per unità di spessore attraverso due linee di flusso Ψ_1 e Ψ_n è eguale alla differenza tra i valori delle rispettive funzioni di corrente, ed è indipendente dalla scelta dei due punti P e Q e dalla linea che li unisce. Questo significa che le curve che differiscono tra loro per lo stessa quantità $\Delta\Psi$ si addensano in zone dove il fluido scorre più velocemente.

Si noti dalla figura che in corrispondenza a valori crescenti di Ψ verso l'alto (cioè per y crescenti) si ha un flusso diretto verso sinistra (cioè per x decrescente), e viceversa. Infine, come regola generale si tenga presente che la derivata di Ψ in una certa direzione fornisce la componente ortogonale a questa direzione nel verso antiorario.

Per completezza riportiamo le equazioni delle linee di corrente nei riferimenti non cartesiani. Le formule possono essere ricavate con un procedimento analogo al precedente applicato alle equazioni di continuità rispettivamente (5.1.4) e (5.1.7). In coordinate cilindriche (r, φ, z) e assumendo un flusso bidimensionale con $v_z = 0$, le relazioni tra la funzione corrente e le componenti radiale e tangente della velocità sono

$$v_r = \frac{1}{r} \frac{\partial \Psi(r, \varphi)}{\partial \varphi} \quad (5.2.9a)$$

$$v_\varphi = -\frac{\partial \Psi(r, \varphi)}{\partial r} . \quad (5.2.9b)$$

Mentre in un flusso con simmetria sferica e $v_\varphi = 0$, le corrispondenti velocità radiali e azimutali nelle coordinate (r, θ, φ) risultano

$$v_r = \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial \Psi(r, \theta)}{\partial \theta} \quad (5.2.10a)$$

$$v_\theta = -\frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial \Psi(r, \theta)}{\partial r} . \quad (5.2.10b)$$

5.3 Potenziale di velocità

In certe condizioni la velocità di un fluido può essere espressa come gradiente di una funzione potenziale. Nei flussi bidimensionali stazionari il *potenziale di velocità* $\Phi(x, y)$ è implicitamente definito dalle equazioni

$$u = \frac{\partial \Phi(x, y)}{\partial x} \quad (5.3.1a)$$

$$v = \frac{\partial \Phi(x, y)}{\partial y} . \quad (5.3.1b)$$

Le (5.3.1) hanno una forma simile alle (5.2.3). Tuttavia, mentre la funzione Ψ esiste solo per flussi che mantengono la densità costante, il differenziale di Φ

$$d\Phi = u dx + v dy \quad (5.3.2)$$

è esatto (e quindi il flusso è *potenziale*), solo se è soddisfatta la relazione

$$\omega \equiv \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} = 0. \quad (5.3.3)$$

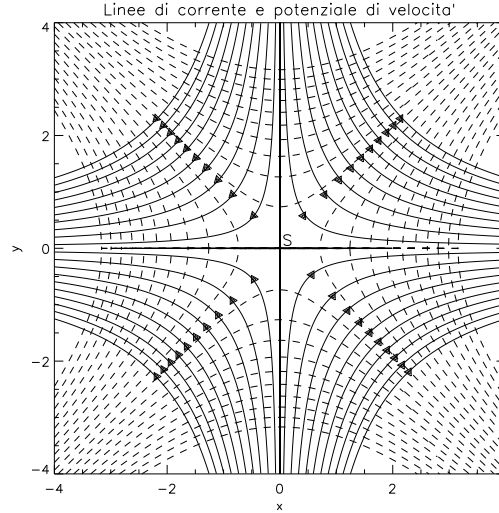


Figura 5.4 Linee di corrente (curve continue) e di eguale potenziale di velocità (curve tratteggiate) in una configurazione con un punto di stagnazione S (v. §5.7)

I flussi che soddisfano a questa condizione vengono detti *irrotazionali* per il motivo che sarà chiarito nel paragrafo 5.13.

La pendenza di una linea equipotenziale, lungo la quale $u dx + v dy = 0$, è data da

$$\left(\frac{dy}{dx} \right)_{\Phi=\text{cost}} = - \frac{\partial \Phi / \partial x}{\partial \Phi / \partial y} = - \frac{u}{v}. \quad (5.3.4)$$

Un confronto con la (5.2.5) mostra che queste curve sono in ogni punto ortogonali alle linee di corrente.

Un semplice esempio di flusso incomprimibile irrotazionale, che pertanto soddisfa contemporaneamente ad entrambe le condizioni (5.2.2) e (5.3.3), è illustrato nella Figura 5.4. Questa speciale configurazione presenta un *punto di stagnazione* S in cui la velocità si annulla e verrà studiato in maggior dettaglio nel paragrafo 5.7.

Anche per il potenziale Φ riportiamo per comodità le relazioni con le componenti della velocità di flussi bidimensionali con simmetria cilindrica o sferica. In coordinate cilindriche (con $v_z = 0$) si ottiene

$$v_r = \frac{\partial \Phi(r, \varphi)}{\partial r} \quad (5.3.5a)$$

$$v_\varphi = \frac{1}{r} \frac{\partial \Phi(r, \varphi)}{\partial \varphi} . \quad (5.3.5b)$$

Le medesime espressioni sono valide in un riferimento sferico (con $v_\varphi = 0$), purchè si sostituisca la coordinata angolare φ con quella polare θ .

5.4 Flusso uniforme

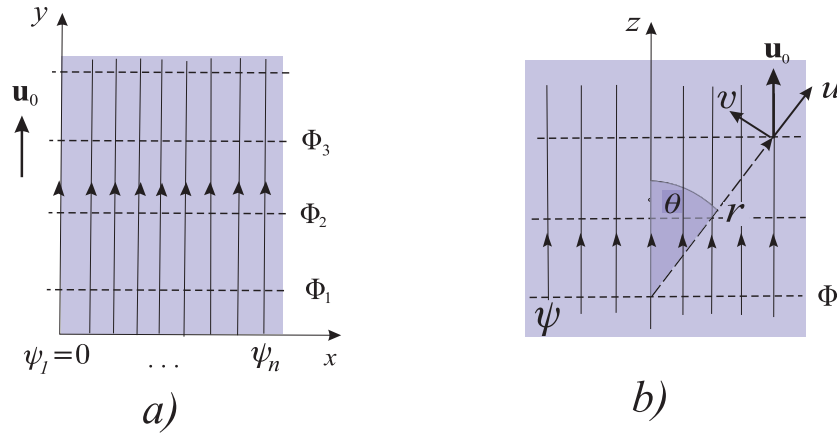


Figura 5.5 a): Flusso uniforme nella direzione dell'asse x (coordinate rettangolari). b): flusso uniforme nella direzione z (coordinate polari).

La configurazione fluida più semplice è formata da un flusso uniforme in cui gli strati scorrono con velocità costante lungo piani paralleli, come è illustrato nella Figura 5.5. In coordinate cartesiane e assumendo che la velocità u_0 del fluido sia diretta lungo l'asse y , si ha

$$\frac{\partial \Phi}{\partial y} = \frac{\partial \Psi}{\partial x} = u_0 \quad (5.4.1a)$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x} = -\frac{\partial \Psi}{\partial y} = 0 \quad (5.4.1b)$$

Integrando le (5.4.1) nella funzione di corrente Ψ si ottiene

$$\Psi(x, y) = u_0 x + f(y) \quad (5.4.2a)$$

$$\Psi(x, y) = g(x) + \text{cost} \quad (5.4.2b)$$

Il confronto tra queste due soluzioni porta alla seguente espressione

$$\Psi(x, y) = u_0 x, \quad (5.4.3)$$

dove si è assegnato il valore $\Psi = 0$ alla linea passante per l'origine. In maniera analoga, integrando le (5.4.1) in Φ si ricava la funzione potenziale

$$\Phi(x, y) = u_0 y. \quad (5.4.4)$$

Possiamo ricavare facilmente anche le funzioni di corrente e potenziale di un flusso uniforme in coordinate sferiche (Figura 5.5b). Si trovano le seguenti espressioni

$$\Psi(r, \theta) = u_0 r \sin \theta \quad (5.4.5)$$

$$\Phi(r, \theta) = u_0 r \cos \theta \quad (5.4.6)$$

5.5 Vorticità

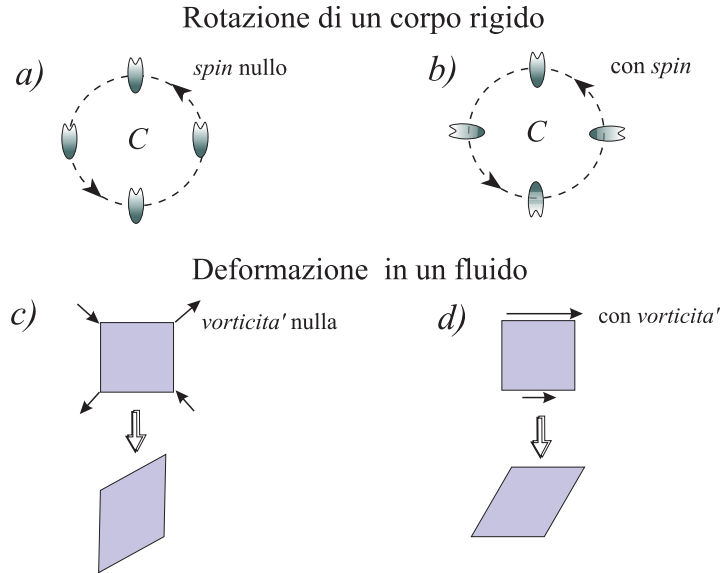


Figura 5.6 *In alto:* traiettoria circolare di un corpo rigido con e senza rotazione intrinseca. *In basso:* deformazione di una porzione di fluido con e senza vorticità.

Come abbiamo visto nel paragrafo 5.3, l'esistenza del potenziale di velocità richiede che la differenza

$$\omega = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}, \quad (5.5.1)$$

sia nulla nell'intera regione occupata dal fluido. La funzione ω viene chiamata *vorticità* e costituisce una delle grandezze fondamentali della

teoria dei fluidi essendo legata alle proprietà di rotazione del flusso. In coordinate cilindriche (o sferiche) (r, θ) la vorticità è data da

$$\omega = \frac{1}{r} \frac{\partial(r v)}{\partial r} - \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \theta} . \quad (5.5.2)$$

con $u = v_r$ e $v = v_\theta$.

Sebbene la definizione di vorticità trovi la sua piena giustificazione nello studio del movimento di fluidi viscosi in tre dimensioni ^[1], daremo qui alcune delle sue principali proprietà utilizzando flussi bidimensionali.

È innanzitutto opportuno precisare che la relazione tra vorticità e rotazione deve essere intesa come una proprietà *locale* del fluido. Possiamo visualizzare questo importante aspetto ricorrendo ad una semplice analogia meccanica (Figura 5.6). Un corpo rigido può descrivere una traiettoria circolare senza possedere momento angolare intrinseco (*spin*), come mostra l'immagine di sinistra. Nel movimento illustrato a destra il corpo possiede invece *spin*. Una situazione analoga si verifica nei moti fluidi ma, diversamente dai solidi, in questo caso occorre esaminare anche l'effetto indotto dalla deformazione del mezzo poichè vi può essere o meno un ulteriore contributo alla vorticità a seconda delle modalità con cui essa avviene (Figura 5.6 in basso).

Chiariamo queste affermazioni con l'aiuto di due esempi: nel primo immaginiamo che un fluido formi un vortice che ruota attorno ad un punto C con velocità angolare Ω . Le componenti cartesiane della velocità sono $u = -\Omega y$ e $v = \Omega x$, e quindi

$$\omega = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} = 2\Omega + x \frac{\partial \Omega}{\partial x} + y \frac{\partial \Omega}{\partial y} .$$

Si vede facilmente che se il fluido ruota rigidamente ($\Omega = \text{costante}$) la vorticità rimane eguale in tutti i punti del flusso ed il suo valore è pari al doppio della velocità angolare. Questa situazione è simile alla rotazione della particella con *spin* della Figura 5.6b. Se invece la velocità angolare del fluido decresce con la distanza r dal punto C secondo la legge $\Omega = K/r^2 = K/(x^2 + y^2)$, per $r > 0$ si ottiene $\omega = 0$, cioè la vorticità è ovunque nulla tranne nel centro del vortice dove la velocità è singolare. Quest'ultima situazione è, per alcuni aspetti, simile alla circolazione senza *spin* illustrata nella Figura 5.6a.

Come secondo esempio, consideriamo un flusso con velocità $u = u(y)$ e $v = w = 0$. In questo caso $\omega = -\partial u / \partial y$. Pur trattandosi di un flusso piano unidirezionale, in ogni punto il fluido è caratterizzato da vorticità non nulla.

[1] Infatti la vorticità è una grandezza vettoriale, di cui la (5.5.1) è solo la componente z . Le rimanenti componenti sono $\omega_x = \partial v / \partial z - \partial w / \partial y$ e $\omega_y = \partial w / \partial x - \partial u / \partial z$. Nella notazione vettoriale $\boldsymbol{\omega} = \text{rot } \mathbf{v}$.

5.6 Equazione di Laplace

Se il flusso è potenziale, possiamo sostituire le definizioni di funzione potenziale (5.3.1) nell'equazione di continuità (5.1.1), che in questo modo diventa

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} = 0. \quad (5.6.1)$$

La (5.6.1) è un'equazione del secondo ordine alle derivate parziali, nota come *equazione di Laplace* ^[2]. Essa è utilizzata soprattutto per studiare i flussi tridimensionali perchè permette di affrontare il problema mediante una singola funzione invece delle tre componenti della velocità.

Le funzioni che soddisfano all'equazione di Laplace sono dette *armoniche*, e sono ovunque regolari con derivate regolari, tranne eventualmente nei bordi (v. l'Appendice D). Proprietà fondamentale dell'equazione di Laplace è la linearità. Questo risultato è particolarmente importante perchè, tra l'altro, implica la possibilità di applicare il principio di sovrapposizione alle soluzioni. È notevole il fatto che la condizione di flusso incomprimibile e irrotazionale, da cui è stata derivata la (5.6.1), rende intrinsecamente lineare il flusso nonostante non lo siano in generale le equazioni di Navier–Stokes.

L'utilità di risolvere le equazioni di Laplace invece delle equazioni di Navier–Stokes deriva dal fatto che esistono dei procedimenti matematici sufficientemente generali che permettono di integrare la (5.6.1) soprattutto quando il problema presenta delle simmetrie. Dopo aver risolto l'equazione (5.6.1) con le opportune condizioni al contorno, e aver quindi ricavato la funzione $\Phi(x, y)$, si calcola la velocità del fluido utilizzando le definizioni (5.3.1). Inoltre, per integrazione delle (5.2.1), è possibile dedurre anche la forma della funzione corrente. In realtà la relazione tra Φ e Ψ può essere scritta esplicitamente uguagliando le componenti delle velocità date dalle (5.2.1) e (5.3.1). Si ottengono così le seguenti *equazioni di Cauchy-Riemann*

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x} = \frac{\partial \Psi}{\partial y} \quad (5.6.2a)$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial y} = -\frac{\partial \Psi}{\partial x} \quad (5.6.2b)$$

Ricordiamo infine che uno dei parametri fondamentali di un flusso è dato dalla pressione. Questa non compare esplicitamente nelle equa-

^[2] L'equazione di Laplace compare in molti settori della fisica, come ad esempio nella teoria dei potenziali delle forze fondamentali. Questo spiega tra l'altro l'origine del termine “potenziale” di velocità attribuito alla funzione Φ

zioni di Laplace, ma dovrà essere calcolata, dopo che il problema cinematico è stato risolto, inserendo nelle equazioni di Navier–Stokes le espressioni della velocità ed integrando quindi nella sola variabile p .

In coordinate cilindriche $[r, \varphi, z]$ le equazioni di Laplace di un flusso bidimensionale sono

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial \Phi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \varphi^2} = 0 \quad (5.6.3)$$

mentre in coordinate sferiche $[r, \theta, \varphi]$ si ha

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial \Phi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin^2 \theta \frac{\partial \Phi}{\partial \theta} \right) = 0. \quad (5.6.4)$$

5.7 Punto di stagnazione

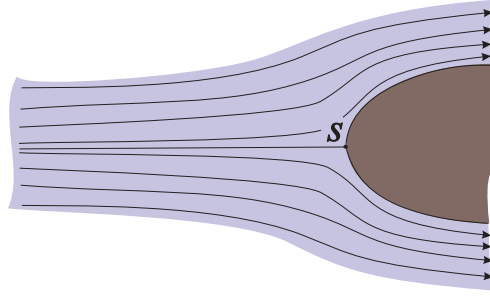


Figura 5.7 Flusso con punto di stagnazione.

Viene detto *punto di stagnazione* (o di ristagno) un punto S di un flusso in cui si annullano tutte le componenti della velocità. Esso si può formare, ad esempio, quando un fluido viene deviato da un ostacolo solido, come mostra la Figura 5.7. Ricaviamo le equazioni del flusso in un intorno sufficientemente piccolo di S in modo che l'elemento di superficie del corpo possa essere considerato piano. Introduciamo quindi coordinate cartesiane centrate in S ed assumiamo che il flusso sia bidimensionale e irrotazionale^[3]. Nell'ipotesi che non vi siano singolarità geometriche il potenziale $\Phi(x, y)$ è ovunque regolare e può essere quindi espanso in serie di Taylor. Ponendo $\Phi_S = \Phi(0, 0)$, in prossimità del punto di stagnazione si ha

$$\Phi(x, y) = \Phi_S + ax + by + cxy + dx^2 + ey^2 + \dots \quad (5.7.1)$$

^[3] Come vedremo in seguito, il fatto che il flusso sia irrotazionale comporta l'assenza scorrimento sulla superficie rigida.

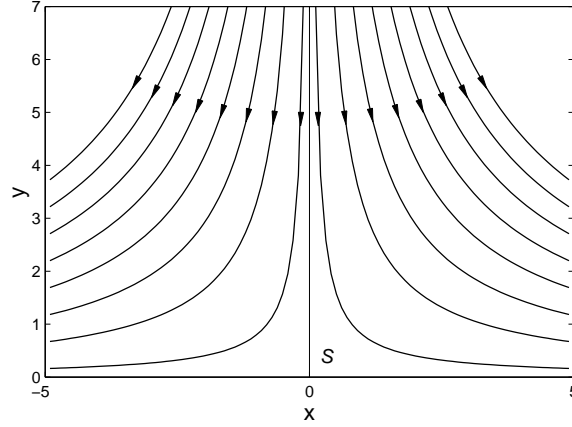


Figura 5.8 Linee di corrente in un flusso con punto di stagnazione.

Poichè $u(S) = (\partial\Phi/\partial x)_S = 0$ e $v(S) = (\partial\Phi/\partial y)_S = 0$, i coefficienti a e b devono essere nulli. Inoltre sostituendo la (5.7.1) nell'equazione di Laplace (5.6.1) si trova $d = -e$. Ponendo allora $k = 2d = -2e$ e trascurando i termini di ordine superiore al secondo, si trova seguente espressione della funzione potenziale

$$\Phi(x, y) = \Phi_S + cxy + \frac{1}{2}k(x^2 - y^2). \quad (5.7.2)$$

Infine, ci dobbiamo aspettare che la soluzione sia simmetrica rispetto all'asse y , cioè $\Phi(x, y) = \Phi(-x, y)$. Questo implica che anche il coefficiente c debba essere nullo. Assumendo la costante arbitraria $\Phi_S = 0$, otteniamo allora

$$\Phi(x, y) = \frac{1}{2}k(x^2 - y^2), \quad (5.7.3)$$

cui corrispondono le componenti della velocità (cfr. le 5.3.1)

$$u = kx, \quad v = -ky. \quad (5.7.4)$$

Inoltre per integrazione della (5.2.1) si ricava la funzione di corrente

$$\Psi = kxy. \quad (5.7.5)$$

Questa espressione mostra che nell'intorno del punto di stagnazione le linee di corrente formano iperboli rettangolari che da una parte tendono asintoticamente al piano dell'ostacolo e dall'altra alla corrispondente linea ortogonale passante per il punto di stagnazione S . Le linee potenziali identificano un'identica famiglia di iperboli con asintoti inclinati di 45° rispetto agli assi (Figure 5.8 e 5.4).

5.8 Diedro

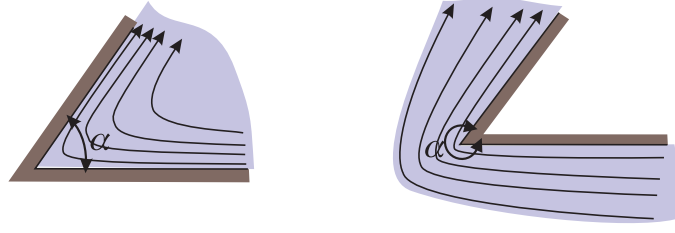


Figura 5.9 Linee di corrente in un flusso tra due piani inclinati di un angolo α .

Consideriamo ora un flusso potenziale di un fluido che scorre tra i due piani di un angolo diedro (Figura 5.9). Se l'angolo è convesso ($\alpha > \pi$) il fluido si muove all'interno del diedro, mentre se è concavo ($\alpha < \pi$) il fluido si trova all'esterno. Usiamo coordinate cilindriche (r, φ, z) con l'asse z normale al piano della figura e l'origine O nello spigolo. Il potenziale velocità deve soddisfare all'equazione di Laplace (5.6.3) con la condizione al contorno fissata dalla richiesta che sulle pareti la velocità sia tangente e quindi che $\partial\Phi/\varphi = 0$ per $\varphi = 0$ e $\varphi = \alpha$. Si può dimostrare (per esempio, per semplice sostituzione diretta) che la soluzione che soddisfa a queste condizioni ha la forma

$$\Phi(r, \varphi) = A r^n \cos(n\varphi), \quad \text{con } n = \pi/\alpha, \quad (5.8.1)$$

dove A è una costante arbitraria. Le componenti della velocità e la funzione di corrente sono quindi

$$u = n A r^{n-1} \cos(n\varphi) \quad (5.8.2)$$

$$v = -n A r^{n-1} \sin(n\varphi) \quad (5.8.3)$$

$$\Psi(r, \varphi) = A r^n \sin(n\varphi) \quad (5.8.4)$$

Come si può verificare facilmente, se $\alpha > \pi$ ($n < 1$) la velocità radiale diverge nel polo O come $1/r^{1-n}$. Se invece l'angolo è concavo ($n > 1$), la velocità tende a zero per $r \rightarrow 0$. Infine se $\alpha = \pi/2$, cioè $n = 2$, la funzione corrente diventa

$$\Psi = A r^2 \sin \theta \cos \theta = 2Axy.$$

Quest'ultimo è il caso del punto di stagnazione esaminato nel paragrafo precedente ^[4]

^[4] Si tenga presente nel ricavare la 5.7.5 partendo dallo sviluppo di Taylor in coordinate cartesiane si è supposta una simmetria destra/sinistra. Evidentemente questa richiesta è equivalente all'ipotesi che il diedro sia retto.

5.9 Sorgente e pozzo

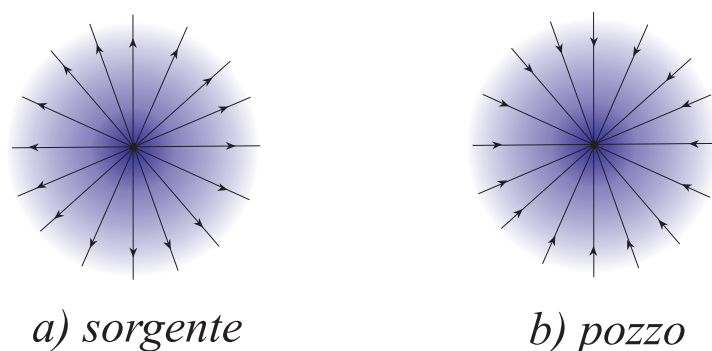


Figura 5.10 Sorgente e pozzo.

L'idea astratta di una *sorgente* di flusso puntiforme e irrotazionale presenta un certo interesse teorico perchè è la base di partenza per definire alcune grandezze che trovano poi applicazione in altre configurazioni più realistiche. In pratica possiamo immaginare di realizzare una sorgente di questo tipo utilizzando una sottile cannuccia dalla cui estremità fuoriesce con regolarità un fluido ideale avente simmetria sferica (Figura 5.10a). Nel caso ideale il flusso è ovunque regolare tranne nel punto O , dove la velocità diverge perchè deve essere soddisfatta l'equazione di continuità. Invertendo la direzione della velocità si ottiene un flusso simile, in cui però il fluido viene risucchiato dal punto singolare. Questa configurazione prende il nome di *pozzo* o *sink* (Figura 5.10b).

Oltre alle sorgenti e ai pozzi con simmetria sferica, possiamo anche immaginare flussi analoghi, ma aventi simmetria cilindrica. In questo caso la regione singolare da cui fuoriesce (o in cui entra) il fluido è costituito dai punti di una retta (per esempio, l'asse z). Le Figure 5.11a e b mostrano schematicamente come possono essere realizzate sorgenti con simmetria cilindrica o sferica.

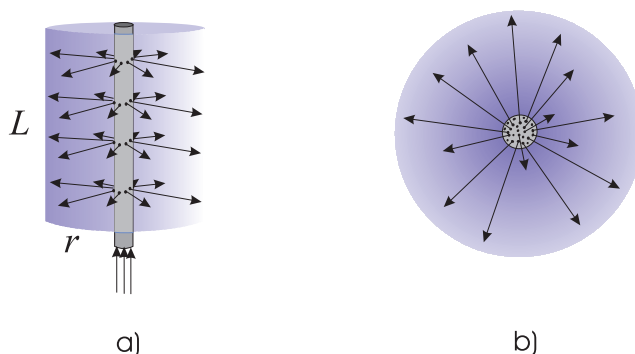


Figura 5.11 Sorgente con simmetria cilindrica (a) e sferica (b).

Poichè è più semplice, studiamo prima il caso del flusso stazionario avente simmetria cilindrica (Figura 5.11a). In virtù della conservazione della massa la portata volumetrica attraverso la superficie di un cilindro di raggio r , altezza L e coassiale con la sorgente, è

$$Q = 2\pi r L u = \text{costante} \quad (5.9.1)$$

Perciò la componente radiale della velocità varia con la distanza secondo la relazione

$$u(r) = m/r. \quad (5.9.2)$$

La costante

$$m = Q/2\pi L \quad (5.9.3)$$

viene chiamata *forza* della sorgente se $m > 0$, oppure del pozzo se $m < 0$. Dal momento che il flusso è irrotazionale, esso ammette un potenziale di velocità che può essere ricavato dalle equazioni (5.3.5):

$$\frac{\partial \Phi(r, \theta)}{\partial r} = \frac{m}{r} \quad (5.9.4a)$$

$$\frac{1}{r} \frac{\partial \Phi(r, \theta)}{\partial \theta} = 0. \quad (5.9.4b)$$

Integrando si ottiene

$$\Phi(r, \theta) = m \ln(r/r_0). \quad (5.9.5)$$

dove r_0 è il raggio della superficie di riferimento $\Phi = 0$. Perciò il potenziale di velocità è costante su superfici cilindriche coassiali i cui raggi crescono esponenzialmente con Φ/m , come mostrano le linee tratteggiate della Figura 5.12.

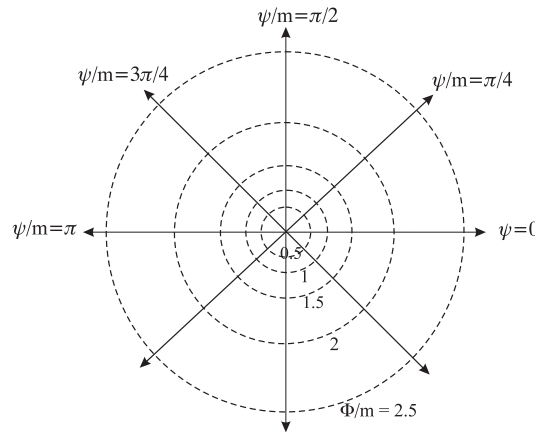


Figura 5.12 Linee di corrente e superfici equipotenziali in una sorgente di forza m .

Infine, la funzione di corrente può essere ottenuta usando le equazioni di Cauchy-Riemann (5.6.4), che nel nostro caso sono

$$\frac{1}{r} \frac{\partial \Psi(r, \theta)}{\partial \theta} = \frac{m}{r} \quad (5.9.6a)$$

$$\frac{\partial \Psi(r, \theta)}{\partial r} = 0 . \quad (5.9.6b)$$

Integrando con la condizione $\Psi(r, 0) = 0$, si ricava

$$\Psi(r, \theta) = m \theta , \quad (c5.9.7)$$

cioè il flusso è diretto radialmente ed ha l'aspetto messo in evidenza dalle linee continue nella Figura 5.12).

In maniera simile si possono trovare le funzioni Ψ e Φ di una sorgente puntiforme nell'ipotesi di simmetria sferica. In questa configurazione la conservazione della massa diventa (con $u = v_r$)

$$4\pi r^2 u = m = \text{costante} . \quad (5.9.8)$$

Le relazioni tra la velocità e le funzioni Ψ e Φ sono

$$u(r) = \frac{m}{4\pi r^2} = \frac{\partial \Phi}{\partial r} = \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial \Psi}{\partial \theta} , \quad (5.9.9)$$

dalle quali per integrazione si ottiene

$$\Psi(r, \theta) = -\frac{m}{4\pi} \cos \theta \quad (5.9.10a)$$

$$\Phi(r, \theta) = -\frac{m}{4\pi r} . \quad (5.9.10b)$$

In questo caso le superfici equipotenziali sono sferiche e concentriche, mentre le linee di corrente sono formate da raggi uscenti (o entranti, se $m < 0$) dall'origine.

5.10 Doppietto

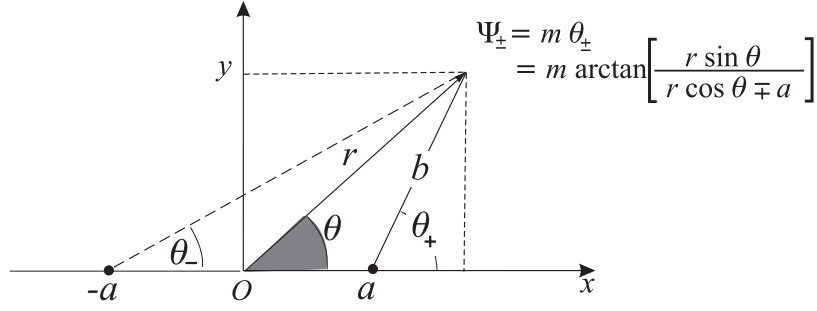


Figura 5.13 Geometria di un doppietto formato da una sorgente centrata in $[a, 0]$ e da un pozzo in $[-a, 0]$.

Un *doppietto* (o *dipolo*) è formato da una coppia di sorgenti singolari di forza opposta ma di eguale valore assoluto, e separate tra loro da una distanza $2a$. Grazie alla linearità delle equazioni di Laplace, la soluzione è ricavabile come somma delle soluzioni separate di due monopoli (sorgente più pozzo).

Nell'ipotesi che sorgente e pozzo abbiano entrambe simmetria cilindrica e si trovino sull'asse x rispettivamente alle coordinate a e $-a$, le funzioni di corrente sono date dalla (5.9.7). Con l'aiuto della Figura 5.13 si trova

$$\begin{aligned}\Psi_+(r, \theta) &= +m\theta_+ = +m \arctan \left[\frac{r \sin \theta_+}{r \cos \theta_+ - a} \right] = m \arctan \frac{y}{x - a} \\ \Psi_-(r, \theta) &= -m\theta_- = +m \arctan \left[\frac{r \sin \theta_-}{r \cos \theta_- + a} \right] = -m \arctan \frac{y}{x + a}.\end{aligned}$$

Perciò la funzione di corrente complessiva è ^[5]

$$\begin{aligned}\Psi &= m \arctan \left(\frac{y}{x - a} \right) - m \arctan \left(\frac{y}{x + a} \right) = \\ &= m \arctan \left(\frac{2ay}{x^2 + y^2 - a^2} \right).\end{aligned}\tag{5.10.1}$$

^[5] Si ricorda la regola trigonometrica:

$$\tan(\alpha + \beta) = \frac{\tan \alpha - \tan \beta}{1 + \tan \alpha \tan \beta}.$$

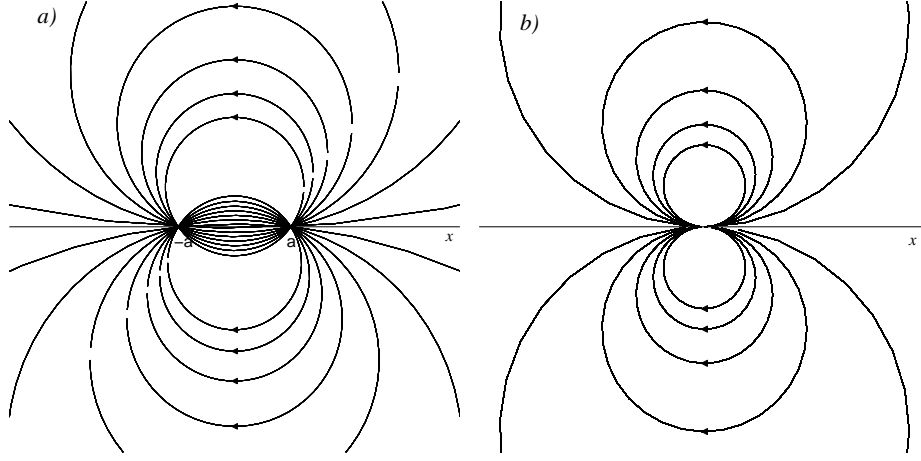


Figura 5.14 a) Dipolo con separazione finita. b) Flusso di un dipolo con $a \rightarrow 0$.

L'equazione delle linee di corrente $\Psi = \Psi_k = \text{costante}$ è

$$x^2 + \left[\frac{y - a}{\tan(\Psi_k/m)} \right]^2 = \left[\frac{a}{\sin(\Psi_k/m)} \right]^2.$$

Come mostra la Figura 5.14a, le linee sono circonferenze di raggio $R = a / \sin(\Psi_k/m)$ centrate in $x_c = 0$ e $y_c = a / \tan(\Psi_k/m)$.

Al tendere a zero della distanza a , l'intera configurazione delle linee collassa verso l'origine. Tuttavia possiamo verificare facilmente che se nello stesso tempo aumentiamo m in modo tale che il prodotto ma rimanga costante, le linee di corrente tendono verso una configurazione stabile che dipende unicamente dal parametro

$$K = 2ma = \text{costante}, \quad (5.10.2)$$

chiamato *forza del dipolo*. In particolare si trova la seguente espressione limite della funzione di corrente del dipolo a simmetria cilindrica

$$\Psi = \lim_{2a \rightarrow 0} \frac{K}{2a} \arctan \left(\frac{2ay}{x^2 + y^2 - a^2} \right) = \frac{Ky}{x^2 + y^2} = \frac{K \sin \theta}{r}. \quad (5.10.3)$$

Le linee a $\Psi = \text{costante}$ sono circonferenze passanti per l'origine ed aventi diametro K/Ψ (Figura 5.14b). A causa dell'ipotesi di simmetria cilindrica, queste curve si devono intendere appartenenti a superfici ortogonali all'asse z ortogonale al piano della figura.

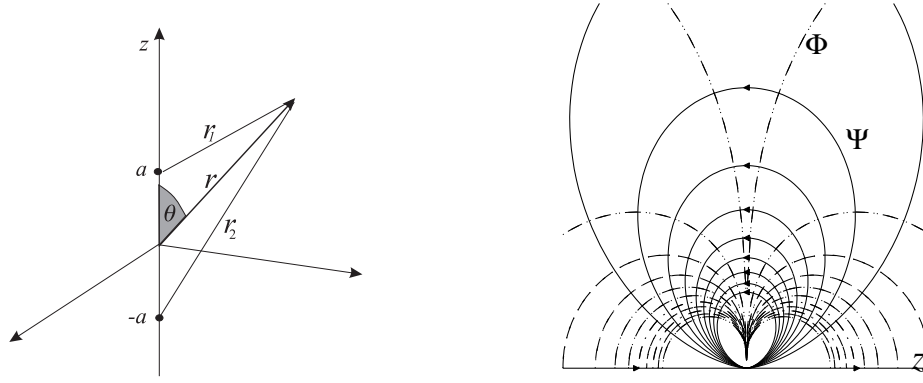


Figura 5.15 Dipolo in simmetria sferica. Nella figura a destra le linee di corrente (curve continue) e le superfici potenziali (tratteggiate) hanno simmetria assiale attorno all'asse z .

In maniera analoga possiamo definire un dipolo avente simmetria sferica sovrapponendo due sorgenti sferiche di forza opposta, situate sull'asse z alla distanza rispettivamente $+a$ e $-a$. In questo caso il problema geometrico è più semplice usando la funzione potenziale. Dalla seconda delle (5.9.10), e facendo riferimento alla Figura 5.15, si trova il potenziale totale dei due monopoli

$$\begin{aligned}\Phi &= \Phi_1 + \Phi_2 = -\frac{m}{4\pi r_1} - \frac{-m}{4\pi r_2} = \frac{m}{4\pi r_1 r_2} (r_1 - r_2) = \\ &= \frac{m}{4\pi r_1 r_2} \frac{(r_1^2 - r_2^2)}{(r_1 + r_2)} = \frac{m}{4\pi r_1 r_2} \frac{(-4ar \cos \theta)}{(r_1 + r_2)} = \\ &= -\frac{K}{4\pi r_1 r_2} \frac{(-2r \cos \theta)}{(r_1 + r_2)},\end{aligned}$$

dove si è fatto uso della relazione $r_{1,2}^2 = r^2 + a^2 \mp 2ar \cos \theta$ e si è posto $K = 2am$. Facendo tendere a zero la distanza tra le sorgenti in modo da mantenere K costante si ha $r_1 \rightarrow r_2 \rightarrow r$. Il potenziale di velocità del dipolo diventa quindi

$$\Phi = -\frac{K}{4\pi r^2} \cos \theta. \quad (5.10.4)$$

Infine dalle equazioni di Cauchy–Riemann in coordinate sferiche si ha

$$\frac{\partial \Psi}{\partial r} = -\sin \theta \frac{\partial \Phi}{\partial \theta} = -\frac{K}{4\pi r^2} \sin^2 \theta.$$

Integrando con la condizione $\Psi(\theta = 0) = 0$, si trova la funzione di corrente del dipolo sferico

$$\Psi(r, \theta) = \frac{K}{4\pi r} \sin^2 \theta \quad (5.10.5)$$

5.11 Flusso uniforme attorno ad un cilindro

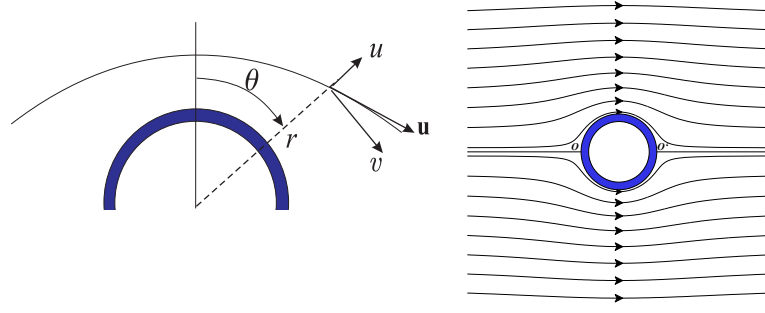


Figura 5.16 Linee di corrente di un flusso uniforme attorno ad un cilindro.

Il modello del dipolo ci permette di ricavare facilmente la configurazione stazionaria di un flusso ideale attorno ad un cilindro di raggio R . Il flusso viene costruito sommando un moto uniforme con velocità u_0 nella direzione dell'asse x e un dipolo centrato nell'origine ^[6]. Il risultato è illustrato nella Figura 5.16. I punti O e O' sono punti di stagnazione.

In coordinate polari la funzione corrente del flusso uniforme è $\Psi = u_0 r \sin \theta$ (v. 5.4.5). Sommando a questa la componente di un dipolo di forza K si ottiene

$$\Psi = u_0 r \sin \theta + \frac{K \sin \theta}{r}. \quad (5.11.1)$$

Il parametro K non è però arbitrario in quanto occorre imporre la condizione che le linee di corrente non possano attraversare il cilindro. Questo viene fatto richiedendo che la stessa superficie del cilindro formi un involuppo di linee di corrente $\Psi = \text{costante}$. Assegnando il valore $\Psi = 0$ alla linea che lambisce la superficie del solido, si ottiene la relazione

$$0 = u_0 R \sin \theta + \frac{K \sin \theta}{R}, \quad (5.11.2)$$

dalla quale risulta

$$K = -u_0 R^2. \quad (5.11.3)$$

Sostituendo questo valore nella (5.11.1) si ha

$$\Psi = u_0 r \sin \theta \left(1 - \frac{R^2}{r^2} \right). \quad (5.11.4)$$

^[6] Questa scelta può apparire alquanto arbitraria. In realtà essa deriva *a posteriori* da un'analisi delle soluzioni generali delle equazioni di Laplace in coordinate cilindriche.

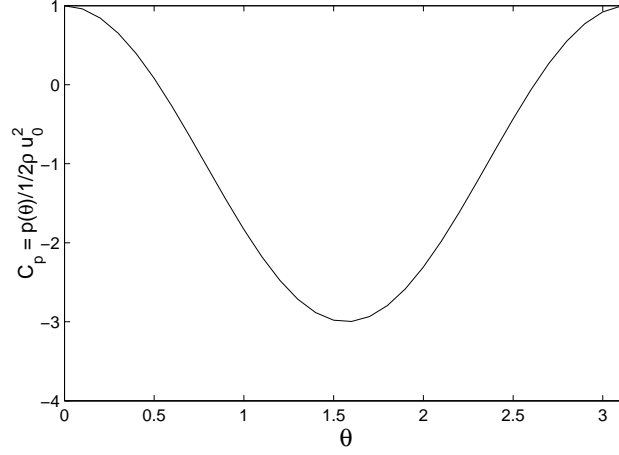


Figura 5.17 Distribuzione della pressione attorno ad un cilindro.

Le componenti della velocità del fluido attorno al cilindro sono

$$u = \frac{1}{r} \frac{\partial \Psi}{\partial \theta} = u_0 \left(1 - \frac{R^2}{r^2} \right) \cos \theta \quad (5.11.5)$$

$$v = -\frac{\partial \Psi}{\partial r} = -u_0 \left(1 + \frac{R^2}{r^2} \right) \sin \theta \quad (5.11.6)$$

$$u^2 + v^2 = u_0^2 \left[1 + \left(\frac{R}{r} \right)^4 + 2 \left(\frac{R}{r} \right)^2 (2 \sin^2 \theta - 1) \right] \quad (5.11.7)$$

Infine la pressione del fluido può essere ricavata dall'equazione di Bernoulli

$$p + \frac{1}{2} \rho (u^2 + v^2) = p_0 + \frac{1}{2} \rho u_0^2 \quad (5.11.8)$$

dove p_0 e u_0 indicano rispettivamente la pressione e la velocità nelle regioni indisturbate del fluido, lontane dal cilindro. Sostituendo la (5.11.7) nella (5.11.8) si ottiene

$$p(\theta) - p_0 = \frac{1}{2} \rho \left[\left(\frac{R}{r} \right)^4 + 2 \left(\frac{R}{r} \right)^2 (2 \sin^2 \theta - 1) \right]. \quad (5.11.8)$$

La differenza $P = p - p_0$ viene chiamata *pressione di gauge*. Sulla superficie del cilindro $r = R$ il *coefficiente di pressione* è

$$C_P(\theta) = \frac{p(\theta) - p_0}{\frac{1}{2} \rho u_0^2} = 1 - 4 \sin^2 \theta. \quad (5.11.9)$$

La distribuzione della pressione attorno al cilindro è simmetrica, ed ha l'andamento illustrato nella Figura 5.17. Ciò significa che la *resistenza*

esercitata dal fluido sull'ostacolo è complessivamente nulla. In realtà questo risultato vale per i tutti i fluidi ideali irrotazionali, qualunque sia la forma del corpo, ed è noto come *paradosso di d'Alembert* perchè è contrario all'evidenza sperimentale. Come vedremo, il paradosso viene risolto ammettendo l'esistenza di uno strato attorno al cilindro dove, a causa della viscosità, il moto del flusso viene profondamente modificato rispetto alla situazione di fluido ideale e dove si forma una regione caratterizzata da vorticità non nulla.

5.12 Flusso uniforme attorno ad una sfera

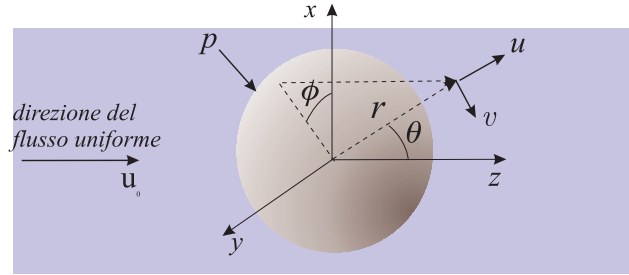


Figura 5.18 Coordinate sferiche usate per descrivere un flusso ideale attorno ad una sfera.

Come nel caso nel cilindro, il flusso ideale attorno ad una sfera è dato dalla combinazione di un dipolo a simmetria assiale e di un moto uniforme nella direzione dell'asse z . In coordinate polari la funzione corrente di un flusso uniforme con velocità u_0 nella direzione dell'asse z (Figura 5.18) si ricava per integrazione delle (5.2.8) ponendo $u = v_r = u_0 \cos \theta$ e $v = v_\theta = -u_0 \sin \theta$. Dalla (5.2.8a) si ottiene quindi

$$u_0 \cos \theta = \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial \Psi}{\partial \theta} ,$$

cioè

$$\Psi = \frac{1}{2} u_0 r^2 \sin^2 \theta . \quad (5.12.1)$$

A questa soluzione dobbiamo sommare la funzione del dipolo (5.10.5) per ottenere alla fine

$$\Psi = \frac{1}{2} u_0 r^2 \sin^2 \theta + \frac{K}{4\pi r} \sin^2 \theta . \quad (5.12.2)$$

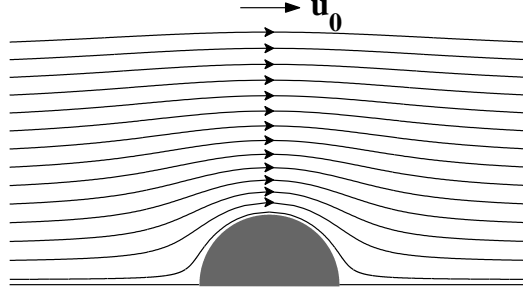


Figura 5.19 Flusso attraverso una sfera

Il valore di K viene fissato richiedendo che la superficie del cilindro sia anche un involuppo delle linee di corrente. Imponendo per queste linee la condizione $\Psi(R, \theta) = 0$, si trova

$$\Psi(r, \theta) = \frac{1}{2} u_0 r^2 \sin^2 \theta \left(1 - \frac{R^3}{r^3} \right). \quad (5.12.3)$$

Integrando le equazioni di Cauchy–Riemann si ricava facilmente anche la funzione potenziale

$$\Phi(r, \theta) = -\frac{1}{2} u_0 r \cos \theta \left(1 + \frac{R^3}{r^3} \right). \quad (5.12.4)$$

Dalla definizione di funzione di corrente (o dal potenziale) in coordinate sferiche si trovano le seguenti componenti della velocità

$$u(r, \theta) = u_0 \left(1 - \frac{R^3}{r^3} \right) \cos \theta \quad (5.12.5)$$

$$v(r, \theta) = -u_0 \left(1 + \frac{R^3}{2r^3} \right) \sin \theta \quad (5.12.6)$$

Sulla superficie della sfera la velocità è puramente tangenziale e vale

$$(u^2 + v^2)^{1/2} = \frac{3}{2} u_0 \sin \theta. \quad (5.12.7)$$

Applicando anche in questo caso il teorema di Bernoulli si ricava infine la seguente espressione del coefficiente di pressione variabile

$$C_P(\theta) = \frac{p - p_0}{\frac{1}{2} \rho u_0^2} = 1 - \frac{9}{4} \sin^2 \theta \quad (5.12.8)$$

Come mostra la Figura 5.19, l'andamento del flusso è simile a quello del cilindro, ma occorre tenere presente che ora le linee di corrente hanno una simmetria sferica, e non cilindrica, attorno all'asse x . Anche in questo caso la distribuzione simmetrica della pressione (5.12.8) comporta l'assenza di una forza netta esercitata dal fluido ideale irrotazionale sul corpo. In altri termini, il coefficiente di pressione integrato è nullo.

5.13 Vortice libero

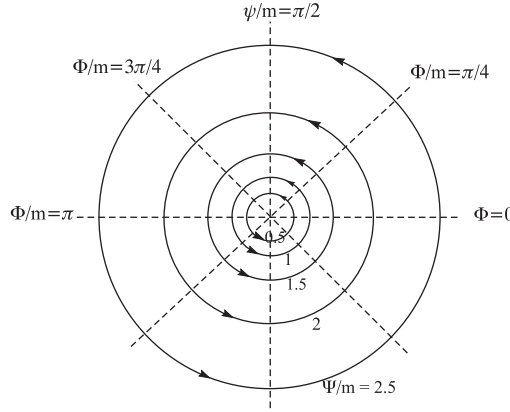


Figura 5.20 linee di corrente (curve continue) e superfici potenziali di un vortice libero.

Scambiando tra loro le definizioni (5.9.5) e (5.9.7) delle funzioni Φ e Ψ di una sorgente puntiforme a simmetria cilindrica si ottiene il moto illustrato in Figura 5.20. Questa speciale configurazione prende il nome di *vortice libero* (o *free-line vortex*) di forza m . Dalle equazioni ^[7]

$$\Phi = m\theta, \quad \Psi = -m \ln r \quad (r > 0) \quad (5.13.1)$$

si ha

$$u = \frac{\partial \Phi}{\partial r} = 0 \quad (5.13.2a)$$

$$v = \frac{1}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial \theta} = \frac{m}{r}, \quad (5.13.2b)$$

cioè il movimento del fluido è puramente tangenziale. Nonostante l'aspetto circolare del flusso, per $r > 0$ la vorticità è nulla, come possiamo verificare applicando la definizione di vorticità (5.5.2). Si ha infatti

$$\omega = \frac{1}{r} \frac{\partial(rv)}{\partial r} - \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \varphi} = 0. \quad (5.13.3)$$

Tra l'altro questo giustifica l'ipotesi dell'esistenza di un potenziale di velocità contenuta implicitamente nella prima equazione (5.13.1).

^[7] Il segno meno nella seconda equazione viene scelto in modo che a valori positivi della forza del vortice corrispondano movimenti antiorari del fluido.

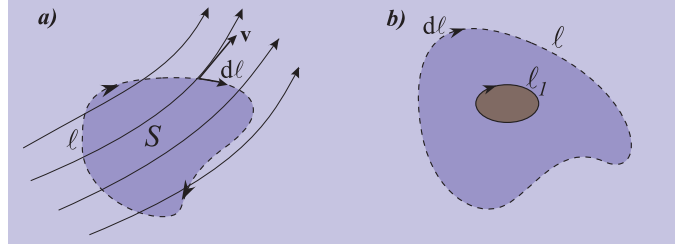


Figura 5.21 Teorema di Stokes.

Si noti che la presenza del punto singolare sull'asse $r = 0$, dove la velocità diverge, introduce una peculiarità che rende la struttura *non ovunque* irrotazionale. Questo fatto ha una serie di importanti conseguenze sulle caratteristiche fisiche del flusso. Innanzitutto occorre tenere presente che la vorticità è una proprietà *locale*, ed è quindi poco adatta a mettere in evidenza eventuali proprietà globali della configurazione fluida. Tale ruolo viene svolto invece dalla *circolazione* Γ , definita dall'integrale

$$\Gamma = \oint \mathbf{v} \cdot d\boldsymbol{\ell} \quad (5.13.4)$$

esteso lungo una linea chiusa ℓ (v. Figura 5.21a), che per semplicità qui supporremo sia interamente contenuta nel piano (x, y) . Si assume convenzionalmente che la circolazione sia positiva per rotazioni orarie.

La circolazione è strettamente legata alla vorticità. Esiste infatti una fondamentale relazione della matematica, nota come *teorema di Stokes*, secondo la quale vale la seguente uguaglianza tra gli integrali di linea e di superficie

$$\Gamma = \oint \mathbf{v} \cdot d\boldsymbol{\ell} = \int_S \omega dS \quad (5.13.5)$$

dove S è la superficie piana che è contenuta interamente nel fluido e che ha come contorno la linea chiusa ℓ ^[8]. Se viceversa la superficie S attraversa un corpo rigido che ha come contorno ℓ_1 (Figura 5.21b)

^[8] Il teorema di Stokes è più generale, ed eguaglia la circolazione lungo una qualsiasi linea chiusa nello spazio a tre dimensioni con l'integrale del rotore della velocità esteso su una qualunque superficie immersa nel fluido e il cui contorno è ℓ (v. la nota del §5.5):

$$\oint \mathbf{v} \cdot d\boldsymbol{\ell} = \int_S \text{rot} \mathbf{v} \cdot d\mathbf{S}.$$

vale la relazione

$$\oint \mathbf{v} \cdot d\boldsymbol{\ell} = \int_S \omega dS + \oint_{\ell_1} \mathbf{v} \cdot d\boldsymbol{\ell} . \quad (5.13.6)$$

Applichiamo questi risultati al vortice libero scegliendo un circuito chiuso circolare di raggio r . In questo caso si ha

$$\Gamma = \oint \frac{m}{r} d\ell = \frac{m}{r} 2\pi r = 2\pi m , \quad (5.13.7)$$

cioè la circolazione è indipendente dal raggio ed è positiva o negativa a seconda del segno della forza m del vortice. Poichè in tutti i punti interni al cerchio, tranne nell'origine, vale la relazione $\omega = 0$, ed essendo la circolazione diversa da zero, si deve concludere che sull'asse z la vorticità deve essere infinitamente grande in modo che sia soddisfatta comunque l'equazione (5.13.5). Naturalmente il vortice libero con il punto centrale singolare è un concetto puramente matematico, che non si verifica in natura. L'interesse teorico verso queste configurazioni deriva dal fatto che esistono situazioni reali assimilabili al vortice libero, nelle quali il flusso possiede una vorticità *quasi* ovunque trascurabile, ma che diventa improvvisamente molto grande (anche se, ovviamente, non infinita) in una regione molto ristretta.

5.14 Cilindro con circolazione

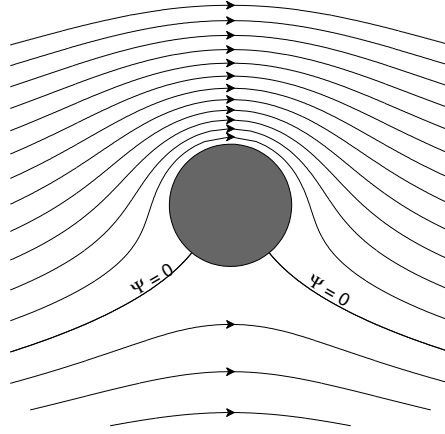


Figura 5.22 Flusso con circolazione oraria attorno ad un cilindro.

Come abbiamo visto nel paragrafo 5.11, un flusso ideale irrotazionale che investe un ostacolo non produce su di esso alcuna forza. Se ora immaginiamo di sommare al flusso attorno al cilindro un vortice di forza $m = \Gamma/2\pi$ si ottiene la funzione di corrente

$$\Psi(r, \theta) = u_0 \left(1 - \frac{R^2}{r^2} \right) r \sin \theta - \frac{\Gamma}{2\pi} \ln r . \quad (5.14.1)$$

Il flusso risultante (assumendo una rotazione oraria del vortice) è illustrato nella Figura 5.22. Sulla superficie del cilindro le componenti della velocità e della pressione sono

$$u(R, \theta) = \frac{1}{r} \frac{\partial \Psi}{\partial \theta} \Big|_R = 0 \quad (5.14.2)$$

$$v(R, \theta) = - \frac{\partial \Psi}{\partial r} \Big|_R = -2u_0 \sin \theta - \frac{\Gamma}{2\pi R} \quad (5.14.3)$$

$$p(R, \theta) - p_0 = \frac{1}{2} \varrho u_0^2 \left[1 - \left(2 \sin \theta + \frac{\Gamma}{2\pi R u_0} \right)^2 \right] . \quad (5.14.4)$$

Come si vede dalla distribuzione delle linee di corrente, si ha ancora simmetria attorno ad un asse centrale ortogonale alla direzione del moto principale, ma non nella direzione parallela. Pertanto la *resistenza*, cioè la forza esercitata dal fluido nella direzione del moto, è ancora nulla, mentre la forza nella direzione ortogonale, chiamata in generale *portanza* (o *lift*), è diversa da zero. Infatti nella parte superiore del cilindro le linee di corrente si addensano poichè la velocità del vortice si somma positivamente a quella del flusso uniforme. Perciò in questa regione la pressione è più bassa rispetto alla parte inferiore, dove invece la velocità si oppone al flusso uniforme. La forza netta può essere calcolata direttamente integrando la (5.14.4) sulla superficie di un tratto di cilindro di altezza unitaria. Si ottiene

$$F_y = - \int_0^{2\pi} p(R, \theta) R \sin \theta d\theta = \varrho u_0 \Gamma . \quad (5.14.5)$$

Cioè la portanza è proporzionale alla circolazione.

Il modello appena descritto è stato ottenuto in modo artificioso sovrapponendo un vortice al flusso ideale attorno ad un cilindro. Nella pratica una situazione di questo genere si instaura facendo ruotare un cilindro in moto traslatorio in un fluido reale (v. la discussione alla fine del prossimo paragrafo). Gli esperimenti confermano che il cilindro subisce effettivamente una spinta nella direzione ortogonale al movimento. La comparsa di questa spinta quando al moto traslatorio viene sovrapposto un movimento rotatorio va sotto il nome di *effetto Magnus* ^[9].

^[9] Il fenomeno fu scoperto dal fisico tedesco Heinrich G. Magnus (1802-70). In qualità di ingegnere militare egli cercava il motivo delle deviazioni anomale delle palle di cannone, a quel tempo ancora sferiche. Eliminò l'inconveniente filettando le bocche dei cannoni in modo da impedire che i proiettili fuoriuscissero con rotazioni casuali. La filettatura infatti obbliga il proiettile a ruotare attorno ad un asse parallelo alla direzione del moto, annullando in questo modo l'effetto.

5.15 Profilo alare

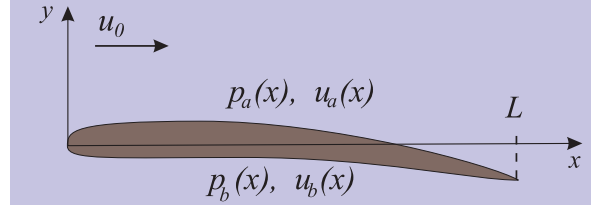


Figura 5.23 Profilo alare

Un'analisi più rigorosa mostra che la relazione (5.15.5) tra la circolazione e la portanza ha una validità più generale perchè risulta indipendente dalla forma dell'ostacolo, purchè il fluido sia *privo di viscosità e irrotazionale*.

È possibile anche dare una semplice giustificazione di questo risultato partendo dal teorema di Bernoulli. Consideriamo un corpo affusolato come, ad esempio, un *profilo alare*. Il profilo sia costruito in maniera tale la deviazione del flusso produca sulla faccia superiore una velocità u_a maggiore rispetto alla velocità u_b sul lato inferiore. Immaginiamo inoltre che l'ala sia sufficientemente sottile in modo che le linee di corrente si mantengano approssimativamente parallele alla direzione del moto (Figura 5.23). Infine il fluido sia ideale e irrotazionale. Dal teorema di Bernoulli segue che la differenza di pressione tra la faccia inferiore e quella superiore dell'ala è

$$p_b - p_a = \frac{1}{2} \rho (u_a^2 - u_b^2) = \frac{1}{2} \rho (u_a + u_b)(u_a - u_b) \approx \rho u_0 (u_a - u_b)$$

dalla quale si ricava la portanza

$$F_y = \rho u_0 \int_0^L (u_a - u_b) dx . \quad (5.15.1)$$

Se ora calcoliamo la circolazione attorno al profilo, risulta

$$\Gamma = \int_0^L u_a dx + \int_L^0 u_b dx = \int_0^L (u_a - u_b) dx , \quad (5.15.2)$$

e quindi

$$F_y = \rho u_0 \Gamma . \quad (5.15.3)$$

Sebbene la circolazione sia stata calcolata lungo la linea adiacente al profilo, il valore di Γ è il medesimo lungo una *qualsiasi* curva tracciata attorno all'ala. Infatti, essendo il flusso irrotazionale, si ha $\int \omega dS = 0$, e quindi dalla (5.13.6) segue che la circolazione è indipendente dalla

curva scelta. L'equazione (5.15.3) costituisce il *teorema di Kutta-Zhukovskii*.

È ora opportuno fare alcune importanti considerazioni su questo risultato. Come abbiamo visto, l'assenza di resistenza nella direzione del moto è una diretta conseguenza della mancanza di attrito viscoso tra il fluido ideale e il corpo. Dalla (5.15.3) risulta invece che la portanza è apparentemente legata solo alla circolazione Γ ma non alla viscosità. Perciò se la circolazione è nulla, la forza complessivamente esercitata dal fluido ideale sull'ostacolo è nulla.

Nel problema del cilindro esaminato nel paragrafo precedente, il valore diverso da zero della circolazione è dovuto all'inserimento artificioso di un vortice, che è stato sommato al flusso ideale uniforme. Come si è detto, nei flussi reali possiamo immaginare di interpretare la comparsa sia della resistenza sia della portanza mettendo in rotazione il cilindro che si muove in un fluido viscoso. Infatti gli sforzi viscosi in prossimità della superficie del solido trascinano il fluido in un movimento rotatorio provocando la comparsa di circolazione.

Meno evidente è il ruolo della viscosità negli ostacoli non ruotanti considerati nel problema di Kutta-Zhukovskii. In questi casi la circolazione non nulla è una conseguenza del fatto di aver immaginato che le linee di corrente vicine alla superficie del corpo possano rimanere aderenti all'intero profilo, e dare origine così ad un punto di stagnazione nell'estremità posteriore. Si dimostra però che questa situazione, rappresentata schematicamente nella Figura 5.24a, è possibile solo in presenza di viscosità. Come confermano anche i risultati numerici, se il medesimo profilo venisse messo in movimento in un fluido ideale la configurazione del flusso assumerebbe invece l'aspetto illustrato nella Figura 5.24b, in cui la circolazione è nulla. In altri termini, solo i fluidi reali possono sviluppare in maniera naturale una configurazione delle linee di corrente simile a quella mostrata nella Figura 5.24a. Tra l'altro, solamente in questo modo l'ostacolo è in grado di deflettere una parte del fluido verso il basso, facendo sì che la quantità di moto trasferita complessivamente al fluido generi una reazione ortogonale al corpo. In definitiva la viscosità gioca un ruolo fondamentale non solo nell'originare la resistenza al moto, ma indirettamente è anche responsabile dell'effetto di portanza.

Aggiungiamo infine che alcuni teoremi fondamentali della fluidodinamica dimostrano che nei fluidi ideali la vorticità non può essere generata o distrutta. Se un fluido ideale è inizialmente irrotazionale, esso rimane tale per sempre. Viceversa nei fluidi reali l'attrito viscoso che compare sulla superficie degli ostacoli genera vorticità che viene poi trasportata dal fluido come se fosse una proprietà materiale. La presenza di viscosità comporta anche la comparsa di altri processi che

rendono il moto ancor più complesso, come l'instaurarsi di instabilità e la formazione di un certo numero di vortici caotici capaci di trasportare grandi quantità di vorticità lontano dal corpo.

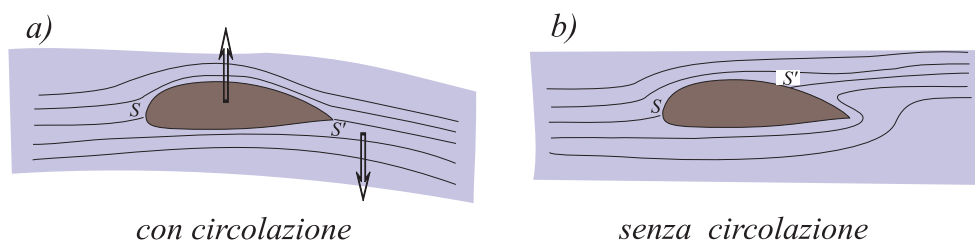


Figura 5.24 Flusso non viscoso attorno ad un ostacolo. a) con circolazione. b) senza circolazione. In quest'ultimo caso il punto di stagnazione S' a valle del flusso è situato nella superficie superiore.

5.16 Flusso irrotazionale con circolazione

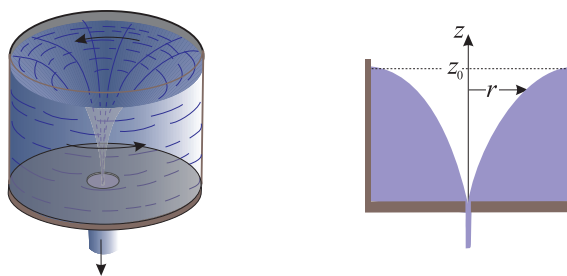


Figura 5.25 Flusso irrotazionale con circolazione in un recipiente cilindrico con un piccolo foro nel fondo.

Un'interessante applicazione di movimento rotatorio irrotazionale con circolazione è illustrato nella Figura 5.25. Un liquido è contenuto in un recipiente di capacità sufficientemente elevata (per esempio un lavandino) munito di un piccolo foro praticato sul fondo, inizialmente chiuso da un tappo. Viene quindi impresso un movimento rotatorio al fluido e poi si toglie il tappo in modo che il liquido defluisca formando una configurazione all'incirca stazionaria. Usiamo coordinate cilindriche ed assumiamo simmetria assiale (derivate $\partial/\partial\varphi = 0$). Le particelle si muovono verso l'interno seguendo spirali centrate attorno all'asse z , con le componenti della velocità v_z e v_r trascurabili rispetto alla componente azimutale v_φ . Come mostra la figura, la superficie libera del liquido prende la forma di un imbuto. A causa della conservazione del momento angolare, la componente azimutale varia come $v_\varphi \propto 1/r$. La

velocità del fluido è dunque

$$v = \sqrt{v_r^2 + v_\varphi^2 + v_z^2} \approx v_0 \frac{r_0}{r}$$

dove v_0 è la velocità ad una qualche distanza radiale r_0 . La velocità cresce via via che il liquido si muove lungo la spirale archimedeana e diverge per $r \rightarrow 0$ mantenendo vorticità nulla (v. la 5.5.2) e circolazione (v. la 5.13.4)

$$\Gamma = 2\pi r v_\varphi = \text{costante}$$

Questi risultati cessano di valere in vicinanza del foro di scarico, dove v_r e v_z diventano importanti. In questa regione aumentano fortemente gli effetti della viscosità con conseguente generazione vorticità.

Lontano dallo scarico la forma della superficie libera può essere dedotta dal teorema di Bernoulli. Infatti ponendo $p = p_a = \text{costante}$, si ha

$$\varrho g z + \frac{1}{2} \varrho v^2 = \text{costante}.$$

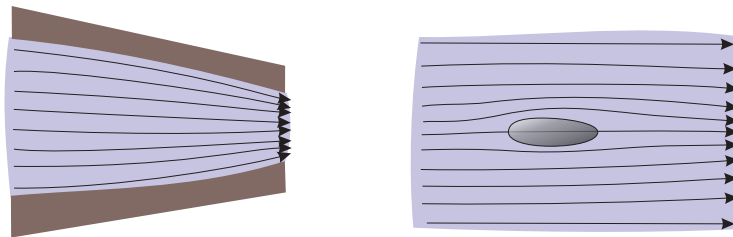
Poichè $v \propto 1/r$, si ottiene l'equazione

$$z = z_0 - \frac{\text{costante}}{r^2}.$$

CAPITOLO VI

SOLUZIONI ESATTE DELLE EQUAZIONI DEL MOTO

6.1 Introduzione



Flusso laminare interno

Flusso laminare esterno

Figura 6.1 Nei flussi interni il fluido è confinato dalle pareti dove vengono imposte le condizioni al contorno. Nei flussi esterni il fluido distante si trova nelle condizioni di flusso libero.

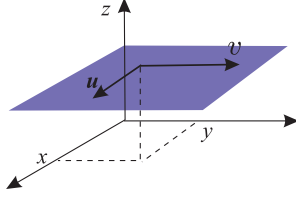
Sebbene le poche soluzioni esatte conosciute delle equazioni di Navier–Stokes siano relative a configurazioni stazionarie geometricamente e fisicamente semplici, esse rivestono una notevole importanza perchè ci aiutano a comprendere meglio i meccanismi fondamentali che regolano il moto dei fluidi in situazioni più complesse.

In questo capitolo prenderemo in considerazione flussi stazionari laminari in fluidi con densità e viscosità costanti.

Il termine *laminare* viene usato per sottolineare la possibilità di visualizzare in ogni istante il movimento mediante una serie di sottili strati adiacenti, in contrasto con i flussi turbolenti nei quali le caratteristiche del fluido cambiano continuamente e in maniera caotica. Alle volte si usa distinguere i *flussi laminari interni* dai *flussi laminari esterni* (Figura 6.1). Nel primo caso il fluido scorre internamente ad un condotto rigido e la viscosità fa sentire i suoi effetti in tutta la regione. Nel secondo caso gli ostacoli dove vengono imposte le condizioni al contorno sono interni al flusso mentre a grande distanza da essi valgono le condizioni di flusso libero.

Il moto è governato dalle equazioni di continuità e di Navier–Stokes. Riportiamo qui sotto le equazioni stazionarie semplificate

scritte nei tre principali riferimenti. La prima equazione di ogni gruppo è l'equazione di continuità.



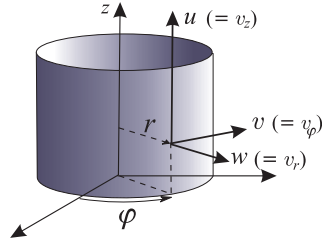
Coordinate rettangolari (x, y, z)
 $w = 0$.

$$\bullet \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (6.1.1)$$

$$\bullet u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \left[\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right] \quad (6.1.2)$$

$$\bullet u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + \nu \left[\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \right] \quad (6.1.3)$$

$$\bullet 0 = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} \quad (6.1.4)$$



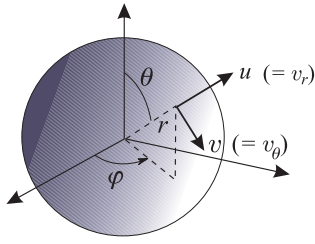
Coordinate cilindriche (r, φ, z)
e simmetria in φ .

$$\bullet \frac{1}{r} \frac{\partial(rv_r)}{\partial r} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0 \quad (6.1.5)$$

$$\bullet v_r \frac{\partial v_r}{\partial r} + v_z \frac{\partial v_r}{\partial z} - \frac{v_\varphi^2}{r} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r} + \nu \left[\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial(rv_r)}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2 v_r}{\partial z^2} \right] \quad (6.1.6)$$

$$\bullet v_r \frac{\partial v_\varphi}{\partial r} + \frac{v_r v_\varphi}{r} + v_z \frac{\partial v_\varphi}{\partial z} = \nu \left[\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial(rv_\varphi)}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2 v_\varphi}{\partial z^2} \right] \quad (6.1.7)$$

$$\bullet v_r \frac{\partial v_z}{\partial r} + v_z \frac{\partial v_z}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} + \nu \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial v_z}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2 v_z}{\partial z^2} \right] \quad (6.1.8)$$



Coordinate sferiche polari (r, θ, φ)
Flusso simmetrico in φ ($v_\varphi = 0$)

$$\bullet \frac{1}{r^2} \frac{\partial(r^2 v_r)}{\partial r} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial(v_\theta \sin \theta)}{\partial \theta} = 0 \quad (6.1.9)$$

$$\bullet v_r \frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} - \frac{v_r^2 + v_\theta^2}{r} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r} + \frac{\nu}{r^2} \left[\frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial v_r}{\partial r} \right) + \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial v_r}{\partial \theta} \right) - 2 \left(v_r + \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + v_\theta \cot \theta \right) \right] \quad (6.1.10)$$

$$\bullet \frac{v_r}{r} \frac{\partial(r v_\theta)}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} = -\frac{1}{\rho r} \frac{\partial p}{\partial \theta} + \frac{\nu}{r^2} \left[\frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial v_\theta}{\partial r} \right) - \frac{v_\theta}{\sin^2 \theta} + \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} \right) + 2 \frac{\partial v_r}{\partial \theta} \right] \quad (6.1.11)$$

Se sul fluido agiscono forze di volume esterne occorre aggiungere a destra delle equazioni di Navier–Stokes anche le corrispondenti componenti. Tuttavia se le forze sono conservative, le equazioni rimangono identiche a quelle scritte qualora la pressione del fluido venga sostituita con la *pressione generalizzata* che si ottiene includendo in p il potenziale (per unità di volume) Φ_F del campo. In questo modo i gradienti di pressione diventano

$$\frac{\partial p}{\partial x} \rightarrow \frac{\partial(p + \Phi_F)}{\partial x} \quad (6.1.12)$$

e analogamente per le rimanenti componenti. Ad esempio, in presenza di una forza peso orientata in verso opposto all'asse y , il potenziale specifico sarà $\Phi_g = \rho g y$.

6.2 Moti unidirezionali stazionari

Le configurazioni fluide più semplici sono quelle piane in cui varia una sola componente della velocità. La semplicità dei flussi unidirezionali deriva non solo dal numero ridotto di variabili ma anche dal fatto che le corrispondenti equazioni del moto perdono il termine non lineare.

Assumiamo coordinate cartesiane e supponiamo che in ogni regione il fluido si muova nella direzione x e che la forza peso sia diretta in verso opposto all'asse y (cioè $g_y = -g$ e $g_x = g_z = 0$). L'unica componente significativa della velocità è dunque $u(x, y, z)$, mentre le rimanenti componenti v e w sono nulle. Con questa condizione l'equazione di continuità (6.2.1) diventa $\partial u / \partial x = 0$, cioè il profilo di velocità è il medesimo per tutti i valori di x . Ponendo allora $u = u(y, z)$, le componenti delle equazioni di Navier-Stokes nelle direzioni y e z (equazioni 6.1.3 e 6.1.4 corrette per il termine gravitazionale) si riducono a

$$\frac{\partial p}{\partial y} = -\varrho g \quad \text{e} \quad \frac{\partial p}{\partial z} = 0. \quad (6.2.1)$$

Il sistema ha come soluzione

$$p(x, y) = p_0(x) - \varrho g y, \quad (6.2.2)$$

dove $p_0(x)$ è la pressione sulla superficie $y = 0$. La componente x dell'equazione di Navier-Stokes (v. la 6.1.2) diventa allora

$$0 = -\frac{dp_0}{dx} + \mu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) \quad (6.2.3)$$

Il termine viscoso a destra della (6.2.2) *non* dipende dalla variabile x in quanto $u = u(y, z)$. Pertanto anche la derivata della pressione deve essere indipendente da questa coordinata. Ma affinché ciò sia possibile occorre che

$$G \equiv -\frac{dp_0}{dx} = \text{costante}, \quad (6.2.4)$$

cioè il gradiente della pressione nella direzione x deve essere costante. La (6.2.3) diventa allora

$$\left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) = -\frac{G}{\mu}. \quad (6.2.5)$$

Si noti infine che, diversamente dall'equazione generale (6.1.2), nella (6.2.5) non compare la densità. Ciò è dovuto all'assenza di effetti inerziali in questo tipo di flussi poichè ogni elemento di fluido ha in realtà accelerazione nulla. In altri termini, l'equazione (6.2.5) afferma che vi è equilibrio tra la forza viscosa ed il gradiente costante di pressione nella direzione del moto.

6.3 Flusso bidimensionale

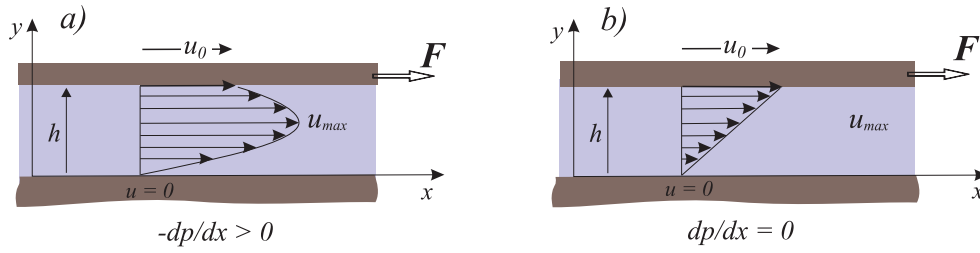


Figura 6.2 Flusso stazionario tra due piani paralleli: a) con gradiente di pressione non nullo. b) con gradiente nullo (flusso di Couette).

Come prima applicazione dei flussi unidirezionali consideriamo il caso di un fluido stazionario in movimento uniforme nella direzione z e confinato tra due piani solidi situati in $y = 0$ e $y = h$ (Figura 6.2). In queste ipotesi la velocità dipende unicamente dalla coordinata y , e quindi l'equazione (6.2.5) diventa

$$\frac{d^2 u}{dy^2} = -\frac{G}{\mu} \quad (6.3.1)$$

La soluzione generale della (6.2.5) è

$$u(y) = -\frac{G}{2\mu} y^2 + A y + B, \quad (6.3.2)$$

dove le costanti di integrazione A e B dipendono dalle condizioni al contorno. Ad esempio, assumendo che il piano inferiore sia fermo e l'altro si muova con velocità $u(h) = u_0$, la soluzione è

$$u(y) = \frac{G}{2\mu} y(h - y) + \frac{u_0 y}{h}. \quad (6.3.3)$$

Perciò se il flusso è sottoposto ad un gradiente di pressione G finito nella direzione x , il profilo di velocità è parabolico, come mostra la Figura 6.2a. Si noti che il profilo è parabolico anche nel caso limite $u_0 = 0$ in cui entrambi i piani sono fermi. Il massimo della velocità avviene per

$$y_{max} = \frac{h}{2} + \frac{\mu u_0}{G}. \quad (6.3.4)$$

ed è

$$u_{max} = \frac{h^2 G}{8\mu} - \frac{\mu u_0^2}{2G}. \quad (6.3.5)$$

La portata volumetrica per unità di larghezza del condotto è

$$Q = \int_0^h u(y) dy = \frac{h}{2} \left(u_0 + \frac{h^2 G}{6\mu} \right) = \bar{u} h \quad (6.3.6)$$

dove

$$\bar{u} = \frac{1}{2} \left(u_0 + \frac{h^2 G}{6\mu} \right). \quad (6.3.7)$$

è la velocità media del flusso attraverso la sezione del condotto.

Calcoliamo infine lo sforzo $\tau = F/\Delta z$ che deve essere applicato alla lamina superiore per mantenere il flusso stazionario. Dalla formula di Newton si ottiene

$$-\tau = -\mu \left(\frac{du}{dy} \right)_{y=h} = \frac{hG}{2}. \quad (6.3.8)$$

Ad esso corrisponde il *fattore di attrito*

$$C_f = \frac{\tau}{\frac{1}{2} \rho \bar{u}^2} = \frac{12\mu}{\rho \bar{u}} = \frac{12}{\text{Re}_h} \quad (6.3.9)$$

dove si è definito il numero di Reynolds

$$\text{Re}_h = \nu h / \bar{u} \quad (6.3.10)$$

Il moto stazionario tra i due piani può avvenire anche in assenza di gradiente di pressione, purchè la lamina superiore sia mantenuta in movimento. Tuttavia, come si può verificare ponendo $G = 0$ nella (6.3.2), la velocità segue ora un profilo lineare. Questo moto prende il nome di *flusso di Couette* (Figura 6.2b).

Una situazione molto simile al flusso confinato tra due piani è quella che si origina in un liquido che, lasciato libero di scorrere su un piano inclinato fermo, forma una lamina di spessore uniforme h (Figura 6.3). Diversamente dal caso precedente, ora la parte superiore costituisce una *superficie libera*, dove cioè gli sforzi viscosi sono nulli.

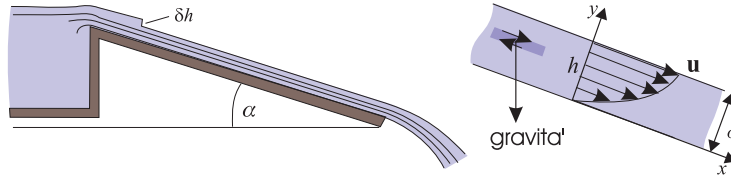


Figura 6.3 Strato laminare liquido su un piano inclinato su cui si propaga una piccola perturbazione di spessore δh . A destra, dettaglio del profilo di velocità.

Per la formula di Newton, su questa superficie si ha

$$(du/dy = 0)_{y=h} . \quad (6.3.11)$$

L'equazione che governa il moto è data ancora dalla (6.2.5), ma ora occorre aggiungere al gradiente della pressione anche la componente della forza peso nella direzione x , definiamo cioè $G = -dp_0/dx + \varrho g \sin \alpha$. Inoltre possiamo ritenere che il salto di pressione a monte e a valle del flusso sia trascurabile (questo infatti è determinato dalle condizioni dell'ambiente esterno), per cui poniamo $dp_0/dx = 0$ e

$$G = \varrho g \sin \alpha \quad (6.3.12)$$

In questo caso il moto stazionario si instaura quando le forze viscosi bilanciano esattamente la forza di gravità. La condizione che la superficie sia libera da sforzi tangenti comporta una precisa relazione tra lo spessore dello strato e la sua portata. Infatti, imponendo la (6.3.11) alla soluzione generale (6.3.2) si ottiene

$$u(y) = \frac{G}{2\mu} y(2h - y) . \quad (6.3.13)$$

Il profilo di velocità è simile a quello che si ha nella prima metà del flusso limitato da due lamine distanti $2h$. La velocità del fluido sulla superficie è massima e vale

$$u_{max} = \frac{Gh^2}{2\mu} = \frac{\varrho g h^2 \cos \alpha}{2\mu} , \quad (6.3.14)$$

mentre la portata (per unità di spessore) risulta

$$Q = \int_0^h u dy = \frac{G h^3}{3\mu} . \quad (6.3.15)$$

Esprimendo invece lo spessore in funzione di Q si ottiene

$$h = \left(\frac{3\mu Q}{G} \right)^{1/3} = \left(\frac{3\mu Q}{\varrho g \sin \alpha} \right)^{1/3} . \quad (6.3.16)$$

Supponiamo ora che, in seguito ad una leggera perturbazione nella riserva che alimenta il flusso, la portata cambi repentinamente per una piccola quantità δQ . Questo provoca sulla lamina fluida la formazione transitoria di un gradino di spessore $\delta h = (dh/dQ)\delta Q$ che si muove con velocità v_q . Dalla legge di continuità si ha $\delta Q = v_q \delta h$ e quindi

$$v_q = \frac{dQ}{dh} = \frac{Gh^2}{\mu} = 2u_{max} ,$$

dalla quale risulta che ogni piccola irregolarità della superficie del fluido si propaga con una velocità doppia rispetto a quella dello strato imperturbato sottostante.

6.4 Flusso di Poiseuille

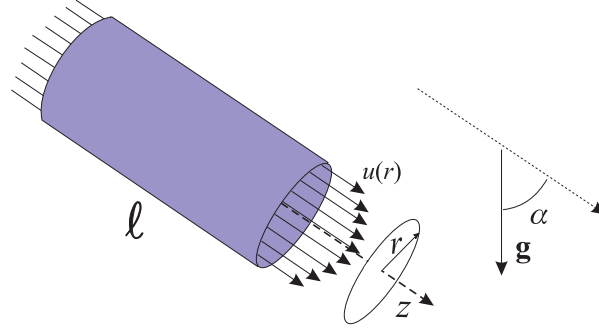


Figura 6.4 Flusso di Poiseuille (1840).

Il medesimo procedimento usato per risolvere il moto laminare piano può essere seguito per studiare anche il moto di un fluido in un condotto circolare agli estremi del quale viene mantenuto un salto di pressione $\Delta p = p_{out} - p_{in}$ (*flusso di Poiseuille*).

Introduciamo coordinate cilindriche con l'asse z orientato nella direzione del moto e assumiamo simmetria attorno all'asse z . Per maggior generalità supponiamo che, oltre al gradiente di pressione, il flusso sia soggetto anche alla forza peso e sia inclinato di un'angolo α , come è illustrato nella Figura 6.4. Ponendo $v_r = 0$ nell'equazione di continuità (6.1.5), si trova che la velocità $v_z(r, z)$ può dipendere in realtà solo dalla coordinata radiale r .

Dall'equazione del momento (6.1.6) nella direzione radiale si ha invece

$$\partial p / \partial r = \varrho g_r \quad (6.4.1)$$

Per semplicità supponiamo che il diametro del tubo sia molto più piccolo della sua lunghezza, in modo da poter ignorare la variazione della pressione attraverso i punti di una medesima sezione del condotto. Questo equivale ad assumere $\partial p / \partial r \approx 0$, ossia che la pressione $p(z)$ sia una funzione solo di z e non della coordinata radiale r . Ponendo per comodità $v_z = u(r)$, la componente dell'equazione del momento (6.1.8) nella direzione z diventa quindi

$$0 = -\frac{dp}{dz} + \varrho g \cos \alpha + \frac{\mu}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{du}{dr} \right). \quad (6.4.2)$$

Poichè l'ultimo termine dipende solamente da r mentre il gradiente della pressione non dipende da questa variabile, l'equazione (6.4.2) è verificata solo se dp/dz è costante. Poniamo allora

$$dp/dz = (p_{out} - p_{in})/\ell,$$

dove p_{in} e p_{out} sono rispettivamente le pressioni agli estremi di un tratto di tubo lungo ℓ e

$$G = -\frac{p_{out} - p_{in}}{\ell} + \varrho g \cos \alpha = \text{costante} \quad (6.4.3)$$

Integrando due volte la (6.4.2) si ottiene la seguente soluzione generale

$$u(r) = \frac{G}{4\mu} [-r^2 + A \log r + B] . \quad (6.4.4)$$

La soluzione è singolare per $r = 0$ a meno che $A = 0$. Inoltre affinché sia soddisfatta la condizione $u(R) = 0$ di non scorrimento sulla superficie del condotto, occorre che $B = R^2$. Il profilo della velocità nel flusso di Poiseuille è dunque

$$u(r) = \frac{G}{4\mu} [R^2 - r^2] . \quad (6.4.4)$$

La portata di volume (*formula di Poiseuille*) è

$$Q = \int_0^R 2\pi r u(r) dr = \frac{\pi R^4 G}{8\mu} \quad (6.4.5)$$

cui corrisponde una velocità media

$$\bar{u} = \frac{Q}{\pi R^2} = \frac{R^2 G}{8\mu} \quad (6.4.6)$$

La verifica sperimentale che la portata cresce linearmente con il salto di pressione, e con la quarta potenza del diametro del tubo ^[1] fu fatta da Hagen nel 1839 e da Poiseuille nel 1840, Questa fu la prima conferma indiretta sia dell'esattezza della *no-slip condition* sia della linearità degli sforzi viscosi con il gradiente di velocità nei fluidi newtoniani.

[1] La portata aumenta con la potenza R^2 per effetto dell'aumento di sezione del tubo, e di un'altra potenza R^2 perchè nei tubi di maggior sezione la diminuzione delle forze di attrito favorisce velocità più elevate.

6.5 Flusso tra due cilindri ruotanti

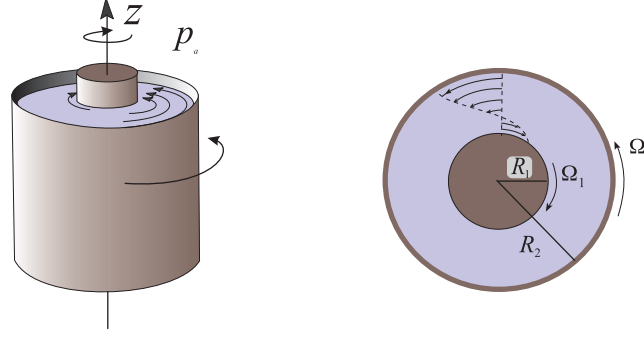


Figura 6.5 Moto laminare di un liquido nell'intercapedine tra due cilindri ruotanti.

Consideriamo il moto stazionario di un fluido all'interno di due cilindri coassiali di raggi R_1 e $R_2 > R_1$, che ruotano attorno al loro asse con velocità angolare rispettivamente Ω_1 e Ω_2 , come mostra la Figura 6.5. In passato questo problema è stato studiato nell'ambito della teoria della lubrificazione, perchè costituisce un modello abbastanza accurato di bronzine. Un apparecchio sperimentale basato sui cilindri ruotanti coassiali ha permesso anche di ricavare la viscosità dei liquidi tramite la misura del momento della forza necessaria per mantenere una rotazione uniforme (*Viscosimetro di Couette-Hatschek*). Poichè siamo interessati soprattutto all'aspetto circolare del moto fluido, ignoriamo l'azione della gravità sulla distribuzione della pressione nella direzione verticale.

Scegliamo coordinate cilindriche (r, φ, z) . Per ragioni di simmetria la velocità è puramente tangenziale e il gradiente di pressione ha solo direzione radiale:

$$v_r = v_z = 0, \quad v_\varphi = v(r), \quad p = p(r). \quad (6.5.1)$$

Le equazioni di Navier–Stokes (6.1.8) e (6.1.9) diventano

$$-\varrho \frac{v^2}{r} = -\frac{dp}{dr} \quad (6.5.2)$$

$$0 = \nu \frac{d}{dr} \left(\frac{1}{r} \frac{d(rv)}{dr} \right). \quad (6.5.3)$$

L'equazione (6.5.2) esprime semplicemente il fatto che le forze centrifughe sono equilibrate dal gradiente radiale della pressione. La seconda equazione ammette come soluzione

$$v(r) = Ar + \frac{B}{r}, \quad (6.5.4)$$

cui corrisponde una velocità angolare locale del fluido

$$\Omega(r) = A + \frac{B}{r^2}. \quad (6.5.5)$$

Le costanti A e B vengono fissate dalle due condizioni al contorno $v(R_1) = R_1\Omega_1$ e $v(R_2) = R_2\Omega_2$. Si trova

$$A = \frac{\Omega_2 R_2^2 - \Omega_1 R_1^2}{R_2^2 - R_1^2}, \quad B = -\frac{(\Omega_2 - \Omega_1) R_1^2 R_2^2}{R_2^2 - R_1^2} \quad (6.5.6)$$

Sostituendo la velocità (6.5.4) nella (6.5.2) ed integrando si ricava facilmente anche la distribuzione della pressione nell'intercapedine.

Se entrambi i cilindri ruotano con la medesima velocità angolare Ω_0 si ottiene un semplice moto rigido del fluido con velocità $v = \Omega_0 r$. Se invece il cilindro esterno è fermo ($\Omega_2 = 0$) e il suo raggio molto grande ($R_2 \rightarrow \infty$) si ha $v(r) = \Omega_1 R_1^2 / r$.

Lo sforzo viscoso sul cilindro interno è (in coordinate cilindriche, v. l'Appendice B):

$$\begin{aligned} \tau = t_{r\varphi} &= \mu \left[r \frac{d(v/r)}{dr} \right]_{R_1} = -\frac{2\mu B}{R_1^2} \\ &= -2\mu R_2^2 \frac{(\Omega_2 - \Omega_1)}{(R_2^2 - R_1^2)}, \end{aligned} \quad (6.5.7)$$

e quindi il momento delle forze applicate al cilindro di altezza L è

$$\mathcal{M} = 2\pi R_1 L \cdot R_1 \tau = 4\pi \mu L \frac{R_2^2 R_1^2 (\Omega_2 - \Omega_1)}{R_2^2 - R_1^2}. \quad (6.5.8)$$

Un calcolo simile effettuato sul cilindro esterno porta evidentemente ad un valore del momento eguale ed opposto.

6.6 Instabilità nei fluidi ruotanti

Particolarmente interessante è lo studio della stabilità del movimento nell'intercapedine dei cilindri ruotanti. Risulta infatti che qualora il cilindro esterno sia fermo e quello interno ruoti, il flusso diventa instabile. Viceversa se il cilindro esterno ruota e quello interno è fermo, la rotazione tende a stabilizzare il moto.

Il problema può essere affrontato col seguente metodo perturbativo. Si considera una porzione di fluido arbitrariamente piccolo e lo si fa deviare dalla traiettoria rispetto al moto naturale. Si verifica quindi se le forze cui è sottoposto l'elemento nella sua nuova posizione tendono a riportarlo nella posizione iniziale, oppure se lo fanno allontanare ancora di più ^[2]. Nel caso dei cilindri ruotanti, ogni piccolo elemento

^[2] Il procedimento è generale e viene applicato anche in altre situazioni, come nello studio della stabilità dei fluidi nelle atmosfere dei pianeti.

di fluido di massa m descrive una traiettoria circolare con momento angolare

$$\ell = mr^2\Omega = m (Ar^2 + B) , \quad (6.6.1)$$

e rimane in equilibrio grazie al fatto che nel punto in cui si trova la forza centrifuga $m\Omega^2 r = \ell^2/mr^3$ è compensata dal gradiente di pressione radiale dell'ambiente circostante, come risulta dall'equazione (6.5.2).

Immaginiamo ora che in seguito ad una occasionale perturbazione una piccola porzione di fluido che in un certo momento si trova alla distanza r_0 con un momento angolare $\ell_0 = \ell(r_0)$, si sposti ad una distanza $r = r_0 + \delta r > r_0$. A causa della conservazione del momento angolare la sua velocità angolare dovrà diminuire secondo la legge $\Omega = \ell_0/mr^2$ (cfr. l'equazione 6.6.1). Nella nuova posizione l'elemento di fluido perturbato è sottoposto ad una forza centrifuga ℓ_0^2/mr^3 . Nello stesso tempo, questo elemento è circondato da un mezzo che esercita invece una forza di pressione $\ell^2(r)/mr^3$ pari a quella necessaria per mantenere l'equilibrio locale del fluido non perturbato. Affinchè possa ritornare nella posizione iniziale occorre allora che tale forza sia superiore alla forza centrifuga che agisce sul fluido deviato, cioè che $\ell^2(r)/mr^3 > \ell_0^2/mr^3$. In definitiva, per $\delta r > 0$ la condizione di stabilità richiede che

$$\ell^2(r_0 + \delta r) - \ell^2(r_0) = 2\ell \frac{d\ell}{dr} \delta r > 0. \quad (6.6.2)$$

Questa diseuguaglianza mostra che in ogni regione il flusso è stabile se 1) $\ell > 0$ (cioè $\Omega > 0$) e contemporaneamente il momento angolare cresce con la distanza, oppure 2) se $\ell < 0$ (cioè $\Omega < 0$) e il momento angolare decresce. Poichè $d\ell/dr = 2Ar$, dalla (6.6.2) e usando la (6.5.6) si ottiene la seguente condizione di stabilità

$$\Omega(r) (\Omega_2 R_2^2 - \Omega_1 R_1^2) > 0. \quad (6.6.3)$$

Come mostra la (6.5.5), passando dal cilindro intero a quello esterno la velocità angolare del fluido è crescente o decrescente a seconda del segno di B , che a sua volta dipende dalla differenza $\Omega_1 - \Omega_2$. Perciò si possono verificare le seguenti due situazioni:

1) I due cilindri ruotano in senso inverso, cioè Ω_1 e Ω_2 hanno segni contrari. In questo caso $\Omega(r)$ cambia sicuramente segno per qualche valore r_c del raggio compreso tra R_1 e R_2 . Il prodotto (6.6.3) non può mai essere ovunque positivo, e la condizione di stabilità viene sicuramente violata in una delle due regioni separate da r_c .

2) I due cilindri ruotano nel medesimo verso, per esempio $\Omega_1 > 0$ e $\Omega_2 > 0$. In questo caso $\Omega(r)$ rimane sempre positivo, perciò il flusso è ovunque stabile solo se vale la relazione

$$\Omega_2 R_2^2 > \Omega_1 R_1^2. \quad (6.6.4)$$

Se viceversa questa condizione non è verificata la regione vicina al cilindro interno è instabile mentre quella prossima al cilindro esterno è stabile.

Poichè $\ell \propto \Omega r^2$, la disuguaglianza (6.6.2) viene spesso scritta nella forma equivalente

$$\frac{d}{dr} |\Omega r^2| > 0 \quad (6.6.5)$$

ed è nota come *criterio di Rayleigh* per i *flussi di Couette*.

Il metodo seguito per analizzare la stabilità non tiene conto della presenza delle forze viscosi durante il movimento dell'elemento di fluido perturbato. I risultati valgono quindi solo se la viscosità è sufficientemente piccola (grandi numeri di Reynolds). Per un approccio più corretto occorre seguire un procedimento analogo al precedente usando le equazioni complete di Navier–Stokes ed includendo anche le eventuali perturbazioni non radiali. Con un calcolo piuttosto complesso si dimostra che la viscosità tende di fatto a stabilizzare il flusso. Nella Figura 6.6a è illustrato schematicamente il dominio di instabilità (regione ombreggiata) in funzione delle velocità dei cilindri e assumendo $\Omega_1 \geq 0$. Se i due cilindri ruotano nello stesso senso, la regione di instabilità ha come asintoto la curva $\Omega_2 R_2^2 = \Omega_1 R_1^2$. Ma per numero di Reynolds bassi il flusso può rimanere stabile anche quando la condizione (6.6.3) viene violata. Analogamente, se i cilindri ruotano in senso opposto, cioè $\Omega_2 < 0$, il flusso diventa instabile solo se la rotazione relativa è abbastanza elevata. In particolare, se il cilindro esterno viene mantenuto fermo, e l'intercapedine è sottile, l'instabilità avviene solo se Ω_1 supera una soglia critica Ω_c il cui valore è

$$\Omega_c = 41.3 \frac{\nu}{h\sqrt{hR}}$$

dove $h = R_2 - R_1 \ll R_2$.

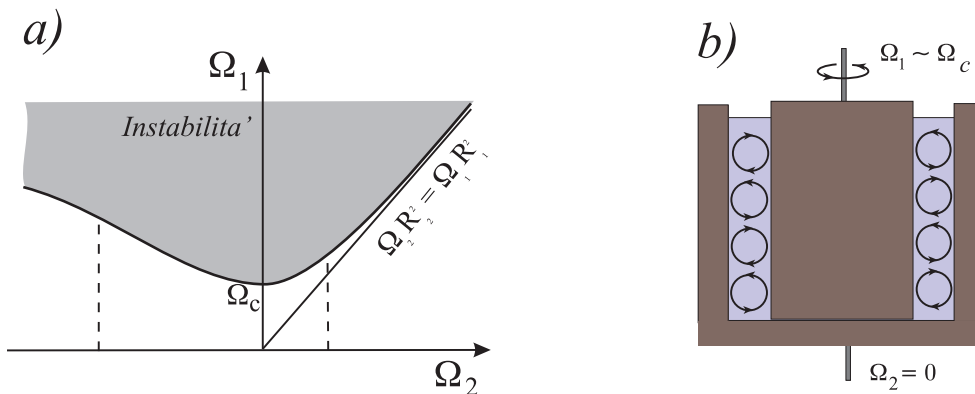


Figura 6.6 a) L'instabilità in un flusso tra due cilindri ruotanti avviene solo per valori della velocità angolare compresi nella regione ombreggiata. b) Celle di Taylor.

In prossimità di questo regime nell'intercapedine si forma una serie di vortici toroidali, noti come *celle di Taylor*, con rotazione alternata, il cui aspetto è illustrato schematicamente nella Figura 6.6b. Al crescere della velocità la configurazione diventa più complessa, finché il moto diventa completamente caotico quando il numero di Reynolds diventa molto elevato.

6.7 Flusso sopra un disco ruotante

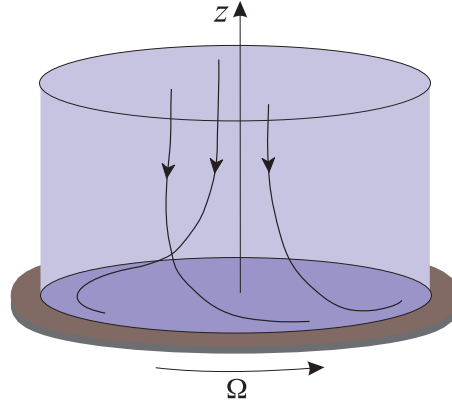


Figura 6.7 Disco ruotante immerso in un fluido.

Tra le soluzioni esatte delle equazioni viscosse di Navier–Stokes si può includere anche il caso di un disco piano infinito, immerso in un fluido e ruotante uniformemente attorno al proprio asse verticale z con velocità angolare Ω (Kármán, 1921) ^[3]. Introduciamo coordinate cilindriche $[z, r, \varphi]$, e assumiamo che il fluido si estenda illimitatamente per $z > 0$ (Figura 6.7). Poichè sono coinvolte tutte e tre le componenti della velocità, il problema è di fatto tridimensionale. Tuttavia la simmetria cilindrica assicura che le variabili p , v_r , v_z , e v_φ dipendono solamente dalle due coordinate r e z . Occorre dunque integrare il sistema completo di equazioni di Navier–Stokes e dell’equazione di continuità (v. l’Appendice A), imponendo che sulla superficie del disco valga la condizione di non scorrimento e che per all’infinito il fluido non ruoti nè abbia movimenti radiali. Le cinque condizioni al contorno sono quindi

$$\begin{aligned} v_r &= 0, & v_\varphi &= \Omega r, & v_z &= 0 & \text{per } z &= 0 \\ v_r &= 0, & v_\varphi &= 0 & & & \text{per } z &= \infty. \end{aligned}$$

Si noti che all’infinito non si è imposta nessuna condizione su v_z . Infatti la componente verticale della velocità non può essere nulla, ma deve tendere verso un limite costante e negativo. Il motivo di questo comportamento è dovuto al fatto che via via che il fluido si avvicina al disco acquista velocità angolare e, a causa degli effetti centrifughi, tende ad allontanarsi dall’asse di rotazione. Per assicurare la continuità della massa è necessario allora che si formi una corrente verticale proveniente dall’infinito in grado di compensare il movimento radiale.

^[3] In realtà la soluzione è numerica, anche se le equazioni differenziali finali sono ordinarie.

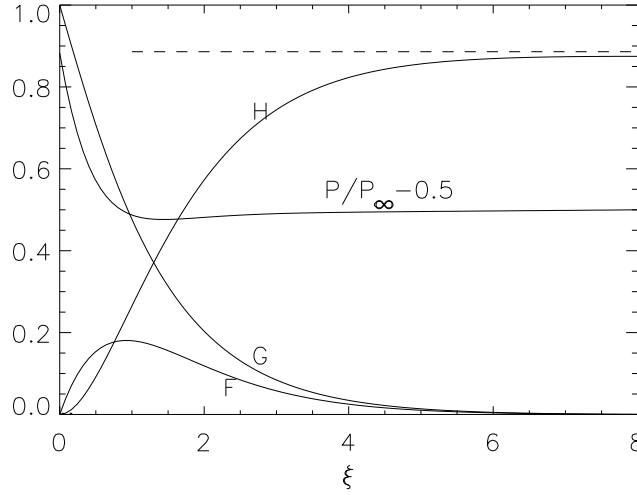


Figura 6.8 Soluzione del flusso con disco ruotante.

Per risolvere il problema conviene operare il seguente cambiamento di variabili

$$\begin{aligned}\xi &= \sqrt{\Omega/\mu} z, & p &= -\varrho \mu \Omega P(\xi) \\ v_r &= \Omega r F(\xi), & v_\varphi &= \Omega r G(\xi), & v_z &= \sqrt{\mu \Omega} H(\xi),\end{aligned}$$

Sostituendo le nuove variabili nelle equazioni del moto si ottiene il seguente sistema di equazioni alle derivate totali nella variabile ξ

$$\begin{cases} F'' - F^2 + G^2 - F'H = 0 \\ G'' - 2FG - G'H = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} HH' - P' - H' = 0 \\ 2F + H' = 0 \end{cases}$$

La soluzione numerica è illustrata dai grafici della Figura 6.8. Il valore limite di H per $z \rightarrow \infty$ è $H = -0.886$, e quindi in termini della velocità verticale

$$v_z(\infty) = -0.886 \sqrt{\mu \Omega}$$

In ogni punto del disco la forza di attrito per unità d'area è

$$t_{z\varphi} = \mu \left. \frac{\partial v_\varphi}{\partial z} \right|_{z=0}$$

Trascurando gli effetti al bordo, se il disco ha raggio finito R , il momento delle forze è

$$\begin{aligned}\mathcal{M} &= \int_0^R 2\pi r^2 t_{z\varphi} dr = \frac{\pi}{2} R^4 \varrho \sqrt{\nu \Omega^3} G'(0) \\ &= -1.94 R^4 \varrho \sqrt{\nu \Omega^3}\end{aligned}$$

avendo posto $G'(0) = 1.235$ valutato numericamente

6.8 Teoria della lubrificazione

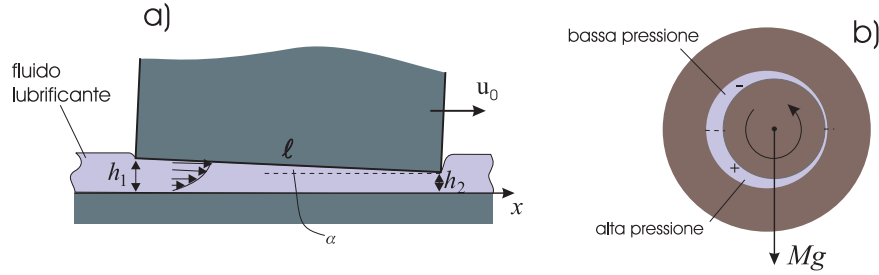


Figura 6.9 Effetto lubrificante di un fluido viscoso interposto tra due superfici in movimento relativo.

L'esperienza comune mostra che un peso appoggiato sopra una superficie solida scivola più facilmente se tra i corpi viene interposto un olio ad *elevata* viscosità (fluido lubrificante). La richiesta di un grande valore della viscosità può sembrare paradossale, ma, come ha sottolineato Reynolds nel 1886, l'azione principale del fluido è quella di mantenere separate le superfici di contatto anche quando la forza che comprime i corpi è molto intensa. In questo modo l'attrito radente tra solidi viene sostituito dal ben più piccolo attrito viscoso. È evidente che se i corpi sono fermi e vengono premuti tra loro, il lubrificante fuoriesce dall'intercapedine che separa le superfici, con il risultato che queste entrano in contatto tra loro. Tuttavia Reynolds ha dimostrato che in presenza di moto relativo si forma nell'intercapedine un eccesso di pressione che allontana leggermente i corpi e il cui gradiente trasversale è tanto più elevato quanto più le superfici sono vicine e tanto maggiore è la viscosità.

Consideriamo la situazione semplice illustrata nella Figura 6.9a. Un blocco solido, la cui base è lunga ℓ , scivola lungo un piano con velocità uniforme u_0 nella direzione x . Esaminiamo le proprietà del fluido situato nell'intercapedine nell'ipotesi che il flusso sia bidimensionale e stazionario. Lo strato di fluido abbia uno spessore $h(x) \ll \ell$ e, per il motivo che risulterà chiaro più avanti, supponiamo che sia leggermente inclinato in avanti di un piccolissimo angolo α , come mostra la figura. Indichiamo con h_1 lo spessore dello strato in ingresso nel punto $x = 0$, e con $h_2 = h_1 - \ell \sin \alpha \approx h_1 - \alpha \ell$ lo spessore in uscita in corrispondenza a $x \approx \ell$. Se l'inclinazione è molto piccola possiamo applicare con buona approssimazione i risultati trovati nel caso del flusso tra due piani paralleli studiato nel paragrafo 6.3. Tuttavia, poichè nella configurazione attuale la distanza tra i piani è variabile, dobbiamo aspettarci che il valore del gradiente di pressione $-G$ non sia esattamente costante, ma dipenda, anche se debolmente, dalla di-

stanza x . Assumiamo quindi che il profilo di velocità abbia la forma (cfr. la 6.3.3)

$$u(x, y) = \frac{G(x)}{2\mu} y [h(x) - y] + \frac{u_0 y}{h(x)} \quad (6.8.1)$$

cui corrisponde una portata volumetrica (per spessore unitario nella direzione z)

$$Q = \int_0^{h(x)} u(y) dy = \frac{1}{2} \left[\frac{G(x) h(x)^3}{6\mu} + u_0 h(x) \right]. \quad (6.8.2)$$

In condizioni stazionarie Q deve essere costante. Occorre allora che il termine a destra dell'equazione (6.8.2) non dipenda da x , e quindi che lungo l'intercapedine il gradiente di pressione $-G$ vari secondo la relazione

$$-G(x) = \frac{dp}{dx} = \frac{dp}{dh} \frac{dh}{dx} = 6\mu \left(\frac{u_0}{h^2} - \frac{2Q}{h^3} \right), \quad (6.8.3)$$

con $h(x) = h_1 - \alpha x$ e $dh/dx = -\alpha$. Integrando la (6.8.3) imponendo la condizione che nella regione di ingresso $x = 0$ (cioè $h = h_1$) la pressione p sia eguale alla pressione esterna p_0 , si ottiene

$$p(x) = p_0 + \frac{6\mu}{\alpha} \left[u_0 \left(\frac{1}{h} - \frac{1}{h_1} \right) - Q \left(\frac{1}{h^2} - \frac{1}{h_1^2} \right) \right]. \quad (6.8.4)$$

D'altra parte la medesima condizione sulla pressione deve valere anche in corrispondenza dell'estremità opposta. Ponendo allora $p(\ell) = p_0$ e $h(\ell) = h_2$, dalla (6.8.4) si ottiene la portata

$$Q = u_0 \frac{h_1 h_2}{h_1 + h_2}. \quad (6.8.5)$$

Con questo valore la pressione all'interno dello strato di fluido risulta

$$\begin{aligned} p(x) - p_0 &= \frac{6\mu u_0}{\alpha} \frac{(h_1 - h)(h - h_2)}{h^2(h_1 + h_2)} = \\ &= \frac{6\mu u_0 \alpha x(\ell - x)}{(h_1 - \alpha x)^2 (2h_1 - \alpha\ell)}, \end{aligned} \quad (6.8.6)$$

ed ha l'andamento illustrato nella Figura 6.10. La forza totale esercitata dal fluido ortogonalmente all'intercapedine è

$$\int_0^\ell (p - p_0) dx = \frac{6\mu u_0}{\alpha^2} \left[\log \frac{h_1}{h_2} - 2 \left(\frac{h_1 - h_2}{h_1 + h_2} \right) \right] \approx \frac{6\mu u_0 \ell^2}{h_1^2}. \quad (6.8.7)$$

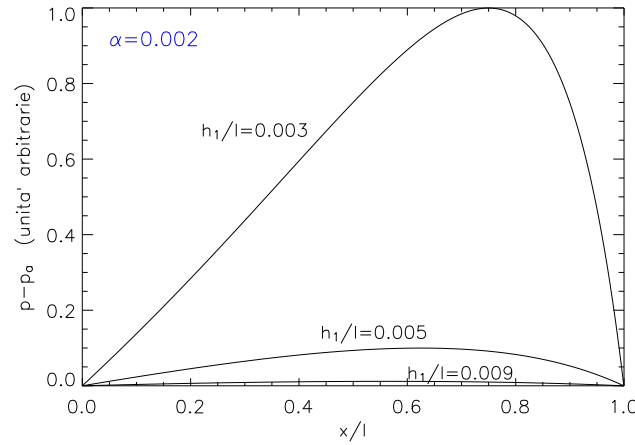


Figura 6.10 Andamento della pressione nell'intercapedine contenente il fluido lubrificante. Minore è lo spessore h dello strato maggiore è la pressione media.

L'espressione approssimata a destra della (6.8.7) vale nell'ipotesi $h_1 \approx h_2$. Come si vede, la forza dipende da h_1^{-2} , e quindi se lo strato di lubrificante è sufficientemente sottile, la pressione riesce a mantenere separato il carico in movimento dal piano di appoggio. Inoltre, affinché $p - p_0$ sia positivo è necessaria anche la presenza di una leggera inclinazione, in modo che $h_1 > h_2$. Cioè il moto relativo tra le superfici deve essere tale da trascinare il lubrificante dalla parte più spessa dell'intercapedine a quella più sottile.

Naturalmente nei casi pratici la separazione h_1 e l'inclinazione α non sono parametri fissi ma si adattano di volta in volta alla situazione specifica, a seconda della velocità del fluido, della posizione del centro di massa del carico, ecc., in modo che in ogni istante sia garantito l'equilibrio meccanico del corpo.

Un principio molto simile regola anche il movimento di meccanismi ruotanti, come le puleggie o le bronzine (Figura 6.9b). Senza entrare nei dettagli del calcolo, possiamo notare che all'equilibrio e in assenza di rotazione il perno centrale, sul quale supponiamo agisca il carico diretto verso il basso, si appoggia direttamente sulla parte bassa del supporto circolare. Mettendo in rotazione il perno il fluido lubrificante viene trascinato lungo l'intercapedine in modo che attraverso ogni sezione la portata sia costante. Con un procedimento simile a quello precedente si può dimostrare che il moto provoca la formazione di un gradiente di pressione positivo nella regione con sezione decrescente e negativo nella regione opposta. Se la rotazione è antioraria, l'asse centrale del perno si sposta verso sinistra, assumendo in questo modo l'aspetto illustrato nella figura, con un eccesso di pressione nella parte bassa dell'intercapedine che sostiene il carico. L'equilibrio risulta stabile poichè se il perno si avvicina troppo alla parete del

supporto, in prossimità di questa regione la pressione aumenta, e viceversa. L'effettivo spostamento dell'asse del perno rispetto all'asse centrale di simmetria diminuisce all'aumentare della velocità angolare ed è inversamente proporzionale alla viscosità. Proprio per questo motivo per aumentare sia l'efficienza che la stabilità del meccanismo occorre utilizzare oli lubrificanti molto viscosi.

CAPITOLO VII

SOLUZIONI APPROSSIMATE

7.1 Introduzione.

In questo capitolo verranno studiate alcune soluzioni stazionarie delle equazioni di Navier–Stokes nel limite $Re \ll 1$. Come abbiamo visto nel paragrafo 4.7, le equazioni dei moti di scorrimento possono essere semplificate escludendo i termini inerziali che risultano trascurabili rispetto a quelli viscosi. Dal punto di vista dinamico ciò significa che in ogni punto del fluido vi è un bilancio esatto tra le forze di pressione, di volume e viscosi. Pur diventando lineari, le equazioni rimangono del secondo ordine.

In coordinate cartesiane le equazioni di Navier–Stokes semplificate diventano

$$\frac{1}{\varrho} \frac{\partial p}{\partial x} = \nu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) \quad (7.1.1)$$

$$\frac{1}{\varrho} \frac{\partial p}{\partial y} = \nu \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) \quad (7.1.2)$$

In coordinate polari (con $v_z = 0$, $u = v_r$, $v = v_\varphi$) abbiamo

$$\frac{1}{\varrho} \frac{\partial p}{\partial r} = \nu \left[\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial(ru)}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial v}{\partial \varphi} \right] \quad (7.1.3)$$

$$-\frac{1}{\varrho r} \frac{\partial p}{\partial \varphi} = \nu \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial v}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 v}{\partial \varphi^2} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial u}{\partial \varphi} \right] \quad (7.1.4)$$

mentre in coordinate sferiche con simmetria in φ ($u = v_r$, $v = v_\theta$)

$$\begin{aligned} \frac{1}{\varrho} \frac{\partial p}{\partial r} = \nu & \left[\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial u}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial u}{\partial \theta} \right) + \right. \\ & \left. - \frac{2}{r^2} \left(u + \frac{\partial v}{\partial \theta} + v \cot \theta \right) \right] \end{aligned} \quad (7.1.5)$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{\varrho r} \frac{\partial p}{\partial \theta} = \nu & \left[\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial v}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial v}{\partial \theta} \right) + \right. \\ & \left. + \frac{2}{r^2} \frac{\partial u}{\partial \theta} - \frac{v}{r^2 \sin^2 \theta} \right] \end{aligned} \quad (7.1.6)$$

Le equazioni di continuità in coordinate rettangolari e sferiche sono eguali rispettivamente alle (6.1.1) e (6.1.9), mentre nelle coordinate polari $[r, \varphi]$ abbiamo

$$\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{u}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \varphi} = 0 \quad (7.1.7)$$

7.2 Flusso di Stokes

Consideriamo una sfera solida di raggio R in movimento lentissimo attraverso un fluido viscoso. Questa configurazione viene chiamata *flusso di Stokes*. Assieme a quella analoga associata al movimento di un cilindro (v. §7.3.3), rappresenta il più noto esempio di moto di scorrimento, ed in passato è servita come base per la comprensione di fenomeni fluidodinamici più complessi.

Usiamo coordinate sferico-polari centrate sulla sfera con l'angolo $\theta = 0$ nella direzione del flusso, e poniamo $u = v_r$ e $v = v_\theta$ (Figura 7.1). Le equazioni (7.1.5), (7.1.6) e (6.1.9) devono essere risolte con le condizioni al contorno

$$u(R) = v(R) = 0 \quad (7.2.1)$$

$$u(\infty) = u_0 \cos \theta, \quad v(\infty) = -u_0 \sin \theta, \quad p(\infty) = p_0, \quad (7.2.2)$$

dove u_0 è la velocità del flusso libero (velocità del fluido a grande distanza dalla sfera) e p_0 la pressione ambiente. Come si può verificare per sostituzione diretta, la soluzione è data

$$u = u_0 \left[1 - \frac{3R}{2r} + \frac{R^3}{2r^3} \right] \cos \theta \quad (7.2.3)$$

$$v = -u_0 \left[1 - \frac{3R}{4r} - \frac{R^3}{4r^3} \right] \sin \theta \quad (7.2.4)$$

$$p - p_0 = -\frac{3}{2} \frac{\mu u_0 R}{r^2} \cos \theta \quad (7.2.5)$$

La distribuzione delle linee di corrente è mostrata in Figura 7.1. Sulla superficie della sfera la velocità soddisfa evidentemente alle condizioni (7.2.1), mentre a grandi distanze ha l'andamento asintotico

$$(u^2 + v^2)/u_0^2 \rightarrow 1 - \frac{3R}{2r} (1 + \cos^2 \theta).$$

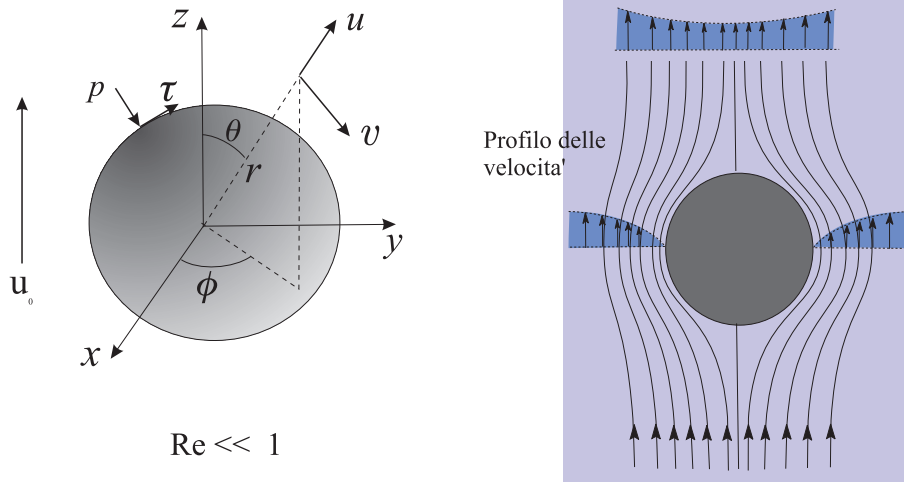


Figura 7.1 Flusso di Stokes attraverso una sfera.

Possiamo calcolare facilmente anche la forza esercitata dal fluido sulla sfera. Infatti, in ogni punto della superficie della sfera la forza per unità d'area nella direzione del flusso è composta dalla somma della forza tangente alla superficie $-\mu dv/dr$ causata dalla viscosità e della forza di pressione normale alla superficie. Pertanto la componente della forza totale nella direzione del moto è data da

$$f_z = \left[-\mu \frac{\partial v}{\partial r} \sin \theta - (p - p_0) \cos \theta \right]_{r=R}. \quad (7.2.6)$$

Sostituendo la soluzione (7.2.3)–(7.2.5) si ottiene

$$f_z = \frac{3\mu u_0}{2R}. \quad (7.2.7)$$

Si noti che f_z risulta indipendente dall'angolo θ . Inoltre, per simmetria, dobbiamo aspettarci che le rimanenti componenti della forza siano nulle. Questo significa che la forza esercitata sulla sfera può essere ricavata direttamente moltiplicando f_z per la superficie della sfera. L'espressione che ne risulta

$$F_D = 4\pi R^2 f_z = 6\pi\mu R u_0, \quad (7.2.8)$$

è nota come *legge di Stokes*. Ad essa corrisponde il coefficiente di resistenza

$$C_D = \frac{F_D/S}{\frac{1}{2} \rho u_0^2} = \frac{6}{\text{Re}}, \quad (7.2.9)$$

dove $S = \pi R^2$ è l'area della sfera proiettata nel piano normale alla velocità e $\text{Re} = \nu u_0/2R$. La (7.2.8) è stata verificata empiricamente

da Stokes studiando la caduta di gocce d'olio nell'aria e di particelle di polvere nei liquidi. Infatti dalle formule è facile trovare la velocità terminale di una sfera in caduta verticale in un campo di gravità. Imponendo l'equilibrio tra la resistenza viscosa la forza peso corretta per l'effetto di galleggiamento si ottiene:

$$6 \pi R \mu u_L = \frac{4}{3} \pi R^3 (\varrho_0 - \varrho) g , \quad (7.2.10)$$

dove ϱ_0 e ϱ sono le densità rispettivamente della sfera e del fluido. La velocità limite di caduta è quindi

$$u_L = \frac{2}{9} \frac{R^2 g}{\nu} \left(\frac{\varrho_0}{\varrho} - 1 \right) \quad (7.2.11)$$

cui corrisponde un numero di Reynolds

$$\text{Re} = \frac{4}{9} \frac{R^3 g}{\nu^2} \left(\frac{\varrho_0}{\varrho} - 1 \right) \quad (7.2.12)$$

Se applichiamo la (7.2.11) ad una goccia d'acqua che cade nell'aria ($\varrho_0/\varrho \approx 780$, $\nu \approx 0.15 \text{ cm}^2/\text{s}$) si ottiene $\text{Re} \approx 10^7 R^3$. Perciò l'ipotesi di bassi numeri di Reynolds su cui si basa l'approssimazione fatta inizialmente vale solo se le dimensioni della goccia è inferiore a circa 40 micron. Per sfere di maggiori dimensioni le deviazioni dalla legge di Stokes diventano sempre più grandi, risultato che è ben evidente nel grafico della Figura 7.1 dove, accanto all'andamento teorico della legge di Stokes sono riportati anche i risultati delle misure empiriche.

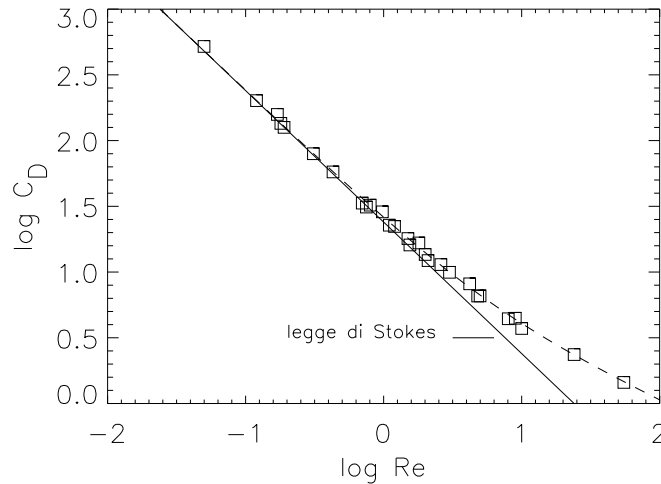


Figura 7.2 Confronto della legge di Stokes con le osservazioni.

7.3 Flusso attraverso un cilindro

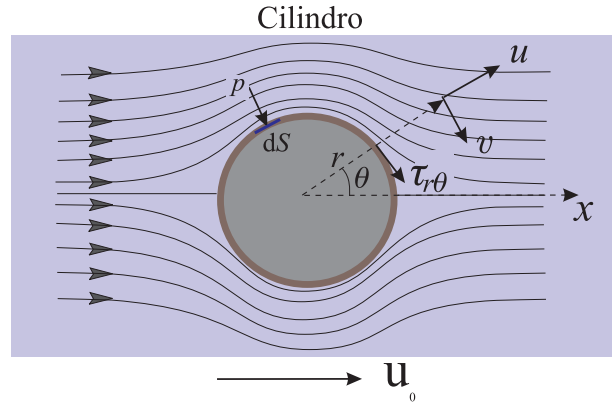


Figura 7.3 Flusso attorno ad un cilindro in coordinate cilindriche.

Sebbene il flusso attorno ad un cilindro possa sembrare per certi aspetti simile a quello della sfera, esso è in realtà sostanzialmente molto diverso e presenta alcune peculiarità che meritano di essere discusse. Il differente comportamento è dovuto al fatto che mentre la sfera è definita geometricamente solo dal proprio raggio, nel cilindro compare un'ulteriore dimensione, legata alla lunghezza trasversale al moto. Per di più, in un modello puramente teorico questa dimensione è indeterminata poichè si assume idealmente che il cilindro sia infinitamente esteso. Tutto questo produce una soluzione delle equazioni semplificate che è del tutto irrealistica e che può essere corretta solo partendo dalle equazioni moto complete.

Per comprendere questo fatto scriviamo, senza derivarle, le soluzioni delle equazioni (7.1.3–4) e (7.1.7) nel caso del cilindro in moto con velocità u_0 . Seguendo un procedimento piuttosto complesso si ottiene

$$u = u_0 \left[\frac{1}{2} \ln \frac{r}{R} + \frac{R^2}{4r^2} - \frac{1}{4} \right] C \cos \theta \quad (7.3.1)$$

$$v = -u_0 \left[\frac{1}{2} \ln \frac{r}{R} - \frac{R^2}{4r^2} + \frac{1}{4} \right] C \sin \theta \quad (7.3.2)$$

$$p - p_0 = -\frac{\mu u_0}{r} C \cos \theta, \quad (7.3.3)$$

dove u e v sono le componenti della velocità rispettivamente radiale e azimutale (Figura 7.3) e C è una costante arbitraria che per il momento lasciamo indeterminata.

Moltiplicando la (7.3.3) per $dS \cos(\theta + \pi) = -R \cos \theta d\theta$ ed integrando sull'intera superficie si ricava la componente nella direzione del flusso della forza (per unità di lunghezza del cilindro) dovuta alla

decompressione tra la parte posteriore e quella anteriore del cilindro

$$F_p = \pi \mu u_0 C . \quad (7.3.4)$$

La componente nella direzione del moto dello sforzo viscoso sulla superficie del cilindro è invece

$$\tau_{r\theta} \sin \theta = \mu \left[r \frac{\partial(v/r)}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} \right]_{r=R} = C \frac{\mu u_0}{R} \sin^2 \theta$$

Moltiplicando per $Rd\theta$ e integrando si ricava alla fine un'espressione identica alla (7.3.4) relativa alla forza viscosa esercitata dal fluido. Pertanto la resistenza totale esercitata dal fluido sull'unità di lunghezza del cilindro è

$$F_D = 2\pi \mu u_0 C . \quad (7.3.5)$$

Si noti che a sua volta questa espressione contiene la costante arbitraria C . Evidentemente dal punto di vista fisico questo risultato non sembra essere soddisfacente, in quanto da origine ad una soluzione non definita. In realtà questo paradosso viene risolto nei seguenti termini.

Come possiamo verificare direttamente, le funzioni (7.3.1), (7.3.2) soddisfano alla condizione di non scorrimento sulla superficie dell'ostacolo, cioè $u = v = 0$ per $r = R$, ma non alla richiesta che all'infinito il flusso sia uniforme. Dal momento che le espressioni del campo di velocità, della pressione e della forza resistente contengono il parametro libero C , si potrebbe pensare di fissarne il valore in modo da soddisfare alla condizione che a grande distanza dal cilindro il fluido tenda verso la velocità uniforme del flusso imperturbato. Tuttavia, a causa della dipendenza logaritmica della velocità dalla coordinata radiale (equazioni 7.3.1 e 7.3.2) risulta impossibile trovare un valore della costante in modo tale che $u \rightarrow u_0$ per $r \rightarrow \infty$. Questo inconveniente è in realtà originato dal fatto la soluzione è stata ricavata usando le equazioni di Navier–Stokes private dei termini inerziali. Nel caso della sfera questa approssimazione si può ritenere valida *in ogni regione* del flusso, purchè $Re \ll 1$. Al contrario, un'analisi dimensionale fatta per il flusso attorno al cilindro mostra come ora l'operazione non sia più lecita. Infatti in questo caso, a distanze molto grandi i termini inerziali diventano addirittura più importanti di quelli viscosi. Evidentemente, se usiamo le equazioni di Navier–Stokes complete dei termini del secondo ordine, l'aumento delle condizioni al contorno permette di imporre in maniera adeguata anche la corretta condizione all'infinito alla soluzione.

Uno studio teorico più accurato, fatto da Oseen nel 1910 usando una migliore approssimazione, mostra che nel limite $Re \ll 1$ la soluzione (7.3.1)–(7.3.3) è sufficientemente prossima al flusso reale fino a

distanze r/R dell'ordine di $1/\text{Re}$ purchè si assegni alla costante C il valore ricavato empiricamente

$$C = \frac{2}{\ln(7.4/\text{Re})} . \quad (7.3.5)$$

Di conseguenza il coefficiente di resistenza è dato da

$$C_D = \frac{F_D}{\frac{1}{2}\rho u_0^2 2R} = \frac{8\pi}{\text{Re} \ln(7.4/\text{Re})} , \quad (7.3.5)$$

e il suo andamento è illustrato nella Figura 7.4. Verifiche sperimentali hanno confermato la consistenza di questi risultati con le osservazioni ^[1].

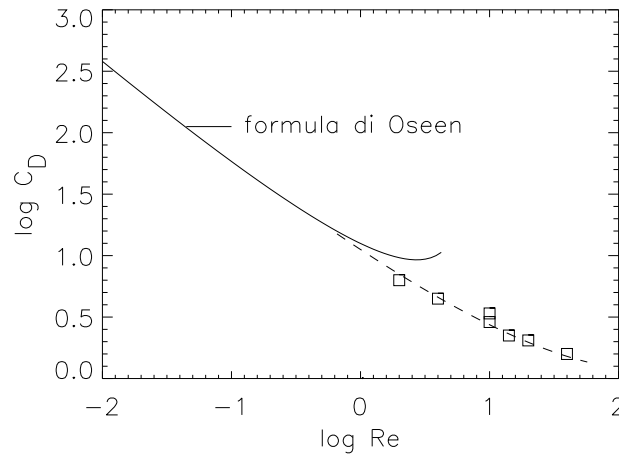


Figura 7.4 Coefficiente di resistenza di un cilindro circolare calcolato con la formula di Oseen (curva continua) e valori sperimentali (rettangoli).

^[1] In realtà è molto difficile eseguire esperimenti con bassi numeri di Reynolds. Infatti, un cilindro di diametro di un centimetro in moto nell'acqua dovrebbe avere una velocità di appena $\approx 10^{-2}$ cm/s per produrre un flusso con un numero di Reynolds unitario.

7.4 Moto geostrofico

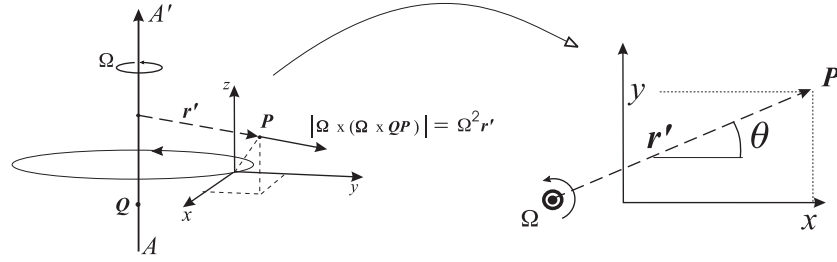


Figura 7.5 Geometria del riferimento ruotante nel problema geostrofico.

Soprattutto nello studio delle atmosfere planetarie acquista particolare interesse l'analisi di moto fluidi in sistemi di riferimento ruotanti. In linea di massima si potrebbe affrontare il problema usando un riferimento inerziale con il fluido in movimento. Tuttavia si dimostra che, quando le superfici sulle quali vengono fissate le condizioni al contorno ruotano, è più conveniente riscrivere le equazioni nel riferimento rigidamente collegato ai vincoli. In questo riferimento le equazioni di Navier–Stokes, rimangono ancora valide se, accanto alle forze reali, aggiungiamo le forze apparenti di trascinamento e di Coriolis. Ricordiamo che la relazione tra l'accelerazione di un punto P del fluido nel riferimento inerziale e in quello ruotante è data

$$\vec{a}' = \vec{a} - \vec{\Omega} \times (\vec{\Omega} \times \vec{r}) - 2\vec{\Omega} \times \vec{v}, \quad (7.4.1)$$

dove r è la posizione di P rispetto ad un punto Q situato sull'asse di rotazione, come mostra la Figura 7.5 [2].

Assumiamo per semplicità che il moto avvenga nel piano (x, y) e che il riferimento ruoti con una velocità angolare Ω costante attorno ad un asse AA' parallelo all'asse z e sia r' la distanza del punto P da AA' . Includendo quindi anche le forze di trascinamento, i termini delle equazioni di Navier–Stokes contenenti le componenti orizzontali della forza agente sul fluido diventano

$$-\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \Omega^2 r' \cos \theta + 2\Omega v \quad (7.4.2)$$

$$-\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + \Omega^2 r' \sin \theta - 2\Omega u \quad (7.4.3)$$

[2] Molto spesso in meccanica l'asse di rotazione viene fatto coincidere con uno degli assi del riferimento. Tuttavia nelle applicazioni relative ai flussi atmosferici è più naturale porre l'origine su un punto della superficie del pianeta posto ad una generica latitudine λ , e dunque ad una certa distanza dall'asse di rotazione, anche se ciò comporta una maggiore complicazione geometrica.

Poichè ^[3]

$$r' \cos \theta = r' \frac{\partial r'}{\partial x} = \frac{1}{2} \frac{\partial r'^2}{\partial x} \quad \text{e} \quad r' \sin \theta = r' \frac{\partial r'}{\partial y} = \frac{1}{2} \frac{\partial r'^2}{\partial y},$$

le (7.4.2) e (7.4.3) possono essere scritte rispettivamente

$$-\frac{1}{\varrho} \frac{\partial}{\partial x} \left(p - \frac{1}{2} \Omega^2 r'^2 \right) + 2\Omega v \quad (7.4.4)$$

$$-\frac{1}{\varrho} \frac{\partial}{\partial y} \left(p - \frac{1}{2} \Omega^2 r'^2 \right) - 2\Omega u. \quad (7.4.5)$$

Queste espressioni mostrano che la componente centrifuga $\Omega^2 r^2$ può essere inclusa come termine correttivo della pressione. In altre parole, il problema fluidodinamico è *formalmente* identico al caso in cui l'azione centrifuga è assente e la pressione opportunamente ridotta ^[4]. Per questo motivo nel seguito ignoreremo il termine centrifugo e scriveremo le equazioni di Navier-Stokes nella seguente forma semplificata

$$\left(u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} \right) = -\frac{1}{\varrho} \frac{\partial p}{\partial x} + 2\Omega v + \nu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right), \quad (7.4.6)$$

$$\left(u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} \right) = -\frac{1}{\varrho} \frac{\partial p}{\partial y} - 2\Omega u + \nu \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right). \quad (7.4.7)$$

Come accade spesso nei problemi di fluidodinamica, i singoli termini delle equazioni di Navier-Stokes possono assumere valori molto differenti tra loro a seconda delle condizioni del moto. Esaminiamo prima il caso in cui le forze inerziali e quelle viscosi sono entrambe trascurabili rispetto al contributo di Coriolis. Se la scala lineare è L e la velocità caratteristica è U , un confronto dimensionale fatto sulle (7.4.6) e (7.4.7) porta alle seguenti relazioni

$$\begin{aligned} U^2/L &\ll \Omega U && \text{forze inerziali trascurabili} \\ \nu U/L^2 &\ll \Omega U && \text{forze viscosi trascurabili} \end{aligned}$$

^[3] Più in generale si ha $\vec{r}' = \frac{1}{2} \nabla(r'^2)$.

^[4] Evidentemente all'equilibrio la forza centrifuga viene bilanciata dal gradiente di pressione radiale esattamente come in un campo di gravità la forza peso è equilibrata dalla pressione. Tuttavia questi risultati sono validi solo se la densità è costante e se il problema non prevede condizioni al contorno nella pressione. Si osservi che $p - 1/2 \Omega^2 r'^2$ rappresenta la *pressione ridotta* (si veda la nota alla fine del paragrafo 6.1.1).

ossia, in termini di grandezze adimensionali

$$\text{Ro} \equiv U/\Omega L \ll 1 \quad (\text{numero di Rossby}) \quad (7.4.8)$$

$$\text{Ek} \equiv \nu/\Omega L^2 \ll 1 \quad (\text{numero di Ekman}) \quad (7.4.9)$$

Quando entrambi i numeri sono piccoli le equazioni di Navier–Stokes sono dominate dalla pressione e dalle forze (apparenti) di volume. In questo caso nel fluido si stabilisce un semplice equilibrio tra queste due forze, cioè

$$2\vec{\Omega} \times \vec{v} = -\frac{1}{\rho} \nabla p \quad (7.4.10)$$

(la pressione include il contributo centrifugo). In un flusso bidimensionale le equazioni diventano

$$-2\Omega v = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x}, \quad (7.4.11)$$

$$2\Omega u = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} \quad (7.4.12)$$

Per completare il problema a queste occorre aggiungere l'equazione di continuità

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0. \quad (7.4.13)$$

Un flusso che soddisfa alle equazioni (7.4.11), (7.4.12) e (7.4.13) viene detto *geostrofico*. Esso riveste una certa importanza nella determinazione delle mappe meteorologiche. La principale proprietà del comportamento geostrofico è legato al fatto che, poichè le forze di Coriolis sono sempre perpendicolari alla direzione del flusso, anche il gradiente di pressione risulta perpendicolare al moto. In altri parole, in un flusso geostrofico la pressione è costante lungo le linee di corrente. Questo risultato è ben diverso da quello che si trova invece nei sistemi non ruotanti, nei quali la pressione può variare lungo le linee di corrente. Un esempio è fornito dall'atmosfera terrestre, il cui comportamento è fortemente influenzato dalla rotazione terrestre. Le osservazioni mostrano che ad alta quota ^[5] la direzione del vento è normale alle isobare. Si tenga presente che nel caso della rotazione della Terra, o più in generale di un pianeta, se l'origine del riferimento si trova in un punto della superficie che ha latitudine λ , l'asse di rotazione non è parallelo all'asse z . Tuttavia i risultati del moto geostrofico rimangono validi se nelle formule la velocità angolare viene sostituita con la sua componente $\Omega \sin \lambda$.

[5] Come vedremo nel prossimo capitolo, a bassa quota diventano importanti anche i termini viscosi, per quanto grandi siano i numeri di Ekman e di Rossby.

CAPITOLO VIII

STRATO LIMITE

8.1 Introduzione.

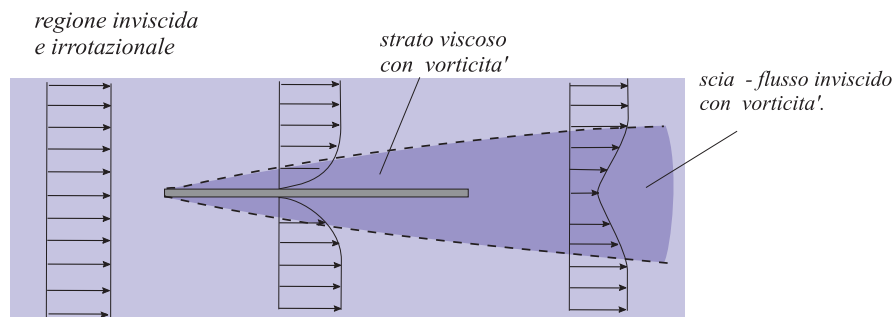


Figura 8.1 Formazione dello strato limite e della scia in un fluido che attraversa una lamina.

Come si è visto nel paragrafo 4.7, i regimi con elevato numero di Reynolds possono essere studiati risolvendo le equazioni di Eulero, più semplici rispetto alle equazioni di Navier–Stokes, come se il fluido fosse effettivamente privo di viscosità. Il prezzo da pagare è una perdita di informazioni dovute all’abbassamento dell’ordine delle equazioni e la conseguente impossibilità di assegnare *tutte* le condizioni al contorno richieste dal problema. D’altra parte le soluzioni inviscide sono certamente *non corrette* in prossimità delle superfici dei solidi, dove l’assenza di scorrimento influenza sicuramente lo stato di moto del fluido indipendentemente dal valore del numero di Reynolds.

L’incapacità di risolvere le equazioni di Navier–Stokes, da un lato, e l’inapplicabilità delle equazioni di Eulero ai fluidi viscosi, dall’altro, divenne particolarmente frustrante agli inizi del ventesimo secolo, in seguito all’invenzione dei primi aeroplani e alla conseguente necessità di calcolare la resistenza e la portanza delle ali. Il problema è stato affrontato da Prandtl nel 1905, il quale ipotizzò l’esistenza di un sottile strato di fluido adiacente alla superficie di contatto con gli ostacoli, all’interno del quale i termini viscosi delle equazioni di Navier–Stokes diventano confrontabili con quelli inerziali indipendentemente dal numero di Reynolds. Gli esperimenti hanno effettivamente confermato l’esistenza di questa regione, chiamata *strato limite*, o *boundary layer*,

il cui spessore decresce con l'aumentare del numero di Reynolds, ma *non si annulla mai*. Attraverso lo strato la velocità del fluido passa rapidamente dal valore zero sulla superficie del solido (su cui vale la condizione di non scorrimento), fino al valore finito che compete alla regione lontana dal solido, dove effettivamente il fluido può essere considerato privo di viscosità.

Lo strato limite può provocare indirettamente una serie di altri importanti effetti, come una non indifferente deformazione delle linee di corrente rispetto al flusso ideale. Nei corpi arrotondati questa distorsione può coinvolgere anche regioni molto distanti dagli ostacoli.

Un'altro importantissimo aspetto dello strato limite è la creazione di vorticità nella zona vicina alla superficie solida ^[1]. In questo modo anche un fluido inizialmente irrotazionale acquista vorticità, che viene successivamente diffusa dal flusso dando origine ad una lunga scia nella direzione del moto (Figura 8.1).

In questo capitolo studieremo in maniera semplificata la teoria dello strato limite ed esamineremo alcuni fenomeni ad esso collegati.

8.2 Teoria dello strato limite

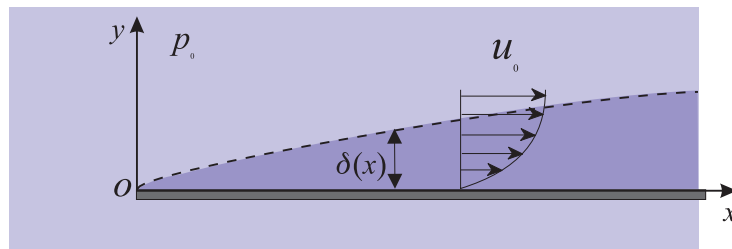


Figura 8.2 Strato limite su una lamina.

Consideriamo un flusso stazionario che scorre sopra una lastra piana con velocità u_0 nella direzione x (Figura 8.2). La lunghezza ℓ della lastra caratterizza anche la scala lineare L della configurazione. In prossimità del solido il fluido viene evidentemente rallentato dalle forze viscose. Se immaginiamo di misurare la velocità del fluido spostandoci trasversalmente alla direzione principale del moto, troviamo che, se $Re = L u_0 / \nu \gg 1$, la velocità passa molto rapidamente dal valore zero sulla superficie fino ad raggiungere praticamente le condizioni di flusso libero ad una certa altezza $y \approx \delta$. Grazie all'elevato numero di Reynolds possiamo ritenere che all'esterno di questa regione il fluido

[1] Si può dimostrare che in un fluido ideale non si può creare vorticità se questa è inizialmente nulla. D'altra parte la vorticità è un ingrediente fondamentale di molti processi fluidodinamici come, ad esempio, la portanza di un'ala.

sia inviscido, e quindi che la pressione $p_0(x)$ e la velocità $u_0(x)$ soddisfino all'equazione di Eulero

$$u_0 \frac{\partial u_0}{\partial x} = -\frac{1}{\varrho} \frac{\partial p_0}{\partial x}. \quad (8.2.1)$$

o alla forma integrata (equazione di Bernoulli)

$$p_0/\varrho + 1/2 u_0^2 = \text{costante}. \quad (8.2.2)$$

La presenza dello strato limite individua automaticamente una seconda scala lineare δ associata al suo spessore. È ragionevole pensare che il valore di δ possa essere funzione della posizione x lungo la lastra e dalla velocità del fluido. Tuttavia per il momento ignoreremo la dipendenza di questo parametro dalle variabili del flusso, ma assumeremo che sia soddisfatta la disuguaglianza

$$\delta \ll L. \quad (8.2.3)$$

La validità di questa ipotesi sarà verificata più avanti (cfr. la 8.2.9).

Indichiamo con $U \approx u_0$ e V le scale delle velocità nelle direzioni rispettivamente x e y e valutiamo l'importanza dei singoli termini delle equazioni del flusso nel limite $Re \gg 1$. Questo ci permetterà di individuare i termini che possono essere eventualmente ignorati e di ricavare quindi la forma semplificata delle equazioni del moto del fluido *attraverso* dello strato limite, dove si presume non valgano le equazioni di Eulero. Scriviamo le equazioni riportando nella riga immediatamente sottostante gli ordini di grandezza delle singole parti.

Equazione di continuità:

$$\frac{\frac{\partial u}{\partial x}}{U/L} + \frac{\frac{\partial v}{\partial y}}{V/\delta} = 0 \quad (8.2.4)$$

Poichè i due termini si devono bilanciare, avremo

$$V \approx U\delta/L, \quad (8.2.5)$$

cioè la velocità verticale è sempre molto più piccola del moto orizzontale.

Equazione di Navier–Stokes nella direzione x :

$$\begin{aligned} u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} &= -\frac{1}{\varrho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \\ \frac{U^2}{L} + \frac{VU}{\delta} &\approx \frac{U^2}{L} \quad \frac{\Delta P_x}{\varrho L} \quad \frac{\nu U}{L^2} \quad \frac{\nu U}{\delta^2} \end{aligned} \quad (8.2.6)$$

ΔP_x rappresenta la variazione della pressione nella direzione x e il suo valore verrà discusso più avanti. I due termini inerziali sono dello stesso ordine perchè la piccolezza del rapporto V/U è compensata dalla più rapida variazione di u con y rispetto a x . Per quanto riguarda i due termini viscosi, possiamo trascurare il primo che è δ^2/L^2 volte più piccolo del secondo.

Equazione di Navier–Stokes nella direzione y :

$$u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + \nu \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \quad (8.2.7)$$

$$\frac{UV}{L} \approx \frac{U^2 \delta}{L^2} \quad \frac{V^2}{\delta} \approx \frac{U^2 \delta}{L^2} \quad \frac{\Delta P_y}{\rho \delta} \quad \frac{\nu V}{L^2} \approx \frac{\nu U \delta}{L^3} \quad \frac{\nu V}{\delta^2} \approx \frac{\nu U}{L \delta}$$

in cui ΔP_y è la variazione della pressione attraverso lo strato limite e verrà anch'esso discusso più avanti. Come nell'equazione (8.2.6), il primo termine viscoso è trascurabile.

Per la stessa definizione di strato limite, nella regione $y \leq \delta$ vi è una sensibile deviazione dalla condizione di flusso inviscido. Ciò significa che in ciascuna delle equazioni (8.2.6) e (8.2.7) il contributo inerziale deve essere confrontabile con il corrispondente termine viscoso. Cioè

$$U^2/L \approx \nu U/\delta^2 \quad \text{e} \quad U^2 \delta/L^2 \approx \nu U/L \delta. \quad (8.2.8)$$

Questo ci permette di avere una prima valutazione del legame tra lo spessore δ e i parametri del flusso. Dalle (8.2.8) segue infatti la seguente relazione approssimata

$$\delta \approx \sqrt{\frac{\nu L}{U}} = \frac{L}{\sqrt{\text{Re}}}. \quad (8.2.9)$$

Poichè $\text{Re} \gg 1$, la (8.2.9) mostra che lo spessore trasversale dello strato limite è effettivamente molto più piccolo della lunghezza della lamina, confermando l'ipotesi iniziale del modello, basato sulla disuguaglianza (8.2.3). Ad esempio, in una lastra lunga 10 cm, che si muove nell'aria con velocità di 100 cm/s, lo spessore dello strato limite è appena 6 mm. Se il moto avviene invece nell'acqua si ha $\delta \approx 2$ mm.

Si noti che nell'analisi dimensionale delle equazioni di Navier–Stokes manca una stima esplicita delle scale di pressione ΔP_x e ΔP_y . D'altra parte occorre tenere presente che il comportamento di un flusso è regolato proprio dai gradienti di queste funzioni. Infatti, in assenza di forze di pressione il fluido si porterebbe rapidamente a riposo sotto l'effetto della dissipazione viscosa. Dobbiamo quindi aspettarci che

anche i termini di pressione siano dello stesso ordine di grandezza dei rimanenti termini. Devono valere cioè le relazioni

$$\frac{\Delta P_x}{\varrho L} \approx U^2/L, \quad \frac{\Delta P_y}{\varrho \delta} \approx U^2 \delta/L^2,$$

dalle quali si ricava il rapporto

$$\Delta P_y/\Delta P_x \approx \delta^2/L^2 = \text{Re}^{-1}. \quad (8.2.10)$$

Poichè $\text{Re} \gg 1$, la differenza di pressione nella direzione trasversale alla lamina sono molto minori delle corrispondenti variazioni nella direzione x . Questo risultato è di fondamentale importanza nella teoria dello strato limite poichè ci permette di assumere che la pressione sia poco sensibile alla coordinata y , cioè che

$$\frac{\partial p}{\partial y} \approx 0. \quad (8.2.11)$$

Con questa semplificazione, in ogni punto $[x, y \leq \delta]$ all'interno dello strato limite la pressione può essere posta eguale alla pressione esterna $p_0(x)$ della regione inviscida, che normalmente è una funzione nota. ^[2]. Pertanto la pressione $p(x, y)$ non compare più come funzione incognita del problema, e il numero di equazioni da risolvere viene di conseguenza ridotto. In definitiva, il sistema semplificato che governa il flusso all'interno dello strato limite contiene le due sole variabili $u(x, y)$ e $v(x, y)$ ed è composto dall'equazione di continuità (8.2.4) e dall'equazione che si ottiene dalla (8.2.6) togliendo il più piccolo dei termini viscosi, cioè

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (8.2.12)$$

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{\varrho} \frac{\partial p_0}{\partial x} + \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}. \quad (8.2.13)$$

Il sistema va risolto con le condizioni al contorno

$$u(x, 0) = v(x, 0) = 0 \quad (8.2.14)$$

$$u(x, y) \rightarrow u_0 \quad \text{per } y \gg \delta \quad (8.2.15)$$

Si noti che la (8.2.15) contiene la richiesta che la velocità tenda con regolarità alla soluzione inviscida via via che ci si allontana dalla superficie della lastra.

[2] Il fatto che all'interno dello strato limite la pressione vari solo nella direzione della lastra e non trasversalmente ad essa è una diretta conseguenza della disegualianza $V \ll U$.

Poichè nella regione esterna vale l'equazione di Eulero (8.2.1), la (8.2.13) può essere scritta più convenientemente in funzione del gradiente della velocità della regione imperturbata. Cioè

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = u_0 \frac{\partial u_0}{\partial x} + \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}. \quad (8.2.16)$$

Sebbene le equazioni del flusso siano state ricavate per una configurazione geometrica semplice, formata da una superficie piana posta lungo l'asse $y = 0$, risultati del tutto simili valgono anche nel caso di superfici regolari curve. Si dimostra infatti le equazioni dello strato limite mantengono ancora la forma (8.2.12) e (8.2.13) qualora vengano introdotte coordinate curvilinee in modo che $y = 0$ delimiti la superficie del solido (Figura 8.3).

La formazione dello strato limite non è necessariamente legata alla presenza di una superficie solida e alla corrispondente condizione di non scorrimento. Le osservazioni mostrano infatti che, più in generale, lo strato si forma dove le condizioni cui è sottoposto il fluido sono diverse da quelle richieste per il moto inviscido. Ad esempio, lo strato limite si forma anche in prossimità di superfici libere lungo le quali gli sforzi sono nulli, oppure nelle regioni che separano due fluidi che scorrono con differente velocità.

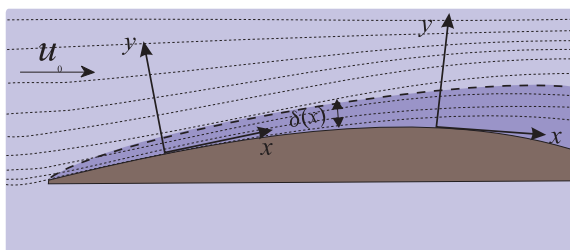


Figura 8.3 Strato limite su un corpo arrotondato (regione del fluido più scura) e andamento delle linee di corrente (curve tratteggiate).

8.3 Strato limite di Blasius

La configurazione di strato limite più semplice è quella relativa ad una lamina sottile di lunghezza finita ℓ , sulla quale scorre flusso uniforme $u_0 = \text{costante}$. Dalla (8.2.1) segue che anche la pressione p_0 deve rimanere costante. In assenza di gradiente di pressione il sistema di equazioni dello strato limite (8.2.12) e (8.2.13) diventa

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (8.3.1)$$

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \quad (8.3.2)$$

Il rallentamento del fluido causato dall'attrito provoca un piccolo allontanamento delle linee di flusso dalla lamina. Per certi aspetti tale deviazione è assimilabile ad un leggero ma graduale aumento dello spessore della lastra.

Come mostrano le Figure 8.2 e 8.3, la formazione dello strato limite inizia nel bordo $x = 0$ e diventa sempre più grande all'aumentare della distanza da questo punto. Nel paragrafo precedente abbiamo supposto che il valore δ fosse legato alla scala lineare del sistema tramite la relazione (8.2.9). In realtà è più ragionevole pensare che lo spessore dello strato in un certo punto x non possa dipendere dall'intera lunghezza ℓ della lamina, ma solo dal tratto x effettivamente percorso dal fluido a partire dal punto in cui l'attrito inizia ad esercitare l'azione frenante. Questo implica la (8.2.9) debba essere sostituita da una espressione del tipo

$$\delta \propto \sqrt{\nu x / u_0}. \quad (8.3.3)$$

La costante di proporzionalità è per il momento indeterminata, e deve essere ricavata risolvendo il sistema (8.3.1) e (8.3.2) con le condizioni al contorno (8.2.14)-(8.2.15).

La ricerca della soluzione viene facilitata da alcune considerazioni dimensionali in base alle quali la velocità deve dipendere dalle coordinate x e y solo attraverso una combinazione del tipo ^[3]

$$\eta(x, y) = y/h(x) \quad (8.3.4)$$

dove

$$h(x) = \sqrt{\nu x / u_0}. \quad (8.3.5)$$

Questo permette di porre

$$u(x, y) = u_0 g(\eta), \quad v(x, y) = u_0 g_1(\eta) \quad (8.3.6)$$

in cui g e g_1 sono due funzioni per il momento imprecisate che dipendono unicamente dalla variabile indipendente η . Le (8.3.5) implicano che attraverso ogni sezione dello strato limite il profilo della velocità deve mantenere la medesima forma, indipendentemente dalla distanza x . Ciò che cambia è infatti solo la scala verticale $h(x)$ del profilo.

^[3] Per la dimostrazione si veda l'Appendice C.

Come possiamo notare dalla (8.3.5), questa funzione è proporzionale proprio allo spessore dello strato limite $\delta(x)$.

Introduciamo la funzione di corrente Ψ , definita dalle note relazioni

$$u = \partial\Psi/\partial y, \quad (8.3.7a)$$

$$v = -\partial\Psi/\partial x, \quad (8.3.7b)$$

la cui esistenza è garantita direttamente dall'equazione di continuità (8.3.1). Poichè anche Ψ deve dipendere dalle coordinate solo tramite la variabile ausiliaria η , dalle (8.3.4), (8.3.6) e (8.3.7a) si ha

$$u_0 g(\eta) = \frac{\partial\Psi}{\partial y} = \frac{d\Psi}{d\eta} \frac{\partial\eta}{\partial y} = \frac{1}{h} \frac{d\Psi}{d\eta} \quad (8.3.8).$$

Integrando in η si ottiene

$$\Psi(\eta) = u_0 h(x) \int g(\eta) d\eta = u_0 h(x) f(\eta), \quad (8.3.9)$$

dove si è introdotta la nuova funzione

$$f(\eta) = \int g(\eta) d\eta. \quad (8.3.10)$$

Dalla prima delle (8.3.6) segue quindi

$$u = u_0 f'(\eta). \quad (8.3.11)$$

dove " ' " significa derivazione totale rispetto a η . Inoltre dalla (8.3.7b) si ricava

$$v = -\frac{\partial\Psi}{\partial x} = -\frac{dh}{dx} f(\eta) - h f' \frac{\partial\eta}{\partial x} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{u_0 \nu}{x}} [\eta f'(\eta) - f(\eta)], \quad (8.3.11)$$

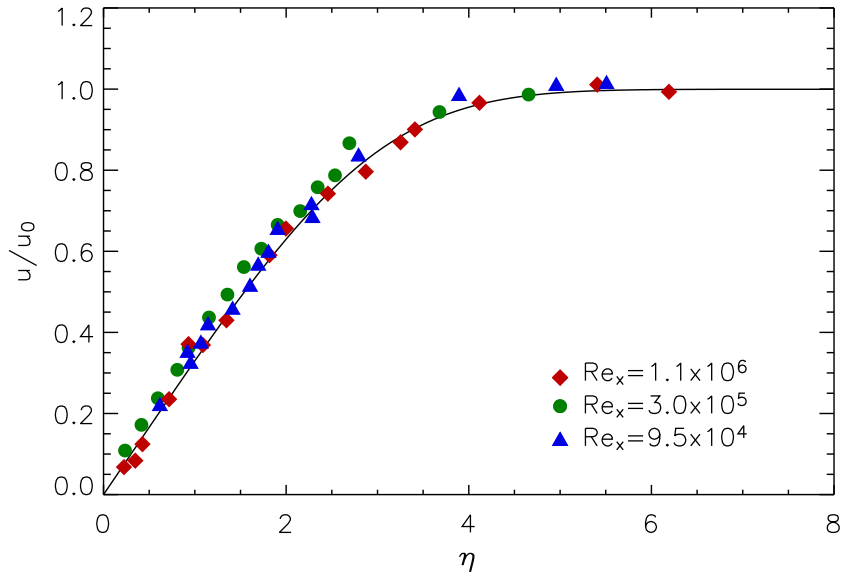


Figura 8.4 Profilo teorico di Blasius (curva continua) e misure sperimentali della velocità $u/u_0 = f'$ attraverso strato limite per tre valori del numero di Reynolds.

Sostituendo le espressioni di u e v nell'equazione del moto (8.3.2) si trova infine la seguente *equazione di Blasius* (1908)

$$f f'' + 2 f''' = 0, \quad (8.3.12)$$

che deve essere integrata con le condizioni al contorno

$$f = f' = 0 \quad \text{per} \quad \eta = 0 \quad \text{e} \quad f' \rightarrow 1 \quad \text{per} \quad \eta \rightarrow \infty. \quad (8.3.13)$$

Esiste solo la soluzione numerica di questa equazione. L'andamento della funzione $g = f'$ è mostrata nella Figura 8.4 assieme ad alcune misure sperimentali ottenute per tre valori del numero di Reynolds. Possiamo notare come, nonostante le approssimazioni introdotte, vi è un notevole accordo tra i risultati del modello teorico e le osservazioni. Il valore $g = 0.99$ (cioè il 99% del massimo) viene raggiunto quando $\eta = \eta_1 = 4.99$. Questo numero fissa convenzionalmente lo spessore dello strato limite. Si pone cioè

$$\delta(x) = y_1 = \eta_1 h(x) = 4.99 \sqrt{\frac{\nu x}{u_0}} = 4.99 \frac{x}{\sqrt{\text{Re}_x}} \quad (8.3.14)$$

dove

$$\text{Re}_x = \frac{ux}{\nu} \quad (8.3.15)$$

è il numero di Reynolds che compete alla distanza x .

Naturalmente lo strato limite non esiste come entità fisica ben definita e, tra l'altro, non coincide con nessuna linea di corrente (Figura 8.5). Esso rappresenta solo una scelta arbitraria, ma ragionevole, per poter fissare un limite al di sopra il quale il flusso può essere considerato con ottima approssimazione inviscido.

Dall'integrazione numerica possiamo anche verificare che sulla superficie del solido $y = 0$ (dove anche $\eta = 0$) la derivata del profilo di Blasius è

$$\left. \frac{\partial f'}{\partial \eta} \right|_{\eta=0} = \left. \frac{\partial(u/u_0)}{\partial(y/h)} \right|_{y=0} = 0.332. \quad (8.3.16)$$

Questo permette di trovare lo sforzo locale causato dallo scorrimento

$$\tau(x) = \mu \left. \frac{\partial u}{\partial y} \right|_{y=0} = 0.332 \varrho \sqrt{\frac{\nu}{x}} u_0^{3/2} = \frac{0.332 \mu u_0}{x} \sqrt{\text{Re}_x}, \quad (8.3.17)$$

e quindi il coefficiente di trasmissione locale

$$c_f(x) \equiv \frac{\tau(0)}{1/2 \varrho u_0^2} = 0.664 \frac{\nu \sqrt{\text{Re}_x}}{u_0 x} = \frac{0.664}{\sqrt{\text{Re}_x}}. \quad (8.3.18)$$

Il coefficiente di attrito totale per una lamina lunga ℓ e larga Δz è

$$\begin{aligned} C_f &= \frac{F_D/(\ell \Delta z)}{1/2 \varrho u_0^2} = \frac{2}{\varrho u_0^2 \ell \Delta z} \Delta z \int_0^\ell \tau(x) dx = \\ &= \frac{0.664}{\varrho u_0^2 \ell} \nu^{1/2} u_0^{3/2} \int_0^\ell \frac{dx}{\sqrt{x}} = \frac{0.664 \nu^{1/2}}{\ell u_0^{1/2}} 2 \sqrt{\ell} = \\ &= \frac{1.328}{\sqrt{\text{Re}_\ell}} \end{aligned} \quad (8.3.19)$$

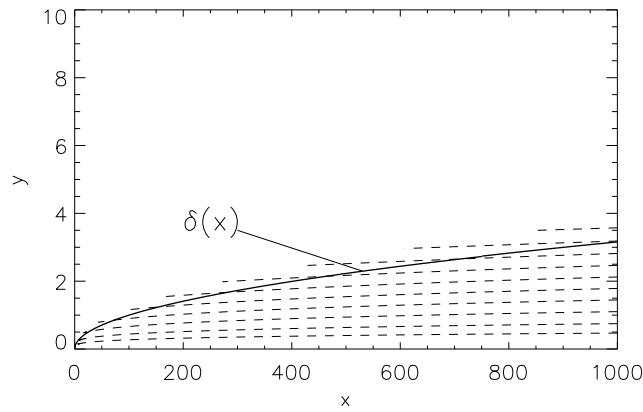


Figura 8.5 Profilo geometrico dello strato limite (linea piena) e delle linee di corrente (curve tratteggiate). Si noti le differenti scale delle coordinate x e y .

8.4 Strato limite turbolento

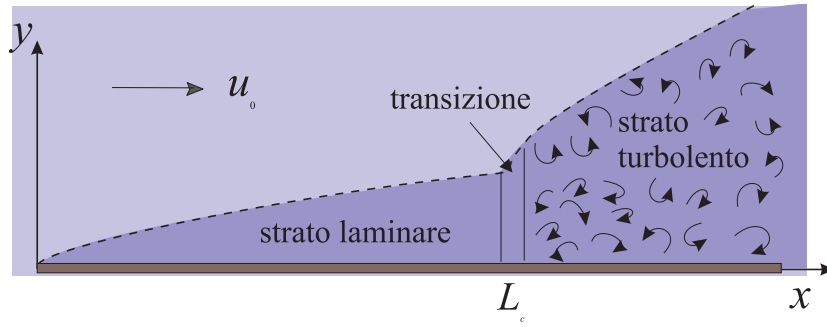


Figura 8.6 Strato limite con regimi laminare e turbolento.

All'interno dello strato limite il numero di Reynolds (8.3.15) aumenta linearmente con la distanza x dal bordo. D'altra parte le osservazioni mettono in evidenza che nelle regioni dove $\text{Re}_x \gtrsim 1.2 \times 10^5$, si sviluppano delle instabilità che rendono il flusso turbolento. Perciò per mantenere un flusso laminare lungo l'intera lastra è necessario che questa abbia una lunghezza inferiore al valore critico

$$L_c \approx \frac{1.2 \times 10^5 \nu}{u_0} . \quad (8.4.1)$$

Ad esempio, questo limite corrisponde ad una lastra lunga 180 cm che si muove nell'aria con velocità $u_0 = 100$ cm/s, oppure lunga 13 cm se il moto avviene nell'acqua ^[4].

Le osservazioni provano che la struttura dello strato limite turbolento mantiene proprietà simili a quelle del flusso laminare purché in ogni regione si sostituisca la velocità caotica del fluido con le velocità medie. Si osserva, tuttavia, che mentre lo spessore dello strato laminare cresce proporzionalmente a $x^{1/2}$, in accordo con la legge (8.3.14), lo strato instabile aumenta più rapidamente, e segue l'andamento

$$\delta(x) = 0.368 \left(\frac{\nu}{u_0} \right)^{1/5} x^{4/5} , \quad (8.4.2)$$

come mostra la Figura 8.7a.

In regime di turbolenza anche la resistenza tra il fluido e la lamina cresce notevolmente, in quanto il moto disordinato dei vortici è capace di trasportare quantità di moto nella direzione trasversale più efficacemente rispetto alla diffusione molecolare. Nella Figura 8.6b è

^[4] In realtà questi valori possono variare sensibilmente perchè dipendono anche dalla ruvidezza della superficie solida

riportato l'andamento del coefficiente di resistenza di una lamina al variare del numero di Reynolds. Per bassi valori di Re il regime rimane laminare sull'intera lunghezza della lamina. Tuttavia, quando $Re \gtrsim 2 \times 10^5$ lo strato risulta formato da una parte iniziale laminare e dalla rimanente parte turbolenta. Quest'ultima cresce di importanza via via che aumenta Re . Pertanto in queste condizioni il coefficiente di resistenza assume un valore intermedio tra quello relativo ad uno strato interamente laminare ed uno completamente turbolento. Infine quando $Re \gtrsim 10^7$ la parte instabile sopra la lamina diventa dominante e di conseguenza il valore di C_D tende verso l'andamento tipico di uno strato completamente turbolento.

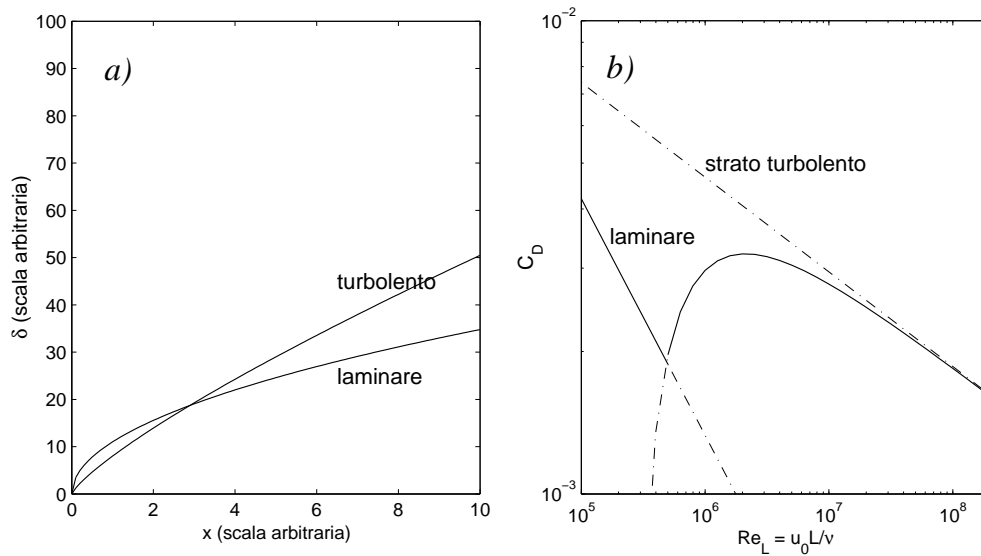


Figura 8.7 a) Forma dello strato limite in una lastra piana nei regimi laminare e turbolento. b) Coefficiente di resistenza in funzione del numero di Reynolds.

8.5 Strato limite di Ekman

Esaminiamo nuovamente il caso di un flusso in un sistema di riferimento ruotante. Nel paragrafo 7.4 abbiamo visto che negli strati alti dell'atmosfera i numeri di Ekman e di Rossby sono talmente piccoli da mantenere il moto dell'aria in equilibrio geostrofico (cioè le isobare coincidono con linee di corrente). Tuttavia in prossimità del suolo, dove si applicano le condizioni di non scorrimento, le forze viscosive diventano importanti ed il flusso viene regolato dall'equazione dello strato limite (8.2.8), corretto però per la presenza del termine di Coriolis. Questa configurazione prende il nome di *strato limite di Ekman* e, dal punto di vista matematico, è più semplice del problema di Blasius.

L'esistenza di questa regione fu messa in evidenza da Ekman nel 1905 in relazione alla formazione di venti generati dalle correnti oceaniche. Possiamo trascurare le forze centrifughe perchè da un lato danno un contributo molto più piccolo rispetto alle altre forze, e dall'altro perchè possono essere incluse come termine correttivo della pressione (v. paragrafo 7.4).

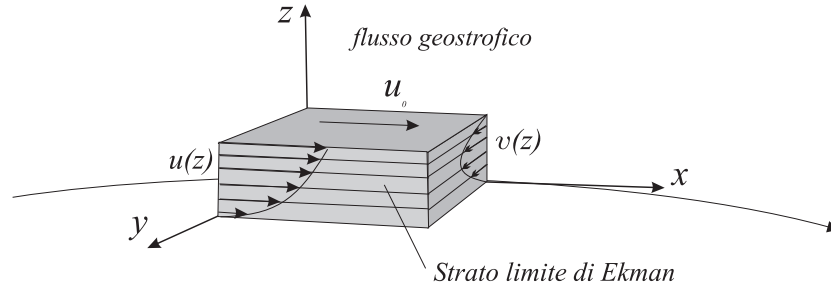


Figura 8.8 Strato limite di Ekman.

Prendiamo in considerazione una porzione di fluido adiacente alla superficie terrestre S . Introduciamo coordinate cartesiane con gli assi (x, y) solidali a S e ruotante con velocità angolare Ω attorno a un assegnato asse [5].

Normalmente le variazioni del moto geostrofico coinvolgono regioni molto estese. Perciò se esaminiamo il comportamento del fluido sovrastante un'area $\Delta x \Delta y$ sufficientemente piccola, possiamo ignorare la curvatura delle linee di corrente. In questa regione il fluido possiede un movimento all'incirca uniforme, con velocità u_0 orientata prevalentemente nella direzione dell'asse x (v. la Figura 8.8), ed è soggetto ad un gradiente ortogonale di pressione $p_0(y)$. Nella regione geostrofica, lontano dalla superficie terrestre, le equazioni del flusso sono

$$2\Omega u_0 = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p_0}{\partial y}, \quad 0 = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p_0}{\partial x} \quad (8.5.1)$$

Ricaviamo ora le equazioni semplificate dello strato limite tenendo presente che, a causa delle forze di Coriolis ortogonali a u_0 , il flusso dovrà muoversi in entrambe le direzioni x e y . Partiamo dall'ipotesi che il moto sia uniforme, cioè che le due componenti delle velocità u e v siano separatamente costanti su ogni piano $z = \text{costante}$ [6].

[5] Come nel moto geostrofico, in generale l'asse di rotazione non coincide con l'asse z del riferimento. Inoltre se il pianeta ruota con velocità angolare Ω_0 e l'origine del riferimento si trova alla latitudine λ , si ha $\Omega = \Omega_P \sin \theta$.

[6] Il fatto che u e v dipendano solo dalla quota z è un'ipotesi *ad hoc*, che sarà giustificata *a posteriori* sulla base del fatto che tale soluzione esiste.

Possiamo quindi scrivere

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} = 0. \quad (8.5.2)$$

Dall'equazione di continuità segue che anche la componente verticale della velocità è costante. Con queste semplificazioni, le equazioni di Navier–Stokes diventano

$$-2\Omega v = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \quad (8.5.3)$$

$$2\Omega u = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + \nu \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \quad (8.5.4)$$

$$\frac{\partial p}{\partial z} = 0 \quad (8.5.5)$$

La (8.5.5) implica l'indipendenza di p dalla quota attraverso tutto lo strato limite, con la conseguenza che in ogni punto dello strato la pressione coincide con la pressione $p_0(y)$ della regione geostrofica sovrastante. Poichè in questa regione valgono le (8.5.1), possiamo dedurre che anche in prossimità del suolo devono essere soddisfatte le equazioni

$$\frac{\partial p}{\partial y} = -2\rho\Omega u_0, \quad \frac{\partial p}{\partial x} = 0. \quad (8.5.6)$$

Sostituendo queste espressioni nelle (8.5.3) e (8.5.4) si ricava il seguente sistema di equazioni dello strato limite

$$-2\Omega v = \nu \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \quad (8.5.7)$$

$$-2\Omega (u_0 - u) = \nu \frac{\partial^2 v}{\partial z^2}. \quad (8.5.8)$$

Il sistema deve essere risolto con le condizioni al contorno

$$u = v = 0 \quad \text{per } z = 0 \quad (8.5.9a)$$

$$u \rightarrow u_0 \quad \text{per } z \rightarrow \infty. \quad (8.5.9b)$$

La soluzione può essere ricavata facilmente mediante la funzione complessa ausiliaria

$$Z(z) = \frac{(u + iv)}{u_0}. \quad (8.5.10)$$

Moltiplicando entrambi i membri della (8.5.8) per l'unità immaginaria i e sommando la (8.5.7), si ottiene l'equazione

$$\nu \frac{d^2 Z}{dz^2} - 2i\Omega(Z - 1) = 0, \quad (8.5.11)$$

mentre le condizioni al contorno diventano

$$Z(0) = 0, \quad \text{e} \quad Z(\infty) = 1. \quad (8.5.12)$$

La soluzione è

$$Z(z) = 1 - e^{kz}, \quad k = \sqrt{\frac{2i\Omega}{\nu}} = \frac{\sqrt{2i}}{\Delta}, \quad (8.5.13)$$

dove

$$\Delta = \sqrt{\nu/\Omega} \quad (8.5.14)$$

rappresenta lo spessore dello *strato limite di Ekman* al di sopra del quale il flusso diventa praticamente indistinguibile da quello geostrofico. Dalla (8.5.10) segue che le velocità del fluido nelle direzioni x e y sono eguali alle parti rispettivamente reale ed immaginaria della funzione Z , cioè

$$u(z)/u_0 = \Re(Z) = 1 - e^{-z/\Delta} \cos(z/\Delta) \quad (8.5.14)$$

$$v(z)/u_0 = \Im(Z) = e^{-z/\Delta} \sin(z/\Delta), \quad (8.5.15)$$

L'andamento delle due componenti della velocità in funzione della quota è illustrato nella Figura 8.9a. Più significativo è il diagramma polare, detto *spirale di Ekman*, riportato nella Figura 8.9b. La forma della spirale nell'intorno di $z = 0$ mostra che in prossimità del suolo il rapporto u/v tende verso l'unità. L'uguaglianza di queste due componenti implica che negli strati bassi il flusso forma un angolo di 45° rispetto al moto geostrofico di alta quota, dove invece $u = u_0$ e $v = 0$. Si osservi inoltre che la componente v si annulla anche alla quota $z/\Delta = \pi$, dove però $u \approx 1.1 u_0$. Cioè in questa regione il flusso si muove ancora nella direzione del moto geostrofico, sebbene con una velocità leggermente superiore.

La spirale di Ekman spiega perchè al livello del suolo il vento spirale sempre in una direzione differente rispetto al vento in quota. In particolare, nell'emisfero Nord il vento è spostato di 45° verso sinistra. In realtà, la deviazione che viene effettivamente osservata è inferiore a quella teorica a causa dei moti turbolenti che aumentano la viscosità effettiva dell'atmosfera terrestre.

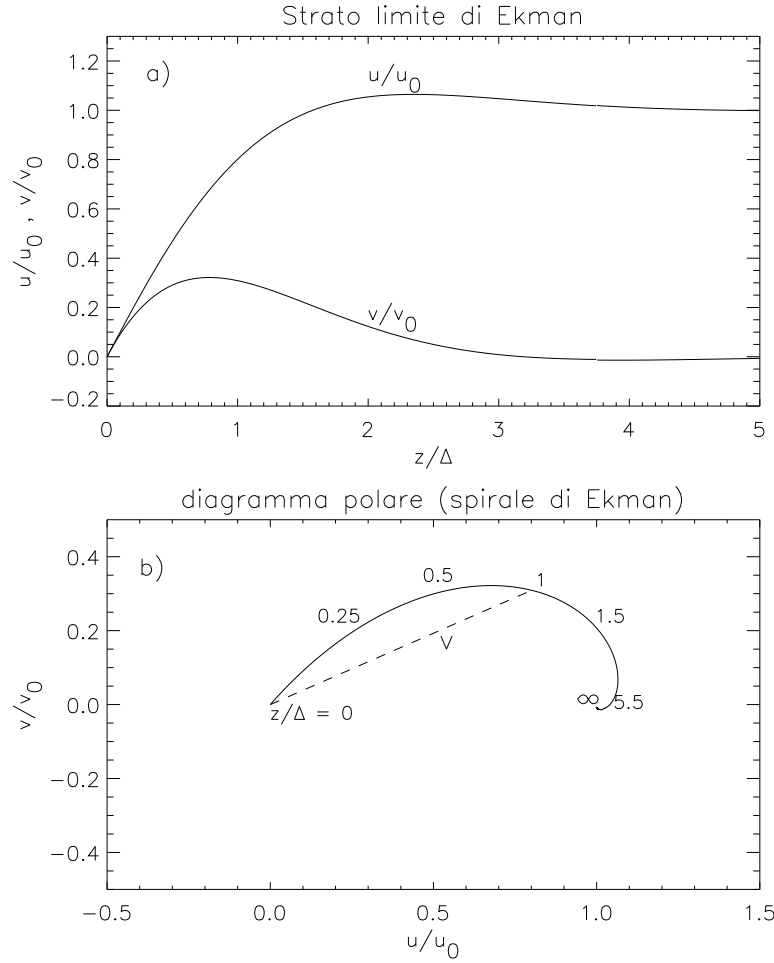


Figura 8.9 a) Velocità nello strato limite di Ekman. b) Diagramma polare delle velocità.

8.6 Flusso ortogonale ad un piano

Riprendiamo il problema esaminato nel paragrafo 5.7 di un flusso ortogonale ad un piano rigido¹. Il fluido si avvicina ortogonalmente all'ostacolo dividendosi in due correnti simmetriche e opposte rispetto al punto di stagnazione. In assenza di viscosità, nell'intorno del punto di stagnazione il flusso è irrotazionale e potenziale, con una funzione corrente

$$\Psi(x, y) = k x y, \quad (8.6.1)$$

$$u(x) = \frac{\partial \Psi}{\partial y} = k x, \quad v(y) = \frac{\partial \Psi}{\partial x} = -k y. \quad (8.6.2)$$

Viceversa, nei fluidi reali la condizione di non scorrimento sulla superficie piana genera vorticità, modificando la forma della funzione corrente e la dipendenza delle velocità dalle coordinate.

Facciamo ora l'ipotesi che la viscosità provochi una deviazione dalle leggi (8.6.2) tale da coinvolgere solo la componente v , mentre continui a valere la proporzionalità tra u e x . Più precisamente assumiamo che la funzione di corrente abbia la forma

$$\Psi(x, y) = x F(y), \quad (8.6.3)$$

dove $F(y)$ è una funzione per il momento incognita, e verifichiamo quindi se una soluzione di questo tipo è effettivamente possibile. Dalla (8.6.3) segue che

$$u(x) = \frac{\partial \Psi}{\partial y} = x F'(y) \quad (8.6.4)$$

$$v(y) = -\frac{\partial \Psi}{\partial x} = -F(y) \quad (8.6.5)$$

$$\omega = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} = -x F''(y), \quad (8.6.6)$$

in cui gli apici indicano derivazione totale rispetto alla variabile y . Sostituendo le (8.6.4) e (8.6.5) nelle equazioni di Navier–Stokes (6.1.2) e (6.1.3) si ottiene il sistema di due equazioni

$$F'(y)^2 - F(y) F''(y) = -\frac{1}{x \varrho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu F'''(y) \quad (8.6.7a)$$

$$F(y) F'(y) = -\frac{1}{\varrho} \frac{\partial p}{\partial y} - \nu F''(y). \quad (8.6.7b)$$

Il sistema contiene sia derivate ordinarie della funzione $F(y)$, sia derivate parziali della pressione $p(x, y)$ rispetto alle coordinate. Tuttavia il primo termine a destra dell'equazione (8.6.7a) non può contenere la variabile x perchè questa non è contenuta in nessuno dei rimanenti termini. Pertanto deve essere verificata la relazione

$$\frac{1}{x} \frac{\partial p}{\partial x} = h(y) \quad (8.6.8)$$

dove $h(y)$ è una opportuna funzione della sola y .

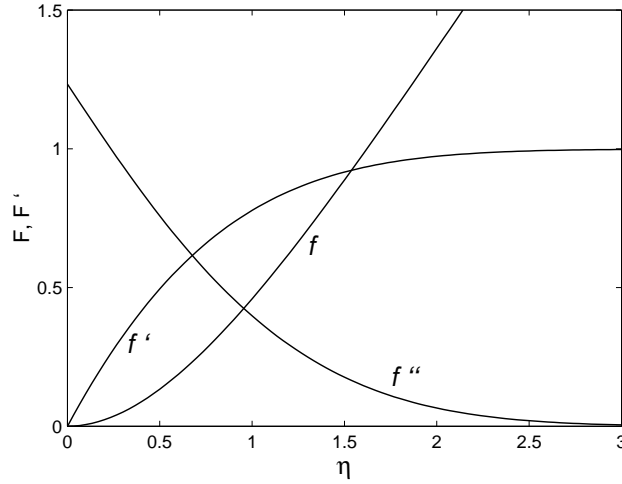


Figura 8.10 Andamento delle funzioni $f(\eta)$ e $f'(\eta)$ e $f''(\eta)$.

Integrando si trova che la pressione deve avere la forma generale

$$p(x, y) = \frac{1}{2} h(y) x^2 + g(y), \quad (8.6.9)$$

dove anche $g(y)$ è una funzione per il momento arbitraria. Derivando rispetto a y si ha

$$\frac{\partial p}{\partial y} = \frac{1}{2} h'(y) x^2 + g'(y). \quad (8.6.10)$$

Ma dalla (8.6.7b) segue che anche questa derivata deve essere indipendente dalla coordinata x . Affinchè questo sia vero occorre che $h'(y) = 0$. Sostituendo allora la (8.6.9) nella (8.6.7a) con $h = \text{costante}$, si ottiene l'equazione differenziale ordinaria

$$F'(y)^2 - F(y) F''(y) - \nu F'''(y) = h = \text{costante} \quad (8.6.11)$$

nella funzione incognita F . Una delle condizioni al contorno richiede che lontano dalla parete solida debba scomparire ogni effetto diretto o indiretto della viscosità. Ciò significa che la soluzione deve convergere verso la soluzione irrotazionale (8.6.1), cioè $F(y) \rightarrow ky$. Sostituendo questa soluzione asintotica nella (8.6.11) si trova che $h^2 = k$.

Per facilitare l'integrazione della (8.6.11) conviene trasformare i coefficienti dimensionati in numeri puri mediante la trasformazione

$$\eta = \left(\frac{k}{\nu} \right)^{1/2} y \quad (8.6.12)$$

$$f(\eta) = (k\nu)^{-1/2} F(y) \quad (8.6.13)$$

Con questa sostituzione si ottiene l'equazione

$$f'^2(\eta) - f(\eta)f''(\eta) - f'''(\eta) = 1, \quad (8.6.14)$$

che deve essere risolta con le condizioni al contorno

$$f(0) = f'(0) = 0 \quad \text{condizione di non scorrimento} \quad (8.6.15)$$

$$f(\eta) \propto \eta \quad \text{per } \eta \rightarrow \infty \quad (8.6.16)$$

In particolare, la (8.6.16) segue dalla richiesta che lontano dal piano si abbia $F(y) \rightarrow ky$ e quindi, per la (8.6.13), che in questo limite $f \approx \eta/k$.

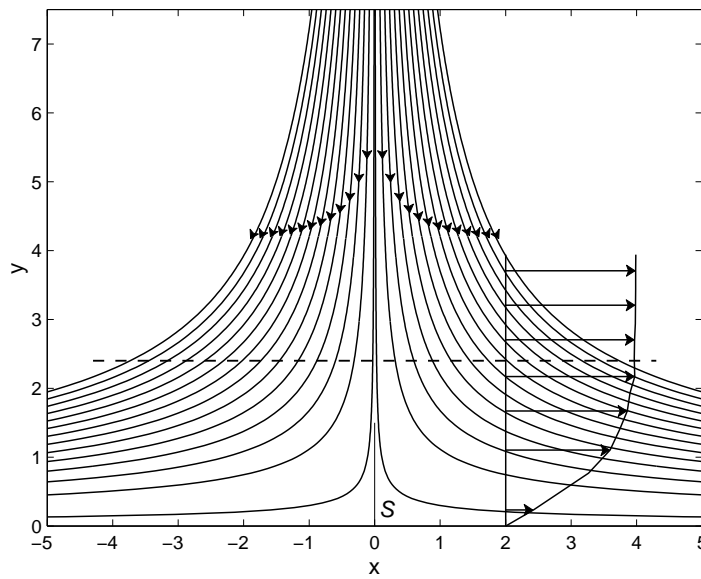


Figura 8.11 Flusso viscoso verso una parete rigida con punto di stagnazione S e profilo della componente orizzontale u della velocità. Per effetto della forza viscosa il profilo di velocità decresce verso la superficie. La linea tratteggiata marca il confine dello strato limite.

La soluzione è solo numerica ed è illustrata nella Figura 8.10. La Figura 8.11 mostra invece l'andamento delle linee di corrente il cui aspetto è molto simile a quello del flusso irrotazionale. Sebbene non sia graficamente evidente, vi è un diverso profilo di velocità in prossimità della superficie piana. Come nel problema di Blasius, si stabilisce convenzionalmente che lo spessore δ dello strato limite sia dato dal valore di y dove $u = 0.99kx$. Numericamente si trova

$$\delta = 2.4 (\nu/k)^{1/2}. \quad (8.6.17)$$

Questa relazione mostra che lo spessore tende a zero quando gli effetti convettivi del flusso (legati al valore di k) diventano dominanti rispetto alla diffusione viscosa. Tuttavia, diversamente dal flusso uniforme lungo una superficie piana, ora δ risulta indipendente dalla distanza x dal punto di stagnazione.

8.7 Separazione dello strato limite

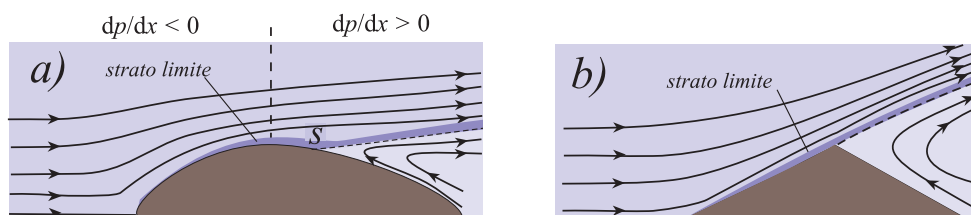


Figura 8.12 a) Separazione dello strato limite, e conseguente deviazione delle linee di corrente, provocato da un gradiente di pressione avverso in un corpo arrotondato.
b) Separazione causata dalla presenza di spigoli sulla superficie dell'ostacolo.

Finora lo studio sullo strato limite è stato affrontato nell'ipotesi semplice che la pressione del flusso libero sia uniforme. Tuttavia un'importante serie di processi è legata proprio alla presenza di gradienti di pressione nella direzione del moto. I gradienti possono essere causati dalle particolari condizioni cui è sottoposto il fluido lontano dall'ostacolo, ma in altri casi la pressione variabile può essere invece provocata indirettamente dalla stessa deviazione delle linee di corrente quando il fluido attraversa un corpo esteso il cui spessore cambia rapidamente nella direzione del moto (Figura 8.12a) o la cui superficie presenta spigoli vivi (Figura 8.12b). Il fenomeno provoca generalmente un forte aumento del coefficiente di resistenza e, data la sua importanza, merita di essere discusso in maniera più approfondita.

Supponiamo che il numero di Reynolds sia molto grande e fissiamo l'attenzione sul fluido che circonda la superficie del solido esternamente allo strato limite. Poichè in questa regione il flusso può essere considerato ideale, la velocità e la pressione sono legate tra loro dall'equazione di Bernoulli. Nel lato anteriore del corpo le linee di corrente si allargano e danno quindi origine ad un graduale aumento di velocità e una conseguente diminuzione della pressione nella direzione del flusso. Al contrario, nella parte posteriore le linee tendono a convergere provocando una diminuzione di velocità e la comparsa di un gradiente positivo di pressione.

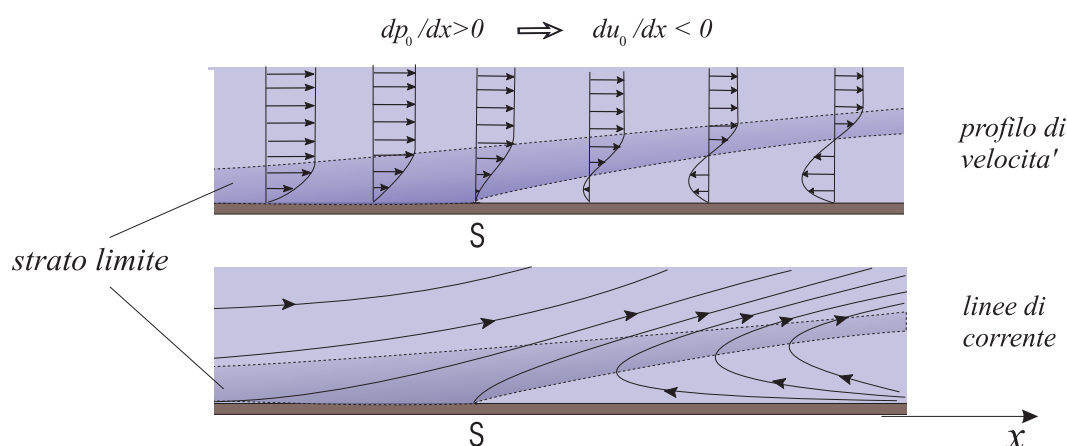


Figura 8.13 Profilo di velocità e linee di corrente in prossimità del punto di separazione provocato da un gradiente di pressione positivo.

Questo comportamento ha evidentemente un'immediata ripercussione anche sul moto del fluido all'interno dello strato limite. Come abbiamo visto nel paragrafo 8.2, nella sottile regione interna allo strato limite la pressione è praticamente identica alla pressione $p_0(x)$ della regione inviscida immediatamente esterna. Nel primo tratto dell'ostacolo, a spessore crescente, il gradiente *negativo* di pressione agisce in modo da favorire un aumento di velocità del fluido. Di conseguenza, in prossimità della parete il profilo di u diventa più ripido dovendo soddisfare da un lato alla condizione di non scorrimento e dall'altro alle condizioni di raccordo con la velocità $u_0(x)$ del flusso esterno allo strato. Perciò nel tratto anteriore del corpo la configurazione del flusso è simile a quella che si presenta nel caso di pressione costante, a parte un più lento aumento dello spessore δ dello strato limite al crescere del numero di Reynolds.

La situazione è però diversa nella parte convergente del flusso, dove il gradiente avverso della pressione ora ostacola il movimento del fluido. D'altra parte, a causa dell'attrito la velocità del fluido in prossimità della superficie del solido è già molto piccola e quindi, se il rallentamento persiste per un tratto sufficientemente lungo, può accadere che il flusso inverta la stessa direzione del moto.

Il punto S dove avviene l'inversione prende il nome di *punto di separazione*. A valle di questo punto le linee di corrente, che prima erano aderenti alla superficie, si staccano e danno luogo ad una caratteristica configurazione il cui aspetto è mostrato nella Figura 8.13. In questa regione il gradiente di pressione mantiene ancora il flusso prevalentemente parallelo alle pareti, ma la direzione del moto è opposta a quella del flusso principale.

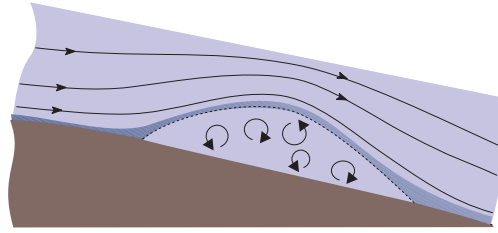


Figura 8.14 Separazione dello strato limite e successiva nuova aderenza causata dalla turbolenza.

Questo comportamento è comune sia agli strati laminari sia a quelli turbolenti, sebbene in quest'ultimo caso le velocità del fluido devono essere intese come valori medi. Esistono però alcune importanti differenze tra i due regimi. Infatti gli strati turbolenti si staccano dalla superficie con maggior difficoltà perchè le correnti di fluido sono in grado di trascinare momento verso le zone lente interne più efficientemente rispetto alla viscosità microscopica. Questo tende a ritardare l'inversione di velocità, contribuendo a mantenere il flusso aderente alla superficie. Inoltre può accadere che subito dopo la separazione le linee di corrente si avvicinino nuovamente alla superficie, creando una piccola zona di ristagno del flusso (Figura 8.14).

Non vi è una regola generale sul punto esatto in cui avviene la separazione. La maggior parte delle nostre conoscenze è di natura empirica. Nelle superfici piane o arrotondate prive di bordi irregolari il distacco avviene più o meno tangenzialmente alla superficie. Se la superficie del solido presenta invece degli spigoli vivi o delle irregolarità, il distacco avviene dove la pendenza varia bruscamente, come mostra la Figura 8.12b. Altri esempi di separazione dovuta ad una improvvisa variazione della curvatura sono illustrati nella Figura 8.15.

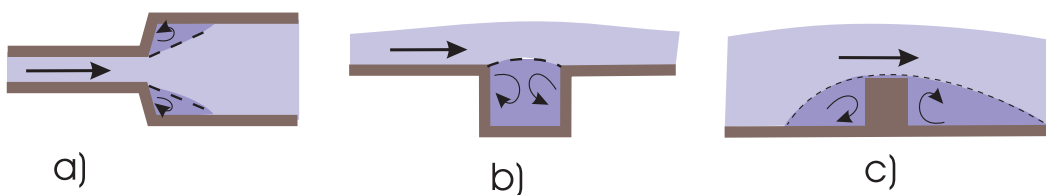


Figura 8.15 Esempi di flussi separati in vicinanza di pareti con spigoli vivi. a) Condotta con un aumento brusco di sezione. b) Flusso sopra una cavità. c) Flusso attraverso un ostacolo rettangolare.

8.8 Flusso attraverso corpi arrotondati

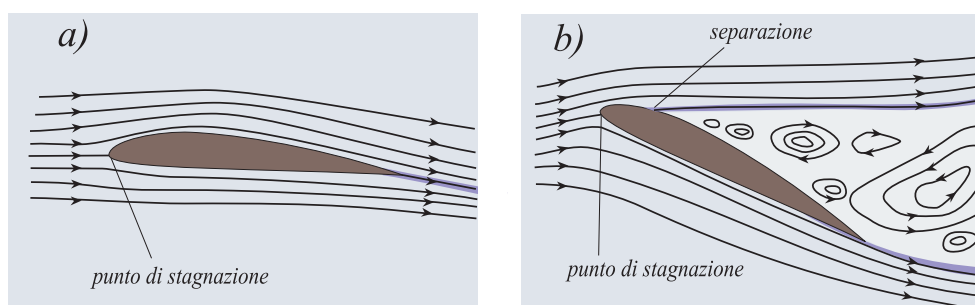


Figura 8.16 a) In un profilo alare allineato con la direzione del flusso non avviene separazione dello strato limite. b) Ala inclinata con separazione e formazione di una regione di aria stagnante e vorticosa.

Non sempre la deviazione delle linee di corrente da parte di un corpo arrotondato è accompagnata dal fenomeno della separazione dello strato limite. Ad esempio, la separazione non avviene quando l'ostacolo ha una forma sufficientemente affusolata ed è allineato con la direzione principale del flusso, come succede nel profilo alare mostrato nella Figura 8.16a. In questa situazione le linee di corrente più prossime alla superficie seguono il profilo dell'ala iniziando dalla regione frontale, dove vi è un punto di stagnazione, fino alla parte posteriore, che di solito termina con un caratteristico bordo a cuspide. Il fluido abbandona quindi il solido formando una sottile *scia*, che ha all'incirca lo stesso spessore dello strato limite e che contiene la vorticità creata in precedenza durante lo scorrimento sulla superficie.

L'aspetto del flusso è però completamente differente se l'ala è inclinata di un angolo superiore a quello che viene definito *angolo di stallo* (Figura 8.16b). In questo caso lo strato limite non può rimanere aderente per l'intera lunghezza del profilo, e in qualche punto della superficie avviene il distacco. Nella figura la regione più scura che inizia dal punto di separazione rappresenta la scia che ha origine dallo strato limite della faccia superiore dell'ala. La regione scura più bassa è invece il resto dello strato limite che si forma nella superficie inferiore del profilo alare. Le due scie costituiscono i bordi di una zona di fluido stagnante e vorticoso. L'apparizione di questa regione separata dal flusso principale provoca una drammatica riduzione della portanza dell'ala e un forte aumento della resistenza, fenomeno noto come *stallo*.

La formazione di una regione delimitata dalle scie degli strati limite separati è più generale, ed avviene quando gli ostacoli non sono sufficientemente sottili (Figura 8.17). Sebbene i dettagli del flusso dipendano molto dal profilo dei corpi rispetto alla direzione del moto,

alcuni aspetti generali sono comuni a tutte le configurazioni. La principale caratteristica è la presenza a valle dell'ostacolo di un regione più o meno estesa che racchiude il fluido in cui la pressione è inferiore rispetto alla parte frontale. Questo accade perchè nella zona di fluido stagnante la pressione non differisce molto da quella presente dalla parte esterna alle due scie, e dove la velocità del fluido è ancora elevata ^[7]. Al contrario, in prossimità del punto di stagnazione anteriore la pressione è elevata, essendo eguale alla somma $p_0 + \frac{1}{2}\rho u_0^2$ della pressione del flusso libero e della pressione di arresto. A causa di questa asimmetria nella distribuzione di pressione, il corpo viene sottoposto ad forza, detta *resistenza di forma*, ben più elevata rispetto alla *resistenza viscosa*, causata dal solo effetto di scorrimento del fluido sulla superficie. Una stima approssimata della forza può essere ricavata osservando che le variazioni di velocità tra una regione e l'altra sono dell'ordine di u_0 , e questo determina una variazione della pressione di circa $\frac{1}{2}\rho u_0^2$. La resistenza di forma F_D è quindi dell'ordine del prodotto di $\frac{1}{2}\rho u_0^2 A$, dove A è l'area del corpo proiettata nel piano ortogonale al moto. I risultati sperimentali su flussi con $Re > 100$ mostrano che effettivamente il coefficiente di resistenza totale

$$C_D = \frac{F_D}{\frac{1}{2}\rho u_0^2 A} \quad (8.8.1)$$

è dell'ordine dell'unità, anche se il suo valore esatto dipende dal numero di Reynolds e dalla forma del corpo (v. la tabella 8.1).

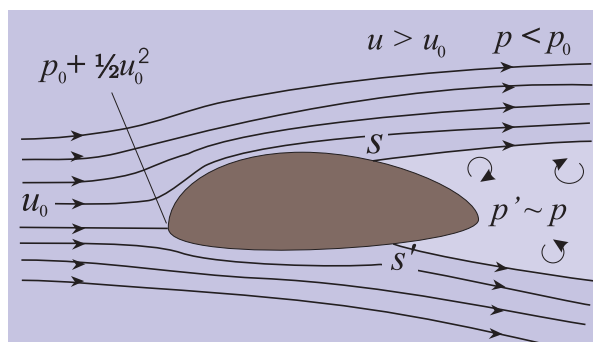


Figura 8.17 Punti di separazione S e S' e formazione di una regione vorticoso alle spalle di un corpo arrotondato. In questa zona il fluido ristagna e la pressione p' è inferiore a quella presente sulla faccia anteriore.

^[7] Infatti, sensibili gradienti di pressione trasversali provocherebbero nel fluido rapidi movimenti. Come si è detto, nella regione dei vortici alle spalle dell'ostacolo il fluido è invece relativamente lento o addirittura ristagna. Ciò provoca un'approssimativa uniformità della pressione nella direzione trasversale.

Quando non avviene la separazione dello strato limite, come nei flussi attorno a corpi affusolati, le linee di corrente rimangono aderenti alla superficie dando origine ad una configurazione simile a quella dei fluidi ideali, tranne per la presenza del sottile strato limite. Perciò, sebbene a parità di superficie la resistenza di attrito sia paragonabile a quella dei corpi spessi, la resistenza di forma risulta molto inferiore.

Tabella 8.1 – **Coefficienti di resistenza**

C_D	Oggetto
0.001	Lamina piana ($Re \lesssim 10^6$)
0.004	Delfino
0.005	Lamina piana turbolenta ($Re \approx 10^6$)
0.01-0.02	Profilo alare
0.012	Aereo commerciale
0.016	Aereo supersonico ($M=2.5$)
0.2	Flussi turbolenti con $Re > 3 \times 10^5$
0.25-0.30	Automobile sportiva $v \approx 60$ km/h
0.3-0.4	Automobile comune $v \approx 60$ km/h
0.3	Palle da golf o da tennis con $v > 50$ m/s
0.4	Uccello
1.1	Disco sottile
1.8	Treno passeggeri $v < 140$ km/h
0.88	Bicicletta da corsa
1.1	Bicicletta
1.0-1.3	Persona in piedi
1.0-1.3	Fune, cavo elettrico
1.9-2.0	Lamina a 90°

8.9 Flusso attorno ad un cilindro

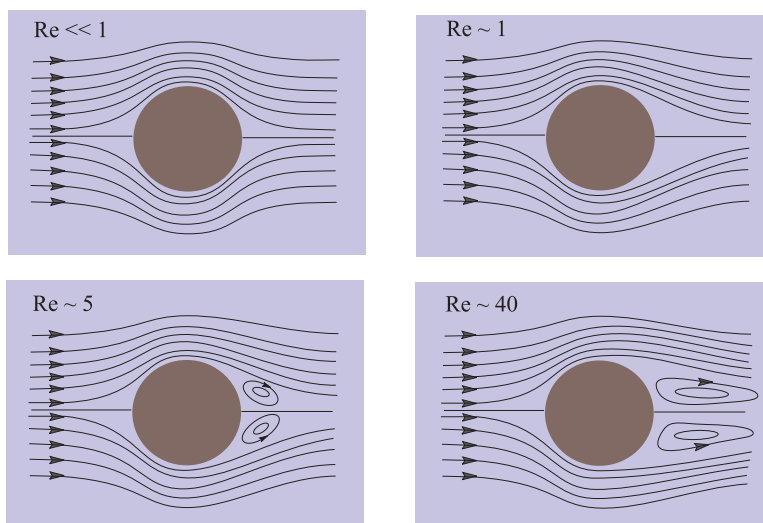


Figura 8.18 Illustrazione schematica dell'andamento delle linee di corrente in un cilindro con bassi numero di Reynolds.

Come si è detto, i flussi che attraversano corpi estesi presentano molte caratteristiche simili tra loro, indipendentemente dalla forma dell'ostacolo. Particolarmente significativo, ed anche ben studiato, è il caso di un fluido che investe un cilindro ortogonalmente alla direzione dell'asse. Gran parte dei risultati sono empirici o derivano da simulazioni numeriche, perchè le soluzioni analitiche esistono solo per valori molto piccoli del numero di Reynolds.

Nella Figura 8.18 sono illustrate quattro tipiche situazioni che si riscontrano per valori del numero di Reynolds inferiori a circa 40. Per $Re \ll 1$ le linee di corrente nella parte posteriore del cilindro sono speculari rispetto al flusso che precede l'ostacolo, risultato ricavabile anche dalla soluzione analitica trovata nel paragrafo 5.11. Ma all'aumentare del numero di Reynolds questa simmetria diventa sempre meno marcata. In particolare, nella parte posteriore del cilindro le linee di corrente diventano sempre più allungate rispetto alla parte frontale, e accumulano un valore crescente di vorticità generata nello strato limite.

Ad iniziare da $Re \approx 4$ la separazione dello strato limite alle spalle del cilindro provoca la formazione di due *vortici attaccati* con circolazione opposta, all'interno dei quali il fluido ristagna. All'aumentare del numero di Reynolds, e fino a $Re \gtrsim 40$, i vortici diventano sempre più grandi e allungati nella direzione del moto. Oltre questo valore la scia diventa instabile.

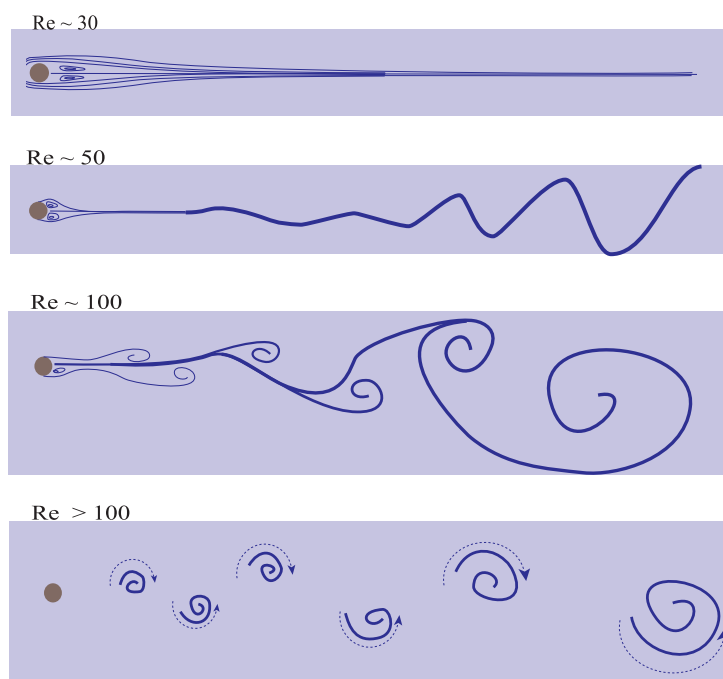


Figura 8.19 Visualizzazione schematica dell'instabilità della scia per alti numeri di Reynolds. Per $Re \gtrsim 100$ i vortici si staccano e formano una caratteristica configurazione, detta *Kármán vortex street*.

Inizialmente l'instabilità si manifesta con la comparsa di una oscillazione della scia, come mostra schematicamente la Figura 8.19. Per valori crescenti del numero di Reynolds l'ampiezza delle oscillazioni aumenta fino a degenerare in un flusso con una caratteristica configurazione, detta *vortex street*, formata da due righe di vortici che hanno segno opposto in ciascun lato della scia. Ogni vortice di una riga si trova a circa metà tra due vortici della riga opposta, e nel loro insieme si spostano nella direzione del flusso con una velocità leggermente inferiore rispetto a u_0 . Questo significa che osservando l'asta in movimento rispetto al fluido fermo, i vortici appaiono muoversi assieme al cilindro, ma via via accumulano un ritardo rispetto a questo. I vortici si formano alternativamente nella parte posteriore del cilindro in modo che non appena un vortice si stacca da un lato inizia la creazione di un'altro vortice nel lato opposto. Questo continuo alternarsi delle strutture vorticosi provoca una oscillazione della pressione locale, e una conseguente sollecitazione variabile sull'asta ^[8]. La frequenza f dell'oscillazione dipende dal diametro $2R$ del cilindro e dalla velocità

^[8] Il fenomeno causa notevoli problemi nei manufatti soggetti all'azione del vento, come nei ponti sospesi. Occorre infatti evitare che la frequenza dell'instabilità sia vicina alla frequenza di risonanza del corpo.

del fluido tramite la *formula di Strouhal*

$$\text{Sr} = \frac{2Rf}{u_0} . \quad (8.9.1)$$

In condizioni normali il *numero di Strouhal* Sr dipende molto debolmente dal numero di Reynolds, e ha un valore all'incirca eguale a 0.2. Oltre a sollecitare il cilindro, i vortici agiscono sul fluido circostante generando una perturbazione ondosa di frequenza f , che si allontana con la velocità locale del suono. Ad esempio, un'asta sottile messa in movimento nell'aria con una velocità di qualche metro al secondo produce un suono nella banda udibile. Anche il sibilo dei proiettili è causato dalla formazione dei *vortex street*.

Per valori del numero di Reynolds maggiori di 200 le oscillazioni diventano sempre meno regolari e nello stesso tempo si sviluppa una scia lunga e stretta dominata dalla turbolenza. Questa situazione permane più o meno inalterata fino a numeri di Reynolds molto elevati. Tuttavia, quando $\text{Re} \approx 3 \times 10^8$ si verifica nel flusso un'interessante anomalia che ha una diretta conseguenza sulla resistenza esercitata dal fluido sul cilindro. Il fenomeno è dovuto alla ritardata separazione dello strato limite causata dalla turbolenza ed è illustrato nella Figura 8.20. Per valori grandi del numero di Reynolds, ma minori di 3×10^5 , lo strato limite è laminare, ed il suo distacco avviene ad un angolo di circa 80° . In questo modo la parte del cilindro soggetta alla bassa pressione della scia coincide praticamente con l'intera superficie posteriore del corpo. Quando Re diventa maggiore di $\approx 2 - 3 \times 10^5$, lo strato limite diventa turbolento e, per il motivo spiegato alla fine del paragrafo 8.7, si riattacca alla superficie fino ad un angolo di circa 120° , dove avviene la separazione dello strato turbolento. La conseguente riduzione dell'area della scia provoca un sensibile abbassamento della resistenza di forma offerta dal disco.

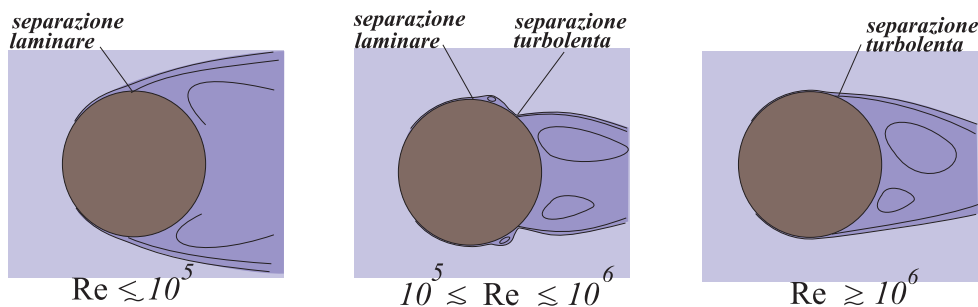


Figura 8.20 Separazione dello strato limite in un cilindro ad elevati numeri di Reynolds.

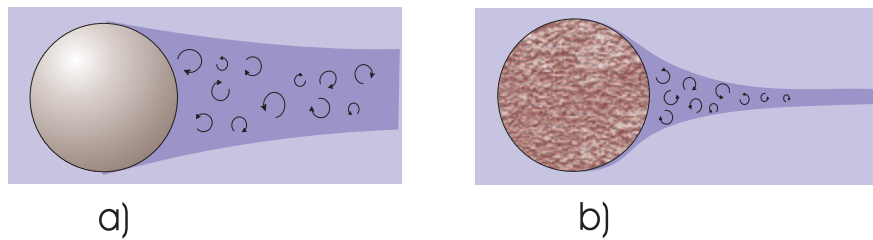


Figura 8.21 a) Flusso attorno ad una sfera liscia con separazione e formazione della scia turbolenta. b) Allo stesso numero di Reynolds una sfera ruvida produce una scia più sottile.

Questo comportamento è ben visibile nel grafico della Figura 8.22, dove è riportata la distribuzione della pressione attorno alla superficie del cilindro e il corrispondente andamento del coefficiente di resistenza.

L'anomalia causata dalla transizione turbolenta dello strato limite viene osservata anche in altri corpi, quali sfere, profili alari, ecc. Normalmente l'effetto avviene tra $Re \approx 10^5$ e $Re \approx 7 \times 10^6$, ma molto dipende dallo stato di levigatezza della superficie. In particolare, l'abbassamento del coefficiente di forma si manifesta in anticipo (cioè per valori più bassi di Re) se la superficie è ruvida o irregolare (Figura 8.21). Anche se può sembrare paradossale, le palle da tennis e da golf vengono costruite con la superficie corrugata proprio per ridurre la resistenza offerta dall'aria.

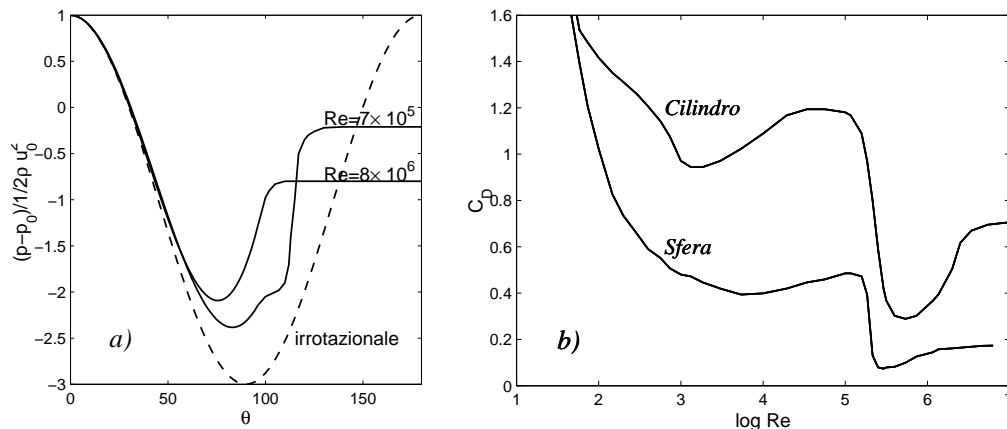


Figura 8.22 a) Distribuzione della pressione sulla superficie di un cilindro in funzione dell'angolo rispetto al punto di stagnazione anteriore. b) Coefficiente di resistenza di un cilindro e di una sfera in funzione del numero di Reynolds.

8.10 Scia

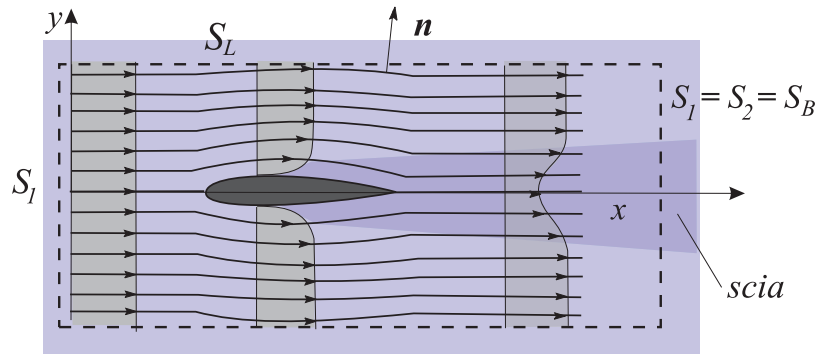


Figura 8.23 Scia lasciata da un corpo attraversato da un flusso.

Come abbiamo visto, nell'attraversare un ostacolo un fluido viscoso, inizialmente irrotazionale, acquista vorticità. La vorticità viene generata nello strato limite e trasportata successivamente a valle dove si forma una regione vorticoso chiamata *scia*. Via via che il fluido si allontana dall'ostacolo la viscosità tende poi a riportare la velocità e la pressione verso valori approssimativamente uniformi.

Nelle immediate vicinanze del corpo la deformazione subita dalle linee di corrente dipende molto dalla geometria della configurazione. Tuttavia ad una certa distanza il profilo della velocità presenta ancora una volta caratteristiche simili in tutti i corpi. Ad esempio, per elevati numeri di Reynolds la scia è generalmente lunga e sottile in quanto la velocità di propagazione laterale della vorticità è molto più bassa della velocità del flusso. Nei corpi bi-dimensionali, come i cilindri, l'apertura della scia cresce con la distanza nella direzione principale del moto come $x^{1/2}$. Questa proprietà è condivisa sia dai flussi laminari sia da quelli turbolenti, sebbene con differenti costanti di proporzionalità. Il difetto della velocità della scia rispetto alla velocità del fluido che precede l'ostacolo varia invece come $x^{-1/2}$. Poiché il numero di Reynolds dipende dal prodotto di queste due grandezze, il suo valore rimane approssimativamente costante. Per questo motivo una scia che inizialmente è laminare rimane tale anche a grande distanza, mentre se il flusso è turbolento, la scia si mantiene instabile per un tratto molto lungo. Nei flussi tridimensionali (per es. una sfera), l'ampiezza della scia aumenta invece come $r^{1/3}$, mentre il difetto di velocità diminuisce come $r^{-2/3}$. In questo caso il numero di Reynolds diminuisce come $r^{-1/3}$ e, diversamente dal cilindro, un flusso che è inizialmente turbolento, può diventare laminare lontano dal corpo.

Per le leggi di Newton il difetto della quantità di moto posseduto dalla scia rispetto al flusso indisturbato è direttamente legato alla resistenza F_D esercitata dal fluido sul corpo. Dimostriamo ora che,

usando l'equazione integrale del momento, è possibile trovare una relazione tra la variazione della portata di volume Q e F_D . Se u_0 è la velocità del flusso libero e $u(y)$ la velocità a valle del corpo, il difetto della portata della scia è dato da (v. Figura 8.23)

$$Q = \int_{-\infty}^{\infty} dz \int_{-\infty}^{\infty} (u_0 - u) dy \quad (8.10.1)$$

dove z indica la profondità nella direzione ortogonale al flusso. Introduciamo un volume di controllo cilindrico contenente interamente il corpo, con le due facce S_1 e S_2 ortogonali alla direzione principale della corrente e tale che la superficie laterale, di area S_L , si trovi fuori dalla scia (curva tratteggiata nella Figura 8.23). Il flusso di momento che attraversa la superficie di controllo deve essere eguale alla forza esercitata sul fluido, che è eguale a sua volta alla forza F_D che il fluido stesso esercita sul corpo.

Osserviamo che sulla superficie laterale del volume di controllo agisce anche la forza tangenziale T_{vis} dovuta agli sforzi viscosi. Tuttavia se il volume è sufficientemente grande questo termine è trascurabile poichè lontano dal corpo vale la condizione di flusso libero. Inoltre, sebbene lungo la superficie laterale si abbia $\mathbf{u} \approx \mathbf{u}_0$, non dobbiamo ignorare la piccola componente della velocità trasversale che è responsabile del flusso non nullo di materia (e quindi di momento). Infatti, dall'equazione di continuità

$$\int_{S_L} \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} dS = \int_{S_1} u_1 dS - \int_{S_2} u_2 dS \quad (8.10.2)$$

occorre che il difetto del flusso attraverso le basi debba essere bilanciato da un equivalente flusso attraverso la parete laterale.

Eguagliando quindi la componente della forza nella direzione x con la somma dei tre contributi del flusso di momento e usando la (8.10.2) si ottiene:

$$\begin{aligned} F_D &= \int_{S_1} (p + \varrho u^2) dS - \int_{S_2} (p + \varrho u^2) dS - \int_{S_L} \varrho u (\mathbf{u} \cdot \mathbf{n}) dS \\ &\approx \int_{S_1} (p + \varrho u^2) dS - \int_{S_2} (p + \varrho u^2) dS - \varrho u_0 \int_{S_L} \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} dS \\ &= \int_{S_1} [p_1 + \varrho u_1 (u_1 - u_0)] dS - \int_{S_2} [p_2 + \varrho u_2 (u_2 - u_0)] dS . \end{aligned}$$

Questa equazione si semplifica se ricordiamo che $u_1 = u_0$ e che lontano dal corpo $p_1 \approx p_2 \approx p_0$. Tenendo presente la (8.10.1) si trova

$$F_D \approx \varrho u_0 \int (u_0 - u_2) dS_L = \varrho u_0 Q , \quad (8.10.3)$$

cioè la resistenza F_D è eguale proprio al difetto di flusso di momento nella scia. Questo difetto si manifesta attraverso una diminuzione di velocità del fluido alle spalle dell'ostacolo.

8.11 Condotto con sezione discontinua

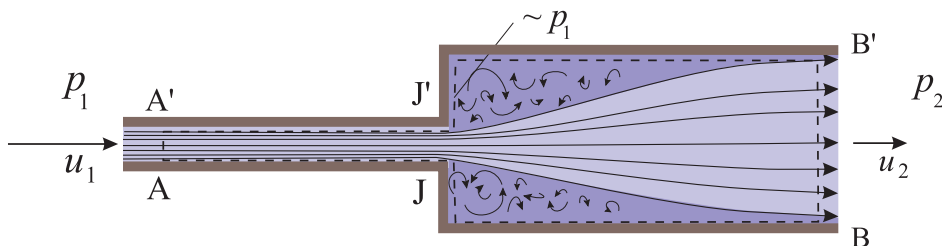


Figura 8.24 Andamento delle linee di corrente di un flusso in un condotto la cui sezione varia bruscamente.

Nei condotti che presentano una brusca variazione della sezione si ha una sensibile diminuzione della portata. Il fenomeno è legato alla separazione dello strato limite all'altezza della discontinuità. Analizziamo il comportamento della velocità e della pressione medie in due sezioni del condotto di area rispettivamente S_1 e $S_2 > S_1$. A causa della conservazione della massa la velocità deve variare inversamente all'area secondo la relazione

$$u_1 S_1 = u_2 S_2 . \quad (8.11.1)$$

Se l'allargamento della sezione avvenisse in maniera graduale in modo da generare un flusso laminare privo di turbolenza, potremmo applicare il teorema di Bernoulli. In questo caso il salto di pressione nelle due sezioni sarebbe

$$p'_2 - p_1 = \frac{1}{2} \varrho (u_1^2 - u_2^2). \quad (8.11.2)$$

In realtà la presenza della discontinuità della sezione del condotto l'andamento della pressione cambia sensibilmente rispetto al comportamento ideale. Infatti, come mostra la Figura 8.24 il fluido entra nella sezione maggiore formando un getto che si allarga gradualmente finché, dopo una certa distanza, il movimento diventa nuovamente regolare, con le linee di corrente parallele alla parete del condotto e velocità $u_2 = (S_1/S_2) u_1$. Nella regione JJ' adiacente al repentino allargamento lo strato limite si separa creando una zona di ristagno del fluido, con formazione di vortici. In questa regione la pressione si mantiene all'incirca eguale alla pressione di ingresso p_1 poichè, in caso contrario, il gradiente di pressione provocherebbe la comparsa di moti trasversali. A causa della turbolenza, in prossimità della discontinuità

i dettagli della configurazione del flusso è molto complicata. Tuttavia possiamo dedurre alcune notevoli proprietà eguagliando la variazione di quantità di moto del fluido alla forza che viene esercitata sul condotto. Consideriamo il volume di controllo tratteggiato nella figura. Il flusso di quantità di moto attraverso le due superfici AA' e BB' è

$$\varrho u_2^2 S_2 - \varrho u_1^2 S_1 = \varrho u_2 S_2 (u_2 - u_1) , \quad (8.11.3)$$

dove si è usata la (8.11.1). La componente orizzontale della forza agisce sia sulle due superfici di controllo AA' e BB' sia sulla superficie anulare di area $S_2 - S_1$ che si trova all'altezza della discontinuità. Questa forza è eguale a

$$p_1 S_1 - p_2 S_2 + p_1 (S_2 - S_1) . \quad (8.11.4)$$

Se il numero di Reynolds $Re \approx u\sqrt{S}/\nu$ è abbastanza elevato possiamo trascurare le forze viscosse rispetto a quelle esercitate dalla pressione. Pertanto il bilancio del momento diventa

$$\varrho u_2 S_2 (u_2 - u_1) = (p_1 - p_2) S_2 , \quad (8.11.5)$$

dal quale si ricava

$$p_2 = p_1 + \varrho u_2 (u_2 - u_1) \quad (8.11.6)$$

Il confronto tra questa espressione e l'equazione (8.11.1) mostra che la pressione finale nel tubo con sezione discontinua è inferiore per una quantità

$$p'_2 - p_2 = \frac{1}{2} \varrho (u_1 - u_2)^2 = \frac{1}{2} \varrho u_1^2 \left(1 - \frac{S_1}{S_2}\right) \quad (8.11.7)$$

rispetto ad un tubo con variazione graduale di sezione. L'interpretazione fisica di questo differente comportamento è legata al fatto che il brusco allargamento provoca la formazione di moti convettivi che dissipano energia meccanica in calore, facendo abbassare il valore della costante di Bernoulli. Infatti dal bilancio di energia si trova che l'energia dissipata è

$$E = \frac{1}{2}(u_2^2 - u_1^2) + \frac{1}{\varrho}(p_2 - p_1) = \frac{1}{2}u_2^2 \left(\frac{S_2}{S_1} - 1\right)^2 . \quad (8.11.8)$$

È interessante notare come sulla base di un semplice bilancio macroscopico si riesca a ricavare un'espressione della perdita per attrito prodotta dalla regione instabile.

8.12 Effetto Coanda

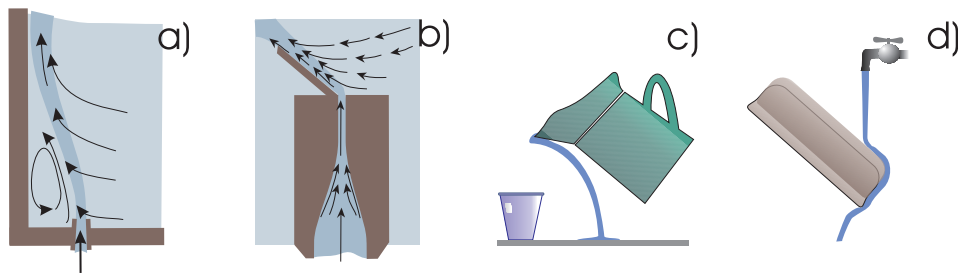


Figura 8.25 Alcuni esempi dell'effetto Coanda

L'effetto Coanda fu scoperto casualmente dall'ingegnere aeronautico rumeno Henri-Marie Coanda nel 1910, ma solo vent'anni più tardi egli ne diede un'interpretazione fisica ^[9]. Il fenomeno consiste nella tendenza dei fluidi in movimento a spostarsi verso le pareti degli ostacoli o a far avvicinare due getti di fluido indipendenti affiancati.

Come mostra la Figura 8.25, l'effetto si manifesta in numerose occasioni della vita quotidiana. Nella figura *a)* un getto inizialmente parallelo alla parete viene attratto da questa. In *b)* un getto uscente da un orifizio viene deviato verso lo schermo. In *c)* l'acqua di una brocca segue il profilo del beccuccio. Infine nella figura *d)* il liquido che colpisce un ostacolo arrotondato aderisce per un certo tratto alla sua superficie.

La causa di questo comportamento è dovuta all'adsorbimento del fluido in movimento di una parte del fluido circostante. In questo modo tra il getto e la parete si genera una carenza di fluido che non può essere rapidamente rimpiazzata, come accade invece nella parte non schermata della regione. Lo sbilanciamento provoca una caduta di pressione e una conseguente deviazione del getto. A questo fenomeno, che talvolta viene confuso con l'effetto Bernoulli, si deve anche la tendenza dei fluidi a seguire il contorno convesso degli ostacoli.

L'effetto Coanda trova numerose applicazioni pratiche e industriali, come le turbine idrauliche, le pompe a vuoto, i vaporizzatori delle bombole *spray*, i purificatori, gli inalatori, ecc. Inoltre speciali schermi mobili (*flaps*) posti nella parte frontale e posteriore di un'ala fortemente inclinata possono provocare un aumento di portanza poichè favoriscono l'aderenza del flusso.

^[9] L'effetto provocò la distruzione di un prototipo di aereo a reazione realizzato dallo stesso Coanda. Per proteggere l'aereo di tela e legno dai gas di scarico, egli interpose due pannelli metallici tra la fusoliera e i razzi. Contrariamente a quanto si aspettava, i getti incandescenti non solo vennero attratti dalle lamine, ma aggirarono le protezioni distruggendo l'intera struttura. Dopo il disastro, Coanda abbandonò il progetto.

Un altro esempio dell'effetto è mostrato nella Figura 8.26. Un getto fluido inviscido investe un cilindro con velocità u ed inclinazione θ rispetto alla normale alla superficie. Come abbiamo visto nel paragrafo 3.9, nel punto di contatto il flusso incidente si separa in due parti di spessore

$$b_{1,2} = \frac{a}{2}(1 \pm \sin \theta), \quad (8.12.1)$$

ed esercita una forza ortogonale (per unità di sezione S del getto) pari a $\rho u^2 \cos \theta$. A causa dell'effetto Coanda le due ramificazioni aderiscono alla superficie del cilindro seguendone la curvatura, per riunirsi alla fine nella parte opposta al punto di incidenza. Il nuovo getto abbandona la superficie avendo ancora velocità u e direzione simmetrica.

Dalla variazione del flusso di quantità di moto del fluido possiamo calcolare la forza esercitata sul cilindro. Come deduce anche dalla geometria del sistema, nella direzione AA' il flusso di momento è costante, mentre nella direzione normale si ha

$$F/S = 2 \rho u^2 \sin \theta. \quad (8.12.2)$$

Tuttavia questa forza non nasce direttamente dall'impatto del fluido sul cilindro. Infatti le forze esercitate dai due getti nel punto di incidenza e in quello di distacco sono opposte, entrambe ortogonali alla superficie del cilindro, ed hanno dunque risultante nulla. La forza (8.12.2) si forma invece a causa della pressione esercitata dalle due diramazioni semicircolari. Naturalmente se il fluido è viscoso occorre tenere presente anche la componente della forza di attrito tangente in ogni punto alla superficie, anche se generalmente è molto piccola.

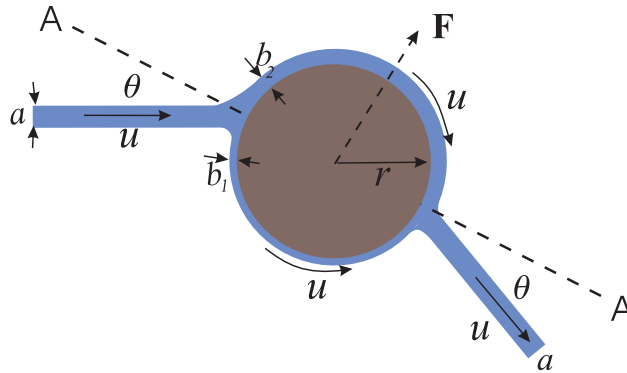


Figura 8.26 Getto fluido che colpisce una superficie cilindrica.

CAPITOLO IX

FLUIDI COMPRIMIBILI

9.1 Introduzione.

Nei capitoli precedenti si sono studiate le proprietà dei fluidi incompressibili. Come abbiamo visto questa approssimazione si può ritenere valida anche per le sostanze gassose purchè la velocità rimanga ovunque molto inferiore alla velocità locale del suono. Tuttavia molte applicazioni della fluidodinamica riguardano proprio situazioni in cui questa condizione viene a cadere. Le equazioni del moto dei fluidi comprimibili sono molto più complesse rispetto alle equazioni che abbiamo visto in precedenza, e lo stesso tensore degli sforzi viscosi contiene dei termini addizionali legati proprio alla variazione di densità del fluido. Per questo motivo in questo capitolo non faremo uso delle equazioni differenziali di Navier–Stokes ma limiteremo la nostra analisi solamente allo studio di alcune proprietà dei fluidi comprimibili esaminando il comportamento di piccole porzioni uniformi di fluido.

9.2 Velocità del suono

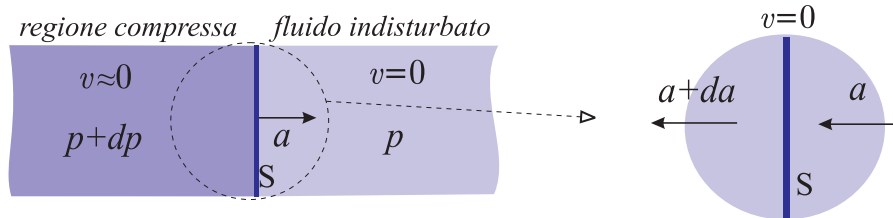


Figura 9.1 Propagazione di un'onda sonora in un fluido in quiete. A destra è mostrato il dettaglio del flusso in un riferimento solidale con il fronte dell'onda.

Una piccola ed improvvisa compressione in un fluido inizialmente in quiete si propaga verso le regioni circostanti con una velocità a , detta *velocità del suono*, che dipende esclusivamente dalle proprietà termodinamiche del mezzo. Facciamo riferimento alla Figura 9.1a e fissiamo l'attenzione sulla superficie di separazione tra la regione imperturbata in quiete (a destra) e quella compressa (a sinistra). Supponiamo che la regione esaminata sia sufficientemente piccola in modo che la superficie possa essere considerata piana e che il fluido a destra e a sinistra

del fronte d'onda sia omogeneo. Il gas imperturbato abbia densità ϱ e pressione p , mentre il gas compresso abbia densità e pressione rispettivamente $\varrho + d\varrho$ e $p + dp$. Vogliamo ricavare la velocità a con cui si propaga la superficie che separa le due regioni.

Introduciamo un sistema di riferimento fermo rispetto al fronte d'onda (Figura 9.1b) in modo che il fluido appaia diretto da destra verso sinistra con velocità $-a$. Per la legge di conservazione della massa il flusso attraverso una porzione di superficie di area S deve essere costante, cioè

$$\varrho a S = \dot{m} = \text{costante} \quad (9.2.1)$$

Differenziando questa equazione si trova

$$a d\varrho = -\varrho da \quad (9.2.2)$$

Analogamente dalla conservazione del momento segue l'equazione

$$p S + \dot{m} a = \text{costante}$$

Il primo termine rappresenta la forza esercitata sulla superficie, mentre il secondo termine contiene il flusso della quantità di moto. Differenziando ed usando le (9.2.1) e (9.2.2) si ottiene

$$0 = S dp + \dot{m} da = S dp + \varrho S a da = S dp - S a^2 d\varrho \quad (9.2.4)$$

cioè

$$dp = a^2 d\varrho. \quad (9.2.5)$$

Questa equazione mette in relazione la velocità di propagazione dell'onda sonora con le perturbazioni di densità e di pressione. Tali perturbazioni non sono però indipendenti tra loro essendo vincolate dall'equazione di stato del fluido. Nelle situazioni più frequenti la rapidità del passaggio della perturbazione assieme alla bassa conducibilità termica del gas (nessuna perdita di calore) e all'assenza di processi dissipativi nel fronte d'onda, fanno sì che la compressione avvenga praticamente in modo adiabatico e reversibile. In questi casi vale la relazione termodinamica

$$dp = \left(\frac{\partial p}{\partial \varrho} \right)_S d\varrho \quad (9.2.6)$$

dove l'indice S indica che la derivata deve essere calcolata lungo una trasformazione a entropia costante. Dal confronto tra la (9.2.5) e la (9.2.6) si trova

$$a^2 = \left(\frac{\partial p}{\partial \varrho} \right)_S. \quad (9.2.7)$$

In particolare, se il gas è ideale l'equazione dell'adiabatica reversibile è $p = \text{cost } \varrho^\gamma$. In questo caso si trova

$$a = \left[\left(\frac{\partial p}{\partial \varrho} \right)_S \right]^{1/2} = [\text{cost } \gamma \varrho^{\gamma-1}]^{1/2} = \sqrt{\gamma \frac{p}{\varrho}} = \sqrt{\gamma \frac{kT}{m_0}}, \quad (9.2.8)$$

dove k è la costante di Boltzmann e m_0 è la massa media delle molecole che compongono il gas. La velocità del suono è dunque dello stesso ordine di grandezza della velocità termica delle molecole del gas.

9.3 Equazione dell'energia

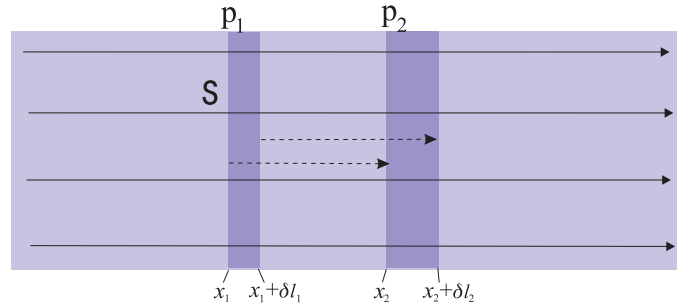


Figura 9.2 Moto di un elemento di fluido comprimibile

Immaginiamo di seguire all'interno di un fluido in movimento una porzione di fluido di densità ϱ , spessore infinitesimo $\delta \ell$ e superficie S nella direzione del moto (Figura 9.2). Sia

$$\delta m = \varrho S \delta \ell \quad (9.3.1)$$

la massa (costante) di questa porzione di fluido, e assumiamo che durante il moto l'area S rimanga costante, mentre lo spessore, e di conseguenza la densità, sono liberi di variare. La somma dell'energia cinetica $\frac{1}{2}v^2 \delta m$, potenziale $\epsilon_p \delta m$, ed interna $u \delta m$ del disco è

$$(\epsilon_p + \frac{1}{2}v^2 + u) \delta m. \quad (9.3.2)$$

Il termine dentro parentesi rappresenta la densità di energia del fluido. In assenza di forze dissipative, la variazione dell'energia totale

$$\left[(\epsilon_p + \frac{1}{2}v^2 + u)_2 - (\epsilon_p + \frac{1}{2}v^2 + u)_1 \right] \delta m. \quad (9.3.3)$$

tra due differenti posizioni deve essere eguale al lavoro fatto dalla pressione sulle due facce del disco durante lo spostamento. Il lavoro fatto dalla pressione a valle del volume è

$$W_1 = \int_{x_1}^{x_2} p S dx$$

mentre quello svolto dalla pressione esercitata a monte è

$$W_2 = - \int_{x_1+\delta\ell_1}^{x_2+\delta\ell_2} p S \, dx$$

Il lavoro totale è dato dunque da

$$\begin{aligned} W_1 + W_2 &= \\ &= \int_{x_1}^{x_1+\delta\ell_1} p S \, dx + \int_{x_1+\delta\ell_1}^{x_2} p S \, dx - \int_{x_1+\delta\ell_1}^{x_2} p S \, dx - \int_{x_2}^{x_2+\delta\ell_2} p S \, dx = \\ &= \int_{x_1}^{x_1+\delta\ell_1} p S \, dx - \int_{x_2}^{x_2+\delta\ell_2} p S \, dx = [p S \delta\ell]_1 - [p S \delta\ell]_2 = \\ &= \delta m \left[\left(\frac{p}{\varrho} \right)_1 - \left(\frac{p}{\varrho} \right)_2 \right] \end{aligned} \quad (9.3.4)$$

Eguagliando la variazione di energia (9.3.3) con il lavoro (9.3.4) e semplificando si ottiene

$$\left[\epsilon_p + \frac{1}{2}v^2 + u + \frac{p}{\varrho} \right]_1 = \left[\epsilon_p + \frac{1}{2}v^2 + u + \frac{p}{\varrho} \right]_2 \quad (9.3.5)$$

cioè

$$\epsilon_p + \frac{1}{2}v^2 + u + \frac{p}{\varrho} = \text{costante} , \quad (9.3.6)$$

Alle volte questa equazione viene scritta nella forma

$$\epsilon_p + \frac{1}{2}v^2 + h = \text{costante} \quad (9.3.7)$$

dove

$$h = u + p/\varrho \quad (9.3.8)$$

è l'*entalpia* per unità di massa del fluido. Se l'energia potenziale è costante, queste due espressioni si semplificano ulteriormente e diventano

$$\frac{1}{2}v^2 + u + \left(\frac{p}{\varrho} \right) = \frac{1}{2}v^2 + h = \text{costante} \quad (9.3.10)$$

In un gas ideale l'energia specifica interna è legata a ϱ e p dalla relazione

$$u = \frac{1}{\gamma - 1} \left(\frac{p}{\varrho} \right) , \quad (9.3.11)$$

e quindi

$$\frac{1}{2}v^2 + \frac{\gamma}{\gamma-1} \left(\frac{p}{\varrho} \right) = \text{costante} \quad (9.3.12)$$

oppure, in termini della velocità del suono

$$\frac{1}{2}v^2 + \frac{a^2}{\gamma-1} = \text{costante}. \quad (9.3.13)$$

Immaginiamo ora che il flusso provenga da un ampio serbatoio alla temperatura uniforme T_0 , nel cui interno la velocità del fluido sia trascurabile rispetto alla velocità locale del suono a_0 (*regione di stagnazione*). Dalla (9.3.13) si ricava allora

$$v^2 + \frac{2a^2}{\gamma-1} = \frac{2a_0^2}{\gamma-1} = \frac{2\gamma}{\gamma-1} \frac{kT_0}{m_0}. \quad (9.3.14)$$

Questa relazione è più significativa se la velocità viene scritta in forma adimensionale mediante il *numero di Mach*

$$M = \frac{v}{a}. \quad (9.3.15)$$

Dalla (9.3.14) si ha infatti

$$M^2 + \frac{2}{\gamma-1} = \frac{2\gamma}{\gamma-1} \frac{a_0^2}{a^2}. \quad (9.3.16)$$

Poichè $a^2 \propto T$, si ottiene la seguente relazione tra la temperatura della zona compressa e quella nella regione di stagnazione

$$\frac{T_0}{T} = 1 + \frac{\gamma-1}{2} M^2. \quad (9.3.16)$$

Se il flusso è isentropico, dalle relazioni di Poisson si ottengono facilmente anche le seguenti relazioni

$$\frac{p_0}{p} = \left[1 + \frac{\gamma-1}{2} M^2 \right]^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} \quad (9.3.17)$$

$$\frac{\varrho_0}{\varrho} = \left[1 + \frac{\gamma-1}{2} M^2 \right]^{\frac{1}{\gamma-1}} \quad (9.3.18)$$

Ad esempio, nell'aria $\gamma = 1.4$, e quindi

$$T = \frac{T_0}{1 + 0.2 M^2} \quad (9.3.19)$$

9.4 Ugello di Laval

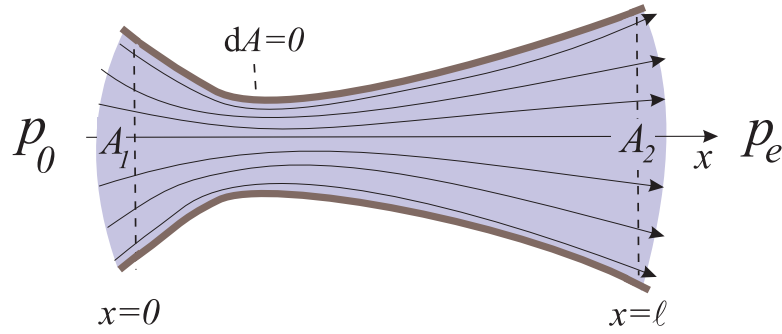


Figura 9.3 Ugello di Laval

Studiamo ora il comportamento di un flusso stazionario che attraversa un condotto la cui sezione è variabile. Se gli scambi termici sono trascurabili e non vi sono attriti il flusso è isentropico. Distinguiamo con gli indici 1 e 2 due sezioni differenti del condotto. Dall'equazione dell'energia (9.3.12) abbiamo

$$v_2^2 = v_1^2 + \frac{2\gamma}{\gamma - 1} \frac{p_1}{\varrho_1} \left[1 - \left(\frac{p_2}{p_1} \right)^{(\gamma-1)/\gamma} \right]. \quad (9.4.1)$$

La velocità in uscita dipende quindi dal rapporto di compressione p_2/p_1 tra le estremità della porzione di condotto. In particolare si ha l'uguaglianza delle velocità ($v_2 = v_1$) quando anche le pressioni di entrata e di uscita sono eguali. Inoltre, la velocità in uscita è massima se $p_2 = 0$. Infine, se in ingresso la velocità è trascurabile (cioè $v_1 \ll v_2$) ed il salto di pressione è sufficientemente grande ($p_1 \gg p_2$), vale la relazione

$$v_2 = \sqrt{\frac{2\gamma}{\gamma - 1} \frac{p_1}{\varrho_1}}. \quad (9.4.2)$$

È interessante analizzare gli effetti della sezione del condotto sulla velocità. Differenziando l'equazione di continuità $\varrho v A = \text{costante}$ otteniamo

$$\frac{dA}{A} + \frac{d\varrho}{\varrho} + \frac{dv}{v} = 0 \quad (9.4.3)$$

mentre differenziando l'equazione dell'energia (9.3.12) si ha

$$\begin{aligned} 0 &= 2v dv + \frac{2\gamma}{\gamma - 1} \left(\frac{dp}{\varrho} - p \frac{d\varrho}{\varrho^2} \right) \\ &= 2v dv + \frac{2\gamma}{\gamma - 1} \left(\frac{dp}{d\varrho} - \frac{p}{\varrho} \right) \frac{d\varrho}{\varrho} = \end{aligned}$$

$$= 2v \, dv + \frac{2\gamma}{\gamma - 1} (\gamma - 1) \frac{p}{\rho} \frac{d\rho}{\rho} = 2v \, dv + 2a^2 \frac{d\rho}{\rho}$$

cioè

$$a^2 \frac{d\rho}{\rho} = -v^2 \frac{dv}{v} . \quad (9.4.4)$$

Questa equazione può essere usata per eliminare la densità dalla (9.4.3). Dopo semplici passaggi si ottiene

$$(1 - M^2) \frac{dv}{v} = -\frac{dA}{A} \quad (9.4.5)$$

che porta alle seguenti importanti conclusioni:

1) se il fluido è subsonico ($M < 1$) si trova che la velocità aumenta ($dv > 0$) solo se $dA < 0$ e viceversa. Cioè il passaggio da flusso subsonico a supersonico è possibile *solo se la sezione del condotto diminuisce*.

2) Se invece il flusso è supersonico, e quindi $M > 1$, il comportamento è esattamente opposto, cioè per poter accelerare il fluido occorre aumentare la sezione del condotto!

Risulta dunque che per produrre un flusso con velocità superiore a quella del suono partendo da un fluido con bassa velocità occorre disporre di un condotto la cui sezione è prima convergente e poi divergente. In altri termini bisogna che in un qualche punto del condotto si abbia una strozzatura in cui $dA = 0$. Come mostra la (9.4.5), esattamente all'altezza di questa sezione avviene la transizione sonica $M = 1$. Una configurazione di questo tipo prende il nome di *Ugello di Laval* e trova applicazione nei motori dei velivoli supersonici.

La diversità tra flusso subsonico e quello supersonico si manifesta anche nella configurazione delle linee di corrente. Infatti, mentre dove $M < 1$ le linee convergono al crescere della velocità, nella regione supersonica le linee di corrente si allontanano. Ciò può sembrare paradossale, ma non dobbiamo dimenticare che questo comportamento è strettamente legato alla comprimibilità del gas. Infatti durante il regime supersonico una parte dell'accelerazione avviene grazie all'energia interna del gas che è stata accumulata durante la compressione nella prima fase e che poi viene liberata durante l'espansione. Evidentemente questo processo non è possibile nei fluidi incomprimibili.

9.5 Flusso supersonico

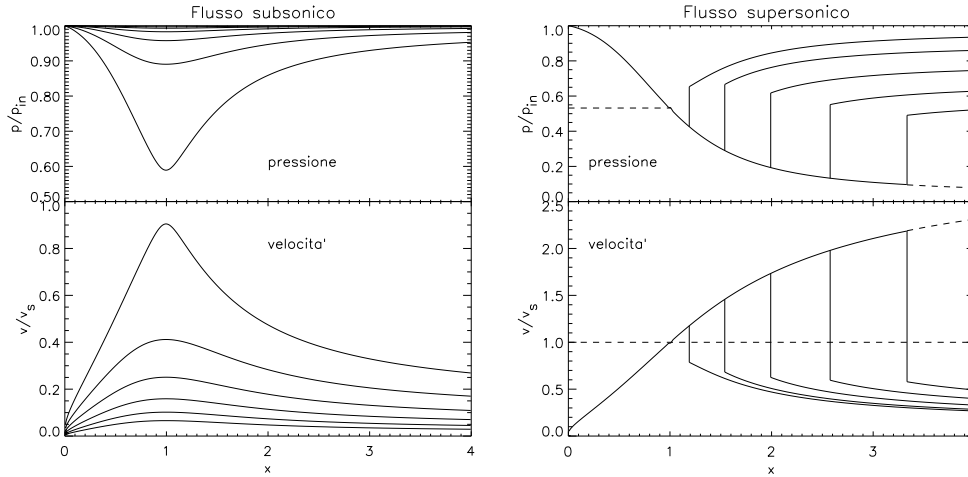


Figura 9.4 Andamento della pressione e della velocità in un flusso subsonico (a sinistra) e supersonico (a destra).

La presenza delle due regioni convergente e divergente nell'ugello di Laval non garantisce da sola che il flusso diventi effettivamente supersonico. Infatti se $M < 1$, l'equazione (9.4.5) esprime solamente una condizione di massimo della velocità nel punto $x = x_c$ in cui $dA/dx = 0$. Se scriviamo la (9.4.5) nella forma

$$\frac{d \ln v}{dx} = \frac{1}{1 - M^2} \frac{d \ln A}{dx}, \quad (9.5.1)$$

possiamo notare che il flusso diventa supersonico solo se nel punto x_c la velocità è esattamente eguale alla velocità del suono. Solamente in questo caso la derivata della velocità può essere ancora positiva ^[1].

Consideriamo ora un flusso adiabatico di un gas ideale. Supponiamo che l'ingresso dell'ugello si trovi alla coordinata $x = 0$ e sia in comunicazione con un grande recipiente nel quale il gas viene mantenuto a fissati valori di pressione, temperatura e densità, rispettivamente p_0 , ρ_0 e $T_0 = T(p_0, \rho_0)$. In questa regione la velocità del gas è molto bassa e può essere approssimata a zero *regione di stagnazione*. Per studiare il flusso all'interno dell'ugello occorre risolvere il sistema di equazioni

$$(1 - M^2) \frac{d \ln v}{dx} + \frac{d \ln A}{dx} = 0 \quad (9.5.1)$$

^[1] La (9.5.1) fornisce un valore indeterminato $0/0$ per il gradiente della velocità nel punto sonico. Questo però non comporta affatto una patologia nelle grandezze fisiche del flusso. Il risultato è legato infatti solo ad alcune proprietà matematiche delle soluzioni stazionarie. Matematicamente il gradiente dovrà essere calcolato usando, ad esempio, la regola dell'Hopital.

$$\frac{d \ln p}{dx} - \gamma M^2 \frac{d \ln v}{dx} = 0 \quad (9.5.2)$$

nelle funzioni incognite v e p . La (9.5.2) è facilmente deducibile dalla (9.4.4) eliminando la densità mediante l'equazione costitutiva delle adiabatiche $p \propto \varrho^\gamma$. Le due condizioni al contorno sono fissate dalla pressione iniziale p_0 nella zona di stagnazione e dalla pressione ambiente all'uscita dell'ugello p_e .

Il problema è risolvibile numericamente e la soluzione è riportata graficamente nella Figura 9.4, nella quale sono mostrate alcune curve per valori decrescenti della pressione esterna p_e , iniziando da valori appena inferiori a p_0 . Come possiamo vedere nel grafico della Figura 9.4a, se il salto di pressione tra il serbatoio e l'ambiente non è troppo grande, la velocità del flusso aumenta nel primo tratto di condotto a sezione decrescente, raggiunge quindi un valore massimo v_{max} all'altezza della strozzatura, e quindi diminuisce nuovamente. Se $v \ll a$, il comportamento è molto vicino a quello di un fluido a pressione costante $\varrho \approx \varrho_0$, con $v \propto A$ e con la pressione che varia seguendo la legge di Bernoulli $p \approx p_0 + 1/2 \varrho_0 (v^2 - v_0^2)$. Al diminuire della pressione p_e il valore massimo della velocità aumenta, ma l'andamento generale rimane simile. Tuttavia la deviazione rispetto al fluido incompressibile diventa sempre più marcata via via che il numero di Mach si avvicina a 1.

In corrispondenza ad una determinata pressione ambiente p_c la velocità massima raggiunge il valore locale del suono (numero di Mach $M = 1$). Nel tratto successivo dell'ugello il flusso diventa supersonico grazie alla simultanea inversione di segno del fattore $1 - M^2$ e del termine dA/dx nell'equazione (9.5.1) che mantiene positiva la derivata della velocità. Analogamente la pressione diminuisce in maniera monotona in tutto il condotto, come risulta dalla (9.5.2). Questo comportamento è mostrato nella Figura 9.4b e si manifesta anche per valori della pressione esterna inferiori a p_c (si noti la differente scala verticale nei due grafici che descrivono i flussi subsonici e supersonici).

Un aspetto fondamentale del flusso supersonico è il fatto che la soluzione *critica* passante per il punto sonico rimane “congelata”, risultando insensibile alle successive variazioni della pressione esterna. In altre parole per una fissato profilo dell'ugello $A(x)$ le funzioni $p(x)$ e $v(x)$ della soluzione supersonica dipendono *esclusivamente* dalle condizioni del gas all'ingresso dell'ugello, e non dalla pressione esterna p_e . La principale conseguenza della presenza di un'unica soluzione critica è l'impossibilità di raccordare con continuità il valore della pressione $p(\ell)$ al termine del condotto con il valore p_e immediatamente dopo l'uscita, che invece dipende dalle condizioni dell'ambiente. Il raccordo può avvenire solo attraverso un salto discontinuo dei parametri del

flusso, e quindi in seguito alla formazione di un'onda d'urto stazionaria. Generalmente questa non si forma esattamente a $x = \ell$ poichè attraverso la discontinuità devono essere soddisfatte ben precise condizioni riguardanti la conservazione della massa e la quantità di moto (vedi il prossimo paragrafo). Questi vincoli fanno sì che l'onda d'urto non sia localizzata in un punto qualsiasi del flusso, ma la sua posizione dipende da p_e . Se questa non è troppo bassa, l'onda stazionaria viene generata all'interno dell'ugello, in una sezione intermedia tra $x = x_c$ e $x = \ell$. Per valori molto piccoli di p_e l'onda si forma invece nella regione del getto creato dal flusso che si propaga nell'ambiente esterno. In quest'ultimo caso le caratteristiche fisiche e geometriche del fronte di discontinuità sono molto complicate per la comparsa di onde stazionarie oblique, inclinate rispetto alla direzione del flusso.

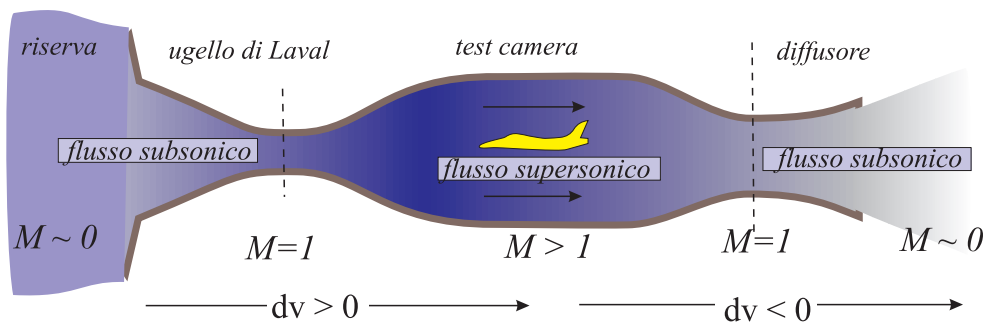


Figura 9.5 Nelle gallerie a vento è necessario una seconda regione convergente per riportare il flusso alle condizioni subsoniche

Osserviamo infine che se nella regione supersonica il profilo del condotto torna a diminuire (e quindi vi è una seconda sezione del condotto dove $dA/dx = 0$) la velocità diventa nuovamente inferiore alla velocità del suono. Questo fenomeno viene utilizzato nelle gallerie a vento per impedire che gli scarichi del gas abbiano velocità troppo elevate (Figura 9.5).

9.6 Onde d'urto piane

Le onde d'urto possono formarsi non solo all'interno di un ugello di Laval, ma anche attorno a corpi in movimento in un fluido con velocità relativa superiore a quella locale del suono. Le osservazioni mostrano che le repentine variazioni dei parametri del flusso sul il fronte dell'onda avvengono su scale confrontabili con il cammino molecolare medio. In una descrizione macroscopica questo permette di trattare l'onda d'urto come una superficie attraverso la quale i valori della velocità, della pressione e della densità del fluido cambiano

con discontinuità, pur dovendo soddisfare alle leggi di conservazione fondamentali.

Studiamo il caso semplice di un'onda piana che si propaga con velocità v_0 in un gas ideale in quiete. In assenza di viscosità e se l'irraggiamento è trascurabile, la transizione del fluido dalla regione imperturbata a quella che ha subito il passaggio avviene in condizioni praticamente adiabatiche. Tuttavia, diversamente da un'onda sonora ordinaria, dove il flusso può essere considerato ovunque isentropico, i forti gradienti sul fronte di discontinuità provocano una sensibile dissipazione di energia ed un conseguente aumento dell'entropia del gas.

Le equazioni che governano il flusso attraverso l'onda d'urto sono l'equazione di continuità, l'equazione del momento e la legge di conservazione dell'energia. Queste equazioni assumono una forma più semplice nel riferimento rispetto al quale il fronte dell'onda appare fermo ed è attraversato ortogonalmente da un flusso di materia con velocità $-v_0$ (Figura 9.6 in basso).

Usando gli indici 1 e 2 per indicare le proprietà del fluido immediatamente prima e dopo la discontinuità, le tre leggi di conservazione sono rispettivamente

$$\varrho_1 v_1 = \varrho_2 v_2 \quad (9.6.1)$$

$$p_1 + \varrho_1 v_1^2 = p_2 + \varrho_2 v_2^2 \quad (9.6.2)$$

$$\frac{1}{2} v_1^2 + \frac{\gamma}{\gamma-1} \frac{p_1}{\varrho_1} = \frac{1}{2} v_2^2 + \frac{\gamma}{\gamma-1} \frac{p_2}{\varrho_2} \quad (9.6.3)$$

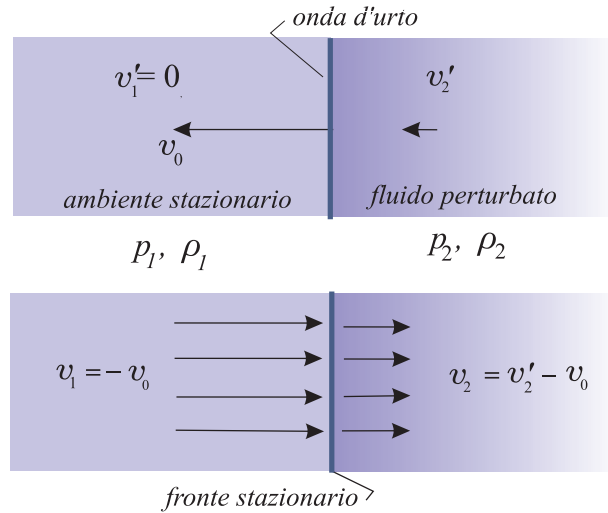


Figura 9.6 *In alto:* Onda d'urto stazionaria che si propaga da sinistra verso destra con velocità v_0 in un ambiente stazionario. *In basso:* la medesima onda nel riferimento in moto col fronte dell'onda.

Espressa in termini della temperatura la (9.6.3) diventa

$$\frac{1}{2} v_1^2 + c_p T_1 = \frac{1}{2} v_2^2 + c_p T_2, \quad (9.6.4)$$

dove c_p è il calore specifico del gas ideale a pressione costante.

Come si è detto, nell'attraversare la discontinuità il fluido subisce un processo irreversibile in cui una certa quantità di energia meccanica viene inevitabilmente dissipata in calore che contribuisce ad aumentare l'energia interna e l'entropia del gas. Ciò significa che, per non contraddire il secondo principio della termodinamica applicato ai processi adiabatici irreversibili, la temperatura T_2 del gas a valle dell'onda urto *deve* essere superiore a T_1 . Dalle (9.6.4) e (9.6.1) seguono allora le disequaglianze

$$v_2 < v_1, \quad \varrho_2 > \varrho_1, \quad (9.6.5)$$

cioè nell'attraversare il fronte la velocità del flusso deve necessariamente diminuire.

In realtà possiamo dimostrare che la condizione sulle velocità è ancora più restrittiva, poichè le leggi di conservazione richiedono che valgano contemporaneamente le disequaglianze $v_1 > a$ e $v_2 < a$. Infatti, combinando le (9.6.1) e (9.6.2) otteniamo la seguente relazione

$$v_1 v_2 = \frac{p_1 - p_2}{\varrho_1 - \varrho_2}, \quad (9.6.6)$$

mentre dalla (9.6.4) si ricava

$$\frac{2\gamma}{\gamma - 1} \left[\frac{p_1 \varrho_2 - p_2 \varrho_1}{\varrho_1 \varrho_2} \right] = v_2^2 - v_1^2 \quad (9.6.7)$$

Possiamo ora usare la (9.6.1) e la (9.6.6) per eliminare dalla (9.6.7) le velocità. Dalle prime due equazioni si ottiene

$$v_1^2 = \frac{(p_1 - p_2) \varrho_2}{(\varrho_1 - \varrho_2) \varrho_1}, \quad \text{e} \quad v_2^2 = \frac{(p_1 - p_2) \varrho_1}{(\varrho_1 - \varrho_2) \varrho_2} \quad (9.6.8)$$

che, sostituite nella (9.6.7), danno

$$2\gamma(p_1 \varrho_2 - p_2 \varrho_1) = (\gamma - 1)(\varrho_1 + \varrho_2)(p_1 - p_2). \quad (9.6.9)$$

Sviluppando i prodotti e semplificando si ottiene infine la seguente relazione tra la pressione e la densità attraverso la discontinuità

$$\frac{p_1 - p_2}{\varrho_1 - \varrho_2} = \gamma \frac{p_1 + p_2}{\varrho_1 + \varrho_2} \quad (9.6.10)$$

ossia

$$\frac{p_2}{p_1} = \frac{(\gamma + 1) \varrho_2 - (\gamma - 1) \varrho_1}{(\gamma - 1) \varrho_2 + (\gamma + 1) \varrho_1} \quad (9.6.11)$$

$$\frac{\varrho_2}{\varrho_1} = \frac{(\gamma - 1) p_1 + (\gamma + 1) p_2}{(\gamma + 1) p_1 + (\gamma - 1) p_2} . \quad (9.6.12)$$

Queste relazioni sono ben diverse dall'equazione di Poisson valida per un'adiabatica reversibile

$$p_2/p_1 = (\varrho_2/\varrho_1)^\gamma , \quad (9.6.13)$$

in accordo con il fatto che il flusso adiabatico attraverso l'onda d'urto non è isentropico.

Come si può verificare facilmente dalle (9.6.11) e (9.6.12), il rapporto p_2/p_1 è una funzione monotona crescente del rapporto delle densità ϱ_2/ϱ_1 . Dalla (9.6.5) segue allora la diseuguaglianza

$$p_2 > p_1 , \quad (9.6.14)$$

cioè attraverso un'onda d'urto piana vi è *sempre* un aumento della pressione. Ricaviamo il legame tra i salti di pressione e di velocità esprimendo queste ultime in unità della velocità locale del suono $a = \gamma p/\varrho$. Il numero di Mach prima della discontinuità è

$$M_1^2 = \frac{v_1^2}{a_1^2} = \frac{\varrho_1 v_1^2}{\gamma p_1} = \frac{\varrho_2 v_2 v_1}{\gamma p_1} = \frac{\varrho_2}{\gamma p_1} \frac{(p_1 - p_2)}{(\varrho_1 - \varrho_2)} , \quad (9.6.15)$$

dove si sono usate le equazioni (9.6.1) e (9.6.6). Usando la (9.6.12) possiamo esprimere il rapporto $(\varrho_1 - \varrho_2)/\varrho_2$ in termini della pressione. Dopo semplici passaggi si ottiene

$$M_1^2 = \frac{1}{2\gamma} \left[(\gamma - 1) + (\gamma + 1) \frac{p_2}{p_1} \right] > 1 \quad (9.6.16)$$

Con un procedimento simile si ricava

$$M_2^2 = \frac{1}{2\gamma} \left[(\gamma - 1) + (\gamma + 1) \frac{p_1}{p_2} \right] < 1 \quad (9.6.17)$$

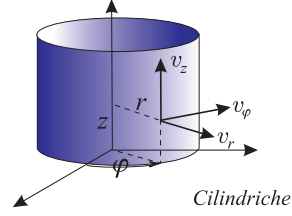
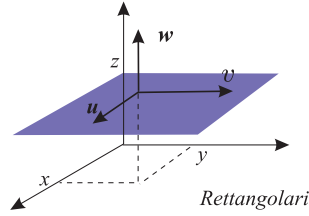
Da queste diseuguaglianze risulta che un'onda d'urto piana si può formare solo in un flusso supersonico. Nell'attraversare la discontinuità la velocità passa da valori supersonici a subsonici, mentre la densità, la pressione e la temperatura aumentano. Questo accade a causa della

dissipazione dell'energia cinetica del moto medio del gas in energia termica. Per un fissato rapporto della pressione p_2/p_1 , dalla (9.6.16) si trova la velocità del flusso del mezzo imperturbato, che è anche eguale alla velocità di propagazione dell'onda d'urto rispetto al fluido fermo. Dalla (9.6.12) si ottiene anche il seguente rapporto delle densità prima e dopo il fronte d'onda

$$\frac{\varrho_2}{\varrho_1} = \frac{(\gamma + 1) M_1^2}{2 + (\gamma - 1) M_1^2} \quad \left(= \frac{v_1}{v_2} \right) \quad (9.6.18)$$

APPENDICE A

Equazioni del moto per fluidi incompressibili

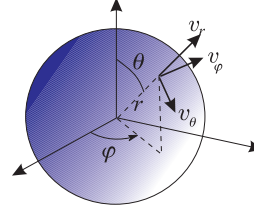


Coordinate cartesiane rettangolari e coordinate cilindriche

- $\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0$
- $\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \left[\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right] + f_x$
- $\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + \nu \left[\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \right] + f_y$
- $\frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} + \nu \left[\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \right] + f_z$

Coordinate cilindriche (r, φ, z)

- $\frac{1}{r} \frac{\partial(rv_r)}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0$
- $\frac{\partial v_r}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{v_\varphi}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \varphi} + v_z \frac{\partial v_r}{\partial z} - \frac{v_\varphi^2}{r} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r} +$
 $+ \nu \left[\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial(rv_r)}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 v_r}{\partial \varphi^2} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial v_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\partial^2 v_r}{\partial z^2} \right] + f_r$
- $\frac{\partial v_\varphi}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_\varphi}{\partial r} + \frac{v_\varphi}{r} \frac{\partial v_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{v_r v_\varphi}{r} + v_z \frac{\partial v_\varphi}{\partial z} = -\frac{1}{\rho r} \frac{\partial p}{\partial \varphi} +$
 $+ \nu \left[\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial(rv_\varphi)}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 v_\varphi}{\partial \varphi^2} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial v_r}{\partial \varphi} + \frac{\partial^2 v_\varphi}{\partial z^2} \right] + f_\varphi$
- $\frac{\partial v_z}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_z}{\partial r} + \frac{v_\varphi}{r} \frac{\partial v_z}{\partial \varphi} + v_z \frac{\partial v_z}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} +$
 $+ \nu \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial v_z}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 v_z}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 v_z}{\partial z^2} \right] + f_z$

Coordinate sferiche polari (r, θ, φ) *Polari*

- $\frac{1}{r^2} \frac{\partial(r^2 v_r)}{\partial r} + \frac{1}{r \sin \theta} \left[\frac{\partial(v_\theta \sin \theta)}{\partial \theta} + \frac{\partial v_\varphi}{\partial \varphi} \right] = 0$
- $\frac{\partial v_r}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} - \frac{v_r^2 + v_\theta^2}{r} + \frac{v_\varphi}{r \sin \theta} \frac{\partial v_r}{\partial \varphi} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r} +$
 $+\frac{\nu}{r^2} \left[\frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial v_r}{\partial r} \right) + \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial v_r}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2 v_r}{\partial \varphi^2} + \right.$
 $\left. - 2 \left(v_r + \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + v_\theta \cot \theta + \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial v_\varphi}{\partial \varphi} \right) \right] + f_r$
- $\frac{\partial v_\theta}{\partial t} + \frac{v_r}{r} \frac{\partial(r v_\theta)}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{v_\varphi}{r \sin \theta} \frac{\partial v_\theta}{\partial \varphi} - \frac{v_\varphi^2 \cot \theta}{r} = -\frac{1}{\rho r} \frac{\partial p}{\partial \theta} +$
 $+\frac{\nu}{r^2} \left[\frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial v_\theta}{\partial r} \right) + \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2 v_\theta}{\partial \varphi^2} + \right.$
 $\left. + 2 \frac{\partial v_r}{\partial \theta} - \frac{v_\theta}{\sin^2 \theta} - \frac{2 \cot \theta}{\sin \theta} \frac{\partial v_\varphi}{\partial \varphi} \right] + f_\theta$
- $\frac{\partial v_\varphi}{\partial t} + \frac{v_r}{r} \frac{\partial(r v_\varphi)}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial v_\varphi}{\partial \theta} + \frac{v_\varphi}{r \sin \theta} \frac{\partial v_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{v_\theta v_\varphi \cot \theta}{r} = -\frac{1}{\rho r \sin \theta} \frac{\partial p}{\partial \varphi} +$
 $+\frac{\nu}{r^2} \left[\frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial v_\varphi}{\partial r} \right) + \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial v_\varphi}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2 v_\varphi}{\partial \varphi^2} + \right.$
 $\left. - \frac{v_\varphi}{\sin^2 \theta} + \frac{2}{\sin \theta} \frac{\partial v_r}{\partial \varphi} + \frac{2 \cot \theta}{\sin \theta} \frac{\partial v_\theta}{\partial \varphi} \right] + f_\varphi$

APPENDICE B

Tensore degli sforzi (fluido newtoniano incomprimibile)

Coordinate cartesiane:

$$\begin{aligned}
 t_{xx} &= 2\mu \frac{\partial v_x}{\partial x} \quad ; \quad t_{yy} = 2\mu \frac{\partial v_y}{\partial y} \quad ; \quad t_{zz} = 2\mu \frac{\partial v_z}{\partial z} \\
 t_{xy} &= t_{yx} = \mu \left[\frac{\partial v_x}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial x} \right] \\
 t_{xz} &= t_{zx} = \mu \left[\frac{\partial v_x}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial x} \right] \\
 t_{yz} &= t_{zy} = \mu \left[\frac{\partial v_y}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial y} \right]
 \end{aligned}$$

Coordinate cilindriche:

$$\begin{aligned}
 t_{rr} &= 2\mu \frac{\partial v_r}{\partial r} \quad ; \quad t_{\varphi\varphi} = \frac{2\mu}{r} \left[\frac{\partial v_\varphi}{\partial \theta} + v_r \right] \quad ; \quad t_{zz} = 2\mu \frac{\partial v_z}{\partial z} \\
 t_{r\varphi} &= t_{\varphi r} = \mu \left[r \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{v_\varphi}{r} \right) + \frac{1}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \varphi} \right] \\
 t_{\varphi z} &= t_{z\varphi} = \mu \left[\frac{\partial v_\varphi}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_z}{\partial \varphi} \right] \\
 t_{zr} &= t_{rz} = \mu \left[\frac{\partial v_z}{\partial r} + \frac{\partial v_r}{\partial z} \right]
 \end{aligned}$$

Coordinate sferiche:

$$\begin{aligned}
 t_{rr} &= \mu \frac{\partial v_r}{\partial r} \quad ; \quad t_{\theta\theta} = \frac{2\mu}{r} \left[\frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + v_r \right] \\
 t_{\varphi\varphi} &= \frac{2\mu}{r} \left[\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial v_\varphi}{\partial \varphi} + v_r + v_\theta \cot \theta \right] \\
 t_{r\theta} &= t_{\theta r} = \mu \left[r \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{v_\theta}{r} \right) + \frac{1}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} \right] \\
 t_{\theta\varphi} &= t_{\varphi\theta} = \frac{\mu}{r} \left[\sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{v_\varphi}{\sin \theta} \right) + \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial v_\theta}{\partial \varphi} \right] \\
 t_{\varphi r} &= t_{r\varphi} = \mu \left[\frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial v_r}{\partial \varphi} + r \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{v_\varphi}{r} \right) \right]
 \end{aligned}$$

APPENDICE C

Soluzione dello strato limite di Blasius (v. §8.3)

Un'informazione importante sulla natura della soluzione di Blasius per una lamina di lunghezza $\ell = L$ può essere dedotta scrivendo le equazioni del moto (8.3.1) e (8.3.2) in forma adimensionale mediante le trasformazioni

$$x' = x/\ell, \quad y' = (y/\ell) \sqrt{\text{Re}} \quad (C1)$$

$$u' = u/u_0, \quad v' = (v/u_0) \sqrt{\text{Re}} \quad (C2)$$

dove $\text{Re} = u_0 \ell / \nu$. Sostituendo le nuove variabili nelle (8.3.1) e (8.3.2) si ottiene il sistema di equazioni

$$u' \frac{\partial u'}{\partial x'} + v' \frac{\partial u'}{\partial y'} = \frac{\partial^2 u'}{\partial y'^2} \quad (C3)$$

$$\frac{\partial u'}{\partial x'} + \frac{\partial v'}{\partial y'} = 0, \quad (C4)$$

che vanno risolte con le condizioni al contorno

$$0 \leq x' \leq 1 \quad \begin{cases} u' = v' = 0 & \text{per } y' = 0 \\ u' \rightarrow 1 & \text{per } y' \rightarrow \infty \end{cases} \quad (C5)$$

Le (C3)–(C5) non contengono nè il numero di Reynolds nè le dimensioni ℓ della lamina. Ciò significa che anche la rispettiva soluzione deve essere indipendente dai parametri fisici del problema. D'altra parte le nuove variabili dipendono dalle dimensioni della lastra tramite le (C.1), ed in particolare $x' \propto \ell^{-1}$ e $y' \propto \ell^{-1/2}$. Pertanto le componenti $u'(x', y')$ e $v'(x', y')$ della velocità dovranno dipendere da x' e y' solo tramite una combinazione che non contenga ℓ , come risulta essere il rapporto

$$\eta = \frac{x'}{\sqrt{y'}} = y \sqrt{\frac{u_0}{x\nu}}.$$

Debbono valere quindi le relazioni

$$\begin{aligned} u(x, y) &= u_0 u'(x', y') = u_0 g(\eta) \\ v(x, y) &= u_0 v'(x', y') / \sqrt{\text{Re}} = u_0 g_1(\eta) \end{aligned}$$

dove g e g_1 sono funzioni adimensionali della sola variabile adimensionale η .

APPENDICE D

Equazione di Laplace

In coordinate cilindriche (r, φ) l'equazione di Laplace è

$$r \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \Phi}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \varphi^2} = 0 \quad (D1)$$

Un sistema *completo* di soluzioni particolari è

$$\begin{cases} \Phi_0 = \text{costante} \\ \Phi_1(r) = \ln(r) \\ \Phi_n(r, \varphi) = r^n \cos(n\varphi) \\ \Phi'_n(r, \varphi) = r^n \sin(n\varphi) \end{cases}, \quad (D2)$$

con $n = \pm 1, \pm 2, \dots$. Pertanto la soluzione generale è

$$\Phi(r, \varphi) = A_0 + B_0 \ln r + \sum_{n=1}^{\infty} [A_n r^n \cos(n\varphi) + B_n r^n \sin(n\varphi)]$$

dove A_0, B_0, A_n, B_n sono costanti arbitrarie.

In coordinate polari l'equazione di Laplace simmetrica in φ diventa

$$\frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial \Phi}{\partial r} \right) + \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial \Phi}{\partial \theta} \right) = 0 \quad (D3)$$

Soluzioni separate sono

$$\begin{cases} \Phi_n^+(r, \theta) = r^n P_n(\cos \theta) \\ \Phi_n^-(r, \theta) = r^{-(n+1)} P_n(\cos \theta), \end{cases} \quad (D4)$$

$(n = 0, 1, 2, \dots)$. P_n sono i polinomi di Legendre definiti da

$$\begin{aligned} P_0(\cos \theta) &= 1, & P_1(\cos \theta) &= \cos \theta, & P_2(\cos \theta) &= \frac{1}{2}(3 \cos^2 \theta - 1), \dots, \\ (n+1)P_{n+1}(x) &= (2n+1)xP_n(x) - nP_{n-1}(x) & (n &= 1, 2, \dots) \end{aligned}$$

La soluzione generale è quindi

$$\Phi(r, \theta) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(A_n r^n + B_n r^{-(n+1)} \right) P_n(\cos \theta)$$

In coordinate cartesiane piane si ha

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} = 0 \quad (D5)$$

la cui soluzione generale si può mettere nella forma

$$\Phi(x, y) = f(x + iy) + g(x - iy) \quad (D6)$$

dove f e g sono funzioni (analitiche) arbitrarie. La (D6) è di scarsa utilità pratica poichè non è semplice determinare la forma delle due funzioni f e g sulla base delle sole condizioni al contorno.

APPENDICE E

Gruppi adimensionali

• Numero di Archimede

$$Ar = \frac{g L^3 \varrho_\ell |\varrho - \varrho_\ell|}{\mu^2} \quad \left\{ \begin{array}{ll} \varrho & \text{densità del fluido} \\ \varrho_\ell & \text{densità del corpo} \\ \mu & \text{viscosità assoluta} \\ g & \text{accelerazione di gravità} \\ L & \text{dimensioni lineari del corpo} \end{array} \right.$$

determina il moto di un corpo causato da differenze di densità del fluido.

• Numero di Biot

$$Bi = \frac{\kappa L}{\lambda_T} \quad \left\{ \begin{array}{ll} \kappa & \text{coefficiente di trasporto termico} \\ L & \text{lunghezza caratteristica} \\ \lambda_T & \text{conducibilità termica} \end{array} \right.$$

Correla le capacità di trasmissione del calore tra l'interno e la superficie di un corpo. Valori di $Bi > 1$ indicano una maggiore resistenza della trasmissione di calore rispetto alla superficie, e quindi la presenza di gradienti termici interni non trascurabili.

• Numero di capillarità

$$\# \text{ capillarità} = \frac{\mu v}{\sigma} \quad \left\{ \begin{array}{ll} \mu & \text{viscosità assoluta del liquido} \\ v & \text{velocità caratteristica} \\ \sigma & \text{tensione superficiale} \end{array} \right.$$

Indica l'importanza relativa tra le forze viscosi e la tensione superficiale.

• Numero di cavitazione

$$\# \text{ cavitaz.} = \frac{p - p_v}{\frac{1}{2} \varrho v^2} \quad \left\{ \begin{array}{ll} p & \text{pressione statica} \\ p_v & \text{pressione di vapore} \\ v & \text{velocità} \\ \varrho & \text{densità} \end{array} \right.$$

(v. *numero di Eulero*). Corrisponde al *coefficiente di pressione* nei problemi di cavitazione (instabilità che avviene quando la pressione statica del fluido è inferiore alla pressione di vapore).

• Numero di Cauchy

$$Ca = \frac{\varrho v^2}{K} \quad \left\{ \begin{array}{ll} \varrho & \text{densità} \\ v & \text{velocità caratteristica} \\ K & \text{modulo di elasticità} \end{array} \right.$$

Rapporto tra le forze inerziali e le forze di compressione di un fluido. È eguale alla radice quadrata del *numero di Mach*.

- **Numero di Ekman**

$$Ek = \frac{\nu}{2D^2\Omega \sin \lambda} \quad \left\{ \begin{array}{ll} \nu & \text{viscosità cinematica} \\ \Omega & \text{velocità angolare terrestre} \\ D & \text{scala verticale dell'onda} \\ \lambda & \text{latitudine} \end{array} \right.$$

È legato a fenomeni geofisici nei mari. Se minore di 1 la perturbazione ondosa si propaga con scarso smorzamento viscoso.

- **Numero di Eulero**

$$Eu = \frac{\Delta p}{\rho v^2} \quad \left\{ \begin{array}{ll} p & \text{pressione} \\ v & \text{velocità} \\ \rho & \text{densità} \end{array} \right.$$

Rapporto tra la forza di pressione e le forze inerziali. È eguale al doppio del *coefficiente di pressione*.

- **Numero di Froude**

$$Fr = \frac{u}{\sqrt{gh}} \quad \left\{ \begin{array}{ll} u & \text{velocità caratteristica} \\ h & \text{scala verticale} \\ g & \text{accelerazione di gravità} \end{array} \right.$$

È l'inverso della radice quadrata del *numero di Richardson*. Viene usato per descrivere il comportamento di un flusso sopra un ostacolo, come una corrente d'aria sopra una montagna, o il flusso sopra una diga. Se il suo valore è *supercritico* ($Fr > 1$) il vento supera la montagna, mentre se è *subcritico* la corrente aggira l'ostacolo. Viene usato anche nello studio del moto ondoso. Infatti il numero di Froude è eguale al rapporto tra la velocità del flusso e la velocità \sqrt{gh} di un'onda in acque basse. Normalmente il fronte di una corrente marina si propaga con un valore di $Fr \approx 1$.

- **Numero di Grashof**

$$Gr = \frac{\beta g \Delta T L^3}{\mu^2} \quad \left\{ \begin{array}{ll} \nu & \text{viscosità cinematica} \\ \Delta T & \text{differenza di temperatura} \\ L & \text{lunghezza caratteristica} \\ \beta & \text{coefficiente di espansione termica} \\ g & \text{accelerazione di gravità} \end{array} \right.$$

Rapporto tra la forza di galleggiamento convettivo e la forza viscosa.

- **Numero di Knudsen**

$$\text{Kn} = \frac{\lambda}{L} = \frac{kT}{\sqrt{2\pi}\sigma^2 PL} \quad \begin{cases} \lambda & \text{cammino libero medio} \\ P & \text{pressione} \\ L & \text{lunghezza caratteristica} \\ T & \text{temperatura} \\ \sigma & \text{diametro delle molecole} \end{cases}$$

Rapporto tra il cammino molecolare medio e le dimensioni rappresentative del sistema.

- **Numero di Laplace**

$$\text{La} = \frac{\sigma \varrho L}{\mu^2} \quad \begin{cases} \sigma & \text{tensione superficiale} \\ \varrho & \text{densità} \\ L & \text{lunghezza caratteristica} \\ \mu & \text{viscosità assoluta} \end{cases}$$

Rapporto tra la tensione superficiale e il flusso di quantità di moto all'interno del liquido.

- **Numero di Mach**

$$\text{Ma} = \frac{v}{a} \quad \begin{cases} v & \text{velocità del fluido} \\ a & \text{velocità del suono} \end{cases}$$

Il flusso può essere *subsonico* ($\text{Ma} < 1$), *sonico* ($\text{Ma} = 1$), *supersonico* ($\text{Ma} > 1$), *transonico* ($0.8 < \text{Ma} < 1.3$), *ipersonico* ($\text{Ma} > 1.3$).

- **Numero di Nusselt**

$$\text{Nu} = \frac{h_c L}{\lambda_T} \quad \begin{cases} h_c & \text{coeff. di trasporto termico convettivo} \\ L & \text{lunghezza caratteristica} \\ \lambda_T & \text{conducibilità termica} \end{cases}$$

Misura l'efficienza del trasporto termico convettivo rispetto alla sola conduzione. Dipende dal gradiente di temperatura superficiale.

- **Numero di Péclet**

$$\text{Pe} = \frac{\varrho L v c_p}{\lambda_T} \quad \begin{cases} L & \text{lunghezza caratteristica} \\ \varrho & \text{densità} \\ v & \text{velocità convettiva del fluido} \\ c_p & \text{calore specifico} \\ \lambda_T & \text{conducibilità termica} \end{cases}$$

Misura l'efficienza della convezione forzata rispetto alla conduzione termica.

- **Numero di Prandtl**

$$\text{Pr} = \frac{\nu}{\alpha} \quad \begin{cases} \nu & \text{viscosità cinematica} \\ \alpha & \text{diffusività termica} \end{cases}$$

Indica la capacità di diffusione di momento rispetto alla diffusione termica. Nella maggior parte dei gas vale circa 0.7. Nei liquidi refrigeranti $\text{Pr} \approx 5$. Nell'olio varia tra 100 e 40000. Il mercurio ha una conduzione molto efficiente e $\text{Pr} \approx 0.015$.

- **Numero di Rayleigh**

$$\text{Ra}_x = \frac{g\beta(T_s - T_e)x^3}{\nu\alpha} \quad \begin{cases} x & \text{dimensione caratteristica} \\ g & \text{accelerazione di gravità} \\ T_s & \text{temperatura superficiale} \\ T_e & \text{temperatura esterna} \\ \nu & \text{viscosità cinematica} \\ \alpha & \text{diffusività termica} \end{cases}$$

Sottolinea l'importanza relativa tra la convezione e la conduzione termica. Se Ra è maggiore di un certo valore critico (come nel caso del mantello terrestre) il trasporto di calore avviene principalmente tramite moti convettivi.

- **Numero di Reynolds**

$$\text{Re} = \frac{vL}{\nu} \quad \begin{cases} L & \text{lunghezza caratteristica} \\ v & \text{velocità} \\ \nu & \text{viscosità cinematica} \end{cases}$$

È il parametro adimensionale più importante della fluidodinamica ed è eguale al rapporto tra le forze inerziali e quelle viscosi. Se il suo valore supera un certo valore critico Re_{crit} (che dipende dalla geometria della configurazione) il flusso passa dal regime laminare a quello turbolento.

- **Numero di Richardson**

$$\text{Ri} = \frac{gh}{v^2} \quad \begin{cases} h & \text{scala verticale} \\ g & \text{accelerazione di gravità} \\ v & \text{velocità rappresentativa} \end{cases}$$

Rapporto tra l'energia potenziale della forza peso e l'energia cinetica (v. il *numero di Froude*). Misura l'importanza degli effetti gravitazionali sul moto del fluido.

- **Numero di Rossby**

$$\text{Ro} = \frac{v}{2L\Omega \sin \lambda} \quad \begin{cases} L & \text{lunghezza caratteristica} \\ \Omega & \text{velocità angolare terrestre} \\ v & \text{velocità} \\ \lambda & \text{latitudine} \end{cases}$$

Quando il numero di Rossby è molto grande possono essere trascurati gli effetti della rotazione terrestre sul moto dei fluidi (atmosfera o mari).

- **Numero di Strouhal**

$$\text{Sr} = \frac{fD}{v} \quad \begin{cases} f & \text{frequenza di formazione dei vortici} \\ D & \text{diametro del corpo solido} \\ v & \text{velocità relativa del fluido} \end{cases}$$

Parametro importante nello studio dei fenomeni oscillatori che accompagnano il moto di un corpo in un fluido. Nell'intervallo $200 \lesssim \text{Re} \lesssim 200000$ si ha $\text{Sr} \approx 0.2$.

• **Numero di Weber**

$$\text{We} = \frac{\rho u_0^2 L}{\sigma} \quad \left\{ \begin{array}{ll} L & \text{scala lineare} \\ u_0 & \text{velocità caratteristica} \\ \sigma & \text{tensione superficiale} \end{array} \right.$$

Indica l'importanza relativa tra le forze inerziali e la tensione superficiale.

Indice analitico

A

analisi dimensionale 17, 124
angolo di stallo 143

B

Blasius 126
bronzine 100, 109

C

celle di Taylor 103
cilindri ruotanti 100
cilindro (flusso attraverso un $-$) .. 115
circolazione 84, 87
Coanda H.M. 154
Coefficiente della forza 24
coefficiente di forma 149
Coefficiente di portanza 24
coefficiente di pressione ... 24, 80, 82
coefficiente di resistenza 24, 113,
117, 144, 149
compressibilità 27, 58
conservazione
 dell'energia..... 29, 167
 della massa.... 29, 35, 75, 152, 158
 del momento.....158
creeping motion (v. moto di
 scorrimento)
criterio di Rayleigh 103

D

derivata convettiva 48
diedro 72
dipolo 81
dipolo (v.doppietto)
disco ruotante 105
doppietto 76
drag (v. resistenza)

E

effetto Coanda 154
Ekman 132
entalpia 160
equazione
 dell'energia..... 39, 159
 del momento 37, 167
 del trasporto di Rankine 32
 di Bernoulli..... 41, 80, 123
 di continuità..... 46, 52, 62, 64,
 69, 73, 94, 105, 120,
 123, 134, 162, 167
 di Eulero 123
 di Laplace 69, 72, 175
 di Newton 29
 di Rankine.....47
 di stato 52
equazioni
 di Cauchy-Riemann 69
 di Eulero..... 56, 94, 121, 126
 di Navier-Stokes..... 49,
 56, 91, 94, 103,
 105, 111, 116, 119,
 121, 123, 134, 171
fattore di attrito 96
fluidi newtoniani 2, 6, 13, 54
fluido ideale 3, 88
fluido irrotazionale 81, 87
fluido viscoso 5
flusso
 attraverso un cilindro 146
 bidimensionale..... 95
 di Couette..... 96, 103
 di massa 36
 di momento.....48
 di Poiseuille..... 17, 98, 99
 di Stokes 112
 irrotazionale 65, 69, 122, 139
 laminare 91
 potenziale.....67

stazionario 18
 supersonico 164
 turbolento 91, 131
 unidirezionale 40
 uniforme 66, 79
 formula
 di Oseen 117
 di Poiseuille 99
 di Strouhal 148
 forza di una sorgente (o pozzo) 74
 forza di un dipolo 77
 forza inerziale 24
 forza viscosa 25
 forze di Coriolis 25, 120, 133
 forze di superficie 2
 forze di taglio 2
 free-line vortex (v. vortice libero)
 funzione armonica 69
 funzione di corrente ... 62, 66, 71, 72,
 78, 128, 137

G

gas ideale 18
 geostrofico (v. moto –)
 gruppi adimensionali 24, 177

H

Hook (v. Legge di –)

K

Kármán vortex street 146

L

Laval (v. ugello di –)
 Legge di Hook 2
 legge di Newton 37, 53
 legge di Stokes 113
 lift (v. portanza)
 linee di corrente 63, 75, 77, 112,
 139, 150
 linee di flusso (v. linee di corrente)
 lubrificazione 100, 107

M

modulo di shear 2

moti stazionari 94
 moti unidirezionali 94
 moto di scorrimento 56, 111, 112
 moto geostrofico 118

N

Newton (v. formula di –)
 no-slip condition (v. scorrimento
 nullo)
 numero di

 di Archimede 177
 di Biot 177
 di capillarità 177
 di Cauchy 177
 di cavitazione 177
 di Ekman 25, 120, 132, 178
 di Eulero 178
 di Froude 25, 178
 di Grashof 178
 di Knudsen 179
 di Laplace 179
 di Mach 27, 59, 164, 179
 di Nusselt 179
 di Péclet 179
 di Prandtl 179
 di Rayleigh 180
 di Reynolds 21,
 25, 55, 56, 117, 121,
 129, 144, 148, 180
 di Richardson 180
 di Rossby 25, 120, 132, 180
 di Strouhal 148, 180
 di Weber 181
 oli lubrificanti 107
 onda d'urto 167
 Oseen (v. formula di –)

P

paradosso di d'Alambert 57, 81
 Poiseuille (v. flusso di –)
 portanza 24, 86, 87
 portata 64, 108
 portata di massa 35
 portata di volume 31, 95
 potenziale di velocità 64, 74, 83
 pozzo 73

Prandtl 121
 pressione 4
 pressione di gauge 80
 profilo alare 87, 143, 149
 profilo di Blasius 129
 proprietà estensiva 32
 proprietà intensiva 32
 puleggie 109
 punto di stagnazione .. 65, 70, 72, 79,
 140

R

Rankine (vedi equazione del trasporto)
 rapporti adimensionali (v. gruppi –)
 regione di stagnazione 161, 164
 regione geostrofica 133
 relazione di Newton 25
 resistenza 24, 80, 86, 116, 148
 Reynolds 107
 ristagno (v. punto di stagnazione)

S

scia 58, 121, 122, 147, 150
 scorrimento nullo 53, 116, 122
 separazione dello strato limite .. 140,
 143, 144
 shear 2
 similarità dinamica 17, 20
 sorgente 73
 spirale di Ekman 135
 stallo 143
 strato limite ... 57, 58, 121, 123, 139,
 146
 strato limite di Blasius 126, 174
 strato limite di Ekman 132

strato limite turbolento 131, 149
 Strouhal 148
 superficie di controllo 30, 151
 superficie libera 96

T

tensione superficiale 14
 tensore degli sforzi 10, 50, 173
 tensore viscoso 13, 173
 teorema di Bernoulli .. 41, 82, 87, 90,
 152
 teorema di Kutta–Zhukovskii 88
 teorema di Stokes 84
 turbolenza 25

U

ugello di Laval 162

V

velocità del suono 26, 158
 viscosimetro 5
 viscosità 5, 50, 53, 88, 110, 113,
 121, 124
 viscosità assoluta 5
 viscosità dinamica 8
 visuale Euleriana 34
 visuale Lagrangiana 34
 volume di controllo 30
 vortex street 147
 vortice libero 83
 vortici 146
 vorticità .. 67, 81, 83, 88, 90, 122, 146

W

wake (v. scia)

