Problemi Di Cinematica del Punto Materiale
A cura del Prof. T.Papa

1. Un punto materiale si muove lungo la traiettoria di equazione $y = x^2$ e, lungo x, ha componente della velocità $\dot{x} = 2\,m/s$, costante. Determinare velocità ed accelerazione, in modulo e direzione, in corrispondenza alla posizione $x = 0,5\,m$.

Il modulo della velocità è

$$v = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} = \sqrt{(\dot{x}^2 + (2x\dot{x})^2} = \dot{x}\sqrt{1 + (2x)^2} = 2\sqrt{2}\,m/s.$$

La sua direzione risulta da:

$$\tan\theta = \frac{\dot{y}}{\dot{x}} = 2x = 1, \qquad \theta = 45°.$$

Modulo dell'accelerazione:

$$\ddot{x} = 0; \qquad \dot{y} = \frac{dy}{dx}\dot{x}; \qquad \ddot{y} = \frac{d^2y}{dx^2}\dot{x}^2 + \frac{dy}{dx}\ddot{x} = 8\,m/s^2.$$

La direzione è quella positiva dell'asse y.

2. Un punto materiale si muove di moto armonico. Alla distanza dalla posizione di equilibrio $x = 6\,cm$ la velocità del punto è $v = 40\,cm/s$, mentre alla distanza $x = 8\,cm$ la velocità risulta $v = 30\,cm/s$. Determinare ampiezza e velocità massima.

Dall'equazione del moto e dalla velocità

$$x = A\sin\omega t, \qquad \dot{x} = A\omega\cos\omega t,$$

quadrando e sostituendo i valori assegnati, si ha

$$\sin^2\omega t = \frac{36}{A^2}, \qquad \cos^2\omega t = \frac{1600}{A^2\omega^2}.$$

$$\sin^2\omega t = \frac{64}{A^2}, \qquad \cos^2\omega t = \frac{900}{A^2\omega^2}$$

Sommando:

$$\frac{36}{A^2} + \frac{1600}{A^2\omega^2} = 1, \qquad \frac{64}{A^2} + \frac{900}{A^2\omega^2} = 1.$$

Da cui

$$36\,\omega^2 + 1600 = A^2\omega^2, \qquad 64\,\omega^2 + 900 = A^2\omega^2.$$

Si ottiene:

$$\omega = \sqrt{\frac{700}{28}} = 5\,s^{-1}, \qquad A = \sqrt{36 + \frac{1600}{\omega^2}} = 10\,cm$$

$$v_{max} = A\omega = 50\,cm/s.$$

3. Un'automobile lunga $l = 3\,m$ viaggia in un tratto rettilineo alla velocità $v = 130\,km/h$. Calcolare il tempo t necessario per il sorpasso di un autocarrro, lungo $l_1 = 12\,m$, che viaggia alla velocità costante $v_1 = 90\,km/h$. Trovare quale accelerazione costante occorre imprimere all'automobile all'inizio del sorpasso, perché il tempo di sorpasso si riduca di 1/5.

Quando i due veicoli viaggiano a velocità costante si ha

$$t = \frac{l + l_1}{v - v_1} = 1,35\,s \tag{1}$$

Ma il tempo di sorpasso dev'essere ridotto di 1/5, $t' = 4t/5$, quindi l'automobile deve assumere una accelerazione a tale che la distanza $l + l_1$ (lunghezza dei due veicoli) venga percorsa nel tempo t', essendo la velocità iniziale quella relativa $v - v_1$. Quindi:

$$l + l_1 = \frac{1}{2}at'^2 + (v - v_1)t'.$$

Sostituendo nella precedente $t' = 4t/5$ e $v - v_1 = (l + l_1)/t$ ricavato dalla (1), si ottiene:

$$a = \frac{5}{8}\frac{1}{t^2}(l + l_1) = 5,14\, m/s^2.$$

4. Due tratti rettilinei a 90° di una pista automobilistica sono raccordati da una curva formata da un quarto di circonferenza di raggio R. Un pilota, proveniente da un tratto rettilineo, giunge in P_0 (inizio della curva) con accelerazione tangenziale a_t e percorre la curva mantenendo costante tale accelerazione. Sapendo che in P_0 l'accelerazione normale è $2a_t$, determinare l'accelerazione normale nel punto P in cui termina la curva e l'intervallo di tempo impiegato a percorrerla ($R = 100\, m;\ a_t = 5\, m/s^2$).

Detta v_0 la velocità in P_0, si ha

$$a_n(P_0) = 2a_t = \frac{v_0^2}{R}, \qquad a_n(P) = \frac{v^2}{R}. \tag{1}$$

Dalla legge cinematica,

$$\Delta s = \frac{v^2 - v_0^2}{2a_t},$$

dove $\Delta s = \pi R/2$ è la lunghezza dell'arco del quarto di circonferenza, si ricava:

$$v^2 = v_0^2 + 2a_t\Delta s = v_0^2 + a_t\pi R.$$

Quindi,

$$\frac{v^2}{R} = \frac{v_0^2}{R} + \pi a_t.$$

Si trae:

$$a_n(P) = a_n(P_0) + \pi a_t = a_t(2 + \pi) = 25,7\, m/s^2. \tag{2}$$

La relazione

$$\Delta t = \frac{v - v_0}{a_t},$$

fornisce l'intervallo di tempo impiegato per percorrere la curva, dove, per le (1) e (2),

$$v_0 = \sqrt{2a_tR} = 31,6\, m/s; \qquad v = \sqrt{a_t(2 + \pi)R} = 50,7\, m/s.$$

Pertanto:

$$\Delta t = 3,8\, s$$

5. Due imbarcazioni A e B procedono in direzioni opposte con velocità costanti, $v_A = 20\, km/h$ e $v_B = 30\, km/h$. Nell'istante in cui la distanza tra le imbarcazioni è d, da A viene sparato un proiettile con velocità, relativa all'imbarcazione, di modulo $v_P = 150\, m/s$ ed alzo $\theta = 30°$. Determinare la distanza d perché il proiettile colpisca B. Trascurare le dimensioni delle imbarcazioni e la resistenza dell'aria.

Il problema può essere risolto nel riferimento fisso o nel riferimento solidale con A.

Nel primo caso, tenuto conto che la componente orizzontale della velocità del proiettile è somma di $v_P \cos\theta$ e della velocità di A, le equazioni del moto sono,

$$x = (v_A + v_P \cos\theta)t; \qquad y = v_P \sin\theta\, t - \frac{1}{2}gt^2. \tag{1}$$

Il tempo di gittata va ricavato dalla seconda per $y = 0$; si ha

$$t_G = \frac{2 v_P \sin\theta}{g};$$

si noti che esso è indipendente da v_A. Sostituendo nella prima delle (1) e tenendo conto del moto dell'imbarcazione B, la gittata x_G risulta:

$$x_G = (v_A + v_P \cos\theta)\, t_G = d - v_B\, t_G,$$

dalla quale si ricava:

$$d = (v_A + v_B + v_P \cos\theta)\, t_G = 2,2\, km. \tag{2}$$

Nel riferimento solidale con A le equazioni del moto diventano:

$$x' = v_P \cos\theta\, t; \qquad y' = v_P \sin\theta\, t - \frac{1}{2} g t^2.$$

Il tempo di gittata è lo stesso del primo caso. La gittata, tenuto conto che la velocità relativa delle imbarcazioni è $v_A + v_B$, risulta:

$$x'_G = v_P \cos\theta\, t_G = d - (v_A + v_B)\, t_G,$$

da cui si ottiene lo stesso valore della (2).

6. Un bersaglio B posto all'altezza $h = 5\, m$ da un piano orizzontale, dev'essere colpito da un proiettile sparato da un carrello che si muove sul piano con velocità costante $v_C = 4,95\, m/s$, verso la proiezione O del bersaglio sul piano stesso. Determinare l'alzo θ in modo che il bersaglio venga colpito nel punto più alto della traiettoria del proiettile, se questo viene sparato quando il carrello si trova da O alla distanza uguale all'altezza h. Trascurare il rinculo del carrello.

Detto v_0 il modulo della velocità del proiettile, come noto, le equazioni del moto nel riferimento fisso, sono:

$$x = (v_C + v_0 \cos\theta) t; \qquad y = v_0 \sin\theta\, t - \frac{1}{2} g t^2, \tag{1}$$

che per $x = y = h$, diventano,

$$h = (v_C + v_0 \cos\theta) t; \qquad h = v_0 \sin\theta\, t - \frac{1}{2} g t^2. \tag{2}$$

Derivando rispetto al tempo si ottengono le componenti della velocità:

$$\dot{x} = v_C + v_0 \cos\theta; \qquad \dot{y} = v_0 \sin\theta - g t,$$

e dalla seconda, annullando la componente verticale della velocità, il tempo impiegato dal proiettile per raggiungere la massima quota:

$$t = \frac{v_0 \sin\theta}{g}. \tag{3}$$

Sostituendo nella seconda delle (2), si ottiene,

$$h = \frac{1}{2} \frac{v_0^2 \sin^2\theta}{g}, \quad \Rightarrow \quad \sin\theta = \frac{\sqrt{2gh}}{v_0}. \tag{4}$$

Tenuto conto delle (3) e (4), la prima delle (2) fornisce:

$$h = (v_C + v_0 \cos\theta) \frac{v_0 \sin\theta}{g} = (v_C + v_0 \cos\theta) \sqrt{\frac{2h}{g}}, \quad \Rightarrow \quad \cos\theta = \frac{1}{v_0} \sqrt{\frac{gh}{2}} - \frac{v_C}{v_0}. \tag{5}$$

Dalle (4) e (5) si ottiene

$$\tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta} = \frac{\sqrt{2gh}}{\sqrt{gh/2} - v_C}, \quad \Rightarrow \quad \theta = \tan^{-1}\left(\frac{\sqrt{2gh}}{\sqrt{gh/2} - v_C}\right). \tag{6}$$

Si deduce che l'alzo dipende dalla velocità di trascinamento v_C. Nel caso del problema risulta:

$$\tan\theta = \infty, \quad \Rightarrow \quad \theta = \frac{\pi}{2}.$$

D'altra parte, la componente orizzontale della velocità è somma della velocità di trascinamento v_C e della velocità $v_0 \cos\theta$ relativa al carrello. Siccome, tenendo presente la (4), la (3) risulta

$$t = \sqrt{\frac{2h}{g}},$$

si ha:

$$v_0 \cos\theta = \frac{h}{t} = \sqrt{\frac{gh}{2}}.$$

Si deduce, per la (6), che quando la velocità relativa è uguale alla velocità del carrello l'alzo dev'essere $\pi/2$.

7. Un tiratore posizionato sul bordo di una pedana circolare di raggio $R = 1\,m$, ruotante con velocità angolare costante $\omega = 5\,rad/s$ attorno al suo asse, deve colpire un bersaglio fisso B, posto all'esterno della pedana alla distanza $2R$ dal centro. Assumendo che velocità iniziale del proiettile abbia modulo $v_0 = 10\,m/s$, determinare la direzione θ da imporre al tiro se questo viene effettuato quando il tiratore si trova nella posizione A allineata col centro O della pedana e col bersaglio B.

Nel riferimento ortogonale fisso, con origine in O, asse x allineato col centro della pedana e col berasaglio, la velocità del proiettile $\mathbf{v}$, nell'istante in cui viene effettuato il tiro, deve risultare parallela a detto asse. Essa è somma della velocità $\mathbf{v}_0$, relativa alla pedana e della velocità di trascinamento $\mathbf{v}_t$:

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_t + \mathbf{v}_0. \tag{1}$$

La velocità di trascinamento è la velocità di rotazione della pedana,

$$\mathbf{v}_t = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{R} = \omega R \mathbf{j}.$$

Quindi la (1) diventa:

$$\mathbf{v} = \omega R \mathbf{j} + \mathbf{v}_0.$$

Si trae:

$$v_x = v_{0x}, \qquad v_y = \omega R + v_{0y}.$$

Poiché dev'essere $v_y = 0$, si deduce,

$$v_{0y} = -\omega R.$$

Ma,

$$v_{0y} = v_0 \sin\theta, \qquad \sin\theta = \frac{v_{0y}}{v_0} = -\frac{\omega R}{v_0} \quad \Rightarrow \quad \theta = -30\,^\circ.$$

8. Un punto materiale si muove su un asse x di moto armonico con pulsazione $\omega = 2\pi\,s^{-1}$. Sapendo che all'istante $t_1 = 1\,s$ il punto occupa la posizione $x_1 = 3\,cm$ ed all'istante $t_2 = (1 + 3/4)\,s$ la posizione $x_2 = -4\,cm$, calcolare posizione, velocità ed accelerazione per $t = 0$.

Il moto può essere espresso dall'equazione

$$x = A\sin(\omega t + \varphi), \tag{1}$$

dove φ è la fase che determina le condizioni iniziali del moto. Dalla (1) si ha

$$x = A(\sin\omega t\cos\varphi + \cos\omega t\sin\varphi).$$

Sostituendo i valori delle posizione e del tempo assegnati, si ha

$$x_1 = A\sin\varphi = 3\,cm \qquad x_2 = -A\cos\varphi = -4\,cm,$$

da cui si ricava l'ampiezza di oscillazione. Infatti:

$$\sin\varphi = \frac{3}{A}, \qquad \cos\varphi = \frac{4}{A}.$$

Quadrando e sommando:

$$\frac{9}{A^2} + \frac{16}{A^2} = 1, \quad \Rightarrow \quad A = \sqrt{25} = 5\,cm.$$

Quindi nelle due posizioni assegnate si ottengono le due relazioni,

$$3 = 5\sin\varphi, \qquad 4 = 5\cos\varphi, \qquad \sin\varphi = 0,6, \qquad \cos\varphi = 0,8; \tag{2}$$

oppure:

$$\tan\varphi = \frac{3}{4}, \quad \Rightarrow \quad \varphi = 36,87^\circ = 0,64\,rad.$$

Pertanto dalla (1) si ottiene:
posizione,

$$x = 5\sin\varphi = 3\,cm;$$

velocità,

$$\dot{x} = A\omega\cos(\omega t + \varphi) = 8\pi\,cm/s;$$

accelerazione,

$$\ddot{x} = -A\omega^2\sin(\omega t + \varphi) = -12\pi^2\,m/s^2.$$

9. Un punto materiale, inizialmente fermo, si muove su una traiettoria circolare di raggio $r = 30\,cm$. Sapendo che l'accelerazione angolare varia nel tempo secondo la relazione $\alpha(t) = kt$ con $k = 4\cdot 10^{-3}\,rad/s^2$, determinare il modulo dell'accelerazione nell'istante in cui l'arco percorso dal punto è $s = 20\,cm$.

Il modulo dell'accelerazione è dato da

$$a = \sqrt{a_t^2 + a_n^2}, \tag{1}$$

dove i moduli delle accelerazioni tangenziale a_t e normale a_n sono:

$$a_t = r\alpha(t) = r\,k\,t, \qquad a_n = \frac{v^2}{r}. \tag{2}$$

La velocità del punto è data da

$$v = \int r\alpha(t)dt = r\,k\int t\,dt = \frac{1}{2}r\,k\,t^2 + C_1, \tag{3}$$

dove C_1 è una costante, pari a zero perché il punto è inizialmente in quiete. Quindi l'arco percorso è dato da

$$s(t) = \int v(t)dt = \frac{1}{6}rkt^3 + C_2,$$

dove C_2 può essere posta uguale a zero. Dalla precedente va ricavato il tempo impiegato dal punto per percorrere l'arco assegnato:

$$t = \sqrt[3]{\frac{6s}{rk}} = 10\,s.$$

Sostituendo nella (3) si ottiene il valore della velocità:

$$v = 6 \cdot 10^{-2}\,m/s$$

e dalle (2) i valori delle accelerazioni tangenziale e normale,

$$a_t = 1,2 \cdot 10^{-2}\,m/s^2, \qquad a_n = 1,2 \cdot 10^{-2}\,m/s^2.$$

La (1) fornisce il modulo dell'accelerazione:

$$a = 1,7 \cdot 10^{-2}\,m/s^2.$$

10. Un'automobile si pone in moto su una pista circolare di raggio $R = 225\,m$. Dall'istante $t = 0$ all'istante $t_1 = 10\,s$ la sua velocità cresce linearmente col tempo e percorre un arco di traiettoria $s = 150\,m$. Determinare il modulo dell'accelerazione all'istante t_1.

Detta a_t l'accelerazione tangenziale, si ha

$$\Delta s = s(t_1) - s(0) = \frac{1}{2} a_t t^2 \quad \Rightarrow \quad a_t = \frac{2\Delta s}{t_1^2} = 3\,m/s^2.$$

Inoltre,

$$v(t_1) = a_t\, t_1 = 30\,m/s;$$

quindi l'accelerazione normale risulta:

$$a_n = \frac{[v(t_1)]^2}{R} = 4\,m/s^2.$$

Si ottiene:

$$a = \sqrt{a_t^2 + a_n^2} = 5\,m/s^2.$$

11. Un corpo puntiforme si muove con velocità relativa $v_r = 0,5\,m/s$ in direzione radiale, verso il centro di una piattaforma orizzontale che ruota con velocità angolare $\omega = 2\pi\,rad/s$. Determinare velocità ed accelerazione quando il corpo si trova alla distanza $r = 12\,m$ dal centro.

Dette $\mathbf{v}_a$ e $\mathbf{v}_t$ le velocità assoluta e di trascinamento, si ha

$$\mathbf{v}_a = \mathbf{v}_t + \mathbf{v}_r = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r} + \mathbf{v}_r,$$

il cui modulo è

$$\sqrt{(\omega r)^2 + v_r^2} = 75,4\,m/s.$$

Tenuto conto che $\mathbf{v}_t$ e $\mathbf{v}_r$ sono ortogonali, $\mathbf{v}_a$ forma un angolo con $\mathbf{v}_r$ dato da

$$\tan\alpha = \frac{v_t}{v_r} = \frac{\omega r}{v_r} = 150,8, \quad \Rightarrow \quad \alpha = \tan^{-1}\frac{\omega r}{v_r} = 89,6^\circ.$$

L'accelerazione assoluta è somma della accelerazione di trascinamento (centripeta) e della accelerazione di Coriolis,

$$\mathbf{a} = \mathbf{a}_t + \mathbf{a}_c = -\omega^2\mathbf{r} + 2\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}_r,$$

il cui modulo è

$$a = \sqrt{(\omega^2 r)^2 + (2\omega v_r)^2} = 473,8\,m/s^2.$$

Tenendo presente che l'accelerazione di Coriolis è ortogonale alla velocità relativa e alla accelerazione centripeta, la accelerazione assoluta forma con quest'ultima un angolo:

$$\tan\beta = \frac{a_c}{a_t} = \frac{2v_r}{\omega r} = 0,013, \quad \Rightarrow \quad \beta = \tan^{-1}\frac{2v_r}{\omega r} = 0,76^\circ.$$

Raccolta di Problemi sulla Dinamica del Punto Materiale
A cura del Prof. T.Papa

1. Un autocarro di massa $m = 25\,t$ ha una forza di trazione costante $F = 1,5 \cdot 10^4\,N$. Supponendo che il veicolo parta da fermo su una strada piana e che il modulo della forza resistente si possa approssimare con la relazione $R = k + bv$, con $k = 8 \cdot 10^3\,N$ e $b = 70\,N/(km/h)$, determinare: la massima velocità raggiunta v_L (velocità limite), il tempo t_1 impiegato per raggiungere la velocità $v_1 = v_L/5$ e lo spazio percorso in tale tempo.

$$F - (k + bv) = m\frac{dv}{dt}. \tag{1}$$

La velocità limite si ha per $dv/dt = 0$, pertanto:

$$v_L = \frac{F-k}{b} = 100\,km/h = 27,78\,m/s.$$

La velocità dell'autocarro va ottenuta integrando la (1), che si può scrivere:

$$v_L - v = \frac{m}{b}\frac{dv}{dt}, \qquad \frac{dv}{v_L - v} = \frac{b}{m}dt.$$

Si ha:

$$-\ln(v_L - v) = \frac{b}{m}t + C,$$

con $C = -\ln v_L$, essendo nulla la velocità iniziale. Dunque:

$$v = v_L\left(1 - e^{-bt/m}\right).$$

Per $v = v_L/5$, tenuto conto che

$$b = 70\,N/(km/h) = 70 \cdot 3,6\,N/(m/s) = 252\,N/(m/s),$$

risulta

$$t_1 = \frac{m}{b}\ln\frac{5}{4} = 22,14\,s.$$

Lo spazio percorso nell'intervallo di tempo t_1 è dato da

$$x = v_L\int_0^{t_1}\left(1 - e^{-bt/m}\right)dt = v_L\left[t_1 + \frac{m}{b}\left(e^{-bt_1/m} - 1\right)\right] = 63,85\,m.$$

2. Una particella di massa $m = 1\,kg$ ha energia potenziale espressa dalla relazione

$$U = A(1 - \cos kx)$$

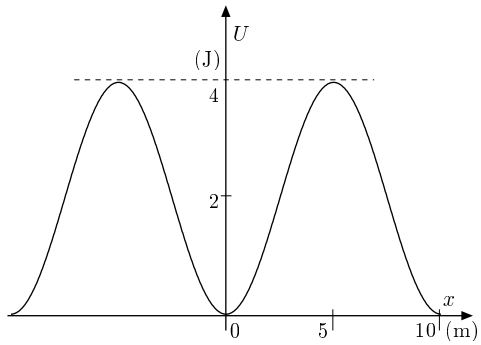
in cui $A = 2\,J$, $k = \pi/5\,rad/m$, e può muoversi, ovviamente, lungo l'asse x.

Inizialmente la particella si trova nella posizione $x_0 = 1\,m$. Determinare la massima distanza x_m che essa raggiunge se le velocità iniziali sono rispettivamente $v_0 = 2\,m/s$ e $v_0 = 4\,m/s$.

L'andamento dell'energia potenziale è periodico, come in figura, con massimi $U_{max} = 2A = 4\,J$, in corrispondenza a

$$kx = (2n+1)\pi, \qquad x = \frac{(2n+1)\pi}{k}.$$

La particella si trova nella buca di potenziale il cui valore massimo, $n = 0$, corrisponde a $x = 5\,m$ e pertanto nel primo caso, avendo energia cinetica $T = 2\,J$, non potrà oltrepassare tale massimo.



La particella è legata, dunque raggiunge la distanza massima con energia cinetica nulla; pertanto:

$$T_0 + U_0 = U;$$

da cui:

$$U = \frac{1}{2}mv_0^2 + A(1 - \cos kx_0) = 2,38\,J.$$

Quindi, alla distanza massima si ha

$$A(1 - \cos kx_m) = 2,38\,J.$$

Si ottiene:

$$x_m = \frac{1}{k}\cos^{-1}\left(1 - \frac{2,38}{A}\right) = 2,8\,m.$$

Nel caso in cui la velocità iniziale sia $v_0 = 4\,m/s$, l'energia totale della particella risulta

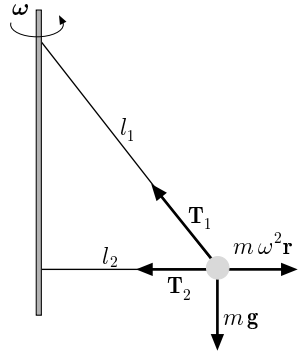
$$E = \frac{1}{2}mv_0^2 + U_0 = 16,38\,J,$$

maggiore dell'energia potenziale massima, pertanto la particella si allontana indefinitamente lungo l'asse x.

3. Un corpo puntiforme di massa $m = 1\,kg$ è collegato mediante due fili ideali, di lunghezza rispettivamente $l_1 = 1\,m$ e $l_2 = 0,5\,m$ ad un'asta rigida verticale che ruota con velocità angolare ω. I fili sono fissati all'asta in modo che, nella rotazione, il filo più corto risulti ortogonale ad essa. Assegnata la tensione massima che possono sopportare i fili, $T_{max} = 60\,N$, determinare il valore massimo di ω.

Nel riferimento ruotante si ha equilibrio delle forze reali e della forza di trascinamento (centrifuga):

$$\mathbf{T}_1 + \mathbf{T}_2 + m\mathbf{g} + m\omega^2\mathbf{r} = 0.$$



Proiettando sugli assi orizzontale e verticale, si ha:

$$-T_1\cos 60° - T_2 + m\omega^2 l_2 = 0, \qquad T_1 \sin 60° - mg = 0.$$

Dalla prima,

$$\frac{1}{2}T_1 + T_2 = m\omega^2 l_2. \tag{1}$$

Dalla seconda,

$$T_1\frac{\sqrt{3}}{2} = mg, \quad \Rightarrow \quad T_1 = \frac{2}{\sqrt{3}}mg = 11,33\,N,$$

indipendente dalla velocità angolare.

Ricavando ω dalla (1) e sostituendo a T_2 il valore della tensione massima assegnato, si ha:

$$\omega_{max} = \sqrt{\frac{T_1}{2ml_2} + \frac{T_{max}}{ml_2}} = 11,46\, rad/s\,.$$

4. All'equatore un corpo cade liberamente dall'altezza $h = 100\, m$, con velocità iniziale nulla. Determinare, nel riferimento terrestre, le equazioni del moto e la deviazione x, rispetto alla verticale, del punto di impatto col suolo. Trascurare la forza centrifuga dovuta alla rotazione terrestre.

Nel riferimento solidale con la terra, il corpo è soggetto alla gravità, alla forza centrifuga ed alla forza di Coriolis. Va applicata la legge della dinamica relativa che si scrive:

$$m\mathbf{a}_r = m\mathbf{g} + m\omega^2\mathbf{r} - 2m\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}_r, \tag{1}$$

dove $\boldsymbol{\omega}$ ed $\mathbf{r}$ sono rispettivamente la velocità angolare della terra e la distanza del corpo dal suo centro.

Il problema è analiticamente piuttosto complesso. Tuttavia se si trascura ω^2 in quanto molto piccolo ($\omega = 7,27 \cdot 10^{-5} rad/s$, quindi il suo quadrato è dell'ordine di 10^{-11}) si ottiene una soluzione soddisfacente; vedi T. Papa; Lezioni di Fisica, Meccanica, pagina 263. Il lettore può trovare la soluzione esatta in J. B. Marion; Classical Dynamics, Academic Press, N. Y. pagina 352. Nel caso del problema proposto, il corpo cade all'equatore dove $\boldsymbol{\omega}$ e $\mathbf{v}_r$ sono ortogonali. Tenuto conto che la forza di Coriolis è rivolta verso est e fissato un riferimento con asse x orientato in questa direzione ed asse y verso l'alto, la (1) dà luogo alle due equazioni scalari:

$$\ddot{x} = |-2\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}_r| = 2\omega\, v_r; \qquad \ddot{y} = -g,$$

che integrate forniscono:

$$\dot{x} = \omega g t^2 \quad \Rightarrow \quad x = \frac{1}{3}\omega g t^3;$$

$$\dot{y} = -gt, \quad \Rightarrow \quad y = -\frac{1}{2}gt^2 + h.$$

Poiché la velocità angolare della terra è $\omega = 2\pi/T = 7,27 \cdot 10^{-5}\, rad/s$ e il tempo d'impatto al suolo $t = \sqrt{2h/g}$, si ottiene:

$$x = \frac{1}{3}\omega g \left(2\frac{h}{g}\right)^{3/2} = 2,18 \cdot 10^{-2}\, m.$$

5. Due masse $m_1 = 10\, kg$ e $m_2 = 5\, kg$ sono fissate agli estremi di un filo ideale e vengono trascinate, su un piano orizzontale, applicando a m_1 una forza costante $\mathbf{F}$, di modulo $F = 100\, N$. Quest'ultima forma con l'orizzontale un angolo $\theta = 30°$. Sapendo che i coefficienti di attrito cinetico tra il piano e le due masse sono rispettivamente $\mu_1 = 0,3$ e $\mu_2 = 0,15$, calcolare la tensione del filo e l'accelerazione delle masse.

La forza applicata forma l'angolo θ con l'orizzontale, quindi la forza normale applicata a m_1 è inferiore al suo peso. Detta T la tensione del filo, le equazioni della dinamica relative alle due masse sono:

$$F\cos\theta - \mu_1(m_1 g - F\sin\theta) - T = m_1 a, \qquad T - \mu_2 m_2 g = m_2 a. \tag{1}$$

L'accelerazione è ovviamente la stessa in quanto il filo, durante il moto, risulta teso; inoltre il modulo della tensione nel filo ideale si trasmette inalterato in ogni suo punto.

Dalla (1) si trae:

$$a = 4,3\, m/s^2, \qquad T = 29\, N.$$

6. In un riferimento inerziale, un punto materiale di massa m si muove su una traiettoria circolare di raggio r. L'area spazzata dal vettore posizione, con origine nel centro della circonferenza, segue la legge

$$S = \frac{1}{2} c\, t^2,$$

dove c è una costante. Determinare il modulo della forza agente sul punto materiale.

Nel problema viene assegnata la legge con cui viene spazzata l'area dal vettore posizione. Ciò indica che la derivata di S rispetto al tempo fornisce il modulo della velocità areolare:

$$\frac{dS}{dt} = c\, t. \tag{1}$$

Ricordando che la velocità areolare è definita dalla relazione

$$\frac{\overrightarrow{dS}}{dt} = \frac{1}{2}(\mathbf{r} \times \mathbf{v}),$$

nel caso di traiettoria circolare, si ha

$$\frac{dS}{dt} = \frac{1}{2} r v = \frac{1}{2} \omega r^2. \tag{2}$$

Uguagliando le (1) e (2):

$$c\, t = \frac{1}{2} \omega r^2, \quad \Rightarrow \quad \omega = \frac{2c}{r^2}\, t. \tag{3}$$

La velocità angolare cresce linearmente col tempo.

D'altra parte, per determinare il modulo della forza agente sul punto materiale occorre conoscere il modulo dell'accelerazione, dato da:

$$a = \sqrt{a_t^2 + a_n^2}, \tag{4}$$

con

$$a_t = \dot{\omega} r, \qquad a_n = \omega^2 r.$$

Sostituendo nella (4),

$$a = r\sqrt{\dot{\omega}^2 + \omega^4},$$

e, tenuto conto della (3),

$$a = \frac{2c}{r}\sqrt{1 + \frac{4c^2}{r^4} t^4}.$$

Pertanto:

$$F = ma = \frac{2mc}{r}\sqrt{1 + \frac{4c^2}{r^4} t^4}.$$

7. Un dischetto è posto alla distanza $r = 10\, cm$ dall'asse di una piattaforma ruotante con velocità angolare $\omega_0 = 2\, rad/s$, restando fermo rispetto ad essa. Imprimendo alla piattaforma una accelerazione angolare $\alpha = \dot{\omega} = 2\, rad/s^2$ si osserva che dopo un intervallo di tempo $\Delta t = 1,5\, s$ il dischetto inizia a muoversi. Determinare il coefficiente di attrito statico.

Nel riferimento inerziale la forza agente sul dischetto è

$$\mu_s R_n = ma, \tag{1}$$

dove μ_s è il coefficiente di attrito statico ed $R_n = mg$ la reazione normale. Ma:

$$a = \sqrt{a_t^2 + a_n^2}, \tag{2}$$

con

$$a_t = \dot{\omega} r, \qquad a_n = \omega^2 r.$$

Trascorso l'intervallo di tempo Δt, la velocità angolare assume il valore

$$\omega = \omega_0 + \dot{\omega}\Delta t = 5\, rad/s;$$

quindi dalle (1) e (2) si trae:

$$\mu_s = \frac{a}{g} = \frac{r}{g}\sqrt{\dot{\omega}^2 + \omega^4} = 0,26.$$

8. Un punto materiale di massa $m = 10\, gm$ si muove su una traiettoria circolare di raggio $R = 20\, cm$ con moto uniformemente ritardato. Sapendo che all'istante $t_0 = 0$ la sua velocità ha modulo $v_0 = 15\, m/s$ e che all'istante $t_1 = 5\, s$ è nulla, determinare le leggi orarie della velocità, del moto e dell'accelerazione. Calcolare inoltre il lavoro compiuto dalle forze agenti nell'intervallo di tempo considerato.

Il modulo dell'accelerazione tangenziale è costante,

$$a_t = \frac{0 - v_0}{t_1 - t_0} = -3\, m/s^2.$$

Si deduce:

$$v = v_0 + a_t\, t = 15 - 3\, t, \qquad s = v_0 t + \frac{1}{2} a_t\, t^2 = 15\, t - \frac{3}{2} t^2. \tag{1}$$

Ricordando che il modulo dell'accelerazione è

$$a = \sqrt{a_t^2 + a_n^2},$$

con

$$a_n = \frac{v^2}{R},$$

tenuto conto della prima delle (1), si trova:

$$a = \sqrt{9 + \left[\frac{(15 - 3t)^2}{0,2}\right]^2}. \tag{2}$$

Si noti che all'istante t_1, essendo $v = 0$, si annulla soltanto l'accelerazione normale. Infatti in tale istante il punto materiale, animato di velocità iniziale v_0 positiva, per esempio diretta nel verso antiorario, ma soggetto all'accelerazione tangenziale negativa di modulo costante, inverte il suo moto e procede con accelerazione il cui modulo è dato dalla (2). D'altra parte il grafico della seconda delle (1), che esprime la legge oraria con cui è percorsa la traiettoria, è una parabola ad asse verticale e concavità volta in basso. L'ascissa t_1 corrisponde proprio al suo vertice, punto di inversione del moto.

Il lavoro delle forze è uguale alla variazione di energia cinetica del punto:

$$\mathcal{L} = \Delta T = -\frac{1}{2} m v_0^2 = -1,12\, J.$$

9. Una particella di massa $10\, gm$ e velocità iniziale di modulo $v_0 = 6\, m/s$, all'istante $t = 0$ entra in un mezzo dove è soggetta ad una forza viscosa del tipo $\mathbf{F} = -b\mathbf{v}$. Calcolare l'energia E dissipata nell'intervallo di tempo compreso tra $t = 0$ e $t = m/b$.

L'andamento della velocità si ottiene integrando l'equazione

$$m\frac{dv}{dt} = -b\, v, \quad \Rightarrow \quad \frac{dv}{v} = -\frac{b}{m} dt,$$

che fornisce

$$\ln v = -\frac{b}{m}\,t + C,$$

dove C è una costante che va determinata tenuto conto della condizione iniziale: $t = 0,\ v = v_0$. Pertanto,

$$\ln v = -\frac{b}{m}\,t + \ln v_0, \quad \Rightarrow \quad v = v_0 e^{-bt/m}.$$

L'energia dissipata è pari alla variazione di energia cinetica:

$$E = \Delta T = \frac{1}{2}mv_0^2 e^{-2bt/m} - \frac{1}{2}mv_0^2 = \frac{1}{2}mv_0^2(e^{-2} - 1) = -0,15\,J.$$

10. Un oggetto animato di velocità iniziale v_0 viene lanciato in modo da strisciare su un piano orizzontale scabro, arrestandosi dopo aver percorso una distanza d. Se il piano viene accelerato verso l'alto si osserva che l'oggetto, lanciato con la stessa velocità iniziale, si arresta percorrendo una distanza $d/2$. Determinare l'accelerazione del piano.

Supponendo costante la forza di attrito, per il teorema dell'energia cinetica si ha:

$$\frac{1}{2}mv_0^2 = \mu_c R_n d = \mu_c mgd, \tag{1}$$

dove R_n è la reazione normale e μ_c il coefficiente d'attrito cinetico o dinamico.

Nel caso in cui il piano venga accelerato verso l'alto le forze che agiscono sull'oggetto sono: la forza di trascinamento $\mathbf{F}_t = -m\mathbf{a}_t$ e la risultante delle forze reali che comprende la reazione vincolare $\mathbf{R}'_n$ e la forza peso. Poiché l'oggetto non assume un moto verticale perché striscia ancora sul piano si ha:

$$\mathbf{R}'_n + m\mathbf{g} + \mathbf{F}_t = 0.$$

Proiettando sulla verticale ascendente si ottiene:

$$R'_n - mg - ma_t = 0, \quad \Rightarrow \quad R'_n = m(g + a_t).$$

Dunque, ancora per il teorema dell'energia cinetica, si ha

$$\frac{1}{2}mv_0^2 = \mu_c R'_n \frac{d}{2} = \mu_c m(g + a_t)\frac{d}{2}. \tag{2}$$

dividendo membro a membro le (2) ed (1) si ottiene:

$$\frac{g + a_t}{g} = 2; \quad \Rightarrow \quad a_t = g.$$

11. Un treno viaggia alla velocità costante $v = 50\,km/h$. Supponendo che la forza di trazione del motore contrasti solo la forza di resistenza del mezzo, che si assume di tipo viscoso $F_v = -bv$ con $b = 100\,kg/s$, e che l'efficienza del motore sia $\epsilon = 0,6$ (rapporto tra l'energia erogata dal motore e l'energia elettrica assorbita), calcolare l'energia elettrica necessaria per percorrere $1\,km$.

Poiché il treno ha velocità costante, detta F la forza di trazione si deve avere,

$$\mathbf{F} + \mathbf{F}_v = 0, \qquad F - bv = 0, \qquad F = bv.$$

Detta E_{mot} l'energia erogata dal motore, E_{el} l'energia elettrica assorbita e Δl lo spazio percorso, si ha:

$$E_{el} = \frac{E_{mot}}{\epsilon} = \frac{F\Delta l}{\epsilon} = \frac{bv\Delta l}{\epsilon} = 2,3 \cdot 10^6\,J.$$

12. Un pendolo semplice di massa $m = 1\,kg$ e lunghezza l, inizialmente in quiete, è fissato al soffitto di un vagone che parte con accelerazione costante di modulo $a_t = 4,9\,m/s^2$. Calcolare la massima tensione del filo durante il moto del vagone.

Il pendolo, disposto inizialmente lungo la verticale, appena il vagone accelera comincia ad oscillare a causa della forza di trascinamento $\mathbf{F}_t = -m\mathbf{a}_t$. La posizione attorno alla quale avvengono le oscillazioni, nel riferimento del vagone (accelerato), è determinata dalla relazione

$$\mathbf{F} + \mathbf{F}_t = 0,$$

dove $\mathbf{F}$ è la somma delle forze reali: forza peso e tensione del filo. Detta $\mathbf{T}$ la tensione del filo, la precedente si scrive:

$$m\mathbf{g} + \mathbf{T} + m\mathbf{a}_t = 0. \tag{1}$$

Assunto positivo il verso degli archi crescenti e proiettando sulla tangente alla traiettoria si ottiene la relazione:

$$ma_t \cos\theta_0 - mg\sin\theta_0 = 0 \quad \Rightarrow \quad a_t = g\,\frac{\sin\theta_0}{\cos\theta_0} = g\tan\theta_0, \tag{2}$$

che determina l'angolo θ_0 attorno al quale avvengono le oscillazioni oppure, noto quest' ultimo, l'accelerazione di trascinamento.

Si intuisce subito, come avviene per un pendolo che oscilla in un riferimento inerziale, che in tale posizione la tensione del filo è massima. Infatti l'equazione della dinamica nel riferimento accelerato si scrive:

$$m\mathbf{g} + \mathbf{T} + m\mathbf{a}_t = m\mathbf{a}_r.$$

Assunto come positivo il verso centripeto e proiettando sulla normale, si ha:

$$T - mg\cos\theta - ma_t\sin\theta = m\frac{v^2}{l}. \tag{3}$$

Detto φ l'angolo di oscillazione rispetto a θ_0, la (3) diventa

$$T - mg\cos(\theta_0 + \varphi) - ma_t\sin(\theta_0 + \varphi) = m\frac{v^2}{l},$$

ossia:

$$T - (mg\cos\theta_0 + ma_t\sin\theta_0)\cos\varphi + (ma_t\cos\theta_0 - mg\sin\theta_0)\sin\varphi = m\frac{v^2}{l},$$

e ricordando la prima delle (2),

$$T - (mg\cos\theta_0 + ma_t\sin\theta_0)\cos\varphi = m\frac{v^2}{l}.$$

Si trae,

$$T = (mg\cos\theta_0 + ma_t\sin\theta_0)\cos\varphi + m\frac{v^2}{l}.$$

La tensione massima si ha per $\varphi = 0$, cioè

$$T_{max} = (mg\cos\theta_0 + ma_t\sin\theta_0) + m\frac{v_0^2}{l},$$

dove v_0 è la velocità (massima) con cui transita il pendolo in corrispondenza a θ_0.

Essendo

$$mg\cos\theta_0 + ma_t\sin\theta_0 = m\sqrt{g^2 + a_t^2},$$

si può anche scrivere:

$$T_{max} = m\sqrt{g^2 + a_t^2} + \frac{mv_0^2}{l}. \tag{4}$$

La velocità v_0 va ricavata per mezzo del teorema dell'energia cinetica:

$$m\sqrt{g^2+a_t^2}\,(1-\cos\theta_0)=\frac{1}{2}mv_0^2, \quad \Rightarrow \quad v_0^2=2\sqrt{g^2+a_t^2}\,(1-\cos\theta_0),$$

che sostituita nella (4) fornisce

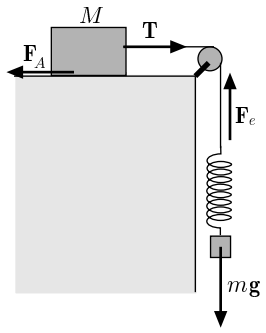
$$T_{max}=m\sqrt{g^2+a_t^2}\,(3-2\cos\theta_0).$$

Ricavando il valore di θ_0 dalla (2), si ottiene:

$$T_{max}=13,27\,N.$$

13. Un blocco di massa $M=4\,kg$, appoggiato su un piano orizzontale è collegato, mediante un filo inestendibile e di massa trascurabile, ad una molla ideale di costante elastica $k=100\,N/m$, disposta verticalmente, al cui estremo inferiore viene agganciata una massa m, in modo tale da non imprimere oscillazioni al sistema; vedi figura. Sapendo che i coefficienti di attrito statico e dinamico tra blocco e piano sono rispettivamente $\mu_s=0,5$, $\mu_d=0,2$, determinare per quale valore di m il sistema si pone in moto e il corrispondente allungamento della molla.

Le forze che agiscono su M sono la reazione vincolare $\mathbf{R}=\mathbf{R}_n+\mathbf{R}_t$, la tensione del filo $\mathbf{T}$ ed il peso $M\mathbf{g}$. La reazione vincolare normale $\mathbf{R}_n$ è ininfluente ai fini del moto in quanto opposta al peso, mentre la reazione tangenziale $\mathbf{R}_t$ è la forza di attrito $\mathbf{F}_A$. Le forze che agiscono su m sono il peso $m\mathbf{g}$ e la forza elastica.



Proiettando le forze su un asse orizzontale e su un asse verticale e tenuto conto che l'accelerazione di ogni parte del sistema è la stessa, le equazioni di Newton per le due masse sono:

$$T-F_A=Ma, \qquad F_e+mg=ma.$$

Poiché $F_e=-k\Delta x$ ed il filo ideale trasmette inalterato il modulo della forza elastica, risulta $T=k\Delta x$. Quindi le precedenti si scrivono:

$$k\Delta x-F_A=Ma, \qquad -k\Delta x+mg=ma. \tag{1}$$

Nelle condizioni di moto incipiente ($a=0$) si ha equilibrio dinamico delle forze; pertanto, indicando con Δx_1 l'allungamento della molla in queste condizioni, dalle (1) si ha

$$k\Delta x_1=F_A=\mu_s Mg, \qquad \Delta x_1=\frac{mg}{k}. \tag{2}$$

Dalla prima si ricava il valore minimo di m che pone in moto il sistema:

$$m=\mu_s M=2\,kg$$

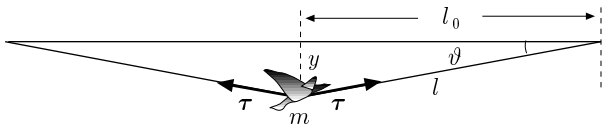
Quando il sistema è in moto, dalla prima delle (1) si ricava

$$a=\frac{k\Delta x-F_A}{M}.$$

Sostituendo nella seconda, tenuto conto della (2) e ricordando che $F_A = \mu_d M g$, si ottiene

$$\Delta x = \frac{mg}{k}\frac{M(1+\mu_d)}{m+M} = \Delta x_1 \frac{M(1+\mu_d)}{m+M} = 0,8\Delta x_1 = 0,16\,m$$

14. Un cavo elastico di lunghezza $2l_0 = 40\,m$ e massa trascurabile è teso orizzontalmente tra due punti fissi. Nel suo punto di mezzo si posa un piccione di massa $m = 1\,kg$, che imprime oscillazioni verticali di ampiezza molto piccola rispetto alla lunghezza del cavo. Determinare la tensione del cavo, sapendo che il periodo delle oscillazioni è $T = 1\,s$ e assumendo trascurabile lo smorzamento



Detti y lo spostamento verticale, τ la tensione del cavo, θ l'angolo che esso forma con l'orizzontale, l'equazione della dinamica del sistema si scrive:

$$m\frac{d^2y}{dt^2} = -2\tau\sin\theta + mg. \tag{1}$$

Supponendo che y sia piccolo si può assumere $\sin\theta = y/l \approx y/l_0$, altrimenti le oscillazioni sarebbero anarmoniche (l è funzione di y). Pertanto la (1) si riscrive:

$$m\frac{d^2y}{dt^2} = -2\tau\frac{y}{l_0} + mg. \tag{2}$$

Le oscillazioni avvengono intorno ad un punto di equilibrio y_0 ($d^2y/dt^2 = 0$), dato da

$$mg = 2\tau\frac{y_0}{l_0}, \quad \Rightarrow \quad y_0 = mg\frac{l_0}{2\tau}.$$

Introducendo la nuova variabile

$$y' = y - mg\frac{l_0}{2\tau},$$

la (2) diventa:

$$\frac{d^2y'}{dt^2} + \frac{2\tau}{ml_0}y' = 0.$$

Pertanto,

$$\omega^2 = \frac{2\tau}{ml_0}, \quad \Rightarrow \quad \tau = \frac{2\pi^2 ml_0}{T^2} = 394,8\,N.$$

Osservazione
Si è accennato più sopra che se $y \ll l_0$ le oscillazioni possono considerarsi armoniche. Il problema è analogo al caso considerato in T. Papa, Lezioni di Fisica; Meccanica, pag. 232. Infatti

$$l^2 = l_0^2 + y^2 = l_0^2\left(1 + \frac{y^2}{l_0^2}\right) = l_0\left(1 + \frac{y^2}{l_0^2}\right)^{1/2};$$

quindi,

$$\frac{1}{l} = \frac{1}{l_0}\left(1 + \frac{y^2}{l_0^2}\right)^{-1/2}.$$

Sviluppando in serie si ha:

$$\frac{1}{l} = \frac{1}{l_0}\left(1 - \frac{1}{2}\frac{y^2}{l_0^2} + \cdots\right),$$

e l'equazione della dinamica del sistema si scrive:

$$m\frac{d^2y}{dt^2} = -2\tau\frac{y}{l_0}\left(1 - \frac{1}{2}\frac{y^2}{l_0^2} + \cdots\right).$$

Pertanto se $y \ll l_0$ è lecito trascurare i termini superiori al primo, ottenendo la (2).

15. Una molla ideale di costante elastica $k = 10\,N/m$ e lunghezza a riposo $l_0 = 1\,m$, vincolata per un estremo ad una parete verticale, è disposta su un piano orizzontale di lunghezza $4l_0$. La molla viene compressa fino a dimezzare la sua lunghezza e alla sua estremità libera viene appoggiata una massa puntiforme $m = 0,1\,kg$ che, una volta sbloccata la molla, viene spinta sul piano. Sapendo che il coefficiente d'attrito dinamico tra massa e piano è $\mu_d = 0,1$, calcolare velocità ed accelerazione della massa alla fine del piano.

Il lavoro delle forze non conservative è pari alla variazione di energia meccanica,

$$E_2 - E_1 = \mathcal{L}^{nc}, \quad \Rightarrow \quad E_2 = E_1 + \mathcal{L}^{nc},$$

ossia, detta v la velocità alla fine del piano,

$$\frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}k\left(\frac{l_0}{2}\right)^2 - \mu_d\, m\, g\left(4l_0 - \frac{1}{2}l_0\right).$$

Si ricava:

$$v^2 = \frac{k}{m}\frac{l_0^2}{4} - 7\mu_d\, g\, l_0, \quad \Rightarrow \quad v = 4,26\,m/s.$$

L'accelerazione, supponendo costante la forza d'attrito, è ovviamente costante e risulta

$$a = \mu_d\, g = 0.98\,m/s^2.$$

16. Una slitta di massa $m = 100\,kg$, trainata da una forza costante di modulo $F = 400\,N$ che forma un angolo θ rispetto all'orizzontale, deve percorrere un tratto $l = 50\,m$ su un piano. Sapendo che il coefficiente d'attrito dinamico tra slitta e piano è $\mu_d = 0,3$, determinare l'angolo θ affinché il tempo di percorrenza sia minimo, supponendo che la velocità iniziale sia nulla.

Il problema va risolto applicando l'equazione di Newton,

$$m\mathbf{a} = \mathbf{F},$$

dove $\mathbf{F}$ è la somma delle forze agenti: forza esterna, peso, reazione vincolare normale $\mathbf{R}_n$ e reazione tangente $\mathbf{R}_t$, pari alla forza d'attrito. Proiettando sugli assi x-y, orizzontale e verticale e tenuto conto che il moto avviene solo secondo x, si ha

$$\begin{aligned} m\ddot{x} &= F\cos\theta - R_t = F\cos\theta - \mu_d(mg - F\sin\theta) \\ m\ddot{y} &= F\sin\theta - mg + R_n = 0. \end{aligned}$$

Dalla prima si ottiene:

$$\ddot{x} = \frac{F(\cos\theta + \mu_d\sin\theta) - \mu_d mg}{m}.$$

Affinché il tempo di percorrenza sia minimo, l'accelerazione impressa alla slitta dev'essere massima. Pertanto, annullando la derivata prima dell'accelerazione rispetto a θ, si ha:

$$-F\sin\theta + F\mu_d\cos\theta = 0, \qquad F\sin\theta = F\mu_d\cos\theta.$$

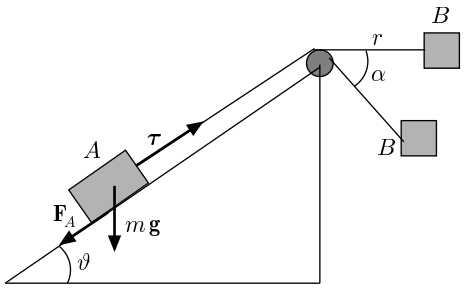
Si trae,

$$\tan\theta = \mu_d = 0,3, \quad \Rightarrow \quad \theta = \theta^* = 16,7^\circ.$$

Il tempo di percorrenza minimo è dato da:

$$t = \sqrt{\frac{2l}{a_{max}}} = \sqrt{\frac{2ml}{F(\cos\theta^* + \mu_d \sin\theta^*) - \mu_d \sin\theta^*}} = 4,9\,s$$

17. Una massa A, su un piano inclinato scabro che forma un angolo θ con l'orizzontale, è collegata mediante un filo ideale ad una massa uguale B, tenuta sospesa in posizione orizzontale rispetto al vertice più alto del piano ad una distanza r da esso. Si osserva che, rilasciata la massa B, A inizia a muoversi verso la sommità del piano quando il filo di collegamento forma un angolo α con l'orizzontale. Ricavare il coefficiente di attrito statico.



Lungo il filo ideale il modulo della tensione $\boldsymbol{\tau}$ si trasmette inalterato, quindi per la massa A, nelle condizioni di moto incipiente, si ha

$$\tau - (mg\sin\theta + \mu_s mg\cos\theta) = 0,$$

da cui,

$$\tau = mg\sin\theta + \mu_s mg\cos\theta. \tag{1}$$

Per la massa B, che percorre una traiettoria circolare, l'equazione della dinamica si scrive

$$m\mathbf{a} = \boldsymbol{\tau} + m\mathbf{g},$$

che proiettata nella direzione centripeta del filo fornisce

$$m\frac{v^2}{r} = \tau - mg\sin\alpha, \quad \Rightarrow \quad \tau = mg\sin\alpha + m\frac{v^2}{r}. \tag{2}$$

Tenuto conto che

$$\frac{1}{2}mv^2 = mgr\sin\alpha, \quad \Rightarrow \quad v^2 = 2gr\sin\alpha,$$

e uguagliando le (1) e (2), si ottiene

$$3\sin\alpha - \sin\theta = \mu_s\cos\theta, \quad \Rightarrow \quad \mu_s = \frac{3\sin\alpha - \sin\theta}{\cos\theta}.$$

18. Una guida verticale scabra ha la forma di un quarto di circonferenza di raggio $r = 10\,m$. Un blocchetto di massa $m = 5\,kg$ viene spinto dalla base della guida fino alla sommità, da una forza $\mathbf{F}$ tangente alla guida, di modulo tale da mantenere costante il modulo della velocità del blocchetto lungo tutta la traiettoria, uguale a $v_0 = 5\,m/s$. Sapendo che il coefficiente d'attrito dinamico tra blocchetto e guida è $\mu_d = 0,3$, determinare il lavoro della forza.

Indicando con $\mathcal{L}$, $\mathcal{L}_A$ e $\mathcal{L}_g$ rispettivamente i lavori della forza applicata, della forza d'attrito e della forza peso, per il teorema dell'energia cinetica, la somma di tali lavori è pari alla variazione di energia cinetica, nel caso del problema, nulla:

$$\mathcal{L} + \mathcal{L}_A + \mathcal{L}_g = 0, \quad \Rightarrow \quad \mathcal{L} + \mathcal{L}_A = -\mathcal{L}_g = mgr, \tag{1}$$

pari alla variazione di energia potenziale del blocchetto. La somma dei lavori al primo membro è dovuta a forze non conservative; infatti la forza applicata è una sorta di forza "intelligente"che mantiene costante la velocità, per esempio una forza muscolare; la forza d'attrito è notoriamente non conservativa. Quindi, essendo il lavoro delle forze non conservative pari alla variazione di energia totale,

$$\mathcal{L}^{nc} = (T_B + U_B) - (T_A + U_A),$$

nel caso del problema ($T_B = T_A$) si ha:

$$\mathcal{L}^{nc} = U_B - U_A = mgr.$$

Per calcolare esplicitamente il lavoro della forza d'attrito si osservi che sul blocchetto agiscono le forze: F, la forza d'attrito $F_A = \mu_d R_n$, la reazione vincolare normale $\mathbf{R}_n$ ed il peso. Si ha:

$$m\mathbf{a} = \mathbf{F} + \mathbf{F}_A + \mathbf{R}_n + m\mathbf{g}.$$

Proiettando lungo la tangente e lungo la normale alla guida, assunti positivi i versi centripeto e degli archi crescenti e tenuto conto che l'accelerazione tangenziale è nulla (velocità v_0 costante), si ha

$$F - F_A - mg\sin\theta = 0$$

$$m\frac{v_0^2}{r} = R_n - mg\cos\theta, \tag{2}$$

dove θ è l'angolo che forma la verticale col raggio. Dalla seconda delle (2) si ricava

$$R_n = mg\cos\theta + m\frac{v_0^2}{r}.$$

Pertanto, tenuto conto che l'elemento d'arco $ds = rd\theta$, il lavoro elementare della forza d'attrito $F_A = \mu_d R_n$ è dato da:

$$d\mathcal{L}_A = -\mu_d(mgr\cos\theta d\theta + mv_0^2 d\theta).$$

Integrando:

$$\mathcal{L}_A = -\mu_d\left(mgr\int_0^{\pi/2}\cos\theta d\theta + mv_0^2\int_0^{\pi/2} d\theta\right) = -\mu_d\left(mgr + mv_0^2\frac{\pi}{2}\right).$$

Sostituendo nella (1),

$$\mathcal{L} = -\mathcal{L}_A - \mathcal{L}_g = \mu_d\left(mgr + mv_0^2\frac{\pi}{2}\right) + mgr = 696\,J$$

Va osservato che tale lavoro può essere ricavato dalla prima delle (2). Più sopra si è detto che la forza applicata al blocchetto dev'essere una forza "intelligente"in quanto va mantenuta costante la velocità. Se, per esempio, agisse una forza di modulo costante, tangente alla traiettoria, la reazione normale dipenderebbe oltre che dall'angolo θ, dalla velocità. In tal caso il calcolo del lavoro diverrebbe piuttosto complesso.

Limitandosi al caso di un corpo puntiforme vincolato ad una guida circolare scabra orizzontale, sul quale agisce una forza F di modulo costante tangente alla guida, l' equazione di Newton è

$$ma = F + F_A + R_n.$$

Come prima, proiettando sulla tangente e sulla normale, si ha

$$ma_t = F - F_A = F - \mu_d R_n, \qquad R_n = m\frac{v^2}{r}.$$

Pertanto:

$$m\frac{d^2s}{dt^2} = F - \mu_d m\frac{v^2}{r}, \tag{3}$$

dove s è l'arco di traiettoria. Si osserva anzitutto che, ponendo $a_t = d^2s/dt^2 = 0$, la velocità del corpo tende al valore limite

$$v_L = \sqrt{\frac{Fr}{\mu_d m}}.$$

Dunque il lavoro delle forze è pari alla variazione di energia cinetica:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}mv_L^2 - \frac{1}{2}mv_0^2,$$

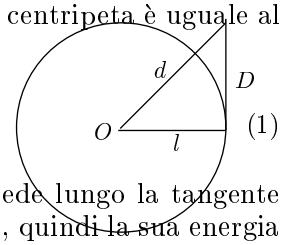
dove v_0 è la velocità iniziale che, in particolare, può essere nulla. L'espressione della velocità va ricavata integrando la (3) col metodo descritto in T. Papa; Lezioni di Fisica, pagina 247. Essa è data da

$$v = v_L \tanh\frac{Ft}{mv_L}.$$

19. Un corpo puntiforme, vincolato ad un filo di lunghezza l e carico di rottura T_m, ruota attorno ad un punto fisso O, su un piano orizzontale scabro. Ad un certo istante il filo si spezza ed il corpo si arresta ad una distanza d dal centro di rotazione O. Determinare la massa del corpo ($\mu_d = 0,15$, $l = 3\,cm$, $d = 5\,cm$, $T_m = 4,9\,N$).

All'istante della rottura del filo la forza centripeta è uguale al carico di rottura del filo,

$$m\frac{v^2}{l} = T_m. \tag{1}$$



D'altra parte il corpo da quell'istante procede lungo la tangente alla traiettoria, arrestandosi alla distanza D, quindi la sua energia cinetica iniziale è uguale all'energia dissipata per attrito:

$$\frac{1}{2}mv^2 = \mu_d mgD, \quad \Rightarrow \quad v^2 = 2\mu_d gD, \tag{2}$$

dove

$$D = \sqrt{d^2 - l^2}.$$

Sostituendo la (2) nella (1) si ricava

$$m = \frac{lT_m}{v^2} = \frac{lT_m}{2\mu_d gD} = 1,25\,kg.$$

20. Un corpo di massa $m = 80\,kg$ è agganciato ad un estremo di una corda elastica di lunghezza l_0. ancorata per l'altro estremo ad un punto O fisso. Il corpo cade da un'altezza l_0 al di sopra di O e precipita trattenuto dalla corda. Supponendo che la corda sia di massa trascurabile ed abbia costante elastica $k = \alpha/l_0$, con $\alpha = 4 \cdot 10^4\,N$, determinare la massima tensione.

Dopo che il corpo nella caduta ha percorso la quota $2l_0$ la corda inizia ad allungarsi di Δl. Si ha conservazione dell'energia:

$$\frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}k(\Delta l)^2 = mgh, \tag{1}$$

dove

$$h = 2l_0 + \Delta l.$$

In corrispondenza all'allungamento massimo $(\Delta l)_{max}$, la velocità del corpo è nulla $v = 0$, quindi la (1) diventa

$$\frac{1}{2}k(\Delta l)^2_{max} = mg[2l_0 + (\Delta l)_{max}] = 2mgl_0 + mg(\Delta l)_{max},$$

ossia

$$k(\Delta l)^2_{max} - 2mg(\Delta l)_{max} - 4mgl_0 = 0,$$

che fornisce:

$$(\Delta l)_{max} = m\frac{g}{k} \pm \sqrt{\left(\frac{mg}{k}\right)^2 + 4mg\frac{l_0}{k}}.$$

Scartando il segno negativo e detta τ la tensione, si ottiene

$$\tau_{max} = k(\Delta l)_{max} = mg + \sqrt{(mg)^2 + 4mg\alpha} = 1,2 \cdot 10^4\, N.$$

21. Una piastra oscilla in un piano orizzontale, con moto armonico di ampiezza $A = 2,5\, cm$ e frequenza ν variabile. Sulla piastra viene appoggiato un dischetto e si osserva che che questo inizia a muoversi quando, aumentando la frequenza (molto lentamente) questa raggiunge il valore $\nu = 2\, Hz$. Determinare il coefficiente di attrito statico tra dischetto e piastra.

Nelle condizioni di moto incipiente dev'essere

$$ma = \mu_s mg.$$

Siccome l'accelerazione nel moto armonico è

$$a = -A\omega^2 \sin \omega t,$$

si ha

$$a_{max} = |A\omega^2|, \quad \Rightarrow \quad \mu_s = \frac{A\omega^2}{g} = 0,4.$$

22. Una pallina cade da un'altezza $h = 1\, m$ su un piano inclinato di un angolo $\theta = 20°$ con velocità iniziale nulla. Nell'ipotesi di urto elastico, determinare la distanza in cui avviene il secondo rimbalzo sul piano inclinato.

Fissato un riferimento cartesiano con origine nel punto di impatto della pallina, asse x orientato lungo il piano inclinato nel verso discendente ed asse y ortogonale, le componenti dell'accelerazione lungo tali assi sono

$$\ddot{x} = g \sin \theta \qquad \ddot{y} = -g \cos \theta. \tag{1}$$

Il modulo della velocità con cui incide e viene riflessa la pallina è dato da

$$v_0 = \sqrt{2gh},$$

e poiché gli angoli di incidenza riflessione sono uguali all'angolo θ del piano inclinato ed interessa la traiettoria dopo l'impatto, le (1) vanno integrate con le seguenti condizioni iniziali:

$$\dot{x}_0 = v_0 \sin \theta = \sqrt{2gh}\, \sin \theta, \qquad \dot{y}_0 = v_0 \cos \theta = \sqrt{2gh}\, \cos \theta.$$

Si ottiene:
velocità,

$$\dot{x} = (g \sin \theta)t + \sqrt{2gh}\, \sin \theta, \qquad \dot{y} = -(g \cos \theta)t + \sqrt{2gh}\, \cos \theta;$$

equazioni del moto,

$$x = \frac{1}{2}(g \sin \theta)t^2 + (\sqrt{2gh}\, \sin \theta)t, \qquad y = -\frac{1}{2}(g \cos \theta)t^2 + (\sqrt{2gh}\, \cos \theta)t. \tag{2}$$

L'istante in cui si ha il secondo contatto della pallina col piano si ha per $y = 0$; risulta:

$$t_1 = \sqrt{\frac{8h}{g}}.$$

Sostituendo la precedente nella prima delle (2) si ricava l'ascissa cercata:

$$x_1 = \frac{1}{2}(g\sin\theta)\frac{8h}{g} + \sqrt{2gh}\,\sin\theta\sqrt{\frac{8h}{g}} = 8h\sin\theta = 2,74\,m.$$

23. Un corpo puntiforme di massa $m = 50\,kg$ può scorrere lungo una guida orizzontale scabra, soggetto ad una forza $\mathbf{F} = -kx\mathbf{i}$, dove x è l'ascissa rispetto al centro O della forza e $k = 50\,N/m$. Il corpo, inizialmente in quiete ad una distanza $d = 50\,cm$ da O, viene lasciato libero di muoversi, quindi transita per O e si ferma in un punto B. Sapendo che il coefficiente d'attrito dinamico è $\mu_d = 0,01$, determinare il minimo valore del coefficiente d'attrito statico affinché il corpo resti fermo in B.

Il corpo è soggetto alla forza di tipo elastico, alla forza d'attrito, opposta alla velocità, al peso ed alla reazione vincolare. L'equazione della dinamica si scrive:

$$m\mathbf{a} = \mathbf{F} + \mathbf{F}_A + m\mathbf{g} + \mathbf{R}.$$

La reazione vincolare è opposta al peso; la forza d'attrito, nella fase del moto prevista dal problema è positiva, contraria alla direzione del moto e, per velocità modeste, costante. Pertanto sull'asse del moto si ha

$$m\ddot{x} = -kx + \mu_d mg. \tag{1}$$

Questa equazione è tipica del sistema massa-molla al quale viene applicata anche una forza costante. Il nuovo centro di oscillazione x_0 va determinato ponendo $\ddot{x} = 0$ (accelerazione nulla). Si ha

$$x_0 = \mu_d\frac{mg}{k}. \tag{2}$$

Introducendo la nuova variabile $x' = x - x_0$, la (1) diventa

$$\ddot{x}' = -\frac{k}{m}x',$$

che, come noto, ha soluzione

$$x' = A\cos(\omega t + \varphi).$$

Vanno ora determinate ampiezza e fase. Derivando:

$$\dot{x}' = -A\omega\sin(\omega t + \varphi),$$

ed imponendo le condizioni iniziali ($t = 0$):

$$x'(0) = A\cos\varphi = d - x_0, \qquad \dot{x}'(0) = -A\omega\sin\varphi = 0.$$

Si ottiene

$$A = d - x_0, \qquad \varphi = 0.$$

Pertanto, passando alla vecchia variabile, le equazione del moto e della velocità sono:

$$x = x_0 + (d - x_0)\cos\omega t, \qquad \dot{x} = -(d - x_0)\omega\sin\omega t. \tag{3}$$

La soluzione trovata è valida finché il corpo raggiunge B; non è valida dopo, sia che il corpo resti fermo a causa dell'attrito statico, sia che si muova nel verso positivo fissato

sulla guida. Il corpo raggiunge il punto B con velocità nulla (punto d'inversione del moto); dalla seconda della (3) si ha

$$-(d - x_0)\omega \sin \omega t = 0, \quad \Rightarrow \quad \omega t = 0.$$

Ricordando la (2), la prima delle (3) fornisce l'ascissa del punto B,

$$x_B = x_0 - (d - x_0) = 2\mu_d \frac{mg}{k} - d = -0,3\, m.$$

Affinché il corpo resti fermo in B è necessario che la forza di attrito statico sia maggiore o uguale alla forza elastica:

$$\mu_s mg \geq k|x_B|, \quad \Rightarrow \quad \mu_s \geq \frac{k|x_B|}{mg} = 0,03.$$

24. L'energia potenziale di un punto materiale è data dall'espressione

$$U = 10z - \frac{1}{2}(x^2 + y^2).$$

Determinare le superfici equipotenziali, il modulo della forza agente sul punto nella posizione $P \equiv (5; 10; 10)$ ed il luogo dei punti in cui la forza ha modulo costante.

Le superfici equipotenziali sono

$$10z - \frac{1}{2}(x^2 + y^2) = C,$$

dove C è una costante. Le superfici equipotenziali sono paraboloidi di rotazione attorno all'asse z del riferimento.

Le componenti della forza sono date da

$$F_x = -\frac{\partial U}{\partial x} = x; \qquad F_y = -\frac{\partial U}{\partial y} = y; \qquad F_z = -\frac{\partial U}{\partial z} = -10.$$

Il modulo della forza nel punto assegnato risulta:

$$\sqrt{x^2 + y^2 + 100} = 15\, N.$$

Si rammenti che la forza è ortogonale alle superfici equipotenziali. I luoghi dei punti in cui la forza ha modulo costante soddisfano l'equazione:

$$x^2 + y^2 + 100 = cost,$$

cilindri intersezioni con le superfici equipotenziali. Si noti la analogia col problema riguardante un fluido contenuto in un vaso cilindrico, ruotante attorno al suo asse.

25. Un punto materiale di massa m si muove lungo una guida circolare orizzontale di raggio $r = 80\, cm$. Sapendo che il coefficiente di attrito dinamico e la velocità iniziale sono rispettivamente $\mu_d = 0,1$, $v_0 = 1\, m/s$, determinare dopo quanti giri la velocità si dimezza ed il corrispondente modulo dell'accelerazione.

Sul punto agisce la reazione normale al vincolo $R_n = mv^2/r$ e la forza d'attrito $F_A = \mu_d R_n$. Pertanto l'unica equazione atta ad individuare il moto è

$$m\frac{dv}{dt} = -\mu_d m \frac{v^2}{r}. \tag{1}$$

Per integrare la (1), detto θ l'angolo di rotazione, si ponga

$$\frac{dv}{dt} = \frac{dv}{d\theta}\frac{d\theta}{dt} = \frac{dv}{d\theta}\frac{v}{r}.$$

Sostituendo al primo membro della (1) si ottiene:

$$\frac{dv}{d\theta} = -\mu_d\, v.$$

Separando le variabili:

$$\frac{dv}{v} = -\mu_d d\theta.$$

Integrando:

$$\ln v = -\mu_d\theta + C,$$

dove C è una costante che, in base alle condizioni iniziali $\theta = 0$, $v = v_0$, risulta $\ln v_0$. Pertanto la precedente diventa

$$\ln v = -\mu_d\theta + \ln v_0, \quad \Rightarrow \quad v = v_0 e^{-\mu_d\theta}. \tag{2}$$

Ponendo $v = v_0/2$ nella (2), l'angolo θ^* per il quale la velocità si dimezza risulta

$$\ln 2 = \mu_d\theta^*, \quad \Rightarrow \quad \theta^* = \frac{\ln 2}{\mu_d}.$$

Il numero di giri è

$$2\pi n = \frac{\ln 2}{\mu_d}, \quad \Rightarrow \quad n = \frac{\ln 2}{2\pi\mu_d} = 1,1\, giri.$$

Il modulo dell'accelerazione è

$$a = \sqrt{a_t^2 + a_n^2} = \frac{v^2}{r}\sqrt{\mu_d^2 + 1},$$

che per $v = v_0/2$ risulta:

$$a = \frac{v_0^2}{4r}\sqrt{\mu_d^2 + 1} = 0,31\, m/s^2.$$

26. Un corpo puntiforme è appoggiato sulla falda interna di un cono circolare che ruota attorno al suo asse, disposto verticalmente, con velocità angolare ω costante. Detta r la distanza del corpo dall'asse e θ la semiapertura del cono, si determini il valore del coefficiente di attrito statico necessario perché il corpo sia in equilibrio.

Nel riferimento ruotante si ha equilibrio relativo delle forze reali e di trascinamento:

$$\mathbf{F} + \mathbf{F}_t = 0. \tag{1}$$

Le forze reali comprendono la forza peso, la reazione normale $\mathbf{R}_n$, ortogonale alla falda del cono, e la forza d'attrito $\mathbf{F}_A$. Pertanto la (1) si scrive,

$$m\mathbf{g} + \mathbf{R}_n + \mathbf{F}_A + m\omega^2\mathbf{r} = 0. \tag{2}$$

Proiettando la (2) su una generatrice del cono, assumendo positivo il verso ascendente, e sulla normale, assumendo positivo il verso di $\mathbf{R}_n$, si ha

$$\begin{aligned} &-mg\cos\theta + F_A + m\omega^2 r\sin\theta = 0 \\ &-mg\sin\theta + R_n - m\omega^2 r\cos\theta = 0. \end{aligned}$$

Si ricava:

$$\begin{aligned} F_A &= mg\cos\theta - m\omega^2 r\sin\theta \\ R_n &= mg\sin\theta + m\omega^2 r\cos\theta. \end{aligned} \tag{2}$$

Poiché per l'equilibrio,

$$F_A \leq \mu_s R_n, \quad \Rightarrow \quad \mu_s \geq \frac{F_A}{R_n},$$

per le (2) si ottiene:

$$\mu_s \geq \frac{g\cos\theta - \omega^2 r\sin\theta}{g\sin\theta + \omega^2 r\cos\theta}. \tag{3}$$

Naturalmente questa relazione pone restrizioni sulla velocità angolare e sull'angolo di semiapertura del cono, in quanto il numeratore dev'essere positivo:

$$g\cos\theta - \omega^2 r\sin\theta > 0.$$

Se fosse $\mu_s = 0$,

$$g\cos\theta = \omega^2 r\sin\theta, \quad \Rightarrow \quad \omega^2 = \frac{g}{r\tan\theta}.$$

Per l'equilibrio, assegnato l'angolo θ, si avrebbe un preciso valore di ω.

Lo stesso risultato si ottiene nel riferimento fisso. In tal caso si ha

$$m\mathbf{a} = m\mathbf{g} + \mathbf{R}_n + \mathbf{F}_A,$$

dove $\mathbf{a}$ è l'accelerazione centripeta. Proiettando secondo una generatrice del cono e la sua normale, con la stessa convenzione per i segni, si ha

$$\begin{aligned} -m\omega^2 r\sin\theta &= F_A - mg\cos\theta \\ m\omega^2 r\cos\theta &= -mg\sin\theta + R_n. \end{aligned}$$

Procedendo come prima, si ottiene la (3).

27. Un blocchetto di massa $1\,kg$ è appoggiato su un piano inclinato scabro, che forma un angolo $\theta = 60°$ con l'orizzontale. Il blocchetto è agganciato ad una molla di costante elastica $k = 20\,N/m$, fissata con un supporto alla sommità del piano. Sapendo che $\mu_d = 0,366$, calcolare il massimo allungamento della molla una volta lasciato libero il blocchetto con la molla non deformata.

Questo problema può essere risolto col teorema dell'energia cinetica. Negli stati iniziale e finale l'energia cinetica è nulla, pertanto la somma dei lavori delle forze agenti è pari a zero. Detto $(\Delta l)_m$ l'allungamento massimo della molla e assunto positivo il verso discendente del piano, si ha

$$-\frac{1}{2}k(\Delta l)_m^2 + mg\sin\theta(\Delta l)_m - \mu_d mg\cos\theta(\Delta l)_m = 0.$$

Si ricava:

$$(\Delta l)_m = \frac{2mg}{k}(\sin\theta - \mu_d\cos\theta) = 0,67\,m.$$

28. Un corpo di massa m è agganciato all'estremità di una molla ideale di costante elastica k, fissata al soffitto di un ascensore. Quando l'ascensore è fermo, il corpo è in equilibrio con la molla allungata di x_0 rispetto alla sua lunghezza a riposo. Ad un certo istante l'ascensore si pone in moto con accelerazione a costante. Determinare modulo e verso di a, sapendo che un osservatore solidale con l'ascensore misura un allungamento massimo della molla $x_m = 2x_0$.

Fissato un asse di riferimento con origine nel punto in cui la molla è a riposo, se l'ascensore è fermo l'allungamento della molla x_0 è dato ponendo $\ddot{x} = 0$ nell'equazione

$$m\ddot{x} = -kx + mg, \quad \Rightarrow \quad x_0 = \frac{mg}{k}.$$

Il corpo si trova in equilibrio ($v = 0$) in tale posizione. Quando l'ascensore accelera l'equazione della dinamica, nel riferimento dell'ascensore, si scrive:

$$m\ddot{x} = F + F_t,$$

dove F è la somma delle forze reali ed $F_t = \pm a_t$ la forza di trascinamento. Pertanto:

$$m\ddot{x} = -kx + m(g \pm a_t).$$

Le oscillazioni del corpo avvengono ($\ddot{x} = 0$) attorno al nuovo centro di oscillazione

$$x_1 = \frac{m(g \pm a_t)}{k}.$$

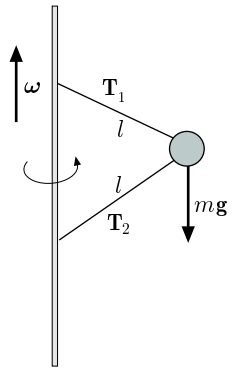
Ma l'osservatore registra un'ampiezza massima di oscillazione $2x_0$, quindi il corpo oscilla tra i punti di coordinate x_0 e $2x_0$ (in x_0 il corpo è inizialmente fermo). È chiaro inoltre che essendo $2x_0$ l'ampiezza massima, l'accelerazione di trascinamento è rivolta in alto. Quindi l'ampiezza dell'oscillazione risulta:

$$A = \frac{2x_0 - x_0}{2} = \frac{x_0}{2}.$$

Pertanto:

$$x_1 = x_0 + \frac{x_0}{2} = \frac{m(g + a_t)}{k}, \quad \Rightarrow \quad a_t = \frac{g}{2}.$$

29. Una sfera di massa $m = 1\,kg$ è collegata ad un'asta rigida verticale mediante due fili ideali, aventi la stessa lunghezza $l = 2\,m$. I fili sono fissati all'asta in due punti distanti l, in modo da formare un triangolo equilatero, vedi figura. Posta in rotazione l'asta con velocità angolare costante, determinare il minimo valore di ω per cui entrambi il fili risultano tesi e il valore delle tensioni che si sono destate.



Nel riferimento ruotante, si ha equilibrio delle forze reali e dalla forza di trascinamento,

$$\mathbf{F} + \mathbf{F}_t = 0.$$

La somma delle forze reali $\mathbf{F}$ comprende: le tensioni dei fili e la forza peso; $\mathbf{F}_t$ è la forza centrifuga, pertanto:

$$\mathbf{T}_1 + \mathbf{T}_2 + m\mathbf{g} + m\omega^2\mathbf{r} = 0. \tag{1}$$

Giacché i fili formano col segmento d'asta un triangolo equilatero, proiettando la (1) sugli assi x, orizzontale ed y verticale, si ha

$$\begin{aligned} -T_1 \cos 30^\circ - T_2 \cos 30^\circ + m\omega^2 r &= 0 \\ T_1 \cos 60^\circ - T_2 \cos 60^\circ - mg &= 0. \end{aligned}$$

Essendo:

$$r = l \cos 30^\circ = l\frac{\sqrt{3}}{2},$$

dalla prima si trae,

$$m\omega^2 l = T_1 + T_2. \tag{2}$$

Dalla seconda:

$$T_1 - T_2 = 2mg. \tag{3}$$

Tenuto conto della (3), dalla (2) si deduce:

$$\omega^2 = \frac{2mg + 2T_2}{ml}.$$

Ma $T_2 \geq 0$, quindi il minimo valore di ω si ha per $T_2 = 0$;

$$\omega^2 = \frac{2g}{l}, \quad \Rightarrow \quad \omega = 3,1\, rad/s.$$

In tali condizioni la tensione T_1 risulta:

$$T_1 = 2mg = 19,6\, N.$$

30. Due masse $m_1 = 1,67\, kg$ e $m_2 = 3,33\, kg$, fissate agli estremi di un filo ideale, scivolano lungo un piano inclinato di un angolo $\theta = 30°$. Sapendo che i coefficienti di attrito dinamico tra masse e piano sono rispettivamente $\mu_1 = 0,225$ e $\mu_2 = 0,113$, calcolare l'accelerazione del sistema e la tensione del filo.

Va osservato che, dai dati del problema, le forze d'attrito $\mu_1 m_1 g \cos\theta$ e $\mu_2 m_2 g \cos\theta$ sono uguali, pertanto durante il moto, il filo rimane teso e le masse si muovono con la stessa accelerazione. Inoltre il modulo della tensione T si trasmette inalterato lungo il filo.

Indicando con m_1 la massa più in alto e con m_2 quella in basso, l'equazione di Newton per dette masse si scrive:

$$\begin{aligned} m_1 g \sin\theta + T - \mu_1 m_1 g \cos\theta &= m_1 a \\ m_2 g \sin\theta - T - \mu_2 m_2 g \cos\theta &= m_2 a. \end{aligned} \tag{2}$$

Risolvendo rispetto a T, si ha

$$m_1 a - m_1 g \sin\theta + \mu_1 m_1 g \cos\theta = m_2 g \sin\theta - \mu_2 m_2 g \cos\theta - m_2 a,$$

da cui:

$$a = g \sin\theta - 2\frac{\mu_1 m_1 \cos\theta}{m_1 + m_2} g = 0,37\, g.$$

La tensione va ricavata da una delle (2); per esempio:

$$T = m_1 g(0,37 + \mu_1 \cos\theta - \sin\theta) = 1,06\, N.$$

31. Un corpo puntiforme di massa m è saldato ad una estremità di un'asta rigida di massa trascurabile, che ruota in un piano verticale attorno all'altro estremo con velocità angolare costante. Nel punto più basso della traiettoria l'asta esercita sul corpo una reazione $R_B = 12\, N$ mentre, se la velocità angolare raddoppia, la reazione diventa $R'_B = 21\, N$. Determinare le reazioni R_A ed R'_A nel punto più alto della traiettoria.

L'equazione della dinamica si scrive,

$$m\mathbf{a} = \mathbf{R} + m\mathbf{g}.$$

Assumendo positivo il verso centripeto e detto r il raggio della traiettoria, nel punto più basso si ha:

$$\begin{aligned} m\omega^2 r &= R_B - mg \\ 4m\omega^2 r &= R'_B - mg \end{aligned} \tag{1}$$

Alla sommità,

$$\begin{aligned} m\omega^2 r &= R_A + mg \\ 4m\omega^2 r &= R'_A + mg. \end{aligned} \tag{2}$$

Dalle (1) si ricavano le espressioni di mg e di $m\omega^2 r$; si ha:

$$mg = \frac{4R_B - R'_B}{3}, \qquad m\omega^2 r = \frac{R'_B - R_B}{3}.$$

Sostituendo nelle (2) si ottiene:

$$R_A = \frac{2R'_B - 5R_B}{3} = -6\,N, \qquad R'_A = \frac{5R'_B - 8R_B}{3} = 3\,N.$$

32. Un corpo puntiforme si muove lungo un asse orizzontale, con velocità costante $v_1 = 2\,m/s$. In seguito ad un impulso $J = 10\,N \cdot s$ esso assume la velocità $v_2 = 10\,m/s$, nella stessa direzione della velocità iniziale. Calcolare il lavoro della forza impulsiva.

Dal teorema dell'energia cinetica:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}mv_2^2 - \frac{1}{2}mv_1^2.$$

Poiché,

$$J = m(v_2 - v_1) = \Delta p,$$

si ha:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}m(v_2^2 - v_1^2) = \frac{1}{2}m(v_2 - v_1)(v_2 + v_1) = \frac{1}{2}J\,(v_1 + v_2) = 60\,J.$$

Esercizi sulla Dinamica dei Sistemi di Punti Materiali
A cura del Prof. T.Papa

1. Due masse m_1 e m_2, appoggiate su un piano orizzontale privo d'attrito, sono unite da una molla ideale di costante elastica k. Calcolare il periodo di oscillazione del sistema quando le masse vengono spostate dalla posizione di equilibrio. ($m_1 = 600\,gm$, $m_2 = 400\,gm$, $k = 6\,N/m$)

Si tratta di un problema a due corpi soggetti ad una forza di interazione. Si ha:

$$m_1 \frac{d\mathbf{v}_1}{dt} = \mathbf{F}_{12}, \qquad m_2 \frac{d\mathbf{v}_2}{dt} = \mathbf{F}_{21},$$

ossia,

$$\frac{d\mathbf{v}_1}{dt} = \frac{1}{m_1}\mathbf{F}_{12}, \qquad m_2 \frac{d\mathbf{v}_2}{dt} = \frac{1}{m_2}\mathbf{F}_{21}.$$

Sottraendo ed essendo $\mathbf{F}_{12} = -\mathbf{F}_{21}$:

$$\frac{d(\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2)}{dt} = \left(\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2}\right)\mathbf{F}_{12}, \quad \Rightarrow \quad \frac{d\mathbf{v}_{12}}{dt} = \frac{1}{\mu}\mathbf{F}_{12},$$

essendo μ la massa ridotta.

Nel caso del problema, detta x la distanza relativa delle masse, si ha

$$\ddot{x} = -\frac{k}{\mu}x, \quad \Rightarrow \quad T = 2\pi\sqrt{\frac{\mu}{k}} = 2\pi\sqrt{\frac{1}{k}\frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}} = 1,26\,s.$$

Si colga l'analogia del problema con la vibrazione di una molecola biatomica.

2. Due corpi dello stesso materiale, di masse $m_1 = 5\,kg$ ed $m_2 = 10\,kg$, sono collegati con una molla ideale di costante elastica $k = 50\,N/m$, poggiati su un piano orizzontale scabro. Alla massa m_1 è applicata una forza orizzontale di modulo $F = 15\,N$ in modo che il sistema si muova con la stessa velocità, costante. Determinare l'allungamento della molla ed il valore del coefficiente di attrito cinetico.

Nel moto le forze interne non intervengono; inoltre il moto del sistema è uniforme quindi, detti A_1 e A_2 i moduli delle forze d'attrito relative alle due masse, si ha:

$$F - A_1 - A_2 = 0, \quad \Rightarrow \quad \mu_d = \frac{F}{(m_1 + m_2)g} = 0,1.$$

L'allungamento della molla va ricavato considerando le forze, elastica e di attrito, che agiscono su una delle due masse, per esempio m_2. Detto Δl l'allungamento, si ha:

$$k\Delta l = A_2, \quad \Rightarrow \quad \Delta l = \frac{\mu_d m_2 g}{k} = 0,2\,m.$$

3. Un corpo puntiforme di massa $m = 1\,kg$ è lanciato orizzontalmente dal bordo di un carrello di massa $M = 6\,kg$, inizialmente fermo su un binario privo d'attrito. Il corpo attraversa l'intera lunghezza $l = 2\,m$ del carrello in un tempo $t = 0,4\,s$. Si trovi l'energia rilasciata nel lancio.

Il sistema corpo-carrello nella direzione orizzontale non è soggetto a forze esterne, dunque il suo centro di massa, inizialmente in quiete, resta tale dopo il lancio del corpo. Fissato un riferimento con origine nel centro di massa del sistema e dette v_1 e v_2 le velocità del corpo e del carrello rispetto a tale riferimento, per la legge di conservazione della quantità di moto, si ha:

$$m v_1 + M v_2 = 0, \quad \Rightarrow \quad v_2 = -\frac{m}{M}v_1. \tag{1}$$

Ma la velocità del corpo è somma della velocità l/t, relativa al carrello, e della velocità di trascinamento v_2,

$$v_1 = \frac{l}{t} + v_2,$$

pertanto, dalla (1) si ha:

$$v_2 = -\frac{m}{M}\left(\frac{l}{t} + v_2\right) = -\frac{m}{m+M}\,\frac{l}{t}, \tag{2}$$

e di conseguenza,

$$v_1 = \frac{M}{m+M}\,\frac{l}{t}. \tag{3}$$

L'energia rilasciata nel lancio è somma delle energie cinetiche della massa e del carrello che rincula:

$$E = \frac{1}{2}mv_1^2 + \frac{1}{2}Mv_2^2,$$

e, tenuto conto delle (2) e (3),

$$E = \frac{1}{2}m\left(\frac{M}{m+M}\right)^2\left(\frac{l}{t}\right)^2 + \frac{1}{2}M\left(\frac{m}{m+M}\right)^2\left(\frac{l}{t}\right)^2 = \frac{1}{2}\frac{mM}{m+M}\left(\frac{l}{t}\right)^2 = 10,7\,J.$$

Il problema può essere risolto considerando gli spostamenti del corpo e del carrello, prima e dopo il lancio; le rispettive velocità vanno ottenute dividento per il tempo t. Nel riferimento adottato si ha:

$$x_C = 0 = \frac{mx_1 + Mx_2}{m+M} = \frac{mx_1' + Mx_2'}{m+M},$$

dove x_1, x_2 sono le ascisse iniziali del corpo e del centro di massa del carrello e x_1', x_2' quelle finali.

Dalle precedenti si ottiene:

$$M(x_2' - x_2) = -m(x_1' - x_1), \qquad M\Delta x_2 = -m\Delta x_1,$$

Lo spostamento assoluto del corpo, come per le velocità, è somma dello spostamento relativo l, lunghezza del carrello, e dello spostamento di trascinamento Δx_2 del carrello:

$$\Delta x_1 = l + \Delta x_2. \tag{4}$$

Pertanto:

$$M\Delta x_2 = -m(l + \Delta x_2), \quad \Rightarrow \quad \Delta x_2 = -\frac{m}{m+M}l,$$

in verso opposto allo spostamento della massa che, per la (4) risulta:

$$\Delta x_1 = \frac{M}{m+M}l.$$

4. Due masse puntiformi $4m$ ed m sono rigidamente collegate ad una sbarretta di massa trascurabile, che può ruotare senza attrito per un suo estremo A. Le masse si trovano rispettivamente a distanza $l = 0,1\,m$ e $2l$ da tale estremo. Calcolare il periodo delle piccole oscillazioni del sistema.

Si tratta del noto problema del pendolo composto, T. Papa; Lezioni di Fisica, Meccanica, pagina 347. In questo caso, posto $\sin\theta \approx \theta$ (piccole oscillazioni) e detta m_t la massa totale, l'equazione della dinamica si scrive:

$$I_A\ddot{\theta} + m_t g\, l_C\theta = 0,$$

dove l_C è la distanza del centro di massa da A. Essendo:

$$m_t = 5m, \qquad l_C = \frac{4ml + 2ml}{5m} = \frac{6}{5}l, \qquad I_A = 4ml^2 + m(2l)^2 = 8ml^2,$$

il periodo risulta:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{I_A}{m_t g l_C}} = 2\pi\sqrt{\frac{4}{3}\frac{l}{g}} = 0,73\,s.$$

5. Una particella di massa m_1, all'istante iniziale $t = 0$ ha velocità nulla $\mathbf{v}_0 = 0$ ed è individuata dal vettore posizione

$$\mathbf{r}_0 = -3\mathbf{i} + \mathbf{j} - 4\mathbf{k}.$$

Applicando la forza, funzione del tempo,

$$\mathbf{F} = 2m\mathbf{i} + 3m\,t\mathbf{k},$$

all'istante $t = 2\,s$ urta un'altra particella di massa $m_2 = 3m$, animata di velocità

$$\mathbf{v}_2 = \frac{4}{3}\mathbf{i} - 2\mathbf{k}.$$

Determinare le coordinate del punto in cui avviene l'urto e la velocità delle particelle dopo l'urto, supponendo che sia completamente anelastico.

Velocità e posizione della prima particella si ottengono integrando la relazione che assegna l'accelerazione:

$$\mathbf{v}_1 = \frac{1}{m}\int \mathbf{F}dt = 2t\mathbf{i} + \frac{3}{2}t^2\mathbf{k} + C_1, \tag{1}$$

dove $C_1 = 0$ in quanto inizialmente la particella è ferma. Integrando ancora:

$$\mathbf{r}_1 = \int \mathbf{v}dt = t^2\mathbf{i} + \frac{1}{2}t^3\mathbf{k} + \mathbf{r}_0 = (t^2 - 3)\mathbf{i} + \mathbf{j} + \left(\frac{1}{2}t^3 - 4\right)\mathbf{k},$$

che per $t = 2\,s$ fornisce:

$$\mathbf{r}_1 = \mathbf{i} + \mathbf{j}.$$

Quindi le coordinate del punto in cui avviene l'urto sono:

$$x_1 = 1\,m \qquad y_1 = 1\,m, \qquad z_1 = 0.$$

Dopo l'urto, per la conservazione della quantità di moto, si ha:

$$m_1\mathbf{v}_1 + m_2\mathbf{v}_2 = (m_1 + m_2)\mathbf{v}, \quad \Rightarrow \quad \mathbf{v}_1 + 3\mathbf{v}_2 = 4\mathbf{v},$$

da cui si trae

$$\mathbf{v} = \frac{1}{4}\mathbf{v}_1 + \frac{3}{4}\mathbf{v}_2.$$

Sostituendo la (1) e l'espressione di $\mathbf{v}_2$, si ottiene:

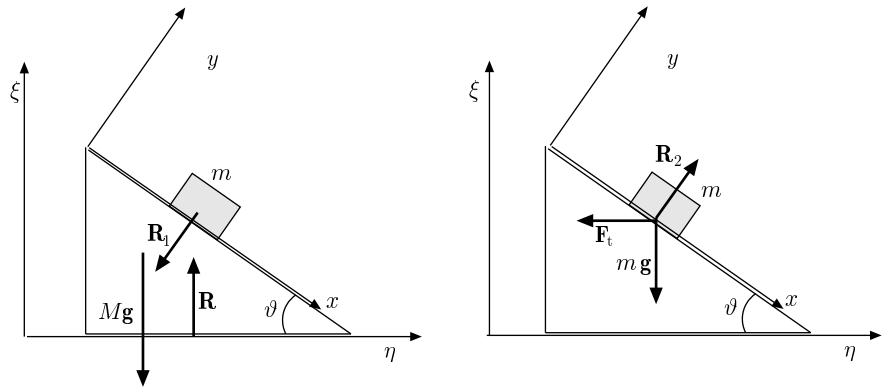
$$\mathbf{v} = \left(\frac{1}{2}t + 1\right)\mathbf{i} + \left(\frac{3}{8}t^2 - \frac{3}{2}\right)\mathbf{k},$$

che, per $t = 2\,s$ diventa

$$\mathbf{v} = 2\mathbf{i}.$$

Le particelle procedono lungo l'asse x con velocità pari a $2\,m/s$.

6. Un cubo di massa m è posto alla sommità dell'ipotenusa di un cuneo triangolare di massa M, poggiato su un piano orizzontale. Noto l'angolo θ che l'ipotenusa del cuneo forma col piano e supponendo che l'attrito su ogni superficie sia nullo determinare, una volta liberato il cubo, l'accelerazione con cui esso giunge sul piano. Inizialmente il blocco si trova fermo all'altezza h dal piano.



Per una soluzione semplice del problema, occorre stabilire riferimenti opportuni. Tali sono: un riferimento fisso $\Omega\,\eta$, ξ, solidale col piano ed un riferimento Oxy mobile, solidale col cuneo, con asse x volto nel verso discendente ed asse y ortogonale, uscente.

Le forze che agiscono sul cuneo sono: il peso, la reazione vincolare $\mathbf{R}$, esercitata dal piano e la reazione $\mathbf{R}_1$ esercitata dal cubo, quindi l'equazione di Newton si scrive:

$$M\mathbf{g} + \mathbf{R} + \mathbf{R}_1 = M\mathbf{a}_t,$$

dove $\mathbf{a}_t$ è l'accelerazione, che è anche l'accelerazione di trascinamento del riferimento mobile. Proiettando sugli assi η-ξ, si ha

$$\begin{aligned} &-R_1 \sin\theta = Ma_t \\ &-Mg + R - R_1\cos\theta = 0 \end{aligned} \tag{1}$$

Le forze che agiscono sul cubo sono: il peso, la reazione vincolare $\mathbf{R}_2$, esercitata dal cuneo, in modulo uguale ad $\mathbf{R}_1$ ma di direzione opposta, e la forza di trascinamento $\mathbf{F}_t$; pertanto

$$m\mathbf{g} + \mathbf{R}_2 + \mathbf{F}_t = m\mathbf{a}_r.$$

Proiettando sugli assi mobili x-y:

$$\begin{aligned} mg\sin\theta - ma_t\cos\theta &= m\ddot{x} \\ R_1 - mg\cos\theta - ma_t\sin\theta &= 0 \end{aligned} \tag{2}$$

Dalla prima delle (1) si trae,

$$a_t = -\frac{R_1}{M}\sin\theta \tag{3}$$

e sostituendo nella seconda delle (2):

$$R_1 = mg\cos\theta - \frac{m}{M}R_1\sin^2\theta.$$

Si ottiene:

$$R_1 = \frac{mM\cos\theta}{M + m\sin^2\theta}g. \tag{4}$$

Sostituendo nella (3) si ricava l'accelerazione del cuneo (di trascinamento):

$$a_t = -\frac{m\sin\theta\cos\theta}{M + m\sin^2\theta}g, \tag{5}$$

negativa, rispetto al riferimento fisso.

Sostituendo la (5) nella prima delle (2), si ottiene l'accelerazione (relativa) del cubo nel riferimento mobile, dove ha una unica componente:

$$\ddot{x} = \frac{(m+M)\sin\theta}{M + m\sin^2\theta} g. \tag{6}$$

Ma l'accelerazione nel riferimento fisso (assoluta) è

$$\mathbf{a} = \mathbf{a}_t + \mathbf{a}_r.$$

Indicando con $\hat{\mathbf{u}}$ il versore dell'asse x e con $\mathbf{i}$ e $\mathbf{j}$ i versori degli assi ξ-η, è

$$\hat{\mathbf{u}} = \cos\theta\mathbf{i} - \sin\theta\mathbf{j};$$

quindi:

$$\mathbf{a}_t = a_t\mathbf{i}; \qquad \mathbf{a}_r = a_r\hat{\mathbf{u}} = a_r(\cos\theta\mathbf{i} - \sin\theta\mathbf{j}).$$

Si ottiene:

$$\mathbf{a} = (a_t + a_r\cos\theta)\mathbf{i} - a_r\sin\theta\mathbf{j} = (a_t + \ddot{x}\cos\theta)\mathbf{i} - \ddot{x}\sin\theta\mathbf{j}.$$

Pertanto, ricordando le (5) e (6), le componenti dell'accelerazione nel riferimento fisso sono:

$$\begin{aligned} a_\xi &= \ddot{\xi} = -\frac{m\sin\theta\cos\theta}{M + m\sin^2\theta} g + \frac{(m+M)\sin\theta\cos\theta}{M + m\sin^2\theta} g = \frac{M\sin\theta\cos\theta}{M + m\sin^2\theta} g \\ a_\eta &= -\ddot{x}\sin\theta = -\frac{(m+M)\sin^2\theta}{M + m\sin^2\theta} g. \end{aligned}$$

Si può verificare immediatamente che si ha conservazione della quantità di moto orizzontale. Infatti, essendo costanti le accelerazioni, nell'istante $\sqrt{2h/g}$ in cui il cubo raggiunge il piano orizzontale, si ha

$$\frac{mM\sin\theta\cos\theta}{M + m\sin^2\theta} g\sqrt{\frac{2h}{g}} - \frac{mM\sin\theta\cos\theta}{M + m\sin^2\theta} g\sqrt{\frac{2h}{g}} = 0.$$

Il metodo descritto per risolvere il problema, in cui si fa uso dell'equazione di Newton, può apparire piuttosto complesso in quanto vanno determinate correttamente le reazioni vincolari e, inevitabilmente vanno assuni due riferimenti in moto relativo. Un altro approccio, più semplice, consiste nell'usare le equazioni di Lagrange per una sollecitazione conservativa. Tuttavia occorre che il lettore possegga qualche nozione di Meccanica Analitica. Di seguito se ne d un cenno.

Si definisce lagrangiana L del sistema la funzione,

$$L = T - U,$$

dove T è l'energia cinetica ed U l'energia poteziale. Le equazioni di Lagrange nella seconda forma (vedi un testo di Meccanica Razionale) sono

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} - \frac{\partial L}{\partial q_k} = 0, \tag{7}$$

dove q_k e $\dot{q}_k$ sono le coordinate libere e le loro derivate rispetto al tempo. Per quanto riguarda il concetto di coordinata libera si veda T. Papa, Lezioni di Fisica, pagina 38. Le coordinate libere del sistema cuneo-cubo sono: l'ascissa X del punto più alto del cuneo e l'ascissa x del cubo. Infatti, detta h l'altezza del cuneo, θ l'angolo che l'ipotenusa del cuneo forma col piano orizzontale, l'ordinata y del cubo può essere espressa dalla relazione

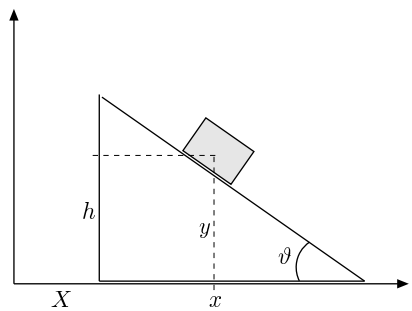
$$h - y = (x - X)\tan\theta, \quad \Rightarrow \quad y = h + (X - x)\tan\theta.$$

Indicando, per comodità, con $k = \tan\theta$, la lagrangiana del sistema si scrive:

$$\begin{aligned} L &= \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) + \frac{1}{2}M\dot{X}^2 - mgy \\ &= \frac{1}{2}m\left[\dot{x}^2 + (\dot{X}^2 + \dot{x}^2 - 2\dot{X}\dot{x})k^2\right] + \frac{1}{2}M\dot{X}^2 - mg[h + (X - x)k]. \end{aligned}$$

Si ha:

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = m\dot{x} + mk^2\dot{x} - mk^2\dot{X},$$



ed inoltre,

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = m\ddot{x} + mk^2\ddot{x} - mk^2\ddot{X}, \qquad \frac{\partial L}{\partial x} = mkg.$$

Pertanto, per la (7):

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} - \frac{\partial L}{\partial x} = m\ddot{x} + mk^2\ddot{x} - mk^2\ddot{X} - mkg = 0. \qquad (8)$$

Analogamente

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{X}} = mk^2\dot{X} - mk^2\dot{x} + M\dot{X},$$

e

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{X}} = mk^2\ddot{X} - mk^2\ddot{x} + M\ddot{X}, \qquad \frac{\partial L}{\partial X} = -mkg.$$

Quindi,

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{X}} - \frac{\partial L}{\partial X} = mk^2\ddot{X} - mk^2\ddot{x} + M\ddot{X} + mkg = 0. \qquad (9)$$

Dalle (8) e (9) si traggono le equazioni dei moti:

$$\begin{aligned} (1 + k^2)\ddot{x} - k^2\ddot{X} - kg &= 0 \\ (mk^2 + M)\ddot{X} - mk^2\ddot{x} + mkg &= 0 \end{aligned} \qquad (10)$$

Dalla prima delle(10) si ricava,

$$\ddot{x} = \frac{k^2\ddot{X} + kg}{1 + k^2}, \qquad (11)$$

che sostituta nella seconda fornisce:

$$\ddot{X} = -\frac{mk}{(m + M)k^2 + M}\, g. \qquad (12)$$

Sostituendo nella (11) si ricava,

$$\ddot{x} = \frac{Mk}{(M + m)k^2 + M}\, g. \qquad (13)$$

Infine, ponendo nelle (12) e (13) $k = \sin\theta/\cos\theta$, si trova:

$$\begin{aligned} \ddot{x} &= \frac{M\sin\theta\cos\theta}{M + m\sin^2\theta}\, g \\ \ddot{X} &= -\frac{m\sin\theta\cos\theta}{M + m\sin^2\theta}\, g. \end{aligned}$$

Le relazioni precedenti rappresentano le componenti secondo l'asse orizzontale delle accelerazioni assolute, coincidenti rispettivamente con $\ddot{\xi}$ ed a_t. Come si vede, non è stato necessario assumere riferimenti mobili né determinare le reazioni, che peraltro possono

anche essere trovate mediante le equazioni di Lagrange nella prima forma. È immediato verificare la conservazione della quantità di moto del sistema.

7. Due masse puntiformi $4m$ ed m, con $m = 0,1\,kg$, sono rigidamente collegate ad una sbarretta di massa trascurabile, che può ruotare senza attrito attorno ad un asse orizzontale passante per il suo estremo O. Le masse si trovano rispettivamente a distanza l e $2l$ da tale estremo. Calcolare la reazione vincolare in O quando la sbarretta, inizialmente ferma nella posizione orizzontale, viene lasciata libera e raggiunge la posizione verticale.

Detta $M = 5m$ la massa totale ed l_C la distanza del centro di massa dall'asse, si ha

$$l_C = \frac{4ml + m2l}{5m} = \frac{6}{5}\,l.$$

La reazione vincolare nella posizione verticale, $\theta = 0$, va ricavata dalla prima equazione della dinamica dei sistemi rigidi:

$$\mathbf{F} + \mathbf{R} = M\mathbf{a}_C, \quad \Rightarrow \quad R = Mg + M\frac{v_C^2}{l_C}, \tag{1}$$

dove a_C e v_C sono accelerazione e velocità del centro di massa. Il rapporto v_C^2/l_C va trovato mediante la conservazione dell'energia:

$$Mgl_C = \frac{1}{2}I\omega^2 = \frac{1}{2}I\frac{v_C^2}{l_C^2}, \quad \Rightarrow \quad \frac{v_C^2}{l_C} = \frac{2Mgl_C^2}{I}.$$

Tenuto conto che il momento d'inerzia del sistema è

$$I = 4ml^2 + m4l^2 = 8ml^2,$$

dalla seconda delle (1) si ottiene

$$R = 14mg = 13,72\,N.$$

Esercizi sulla Dinamica dei Corpi Rigidi
A cura del Prof. T.Papa

1. Una palla da biliardo di raggio R è in quiete sul piano del tavolo da giuoco. Ad essa viene impresso un impulso centrale che la fa muovere con velocità iniziale v_0. Si calcoli la velocità angolare della palla nell'istante in cui il suo moto diventa di puro rotolamento. ($v_0 = 0,5\,m/s$, $R = 5\,cm$, $I = 2mR^2/5$).

Il piano del tavolo presenta attrito, quindi la velocità decresce secondo la legge:

$$v = v_0 - \mu g t. \tag{1}$$

Dalla seconda equazione cardinale della dinamica si ha

$$M = \mu g R = I\frac{d\omega}{dt}, \qquad \frac{d\omega}{dt} = \frac{\mu g R}{I} = \frac{5\mu g}{2R}.$$

Integrando:

$$\omega = \frac{5\mu g}{2R}t. \tag{2}$$

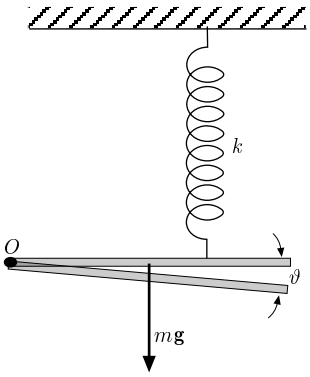
Nell'istante t^* in cui si ha puro rotolamento:

$$v(t^*) = R\omega(t^*).$$

Dunque, combinando le (1) e (2):

$$t^* = \frac{2}{7}\frac{v_0}{\mu g}, \qquad \omega(t^*) = \frac{5}{7}\frac{v_0}{R} = 7,14\,rad/s.$$

2. Una sbarretta omogenea di massa $m = 300\,gm$ e lunghezza l è incernierata, senza attrito, ad un estremo O ed è mantenuta in posizione di equilibrio orizzontale da una molla ideale, ad asse verticale, di costante elastica $k = 10^3\,N/m$, agganciata alla sbarretta nel punto distante $2l/3$ dall'estremo O. Si determini il periodo delle piccole oscillazioni verticali della sbarretta.



Supponendo che la molla all'equilibrio sia allungata di Δy, per l'uguaglianza dei momenti delle forze rispetto ad O, si ha

$$mg\frac{l}{2} = \frac{2}{3}lk\Delta y, \quad \Rightarrow \quad k\Delta y = \frac{3}{4}mg. \tag{1}$$

Impartendo un piccolo spostamento verticale y, il sistema inizia ad oscillare. Dalla seconda equazione cardinale dei sistemi rigidi si ha:

$$mg\frac{l}{2} - \frac{2}{3}l\,k(\Delta y + y) = I\frac{d\omega}{dt}.$$

Tenuto conto della (1), si ha

$$-\frac{2}{3} l\, k\, y = I \frac{d\omega}{dt}. \tag{2}$$

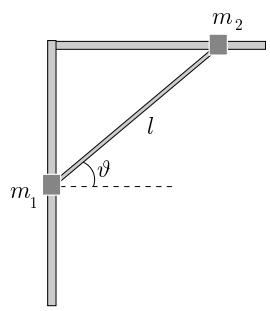
Ma detto θ l'angolo formato dalla sbarretta con l'orizzontale, per piccoli spostamenti verticali si può scrivere $y \approx 2l\theta/3$ ed $\omega = d\theta/dt$. Ricordando inoltre che il momento d'inerzia della sbarretta rispetto all'estremo è $I = ml^2/3$, la (2) diventa,

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{4}{3}\frac{k}{m}\theta = 0.$$

Il periodo risulta

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{3}{4}\frac{m}{k}} \approx 0,09\, s.$$

3. Un sistema articolato è costituito da due masse m_1 ed m_2 uguali che possono scorrere senza attrito su due guide disposte ad angolo retto, una verticale e l'altra orizzontale. Le due masse sono incernierate ad un'asta di lunghezza l, anch'essa di massa uguale alle altre, in modo che possano scorrere liberamente sulle guide. Inizialmente il sistema è in quiete con l'asta inclinata di un angolo θ_0 rispetto all'orizzontale. Lasciato il sistema libero di muoversi, determinare la velocità delle due masse quando l'asta raggiunge la posizione verticale.



Le reazioni vincolari, ortogonali alle guide non compiono lavoro quindi va applicato il teorema di conservazione dell'energia. La massa m_2, scorrendo sulla guida orizzontale ha energia potenziale costante. Posta uguale a zero l'energia potenziale nella configurazione verticale e detto θ l'angolo che durante il moto l'asta forma con l'orizzontale, l'energia potenziale del sistema è somma dell'energia potenziale di m_1 e dell'asta. La prima è

$$U_1 = mgl(1 - \sin\theta),$$

la seconda,

$$U_a = mg\frac{l}{2}(1 - \sin\theta).$$

Sommando si ha:

$$U = U_1 + U_a = \frac{3}{2}mgl(1 - \sin\theta).$$

Durante il moto, l'energia cinetica del sistema è data dalla somma dell'energia cinetica dell'asta, che ruota attorno al centro istantaneo di rotazione, e dell'energia cinetica delle masse m_1 ed m_2.

Il centro istantaneo di rotazione Q si trova all'intersezione delle normali alle guide condotte dagli estremi dell'asta, alla distanza $l/2$ dal suo baricentro. Dunque l'energia cinetica dell'asta risulta

$$T_a = \frac{1}{2}I_Q\omega^2 = \frac{1}{2}\frac{1}{3}ml^2\omega^2 = \frac{1}{6}ml^2\omega^2.$$

Le masse m_1 ed m_2 hanno rispettivamente velocità:

$$v_1 = \omega l\cos\theta, \qquad v_2 = \omega l\sin\theta; \tag{1}$$

quindi energie cinetiche:

$$T_1 = \frac{1}{2}mv_1^2 = \frac{1}{2}m\omega^2 l^2 \cos^2\theta; \qquad T_2 = \frac{1}{2}mv_2^2 = \frac{1}{2}m\omega^2 l^2 \sin^2\theta.$$

Per la conservazione dell'energia si ha:

$$T_a + T_1 + T_2 + \frac{3}{2}mgl(1-\sin\theta) = \frac{3}{2}mgl(1-\sin\theta_0),$$

ossia:

$$\frac{1}{6}m\omega^2 l^2 + \frac{1}{2}m\omega^2 l^2 \cos^2\theta + \frac{1}{2}m\omega^2 l^2 \sin^2\theta = \frac{3}{2}mgl(\sin\theta - \sin\theta_0),$$

da cui si ricava:

$$\omega^2 = \frac{9}{4}\frac{g}{l}(\sin\theta - \sin\theta_0). \tag{2}$$

Ma la velocità del baricentro dell'asta è

$$v_C = \omega l/2, \qquad \omega = \frac{2}{l}v_C, \tag{3}$$

quindi sostituendo nella (2):

$$v_C^2 = \frac{9}{16}gl(\sin\theta - \sin\theta_0), \quad \Rightarrow \quad v_C = \sqrt{\frac{9}{16}gl(\sin\theta - \sin\theta_0)}.$$

quando l'asta è verticale $\sin\theta = 1$, si ha

$$v_C = \sqrt{\frac{9}{16}gl(1-\sin\theta_0)}.$$

Infine, tenuto conto delle (1) e (3), le velocità delle masse risultano:

$$v_1 = 0, \qquad v_2 = 2v_C = \sqrt{\frac{9}{4}gl(1-\sin\theta_0)}.$$

Va osservato che il sistema oscilla: m_1 ed asta sulla guida verticale, m_2 su quella orizzzontale. Dalla (2), essendo $\omega = \dot{\theta}$, si ha

$$\dot{\theta}^2 = \frac{9}{4}\frac{g}{l}(\sin\theta - \sin\theta_0), \quad \Rightarrow \quad \frac{d\theta}{dt} = \sqrt{\frac{9}{4}\frac{g}{l}(\sin\theta - \sin\theta_0)}.$$

Separando le variabili:

$$\frac{d\theta}{\sqrt{\sin\theta - \sin\theta_0}} = \sqrt{\frac{9}{4}\frac{g}{l}}\ dt.$$

Questa equazione è simile a quella delle grandi oscillazioni del pendolo semplice; essa va integrata col metodo indicato in T. Papa; Lezioni di Fisica, Meccanica, pagina 241.

4. Un'asta omogenea di massa $m = 0,5\,kg$ e lunghezza $l = 1\,m$ reca agli estremi due masse puntiformi $m_1 = 0,2\,kg$ ed $m_2 = 0,3\,kg$. L'asta è posta in rotazione con velocità angolare ω_0 costante, attorno ad un asse ad essa ortogonale, passante per un punto a distanza x da m_1. L'unica sollecitazione alla quale è soggetta l'asta consiste in una coppia frenante di momento costante. Determinare il valore di x affinché si fermi nel minor tempo possibile.

Detto $-M$ il momento della coppia frenante, dalla seconda equazione della dinamica dei corpi rigidi si ha,

$$-M = I\frac{d\omega}{dt},$$

dove I è il momento d'inerzia del sistema rispetto all'asse x. Integrando:

$$\omega = \omega_0 - \frac{M}{I}t.$$

Il tempo di arresto t_A si ottiene per $\omega = 0$, quindi,

$$t_A = \frac{I\omega_0}{M}.$$

Il momento d'inerzia del sistema rispetto all'asse x è dato da:

$$I = \frac{ml^2}{12} + m\left(\frac{l}{2} - x\right)^2 + m_1 x^2 + m_2(l-x)^2.$$

Perché l'asta si fermi nel minor tempo possibile, tale momento d'inerzia dev'essere minimo:

$$\frac{dI}{dx} = 0, \quad \Rightarrow \quad x = \frac{l(2m_2 + m)}{2(m + m_1 + m_2)} = 0,55\,m.$$

Infatti,

$$\frac{d^2 I}{dt^2} = 2(m + m_1 + m_2) > 0.$$

5. Una sbarretta omogenea di lunghezza $l = 60\,cm$, soggetta alla gravità, può oscillare attorno ad un asse orizzontale passante per un punto P, posto tra il centro O della sbarretta ed il suo estremo superiore. Determinare la distanza $x = OP$ per la quale il periodo delle piccole oscillazioni è minimo.

Come noto, il periodo delle piccole oscillazioni del pendolo composto è

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{I_P}{mgx}},$$

dove

$$I_P = I_O + mx^2 = \frac{1}{12}ml^2 + mx^2.$$

Pertanto,

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l^2}{12gx} + \frac{x}{g}}. \tag{1}$$

Il valore minimo del periodo si ha annullando la derivata prima della (1) rispetto ad x;

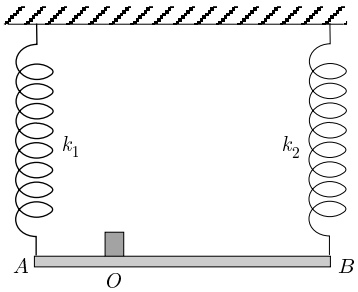
$$\frac{dT}{dx} = 0, \quad \Rightarrow \quad x_{min} = \sqrt{\frac{l^2}{12}} = 17,3\,cm,$$

cui corrisponde:

$$T_{min} = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}\frac{\sqrt{3}}{3}} = 1,18\,s.$$

6. Una sbarra omogenea AB di sezione costante, lunghezza $l = 34\,cm$ e massa $m = 250\,gm$ è sospesa ad un soffitto per mezzo di due molle ideali verticali, di uguale lunghezza a riposo e costanti elastiche $k_1 = 50\,N/m$ e $k_2 = 13\,N/m$, poste agli estremi A e B. Allo scopo di disporre la sbarra in equilibrio orizzontale, viene fissato ad essa un corpo puntiforme di massa $m_1 = 750\,gm$ in un punto O compreso tra gli estremi. Determinare:
a) la distanza di tale punto dall'estremo A;

b) la frequenza delle piccole oscillazioni quando il sistema viene spostato verticalmente dalla posizione di equilibrio.



A causa delle masse sospese, le molle vengono allungate di una quantità y_0 rispetto alla loro lunghezza a riposo; si ha:

$$(k_1 + k_2)y_0 = (m + m_1)g, \quad \Rightarrow \quad y_0 = \frac{m + m_1}{k_1 + k_2} g = 0,15\, m. \tag{1}$$

Detta x la distanza OA, l'equilibrio dei momenti delle forze applicate rispetto ad A, fornisce:

$$m_1 g x + mg\frac{l}{2} - k_2 y_0 l = 0 \quad \Rightarrow \quad x = \frac{1}{m_1 g}\left(k_2 y_0 l - mg\frac{l}{2}\right) = 3,3\, cm.$$

La frequenza delle piccole oscillazioni va ricavata considerando l'equazione della dinamica del sistema. Detto y lo spostamento rispetto ad y_0, si ha:

$$(m + m_1)\ddot{y} = (m + m_1)g - (k_1 + k_2)(y_0 + y),$$

e sostituendo a y_0 la (1),

$$(m + m_1)\ddot{y} + (k_1 + k_2)y = 0.$$

Si ricava.

$$\nu = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k_1 + k_2}{m + m_1}} = 1,26\, s^{-1}.$$

7. Un'asta omogenea di sezione costante, lunghezza l e massa m, oscilla attorno ad un asse orizzontale fisso, passante per un suo estremo. Determinare l'espressione della reazione vincolare esercitata dall'asse.

Le forze applicate all'asta sono il peso e la reazione vincolare. Come sempre vanno considerate le equazioni cardinali della dinamica dei corpi rigidi:

$$\mathbf{F} = m\mathbf{g} + \mathbf{R}, \qquad \mathbf{M} = I\frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt},$$

dove $\mathbf{R}$ è la reazione vincolare, $\mathbf{M}$ il momento risultante delle forze ed I il momento d'inerzia della sbarra rispetto all'asse di rotazione.

Dalla prima, assumendo positive la rotazione antioraria e la direzione centripeta, si ha:

$$ma_t = -mg\sin\theta + R_t, \qquad ma_n = -mg\cos\theta + R_n.$$

Dalla seconda:

$$-mg\frac{l}{2}\sin\theta = I\frac{d\omega}{dt} = I\frac{a_t}{l/2}.$$

Poiché il momento d'inerzia rispetto all'asse di oscillazione è $I = ml^2/3$, si ha

$$a_t = -\frac{3}{4}g\sin\theta.$$

Pertanto:

$$R_t = \frac{1}{4} mg \sin\theta, \qquad R_n = mg\cos\theta + \frac{1}{2} ml\omega^2.$$

8. Una sbarretta omogenea di massa m, sezione costante e lunghezza $l = 1,2\,m$ può ruotare in un piano verticale attorno ad un asse orizzontale, privo d'attrito, passante ad una distanza $l/4$ da un suo estremo. Assegnata la velocità angolare massima $\omega_{max} = 8\,rad/s$, si determini il valore minimo della velocità del centro di massa durante il moto.

La velocità angolare massima si ha nel punto più basso della traiettoria, dove l'energia potenziale si assume nulla, mentre la velocità angolare minima si ha nel punto più alto dove l'energia potenziale è massima, pertanto

$$\frac{1}{2} I\omega_{max}^2 = mg\frac{l}{2} + \frac{1}{2} I\omega_{min}^2.$$

Essendo

$$I = \frac{1}{12} ml^2 + \frac{1}{16} ml^2 = \frac{7}{48} ml^2\,,$$

si ottiene:

$$\omega_{min} = \sqrt{\omega_{max}^2 - \frac{48}{7}\frac{g}{l}} = 2,83\,rad/s; \qquad v_C = \omega_{min}\frac{l}{4} = 0,85\,m/s.$$

9. Un'asta omogenea di sezione costante, lunghezza l e massa M è adagiata, senza altri vincoli, su un piano orizzontale privo di attrito. Inizialmente l'asta è in quiete; quindi viene urtata elasticamente da una pallina di massa m, animata di velocità $\mathbf{v}_0$ ortogonale all'asta, in un punto distante d dal suo centro. Determinare l'espressione di m affinché dopo l'urto la pallina si arresti.

Si ha conservazione della quantità di moto, del momento angolare e dell'energia cinetica:

$$mv_0 = Mv_C, \qquad mv_0 d = I\omega, \qquad \frac{1}{2} mv_0^2 = \frac{1}{2} Mv_C^2 + \frac{1}{2} I\omega^2, \tag{1}$$

essendo v_C ed I rispettivamente la velocità del centro di massa e il momento d'inerzia dell'asta rispetto a quest'ultimo, avendo tenuto conto che l'asta, dopo l'urto, assume un movimento rototraslatorio.

Tenendo presente la prima e la seconda delle (1), la terza diventa:

$$mv_0^2 = \frac{m^2 v_0^2}{M} + \frac{m^2 v_0^2 d^2}{I}, \quad \Rightarrow \quad m\left(\frac{1}{M} + \frac{d^2}{I}\right) = 1,$$

ed, introducendo il momento d'inerzia della asta $I = Ml^2/12$, si ottiene:

$$m = \frac{Ml^2}{l^2 + 12d^2}.$$

10. Un disco omogeneo di masssa $M = 4\,kg$ e raggio R è libero di ruotare senza attrito attorno al suo asse, disposto orizzontalmente. Lungo il suo bordo è avvolto, in modo che non possa slittare, un filo ideale alla cui estremità è fissata una massa $m = 2\,kg$. All'istante iniziale il disco è fermo; quindi viene lasciato libero e la massa m comincia scendere mettendo in moto il disco. Determinare l'energia cinetica del disco all'istante $t = 2\,s$.

Detta T l'energia cinetica del disco, per la conservazione dell'energia, si ha

$$mgh = \frac{1}{2} mv^2 + T = \frac{1}{2} mv^2 + \frac{1}{2} I\omega^2. \tag{1}$$

Dalle equazioni cardinali della dinamica,

$$\mathbf{F} = m\mathbf{a}_C, \qquad \mathbf{M} = I\frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt},$$

detta τ la tensione del filo e proiettando su un asse verticale volto in basso, si ha

$$mg - \tau = ma_C, \qquad \tau R = I\frac{d\omega}{dt}. \tag{2}$$

Poiché il filo non slitta $a_C \dot{\omega} R$; quindi la seconda delle (2) fornisce:

$$\tau = I\frac{a_C}{R^2}.$$

Sostituendo nella prima:

$$mg - I\frac{a_C}{R^2} = ma_C, \quad \Rightarrow \quad a_C = \frac{mg}{m + I/R^2} = \frac{mg}{m + M/2}. \tag{3}$$

Il moto della massa è uniformemente accelerato, dunque la quota h di cui scende e la velocità acquistata sono

$$h = \frac{1}{2}a_C t^2 = \frac{1}{2}\frac{mg}{m + M/2}t^2, \qquad v = a_C t, \tag{4}$$

pertanto, tenuto conto delle (3) e (4), dalla (1) si ottiene:

$$\begin{aligned} T &= mgh - \frac{1}{2}mv^2 = mg\frac{1}{2}\frac{mg}{m + M/2}t^2 - \frac{1}{2}m\left(\frac{mg}{m + M/2}\right)^2 t^2 \\ &= \frac{M}{4}\left(\frac{mg}{m + M/2}\right)^2 t^2 = 96\,J \end{aligned}$$

In alternativa, la prima delle (3) si può scrivere

$$mg - I\frac{\dot{\omega}R}{R^2} = m\dot{\omega}R, \quad \Rightarrow \quad mgR = \dot{\omega}(mR^2 + I),$$

da cui:

$$\dot{\omega} = \frac{mgR}{mR^2 + I}.$$

Integrando,

$$\omega = \frac{mgR}{mR^2 + I}\,t = \frac{mg}{mR + MR/2}\,t.$$

Pertanto l'energia cinetica del disco risulta:

$$T = \frac{1}{2}I\omega^2 = \frac{M}{4}\frac{m^2 g^2}{(m + M/2)^2}\,t^2 = 96\,J.$$

11. Una matita di lunghezza $l = 15\,cm$, viene appoggiata in posizione verticale su un piano con attrito. Essa, inizialmente ferma, cade ruotando attorno al punto di contatto col piano. Ricavare velocità ed accelerazione angolare nell'istante dell'impatto col piano.

Per la conservazione dell'energia, detta m la massa della matita, si ha:

$$mg\frac{l}{2} = \frac{1}{2}I\omega^2, \tag{1}$$

dove I è il momento d'inerzia della matita rispetto all'estremo poggiato sul piano, pari a $ml^2/3$.

Dalla (1) si ottiene:

$$\omega = \sqrt{\frac{3g}{l}} = 14\,rad/s.$$

Per la seconda equazione della dinamica dei sistemi rigidi,

$$\mathbf{M} = \frac{d\mathbf{L}}{dt},$$

al momento dell'impatto, si ha:

$$-mg\frac{l}{2} = I\dot{\omega}, \quad \Rightarrow \quad \dot{\omega} = -\frac{3}{2}\frac{g}{l} = -98\,rad/s^2.$$

12. Sul bordo di una piattaforma circolare di raggio r che può ruotare senza attrito attorno al suo asse verticale, è fissato un dispositivo di massa M, munito di una molla ideale di costante k, atto a lanciare un corpo di massa m lungo una traiettoria tangente alla piattaforma. Determinare la velocità angolare della piattaforma dopo il lancio del corpo, supponendo che inizialmente il sistema sia in quiete e che la molla sia stata compressa di un tratto Δl. ($r = 50\,cm$; $M = 1\,kg$; $m = 200\,gm$; $k = 100\,N/m$; $\Delta l = 20\,cm$; momento d'inerzia della piattaforma $I = 0,75\,kg \cdot m^2$)

Per la conservazione dell'energia cinetica:

$$\frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}(I + Mr^2)\omega^2 = \frac{1}{2}k(\Delta l)^2; \tag{1}$$

per la conservazione del momento angolare, detta v la velocità del corpo, si ha:

$$mvr - (I + Mr^2)\omega = 0,$$

da cui si ricava:

$$v = \frac{(I + Mr^2)\,\omega}{mr}.$$

Sostituendo nella (1) si ottiene:

$$\omega = \sqrt{\frac{kmr^2(\Delta l)^2}{(I + Mr^2)^2 + mr^2(I + Mr^2)}} = 0,44\,rad/s.$$

13. Un disco omogeneo di massa m e raggio R viene fatto rotolare lungo un piano inclinato. Determinare l'angolo massimo θ di inclinazione, oltre il quale il moto non è più di puro rotolamento sapendo che $\mu_s = 0,5$.

Come sempre, il problema va risolto mediante le equazioni cardinali della dinamica dei corpi rigidi,

$$\mathbf{F} = m\mathbf{a}_C; \qquad \mathbf{M} = I\frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt}, \tag{1}$$

dove $\mathbf{F}$ è la somma delle forze agenti, peso, forza d'attrito e reazione normale, $\mathbf{M}$ la somma dei momenti di tali forze, $I = mR^2/2$ il momento d'inerzia del disco rispetto al suo asse. Nel caso di puro rotolamento, detta $\mathbf{F}_A$ la forza d'attrito, proiettando la prima delle (1) lungo il piano inclinato, nel verso discendente, si ha:

$$mg\sin\theta - F_A = ma_C; \tag{2}$$

Inoltre, assunti i momenti delle forze rispetto all'asse del disco, la seconda delle (1) fornisce,

$$F_A\, R = I\dot{\omega}.$$

Poiché $a_C = \dot{\omega} R$, quest'ultima diventa:

$$F_A\, R = I\frac{a_C}{R}, \quad \Rightarrow \quad F_A = I\frac{a_C}{R^2},$$

e sostituendo nella (2) si trova:

$$a_C = \frac{mg\sin\theta}{m + I/R^2} = \frac{2}{3}g\sin\theta.$$

Quindi la forza d'attrito vale:

$$F_A = I\frac{a_C}{R^2} = \frac{1}{3}mg\sin\theta.$$

Ma per il puro rotolamento deve essere,

$$F_A \leq \mu_s R_n, \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{3}mg\sin\theta \leq \mu_s mg\cos\theta.$$

Pertanto,

$$\tan\theta \leq 3\mu_s \quad \Rightarrow \quad \theta = 56,3^\circ.$$

14. Un corpo puntiforme di massa m percorre, su un piano orizzontale scabro, una traiettoria circolare di raggio R con velocità angolare iniziale ω_0. Calcolare il numero di giri n che compie prima di arrestarsi, sapendo che una sbarra omogenea di sezione costante, lunghezza $2R$ e massa m uguale, animata della stessa velocità angolare iniziale, ruotando sullo stesso piano intorno al proprio asse baricentrale, si arresta dopo un giro. Assumere che il coefficienete d'attrito dinamico per il corpo e la sbarra sia lo stesso.

Supponendo che sulla sbarra agisca un momento frenate M costante, dovuto alla forza d'attrito μmg, il lavoro dissipato è dato da

$$\mathcal{L}_s = M\theta_1 = \mu\, m\, g\frac{R}{2}\theta_1.$$

Tale lavoro è pari all'energia cinetica iniziale:

$$\mu\, m\, g\frac{R}{2}\theta_1 = \frac{1}{2}I\omega_0^2, \tag{1}$$

dove $I = m(2R)^2/12$ è il momento d'inerzia della sbarra rispetto all'asse di rotazione.

Dalla (1) si trae:

$$\mu\, g\, \theta_1 = \frac{1}{3}R\omega_0^2. \tag{2}$$

Il lavoro dissipato dal corpo risulta

$$\mathcal{L}_c = \mu\, m\, g\, R\, \theta_2,$$

uguale all'energia cinetica iniziale del corpo;

$$\mu\, m\, g\, R\theta_2 = \frac{1}{2}mR^2\omega_0^2, \quad \Rightarrow \quad \mu\, g\, \theta_2 = \frac{1}{2}R\omega_0^2. \tag{3}$$

Dalle (2) e (3) si ricava:

$$\theta_1 = \frac{1}{3}\frac{R}{\mu g}\omega_0^2, \qquad \theta_2 = \frac{1}{2}\frac{R}{\mu g}\omega_0^2 \quad \Rightarrow \quad \frac{\theta_2}{\theta_1} = \frac{3}{2},$$

ed essendo $\theta_1 = 2\pi$,

$$\theta_2 = 3\pi, \quad \Rightarrow \quad n = 1,5\, giri.$$

15. Una sbarra omogenea di sezione costante ed un corpo puntiforme, di masse $m_1 = m_2 = 1\, kg$, sono adagiati senza altri vincoli, su un piano orizzontale liscio. Una molla di costante elastica $k = 5 \cdot 10^4\, N/m$, compressa di $\Delta x = 7\, cm$, è disposta ortogonalmente tra un estremo della sbarra ed il corpo. Trovare la velocità v del corpo dopo che la molla viene sbloccata.

Dopo il rilascio della molla, il moto della sbarra è rototraslatorio mentre il moto del corpo è rettilineo. Detta v_C la velocità del centro di massa della sbarra, si ha conservazione dell'energia,

$$\frac{1}{2}k(\Delta x)^2 = \frac{1}{2}I\omega^2 + \frac{1}{2}m_1 v_C^2 + \frac{1}{2}m_2 v^2, \tag{1}$$

della quantità di moto,

$$m_1 v_C = m_2 v, \tag{2}$$

e del momento angolare:

$$I\omega = \frac{l}{2}m_2 v, \tag{3}$$

dove l è la lunghezza della sbarra.

Tenuto conto che $m_1 = m_2$, dalle (2) e (3) si ha:

$$v = v_C, \qquad \omega = \frac{1}{2}\frac{l}{I}mv.$$

Ricordando che il momento d'inerzia della sbarra rispetto al baricentro è $I = ml^2/12$ e sostituendo nella (1) si ricava:

$$k(\Delta x)^2 = 3mv^2 + 2mv^2 = 5mv^2, \quad \Rightarrow \quad v = \sqrt{\frac{k(\Delta x)^2}{5m}} = 7\, m/s.$$

16. Un carrello, costituito da un telaio di massa M, e da quattro ruote, assimilabili a dischi di raggio R e massa $m = M/16$ ognuno, viene lanciato con velocità iniziale $v_0 = 7\, m/s$ lungo una rotaia che ha la pendenza del 15%. Determinare il tratto percorso dal carrello fino al suo arresto. Trascurare ogni altro attrito oltre a quello che determina il puro rotolamento.

In condizioni di puro rotolamento si ha conservazione dell'energia:

$$\frac{1}{2}(M + 4m)v_0^2 + \frac{1}{2}I\omega^2 = (M + 4m)gh. \tag{1}$$

Il primo termine rappresenta l'energia cinetica iniziale, comprendente quella del carrello e delle ruote, il secondo l'energia potenziale assunta nel punto di arresto. Calcolando il momento d'inerzia delle quattro ruote rispetto al loro asse e ricordando la condizione di rotolamento:

$$I = 4\frac{1}{2}\frac{M}{16}R^2 \qquad \omega = v_0 R,$$

la (1) diventa,

$$\frac{11}{16}Mv_0^2 = \frac{20}{16}Mgh \quad \Rightarrow \quad h = \frac{11}{20}\frac{v_0^2}{g}.$$

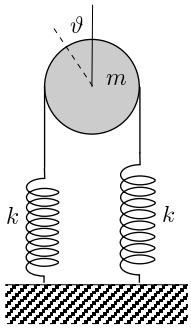
D'altra parte, detta d la proiezione orizzontale del percorso l, si ha

$$\tan\theta = \frac{h}{d} = 0,15, \quad \Rightarrow \quad \theta = 8,53^\circ.$$

Pertanto:

$$h = l \sin\theta, \quad \Rightarrow \quad l = \frac{h}{\sin\theta} = \frac{11}{20}\frac{v_0^2}{g\sin\theta} = 18,54\,m$$

17. Nella gola di una carrucola di massa m e raggio r ad asse orizzontale, intorno al quale può ruotare senza attrito, è diposto un filo ideale che non slitta. Gli estremi di quest'ultimo sono collegati a due molle ideali di costante elastica k, fissate a loro volta ad un supporto rigido, come in figura. Determinare il periodo delle oscillazioni e la velocità angolare massima della carrucola, quando il sistema viene spostato dalla sua posizione di equilibrio.



Il sistema ha un solo grado di libertà: l'angolo di rotazione. Per la seconda equazione cardinale della dinamica dei corpi rigidi,

$$M = I\frac{d\omega}{dt},$$

indicando con θ l'angolo di rotazione, si ha:

$$-2k(r\theta)r = \frac{1}{2}mr^2\frac{d^2\theta}{dt^2}, \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{2}m\ddot{\theta} + 2k\theta = 0.$$

dove

$$\omega = \sqrt{\frac{4k}{m}}, \quad \Rightarrow \quad T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{4k}}.$$

Il moto oscillatorio e la velocità angolare possono essere espressi dalle equazioni

$$\theta = \theta_0 \sin\omega t, \quad \Rightarrow \quad \dot{\theta} = \theta_0\omega\sin\omega t,$$

dove θ_0 è l'angolo massimo di rotazione della carrucola. Quindi, tenendo conto della (1), la velocità angolare massima risulta:

$$\omega_{max} = \theta_0\omega = \theta_0\sqrt{\frac{4k}{m}}.$$

Da notare che inevitabilmente, velocità angolare e pulsazione sono espresse con lo stesso simbolo.

Si lascia al lettore risolvere il problema mediante la conservazione dell'energia: cinetica ed elastica.

18. Una sbarretta omogenea di sezione costante, lunghezza l e massa m, è adagiata senza altri vincoli, su un piano orizzontale liscio. Sullo stesso piano una particella, anch'essa di massa m, animata di velocità $\mathbf{v}$ che forma un angolo θ con la sbarretta, colpisce un estremo di questa aderendovi all'istante. Determinare l'espressione dell'energia cinetica del sistema dopo l'urto.

Il sistema dopo l'urto anelastico, assume un movimento rototraslatorio piano. Non agendo forze esterne, tranne la reazione del vincolo, che non compie lavoro perché ortogonale al piano, l'energia cinetica finale risulta somma di due termini: uno di traslazione del centro di massa, l'altro di rotazione intorno ad esso. Il centro di massa del sistema, dopo l'urto si trova alla distanza $l/4$ dall'estremo della sbarretta. Si ha conservazione della quantità di moto e del momento angolare, prima e dopo l'urto:

$$m\mathbf{v} = 2m\mathbf{v}_C, \qquad mv\frac{l}{4}\sin\theta = I_C\omega, \tag{1}$$

dove I_C è il momento d'inerzia del sistema rispetto al centro di massa. Dalle (1) si trae:

$$\mathbf{v}_C = \frac{\mathbf{v}}{2}, \qquad I_C = m\frac{l^2}{12} + m\left(\frac{l}{4}\right)^2 + m\left(\frac{l}{4}\right)^2 = \frac{5}{24}ml^2.$$

Quindi, dalla seconda delle (1),

$$\omega = \frac{6}{5}\frac{v}{l}\sin\theta.$$

L'energia cinetica risulta:

$$T = \frac{1}{2}(2m)v_C^2 + \frac{1}{2}I_C\omega^2 = \frac{1}{4}mv^2\left(1 + \frac{3}{5}\sin^2\theta\right).$$

19. Una ruota, assimilabile ad un disco di massa $m = 10\,kg$ e raggio r, rotola senza strisciare su una rotaia orizzontale, trainata da una forza, parallela alla rotaia e applicata al centro di massa, di intensità che varia nel tempo con la legge $F = kt$, con $k = 1\,N/s$. Determinare l'istante in cui cessa il rotolamento puro, sapendo che il coefficiente d'attrito statico è $\mu_s = 0,2$.

Come in tutti i problemi che riguardano il movimento di un corpo rigido, vanno applicate le equazioni:

$$\mathbf{F} = m\mathbf{a}_C, \qquad \mathbf{M} = I\frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt},$$

in cui $\mathbf{F}$ è la somma delle forze agenti ed $\mathbf{M}$ la somma dei momenti di dette forze. Nel caso del problema le forze agenti sono la forza d'attrito $\mathbf{F}_A$, opposta alla direzione del moto, e la forza di traino. Proiettando sull'asse orizzontale e assumendo i momenti delle forze ed il momento d'inerzia rispetto al centro di massa della ruota, si ha:

$$kt - F_A = ma_C \qquad F_A r = I\frac{d\omega}{dt}.$$

Dalla seconda si trae

$$F_A = \frac{I}{r}\ddot{\theta}, \tag{1}$$

che sostituita nella prima fornisce:

$$kt - \frac{I}{r}\ddot{\theta} = mr\ddot{\theta}, \quad \Rightarrow \quad \ddot{\theta} = \frac{k\,t}{mr + I/r}.$$

perciò la (1) diventa,

$$F_A = \frac{I}{r}\frac{k\,t}{mr + I/r} = \frac{1}{3}k\,t.$$

Ma perché il moto sia di puro rotolamento dev'essere

$$F_A \le \mu_s mg, \qquad \frac{1}{3}k\,t \le \mu_s mg, \quad \Rightarrow \quad t \le 3\frac{\mu_s mg}{k} = 58,8\,s.$$

20. Un'asta omogenea di sezione costante e massa $M = 9m$ può ruotare su un piano orizzontale privo di attrito, attorno ad un asse fisso verticale, passante per un suo estremo. Essa si trova in quiete finché un corpo puntiforme di massa m animato di velocità $\mathbf{v}$ ortogonale all'asta e parallela al piano, la colpisce nel punto di mezzo, rimbalzando con velocità $\mathbf{v}' = -\mathbf{v}/3$. Stabilire se l'urto è elastico o meno.

Per stabilire il tipo d'urto occorre valutare l'energia cinetica del sistema prima e dopo l'urto. In ogni caso si ha conservazione del momento angolare. Detta l la lunghezza dell'asta si ha

$$mv\frac{l}{2} = -mv'\frac{l}{2} + I\omega = -\frac{1}{3}mv\frac{l}{2} + I\omega, \tag{1}$$

in cui $I = Ml^2/3$ è il momento d'inerzia dell'asta rispetto all'estremo. Dalla (1) si ricava:

$$\frac{2}{3}mvl = I\omega, \quad \Rightarrow \quad \omega = \frac{2}{9}\frac{v}{l}. \tag{2}$$

L'energia cinetica dopo l'urto è:

$$T' = \frac{1}{2}mv'^2 + \frac{1}{2}I\omega^2 = \frac{1}{2}m\frac{v^2}{9} + \frac{1}{2}I\omega^2.$$

Sostituendo l'espressione di ω data dalla (2), si ottiene:

$$T' = \frac{7}{54}mv^2,$$

e, confrontando con l'energia cinetica del corpo prima dell'urto, $T = mv^2/2$,

$$\frac{T'}{T} = \frac{7}{27} = 0,26.$$

L'urto non è elastico.

21. Una sbarra di sezione costante, lunghezza l e massa M in quiete, può ruotare su un piano orizzontale liscio, attorno ad un perno fissato ad un estremo. Una massa m animata di velocità $\mathbf{v}_0$, perpendicolare alla sbarra e parallela al piano, vi si conficca ad una distanza x dal perno. Ricavare la distanza x per la quale la velocità angolare, dopo l'urto, è massima e l'espressione di quest'ultima.

L'urto è anelastico. Si ha conservazione del momento angolare prima e dopo l'urto:

$$mv_0x = I\omega, \tag{1}$$

dove il momento d'inerzia del sistema è dato da

$$I = \frac{1}{3}Ml^2 + mx^2.$$

dalla (1) si ricava:

$$\omega = \frac{mv_0x}{mx^2 + Ml^2/3}.$$

Annullando la derivata rispetto ad x della relazione precedente, si ottiene la distanza x_0 per la quale la velocità angolare risulta massima:

$$x_0 = l\sqrt{\frac{M}{3m}}$$

e la velocità angolare massima:

$$\omega_{max} = \frac{v_0}{2l\sqrt{M/(3m)}}.$$

22. Una sbarretta omogenea di massa M, lunghezza l e sezione costante può ruotare attorno ad un asse orizzontale passante per il suo centro ed ortogonale ad essa. Un corpo puntiforme di massa m viene fatto cadere da un'altezza h aderendo ad una estremità della sbarretta, inizialmente in quiete ed in posizione orizzontale. Determinare l'altezza minima da cui deve cadere il corpo affinché il sistema compia un giro completo ($M = 3m$).

L'urto è anelastico; si conserva il momento angolare. Detta v la velocità del corpo al momento dell'impatto, si ha

$$mv\frac{l}{2} = I\omega, \tag{1}$$

dove il momento d'inerzia del sistema è

$$I = \frac{1}{12}Ml^2 + m\left(\frac{l}{2}\right)^2 = \frac{1}{2}ml^2.$$

dalla (1) si ha

$$\omega = \frac{mvl}{2I} = \frac{v}{l}.$$

Poiché,

$$v = \sqrt{2gh},$$

si ottiene

$$\omega = \frac{1}{l}\sqrt{2gh}.$$

Affinché il sistema compia un giro completo, la sua energia cinetica dopo l'urto, dev'essere almeno pari alla variazione di energia potenziale del corpo che, una volta colpita la sbarretta, raggiunge la massima altezza $l/2$:

$$\frac{1}{2}I\omega^2 \geq mg\frac{l}{2}, \quad \Rightarrow \quad h \geq l.$$

23. Un disco e un anello rotolano senza strisciare lungo un piano inclinato, partendo rispettivamente dalle quote h_d ed h_a. Determinare il rapporto h_d/h_a perché alla fine del piano inclinato giungano con la stessa velocità.

Trascurando l'attrito di rotolamento, sempre molto piccolo se il piano d'appoggio è indeformabile, si ha conservazione dell'energia cinetica in quanto la forza di attrito statico non compie lavoro; essa infatti non sposta il suo punto di applicazione. Pertanto:

$$\frac{1}{2}I\omega^2 + \frac{1}{2}mv_C^2 = mgh, \tag{1}$$

dove I è il momento d'inerzia rispetto all'asse di rotazione, che per il disco e l'anello sono

$$I_d = \frac{1}{2}m_dR_d^2, \qquad I_a = m_aR_a^2.$$

Inoltre trattandosi di puro rotolamento nei due casi si ha

$$\omega_d = \frac{v_{Cd}}{R_d}, \qquad \omega_a = \frac{v_{Ca}}{R_a},$$

con ovvio significato dei simboli. Sostituendo nella (1) le grandezze pertinenti al disco e all'anello, si ottiene

$$v_{Cd}^2 = \frac{4}{3}gh_d, \qquad v_{Ca}^2 = gh_a.$$

Ma, dovendo essere uguali le velocità alla fine del piano inclinato, confrontando si trae:

$$\frac{h_d}{h_a} = \frac{3}{4}.$$

24. Una semisfera omogenea di raggio R e massa m è trascinata, con velocità costante $\mathbf{v}_0$ da una forza orizzontale $\mathbf{F}_1$, applicata come in figura. Il baricentro della semisfera si trova ad una distanza $3R/8$ dalla superficie piana. determinare il coefficiente di attrito dinamico sapendo che, durante il moto, la normale alla superficie piana forma con la verticale un angolo $\alpha = 28°$.

Giacché la normale alla superficie piana forma un angolo α con la verticale, il punto di contatto O della semisfera col piano non si trova su detta normale, vedi figura. Inoltre la semisfera si muove con velocità costante, quindi la somma delle forze $\mathbf{F}$ e la somma dei momenti $\mathbf{M}$ devono essere nulle. Detta $\mathbf{R}_n$ la reazione normale al piano ed $\mathbf{F}_A$ la forza d'attrito, si ha,

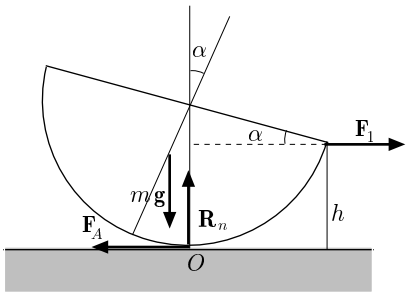
$$\mathbf{F} = \mathbf{F}_1 + \mathbf{R}_n + \mathbf{F}_A + m\mathbf{g} = 0.$$

Proiettando lungo l'asse x orizzontale:

$$F_x = F_1 - F_A = 0, \quad \Rightarrow \quad F_A = F_1. \tag{1}$$

Assumendo i momenti delle forze rispetto al punto di contatto O, sapendo che la forza peso è applicata al baricentro, distante $3R/8$ dalla superficie piana e tenuto conto che $F_1 = F_A$, la somma dei moduli dei momenti risulta:

$$M = mg\frac{3}{8}R\sin\alpha - \mu_d mgR(1 - \sin\alpha) = 0.$$



Si ottiene

$$\frac{3}{8}\sin\alpha = \mu_d(1 - \sin\alpha), \quad \Rightarrow \quad \mu_d = \frac{3}{8}\frac{\sin\alpha}{1 - \sin\alpha}.$$

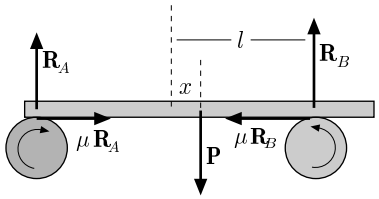
Per $\alpha = 28°$ risulta:

$$\mu_d = \frac{1}{3}.$$

Se α fosse uguale a zero non ci sarebbe attrito; la semisfera si muoverebbe di moto uniformemente accelerato.

25. Una sbarra omogenea di sezione costante e peso $P = 4\,kg_p$, è appoggiata orizzontalmente su due cilindri identici ad assi paralleli ed orizzontali, distanti $2l = 1,2\,m$. Calcolare le reazioni R_A ed R_B nei punti d'appoggio A e B, quando il baricentro della sbarra dista $x = 10\,cm$ dal piano verticale equidistante dai cilindri. Assumendo che il coefficiente d'attrito dinamico tra sbarra e cilindri sia $\mu = 0,2$ e posti in rotazione i cilindri attorno ai loro assi, con velocità angolari uguali e in verso opposto, dimostrare che il moto della sbarra è armonico. Supponendo che essa sia sufficientemente lunga da potere appoggiare sempre sui cilindri, calcolare il valore di μ nel caso in cui il periodo delle oscillazioni sia $T = 2,5\,s$.

Calcolo delle reazioni



Per l'equilibrio delle forze e dei momenti, rispetto al baricentro della sbarra, si ha

$$R_A + R_B - P = 0, \qquad M_B - M_A = 0. \tag{1}$$

Quest'ultima si scrive:

$$R_A(l + x) = R_B(l - x),$$

e, tenuto conto della prima delle (1),

$$(P - R_B)(l + x) = R_B(l - x).$$

Si trae:

$$R_B = \frac{P(l + x)}{2l} = 2,33\, kg_p, \qquad R_A = \frac{P(l - x)}{2l} = 1,67\, kg_p. \tag{2}$$

Calcolo del moto

Le forze orizzontali alle quali è soggetta la sbarra sono le forze d'attrito che si destano nei punti di contatto coi cilindri μR_A e μR_B. Supponendo che il primo cilindro ruoti in senso orario ed il secondo in senso antiorario, l'equazione di Newton si scrive:

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = \mu\left(\frac{P(l - x)}{2l} - \frac{P(l + x)}{2l}\right) = -\mu\frac{P}{l}\, x.$$

ossia:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\mu\frac{g}{l}\, x,$$

equazione dell'oscillatore armonico con

$$\omega^2 = \mu\frac{g}{l}, \quad \Rightarrow \quad T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{\mu g}}.$$

Il coefficiente d'attrito per un periodo $T = 2,5\, s$ dev'essere

$$\mu = 4\pi^2\frac{l}{gT^2} = 0,39.$$

26. Una sbarra omogenea di sezione costante, massa $m = 200\, gm$ e lunghezza l, è adagiata, in quiete, su un piano orizzontale liscio. La sbarra viene posta in moto da un impulso $J = 2\, N \cdot s$, ortogonale ad essa ed applicato ad un estremo. Calcolare il lavoro della forza impusiva.

Il lavoro della forza impulsiva è pari all'energia cinetica dalla sbarra che assume un moto rototrasaltorio:

$$\mathcal{L} = T = \frac{1}{2}mv_C^2 + \frac{1}{2}I\omega^2. \tag{1}$$

Poiché l'impulso angolare è uguale alla variazione del momento angolare,

$$\mathbf{J}_\theta = \Delta\mathbf{L}, \quad \Rightarrow \quad J_\theta = I\omega,$$

si ha:

$$\omega = \frac{J_\theta}{I} = \frac{Jl}{2I} = \frac{6J}{ml},$$

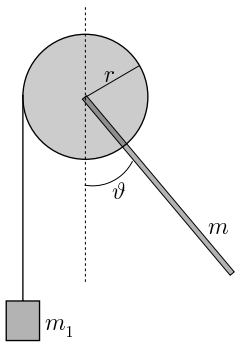
avendo tenuto conto che il momento d'inerzia della sbarra rispetto al suo centro di massa è $I = ml^2/12$. D'altra parte,

$$v_C = \omega\frac{l}{2} = 3\frac{J}{m}.$$

Sostituendo nella (1), si ottiene:

$$\mathcal{L} = \frac{9}{2}\frac{J^2}{m} + \frac{1}{2}\frac{ml^2}{12}\frac{36J^2}{m^2l^2} = 6\frac{J^2}{m} = 120\,J.$$

27. Un sistema rigido è costituito da una sbarra omogenea di sezione costante, massa m e lunghezza l, la cui estremità è saldata ortogonalmente all'asse di un disco di raggio r, di massa trascurabile rispetto a quella della sbarra. Il sistema può ruotare senza attrito attorno all'asse del disco, disposto orizzontalmente, ed è tenuto in equilibrio da un corpo di massa m_1 agganciato ad un estremo di un filo ideale, mentre l'altro estremo è fissato al bordo del disco. In tale posizione, individuata dall'angolo θ che l'asta forma con la verticale, viene agganciato al filo un altro corpo di massa $2m_1$. Determinare la velocità angolare del sistema quando la sbarra si dispone verticalmente ($r = 10\,cm$; $m = 800\,gm$; $m_1 = 1\,kg$; $l = 32\,cm$).



Dall'equilibrio dei momenti delle forze rispetto all'asse di rotazione, si ottiene l'angolo θ:

$$m_1gr - mg\frac{l}{2}\sin\theta = 0, \qquad \sin\theta = \frac{2mr}{m_1l}, \quad \Rightarrow \quad \theta = \frac{\pi}{6}.$$

Quando al filo, oltre al corpo di massa m_1, viene agganciato il corpo di massa $2m_1$, il sistema inizia a ruotare. Tenuto conto che, raggiunta la posizione verticale della sbarra, il filo si svolge di una lunghezza pari a $r(\pi - \pi/6)$ ed i corpi scendono di tale quota mentre la sbarra raggiunge la verticale, la variazione di energia potenziale del sistema risulta:

$$\Delta U = -3mgr\left(\pi - \frac{\pi}{6}\right) + mg\frac{l}{2}(1 + \cos\theta) = -5,35\,J.$$

La variazione di energia cinetica corrispondente è

$$\Delta T = \frac{1}{2}I\omega^2 + \frac{1}{2}(3m_1)v^2 = \frac{1}{6}ml^2\omega^2 + \frac{3}{2}m_1r^2\omega^2.$$

Ma $\Delta T = -\Delta U$, quindi:

$$\left(\frac{1}{6}ml^2 + \frac{3}{2}mr^2\right)\omega^2 = 5,35, \quad \Rightarrow \quad \omega = 13,68\,rad/s.$$

28. Un cubo omogeneo di spigolo $l = 10\,cm$ e massa M è appoggiato su un piano orizzontale. Al centro della faccia opposta a quella su cui poggia è applicata una forza $\mathbf{F}$, parallela agli spigoli orizzontali. Fuori dal centro, in un punto P opposto alla direzione della forza, viene collocata una massa $m = \alpha M$, con $\alpha = 0,3$. Sapendo che il coefficiente d'attrito statico tra cubo e piano è $\mu_s = 0,5$ determinare la minima distanza x dalla faccia verticale, normale ad $\mathbf{F}$, del punto P affinché, nella condizione di moto incipiente, il cubo trasli senza subire rotazioni.

Nelle condizioni di moto incipiente il modulo della forza applicata dev'essere:

$$F = \mu_s M g(1+\alpha).$$

La distanza minima x in cui va posta m va ricavata imponendo che la somma dei momenti delle forze dev'essere nulla. Assumendo i momenti rispetto allo spigolo anteriore che poggia sul piano, si ha

$$\mu_s M g(1+\alpha)l - Mg\frac{l}{2} - \alpha M g x = 0.$$

Si ricava:

$$x = \frac{\mu_s(1+0,3)l - l/2}{0,3} = 5\,cm.$$

29. Un'automobile viaggia su un rettilineo con velocità $v_0 = 216\,km/h$. Alla distanza $d = 150\,m$ dall'inizio di una curva comincia a frenare con accelerazione costante, in modo da affrontare la curva con la massima velocità, di modulo costante, senza slittare. Calcolare il valore dell'accelerazione sapendo che il raggio della curva è $r = 90\,m$ ed il coefficiente di attrito statico $\mu_s = 1$.

Perché la macchina non slitti la forza centripeta dev'essere:

$$m\frac{v^2}{r} \leq \mu_s m g, \quad \Rightarrow \quad v_{max} = \sqrt{\mu_s r g}. \tag{1}$$

L'accelerazione va determinata mediante la relazione:

$$v_{max}^2 - v_0^2 = 2ad.$$

Sostituendo la (1),

$$a = \frac{v_{max}^2 - v_0^2}{2d} = -9\,m/s^2.$$

30. Un'asta omogenea di sezione costante, massa $m = 0,9\,kg$ e lunghezza $l = 0,2\,m$, incernierata nel suo punto di mezzo ad un asse, è inizialmente in equilibrio in posizione orizzontale. Essa viene colpita verticalmente da un proiettile, di massa $m_1 = 100\,gm$ e velocità $v_0 = 100\,m/s$ che si conficca in un sua estremo. Determinare la velocità angolare del sistema subito dopo l'urto e il numero di giri compiuto prima di arrestarsi, supponendo che la cerniera eserciti un momento costante, dovuto alla forza d'attrito pari a $M = 6\,N\cdot m$.

Nell'urto si conserva il momento angolare rispetto all'asse di rotazione:

$$m_1 v_0 \frac{l}{2} = I\omega, \tag{1}$$

dove I è il momento d'inerzia del sistema:

$$I = m\frac{l^2}{12} + m_1\frac{l^2}{4} = \frac{1}{12}(m+3m_1)l^2.$$

Dalla (1) si trae:

$$\omega = \frac{6m_1 v_0}{(m+3m_1)l}.$$

Il lavoro della forza d'attrito è

$$\mathcal{L}_A = -\int_0^\theta M\,d\theta = -M\theta.$$

Tale lavoro è pari alla variazione di energia cinetica $T_f - T_i$ dove $T_f = 0$. Pertanto:

$$M\theta = \frac{1}{2}I\omega^2.$$

Si deduce:

$$\theta = \frac{3}{2}\frac{(m_1 v_0)^2}{(m+3m_1)M} = 20,8\,rad, \qquad n = \frac{\theta}{2\pi} = 3,32\,giri.$$

31. Un disco ed una sfera omogenei, animati di velocità baricentrale v_d e v_s, affrontano in salita un piano inclinato, rotolando senza strisciare. Determinare quanto dev'essere il rapporto v_d/v_s affinché raggiungano la stessa quota h.

Per la conservazione dell'energia si ha

$$\frac{1}{2}I\omega^2 + \frac{1}{2}mv_C^2 = mgh,$$

dove I è il momento d'inerzia rispetto all'asse di rotazione. Poiché il momento d'inerzia, nei due casi, ha l'espressione

$$I = kmr^2,$$

con $k_d = 1/2$ e $k_s = 2/5$, rispettivamente per il disco e la sfera, ed il moto è di puro rotolamento, si ha

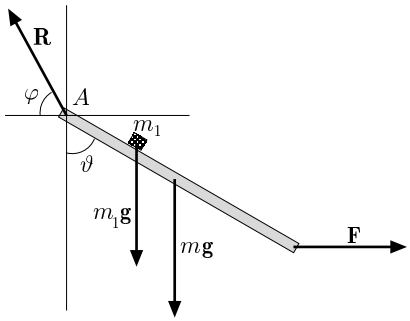
$$\frac{1}{2}k_d mr^2\frac{v_d^2}{r^2} + \frac{1}{2}mv_d^2 = \frac{1}{2}mv_d^2(k_d+1) = mgh$$
$$\frac{1}{2}k_s mr^2\frac{v_s^2}{r^2} + \frac{1}{2}mv_s^2 = \frac{1}{2}mv_s^2(k_s+1) = mgh.$$

Uguagliando le due espressioni, si ottiene:

$$\frac{v_d}{v_s} = \sqrt{\frac{1+k_s}{1+k_d}} = \sqrt{\frac{14}{15}}.$$

Esercizi sulla Statica dei Corpi Rigidi
A cura del Prof. T.Papa

1. Un'asta rigida AB, di sezione costante, lunghezza l e massa $m = 20\,kg$, è incernierata ad un asse orizzontale passante per l'estremo A, Sull'asta, alla distanza $2l/3$ da B è fissato un corpo puntiforme di massa $m_1 = 10\,kg$. Determinare il modulo della forza orizzontale che si deve applicare all'estremo B per mantenere l'asta in equilibrio nella posizione in cui forma un angolo $\theta = 60°$ con la verticale, e la reazione in A in tali condizioni.



Per l'equilibrio le somme delle forze e la somma dei momenti devono essere nulle,

$$\sum \mathbf{F} = 0, \qquad \sum \mathbf{M} = 0.$$

Le forze agenti sull'asta sono: il peso proprio, il peso del corpo, la forza applicata e la reazione vincolare

$$m\mathbf{g} + m_1\mathbf{g} + \mathbf{F} + \mathbf{R} = 0.$$

Proiettando sugli assi di un riferimento cartesiano con origine in A, si ha

$$F + R_{Ax} = 0, \qquad R_{Ay} - mg - m_1 g = 0,$$

da cui:

$$R_{Ax} = -F \qquad R_{Ay} = (m + m_1)g. \tag{1}$$

Assumendo i momenti delle forze rispetto ad A, si ottiene:

$$-mg\frac{l}{2}\sin\theta - m_1 g\frac{l}{3}\sin\theta + Fl\cos\theta = 0.$$

Si ricava:

$$F = \left(\frac{m}{2} + \frac{m_1}{3}\right) g\tan\theta = 226,3\,N.$$

Tenuto conto delle (1), il modulo della reazione è

$$R_A = \sqrt{R_{Ax}^2 + R_{Ay}^2} = \sqrt{F^2 + [(m + m_1)g]^2} = 371,1\,N.$$

Poiché per le (1),

$$\tan\varphi = \frac{R_{Ay}}{R_{Ax}} = -1,29, \quad \Rightarrow \quad \varphi = |52,22°|.$$

La direzione di $\mathbf{R}$, rispetto all'orizzontale, risulta

$$\beta = 180° - 52,22° = 127,78°.$$

2. Una trave omogenea, di sezione costante e lunghezza l, è appoggiata ad una parete verticale liscia e ad un pavimento scabro. Sapendo che il coefficiente di attrito statico

tra pavimento e trave è $\mu_s = 0,5$, si determini il minimo angolo formato dalla trave col pavimento perché si abbia equilibrio.

Detti A e B i punti di appoggio della trave sulla parete e sul pavimento, la condizione di equilibrio è espressa dalle relazioni,

$$\sum \mathbf{F} = 0. \qquad \sum \mathbf{M} = 0. \tag{1}$$

Le forze che agiscono sulla trave sono: il peso, applicato al suo baricentro, e le reazioni $\mathbf{R}_A$ e $\mathbf{R}_B$; la prima delle (1) si scrive:

$$m\mathbf{g} + \mathbf{R}_A + \mathbf{R}_B = 0. \tag{2}$$

Fissato un riferimento con asse x parallelo al piano ed asse y ortogonale, volto in alto, e proiettando la (2) su tali assi, si ha

$$R_A + R_{Bx} = 0 \qquad R_{By} - mg = 0. \tag{3}$$

Va osservato che, essendo la parete liscia, la reazione $\mathbf{R}_A$ è ortogonale alla parete mentre non è nota la direzione della reazione $\mathbf{R}_B$. Pertanto conviene assumere i momenti delle forze rispetto ad B. Si ha:

$$mg\frac{l}{2}\cos\theta - R_A l \sin\theta = 0.$$

Si ottiene:

$$R_A = \frac{1}{2}mg\frac{\cos\theta}{\sin\theta}.$$

Per la prima delle (3) si deduce

$$R_{Bx} = -R_A = -\frac{1}{2}mg\frac{\cos\theta}{\sin\theta}.$$

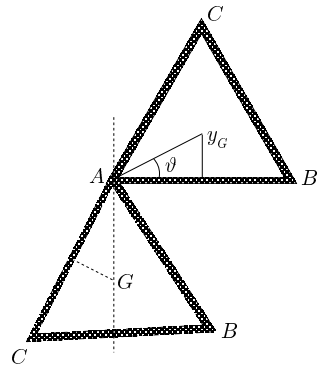
Tenuto conto della seconda delle (3), perché la trave non scivoli si deve avere:

$$|R_{Bx}| \leq \mu_s R_{By} = \mu_s mg.$$

Da cui:

$$\mu_s \geq \frac{|R_{Bx}|}{mg} = \frac{1}{2}\cot\theta, \quad \Rightarrow \quad \theta = 45°.$$

3. Un triangolo equilatero ABC è formato da tre asticelle omogenee, di sezioni S uguali. I lati AC e BC sono costituiti da materiale di densità ρ; il lato AB ha densità $\rho_1 = 2\rho/3$. Inizialmente il triangolo è disposto col lato AB orizzontale e può ruotare attorno al vertice A. Determinare l'angolo di rotazione quando, lasciandolo libero, raggiunge la posizione di equilibrio.



Nella posizione di equilibrio stabile il baricentro del triangolo, soggetto alla gravità, è disposto sulla verticale. Per ragioni di simmetria il baricentro si trova sull'altezza relativa al lato AB; quindi, detta l la lunghezza del lato, la sua ascissa è

$$x_G = l\cos 60^\circ = \frac{l}{2}.$$

Dette m_1, m_2 ed m_3 le masse dei lati, l'ordinata è data da:

$$y_G = \frac{(m_1 + m_2)(l/2)\sin 60^\circ}{m_1 + m_2 + m_3}.$$

Essendo,

$$m_1 = m_2 = lS\rho, \qquad m_3 = 2lS\rho/3,$$

si ottiene:

$$y_G = \frac{3}{8} l \sin 60^\circ = \frac{3}{8}\frac{\sqrt{3}}{2}\, l.$$

L'angolo θ formato dal segmento che unisce il baricentro col vertice A è dato da

$$\tan\theta = \frac{y_G}{l/2} = \frac{3}{8}\sqrt{3} = 0,65, \quad \Rightarrow \quad \theta = 33^\circ.$$

L'angolo di rotazione:

$$\varphi = 90^\circ + 33^\circ = 123^\circ.$$

Esercizi sulla Statica dei Fluidi
A cura del Prof. T.Papa

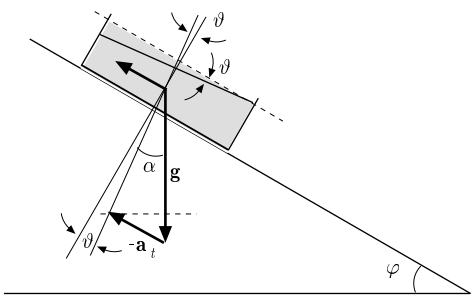
1. Un recipiente contenente un liquido scivola lungo un piano inclinato di un angolo φ rispetto all'orizzontale. Il coefficiente di attrito cinetico tra recipiente e piano è $\mu = 0,15$. Si determini l'angolo θ che la superficie libera del liquido forma col piano inclinato durante il moto del recipiente.

Nel riferimento solidale col recipiente si ha equilibrio tra le forze di superficie e le forze di volume; queste ultime dovute al peso del liquido e alla forza di trascinamento. La somma di tali forze è ortogonale alla superficie isobarica (equipotenziale). Si verifica facilmente che nel caso in cui non fosse presente attrito, la superficie libera del liquido sarebbe parallela al piano inclinato. Infatti l'accelerazione di trascinamento è in modulo $a_t = g \sin\varphi$, opposta all'accelerazione con cui si muove il recipiente. La somma dei vettori $\mathbf{g}$ e $-\mathbf{a}_t$ è ortogonale al piano inclinato e quindi alla superficie libera del liquido.

Nel caso in cui sia presente l'attrito l'accelerazione di trascinamento risulta, in modulo,

$$a_t = g \sin\varphi - \mu g \cos\varphi. \tag{1}$$

La somma dei vettori $\mathbf{g}$ e $-\mathbf{a}_t$, dev'essere ortogonale alla superficie libera del liquido ma non è ortogonale al piano inclinato.



Si consideri l'angolo α che la forza peso forma con la normale alla superficie libera, vedi figura; esso è dato dalla relazione

$$\tan\alpha = \frac{a_t \cos\varphi}{g - a_t \sin\varphi}. \tag{2}$$

Si verifica immediatamente che in assenza di attrito $\tan\alpha = \tan\varphi$. Poiché $\theta = \varphi - \alpha$, si ha:

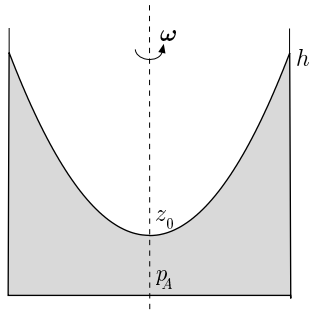
$$\tan\theta = \tan(\varphi - \alpha) = \frac{\tan\varphi - \tan\alpha}{1 + \tan\varphi \tan\alpha}.$$

Sostituendo nella precedente relazione le (1) e (2), si ottiene

$$\tan\theta = \mu, \qquad \theta = 8,53^\circ.$$

Il risultato è interessante ma non sorprendente; infatti nell'accelerazione di trascinamento interviene la forza di attrito che è proporzionale a μ.

2. Un recipiente cilindrico di raggio $R = 25\,cm$ contenente acqua, ruota attorno al proprio asse, disposto verticalmente, compiendo $1,5\,giri/s$. Sapendo che la pressione minima sul fondo del recipiente è $p_A = 1,02\,atm$, si determini l'altezza h che l'acqua raggiunge in corrispondenza alla parete. Si assuma che la pressione esterna p_0 sia uguale ad una atmosfera.



Nel riferimento ruotante si ha equilibrio tra le forze di pressione e le forze di volume. Le superfici equipotenziali, e quindi la superficie libera dell'acqua, sono paraboloidi di rotazione (T. Papa; Lezioni di Fisica, Meccanica, pag. 427) di equazione

$$g(z - z_0) = \frac{1}{2}\omega^2(x^2 + y^2), \tag{1}$$

dove z_0 è l'ordinata del vertice del paraboloide. La pressione sul fondo, p_A, è minima in corrispondenza all'asse di rotazione e massima in corrispondenza alla parete, dove l'acqua assume l'altezza h. Pertanto dalla (1) si ha

$$g(h - z_0) = \frac{1}{2}\omega^2 R^2,$$

e moltiplicando per ρ:

$$\rho g h - \rho g z_0 = \frac{1}{2}\rho\omega^2 R^2. \tag{2}$$

D'altra parte:

$$p_A = \rho g z_0 + p_0, \quad \Rightarrow \quad \rho g z_0 = p_A - p_0.$$

Sostituendo nella (2) si ottiene:

$$\rho g h = p_A - p_0 + \frac{1}{2}\rho\omega^2 R^2, \quad \Rightarrow \quad h = \frac{p_A - p_0}{\rho g} + \frac{1}{2}\frac{\omega^2 R^2}{g} = 0,49\,m$$

3. Un palloncino di gomma, che può sopportare una sovrappressione massima $\Delta p = 0,66\,atm$, è riempito con elio alla pressione atmosferica. Nell'ipotesi di atmosfera isoterma secondo cui la densità dell'aria obbedisce alla legge di Boyle $\rho = \rho_0 p/p_0$, dove ρ_0 e p_0 sono la densità e la pressione al livello del mare, si calcoli a quale altezza dal suolo il palloncino esploderà. ($\rho_0 = 1,29\,kg/m^3$, $p_0 = 1\,atm$)

Fissato un asse z di riferimento volto in alto, la variazione infinitesima di pressione è data da

$$dp = -\rho g dz = -\frac{\rho_0}{p_0} p g dz.$$

Separando le variabili ed integrando si ha

$$\frac{dp}{p} = -\frac{\rho_0}{p_0} g dz, \quad \Rightarrow \quad \ln p = -\frac{\rho_0}{p_0} g z + C,$$

dove C è una costante pari a $\ln p_0$. Pertanto

$$\ln\frac{p}{p_0} = -\frac{\rho_0}{p_0} g z, \quad \Rightarrow \quad p = p_0 e^{-\rho_0 g z/p_0}. \tag{1}$$

Ma la pressione alla quale il palloncino esplode è $p_0 - \Delta p$, quindi sostituendo nella prima delle (1) si trae:

$$\ln\frac{p_0 - \Delta p}{p_0} = -\frac{\rho_0}{p_0} g z, \quad \Rightarrow \quad z = \frac{p_0}{g\rho_0}\ln\frac{p_0}{p_0 - \Delta p} = 8,5\,km.$$

4. Un recipiente a pareti verticali poggia su un piano orizzontale ed è rempito, fino all'altezza $h = 25\,cm$, con una massa d'acqua $m = 30\,kg$. In esso viene posto a galleggiare un cubo di ghiaccio di spigolo $l = 20\,cm$. Si determini la pressione sul fondo, prima e dopo la fusione del ghiaccio (densità del ghiaccio $\rho_{gh} = 940\,kg/m^3$).

Dalla definizione di pressione come rapporto tra forza normale e superficie, si deduce che la pressione sul fondo del recipiente è la stessa prima e dopo la fusione del ghiaccio;

$$p = p_0 + \frac{m + m_{gh}}{A} g, \tag{1}$$

dove p_0 è la pressione atmosferica ed A la superficie del fondo. Poiché

$$A = \frac{V}{h} = \frac{m}{\rho_a h},$$

dove ρ_a è la densità dell'acqua, la (1) si scrive:

$$p = p_0 + (m + \rho_{gh} l^3) g \frac{h}{m} \rho_a = p_0 + 3064\,N/m^2.$$

5. Un'autocisterna completamente piena di un liquido di densità $\rho = 850\,kg/m^3$ viaggia su una strada piana con velocità costante. Ad un certo istante essa frena con accelerazione costante $a = 1,5\,m/s^2$. Sapendo che la lunghezza dell'autocisterna è $l = 7\,m$ e l'altezza del liquido in quiete è $z_0 = 1,5\,m$, determinare il valore della pressione massima esercitata dal liquido durante la frenata.

Nel riferimento x-z dell'autocisterna, fintanto che l'accelerazione impartita dalla frenata è costante, si ha equilibrio tra le forze di pressione e le forze di volume:

$$\nabla p = \mathbf{F} + \mathbf{F}_t,$$

dove $\mathbf{F}$ e $\mathbf{F}_t$ sono rispettivamente la somma delle forze reali e delle forze di trascinamento. Nel caso del problema, la forza peso e la forza di trascinamento destata dalla frenata $\mathbf{F}_t = -m\mathbf{a}_t$. Se l'asse x del riferimento è positivo nel verso del moto, essendo l'accelerazione negativa, tale forza è positiva e spinge il liquido contro la parete anteriore. La precedente relazione si scrive:

$$\nabla p = -\rho g \mathbf{k} + \rho a_t \mathbf{i},$$

che dà luogo a

$$\nabla p = \nabla(\rho a_t x - \rho g z), \quad \Rightarrow \quad \nabla(p - \rho a_t x + \rho g z) = 0.$$

Si trae:

$$p - \rho a_t x + \rho g z = cost, \tag{1}$$

in cui, per $x = 0$, $z = z_0$, $p = p_0$ (pressione atmosferica),

$$cost = p_0 + \rho g z_0.$$

Pertanto la (1) diventa,

$$p = \rho a_t x - \rho g z + \rho g z_0 + p_0. \tag{2}$$

La pressione è massima per $x = l$ e $z = 0$:

$$p_{max} = \rho a_t l + \rho g z_0 + p_0 = 122720\,N/m^2.$$

Questo risultato è corretto se si suppone l'autocisterna completamente piena di liquido incompressibile e se essa è munita di un opportuno dispositivo che mantiene la pressione p_0 (atmosferica) alla superficie libera del liquido.

Se l'autocisterna fosse aperta, con pareti sufficienetemente alte, le superfici isobariche (equipotenziali) vanno ottenute assegnando i corrispondenti valori di p nella (2). In particolare, ponendo $p = p_0$, si ha l'equazione della superficie libera:

$$\rho g z = \rho a_t x + \rho g z_0' \quad \Rightarrow \quad z = \frac{a_t}{g} x + z_0', \tag{3}$$

dove z_0' è l'altezza minima assunta dal liquido (parete posteriore).

La (3) è l'equazione di un piano inclinato di un angolo

$$\tan\theta = \frac{a_t}{g}, \quad \Rightarrow \quad \theta = \tan^{-1}\frac{a_t}{g}.$$

Per trovare le altezze z_0' (parete posteriore) ed h (parete anteriore) che assume il liquido (incompressibile) durante la frenata, si osservi che il suo volume rimane lo stesso; quindi, qualunque sia la sezione trasversale del serbatoio, la sezione mediana longitudinale, prima e durante la frenata, è costituita da un rettangolo e da un trapezio di aree uguali:

$$z_0 l = \frac{1}{2}(h + z_0')l, \quad z_0' = 2z_0 - h. \tag{4}$$

pertanto la (3) diventa,

$$z = \frac{a_t}{g} x + 2z_0 - h.$$

Ponendo $z = h$, $x = l$, si ha:

$$h = \frac{a_t}{g} l + 2z_0 - h \quad \Rightarrow \quad h = \frac{l}{2}\frac{a_t}{g} + z_0 = 2,03\,m \tag{5}$$

La pressione massima risulta

$$p_{max} = \rho g h + p_0 = \frac{l}{2}\rho a_t + \rho g z_0 + p_0 = 118254\,N/m^2.$$

Il valore della pressione è leggermente inferiore a quello trovato prima (autocisterna piena). Si deduce che in quel caso la sovrappressione è dovuta alla reazione esercitata dalla parete superiore del serbatoio.

Si osservi che, tenuto conto della (5), la (4) fornisce:

$$z_0' = z_0 - \frac{l}{2}\frac{a_t}{g} = 0,96\,m.$$

6. Una sfera omogenea, di volume $V = 25\,dm^3$ e densità ρ, è trattenuta, completamente immersa nell'acqua di un grande recipiente, da una funicella ideale ancorata al fondo, soggetta ad una tensione $T = 20\,kg_p$. A causa della rottura della funicella, la sfera emerge raggiungendo una nuova posizione di equilibrio. Determinare la frazione di sfera emergente e la variazione della reazione vincolare esercitata dal fondo.

Detta ρ_a la densità dell'acqua, la tensione della funicella è data dalla differenza tra la spinta d'Archimede ed il peso della sfera,

$$T = \rho_a V g - \rho V g, \quad \Rightarrow \quad \rho = \rho_a - \frac{T}{Vg} = 200\,kg/m^3.$$

Quando la sfera emerge, una parte rimane immersa. Detto V_1 il volume di tale parte, si ha:

$$\rho_a V_1 g = \rho V g \quad \Rightarrow \quad V_1 = \frac{\rho V}{\rho_a}.$$

pertanto,

$$\frac{V - V_1}{V} = 1 - \frac{V_1}{V} = 1 - \frac{\rho}{\rho_a} = 0,8.$$

La variazione della reazione vincolare è ovviamente:

$$\Delta R = T = 20\,kg_p = 196,2\,N.$$

7. Sul fondo di una piscina piena d'acqua è ancorata una fune ideale alla quale sono fissate, immerse nell'acqua e a distanze diverse, due boe A e B, entrambe di massa $m = 3\,kg$ e densità media ρ pari ad un terzo di quella dell'acqua. Determinare le tensioni τ_1 e τ_2 nei tratti di fune compresi tra il fondo e la prima boa A e tra la prima e la seconda boa B.

Fissato un asse di riferimento volto in basso, sulla boa A agiscono le forze: τ_1, τ_2, peso e spinta d'Archimede; per l'equilibrio si ha,

$$\tau_1 - \tau_2 + mg - m_a g = 0,$$

dove m_a è la massa d'acqua spostata. Detta ρ_a la densità dell'acqua, risulta,

$$m_a = m\frac{\rho_a}{\rho};$$

quindi la relazione precedente diventa:

$$\tau_1 - \tau_2 + mg - m\frac{\rho_a}{\rho}g = 0. \tag{1}$$

D'altra parte per l'equilibrio della boa B si ha:

$$\tau_2 + mg - m\frac{\rho_a}{\rho}g = 0, \quad \Rightarrow \quad \tau_2 = mg\left(\frac{\rho_a}{\rho} - 1\right) = 58,8\,N.$$

Sostituendo nella (1) si ottiene:

$$\tau_1 = 2mg\left(\frac{\rho_a}{\rho} - 1\right) = 2\tau_2 = 117,6\,N.$$

8. Un corpo, a pressione atmosferica, ha densità $\rho = 960\,kg/m^3$ e modulo di compressibilità $K = 2\cdot 10^7\,Pa$. Determinare la minima profondità dell'acqua alla quale si deve immergere il corpo perché affondi spontaneamente. Considerare l'acqua come liquido incompressibile.

La variazione di pressione è legata alla variazione relativa di volume dalla relazione,

$$\Delta p = -K\frac{\Delta V}{V},$$

dove K è il modulo di compressibilità. Poiché

$$\frac{\Delta V}{V} = -\frac{\Delta\rho}{\rho'},$$

dove ρ' è la densità assunta dal corpo a causa della compressione, si ottiene

$$\Delta p = K\frac{\Delta\rho}{\rho'}, \quad \Rightarrow \quad \rho_a g h = K\frac{\rho' - \rho}{\rho'},$$

in cui ρ_a è la densità dell'acqua. Pertanto la profondità minima alla quale bisogna immergere il corpo viene determinata quando quest'ultimo assume la densità dell'acqua:

$$\rho_a g h_m = \frac{\rho_a - \rho}{\rho_a}, \quad \Rightarrow \quad h_m = \frac{K}{\rho_a g}\frac{\rho_a - \rho}{\rho_a} = 81,63\,m$$

In queste condizioni il corpo è in equilibrio; appena più in basso di h_m esso affonda.

9. Un'asta di legno uniforme di lunghezza l e massa $m = 0,3\,kg$ è libera di ruotare attorno ad un asse orizzontale passante per un estremo, disposto ad un'altezza $l/2$ sopra la superficie libera dell'acqua contenuta in un grande recipiente. Sapendo che la densità del legno è $\rho = 600\,kg/m^3$, determinare la reazione vincolare sull'asse quando l'asta è in posizione d'equilibrio.

La reazione è

$$R = mg - S,$$

dove S è la spinta d'Archimede. Detta A la sezione dell'asta, ρ_a la densità dell'acqua ed l_{im} la lunghezza immersa dell'asta, si ha

$$R = \rho Alg - \rho_a Al_{im}g = Alg\left(\rho - \frac{l_{im}}{l}\rho_a\right) = mg\left(1 - \frac{l_{im}}{l}\frac{\rho_a}{\rho}\right).$$

La posizione verticale dell'asta non è di equilibrio stabile, in quanto il suo baricentro è sopra il centro di spinta. In questa posizione ($l_{im} = l/2$), risulta:

$$R_1 = mg\left(1 - \frac{1}{2}\frac{\rho_a}{\rho}\right) = 0,5\,N.$$

Poiché l'asta è vincolata a ruotare, posizioni di equilibrio stabili sono quelle simmetriche rispetto alla verticale, con un angolo d'inclinazione θ, per il quale la somma dei momenti della forza peso e della spinta, rispetto all'asse di rotazione, è nulla; ossia:

$$\rho Alg\frac{l}{2}\sin\theta = \rho_a Al_{im}g\left(l - \frac{l_{im}}{2}\right)\sin\theta.$$

Si trae:

$$\rho l^2 = 2\rho_a ll_{im} - \rho_a l_{im}^2, \quad \Rightarrow \quad \left(\frac{l_{im}}{l}\right)^2 - 2\frac{l_{im}}{l} + \frac{\rho}{\rho_a} = 0.$$

Risolvendo questa equazione si trova:

$$\frac{l_{im}}{l} = 1 \pm \sqrt{1 - \frac{\rho}{\rho_a}} = 1 \pm 0,63.$$

Scartando il segno positivo si ottiene,

$$\frac{l_{im}}{l} = 0,37.$$

pertanto la reazione vale:

$$R = mg\left(1 - \frac{l_{im}}{l}\frac{\rho_a}{\rho}\right) = 1,13\,N.$$

Esercizi su Lavoro
A cura del Prof. T.Papa

1. Un litro di mercurio è compresso reversibilmente a temperatura costante, da una pressione iniziale $p_A = 1\,kbar$ ad una finale $p_B = 2\,kbar$. Sapendo che nell'intervallo indicato e alla temperatura dell'esperienza, il coefficiente di compressibilità isoterma è $\kappa_T = 3,8 \cdot 10^{-6}\,bar^{-1}$, circa costante, calcolare il lavoro necessario per la compressione.

Il lavoro reversibile è

$$\mathcal{L} = \int_A^B p dV, \quad \text{con} \quad dV = \left(\frac{\partial V}{\partial p}\right)_T dp + \left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_p dT.$$

Poiché il coefficiente di compressibilità isoterma è definito dalla relazione

$$\kappa_T = -\frac{1}{V_0}\left(\frac{\partial V}{\partial p}\right)_T,$$

si ha:

$$dV = -\kappa_T V_0 dp,$$

dove $V_0 = 1\,\ell$ è il volume iniziale.

Il lavoro risulta:

$$\mathcal{L} = -\int_{p_A}^{p_B} \kappa_T V_0 p\, dp = -\frac{1}{2}\kappa_T V_0 (p_B^2 - p_A^2) = 5,7 \cdot 10^2\,J.$$

Si rammenti che $1\,bar = 10^5\,Pa$.

2. Un blocco metallico di volume $V = 1\,dm^3$ viene scaldato reversibilmente alla pressione costante $p = 1\,atm$, in modo che la sua temperatra vari di $\Delta T = 500\,K$. Supponendo che il coefficiente di espansione in tale intervallo abbia il valore medio $\beta = 6 \cdot 10^{-5}\,K^{-1}$, calcolare il lavoro nella trasformazione.

Il lavoro reversibile è

$$\mathcal{L} = \int_A^B p dV, \quad \text{con} \quad dV = \left(\frac{\partial V}{\partial p}\right)_T dp + \left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_p dT,$$

Poiché il coefficiente di espansione a pressione costante è definito da

$$\beta = \frac{1}{V}\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_p,$$

si ha:

$$dV = \beta V\, dT, \qquad \mathcal{L} = p\beta V \int_{T_A}^{T_B} dT = p\beta V \Delta T = 3\,J$$

Problemi sul 1 Principido della Termodinamica
A cura del Prof. T.Papa

1. Un'asta omogenea di sezione costante, lunghezza $l = 0,4\,m$, massa $m = 0,64\,kg$ e peso molecolare $M = 64$, è libera di oscillare sotto l'azione della gravità all'interno di un involucro isolato, dove sono contenute $n = 0,5\,mol$ di un gas ideale monoatomico. Inizialmente l'asta è in quiete formando un angolo $\theta_0 = \pi/3$ con la verticale. Lasciata libera di oscillare, dopo qualche tempo si ferma nella posizione verticale ed il sistema raggiunge un nuovo stato di equilibrio. Calcolare la variazione di temperatura del sistema (gas-asta). Trascurare la capacità termica dell'involucro e per il calore molare C_a dell'asta assumere valida la legge di Dulong e Petit.

Il problema va risolto mediante la prima legge della termodinamica, nella situazione in cui al sistema vengono impartite forme di energia (meccanica, elettromagnetica, ...) diverse dal calore. La variazione di energia interna è sempre la stessa. Nel caso in esame la variazione di energia interna del sistema gas-asta avviene a spese dell'energia potenziale iniziale dell'asta, quindi il bilancio energetico si scrive:

$$mgh = nC_V(T_B - T_A) + n_a C_a(T_B - T_A) = (nC_V + n_a C_a)(T_B - T_A)$$
$$(T_B - T_A) = \frac{mgh}{nC_V + n_a C_a}.$$

Essendo:

$$h = \frac{l}{2}(1 - \cos\theta_0) = \frac{l}{4}, \qquad n_a = \frac{m}{M} = 10, \qquad C_a = 3R,$$

(m va espressa in grammi) risulta:

$$(T_B - T_A) = \frac{mgl/4}{nC_V + n_a C_a} \approx 2,5 \cdot 10^{-3}\,K.$$

2. Un gas ideale monoatomico, inizialmente alla pressione $p_0 = 2\,atm$ e volume $V_0 = 10\,l$, esegue la trasformazione reversibile

$$p = p_0\left[1 + \left(\frac{V - V_0}{V_0}\right)^2\right],$$

fino a raddoppiare il volume. Calcolare il calore scambiato durante la trasformazione.

Dall'equazione della trasformazione si deduce che raddoppiando il volume iniziale, la pressione finale risulta $p_1 = 2p_0$.

Il calore scambiato è dato dalla prima legge della Termodinamica,

$$Q = \Delta U + \mathcal{L}. \tag{1}$$

La variazione di energia interna del gas risulta:

$$\Delta U = nC_V(T_1 - T_0) = n\frac{3}{2}R\left(\frac{4p_0V_0}{nR} - \frac{p_0V_0}{nR}\right) = \frac{9}{2}p_0V_0, \tag{2}$$

dove, per ricavare le temperature, si è usata l'equazione di stato. Il lavoro nella trasformazione:

$$\mathcal{L} = \int_{V_0}^{2V_0} pdV = \int_{V_0}^{2V_0} p_0\left[1 + \left(\frac{V - V_0}{V_0}\right)^2\right]dV = \frac{4}{3}p_0V_0. \tag{3}$$

Sostituendo le (2) e (3) nella (1), si ottiene:

$$Q = \frac{35}{6}p_0V_0 = 116,7\,\ell \cdot atm = 11670\,J.$$

3. Un gas ideale monoatomico, di volume iniziale $V_0 = 10^{-2}\,m^3$ alla temperatura $\theta_0 = 20\,°C$, contenuto in un recipiente diatermico, viene compresso fino alla pressione $p = 2\,MPa$ che viene mantenuta costante. Una volta raggiunto l'equilibrio, la temperatura del gas è aumentata di $80\,°C$ ed il volume è diventato $V = V_0/10$. Determinare la quantità di calore scambiata dal gas con l'ambiente esterno.

Per la prima legge della termodinamica:

$$Q = \Delta U + \mathcal{L},$$

con

$$\Delta U = nC_V \Delta T = \frac{3}{2} nR\Delta T, \qquad \mathcal{L} = p\Delta V.$$

Essendo, per l'equazione di stato,

$$nR = \frac{pV}{T} = \frac{pV_0/10}{T},$$

si ottiene:

$$Q = \frac{3}{2}\frac{pV_0/10}{T}\Delta T + p\Delta V = -17,5\,kJ$$

4. Un gas ideale monoatomico, inizialmente a temperatuta $T_A = 300\,K$, compie una trasformazione adiabatica irreversibile al termine della quale si raffredda di $\Delta T = T_B - T_A = -5\,K$. Utilizzando il lavoro ottenuto durante tale processo, il gas viene riportato, a pressione costante, al volume iniziale $V_C = V_A$. Determinare la temperatura finale del gas.

Per la prima legge della termodinamica, il lavoro nella trasformazione adiabatica, è uguale alla diminuzione di energia interna:

$$\mathcal{L} = -nC_V(T_B - T_A), \tag{1}$$

Nella trasformazion isobara:

$$-\mathcal{L} = p(V_C - V_B).$$

Poiché $V_C = V_B T_C/T_B$, si ha

$$-\mathcal{L} = \frac{pV_B}{T_B}(T_C - T_B) = nR(T_C - T_B),$$

e tenendo conto della (1):

$$nR(T_C - T_B) = nC_V(T_B - T_A).$$

Essendo $T_B = T_A + \Delta T$, si ottiene:

$$T_C = T_A + \frac{C_p}{R}\Delta T = T_A + \frac{5}{2}\Delta T = 287,5\,K$$

5. Una mole di gas ideale biatomico si espande secondo la politropica reversibile $pV^2 = cost$. Sapendo che la temperatura iniziale è $T_A = 400\,K$ e che il gas compie il lavoro $\mathcal{L} = 2000\,J$, determinare la temperatura finale T_B ed il calore scambiato nella trasformazione.

In una politropica, $pV^\delta = p_A V_A^\delta$, il lavoro reversibile è dato da

$$\mathcal{L} = \int_{V_A}^{V_B} \frac{p_A V_A^\delta}{V^\delta} dV = \frac{p_B V_B - p_A V_A}{1-\delta} = \frac{R(T_B - T_A)}{1-\delta}.$$

Da cui, per $\delta = 2$,

$$T_B = T_A + \frac{1-\delta}{R}\mathcal{L} = 160\,K.$$

Il calore scambiato:

$$Q = \Delta U + \mathcal{L} = C_V(T_B - T_A) + \mathcal{L} = -2986\,J.$$

Nella traformazione calore viene ceduto.

6. Un recipiente cilindrico adiabatico è diviso in due parti uguali A e B da un pistone scorrevole, anch'esso adiabatico, e di massa trascurabile. Ognuna delle due parti contiene $6\,mol$ di gas ideale monoatomico alla pressione p_0 e alla temperatura $T_0 = 300\,K$. Una resistenza elettrica riscalda reversibilmente il gas contenuto nella parte A, determinando una compressione del gas in B, fino a triplicarne la pressione. Calcolare il lavoro fatto dal gas contenuto in A ed il calore da esso assorbito.

In A viene dissipato calore mediante la resistenza elettrica (lavoro adiabatico), mente il gas contenuto in B viene compresso adiabaticamente e reversibilmente, raggiungendo la temperatura

$$T_B = T_0 \left(\frac{p_B}{p_0}\right)^{(\gamma-1)/\gamma} = 466\,K,$$

avendo tenuto conto dell'equazione delle adiabatiche reversibili, nelle variabili p e T.

Di conseguenza, il lavoro fatto dal gas in A su quello contenuto in B è pari alla variazione di energia interna di quest'ultimo:

$$\mathcal{L} = nC_V(T_B - T_0) = 1,2 \cdot 10^4\,J.$$

D'altro canto, il calore assorbito dal gas A è pari alla somma del lavoro effettuato e della sua variazione di energia interna. Per calcolare quest'ultima occorre determinare la temperatura finale T_A del gas. Dall'equazione di stato del gas ideale si ha:

$$p_A V_A = nRT_A, \quad p_0 V_0 = nRT_0, \quad \frac{T_A}{T_0} = \frac{p_A V_A}{p_0 V_0}, \quad \Rightarrow \quad T_A = T_0 \frac{p_A V_A}{p_0 V_0}.$$

Ma, essendo V_0 il volume iniziale dei gas,

$$V_A = 2V_0 - V_B = 2V_0 - V_0 \left(\frac{p_0}{p_B}\right)^{1/\gamma} = V_0 \left[2 - \left(\frac{p_0}{p_B}\right)^{1/\gamma}\right],$$

e, tenuto conto che nelle due parti $p_A = p_B$,

$$T_A = T_0 \frac{p_B}{p_0} \left[2 - \left(\frac{p_0}{p_B}\right)^{1/\gamma}\right] = 1334\,K.$$

Pertanto:

$$Q = \mathcal{L} + \Delta U_A = \frac{3}{2} nR(T_B - T_0) + \frac{3}{2} nR(T_A - T_0) = 89,75\,kJ.$$

7. Due moli di gas ideale monoatomico si espandono secondo la trasformazione reversibile, di equazione

$$p = p_0 + a(V - V_0) - b(V - V_0)^2,$$

in cui la pressione dello stato finale è uguale a quella dello stato iniziale $p_0 = 10^5\,Pa$. Calcolare il lavoro ed il calore associati alla trasformazione; ($a = 2 \cdot 10^8\,Pa/m^3$, $b = 5 \cdot 10^{11}\,Pa/m^6$).

Nel diagramma V-p la trasformazione è rappresentata da un arco di parabola ad asse verticale e concavità volta in basso i cui stati estremi sono alla stessa pressione p_0. Per la prima legge della termodinamica,

$$Q = \Delta U + \mathcal{L}. \tag{1}$$

Detto V_1 il volume finale, si ha

$$\begin{aligned}\mathcal{L} &= \int_{V_0}^{V_1} p dV = \int_{V_0}^{V_1} \left[p_0 + a(V - V_0) - b(V - V_0)^2\right] dV \\ &= p_0(V_1 - V_0) + \frac{1}{2}a(V_1 - V_0)^2 - \frac{1}{3}b(V_1 - V_0)^3.\end{aligned}$$

Ma, dall'equazione della trasformazione, per $p = p_0$ e $V = V_1$, si ricava

$$V_1 - V_0 = \frac{a}{b} = 4 \cdot 10^{-4}\, m^3. \tag{2}$$

Sostituendo nella precedente, il lavoro risulta:

$$\mathcal{L} = 45,34\, J.$$

La variazione di energia interna è

$$\Delta U = nC_V(T_1 - T_0) = \frac{3}{2}p_0(V_1 - V_0) = 60\, J,$$

dove si è tenuto conto dell'equazione di stato. Dalla (1) si ottiene il calore associato alla trasformazione:

$$Q = 105,34\, J.$$

Si noti che il lavoro e la variazione di energia interna risultano piuttosto piccoli. Ciò è dovuto al fatto che la variazione di volume, come risulta dalla (2), è molto modesta.

Problemi sui Gas Ideali
A cura del Prof. T.Papa

1. Una mole di gas ideale monoatomico alla temperatura iniziale $T_0 = 300\,K$ esegue una trasformazione politropica reversibile di equazione $TV^{-3} = cost$, raddoppiando il volume iniziale V_0. Determinare la quantità di calore scambiata dal gas.

Usando l'equazione di stato, l'equazione della politropica si può scrivere

$$pV^{-2} = cost, \qquad (\delta = -2).$$

Il calore molare della politropica è

$$C_\delta = C_V + \frac{R}{1-\delta} = \frac{11}{6}R,$$

quindi:

$$Q = nC_\delta(T_f - T_0). \tag{1}$$

Ma,

$$T_0V_0^{-3} = T_f(2V_0)^{-3}; \quad \Rightarrow \quad T_f = 8T_0.$$

Sostituendo nella (1),

$$Q = nR\frac{77}{6}T_0 = 7647\,cal.$$

2. Due moli di gas ideale monoatomico si espandono secondo la trasformazione reversibile, di equazione

$$p = p_0 + a(V - V_0) - b(V - V_0)^2,$$

in cui la pressione dello stato finale è uguale a quella dello stato iniziale $p_0 = 10^5\,Pa$. Calcolare il lavoro ed il calore associati alla trasformazione; ($a = 2 \cdot 10^8\,Pa/m^3$, $b = 5 \cdot 10^{11}\,Pa/m^6$).

Nel diagramma V-p la trasformazione è rappresentata da un arco di parabola ad asse verticale e concavità volta in basso i cui stati estremi sono alla stessa pressione p_0. Per la prima legge della termodinamica,

$$Q = \Delta U + \mathcal{L}. \tag{1}$$

Detto V_1 il volume finale, si ha

$$\begin{aligned}\mathcal{L} &= \int_{V_0}^{V_1} pdV = \int_{V_0}^{V_1} \left[p_0 + a(V - V_0) - b(V - V_0)^2\right] dV \\ &= p_0(V_1 - V_0) + \frac{1}{2}a(V_1 - V_0)^2 - \frac{1}{3}b(V_1 - V_0)^3.\end{aligned}$$

Ma, dall'equazione della trasformazione, per $p = p_0$ e $V = V_1$, si ricava

$$V_1 - V_0 = \frac{a}{b} = 4 \cdot 10^{-4}\,m^3. \tag{2}$$

Sostituendo nella precedente, il lavoro risulta:

$$\mathcal{L} = 45,34\,J.$$

La variazione di energia interna è

$$\Delta U = nC_V(T_1 - T_0) = \frac{3}{2}p_0(V_1 - V_0) = 60\,J,$$

dove si è tenuto conto dell'equazione di stato. Dalla (1) si ottiene il calore associato alla trasformazione:

$$Q = 105,34\,J.$$

Si noti che il lavoro e la variazione di energia interna risultano piuttosto piccoli. Ciò è dovuto al fatto che la variazione di volume, come risulta dalla (2), è molto modesta.

3. Un recipiente cilindrico adiabatico, munito di pistone anch'esso adiabatico, è contenuta una mole di gas ideale ed una massa $m = 20\,gm$ di ghiaccio. Il sistema è in equilibrio alla pressione $p_0 = 1\,atm$ e alla temperatura $\theta_0 = 0\,°C$. Il gas viene compresso reversibilmente finché tutto il ghiacco si è sciolto. Calcolare il volume finale del gas, assumendo indipendenti dalla pressione la temperatura ed il calore di fusione del ghiaccio $\lambda_f = 80\,cal/gm$.

Finché il ghiaccio è presente alla sua temperatura di fusione, la compressione è isoterma reversibile. In tal caso

$$\Delta U = 0, \quad \Rightarrow \quad Q = -\mathcal{L},$$

dove Q è il calore assorbito nella fusione del ghiaccio e $-\mathcal{L}$ il lavoro di compressione, esterno. Detto V_1 il volume finale, si ha

$$m\lambda_f = -nRT_0 \ln \frac{V_1}{V_0}.$$

da cui:

$$V_1 = V_0 \exp\left[-\frac{m\lambda_f}{nRT_0}\right] = \frac{nRT_0}{p_0} \exp\left[-\frac{m\lambda_f}{nRT_0}\right] = 1,18 \cdot 10^{-3}\, m^3.$$

4. Un gas ideale monoatomico è contenuto in un recipiente adiabatico, in equilibrio alla temperatura $T_A = 320\,K$. Successivamente esso si espande, occupando il volume $V_B = 3V_A$ e compiendo il lavoro $\mathcal{L} = 150\,J/mol$, quindi viene compresso adiabaticamente e reversibilmente fino al volume finale $V_C = V_A$. Determinare la temperatura finale del gas.

L'espansione AB è irreversibile. Per la prima legge della termodinamica,

$$nC_V(T_B - T_A) + n\mathcal{L} = 0,$$

si ricava:

$$T_B = T_A - \frac{\mathcal{L}}{C_V} = T_A - \frac{2\mathcal{L}}{3R}.$$

Pertanto, tenuto conto dell'equazione dell'adiabatica BC,

$$T_C = T_B \left(\frac{V_B}{V_C}\right)^{\gamma-1} = T_B 3^{\gamma-1},$$

si ottiene:

$$T_C = \left(T_A - \frac{2\mathcal{L}}{3R}\right) 3^{5/3-1} = 640,5\,K.$$

Problemi sui Gas di Wan der Waals
A cura del Prof. T.Papa

1. Una quantità di ossigeno costituita da n moli, a temperatuta T_0 e volume V_0, viene fatta espandere isotermicamente, fino a raddoppiare il volume. Calcolare il rapporto dei calori assorbiti nei seguenti casi:
a) il gas si consideri ideale
b) il gas obbedisca all'equazione di Van der Waals con $V_0 = 2nb$ (b covolume).

Gas ideale. Detto V_1 il volume finale, si ha

$$Q_1 = nRT_0 \ln \frac{V_1}{V_0} = nRT_0 \ln 2. \tag{1}$$

Gas di Van der Waals.

$$\delta Q_2 = dU + pdV = \left(\frac{\partial U}{\partial T}\right)_V dT + \left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_T dV + pdV.$$

Nell'isoterma,

$$\delta Q_2 = \left[\left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_T + p\right] dV. \tag{2}$$

Ricordando che

$$\left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_T = T\left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_V - p,$$

e sostituendo nella (2)

$$\delta Q_2 = T_0 \left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_V dV. \tag{3}$$

Dall'equazione di stato di Van der Waals:

$$p = \frac{nRT}{V - nb} - \frac{n^2 a}{V^2}, \quad \Rightarrow \quad \left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_V = \frac{nR}{V - nb}.$$

Pertanto la (3) diventa:

$$\delta Q_2 = \frac{nRT_0}{V - nb} dV.$$

Integrando:

$$Q_2 = \int_{V_0}^{V_f} \frac{nRT_0}{V - nb} dV = nRT_0 \ln \frac{V_f - nb}{V_0 - nb} = nRT_0 \ln 3.$$

Pertanto:

$$\frac{Q_1}{Q_2} = \frac{\ln 2}{\ln 3} = 0,63.$$

2. Un cilindro diatermico, munito di pistone libero di scorrere, contiene una mole di gas reale assimilabile ad un gas di Van der Waals, in cui $a = 1,4\,\ell \cdot atm \cdot \ell/mol^2$ e $b = 0,04\,\ell/mol$, che occupa il volume $V_1 = 1\,\ell$. Improvvisamente il gas viene fatto espandere contro la pressione atmosferica p_0 fino al volume $V_2 = 4\,\ell$. Calcolare il calore scambiato dal gas durante l'espansione.

L'espansione è irreversibile ma, essendo il cilindro diatermico, una volta raggiunto l'equilibrio finale, la temperatura del gas è uguale a quella iniziale.

Per la prima legge della termodinamica, il calore scambiato è dato da

$$Q = \Delta U + \mathcal{L}. \tag{1}$$

Per ricavare ΔU si rammenti che il differenziale dell'energia interna, nelle variabili T e V è

$$dU = \left(\frac{\partial U}{\partial T}\right)_V dT + \left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_T dV = C_V dT + \left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_T dV. \tag{2}$$

Ricordando l'equazione termodinamica di stato,

$$\left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_T = T\left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_V - p,$$

e l'equazione di stato di Van der Waals,

$$p = \frac{RT}{V-b} - \frac{a}{V^2},$$

dove V è il volume molare, espresso nel caso del problema in ℓ/mol, si ottiene:

$$\left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_T = \frac{a}{V^2}.$$

Pertanto la (2) diventa:

$$dU = C_V dT + \frac{a}{V^2} dV,$$

e poiché il processo è monotermo,

$$dU = \frac{a}{V^2} dV.$$

Integrando si ricava:

$$\Delta U = a\left(\frac{1}{V_1} - \frac{1}{V_2}\right) = 1,05\,\ell \cdot atm = 106,7\,J/mol \tag{3}$$

Il lavoro contro la pressione esterna p_0 è semplicemente

$$\mathcal{L} = p_0 \Delta V = 3\,\ell \cdot atm = 304\,J \tag{4}$$

Sostituendo la (3) e la (4) nella (1) si ottiene:

$$Q = 410\,J.$$

Si osservi che il contributo alla variazione di energia interna è dovuto solo alla variazione di volume.

Problemi sul II Principio della Termodinamica e sull'Entropia
A cura del Prof. T.Papa

1. Un blocco di alluminio ($M_{Al} = 27$) di massa $m = 1\,kg$, alla temperatura di $500\,°C$, viene raffreddato ponendolo a contatto con una sorgente a $20\,°C$, fino a raggiungere l'equilibrio termico. Si calcoli la variazione di entropia del blocco e della sorgente. Si ritenga trascurabile la variazione di volume e valida la legge di Dulong Petit nell'intervallo di temperature assegnato.

La legge di Dulong e Petit afferma che a temperature elevate rispetto a quelle criogeniche, il calore molare a volume costante di un solido è $C_V = 3R$. Il processo è irreversibile, in quanto il blocco viene semplicemente posto in contatto con la sorgente. La variazione di entropia del blocco, valutata con i soliti criteri di reversibilità, è data da:

$$\Delta S = nC_V \int_{T_A}^{T_B} \frac{dT}{T} = \frac{m}{M} 3R \ln \frac{293}{773} = -895\,J/K.$$

La variazione di entropia della sorgente è data da:

$$\Delta S_{sorg} = \frac{Q}{T_B} = \frac{m}{M_{Al}} C_V \frac{T_A - T_B}{T_B} = \frac{m}{M_{Al}} 3R \frac{480}{293} = 1512\,J/K.$$

Si rammenti che la sorgente subisce variazioni, di origine non dissipative, determinate esclusivamente dalle quantità di calore scambiate. Se il calore fosse scambiato reversibilmente si otterrebbe esattamente la stessa variazione di entropia. Dunque, ogni volta che una sorgente scambia una quantità di calore durante una trasformazione di qualsiasi tipo, la sua variazione di entropia è Q/T, dove Q va preso col suo segno (positivo se il calore viene assorbito, negativo se ceduto).

2. Un pezzo di piombo, di massa $m_1 = 80\,gm$, alla temperatura $\theta_1 = 150\,°C$ viene introdotto in un vaso Dewar (thermos) di capacità termica trascurabile, contenente una massa $m_2 = 80\,gm$ d'acqua a temperatura $\theta_2 = 20\,°C$. Si calcoli la variazione di entropia del sistema una volta raggiunto l'equilibrio. ($c_{Pb} = 129\,J/(kg \cdot K)$).

Il sistema è isolato e la variazione di volume nel processo è trascurabile, pertanto la variazione di energia interna, somma delle variazioni di energia interna dell'acqua e del piombo, è nulla

$$\Delta U = \Delta U_{acq} + \Delta U_{Pb} = 0, \qquad \Delta U_{acq} = -\Delta U_{Pb}.$$

Detta θ_e la temperatura di equilibrio, si ha

$$m_1 c_{Pb}(\theta_1 - \theta_e) = m_2 c_{acq}(\theta_e - \theta_2), \quad \Rightarrow \quad \theta_e = 23,9°C = 297\,K.$$

La variazione di entropia va calcolata adottando i noti criteri di reversibilità per tali processi. La variazione di entropia totale è somma delle variazioni di entropia del piombo e dell'acqua. Assumendo nell'intervallo di temperature assegnato, costante il calore specifico dell'acqua e pari a $1\,cal/gm \cdot K = 4,18 \cdot 10^3\,J/kg \cdot K$, si ottiene:

$$\Delta S = \int_{T_1}^{T_e} m_1 c_{Pb} \frac{dT}{T} + \int_{T_2}^{T_e} m_2 c_{acq} \frac{dT}{T} = m_1 c_{Pb} \ln \frac{T_e}{T_1} + m_2 c_{acq} \ln \frac{T_e}{T_2} = 0,85\,J/K.$$

Essendo il sistema isolato tale variazione è anche la variazione d'entropia dell'universo.

3. Un gas ideale biatomico è contenuto in un cilindro, chiuso da un pistone a tenuta e perfettamente scorrevole. Temperatura, volume e pressione iniziali sono: $T_0 = 300\,K$, $V_0 = 0,2\,m^3$, $p_0 = 1\,atm$ uguale alla pressione esterna. Posto il cilindro in contatto con una sorgente a temperatura $T_1 = 600\,K$, il gas dopo un certo tempo raggiunge l'equilibrio. Verificare che la variazione di entropia del gas è maggiore della variazione di entropia della sorgente. Nell'intervallo di temperature considerato, si ritengano congelati i gradi di libertà di vibrazione.

Si tratta di verificare la disuguaglianza di Clausius nello scambio irreversibile di calore con una sola sorgente:

$$\Delta S \geq \int_A^B \frac{\delta Q}{T}.$$

Essendo $n = p_0 V_0 / R T_0$, la variazione di entropia del gas risulta:

$$\Delta S = n C_p \ln \frac{T_1}{T_0} = \frac{p_0 V_0}{R T_0} \frac{7}{2} R \ln \frac{T_1}{T_0} = 162\, J/K.$$

La variazione di entropia della sorgente è

$$\Delta S_{sorg} = \int_{T_0}^{T_1} \frac{\delta Q}{T_1} = \frac{n C_p \Delta T}{T_1} = 117\, J/K.$$

4. Un recipiente isolato di volume $V = 0,1\, m^3$ è diviso in due parti uguali A e B da un setto adiabatico. In A è contenuto una mole di O_2 alla temeperatura di $10\,°C$; in B sono contenute due moli di N_2 alla temperatura di $50\,°C$. Rimosso il setto viene raggiunto lo stato di equilibrio finale. Supponendo i gas ideali, determinare temperatura e pressione finali e la variazione di entropia del sistema.

In un sistema isolato la variazione di energia interna totale è nulla:

$$\Delta U = \Delta U_A + \Delta U_B = 0, \quad \Rightarrow \quad n_A C_V (T_f - T_A) + n_B C_V (T_f - T_B) = 0.$$

Si ricava:

$$T_f = \frac{n_A T_A + n_B T_B}{n_A + n_B} = 309,6\, K \qquad p_f = (n_A + n_B) \frac{R T_f}{V} = 7,7 \cdot 10^4\, Pa.$$

È ovvia l'irreversibilità del processo, quindi la variazione di entropia va calcolata come se ciascun gas eseguisse un'espansione libera. Pertanto:

$$\begin{aligned} \Delta S_A &= n_A C_V \ln \frac{T_f}{T_A} + n_A R \ln \frac{V_A + V_B}{V_A} = 7,62\, J/K \\ \Delta S_B &= n_B C_V \ln \frac{T_f}{T_B} + n_B R \ln \frac{V_A + V_B}{V_B} = 9,76\, J/K. \end{aligned} \tag{1}$$

La variazione totale risulta

$$\Delta S = \Delta S_A + \Delta S_B = 17,38\, J/K.$$

È molto importante notare che il risultato è corretto in quanto i gas sono diversi. Per evidenziare questo aspetto si osservi che dalle equazioni di stato

$$p_f (V_A + V_B) = (n_A + n_B) R T_f; \qquad p_A V_A = n_A R T_A,$$

si ricava:

$$\frac{V_A + V_B}{V_A} = \frac{n_A + n_B}{n_A} \frac{T_f}{T_A} \frac{p_A}{p_f}.$$

Quindi la prima delle (1) si scrive:

$$\begin{aligned} \Delta S_A &= n_A C_V \ln \frac{T_f}{T_A} + n_A R \left(\ln \frac{n_A + n_B}{n_A} + \ln \frac{T_f}{T_A} + \ln \frac{p_A}{p_f} \right) = \\ &= n_A C_p \ln \frac{T_f}{T_A} + n_A R \ln \frac{p_A}{p_f} + n_A R \ln \frac{n_A + n_B}{n_A} \end{aligned} \tag{2}$$

Analogamente la seconda delle (1);

$$\Delta S_B = n_B C_p \ln \frac{T_f}{T_B} + n_A R \ln \frac{p_B}{p_f} + n_A R \ln \frac{n_A + n_B}{n_B}. \tag{3}$$

Nelle (2) e (3) compaiono i termini relativi all'entropia di mescolamento che complessivamente vale:

$$\Delta S_M = R \left(n_A \ln \frac{n_A + n_B}{n_A} + n_B \ln \frac{n_A + n_B}{n_B} \right),$$

che per gas identici è nulla (Gibbs). In tal caso va fatta molta attenzione in quanto le variazioni di entropia, come apparirebbe spontaneo, non sono date dalle (1) bensì dalle:

$$\Delta S_A = n_A C_p \ln \frac{T_f}{T_A} + n_A R \ln \frac{p_A}{p_f}$$
$$\Delta S_B = n_B C_p \ln \frac{T_f}{T_B} + n_B R \ln \frac{p_B}{p_f}.$$

Tali espressioni sono conseguenza dei diversi valori della pressione e della temperatura nelle due parti. Se p e T sono costanti la variazione di entropia risulta $\Delta S = 0$.

5. Un recipiente isolato è diviso in due parti uguali da una parete fissa, di capacità termica trascurabile, ciascuna contenente una mole dello stesso gas ideale biatomico. In una parte la temperatura è $T_1 = 300\,K$, nell'altra $T_2 = 400\,K$. Si calcoli la variazione di entropia del sistema nelle seguenti situazioni:
a) nella parete è praticato un piccolo foro che permette l'interdiffusione dei gas;
b) la parete viene rimossa.
c) la parete è diatermica;

La situazione è analoga a quella del problema precedente. Essendo i gas uguali nella variazione di entropia manca il termine di mescolamento; quindi le situazioni a) e b) sono compatibili con quanto discusso prima. Per quanto riguarda la situazione c) si osservi che l'equibrio finale, nel processo spontaneo, viene raggiunto semplicemente attraverso la conduzione del calore, quindi la variazione di entropia nei casi prospettati è la stessa.

La temperatura d'equilibrio va ricavata tenendo presente, come prima, che l'energia interna è costante:

$$\Delta U = \Delta U_A + \Delta U_B = 0,$$

ed essendo $n_A = n_B$,

$$C_V(T_f - T_1) = C_V(T_2 - T_f), \quad \Rightarrow \quad T_f = \frac{T_1 + T_2}{2}.$$

Tenuto conto che la variazione di entropia di mescolamento è nulla, dalle equazioni di stato si ricava:

$$\frac{p_A}{p_f} = \frac{n_A}{n_A + n_B} \frac{V_A + V_B}{V_A} \frac{T_A}{T_f} = \frac{T_A}{T_f},$$

la variazione di entropia risulta

$$\Delta S = n C_V \left(\ln \frac{T_1 + T_2}{2T_1} + \ln \frac{T_1 + T_2}{2T_2} \right) = 0,1\, cal/K.$$

6. Un recipiente con pareti rigide e capacità termica trascurabile, contiene 15 moli di azoto, in equilibrio termodinamico, alla temperatura T_1. Il sistema viene posto in contatto con una sorgente alla temperatura di $0\,°C$, attraverso una parete diatermica. Raggiunto il nuovo equilibrio, si osserva che la variazione di entropia della sorgente è $\Delta S_{sorg} = 750\,J/K$. Calcolare la variazione di entropia del gas.

La trasformazione è irreversibile, ma la variazione di entropia della sorgente è sempre pari al rapporto tra il calore assorbito (ceduto dal gas) e la sua temperatura, ossia

$$\Delta S_{sorg} = \frac{Q}{T_2}, \qquad Q = T_2 \Delta S_{sorg} = 204750\, J$$

dove $T_2 = 273\, K$. Essendo $Q = nC_V(T_1 - T_2)$, risulta:

$$T_1 = T_2 + \frac{Q}{nC_V} = 930\, K.$$

Si sono considerati attivi i gradi di libertà di vibrazione ($C_V = 5R/2$).

La variazione di entropia del gas risulta:

$$\Delta S = nC_V \ln \frac{T_2}{T_1} = -382\, J/K.$$

7. Un grammo d'acqua nella transizione liquido-vapore ha una variazione di energia interna $\Delta U = 500\, cal$. Calcolare la variazione di entropia della transizione di fase ritenendo trascurabile il volume del liquido, V_l, rispetto a quello del vapore, V_g, e considerando quest'ultimo come un gas ideale. Assumere costante il calore di evaporazione (calore latente) e pari a $\lambda_e = 2260\, J/gm$.

Dalla prima legge della termodinamica:

$$\Delta U = Q - \mathcal{L} = m\lambda_e - p(V_g - V_l) = m\lambda_e - \frac{m}{M} RT,$$

dove m ed M sono la massa ed il peso molecolare dell'acqua. Si ricava

$$T = \lambda_e \frac{M}{R} - \frac{M \Delta U}{mR} = 368,2\, K.$$

La variazione di entropia risulta:

$$\Delta S = \frac{m\lambda_e}{T} = 6,14\, J/K.$$

8. Un gas ideale, a contatto con una sorgente a temperatura $T = 300\, K$, ha una variazione di entropia $\Delta S = 10\, J/K$. Si calcoli il massimo lavoro ottenibile.

In una trasformazione isoterma,

$$\Delta S \geq \frac{Q}{T}, \qquad T\Delta S \geq \Delta U + \mathcal{L}, \qquad \mathcal{L} \leq T\Delta S - \Delta U, \qquad \mathcal{L} \leq -\Delta F.$$

Il lavoro ottenibile è pari alla diminuzione della funzione di Helmholtz se la trasformazione è reversibile, minore se la trasformazione è irreversibile. Trattandosi di un gas ideale: $\Delta U = 0$, quindi

$$\mathcal{L} \leq T\Delta S.$$

Il lavoro massimo si ottiene nella trasformazione reversibile:

$$\mathcal{L} = T\Delta S = 3000\, J.$$

9. Un cilindro munito di pistone perfettamente scorrevole, contiene $0,3$ moli di azoto alla pressione p. Il sistema è in equilibrio termico con un bagno di acqua e ghiaccio fondente in cui sono presenti $150\, gm$ di ghiaccio alla pressione $p_0 = 1\, atm$. Il gas viene fatto espandere reversibilmente finché la sua pressione diventa uguale a p_0 e al termine del processo si

osserva che sono presenti $160\,gm$ di ghiaccio. Calcolare la pressione iniziale del gas e la variazione di entropia dell'universo. (Entalpia di fusione del ghiaccio $\Delta H = 334\,kJ/kg$).

Durante l'espansione, isoterma reversibile, il gas ha assorbito dal bagno una quantità di calore pati a

$$Q = m\Delta H = 3340\,J,$$

dove $m = 10\,gm$ è la differenza tra le masse del ghiaccio presente alla fine e quello iniziale.

D'altra parte nell'isoterma,

$$Q = \mathcal{L} = nRT_0 \ln \frac{V_0}{V} = nRT_0 \ln \frac{p}{p_0}, \qquad \ln \frac{p}{p_0} = \frac{3340}{nRT_0},$$

da cui:

$$p = p_0 \exp\left[\frac{3340}{nRT_0}\right] \approx 135\,atm\,.$$

La variazioni di entropia del bagno è

$$\Delta S_b = -\frac{Q}{T_0} = -\frac{3340}{273} = -12,2\,J/K.$$

Ma il processo è reversibile, dunque la variazione di entropia del gas è uguale ed opposta a quella del bagno. La variazione di entropia dell'universo è zero.

10. Un cilindro adiabatico munito di pistone perfettamente scorrevole, contiene $n = 5\,mol$ di gas ideale biatomico in equilibrio. Raddoppiando bruscamente la pressione esterna, il gas raggiunge lo stato di equilibrio finale. Sapendo che volume e temperatura iniziali sono V_1 e $T_1 = 300\,K$, calcolare le variazioni di entalpia e di entropia tra i due stati. Supporre che i gradi di libertà di vibrazione del gas non siano attivi.

Dalla prima legge della termodinamica, per $Q = 0$ si ha

$$\Delta U = -\mathcal{L}, \quad \Rightarrow \quad nC_V(T_2 - T_1) = 2p_1(V_1 - V_2).$$

Tenendo presente l'equazione di stato, si ricava

$$nC_V(T_2 - T_1) = 2p_1\left(\frac{nRT_1}{p_1} - \frac{nRT_2}{2p_1}\right).$$

Da cui

$$T_2 = \frac{2\gamma - 1}{\gamma} T_1 = 385,7\,K,$$

essendo, per un gas biatomico, $\gamma = 1,4$.

La variazione di entalpia risulta

$$\Delta H = \Delta U + \Delta(pV) = C_p(T_2 - T_1) = 12,46\,kJ.$$

La variazione di entropia:

$$\Delta S = nC_V \ln \frac{T_2}{T_1} + nR \ln \frac{V_2}{V_1} = nC_V \ln \frac{T_2}{T_1} + nR \ln \frac{T_2}{2T_1} = 7,8\,J/K,$$

dove si è tenuto conto dell'equazione di stato.

11. Due moli di gas ideale monoatomico vengono compresse isotermicamente e reversibilmente alla temperatura T_A fino a dimezzarne il volume. Una volta raggiunto lo stato finale il gas viene isolato dalla sorgente facendolo espandere liberamente, fino a ripristinare lo stato iniziale. Calcolare la variazione di entropia dell'universo.

Nello universo termodinamico, costituito dal gas e dalla sorgente, è presente una trasformazione irreversibile pertanto, per la legge di accrescimento dell'entropia si ha

$$\Delta S_u = \Delta S_{isot} + \Delta S_{irr} + \Delta S_{sorg} > 0.$$

Ma la variazione di entropia del gas nel ciclo è nulla:

$$\Delta S_{isot} + \Delta S_{irr} = 0, \qquad \Delta S_{irr} = -\Delta S_{isot}; \tag{1}$$

pertanto:

$$\Delta S_u = \Delta S_{sorg} > 0.$$

Per la seconda delle (1) la variazione di entropia della sorgente è uguale ed opposta a quella dell'isoterma; quindi

$$\Delta S_{sorg} = \Delta S_{irr} = -nR \ln \frac{V_B}{V_A} = 2R \ln 2 \approx 11,5\, J/K > 0,$$

in quanto $V_B < V_A$. Pertanto la variazione di entropia del sistema (universo) è uguale alla variazione di entropia della sorgente, che è anche la variazione di entropia dell'espansione libera.

12. Un cubetto di ghiaccio di massa $m = 15\, gm$ alla temperatura $\theta_0 = 0\,°C$, viene posto in un bicchiere d'acqua alla temperatura $\theta_1 = 27\,°C$, in equilibrio con l'ambiente esterno. Il sistema evolve fino a ritornare all'equilibrio iniziale. Calcolare la variazione di entropia del ghiaccio, dell'acqua, del bicchiere e dell'ambiente. (Calore di fusione del ghiaccio $\lambda = 80\, cal/gm$)

Assumendo costante il calore specifico del ghiaccio e pari a $1\, cal/(gm \cdot K)$, si ha

$$\Delta S_{gh} = \frac{m\lambda}{T_0} + mc \ln \frac{T_1}{T_0} = 5,8\, cal/K.$$

Le variazioni di entropia dell'acqua e del bicchiere sono nulle in quanto lo stato finale è uguale allo stato iniziale:

$$\Delta S_{acq} = 0, \qquad \Delta S_{bic} = 0.$$

La variazione di entropia dell'ambiente esterno, considerando quest'ultimo come una sorgente ideale, è data dal rapporto tra il calore Q fornito al sistema e la temperatura costante dell'ambiente:

$$\Delta S_{amb} = \frac{Q}{T_1} = -\frac{m\lambda + mc(T_1 - T_0)}{T_1} = -5,3\, cal/K,$$

La variazione di entropia dell'universo risulta

$$\Delta S_u = \Delta S_{gh} + \Delta S_{amb} = 0,5\, cal/K.$$

13. In un thermos contenente una massa $m_1 = 2\, kg$ di acqua alla temperatura $\theta_1 = 10\,°C$, viene aggiunta una massa d'acqua $m_2 = 4\, kg$ alla temperatura $\theta_2 = 25\,°C$. Calcolare la variazione di energia interna e la variazione di entropia del sistema (universo).

Il sistema è adiabatico e, contenendo acqua a pressione costante, non scambia lavoro con l'esterno; dunque si tratta di un sistema isolato. Si deduce che la variazione di energia interna è nulla, $\Delta U = 0$. Pertanto, detta ΔU_1 la variazione di energia interna della massa d'acqua m_1 e ΔU_2 quella della massa m_2, si ha

$$\Delta U = \Delta U_1 + \Delta U_2 = 0. \tag{1}$$

Supponendo costante il calore specifico dell'acqua nell'intervallo di temperature considerato e detta T_E la temperatura assoluta di equilibrio raggiunta dal sistema, la (1) si scrive:

$$cm_1(T_E - T_1) + cm_2(T_E - T_2) = 0, \quad \Rightarrow \quad T_E = \frac{m_1 T_1 + m_2 T_2}{m_1 + m_2} = 293\, K.$$

La variazione di entropia è pari alla somma delle variazioni di entropia delle masse d'acqua che passano dallo stato di equilibrio termico iniziale a quello finale a temperatura T_E.

Il processo è ovviamente irreversibile. Per il calcolo delle variazioni di entropia occorre considerare un processo reversibile che congiunga gli stati iniziali e finali delle masse d'acqua. Come è stato più volte sottolineato, tale processo consiste nel porre la massa m_1 a contatto con un insieme infinito di sorgenti a temperature crescenti, comprese tra T_1 e T_E, e attendendo, ogni volta, l'equilibrio termico dell'acqua che scambia la quantità di calore δQ alla temperatura T di ogni sorgente con cui è stata posta in contatto. Lo stesso processo va effettuato per la massa m_2 che stavolta viene raffreddata, mettendola in contatto con l'insieme infinito di sorgenti a temperature decrescenti, comprese tra T_2 a T_E. Poiché la variazione infinitesima di entropia in ognuno di tali processi è $dS = \delta Q/T$, la variazione totale risulta:

$$\Delta S = \int_{T_1}^{T_E} \frac{\delta Q}{T} + \int_{T_2}^{T_E} \frac{\delta Q}{T} = m_1 c \int_{T_1}^{T_E} \frac{dT}{T} + m_2 c \int_{T_2}^{T_E} \frac{dT}{T}, \tag{2}$$

ed essendo $c = 1\,cal/(gm \cdot K)$, si ha

$$\Delta S = m_1 \ln \frac{T_E}{T_1} + m_2 \ln \frac{T_E}{T_2} = 1,77\,cal/K.$$

Va notato che, sebbene il secondo termine sia negativo, ossia indichi una diminuzione di entropia, il termine che prevale è il primo; quindi si ha un aumento di entropia, come dev'essere in ogni processo irreversibile. La (2), essendo il sistema isolato, è anche la variazione di entropia dell'universo.

14. Un sistema termodinamico isolato è costituito da $n = 5\,mol$ di gas ideale biatomico in contatto con una sorgente termica (termostato) a temperatura $\theta = 20\,°C$. Inizialmente il gas è alla pressione p_0 e successivamente viene fatto espandere fino a raggiungere la pressione $p_1 = p_0/10$. Sapendo che nell'espansione la sorgente ha ceduto la quantità di calore $Q = 6\,kcal$, si determini la variazione di entropia del gas e si stabilisca se la trasformazione è reversibile o meno.

L'espansione del gas avviene a temperatura costante, quindi detto V_0 il volume iniziale, la sua variazione di entropia risulta:

$$\Delta S_{gas} = nR \ln \frac{V_1}{V_0} = nR \ln \frac{p_0}{p_1} = 95,7\,J/K.$$

La variazione di entropia della sorgente è

$$\Delta S_{sorg} = -\frac{Q}{T} = -85,7\,J/K.$$

La variazione di entropia del sistema:

$$\Delta S = \Delta S_{gas} + \Delta S_{sorg} = 10\,J/K.$$

Il processo è irreversibile.

15. Un cilindro rigido e adiabatico è diviso in due parti da un setto di superficie $S = 40\,cm^2$, anch'esso adiabatico, che può scorrere al suo interno. Una parte, di volume $V_1 = 6\,\ell$, contiene $2\,mol$ di gas ideale biatomico; l'altra parte, di volume $V_2 = 3\,\ell$ contiene $1,3\,mol$ dello stesso gas. Inizialmente la pressione nelle due parti è $p = 10\,atm$ ed il sistema si trova in equilibrio meccanico col setto in una certa posizione. Bloccato il setto in tale posizione e facendo venir meno la sua adiabaticità, si calcoli la forza che agisce su di esso e la variazione di entropia del sistema.

Le temperature iniziali dei gas vanno determinate mediante l'equazione di stato:

$$T_1 = \frac{pV_1}{n_1 R} = 365\,K, \qquad T_2 = \frac{pV_2}{n_2 R} = 281\,K.$$

Una volta che il setto diventa diatermico, calore fluisce da una parte all'altra e viene raggiunta la temperatura finale T_f. Tenuto conto che l'energia interna dell'intero sistema è costante, nel processo la sua variazione è nulla:

$$\Delta U = \Delta U_1 + \Delta U_2 = 0.$$

Essendo,

$$\Delta U_1 = n_1 C_V \Delta T_1, \qquad \Delta U_2 = n_2 C_V \Delta T_2$$

si ha

$$\Delta U = n_1 C_V (T_f - T_1) + n_2 C_V (T_f - T_2) = 0.$$

Da cui:

$$T_f = \frac{n_1 C_V T_1 + n_2 C_V T_2}{n_1 C_V + n_2 C_V} = 332\, K.$$

La forza che agisce sul setto risulta

$$F = S(p_2 - p_1) = SRT_f \left(\frac{n_2}{V_2} - \frac{n_1}{V_1} \right) = 1103,5\, N.$$

La variazione di entropia del sistema:

$$\Delta S = \Delta S_1 + \Delta S_2 = n_1 C_V \ln \frac{T_f}{T_1} + n_2 C_V \ln \frac{T_f}{T_2} = 0,56\, J/K.$$

16. Un litro d'acqua a pressione atmosferica ed alla temperatura $T_0 = 300\, K$, posto in un recipiente adiabatico, viene scaldato mediante un mulinello che compie $1000\, giri/min$, azionato da un motore che, a regime, esercita un momento $M = 10\, N\, m$. Calcolare la variazione di entropia dell'acqua dopo $1\, min$ di funzionamento del mulinello. ($c_p = c = 1\, cal/gm\, K$)

È il caso del lavoro esterno adiabatico ($Q = 0$) fatto su un sistema, pertanto

$$\Delta U = -\mathcal{L}, \qquad \mathcal{L}_{est} = mc_p \Delta T.$$

Da cui:

$$\Delta T = \frac{\mathcal{L}_{est}}{mc_p} = \frac{M\varphi}{mc_p} = \frac{M\, 10^3\, 2\pi}{10^3\, 4,18} = 15\, K.$$

La variazione di entropia risulta:

$$\Delta S = mc_p \ln \frac{T_f}{T_0} = 49\, cal/K.$$

17. Un recipiente adiabatico contiene una mole di gas ideale monoatomico che, da uno stato A di equilibrio viene improvvisamente fatto espandere, raggiungendo uno stato finale B, anch'esso di equilibrio. Calcolare la variazione di entropia sapendo che nello stato A la pressione è $p_A = 4p_B$.

La variazione di entropia è data da

$$\Delta S = C_p \ln \frac{T_B}{T_A} - R \ln \frac{p_B}{p_A}. \tag{1}$$

Ma,

$$\mathcal{L} = p_B (V_B - V_A) = -C_V (T_B - T_A).$$

Usando l'equazione di stato:

$$Rp_B\left(\frac{T_B}{p_B}-\frac{T_A}{4p_B}\right)=-C_V(T_B-T_A).$$

Si trae:

$$\frac{T_B}{T_A}=\frac{R/4+C_V}{R+C_V}=\frac{7}{10},$$

Quindi la (1) fornisce

$$\Delta S=\frac{5}{2}R\ln\frac{7}{10}-R\ln\frac{1}{4}=4,12\,J/K.$$

18. Due moli di gas ideale monoatomico sono contenute in un recipiente alla temperatura $T_A=300\,K$. Al fine di dimezzare pressione e volume iniziali p_A, V_A, il gas viene sottoposto a due trasformazioni consecutive: una compressione isoterma reversibile AB, che dimezza il volume; una isocora irreversibile BC, realizzata ponendo il gas a contatto con una sorgente a temperatura T_C, che ne dimezza la pressione. Calcolare le quantità di calore scambiate con le sorgenti e la variazione di entropia dell'universo (gas e sorgenti).

Nell'isoterma AB, $\Delta U=0$, è

$$Q_{AB}=nRT_A\ln\frac{V_B}{V_A}=-2RT_A\ln 2=-3456\,J, \tag{1}$$

calore viene ceduto.

Nell'socora irreversibile BC, $\mathcal{L}=0$,

$$Q_{BC}=nC_V(T_C-T_A)=-\frac{9}{4}RT_A=5609\,J, \tag{2}$$

essendo $T_C=T_A/4$. Calore viene ceduto.
Variazione di entropia dell'universo:

$$\begin{aligned}\Delta S_u&=\Delta S_{gas}+\Delta S_{T_A}+\Delta S_{T_C}=\\&=nC_V\ln\frac{T_C}{T_A}+nR\ln\frac{V_C}{V_A}+\frac{Q_{AB}}{T_A}+\frac{Q_{BC}}{T_C}=9R-6R\ln 2=40,23\,J/K,\end{aligned}$$

dove si è tenuto conto delle (1) e (2) e si è assunto il segno positivo per il calore assorbito dalle sorgenti.

19. Un corpo di capacità termica $C=15\,cal/K$, costante nell'intervallo di temperature considerato, si trova alla temperatura $\theta_0=0\,^\circ C$. Esso viene riscaldato fino alla temperatura $\theta_1=200\,^\circ C$ in due modi diversi.
Ponendolo a contatto con una sorgente a temperatura θ_1.
Ponendolo a contatto con una sorgente a temperatura $\theta_2=150\,^\circ C$ e, dopo aver raggiunto l'equilibrio, con la sorgente a temperatuta θ_1.

Calcolare la variazione di entropia del corpo e del sistema corpo e sorgenti nei due casi.

L'entropia è una grandezza estensiva quindi, detta ΔS_C la variazione di entropia del corpo, in entrabi i casi risulta:

$$\Delta S_C=C\ln\frac{T_1}{T_0}=8,24\,cal/K.$$

Nel primo caso la variazione di entropia della sorgente è

$$\Delta S_{T_1}=-\frac{C(T_1-T_0)}{T_1}=-6,3\,cal/K,$$

e la variazione di entropia corpo e sorgente (universo):

$$\Delta S_u = \Delta S_C + \Delta D_{T_1} = 1,95\, cal/K.$$

Nel secondo caso la variazione di entropia delle sorgenti è

$$\Delta S_{T_1} + \Delta S_{T_2} = -\frac{C(T_1 - T_2)}{T_1} - \frac{C(T_1 - T_2)}{T_2} = -6,9\, cal/K,$$

e la variazione di entropia corpo e sorgenti:

$$\Delta S_u = \Delta S_C + \Delta S_{T_1} + \Delta S_{T_2} = 1,4\, cal/K.$$

20. Un recipiente cilindrico adiabatico è diviso in due parti A e B da un pistone di massa trascurabile, perfettamente scorrevole, anch'esso adiabatico. In A sono contenute $10\, mol$ di gas ideale biatomico alla temperatura $T_A = 600\, K$; in B sono contenute $5\, mol$ dello stesso tipo di gas a temperatura $T_B = 300\, K$. Inizialmente i gas sono in equilibrio ed alla stessa pressione, occupando un volume complessivo $V_0 = 0,12\, m^3$. Successivamente nel pistone si verifica una perdita di isolamento e calore inizia a fluire da A verso B, finché non viene raggiunto l'equilibrio finale. Calcolare la variazione di entropia del sistema.

Il problema è simile a molti altri in cui si verificano processi irreversibili.
Nel sistema isolato l'energia intena totale è costante, quindi

$$\Delta U = \Delta U_A + \Delta U_B = 0,$$

da cui,

$$n_A C_V (T_f - T_A) + n_B C_V (T_F - T_B) = 0, \quad \Rightarrow \quad T_f = 500\, K.$$

Poiché i gas inizialmente hanno la stessa pressione, si ha

$$\frac{V_A}{V_B} = \frac{n_A T_A}{n_B T_B} = 4, \qquad V_A + V_B = 120\, \ell \quad \Rightarrow \quad V_A = 96\, \ell, \quad V_B = 24\, \ell.$$

All'equilibrio finale (stesse pressioni e temperature):

$$\frac{V_A^f}{V_B^f} = \frac{n_A}{n_B} = 2, \qquad V_A^f + V_B^f = 120\, \ell \quad \Rightarrow \quad V_A^f = 80\, \ell \quad V_B^f = 40\, \ell.$$

La variazione di entropia del sistema (universo) risulta:

$$\Delta S = n_A C_V \ln \frac{T_f}{T_A} + n_A R \ln \frac{V_A^f}{V_A} + n_B C_V \ln \frac{T_f}{T_B} + n_B R \ln \frac{V_B^f}{V_B} = 27,84\, J/K.$$

21. Una mole di gas ideale monoatomico alla temperatura $T_A = 300\, K$, compie un ciclo $ABCA$ nel quale: AB è una espansione libera; BC una compressione adiabatica irreversibile; CA una isobara reversibile che riporta il gas nello stato iniziale. Sapendo che nella compressione adiabatica viene impiegato il lavoro $\mathcal{L} = 200\, J$, calcolare la variazione di entropia del sistema (universo).

Si osserva che nell'espansione libera del gas ideale la temperatura rimane costante, dunque $T_A = T_B$. Inoltre nella compressione BC si ha

$$n C_V (T_C - T_B) - \mathcal{L} = 0, \quad \Rightarrow \quad T_C = T_B + \frac{\mathcal{L}}{n C_V} = T_A + \frac{2}{3}\frac{\mathcal{L}}{R} = 316\, K.$$

La variazione di entropia dell'universo è data da

$$\Delta S_u = \Delta S_{gas} + \Delta S_{ext}.$$

La variazione di entropia del gas è nulla perché compie un ciclo. ΔS_{ext} è pari alla somma delle variazioni di entropia dell'ambiente esterno, che si riducono solo a quella relativa alla compressione isobara CA:

$$-\Delta S_{CA} = -\int_{T_C}^{T_A} nC_p \frac{dT}{T} = C_p \ln \frac{T_C}{T_A}.$$

Infatti nella compressione BC viene esercitato sul gas lavoro adiabatico esterno.

Dunque la variazione di entropia dell'universo risulta

$$\Delta S_u = C_p \ln \frac{T_C}{T_A} = 0,26\, cal/K.$$

22. Una mole di gas ideale monoatomico compie una trasformazione reversibile la cui equazione nel piano di Gibbs (T, S) è

$$T = T_0 + a(S - S_0) - b(S - S_0)^2,$$

con $a = 5\, K^2\, mol/J$, $b = 0,8\, K^3\, mol^2/J^2$. Sapendo che la temperatura finale coincide con quella iniziale $T_0 = 300\, K$, calcolare la quantità di calore ed il lavoro associati alla trasformazione.

Nel diagramma T, S la trasformazione è rappresentata da un'arco di parabola ad asse verticale e concavità volta in basso quindi, per un certo valore dell'entropia $S_1 \neq S_0$, si avrà un altro valore della temperatura pari a T_0. Segue che fra questi due estremi,

$$\Delta U = 0, \qquad Q = \mathcal{L}.$$

Il calore associato alla trasformazione è

$$\begin{aligned} Q = \int_{S_0}^{S_1} T dS &= \int_{S_0}^{S_1} \left[T_0 + a(S - S_0) - b(S - S_0)^2\right] dS \\ &= T_0(S_1 - S_0) + \frac{1}{2}a(S_1 - S_0)^2 - \frac{1}{3}b(S_1 - S_0)^3. \end{aligned}$$

Dall'equazione della trasformazione, per $T = T_0$ si ha

$$S_1 - S_0 = \frac{a}{b} = 6,25\, J/(K \cdot mol).$$

Sostituendo nella precedente:

$$Q = \mathcal{L} = 1,9\, kJ.$$

23. In un recipiente adiabatico contenente una massa $m_1 = 56\, gm$ di acqua, alla temperatura $\theta_1 = 23\,°C$, viene introdotto un pezzo di ghiaccio di massa $m_2 = 12\, gm$ alla temperatura $\theta_2 = -15\,°C$ e si attende l'equilibrio, in cui il ghiaccio si è completamente sciolto. Calcolare la variazione di entropia del sistema; (calore specifico del ghiaccio $c_2 = 1900\, J/kg \cdot K$, entalpia di fusione (calore latente) $\lambda_f = 333\, kJ/kg$).

Come in tutti gli altri problemi di questo tipo, la variazione di entropia totale consta di vari termini; in questo caso concernenti: l'aumento di temperatura del ghiaccio fino alla temperatura di fusione, la fusione del ghiaccio e l'acqua che, insieme a quella di fusione, passa alla temperatura di equilibrio finale T_E. Per ricavare quest'ultima, come al solito, si ossserva che l'entalpia totale del sistema è costante e la sua variazione è pari a zero:

$$m_2 c_2 (T_0 - T_2) + m_2 \lambda_f + m_2 c (T_E - T_0) + m_1 c (T_E - T_1) = 0, \tag{1}$$

dove $T_0 = 273,15\,K$, T_E è la temperatura finale d'equilibrio, $c = 1\,cal/gm \cdot K$ il calore specifico dell'acqua. Dalla (1) si ricava

$$T_E = \frac{m_2 c T_0 + m_1 c T_1 - m_2 c_2 (T_0 - T_2) - m_2 \lambda_f}{(m_1 + m_2)c} = 276,68\,K.$$

La variazione di entropia del sistema risulta:

$$\Delta S = \Delta S_{gh} + \Delta S_{fus} + \Delta S_{acq} =$$
$$m_2 c_2 \ln \frac{T_0}{T_2} + \frac{m_2 \lambda_f}{T_0} + m_1 c \ln \frac{T_E}{T_1} + m_2 c \ln \frac{T_E}{T_0} = 0,79\,J/K.$$

24. Un recipiente cilindrico isolato, di volume $V_0 = 40\,\ell$ è diviso in due parti uguali da una parete di sezione $S = 100\,cm^2$ e volume trascurabile, perfettamente scorrevole. In una delle due parti è contenuta una mole di gas ideale monoatomico, mentre l'altra parte è vuota. La parete mobile è mantenuta in equilibrio da una molla di costante elastica $k = 10^4\,N/m$, compressa di $\Delta l = 0,1\,m$. Praticando un piccolo foro nella parete, il gas diffonde nella parte vuota. Calcolare la variazione di energia interna e di entropia del gas. Trascurare la capacità termica del sistema.

La pressione ed il volume dello stato iniziale sono:

$$p_1 = \frac{k\Delta l}{S} = 10^5\,Pa; \qquad T_1 = \frac{p_1 V_1}{nR} = 240,6\,K; \qquad (V_1 = V_0/2).$$

L'energia interna del sistema è costante,

$$\Delta U = \Delta U_{gas} + \Delta U_{molla} = 0,$$

ed essendo:

$$\Delta U_{molla} = 0 - \frac{1}{2}k(\Delta l)^2 = -\frac{1}{2}k(\Delta l)^2$$

(l'energia finale della molla è nulla, $\Delta l = 0$), si ha

$$\Delta U_{gas} = nC_V(T_2 - T_1) = \frac{1}{2}k(\Delta l)^2 = 50\,J.$$

Si ottiene:

$$T_2 = T_1 + \frac{\Delta U_{gas}}{nC_V} = 244,6\,K; \qquad p_2 = \frac{nRT_2}{V_2} = \frac{nRT_2}{V_0} = 0,51\,Pa.$$

La variazione di entropia risulta:

$$\Delta S = nC_V \ln \frac{T_2}{T_1} + nR \ln \frac{V_0}{V_0/2} = 5,94\,J/K.$$

25. Due moli di gas ideale biatomico sono contenute in recipiente alla temperatura $T_A = 300\,K$. Al fine di dimezzare volume e pressione iniziali, il gas viene sottoposto a due trasformazioni reversibili consecutive: compressione adiabatica AB che ne dimezza il volume; isocora BC che dimezza la pressione. Calcolare il lavoro di compressione e le variazioni di entropia del gas e delle sorgenti (ritenere congelata la vibrazione). Il lavoro di compressione è pari all'aumento di energia interna del gas,

$$\mathcal{L}_{AB} = \Delta U = nC_V(T_B - T_A) = 5RT_A\left(\frac{T_B}{T_A} - 1\right).$$

Usando l'equazione del'adiabatica reversibile

$$T_A V_A^{\gamma-1} = T_B V_B^{\gamma-1},$$

si ha:

$$\mathcal{L} = 5RT_A \left[\left(\frac{V_A}{V_B} \right)^{\gamma-1} - 1 \right] = 5RT_A \left(2^{\gamma-1} - 1 \right) = 3982,7\, J.$$

Tenuto conto che, per l'equazione di stato, si ricava $T_C = T_A/4$, la variazione di entropia del gas è

$$\Delta S_{gas} = nC_V \ln \frac{T_C}{T_A} + nR \ln \frac{V_C}{V_A} = -69,1\, J/K.$$

Poiché il processo è reversibile, la variazione di entropia delle sorgenti risulta:

$$\Delta S_{sorg} = -\Delta S_{gas}.$$

26. Una macchina termica funziona tra due sorgenti alle temperature $\theta_1 = 400\,°C$ e $\theta_2 = 900\,°C$, fornendo una potenza $W = 20\,Mwatt$, con rendimento pari al 50% di una macchina di Carnot che funziona tra le stesse sorgenti. Calcolare i calori scambiati e la variazione di entropia dell'universo in ogni ora di funzionamento, supponendo che la macchina compia un numero intero di cicli.

Il rendimento della macchina è

$$\eta = 0,5 \left(1 - \frac{T_1}{T_2} \right) = 0,21;$$

il lavoro erogato in un'ora:

$$\mathcal{L} = 3,6 \cdot 10^3 \cdot 2 \cdot 10^7 = 7,2 \cdot 10^{10}\, J.$$

Le quantità di calore scambiate:

$$Q_2 = \frac{\mathcal{L}}{\eta} = 3,42 \cdot 10^{11}\, J; \qquad Q_1 = Q_2 - \mathcal{L} = 2,7 \cdot 10^{11}\, J.$$

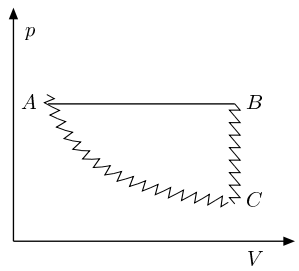
La variazione di entropia dell'universo è uguale a quella delle sorgenti, in quanto la variazione di entropia della macchina, lavorando ciclicamente, è nulla;

$$\Delta S_u = \frac{Q_1}{T_1} - \frac{Q_2}{T_2} = 1,8 \cdot 10^8\, J/K.$$

27. Una mole di gas ideale monoatomico esegue una trasformazione isobara tra gli stati A e B, compiendo il lavoro $\mathcal{L} = 10^3\, J$. Il gas può raggiungere lo stato finale B attraverso un processo irreversibile costituito da due trasformazioni:

una trasformazione AC in cui il gas è posto a contatto con una sorgente a temperatura T_A, fino ad assumere il volume V_B; una compressione isocora CB, fino ad assumere la temperatura T_B.

Calcolare il calore scambiato nella trasformazione isobara ed il lavoro massimo ottenibile nel processo irreversibile ($T_A = 300\,K$).



La quantità di calore scambiata nella trasformazione isobara è pari alla variazione di entalpia del gas,

$$Q = \Delta H = C_p(T_B - T_A) = \Delta U + \mathcal{L}, \tag{1}$$

indipendente dal tipo di trasformazione. Infatti l'energia interna è una funzione di stato ed il lavoro è pari a

$$\mathcal{L} = p(V_B - V_A) = R(T_B - T_A), \tag{2}$$

anch'esso indipendente dal tipo di trasformazione. Dalla (2) si ricava

$$T_B - T_A = \frac{\mathcal{L}}{R}, \quad \Rightarrow \quad T_B = T_A + \frac{\mathcal{L}}{R} = 420,28\,K. \tag{3}$$

Sostituendo nella (1) si ottiene

$$Q = \Delta H = C_p \frac{\mathcal{L}}{R} = 2500\,J.$$

Per determinare il lavoro ottenibile nel secondo processo si può applicare la legge di accrescimento dell'entropia,

$$\Delta S_{sorg} + \Delta S_{gas} \geq 0.$$

Assumendo il segno di uguaglianza (lavoro massimo), si ha:

$$-\frac{\mathcal{L}_{max}}{T_A} - C_V \ln \frac{T_B}{T_A} + C_p \ln \frac{T_B}{T_A} = 0,$$

dove i primi due termini rappresentano la variazione di entropia delle sorgenti, il terzo la variazione di entropia del gas con T_B è dato dalla seconda delle (3). Si ottiene:

$$\mathcal{L}max = T_A \left(C_p \ln \frac{T_B}{T_A} - C_V \ln \frac{T_B}{T_A} \right) = 840,5\,J. \tag{4}$$

Poiché le trasformazioni AC e BC sono irreversibili, il lavoro ottenibile è sicuramente minore. Si noti che nella situazione prospettata dal problema non è necessario ricorrere alla legge di accrescimento dell'entropia; infatti la (4), essendo $p_A = p_B$ è proprio uguale a lavoro dell'isoterma reversibile AC.

28. Un cubetto di ghiaccio di massa m_0 alla temperatura $\theta_0 = 0\,°C$ viene immerso in una massa d'acqua $m_1 = 0,1\,kg$, alla temperatura $\theta_1 = 27\,°C$, posta in un thermos, di capacità termica trascurabile. Determinare la massima quantità di ghiaccio che può essere sciolta e la variazione di entropia del siatema; (calore di fusione del ghiaccio $\lambda_f = 80\,cal/gm$,).

L'entalpia del sistema è costante, dunque

$$\Delta H = \Delta H_{gh} + \Delta H_{acq} = 0,$$

ossia, indicando con θ_E la temperatura di equilibrio e ponendo per l'acqua $c_p = 1\, cal/gm{\cdot}K$,

$$m_0\lambda_f + m_0 c_{gh}(\theta_E - \theta_0) + m_1 c_p(\theta_E - \theta_1) = 0.$$

La massima quantità di ghiaccio che può essere sciolta si ha quando la temperatura del sistema diventa $\theta_E = \theta_0 = 0\,°C$. Pertanto, dalla relazione precedente si ha:

$$m_0 = \frac{m_1 c_p(\theta_1 - \theta_E)}{\lambda_f} = 34\, gm.$$

Si osservi calore che il specifico del ghiaccio a $0°C$, pari a $c_{gh} = 0,48\, cal/gm \cdot K$, non interviene in quanto la temperatura di equilibrio è $0°C$. La variazione di entropia del sistema risulta:

$$\Delta S = \Delta S_{gh} + \Delta S_{acq} = \frac{m_0\lambda_f}{T_0} + m_1 c_p \ln\frac{T_1}{T_0} = 80,2\, J/K.$$

Si noti che la temperatura dell'acqua di fusione del ghiaccio resta a $0°\, C$, quindi non muta il suo stato.

29. Un corpo di capacità termica $C = 2\, kcal/K$, costante nell'intervallo di temperature considerato, è in equilibrio termico con una sorgente a temperatura $T_1 = 1000\, K$. Esso viene posto direttamente in contatto con una sorgente a temperatura $T_2 = 500\, K$ quindi, raggiunto il nuovo equilibrio, viene riportato in contatto con la sorgente a temperatura T_1. Calcolare la variazione di entropia del sistema corpo sorgenti (universo).

Il corpo non scambia calore reversibilmente, quindi il processo è irreversibile. La variazione di entropia del corpo è nulla perché ritorna nelle condizioni iniziali. Dunque la variazione di entropia dell'universo è pari a quella delle sorgenti:

$$\Delta S_1 = -\frac{C(T_1 - T_2)}{T_1} = -1\, kcal/K, \qquad \Delta S_2 = \frac{C(T_1 - T_2)}{T_2} = 2\, kcal/K.$$

Quindi,

$$\Delta S_u = \Delta S_1 + \Delta S_2 = \frac{C(T_1 - T_2)^2}{T_1 T_2} = 1\, kcal/K.$$

PROBLEMI SULLE MACCHINE TERMICHE
A cura del Prof. T.Papa

1. Il funzionamento di una macchina a vapore può essere approssimato a quello di una macchina di Carnot, che assorbe calore alla temperatura θ_2 della caldaia e cede calore alla temperatura θ_1 del condensatore. La quantità d'acqua per unità di tempo, prodotta nel condensatore è $dm/dt = 2\,kg/min$. Determinare la potenza della macchina sapendo che $\theta_2 = 200\,°C$, $\theta_1 = 30\,°C$ e che la variazione d'entalpia di evaporazione dell'acqua nel condensatore è $\Delta H = 43,8\,kJ/mol$.

Per un ciclo di Carnot:

$$\frac{Q_2}{T_2} = \frac{Q_1}{T_1}; \quad \Rightarrow \quad Q_2 = Q_1 \frac{T_2}{T_1}.$$

La potenza erogata risulta,

$$W = \frac{\mathcal{L}}{\Delta t} = \frac{Q_2 - Q_1}{\Delta t} = \frac{Q_1}{\Delta t}\left(\frac{T_2}{T_1} - 1\right).$$

Essendo

$$\frac{Q_1}{\Delta t} = \frac{dm}{dt}\Delta H,$$

si ottiene:

$$W = \frac{dm}{dt}\Delta H\left(\frac{T_2}{T_1} - 1\right) = 45,5\,kW.$$

Si faccia attenzione alle unità di misura (peso molecolare dell'acqua: 18).

2. Un gas ideale biatomico esegue un ciclo costituito da una isobara AB che ne raddoppia il volume, una politropica BC di equazione $pV^2 = cost$ e da una isoterma CA. Calcolare il rendimento del ciclo.

Dall'equazione di stato e dall'equazione della politropica si trae:

$$T_B = 2T_A, \qquad T_C = T_A, \qquad T_B V_B = T_C V_C, \qquad V_C = 4V_A.$$

Le quantità di calore coinvolte nel ciclo sono:

$$\begin{aligned} Q_{AB} &= nC_p(T_B - T_A) = nC_pT_A > 0 \\ Q_{BC} &= nC_\delta(T_C - T_B) = -nC_\delta T_A < 0 \\ Q_{CA} &= nRT_A \ln\frac{V_A}{V_C} = -nRT_A \ln 4 < 0, \end{aligned}$$

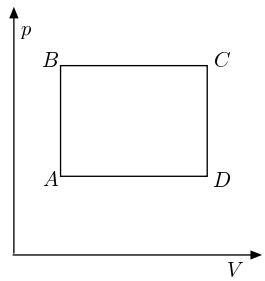
con

$$C_\delta = C_V + \frac{R}{1-\delta} = \frac{3}{2}R.$$

Il rendimento risulta:

$$\eta = 1 - \frac{Q_{BC} + Q_{CA}}{Q_{AB}} = 1 - \frac{C_\delta + \ln 4}{C_p} \approx 18\%.$$

3. Una mole di gas ideale biatomico compie un ciclo costituito dalle seguenti trasformazioni reversibili: isocora AB, isobara BC, isocora CD ed una isobara DA che chiude il ciclo. Calcolare il rendimento del ciclo conoscendo la variazione di energia interna $\Delta U_{AB} = 4\,kJ$, la variazione di entalpia $\Delta H_{BC} = 14\,kJ$ e la temperatura $T_B = 700\,K$. Si supponga che la vibrazione molecolare non sia attiva.



Il rendimento è dato da

$$\eta = \frac{\mathcal{L}}{Q_a}, \qquad \eta = 1 - \frac{Q_c}{Q_a}, \tag{1}$$

dove Q_a è il calore assorbito e Q_c quello ceduto. Nel ciclo in esame:

$$Q_a = Q_{AB} + Q_{BC}, \qquad Q_c = Q_{CD} + Q_{DA},$$

dove:

$$\begin{aligned} Q_{AB} &= \Delta U_{AB} = C_V(T_B - T_A) \qquad & Q_{CD} &= \Delta U_{CD} = C_V(T_C - T_D) \\ Q_{BC} &= \Delta H_{BC} = C_p(T_C - T_B) \qquad & Q_{DA} &= \Delta H_{DA} = C_p(T_D - T_A). \end{aligned} \tag{2}$$

Per calcolare il rendimento si può usare la prima delle (1). In tal caso,

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= (p_B - p_A)(V_C - V_B) = \left(p_B - p_B\frac{T_A}{T_B}\right)\left(V_B\frac{T_C}{T_B} - V_B\right) \\ &= p_B V_B\left(1 - \frac{T_A}{T_B}\right)\left(\frac{T_C}{T_B} - 1\right) = \frac{p_B V_B}{T_B^2}(T_B - T_A)(T_C - T_B) \\ &= \frac{R}{T_B}(T_B - T_A)(T_C - T_B). \end{aligned}$$

Ma,

$$(T_B - T_A) = \frac{\Delta U_{AB}}{C_V}; \qquad (T_C - T_B) = \frac{\Delta H_{BC}}{C_p},$$

pertanto:

$$\mathcal{L} = \frac{R}{T_B}\frac{\Delta H_{BC}}{C_p}\frac{\Delta U_{AB}}{C_V}.$$

Tenendo conto delle (2), il rendimento formulato con la prima delle (1) risulta:

$$\eta = \frac{R}{T_B}\frac{\Delta H_{BC}\Delta U_{AB}}{C_V C_p(\Delta U_{AB} + \Delta H_{BC})} = 6\%$$

Ovviamente si ottiene lo stesso risultato dalla seconda delle (1) che si scrive.

$$\eta = 1 - \frac{\Delta U_{CD} + \Delta H_{DA}}{\Delta U_{AB} + \Delta H_{BC}}. \tag{3}$$

Osservando che dall'equazione di stato si ha

$$\frac{T_A}{T_B} = \frac{T_D}{T_C},$$

si riconosce che

$$\begin{aligned} \Delta U_{CD} &= C_V(T_C - T_D) = C_V T_C\left(1 - \frac{T_D}{T_C}\right) = C_V T_C\left(1 - \frac{T_A}{T_B}\right) \\ &= C_V\frac{T_C}{T_B}(T_B - T_A) = \frac{T_C}{T_B}\Delta U_{AB}. \end{aligned}$$

Analogamente:

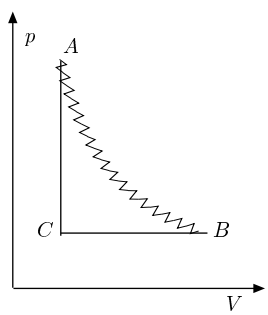
$$\Delta H_{DA} = \frac{T_D}{T_C}\Delta H_{BC} = \frac{T_A}{T_B}\Delta H_{BC}.$$

La (3) diventa

$$\begin{aligned}
\eta &= \frac{\Delta U_{AB} + \Delta H_{BC} - \Delta U_{AB} T_C/T_B - \Delta H_{BC} T_A/T_B}{\Delta U_{AB} + \Delta H_{BC}} \\
&= \frac{(1 - T_C/T_B)\Delta U_{AB} + (1 - T_A/T_B)\Delta H_{BC}}{\Delta U_{AB} + \Delta H_{BC}} \\
&= \frac{(T_B - T_C)\Delta U_{AB} + (T_B - T_A)\Delta H_{BC}}{T_B(\Delta U_{AB} + \Delta H_{BC})} \\
&= \frac{-\Delta H_{BC}\Delta U_{AB}/C_p + \Delta U_{AB}\Delta H_{BC}/C_V}{T_B(\Delta U_{AB} + \Delta H_{BC})} = \frac{R}{T_B}\frac{\Delta U_{AB}\Delta H_{BC}}{C_V C_p(\Delta U_{AB} + \Delta H_{BC})},
\end{aligned}$$

come prima.

4. Una mole di gas ideale monoatomico compie un ciclo ABC, in cui AB è una espansione adiabatica irreversibile, BC una isobara reversibile che riporta il gas al volume iniziale, CA una isocora reversibile che chiude il ciclo. Sapendo che $T_A = 2T_B$ e $\Delta S_{BC} + \Delta S_{CA} = -6\,J/K$, calcolarne il rendimento.



$$\eta = 1 - \frac{Q_{BC}}{Q_{CA}} = 1 - \frac{C_p(T_B - T_C)}{C_V(T_A - T_C)} = 1 - \gamma\frac{T_B/T_C - 1}{T_A/T_C - 1}. \tag{1}$$

Dall'equazione di stato si ha:

$$\frac{T_B}{T_C} = \frac{V_B}{V_C} = \frac{V_B}{V_A}, \quad \Rightarrow \quad T_C = T_B\frac{V_A}{V_B}.$$

La (1) diventa,

$$\eta = 1 - \gamma\frac{V_B/V_A - 1}{T_A V_B/T_B V_A - 1} = 1 - \gamma\frac{V_B/V_A - 1}{2V_B/V_A - 1}. \tag{2}$$

Per ricavare il rapporto V_B/V_A, si osservi che la variazione di entropia del ciclo è nulla

$$\Delta S_{AB} + \Delta S_{BC} + \Delta S_{CA} = 0, \quad \Rightarrow \quad \Delta S_{AB} - 6 = 0. \tag{3}$$

Poiché

$$\Delta S_{AB} = C_V \ln\frac{T_B}{T_A} + R\ln\frac{V_B}{V_A}, \qquad T_A = 2T_B,$$

sostituendo nella (3) si ha

$$C_V \ln\frac{1}{2} + R\ln\frac{V_B}{V_A} = 6.$$

Quindi, dividendo per C_V,

$$\ln\frac{1}{2} + \frac{R}{C_V}\ln\frac{V_B}{V_A} = \frac{6}{C_V}.$$

Essendo

$$\frac{R}{C_V} = \frac{C_p - C_V}{C_V} = \gamma - 1,$$

si ottiene

$$\ln\frac{1}{2} + \ln\left(\frac{V_B}{V_A}\right)^{\gamma-1} = \frac{6}{C_V}.$$

ovvero,

$$\ln\frac{1}{2}\left(\frac{V_B}{V_A}\right)^{\gamma-1} = \frac{6}{C_V}.$$

Si ottiene:

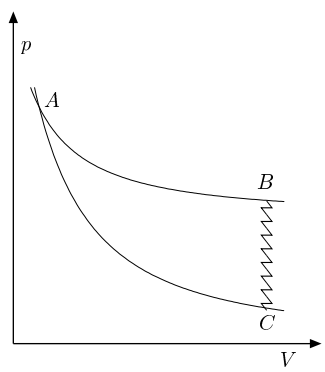
$$\frac{V_B}{V_A} = 2^{1/\gamma-1}e^{6/[C_V(\gamma-1)]} = 2^{3/2}e^{6/R} = 5,8.$$

Sostituendo nella (2) si ottiene:

$$\eta = 0,248.$$

Si rammenti che per il gas ideale monoatomico $\gamma = 1,66$.

5. Una mole di gas ideale monoatomico esegue un ciclo composto da una espansione isoterma reversibile AB che ne raddoppia il volume, da una trasformazione isocora irreversibile BC, realizzata ponendo il gas a contatto con una sorgente a temperatura T_C, e da una adiabatica reversibile CA che chiude il ciclo. Calcolare il rendimento e la variazione di entropia dell'universo.



Il rendimento è dato da

$$\eta = 1 - \frac{Q_{BC}}{Q_{AB}}, \tag{1}$$

dove le quantità di calore assorbito Q_{AB} e ceduto Q_{BC} sono,

$$Q_{AB} = nRT_A \ln\frac{V_B}{V_A}, \qquad Q_{BC} = nC_V(T_B - T_C). \tag{2}$$

Dall'equazione dell'adiabatica reversibile si ha

$$T_A V_A^{\gamma-1} = T_C V_C^{\gamma-1}, \quad \Rightarrow \quad T_C = T_A\left(\frac{V_A}{V_B}\right)^{\gamma-1}. \tag{3}$$

Sostituendo la (3) e la (2) nella (1) e ricordando che per il gas ideale monotamico $\gamma = 1,66$, si ottiene

$$\eta = 1 - \frac{3}{2}\,\frac{1-(V_A/V_B)^{\gamma-1}}{\ln V_B/V_A} = 0,2.$$

Per quanto riguarda la variazione di entropia dell'universo si osservi che se il ciclo fosse reversibile tale variazione sarebbe nulla. Poiché la trasformazione isocora è irreversibile si ha necessariamente una variazione di entropia delle sorgenti, in quanto la variazione di entropia dell'intero ciclo è nulla. Pertanto denotando con S^* l'entropia delle sorgenti, si ha

$$\Delta S_u = \Delta S^*_{AB} + \Delta S^*_{BC}.$$

Ma

$$\Delta S^*_{AB} = -R\ln\frac{V_B}{V_A} = -5,76\,J/K,$$

$$\Delta S^*_{BC} = C_V\frac{T_B - T_C}{T_C} = C_V\left[\left(\frac{V_B}{V_A}\right)^{\gamma-1} - 1\right] = 7,23\,J/K$$

tenuto conto, per la (3), che $T_A = T_B$. Pertanto

$$\Delta S_u = 1,47\, J/K.$$

6. Un gas ideale monoatomico compie un ciclo reversibile, costituito da una espansione isoterma AB, dove il gas raddoppia il volume, da una isocora BC e da una adiabatica CA. Calcolare il rendimento del ciclo.

Detta T la temperatura assoluta dell'isotema e T_C quella dello stato C, si ha

$$\eta = 1 - \frac{Q_{ced}}{Q_{ass}} = 1 - \frac{C_V(T - T_C)}{RT \ln V_B/V_A}. \tag{1}$$

Per ricavare T_C, si osservi che nel ciclo la variazione di entropia è nulla:

$$\Delta S = C_V \ln \frac{T_C}{T} + R \ln \frac{V_B}{V_A} = 0 \quad \Rightarrow \quad T_C = T\, 2^{-2/3}. \tag{2}$$

Lo stesso risultato si ottiene considerando gli stati A e C dell'adiabatica. Sostituendo la (2) nella (1), si ottiene:

$$\eta = 1 - \frac{C_V T(1 - 2^{-2/3})}{RT \ln 2} = 0,2.$$

7. Per mantenere un ambiente alla temperatura costante $\theta_A = 20\,°C$, quando la temperatura esterna è $\theta_E = -3\,°C$, occorre una quantità di calore per unità di tempo dQ/dt. Per ottenere lo scopo si può usare:

a) una stufa elettrica che trasforma direttamente in calore l'energia elettrica assorbita,

b) una pompa di calore ideale che, prelevando calore dall'esterno (a temperatura θ_E), ceda calore all'ambiente (a temperatura θ_A) assorbendo lavoro meccanico.

Supponendo che il lavoro meccanico sia fornito alla pompa di calore da un motore elettrico avente un rendimento $\eta_e = 0,9$, si determini il rapporto tra le potenze elettriche utilizzate nei due metodi. Il rendimento del motore elettrico, analogamente ad ogni altro rendimento, è definito come il rapporto tra la potenza meccanica erogata e la potenza elettrica assorbita.

Detta W_m la potenza meccanica erogata dal motore e W_e la potenza elettrica assorbita, si ha

$$\eta_e = \frac{W_m}{W_e}; \tag{1}$$

mentre il rendimento della pompa di calore ideale, supponendo che sia l'esterno che l'ambiente da riscaldare possano essere approssimati a sorgenti, è dato da

$$\eta = 1 - \frac{T_E}{T_A}. \tag{2}$$

Con la stufa si ottiene la conversione diretta di potenza elettrica in calore nell'unità di tempo, quindi detta W_e^s la potenza elettrica assorbita, si ha

$$\frac{dQ}{dt} = W_e^s,$$

mentre con la pompa di calore, detta W_e^p la potenza elettrica assorbita, si ha

$$\frac{dQ}{dt} = \frac{W_m}{\eta} = \frac{\eta_e}{\eta} W_e^p,$$

dove si è tenuto conto della (1). Pertanto:

$$\frac{W_e^s}{W_e^p} = \frac{\eta_e}{\eta} = \eta_e \frac{T_A}{T_A - T_E} = 11,46. \tag{3}$$

Ciò significa che la potenza elettrica impegnata dalla stufa risulta $11,46$ volte la potenza elettrica impegnata dalla pompa di calore.

Si noti che la (3) può essere scritta

$$\frac{W_e^s}{W_e^p} = \eta_e \left(1 + \frac{T_E}{T_A - T_E}\right),$$

dove:

$$e_m = \frac{T_E}{T_A - T_E}$$

è l'efficienza frigorifera massima della macchina di Carnot inversa. L'efficienza frigorifera in generale è data dal rapporto tra il calore prelevato dalla sorgente fredda ed il lavoro occorrente. L'efficienza frigorifera aumenta al diminuire del salto di temperatura $T_A - T_E$.

8. Due moli di gas ideale biatomico compiono un ciclo $ABCA$, dove AB è una espansione reversibile in cui il gas è in equilibrio termico con una sorgente costituita da ghiaccio in presenza della sua acqua di fusione, passando da un volume $V_A = 10\,\ell$ ad un volume $V_B = 15\,\ell$; BC una trasformazione adiabatica reversibile, con la quale il gas ritorna al suo volume iniziale; CA una trasformazione in cui il gas, posto nuovamente a contatto con la sorgente, ritorna rapidamente allo stato iniziale. Calcolare il lavoro del ciclo e la variazione di entropia del sistema (universo).

Nella trasformazione AB, isoterma, $T_A = T_B = 273\,K$. La temperatura in C, va ricavata ricorrendo all'equazione dell'adiabatica reversibile,

$$T_C V_C^{\gamma-1} = T_B V_B^{\gamma-1}, \quad \Rightarrow \quad T_C = T_A \left(\frac{V_B}{V_A}\right)^{\gamma-1} = 321\,K.$$

Il lavoro compiuto nel ciclo è

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_{AB} + \mathcal{L}_{BC} = nRT_A \ln\frac{V_B}{V_A} - nC_V(T_C - T_A) = -154,7\,J.$$

La variazione di entropia dell'universo dev'essere maggiore di zero in quanto il ciclo contiene una trasformazione irreversibile (isocora CA). Ma, la variazione di entropia del ciclo è nulla, pertanto la la variazione di entropia dell'universo è uguale alla variazione di entropia della sorgente. Questa cede calore lungo la trasformazione AB ed assorbe calore lungo CA; pertanto

$$\Delta S_u = \Delta S_{sorg} = -\frac{Q_{AB}}{T_A} + \frac{Q_{CA}}{T_A}.$$

Ossia

$$\Delta S_{sorg} = -nR\ln\frac{V_B}{V_A} + \frac{nC_V(T_C - T_A)}{T_A} = -6,76 + 7,30 = 0,56\,J/K.$$

9. Una mole di gas ideale monoatomico compie un ciclo $ABCD$ in cui AB è una isoterma reversibile a temperatura $T_2 = 350\,K$, BC una isocora irreversibile, CD una isoterma reversibile a temperatura $T_1 = 250\,K$, DA una adiabatica reversibile. calcolare il lavoro compiuto nel ciclo ed il calore scambiato nella trasformazione BC; ($V_B = 3V_A = 9\,\ell$).

Non è noto il volume V_D, ma usando l'equazione dell'adiabatica reversibile si ha

$$T_2^{1/(\gamma-1)} V_A = T_1^{1/(\gamma-1)} V_D, \quad \Rightarrow \quad V_D = \left(\frac{T_2}{T_1}\right)^{1/(\gamma-1)} V_A = 4,99\,\ell.$$

Il lavoro del ciclo è dato da

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_{AB} + \mathcal{L}_{CD} + \mathcal{L}_{DA}, \tag{1}$$

dove:

$$\mathcal{L}_{AB} = RT_2 \ln \frac{V_B}{V_A} = 3195\, J$$
$$\mathcal{L}_{CD} = RT_1 \ln \frac{V_D}{V_B} = -1225,2\, J$$
$$\mathcal{L}_{DA} = -C_V(T_2 - T_1) = -\frac{3}{2}R(T_2 - T_1) = -1246,5\, J.$$

Sostituendo nella (1) si ottiene

$$\mathcal{L} = 723,3\, J.$$

Poiché nel ciclo

$$\Delta U = 0, \quad \Rightarrow \quad Q_{ciclo} = Q_{AB} + Q_{BC} + Q_{CD} = \mathcal{L}, \tag{2}$$

ed essendo

$$Q_{AB} = \mathcal{L}_{AB}, \qquad Q_{CD} = \mathcal{L}_{CD},$$

sostituendo nella (2), si ricava:

$$Q_{BC} = \mathcal{L} - \mathcal{L}_{AB} - \mathcal{L}_{CD} = -1246,5\, J.$$

10. Un gas ideale compie un ciclo $ABCDA$, in cui: AB è una espansione ottenuta ponendo il gas a contatto con una sorgente a temperatura T_1 e dimezzando la pressione sterna; BC una trasformazione adiabatica reversibile che raffredda il gas dalla temperatuta T_1 alla temperatura T_2; CD una compressione ottenuta ponendo il gas a contatto con una sorgente a temperatura T_2 e raddoppiando la pressione esterna; DA una compressione adiabatica reversibile che riporta il gas nello stato iniziale. Determinare il rapporto tra il rendimento del ciclo e quello della macchina di Carnot che lavora tra le stesse sorgenti. ($T_1 = 900\, K,\ T_2 = 300\, K$)

Le trasformazioni AB e CD sono evidentemente irreversibili. Poiché per entrambe gli stati iniziali e finali sono alle stesse temperature, rispettivamente T_1 e T_2, si ha

$$V_B = 2V_A, \qquad V_C = 2V_D, \qquad \Delta U_{AB} = 0, \qquad \Delta U_{CD} = 0.$$

Inoltre:

$$Q_{AB} = \mathcal{L}_{AB} = p_B(V_B - V_A) = \frac{p_A V_A}{2} = \frac{nRT_1}{2} > 0$$
$$Q_{CD} = \mathcal{L}_{CD} = p_D(V_D - V_C) = -P_D V_D = -nRT_2 < 0.$$

Pertanto i rendimenti η del ciclo e η_C della macchina di Carnot risultano:

$$\eta = 1 - \frac{Q_{CD}}{Q_{AB}} = 1 - \frac{2T_2}{T_1} = \frac{1}{3}, \qquad \eta_C = 1 - \frac{T_2}{T_1} = \frac{2}{3}, \qquad \eta = \frac{\eta_C}{2}.$$

11. Una macchina frigorifera lavora scambiando calore con l'ambiente esterno a temperatura θ_0, da considerare come una sorgente ideale. Calcolare il lavoro minimo occorrente per solidificare una massa m di acqua inizialmente in equilibrio a temperatura ambiente. (calore di fusione dell'acqua, $\lambda_f = 80\, cal/gm$, $m = 1\, kg$, $\theta_0 = 27\,°C$)

Il lavoro minimo si realizza in condizioni di reversibilità. Per la legge di accrescimento dell'entropia, la variazione di entropia dell'universo (frigorifero, acqua, ambiente) dev'essere maggiore o uguale a zero, $\Delta S_u \geq 0$, dove il segno di uguaglianza vale per processi reversibili. Pertanto, dette ΔS_{acq}, ΔS_{frig} e ΔS_{amb} rispettivamente, le variazioni di entropia dell'acqua, del frigorifero e dell'ambiente, si ha

$$\Delta S_u = \Delta S_{acq} + \Delta S_{frig} + \Delta S_{amb} = 0.$$

Ma $\Delta S_{frig} = 0$ in quanto la macchina lavora ciclicamente, quindi:

$$\Delta S_{acq} + \Delta S_{amb} = 0. \tag{1}$$

La variazione di entropia dell'acqua risulta:

$$\Delta S_{acq} = mc_p \ln \frac{T_0}{T_1} - \frac{m\lambda_f}{T_1}, \tag{2}$$

dove $c_p \approx 1\, cal/gm \cdot K$ è il calore specifico a pressione costante e $T_1 = 273,15$.

La variazione di entropia dell'ambiente:

$$\Delta S_{amb} = \frac{Q + \mathcal{L}_{min}}{T_0}, \tag{3}$$

dove Q è il calore sottratto all'acqua,

$$Q = mc_p(T_0 - T_1) + m\lambda_f. \tag{4}$$

Sostituendo le (2) e (3) nella (1) e tenuto conto della (4), si ricava:

$$\mathcal{L}_{min} = -T_0 mc_p \ln \frac{T_1}{T_0} + \frac{T_0}{T_1} m\lambda_f - mc_p(T_0 - T_1) - m\lambda_f = 9,2\, kcal = 38,45\, kJ.$$

Al lavoro può essere attribuito il segno negativo in quanto viene assorbito dal frigorifero.

12. Due moli di gas ideale biatomico scambiano calore con due sorgenti a temperatura T_1 e $T_2 = 4T_1/5$, compiendo un ciclo $ABCDA$, dove: AB è una espansione isoterma reversibile che ne raddoppia il volume; BC una trasformazione a volume costante che raffredda il gas, posto a contatto con la sorgente a temperatura T_2; CD una compressione isoterma reversibile che riconduce il volume a quello iniziale; DA una trasformazione a volume costante che riscalda il gas, posto a contatto con la sorgente a temperatura T_1. Calcolare il rendimento del ciclo. Ritenere congelati i gradi di libertà vibrazionali.

Il rendimento è

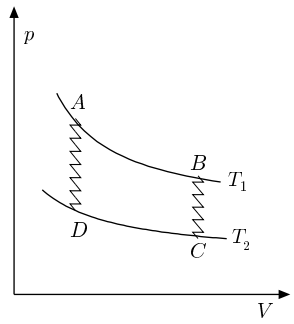
$$\eta = 1 - \frac{Q_{ced}}{Q_{ass}},$$

dove:

$$Q_{ced} = Q_{BC} + Q_{CD} \qquad Q_{ass} = Q_{AB} + Q_{DA}.$$

Essendo:

$$Q_{BC} = nC_V(T_2 - T_1), \qquad Q_{CD} = nRT_2 \ln \frac{V_A}{V_B}$$
$$Q_{AB} = nRT_1 \ln \frac{V_B}{V_A}, \qquad Q_{DA} = nC_V(T_1 - T_2),$$



si ottiene:

$$\eta = 1 - \frac{T_2}{T_1} \frac{\ln 2 + \frac{5}{2}\left(\frac{T_1}{T_2} - 1\right)}{\ln 2 + \frac{5}{2}\left(1 - \frac{T_2}{T_1}\right)} = 1 - \frac{4}{5} \frac{\ln 2 + \frac{5}{8}}{\ln 2 + \frac{1}{2}} = 0,11\,.$$

Si noti che il rendimento risulterebbe lo stesso se le trasformazioni isocore fossero reversibili.

13. Una mole di gas ideale monoatomico descrive un ciclo $ABCA$ costituito da una adiabatica reversibile AB, una isoterma reversibile BC ed una isocora irreversibile CA, durante la quale il gas è posto in contatto con una sorgente a temperatura T_A. Sapendo che $V_B/V_A = 2$, calcolare il rendimento e le variazioni di entropia della sorgente e del gas durante la trasformazione isocora.

Il calore viene assorbito lungo l'isocora CA:

$$Q_{CA} = nC_V(T_A - T_B),$$

essendo $T_C = T_B$. Il calore ceduto, lungo la compressione isoterma, è

$$Q_{BC} = nRT_B \ln \frac{V_B}{V_A},$$

essendo $V_C = V_A$. Pertanto:

$$\eta = 1 - \frac{nRT_B \ln(V_B/V_A)}{nC_V(T_A - T_B)} = 1 - \frac{R}{C_V} \frac{\ln(V_B/V_A)}{(T_A/T_B - 1)}.$$

Poiché,

$$\frac{T_B}{T_A} = \left(\frac{V_A}{V_B}\right)^{\gamma-1}, \qquad \frac{R}{C_V} = \gamma - 1 = \frac{2}{3},$$

si ottiene:

$$\eta = 1 - \frac{2}{3} \frac{\ln 2}{2^{2/3} - 1} = 0,21.$$

Variazioni di entropia:

$$\Delta S_{sorg} = -\frac{Q_{CA}}{T_A} = -\frac{nC_V(T_A - T_B)}{T_A} = -nC_V\left(1 - \frac{T_B}{T_A}\right)$$
$$= -nC_V\left[1 - \left(\frac{V_A}{V_B}\right)^{\gamma-1}\right] = -4,61\ J/K$$
$$\Delta S_{BC} = nR \ln \frac{V_A}{V_B} = R \ln \frac{1}{2} = -5,76\, J/K.$$

Si verifica che la variazione di entropia dell'universo è maggiore di zero. Infatti la somma delle variazioni di entropia delle sorgenti, sorgente a temperatura T_A e sorgente relativa all'isoterma BC, risulta maggiore di zero.

14. Un gas ideale monoatomico compie il ciclo reversibile $ABCA$ in cui: AB è una adiabatica che ne raddoppia il volume; BC una isobara che riporta il volume a quello iniziale; CA una isocora che riporta il gas nello stato iniziale. Calcolare il rendimento.

Il calore viene assorbito lungo la trasformazione isocora CA e ceduto lungo l'isobara BC, pertanto

$$\eta = 1 - \frac{Q_{BC}}{Q_{CA}} = 1 - \frac{nC_p(T_B - T_C)}{nC_V(T_A - T_C)} = 1 - \gamma\frac{T_B/T_C - 1}{T_A/T_C - 1}. \tag{1}$$

Nell'isobara, essendo $V_B = 2V_A$, si ha:

$$\frac{V_B}{V_C} = \frac{V_B}{V_A} = \frac{T_B}{T_C} = 2 \tag{2}$$

Dall'equazione dell'adiabatica:

$$\frac{T_A}{T_B} = \left(\frac{V_B}{V_A}\right)^{\gamma-1} = 2^{\gamma-1}, \qquad T_A = T_B 2^{\gamma-1},$$

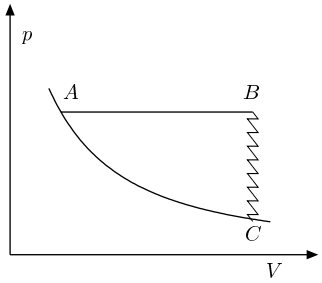
e tenendo conto della (2):

$$T_A = T_C\, 2^{\gamma}, \qquad \frac{T_A}{T_C} = 2^{\gamma}. \tag{3}$$

Sostituendo le (2) e (3) nella (1) si ottiene:

$$\eta = 0,23.$$

15. Un gas ideale monoatomico esegue un ciclo $ABCA$ in cui: AB è una espansione isobara che ne raddoppia il volume; BC Una trasformazione isocora irreversibile, realizzata ponendo il gas a contatto il gas con una sorgente a temperatura T_C; CA una compressione isoterma reversibile. Calcolare il rendimento del ciclo e la variazione di entropia dell'universo.



Problema analogo ad altri. Nel ciclo, irreversibile, calore viene assorbito lungo l'isobara.

$$Q_{AB} = nC_p(T_B - T_A),$$

ceduto nell'isocora BC e nell'isoterma CA:

$$Q_{BC} = nC_V(T_B - T_C) = nC_V(T_B - T_A)$$
$$Q_{CA} = nRT_A \ln\frac{V_A}{V_C} = nRT_A \ln\frac{V_A}{V_B}.$$

Dunque,

$$\eta = 1 - \frac{nC_V(T_B - T_A) + nRT_A\ln(V_B/V_A)}{nC_p(T_B - T_A)} = 1 - \frac{C_V(T_B/T_A - 1) + R\ln(V_B/V_A)}{C_p(T_B/T_A - 1)}.$$

Essendo $T_B/T_A = V_B/V_A = 2$, si ottiene:

$$\eta = 1 - \frac{C_V + R\ln 2}{C_p} = 0,12.$$

La variazione di entropia nel ciclo è nulla, quindi la variazione di entropia dell'universo è pari alla variazione di entropia delle sorgenti.

$$\Delta S_u = \Delta S_{sorg} = -C_p \ln \frac{T_B}{T_A} - R \ln \frac{V_A}{V_C} - C_V \frac{T_C - T_B}{T_C} = 16,3\, J/K.$$

Si noti che $T_C = T_A$.

16. Un gas ideale monoatomico esegue un ciclo reversibile $ABCA$ in cui: AB è una espansione isoterma, alla fine della quale $V_B/V_A = 1,3$; BC una espansione adiabatica dove $V_C/V_B = 1,2$; CA una politropica di equazione $pV^\delta = cost$ che riporta il gas nello stato iniziale. Determinare il valore δ della politropica.

Nel ciclo la variazione entropia è nulla:

$$\Delta S = nR \ln \frac{V_B}{V_A} + nC_V \ln \frac{T_A}{T_C} + nR \ln \frac{V_A}{V_C} = 0.$$

Si ricava:

$$\left(\frac{V_B}{V_C}\right)^R = \left(\frac{T_C}{T_A}\right)^{C_V}. \tag{1}$$

Tenuto conto dall'equazione della politropica e dell'equazione di stato del gas, si ha:

$$p_A V_A^\delta = p_C V_C^\delta, \quad \Rightarrow \quad T_A V_A^{\delta-1} = T_C V_C^{\delta-1},$$

da cui:

$$\frac{T_C}{T_A} = \left(\frac{V_A}{V_C}\right)^{(\delta-1)}.$$

Sostituendo nella (1), si ottiene:

$$\delta = 1 + \frac{2}{3}\left(\frac{\ln(V_B/V_C)}{\ln(V_A/V_C)}\right) = 1,27.$$

17. Una macchina termica reversibile assorbe una quantità di calore Q_0 da una sorgente costituita da una miscela di acqua e ghiaccio in equilibrio ($T_0 = 273\, K$), e cede calore ad una mole di gas ideale, in maniera tale che la temperatura T_1 di quest'ultimo rimanga costante. Si determini l'aumento percentuale di volume del gas, in corrispondenza alla solidificazione di una massa $m = 5\, gm$ di acqua. (Calore di fusione del ghiaccio $\lambda_f = 80\, cal/gm$).

Il gas compie una espansione isoterma reversibile a temperatura T_1, quindi può essere considerato come una sorgente. Il processo è interamente reversibile; la variazione di entropia dell'universo (macchina e sorgenti) è uguale a zero. La macchina è una macchina di Carnot che opera tra le temperature T_0 e T_1, quindi,

$$\frac{Q_0}{T_0} = \frac{Q_1}{T_1}, \quad \Rightarrow \quad Q_1 = Q_0 \frac{T_1}{T_0} = m\lambda_f \frac{T_1}{T_0},$$

dove Q_1 è il calore ceduto al gas. D'altra parte nell'espansione isoterma si ha:

$$Q_1 = nRT_1 \ln \frac{V_2}{V_1} = m\lambda_f \frac{T_1}{T_0}, \quad \Rightarrow \quad \frac{V_2}{V_1} = \exp\left[\frac{m\lambda_f}{nRT_0}\right].$$

Segue:

$$\frac{V_2 - V_1}{V_1} = \frac{V_2}{V_1} - 1 = \exp\left[\frac{m\lambda_f}{nRT_0}\right] - 1 = 0,193 = 19,3\%.$$

18. Due corpi A e B identici, di capacità termica $C = 10\, cal/K$, costante nell'intervallo di temperature considerato, sono rispettivamente alle temperature $T_A = 400\, K$ e $T_B = 300\, K$.

Determinare il lavoro massimo ottenibile da una macchina che scambia calore con i due corpi.

La macchina assorbe calore dal corpo a temperatura più elevata e ne cede al corpo a temperatura più bassa, finché, raggiunta la temperatura di equilibrio, si arresta. Il lavoro massimo viene ottenuto in condizioni di reversibilità. Pertanto, per la legge di accrescimento dell'entropia, la variazione di entropia dell'universo è pari a zero.

$$\Delta S_u = \Delta S_A + \Delta S_B + \Delta S_{macch} = 0.$$

La variazione di entropia della macchina è nulla Le variazioni di entropia dei corpi sono rispettivamente:

$$\Delta S_A = C \ln \frac{T_f}{T_A}, \qquad \Delta S_B = C \ln \frac{T_f}{T_B},$$

quindi:

$$C \ln \frac{T_f}{T_A} + C \ln \frac{T_f}{T_B} = 0, \qquad \ln \frac{T_f^2}{T_A T_B} = 0 \quad \Rightarrow \quad T_f = \sqrt{T_A T_B} = 346,4\,K.$$

Il lavoro risulta:

$$\mathcal{L} = Q_A - Q_B = C(T_A - T_f) - C(T_f - T_B) = C(T_A + T_B - 2T_f) = 72\,cal = 301\,J.$$

19. Un motore termico, assimilabile alla macchina di Carnot, lavora tra le sorgenti a temperature $\theta_1 = 150\,°C$ e $\theta_2 = 0\,°C$ ed, a regime, compie $2\,giri/s$. Determinare la potenza del motore sapendo che la quantità di calore ceduta in ogni ciclo è $Q_2 = 1500\,J$.

Nella macchina di Carnot si ha

$$\frac{Q_1}{T_1} = \frac{Q_2}{T_2}, \quad \Rightarrow \quad Q_1 = Q_2 \frac{T_2}{T_1} = 2,32\,kJ.$$

Il lavoro risulta

$$\mathcal{L} = Q_1 - Q_2 = 0,824\,kJ,$$

la potenza:

$$W = \frac{\mathcal{L}}{\Delta t} = \frac{0,824}{0,5} = 1,6\,kW.$$

20. Una macchina termica funziona scambiando calore con due sorgenti alle temperature $T_A = 300\,K$ e $T_B = 250\,K$. Dopo un certo numero di cicli essa produce un lavoro $\mathcal{L} = 30\,cal$, mentre la variazione di entropia dell'universo risulta $\Delta S_u = 0,02\,cal/K$. Ricavare il rendimento della macchina.

Si ha un aumento dell'entropia dell'universo, quindi la macchina è irreversibile. Poiché la variazione di entropia di quest'ultima, che lavora ciclicamente, è nulla, si ha variazione di entropia delle sorgenti;

$$\Delta S_u = \frac{Q_B}{T_B} - \frac{Q_A}{T_A}. \tag{1}$$

Tenuto conto che

$$\mathcal{L} = Q_A - Q_B, \qquad Q_B = Q_A - \mathcal{L},$$

sostituendo nella (1), si ricava:

$$Q_A = \frac{\Delta S_u + \mathcal{L}/T_B}{1/T_B - 1/T_A}.$$

Il rendimento risulta:

$$\eta = \frac{\mathcal{L}}{Q_A} = \frac{\mathcal{L}(1/T_B - 1/T_A)}{\Delta S_u + \mathcal{L}/T_B} = 0,14.$$

21. Una macchina di Carnot funziona in senso inverso tra le sorgenti a temperature $\theta_1 = 0\,°C$ e $\theta_2 = 100\,°C$. Le sorgenti sono costituite da due grandi masse d'acqua che mantengono costante la loro temperatura. Sapendo che la potenza necessaria al funzionamento della macchina è $W = 798\,watt$, determinare quanto ghiaccio si forma nella sorgente fredda in un'ora; (calore di fusione dell'acqua $\lambda_f = 798\,cal/gm$).

Indicando con Q_1 il calore sottratto alla sorgente fredda e ricordando la definizione di efficienza frigorifera e, si ha:

$$e = \frac{Q_1}{\mathcal{L}} = \frac{Q_1}{W\Delta t} = \frac{T_1}{T_2 - T_1}, \quad \Rightarrow \quad Q_1 = \frac{T_1}{T_2 - T_1} W\Delta t.$$

Tenendo presente che $\Delta t = 3600\,s$, la massa di ghiaccio prodotta risulta:

$$m = \frac{Q_1}{\lambda_f} = \frac{T_1}{T_2 - T_1}\frac{W\Delta t}{\lambda_f} = 2,35\,kg.$$

22. Un gas ideale monoatomico, nello stato iniziale $p_A = 32,8\,atm$, $V_A = 2\,\ell$, $T_A = 400\,K$, esegue il ciclo $ABCDA$ dove: AB è un'espansione isoterma reversibile a temperatura $T_1 = T_A$, BC una espansione adiabatica reversibile, CD una compressione isoterma reversibile a temperatura $T_2 = T_D$, DA una isocora irreversibile, che riporta il gas nello stato iniziale. Quest'ultima trasformazione può essere realizzata in due modi:
a) ponendo il gas a contatto con la sorgente a temperatura T_1
b) effettuando lavoro adiabatico esterno $\mathcal{L}$.

Calcolare il rendimento nei due casi e la variazione di entropia delle sorgenti nel caso b); ($V_B = 8\,\ell$, $T_2 = 250\,K$).

Le quantità di calore coinvolte nel ciclo sono:

$$\begin{aligned}
&Q_{AB} = nRT_1 \ln\frac{V_B}{V_A} = 90,9\,\ell\cdot atm; \qquad n = \frac{p_A V_A}{RT_A} = 2\,mol\\
&Q_{BC} = 0\\
&Q_{CD} = nRT_2 \ln\frac{V_D}{V_C} = -85,7\,\ell\cdot atm; \qquad V_D = V_A, \quad V_C = V_B\left(\frac{T_1}{T_2}\right)^{1/(\gamma-1)}\\
&Q_{DA} = nC_V(T_1 - T_2) = 36,9\,\ell\cdot atm.
\end{aligned}$$

Nel primo caso il rendimento risulta:

$$\eta = 1 - \frac{Q_{CD}}{Q_{AB} + Q_{DA}} = 0,33.$$

Nel secondo caso nel gas viene dissipato lavoro adiabatico, che determina la stessa variazione di energia interna del primo caso. Pertanto il rendimento è lo stesso. Si rammenti che il rendimento di una macchina è, in generale, definito dal rapporto tra il lavoro utile ottenuto e l'energia, di qualsiasi genere, impiegata.

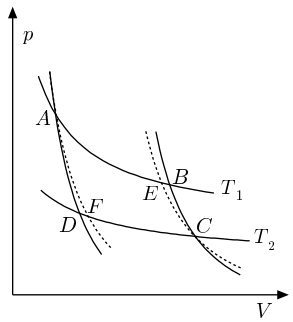
La variazione di entropia delle sorgenti, caso b), è

$$\Delta S_{sorg} = -\frac{Q_{AB}}{T_1} + \frac{Q_{CD}}{T_2} = 0,12\,\ell\cdot atm/K.$$

23. Una macchina di Carnot opera tra le sorgenti a temperature $T_1 = 600\,K$ e $T_2 = 300\,K$, utilizzando una mole di He. Una seconda macchina opera tra le stesse sorgenti, utilizzando una mole di H_2. Supponendo che i gas possano essere assimilati a gas ideali e che nei due cicli, le pressioni minima e massima siano le stesse, determinare la differenza tra i lavori ottenibili dalle macchine.

Per il teorema di Carnot il rendimento delle macchine è lo stesso (indipendente dalla sostanza),

$$\eta = 1 - \frac{T_2}{T_1} = \frac{\mathcal{L}^{(He)}}{Q_1^{(He)}} = \frac{\mathcal{L}^{(H_2)}}{Q_1^{(H_2)}}, \quad \Rightarrow \quad \mathcal{L}^{(He)} - \mathcal{L}^{(H_2)} = \eta \left(Q_1^{(He)} - Q_1^{(H_2)} \right). \tag{1}$$



Indichiamo con $ABCD$ il ciclo dell'elio e con $AECF$ il ciclo dell'idrogeno; essi differiscono per la pendenza delle adiabatiche in cui, per l'elio (gas monoatomico) $\gamma_1 = 5/3$ e per l'idrogeno (gas biatomico) $\gamma_2 = 7/5$. Nei due cicli la pressione massima è p_A e quella minima p_C. Dalle equazioni delle adiabatiche reversibili si ha,

$$\begin{aligned} p_B T_1^{\gamma_1/(1-\gamma_1)} &= p_C T_2^{\gamma_1/(1-\gamma_1)} \\ p_E T_1^{\gamma_2/(1-\gamma_2)} &= p_C T_2^{\gamma_2/(1-\gamma_2)}. \end{aligned} \tag{2}$$

D'altra parte,

$$Q_1^{(He)} = RT_1 \ln \frac{p_A}{p_B}, \qquad Q_1^{(H_2)} = RT_1 \ln \frac{p_A}{p_E},$$

quindi per la (1) si ha:

$$\Delta\mathcal{L} = \eta\, RT_1 \ln \frac{p_E}{p_B} = R(T_1 - T_2) \ln \frac{p_E}{p_B}. \tag{3}$$

Dividendo membro a membro le (2):

$$\frac{p_E}{p_B} = \left(\frac{T_2}{T_1} \right)^{[(\gamma_2/(1-\gamma_2) - \gamma_1/(1-\gamma_1)]} ;$$

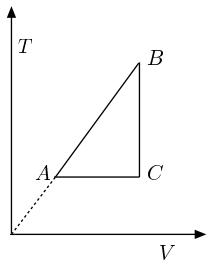
Sostituendo nella (3) e ricordando i valori di γ_1 e γ_2, si ottiene:

$$\Delta\mathcal{L} = R(T_1 - T_2) \left(\frac{\gamma_2}{1-\gamma_2} - \frac{\gamma_1}{1-\gamma_1} \right) \ln \frac{T_2}{T_1} = R(T_1 - T_2) \ln \frac{T_1}{T_2} = 1728\, J.$$

24. Un gas ideale monoatomico, nel diagramma V-T, compie un ciclo $ABCA$ rappresentato da un triangolo rettangolo, come in figura. Sapendo che $T_B = 3T_A$, calcolare il rendimento.

Dalla figura si riconosce che nella trasformazione AB il rapporto $T/V = c$ è costante, quindi si tratta di una isobara; BC è una isocora; CA una isoterma. Usando l'equazione di stato, si ha

$$\frac{V_B}{V_A} = \frac{T_B}{T_A} = 3, \quad \Rightarrow \quad V_B = V_C = 3V_A.$$



Le quantità di calore scambiate sono:

$$\begin{aligned} Q_{AB} &= C_p(T_B - T_A), \\ Q_{BC} &= C_V(T_B - T_C), \\ Q_{CA} &= RT_A \ln \frac{V_C}{V_A}. \end{aligned}$$

Il rendimento risulta

$$\eta = 1 - \frac{Q_{BC} + Q_{CA}}{Q_{AB}} = 0,18.$$

25. Un gas ideale biatomico essegue il ciclo $ABCA$, in cui: AB è una espansione isobara che raddoppia il volume iniziale, $V_B = 2V_A$; BC un raffreddamento isocoro, ottenuto ponendo il gas in contatto con una sorgente a temperatura T_C; CA una compressione isoterma che riporta il gas nelle condizioni iniziali. Calcolare il rendimento del ciclo e la variazione di entropia molare dell'universo.

Dall'equazione di stato, relativa all'isobara, si ha

$$\frac{T_B}{T_A} = \frac{V_B}{V_A} = \frac{V_C}{V_A} = 2.$$

Le quantità di calore scambiate nel ciclo sono:

$$Q_{AB} = nC_p(T_B - T_A) = nC_pT_A,$$

assorbita;

$$Q_{BC} = nC_V(T_B - T_C) = nC_V(T_B - T_A) = nC_VT_A,$$

ceduta;

$$Q_{CA} = nRT_A \ln \frac{V_C}{V_A} = nRT_A \ln \frac{V_B}{V_A} = nRT_A \ln 2,$$

ceduta. Il rendimento risulta:

$$\eta = 1 - \frac{Q_{BC} + Q_{CA}}{Q_{AB}} = 1 - \frac{C_V + R\ln 2}{C_p} = 8,8\%$$

Il ciclo contiene una trasformazione irreversibile: l'isocora che raffredda il gas posto a contatto con la sorgente a temperatura $T_C = T_A$, pertanto risulta irreversibile. Ma la sua variazione di entropia è nulla, dunque la variazione di entropia dell'universo è uguale alla variazione di entropia delle sorgenti. Denotando con ΔS^* tali variazioni, per $n = 1$, si ha:

$$\begin{aligned} \Delta S_u &= \Delta S^*_{AB} + \Delta S^*_{BC} + \Delta S^*_{CA} \\ &= -C_p \ln \frac{T_B}{T_A} - \frac{Q_{BC}}{T_A} - R \ln \frac{V_A}{V_B} \\ &= -C_p \ln 2 + C_V + R \ln 2 = 6,4\, J/(mol \cdot K). \end{aligned}$$

26. Una mole di gas ideale monoatomico compie il ciclo reversibile $ABCA$ in cui: AB è una isoterma; BC una isobara dove $V_C = V_A/2$; CA una trasformazione dove è costante il rapporto pressione volume. Calcolare il rendimento del ciclo.

La trasformazione CA è una politropica del tipo

$$pV^{-1} = cost, \quad \Rightarrow \quad \frac{p_A}{V_A} = \frac{p_C}{V_C}, \quad \Rightarrow \quad p_C = \frac{p_A}{2}, \quad T_C = \frac{T_A}{4}.$$

Essendo nella politropica $\delta = -1$, il suo calore molare risulta:

$$C_\delta = C_V + \frac{R}{1-\delta} = C_V + \frac{R}{2}.$$

Nella trasformazione AB si ha

$$p_A V_A = p_B V_B = p_C V_B, \quad \Rightarrow \quad V_A = \frac{V_B}{2}.$$

Quantità di calore scambiate:

$$Q_{AB} = RT_A \ln \frac{V_B}{V_A}, \qquad Q_{CA} = C_\delta (T_A - T_C),$$

assorbite.

$$Q_{BC} = C_p (T_A - T_C),$$

ceduta.

Pertanto:

$$\eta = 1 - \frac{C_p(1 - T_C/T_A)}{R\ln(V_B/V_A) + C_\delta(1 - T_C/T_A)} = 0.14.$$

27. Una mole di gas biatomico di equazione di stato,

$$\left(p + \frac{a}{V^2}\right) V = RT,$$

esegue un ciclo $ABCDA$ in cui: AB è una isoterma reversibile, in cui la temperatura della sorgente è $T_1 = 400\,K$; BC una isocora ottenuta ponendo il gas a diretto contatto con una sorgente alla temperatura $T_2 = 200\,K$; CD una compressione isoterma reversibile alla temperatura T_2; DA una isocora ottenuta ponendo il gas in contatto con la sorgente a temperatura T_1 e che riporta il sistema nello stato iniziale. Calcolare il rendimento del ciclo. Assumere $C_V = 5R/2$ e $V_B = 4V_A$.

Per la prima legge della termodinamica

$$\delta Q = dU + pdV = \left(\frac{\partial U}{\partial T}\right)_V dT + \left[p + \left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_T\right] dV.$$

Tenuto conto che

$$\left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_T = T\left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_V - p,$$

si ottiene:

$$\delta Q = C_V dT + RT\frac{dV}{V}.$$

Pertanto:

$$Q_{AB} = RT_1 \ln \frac{V_B}{V_A} = RT_1 \ln 4.$$

Inoltre:

$$Q_{BC} = C_V(T_B - T_C), \qquad Q_{CD} = RT_2 \ln \frac{V_D}{V_C}, \qquad Q_{DA} = C_V(T_A - T_D).$$

Il rendimento risulta,

$$\eta = 1 - \frac{Q_{BC} + Q_{CD}}{Q_{AB} + Q_{DA}} = \frac{R(T_1 - T_2)\ln 4}{RT_1 ln4 + 5R(T_1 - T_2)/2} = 0,26.$$

Problemi sulle Funzioni Termodinamiche
A cura del Prof. T.Papa

1. Una mole di gas, di equazione di stato

$$p = \frac{RT}{V} - \frac{a}{V^2},$$

con a costante positiva, è contenuta in un cilindro diatermico, chiuso da un pistone scorrevole. Inizialmente il gas è in equilibrio ed occupa il volume V_A alla pressione p_A, mentre nell'ambiente esterno la pressione è $p_0 < p_A$ e la temperatura T_0. Calcolare le variazioni di energia interna, di entalpia e di entropia, una volta che il gas, espandendosi, raggiunge l'equilibrio finale.

L'espansione è irreversibile ma gli stati iniziale e finale hanno la stessa temperatura. Per le grandezze di stato di cui si vuole calcolare la variazione, si ha:

$$\begin{aligned} dU &= C_V dT + \left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_T dV \\ dH &= dU + d(pV) \\ dS &= C_V \frac{dT}{T} + \left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_V dV\,. \end{aligned} \tag{1}$$

Rammentando che

$$\left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_T = T\left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_V - p,$$

ed essendo uguale la temperatura negli stati iniziale e finale, si ha

$$\Delta U = \int_A^B \frac{a}{v^2} dV = a\frac{V_B - V_A}{V_A V_B} > 0.$$

Per la seconda delle (1) la variazione di entalpia è

$$\Delta H = \Delta U + p_B V_B - p_A V_A,$$

e, tenuto conto dell'equazione di stato,

$$\Delta H = 2a\frac{V_B - V_A}{V_A V_B}.$$

Per quanto riguarda la variazione di entropia, dalla terza delle (1) si ottiene:

$$\Delta S = R \ln \frac{V_B}{V_A}.$$

Si osservi che sia la variazione di energia interna che le variazioni di entalpia e di entropia dipendono dal volume.

2. Una certa quantità di ossigeno, da considerare come gas ideale, è contenuto in un recipiente cilindrico adiabatico, munito di pistone anch'esso adibatico. Il gas, di volume iniziale $V_0 = 1\,m^3$, viene fatto espandere contro una pressione esterna $p = 10^5\,Pa$, fino ad aumentare il volume del 50%. determinare la variazione di entalpia del gas.

La variazione di entalpia è data da

$$\Delta H = nC_p\Delta T. \tag{1}$$

D'altra parte, per la prima legge della termodinamica,

$$\Delta U + \mathcal{L} = 0, \quad \Rightarrow \quad nC_V\Delta T = -\mathcal{L} = -p\Delta V,$$

da cui:

$$\Delta T = -\frac{p\Delta V}{nC_V}.$$

Sostituendo nella (1) ed essendo $\Delta V = 0,5V_0$, si ottiene:

$$\Delta H = -\gamma\, p\Delta V = -\gamma\mathcal{L} = -70\, kJ.$$

3. In un involucro adiabatico un corpo A, massa m_A, temperatuta $\theta_A = 50\,°C$, è posto in contatto termico con un corpo B, massa m_B, tempertura $\theta_B = 40\,°C$. Il sistema raggiunge la temperatura di equilibrio $\theta_1 = 48\,°C$. Viceversa, ponendo A in contatto termico con un corpo C, massa $m_C = 4\, m_B$, temperatura $\theta_C = 40\,°C$, viene raggiunta la temperatura di equilibrio $\theta_2 = 45\,°C$. Determinare il rapporto $r = c_p^{(C)}/c_p^{(B)}$ tra i calori specifici a pressione costante dei corpi B e C.

Il sistema ha entalpia costante, pertanto nelle due situazioni si ha:

$$\Delta H = \Delta H_A + \Delta H_B = 0, \qquad \Delta H = \Delta H_A + \Delta H_C = 0,$$

ossia:

$$\begin{aligned} m_A\, c_p^{(A)}(\theta_A - \theta_1) &= m_B\, c_p^{(B)}(\theta_1 - \theta_B) \\ m_A\, c_p^{(A)}(\theta_A - \theta_2) &= m_C\, c_p^{(C)}(\theta_2 - \theta_C). \end{aligned}$$

Dividendo membro a membro e sostituendo i valori numerici:

$$\frac{\theta_A - \theta_1}{\theta_A - \theta_2} = \frac{m_B\, c_p^{(B)}(\theta_1 - \theta_B)}{m_C\, c_p^{(C)}(\theta_2 - \theta_C)},$$

si ottiene

$$r = \frac{c_p^{(C)}}{c_p^{(B)}} = 1.$$

I corpi sono dello stesso materiale.

Università degli Studi di Roma "La Sapienza"
Facoltà di Ingegneria
Raccolta di esercizi di Fisica II
CAMPO ELETTROSTATICO NEL VUOTO

1. Lungo l'asse di un sottile disco isolante di raggio R e ad una certa distanza d da esso è posta, nel vuoto, una particella di massa m e carica q. Sul disco è uniformemente distribuita una carica Q. Determinare la minima velocità che è necessario imprimere alla particella, nella direzione dell'asse, perchè questa possa raggiungere il disco.
Si trascuri la forza peso. (R=3cm, d=4cm, q/m=$5 \cdot 10^7$C/Kg, Q=$10^{-9}C$)
Soluzione:

come ben noto in elettrostatica le forze elettriche hanno natura conservativa; è quindi possibile introdurre una funzione energia potenziale $U = qV$ ed imporre il principio di conservazione dell'energia nel passaggio dal punto iniziale A al punto finale B come segue

$$[1] \qquad T_A + U_A = T_B + U_B$$

La particella parte in A con la velocità minima v_A , si muove di moto rettilineo lungo l'asse del disco per fermarsi in B ove si ha $v_B = 0$ e $T_B = 0$. L'Eq.(1) diventa conseguentemente

$$\frac{mv_A^2}{2} + qV_A = qV_B$$

da cui si ottiene

$$[2] \qquad v_A = \sqrt{\frac{2q(V_B - V_A)}{m}}$$

La difficoltà si sposta ora nel calcolo della differenza di potenziale $V_B - V_A$ tra i due punti B ed A entrambi sull'asse. In sostanza si tratta di calcolare il potenziale generato da un disco uniformemente carico in un generico punto P sul suo asse a distanza x dal disco (vedere fig.2). Tale potenziale V(x) si ottiene integrando tutti i contributi infinitesimi di potenziale dV prodotti dalle cariche dq presenti sul disco

$$[3] \qquad V(x) = \int dV = \int_Q (\frac{dq}{4\pi\varepsilon_0 p}) = \int_S (\frac{\sigma\ dS}{4\pi\varepsilon_0 p})$$

ove $dq = \sigma\ dS$ e $\sigma = \frac{Q}{\pi R^2}$ rappresenta la densità di carica superficiale. Utilizzando sul disco le coordinate polari r, ϕ, l'integrale di superficie in $dS = r\ dr\ d\phi$ si spezza in due integrali come segue dalla Eq.(3)

$$[4] \qquad V(x) = \frac{\sigma}{4\pi\varepsilon_0}\int_0^{2\pi} d\Phi \int_0^R \frac{r\ dr}{\sqrt{r^2+x^2}} = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}\int_0^R \frac{r\ dr}{\sqrt{r^2+x^2}} =$$

$$= \frac{\sigma}{2\epsilon_0}\left(\sqrt{r^2+x^2}\right)_0^R = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}\left(\sqrt{R^2+x^2} - |x|\right)$$

da cui si ricava $V_A(d) = \frac{\sigma}{4\epsilon_0}\left(\sqrt{R^2+d^2} - d\right)$ e $V_B(0) = \frac{\sigma}{4\epsilon_0}R$ che unitamente alla Eq.(2) danno luogo a

$$v_A = \sqrt{\frac{q\sigma}{m\epsilon_0}\left(R + d - \sqrt{R^2+d^2}\right)} =$$

$$= \sqrt{\frac{q\ 4\ Q}{m\ (4\pi\epsilon_0)\ R^2}\left(R + d - \sqrt{R^2 + d^2}\right)}$$

$$v_A = \sqrt{5 \cdot 10^7 \cdot 4 \cdot 10^{-9} \cdot 9 \cdot 10^9 \frac{(3 + 4 - \sqrt{9+16}) \cdot 10^{-2}}{9 \cdot 10^{-4}}} = \sqrt{4 \cdot 10^{10}} = 2 \cdot 10^5\ m/s$$

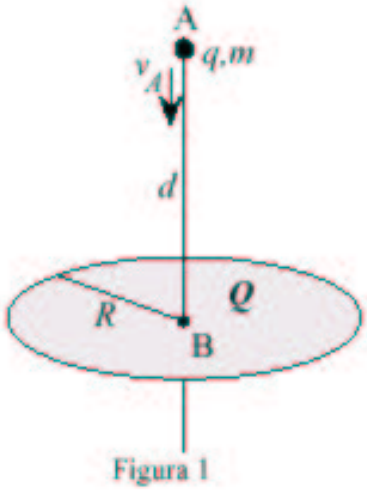


Figura 1

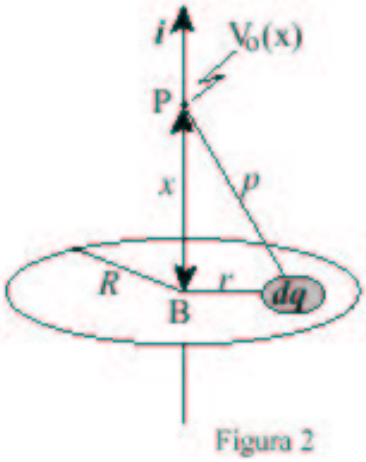
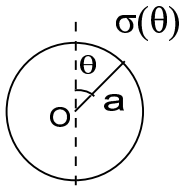


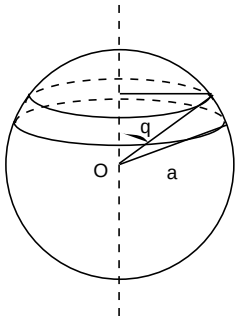
Figura 2

2. Su una superficie sferica di raggio a una carica statica nel vuoto è distribuita con densità superficiale simmetrica rispetto alla rotazione intorno ad un asse, data dall' espressione $\sigma(\theta) = \sigma_0 cos^2(\theta)$. Calcolare l' espressione del potenziale $V(0)$ al centro della distribuzione, assumendo nullo il potenziale all' infinito.



SOLUZIONE:

In accordo alla figura riportata accanto, Il problema può essere risolto immaginando la distribuzione data dalla sovrapposizione di anelli coassiali di superficie infinitesima dS e dotati di carica:



$dq = \sigma dS = \sigma_0 cos^2\theta \cdot 2\pi a\ sen\theta \cdot a\ d\theta$
Si ricorda che, nell'ipotesi $V(\infty) = 0$, il potenziale prodotto sull'asse z di un sottile anello di raggio R è pari a:
$V(z) = \dfrac{Q}{4\pi\epsilon_0\sqrt{R^2 + z^2}}$
dove Q è la carica complessivamente distribuita uniformemente sull'anello.
In base alla precedente formula possiamo ricavare il potenziale prodotto da ciascun anello infinitesimo:
$dV(0) = \dfrac{dq}{4\pi\epsilon_0 a} = \dfrac{1}{4\pi\epsilon_0}\dfrac{dq}{a} = \dfrac{\sigma_0 a}{2\epsilon_0} cos^2\theta sen\theta d\theta$
Applicando il principio di sovrapposizione si ottiene:
$V(0) = \dfrac{\sigma_0 a}{2\epsilon_0}\displaystyle\int_0^\pi d(-\frac{cos^3\theta}{3}) = \dfrac{\sigma_0 a}{3\epsilon_0}$

3. Nel vuoto una carica positiva Q è distribuita all'interno di una sfera di raggio R. Calcolare la frequenza delle piccole oscillazioni che una carica puntifurme negativa q, di massa m, compie se posta a distanza $r_c \ll R$ da centro della sfera.
SOLUZIONE:

Data la simmetria sferica della distribuzione di carica, il campo elettrico E può essere ricavato attraverso il teorema di Gauss mediante la seguente procedura.

$$4\pi r^2 E_0 = \frac{\rho 4\pi r^3}{3\epsilon_0}$$

$$\text{Dove} \quad \rho = \text{ densità di carica } = \frac{3Q}{4\pi R^3}$$

$$\Rightarrow E_0 = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R^3} r$$

Come si vede il campo E è linearmente dipendente dalla distanza r. Ne consegue che la forza agente sulla carica q è di tipo elastico

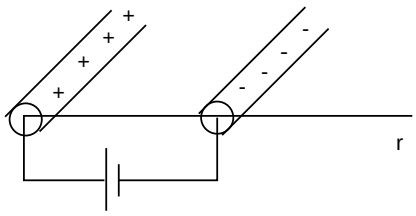
$$F = -kr = -|q|E_0 = -\frac{Q|q|}{4\pi\epsilon_0 R^3} r$$

Ricordando che la pulsazione di oscillazione $\omega = 2\pi\nu$ è data da $\omega = \sqrt{k/m}$, dove m e la massa in oggetto e k il termine di richiamo, si perviene alla soluzione

$$\nu = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{Q|q|}{4\pi\epsilon_0 m R^3}}$$

4. Si abbiano due conduttori cilindrici di raggio a, molto lunghi, paralleli tra di loro, i cui centri distano d uno dall'altro. Tra i due conduttori, che sono in aria, viene applicata una differenza di potenziale ΔV mediante un generatore di forza elettromotrice. Calcolare il valore massimo di ΔV prima che si manifesti la scarice elettrica tra i due conduttori. Campo di rottura dell'aria $E_r = 30kv/cm$; $a = 5mm$; $d = 10cm$.
SOLUZIONE:

Il campo elettrico generato a distanza r da un conduttore cilindrico di lunghezza infinita su cui è distribuita un carica con densità lineare λ è pari a:



$$\vec{E_0} = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r} f \qquad r > a$$

Dove r è il versore dell'asse r disposto come in figura.
Applicando il principio di sovrapposizione, il campo elettrico generato complessivamente dai due cilindri è dato da:

$$\vec{E_0} = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0}(\frac{1}{r} + \frac{1}{d-r})f.$$

Il campo elettrico assume il valore massimo E_{MAX} in prossimità della superficie dei due cilindri $(r = a; r = d - a)$.

$$E_{MAX} = E(a) = E(d-a) = \frac{\lambda d}{2\pi\epsilon_0 a(d-a)}$$, da cui si ricava λ

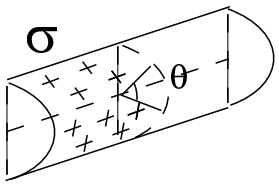
La differenza di potenziale tra i due cilindri è pari a:

$$\Delta V = \int_a^{d-a} \vec{E_0} \cdot \vec{dt} = \frac{\lambda}{\pi\epsilon_0} ln\frac{d-a}{a}$$

Affinché non si verifichi la scarica elettrica tra i due conduttori, il campo elettrico massimo deve essere minore della rigidità dielettrica. Ciò corrisponde alla differenza di potenziale massima ΔV_{max} tra i due conduttori che risulta essere data da:

$$\Delta V_{max} = \frac{aE_r a(d-a)}{d} ln\frac{d-a}{a} = 84\ kW$$

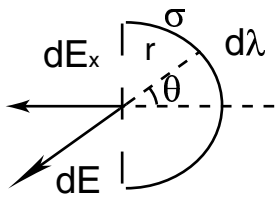
5. Una carica statica nel vuoto è distribuita su una superficie semi-cilindrica illimitata con densità $\sigma = \sigma_0 sen^2\theta$. Calcolare l'espressione di E sull'asse.



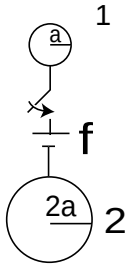
SOLUZIONE:

$$dE_x = dEcos\theta = \frac{\sigma r d\theta}{2\pi\epsilon_0 r}cos\theta = \frac{\sigma_0}{2\pi\epsilon_0 sen^2\theta cos\theta d\theta}$$

$$E_x = \frac{\sigma_0}{2\pi\epsilon_0} \cdot \frac{1}{3}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} d(sen^3\theta) = \frac{\sigma_0}{3\pi\epsilon_0}$$



6. Due sfere conduttrici di raggi $a = 5cm$ e $2a$, distanti qualche metro tra loro, inizialmente scariche, sono collegate tramite un sottile filo conduttore, lungo il quale sono inseriti una batteria di $f = 9V$ e un interruttore inizialmente aperto, come mostrato in figura. Il sistema è in aria, lontano da altri corpi. Calcolare il lavoro che compie la batteria per raggiungere la nuova situazione statica dopo la chiusura dell'interruttore.



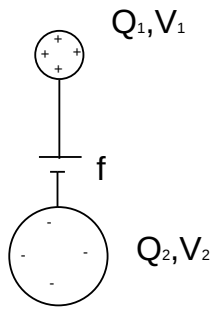
SOLUZIONE:

$Prima\ della\ chiusura: Q_1 = 0 \quad , \quad Q_2 \simeq 0$

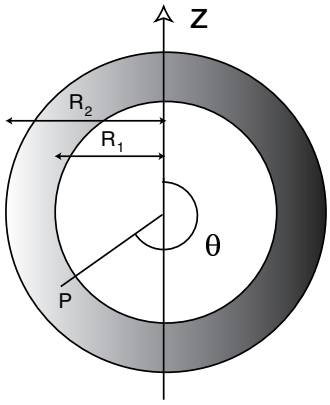
$Dopo: \quad V_1 - V_2 = f \quad V_1 = \dfrac{Q_1}{4\pi\epsilon_0 a} \quad V_2 = \dfrac{Q_1}{4\pi\epsilon_0 2a} \quad Q_2 = -Q_1 \implies$

$\dfrac{Q_1}{4\pi\epsilon_0 a} + \dfrac{1}{2}\dfrac{Q_1}{4\pi\epsilon_0 2a} = f \quad L = Q_1 f = \dfrac{2}{3}4\pi\epsilon_0 a f^2 = \dfrac{2}{3}\dfrac{1}{9\cdot 10^9}\cdot 5\cdot 10^{-2}\cdot$
$81 =$

$= 3.0\cdot 10^{-10} J$



7. Nei punti P all' interno di un guscio sferico di raggio interno R_1 ed esterno R_2 (sezione in figura) vi sia carica elettrica distribuita con densità di carica $\rho = \rho_0 cos\theta$. Si calcoli il momento di dipolo della distribuzione, in modulo direzione e verso, e si dia l' espressione del potenziale elettrico in un punto generico a distanza $R >> R_2$ dal centro geometrico della distribuzione di carica. [Dati $R_1 = 0.1m$, $R_2 = 0.2m$, $\rho_0 = 10^{-6}/m^3$].



SOLUZIONE:

$\vec{P} = \int \rho\vec{r}d\tau \longrightarrow$ diretto lungo $\hat{z}$ con verso positivo

$| \vec{P} | = P_z = \displaystyle\int_\tau \rho r cos\vartheta \cdot r^2 sin\vartheta d\vartheta d\varphi dr =$

$2\pi\rho \displaystyle\int_0^\pi cos^2\vartheta sin\vartheta d\vartheta \int_{R_1}^{R_2} r^3 dr = \frac{\pi\rho_0}{3}(R_2^4 - R_1^4)$

$P_z = 1,57\cdot 10^{-9} \quad Cm \qquad V_0(P) = \dfrac{1}{4\pi\epsilon_0}\dfrac{\vec{P}\cdot\vec{r}}{r^3} = \dfrac{1}{4\pi\epsilon_0}\dfrac{P\cdot z}{r^3}$

8. Dato un filo rettilineo molto lungo, disposto nel vuoto lungo l'asse z di un riferimento cartesiano, uniformemente carico con densità lineare di carica λ, ricavare l'espressione della forza risultante su un piccolo dipolo elettrico di momento di dipolo $\vec{p}$ con il suo centro posto a una distanza r dal filo carico e diretto perpendicolarmente al piano individuato dal filo stesso e dal punto A considerato.

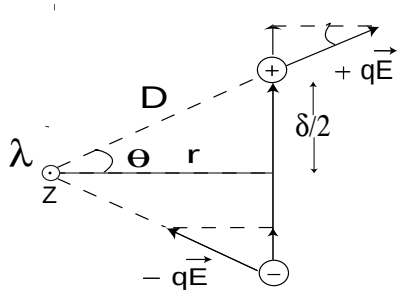
SOLUZIONE:

$\vec{F} \parallel \vec{p} \qquad E = \lambda/2\pi\epsilon_0 D$

$F = 2(qE)sen\vartheta \qquad sen\vartheta = \delta/2D$

$$F = \frac{2q\lambda\delta}{2\pi\epsilon_0 D2D} = p\frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 D^2}$$

$D^2 = r^2 + \delta^2/4 \simeq r^2 \qquad \vec{F} \cong \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r^2}\vec{p}$



Università degli Studi di Roma "La Sapienza"
Facoltà di Ingegneria
Raccolta di esercizi di Fisica II
CAMPO ELETTROSTATICO NEi DIELETTRICI

1. Un condensatore, costituito da due superfici sferiche di raggi R_1 ed R_2, è riempito con un materiale elettrico la cui costante varia in funzione della distaza r dal centro comune delle due sfere secondo la legge $\epsilon = \epsilon_0 \frac{R_2^2}{r^2}$. Tra le due armature esiste una differenza di potenziale V. Calcolare la carica Q distribuita sulle armature del condensatore e le cariche di polarizzazione Q_{P1} e Q_{P2} distribuite sulle superfici del dielettrico di raggio R_1 e R_2. (R_2=3cm, R_2-R_1=1mm, V=300volt).
Soluzione:

il problema del calcolo della carica Q in un condensatore a partire dalla differenza di potenziale fra le sue armature richiede un approccio inverso a quello comunemente usato nella teoria sui condensatori, dove nota la carica sulle armature Q si procede prima al calcolo del campo elettrico interno $\vec{E}$ e quindi, per integrazione, si ricava la differenza di potenziale ΔV. Seguiamo l'approccio diretto. Sia data una carica Q sull'armatura interna A alla quale va a contrapporsi per induzione una carica -Q sull'armatura esterna B (figura 3). Data la simmetria radiale del condensatore sferico i vettori $\vec{E}, \vec{D}$ devono conservare tale simmetria radiale e si possono calcolare applicando la legge di Gauss. Tuttavia la presenza di cariche di polarizzazione nel dielettrico suggerisce di applicare la legge di Gauss per il vettore spostamento elettrico $\vec{D}$ che dipende dalle sole cariche libere. In generale applicando la legge di Gauss su una qualsiasi superficie chiusa Σ si deve avere per il flusso uscente

$$[5] \qquad \Phi_\Sigma(\vec{D}) = \int_\Sigma \vec{D} \cdot \hat{n}\, dS = Q_{lib,int}$$

ove $Q_{lib,int}$ rappresenta tutta e sola la carica libera interna a Σ. L'integrale di superficie descritto risulta particolarmente complicato a meno che non venga scelta come Σ una sfera concentrica di raggio r. In questo caso il calcolo del flusso uscente si semplifica notevolmente essendo il versore normale uscente $\hat{n}$ parallelo ed equiverso a $\vec{D}$, ed essendo il modulo D(r) costante su tutta Σ vale la relazione

$$[6] \qquad \Phi_\Sigma(\vec{D}) = \int_\Sigma \vec{D} \cdot \hat{n}\, dS = \int_\Sigma D(r)\, dS = D(r) \int_\Sigma dS = D(r)\, \Sigma = 4\pi r^2\, D(r) = Q_{lib,int}$$

Essendo la Σ interna al condensatore ($R_1 < r < R_2$), la carica interna libera è tutta e sola la carica sul conduttore A; cioè vale $Q_{lib,int} = +Q$ che sostituita nella Eq.(6) permette di ottenere $D(r) = Q/4\pi r^2$. Nelle altre 2 regioni "esterne" ($r < R_1$) e ($r > R_2$) invece deve valere D(r)=0 come si dimostra ripercorrendo lo stesso ragionamento 2 volte ora con una superficie sferica Σ interna al conduttore A, ora con una esterna a B; in tutti e due i casi la carica netta è nulla $Q_{lib,int} = 0$ e conseguentemente D=0. Un grafico qualitativo di D(r) è riportato in figura 4a. Il vettore campo elettrico si ottiene invece dalla relazione $\vec{E}(r) = \vec{D}(r)/\epsilon(r)$. Il campo elettrico è quindi nullo nelle regioni "esterne" mentre in quella interna ($R_1 < r < R_2$) vale $E(r) = \frac{D(r)}{\epsilon(r)} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R_2^2}$ che è fortuitamente indipendente da r . Un grafico qualitativo di E(r) è

riportato in figura 4b. La differenza di potenziale fra le armature A e B si ottiene integrando il campo elettrico lungo un percorso per facilità radiale come segue

$$\Delta V = \int_A^B \vec{E}(r) \cdot d\vec{s} = \int_{R_1}^{R_2} E(r)\, dr = E(R_2 - R_1) = \frac{Q(R_2 - R_1)}{4\pi\epsilon_0 R_2^2}$$

da cui si può ricavare la carica del condensatore Q che vale

$$Q = \frac{(4\pi\epsilon_0)R_2^2 \Delta V}{R_2 - R_1} = \frac{(3 \cdot 10^{-2}) \cdot 300}{(9 \cdot 10^9) \cdot 10^{-3}} = 3 \cdot 10^{-8}\ C$$

Accanto alla carica libera sulle armature bisogna considerare però anche la carica di polarizzazione nel dielettrico. In generale la carica di polarizzazione potrà essere distribuita sulle superfici del dielettrico A' e B' affacciate rispettivamente ad A e B ed eventualmente nel volume del dielettrico (fig.5). Il calcolo della densità di carica superficiale σ_{pol} si ottiene dal prodotto scalare $\sigma_{pol} = \vec{P} \cdot \hat{n}$ dove $\vec{P}$ è il vettore intensità di polarizzazione ed $\hat{n}$ il versore normale esterno alla superficie del dielettrico. L'intensità di polarizzazione dipende dal vettore spostamento elettrico come segue

$$P = \epsilon_0 \chi E = \epsilon_0(\epsilon_r - 1)E\ = \frac{\epsilon_0(\epsilon_r - 1)}{\epsilon_0 \epsilon_r} D = \frac{\epsilon_r - 1}{\epsilon_r} D\ = \frac{(R_2^2 - r^2)Q}{R_2^2\, 4\pi r^2}$$

La densità superficiale σ_{pol} va calcolate su A' e B' tenuto conto che $\vec{P}$ ed $\hat{n}$ sono controversi su A', ma equiversi su B' si ottiene

$$\sigma_{pol-A'} = \vec{P}(R_1) \cdot \hat{n}_{A'} = -\frac{R_2^2 - R_1^2}{4\pi R_1^2 R_2^2} Q \quad e \quad \sigma_{pol-B'} = \vec{P}(R_2) \cdot \hat{n}_{B'} = \frac{R_2^2 - R_2^2}{4\pi R_2^4} Q = 0$$

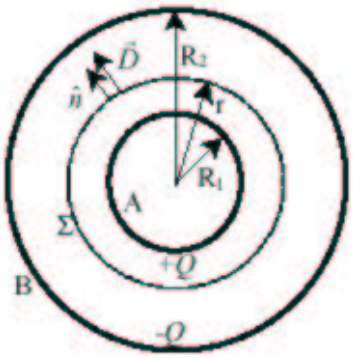


Figura 3

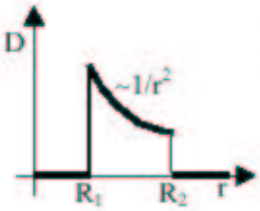


Figura 4a

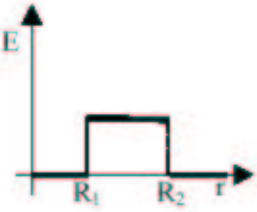


Figura 4b

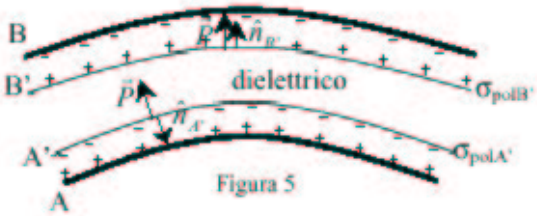
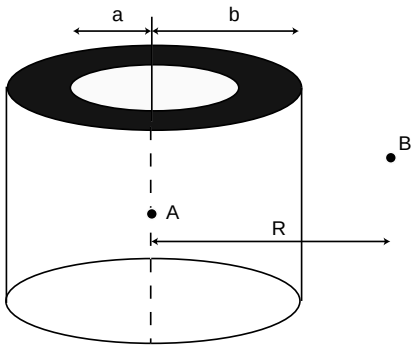


Figura 5

Infine la carica di polarizzazione Q_{pol} si ottiene integrando la densità σ_{pol} su tutta la superficie sferica. Ripetendo il procedimento per le due superfici A' e B' si ottiene

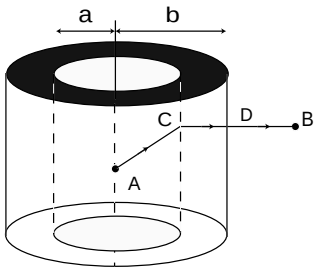
$$Q_{pol-A'} = \int_{A'} \sigma_{pol-A'} dS = \sigma_{pol-A'} 4\pi R_1^2 = -\frac{R_2^2 - R_1^2}{R_2^2} Q =$$
$$= -\frac{3^2 - 2.9^2}{3^2} 3 \cdot 10^{-8} C \simeq -2 \cdot 10^{-9} C \quad e \quad Q_{pol-B'} = 0$$

2. Sia data una distribuzione di carica con densità uniforme ρ all' interno di un guscio cilindrico dielettrico di raggio interno a ed esterno b, e costante dielettrica relativa ϵ_r, come indicato in figura. La distribuzione sia indefinitamente estesa lungo la direzione dell' asse. Si calcoli la differenza di potenziale a cui si trovano due punti A e B disposti rispettivamente sull' asse di simmetria e ad una distanza R da esso. [Dati: $a = 0.1m$, $b = 0.2m$, $R = 0.4m$, $\varrho = 10^{-6}C/m^3$, $\epsilon_r = 5$].



SOLUZIONE:

Gauss $\Phi_s(\vec{D}) = Q^{int}$



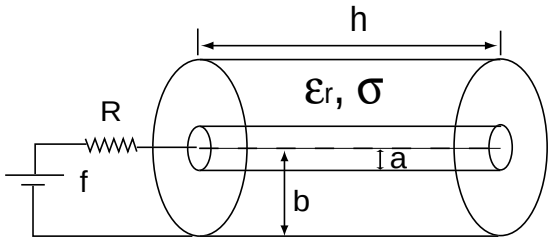
$$\vec{D} = \begin{cases} 0 & r \leq a \\ \dfrac{\rho}{2}\dfrac{r^2 - a^2}{r} & a \leq r \leq b \\ \dfrac{\rho}{2}\dfrac{b^2 - a^2}{r} & r \geq b \end{cases} \quad \vec{E} = \begin{cases} 0 & r \leq a \\ \dfrac{\rho}{2\epsilon_0\epsilon_r}\dfrac{r^2 - a^2}{r} & a \leq r \leq b \\ \dfrac{\rho}{2\epsilon_0}\dfrac{b^2 - a^2}{r} & r \geq b \end{cases}$$

$$V_A - V_B = \overset{\vec{E}=0}{\int_A^C} \vec{E}\vec{dl} + \int_C^D \vec{E}\vec{dl} + \int_D^B \vec{E}\vec{dl} =$$

$$\int_a^b \frac{\rho}{2\epsilon_0\epsilon_r}\frac{r^2 - a^2}{r}dr + \int_b^R \frac{\rho}{2\epsilon_0}\frac{b^2 - a^2}{r}dr$$

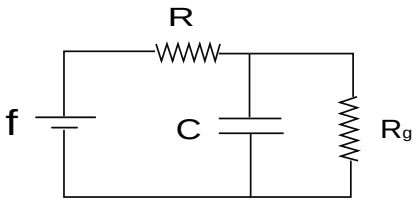
$$V_A - V_B = \frac{\rho}{2\epsilon_0}\left[\frac{1}{\epsilon_r}\left(\frac{b^2 - a^2}{2} - a^2 ln\frac{b}{a}\right) + \left(b^2 - a^2\right) ln\frac{R}{b}\right] = 1435 \quad volt$$

3. Un tratto di cavo coassiale ha lunghezza h, raggio del conduttore cilindrico interno pari ad a, raggio del sottile guscio cilindrico conduttore esterno pari a b (con h $\gg a,b$).
Il dielettrico che riempie lo spazio tra tali conduttori ha costante dielettrica relativa ϵ_r, ma non è perfettamente isolante e presenta una conducibilità σ.
Un'estremità del cavo è connessa ad un generatore di fem f costante tramite una resistenza r, mentre l'altra estremità del cavo è aperta come mostrato in figura. Ricavare l'espressione della carica che, a regime si trova sull'armatura del condensatore.



SOLUZIONE:

$$R_g = \int_a^b \frac{1}{\sigma}\frac{dr}{2\pi r h} = \frac{1}{2\pi\sigma h} ln(b/a)$$

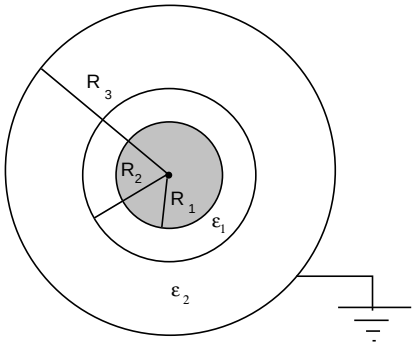


$$\triangle V = I R_g = f R_g/(R + R_g)$$

$$Q = C \triangle V \qquad con \quad C = 2\pi\epsilon_0\epsilon_r h/ln(b/a)$$

$$Q = 2\pi\epsilon_0\epsilon_r h f/(2\pi\sigma h R + ln(b/a))$$

4. Il condensatore cilindrico, rappresentato in sezione nella figura, ha lo spazio tra le armature riempito da due gusci cilindrici adiacenti, di cui il primo di raggio interno R_1, raggio esterno R_2, costante dielettrica ϵ_1 e rigidità dielettrica E_{R_1} (massimo campo elettrico sopportabile dal dielettrico); ed il secondo raggio interno R_2, raggio esterno R_3, costante dielettrica ϵ_2 e rigidità dielettrica E_{R_2}. Assumendo che valga la diseguaglianza: $\epsilon_1 \cdot E_{R_1} \cdot R_1 < \epsilon_2 \cdot E_{R_2} \cdot R_2$, ricavare l' espressione della massima differenza di potenziale V_{max} che si può applicare al condensatore senza comprometterne le qualità di isolamento.



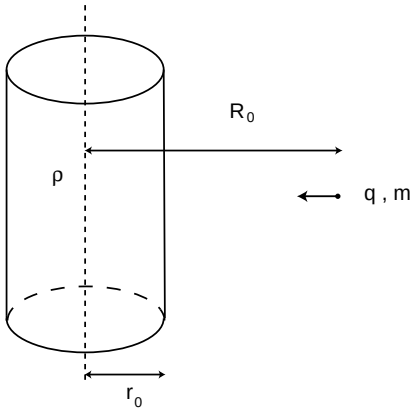
SOLUZIONE:

$$E = \lambda/2\pi\epsilon r \qquad (\epsilon = \epsilon_0\epsilon_r)$$
$$E_{1MAX} = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_1 R_1} \leq E_{R_1} \longrightarrow \lambda \leq 2\pi\epsilon_1 R_1 E_{R_1}$$
$$E_{2MAX} = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_2 R_2} \leq E_{R_2} \longrightarrow \lambda \leq 2\pi\epsilon_2 R_2 E_{R_2}$$

$$\epsilon_1 R_1 E_{R_1} < \epsilon_2 R_2 E_{R_2} \longrightarrow \lambda_{MAX} = 2\pi\epsilon_1 R_1 E_{R_1}$$

$$V_{MAX} = \int_{R_1}^{R_2} \frac{\lambda_{MAX}}{2\pi\epsilon_1 r} dr + \int_{R_2}^{R_3} \frac{\lambda_{MAX}}{2\pi\epsilon_2 r} dr = R_1 E_{R_1} \left[ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right) + \frac{\epsilon_1}{\epsilon_2} ln\left(\frac{R_3}{R_2}\right)\right]$$

5. Si abbia una distribuzione di carica elettrica con densità uniforme ρ all'interno di un cilindro dielettrico ($\varepsilon_r = 5$) indefinitamente lungo di raggio r_0. Una particella di carica q e massa m viene lanciata con velocità v_0 in direzione dell'asse del cilindro e perpendicolarmente ad esso, come indicato in figura, da una distanza R_0. Si determini il valore di v_0 per il quale la particella arriva con velocità nulla sull'asse del cilindro. Si consideri che la particella possa attraversare il dielettrico senza urti. [$m = 9.1 \cdot 10^{-31} Kg$, $q = -1.610^{-19} C$, $\rho = -10^{-6} C/m^3$, $R_0 = 1m$, $r_0 = 0.1m$]



SOLUZIONE:

Campo del cilindro : infinito

$$\vec{E}(\vec{r}) = \begin{cases} \dfrac{\rho r}{2\epsilon_0 \epsilon_r}\hat{r} & r \leq r_0 \\ \dfrac{r_0^2 \rho}{2\epsilon_0 r}\hat{r} & r > r_0 \end{cases}$$

$$T_{fin} - T_{in} = U_{in}^{el} - U_{fin}^{el} \Rightarrow \frac{1}{2}mv_o^2 = -\int_{R_0}^{0} q\vec{E}(\vec{r}) \cdot \vec{dr} = \int_0^{r_0} \frac{q\rho r}{2\epsilon_0\epsilon_r}dr + \int_{r_0}^{R_0} \frac{qr_0^2\rho}{2\epsilon_0 r}dr =$$
$$\frac{1}{2}\frac{q\rho r_0^2}{\epsilon_0}\{\frac{1}{2\epsilon_r} + ln\frac{R_0}{r_0}\} \quad \Rightarrow v_0 = \left[\frac{q\rho r_0^2}{m\epsilon_0}(\frac{1}{2\epsilon_r} + ln\frac{R_0}{r_0})\right]^{\frac{1}{2}} = 2.2 * 10^7 m/s$$

6. Un condensatore piano, a facce parallele quadrate di lato a e spessore b è completamente riempito da un dielettrico ($\varepsilon_r = 5$). Esso è isolato e carico con una carica Q. Si immagini di estrarre il dielettrico dal condensatore. Si determini di quanto si può estrarre il dielettrico prima che si generi una scarica elettrica tra le armature, sapendo i valori della rigidita dielettrica dell'aria $E_{R(aria)}$ e del dielettrico $E_{R(diel)}$. Si trascurino gli effetti di bordo. [$Q = 5 \cdot 10^{-9} C$, $a = 0.1m$, $E_{R(diel.)} = 4 \cdot 10^5 \frac{V}{m}$, $E_{R(aria)} = 3 \cdot 10^4 V/m$].

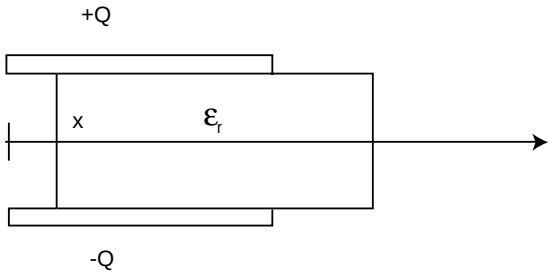
SOLUZIONE:

$$C = C_1 + C_2 = \frac{\epsilon_0 a}{b}\left[x(1-\epsilon_r) + a\epsilon_r\right]$$

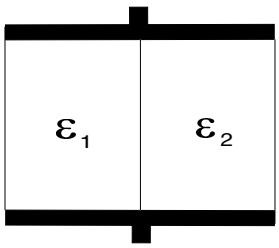
$$\Delta V = \frac{Q}{C} = \frac{Qb}{\epsilon_0 a}\frac{1}{x(1-\epsilon_r) + a\epsilon_r}$$

$$E = \frac{\Delta V}{b} = \frac{Q}{\epsilon_0 a}\frac{1}{x(1-\epsilon_r) + a\epsilon_r} < E_{R(aria)}$$

$$\Rightarrow x < \frac{\epsilon_r a}{\epsilon_r - 1} - \frac{Q}{\epsilon_0 a E_{R(aria)}(\epsilon_r - 1)} = 7.8cm$$



7. Un condensatore a facce piane e parallele ha nel vuoto una capacità $C_0 = 10\mu F$.
Successivamente viene riempito per metà superficie con un dielettrico di costante dielettrica relativa $\epsilon_{r1} = 1.4$ e per l' altra metà con un altro dielettrico di costante $\epsilon_{r2} = 1.6$, secondo lo schema in figura. Calcolare la nuova capacità ed il rapporto fra le cariche di polarizzazione sui due dielettrici.



SOLUZIONE:

$$C = C_1 + C_2 = \frac{\epsilon_0 \epsilon_{r_1} \frac{S}{2}}{d} + \frac{\epsilon_0 \epsilon_{r_2} \frac{S}{2}}{d} = \frac{\epsilon_{r_1} + \epsilon_{r_2}}{2} C_0 = 1,5 \quad C_0 = 15\mu F$$

$$\sigma_1^p = \vec{P}_1 \cdot \hat{r} = \epsilon_0(\epsilon_{r_1} - 1)|\vec{E}_1| \quad ; \sigma_2^p = \vec{P}_2 \cdot \hat{r} = \epsilon_0(\epsilon_{r_2} - 1)|\vec{E}_2| \quad ; \vec{E}_1 = \vec{E}_2$$

$$\frac{\sigma_1^p}{\sigma_2^p} = \frac{\epsilon_{r_1} - 1}{\epsilon_{r_2} - 1} = 0.67$$

Università degli Studi di Roma "La Sapienza"
Facoltà di Ingegneria
Raccolta di esercizi di Fisica II
CAMPO MAGNETOSTATICO NEL VUOTO

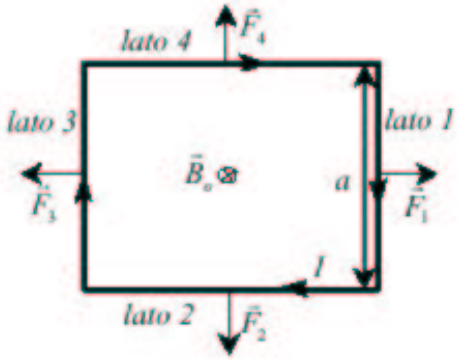
1. Una spira rettangolare rigida, di massa m e lati di lunghezza a e b, è vincolata a ruotare attorno ad un asse orizzontale passante per uno dei due lati di lunghezza a. Essa è percorsa da una corrente I e si trova in una regione dello spazio in cui è presente un campo di induzione $\vec{B}$, uniforme, diretto lungo la direzione verticale. Determinare l'angolo θ che il piano della spira forma, all'equilibrio, con la direzione verticale.
(m=3g, a=10cm, I=3A, B=49mT)
Soluzione:

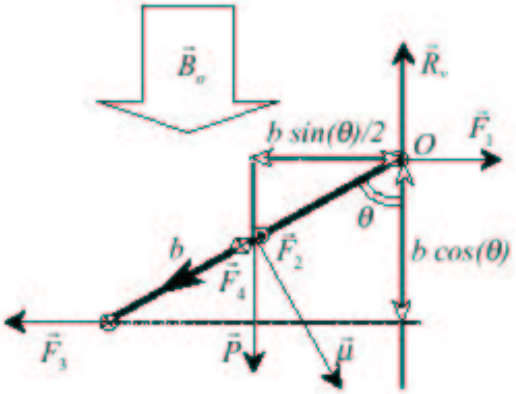
ogni lato l della spira è sottoposto ad una forza che per la seconda formula di Laplace si scrive $\vec{F} = \int_l I\, \vec{dl} \times \vec{B_0} = I\, \vec{l} \times \vec{B_0}$ e che può pensarsi applicata al centro del lato. Le forze sui lati 2 e 4 sono eguali di modulo $F_2 = F_4 = IB_0 b\, cos(\theta)$, opposte in verso, ma sulla stessa linea d'azione, così da non produrre effetti su una spira rigida. Le altre forze sui lati 1 e 3 sono eguali di modulo $F_1 = F_3 = IB_0 a$, opposte in verso ma su linee di azione parallele in modo da formare una coppia. Accanto a queste forze di natura magnetica vanno considerate la forza peso di modulo $P = mg$ e applicata nel baricentro che coincide con il centro della spira, se considerata omogenea, e la reazione vincolare R_v applicata nel vincolo O che equilibra la forza peso. La spira è in equilibrio quando sono nulle allo stesso tempo la somma delle forze e la somma dei momenti delle forze. La prima condizione è facilmente verificata quando $\vec{F_1} + \vec{F_2} + \vec{F_3} + \vec{F_4} + \vec{P} + \vec{R_v} = 0$ il che implica che la reazione vincolare deve essere eguale e opposta alla forza peso $\vec{R_v} = -\vec{P}$. Più interessante è l'equazione dei momenti che consente di calcolare l'angolo θ per cui si ha equilibrio. Proiettando i momenti sull'asse dell'unica rotazione consentita (asse per O) notiamo che le forze R_v e F_1 non contribuiscono perché hanno punto di applicazione sull'asse stesso, F_2 e F_4 oltre ad essere sulla stessa linea d'azione non contribuiscono neanche singolarmente ad un momento sull'asse per O, mentre P ed F_3 contribuiscono in modo opposto; in particolare P tenderebbe a fare ruotare la spira in verso antiorario (momento assiale positivo), F_3 invece in verso orario. L'equilibrio si ha quando $M_p + M_{F3} = P \cdot b\, sin(\theta)\ /2 - F_3 b\, cos(\theta) = 0$ da cui

$$tg(\theta) = \frac{2F_3}{P} = \frac{2IaB_0}{mg} = \frac{2 \cdot 3 \cdot 10^{-1} \cdot 49 \cdot 10^{-3}}{3 \cdot 10^{-3} \cdot 9,8} = 1$$

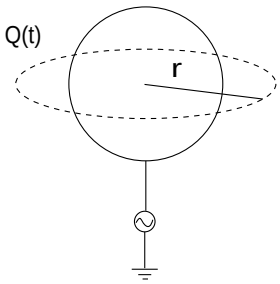
da cui $\theta = 45^o$

soluzione alternativa: il momento magnetico della spira $\mu = Iab$ crea un momento meccanico che all'equilibrio si oppone al momento della forza peso $\vec{r} \times \vec{P} + \vec{\mu} \times \vec{B_0} = 0$. Proiettando sull'asse si ottiene $-b \cdot mg\, cos(\theta) + Iab \cdot B_0\, sin(\theta) = 0$ da cui si ricava θ.



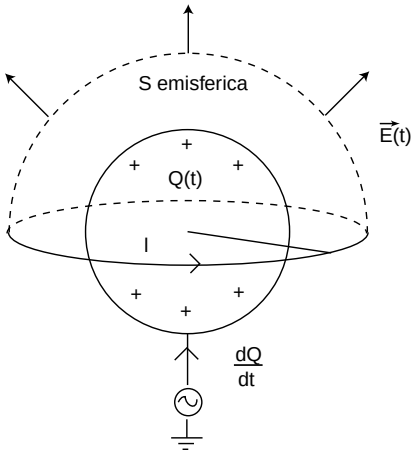


2. Una sfera conduttrice in aria è collegata a terra tramite un lungo filo conduttore rettilineo molto sottile, lungo il quale è inserito un generatore di tensione alternata. La carica della sfera è data dall' espressione $Q(t) = Q_0 sin\varpi t$. La variazione nel tempo è sufficientemente lenta da poter assumere l' approssimazione quasi stazionaria. Calcolare l' espressione del campo B presente in un punto sul piano equatoriale della sfera, all' esterno di quest' ultima e a distanza r dal centro.



Soluzione:

Il problema può essere risolto a partire dalla circuitazione di B lungo il percorso evidenziato in figura. Data la simmetria sferica del problema, il campo B assume infatti lungo il percorso di integrazione un valore costante e diretto lungo la circonferenza stessa. In accordo alla 4a eq. di Maxwell e al teorema di Stokes si ha:



$$\oint_l \vec{B} \cdot \vec{dl} = B_t \cdot 2\pi r = \mu_0 \int_S (\vec{J} + \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}) \cdot d\vec{S}$$

dove S è una qualsiasi superficie avente la linea di circuitazione come bordo e con la normale rivolta secondo la convenzione fissata dal teorema di Stokes. Assumiamo un verso di percorrenza antiorario tale da avere la normale diretta verso l'alto.
Risolviamo il problema prendendo inizialmente come superficie S l'emisfero superiore. In questo caso le correnti di conduzione rappresentate dal termine J sono nulle. Da ciò deriva che

$$B_t 2\pi r = \oint_l \vec{B} \cdot \vec{dl} = \mu_0 \epsilon_0 \cdot \frac{dE_n}{dt} \cdot \frac{4\pi r^2}{2} = \mu_0 \epsilon_0 \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{Q(t)}{r^2}\right) \cdot \frac{4\pi r^2}{2} =$$
$$= \frac{1}{2}\mu_0 \frac{dQ}{dt} \quad \rightarrow B_t = \frac{1}{2}\frac{\mu_0 \omega Q_0}{2\pi r} cos\omega t$$

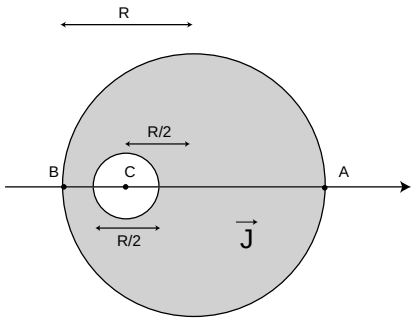
Si noti che il campo elettrico è stato calcolato in accordo alla ipotesi semplificativa riportata nel testo. Se viene scelto l'emisfero inferiore, allora, data la presenza del filo, le correnti di conduzione non sono identicamente nulle su tutta la superficie S. In particolare il flusso di J attraverso la superficie S fornisce la corrente totale sul filo data da:

$$\int \vec{J} d\vec{S} = I = \frac{dQ}{dt}$$

Tenendo conto di questa circostanza, si perviene alla soluzione che è ovviamente coincidente con il risultato trovato precedentemente. $B_t\, 2\pi r = \mu_0 \frac{dQ}{dt} - \frac{1}{2}\mu_0 \frac{dQ}{dt} = \frac{1}{2}\mu_0 \frac{dQ}{dt}$

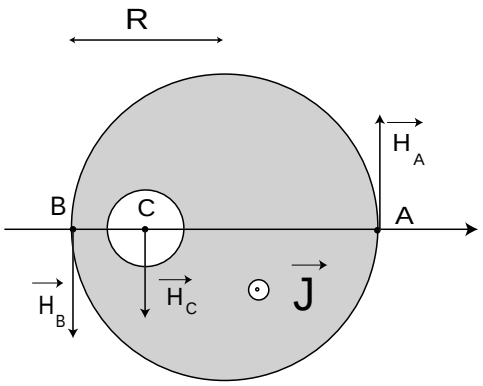
Si badi bene al cambio del segno nel termine della corrente di spostamento dovuto all'opposto orientamento del campo elettrico e della normale alla superficie S.

3. Un conduttore cilindrico di raggio R indefinitamente lungo, avente una cavità cilindrica di raggio $R/4$ a distanza $R/2$ dal proprio asse, è percorso da una corrente elettrica con densità di corrente $\vec{J}$ uniforme, diretta lungo l' asse. Si calcoli il valore del campo magnetico nei punti A e B e C indicati in figura. [Dati: $J = 100 A/m^2, R = 10^{-2} m$].

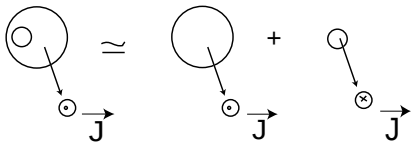


Soluzione:

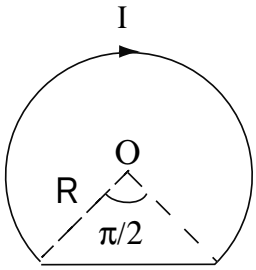
$$\begin{cases} H_A = \dfrac{J \cdot \pi R^2}{2\pi R} - \dfrac{J\pi \cdot (R/4)^2}{2\pi(R + R/2} = \dfrac{23}{24}\dfrac{J \cdot R}{2} \\ H_B = \dfrac{J \cdot \pi R^2}{2\pi R} - \dfrac{J\pi \cdot (R/4)^2}{2\pi(R/2)} = \dfrac{7}{8}\dfrac{J \cdot R}{2} \\ H_C = \dfrac{J \cdot \pi (R/2)^2}{2\pi R/2} = \dfrac{1}{2}\dfrac{J \cdot R}{2} \end{cases}$$



$$\begin{cases} H_A = 0.48 \;\; Asp/m \\ H_B = 0.44 \;\; Asp/m \\ H_C = 0.25 \;\; Asp/m \end{cases}$$

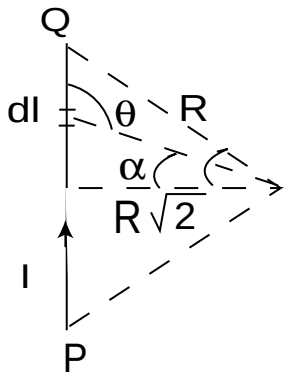


4. Un sottile filo conduttore è sagomato in modo da formare un arco di circonferenza di centro O, raggio R ed angolo al centro di $(3\pi/2)$ rad, raccordato ad un tratto rettilineo che chiude il circuito. Nel circuito, posto nel vuoto scorre una corrente stazionaria I. Ricavare l'espressione del campo di induzione magnetica $\vec{B}$ nel punto O.



Soluzione:

$$B = B_{arco} + B_{segmento}$$



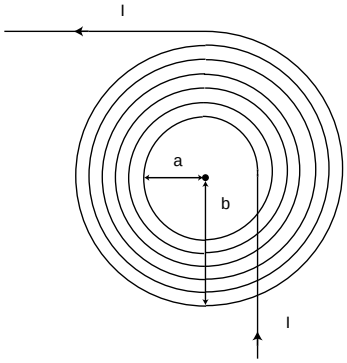
$$B_{arco} = \int_{arco} \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{dl}{R^2} = \frac{3\mu_0 I}{8R}$$

$$B_{segmento} = \int_P^Q \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{dl\, sen\vartheta}{r^2} = \frac{\mu_0 I\sqrt{2}}{4\pi R} \int_{-\pi/4}^{+\pi/4} cos\alpha d\alpha =$$

$$= \frac{\mu_0 I}{2\pi R}$$

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi R}\left(\frac{3\pi}{4} + 1\right)$$

5. Una bobina piatta, in aria, è costituita da un numero N molto grande di spire di filo sottile avvolte in modo da riempire con una spirale piana e compatta la corona circolare di raggio interno a e raggio esterno b indicata in figura. Se la bobina è percorsa da una corrente I, ricavare l' espressione del vettore induzione magnetica B nel centro O della bobina stessa.



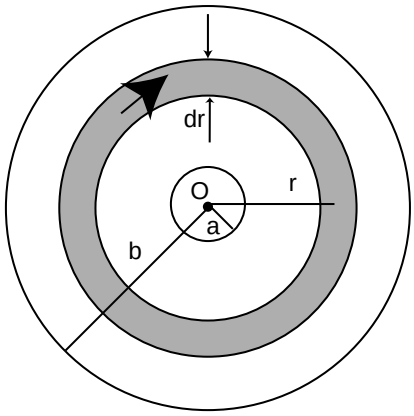
Soluzione:

Densità radiale di spire : $\dfrac{N}{b-a}$

La corona elementare di raggio r contiene $\left(\dfrac{N}{b-a}dr\right)$ spire percorse da corrente I che producono in O

$$dB = \frac{\mu_0 I}{2r}\frac{N}{b-a}dr$$

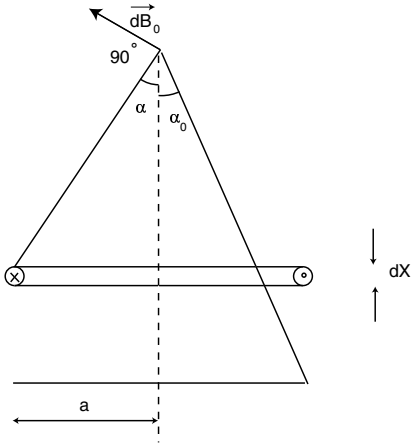
$$\int_a^b \frac{\mu_0 I}{2r}\frac{N}{b-a}dr = \frac{\mu_0 I N}{2(b-a)} ln\left(\frac{b}{a}\right)$$



6. Si abbia della carica distribuita con densità superficiale uniforme σ sulla superficie laterale di un cilindro di materiale isolante e non magnetico, di raggio a e altezza b. Si calcoli l'induzione B sull'asse del cilindro, in corrispondenza delle superfici di base, se il cilindro stesso è posto in rotazione intorno all'asse con velocità angolare ω.

Soluzione:

$\mathrm{d}dB_{0x} = \dfrac{\mu_0}{4\pi} \oint \dfrac{|d\vec{l} \times \vec{r}|}{r^3} \cdot \sin\alpha =$ Campo sulla faccia superiore



$$= \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\sigma 2\pi\ a\ dx}{T} \cdot \oint \frac{dl\ r}{r^3} \sin\alpha =$$

$$= \frac{\mu_0}{2} \frac{\sigma a^2 \omega sin\alpha}{r^2}\ dx$$

$$B_{0x} = \int_{\alpha_0}^{\pi/2} \frac{\mu_0}{2} \sigma a^2 \omega \frac{sin^3\alpha}{a^2} \frac{a}{sin^3\alpha} d\alpha = \frac{\mu_0}{2} \sigma a \omega cos\alpha \Big]_{\frac{\pi}{2}}^{\alpha_0} =$$

$$= \frac{\mu_0}{2} \sigma a \omega cos\alpha_0 \qquad \alpha_0 = arctg\frac{a}{b}$$

7. Un elettrone ($m = 9 \cdot 10^{-31} kg$) che si trova sull' asse di un cilindro di raggio $r = 2cm$ viene emesso con velocità radiale $v = 5 \cdot 10^7 m/s$ verso la parete del cilindro. Determinare il valore minimo di B_0, diretto con linee di forza parallele all' asse, che impedisce all' elettrone di arrivare sulla parete del cilindro.

   Soluzione:

   Traiettoria circolare : raggio della traiettoria R= $\dfrac{mv}{qB} \leq \dfrac{r}{2}$

   $$B_{min} = \frac{2mv}{qr} = 0.028\ T$$

Università degli Studi di Roma "La Sapienza"
Facoltà di Ingegneria
Raccolta di esercizi di Fisica II
CIRCUITI

1. Un solenoide cilindrico, di raggio r e lunghezza h, è costituito da N spire ottenuto avvolgendo in modo compatto un filo di rame a sezione circolare di diametro d. Esso è riempito per metà della sua lunghezza con un materiale di permeabilità magnetica relativa μ_r costante. Calcolare la costante di tempo τ del circuito ottenuto collegando, tramite fili conduttori di resistenza trascurabile, il solenoide ad un generatore di forza elettromotrice costante e resistenza interna R_i.
(r=1cm, h=55cm, N=550, $\rho = 1,7 \cdot 10^{-8}\Omega$ m, d=1mm, μ_r=900, $R_i = 1.25\ \Omega$)
Soluzione:

Il circuito elettrico descritto è un circuito RL; esso è costituito da una forza elettromotrice f, da una resistenza totale R_{tot} che è la serie della resistenza interna del generatore R_i e di quella di tutto il solenoide R_s, ed infine dalla serie di due induttori di coefficiente di autoinduzione L_0 ed L_1, uno immerso nel vuoto e l'altro immerso in un materiale ferromagnetico. Applicando le leggi di Ohm possiamo calcolare la resistenza totale del circuito come

$$R_{tot} = R_i + R_s = R_i + \rho\frac{l_{filo}}{S_{filo}} = R_i + \rho\frac{2\pi r \cdot N}{\pi\ (d/2)^2} =$$

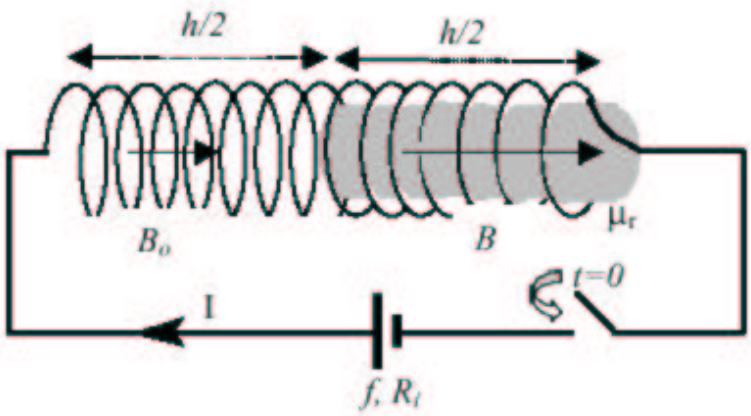
$$R_i + \rho\frac{8Nr}{d^2} = 1.25 + \frac{1.7 \cdot 10^{-8} \cdot 8 \cdot 550 \cdot 10^{-2}}{10^{-6}} = 2\ \Omega$$

Per il calcolo del coefficiente di autoinduzione serie possiamo pensare di spezzare l'induttore in due induttori di lunghezza h/2 e di numero di spire N/2, calcolare i rispettivi coefficienti L_0 ed L_1 e sommarli

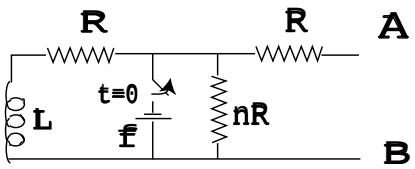
$$L_0 = \mu_0\frac{(N/2)^2 \cdot (\pi r^2)}{h/2} \quad ; \quad L_1 = \mu_r L_0$$

$$L_{tot} = L_0 + L_1 = \mu_0\frac{(1+\mu_r)N^2\pi r^2}{2h} = 4\pi \cdot 10^{-7} \cdot 450.5\frac{550^2\ \pi\ 10^{-4}}{55 \cdot 10^{-2}} = 0.0978\ Henry$$

Nel circuito RL ora descritto, chiuso il circuito a t=0, la corrente I(t) cresce nel tempo con legge
$i(t) = \dfrac{f}{R_{tot}}(1 - e^{-t/\tau})$ ove la costante di tempo di carica è
$\tau = \dfrac{L_tot}{R_tot} = \dfrac{0.0978}{2} = 48.9\ ms$

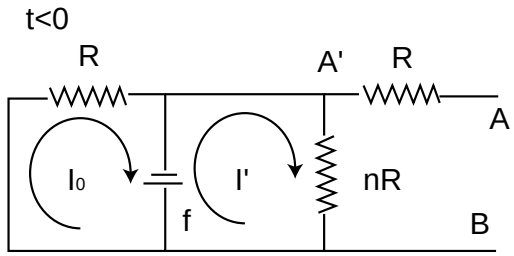


2. Il circuito in figura è a regime quando l' interruttore si apre a $t = 0$. La resistenza interna del generatore è trascurabile (generatore ideale). Calcolare l' espressione della differenza di potenziale $\Delta V(t)$ tra i punti A e B prima e dopo l' apertura dell' interruttore.



Soluzione:

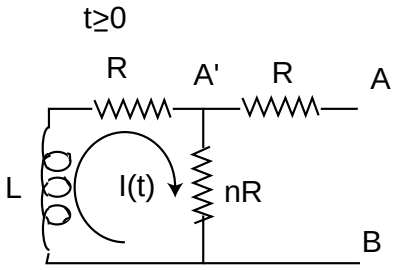
In condizioni di regime ($t < 0$), l'induttore è attraversato da un corrente costante I_0 e, di conseguenza, la differenza di potenziale ai suoi capi è nulla. La differenza di potenziale ΔVab coincide con la fem del generatore a meno di un cambio di segno dovuto alla diversa orientazione del generatore in confronto alla posizione dei nodi A e B. In base a queste considerazioni si ottiene:



$$\text{A } t < 0 \begin{cases} f = RI_0 \quad \Rightarrow I_0 = \dfrac{f}{R} \\ -f = nRI' \quad ininfluente \end{cases}$$

$\Delta V_{AB} = \Delta V_{AA'} + \Delta V_{A'B} = \Delta V_{A'B} = -f$

Una volta aperto l'interruttore, l'induttore si scarica sulla serie delle due resistenze R e nR. Per ricavare la differenza di potenziale ΔVab, è necessario integrare l'equazione:



$$-L\frac{dI}{dt} = (n+1)RI \quad \Rightarrow \frac{dI}{I} = -\frac{dt}{\tau}$$

$$con \;\; \tau = \frac{L}{(n+1)R}$$

Tenendo conto della condizione al contorno fornita dalla corrente iniziale $I(0) = I_0$, si ottiene:

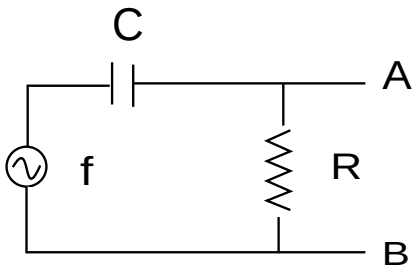
$I(t) = I_0 e^{-\frac{t}{\tau}}$

Una volta ricavata la corrente, è facile ricavare la differenza di potenziale ΔVab tramite la legge di Ohm...

$$\Delta V_{AB} = \Delta V_{A'B} = nRI(t) = nR\frac{f}{R}e^{-\frac{t}{\tau}} = nfe^{-\frac{t}{\tau}}$$

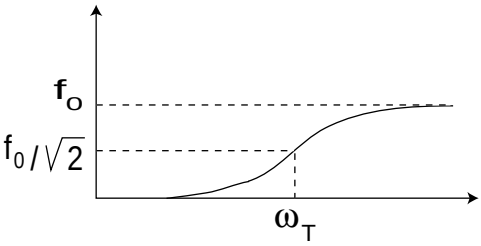
E' utile notare che la resistenza R interposta tra i nodi A e A' non ha alcun ruolo in quanto non attraversata da corrente.

3. Nel circuito indicato in figura f è un generatore di forza elettromotrice alternata sinusoidale $f = f_c \cdot sen(\omega t)$, di impedenza interna tracurabile. Calcolare e rappresentare con un grafico l'andamento dell'ampiezza V_{AB} della differenza di potenziale tra i punti A e B in funzione di ω, supponendo noti e costanti i valori di f_0, R e C. Calcolare anche il valore di ω_T in corrispondenza del quale $\frac{V_{AB}}{f_0} = \frac{1}{\sqrt[2]{(2)}}$.



Soluzione:

Il problema può essere agevolmente risolto applicando il metodo complesso. Se con I veiene indicato il fasore associato alla corrente di maglia, allora si ha che $\tilde{I} = \frac{f_0}{\tilde{Z}} = \frac{f_0}{R - \frac{j}{\omega C}}$ dove Z è l'impedenza data dalla serie del condensatore con la resistenza. In accordo alla legge di Ohm, l'ampiezza massima V_AB è data dal modulo del seguente prodotto



$V_{AB} = |\tilde{I} \cdot R| = |\frac{f_0 R}{R - \frac{j}{\omega C}}| == \frac{f_0 R}{\sqrt{R^2 + \frac{1}{\omega^2 C^2}}} = \frac{f_0 \omega R C}{\sqrt{\omega^2 R^2 C^2 + 1}}$ da cui si può ricavare la pulsazione tale che

$\omega_T = \frac{1}{RC}$

4. La resistenza di una stufa elettrica da $600W$, alimentata a $220V$, è costituita da un lungo filo di tungsteno dle diametro di $0.5mm$. Sapendo che la resistenza del filo alla temperatura ambiente di $15°C$ è 22Ω, calcolare: a) la temperatura del filo, trascurandone la dilatazione termica, quando la stufa è accesa; b) la potenza assorbita all'istante di accensione della stufa; c) la lunghezza del filo a $15°C$. Per il tungsteno: resistività $\rho_1 5°C = 5.6 \cdot 10{-}8\Omega \cdot m$; coefficiente termico $\alpha = 4.5 \cdot 10^{-3°}C^{-1}$.

Soluzione:

Per risolvere l'esercizio, è opportuno ricordare che l'andamento della resistenza elettrica R con la temperatura centigrada è descritto, nell'intorno della temperatura ambiente, da un andamento del tipo

$R_T = R_0(1 + \alpha T)$

La costante R_0 può essere determinata a partire dal valore di resistenza a 15°C secondo quanto segue:
$R_{15} \;=\; R_0(1+\alpha T_{15}) \;\;\Rightarrow\;\; R_0 \;=\; 20.6\ \Omega$
La temperatura del filo viene ricavata a partire dalla potenza ovvero dalla corrente erogata dal generatore. Ciò consente di determinare la resistenza del filamento e quindi la sua temperatura:

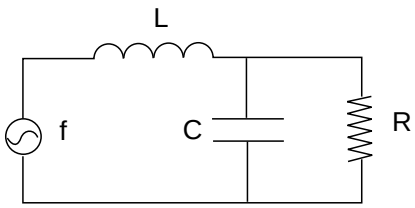
$$R_T \;=\; \frac{f^2}{W} \;=\; 80.7\ \Omega$$

$$R_T \;=\; R_0(1+\alpha T) \;\Rightarrow\; T \;=\; 648°C$$

La lunghezza del filo può essere determinata ricordano l'espressione del resistenza $R = \rho * l/S$ offerta da un conduttore di resistività ρ sezione S e lunghezza l.

$$R_{15} \;=\; \frac{\rho_{15°} l}{\pi r^2} \;\;\Rightarrow\;\; l \;=\; 77.1\ m$$

La potenza assorbita a temperatura ambiente è quindi data da
$W_{iniz} \;=\; \frac{f^2}{R_{15}} \;=\; 2.2\ kW$



5. Nel circuito disegnato in figura, f è un generatore ideale di forza elettromotrice sinusoidale di valore efficace f_eff. In condizioni di risonanza il valore efficace della differenza di potenziale misurata ai capi della resistenza è $V_eff = (f_eff/2)$. Determinare il valore della capacità Csapendo che $L = 0.1H$ ed $R = 100\Omega$.

Soluzione:

Se si utilizza il metodo simbolico, l'impedenza complessiva vista dal generatore Z_tot è data dalla serie dell'impedenza associata all'induttore e al parallelo RC pari a

$$\widetilde{Z_{eq}} \;=\; \frac{\frac{R}{j\omega C}}{R+\frac{1}{j\omega C}} \;=\; \frac{R}{j\omega CR+1}$$

Il fasore associato alla corrente erogata dal generatore è quindi data da

$$\widetilde{i} \;=\; \frac{f_m}{\widetilde{Z_{tot}}} \;=\; \frac{f_m}{j\omega L+\frac{R}{j\omega CR+1}} \;=\; f_m\frac{j\omega CR+1}{j\omega L+R(1-\omega^2 LC)} \qquad f_m \;=\sqrt{2}f_{eff}$$

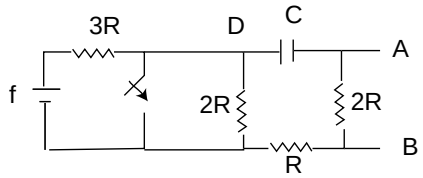
da cui si ottiene il fasore V_R corrispondente alla caduta di potenziale sulla resistenza R

$$\widetilde{V_R} \;=\; \widetilde{i}\,\widetilde{Z_{eq}} \;=\; \frac{f_m R}{j\omega L+R(1-\omega^2 LC)}$$

In condizioni di massima risonanza $1-\omega^2 LC \;=\; 0, \Rightarrow$

$$|\widetilde{V_R}| \;=\; \sqrt{2}V_{eff} \;=\; \frac{\sqrt{2}f_{eff}R}{\omega L} \;\Rightarrow\; \omega = \frac{2R}{L} \;\Rightarrow\; C = \frac{1}{L\omega^2} = 2.5\ \mu F$$

6. Il circuito in figura è a regime quando si chiude l'interruttore a $t = 0$. Calcolare l'espressione della differenza di potenziale $\Delta V = V_A - V_B$ per $t > 0$.



Soluzione:

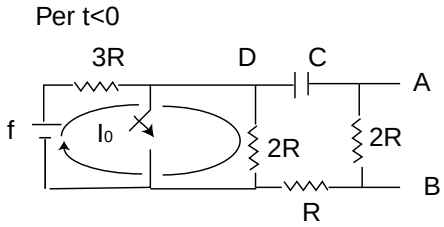
$Per \quad t < 0$

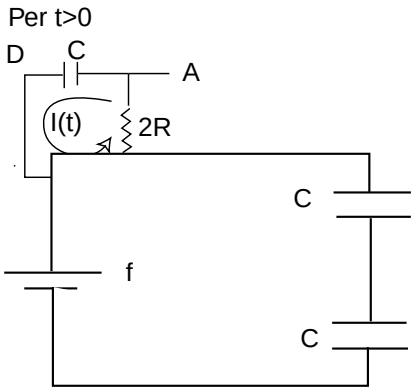
$\Delta V_{DA} = V_D - V_A = 2RI_0 = \dfrac{2R}{2R+3R} f = \dfrac{2}{5} f$

$Per \quad t > 0$

$V_A - V_B = \Delta V(t) = -2RI(t) = -2R\Delta \dfrac{V(t)}{} =$

$= -\dfrac{2}{3}\Delta V_{DA}(0) \cdot e^{-\frac{t}{\tau}} - \dfrac{4}{15} f e^{-\frac{t}{\tau}} \quad con \tau = 3RC$

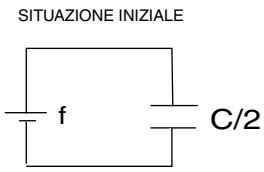




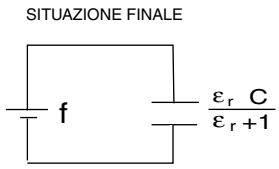
7. Nel circuito mostrato in figura, inizialmente i due condensatori piani hanno il vuoto tra le armature e la stssa capacità C. A partire da questa situazione di equilibrio iniziale uno dei due condensatori viene riempito di materiale omogeneo ed isotropo di costante dielettrica relativa ϵ_r. Si raggiunge così una nuova situazione di equilibrio. Ricavare l'espressione del lavoro elettrico erogato dal generatore nel passaggio dallo stato iniziale a quello finale.

Soluzione:

SITUAZIONE INIZIALE $\quad q_{in} = \dfrac{C}{2} f$

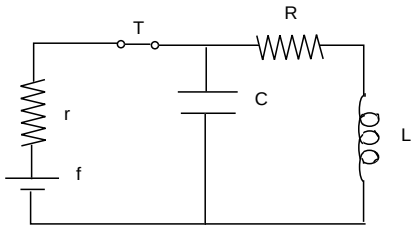


SITUAZIONE FINALE $\quad q_{fin} = \dfrac{\epsilon_r C}{\epsilon_r + 1} f$



$\triangle q = q_{fin} - q_{in} = \dfrac{\epsilon_r - 1}{2(\epsilon_r + 1)} f C \longrightarrow L_g = f \triangle q$

8. Il circuito mostrato nel disegno, in cui sono da considerarsi noti f, r, R, C, L e trascurabile la resistenza elettrica dell' induttanza L, é inizialmente a regime con l' interrutore T chiuso come in figura. All' istante $t = 0$ l'interruttore viene aperto. Ricavare l' espressione dell' energia totale (elettrica e magnetica) U_0 presente nel circuito RLC all' istante $t = 0$. Nell' ipotesi che valga la diseguaglianza $4L > CR^2$, ricavare anche l' andamento temporale della carica elettrica $Q(t)$ presente sul condensatore per $t > 0$.



Soluzione:

$$f = i_0(r+R) \quad i_0 = f/(r+R) \quad \triangle V = i_0 R = \frac{fR}{r+R}$$

$$U_o = \frac{1}{2}C \triangle V^2 + \frac{1}{2}Li_0^2 = \frac{1}{2}\frac{f^2}{(r+R)^2}(CR^2 + L)$$

$$\frac{Q(t)}{C} - L\frac{di}{dt} = iR \longrightarrow \frac{Q}{C} + L\frac{d^2Q}{dt^2} + R\frac{dQ}{dt} = 0$$

$$Q(t) = Ae^{-\gamma t} sen(\omega t + \varphi) \qquad \gamma = R/2L$$

$$\left(\triangle = \frac{R^2}{4L^2} - \frac{1}{LC} < 0\right) \qquad \omega = \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2}}$$

9. Un circuito RLC serie è collegato ad un generatore di $f.e.m.$ alternata $f_{eff} = 10V$. Si sa che alla pulsazione di risonanza $\varpi_0 = 5000s^{-1}$ nel circuito si dissipa una potenza media di $2W$. Se si elimina la capacità alla stessa pulsazione la potenza media dissipata diventa $1W$. Determinare i valori di R, L e C.

Soluzione:

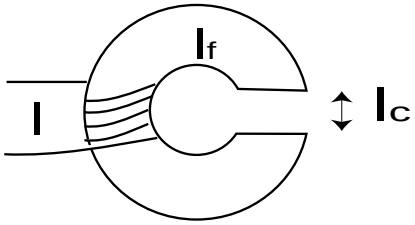
R: in risonanza $\quad < P >= I_{eff}^2 \; R = \frac{f_{eff}^2}{R} \quad R = \frac{f_{eff}^2}{< P >} = 50\Omega$

$L : circuito RL \quad < P >= I_{eff} f_{eff} cos\varphi \; = \frac{f_{eff}^2 R}{R^2 + \omega^2 L^2} \quad da\ cui \quad L = \frac{1}{\omega}\sqrt{\frac{f_{eff}^2 R}{< P >} - R^2}$

$L = 10mH$

$C : \quad \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \quad C = \frac{1}{L\omega_0^2} = 4\mu F$

10. Un elettromagnete è costituito da un toro sottile circolare di materiale ferromagnetico di lunghezza media $l_f = 1m$, sezione uniforme $S = 400cm^2$, permeabilità magnetica relativa $\mu_r = 700$, dotato di un traferro in aria di spessore $l_0 = 1cm$ ($l_0 \ll l_f$). Sul toro sono avvolte 200 spire percorse da una corrente costante $I = 10A$. Trascurando il flusso disperso, calcolare la forza che si esercita tra le due facce del traferro.



Soluzione:

L'espressione della forza tra le facce del traferro può essere ricavata a partire dal gradiente spaziale dell'energia magnetica U_M complessivamente immagazzinata nel circuito magnetico. L'energia U_M è data dal prodotto della densità di energia magnetica w per il volume occupato dal circuito magnetico

$$U_M = \frac{1}{2}\frac{{B_0}^2 S l_0}{\mu_0} + \frac{1}{2}\frac{{B_f}^2 S l_f}{\mu_0 \mu_r} = \frac{1}{2}\frac{{B_0}^2 S}{\mu_0 \mu_r}(l_f + \mu_r l_0) \qquad (B_0 = B_f)$$

dove B_0 e B_f sono rispettivamente il campo di induzione magnetica presente nel traferro e all'interno del mezzo ferromagnetico. E' opportuno notare che $B_0 = B_f$ essendo diretti normalmente alla superficie di separazione tra i due mezzi. Il campo B può essere calcolato mediante la legge di Hopkinson

$$H_f l_f + H_0 l_0 = NI \qquad \frac{B_0 l_f}{\mu_0 \mu_r} + \frac{B_0 l_0}{\mu_0} = NI \Rightarrow B_0 = \frac{NI\mu_0\mu_r}{l_f + \mu_r l_0}$$

L'energia U_M risulta quindi pari a

$$U_M = \frac{1}{2}\frac{N^2 I^2 \mu_0 \mu_r S}{l_f + \mu_r l_0}$$

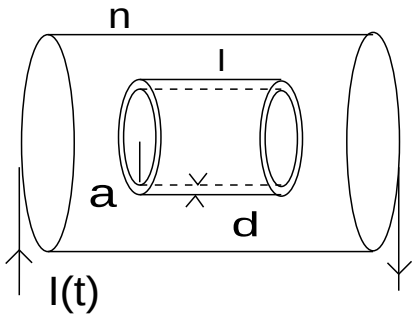
mentre la forza F è data da

$$F = +\frac{\partial U_M}{\partial l_0} = -\frac{1}{2}\frac{S N^2 I^2 \mu_0 {\mu_r}^2}{(l_f + \mu_r l_0)^2} = -770\ N$$

Si noti che il segno positivo davanti all'operatore di derivazione è dovuto al fatto che bisogna tenere in conto anche il lavoro fatto dal generatore per mantenere costante la corrente sull'avvolgimento.

Università degli Studi di Roma "La Sapienza"
Facoltà di Ingegneria
Raccolta di esercizi di Fisica II
CAMPI ELETTROMAGNETICI INDOTTI

1. In un solenoide lungo e compatto, in aria e con n spire per unità di lunghezza, la corrente viene portata da 0 ad un valore I_0 costante, con legge temporale $I(t) = (t/T)I_0$. Al suo interno, parallelamente all' asse del solenoide è posto un tubo cilindrico di lunghezza l, raggio a e piccolo spessore d, fatto di materiale conduttore non ferromagnetico di resistività uniforme ρ. Calcolare l' energia che viene dissipata per effetto Joule nel tubo. Si trascuri l' autoinduzione. Valori numerici: $n = 10^3/m, I_0 = 10A, T = 10^{-2}s, l = 0.8m, a = 0.1m, d = 1mm, \rho = 2 \cdot 10^{-8}\Omega m$.



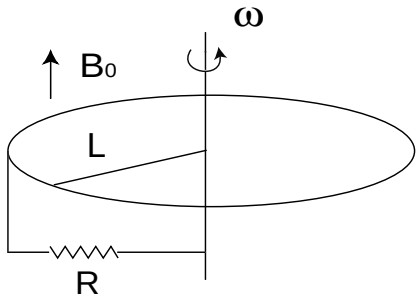
SOLUZIONE:

Il flusso $\Phi(B)$ concatenato con il cilindro di materiale ferromagnetico è variabile nel tempo. In accordo alla legge di Faraday Neumann Lenz , viene indotta un forza elettromotrice pari a $-\frac{d\Phi(B)}{dt}$ che a sua volta da luogo ad una corrente elettrica lungo il mantello del cilindro stesso. Tenendo conto che il campo B prodotto dal solenoide $B = \mu_0 n I(t)$ è uniforme e diretto parallelamente alle generatrici del cilindro, il flusso $\Phi(B)$ è semplicemente dato dal prodotto del modulo di B per l'area della base.
Per il calcolo dell'energia complessivamente dissipata per effetto Joule occorre integrare la potenza istantanea nell'intervallo (0,T) richiesto per raggiungere la corrente costante I_0. Passato tale intervallo, la fem indotta cessa di esistere essendo la corrente I(t) costante.
$U = \int_0^T W\ dt = \int_0^T \frac{f_i^2}{R} dt = \int_0^T (\mu_0 n \frac{I_0}{T} \cdot \pi a^2)^2 \cdot \frac{1}{R} dt = T \cdot (\mu_0 n \frac{I_0}{T} \cdot \pi a^2)^2 \cdot \frac{1}{R}$
Per il calcolo della resistenza elettrica complessiva è opportuno ricordare che un conduttore di sezione costante S, lunghezza l e resistività ρ, presenta ai suoi capi una resistenza R pari a $R = \rho\ l/S$. Dato il verso di circolazione della corrente già citato precedentemente, la lunghezza l e la sezione S sono nel nostro caso pari a
$l = 2\pi a \quad ; \quad S = d \cdot l$

Sostituendo l'espressione della resistenza R, si perviene al risultato finale

$$U = WT = \frac{\mu_0^2 n^2 I_0^2 \pi a^3 l d}{2T\rho} \simeq 1J$$

2. Una sbarra metallica lunga L ruota con velocità angolare ω in un piano orizzontale intorno ad un perno conduttore verticale passante per un estremo. L'altro estremo della sbarra scorre lungo un contatto strisciante. Il contatto strisciante è collegato elettricamente al perno con una resistenza R. La sbarra è immersa durante tutta la rotazione in un campo di induzione magnetica uniforme $\vec{B}_c$ verticale. Calcolare la potenza dissipata nella resistenza.



SOLUZIONE:

L'asta di materiale conduttore si muove all'interno di una zona in cui è presente un campo di induzione B uniforme. Le cariche sono quindi soggette alla forza di Lorentz F_L ovvero a un campo elettromotore

$$f_i = \int_0^L \vec{E}_i \cdot \vec{dl} \qquad \vec{E}_i = \vec{v} \times \vec{B}_0 \quad \text{parallelo alla sbarra}$$

Tenendo conto dell'orientazione di B e del verso di rotazione dell'asta, il campo E_i risulta diretto lungo l'asta e orientato verso l'esterno della circonferenza.
La forza elettromotrice indotta è pari a

$$f_i = \int_0^L \omega x B_0 dx = \omega B_0 \frac{L^2}{2} \quad \text{essendo a distanza x dal perno} \quad E_i = \omega x B_0$$

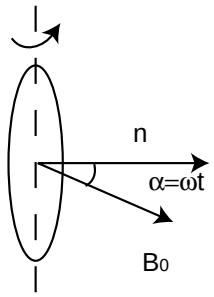
Essendo inoltre l'asta collegata alla resistenza R, si trova che la potenza dissipata è data da

$$P = i^2 R = \frac{{f_i}^2}{R} = \frac{\omega^2 {B_0}^2 L^4}{4R}$$

3. Una bobina di N spire circolari di area S e resistenza totale R può ruotare intorno ad un asse coincidente con un diametro. La bobina è immersa in un campo magnetico uniforme, costante nel tempo, di induzione $\vec{B}_0$, perpendicolare all'asse di rotazione. Calcolare il momento meccanico medio che deve fornire un motore per mantenere la bobina in rotazione con velocità angolare costante ω. Si trascurino l'autoinduzione e gli attriti meccanici.

SOLUZIONE:

La bobina è soggetta ad un flusso concatenato $\Phi(B)$ variabile nel tempo. Per effetto dell'induzione e.m, viene indotta un f.e.m ovvero una corrente indotta pari a



$$i_{ind} = -\frac{1}{R}\frac{d}{dt}\Phi(\vec{B_0}) = \frac{N\omega S B_0}{R} sen\omega t$$

Il momento magnetico della spira associato alla corrente indotta è:$\vec{m} = NSi_{ind}\vec{n}$. Il momento meccanico fornito dal motore deve essere uguale e contrario al momento meccanico agente sulla spira : $\vec{M}_{mot} = -\vec{M} = -\vec{m} \times \vec{B}_0$

$$M_{mot} = \frac{\omega N^2 S^2 B_0^2}{R} sen^2\omega t \Rightarrow M_{mot} = \frac{\omega N^2 S^2 B_0^2}{2R}$$

4. Una piccola spira di raggio $a = 1cm$ è percorsa da una corrente alternata $i_0 cos(\omega t)(\omega = 10^4, i_0 = 1A)$. Calcolare la corrente che si induce in una grande spira di raggio $b = 1m$ complanare e concentrica con la spira piccola. Sia $R = 1\Omega$ la resistenza della spira grande.

SOLUZIONE:

$$B_0 = \frac{\mu_0 I}{2b} \quad campo\ generato\ dalla\ spira\ grande\ al\ centro\ se\ fosse\ percorsa\ da\ una\ corrente.$$

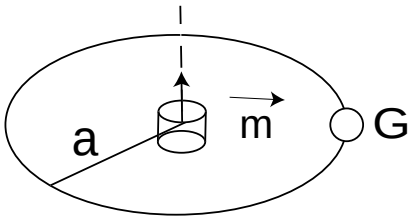
$$\Phi_{spirapiccola}(\vec{B_0}) = \frac{\mu_0 I}{2b}\pi a^2 \quad M = \frac{\Phi(B_0)}{I} = \frac{\mu_0 \pi a^2}{2b} \quad coeff.\ mutua\ induzione$$
$(M_{12} = M_{21})$

$$fem = -M\frac{di}{dt} = M\omega i_0 sin(\omega t) \quad I(t) = \frac{fem(t)}{R} = \frac{\mu_0 \pi a^2 \omega i_0}{2bR} sin(\omega t) = I_0 \sin(\omega t)$$

$I_0 \cong 2\ \mu A$

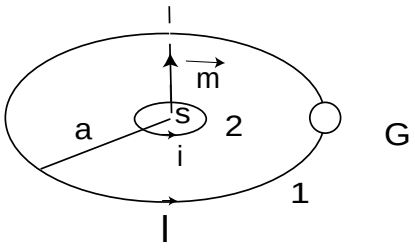
5. Al centro di una spira circolare conduttrice di resistenza R e raggio a, nella quale è inserito un galvanometro balistico G, è disposto in aria, un piccolo cilindro magnetizzato lungo la direzione del suo asse, che è disposto perpendicolarmente al piano della spira.

A partire da questa situazione iniziale, il magnete viene portato a grande distanza. Per effetto di questo spostamento il galvanometro balistico registra il passaggio di una carica totale Q nella spira. Ricavare l'espressione del momento magnetico del cilindretto magnetizzato.



SOLUZIONE:

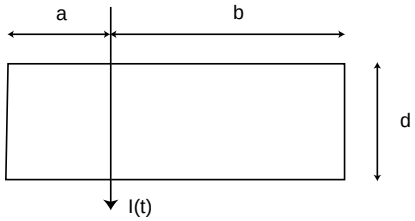
$m = iS \;\; M = M_{21} = \dfrac{\Phi_2(B_1)}{I} \simeq \dfrac{\mu_0 I}{2aI} S$
$(S << \pi a^2)$



Per Felici : $Q = \dfrac{1}{R}\left[\Phi_{in} - \Phi_{fin}\right] = \dfrac{1}{R}\Phi_{in} \longrightarrow \Phi_{in} = RQ$

ma: $\Phi_{in} = Mi = \dfrac{\mu_0(iS)}{2a} = \dfrac{\mu_0 m}{2a} = RQ \longrightarrow m = \dfrac{2aRQ}{\mu_0}$

6. Una spira rettangolare chiusa di resistenza r sia appoggiata su un filo indefinito percorso da una corrente di intensità $I(t)$, come mostrato in figura. Spira e filo sono isolati elettricamente. Si calcoli l'energia dissipata nella spira se la corrente che scorre nel filo aumenta segue ndo la legge: $I(t) = I_0\left[1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right]$. Si trascuri l'autoinduzione. $[r = 5\Omega,\ I_0 = 3A,\ \tau = 1ms,\ b = 3a = 2d = 0.1m]$



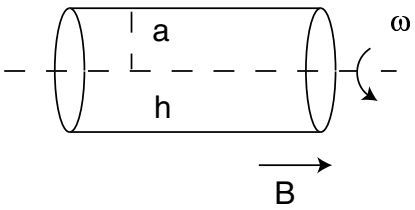
SOLUZIONE:

$$f_i = -\frac{d\phi(B)}{dt} \qquad \phi(B) = \int_a^b d \cdot dx \cdot B(x) = \int_a^b \frac{\mu_0 I(t) d}{2\pi x} = \frac{d\mu_0 ln\frac{b}{a}}{2\pi} I(t)$$

$$\Longrightarrow f_i = \frac{\mu_0}{2\pi} ln\frac{b}{a}\frac{I_0}{\tau} e^{\frac{-t}{\tau}}$$

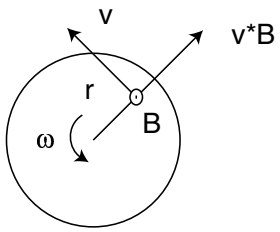
$$\mathcal{E} = \int_0^\infty p(t)dt = \int_0^\infty \frac{f_i^2}{r} dt = \frac{d^2\mu_0^2 ln^2\frac{b}{a} I_0^2}{8\pi^2\tau r} \qquad \Rightarrow \quad \mathcal{E} = 1.2 \cdot 10^{-12} J$$

7. Un cilindro di rame di raggio a e altezza $h >> a$, ruota con velocità angolare uniforme ω attorno al proprio asse ed è immerso in un campo B stazionario e uniforme, parallelo all'asse del cilindro. Calcolare l'espressione della carica Q presente all'interno del corpo cilindrico.



SOLUZIONE:

All' interno del cilndro di rame :
$\vec{E} = -\vec{E_L} = -\omega B \vec{r}$



Applichiamo il teorema di Gauss ad una superficie cilndrica appena contenuta nel cilindro di rame:

$$Q = \epsilon_0 \int_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = -\epsilon_0 ES = -\epsilon_0 ES = -\epsilon_0 \omega B a \cdot 2\pi a h$$

Università degli Studi di Roma "La Sapienza"
Facoltà di Ingegneria
Raccolta di esercizi di Fisica II
ONDE ELETTROMAGNETICHE ed OTTICA

1. Un'onda piana di intensità I e lunghezza λ si propaga in un mezzo di indice di rifrazione n impedenza caratteristica Z. Calcolare l'ampiezza del campo elettrico $\vec{E}$e di quello di induzione $\vec{B}$ associati all'onda sapendo che, se questa si propagasse nel vuoto, la sua lunghezza d'onda sarebbe λ_0.
(Z=290 Ω, I=10 W/m^2, λ=500nm, λ_0=650nm).
Soluzione:

In un'onda elettromagnetica piana monocromatica i vettori campo elettrico ed induzione magnetica sono ortogonali fra loro ed ortogonali alla direzione di propagazione. I tre vettori $\vec{E}, \vec{B}, \hat{i}$ formano quindi una terna trirettangola destra che senza perdita di generalità possiamo porre lungo gli assi y,z,x.
$E_y(x,t) = E_m cos(kx - \omega t + \varphi)$
$B_z(x,t) = B_m cos(kx - \omega t + \varphi)$
$H_z(x,t) = H_m cos(kx - \omega t + \varphi)$

dove i valori massimi sono regolati da $B_m = E_m/\nu$ e $H_m = E_m/Z$

Il vettore di Poynting $\vec{N} = \vec{E} \times \vec{H}$ punta la direzione di propagazione dell'onda e vale $N = E_y \cdot H_z = E_m H_m \ cos^2(kx - \omega t + \varphi) = \frac{E_m^2}{Z} cos^2(kx - \omega t + \varphi)$. L'intensità dell'onda si ottiene facendo la media temporale in un periodo; ovviamente la funzione cos^2 varia tra 0 ed 1 con valor medio $\frac{1}{2}$ così che l'intensità si scrive come $I = \overline{N} = \frac{E_m^2}{2Z}$
da cui invertendo si ha $E_m = \sqrt{2ZI} = \sqrt{2 \cdot 290 \cdot 10} = \sqrt{5800} = 76.16 \ V/m$ il valore massimo del vettore di induzione si ottiene invece a partire dal valore massimo del campo elettrico come $B_m = \frac{E_m}{\nu} = \frac{E_m \cdot n}{c}$ dove n è l'indice di rifrazione. Come ricavare il valore dell'indice di rifrazione? Per esempio dal rapporto fra l'impedenza caratteristica del vuoto $Z_0 = 120\pi \simeq 377\Omega$ e quella data nel mezzo $Z = 290\Omega$

$$n = \frac{Z_0}{Z} = \frac{377}{290} = 1.3$$

oppure è ugualmente possibile dal rapporto fra le lunghezza d'onda nel vuoto e nel mezzo

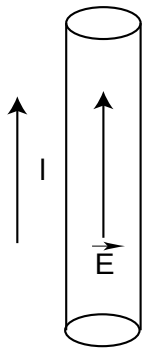
$$n = \frac{k}{k_0} = \frac{\lambda}{\lambda_0} = \frac{650}{500} = 1.3$$

A questo punto il valore massimo del campo di induzione risulta

$$B_m = \frac{E_m \cdot n}{c} = \frac{\sqrt{5800} \cdot 1.3}{3 \cdot 10^8} = 3.3 \cdot 10^{-7} \ T$$

2. Una sottile barretta di plastica in aria, di costante dielettrica $\epsilon_r = 3$, lunghezza $l = 20cm$, e sezione $S = 1mm^2$, è investita da un' onda radio monocromatica di intensità $I = 10^{-6}W/m^2$, polarizzata parallelamente alla sbarretta. Calcolare l' ampiezza massima p_m del momento di dipolo elettrico oscillante indotto nella sbarretta.

Soluzione:



Essendo la barretta di plastica e quindi di materiale dielettrico, l'effetto del campo elettrico è quello di indurre due distribuzioni superficiali di cariche di polarizzazione σp(t), di pari modulo e opposte in segno, sulle sezioni ortogonali alla direzione del campo elettrico. In accordo alla definizione data per due cariche puntiformi, il momento di dipolo p è quindi dato dal prodotto del modulo della carica presente su una delle due sezioni per la lunghezza della barretta. Si ricorda che la σp è data dalla relazione:
$\sigma p = \epsilon_0(\epsilon_r - 1)E$
dove E è il campo elettrico interno alla barretta. Se si tiene conto della conservazione della componente tangenziale del campo elettrico all'interfaccia di due dielettrici e che il campo elettrico dell'onda e.m. è diretto parallelamente alla superficie della barretta, allora si può immediatamente dedurre che il campo E dell'onda e.m. coincide con quello all'interno della barretta. Se con il pedice M facciamo riferimento al valore massimo della grandezza indicata, possiamo ricavare E_M dalla relazione che fornisce l'intensità media di un onda em:

$$I = \frac{E_M^2}{2Z_0} \quad \Rightarrow E_M = \sqrt{2Z_0 I}$$

e in accordo a quanto detto prima, il momento di dipolo massimo indotto nella barretta:
$p_M = P_M l S = \epsilon_0(\epsilon_r - 1) l S \sqrt{2Z_0 I} \simeq 10^{-19} Cm$

3. L'antenna di una stazione radio emette onde elettromagnetiche sferiche sinusoidali di frequenza $\nu = 100Mhz$, polarizzate linearmente. La potenza media irraggiata è di $10^5 W$. Calcolare la forza elettromotrice indotta in una spira metallica che racchiude una superficie di $S = 10cm^2$, lontana $10Km$ dall'antenna e posizionata con la normale alla superficie parallela al vettore di induzione magnetica dell'onda

Soluzione:

Sulla spira si viene ad indurre un f.e.m in accordo alla legge di Faraday Neumann Lenz espressa da

$$f_i = -\frac{d\Phi(\vec{B_0})}{dt}$$

Per calcolare il flusso concatenato $\Phi(B)$ è necessario ricavare il campo B ovvero il campo elettrico E essendo le due grandezza legate dalla relazione $B_0 = E_0/c$.
Il campo E può essere ricavato a partire dall'osservazione che l'antenna emette in maniera onde e.m. sferiche. In questo caso l'intensità media a distanza D è data dal semplice dal rapporto della potenza media emessa sulla superficie sferica di raggio D. Inoltre, vista la notevole distanza D a cui è posta la spira, l'onda sferica può essere approssimata localmente come un'onda piana.

Ricordando l'espressione dell'intensità media di un onda e.m piana, si ottiene

$$\overline{\Im} = \frac{\overline{P}}{4\pi D^2} \qquad \overline{\Im} = \frac{{E_0}^2}{2Z_0} \qquad B_0 = \frac{E_0}{c}$$

da cui

$$B_0 = \frac{1}{c}\sqrt{\frac{2Z_0\overline{P}}{4\pi D^2}} = 8,2 \times 10^{-10} \quad T$$

Infine, notando che la normale alla spira è parallela al campo B, si può calcolare il flusso concatenato e, di conseguenza, la forza e.m. indotta.

$$f_i = \omega S B_0(D) sin(2\pi\nu t) = 5.15 \times 10^{-4} \sin(2\pi \cdot 10^8 t) \quad V$$

4. Un'onda elettromagnetica monocromatica piana, polarizzata circolarmente, di intensità media $\bar{I}$, si propaga nel vuoto. Calcolare la forza elettromotrice indotta su una sottile asta metallica di lunghezza l perpendicolare alla direzione di propagazione dell'onda.

Soluzione:

Ponendo la direzione di propagazione dell'onda lungo l'asse x di un sistema di riferimento xyz,e l'asta conduttrice lungo l'asse y con un estremo nell'origine,si trova:
campo elettrico dell'onda: $\vec{E} \;=\; E_0 cos(\omega t - kx)\widehat{J} + E_0 sen(\omega t - kx)\widehat{k}$

forza elettromotrice indotta: $f_i = \displaystyle\int_0^l \vec{E} \cdot \vec{dl} \;=\; E_0 l cos\omega t$

$$\overline{I} \;=\; \frac{1}{Z_0 T}\int_0^T \vec{E} \cdot \vec{E} dt \;=\; \frac{1}{Z_0 T}\int_0^T [E_0^2 cos^2(\omega t - kx) + E_0^2 sen^2(\omega t - kx)]dt \;=\; \frac{E_0^2}{Z_0} \;\Rightarrow$$

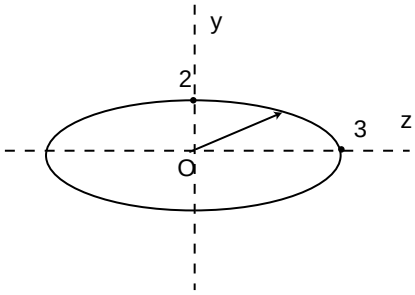
$$E_0 \;=\; \sqrt{\overline{I} Z_0} \;\Rightarrow\; f_i = l\sqrt{\overline{I} Z_0} cos\omega t$$

5. Un'onda e.m. piana si propaga in aria.Rispetto a un dato sistema di riferimento cartesiano l'espressione del campo $\vec{B}$ è $\vec{B}$=[$\vec{j}$ 2cos(kx-ωt)+$\vec{k}$ 3sen(kx-ωt)]$10^{-8}T$. Calcolare la potenza media incidente su una superficie piana d'area $S = 9m^2$,la cui normale forma un angolo di 60 gradi con l'asse x.Riconoscere lo stato di polarizzazione dell'onda.

Soluzione:

$$W = IScos60° = \frac{E_{eff}^2}{z_0} Scos60° = 9 \cdot 10^1 6 \frac{2^2+3^2}{2 \cdot 377} \cdot 10^{-16} \cdot 9 \cdot \frac{1}{2} = 0.70W$$

$$\frac{B_{0y}}{B_{0z}} = \frac{2}{3} \Delta\phi_{yz} = \frac{\pi}{2} \longrightarrow pol.ellittica$$



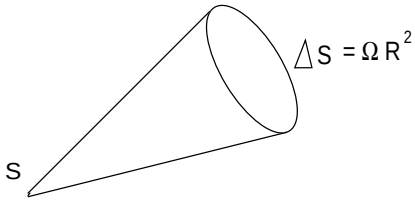
6. Una sorgente di luce irraggia radiazione uniformemente in un cono di apertura $\Omega = 10^{-5}$ steradianti con una potenza media $P = 1watt$. Calcolare il valore massimo di campo elettrico e magnetico misurati ad una distanza $R = 100m$ dalla sorgente stessa.

Soluzione:

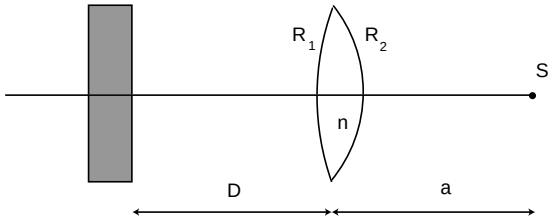
$$\triangle S = \Omega \cdot R^2 \qquad \bar{I} = \frac{P}{\triangle S} = \frac{P}{\Omega \cdot R^2} = 10 \;\; W/m^2$$

$$\bar{I} = \frac{1}{2}\frac{E_M^2}{Z_0} \quad \Longrightarrow \quad E_M = \sqrt{2Z_0\bar{I}} \cong 87 \;\; V/m$$

$$H = \frac{E}{Z_0} \cong 0.23 \;\; Asp/m$$



7. Una lente sottile di raggi R_1 ed R_2 ed indice di rifrazione n ed uno specchio piano siano disposti in aria come indicato in figura in modo da formare un sistema ottico centrato. Una sorgente puntiforme S viene posta sull' asse a distanza a dalla lente. Si calcoli la posizione dell' immagine formata dal sistema rispetto alla lente. [Dati: $|R_1| = 0.4m, |R_2| = 0.2m, n = 1.5, a = 0.3m, D = 0.5m$]



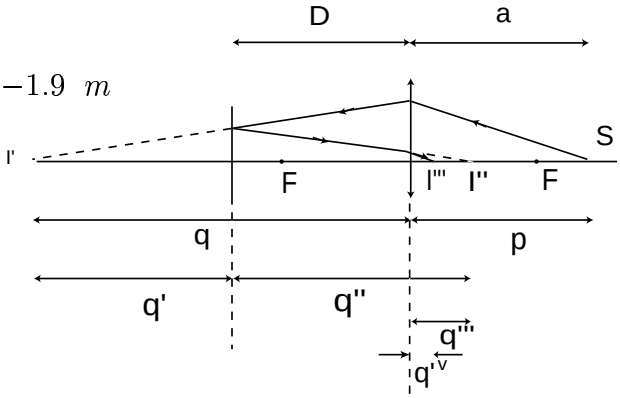
Soluzione:

- Primo passaggio nella lente
  $\frac{1}{a} + \frac{1}{q} = \frac{1}{f} \quad q = 2.4 \;\; m \quad \Rightarrow q^I = D - q = -1.9 \;\; m$
  rispetto allo specchio

- Riflessione sullo specchio

  $$\frac{1}{q^I} - \frac{1}{q^{II}} = 0 \quad \Rightarrow \quad q^{II} = q^I = -1.9 \;\; m$$

  $\Rightarrow q^{III} = -1.4 \;\; m$ rispetto alla lente



- Secondo passaggio nella lente
  $$\frac{1}{q^{III}} + \frac{1}{q^{IV}} = \frac{1}{f} \quad q^{IV} \quad \cong 0.22 \;\; m$$

$$\frac{1}{f} = (n-1)\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right) \simeq 3.75 \quad f \cong 0.27 \;\; m$$

L' immagine I''' si forma 22 cm a destra della lente

8. Una spira circolare di raggio a, resistenza R ed induttanza L è investita, nel vuoto, da un'onda e.m. piana, sinusoidale con pulsazione ω,polarizzata linearmente con il vettore $\vec{B}$ perpendicolare al piano della spira. L'intensità media dell'onda è $\overline{I}$ e la lunghezza d'onda è molto maggiore del raggio a. Ricavare l'espressione della corrente circolante nella spira.

Soluzione:

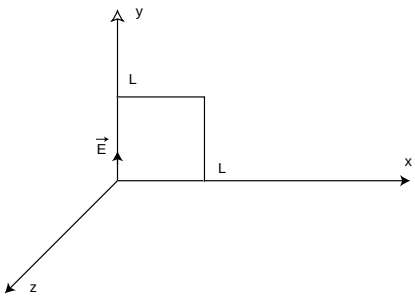
$$B = B_0 cos(\omega t - kx) \;\; \bar{I} = E_0^2/2Z_0 \longrightarrow B_0 = \sqrt{2Z_0\bar{I}}/c$$

$$f_i = -\frac{d\Phi(B)}{dt} = \left[\pi a^2 \omega \frac{\sqrt{2Z_0\bar{I}}}{c}\right] sen\omega t$$

$$i(t) = I_0 sen(\omega t + \varphi) \qquad I_0 = (\pi a^2 \omega \sqrt{2Z_0\bar{I}})/(\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2})$$

$$tg\varphi = -\omega L/R$$

9. Un' onda elettromagnetica piana linearmente polarizzata con il vettore campo elettrico parallelo all' asse y, di frequenza $\nu = 300MHz$ e ampiezza $E_0 = 100mV/m$ si propaga nel vuoto lungo l'asse x ed investe una spira quadrata di lato $L = 25cm$ disposta, come in figura, nel piano xy. Se la spira ha resistenza elettrica complessiva $R = 30\Omega$, calcolare la corrente $i(t)$ circolante nella spira.



Soluzione:

$$\lambda = c/\nu = 1 \;\; m \quad (L = 0.25 \;\; m)$$

$$\begin{cases} E = E_y = E_0 cos(kx - \omega t) \\ B = B_z = \dfrac{E_0}{c} cos(kx - \omega t) \end{cases}$$

$$f_i = -\frac{d\Phi(B)}{dt}$$

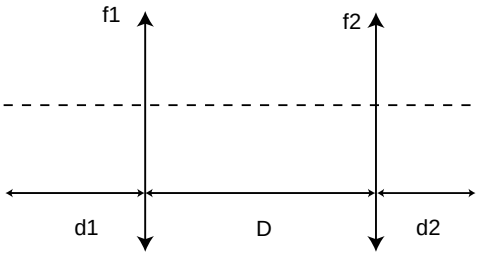
$$\Phi(B) = \int_0^L \frac{E_0}{c} cos(kx - \omega t) L dx = \frac{E_0 L}{ck} [sen(kL - \omega t) + sen\omega t]$$

$$f_i = \frac{E_0 L \omega}{ck} [cos(kL - \omega t) - cos\omega t] \qquad \left(\frac{\omega}{k} = c\right)$$

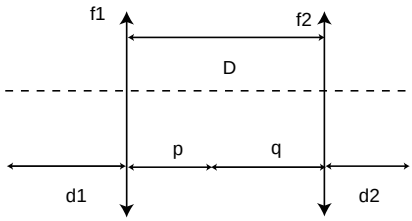
$$i(t) = \frac{f_i}{R} = \frac{E_0 L}{R} [cos(kL - \omega t) - cos\omega t] = 0.83 \cdot 10^{-3} \left[cos\left(\frac{\pi}{2} - \omega t\right) - cos\omega t\right] =$$

$$= 0.83 \cdot 10^{-3} (sen\omega t - cos\omega t) A$$

10. Due lenti sottili di focale f_1 ed f_2 sono disposte come in figura ad una distanza D. Si determini il valore di D affinché l'immagine di un oggetto posto a distanza d_1 alla sinistra della prima lente si crei ad una distanza d_2 a destra della seconda lente. [$f_1 = 0.100m$, $f_2 = 0.05m$, $d_1 = 1m$, $d_2 = 0.1m$]



Soluzione:

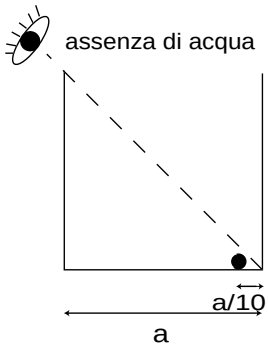


$$\begin{cases} \dfrac{1}{d_1} + \dfrac{1}{p} = \dfrac{1}{f_1} \\ \dfrac{1}{p'} + \dfrac{1}{d_2} = \dfrac{1}{f_2} \end{cases}$$

$$p' + p = D \Rightarrow p = \frac{f_1 d_1}{d_1 - f_1}$$

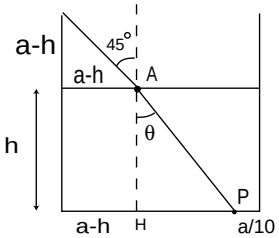
$$D - p = \frac{d_2 f_2}{d_2 - f_2} \qquad \Rightarrow D = \frac{d_2 f_2}{d_2 - f_2} + \frac{f_1 d_1}{d_1 - f_1} \cong 0.21m$$

11. Un uomo guarda un recipiente cubico di lato $a = 10cm$ dall' alto sotto un angolo di 45° in modo da vedere il fondo del recipiente proprio in corrispondenza dello spigolo opposto a quello dal quale egli guarda. Quanta acqua ($n = 1.33$) deve essere messa nel recipiente perchè egli possa vedere un oggetto puntiforme sul fondo posto ad una distanza di $a/10$ dallo spigolo?



Soluzione:

$$\overline{AH} \;=\; h$$



$$\overline{HP} \;=\; a-(a-h)-\frac{a}{10} \;=\; h-\frac{a}{10}$$

$$\theta \;=\; arcsin[\frac{sin\ 45}{n_{H_2O}}] = 32.12^\circ$$

$$\overline{HP} \;=\; \overline{AH}\ tg\theta \;\Rightarrow\; h-\frac{a}{10} \;=\; htg\theta$$

$$h \;=\; \frac{\frac{a}{10}}{1-tg\theta} \;\cong\; \frac{a}{3.7} \;\cong\; 2.69\ cm$$