

A.A. 2005-06

Appunti del corso di
FISICA per Scienze Biologiche

M.Taiuti
M.T.Tuccio

Versione 3.4

INDICE

Le Grandezze Fisiche	4
Le Forze e le Tre Leggi della Dinamica	7
Il Moto.....	14
Il Lavoro e la Conservazione dell'Energia.....	21
I Sistemi di Punti	28
Gli Urti	30
Cenni di Statica ed Equilibrio di un Corpo Rigido	33
La Statica dei Fluidi	35
La Dinamica dei Fluidi Ideali	41
La Dinamica dei Fluidi Reali.....	45
Il Moto dei Corpi nei Fluidi Reali	51
I Fenomeni di Superficie dei Liquidi.....	54
L'Elettrostatica.....	63
La Capacità Elettrica	72
La Corrente Elettrica	76
Il Magnetismo	82
L'Induzione Magnetica	87
Le Onde Elettromagnetiche e la Luce.....	90
La Riflessione e la Rifrazione	92
Gli Specchi	94
Il Diottro Sferico.....	98
La Lente Sottile.....	99
Strumenti Ottici: l'Occhio Umano.....	104
Strumenti Ottici: la Lente d'Ingrandimento.....	106
Strumenti Ottici: il Microscopio.....	107
Il Potere Risolutivo di un Sistema Ottico.....	108

La Calorimetria.....	110
II Primo Principio della Termodinamica.....	116
II Gas Perfetto.....	118
Le Macchine Termiche.....	122
L'Entropia.....	126
II Secondo Principio della Termodinamica.....	127
II Calcolo della Variazione di Entropia.....	130
I Potenziali Termodinamici.....	134
Appendice I.....	139

Le Grandezze Fisiche

La descrizione quantitativa del mondo cui apparteniamo si basa sulla formulazione di espressioni matematiche (leggi fisiche) che legano tra loro le varie grandezze fisiche.

Grandezze fisiche scalari: molte grandezze fisiche di cui abbiamo già esperienza dalla vita quotidiana quali per esempio di lunghezza, area, volume, tempo, energia, pressione sono grandezze scalari, ovvero è necessario per definirle un solo numero e l'unità di misura appropriata.

Le grandezze fisiche scalari soddisfano alle seguenti proprietà:

- non è possibile sommare fra loro due diverse grandezze fisiche;
- la somma di due valori s_1 ed s_2 della stessa grandezza fisica ha come risultato un nuovo valore pari semplicemente ad $s_1 + s_2$;
- il prodotto del valore s di una grandezza fisica scalare per un numero adimensionale k ha come risultato un nuovo valore ks della stessa grandezza fisica;
- il prodotto di due grandezze fisiche scalari è una nuova grandezza fisica scalare.

Grandezze fisiche vettoriali: altre grandezze fisiche hanno invece bisogno di tre numeri oltre all'unità di misura appropriata per essere descritte. Esempio tipico è la velocità: se noi vogliamo descrivere il movimento di un'automobile dovremo non solo dire il valore della velocità letto sul tachimetro ma anche la direzione in cui sta viaggiando. Altri esempi sono l'accelerazione, la forza, la superficie, il campo elettrico.

Per descrivere una grandezza fisica vettoriale \vec{V} è necessario definire tre numeri che possono essere le tre componenti lungo gli assi \vec{x} , \vec{y} e \vec{z} con la stessa unità di misura oppure il modulo del vettore ed i due angoli q e f indicanti la direzione. Le tre componenti ed il modulo del vettore sono legate tra loro dalla relazione pitagorica $V^2 = V_x^2 + V_y^2 + V_z^2$. In due

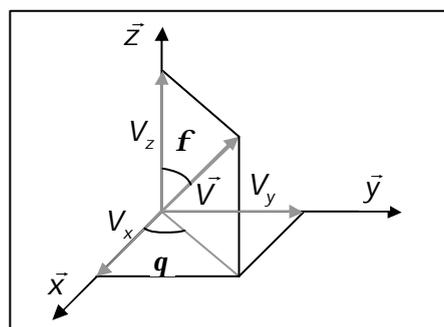


Fig. 1. Esempio di grandezza vettoriale.

dimensioni ($V_z = 0$) le relazioni si semplificano: $V^2 = V_x^2 + V_y^2$, $V_x = V \cos \mathbf{q}$ e $V_y = V \sin \mathbf{q}$. Una possibile notazione per rappresentare le tre componenti del vettore è la seguente: $\vec{V} = (V_x, V_y, V_z)$.

Le grandezze fisiche vettoriali soddisfano alle seguenti proprietà:

- non è possibile sommare fra loro due diverse grandezze fisiche;
- la somma di due valori \vec{V}_1 e \vec{V}_2 della stessa grandezza fisica ha come risultato un nuovo valore \vec{V} della grandezza vettoriale le cui componenti sono pari alla somma delle componenti dei due vettori di partenza, cioè $\vec{V} = (V_{1x} + V_{2x}, V_{1y} + V_{2y}, V_{1z} + V_{2z})$;
- il prodotto del valore \vec{V} di una grandezza fisica vettoriale per un numero adimensionale k ha come risultato un nuovo valore $k\vec{V}$ della stessa grandezza fisica le cui componenti sono pari alle componenti iniziali moltiplicate per k cioè $k\vec{V} = (kV_x, kV_y, kV_z)$, inoltre la direzione non cambia (\mathbf{q} e \mathbf{f} rimangono gli stessi) ed il modulo diventa kV ;
- il prodotto del valore \vec{V} di una grandezza fisica vettoriale per una grandezza scalare s ha come risultato una nuova grandezza vettoriale \vec{W} le cui componenti sono pari alle componenti iniziali moltiplicate per s cioè $\vec{W} = (sV_x, sV_y, sV_z)$, inoltre la direzione non cambia (\mathbf{q} e \mathbf{f} rimangono gli stessi) ed il modulo diventa sV ;
- il prodotto di due grandezze fisiche vettoriali \vec{V}_1 e \vec{V}_2 può essere a sua volta una grandezza vettoriale oppure scalare. Nel primo caso si parla di **prodotto vettoriale** $\vec{V}_1 \wedge \vec{V}_2$ il cui risultato è un vettore \vec{V}_3 perpendicolare ai primi due, il cui modulo vale $V_3 = V_1 V_2 \sin \mathbf{J}$ dove \mathbf{J} è l'angolo formato dai due vettori. Nel secondo caso si parla di **prodotto scalare** $\vec{V}_1 \cdot \vec{V}_2$ il cui risultato è una grandezza scalare s il cui valore è pari a $s = V_1 V_2 \cos \mathbf{J}$. Si noti che il valore del modulo assume il valore massimo nel prodotto vettoriale quando le direzioni dei due vettori formano tra loro un angolo di 90° ed è

nullo se sono allineati a 0° o 180° ; nel prodotto scalare, invece, il valore massimo si raggiunge quando i due vettori sono paralleli ed è nullo quando sono orientati a 90° .

Le Forze e le Tre Leggi della Dinamica

Il nostro mondo esiste come tale perchè ci sono le forze. La forma stessa dei corpi è determinata dalla presenza delle forze. Questa prima parte del corso è dedicata a studiare alcuni tipi di forze e come esse possano modificare il **movimento** di un corpo.

Secondo Principio della Dinamica: la legge fisica che mette in relazione le forze che agiscono su un corpo ed il movimento di quest'ultimo è la seguente:

$$\sum_i \vec{F}_i = M\vec{a}$$

l'accelerazione che il corpo subisce, è proporzionale alla somma vettoriale (risultante) di tutte le forze che agiscono sul corpo stesso.

Primo Principio della Dinamica: nel caso particolare in cui la risultante delle forze è zero il movimento del corpo non subisce alcuna variazione (accelerazione = $\vec{0}$). Più precisamente il corpo o sta fermo, oppure si muove di moto rettilineo uniforme.

Del Secondo Principio della Dinamica dobbiamo osservare le seguenti proprietà: a) le forze sono sommate vettorialmente e non si fa cenno alla loro natura; b) la costante di proporzionalità M è una proprietà intrinseca del corpo *soggetto* alle forze e prende il nome di massa.

Nel sistema di misura **SI** le unità di misura di forza, massa ed accelerazione sono rispettivamente il **Newton** (N), il **chilogrammo** (kg) ed il **metro su secondo al quadrato** (m/s^2), mentre nel sistema **cgs** sono il **dina**, il **grammo** (g) ed il **centimetro su secondo al quadrato** (cm/s^2). Più ovviamente i vari multipli e sottomultipli. E' possibile passare da un sistema di misura ad un altro applicando opportuni coefficienti moltiplicativi (vedi Appendice I).

Vediamo ora di descrivere le forze di cui facciamo esperienza quotidiana.

Forza peso \vec{P} : è l'effetto diretto della forza di attrazione che la Terra esercita sui corpi posti presso la superficie. E' rivolta sempre verso il basso (ovvero verso il centro della Terra) e, nel caso sia l'unica forza ad agire, induce su corpi liberi di cadere

un'accelerazione costante g pari, al livello del mare, a $g = 9.8\text{m/s}^2$. Quindi l'intensità della forza peso varia a seconda del valore della massa M del corpo e vale: $P = Mg$. Il valore di g si ricava dall'espressione della forza di gravità F_G (vedi dopo).

Reazione vincolare (o forza di contatto) \vec{N} : è presente ogni volta che un corpo solido V (per esempio un pavimento od una parete) si oppone al possibile movimento di un altro corpo C . La forza esercitata da V è sempre perpendicolare alla sua superficie, e l'intensità non è costante bensì varia secondo il valore delle altre forze applicate al corpo C .

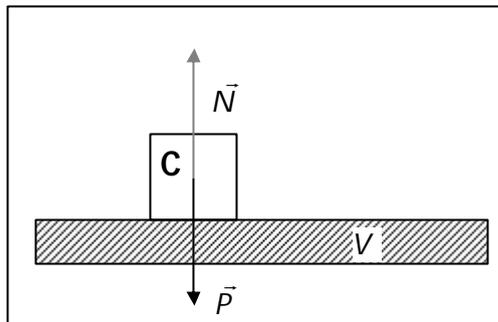


Fig. 2. Esempio di reazione vincolare.

Nell'esempio riportato in figura 2 deve valere $\vec{N} = -\vec{P}$ affinché il corpo stia fermo appoggiato sulla superficie. Vedremo successivamente altri esempi più complessi.

Tensione \vec{T} : è il tipo di forza che si applica utilizzando per esempio una fune. Altri esempi possono essere un braccio che sostiene una valigia (il braccio esercita la tensione, la valigia è il corpo su cui è applicata la forza), gli elastici di una fionda tesa (gli elastici esercitano la tensione mentre la pietra è il corpo su cui la forza è applicata) e così via. Nel caso della tensione, la forza è diretta lungo la direzione della "fune" orientata in modo da allontanarsi dal corpo su cui è applicata e l'intensità può variare secondo le situazioni.

Forza elastica \vec{F}_k : questa forza si manifesta ogni volta che si stira un corpo che tende poi a ritornare alla sua forma iniziale (per esempio un elastico oppure una molla). In questo caso la forza è proporzionale alla deformazione x del corpo rispetto alla sua forma a riposo ed è orientata in modo da riportare il corpo alla sua

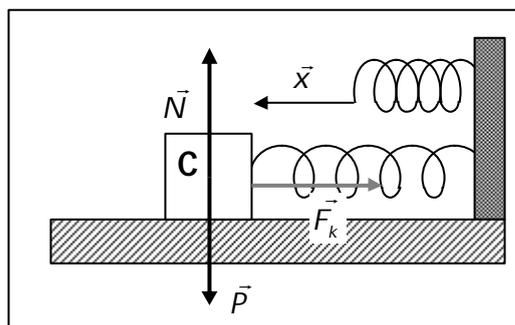
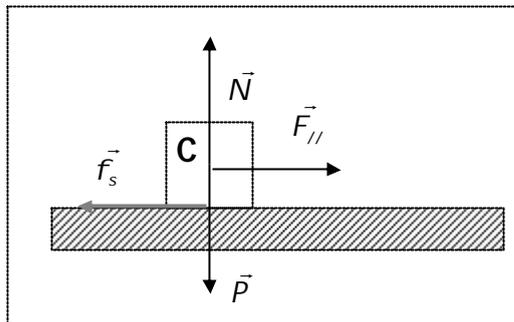


Fig. 3. Esempio di forza elastica.

forma originale secondo la legge di Hooke $\vec{F} = -k\vec{x}$. La costante k propria di ogni corpo è detta costante elastica e si misura in N/m.

Forza di attrito statico \vec{f}_s e dinamico \vec{f}_d :

questo tipo di forze si genera dal contatto fra due superfici ruvide quando una delle superfici è in movimento rispetto all'altra o quando si cerca di spostarne una. Il processo è mostrato in figura 4: non appena sul corpo C fermo viene



applicata una forza $\vec{F}_{//}$ parallela alle superfici di contatto, a causa della loro ruvidità, si instaura una forza \vec{f}_s , di verso opposto al tentativo del movimento, la cui intensità e direzione annulla la forza applicata $\vec{F}_{//}$.

Come risultato il corpo rimane fermo in quanto vale $\sum_i \vec{F}_i = 0$ ed in particolare $\vec{f}_s + \vec{F}_{//} = 0$. L'intensità della forza d'attrito statico non è costante ma, finché il corpo non inizia a muoversi, varia in funzione delle altre forze applicate al corpo; l'intensità e la direzione sono sempre tali da annullare la componente parallela alla superficie di contatto della risultante delle altre forze.

A causa della natura della forza d'attrito statico, l'intensità non può crescere indefinitamente, ma raggiungerà un valore massimo pari a $f_s = m_s N$. Raggiunto questo limite, l'attrito statico non è più in grado di contrastare l'azione delle altre forze ed il corpo inizierà a muoversi.

Con il corpo in movimento rimane una forza d'attrito residua, d'intensità inferiore ma costante. Tale forza prende il nome di attrito dinamico, è orientata come l'attrito statico ed ha una intensità pari a $f_d = m_d N$ con ovviamente $m_d < m_s$. Le due costanti

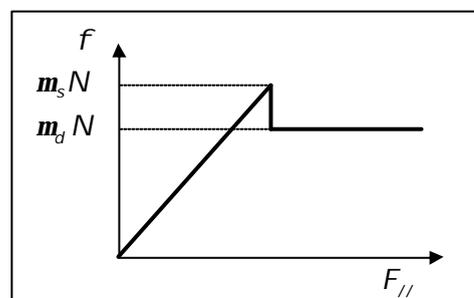


Fig. 5. Intensità della forza di attrito.

Con il corpo in movimento rimane una forza d'attrito residua, d'intensità inferiore ma costante. Tale forza prende il nome di attrito dinamico, è orientata come l'attrito statico ed ha una intensità pari a $f_d = m_d N$ con ovviamente $m_d < m_s$. Le due costanti

adimensionali m_s e m_d si chiamano rispettivamente coefficiente d'attrito statico e dinamico.

Altre forze d'attrito che saranno analizzate nella "Dinamica dei fluidi reali" sono:

Forza di attrito viscoso nello scorrimento di fluidi reali.

Forza di Stokes nel movimento di un corpo in un fluido reale.

Forza di gravità \vec{F}_G : questa forza viene esercitata da un corpo di massa M_1 su un secondo corpo di massa M_2 . La direzione della forza è lungo la linea immaginaria che unisce i due corpi ed è orientata in modo che i corpi si muovano l'uno verso l'altro.

L'intensità è invece data dall'espressione $F_G = G \frac{M_1 M_2}{R_{12}^2}$ dove R_{12} è la distanza tra i due corpi e G è la costante di gravitazione universale e vale $G = 6.67 \cdot 10^{-11} \text{ N} \cdot \text{m}^2/\text{kg}^2$.

Normalmente i corpi hanno una dimensione finita (non sono dei punti), pertanto bisogna essere più precisi nella formulazione dell'intensità della forza, specificando che la distanza R_{12} va calcolata fra i centri di massa dei due corpi (per corpi omogenei di forma sferica il centro di massa coincide con il centro della sfera). E' opportuno osservare che la forza peso $P = mg$ altri non è che la forza di attrazione che la Terra esercita sui corpi posti presso la superficie. Pertanto il valore di g può essere ricavato dall'espressione $F_G = P$ ponendo $M_1 = M_T$ (massa della Terra), $M_2 = m$ e $R_{12} = R_T$ (raggio della Terra) da cui si ricava $g = G \frac{M_T}{R_T^2} = 9.8 \text{ m/s}^2$.

Forza di Coulomb: questa forza viene esercitata tra due corpi dotati di carica elettrica e posti a distanza R_{12} . La direzione della forza è lungo la linea immaginaria che unisce i due corpi e può essere attrattiva o repulsiva a seconda del segno delle cariche elettriche. L'intensità è data dall'espressione $F = K \frac{Q_1 Q_2}{R_{12}^2}$ formalmente uguale alla forza di gravità F_G (vedi "Elettrostatica").

Forza di Lorentz: un corpo dotato di carica elettrica q , in movimento con velocità \vec{v} in un campo magnetico è soggetta ad una forza pari a $\vec{F} = q\vec{v} \wedge \vec{B}$ (vedi “Magnetismo”).

Terzo Principio della Dinamica: la forza di gravità (o la forza di Coulomb) ci permette adesso di introdurre il Principio noto anche come Principio di Azione e Reazione. Dall'espressione del modulo di \vec{F}_G si vede chiaramente che il corpo 2 esercita sul corpo 1 una forza di intensità pari a quella della forza che il corpo 1 esercita sul corpo 2! In realtà questo è vero per tutte le forze; come abbiamo visto nei casi precedenti, l'azione della forza richiede oltre al corpo su cui si applica, la presenza di un secondo corpo che la generi (la Terra per la forza peso, il pavimento per la reazione vincolare, la fune per la tensione e così via). Possiamo pertanto formulare il Terzo Principio della Dinamica o principio di azione e reazione dicendo che ogni volta che un corpo 1 esercita sul corpo 2 una forza di intensità F , il corpo 1 subisce dal corpo 2 una forza di pari intensità ed orientata nel verso opposto.

Esempi

1. Calcolare l'accelerazione generata dalla risultante delle forze nel sistema riportato in figura 6. \vec{T} rappresenta una forza parallela alla superficie del piano inclinato e potrebbe per esempio rappresentare la tensione esercitata da una fune o da una molla.

Soluzione: questo è un problema classico e riportiamo qui la procedura necessaria per impostarlo correttamente. Occorre anzitutto ruotare la figura in modo da portare il piano inclinato parallelo all'asse x . In questo modo è facile verificare che tutte le forze sono parallele ad uno degli assi, eccetto la forza peso che forma un angolo α (uguale all'inclinazione del piano inclinato) con l'asse y .

L'espressione $\sum_i \vec{F}_i = M\vec{a}$ può quindi essere scomposta nelle due componenti:

$$\begin{cases} x : \sum_i F_{ix} = Ma_x \\ y : \sum_i F_{iy} = Ma_y \end{cases}$$

che diventano, osservando che $a_y = 0$ (il corpo NON si stacca dal piano inclinato) e ricordando la definizione della forza di attrito dinamico $f_d = \mu_y N$:

$$\begin{cases} x : T + Mg \sin \alpha - f_d = Ma_x \\ y : N - Mg \cos \alpha = 0 \\ f_d = \mu_y N \end{cases} \quad \text{da cui} \quad \begin{cases} a_x = \frac{T + Mg(\sin \alpha - \mu_y \cos \alpha)}{M} \\ a_y = 0 \end{cases}$$

2. Un corpo di massa $M = 50\text{g}$ si trova su un piano inclinato con coefficiente di attrito dinamico $\mu_d = 0.2$. Calcolare la risultante delle forze e l'accelerazione con cui scende il corpo sapendo che l'angolo d'inclinazione del piano è $\alpha = 30^\circ$.

Soluzione: è sufficiente applicare le formule dell'esempio precedente osservando che $T = 0$:

$$\begin{cases} x : \sum_i F_{ix} = Mg \sin \alpha - f_d = Mg(\sin \alpha - \mu_y \cos \alpha) = \\ \quad = 50 \cdot 10^{-3} \text{kg} \times 9.8 \text{m/s}^2 \times (\sin 30^\circ - 0.2 \times \cos 30^\circ) = 0.16 \text{N} \\ y : \sum_i F_{iy} = 0 \end{cases}$$

l'accelerazione è diretta parallela al piano inclinato e vale:

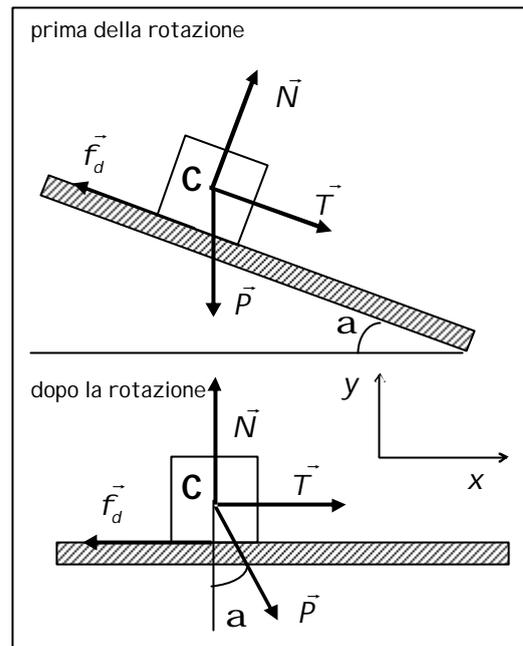


Fig. 6. Problema del piano inclinato

$$a = g(\sin\alpha - m_y \cos\alpha) = 9.8 \text{ m/s}^2 \times (\sin 30^\circ - 0.2 \times \cos 30^\circ) = 3.2 \text{ m/s}^2$$

3. Un pallina di massa $M = 30\text{g}$ è sospesa ad una molla di costante $k = 3\text{N/m}$. Calcolare l'allungamento della molla.

Soluzione: la pallina è soggetta alla forza peso diretta verso il basso ed alla forza di richiamo della molla diretta verso l'alto. Affinché rimanga ferma occorre che la risultante delle forze sia nulla. Pertanto $kx - Mg = 0$ da cui

$$x = \frac{Mg}{k} = \frac{30 \cdot 10^{-3} \text{ kg} \times 9.8 \text{ m/s}^2}{3 \text{ N/m}} = 9.8 \cdot 10^{-2} \text{ m}$$

4. Calcolare l'accelerazione di gravità g_h ad una altezza h di 100km. (Massa della Terra $M_T = 5.97 \cdot 10^{24} \text{ kg}$, raggio della Terra $R_T = 6.37 \cdot 10^3 \text{ km}$)

Soluzione: un corpo di massa m posto all'altezza h è soggetto alla forza di attrazione gravitazionale esercitata dalla Terra $F = G \frac{M_T m}{(R_T + h)^2}$.

Per il Secondo Principio della Dinamica vale relazione $G \frac{M_T m}{(R_T + h)^2} = mg_h$ da cui

$$g_h = G \frac{M_T}{(R_T + h)^2} = \frac{6.67 \cdot 10^{-11} \text{ N} \cdot \text{m}^2/\text{kg}^2 \times 5.97 \cdot 10^{24} \text{ kg}}{(6.37 \cdot 10^6 \text{ m} + 10^5 \text{ m})^2} = 9.51 \text{ m/s}^2.$$

5. Spiegare perché un corpo di massa M appoggiato su un piano è soggetto alla reazione vincolare.

Soluzione: il corpo esercita sul piano una forza verso il basso di intensità pari a Mg e per il Terzo Principio della Dinamica riceve dal piano l'azione di una forza uguale e contraria.

Il Moto

Moti rettilinei - Come abbiamo visto nel capitolo precedente, un corpo su cui sono applicate delle forze è soggetto ad un'accelerazione proporzionale all'intensità della risultante delle forze applicate. Vediamo ora alcuni casi semplici.

- La risultante delle forze è nulla: in questo caso come si è visto precedentemente il movimento del corpo non subisce nessuna variazione. Questa condizione può essere riassunta come segue: in assenza di forze esterne il corpo o rimane nel suo stato di quiete oppure continua a muoversi di **moto rettilineo uniforme** ovvero il *vettore velocità rimane costante nel tempo*. Per descrivere questo moto conviene scegliere un sistema di riferimento con l'asse x orientato nella stessa direzione del vettore velocità \vec{v}_0 . In queste condizioni è facile capire che il moto proseguirà lungo l'asse x e la posizione del corpo in ogni istante è descritta dall'equazione oraria: $x(t) = x_0 + v_0 t$

avendo chiamato con x_0 la posizione iniziale (all'istante $t = 0$) del corpo mentre v_0 è il modulo della velocità preceduto dal segno meno se il vettore \vec{v}_0 è orientato in direzione opposta all'asse x . È facile convincersi che in questo tipo di moto il corpo percorre in un certo intervallo di tempo Δt sempre la stessa distanza $\Delta x = v_0 \Delta t$ (spazi uguali in intervalli di tempo uguali).

- La risultante delle forze $\sum_i \vec{F}_i$ è costante nel tempo in modulo e direzione: per la seconda legge della dinamica anche *il vettore accelerazione è costante nel tempo*. In questo caso il moto del corpo è più complesso e per descriverlo dovremo procedere per gradi. Anzitutto immaginiamo che la velocità del corpo nell'istante in cui le forze iniziano ad essere applicate sia parallela alla risultante delle forze. Il moto che ne deriva è un **moto rettilineo uniformemente accelerato** ed anche in questo caso conviene scegliere un sistema di riferimento con l'asse x orientato nella stessa direzione dei vettori velocità \vec{v}_0 ed accelerazione \vec{a} . Per descrivere il moto è necessario adesso

dire come variano nel tempo lo spazio percorso e la velocità del corpo. Le equazioni

orarie diventano $x(t) = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2} a t^2$
 $v(t) = v_0 + a t$ dove il modulo a dell'accelerazione è prece-

duto dal segno meno se \vec{a} è orientato in direzione opposta all'asse x

E' facile convincersi che in questo tipo di moto la velocità del corpo varia in un certo intervallo di tempo Δt sempre della stessa quantità $\Delta v = a \Delta t$. Le due equazioni precedenti possono essere combinate in modo da eliminare la dipendenza esplicita dal

tempo: $a(x - x_0) = \frac{1}{2} v^2 - \frac{1}{2} v_0^2$ oppure $v^2 = v_0^2 + 2a(x - x_0)$

Queste equazioni hanno delle conseguenze che verranno discusse nel capitolo relativo all'energia. Per motivi di semplicità non analizzeremo altri tipi di moto unidimensionale.

Moti piani - E' sempre possibile scomporre il moto nelle sue componenti lungo le direzioni individuate dagli assi cartesiani, basta immaginare che il punto proietti un'ombra sull'asse x ed un'altra ombra sull'asse y : le due "ombre" si muoveranno di concerto con il corpo ed il loro moto potrà essere descritto usando uno dei due tipi descritti precedentemente. Inoltre la velocità è sempre tangente alla traiettoria.

Come esempio consideriamo il **moto di un proiettile**: dalla figura 7 si vede che in ogni punto del moto la velocità \vec{v} può essere scomposta nelle due componenti di modulo $v_x = v \cos J$ e $v_y = v \sin J$. Poiché la componente a_x dell'accelerazione è nulla il moto lungo x sarà rettilineo uniforme, mentre lungo y , dove la componente $a_y = g$ è costante e ri-

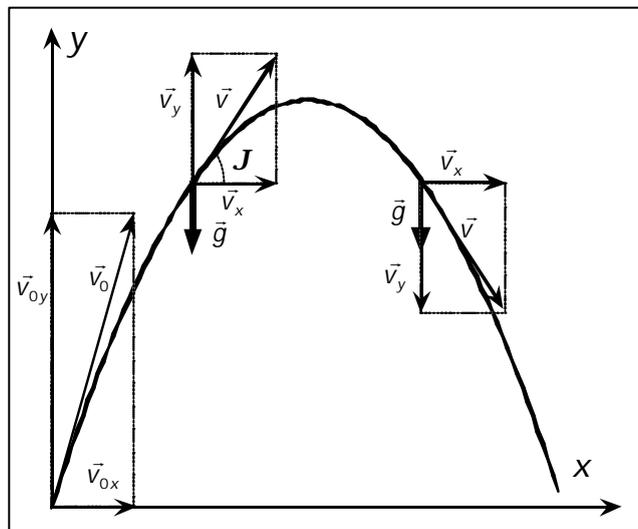


Fig. 7. Moto di un proiettile in due dimensioni.

volta verso il basso, il moto sarà rettilineo uniformemente accelerato ed è possibile dimostrare, eliminando il tempo dalle due equazioni orarie, che la traiettoria che percorre il proiettile è una parabola:

$$\begin{cases} x(t) = x_0 + v_{0x}t \\ y(t) = y_0 + v_{0y}t - \frac{1}{2}gt^2 \end{cases} \Rightarrow y = y_0 + (x - x_0) \operatorname{tg} J_0 - \frac{g}{2v_0^2 \cos^2 J_0} (x - x_0)^2$$

Moto circolare uniforme; è generato da una qualunque forza \vec{F} orientata verso un punto fisso O e d'intensità costante (**forza centripeta**). Esempi possono essere la forza di gravità esercitata dal Sole sulla Terra, la normale alle pareti del cestello della lavatrice, la tensione dello spago che tende la fionda. Per il Secondo Principio della Dinamica anche l'accelerazione, come la forza, sarà orientata verso il punto O ed ha intensità costante pari a $a_c = F/M$.

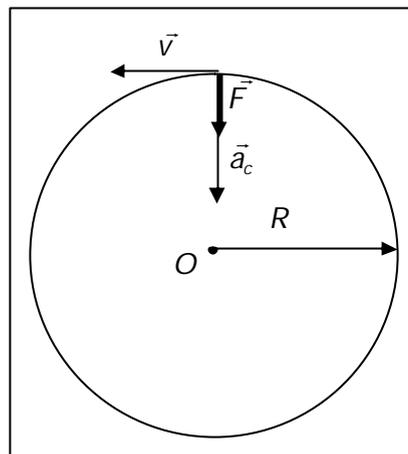


Fig. 8. Moto circolare uniforme.

L'accelerazione a_c prende il nome di *accelerazione centripeta*. In questo moto la velocità è in ogni punto tangente alla circonferenza. I moduli della velocità v e di a_c sono costanti nel tempo, sono inoltre legati tra loro ed al raggio R dall'espressione

$a_c = \frac{v^2}{R}$. Si noti che il moto può avvenire se e solo se il corpo è soggetto alla forza centripeta \vec{F} e possiede una velocità v che soddisfa alla relazione precedente: $a_c = v^2/R$.

Nel moto circolare uniforme il corpo si muove lungo la circonferenza percorrendo in un tempo t un arco di lunghezza $s(t) = vt$. È possibile ancora introdurre il periodo di rotazione T_0 , la frequenza f di rotazione e la velocità angolare ω . Il periodo è definito come il tempo necessario per compiere una rivoluzione completa, quindi

$T_0 = \frac{2\pi R}{v}$; la frequenza è semplicemente l'inverso del periodo $\left(f = \frac{1}{T_0}\right)$ e viene

misurata in **Hertz** (Hz) dove $1\text{Hz} = 1\text{s}^{-1}$, la velocità angolare è $\omega = \frac{2\pi}{T_0} = 2\pi f$.

La velocità e l'accelerazione centripeta sono legate alla velocità angolare mediante le relazioni $v = \omega R$ e $a_c = \omega^2 R$.

Esempi

1. Un'automobile percorre un tratto rettilineo alla velocità costante $v_0 = 60\text{km/h}$. Calcolare quanti minuti impiega a percorrere uno spazio di 15km.

Soluzione: il moto è rettilineo uniforme, quindi: $t = \frac{s}{v} = \frac{15 \cdot 10^3\text{m}}{60/3.6\text{m/s}} = 15\text{min}$.

2. Un proiettile si muove verticalmente verso l'alto con velocità iniziale $v_0 = 100\text{m/s}$. Calcolare l'altezza h raggiunta dopo un tempo $t = 10\text{s}$.

Soluzione: il moto è rettilineo uniformemente accelerato, quindi:

$$h = v_0 t + \frac{1}{2} a t^2 = 100\text{m/s} \times 10\text{s} - 0.5 \times 9.8\text{m/s}^2 \times (10\text{s})^2 = 510\text{m}.$$

3. Calcolare la distanza dalla Terra a cui si trova un satellite geo-stazionario (comple un'orbita in 24 ore). (Massa della Terra $M_T = 5.97 \cdot 10^{24}\text{kg}$)

Soluzione: il satellite è soggetto alla forza di attrazione gravitazionale esercitata dalla Terra $F = G \frac{M_T M_S}{R^2}$, pertanto per muoversi di moto circolare uniforme lungo un'orbita circolare di raggio R (rispetto al centro della Terra) deve possedere una velocità radiale non nulla. Per il Secondo Principio della Dinamica vale relazione $G \frac{M_T M_S}{R^2} = M_S a_c$. Il satellite possiede quindi un'accelerazione centripeta pari a $a_c = G \frac{M_T}{R^2}$ (non dipende dalla massa del satellite). Ricordando infine che il periodo di rotazione è definito come $T_0 = \frac{2\pi R}{v}$ e che la velocità del satellite è legata all'accelerazione centripeta dalla relazione $a_c = \frac{v^2}{R}$ ovvero $v = \sqrt{a_c R}$, avremo che $T_0 = \frac{2\pi R^{3/2}}{\sqrt{GM_T}}$. Da questa espressione possiamo ricavare:

$$R = \left(\frac{T_0 \sqrt{GM_T}}{2\pi} \right)^{2/3} = \left(\frac{24 \times 3600\text{s} \times \sqrt{6.67 \cdot 10^{-11}\text{N} \cdot \text{m}^2/\text{kg}^2 \times 5.97 \cdot 10^{24}\text{kg}}}{2\pi} \right)^{2/3} = 4.22 \cdot 10^7\text{m}$$

4. Un satellite si trova in orbita ad una quota $h = 340\text{km}$ sopra la superficie terrestre. Determinare l'accelerazione centripeta che possiede il satellite, la sua velocità e il periodo di rotazione.

Soluzione: il satellite è soggetto alla forza di attrazione gravitazionale esercitata dalla Terra $F = G \frac{M_T M_S}{R^2}$, pertanto si muove di moto circolare uniforme lungo un'orbita circolare di raggio $R = R_T + h$ (R è il raggio rispetto al centro della Terra e $R_T = 6.37 \cdot 10^3\text{km}$ il raggio della Terra). Per il Secondo Principio della Dinamica vale relazione $G \frac{M_T M_S}{R^2} = M_S a_c$ tra la forza di attrazione gravitazionale e l'accelerazione centripeta. Il satellite possiede quindi

un'accelerazione centripeta pari a $a_c = G \frac{M_r}{R^2}$ (non dipende dalla massa del satellite). Ricordando infine che la velocità del satellite è legata all'accelerazione centripeta dalla relazione $a_c = v^2/R$ possiamo ricavare $v = \sqrt{a_c R}$ e quindi il periodo di rotazione definito come $T_0 = 2\pi R/v$. Si verifichi che $a_c = 8.8 \text{ m/s}^2$, $v = 7.7 \text{ km/s}$ e $T_0 = 1 \text{ h } 32 \text{ min}$.

5. Un corpo di massa $m = 200 \text{ g}$, attaccato a una molla di costante elastica $k = 10 \text{ N/m}$ e lunghezza a riposo $x_0 = 1 \text{ m}$, viene messo in rotazione sul piano orizzontale con una velocità angolare $\omega = 3 \text{ rad/s}$. Determinare il raggio della circonferenza percorsa dall'oggetto attaccato alla molla.

Soluzione: il corpo attaccato alla molla, quando è posto in rotazione è soggetto alla forza di richiamo della molla diretta verso il centro e pertanto si muove di moto circolare uniforme lungo un'orbita circolare di raggio $R = x_0 + x$ (dove x_0 è la lunghezza a riposo della molla e x il suo allungamento). Per il Secondo Principio della Dinamica possiamo collegare la forza di richiamo della molla all'accelerazione centripeta mediante la relazione $kx = ma_c$ e ricordando che la velocità angolare è legata ad a_c dalla relazione $a_c = \omega^2 R$ otteniamo

$$k(R - x_0) = m\omega^2 R, \text{ da cui } R = 1.22 \text{ m}$$

6. Un'auto percorre a velocità costante $v_0 = 60 \text{ km/h}$ una curva di raggio $R = 60 \text{ m}$. Calcolare il coefficiente di attrito statico fra le ruote e l'asfalto.

Soluzione: l'attrito statico è la forza centripeta che genera il moto circolare uniforme. Quindi deve valere $f_s = Ma_c$. Ricordando le definizioni di forza di attrito statico e di accelerazione centripeta l'equazione precedente diventa

$$m_s Mg = M \frac{v^2}{R} \text{ da cui:}$$

$$m_s = \frac{v^2}{Rg} = \frac{((60/3.6) \text{ m/s})^2}{60 \text{ m} \times 9.8 \text{ m/s}^2} = 0.472$$

7. Un'auto percorre a velocità costante $v_0 = 60 \text{ km/h}$ una curva parabolica di raggio $R = 60 \text{ m}$ ed inclinata di $\alpha = 10^\circ$ verso l'interno. Calcolare il coefficiente d'attrito statico fra le ruote e l'asfalto.

Soluzione: in questo caso è la risultante di tutte le forze applicate $\vec{F} = \vec{N} + \vec{P} + \vec{f}_s$ la forza centripeta che genera il moto circolare uniforme. Occorre quindi risolvere il sistema

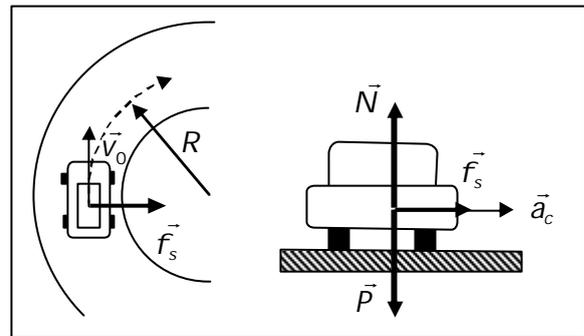


Fig. 9. Problema 6: vista superiore e vista frontale

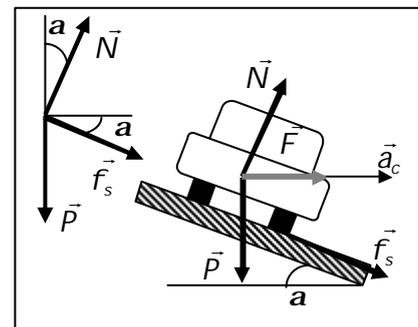


Fig. 10. Problema 7.

$$\begin{cases} x : \sum F_{ix} = Ma_c \\ y : \sum F_{iy} = 0 \end{cases} \quad \text{cioè} \quad \begin{cases} N \sin \alpha + f_s \cos \alpha = Ma_c \\ N \cos \alpha - f_s \sin \alpha - Mg = 0 \end{cases}$$

Ricordando che vale la relazione $f_s = m_s N$, il sistema di equazioni diventa

$$\begin{cases} N \sin \alpha + m_s N \cos \alpha = Ma_c \\ N \cos \alpha - m_s N \sin \alpha = Mg \end{cases}$$

dal cui rapporto si ricava la relazione $\frac{\tan \alpha + m_s}{1 - m_s \tan \alpha} = \frac{a_c}{g}$.

Ricordando la definizione di accelerazione centripeta l'equazione precedente diventa

$$m_s = \frac{v^2 - Rg \tan \alpha}{Rg + v^2 \tan \alpha} = \frac{((60/3.6)\text{m/s})^2 - 60\text{m} \times 9.8\text{m/s}^2 \times \tan 10^\circ}{60\text{m} \times 9.8\text{m/s}^2 + ((60/3.6)\text{m/s})^2 \times \tan 10^\circ} = 0.273$$

Si osservi che questo problema comprende il precedente nell'ipotesi $\alpha = 0^\circ$.

Si osservi inoltre che in certe condizioni cinematiche la soluzione potrebbe assumere valori negativi. Questo significa che la forza d'attrito è orientata nella direzione opposta a quella rappresentata in figura 10.

Questa osservazione ci permette di comprendere la soluzione dell'altro caso particolare in cui $\alpha = 90^\circ$ (basti pensare agli acrobati che percorrono in moto le pareti circolari di un cilindro verticale). In questo caso, poiché $\tan 90^\circ \rightarrow \infty$ la soluzione diventa:

$$m_s = -\frac{g}{a_c} = -\frac{Rg}{v^2}.$$

Più precisamente $m_s = \frac{Rg}{v^2}$ con la forza d'attrito orientata verso l'alto.

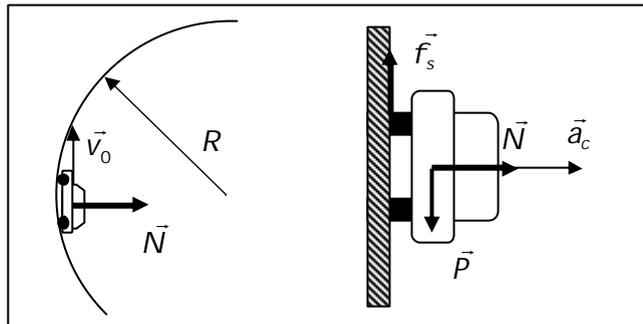


Fig. 11. Problema del moto lungo le pareti circolari di un cilindro.

Il Lavoro e la Conservazione dell'Energia

Lavoro di una forza costante: nell'esempio riportato in figura 12 la risultante delle forze è non nulla ed il corpo si muove verso destra. Immaginiamo che le forze applicate rimangano costanti per un intervallo di tempo Δt durante il quale il corpo si sposta di una quantità \vec{s} . Il moto sarà uniformemente accelerato con

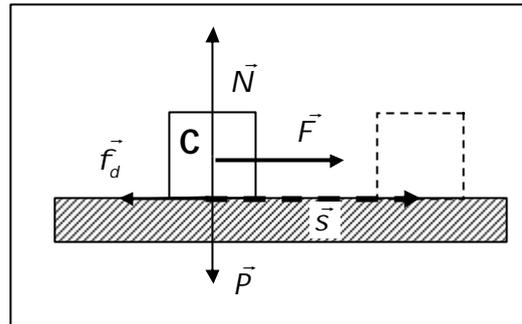


Fig. 12. Definizione di lavoro di una forza.

l'accelerazione orientata nella stessa direzione della risultante delle forze.

Possiamo definire il lavoro fatto da una forza \vec{F}_i durante lo spostamento \vec{s} come la seguente quantità scalare $L_i = \vec{F}_i \cdot \vec{s} = F_i s \cos J$, dove J è l'angolo formato dai vettori \vec{F}_i ed \vec{s} . Nell'esempio precedente la forza \vec{F} essendo orientata nella stessa direzione di \vec{s} farà un lavoro positivo pari a $L_F = Fs \cos 0^\circ = Fs$, la forza di attrito statico farà invece un lavoro negativo pari a $L_{f_s} = f_s s \cos 180^\circ = -f_s s$ mentre il lavoro delle due forze perpendicolari allo spostamento sarà nullo: $L_N = Ns \cos 90^\circ = 0$ e $L_p = Ps \cos 270^\circ = 0$. Il lavoro totale è la somma dei lavori delle singole forze $L = \sum_i L_i$.

Lavoro di una forza non costante: se la forza non si mantiene costante in modulo e direzione per tutta la durata dello spostamento è necessario dividere il moto in tanti piccoli spostamenti $\Delta\vec{s}_i$ in modo tale che per ciascuno di essi la forza applicata sia costante. Il lavoro totale L si otterrà quindi come la somma dei lavori calcolati sui singoli spostamenti $\Delta\vec{s}_i$: $L = \sum_i L_i = \sum_i \vec{F} \cdot \Delta\vec{s}_i$.

La **potenza** $P = \frac{L}{\Delta t}$ rappresenta il lavoro fatto nell'unità di tempo. Si misura in **Watt** (W) nel sistema **SI** ed in **erg/s** nel sistema **CGS**.

Teorema lavoro-energia cinetica (o teorema delle forze vive): nell'esempio precedente, sfruttiamo l'equazione oraria del moto uniformemente accelerato. Poiché vale la relazione cinematica $a(x_f - x_i) = \frac{1}{2}v_f^2 - \frac{1}{2}v_i^2$, moltiplicando per la massa M i due membri dell'uguaglianza ed usando il Secondo Principio della Dinamica otteniamo:

$$Ma(x_f - x_i) = \sum_i \vec{F}_i \cdot \vec{s} \equiv L = \frac{1}{2}Mv_f^2 - \frac{1}{2}Mv_i^2 \Rightarrow L = K_f - K_i$$

dove abbiamo definito l'**energia cinetica** K come $K = \frac{1}{2}Mv^2$.

Il lavoro L delle forze che agiscono sul corpo durante lo spostamento \vec{s} , è pari alla differenza di valori che l'energia cinetica assume alla fine ed all'inizio dello spostamento. Possiamo quindi affermare che l'effetto (lavoro) dell'azione di forze applicate ad un corpo che compie uno spostamento, si manifesta nella variazione dell'energia cinetica del corpo.

Proprietà (vedi figura 13): a) per una qualunque traiettoria, il lavoro fatto dalla forza durante uno spostamento da un punto A ad un punto B lungo una traiettoria è uguale ma di segno opposto al lavoro fatto durante lo spostamento inverso da B ad A lungo la stessa traiettoria: $L_{A \rightarrow B}^{(a)} = -L_{B \rightarrow A}^{(a)}$; b) il lavoro è additivo: $L_{A \rightarrow B}^{(a)} = L_{A \rightarrow C}^{(a)} + L_{C \rightarrow B}^{(a)}$.

Forze conservative: consideriamo lo spostamento raffigurato in figura 13 dal punto A fino al punto B lungo l'itinerario a e ritorno ad A lungo l'itinerario b in presenza di una forza \vec{F} . Se il lavoro della forza calcolato lungo tutto l'itinerario è nullo $L_{A \rightarrow B}^{(a)} + L_{B \rightarrow A}^{(b)} = 0$, e tale rimane anche cambiando uno dei due itinerari o la posizione del punto B allora \vec{F} è conservativa.

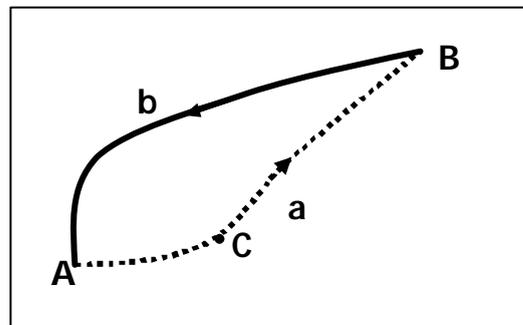


Fig. 13. Traiettorie e lavoro di una forza.

Energia potenziale: si può dimostrare che per una forza conservativa valgono le seguenti proprietà:

- il lavoro NON dipende dall'itinerario che collega A a B , cioè $L_{A \rightarrow B}^{(a)} = L_{A \rightarrow B}^{(b)}$;
- si può definire l'energia potenziale in un qualunque punto dello spazio come una funzione delle coordinate del punto $U(x, y, z)$;
- l'espressione dell'energia potenziale dipende dalla forza;
- se sono presenti più forze conservative, l'energia potenziale in un punto è la somma delle energie potenziali di ogni singola forza;
- dati i tre punti A , B e C dell'esempio precedente vale la seguente relazione:

$$\Delta U_{AB} = \Delta U_{AC} + \Delta U_{CB}.$$

- il lavoro dipende solo dalla differenza dei valori dell'energia potenziale calcolata nei punti A e B : $L_{A \rightarrow B}^{(a)} = U(A) - U(B) \equiv -\Delta U_{BA}$
- si può dimostrare il **teorema della conservazione dell'energia meccanica**

infatti $L_{A \rightarrow B}^{(a)} = U(A) - U(B) \equiv -\Delta U_{BA}$ ma dal teorema lavoro energia cinetica

$$L_{A \rightarrow B}^{(a)} = K_B - K_A \equiv \Delta K_{AB} \text{ pertanto } \boxed{K_A + U(A) = K_B + U(B)}$$

In tabella sono riportati alcuni esempi di forze conservative. Si osservi che per la forza peso, per calcolare h è necessario utilizzare un sistema di riferimento orientato verso l'alto, mentre per la forza gravitazionale e per la forza di Coulomb r rappresenta il modulo della distanza.

Forza peso	$U(h) = Mgh$
Forza gravitazionale	$U(r) = -G \frac{M_1 M_2}{r}$
Forza elastica	$U(x) = \frac{1}{2} k x^2$
Forza di Coulomb	$U(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{r}$

E' opportuno osservare che, in funzione delle condizioni del sistema studiato, l'energia potenziale potrebbe variare in un intervallo limitato di valori. Alcuni esempi:

- per un corpo di massa m appoggiato su un tavolo di altezza h_f ed in grado di muoversi solo lungo la direzione verticale, l'energia potenziale della forza peso non potrà mai assumere un valore inferiore a $U_{\min} = mgh_f$ (energia potenziale minima);

- per una molla l'energia potenziale potrà variare fra il valore minimo $U_{\min} = 0$ corrispondente alla posizione di riposo ed il valore massimo $U_{\max} = \frac{1}{2}kx_M^2$ corrispondente al massimo allungamento possibile x_M .

In presenza anche di forze non conservative il teorema della conservazione dell'energia può essere riscritto considerando che per il teorema lavoro-energia cinetica il lavoro fatto da tutte le forze presenti è uguale alla variazione di energia cinetica e sostituendo, per tutte le forze conservative, l'espressione del lavoro con la differenza d'energia potenziale:

$$\Delta K = L_{\text{tot}} = L_c + L_{nc} = -\Delta U + L_{nc}$$

ovvero $\Delta K + \Delta U = L_{nc}$ che equivale a $L_{nc} = (K_f + U_f) - (K_i + U_i)$.

dove U rappresenta la somma delle energie potenziali di tutte le forze conservative presenti, mentre L_{nc} rappresenta il lavoro di tutte le forze non conservative. Se definiamo l'**energia meccanica** E come $E = K + U$ l'espressione precedente diventa:

$$E_f - E_i = L_{nc}$$

Conseguenza: in assenza di forze non conservative l'energia meccanica E si conserva, $E_f = E_i$.

Energia cinetica, energia potenziale e lavoro si misurano in **Joule** (J) nel sistema **SI** ed in **erg** nel sistema **CGS**. Vedremo nella parte dedicata alla termodinamica come l'energia trasformata in lavoro delle forze d'attrito non sia perduta, ma semplicemente trasformata in altra forma (Calore).

Esempi

1. Calcolare il lavoro della forza centripeta nel moto circolare uniforme.

Soluzione: bisogna spezzare il moto in modo che, per ogni singola parte, il movimento lungo l'arco di circonferenza possa essere approssimato con il segmento tangente di pari lunghezza e la forza sia costante in direzione oltre che in modulo. In questo modo si vede subito che, poiché $\mathbf{J} = 90^\circ$, il lavoro $\Delta L = \vec{F}_c \cdot \Delta \vec{s} = F_c \Delta s \cos \mathbf{J}$ è nullo.

2. Una molla di costante $k = 3\text{N/m}$ è posta in verticale ed al suo estremo è sospesa una massa $M = 30\text{g}$. La molla è inizialmente a riposo ($x_i = 0$) e la massa viene lasciata libera di cadere con velocità iniziale $v_i = 0$. Calcolare il massimo allungamento della molla.

Soluzione: poiché siamo in presenza di forze conservative (forza peso e forza elastica della molla) è sufficiente calcolare l'energia del sistema E pari alla somma dell'energia cinetica e delle energie potenziali $E = \frac{1}{2}Mv^2 + Mgh + \frac{1}{2}kx^2$, imporre che E rimanga costante $E_f = E_i$ ed osservare che nella posizione finale il massimo allungamento della molla $x_f = h_i - h_f$ corrisponderà a $v_f = 0$.

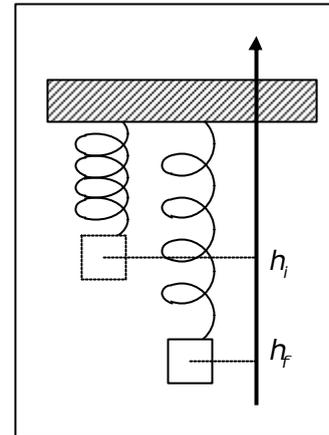


Fig. 14. Problema 2.

	U_{molla}	U_{peso}	K
istante iniziale	$\frac{1}{2}kx_i^2$	Mgh_i	$\frac{1}{2}Mv_i^2$
istante finale	$\frac{1}{2}kx_f^2$	Mgh_f	$\frac{1}{2}Mv_f^2$

Avremo quindi $\frac{1}{2}Mv_f^2 + Mgh_f + \frac{1}{2}kx_f^2 = \frac{1}{2}Mv_i^2 + Mgh_i + \frac{1}{2}kx_i^2$ da cui imponendo le condizioni $x_i = 0$, $v_i = 0$ e $v_f = 0$ si ricava $-Mg(h_i - h_f) + \frac{1}{2}kx_f^2 = 0$.

A questo punto è necessario osservare che la differenza di altezza del peso $h_i - h_f$ è pari al massimo allungamento della molla x_f e l'equazione avrà come soluzione non nulla:

$$x_f = \frac{2Mg}{k} = \frac{2 \times 30 \cdot 10^{-3} \text{kg} \times 9.8 \text{m/s}^2}{3 \text{N/m}} = 0.196 \text{m}.$$

3. Un corpo di massa $M = 1\text{kg}$ si muove lungo un piano orizzontale con velocità iniziale $v_0 = 100\text{cm/s}$. A causa dell'attrito dinamico il corpo percorre una distanza $s = 10\text{cm}$ prima di fermarsi. Calcolare il coefficiente di attrito dinamico m_d .

Soluzione: il corpo subisce una variazione d'energia cinetica e questa è pari al lavoro fatto dalle forze d'attrito. Quindi:

$$K_f - K_i = L_{\text{attrito}} \Rightarrow -\frac{1}{2}Mv_0^2 = -m_d Mgs \Rightarrow m_d = \frac{v^2}{2gs} = \frac{(100 \cdot 10^{-2} \text{m/s})^2}{2 \times 9.8 \text{m/s}^2 \times 10 \cdot 10^{-2} \text{m}} = 0.51$$

4. Un sasso di massa $M = 10\text{g}$ viene lanciato in verticale verso l'alto con una fionda. Sapendo che per far raggiungere l'altezza massima di $h_f = 3\text{m}$ la fionda deve essere allungata di $x_i = 10\text{cm}$, calcolare la costante elastica della fionda. (trattare la fionda come una molla).

Soluzione: poiché siamo in presenza di forze conservative (forza peso e forza elastica della fionda) è sufficiente calcolare l'energia del sistema E pari alla somma dell'energia cinetica e delle energie potenziali $E = \frac{1}{2}Mv^2 + Mgh + \frac{1}{2}kx^2$, imporre che E rimanga costante $E_f = E_i$ ed osservare che l'energia cinetica del sasso è nulla sia al momento iniziale che a quello finale e che la fionda non essendo più sollecitata dopo il lancio del sasso, rimane nella sua posizione di riposo.

	U_{molla}	U_{peso}	K
istante iniziale	$\frac{1}{2}kx_i^2$	Mgh_i	$\frac{1}{2}Mv_i^2$
istante finale	$\frac{1}{2}kx_f^2$	Mgh_f	$\frac{1}{2}Mv_f^2$

Avremo quindi $\frac{1}{2}Mv_f^2 + Mgh_f + \frac{1}{2}kx_f^2 = \frac{1}{2}Mv_i^2 + Mgh_i + \frac{1}{2}kx_i^2$ da cui imponendo le condizioni $h_i = 0$, $v_i = 0$, $x_f = 0$ e $v_f = 0$, si ricava $Mgh_f - \frac{1}{2}kx_i^2 = 0$ da cui:

$$k = \frac{2mgh_f}{x^2} = \frac{2 \times 10 \times 10^{-3} \text{kg} \times 9.8 \text{m/s}^2 \times 3 \text{m}}{(10 \times 10^{-2} \text{m})^2} \Rightarrow$$

$$k = 58.8 \text{N/m}$$

In figura 15 è graficato il valore di U_{molla} , U_{peso} e K . Si osservi che la somma delle tre energie si mantiene costante in tutti i punti del moto.

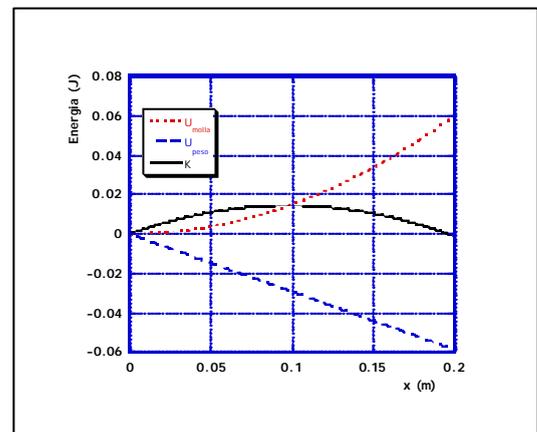


Fig. 15. Problema 4.

5. Un corpo di massa $M = 3\text{kg}$ viene lanciato su per un piano inclinato di un angolo $q = 20^\circ$ sull'orizzontale, con velocità iniziale $v_0 = 3.3\text{m/s}$. Se il coefficiente di attrito dinamico tra il corpo ed il piano è $m_d = 0.2$ determinare lo spazio percorso prima di fermarsi.

Soluzione: poiché non siamo in presenza di sole forze conservative è necessario calcolare la variazione dell'energia meccanica del sistema E pari alla somma dell'energia cinetica e delle energie potenziali $E = \frac{1}{2}Mv^2 + Mgh$, imporre che $\Delta E = E_f - E_i$ sia pari al lavoro fatto dalla forza di attrito dinamico $L_{\text{attrito}} = -m_d Mgs \cos q$.

	U_{peso}	K
istante iniziale	Mgh_i	$\frac{1}{2}Mv_i^2$
istante finale	Mgh_f	$\frac{1}{2}Mv_f^2$

Avremo quindi, osservando che la velocità finale è nulla e che $(h_f - h_i) = s \times \sin q$:

$$K_f - K_i = L_{\text{attrito}} \Rightarrow Mgh_f - Mgh_i - \frac{1}{2}Mv_i^2 = -m_d Mgs \cos q$$

$$(\sin q + m_d \cos q)gs = \frac{1}{2}v_i^2 \Rightarrow$$

$$s = \frac{v_i^2}{2(\sin q + m_d \cos q)g} = \frac{(3.3\text{m/s})^2}{2(\sin 20^\circ + 0.2 \times \cos 20^\circ) \times 9.8\text{m/s}^2} = 1.05\text{m}$$

I Sistemi di Punti

Finora abbiamo visto il comportamento di un singolo corpo in presenza di forze. Vediamo ora cosa succede quando consideriamo più corpi in movimento e soggetti a forze. Ovviamente vedremo il caso semplice del moto unidimensionale di due corpi puntiformi di massa M_1 e M_2 . Il moto di ogni singolo corpo è definito, come abbiamo già visto, non appena siano in grado di descrivere la posizione x , la velocità v e l'accelerazione a in ogni istante di tempo. E' opportuno a questo punto introdurre delle variabili che permettano di descrivere alcune proprietà comuni al moto dei due corpi. Iniziamo col definire la coordinata del **Centro di Massa** (CM) che si ottiene dalla media pesata delle coordinate dei singoli corpi:

$$x_{CM} = \frac{M_1}{M_1 + M_2} x_1 + \frac{M_2}{M_1 + M_2} x_2$$

x_{CM} è la coordinata di un punto che si trova sulla linea che congiunge i due corpi. La posizione è determinata dal valore delle due masse: il punto CM si troverà più vicino al corpo di massa maggiore e nel caso particolare in cui le due masse sono uguali si troverà esattamente a metà strada. Allo stesso modo potremo definire la velocità v_{CM} e l'accelerazione a_{CM} del centro di massa come:

$$v_{CM} = \frac{M_1}{M_1 + M_2} v_1 + \frac{M_2}{M_1 + M_2} v_2 \quad \text{e} \quad a_{CM} = \frac{M_1}{M_1 + M_2} a_1 + \frac{M_2}{M_1 + M_2} a_2$$

In particolare l'espressione dell'accelerazione è molto utile, perché adesso la possiamo mettere in relazione con le forze che agiscono sui due corpi sostituendo al prodotto $M_i a_i$ la risultante di tutte le forze agenti:

$$a_{CM} = \frac{\sum_i F_i^{(1)}}{M_1 + M_2} + \frac{\sum_j F_j^{(2)}}{M_1 + M_2}$$

L'espressione può ancora essere riscritta come $\sum_i F_i^{(1)} + \sum_j F_j^{(2)} = (M_1 + M_2) a_{CM}$ dove è possibile semplificare la somma delle forze agenti applicando il Terzo Principio della

Dinamica: se il corpo ① esercita una forza sul corpo ②, questi eserciterà sul corpo ① una forza uguale in intensità e direzione ma opposta in verso. Quindi al momento di effettuare la somma $\sum_i F_i^{(1)} + \sum_j F_j^{(2)}$ dovremo ricordarci che le forze esercitate tra i due corpi danno contributo totale uguale a zero e nelle due somme sopravvivranno solo le forze esercitate dall'esterno. Questo si traduce nella nuova scrittura:

$$\sum_i F_i^{(est)} = (M_1 + M_2)a_{CM}$$

L'espressione afferma che, indipendentemente dal moto individuale delle due masse, la coordinata del Centro di Massa si muove con un'accelerazione dovuta solo alle forze esterne al sistema. Se per esempio la risultante delle forze esterne lungo una direzione qualsiasi è nulla allora anche la componente di a_{CM} lungo quella direzione risulterà essere uguale a zero e di conseguenza la velocità del Centro di Massa v_{CM} lungo quella direzione sarà costante ed il moto del Centro di Massa lungo quella direzione sarà rettilineo uniforme.

Questa proprietà ha una conseguenza diretta sulla velocità dei corpi, infatti poiché vale la relazione $v_{CM} = \frac{M_1}{M_1 + M_2}v_1 + \frac{M_2}{M_1 + M_2}v_2$ si avrà che la somma $M_1v_1 + M_2v_2 = (M_1 + M_2)v_{CM}$ risulterà costante quando la risultante delle forze esterne è nulla. La quantità Mv è un vettore che ha la stessa direzione del vettore velocità e prende il nome di **Quantità di Moto**. In particolare se per un dato sistema la risultante delle forze esterne è nulla (sistema isolato) avremo $a_{CM} = 0$ e v_{CM} costante; pertanto indipendentemente dal moto individuale delle singole masse la somma $M_1v_1 + M_2v_2$ sarà costante (**conservazione della Quantità di Moto**).

Teorema dell'Impulso e della Quantità di Moto: in presenza di forze impulsive, che agiscono per un tempo Δt molto breve su un corpo di massa M , si definisce Impulso della Forza la quantità $\vec{I} = \vec{F}\Delta t$ dove \vec{F} è il valore medio della forza agente, e vale la seguente relazione $\vec{F}\Delta t = M(\vec{v}_f - \vec{v}_i)$.

Gli Urti

Caso particolare di interazione di durata molto breve tra due corpi in presenza di forze interne molto grandi per cui le forze esterne quali per esempio forza peso ed attrito possono essere trascurate e possiamo considerare $\sum \vec{F}_{est} = 0$. Per semplicità tratteremo il problema in una sola dimensione. In un urto possiamo individuare un "prima" quando i due corpi si muovono senza esercitarsi vicendevolmente nessuna forza, un "durante" quando i due corpi "interagiscono" tra di loro per la presenza di forze interne ed un "dopo" quando l'azione delle forze termina ed i due corpi tornano a muoversi indisturbati. Potremo inoltre avere un urto "elastico" quando l'energia cinetica del sistema si conserva, oppure un urto "completamente anelastico" quando i due corpi si muovono dopo l'urto con pari velocità nella stessa direzione.

Prima e dopo l'urto, per quanto abbiamo visto nel capitolo precedente, la quantità di moto rimane costante (le forze esterne hanno risultante nulla):

$$M_1 v_{1i} + M_2 v_{2i} = M_1 v_{1f} + M_2 v_{2f}$$

Urto elastico: l'energia cinetica iniziale e finale sono uguali, quindi:

$$\begin{cases} M_1 v_{1i} + M_2 v_{2i} = M_1 v_{1f} + M_2 v_{2f} \\ \frac{1}{2} M_1 v_{1i}^2 + \frac{1}{2} M_2 v_{2i}^2 = \frac{1}{2} M_1 v_{1f}^2 + \frac{1}{2} M_2 v_{2f}^2 \end{cases}$$

Urto completamente anelastico: la velocità finale dei due corpi è la stessa e pertanto uguale alla velocità del centro di massa $v_{1f} = v_{2f} \equiv v_{CM}$, quindi:

$$M_1 v_{1i} + M_2 v_{2i} = (M_1 + M_2) v_{CM}$$

Esempi

1. Una stecca da biliardo colpisce una palla di massa $m = 200\text{g}$ inizialmente ferma con una forza media $F = 50\text{N}$. Supponendo che l'urto duri $\Delta t = 10\text{ms}$ calcolare: a) l'impulso che agisce sulla palla, b) la velocità acquistata dalla palla.

Soluzione: l'impulso si calcola applicando direttamente la definizione $I = F\Delta t$, pertanto vale $I = 50\text{N} \times 10 \cdot 10^{-3}\text{s} = 0.5\text{Ns}$ mentre la velocità acquistata dalla palla si ricava applicando il teorema dell'impulso

$$v_f = \frac{I}{m} = \frac{0.5\text{Ns}}{200 \cdot 10^{-3}\text{kg}} = 2.5\text{m/s}$$

2. Un proiettile di massa $M_p = 20\text{g}$ si muove lungo l'asse x con velocità $v_p = 200\text{m/s}$ e si conficca in un blocco di legno di massa $M_b = 500\text{g}$ libero di scorrere senza attriti lungo l'asse x . Si calcoli la velocità con cui il sistema "blocco + proiettile" si muove dopo l'urto e l'energia cinetica persa nell'urto.

Soluzione: l'urto è completamente anelastico pertanto si deve applicare l'equazione $M_p v_p + M_b v_B = (M_p + M_b) v_f$ da cui

$$v_f = \frac{M_p v_p + M_b v_B}{M_p + M_b} = \frac{20 \cdot 10^{-3}\text{kg} \times 200\text{m/s} + 0}{20 \cdot 10^{-3}\text{kg} + 500 \cdot 10^{-3}\text{kg}} = 7.69\text{m/s}$$

L'energia iniziale e finale del sistema valgono rispettivamente

$$K_i = \frac{1}{2} M_p v_p^2 + \frac{1}{2} M_b v_B^2 = \frac{1}{2} \times 20 \cdot 10^{-3}\text{kg} \times (200\text{m/s})^2 + 0 = 400\text{J} \text{ e}$$

$$K_f = \frac{1}{2} M_p v_f^2 + \frac{1}{2} M_b v_f^2 = \frac{1}{2} \times (20 \cdot 10^{-3}\text{kg} + 0.5\text{kg}) \times (7.69\text{m/s})^2 = 15.4\text{J} \text{ da cui}$$

$$\Delta K = 15.4\text{J} - 400\text{J} = -384.6\text{J}$$

3. Immaginando che il blocco di legno sia soggetto ad una forza d'attrito dinamico con coefficiente $\mu_d = 0.4$, si calcoli la massima distanza raggiunta dal sistema "blocco + proiettile" dopo l'urto.

Soluzione: dobbiamo immaginare che la forza d'attrito inizi ad agire dopo che l'urto è avvenuto, e successivamente per il teorema della conservazione dell'energia, calcolando l'energia cinetica K_f con la velocità v_f ottenuta dall'esempio precedente, imponiamo:

$$L = K_f - K_i \Rightarrow f_d s \cos \theta = 0 - \frac{1}{2} (M_p + M_b) v_f^2 \text{ e tenuto conto che } f_d = \mu_d (M_p + M_b) g \text{ si}$$

$$\text{ricava } s = \frac{\frac{1}{2} (M_p + M_b) v_f^2}{\mu_d (M_p + M_b) g} = \frac{v_f^2}{2 \mu_d g} = \frac{(7.69\text{m/s})^2}{2 \times 0.4 \times 9.8\text{m/s}^2} = 7.54\text{m}$$

4. Un cannone di massa $M_1 = 10^3 \text{ kg}$ libero di scorrere senza attriti lungo l'asse x spara orizzontalmente una palla di massa $M_2 = 10^2 \text{ kg}$ con una velocità $v_2 = 100 \text{ m/s}$. Calcolare il modulo e la direzione della velocità finale del cannone.

Soluzione: poichè il sistema è soggetto solo a forze interne la quantità di moto si conserva:

$$0 = M_1 v_1 + M_2 v_2 \Rightarrow v_1 = -\frac{M_2 v_2}{M_1} = -\frac{10^2 \text{ kg} \times 100 \text{ m/s}}{10^3 \text{ kg}} = -10 \text{ m/s}$$

quindi il cannone si muove in direzione opposta alla palla con velocità $v_1 = 10 \text{ m/s}$.

5. Una bilia di massa $M_1 = 20 \text{ g}$ si muove lungo l'asse x con velocità $v_0 = 3 \text{ m/s}$ ed urta elasticamente una seconda bilia di massa $M_2 = 40 \text{ g}$ ed inizialmente ferma. Calcolare la velocità finale delle due bilie nell'ipotesi che entrambe si muovano lungo l'asse x .

Soluzione: bisogna applicare le equazioni dell'urto elastico ricordando che la velocità iniziale della seconda bilia è zero.

$$\begin{cases} M_1 v_0 = M_1 v_1 + M_2 v_2 \\ \frac{1}{2} M_1 v_0^2 = \frac{1}{2} M_1 v_1^2 + \frac{1}{2} M_2 v_2^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} v_0 = v_1 + \frac{M_2}{M_1} v_2 = v_1 + k v_2 \\ v_0^2 = v_1^2 + \frac{M_2}{M_1} v_2^2 = v_1^2 + k v_2^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} v_1 = v_0 - k v_2 \\ v_0^2 = (v_0 - k v_2)^2 + k v_2^2 \end{cases}$$

Il sistema di equazioni ha come soluzione:

$$v_1 = \frac{M_1 - M_2}{M_1 + M_2} v_0 = \frac{20 \text{ g} - 40 \text{ g}}{20 \text{ g} + 40 \text{ g}} \times 3 \text{ m/s} = -1 \text{ m/s}$$

$$v_2 = \frac{2M_1}{M_1 + M_2} v_0 = \frac{2 \times 20 \text{ g}}{20 \text{ g} + 40 \text{ g}} \times 3 \text{ m/s} = 2 \text{ m/s}$$

il valore negativo di v_1 significa che la bilia M_1 si muove nella direzione opposta a quella iniziale.

Cenni di Statica ed Equilibrio di un Corpo Rigido

La tendenza di una forza a provocare una rotazione intorno ad un punto, dipende dall'intensità della forza e dalla distanza fra la retta d'azione della forza e il punto. Si definisce **momento meccanico di una forza rispetto**

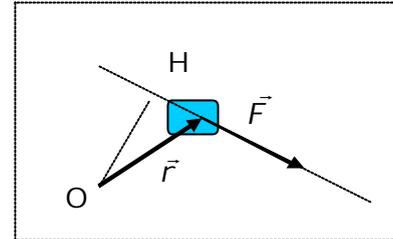


Fig. 16. Momento meccanico.

ad un punto O il prodotto vettoriale $\vec{M} = \vec{r} \wedge \vec{F}$. Il

momento meccanico M è pertanto un vettore avente

modulo pari a $M = \text{forza} \times \text{braccio} = F \times OH$ (ricordando le proprietà del prodotto vettoriale).

Condizioni generali di **equilibrio di un corpo rigido**: Affinché un corpo rigido sia in equilibrio occorre che sia nulla la risultante di tutte le forze che agiscono sul corpo

$\sum \vec{F} = 0$ e che sia nulla la somma dei momenti di tutte le forze $\sum \vec{M} = 0$.

Il **centro di gravità o baricentro** di un corpo è quel punto dove si deve pensare applicata la forza peso del corpo.

Possiamo parlare di EQUILIBRIO STABILE, INSTABILE O INDIFFERENTE per un corpo sospeso o per un corpo appoggiato a seconda che quando il corpo viene spostato dalla posizione di equilibrio esso tenda a ritornarvi, ad allontanarsene sempre più o a rimanere nella nuova posizione. Si analizzi

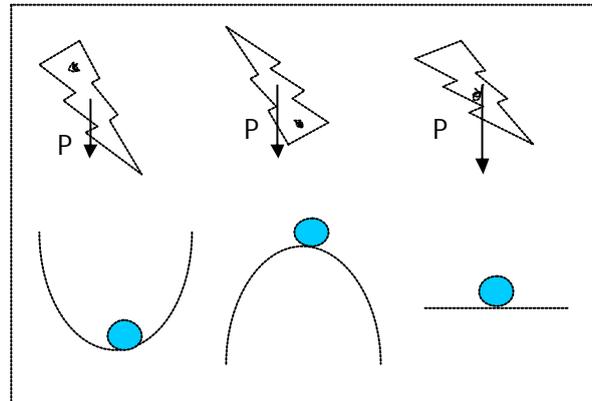
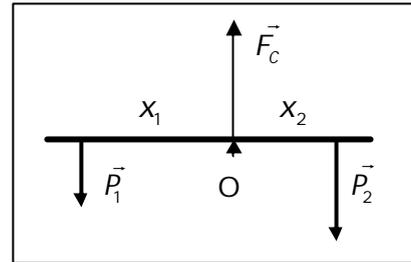


Fig. 17. Condizioni di equilibrio di un corpo rigido.

l'azione provocata dal momento della forza peso nelle varie situazioni riportate in figura 17: osservando la seconda riga della figura 17, relativa all'equilibrio di un corpo appoggiato a un profilo rigido, si noti come l'equilibrio stabile di un sistema si ha sempre in corrispondenza della condizione di energia potenziale minima, compatibilmente con i vincoli del sistema (es. gravitazionale).

Esempi

1. Si consideri un'altalena e due bambini di peso diverso $P_1 = 200\text{N}$ e $P_2 = 300\text{N}$. Si calcoli il valore della forza di contatto che agisce sul perno, e dire come devono sedersi i due bambini affinché l'altalena sia in equilibrio.

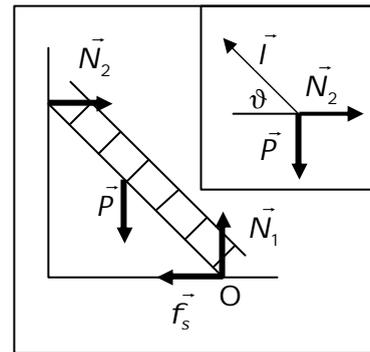


Soluzione: dal Secondo Principio della Dinamica possiamo scrivere $\sum \vec{F}_{est} = 0 \Rightarrow F_c + P_1 + P_2 = 0$ da cui si ricava $F_c = 500\text{N}$.

Per quanto riguarda le rotazioni, osserviamo che la forza peso P_1 tende a far ruotare l'altalena in senso antiorario rispetto al fulcro O e la forza P_2 tende a farlo ruotare in senso orario, mentre la forza di contatto F_c non produce nessuna rotazione perché la retta d'azione di questa forza passa per il perno O . Pertanto la condizione $\sum \vec{M}_{est} = 0$ diventa $P_1 x_1 + P_2 x_2 = 0$, ovvero il bambino più pesante deve sedersi più vicino al fulcro in modo che sia $P_1 |x_1| = P_2 |x_2|$. Per esempio se il bambino di peso $P_1 = 200\text{N}$ si siede a $x_1 = 3\text{m}$ affinché l'altalena sia in equilibrio, il bambino di peso $P_2 = 300\text{N}$ dovrà sedersi a $x_2 = 2\text{m}$.

Fig. 18. Problema 1.

2. Si consideri la scala di lunghezza l e massa m appoggiata ad una parete e formante un angolo J con il pavimento. Calcolare il valore del coefficiente di attrito statico fra scala e pavimento affinché la scala non scivoli.



Soluzione: la scala è soggetta a 4 forze come riportato in figura. Dal Secondo Principio della Dinamica possiamo scrivere

$$\sum \vec{F}_{est} = 0 \Rightarrow \begin{cases} x : N_2 - f_s = 0 \\ y : N_1 - P = 0 \end{cases} \text{ . Inoltre } f_s = m_s N_1 .$$

Dal punto di vista delle rotazioni, per calcolare i momenti delle forze scegliamo opportunamente come punto O il punto di appoggio della scala di modo che la condizione $\sum \vec{M}_{est} = 0$

Fig. 19. Problema 2.

diventi $\frac{l}{2} \wedge \vec{P} + l \wedge \vec{N}_2 = 0$, cioè $\frac{l}{2} P \sin(\frac{p}{2} + J) + l N_2 \sin(p + J) = 0$. Il sistema completo

delle equazioni diventa:

$$\begin{cases} N_2 - f_s = 0 \\ N_1 - P = 0 \\ f_s = m_s N_1 \\ \frac{l}{2} P \cos(J) - l N_2 \sin(J) = 0 \end{cases} \text{ da cui } m_s = \frac{\text{ctg}(J)}{2} .$$

3. Perché un corpo ha una stabilità migliore se il suo baricentro è situato in basso?

La Statica dei Fluidi

Un fluido non possiede forma propria ma si adatta a quella del contenitore che lo contiene. Può essere nella fase liquida (es. acqua) o gassosa (es. un gas). Anche se non possiede una forma propria, una massa M di fluido possiede un volume V . Inoltre se, a parità di condizioni, consideriamo una massa $2M$ dello stesso fluido, questa occuperà un volume $2V$.

La **densità** del fluido è definita come il rapporto $\rho = \frac{M}{V}$. Si misura in kg/m^3 oppure g/cm^3 ($1\text{g}/\text{cm}^3 = 10^3\text{kg}/\text{m}^3$). Per la proprietà precedentemente vista, la densità di un fluido, a parità di condizioni, è costante indipendentemente dal valore della massa considerata.

Altra caratteristica del fluido è di esercitare la forza nella direzione perpendicolare ad una qualunque superficie toccata dallo stesso. Esempi:

- a) l'acqua contenuta in una bottiglia esercita una forza verso l'esterno normale alla parete della stessa;
- b) l'acqua del mare esercita sui pesci una forza diretta verso l'interno del corpo;
- c) l'aria esercita su di noi una forza diretta verso l'interno del nostro corpo.

La **pressione** è definita come il rapporto $p = \frac{F_{\perp}}{S}$ tra la componente della forza ortogonale alla superficie e la superficie su cui la forza è applicata. La pressione è quindi una grandezza scalare che ci dice quale può essere la forza esercitata dal fluido su una superficie (anche immaginaria in mezzo al fluido!) con cui si trova in contatto. Può variare da punto a punto. Nel sistema **SI** si misura in **Pascal** ($1\text{Pa} = 1\text{N}/\text{m}^2$). Altre unità di misura utilizzate nella pratica sono l'**atmosfera** (atm), il **bar** con il sottomultiplo **millibar** (mbar) ed il **torr**. Sono legate tra loro dalla seguente relazione: $1\text{atm} = 760\text{torr} = 1013\text{mbar} = 1.013 \cdot 10^5\text{Pa}$. Si noti che $1\text{mbar} = 1\text{hPa}$.

Secondo il **principio di Pascal** se in un punto di un fluido la pressione p è variata per qualunque motivo di una quantità Δp , questa variazione si trasmette in ogni altro punto del fluido: $p_1 \rightarrow p_1 + \Delta p \Rightarrow p_2 \rightarrow p_2 + \Delta p$

Secondo la **legge di Stevino** la pressione in un fluido dipende dalla profondità a cui viene misurata: $p_2 = p_1 + \rho g(h_1 - h_2)$ ovvero se due punti si trovano a diversa altezza nel fluido la pressione sarà maggiore nel punto di profondità maggiore, inoltre in due punti che si trovano alla stessa altezza nel fluido la pressione è la stessa. Questa equazione ci dice che una delle cause della pressione è la forza peso esercitata dagli strati di fluidi sovrastanti il volume interessato. La legge di Stevino se scritta nella forma $p_2 + \rho g h_2 = p_1 + \rho g h_1 = \text{costante}$ assume un significato profondo. Moltiplicando il termine $p + \rho g h$ per il volume V pari ad una massa $m = \rho V$ di fluido, si ottiene l'espressione $pV + mgh$ dove pV rappresenta il lavoro necessario per liberare il volume nel fluido pre-esistente mentre mgh rappresenta l'energia potenziale.

Secondo il **principio di Archimede** un corpo di volume V immerso in un fluido di densità ρ è soggetto ad una forza da parte del fluido diretta verso l'alto e d'intensità pari al peso del volume V_{im} di fluido spostato $F_A = \rho V_{im} g$. Se il corpo galleggia avremo $V_{im} < V$ mentre se è completamente immerso V e V_{im} coincidono.

Esempi

1. Calcolare la pressione in una piscina piena d'acqua ($\rho = 10^3 \text{ kg/m}^3$) alla profondità di 2m.

Soluzione: non appena conosciamo il valore della pressione in un punto 1 della piscina, potremo applicare la legge di Stevino. Questo punto è la superficie dove l'acqua è in contatto con l'aria (altro fluido). Quindi sulla superficie la pressione è pari alla pressione atmosferica $p_0 = 1013 \text{ mbar} = 1.013 \cdot 10^5 \text{ Pa}$. A due metri di profondità la pressione è di conseguenza

$$p = p_0 + \rho g(h_1 - h_2) = 1.013 \cdot 10^5 \text{ Pa} + 10^3 \text{ kg/m}^3 \times 9.8 \text{ m/s}^2 \times (0 + 2 \text{ m}) = 1.21 \cdot 10^5 \text{ Pa}$$

(si noti che ogni 10 metri di profondità la pressione nell'acqua aumenta di 1 atmosfera).

2. Calcolare la differenza di pressione tra p_A nel volume in figura 20 e quella atmosferica sapendo che l'altezza della colonna di acqua è $h = 10 \text{ cm}$ e che l'estremità superiore del tubo è aperta.

Soluzione: non appena conosciamo il valore della pressione in un punto ① della colonna d'acqua, potremo applicare la legge di Stevino. Questo punto è la superficie dove l'acqua è in contatto con l'atmosfera per cui $p_1 = p_0$. Quindi

$$p_A + \rho g h_2 = p_0 + \rho g h_1$$

$$p_A - p_0 = \rho g h = 10^3 \text{ kg/m}^3 \times 9.8 \text{ m/s}^2 \times 0.1 \text{ m} = 908 \text{ Pa}$$

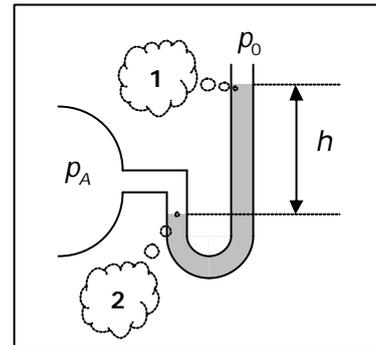


Fig. 20. Problema 2.

La differenza $p_A - p_0$ è detta anche pressione relativa (del volume A rispetto all'atmosfera) e diversamente dalla pressione assoluta può assumere anche valori negativi.

3. Calcolare la pressione a 20 cm dal tappo in una bottiglia sigillata e colma d'acqua.

Soluzione: non appena conosciamo il valore della pressione in un punto ① della bottiglia, potremo applicare la legge di Stevino. Questo punto è la superficie dove l'acqua è in contatto con il tappo. Poiché il tappo isola l'acqua dall'atmosfera esterna, la pressione è praticamente zero $p_1 = 0 \text{ Pa}$. Ad una profondità di 20 cm la pressione è quindi

$$p = p_1 + \rho g(h_1 - h_2) = 0 + 10^3 \text{ kg/m}^3 \times 9.8 \text{ m/s}^2 \times 0.2 \text{ m} = 1.96 \cdot 10^3 \text{ Pa}$$

4. Descrivere il funzionamento del barometro di Torricelli.

Soluzione: il barometro di Torricelli è costituito da un tubo di vetro di altezza superiore ad 1 metro, riempito di mercurio e posto in verticale in una vasca colma di mercurio e con l'estremità superiore sigillata in modo che non ci sia contatto diretto tra il mercurio contenuto nel tubo e l'atmosfera. Per conoscere l'altezza cui si dispone il livello del mercurio nel tubo, è necessario applicare la legge di Stevino fra i due punti ① e ② dove la pressione del liquido è nota. Il punto ① è la superficie dove il mercurio è in contatto con i vapori di mercurio (altro fluido) dove la pressione è pari alla tensione di

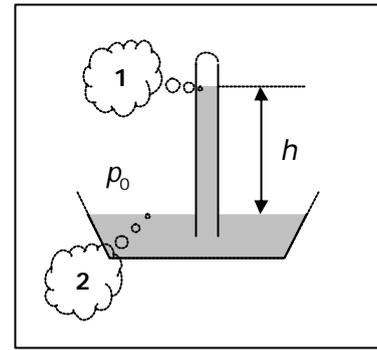


Fig. 21. Problema 4.

vapore e pertanto talmente piccola da poter essere trascurata ($p_1 = 0\text{Pa}$) mentre il punto ② è quello in contatto con l'aria (altro fluido) e pertanto la pressione è pari a quella atmosferica ($p_2 = p_0$). Pertanto:

$$p_2 = p_1 + \rho_{\text{Hg}} g(h_1 - h_2) \text{ da cui } h = \frac{p_2 - p_1}{\rho_{\text{Hg}} g} = \frac{1.013 \cdot 10^5 \text{Pa} - 0\text{Pa}}{1.36 \cdot 10^4 \text{kg/m}^3 \times 9.8 \text{m/s}^2} = 0.760\text{m}$$

5. Descrivere il comportamento del barometro di Torricelli quando si trova in un contenitore sigillato in cui viene fatto il vuoto.

Soluzione: poiché la pressione sulla superficie libera del mercurio (fuori dal tubo) adesso è nulla ($p_2 = 0$) il livello del mercurio all'interno del tubo scenderà allo stesso livello del mercurio nella vaschetta.

6. Spiegare il significato del prodotto pV per un fluido incompressibile (densità costante).

Soluzione: dimostriamo che pV rappresenta il lavoro necessario per svuotare il volume V . Consideriamo per semplicità un fluido a pressione p posto all'interno di un volume V di forma cubica. Immaginiamo inoltre che allo scorrere della superficie S il fluido possa fuoriuscire attraverso la superficie opposta mantenendo costante la pressione idrostatica p . Per svuotare il volume V dal fluido è necessario, quindi, esercitare sulla superficie S una forza \vec{F} tale da annullare l'effetto pS della pressione ($F = pS$) e fare in modo che la parete S possa scorrere per il tratto l fino a raggiungere la parete opposta. Il lavoro compiuto dalla forza \vec{F} è quindi pari a $L = Fl = pSl = pV$.

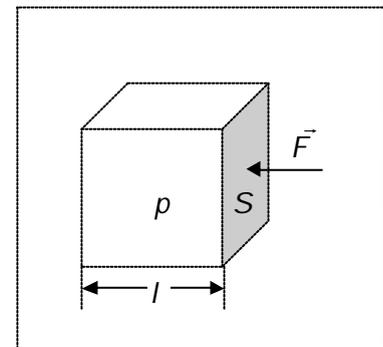


Fig. 22. Problema 6.

7. In una persona in posizione eretta, fissata l'altezza del cuore (e dell'aorta) come l'origine delle coordinate, si assuma che i piedi si trovino a circa $h_p = 135\text{cm}$ sotto il cuore e la parte più alta della testa si trovi a circa $h_t = 45\text{cm}$ sopra. Assumendo che la pressione relativa al livello dell'aorta sia 100Torr e che la densità del sangue sia $\rho = 1.05\text{g/cm}^3$ calcolare la pressione relativa al livello dei piedi e quella a livello della testa.

Soluzione: applicando la legge di Stevino con $p = p_{aorta} + \rho g(h_{aorta} - h)$ si verifici che

$$p_{piedi} = p_{aorta} + \rho g h_p = 203\text{Torr} \quad \text{e} \quad p_{testa} = p_{aorta} - \rho g h_t = -65\text{Torr}.$$

8. Dimostrare il principio di Archimede.

Soluzione: consideriamo un contenitore riempito con un fluido di densità ρ , ed un volumetto V di fluido posto ad una qualunque profondità nel contenitore. Poiché il sistema è in equilibrio e pertanto il volumetto non si muove, occorre che ci sia una forza F_A rivolta verso l'alto che annulli la forza peso P del volumetto, quindi $F_A - Mg = 0$ da cui $F_A = \rho V g$. La forza F_A è esercitata dal resto del fluido sul volumetto V e non dipende da cosa c'è in V , pertanto sostituendo nel volume V un altro corpo questi subirà la stessa spinta verso l'alto.

9. Sapendo che un blocco di ghiaccio immerso in acqua galleggia e che la frazione del volume che rimane immersa è $\frac{11}{12}$, calcolare la densità del ghiaccio ρ_{gh} .

Soluzione: posto V il volume del blocco di ghiaccio, l'equilibrio delle forze a cui è soggetto si può scrivere come la somma vettoriale della forza peso e della spinta di Archimede generata dalla parte di ghiaccio immersa nell'acqua $\vec{P} + \vec{F}_A = 0$ da cui

$$\rho_{im} V g - \rho_{gh} V g = 0 \quad \Rightarrow \quad \rho_{gh} = \rho_{im} \frac{V_{im}}{V} = 1\text{g/cm}^3 \times \frac{11}{12} = 0.92\text{g/cm}^3$$

10. Determinare con che accelerazione sale in superficie un blocco di legno di densità $\rho = 0.7\text{g/cm}^3$ lasciato libero dal fondo di un lago. Si trascuri la resistenza dell'acqua.

Soluzione: la forza totale che agisce sul corpo immerso è data dalla risultante tra la forza peso e la spinta di Archimede: $F = F_A - Mg = \rho_{fluido} V g - \rho V g = (\rho_{fluido} - \rho) V g$ avendo espresso la massa del corpo $M = \rho V$. Possiamo ricavare dal Secondo Principio della Dinamica:

$$a = F/M = \frac{(\rho_{fluido} - \rho) V g}{\rho V} = \left(\frac{\rho_{fluido}}{\rho} - 1 \right) g = 4.2\text{ m/s}^2$$

11. Una sfera di metallo di massa $m = 1 \text{ kg}$ e densità $\rho = 7.8 \cdot 10^3 \text{ kg/m}^3$ è completamente immersa in acqua, ancorata al fondo di un recipiente mediante una molla di costante elastica $k = 250 \text{ N/m}$. Calcolare la spinta di Archimede, valutare se la molla è compressa o allungata e determinare lo spostamento dalla posizione di equilibrio.

Soluzione: noto il volume, ottenuto come $V = \frac{m}{\rho} = \frac{1 \text{ kg}}{7.8 \cdot 10^3 \text{ kg/m}^3} = 1.28 \cdot 10^{-4} \text{ m}^3$, si può ricavare la spinta di Archimede $F_A = \rho_{\text{fluido}} V g = 1.25 \text{ N}$. Perché la sfera sia ferma occorre che la risultante delle forze sia nulla: $\vec{F}_A + \vec{P} + \vec{F}_{\text{molla}} = 0$. Scelta come positiva la direzione rivolta verso l'alto dell'asse verticale, l'espressione precedente diventa $F_A - mg + kx = 0$ da cui si ricava $x = -3.4 \text{ cm}$, Quindi la molla è compressa ed il modulo $|x| = 3.4 \text{ cm}$ rappresenta lo scostamento dalla posizione di equilibrio.

12. In quali condizioni un corpo immerso in un fluido di densità ρ_f galleggia?

Soluzione: per poter galleggiare occorre che la risultante delle forze che agiscono sul corpo sia positiva, cioè $\vec{P} + \vec{F}_A \geq 0$. Posti V e ρ rispettivamente il volume e la densità del corpo, occorre osservare che la massima intensità della spinta di Archimede si ha quando il corpo è completamente immerso ovvero quando $V_{\text{in}} = V$, quindi $\rho_f V g - \rho V g \geq 0$. Questa condizione è soddisfatta se la densità del corpo è minore della densità del fluido in cui è immerso $\rho < \rho_f$.

13. Un cubo di legno di lato $L = 20 \text{ cm}$ con una densità $\rho = 0.65 \cdot 10^3 \text{ kg/m}^3$ galleggia parzialmente immerso in acqua: calcolare la distanza d fra la faccia superiore del cubo e la superficie dell'acqua. Determinare il peso massimo P che può essere messo sul cubo affinché la sua faccia superiore sia a livello dell'acqua.

Soluzione: il corpo è soggetto a due forze: la forza peso rivolta verso il basso e la spinta di Archimede rivolta verso l'alto. La spinta di Archimede è proporzionale al volume $V_{\text{immerso}} = L^2 h_{\text{immerso}}$ della parte del cubo immersa nell'acqua: $F_A = \rho_{\text{fluido}} V_{\text{immerso}} g$. Poiché il corpo è in equilibrio il modulo delle due forze deve essere uguale. Pertanto $\rho_{\text{fluido}} V_{\text{immerso}} g = V \rho g$ da cui $h_{\text{immerso}} = L \frac{\rho}{\rho_{\text{fluido}}} = 13 \text{ cm}$ e $d = 7 \text{ cm}$.

Quando il cubo è completamente sommerso la spinta di Archimede diventa $F'_A = \rho_{\text{fluido}} V g$. Anche in questo caso la risultante delle forze deve essere nulla, pertanto $\rho V g + P = \rho_{\text{fluido}} V g$ da cui $P = (\rho_{\text{fluido}} - \rho) V g = 27.44 \text{ N}$.

La Dinamica dei Fluidi Ideali

Un fluido ideale in movimento può essere immaginato costituito da tante lamine sottili in grado di scorrere l'una sull'altra senza attrito. Il movimento del fluido è sempre parallelo alla superficie delle lamine. Esempi:

- in un fiume il movimento dell'acqua, supposta un fluido ideale, può essere scomposto nello scorrimento di tante lamine orizzontali sovrapposte che si muovono parallele al letto del fiume;

- in un condotto di sezione cilindrica il movimento può essere scomposto in tante lamine circolari concentriche con raggio crescente a partire dall'asse centrale del condotto che si muovono parallele all'asse del condotto.

Il movimento è descritto da due equazioni che devono essere soddisfatte contemporaneamente.

1) L'**equazione di continuità** che stabilisce che la quantità di fluido che attraversa nell'unità di tempo una qualunque sezione del condotto (**portata**), è costante (il fluido non si perde per strada!). Può essere scritta in due forme:

portata volumetrica: $Q = Sv = \text{costante}$ nel sistema SI si misura in m^3/s

portata massica: $Q_m = rSv = \text{costante}$ nel sistema SI si misura in kg/s

dove con r si è indicata la densità del fluido.

2) L'**equazione di Bernoulli**: $p + \frac{1}{2}rv^2 + rgh = \text{costante}$ che fissa il valore della pressione, della velocità e dell'altezza di una qualunque parte del fluido in movimento. Si ricava direttamente dalla conservazione dell'energia. L'equazione di Bernoulli si applica a fluidi incompressibili ($r = \text{costante}$), non viscosi e irrotazionali ($\boldsymbol{\omega} = 0$) in moto stazionario, tale cioè che la velocità del fluido in un dato punto è sempre la stessa. In conseguenza all'equazione di Bernoulli, la pressione idrostatica p di un fluido può essere diversa secondo lo stato di quiete o di moto del fluido. Si rimanda agli esempi riportati di seguito.

Esempi

1. Calcolare la velocità v con cui l'acqua inizia ad uscire dal foro di scarico di una vasca da bagno dove il livello iniziale dell'acqua è $h = 30\text{cm}$.

Soluzione: dobbiamo applicare l'equazione di Bernoulli sul punto ① dello scarico ed in un altro punto ② della vasca dove conosciamo il valore per p , v e h . Il punto ② in questione è il livello superiore dell'acqua dove $p_2 = p_0$, $h_2 = h$ e $v_2 = 0$ perché non appena l'acqua inizia a defluire dal fondo, quella posta sulla superficie è ancora praticamente ferma. Al punto ① vale invece $h_1 = 0$, $v_1 = v$ e $p_1 = p_0$ perché la superficie del fronte d'acqua che sta uscendo dallo scarico si trova in diretto contatto con l'atmosfera. Quindi:

$$p_1 + \frac{1}{2} \rho v_1^2 + \rho g h_1 = p_2 + \frac{1}{2} \rho v_2^2 + \rho g h_2$$

$$p_0 + \frac{1}{2} \rho v^2 = p_0 + \rho g h \Rightarrow v = \sqrt{2gh} = \sqrt{2 \times 9.8 \text{m/s}^2 \times 30 \cdot 10^{-2} \text{m}} = 2.425 \text{m/s}$$

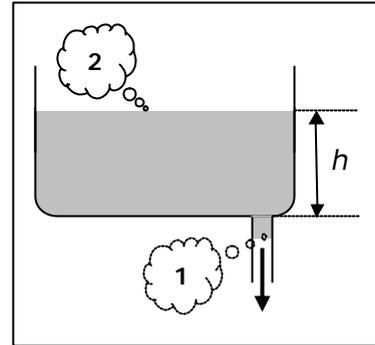


Fig. 23. Problema 1.

2. Spiegare qualitativamente perché la sezione del filo d'acqua che fluisce da un rubinetto diminuisce con l'aumentare della distanza dal rubinetto.

Soluzione: l'acqua nella caduta aumenta la propria velocità secondo l'equazione di Bernoulli $\frac{1}{2} \rho v_1^2 + \rho g h_1 = \frac{1}{2} \rho v_2^2 + \rho g h_2$ essendo la pressione uguale in tutti i punti a quella atmosferica. Deve inoltre valere l'equazione di continuità $Sv = \text{costante}$ per cui i punti dove la velocità è maggiore sono i punti in cui la sezione sarà minore.

3. In un adulto normale a riposo, la velocità media del sangue attraverso l'aorta è $v_0 = 33\text{cm/s}$. Calcolare la portata attraverso un'aorta di $r = 9\text{mm}$.

Soluzione: $Q = S_0 v_0 = \pi r^2 v_0 = 3.14 \times (0.9\text{cm})^2 \times 33\text{cm/s} = 84\text{cm}^3/\text{s} \approx 5\text{litri/min}$

Dall'aorta il sangue fluisce nelle arterie maggiori, poi in quelle più piccole e infine nei capillari. Ad ogni stadio successivo ciascuno di questi vasi si divide in molti vasi più piccoli e il flusso di sangue si ripartisce fra questi in modo che la portata totale sia costante. Se conosciamo la sezione complessiva di tutte le arterie S_{arterie} e di tutti i capillari $S_{\text{capillari}}$ dovrà valere la relazione: $Q = S_0 v_0 = S_{\text{arterie}} v_{\text{arterie}} = S_{\text{capillari}} v_{\text{capillari}}$. Pertanto il sangue si muove più lentamente verso la periferia perché la sezione complessiva dei vasi sanguigni è maggiore. Se per esempio la sezione totale di tutte le arterie è 20cm^2 e di tutti i capillari è 0.25m^2 possiamo ricavare la velocità del sangue $v_{\text{arterie}} = Q/S_{\text{arterie}} = 4.2\text{cm/s}$ e $v_{\text{capillari}} = Q/S_{\text{capillari}} = 0.33\text{mm/s}$.

in un singolo capillare di raggio $r = 20\mu\text{m}$ avremo $Q = \pi r^2 v_{\text{capillari}} = 4.1 \cdot 10^{-7} \text{cm}^3/\text{s}$.

4. Utilizzando i dati dell'esercizio precedente stimare il numero di capillari nel corpo umano.

Soluzione: la portata è costante in tutto il sistema cardiocircolatorio, pertanto deve valere

$$Q_{aorta} = N \cdot Q_{1\text{capillare}} \text{ da cui } N = \frac{Q_{aorta}}{Q_{1\text{capillare}}} \approx 2 \cdot 10^8.$$

5. Spiegare qualitativamente cosa succede quando in un'arteria è presente un aneurisma.

Soluzione: in presenza di un aneurisma la sezione dell'arteria S_2 è maggiore di quella naturale S_1 e dovendosi conservare la portata dell'arteria, la velocità v_2 sarà minore di quella naturale

$$v_1 \quad (v_2 = \frac{S_1}{S_2} v_1).$$

Supponiamo per semplicità che l'arteria sia orizzontale. In queste condizioni la pressione sanguigna p_2 all'altezza dell'aneurisma sarà maggiore di quella naturale p_1 in accordo all'equazione di Bernoulli $\frac{1}{2} \rho v_1^2 + p_1 = \frac{1}{2} \rho v_2^2 + p_2$.

Pertanto, nel punto dove c'è l'aneurisma, può rompersi la parete dell'arteria.

6. Spiegare qualitativamente cosa succede quando in un'arteria è presente una stenosi.

Soluzione: in presenza di una stenosi la sezione dell'arteria S_2 è minore di quella naturale S_1 e con un procedimento simile a quello seguito nell'esempio precedente si può dimostrare che la pressione sanguigna p_2 all'altezza della stenosi sarà minore di quella naturale p_1 .

Pertanto, nel punto dove c'è la stenosi, l'arteria può occludersi completamente.

7. Due punti di un condotto orizzontale che trasporta acqua hanno diverse sezioni, con raggio $R_1 = 1.2\text{cm}$ e $R_2 = 0.5\text{cm}$, mentre la differenza di pressione tra di loro è pari a un dislivello di $h = 5.0\text{cm}$ d'acqua. Calcolare:

- le velocità dell'acqua v_1 e v_2 ;
- la portata del condotto.

Soluzione: consideriamo i punti ① e ② che si trovano sull'asse del condotto alla stessa altezza $Z_1 = Z_2$. La prima relazione che possiamo ricavare dalle condizioni iniziali è quella fra le due pressioni e la differenza d'altezza nei tubi verticali. Infatti avremo che la pressione sull'asse del condotto è legata a quella atmosferica da $p_1 = p_0 + \rho g h_1$ e $p_2 = p_0 + \rho g h_2$ da cui si ricava: $p_1 - p_2 = \rho g h$.

Poiché i punti ① e ② si trovano sull'asse del condotto, l'equazione di Bernoulli si semplifica e diventa $p_1 + \frac{1}{2} \rho v_1^2 = p_2 + \frac{1}{2} \rho v_2^2$. Poiché le incognite sono due (v_1, v_2) è necessario trovare un'ulteriore condizione che è data semplicemente dall'equazione di continuità $S_1 v_1 = S_2 v_2$ essendo note le due sezioni del condotto.

Si tratta ora di risolvere il sistema:

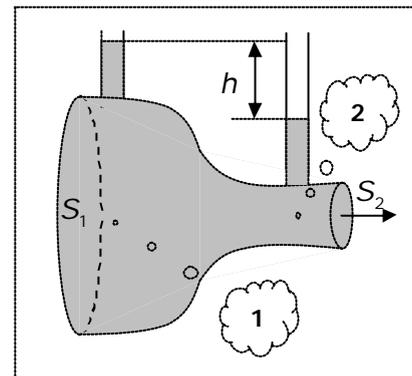


Fig. 24. Problema 6.

$$\begin{cases} S_1 v_1 - S_2 v_2 = 0 \\ \rho_1 - \rho_2 + \frac{1}{2} \rho v_1^2 - \frac{1}{2} \rho v_2^2 = 0 \end{cases}$$

potendo effettuare la sostituzione $\rho_1 - \rho_2 = \rho gh$ che porta a $\frac{1}{2} \rho v_1^2 - \frac{1}{2} \rho v_2^2 + \rho gh = 0$.

$$\begin{cases} v_2 = \frac{S_1}{S_2} v_1 = \frac{\rho R_1^2}{\rho R_2^2} v_1 = \frac{R_1^2}{R_2^2} v_1 \\ \rho gh + \frac{1}{2} \rho v_1^2 - \frac{1}{2} \rho \left(\frac{R_1^2}{R_2^2} v_1 \right)^2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} v_2 = \left(\frac{R_1}{R_2} \right)^2 v_1 \\ v_1 = \sqrt{2gh} \left[\left(\frac{R_1}{R_2} \right)^4 - 1 \right]^{-\frac{1}{2}} \end{cases}$$

$$\text{con soluzione} \begin{cases} v_1 = \sqrt{2 \times 9.8 \text{ m/s}^2 \times 5 \cdot 10^{-2} \text{ m}} \times \left[\left(\frac{1.2}{0.5} \right)^4 - 1 \right]^{-\frac{1}{2}} = 0.17 \text{ m/s} \\ v_2 = \left(\frac{1.2}{0.5} \right)^2 \times 0.17 \text{ m/s} = 1.0 \text{ m/s} \end{cases}$$

La portata è data semplicemente da

$$Q = S_2 v_2 = \rho R_2^2 v_2 = 3.14 \times (0.5 \cdot 10^{-2} \text{ m})^2 \times 1.0 \text{ m/s} = 7.85 \cdot 10^{-5} \text{ m}^3/\text{s}$$

Si noti che in assenza di movimento del fluido la pressione idrostatica sarebbe costante:

$$\rho_1 = \rho_2.$$

8. Verificare che nell'esercizio precedente il risultato finale è lo stesso anche se la pressione del fluido non viene calcolata sull'asse del condotto.

Soluzione: immaginiamo di considerare due punti posti ad un'altezza z_1 e z_2 rispetto all'asse del condotto. In questo caso avremo che la pressione sull'asse del condotto è legata a quella atmosferica da $p'_1 = p_0 + \rho g(h_1 - z_1)$ e $p'_2 = p_0 + \rho g(h_1 - z_2)$ da cui si ricava: $p'_1 - p'_2 = \rho gh - \rho g(z_1 - z_2)$.

Anche l'equazione di Bernoulli cambia e diventa $p'_1 + \frac{1}{2} \rho v_1^2 + \rho g z_1 = p'_2 + \frac{1}{2} \rho v_2^2 + \rho g z_2$ e sostituendovi la relazione precedente si ottiene di nuovo l'equazione dell'esercizio precedente: $\frac{1}{2} \rho v_1^2 - \frac{1}{2} \rho v_2^2 + \rho gh = 0$.

9. Spiegare il significato fisico dell'equazione di Bernoulli.

Soluzione: moltiplicando tutti i termini per il volume unitario V l'equazione diventa

$$pV + \frac{1}{2} \rho v^2 V + \rho gh V = pV + \frac{1}{2} \rho v^2 V + \rho gh V = \text{costante}.$$

Il secondo e terzo termine rappresentano rispettivamente l'energia cinetica e l'energia potenziale del volume di fluido considerato. Per comprendere il significato del primo termine immaginiamo che il volume unitario abbia la forma di un cubetto di lato x ed usiamo la definizione della pressione per riscrivere il prodotto pV come $\frac{F}{S} V = \frac{F}{x^2} x^3 = Fx$ che rappresenta il lavoro fatto dal fluido per occupare il volume V . Questa relazione è generale.

La Dinamica dei Fluidi Reali

A differenza del caso ideale, nel fluido reale in movimento (anche in regime laminare) le lamine sottili, di cui possiamo ancora immaginare essere costituito, non sono più in grado di scorrere l'una sull'altra senza attrito. Anche in questo caso il movimento del fluido è sempre parallelo alla superficie delle lamine ma stavolta, proprio a causa della presenza dell'attrito nel movimento sarà speso del lavoro. L'intensità di queste forze

d'attrito può essere espressa secondo la seguente espressione: $F = h \frac{dv}{dy} \Delta S$ dove ΔS

è la superficie di contatto fra due lamine contigue, $\frac{dv}{dy}$ il gradiente di velocità fra le

due lamine ed infine h la **viscosità** del fluido. La viscosità viene misurata in $\text{Pa} \cdot \text{s}$ nel **SI** oppure in **poise** (P) nel sistema **CGS** ($1 \text{Pa} \cdot \text{s} = 10 \text{ P}$).

Esempio: in un condotto di sezione cilindrica il movimento può essere scomposto in tante lamine circolari concentriche con raggio crescente a partire dall'asse centrale del condotto che si muovono parallele all'asse del condotto. A causa della maggiore superficie di contatto la forza d'attrito sarà maggiore verso le pareti del condotto quindi la velocità sarà maggiore verso il centro del condotto.

Legge di Hagen-Poiseuille: per mantenere in movimento un fluido reale con portata Q costante, è necessario fare un lavoro, occorre cioè mantenere una differenza di pressione fra i punti d'ingresso e d'uscita. Nel caso di un condotto cilindrico orizzontale di raggio costante R e lunghezza l la portata del condotto è legata alla differenza di

pressione $\Delta p = p_{uscita} - p_{ingresso}$ agli estremi del condotto dall'equazione: $Q = \frac{p}{8 \eta l} R^4 \Delta p$.

Si definisce perdita di carico di un condotto la variazione di pressione per unità di

lunghezza del condotto $\frac{\Delta p}{l} = \frac{8hQ}{pR^4}$, mentre la resistenza R del condotto è data da

$$R = \frac{8hl}{pR^4} \text{ pertanto l'espressione diventa } \Delta p = RQ.$$

Ricordando quanto visto nel capitolo precedente per far passare un volume V entro il condotto è necessario un lavoro pari a $L = \Delta pV$ ed una potenza pari a

$$P = \frac{\Delta pV}{t} = \Delta pQ.$$

La legge di Hagen-Poiseuille è valida in regime laminare, quando cioè si può pensare che gli strati di fluido scorrano gli uni sugli altri parallelamente senza mescolarsi. L'approssimazione a regime laminare è valida nei fluidi viscosi quando la velocità è molto bassa, all'aumentare della velocità gli strati di fluido si mescolano tra loro in moto vorticoso dando luogo ad un regime turbolento.

Per stabilire se un fluido reale in movimento possa essere considerato in regime lami-

nare occorre calcolare il **numero di Reynolds** $N_R = \frac{2r\bar{v}R}{h}$ dove $\bar{v} = \frac{Q}{pR^2}$ è la velocità

media del fluido di densità r e viscosità h nel condotto cilindrico di raggio R , e verificare che sia $N_R < 1000$. Per valori maggiori a 3000 il moto è sicuramente turbolento mentre per valori intermedi il regime è instabile.

Esempi

1. Un fluido di densità $\rho = 1.0 \text{ g/cm}^3$ e viscosità $\eta = 0.1 \text{ P}$ scorre in un condotto di raggio costante $R = 1 \text{ cm}$. Calcolare la portata sapendo che la differenza di altezza tra le due colonne poste ad una distanza $l = 30 \text{ cm}$ è $h = 3 \text{ cm}$.

Soluzione: trattandosi di un fluido viscoso dobbiamo applicare l'equazione di Hagen-Poiseuille, sapendo inoltre che la differenza di pressione fra i due punti vale:

$$\Delta p = p_1 - p_2 = \rho g h.$$

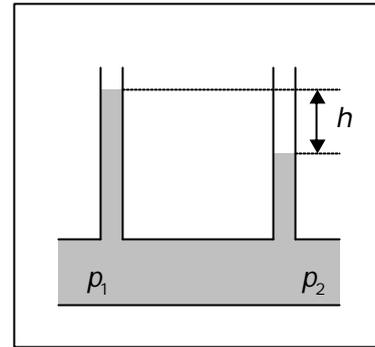


Fig. 25. Problema 1.

$$Q = \frac{\rho R^4}{8 \eta l} \Delta p = \frac{\rho (1 \text{ cm})^4}{8 \cdot 0,1 \text{ P} \times 30 \text{ cm}} 1,0 \text{ g/cm}^3 \times 9,8 \cdot 10^2 \text{ cm/s}^2 \times 3 \text{ cm} = 384,8 \text{ cm}^3/\text{s} = 0,38 \text{ litri/s}$$

2. Approssimando l'aorta di un adulto a riposo come un cilindro lungo $L = 30 \text{ cm}$ di raggio $R = 9 \text{ mm}$, si calcoli la caduta di pressione nel sangue quando attraversa l'aorta e la perdita di carico nell'aorta. Si assuma la viscosità del sangue $\eta = 4,75 \cdot 10^{-2} \text{ P}$ e la portata del sangue nell'aorta $Q = 83 \text{ cm}^3/\text{s}$.

Soluzione: la caduta di pressione si ottiene applicando l'equazione di Hagen-Poiseuille (passando al sistema **SI**):

$$\Delta p = \frac{8 \eta L Q}{\rho R^4} = \frac{8 \times 4,75 \cdot 10^{-3} \text{ Pa} \cdot \text{s} \times 0,3 \text{ m} \times 83 \cdot 10^{-6} \text{ m}^3/\text{s}}{\rho \times (9 \cdot 10^{-3} \text{ m})^4} = 45,9 \text{ Pa} \approx 0,3 \text{ Torr};$$

$$\text{mentre la perdita di carico è data da } \left. \frac{\Delta p}{L} \right|_{\text{aorta}} = \frac{45,9 \text{ Pa}}{0,3 \text{ m}} = 1,53 \cdot 10^2 \text{ Pa/m}$$

$$\text{oppure } \left. \frac{\Delta p}{L} \right|_{\text{aorta}} = \frac{0,3 \text{ Torr}}{30 \text{ cm}} = 0,01 \text{ Torr/cm}.$$

3. Calcolare la caduta di pressione e la perdita di carico in un capillare di lunghezza $L = 1 \text{ cm}$ e raggio $R = 20 \mu\text{m}$. Si assuma la portata volumetrica del capillare $Q = 4,1 \cdot 10^{-7} \text{ cm}^3/\text{s}$ e la viscosità del sangue $\eta = 4,75 \cdot 10^{-2} \text{ P}$.

Soluzione: la caduta di pressione si ottiene applicando l'equazione di Hagen-Poiseuille (passando al sistema **SI**):

$$\Delta p = \frac{8 \eta L Q}{\rho R^4} = \frac{8 \times 4,75 \cdot 10^{-3} \text{ Pa} \cdot \text{s} \times 0,01 \text{ m} \times 4,1 \cdot 10^{-13} \text{ m}^3/\text{s}}{\rho \times (20 \cdot 10^{-6} \text{ m})^4} = 3,1 \cdot 10^2 \text{ Pa} \approx 2,3 \text{ Torr};$$

$$\text{mentre la perdita di carico è data da } \left. \frac{\Delta p}{L} \right|_{\text{capillare}} = \frac{3,1 \cdot 10^2 \text{ Pa}}{0,01 \text{ m}} = 3,1 \cdot 10^4 \text{ Pa/m}$$

oppure $\left. \frac{\Delta p}{L} \right|_{\text{capillare}} = \frac{2.3 \text{ Torr}}{1 \text{ cm}} = 2.3 \text{ Torr/cm}.$

4. Con i dati degli esercizi 2 e 3 verificare che la resistenza di un capillare è molto maggiore

della resistenza dell'aorta: $R_{\text{capillare}} = \left. \frac{\Delta p}{Q} \right|_{\text{capillare}} \gg R_{\text{aorta}} = \left. \frac{\Delta p}{Q} \right|_{\text{aorta}}.$

5. Calcolare il numero di Reynolds per il sangue che scorre con velocità media $\bar{v} = 10 \text{ cm/s}$ in un'arteria di raggio $R = 2 \text{ mm}$. Densità del sangue a 37° $\rho = 1.05 \text{ g/cm}^3$ e viscosità $\eta = 4.75 \cdot 10^{-2} \text{ P}$

Soluzione: è sufficiente applicare la definizione di N_R

$$N_R = \frac{2\rho\bar{v}R}{\eta} = \frac{2 \times 1.05 \text{ g/cm}^3 \times 10 \text{ cm/s} \times 0.2 \text{ cm}}{4.75 \cdot 10^{-2} \text{ P}} \approx 88$$

con flusso laminare.

6. Calcolare il numero di Reynolds nell'ipotesi che nell'arteria dell'esercizio precedente sia presente una stenosi che riduca il raggio dell'arteria a $R' = 0.2 \text{ mm}$.

Soluzione: occorre anzitutto ricalcolare la velocità media del sangue nell'ipotesi che la portata dell'arteria sia costante:

$$\bar{v}' \rho R'^2 = \bar{v} \rho R^2 \Rightarrow \bar{v}' = \left(\frac{R}{R'} \right)^2 \bar{v} = \left(\frac{2 \text{ mm}}{0.2 \text{ mm}} \right)^2 \times 10 \text{ cm/s} = 10^3 \text{ cm/s}$$

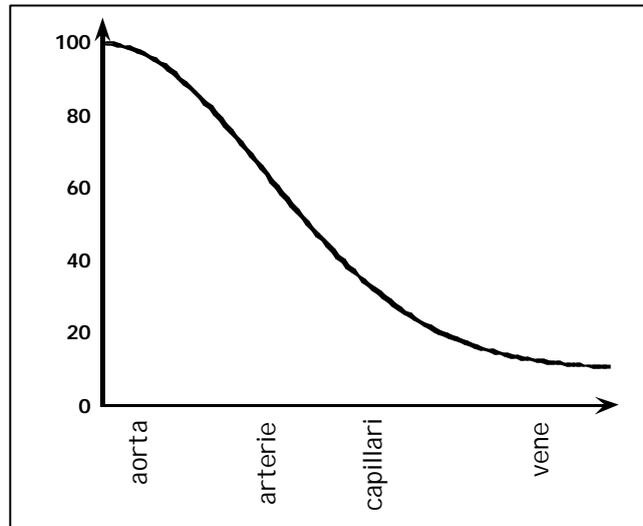
è quindi applicare la definizione di N_R

$$N_R = \frac{2\rho\bar{v}'R'}{\eta} = \frac{2 \times 1.05 \text{ g/cm}^3 \times 10^3 \text{ cm/s} \times 0.02 \text{ cm}}{4.75 \cdot 10^{-2} \text{ P}} \approx 884$$

con flusso prossimo ad essere turbolento.

Cenni alla Circolazione del Sangue

Nel tratto dell'aorta c'è una caduta di pressione molto piccola: come i dati dell'esempio 2 se la pressione del sangue è 100Torr, quando entra nell'aorta provenendo dal ventricolo sinistro, essa si è ridotta di soli 0.3Torr quando il sangue arriva alle arterie maggiori. Ma mano a mano che il sangue procede verso i vasi più periferici, questi hanno via via raggi sempre più piccoli e quindi la caduta di pressione sarà sempre maggiore. Nella figura è rappresentata schematicamente la variazione di pressione del sangue nei vari distretti. Vediamo dal grafico che quando il sangue entra nelle vene la pressione è di soli 10Torr con una caduta di pressione totale su tutto il circolo pari a:



$$\Delta p = 100\text{Torr} - 10\text{Torr} = 90\text{Torr} = 1.2 \cdot 10^4 \text{ Pa.}$$

Con questi dati possiamo calcolare la resistenza totale di tutto il sistema circolatorio aorta-

$$\text{arterie} - \text{arterioli} - \text{capillari: } R = \frac{\Delta p}{Q} = \frac{1.2 \cdot 10^4 \text{ Pa}}{83 \cdot 10^{-6} \text{ cm}^3/\text{s}} = 1.44 \cdot 10^8 \text{ N} \cdot \text{s}/\text{m}^3.$$

Si noti che se la resistenza del circuito aumenta (ricordando che $R = \frac{8hl}{pR^4}$, questo può avvenire sia per un aumento della viscosità h che per una diminuzione del raggio R del condotto) allora, per mantenere normale il flusso di sangue, la pressione sanguigna deve aumentare (ipertensione) con conseguente aumento del lavoro richiesto al cuore. Infatti, possiamo dimostrare semplicemente che il lavoro fatto dal cuore dipende dalla pressione sanguigna, calcolando la potenza sviluppata dal cuore. La potenza può essere espressa come prodotto della velocità media con cui il sangue esce dal cuore per la forza media esercitata dal cuore sul sangue quando viene pompato fuori e la forza come prodotto della pressione p esercitata dal cuore per la sezione S dell'aorta:

$$P = Fv_{\text{media}} = pSv_{\text{media}} = pQ \text{ da cui si vede chiaramente che il lavoro fatto dal cuore in 1s cresce al crescere della pressione sanguigna.}$$

Si verifichi che in un adulto con $p = 100\text{Torr}$ e $Q = 83\text{cm}^3/\text{s}$ si ha $P = 1.1\text{W}$.

Lo Sfigmomanometro

La pressione del sangue si misura con un manometro. Lo strumento tradizionale è un manometro a mercurio collegato ad un bracciale che può essere gonfiato con aria utilizzando un'apposita pompetta di gomma. Il bracciale viene avvolto intorno all'avambraccio, all'altezza del cuore altrimenti bisognerebbe tener conto della correzione idrostatica dovuta alla legge di Stevino. Si pompa aria in modo che il bracciale, gonfiandosi, vada a comprimere l'arteria brachiale fino a bloccare completamente il flusso di sangue nell'arteria del braccio: in questo momento la pressione dell'aria nel bracciale è sicuramente maggiore della pressione sistolica (pressione massima). Successivamente l'aria viene lasciata uscire molto lentamente, azionando un'apposita valvola, mentre con uno stetoscopio si ascolta il rumore di quando il sangue riprende a circolare nell'arteria. Il primo rumore si avverte quando la pressione nel bracciale è uguale alla pressione sistolica: in condizioni di massima pressione un po' di sangue riesce a passare anche attraverso l'arteria schiacciata (sezione piccola → velocità grande → moto turbolento → rumore). Il dislivello della colonna di mercurio (in mm Hg) al primo rumore fornisce pertanto una misura della pressione massima (sistolica). Si fa uscire altra aria dal bracciale fino a quando il rumore cessa perchè il flusso sanguigno è tornato al regime laminare; il dislivello del mercurio nell'istante in cui cessa il rumore rappresenta la pressione minima (diastolica).

Il Moto dei Corpi nei Fluidi Reali

Vediamo ora l'effetto della viscosità sul moto di un corpo all'interno di un fluido reale.

La **forza di Stokes** è la forza che un fluido reale di viscosità h oppone ad un corpo in movimento con velocità v in regime laminare. Questa forza dipende dalle dimensioni e dalla forma del corpo: nel caso in cui il corpo abbia forma sferica con raggio r vale:

$F_S = 6prhv$. Questa relazione è valida solo se il movimento non crea turbolenze nel

fluido ovvero se il **numero di Reynolds** in questo caso definito come $N_R = \frac{rvr}{h}$ è

minore di 0.2. Se $N_R > 1000$ il moto è sicuramente turbolento e $F_S \propto v^2$, mentre per valori intermedi il regime è instabile. Inoltre questa forza, essendo una forza d'attrito, sarà sempre diretta nel verso opposto alla velocità del corpo.

Conseguenza diretta è la **sedimentazione**. Immaginiamo dei corpuscoli di forma sferica di densità r in sospensione in un liquido di densità r' . Le forze cui sono soggetti sono inizialmente forza peso e spinta di Archimede la cui somma, rivolta verso il basso, genera un moto accelerato che porta il corpuscolo a scendere verso il fondo. A causa dell'aumento della velocità la forza di Stokes, inizialmente nulla, cresce d'intensità fino ad equilibrare le prime due. A questo punto la risultante delle forze è nulla e la velocità del corpuscolo raggiunge il valore limite fissato dal Primo Principio della

Dinamica: $\sum \vec{F} = 0 \Rightarrow P - F_A - F_S = 0 \Rightarrow rVg - r'Vg - 6prhv_s = 0$ da cui si

ricava la relazione $v_s = \frac{V(r - r')g}{6phr}$ equivalente a $v_s = \frac{2(r - r')r^2g}{9h}$ dove si è usato

l'espressione del volume della sfera $V = \frac{4}{3}pr^3$.

Lo stesso principio può essere usato per la **centrifuga**. Immaginiamo dei corpuscoli di forma sferica in sospensione in un liquido posto in una provetta in rotazione intorno ad un asse verticale con velocità angolare ω . In questo caso, trascurando la forza peso, si può dimostrare che il corpuscolo in sospensione ad una distanza R dall'asse di

rotazione è soggetto ad una forza centripeta $F_c = r'Vw^2R$ ed applicando il Primo Principio della Dinamica si ottiene:

$$F_c + F_s = Mw^2R \Rightarrow r'Vw^2R + 6prhv_s = rVw^2R \Rightarrow v_s = \frac{V(r - r')w^2R}{6prh}$$

simile alla velocità di sedimentazione nel campo gravitazionale dove al posto di g si deve sostituire l'accelerazione centripeta w^2R .

Esempi

1. Approssimando un globulo rosso ad una sferetta di raggio $r = 2 \cdot 10^{-4} \text{ cm}$ e densità $\mathbf{r} = 1.3 \cdot 10^3 \text{ kg/m}^3$, determinare il tempo necessario affinché si abbia un sedimento di 1mm nel plasma ($\mathbf{r}_0 = 1.0 \cdot 10^3 \text{ kg/m}^3$) alla temperatura $T = 37^\circ \text{C}$ (coefficiente di viscosità $\mathbf{h} = 4 \cdot 10^{-3} \text{ Pa} \cdot \text{s}$): a) nel campo gravitazionale, b) in una centrifuga in cui l'accelerazione è $a = 3 \cdot 10^5 g$.

Soluzione: lo spessore s del sedimento è funzione della velocità di sedimentazione v_s e del tempo t secondo la formula $s = v_s t$. Nel caso a) avremo $v_s = \frac{V(\mathbf{r} - \mathbf{r}')g}{6\pi\mathbf{h}r}$ per cui:

$$t = \frac{s}{v_s} = \frac{6\pi\mathbf{h}rs}{\frac{4}{3}\pi r^3(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0)g} = \frac{9 \times 4 \cdot 10^{-3} \text{ Pa} \cdot \text{s} \times 10^{-3} \text{ m}}{2 \times 4 \cdot 10^{-12} \text{ cm} \times (1.3 \cdot 10^3 \text{ kg/m}^3 - 1.0 \cdot 10^3 \text{ kg/m}^3) \times 9.8 \text{ m/s}^2} = 1530 \text{ s},$$

mentre nel caso b) avremo $v_s = \frac{V(\mathbf{r} - \mathbf{r}')\omega^2 R}{6\pi\mathbf{h}r} = \frac{V(\mathbf{r} - \mathbf{r}')a}{6\pi\mathbf{h}r}$ da cui

$$t = \frac{6\pi\mathbf{h}rs}{\frac{4}{3}\pi r^3(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0)a} = \frac{9 \times 4 \cdot 10^{-3} \text{ Pa} \cdot \text{s} \times 10^{-3} \text{ m}}{2 \times 4 \cdot 10^{-12} \text{ cm} \times (1.3 \cdot 10^3 \text{ kg/m}^3 - 1.0 \cdot 10^3 \text{ kg/m}^3) \times 3 \cdot 10^5 \times 9.8 \text{ m/s}^2} = 5.1 \cdot 10^{-3} \text{ s}$$

2. Una sfera d'alluminio di densità $\mathbf{r} = 2.7 \cdot 10^3 \text{ kg/m}^3$ cade in un recipiente contenente olio lubrificante ($\mathbf{r}_0 = 1.0 \cdot 10^3 \text{ kg/m}^3$ e $\mathbf{h} = 0.6 \text{ Pa} \cdot \text{s}$) raggiungendo la velocità limite $v = 12 \text{ cm/s}$. Determinare il raggio r della sfera e verificare che il moto è laminare calcolando il numero di Reynolds.

Soluzione: la velocità limite della sfera è data dall'espressione $v_s = \frac{V(\mathbf{r} - \mathbf{r}')g}{6\pi\mathbf{h}r}$, il volume è

legato al raggio della sfera da $V = \frac{4}{3}\pi r^3$, per cui il raggio della sfera vale

$$r = \sqrt{\frac{9\mathbf{h}v_s}{2(\mathbf{r} - \mathbf{r}')g}} = \sqrt{\frac{9 \times 0.6 \text{ Pa} \cdot \text{s} \times 0.12 \text{ m/s}}{2 \times (2.7 \cdot 10^3 \text{ kg/m}^3 - 1.0 \cdot 10^3 \text{ kg/m}^3) \times 9.8 \text{ m/s}^2}} = 4.4 \cdot 10^{-3} \text{ m}$$

$$\text{infine } N_R = \frac{\mathbf{r}v_s r}{\mathbf{h}} = \frac{1.0 \cdot 10^3 \text{ kg/m}^3 \times 0.12 \text{ m/s} \times 4.4 \cdot 10^{-3} \text{ m}}{0.6 \text{ Pa} \cdot \text{s}} = 0.44$$

3. Dimostrare che in una centrifuga le particelle in sospensione nel liquido di densità \mathbf{r}' sono soggette alla forza centripeta $F_c = \mathbf{r}'V\omega^2 R$.

Soluzione: basta osservare che se al posto delle particelle ci fosse un pari volume di liquido, questi rimarrebbe in rotazione alla distanza R . Affinché questo avvenga è necessaria la presenza di una forza centripeta il cui modulo soddisfi a $F_c = \mathbf{r}'V\omega^2 R$. Poiché questa forza è esercitata dal resto del fluido non dipende da cosa occupa il volume V , pertanto inserendo ora la particella questa subirà la stessa forza centripeta.

I Fenomeni di Superficie dei Liquidi

Per capire l'importanza di questi fenomeni in biologia, basta considerare che gli scambi di energia e materia di una cellula con l'ambiente esterno avvengono attraverso la sua superficie. Questi fenomeni diventano molto importanti quando il rapporto superficie volume è molto grande, come ad esempio nei polmoni, dove l'eliminazione di anidride carbonica e l'apporto di ossigeno al sangue avviene attraverso la superficie degli alveoli polmonari per diffusione, processo molto lento, che pertanto richiede una superficie di contatto (membrana alveolare) molto estesa, circa 70 m^2 (contro i 2 m^2 della superficie del corpo umano).

Le superfici di separazione fra mezzi diversi - ad esempio tra due liquidi non miscibili o tra un liquido e un gas - possiedono particolari proprietà che danno luogo ad effetti detti fenomeni di superficie. Questi sono essenzialmente dei fenomeni molecolari dovuti alle forze di coesione (forze di attrazione che esistono fra le molecole e che agiscono entro un raggio di azione dell'ordine di 10^{-9} m).

Consideriamo per esempio due molecole poste in un liquido in posizione diversa rispetto alla superficie di separazione liquido-aria, come riportato in figura 26: quella immersa in profondità nel liquido (1) è soggetta alle forze attrattive da parte di tutte le altre molecole che la circondano e che si trovano dentro la sfera il cui raggio è pari al raggio d'azione della forza di coesione. Poiché queste forze sono esercitate da tutte le direzioni ed

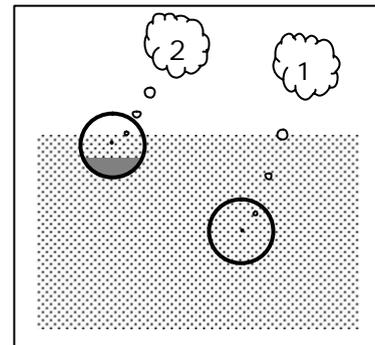


Fig. 26. Effetto di superficie. Le molecole considerate nel testo si trovano al centro dei circoletti.

hanno in media la stessa intensità, la risultante è nulla e la molecola può muoversi liberamente all'interno del volume. Nei pressi della superficie (2), invece, venendo a mancare una parte del liquido che circonda la molecola la forza di attrazione esercitata dalle molecole contenute nella parte grigia del volume non è più compensata

e l'effetto è una forza che attira la molecola verso l'interno. Per questo motivo, tutte le molecole che si trovano nello stato superficiale del liquido, di spessore pari al diametro della sfera d'azione della forza di coesione, sono soggette ad una forza che tende a mantenerle nel liquido. Poiché questa forza attrattiva F agisce su tutta la superficie S del liquido, possiamo definire una **pressione superficiale** come $p_s = \frac{F}{S}$.

In altre parole, a causa delle forze di coesione e della superficie di separazione liquido-aria, il liquido viene a trovarsi in uno stato di compressione.

Volendo aumentare la superficie libera di un liquido sarà necessario far passare un certo numero di molecole dall'interno alla superficie, vincendo le forze di attrazione esercitate dalle altre molecole; occorre quindi compiere un lavoro che si traduce in aumento di energia del sistema. Questo meccanismo ci fa capire come l'aumento di superficie libera di un liquido non possa mai avvenire spontaneamente. Al contrario, la tendenza spontanea di un liquido è di ridurre la propria superficie libera. In particolare, una goccia tende ad assumere la forma sferica (trascurando la gravità) perchè questo è il solido che presenta la minore superficie a parità di volume contenuto ed alla superficie minore compete un'energia minore.

Possiamo quindi immaginare l'energia totale che ha un liquido come formata da due parti, un'energia di volume E_v legata all'energia delle molecole interne ed un'energia superficiale E_s che, come abbiamo visto, dipende solo dalla superficie del liquido, pertanto possiamo scrivere: $E_{tot} = E_v + E_s = E_v + \mathbf{t} S$

La costante di proporzionalità \mathbf{t} fra l'energia richiesta e l'aumento di superficie ottenuto, è detta **tensione superficiale** del liquido ($\frac{J}{m^2}$) e descrive la proprietà del liquido di assumere la configurazione con superficie minima, che nel caso di assenza di gravità corrisponde ad una sfera.

Possiamo arrivare ad un'altra definizione della tensione superficiale \mathbf{t} analizzando il seguente esperimento che ci permette di misurare l'intensità delle forze di coesione. Immaginiamo di avere un telaio di filo metallico di forma rettangolare con un lato AB

mobile, di lunghezza l , che è stato immerso in un liquido e pertanto trattiene una lamina liquida, come illustrato in figura 27. Per aumentare la superficie del velo di liquido attaccato al telaio è necessario applicare una forza \vec{F} che, per esempio, sposti di un tratto x il lato AB. Il lavoro fatto in questo caso, assumendo la direzione della

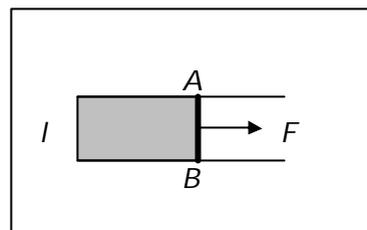


Fig. 27. Effetto della tensione superficiale.

forza parallela allo spostamento, sarà $L = Fx$ e l'aumento di superficie $\Delta S = 2lx$, dove il fattore 2 tiene conto che il velo di liquido ha due facce.

Dalla definizione della tensione superficiale si ricava $t = \frac{\text{energia}}{\text{superficie}} = \frac{L}{\Delta S} = \frac{F}{2l}$ da cui

si vede che la tensione superficiale si può anche interpretare come quella forza per unità di lunghezza che tiene uniti i bordi di un immaginario taglio di lunghezza unitaria della lamina (N/m). Come si può vedere nelle tabelle in fondo al paragrafo la tensione superficiale dipende dal liquido e, per uno stesso liquido, dipende dalla temperatura (all'aumentare della temperatura t diminuisce perché diminuisce l'intensità delle forze di legame) e dal mezzo con cui il liquido è a contatto. Si chiamano **tensioattivi** (sapone, alcool, ecc) quelle sostanze che, se aggiunte ad un liquido, hanno la proprietà di concentrarsi sullo strato superficiale di liquido e pertanto, non essendo attratte con forza dalle molecole del liquido sottostante, ne abbassano la tensione superficiale. La capacità di un tensioattivo di ridurre la tensione superficiale dipende dalla sua concentrazione.

La tensione superficiale compare in diverse proprietà delle superfici:

- lungo i bordi estremi della superficie (per esempio a contatto coi bordi del recipiente) agisce una forza parallela alla superficie, perpendicolare alla linea di contatto e d'intensità $F = t l$ dove l è la lunghezza della linea di contatto;
- **legge di Laplace**: se la superficie di un liquido è curva (bolla d'aria in acqua o goccia di liquido in aria, per esempio), la risultante delle forze dovute alla tensione superficiale determina una differenza di pressione fra l'interno del liquido e

l'ambiente esterno con $p_{\text{int}} > p_{\text{est}}$ (possiamo pensare che sia questa sovrappressione interna che mantiene la bolla). Chiamiamo **pressione di contrattilità** la differenza di pressione $p_c = p_{\text{int}} - p_{\text{est}}$ e si può dimostrare che questa pressione p_c è direttamente proporzionale alla tensione superficiale τ ed inversamente proporzionale al raggio di curvatura. In particolare:

- per una qualunque superficie sferica (goccia) $p_c = \frac{2t}{R}$ (per una superficie piana sarà $p_c = 0$, mentre per una sfera di raggio infinitamente piccolo $p_c \rightarrow \infty$)

- per una superficie cilindrica $p_c = \frac{t}{R}$

- per una bolla (in cui si hanno 2 superfici sferiche di separazione: quella interna aria int/liquido e quella esterna liquido/aria est) $p_c = \frac{4t}{R}$ (questo ci spiega, per esempio, perché le bolle di acqua saponata resistono di più, mentre le bolle di acqua pura si rompono subito, dato che $t_{\text{acqua saponata}} < t_{\text{acqua pura}}$)

L'espressione generale della **legge di Laplace** è data per ogni punto della superficie

da $p_c = t \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right)$ dove R_1 e R_2 sono i raggi di curvatura calcolati lungo due direzioni

qualsiasi ortogonali fra loro, della superficie che delimita una massa liquida. Per esempio nel caso della superficie sferica si avrà sempre lo stesso valore $R_1 = R_2 = R$, mentre nel caso della superficie cilindrica uno dei due raggi di curvatura sarà ∞ . La legge di Laplace vale anche per membrane elastiche sottoposte a due effetti antagonisti, una pressione interna p_{int} e una pressione esterna p_{est} . In particolare per un vaso sanguigno, applicando la legge di Laplace valida per una superficie cilindrica, si ottiene $t = p_c R$ che in questo caso prende il nome di tensione elastica. Si confrontino i valori per l'aorta e per un capillare, consultando le tabelle in fondo al paragrafo.

Fenomeni alla superficie di separazione fra sostanze diverse. Quando si deposita una goccia di liquido su una superficie solida, il liquido può spargersi sulla superficie (come avviene per esempio per l'acqua) o può rapprendersi tendendo a formare una

goccia (per esempio il mercurio). Questo diverso comportamento dipende dalle intensità relative delle forze di coesione (forze che le molecole del liquido esercitano fra loro) e di adesione (forza che la superficie solida esercita sulle molecole del liquido).

Una goccia d'acqua, come si dice, tende a bagnare la superficie distendendosi sulla superficie, mentre una

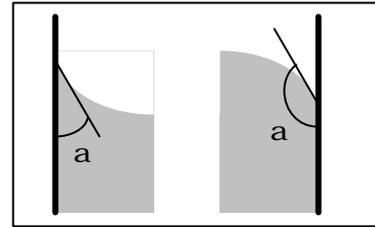


Fig. 28. Effetto della tensione superficiale in presenza di pareti.

goccia di mercurio no. Analogamente, per un liquido contenuto in un recipiente, l'angolo di raccordo fra la superficie del liquido e il recipiente è determinato dalle forze di coesione e da quelle di adesione. In figura 28 sono mostrati due esempi in cui, a sinistra, le forze di adesione sono maggiori di quelle di coesione (il liquido "bagna" la superficie ovvero menisco concavo, con angolo di contatto acuto) e viceversa, a destra, sono le forze di coesione a predominare (menisco convesso, angolo di contatto ottuso). In entrambi i casi, alla superficie di separazione liquido-aria, ci sarà una diversa pressione fra l'interno e l'esterno del liquido e si genererà una pressione di contrattilità regolata dalla legge di Laplace.

Esempi di α	
Acqua-vetro	~ 0
Acqua-paraffina	110
Mercurio-vetro	148
Trementina-vetro	17
Cherosene-vetro	26

Fenomeni di capillarità: quando un tubo di vetro di sezione molto piccola (capillare) viene parzialmente immerso in un liquido, a seconda delle due situazioni descritte in precedenza (menisco concavo o convesso), si produrrà nel capillare un innalzamento o un abbassamento del liquido, rispetto al livello del liquido all'esterno.

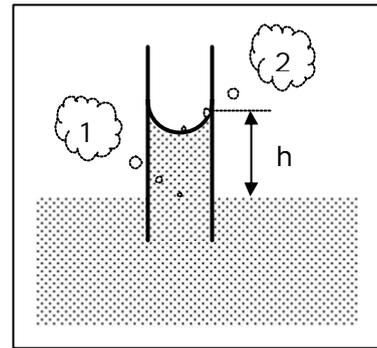


Fig. 29. Effetto di capillarità.

La **legge di Jurin** ci permette di calcolare di quanto il liquido nel capillare si innalza (o si abbassa). Consideriamo

un tubicino immerso in un liquido e con un raggio R sufficientemente piccolo affinché la superficie libera del liquido (menisco) sia una semisfera di raggio R , ovvero che formi nel punto di contatto con il capillare, un angolo $\alpha = 0^\circ$. Analizziamo il caso di un liquido che "bagna" la superficie, per cui per quanto detto prima si avrà un innalzamento h del liquido nel capillare. Per la legge di Laplace, a causa della curvatura nel punto **2** ci sarà una differenza di pressione fra l'interno della semisfera (alla

pressione atmosferica) e l'esterno della semisfera pari a $\frac{2t}{R}$, cioè $p_0 - p_2 = \frac{2t}{R}$

pertanto nel punto **2** ci sarà una pressione minore rispetto a quella atmosferica pari a

$p_2 = p_0 - \frac{2t}{R}$ e quindi il liquido salirà fino ad una altezza h . Poiché deve valere la legge

di Stevino e anche nel punto **1** c'è la pressione atmosferica p_0 , dovrà essere

$p_1 = p_2 + \rho gh$, e quindi $\frac{2t}{R} = \rho gh$ da cui si ricava $h = \frac{2t}{\rho g R}$.

Si può dimostrare che per un angolo α qualsiasi la legge di Jurin diventa $h = \frac{2t \cos \alpha}{\rho g R}$

da cui si vede per $\alpha = 90^\circ$ (per esempio mercurio) si ha $h < 0$ (abbassamento).

TABELLE

Tensione superficiale t	
Sostanza a 20°C	(dine/cm)
Mercurio	476
Acqua	72.8
Glicerina	64.5
Acqua saponata	25.0
Benzolo	28.9
Alcool etilico	22.3
Etere etilico	12.0
Saliva	18.0

Tensione superficiale t dell'acqua vs. temperatura	
°C	(dine/cm)
0	75.6
10	74.2
20	72.8
80	62.6
100	58.9
140	50.8

Tensione elastica nei vasi sanguigni			
Vasi	R (cm)	Pressione (Torr)	Tensione (N/m)
Vena cava	1.6	10	21
Aorta	1.3	100	170
Piccole arterie	$1.5 \cdot 10^{-2}$	60	1.2
Capillari arteriosi	$4 \cdot 10^{-4}$	30	0.4
Vene	$2 \cdot 10^{-2}$	15	0.016

Tensioni interfacciali t	
Sostanza	(dine/cm)
Etere-aria	17
Acqua-aria	72.8
Acqua-olio	21
Olio-aria	32
Benzina-aria	29
Acqua-benzina	34
Acqua-mercurio	427
Mercurio-aria	476

Esempi

1. Determinare il raggio minimo di una goccia d'acqua che si può formare senza evaporare (si assuma la tensione di vapore dell'acqua pari a $p_v = 2 \cdot 10^3 \text{ Pa}$ e la tensione superficiale dell'acqua $t = 7.12 \cdot 10^{-2} \text{ N/m}$).

Soluzione: la pressione di contrattilità $p_c = \frac{2t}{R}$ della superficie sferica della goccia d'acqua, che tende a contenere le molecole d'acqua nella goccia, deve contrastare la tensione di vapore che spinge le molecole a staccarsi dalla goccia, per cui $p_c = p_v$

$$R = \frac{2t}{p_v} = \frac{2 \times 7.12 \cdot 10^{-2} \text{ N/m}}{2 \cdot 10^3 \text{ Pa}} = 7.12 \cdot 10^{-5} \text{ m}.$$

2. Un dischetto di metallo di raggio $r = 1 \text{ cm}$ e spessore $h = 2 \text{ mm}$ galleggia sull'acqua contenuta in un bicchiere. Nell'ipotesi che le superfici del dischetto siano perfettamente lisce, determinare la massima densità del dischetto affinché lo stesso possa galleggiare sull'acqua (si assuma la tensione superficiale dell'acqua $t = 7.12 \cdot 10^{-2} \text{ N/m}$).

Soluzione: la pressione esercitata dal peso del dischetto deformerà la superficie dell'acqua in modo che la stessa eserciti lungo il bordo di contatto tra dischetto e superficie (circonferenza del dischetto), una forza parallela alla superficie e proporzionale alla tensione superficiale $F = 2prt$, la cui componente perpendicolare equilibra il peso del dischetto. Nelle condizioni di massimo sforzo la superficie di contatto diventerà perpendicolare per cui la forza F eguaglierà la forza peso $2prt = mg = pr^2h\rho g$ dove abbiamo espresso la massa attraverso la densità $m = rV = rpr_2h$.

La massima densità vale:

$$\rho = \frac{2t}{rhg} = \frac{2 \times 7.12 \cdot 10^{-2} \text{ N/m}}{10^{-2} \text{ m} \times 2 \cdot 10^{-3} \text{ m} \times 9.8 \text{ m/s}^2} = 0.73 \cdot 10^3 \text{ kg/m}^3.$$

Questo esempio ci permette di capire come, grazie alla tensione superficiale, piccoli oggetti (foglie, fiori, insetti...) possano essere sostenuti sulla superficie di un liquido senza immergersi e come alcuni insetti possano camminare sull'acqua.

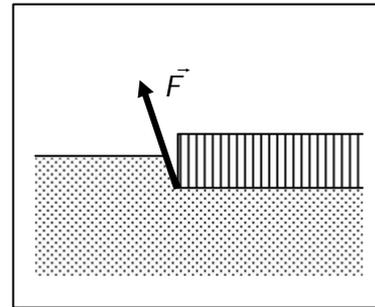


Fig. 30. Problema 2.

3. Un ragazzino, soffiando in una soluzione saponata di tensione superficiale $t = 25 \cdot 10^{-3} \text{ N/m}$, forma una bolla di sapone di raggio $R = 1.40 \text{ cm}$. Calcolare:

- la differenza di pressione fra interno e l'esterno della bolla;
- il lavoro fatto dal ragazzino per gonfiare la bolla di sapone

Soluzione: a) dalla legge di Laplace la pressione di contrattilità di una bolla è data da

$$p_c = \frac{4t}{R} = \frac{4 \cdot 25 \cdot 10^{-3}}{1.4 \cdot 10^{-2}} = 7.16 \text{ Pa}$$

b) Ricordando la definizione di tensione superficiale come $t = \frac{E}{\Delta S}$ possiamo ricavare il lavoro

come aumento di energia in seguito all'aumento della superficie della bolla. L'aumento di superficie è dato da (si noti il fattore 2)

$$\Delta S = 2 \times 4\pi(R_2^2 - R_1^2) = 2 \times 4\pi(1.40^2 - 0) \cdot 10^{-4} \text{ m}^2 = 49.2 \cdot 10^{-4} \text{ m}^2$$

$$\text{pertanto } L = t\Delta S = 25 \cdot 10^{-3} \text{ N/m} \times 49.2 \cdot 10^{-4} \text{ m}^2 = 123 \text{ mJ}$$

4. Determinare l'innalzamento dovuto alla capillarità in un tubo di vetro di diametro $d = 4 \cdot 10^{-3} \text{ cm}$ con un estremo immerso in acqua. Si assuma l'angolo di raccordo sia uguale a zero e che la tensione superficiale dell'acqua sia $t = 7.12 \cdot 10^{-2} \text{ N/m}$.

Soluzione: l'altezza raggiunta dall'acqua nel capillare è data dall'espressione $\frac{2t}{R} = rgh$.

$$h = \frac{2t}{rg \frac{d}{2}} = \frac{2 \times 7.12 \cdot 10^{-2} \text{ N/m}}{10^3 \text{ kg/m}^3 \times 9.8 \text{ m/s}^2 \times 0.5 \times 4 \cdot 10^{-5} \text{ m}} = 0.726 \text{ m}.$$

Da questo risultato si capisce come la capillarità ci permetta di spiegare fenomeni come la salita della linfa nelle piante o la salita dei liquidi in sostanze porose.

L'Elettrostatica

I costituenti elementari della materia possiedono, oltre alla massa, la carica elettrica. La carica elettrica si misura in **Coulomb** (C) ed il valore più piccolo finora osservato è la carica dell'elettrone pari a $q_e = -1.61 \cdot 10^{-19} \text{C}$. In natura esistono corpi dotati di carica elettrica positiva, altri negativa, altri ancora nulla (in ogni caso la carica è un multiplo intero della carica dell'elettrone).

Forza di Coulomb: un corpo puntiforme dotato di carica elettrica q_1 esercita su un secondo corpo puntiforme dotato di carica elettrica q_2 una forza d'intensità:

$$F_c = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{r_{12}^2} \text{ dove } r_{12} \text{ è la distanza tra i corpi}$$

mentre $\epsilon_0 = 8.86 \cdot 10^{-12} \text{C}^2/\text{N} \cdot \text{m}^2$ è la costante dielettrica del vuoto. E' utile ricordare anche

$$\frac{1}{4\pi\epsilon_0} = 8.98 \cdot 10^9 \text{N} \cdot \text{m}^2/\text{C}^2.$$

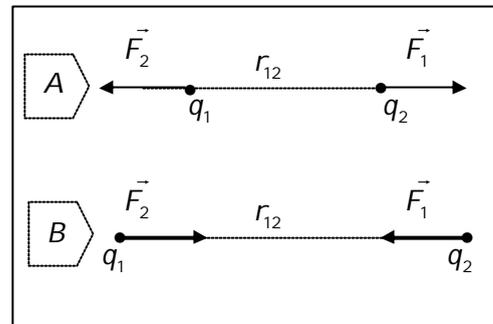


Fig. 31. Esempi di forza di Coulomb:
A - cariche dello stesso segno si respingono,
B - cariche di segno opposto si attraggono.

La forza si esercita lungo la direzione che unisce i due corpi e per il Terzo Principio della Dinamica il secondo corpo esercita sul primo una forza di pari intensità, stessa direzione ma verso opposto. I corpi dotati di carica elettrica dello stesso segno esercitano l'uno sull'altro una forza repulsiva, mentre i corpi dotati di carica di segno opposto esercitano l'uno sull'altro una forza attrattiva. Per esempio, nel caso A riportato in figura 31 le due cariche hanno lo stesso segno e la carica q_1 esercita sulla carica q_2 la forza repulsiva \vec{F}_1 mentre q_2 esercita su q_1 la forza anch'essa repulsiva $\vec{F}_2 = -\vec{F}_1$. Nel caso B le due cariche hanno segno opposto ed esercitano l'una sull'altra una forza attrattiva ed anche in questo caso vale $\vec{F}_2 = -\vec{F}_1$.

La forza elettrostatica agisce a distanza. Possiamo quindi immaginare che una qualunque carica elettrica Q "estenda" la sua presenza al volume che la circonda. E' come se

la singola carica elettrica posta nel punto P avesse registrato in tutti gli altri punti dell'Universo l'informazione della sua presenza in P . Non appena una seconda carica q viene ad occupare un punto del volume questa presenza si manifesta sotto forma di una forza agente sulla carica q pari a $F = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{qQ}{r^2}$. Per descrivere questa presenza

utilizziamo la grandezza vettoriale **campo elettrico** \vec{E} definito come $\vec{E} = \frac{\vec{F}}{q}$. Nel

caso di una carica puntiforme il campo elettrico ha le seguenti proprietà:

- è diretto radialmente verso la carica Q che lo ha generato se $Q < 0$, oppure è diretto in direzione opposta se $Q > 0$, ed

- il suo modulo in un punto distante r vale $E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r^2}$.

Il campo elettrico viene misurato in N/C oppure **Volt/metro** (V/m).

In generale per calcolare la forza esercitata da una distribuzione qualunque di cariche su una carica q posta in un punto P è sufficiente calcolare il valore del campo elettrostatico \vec{E} come somma vettoriale dei campi elettrici generati dalle singole cariche della distribuzione nel punto P (**Principio di sovrapposizione**) e ricavare la forza elettrostatica moltiplicando il valore del campo per q : $\vec{F} = q\vec{E}$.

E' possibile rappresentare graficamente la presenza nello spazio del campo elettrico mediante la tracciatura di linee, dette **linee di campo**, con la condizione che in ogni punto dello spazio il campo elettrico sia tangente alla linea di campo che passa per quel punto. La maggiore densità di linee corrisponde ad una maggiore intensità del campo elettrico.

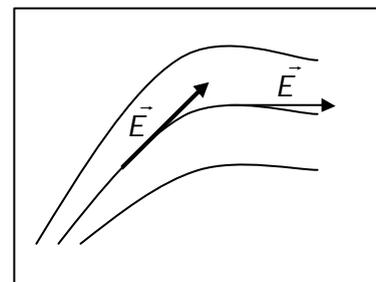


Fig. 32. Linee di campo e campo elettrico.

Non è possibile che due linee di campo si intersechino.

Le linee di campo sono uscenti dalle cariche positive ed entranti verso quelle negative.

Il **dipolo elettrico** è formato da due cariche puntiformi q di segno opposto e mantenute alla distanza fissa d . La forma del campo elettrico, riportata in figura 33, è radiale vicino alle singole cariche come nel caso di una carica puntiforme libera, mentre allontanandosi dalle cariche le linee di campo risentono della presenza dell'altra carica e piegano in modo tale che ogni linea che parte dalla carica q finisce sulla carica $-q$. La grandezza vettoriale che

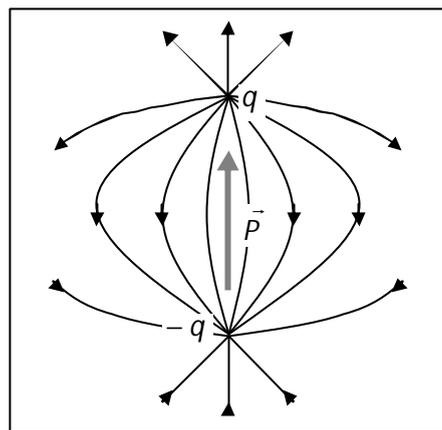


Fig. 33. Campo elettrico generato da un dipolo

lo descrive è il **momento di dipolo** $\vec{P} = q\vec{d}$ orientato come in figura 33. Il valore del campo elettrico generato dal dipolo si può calcolare in ogni punto dello spazio come somma dei campi generati dalle singole cariche $\vec{E} = \vec{E}_q + \vec{E}_{-q}$. Se un dipolo elettrico si trova immerso in un campo elettrico esterno uniforme la carica positiva risentirà di una forza uguale ma di verso opposto alla forza che subisce la carica negativa (la positiva risentirà di una forza $\vec{F} = +q\vec{E}_{est}$ e quella negativa di una forza $\vec{F} = -q\vec{E}_{est}$). L'insieme di queste due forze uguali e contrarie (coppia di forze) tenderà a far ruotare il dipolo. Si dice che un dipolo immerso in un campo esterno subisce un **momento meccanico di rotazione** di intensità pari a $M = PE_{est} \sin \alpha$ dove α è l'angolo formato tra la direzione del vettore momento di dipolo P e la direzione del campo elettrico esterno.

Il dipolo elettrico è una buona approssimazione del comportamento di molte molecole (esempio H_2O) che presentano una distribuzione di cariche positive e negative. In condizioni normali i dipoli delle singole molecole sono orientati in modo casuale, pertanto la somma vettoriale dei loro campi elettrici è nulla, mentre in presenza di un campo elettrico esterno

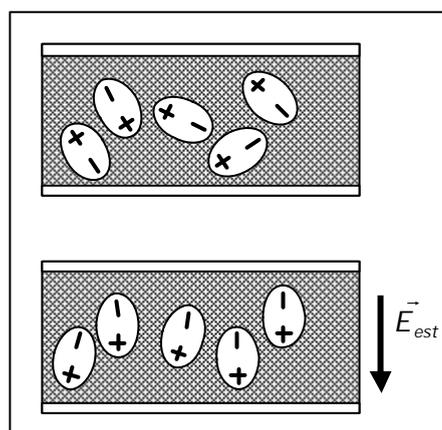


Fig. 34. Polarizzazione dei dipoli molecolari in presenza di un campo elettrico esterno.

\vec{E}_{est} gli stessi ruotano in modo da orientare \vec{P} parallelamente al campo \vec{E}_{est} . In questo modo il campo elettrico all'interno del materiale risulta essere la somma vettoriale del campo generato da ciascun dipolo (adesso tutti orientati nello stesso verso) e del campo elettrico esterno e pertanto risulterà minore di \vec{E}_{est} .

Materiali che si comportano in questo modo vengono detti **dielettrici** e le loro proprietà elettriche vengono descritte mediante la costante dielettrica relativa ϵ_r sempre maggiore di 1. Si può dimostrare che l'intensità del campo elettrico esterno \vec{E}_{est}

assume all'interno del dielettrico il valore (minore di \vec{E}_{est}) $\vec{E} = \frac{\vec{E}_{est}}{\epsilon_r}$.

La forza elettrostatica è conservativa e pertanto è possibile definire l'energia potenziale U che per la forza di Coulomb vale:

$U(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{r}$. In particolare l'energia

potenziale per un dipolo in presenza di un campo esterno \vec{E}_{est} è $U = -\vec{P} \cdot \vec{E}_{est}$.

Analogamente alla relazione $\vec{F} = q\vec{E}$ che lega il campo elettrico alla forza elettrostatica, è possibile scrivere la relazione $U = qV$ che lega l'energia potenziale U al **potenziale elettrico** V . Questa grandezza fisica scalare ha come unità di misura nel sistema **SI** il **Volt** ($V = J/C$) e pertanto il campo elettrico si può misurare in V/m . Nel

caso di una carica puntiforme Q vale la relazione $V(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r}$ mentre per

configurazioni più complicate rimandiamo alla tabella successiva. Al pari del campo elettrico, il potenziale elettrostatico è definito in tutti i punti dello spazio e dipende dalle cariche elettriche presenti e può essere calcolato con il principio di sovrapposizione $V = \sum_i V_i$. Si osservi che questa è una somma di grandezze scalari,

mentre $\vec{E} = \sum_i \vec{E}_i$ è una somma vettoriale ed il calcolo è più complicato. Per questa

ragione, per calcolare il campo elettrico generato da una distribuzione di cariche, è conveniente calcolare prima il potenziale elettrico mediante la somma di grandezze

scalari $V = \sum_i V_i$ e successivamente calcolare \vec{E} mediante la relazione $E_x = -\frac{dV}{dx}$ che

lega ciascuna delle tre componenti del campo elettrico al potenziale elettrico.

Per calcolare il lavoro fatto dalla forza elettrostatica basta ricordare che per forze conservative vale $L = -\Delta U$. Per calcolare la variazione dell'energia potenziale ΔU per una carica che si muove da un punto x_1 ad un punto x_2 è quindi sufficiente valutare l'espressione $\Delta U = q[V(x_2) - V(x_1)]$ dove $V(x)$ è il potenziale elettrico generato dalle altre cariche presenti. La carica q in presenza di un potenziale elettrico V acquista quindi un'energia potenziale $U = qV$ e, se lasciata libera, tenderà a muoversi verso il punto dove U assume il valore minimo.

Partendo dalla legge di Coulomb ed utilizzando il teorema di Gauss è possibile calcolare il campo elettrico generato da una qualunque configurazione di cariche. Nella tabella seguente sono riportati alcuni casi particolari.

Configurazione		Campo elettrostatico		Potenziale elettrostatico
carica punti-forme		$E = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r^2}$	il campo è radiale	$V(r) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r}$ $V(\infty) = 0$
dipolo componente lungo l'asse //	$p = qd$ momento di dipolo (C • m)	$E_x = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{p(2y^2 - x^2)}{(x^2 + y^2)^{3/2}}$		$V(r, \mathbf{q}) = \frac{p \cos \mathbf{q}}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r^2}$
dipolo componente lungo l'asse ⊥		$E_y = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{3pxy}{(x^2 + y^2)^{3/2}}$		
sfera uniformemente carica di raggio R	\mathbf{r} = densità di carica (C/m ³) $Q = \frac{4}{3}\pi R^3 \mathbf{r}$ = carica totale	$E = \frac{\mathbf{r}}{3\epsilon_0} r \quad r \leq R$ $E = \frac{\mathbf{r}}{3\epsilon_0} \frac{R^3}{r^2} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r^2} \quad r > R$	il campo è radiale rispetto al centro della sfera	$V(r) = \frac{\mathbf{r}}{2\epsilon_0} \left(R^2 - \frac{r^2}{3} \right) \quad r \leq R$ $V(r) = \frac{\mathbf{r}}{3\epsilon_0} \frac{R^3}{r} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r} \quad r > R$ $V(\infty) = 0$
superficie sferica uniformemente carica	\mathbf{s} = densità superficiale di carica (C/m ²) $Q = 4\pi R^2 \mathbf{s}$ = carica totale	$E = 0 \quad r \leq R$ $E = \frac{\mathbf{s}}{\epsilon_0} \frac{R^2}{r^2} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r^2} \quad r > R$	il campo è radiale rispetto al centro della sfera	$V(r) = \frac{\mathbf{s}}{\epsilon_0} R \quad r \leq R$ $V(r) = \frac{\mathbf{s}}{\epsilon_0} \frac{R^2}{r} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r} \quad r > R$ $V(\infty) = 0$
filo infinito uniformemente carico	\mathbf{l} = densità lineare di carica (C/m)	$E = \frac{\mathbf{l}}{2\pi\epsilon_0} \frac{1}{r}$	il campo è radiale al filo	$V(r) = -\frac{\mathbf{l}}{2\pi\epsilon_0} \ln r$
anello di raggio R uniformemente carico, in un punto dell'asse		$E = \frac{qz}{4\pi\epsilon_0 (z^2 + R^2)^{3/2}}$	Il campo è diretto lungo l'asse	$V(z) = -\frac{q}{4\pi\epsilon_0 \sqrt{z^2 + R^2}}$
piano infinito uniformemente carico	\mathbf{s} = densità superficiale di carica (C/m ²)	$E = \frac{\mathbf{s}}{2\epsilon_0}$	il campo è perpendicolare al piano	$V(d) = -\frac{\mathbf{s}}{2\epsilon_0} d$ $V(0) = 0$

Esempi

1. Modello dell'atomo di Bohr. Un elettrone di massa $m_e = 9.1 \cdot 10^{-31}$ kg e carica $q_e = -1.61 \cdot 10^{-19}$ C ruota attorno al nucleo atomico, costituito nel caso dell'idrogeno da un singolo protone. Sapendo che percorre una circonferenza di raggio $R = 5.3 \cdot 10^{-11}$ m e che la carica del protone è $q_p = +1.61 \cdot 10^{-19}$ C, calcolare:

- la forza elettrostatica fra elettrone e protone;
- il potenziale generato dal protone alla distanza R a cui si trova l'elettrone;
- la velocità orbitale con cui l'elettrone percorre la circonferenza;
- l'energia totale posseduta dall'elettrone

Soluzione:

a) Dalla legge di Coulomb si ottiene $F_e = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_e q_p}{R^2} = 8.2 \cdot 10^{-8}$ N

b) Dalla definizione di potenziale per una carica puntiforme $V(R) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_p}{R} = +27.2$ V

c) L'elettrone, sotto l'azione della forza elettrostatica, percorre una circonferenza di raggio R, per cui occorrerà collegare tramite il Secondo Principio della Dinamica la forza elettrostatica all'accelerazione centripeta, ottenendo $F_e = m \frac{v^2}{R}$ da cui si ottiene $v = 2.2 \cdot 10^6$ m/s

d) L'energia totale è la somma dell'energia cinetica K e dell'energia potenziale U :

$$K = \frac{1}{2} m v^2 = 2.17 \cdot 10^{-18} \text{ J}$$

$$U(R) = q_e V(R) = -4.35 \cdot 10^{-18} \text{ J}$$

$$\text{Pertanto } E_{tot} = K + U = -2.18 \cdot 10^{-18} \text{ J} = -13.6 \text{ eV}$$

dove si è espresso il risultato utilizzando l'unità di misura elettronvolt, definita come l'energia acquistata da un elettrone quando attraversa la differenza di potenziale di un Volt: $1 \text{ eV} = 1.61 \cdot 10^{-19} \text{ J}$

Si noti che nel risultato ottenuto $E_{tot} < 0$, in generale questo indica uno *stato legato*, in altre parole, indica che la configurazione è stabile ed è necessario fornire energia per portar via l'elettrone (energia di ionizzazione).

2. Una carica puntiforme $q_1 = 5 \mu\text{C}$ è fissata nell'origine ed una seconda carica $q_2 = -2 \mu\text{C}$ è posta sull'asse x , ad una distanza $d = 3\text{m}$, come in figura 35. Calcolare:

- il campo elettrico in un punto P , sull'asse y , a una distanza di 4m dall'origine;
- il potenziale nel punto P ;
- il lavoro richiesto per portare una terza carica puntiforme

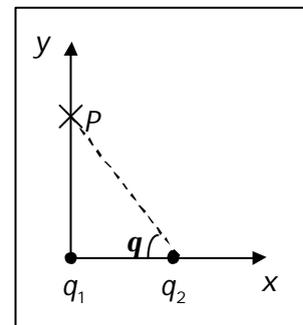


Fig. 35. Problema 2.

$q_3 = 4\mu\text{C}$ dall'infinito al punto P ;

- d) la forza elettrostatica che agisce su q_3 posta in P ;
 e) l'energia potenziale totale del sistema costituito dalle tre cariche nella configurazione finale.

Soluzione:

a) Il campo elettrico è la somma vettoriale dei campi elettrici generati dalle due cariche. Per semplicità conviene calcolare le due componenti E_x ed E_y .

$$E_x = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_2}{r_{2P}^2} \cos \theta = -\frac{1}{4\pi \times 8.86 \cdot 10^{-12} \text{ C}^2/\text{N} \cdot \text{m}^2} \frac{-2\mu\text{C}}{(4^2 + 3^2)\text{m}^2} \frac{3}{\sqrt{4^2 + 3^2}} = 431 \text{ V/m}$$

$$E_y = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1}{r_{1P}^2} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_2}{r_{2P}^2} \sin \theta =$$

$$= \frac{1}{4\pi \times 8.86 \cdot 10^{-12} \text{ C}^2/\text{N} \cdot \text{m}^2} \left(\frac{5\mu\text{C}}{4^2\text{m}^2} + \frac{-2\mu\text{C}}{(4^2 + 3^2)\text{m}^2} \frac{4}{\sqrt{4^2 + 3^2}} \right) = 2232 \text{ V/m}$$

pertanto il campo elettrico \vec{E} avrà modulo $E = \sqrt{E_x^2 + E_y^2} = 2273 \text{ V/m}$ e direzione rispetto

all'asse x data da $\theta = \arctg \frac{E_y}{E_x} \approx 79^\circ$.

b) Il potenziale è la somma dei potenziali generati dalle singole cariche $V_p = V_1 + V_2$.

$$V_1 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1}{r_{1P}} = \frac{1}{4\pi \times 8.86 \cdot 10^{-12} \text{ C}^2/\text{N} \cdot \text{m}^2} \frac{5\mu\text{C}}{4 \text{ m}} = 11.2 \text{ kV}$$

$$V_2 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_2}{r_{2P}} = \frac{1}{4\pi \times 8.86 \cdot 10^{-12} \text{ C}^2/\text{N} \cdot \text{m}^2} \frac{-2\mu\text{C}}{\sqrt{4^2 + 3^2} \text{ m}} = -3.6 \text{ kV}$$

da cui $V_p = 11.2 \text{ kV} - 3.6 \text{ kV} = 7.6 \text{ kV}$

c) Il lavoro è dato da $L = \Delta U = U_p - U_\infty = q_3(V_p - V_\infty) = 4\mu\text{C} \times (7.6 \text{ kV} - 0 \text{ kV}) = 30.4 \text{ mJ}$

$L = -\Delta U = -30.4 \text{ mJ}$ è il lavoro fatto **dalla** forza elettrica

$L = \Delta U = 30.4 \text{ mJ}$ è il lavoro fatto **contro la** forza elettrica

d) Conoscendo il campo elettrico possiamo ricavare la forza elettrostatica $F = q_3 E = 4 \cdot 10^{-6} \text{ C} \times 2273 \text{ V/m} = 9.1 \cdot 10^{-3} \text{ N}$, stessa direzione e verso del campo elettrico.

e) Il modo migliore per calcolare l'energia potenziale è di costruirla immaginando di portare al proprio posto da un punto all'infinito le tre cariche una alla volta, partendo da una situazione iniziale priva di cariche elettriche.

$U_1 = 0$: q_1 non risente di alcun potenziale elettrico;

$U_2 = q_2 V_1(r_{12}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{r_{12}}$: q_2 risente solo della presenza di q_1 .

$U_3 = q_3 V_1(r_{13}) + q_3 V_2(r_{23}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{q_1 q_3}{r_{13}} + \frac{q_2 q_3}{r_{23}} \right)$: q_3 risente della presenza di q_1 e q_2 . Da cui:

$$U = U_1 + U_2 + U_3 =$$

$$= \frac{1}{4\pi \times 8.86 \cdot 10^{-12} \text{ C}^2 / \text{N} \cdot \text{m}^2} \left(\frac{5 \mu\text{C} \times (-2 \mu\text{C})}{3 \text{ m}} + \frac{5 \mu\text{C} \times 4 \mu\text{C}}{4 \text{ m}} + \frac{-2 \mu\text{C} \times 4 \mu\text{C}}{\sqrt{4^2 + 3^2} \text{ m}} \right) = 0.6 \text{ mJ}$$

3. Una lamina estesa non conduttrice è caricata con una densità superficiale di carica $\mathbf{s} = +2 \cdot 10^{-6} \text{ C/m}^2$. Una piccola sfera di massa $m = 1 \text{ g}$ e carica $q = 2 \cdot 10^{-5} \text{ C}$ è tenuta in un punto A , alla distanza $a = 12 \text{ cm}$ dalla lamina. Calcolare:

- il campo elettrico generato nello spazio circostante dalla distribuzione piana di carica;
- la forza che agisce sulla sferetta.

Se la sferetta viene lasciata libera di muoversi, con velocità iniziale $v_A = 0$, calcolare:

- il lavoro fatto dalla forza elettrica quando la sferetta si sposta dal punto A fino a un punto B con $b = 24 \text{ cm}$;
- la velocità con cui la sferetta passa per il punto B .

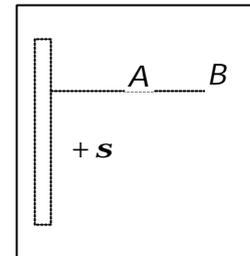


Fig. 36. Problema 3.

Soluzione:

a) Un piano infinito caricato uniformemente genera nello spazio circostante un campo elettrico ortogonale alla lamina costante (indipendente dalla distanza dal piano) di modulo

$$E = \frac{\mathbf{s}}{2\mathbf{e}_0} = \frac{2 \cdot 10^{-6}}{2 \times 8.85 \cdot 10^{-12}} = 1.1 \cdot 10^3 \text{ N/C} \text{ uscente dalla lamina } (\mathbf{s} > 0)$$

b) Conoscendo il campo elettrico, possiamo determinare la forza che agisce sulla sferetta:

$$F = qE = 2.2 \cdot 10^{-2} \text{ N}$$

c) Possiamo calcolare il lavoro come differenza di energia potenziale fra i due punti, esprimendo questa attraverso il potenziale:

$$L_{AB} = U_A - U_B = q(V_A - V_B) = q \frac{-\mathbf{s}}{2\mathbf{e}_0} (a - b) = 2.6 \cdot 10^{-3} \text{ J}$$

d) Applichiamo il teorema lavoro energia cinetica: $L_{AB} = \frac{1}{2} m v_B^2 - \frac{1}{2} m v_A^2$ e ricordando che $v_A = 0$, si ricava $v_B = 2.3 \text{ m/s}$.

La Capacità Elettrica

Immaginiamo una sfera metallica di raggio R in cui è stata depositata una certa carica Q costituita da un certo numero di portatori di carica (per esempio elettroni). Questi esercitano l'uno sull'altro una forza elettrostatica repulsiva, e potendosi muovere solo all'interno del conduttore si dispongono sulla superficie della sfera in modo tale da ridurre al minimo le forze esercitate. Si può dimostrare con il Teorema di Gauss che in questa configurazione il campo elettrostatico all'interno del conduttore è nullo e tutti i punti della superficie sono allo stesso potenziale $V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{R}$. Si osservi che per la sfera metallica il rapporto $C = \frac{Q}{V} = 4\pi\epsilon_0 R$ non dipende dalla carica depositata ma solo dalla geometria del conduttore.

Questa proprietà è generale e possiamo definire il rapporto $C = \frac{Q}{V}$ **capacità elettrica**. Nel sistema **SI** la capacità si misura in **Farad (F)**.

Si chiama **condensatore** il sistema formato da due conduttori (detti armature del condensatore) posti molto vicini uno di fronte all'altro. Se si pone una carica $+Q$ su una delle armature, per il fenomeno dell'induzione elettrostatica, sull'altra armatura vengono indotte cariche di segno opposto pari a $-Q$ e tra le due armature si stabilisce una differenza di potenziale $\Delta V = V_2 - V_1$. Si definisce **capacità di un condensatore** il rapporto $C = \frac{Q}{\Delta V}$ talvolta, per semplicità, si indica solo con V la differenza di potenziale tra le armature.

Un tipo di condensatore di uso comune è il **condensatore a facce piane parallele** dove due superfici conduttrici di forma identica e superficie S sono affacciate l'un l'altra ad una distanza d . In questo caso è possibile dimostrare che la capacità vale

$C = \epsilon_0 \frac{S}{d}$ e che il campo elettrico all'interno del volume del condensatore è costante

in ogni punto e vale $E = \frac{V}{d}$. Il volume delimitato dalle armature del condensatore contribuisce al valore della capacità, infatti inserendo un materiale dielettrico con una costante dielettrica relativa ϵ_r la capacità diventa $C = \epsilon_0 \epsilon_r \frac{S}{d}$.

E' possibile inoltre dimostrare che per depositare la carica Q sulla superficie di un condensatore è necessario fare un lavoro pari a $L = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C} = \frac{1}{2} CV^2$. L'energia è accumulata nel volume del condensatore e può essere riutilizzata permettendo la scarica del condensatore attraverso un conduttore collegato verso massa.

In circuiti elettrici complessi si dice che due condensatori C_1 e C_2 sono in serie, quando sulle armature hanno la stessa carica $Q_1 = Q_2$ e pertanto la differenza di potenziale elettrico sarà data per i singoli condensatori da $\Delta V_i = \frac{Q}{C_i}$, mentre si dice che sono in parallelo quando tra le loro armature esiste la stessa differenza di potenziale $\Delta V_1 = \Delta V_2$ e pertanto la carica indotta sulle armature dei singoli condensatori sarà data da $Q_i = C_i \Delta V$.

E' possibile dimostrare (vedi esempi) che due o più condensatori in serie sono equivalenti ad un condensatore il cui valore è dato da $\frac{1}{C_s} = \sum_i \frac{1}{C_i}$ mentre più condensatori in parallelo sono equivalenti ad un condensatore il cui valore è dato da $C_{//} = \sum_i C_i$. Questo significa che sostituendo in un circuito un gruppo di condensatori con il loro condensatore equivalente, le prestazioni del circuito non cambiano, cioè applicando al circuito di partenza ed al condensatore equivalente la stessa differenza di tensione ΔV viene indotta la stessa carica elettrica Q .

Esempi

1. Verificare la formula dell'energia accumulata in un condensatore a facce piane parallele.

Soluzione: è necessario partire dal condensatore completamente scarico e caricarlo lentamente spostando di volta in volta cariche dq molto piccole (per esempio elettroni) dall'armatura ① all'armatura ② aumentando così la carica positiva $+q$ sull'armatura ② e della stessa quantità la carica negativa $-q$ sull'armatura ① fino al raggiungimento del valore finale Q . Il lavoro per portare la prima carica è ovviamente nullo, ma per tutte le altre occorre ora superare la differenza di potenziale $\Delta V = C \cdot q$ generata dalle cariche q precedentemente spostate. Per farlo è necessario compiere il lavoro $dL = dq \cdot \Delta V$ ovvero $dL = Cdq \cdot q$. Per trovare il lavoro totale è sufficiente a questo punto sommare tutti i lavori individuali $L = \sum dL = C \sum dq \cdot q$.

Il modo più diretto per effettuare il calcolo è trasformare la somma in un integrale di cui è nota la primitiva $L = C \int_0^Q q dq = \frac{1}{2} C q^2 \Big|_0^Q = \frac{1}{2} C Q^2$

2. Calcolare la capacità equivalente di due condensatori in serie.

Soluzione: occorre trovare il valore della capacità sulla quale viene indotta la stessa carica Q una volta che viene applicato la stessa differenza di potenziale ΔV cioè $C = Q/\Delta V$. Basta quindi osservare che poiché due armature sono collegate tra loro ma isolate dal resto del circuito la carica indotta deve essere la stessa per i due condensatori, inoltre deve valere $\Delta V = \Delta V_1 + \Delta V_2$:

$$C = \frac{Q}{\Delta V} = \frac{Q}{\Delta V_1 + \Delta V_2} \Rightarrow \frac{1}{C} = \frac{\Delta V_1 + \Delta V_2}{Q} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}$$

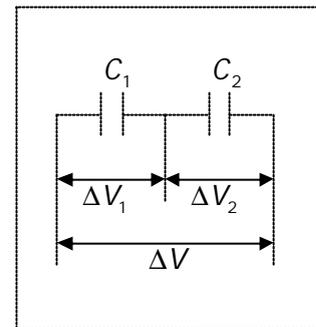


Fig. 37. Problema 2.

3. Calcolare la capacità equivalente di due condensatori in parallelo.

Soluzione: occorre trovare il valore della capacità sulla quale viene indotta la stessa carica Q una volta che viene applicato la stessa differenza di potenziale ΔV cioè $C = Q/\Delta V$. Basta quindi osservare che le armature dei due condensatori che sono collegate tra loro sono allo stesso potenziale (se così non fosse ci sarebbe uno spostamento di cariche dall'una all'altra armatura fino all'annullamento di tale differenza) e che la carica totale indotta è pari alla somma $Q = Q_1 + Q_2$:

$$C = \frac{Q}{\Delta V} = \frac{Q_1 + Q_2}{\Delta V} = \frac{Q_1}{\Delta V} + \frac{Q_2}{\Delta V} = C_1 + C_2$$

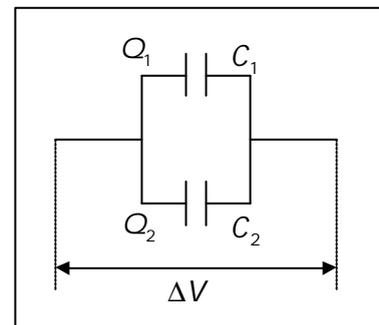


Fig. 38. Problema 3.

4. Due condensatori di capacità $C_1 = 3\text{pF}$ e $C_2 = 5\text{pF}$ sono collegati in serie e fra le armature estreme viene applicata una d.d.p. di $\Delta V = 1000\text{V}$. Calcolare:

- la capacità equivalente;
- la carica elettrica totale
- la d.d.p. tra le armature di ciascun condensatore;
- l'energia totale immagazzinata nei due condensatori.

Soluzione:

a) I due condensatori sono in serie, quindi $\frac{1}{C_{eq}} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} \Rightarrow C_{eq} = \left(\frac{1}{3\text{pF}} + \frac{1}{5\text{pF}} \right)^{-1} = 1.875\text{pF}$.

b) La carica elettrica totale è data da $Q = \Delta V \times C_{eq} = 1000\text{V} \times 1.875\text{pF} = 1.875\text{nC}$.

c) Poiché i due condensatori sono in serie la carica indotta è la stessa e pari alla carica totale, pertanto $\Delta V_1 = \frac{Q}{C_1} = \frac{1.875\text{nC}}{3\text{pF}} = 625\text{V}$ e $\Delta V_2 = \frac{Q}{C_2} = \frac{1.875\text{nC}}{5\text{pF}} = 375\text{V}$

d) L'energia immagazzinata è data da $E = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C_{eq}} = \frac{(1.875\text{nC})^2}{1.875\text{pF}} = 9.375 \cdot 10^{-7} \text{J}$

5. Una goccia di olio carica e di massa $m = 2.5 \cdot 10^{-4} \text{g}$ si trova fra le due armature di un condensatore a facce piane e parallele orizzontali distanti $d = 0.5 \text{cm}$ e di area $A = 200 \text{cm}^2$. Si osserva che la goccia è in equilibrio quando l'armatura superiore possiede una carica $q = 4 \cdot 10^{-7} \text{C}$ e quella inferiore una carica uguale ed opposta. Calcolare:

- la capacità del condensatore;
- il valore del campo elettrico all'interno del condensatore;
- la carica elettrica sulla goccia.

Soluzione:

a) La capacità è data dalla formula $C = \epsilon_0 \frac{S}{d}$ da cui

$$C = 8.86 \cdot 10^{-12} \text{C}^2 / \text{N} \cdot \text{m}^2 \times \frac{200 \cdot 10^{-4} \text{m}^2}{0.5 \cdot 10^{-2} \text{m}} = 36 \cdot 10^{-9} \text{F} = 36 \text{pF}$$

b) Il campo è dato semplicemente da $E = \frac{V}{d} = \frac{q}{Cd} = \frac{4 \cdot 10^{-7} \text{C}}{36 \text{pF} \times 0.5 \cdot 10^{-2} \text{m}} = 2.2 \cdot 10^6 \text{V/m}$

c) La carica elettrica Q sulla goccia deve giustificare l'equilibrio fra forza peso e forza elettrostatica $mg + QE = 0$ da cui si ottiene:

$$Q = -\frac{mg}{E} = -\frac{mgCd}{q} = -\frac{2.5 \cdot 10^{-7} \text{kg} \times 9.8 \text{m/s}^2 \times 36 \text{pF} \times 0.5 \cdot 10^{-2} \text{m}}{4 \cdot 10^{-7} \text{C}} = -1.1 \text{pC}$$

La Corrente Elettrica

In natura esistono dei materiali detti conduttori che contengono elettroni che possono spostarsi abbastanza liberamente al proprio interno. Esempi tipici sono i metalli ed in particolare il rame, l'alluminio, l'argento e l'oro. In generale se fra due punti di un conduttore esiste una differenza di potenziale elettrico ΔV , una parte degli elettroni del conduttore inizia a spostarsi verso il punto d'energia potenziale maggiore (gli elettroni hanno carica elettrica negativa). Si instaura in questo modo un passaggio di cariche nel tempo per cui, per un flusso costante nel tempo, possiamo definire la corrente elettrica I come la quantità di carica che fluisce nell'unità di tempo

$I = \frac{\Delta Q}{\Delta t}$. La corrente elettrica nel sistema **SI** viene misurata in **Ampere (A)**. Questo

movimento si mantiene per tutto il tempo in cui esiste una differenza di potenziale ΔV e la corrente I risulta proporzionale a ΔV . Si chiamano conduttori ohmici quelli per cui questa proporzionalità è lineare e possiamo dire che oppongono una resistenza R costante al movimento delle cariche descritto dalle due **Leggi di Ohm** $\Delta V = RI$ e

$R = r \frac{l}{S}$ essendo l la lunghezza del conduttore, S la sezione e r la resistività

propria di ogni materiale. Questo significa che per far scorrere una corrente I è necessario mantenere una differenza di potenziale ΔV ai due estremi del conduttore e se vogliamo far variare di un fattore k la corrente dobbiamo variare dello stesso fattore la differenza di potenziale. Questa legge ci dice altresì che: se osserviamo un passaggio di corrente attraverso un conduttore si può affermare che agli estremi dello stesso è presente una differenza di potenziale elettrico. Nel sistema **SI** la resistenza si misura in **Ohm (Ω)**.

Cerchiamo di comprendere più a fondo questo fenomeno: in un intervallo di tempo Δt attraverso la resistenza R passerà una carica totale pari in modulo a $|Q| = I\Delta t$ e poiché ai due estremi della resistenza è presente una differenza di potenziale ΔV i

portatori di carica elettrica (per esempio gli elettroni) subiranno una variazione di energia potenziale pari a $\Delta U = Q\Delta V$. Per il teorema della conservazione dell'energia avremo che $\Delta K + \Delta U = L_{nc}$ dove L_{nc} è il lavoro (negativo) fatto dalla resistenza R nell'opporci al passaggio della corrente elettrica. Poiché in un conduttore gli elettroni si muovono con velocità circa costante e pertanto non subiscono una variazione di energia cinetica, avremo che il lavoro speso per far passare una corrente I in un intervallo di tempo Δt è pari a $|L_{nc}| = |\Delta U| = I\Delta V\Delta t$. La potenza dissipata è pertanto

$$P = \frac{L_{nc}}{\Delta t} = I\Delta V \quad (\text{Effetto Joule}). \quad \text{In un conduttore ohmico vale anche } P = I^2 R = \frac{\Delta V^2}{R}.$$

Poiché deve valere $\Delta U < 0$, le cariche positive si muovono dal punto di potenziale elettrico maggiore a quello di potenziale elettrico minore, mentre quelle negative si muovono in senso opposto.

Il circuito elettrico più semplice è quello rappresentato in figura 39, ed è costituito da un conduttore con resistenza R e da una forza elettromotrice f costante nel tempo (per esempio una pila). Per semplicità si considerano i tratti rettilinei del circuito a resistenza nulla per

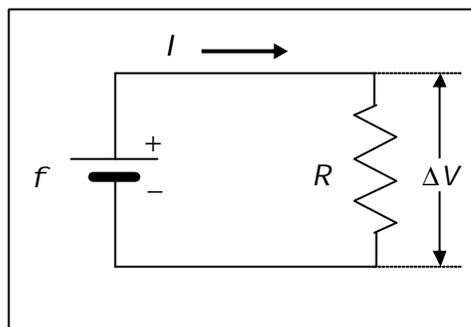


Fig. 39. Circuito elettrico elementare.

cui vengono percorsi dalla corrente elettrica senza perdita di energia. Si noti che punti appartenenti alla stessa linea retta si trovano allo stesso potenziale mentre la differenza di potenziale tra punti posti agli estremi della resistenza vale ΔV . In queste condizioni nel circuito scorre una corrente $I = f/R$ data dalla legge di Ohm.

In circuiti elettrici più complessi si dice che due resistenze R_1 e R_2 sono in serie quando sono attraversate dalla stessa corrente I e la differenza di potenziale per le singole resistenze sarà data da $\Delta V_i = IR_i$ mentre si dice che sono in parallelo quando ai loro capi esiste la stessa differenza di potenziale ΔV e pertanto la corrente che attraversa le singole resistenze è data da $I_i = \Delta V/R_i$. E' possibile dimostrare (vedi

esempi) che due o più resistenze in serie sono equivalenti ad una resistenza il cui valore è dato da $R_s = \sum_i R_i$ mentre più resistenze in parallelo sono equivalenti ad una

resistenza il cui valore è dato da $\frac{1}{R_{//}} = \sum_i \frac{1}{R_i}$. Questo significa che sostituendo in un

circuito un gruppo di resistenze con la loro resistenza equivalente, le prestazioni del circuito non cambiano, cioè applicando al circuito di partenza ed alla resistenza equivalente la stessa differenza di tensione si osserva il passaggio della stessa corrente.

Esempi

1. Calcolare la resistenza equivalente di due resistenze in serie.

Soluzione: occorre trovare il valore della resistenza attraverso la quale scorre la stessa corrente I una volta che viene applicato la stessa differenza di potenziale ΔV cioè $R = \Delta V / I$. Basta quindi osservare che $\Delta V = \Delta V_1 + \Delta V_2$ ed applicare la legge di Ohm alle singole resistenze:

$$R = \frac{\Delta V}{I} = \frac{\Delta V_1 + \Delta V_2}{I} = \frac{\Delta V_1}{I} + \frac{\Delta V_2}{I} = R_1 + R_2$$

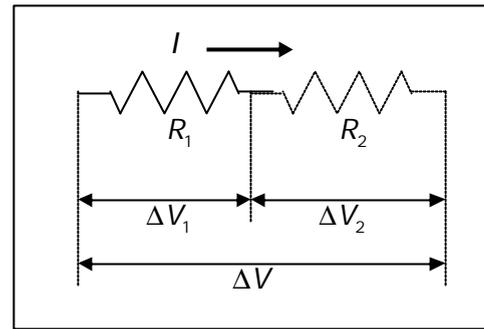


Fig. 40. Problema 1.

2. Calcolare la resistenza equivalente di due resistenze in parallelo.

Soluzione: occorre trovare il valore della resistenza attraverso la quale scorre la stessa corrente I una volta che viene applicato la stessa differenza di potenziale ΔV cioè $R = \Delta V / I$. Basta quindi osservare che $I = I_1 + I_2$ ed applicare la legge di Ohm alle singole resistenze:

$$R = \frac{\Delta V}{I} = \frac{\Delta V}{I_1 + I_2} \Rightarrow \frac{1}{R} = \frac{I_1 + I_2}{\Delta V} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}$$

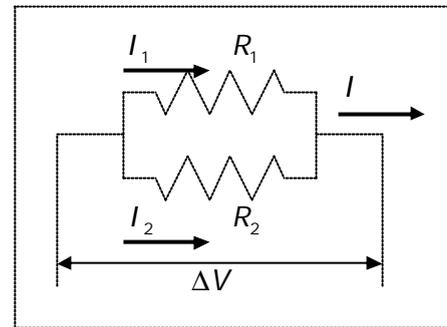


Fig. 41. Problema 2.

3. Descrivere il funzionamento del circuito riportato in figura 42.

Soluzione: anzitutto osserviamo che la forza elettromotrice f genera tra i punti ① e ⑥ una differenza di potenziale $V_1 - V_6$ e che nel circuito circola la corrente I . Tutti i punti tra ① e ② si trovano allo stesso potenziale V_1 . Il punto ③ invece si trova ad un potenziale minore pari a $V_3 = V_1 - \Delta V_1$ a seguito della caduta di potenziale $\Delta V_1 = R_1 I$, ed allo stesso potenziale si trovano tutti i punti tra ③ e ④. Il punto ⑤ si trova ad un potenziale ancora minore pari a $V_5 = V_4 - \Delta V_2$ e poiché questo è il potenziale di tutti i punti compresi tra ⑤ e ⑥ si ottiene rapidamente la seguente relazione $V_6 = V_1 - \Delta V_1 - \Delta V_2$ da cui

$$f = V_1 - V_6 = \Delta V_1 + \Delta V_2 = R_1 I + R_2 I$$

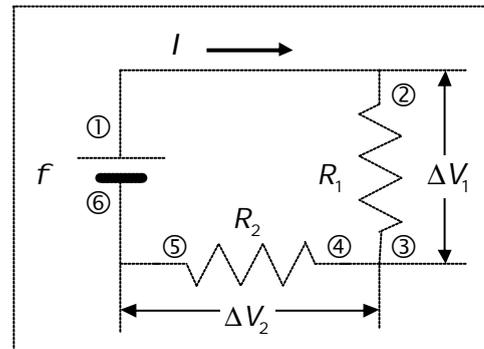


Fig. 42. Problema 3.

4. Dato il circuito riportato in figura 43 con $f = 5\text{ V}$, $R_1 = 2\ \Omega$, $R_2 = 4\ \Omega$ e $R_3 = R_4 = 12\ \Omega$ calcolare:

- la resistenza equivalente del circuito;
- la corrente che fluisce nella resistenza R_1 ;
- la potenza erogata dalla batteria.

Soluzione:

a) Per calcolare la resistenza equivalente basta osservare che R_2 , R_3 e R_4 sono in parallelo e che pertanto possono essere sostituite da un'unica resistenza $R_{//}$

$$\frac{1}{R_{//}} = \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_4} = 0.42\ \Omega^{-1} \quad \text{da cui si}$$

ottiene $R_{//} = 2.4\ \Omega$. Il circuito può essere ora schematizzato come mostrato nella figura qui a fianco da cui si vede che R_1 e $R_{//}$ sono attraversate dalla stessa corrente I . Sono pertanto in serie e possono essere sostituite da un'unica resistenza equivalente $R_S = R_1 + R_{//} = 4.4\ \Omega$

b) Per calcolare la corrente che attraversa la resistenza R_1 basta osservare che la corrente che attraversa R_1 è la stessa che attraversa R_S ed applicare la legge di Ohm al circuito equivalente:

$$I = \frac{f}{R_S} = 1.14\ \text{A} \quad \text{che corrisponde anche alla corrente che attraversa la batteria}$$

c) Possiamo adesso calcolare la potenza erogata dalla batteria $P = I f = 1.14\text{ A} \times 5\text{ V} = 5.7\ \text{W}$. Si noti che la potenza erogata dalla batteria viene dissipata per effetto Joule nelle quattro resistenze del circuito, infatti $P_{\text{Joule}} = I^2 R_S = (1.14\text{ A})^2 \times 4.4\ \Omega = 5.7\ \text{W}$

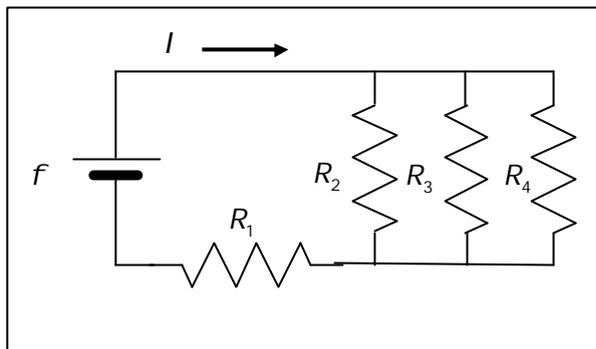


Fig. 43. Problema 4.

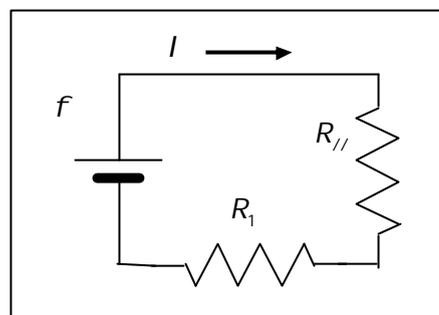


Fig. 44. Problema 4.

5. Si chiamano circuiti RC quei circuiti che, oltre a contenere delle resistenze, contengono anche dei condensatori. Nel circuito rappresentato in figura 45 per esempio, quando viene collegata la batteria, la corrente I , dopo aver percorso le resistenze R_3 ed R_2 , arriva al nodo a , dove si divide in due parti, una parte fluisce nel ramo del circuito dove c'è la resistenza R_1 e un'altra parte nel ramo di destra dove c'è il condensatore di capacità C . A questo punto, il condensatore, inizialmente scarico, inizia a caricarsi immagazzinando cariche sulle sue armature e facendo quindi diminuire la corrente che fluisce nel ramo del circuito dove c'è il condensatore. Si dice che il circuito è in regime stazionario quando il condensatore è completamente carico e nel ramo dove c'è il condensatore la corrente si è ridotta a zero. Con

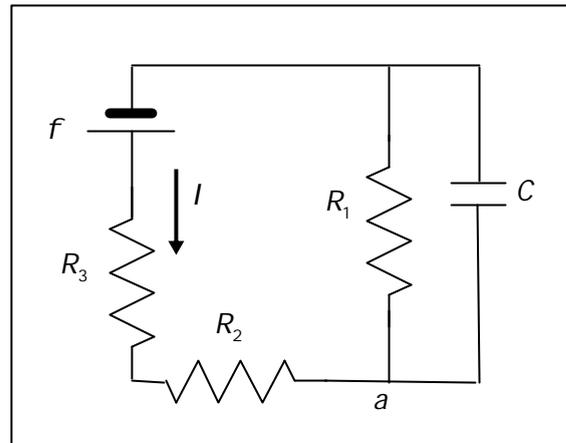


Fig. 45. Problema 5.

riferimento al circuito rappresentato in figura si assuma $f = 50V$, $R_1 = 200\Omega$, $R_2 = 100\Omega$, $R_3 = 50\Omega$, $C = 1\mu F$. In condizioni stazionarie, si calcoli:

- la corrente che fluisce attraverso la batteria;
- la carica sulle armature del condensatore;
- l'energia immagazzinata nel condensatore

Soluzione: In condizioni stazionarie nel ramo di destra del circuito, quello che contiene il condensatore, non passa più corrente, quindi al nodo a la corrente proveniente da R_2 fluirà tutta in R_1 . Pertanto, a regime, il circuito è equivalente a tre resistenze in serie collegate ad una batteria ($R_{eq} = R_1 + R_2 + R_3 = 350\Omega$).

a) Per determinare la corrente basta applicare la legge di Ohm $I = \frac{f}{R_{eq}} = 143\text{mA}$

b) Per calcolare la carica sulle armature del condensatore possiamo determinare la differenza di potenziale tra le sue armature e ricordare la definizione di capacità

$C = \frac{Q}{\Delta V}$ dove ΔV è la differenza di potenziale ai capi del condensatore. Dalla configurazione del nostro circuito, si vede che il condensatore è messo in parallelo alla resistenza R_1 , per cui dovrà essere:

$$\Delta V = IR_1 = 0.143\text{A} \cdot 200\Omega = 28.6\text{V} \text{ e quindi } Q = C\Delta V = 28.6 \cdot 10^{-6}\text{C}$$

c) Per calcolare l'energia immagazzinata nel condensatore, occorre ricordare che

$$E = \frac{1}{2}CV^2 = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C} = 0.41 \cdot 10^{-3}\text{J}$$

Il Magnetismo

In elettrostatica abbiamo visto che una carica q ferma, genera nello spazio un campo elettrico \vec{E} il cui modulo è proporzionale a q , in grado di esercitare una forza elettrostatica su altre cariche. Analogamente una corrente elettrica genera nello spazio un **campo magnetico \vec{B}** in grado di esercitare una forza su altre cariche elettriche in movimento. L'intensità del campo viene misurata nel sistema **SI** in **Tesla** (T). In analogia al campo elettrico possiamo rappresentare il campo \vec{B} mediante vettori tangenti alle linee di campo. Si può dimostrare che le linee del campo \vec{B} , diversamente da \vec{E} , sono sempre linee chiuse.

Filo rettilineo infinito si può dimostrare che in questo caso al passaggio di una corrente I viene indotto un campo \vec{B} la cui intensità è legata alla distanza r dal filo mediante la **legge di Ampere**

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}$$

dove la costante μ_0 è la permeabilità

magnetica del vuoto e vale $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ T} \cdot \text{m/A}$.

In questo caso le linee di campo sono delle circonferenze di raggio r con centro sul filo e poste su un piano perpendicolare alla direzione del filo stesso mentre la direzione di \vec{B} in ogni punto è tangente alla circonferenza. La direzione del campo \vec{B} si può ricavare mediante l'uso della mano destra: tenendo la mano destra aperta con il pollice rivolto nella stessa direzione della corrente si chiudano le altre quattro dita a pugno; il movimento di chiusura della mano indica la direzione d'orientamento del campo magnetico.

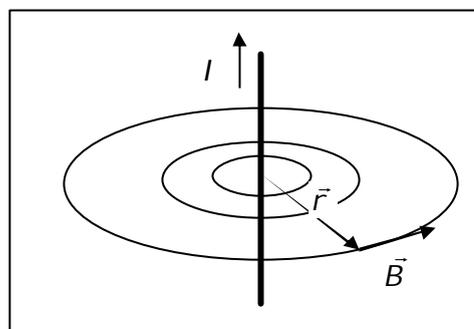


Fig. 46. Campo magnetico generato da un filo rettilineo infinito percorso da corrente.

Solenoide: è costituito da un filo avvolto a spirale attorno ad un cilindro cavo di sezione S . Per un solenoide ideale (tale che la sua lunghezza L sia molto maggiore del diametro del solenoide) si genera in ogni punto all'interno del volume cilindrico un campo magnetico d'intensità uniforme pari a $B = \mu_0 n I$, dove

$n = \frac{N}{L}$ è il numero di spire per unità di lunghezza.

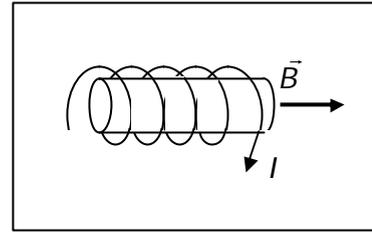


Fig. 47. Solenoide.

La direzione del campo \vec{B} si ottiene usando la regola della mano destra: chiudendo le quattro dita della mano destra con un movimento uguale a quello della corrente nelle spire del solenoide il pollice indica la direzione del campo magnetico. In questo caso le linee di campo all'interno del solenoide sono parallele all'asse dello stesso.

Forza di Lorentz: una carica elettrica q in movimento con velocità \vec{v} in un campo magnetico è soggetta ad una forza pari a $\vec{F} = q\vec{v} \wedge \vec{B}$. L'intensità della forza è data dal prodotto $F = qvB \sin J$ dove J è l'angolo formato fra la velocità della carica ed il campo magnetico per cui l'intensità è massima quando la carica elettrica si muove perpendicolarmente al campo \vec{B} ed è nulla quando si muove parallelamente. La direzione è perpendicolare al piano individuato dai vettori \vec{v} e \vec{B} . Pertanto se i due vettori sono perpendicolari tra loro e \vec{B} è costante, il moto sarà circolare uniforme.

Forza su un filo percorso da corrente: Un filo rettilineo di lunghezza l percorso da corrente I immerso in un campo magnetico \vec{B} subisce una forza pari a $\vec{F} = I \vec{l} \wedge \vec{B}$.

Forza fra due fili paralleli percorsi da corrente: sia d la distanza tra i due fili, la corrente I_1 del primo filo genera un campo

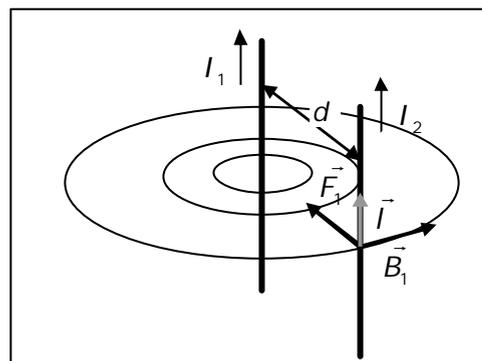


Fig. 48. Forza esercitata tra due fili rettilinei percorsi da corrente.

magnetico $B = \frac{\mu_0}{2p} \frac{I_1}{d}$ che esercita su un tratto l del secondo filo una forza pari a

$\vec{F}_1 = I_2 \vec{l} \wedge \vec{B}$ orientata come in figura 48 ed il cui modulo, secondo la legge di Ampere,

vale $F_1 = \frac{\mu_0}{2p} \frac{I_1 I_2 l}{d}$.

Il risultato del prodotto vettoriale è tale per cui la forza è attrattiva se il verso delle due correnti è concorde come in figura 48 e repulsiva in caso contrario. Inoltre per il Terzo Principio della Dinamica sul primo filo agisce una forza \vec{F}_2 di pari intensità e direzione opposta di modo tale che \vec{F}_1 e \vec{F}_2 siano entrambe attrattive o repulsive.

Esempi

1. Un protone ($q = +1.6 \cdot 10^{-19} \text{C}$ e $m = 1.67 \cdot 10^{-27} \text{kg}$) si muove con una velocità $v = 8 \cdot 10^6 \text{m/s}$ lungo la direzione positiva dell'asse x ed entra in una regione di spazio dove è presente un campo magnetico $B = 2.5 \text{T}$ diretto nel verso positivo dell'asse y . Calcolare:

- intensità e direzione della forza di deflessione che agisce sul protone;
- il raggio della traiettoria circolare percorsa dal protone e la frequenza del moto;
- la corrente che dovrebbe percorrere un solenoide di lunghezza $l = 50 \text{cm}$, formato da 1000 spire, per generare un campo $B = 2.5 \text{T}$.

Soluzione:

a) Il protone è soggetto alla forza di Lorentz la cui intensità vale $F = qvB \sin \mathbf{J}$, da cui $F = 1.6 \cdot 10^{-19} \text{C} \times 8 \cdot 10^6 \text{m/s} \times 2.5 \text{T} = 3.2 \cdot 10^{-12} \text{N}$ con direzione positiva lungo l'asse z .

b) Per ricavare il raggio basta considerare che, in questo caso, la forza centripeta del moto circolare uniforme è data dalla forza di Lorentz, pertanto $\frac{mv^2}{R} = qvB \sin \mathbf{J}$ e ricordando che $\sin 90^\circ = 1$ si può ricavare il raggio della circonferenza:

$$R = \frac{mv}{qB} = 3.34 \text{cm}.$$

La frequenza del moto, ovvero l'inverso del periodo, si può ricavare ricordando che il periodo è il tempo necessario per fare un giro completo:

$$T = \frac{2\pi R}{v} = \frac{2\pi \frac{mv}{qB}}{v} = \frac{2\pi m}{qB} = 2.6 \cdot 10^{-8} \text{s} \text{ da cui } f = \frac{1}{T} = 3.8 \cdot 10^7 \text{Hz}$$

c) La corrente del solenoide è data da $I = \frac{B}{\mu_0 n} = \frac{2.5 \text{T}}{4\pi \cdot 10^{-7} \text{T} \cdot \text{m/A} \times \frac{1000}{0.5 \text{m}}} = 10^3 \text{A}$.

2. Con un lungo filo di rame (resistività $r = 1.7 \cdot 10^{-8} \Omega \text{m}$) di lunghezza $l = 150 \text{m}$ e sezione $S = 0.5 \text{mm}^2$ si realizza un solenoide, formato da $N = 1000$ spire, lungo $L = 40 \text{cm}$. Se il solenoide è collegato ad una batteria di 12V , calcolare:

- la corrente che percorre il solenoide;
- l'energia dissipata per effetto Joule in $t = 2 \text{s}$;
- il campo magnetico B all'interno del solenoide.

Soluzione:

a) Calcoliamo la resistenza del filo $R = r \frac{l}{S} = 1.7 \cdot 10^{-8} \Omega \text{m} \times \frac{150 \text{m}}{0.5 \cdot 10^{-6} \text{m}^2} = 5.1 \Omega$. Nota al

resistenza la corrente si ricava dalla legge di Ohm $I = \frac{\Delta V}{R} = \frac{12 \text{V}}{5.1 \Omega} = 2.35 \text{A}$.

b) $E = \Delta V I t = 12 \text{V} \times 2.35 \text{A} \times 2 \text{s} = 56.4 \text{J}$.

c) $B = \mu_0 n I = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{Tm/A} \times \frac{1000}{0.4 \text{m}} \times 2.35 \text{A} = 7.4 \cdot 10^{-3} \text{T}$.

3. In un filo rettilineo infinito scorre una corrente $I_1 = 0.5\text{A}$ mentre in un secondo filo parallelo al primo e distante $d = 30\text{cm}$, scorre in direzione opposta una corrente $I_2 = 0.3\text{A}$. Calcolare il vettore induzione magnetica B in un punto posto a metà tra i due fili e la forza che viene esercitata su un elettrone che passa in quel punto con velocità $v = 0.9 \times c$, parallela ad I_1 specificando verso quale dei due fili si muoverà l'elettrone.

Soluzione:

Nel punto intermedio il campo B è orientato lungo y ed è dato dalla somma dei campi prodotti dalle due correnti

$$B = B_1 + B_2 = \frac{\mu_0}{2p} \frac{I_1}{d/2} + \frac{\mu_0}{2p} \frac{I_2}{d/2}. \text{ Pertanto}$$

$$B = \frac{4\pi \cdot 10^{-7} \text{Tm/A}}{2\pi} \frac{0.5\text{A} + 0.3\text{A}}{\frac{1}{2} \times 30 \cdot 10^{-2} \text{m}} = 1.07 \cdot 10^{-6} \text{T}.$$

L'elettrone è soggetto alla forza di Lorentz

$\vec{F} = q\vec{v} \wedge \vec{B}$. Poiché \vec{v} è diretta lungo $z > 0$ e \vec{B} è diretto lungo $y > 0$, tenendo conto del segno negativo della carica dell'elettrone, la forza sarà diretta lungo $x < 0$, mentre l'intensità è data da

$$F = qvB \sin J = 1.6 \cdot 10^{-19} \text{C} \times 0.9 \times 3 \cdot 10^8 \text{m/s} \times 1.06 \cdot 10^{-6} \text{T} \times \sin 90^\circ = 4.6 \cdot 10^{-17} \text{N}$$

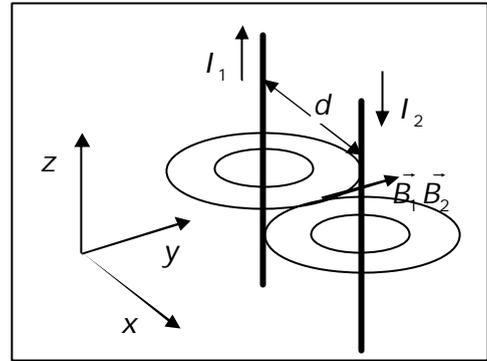


Fig. 49. Problema 3.

L'Induzione Magnetica

Per introdurre il fenomeno dell'Induzione Magnetica occorre aver ben chiaro il concetto di flusso di un vettore attraverso una superficie. Consideriamo una superficie di area S delimitata da un filo chiuso su se stesso (il caso più semplice può essere un cerchio delimitato dalla

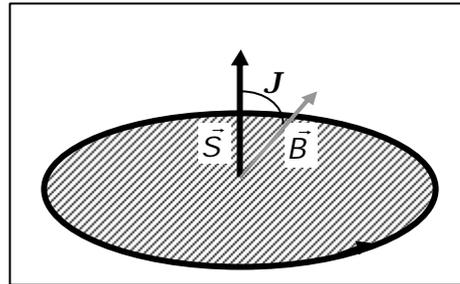


Fig. 50. Flusso del campo magnetico.

circonferenza), l'orientamento della

superficie può essere dato da un vettore \vec{S} perpendicolare alla superficie e di modulo pari a S .

Regola della mano destra: con il pollice rivolto parallelo ad \vec{S} il movimento di chiusura a pugno del palmo della mano fissa il senso di percorrenza del filo.

Se nello spazio dove si trova questa superficie è presente un campo magnetico B , uniforme in tutti i punti che compongono la superficie, si definisce il **flusso concatenato** Φ_B come $\Phi_B = \vec{B} \cdot \vec{S} = BS \cos J$. Nel sistema **SI** il flusso Φ_B si misura in **Weber** (Wb).

La **legge di Faraday-Neumann-Lenz** afferma che una variazione $\Delta\Phi_B$ del flusso induce una forza elettromotrice nel filo pari a $e = -\frac{\Delta\Phi_B}{\Delta t}$. Per avere una variazione del flusso è sufficiente che cambi valore una delle tre grandezze fisiche B , S o J .

Se il filo è un conduttore con resistenza R nel filo circolerà una corrente $I = \frac{e}{R} = -\frac{1}{R} \frac{\Delta\Phi_B}{\Delta t}$. Il segno di I definisce il verso della corrente rispetto al senso di percorrenza del filo. Il verso della corrente è tale da indurre un campo magnetico \vec{B}_I , il cui flusso concatenato si oppone alla variazione $\Delta\Phi_B$. Si noti che la carica che viene

indotta nel circuito sarà data da $Q = I\Delta t = -\frac{\Delta\Phi_B}{R}$ e quindi, al contrario di I , è indipendente dal tempo in cui è avvenuta la variazione di flusso.

Consideriamo un solenoide di lunghezza l e sezione S formato da N spire e percorso da una corrente I : il campo magnetico all'interno del solenoide è dato da $B = \mu_0 n I$

(con $n = \frac{N}{l}$) ed ad ogni spira è associato il flusso $\Phi_B = BS = \mu_0 n S I$ per cui il flusso

totale è pari a $\Phi_T = NBS = \mu_0 n^2 l S I$. Ad una variazione della corrente circolante

corrisponde per la legge di Faraday-Neumann una forza elettromotrice pari a

$\mathcal{E} = -\frac{\Delta\Phi_B}{\Delta t} = -\mu_0 n^2 l S \frac{\Delta I}{\Delta t}$. In generale la relazione si scrive $\mathcal{E} = -L \frac{\Delta I}{\Delta t}$ dove

l'**induttanza** L viene misurata in Henry (H) e dipende dalle proprietà fisiche del

circuito. Nel caso del solenoide avremo $L = \mu_0 n^2 l S$. In analogia a quanto visto per il

condensatore, è possibile dimostrare che in una induttanza L percorsa da una

corrente I è immagazzinata una quantità di energia pari a $E = \frac{1}{2} L I^2$.

Esempi

1. Una bobina, formata da $n_s = 25$ spire di raggio $r = 2\text{cm}$ e di resistenza totale $R = 5.3\Omega$, è disposta ortogonalmente alla direzione del campo magnetico all'interno di un lungo solenoide rettilineo ($n = 100\text{spire/cm}$), percorso da una corrente $I = 10\text{A}$. Calcolare:

- il valore del flusso di B attraverso la bobina;
- la f.e.m. media indotta nella bobina quando la corrente nel solenoide è portata a zero in un tempo $\Delta t = 0.2\text{s}$.
- la potenza media dissipata nella bobina per effetto Joule.

Soluzione:

a) Il flusso è pari a $\Phi_B = n_s SB = n_s \pi r^2 m_0 n I$ da cui

$$\Phi_B = 25 \times \pi \times (0.02\text{m})^2 \times 4\pi \cdot 10^{-7} \text{T} \cdot \text{m/A} \times 10^4 \text{spire/m} \times 10\text{A} = 3.9 \cdot 10^{-3} \text{Wb}.$$

b) La f.e.m. media è data da $e = -\frac{\Delta\Phi_B}{\Delta t} = -\frac{(0 - 3.9 \cdot 10^{-3})\text{Wb}}{0.2\text{s}} = 19.7 \text{mV}.$

c) La potenza media è data da $P = eI = \frac{e^2}{R} = \frac{(19.7 \text{mV})^2}{5.3\Omega} = 7.35 \cdot 10^{-5} \text{W}.$

2. Un solenoide è formato da $N = 10^4$ spire di un filo conduttore di sezione $s = 2.6 \text{mm}^2$ e resistività $r = 1.7 \cdot 10^{-8} \Omega\text{m}$. Il solenoide è lungo $L = 30\text{cm}$ ed ha un raggio $R = 2.5\text{cm}$. Ai suoi capi è applicata una differenza di potenziale $\Delta V = 12\text{V}$. Calcolare:

- la resistenza totale del solenoide;
- la corrente circolante;
- il campo magnetico indotto dal solenoide;
- l'induttanza
- l'energia immagazzinata.

Soluzione:

a) La resistenza della singola spira R_{spira} e la corrente si ottengono dalla legge di Ohm:

$$R = NR_{\text{spira}} = Nr \frac{2\pi R}{s} = 10^4 \times 1.7 \cdot 10^{-8} \Omega\text{m} \times \frac{2 \times 3.14 \times 2.5 \cdot 10^{-2} \text{m}}{2.5 \cdot 10^{-6} \text{m}^2} = 10 \Omega.$$

b) La corrente è data da: $I = \frac{\Delta V}{R} = \frac{12\text{V}}{10\Omega} = 1.2\text{A}.$

c) Il campo magnetico è dato da:

$$B = m_0 n I = m_0 \frac{N}{L} I = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{T} \cdot \text{m/A} \times \frac{10^4 \text{spire}}{0.3\text{m}} \times 1.2\text{A} = 5.0 \cdot 10^{-2} \text{T}.$$

d) L'induttanza vale:

$$L = m_0 n^2 I S = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{T} \cdot \text{m/A} \times \left(\frac{10^4 \text{spire}}{0.3\text{m}} \right)^2 \times 0.3\text{m} \times \pi \times (2.5 \cdot 10^{-2} \text{m})^2 = 0.82\text{H}$$

e) L'energia immagazzinata vale: $E = \frac{1}{2} Li^2 = \frac{1}{2} \times 0.82\text{H} \times 1.2\text{A} = 0.6 \text{J}$

Le Onde Elettromagnetiche e la Luce

Le leggi dell'elettromagnetismo prevedono che i campi elettrico e magnetico generati da cariche elettriche in movimento possano propagarsi nello spazio trasportando energia sotto forma di onde elettromagnetiche.

Proprietà delle onde elettromagnetiche:

- i vettori \vec{E} e \vec{B} oscillano mantenendosi sempre tra loro perpendicolari;
- la direzione di propagazione dell'onda elettromagnetica è perpendicolare al piano individuato da \vec{E} e \vec{B} , si tratta quindi di onde trasversali;
- la velocità di propagazione nel vuoto dell'onda elettromagnetica è finita e vale

$$c = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}} = 3.0 \cdot 10^8 \text{ m/s};$$

- i moduli dei vettori sono legati dalla relazione $E = cB$.

- l'energia media trasportata nell'unità di tempo e per unità di superficie (intensità dell'onda elettromagnetica) è data da $I = \frac{1}{2\epsilon_0} E_{Max} B_{Max}$ e si misura nel **SI** in W/m^2 .

Il campo \vec{E} di una radiazione elettromagnetica che si propaga nella direzione x con oscillazioni di frequenza costante f è data, nella forma più semplice, dalla espressione $E(x, t) = E_0 \cos\left[2\pi\left(\frac{x - ct}{I}\right)\right]$

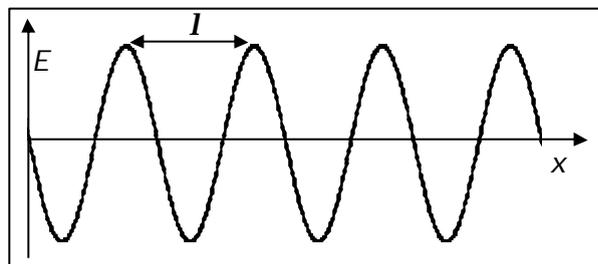


Fig. 51. Onda sinusoidale.

dove I è la lunghezza d'onda della radiazione, corrispondente alla distanza tra due massimi di intensità. Lunghezza d'onda I e frequenza di oscillazione f sono legate dalla relazione $I f = c$. Al diminuire del valore della lunghezza d'onda la radiazione elettromagnetica assume i seguenti nomi: onde radio, microonde, infrarossi, luce visibile, luce ultravioletta, raggi X , raggi g .

In particolare la luce visibile è la parte dello spettro elettromagnetico rivelabile dall'occhio umano ed il colore che percepiamo è legato alla lunghezza d'onda. Ad esempio per il violetto vale $\lambda = 380\text{nm} = 3800\text{\AA}$ (**Angstrom**) mentre per il rosso vale $\lambda = 760\text{nm} = 7600\text{\AA}$.

Polarizzazione. Un'onda elettromagnetica si dice polarizzata quando il vettore campo elettrico oscillando mantiene sempre la stessa direzione. Il piano individuato dalla direzione del vettore \vec{E} e dalla direzione di propagazione dell'onda è detto piano di polarizzazione di \vec{E} . Ovviamente, poiché i vettori \vec{E} e \vec{B} sono sempre tra loro perpendicolari, anche il vettore campo magnetico oscillerà mantenendosi su un suo piano di polarizzazione. La luce emessa da una sorgente comune, come il sole o una lampadina, non è polarizzata, la sua energia è emessa sotto forma di onde elettromagnetiche in cui i vettori \vec{E} e \vec{B} pur mantenendosi tra loro perpendicolari, sono orientati a caso attorno alla direzione di propagazione dell'onda. Quando la luce incide su una superficie piana liscia (ad esempio la superficie del mare o un pavimento), nella riflessione viene parzialmente polarizzata nella direzione parallela alla superficie. Esistono apposite lamine polarizzanti che permettono di "polarizzare" in una certa direzione la luce non polarizzata.

La Riflessione e la Rifrazione

Leggi di Snell: quando un raggio luminoso incide obliquamente sulla superficie che separa due mezzi otticamente trasparenti, una frazione dell'intensità viene riflessa con un angolo rispetto alla normale uguale a quello di incidenza i , mentre

una seconda frazione viene rifratta nel secondo mezzo lungo una direzione che forma un angolo r

rispetto alla normale secondo la relazione $\frac{\sin i}{\sin r} = n_{12}$.

La costante n_i è detta **indice di rifrazione** del mezzo, e corrisponde al rapporto tra la velocità della luce nel vuoto e la velocità della luce nel mezzo $n = \frac{c}{v} \geq 1$ dove $n = 1$ per

il vuoto o con buona approssimazione per l'aria. Per l'acqua ad esempio $n = 1.33$. La

costante $n_{12} = \frac{n_2}{n_1}$ è detta indice di rifrazione del secondo mezzo relativo al primo.

L'indice di rifrazione è una funzione decrescente della lunghezza d'onda ed è massima per la luce violetta e minima per la luce rossa. Questo ci spiega il fenomeno della dispersione cromatica della luce bianca (l'arcobaleno, per esempio). Quando un fascio di luce bianca incide su una superficie rifrangente, le diverse componenti cromatiche vengono rifratte con angoli di rifrazione diversi: le componenti a lunghezza d'onda minore, il blu e il violetto per esempio, vengono rifratte maggiormente di quelle a lunghezza d'onda maggiore, il rosso per esempio.

Riflessione totale: se la luce passa da un mezzo ① più rifrangente ad un mezzo ② meno rifrangente si avrà $n_1 > n_2$ e quindi l'angolo $r > i$. Pertanto esisterà un **angolo limite** di incidenza i_0 in corrispondenza del quale l'angolo di rifrazione vale $r = 90^\circ$. ||

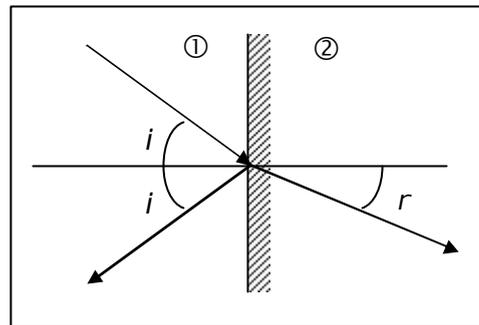


Fig. 52. Legge della riflessione e della rifrazione.

valore dell'angolo limite, facilmente ricavabile dalla legge di Snell, è $i_0 = \arcsin\left(\frac{n_2}{n_1}\right)$. Si noti che per angoli di incidenza $i > i_0$ non si avrà rifrazione nel mezzo ② e il raggio luminoso verrà totalmente riflesso dalla superficie di separazione e quindi l'energia trasportata dal raggio incidente la si ritrova tutta nel raggio riflesso. Per esempio, nel caso della superficie di contatto tra acqua ed aria l'angolo limite per un raggio luminoso proveniente dall'acqua vale $i_0 = \arcsin\left(\frac{1}{1.33}\right) = 49^\circ 20'$. Il fenomeno della riflessione totale ha numerose applicazioni, tra cui la più importante sono le fibre ottiche, molto utilizzate nelle telecomunicazioni e in campo medico (endoscopia).

Gli Specchi

Per costruire l'immagine occorre che il sistema ottico sia in grado di concentrare gli infiniti raggi luminosi che l'oggetto emette da tutti i suoi punti in altrettanti punti coniugati il cui insieme formi l'immagine cercata. La verifica di tale costruzione può essere fatta graficamente disegnando fra tutti i raggi luminosi emessi, due raggi di cui conosciamo il modo con cui vengono riflessi o rifratti.

Nel caso dello **specchio piano** riportato in figura 53 consideriamo anzitutto la punta della freccia nera. Di tutti i raggi emessi seguiamo quello che incide perpendicolarmente allo specchio (e che viene riflesso all'indietro nella stessa direzione) e quello che incide nel punto in cui lo specchio interseca il piano orizzontale (e che viene riflesso con lo stesso angolo di incidenza).

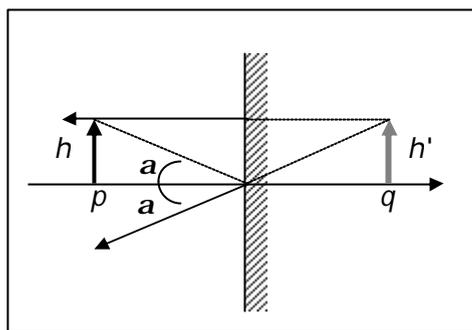


Fig. 53. Specchio piano.

I raggi divergono dopo la riflessione, ma se prolungati all'indietro, oltre la superficie dello specchio, le linee s'incontrano nel punto corrispondente alla punta della freccia grigia. Si potrebbe verificare facilmente che in questo punto s'incontrano i prolungamenti di tutti i raggi emessi dalla punta della freccia nera. Un qualunque altro punto della freccia nera emetterà raggi luminosi i cui prolungamenti andranno ad incontrarsi nel punto equivalente della freccia grigia ricostruendo così completamente l'immagine della freccia. Se l'oggetto è posto a sinistra ad una distanza p dello specchio dove è fissata l'origine degli assi, l'immagine si formerà a destra ad una distanza q . Un'immagine ricostruita con i prolungamenti dei raggi, come quella dello specchio piano, si chiama **immagine virtuale** perché per portarla vedere è necessario uno strumento ottico (per esempio l'occhio) che la osservi. Al contrario, nel punto in cui si forma un **immagine reale** è possibile mettere un foglio di carta (od una pellicola

fotografica) e su questo vedere il formarsi dell'immagine. Infatti solo nel caso di immagine reale i raggi luminosi passano effettivamente per il punto d'intersezione e quindi l'energia trasportata dai raggi luminosi può, per esempio, impressionare una pellicola fotografica. Riassumendo, possiamo dire che l'immagine formata da uno specchio piano è virtuale, diritta, di dimensioni uguali alle dimensioni dell'oggetto ($h = h'$) e posta alla distanza $q = p$ dallo specchio.

Analizziamo ora come si formano le immagini per **specchi sferici**. Uno specchio sferico è caratterizzato da un centro di curvatura C ed un raggio di curvatura R e si chiama convesso o concavo a seconda di come è disposta la curvatura.

Consideriamo ora uno **specchio sferico convesso** di raggio R . In analogia al caso precedente, tracciamo due raggi che si dipartono dalla punta della freccia nera, quello diretto verso il centro C di curvatura dello specchio (e che verrà quindi ri-

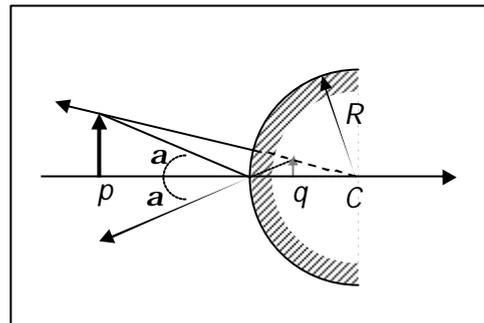


Fig. 54. Specchio sferico convesso.

flesso all'indietro nella stessa direzione) e quello che incide nel punto in cui lo specchio interseca il piano orizzontale (e che viene riflesso con lo stesso angolo di incidenza). Anche in questo caso i raggi dopo la riflessione divergono, ma se prolungati all'indietro, oltre la superficie dello specchio, le linee si incontrano nel punto corrispondente alla punta della freccia grigia. Si può verificare facilmente che in questo punto si incontrano i prolungamenti di tutti i raggi emessi dalla punta della freccia nera. L'immagine che si forma è virtuale, diritta, rimpicciolita e la sua posizione è compresa tra lo specchio ed il centro di curvatura.

Consideriamo infine uno **specchio sferico concavo** di raggio R ed una freccia nera posta alla distanza $p > R$. Tracciamo i due raggi che si dipartono dalla punta della freccia nera, quello diretto verso il centro C di curvatura dello specchio (riflesso

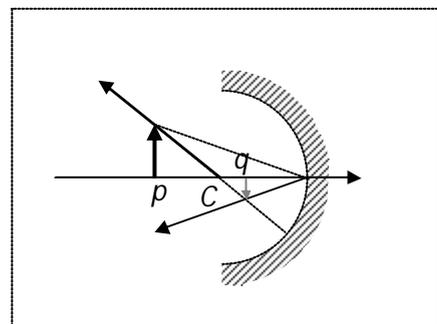


Fig. 55. Specchio sferico concavo.

all'indietro nella stessa direzione) e quello che incide nel punto in cui lo specchio interseca il piano orizzontale (riflesso con lo stesso angolo di incidenza). I raggi dopo la riflessione si incontrano ad una distanza q a sinistra dello specchio. Si può verificare facilmente che in questo punto si incontrano tutti i raggi emessi dalla punta della freccia nera. Il tipo d'immagine che si forma è, pertanto, reale, capovolta, rimpicciolita e la sua posizione è compresa tra lo specchio e il centro. Se l'oggetto è posto a distanze più ravvicinate si può verificare facilmente, con la costruzione grafica, che il tipo d'immagine dipende dalla posizione dell'oggetto. Riassumendo possiamo affermare, che:

- se $p > R$ l'immagine è reale, capovolta e rimpicciolita
- se $\frac{R}{2} < p < R$ l'immagine è reale, capovolta e ingrandita
- se $p < \frac{R}{2}$ l'immagine è virtuale, diritta e ingrandita

E' possibile dimostrare che la relazione che lega la posizione dell'oggetto e dell'immagine, detta anche **legge dei punti coniugati**, può essere espressa in generale

dalla relazione $\frac{1}{q} + \frac{1}{p} = \frac{1}{f}$ dove f è la distanza focale dello specchio e vale $f = \frac{R}{2}$ per specchi concavi e $f = -\frac{R}{2}$ per quelli convessi. Attenzione ai segni in questa equazione:

se si ottiene $q > 0$ l'immagine è reale, altrimenti per $q < 0$ si ha un'immagine virtuale.

Si ossevi inoltre che la posizione dell'immagine di un oggetto posto all'infinito ($p \rightarrow \infty$) coincide con quella del fuoco dello specchio.

Il rapporto G tra le dimensioni dell'immagine h' e dell'oggetto h è detto **ingrandimento** e si può facilmente dimostrare che vale $G = -\frac{q}{p}$. Se $G > 0$ l'immagine è diritta, mentre se $G < 0$ l'immagine è capovolta.

Si noti in particolare che nel caso dello specchio piano $R \rightarrow \infty$ e $\frac{1}{f} = 0$ per cui si avrà $q = -p$ e pertanto $G = 1$: immagine virtuale ($q < 0$), diritta ($G > 0$) e delle stesse dimensioni dell'oggetto.

Il Diottro Sferico

Il **diottro** è formato da due mezzi con indice di rifrazione assoluti n_1 ed n_2 con $n_2 > n_1$ separati da una superficie. Il diottro è la base di una qualunque lente. In analogia a quanto visto nel capitolo precedente studiamo graficamente come il diottro è in grado di ricostruire l'immagine di un oggetto. Consideriamo come esempio un diottro sferico convesso con raggio di curvatura R .

Tracciamo due raggi che si dipartono dalla punta della freccia nera posta nel punto distante p , quello diretto verso il centro di curvatura del diottro (che verrà quindi rifratto senza cambiamenti di direzione) e quello che incide con un angolo a nel punto in cui lo specchio interseca il piano orizzontale

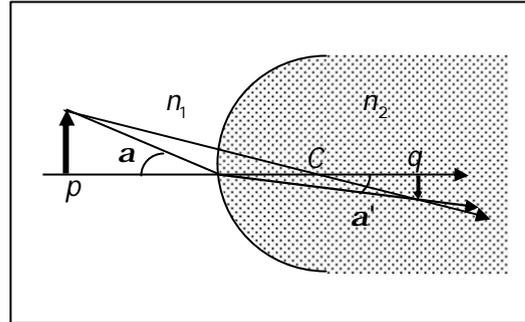


Fig. 56. Diottro sferico convesso.

(che viene rifratto con un angolo $a' < a$). I raggi dopo la rifrazione si incontrano in un punto posto a distanza q . Si può verificare facilmente che in questo punto si incontrano tutti i raggi emessi dalla punta della freccia nera che incidono con angoli piccoli sulla superficie del diottro. Il tipo di immagine che si forma dipende dalla posizione dell'oggetto, nel caso riportato in figura l'immagine che si forma è reale, capovolta e rimpicciolita.

E' possibile dimostrare che la **legge dei punti coniugati per un diottro** è data da

$$\frac{n_2}{q} + \frac{n_1}{p} = \frac{n_2 - n_1}{R}. \text{ Se si ottiene } q > 0 \text{ l'immagine è reale, altrimenti per } q < 0 \text{ si ha}$$

un'immagine virtuale.

La Lente Sottile

Una **lente** è costituita da un mezzo trasparente alla luce con indice di rifrazione n_2 , delimitato da due superfici curve o da una superficie curva e una piana.

Una **lente sottile** ha uno spessore piccolo in confronto ai raggi di curvatura delle due superfici.

Similmente allo specchio, una lente sottile è in grado di ricostruire ad una distanza q (posto sull'asse ottico) l'immagine di un oggetto distante p .

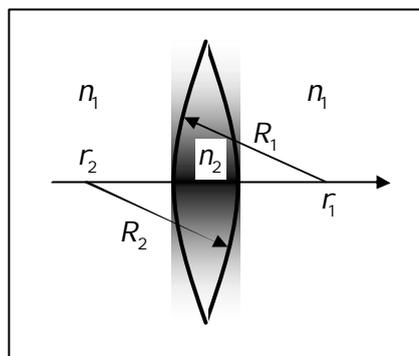


Fig. 57. Lente sottile biconvessa.

La **legge dei punti coniugati di una lente** ha la stessa forma di quella dello specchio, ma l'espressione del fuoco è più complessa, perché deve tenere conto delle due superfici della lente e del diverso indice di rifrazione. Nel caso di una lente sottile la

legge dei punti coniugati vale $\frac{1}{q} + \frac{1}{p} = \frac{1}{f}$ dove l'espressione per la coordinata del

fuoco f o **lunghezza focale** è legata alle coordinate r_1 e r_2 dei centri di curvatura (r_1 corrisponde alla superficie della lente più vicina all'oggetto), all'indice di rifrazione n_2 della lente ed anche all'indice di rifrazione n_1 del mezzo dove è immersa la lente

secondo la relazione $\frac{1}{f} = \left(\frac{n_2}{n_1} - 1 \right) \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right)$. Anche in questo caso se si ottiene $q > 0$

l'immagine è reale, altrimenti per $q < 0$ si ha un'immagine virtuale.

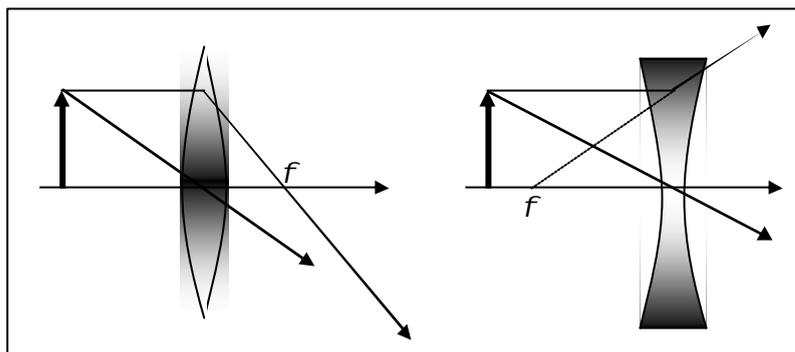
Se si considera la distanza focale in metri, il reciproco $\frac{1}{|f|}$, misurato in m^{-1} , si

esprime in **diottrie** e dà una misura del **poter diottrico** della lente stessa, cioè della sua capacità di convergenza o di divergenza.

Dalla legge dei punti coniugati si ricava la seguente proprietà comune a tutte le lenti: nel caso di un oggetto posto a distanza infinita ($p \rightarrow \infty$), l'immagine si forma nel fuoco

($q = f$). In particolare, se una lente presenta $f > 0$ quando sulla lente incide un fascio di raggi paralleli all'asse ottico (oggetto all'infinito), all'uscita dalla lente si ha un fascio di raggi convergenti in un punto dell'asse distante dalla lente di una quantità pari alla distanza focale ($q > 0$ immagine reale). Viceversa, se la lente ha distanza focale negativa, quando un fascio di raggi paralleli all'asse ottico incide sulla lente, all'uscita dalla lente i raggi divergono, in modo che 'sembrano' provenire da un punto dell'asse distante dalla lente di una quantità pari alla distanza focale ($q < 0$ immagine virtuale).

Fig. 58. Proprietà di rifrazione di una lente sottile.



Questa proprietà fa sì che i raggi luminosi che incidono sulla lente, paralleli all'asse ottico, abbiano una direzione, una volta rifratti dalla lente, passante per il fuoco della stessa. Inoltre un raggio che passi per il centro della lente subisce una doppia rifrazione che lascia inalterata la sua direzione.

Le proprietà di convergenza della lente variano a seconda del tipo di curvatura delle superfici. Nella tabella seguente sono riportati i casi più importanti nell'ipotesi $n_2 > n_1$

Tipo lente	biconvessa	piano convessa	convesso-concava	biconcava	piano concava	concavoconvessa
r_1	> 0	$\rightarrow \infty$	< 0	< 0	$\rightarrow \infty$	< 0
r_2	< 0	< 0	< 0	> 0	> 0	> 0
f	> 0	> 0	> 0	< 0	< 0	< 0
focalizzazione	convergente	convergente	convergente	divergente	divergente	divergente

Possiamo ora vedere nella figura 59 come una lente sottile ricostruisce un'immagine. Tracciamo due raggi emessi dalla punta della freccia nera, il primo parallelo all'asse ottico che sappiamo essere rifratto lungo una direzione che passa per il fuoco della lente, ed il secondo che passi per il centro della lente in modo tale che la sua direzione rimanga inalterata. I raggi rifratti (od i loro prolungamenti all'indietro a seconda che la lente sia convergente o divergente) s'incontrano alla distanza q data dalla legge dei punti coniugati.

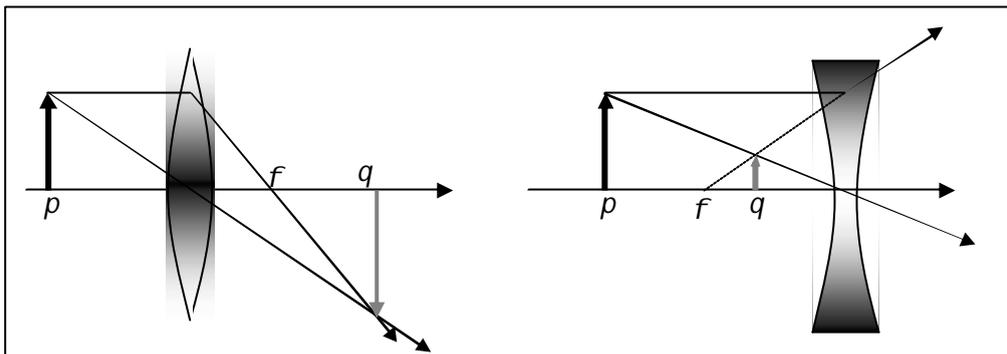


Fig. 59. Ricostruzione dell'immagine da una lente sottile.

Si può verificare che tutti i raggi emessi dalla punta della freccia nera (od i loro prolungamenti) si incontrano in questo punto. Un qualunque altro punto della freccia nera emetterà raggi luminosi i cui prolungamenti rifratti dalla lente andranno ad incontrarsi nel punto equivalente della freccia grigia, ricostruendo così completamente l'immagine dell'oggetto. L'immagine sarà reale se si forma dalla parte opposta della lente mentre sarà virtuale se si forma dalla stessa parte dell'oggetto.

Anche per la lente si definisce **ingrandimento lineare** G , il rapporto tra le dimensioni dell'immagine h' e dell'oggetto h e si può facilmente dimostrare che vale $G = \left| \frac{q}{p} \right|$.

Si definisce **potere risolutivo** di un sistema ottico la minima separazione osservabile tra due oggetti.

Esempi

1. Immaginando di usare in aria una lente sottile biconvessa con indice di rifrazione $n = 1.45$ e raggio di curvatura $R = 10$ cm calcolare la lunghezza focale.

Soluzione: la lunghezza focale si ottiene dalla formula $\frac{1}{f} = \left(\frac{n_2}{n_1} - 1\right) \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right)$ osservando che $n_2 = 1.45$, $n_1 = 1$, $r_1 = R = 10$ cm e $r_2 = -R = -10$ cm quindi:

$$\frac{1}{f} = \left(\frac{n_2}{n_1} - 1\right) \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right) = \left(\frac{1.45}{1} - 1\right) \left(\frac{1}{10 \text{ cm}} + \frac{1}{10 \text{ cm}}\right) = 0.45 \frac{1}{5} \text{ cm}^{-1} \Rightarrow f = 11.11 \text{ cm}$$

$f > 0$ indica che si tratta di una lente convergente con potere diottrico $\frac{1}{f(\text{m})} = 9$ diottrie.

2. Ponendo un oggetto alla distanza di 20 cm dalla lente dell'esercizio precedente calcolare il punto di formazione dell'immagine e specificare il tipo di immagine.

Soluzione: bisogna applicare la legge dei punti coniugati $\frac{1}{q} + \frac{1}{p} = \frac{1}{f}$ osservando che $p = 20$ cm quindi:

$$\frac{1}{q} + \frac{1}{p} = \frac{1}{f} \Rightarrow \frac{1}{q} = \frac{1}{f} - \frac{1}{p} = \frac{p - f}{pf} = \frac{20 \text{ cm} - 11.11 \text{ cm}}{20 \times 11.11 \text{ cm}^2} \Rightarrow q = 25 \text{ cm}$$

poichè q è positivo l'immagine sarà reale, capovolta ed ingrandita con ingrandimento $G = \frac{q}{p} = 1.25$. Si verifichi graficamente.

3. Considerate una bolla sferica d'aria di raggio $R = 5$ cm posta in acqua ($n_{\text{Acqua}} = 1.333$), calcolare la lunghezza focale nell'approssimazione di lente sottile e specificare il tipo di lente.

Soluzione: la lunghezza focale si ottiene dalla formula $\frac{1}{f} = \left(\frac{n_2}{n_1} - 1\right) \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right)$ osservando che $n_2 = 1$, $n_1 = 1.333$, $r_1 = R = 5$ cm e $r_2 = -R = -5$ cm quindi

$$\frac{1}{f} = \left(\frac{n_2}{n_1} - 1\right) \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right) = \left(\frac{1}{1.333} - 1\right) \left(\frac{1}{5 \text{ cm}} + \frac{1}{5 \text{ cm}}\right) = -0.25 \frac{1}{2.5} \text{ cm}^{-1} \Rightarrow f = -10 \text{ cm}$$

e poichè f è negativo la lente sarà divergente.

4. Un proiettore per diapositive utilizza una lente convergente con distanza focale $f = 15 \text{ cm}$ e proietta su uno schermo che dista dalla lente $q = 4 \text{ m}$. Calcolare:

- a) a quale distanza dalla lente deve trovarsi la diapositiva affinché l'immagine sia a fuoco;
- b) l'ingrandimento e le dimensioni dell'immagine di una diapositiva di 35 mm (dimensione della diapositiva).

Soluzione:

a) La distanza a cui deve trovarsi la diapositiva, cioè la posizione p dell'oggetto, si calcola applicando la legge dei punti coniugati $\frac{1}{q} + \frac{1}{p} = \frac{1}{f}$ con $q = 400 \text{ cm}$ e $f = 15 \text{ cm}$, ottenendo $p = 15.6 \text{ cm}$, cioè la diapositiva è posta ad una distanza di 0.6 cm dal fuoco della lente.

b) L'ingrandimento si ottiene da $G = \left| \frac{q}{p} \right| = \frac{400 \text{ cm}}{15.6 \text{ cm}} = 25.6$ e ricordando la definizione di G come rapporto tra le dimensioni dell'immagine h' e dell'oggetto h si possono ricavare le dimensioni dell'immagine $h' = Gh = 25.6 \times 3.5 \text{ cm} \approx 90 \text{ cm}$.

Cosa si deve fare per aumentare la dimensione dell'immagine sullo schermo?

5. Utilizzando una macchina fotografica con una lente da 50 mm si riprende una persona alta 180 cm che si trova alla distanza di 10 m . Calcolare la posizione e le dimensioni dell'immagine.

Soluzione: La macchina fotografica, al contrario del proiettore, opera nelle condizioni in cui l'oggetto si trova a grande distanza dalla lente e l'immagine deve formarsi sulla pellicola, posta vicino alla lente. Dalla legge dei punti coniugati $\frac{1}{q} + \frac{1}{p} = \frac{1}{f}$ con $p = 1000 \text{ cm}$ molto maggiore in modulo di $f = 5 \text{ cm}$, si ricava $q \approx f = 5 \text{ cm}$, cioè la pellicola, praticamente, deve trovarsi nel fuoco della lente.

L'ingrandimento $G = \left| \frac{q}{p} \right| = \left| \frac{f}{p} \right| = \frac{5 \text{ cm}}{1000 \text{ cm}} = 5 \cdot 10^{-3}$ e quindi le dimensioni dell'immagine sulla pellicola saranno date da $h' = Gh = 0.005 \times 180 \text{ cm} \approx 9 \text{ mm}$.

Cosa si deve fare per aumentare l'immagine sulla pellicola?

6. Mostrare graficamente le proprietà di convergenza di una lente convessa e di divergenza di una lente concava.

Soluzione: E' sufficiente ricostruire la doppia rifrazione di un raggio luminoso con direzione iniziale parallela all'asse ottico.

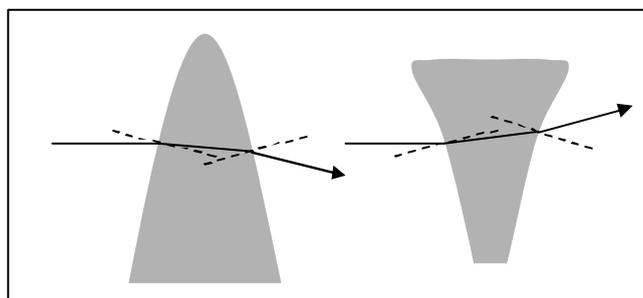


Fig. 60. Rappresentazione grafica della rifrazione di una lente.

Strumenti Ottici: l'occhio umano

L'**occhio umano** è un sistema ottico che forma e proietta le immagini su una superficie sensibile - la *retina* - ricca di fotorecettori (coni e bastoncelli). Il sistema ottico è costituito da un diottro (*cornea*, *umor acqueo*, e *umor vitreo*) di indice di rifrazione 1.33 e da una lente biconvessa, il *cristallino*, di indice di rifrazione 1.44. Cornea, camera anteriore, cristallino e camera posteriore nel loro complesso formano una lente convergente che proietta le immagini sulla retina, rimpicciolite e capovolte. Una membrana muscolare, l'*iride*, al cui centro è ricavata un'apertura, la *pupilla*, serve a diaframmare, cioè a regolare la quantità di luce che entra nell'occhio. Poiché la distanza tra la retina ed il cristallino (q) è fissa, affinché l'immagine di oggetti posti a diverse distanze (p) sia a fuoco sulla retina, occorre variare la lunghezza focale f della lente. Questo si ottiene mediante il **meccanismo di accomodazione**, durante il quale la curvatura della faccia anteriore del cristallino viene modificata dalla contrazione dei muscoli ciliari, variando così la distanza focale f fra 2,4 e 1,7 cm (quasi 60 diottrie). Se i muscoli ciliari sono rilassati, un occhio normale mette a fuoco sulla retina i raggi provenienti da oggetti lontani. Quando l'occhio deve mettere a fuoco oggetti vicini, intervengono i muscoli ciliari diminuendo la curvatura della lente in modo da ottenere distanze focali minori. La **distanza ottimale (visione distinta)** fra oggetto ed occhio è, in media, di $d_0 = 25\text{cm}$, questa distanza aumenta con l'invecchiamento della persona, a causa di una maggior rigidità dei muscoli ciliari (**presbiopia**).

Un occhio **miope**, è un occhio in cui l'immagine - a causa di difetti anatomici tipo eccessiva curvatura della cornea o del cristallino, oppure eccessiva lunghezza della cavità oculare - invece di formarsi sulla retina, si forma in un punto che si trova davanti alla retina. Un occhio miope riesce a mettere a fuoco sulla retina solo le immagini di oggetti vicini, mentre le immagini di oggetti a distanze maggiori risultano

confuse. Per correggere il difetto della miopia è necessaria una lente correttiva divergente.

Al contrario, il difetto visivo per cui l'immagine si forma in un punto che si trova al di là della retina, prende il nome di **ipermetropia**, quando la causa sono dei difetti anatomici costituzionali, o di **presbiopia**, quando la causa è, come abbiamo visto, l'invecchiamento fisiologico dei muscoli ciliari. In questi casi il cristallino riesce a focalizzare bene le immagini di oggetti lontani, ma non riesce a mettere a fuoco oggetti vicini. Per correggere questo difetto occorrerà porre davanti all'occhio una lente convergente.

Il difetto dell'**astigmatismo**, infine, è dovuto a irregolarità nei raggi di curvatura delle varie sezioni del cristallino ed è quello meno facilmente correggibile.

Strumenti Ottici: la Lente d'Ingrandimento

Si chiama **lente d'ingrandimento** una semplice lente biconvessa usata per osservare piccoli oggetti. L'oggetto viene posto tra il fuoco e la lente ad una distanza p dalla lente, come mostrato in figura 61, pertanto, come si vede dalla costruzione grafica, si forma un'immagine virtuale, diritta e ingrandita ad una distanza q dalla lente (immagine che per essere osservata ha bisogno dell'occhio che ne raccolga i raggi luminosi).

L'ingrandimento, in generale, dipende dalla distanza p dell'oggetto:

infatti dalla legge dei punti coniugati

$$q = \frac{pf}{p-f} \quad (\text{si osservi che, essendo}$$

$p < f$, si ha $q < 0 \Rightarrow$ immagine virtuale)

e pertanto $G = \left| \frac{q}{p} \right| = \left| \frac{f}{p-f} \right|$ che

dipende anche dalla posizione p

dell'oggetto. Se, invece, si assume di far cadere l'immagine dell'oggetto nel punto della visione distinta dell'occhio umano $d_0 = 25\text{cm}$, allora si può dimostrare che

l'ingrandimento della lente dipende solo dalla sua lunghezza focale. Infatti, si assuma $q = -d_0 = -25\text{cm}$ (immagine virtuale) e dalla legge dei punti coniugati questa volta si

ricavi $p = \frac{qf}{q-f}$ allora $G = \left| \frac{q}{p} \right| = \left| \frac{q-f}{f} \right| = \frac{d_0}{f} + 1$.

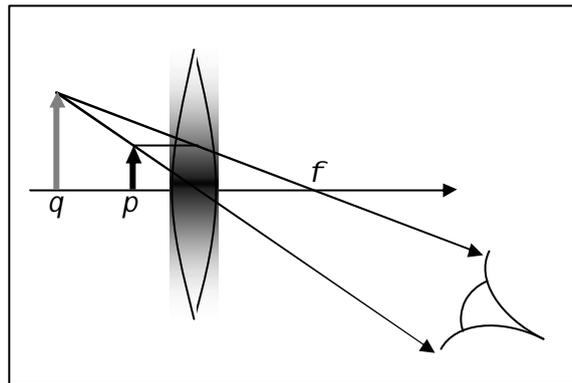
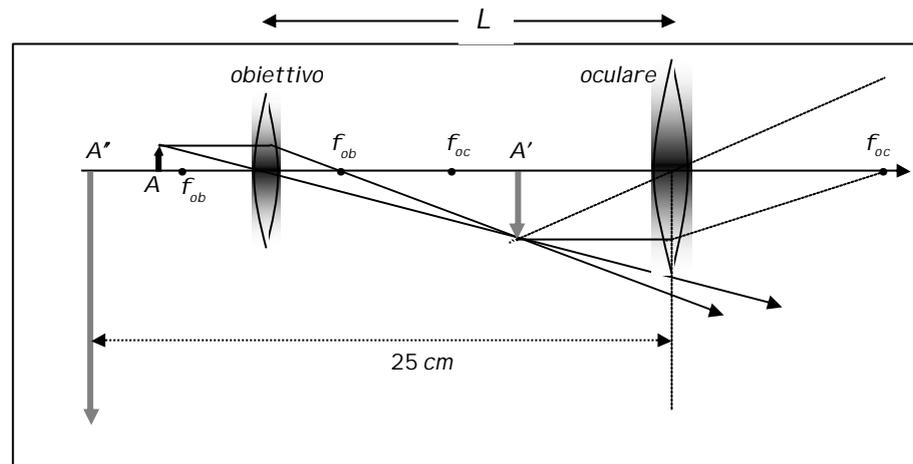


Fig. 61. Ricostruzione dell'immagine da una lente d'ingrandimento.

Strumenti Ottici: il Microscopio

È costituito nel caso più semplice da una prima lente convergente con focale f_{ob} (obiettivo) e da una seconda lente con focale f_{oc} che può essere convergente (oculare positivo) o divergente (oculare negativo) montate all'estremità di un tubo lungo L .

Fig. 62. Ricostruzione dell'immagine da un microscopio con oculare positivo.



L'oggetto da osservare è posto in prossimità dell'obiettivo ad una distanza A appena maggiore della distanza focale f_{ob} , pertanto l'obiettivo forma un'immagine reale capovolta nel punto A' . Questa immagine funge da oggetto per la seconda lente. La posizione dell'oculare è tale per cui il punto A' viene a trovarsi ad una distanza dall'oculare inferiore alla sua distanza focale e quindi l'oculare formerà un'immagine virtuale ingrandita. Lo strumento è costruito in modo che l'immagine finale che si forma in A'' venga a trovarsi ad una distanza $d_0 = 25\text{ cm}$ (punto della visione distinta) dall'occhio dell'osservatore posto in prossimità dell'oculare.

L'**ingrandimento** lineare definito come il rapporto tra le dimensioni dell'immagine e dell'oggetto è dato dal prodotto dell'ingrandimento delle due lenti:

$$G = G_{ob} \cdot G_{oc} = \frac{q_{ob}}{p_{ob}} \cdot \frac{q_{oc}}{p_{oc}} \cong \frac{L - f_{oc}}{f_{ob}} \cdot \left(\frac{25\text{ cm}}{f_{oc}} + 1 \right)$$

Per esempio con $f_{oc} = f_{ob} = 1\text{ cm}$ ed $L = 16\text{ cm}$ si otterrebbe $G = 390$.

Il Potere Risolutivo di un Sistema Ottico

Si definisce **potere risolutivo** di un sistema ottico il reciproco della minima distanza d osservabile tra due punti. Il potere risolutivo è limitato dalla natura ondulatoria della luce e si può dimostrare che $\frac{1}{d} \propto \frac{n}{\lambda}$ dove n è l'indice di rifrazione dell'elemento in cui l'oggetto è immerso e λ la lunghezza d'onda della luce utilizzata. Pertanto per migliorare il **potere risolutivo di un microscopio** si può aumentare n , riempiendo il volume tra l'oggetto e l'obiettivo con una sostanza ad elevato indice di rifrazione (Balsamo del Canada, olio) oppure diminuire la lunghezza d'onda λ della luce utilizzata per illuminare il campione. Un deciso aumento del potere risolutivo si ottiene con il microscopio elettronico, dove la radiazione utilizzata è costituita da un fascio di elettroni che si muove a velocità molto elevata, ottenendo lunghezze d'onda λ associate molto minori delle lunghezze d'onda della luce visibile.

Nel caso dell'occhio invece di potere risolutivo si preferisce parlare di **acuità visiva**, definita come il reciproco del minimo angolo α sotto cui due punti sono percepiti ancora distinti. Infatti, mentre con il microscopio si osservano oggetti tutti alla stessa distanza, con l'occhio si osservano oggetti a distanze molto diverse fra

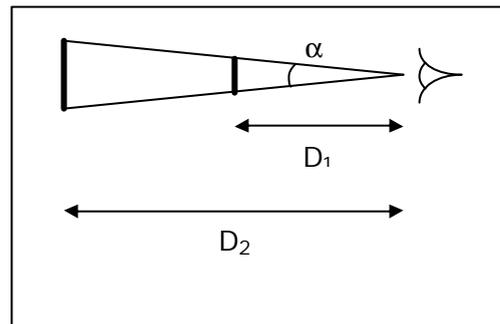


Fig. 63. Acuità visiva = $\frac{1}{\alpha}$.

loro e la capacità di distinguere due particolari aumenta man mano che la distanza D fra l'oggetto e l'occhio diminuisce e le dimensioni dell'immagine retinica crescono.

Esempi

1. Calcolare il potere d'ingrandimento di una lente di lunghezza focale di 5 cm. A quale distanza dalla lente deve essere posto un oggetto per avere questo ingrandimento?

Soluzione: Si è visto che per una lente di ingrandimento in condizioni ottimali (immagine nel

punto della visione distinta $d_0 = 25$ cm) si ha $G = 1 + \frac{d_0}{f} = 1 + \frac{25}{5} = 6$

Per ricavare la distanza dell'oggetto dalla lente basta ricordare la definizione di $G = \left| \frac{q}{p} \right|$ da

cui si ricava $p = \frac{|q|}{G} = 4.17$ cm, cioè in una posizione tra il fuoco e la lente, prossima al fuoco.

2. Una persona presbite non riesce più a focalizzare gli oggetti alla distanza del punto prossimo $d_0 = 25$ cm, ma riesce a mettere correttamente a fuoco oggetti che si trovino ad almeno 100 cm. Quale distanza focale devono avere le lenti degli occhiali usati da questa persona? Quanto vale l'ingrandimento dell'immagine?

Soluzione: Le lenti correttive devono fare in modo che tenendo l'oggetto ad una distanza normale (punto prossimo $d_0 = 25$ cm), la lente ne formi un'immagine virtuale che vada a collocarsi nel punto della visione distinta della persona (100 cm). Pertanto possiamo

determinare la lunghezza focale della lente dalla legge dei punti coniugati $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{f}$

assumendo $p = 25$ cm, $q = -100$ cm (immagine virtuale). Sostituendo, si ottiene:

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{25} - \frac{1}{100} = 0.03 \text{ cm}^{-1}$$

cioè una lente convergente ($f = +33.3$ cm) di potere diottrico 3 diottrie.

L'ingrandimento dell'immagine si ottiene da $G = \left| \frac{q}{p} \right| = \frac{100}{25} = 4$. L'immagine virtuale,

pertanto, è quattro volte più grande dell'oggetto, per cui anche se si trova ad una distanza quadrupla da quella dove è posto l'oggetto, essa appare della stessa grandezza. Infatti, riferendoci alla figura 63, si ha $D_2 = 4D_1$, ma l'angolo α è lo stesso e pertanto la proiezione sulla retina è la stessa.

La Calorimetria

Ogni corpo fisico è costituito da atomi in continuo movimento e legati fra loro mediante forze elettrostatiche. Secondo l'intensità delle forze di legame i corpi possono assumere forma solida, liquida od aeriforme. Ogni corpo possiede un'energia interna U somma dell'energia cinetica e potenziale di tutti i suoi costituenti.

A grammi (A = peso molecolare della sostanza) di materia costituiscono una mole formata da $N_0 = 6.022 \cdot 10^{23}$ atomi (N_0 è il numero di Avogadro). Nonostante il grande numero di costituenti si possono descrivere le proprietà macroscopiche del corpo fisico (sistema termodinamico) mediante un numero limitato di variabili fisiche

(variabili di stato): il volume V , la pressione p , il numero di moli $n = \frac{m}{A}$ e la

temperatura T espressa in gradi Kelvin (K). Per ogni stato di equilibrio del sistema i valori assunti da queste grandezze sono legati tra di loro da una relazione detta

equazione di stato, ad esempio per il gas perfetto vale $pV = nRT$

($R = 8.31 \frac{\text{J}}{\text{mole} \cdot \text{K}}$ è la costante dei gas perfetti). Nei casi in cui n è costante è possibile rappresentare lo stato del sistema come un punto in un piano cartesiano le cui coordinate corrispondono rispettivamente a V e p (piano $p-V$).

La temperatura è un indicatore dell'energia interna di un corpo. Quando due corpi con energia interna diversa sono messi in contatto avviene un trasferimento di energia dal corpo a temperatura maggiore a quello a temperatura minore fino al raggiungimento dell'equilibrio termico quando le due temperature diventano uguali. L'energia scambiata prende il nome di calore (Q), positivo se viene assorbito e negativo se ceduto.

Nel sistema SI la temperatura si misura in gradi Kelvin (K) (ovvero assoluti) ed il calore in Joule. Nella pratica si usano anche i gradi Celsius ($^{\circ}\text{C}$) (gradi centesimali) per la temperatura e le calorie (cal) per il calore. La caloria è definita come la quantità di calore (energia) necessaria per innalzare di un grado centesimale la temperatura di

una massa d'acqua pari ad 1g da 14.5°C a 15.5°C. Valgono le relazioni di conversione:

$$1\text{cal} = 4.18\text{J} \text{ e } x\text{K} = y\text{°C} + 273.15.$$

La **trasmissione di calore**: può avvenire attraverso tre differenti processi:

- **conduzione** quando si ha uno scambio diretto di energia, senza spostamento di materia, tra due corpi messi in contatto, dal corpo a temperatura maggiore a quello a temperatura minore. Per un corpo di lunghezza l e sezione S ed alle cui estremità è presente una differenza di temperatura ΔT , la quantità di calore che fluisce in un

intervallo di tempo Δt è pari a $Q = K_1 \frac{\Delta T}{l} S \Delta t$ dove K_1 è la costante di conducibilità termica;

- **convezione** quando il trasferimento di calore avviene mediante lo spostamento di materia. Per un corpo di superficie S e temperatura T_c investito per un intervallo di tempo Δt da un flusso di aria a temperatura T_A , il calore scambiato è pari a $Q = K_2 (T_A - T_c) S \Delta t$ dove K_2 è una costante che dipende dai due mezzi fra cui avviene lo scambio termico;

- **irraggiamento** mediante emissione di radiazione elettromagnetica (principalmente raggi infrarossi). Il calore ceduto dipende dalla quarta potenza della temperatura assoluta del corpo secondo la legge di Stefan-Boltzmann $Q = K_3 T^4 S \Delta t$. La costante K_3 è data dal prodotto della costante di Stefan-Boltzmann $s = 5.67 \cdot 10^{-8} \text{W/m}^2 \cdot \text{K}^4$ per il potere emissivo sempre compreso tra 0 e 1.

Per un corpo di massa m , l'effetto sulla temperatura del calore assorbito o ceduto è descritto da $Q = mc\Delta T$ dove ΔT è la variazione di temperatura (positiva se il calore è assorbito, negativa se ceduto) e c il **calore specifico** del corpo (definito come il calore necessario per aumentare di 1°C la temperatura di un corpo di massa $m = 1\text{g}$ di una data sostanza); il prodotto $C = mc$ è detto capacità termica del corpo. Poiché la maggior parte dei processi termodinamici avviene a pressione costante (per esempio il metabolismo) o volume costante ci sono due tipi di calore specifico: c_p calore speci-

fico a pressione costante e c_v calore specifico a volume costante. Per i corpi solidi e liquidi le due costanti assumono valori simili, mentre per i gas assumono valori sensibilmente diversi. Inoltre vale sempre la relazione $c_p > c_v$.

Per i gas perfetti si usa definire il calore molare a pressione costante (C_p) o volume costante (C_v) pari al calore necessario per variare di 1K la temperatura di una mole di gas. I due valori sono legati dalla **relazione di Mayer** $C_p - C_v = R$ e valgono:

$$C_p = \frac{5}{2}R \text{ e } C_v = \frac{3}{2}R \text{ (gas monoatomico), } C_p = \frac{7}{2}R \text{ e } C_v = \frac{5}{2}R \text{ (gas biatomico).}$$

Il comportamento di un corpo inizialmente alla temperatura T_i , quando viene fornita o sottratta una certa quantità di calore Q può essere il seguente:

- il corpo subisce la variazione di temperatura $\Delta T = T_f - T_i = Q/mc$, non cambia il proprio stato ma, lasciato libero di espandersi o di contrarsi, subisce una variazione di volume secondo la legge $\Delta V = bV_i\Delta T$ dove b è il coefficiente di dilatazione cubica (la stessa espressione con coefficiente di dilatazione lineare pari a $a \approx \frac{1}{3}b$ si applica ad ogni dimensione per trovare l'allungamento lineare $\Delta l = a'l_i\Delta T$ - il termometro a mercurio si basa su questo effetto);
- il corpo subisce un cambiamento di stato mantenendo costante la propria temperatura ed il calore scambiato durante il processo vale $Q = mI$ dove I è il calore latente per unità di massa e m la massa che subisce il cambiamento di stato.

In tabella sono riportati i possibili cambiamenti di stato; si noti come i calori latenti di solidificazione e di liquefazione assumano un valore negativo perché in queste trasformazioni il corpo cede calore.

Tipo trasformazione		Calore latente
solido \rightarrow liquido	fusione	I_F
liquido \rightarrow solido	solidificazione	$-I_F$
liquido \rightarrow gas	evaporazione	I_E
gas \rightarrow liquido	liquefazione	$-I_E$
solido \rightarrow gas	sublimazione	I_S

Le trasformazioni termodinamiche più semplici sono quelle quasi-statiche e reversibili.

La **trasformazione quasi-statica reversibile** è una trasformazione da uno stato iniziale A ad uno finale B , costituita da una serie di passaggi consecutivi fra stati di equilibrio, che avviene così lentamente che la variazione è quasi trascurabile (quasi-statica) e la direzione di evoluzione è impercettibile (reversibile). Si osservi che in questo tipo di trasformazioni il valore delle variabili di stato è sempre definito pertanto in un piano $p-V$ possono essere rappresentate da linee che congiungono i punti corrispondenti ai differenti stati termodinamici.

Per comprendere il significato di trasformazione quasi-statica basti pensare a come scaldare una pentola piena d'acqua fino a portarla alla temperatura di ebollizione. La procedura più semplice è quella di mettere la pentola su una fonte di calore a temperatura almeno pari a quella di ebollizione dell'acqua. Questa chiaramente non è una trasformazione reversibile. Per poter scaldare l'acqua in modo reversibile occorre avere una successione di fonti di calore a temperatura leggermente superiore ciascuna rispetto alla precedente che copra l'intervallo di temperatura da quella iniziale dell'acqua fino alla temperatura di ebollizione e mettere in contatto la pentola con ciascuna fonte di calore in successione aspettando ogni volta che l'acqua raggiunga l'equilibrio termico con la sorgente di calore. In questo modo la differenza di temperatura tra pentola e sorgente di calore è molto piccola e quasi trascurabile, quindi la quantità di calore ceduto all'acqua è così piccola da non alterare l'equilibrio termico del sistema.

Nella tabella sono elencate le trasformazioni termodinamiche più semplici e la loro rappresentazione nel piano $p-V$ nel caso si tratti di trasformazioni quasi-statiche o reversibili:

isobara	$p = \text{costante}$	segmento orizzontale nel piano $p-V$
isocora	$V = \text{costante}$	segmento verticale nel piano $p-V$
isoterma	$T = \text{costante}$	dipende dal sistema considerato
adiabatica	$Q = 0$	dipende dal sistema considerato

Esempi

1. Una quantità di calore pari a $Q = 300\text{kJ}$ viene fornita ad una massa $m = 720\text{g}$ di ghiaccio posta inizialmente alla temperatura -20°C . Calcolare la temperatura finale dell'acqua.

Soluzione: per comodità convertiamo anzitutto in calorie il calore a disposizione: $Q = 300\text{kJ}/(4.18\text{J/cal}) = 71.8\text{kcal}$.

Per scaldare il blocco di ghiaccio fino alla temperatura di 0°C è necessaria la quantità di calore $Q_1 = c_{\text{ghiaccio}} m \Delta T = 0.5 \frac{\text{cal}}{\text{g} \cdot ^\circ\text{C}} \times 720\text{g} \times (0^\circ\text{C} + 20^\circ\text{C}) = 7.2\text{kcal}$. Poiché questo valore è minore della quantità Q il blocco di ghiaccio, non appena raggiunta la temperatura di 0°C , inizierà a fondere. Il calore necessario per la fusione di tutto il blocco è pari a $Q_2 = l_{\text{ghiaccio}} m = 79.7 \text{ cal/g} \times 720\text{g} = 57.4\text{kcal}$. Infine l'ultima frazione di calore disponibile pari a $Q_3 = Q - Q_1 - Q_2 = 7.2\text{kcal}$ verrà utilizzata per scaldare l'acqua fino ad una temperatura T_f tale che $\Delta T = T_f - 0^\circ\text{C} = \frac{Q_3}{c_{\text{acqua}} m} = \frac{7.2\text{kcal}}{1.0 \frac{\text{cal}}{\text{g} \cdot ^\circ\text{C}} \times 720\text{g}} = 10^\circ\text{C}$.

2. Un litro di acqua viene versato in un recipiente tenuto a pressione $p = 1\text{atm}$ e mantenuto a temperatura costante da un termostato a $T = 373\text{K}$. In tali condizioni tutta l'acqua evapora e va ad occupare l'intero volume del recipiente. Conoscendo il calore di evaporazione $l = 539\text{cal/g}$ e la densità dell'acqua liquida $r = 1\text{g/cm}^3$, trovare:

- la massa e il numero di moli di H_2O (peso molecolare $M = 18$);
- il calore scambiato;
- il volume del recipiente (si tratti il vapore acqueo come un gas perfetto).

Soluzione:

a) La massa è $m = Vr = 10^3\text{cm}^3 \times 1\text{g/cm}^3 = 10^3\text{g} = 1\text{kg}$ e le moli $n = \frac{m}{M} = \frac{10^3}{18} = 55.6$

b) Il calore scambiato è $Q = ml = 10^3\text{g} \times 539\text{cal/g} = 5.39 \cdot 10^5\text{cal}$

c) Nell'ipotesi di gas perfetto vale $pV = nRT$ da cui

$$V = \frac{nRT}{p} = \frac{55.6\text{moli} \times 8.31 \frac{\text{J}}{\text{mole} \cdot \text{K}} \times 373\text{K}}{10^5\text{Pa}} = 1.72\text{m}^3$$

3. Una sbarra di ferro lunga $L = 20\text{cm}$ e sezione $S = 3\text{cm}^2$ ha un'estremità in un bagno di acqua e ghiaccio a $T_1 = 0^\circ\text{C}$ e l'altra in acqua bollente e vapore a $T_2 = 100^\circ\text{C}$. La conducibilità termica della sbarra di ferro è $K = 0.16 \frac{\text{cal}}{\text{cm} \cdot \text{s} \cdot ^\circ\text{C}}$. Assumendo che il calore sia trasmesso per conduzione solo attraverso la lunghezza della sbarra, si calcoli:

- quanto calore viene trasmesso nell'unità di tempo lungo la sbarra;
- la quantità di calore trasferita dal vapore d'acqua al ghiaccio in 10 min;
- la quantità di ghiaccio che fonde in 10 min.

Soluzione:

a) E' sufficiente applicare la formula $Q = K_1 \frac{\Delta T}{L} S \Delta t$ ponendo $\Delta t = 1\text{s}$ da cui si ricava:

$$Q = 0.16 \frac{\text{cal}}{\text{cm} \cdot \text{s} \cdot ^\circ\text{C}} \times \frac{100^\circ\text{C} - 0^\circ\text{C}}{20\text{cm}} \times 3\text{cm}^2 \times 1\text{s} = 2.4\text{cal}$$

b) In questo caso $\Delta t = 10\text{min} = 600\text{s}$. Quindi

$$Q = 0.16 \frac{\text{cal}}{\text{cm} \cdot \text{s} \cdot ^\circ\text{C}} \times \frac{100^\circ\text{C} - 0^\circ\text{C}}{20\text{cm}} \times 3\text{cm}^2 \times 600\text{s} = 1440\text{cal}$$

c) Poiché il ghiaccio si trova già alla temperatura di fusione, tutto il calore assorbito sarà utilizzato per fondere una massa di ghiaccio pari a $m = \frac{Q}{I_{\text{ghiaccio}}} = \frac{1440\text{cal}}{79.7\text{cal/g}} = 18\text{g}$

4. Calcolare di quanto deve aumentare la temperatura di una sbarra di acciaio di lunghezza $l_0 = 2\text{m}$ affinché sia più lunga di 1mm rispetto al valore iniziale ($\alpha = 11 \cdot 10^{-6}^\circ\text{C}^{-1}$).

Soluzione: dalla legge dell'espansione termica: $\Delta T = \frac{1}{\alpha} \frac{\Delta l}{l_0} = \frac{1}{11 \cdot 10^{-6}^\circ\text{C}^{-1}} \frac{10^{-3}\text{m}}{2\text{m}} = 45.5^\circ\text{C}$

Il Primo Principio della Termodinamica

Un corpo può variare la propria energia interna U mediante lo scambio di calore oppure compiendo un lavoro L . Non è sempre possibile stabilire il valore assoluto dell'energia interna, però la conservazione dell'energia nelle sue tre forme presenti in termodinamica permette di calcolare la variazione di energia interna in una trasformazione termodinamica come $\Delta U = Q - L$. ΔU al contrario di Q ed L non dipende dal tipo di trasformazione termodinamica ma solo dal valore che le variabili termodinamiche assumono allo stato iniziale e finale. Pertanto l'energia interna U può essere scritta come una funzione delle variabili di stato ed è detta **funzione di stato**.

Il modo più semplice con cui un sistema termodinamico può compiere un lavoro è mediante una variazione di volume ΔV a pressione costante $L = p\Delta V$. Come esempio consideriamo una sbarra cilindrica di sezione S immersa in aria che si allunga di una quantità Δl : per vincere la forza esercitata dalla pressione atmosferica p_0 la sbarra deve compiere un lavoro pari a $L = F\Delta l = \frac{F}{S}S\Delta l = p_0\Delta V$. Nel caso generale avremo

$L = \int_A^B p_{est} dV$. Se la trasformazione è quasi-statica il sistema in ogni istante è in equilibrio con l'esterno, pertanto la pressione esterna è uguale alla pressione del sistema $p_{est} = p$.

Usando il piano cartesiano $p-V$, è possibile rappresentare graficamente il passaggio da uno stato iniziale A ad uno finale B come una linea che congiunge i punti corrispondenti a tutti i valori che lo stato del sistema termodinamico assume nella transizione. La freccia indica il verso di percorrenza. In questa rappresentazione il

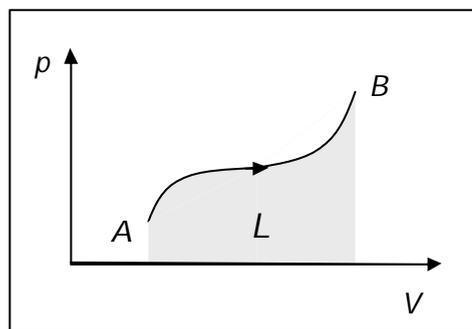


Fig. 64. Rappresentazione sul piano pV di una trasformazione termodinamica quasi-statica e del lavoro associato.

lavoro è l'area sottesa dalla curva, presa con il segno positivo se la trasformazione va nel verso di far aumentare il volume del sistema, come in figura 64, e si dice che è il sistema a compiere lavoro. Al contrario, con il segno negativo, si dice che è lavoro fatto dall'esterno sul sistema.

Il Gas Perfetto

È costituito da molecole che non interagiscono tra loro ma solamente con le pareti del contenitore che le confinano nel volume V . Gli urti delle molecole contro le pareti sono la causa microscopica della pressione p esercitata dal gas. L'equazione di stato che descrive il gas perfetto è $pV = nRT$ con $R = 8.31 \text{ J/mole} \cdot \text{K}$. Il calore molare a pressione (C_p) o volume costante (C_v) pari al calore necessario per variare di 1K la temperatura di una mole di gas valgono per un gas monoatomico $C_p = \frac{5}{2}R$ e $C_v = \frac{3}{2}R$, per uno biatomico $C_p = \frac{7}{2}R$ e $C_v = \frac{5}{2}R$. Sussiste la **relazione di Mayer** $C_p - C_v = R$. La costante $g = \frac{C_p}{C_v}$ interviene nelle trasformazioni adiabatiche e vale $g = \frac{5}{3}$ per i gas monoatomici e $g = \frac{7}{5}$ per quelli biatomici.

Dalla teoria cinetica dei gas si può dimostrare che l'energia interna di un gas perfetto dipende solamente dalla temperatura e che la **variazione di energia interna** tra due stati A e B è pari a $\Delta U = nC_v(T_B - T_A)$.

Le trasformazioni del gas ed il valore di calore scambiato, lavoro fatto e variazione di energia interna sono descritte dalle seguenti relazioni:

isocora	$V_A = V_B$ $T_A p_A^{-1} = T_B p_B^{-1}$	$L = 0$	$Q = \Delta U = nC_v(T_B - T_A)$
isobara	$p_A = p_B$ $T_A V_A^{-1} = T_B V_B^{-1}$	$L = p(V_B - V_A)$	$Q = nC_p(T_B - T_A)$
isoterma	$T_A = T_B$ $p_A V_A = p_B V_B$	$L = nRT \ln \frac{V_B}{V_A}$	$Q = L$
adiabatica	$p_A V_A^g = p_B V_B^g$ $T_A V_A^{g-1} = T_B V_B^{g-1}$	$L = -\Delta U = -nC_v(T_B - T_A)$	$Q = 0$

Se le trasformazioni sono quasi-statiche o reversibili, possono essere rappresentate nel piano $p-V$ ottenendo rispettivamente un segmento verticale od orizzontale per le trasformazioni isocore o isobare, un'iperbole equilatera per l'isoterma e una curva più ripida dell'iperbole per la trasformazione adiabatica.

Esempi

1. Calcolare il lavoro fatto da una sbarra di ferro di sezione $S = 10\text{cm}^2$ che subisce a seguito della dilatazione termica una variazione di lunghezza $\Delta l = 1\text{mm}$.

Soluzione: l'espansione della barra avviene contro la pressione atmosferica che possiamo assumere costante, per cui il lavoro è dato semplicemente da $L = p_0 \Delta V = p_0 S \Delta l$.

$$L = 10^5 \text{Pa} \times 10 \cdot 10^{-4} \text{m}^2 \times 10^{-3} \text{m} = 0.1 \text{J}.$$

2. Una massa $m = 1\text{kg}$ d'acqua è trasformata in vapore. Conoscendo il calore di evaporazione $I = 539\text{cal/g}$ e la densità del vapore $r_V = 0.6\text{kg/m}^3$, determinare quale frazione dell'energia assorbita viene impiegata nell'espansione del vapore d'acqua per vincere la pressione atmosferica $p_0 = 1\text{atm}$.

Soluzione: occorre anzitutto calcolare il calore assorbito durante l'evaporazione:

$$Q = mI = 1\text{kg} \times 539\text{kcal/kg} \times 4.18\text{J/cal} = 2.25 \cdot 10^6 \text{J},$$

mentre il lavoro fatto nell'espansione a pressione costante è pari a

$$\begin{aligned} L &= p_0 \Delta V = p_0 (V_V - V_A) = p_0 \left(\frac{m}{r_V} - \frac{m}{r_A} \right) = \\ &= 10^5 \text{Pa} \times 1\text{kg} \times \left(\frac{1}{0.6\text{kg/m}^3} - \frac{1}{10^3\text{kg/m}^3} \right) = 1.7 \cdot 10^5 \text{J} \end{aligned}$$

da cui la frazione $\frac{L}{Q} = \frac{1.7 \cdot 10^5 \text{J}}{2.25 \cdot 10^6 \text{J}} = 7.5\%$.

3. Tre moli di ossigeno subiscono una trasformazione isoterma quasi-statica alla temperatura di 18°C da un volume iniziale $V_1 = 30\text{litri}$ a un volume finale $V_2 = 100\text{litri}$. Calcolare il lavoro fatto dal gas.

Soluzione: durante la trasformazione la pressione non è costante, per cui dobbiamo applicare la definizione generale di lavoro. Poiché la trasformazione è quasi-statica possiamo sostituire la p_{est} con la pressione del gas e ricavare questa dall'equazione di stato $pV = nRT$:

$$L = \int_1^2 p_{\text{est}} dV = \int_1^2 p dV = \int_1^2 \frac{nRT}{V} dV = nRT \ln \frac{V_2}{V_1} = 8.7 \cdot 10^3 \text{J}.$$

4. Una mole di gas perfetto biatomico subisce una trasformazione lineare dal punto A con $V_A = 10\text{l}$ e $T_A = 293\text{K}$ al punto B con $V_B = 6.2\text{l}$ e $T_B = 309\text{K}$. Calcolare il lavoro fatto L ed il calore scambiato Q .

Soluzione: occorre anzitutto calcolare il valore della pressione nei due punti usando l'equazione $p = \frac{nRT}{V}$:

$$p_A = \frac{1 \text{ mole} \times 8.31 \frac{\text{J}}{\text{mole} \cdot \text{K}} \times 293 \text{ K}}{10 \cdot 10^{-3} \text{ m}^3} = 2.4 \cdot 10^5 \text{ Pa} = 2.4 \text{ atm}$$

$$p_B = \frac{1 \text{ mole} \times 8.31 \frac{\text{J}}{\text{mole} \cdot \text{K}} \times 309 \text{ K}}{6.2 \cdot 10^{-3} \text{ m}^3} = 4.1 \cdot 10^5 \text{ Pa} = 4.1 \text{ atm}$$

Il lavoro è dato dall'area del trapezio cambiata di segno, mentre il calore si ricava dal Primo Principio della Termodinamica utilizzando l'espressione $\Delta U = nC_V(T_B - T_A)$ per ricavare la variazione di energia interna del gas perfetto:

$$L = \frac{(p_B + p_A)(V_B - V_A)}{2} = \frac{(2.4 + 4.1) \cdot 10^5 \text{ Pa} \times (6.2 - 10) \cdot 10^{-3} \text{ m}^3}{2} = -1.23 \cdot 10^3 \text{ J}$$

$$Q = \Delta U + L = nC_V(T_B - T_A) + L = 1 \text{ mole} \times \frac{5}{2} \times 8.31 \frac{\text{J}}{\text{mole} \cdot \text{K}} \times (309 \text{ K} - 293 \text{ K}) - 1.23 \cdot 10^3 \text{ J} = -897 \text{ J}$$

Si noti che $L < 0$ pertanto è lavoro fatto dall'esterno sul sistema e $Q < 0$ è calore ceduto dal sistema all'esterno.

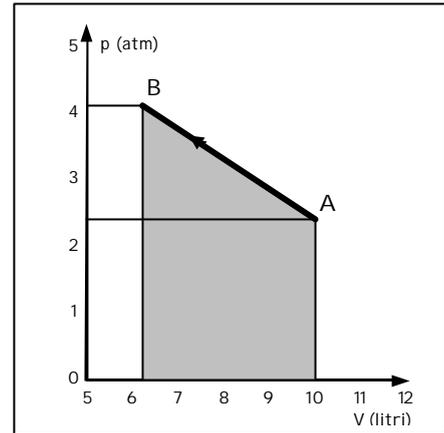


Fig. 65. Problema 4

Le Macchine Termiche

La macchina termica ciclica è una macchina in grado di ritornare al proprio stato termodinamico iniziale ($\Delta U = 0$) dopo aver scambiato calore e lavoro con l'esterno. Come mostrato in figura 66, e come verrà discusso nell'ambito del Secondo Principio della Termodinamica, lo scambio di calore deve avvenire con almeno due sorgenti di calore a temperatura diversa.

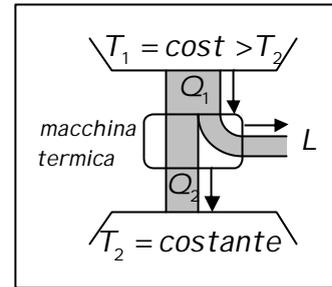


Fig. 66. Esempio di funzionamento di una macchina termica

Per una macchina termica che produca lavoro si definisce il rendimento come la

frazione di lavoro prodotto rispetto al calore assorbito
$$h = \frac{L}{|Q_1|} = \frac{|Q_1| - |Q_2|}{|Q_1|} = 1 - \frac{|Q_2|}{|Q_1|}$$

Si noti che $h \leq 1$ e che $h = 1$ solo se $Q_2 = 0$.

Per una macchina termica che utilizzi il lavoro esterno per trasferire calore da un termostato a temperatura minore ad uno a temperatura maggiore (macchina frigorifera) si definisce il coefficiente di prestazione od efficienza come la frazione di calore assorbito rispetto al lavoro richiesto

$$w = \frac{Q_{\text{ass}}}{L} = \frac{|Q_2|}{|Q_1| - |Q_2|}$$

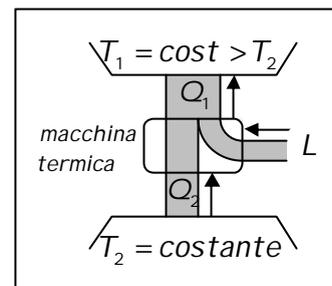


Fig. 67. Esempio di funzionamento di una macchina termica frigorifera

Teorema di Carnot: date due sorgenti di calore alle temperature T_1 e $T_2 < T_1$, tutte le macchine termiche reversibili funzionanti con le due sorgenti (per esempio il ciclo di Carnot) hanno lo stesso rendimento $h_{rev} = 1 - \frac{T_2}{T_1}$ mentre ogni altra macchina termica irreversibile che funziona con le stesse sorgenti ha rendimento minore.

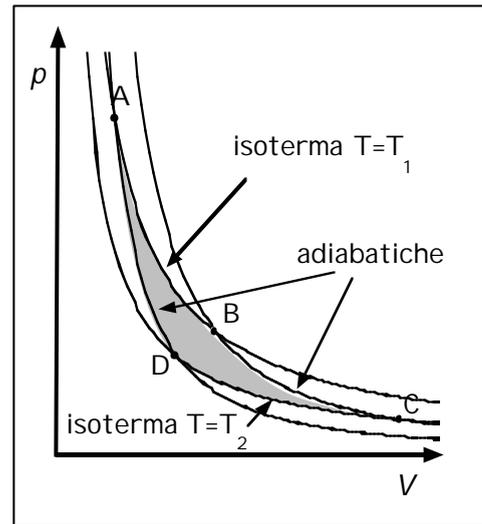


Fig. 68. Ciclo di Carnot

Esempi

1. Descrivere il funzionamento di una macchina di Carnot.

Soluzione: si può realizzare una possibile macchina di Carnot con un cilindro adiabatico riempito di gas. La base inferiore deve essere in grado di poter essere messa in contatto con un termostato per lo scambio di calore, mentre la base superiore deve essere libera di scorrere verso l'alto od il basso. Inizialmente la temperatura del gas è T_1 , e sulla base superiore sono posti dei pallini di piombo in modo da equilibrare la pressione esercitata dal gas.

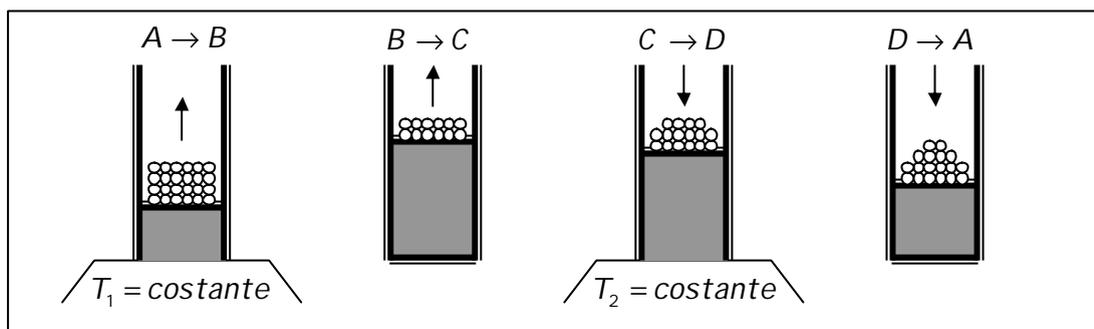


Fig. 69. Esempio di funzionamento di una macchina termica di Carnot

Per realizzare l'espansione reversibile a temperatura costante è sufficiente rimuovere uno alla volta una parte dei pallini di piombo. In questo modo l'espansione è sufficientemente lenta per poter essere considerata quasi-statica. Arrivati al punto B il contatto termico con la sorgente di calore a T_1 viene interrotto e la base inferiore isolata termicamente. Continuando a rimuovere i pallini si realizza ora un'espansione adiabatica. Una volta giunti al punto C l'isolamento termico della base inferiore viene rimosso ed il cilindro viene posto in contatto con la sorgente di calore a T_2 . Aggiungendo i pallini di piombo si realizza adesso la compressione isoterma quasi-statica. Raggiunto il punto D il contatto termico con la sorgente di calore viene interrotto e la base inferiore isolata termicamente. Continuando ad aggiungere i pallini di piombo si realizza ora la compressione adiabatica fino ad A. Si noti che alla fine della compressione saranno stati rimessi tutti i pallini precedentemente tolti perché è stata ristabilita la pressione iniziale del gas. Nella tabella successiva sono riportati la variazione di energia interna, il lavoro fatto ed il calore scambiato in ogni trasformazione

trasformazione	ΔU	L	Q
$A \rightarrow B$	0	$L = nRT_1 \ln \frac{V_B}{V_A}$	$Q = L$
$B \rightarrow C$	$\Delta U = nC_V(T_2 - T_1)$	$L = -\Delta U$	$Q = 0$
$C \rightarrow D$	0	$L = nRT_2 \ln \frac{V_D}{V_C}$	$Q = L$
$D \rightarrow A$	$\Delta U = nC_V(T_1 - T_2)$	$L = -\Delta U$	$Q = 0$

Si noti che $\Delta U_{tot} = 0$ e $L_{tot} = Q_{tot} = nRT_1 \ln \frac{V_B}{V_A} + nRT_2 \ln \frac{V_D}{V_C}$.

2. Dimostrare che per un ciclo di Carnot il rendimento vale $h_{rev} = 1 - \frac{T_2}{T_1}$.

Soluzione: è necessario calcolare esplicitamente il calore scambiato nelle varie trasformazioni termodinamiche illustrate in figura 68.

$$Q_{A \rightarrow B} = nC_V T_1 \ln \frac{V_B}{V_A} > 0, \quad Q_{B \rightarrow C} = 0, \quad Q_{C \rightarrow D} = nC_V T_2 \ln \frac{V_D}{V_C} < 0, \quad Q_{D \rightarrow A} = 0$$

Pertanto il rendimento diventa $h_{rev} = 1 - \frac{|Q_{C \rightarrow D}|}{|Q_{A \rightarrow B}|} = 1 - \frac{T_1 \left| \ln \frac{V_D}{V_C} \right|}{T_2 \left| \ln \frac{V_B}{V_A} \right|}$. Per semplificare questa

relazione è necessario utilizzare le due trasformazioni adiabatiche per le quali vale:

$$p_B V_B^g = p_C V_C^g \Rightarrow T_B V_B^{g-1} = T_C V_C^{g-1}$$

$$p_A V_A^g = p_D V_D^g \Rightarrow T_A V_A^{g-1} = T_D V_D^{g-1}$$

da cui si ricava dividendo membro a membro $\frac{V_B}{V_A} = \frac{V_C}{V_D}$ e pertanto $h_{rev} = 1 - \frac{T_2}{T_1}$. Quindi per il

Teorema di Carnot questo sarà il rendimento di qualsiasi macchina termica che lavora reversibilmente tra le temperature T_1 e T_2 .

L'Entropia

Per ogni sistema termodinamico si può dimostrare che oltre all'energia interna U esistono altre funzioni di stato, cioè funzioni che hanno la proprietà che ogni volta che il sistema subisce una trasformazione da uno stato iniziale A ad uno finale B , la loro variazione dipende **solo** dai valori iniziali e finali delle variabili termodinamiche ma non dal tipo di trasformazione (si veda anche il capitolo relativi ai potenziali termodinamici). Una funzione di stato molto importante per descrivere le proprietà di un sistema termodinamico è l'**entropia** indicata con S .

Si può dimostrare, mediante il Teorema di Carnot, che per una trasformazione termodinamica che porti il sistema da uno stato iniziale A ad uno finale B si ha

$$\Delta S = S_B - S_A \geq \int_A^B \frac{dQ}{T} \quad \text{dove } T \text{ è la temperatura assoluta a cui avviene lo scambio di}$$

calore infinitesimo dQ . La relazione di uguaglianza vale solo se la trasformazione è reversibile.

E' pertanto possibile determinare la differenza di entropia tra gli stati A e B mediante una qualunque trasformazione reversibile che colleghi i due stati, usando

l'espressione:
$$\Delta S = S_B - S_A = \int_A^B \frac{dQ_{rev}}{T}$$
. Nel SI S si misura in J/K.

Si noti che se la trasformazione è una adiabatica reversibile ($dQ_{rev} = 0$), vale $\Delta S = S_B - S_A = 0$ e quindi gli stati A e B hanno lo stesso valore di entropia.

In generale è possibile utilizzare la nuova coppia di variabili S e T per rappresentare graficamente le trasformazioni termodinamiche reversibili: l'area sottesa dalla curva rappresenta il calore totale Q_{rev} scambiato nella trasformazione.

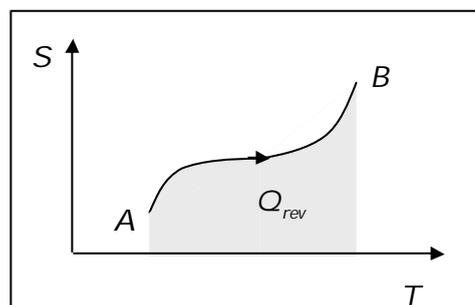


Fig. 70. Rappresentazione sul piano T-S di una trasformazione termodinamica reversibile e del calore associato.

Il Secondo Principio della Termodinamica

Il Secondo Principio della Termodinamica limita le possibilità di scambio di calore e del suo impiego come energia meccanica (lavoro). Esistono diversi enunciati.

1) **Variazione dell'entropia dell'Universo** Nel caso di trasformazioni adiabatiche

l'espressione $S_B - S_A \geq \int_A^B \frac{dQ}{T}$ diventa $S_B - S_A \geq 0$. Poiché possiamo considerare

l'Universo in cui viviamo un sistema isolato (non c'è nulla al di fuori con cui scambiare calore), possiamo formulare il Secondo Principio della Termodinamica dicendo che per ogni trasformazione termodinamica deve valere la relazione $\Delta S_U \geq 0$ dove l'uguaglianza $\Delta S_U = 0$ vale solo nel caso di trasformazioni reversibili. Le trasformazioni irreversibili - in particolare tutte le trasformazioni che avvengono in natura - sono sempre accompagnate da un aumento di entropia dell'Universo $\Delta S_U > 0$, aumento che è tanto più grande quanto più la trasformazione è irreversibile.

Il Secondo Principio della Termodinamica, formulato in termini di legge di accrescimento dell'entropia dell'Universo, ci permette di fare un'osservazione importante: gli unici cambiamenti possibili nell'Universo (o in un sistema isolato) sono quelli per cui l'entropia del sistema isolato o resta costante (ovvero se la trasformazione è reversibile) od aumenta; non sono invece possibili trasformazioni verso stati che comportino una diminuzione di entropia dell'Universo (o del sistema isolato). I fenomeni che possono avvenire in natura sono irreversibili, e pertanto possono soltanto andare nella direzione di un aumento dell'entropia dell'Universo.

Tutti gli altri fenomeni, anche se consentiti dal Primo Principio della Termodinamica, sono vietati dal Secondo Principio della Termodinamica. Immaginiamo per esempio due corpi a temperatura diversa: il Primo Principio non vieta il passaggio di una certa quantità di calore dal corpo più freddo al più caldo (la conservazione dell'energia è

rispettata) ma questo fenomeno viola il Secondo Principio in quanto si può dimostrare che un tale passaggio di calore comporterebbe $\Delta S_U < 0$.

Il fatto che l'entropia dell'Universo non possa diminuire non implica che l'entropia di un singolo elemento dell'Universo non possa diminuire, questo può avvenire, ma a patto che qualche altro componente abbia un aumento di entropia maggiore.

Storicamente esistono altre due formulazioni del Secondo Principio della Termodinamica che utilizzano il concetto di macchina termica/frigorifera ciclica visto in precedenza, ovvero di macchine capaci di tornare al proprio stato termodinamico iniziale ($\Delta U = 0$) dopo aver scambiato calore e/o lavoro con l'esterno.

2) **Enunciato di Kelvin-Planck**: è impossibile realizzare una macchina che, lavorando ciclicamente, trasformi in lavoro meccanico il calore scambiato con un'unica sorgente (in altre parole, non può esistere la macchina termica ideale che funzioni senza dissipare Q_2).

3) **Enunciato di Clausius**: è impossibile realizzare una macchina che, lavorando ciclicamente, abbia come unico risultato il passaggio di una certa quantità di calore dalla sorgente fredda alla calda (in altre parole, non può esistere il frigorifero ideale che funzioni senza fornirgli lavoro).

Esempi

1. Dimostrare l'equivalenza tra il Secondo Principo della Termodinamica e l'enunciato di Clausius.

Soluzione: ipotizziamo che l'enunciato di Clausius non sia valido. E' possibile allora trovare una trasformazione ciclica che funzioni come rappresentato in figura 71

$$\Delta S = \Delta S_{MT} + \Delta S_{term1} + \Delta S_{term2} = 0 + \frac{Q}{T_1} - \frac{Q}{T_2} < 0$$

violando pertanto il Secondo Principo della Termodinamica.

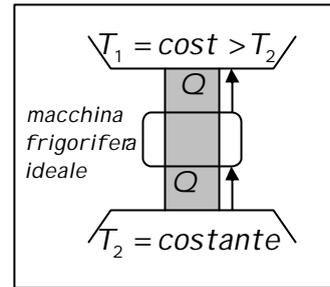


Fig. 71. Macchina frigorifera ideale che viola l'enunciato di Clausius.

2. Dimostrare l'equivalenza tra il Secondo Principo della Termodinamica e l'enunciato di Kelvin-Planck.

Soluzione: ipotizziamo che l'enunciato di Kelvin-Planck non sia valido. E' possibile allora trovare una trasformazione ciclica che funzioni come rappresentato in figura 72

$$\Delta S = \Delta S_{MT} + \Delta S_{term} = 0 - \frac{Q}{T} < 0$$

violando pertanto il Secondo Principo della Termodinamica.

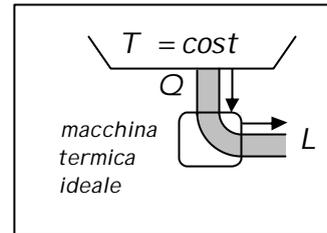


Fig. 72. Macchina frigorifera ideale che viola l'enunciato di Kelvin-Planck.

3. Dimostrare l'equivalenza tra l'enunciato di Clausius e l'enunciato di Kelvin-Planck.

Soluzione: nell'ipotesi che l'enunciato di Clausius non sia valido, sarebbe possibile accoppiare una macchina frigorifera ideale ad una macchina termica ordinaria in modo da realizzare una macchina termica ideale che violi l'enunciato di Kelvin-Planck come mostrato in figura 73. Analogamente nell'ipotesi che l'enunciato di Kelvin-Planck non sia valido, sarebbe possibile accoppiare una macchina termica ideale ad una macchina termica ordinaria in modo da realizzare una macchina frigorifera ideale che violi l'enunciato di Clausius.

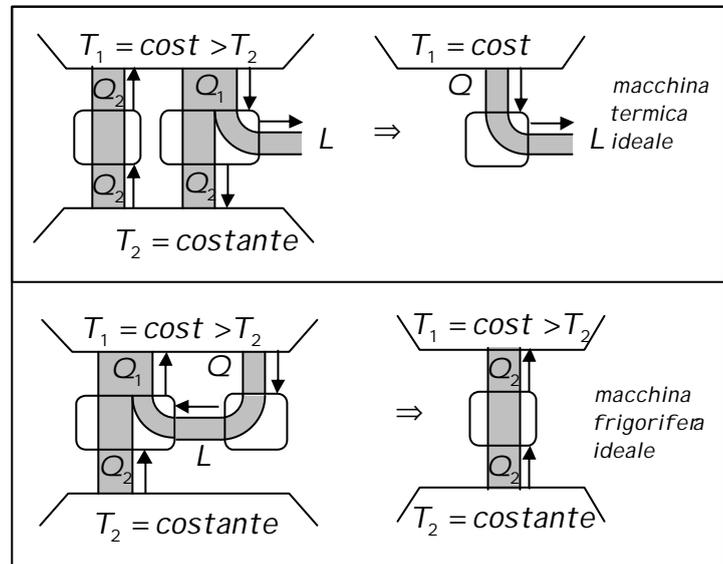


Fig. 73. Problema 3.

Il Calcolo della Variazione di Entropia

In generale per calcolare la differenza di entropia fra uno stato iniziale A ad uno finale B del sistema, è necessario trovare una trasformazione reversibile che li colleghi e per questa trasformazione calcolare l'integrale $\Delta S = \int_A^B \frac{dQ_{rev}}{T}$.

Nel caso dei gas perfetti è possibile dimostrare che la differenza di entropia fra due

stati A e B è data da $\Delta S = nC_V \ln \frac{T_B}{T_A} + nR \ln \frac{V_B}{V_A}$.

Per una trasformazione reversibile isoterma $\Delta S = \frac{Q_{rev}}{T}$ dove Q_{rev} è tutto il calore

scambiato. Per esempio in un cambiamento di stato si ha $\Delta S = \frac{mL}{T}$.

Nel caso in cui un corpo di massa m e calore specifico c ed inizialmente alla temperatura T_i , scambia calore con l'esterno e subisce una variazione di temperatura fino al valore T_f , la variazione dell'entropia del corpo è data dall'espressione (vedi Esempio

2): $\Delta S = mc \ln \frac{T_f}{T_i}$.

Per calcolare la variazione di entropia dell'Universo occorre sommare la variazione di entropia dei singoli sistemi che partecipano allo scambio di calore (vedi Esempio 2).

Esempi

1. Verificare l'espressione della variazione di entropia per il gas perfetto.

Soluzione: consideriamo una trasformazione reversibile tra uno stato iniziale ed uno stato finale. E' possibile in questo caso legare la variazione di entropia al calore scambiato durante la trasformazione reversibile mediante l'espressione $\Delta S = S_B - S_A = \int_A^B \frac{dQ_{rev}}{T}$. Usando il Primo Principio della Termodinamica è possibile scrivere il calore scambiato nella forma: $dQ_{rev} = dU + pdV$. Quindi $\Delta S = \int_A^B \frac{dU}{T} + \int_A^B \frac{pdV}{T}$. Utilizziamo ora la definizione della variazione di energia interna per un gas perfetto e l'equazione di stato $pV = nRT$:

$$\Delta S = \int_A^B \frac{nC_V dT}{T} + \int_A^B \frac{nRdV}{V} = nC_V \int_A^B \frac{dT}{T} + nR \int_A^B \frac{dV}{V} = nC_V \ln \frac{T_B}{T_A} + nR \ln \frac{V_B}{V_A}$$

2. Una massa $m = 1\text{kg}$ di acqua inizialmente alla temperatura $T_i = 10^\circ\text{C}$ viene posta in contatto con un termostato con $T_f = 90^\circ\text{C}$. Calcolare la variazione d'entropia dell'Universo.

Soluzione: per calcolare la variazione di entropia dell'Universo occorre calcolare la variazione di entropia dell'acqua e quella del termostato. Per calcolare ΔS dell'acqua occorre trovare una trasformazione reversibile che porti l'acqua dallo stato iniziale $T_i = 10^\circ\text{C}$ a quello finale $T_f = 90^\circ\text{C}$. La trasformazione si ottiene immaginando di mettere in contatto l'acqua con un termostato con temperatura leggermente maggiore, permettendo che l'acqua si porti in equilibrio con il termostato (ovvero che raggiunga la nuova temperatura). Quest'operazione va quindi ripetuta più volte fino al raggiungimento della temperatura finale. Ad ogni passo viene scambiata la quantità di calore $dQ = mcdT$ e la variazione di entropia corrispondente si può calcolare come $dS = \frac{mcdT}{T}$ con T espresso in gradi Kelvin.

Il processo completo corrisponde alla variazione $\Delta S_A = \int_i^f \frac{mcdT}{T} = mc \ln \frac{T_f}{T_i}$.

Per il termostato vale semplicemente $\Delta S_T = \frac{Q}{T} = \frac{-mc(T_f - T_i)}{T_f}$ dove il calore scambiato è

pari a quello ceduto dall'acqua cambiato di segno. In totale si ha:

$$\Delta S_U = \Delta S_A + \Delta S_T = mc \ln \frac{T_f}{T_i} - \frac{mc(T_f - T_i)}{T_f} = 10^3 \text{g} \times 1 \text{cal/g} \cdot \text{K} \left(\ln \frac{363\text{K}}{283\text{K}} - \frac{363\text{K} - 283\text{K}}{363\text{K}} \right) = 28.57 \text{cal/K}$$

La variazione d'entropia dell'Universo è positiva perché la trasformazione è irreversibile.

Si ripeta l'esercizio immaginando di utilizzare un termostato intermedio alla temperatura di 50°C per portare l'acqua alla temperatura finale di 90°C . Si confrontino fra loro i risultati trovati per ΔS_U nei due procedimenti e si dia un'interpretazione.

3. Un contenitore adiabatico di volume $V = 1$ litro è diviso a metà da un diaframma. In una metà è contenuta una mole di gas perfetto a temperatura $T = 300\text{K}$ mentre nell'altra metà è fatto il vuoto. Rimovendo il diaframma si permette al gas di espandersi liberamente nel contenitore. Calcolare la variazione di entropia dell'Universo durante l'espansione libera.

Soluzione: il processo è chiaramente irreversibile, inoltre la temperatura non cambia perché nell'espansione libera adiabatica non viene fatto lavoro $L = 0$ e non viene scambiato calore $Q = 0$. Pertanto $\Delta U = 0$ e la temperatura del gas non cambia. La trasformazione reversibile che lega gli stati iniziali e finali del gas è quindi un'espansione a temperatura costante. In realtà per calcolare la variazione d'entropia è sufficiente utilizzare la formula per i gas perfetti

$$\Delta S = nC_V \ln \frac{T_B}{T_A} + nR \ln \frac{V_B}{V_A} = 1 \times 8.31 \text{ J/mole} \cdot \text{K} \times \ln 2 = 5.76 \text{ J/K}.$$

4. Una massa $m = 1\text{kg}$ di acqua a $T_i = 20^\circ\text{C}$ viene raffreddata alla pressione atmosferica fino ad ottenere ghiaccio a $T_f = 0^\circ\text{C}$. Calcolare la variazione d'entropia del sistema.

Soluzione: abbiamo due processi: il raffreddamento ed il passaggio di stato. Per il primo vale

$$\Delta S_1 = mc \ln \frac{T_f}{T_i} = 1\text{kg} \times 1 \text{ kcal/kg} \cdot ^\circ\text{C} \times \ln \frac{(0+273)\text{K}}{(20+273)\text{K}} = -70.7 \text{ cal/K} \text{ mentre per il secondo}$$

$$\Delta S_2 = \frac{ml}{T} = \frac{1\text{kg} \times (-79.7 \text{ kcal/kg})}{(0+273)\text{K}} = -291.9 \text{ cal/K}. \text{ In totale } \Delta S = -362.6 \text{ cal/K}.$$

5. Calcolare la variazione di entropia del gas perfetto dell'esercizio 4 pag. 119 (Gas Perfetto) durante la trasformazione lineare AB.

Soluzione: è sufficiente utilizzare la formula per i gas perfetti

$$\Delta S = nC_V \ln \frac{T_B}{T_A} + nR \ln \frac{V_B}{V_A} = 1 \times \frac{5}{2} \times 8.31 \times \ln \frac{309}{293} + 1 \times 8.31 \times \ln \frac{6.21}{10} \text{ J/mole} \cdot \text{K} = -2.85 \text{ J/K}.$$

6. Durante una trasfusione di sangue, vengono immessi in circolazione 500g di sangue inizialmente alla temperatura di $T_i = 20^\circ\text{C}$. Assumendo la temperatura corporea dell'organismo costante a $T_c = 37^\circ\text{C}$, si calcoli la variazione di entropia dell'Universo. Si assuma come valore per il calore specifico del sangue $c_p = 1 \text{ cal/g} \cdot \text{K}$.

Soluzione: per calcolare la variazione di entropia dell'Universo occorre calcolare la variazione di entropia del sangue quando viene portato da $T_i = 293\text{K}$ a $T_c = 310\text{K}$ e quella del termostato-organismo, assumendo che il calore scambiato è pari a quello assorbito dal sangue per passare da T_i a T_c cambiato di segno. In totale si ha:

$$\Delta S_{\text{sangue}} = mc_p \ln \frac{T_c}{T_i} = 118 \text{ J/K}, \quad \Delta S_{\text{organismo}} = \frac{\Delta Q}{T_f} = \frac{-mc_p(T_c - T_i)}{T_c} = -114 \text{ J/K} \text{ e}$$

$$\Delta S_U = \Delta S_{\text{sangue}} + \Delta S_{\text{organismo}} = +4 \text{ J/K}.$$

7. Una mole di gas perfetto monoatomico alla temperatura $T_A = 243\text{K}$ e pressione $p_A = 2\text{atm}$, esegue un ciclo reversibile costituito dalle seguenti trasformazioni:

- espansione isobara AB ;
- espansione adiabatica BC fino a $p_C = 1\text{atm}$, e $T_C = T_A$;
- compressione isoterma CA fino a ritornare allo stato A .

Calcolare:

- a) i parametri p, V, T di ogni stato e disegnare il ciclo in un piano (pV);
- b) il calore scambiato in ogni trasformazione;
- c) il rendimento del ciclo
- d) la variazione di entropia del gas lungo la trasformazione isoterma CA .

Soluzione:

a) Il volume degli stati A e C si ricava dall'equazione di stato dei gas perfetti $pV = nRT$

$$V_A = \frac{nRT_A}{p_A} = \frac{1 \text{ mole} \times 8.31 \text{ J/mole} \cdot \text{K} \times 243 \text{ K}}{2 \cdot 10^5 \text{ Pa}} = 10^{-2} \text{ m}^3 = 10 \text{ litri}$$

$$V_C = \frac{nRT_C}{p_C} = \frac{1 \text{ mole} \times 8.31 \text{ J/mole} \cdot \text{K} \times 243 \text{ K}}{1 \cdot 10^5 \text{ Pa}} = 2 \cdot 10^{-2} \text{ m}^3 = 20 \text{ litri}$$

Il volume dello stato B si ricava dall'equazione dell'espansione adiabatica

$$V_B = \left(\frac{p_C}{p_B} \right)^{\frac{1}{\gamma}} V_C = \left(\frac{1 \text{ atm}}{2 \text{ atm}} \right)^{\frac{3}{5}} 20 \text{ litri} = 13.2 \text{ litri.}$$

$$\text{Di conseguenza } T_B = \frac{p_B V_B}{nR} = \frac{2 \cdot 10^5 \text{ Pa} \times 13.2 \cdot 10^{-3} \text{ m}^3}{1 \text{ mole} \times 8.31 \text{ J/mole} \cdot \text{K}} = 317.7 \text{ K}$$

b) Il calore scambiato nelle varie trasformazioni è pari a

$$Q_{AB} = nC_p(T_B - T_A) = 1 \text{ mole} \times \frac{5}{2} \cdot 8.31 \text{ J/mole} \cdot \text{K} \times (317.7 \text{ K} - 243 \text{ K}) = 1552 \text{ J} \quad \textit{isobara}$$

$$Q_{BC} = 0 \quad \textit{adiabatica}$$

$$Q_{CA} = nRT \ln \frac{V_A}{V_C} = 1 \text{ mole} \times 8.31 \text{ J/mole} \cdot \text{K} \times 243 \text{ K} \times \ln \frac{10 \text{ litri}}{20 \text{ litri}} = -1400 \text{ J} \quad \textit{isoterma}$$

c) Noto il calore scambiato e ricordando che in un ciclo $\Delta U = 0$, il lavoro ottenuto è pari a

$$L = \sum Q = 1552 \text{ J} - 1400 \text{ J} = 152 \text{ J} \text{ e di conseguenza } h = \frac{L}{Q_{\text{assorbito}}} = \frac{152 \text{ J}}{1552 \text{ J}} = 9.8\%$$

d) La variazione d'entropia è data dalla formula $\Delta S = nC_v \ln \left(\frac{T_B}{T_A} \right) + nR \ln \left(\frac{V_B}{V_A} \right)$ da cui

$$\Delta S_{CA} = nC_v \ln \left(\frac{T_A}{T_C} \right) + nR \ln \left(\frac{V_A}{V_C} \right) = 1 \text{ mole} \times 8.31 \text{ J/mole} \cdot \text{K} \times \ln \frac{10 \text{ litri}}{20 \text{ litri}} = -5.76 \text{ J/K.}$$

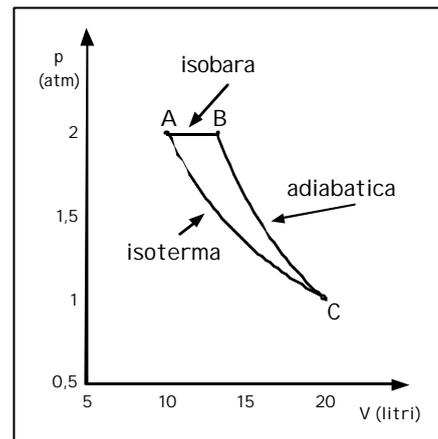


Fig. 74. Problema 6

I Potenziali Termodinamici

A partire dalle due funzioni di stato U ed S è possibile costruire alcune funzioni dette potenziali termodinamici che ci permettono in alcuni casi di calcolare l'energia di un sistema termodinamico e di prevederne l'evoluzione spontanea calcolando eventualmente la condizione di equilibrio stabile verso cui tende il sistema.

L'**entalpia** $H = U + pV$ è utile per descrivere le trasformazioni che avvengono a p costante, per esempio le reazioni chimiche. In questo caso la variazione di entalpia è data da $\Delta H = \Delta U + p\Delta V = \Delta U + L$ che per il Primo Principio della Termodinamica diventa $\Delta H = Q$, cioè la variazione di entalpia è pari al calore scambiato nella reazione. Si può dimostrare che la relazione $\Delta H = Q_p$ è vera per qualsiasi trasformazione anche se non si tratta di una trasformazione a pressione costante (v. esempi).

L'**energia libera di Gibbs** $G = U + pV - TS$ è invece utile per descrivere le trasformazioni che avvengono a p e T costanti. Questo è un caso di estremo interesse per la biologia perchè è la condizione in cui avvengono tutte le reazioni chimiche in una cellula. A pressione e temperatura costanti la variazione dell'energia libera di Gibbs $\Delta G = \Delta U + p\Delta V - T\Delta S = \Delta H - T\Delta S$ si ricava direttamente dalla definizione. In termini di calore scambiato ed usando la relazione tra entropia e calore Q_{rev} scambiato in una trasformazione reversibile che unisca i punti iniziale e finale, ΔG diventa $\Delta G = Q - Q_{rev}$. Applicando il Secondo Principio della Termodinamica si ha che $\Delta G \leq 0$ dove l'uguaglianza vale solo se la trasformazione è reversibile. Nel caso di reazioni chimiche irreversibili questa relazione ci dice che il processo avverrà nella direzione che riduce G ($\Delta G < 0$) fino a raggiungere, all'equilibrio, il valore minimo. La quantità di lavoro che può essere ottenuto dalla reazione vale $-\Delta G$. La spontaneità della reazione è legata al segno relativo di ΔH e ΔS ed al valore della temperatura

T . I vari casi in cui si può avere $\Delta G = \Delta H - T\Delta S < 0$ sono riassunti nella tabella seguente.

$\Delta H < 0$	$\Delta S > 0$	reazione spontanea esotermica
$\Delta H < 0$	$\Delta S < 0$	reazione spontanea esotermica a T bassi
$\Delta H > 0$	$\Delta S > 0$	reazione spontanea endotermica a T alti
$\Delta H > 0$	$\Delta S < 0$	reazione non spontanea

L'**energia libera (o potenziale di Helmotz)** $F = U - TS$ è invece utile per descrivere le trasformazioni che avvengono a V e T costanti. La variazione $\Delta F = \Delta U - T\Delta S \leq 0$ ci dà la direzione spontanea della reazione e l'equilibrio si avrà per F minimo.

Esempi

1. 128 grammi di ossigeno (gas perfetto biatomico $M = 32$) inizialmente a $T_1 = 25^\circ\text{C}$, vengono compressi reversibilmente e adiabaticamente da $p_1 = 1\text{atm}$ a $p_2 = 6p_1$. Calcolare la temperatura finale del gas, il lavoro e la variazione di entalpia.

Soluzione: innanzitutto calcoliamo il numero di moli $n = \frac{m}{M} = \frac{128}{32} = 4$ moli per calcolare la temperatura finale, dato che si tratta di una trasformazione adiabatica reversibile, possiamo utilizzare le equazioni di Poisson:

$$T_2 p_2^{1-g/g} = T_1 p_1^{1-g/g} \text{ da cui si ricava } T_2 = T_1 \left(\frac{p_2}{p_1} \right)^{g-1/g} = 497\text{K} \text{ avendo utilizzato } g = 1.4. \text{ Infatti}$$

$$\text{si tratta di un gas perfetto biatomico per cui } g = \frac{C_p}{C_v} = \frac{7/2 R}{5/2 R} = 1.4$$

Per calcolare il lavoro basta utilizzare il Primo Principio e osservare che in una trasformazione adiabatica $Q = 0$ pertanto

$$L = -\Delta U = -nC_v(T_2 - T_1) = -163 \text{ litri} \cdot \text{atm.}$$

La variazione di Entalpia è sempre uguale alla quantità di calore scambiato in una immaginaria trasformazione a pressione costante fra gli stessi stati iniziali e finali della trasformazione in oggetto, per cui:

$$\Delta H = nC_p(T_2 - T_1) = 228 \text{ litri} \cdot \text{atm.}$$

2. Calcolare il calore prodotto dalla reazione $2C_2H_6 + 7O_2 = 4CO_2 + 6H_2O$ a pressione e temperatura standard ($p = 1\text{atm}$ e $T = 25^\circ\text{C} = 298\text{K}$).

Soluzione: il processo avviene a pressione costante quindi il calore di reazione è semplicemente la variazione di entalpia fra gli stati iniziale e finale. Poiché il valore non dipende dal percorso fatto dalla reazione, per calcolarlo è sufficiente immaginare di scomporre a pressione costante i composti chimici nei singoli componenti per poi ricomporli nello stato finale calcolando la variazione totale dell'entalpia come la somma delle variazioni di entalpia intermedie legate alle entalpie standard di formazione ΔH_f° delle singole molecole. Immaginando che a reagire siano 2 moli di etano e 7 di ossigeno si ha:



da cui $\Delta H = 2 \times 20.2\text{kcal} - 4 \times 94.1\text{kcal} - 6 \times 57.8\text{kcal} = -682.8\text{kcal}$.

3. Analizzare la reazione di decomposizione del carbonato di calcio con produzione di calce e anidride carbonica $\text{CaCO}_3 \Rightarrow \text{CaO} + \text{CO}_2$ sapendo che la reazione è endotermica con assorbimento di calore pari a $\Delta H = +42.6 \text{ kcal/mole}$ ed aumento di entropia pari a $\Delta S = +38.4 \text{ cal/mole} \cdot \text{K}$.

Soluzione: la reazione può avvenire spontaneamente solo quando è $\Delta G < 0$, pertanto occorrerà che sia $\Delta H - T\Delta S < 0$, cioè $T > \frac{\Delta H}{\Delta S} = 1100 \text{ K} \approx 850^\circ\text{C}$. La reazione di decomposizione spontanea avviene soltanto ad altissime temperature; al contrario, a temperatura ambiente $T \approx 300 \text{ K}$, si ha $\Delta G = \Delta H - T\Delta S \approx 31 \text{ kcal}$ il che significa che la reazione spontanea va verso sinistra, nel senso della formazione del calcare.

4. Una mole di gas perfetto biatomico esegue una trasformazione isocora a $V = 5 \text{ dm}^3$ da $p_1 = 2 \text{ atm}$ a $p_2 = 3 \text{ atm}$. Determinare ΔH . Sapendo che durante la trasformazione l'energia libera varia di $\Delta F = +180 \text{ J}$ calcolare di quanto varia il potenziale di Gibbs.

Soluzione: per calcolare ΔH dobbiamo calcolare il calore scambiato in una immaginaria trasformazione a $p = \text{cost}$ dallo stato 1 allo stato 2 del gas. Pertanto:

$$\Delta H = Q = nC_p(T_2 - T_1) = nC_p \left(\frac{p_2 V_2}{nR} - \frac{p_1 V_1}{nR} \right) = 17.5 \text{ litri} \cdot \text{atm}$$

Per calcolare ΔG conoscendo ΔF possiamo scrivere: $G = U + pV - TS = F + pV$

pertanto a volume costante si avrà

$$\Delta G = \Delta F + V\Delta p = 180 \text{ J} + 5 \text{ litri} \cdot \text{atm} \times 101.2 \text{ J/litri} \cdot \text{atm} = 686 \text{ J}.$$

5. Calcolare il calore latente di evaporazione dell'acqua alla temperatura di $T = 25^\circ\text{C}$ ed a pressione standard ($p = 1 \text{ atm}$).

Soluzione: il processo avviene a pressione costante ma ad una temperatura diversa da quella di ebollizione. Poiché ΔH non dipende dal percorso fatto dalla reazione, per calcolarlo è sufficiente immaginare di scaldare l'acqua a pressione costante fino al punto di ebollizione, fare avvenire il cambiamento di stato e raffreddare il vapore fino alla temperatura $T = 25^\circ\text{C}$. Sapendo che i calore specifici di acqua e vapore a pressione costante sono rispettivamente $c_a = 1 \text{ kcal/kg} \cdot ^\circ\text{C}$ e $c_v = 0.45 \text{ kcal/kg} \cdot ^\circ\text{C}$, ΔH per una massa unitaria di acqua sarà pari alla somma dei calori scambiati nei tre passaggi della reazione.

$$mI_T = Q = mc_a(T_{\text{ebollizione}} - T) + mI_{\text{ebollizione}} + mc_v(T - T_{\text{ebollizione}})$$

$$I_T = 1 \text{ kcal/kg} \cdot ^\circ\text{C} \times (100^\circ\text{C} - 25^\circ\text{C}) + 540 \text{ kcal/kg} + 0.45 \text{ kcal/kg} \cdot ^\circ\text{C} \times (25^\circ\text{C} - 100^\circ\text{C})$$

$$I_T = 581.3 \text{ kcal/kg}$$

6. Calcolare il rendimento nel metabolismo di una mole di glucosio.

Soluzione: il processo avviene a pressione costante ed alla temperatura corporea $T = 310\text{K}$.

L'ossidazione di una mole di glucosio $C_6H_{12}O_6 + 6O_2 = 6CO_2 + 6H_2O$ è descritta dall'entalpia standard di formazione $\Delta H_f^\circ = -673\text{kcal}$ e dall'entropia standard di formazione $\Delta S_f^\circ = -0.042\text{kcal/K}$ per cui

$$\Delta G_{\text{ossidazione}} = -673\text{kcal} - 0.042\text{kcal/K} \times 310\text{K} = -686\text{kcal}.$$

All'interno dell'organismo umano una frazione di $\Delta G_{\text{ossidazione}}$ è utilizzata per alimentare il Ciclo di Krebs che coinvolge il ciclo dell'acido tricarbossilico. Per ogni mole di glucosio si formano 32 moli di ATP secondo la reazione $ADP + \text{fosfato} = ATP$ con $\Delta G = 304\text{kcal}$. La reazione inversa $ATP = ADP + \text{fosfato}$ produce la contrazione muscolare con rendimento 50%. Quindi di tutta l'energia a disposizione solo 152kcal vengono utilizzate come lavoro mentre il resto è disperso sotto forma di calore. Il rendimento è quindi $h = \frac{152\text{kcal}}{686\text{kcal}} \approx 22\%$.

7. Descrivere la sintesi del saccarosio.

Soluzione: glucosio e fruttosio possono dar luogo ad una molecola di saccarosio secondo la reazione $\text{glucosio} + \text{fruttosio} = \text{saccarosio} + H_2O$. Poiché $\Delta G = 5500\text{kcal}$ la reazione non è spontanea in condizioni normali e richiede una seconda reazione con $\Delta G' < 0$ che possa fornire l'energia necessaria. La reazione che gli organismi viventi utilizzano è la rottura della molecola di ATP secondo $ATP + H_2O = ADP + \text{fosfato}$ con $\Delta G' = -7000\text{kcal}$.

Appendice I

Grandezza	Unità SI	Unità SI	Unità cgs	SI → cgs	cgs → SI
lunghezza	metro	m	cm	$1 \text{ m} = 10^2 \text{ cm}$	$1 \text{ cm} = 10^{-2} \text{ m}$
tempo	secondo	s	s		
velocità		m/s	cm/s	$1 \text{ m/s} = 10^2 \text{ cm/s}$	$1 \text{ cm/s} = 10^{-2} \text{ m/s}$
frequenza	Hertz	Hz (= s ⁻¹)	Hz (= s ⁻¹)		
massa	chilogrammo	kg	g	$1 \text{ kg} = 10^3 \text{ g}$	$1 \text{ g} = 10^{-3} \text{ kg}$
forza	Newton	N (= kg·m/s ²)	dina (= g·m/s ²)	$1 \text{ N} = 10^5 \text{ dine}$	$1 \text{ dine} = 10^{-5} \text{ N}$
energia	Joule	J (= N·m)	erg (= dina·m)	$1 \text{ J} = 10^7 \text{ erg}$	$1 \text{ erg} = 10^{-7} \text{ J}$
potenza	Watt	W (= J/s)	erg/s	$1 \text{ W} = 10^7 \text{ erg/s}$	$1 \text{ erg/s} = 10^{-7} \text{ W}$
densità		kg/m ³	g/cm ³	$1 \text{ kg/m}^3 = 10^{-3} \text{ g/cm}^3$	$1 \text{ g/cm}^3 = 10^3 \text{ kg/m}^3$
pressione	Pascal bar atmosfera	Pa (= N/m ²) bar atm	dina/cm ²	$1 \text{ Pa} = 10 \text{ dine/cm}^2$ $1 \text{ Pa} = 10^{-5} \text{ bar}$ $1 \text{ Pa} = 0.976 \cdot 10^{-5} \text{ atm}$	$1 \text{ dine/cm}^2 = 0.1 \text{ Pa}$
portata		m ³ /s litro/s	cm ³ /s	$1 \text{ m}^3/\text{s} = 10^6 \text{ cm}^3/\text{s}$ $1 \text{ m}^3/\text{s} = 10^3 \text{ litri/s}$	$1 \text{ cm}^3/\text{s} = 10^{-6} \text{ m}^3/\text{s}$ $1 \text{ cm}^3/\text{s} = 10^{-3} \text{ litri/s}$
viscosità		Pa·s	poise (P)	$1 \text{ Pa} \cdot \text{s} = 10 \text{ P}$	$1 \text{ p} = 0.1 \text{ Pa} \cdot \text{s}$
tensione superficiale		N/m	dina/cm	$1 \text{ N/m} = 10^3 \text{ dine/cm}$	$1 \text{ dine/cm} = 10^{-3} \text{ N/m}$