

# DALL'ELETTROMAGNETISMO ALL'ELETTROTECNICA.

## 1 La strategia dello studio.

Il percorso logico che viene proposto agli allievi ingegneri nella presente dispensa per illustrare l'Elettrotecnica, e cioè lo sviluppo delle applicazioni dell'elettromagnetismo, è quello indicato da Ercole Bottani (1897-1978), caposcuola di questa materia nel nostro Politecnico. Nel 1933 Bottani così precisava la via ai discepoli della "Scuola di perfezionamento per Ingegneri Eletttricisti":

"...Il costruttore anatomizza le macchine e gli apparecchi, cioè divide idealmente uno scatolone in tante scatole collegate tra di loro, e se ciò non basta divide ulteriormente le scatole in scatolette e così via di seguito. Può anche avvenire che così facendo, qualche scatola risulti ad infiniti morsetti, ma ciò nulla toglie alla verità dell'osservazione. Lo studio del funzionamento interno dello scatolone più grande si riduce allora a studiare il comportamento esterno delle scatole più piccole; lo studio dell'interno di queste si riduce allo studio dall'esterno di quelle più piccole e così via di seguito.

Ma poiché ci è tuttora ignoto il meccanismo intimo dei fenomeni elettromagnetici, per quanto oltre si spinga la suddivisione, di fronte alle più piccole scatolette dovremo necessariamente accontentarci delle misure che, su di esse, possiamo eseguire dall'esterno. Possiamo pertanto concludere che in definitiva noi oggi non possiamo fare altro che coordinare risultati di misure sviluppando delle teorie sintetiche ed immaginando dei circuiti equivalenti..."

In conclusione, di fronte ai fenomeni che si manifestano alla "porta" (là dove ogni sistema interagisce con quelli ad esso collegati) dei nostri sistemi fisici noi realizziamo strumenti di misura atti a qualificare e quantificare le grandezze misurabili alla porta e ci accontentiamo di correlare le misure in leggi e di sfruttare tali leggi per la nostra utilità. In relazione poi al tipo di relazione che il sistema fisico stabilisce tra le grandezze misurabili alla porta noi caratterizziamo il sistema stesso con nomi.

Ad esempio consideriamo un sistema meccanico collegabile ad altre parti meccaniche mediante due terminali (che possiamo denominare anche poli per modo che il sistema si può indicare come "bipolo meccanico"), deformabile per trazione o compressione dei poli. Se ai due poli applichiamo due forze uguali ed opposte (misurabili con adeguato strumento, il dinamometro) variabili nel tempo possiamo misurare come varia nel tempo (misurabile con l'orologio) lo spostamento relativo (misurabile con il metro) dei terminali e dalla correlazione tra queste due ultime misure dedurre la velocità relativa dei terminali, mentre dal prodotto della forza per la velocità deduciamo la potenza meccanica in gioco. Noi chiamiamo "smorzatore" un bipolo meccanico per il quale la forza è proporzionale alla velocità.

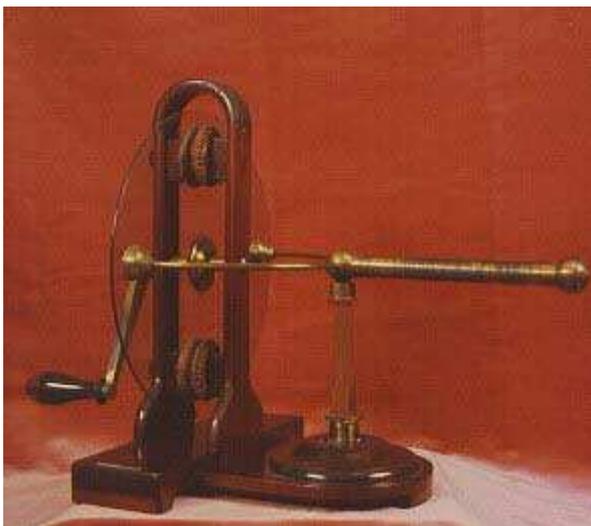
In modo analogo consideriamo un sistema elettrico collegabile ad altre parti elettriche mediante due poli. Pur non sapendo esattamente il significato dei termini sappiamo che se tra i poli applichiamo una tensione variabile nel tempo possiamo misurare, a ciascuno dei poli, come varia nel tempo la carica elettrica che fluisce nel bipolo e dalla relazione tra carica e tempo dedurre la corrente elettrica (la quantità di carica nell'unità di tempo) mentre dal prodotto della tensione per la corrente deduciamo, come verrà mostrato, la potenza elettrica in gioco. Noi chiamiamo "resistore" un bipolo elettrico per il quale la corrente elettrica è proporzionale alla tensione.

Nel seguito viene sinteticamente delineato il percorso seguito dall'esperienza umana nell'organizzare sotto forma di leggi le misure alla porta dei bipoli elettrici, verrà poi messo in evidenza il fatto che questa visione è estendibile, per analogia, ai sistemi meccanici per modo

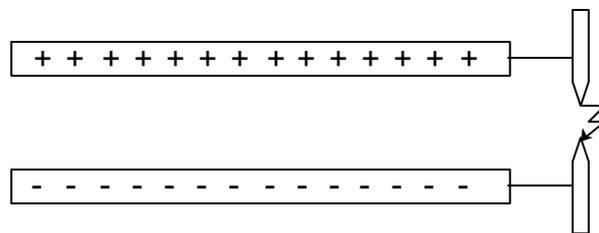
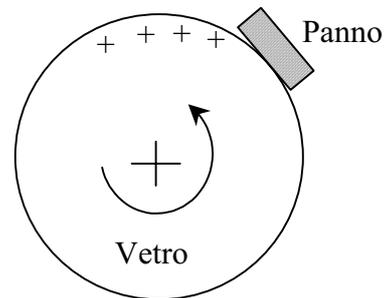
che, valendo tutta la metodologia per entrambe le culture, potremo analizzare in modo unitario i sistemi elettromeccanici.

## 2 Da Galvani a Volta, da Oersted ad Ampère.

La fine del '700 segna l'inizio dell'elettromagnetismo che eredita dai precedenti millenni di storia scritta poche e disperse nozioni: esiste un campo magnetico terrestre e cioè una regione in cui si manifesta sugli aghi magnetici una coppia che li orienta (indicativamente) come il meridiano terrestre ed esiste la possibilità di "caricare elettricamente" per strofinio i materiali isolanti (non metallici), si veda la Fig.2.1a. Si possono costruire "macchine elettrostatiche" che generino per strofinio "cariche elettriche" e queste sono accumulabili nei "condensatori", si tratta di due armature metalliche separate da un materiale isolante. Mettendo in contatto le armature di un condensatore tramite un conduttore metallico le cariche si ricombinano dando luogo ad una corrente elettrica di breve durata. La corrente assume la forma di una scarica visibile di colore violetto se alle armature vengono collegate due punte metalliche opportunamente ravvicinate, Fig.2.1b. Nelle conoscenze dell'epoca però non esisteva alcuna connessione tra la presenza di un campo magnetico e la presenza di una corrente elettrica.



a)



b)

Fig.2.1a-b a) Generazione di cariche per strofinio. b) Accumulo delle cariche in un condensatore e scarica del condensatore mediante due punte.

Per richiamare in termini attuali l'esperienza delle macchine elettrostatiche si ricorda che per effetto dello strofinio del vento sulla vernice isolante delle automobili si creano

cariche elettriche che si accumulano nella armatura metallica dell'auto. Questa, nei giorni secchi, è separata dalla armatura conduttrice del terreno dal materiale isolante di cui sono costituite le gomme; nel terreno, allora, si forma "per induzione" un sistema di cariche uguali e di segno opposto a quelle presenti sulle parti metalliche dell'auto. Nel momento in cui, toccando la maniglia della macchina, il guidatore appoggia a terra i piedi, il suo corpo, che è conduttore, mette in contatto le due armature del condensatore, il guidatore allora viene percorso dalla corrente di ricombinazione delle cariche ed avverte una contrazione dei suoi muscoli.



Fig.2.2 Ritratto di Galvani

Luigi Galvani (1737-1798), vedi Fig.2.2, professore di anatomia presso l'Accademia delle Scienze di quella città (Fig.2.4), nella sua opera "De viribus electricitatis...in motu musculari commentarius" del 1791 riferisce l'effetto di contrazione in un muscolo di vertebrato connesso ad un condensatore carico. Successivamente osservò una analoga contrazione dei nervi lombari di una rana quando gli estremi del nervo fossero toccati con i due bracci di un compasso costituiti rispettivamente da rame e da zinco (un "arco bimetallico", vedi Fig2.3). Tale fenomeno venne interpretato da Galvani con l'esistenza di una capacità animale di produzione ed accumulo nei muscoli di cariche elettriche che potevano esser rimosse per mezzo di archi bimetallici.

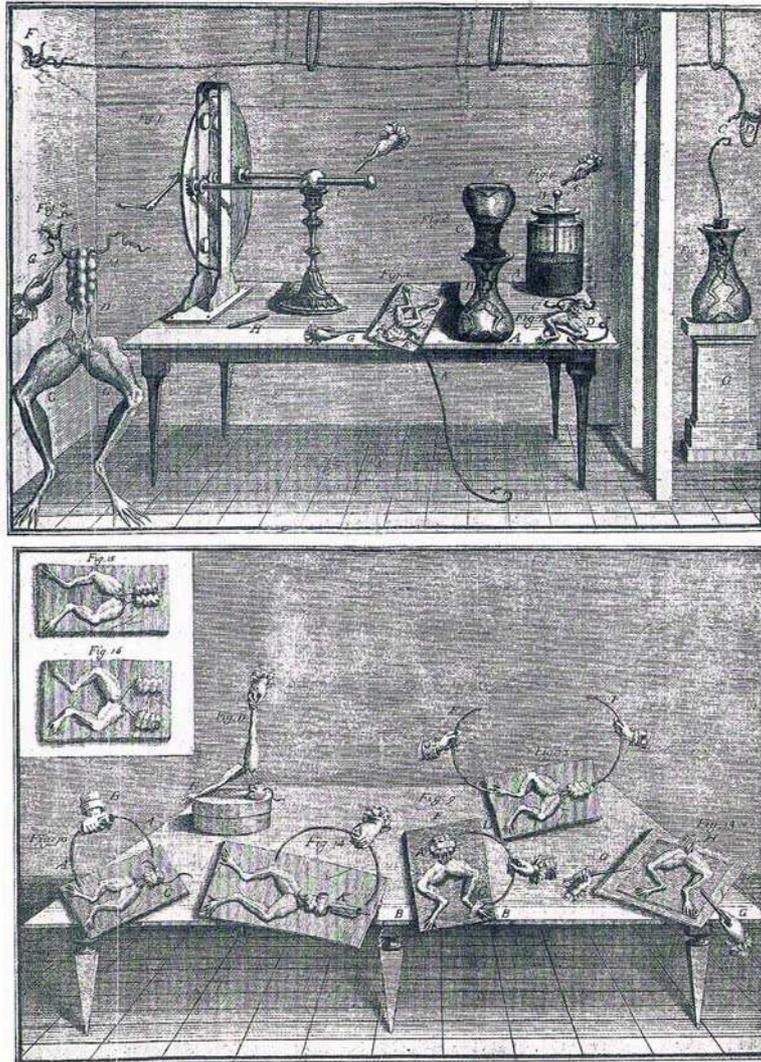


Fig.2.3 Tavole dalla "De viribus electricitatis..." illustranti il tavolo delle esperienze di Galvani.



Fig 2.4 La sala anatomica dell'Università di Bologna.

Alessandro Volta (1745-1827), vedi Fig2.5, ordinario di Fisica presso l'Università di Pavia, ripeté gli esperimenti di Galvani e li interpretò attribuendo l'origine della corrente al contatto tra due metalli diversi e non alla capacità dei muscoli animali di generare cariche elettriche. Per dimostrare questa ipotesi Volta realizzò una macchina costituita impilando dischetti di rame e di zinco (i due bracci del compasso) separati tra di loro da feltri imbevuti da una soluzione acida (i muscoli della rana): collegando i poli della pila (e cioè i dischetti terminali in rame, polo positivo, e quello in zinco, polo negativo) alle armature di un condensatore egli evidenziò il trasferimento di carica sulle armature senza alcuna operazione di strofinio. La carica trasferita, inoltre, era costante ed indipendente dal tempo di applicazione della pila al condensatore. Volta diede notizia della sua scoperta a J.Banks, Presidente della Royal Society (l'Accademia al tempo più prestigiosa), con una lettera datata 20 marzo 1800. Da quel momento fu possibile generare corrente elettrica in modo continuativo, sperimentarne gli effetti e predisporre gli strumenti di misura per lo studio dei bipoli elettrici.



Fig. 2.5 Ritratto di Volta.

Per comprendere il significato delle grandezze fisiche tensione, carica elettrica e corrente evidenziate dalla esperienza di Volta e le relative correlazioni consideriamo il circuito elettrico, particolarmente adatto alla sperimentazione, costituito da una pila Daniell

(analoga a quella di Volta di Fig 2.6) collegata ad una lampadina tramite conduttori metallici in aria, si veda la Fig.2.7.

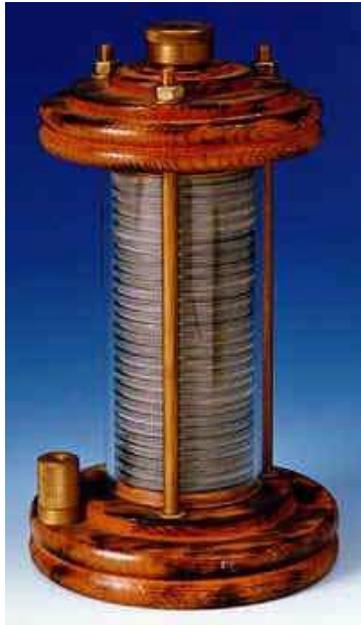


Fig2.6 La pila di Volta

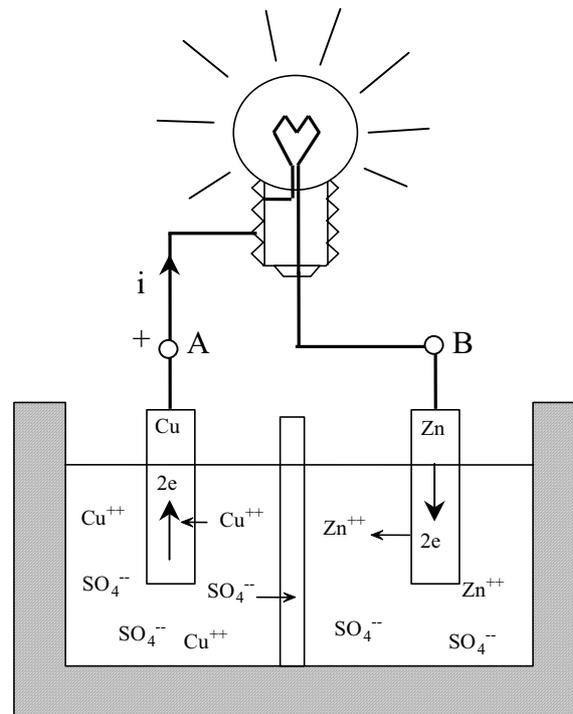


Fig.2.7 Il circuito sperimentale (pila Daniell)

La pila Daniell è costituita da una vasca in cui un setto poroso separa due parti evitandone il mescolamento meccanico ma consentendo lo scambio di ioni.

Nella prima parte è disposto un elettrodo in rame (che costituisce il polo positivo della pila, quello dal quale, come si vedrà, escono le cariche elettriche positive), immerso in una soluzione di solfato di rame  $CuSO_4$ . Nella soluzione sono quindi presenti lo ione rame  $Cu^{++}$  e lo ione  $SO_4^{--}$  (il simbolo  $-$  indica una carica elettrica negativa pari a quella dell'elettrone  $e^- = -1,602 \cdot 10^{-19} C$ , il simbolo  $+$  ed il simbolo  $e$  indicano una carica dello stesso valore, ma positiva; l'unità di misura della carica nel Sistema Internazionale è il coulomb [C], come verrà nel seguito precisato).

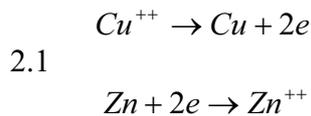
Nella seconda parte è disposto un elettrodo in zinco (che costituisce il polo negativo, quello nel quale entrano le cariche positive), immerso in una soluzione di solfato di zinco  $ZnSO_4$ . Nella soluzione sono quindi presenti lo ione  $Zn^{++}$  e lo ione  $SO_4^{--}$ .

La lampadina è costituita (nella versione messa a punto da Edison) da un bulbo in vetro al cui interno è stato praticato il vuoto d'aria e da uno zoccolo, costituito da materiale isolante, che sigilla il bulbo. Sulla periferia laterale dello zoccolo è disposta una vite in ottone (primo polo con funzioni anche meccaniche perché consente di fissare la lampadina al portalampada), mentre alla base dello zoccolo è disposto un bottone metallico (secondo polo) adeguatamente isolato dalla vite. Nel bulbo è sospeso un filamento in carbone le cui estremità attraversano il materiale isolante dello zoccolo per andare poi a collegarsi rispettivamente alla vite ed al bottone.

Sappiamo che collegando la lampada alla pila circola corrente elettrica ed il calore generato dall'attrito che le cariche elettriche incontrano nel loro movimento rende

incandescente il filamento, questo, d'altra parte, non brucia perché nel bulbo non vi è ossigeno. Una certa energia, fornita dalla pila, viene così trasformata in calore e luce.

Facendo funzionare il dispositivo si nota la deposizione di rame sul polo positivo e la dissoluzione dello zinco del polo negativo. In effetti le due reazioni sono interpretabili tramite la eq.2.1 e cioè lo ione rame  $Cu^{++}$  in soluzione si deposita sull'elettrodo in rame cedendo la carica  $2e$  mentre il corrispondente ione  $SO_4^{--}$  migra, tramite il setto, nella seconda parte della vasca, quella dello zinco. Lo zinco del polo negativo entra in soluzione acquisendo la carica  $2e$  dallo ione rame e compensa così l'equilibrio delle cariche.



Chiamiamo corrente elettrica la quantità di cariche positive trasferita nell'unità di tempo dall'elettrodo positivo A (quello da cui escono le cariche positive), a quello negativo B (quello in cui entrano le cariche positive). In effetti, convenzionalmente, la corrente elettrica viene riferita al moto di cariche positive, opposto a quello delle cariche negative degli elettroni.

Supponiamo ora di registrare in funzione del tempo  $t$  la massa dell'elettrodo in rame  $m_{cu}(t)$  e quella  $m_{zn}(t)$  dell'elettrodo di zinco. Dal momento che per ogni atomo di rame (di massa  $m^* = 1.0552 \cdot 10^{-25} \text{ kg}$ ) che si deposita sull'elettrodo in rame questo riceve due elettroni (con carica elettrica negativa  $-2e^-$ ) ed eroga quindi la carica positiva equivalente  $2e$ , ad ogni variazione  $dm_{cu}$  che si manifesta nell'intervallo di tempo  $dt$  corrisponde il passaggio della carica  $dq$  indicata nella eq.2.2.

$$2.2 \quad dq = \frac{dm_{cu}}{m^*} 2e$$

La corrente e cioè la carica positiva che passa nell'unità di tempo dall'elettrodo in rame a quello in zinco è fornita allora dalla eq.2.3. La corrente si misura in ampere [A]; in base alla eq.2.3 le unità di misura della corrente e della carica sono tra loro correlate come segue:  $1[A]=1[C]/[s]$ .

$$2.3 \quad i = \frac{dq}{dt} = \frac{2e}{m^*} \frac{dm_{cu}}{dt}$$

La carica  $\Delta q$  che fluisce nell'intervallo di tempo finito  $\Delta t$  è poi deducibile dalla variazione  $\Delta m_{cu}$  della massa dell'elettrodo in rame in questo intervallo di tempo come è indicato nella eq.2.4.

$$2.4 \quad \Delta q = \int_0^{\Delta t} i dt = \int_0^{\Delta t} \frac{2e}{m^*} dm_{cu} = \frac{2e}{m^*} \Delta m_{cu}$$

In particolare si trova che per  $\Delta m_{cu} = 31,785g$  la carica fluita nel circuito vale  $\Delta q = 96580C$  (mentre l'elettrodo in zinco ha perso  $\Delta m_{zn} = 32,69g$ ); da queste misure è possibile allora dedurre per via elettrolitica la costante  $\Delta q / \Delta m_{cu} = 2e / m^*$  che compare nella eq.2.4.

Per valutare il lavoro eseguito dalla pila (e trasformato in luce e calore dalla lampadina) osserviamo che se poniamo all'interno di un calorimetro, Fig.2.8, una soluzione di  $CuSO_4$  versando nella soluzione  $\Delta m_{Zn} = 32,69g$  di zinco avviene la reazione esotermica indicata nella eq.2.5, nel calorimetro si depositano  $31,785g$  di rame e si misura (tramite la massa, il calore specifico ed il salto termico della soluzione) lo sviluppo di una energia  $\Delta W = 106300J$  sotto forma di calore.

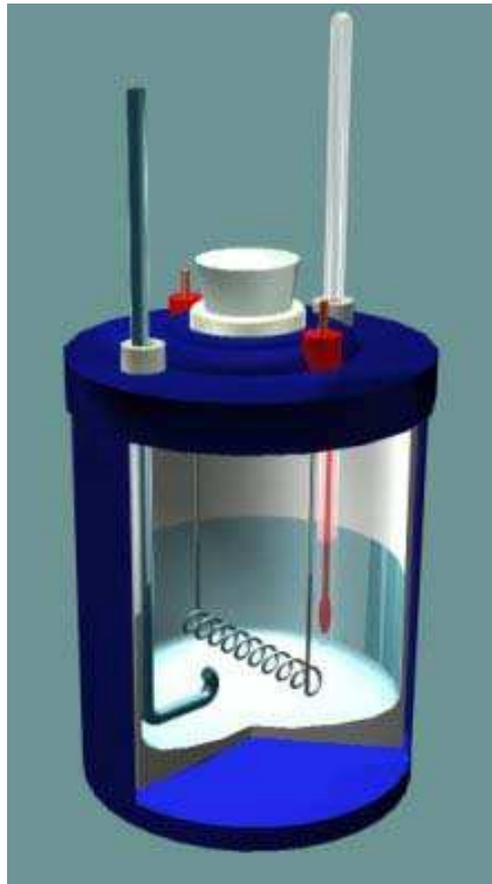
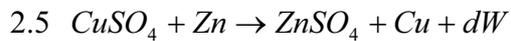


Fig.2.8 Il calorimetro.

Nella pila Daniell avviene la stessa trasformazione chimica ma l'energia  $\Delta W$  liberata, dato che non si ritrova sotto forma di calore nelle soluzioni dei due solfati, non può (conservazione dell'energia) che esser stata utilizzata per muovere le cariche elettriche positive dall'elettrodo in rame a quello in zinco.

Chiamiamo "tensione"  $v(t)$  il lavoro erogato  $dW$  dalla pila per unità di carica  $dq$  movimentata dall'elettrodo positivo A, a quello negativo B (si veda la eq. 2.6a e la Fig. 2.7). Nel caso della pila, si veda la eq. 2.6b, questo lavoro è circa costante nel tempo. L'unità di misura della tensione nel Sistema Internazionale è il volt [V], questa unità, come è evidenziato dalla eq.2.6b è deducibile da quella del lavoro e da quella della carica elettrica oppure da quella della potenza e da quella della corrente dato che  $1[V]=1[J]/[C]=1[W]/[A]$ .

$$2.6 \quad a) \quad v(t) = \frac{dW}{dq} \qquad b) \quad V = \frac{\Delta W}{\Delta q} = \frac{106350J}{96580C} = 1,1V$$

In relazione al significato fisico delle grandezze corrente e tensione il prodotto della corrente per la tensione fornisce la potenza  $p(t)$  erogata dalla pila ed assorbita dalla lampadina, si veda la eq.2.7a. L'energia elettrica erogata dalla pila ed assorbita dalla lampadina nell'intervallo di tempo  $0 \leq t \leq t^*$  di funzionamento è indicata nella eq. 2.7b (la potenza, come è noto, si misura in watt [W] e l'energia in [J] o, in termini industriali, in [Wh]).

$$2.7 \quad \text{a) } v(t)i(t) = \frac{dW}{dq} \frac{dq}{dt} = \frac{dW}{dt} = p(t) \quad \text{b) } W = \int_0^{t^*} p(t) dt$$

Si noti che, fissata l'unità di misura della corrente e cioè l'ampere [A] (che verrà definita, grazie alla esperienza dovuta ad Ampère nel seguito descritta, come quarta unità di misura fondamentale dopo metro [m], chilogrammo [kg] e secondo [s]), risulta anche fissata l'unità di misura della carica il coulomb  $1[C]=1 [A][s]$  e della tensione il volt  $1[V]=1[W]/[A]$ .

In conclusione l'esperienza ora indicata ha consentito di fissare la nozione di circuito elettrico e di indicare un metodo operativo per realizzare mediante bilancia, cronometro e calorimetro un voltmetro, un amperometro, uno strumento di misura della carica elettrica ed un wattmetro.

La esperienza della pila Daniell mette quindi in evidenza il fatto che gli ingegneri si avvalgono della "definizione operativa" delle grandezze fisiche: vengono cioè indicate tutta una serie di operazioni ripetibili che in un certo contesto (di condizioni al contorno; ad esempio, per il caso trattato, di temperatura, concentrazione degli elettroliti etc...) portano a quantificare con un errore stimabile (nessun metodo di misura è tale da non alterare l'oggetto della quantificazione) la grandezza oggetto di misura. D'altra parte nessuna grandezza non definibile in modo operativo può interessare agli ingegneri in quanto, non essendo misurabile, non rientra nel campo di manipolabilità tipico del loro interesse.

Nei primi anni successivi alla scoperta di Volta vennero messi a punto i primi strumenti di misura della tensione e della corrente (grazie proprio ad esperienze elettrochimiche del tipo prima indicato per la pila di Daniell) e si moltiplicarono le sperimentazioni sulle cariche elettriche ed i circuiti elettrici.

All'inizio del secolo XIX particolarmente attiva nella sperimentazione era la scuola francese sotto la spinta degli avvenimenti susseguenti alla rivoluzione (chiusura delle Accademie, fondazione delle scuole politecniche, in particolare l'Ecole Polytechnique de Paris, pubblicizzazione delle sperimentazioni e delle lezioni scientifiche). A questo periodo risalgono le esperienze di C. de Coulomb (1736-1806), cui si deve la legge fondamentale dell'elettrostatica indicata nella eq.2.8 (dove  $k$  dipende dalle unità di misura; nella eq.2.8 è precisato il valore di  $k$  nel Sistema Internazionale tramite la "permettività"  $\epsilon_0$  dell'aria; l'unità di misura farad [F] che compare in tale equazione verrà nel seguito precisata a proposito del condensatore ideale).

Il campo elettrico stazionario (nel tempo) è quindi il campo delle forze che si esercitano, in presenza di cariche elettriche stazionarie, tra i baricentri, distanti  $r$ , delle cariche stesse: il dinamometro applicato ad una carica sonda  $q$  di valore noto può quindi consentire la valutazione di una generica carica  $q'$  presente nel campo, oppure, noti  $q, q'$ , consente la misura di  $k$ .

$$2.8 \quad F = k \frac{qq'}{r^2} \quad k = 4\pi\epsilon_0 \quad \epsilon_0 = 8,859 \cdot 10^{-12} F/m$$

Allo stesso ambiente scientifico ed alla stessa epoca risalgono anche le esperienze, sconvolgenti per le conoscenze dell'epoca, svolte da A.C.Oersted (1777-1851) con la pila di Volta e gli aghi magnetici. Ad Oersted si deve infatti la scoperta (1820) che gli aghi magnetici deviano, e cioè sono sottoposti a coppie meccaniche, quando siano in presenza di una corrente elettrica. Il campo elettrico generato dalle cariche elettriche in movimento genera allora un campo magnetico e cioè un campo di forze meccaniche sugli aghi magnetici per modo che i due campi sono tra loro correlati.

Sempre alla scuola francese vanno attribuite le sperimentazioni di J.Biot (1774-1862), che in collaborazione con Savart mise a punto la descrizione sperimentale del campo magnetico generato da un conduttore percorso dalla corrente  $I$  stazionaria. Nella descrizione di Biot le linee di forza del campo magnetico (tangenti all'ago magnetico orientato da sud a nord) si svolgono nel piano ortogonale al conduttore secondo circonferenze, con centro nel conduttore, orientate con la "regola del cavatappi" (e cioè secondo il senso di rotazione di un cavatappi che avanzi nella direzione della corrente). In un generico punto P di tali linee il vettore  $\vec{B}$  (induzione magnetica, diretto come l'ago magnetico posto in P, con verso dal polo sud al polo nord, si veda la Fig.2.9), ha modulo definito dalla eq.2.9 (dove  $k$  dipende dal sistema di unità di misura; nel Sistema Internazionale, nel caso di conduttore in aria,  $k = \mu_0 / 2\pi$  dove l'unità di misura henry [H] che compare nella eq.2.9 verrà nel seguito precisata a proposito dell'induttore ideale).

$$2.9 \quad B = kI/R \quad k = \mu_0 / 2\pi \quad \mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ H/m}$$

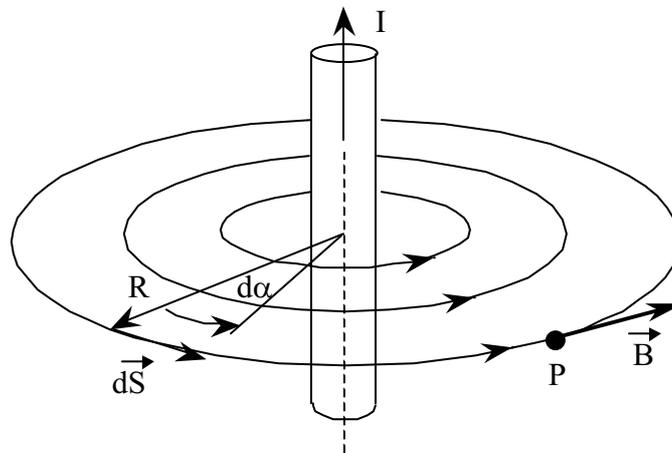


Fig.2.9 Le linee di forza generate da un conduttore percorso da corrente

L'esperienza di Biot consente di evidenziare una legge fondamentale dei campi magnetici. Consideriamo il vettore "forza magnetica"  $\vec{H} = \vec{B} / \mu_0$  e valutiamo il lavoro di questo vettore lungo una linea di forza limitatamente ad un giro di tale linea attorno al conduttore (si veda la eq.2.10). Il risultato conseguito è di carattere generale: il lavoro del vettore forza magnetica lungo una linea chiusa è pari alla corrente abbracciata (il risultato sarebbe stato  $nI$  se  $n$  fosse stato il numero di giri attorno al conduttore).

$$2.10 \quad \oint \vec{H} \times d\vec{s} = \oint \frac{\vec{B}}{\mu_0} \times d\vec{s} = \int_0^{2\pi} \frac{I}{2\pi R} R d\alpha = I$$

Si nota che l'unità di misura di  $H$  è  $[A]/[m]$ , in altri termini il nome "forza magnetica" è improprio nel senso che non indica una azione meccanica.

Alla scuola francese vanno anche attribuite le innovazioni fisico-matematiche di P.de Laplace (1749-1827) (a lui si devono le equazioni alle derivate parziali del secondo ordine e la teoria analitica delle probabilità) ed i lavori di A.M.Ampère (1776-1836) che nel 1825 con la "Teoria dei fenomeni elettrodinamici unicamente dedotta dall'esperienza" mise in evidenza il fatto che un circuito elettrico percorso da corrente, oltre a generare un campo magnetico, equivale ad un ago magnetico ed è quindi sottoposto a forze quando sia disposto all'interno del campo magnetico generato, ad esempio, da un altro circuito elettrico.

Ad Ampère si deve la seguente legge: la forza che agisce su un tratto  $\Delta l$  di circuito percorso dalla corrente  $I$  quando sia immerso in un campo magnetico di induzione  $\vec{B}$  è valutabile tramite la eq.2.11 dove  $\vec{\Delta l}$  ha il verso definito dalla corrente  $I$ , si veda la Fig 2.12. Il senso d'azione si può dedurre dalla "regola delle tre dita della mano sinistra: posto l'indice nel senso della induzione magnetica  $\vec{B}$  (e cioè nella direzione che assumerebbe un ago magnetico posto nel punto in cui si vuole eseguire la misura) ed il medio nel senso in cui fluisce la corrente elettrica, il pollice dà il verso della forza (si veda la Fig.2.10). Si noti che per gli elettrotecnici la regola delle tre dita della mano destra non è riservata al prodotto vettoriale (pollice come il primo vettore, indice come il secondo e medio come il prodotto) ma, come si vedrà nel seguito, alla generazione delle forze elettromotrici.

$$2.11 \quad \vec{f} = I \Delta \vec{l} \wedge \vec{B}$$

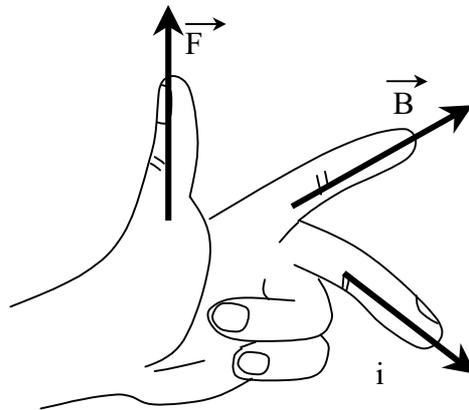


Fig.2.10 Regola delle tre dita della mano sinistra

Quanto detto consente di realizzare amperometri particolarmente precisi. Infatti consideriamo il semplice circuito costituito collegando un conduttore metallico ai due poli di una pila Daniell come è indicato in Fig.2.11. La corrente  $I$  nel tratto a sinistra del conduttore crea un campo magnetico che risponde alle indicazioni di Biot e Savart (proporzionale alla corrente e diretto secondo la regola del cavatappi), questo campo investe il tratto a destra del conduttore. Applicando la eq. 2.11 e la regola delle tre dita della mano sinistra si deduce che la forza che si manifesta sul tratto a destra è di repulsione (tende ad allontanare il conduttore di destra da quello di sinistra) ed è proporzionale al quadrato della corrente. Altrettanto poi, avviene per il tratto di conduttore a sinistra, investito dal campo generato dalla corrente nel tratto a destra per modo che la situazione delle forze è quella mostrata nella Fig.2.11.

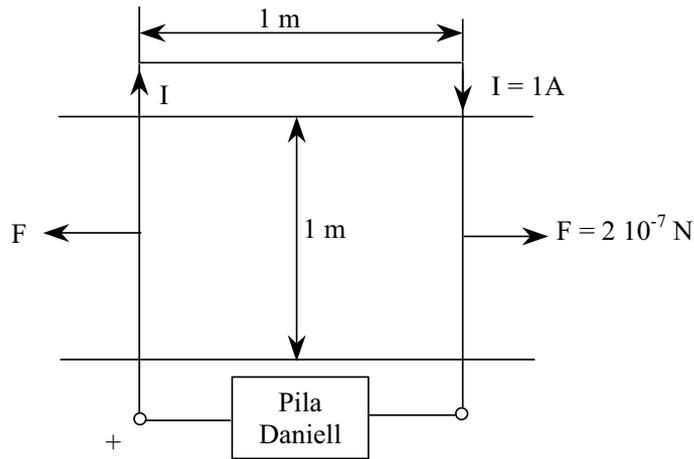


Fig.2.11 Definizione operativa della corrente.

Questa esperienza, quindi, riduce la misura della corrente alla misura di una forza: si assume che la corrente vale  $1[A]$  quando la forza per ogni tratto pari ad un metro dei due conduttori, distanti  $1\text{ m}$ , di Fig.2.8 vale  $2 \cdot 10^{-7}\text{ N}$  (una volta fissata l'unità di misura della corrente si deduce quella della carica elettrica e della tensione).

Grazie alle esperienze di Ampère è stato poi possibile introdurre definizioni operative anche del campo magnetico. Ad esempio, si veda la Fig.2.12, considerato un tratto di conduttore di lunghezza  $\Delta l$ , sospeso mediante un dinamometro (due molle di nota costante elastica), e percorso da una corrente costante  $I$  misurata da un amperometro, la forza  $\vec{f}$  applicata al conduttore, come già detto, è legata alla intensità del campo magnetico  $\vec{B}$  dalla eq.2.11. La misura della forza  $\vec{f}$  tramite il dinamometro e della corrente  $I$  tramite un amperometro consente allora di individuare l'induzione magnetica  $\vec{B}$  e di attribuire a tale grandezza un preciso significato fisico. L'induzione magnetica  $\vec{B}(P)$  in questa visione è il vettore rappresentativo del campo magnetico nel punto  $P$ , esso è orientato come l'ago magnetico posto in  $P$  (con verso dal polo sud al polo nord) ed ha come modulo il valore massimo della forza che si esercita su un elemento di conduttore, di lunghezza unitaria, percorso dalla corrente di  $1\text{ A}$  il cui baricentro sia in  $P$ . L'unità di misura dell'induzione magnetica è il tesla  $1[\text{T}] = 1[\text{N}]/([A][\text{m}])$ .

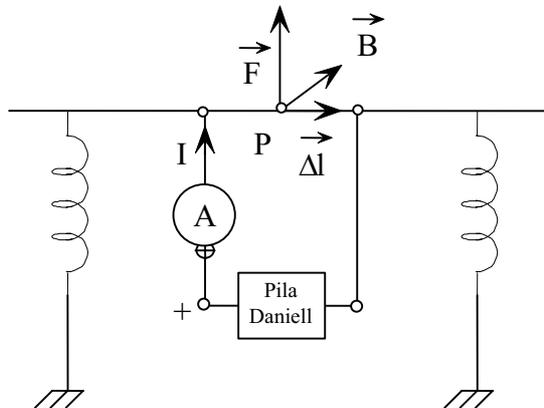


Fig.2.12 Definizione operativa di induzione magnetica.

Grazie alle esperienze di Volta e di Ampère fu possibile costruire circuiti elettrici e strumenti di misura delle grandezze elettriche, in particolare voltmetri ed amperometri. Vedremo nel seguito quanto è stato dedotto da tali esperienze.

### 3 Circuiti elettrici in regime lentamente variabile.

Avvalendosi delle esperienze descritte nel precedente paragrafo e del continuo miglioramento delle conoscenze è stato possibile costruire voltmetri ed amperometri che sempre meglio approssimano il funzionamento ideale, tali cioè da consentire la misura del valore istantaneo di tensioni e di correnti variabili nel tempo al limite senza alterare la grandezza oggetto della misura. Tutte le considerazioni che nel seguito verranno introdotte fanno riferimento alle indicazioni fornite da questi bipoli ideali.

Gli amperometri ideali, si veda  $A_1$  nella figura 3.1a, sono bipoli costituiti da un quadrante di lettura della misura e da due morsetti di cui uno è contrassegnato con il simbolo  $+$ . Considerato il circuito di Fig3.1a in cui compare il bipolo generatore  $G$  (la pila Daniell) collegato, tramite cordoni metallici disposti in un materiale isolante (l'aria), ad un bipolo utilizzatore  $U$  (la lampadina di Edison), l'amperometro ideale inserito come  $A_1$  dà indicazione positiva e la corrente misurata  $i(t) = dq/dt$  corrisponde alla carica elettrica positiva che entra nell'unità di tempo nel morsetto contrassegnato.

Una proprietà autoevidente degli amperometri ideali è quella indicata nella eq.3.1 e cioè la lettura  $i_2(t)$  dell'amperometro  $A_2$  è opposta a quella  $i_1(t)$  dell'amperometro  $A_1$ .

La Fig.3.1b evidenzia poi un modo più sintetico di indicare l'inserzione dell'amperometro  $A_1$ , questa modalità di rappresentazione della inserzione verrà normalmente usata nello studio dei circuiti.

$$3.1 \quad i_2 = -i_1$$

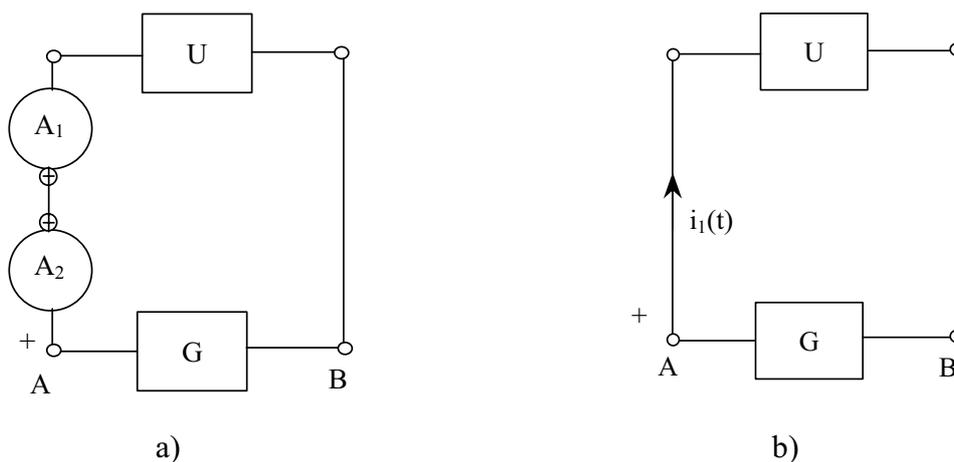


Fig.3.1 a) Inserzioni di un amperometro in un circuito. b) Rappresentazione sintetica della inserzione dell'amperometro  $A_1$

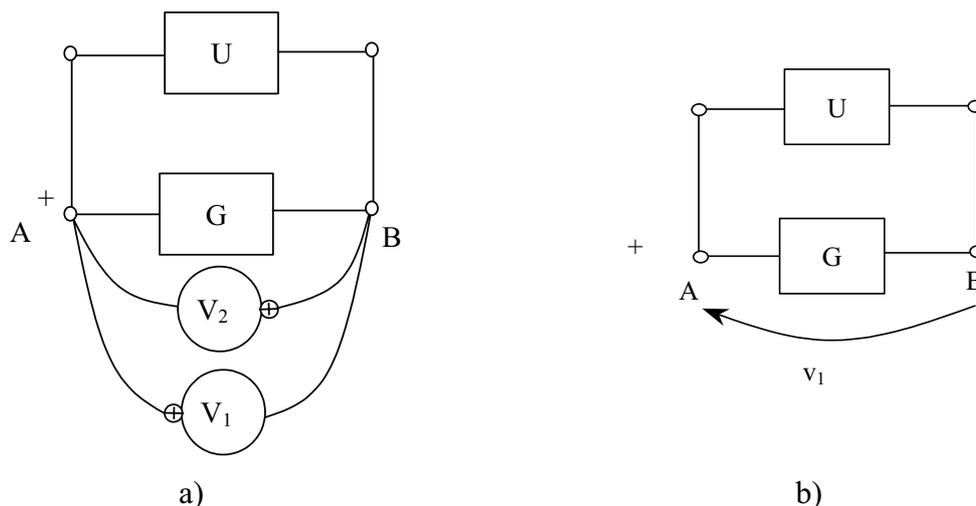


Fig.3.2 a) Inserzioni di un voltmetro ai morsetti di un bipolo. b) Rappresentazione sintetica dell'inserzione del voltmetro  $V_1$ .

I voltmetri ideali (si veda  $V_1$  in Fig 3.2a) sono bipoli costituiti da un quadrante di lettura della misura e da due morsetti di cui uno è contrassegnato con il simbolo +; ai due morsetti sono collegati due cordoni le cui estremità vengono collegate ai punti A,B tra i quali si desidera valutare la tensione. Il voltmetro ideale fornisce istante per istante  $v(t) = dW/dq$  e cioè il lavoro che occorre per spostare la carica elettrica unitaria positiva dal terminale A del cordone collegato al polo contrassegnato al terminale B lungo la linea  $\Gamma$ , orientata da A a B, costituita dai cordoni stessi. In base a quanto visto a proposito della pila Daniell il voltmetro  $V_1$  dà una lettura positiva corrispondente a quanto indicato nella eq.2.6b.

Una proprietà autoevidente dei voltmetri ideali è quella indicata nella eq. 3.2 e cioè la lettura  $v_2(t)$  del voltmetro  $V_2$  è uguale ed opposta a quella del voltmetro  $V_1$ .

La Fig.3.2b evidenzia infine un modo sintetico per indicare l'inserzione del voltmetro  $V_1$ , questa modalità di rappresentazione del collegamento verrà sistematicamente adoperata nello studio dei circuiti.

$$3.2 \quad v_2 = -v_1$$

L'esperienza prima condotta sulla pila di Daniell collegata alla lampadina consente ora di concludere che se il voltmetro e l'amperometro sono inseriti tra i punti A,B nel circuito di Fig. 2.7 come è indicato nella Fig. 3.3a) allora il prodotto delle indicazioni dei due strumenti, che è positivo, fornisce la potenza erogata dalla pila ed assorbita dalla lampadina.

Supponiamo ora di non conoscere la natura energetica di un bipolo inserito in un circuito. Se colleghiamo il voltmetro e l'amperometro ai suoi morsetti come è indicato in Fig. 3.3a (si dice in questo caso che gli strumenti sono collegati con la "convenzione di misura dei generatori") ed il prodotto delle indicazioni dei due strumenti di misura è positivo allora il bipolo è un generatore, viceversa se il prodotto è negativo il bipolo è un utilizzatore. Se, viceversa, colleghiamo gli strumenti come è indicato in Fig. 3.3b ("convenzione di misura degli utilizzatori") ed il prodotto delle indicazioni è positivo allora il bipolo è un utilizzatore, in caso contrario sarà un generatore.



Fig.3.3 Convenzioni di misura dei generatori a) e degli utilizzatori b)

Supponiamo ora di collegare al circuito base indicato nelle precedenti figure in luogo della pila Daniell un generatore che fornisca una tensione alternata sinusoidale del tipo  $v_G(t) = V_M \cos(\omega t)$  di ampiezza  $V_M$  costante e di pulsazione  $\omega$  regolabile e di attrezzare il circuito e lo spazio circostante ad esso con una serie di voltmetri ed amperometri ideali come è indicato nella Fig.3.4.

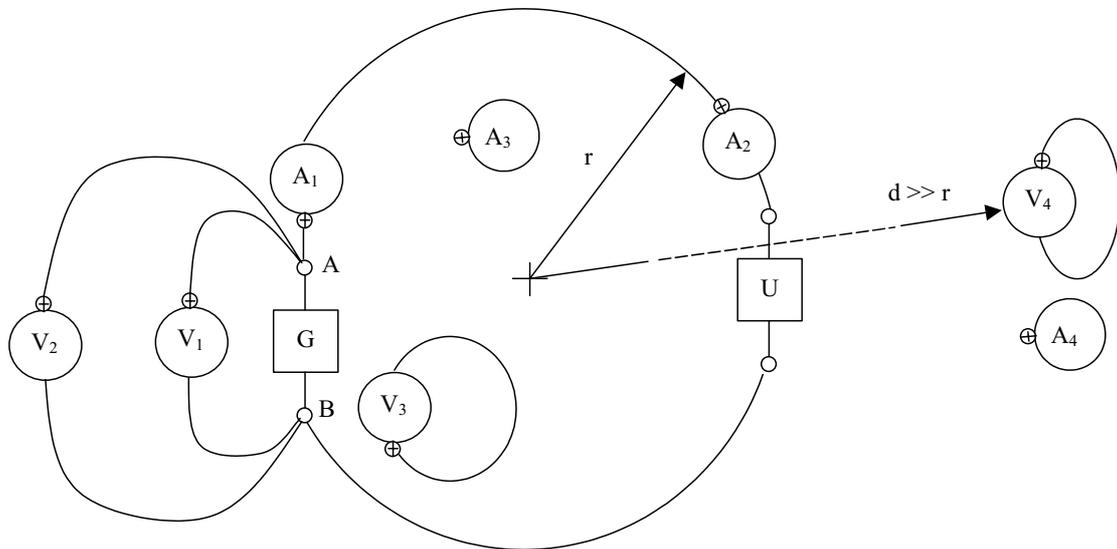


Fig.3.4 Possibili inserzioni di voltmetri ed amperometri ideali in presenza di un circuito elettrico.

Potremo osservare che le indicazioni degli strumenti sono influenzate dal valore della pulsazione  $\omega$ .

In effetti se la pulsazione è nulla (si parla in tal caso di “**regime stazionario**”) per modo che il generatore applica al circuito una tensione costante  $v(t) = V_M$  allora le indicazioni dei voltmetri  $V_1$  e  $V_2$ , pur essendo diversi i percorsi dei cordoni, non differiscono tra di loro. Troviamo ancora che è nulla l’indicazione dei voltmetri  $V_3$  e  $V_4$  i cui poli sono cortocircuitati tramite i cordoni che descrivono una spirale di area non nulla.

In conclusione troviamo che l’indicazione dei voltmetri dipende solo dalla posizione dei punti estremi dei cordoni e non dal loro percorso, qualunque esso sia. L’indicazione è non nulla solo se i cordoni sono connessi ai due poli di un bipolo, mentre l’indicazione è nulla se i due poli del voltmetro sono in corto circuito tramite i cordoni.

Per quanto riguarda gli amperometri in regime stazionario troviamo che le indicazioni di  $A_1$  e di  $A_2$  sono uguali, pur occupando i due strumenti distinte posizioni lungo il circuito.

Troviamo ancora che sono nulle le indicazioni degli amperometri  $A_3$  e  $A_4$ , i cui morsetti sono aperti.

L'indicazione degli amperometri, quindi, non dipende dalla posizione lungo il circuito, inoltre l'indicazione è diversa da zero solo se l'amperometro è inserito nel circuito.

Se la pulsazione  $\omega$  è diversa da zero (si parla in questo caso di **“regime variabile”**) le cose cambiano e cambiano tanto più pesantemente quanto più alta è la pulsazione stessa.

In questo caso infatti i voltmetri  $V_1$  e  $V_2$ , pur essendo collegati agli stessi estremi, danno indicazioni sempre della stessa pulsazione e con la stessa fase ma di ampiezze diverse ed altrettanto avviene per gli amperometri  $A_1$  ed  $A_2$  che, pur essendo inseriti nello stesso circuito occupano posizioni diverse. L'amperometro  $A_3$  ed il voltmetro  $V_3$  forniscono indicazioni non nulle, sempre di pulsazione  $\omega$ , con valori di corrente e di tensione che, se tali strumenti (insieme all'utilizzatore U) sono posizionati presso il generatore G, sono in fase con le indicazioni di  $V_1; V_2$  e di  $A_1; A_2$ . Il voltmetro  $V_4$  e l'amperometro  $A_4$  poi forniscono indicazioni non nulle, sempre con la pulsazione della tensione del generatore ma le indicazioni (ad esempio il valore massimo positivo della tensione o della corrente) sono sfasate in ritardo rispetto a quelle degli strumenti vicini al generatore. L'esperienza mostra che il tempo di ritardo è pari al rapporto  $d/c$  dove  $d$  è la distanza dello strumento dal generatore e  $c \approx 3 \cdot 10^8 m/s$  è la velocità della luce.

Con ogni evidenza nel caso di regime variabile il campo elettrico e quello magnetico, tra loro correlati (si vedano le equazioni di Maxwell), si propagano nello spazio e le trasformazioni energetiche non si limitano al circuito che genera il campo elettromagnetico.

L'esperienza mostra ancora che se il “tempo di transito del circuito”  $\tau$  da parte della luce è molto piccolo rispetto al periodo  $T = 2\pi/\omega$  delle tensioni e delle correnti imposte dal generatore, e cioè se è valida la disequaglianza indicata nella eq.3.1a, allora conviene parlare di regime **“quasi stazionario”**. In questo caso infatti le misure elettriche rispondono con buona approssimazione alle condizioni tipiche del regime stazionario per modo che ha senso il parlare di circuito (caratterizzato da una ben precisa corrente) e di bipoli (caratterizzati da una ben precisa tensione e corrente ai poli). Per il regime stazionario e per quello quasi stazionario allora i circuiti si potranno studiare con le modalità nel seguito descritte e cioè modellizzando i diversi bipoli reali mediante opportuni bipoli ideali ed individuando le leggi cui rispondono le correnti e le tensioni dei circuiti. Si avrà ancora che il campo magnetico è correlato a quello elettrico dalle equazioni eq.2.9/10/11.

$$3.1 \quad a) \tau = r/c \ll T = 2\pi/\omega \quad b) r \ll R = cT$$

Se ora consideriamo che lo spettro significativo (campo di frequenze in cui esistono armoniche isofrequenziali di tensioni e correnti che danno luogo a potenze significative dal punto di vista ingegneristico) delle tensioni e delle correnti in gioco nelle trasformazioni energetiche che interessano i sistemi elettromeccanici è limitato, con frequenze massime dell'ordine di  $f = 10^4 Hz$  ( e periodi, quindi, dell'ordine di  $T = 1/f = 10^{-4} s$ ) per essere in regime quasi stazionario occorre che le dimensioni  $r$  del circuito oggetto di studio, si veda eq 3.1b, siano piccole rispetto a  $R = c \cdot T = 3 \cdot 10^4 m$  e cioè alla distanza percorsa dalla luce nel periodo più piccolo del campo significativo delle tensioni.

Appare evidente da questa indicazione numerica che la teoria che verrà presentata risulta quasi sempre valida per le applicazioni industriali iniziando a produrre indicazioni inattendibili per circuiti molto estesi o per frequenze dell'ordine di quelle usate nelle trasmissioni a radiofrequenza. Si ribadisce però l'idea che prima di applicare le idee nel

seguito presentate occorre verificare che sia soddisfatta la disuguaglianza espressa dalla eq.3.1.

#### 4 La topologia dei circuiti elettrici di bipoli in regime quasi stazionario.

Un circuito elettrico reale in regime quasi stazionario, si veda la Fig.4.1, risulta dalla connessione di diversi bipoli generatori ed utilizzatori finalizzata a ben precisi scopi energetici. La topologia del circuito è descritta, si veda la Fig.4.2, dal così detto "grafo" e cioè da un disegno stilizzato in cui i diversi bipoli del circuito sono rappresentati da archi che uniscono i nodi e cioè i punti di connessione tra i morsetti dei diversi bipoli. Questi archi, denominati lati del circuito, vengono successivamente numerati assegnando 1 come primo numero, si veda la Fig 4.2. Anche i nodi vengono successivamente numerati a partire da un nodo qualsiasi (che prende il nome di "nodo di massa") cui si assegna il numero zero, si veda ancora la Fig 4.2.

Nel seguito si considerano solo grafi "connessi" (privi cioè di parti separate) e non articolati (cioè non separabili in due o più parti tra loro non interagenti).

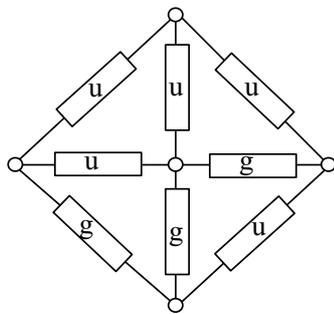


Fig. 4.1 Rete di bipoli

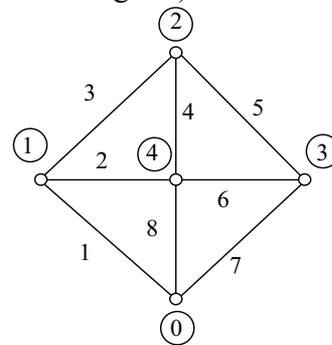


Fig.4.2 Grafo della rete.

Per studiare una rete occorre fissare le convenzioni di misura delle correnti e delle tensioni nei lati. Nel seguito questa operazione verrà compiuta secondo modalità normalizzate. Precisamente si fisserà per ogni lato la convenzione di misura della corrente "orientando" il lato stesso (e cioè indicando sul lato con una freccia la modalità di inserzione dell'amperometro) per tutti lati poi le tensioni verranno misurate con una stessa convenzione.

Nel seguito si impiegherà per le tensioni sempre la convenzione degli utilizzatori, si veda la Fig. 4.3a, per modo che potrà esser sottintesa la freccia indicativa della modalità di inserzione del voltmetro. Una volta scelta la convenzione di misura della corrente per ogni lato si otterrà un "grafo orientato", si veda la Fig.4.3b.

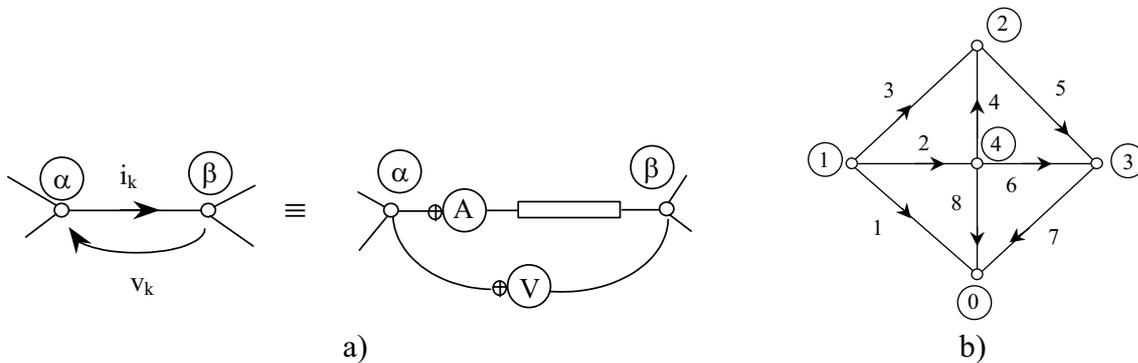


Fig.4.3 a) Convenzioni di misura corrispondenti. b) Grafo orientato.

Risolvere una rete elettrica comporta la valutazione delle correnti e delle tensioni di ogni lato del grafo orientato quando sia nota la natura dei bipoli che compongono la rete, il numero delle incognite è pari, quindi, a  $2l$  (se  $l$  è il numero dei lati).

Per la risoluzione ci si avvale delle equazioni conseguenti alle seguenti leggi.

- I "legami costitutivi LC" dei singoli lati e cioè la legge  $v = f(i)$  oppure  $i = g(v)$  che, in relazione alla natura del bipolo, lega la corrente e la tensione ai morsetti di ogni lato. E' evidente che potremo scrivere  $l$  equazioni ai legami costitutivi.
- La "legge di Kirchhoff delle correnti (LKC)": considerata un superficie chiusa, si veda la Fig.4.4, che intersechi il grafo della rete in corrispondenza di due o più lati è nulla la somma delle correnti entranti (o uscenti) dalla superficie chiusa (nel seguito si considererà positiva la corrente entrante). Come caso particolare la superficie chiusa può racchiudere un nodo della rete e cioè un punto in cui convergono due o più lati ed in questo caso la LKC comporta che sia nulla la somma algebrica delle correnti entranti in ogni nodo di rete, si veda la Fig.4.5.

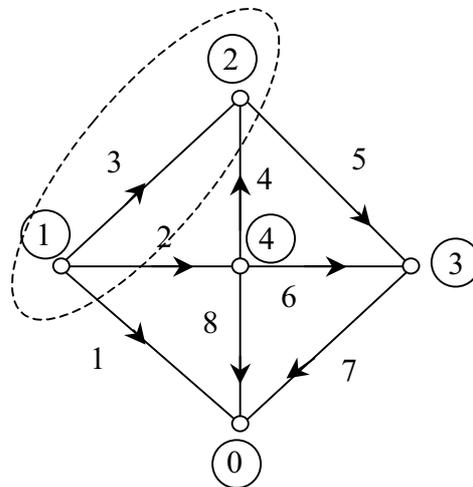


Fig.4.4 Legge di Kirchhoff delle correnti.(LKC :  $-i_1 - i_2 + i_4 - i_5 = 0$ )

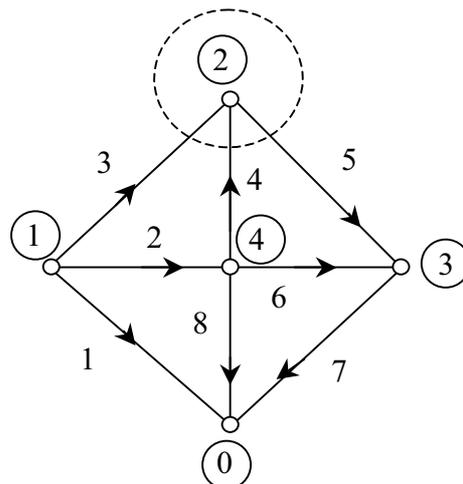


Fig.4.5 LKC ad un nodo. ( $i_3 + i_4 - i_5 = 0$ )

- La "legge di Kirchhoff delle tensioni (LKT)": considerata un linea chiusa, costituita da lati del grafo, in cui ogni nodo ha solo due lati incidenti su di esso (questa è la definizione di "maglia" di un grafo) è nulla la somma algebrica delle tensioni misurate ordinatamente tra

i successivi nodi della maglia. Questo comporta che, ad esempio, per la maglia di Fig.4.6a sia nulla la somma delle tensioni  $v_{01} + v_{12} + v_{24} + v_{40}$ , dove il primo indice della tensione indica il nodo cui è collegato il morsetto + del voltmetro. Dal momento che, si veda la Fig.4.6b,  $v_{01} = -v_1$ ,  $v_{12} = v_3$ ,  $v_{24} = -v_4$ ,  $v_{40} = v_8$  (perché le tensioni di lato vengono sempre misurate con le convenzioni degli utilizzatori), la LKT della maglia si scrive  $-v_1 + v_3 - v_4 + v_8 = 0$ .

La scrittura della equazione che esprime la LKT di una maglia è "automatica" se si tiene conto che abbiamo scelto per le tensioni la convenzione di misura degli utilizzatori. Si fissa infatti un senso di percorrenza della maglia (nel seguito si adopererà quello orario): la tensione di un lato verrà trascritta positiva se la corrente del lato è concorde con il senso di percorrenza della maglia, si veda la Fig.4.6a, negativa in caso contrario.

Come caso particolare se la linea chiusa è tale da non lasciare al suo interno dei lati, si veda la Fig.4.7, si parla in tal caso di anello e la LKT afferma che è nulla la somma delle tensioni misurate ordinatamente lungo i lati di un anello.

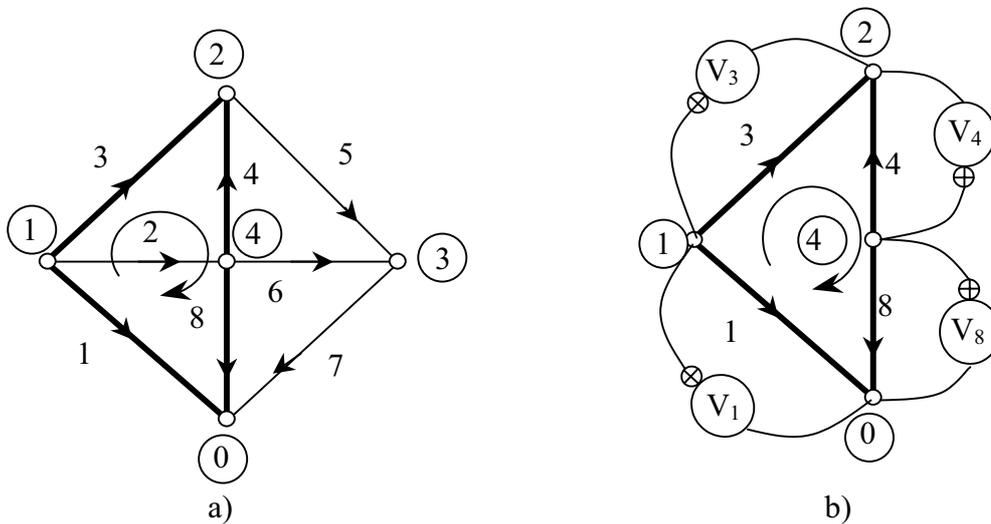


Fig.4.6 LKT ad una maglia. ( $-v_1 + v_3 - v_4 + v_8 = 0$ )

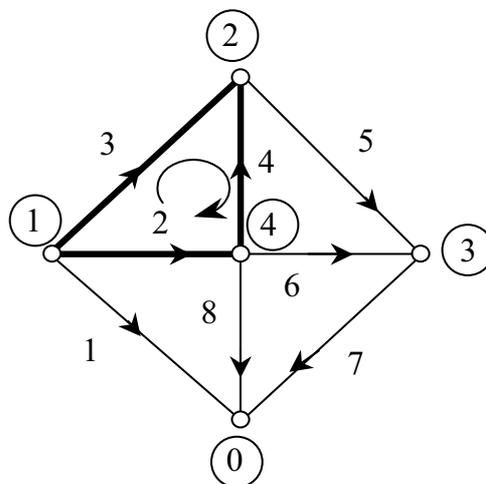


Fig.4.7 LKT ad un anello. ( $v_3 - v_4 - v_2 = 0$ )

Nella risoluzione di una rete elettrica si incontrano le seguenti difficoltà.

- Occorre scrivere in modo "metodicamente veloce" le equazioni che si deducono dalle LK evitando di ripetere più volte le stesse informazioni (le equazioni devono essere linearmente indipendenti).
- Mentre le LK sono sempre lineari altrettanto non avviene per i legami costitutivi dei bipoli. Nel seguito l'analisi sarà limitata agli elementi lineari di maggior interesse per le applicazioni industriali.
- Una volta scritte le equazioni le modalità di soluzione dipendono dalla natura degli ingressi e cioè dalla natura dei generatori che alimentano le reti. I casi di maggior interesse industriale sono quelli di generatori che imprimono: i) tensioni e/o correnti costanti nel tempo (in tal caso tutte le grandezze di rete sono costanti e si parla di regime stazionario); ii) tensioni e/o correnti alternate sinusoidali isofrequenziali (tutte le grandezze di rete rispondono allo stesso tipo di legge temporale e si parla di rete in regime alternato sinusoidale), iii) tensioni e/o correnti variabili nel tempo rispondenti ad una sinusoide generalizzata (cissoidale): si parlerà di rete in transitorio (cissoidale).

## 5 Il teorema fondamentale delle reti elettriche.

Il teorema fondamentale delle reti elettriche afferma che una rete di  $l$  lati è risolubile, e cioè è possibile individuare le  $2l$  incognite corrispondenti alle tensioni e correnti di lato, avvalendosi delle equazioni conseguenti ai legami costitutivi LC ed alle equazioni linearmente indipendenti conseguenti alle LKC e LKT.

Dimostriamo infatti che se  $n_t$  sono i nodi della rete è possibile scrivere  $n = (n_t - 1)$  equazioni indipendenti ai nodi basate sulla LKC.

In effetti consideriamo l'insieme di tutte le equazioni ai nodi ed osserviamo che la corrente di ogni lato, essendo quest'ultimo inserito tra due nodi, compare con segni opposti nelle due equazioni di tali nodi. Se ne conclude che la somma di tutte le equazioni ai nodi è nulla per modo che esse sono linearmente dipendenti.

Escludiamo ora il nodo di massa dal novero dei nodi e mettiamo in evidenza i lati che collegano il nodo in questione con la parte restante della rete, si veda la Fig.5.1. Le equazioni  $n = (n_t - 1)$  che si deducono dalla LKC per i nodi della parte restante non possono più dare somma nulla perché le correnti dei lati che uniscono tale parte con il nodo di massa compaiono una sola volta in tali equazioni. Se ne conclude che tali  $n$  equazioni sono tra loro indipendenti.

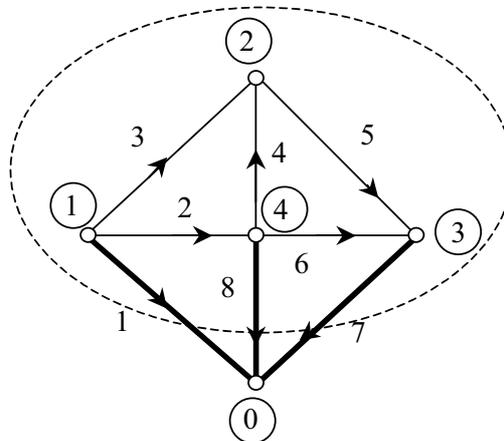


Fig.5.1 I lati del nodo di massa.

Dimostriamo ora che se  $a_i$  sono gli anelli di una rete planare è possibile scrivere  $a = (a_i - 1)$  equazioni indipendenti agli anelli basate sulla LKT.

Per dimostrare quanto detto numeriamo gli anelli del grafo partendo dal così detto "anello esterno" cui assegniamo il numero zero (così detto perché se si dispone la rete su una sfera, che è il caso più generale di piano, l'anello esterno ha le stesse prerogative topologiche degli altri anelli). Orientiamo poi gli anelli interni in senso orario ed orientiamo l'anello esterno in senso antiorario, si veda, ad esempio, la Fig.5.2.

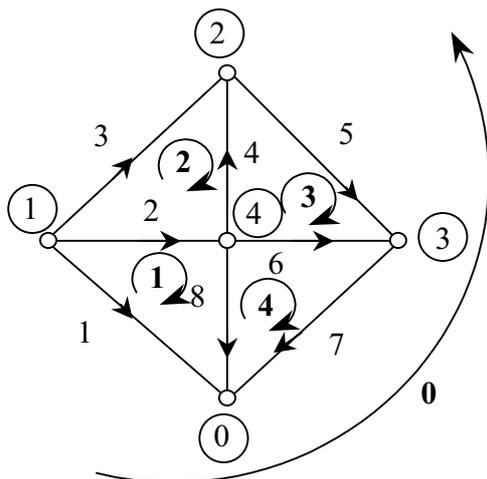


Fig.5.2 Orientamento degli anelli interni e dell'anello esterno.

Si può osservare a questo punto che ogni lato del grafo fa parte di due anelli e che, in base all'orientamento degli anelli stessi, esso viene percorso in senso opposto nei due anelli per modo che la tensione di tale lato compare con segni opposti nelle corrispondenti LKT dei due anelli. Se ne conclude che la somma delle tensioni che compaiono nelle LKT di tutti gli anelli è nulla e quindi che tali equazioni sono linearmente dipendenti.

Escludiamo ora l'anello di massa dal novero degli anelli e mettiamo in evidenza i lati che fanno parte contemporaneamente degli anelli interni e di quello escluso, si veda la Fig.5.3. Le tensioni di tali lati entrano in gioco una sola volta nelle equazioni agli anelli interni che pertanto non potranno più avere somma nulla. Se ne conclude che  $a = (a_i - 1)$  sono le equazioni agli anelli tra loro indipendenti.

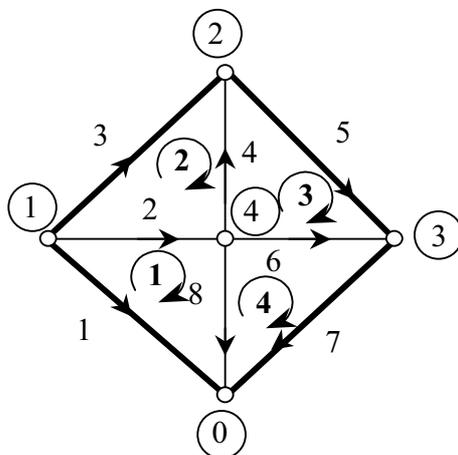


Fig.5.3 Lati in comune tra l'anello esterno e quelli interni.

Dimostriamo ora che se  $l$  sono i lati della rete allora  $a = l - n$ . Infatti, si veda la Fig.5.4, il più semplice degli anelli soddisfa tale regola qualunque sia il numero di lati che lo compongono. A partire da questo anello base è possibile realizzare, si veda la Fig.5.5, un altro anello o aggiungendo un lato tra i nodi esistenti (e questo conferma la regola) oppure aggiungendo  $k$  lati con  $(k - 1)$  nodi (e questo conferma ancora la regola).

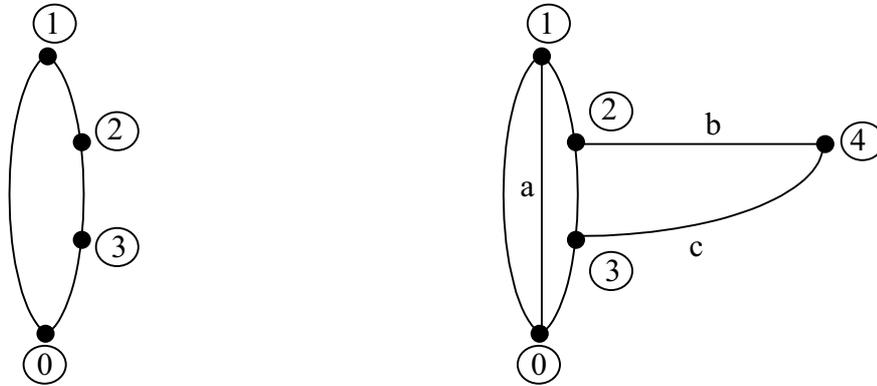


Fig. 5.4 Anello base ( $l = 4$ ,  $n_t = 4$ ,  $n = 3$ ,  $a = 1$ ) Fig. 5.5 Il lato  $a$  determina un nuovo anello. I lati  $b$  e  $c$  un nuovo anello

Complessivamente per una rete ad  $l$  lati e quindi con  $2l$  incognite (la corrente e la tensione di ogni lato) abbiamo a disposizione  $l$  equazioni corrispondenti ai legami costitutivi LC di ogni lato,  $n$  equazioni indipendenti corrispondenti alla LKC ai nodi ed  $a = l - n$  equazioni indipendenti corrispondenti alla LKT agli anelli: il numero delle equazioni indipendenti  $2l$  è pari quindi al numero delle incognite.

Il teorema fondamentale, ora individuato per la soluzione di una rete, propone un metodo di calcolo del tutto generale (esso viene chiamato "metodo del tableau sparso") ma piuttosto oneroso (perché richiede di valutare contemporaneamente le correnti e le tensioni) rispetto a quelli deducibili dalla teoria dei grafi (che consentono il calcolo di un numero più ridotto di incognite con una impostazione matriciale che ne facilita la soluzione, si rimanda in proposito ai testi di "teoria delle reti", al metodo dei potenziali ai nodi ed a quello delle correnti cicliche). Esso comunque fornisce le indicazioni di base per tutti i metodi successivi e consente la soluzione "a vista" delle reti più semplici.

## 6 Le relazioni costitutive dei bipoli ideali.

Chiamiamo ideali i bipoli per i quali il legame costitutivo vale qualunque siano i valori assunti dalle correnti e dalle tensioni ai morsetti e qualunque siano le condizioni al contorno in cui siano chiamati ad operare (temperatura, pressione, agenti inquinanti, etc). I bipoli ideali sono una astrazione cui si perviene idealizzando il comportamento di alcuni bipoli reali in ambiti limitati di tensioni, correnti e condizioni al contorno. Essi vengono impiegati per costruire circuiti equivalenti agli effetti esterni dei bipoli reali e per rappresentarne le caratteristiche di funzionamento in condizioni al contorno da precisare caso per caso. Nel seguito vengono considerati i bipoli ideali, di maggior interesse per le applicazioni industriali, caratterizzati da un legame costitutivo  $v = f(i)$  o  $i = g(v)$  lineare. Si ricorda che una funzione  $y = y(x)$  è lineare se gode delle seguenti proprietà: i)  $y = y(\alpha x) = \alpha y(x)$  (proprietà di omogeneità) e ii)  $y(x_1 + x_2) = y(x_1) + y(x_2)$  (proprietà additiva).

## 6.1 Generatori ideali di tensione; il principio di sostituzione.

Un generatore ideale di tensione impone ai suoi morsetti una tensione  $v(t)$  ben definita qualunque sia la corrente  $i(t)$  ai morsetti (che dipenderà dalla rete connessa ai morsetti del generatore), il simbolo circuitale di questo bipolo è indicato in Fig.6.1 nella quale si è utilizzata per la corrente ai morsetti la convenzione di misura dei generatori (nulla vieta di usare quella degli utilizzatori). Con riferimento alla pila Daniell è evidente l'astrazione che si può compiere: la pila Daniell potrebbe essere modellizzata con un generatore di tensione costante  $V_g = 1.1V$ ; in effetti tale pila impone una tensione costante di 1,1 V quando la corrente ai morsetti e la carica elettrica erogata/assorbita dal momento dell'entrata in servizio siano opportunamente limitate, inoltre (per indicare alcune delle condizioni al contorno) la prestazione in tensione vale se le temperature spaziano in un campo delimitato e se nella soluzione non vi siano agenti chimici che modifichino la reazione fondamentale.

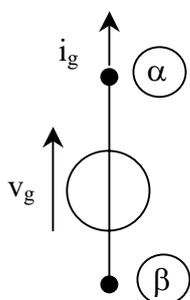


Fig.6.1 Simbolo circuitale del generatore ideale di tensione.

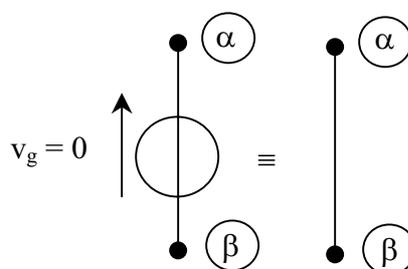


Fig.6.2 Simbolo circuitale del corto circuito ideale.

Un generatore ideale di tensione con tensione impressa nulla è un "corto circuito ideale": impone cioè che la tensione sia nulla qualunque sia la corrente ai morsetti (nei corti circuiti reali la tensione cresce al crescere della corrente). Il corto circuito ideale si indica come è specificato in Fig.6.2.

Consideriamo ora due reti elettriche  $A, B$  tra loro connesse ai morsetti  $R, S$ , si veda la Fig.6.3a, tra i quali si manifesta la tensione  $v(t)$ . Il principio di sostituzione afferma che nulla cambia nel funzionamento della rete  $B$  se alla rete  $A$  si sostituisce un generatore ideale di tensione pari a  $v(t)$ , si veda la Fig.6.3b.

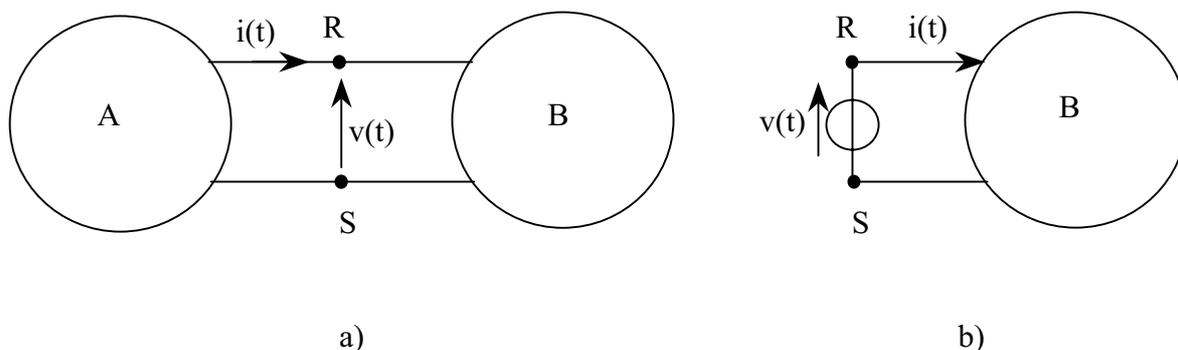


Fig.6.3a Reti elettriche tra loro connesse; b) principio di sostituzione.

Nelle reti meccaniche caratterizzate da bipoli alla cui porta sia misurabile una forza (coppia) ed una velocità lineare (angolare) unidirezionali il generatore ideale di tensione ha come “analogo” (e la parola viene usata in modo puramente intuitivo) il “generatore ideale di velocità”. Questo generatore, si veda la Fig.6.4, impone che la velocità del punto  $A$  rispetto al punto  $B$  nella direzione  $AB$  sia  $u(t)$  qualunque sia la forza che si manifesta al polo  $A$ .

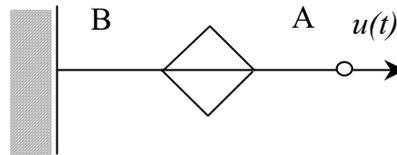


Fig. 6.4 Generatore ideale di velocità.

## 6.2 Il generatore ideale di corrente; il principio di sostituzione.

Un generatore ideale di corrente impone ai suoi morsetti una corrente  $i(t)$  ben definita qualunque sia la tensione che si manifesta ai morsetti. Il simbolo circuitale di tale bipolo è indicato in Fig. 6.5 nella quale si è utilizzata per la tensione  $v(t)$  la convenzione di misura dei generatori.

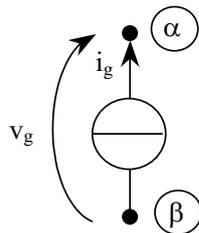


Fig.6.5 Simbolo circuitale del generatore ideale di corrente.

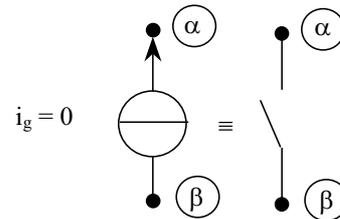


Fig.6.6 Simbolo circuitale del circuito aperto ideale.

Un generatore ideale di corrente nulla è un “circuito aperto ideale”: impone cioè che la corrente sia nulla qualunque sia la tensione ai morsetti (nella realtà ai morsetti di un circuito aperto la corrente cresce con la tensione fino ad assumere valori distruttivi quando si superi la tensione di scarica del sistema di isolamento). Il circuito aperto ideale si indica come è precisato in Fig.6.6.

Consideriamo due reti elettriche  $A, B$  tra loro connesse ai morsetti  $R, S$  (si veda la Fig.6.3a) ed indichiamo con  $i(t)$  la corrente ai morsetti. Il principio di sostituzione afferma che nulla cambia nel funzionamento della rete  $B$  se alla rete  $A$  si sostituisce un generatore ideale di corrente  $i(t)$ , si veda la Fig.6.7.

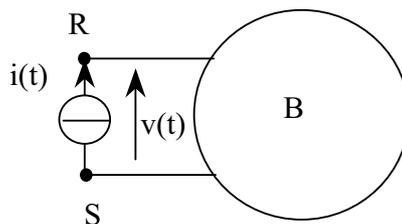


Fig.6.7 Principio di sostituzione.

Nelle reti meccaniche caratterizzate da bipoli alla cui porta sia misurabile una forza (coppia) ed una velocità lineare (angolare) unidirezionali il generatore ideale di corrente ha come analogo il “generatore ideale di forza”. Questo generatore, si veda la Fig.6.8, impone che la forza applicata al punto  $A$  nella direzione  $AB$  sia  $f(t)$  qualunque sia la velocità del punto  $A$ .

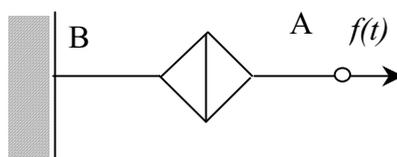


Fig. 6.8 Generatore ideale di forza.

### 6.3 Il resistore ideale.

Si definisce resistore ideale quello che presenta la relazione costitutiva indicata nella eq.6.1 quando la tensione e la corrente siano misurate con la convenzione degli utilizzatori. Il simbolo circuitale insieme alle convenzioni di misura sono quelli indicati in Fig.6.9a.

$$6.1 \quad v(t) = Ri(t)$$



Fig.6.9 a) Il simbolo circuitale del resistore e le relative convenzioni di misura (degli utilizzatori); b) il resistore con la convenzione dei generatori.

Se per il resistore ideale si usa la convenzione dei generatori, si veda la Fig.6.9b, allora la relazione costitutiva diviene quella indicata nella eq.6.2.

$$6.2 \quad v(t) = -Ri(t)$$

Il parametro  $R$ , costante e non negativo, si chiama resistenza e si misura in ohm  $[\Omega] = [V]/[A]$ . Il resistore ideale è un bipolo "passivo" per il quale cioè l'energia elettrica assorbita risponde alla eq.6.3. Un bipolo reale assimilabile al resistore ideale pur di considerare un ambito ristretto di correnti e di tensioni oltre che di condizioni ambientali è la lampadina di Edison.

$$6.3 \quad w(t) = \int_{-\infty}^t v(t)i(t)dt = R \int_{-\infty}^t i^2(t)dt \geq 0$$

Nel caso particolare di  $R = 0$ , si veda la Fig.6.10, il resistore ideale si comporta come un corto circuito.

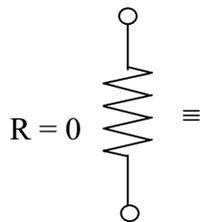


Fig.6.10 Il resistore ideale come corto circuito.

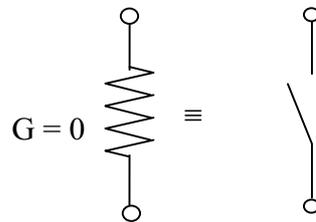


Fig.6.11 Il conduttore ideale come circuito aperto.

Se poi  $R \neq 0$  la relazione costitutiva è invertibile ed assume la forma indicata nella eq.6.4. Si parla in tal caso di conduttore ed il parametro  $G$  prende il nome di conduttanza del conduttore e si misura in siemens  $[S] = 1/[\Omega]$ .

$$6.4 \quad i(t) = Gv(t) \quad G = 1/R$$

Nel caso particolare di  $G = 0$  il conduttore ideale si comporta come un circuito aperto, si veda la Fig.6.11.

Nelle reti meccaniche caratterizzate da bipoli alla cui porta sia misurabile una forza (coppia) ed una velocità lineare (angolare) unidirezionali il conduttore ideale ha come analogo lo smorzatore ideale. Questo bipolo, infatti, si veda la Fig.6.12, impone che tra la forza e la velocità valga la eq.6.5 (si corrispondono quindi  $G$  e  $H$ ).

$$6.5 \quad f(t) = Hu(t)$$

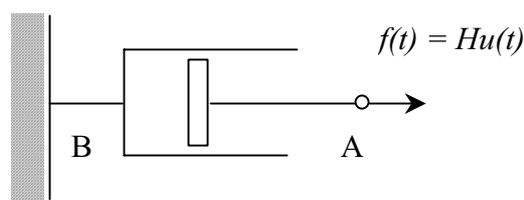


Fig.6.12 Smorzatore ideale

#### 6.4 Induttore ideale.

L'induttore ideale è rappresentato dal simbolo circuitale indicato in Fig.6.13 (il simbolo ricorda che, come si vedrà nel seguito, un induttore reale si costruisce disponendo un avvolgimento su un opportuno nucleo) e risponde alla relazione costitutiva indicata nella eq.6.6 quando tensione e corrente rispondano alla convenzione degli utilizzatori.

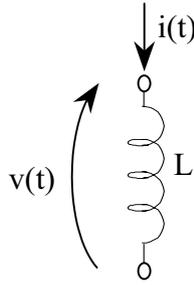


Fig.6.13 Simbolo circuitale dell'induttore ideale e convenzioni di misura.

Il parametro  $L$  si chiama induttanza e nel Sistema Internazionale si misura in henry  $[H]=[V][s]/[A]=[Ω][s]$ .

La grandezza  $\psi(t) = Li(t)$  si chiama "flusso concatenato dall'induttore", si tratta di una grandezza (la cui unità di misura è il weber  $[W]=[V][s]$ ) che, come si vedrà nel seguito, ha un ben preciso significato fisico per gli induttori reali. Il flusso concatenato si calcola a partire dalla tensione applicata all'induttore mediante la eq.6.7 nella ipotesi che per  $t=0$  sia  $\psi(0)=0$ .

$$6.6 \quad v(t) = L \frac{di(t)}{dt} = L p i(t) = p \psi(t) \quad p = \frac{d}{dt} \quad \psi(t) = Li(t)$$

$$6.7 \quad \psi(t) = \int v(t) dt$$

Nel caso particolare in cui  $i(t) = I$  (con la lettera maiuscola si designeranno nel seguito correnti e tensioni costanti) allora  $v(t) = 0$  quindi un induttore percorso da corrente costante è un corto circuito, si veda la Fig.6.14.

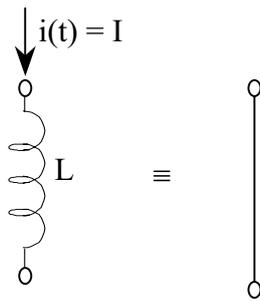


Fig.6.14 L'induttore ideale come corto circuito.

La potenza entrante in un induttore ideale è indicata nella eq.6.8, essa si può interpretare come derivata temporale dell'energia  $w_L(t)$  accumulata nell'induttore. Per indicare che l'induttore ideale è un bipolo capace di immagazzinare energia si dirà che esso è un "bipolo reattivo".

$$6.8 \quad p(t) = v(t)i(t) = Li(t)pi(t) = p\left(\frac{1}{2}Li^2(t)\right) = pw_L(t) \quad w_L(t) = \frac{1}{2}Li^2(t)$$

Un induttore si dice che è "carico" se l'energia accumulata  $w = Li^2 / 2$  è diversa da zero. Per l'induttore carico vale la seguente proprietà: un induttore carico posto in corto circuito conserva indefinitamente l'energia accumulata. Infatti se all'istante  $t^*$  in cui il bipolo viene chiuso in corto circuito la corrente vale  $i^* \neq 0$ , negli istanti successivi, essendo  $v = L di / dt = 0$ , la corrente rimane costante al valore  $i^*$ .

Nelle reti meccaniche caratterizzate da bipoli alla cui porta sia misurabile una forza (coppia) ed una velocità lineare (angolare) unidirezionali l'induttore ideale ha come analogo la molla ideale. Questo bipolo, infatti, si veda la fig.6.15, impone che tra la forza e la velocità valga la eq.6.9 (si corrispondono, quindi,  $L$  e  $1/K$ ). L'energia elastica accumulata nella molla vale  $w = f^2 / 2K$  essa ha come analoga l'energia magnetica (come verrà mostrato nel seguito) accumulata nell'induttore  $w_L = Li^2 / 2$ .

$$6.9 \quad u = \frac{1}{K} pf$$

6.10

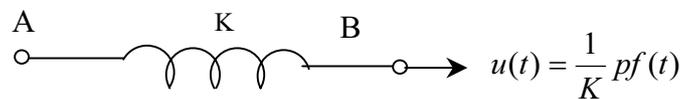


Fig. 6.15 La molla ideale.

### 6.5 Condensatore ideale.

Il condensatore ideale è rappresentato dal simbolo circuitale indicato in Fig.6.16 (il simbolo ricorda che i condensatori reali si costruiscono interponendo una lamina di materiale isolante tra due armature metalliche), esso risponde alla relazione costitutiva presentata nella eq.6.10 quando ci si avvalga della convenzione di misura degli utilizzatori. Il parametro  $C$  si chiama capacità del condensatore e si misura in farad  $[F]=[A][s]/[V]=[S][s]$ .

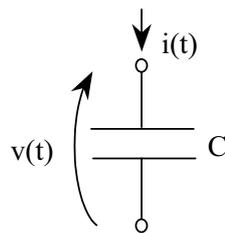


Fig.6.16 Simbolo circuitale del condensatore ideale e relative convenzioni di misura.

La grandezza  $q = Cv(t)$  è, per il condensatore reale di cui l'ideale costituisce una astrazione, la carica elettrica sulle armature e si misura in  $[C]$ . La carica elettrica è legata alla corrente assorbita dalla eq.6.11 nella ipotesi che per  $t = 0$  sia  $q(0) = 0$ .

$$6.10 \quad i = C \frac{dv(t)}{dt} = Cpv(t) = pq(t) \quad p = \frac{d}{dt} \quad q(t) = Cv(t)$$

$$6.11 \quad q(t) = \int i(t) dt$$

Nel caso particolare di  $v(t) = V$ , e cioè di tensione costante ai morsetti, il legame costitutivo del condensatore comporta che  $i(t) = 0$  e cioè il condensatore sia un circuito aperto, si veda la Fig.6.17.

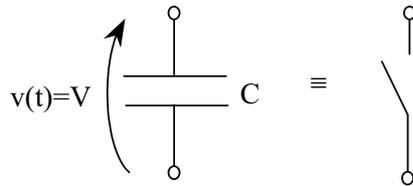


Fig.6.17 Il condensatore ideale come circuito aperto.

La potenza entrante in un condensatore è indicata nella eq.6.12, essa si può interpretare come derivata dell'energia  $w_C(t)$  accumulata nel condensatore. Anche il condensatore è quindi un bipolo reattivo.

$$6.12 \quad p(t) = v(t)i(t) = Cv(t)pv(t) = p\left(\frac{1}{2}Cv^2(t)\right) = pw_C(t) \quad w_C(t) = \frac{1}{2}Cv^2(t)$$

Un condensatore si dice che è "carico" se l'energia accumulata  $w = Cv^2 / 2$  è diversa da zero. Per il condensatore carico vale la seguente proprietà: un condensatore carico lasciato a vuoto conserva indefinitamente l'energia accumulata. In effetti se all'istante  $t^*$  in cui il bipolo viene lasciato a vuoto la tensione vale  $v^* \neq 0$ , negli istanti successivi, essendo  $i = Cdv / dt = 0$ , la tensione rimane costante al valore  $v^*$ .

Nelle reti meccaniche caratterizzate da bipoli alla cui porta sia misurabile una forza (coppia) ed una velocità lineare (angolare) unidirezionali il condensatore ideale ha come analogo la massa. Questo bipolo, infatti, si veda la Fig.6.18, impone che tra forza e velocità valga la eq.6.13 (si corrispondono, quindi,  $C$  ed  $M$ ). L'energia cinetica accumulata nella massa vale  $w = Mu^2 / 2$  essa ha come analoga l'energia elettrica (come verrà mostrato nel seguito) accumulata nel condensatore  $w_C = Cv^2 / 2$ .

$$6.13 \quad f = Mpu$$

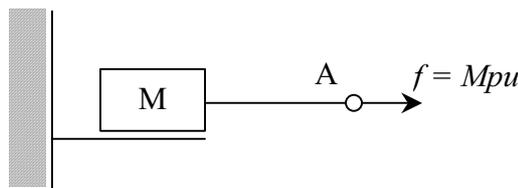


Fig.6.18 La massa ideale.

## 7 La struttura delle equazioni risolutive con il metodo del tableau sparso.

La struttura in questione (a differenza di quelle proposte dalla teoria dei circuiti basate sul grafo della rete) non si presta ad una descrizione normalizzata per modo che conviene evidenziare le modalità operative su un esempio.

Si consideri la rete di Fig.7.1, dotata di due lati attivi e di due elementi reattivi. Si nota in primo luogo che in serie al generatore di tensione ed in parallelo al generatore di corrente compare un bipolo (resistivo nel caso particolare).

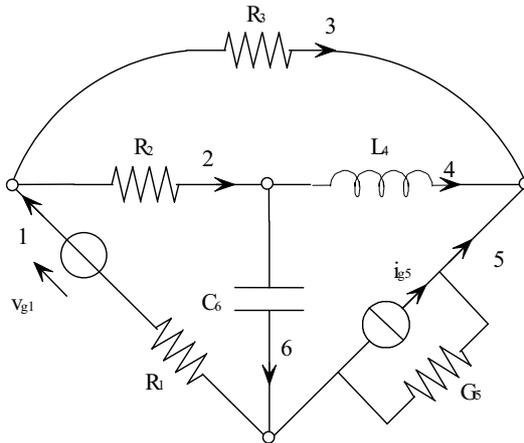


Fig.7.1 La rete oggetto di studio.

In effetti, si veda la Fig.7.2a-b, allo scopo di ridurre il numero delle equazioni, conviene eliminare, preliminarmente alla scrittura delle equazioni, i lati costituiti da soli generatori.

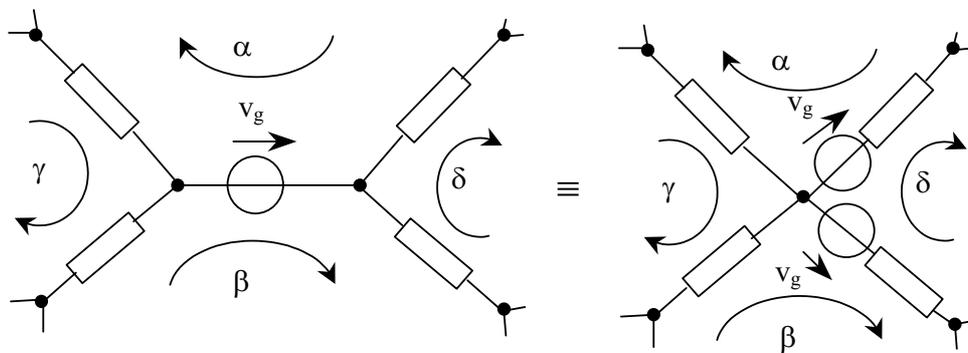


Fig. 7.2a Eliminazione dei generatori di tensione di lato senza modificare le LKT.

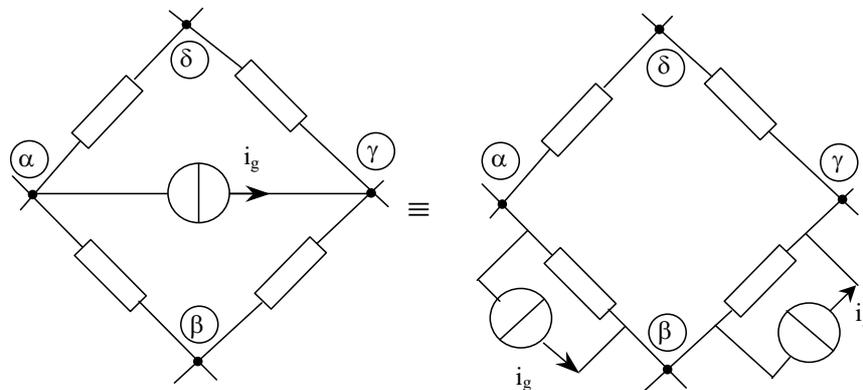


Fig.7.2b Eliminazione dei generatori di corrente di lato senza modificare le LKC.

Allo scopo poi di scrivere le LKC e le LKT tracciamo il grafo, numeriamo ed orientiamo i lati, numeriamo i nodi, numeriamo ed orientiamo gli anelli interni, si veda la Fig.7.3.

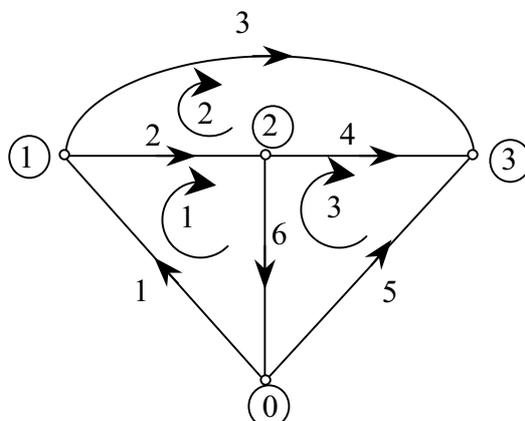


Fig.7.3 Grafo orientato della rete.

Scriviamo le LKC e le LKT come è indicato rispettivamente nelle eq.7.1 e nelle eq.7.2; scriviamo infine i legami costitutivi come è indicato nelle eq.7.3.

$$\begin{array}{ll}
 \text{nodo 1} & i_1 - i_2 - i_3 = 0 \\
 7.1 \text{ nodo 2} & i_2 - i_4 - i_6 = 0 \\
 \text{nodo 3} & i_3 + i_4 + i_5 = 0
 \end{array}$$

$$\begin{array}{ll}
 \text{anello 1} & v_1 + v_2 + v_6 = 0 \\
 7.2 \text{ anello 2} & -v_2 + v_3 - v_4 = 0 \\
 \text{anello 3} & v_4 - v_5 - v_6 = 0
 \end{array}$$

$$\begin{array}{ll}
 \text{lato 1} & v_1 = R_1 i_1 - v_{g1} \\
 \text{lato 2} & v_2 = R_2 i_2 \\
 7.3 \text{ lato 3} & v_3 = R_3 i_3 \\
 \text{lato 4} & v_4 = L_4 p i_4 \\
 \text{lato 5} & i_5 = i_{g5} + G_5 v_5 \\
 \text{lato 6} & i_6 = C_6 p v_6
 \end{array}$$

Già da questo esempio si nota che la rete è caratterizzata da tante equazioni differenziali del primo ordine quanti sono gli elementi reattivi (quelli indipendenti, tali da non formare maglie di induttori o nodi di condensatori) e si capisce anche che la complessità della soluzione dipende dalla natura dei generatori. Notevoli semplificazioni si presentano infatti se i generatori sono di tensioni e correnti costanti in quanto gli induttori si comportano come corti circuiti ed i condensatori come circuiti aperti per modo che la rete, completamente algebrica, si riduce a quella indicata in Fig.7.4. Nel seguito esamineremo in primo luogo il caso di reti in regime stazionario (alimentate da generatori di tensione e corrente costanti): si tratta di reti resistive in relazione al comportamento degli induttori e dei condensatori.

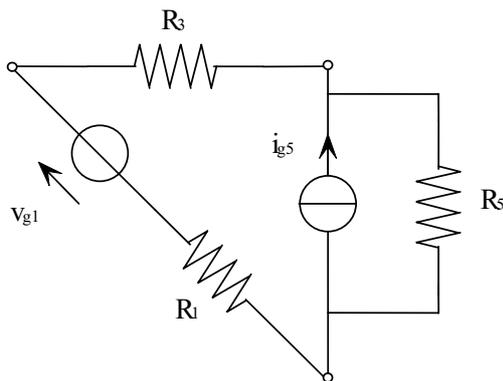


Fig.7.4 La struttura della rete di Fig.7.1 nella ipotesi di generatori stazionari.

## 8 Dualità e analogie.

La teoria delle reti elettromeccaniche prospetta un insieme di parole “magiche”, caratterizzate dal fatto che, sostituendo ordinatamente l’una all’altra è possibile costruire a partire da una proposizione scientificamente valida una nuova proposizione anche essa valida. La “magia” è intrinseca delle proprietà topologiche dei grafi orientati e della natura dei bipoli ideali. Convienne tenere aggiornato l’elenco di tali parole (che si dicono “dualmente corrispondenti”) in quanto esse consentono di espandere rapidamente l’area delle conoscenze e di memorizzare le conoscenze più economicamente. La Tab.8.1 fornisce un primo elenco di parole duali.

Corrente	Tensione
Potenza/energia	Potenza/Energia
Generatore di corrente	Generatore di tensione
Nodo	Anello
Lato	Lato
Serie	Parallelo
Resistore	Conduttore
Resistenza	Conduttanza
Induttore	Condensatore
Induttanza	Capacità
Flusso concatenato	Carica elettrica
Corto circuito	Circuito aperto

Tab.8.1 Parole duali.

Ecco alcuni esempi di proposizioni duali:

- “un generatore di tensione/corrente nulla è un corto circuito/circuito aperto”
- “un resistore/conduttore di resistenza/conduttanza nulla è un corto circuito/circuito aperto”
- “le LKC/LKT indipendenti si ottengono escludendo il nodo/l’anello di massa”
- “il numero dei nodi/anelli indipendenti è  $(n-1)/(a-1)$ ”
- “un induttore/condensatore interessato da una corrente/tensione costante è un corto circuito/circuito aperto”
- “l’energia accumulata in un induttore/condensatore è  $Li^2/2 - Cv^2/2$ ”
- “un induttore/condensatore ideale in corto circuito/aperto conserva la propria energia”

- “il flusso concatenato/la carica elettrica è l’integrale della tensione/corrente”

Tra scienze diverse poi si stabiliscono analogie quando si riscontra che fenomeni diversi sono descrivibili con modelli matematici che hanno la stessa struttura. In particolare si riscontra che è possibile studiare le reti elettriche e quelle meccaniche, dotate di dinamica lineare, stabilendo una connessione di analogia tra le grandezze ed i bipoli ideali indicati nella Tab.8.2.

Forza	Corrente
Velocità	Tensione
Spostamento	Flusso concatenato
Molla	Induttore
Massa	Condensatore

Tab.8.2 Parole analoghe.

Dal momento che le proprietà topologiche dei circuiti meccanici sono le stesse dei circuiti elettrici, se ne conclude che risolvere una rete elettrica comporta la soluzione di altre tre reti: quella della rete elettrica duale, della rete meccanica analoga e della rete meccanica duale di quella analoga.

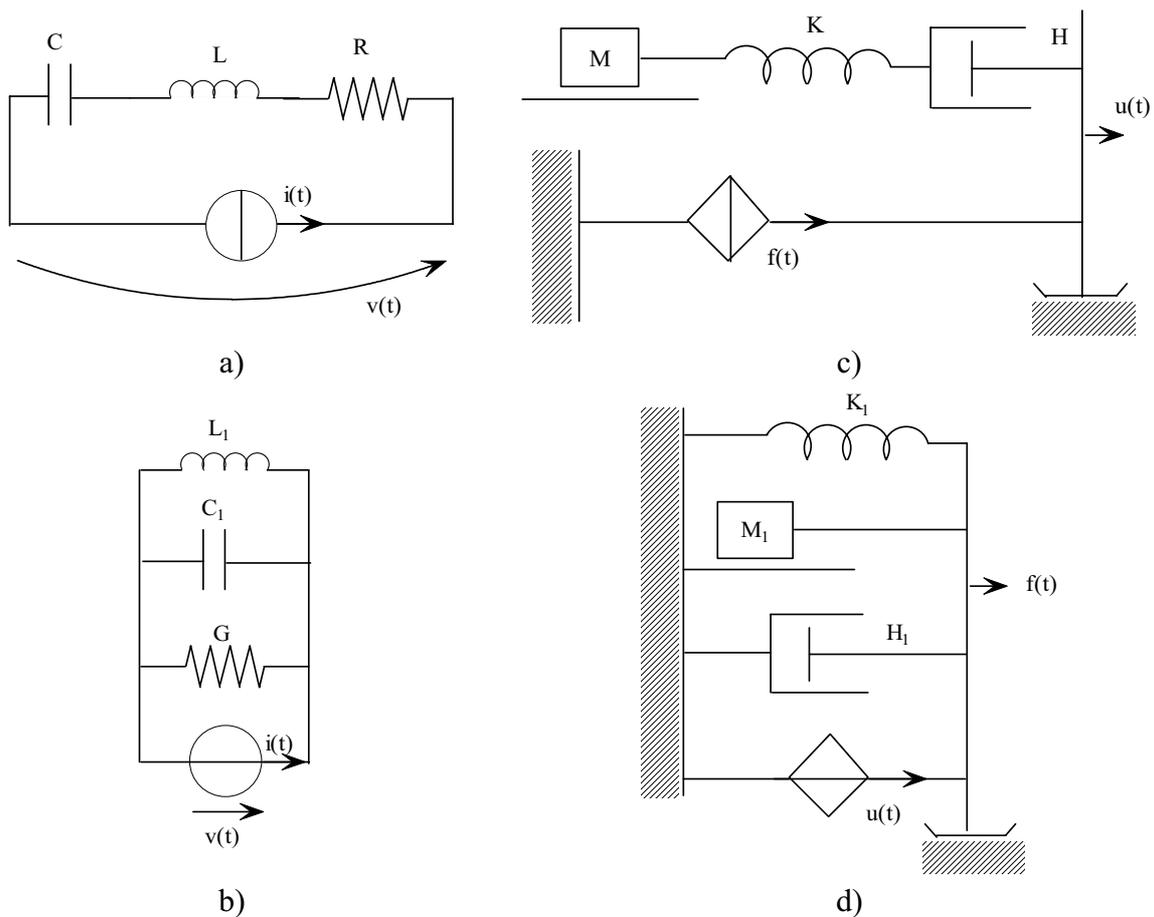


Fig.8.1 Circuiti duali e circuiti analoghi.

La Fig.8.1 illustra questa idea con riferimento a quattro reti supposte tutte inizialmente “scariche” (con energie nulle nei bipoli reattivi per  $t = 0$ ). Nella rete di Fig.8.1a

comparare una rete costituita da quattro bipoli elettrici ideali in serie: un generatore di corrente, un resistore, un induttore ed un condensatore ed il teorema generale delle reti elettriche fornisce come equazione risolutiva la eq.8.1a. Nella rete duale di Fig.8.1b compare una rete costituita da quattro bipoli ideali in parallelo: un generatore ideale di tensione, un conduttore, un condensatore ed un induttore ed il teorema generale delle reti elettriche fornisce come equazione risolutiva la eq.8.1b. Se si assume che numericamente siano  $G = R$ ;  $L = C_1$ ;  $C = L_1$  e che  $i(t) = v(t)$  allora la tensione della prima rete uguaglia numericamente la corrente della seconda rete.

La rete meccanica di Fig.8.1c è costituita dalla serie di un generatore di forza ideale, di uno smorzatore, di una molla e di una massa ed il teorema generale delle reti fornisce come equazione risolutiva la eq.8.1c. Nella rete duale di Fig.8.1d compare una rete costituita da quattro bipoli in parallelo: un generatore ideale di velocità, uno smorzatore, una massa ed una molla ed il teorema generale delle reti fornisce come equazione risolutiva la eq.8.1d. Anche in questo caso tramite l'eguaglianza tra parametri ed ingressi del tipo prima indicato si perviene ad una stessa soluzione numerica per le due reti.

Se, infine, si assumono valide le seguenti eguaglianze numeriche  $R = 1/H_1$ ;  $L = 1/K_1$ ;  $C = M_1$  e si assume che  $i(t) = f(t)$  allora la  $v(t)$  del circuito elettrico di Fig 8.1a eguaglia la  $u(t)$  del circuito meccanico di Fig.8.1c.

$$8.1a \quad v(t) = Ri + Lpi + \frac{i}{Cp} \quad p = \frac{d}{dt} \quad \frac{1}{p} = \int dt$$

$$8.1b \quad i(t) = Gv + C_1pv + \frac{v}{L_1p}$$

$$8.1c \quad u(t) = \frac{f}{H_1} + \frac{pf}{K_1} + \frac{f}{M_1p}$$

$$8.1d \quad f(t) = Hu + Mpu + \frac{u}{Kp}$$

## 9 Proprietà delle reti elettriche

### 9.1 Teorema di Tellegen (TT)

Si consideri un grafo orientato. Assegnata *arbitrariamente* una corrente  $i_j$  ed una tensione  $v_j$  ad ogni lato  $j$  (con tensioni e correnti misurate in modo coordinato, ad esempio con la convenzione degli utilizzatori), se tali grandezze rispettano le LKC e le LKT allora la somma delle potenze di tutti i lati è nulla, per modo che vale la eq.9.1.

$$9.1 \quad \sum_j v_j i_j = 0$$

Come caso particolare se la tensione e la corrente sono quelle fisiche, quali si realizzano in funzionamento particolare di una rete dotata di quel grafo (dovuto a specifici generatori della rete), allora le potenze sono quelle assorbite dai diversi lati in quel funzionamento particolare ed il TT produce lo stesso enunciato del principio di conservazione dell'energia.

Per comprendere la generalità e la portata del TT ed estendere le proprietà di dualità (senza entrare nel merito di una dimostrazione) consideriamo il caso particolare della rete di Fig.9.1 che presenta  $l = 6$ ,  $n = 3$  ed  $a = 3$ .

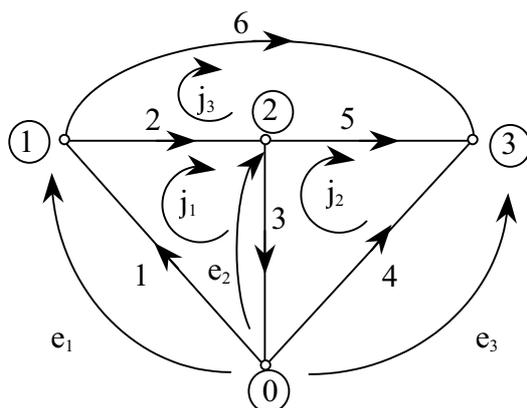


Fig.9.1 Grafo orientato, potenziali indipendenti e correnti cicliche.

La rete in questione è caratterizzata da  $l = 6$  tensioni tra le quali esistono i legami precisati da  $a = 3$  LKT. Possiamo quindi fissare  $l - a = n = 3$  "tensioni indipendenti" e ricavare tramite le LKT le restanti. Un sistema di tensioni indipendenti è quello dei "potenziali dei nodi" (e cioè le tensioni tra ogni nodo ed il nodo di massa)  $e_1, e_2, e_3$ , si veda la Fig.9.1, che consentono di esprimere direttamente le tensioni  $v_1, v_3, v_4$  dei lati connessi tra un nodo e quello di massa e di ricavare, tramite le LKT, le tensioni  $v_2, v_5, v_6$  tra lati non connessi al nodo di massa. Complessivamente un sistema di tensioni che soddisfa le LKT è allora quello indicato nella eq.9.2.

$$9.2 \quad \begin{array}{ll} v_1 = -e_1 & v_2 = e_1 - e_2 \\ v_3 = e_2 & v_4 = -e_3 \\ v_5 = e_2 - e_3 & v_6 = e_1 - e_3 \end{array}$$

La rete d'altra parte è caratterizzata da  $l = 6$  correnti di lato tra le quali esistono i legami precisati da  $n = 3$  equazioni LKC. Possiamo quindi dualmente fissare  $l - n = a = 3$  "correnti indipendenti" e ricavare tramite le LKC le restanti. Un sistema di correnti indipendenti è quello delle "correnti cicliche"  $j_1, j_2, j_3$ , si veda la Fig.9.1 (pensate circolanti all'interno di ogni anello) che consentono di esprimere direttamente le correnti  $i_1, i_4, i_6$  dei lati che fanno parte dell'anello esterno e di ricavare, tramite le LKC, le correnti  $i_2, i_3, i_5$  dei lati che non fanno parte dell'anello esterno. Complessivamente un sistema di correnti che soddisfa le LKC è allora quello indicato nella eq.9.3.

$$9.3 \quad \begin{array}{ll} i_1 = j_1 & i_2 = j_1 - j_3 \\ i_3 = j_1 - j_2 & i_4 = -j_2 \\ i_5 = j_2 - j_3 & i_6 = j_3 \end{array}$$

Assegniamo ora arbitrariamente ai tre potenziali indipendenti valori nell'ambito dei numeri interi, ad esempio assumiamo  $e_1 = 1; e_2 = 2; e_3 = -1$  ed assegniamo arbitrariamente alle tre correnti cicliche valori nell'ambito delle funzioni del tempo, ad esempio assumiamo  $j_1 = t; j_2 = \text{sen}(t); j_3 = \text{cos}(t)$ . Valutiamo a questo punto, tramite le eq.9.2 e 9.3, le tensioni, le correnti di lato e le potenze di ogni lato come è indicato nella eq.9.4. Si può constatare che il TT è soddisfatto dato che la sommatoria delle potenze di tutti i lati è nulla  $\sum_j p_j = 0$

$$9.4 \quad \begin{array}{lll} v_1 = -e_1 = -1 & i_1 = j_1 = t & p_1 = v_1 i_1 = -t \\ v_2 = e_1 - e_2 = -1 & i_2 = j_1 - j_3 = t - \text{cos}(t) & p_2 = v_2 i_2 = -t + \text{cos}(t) \\ v_3 = e_2 = 2 & i_3 = j_1 - j_2 = t - \text{sen}(t) & p_3 = v_3 i_3 = 2t - 2 \text{sen}(t) \\ v_4 = -e_3 = 1 & i_4 = -j_2 = -\text{sen}(t) & p_4 = v_4 i_4 = -\text{sen}(t) \\ v_5 = e_2 - e_3 = 3 & i_5 = j_2 - j_3 = \text{sen}(t) - \text{cos}(t) & p_5 = v_5 i_5 = 3 \text{sen}(t) - 3 \text{cos}(t) \\ v_6 = e_1 - e_3 = 2 & i_6 = j_3 = \text{cos}(t) & p_6 = v_6 i_6 = 2 \text{cos}(t) \end{array}$$

## 9.2 Proprietà delle reti lineari e tempo invarianti.

La risposta delle reti lineari, con parametri  $R, L, C$  positivi ed indipendenti dal tempo (reti lineari tempo invarianti), ad un qualsiasi insieme di ingressi costituito da generatori indipendenti è unica qualunque sia lo stato iniziale dell'energia accumulata negli induttori e nei condensatori. Come conseguenza della unicità della soluzione è possibile dimostrare i teoremi di sostituzione, di sovrapposizione, delle reti equivalenti di Thevenin e di Norton ed il teorema di reciprocità nel seguito enunciati.

### 9.2.1 Teorema di sostituzione.

Data una rete arbitraria  $\Pi$  con un certo numero di generatori indipendenti che ammetta un'unica soluzione, siano  $v_k(t), i_k(t)$  la tensione e la corrente del lato  $k$ . La soluzione della rete non cambia se al lato  $k$  si sostituisce un generatore di tensione indipendente con tensione  $v_k(t)$  oppure un generatore indipendente di corrente con corrente  $i_k(t)$ , si veda la Fig.9.2.

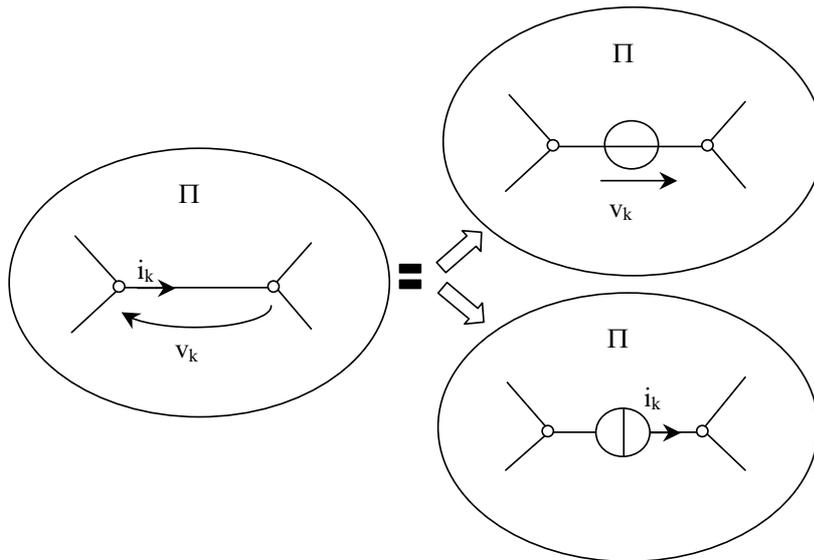


Fig.9.2 Teorema di sostituzione

### 9.2.2 Teorema di sovrapposizione.

La risposta di una rete  $R, L, C$  inizialmente  $t = 0$  scarica ad un insieme di generatori di tensione e di corrente indipendenti è pari alla somma delle risposte a ciascuno dei generatori pensati agenti da soli quando gli altri generatori di tensione siano corto circuitati e quelli di corrente aperti, si veda la rete di Fig.9.3 che per semplicità annovera solo un generatore di tensione ed uno di corrente. Questo comporta che se in una rete si aggiunge un generatore indipendente la soluzione sia la somma di quella precedente più quella dovuta al solo generatore aggiunto quando gli altri siano cortocircuitati (generatori di tensione) o aperti (generatori di corrente).

Nel caso di reti in regime stazionario o alternato sinusoidale isofrequenziale il teorema di sovrapposizione si applica anche alla soluzione di regime.

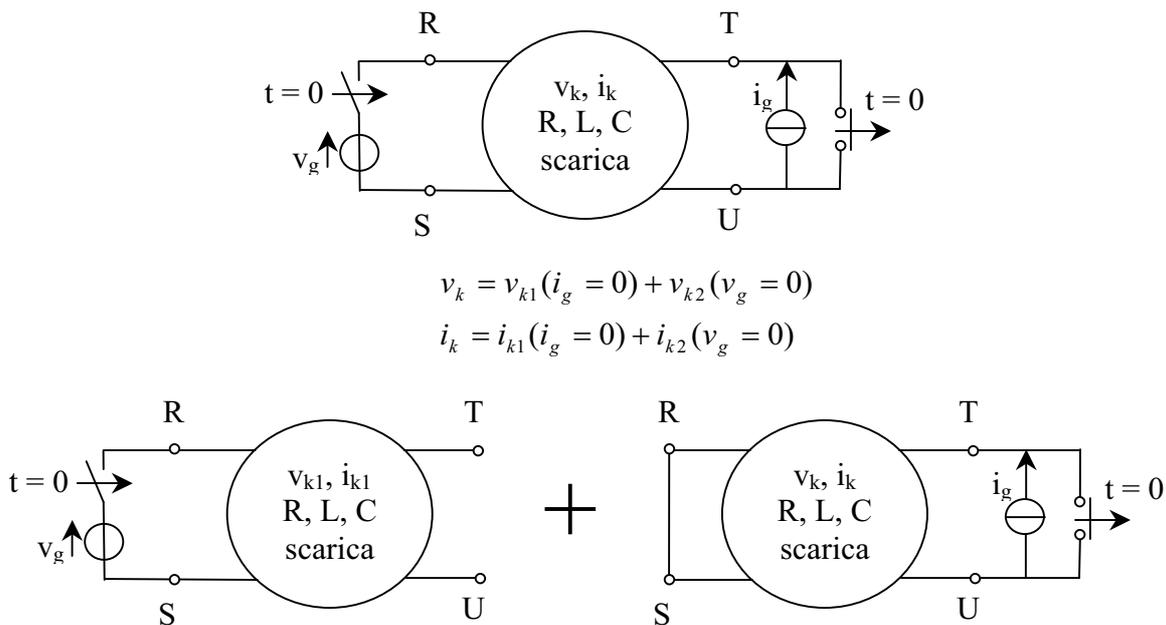


Fig.9.3 Teorema di sovrapposizione.

### 9.2.3 Teorema delle rete equivalente di Thevenin e della rete equivalente di Norton.

Si consideri un rete lineare  $\Pi$  connessa ai morsetti  $R, S$  ad un bipolo  $B$  arbitrario (il teorema quindi vale qualunque sia il legame costitutivo del carico connesso ai morsetti  $R, S$ ), si veda la Fig.9.4a. Supponiamo di staccare il carico e di misurare la tensione  $v_{ORS}$  che si manifesta ai morsetti  $R, S$ , si veda la Fig.9.4c.

Il teorema della rete equivalente di Thevenin, si veda la Fig.9.4b, assicura che agli effetti del calcolo della tensione e della corrente nel bipolo  $B$  si può sostituire all'intera rete  $\Pi$  un generatore indipendente di tensione pari a  $v_{ORS}$  (disposto come è indicato in Fig.9.4b) in serie ad una rete  $\Pi_0$  ottenuta da quella iniziale azzerando tutti i generatori indipendenti (quindi sostituendo ai generatori di tensione indipendente un corto circuito ed ai generatori di corrente indipendenti un circuito aperto).

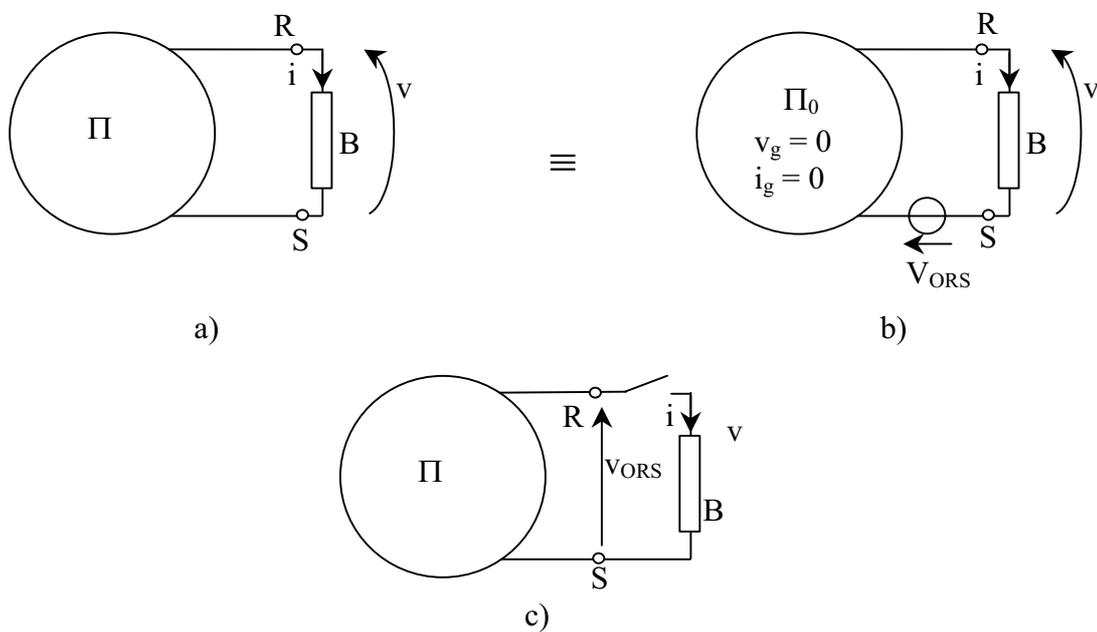


Fig.9.4 Il teorema di Thevenin.

In effetti, si veda la Fig.9.5a., nulla cambia nel funzionamento della rete  $\Pi$  se in serie al carico  $B$  si dispongono due generatori indipendenti di tensione pari a  $\pm v_{ORS}$ .

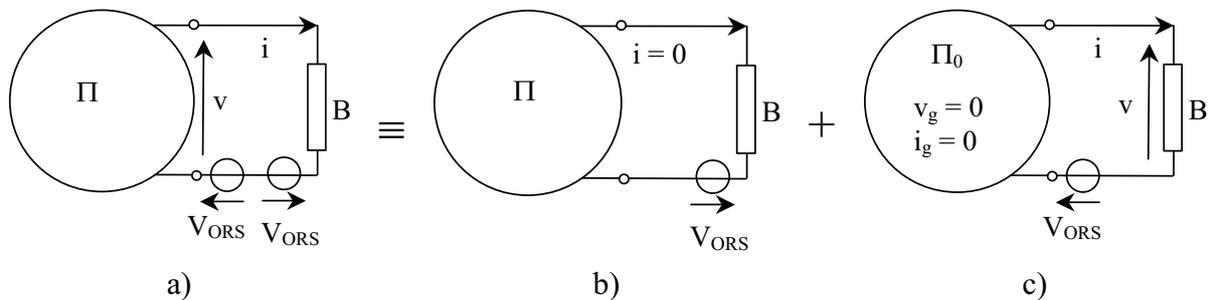


Fig.9.5 a) Rete equivalente a quella di Fig.9.4; b) Rete con corrente e tensione nulla su  $B$ , c) rete equivalente di Thevenin per il calcolo della tensione e corrente di  $B$ .

In base al teorema di sovrapposizione la tensione e la corrente di  $B$  nella rete di Fig.9.5a si possono calcolare per sovrapposizione: i) di quelle della rete di Fig.9.5b dovute alla rete  $\Pi$  ed al generatore  $v_{0RS}$  (che comporta corrente e tensione nulla in  $B$ ) e ii) di quelle dovute alla rete  $\Pi_0$  (con generatori nulli) ed al generatore  $-v_{0RS}$ , si veda la Fig.9.5c.

Il teorema della rete equivalente di Norton è duale di quello precedente e si riferisce sempre alla rete riprodotta per comodità in Fig.9.6a. Supponiamo di porre in corto circuito il carico e di misurare la corrente di corto circuito  $i_{kRS}$ , si veda la Fig.9.6c.

Il teorema della rete equivalente di Norton assicura che agli effetti del calcolo della tensione e della corrente nel bipolo  $B$  si può sostituire all'intera rete  $\Pi$  un generatore indipendente di corrente pari alla corrente di corto circuito  $i_{kRS}$  (disposto come è indicato in Fig.9.6c) in parallelo ad una rete  $\Pi_0$  ottenuta da quella iniziale azzerando tutti i generatori indipendenti, si veda la Fig.9.6c che descrive la rete equivalente di Norton.

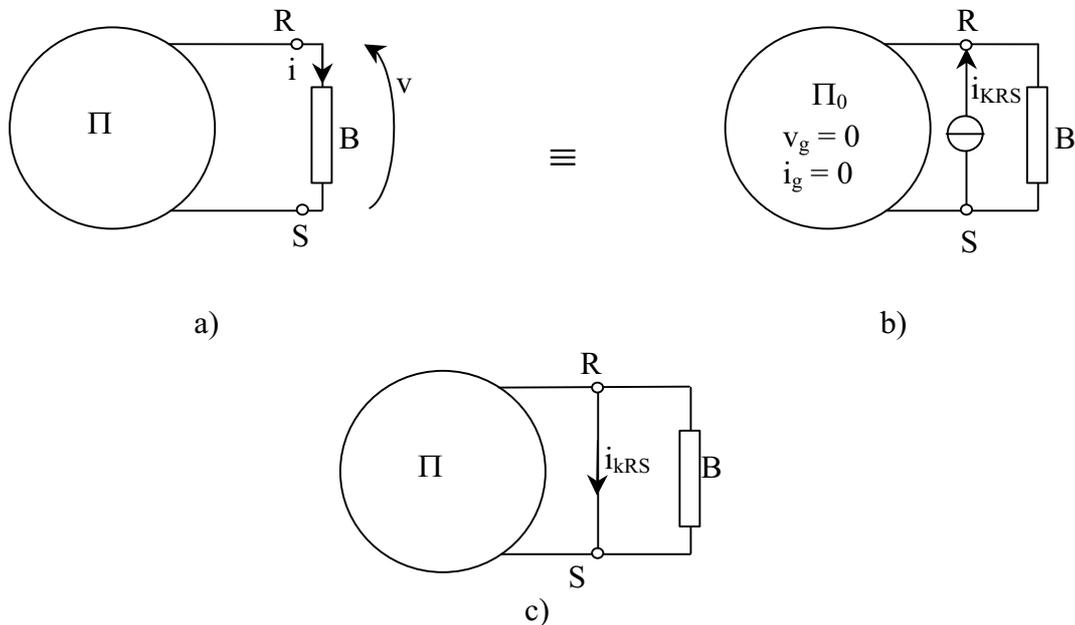


Fig.9.6 Teorema di Norton.

In effetti, si veda la Fig.9.7a, nulla cambia nel funzionamento della rete  $\Pi$  se in parallelo al carico  $B$  si dispongono due generatori indipendenti di corrente pari a  $\pm i_{kRS}$ .

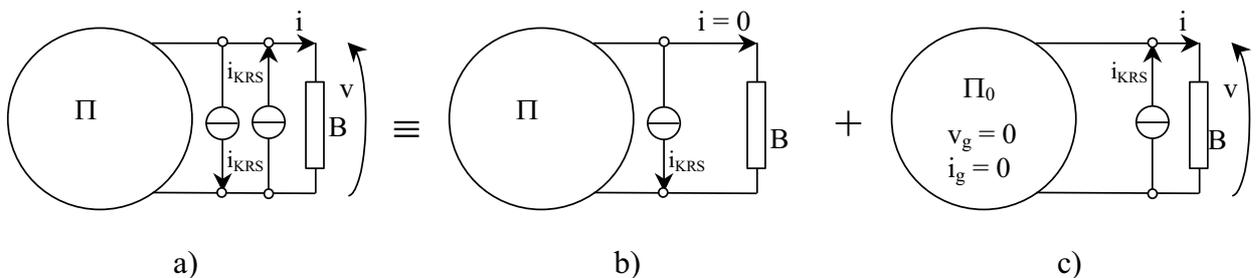


Fig.9.7 a) Rete equivalente a quella di Fig.9.3; b) rete con corrente e tensione nulla su  $B$ ; c) rete equivalente di Norton per il calcolo della tensione e corrente di  $B$ .

In base al teorema di sovrapposizione la tensione e la corrente di  $B$  si possono calcolare per sovrapposizione: i) di quelle della rete di fig.9.7b dovute alla rete ed al generatore  $i_{kRS}$  (che comporta corrente e tensione nulla su  $B$  e ii) di quelle della rete  $\Pi_0$  (con generatori nulli) ed al generatore  $-i_{kRS}$ , si veda la Fig.9.7c che descrive la rete equivalente di Norton.

### 9.2.4 Teorema di reciprocità.

Una rete lineare e tempo invariante rappresenta un sistema fisico reciproco cioè tale che considerate due coppie  $\alpha, \beta$  e  $\gamma, \delta$  qualsiasi di morsetti la risposta misurabile ai morsetti  $\gamma, \delta$  per effetto di un qualsiasi ingresso applicato ai morsetti  $\alpha, \beta$  è uguale alla risposta misurabile ai morsetti  $\alpha, \beta$  per effetto dello stesso ingresso applicato ai morsetti  $\gamma, \delta$ . Le comunicazioni telefoniche costituiscono una testimonianza continua di questo teorema. In effetti il microfono all'inizio (M) di una linea elettrica (schematizzabile con una rete lineare) imprime una tensione e fa circolare una corrente proporzionale al messaggio vocale, l'altoparlante al termine (A) della linea trasforma la corrente in un segnale acustico proporzionale alla corrente stessa e quindi proporzionale al messaggio. Ponendo il microfono al termine della linea ed inviando da tale posizione lo stesso messaggio vocale un altoparlante all'inizio della linea lo ricostruirà allo stesso modo che nella precedente esperienza (Fig.9.9).

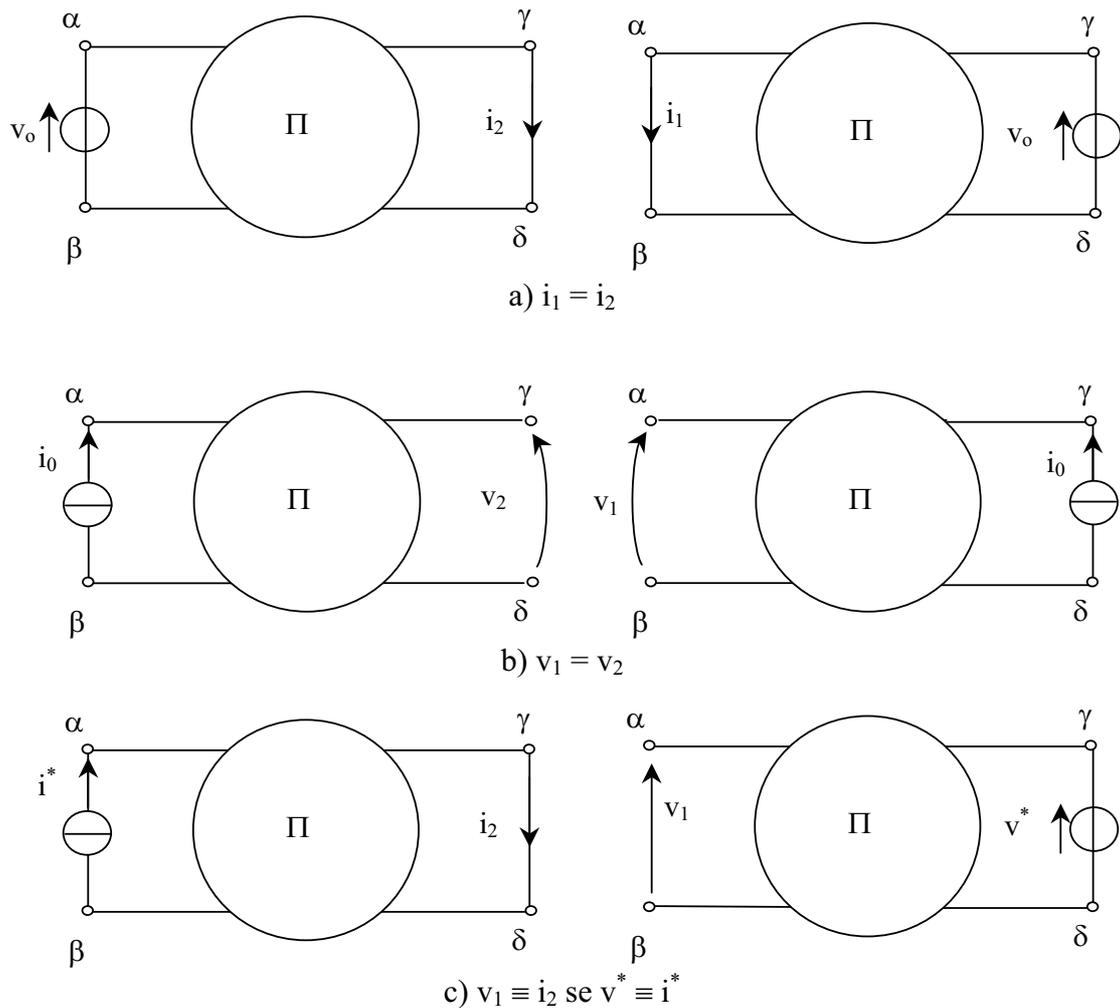


Figura 9.8. Le 3 asserzioni della reciprocità.

In proposito si possono dimostrare le seguenti asserzioni.

Prima asserzione, si veda la Fig.9.8a: le correnti  $i_1$  ed  $i_2$  sono uguali.

Seconda asserzione, si veda la Fig.9.8b: le tensioni  $v_1$  e  $v_2$  sono uguali.

Terza asserzione, si veda la Fig.9.8c: se le forme d'onda di  $i^*(t)$  e di  $v^*(t)$  sono uguali allora sono uguali anche le forme d'onda di  $i_2(t)$  e di  $v_1(t)$ .

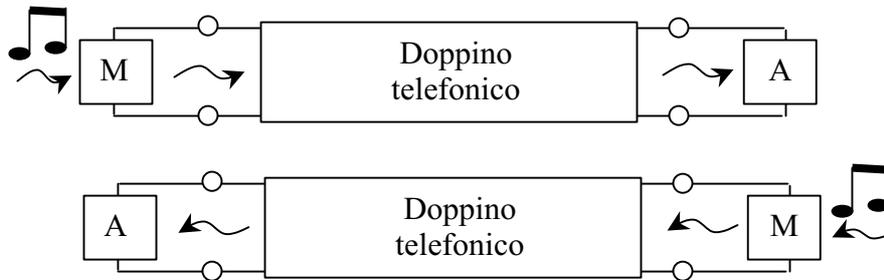


Fig 9.9 Ricostruzione del segnale vocale.

## RETI IN REGIME SINUSOIDALE.

### 1 Proprietà delle funzioni sinusoidali isofrequenziali nella forma coseno.

Nel funzionamento in regime alternato sinusoidale isofrequenziale le tensioni e le correnti della rete sono tutte funzioni sinusoidali con la stessa pulsazione  $\omega$ , di queste funzioni nel seguito si userà soltanto la forma coseno. Questo comporta che la forma seno verrà trasformata avvalendosi della eq.1.1.

$$1.1 \quad \pm \operatorname{sen}(\omega t + \alpha) = \cos(\omega t + \alpha \mp \pi/2)$$

Tratteremo quindi sempre funzioni del tipo indicato nella eq.1.2, con la forma precisata nella Fig.1.1, in cui  $F_M$  prende il nome di valore massimo,  $\alpha$  prende il nome di fase iniziale (spostamento dell'origine dell'asse  $\omega t$  rispetto al massimo positivo della cosinusoide) e la pulsazione  $\omega$  è legata al periodo  $T$  ed alla frequenza  $f$  come è indicato ancora nella eq.1.2.

$$1.2 \quad f(t) = F_M \cos(\omega t + \alpha) \quad \omega = 2\pi/T = 2\pi f$$

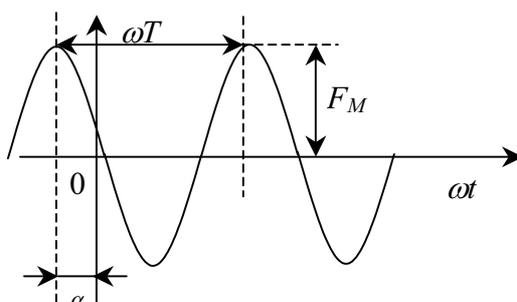


Fig.1.1 Funzione alternata sinusoidale nella forma coseno  $\Rightarrow F_M \cos(\omega t + \alpha)$ .

Si definisce valore medio  $F_m$  della funzione  $f(t)$  la quantità indicata nella eq.1.3, mentre si chiama valore efficace  $F$  la quantità indicata nella eq.1.4 e fattore di forma il rapporto precisato nella eq.1.5.

$$1.3 \quad F_m = \frac{1}{T} \int_0^T |f(t)| dt = \frac{2}{\pi} V_m = 0,636 V_M$$

$$1.4 \quad F = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T f^2(t) dt} = \frac{V_M}{\sqrt{2}} = 0,707 V_M$$

$$1.5 \quad K_f = \frac{F}{F_m} = \frac{\pi}{2\sqrt{2}} = 1,11$$

Il valore efficace ha un preciso significato energetico: se, ad esempio,  $f(t)$  è una corrente allora il valore efficace è quella corrente continua  $F$  che in un periodo dà luogo in

un resistore alla stessa energia che viene dissipata per effetto della corrente  $f(t)$  (come dimostra la eq.1.6 per la tensione vale la frase duale).

$$1.6 \quad RF^2T = R \int_0^T f^2(t)dt$$

Il fattore  $K_f$  è un indice della forma d'onda della grandezza alternata nel senso messo in evidenza, per confronto, dalla Fig.1.2.

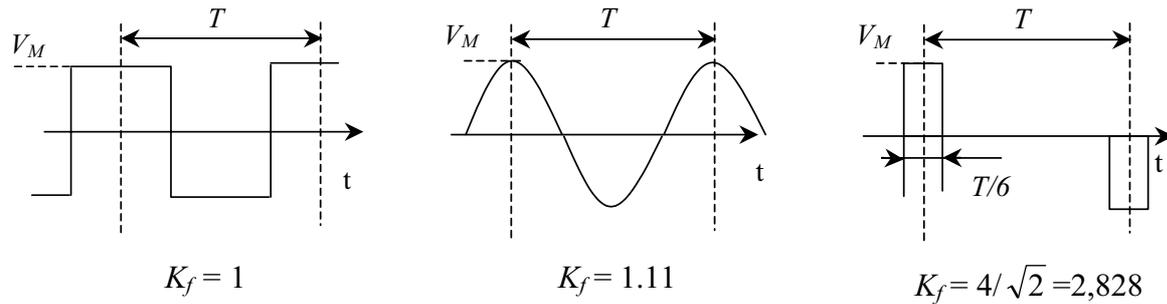


Fig.1.2 Fattori di forma per alcune funzioni alternate.

## 2 Modalità di rappresentazione delle funzioni coseno e seno.

### 2.1 Forma esponenziale con un fasore rotante.

Consideriamo nel piano dei numeri complessi con asse reale  $Re$  ed immaginario  $Im$  una circonferenza di raggio  $F_M$  e su di essa un punto  $P$  individuato dall'angolo al centro  $\alpha$ , si veda la Fig.2.1.

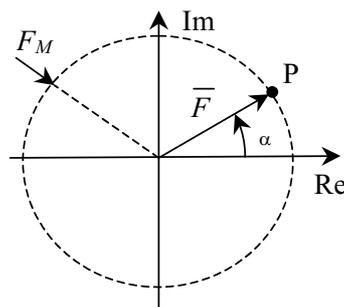


Fig.2.1 Il fasore  $\bar{F}$ .

Il numero complesso  $\bar{F}$  che individua  $P$  nel piano complesso è indicato nella eq.2.1. Se ora il punto  $P$  ruota sulla circonferenza, a partire dalla posizione iniziale individuata da  $\bar{F}$ , con velocità angolare  $\omega$  allora la sua posizione è individuata dal numero complesso  $\bar{F}^*$  indicato nella eq.2.2.

$$2.1 \quad \bar{F} = F_M \cos \alpha + jF_M \sin \alpha = F_M e^{j\alpha}$$

$$2.2 \quad \bar{F}^* = \bar{F}e^{j\omega t} = F_M e^{j(\omega t + \alpha)} = F_M \cos(\omega t + \alpha) + jF_M \sin(\omega t + \alpha) = \text{Re}(\bar{F}e^{j\omega t}) + j \text{Im}(\bar{F}e^{j\omega t})$$

La eq.2.2 evidenzia che una funzione cosinusoidale è rappresentabile come è indicato nella eq.2.3, dove  $\bar{F}$  si dice che è il “fasore rappresentativo della cosinusoidale”. La conclusione, si veda la Fig.2.2, è che la classe delle funzioni di nostro interesse è rappresentata dalla proiezione sull’asse reale di un fasore rotante con velocità angolare  $\omega$  in senso antiorario (Fig.2.2a) oppure dalla proiezione del fasore, fisso nel piano complesso, sull’asse reale rotante in senso orario con velocità  $\omega$  (Fig.2.2b).

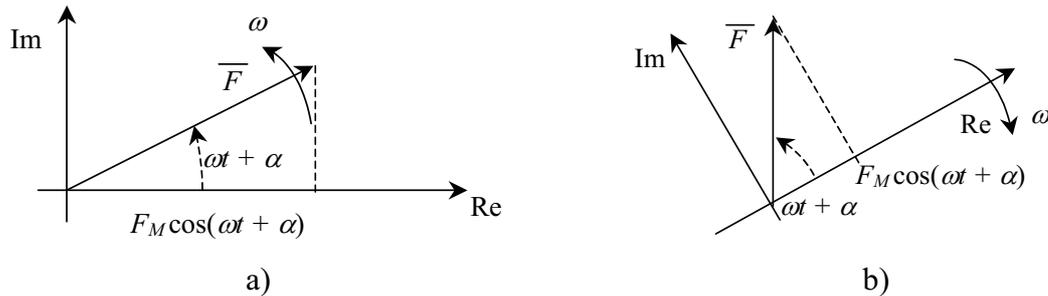


Fig.2.2 Rappresentazione di una funzione cosinusoidale mediante proiezione sull’asse Re del fasore rappresentativo  $\bar{F}$ .

$$2.3 \quad F_M \cos(\omega t + \alpha) = \text{Re}(\bar{F}e^{j\omega t})$$

Si noti che nelle eq.2.1-2 è stato introdotto l’operatore  $e^{j\beta}$  che, applicato ad un fasore, lo fa ruotare di  $\beta$  in senso antiorario: questa proprietà è ulteriormente evidenziata nella eq.2.4.

$$2.4 \quad \bar{F}e^{j\beta} = (F_M \cos \alpha + jF_M \sin \alpha)(\cos \beta + j \sin \beta) = F_M \cos(\alpha + \beta) + jF_M \sin(\alpha + \beta)$$

Proprietà notevoli dell’operatore  $e^{j\beta}$  sono indicate nelle eq.2.5 e 2.6 (si veda anche la Fig.2.3).

$$2.5 \quad e^{jK\pi/2} = \pm j \quad \text{per } K = 4H + 1 \text{ con } H = 0,1,2,\dots; \quad - \text{ per } K = 2H + 1 \text{ con } H = 1,3,5$$

$$2.6 \quad e^{jK\pi} = \pm 1 \quad + \text{ per } K = 0,2,4,\dots \quad - \text{ per } K = 3,5,\dots$$

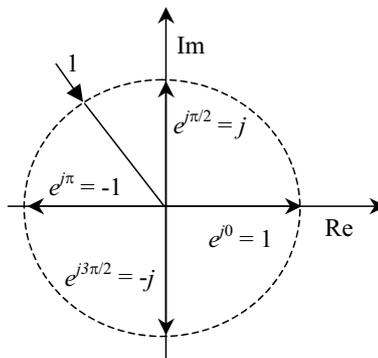


Fig.2.3 Il fasore  $e^{jN\pi/2}$ .

## 2.2 Forma sinusoidale con due fasori controrotanti.

Questa rappresentazione, dovuta ad Eulero, è illustrata nella Fig.2.4a. Si consideri nel piano complesso la circonferenza di raggio  $F_M/2$  e su questa i punti  $P^+$  e  $P^-$  individuati dai due fasori indicati nella eq. 2.7.

$$2.7 \quad \bar{F}^+ = \frac{F_M}{2} e^{j\alpha} = \frac{F_M}{2} (\cos \alpha + j \sin \alpha) \quad \bar{F}^- = \frac{F_M}{2} e^{-j\alpha} = \frac{F_M}{2} (\cos \alpha - j \sin \alpha)$$

$$2.8 \quad \bar{F}^+ + \bar{F}^- = F_M \cos \alpha = F_M (e^{j\alpha} + e^{-j\alpha}) / 2 = F_M Chj\alpha$$

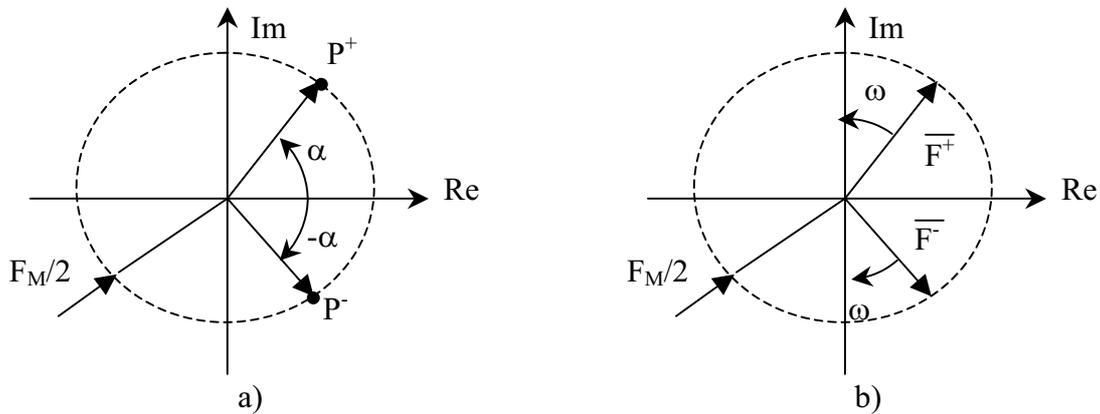


Fig 2.4 Rappresentazione con due fasori controrotanti di una funzione sinusoidale

Si può constatare che la somma dei due fasori individua una cosinusoidale di ampiezza  $F_M$ , come è evidenziato nella eq.2.8. La stessa relazione individua poi anche il legame tra la funzione sinusoidale e la funzione coseno iperbolico.

Se ora i punti  $P^+$  e  $P^-$  ruotano sulla circonferenza con velocità angolare  $\pm \omega$ , si veda la Fig.2.4b, allora la somma dei due fasori rappresentativi della posizione di tali punti fornisce la funzione sinusoidale oggetto di studio, come è indicato nella eq.2.9.

$$2.9 \quad \bar{F}^+ e^{j\omega t} + \bar{F}^- e^{-j\omega t} = F_M Ch[j(\omega t + \alpha)] = F_M \cos(\omega t + \alpha)$$

In conclusione questo tipo di rappresentazione evita di introdurre l'operatore Re di proiezione sull'asse reale mediante l'introduzione di due fasori controrotanti di ampiezza pari a metà del valore massimo della cosinusoidale.

La rappresentazione con un solo fasore rotante viene privilegiata nella analisi delle reti a regime, quella con due fasori controrotanti nella analisi dei segnali.

E' possibile a questo punto verificare che nel caso della forma seno  $f(t) = F_M \sin(\omega t + \alpha)$  e di rappresentazione con un solo fasore rotante si sarebbe dovuto considerare la proiezione del fasore rotante  $\bar{F} e^{j\omega t}$  sull'asse immaginario Im, mentre nel caso di rappresentazione con due fasori controrotanti si sarebbe trovato che  $F_M \sin(\omega t + \alpha) = F_M Sh[j(\omega t + \alpha)] / j$ .

Nel seguito, come già detto, si adopererà la forma coseno.

### 3 Le operazioni con le funzioni sinusoidali e l'analisi delle reti elettriche

Nello studio delle reti elettriche in regime alternato sinusoidale le principali operazioni da compiere sono quelle di combinazione lineare e di derivazione: entrambe queste operazioni, come viene nel seguito dimostrato, sono di semplice esecuzione avvalendosi della rappresentazione mediante la proiezione sull'asse reale di un fasore rotante.

Nella eq.3.1 si evidenzia che la combinazione lineare di più funzioni cosinusoidali si valuta mediante la combinazione lineare  $\bar{F}$  dei rispettivi fasori rappresentativi  $\bar{F}_k$  dato che gli operatori Re di proiezione e di somma  $\sum$  sono tra loro invertibili.

$$3.1 \quad f(t) = \sum_k A_k F_{Mk} \cos(\omega t + \alpha_k) = \sum_k \text{Re}(A_k \bar{F}_k e^{j\omega t}) = \text{Re} \left[ e^{j\omega t} \sum_k A_k \bar{F}_k \right] = \text{Re}[\bar{F} e^{j\omega t}]$$

In particolare la cosinusoide somma di più cosinusoidi  $f(t) = f_1(t) + f_2(t) = \text{Re}[(\bar{F}_1 + \bar{F}_2)e^{j\omega t}]$  è rappresentata da un fasore che è la somma dei fasori rappresentativi delle singole cosinusoidi, si veda la Fig.3.1.

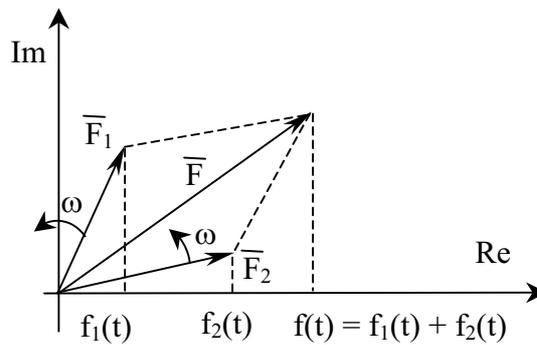


Fig.3.1. Fasore somma

Nella eq.3.2 si evidenzia il fatto che la derivata di una cosinusoide è ancora una cosinusoide il cui fasore rappresentativo si ottiene moltiplicando quello della cosinusoide di partenza per  $j\omega$ , si veda la Fig. 3.2 (a questo punto è anche chiaro il risultato della derivata di una combinazione lineare di cosinusoidi). Il risultato conseguito dipende dal fatto che anche l'operatore  $p$  derivata e l'operatore di proiezione Re sono tra loro invertibili.

$$3.2 \quad pF_M \cos(\omega t + \alpha) = -\omega F_M \text{sen}(\omega t + \alpha) = \omega F_M \cos(\omega t + \alpha + \pi/2) = \\ = \text{Re}(j\omega \bar{F} e^{j\omega t}) = \text{Re}(p\bar{F} e^{j\omega t})$$

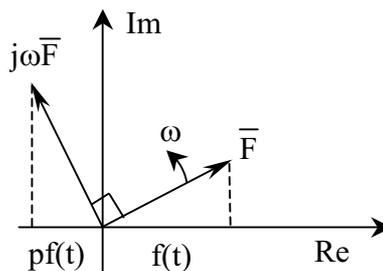


Fig 3.2. Derivata di una cosinusoide

Risulta a questo punto particolarmente facilitata la soluzione delle reti  $R, L, C$  in regime alternato sinusoidale avvalendosi del teorema generale delle reti elettriche. Le leggi di Kirchhoff delle correnti (per ognuno degli  $n$  nodi indipendenti) e delle tensioni (per ognuno degli  $a = l - n$  anelli indipendenti) si riducono infatti a semplici combinazioni lineari di grandezze complesse mentre i legami costitutivi si limitano a stabilire connessioni lineari tra ingresso ed uscita di ogni bipolo di rete. Questa peculiarità è messa in evidenza nella Tab.3.1.

Formulazione			
	nel dominio del tempo		nel dominio della pulsazione $\omega$
LKC	$\sum_k I_{kM} \cos(\omega t + \alpha_k) = 0$	n equazioni	$\sum_k \bar{I}_k = 0$
LKT	$\sum_h V_{hM} \cos(\omega t + \beta_h) = 0$	l-n equazioni	$\sum_k \bar{V}_h = 0$
LC	$v_R(t) = Ri_R(t)$ $v_L(t) = Lpi_L(t)$ $i_C(t) = Cpv_C(t)$	l equazioni	$\bar{V}_R = R\bar{I}_R$ $\bar{V}_L = j\omega L\bar{I}_L$ $\bar{I}_C = j\omega C\bar{V}_C$

Tab.3.1. Formulazione nel dominio del tempo e della pulsazione  $\omega$

Naturalmente una volta risolte le 2l equazione e ricavati i fasori rappresentativi delle correnti e delle tensioni di lato si torna nel dominio del tempo proiettando i fasori sull'asse reale.

Complessivamente la soluzione della rete procede nel seguente modo ciclico: si rappresentano gli ingressi (alternati cosinusoidali) mediante i corrispondenti fasori, si scrivono le equazioni di rete (LKC e LKT) ed i legami costitutivi (LC) e si risolvono le corrispondenti 2l equazioni algebriche nei fasori (numeri complessi) ricavando per ogni lato  $\bar{V}_k$  e  $\bar{I}_k$ , si torna infine nel dominio del tempo proiettando i fasori  $\bar{V}_k, \bar{I}_k$  soluzioni di rete, rappresentativi delle correnti e delle tensioni dei singoli lati, sull'asse reale rotante in senso orario alla velocità  $\omega$ .

#### 4 Impedenza, ammettenza dei bipoli ideali e circuiti simbolici.

Si chiama impedenza di un bipolo ideale  $\bar{Z}$  il rapporto tra il fasore tensione  $\bar{V}$  ed il fasore corrente  $\bar{I}$ , ammettenza  $\bar{Y}$  il reciproco di tale rapporto. Nella Tab.4.1 sono esplicitati questi operatori e sono state introdotte le definizioni di reattanza induttiva  $X_L = \omega L$  e reattanza capacitiva  $X_C = 1/\omega C$  (misurate, come la esistenza  $R$  in  $[\Omega]$ ) e di suscettanza induttiva  $B_L = 1/X_L = 1/\omega L$  e di suscettanza capacitiva  $B_C = 1/X_C = \omega C$  (misurate, come la conduttanza  $G$ , in  $[S]$ ).

Resistore	$\bar{Z}_R = R$	$\bar{Y}_R = 1/\bar{Z}_R = 1/R = G$
Induttore	$\bar{Z}_L = j\omega L = jX_L$	$\bar{Y}_L = 1/\bar{Z}_L = 1/jX_L = -jB_L$
Condensatore	$\bar{Z}_C = 1/j\omega C = -jX_C$	$\bar{Y}_C = 1/\bar{Z}_C = j\omega C = jB_C$

Tab.4.1 Impedenza ed ammettenza, reattanza e suscettanza dei bipoli ideali.

In merito ai "valori asintotici" della impedenza dei bipoli ideali (per l'ammittenza valgono proposizioni duali), si può notare che per  $\omega \rightarrow \infty$  l'induttore si comporta come un circuito aperto (impedenza al limite infinita), mentre il condensatore si comporta come un corto circuito (impedenza al limite nulla), mentre per  $\omega \rightarrow 0$  avviene il contrario. Il resistore mantiene, invece, il suo comportamento qualunque sia il valore di  $\omega$ , nel senso che la sua impedenza ed ammettenza è indipendente dalla frequenza.

Quanto all'effetto della connessione si nota che bipoli ideali in serie sono percorsi dalla stessa corrente e la tensione totale sulla serie dei bipoli è la somma delle tensioni sui singoli elementi. Ne consegue che l'impedenza di una serie di bipoli è la somma delle impedenze. Nel caso di connessione parallelo vale la frase duale.

Fate queste precisazioni si constata che le reti  $R, L, C$  in regime alternato sinusoidale sono rappresentabili con il "circuito simbolico" in cui in luogo dei valori istantanei delle correnti e delle tensioni compaiono i corrispondenti fasori ed in luogo delle resistenze, induttanze e capacità le corrispondenti impedenze o le ammettenze a seconda della comodità di calcolo.

Nella Fig.4.1 sono rappresentate due tipiche reti simboliche con le convenzioni di misura delle grandezze istantanee di lato rappresentate tramite i fasori (per le misure in tale regime si impiegano voltmetri ed amperometri a valore istantaneo, per i quali è essenziale rispettare il coordinamento della inserzione del voltmetro e dell'amperometro; è anche comune l'uso di strumenti a valore efficace ed in tal caso la misura è indipendente dalla modalità di inserzione dello strumento in relazione alla natura della operazione che lo strumento stesso è chiamato a compiere).

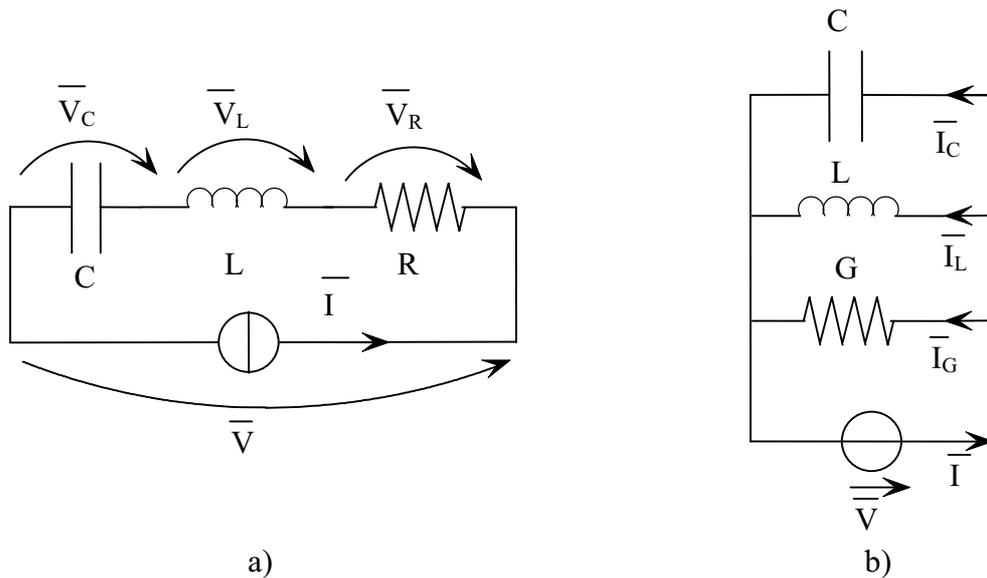


Fig.4.1 Tipiche reti simboliche.

Per le due reti di Fig.4.1 l'impedenza e l'ammittenza simbolica sono rispettivamente quelle indicate nella eq.4.1 e 4.2, tra loro duali.

$$4.1 \quad \bar{Z} = R + j\omega L + \frac{1}{j\omega C} = R + j\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right) = R + j\frac{\omega^2 LC - 1}{\omega C}$$

$$4.2 \quad \bar{Y} = G + j\omega C + \frac{1}{j\omega L} = G + j \frac{\omega^2 LC - 1}{\omega L}$$

Nel caso di reti che presentano un unico ingresso, come nella Fig.4.1 , la soluzione della rete prevede i seguenti passaggi: si rappresenta l'ingresso con corrente/tensione con il corrispondente fasore, si calcola l'impedenza/ammettenza della rete ai morsetti dell'ingresso, si calcola il fasore risposta della rete tensione/corrente moltiplicando l'impedenza/ammettenza per il fasore d'ingresso; si torna nel dominio del tempo proiettando il fasore rotante dell'uscita sull'asse reale. Si nota che, grazie al teorema di sovrapposizione, la procedura ora indicata consente risultati del tutto generali.

$$4.3 \quad v(t)/i(t) \rightarrow \bar{V}(j\omega)/\bar{I}(j\omega) \rightarrow \bar{Y}(j\omega)/\bar{Z}(j\omega) \rightarrow \\ \rightarrow \bar{I}(j\omega)/\bar{V}(j\omega) = \bar{Y}(j\omega)\bar{V}(j\omega)/\bar{Z}(j\omega)\bar{I}(j\omega) \rightarrow i(t)/v(t)$$

## 5 Funzioni di rete.

Consideriamo una rete normale passiva costituita da bipoli  $R, L, C$  ed evidenziamo in questa rete due coppie di morsetti una di ingresso  $AA'$  ed una di uscita  $BB'$  e convenzioni di misura per le tensioni e le correnti a queste due porte, si veda ad esempio la Fig.5.1.

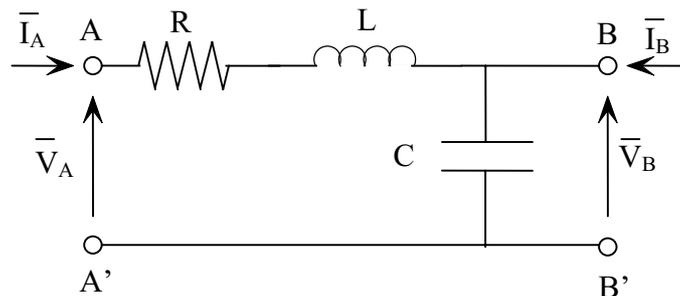
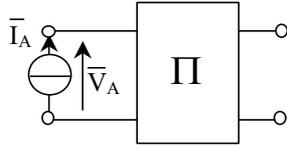
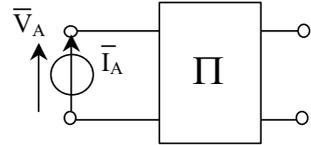
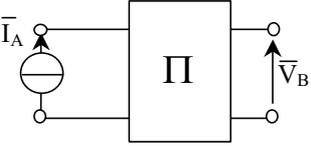
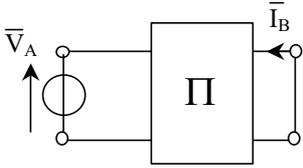
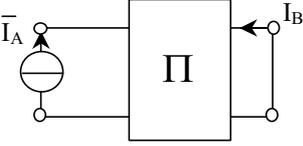
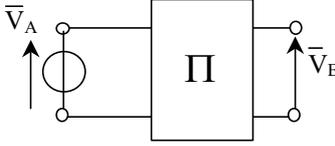


Fig 5.1 Convenzioni di misura alle due porte della rete

Le funzioni di rete sono quelle evidenziate nella Tab.5.1, esse ci consentono di valutare:

- tramite l'impedenza la risposta in tensione alla porta di ingresso  $\bar{V}_A$  ad un generatore di corrente  $\bar{I}_A$  collegato alla porta di ingresso:  $\bar{V}_A = \bar{Z}\bar{I}_A$ ;
- tramite l'ammettenza la risposta in corrente della rete alla porta di ingresso  $\bar{I}_A$  ad un generatore di tensione  $\bar{V}_A$  collegato alla porta di ingresso:  $\bar{I}_A = \bar{Y}\bar{V}_A$ ;
- tramite l'impedenza di trasferimento la risposta in tensione alla porta di uscita  $\bar{V}_B$  per effetto di un generatore di corrente alla porta di ingresso:  $\bar{V}_B = \bar{Z}_t\bar{I}_A$ ;
- tramite l'ammettenza di trasferimento la risposta in corrente alla porta di uscita per effetto di un generatore di tensione alla porta di ingresso:  $\bar{I}_B = \bar{Y}_t\bar{V}_A$ ;
- tramite il guadagno in corrente la risposta in corrente alla porta di uscita per effetto di un generatore alla porta di ingresso:  $\bar{I}_B = \bar{G}_I\bar{I}_A$ .
- tramite il guadagno in tensione la risposta in tensione alla porta di uscita per effetto di un generatore di tensione alla porta di ingresso:  $\bar{V}_B = \bar{G}_V\bar{V}_A$ ;

<p style="text-align: center;"><b>Impedenza</b></p>  $\bar{Z}(j\omega) = \frac{\bar{V}_A}{\bar{I}_A} = R(\omega) + jX(\omega)$	<p style="text-align: center;"><b>Ammetenza</b></p>  $\bar{Y}(j\omega) = \frac{\bar{I}_A}{\bar{V}_A} = G(\omega) + jB(\omega)$
<p style="text-align: center;"><b>Impedenza di trasferimento</b></p>  $\bar{Z}_t(j\omega) = \frac{\bar{V}_B}{\bar{I}_A} = R_t(\omega) + jX_t(\omega)$	<p style="text-align: center;"><b>Ammetenza di trasferimento</b></p>  $\bar{Y}_t(j\omega) = \frac{\bar{I}_B}{\bar{V}_A} = G_t(\omega) + jB_t(\omega)$
<p style="text-align: center;"><b>Guadagno in corrente</b></p>  $\bar{G}_I(j\omega) = \frac{\bar{I}_B}{\bar{I}_A}$	<p style="text-align: center;"><b>Guadagno in tensione</b></p>  $\bar{G}_V(j\omega) = \frac{\bar{V}_B}{\bar{V}_A}$

Tab.5.1 Le funzioni di rete.

Le funzioni di trasferimento di maggior interesse energetico sono l'impedenza e l'ammettenza (sulla quali si concentrerà l'attenzione) conviene però ricordare che le altre funzioni di rete sopra evidenziate sono fondamentali per le scienze elettriche che trattano segnali (ad esempio misure elettriche e comunicazioni elettriche) per modo che quanto segue vale solo come introduzione per tali funzioni.

Posto ora  $s = j\omega$ , l'impedenza  $\bar{Z}(s)$  simbolica della rete (e l'ammettenza simbolica  $\bar{Y}(s)$ ; per fissare le idee si veda la eq.5.1 che fa riferimento al caso della Fig.5.1) gode delle seguenti proprietà.

$$5.1 \quad \bar{Z}(s) = R + sL + \frac{1}{sC} = \frac{s^2LC + sRC + 1}{sC} = \frac{N(s)}{D(s)} = \frac{\bar{V}_A(s)}{\bar{I}_A(s)} = \frac{1}{\bar{Y}(s)}$$

- L'impedenza (l'ammettenza) si presenta sempre come un rapporto tra due polinomi (con numeratore indicato nel seguito come  $N(s)$  e denominatore indicato come  $D(s)$ ). Dal momento che il comportamento asintotico di una rete è resistivo (si veda la rete di Fig.5.2a), induttivo (come nel caso della Fig.5.1) o capacitivo (si veda la Fig.5.2b) tra il grado  $n^*$  del polinomio al numeratore e quello  $d^*$  del polinomio al denominatore di  $\bar{Z}$  deve esistere una delle seguenti relazioni:  $n^* = d^*$  se la rete è asintoticamente resistiva,  $n^* = d^* + 1$  se la rete è asintoticamente induttiva e  $n^* = d^* - 1$  se la rete è asintoticamente capacitiva.

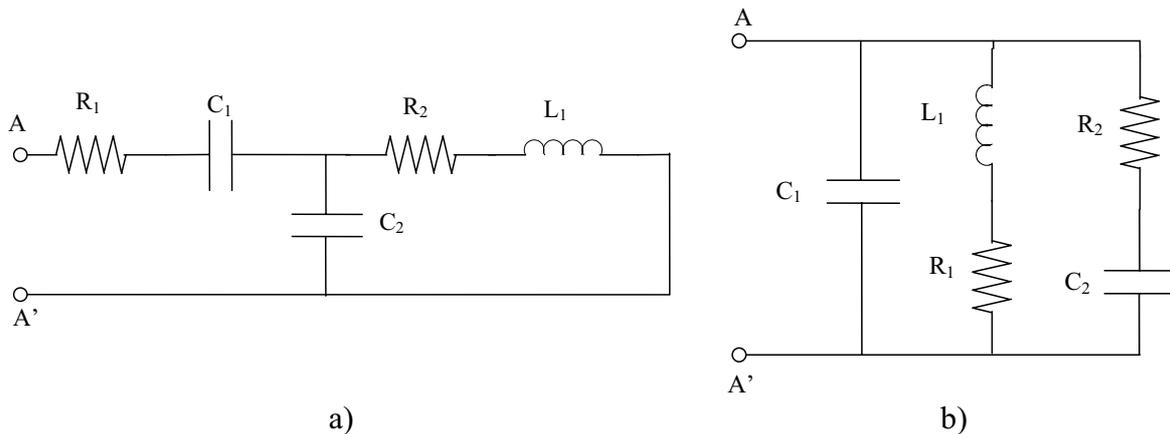


Fig.5.2 a) Esempio di rete asintoticamente resistiva. b) Esempio di rete asintoticamente capacitiva.

- Considerate le  $n^*$  radici del numeratore (e cioè della equazione  $N(s) = 0$ , zeri della impedenza, indicate nel seguito come  $z_k$ ) e le  $d^*$  radici del denominatore (e cioè della equazione  $D(s) = 0$ , poli della impedenza, indicate nel seguito come  $p_j$ ), supposte tra loro distinte, l'impedenza può esser trascritta come è indicato nella eq.5.1 (i poli della impedenza sono gli zeri della ammettenza e viceversa). La risposta in frequenza della rete (e cioè il comportamento della tensione/corrente ai morsetti di ingresso al variare della pulsazione della corrente/tensione impressa, a parità di ampiezza dell'ingresso) e, come si vedrà nel seguito, il comportamento transitorio della rete per effetto di un ingresso variabile nel tempo dipende dai poli e dagli zeri che vengono rappresentati in diagrammi del tipo in Fig.5.3 (dove i poli vengono convenzionalmente indicati con una croce e gli zeri con un piccolo cerchio). Lo studio della risposta in frequenza delle reti e le relative applicazioni sono demandate ai corsi pertinenti l'uso dei segnali elettrici.

$$5.1 \quad \bar{Z}(s) = \frac{N(s)}{D(s)} = g \frac{(s - z_1) \dots (s - z_n)}{(s - p_1) \dots (s - p_d)} = \frac{1}{\bar{Y}(s)} \quad \bar{Y}(s) = \frac{1}{\bar{Z}(s)}$$

- Verrà nel seguito mostrato a proposito dei transitori che le reti  $R, L, C$  sono "stabili" e cioè una volta spostate da una condizione di equilibrio tornano ad essa se cessano le cause perturbative, questa proprietà è connessa al fatto che poli e zeri di tali reti si trovano nel semipiano sinistro del piano complesso e quindi sono numeri reali negativi oppure sono complessi coniugati con parte reale negativa.

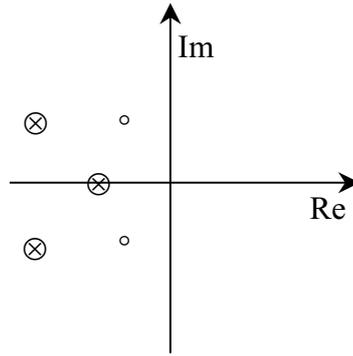


Fig.5.3 Posizione dei poli (⊗) e degli zeri (◦) per la rete R,L,C.

## 6 Energetica delle reti in regime alternato sinusoidale isofrequenziale.

Supponiamo di aver calcolato (o misurato) per la pulsazione  $\omega$  di nostro interesse l'impedenza ai morsetti di ingresso di una rete nella forma indicata nella eq.6.1 e di averne quindi individuato la parte reale  $R$  (resistenza) ed il coefficiente  $X$  (reattanza) dell'unità immaginaria (misurate in  $[\Omega]$ ). Quest'ultima, si veda la Tab.4.1, sarà positiva se la rete ha comportamento induttivo (cioè è equivalente ad un resistore ed un induttore in serie) e negativa se la rete ha comportamento capacitivo (cioè è equivalente ad un resistore ed un condensatore in serie). Potremo ora disegnare il "triangolo dell'impedenza" che, nella ipotesi di reattanza positiva, assume l'aspetto indicato in Fig.6.1a.

A questo punto l'ammettenza è quella indicata nella eq.6.2 dove  $G$  è la conduttanza della ammettenza e  $B$  la suscettanza (misurate in  $[S]$ ). ed il relativo triangolo è precisato nella Fig.6.1b (in base a quanto evidenziato nella Tab.4.1 ad una reattanza positiva corrisponde una suscettanza negativa e viceversa).

$$6.1 \quad \bar{Z} = \frac{\bar{V}}{\bar{I}} = R \pm jX = Ze^{\pm j\varphi} \quad Z = \sqrt{R^2 + X^2} \quad \text{tg}\varphi = \pm \frac{X}{R}$$

$$6.2 \quad \bar{Y} = \frac{\bar{I}}{\bar{V}} = \frac{1}{\bar{Z}} = G \mp jB = \frac{R}{Z^2} - j \frac{X}{Z^2} = Ye^{\mp j\varphi} \quad Y = \frac{1}{Z} = \sqrt{G^2 + B^2}$$

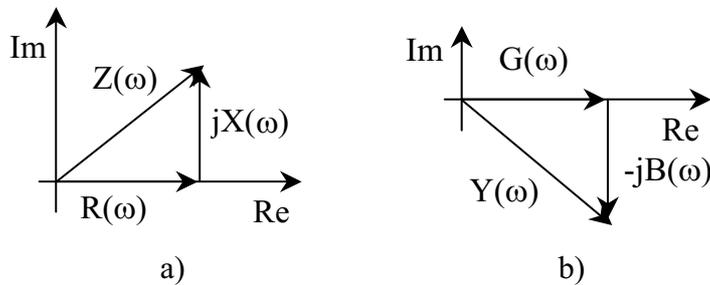


Fig.6.1 a) Triangolo della impedenza per reattanza positiva. b) Triangolo della ammettenza per suscettanza negativa.

Se ora la tensione applicata alla rete è del tipo indicato nella eq.6.3a ne consegue, in base alla eq.6.2, che la corrente assorbita è quella indicata nella eq.6.3b, dove  $I_M = YV_M$ .

Ne consegue la potenza istantanea ai morsetti di rete indicata nella eq.6.4 che può essere sviluppata come è indicato nella stessa equazione e visualizzata come è presentato nella Fig.6.2.

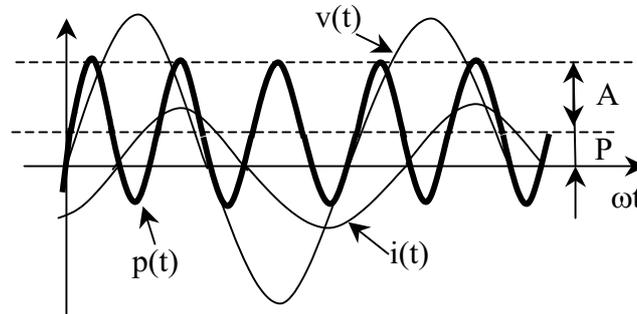


Fig.6.2 Tensione, corrente, potenza istantanea  $p(t)$ , potenza attiva  $P$  e potenza apparente  $A$ .

$$6.3 \quad \text{a) } v(t) = V_M \cos(\omega t + \alpha) \quad \text{b) } i(t) = I_M \cos(\omega t + \alpha \mp \varphi)$$

$$6.4 \quad p(t) = V_M I_M \cos(\omega t + \alpha) \cos(\omega t + \alpha \mp \varphi) = \frac{V_M I_M}{2} \cos \varphi + \frac{V_M I_M}{2} \cos[2\omega t + (2\alpha \mp \varphi)]$$

$$6.5 \quad P = \int_0^T p(t) dt = \frac{V_M I_M}{2} \cos \varphi = VI \cos \varphi$$

$$6.6 \quad w(\Delta t) = \int_0^{\Delta t} p(t) dt \approx P \Delta t$$

Si chiama potenza attiva, la si indica con  $P$  e la si misura in [W] il valore medio in un periodo  $T$  della potenza istantanea, si veda la eq.6.5 dove la quantità  $\cos \varphi$  prende nella tecnica il nome di "fattore di potenza".

L'energia  $W(\Delta t)$  assorbita dal circuito in un intervallo di tempo  $\Delta t$  (misurata in [J]=[Ws]) è fornita poi dalla eq.6.6. Questa, nella ipotesi di  $\Delta t \gg T$ , può esser approssimata con il prodotto della potenza attiva per l'intervallo di tempo di utilizzazione della rete (come se  $\Delta t$  fosse un multiplo intero di  $T$ ). Nelle utenze industriali il tempo si misura in ore  $h$  e la potenza in [kW] per modo che l'unità di misura correntemente usata per l'energia elettrica è il [kWh].

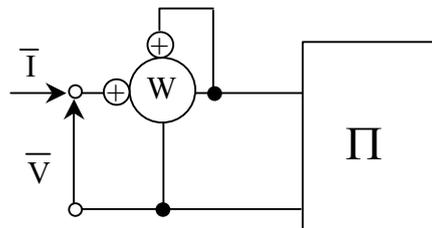


Fig.6.3 Inserzione di un wattmetro con la convenzione degli utilizzatori,

Lo strumento di misura della potenza attiva si chiama wattmetro. Esso è composto da un equipaggio voltmetrico derivato, da uno amperometrico in serie al circuito (si veda la Fig.6.3)

e di una logica atta a realizzare le operazioni implicite nella eq.6.5. Lo strumento di misura dell'energia è il contatore: si tratta di un wattmetro (quindi con equipaggio voltmetrico ed amperometrico) integratore che opera in conformità della eq.6.6.

Si chiama potenza apparente  $A = V_M I_M / 2 = VI$  (e la si misura in voltampere [VA]) la massima oscillazione della potenza istantanea attorno al valore medio, si veda la Fig.6.2 e la eq.6.4. Si tratta di una grandezza di notevole significato ingegneristico se si pensa ai costi di realizzazione (e di gestione durante il ciclo di vita) di una rete industriale. Infatti il dimensionamento dell'isolamento elettrico della rete industriale deve esser commisurato al valore efficace della tensione, mentre il dimensionamento dei conduttori di adduzione della corrente deve esser commisurato (per ragioni di riscaldamento) al valore efficace della corrente: se ne conclude che la potenza apparente è un indice dell'impegno necessario per la costruzione e la gestione del sistema energetico.

La eq.6.4 può esser poi elaborata come è indicato nella eq.6.7. Dal momento che  $P = A \cos \varphi$ , se definiamo "potenza reattiva"  $Q = \pm A \sin \varphi$  (misurata in voltampere reattivi [VAR], con segno positivo per reti a comportamento induttivo e negativo per reti a comportamento capacitivo) la 6.7 porta alla eq.6.8 ed alla eq.6.9, che stabilisce il legame tra potenza attiva, reattiva ed apparente.

$$6.7 \quad p(t) = P + A \cos[2(\omega t + \alpha) \mp \varphi] = P + A \cos \varphi \cos[2(\omega t + \alpha)] \pm A \sin \varphi \sin[2(\omega t + \alpha)]$$

$$6.8 \quad p(t) = P + P \cos(2\omega t + \alpha) + Q \sin(2\omega t + \alpha)$$

$$6.9 \quad A = \sqrt{P^2 + Q^2} \quad P = A \cos \varphi \quad Q = \pm A \sin \varphi$$

Le tre potenze  $P, Q, A$  possono esser meglio rappresentate avvalendosi della nozione di "potenza complessa" nel seguito precisata.

Siano  $\bar{V}, \bar{I}$  (si veda la eq.6.10 e la Fig.6.4) i fasori rappresentativi della tensione e della corrente di una rete alla porta di ingresso, si chiama potenza complessa, si veda la eq.6.11, il semiprodotto del fasore tensione per il coniugato  $\bar{I}^*$  del fasore corrente. Si può constatare che la potenza complessa ha per parte reale la potenza attiva della rete e per coefficiente dell'unità immaginaria la potenza reattiva (positiva per rete di tipo induttivo). La potenza complessa si rappresenta nel piano complesso con il "triangolo delle potenze", si veda la Fig.6.5, particolarmente adatto ad evidenziare la natura energetica della rete tramite il segno della potenza reattiva. Nel seguito, allo scopo di evidenziare il segno di  $Q$ , si assumerà  $Q = VI \sin \varphi$  (si veda ad esempio eq.6.11).

$$6.10 \quad \bar{V} = V_M e^{j\alpha} \quad \bar{I} = \bar{Y}\bar{V} = Y V_M e^{j(\alpha \mp \varphi)} = I_M e^{j(\alpha \mp \varphi)} \quad \bar{I}^* = I_M e^{-j(\alpha \mp \varphi)}$$

$$6.11 \quad \bar{A} = \frac{\bar{V}\bar{I}^*}{2} = \frac{V_M I_M}{2} e^{\pm j\varphi} = P \pm jQ$$

Questo triangolo, inoltre, evidenzia il fatto che l'onere costruttivo (e di gestione), espresso dalla potenza apparente  $A$ , è minimo se, a pari potenza attiva  $P$  (quella utile per le trasformazioni energetiche), è nulla la potenza reattiva  $Q$  (di qui il provvedimento di "rifasamento" delle reti industriali discusso nel seguito).

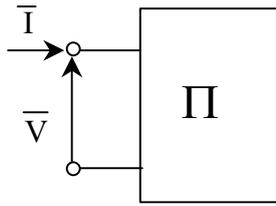


Fig.6.4 Fasori alla porta di una rete.

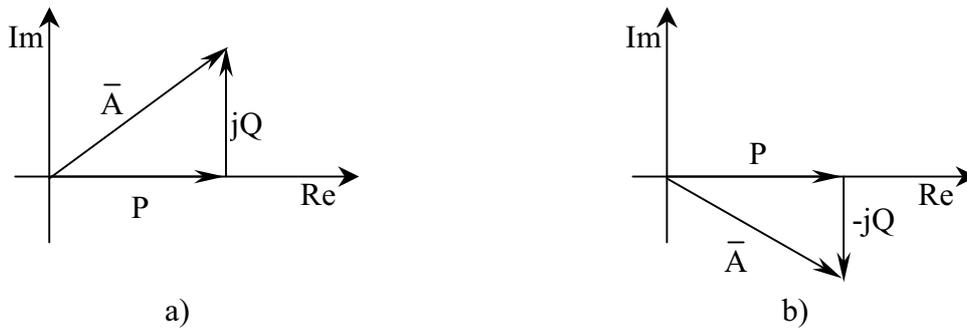


Fig.6.5 Il triangolo della potenza complessa: a) per reti induttive  $\bar{A} = P + jQ$  e b) per reti capacitive  $\bar{A} = P - jQ$ .

Allo scopo di fissare le idee commentiamo ora la potenza istantanea per il caso di reti a comportamento "puro" e cioè resistive, induttive o capacitive.

Se  $\bar{Z} = R$  la rete si comporta come un resistore, i fasori rappresentativi di tensione e corrente sono del tipo indicato in Fig.6.6a. I valori istantanei di tensione corrente ai morsetti sono esprimibili come è indicato nella eq.6.12, mentre la potenza istantanea è esprimibile come è indicato nella eq.6.13 ed è rappresentato nella Fig.6.6b.

$$6.12 \quad v(t) = V_M \cos(\omega t) \quad i(t) = I_M \cos(\omega t) \quad V_M = RI_M$$

$$6.13 \quad p(t) = v(t)i(t) = V_M I_M \cos^2(\omega t) = \frac{V_M I_M}{2} + \frac{V_M I_M}{2} \cos(2\omega t) = P + P \cos(2\omega t)$$

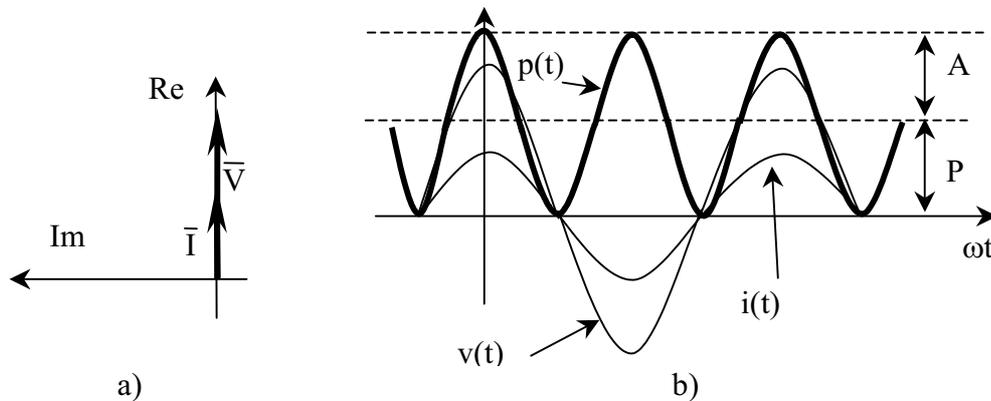


Fig.6.6 a) Il diagramma dei fasori di una rete resistiva. b) La potenza istantanea di una rete resistiva.

Si nota che la potenza è una funzione che presenta due oscillazioni nel periodo mantenendo sempre un valore positivo perché  $P = A$ .

Per una rete puramente induttiva, quindi con  $\bar{Z} = jX_L = j\omega L$ , i fasori rappresentativi della tensione e della corrente hanno la configurazione indicata in Fig.6.7a. I valori istantanei di tensione e corrente sono del tipo precisato nella eq.6.14, mentre la potenza istantanea è quella indicata nella eq.6.15. La potenza istantanea, si veda la Fig.6.7b, ha valore medio nullo ( $P = 0$ ) ed oscilla due volte per ogni periodo. Quando  $p > 0$  la rete assorbe ed accumula energia (nel campo magnetico, come si vedrà nel seguito), quando  $p < 0$  la rete restituisce energia al generatore di tensione. Si chiama potenza reattiva  $Q$  il valore massimo della potenza istantanea scambiata tra il generatore di tensione ed il campo magnetico.

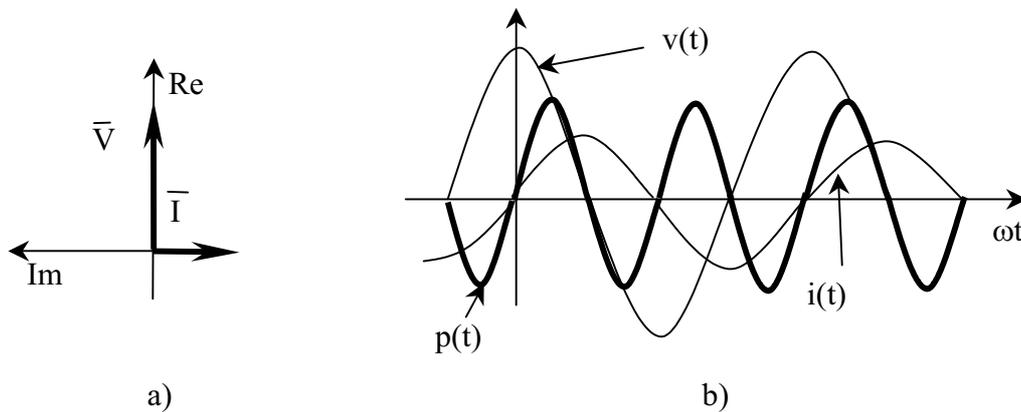


Fig. 6.7 a) Diagramma dei fasori per una rete puramente induttiva. b) Potenza istantanea per una rete induttiva pura.

$$6.14 \quad v(t) = V_M \cos(\omega t) \quad i(t) = I_M \cos(\omega t - \frac{\pi}{2}) \quad V_M = X_L I_M = \omega L I_M$$

$$6.15 \quad p(t) = v(t)i(t) = \frac{V_M I_M}{2} \cos(2\omega t - \frac{\pi}{2}) = Q \cos(2\omega t - \frac{\pi}{2}) = Q \sin(2\omega t)$$

Per una rete puramente capacitiva, quindi con  $\bar{Z} = -jX_C = -j/\omega C$ , i fasori tensione e corrente sono disposti come è indicato nella Fig.6.8a. I valori istantanei di tensione e corrente sono del tipo precisato nella eq.6.16, mentre la potenza istantanea è del tipo indicato nella eq.6.17 e presentata nella Fig.6.9. La potenza istantanea  $p$ , si veda la Fig.6.8b, ha valore medio nullo e anche in questo caso presenta due oscillazioni in un periodo. Quando  $p > 0$  la rete assorbe energia dal generatore accumulandola, come si vedrà nel seguito, nel campo elettrico, quando  $p < 0$  la rete restituisce al generatore l'energia prima assorbita. A parità di tensione, quando la rete induttiva assorbe energia la rete capacitiva la emette per modo che quando il massimo della potenza istantanea (potenza reattiva) è positiva per la rete induttiva pura è negativa per la rete capacitiva pura.

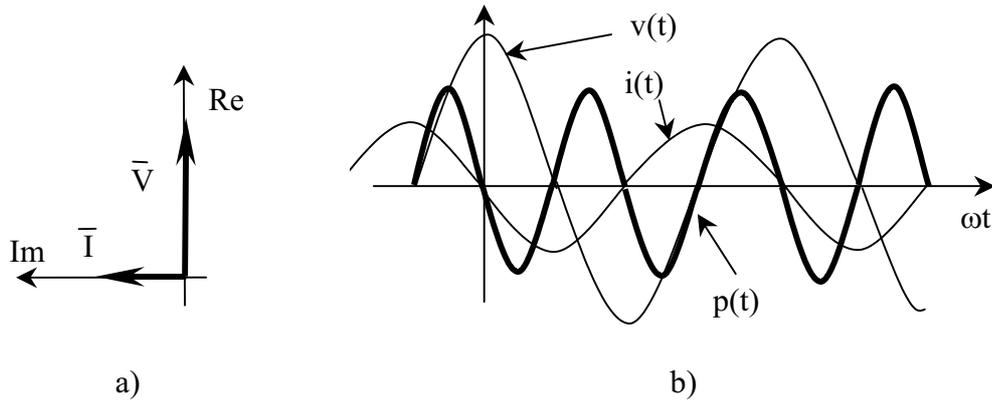


Fig.6.8 a) Fasori per una rete capacitiva pura. b) Potenza istantanea per una rete capacitiva pura.

$$6.16 \quad v(t) = V_M \cos(\omega t) \qquad i(t) = I_M \cos(\omega t + \frac{\pi}{2}) \qquad V_M = X_C I_M = \frac{I_M}{\omega C}$$

$$6.17 \quad p(t) = v(t)i(t) = \frac{V_M I_M}{2} \cos(2\omega t + \frac{\pi}{2}) = Q \cos(2\omega t + \frac{\pi}{2}) = -Q \sin(2\omega t)$$

## 7 Procedimento di Boucherot e rifasamento.

Supponiamo di conoscere per tutti i lati della rete (avendo impiegato convenzioni di misura coordinate per la tensione e la corrente, in particolare la convenzione degli utilizzatori) i fasori  $\bar{V}_k, \bar{I}_k$  rappresentativi della tensione e della corrente. Sicuramente i fasori tensione soddisfano le LKT ed i fasori corrente le LKC ma altrettanto è vero anche per i coniugati  $\bar{I}_k^*$  dei fasori corrente dato che per essi sono ordinatamente cambiate di segno tutte le parti immaginarie. In base allora al teorema di Tellegen deve valere la eq.7.1 dove la sommatoria è estesa a tutti i lati della rete. Ne consegue che la somma algebrica di tutte le potenze attive e di tutte le potenze reattive dei lati di rete sono nulle (solo la prima di tali frasi è giustificabile con il principio di conservazione dell'energia), come è indicato nella eq.7.2.

$$7.1 \quad \sum_l \bar{V}_k \bar{I}_k^* = \sum_l \bar{A}_k = \sum_l (P_k \pm jQ_k) = 0$$

$$7.2 \quad \sum_l P_k = 0 \qquad \sum_l \pm Q_k = 0$$

Per le reti (si pensi alle analogie) vale quindi la conservazione sia della potenza attiva, sia della potenza reattiva e questo consente di individuare la soluzione delle reti stesse per via energetica, mediante il così detto "procedimento di Boucherot", senza l'uso dei numeri complessi.

Supponiamo infatti di conoscere il senso secondo cui fluiscono le potenze e di suddividere la rete oggetto di studio in sezioni successive in cui racchiudiamo lati percorsi dalla stessa corrente o sottoposti alla stessa tensione, si veda, per fissare le idee, la Fig.7.1. Se per una sezione, ad esempio la sezione 1, conosciamo la potenza complessa assorbita dal bipolo  $B$  ed il modulo del fasore tensione o del fasore corrente è possibile ricavare tutte le

rimanenti grandezze di rete ed in particolare le potenze erogate dal generatore tramite la conservazione delle potenze.

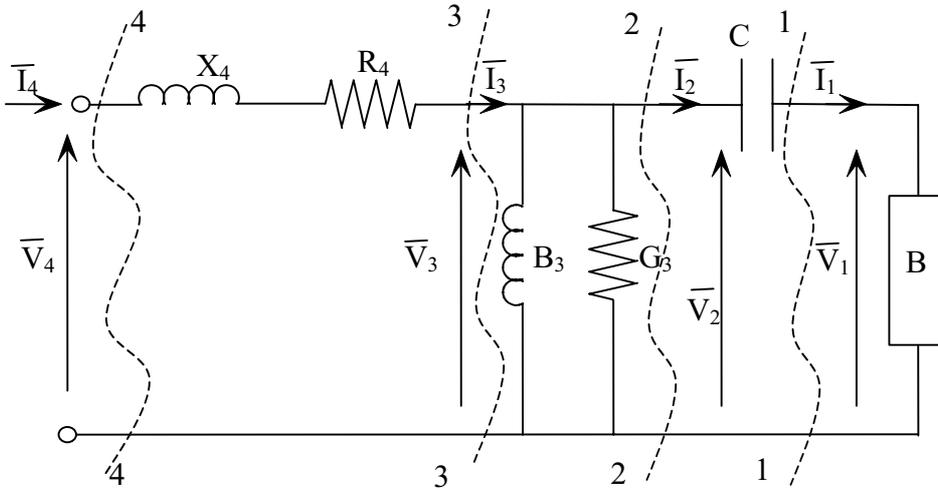


Fig.7.1 Calcolo di una rete con il procedimento di Boucherot.

Infatti se, ad esempio, sono noti  $P_1, Q_1, V_{1M}$  allora  $I_{1M} = 2A_1 / V_{1M}$  con  $A_1 = \sqrt{P_1^2 + Q_1^2}$ .

Nella sezione 2 si ha  $I_{1M} = I_{2M}$ ,  $P_2 = P_1$ ,  $Q_2 = Q_1 - X_C I_2^2$ , allora  $V_{2M} = 2A_2 / I_{2M}$ .

Nella sezione 3 si ha  $V_{3M} = V_{2M}$ ,  $P_3 = P_2 + G_3 V_{3M}^2 / 2$ ,  $Q_3 = Q_2 + B_3 V_{3M}^2 / 2$  allora

$$A_3 = \sqrt{P_3^2 + Q_3^2} \text{ e } I_{3M} = 2A_3 / V_{3M}$$

Nella sezione 4 si ha  $I_{4M} = I_{3M}$ ,  $P_4 = P_3 + R_4 I_{4M}^2 / 2$ ,  $Q_4 = Q_3 + X_4 I_{4M}^2 / 2$  allora

$$A_4 = \sqrt{P_4^2 + Q_4^2} \text{ e } V_{4M} = 2A_4 / I_{4M}$$

Viceversa se fossero note le condizioni alla porta 4, dove è disposto il generatore, sempre con lo stesso procedimento si sarebbero ricavate le condizioni alla porta 1 dove è disposto il bipolo utilizzatore questa volta sottraendo le potenze sezione per sezione.

Il procedimento di Boucherot rende particolarmente agevole il calcolo, tipicamente industriale, del "rifasamento". In effetti il produttore di energia elettrica, allo scopo di limitare la potenza apparente (che è indice, come prima detto, del costo di realizzazione e di gestione di una rete di distribuzione) a parità di potenza attiva (quella utile per le trasformazioni energetiche) impone agli utenti (tramite adeguata penale sulla tariffa di fornitura) che il fattore di potenza delle reti utilizzatrici sia convenientemente alto ( $\cos \varphi^* > 0,9$ ).

Nel caso di  $\cos \varphi < \cos \varphi^*$  gli utenti evitano la penale introducendo a monte della propria rete  $\Pi$  una batteria di condensatori di capacità  $C$  adeguata, si veda la Fig.7.2. In effetti l'utente conosce lo stato energetico nella sezione 2 perché ricava la potenza attiva e quella reattiva (normalmente di tipo induttivo) che gli è necessaria come somma delle potenze attive e reattive dei carichi e conosce anche, si veda la Fig.7.3, la situazione energetica da realizzare nella sezione 1 perché è noto il fattore di potenza imposto dal fornitore dell'energia. Ne consegue allora la potenza reattiva  $Q_C$  della batteria di condensatori e la capacità  $C$  della batteria come è indicato nella eq.7.3.

$$7.3 \quad |Q_C| = Q_2 - Q_1 = B_C V_{1M}^2 / 2 = \omega C V_{1M}^2 / 2$$

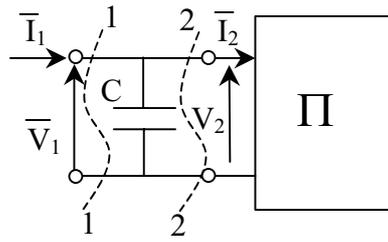


Fig.7.2 Posizionamento della batteria di condensatori per il rifasamento.

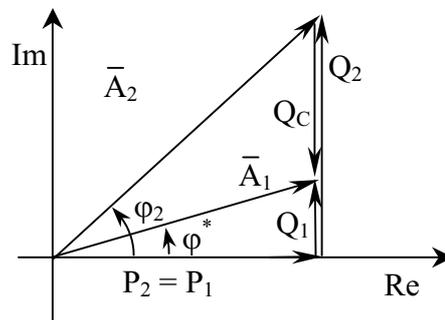


Fig.7.3 Calcolo della potenza reattiva di rifasamento con il triangolo della potenza complessa.

# RETI IN REGIME ALTERNATO NON SINUSOIALE.

## 1 La strategia della risoluzione.

La risposta di una rete fisica normale passiva ad un sistema di ingressi costituito da un insieme di generatori indipendenti di tensione e di corrente alternata sinusoidale con diverse frequenze (ad esempio il generatore  $v_1$  a frequenza  $f_1$  e il generatore  $i_2$  a frequenza  $f_2$ ) si può valutare, in base al teorema di sovrapposizione, come somma delle risposte dovute ai singoli generatori quando gli altri siano annullati: questa procedura è rappresentata sinteticamente nella Fig.1.1.

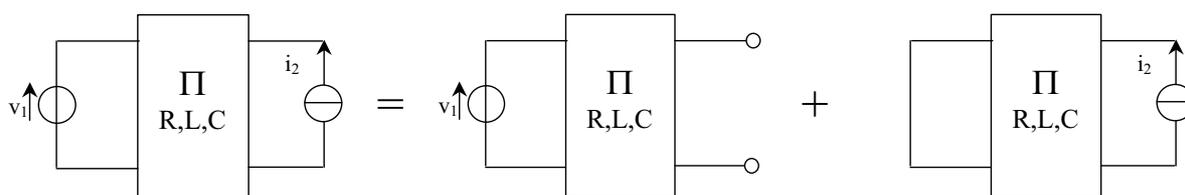


Fig.1.1 Risposta di una rete ad un insieme di generatori con forme d'onda alternate sinusoidali di frequenza diversa.

La procedura si presta ad essere generalizzata in quanto ogni grandezza alternata non sinusoidale, di periodo  $T$  e pulsazione  $\omega_1 = 2\pi/T$ , può essere rappresentata, grazie allo sviluppo in serie di Fourier, come somma di grandezze alternate sinusoidali, di ampiezza opportuna, con pulsazioni multiple intere di  $\omega_1$  ed ogni grandezza aperiodica può essere rappresentata, grazie all'integrale di Fourier (e più in generale grazie alla trasformata di Laplace), come somma di grandezze alternate sinusoidali le cui pulsazioni occupano tutto il campo dei numeri reali (e per la trasformata di Laplace come somma di cissoidi le cui pulsazioni occupano tutto il campo dei numeri complessi).

## 2 Lo sviluppo in serie di Fourier.

Consideriamo un generatore indipendente la cui forma d'onda  $f(t)$  è descrivibile con una funzione periodica del tempo caratterizzata dal fatto che (si veda la Fig2.1):

- all'interno del periodo  $T$  compare un numero finito di massimi e di minimi ed un numero finito di discontinuità;
- all'interno del periodo compare al più un numero finito di discontinuità (in corrispondenza di istanti temporali  $t_k$  noti) tali però che esistono e sono finiti il limite destro  $f(t_k^+)$  e sinistro  $f(t_k^-)$ .

L'analisi matematica assicura che le funzioni periodiche sopra indicate sono esprimibili come somma di infinite funzioni sinusoidali, con pulsazione multipla intera della "pulsazione fondamentale"  $\omega_1 = 2\pi/T$ , e che la serie converge ad  $f(t)$  per i punti di continuità e ad  $[f(t_k^+) + f(t_k^-)]/2$  per i punti di discontinuità.

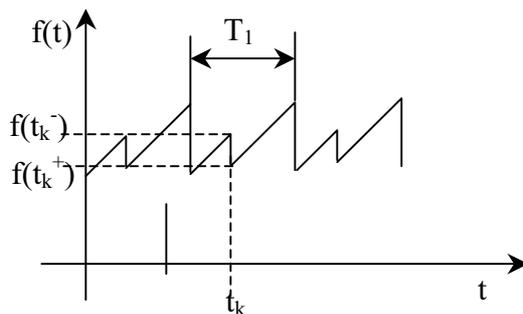


Fig. 2.1 Forma d'onda sviluppabile in serie di Fourier.

La "forma trigonometrica" della serie di Fourier (la "forma esponenziale" si consegue da quella trigonometrica tenendo in conto che  $\cos k\omega t = Chjk\omega t$  e che  $\text{sen}k\omega t = Sh(jk\omega t) / j$ ) è fornita dalla eq.2.1 dove il valore medio  $F_m$  della funzione  $f(t)$  e le ampiezze delle armoniche successive sono indicati nella eq.2.2.

$$2.1 \quad f(t) = F_m + \sum_1^{\infty} k [F'_{kM} \cos k\omega_1 t + F''_{kM} \text{sen}k\omega_1 t] \quad \omega_1 = 2\pi / T$$

$$2.2 \quad F_m = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) dt \quad F'_{kM} = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \cos(k\omega_1 t) dt \quad F''_{kM} = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \text{sen}(k\omega_1 t) dt$$

Si possono poi sommare le due sinusoidi presenti nella eq.2.1 in modo da compattare lo sviluppo come è indicato nella eq.2.3.

$$2.3 \quad f(t) = F_m + \sum_1^{\infty} k F_{kM} \cos(k\omega_1 t - \alpha_k) \quad F_{kM} = \sqrt{F'_{kM}{}^2 + F''_{kM}{}^2} \quad \text{tg} \alpha_k = F''_{kM} / F'_{kM}$$

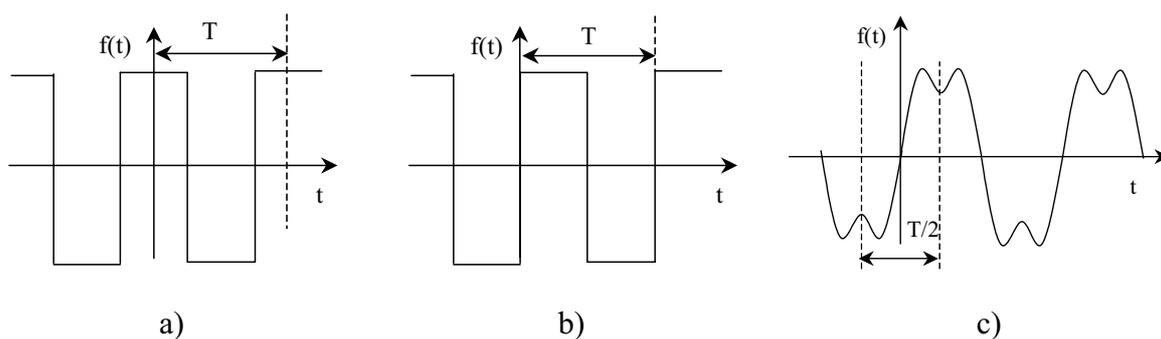


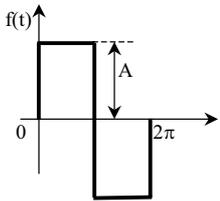
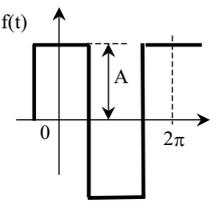
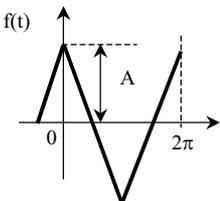
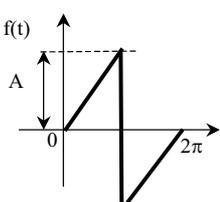
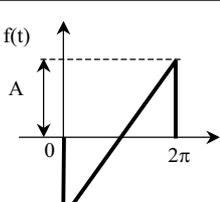
Fig.2.2 a) Funzione periodica pari; b) funzione periodica dispari; c) funzione periodica speculare.

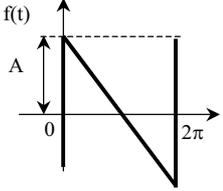
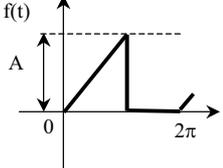
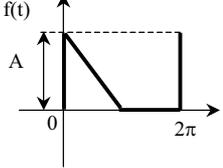
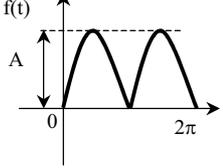
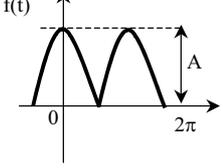
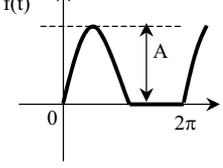
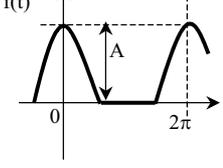
Ulteriori semplificazioni dello sviluppo si possono conseguire tenendo conto delle simmetrie e precisamente:

- se  $f(t)$  è una funzione "periodica pari" (e cioè se rispetto all'origine dei tempi risulta  $f(-t) = f(t)$ , si veda la Fig.2.2a) allora nello sviluppo in serie 2.2 compaiono solo coseni (come si deduce intuitivamente dal fatto che le funzioni seno sono dispari);

- se  $f(t)$  è una funzione "periodica dispari" (e cioè se rispetto all'origine dei tempi risulta  $f(-t) = -f(t)$ , si veda la Fig.2.2b) allora nello sviluppo in serie 2.2 compaiono solo seni (come si deduce intuitivamente dal fatto che le funzioni coseno sono pari);
- se  $f(t)$  presenta simmetria speculare (e cioè se rispetto all'origine dei tempi risulta  $f(-t) = -f(-t + T/2)$ , si veda la Fig.2.2c) per modo che la semionda positiva si ottiene da quella negativa per ribaltamento e scorrimento allora nello sviluppo 2.2 sono presenti solo armoniche multiple dispari della fondamentale.

Nella Tab.2.1 sono presentati gli sviluppi in serie di forme d'onda (idealizzate) che si riscontrano nelle energetica elettrica e nella analisi dei segnali elettrici.

	$f(t) = \frac{4A}{\pi} \left( \sin \omega t + \frac{1}{3} \sin 3\omega t + \frac{1}{5} \sin 5\omega t + \dots \right)$
	$f(t) = \frac{4A}{\pi} \left( \cos \omega t - \frac{1}{3} \cos 3\omega t + \frac{1}{5} \cos 5\omega t - \dots \right)$
	$f(t) = \frac{8A}{\pi^2} \left( \cos \omega t + \frac{1}{3^2} \cos 3\omega t + \frac{1}{5^2} \cos 5\omega t + \dots \right)$
	$f(t) = \frac{2A}{\pi} \left( \sin \omega t - \frac{1}{2} \sin 2\omega t + \frac{1}{3} \sin 3\omega t - \frac{1}{4} \sin 4\omega t + \dots \right)$
	$f(t) = -\frac{2A}{\pi} \left( \sin \omega t + \frac{1}{2} \sin 2\omega t + \frac{1}{3} \sin 3\omega t + \dots \right)$

	$f(t) = \frac{2A}{\pi} \left( \sin \omega t + \frac{1}{2} \sin 2\omega t + \frac{1}{3} \sin 3\omega t + \dots \right)$
	$f(t) = \frac{A}{4} - \frac{2A}{\pi^2} \left( \cos \omega t + \frac{1}{3^2} \cos 3\omega t + \frac{1}{5^2} \cos 5\omega t + \dots \right) + \frac{A}{\pi} \left( \sin \omega t - \frac{1}{2} \sin 2\omega t + \frac{1}{3} \sin 3\omega t - \dots \right)$
	$f(t) = \frac{A}{4} + \frac{2A}{\pi^2} \left( \cos \omega t + \frac{1}{3^2} \cos 3\omega t + \frac{1}{5^2} \cos 5\omega t + \dots \right) + \frac{A}{\pi} \left( \sin \omega t + \frac{1}{2} \sin 2\omega t + \frac{1}{3} \sin 3\omega t + \dots \right)$
	$f(t) = \frac{2A}{\pi} \left( 1 - \frac{2}{3} \cos 2\omega t - \frac{2}{15} \cos 4\omega t - \frac{2}{35} \cos 6\omega t - \dots \right)$
	$f(t) = \frac{2A}{\pi} \left( 1 + \frac{2}{3} \cos 2\omega t - \frac{2}{15} \cos 4\omega t + \frac{2}{35} \cos 6\omega t - \dots \right)$
	$f(t) = \frac{A}{\pi} \left( 1 + \frac{\pi}{2} \sin \omega t - \frac{2}{3} \cos 2\omega t - \frac{2}{15} \cos 4\omega t - \frac{2}{35} \cos 6\omega t - \dots \right)$
	$f(t) = \frac{A}{\pi} \left( 1 + \frac{\pi}{2} \cos \omega t + \frac{2}{3} \cos 2\omega t - \frac{2}{15} \cos 4\omega t + \frac{2}{35} \cos 6\omega t - \dots \right)$

Tab.2.1 Sviluppi in serie di tipiche forme d'onda.

### 3 Applicazioni dello sviluppo in serie.

#### 3.1 Risposta di una rete ad un ingresso alternato non sinusoidale.

La risposta di una rete fisica ad un ingresso alternato non sinusoidale si valuta, come già detto, per sovrapposizione delle singole armoniche componenti lo sviluppo in serie. Consideriamo in proposito il caso tipico, si veda la Fig.3.1, di un ingresso in tensione  $v(t)$ ; per il calcolo della corrente  $i(t)$  la funzione  $v(t)$  va posta nella forma indicata nella eq.3.1 svolgendo le operazioni indicate nelle eq.2.1-2-3. L'ampiezza e la fase delle singole armoniche di corrente si valutano tramite la eq.3.2 e cioè tramite il modulo e la fase della ammettenza che la rete presenta alle singole armoniche di tensione. Si esprime infine la corrente  $i(t)$ , funzione alternata non sinusoidale con lo stesso periodo  $T$  della tensione, tramite il suo sviluppo in serie, si veda la eq.3.3.

$$3.1 \quad v(t) = V_m + \sum_1^{\infty} V_{kM} \cos(k\omega_1 t - \alpha_k)$$

$$3.2 \quad \bar{I}_k = \bar{Y}(jk\omega_1) \bar{V}_k \quad \bar{Y}(jk\omega_1) = Y(k\omega_1) e^{-j\varphi_k}$$

$$3.3 \quad i(t) = I_m + \sum_0^{\infty} I_{kM} \cos(k\omega_1 t - \alpha_k - \varphi_k) \quad I_{kM} = Y(k\omega) V_{kM} \quad I_m = V_m Y(k\omega_1 = 0)$$

Resta ora il dubbio di come avvalersi della soluzione in quanto gli sviluppi in serie pongono all'ingegnere evidenti imbarazzi legati: i) al fatto di dover considerare infiniti termini e ii) di dover valutare la possibile convenienza di altri tipi di sviluppo in serie, diversi da quello proposto da Fourier. In proposito valgono le seguenti osservazioni.

- Si può dimostrare che l'errore quadratico medio che si commette approssimando una funzione periodica mediante la somma di  $n$  funzioni armoniche è minimo se le ampiezze di tali armoniche sono quelle dello sviluppo in serie di Fourier. In altri termini il funzionale  $g(n)$  di cui alla eq.3.4 (di evidente significato energetico) è minimo (per ogni valore di  $n$ ) se  $f_n(t)$  corrisponde ai primi  $n$  termini dello sviluppo in serie di Fourier. Se l'attenzione allora è rivolta alle trasformazioni energetiche (e non, ad esempio, alla riproduzione più corretta della forma d'onda) conviene usare lo sviluppo di Fourier.

$$3.4 \quad g(n) = \frac{1}{T} \int_0^T [f(t) - f_n(t)]^2 dt$$

- Le valutazioni energetiche possono esser circoscritte a poche armoniche isofrequenziali di tensione e di corrente se la rete ha un comportamento asintotico induttivo (come avviene in gran parte delle applicazioni industriali).

In effetti lo "spettro delle ampiezze" della funzione periodica  $v(t)$ , e cioè il diagramma (si veda la Fig.3.2 che si riferisce alla forma  $f_1(t)$  in Tab.2.1) che presenta l'ampiezza  $V_{kM}$

delle diverse armoniche componenti l'ingresso  $v(t)$  in funzione della pulsazione, presenta ampiezze  $V_{kM}$  decrescenti al crescere di  $k\omega$  quanto meno proporzionalmente ad  $1/k$  (si vedano in proposito le ampiezze nei diversi sviluppi presentati nella Tab.2.1).

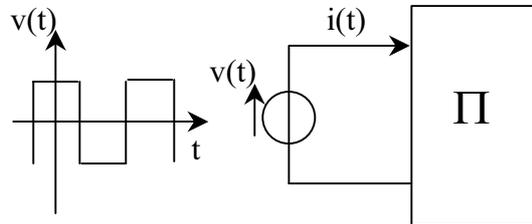


Fig.3.1 Risposta  $i(t)$  di una rete ad un generatore di tensione  $v(t)$  alternata non sinusoidale.

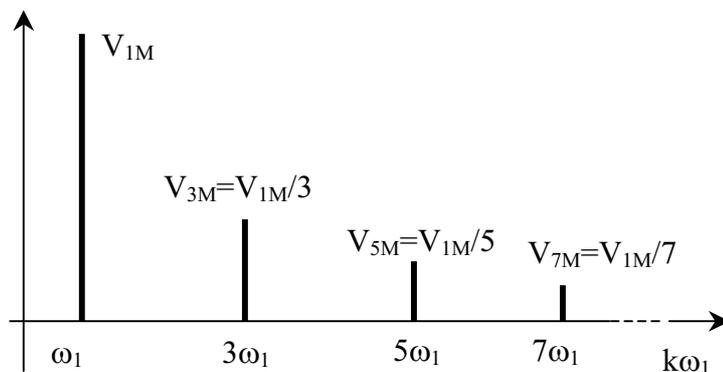


Fig.3.2 Spettro dell'ingresso in tensione (ampiezza).

D'altra parte lo spettro delle ampiezze della corrente si deduce da quello dell'ingresso tramite la eq.3.5 e cioè tramite il modulo della ammettenza che la rete presenta alle diverse armoniche di tensione.

$$3.5 \quad \bar{I}_k = V_{kM} e^{j\alpha_k} \bar{Y}(jk\omega_1) \quad I_{kM} = V_{kM} Y(k\omega_1)$$

Se ora la rete è asintoticamente induttiva, come avviene in gran parte delle applicazioni industriali, allora  $Y(k\omega_1)$  il modulo della ammettenza decresce circa proporzionalmente a  $1/k$  (ad esempio per una rete con  $R, L$  in serie è  $Z(k\omega_1) = 1/Y(k\omega_1) = \sqrt{R^2 + (k\omega_1 L)^2}$  e per  $k$  convenientemente grande è  $Y(k\omega_1) \approx 1/(kL\omega_1)$ ) per modo che le ampiezze delle successive armoniche della corrente  $I_{kM}$  decrescono proporzionalmente quanto meno a  $1/k^2$  e la potenza apparente  $A_k = V_k I_k$  associata alla armonica di ordine  $k$  della tensione e della corrente decresce quanto meno come  $1/k^3$ . Se ne conclude che normalmente per le reti induttive bastano pochi termini dello sviluppo in serie per cogliere quasi completamente la natura delle trasformazioni energetiche.

### 3.2 Valore efficace, residuo e potenze in regime alternato non sinusoidale.

Il valore efficace della tensione applicata alla rete di Fig.3.1 si deduce dalla eq.3.1 come è indicato nella eq.3.4. Il risultato rappresentato nella eq.3.6 si giustifica tenendo in conto le proprietà delle funzioni armoniche evidenziate nelle eq.3.7: in altri termini danno un contributo non nullo all'integrale solo i quadrati delle singole armoniche e l'integrale di tali quadrati è il quadrato del valore efficace della singola armonica componente.

$$3.6 \quad V = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T v^2 dt} = \sqrt{V_m^2 + \sum_1^{\infty} V_k^2}$$

$$3.7 \quad \int_0^T [\cos(n\omega_1 t) \cos(m\omega_1 t)] dt = \int_0^T [\text{sen}(n\omega_1 t) \text{sen}(m\omega_1 t)] dt$$

questi integrali valgono 0 se  $m \neq n$ , valgono  $T/2$  se  $m = n$

$$\int_0^T [\text{sen}(m\omega_1 t) \cos(n\omega_1 t)] dt = 0 \quad \text{per ogni } m, n$$

Per una grandezza alternata sinusoidale a valore medio nullo si definisce residuo il rapporto  $r$  presentato nella eq.3.8. Il residuo è un indice dello scostamento della forma d'onda dalla sinusoide pura (in questo caso infatti  $r = 0$ ).

$$3.8 \quad r = \frac{\sqrt{\sum_2^{\infty} V_k^2}}{V_1^2}$$

La potenza istantanea  $p(t)$  assorbita dalla rete è data dal prodotto delle sommatorie di cui alle eq.3.1-3 e la potenza attiva, valore medio della potenza istantanea, è fornita dalla eq.3.9. Infatti, in base alle proprietà generali rappresentate nella eq.3.5, danno un contributo non nullo alla potenza attiva solo le armoniche isofrequenziali di tensione e di corrente. Naturalmente l'energia  $w$  assorbita dalla rete in un intervallo di tempo  $\Delta t \gg T$  si calcola come indicato ancora nella eq.3.9.

$$3.9 \quad P = \frac{1}{T} \int_0^T p(t) dt = V_m I_m + \sum_1^{\infty} V_k I_k \cos \varphi_k \quad w(\Delta t) = P \Delta t$$

Normalmente le trasformazioni energetiche che interessano sono quelle associate alla prima armonica di tensione e di corrente. Da questo punto di vista la eq.3.9 evidenzia il fatto che in tal caso il regime alternato non sinusoidale comporta uno spreco energetico tanto più elevato quanto più elevato è il contenuto armonico della grandezza impressa e quanto meno la rete si presta con il suo comportamento induttivo a limitare la circolazione delle armoniche di corrente con frequenza multipla di quella della prima armonica.

Si definisce potenza apparente  $A$  in regime alternato non sinusoidale il prodotto dei valori efficaci di tensione e di corrente: si veda la eq.3.10.

$$3.10 \quad A = VI = \sqrt{V_m^2 + \sum_k V_k^2} \sqrt{I_m^2 + \sum_k I_k^2}$$

Si noti che agli effetti della potenza attiva e della potenza apparente il sistema deformato è equivalente ad una sinusoide tensione di valore efficace  $V$  e ad una sinusoide corrente di valore efficace  $I$  tra loro sfasate con un fattore di potenza  $\cos \varphi = P / A$ .

Definiamo ora come potenza reattiva  $Q$  in regime deformato (senza uno specifico significato energetico) la somma delle potenze reattive associate alle singole armoniche isofrequenziali di tensione e di corrente, si veda la eq.3.11 (che non coincide con quella delle sinusoidi equivalenti prima definite). Potremo a questo punto constatare che in regime deformato per legare alla potenza apparente la potenza attiva e quella reattiva occorre considerare un ulteriore termine che prende il nome di potenza deformante  $D$ , si veda la eq.3.12. La presenza della potenza deformante testimonia che le trasformazioni energetiche nelle reti in regime deformato sono nettamente più complesse che in regime alternato sinusoidale.

$$3.11 \quad Q = \sum_1^{\infty} V_k I_k \sin \varphi_k$$

$$3.12 \quad A^2 = P^2 + Q^2 + D^2$$

### 3.3 Qualità dell'energia elettrica.

Si consideri, vedi Fig.3.3, una semplice rete elettrica costituita da un generatore, da una linea di trasmissione e da un complesso di carichi tra loro in parallelo. Se tra i carichi ne compare uno solo non lineare (CNL) la corrente assorbita da tale carico è deformata (e lo sarebbe anche se il carico fosse direttamente alimentato dal generatore di tensione alternata sinusoidale). Dal momento poi che questa corrente deformata attraversa l'impedenza equivalente di linea (che è schematizzabile con la serie di un resistore  $R$  e di un induttore  $L$ , si veda la Fig.3.3) a tutti i carichi lineari CL è applicata una tensione deformata perché la corrente del carico non lineare dà luogo a cadute di tensione  $v_l(t)$  deformate sulla impedenza di linea che si sommano alla tensione alternata sinusoidale del generatore ( $v_c = v - v_l$ ). Ne consegue che tutta la rete lavora in regime alternato non sinusoidale con gli sprechi energetici impliciti nella espressione della potenza attiva.

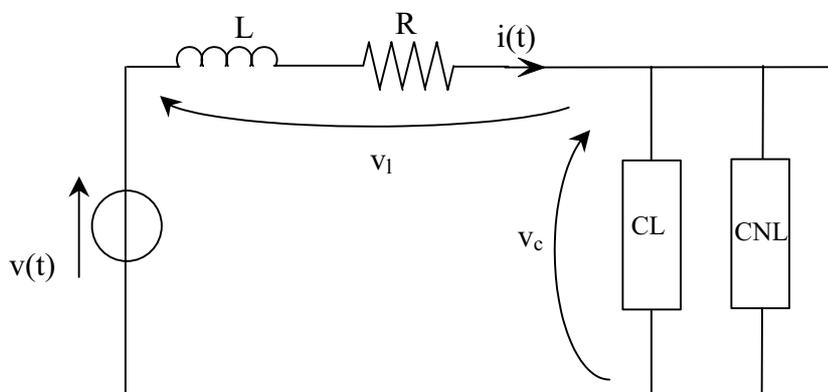


Fig.3.3 Rete elettrica industriale con generatore di tensione alternata sinusoidale, linea di trasmissione e carichi lineari CL e non lineari CNL

Questa è la situazione che si verifica attualmente nelle reti industriali in conseguenza del diffondersi dei carichi in cui l'energia viene modulata mediante convertitori elettronici costituiti da semiconduttori al silicio. Le norme di fornitura dell'energia elettrica tendono a limitare gli inconvenienti di questa situazione imponendo, tramite opportune tariffe discriminatorie, agli utenti inquinanti di filtrare adeguatamente i propri carichi inquinanti eliminando le componenti di corrente a frequenza diversa da quella del generatore. Il problema della qualità della fornitura di energia elettrica (del generatore di Fig.3.3) e della qualità dei carichi è materia di grande attenzione nel mercato dell'energia elettrica.

# EQUAZIONI DI STATO DI UNA RETE.

## 1 Ulteriori proprietà topologiche di un grafo connesso.

Si chiama "albero" un sottografo che contiene tutti i nodi di una rete ed è privo di maglie. I lati di questo sottografo si chiamano "lati d'albero". La parte complementare dell'albero si chiama "coalbero" ed i lati del coalbero si chiamano "corde". Per ogni grafo è possibile definire più alberi e coalberi, ad esempio per il grafo di Fig.1.1 sono riportati nella Fig.1.2 alcuni alberi. Si nota però che tutti gli alberi ed i coalberi rispondono alle proprietà generali sotto indicate, che verranno illustrate con riferimento al primo degli alberi di Fig.1.2.

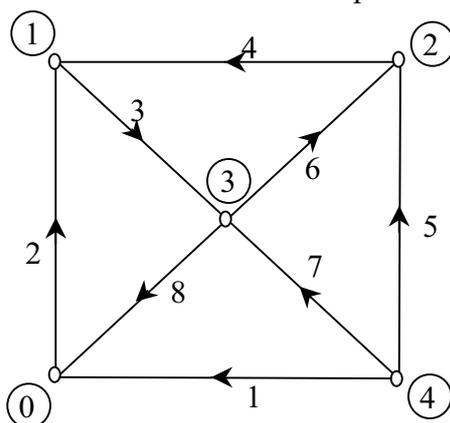


Fig.1.1 Grafo della rete.

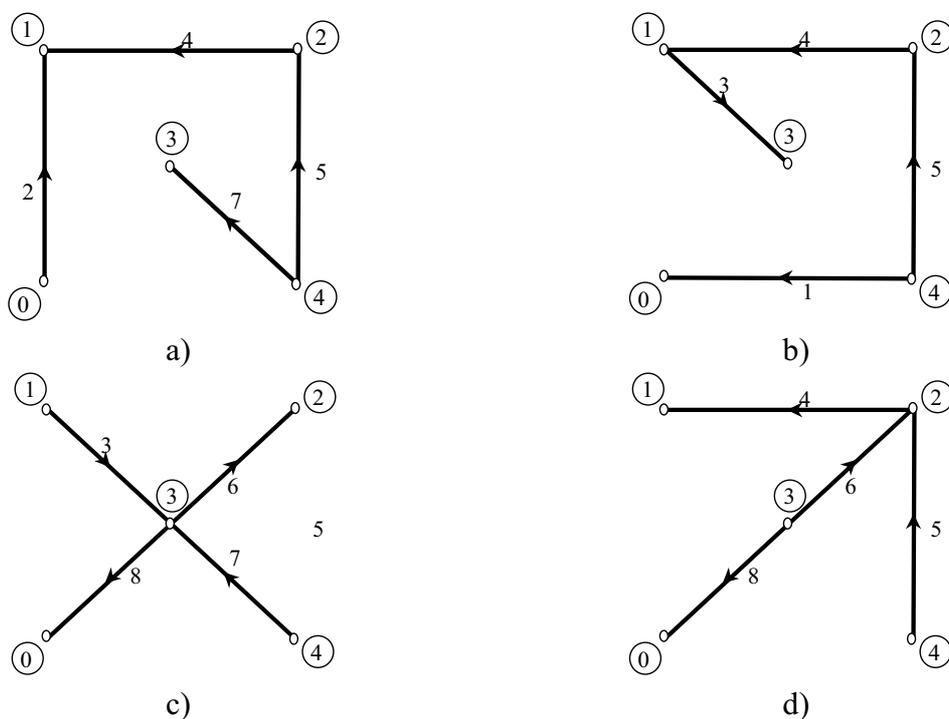


Fig.1.2 Alberi delle rete di Fig.1.1.

- In un albero esiste un unico percorso tra due nodi: in effetti se ci fossero due percorsi allora esisterebbe una maglia il che è escluso dalla definizione di albero.

- Il numero  $la$  dei lati dell'albero è pari al numero dei nodi indipendenti  $la = n = n_t - 1$ . In effetti vi sono nell'albero  $n_t$  nodi e almeno 2 nodi terminali (ad esempio il nodo 0 ed il nodo 3 nell'albero di Fig.1.2a). Per ogni lato connesso ad un nodo terminale che cancelliamo dall'albero noi liberiamo un nodo, quando infine cancelliamo l'ultimo lato liberiamo due nodi. Se ne conclude che il numero dei lati d'albero è  $n_t - 1$ .
- Il numero delle corde  $lc$  è pari al numero degli anelli indipendenti  $a$ . Questa proprietà è conseguenza della precedente in quanto il numero dei lati d'albero è pari al numero dei nodi indipendenti e quindi  $lc = l - n = a$ .
- Aggiungendo ognuna delle  $a$  corde all'albero si forma una maglia indipendente. In effetti si forma sicuramente una maglia ed ogni maglia contiene una diversa tensione, quella della corda che viene aggiunta all'albero. Ne consegue che nessuna delle LKT delle maglie così costruite può dedursi dalle altre. Quindi le  $a$  equazioni che così vengono costruite sono tra loro indipendenti. Nella Fig.1.3 sono illustrate le  $a$  maglie indipendenti costruibili sul primo degli alberi di Fig.1.2.
- Adagiamo sull'albero una superficie chiusa che tagli un solo lato degli  $n$  lati d'albero (operazione che è sempre fattibile perché l'albero è una struttura senza maglie): abbiamo così formato per ogni lato d'albero un nodo. Ognuno di questi nodi contiene una diversa corrente, quella del lato d'albero che viene tagliato. Ne consegue che nessuna delle LKC dei nodi così costruiti può dedursi dalle altre. Quindi le  $n$  equazioni che così vengono costruite sono tra loro indipendenti. Nella Fig.1.4 sono illustrati gli  $n$  nodi indipendenti costruibili con i lati del primo degli alberi di Fig.1.2.

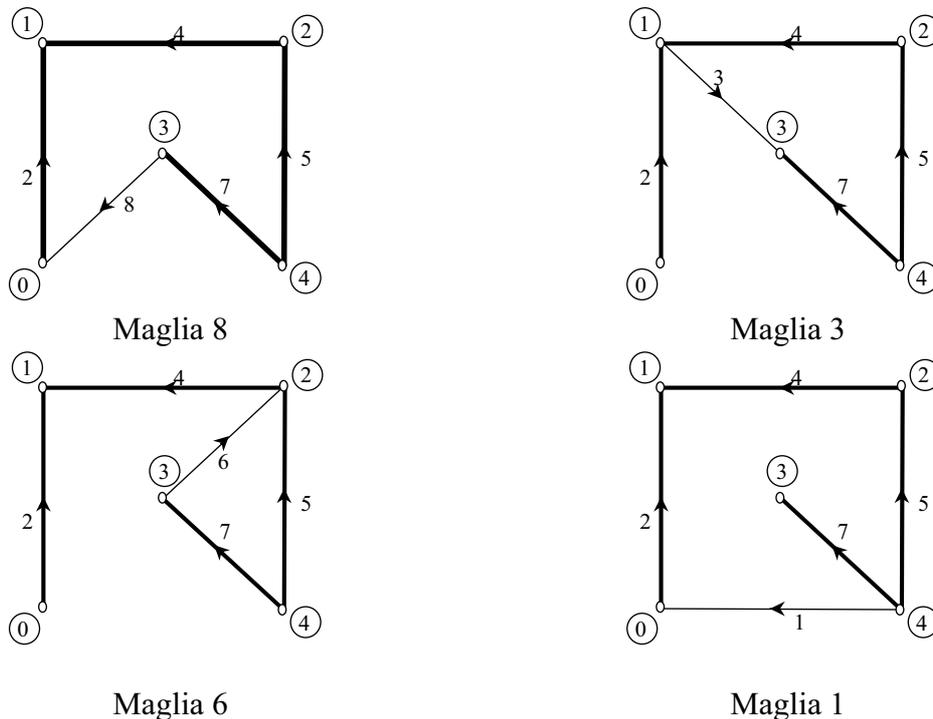


Fig.1.3 Maglie indipendenti costruite appoggiando le  $a$  corde al primo degli alberi di Fig.1.2.

Il teorema generale delle reti elettriche si può allora enunciare nel seguente modo. Data una rete elettrica con  $l$  lati rappresentata dal suo grafo orientato, scelto un albero, le equazioni risolutive sono le  $n$  LKC date dai nodi associati ai lati d'albero, le  $a$  LKT date dalle maglie associate alle corde e gli  $l$  legami costitutivi LC di ogni lato.

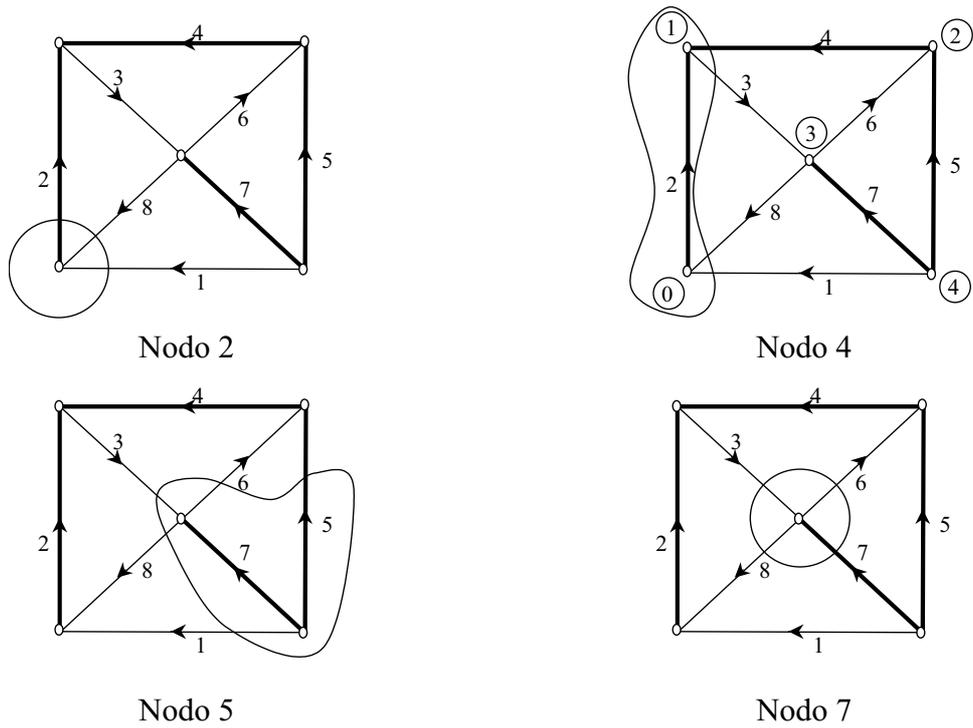


Fig.1.4 Nodi indipendenti costruiti tagliando gli  $n$  lati d'albero del primo albero di Fig.1.2.

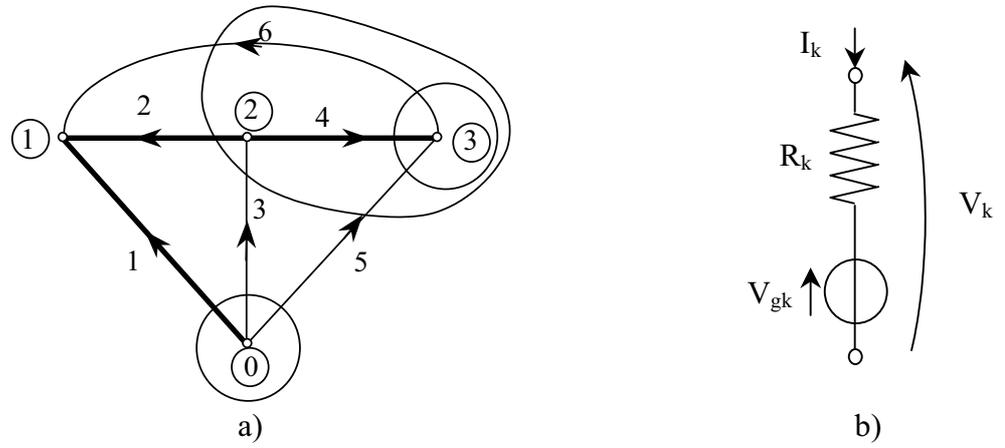


Fig.1.5 a) Rete oggetto di studio. b) Lati della rete.

Come esempio applicativo consideriamo la rete che presenta il grafo orientato di Fig.1.5a e lati del tipo indicato in Fig.1.1b. Scelto come albero quello evidenziato nella Fig.1.5a, le equazioni risolutive (costruite con la metodologia sopra indicata) sono quelle indicate nella eq.1.1. Si noti che nella scrittura delle LKT si è assunto come verso positivo di percorrenza della maglia quella del lato d'albero che la definisce e nella scrittura delle LKC si è assunto come verso positivo delle correnti quello della corda che definisce il nodo.

	$V_3 + V_2 - V_1 = 0$	$I_1 + I_3 + I_5 = 0$
1.1	LKT $V_6 - V_2 + V_4 = 0$	LKC $I_2 - I_3 - I_5 + I_6 = 0$
	$V_5 - V_4 + V_2 - V_1 = 0$	$I_4 + I_5 - I_6 = 0$

$$LC \quad V_k = V_{gk} + R_k I_k$$

La metodologia ora evidenziata è particolarmente utile nella scrittura delle equazioni di stato di una rete come viene nel seguito discusso.

## 2 Stato di un sistema fisico.

Si chiama "stato" di un sistema fisico un insieme di variabili che soddisfano alle seguenti condizioni.

- La conoscenza dello stato e degli ingressi (nel caso delle reti elettriche i generatori indipendenti di tensione e di corrente) all'istante di tempo  $t^*$  consente di valutare ogni altra grandezza pertinente il sistema fisico nello stesso istante di tempo.
- La conoscenza dello stato al tempo  $t^*$  e degli ingressi consente di valutare lo stato per ogni istante di tempo  $t > t^*$ .

Per una rete elettrica  $R, L, C$  non degenera (che non contiene nodi cui concorrono soli induttori o maglie formate da soli condensatori, tali cioè da stabilire un legame algebrico tra le correnti/tensioni degli induttori/condensatori che ne fanno parte) e per tutti i sistemi fisici analoghi caratterizzati da ingressi che presentino, al più, discontinuità di prima specie (discontinuità al finito con limite destro e sinistro noti) le correnti degli induttori e le tensioni dei condensatori rappresentano lo stato della rete. Dimostriamo che questo insieme di variabili soddisfa alle due proprietà che definiscono lo stato.

### 2.1 Valutabilità del sistema fisico tramite lo stato e gli ingressi.

Dimostriamo in primo luogo che la conoscenza dello stato (correnti degli induttori e tensioni dei condensatori) e degli ingressi (generatori indipendenti di tensione e di corrente) all'istante  $t^*$  consente di valutare ogni altra grandezza di rete all'istante  $t^*$ .

Occorre infatti considerare che, dato il legame costitutivo dei bipoli che costituiscono lo stato ( $v_L = L p i_L, i_C = C p v_C$ ) e data la natura degli ingressi (discontinuità, al più, di prima specie) la corrente degli induttori e la tensione dei condensatori devono variare senza discontinuità, infatti se la corrente  $i_L$  di un induttore e/o la tensione  $v_C$  ai morsetti di un condensatore presentassero discontinuità la tensione  $v_L$  e/o la corrente  $i_C$  ai morsetti di questi bipoli presenterebbero valori infinitamente alti non compatibili (considerate le  $LKC$  e le  $LKT$ ) con le tensioni e le correnti finite dei generatori indipendenti di corrente e di tensione.

Ne consegue che nell'intorno di ogni istante di tempo  $t^*$  (teorema di sostituzione) agli induttori si può sostituire un generatore di corrente  $i_L(t^*)$  ed ai condensatori un generatore di tensione  $v_C(t^*)$ . In conclusione la rete, nell'intorno di ogni istante  $t^*$ , si riduce ad una rete resistiva univocamente risolubile in funzione dei generatori rappresentativi degli ingressi indipendenti e di quelli equivalenti agli induttori ed ai condensatori.

Come esempio delle asserzioni ora fatte si consideri la rete di Fig.2.1a in cui il condensatore e l'induttore sono scarichi per  $t < 0$  (quindi  $i_L(0^-) = 0, v_C(0^-) = 0$ ). L'ingresso  $v(t)$  per effetto della chiusura dell'interruttore, si veda la Fig.2.1b, presenta, per  $t = 0$ , una discontinuità di prima specie. Dimostriamo che nell'intorno di  $t = 0$  ed in particolare per  $t = 0^+$  (e cioè anche subito dopo la chiusura dell'interruttore) si ha  $i_L(0^+) = 0, v_C(0^+) = 0$  per modo che la rete, nell'intorno di  $t = 0$ , è rappresentabile con il circuito equivalente di Fig.2.1c

in cui all'induttore si è sostituito un generatore di corrente nulla ed al condensatore un generatore di tensione nulla (si veda, in definitiva, il circuito di Fig.2.1d).

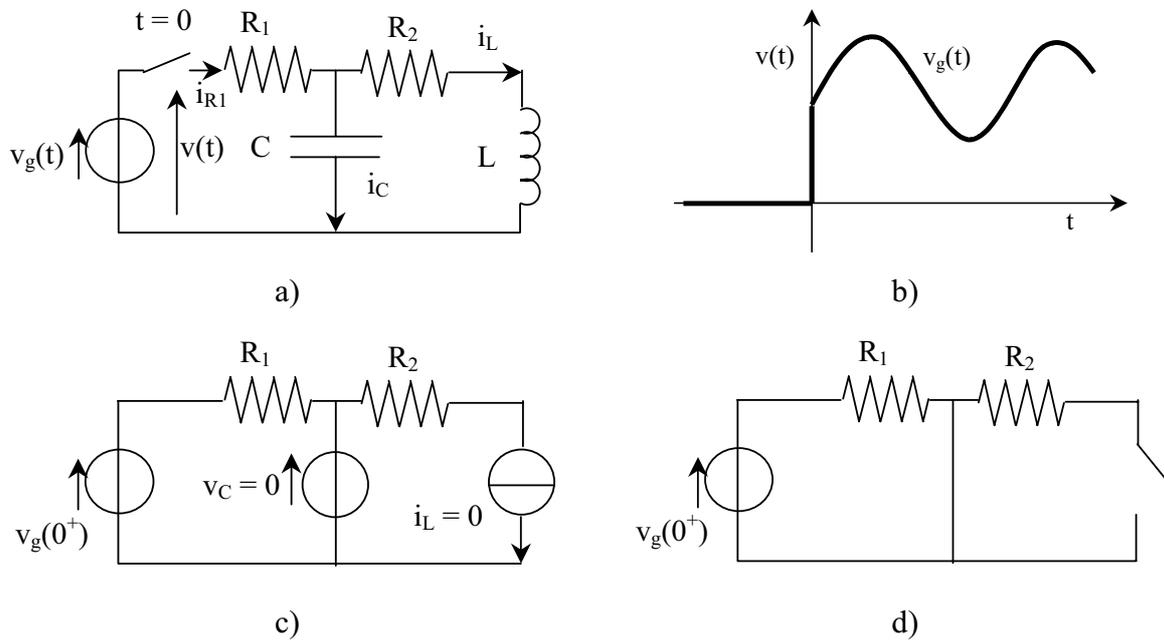


Fig.2.1 a) Rete del secondo ordine non degenere inizialmente scarica; b) ingresso  $v(t)$ ; c-d) rete resistiva equivalente nell'intorno di  $t = 0^+$ .

Infatti se  $i_L$  presentasse una discontinuità passando, a gradino, da zero ad un valore, ad esempio, finito e positivo  $i_L(0^+) > 0$  allora  $v_L$  assumerebbe un valore positivo infinitamente alto  $v_{L\infty}$ , mentre su  $R_2$  si manifesterebbe la tensione finita  $R_2 i_L(0^+) > 0$ . La tensione sul condensatore passerebbe dal valore nullo ad un valore positivo infinitamente alto (dato che  $v_{C\infty} = v_{L\infty} + R_2 i_L(0^+)$ ) e la corrente assorbita assumerebbe un valore positivo infinitamente alto  $i_{C\infty}$ . Ne conseguirebbe sul resistore  $R_1$ , per la *LKC* al nodo 1, una corrente positiva infinitamente alta ed una tensione positiva infinitamente alta  $v_{R1\infty}$ . Sul generatore, per la *LKT*, si manifesterebbe allora una tensione ancora infinitamente alta come somma di  $v_{C\infty} + v_{R1\infty}$  incompatibile con il valore finito della tensione sul generatore. In modo analogo si può constatare che la tensione sul condensatore non può presentare discontinuità.

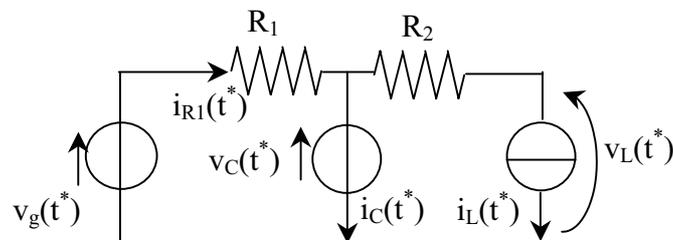


Fig.2.2 Rete resistiva equivalente a quella di Fig.2.1 nell'intorno di  $t^*$ .

Come conseguenza di quanto dimostrato la rete di Fig.2.1, nell'intorno di un qualsiasi istante di tempo  $t^* > 0$  in cui lo stato e gli ingressi sono noti, è rappresentabile con la rete resistiva equivalente di Fig.2.2 e le "uscite" e cioè tutte le altre grandezze di rete (in particolare  $v_L(t^*)$ ,  $i_C(t^*)$  e  $i_{R1}(t^*)$ ) sono individuabili in funzione degli ingressi e dello stato come è indicato nella eq.2.1.

$$2.1 \quad v_L(t^*) = v_C(t^*) - R_2 i_L(t^*) \quad i_{R1}(t^*) = [v(t^*) - v_C(t^*)] / R_1 \quad i_C(t^*) = i_{R1}(t^*) - i_L(t^*)$$

In generale la continuità dello stato implica che le uscite siano esprimibili in funzione dello stato e degli ingressi con legami algebrici, individuabili con la rete resistiva che si ottiene sostituendo allo stato generatori di tensione e di corrente.

Con questa posizione allora le uscite sono esprimibili, in forma generale, nel modo indicato dalla eq.2.2 (tipica della teoria dei sistemi). In questa equazione l'insieme delle variabili di stato è espresso dalla matrice colonna  $[x] = [i_L v_C]^t$ , l'insieme delle uscite dalla matrice colonna  $[y] = [v_L i_C i_R]^t$ , l'insieme degli ingressi dalla matrice colonna  $[u]$ , mentre  $[C]$ ,  $[D]$  sono matrici di coefficienti (resistenza e conduttanza) che dipendono dalla rete resistiva che si ottiene sostituendo allo stato generatori di tensione e di corrente.

$$2.2 \quad [y] = [C] [x] + [D] [u]$$

Ad esempio le eq.2.1 possono esser messe nella forma indicata nelle eq.2.3 che rispetta la struttura indicata nelle eq.2.2.

$$2.3 \quad \begin{bmatrix} v_L \\ i_C \\ i_{R1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -R_2 & 1 \\ -1 & -1/R_1 \\ 0 & -1/R_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_L \\ v_C \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1/R_1 \\ 1/R_1 \end{bmatrix} [v_g]$$

## 2.2 Evoluzione univoca dello stato.

Dimostriamo che la conoscenza dello stato al tempo  $t^*$  (e cioè la conoscenza di  $i_L(t^*)$ ,  $v_C(t^*)$ ) e degli ingressi ( $v_g, i_g$ ) consente di ricavare univocamente lo stato ( $i_L(t)$ ,  $v_C(t)$ ) per ogni  $t > t^*$ .

Infatti, per quanto mostrato nel precedente paragrafo, in ogni istante  $t^*$  siamo in grado di esprimere, tramite la rete resistiva equivalente, ogni grandezza di rete tramite lo stato e gli ingressi. D'altra parte preso "l'albero proprio" della rete, quello che contiene tutti i condensatori e nessun induttore siamo in grado, appoggiando un induttore per volta all'albero, di scrivere per ogni induttore la sua equazione di maglia nella forma 2.4 e per ogni condensatore siamo in grado di esprimere la sua equazione di nodo nella forma 2.5.

$$2.4 \quad L p i_L = \sum (v_g + v_C + v_R)$$

$$2.5 \quad C p v_C = \sum (i_g + i_L + i_R)$$

Si noti che le tensioni che compaiono nella eq.2.4 sono, in generale, quelle degli ingressi  $v_g$ , dei condensatori  $v_C$  e dei lati resistivi  $v_R$ , mentre le correnti che compaiono nella eq.2.5 sono, in generale, quelle degli ingressi  $i_g$ , degli induttori  $i_L$  e dei lati resistivi  $i_R$ .

Dal momento che ogni grandezza di rete (ed in particolare  $v_R, i_R$ ) può essere espressa tramite lo stato e gli ingressi le equazioni 2.4-5 si possono riorganizzare, in forma matriciale, come è indicato nella eq. 2.6.

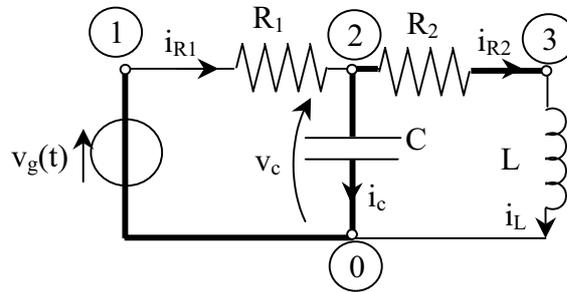


Fig 2.3 Albero della rete

Lo stato quindi evolve nel tempo secondo un sistema di equazioni differenziali del primo ordine a coefficienti costanti di numero ("ordine della rete") pari a quello degli induttori e dei condensatori presenti nella rete. L'analisi matematica assicura che si tratta di un sistema che ammette soluzione univoca quando sia assegnato il valore dello stato al tempo iniziale.

$$2.6 \quad p \begin{bmatrix} i_L \\ v_C \end{bmatrix} = [A] \begin{bmatrix} i_L \\ v_C \end{bmatrix} + [B] [u]$$

Così, ad esempio, per la rete di Fig.2.1, considerato l'albero proprio tratteggiato nella Fig.2.3, le equazioni 2.4 e 2.5 assumono l'aspetto precisato nelle eq.2.7 e 2.8 e queste, considerati i legami algebrici imposti dalla eq.2.3, si possono trascrivere come è indicato nella eq.2.9.

$$2.7 \quad L p i_L = v_L = v_C - R_2 i_{R2} = v_C - R_2 i_L$$

$$2.8 \quad C p v_C = i_C = i_{R1} - i_{R2} = i_{R1} - i_L$$

$$2.9 \quad p \begin{bmatrix} i_L \\ v_C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -R_2/L & 1/L \\ -1/C & -1/R_1 C \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_L \\ v_C \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1/R_1 C \end{bmatrix} [v_g]$$

Complessivamente se indichiamo con  $[x]$  la matrice colonna dello stato, con  $[u]$  la matrice colonna degli ingressi, con  $[y]$  la matrice colonna delle uscite le equazioni di stato ed i legami tra lo stato e le uscite sono rappresentabili nella forma sintetica indicata nelle eq.2.10 dove  $[A]$  è una matrice quadrata di ordine pari a quello della rete.

$$2.10 \quad \begin{aligned} p[x] &= [A] [x] + [B] [u] \\ [y] &= [C] [x] + [D] [u] \end{aligned}$$

# TRANSITORI NELLE RETI NORMALI.

## 1 Impostazione delle equazioni dinamiche.

Si è visto che per una rete normale lo stato è esprimibile tramite la corrente degli induttori e la tensione dei condensatori (per una rete con induttori e condensatori anomali si può mostrare che la metodologia messa a punto è ancora valida pur di assumere come stato il flusso concatenato degli induttori anomali e la carica elettrica dei condensatori anomali) e che la conoscenza dello stato all'istante  $t^*$  e degli ingressi consente di ricavare lo stato ed ogni altra grandezza di rete per  $t > t^*$ .

Nel presente paragrafo ci interesseremo dei metodi risolutivi delle equazioni di stato nel dominio del tempo in forma chiusa. Questi metodi consentono di rappresentare tensioni e correnti di rete sotto forma di funzioni del tempo continue e derivabili quando gli ingressi rispondano alle limitazioni nel seguito indicate. Pur ponendo limitazioni il metodo che verrà esposto ha il vantaggio (come quello basato sulla trasformata di Laplace) di evidenziare ulteriori proprietà generali delle reti. I metodi basati sulla integrazione numerica delle equazioni di stato, che costituiscono una valida alternativa, sono più generali perché non pongono limitazioni sulla natura degli ingressi ma, d'altra parte, per la loro natura non forniscono indicazioni sulle proprietà intrinseche delle reti.

Il punto di partenza sono allora le equazioni di stato, il valore dello stato al tempo  $t^*$  ed il legame tra lo stato e le uscite  $[y]$ , come è evidenziato nelle eq.1.1 che per semplicità si riferiscono ad una rete del secondo ordine (per le reti di ordine superiore lo stato sarà rappresentato da un vettore di correnti degli induttori e da un vettore di tensioni dei condensatori) con un solo ingresso  $u(t)$  (nel caso di più ingressi vale il teorema di sovrapposizione).

$$p \begin{bmatrix} i_L \\ v_C \end{bmatrix} = [A] \begin{bmatrix} i_L \\ v_C \end{bmatrix} + [B]u = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_L \\ v_C \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_{11} \\ b_{21} \end{bmatrix} u \quad i_L(t^*) = i_L^* \quad v_C(t^*) = v_C^*$$

1.1

$$[y] = [C] \begin{bmatrix} i_L \\ v_C \end{bmatrix} + [D]u$$

Le due equazioni differenziali della eq.1.1 si possono combinare fino ad ottenere un'unica equazione differenziale completa del secondo ordine. In effetti se deriviamo la prima equazione come è indicato nella eq.1.2 possiamo poi introdurre in essa la seconda delle equazioni 1.1 come è indicato nella eq.1.3; da questa equazione, ricordando la prima delle eq.1.1 (che consente di esprimere  $v_C$  in funzione di  $pi_L, i_L, u$ ), si ricava infine un'equazione nella sola variabile  $i_L$  e nelle sue derivate prima e seconda che può essere ordinata come è indicato nella eq.1.4 (dove  $a_1, a_2, a_3$  sono combinazioni dei coefficienti dell'equazione di partenza). Una volta integrata la eq.1.4 è possibile poi ricavare  $v_C$  tramite la prima delle eq.1.1 per modo che la conoscenza dello stato è completa per ogni  $t > t^*$ . Si noti che la eq.1.4 evidenzia un'ulteriore proprietà dello stato al tempo  $t^*$ : esso è noto con tutte le sue successive derivate.

$$1.2 \quad p^2 i_L = a_{11} p i_L + a_{12} p v_C + b_{11} p u$$

$$1.3 \quad p^2 i_L = a_{11} p i_L + a_{12} (a_{21} i_L + a_{22} v_C + b_{21} u) + b_{11} p u$$

$$1.4 \quad a_1 p^2 i_L + a_1 p i_L + a_0 i_L = f(t) \quad i_L(t^*) = i_L^* \quad p i_L(t^*) = a_{11} i_L^* + a_{12} v_C^* + b_{11} u^*$$

Più in generale per una rete di ordine  $n$  la cui dinamica è rappresentata da uno stato di  $n$  variabili costituite da correnti di induttori e tensioni di condensatori, combinando le equazioni di stato con la metodologia prima indicata si ottiene una equazione differenziale completa di ordine  $n$  a coefficienti costanti in una delle variabili di stato del tipo indicato nella eq.1.5. Questa equazione è da integrare con le condizioni iniziali a fianco indicate che sono note in quanto  $x$  come variabile di stato è nota al tempo  $t^*$  con tutte le sue derivate.

$$1.5 \quad a_n p^n x + a_{n-1} p^{n-1} x + \dots + a_0 x = f(t) \quad p^{n-1} x(t^*) = p^{n-1} x^* \quad \dots \quad x(t^*) = x^*$$

L'analisi matematica insegna che le equazioni differenziali di cui alla eq.1.5 sono univocamente risolvibili e che la soluzione consta di due parti e precisamente della soluzione  $x_t(t)$  della equazione omogenea associata (che si ottiene da quella completa ponendo  $f(t) = 0$ ;  $x_t(t)$  prende il nome di “soluzione transitoria”, come viene nel seguito motivato) e da un integrale particolare  $x_p(t)$  della equazione completa (che prende il nome di “soluzione di regime”, come viene nel seguito motivato). Vale quindi la posizione indicata nella eq.1.6.

$$1.6 \quad x(t) = x_t(t) + x_p(t)$$

## 2 Sull'integrale particolare della equazione differenziale completa.

L'integrale particolare è facilmente formulabile per una categoria di funzioni di ampio interesse applicativo, quelle che rispondono alla eq.2.1 (denominate sinusoidi generalizzate o cissoidi) in cui  $\gamma$  è un numero complesso che prende il nome di “pulsazione generalizzata” ( $\sigma$  è un numero reale positivo) ed il tempo è conteggiato ponendo  $t^* = 0$  (gli ingegneri godono, a differenza degli studiosi di altre scienze, della opportunità di spostare l'origine del tempo all'inizio dei fenomeni oggetto di studio senza alterare per questo i risultati delle loro analisi). La funzione gradino unitario  $1(t)$ , che ha l'andamento temporale indicato in Fig.2.1, serve ad esprimere l'idea che l'ingresso  $f(t)$  agisce per  $t > 0$ .

$$2.1 \quad f(t) = \operatorname{Re}(\bar{F} e^{\gamma t}) 1(t) \quad \bar{F} = F e^{j\alpha} \quad \gamma = -\sigma + j\omega$$

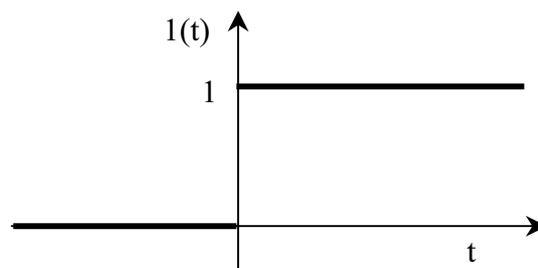


Fig.2.1 La funzione gradino unitario.

La sinusoida generalizzata (la cui forma d'onda si ottiene come è indicato in Fig.2.2a) serve ad esprimere, in relazione ai diversi valori attribuibili alla pulsazione generalizzata, l'intervento sulla rete di un generatore con una delle seguenti forme d'onda.

$\gamma = 0, \alpha = 0 \quad f(t) = F \cdot 1(t) \quad$  Ingresso costante nel tempo, Fig.2.2b

$\omega = 0, \alpha = 0 \quad f(t) = Fe^{-\sigma t} 1(t) \quad$  Ingresso variabile esponenzialmente nel tempo, Fig.2.2c

$\sigma = 0 \quad f(t) = F \cos(\omega t + \alpha) \cdot 1(t) \quad$  Ingresso variabile sinusoidalmente nel tempo, Fig.2.2d

$\sigma \neq 0 \quad f(t) = Fe^{-\sigma t} \cos(\omega t + \alpha) \quad$  Ingresso cissoidale, Fig.2.2e.

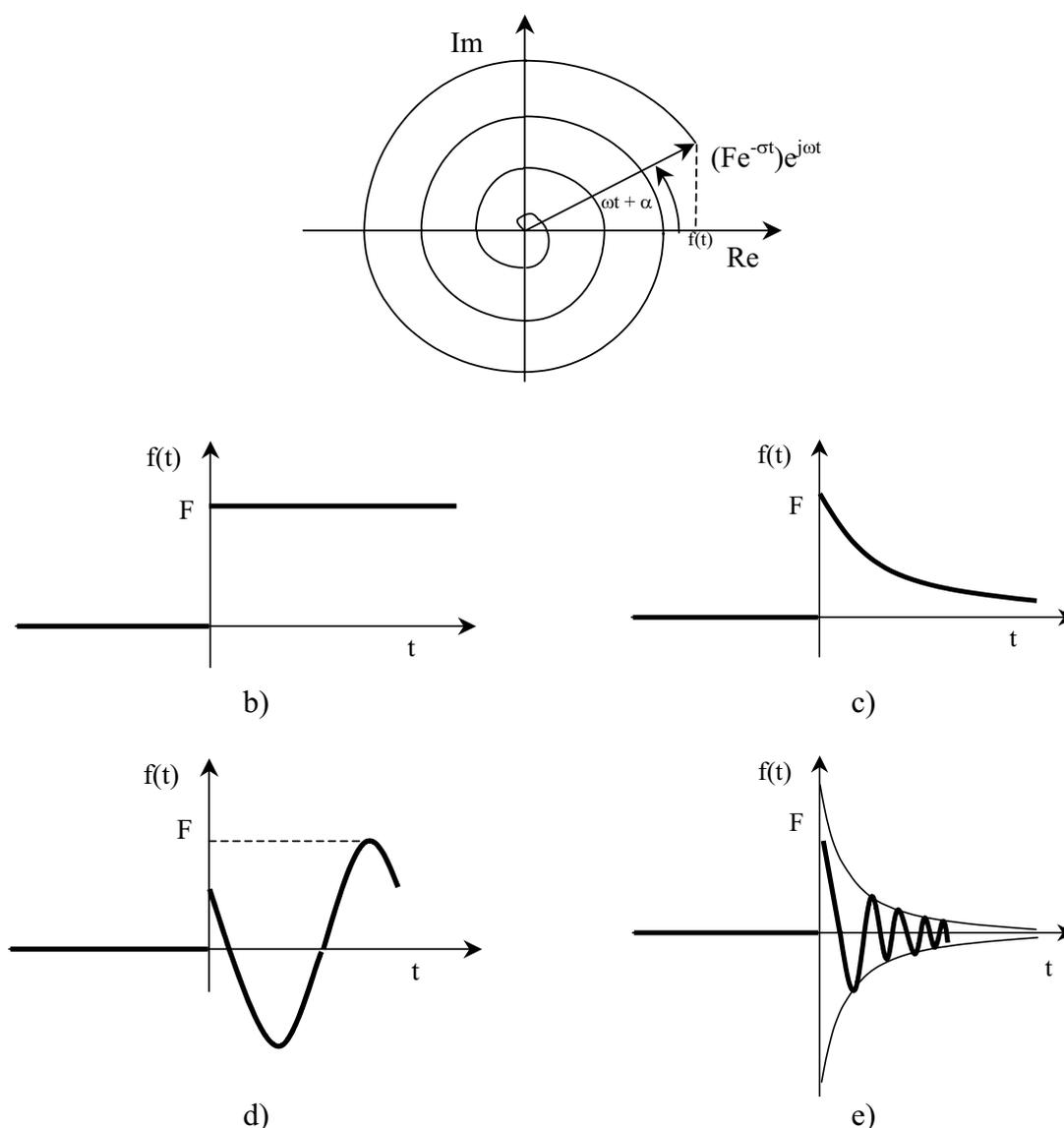


Fig.2.2 a) La cissoide come proiezione di un fasore rotante di ampiezza smorzata esponenzialmente; b) il gradino come caso della cissoide; c) l'esponenziale smorzata come caso della cissoide; d) la funzione cosinusoidale come caso della cissoide; e) l'andamento temporale della cissoide.

Per  $t > 0$  le derivate successive della sinusoida generalizzata rispondono alla eq.2.2 in quanto sono tra loro scambiabili l'operatore  $p$  di derivazione e l'operatore  $\text{Re}$  di proiezione sull'asse reale. Questa proprietà giustifica il fatto che se l'ingresso  $f(t)$  nella eq.1.5 è del tipo indicato nella eq.2.1, allora l'integrale particolare si può mettere nella forma indicata nella eq.2.3 (quindi l'integrale particolare è una cissoide con la stessa pulsazione generalizzata della cissoide di ingresso). Sostituendo infatti la eq.2.3 nella eq.1.5 si ricava una equazione che consente di ricavare il fasore  $\bar{X}_p$  come è indicato nella eq.2.4.

$$2.2 \quad p^n \text{Re}(\bar{F}e^{\gamma t})1(t) = \text{Re}(p^n \bar{F}e^{\gamma t})1(t) = \text{Re}(\gamma^n \bar{F}e^{\gamma t})1(t)$$

$$2.3 \quad x_p(t) = \text{Re}(\bar{X}_p e^{\gamma t})1(t)$$

$$2.4 \quad \bar{X}_p = \bar{F} / (a_n \gamma^n + a_{n-1} \gamma^{n-1} + \dots + a_0)$$

### 3 Sull'integrale dell'omogenea associata.

Per ricavare questo integrale occorre risolvere l'equazione algebrica caratteristica indicata nella eq.3.1 nell'incognita  $z$ . Se le  $n$  radici  $(z_1, z_2, \dots, z_n)$  sono distinte (per la soluzione di equazioni di grado superiore al terzo si veda il corso di analisi numerica), reali o complesse coniugate, l'integrale generale dell'omogenea associata si pone nella forma indicata nella eq.3.2 in cui ad ogni coppia di radici complesse coniugate del tipo  $\bar{z}_k = \alpha_k \pm j\beta_k$  corrisponde una oscillazione del tipo  $e^{\alpha_k t} A_k \cos(\beta_k t + \psi_k)$ . Le  $n$  costanti di integrazione  $A_1, A_2, \dots, A_k, \psi_k, \dots, A_n$  vengono individuate imponendo alla soluzione completa le  $n$  condizioni iniziali pertinenti la variabile di stato  $x(0)$  e le sue derivate successive fino a quella di ordine  $(n-1)$  all'istante  $t = 0^+$ .

$$3.1 \quad a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_0 = 0$$

$$3.2 \quad x_i(t) = [A_1 e^{z_1 t} + A_2 e^{z_2 t} + \dots + A_k e^{\alpha_k t} \cos(\beta_k t + \psi_k) + \dots + A_n e^{z_n t}]1(t)$$

Se le radici non sono distinte ma tra di esse vi è una radice  $z_m$  multipla di ordine  $m$  allora a questa radice corrisponde nella eq.3.2 un termine del tipo indicato nella eq.3.4 (che introduce  $m$  costanti di integrazione).

$$3.3 \quad (B_1 + B_2 t + B_3 t^2 + \dots + B_m t^{m-1}) e^{z_m t} 1(t)$$

In merito all'integrale dell'omogenea associata valgono le seguenti osservazioni.

- Un sistema fisico rappresentabile con una rete normale  $R, L, C$  è intrinsecamente stabile e cioè se viene meno l'ingresso esso evolve verso lo stato di quiete con stato nullo. A questa caratteristica fisica deve corrispondere il fatto che se si pone  $f(t) = 0$ , e cioè se è nullo l'integrale particolare, allora il limite per  $t \rightarrow \infty$  di  $x_i(t)$  deve essere

nullo. La condizione ora indicata comporta che le radici  $z_j$  se sono reali devono essere negative e se sono complesse coniugate devono avere parte reale negativa: solo in questo modo infatti l'integrale particolare tende a zero per  $t \rightarrow \infty$ . Si può dimostrare che affinché sia rispettata questa proprietà occorre che i segni dei diversi termini dell'equazione algebrica siano uguali (tutti positivi o tutti negativi). Questo comportamento per  $t \rightarrow \infty$  giustifica per  $x_i(t)$  il nome di "componente transitoria" della soluzione e, correlativamente, quello di "soluzione di regime" per l'integrale particolare. Si osservi che quanto detto ha un ben preciso significato energetico: non è possibile che in una rete  $R, L, C$  abbandonata a se stessa senza generatori le grandezze continuino ad evolvere nel tempo senza mai annullarsi in quanto nulla genera l'energia che viene dissipata nei resistori.

- Le radici  $z_j$  dovendo essere  $|z_j t|$  adimensionale, hanno la dimensione dell'inverso del tempo  $[s]^{-1}$ , esse prendono il nome di "pulsazioni proprie" del sistema fisico rappresentato dalla rete. L'inverso delle pulsazioni proprie si chiamano "costanti di tempo" della rete ( $1/\alpha_k$  nel caso di radici complesse coniugate). Dal momento che  $e^{-5} < 0,001$  ogni termine della soluzione transitoria del tipo  $f_j(t) = A_j e^{z_j t} 1(t)$  ha un andamento temporale del tipo indicato in Fig.3.1 e diviene minore dell'un per mille del valore iniziale quando è trascorso un tempo pari a cinque costanti di tempo. Ne consegue che la più grande  $T_M$  delle costanti di tempo dà una misura ingegneristica della durata del transitorio (la corrispondente radice, di modulo minimo  $z_m = 1/T_M$ , si dice "radice dominante"). La conoscenza, viceversa, della costante di tempo minima  $T_m = 1/z_M$  è utile nella scelta del passo per l'integrazione numerica dell'equazioni di stato (metodo da usare nel caso di ingressi non riconducibili ad una sinusoide generalizzata oppure nel caso di reti non lineari). In effetti se  $f_{gM}$  è la massima frequenza delle tensioni/correnti impresse dai generatori conviene scegliere  $\tau^* = \min(T_m, 1/f_{gM})/10$ .
- Derivando una delle funzioni  $f_j(t)$  si ottiene quanto è indicato nella eq.3.5. Questo comporta che la costante di tempo  $T_j$  è calcolabile/misurabile come è indicato nella Fig.3.1.

$$3.4 \quad pf_j(t) = -A_j e^{-t/T_j} = -f_j(t)/T_j$$

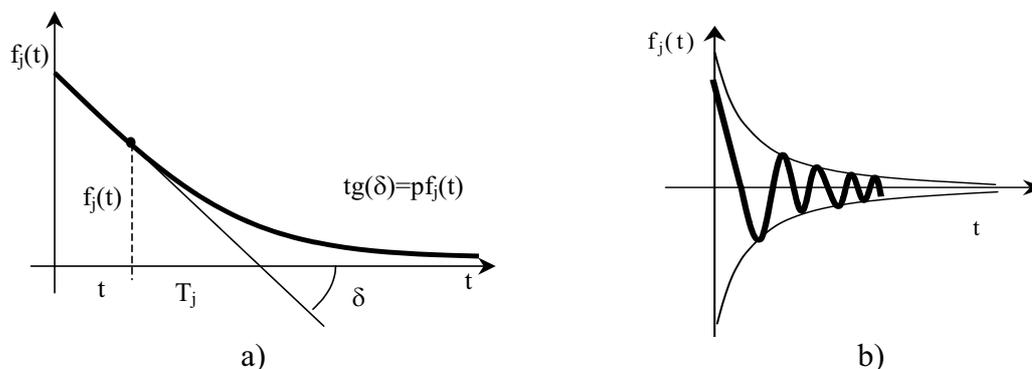


Fig.3.1 Tipico andamento temporale delle funzioni componenti la soluzione transitoria: a) nel caso di radice reale negativa; b) nel caso di radici complesse coniugate.

- Mediante la trasformata di Laplace è possibile dimostrare che esiste un legame tra l'equazione algebrica caratteristica, le funzioni di rete e la matrice di stato  $[A]$  (si veda la eq.1.1). Più precisamente si dimostra che l'equazione algebrica ha la stessa struttura del denominatore della funzione di rete che, moltiplicata per l'ingresso, fornisce la variabile di stato di cui alla eq.1.5 e che le soluzioni della equazione algebrica ed i poli della funzione di rete prima indicata sono gli autovalori della matrice di stato. Questi legami appariranno visibili nei successivi esempi applicativi.

#### 4 Esempi applicativi.

Si consideri la rete elettrica di fig.4.1a per la quale si vogliono impostare le equazioni dinamiche per lo studio del transitorio di inserzione del generatore di corrente al tempo  $t = 0$ . L'albero proprio della rete è costituito dal solo condensatore ed appoggiando all'albero proprio l'induttore si ottiene la prima delle due equazioni di stato indicate nella eq.4.1. Tagliando poi il condensatore con una superficie che si richiuda sulle corde si ottiene il nodo associato al condensatore che consente di scrivere la seconda equazione di stato.

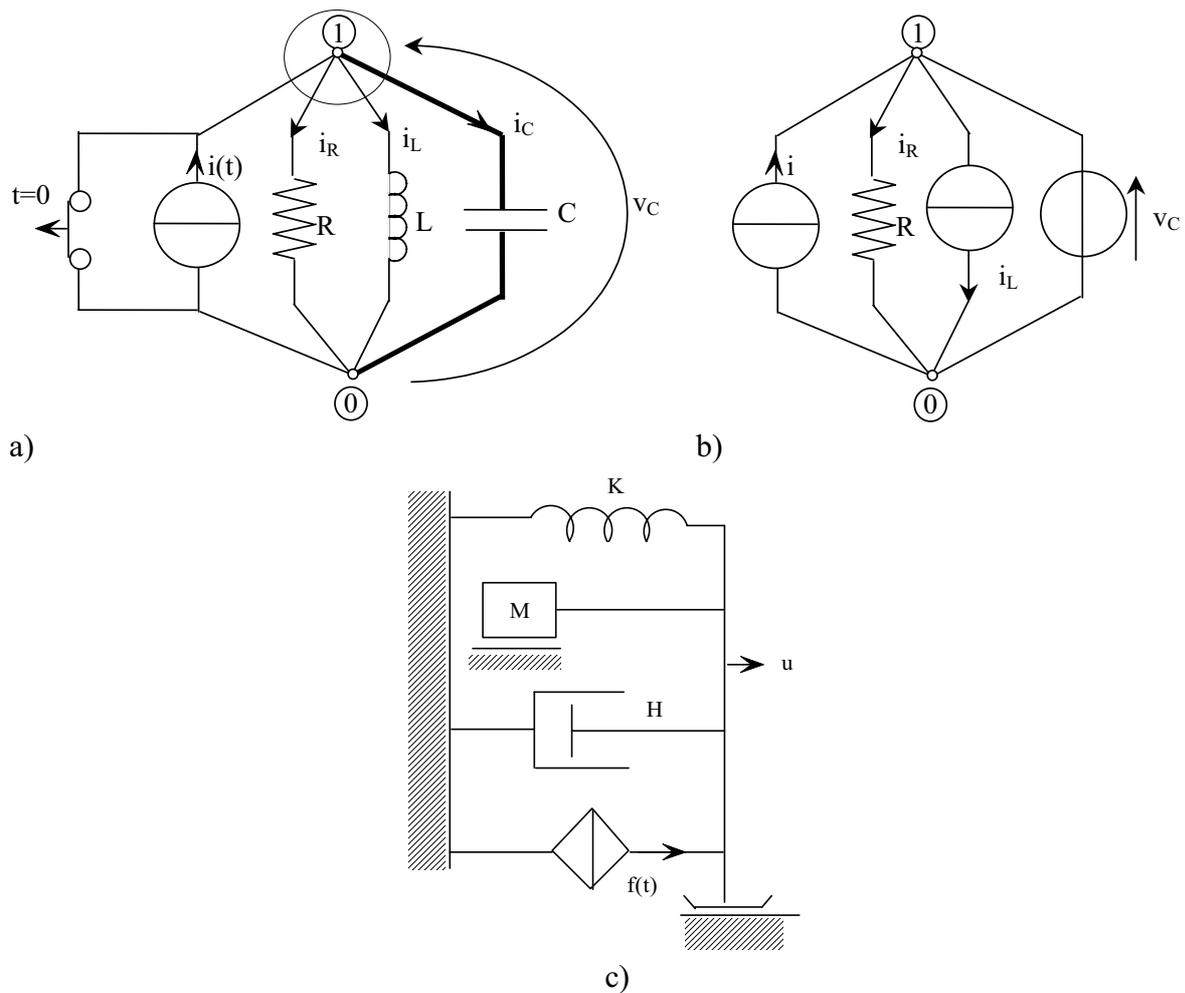


Fig.4.1 a) Rete oggetto di studio; b) rete algebrica per il calcolo delle uscite; c) rete meccanica analoga.

I legami algebrici tra lo stato e le uscite (le rimanenti grandezze di rete) sono poi definiti dalla rete resistiva ausiliaria di Fig.4.1b ottenuta sostituendo al condensatore un generatore di tensione ed all'induttore un generatore di corrente. Dalla rete ausiliaria si ricava in particolare la corrente del resistore in funzione dello stato, si veda la eq.4.2, che consente di ordinare le equazioni stesse come è indicato nella eq.4.3 (in cui si sono considerate come uscite la corrente  $i_R$  del resistore e la tensione  $v_g$  sul generatore di corrente). Nella eq.4.4 sono poi indicate le condizioni iniziali limitando l'analisi alle derivate prime

$$Lpi_L = v_C$$

4.1

$$Cpv_C = i_C = i - i_R - i_L$$

$$4.2 \quad i_R = v_C / R$$

$$4.3 \quad p \begin{bmatrix} i_L \\ v_C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1/L \\ -1/C & -1/RC \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_L \\ v_C \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1/C \end{bmatrix} i \quad [A] = \begin{bmatrix} 0 & 1/L \\ -1/C & -1/RC \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} i_R \\ v_g \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1/R \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_L \\ v_C \end{bmatrix}$$

$$4.4 \quad i_L(0^+) = 0; \quad v_C(0^+) = 0; \quad pi_L(0^+) = 0; \quad pv_C(0^+) = i(0^+)$$

In Fig.4.1c viene poi presentato il circuito meccanico analogo le cui variabili di stato sono la forza  $f_K$  della molla e la velocità  $u_M$  della massa. Le eq.4.5 presentano le equazioni di stato del sistema meccanico analogo (analoghe delle eq.4.1), mentre la eq.4.6 presenta il legame stato-uscita (analogo di quello indicato nella eq.4.2).

$$4.5 \quad pf_K / K = u_K$$

4.5

$$Mpu_M = f - f_H - f_K$$

$$4.6 \quad f_H = Hu_H = Hu_M$$

Se ora si deriva, ad esempio, la seconda delle eq.4.1 e si tiene conto della prima delle eq.4.1 si trova la eq. 4.7 e da questa, in base alla prima delle eq.4.1 si perviene alla eq.4.8 conclusiva che presenta l'equazione algebrica caratteristica indicata nella eq.4.9.

Si noti che la eq.4.9 coincide, nel dominio della pulsazione complessa  $s = j\omega$ , con il polinomio  $D(s)$  al denominatore dell'operatore impedenza  $\bar{Z}(s)$  ai morsetti del generatore di corrente evidenziato nella eq.4.10 e cioè dell'operatore che applicato all'ingresso  $\bar{I}(s)$  fornisce la tensione  $\bar{V}(s)$  sul condensatore. D'altra parte gli autovalori della matrice di stato  $[A]$  evidenziata nella eq.4.3 (e cioè la soluzione dell'equazione  $|\lambda[1] - [A]| = 0$ ) sono la soluzione della eq.4.11, che coincide ancora con la eq.4.9.

$$4.7 \quad Cp^2v_c = -pv_c / R - pi_L + pi$$

$$4.8 \quad CRLp^2v_c + Lpv_c + Rv_c = RLpi$$

$$4.9 \quad CRLz^2 + Lz + R = 0$$

$$4.10 \quad Z(s) = \frac{sLR}{s^2CLR + sL + R} \quad \bar{V}(s) = \bar{Z}(s)\bar{I}(s)$$

$$4.11 \quad s(s + 1/RC) + 1/LC = 0$$

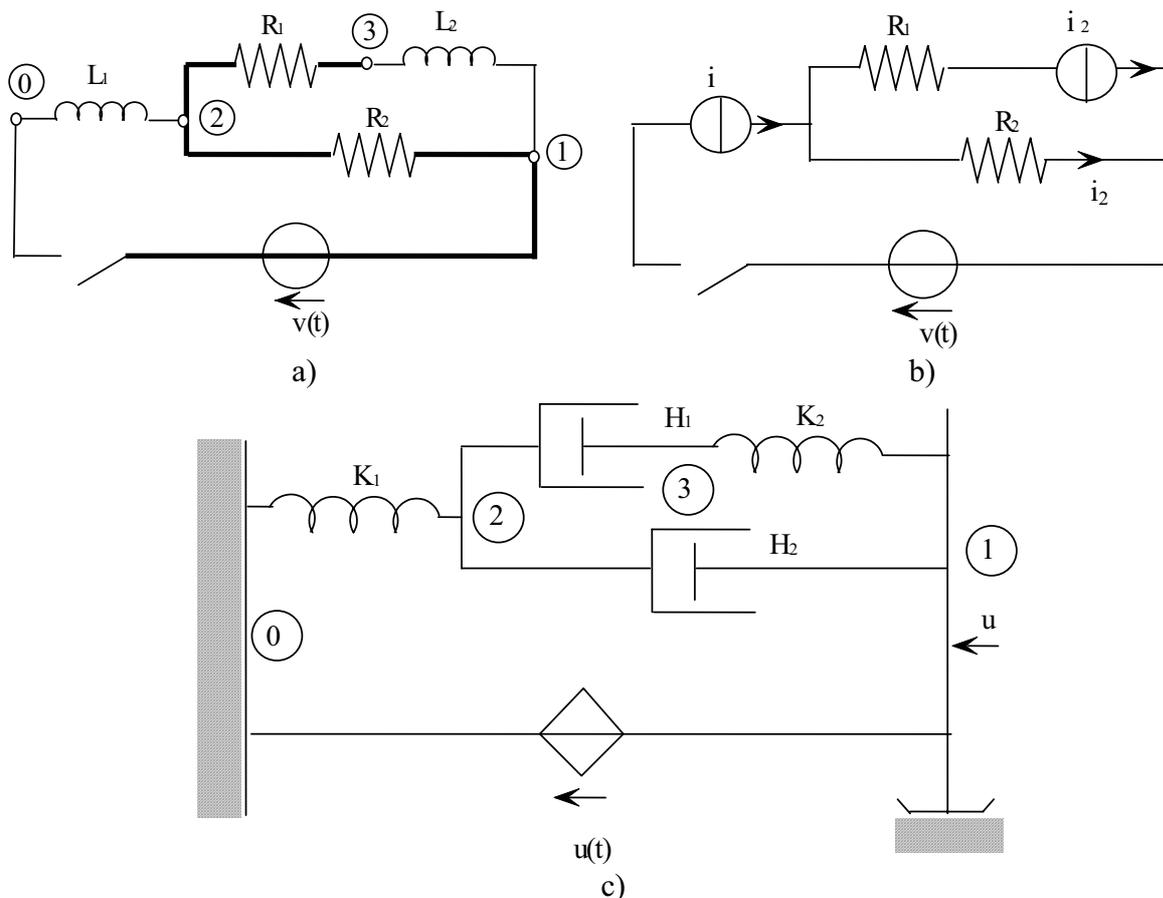


Fig.4.2 a) Esempio di rete elettrica del secondo ordine; b) rete resistiva ausiliaria per il calcolo delle uscite; c) rete meccanica analoga.

Si consideri la rete di Fig.4.2a per la quale si vogliono impostare le equazioni dinamiche che consentono lo studio del transitorio di inserzione del generatore di tensione al tempo  $t = 0$ . La rete presenta l'albero proprio evidenziato nella Fig.4.2a e appoggiando all'albero l'induttore  $L$  si ottiene una maglia che consente di scrivere la prima delle equazioni di stato indicate nelle eq.4.12. Appoggiando all'albero il secondo induttore si ricava poi la seconda equazione di stato indicata nelle eq.4.12. I legami tra l'ingresso, lo stato e le rimanenti variabili di rete si ottengono dalla rete resistiva ausiliaria di Fig.4.2b che consente in particolare di esprimere la corrente  $i_2$  come è indicato nella eq.4.13.

$$4.12 \quad Lpi = v - R_2 i_2$$

$$L_1 p i_1 = -R_1 i_1 + R_2 i_2$$

$$4.13 \quad i_2 = i - i_1$$

Combinando le eq.4.12-13 si ottiene il sistema di equazioni di stato indicato nella eq.4.14 con la relativa matrice di stato  $[A]$ , da integrare con le condizioni iniziali indicate nelle eq.4.15 (limitatamente alle derivate prime). Il circuito meccanico analogo è indicato nella Fig.4.2c, esso ammette come stato le forze  $f_K, f_{K1}$  delle due molle e le due equazioni di stato sono le eq.4.16 mentre il legame stato-uscite è espresso dalla eq.4.17.

$$4.14 \quad P \begin{bmatrix} i \\ i_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -R_2/L & R_2/L \\ R_2/L_1 & -(R_1 + R_2)/L_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i \\ i_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1/L \\ 0 \end{bmatrix} v \quad [A] = \begin{bmatrix} -R_2/L & R_2/L \\ R_2/L_1 & -(R_1 + R_2)/L_1 \end{bmatrix}$$

$$4.15 \quad i(0^+) = 0; \quad i_1(0^+) = 0; \quad pi(0^+) = v(0^+)/L; \quad pi_1(0^+) = 0$$

$$4.16 \quad pf_K / K = u - u_{H2}$$

$$pf_{K1} / K_1 = -u_{H1} + u_{H2}$$

$$4.17 \quad f_{H2} = f_K - f_{K1} \quad u_{H1} = f_{K1} / H_1 \quad u_{H2} = f_{H2} / H_2$$

Se ora si deriva la prima delle due equazioni di stato elettriche e si sostituisce la seconda si ottiene la eq.4.18 e da questa, tramite la prima delle equazioni di stato, si ricava l'equazione conclusiva eq.4.19, cui corrisponde l'equazione algebrica caratteristica 4.20.

Si noti che nel dominio della pulsazione complessa l'impedenza di rete ai morsetti del generatore di tensione ha l'espressione indicata nella eq.4.21, che la corrente  $\bar{I}(s)$  si ottiene da  $\bar{V}(s)$  come è indicato nella eq.4.22 e che il denominatore della ammettenza (e cioè dell'operatore che applicato all'ingresso fornisce la variabile di stato oggetto del calcolo) coincide con l'equazione algebrica caratteristica. Si noti, infine, che gli autovalori della matrice di stato  $[A]$  sono dati dalla eq.4.23 che ha la stessa struttura della equazione algebrica caratteristica.

$$4.18 \quad Lp^2 i = pv - R_2 pi + R_2 pi_1 = -R_2 pi + R_2 [-(R_1 + R_2)i_1 / L_1 + R_2 i / L_1] + pv$$

$$4.19 \quad LL_1 p^2 i + [(R_1 + R_2)L + R_2 L_1] pi + R_1 R_2 i = (R_1 + R_2)v + L_1 pv$$

$$4.20 \quad LL_1 z^2 + [(R_1 + R_2)L + R_2 L_1]z + R_1 R_2 = 0$$

$$4.21 \quad Z(s) = sL + \frac{R_2(R_1 + sL_1)}{sL_1 + (R_1 + R_2)} = \frac{s^2 LL_1 + s[L(R_1 + R_2) + L_1 R_2] + R_1 R_2}{sL_1 + (R_1 + R_2)}$$

$$4.22 \quad \bar{I}(s) = \bar{V}(s)\bar{Y}(s) = \bar{V}(s) \frac{sL_1 + (R_1 + R_2)}{s^2LL_1 + s[L(R_1 + R_2) + L_1R_2] + R_1R_2}$$

$$4.23 \quad (s + R_2 / L)[s + (R_1 + R_2) / L_1] - R_2^2 / LL_1 = 0$$

Si consideri la rete elettrica del secondo ordine di Fig.4.3a per la quale si vogliono impostare le equazioni dinamiche per lo studio del transitorio di inserzione del generatore di tensione al tempo  $t=0$ . L'albero proprio della rete è evidenziato nella stessa figura ed appoggiando all'albero l'induttore si ottiene una maglia che consente di scrivere la prima delle equazioni di stato eq. 4.24. Tagliando poi il condensatore con una superficie che si richiuda sulle corde si ottiene il nodo associato al condensatore che consente di scrivere la seconda delle due equazioni di stato eq.4.24.

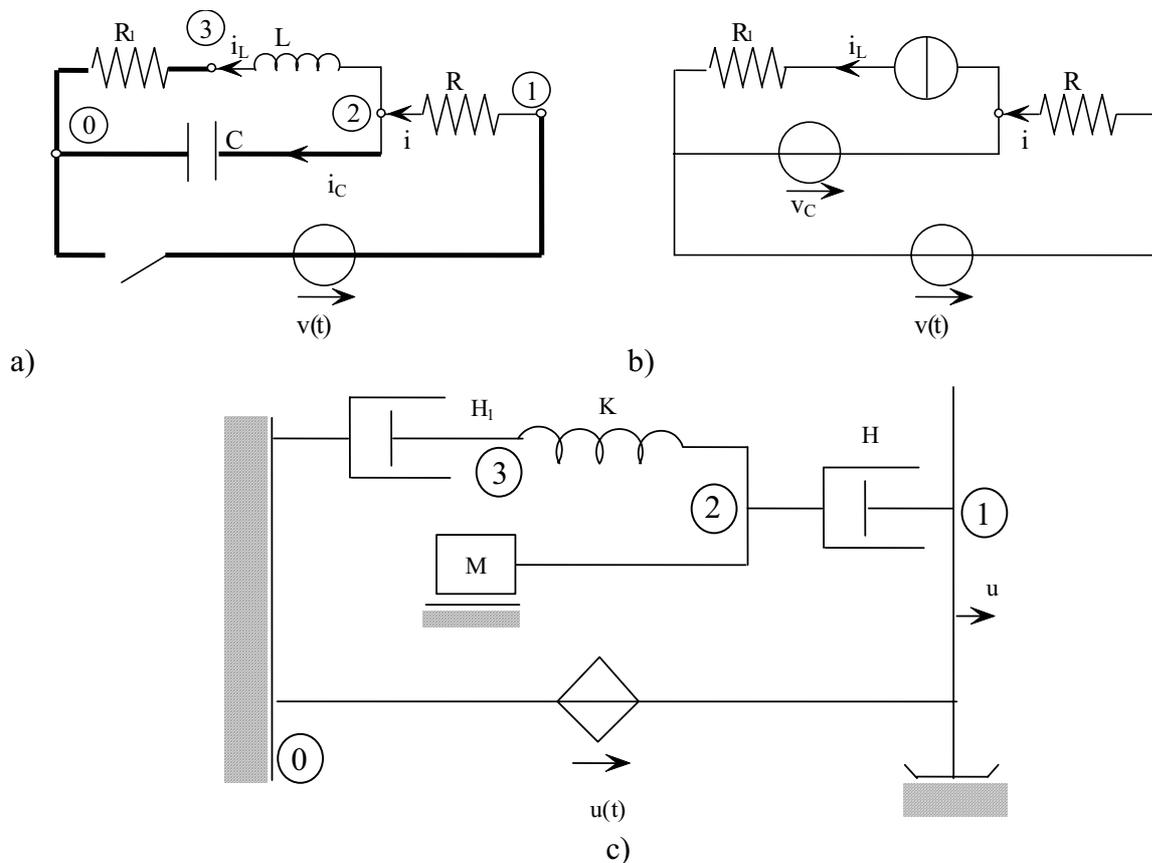


Fig.4.3 a) Rete elettrica oggetto di studio; b) rete resistiva ausiliaria per il calcolo delle uscite; c) rete meccanica analoga.

I legami algebrici tra l'ingresso, lo stato e le uscite sono definiti dalla rete resistiva ausiliaria di cui alla Fig.4.3b, da questa si ricava in particolare la corrente  $i$  nel resistore  $R$  come è indicato nella eq.4.25. E' possibile a questo punto scrivere le equazioni di stato nella forma indicata nella eq.4.26 (in cui è indicata la matrice di stato  $[A]$ ) da integrare con le condizioni iniziali precisate nella eq.4.27 (limitatamente alle derivate prime).

$$L_1 p i_L = v_C - R_1 i_L$$

4.24

$$Cpv_c = i - i_L$$

4.25 
$$i = (v - v_c) / R$$

4.26 
$$\begin{bmatrix} i_L \\ v_c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -R_1/L & 1/L \\ -1/C & -1/RC \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1/RC \end{bmatrix} v \quad [A] = \begin{bmatrix} -R_1/L & 1/L \\ -1/C & -1/RC \end{bmatrix}$$

4.27 
$$i_L(0^+) = 0; \quad v_c(0^+) = 0; \quad pi_L(0^+) = 0; \quad pv_c(0^+) = v(0^+) / RC$$

Nella Fig.4.3c è presentato il circuito meccanico analogo le cui variabili di stato sono la forza  $f_K$  della molla e la velocità  $u_M$  della massa. Le equazioni di stato di questo circuito sono quelle indicate nelle eq.4.27, mentre il legame che interessa tra ingresso, stato ed uscite è indicato nella eq.4.28.

4.28 
$$pf_K / K = u_K = u_M - u_{H1} = u_M - f_K / H_1$$

4.28

$$Mpu_M = f_M = f_H - f_{H1} = Hu_H - f_K$$

4.29 
$$u = u_M + u_H$$

Se ora si deriva la prima delle equazioni di stato elettriche e si sostituisce la seconda si ottiene la eq.4.30 e da questa, tramite la prima delle equazioni di stato, si ricava l'equazione conclusiva eq.4.31, cui corrisponde l'equazione algebrica caratteristica eq.4.32.

Si noti che l'impedenza di rete ai morsetti del generatore di tensione ha l'espressione indicata nella eq.4.33 e che la corrente  $\bar{I}(s)$  ai morsetti del generatore si ricava come è indicato nella eq.4.33; da questa si ricava infine la corrente  $\bar{I}_1(s)$  con la regola dell'arco doppio come è precisato ancora nella eq.4.34. Si osserva che il denominatore della funzione di rete che applicata all'ingresso  $\bar{V}(s)$  fornisce la variabile di stato  $\bar{I}_1(s)$  ha la stessa struttura dell'equazione algebrica caratteristica. Si osserva infine che gli autovalori della matrice di stato  $[A]$  sono definiti, si veda l'eq.4.35, da una equazione che coincide con l'equazione algebrica caratteristica.

4.30 
$$Lp^2 i_L = pv_c - R_1 pi_L = (-v_c / RC - i_L / C + v / RC) - R_1 pi_L$$

4.31 
$$LRCp^2 i_L + (L + RR_1 C) pi_L + (R + R_1) i_L = v$$

4.32 
$$LRCz^2 + (L + RR_1 C)z + (R + R_1) = 0$$

4.33 
$$Z(s) = R + \frac{sL + R_1}{s^2 LC + sR_1 C + 1} = \frac{s^2 RLC + s(L + CRR_1) + (R + R_1)}{s^2 LC + sCR_1 + 1}$$

4.34 
$$\bar{I}(s) = \bar{V}(s)\bar{Y}(s); \quad \bar{I}_L(s) = \bar{I}(s) \frac{1/sC}{1/sC + R_1 + sL} = \frac{\bar{V}(s)}{s^2 RLC + s(L + CRR_1) + (R + R_1)}$$

$$4.35 \quad (s + R_1 / L)(s + 1 / RC) + 1 / LC = 0$$

# SISTEMI TRIFASE A TRE E QUATTRO FILI IN REGIME ALTERNATO SINUSOIDALE.

## 1 Generalità.

La generazione, la trasmissione, la distribuzione e la utilizzazione dell'energia elettrica avvengono in larga misura sotto forma trifase per motivi tecnici ed economici. In effetti le macchine elettriche e le linee elettriche trifase sono più leggere e meno ingombranti di quelle monofase e di quelle a corrente continua, inoltre le linee trifase danno luogo a minori cadute di tensione di quelle monofase.

Con riferimento alla asserzione fatta a proposito di ingombri e masse la Fig.1.1a fornisce una spiegazione intuitiva.

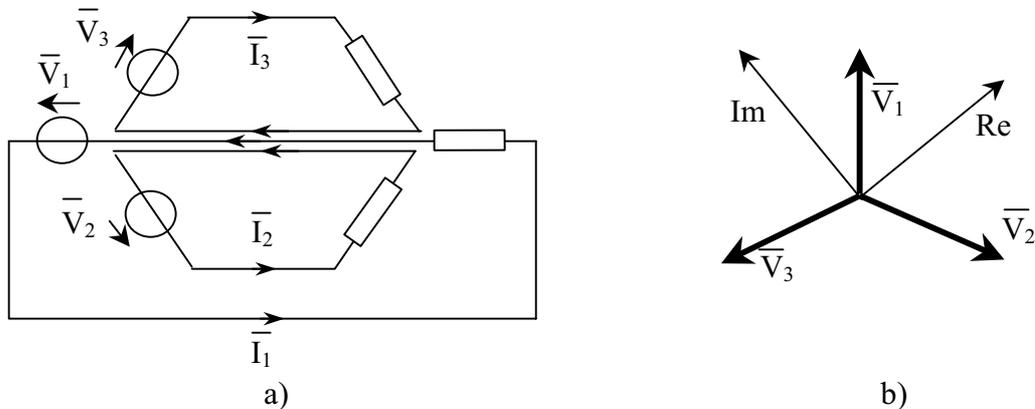


Fig.1.1 a) Sistema trifase di trasmissione costituito da tre sistemi monofase. b) Fasori rappresentativi delle tensioni dei tre generatori monofase

Si consideri infatti il caso di tre generatori di tensione alternata sinusoidale con tensioni rispondenti alla eq.1.1 (quindi con  $v_1(t) + v_2(t) + v_3(t) = 0$ ) e rappresentabili con la terna di fasori  $\bar{V}_1, \bar{V}_2, \bar{V}_3$  (con  $\bar{V}_1 + \bar{V}_2 + \bar{V}_3 = 0$ ) di Fig.1.1b (si noti che, convenzionalmente, il secondo fasore di una terna trifase rappresenta una funzione sinusoidale in ritardo rispetto a quella rappresentata dal primo fasore).

Se a ciascuno di questi generatori colleghiamo un carico rappresentabile con la stessa impedenza  $\bar{Z} = Ze^{j\phi}$  le correnti che circolano nelle tre linee monofase sono alternate sinusoidali ed i fasori rappresentativi rispondono alla eq.1.2.

	$\bar{I}_1 = \bar{V}_1 / \bar{Z}$
1.1 $v_2(t) = V_M \cos(\omega t - 2\pi/3)$	1.2 $\bar{I}_2 = \bar{V}_2 / \bar{Z}$
$v_3(t) = V_M \cos(\omega t - 4\pi/3)$	$\bar{I}_3 = \bar{V}_3 / \bar{Z}$

Il sistema delle correnti è caratterizzato dal fatto che  $i_1 + i_2 + i_3 = 0$  dato che la somma dei loro fasori rappresentativi è nulla. Ne consegue che se i tre conduttori di ritorno delle tre

linee monofasi sono messi in comune in questo conduttore circola corrente nulla per modo che il conduttore può essere eliminato. Siamo allora in grado di trasmettere la potenza delle tre linee monofase con tre conduttori in luogo di sei.

## 2 Misure sui sistemi trifase a tre e quattro fili in regime alternato sinusoidale.

Consideriamo un impianto elettrico caratterizzato da una stazione di generazione,  $G$  nella Fig.2.1, trifase, da una linea di trasmissione  $L$  e da un impianto utilizzatore  $U$ .

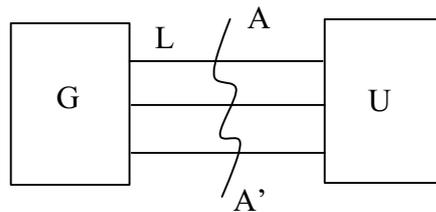


Fig.2.1 Impianto trifase e sezione  $AA'$  di misura.

In una generica sezione  $AA'$  della linea di trasmissione siamo in grado di misurare il sistema di tensioni indicato nella Fig.2.2.

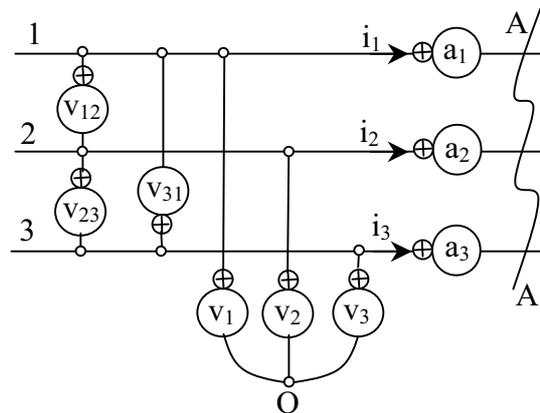


Fig.2.2 Misure di tensione e di corrente nella sezione  $AA'$ .

Distinguiamo in proposito le tre “tensioni concatenate”  $v_{12}(t), v_{23}(t), v_{31}(t)$  misurate tra coppie ordinate di conduttori e le “tensioni di fase”  $v_{10}(t), v_{20}(t), v_{30}(t)$  misurate tra ciascun conduttore ed un punto fisico  $O$  esterno alla linea.

Tra queste tensioni esistono i legami dovuti alla LKT, espressi mediante i fasori rappresentativi dalla eq.2.1a-b. In base alla eq.2.1b i fasori  $\bar{V}_{12}, \bar{V}_{23}, \bar{V}_{31}$  fanno parte nel piano complesso di un “triangolo delle tensioni concatenate”, si veda la Fig.2.3 ed in base alla eq.2.1a ogni punto  $O$  del piano complesso individua un possibile sistema di tensioni di fase.

$$\begin{aligned}
 & \bar{V}_{12} = \bar{V}_{10} - \bar{V}_{20} \\
 2.1 \quad a) \quad & \bar{V}_{23} = \bar{V}_{20} - \bar{V}_{30} \\
 & \bar{V}_{31} = \bar{V}_{30} - \bar{V}_{10} \\
 & b) \quad \bar{V}_{12} + \bar{V}_{23} + \bar{V}_{31} = 0
 \end{aligned}$$

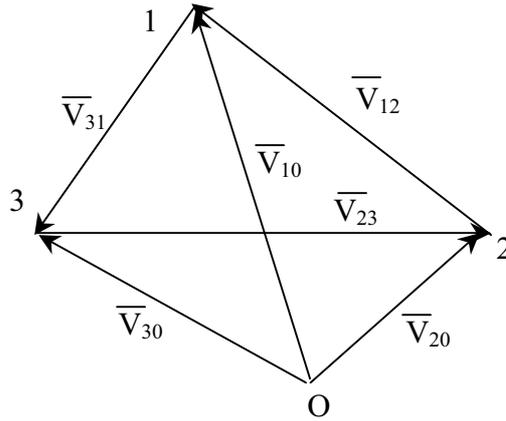


Fig. 2.3 Triangolo delle tensioni concatenate e tensioni di fase riferite al centro  $O$ .

Tra i diversi centri  $O$  del piano complesso conviene privilegiare nelle analisi successive il baricentro  $G$  del triangolo delle tensioni concatenate (punto di incontro delle mediane dei lati), si veda la Fig.2.4a, detto “centro teorico” in quanto le tensioni di fase riferite a questo centro godono della proprietà (utile nei calcoli) che la loro somma è nulla.

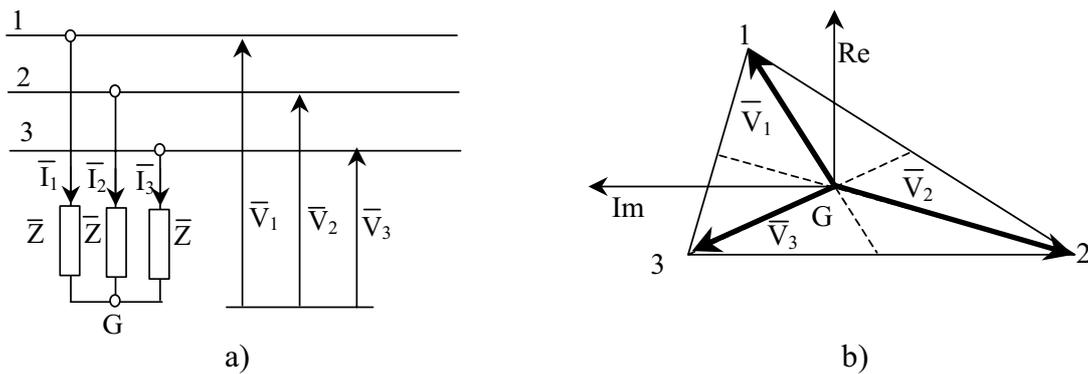


Fig.2.4 Determinazione del centro teorico  $G$ .

Dal punto di vista delle misure il centro  $G$  è facilmente identificabile: in effetti supponiamo di derivare nella sezione di misura tre impedenze uguali connesse a stella e sia  $G$  il centro della stella, si veda la Fig.2.4. Le tre correnti drenate da tali impedenze ( $\bar{V}_{1G} / \bar{Z}, \bar{V}_{2G} / \bar{Z}, \bar{V}_{3G} / \bar{Z}$ ) hanno somma nulla ( $LKC$  per il nodo  $G$ ) per modo che le tensioni misurate tra i fili ed il centro stella rispondono alla proprietà delle tensioni di fase spiccate dal baricentro del triangolo delle tensioni concatenate. Nel seguito queste tensioni di fase verranno designate con un solo indice e cioè come  $\bar{V}_1, \bar{V}_2, \bar{V}_3$ .

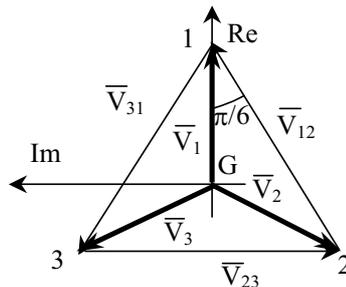


Fig.2.5 Tensioni concatenate e tensioni di fase per il caso di sistema simmetrico di tensioni.

Se ora il triangolo delle tensioni concatenate è equilatero si dice che il sistema delle tensioni è “simmetrico” (in caso contrario si dirà che il sistema delle tensioni è “dissimmetrico”) : in questo caso, si veda la Fig.2.5, le terne delle tensioni di fase e delle tensioni concatenate sono esprimibili come indicato nella eq.2.3.

$$2.3 \quad \bar{V}_1, \bar{V}_2, \bar{V}_3 = V, V e^{j2\pi/3}, V e^{j4\pi/3} \quad \bar{V}_{12}, \bar{V}_{23}, \bar{V}_{31} = V_c e^{j\pi/6}, V_c e^{j5\pi/6}, V_c e^{j9\pi/6}$$

$$V_c = 2V \cos(\pi/6) = \sqrt{3}V$$

Le correnti misurate nella sezione  $AA'$  mediante l’inserzione degli amperometri indicata in Fig. 2.2 si chiamano “correnti di linea”, esse godono della proprietà (LKT al nodo utilizzatore) che la loro somma è nulla, si veda la eq.2.2. se ne conclude che i fasori corrente di linea costituiscono i lati di un triangolo, si veda la Fig.2.6.

$$2.2 \quad i_1(t) + i_2(t) + i_3(t) = 0 \quad \bar{I}_1 + \bar{I}_2 + \bar{I}_3 = 0$$

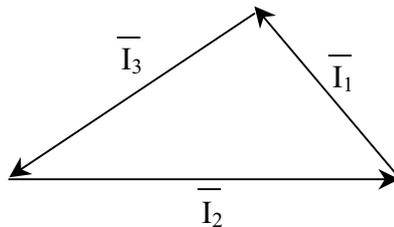


Fig.2.6 triangolo delle correnti di linea.

Se il triangolo è equilatero i fasori corrente hanno lo stesso modulo e sono tra loro sfasati di  $2\pi/3$  in questo caso il sistema delle correnti si dice equilibrato (in caso contrario si parla di sistema squilibrato). Normalmente i tre fasori corrente vengono rappresentati spiccandoli dal centro teorico  $G$  per modo che il complesso delle misure di tensione e di corrente assume, nel caso generale di sistemi dissimmetrici e squilibrati, l’aspetto indicato in Fig.2.7.

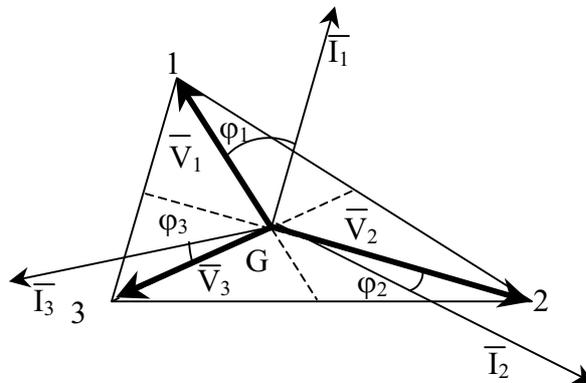


Fig.2.7 Sistema trifase dissimmetrico e squilibrato.

### 3 Energetica delle linee trifase a tre e quattro fili.

Dal punto di vista energetico è utile leggere la eq.2.2 nel senso che la corrente in un filo qualsiasi si può interpretare come il ritorno delle correnti degli altri due fili (ad esempio  $i_3 = -(i_1 + i_2)$ ). Tutto avviene quindi come se vi fossero due linee monofase con un filo di ritorno in comune. In base a questa interpretazione la potenza istantanea trasmessa dalla linea trifase si può valutare, tenuto conto anche della eq.2.2, in uno qualsiasi dei quattro modi evidenziati nelle eq.3.1 (si noti che l'ultimo tipo di scrittura evidenzia il fatto che la linea trifase è equivalente a tre linee monofase interessate dalle correnti di linea e dalle tensioni di fase rispetto ad un qualsiasi centro  $O$ ). Normalmente si preferisce limitare la misura all'uso di due wattmetri a valore istantaneo come è indicato nella Fig.3.1 (inserzione "Aron" dei wattmetri).

$$p = v_{13}i_1 + v_{23}i_2 = (v_{10} - v_{30})i_1 + (v_{20} - v_{30})i_2 = v_{10}i_1 + v_{20}i_2 + v_{30}i_3 \quad (\text{ritorno 3})$$

$$3.1 \quad p = v_{12}i_1 + v_{32}i_3 = (v_{10} - v_{20})i_1 + (v_{30} - v_{20})i_3 = v_{10}i_1 + v_{20}i_2 + v_{30}i_3 \quad (\text{ritorno 2})$$

$$p = v_{21}i_2 + v_{31}i_3 = (v_{20} - v_{10})i_2 + (v_{30} - v_{10})i_3 = v_{10}i_1 + v_{20}i_2 + v_{30}i_3 \quad (\text{ritorno 1})$$

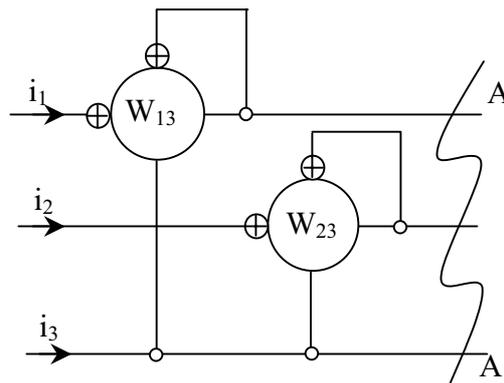


Fig.3.1 Inserzione Aron dei wattmetri.

Una volta individuata la potenza istantanea è possibile misurare (con wattmetri a valore medio) la potenza attiva  $P$  del sistema trifase e cioè il valore medio della potenza istantanea in uno dei quattro modi indicati nella eq.3.2. Si può valutare, inoltre, la potenza reattiva associata a ciascuna delle linee monofase sopra indicate e da questa dedurre la potenza reattiva trifase  $Q$  in uno dei modi indicati nella eq.3.3.

$$3.2 \quad P = P_{13} + P_{23} = P_{12} + P_{32} = P_{21} + P_{31} = P_{10} + P_{20} + P_{30}$$

$$Q = Q_{13} + Q_{23} = Q_{12} + Q_{32} = Q_{21} + Q_{31} = Q_{10} + Q_{20} + Q_{30}$$

La potenza trifase complessa  $\bar{A}$  ed il fattore di potenza del sistema trifase  $\cos \Phi$  sono definiti nella eq.3.4: la potenza complessa è rappresentabile, come nel caso dei sistemi monofase, con il triangolo delle potenze.

$$3.4 \quad \bar{A} = P + jQ = Ae^{j\Phi} \quad \cos \Phi = P / A$$

Si noti che la distribuzione domestica dell'energia elettrica viene realizzata con sistemi a quattro fili del tipo indicato in Fig.3.2.

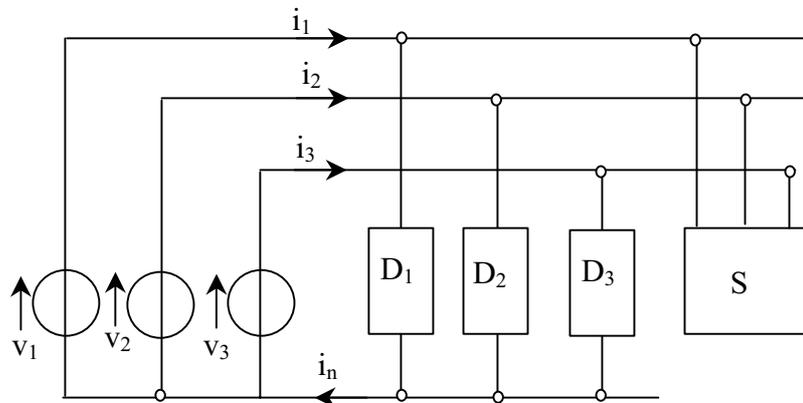


Fig.3.2 Tipico impianto di distribuzione domestica.

In questo caso alle utenze domestiche  $D$  (equamente ripartite tra i tre fili di linea in modo da emulare un carico equilibrato) vengono fornite le tensioni di fase (di valore efficace convenientemente ridotto per ridurre i rischi di folgorazione, in Europa 220V a 50Hz) mentre alle utenze condominiali  $S$  (servizio di ascensore, di riscaldamento etc.), che richiedono un maggior impegno di potenza ed hanno minori vincoli di sicurezza essendo frequentati da personale esperto dei pericoli connessi all'uso della corrente elettrica, si rende disponibile la tensione concatenata (in Europa 380V a 50Hz). In questo modo si cerca di salvaguardare la vita e di ridurre le spese di impianto (tutti i cavi e gli avvolgimenti del macchinario devono esser commisurati al valore efficace della corrente, che, a pari potenza apparente, è tanto minore quanto più alta è la tensione, si veda la eq.4.1).

Le misure di potenza attiva e reattiva ed il calcolo della potenza complessa avvengono per le linee trifase a quattro fili equiparandole a tre linee monofase con il ritorno in comune sul "quarto filo" detto anche neutro  $n$ , si veda la eq.3.5.

$$3.5 \quad P = P_{1n} + P_{2n} + P_{3n} \quad Q = Q_{1n} + Q_{2n} + Q_{3n} \quad \bar{A} = P + jQ$$

#### 4 Sistemi trifase simmetrici ed equilibrati: circuito monofase equivalente.

Consideriamo la configurazione particolarmente significativa di Fig.4.1 in cui un generatore  $G$  trifase alimenta tramite una linea  $L$  di trasmissione dell'energia elettrica un complesso di carichi  $C$  tra loro in parallelo. Il funzionamento simmetrico ed equilibrato, che è quello di maggior rilevanza applicativa per tutti i calcoli energetici di base dei sistemi elettrici trifase, si presenta quando il sistema di tensioni fornito dal generatore è simmetrico, la linea è costituita da tre conduttori simmetricamente disposti nello spazio e tutti i carichi sono equilibrati (costituiti da tre impedenze uguali connesse a stella oppure a triangolo).

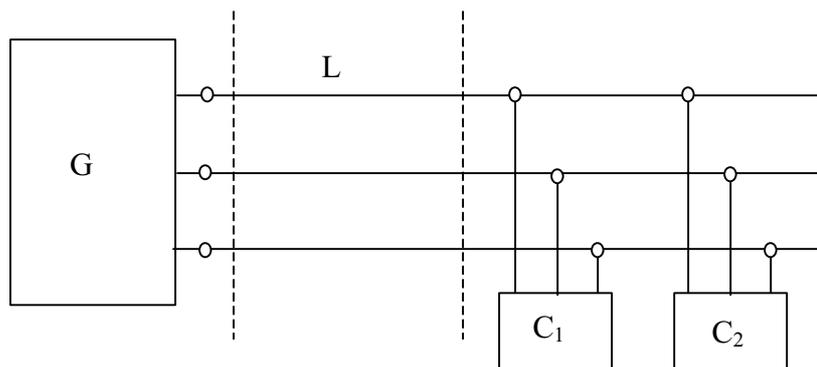


Fig.4.1 Tipico impianto di distribuzione trifase.

Se rappresentiamo il generatore mediante tre generatori di tensione ideali connessi a stella (con tensioni pari a quella della terna delle tensioni di fase riferite al centro teorico), la linea (fase per fase) mediante una resistenza  $R$  ed una induttanza  $L$  in serie tra di loro (l'induttanza è quella di ciascuna dei tre circuiti monofase di cui alla Fig.1.1) ed i carichi sempre mediante circuiti equivalenti a stella (nel caso di connessione a triangolo si opererà trasformando il triangolo nella stella equivalente) allora l'impianto di Fig.4.1 si potrà schematizzare come è indicato in Fig.4.2.

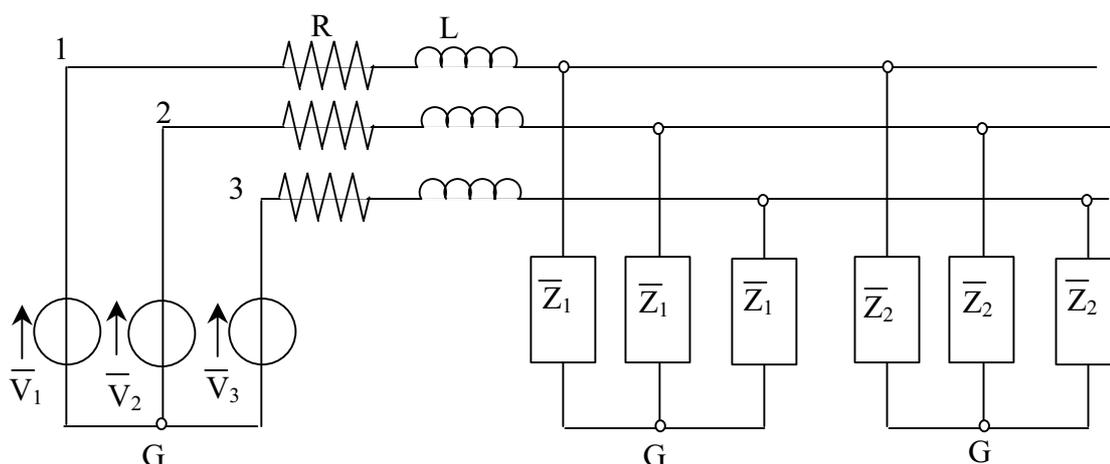


Fig.4.2 Circuito equivalente di un impianto con generatori e linea simmetrici e carichi equilibrati.

Nel circuito di Fig.4.2, in ragione della simmetria del generatore e della linea e dell'equilibrio dei carichi, tutto avviene come se vi fossero tre reti monofase, tra loro svincolate, con un filo  $G$  di ritorno in comune (percorso da corrente nulla). Lo studio della rete si può quindi limitare ad una qualsiasi delle tre reti monofase (si veda la Fig.4.3) e la soluzione delle reti monofase equivalente si potrà ottenere avvalendosi del teorema fondamentale delle reti elettriche (e delle formulazioni derivate) oppure del procedimento di Boucherot.

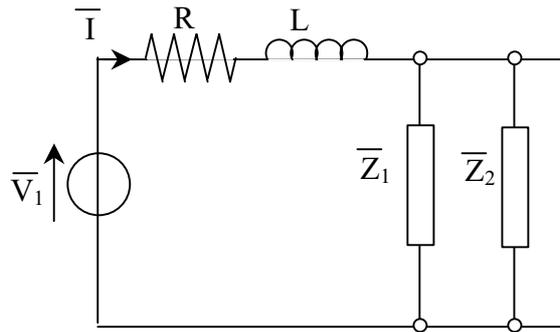


Fig.4.3 Rete monofase equivalente a quella trifase simmetrica ed equilibrata.

Una volta risolta la rete monofase equivalente i risultati conseguiti andranno opportunamente modificati per adattarli alla rete trifase originale. In proposito le correnti di linea trifase coincidono con quelle del circuito monofase, le tensioni di fase del trifase coincidono con quelle del circuito monofase equivalente mentre per le tensioni concatenate e le potenze trifase valgono le eq.4.1 (dove l'indice  $t$  si riferisce al trifase, l'indice  $m$  al monofase e  $c$  alla tensione concatenata).

$$V_t = V_m = V \quad I_t = I_m = I \quad V_c = \sqrt{3}V_m = \sqrt{3}V$$

4.1

$$P_t = 3P_m = 3V I \cos \varphi \quad Q_t = 3Q_m = \pm 3V I \sin \varphi \quad \bar{A}_t = P_t + jQ_t = 3VIe^{\pm j\varphi}$$

# LEGGE DELL'INDUZIONE ELETTROMAGNETICA

## 1 La legge dell'induzione elettromagnetica.

Si consideri un conduttore di resistenza  $R$  disposto nel piano come è indicato a tratto continuo in Fig.1 ed alimentato, tramite un interruttore, da un generatore di tensione costante. Chiuso l'interruttore 1, l'esperienza mostra quanto segue.

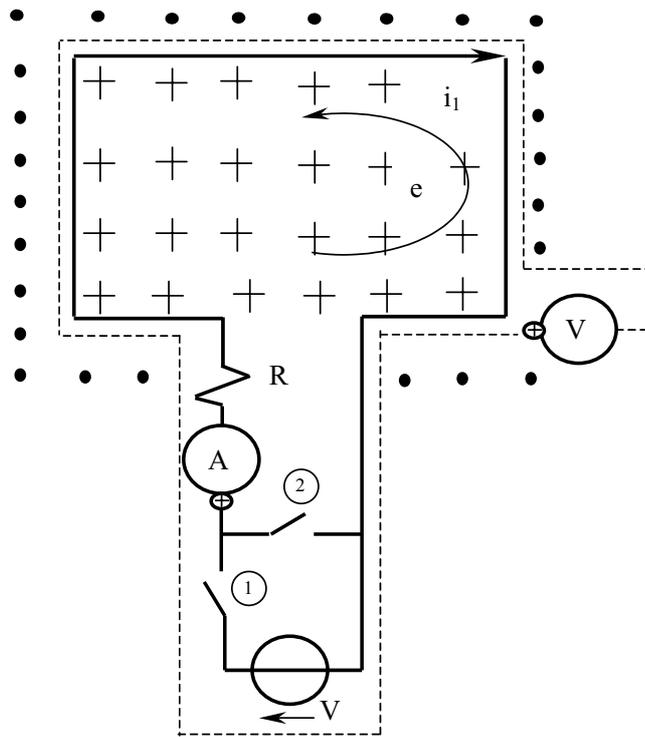


Fig.1.1. Il circuito oggetto di studio

- Nel circuito circola una corrente  $i_1(t)$  (misurata dall'amperometro A) variabile nel tempo che genera un campo magnetico le cui linee di forza, tangenti al vettore  $\vec{B}$ , avvolgono la corrente essendo orientate con la regola del cavatappi. Il flusso del vettore  $\vec{B}$  quindi entra dall'alto verso il basso (simbolo +) nella superficie delimitata dal conduttore che costituisce il circuito di Fig.1.1, mentre esce dalla superficie esterna al conduttore (simbolo •).
- La corrente  $i_1(t)$  perviene al valore di regime  $I = V_g / R$  (dove  $R$  è la resistenza del circuito) seguendo un transitorio del tipo indicato in Fig.1.3b (una curva esponenziale) e se ne conclude (in base alla legge alle maglie) che fino a che la corrente cambia nel tempo, essendo  $V_g - Ri_1(t) > 0$ , nel circuito si manifesta una tensione  $e(t)$ , che si oppone al passaggio della corrente ed il cui andamento nel tempo è indicato in Fig.1.3a.
- Se ora si dispone un secondo conduttore, sagomato come il primo ed a questo immediatamente adiacente (tratteggiato in Fig.1.1), ripetendo la precedente esperienza si trova che il voltmetro  $V$  in Fig.1.1 segnala in questo conduttore la presenza di una tensione variabile pari ad  $e(t)$ ; se poi il secondo conduttore viene sagomato nel senso di realizzare  $N$  spire tutte strettamente ridossate al primo conduttore allora il voltmetro segnala una tensione pari a  $Ne(t)$ .

- Se il circuito del secondo conduttore viene ristretto (si veda la Fig.1.2) fino a ridurlo ad una striscia sottile all'interno dell'area delimitata dal primo conduttore oppure se il secondo conduttore viene allargato fino ad assumere dimensioni  $L \gg l$  (si veda ancora la Fig.1.2), allora si trova che la tensione nel secondo circuito diviene evanescente ( $e_1 \approx 0$ ;  $e_2 \approx 0$ ).

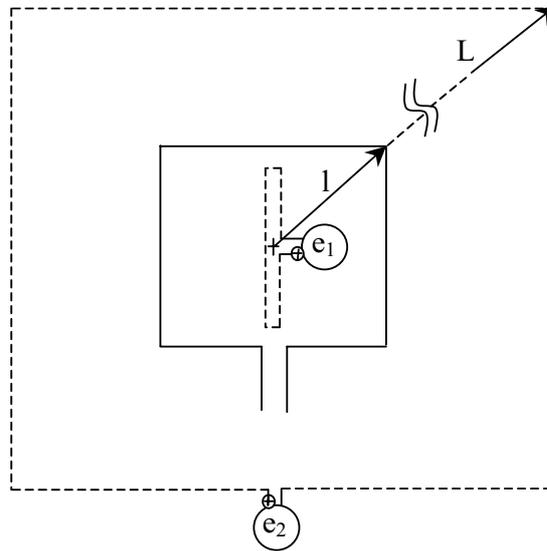


Fig1.2. Misure ai morsetti

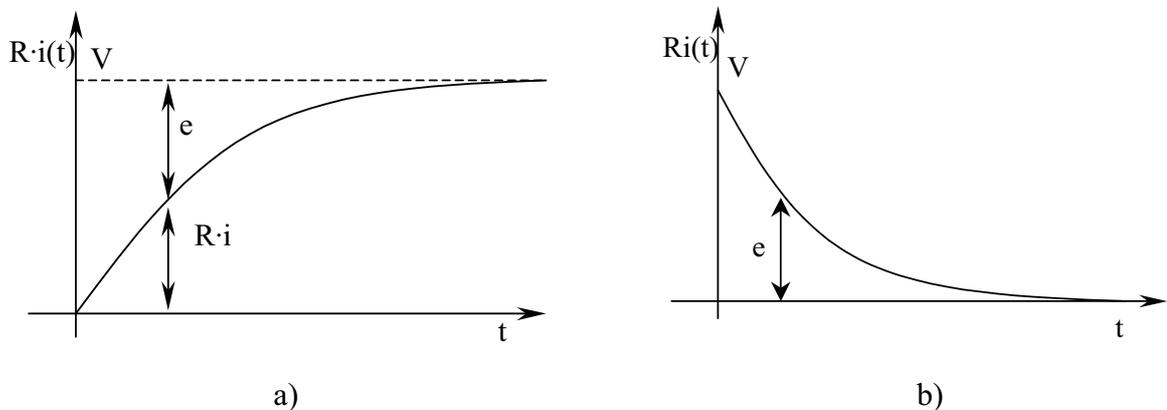


Fig. 1.3. a) Transitorio di inserzione b) di disinserzione

Una volta pervenuti alla corrente di regime se si chiude l'interruttore 2 e si apre 1 l'esperienza mostra quanto segue.

- La corrente nel primo conduttore si annulla con legge esponenziale (si veda la Fig1.3b) e cioè (in base alla legge alle maglie) nel circuito è presente una tensione  $e(t) = Ri(t)$  (che agisce in verso opposto a quella precedente) che si annulla quando la corrente è pervenuta al valore nullo di regime (la tensione, a differenza del caso precedente, agisce nel senso di mantenere la corrente nel circuito).
- Nel secondo conduttore, quello tratteggiato in Fig.1.1, il voltmetro segnala una tensione, negativa, pari ad  $e(t)$ .

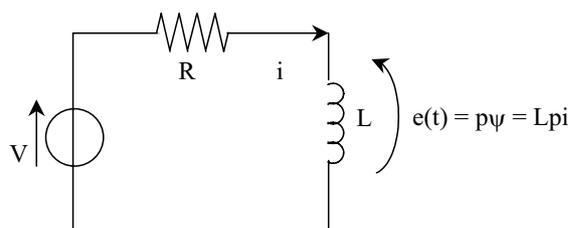


Fig. 1.4 Circuito equivalente agli effetti dei transistori elettrici

Le esperienze ora descritte portano ad attribuire l'insorgere di una tensione variabile in un circuito al fatto che esso concatena un flusso magnetico variabile nel tempo, questa è la grandezza in comune tra i due circuiti di Fig.1.1, e tale grandezza risulta ampliata proporzionalmente al numero di spire del secondo circuito e ridotta per effetto delle variazioni dell'area del secondo circuito. Un altro modo per esprimere i risultati descritti consiste nel dire (usando il linguaggio di M.Faraday, che mise a punto l'esperimento) che l'elettricità genera magnetismo ed il magnetismo genera elettricità.

La formulazione matematica della legge dell'induzione elettromagnetica che lega il flusso concatenato da un circuito alla tensione che in esso viene indotta (quando si adoperino le convenzioni di misura indicate nella Fig.1) è dovuta a J.C.Maxwell. La legge in questione, detta anche legge di Faraday-Maxwell, è quella presentata nella eq.1, dove  $\psi(t)$  è il flusso totale concatenato dal circuito, misurato in Weber [Wb = V·s]

$$1.1 \quad e(t) = d\psi / dt$$

Conviene a questo punto riflettere anche sul nome da assegnare alla grandezza descritta dalla legge di eq.1.1. In proposito si osserva che, collegato il circuito tratteggiato di Fig.1 ad un resistore, in questo, per effetto della circolazione della corrente, si dissipa energia e questa, dato che nel secondo circuito non vi è alcuna fonte energetica, non può che esser trasferita dal primo circuito tramite il campo magnetico variabile. Se conveniamo di chiamare "forza elettromotrice" (abbreviato nel seguito con f.e.m.) ogni grandezza, omogenea con una tensione, che moltiplicata per la corrente presente in un circuito esprime la potenza scambiata con sistemi fisici interagenti non elettrici (con questa definizione la tensione che la pila Daniell presenta quando non eroga corrente è una f.e.m.) allora la grandezza espressa dalla legge di Faraday-Maxwell potrà ragionevolmente chiamarsi "forza elettromotrice indotta" (in luogo di "tensione indotta", che è un'altra denominazione compatibile).

Con riferimento alle Fig.1.1-2 si osserva che il campo magnetico è generato dalla corrente  $i_1$  presente nella spira (circuito 1) alimentata dalla pila e che, in base alla esperienza di Ampère, l'induzione  $\vec{B}$  in ogni punto del campo è proporzionale alla corrente  $i_1$ . Ne consegue che il flusso  $\psi_{11}$  (dell'induzione magnetica  $\vec{B}$ ) generato da  $i_1$  e concatenato con il circuito 1 è proporzionale alla corrente. Si chiama autoinduttanza del circuito 1 il rapporto  $L_{11} = \psi_{11} / i_1$ . Il parametro autoinduttanza consente di descrivere i fenomeni relativi al circuito 1 con il circuito equivalente di Fig.1.4.

Anche il circuito 2 (quello tratteggiato nelle due figure) concatena un flusso  $\psi_{21}$  generato dalla corrente  $i_1$ , proporzionale a tale corrente e funzione della disposizione spaziale di tale circuito. Si chiama mutua induttanza  $L_{21}$  (il primo indice è quello del circuito che concatena il flusso, il secondo indice è quello del circuito in cui circola la corrente che genera il campo) il rapporto  $L_{21} = \psi_{21} / i_1$ . Avvalendosi di tali parametri la legge dell'induzione

elettromagnetica per i circuiti 1–2 si scrive come è precisato nella eq.1.2 quando tutte le grandezze in gioco siano misurate come è indicato nella Fig.1.1.

$$1.2 \quad e_{11} = L_{11} p i_1 \quad e_{21} = L_{21} p i_1$$

## 2 La conversione elettromeccanica dell'energia.

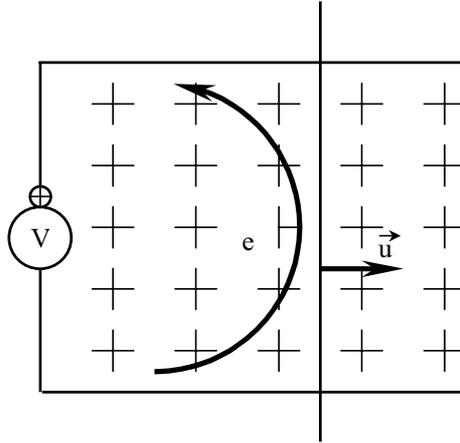


Fig. 2.1. Circuito elementare per la conversione elettromeccanica dell'energia

Si consideri il circuito di Fig.2.1, costituito da due binari metallici fissi sui quali può scorrere, idealmente senza attrito, un conduttore mobile, non deformabile, azionato da un motore in grado di imprimergli la velocità  $\vec{u}$  con il verso indicato in figura. Supponiamo che il circuito sia immerso in un campo magnetico e che l'induzione magnetica  $\vec{B}$  sia in modulo costante e diretta ortogonalmente al piano del disegno dall'alto verso il basso. Per effetto del movimento, il circuito concatena un flusso crescente nel tempo ed è quindi sede di una f.e.m. misurata positivamente dal voltmetro V.

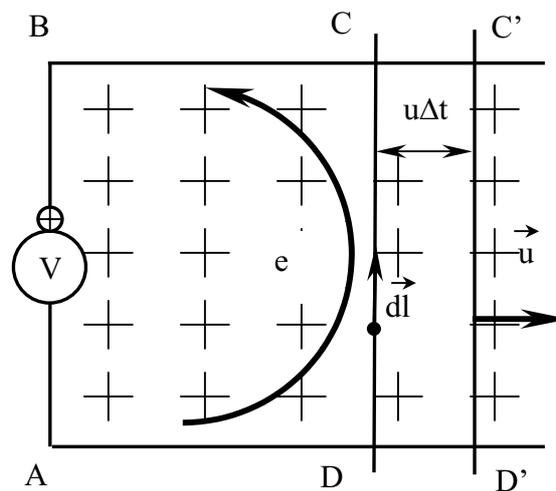


Fig. 2.2. Calcolo della f.e.m.

La legge dell'induzione elettromagnetica ci consente di calcolare la f.e.m. indotta  $e$  pur di eseguire la derivata indicata nella eq.2.1.

Per eseguire la derivata, si veda la Fig.2.2, consideriamo le configurazioni assunte dal circuito al tempo  $(t + \Delta t)$  ed al tempo  $t$  ed indichiamo con  $\Sigma_1 = ABCD$  la superficie che

individua il flusso concatenato al tempo  $t$ , con  $\Sigma_2 = ABC'D'$  quella al tempo  $(t + \Delta t)$  e con  $\Sigma_3 = CDC'D'$  la differenza tra tali superfici. Il calcolo della derivata comporta il limite indicato nella eq.2.1, dove la normale  $\vec{n}$  alle superfici  $\Sigma$  è orientata come  $\vec{B}$ . Ora  $\vec{B}(t + \Delta t) = \vec{B}(t) = \vec{B}$  perché il campo magnetico è indipendente dal tempo; ne consegue la prima eguaglianza indicata nella eq.2.2.

Se ora si orienta il versore della linea  $l$  costituita dal conduttore mobile nel verso della f.e.m. allora  $\vec{n}d\Sigma_3 = d\vec{l} \wedge \vec{u}\Delta t$ , ed è così possibile trasformare l'integrale di superficie in integrale di linea come è evidenziato dalla seconda eguaglianza indicata nella eq.2.2.

$$2.1 \quad e = \frac{d\psi}{dt} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta t} \left[ \int_{\Sigma_2} \vec{B}(t + \Delta t) \cdot \vec{n} d\Sigma_2 - \int_{\Sigma_1} \vec{B}(t) \cdot \vec{n} d\Sigma_1 \right]$$

$$2.2 \quad e = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta t} \int_{\Sigma_3} \vec{B} \cdot \vec{n} d\Sigma_3 = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta t} \int_l \vec{B} \cdot d\vec{l} \wedge \vec{u} \Delta t$$

Dal momento che per il prodotto vettoriale misto vale la proprietà commutativa indicata in eq.2.3 allora si perviene alla formulazione particolarmente utile per le applicazioni presentata in eq.2.4.

$$2.3 \quad \vec{B} \cdot d\vec{l} \wedge \vec{u} = \vec{u} \cdot \vec{B} \times d\vec{l}$$

$$2.4 \quad e = \int_l \vec{u} \cdot \vec{B} \times d\vec{l}$$

$$2.5 \quad e = Blu$$

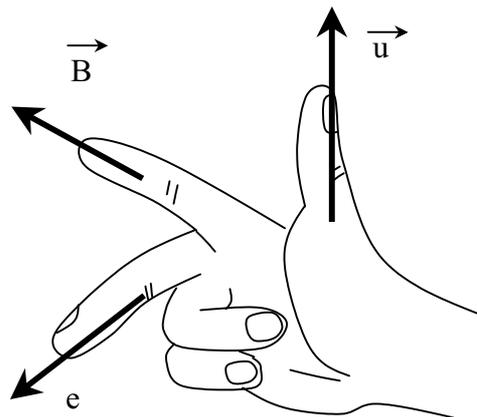


Fig. 2.3. Regola della mano destra

La conclusione è che nel caso della Fig.2.1 la f.e.m. (costante) indotta in un conduttore rigido di lunghezza  $l$  in moto con velocità  $\vec{u}$  costante ed immerso in un campo magnetico  $\vec{B}$  stazionario nel tempo e diretto ortogonalmente al conduttore ed alla velocità ha il valore precisato nella eq.2.5. Il cui risultato conseguito può esser utilmente memorizzato con la così

detta "regola delle tre dita della mano destra": posto il pollice come la velocità e l'indice come l'induzione, il medio dà il verso della f.e.m. di valore  $e = Blu$ , si veda la Fig.2.3 .

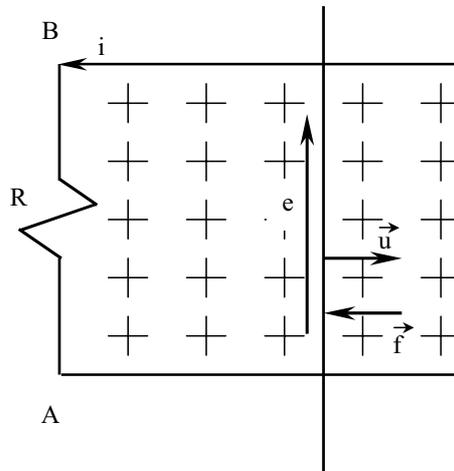


Fig. 2.3. Generatore elettrico elementare

Supponiamo ora di collegare ai morsetti  $A-B$  un resistore di resistenza  $R$ , si veda la Fig.2.3, circolerà in tal caso la corrente costante  $i = e/R$  e vi sarà una potenza  $p$  dissipata costante pari a  $p = ei = Ri^2$ . Dal momento che il campo magnetico è stazionario e che nel circuito elettrico non vi è alcuna sorgente energetica tutta la potenza in questione dovrà derivare dal motore meccanico che tiene in movimento il conduttore. Questo comporta che, appena si instaura la corrente  $i$  in base al principio di conservazione dell'energia il sistema elettrico dovrà presentare all'albero del sistema meccanico interagente una forza  $\vec{f}$  che si oppone al movimento e che, correlativamente, il sistema meccanico per mantenere invariata la velocità sviluppi una forza uguale ed opposta tale da soddisfare la eq.2.6. Ne consegue per la forza l'espressione in eq.2.7 che può esser utilmente memorizzata con la così detta "regola delle tre dita della mano sinistra": posto l'indice indice come l'induzione ed il medio come la corrente, il pollice dà la direzione della forza che il sistema elettrico applica al sistema meccanico interagente, il cui modulo è  $f = Bli$ , si veda la Fig.2.4

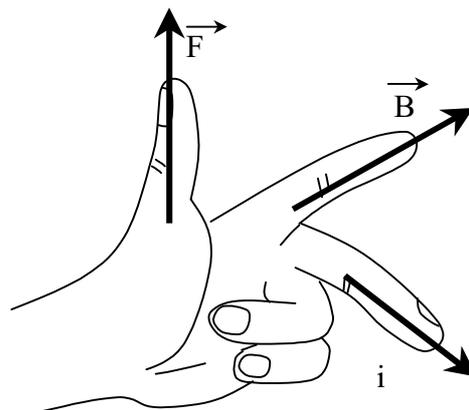


Fig. 2.4. Regola della mano sinistra

$$2.6 \quad ei = Blui = Ri^2 = fu$$

$$2.7 \quad f = Bli$$

La macchina ora individuata ("generatore elettrico ideale" o "convertitore elettromeccanico ideale") è perfettamente reversibile. Si supponga infatti di alimentare il circuito collegando ai morsetti  $A-B$  un generatore ideale che eroga una corrente  $i$  costante come è indicato in Fig.2.5 (positiva quindi se misurata in senso opposto a quello del caso precedente). In questo caso la potenza  $p = ei$  è di segno opposto rispetto al caso precedente e, per la conservazione dell'energia, questo richiede che, a velocità costante, si sia invertita la forza che il conduttore mobile applica al sistema meccanico interagente. Si è quindi realizzato un motore elettrico (anzi una catapulta elettrica) che imprime al sistema meccanico una forza nella direzione della velocità rispettando le precedenti equazioni.

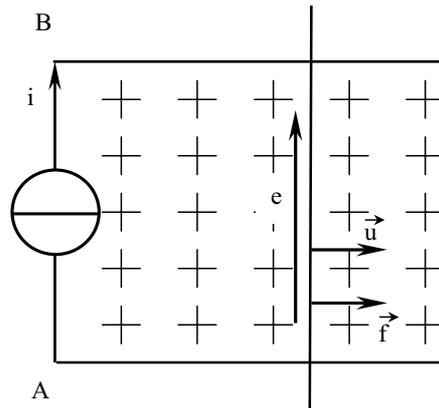


Fig2.5. Motore elettrico elementare

Complessivamente il convertitore elettromeccanico ora individuato e quelli che se ne deducono (a simmetria cilindrica o a disposizione lineare nel piano, come in Fig.2.5) è un doppio bipolo dotato di una porta elettrica alla quale sono misurabili corrente e forza elettromotrice e di una porta meccanica alla quale sono misurabili forza (coppia nelle macchine a simmetria cilindrica) e velocità lineare (velocità angolare).

Il circuito elettrico è caratterizzato dal fatto che la corrente viene addotta ai conduttori mobili (con moto lineare o rotatorio) mediante un sistema di spazzole di grafite striscianti su una struttura (detta "collettore") cui sono collegati i conduttori mobili. I conduttori, con resistenza trascurabile, sono allocati nella parte mobile e tra loro collegati in modo da realizzare un avvolgimento che consente dal punto di vista elettrico di sommare le forze elettromotrici e dal punto di vista meccanico di sommare le forze (le coppie) dei singoli conduttori. Il campo magnetico generato dai conduttori è trascurabile (quindi l'autoinduttanza dell'avvolgimento è trascurabile) ed il campo magnetico che genera la forza elettromotrice è prodotto da un magnete permanente ideale privo di perdite ed in grado di mantenere costante l'induzione  $B$  in ogni condizione di funzionamento.

Quanto detto giustifica il simbolo che viene usato per indicare la "macchina rotante ideale a corrente continua" (la struttura cilindrica è quella più usuale) indicata in Fig.2.6. La macchina ideale ora tratteggiata presenta forza elettromotrice e coppia che rispettano le eq.2.8 (deducibili dalle eq.2.5-7 tenendo conto che  $B$  è costante e che vi sono più conduttori attivi) dove la "costante di macchina"  $K$  è tale qualunque siano i valori delle altre grandezze.

$$2.8 \quad e = K\Omega \quad T = Ki$$

Il doppio bipolo in questione può funzionare da generatore ricevendo potenza meccanica  $p_m$  dai sistemi fisici interagenti ed erogando potenza elettrica  $p_e$  oppure da

motore con flusso invertito delle potenze. Trattandosi di macchina ideale la conversione avviene senza perdite per modo che vale in ogni condizione di funzionamento la eq.2.9.

$$2.9 \quad p_e = ei = p_m = T\Omega$$

Per quanto riguarda le misure alle porte nella Fig.2.6 si mette in evidenza che se la f.e.m.  $e$  è misurata positivamente tra i poli  $A-B$  e la velocità angolare nel senso indicato in figura allora nel funzionamento come generatore è positiva la corrente misurata uscente dal morsetto  $A$  ed è positiva la coppia che la macchina applica ai sistemi meccanici interagenti in senso opposto alla velocità angolare. Nel funzionamento come motore, viceversa, viene misurata positivamente la corrente entrante nel polo  $A$  e la coppia agisce nel senso della velocità angolare.

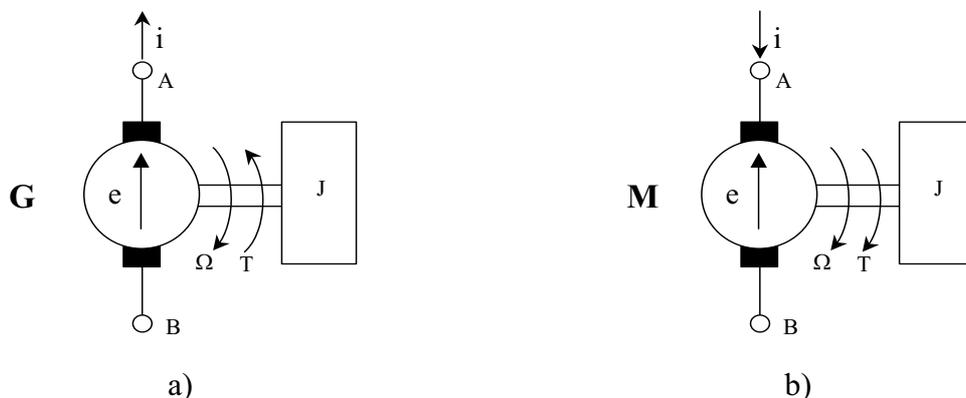


Fig.2.6 Macchina rotante ideale a corrente continua: a) misure positive nel funzionamento come generatore; b) misure positive nel funzionamento come motore.

### 3 La macchina a corrente continua reale a simmetria cilindrica.

La macchina reale differisce da quella ideale in quanto “l’avvolgimento di indotto”, quello disposto sulla parte mobile, presenta resistenza  $R_i$  ed autoinduttanza  $L_i$  non nulle. Il campo magnetico, inoltre, è generato o da un magnete permanente (ed in tal caso l’induzione  $B$  non è regolabile) oppure da un “avvolgimento induttore” (o “di eccitazione”), alimentato in modo indipendente da quello di indotto, posto sulla parte fissa della macchina e dotato di resistenza  $R_e$  ed autoinduttanza  $L_e$  non nulle (ed in questo caso l’induzione  $B$  è regolabile tramite la corrente di eccitazione  $i_e$ ). Anche nella macchina reale, infine, è possibile ridurre al minimo l’interazione del campo magnetico induttore con quello di indotto.

La macchina a corrente continua a magneti permanenti è descritta dal circuito equivalente di Fig.3.1a in cui la costante di macchina  $K$  è tale solo se la corrente di indotto permane all’interno di un campo di valori indicato dal costruttore (sia in termini di ampiezza, sia di contenuto armonico). La macchina con avvolgimento di eccitazione è descritta dal circuito equivalente di Fig.3.1b (le autoinduttanze di eccitazione e di indotto siano disegnate tra loro ortogonali, questo serve a memorizzare il fatto che non vi è mutua induttanza tra tali avvolgimenti) in cui la costante di macchina  $K(i_e)$  è una funzione non lineare crescente con la corrente di eccitazione del tipo indicato nella Fig.3.2.

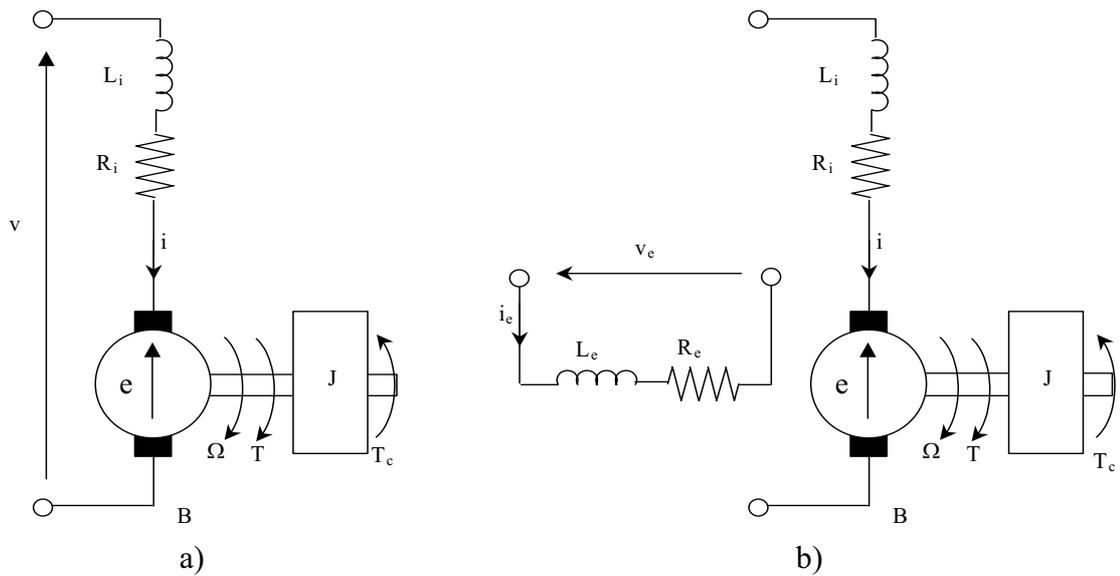


Fig.3.1 Circuito equivalente di una macchina a corrente continua reale con la convenzione di misura dei motori: a) a magneti permanenti, b) con avvolgimento di eccitazione “indipendente” (alimentato in modo indipendente dall’indotto).

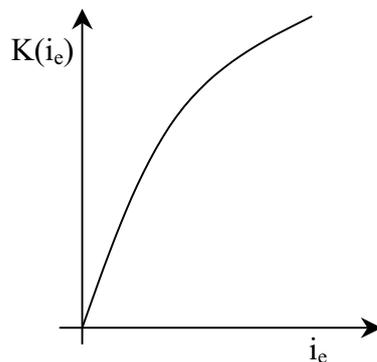


Fig.3.2 Tipico andamento della funzione  $K(i_e)$ .

Il circuito equivalente consente di rappresentare il modello matematico dinamico della macchina. Ad esempio per un motore corrente continua a magneti permanenti dotato di carico inerziale (con momento di inerzia  $J$ ) e di coppia resistente  $T_c$  valgono le equazioni di stato eq.3.1 (lo stato sono le variabili  $i, \Omega$ ): si tratta di un sistema lineare del secondo ordine.

$$\begin{aligned}
 v &= R_i i + L_i p i + e & e &= K \Omega \\
 T &= T_c + J p \Omega & T &= K i
 \end{aligned}
 \tag{3.1}$$

Nel caso di un motore ad eccitazione indipendente le equazioni di stato sono le eq.3.2. Si tratta di un sistema fisico del terzo ordine (lo stato è l’insieme delle tre variabili  $i, \Omega, i_e$ ) non lineare per il fatto che la costante di macchina è funzione della corrente di eccitazione.

$$\begin{aligned}
 v &= R_i i + L_i p i + e & e &= K(i_e) \Omega \\
 3.2 \quad v_e &= R_e i_e + L_e p i_e & & \\
 T &= T_c + J p \Omega & T &= K(i_e) i
 \end{aligned}$$

Nella ipotesi di funzionamento con tensione di alimentazione costante  $v = V$  la coppia elettromagnetica del motore a corrente continua risponde alla eq.3.3 (in cui si è indicato con  $\Omega_0$  la meccanica  $T = T(\Omega)$  risponde alla Fig.3.3. Con questo tipo di alimentazione il funzionamento a regime si realizza quando la caratteristica del carico  $T_c = T_c(\Omega)$  interseca quella del motore, come è indicato nella Fig3.3.

$$3.3 \quad T = K i = K \frac{V - e}{R_i} = \frac{K^2}{R_i} (\Omega_0 - \Omega)$$

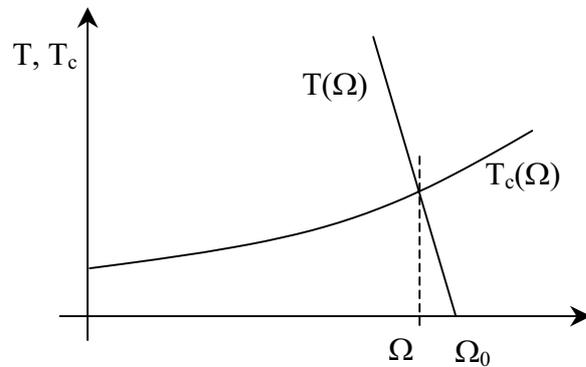


Fig.3.3 Caratteristica meccanica a tensione costante e corrente di eccitazione costante di un motore a corrente continua con eccitazione indipendente costante.

# MACCHINE ELETTRICHE ELEMENTARI E PROPRIETÀ ELETTRICHE DEI MATERIALI.

## 1 Campo elettrico di conduzione, resistività e circuiti elettrici di conduzione.

L'esperienza della pila Daniell mostra che collegando i poli della lampadina ai poli della pila mediante conduttori metallici rivestiti di opportuno materiale isolante è possibile manipolare i conduttori senza avvertire nei nostri muscoli le contrazioni evidenziate da Galvani. La corrente elettrica è quindi delimitabile nel materiale conduttore se questo è circondato da uno strato di conveniente spessore di materiale isolante, che, come gli argini di un fiume, incanala il moto delle cariche.

Per descrivere il moto uniforme di un fluido incompressibile in un fiume si introduce la nozione di densità di corrente: si tratta di un vettore  $\vec{J}$ , con la direzione ed il verso della velocità media  $\vec{u}$  del fluido, il cui modulo esprime la quantità di fluido che passa nell'unità di tempo attraverso una superficie di area unitaria posta ortogonalmente alla velocità del fluido. Se  $\Delta$  è la densità di massa ( $kg/m^3$ ) del fluido il vettore che risponde alla definizione risulta  $\vec{J} = \Delta\vec{u}$  ( $[J]=[kg/m^2s]$ ).

In modo analogo per descrivere il moto uniforme delle cariche elettriche nel letto di fiume delimitato dal materiale isolante si usa il vettore densità di corrente elettrica  $\vec{J} = K\vec{u}$  ( $[C/m^2s]=[A/m^2]$ ) definito dal prodotto della velocità media  $\vec{u}$  delle cariche per la densità volumetrica  $K[C/m^3]$  della carica elettrica. La densità di corrente elettrica ha quindi per modulo la corrente che passa su una superficie di area unitaria posta ortogonalmente al vettore velocità media, la direzione ed il verso sono quelle della velocità media. In relazione alla definizione di  $\vec{J}$  la corrente elettrica che attraversa una superficie generica  $\Sigma$  è data dalla eq.1.1, dove  $\vec{n}$  è la normale all'elemento di superficie  $d\Sigma$  (la corrente è il "flusso" del vettore densità di corrente  $\vec{J}$  attraverso la superficie  $\Sigma$ ).

$$1.1 \quad I = \int_{\Sigma} \vec{J} \cdot \vec{n} d\Sigma$$

Come caso particolare se la superficie  $S$  è chiusa dal momento che tante cariche entrano in  $S$  quante ne escono, vale la eq.1.2 che prende il nome di "legge di Kirchhoff delle correnti LKC".

$$1.2 \quad I = \int_S \vec{J} \cdot \vec{n} dS = 0$$

Se ora interpretiamo il moto delle cariche ammettendo che la pila eserciti una "forza elettrica" costante  $\vec{E}$  sulla unità di carica positiva ( $[E]=[N/C]$ ) e che questa si muova incontrando attriti proporzionali alla velocità allora nel funzionamento di regime, in base al principio di inerzia, potremo adottare il modello matematico indicato nella eq.1.3, dove  $\rho$  è una costante tipica del mezzo conduttore che prende il nome di resistività. L'inverso della resistività si chiama conducibilità  $\gamma$ , si veda ancora la eq.1.3.

$$1.3 \quad \vec{E} = \rho \vec{J} \quad \vec{J} = \gamma \vec{E}$$

In base alla definizione di forza elettrica il lavoro fatto dalla pila per spostare la carica unitaria positiva dal polo positivo  $A$  al polo negativo  $B$  della pila all'interno del conduttore lungo una linea orientata  $\Gamma$  (è la tensione tra i due punti, misurabile con un voltmetro) è data dalla eq.1.4 dalla quale si deduce che  $[E] = [N/C] = [V/m]$  e che  $[\rho] = [Vm/A] = [\Omega m]$ . Come caso particolare se la linea  $G$  orientata è chiusa il lavoro della forza elettrica è nullo, si veda la eq.1.5a, che prende il nome di "legge di Kirchhoff delle tensioni". Se si scompone la linea  $G$  in archi  $G_1, G_2, \dots, G_n$  contigui la somma dei lavori (somma delle tensioni) compiuti dalla forza elettrica per spostare la carica unitaria positiva lungo gli archi successivi è nulla, si veda la eq.1.5b.

$$1.4 \quad V = \int_{\Gamma} \vec{E} x d\vec{l}$$

$$1.5 \quad \text{a) } \oint_G \vec{E} x d\vec{l} = 0 \quad \text{b) } \int_{G_1} \vec{E} x d\vec{l} + \int_{G_2} \vec{E} x d\vec{l} + \dots + \int_{G_n} \vec{E} x d\vec{l} = V_1 + V_2 + \dots + V_n = 0$$

## 2 Proprietà dei materiali conduttori.

Consideriamo un provino costituito da un filo del materiale oggetto di studio di diametro  $d$ , di sezione  $\sigma = \pi d^2 / 4$  e di lunghezza  $l$ , opportunamente isolato ed alimentato da un generatore di tensione costante. Dal momento che possiamo toccare il provino senza avvisare corrente se ne conclude che il vettore  $\vec{J}$  è tangente alla superficie del provino il quale è un tubo di flusso di tale vettore. Considerate allora le eq.1.3-4, preso l'asse del provino come linea di integrazione  $\Gamma$  della eq.1.4 e considerato che la corrente  $I = J\sigma$  in tutte le sezioni trasversali del filo ha sempre lo stesso valore, se ne deduce la eq.2.1.

$$2.1 \quad V = \int_{\Gamma} \vec{E} x d\vec{l} = \int_{\Gamma} E dl = \int_{\Gamma} \rho J \sigma \frac{dl}{\sigma} = I \int_{\Gamma} \frac{\rho dl}{\sigma} = RI \quad R = \frac{\rho l}{\sigma}$$

In conclusione misurati  $V, I$  con il voltmetro e l'amperometro e note le dimensioni del filo possiamo valutare la resistività  $\rho$ .

Per i materiali metallici si trova che il rapporto  $\rho = E/J$  è costante, si veda la Fig.2.1 e che esso dipende dalla temperatura. Più precisamente la resistività si annulla allo zero assoluto, mentre nel campo di temperatura di maggior interesse industriale la resistività varia con la temperatura (in gradi centigradi) come è evidenziato in Fig.2.2 (caratteristica di elettrizzazione del materiale) e nella eq.2.2 dove  $\theta_c$  prende il nome di temperatura critica. Nel caso del rame, che è il conduttore di maggior impiego industriale, si ha che  $\rho = 1,73 \cdot 10^{-8} \Omega m$ , mentre  $\theta_c = -235^\circ C$ . La Tab.2.1 riporta le principali proprietà del rame per usi industriali, mentre la tab.2.2 riporta la resistività di metalli, leghe e materiali diversi.

La potenza dissipata in un resistore viene riportata nella eq.2.3: si può osservare che essa è proporzionale al volume del materiale conduttore. La potenza specifica di un resistore

(potenza dissipata per unità di volume del materiale conduttore) è allora quella indicata nella eq.2.4.

La eq.2.4 comporta la seguente riflessione. Il calore prodotto è proporzionale al volume  $l\pi d^4/4$  ma esso viene trasmesso all'ambiente attraverso la superficie  $l\pi d$ , se allora, a parità di  $J$  si vogliono mantenere costanti le sovratemperature del filo rispetto all'ambiente occorre migliorare gli scambi termici al crescere delle dimensioni.

$$2.2 \quad \frac{\rho_2}{\rho_1} = \frac{\theta_2 - \theta_c}{\theta_1 - \theta_c}$$

$$2.3 \quad P = RI^2 = \rho J^2 l \sigma$$

$$2.4 \quad p = \rho J^2 [W/m^3]$$

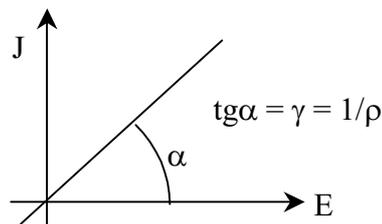


Fig.2.1 Caratteristica di elettrizzazione di un materiale conduttore.

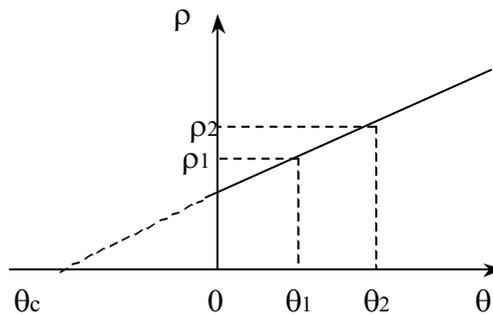


Fig.2.2 La dipendenza della resistività dalla temperatura.

Tab.2.1 Caratteristiche del rame per usi industriali.

Caratteristiche	Rame elettrolitico Cu-ETP		Rame esente da ossigeno Cu-OF		Rame all'argento Cu-LSTP
Composizione	Cu: 99,9%; $O_2$ :<0,04%		Cu: 99,95%		Ag: 0,02-0,12; Cu: resto
Resistività max a 20°C $10^{-8} \Omega m$	ricotto	crudo	ricotto	crudo	1,786
	1,7241	1,786	1,7241	1,786	
Coeff. di temperatura a 20°C. ( $\times 10^{-3}$ )	3,93	3,81	3,93	3,81	3,93
Densità ( $kg/dm^3$ )	8,89-8,94		8,94		8,94
Calore specifico 0-100°C ( $J/kg^\circ C$ )	385		381		381
Coeff. dilatazione termica lineare $10^{-4} / ^\circ C$	17		17		17

Tab.2.2 Resistività di metalli, leghe e materiali diversi.

Materiale	Resistività a 20°C $10^{-8} \Omega m$	Coeff. di temper. $\times 10^{-3}$	Materiale	Resistività a 20°C $10^{-8} \Omega m$	Coeff. di temperat $\times 10^{-3}$
Alluminio 99,3-99,6% crudo ricotto in getti	2,82-2,87 2,76-2,82 3,3	4 4	Acciaio	10-25	4,5-5
Antimonio	4,2	3,6	Aldrey	3,1-3,3	3,6
Argento 99,88%	1,64	3,8	Anticorodal	3,7	3,6
Carbonio Carbone amorfo Spazzole di carb.	38-40 20-100		Argentana	3,5-4,1	7
Ferro puro	9,78	6	Bronzo	5-10	3,9
Molibdeno	5,7	3,3	Costantana	4,9-5,1	$\approx 0$
Nichel	7,8-11	4-6	Ferro al silicio lamiere 1-5% Si	2,7-6,7	
Platino	10	3,6	Fe-Ni (25-30%)	8,5-9,2	0,4-1
Rame elettrolitico crudo ricotto	1,78 1,72	3,91 3,93	Ghisa	6-16	
Stagno	11-12	4,2-4,4	Manganina	42-45	0,01
Tantalo	15	3,1	Nichelina	33-44	0,2-0,3
Tungsteno	5,5	4,5	Ottone	6-8	1-2
Zinco	6	3,7			

### 3 Resistori reali.

I resistori per usi industriali con potenze dissipate fino a qualche centinaio di watt sono realizzati con filo metallico avvolto su supporto cilindrico di porcellana o altro materiale isolante atto a sopportare temperature elevate. I resistori per circuiti elettronici sono realizzati con film di nichel, nichelcromo o di carbone depositati su un supporto ceramico cilindrico (con lunghezze dell'ordine del centimetro e diametri dell'ordine dei millimetri).

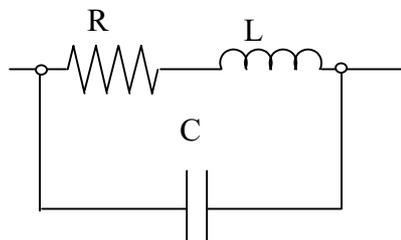


Fig.3.1 Circuito equivalente di un resistore reale.

I resistori reali si scostano da quelli ideali per il fatto che le loro prestazioni dipendono dalla temperatura (ambiente e del conduttore), dal tempo (il valore della resistenza tende a variare con il numero delle ore di utilizzazione) e dalla frequenza della corrente. La Fig.3.1 riporta un possibile circuito equivalente di un resistore reale atto ad evidenziare gli effetti

della frequenza sulle prestazioni (anche uno smorzatore reale meccanico ha un comportamento che dipende dalla frequenza della velocità ai morsetti). Il circuito mostra che solo a bassa frequenza sono trascurabili gli effetti della induttanza parassita  $L$  e della capacità parassita  $C$  tra spire successive del conduttore che rappresentano gli effetti del campo magnetico e del campo elettrico (nell'isolante interposto tra le spire successive).

#### 4 Campo magnetico, permeabilità e circuiti magnetici.

Per studiare le proprietà magnetiche di un materiale conviene realizzare con il materiale oggetto di studio (mai preventivamente magnetizzato) un provino sagomato nella forma di toroide sottile. Il toroide sottile è un volume, si veda la Fig.4.1, ottenuto per rotazione di un cerchio (di un rettangolo), di raggio  $r \ll R$  (con lato  $l \ll R$ ), attorno all'asse  $n-n$ . Sul provino vengono avvolte  $N$  spire di materiale conduttore uniformemente serrate, si veda la Fig.4.2. Il dispositivo così ottenuto si chiama "permeometro".

Se ora alimentiamo l'avvolgimento con un generatore di tensione costante in modo da iniettare una corrente  $I$  nell'avvolgimento e studiamo il campo magnetico usando un magnetometro (ad esempio quello presentato nella Fig. 2.12 del cap.1) possiamo constatare che il campo magnetico è delimitato dalle pareti del toroide, che costituisce quindi un tubo di flusso del vettore  $\vec{B}$ . All'interno del toroide le linee di forza del campo magnetico sono circonferenze con centro sull'asse di rotazione  $n-n$  orientate, in relazione alla corrente, con la regola del cavatappi, si veda la Fig.4.2.

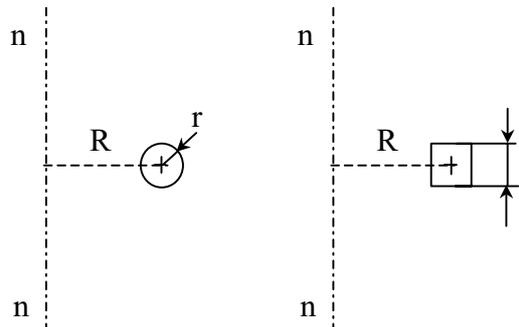


Fig.4.1 Generazione di un toroide sottile di sezione circolare o rettangolare.

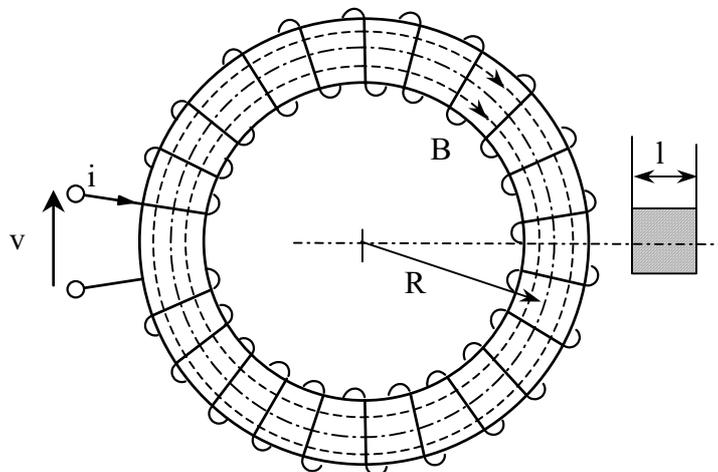


Fig.4.2 Orientamento delle linee di forza del campo magnetico.

Il campo è con buona approssimazione uniforme e cioè il modulo del vettore  $\vec{B}$  ha lo stesso valore su tutti i punti di qualsiasi cerchio (rettangolo) generatore del toroide. Ne consegue che, scelta come linea di integrazione la circonferenza  $\Gamma$  asse del toroide orientata con la regola del cavatappi, deve valere la eq.4.1.

$$4.1 \quad \oint_{\Gamma} \vec{B} x d\vec{l} = B 2\pi R = \mu NI \quad B = \mu \frac{NI}{2\pi R} = \mu H$$

Dal momento che  $B$  è misurabile con il magnetometro e che  $I$  si misura con l'amperometro, dalla eq.4.1 si può ricavare la permeabilità  $\mu$  del materiale. In particolare facendo crescere la corrente  $I$  a partire dal valore nullo si può costruire per punti la "caratteristica di prima magnetizzazione" del materiale e cioè la curva che riporta il modulo  $B$  dell'induzione magnetica in funzione del modulo  $H$  della forza magnetica per materiale mai prima magnetizzato.

## 5 Proprietà magnetiche dei materiali.

I materiali non magnetici ("isolanti magnetici") presentano una caratteristica di prima magnetizzazione lineare, si veda la Fig.5.1, la cui pendenza fornisce una permeabilità in pratica uguale per tutti i materiali di questa categoria e pari a quella dell'aria  $\mu_0$ . Per i materiali magnetici ("conduttori magnetici") la caratteristica di prima magnetizzazione non è lineare ed assume l'aspetto indicato nella Fig.5.2. La permeabilità varia tra un valore massimo dell'ordine di  $\mu_M \approx 10^4 \mu_0$  ed un valore asintotico (al limite per  $I, H \rightarrow \infty$ ) minimo pari a  $\mu_m = \mu_0$ .

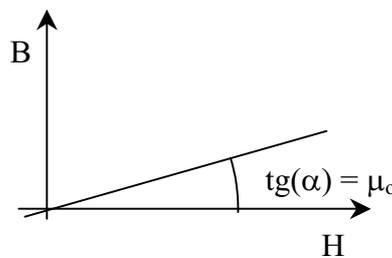


Fig.5.1 Caratteristica di prima magnetizzazione di un materiale non magnetico.

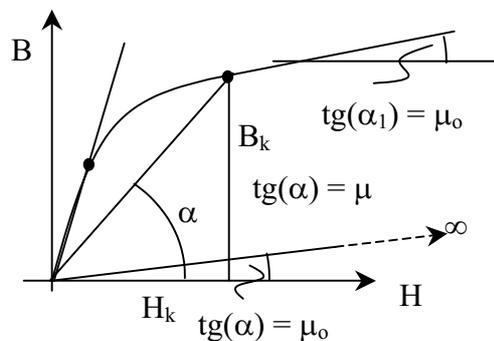


Fig.5.2 Caratteristica di prima magnetizzazione di un materiale magnetico.

Per un materiale magnetico se, a partire da un valore qualsiasi di  $I, H$ , si fa variare la corrente tra  $\pm I$  si trova che il punto di funzionamento si sposta dalla caratteristica di prima magnetizzazione descrivendo un "ciclo di isteresi simmetrico", si veda la Fig.5.3, i cui elementi caratteristici sono: la posizione dei vertici del ciclo, "l'induzione residua"  $B_r$  ( $H=0$ ), la "forza magnetica coercitiva"  $H_c$  ( $B=0$ ) e l'area del ciclo.

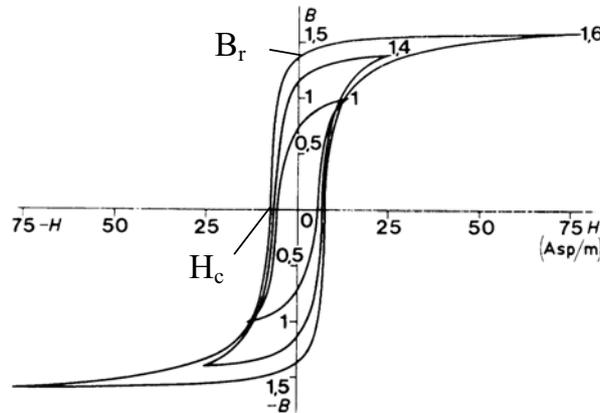


Fig.5.3 Ciclo di isteresi.

I materiali magnetici sono caratterizzati dal fatto che i vertici dei cicli di isteresi simmetrici si trovano sulla caratteristica di prima magnetizzazione.

Per i materiali impiegati nella costruzione di macchine elettriche ("materiali magnetici teneri") si ha che la forza magnetica coercitiva  $H_c$  è molto piccola e l'area del ciclo di isteresi così ridotta che i calcoli magnetici, pertinenti al regime alternato sinusoidale, si possono eseguire in prima approssimazione come se l'area fosse nulla (tenendo conto a parte del fatto che l'area rappresenta una perdita per unità di volume del materiale magnetico e per ciclo di magnetizzazione). Viceversa per i materiali impiegati per la costruzione di magneti permanenti ("materiali magnetici duri", si veda la Fig.5.4)  $H_c, B_r$  sono molto elevati (come ordine di grandezza  $B_r \cong 1T$  e  $\mu_0 H_c \cong 1T$ ) per modo che i calcoli magnetici si devono eseguire considerando il ciclo di isteresi.

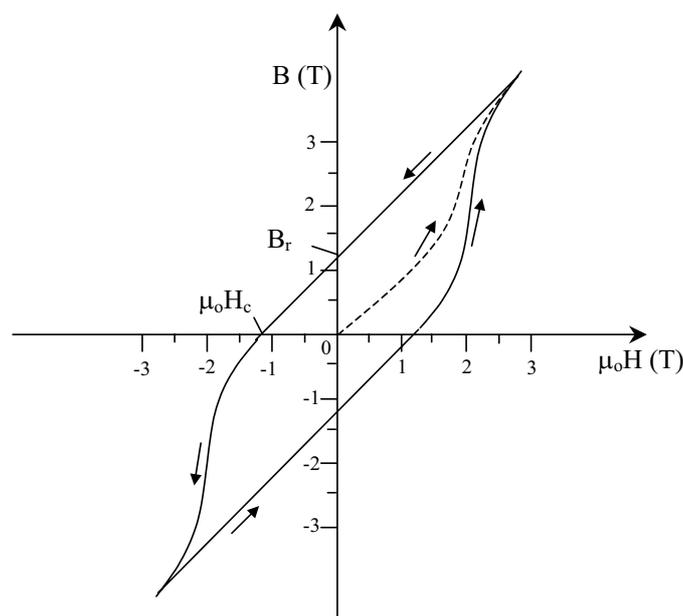


Fig.5.4 Ciclo di isteresi di un materiale magnetico duro.

## 6 Induttori reali.

I materiali magnetici teneri vengono lavorati sotto forma di fogli con superficie dell'ordine dei  $[m^2]$  e spessori dell'ordine della frazione di  $[mm]$ ; i fogli vengono tranciati in forma utile per poterli impilare e serrare fino a realizzare nuclei magnetici del tipo indicato in Fig.6.1 ed in Fig.6.2. A parte viene realizzato (avvalendosi di materiale conduttore sagomato in filo o in piattina rettangolare) con simmetria cilindrica un avvolgimento di  $N$  spire che viene poi infilato su una colonna del nucleo magnetico.

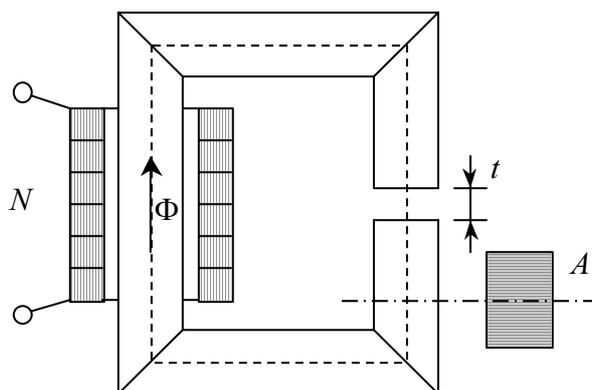


Fig.6.1 Induttore reale con "nucleo a colonna".

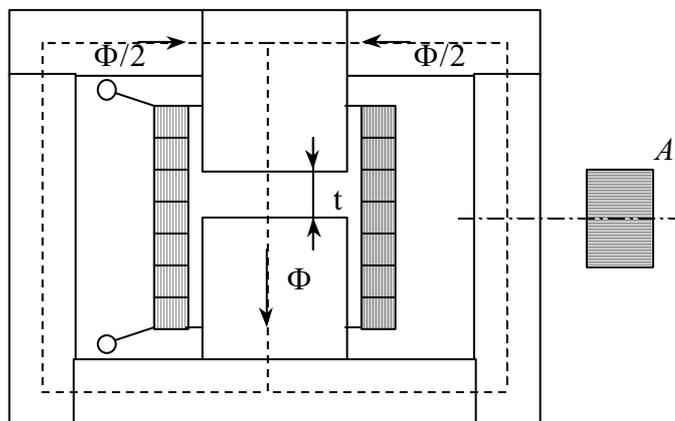


Fig.6.2 Induttore reale con "nucleo a mantello".

Il dispositivo così formato è un induttore reale le cui prestazioni (in regime stazionario ed in regime alternato sinusoidale) sono individuate dalla "caratteristica di magnetizzazione" e cioè dalla curva che lega il flusso del vettore  $\vec{B}$  alla corrente nell'avvolgimento nell'ipotesi che  $|\vec{B}|$  sia legato ad  $|\vec{H}|$  dalla caratteristica di prima magnetizzazione.

Il calcolo della caratteristica di magnetizzazione viene normalmente eseguito, in prima approssimazione, assumendo che le linee di forza di  $\vec{B}$  siano chiuse attorno alla corrente che le genera, orientate con la regola del cavatappi e limitate nel loro sviluppo solo ai materiali magnetici (che delimitano quindi tubi di flusso del vettore  $\vec{B}$ ). Si assume ancora che l'induzione sia uniformemente distribuita in ogni sezione di tubo ortogonale a  $\vec{B}$ .

In questa visione la corrente elettrica, si veda la Fig.6.3, genera correnti magnetiche (flussi del vettore  $\vec{B}$ :  $\Phi_1 = B_1 A_1$ ;  $\Phi_2 = B_2 A_2$ ;  $\Phi_3 = B_3 A_3$ ; l'unità di misura del flusso, si pensi

alla legge dell'induzione elettromagnetica, è il weber [ $Wb$ ]=[ $V \cdot s$ ], legata alla unità di misura dell'induzione da  $1[T]=1[Wb/m^2]$ , delimitate dalle pareti dei materiali magnetici, che si svolgono secondo percorsi tra loro in serie (ad esempio i tronchi  $AB - BC - CD$ ) oppure in parallelo (ad esempio i tronchi  $ABCD - DA - DEFA$ ). L'insieme dei diversi tronchi configura un circuito di conduzione magnetica per la cui soluzione, come per i circuiti della conduzione elettrica, occorre individuare la corrente magnetica (il flusso) in ogni tronco e la tensione magnetica alla estremità di ogni tronco (lavoro di  $\vec{H}$  lungo l'asse, orientato come  $\vec{B}$ , del tronco) quando sia assegnata la corrente elettrica che genera il campo magnetico oppure, assegnato il flusso in un tronco, individuare la corrente elettrica necessaria per conseguire quel flusso.

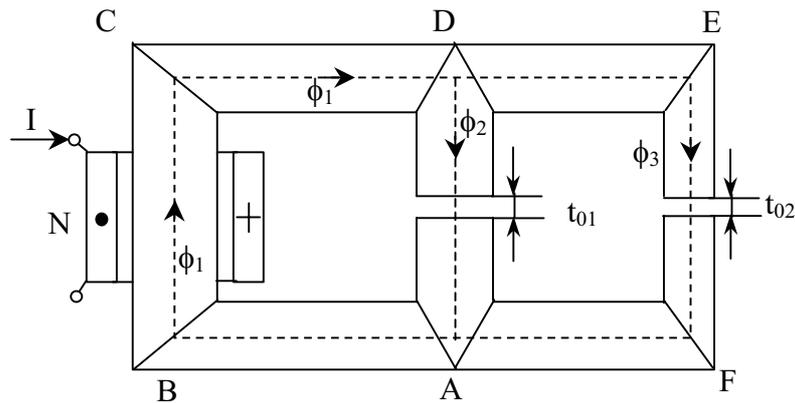


Fig.6.3 Circuito di conduzione magnetica.

Le leggi che si usano per risolvere i circuiti magnetici sono analoghe a quelle dei circuiti di conduzione elettrica come viene nel seguito precisato.

- Legge di Kirchhoff delle correnti magnetiche: dal momento che le linee di forza di  $\vec{B}$  sono chiuse è nullo il flusso di  $\vec{B}$  attraverso una superficie  $S$  chiusa (nodo magnetico), si veda la eq.6.1a o anche è nulla la somma dei flussi attraverso le superfici  $\Sigma_1, \Sigma_2, \dots, \Sigma_n$  in cui viene suddivisa una superficie chiusa  $S$ , si veda la eq.6.1b

$$6.1 \quad \text{a) } \int_S \vec{B} \cdot \vec{n} dS = 0 \quad \text{b) } \sum_k \Phi_k = \sum_k \int_{\Sigma_k} \vec{B} \cdot \vec{n} d\Sigma_k = 0$$

- Legge di Kirchhoff delle tensioni magnetiche: il lavoro della forza magnetica lungo una linea chiusa orientata  $L$  è pari alla somma delle correnti concatenate dalla linea (nella sommatoria la singola corrente è positiva se la convenzione di misura della corrente è legata al senso di percorrenza della linea con la regola del cavatappi), si veda la eq.6.2a (quindi l'unità di misura di  $H$  è l'ampère/metro [ $A/m$ ]). Se poi definiamo "tensione magnetica" (misurata in ampère [ $A$ ]) il lavoro di  $\vec{H}$  lungo una linea aperta  $\Gamma$ , la stessa legge si enuncia dicendo che la somma delle tensioni magnetiche valutate sui successivi tratti di linea orientata  $\Gamma_1, \Gamma_2, \dots, \Gamma_n$  in cui può essere scomposta  $L$  è pari alla somma delle correnti concatenate, si veda la eq.6.2b.

$$6.2 \quad \text{a) } \oint_L \vec{H} \cdot d\vec{l} = \sum_k I_k \quad \text{b) } \sum_k U_k = \sum_k \int_{\Gamma_k} \vec{H} \cdot d\vec{l}_k = \sum_k I_k$$

Risulta individuata a questo punto l'unità di misura della permeabilità:

$$[\mu] = [B]/[H] = [\Omega s / m] = [H / m].$$

In questa unità risulta  $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} H / m$ .

- Legame costitutivo: per ogni tronco (di tubo di tubo di flusso) passivo di area  $A$  (non direttamente concatenato ad una corrente elettrica, ad esempio il tronco  $DA$  nella Fig.6.3) vale la eq.6.3 dove  $\Theta$  prende il nome di riluttanza del tronco (con unità di misura  $[1/H]$ ). L'inverso della riluttanza si chiama permeanza  $\Lambda$  (con unità di misura  $[H]$ ).

$$6.3 \quad \int_{\Gamma} \vec{H} \times d\vec{l} = U = \int_{\Gamma} BA \frac{dl}{\mu A} = \Phi \int_{\Gamma} \frac{dl}{\mu A} = \Theta \Phi \quad \Theta = \frac{l}{\mu A} \quad \Lambda = \frac{1}{\Theta} = \frac{\mu A}{l}$$

Per ogni tronco attivo, ad esempio  $BC$  nella Fig.6.3, vale la eq.6.4, dove  $I_t$  è la corrente totale che concatena il flusso  $\Phi_{BC}$  del tronco attivo.

$$6.4 \quad U_{BC} + U_{CD} + U_{DA} + U_{AB} = \Theta_{BC} \Phi_{BC} + U_{CB} = I_t$$

L'insieme dei legami ora evidenziati si può rappresentare con il circuito simbolico indicato nella Fig.6.4 in cui per le riluttanze si è scelto lo stesso simbolo delle resistenze elettriche (lineari per i tronchi in aria, corrispondenti ai "traferri"  $t_{01}, t_{02}$  di Fig.6.3, per i quali  $\mu_0$  è costante, non lineari per i tronchi in ferro per i quali  $\mu$  è variabile con l'induzione) mentre la corrente elettrica  $I_t = NI$  che genera le correnti magnetiche è stata rappresentata (in base alla eq.6.4) con un generatore di tensione.

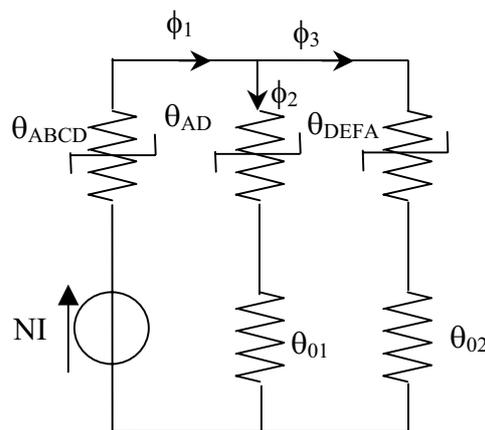


Fig.6.4 Rappresentazione simbolica dei legami circuitali.

Si noti che, per effetto della presenza delle riluttanze non lineari, i circuiti magnetici sono risolvibili in modo diretto solo nel senso di calcolare la corrente concatenata necessaria per generare un certo flusso, mentre solo per successive approssimazioni si può calcolare il flusso generato da una certa corrente concatenata. Come esemplificazione della proprietà ora

enunciata consideriamo il circuito magnetico di Fig.6.1 che può essere rappresentato con il circuito simbolico di Fig.6.5.

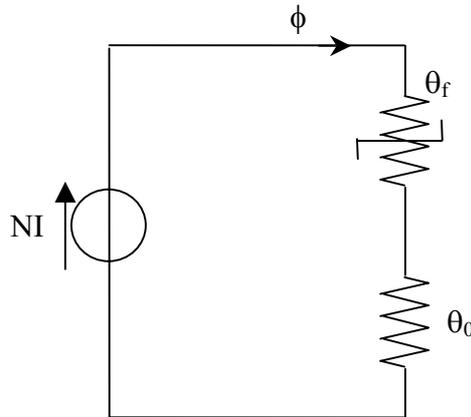


Fig. 6.5 Circuito magnetico simbolico del circuito magnetico di Fig.6.1.

E' possibile costruire la "caratteristica di magnetizzazione"  $\Phi = \Phi(I_t)$  con la seguente procedura:

- si fissa l'induzione  $B_0$  nel tronco passivo in aria (e quindi anche  $H_0 = B_0 / \mu_0$ ) e si calcola il flusso  $\Phi_0 = B_0 A_0$  in tale sezione del circuito; si calcola la tensione magnetica di tale tronco  $U_0 = \Theta_0 \Phi_0 = H_0 l_0$ ;
- l'induzione nei tronchi in ferro è uguale a quella nel tronco in aria  $B = B_0$ ; entrando con tale valore nella caratteristica di prima magnetizzazione del materiale magnetico usato si valuta la forza magnetica  $H$ , si veda la Fig.6.6;
- si calcola la somma delle tensioni magnetiche dei tronchi in ferro:  $U = \theta_f \Phi_0 = H l_f$  (dove  $l_f$  è la lunghezza totale, calcolata lungo l'asse del circuito magnetico, dei tronchi in ferro);
- si calcola la corrente totale concatenata con il flusso  $\Phi$  e cioè  $I_t = NI$  come somma delle tensioni magnetiche:  $U + U_0 = (\theta_0 + \theta_f) \Phi = \theta \Phi = NI$ .

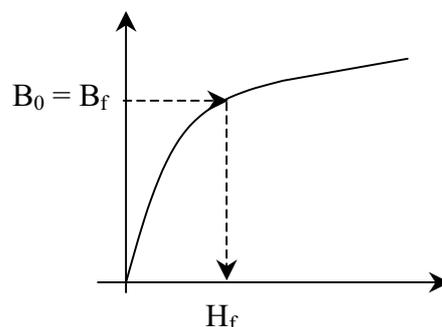


Fig.6.6 Calcolo della forza magnetica nei tronchi in ferro.

La caratteristica di magnetizzazione ha il tipico andamento presentato in Fig.6.7 (simmetrica rispetto all'origine): per bassi valori di induzione (e di flusso) le tensioni magnetiche sui tronchi in ferro sono trascurabili rispetto a quella del tronco in aria (perché le permeabilità del ferro sono  $10^4$  volte maggiori di quelle dell'aria), avvicinandosi alla

condizione di saturazione dei tronchi in ferro (l'induzione di saturazione è dell'ordine di 2T) le permeabilità del ferro diventano dell'ordine di  $10^2 \mu_0$  e le tensioni dei tronchi in ferro (di lunghezza molto maggiore di quelle dei tronchi in aria) diventano confrontabili con quelle dei tronchi in aria per modo che la caratteristica si incurva.

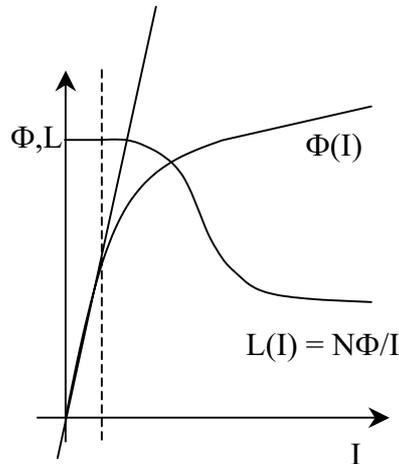


Fig.6.7 Caratteristica di magnetizzazione  $\Phi = \Phi(I)$  del circuito magnetico ed induttanza  $L = L(I)$  del circuito elettrico.

Si noti che, assegnata la corrente  $I$  non è possibile ricavare  $\Phi$  in modo diretto in quanto non si conosce la permeabilità da assegnare ai tronchi in ferro.

Una volta individuata la caratteristica di magnetizzazione  $\Phi = \Phi(I)$  è possibile dedurre il flusso concatenato  $\psi(I) = N\Phi(I)$  con il circuito elettrico e quindi l'induttanza  $L = \psi(I)/I$ , si veda la Fig.6.7 e la eq.6.5.

$$6.5 \quad L(I) = \frac{\psi(I)}{I} = \frac{N\Phi(I)}{I} = N^2 \Lambda = \frac{N^2}{\theta}$$

La conclusione di tutte le precedenti considerazioni è che gli induttori reali si scostano da quelli ideali in quanto :

- sono dotati di resistenza non nulla (quella dell'avvolgimento, che può essere resa molto piccola immergendo l'induttore in un gas liquido a temperatura prossima allo zero assoluto);
- sono non lineari per alti valori di corrente;
- il parametro induttanza è influenzato dalla frequenza (alle alte frequenze divengono importanti le capacità tra spire contigue dell'avvolgimento).

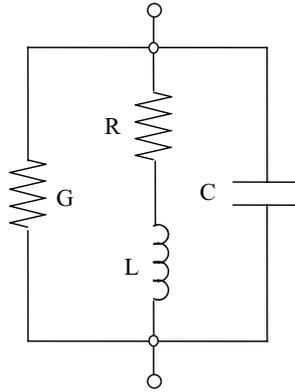


Fig.6.8 Circuito equivalente di un induttore reale.

Nella Fig.6.8 viene presentato un possibile circuito equivalente di un induttore reale atto ad evidenziare l'influenza della frequenza e delle perdite sulle prestazioni.  $R$  è la resistenza dell'avvolgimento (funzione della temperatura).  $G$  è una conduttanza atta a rappresentare (quando sia moltiplicata per il quadrato della tensione applicata all'induttore) le perdite nel ferro del nucleo magnetico (oltre alle "perdite per isteresi" vi sono perdite "per correnti parassite" generate nel ferro dalla forza elettromotrice indotta dal flusso variabile: queste perdite crescono al crescere della tensione e della frequenza).  $C$  tiene conto delle capacità parassite che si manifestano tra spire successive dell'avvolgimento.

Complessivamente troviamo che solo a basse frequenza ( $1/\omega C \rightarrow \infty$ ;  $G \rightarrow \infty$ ) ed a basse temperature ( $R \rightarrow 0$ ) un induttore reale approssima il comportamento ideale, mentre ad alte frequenze l'induttore reale ha un comportamento asintotico di tipo capacitivo.

## 7 Campo elettrico nei materiali isolanti, permittività e proprietà dei materiali.

Per studiare le proprietà dei materiali isolanti conviene fare riferimento alla struttura dei condensatori piani sottili costituiti da due piastre metalliche separate dal materiale isolante oggetto di studio dove le dimensioni lineari delle piastre sono molto maggiori dello spessore  $s$  del materiale isolante. Alle piastre sono collegati conduttori metallici corti alle cui estremità (poli del condensatore) si possono disporre gli strumenti di misura, si veda la Fig.7.1.

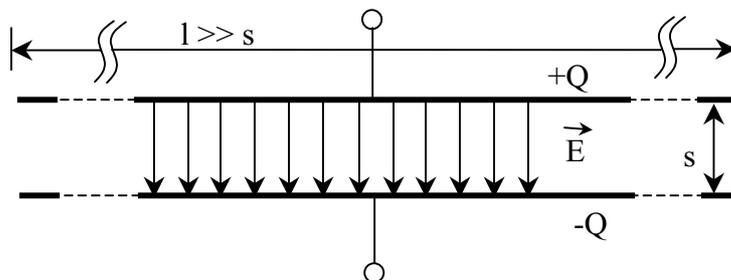


Fig.7.1 Condensatore sottile per la prova dei materiali isolanti.

Se applichiamo ai poli di questo dispositivo una tensione costante  $V$  possiamo evidenziare con le misure elettriche le seguenti proprietà.

- Vi è un accumulo di cariche elettriche  $\pm Q$  di segno opposto distribuite in modo uniforme sulle due piastre di area  $A$ : si chiama "induzione dielettrica"  $D = Q/A [C/m^2]$  la carica per unità di superficie (la carica  $Q$  è il flusso dell'induzione dielettrica e cioè la "corrente dielettrica"). In ogni punto all'interno del materiale la carica positiva è soggetta ad una forza  $E = V/s$  con linee di forza ortogonali alle piastre e dirette dalla piastra positiva a quella negativa, si veda la Fig.7.1. La carica  $Q$  è proporzionale alla tensione  $V$  ed il coefficiente di proporzionalità  $C = Q/V$  si chiama "capacità" del condensatore e si misura in farad  $[F] = [C/V]$ .

La capacità dipende dalle dimensioni lineari e dalla natura dell'isolante come è evidenziato nella eq.7.1a, dove  $\varepsilon$  si chiama "permettività" del materiale isolante e si misura in  $[F/m]$ . La permettività è anche il rapporto tra induzione dielettrica e forza elettrica, si veda la eq.7.1b.

$$7.1 \quad a) \quad C = Q/V = \varepsilon A/s \quad b) \quad Q/A = D = \varepsilon V/s = \varepsilon E$$

Variando la tensione applicata è possibile costruire il diagramma  $D=D(E)$  (caratteristica di elettrizzazione del materiale isolante) trovando, si veda la Fig.7.2, risultati analoghi a quelli individuati per i materiali magnetici.

Per i materiali a bassa conducibilità dielettrica la permettività è costante e poco diversa da quella dell'aria  $\varepsilon_0 = 8,859 pF/m$ . Il rapporto  $\varepsilon_r = \varepsilon/\varepsilon_0$  si chiama "permettività relativa" ed è dell'ordine di poche unità.

I materiali ad alta conducibilità dielettrica presentano permettività che varia in modo non lineare con la forza elettrica  $E$  (con valori massimi  $\varepsilon_M \approx 10^4 \varepsilon_0$  e valore minimo asintotico  $\varepsilon_m = \varepsilon_0$ ) e cicli di isteresi con proprietà (ad esempio perdite per isteresi) analoghe a quelle dei materiali magnetici teneri (questo giustifica il nome di materiali "ferroelettrici").

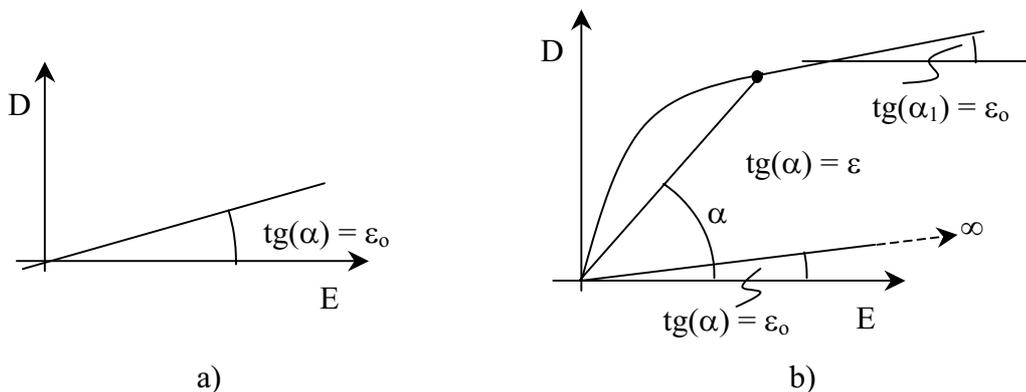


Fig.7.2 Caratteristica di elettrizzazione di un materiale normale a) e di un materiale ferroelettrico b).

- Gli strumenti di misura evidenziano anche una bassa conducibilità elettrica: la resistività corrispondente è dell'ordine di  $\rho_0 = 10^{10} - 10^{16} \Omega m$  e decresce con la temperatura assoluta con legge esponenziale:  $\rho(T) = \rho_0 e^{-kT}$ .

- Il più alto valore di  $E$  che il materiale dielettrico può sopportare senza dare luogo a scarica tra le piastre metalliche si chiama "rigidità dielettrica di massa". La rigidità è influenzata dalla forma degli elettrodi (decrece quanto più appuntita è la forma degli elettrodi), dal tempo di applicazione (decrece al crescere del tempo), dalla frequenza della tensione applicata (decrece con la frequenza), dalla temperatura (per i materiali solidi decrece con la temperatura) e dal numero di strati di materiale isolante a pari spessore totale di isolamento (cresce con il numero degli strati).

Se applichiamo una tensione alternata sinusoidale possiamo evidenziare con la strumentazione le seguenti proprietà.

- La corrente assorbita presenta, oltre alla componente in quadratura  $I_q$  (si veda la Fig.7.3) una piccola componente in fase  $I_f$  con la tensione: si chiama "fattore di dissipazione"  $tg\delta = I_f / I_q$ . La potenza dissipata nel condensatore è legata alla potenza reattiva del condensatore da  $P_p = VI_f = VI_q tg\delta = Q tg\delta$  con  $Q = VI_q = \omega CV^2$ .

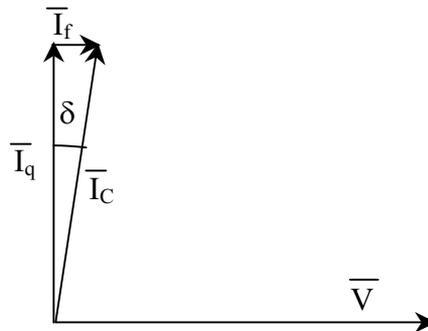


Fig.7.3 Fasori tensione e corrente di un condensatore reale.

- La permittività ed il fattore di dissipazione dipendono dalla frequenza e dalla temperatura (solitamente in modo crescente per il fattore di dissipazione): questa particolarità deve essere valutata nelle applicazioni industriali dei condensatori a frequenza variabile.

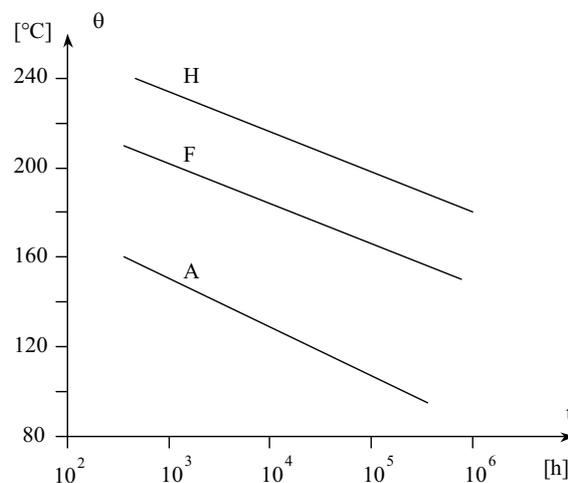


Fig. 7.4 Vita media probabile in funzione della temperatura.

L'esperienza, infine, mostra che i materiali isolanti per effetto del riscaldamento tendono col passare del tempo a perdere la consistenza meccanica divenendo così facilmente danneggiabili: la vita di un materiale dipende dal complesso delle vicende termiche cui è sottoposto. La relazione tra la vita media probabile  $t$  e la temperatura di funzionamento  $\theta$  (quando sia mantenuta costante) corrisponde indicativamente alla eq.7.2 e può essere rappresentata in scala semilogaritmica come è indicato nella Fig.7.4 per diverse categorie di materiali. Nella eq.7.2 il coefficiente  $m$  è tale che per  $(\theta_2 - \theta_1) = 10^\circ\text{C}$  si ha  $t_1 / t_2 \approx 2$  e cioè un aumento di temperatura di  $10^\circ\text{C}$  dimezza la vita media probabile del materiale isolante. Il fenomeno di invecchiamento del materiale isolante giustifica il fatto che i materiali siano catalogati (Norme CEI) in "classi di isolamento" (A,B,F,H,C si veda la Tab.7.1) per le quali viene indicata la temperatura continuativa massima ammissibile per una vita media probabile estesa alla naturale obsolescenza del macchinario elettrico (circa 15 anni).

$$7.2 \quad t_1 / t_2 = e^{m(\theta_2 - \theta_1)}$$

Tab.7.1 Proprietà delle diverse classi di materiale isolante solido

Classe	Materiale isolante	Sostanze leganti o di rivestimento	Sostanze impregnanti per il trattamento delle parti isolate
A-105°C	Carta impregnata o immersa in olio minerale. Elastomeri di policloroprene o di butadiene-acrilonitrile		Materiali elencati nelle classi superiori.
E-120°C	Smalti per fili a base di resine epossidiche, poliuretaniche o formalpoliviniliche.		Vernici a base di asfalti o di resine sintetiche ed olio. Poliesteri a catena trasversale.
	Stratificati a base di tela di cotone	Resinoidi fonolici e melamminici	Resinoidi epossidici. Materiali elencati nelle classi più elevate.
	Stratificati a base di carta		
	Tessuti di polietilentereftalato	Vernici alchidiche oleomodificate	
B-130°C	Fibra di vetro		Asfalti e resine sintetiche oleomodificate.
	Tessuto di fibra di vetro impregnato	Vernici a base di resine oleomodificate	Poliesteri reticolati. Resine epossidiche. Nel caso di severe sollecitazioni meccaniche: resine fenoliche non modificate. Materiali delle classi superiori.
	Agglomerati di mica con e senza supporto	Gommalacca. Miscele bituminose. Poliesteri reticolati. Resine alchidiche.	
	Stratificati a base di fibra di vetro. Pezzi stampati con supporti minerali	Resine melamminiche Resine fenoliche.	
F-155°C	Fibra di vetro		Resine alchidiche Resine epossidiche
	Tessuto di vetro impregnato Agglomerati di mica (con o senza supporto)	Resine alchidiche Resine epossidiche Poliesteri reticolati Resine poliuretaniche	Poliesteri reticolati Resine silicone-alchidiche Resine silicone-fenoliche Materiali di classi superiori.

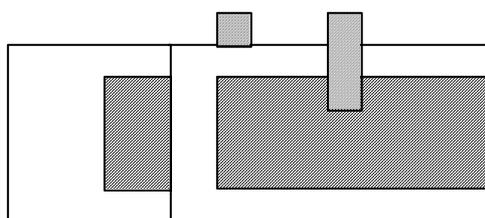
H-180°C	Fibra di vetro	Nessuna	Resine siliconiche
	Tessuto di vetro impregnato	Resine siliconiche Elastomeri di silicone	
	Agglomerati di mica (con o senza supporto). Stratificati tessuto di vetro	Resine siliconiche	
	Elastomeri di silicone	Nessuna	
>180°C	Mica Porcellana e materiali ceramici Vetro. Quarzo	Nessuna	Leganti inorganici
	Tessuto di vetro trattato Agglomerati di mica	Resine siliconiche ad elevata stabilità termica	Resine siliconiche ad elevata stabilità termica
	Politetrafluoroetilene	Nessuna	

L'insieme delle proprietà prima indicate mostra che, in relazione alla complessità dei comportamenti, la realizzazione di un sistema di isolamento per una parte in tensione costituisce da sola materia di studio autonoma.

## 8 Condensatori reali.

I condensatori reali sono impiegati nella energetica elettromeccanica in circuiti di filtraggio, per il rifasamento industriale, nei circuiti di protezione o di commutazione dei circuiti di conversione statica dell'energia elettrica che si avvalgono di valvole al silicio.

Nelle costruzioni più comuni le armature metalliche sono due fogli di alluminio, tratteggiati nella Fig.8.1a, con spessori dell'ordine di alcuni  $\mu m$  separati da due fogli di materiale isolante (carta per i condensatori di filtraggio industriale, polipropilene per i circuiti di conversione statica) con spessori dello stesso ordine di grandezza. Per la connessione ai morsetti esterni ai due fogli metallici sono appoggiate (o saldate) delle bandelle metalliche rettangolari.



a)

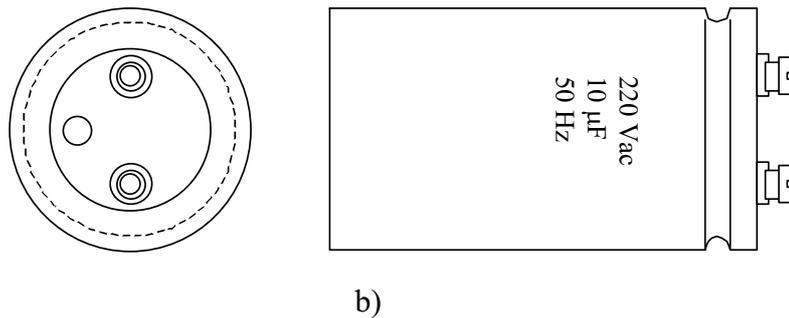


Fig.8.1 a) Struttura interna di un condensatore reale; b) aspetto esterno di un condensatore reale.

Il complesso viene avvolto come un sigaro (in modo da ottenere una forma cilindrica) ed infilato in una cassa metallica (si veda la Fig.8.1b), le bandelle vengono saldate ai due morsetti esterni ed il complesso viene essiccato (per eliminare ogni traccia di acqua che degraderebbe le proprietà isolanti) ed impregnato sotto vuoto di olio minerale (in modo da migliorare le capacità di trasmissione alle pareti esterne del calore dovuto alle perdite nelle parti metalliche interne e nel dielettrico).

Nella Fig.8.2 viene indicato un circuito equivalente atto ad evidenziare gli effetti della frequenza e le ragioni di perdita.  $R$  è la resistenza delle connessioni dai poli terminali alle armature metalliche;  $L$  l'induttanza della maglia costituita da un generatore direttamente collegato ai morsetti, dalle connessioni e dal percorso di chiusura della corrente all'interno del condensatore;  $C$  la capacità del condensatore piano costituito dai due fogli di materiale conduttore separato dallo spessore di isolante ed  $R_p$  la resistenza dovuta alla conduzione interna al materiale isolante. Con frequenze convenientemente basse con tensioni e correnti opportunamente contenute il condensatore reale approssima quello ideale.

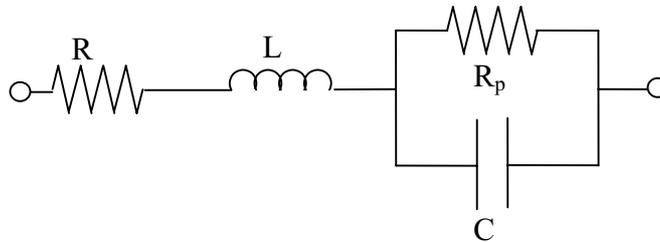


Fig.8.2 Circuito equivalente agli effetti esterni di un condensatore reale.

Dal circuito di Fig.8.2 si desume che anche una semplice macchina come un condensatore reale si presenta come un sistema complesso da costruire e da gestire non appena la frequenza sia variabile. In proposito il circuito equivalente mostra che il comportamento asintotico di un condensatore reale è di tipo induttivo.

# AUTO E MUTUE INDUTTANZE.

## 1 Generalità

Si consideri il circuito costituito da  $N_1$  spire di materiale conduttore, quadrate di lato  $l$  ortogonale al piano del foglio, tra loro sovrapposte con sezione trasversale mediana del tipo in Fig.1.1.

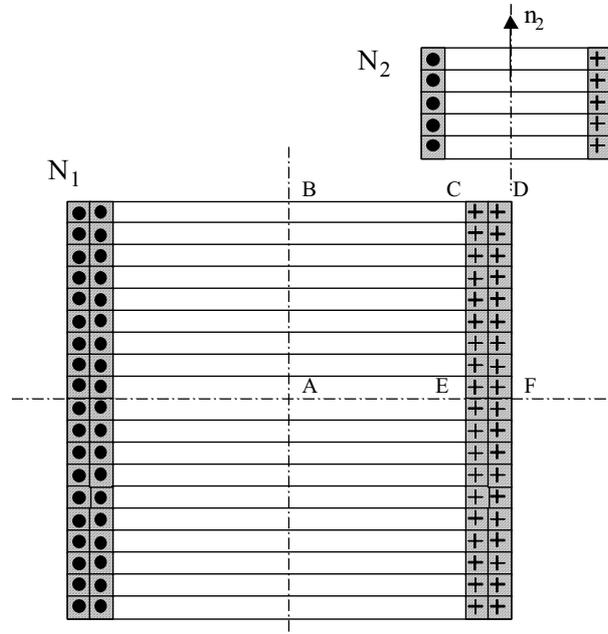


Fig. 1.1 Le due bobine oggetto di studio

Supponiamo che l'avvolgimento in questione sia posto in presenza di materiali magnetici a permeabilità costante.

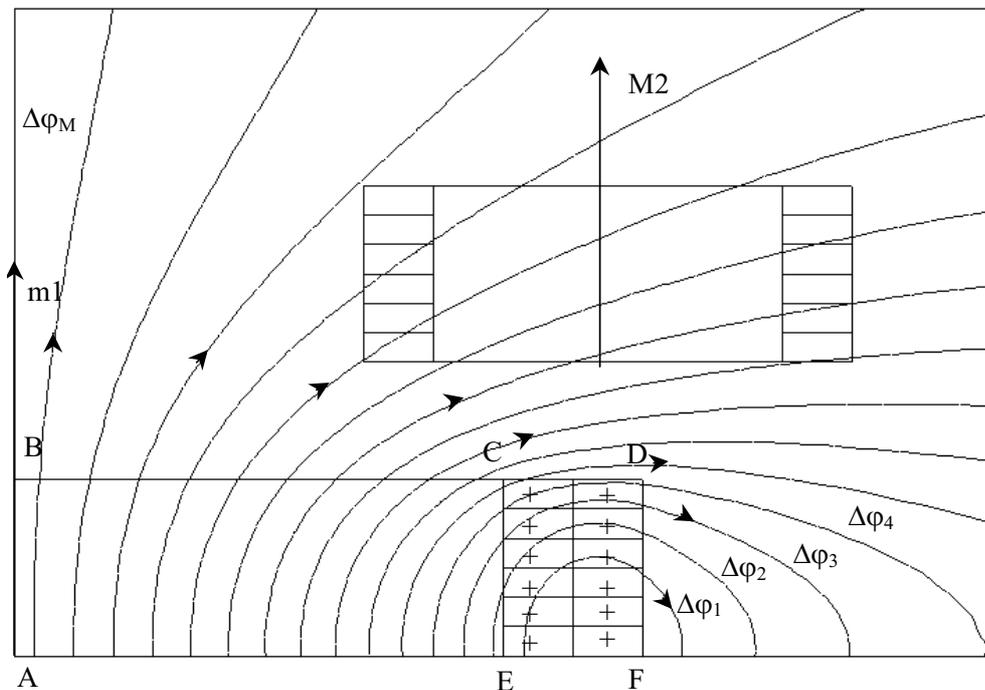


Fig. 1.2. Andamento dei tubi di flusso

Questo avvolgimento quando sia percorso da una corrente  $i_1$  (nel verso indicato in Fig.1.1) genera un campo magnetico le cui linee di forza possono essere valutate sperimentalmente o mediante integrazione delle equazioni di Maxwell del campo elettromagnetico. Ad esempio, per integrazione delle equazioni di Maxwell, si trova che le linee di forza del vettore  $\vec{B}$ , orientate secondo la regola del cavatappi, concatenano le correnti rispettando gli assi di simmetria del disegno con l'andamento evidenziato nella Fig.1.2 (il disegno, per ragioni di simmetria, è stato limitato ad un quarto della superficie di Fig.1.1).

Si considerino ora i tubi di flusso delimitati da due linee di forza successive e di altezza unitaria in direzione ortogonale al disegno: il flusso di tali tubi concatena in modo non uguale le diverse spire. Il flusso totale concatenato  $\psi_{11}$  con l'avvolgimento di  $N_1$  spire e generato dalla corrente  $i_1$  che le percorre (qui e nel seguito ci si riferirà nei calcoli alla unità di lunghezza della bobina in direzione ortogonale al foglio) si può calcolare come è indicato nella eq.1.1 e cioè come somma estesa alle  $N_1$  spire del flusso concatenato con la spira  $j$  dell'avvolgimento 1. Si noti che nella eq.1.1 il flusso  $\Delta\varphi_k$  del generico tubo sarà presente in numero pari alle spire che il tubo stesso concatena per modo che un modo equivalente di calcolo del flusso concatenato consiste nel valutare per ogni tubo il prodotto del flusso nel tubo  $\Delta\varphi_k$  per il numero di spire concatenate  $N_{k1}$  dell'avvolgimento 1 e nel sommare questi contributi tra di loro, si veda la eq.1.2 in cui la sommatoria è estesa agli  $M$  tubi di flusso presenti nel disegno del campo (il coefficiente moltiplicativo 2 ricorda che, appoggiandosi al disegno del campo di Fig.1.2, occorre considerare anche il contributo dei tubi a sinistra dell'asse di simmetria).

$$1.1 \quad \psi_{11} = \sum_1^{N_1} \psi_{j1}$$

$$1.2 \quad \psi_{11} = 2 \sum_k N_{k1} \Delta\varphi_k$$

Questo tipo di calcolo consente di raccordare il flusso concatenato alla corrente che percorre le spire dell'avvolgimento. Infatti il flusso in ogni tubo è correlato alla forza magnetomotrice  $N_{k1}i_1$  che lo genera dalla eq.1.3 in cui  $\Theta_k$  è la riluttanza del tubo di flusso. Sostituendo la eq.1.3 nella eq.1.2 si ottiene per il flusso concatenato la eq.1.4 che consente di dare alla nozione di autoinduttanza il significato fisico indicato nella eq.1.5 e di precisare la nozione di "permeanza equivalente agli effetti del flusso concatenato"  $\Lambda_{11}$ .

$$1.3 \quad \Delta\varphi_k = N_{k1}i_1 / \Theta_k$$

$$1.4 \quad \psi_{11} = i_1 \sum_k N_{k1}^2 / \Theta_k = L_{11}i_1$$

$$1.5 \quad L_{11} = \psi_{11} / i_1 = 2 \sum_k N_{k1}^2 / \Theta_k = N_1^2 \sum_k 2 \left( \frac{N_{k1}}{N_1} \right)^2 \frac{1}{\Theta_k} = N_1^2 \Lambda_{11}$$

Conviene osservare che l'autoinduttanza è un parametro (sempre positivo con i criteri di calcolo prima indicati) che dipende solo dalla geometria dell'avvolgimento e dalla permeabilità del mezzo in cui si svolge il campo.

La f.e.m. indotta nell'avvolgimento 1 per effetto delle correnti che lo percorrono si può quindi scrivere (come già indicato in precedenza) nella forma corrispondente alla eq.1.6.

$$1.6 \quad e_{11} = \frac{d\psi_{11}}{dt} = L_{11} \frac{di_1}{dt}$$

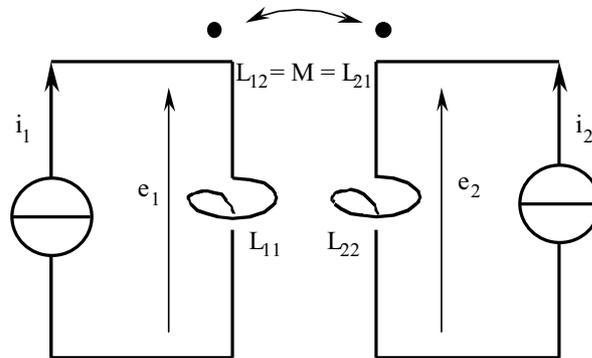


Fig.1.3. Circuito per lo studio del muto induttore

Supponiamo a questo punto di immergere un avvolgimento con numero di spire  $N_2$  nel campo magnetico generato dal precedente avvolgimento e conveniamo di misurare le correnti nel secondo avvolgimento positivamente come è indicato in Fig.1.1, conveniamo ancora che la normale alla superficie definita dal bordo della singola spira sia orientata, si veda  $\vec{n}_2$  in Fig.1.1, come avanza la punta di un cavatappi che ruota secondo il verso convenzionale positivo della corrente e misuriamo i flussi concatenati con la singola spira assumendo il verso della normale ora indicata. Avvalendoci del disegno di Fig.1.2 il calcolo del flusso  $\psi_{21}$ , concatenato con la bobina 2 e generato dalla corrente nella bobina 1, si conduce come è indicato nella eq.1.7 e cioè come sommatoria estesa alle  $N_2$  spire del flusso concatenato con la singola spira  $j$  dell'avvolgimento 2.

Anche in questo caso possiamo osservare che nella sommatoria il generico flusso  $\Delta\phi_k$  del tubo  $k$  compare tante volte quante sono le spire del secondo avvolgimento  $N_{k2}$  abbracciate dal tubo stesso. Ne consegue che un secondo modo di calcolare il flusso concatenato  $\psi_{21}$  è quello indicato nella prima eguaglianza della eq.1.8 dove la sommatoria è estesa ai tubi di flusso generati dal primo avvolgimento che avvolgono almeno una spira del secondo avvolgimento. Se ora si considera il legame tra il flusso in un tubo e la forza magnetomotrice che agisce su tale tubo definito dalla riluttanza del tubo si perviene alla seconda eguaglianza indicata nella eq.1.8 (in cui  $N_{k1}$  è il numero di spire del primo avvolgimento concatenate con il flusso  $\Delta\phi_k$ ) e questa consente di definire la mutua induttanza  $L_{21}$  come è indicato nella terza eguaglianza della eq.1.8.

$$1.7 \quad \psi_{21} = \sum_1^{N_2} \psi_{j2}$$

$$1.8 \quad \psi_{21} = \sum_k N_{k2} \Delta\phi_k = \sum_k N_{k2} N_{k1} i_1 / \Theta_k = L_{21} i_1$$

$$1.9 \quad L_{21} = \frac{\psi_{21}}{i_1} = N_1 N_2 \sum_k \frac{N_{k1}}{N_1} \frac{N_{k2}}{N_2} \frac{1}{\Theta_k} = N_1 N_2 \Lambda_{21}$$

La mutua induttanza  $L_{21}$  si può elaborare come è indicato nella eq.1.9 in cui si è introdotta la "permeanza equivalente agli effetti della mutua induttanza"  $\Lambda_{21}$ . Anche la mutua induttanza è un parametro che dipende solo dalla geometria dei due avvolgimenti e dalla permeabilità del mezzo in cui si svolge il campo magnetico. Tale parametro può anche esser negativo: se infatti si fosse scelta per il secondo avvolgimento una convenzione di segno delle correnti (e quindi per la normale  $\vec{n}_2$  alla superficie di ogni spira del secondo avvolgimento) opposta a quella indicata in Fig.1.1 allora i flussi  $\Delta\phi_k$  sarebbero stati negativi ed altrettanto sarebbe avvenuto per  $\psi_{21}$ .

La f.e.m. indotta dal campo generato dalla corrente  $i_1$  nell'avvolgimento 2 si valuta a questo punto come è indicato nella eq.1.10.

$$1.10 \quad e_{21} = \frac{d\psi_{21}}{dt} = L_{21} \frac{di_1}{dt}$$

Tutti i ragionamenti ora fatti nella ipotesi di alimentare l'avvolgimento 1 con la corrente  $i_1$  lasciando aperto l'avvolgimento 2 si possono ripetere alimentando l'avvolgimento 2 con una corrente  $i_2$  e lasciando aperto l'avvolgimento 1. In questo modo possiamo calcolare l'autoinduttanza  $L_{22}$  e la mutua induttanza  $L_{12}$ . Dal momento che il mezzo in cui si svolge il campo è normale vale la sovrapposizione degli effetti per modo che quando entrambi gli avvolgimenti fossero alimentati i flussi concatenati totali si possono calcolare in funzione delle correnti come è indicato nelle prime eguaglianze riportate nella eq.1.11 (correlativamente le correnti si possono esprimere in funzione dei flussi concatenati come è indicato nelle seconde eguaglianze riportate nella eq.1.11) e le f.e.m. indotte si possono poi valutare come è indicato nella eq.1.12.

$$1.11 \quad \begin{aligned} \psi_1 &= L_{11}i_1 + L_{12}i_2 & i_1 &= (L_2\psi_1 - L_{21}\psi_2)/H & H &= (L_1L_2 - L_{12}L_{21}) \\ \psi_2 &= L_{21}i_1 + L_{22}i_2 & i_2 &= (L_1\psi_2 - L_{12}\psi_1)/H \end{aligned}$$

$$1.12 \quad \begin{aligned} e_1 &= \frac{d\psi_1}{dt} = e_{11} + e_{12} = L_{11} \frac{di_1}{dt} + L_{12} \frac{di_2}{dt} \\ e_2 &= \frac{d\psi_2}{dt} = e_{21} + e_{22} = L_{21} \frac{di_1}{dt} + L_{22} \frac{di_2}{dt} \end{aligned}$$

Le equazioni del mutuo induttore possono esser visualizzate come è indicato in Fig.1.3 in cui si è evidenziato che il cambiamento delle convenzioni di misura della corrente a uno qualsiasi dei due avvolgimenti interagenti comporta il cambiamento di segno della f.e.m. di mutua induttanza (la f.e.m. di mutua induttanza è negativa se la corrente viene misurata uscente ad uno dei due morsetti contrassegnati del mutuo induttore).

Il mutuo induttore gode delle seguenti proprietà:

- $L_{12} = L_{21} = M$  "reciprocità delle mutue induttanze";
- l'energia immagazzinata nel campo magnetico vale  $W_m = \frac{1}{2}L_{11}i_1^2 + \frac{1}{2}L_{22}i_2^2 + Mi_1i_2$
- $H = L_{11}L_{22} - M^2 \geq 0$  il prodotto delle autoinduttanze è maggiore o al limite uguale al quadrato della mutua induttanza.

La prima proprietà si dimostra osservando che il mutuo induttore stabilisce un legame univoco tra i flussi concatenati  $\psi_1, \psi_2$  e le correnti  $i_1, i_2$  (per modo che ciascuna di queste coppie di variabili si può esprimere in funzione dell'altra, si veda la eq.1.11) e che l'energia elettrica elementare  $dW_m$  entrante ai morsetti è accumulata nel campo sotto forma di energia magnetica. Tale energia elementare, quando la funzione  $W_m$  sia intesa come funzione dei due flussi concatenati  $\psi_1, \psi_2$ , si deduce dalla eq.1.12 come è indicato nella eq.1.13.

$$1.13 \quad dW_m(\psi_1, \psi_2) = e_1 i_1 dt + e_2 i_2 dt = i_1 d\psi_1 + i_2 d\psi_2 = \frac{\partial W_m}{\partial \psi_1} d\psi_1 + \frac{\partial W_m}{\partial \psi_2} d\psi_2$$

Dalla eq.1.12 si deduce che le correnti, intese come funzioni dei due flussi concatenati, rispondono alla eq.1.14.

$$1.14 \quad i_1 = \frac{\partial W_m}{\partial \psi_1} \quad i_2 = \frac{\partial W_m}{\partial \psi_2}$$

Dal momento che la funzione energia è continua e derivabile deve valere la proprietà indicata nella eq.1.15. e da questa, osservando le seconde uguaglianze presentate nella eq.1.11, si ricava la eq.1.16 che dimostra la proprietà di reciprocità.

$$1.15 \quad \frac{\partial i_1}{\partial \psi_2} = \frac{\partial^2 W_m}{\partial \psi_2 \partial \psi_1} = \frac{\partial^2 W_m}{\partial \psi_1 \partial \psi_2} = \frac{\partial i_2}{\partial \psi_1}$$

$$1.16 \quad \frac{\partial i_1}{\partial \psi_2} = -\frac{L_{21}}{H} = \frac{\partial i_2}{\partial \psi_1} = -\frac{L_{12}}{H}$$

E' possibile a questo punto calcolare il differenziale dell'energia immagazzinata nel campo magnetico del mutuo induttore a partire dalle eq.1.11 e eq.1.12 come è indicato nella eq.1.17, da cui si deduce la funzione energia indicata nella eq.1.18.

$$1.17 \quad \begin{aligned} dW_m &= i_1 d\psi_1 + i_2 d\psi_2 = i_1 (L_{11} di_1 + M di_2) + i_2 (M di_1 + L_{22} di_2) = \\ &= d\left(\frac{1}{2}L_{11}i_1^2 + \frac{1}{2}L_{22}i_2^2 + Mi_1i_2\right) \end{aligned}$$

$$1.18 \quad W_m = \frac{1}{2}L_{11}i_1^2 + \frac{1}{2}L_{22}i_2^2 + Mi_1i_2$$

Per quanto riguarda infine il legame tra le autoinduttanze e la mutua induttanza questo si deduce dal fatto che l'energia  $W_m$  è per sua natura una funzione positiva o al più nulla per

qualsiasi coppia di valori di correnti  $i_1, i_2$ . Ora l'energia indicata nella eq.1.18 si può anche descrivere con la funzione presentata nella eq.1.19.

$$1.19 \quad W_m = \frac{1}{2}L_{11}\left(i_1 + \frac{M}{L_{11}}i_2\right)^2 + \frac{1}{2}\left(L_{22} - \frac{M^2}{L_{11}}\right)i_2^2$$

Dal momento che il primo termine della eq.1.19 è sempre positivo o nullo altrettanto deve valere per il secondo termine, quindi deve esser soddisfatta la condizione indicata nella eq.1.20. La proprietà ora indicata si esprime dicendo che il "coefficiente di accoppiamento"  $h$  è minore o al limite uguale all'unità.

$$1.20 \quad L_{11}L_{22} - M^2 \geq 0 \quad h = \sqrt{\frac{M^2}{L_{11}L_{22}}} \leq 1$$

# CALCOLO DELLE FORZE E DEGLI SFORZI.

## 1 Forze e sforzi nel campo magnetico

L'esperienza mostra che al termine del processo di magnetizzazione, che comporta lo stabilirsi di un flusso  $\varphi$  costante nel nucleo dell'elettromagnete di Fig.1, si manifesta una forza di attrazione costante  $F$  tra le due ancore dell'elettromagnete. Tale forza è calcolabile agevolmente con riferimento alla ipotesi di alimentazione indicata in Fig.1 in cui si è supposto che l'ancora superiore sia fissa e che quella inferiore sia mobile ma tenuta ferma da una forza esterna  $F$ .

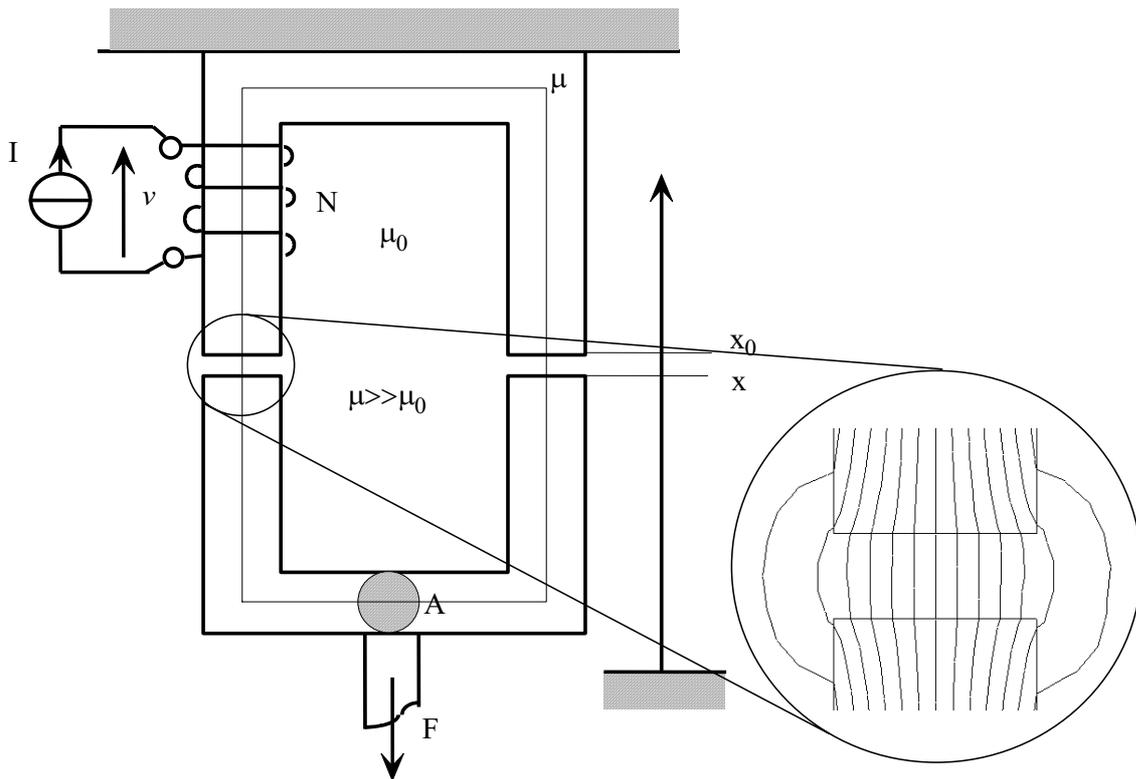


Fig. 1.1. Calcolo della forza nel campo magnetico

Supponiamo infatti di dare uno spostamento  $dx$  nel senso di avvicinare le due ancore in un tempo  $dt$ . A tale deformazione si accompagna una variazione della riluttanza del circuito magnetico, una variazione  $d\varphi$  del flusso  $\varphi$  nel circuito magnetico (essendo imposta la forza magnetomotrice  $NI$ ), una variazione del flusso concatenato  $d\varphi_c = Nd\varphi$  e quindi una forza elettromotrice  $e = d\varphi_c / dt$  legata alla corrente ed alla tensione ai morsetti del generatore dalla eq.1.1).

$$1.1 \quad v = RI + d\varphi_c / dt = RI + d(LI) / dt = RI + IdL / dt$$

Le trasformazioni energetiche implicite nella eq.1.1 si evidenziano moltiplicando primo e secondo membro per  $Idt$  come è indicato nella eq.1.2: l'energia elettrica elementare entrante  $vIdt$  è pari alla somma del lavoro perduto  $RI^2dt$  e del lavoro ceduto ai sistemi interagenti con il circuito elettrico  $Id\varphi_c = IdL / dt$ .

$$1.2 \quad vIdt = RI^2 dt + Id\varphi_c = RI^2 dt + I^2 dL$$

D'altra parte il principio di conservazione dell'energia dice che, eq.1.3, il lavoro elementare ceduto ai sistemi fisici interagenti con il circuito elettrico eguaglia la somma dell'incremento di energia (magnetica) accumulata nel sistema (campo elettromagnetico)  $dW_m$  e del lavoro meccanico elementare  $Fdx$  ceduto alla porta meccanica.

$$1.3 \quad Id\varphi_c = I^2 dL = dW_m + Fdx$$

Dal momento allora che  $W_m = I\varphi_c / 2 = LI^2 / 2$  e che  $dW_m = Id(\varphi_c / 2) = I^2 d(L / 2)$  si ricava per la forza  $F$  l'espressione in eq.1.4.

$$1.4 \quad F = \frac{Id\varphi_c - dW_m}{dx} = \frac{dW_m}{dx} \Big|_{I=\text{cost}} = \frac{I}{2} \frac{d\varphi_c}{dx} = \frac{NI}{2} \frac{d\varphi}{dx}$$

La legge dei circuiti magnetici indica poi che, trascurata la riluttanza dei tronchi in ferro  $\theta_{fe}$  rispetto a quella dei tronchi in aria  $\theta_o$ , vale l'eq.1.5 dove  $A$  è la sezione del circuito magnetico e  $2(x_o - x)$  il traferro. Ne consegue, per la eq.1.4, che la forza si può calcolare come indicato nella eq.1.6

$$1.5 \quad \theta_o \varphi = NI \quad \varphi = \mu_o NIA / 2(x_o - x)$$

$$1.6 \quad F = \mu_o \frac{(NI)^2}{4(x_o - x)^2} A$$

E' possibile ora introdurre nella eq.1.6 la grandezza specifica  $H_o$  (forza magnetica al traferro) osservando che avendo trascurato la riluttanza dei tronchi in ferro vale la eq.1.7 (dove la linea chiusa di integrazione è l'asse del circuito magnetico tratteggiato in Fig.1.1 e quindi si deduce per  $H_o$  l'espressione indicata nella eq.1.8. Sostituendo tale espressione nella eq.1.6 si ricava infine l'eq.1.9 che è di validità generale: lo sforzo di trazione  $\sigma$   $[N/m^2]$  che si manifesta sul ferro posto alla superficie di separazione tra ferro e traferro (di area  $2A$ ) è pari all'energia accumulata  $W'_m$   $[J/m^3]$  per unità di volume del traferro.

$$1.7 \quad \oint \vec{H} \times d\vec{l} = 2H_o(x_o - x) = NI$$

$$1.8 \quad H_o = \frac{NI}{2(x_o - x)}$$

$$1.9 \quad \sigma = \frac{F}{2A} = \mu_o \frac{H^2}{2} = \frac{BH}{2} = \frac{B^2}{2\mu_o}$$

Come ordine di grandezza i valori massimi di  $B$  che riusciamo ad ottenere nei circuiti ferromagnetici è dell'ordine di  $1T$  (per effetto della saturazione dei tronchi in ferro), ne

conseguo che, essendo  $\mu_o = 4\pi 10^{-7} H/m$ , gli sforzi di trazione (sulle superfici in ferro affacciate al traferro) che si manifestano sono dell'ordine di  $\sigma = 400kN/m^2$ .

In generale conviene ricordare che ogni tubo di flusso del campo magnetico si comporta (M.Faraday-J.K.Maxwell) come un elastico in stato di trazione con sforzo di trazione longitudinale e sforzi di compressione laterale (trasmessi dagli elastici contigui) pari all'energia per unita di volume. Nello spazio occupato da un campo magnetico esiste quindi una membrana invisibile capace di trasmettere forze e sforzi ai sostegni del campo tra loro distanziati.

## 2 Forze e sforzi nel campo elettrico

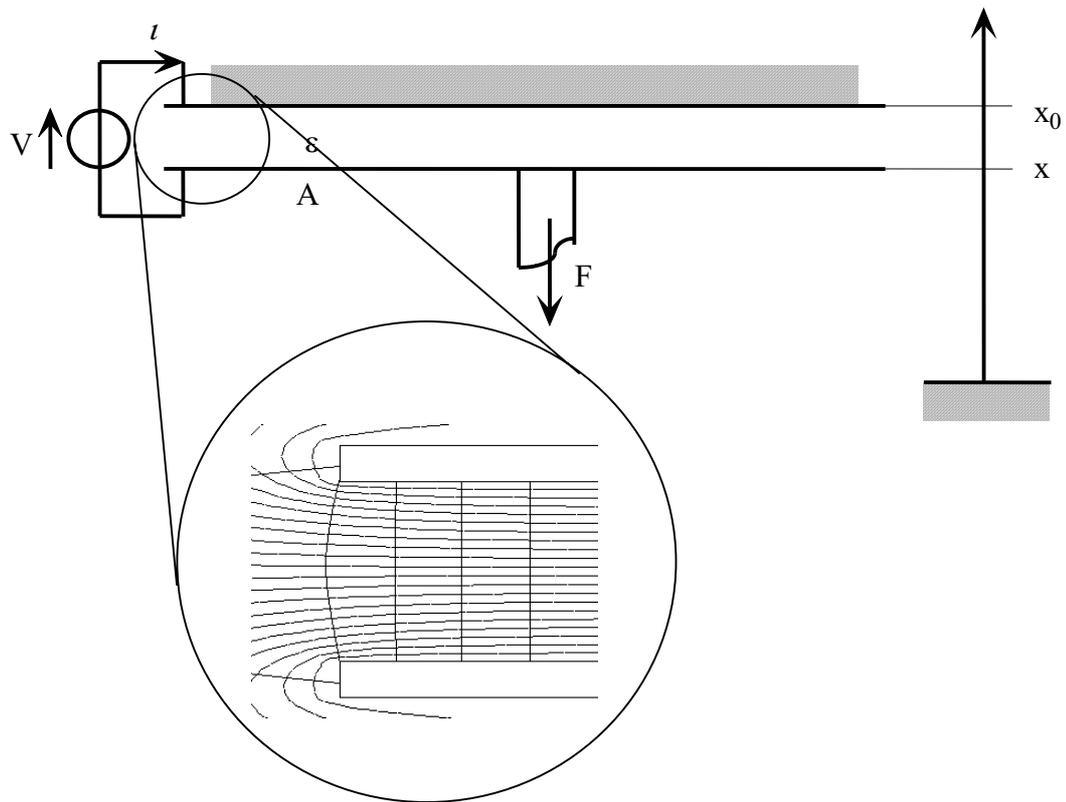


Fig. 2.1 Calcolo della forza nel campo elettrico

Le considerazioni che sono state fatte per il magnete generato dalle correnti di Fig.1.1 si possono ripetere per il magnete generato dalle tensioni di Fig.2.1 (in tutte le manifestazioni induttore e condensatore sono tra loro duali ed il duale di energia e di pressione è ancora energia e pressione). Si nota anche in questo caso che, tenendo ferma l'armatura superiore, quella inferiore è soggetta ad una forza  $F$  che tende ad avvicinarla a quella superiore. Il calcolo della forza si esegue con le stesse modalità viste per il caso di Fig.1 pur di sostituire ad ogni parola quella duale (energia magnetica/energia elettrica; induttanza/capacità; tensione magnetica/tensione elettrica; forza magnetica/forza elettrica; induzione magnetica/induzione dielettrica). Ne consegue che nel campo elettrico gli elastici di Faraday sono sottoposti allo sforzo di trazione indicato nella eq.2.1.

$$2.1 \quad \sigma = \frac{\epsilon E^2}{2} = \frac{DE}{2} = \frac{D^2}{2\epsilon}$$

Gli sforzi realizzabili nel campo elettrico dipendono dalle limitazioni imposte dai materiali. In particolare occorre limitare la forza elettrica  $E$  allo scopo di evitare scariche elettriche tra gli elettrodi distruttive del materiale isolante interposto tra gli elettrodi stessi (è limitata la rigidità dielettrica degli isolanti  $E_M$ ). Come ordine di grandezza  $E_M \approx 10^7 V/m$ ; essendo poi  $\varepsilon \approx 10^{-11} F/m$ , ne consegue che gli sforzi realizzabili nel campo elettrico sono dell'ordine di  $\sigma \approx 0,5 kN/m^2$ , nettamente inferiori al caso del campo elettromagnetico. Per questo motivo le macchine elettriche verranno impostate nel senso di sfruttare le forze e gli sforzi che si manifestano quando si generino degli elettromagneti.

# I TRASFORMATORI

## 1 La nascita del trasformatore

Nella pagina del diario di laboratorio del 29 Agosto 1831 M.Faraday riporta il disegno di una macchina da lui costruita avvolgendo due circuiti elettrici A,B tra di loro isolati su un nucleo toroidale realizzato con filo di ferro. Egli annota che, al momento in cui si alimenta il circuito A con una batteria, nel circuito B, chiuso su un galvanometro, si manifesta corrente. Dal momento che i due circuiti hanno in comune solo il campo magnetico la conclusione è che il magnetismo genera elettricità, così come l'elettricità genera magnetismo. Il primo trasformatore nasceva così presso il laboratori della Royal Institution come pietra di fondazione dell'elettromagnetismo applicato (elettrotecnica) all'utilità umana.

## 2 Trasformatori ed autotrasformatori ideali

Definiamo “trasformatore ideale” una macchina elettrica che consente di modificare i fattori (tensione e corrente) della potenza elettrica istantanea senza alterarne il prodotto. La definizione prospetta un doppio bipolo, si veda la Fig. 2.1, per il quale valgono le relazioni eq.2.1 dove K prende il nome di rapporto di trasformazione.

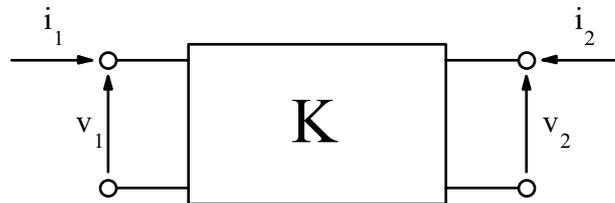


Fig. 2.1. Il trasformatore ideale.

$$2.1 \quad v_1 i_1 + v_2 i_2 = 0 \quad \frac{v_1}{v_2} = K = -\frac{i_2}{i_1}$$

Il risultato indicato dalla eq.2.1 è di fondamentale interesse industriale perché, al momento della utilizzazione, conviene, per ragioni di sicurezza, che l'energia sia disponibile ad un livello convenientemente basso di tensione, mentre, quando occorra trasferirla a distanza, è opportuno, al fine di contenere i costi di costruzione e di gestione, le perdite e le variazioni di tensione, che il livello della tensione sia opportunamente elevato. Vediamo allora come realizzare tale dispositivo ideale (non è possibile, infatti, eseguire alcuna trasformazione energetica senza perdite) perché questo tipo di analisi è di guida quando occorra approssimare l'ideale con dispositivi tecnicamente fattibili.

Supponiamo di disporre di un materiale magnetico che: i) non sia sede di perdite in presenza di un campo magnetico variabile nel tempo e ii) presenti una permeabilità al limite infinita. Sagomiamo questo materiale nel senso di costituire un nucleo toroidale attorno al quale disponiamo un avvolgimento, uniformemente distribuito, di numero di spire  $N_1$  realizzato con un materiale conduttore di resistività al limite nulla, si veda la Fig. 2.2.

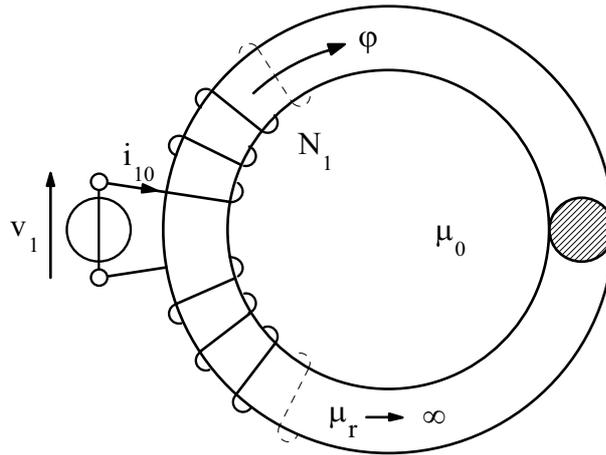


Fig. 2.2. La struttura toroidale proposta da Faraday.

Se ora alimentiamo tale avvolgimento con un generatore ideale di tensione  $v_1$  variabile nel tempo, in base alla legge dell'induzione elettromagnetica l'avvolgimento concatenerà un flusso  $\psi_1$  legato alla tensione dalla relazione eq.2.2a. Dal momento poi che il campo magnetico all'esterno del nucleo è nullo, indicato con  $\phi$  il flusso nel nucleo (che risulta concatenato con ciascuna delle  $N_1$  spire) si ha che  $\psi_1 = N_1\phi$  per modo che il flusso  $\phi$  e la tensione sono legati dalla eq.2.2b). L'avvolgimento che, grazie al generatore ideale, impone il flusso  $\phi$  nel nucleo viene denominato "primario".

$$2.2 \quad a) \quad v_1 = p\psi_1 \quad b) \quad \phi = \phi_0 + \int_0^t \frac{v_1}{N_1} dt$$

Si noti che il campo magnetico può esistere solo all'interno del nucleo perché se esistesse un tubo che fuoriesce, si veda il tubo a\* nella Fig. 2.3, allora per ragioni di simmetria, dovrebbero esistere anche i tubi contigui con lo stesso valore del flusso per modo che, componendo tali tubi, si perverrebbe all'assurdo che esisterebbe un tubo di flusso non concatenato con l'avvolgimento che genera il campo, quello tratteggiato nella stessa figura.

La forza magnetomotrice che il primario impone al circuito magnetico è (al limite) nulla perché la riluttanza  $\Theta_n$  del tubo di flusso delimitato dal nucleo è (al limite) nulla (e la permeanza  $\Lambda_n$  corrispondente è infinita), si veda la eq.2. 3.

$$2.3 \quad N_1 i_{10} = \Theta_n \phi = 0 \quad \Theta_n = 1/\Lambda_n = \frac{2\pi r}{\mu A_n}$$

Se ora avvolgiamo in modo uniforme e con lo stesso senso di avvolgimento attorno al nucleo un "secondario" di numero di spire  $N_2$  (nella Fig. 2.4 per comodità grafica i due avvolgimenti sono stati disegnati come concentrati) ai morsetti di tale avvolgimento sarà misurabile, con le convenzioni indicate in figura, la tensione  $v_2$  definita dalla eq.2.4 perché, qualunque sia il carico collegato al secondario, il flusso  $\phi$  permane definito dalla eq.2.2 (è imposto da un generatore ideale).

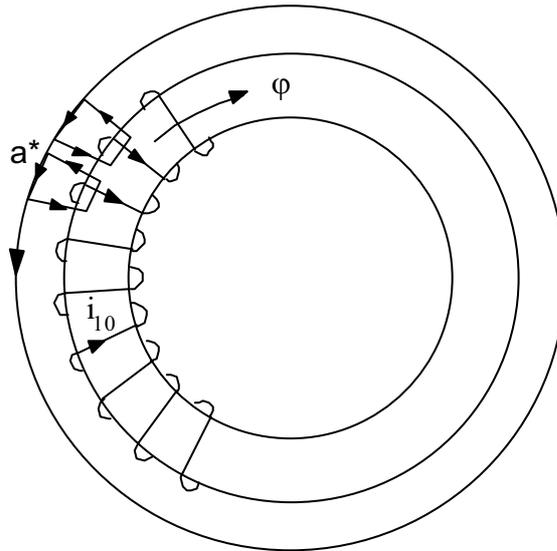


Fig. 2.3. Il contenimento del campo magnetico all'interno del nucleo toroidale.

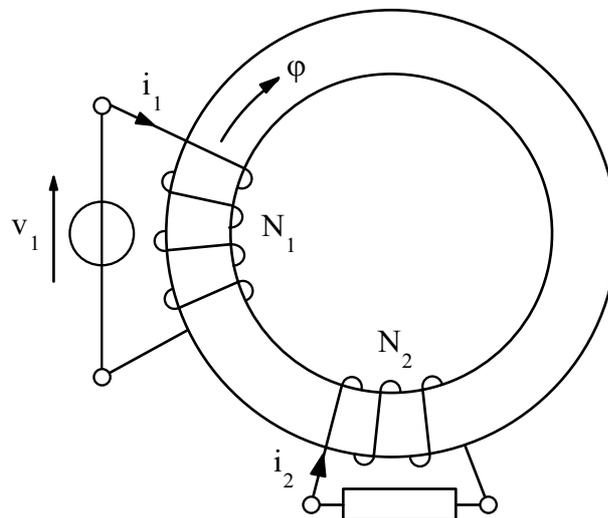


Fig. 2.4. I due avvolgimenti del trasformatore di Faraday.

Ne consegue che la forza magnetomotrice complessiva che agisce sul nucleo deve avere il valore indicato nella eq. 2.5a e che le correnti sono legate tra di loro dall'inverso del rapporto spire, si veda la eq. 2.5b. Il segno negativo nella eq. 2.5b consegue dall'aver utilizzato anche per il secondario la convenzione di misura degli utilizzatori (si veda in proposito il doppio bipolo della Fig. 2.1), mentre utilizzando la convenzione degli utilizzatori il segno sarebbe stato positivo.

$$2.4 \quad \frac{v_1}{v_2} = \frac{N_1}{N_2}$$

$$2.5 \quad \text{a) } N_1 i_1 + N_2 i_2 = N_1 i_{10} = \varphi / \Lambda_n = 0 \quad \text{b) } \frac{i_1}{i_2} = -\frac{N_2}{N_1}$$

Complessivamente allora la eq.2.4 e la eq.2.5 comportano che i fattori della potenza rispettino le relazioni eq.2.1 e cioè che la potenza elettrica venga trasmessa senza perdite ma che i fattori di tale potenza, tensione e corrente, siano modificati in modo direttamente ed inversamente proporzionale al rapporto spire  $K = N_1 / N_2$ . Il dispositivo così realizzato (con la struttura indicata da Faraday), che risponde quindi alla definizione di trasformatore ideale, viene rappresentato nei circuiti equivalenti costituiti da bipoli ideali come è indicato in Fig. 2.5.

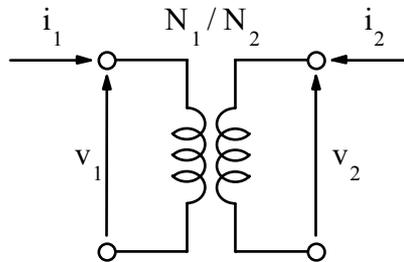


Fig. 2.5 Il simbolo di trasformatore ideale.

Il doppio bipolo così costruito è una pura astrazione come si deduce dal fatto che le perdite sono nulle e che le prestazioni non sono influenzate dalle dimensioni né del nucleo né del conduttore con cui sono realizzati gli avvolgimenti, né dalla posizione relativa di questi. Esso gode della proprietà che un qualsiasi bipolo ideale collegato al secondario può essere “riferito ai dati di avvolgimento del primario” tramite il quadrato del rapporto di trasformazione come è messo in evidenza nella eq.2.6 e nella Fig. 2.6a con riferimento al caso di carico resistivo. E’ possibile, viceversa, riferire un bipolo ideale collegato al primario ai dati di avvolgimento del secondario come è indicato nella Fig. 2.6b.

$$2.6 \quad v_1 = K v_2 = -K R_2 i_2 = (K^2 R_2) i_1 = R_2' i_1$$

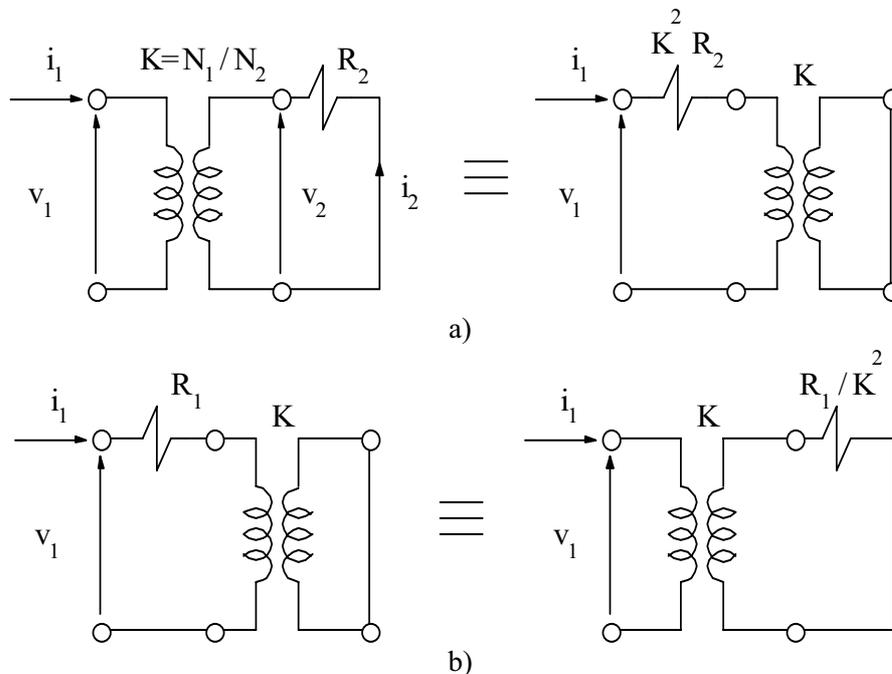


Fig. 2.6. Il trasferimento di una impedenza dal secondario al primario a) e viceversa b).

Si noti che il funzionamento agli effetti esterni del dispositivo così realizzato può essere studiato, nella ipotesi di permeabilità finita, tramite le equazioni di un mutuo induttore i cui parametri siano quelli indicati nella eq.2.7 (con le ipotesi adottate il coefficiente di accoppiamento  $k$  è unitario e con  $N_1 \neq N_2$  uno dei parametri  $L_1 - M$  o  $L_2 - M$  è negativo). Tali equazioni sono rappresentabili tramite il circuito equivalente di Fig. 2.7.

$$v_1 = (L_1 - M)pi_1 + Mp(i_1 + i_2)$$

$$2.7 \quad v_2 = Mp(i_1 + i_2) + (L_2 - M)pi_2$$

$$L_1 = N_1^2 \Lambda_n \quad L_2 = N_2^2 \Lambda_n \quad M = N_1 N_2 \Lambda_n \quad k = \sqrt{M^2 / (L_1 L_2)} = 1$$

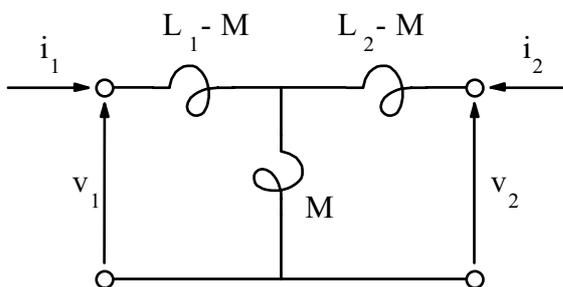


Fig. 2.7. Il circuito equivalente del mutuo induttore.

### 3 Trasformatori e mutui induttori

Il trasformatore cui siamo pervenuti nel precedente paragrafo è criticabile per il fatto che la sua struttura non risponde a criteri costruttivi industriali. In effetti un nucleo toroidale (in filo di ferro come quello proposto da Faraday) non è di agevole fattura e richiede che gli avvolgimenti vengano intessuti sul nucleo stesso, mentre sarebbe comodo che il nucleo e gli avvolgimenti potessero essere separatamente confezionati ed assemblati come pezzi di un meccano. A questa esigenza di funzionalità corrispondono le strutture di nucleo e di avvolgimento comunemente adottati.

Una prima struttura è quella di Fig. 3.1: il nucleo è composto da due “tazze” separabili (realizzate tipicamente con polveri di materiale magnetico opportunamente sinterizzate), che contengono rispettivamente il primario ed il secondario sotto forma di bobine avvolte su opportuno sostegno; le tazze sono tenute assieme da opportuni tiranti o leganti.

Altre forme costruttive sono quelle indicate in Fig. 3.2 (nucleo a mantello) ed in Fig. 3.3 (nucleo a colonne). In entrambi i casi il nucleo è costituito da lamierini di materiale magnetico opportunamente sagomati ed impacchettati, vincolati tra di loro mediante tiranti. Le parti (colonne verticali e gioghi trasversali) sono opportunamente smontabili in modo da consentire il posizionamento degli avvolgimenti.

Gli avvolgimenti sono separatamente costruiti nelle forme indicate nella Fig. 3.4 e cioè a “bobine concentriche” (tipi a-b) o a “bobine alternate” (tipo c) e per i nuclei a colonna sono disposti su entrambe le colonne. Tipicamente l’avvolgimento a tensione più bassa (indicato con 1 nelle figure, mentre 2 designa l’avvolgimento a tensione più elevata) è quello disposto più vicino al nucleo (eventualmente sdoppiato come nella Fig. 3.4b) allo scopo di limitare gli ingombri dell’isolamento.

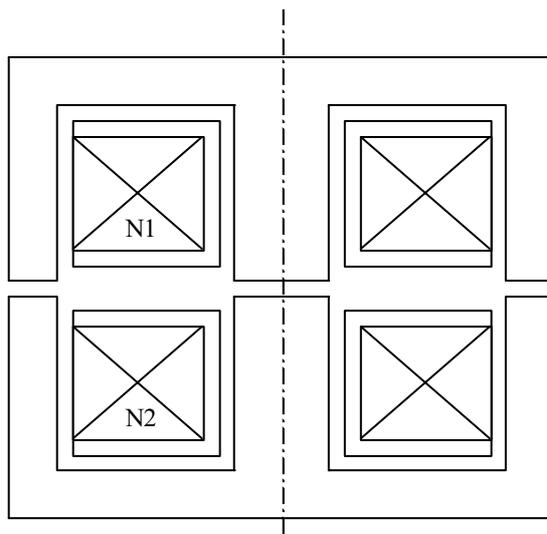


Fig.3.1. Sezione di un trasformatore a tazza.

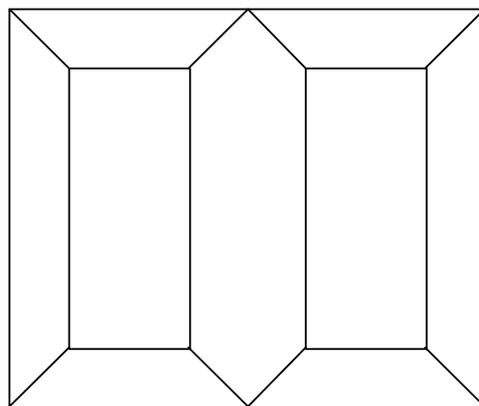


Fig. 3.2. Trasformatore con nucleo a mantello.

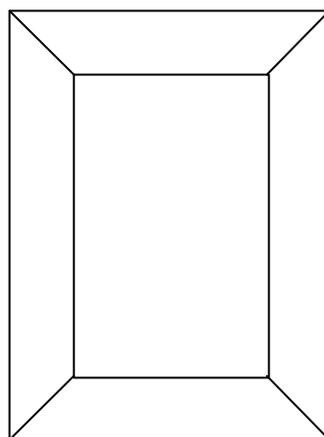


Fig. 3.3. Trasformatore con nucleo a colonne.

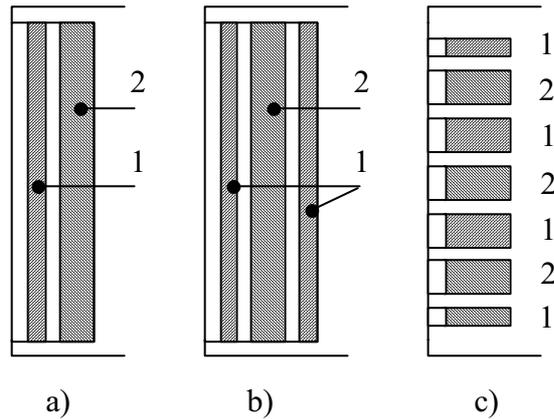


Fig. 3.4. Avvolgimenti a bobine concentriche a), b) ed a bobine alternate c).

Le esigenze funzionali della costruzione ora evidenziate comportano che non vi sia un avvolgimento intessuto sul nucleo e che non vi sia simmetria costruttiva dal punto di vista della posizione degli avvolgimenti rispetto al nucleo. Il campo magnetico, quindi, non è rigorosamente confinato nel nucleo. D'altra parte se la tensione che alimenta il primario è tale da non portare in forte saturazione il materiale magnetico del nucleo avremo che, essendo  $\mu_{fe} \gg \mu_0$  (la permeabilità relativa è dell'ordine di  $10^3$ ), i tubi di flusso che si svolgono in aria sono pochi, il flusso nel nucleo dipenderà (come prima) praticamente solo dalla tensione e le cadute di tensione magnetica nel ferro saranno molto piccole rispetto alle forze magnetomotrici a carico. In questo caso non si commette un grave errore per lo studio del funzionamento a carico assumendo il nucleo come costituito da un materiale di permeabilità elevata e praticamente costante. Con questa ipotesi, allora, le misure ed i calcoli vengono condotti come per un mutuo induttore normale con induttanze (auto e mutua) caratterizzate da permeanze equivalenti agli effetti del flusso concatenato (poco) diverse tra di loro e (poco) diverse dalla permeanza del nucleo.

Per le permeanze valgono tipicamente le seguenti osservazioni (si è designato con l'indice 1 l'avvolgimento più vicino al nucleo).

- Le permeanze  $\Lambda_{1,2}$  sono maggiori ma poco diverse da quelle del nucleo  $\Lambda_n$  e  $\Lambda_1 < \Lambda_2$  (perché l'area di passaggio dei tubi di flusso che si concatenano con l'avvolgimento esterno è maggiore di quella pertinente l'avvolgimento interno).
- La permeanza mutua  $\Lambda_m$  è di poco maggiore di quella del nucleo ed è minore delle  $\Lambda_{1,2}$  perché nel funzionamento a vuoto (in cui tali permeanze sono valutate) i tubi di flusso che si concatenano con l'avvolgimento alimentato sono sempre maggiori di quelli che si concatenano con quello aperto.
- In relazione alla piccola differenza tra le permeanze il coefficiente di accoppiamento differisce tipicamente dall'unità di  $10^{-3} \div 10^{-4}$ . Nella eq.3. 1 vengono sotto riportati valori tipici di permeanze allo scopo di sensibilizzare sugli ordini di grandezza.

$$3.1 \quad \Lambda_n = 10^{-8} \quad \Lambda_m = 1,051\Lambda_n \quad \Lambda_1 = 1,054\Lambda_n \quad \Lambda_2 = 1,055\Lambda_n$$

$$k^2 = \Lambda_m^2 / \Lambda_1\Lambda_2 = 0,9934$$

Una volta individuate le permeanze, noto il numero di spire dei due avvolgimenti, sono noti i parametri del modello matematico del mutuo induttore ed il corrispondente circuito equivalente è perfettamente identificato, si vedano le eq.3.2 e la Fig.2.7.

$$3.2 \quad \begin{aligned} v_1 &= R_1 i_1 + L_1 p i_1 + M p i_2 = R_1 i_1 + N_1^2 \Lambda_1 p i_1 + N_1 N_2 \Lambda_m p i_2 \\ v_2 &= R_2 i_2 + M p i_1 + L_2 p i_2 = R_2 i_2 + N_1 N_2 \Lambda_m p i_1 + N_2^2 \Lambda_2 p i_2 \end{aligned}$$

Il circuito equivalente del mutuo induttore, mal si presta ai calcoli perché, essendo i parametri  $L_1$ ,  $L_2$ ,  $M$  numericamente poco diversi, bastano piccoli errori nella misura o nel calcolo delle auto e mutue induttanze per creare grandi errori nelle differenze  $(L_1 - M)$  e  $(L_2 - M)$ . Altro svantaggio del circuito di Fig. 2.7 è che non consente di valutare le prestazioni con misure eseguite su una singola porta.

Per superare queste difficoltà le equazioni eq.3.2 possono essere ulteriormente elaborate come è indicato nelle eq.3.3 e nelle eq.3.4 al fine di pervenire ad un circuito equivalente del mutuo induttore che riproponga almeno formalmente le peculiarità evidenziate nel precedente paragrafo.

$$3.3 \quad \begin{aligned} v_1 &= R_1 i_1 + N_1^2 (\Lambda_1 - \Lambda_m) p i_1 + N_1 \Lambda_m p (N_1 i_1 + N_2 i_2) = \\ &= R_1 i_1 + L_{d1} p i_1 + N_1 p \varphi \\ v_2 &= R_2 i_2 + N_2^2 (\Lambda_2 - \Lambda_m) p i_2 + \frac{N_2}{N_1} N_1^2 \Lambda_m p (i_1 + \frac{N_2}{N_1} i_2) = \\ &= R_2 i_2 + L_{d2} p i_2 + N_2 p \varphi \end{aligned}$$

$$3.4 \quad \varphi = \Lambda_m (N_1 i_1 + N_2 i_2) = N_1 \Lambda_m (i_1 + \frac{N_2}{N_1} i_2) = N_1 \Lambda_m (i_1 + i_2')$$

Combinando le precedenti due equazioni si trovano le eq.3.5 (in cui si è posto  $L_{m1} = N_1^2 \Lambda_m$ ) che si prestano ad essere interpretate tramite il circuito equivalente di Fig. 3.5 (o equivalenti riferendo i parametri ad un diverso numero di spire, ad esempio al primario come è indicato in Fig. 3.6) in cui compaiono le “induttanze di dispersione”  $L_{d1,2}$  e “l’induttanza di magnetizzazione”  $L_{m1}$  riferita ai dati di avvolgimento del primario.

$$3.5 \quad \begin{aligned} v_1 &= R_1 i_1 + L_{d1} p i_1 + L_{m1} p (i_1 + \frac{N_2}{N_1} i_2) \\ v_2 &= R_2 i_2 + L_{d2} p i_2 + \frac{N_2}{N_1} L_{m1} p (i_1 + \frac{N_2}{N_1} i_2) \end{aligned}$$

Grazie alla particolare elaborazione tutto avviene come se al campo magnetico effettivo della macchina venisse sostituito uno equivalente agli effetti esterni del tipo illustrato in Fig. 3.7: un tubo di flusso  $\varphi$  di permeanza  $\Lambda_m$  concatenato totalmente sia con le spire del primario, sia con quelle del secondario, un tubo di permeanza  $\lambda_{d1} = (\Lambda_1 - \Lambda_m)$  concatenato totalmente con le spire primarie ma non con le secondarie ed un tubo di permeanza  $\lambda_{d2} = (\Lambda_2 - \Lambda_m)$  concatenato totalmente con le spire secondarie ma non con le primarie. Si noti che le lettere  $\lambda / \Lambda$  (minuscola/maiuscola) servono a ricordare che gli ordini di grandezza di queste permeanze sono completamente diversi come è messo in evidenza nella eq.3.6.

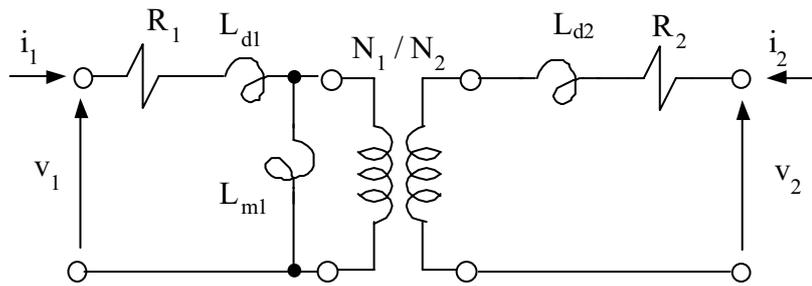


Fig. 3.5. Circuito equivalente del trasformatore.

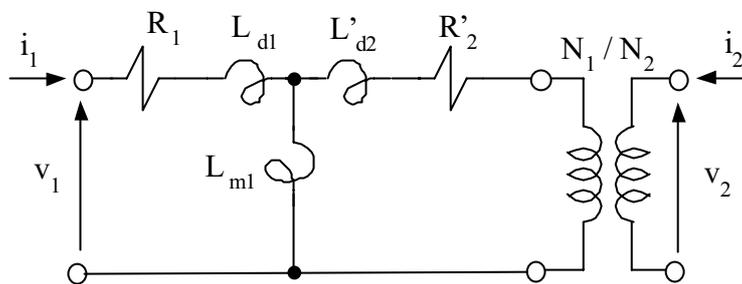


Fig. 3.6. Circuito equivalente con parametri riferiti ai dati di avvolgimento del primario.

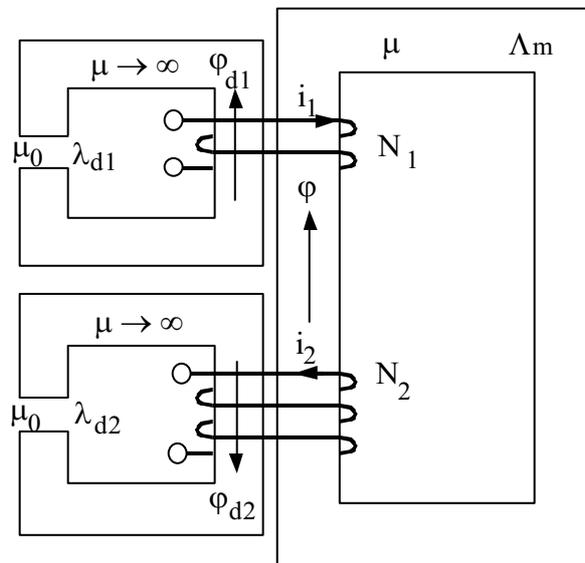


Fig. 3.7. Il campo magnetico equivalente agli effetti esterni.

$$3.6 \quad \Lambda_m = 1,051 \cdot 10^{-8} \quad \lambda_{d1} = (\Lambda_1 - \Lambda_m) = 3 \cdot 10^{-11}$$

$$\lambda_{d2} = (\Lambda_2 - \Lambda_m) = 4 \cdot 10^{-11}$$

Le permeanze indicate nella eq.3.6, una volta definito il numero delle spire dei due avvolgimenti (ad esempio  $N_1 = 10^3$  e  $N_2 = 0,5 \cdot 10^3$ ) consentono il calcolo delle induttanze del circuito equivalente di Fig. 3.6 come è messo in evidenza nelle eq.3.7.

$$3.7 \quad L_{m1} = N_1^2 \Lambda_m = 1,051 \cdot 10^{-2}; \quad L_{d1} = N_1^2 \lambda_{d1} = 3 \cdot 10^{-5};$$

$$L'_{d2} = N_1^2 \lambda_{d2} = 4 \cdot 10^{-5}$$

Nei calcoli che hanno per fine la valutazione delle dimensioni e delle prestazioni si fa normalmente riferimento alla distribuzione dei flussi indicata nella Fig. 3.7 e quindi al circuito equivalente di Fig. 3.6 che è convenzionale ma concretamente vicino alla realtà.

# MACCHINE ROTANTI A CORRENTE ALTERNATA: GENERALITA'

## 1 Introduzione

Nel presente capitolo vengono introdotte le nozioni di base che consentono l'analisi del funzionamento delle macchine rotanti a corrente alternata. Tra le diverse impostazioni possibili si è scelta la teoria fasoriale (o vettoriale, come indicano alcuni testi) dinamica perché consente una visione unificata del funzionamento, in regime stazionario e dinamico. Tra le diverse proposte concettuali che consentono poi di qualificare l'insorgere delle azioni meccaniche si è privilegiata quella che rappresenta le macchine rotanti come sistema di due elettromagneti interagenti perché spinge a valutazioni sintetiche comuni a tutte le macchine rotanti.

## 2 Fasori spaziali tempo varianti per l'analisi degli elettromagneti

Gli elettromagneti trovano impiego industriale nella movimentazione di masse ferrose, nella trasmissione del moto mediante giunti elettromagnetici e nella conversione elettromeccanica sotto la forma di macchine elettriche rotanti. Fisseremo l'attenzione su queste ultime due applicazioni mostrando la continuità che esiste tra le nozioni di elettromagnete, giunto e motore/generatore elettrico con riferimento alle interazioni che si instaurano tra elettrocalamite del tipo in Fig. 2.1a-b.

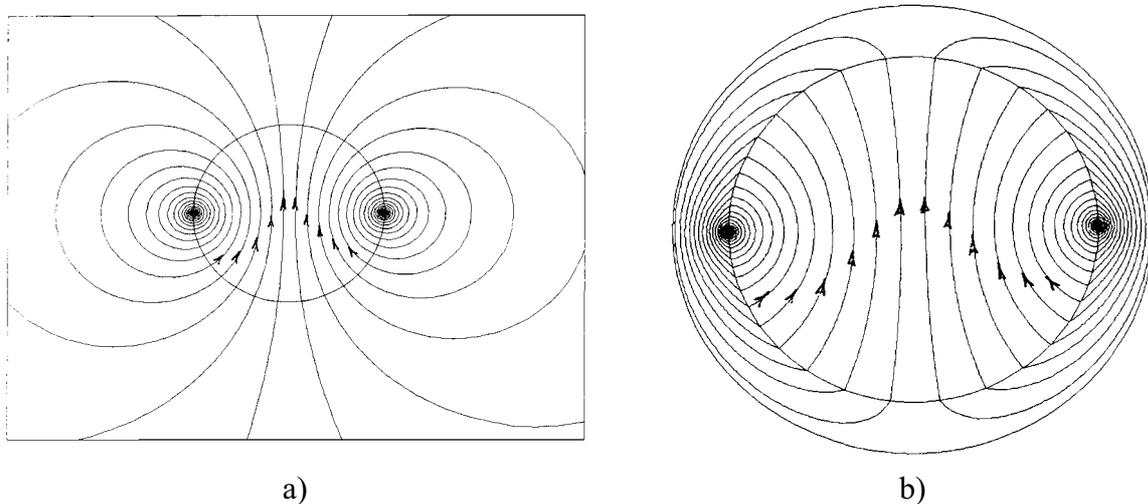


Fig.2.1. Elettromagneti elementari.

Nella Fig. 2.1a si considera il caso di un elettromagnete costituito da una armatura magnetica di diametro  $D$  e lunghezza  $l$  in direzione ortogonale al foglio realizzata con materiale magnetico ideale (con permeabilità  $\mu$  costante e molto elevata rispetto a quella dell'aria e privo di perdite in presenza di campi magnetici variabili nel tempo).

Disponiamo su tale armatura un avvolgimento diametrico di  $N$  spire di sezione trasversale trascurabile ed alimentiamo tale avvolgimento con un generatore ideale di corrente. Se la corrente misurata (con un amperometro ideale) uscente dal piano del foglio per il conduttore a sinistra ed entrante per il conduttore a destra è positiva allora il campo

magnetico dell'elettromagnete presenta linee di forza orientate come è indicato in Fig. 2.1a (secondo il senso di avanzamento della punta di un cavatappi che ruoti nel senso positivo delle correnti dell'avvolgimento). Il "polo nord dell'elettromagnete" corrisponde alla superficie della armatura da cui escono le linee di forza del campo magnetico (sud è la superficie contrapposta) ed il "flusso dell'elettromagnete" è il flusso del vettore induzione uscente dal polo nord ed entrante nel polo sud.

Altra configurazione di elettromagnete è quella indicata in Fig. 2.1b in cui all'interno di una corona cilindrica di materiale magnetico ideale è disposto un avvolgimento diametrale di  $N$  spire. Alimentando tale avvolgimento le linee di forza del campo magnetico hanno l'andamento qualitativo indicato in Fig. 2.1b (l'orientamento delle linee di forza è legato alla corrente dalla "regola del cavatappi") nella quale è possibile riconoscere i poli nord e sud dell'elettromagnete.

Vediamo ora in primo luogo come si studia il campo magnetico che si realizza ponendo l'elettromagnete di Fig. 2.1a all'interno di quello di Fig. 2.1b come è indicato in Fig. 2.2 (e cioè lasciando tra le due armature un traferro di spessore  $t$  che ne consenta il moto relativo) e poi come si valutino le forze che insorgono quando entrambi gli avvolgimenti siano percorsi da correnti.

Supponiamo che soltanto l'avvolgimento dell'armatura interna (con numero di spire  $N_e$ ) sia percorso da corrente (positiva quando sia misurata con le convenzioni indicate in figura): in questo caso le linee di forza hanno nell'aria del traferro l'andamento qualitativo indicato nella figura, in cui si è anche evidenziato l'asse magnetico  $\mathcal{R}_e$  dell'elettromagnete, che verrà assunto come riferimento per la definizione della posizione lungo la periferia del traferro.

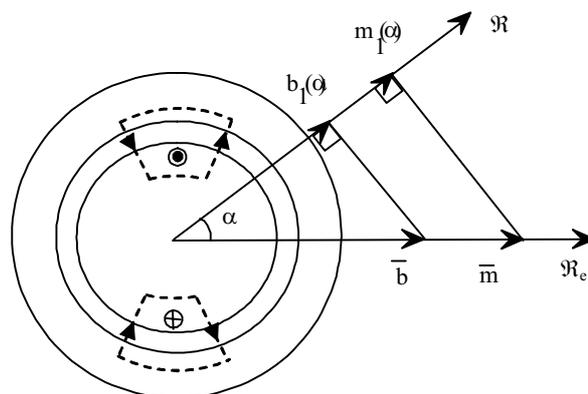


Fig. 2.2. Configurazione elettromagnetica oggetto di studio.

Le linee di forza sono radiali, il campo è uniforme e per l'elettrocalamita costituita dall'armatura interna il polo Nord corrisponde alla semicirconferenza da cui fuoriescono le linee di forza, il polo Sud dalla parte rimanente della superficie. Il flusso  $\varphi$  del polo si incanala nella corona cilindrica esterna (che prende anche il nome di "giogo") suddividendosi simmetricamente rispetto all'asse magnetico  $\mathcal{R}_e$  per modo che il flusso nel giogo varia tra zero sull'asse polare  $\mathcal{R}_e$  e metà del flusso polare sull'asse interpolare (quello ortogonale ad  $\mathcal{R}_e$ ).

La corrente concatenata con il tubo di flusso elementare che attraversa il traferro in una generica posizione  $x$  (misurata lungo la periferia dell'armatura su cui sono disposti i conduttori che generano il campo magnetico) è la forza magnetomotrice che genera tale tubo. In relazione alla simmetria della figura tutti i tubi di flusso elementari attraversano due volte il

traferro e concatenano la corrente  $N_e i_e$  indipendentemente dal valore della permeabilità magnetica del materiale che costituisce le armature. Se ora a tale permeabilità attribuiamo un valore (ingegneristicamente parlando) infinito allora la differenza di potenziale magnetico alle estremità di ogni tronco di tubo che attraversa il traferro è pari in questa situazione ideale a  $N_e i_e / 2$  in valore assoluto. Se poi misuriamo questa grandezza tra l'armatura su cui si trovano i conduttori e l'altra armatura allora la differenza di potenziale è positiva per l'arco di periferia (polo nord) dal quale escono i tubi e negativa per l'arco di entrata.

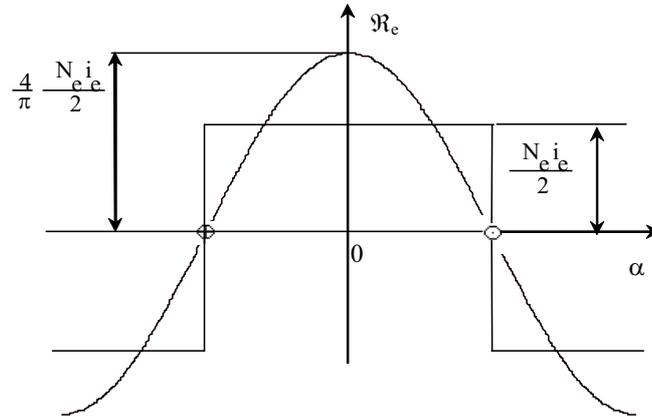


Fig. 2.3. Campo di f.m.m. al traferro.

Questa differenza di potenziale magnetico ideale viene denominata “forza magnetomotrice al traferro”  $m(x)$  ed ha l'andamento (a rettangolo incrociato) precisato nella Fig. 2.3.

Lo sviluppo in serie di Fourier della funzione  $m(x)$  (quando per la misura degli angoli e per la rappresentazione dei fasori in forma polare si assuma il riferimento costituito dall'asse magnetico  $\mathfrak{R}_e$  dell'avvolgimento) è indicato nella eq.2.1. Si noti che la componente fondamentale è una funzione circolare della anomalia  $\alpha$  e come tale rappresentabile mediante il fasore indicato nella eq. 2.2 (di ampiezza funzione del tempo perché tale è la corrente  $i_e$ ), orientato come l'asse di riferimento  $\mathfrak{R}_e$  che individua la posizione nel traferro per cui è massima tale componente.

$$2.1 \quad m(\alpha) = \frac{4}{\pi} \frac{N}{2} i_e \left[ \cos \alpha - \frac{1}{3} \cos 3\alpha + \frac{1}{5} \cos 5\alpha \dots \right] = m_1(\alpha) + m_3(\alpha) + m_5(\alpha) + \dots$$

$$2.2 \quad \bar{m}_1 = \frac{2}{\pi} N_e i_e \quad m_1(\alpha) = \Re(\bar{m}_1) = \bar{m}_1 x \bar{\mathfrak{R}}$$

Il valore  $m_1(\alpha)$  del campo di f.m.m. al traferro nella posizione individuata da un generico asse orientato  $\mathfrak{R}$ , sfasato di  $\alpha$  rispetto al riferimento  $\mathfrak{R}_e$ , è la proiezione del fasore  $\bar{m}_1$  si veda la Fig. 2.2, nella direzione  $\mathfrak{R}$  (di versore  $\bar{\mathfrak{R}}$ ); questa operazione di proiezione verrà nel seguito indicata nel primo dei due modi precisati nella seconda relazione della eq. 2.2.

Nel seguito verranno esaminati gli effetti correlati alla componente fondamentale  $\bar{m}_1$  della f.m.m., d'altra parte i campi armonici spaziali di periodo minore danno luogo a

fenomeni parassiti, secondari dal punto di vista della conversione elettromeccanica (come verrà chiarito più avanti).

E' possibile a questo punto descrivere localmente il campo magnetico al traferro individuando i valori locali di forza magnetica e di induzione generati dal campo fondamentale di f.m.m. Si tratta di funzioni circolari della anomalia  $\alpha$  e come tali rappresentabili con i fasori spaziali indicati nella eq.2.3 orientati come  $\mathfrak{R}_e$ : anche in questo caso il valore locale in una posizione individuata da un asse  $\mathfrak{R}$  è dato dalla proiezione del fasore nella direzione  $\mathfrak{R}$ , si veda la Fig. 2.2.

$$2.3 \quad \bar{h}_1 = \frac{\bar{m}_1}{t} = \frac{2}{\pi} \frac{N_e i_e}{t} \quad \bar{b}_1 = \mu_0 \bar{h}_1 \quad b_1(\alpha) = \mathfrak{R}(\bar{b}_1)$$

E' possibile ora calcolare agevolmente il flusso per polo  $\varphi$  dell'elettromagnete tramite la eq.2.4 (calcolabile anche come valore medio dell'induzione sotto un polo per l'area del polo) ed individuare il flusso  $\varphi_g$  in ogni sezione del giogo sfasata di  $\alpha$  rispetto ad  $\mathfrak{R}_e$  tramite la eq. 2.5 ( $r = D/2$  è il raggio della armatura interna ed  $l$  la lunghezza assiale delle armature).

$$2.4 \quad \varphi = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} b_1(\alpha) l r d\alpha = \frac{4}{\pi} \mu_0 \frac{l r}{t} N_e i_e$$

$$2.5 \quad \varphi_g = \int_0^{\alpha} b_1(\alpha) l r d\alpha = \frac{\varphi}{2} \text{sen} \alpha = \frac{2}{\pi} \mu_0 \frac{l r}{t} N_e i_e \text{sen} \alpha$$

Si osserva che il flusso in ogni sezione di giogo è individuabile orientando il fasore spaziale  $\bar{\varphi}_g$  come è indicato nella Fig. 2.4 e proiettando tale fasore sulla normale  $\bar{n}$  alla sezione di giogo per la quale si vuole calcolare il flusso (questa operazione di proiezione è quella indicata nella seconda relazione delle eq.2.6).

$$2.7 \quad \bar{\varphi}_g = \frac{2}{\pi} \mu_0 \frac{l r}{t} N_e i_e \quad \varphi_g(\alpha) = N(\bar{\varphi}_g)$$

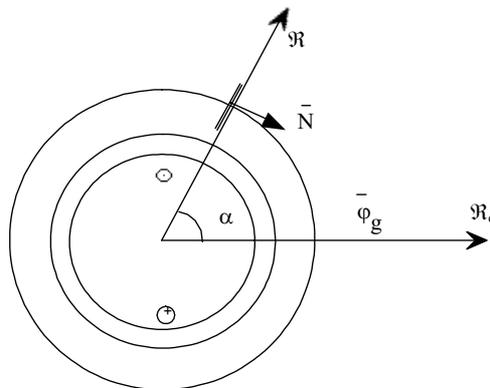


Fig. 2.4. Il fasore spaziale “flusso nel giogo”.

Il flusso  $\psi_{ee}$  generato dall'avvolgimento ( $e$ ) di eccitazione e concatenato con tale avvolgimento è valutabile come è indicato nella eq.2.7 ed il rapporto tra tale flusso e la

corrente  $i_e$  fornisce l'autoinduttanza  $L_e$  di tale avvolgimento, come è indicato ancora nella eq.2.8.

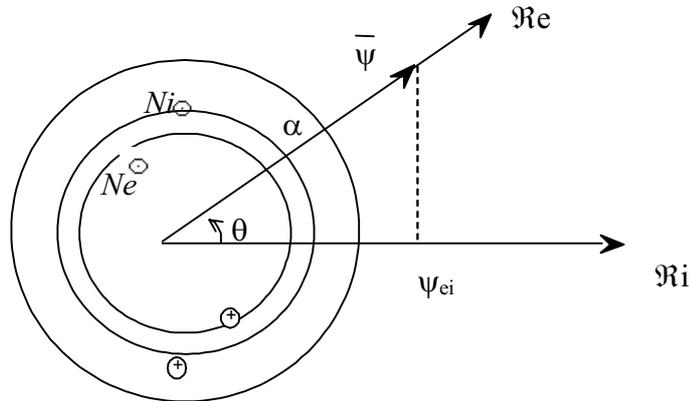


Fig. 2.5. Il fasore “flusso concatenato”.

$$2.8 \quad \psi_{ee} = N_e \phi = N_e^2 \frac{4 lr}{\pi t} \mu_0 i_e \quad L_e = \frac{\psi_{ee}}{i_e} = N_e^2 \frac{4 lr}{\pi t} \mu_0$$

Il flusso  $\psi_{ei}$ , generato dall'avvolgimento di eccitazione ( $e$ ) e concatenato con un avvolgimento diametrale ( $i$ ) di indotto (la disposizione sulla armatura interna o su quella esterna degli avvolgimenti  $e, i$  è del tutto influente sui risultati) di numero di conduttori  $N_i$  e di asse magnetico  $\mathfrak{R}_i$ , ruotato di  $\theta$  rispetto al riferimento  $\mathfrak{R}_e$  (si veda la Fig. 2.5) viene fornito nella eq.2.9 (si è trascurata la presenza di tubi di flusso che, non attraversando il traferro, sono concatenati solo con l'avvolgimento induttore). Il rapporto tra tale flusso concatenato e la corrente che lo genera fornisce la mutua induttanza  $M_{ie}$ , come è indicato ancora nella eq.2. 9.

$$\psi_{ie}(\theta) = N_i \int_{\frac{\pi}{2} + \theta}^{\frac{\pi}{2} - \theta} b_1(\alpha) l r d\alpha = \frac{N_i}{N_e} \psi_{ee} \cos \theta$$

2.9

$$m_{ie}(\theta) = \frac{\psi_{ie}}{i_e} = \frac{N_i}{N_e} L_{ee} \cos \theta = M_{ie} \cos \theta$$

In relazione alla particolare dipendenza dalla anomalia angolare tale flusso concatenato si può ottenere orientando un fasore spaziale  $\bar{\psi}$  di modulo  $M_{ie} i_e$  secondo l'asse  $\mathfrak{R}_e$  dell'avvolgimento induttore e proiettando tale fasore sull'asse dell'avvolgimento di indotto per il quale si desidera valutare il flusso concatenato, come è rappresentato nella Fig. 2.5. Queste operazioni sono poi indicate dalla eq.2.10.

$$2.10 \quad \psi_{ie} = \mathfrak{R}_i(M_{ie} i_e e^{j\theta}) = \mathfrak{R}_i(\bar{\psi})$$

### 3 Il calcolo delle forze elettromotrici

La metodologia nel seguito presentata consente il calcolo delle f.e.m. indotte quando vi sia un avvolgimento (detto di "eccitazione" o "induttore"), alimentato da un generatore di corrente  $i_e$  variabile, in moto relativo rispetto ad un secondo avvolgimento (detto di "indotto").

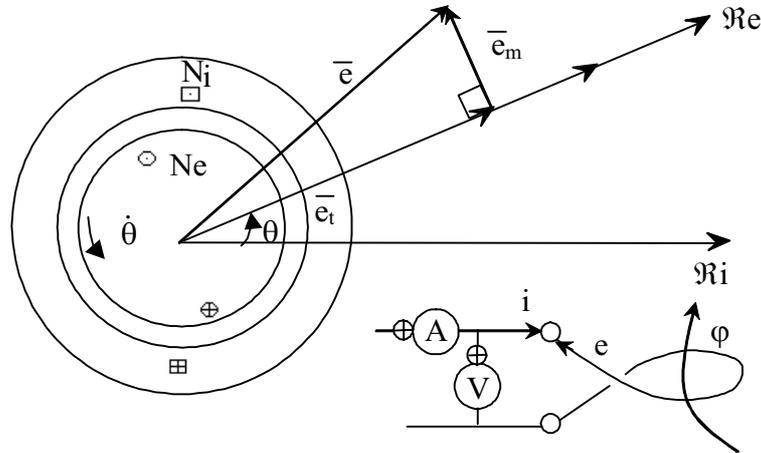


Fig. 3.1. Il fasore f.e.m.

Nella Fig. 3.1 viene presa in esame la situazione in cui un avvolgimento di eccitazione, con numero di spire efficaci  $N_e$  e disposto sulla armatura interna, sia percorso da una corrente  $i_e(t)$  e messo in rotazione da un motore esterno con velocità angolare  $\dot{\theta}(t)$  rispetto alla armatura esterna. Sulla armatura esterna si trova l'avvolgimento di "indotto", costituito da una bobina diametrale con numero di spire  $N_i$  ed asse magnetico  $\Re_i$ .

Un osservatore solidale con l'avvolgimento di indotto calcola nel proprio riferimento  $\Re_i$  il flusso concatenato  $\psi_{ie}$  come è indicato nella eq. 3.1 (dove  $\psi = M_{ie}i_e$ ). A questo punto la f.e.m. indotta nell'avvolgimento  $i$  (per le convenzioni di misura del flusso e della f.e.m. si veda la Fig. 3.1) è data dalla eq. 3.2.

Il risultato conseguito si interpreta come segue: il fasore forza elettromotrice  $\bar{e}$  è la derivata del fasore flusso concatenato  $\bar{\psi}$  espresso in un riferimento solidale con l'avvolgimento sede della f.e.m. indotta, si veda la eq. 3.3. Il valore istantaneo della f.e.m. si ottiene per proiezione del fasore forza elettromotrice sull'asse magnetico dell'avvolgimento di indotto, si veda la eq. 3.2.

$$3.1. \quad \psi_{ie} = \Re_i(\bar{\psi}) = \Re_i(\psi e^{j\theta}) = \Re_i(M_{ie}i_e e^{j\theta})$$

$$3.2. \quad e = p\psi_{ei} = \Re_i(p\psi e^{j\theta} + j\dot{\theta}\psi e^{j\theta}) = \Re_i(\bar{e})$$

$$3.3 \quad \bar{e} = p(\psi e^{j\theta}) = p\psi e^{j\theta} + j\dot{\theta}\psi e^{j\theta} = \bar{e}_t + \bar{e}_m$$

In relazione alla particolare struttura dei fasori  $\bar{e}_t, \bar{e}_m$  componenti il fasore  $\bar{e}$  si nota che la "f.e.m. trasformatorica"  $\bar{e}_t$  è quella che si avrebbe se la corrente di eccitazione variasse nel tempo e non vi fosse moto relativo, mentre la "f.e.m. mozionale"  $\bar{e}_m$  è quella che si avrebbe se la corrente di eccitazione fosse costante e vi fosse moto relativo.

## 4 Il giunto elettromagnetico come paradigma dei motori elettrici

E' possibile realizzare un giunto elettromagnetico con la struttura indicata in Fig. 4.1. La sezione trasversale della macchina (limitata in figura ai due pacchi lamiere di induttore e di indotto) presenta due avvolgimenti costituiti da bobine diametrali i cui conduttori sono idealmente puntiformi. Nella realtà gli avvolgimenti hanno una consistenza fisica che impone precisi vincoli nell'ammarraggio dei conduttori e nel loro isolamento rispetto al pacco lamiere. Questi vincoli possono esser soddisfatti se il conduttore è costituito, ad esempio, da piattina di rame di adeguato con adeguato isolamento esterno, disposta in una cava foderata da materiale isolante e chiusa da biette isolanti sul lato del traferro, si veda la Fig. 4.2.

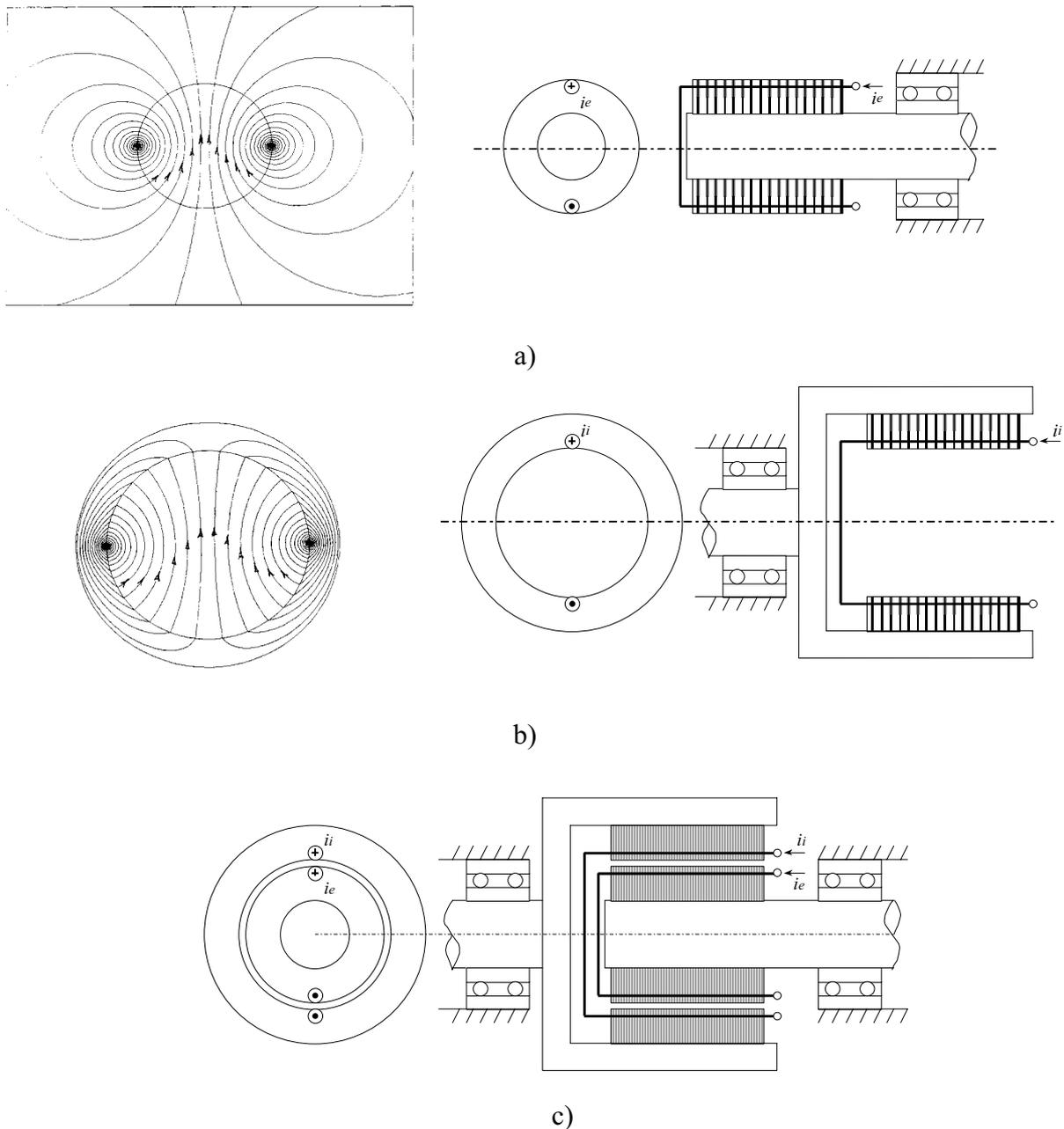


Figura 4.1. Giunto elettromagnetico: a) struttura elettromagnetica interna; b) struttura elettromagnetica esterna; c) struttura completa.

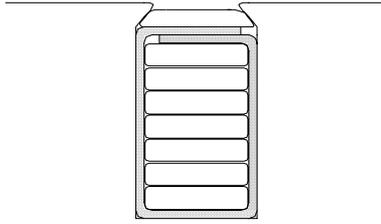


Figura 4.2. Conducenti nelle cave del giunto elettromagnetico.

Supponiamo ora che entrambi gli avvolgimenti, di assi magnetici  $R_i$  ed  $R_e$ , siano alimentati da due generatori di corrente: l'esperienza mostra che se l'elettromagnete esterno viene posto in rotazione da un motore primo allora l'elettromagnete interno lo segue e che gli assi  $R_e, R_i$  si sfasano di un angolo  $\theta$  crescente al crescere della coppia resistente applicata alla armatura interna. Proponiamoci a questo punto di calcolare la coppia che si trasmette tra le due armature magnetiche.

Siano  $i_e, i_i$  le correnti all'istante in cui si desidera definire le azioni meccaniche; in questo caso, trascurando le dimensioni trasversali degli avvolgimenti e la presenza delle cave in cui sono alloggiati, il diagramma delle induzioni  $b_i$  e  $b_e$  al traferro (positive se di verso uscente dall'armatura interna) generate dalle due bobine è rappresentato nella Fig.4.3. In relazione alle ipotesi adottate vale la sovrapposizione delle cause e degli effetti per modo che tali diagrammi si costruiscono come se i due avvolgimenti agissero separatamente (per gli avvolgimenti  $i, e$  si sono evidenziati i riferimenti intrinseci  $R_e, R_i$  sfasati dell'angolo  $\theta$ ).

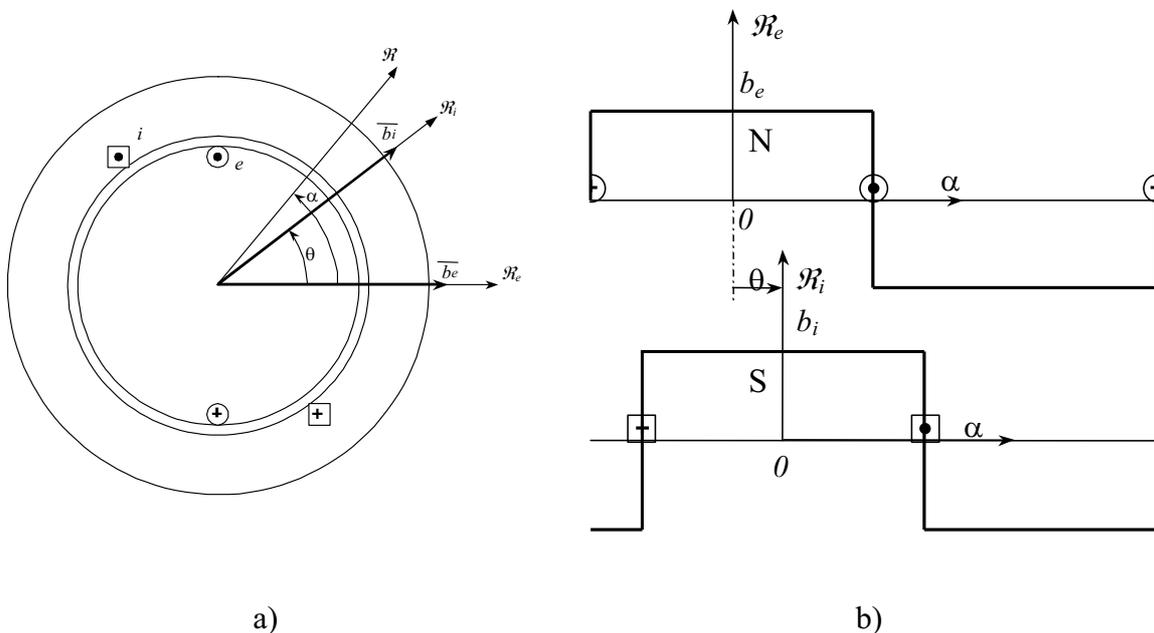


Fig. 4.3. Campo elettromagnetico nel traferro del giunto: a) rappresentazione polare dei fasori e b) rappresentazione cartesiana.

Si può osservare come la macchina così realizzata presenti due elettromagneti con polarità di nome opposto sfasate dell'angolo  $\theta$ : l'esperienza comune insegna che i due elettromagneti si comportano come i denti di due ingranaggi meccanici virtuali, che ingranano trasmettendo una coppia che dipende dall'angolo di sfasamento tra gli assi magnetici. Tale

coppia (nulla se gli assi sono allineati) cresce assumendo valore massimo quando la polarità Nord generata dalla corrente  $i_e$  è sfasata di  $\pi/2$  rispetto alla polarità Sud generata dalla corrente  $i_i$ .

A questa visione intuitiva si può dare un preciso supporto analitico tramite il principio di conservazione dell'energia per il quale la coppia che agisce nel senso positivo dell'angolo  $\theta$  si può calcolare come è indicato nella eq. 4.1, dove  $W_m$  è l'energia magnetica accumulata nel campo magnetico (si veda la eq.1.4 del capitolo "Calcolo delle forze e degli sforzi"). Il calcolo verrà condotto con riferimento al campo fondamentale componente l'onda di induzione. al traferro nella ipotesi di correnti costanti. Nel valutare l'energia si terrà conto del fatto che la permeabilità del materiale costituente le due armature del giunto è molto elevata rispetto a quella dell'aria per modo che tutta l'energia è accumulata (con buona approssimazione) solo nel traferro, come viene indicato nella eq. 4.2 (i valori massimi della prima componente armonica dell'induzione al traferro sono indicati nella eq. 4.3).

$$4.1 \quad T = \left( \frac{dW_m}{d\theta} \right)_{i_e, i_i = \text{cost}}$$

$$4.2 \quad W_m \approx \int_0^{2\pi} \frac{(b_{i1} + b_{ie})^2}{2\mu_0} \, ltr \, d\alpha$$

$$b_{i1}(\alpha) = B_{i1} \cos(\alpha - \theta) \quad b_{e1}(\alpha) = B_{e1} \cos\alpha$$

$$4.3 \quad B_{i1} = \frac{2}{\pi} \mu_0 \frac{N_i i_i}{t} \quad B_{e1} = \frac{2}{\pi} \mu_0 \frac{N_e i_e}{t}$$

Si noti che agli effetti del calcolo della coppia non interessano i termini quadratici presenti sotto il segno di integrale nella eq.4.2 (perché l'integrale di tali termini è indipendente da  $\theta$  e come tale presenta derivata nulla rispetto a  $\theta$ ) ma solo il termine corrispondente al doppio prodotto delle induzioni il cui contributo alla coppia è indicato nella eq.4.4.

$$4.4 \quad T = \frac{d}{d\theta} \int_0^{2\pi} 2 B_{iM} B_{eM} \cos(\alpha - \theta) \cos(\alpha) \frac{lt}{2\mu_0} r \, d\alpha = -V_0 \frac{B_{iM} B_{eM}}{2\mu_0} \text{sen}\theta \quad \text{con } V_0 = 2\pi ltr$$

La relazione eq.4.4 consente le seguenti osservazioni e conclusioni.

- La coppia agisce nel senso di ridurre l'angolo  $\theta$ , è proporzionale al prodotto vettoriale dei fasori rappresentativi delle induzioni al traferro (componente fondamentale) e, a parità di correnti, è massima per  $\theta = \pi/2$ .
- Per regolare la coppia si possono seguire diverse strategie; ad esempio si può mantenere costante  $\theta = \pi/2$  e far variare  $i_e$  ed  $i_i$  proporzionalmente a  $\sqrt{T}$ , oppure si può mantenere costante una delle due correnti e far variare l'altra, con  $\theta = \pi/2$ , proporzionalmente a T.
- E' nulla la coppia associata a campi armonici generati da  $i_i$  ed  $i_e$  con diverso ordine di armonicità spaziale.
- Se uno dei due avvolgimenti, ad esempio quello esterno, generasse un campo di induzione al traferro di ampiezza e velocità angolare regolabili, allora il giunto potrebbe funzionare anche con armatura esterna fissa ed armatura interna mobile. In questo caso le due

armature si scambierebbero, per il principio di azione e reazione, due coppie uguali ed opposte funzione dell'angolo di sfasamento tra i campi fondamentali di induzione al traferro come è indicato dalla eq.4.4. Nei successivi paragrafi verrà mostrato che questo è il percorso per ottenere i motori (ed i generatori) elettrici a corrente alternata.

## 5 Il campo magnetico generato dagli avvolgimenti polifase simmetrici: il caso bifase

Un avvolgimento bifase simmetrico per due poli è costituito da due avvolgimenti di  $N$  spire denominati nel seguito  $\alpha, \beta$ , strutturalmente identici, con asse magnetici  $\mathfrak{R}_\alpha, \mathfrak{R}_\beta$  sfasati spazialmente di  $\pi/2$  radianti nel senso ciclico positivo (antiorario). Le convenzioni di misura delle correnti e la disposizione degli assi magnetici sono indicate nella Fig. 5.1. Nel seguito per descrivere il campo magnetico generato da tale avvolgimento con gli adeguati fasori verrà sovrapposto al piano della macchina un sistema di assi di riferimento con asse reale coincidente con l'asse magnetico  $\alpha$  ed asse immaginario sovrapposto a  $\beta$ . Le grandezze fasoriali descritte in tale riferimento, stazionario nello spazio, saranno designate mediante l'apice  $s$ .

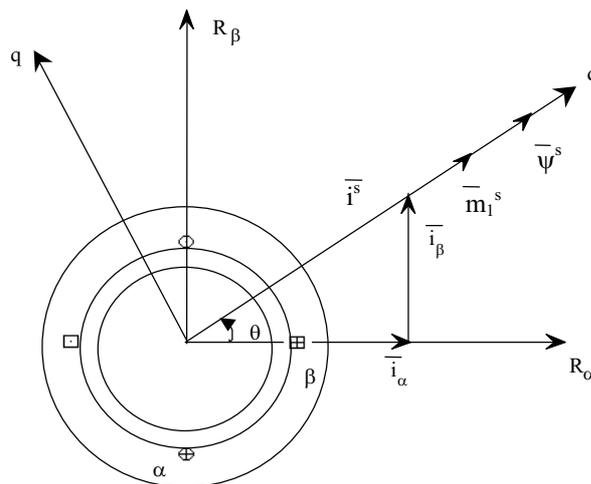


Fig. 5.1. Avvolgimento bifase simmetrico.

Quando l'avvolgimento sia alimentato da un sistema di correnti  $i_\alpha, i_\beta$  il diagramma spaziale della componente fondamentale della f.m.m. (come di qualsiasi altro campo con ordine di armonicità  $h$ ) al traferro si ottiene per sovrapposizione delle cause e degli effetti.

Il campo principale di f.m.m.  $m_{1\alpha}$  generato dalla fase  $\alpha$  in un punto generico della periferia di anomalia  $\theta$  si ottiene disponendo un fasore spaziale  $\bar{m}_{1\alpha}^s$  sull'asse di riferimento  $\mathfrak{R}_\alpha$  (asse reale) e proiettando tale fasore sull'asse  $\mathfrak{R}$  che passa per il punto in cui si vuole calcolare la f.m.m. al traferro. Il campo di f.m.m. generato nello stesso punto dall'avvolgimento  $\beta$  si ottiene disponendo il fasore spaziale  $\bar{m}_{1\beta}^s$  sull'asse  $\mathfrak{R}_\beta$  (asse immaginario) e proiettando tale fasore sull'asse  $\mathfrak{R}$  che passa per il punto in cui si vuole calcolare la f.m.m., si veda la eq.5.1.

La f.m.m. risultante generata dall'avvolgimento bifase è la somma delle due f.m.m., si veda la eq.5.2.

$$5.1 \quad \begin{aligned} m_{1\alpha} &= \frac{2}{\pi} Ni_{\alpha} \cos \theta = \Re[\bar{m}_{1\alpha}^s] & \bar{m}_{1\alpha}^s &= \frac{2}{\pi} Ni_{\alpha} \\ m_{1\beta} &= \frac{2}{\pi} Ni_{\beta} \sin \theta = \Re[\bar{m}_{1\beta}^s] & \bar{m}_{1\beta}^s &= \frac{2}{\pi} Ni_{\beta} e^{j\frac{\pi}{2}} \end{aligned}$$

$$5.2 \quad m_1(\alpha) = \Re\left[\frac{2}{\pi} N\left(i_{\alpha} + i_{\beta} e^{j\frac{\pi}{2}}\right)\right] = \Re\left(\frac{2}{\pi} Ni^s\right) = \Re(\bar{m}_1^s)$$

Nella eq. 5.2 compare la grandezza  $\bar{i}^s = i_{\alpha} + ji_{\beta}$  che ha significato sia spaziale, sia temporale. In effetti tale fasore, moltiplicato per  $2N/\pi$ , individua la componente fondamentale del campo di f.m.m. al traferro generato dai due avvolgimenti. D'altra parte  $\bar{i}^s$  individua con le sue proiezioni sugli assi  $\alpha, \beta$  i valori istantanei delle correnti di fase: nel seguito questo insieme di proprietà verrà correlato al nome "fasore corrente".

Le f.m.m.  $m_{1\alpha}, m_{1\beta}$  generano i flussi concatenati  $\psi_{1\alpha}, \psi_{1\beta}$  (non vi è mutua interazione tra gli avvolgimenti dato che i loro assi magnetici sono in quadratura spaziale) e questi si compongono per dare luogo al fasore flusso concatenato come è messo in evidenza nella eq.5.3. La proiezione di tale fasore sull'asse magnetico di fase fornisce il valore istantaneo del flusso concatenato con la fase, risultante della azione di tutte le correnti.

$$5.3 \quad \bar{\psi}_1^s = \psi_{1\alpha} + \psi_{1\beta} e^{j\frac{\pi}{2}} = \psi_{1\alpha} + j\psi_{1\beta} = N^2 \frac{4}{\pi} \mu_0 \frac{l r}{t} (i_{\alpha} + ji_{\beta}) = Li^s$$

Le tensioni che si manifestano ai morsetti delle singole fasi sono indicate nella eq.5.4 dove  $R$  è la resistenza di fase; esse individuano il fasore tensione (le cui proiezioni sono appunto tali tensioni di fase) come è messo in evidenza nelle eq.5.5.

$$5.4 \quad v_{\alpha} = Ri_{\alpha} + p\psi_{1\alpha} \quad v_{\beta} = Ri_{\beta} + p\psi_{1\beta}$$

$$5.5 \quad \bar{v}^s = v_{\alpha} + v_{\beta} e^{j\frac{\pi}{2}} = R\bar{i}^s + p\bar{\psi}_1^s = (R + pL)\bar{i}^s$$

La potenza elettrica istantanea erogata dai generatori collegati ai morsetti dei due avvolgimenti è data dalla eq.5.6 (dove il simbolo  $\text{Re}$  indica la parte reale del prodotto del fasore tensione per il coniugato del fasore corrente).

$$5.6 \quad p = v_{\alpha} i_{\alpha} + v_{\beta} i_{\beta} = \bar{v}^s \times \bar{i}^s = \text{Re}(\bar{v}^s \bar{i}^s)$$

In definitiva, note le correnti applicate ed i parametri di macchina, si possono calcolare le tensioni e le potenze in gioco, inoltre, tramite la nozione di f.m.m., si possono valutare tutte le grandezze elettromagnetiche interne di macchina.

I fasori introdotti in precedenza possono essere espressi, quando risulti comodo, assumendo un diverso sistema di riferimento. Ad esempio, si veda la Fig. 5.2, se si assume come riferimento un sistema di assi  $d, q$  ruotante alla velocità angolare  $\dot{\theta}$  il legame tra i fasori nel vecchio e nel nuovo riferimento (fasori senza l'apice  $s$ ) è indicato nelle eq.5.7. Il legame tra i fasori tensione e corrente nel nuovo riferimento è fornito dalla eq.5.8, che è stata ottenuta

introducendo formalmente tali legami nella eq.5.5 (la potenza istantanea è indipendente dal sistema di riferimento dei fasori).

$$5.7 \quad \bar{v}^s = \bar{v}e^{j\theta} \quad \bar{i}^s = \bar{i}e^{j\theta} \quad \bar{\psi}_1^s = \bar{\psi}_1e^{j\theta}$$

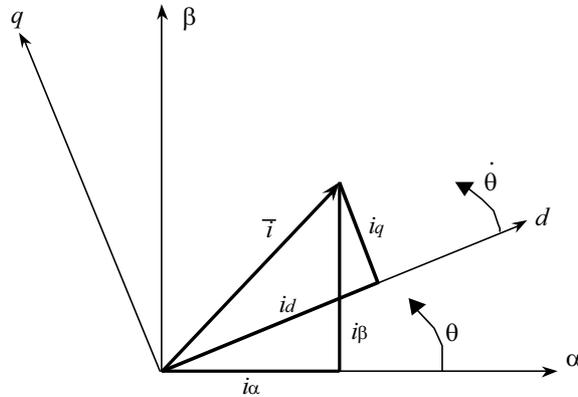


Figura 5.2. Cambiamento del riferimento dei lavori.

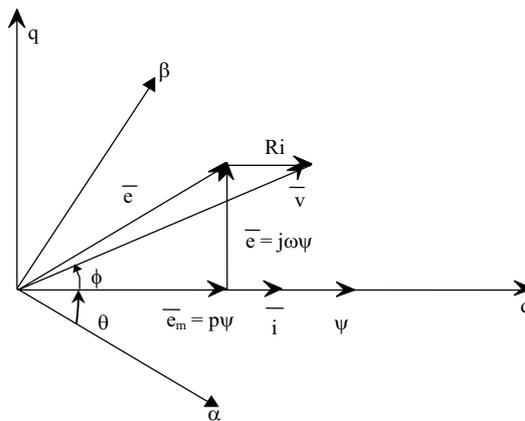


Figura 5.3. Tensione, corrente e f.e.m. nel riferimento d,q.

$$5.8 \quad \bar{v} = R\bar{i} + p\bar{\psi}_1 + j\dot{\theta}\bar{\psi}_1 = (R + pL + j\dot{\theta}L)\bar{i}$$

In particolare si può assumere l'asse reale  $d$  solidale con il fasore corrente (e quindi ruotante, in generale a velocità variabile, in relazione alle correnti iniettate dai generatori): in questo caso vale la eq.5.9.

$$5.9 \quad \bar{v} = (R + pL + j\dot{\theta}L)\bar{i}$$

Come caso particolare se le correnti di fase costituiscono un sistema equilibrato del tipo indicato nelle eq.5.10 allora i fasori rappresentativi della f.m.m. generata, del flusso concatenato e della tensione ai morsetti sono quelli indicati nelle eq.5.11-13, la potenza

elettrica istantanea è costante ed ha il valore indicato nella eq.5.14. In particolare la eq.5.11 evidenzia che il campo di f.m.m. al traferro è rotante con velocità angolare  $\omega$ .

$$5.10 \quad \begin{aligned} i_\alpha &= I_M \cos \omega t & i_\beta &= I_M \sin \omega t \\ \bar{i}^s &= I_M (\cos \omega t + j \sin \omega t) = I_M e^{j\omega t} \end{aligned}$$

$$5.11 \quad \bar{m}_1^s = \frac{2}{\pi} N \bar{i}^s = \frac{2}{\pi} N I_M e^{j\omega t}$$

$$5.12 \quad \bar{\psi}_1^s = \psi_{1\alpha} + j\psi_{1\beta} = N^2 \frac{4}{\pi} \mu_0 \frac{l_r}{t} \bar{i}^s = L \bar{i}^s = L I_M e^{j\omega t}$$

$$5.13 \quad \bar{v}^s = v_\alpha + jv_\beta = R \bar{i}^s + p \bar{\psi}_1^s = (R + j\omega L) I_M e^{j\omega t} = V_M e^{j(\omega t + \varphi)}$$

$$5.14 \quad p = \bar{v}^s \times \bar{i}^s = V_M I_M \cos \varphi = 2VI \cos \varphi$$

Se l'avvolgimento bifase simmetrico ora considerato viene disposto sull'armatura esterna del giunto elettromagnetico di Fig. 4.1 e viene alimentato con un sistema di correnti del tipo della eq.5.10 sarà possibile trascinare l'armatura interna con velocità angolare  $\dot{\theta} = \omega$  regolabile erogando una coppia anche essa regolabile tramite  $I_M(t)$  (la regolazione, ad esempio, può essere eseguita mantenendo costante la corrente dell'avvolgimento interno e costante e pari a  $\pi/2$  lo sfasamento tra le f.m.m. dell'avvolgimento esterno e di quello interno in modo da ottenere la massima coppia per unità di corrente).

L'avvolgimento bifase può essere strutturato per un numero di poli  $p = 2n$  ripetendo  $n$  volte lungo la periferia della macchina la distribuzione di conduttori prima esaminata per la macchina a due poli. In questo caso i fasori precedentemente introdotti descrivono il campo elettromagnetico in corrispondenza di ciascuna delle  $n$  paia di poli. Come conseguenza gli angoli (angoli "elettrici"  $\theta_e$ ) che compaiono nelle precedenti espressioni assumono il valore  $2\pi$  in corrispondenza dell'arco di periferia esteso ad una coppia di poli mentre l'angolo "meccanico"  $\theta_m$  che corrisponde a tale arco è pari a  $2\pi/n$ . Quindi per tali macchine la corrispondenza tra gli angoli è quella definita dalla eq.5.15a.

$$5.15 \quad a) \theta_m = \theta_e / n \quad b) \dot{\theta}_m = \dot{\theta}_e / n$$

In particolare nel caso di alimentazione con un sistema equilibrato di correnti del tipo in eq. 5.10 i fasori ruotano alla velocità angolare elettrica pari alla pulsazione  $\omega$  delle correnti impresse e descrivono l'arco di periferia corrispondente a  $2\pi$  radianti elettrici in un periodo. Dal momento che tra gli angoli vale la eq.5.15a tra le velocità elettriche e meccaniche dei fasori vale la relazione eq.5.15b.

## 6 Il campo magnetico generato dagli avvolgimenti polifase simmetrici: il caso trifase

Nella Fig. 6.1 è presentata la struttura di un avvolgimento trifase per due poli: si tratta di tre avvolgimenti uguali  $a, b, c$  di  $N$  spire i cui assi magnetici sono ordinatamente sfasati nello

spazio di  $2\pi/3$  nel senso ciclico positivo (antiorario). Assumiamo come riferimento per la descrizione dei fasori il sistema di assi (reale, immaginario) stazionario D,Q dove D coincide con l'asse magnetico  $\mathcal{R}_a$  della fase a. Le grandezze riferite a questo sistema di assi saranno designate dall'apice s.

Supponiamo che gli avvolgimenti siano alimentati da generatori che impongono le correnti  $i_{a,b,c}$  in tal caso le f.m.m. al traferro (componente fondamentale) generate da ciascun avvolgimento di fase si possono valutare per un generico punto della periferia di anomalia  $\theta$  assumendo un asse orientato  $\mathcal{R}$  che passa per tale punto e proiettando su tale asse i fasori spaziali che rappresentano tali f.m.m. di fase come è indicato dalla eq.6.1. Nella eq.6.1 si è evidenziato il fasore f.m.m. trifase (somma dei fasori) e la grandezza complessa  $\bar{i}^s$  (fasore corrente) che merita una particolare attenzione.

$$6.1 \quad m_1(\theta) = \Re(\bar{m}_{1a} + \bar{m}_{1b} + \bar{m}_{1c}) = \Re\left[\frac{2}{\pi} N \left( i_a + i_b e^{j\frac{2\pi}{3}} + i_c e^{j\frac{4\pi}{3}} \right) \right] = \Re\left( \frac{2}{\pi} N \bar{i}^s \right)$$

Si può constatare, infatti, che se  $(i_a + i_b + i_c) = 0$  (questo è il caso considerato per le correnti nella Fig. 6.1) ad esempio per effetto della connessione a stella tra le fasi, allora le correnti di fase si possono ottenere moltiplicando per  $2/3$  la proiezione del vettore  $\bar{i}^s = i_a + ai_b + a^2i_c = i^s e^{j\beta}$  (con  $a = e^{j2\pi/3}$ ) sull'asse della singola fase, si vedano le eq.6.2-3.

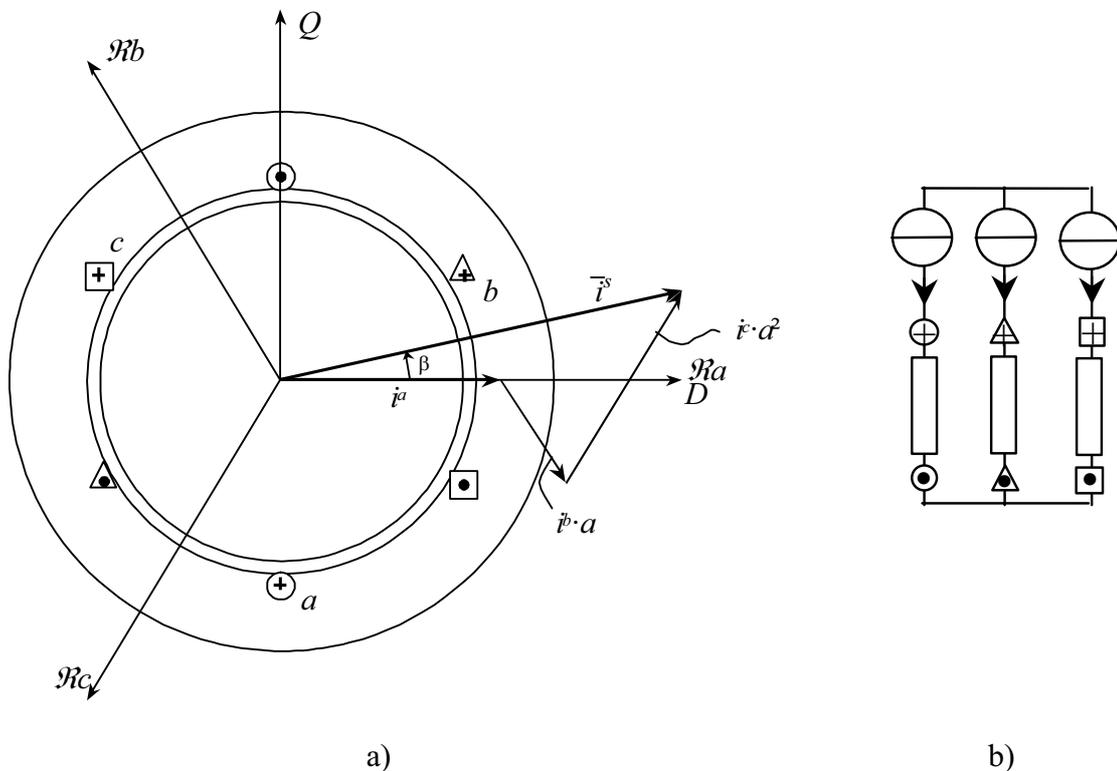


Fig. 6.1. a) Avvolgimento trifase simmetrico per due poli; b) connessione tra le fasi.

$$\Re_a(\bar{i}^s) = i_a + i_b \cos \frac{2\pi}{3} + i_c \cos \frac{4\pi}{3} = i_a - \frac{1}{2}(i_b + i_c) = \frac{3}{2}i_a$$

$$6.2 \quad \Re_b(\bar{i}^s) = i_a \cos \frac{4\pi}{3} + i_b + i_c \cos \frac{2\pi}{3} = i_b - \frac{1}{2}(i_a + i_c) = \frac{3}{2}i_b$$

$$\Re_c(\bar{i}^s) = i_a \cos \frac{2\pi}{3} + i_b \cos \frac{4\pi}{3} + i_c = i_c - \frac{1}{2}(i_a + i_b) = \frac{3}{2}i_c$$

$$6.3 \quad i_{a,b,c} = \frac{2}{3} \Re_{a,b,c}(\bar{i}^s) = \frac{2}{3} \Re_{a,b,c}[i^s e^{j\beta}] = \frac{2}{3} i^s \cos \left[ \beta - k \frac{2\pi}{3} \right] \quad k = 0,1,2$$

Le eq.6.1-3 comportano la seguente considerazione.

La grandezza complessa  $\bar{i}^s$  ha una valenza spaziale (come si è discusso per il caso bifase) ed una temporale (come è messo in evidenza nella eq.6.3): entrambe queste valenze si devono pensare come salvaguardate nella denominazione di “fasore corrente”.

La f.m.m. di ogni fase (componente fondamentale) genera un flusso che si concatena con la stessa fase ma anche con le fasi contigue dato che gli assi magnetici non sono tra loro ortogonali. Così, ad esempio, la corrente  $i_a$ , si veda la Fig. 6.2, genera la f.m.m.  $\bar{m}_{1a}$  e questa individua il fasore  $\bar{\psi}_{1a} = L i_a$  orientato secondo l’asse magnetico a (asse reale). La proiezione di questo fasore sugli assi a,b,c individua i flussi concatenati con le tre fasi per effetto della corrente nella fase a.

Si trova in questo modo  $\psi_{1aa} = L i_a$ ;  $\psi_{1ab} = L i_a \cos(2\pi/3)$ ;  $\psi_{1ac} = L i_a \cos(4\pi/3)$ . Se ora si ripete lo stesso ragionamento per le correnti  $i_b, i_c$  si trova che i flussi concatenati totali con le tre fasi sono quelli indicati nella eq.6.4. In questa relazione si è anche tenuto conto tramite l’induttanza di dispersione  $L_d$  (uguale per tutte le fasi data la simmetria costruttiva) dei flussi concatenati  $\psi_{da,b,c}$  dovuti alla presenza di tubi di flusso che si concatenano con le singole fasi senza attraversare il traferro (dispersione in cava e sulle teste delle bobine sulle due fronti della armatura di sostegno dell’avvolgimento) e quindi senza interessare le rimanenti fasi.

$$6.4 \quad \begin{aligned} \psi_{1a} &= \psi_{1aa} + \psi_{1ba} + \psi_{1ca} + \psi_{da} = L i_a - L i_b / 2 - L i_c / 2 + L_d i_a \\ \psi_{1b} &= \psi_{1ab} + \psi_{1bb} + \psi_{1cb} + \psi_{db} = -L i_a / 2 + L i_b - L i_c / 2 + L_d i_b \\ \psi_{1c} &= \psi_{1ac} + \psi_{1bc} + \psi_{1cc} + \psi_{dc} = -L i_a / 2 - L i_b / 2 + L i_c + L_d i_c \end{aligned}$$

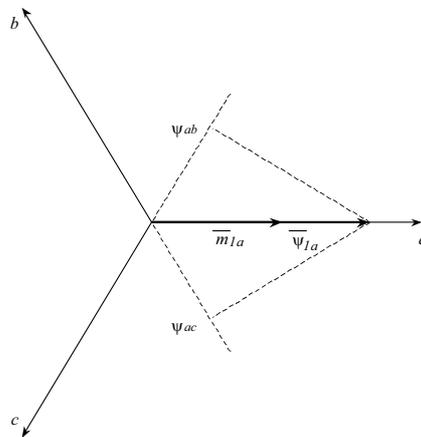


Fig. 6.2. Flussi concatenati generati dalla corrente  $i_a$ .

Se la somma delle correnti è nulla (si veda la Fig 6.1b) allora le eq.6.4 si semplificano come è precisato nella eq.6.5 e se si introduce il fasore  $\bar{\psi}_1^s$  indicato nella eq.6.6a è possibile calcolare i flussi di fase come è precisato nella eq.6.6b.

$$6.5 \quad \psi_{a,b,c} = L_s i_{a,b,c} \quad L_s = \frac{3}{2}L + L_d \quad L = N^2 \frac{4}{\pi} \mu_0 \frac{lr}{t}$$

$$6.6 \quad \begin{aligned} \text{a) } \bar{\psi}_1^s &= (\psi_{1a} + a\psi_{1b} + a^2\psi_{1c}) = L_s(i_a + ai_b + a^2i_c) = L_s\bar{i}^s \\ \text{b) } \psi_{1a} &= \frac{2}{3}\Re_a(\bar{\psi}_1^s) \quad \psi_{1b} = \frac{2}{3}\Re_b(\bar{\psi}_1^s) \quad \psi_{1c} = \frac{2}{3}\Re_c(\bar{\psi}_1^s) \end{aligned}$$

Una volta definiti i flussi concatenati dalle tre fasi è possibile valutare le tensioni di fase come è indicato nelle eq.6.7 ed utilizzare tali tensioni per definire il fasore tensione come è indicato nelle eq.6.8.

$$6.7 \quad v_{a,b,c} = Ri_{a,b,c} + p\psi_{1a,b,c} = (R + L_s p)i_{a,b,c}$$

$$6.8 \quad \bar{v}^s = v_a + av_b + a^2v_c = R\bar{i}^s + p\bar{\psi}_1^s = (R + L_s p)\bar{i}^s$$

Con questa definizione il legame tra le tensioni di fase ed il fasore tensione è quello indicato nella eq.6.9 dove per le tre fasi  $k$  assume rispettivamente i valori  $k = 0,1,2$ .

$$6.9 \quad \begin{aligned} v_{a,b,c} &= \frac{2}{3}\Re_{a,b,c}(\bar{v}^s) = \frac{2}{3}\Re_{a,b,c}(v^s e^{j(\beta+\varphi)}) = \\ &= \frac{2}{3}v^s \cos(\beta + \varphi - k2\pi/3) \end{aligned}$$

I fasori prima definiti possono, se risulta comodo, essere riferiti ad un diverso sistema di assi. Ad esempio (si veda la Fig. 5.2, che vale anche per il caso trifase pur di sostituire  $D, Q$  ad  $\alpha, \beta$ ) assumendo il riferimento d,q rotante rispetto al riferimento fisso D,Q alla velocità  $\dot{\theta}$  esiste tra i fasori il legame presentato nella eq.6.10 dove i fasori senza apice sono riferiti agli assi d,q. Ne consegue che tra i fasori nel nuovo riferimento esiste il legame indicato nella eq.6.11.

$$6.10 \quad \bar{i}^s = i_D + ji_Q = (i_d + ji_q)e^{j\theta} = \bar{i}e^{j\theta} \quad \bar{\psi}_1^s = \bar{\psi}_1e^{j\theta} \quad \bar{v}^s = \bar{v}e^{j\theta}$$

$$6.11 \quad \bar{v}^s = (Ri + p\psi + j\dot{\theta}\psi)e^{j\theta} \quad \bar{v} = Ri + p\psi + j\dot{\theta}\psi$$

La potenza istantanea si calcola come è indicato nella prima delle eguaglianze eq.6.12; da questa, tenendo in conto le relazioni eq.6.3 e eq.6.9, si trovano le successive.

$$\begin{aligned}
 6.12 \quad p &= v_a i_a + v_b i_b + v_c i_c = \frac{2}{3} v^s i^s \cos \varphi = \frac{2}{3} \bar{v}^s \times \bar{i}^s = \\
 &= \frac{2}{3} \operatorname{Re}(\bar{v}^s \bar{i}^s) = \frac{2}{3} \bar{v} \times \bar{i}
 \end{aligned}$$

Si osserva ora che assumendo come definizione dei fasori (tensione, corrente e flusso concatenato) quella “razionale” indicata nella eq.6.13, la potenza si calcola come è indicato nella eq.6.14, i valori istantanei di fase si deducono dai fasori come è indicato nella eq.6.15 ed il legame tra i fasori tensione e corrente rimangono quelli indicati nelle eq.6.8-9 Nel seguito si procederà assumendo per i fasori la definizione razionale, conservativa della potenza elettrica.

$$\begin{aligned}
 6.13 \quad \bar{i}_r^s &= \sqrt{\frac{2}{3}}(i_a + a i_b + a^2 i_c) = \sqrt{\frac{2}{3}} \bar{i}^s \\
 \bar{v}_r^s &= \sqrt{\frac{2}{3}}(v_a + a v_b + a^2 v_c) = \sqrt{\frac{2}{3}} \bar{v}^s
 \end{aligned}$$

$$6.14 \quad p = v_a i_a + v_b i_b + v_c i_c = \bar{v}_r^s \times \bar{i}_r^s = \bar{v}_r \times \bar{i}_r$$

$$\begin{aligned}
 6.15 \quad i_{a,b,c} &= \frac{2}{3} \Re_{a,b,c}(\bar{i}^s) = \sqrt{\frac{2}{3}} \Re(\bar{i}_r^s) \\
 v_{a,b,c} &= \frac{2}{3} \Re_{a,b,c}(\bar{v}^s) = \sqrt{\frac{2}{3}} \Re_{a,b,c}(\bar{v}_r^s)
 \end{aligned}$$

Come caso particolare se le tre correnti di fase costituiscono un sistema equilibrato di correnti alternate sinusoidali di pulsazione  $\omega$  come è indicato nella eq.6.16 allora i fasori corrente e tensione sono del tipo indicato nella eq.6.17 e la potenza istantanea è costante ed assume il valore indicato nella eq.6.18. Anche in questo caso le correnti generano un campo rotante di f.m.m. al traferro.

$$6.16 \quad i_{a,b,c} = I_M \cos(\omega t - k \frac{2\pi}{3}) \quad k = 0;1;2$$

$$\begin{aligned}
 6.17 \quad \bar{i}_r^s &= \sqrt{\frac{3}{2}} I_M e^{j\omega t} = \sqrt{3} I e^{j\omega t} & \bar{v}_r^s &= \sqrt{3} I L_s e^{j\omega t} \\
 v_r^s &= \sqrt{3} (R + j\omega L_s) I e^{j\omega t} = \sqrt{3} V e^{j(\omega t + \varphi)}
 \end{aligned}$$

$$6.18 \quad p = v_a i_a + v_b i_b + v_c i_c = \bar{v}_r^s \times \bar{i}_r^s = 3VI \cos \varphi$$

# MACCHINE ISOTROPE A CORRENTE ALTERNATA

## 1 Introduzione

Si mostrerà nel seguito che mediante l'uso dei fasori introdotti nel precedente capitolo è possibile definire modelli matematici di uso generale per le macchine rotanti a corrente alternata. Tra i diversi percorsi didattici possibili è stato privilegiato quello tradizionale consistente nel presentare la struttura della macchine e nel valutarne il funzionamento in regime stazionario.

## 2 La macchina sincrona isotropa.

### 2.1 La struttura ed il funzionamento in regime alternato sinusoidale.

La macchina sincrona isotropa è strutturata come è indicato nella Fig. 2.1a: sull'armatura esterna fissa è disposto un avvolgimento polifase simmetrico "di indotto" (trifase nella figura con fasi a,b,c dotate di assi magnetici  $\mathfrak{R}_{a,b,c}$  sfasati spazialmente di  $2\pi/3$  e numero di conduttori  $N_i$ ) e su quella interna un avvolgimento monofase con numero di conduttori  $N_e$ .

Supponiamo ora di alimentare le fasi a,b,c dell'avvolgimento trifase con tre generatori di corrente (con valori di corrente pari a quelli che si realizzano nel caso trifase nell'istante in cui è massima la corrente nella fase a):  $i_a = I_M$ ;  $i_{b,c} = -I_M/2$ . In questo modo si crea nel traferro un campo fondamentale di f.m.m. al traferro a disposizione sinusoidale nello spazio, con fasore rappresentativo  $\bar{m}_{1i}$  orientato come  $\mathfrak{R}_a$ .

Alimentiamo poi l'avvolgimento monofase di "eccitazione" con una corrente continua  $I_e$  che genera il campo fondamentale  $\bar{m}_{1e}$  diretto come  $\mathfrak{R}_e$ .

Se all'albero è applicata in senso orario una coppia T da un sistema meccanico interagente (e l'armatura esterna è, come già indicato, bloccata al suolo) allora l'asse magnetico del campo  $m_{1e}$  si sfasa di un angolo  $\varepsilon$  rispetto all'asse  $\mathfrak{R}_a$  tale che la coppia elettromagnetica faccia equilibrio alla coppia applicata dall'esterno, si veda la Fig. 2.1a.

Se ora a partire da questa situazione le correnti assumono nel tempo i valori tipici di un sistema equilibrato di correnti di valore massimo  $I_M$  e di pulsazione  $\omega$  (quindi  $i_{a,b,c} = I_M \cos(\omega t - k2\pi/3)$  con  $k=0,1,2$ ) allora il campo di f.m.m. di indotto prenderà a ruotare in senso antiorario con velocità angolare pari alla pulsazione  $\omega$  e si trascinerà dietro l'albero cui è applicata dall'esterno la coppia T, mentre lo sfasamento  $\varepsilon$  tra i due campi fondamentali di f.m.m. al traferro rimarrà inalterato se inalterata è la coppia che si oppone al moto.

In questo caso i fasori spaziali  $\bar{m}_{1i}, \bar{m}_{1e}$  ruotano alla stessa velocità angolare  $\omega$ , altrettanto avviene per il fasore temporale  $\bar{i}$  rappresentativo del sistema equilibrato di correnti che alimenta l'avvolgimento polifase di induttore e per i fasori  $\bar{\psi}_i, \bar{\psi}_e$  le cui proiezioni sugli assi  $\mathfrak{R}_{a,b,c}$  individuano i flussi concatenati con le tre fasi.

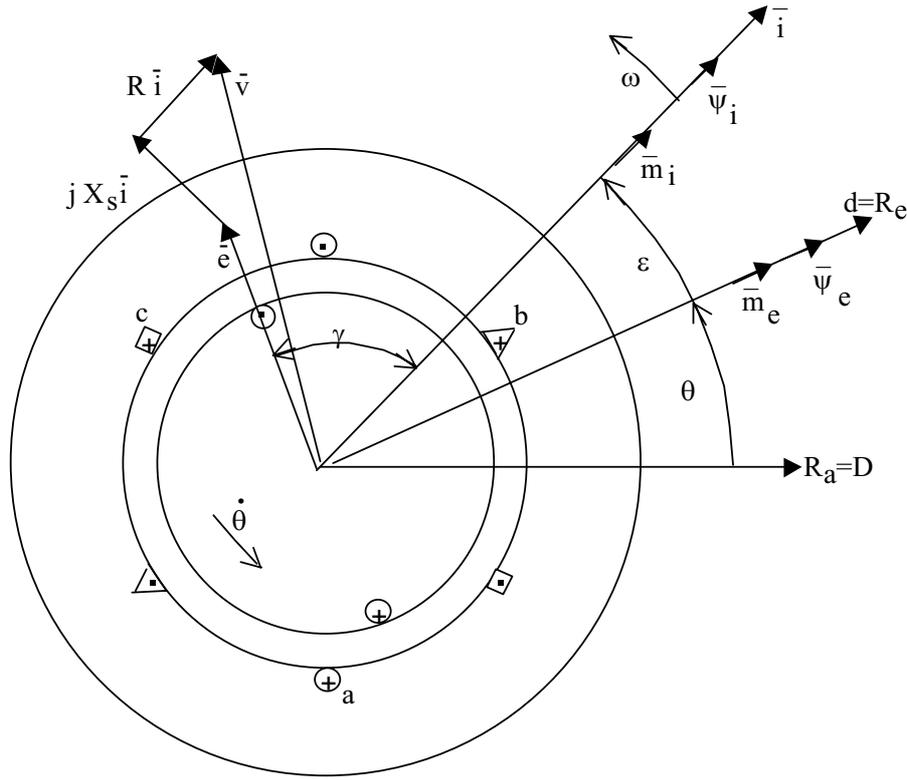


Fig. 2.1 a) La struttura della macchina sincrona isotropa, la alimentazione dell'avvolgimento trifase e dell'avvolgimento di eccitazione; b) il diagramma dei fasori a regime.

E' possibile ora calcolare le tensioni  $v_{a,b,c}$  che si manifestano ai morsetti dei generatori di corrente che erogano all'indotto il sistema equilibrato di correnti tramite la eq. 2.1 ( $R$  è la resistenza di fase) in cui, valendo il principio di sovrapposizione, il flusso concatenato da ogni fase di indotto è la somma di quello dovuto alle correnti di induttore (e) e di indotto (i).

$$2.1 \quad v_{a,b,c} = Ri_{a,b,c} + p\psi_{a,b,c} \quad \psi_{a,b,c} = (\psi_{a,b,c})^i + (\psi_{a,b,c})^e$$

Una volta costruiti i fasori "razionali"  $\bar{v}^s, \bar{i}^s, \bar{\psi}^s$ , in un riferimento stazionario D,Q (con l'asse reale D solidale con l'asse magnetico  $\mathfrak{R}_a$  della fase a) ed il fasore  $\bar{\psi}_e^s$  (disposto secondo l'asse magnetico dell'induttore), le relazioni eq. 2.1 si possono ritrascrivere come è indicato nelle eq. 2.2. Se ne conclude che il fasore  $\bar{v}^s$  è correlato agli altri fasori tramite la eq. 2.3.

$$2.2 \quad \sqrt{\frac{2}{3}}\Re_{a,b,c}(\bar{v}^s) = \sqrt{\frac{2}{3}}R\Re_{a,b,c}(\bar{i}^s) + \sqrt{\frac{2}{3}}\Re_{a,b,c}(p\bar{\psi}_i^s) + \Re_{a,b,c}(p\bar{\psi}_e^s)$$

$$2.1 \quad \bar{v}^s = R\bar{i}^s + p(\bar{\psi}_i^s + \sqrt{\frac{3}{2}}\bar{\psi}_e^s)$$

Conviene a questo punto ricordare il legame tra flussi concatenati di indotto e correnti ed esprimere tutti i fasori nel riferimento  $d,q$  (con l'asse reale  $d$  solidale con l'asse  $\mathfrak{R}_e$  dell'avvolgimento di eccitazione). Infatti in questo riferimento ampiezze e fasi dei diversi fasori sono costanti nel funzionamento di regime. Operando in questo modo si ottengono le eq. 2.4-5 in cui  $|R\bar{i}| \ll |jX_s\bar{i}|$  in cui  $\omega = \dot{\theta}$  ( $L_s$  prende il nome di induttanza sincrona), si veda la Fig. 2.1b.

$$2.2 \quad \begin{aligned} \bar{v}^s &= \bar{v}e^{j\theta} = R\bar{i}e^{j\theta} + p(L_s\bar{i}e^{j\theta} + \sqrt{\frac{3}{2}}\psi_{ei}e^{j\theta}) = \\ &= (R\bar{i} + j\omega L_s\bar{i} + j\omega\sqrt{\frac{3}{2}}\psi_{ei})e^{j\theta} \end{aligned}$$

$$2.3 \quad \begin{aligned} \bar{v} &= R\bar{i} + j\omega L_s\bar{i} + \bar{e} \approx jX_s\bar{i} + \bar{e} \\ \bar{e} &= j\omega\sqrt{\frac{3}{2}}\psi_{ei} = j\omega\sqrt{\frac{3}{2}}M_{ei}i_e = j\omega M i_e \end{aligned}$$

In base a quanto discusso nel precedente capitolo tutti i fasori che compaiono nella eq. 2.5 hanno modulo pari a  $\sqrt{3}$  volte il valore efficace di regime (tensioni e forze elettromotrici di fase, correnti di linea; si noti che, essendo  $\psi_{ei}$  il valore massimo del flusso concatenato, il coefficiente  $\sqrt{3}/2$  individua il prodotto del valore efficace di tale flusso per  $\sqrt{3}$ ), dividendo allora tutti i fasori della eq. 2.5 per  $\sqrt{3}$  si ottiene la eq. 2.6 in cui i fasori hanno per modulo i valori efficaci.

$$2.4 \quad \bar{V} = R\bar{I} + j\omega L_s\bar{I} + \bar{E} \approx jX_s\bar{I} + \bar{E}$$

Va osservato che agli effetti del controllo, sia nel funzionamento come motore, sia come generatore, è opportuno non perdere mai di vista l'allocatione di tale diagramma sulla struttura fisica della macchina. Nel caso in cui per comodità non si disegni la macchina conviene sempre ricordare, si veda la Fig. 2.2 (in cui il diagramma dei fasori prende il nome di "costruzione della reattanza sincrona" o di Behn-Eshemburg) che i fasori sono riferiti al sistema di assi spaziali  $d, q$  ( $d = \text{"diretto"}$ ,  $q = \text{"quadratura"}$ ), il primo orientato come l'asse magnetico di eccitazione ed il secondo in quadratura nel senso della successione ciclica delle fasi ( $a, b, c$  nel caso specifico), sfasati di  $\theta$  rispetto al sistema di assi fissi  $D, Q$  con  $D$  solidale con  $\mathfrak{R}_a$ .

Si può a questo punto ricavare il bilancio energetico della macchina come è indicato nella eq. 2.7 perché tutti i fasori sono "razionali" e perché la potenza istantanea è indipendente dal sistema di assi di riferimento. La potenza elettrica entrante è costante ed è la somma delle perdite nel rame di indotto e della potenza elettrica convertita in meccanica, prodotto della coppia elettromagnetica per la velocità angolare dell'indotto  $\Omega = \omega/n$  (a regime non vi sono variazioni nella energia immagazzinata nel campo magnetico). Dal bilancio si deduce l'espressione della coppia  $T$  riportata nelle eq. 2.8.

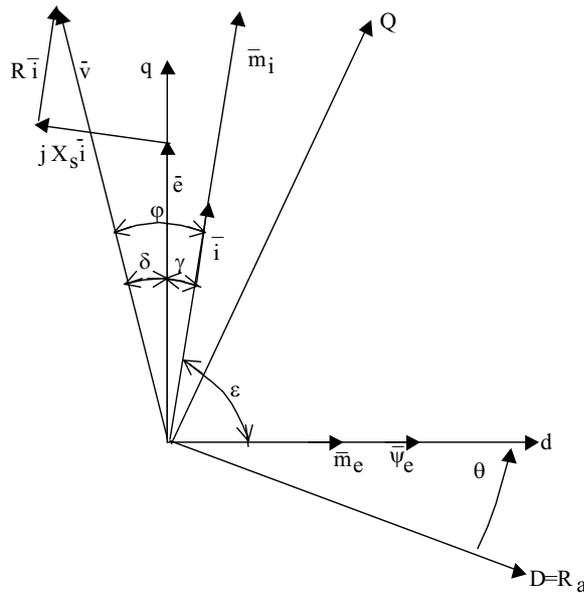


Figura 2.2. Costruzione di Behn-Eshemburg.

$$2.7 \quad p = v_a i_a + v_b i_b + v_c i_c = \bar{v} \times \bar{i} = Ri^2 + ei \cos \gamma = \\ = 3RI^2 + 3EI \cos \gamma = p_j + p_m$$

$$2.5 \quad T = \frac{ei \cos \gamma}{\Omega} = n \sqrt{\frac{3}{2}} \psi_{ei} \\ \Omega = \frac{\omega}{n} = \frac{2\pi f}{n}$$

La eq.2.8 si commenta da sola per quanto riguarda la opportunità di regolare la coppia e la velocità:

- la velocità si regola tramite la pulsazione delle correnti;
- il senso ciclico di rotazione si modifica cambiando il senso ciclico delle correnti (quindi imponendo che la corrente nella fase b sia in anticipo e quella nella fase c in ritardo rispetto alla corrente nella fase a);
- il modulo della coppia si regola agendo sulla corrente di eccitazione e/o sulla corrente di indotto.

## 2.2 Il campo di operatività a regime al variare della tensione e della frequenza.

Il campo di operatività della macchina sincrona al variare della tensione e della frequenza (tipicamente come motore negli azionamenti alimentati da un convertitore in grado di erogare una tensione di ampiezza e frequenza controllate) è delimitato da un insieme di restrizioni che riguardano:

- il sistema di isolamento e di raffreddamento;
- il sistema meccanico;
- il circuito magnetico, in relazione ai materiali impiegati;

- il sistema dei generatori pilotati di alimentazione.

Il sistema di isolamento viene progettato in modo da assicurare alla macchina una vita media probabile convenientemente lunga quando la tensione sia inferiore al valore nominale  $v_n$  (“tensione nominale di isolamento”). La qualità della progettazione viene provata in base alle norme internazionali (IEC) assoggettando la macchina ad una serie di prove standardizzate di intensità commisurata alla tensione nominale di isolamento.

Il sistema di raffreddamento e/o di accumulazione delle perdite consentirà funzionamenti di regime (continuativo, intermittente o di durata limitata) con perdite da contenere opportunamente (in relazione alla classe del materiale isolante) oppure colpi di calore (con accumulo delle perdite senza sensibile smaltimento) per effetto di picchi di corrente di durata convenientemente limitata in relazione alla temperatura iniziale degli avvolgimenti ed alle riduzioni della vita media probabile degli isolamenti che si ritiene utile di accettare.

Il sistema meccanico della macchina (tipicamente i cuscinetti e gli ammaraggi degli avvolgimenti) sarà progettato per una velocità angolare nominale che definisce, quando sia correlata alle norme IEC, le prove di velocità di tipo e di accettazione atte a qualificare la progettazione meccanica.

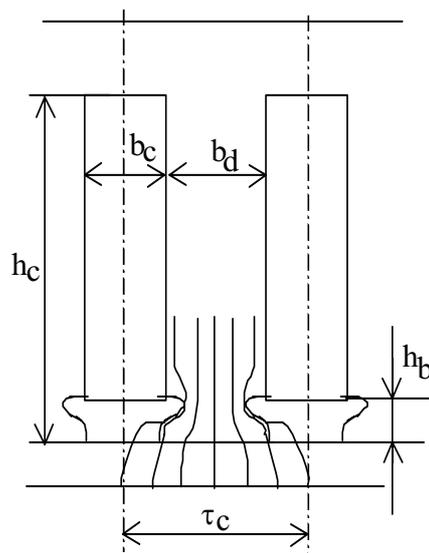


Fig. 2.3. Incanalamento del flusso al traferro nel dente.

Il materiale magnetico impiegato è soggetto a saturazione; tale fenomeno è particolarmente sensibile per il dente interposto tra due cave nella zona in cui è massima l'induzione al traferro. Se si accetta di assegnare, si veda la Fig. 2.3, metà del passo di cava (arco di periferia corrispondente ad una cava  $\tau_c = \pi D / c$  dove  $D$  è il diametro al traferro e  $c$  il numero totale delle cave) al dente e metà alla apertura di cava  $b_c$ , l'induzione ideale (in assenza di saturazione) nel dente è doppia che nel traferro (più che doppia in alcune zone del dente se si tiene conto dell'intaglio creato dalla bietta, si veda la Fig. 2.3). Dal momento che nei materiali attuali, come ordine di grandezza, induzioni nei denti dell'ordine di 2T danno luogo a saturazione (per modo che al crescere di  $m_e$  non crescono più  $\varphi, \psi$ ) le induzioni massime al traferro saranno inferiori a circa 1T. Se ne conclude che le grandezze  $\varphi, \psi$

realizzabili sono limitate sostanzialmente dalle dimensioni (diametro al traferro e lunghezza del pacco lamiera) della macchina.

Occorre infine considerare che il sistema dei generatori pilotabili (convertitori con valvole al silicio in grado di fornire correnti o tensioni di ampiezza e frequenza regolabili) costituisce un sistema di potenza finita in grado di erogare punte di corrente limitate dalla modesta capacità termica delle valvole. Queste limitazioni vanno considerate come parte integrante di quelle tipiche della macchina elettrica quando si consideri il sistema generatore pilotabile/motore.

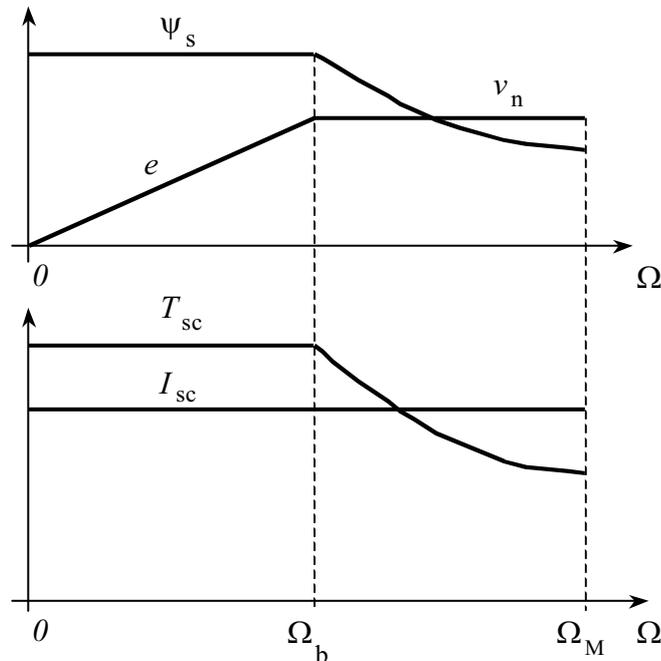


Fig. 2.4. Andamento qualitativo del campo di operatività al variare della frequenza e della tensione.

Nella Fig. 2.4 viene indicato un andamento qualitativo del campo di operatività e cioè dei valori ammissibili per le diverse grandezze elettromagnetiche al variare della velocità angolare della macchina. Si può osservare che, assumendo il flusso  $\psi$  pari al valore massimo ammissibile  $\psi_s$  in relazione alla saturazione, la f.e.m. crescerà proporzionalmente alla velocità. Una volta superata la “velocità base”  $\Omega_b$ , quella per la quale la f.e.m. eguaglia la tensione nominale di isolamento  $v_n$  dove in queste considerazioni, per semplicità, si accetta che  $e \approx v_n$ ) la f.e.m. verrà mantenuta costante ed il flusso  $\psi$  si ridurrà proporzionalmente ad  $1/\Omega$  fino alla velocità massima  $\Omega_M$  imposta dal sistema meccanico.

Per quanto riguarda la corrente, se il sistema di smaltimento delle perdite ha una efficacia indipendente dalla velocità (questo non avviene, ad esempio, nelle macchine autoventilate) allora la corrente ammissibile dipenderà dal tipo di servizio e dal sistema di alimentazione e crescerà passando dal servizio continuativo, a quello di durata limitata, a quello intermittente, a quello di picco. Nella figura si è considerato il caso di una macchina con sistema di raffreddamento indipendente dalla velocità e servizio continuativo. In questo caso, salvo fenomeni secondari che verranno separatamente esaminati, la corrente ammissibile  $I_{sc}$  è sostanzialmente costante. Ne consegue che la coppia massima ( $\cos \gamma = 1$ ) erogabile in servizio continuativo  $T_{sc}$  dovrà essere non superiore a  $I_{sc}\psi_s$  nel campo di

velocità inferiore alla velocità base per poi ridursi fino alla velocità massima proporzionalmente ad  $1/\Omega$ .

### 3 La macchina asincrona: la teoria trasformatorica

La macchina asincrona presenta la struttura isotropa indicata in Fig. 3.1: sull'armatura esterna, che è fissa (statore), è disposto un avvolgimento polifase simmetrico (trifase nel caso particolare con assi magnetici delle tre fasi designati con  $sa, sb, sc$  e avvolgimenti dotati di numero  $N_s$  di spire efficaci). Sull'armatura interna mobile (rotore) è disposto un secondo avvolgimento polifase simmetrico, nel caso specifico trifase (le tre fasi, designate con  $ra, rb, rc$ , sono dotate, di  $N_r$  spire efficaci) con assi magnetici che supponiamo inizialmente sovrapposti agli analoghi di statore

L'avvolgimento rotorico comunica con l'esterno attraverso un sistema di spazzole ed anelli che consentono la connessione ad impedenze o a generatori; in particolare l'avvolgimento rotorico può essere lasciato aperto o chiuso in corto circuito.

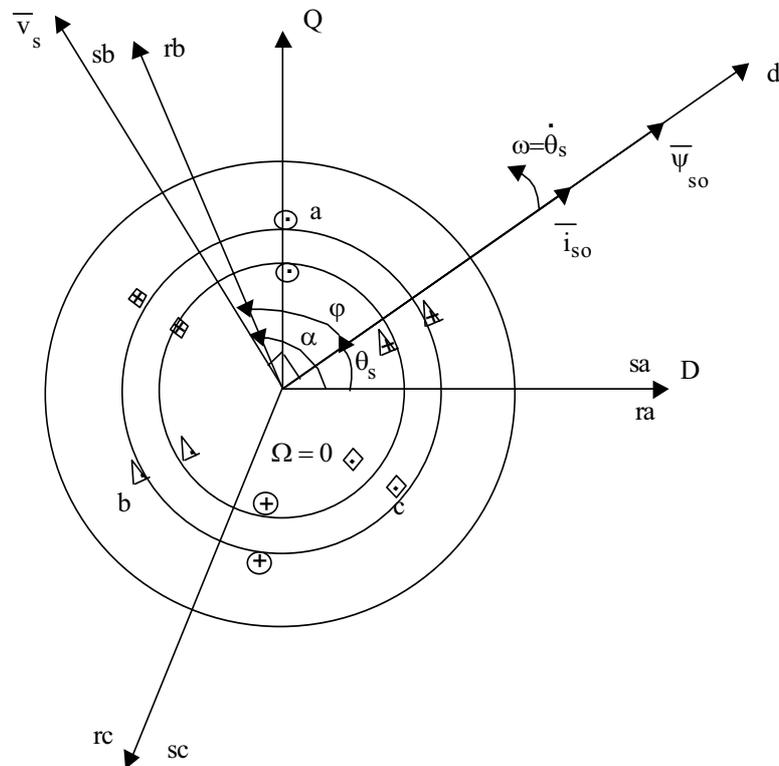


Fig. 3.1. La struttura della macchina asincrona.

Lasciamo aperto (si veda la Fig.3.2) l'avvolgimento di rotore ed alimentiamo l'avvolgimento di statore, supporto di resistenza trascurabile, con un generatore ideale trifase di tensioni in grado di erogare un sistema simmetrico di tensioni alternate sinusoidali di pulsazione  $\dot{\theta}_s = \omega$  e di valore massimo  $V_M$  del tipo indicato nelle eq. 3.1.

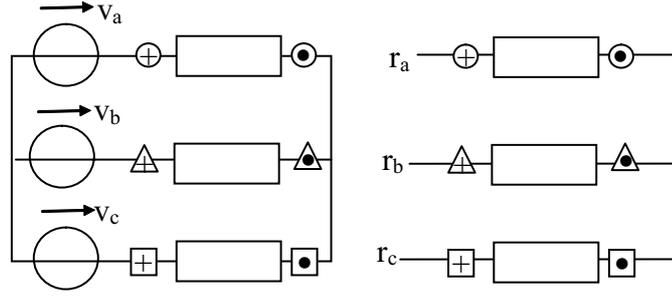


Fig. 3.2 Funzionamento con avvolgimento di rotore aperto.

In relazione alla simmetria della macchina circola nelle tre fasi statoriche un sistema equilibrato e queste correnti si possono esprimere come proiezioni sugli assi a,b,c del fasore rotante rispetto agli assi fissi D,Q presentato nella eq.3.2.

$$3.1 \quad v_{sa,b,c} = V_M \cos(\omega t + \alpha - k \frac{2\pi}{3}) \quad k = 0;1;2$$

$$3.2 \quad \bar{i}_{s0}^s = \sqrt{\frac{2}{3}}(i_{sa} + a i_{sb} + a^2 i_{sc}) = \sqrt{3} I_{s0} e^{j\theta_s} \quad \theta_s = \omega t + \theta_{s0}$$

$$i_{sa,b,c} = \sqrt{\frac{2}{3}} \Re_{sa,b,c}(\bar{i}_{s0}^s)$$

Il campo rotante di f.m.m. al traferro, generato dalle correnti statoriche, genera a sua volta il campo di induzione al traferro indicato nella eq.3.3 ed a questo si devono i flussi concatenati della eq. 3.4 (nella espressione della induttanza sincrona si sono trascurati i flussi di dispersione e quindi la presenza dell'induttanza di dispersione statorica  $L_{ds}$ ), rappresentabili come è indicato nella eq. 3.5.

$$3.3 \quad \bar{B}_0 = \frac{2}{\pi} N \frac{\mu_0}{t} \sqrt{\frac{3}{2}} \bar{i}_{s0}^s$$

$$3.4 \quad \psi_{sa,b,c} = L_{s0} i_{sa,b,c} \quad L_{s0} = \frac{3}{2} N_s^2 \frac{2}{\pi} \mu_0 \frac{lr}{t} = N_s^2 \Lambda$$

$$3.5 \quad \bar{\psi}_{s0}^s = \sqrt{\frac{2}{3}}(\psi_{sa} + a \psi_{sb} + a^2 \psi_{sc}) = L_{s0} \bar{i}_{s0}^s = L_{s0} \sqrt{3} I_{s0} e^{j\theta_s}$$

$$\psi_{sa,b,c} = \sqrt{\frac{2}{3}} \Re_{sa,b,c}(\bar{\psi}_{s0}^s)$$

Essendo trascurabili le cadute di tensione resistive il legame tra la tensione applicata e le correnti è quello indicato nella eq. 3.6

$$3.6 \quad \bar{v}_s^s = \bar{e}_s^s = p \bar{\psi}_{s0}^s = j \sqrt{3} L_{s0} \omega I_{s0} e^{j\theta_s} = j \omega \psi_{s0} e^{j\theta_s}$$

L'avvolgimento di rotore (dal momento che, fase per fase, ogni spira concatena lo stesso flusso della corrispondente spira dell'avvolgimento statorico) è sede di una f.e.m. valutabile come è indicato nella eq. 3.7: la macchina si comporta quindi come un trasformatore a vuoto ed il circuito equivalente è quello di Fig. 3.3 in cui tutti i fasori sono stati riferiti al riferimento  $d, q$  con  $d$  solidale con  $\bar{\psi}_{s0}$  (in questo riferimento i fasori hanno modulo e fase costanti).

$$3.7 \quad \bar{e}_{r0}^s = \frac{N_r}{N_s} \bar{e}_s^s = \frac{\bar{e}_s^s}{K} = \frac{j\omega\psi_{s0}}{K} e^{j\theta_s} \quad K = \frac{N_s}{N_r}$$

Occorre notare a questo punto che qualunque sia il carico che verrà collegato al secondario del trasformatore il sistema delle correnti di primario e di secondario dovrà essere tale da salvaguardare il flusso  $\bar{\psi}_{s0}^s$  (e la corrente  $\bar{i}_{s0}^s$  la cui f.m.m. origina  $\bar{\psi}_{s0}^s$ ) dato che questo fasore è imposto dal sistema delle tensioni applicato dai generatori ideali connessi allo statore.

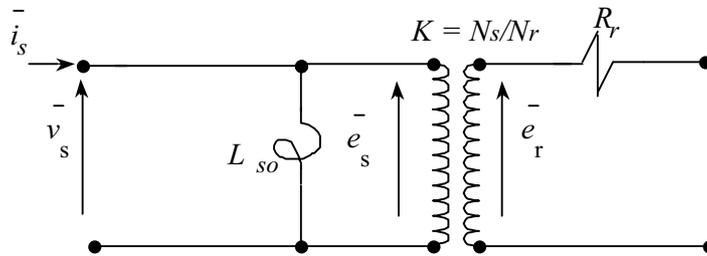


Fig.3.3 Circuito equivalente per il funzionamento a rotore aperto.

Supponiamo ora, a parità di alimentazione dello statore, di chiudere in corto circuito l'avvolgimento rotorico impedendone la rotazione meccanica (le grandezze pertinenti questo tipo di funzionamento avranno il pedice k) e studiamo il funzionamento in questa situazione nella ipotesi che l'avvolgimento rotorico presenti una resistenza di valore finito.

Il sistema simmetrico di f.e.m. rotoriche genererà (a regime), in relazione alla simmetria, un sistema equilibrato di correnti  $\bar{i}_{rk}^s$ . Insorge quindi un campo rotante rotorico ma, proprio in relazione al fatto che il flusso  $\bar{\psi}_{s0}^s$  deve rimanere immutato, dovrà anche insorgere una corrente statorica  $\bar{i}_{sk}^s$  tale da generare un campo statorico che sommato a quello rotorico lasci immutata la f.m.m. al traferro. La situazione delle correnti e delle f.m.m. al traferro dovrà essere allora quella indicata nella eq. 3.8.

Per quanto riguarda le tensioni e le f.e.m. si ha che: nello statore la f.e.m. statorica eguaglia la tensione, nel rotore (che presenta resistenza non nulla) la f.e.m. è uguale a quella nel funzionamento a vuoto e la somma della f.e.m. rotorica e della caduta di tensione resistiva eguaglia la tensione applicata (nulla perché l'avvolgimento è in corto circuito), si veda la eq. 3.9.

$$3.8 \quad \frac{2}{\pi} N_s \bar{i}_{sk}^s + \frac{2}{\pi} N_r \bar{i}_{rk}^s = \frac{2}{\pi} N_s \bar{i}_{s0}^s \quad \bar{i}_{sk}^s + \frac{\bar{i}_{rk}^s}{K} = \bar{i}_{sk}^s + \bar{i}_{rk}^s = \bar{i}_{s0}^s$$

$$3.9 \quad \bar{v}_s^s = \bar{e}_s^s = K \bar{e}_{r0}^s \quad \bar{v}_r^s = 0 = R_r \bar{i}_{rk}^s + \bar{e}_{r0}^s \quad \bar{i}_{rk}^s = -\bar{e}_{r0}^s / R_r$$

Combinando le relazioni indicate nella eq. 3.9 si ottiene la eq. 3.10 e si nota che il funzionamento della macchina può essere rappresentato dal circuito equivalente di Fig. 3.3 i cui fasori (riferiti al sistema di assi  $d, q$  e quindi costanti in modulo e fase) sono disposti nello spazio come è indicato nella Fig. 3.4.

$$3.10 \quad \bar{v}_s^s = \bar{e}_s^s = K\bar{e}_r^s = -KR_r\bar{i}_{rk}^s = -K^2R_r\bar{i}_{rk}^s$$

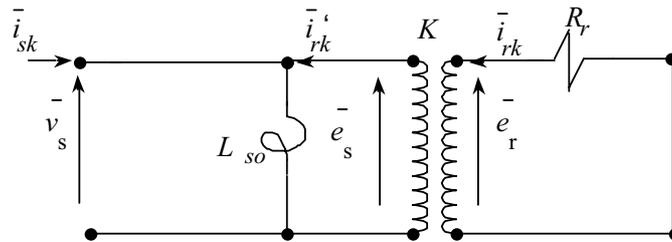


Fig.3.4. Circuito equivalente per il funzionamento a rotore bloccato ed in corto circuito.

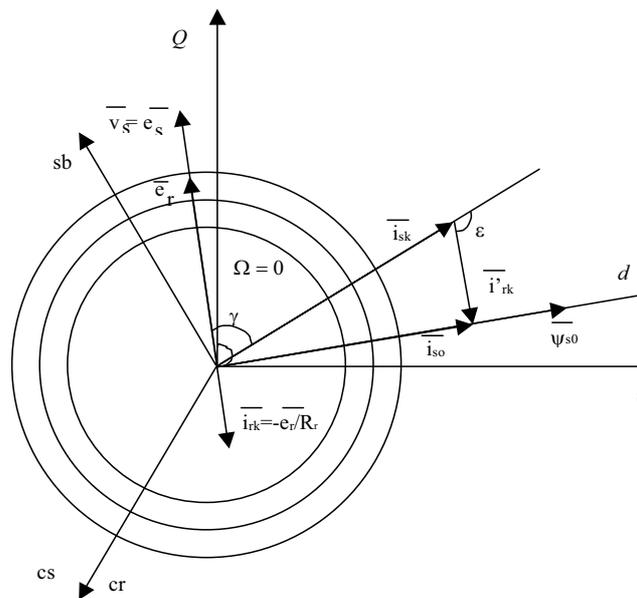


Figura 3.5. Disposizione dei fasori nel funzionamento in corto circuito.

La Fig. 3.4 evidenzia il fatto che si è creata una situazione da giunto elettromagnetico. In effetti il campo di f.m.m. statorica  $\bar{m}_{sk}$  (che agisce nel senso di  $\bar{i}_{sk}$ ) genera un elettromagnete che interagisce con l'elettromagnete generato dal campo di f.m.m. rotorica  $\bar{m}_{rk}$  (che agisce nel senso di  $\bar{i}_{rk}$ ) dando luogo ad una coppia  $T_k$  che, come si legge direttamente dal disegno, tende a portare l'armatura interna in rotazione in senso antiorario (nel senso ciclico  $a, b, c$  positivo). Si noti che in questo caso l'elettromagnete statorico agisce

per repulsione su quello rotorico in quanto, essendo l'angolo di sfasamento tra le f.m.m. maggiore di  $\pi/2$ , il polo nord dell'elettromagnete statorico è in anticipo rispetto alla analoga polarità rotorica di  $(\pi - \varepsilon)$ .

La coppia  $T_k$  si può valutare tramite il bilancio energetico del circuito equivalente, che, nella situazione di rotore bloccato, si scrive come è indicato nella eq. 3.11.

$$3.11 \quad \begin{aligned} p &= \bar{v}_s \times \bar{i}_s = \bar{e}_s \times \bar{i}_s = e_s i_s \cos \gamma = \\ &= T_k \Omega_0 = T_k \frac{\omega}{n} = 3R_r' (i_{rk}^s)^2 \end{aligned}$$

Vediamo ora cosa succede se, dopo aver applicato all'albero di rotore una coppia meccanica resistente (indipendente dalla velocità angolare)  $T_c < T_k$ , si sblocca l'armatura interna consentendone così la rotazione.

La macchina in tal caso si porterà in una nuova condizione di regime (con coppia elettromagnetica eguale a quella meccanica  $T = T_c$ ) e questa sarà caratterizzata dal fatto che il rotore dovrà ruotare ad una velocità angolare  $\dot{\theta}$  inferiore rispetto a quella "di sincronismo"  $\dot{\theta}_s = \omega$  del fasore induzione al traferro perché solo in tale caso (essendo non nulla velocità relativa del campo magnetico al traferro rispetto al rotore) si potrà generare un sistema trifase simmetrico di f.e.m. rotoriche e quindi un sistema equilibrato di correnti rotoriche e quindi ancora un flusso rotorico che, interagendo con quello statorico, generi la coppia elettromagnetica. Se ne conclude che il fasore induzione al traferro ruoterà rispetto ad un riferimento solidale con il rotore ad una velocità  $\dot{\theta}_r$  non nulla e legata alle altre velocità dalla relazione eq.3.12 in cui il rapporto adimensionale  $x$  prende il nome di scorrimento.

$$3.12 \quad \dot{\theta}_r = \dot{\theta}_s - \dot{\theta} = x \dot{\theta}_s \quad \dot{\theta}_s = \omega \quad x = \frac{\dot{\theta}_s - \dot{\theta}}{\dot{\theta}_s}$$

Dal momento che il flusso  $\bar{\psi}_{s0}$  è inalterato la f.e.m. indotta in ogni fase rotorica è data dalla eq.3.13 quindi è pari al prodotto dello scorrimento per la f.e.m. indotta nel funzionamento a vuoto.

$$3.13 \quad \bar{e}_r^s = \frac{j \dot{\theta}_r \psi_{s0}}{K} e^{j\theta_s} = x \bar{e}_{r0}^s$$

Ne consegue che il sistema equilibrato di correnti rotoriche è rappresentabile con il fasore indicato nella eq.3.14 e cioè la corrente rotorica è quella che si avrebbe nel funzionamento in corto circuito se la resistenza rotorica fosse  $R_r / x$ .

$$3.14 \quad \bar{i}_r^s = \bar{e}_r^s / R_r = x \bar{e}_{r0}^s / R_r = \bar{e}_{r0}^s / (R_r / x)$$

Per quanto riguarda infine la corrente statorica occorre ripetere quanto si è detto in corto circuito a proposito della eq.3.8 che viene riconfermata nella eq.3.15.

$$3.15 \quad \frac{2}{\pi} N_s \bar{i}_s^s + \frac{2}{\pi} N_r \bar{i}_r^s = \frac{2}{\pi} N_s \bar{i}_{s0}^s \quad \bar{i}_s^s + \frac{\bar{i}_r^s}{K} = \bar{i}_{s0}^s$$

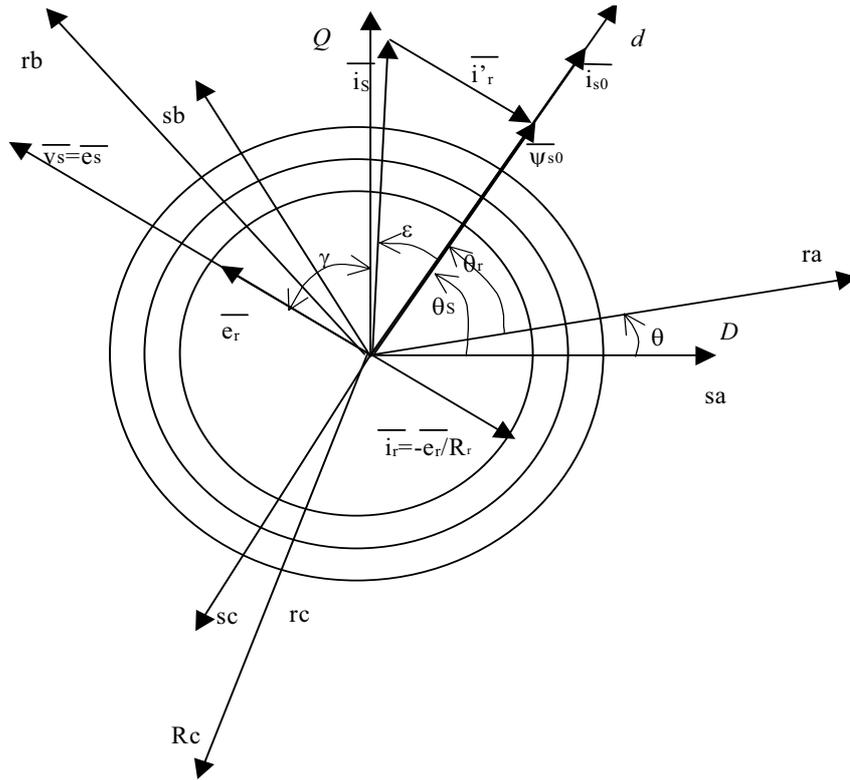


Fig.3.5 Disposizione dei fasori a carico.

Complessivamente il funzionamento della macchina nel riferimento  $d,q$  è espresso dalle eq. 3.16 e da queste relazioni si vede che i fasori rispondono nel funzionamento a carico al diagramma di Fig. 3.5 ed al circuito equivalente di Fig. 3.6 che compendia, in relazione ai diversi valori di  $x$  ( $x=0$  funzionamento a vuoto;  $x=1$  funzionamento a rotore bloccato;  $0 < x < 1$  funzionamento a carico come motore), le tre situazioni di funzionamento prima esaminate.

$$3.16 \quad \begin{aligned} \bar{v}_s &= \bar{e}_s = j\omega L_{s0} \bar{i}_{s0} & \bar{i}_s + \frac{\bar{i}_r}{K} &= \bar{i}_{s0} \\ \bar{i}_r &= -\frac{\bar{e}_{r0}}{R_r/x} = -\frac{\bar{e}_s}{KR_r/x} & T &= T_c \end{aligned}$$

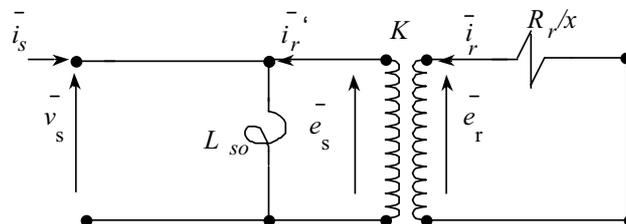


Fig. 3.6. Circuito equivalente per il funzionamento a carico.

Complessivamente il funzionamento della macchina nel riferimento  $d,q$  è espresso dalle eq.3.17 e dal circuito equivalente di Fig.3.6 che compendia in relazione ai diversi valori di  $x$  ( $x=0$  funzionamento a vuoto;  $x=1$  funzionamento in corto circuito;  $0 < x < 1$  funzionamento a carico come motore) i tre casi prima esaminati.

$$3.17 \quad \bar{v}_s = \bar{e}_s = j\omega L_{s0} \bar{i}_{s0} \quad \bar{i}_s + \frac{\bar{i}_r}{K} = \bar{i}_{s0} \quad \bar{i}_r = -\frac{\bar{e}_{r0}}{R_r/x}$$

Si potranno poi eliminare le ipotesi semplificatrici introdotte considerando la presenza della resistenza statorica  $R_s$  e dei flussi di dispersione corrispondenti a tubi che si concatenano con i due avvolgimenti senza attraversare il traferro (il flusso concatenato di dispersione sarà in tal caso proporzionale alla corrente secondo un coefficiente, denominato "induttanza di dispersione", che dipende dalla struttura dell'avvolgimento). Le equazioni della macchina assumono allora la forma indicata nelle eq.3.18.

$$3.18 \quad \begin{aligned} \bar{v}_s &= R_s \bar{i}_s + j\omega L_{ds} \bar{i}_s + j\omega L_{s0} \bar{i}_{s0} & L_{s0} &= N_s^2 \Lambda \\ 0 &= \frac{R_r}{x} \bar{i}_r + j\omega L_{dr} \bar{i}_r + j\omega L_{s0} \bar{i}_{s0} / K \\ T &= T_c \end{aligned}$$

Ne consegue per il circuito equivalente la struttura di Fig. 3.7 (in cui tutte le grandezze di rotore sono state riferite ai dati di avvolgimento dello statore) e per il diagramma dei fasori la struttura di Fig. 3.8 (si noti che, a parità di  $\bar{v}_s$ , la corrente "magnetizzante"  $\bar{i}_m$  nella induttanza  $L_{s0}$  è diversa da  $\bar{i}_{s0}$  perché in questo caso  $\bar{e}_s \neq \bar{v}_s$ ).

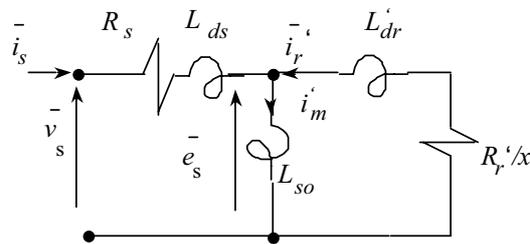


Fig.3.7 Circuito equivalente completo della macchina.

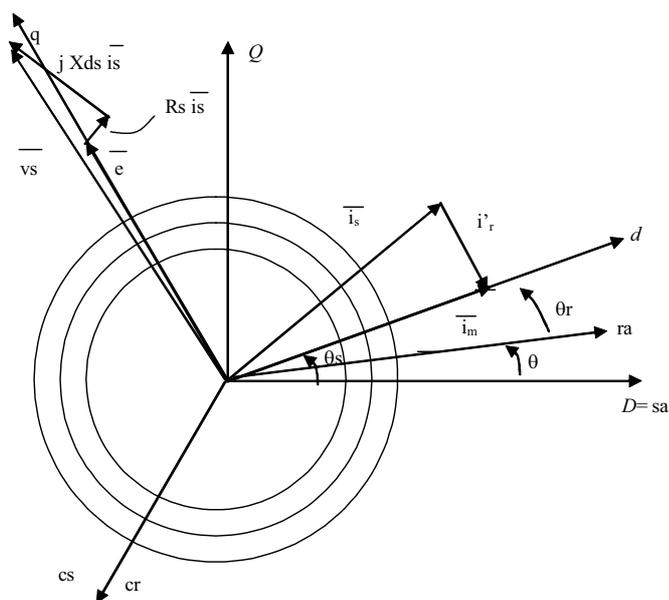


Fig. 3.8. I fasori nel funzionamento a carico.

La potenza istantanea è data dalla eq. 3.19: la potenza elettrica entrante è pari alla somma delle perdite per effetto joule nello statore  $p_{js}$  e della potenza trasmessa elettromagneticamente (tramite il giunto elettromagnetico) al rotore. La potenza trasmessa  $p_t$  è pari al prodotto della coppia  $T$  scambiata dalle due armature del giunto per la velocità di rotazione del giunto. Dal momento che nella ipotesi di macchina con  $n$  paia di poli il giunto ruota alla “velocità di sincronismo”  $\Omega_0 = \omega / n$  dalla espressione della potenza trasmessa si deduce quella della coppia come è indicato nella eq. 3.20. La eq. 3.21 evidenzia il significato energetico dello scorrimento che è pari al rapporto tra le perdite nel rame di rotore e la potenza trasmessa.

$$3.19 \quad p = \bar{v}_s \times \bar{i}_s = R_s i_s^2 + \frac{R_r'}{x} i_r'^2 = p_{js} + p_t = 3R_s I_s^2 + 3 \frac{R_r'}{x} I_r'^2$$

$$3.20 \quad T\Omega_0 = T \frac{\omega}{n} = \omega \psi_{s0} i_s \cos \gamma = \frac{R_r'}{x} i_r'^2$$

$$T = n \psi_{s0} i_s \cos \gamma = 3n \frac{R_r'}{x} i_r'^2$$

$$3.21 \quad x = \frac{p_{jr}}{p_t} = \frac{R_r' i_r'^2}{R_r' i_r'^2 / x}$$

### 3.1 Modi di funzionamento, caratteristica meccanica

A partire dalla condizione di rotore bloccato si è supposto di applicare una coppia resistente inferiore a quella elettromagnetica e di sbloccare il rotore consentendogli di ruotare nel senso ciclico diretto. Se la coppia di carico fosse stata nulla il motore si sarebbe portato idealmente (in assenza di attriti) alla velocità di sincronismo  $\Omega_0 = \omega / n$ .

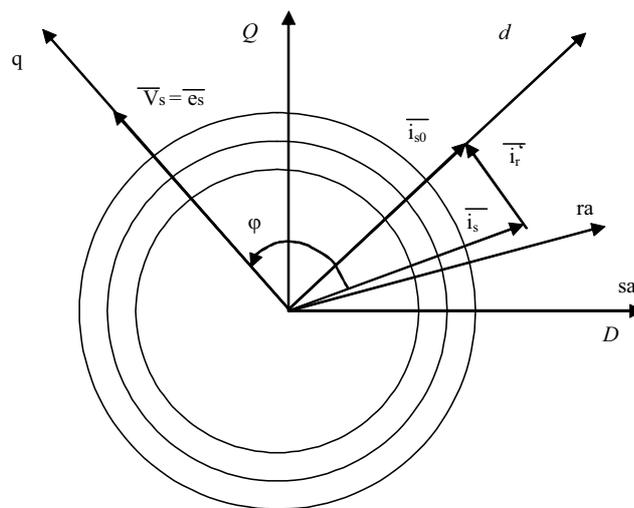


Fig.3.9 Diagramma dei fasori nel funzionamento come generatore.

Se poi a partire da questa condizione un motore primo avesse imposto una velocità di rotazione  $\dot{\theta} > \omega$  allora i ragionamenti sarebbero rimasti invariati ma la velocità relativa  $\dot{\theta}_r = \dot{\theta}_s - \dot{\theta} = \omega - \dot{\theta} < 0$  del fasore  $\bar{\psi}_{s0}$  rispetto al rotore avrebbe cambiato di segno (lo stesso per lo scorrimento  $x = (\omega - \dot{\theta}) / \omega$ ) per modo che il diagramma dei fasori sarebbe diventato quello della Fig. 3.9. In questo caso, essendo  $\varphi > \pi/2$ , la macchina funziona da generatore.

Se invece, a partire dalla condizione di rotore bloccato, un motore primo avesse imposto una rotazione ad una velocità finita in senso opposto a quello del campo statorico allora la velocità relativa  $\dot{\theta}_r = \omega - \dot{\theta} > \omega$ , lo scorrimento sarebbe stato maggiore dell'unità ed il diagramma dei fasori sarebbe stato ancora quello di Fig. 3.8. In questo caso tutti i ragionamenti sarebbero rimasti inalterati, la macchina avrebbe continuato a trasmettere potenza dallo statore al rotore (la coppia non avrebbe cambiato segno) e la coppia elettromagnetica si sarebbe opposta alla rotazione (funzionamento come freno).

Tutte queste condizioni di funzionamento possono essere riconosciute utilizzando ad esempio il circuito equivalente di Fig. 3.7 e calcolando con questo tramite la caratteristica meccanica a regime. In proposito i calcoli possono essere convenientemente semplificati allo scopo di cogliere la correlazione tra coppia e parametri.

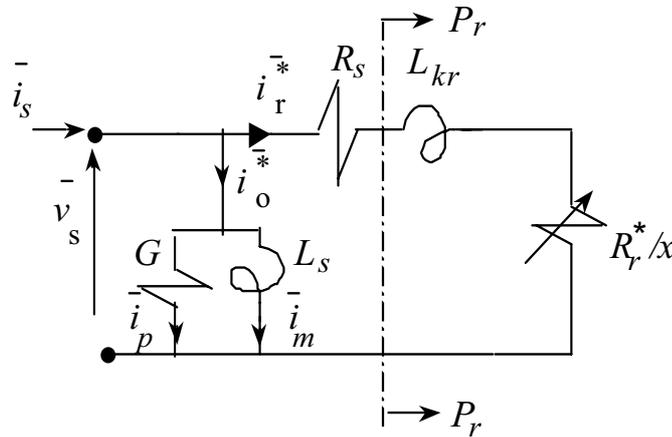


Fig. 3.10 Circuito a quattro parametri semplificato.

In effetti finchè sono piccole le cadute di tensione sulla resistenza statorica è possibile semplificare il circuito equivalente come è indicato nella Fig. 3.10. In questa figura, rispetto al circuito di Fig. 3.7 è stato: spostato a monte di  $R_s$  il ramo derivato  $L_s$ ; ii) aggiunto il ramo  $G$  per rendere ragione delle perdite nel ferro (misurabili a vuoto sincrono  $x=0$ ); iii) evidenziati il ramo del circuito cui compete la potenza rotorica.

E' possibile ora ricavare agevolmente la coppia elettromagnetica (dalla potenza elettrica trasformata in meccanica, si veda la eq. 3.22) e quindi la caratteristica meccanica di Fig. 3.11. Si tratta di una funzione della velocità angolare meccanica  $\Omega$  (o dello scorrimento) che presenta i punti caratteristici nel seguito discussi.

$$3.22 \quad P_m = \Omega_0 T = \frac{R_r^*}{x} i_r^{*2} = \frac{3yV^2}{(R_s' + y)^2 + X_k^2} = \frac{3V^2/Z}{\left(\frac{y}{Z} + 2\chi + \frac{Z}{y}\right)}$$

$$Z = \sqrt{R_s'^2 + X_k^2} \quad \chi = \frac{R_s'}{Z} \quad y = \frac{R_r^*}{x} \quad \chi_k = \omega L_{kr}$$

Per scorrimento  $x$  piccolo, quale si realizza ad esempio per le macchine di media e grande potenza nel funzionamento in servizio continuativo con coppia resistente  $T_c$  uguale alla coppia nominale  $T_n$ , allora  $y$  è grande e la coppia  $T_n$  si può esprimere come è indicato nella eq. 3.23a. Da questa espressione si ricava lo scorrimento nominale  $x_n$ , che è correlato alla resistenza di rotore ed alla coppia nominale (si veda la eq. 3.23b).

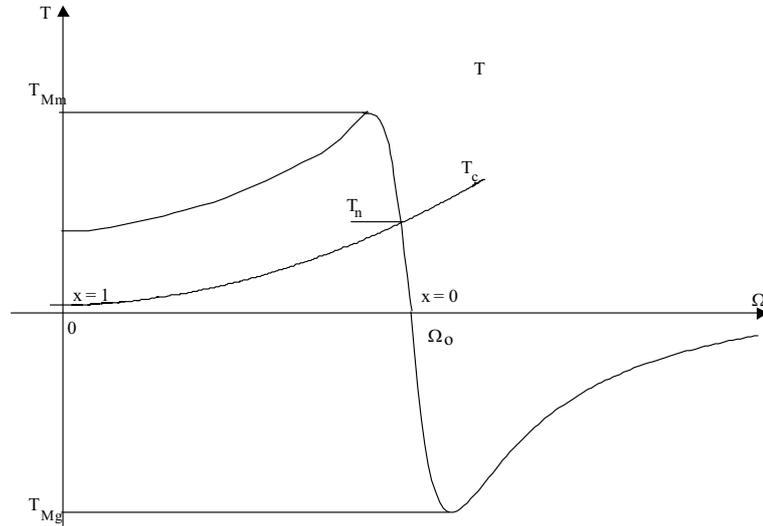


Fig.3.11 Caratteristica meccanica.

$$3.23 \quad a) T_n = \frac{3V^2}{\Omega_0 y_n} \quad b) x_n = T_n \Omega_0 \frac{R_r^*}{V^2}$$

Le coppie massima/minima  $T_M$  si realizzano per  $y_M = \pm Z$  e cioè per scorrimento  $x_M = \pm R_r^* / Z \approx \pm R_r^* / X_k$  ed hanno l'espressione eq.3.24 (dove  $\chi \ll 1$ ). Le coppie massima/minima sono correlate alla induttanza di corto circuito e variano con la pulsazione come  $1/\omega^2$ .

$$3.24 \quad T_M = \frac{3V^2}{2(\chi \pm 1)\Omega_0 Z} \approx \frac{3V^2}{2(\chi \pm 1)\Omega_0 X_k}$$

La coppia a rotore bloccato e con avvolgimento in corto circuito si deduce dalla eq. 3.22 per  $y=R_r^*$  e cioè per  $x=1$ ; ad essa si può assegnare l'espressione approssimata indicata nella eq. 3.25. La coppia di corto circuito è correlata ancora alla resistenza rotorica  $R_r^*$  ed al quadrato della reattanza  $X_k$  (si noti la dipendenza da  $1/\omega^3$ ).

$$3.25 \quad T_K \cong \frac{3V^2 R_r^*}{\Omega_0 Z^2} \approx \frac{3V^2 R_r^*}{\Omega_0 X_k^2}$$

Come ordini di grandezza per una macchina a rotore avvolto, posto  $Z_n = V_n / \sqrt{3} I_n$  (con  $V_n$  tensione nominale concatenata della macchina) si ha:

$$R_s / Z_n \approx R_r / Z_n = 0,03 - 0,05; \quad Z / Z_n \approx X_k / Z_n = 0,25 - 0,35$$

$$I_k / I_n \approx (V_n / X_k) / (V_n / Z_n) = 1 / (X_k / Z_n) = 3 - 4; \quad x_n = 0,02 - 0,04$$

$$T_M / T_n = 2 - 2,5 \quad \text{e} \quad T_k / T_n = 0,6 - 0,8$$

Gli ordini di grandezza evidenziano che si tratta di macchine con coppie di spunto relativamente modeste rispetto alla nominale e con elevate correnti allo spunto. Queste limitazioni sono rimovibili usando per il rotore avvolgimenti “a gabbia” (nelle cave rotoriche sono disposte sbarre in rame o leghe di rame chiuse in corto circuito sui due fronti del pacco lamiere mediante anelli di corto circuito) come mostrano i dati della Tab.3.1.

Pote nza nominale	Velo cità nominale	Rend im. nominale	Cos $\phi$ nominale	Corr ente nominale	$\frac{T_k}{T_n}$	$\frac{i_k}{i_n}$	$\frac{T_M}{T_n}$	GD <sup>2</sup>	Mass a totale
[kW]	giri/min	[%]	[/]	[A]	[/]	[/]	[/]	[kgm <sup>2</sup> ]	[kg]
30	1470	91,5	0,84	45	2,5	6,3	2,8	1,1	265
37	1475	92	0,86	71	2,5	6,3	2,8	1,3	300
45	1475	92	0,86	87	2,5	6,3	2,8	1,6	330
55	1475	93	0,86	105	2,3	6,2	2,5	2,7	415
75	1480	93	0,86	143	2,3	6,2	2,5	3,4	500
90	1480	93,5	0,86	170	2,5	6,2	2,5	4	550
110	1485	93,5	0,86	208	2,5	6,2	2,4	7,8	670

Tab. 3.1 Dati caratteristici di motori con indotto a gabbia.

### 3.2 Il campo di operatività in regime alternato sinusoidale a tensione e frequenza costanti: il diagramma circolare

Il diagramma circolare della macchina asincrona rappresenta la legge di variazione della corrente di statore al variare dello scorrimento nel funzionamento in regime alternato sinusoidale con tensione applicata allo statore di ampiezza e frequenza costanti. Il diagramma è di semplice determinazione nel caso del circuito equivalente semplificato di Fig. 3.10 in cui la corrente statorica è la somma della corrente a vuoto  $\bar{i}_0$  (somma dei fasori rappresentativi della componente magnetizzante  $\bar{i}_m$  e della componente di perdita  $\bar{i}_p$ , rappresentativa delle perdite a “vuoto sincrono” e cioè a scorrimento  $x=0$ ) e della corrente rotorica  $\bar{i}_r$  (per la quale si è cambiata la convenzione di misura rispetto a quelle precedentemente adottate).

Nel circuito di Fig. 3.10 si è evidenziata la sezione di passaggio della potenza rotorica  $p_2$ . Per la parte attiva questa è la somma delle perdite nel rame rotorico e della potenza meccanica resa, somma a sua volta delle perdite per ventilazione e della potenza resa al carico meccanico.

Si noti (al fine di comprendere l'ordine di grandezza dell'errore che si commette con l'uso di questo circuito) che per effetto della approssimazione introdotta le perdite nel rame di statore vengono valutate come  $p_{cus} = R_s i_s^2 \approx R_s i_r^2$  (come ordine di grandezza se

$i_0 \approx i_m \approx 0,33 i_n$ , allora a corrente statorica nominale si ha  $i_s^2 = i_n^2 = i_m^2 + i_r^2$  ed  $i_r^2 \approx 0,9 i_s^2$  e quindi le perdite nel rame di statore vengono valutate con il circuito proposto con un errore dell'ordine del 10%; le perdite nel rame complessive, statore più rotore, sono valutate a corrente nominale con un errore dell'ordine del 5% se la resistenza statorica e quella rotorica hanno lo stesso valore).

Considerato ora il circuito di Fig. 3.10, se si orienta sull'asse reale il fasore  $\bar{v}_s$ , il fasore rappresentativo della corrente rotorica massima (quella per scorrimento negativo tale che  $R = R_s + R_r / x = 0$ ) vale  $\bar{i}_{rM} = \bar{v}_s / jX_{rk}$ , mentre la corrente rotorica per un valore generico dello scorrimento  $x$  è allora quella indicata nella eq. 3.26.

$$3.26 \quad \bar{i}_r(R) = \frac{\bar{v}_s}{\bar{Z}} = \frac{v_s}{Ze^{j\varphi}} = \frac{v_s}{X_{rk}} \frac{X_{rk}}{Z} e^{-j\varphi}$$

$$3.27 \quad \bar{i}_r(R) = (\bar{i}_{rM} \text{ sen } \varphi) e^{-j\varphi} = OB e^{-j\varphi} = i_r e^{-j\varphi}$$

Se allora costruiamo il luogo dei vertici del fasore  $e^{-j\varphi} = (R - jX_{rk}) / Z = \overline{OA} / OA$ , si veda la Fig. 3.12, riportando le componenti  $R$  ed  $X_{rk}$  della impedenza  $\bar{Z}$  in una scala opportuna osserviamo che la relazione eq. 3.27 (che è una ritrascrizione della eq. 3.26) consente di identificare  $\bar{i}_r(R)$  in forma polare tramite il modulo  $OB$  e l'anomalia  $\varphi$ .

A questo punto la corrente totale statorica si ottiene come somma di quella rotorica e della corrente a vuoto e cioè trasladando la circonferenza prima individuata del fasore  $\bar{i}_0$  come è indicato nella Fig. 3.13.

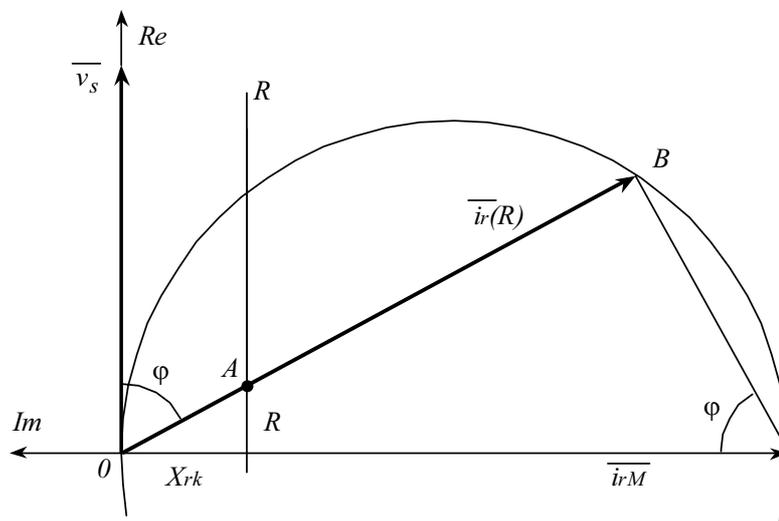


Fig. 3.12. Luogo dei vertici della corrente rotorica.

In questa figura si sono evidenziati il punto A di funzionamento con scorrimento  $x=0$ , il punto B di funzionamento con  $x=1$  (rotore bloccato) ed il punto C di funzionamento con scorrimento infinito. L'arco AB sulla circonferenza corrisponde al funzionamento come motore, l'arco BC al funzionamento come freno, nell'arco AC si può distinguere una zona di funzionamento come generatore (nei punti in cui la potenza elettrica attiva ai morsetti è

negativa) ed una zona in cui la potenza attiva è assorbita sia dalla rete sia dal motore primo collegato al rotore.

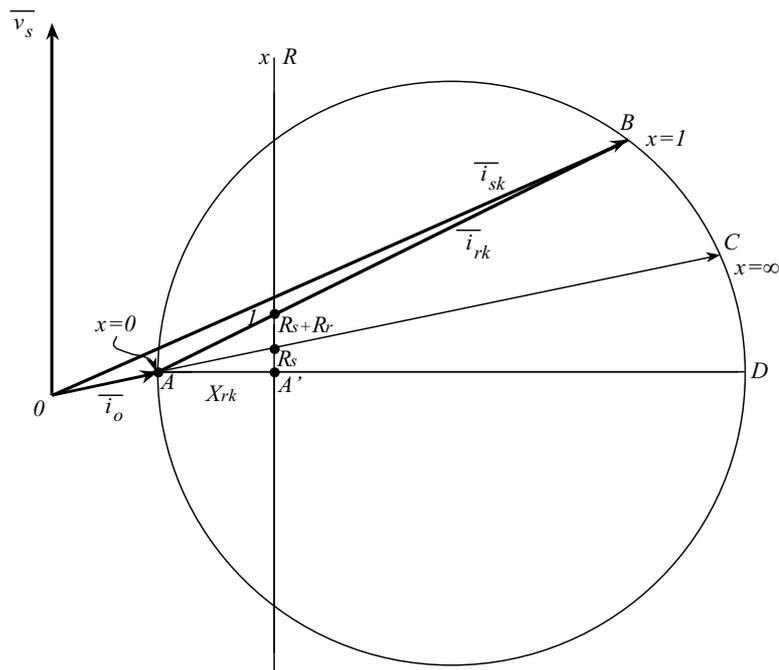


Fig. 3.13. Diagramma circolare.

In effetti, si veda la Fig. 3.14, per una generica condizione di funzionamento (punto Q) la potenza attiva ai morsetti è  $p = v_s QW$ , essa corrisponde alla somma delle perdite a vuoto sincrono  $p_0 = v_s UW$ , delle perdite nel rame di statore e di rotore  $p_{cu} = v_s US = (R_s + R_r) i_r^2$  e della potenza  $p_{tr} = v_s TQ = p_{cur} + p_{tm} = v_s TS + v_s SQ$  trasmessa da statore a rotore (dato che i corrispondenti segmenti TQ, TS ed SQ sono proporzionali rispettivamente ad  $R_r + R_r(1/x - 1)$ , ad  $R_r$  e ad  $R_r(1/x - 1)$ ).

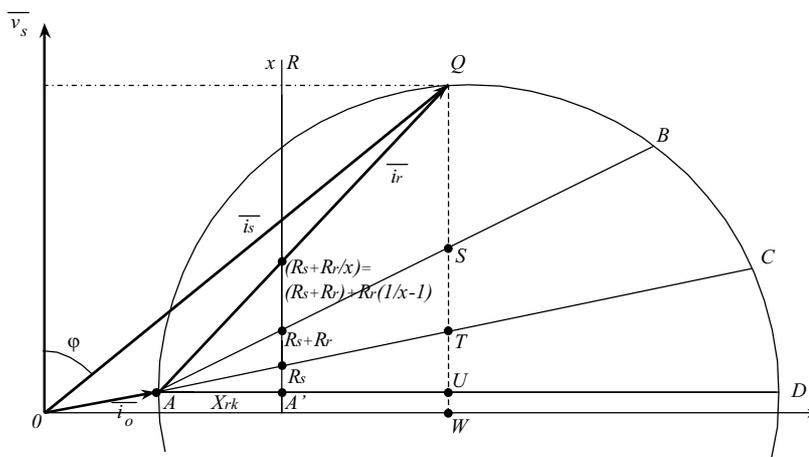


Fig. 3.14. La potenza nel diagramma circolare.

Sul diagramma circolare quindi si può identificare la “retta delle coppie” AC che definisce i segmenti del tipo di TQ proporzionali alla potenza trasmessa (somma delle perdite nel rame di rotore e della potenza meccanica, somma pari al prodotto della coppia elettromagnetica per la velocità di sincronismo) e la “retta della potenza resa” AB che definisce i segmenti del tipo di SQ proporzionali a  $p_{tm}$ .

Sul diagramma circolare infine è possibile leggere lo scorrimento corrispondente ad una generica situazione di funzionamento come è evidenziato nella eq.3.28.

$$3.28 \quad x = \frac{R_r}{R_r / x} = \frac{R_r i_r^2}{R_r i_r^2 / x} = \frac{P_{cur}}{P_{tr}} = \frac{ST}{QT}$$

### 3.4 Campo di operatività a tensione e frequenza variabili

Le precedenti considerazioni consentono ora di valutare il campo di operatività nel funzionamento come motore con tensione e frequenza variabili.

La definizione del campo di operatività della macchina, si veda la Fig. 3.15, è più complessa, a parità di restrizioni, rispetto al caso del sincrono. In effetti per quanto riguarda il flusso di saturazione (valore massimo ammissibile  $\psi_{sM}$  per il flusso statorico), la f.e.m. nominale, la velocità angolare base (normalmente è quella nominale, usata nel dimensionamento della macchina ed indicata sulla targa)  $\Omega_b$  (tale che la tensione nominale  $v_n = n\Omega_b\psi_{sM} = \omega\psi_{sM}$ ) e la velocità angolare massima valgono le considerazioni già fatte per la macchina sincrona. Se ne deduce che i diagrammi  $\psi_s(\Omega), e_s(\Omega)$  hanno lo stesso andamento che per la macchina sincrona.

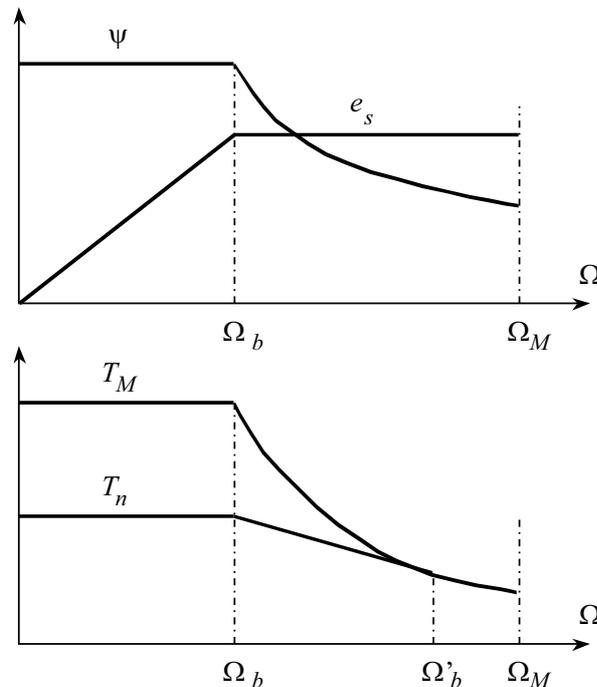


Fig. 3.15. Campo di operatività a frequenza e tensione variabili.

Per quanto riguarda invece la caratteristica meccanica, questa, indipendentemente dal sistema di raffreddamento e di alimentazione, non potrà mai superare la coppia massima definita dalla eq. 3.24 e questa (essendo  $X_K = \omega L_K$ , ed  $\omega$  proporzionale ad  $\Omega$ ) finchè  $v_s \approx \omega \psi_{sM}$  è indipendente dalla velocità angolare, poi, quando  $v_s$  è costante (superata la velocità base  $\Omega_b$ ) diminuisce proporzionalmente a  $(1/\Omega)^2$ .

Per quanto riguarda poi la corrente nominale in servizio continuativo, se il sistema di raffreddamento è indipendente dalla velocità anche la corrente è indipendente dalla velocità (in effetti con la legge di variazione assegnata a  $\psi_s$  le perdite nel ferro tendono a diminuire, dato che sono proporzionali al quadrato dell'induzione e ad una potenza della frequenza minore del quadrato, per modo che la corrente accettabile alle alte velocità tende a crescere). Ne consegue che la coppia erogabile in servizio continuativo  $T_n = 3nE_s I_{sn} \cos \gamma = n \psi_{s0} i_{sn} \cos \gamma$  è costante finchè lo è  $\psi_s$  e diminuisce proporzionalmente a  $1/\Omega$  per velocità maggiori di quella base. Superata la velocità per la quale  $T_n = T_M$  ( $\Omega'_b$  nella Fig. 3.15) la coppia dovrà variare con la velocità come  $T_M$  e cioè proporzionalmente a  $1/\Omega^2$ .

## ESERCITAZIONE 1

Esercizi svolti durante l'esercitazione.

### Ex1.1

Tre resistenze, collegate in serie e percorse da una corrente  $I$  di 2 A, dissipano rispettivamente le seguenti potenze:

$$P_1 = 20 \text{ W}$$

$$P_2 = 32 \text{ W}$$

$$P_3 = 24 \text{ W}$$

Determinare i valori delle rispettive tensioni e delle resistenze

$$[V_1 = 10 \text{ V}, V_2 = 16 \text{ V}, V_3 = 12 \text{ V}, R_1 = 5 \text{ } \Omega, R_2 = 8 \text{ } \Omega, R_3 = 6 \text{ } \Omega]$$

*{Si ricorda che l'espressione della potenza dissipata in un resistore si può esprimere come:  
 $P = V \cdot I = R \cdot I^2 = G \cdot V^2$ . Quindi  $V_1 = P_1/I = 10 \text{ V}$ ,  $V_2 = P_2/I = 16 \text{ V}$  mentre  $V_3 = P_3/I = 12 \text{ V}$ . Le resistenze si ottengono o dall'espressione di  $P$  in funzione della resistenza e del quadrato della corrente o dalla equazione costitutiva del resistore  $V = R \cdot I$ . Risulta  $R_1 = V_1/I = 5 \text{ } \Omega$ ,  
 $R_2 = V_2/I = 8 \text{ } \Omega$  mentre  $R_3 = V_3/I = 6 \text{ } \Omega$ .}*

### Ex1.2

Tre resistenze collegate in parallelo, dissipano rispettivamente le seguenti potenze:

$$P_1 = 50 \text{ W}$$

$$P_2 = 25 \text{ W}$$

$$P_3 = 20 \text{ W}$$

Inoltre la corrente  $I_1$  che percorre la resistenza  $R_1$  è pari a 5 A.

Determinare i valori delle resistenze  $R_1$ ,  $R_2$ ,  $R_3$  e la corrente totale.

$$[R_1 = 2 \text{ } \Omega, R_2 = 4 \text{ } \Omega, R_3 = 5 \text{ } \Omega, I_{\text{tot}} = 9.5 \text{ A}]$$

*{Per ottenere i valori delle resistenze (o meglio, delle conduttanze) si sfrutta la relazione  $P = G \cdot V^2$ . Ora,  $V$  è la stessa per tutte le resistenze in parallelo. Conoscendo la corrente in una di esse ( $I_1$ ) è possibile risalire quindi al valore della tensione  $V = P_1/I_1 = 10 \text{ V}$ . Così risulta:  
 $G_1 = P_1/V^2 = 0.5 \text{ S}$  da cui  $R_1 = 1/G_1 = 2 \text{ } \Omega$ ,  $G_2 = P_2/V^2 = 0.25 \text{ S}$  da cui  $R_2 = 1/G_2 = 4 \text{ } \Omega$ , mentre  
 $G_3 = P_3/V^2 = 0.2 \text{ S}$  da cui  $R_3 = 1/G_3 = 5 \text{ } \Omega$ . Si può calcolare la corrente totale o come il rapporto tra la potenza totale e la tensione ( $I_{\text{tot}} = P_{\text{tot}}/V = (P_1+P_2+P_3)/V = 9.5 \text{ A}$ ) oppure come somma delle correnti di ogni resistenza (legge al nodo)  $I_{\text{tot}} = I_1+I_2+I_3 = V \cdot G_1+V \cdot G_2+V \cdot G_3 = 9.5 \text{ A}$ . Dall'ultima espressione si nota che la corrente totale si può calcolare anche come prodotto della tensione per la conduttanza totale dell'oggetto costituito dal parallelo dei tre resistori  
 $I_{\text{tot}} = G_{\text{tot}} \cdot V = (G_1+G_2+G_3) \cdot V = 9.5 \text{ A}$ .}*

### Ex1.3

Dato il circuito in figura 1.1, sono noti:

$$P1 = 40 \text{ W}$$

$$P2 = 30 \text{ W}$$

$$P3 = 25 \text{ W}$$

$$P4 = 35 \text{ W}$$

$$I = 4 \text{ A.}$$

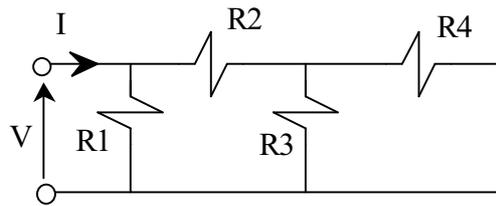


Fig. 1.1

Determinare i valori delle quattro resistenze e verificare il rapporto  $V/I$ .

$$[R1 = 26.41 \ \Omega, R2 = 3.912 \ \Omega, R3 = 18.78 \ \Omega, R4 = 13.42 \ \Omega, V/I = 8.125 \ \Omega]$$

{Conoscendo la potenza dissipata in ogni resistore è possibile risalire al valore della totale potenza dissipata dall'oggetto a sinistra dei morsetti  $P = P1 + P2 + P3 + P4 = 130 \text{ W}$ . Tale valore corrisponde anche al prodotto della tensione per la corrente; quindi  $V = P/I = 32.5 \text{ V}$ . Sfruttando ora le equazioni costitutive, le leggi ai nodi e le leggi alle maglie è possibile percorrere il circuito da sinistra a destra in modo da ottenere i valori delle quattro resistenze. Di  $R1$  si conosce potenza dissipata e tensione:  $G1 = P1/V^2 = 0.03787 \text{ S}$  da cui  $R1 = 1/G1 = 26.41 \ \Omega$ . Sfruttando la legge ai nodi e l'equazione costitutiva è possibile conoscere la corrente circolante in  $R2$ :

$I2 = I - G1 * V = 2.769 \text{ A}$ . Quindi  $R2 = P2/I2^2 = 3.912 \ \Omega$ . Ora è possibile conoscere la tensione sull'oggetto costituito dal parallelo di  $R3$  con  $R4$  sfruttando una legge alle maglie ed una equazione costitutiva:  $V34 (= V3 = V4) = V - R2 * I2 = 21.67 \text{ V}$ . Quindi  $G3 = P3/V3^2 = 0.05324 \text{ S}$  da cui  $R3 = 1/G3 = 18.78 \ \Omega$  e  $G4 = P4/V4^2 = 0.07453 \text{ S}$  da cui  $R4 = 1/G4 = 13.42 \ \Omega$ . La verifica del rapporto  $V/I = 32.5 \text{ V} / 4 \text{ A} = 8.125 \ \Omega$  si ottiene considerando che tale rapporto corrisponde al valore della resistenza totale dell'oggetto a sinistra dei morsetti. Esso è costituito dal parallelo di  $R1$  con un oggetto a sua volta costituito dalla serie di  $R2$  con il parallelo di  $R3$  con  $R4$ , la cui conduttanza vale  $G34 = G3 + G4 = 0.12777 \text{ S}$  da cui  $R34 = 1/G34 = 7.827 \ \Omega$ . La resistenza della serie vale allora  $R234 = R2 + R34 = 11.739 \ \Omega$  o meglio  $G234 = 1/R234 = 0.08519 \text{ S}$ . La conduttanza totale vale  $G1234 = G1 + G234 = 0.12305 \text{ S}$  e quindi  $R1234 = 1/G1234 = 8.126 \ \Omega$ , pari al valore di  $V/I$  (a parte i troncamenti effettuati).}

### Ex1.4

Nel circuito in figura 1.2 sono noti:

$$R1 = 60 \ \Omega, R2 = 60 \ \Omega, R3 = 32 \ \Omega, R4 = 80 \ \Omega,$$

$$V = 125 \text{ V.}$$

Determinare i valori della totale corrente  $I$  e della tensione  $V2$  ai capi della resistenza  $R2$ .

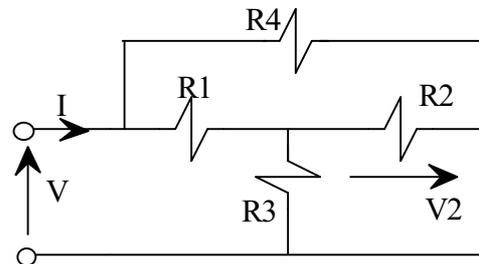


Fig. 1.2

$$[I = 3.108 \text{ A}, V2 = -32.26 \text{ V}]$$

{La totale corrente  $I$  è facilmente calcolabile se fosse conosciuto il valore della resistenza totale dell'oggetto a destra dei morsetti. Occorre ridisegnare il circuito e notare che  $R4$  risulta in parallelo ad un oggetto costituito dalla serie di  $R1$  con un oggetto costituito, a sua volta, dal parallelo di  $R3$  con  $R2$  che possiede una conduttanza  $G23 = G2 + G3 = 0.04792 \text{ S}$  e quindi una resistenza  $R23 = 1/G23 = 20.87 \ \Omega$ . Da qui, la serie di  $R1$  con  $R23$  equivale a  $R123 = R1 + R23 = 80.87 \ \Omega$ . O meglio  $G123 = 1/R123 = 0.01237 \text{ S}$ . Quindi la conduttanza totale dell'oggetto a destra dei morsetti vale  $G1234 = G4 + G123 = 0.02487 \text{ S}$ . Quindi  $I = G1234 * V = 3.108 \text{ A}$ . La tensione  $V2$  si ottiene notando che la tensione  $V$  insiste sulla serie di  $R1$  con l'oggetto  $R23$  e che  $V2$  ne è una parte (è la

tensione sull'oggetto R23). Sfruttando la formula del partitore di tensione si ha che  $V_2 = -V \cdot R_{23} / (R_{23} + R_1) = -32.26 \text{ V}$  }

### Ex1.5

Sia dato il circuito rappresentato in figura 1.3, con i seguenti dati:  
 $R_1 = 5 \Omega$ ,  $R_2 = 10 \Omega$ ,  $R_3 = 20 \Omega$ ,  $R_4 = 30 \Omega$ ,  
 $V_1 = 10 \text{ V}$ .

Determinare la tensione  $V$  e la corrente  $I_4$

$$[V = -34 \text{ V}, I_4 = -0.8 \text{ A}]$$

{Poichè  $R_2$  non è percorso da corrente in quanto risulta in serie ad un circuito aperto, per la equazione cositutiva del resistore la tensione su  $R_2$  è nulla e quindi, per la legge alle maglie, la tensione  $V_1$  insiste sulla sola  $R_1$  ed  $R_2$  è ininfluyente al problema. Di conseguenza si può facilmente calcolare la corrente  $I = V_1 / R_1 = 2 \text{ A}$  che è la stessa corrente che circola nell'oggetto ottenuto dal parallelo di  $R_3$  con  $R_4$ . La sua conduttanza vale  $G_{34} = G_3 + G_4 = 0.08333 \text{ S}$  mentre la sua resistenza è l'inverso  $R_{34} = 1 / G_{34} = 12 \Omega$ . Per la legge alle maglie risulta, quindi,  $V = -R_{34} \cdot I - V_1 = -34 \text{ V}$ . E' possibile calcolare la corrente  $I_4$  dalla formula del partitore di corrente facendo attenzione ai segni:

$$I_4 = -I \cdot G_4 / (G_3 + G_4) = -0.8 \text{ A}.$$

Un altro approccio potrebbe essere quello di considerare che  $V$  insiste sulla serie di  $R_1$  con un oggetto, costituito dal parallelo di  $R_3$  con  $R_4$ , di resistenza  $R_{34} = 12 \Omega$ . Per la formula del partitore di tensione si ha che  $V = -V_1 \cdot (R_1 + R_{34}) / R_1 = -34 \text{ V}$ . La corrente  $I_4$  è facilmente calcolabile conoscendo la tensione  $V_4$  che insiste su  $R_4$ :  $I_4 = V_4 / R_4$ . Ma, per la legge alle maglie,  $V_4 - V_1 - V = 0$  da cui  $V_4 = -24 \text{ V}$  e quindi  $I_4 = V_4 / R_4 = -0.8 \text{ A}$  }

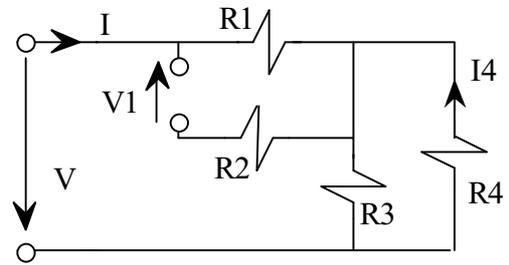


Fig. 1.3

### Esercizi proposti

#### Ex1.6

Il circuito in figura 1.4 presenta:  
 $R_1 = 20 \Omega$ ,  $R_2 = 40 \Omega$ ,  $R_3 = 20 \Omega$ ,  $R_4 = 60 \Omega$ ,  
 $V_2 = 100 \text{ V}$ .

Determinare  $V$ ,  $I$

$$[V = 175 \text{ V}, I = 3.75 \text{ A}]$$

{La tensione  $V$  si ottiene utilizzando la formula del partitore di tensione, considerando che  $V$  insiste su  $R_1$  e su un oggetto costituito dal parallelo di  $R_2$  con la serie di  $R_3$  ed  $R_4$ . La serie di  $R_3$  con  $R_4$  equivale ad una resistenza  $R_{34} = R_3 + R_4 = 80 \Omega$  mentre il parallelo tra  $R_2$  ed  $R_{34}$  ha una conduttanza  $G_{234} = G_2 + G_{34} = 1/R_2 + 1/R_{34} = 0.0375 \text{ S}$ . La  $R_{234} = 1/G_{234} = 26.67 \Omega$ . Quindi, poichè  $V_2 = R_{234} \cdot I / (R_1 + R_{234})$ , si ha che  $V = V_2 \cdot (R_1 + R_{234}) / R_{234} = 175 \text{ V}$ . La corrente  $I$  si ottiene facilmente considerando che percorre oltre a  $R_1$  anche  $R_{234}$  la cui tensione vale  $V_2$ . Quindi  $I = V_2 / R_{234} = 3.75 \text{ A}$ .

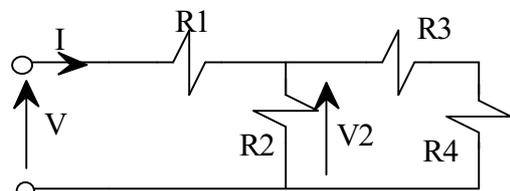


Fig. 1.4

Un altro metodo consiste nel calcolare la corrente nella resistenza  $R_2$  come  $I_2 = V_2/R_2 = 2.5 \text{ A}$ . Usando la formula del partitore di corrente è possibile ora risalire al valore della corrente  $I$  come  $I = I_2 \cdot (G_2 + G_{34})/G_2 = 3.75 \text{ A}$ . Da qui, per la legge alle maglie, si ottiene che  $V = R_1 \cdot I + V_2 = 175 \text{ V}$

### Ex1.7

Dato il circuito in figura 1.5 sono noti:

$R_1 = 60 \Omega$ ,  $R_2 = 60 \Omega$ ,  $R_3 = 32 \Omega$ ,  $R_4 = 80 \Omega$ ,  
 $I = 120 \text{ A}$ .

Determinare  $I_4$ .

[ $I_4 = 52.39 \text{ A}$ ]

{ $R_1$  ed  $R_2$  sono in parallelo attraverso il cortocircuito superiore; il circuito si riduce al parallelo di  $R_4$  con un oggetto costituito dalla serie di  $R_3$  con il parallelo tra  $R_1$  ed  $R_2$ ; tale oggetto presenta una totale resistenza

$R_{123} = R_3 + 1/G_{12}$  dove  $G_{12} = G_1 + G_2 = 0.033333 \text{ S}$ . Quindi  $R_{123} = 62 \Omega$  da cui  $G_{123} = 0.01613 \text{ S}$ . Applicando la formula del partitore di corrente si ottiene:

$I_4 = I \cdot G_4 / (G_{123} + G_4) = 52.39 \text{ A}$  }

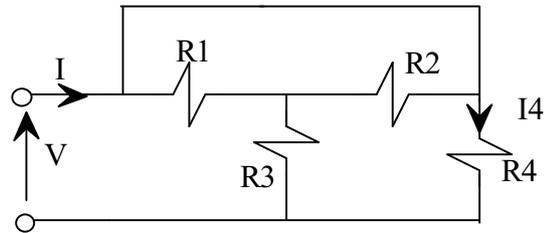


Fig. 1.5

### Ex1.8

Date due resistenze  $R_1$  ed  $R_2$  in parallelo, sono noti:  $R_1 = 20 \Omega$ ,  $P_2 = 120 \text{ W}$ ,  $I_{\text{tot}} = 10 \text{ A}$ .

Determinare  $R_2$ .

[ $R_2 = 1.37 \Omega$  oppure  $R_2 = 292 \Omega$ ]

{Supponendo di chiamare con  $I_2$  la corrente che percorre il resistore  $R_2$  si hanno due equazioni nelle due incognite  $I_2$  ed  $R_2$ :

$I_2 = I_{\text{tot}} \cdot G_2 / (G_1 + G_2)$  che deriva dalla formula del partitore di corrente e

$P_2 = R_2 \cdot I_2^2$ . Il sistema si può ricondurre ad una equazione del secondo ordine in  $R_2$ . Esisteranno due soluzioni. Sono accettabili solo quelle di valore positivo.}

### Ex1.9

Il disco di un contatore di costante  $N = 1200 \text{ giri/kWh}$  ha impiegato 40 secondi per compiere 30 giri.

Determinare la potenza.

[ $P = 2250 \text{ W}$ ]

{Occorre ricondurre il valore della costante al SI; ricordando che  $1 \text{ kWh} = 3600 \text{ kWhs} = 3600 \text{ kJ}$  risulta  $N = 1200/3600 \text{ giri/kJ} = 0.3333 \text{ giri/kJ}$ ; in 30 giri l'energia transitante vale

$\Delta W_e = 30/N = 90 \text{ kJ} = 90000 \text{ J}$ . Quindi la potenza necessaria affinché in 40 secondi vi sia il transito di  $90000 \text{ J}$  risulta  $P = \Delta W_e / 40 = 2250 \text{ W}$  }

**Ex1.10**

Sia dato il circuito rappresentato in fig 1.6, sono noti  
 $R1 = 4 \Omega$ ,  $R2 = 20 \Omega$ ,  $R3 = 80 \Omega$ ,  $R4 = 50 \Omega$ ,  $V = 100 \text{ V}$

Determinare  $V1$  e la potenza  $P4$  dissipata in  $R4$

[ $V1 = -20\text{V}$ ,  $P4 = 200\text{W}$ ]

*{La tensione  $V1$  si ottiene mediante l'applicazione della formula del partitore di tensione alla serie di  $R1$  con l'oggetto costituito dal parallelo tra  $R2$  ed  $R3$  ( $R23 = 16 \Omega$ ). Quindi  $V1 = -V \cdot R1 / (R1 + R23) = -20 \text{ V}$ . La potenza dissipata in  $R4$  (o meglio  $G4$ ) si può ottenere ricordando che*

*$P4 = G4 \cdot V4^2 = G4 \cdot V^2 = 200 \text{ W}$ .}*

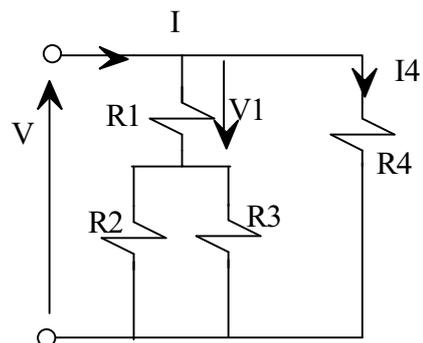


Fig. 1.6

**ESERCITAZIONE 2**

Esercizi svolti durante l'esercitazione.

**Ex2.1**

Dato il circuito in figura 2.1, sono noti:

$R1 = 40 \Omega, R2 = 60 \Omega, R3 = 12 \Omega$

$R4 = 80 \Omega, R5 = 70 \Omega$

$V1 = 120 \text{ V}, I4 = 50 \text{ A}, I5 = 40 \text{ A}.$

Determinare la potenza elettrica generata dalla sorgente di corrente  $I4$

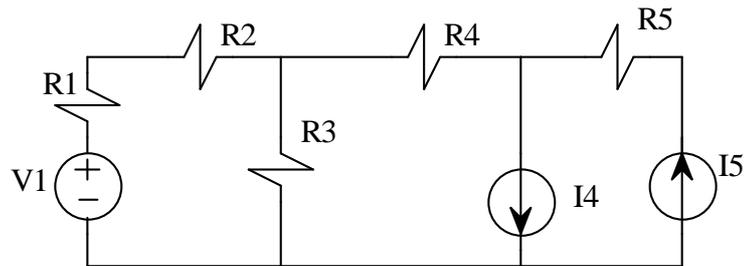


Fig. 2.1

$[P_{I4} = 45.6 \text{ kW}]$

*{La potenza elettrica generata da  $I4$  puo' essere calcolata in due modi: come il prodotto della tensione  $V4$  su  $I4$  (morsetto contrassegnato in basso) per la corrente  $I4$  stessa o come bilancio delle potenze (potenze generate da  $V1$  e da  $I5$  meno le potenze dissipate nei resistori). Conviene il primo approccio. Si operano, inizialmente, tutte le semplificazioni possibili al di fuori di  $I4$ , oggetto del presente studio. Il circuito di destra e' costituito dalla serie di un generatore di corrente con un resistore. E' equivalente ad un generatore di corrente pari a  $I5$  (basta applicare Norton e notare che la  $G_{eq}$  e' nulla, mentre la corrente di corto circuito e' proprio  $I5$ ). Si nota anche che la tensione  $V4$  risulta anche la tensione sul parallelo dei due generatori di corrente  $I4$  e  $I5$ , che equivalgono ad un generatore di corrente equivalente  $I45 = I4 - I5$  (verso il basso). La parte del circuito di sinistra e' equivalente ad un bipolo serie. Per la legge di Thevenin la resistenza equivalente  $R_{1234}$  e' ottenuta dalla serie di  $R4$  con il parallelo tra  $R3$  e la serie di  $R1$  con  $R2$ :  $R_{1234} = 90.71 \Omega$ . La tensione del generatore equivalente e' pari alla tensione a vuoto ai morsetti di  $I45$ , che coincide con la tensione su  $R3$ , che, a sua volta, e' una quota parte della totale tensione  $V1$ . Applicando la formula del partitore di tensione si ha che  $V_{eq} = R3 * V1 / (R1 + R2 + R3) = 12.86 \text{ V}$ . Rimangono in gioco un generatore ideale di tensione  $V_{eq}$  con in serie un resistore di resistenza  $R_{eq}$  ed il generatore di corrente  $I45$ . Si ha che  $V4 = -V_{eq} + R_{eq} * I45 = 894.2 \text{ V}$ . La potenza generata da  $I4$  vale quindi  $P4 = I4 * V4 = 45.6 \text{ kW}$ .}*

**Ex2.2**

Dato il circuito in figura 2.2, sono noti:

$R1 = 10 \Omega, R2 = 5 \Omega, R3 = 3 \Omega$

$R4 = 4 \Omega, V1 = 30 \text{ V}, V2 = 15 \text{ V}, I4 = 18 \text{ A}.$

Determinare la totale potenza dissipata nei resistori

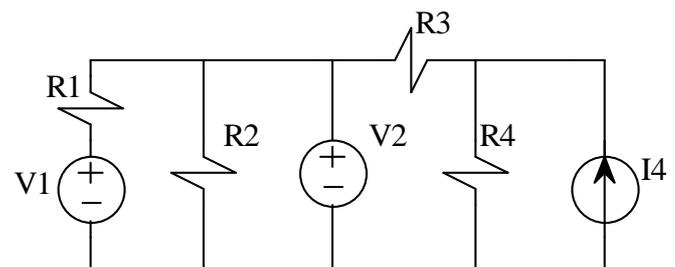


Fig. 2.2

$[P_{R1} = 22.5 \text{ W}, P_{R2} = 45 \text{ W}, P_{R3} = 198.9 \text{ W}, P_{R4} = 388.7 \text{ W}]$

*{Il generatore ideale di tensione  $V2$  fa si' che*

il circuito alla sua destra non “veda” il circuito alla sua sinistra, e viceversa. Quello che entrambi i sotto-circuiti “vedono” è semplicemente  $V_2$  (basta applicare Thevenin per accorgersi che la resistenza equivalente è nulla). Non solo,  $R_2$  “vede” solo  $V_2$  e così via. Quindi il problema si risolve studiando i tre sotto-circuiti separatamente. La potenza dissipata in  $R_2$  è semplicemente data da  $P_{R_2} = V_2^2 * G_2 = 45 \text{ W}$ . La tensione su  $R_1$  vale (per la legge alle maglie)  $V_1 - V_2$ . Quindi  $P_{R_1} = (V_1 - V_2)^2 * G_1 = 22.5 \text{ W}$ . Il circuito di destra si può semplificare sostituendo il bipolo parallelo  $I_4 - G_4$  con l'equivalente serie  $V_4 - R_4$  con  $V_4 = I_4 * R_4 = 72 \text{ V}$ . La tensione su  $R_3$  vale allora (partitore di tensione)  $V_{R_3} = (V_2 - V_4) * R_3 / (R_3 + R_4) = -24.43 \text{ V}$ , da cui  $P_{R_3} = 198.9 \text{ W}$ . La potenza dissipata nella resistenza  $R_4$  dell'equivalente serie non è la stessa della potenza dissipata nel resistore originale perché l'equivalenza è assicurata solo ai morsetti esterni, non interni. Infatti la potenza in  $R_4$  dell'equivalente serie vale  $265.22 \text{ W}$  (la tensione ai suoi capi vale  $(V_2 - V_4) * R_4 / (R_3 + R_4) = -32.57 \text{ V}$ ). La potenza richiesta, invece, può essere calcolata partendo dalla tensione sul bipolo parallelo che vale  $V_2 - V_{R_3} = 39.43 \text{ V}$  da cui  $P_{R_4} = 388.7 \text{ W}$  }

### Ex2.3

Dato il circuito in figura 2.3, sono noti:

$$R_1 = 10 \text{ } \Omega, R_2 = 5 \text{ } \Omega, R_3 = 3 \text{ } \Omega$$

$$R_4 = 4 \text{ } \Omega, V_1 = 30 \text{ V}, I_4 = 18 \text{ A}, I_3 = 6 \text{ A}.$$

Determinare il valore della tensione misurata  $V_x$

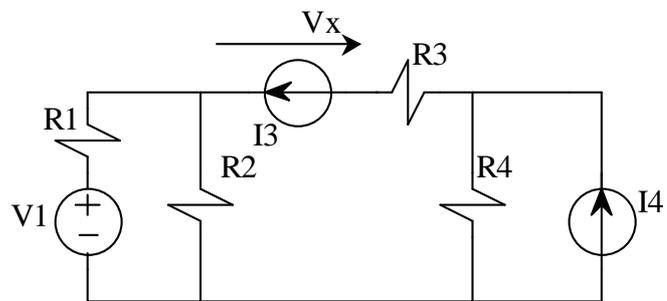


Fig. 2.3

$$[V_x = 0 \text{ V}]$$

{Per conoscere  $V_x$  basta semplificare il circuito intorno a  $I_3$ . La parte sinistra

equivale ad un bipolo serie con generatore di tensione  $V_{eq1} = V_1 * R_2 / (R_1 + R_2) = 10 \text{ V}$  e

resistenza equivalente  $R_{eq1} = 1 / (G_1 + G_2) = 3.333 \text{ } \Omega$ . La parte di destra equivale ad un bipolo

serie con generatore di tensione  $V_{eq2} = I_4 / G_4 = 72 \text{ V}$  e resistenza equivalente

$R_{eq2} = R_3 + R_4 = 7 \text{ } \Omega$ .  $V_x$  si ottiene, allora, con una legge all'unica maglia rimasta, sapendo che  $I_3$  percorre tutti i bipoli serie:  $V_{eq1} + R_{eq1} * I_3 + V_x + R_{eq2} * I_3 - V_{eq2} = 0$  da cui  $V_x = 0 \text{ V}$ .}

### Ex2.4

Nel circuito in figura 2.4 sono noti:

$$R_2 = 4 \text{ } \Omega, R_3 = 3 \text{ } \Omega, R_4 = 2 \text{ } \Omega,$$

$$R_5 = 6 \text{ } \Omega, V_1 = 30 \text{ V}.$$

Calcolare  $R_x$  affinché  $I_{rx} = 1 \text{ A}$  in valore assoluto.

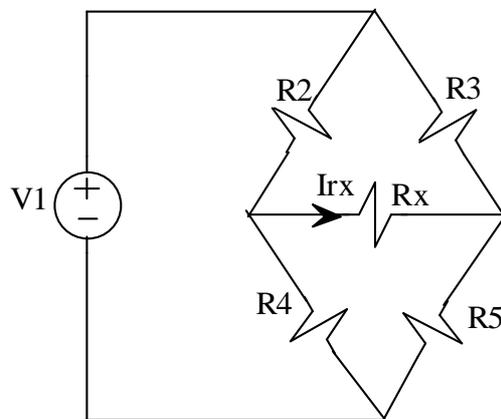


Fig. 2.4

$$[R_x = 6.667 \text{ } \Omega]$$

{Il problema è localizzato su  $R_x$ . Conviene semplificare il circuito intorno a  $R_x$  utilizzando Thevenin o Norton. Il calcolo della resistenza equivalente “vista” dai morsetti di  $R_x$  può essere effettuato in due modi: o calcolando la resistenza equivalente vista dai morsetti di  $R_x$  dopo aver reso passiva la rete, o come rapporto tra la tensione del generatore equivalente (tensione a vuoto) del bipolo serie e la corrente del generatore equivalente

del bipolo parallelo (corrente di corto circuito). La tensione a vuoto si trova appoggiandosi ad una maglia (ad esempio quella costituita da R2, R3 ed il posto vuoto lasciato da Rx). Le tensioni su R2 e su R3 si trovano utilizzando la formula del partitore di tensione:

$$V_{R2} = V1 * R2 / (R2 + R4) = 20 \text{ V}$$

$$V_{R3} = V1 * R3 / (R3 + R5) = 10 \text{ V}$$

$$V_o \text{ (verso sinistra)} = V_{R3} - V_{R2} = -10 \text{ V}$$

La resistenza equivalente si ottiene come serie del parallelo tra R2 e R4 e il parallelo tra R3 e R5, e vale  $Req = (R2 // R4) + (R3 // R5) = 3.333 \Omega$  (il simbolo // viene usato per indicare il parallelo).

Considerando l'equivalente di tipo serie la corrente Ix si ottiene come  $I_x = V_o / (Req + R_x)$ . Quindi  $R_x = V_o / I_x - Req = 6.667 \Omega$

L'altro metodo consiste nel calcolare la corrente di cto cto. La corrente di corto circuito (verso destra) si ottiene con una legge ai nodi (ad esempio il nodo costituito da R2, R4 e il corto circuito). Le correnti in R2 e R4 si trovano come quota parte della totale corrente erogata dal generatore V1. La resistenza totale vista da V1 è ora ottenuta dalla serie di due oggetti: il parallelo di R2 con R3 ed il parallelo tra R4 e R5. La nuova R2345 vale:

$$R_{2345} = R2 // R3 + R4 // R5 = 3.214 \Omega$$

$$I_{tot} = V1 / R_{2345} = 9.334 \text{ A}$$

$$I_{R2} = I_{tot} * G2 / (G2 + G3) = 4 \text{ A}$$

$$I_{R4} = I_{tot} * G4 / (G4 + G5) = 7 \text{ A}$$

$$I_{cc} \text{ (verso destra)} = I_{R2} - I_{R4} = -3 \text{ A}$$

Quindi la resistenza equivalente vale  $Req = V_o / I_{cc} = 3.333 \Omega$ . }

### Ex2.5

Sia dato il circuito rappresentato in figura 2.5, con i seguenti dati:

$$R1 = 5 \Omega, R2 = 6 \Omega, R3 = 3 \Omega, R4 = 6 \Omega,$$

$$V1 = 18 \text{ V}, I1 = 12 \text{ A}.$$

Determinare la potenza dissipata nel resistore R4.

$$[P_{R4} = 1.997 \text{ W}]$$

{Occorre semplificare il circuito esterno ad R4.

Dapprima si nota che il generatore di corrente I1 si

trova in parallelo al generatore di tensione V1. Agli effetti esterni equivalgono al solo generatore di tensione V1 (basta applicare Thevenin al parallelo di I1 e V1). Ora R4, R3, R1 ed il bipolo serie V1-R2 sono in parallelo. Trasformando il bipolo serie in un bipolo di tipo parallelo si ottengono quattro resistori (R1, R2, R3 e R4) in parallelo ad un generatore di corrente  $I_{eq} = V1 / R2 = 3 \text{ A}$ .

La potenza dissipata in R4 si conosce se si conosce la tensione o la corrente di R4. Ma la corrente in R4 è una quota parte della corrente Ieq:  $I_{R4} = I_{eq} * G4 / (G1 + G2 + G3 + G4) = 0.5769 \text{ A}$ .

$$\text{Allora } P_{R4} = R4 * I_{R4}^2 = 1.997 \text{ W}$$

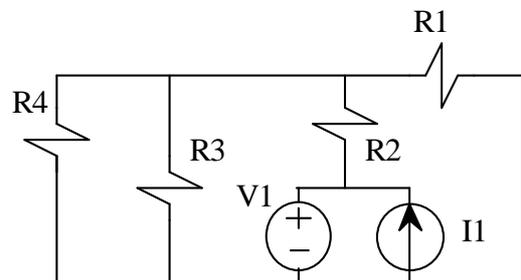


Fig. 2.5

Esercizi proposti

**Ex2.6**

Il circuito in figura 2.6 presenta:

$R1 = 5 \Omega$ ,  $R2 = 3 \Omega$ ,  $R3 = 2 \Omega$ ,  $R4 = 6 \Omega$ ,

$V1 = 18 \text{ V}$ ,  $V2 = 20 \text{ V}$ ,  $I1 = 12 \text{ A}$ .

Determinare la corrente  $I11$  e la potenza elettrica assorbita dalla sorgente di tensione  $V1$   
 $[I11 = 3.625 \text{ A}$ ,  $P_{V1} = 65.25 \text{ W}]$

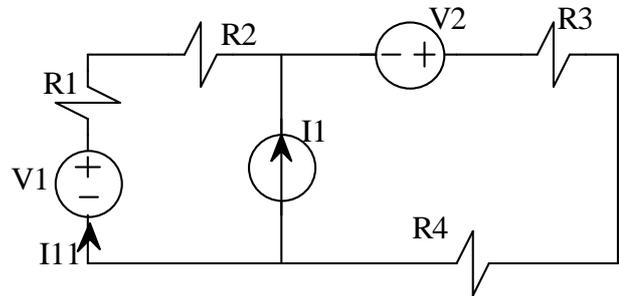


Fig. 2.6

*{Nel circuito sono presenti tre bipoli in parallelo: il resistore  $R12$  equivalente alla serie di  $R1$  con  $R2$ ,  $V1$  con  $R34$ , equivalente alla serie di  $R3$  e  $R4$ ,  $V2$  e  $I1$ . Trasformando tutti i componenti in bipoli di tipo parallelo si ottiene facilmente la tensione comune ai bipoli:*

$$V = (V1 * G12 - V2 * G34 + I1) / (G34 + G12) = 47 \text{ V}$$

*Tornando al circuito di fig. 2.6, è ora possibile calcolare la corrente  $I11$ :*

$$I11 = (V1 - V) / (R1 + R2) = -3.625 \text{ A.}$$

*La potenza assorbita dalla sorgente  $V1$  è allora pari a  $P_{V1} = -V1 * I11 = 65.25 \text{ W}$ }*

**Ex2.7**

Dato il circuito in figura 2.7 sono noti:

$R1 = 4 \Omega$ ,  $R2 = 6 \Omega$ ,  $R3 = 2 \Omega$ ,  $R4 = 5 \Omega$

$V1 = 18 \text{ V}$ ,  $V2 = 20 \text{ V}$ .

Determinare la potenza dissipata dal resistore  $R4$  e le potenze generate  $P_{V1}$  e  $P_{V2}$ .

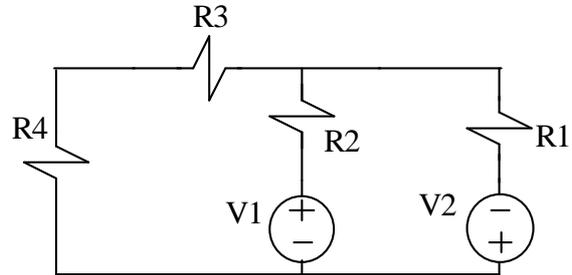


Fig. 2.7

$$[P_{R4} = 1.304 \text{ W}$$
,  $P_{V1} = 64.72 \text{ W}$ ,  $P_{V2} = 82.12 \text{ W}]$

*{Nel circuito sono presenti tre bipoli in parallelo: il resistore  $R34$  equivalente alla serie di  $R3$  con  $R4$ ,  $V1$  con  $R2$  e  $V2$  con  $R1$ . Trasformando tutti i componenti in bipoli di tipo parallelo si ottiene facilmente la tensione comune ai bipoli:*

$$V = (V1 * G2 - V2 * G1) / (G34 + G2 + G1) = -3.574 \text{ V}$$

*Tornando al circuito di fig. 2.7, è ora possibile calcolare tutte le correnti:*

$$I_{R4} = V / (R3 + R4) = -0.5106 \text{ A}; I_{V1} \text{ (verso il basso)} = (V - V1) / R2 = -3.5957 \text{ A}$$

$$I_{V2} \text{ (verso il basso)} = -I_{R4} - I_{V1} = 4.106 \text{ A. Quindi } P_{R4} = R4 * I_{R4}^2 = 1.304 \text{ W};$$

$$P_{V1} = V1 * (-I_{V1}) = 64.72 \text{ W}; P_{V2} = V2 * I_{V2} = 82.12 \text{ W}; \}$$

**Ex2.8**

Dato il circuito in figura 2.8 sono noti:

$R1 = 4 \Omega$ ,  $R2 = 15 \Omega$ ,  $R3 = 5 \Omega$ ,  $R4 = 10 \Omega$ ,

$R5 = 25 \Omega$ ,  $R6 = 8 \Omega$ ,  $V1 = 25 \text{ V}$ ,  $I5 = 1 \text{ A}$

Determinare la potenza dissipata in  $R6$   
 $[P6 = 16.10 \text{ W}]$

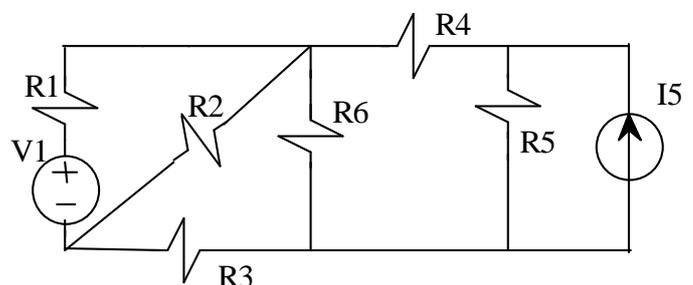


Fig. 2.8

{La potenza dissipata su R6 può essere calcolata come  $P6 = R6 \cdot I6^2$  oppure come  $P6 = G6 \cdot V6^2$ .  
 Conviene semplificare il circuito a sinistra e a destra del resistore R6 calcolando i parametri dei bipoli equivalenti serie o parallelo. Per quello che riguarda il circuito a sinistra si può notare che è costituito dal parallelo di V1 e R1 con R2 che sono a loro volta in serie a R3. Si può quindi calcolare il bipolo equivalente serie, la resistenza equivalente è data dalla serie del parallelo di R1 con R2 con R3:

$$Req = (R1 // R2) + R3 = 8.158 \Omega \text{ (il simbolo // indica il parallelo).}$$

La tensione a vuoto è la tensione sul resistore R2 e può essere calcolata con la formula del partitore di tensione come:

$$Vo = V1 \cdot R2 / (R1 + R2) = 17.73 \text{ V}$$

Il circuito di destra può essere trasformato nel suo equivalente serie con una resistenza equivalente Req1 pari alla serie di R4 e R5:

$$Req1 = R4 + R5 = 35 \Omega$$

E una tensione a vuoto pari a  $Vo1 = R5 \cdot I5 = 25 \text{ V}$ . LA tensione V6 ai capi di R6 può essere facilmente calcolata trasformando i bipoli serie nel loro equivalente parallelo come:

$$V6 = Geq \cdot Vo + Geq1 \cdot Vo1 / (Geq + Geq1 + G6) = 11.35 \text{ V}$$

La potenza dissipata su R6 vale quindi  $P6 = G6 \cdot V6^2 = 16.10 \text{ W}$

### Ex2.9

Dato il circuito di fig. 2.9 sono noti:

$$R1 = 3 \Omega, R2 = 2 \Omega, R3 = 5 \Omega, R4 = 6 \Omega,$$

$$R5 = 4 \Omega, R6 = 1 \Omega,$$

$$V1 = 18 \text{ V}, V2 = 20 \text{ V}, I1 = 8 \text{ A}$$

Determinare il bipolo equivalente serie visto dai terminali P Q

$$[Vo = 40 \text{ V}, Req = 9 \Omega]$$

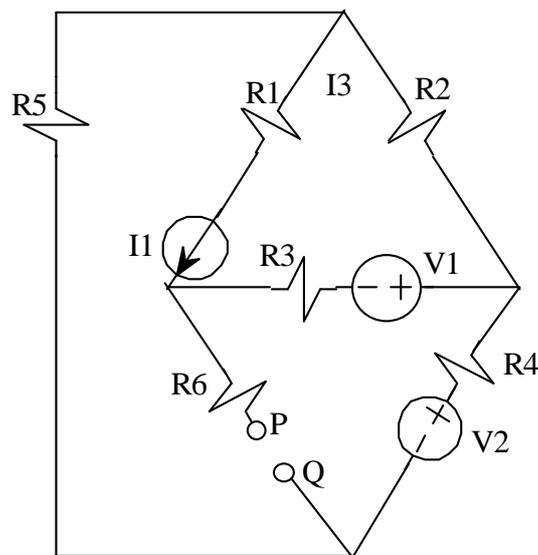


Fig. 2.9

**ESERCITAZIONE 3**

Esercizi svolti durante l'esercitazione.

**Ex3.1**

Dato il circuito in figura 3.1, sono noti:

$R1 = 3 \Omega$ ,  $R2 = 5 \Omega$ ,  $R3 = 2 \Omega$   
 $V1 = 18 V$ ,  $V2 = 20 V$ ,  $I1 = 8 A$ ,  
 $I2 = 6 A$ ,  $I3 = 4 A$ ,  $L = 1 mH$

L'interruttore S è aperto da un tempo infinito. Determinare alla chiusura di S il transitorio di  $v(t)$  e tracciarne l'andamento in modo qualitativo

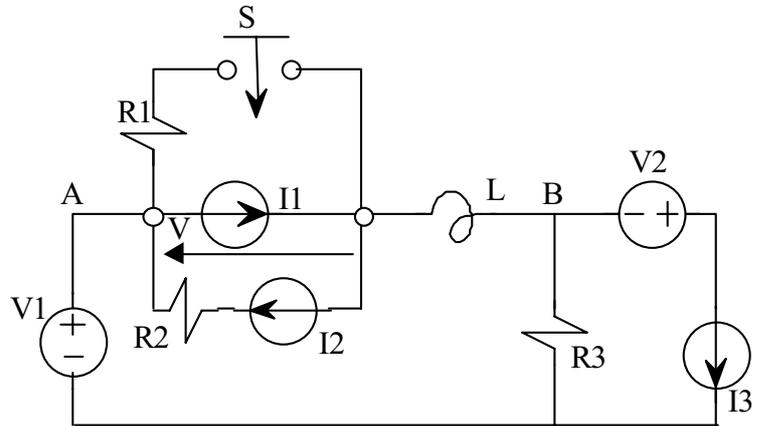


Fig. 3.1

$[v(t) = 13.2 \cdot (1 - e^{-t/\tau})]$ ,  $\tau = 200 \mu s$

{Conviene semplificare il circuito cercando il bipolo equivalente serie o

parallelo visto ai morsetti AB. La parte a destra è data dal generatore I3 con in parallelo R3, la parte a sinistra è data dal solo generatore V1; la tensione a vuoto (che punta verso A) si trova quindi scrivendo una legge delle tensioni e risulta pari a  $V_{eq} = V1 + R3 \cdot I3 = 26 V$ . La resistenza equivalente può essere calcolata in due modi differenti:

come resistenza vista ai morsetti AB quando la rete sia resa passiva o come rapporto tra la tensione a vuoto e la corrente di corto circuito.

Seguendo il primo procedimento si trova subito che  $Req$  è pari alla sola R3. Seguendo il secondo procedimento si calcola la corrente di corto circuito  $I_{cc}$  che dalla legge al nodo B risulta pari a  $I_{cc} = I3 + V1 \cdot G3 = 13 A$  da cui la  $Req = V_{eq} / I_{cc} = 2 \Omega = R3$

Si può poi calcolare il bipolo equivalente parallelo di I1 e I2-R2 che risulta essere  $I_{eq} = I1 - I2 = 2 A$  e che è diretto verso destra,  $G_{eq} = 0 S$ .

All'istante  $t_{0-}$  si calcola la corrente nell'induttore  $i_{L0-} = I_{eq} = 2 A$ ; la tensione richiesta risulterà quindi pari a  $v_{0-} = V_{eq} - Req \cdot I_{eq} = 22 V$ .

All'istante  $t_{0+}$  per la continuità sulla variabile di stato ( $i_{L0-} = i_{L0+}$ ) si sostituisce l'induttore con un generatore di corrente pari a 2 A; la tensione  $v_{0+}$  risulta data da  $v_{0+} = R1 \cdot (I_{eq} - i_{L0+}) = 0 V$ .

All'istante  $t_{inf}$  si sostituisce l'induttore con un corto circuito e la tensione richiesta si può calcolare trasformando il bipolo serie  $V_{eq} - Req$  nel bipolo parallelo  $I_{eq1} = V_{eq} / Req$  e  $G_{eq} = 1 / Req$ . Risulta quindi  $v_{inf} = (-I_{eq} + I_{eq1}) / (G1 + G_{eq}) = 13.2 V$ . La costante di tempo è pari a  $\tau = L / Req_L$ , dove  $Req_L$  è la resistenza della rete resa passiva vista dai morsetti dell'induttore ed è pari a

$Req_L = Req + R1 = 5 \Omega$ , quindi  $\tau = 200 \mu s$ . La tensione richiesta è così espressa:  $v(t) = (v_{0+} - v_{inf}) \cdot e^{-t/\tau} + v_{inf} = 13.2 \cdot (1 - e^{-t/\tau})$

### Ex3.2

Dato il circuito in figura 3.2, sono noti:

$R1 = 4 \Omega$ ,  $R2 = 6 \Omega$ ,  $V1 = 18 \text{ V}$ ,  $V2 = 24 \text{ V}$ ,

$I1 = 6 \text{ A}$ ,  $C = 3 \mu\text{F}$ .

Determinare alla chiusura di S la tensione  $v(t)$  ed il valore assunto per  $t = 6 \mu\text{s}$

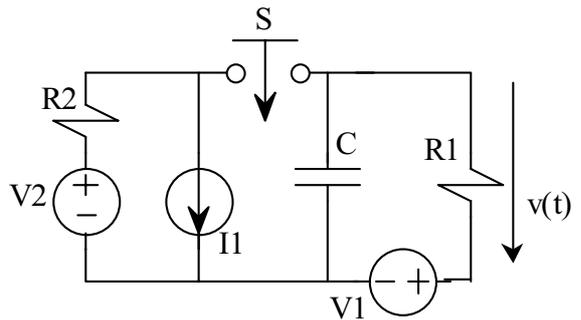


Fig. 3.2

$$[v(t) = -12 * e^{(-t/\tau)} + 12 \text{ V}, \tau = 7.2 \mu\text{s}, v(6 \mu\text{s}) = 6.785 \text{ V}]$$

{Conviene semplificare la parte di sinistra del

circuito trasformandola nel bipolo equivalente serie; si ottiene allora che  $V_{eq} = V2 - R2 * I1 = -12 \text{ V}$  e  $R_{eq} = R2 = 6 \Omega$ . All'istante  $t_0$  il condensatore si comporta come un circuito aperto e la tensione ai suoi capi (diretta verso l'alto) è pari a  $V1$ ,  $v_{c0} = 18 \text{ V}$  e la tensione richiesta  $v(t_0) = 0 \text{ V}$ .

All'istante  $t = 0+$  si sostituisce il condensatore con un generatore di tensione pari a  $v_{c0}$  e si calcola la tensione richiesta. Si può notare in tal caso che  $V_{eq} - R_{eq}$  risulta in parallelo ad un generatore di tensione ( $v_{c0}$ ) e quindi agli effetti esterni equivale al solo generatore di tensione. A questo punto  $v(t_{0+}) = V1 - v_{c0} = 0 \text{ V}$

A regime il condensatore si comporta come un circuito aperto, la tensione  $v_{inf}$  può essere calcolata osservando che  $V_{eq}$  e  $V1$  risultano in serie e con la regola del partitore di tensione si ottiene:  $v_{inf} = (V1 - V_{eq}) * R1 / (R1 + R_{eq}) = 12 \text{ V}$ . Per il calcolo della costante di tempo è necessario calcolare la  $G_{eqc}$  vista dei morsetti del condensatore a manovra avvenuta e con la rete resa passiva; risulta quindi che  $G_{eqc}$  è pari al parallelo del resistore  $R_{eq}$  e del resistore  $R1$ ,  $G_{eqc} = G_{eq} + G1 = 0.417 \text{ S}$  la costante di tempo  $\tau = C / G_{eqc} = 7.2 \mu\text{s}$ . Segue  $v(t) = -12 * e^{(-t/\tau)} + 12 \text{ V}$ .  $v(6 \mu\text{s}) = 6.785 \text{ V}$

### Ex3.3

Dato il circuito in figura 3.3, sono noti:

$R1 = 2 \Omega$ ,  $R2 = 3 \Omega$ ,  $R3 = 5 \Omega$

$V1 = 8 \text{ V}$ ,  $V2 = 10 \text{ V}$ ,  $L = 1 \text{ mH}$ .

Determinare  $i(t)$  e stabilire il suo valore per  $t = 2\tau$

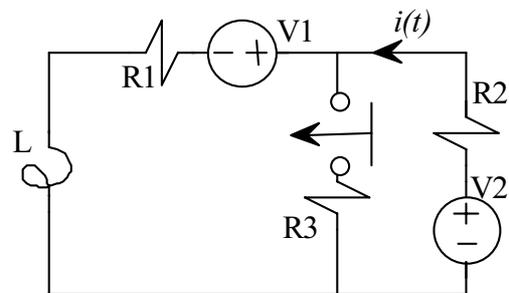


Fig. 3.3

$$[i(t) = 0.5323 * e^{(-t/\tau)} + 0.9677 \text{ A}, \tau = 258.1 \mu\text{s},$$

$$i(2\tau) = 1.0397 \text{ A}]$$

{La rete è già abbastanza semplificata. Se si

suppone che il circuito fosse a regime prima dell'evento, per  $t=0-$  la tensione sull'induttanza è nulla. La corrente nell'induttanza prima dell'evento (corrisponde anche alla corrente richiesta) è sostenuta dai due generatori  $V1$  e  $V2$  (in serie) e limitata dalla serie dei due resistori  $R1$  ed  $R2$ .

Quindi vale  $i(0-) = (V2 - V1) / (R1 + R2) = 0.4 \text{ A}$ . Al fine di risolvere il circuito all'istante  $t=0+$ , l'induttanza può essere sostituita da un generatore di corrente  $I_s = 0.4 \text{ A}$  (verso il basso), che risulta, agli effetti esterni, in parallelo al resistore  $R3$ . Trasformando in equivalente serie,

$i(0+) = (V2 + I_s * R3) / (R2 + R3) = 1.5 \text{ A}$ . A regime il circuito si presenta come parallelo di tre bipoli di tipo serie. La tensione ai loro capi (verso l'alto) si trova trasformandoli in bipoli di tipo

parallelo:  $V = (V1 * G1 + V2 * G2) / (G1 + G2 + G3) = 7.097 \text{ V}$ . Quindi  $i(+\infty) = (V2 - V) / R2 = 0.9677 \text{ A}$ . La costante di tempo  $\tau$  si ottiene come  $L / R_{eq}$ , dove  $R_{eq}$  è la resistenza "vista" da  $L$  dopo aver reso passiva la rete  $R_{eq} = R1 + (R2 // R3) = 3.875 \Omega$ ; da cui  $\tau = 258.1 \mu\text{s}$ . Segue

$i(t) = 0.5323 * e^{(-t/\tau)} + 0.9677 \text{ A}$ .  $i(2\tau) = 1.0397 \text{ A}$

$$i(t) = 0.5323 * e^{(-t/\tau)} + 0.9677 \text{ A}. i(2\tau) = 1.0397 \text{ A}$$

### Ex3.4

Dato il circuito in figura 3.4, sono noti:

$R_1 = 2 \Omega$ ,  $R_2 = 3 \Omega$ ,  $R_3 = 1 \Omega$   
 $R_4 = 5 \Omega$ ,  $R_5 = 4 \Omega$ ,  $V_1 = 10 \text{ V}$ ,  
 $V_2 = 12 \text{ V}$ ,  $V_3 = 80 \text{ V}$ ,  $C = 3 \mu\text{F}$ .

L'interruttore S è chiuso da lungo tempo.  
 Determinare all'apertura di S il  
 transitorio di  $v_C(t)$  e tracciarne  
 l'andamento in modo qualitativo

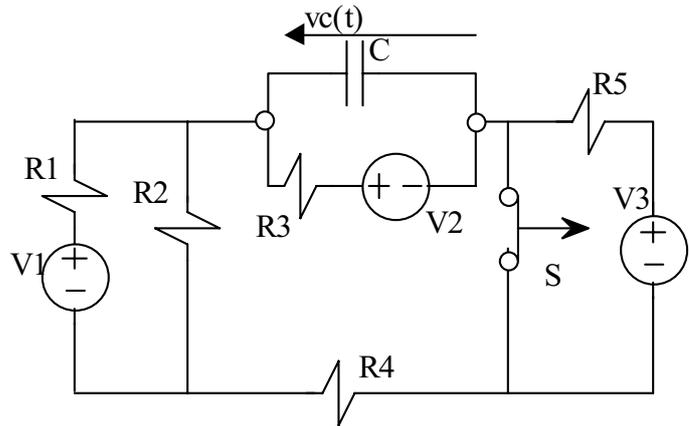


Fig. 3.4

$$[v(t) = 4.321 + 6.845 \cdot e^{(-t/\tau)} \text{ V}, \tau = 2.732 \mu\text{s}]$$

{A  $t=0^-$  rimangono tre bipoli di tipo serie in parallelo tra loro:  $(V_1, R_1)$ ,  $(R_2)$  e  $(V_2, R_3 + R_4)$ . La comune tensione vale  $V = (V_1 \cdot G_1 + V_2 \cdot G_3) / (G_1 + G_2 + G_3) = 7 \text{ V}$ , da cui  $v_C(0^-) = V_2 + R_3 \cdot (V - V_2) / (R_3 + R_4) = 11.167 \text{ V}$ . A  $t=0^+$  sono sempre tre i bipoli in parallelo:  $(V_1, R_1)$ ,  $(R_2)$  e  $(V_3 + v_C(0^-), R_5 + R_4)$ . A regime nel condensatore non circola corrente; i tre bipoli in parallelo sono  $(V_1, R_1)$ ,  $(R_2)$  e  $(V_3 + V_2, R_3 + R_5 + R_4)$ .  $V = (V_1 \cdot G_1 + (V_3 + V_2) \cdot G_3) / (G_1 + G_2 + G_3) = 15.214 \text{ V}$ , da cui si può calcolare la tensione sul condensatore che è pari a:  $v_C(\infty) = (V - V_3 - V_2) \cdot R_3 / (R_3 + R_4 + R_5) + V_2 = 4.321 \text{ V}$ . La costante di tempo si ottiene come  $\tau = C / G_{eq} = 2.732 \mu\text{s}$ .}

### Esercizi proposti

### Ex3.5

Nel circuito in figura 3.5 sono noti:

$R_1 = 8 \Omega$ ,  $R_2 = 3 \Omega$ ,  $R_3 = 5 \Omega$ ,  
 $V_1 = 20 \text{ V}$ ,  $V_2 = 22 \text{ V}$ ,  $I_1 = 12 \text{ A}$ ,  $L = 20 \text{ mH}$

Determinare  $v(t)$  e tracciarne l'andamento in  
 funzione del tempo

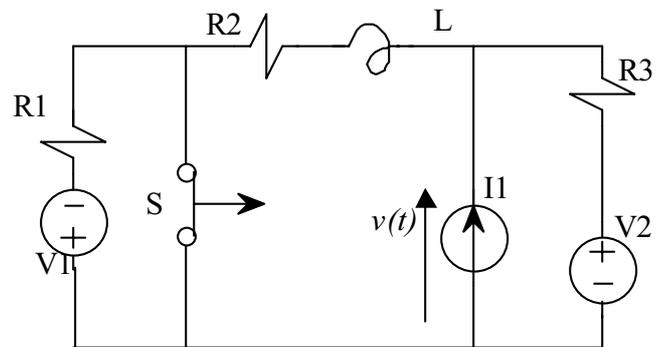


Fig. 3.5

$$[v(t) = 50.125 - 19.365 \cdot e^{(-t/\tau)} \text{ V}, \tau = 1.25 \text{ ms}]$$

{A  $t=0^-$  rimangono tre bipoli in parallelo:  $R_2$ ,  
 $I_1$  e  $R_3, V_2$ . Trasformando  $V_2 - R_3$

nell'equivalente parallelo si può facilmente

calcolare la corrente;  $i_L(0^-) = (I_1 + V_2/R_3) \cdot G_2 / (G_2 + G_3) = 10.25 \text{ A}$  (verso sinistra).

La tensione  $v(0^-) = R_2 \cdot i_L(0^-) = 30.75 \text{ V}$ .

All'istante  $t = 0^+$  rimangono tre bipoli in parallelo: un generatore di corrente pari a  $i_L(0^-)$ ,  $I_1$  e  $R_3 - V_2$ . La tensione  $v(0^+)$  può essere calcolata trasformando il bipolo serie  $V_2 - R_3$  nell'equivalente parallelo e risulta pari a  $v(0^+) = (I_1 + V_2 \cdot G_3 - i_L(0^-)) / (G_3) = 30.75 \text{ V}$ ;

La  $v(\infty)$  si calcola osservando che a  $t \rightarrow \infty$  restano tre bipoli in parallelo:  $V_1 - R_1 + R_2$ ,  $I_1$  e  $V_3 - R_3$ . Si trova allora  $v(\infty) = (-G_{12} \cdot V_1 + I_1 + V_2 \cdot G_3) / (G_{12} + G_3) = 50.125 \text{ V}$  dove  $G_{12} = 1 / (R_1 + R_2)$ ;  $R_{eq} = 16 \Omega$ ;  $\tau = 1.25 \text{ ms}$ }

### Ex3.6

Sia dato il circuito rappresentato in figura 3.6, con i seguenti dati:

$R1 = 18 \Omega$ ,  $R2 = 5 \Omega$ ,  $R3 = 3 \Omega$ ,  $R4 = 7 \Omega$ ,  
 $V1 = 18 \text{ V}$ ,  $V2 = 22 \text{ V}$ ,  $L = 1 \text{ mH}$ .

Determinare la tensione  $v(t)$  alla chiusura dell'interruttore

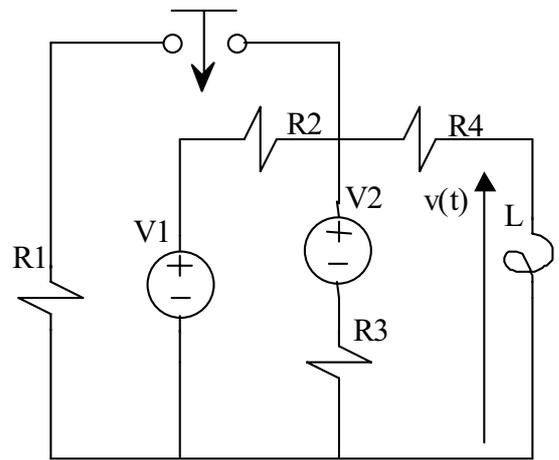


Fig. 3.6

$$[v(t) = -1.525 * e^{(-t/\tau)} \text{ V}, \tau = 114.97 \mu\text{s}]$$

{All'istante  $t=0^-$  rimangono tre bipoli in parallelo:

$V1-R2$ ,  $V2-R3$ ,  $R4$ . La corrente  $i_{L0^-} =$

$$(G2 * V1 + V2 * G3) * G4 / (G2 + G3 + G4) = 2.31 \text{ A}$$

(diretta verso il basso). La tensione  $v_{0^-} = 0$ . A  $t = 0^+$

rimangono quattro bipoli in parallelo:  $R1$ ,  $V1-R2$ ,  $V2-R3$ ,  $I_{L0^-} - R4$ . La tensione su  $R4 - I_{L0^-}$  è pari a  $V = (V1 * G2 + V2 * G2 - i_{L0^-}) / (G1 + G2 + G3) = 14.64 \text{ V}$ , la tensione  $v(0^+) = V - R4 * i_{L0^-} = -1.525 \text{ V}$ . A regime la tensione è nulla.

La costante di tempo  $\tau = L / Req$ ,  $Req = R4 + (1 / (G1 + G2 + G3)) = 8.698 \Omega$ ,  $\tau = 1.1497 * 10^{-4} \text{ s}$  }

### Ex3.7

Il circuito in figura 3.7 presenta:

$R1 = 6 \Omega$ ,  $R2 = 8 \Omega$

$V1 = 18 \text{ V}$ ,  $V2 = 20 \text{ V}$ ,  $V3 = 22 \text{ V}$ ,  $I1 = 12 \text{ A}$ .

$C = 10 \mu\text{F}$

L'interruttore è chiuso da tempo infinito.

A  $t = 0 \text{ s}$  si apre l'interruttore, determinare la tensione sul condensatore nel verso indicato in figura

$$[v_c(0^-) = v_c(0^+) = -20 \text{ V}, v_{cinf} = 40.86 \text{ V}, \tau = 3.429 * 10^{-5} \text{ s}]$$

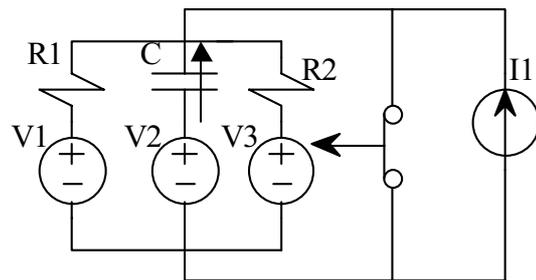


Fig. 3.7

{All'istante  $t = 0^-$  resta  $V2$  in serie ad un circuito aperto e un corto circuito,  $v_{c0^-} = -V2 = -20 \text{ V}$  (diretto verso l'alto). All'istante  $t \rightarrow \infty$  il condensatore è un circuito aperto, la tensione ai capi di  $V2 - C$  si trova trasformando i bipoli nel loro equivalente parallelo ed è pari a  $V =$

$(V1 * G1 + V3 * G2 + I1) / (G1 + G2) = 60.86 \text{ V}$ ; la tensione  $v_{cinf}$  vale:  $V - V2 = 40.86 \text{ V}$ . La costante di tempo  $\tau = C / Geq$ ,  $Geq = G1 + G2 = 0.292 \text{ S}$ ,  $\tau = 34.29 \mu\text{s}$ ,  $v(t) = -60.86 * e^{-t/\tau} + 40.86$ }

**ESERCITAZIONE 4**

Esercizi svolti durante l'esercitazione.

**Ex4.1**

Dato il circuito in figura 4.1, sono noti:

$R = 8 \Omega$ ,  $L = 10 \text{ mH}$ ,  $C = 100 \mu\text{F}$ .

$v(t) = 50 \cdot \cos(300 \cdot t + \pi/6) \text{ V}$

Determinare la corrente, le tensioni sul resistore, sul condensatore e sull'induttore nel dominio del tempo ed in quello fasoriale.

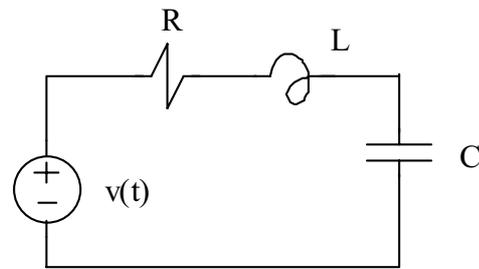


Fig. 4.1

$[i(t) = 1.594 \cdot \cos(300 \cdot t + 1.8387) \text{ A}$ ,  
 $v_r(t) = 12.751 \cdot \cos(300 \cdot t + 1.837) \text{ V}$ ,  
 $v_l(t) = 4.782 \cdot \cos(300 \cdot t + 3.407) \text{ V}$ ,  
 $v_c(t) = 53.13 \cdot \cos(300 \cdot t + 0.266) \text{ V}]$

*{E' necessario esprimere la sorgente di tensione nel dominio fasoriale. In tale dominio*

$\bar{V} = \frac{50}{\sqrt{2}} \cdot e^{j\frac{\pi}{6}} = \frac{50}{\sqrt{2}} \cdot (\cos \frac{\pi}{6} + j \cdot \sin \frac{\pi}{6}) = 30.62 + j \cdot 17.68 \text{ V}$ . La pulsazione è pari a  $\omega = 300 \text{ rad/s}$ . Si

può ricavare la reattanza induttiva  $X_l = \omega \cdot L = 3 \Omega$ , la reattanza capacitiva è pari a  $X_c = 1/(\omega \cdot C) = 33.33 \Omega$ . Scrivendo la legge alla maglia si ottiene la corrente

$\bar{I} = \bar{V} / (R + j \cdot (X_l - X_c)) = -0.296 + j \cdot 1.087 \text{ A}$ . La tensione ai capi del resistore è pari a

$\bar{V}_r = R \cdot \bar{I} = -2.368 + j \cdot 8.7 \text{ V}$ , la tensione sull'induttore vale  $\bar{V}_l = j X_l \cdot \bar{I} = -3.262 - j \cdot 0.888 \text{ V}$ , la tensione sul condensatore vale  $\bar{V}_c = -j X_c \cdot \bar{I} = 36.249 + j \cdot 9.866 \text{ V}$ . Per trasformare le grandezze trovate nel dominio del tempo si procede nel medesimo modo per tutte le grandezze. Ad esempio per la corrente si ha:

$i(t) = I_M \cdot \cos(\omega t + \varphi)$ , dove  $I_M = \sqrt{2} \cdot \left\{ \sqrt{\text{Re}(\bar{I})^2 + \text{Im}(\bar{I})^2} \right\}$  e  $\varphi = a \tan\left(\frac{\text{Im}(\bar{I})}{\text{Re}(\bar{I})}\right)$ , se la parte reale è

positiva, e  $\varphi = a \tan\left(\frac{\text{Im}(\bar{I})}{\text{Re}(\bar{I})}\right) + \pi$  se è negativa. Si ottiene allora:

$i(t) = 1.594 \cdot \cos(300 \cdot t + 1.8387) \text{ A}$ ,  
 $v_r(t) = 12.751 \cdot \cos(300 \cdot t + 1.837) \text{ V}$ ,  
 $v_l(t) = 4.782 \cdot \cos(300 \cdot t + 3.407) \text{ V}$ ,  
 $v_c(t) = 53.13 \cdot \cos(300 \cdot t + 0.266) \text{ V}$

### Ex4.2

Dato il circuito in figura 4.2, sono noti:

$$I_1 = 18 \text{ A}, X_1 = 3 \Omega, R = 4 \Omega$$

$$X_c = 1 \Omega, \omega = 200 \text{ rad/s.}$$

Determinare lo sfasamento tra  $I_1$  e  $V_1$ , e  $v_1(t)$

$$[\text{sfas} = 1.326 \text{ rad}, v_1(t) = 24.696 \cdot \cos(200 \cdot t - 0.54) \text{ V}]$$

{Il fasore  $\bar{I}_1$  è pari a  $\bar{I}_1 = 18 \cdot e^{j\pi/4} = 18 \cdot (\cos(\pi/4) + j \cdot \sin(\pi/4)) = 12.73 + j \cdot 12.73$ .  $R$  e  $X_c$  sono in parallelo di conseguenza equivalgono ad una impedenza  $\bar{Z}_{par} = 1/\bar{Y}_{par}$ , dove  $\bar{Y}_{par} = G + (-1/(j \cdot X_c))$ ,

$\bar{Z}_{par} = 0.235 - j \cdot 0.941 \Omega$ . La tensione  $\bar{V}_1$  è pari a  $\bar{V}_1 = \bar{I}_1 \cdot \bar{Z}_{par} = 14.974 - j \cdot 8.984 \text{ V}$ . La tensione  $\bar{V}_1$  nel dominio del tempo è pari a  $v(t) = 24.696 \cdot \cos(200 \cdot t - 0.54) \text{ V}$ . Lo sfasamento di  $\bar{I}_1$  rispetto a  $\bar{V}_1$  è pari alla differenza della fase della corrente e di quella della tensione:  $\text{sfas} = \pi/4 - (-0.54) = 1.325 \text{ rad}$ }

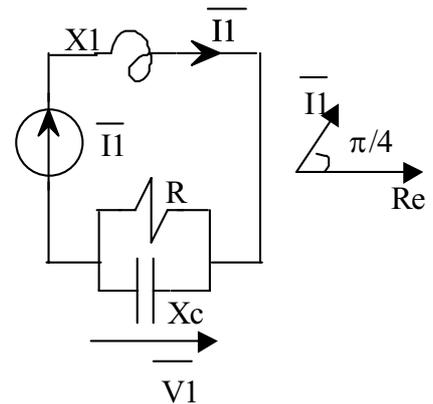


Fig. 4.2

### Ex4.3

Dato il circuito in figura 4.3, sono noti:

$$X_1 = 30 \Omega, R_1 = 7 \Omega, R_2 = 10 \Omega, X_c = 18 \Omega$$

$$V_1 = 18 \text{ V}, V_2 = 20 \text{ V}, \delta = \pi/3$$

$$\omega = 100 \text{ rad/s}$$

Determinare la corrente  $i(t)$  e il suo fasore rappresentativo

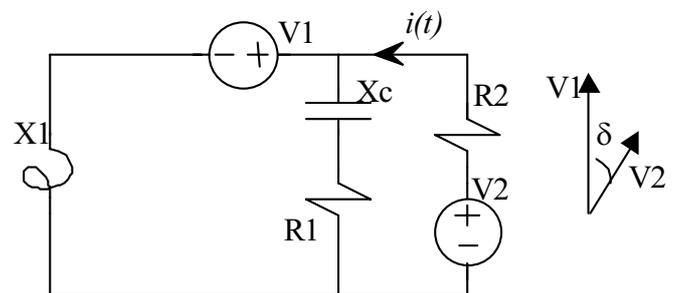


Fig. 4.3

$$[\bar{I} = -0.057 + j \cdot 0.511 \text{ A},$$

$$i(t) = 0.727 \cdot \cos(100 \cdot t + 1.682) \text{ A}]$$

{Poiché è dato lo sfasamento relativo tra  $\bar{V}_1$  e  $\bar{V}_2$  è necessario scegliere dove porre l'asse reale, la scelta più furba consiste nel posizionare tale asse su uno dei due fasori. Se si posiziona l'asse reale coincidente con  $\bar{V}_2$  si ottiene:  $\bar{V}_2 = 20 \text{ V}$ ,  $\bar{V}_1 = 18 \cdot e^{j\delta} \text{ V} = 9 + j \cdot 15.59 \text{ V}$ . A questo punto conviene semplificare la rete di sinistra che comprende  $V_1 - X_1$ ,  $R_1 - X_c$ , trasformandolo nel bipolo equivalente serie. La tensione a vuoto può essere calcolata con la regola del partitore di tensione,  $\bar{V}_v = \bar{V}_1 \cdot (R_1 - j \cdot X_c) / (j \cdot X_1 + R_1 - j \cdot X_c) = 9.174 - j \cdot 23.28 \text{ V}$ . L'impedenza equivalente è pari al parallelo di  $X_1$  con la serie di  $R_1$  e  $X_c$ :  $\bar{Z}_{eq} = 1 / (1/(j \cdot X_1) + 1/(R_1 - j \cdot X_c)) = 32.64 - j \cdot 25.96 \Omega$ . A questo punto il fasore corrente può essere calcolato scrivendo una legge alla maglia e si ottiene:  $\bar{I} = (\bar{V}_2 - \bar{V}_v) / (R_2 + \bar{Z}_{eq}) = -0.057 + j \cdot 0.511 \text{ A}$ . Tornando nel dominio del tempo si ottiene  $i(t) = 0.727 \cdot \cos(100 \cdot t + 1.682) \text{ A}$ }

**ESERCITAZIONE 5**

Esercizi svolti durante l'esercitazione.

**Ex5.1**

Dato il circuito in figura 5.1, sono noti:

$R = 6 \Omega$ ,  $L = 1 \text{ mH}$ ,  $C = 12 \mu\text{F}$

$f = 50 \text{ Hz}$ ,  $\delta = \pi/6$

$V_1 = 18 \text{ V}$ ,  $I_1 = 18 \text{ A}$

Determinare la tensione  $v(t)$  e lo sfasamento di  $V_r$  rispetto a  $I_c$ .

$[v(t) = 131.27 \cdot \cos(314.15 \cdot t + 0.598) \text{ V}$   
 $\phi = 1.477 \text{ rad}]$

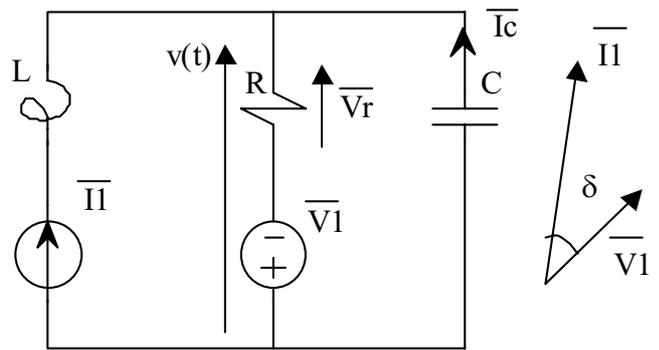


Fig. 5.1

{Scegliendo di posizionare l'asse reale allineato con il fasore tensione  $\bar{V}_1$ , si ottiene che la

tensione  $\bar{V}_1$  nel dominio fasoriale vale  $18 \text{ V}$  mentre la corrente  $\bar{I}_1 = 18 \cdot e^{j\frac{\pi}{6}} = 15.59 + j9 \text{ A}$ . La rete è costituita dal parallelo di  $\bar{I}_1$ ,  $\bar{V}_1 - \bar{Z}_r$  (dove  $\bar{Z}_r = R$ ),  $\bar{Z}_c = -jX_c$ . La reattanza  $X_c$  può essere facilmente calcolata come  $X_c = 1/(\omega C) = 265.3 \Omega$ , ( $\omega = 2 \cdot \pi \cdot f$ ).  $X_l$ , essendo in serie ad un generatore di corrente, non viene visto ai morsetti esterni..

La tensione  $v(t)$  richiesta è quella ai capi di  $X_c$ , che può essere calcolata in diversi modi: si può infatti semplificare la parte rimanente della rete cercando il bipolo equivalente serie oppure si può trasformare il bipolo  $\bar{V}_1 - \bar{Z}_r$  nel suo equivalente parallelo riducendo così la rete nel parallelo di  $\bar{I}_1$ ,  $\bar{V}_1/R - Y_1$ ,  $Y_c$ . Ricordando la relazione  $\bar{I} = \bar{Y} \cdot \bar{V}$  si può calcolare la tensione richiesta come  $\bar{V} = (\bar{I}_1 - (\bar{V}_1/\bar{Z}_r))/((1/\bar{Z}_r) + 1/(\bar{Z}_c)) = 76.71 + j52.26 \text{ V}$ , la tensione  $v(t)$  risulta allora pari a  $v(t) = |\bar{V}| \sqrt{2} \cdot \cos(\omega t + \arctan(\text{Im}(\bar{V})/\text{Re}(\bar{V}))) = 131.274 \cdot \cos(314.15 \cdot t + 0.598) \text{ V}$

La tensione  $\bar{V}_r$  si trova scrivendo la legge delle tensioni e risulta pari a  $\bar{V}_r = \bar{V} + \bar{V}_1 = 94.71 + j52.265 \text{ V}$ . La corrente  $\bar{I}_c$  risulta  $\bar{I}_c = -\bar{V}/\bar{Z}_c = 0.197 - j0.289 \text{ A}$ . L'angolo  $\phi$  richiesto è pari a  $\phi = \arg(\bar{V}_r \cdot \bar{I}_c) = 1.477 \text{ rad}$

**Ex5.2**

Dato il circuito in figura 5.2, sono noti:  
 $\bar{V}_1 = 10 \text{ V}$ ,  $\bar{V}_2 = j*12 \text{ V}$ ,  $R_1 = 2 \Omega$ ,  $R_2 = 4 \Omega$   
 $R_3 = 5 \Omega$ ,  $R_4 = 10 \Omega$ ,  $X_c = 2 \Omega$ ,  $X_l = 3 \Omega$ ,  
 $f = 50 \text{ Hz}$ .

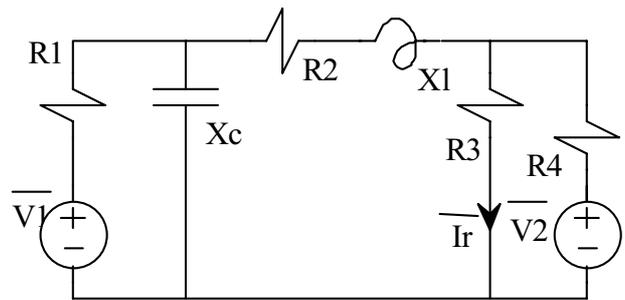


Fig. 5.2

Determinare  $i_r(t)$

$[i_r(t) = 0.306*\cos(314.15*t+0.132) \text{ A}]$

{Conviene semplificare la parte di rete di sinistra (costituita dal bipolo a tipo serie costituito dal generatore di tensione  $\bar{V}_1$  e dall'impedenza  $\bar{Z}_1 = R_1$ , in parallelo a  $\bar{Z}_c = -jX_c$ , in serie a  $\bar{Z}_2 = R_2 + jX_l$ ). La tensione a vuoto si trova con la regola del partitore di tensione e vale  $\bar{V}_v = \bar{V}_1 \cdot \bar{Z}_c / (\bar{Z}_c + \bar{Z}_1) = 5 - j5 \text{ V}$ , l'impedenza equivalente è data dalla serie di  $\bar{Z}_2$  e del parallelo di  $\bar{Z}_1$  e  $\bar{Z}_c$ ,  $\bar{Z}_{eq} = 5 + j2 \Omega$ . La corrente  $\bar{I}_r$  può essere calcolata trasformando i due bipoli  $\bar{V}_v - \bar{Z}_{eq}$  e  $\bar{V}_2 - \bar{Z}_4$  ( $\bar{Z}_4 = R_4$ ) nel loro equivalente parallelo e applicando la regola del partitore di corrente, (dove  $\bar{Y}_{eq} = 1/\bar{Z}_{eq}$ ,  $\bar{Y}_3 = 1/\bar{Z}_3$ , ( $\bar{Z}_3 = R_3$ )  $\bar{Y}_4 = 1/\bar{Z}_4$ ) si ottiene quindi:  
 $\bar{I}_r = ((\bar{V}_v / \bar{Z}_{eq}) + (\bar{V}_2 / \bar{Z}_4)) * \bar{Y}_3 / (\bar{Y}_3 + \bar{Y}_4 + \bar{Y}_{eq}) = 0.215 + j0.028 \text{ A}$ .  
 La corrente  $i_r(t)$  risulta allora pari a  $i_r(t) = 0.306*\cos(314.15*t+0.132) \text{ A}$ }

**Ex5.3**

Dato il circuito in figura 5.3 funzionante in regime sinusoidale, sono noti:  
 $\bar{Z}_1 = 1 - j \Omega$ ,  $\bar{Z}_2 = 2 + j \Omega$ ,  $\bar{Z}_3 = 1 - j2 \Omega$ ,  
 $\bar{Z}_4 = 3 + j2 \Omega$ ,  $V = 120 \text{ V}$ ,  
 $I_1 = 80 \text{ A}$ ,  $I_2 = 50 \text{ A}$

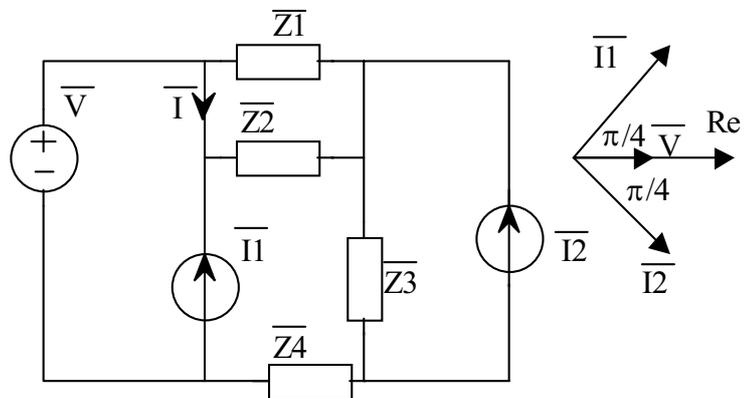


Fig. 5.3

Determinare in modulo e fase la corrente I

$[\bar{I} = -39 - j58.68 \text{ A}]$

{Conviene semplificare il circuito cercando il bipolo equivalente serie visto dai morsetti del ramo percorso dalla corrente I.  
 L'impedenza equivalente è data da  $\bar{Z}_{eq} = (\bar{Z}_3 + \bar{Z}_4) // \bar{Z}_1 + \bar{Z}_2 = 2.923 + j0.385 \Omega$  (dove // indica il parallelo). Per il calcolo della tensione a vuoto conviene trasformare il bipolo parallelo  $\bar{I}_2 - \bar{Z}_3$  nel suo equivalente serie  $\bar{V}_2 - \bar{Z}_3$  dove  $\bar{V}_2 = \bar{I}_2 * \bar{Z}_3$ . Si osserva a questo punto che l'impedenza  $\bar{Z}_3$  risulta in serie a  $\bar{Z}_4$  e che la rete è quindi costituita dal parallelo di  $\bar{V} - \bar{Z}_1$ ,  $\bar{I}_1 - \bar{Z}_2$  e  $\bar{V}_2 - (\bar{Z}_3 + \bar{Z}_4)$ .  
 La tensione a vuoto può essere calcolata una volta nota la tensione  $V_u$  sul bipolo  $V_1 - Z_1$ , che risulta pari a  $\bar{V}_u = (\bar{I}_1 + \bar{V} / \bar{Z}_1 + \bar{V}_2 / (\bar{Z}_3 + \bar{Z}_4)) / (1/\bar{Z}_1 + 1/(\bar{Z}_3 + \bar{Z}_4)) = 154.86 + j16.83 \text{ V}$ , risulta allora che la tensione a vuoto è pari a  $\bar{V}_v = \bar{V} - \bar{V}_u - \bar{Z}_2 * \bar{I}_1 = -91.43 - j186.5 \text{ V}$ .  
 La corrente  $\bar{I}$  richiesta è allora data da  $\bar{I} = \bar{V}_v / \bar{Z}_{eq} = -39 - j58.68 \text{ A} = 70.46 * e^{j123.6} \text{ A}$ .}

**Ex5.4**

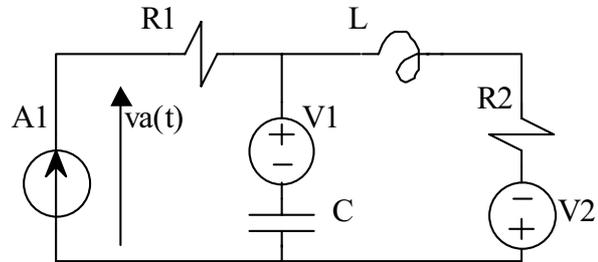
Dato il circuito in figura 5.4 funzionante in regime sinusoidale, sono noti:

$$v_1(t) = \sqrt{2} * 200 * \sin(500 * t) \text{ V}, v_2(t) = \sqrt{2} * 300 * \cos(500 * t) \text{ V}$$

$$a_1(t) = \sqrt{2} * 10 * \sin(500 * t - \pi/4) \text{ A}$$

$$R_1 = 5 \text{ } \Omega, R_2 = 10 \text{ } \Omega, L = 20 \text{ mH},$$

$$C = 100 \text{ } \mu\text{F}$$



Determinare la tensione  $v_a(t)$

$$[v_a(t) = 428.46 * \cos(500 * t + 2.723) \text{ V}]$$

*{I generatori di tensione e corrente espressi in regime fasoriale sono pari a :*

$$V_1 = -j200 \text{ V}, V_2 = 300 \text{ V},$$

$$A_1 = 10 * e^{-j(\pi/4 + \pi/2)} \text{ A. Conviene semplificare}$$

*la rete di destra cercando il bipolo equivalente serie. Detti  $Z_r = R_1, Z_c = -j/(\omega * C)$*

*(con  $\omega = 500 \text{ rad/s}$ ),  $Z_2 = R_2 + j * \omega * L$ , l'impedenza equivalente  $Z_{eq}$  è data dalla serie di  $Z_r$  con il parallelo di  $Z_c$  e  $Z_2$ .  $Z_{eq} = Z_r + (Z_c // Z_2) = 25 \text{ } \Omega$ .*

*La tensione a vuoto è data dalla legge alla maglia e vale*

$$V_v = V_1 - Z_c * (V_1 + V_2) / (Z_2 + Z_c) = -100 + j300 \text{ V}.$$

*La tensione  $V_a = V_v + Z_{eq} * A_1 = -267.78 + j123.22 \text{ V}$ . Ritornando nel dominio del tempo si trova  $v_a(t) = 428.46 * \cos(500 * t + 2.723) \text{ V}$ }*

Fig. 5.4

Esercizi proposti

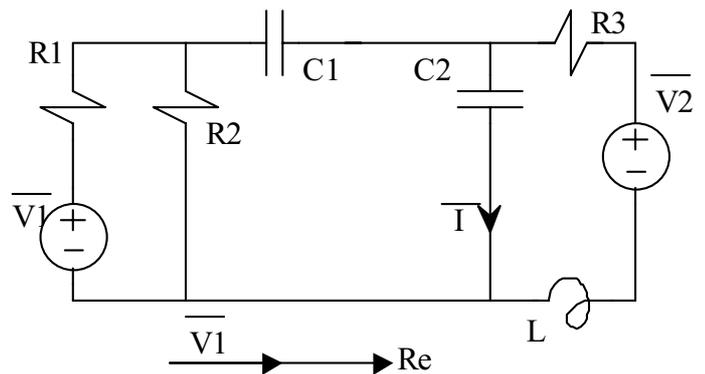
**Ex5.5**

Dato il circuito in figura 5.2, sono noti:

$$V_1 = 10 \text{ V}, R_1 = 5 \text{ } \Omega, R_2 = 20 \text{ } \Omega$$

$$R_3 = 6 \text{ } \Omega, R_4 = 10 \text{ } \Omega, C_1 = C_2 = 1 \text{ mF}$$

$$L = 0.1 \text{ H}, \omega = 100 \text{ rad/s}.$$



Calcolare  $V_2$  in modulo e fase rispetto a  $V_1$  in modo che  $I = 0$ .

$$[v_2(t) = 12.25 * \cos(100 * t - 0.921) \text{ V}]$$

Fig. 5.5

*{Affinché la corrente I sia pari a zero dovrà*

*essere  $I = V_{c2} / Z_{c2} = 0$  e quindi dovrà essere nulla la tensione ai capi di  $C_2$ .*

*Conviene semplificare la parte di rete di sinistra, costituita da  $V_1 - R_1, R_2, C_1$ . Detti  $Z_1 = R_1, Z_2 = R_2, Z_c = -j/(\omega * C_2)$ , l'impedenza equivalente risulta la serie di  $Z_c$  con il parallelo di  $Z_1$  e  $Z_2$ ,  $Z_{eq} = (Z_1 // Z_2) + Z_c = 4 - j * 10 \text{ } \Omega$ . La tensione a vuoto può essere calcolata con la regola del partitore di tensione e risulta pari a  $V_v = V_1 * Z_2 / (Z_2 + Z_1) = 8 \text{ V}$ . La parte di rete di destra è costituita*

dall'impedenza  $Z3 = R3 + j*(\omega*L)$  e dal generatore di tensione  $V2$ . Imponendo che la tensione ai capi di  $C2$  sia nulla si ottiene:  $V_{c2} = V_v - Z_{eq}*(V_v - V2)/(Z_{eq} + Z3) = 0$ , da cui si ottiene  $V2 = 5.241 - j6.897$  e quindi  $v2(t) = 12.25*\cos(100*t - 0.921)$  V}

**Ex5.6**

Dato il circuito in figura 5.6, sono noti:

- $v1(t) = 14.139*\sin(10*t)$  V,  $R1 = 2 \Omega$ ,  $R2 = 1 \Omega$
- $R3 = 4 \Omega$ ,  $C1 = C2 = 0.1$  F
- $L1 = 0.1$  H,  $L2 = 0.5$  H.

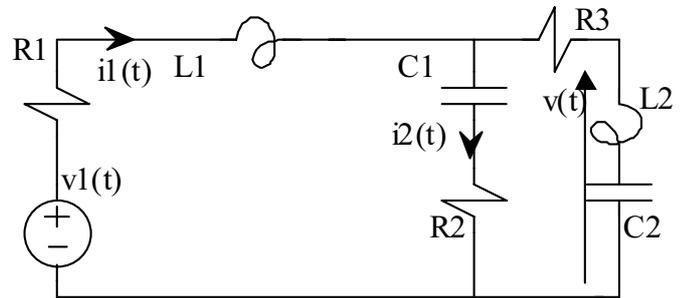


Fig. 5.6

Calcolare  $i1(t)$ ,  $i2(t)$ ,  $v(t)$ .

- $i1(t) = 4.432*\cos(10*t - 1.663)$  A,
- $i2(t) = 4.3*\cos(10*t - 1.418)$  A,
- $v(t) = 4.3*\cos(10*t + 1.418)$  V]

{Il generatore di tensione  $v1(t)$  in regime fasoriale è pari a  $V1 = -j9.99$  V. La rete è costituita dal parallelo di 3 bipoli:  $V1-Z1$ ,  $Z2$ ,  $Z3$ , dove  $Z1 = R1 + j*\omega*L$ ,  $Z2 = R2 - j/(\omega*C1)$ ,  $Z3 = R3 + j*(\omega*L2 - 1/(\omega*C2))$ . Per calcolare la tensione  $V$  conviene trasformare  $V1-Z1$  nel suo equivalente parallelo e notare che in tal modo si ottiene dalla relazione  $I = Y*V$  che la tensione  $V_u$  ai capi di  $Z2$  è pari a  $V_u = (V1/Z1)/(1/Z1 + 1/Z2 + 1/Z3) = -2.543 - j3.467$  V. La tensione  $V$  si trova applicando la regola del partitore di tensione ed è pari a  $V = V_u*(j*(\omega*L2 - 1/(\omega*C2)))/(Z3) = 0.462 - j3.005$  V, la corrente  $I2$  è pari a  $I2 = V_u/Z2 = 0.462 - j3.005$  A, la corrente  $I1 = (V1 - V_u)/Z1 = -0.289 - j3.121$  A. Ritornando nel dominio del tempo si ottiene:  $i1(t) = 4.432*\cos(10*t - 1.663)$  A,  $i2(t) = 4.3*\cos(10*t - 1.418)$  A,  $v(t) = 4.3*\cos(10*t + 1.418)$  V}

**ESERCITAZIONE 6**

Esercizi svolti durante l'esercitazione.

**Ex6.1**

Dato il circuito in figura 6.1 funzionante in regime sinusoidale, sono noti:

$R1 = 3 \Omega$ ,  $R2 = 4 \Omega$ ,  $R3 = 5 \Omega$   
 $R4 = 4 \Omega$ ,  $Xc1 = 2 \Omega$ ,  $Xc2 = 3 \Omega$   
 $Xl = 2 \Omega$ ,  $Iz = 20 A$ ,  $Pz = 400 W$   
 $Qz = 300 Var$  (ind)

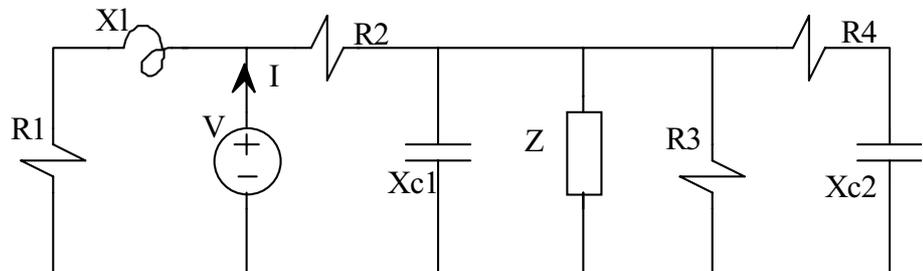


Fig. 6.1

Determinare i valori della tensione del generatore V, della corrente da esso erogata e del loro sfasamento reciproco.

[ $V = 125.78 V$ ,  $I = 57.38 A$ ,  $\phi = 18.97^\circ$  (ind.)]

{Si procede seguendo il metodo di Boucherot. Per trovare la tensione V è necessario trovare la potenza attiva, reattiva e apparente totale ai morsetti del generatore. Per fare questo conviene dividere la rete in tre sezioni:

- sez. a comprende Xc1, Z, R3, R4 e Xc2
- sez. b comprende R2;
- sez. c comprende R1 e Xl

Alla sez. a la potenza attiva totale è la somma di diversi contributi:

$$Pa = Pz + PR3 + PR4$$

dove  $Pz = 400 W$ ,  $PR3 = V_{R3}^2 / R3$ ,  $PR4 = R4 * I_{R4}^2$ . La tensione ai capi di R3 è la stessa che c'è ai capi di Z e vale  $V_{R3} = \sqrt{Pz^2 + Qz^2} / Iz = 25 V$ . La corrente su R4 è pari a

$$I_{R4} = Vz / \sqrt{R4^2 + Xc2^2} = 5A \text{ quindi } Pa = 625 W.$$

Mentre la potenza reattiva è la seguente:

$$Qa = -Q_{Xc2} + Qz - Q_{Xc1}, \text{ dove } Q_{Xc2} = Xc2 * I_{R4}^2 = 75 Var, Q_{Xc1} = Vz^2 / Xc1 = 312.5 Var, \text{ da cui } Qa = -87.5 Var.$$

Alla sez. b si ha  $Qb = Qa$ ,  $Pb = Pa + R2 * I2^2$ . La corrente I2 è data da

$$I2 = \sqrt{Pa^2 + Qa^2} / Vz = 25.24 A. \text{ Quindi } Pb = 3174 W.$$

Alla sez. c  $Pc = Pb + P1$ ,  $Q1 = Qb + Q1$ . Dove  $P1 = R1 * I1^2$  e  $Q1 = Xl * I1^2$ . Per il calcolo della corrente I1 conviene calcolare la tensione ai capi dell'impedenza R1-Xl (che è la stessa che c'è ai capi del generatore V). Questa tensione è pari a  $V1 = \sqrt{Pb^2 + Qb^2} / I2 = 125.78 V$ . Nota V1 la

corrente I1 risulta pari a  $I1 = V1 / \sqrt{R1^2 + Xl^2} = 34.89 A$ . Risulta allora  $Pc = 6825 W$  e  $Qc = 2346.5$

Var. La potenza apparente totale è pari a  $Ac = \sqrt{Pc^2 + Qc^2} = 7217.1 VA$ , la tensione del

generatore vale  $V = V1 = 125.78 V$ , la corrente ai capi del generatore è pari a  $I = Ac / V = 57.38 A$ , lo sfasamento è pari a  $\phi = \text{acos}(Pc / Ac) = 0.311 \text{ rad} = 18.97^\circ$

### Ex6.2

Dato il circuito in figura 6.2, sono noti:

$R1 = 50 \Omega$ ,  $R2 = 2 \Omega$ ,  $R3 = 4 \Omega$ ,  $R4 = 4 \Omega$ ,

$Xc1 = 3 \Omega$ ,  $Xl1 = 6 \Omega$ ,

$Pz = 1600 \text{ W}$ ,  $\cos\phi_z = 0.8$  (ind.)  $Vz = 100\text{V}$

$f = 50 \text{ Hz}$ .

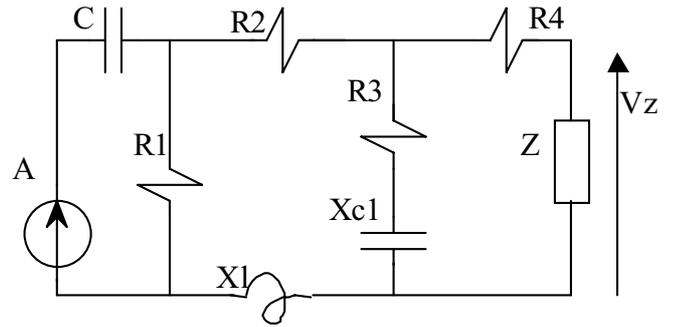


Fig. 6.2

Determinare il valore della capacità C affinché il fattore di potenza ( $\cos\phi$ ) del generatore A risulti pari a 0.9 (ind.)

[ $C = 2.131 \text{ mF}$ ]

{Si procede utilizzando il metodo di Boucherot per calcolare il fattore di potenza che risulta ai capi del generatore A quando non sia presente il condensatore C, e successivamente si calcola il valore della capacità C tale da avere un  $\cos\phi = 0.9$  ind.

Si divide la rete nelle seguenti sezioni:

- sez. a -> impedenza Z e R4
- sez. b -> impedenza R3-Xc1
- sez. c -> impedenza R2-Xl1
- sez. d -> R1
- sez. e -> C

Alla sez. a si ha  $Pa = Pz + R4 \cdot Iz^2 = 3.2 \text{ kW}$ ,  $Qz = Pz \cdot \tan(\phi) = 1.2 \text{ kVar}$ ,  $Ia = Iz = P/(V \cdot \cos\phi) = 20 \text{ A}$ ,  $Va = \sqrt{Pa^2 + Qa^2} / Iz = 170.88 \text{ V}$ . Alla sez. b si ha  $Pb = Pa + PR3$ ,  $Qb = Qa - Q_{Xc1}$ . Ma  $PR3 = R3 \cdot I_{R3}^2$ , dove  $I_{R3} = Va / \sqrt{R3^2 + Xc1^2} = 34.176 \text{ A}$ , quindi  $Pb = 7.872 \text{ kW}$  e  $Qb = -2.304 \text{ kVar}$  e  $Ib = \sqrt{Pb^2 + Qb^2} / Va = 48 \text{ A}$ .

Alla sez. c si ha  $Pc = Pb + PR2$  e  $Qc = Qb + Q_{Xl1}$ . Dove  $PR2 = R2 \cdot I2^2$  e  $Q_{Xl1} = Xl1 \cdot I2^2$ . La corrente I2 è pari a Ib quindi  $Pc = 12.48 \text{ kW}$  e  $Qc = 11.52 \text{ kVar}$ . Alla sezione c si ha inoltre  $Ic = Ib$ , e  $Vc = \sqrt{Pc^2 + Qc^2} / Ic = 353.84 \text{ V}$ . Nella sez. d si ha  $Pd = Pc + Vc^2 / R1 = 14.98 \text{ kW}$  e  $Qd = Qc$ . Si ha inoltre  $Vd = Vc$  e  $Id = \sqrt{Pd^2 + Qd^2} / Vc = 53.42 \text{ A}$

In assenza del condensatore il  $\cos\phi$  è pari a  $\cos\phi = Pd / \sqrt{Pd^2 + Qd^2} = 0.793$ . Se si aggiunge il condensatore, nella sez. e si ha  $Qe = Pd \cdot \tan\phi^* = Qd - Q^* = 7.257 \text{ kVar}$  quindi  $Q^* = 4.263 \text{ kVar}$  (cap) da cui si ricava  $C = Id^2 / (\omega \cdot Q^*) = 2.131 \text{ mF}$

### Ex 6.3

Dato il circuito in figura 6.3 funzionante in regime sinusoidale, sono noti:

$\bar{V} = 40 - j10 \text{ V}$ ,  $R = 20 \Omega$ ,  $Xc = 12 \Omega$

$X1 = 4 \Omega$ ,  $X2 = 8 \Omega$ ,  $k = 0.9$

Determinare la corrente I

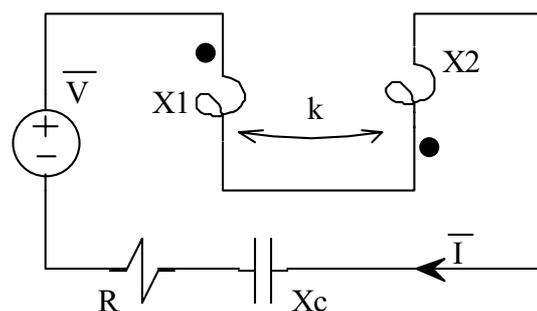


Fig. 6.3

Si consideri poi il caso in cui si abbia lo stesso circuito ma con il puntino su X2 posizionato in alto.

[CASO 1:  $\bar{I} = 1.386-j1.206$  A

CASO 2:  $\bar{I} = 1.79+j0.412$  A]

{Scrivendo la legge alla maglia si ottiene:  $\bar{V} = \bar{V}_1 + \bar{V}_2 - jX_c \bar{I} + R \bar{I}$  del resto le tensioni  $V_1$  e  $V_2$  sono date da  $\bar{V}_1 = jX_1 \bar{I}_1 + jX_m \bar{I}_2$  e  $\bar{V}_2 = jX_m \bar{I}_1 + jX_2 \bar{I}_2$  dove  $X_m = k \sqrt{X_1 X_2} = 5.091 \Omega$ . La

corrente  $I$  e' data da  $\bar{I} = \frac{\bar{V}}{j(X_1 + 2X_m + X_2 - X_c) + R} = 1.386-j1.206$  A.

Se il puntino su X2 è posizionato in alto le relazioni sul mutuo induttore diventano le seguenti:

$\bar{V}_1 = jX_1 \bar{I}_1 - jX_m \bar{I}_2$  e  $\bar{V}_2 = jX_m \bar{I}_1 - jX_2 \bar{I}_2$  e quindi

$\bar{I} = \frac{\bar{V}}{j(X_1 - 2X_m + X_2 - X_c) + R} = 1.79+j0.412$  A}

### Ex6.4

Dato il circuito in figura 6.4 funzionante in regime sinusoidale, sono noti:

$\bar{A}_1 = 40-j10$  V,  $R = 20 \Omega$ ,

$X_1 = 4 \Omega$ ,  $X_2 = 8 \Omega$ ,  $k = 0.9$

$f = 50$  Hz

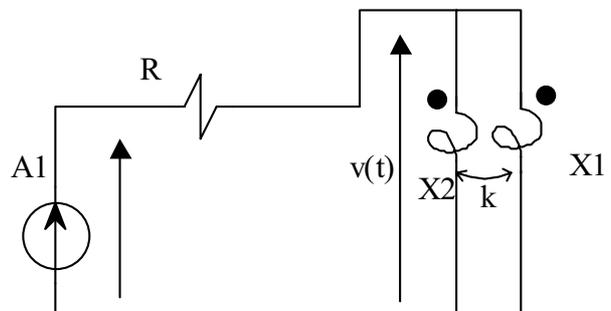


Fig. 6.4

Determinare la tensione  $v(t)$

$[v(t) = 195.04 \cdot \cos(314.15 \cdot t + 1.326)]$  V]

{Il fasore tensione  $V$  è dato da  $V = jX_1 \cdot I_1 + jX_m \cdot I_2 = jX_2 \cdot I_2 + jX_m \cdot I_1$ . E' quindi necessario calcolare le due correnti  $I_1$  e  $I_2$ . Invertendo la relazione tensioni ( $V_1, V_2$ ) e ( $I_1, I_2$ ) si ottiene:  $I_1 = j(X_2 - X_m) \cdot V / (X_m^2 - X_1 \cdot X_2)$  e  $I_2 = j(X_1 - X_m) \cdot V / (X_m^2 - X_1 \cdot X_2)$ . Introducendo la legge al nodo si ottiene  $A_1 = V \cdot (j \cdot (X_1 + X_2 - 2X_m) / (X_m^2 - X_1 \cdot X_2))$  si ottiene quindi  $V = A_1 \cdot j(X_1 X_2 - X_m^2) / (X_2 + X_1 - 2X_m) = 33.45 + j133.79$  e quindi  $v(t) = 195.07 \cdot \cos(314.15 \cdot t + 1.326)$ }

### Esercizi proposti

#### Ex 6.5

Dato il circuito in figura 6.5, sono noti:

$V_u = 280$  V  $P_u = 1$  kW

$\phi_u = \pi/4$  (ind)  $f = 50$  Hz  $R_1 = 17 \Omega$

$X_c = 200 \Omega$ ,  $R_2 = 10 \Omega$

Determinare il valore della capacità  $C_x$  in modo che la corrente  $I$  sia in fase con la tensione  $V_1$

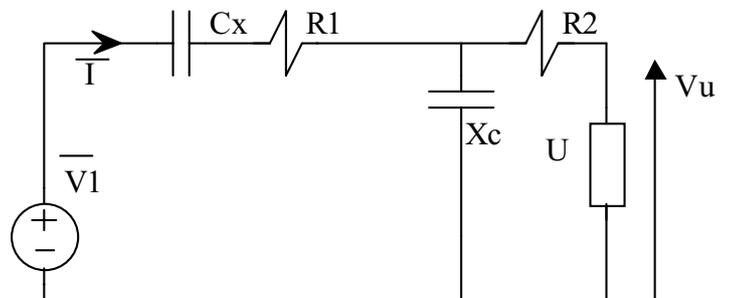


Fig. 6.5

[ $C = 115.91 \mu\text{F}$ ]

{Si procede utilizzando il metodo di Boucherot. Si individuano le seguenti sezioni:

- sez a -> R-U
- sez b -> Xc
- sez c -> R1
- sez d -> Cx

Alla sez a si ha  $P_a = P_u + PR_2 = P_u + R_2 \cdot I_u^2$ , ma  $I_u = P_u / (V_u \cdot \cos \phi) = 5.051 \text{ A}$ , quindi  $P_a = 1.255 \text{ kW}$   
 $Q_a = Q_u = P_u \cdot \tan \phi = 1 \text{ kVar}$ ,  $V_a = \sqrt{P_a^2 + Q_a^2} / I_u = 317.72 \text{ V}$ . Nella sez. b si ha  $P_b = P_a$ ,  $Q_b = Q_a - V_a^2 / X_c = 495.2 \text{ Var}$  e  $I_b = \sqrt{P_b^2 + Q_b^2} / V_a = 4.247 \text{ A}$ . Il condensatore  $C_x$  deve fornire una potenza reattiva pari a  $Q_b$  e quindi  $C_x = I_b^2 / (\omega \cdot Q_b) = 115.91 \mu\text{F}$ .

L'esercizio poteva essere risolto anche in altro modo calcolando il modulo dell'impedenza  $Z_u$  come  $Z_u = V_u / I_u$  e poi calcolando la parte reale e immaginaria di tale impedenza ( $R_u = Z_u \cdot \cos \phi$  e  $X_u = Z_u \cdot \sin \phi$ ). Affinché la corrente e la tensione siano in fase la parte immaginaria dell'impedenza vista ai morsetti di  $V1$  deve essere nulla. Imponendo questa condizione si trova la soluzione}

### Ex 6.6

Dato il circuito in figura 6.6, sono noti:

$V = 200 \text{ V}$ ,  $I = 5 \text{ A ind.}$ ,  $P = 800 \text{ W}$

$R_1 = 10 \Omega$ ,  $X_c = 100 \Omega$ ,  $X_l = 5 \Omega$

$R_2 = 50 \Omega$

Determinare l'impedenza  $Z$

$[Z = 11.574 + j21.546 \Omega]$

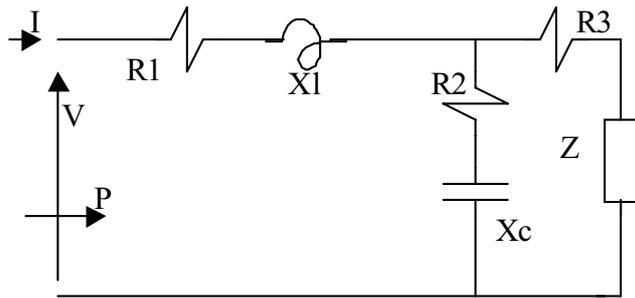


Fig. 6.6

{Si utilizza il metodo di Boucherot partendo da sinistra}

**ESERCITAZIONE 7**

Esercizi svolti durante l'esercitazione.

**Ex7.1**

Dato il circuito in figura 7.1 funzionante in regime sinusoidale, sono noti:

$$R1 = 0.1 \Omega, R2 = 5 \Omega, R3 = 5 \Omega$$

$$X4 = 3 \Omega, X5 = 4 \Omega$$

$$Xc = 6 \Omega$$

$$\bar{V}_s = 50 + j80 \text{ V}, \bar{I}_s = 10 \text{ A}$$

$$k = 0.8$$

Determinare la potenza dissipata su R1.

$$[P_{R1} = 6.4 \text{ W}]$$

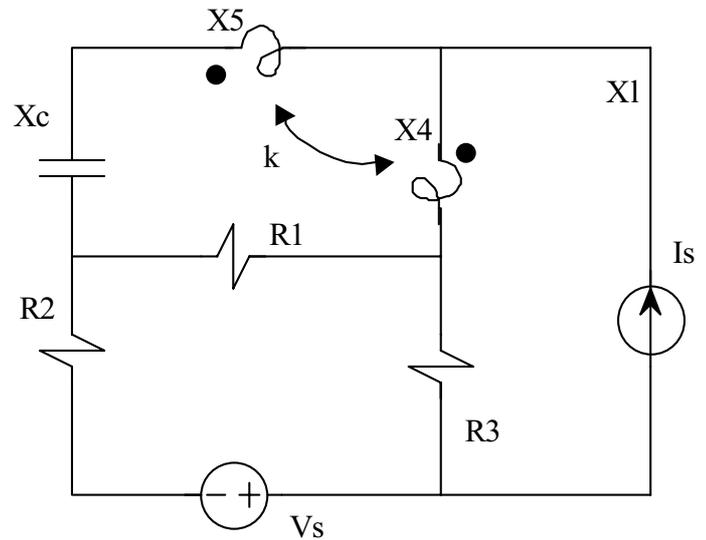


Fig. 7.1

*{Conviene determinare il bipolo equivalente serie ai morsetti del resistore R1. E' quindi necessario determinare la tensione a vuoto e la resistenza equivalente.*

*Per determinare la tensione a vuoto conviene scrivere una legge alla maglia che comprende i resistori R2, R3 e il generatore Vs. Ipotizzando che la corrente I3 che percorre R3 sia diretta verso il basso e la corrente I4 che percorre R4 sia diretta verso l'alto, e calcolando la tensione a vuoto diretta verso sinistra, si ottiene la seguente equazione fasoriale:*

*$V_V = -(V_s + R_2 \cdot I_3 + R_3 \cdot I_4)$ . E' quindi necessario determinare le due correnti. Per fare questo si scrive una equazione alle maglie più esterna e al nodo e si ottiene quanto segue:*

$$V_s + V_{R3} + V_{X4} + V_{X5} + V_{Xc} + V_{R2} = 0$$

$$I_s = I_4 - I_3$$

*I diversi contributi che compaiono nelle due equazioni sono i seguenti:*

*$V_{R3} = R_3 \cdot I_3$ ,  $V_{R2} = R_2 \cdot I_2$ ,  $V_{Xc} = -j \cdot X_c \cdot I_5$ ,  $V_{X4} = j \cdot X_4 \cdot I_4 + j \cdot X_{45} \cdot I_5$ ,  $V_{X5} = j \cdot X_{45} \cdot I_4 + j \cdot X_5 \cdot I_5$  (dove  $X_{45} = k \cdot \sqrt{X_4 \cdot X_5} = 2.77 \Omega$ ). Si ottengono quindi due equazioni in due incognite, e sostituendo si ottiene  $I_3 = (V_s + (R_3 + j(X_4 + X_{45})) \cdot I_s) / (R_2 + R_3 + j(X_4 + X_5 + 2 \cdot X_{45} - X_c)) = -13.31 - j5.06 \text{ A}$  e  $I_4 = I_s + I_3 = -3.31 - j5.06 \text{ A}$ .*

*Sostituendo si ottiene allora la tensione a vuoto che e' pari a  $V_V = 33.12 - j29.38 \text{ V}$ .*

*Per determinare l'impedenza equivalente si rende la rete passiva, si impone una corrente sonda  $I^*$  e si calcola la tensione  $V^*$  che ne segue. Si trova quindi che l'impedenza equivalente  $Z_{eq} = V^* / I^*$  e' data dal parallelo della resistenza  $R_{23} = R_2 + R_3$  con l'impedenza  $Z = j(X_4 + X_5 + 2 \cdot X_{45} - X_c)$ , si ottiene allora  $Z_{eq} = 1 / (1/Z + 1/R_{23}) = 3 + j4.58 \Omega$ . La potenza dissipata e' data da  $P_{R1} = R_1 \cdot I_{R1}^2$  il modulo della corrente che percorre la resistenza R1 e' pari a  $I_{R1} = |V_V| / |Z_{eq} + R_1| = 8 \text{ A}$  da cui  $P_{R1} = 6.4 \text{ W}$  }*

**Ex7.2**

Dato il circuito in figura 7.2 funzionante in regime sinusoidale, sono noti:

$R1 = 5 \Omega, R2 = 9 \Omega$

$C = 200 \mu F, L1 = 1 mH, L2 = 3 mH, k = 0.85$

$V = 80 V, A = 10 A, \phi = \pi/3, f = 100 Hz$

Determinare il bipolo equivalente serie visto ai morsetti AB

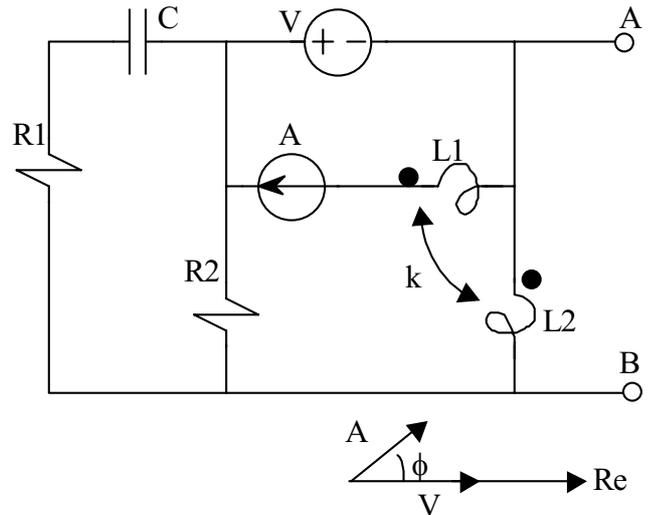


Fig. 7.2

$[V_v = 10.735 - j40.125 V, Z_{eq} = 0.755 - j1.983 \Omega]$

{i fasori rappresentativi dei due generatori sono i seguenti:  $A = A * e^{j\phi} = 5 + j * 8.667 A, V = 80 V$ . La mutua induttanza e' data da  $L_m = k * \sqrt{L1 * L2} = 1.472 mH$ . Da cui si ricavano le rispettive reattanze:

$X1 = \omega L1 = 0.628 \Omega, X2 = \omega L2 = 1.885 \Omega, X_m = \omega L_m = 0.925 \Omega$ , inoltre  $X_c = 1/(\omega C) = 7.958 \Omega$ .

Prima di cercare l'equivalente serie, e' possibile semplificare la rete sostituendo a  $R1 - X_c - R2$  l'impedenza equivalente data dal parallelo della serie di  $X_c - R1$  con  $R2$ , chiamando questa impedenza  $Z1$  si ottiene  $Z1 = 1/(Y1 + 1/R2) = 4.627 - j * 2.486 \Omega$ , dove  $Y1 = 1/(R1 - jX_c)$ .

La tensione a vuoto e' la tensione  $V_{X2}$  ed e' pari a  $V_{X2} = jX2 * I2 - jX_m * A$  (con  $I2$  diretta verso il basso). E' quindi necessario calcolare la corrente  $I2$ , conviene considerare la maglia esterna costituita da  $Z1, V, X2$ . La corrente che percorre  $Z1$  e' ancora  $I2$  e dalla legge alla maglia si ricava  $I2 = (jX_m * A - V) / (jX2 + Z1) = -18.83 - j1.445 A$ . La tensione a vuoto risulta allora pari a  $V_v = 10.735 - j40.125 V$ . Per il calcolo di  $Z_{eq}$  si impone una tensione sonda  $V^*$  e si calcola la corrente  $I^*$  che ne deriva una volta che si sia resa la rete passiva. Si ottiene  $Z_{eq} = V^* / I^* = 1 / ((1/Z1) + 1/(jX2)) = 0.755 + j1.983 \Omega$

**Ex 7.3**

Dato il circuito in figura 7.3 funzionante in regime sinusoidale, sono noti:

$V = 20 V, R = 5 \Omega, X_c = 2 \Omega$

$X1 = 4 \Omega, X2 = 5 \Omega, k = 0.9$

$A = 8 A, f = 50 Hz, \delta = \pi/6$

Determinare la tensione  $v(t)$

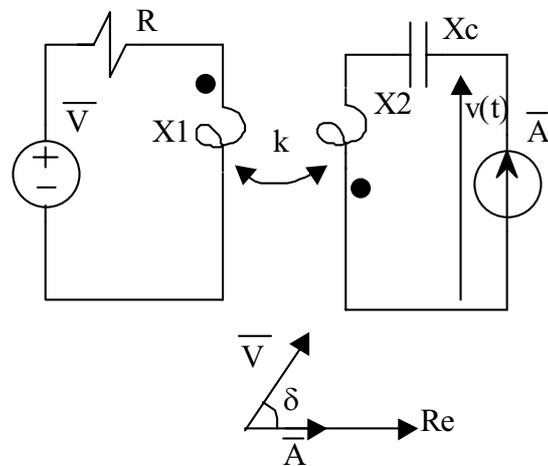


Fig. 7.3

$[v(t) = 19.733 * \cos(314.15t - 0.077) V]$

{Si calcola il bipolo equivalente serie visto ai morsetti del generatore di corrente. La tensione a vuoto e' data dalla sola  $V2 = -jX_m I1$ . La corrente  $I1$  si trova scrivendo una

legge delle tensioni alla prima maglia che risulta la seguente:  $V = R \cdot I_1 + jX_1 \cdot I_1$ , da cui  $I_1 = V / (R + jX_1) = 3.088 - j0.47 \text{ A}$  (presa entrante nel morsetto contrassegnato) e  $V_v = -1.893 - j12.43 \text{ V}$ . Per il calcolo dell'impedenza equivalente si impone una corrente sonda  $I^*$  e si calcola la tensione  $V^*$  che ne risulta, la  $Z_{eq}$  è data dal loro rapporto ( $Z_{eq} = V^* / I^*$ ). Imponendo tale corrente si ottengono le seguenti due equazioni:

$$jX_1 \cdot I_1 - jX_m \cdot I^* + R_1 \cdot I_1 = 0$$

$$V^* = jX_2 I^* - jX_m I_1 - jX_c + I^*$$

Da cui si ricava  $V^* / I^* = jX_2 + X_m^2 / (R_1 + jX_1) - jX_c = 1.976 + j1.42 \ \Omega$

Il fasore rappresentativo della tensione  $V$  richiesta è pari a  $V = V_v + Z_{eq} \cdot A = 13.953 \cdot e^{-j0.077}$ , da cui si ottiene la seguente espressione in funzione del tempo:  $v(t) = 19.733 \cdot \cos(314.15t - 0.077) \text{ V}$

#### Ex7.4

Dato il circuito in figura 7.4 funzionante in regime sinusoidale, sono noti:

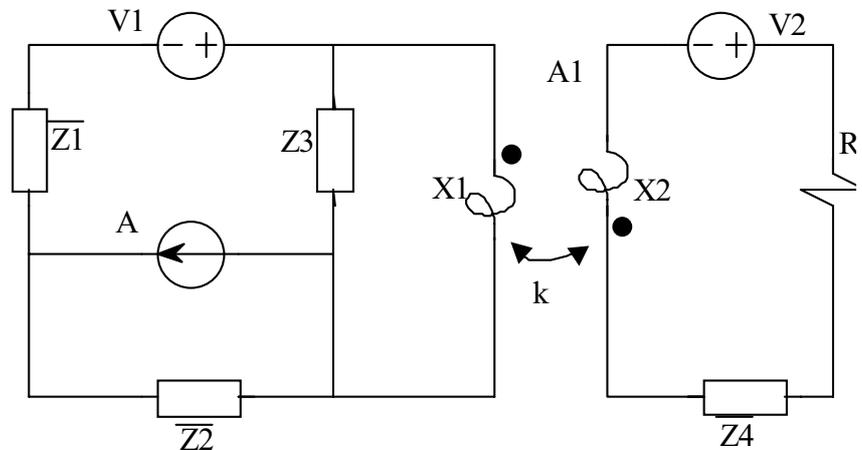
$$\overline{A_1} = 5 - j5 \text{ A}, \quad \overline{V_1} = 40 \text{ V}$$

$$\overline{V_2} = j30 \text{ V}, \quad R = 4 \ \Omega,$$

$$X_1 = 2 \ \Omega, \quad X_2 = 8 \ \Omega, \quad k = 0.9$$

$$\overline{Z_1} = 3 \ \Omega, \quad \overline{Z_2} = j2 \ \Omega,$$

$$\overline{Z_3} = j2 \ \Omega, \quad \overline{Z_4} = 1 \ \Omega$$



Determinare la potenza dissipata sul resistore  $R$ .

$$[P_R = 23.75 \text{ W}]$$

Fig. 7.4

{Conviene calcolare il bipolo equivalente serie visto ai morsetti del resistore  $R$ . Procedendo per semplificazioni successive si trova il bipolo equivalente serie ai morsetti di  $X_1$  e poi quello a i morsetti di  $R$ . Per il calcolo del bipolo equivalente serie ai morsetti di  $X_1$ , si calcola la tensione a vuoto  $V_{v1}$  e l'impedenza equivalente  $Z_{eq1}$ . La tensione a vuoto è data da  $V_{v1} = Z_3 \cdot I_3$ , trasformando il bipolo parallelo  $A-Z_2$  nel suo equivalente serie si trova con la legge del partitore di tensione la tensione a vuoto  $V_{v1} = (V_1 + Z_2 \cdot A) \cdot Z_3 / (Z_3 + Z_1 + Z_2) = 13.6 + j15.2 \text{ V}$ . L'impedenza equivalente è data dal parallelo di  $Z_3$  con la serie di  $Z_1$  e  $Z_2$ ,  $Z_{eq1} = 1 / ((1/Z_3) + 1/(Z_1 + Z_2)) = 0.48 + j1.36 \ \Omega$ . Si calcola ora il bipolo equivalente serie visto dai morsetti del resistore La tensione a vuoto è pari alla somma di  $V_{X_2}$  e di  $V_2$ . La tensione  $V_{X_2}$  è data da  $V_{X_2} = -jX_m I_1$ . La corrente  $I_1$  si calcola scrivendo una legge alla maglia, si ottiene quindi la seguente relazione  $jX_1 \cdot I_1 - V_{v1} + Z_{eq1} \cdot I_1 = 0$ , da cui  $I_1 = 5 + j3.33 \text{ A}$ , sostituendo si ottiene la tensione a vuoto  $V_v = -12 + j12 \text{ V}$ . Per il calcolo dell'impedenza equivalente si impone una corrente sonda  $I^*$  entrante nel morsetto superiore e si calcola la tensione  $V^*$  diretta verso l'alto che ne deriva, l'impedenza equivalente è data dal rapporto di tale tensione e della corrente sonda. Si ottiene  $V^* = jX_2 \cdot I^* - jX_m \cdot I_1 + Z_4 \cdot I^*$ , dove la corrente  $I_1$  (diretta verso il morsetto contrassegnato) può essere calcolata considerando la prima maglia dalla seguente legge delle tensioni  $jX_1 \cdot I_1 - jX_m \cdot I^* + Z_{eq1} \cdot I_1$ , da cui  $I_1 = jX_m \cdot I^* / (Z_{eq1} + jX_1)$ , sostituendo si ottiene l'impedenza equivalente  $Z_{eq} = jX_2 + X_m^2 / (Z_{eq1} + jX_1) + Z_4 = 1.54 + j4.22 \ \Omega$ . La potenza dissipata è data dal prodotto della

resistenza per il modulo della corrente al quadrato, si ottiene allora  $P_R = R \cdot \left| \frac{V_v}{R + Z_{eq}} \right|^2 = 23.75 \text{ W}$

**ESERCITAZIONE 8**

Esercizi svolti durante l'esercitazione.

**Ex8.1**

Dato il circuito in figura 8.1 funzionante in regime stazionario, sono noti:

$$R1 = 7.333 \Omega, R2 = 2 \Omega, R3 = 7 \Omega$$

$$\delta1 = 1 \text{ mm}, \delta2 = 1.3 \text{ mm}, \delta3 = 1.5 \text{ mm}$$

$$A = 8 \text{ cm}^2, N1 = 100, N2 = 500$$

$$V1 = 30 \text{ V}$$

Si consideri la permeabilità del ferro infinita.  
 Determinare la totale energia immagazzinata.

$$[W=0.082 \text{ J}]$$

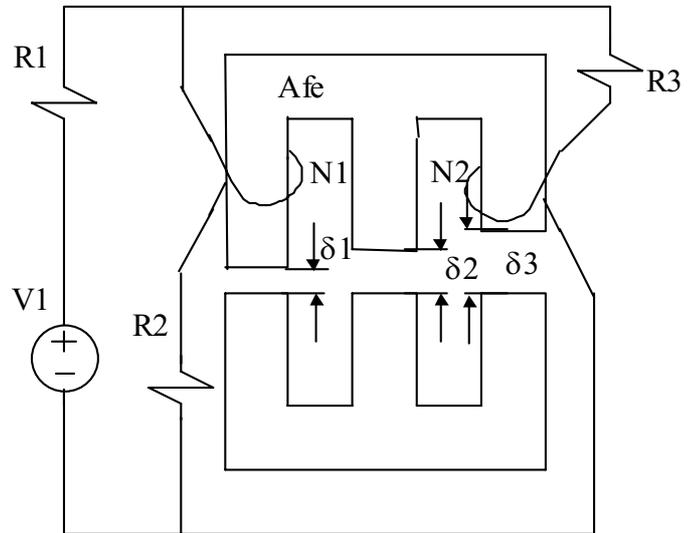


Fig. 8.1

*{Per prima cosa è necessario calcolare i parametri di auto e mutua induttanza. Si disegna quindi la rete magnetica, poiché la permeabilità del ferro è ipotizzata infinita, nel circuito magnetico compariranno solo le riluttanza dei trasferri. In particolare si ottiene quanto segue:  $\theta1 = \delta1/(\mu0 * Afe) = 9.947 * 10^5 H^{-1}$ ,  $\theta2 = \delta2/(\mu0 * Afe) = 1.293 * 10^6 H^{-1}$   $\theta3 = \delta3/(\mu0 * Afe) = 1.492 * 10^6 H^{-1}$ , dove  $\mu0$  è la permeabilità dell'aria ( $\mu0 = 4 * \pi * 10^{-7}$ ). Le auto induttanze si trovano come rapporto tra il numero di spire al quadrato e la riluttanza equivalente vista ai morsetti di na delle due f.m.m. quando il circuito sia reso passivo. Si ottiene quindi che  $\thetaeq1 = 1/(\Lambda2 + \Lambda3) + \theta1$  e  $L1 = N1^2 / \thetaeq1 = 5.926 \text{ mH}$ . Per l'auto induttanza  $L22$  si ha che  $\thetaeq2 = 1/(\Lambda1 + \Lambda2) + \theta3$  e  $L2 = N2^2 / \thetaeq2 = 122 \text{ mH}$ . Per il calcolo della mutua induttanza si alimenta uno dei due avvolgimenti lasciando a vuoto il secondo e si calcola il rapporto tra il flusso concatenato con il secondo avvolgimento e la corrente che percorre il primo avvolgimento. Si ottiene quindi che  $\thetaeq21 = (1/(\Lambda2 + \Lambda3) + \theta1) * (\Lambda3 / (\Lambda3 + \Lambda2))^{-1}$  e  $Lm = N1 * N2 / \thetaeq21 = 14 \text{ mH}$ . Per il calcolo dell'energia immagazzinata è necessario calcolare la corrente  $Ia$  e  $Ib$  che percorre i due avvolgimenti. Conviene allora trasformare  $V1-R1$  nel suo equivalente parallelo e utilizzare la regola del partitore di corrente. Si ottiene quindi  $Ia = I1 * G2 / (G1 + G2 + G3) = 2.625 \text{ A}$ , e  $Ib = I1 * G3 / (G1 + G2 + G3) = 0.75 \text{ A}$ . Poiché entrambe le correnti entrano nei morsetti contrassegnati si ottiene  $W = \frac{1}{2} * L1 * Ia^2 + \frac{1}{2} * L2 * Ib^2 + Lm * Ia * Ib = 0.082 \text{ J}$ }*

**Ex8.2**

Dato il circuito in figura 8.2 funzionante in regime stazionario, sono noti:

$$R1 = 4 \Omega, R2 = 3 \Omega$$

$$R3 = 6 \Omega,$$

$$N1 = 2000, N2 = 1500,$$

$$V1 = 200 \text{ V}, V2 = 150 \text{ V}, I1 = 10 \text{ A}$$

$$A_{fe} = 5 \text{ cm}^2, \delta = 1 \text{ mm}, L = 1 \text{ mH}, \mu_{fe} \text{ infinita}$$

Determinare la totale energia magnetica immagazzinata

$$[W_L = 1.25 \text{ J}, W_\mu = 0.681 \text{ J}, W_{tot} = 1.931 \text{ J}]$$

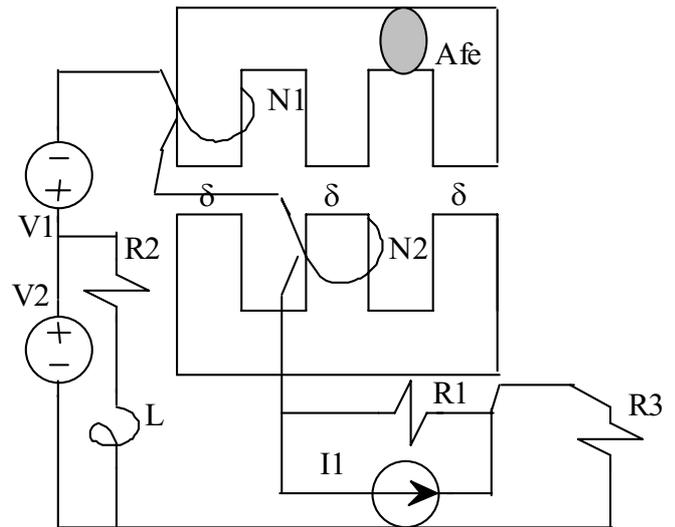


Fig. 8.2

{Si procede con il calcolo dei parametri di auto e mutua induttanza. L'auto induttanza è data da  $L1 = N1^2/\theta_{eq1} = 1.676 \text{ H}$ , dove la  $\theta_{eq1}$  è data dalla serie del parallelo delle due riluttanze  $\theta\delta$  con  $\theta\delta$ . L'auto induttanza  $L2$  si calcola come rapporto tra il quadrato del numero di spire  $N2$  e la riluttanza equivalente  $\theta_{eq2}$  che visto la simmetria del circuito magnetico è pari a  $\theta_{eq1}$ . Si ottiene quindi  $L2 = N2^2/\theta_{eq2} = 0.942 \text{ H}$ . Per il calcolo della mutua induttanza si alimenta uno dei due avvolgimenti lasciando a vuoto il secondo e si calcola il rapporto tra il flusso concatenato con il secondo avvolgimento e la corrente che percorre il primo avvolgimento. Si ottiene quindi che  $\theta_{eq21} = (3*\theta\delta)$  e  $Lm = N1*N2/\theta_{eq21} = 0.628 \text{ H}$ . Si contrassegnano poi i morsetti dei due avvolgimenti e risulta che il morsetto superiore del primo avvolgimento e quello inferiore del secondo sono i morsetti corrispondenti. Ritornando al circuito elettrico è necessario calcolare la corrente che percorre il mutuo induttore per calcolare il contributo di energia immagazzinata legata al mutuo induttore. Trasformando il bipolo parallelo  $R1-I1$  nell'equivalente serie si ottiene la corrente che percorre il mutuo induttore  $I = (V2 - V1 + R1*I1)/(R1 + R3) = -1 \text{ A}$ . Poiché tale corrente entra nel morsetto contrassegnato del primo avvolgimento ed esce da quello contrassegnato del secondo, l'espressione dell'energia è la seguente:  $W = \frac{1}{2}*L1*Ia^2 + \frac{1}{2}*L2*Ib^2 - Lm*Ia*Ib = 0.681 \text{ J}$ . Il contributo di energia legato all'induttanza  $L$  è dato da  $W_L = \frac{1}{2}*L*I_L^2 = \frac{1}{2}*L*(V2/R2)^2 = 1.25 \text{ J}$  e quindi l'energia totale è data da  $W_{tot} = W + W_L = 1.931 \text{ J}$ }

### Ex 8.3

Dato il circuito in figura 8.3 funzionante in regime stazionario, sono noti:

$$V_2 = 40 \text{ V,}$$

$$V_1 = 30 \text{ V,}$$

$$R_1 = 6 \ \Omega,$$

$$R_2 = 10 \ \Omega,$$

$$R_3 = 4 \ \Omega,$$

$$R_4 = 2 \ \Omega$$

$$N_1 = 100, N_2 = 500 \text{ Afe} = 8 \text{ cm}^2, I_1 = 10 \text{ A}$$

$$\delta = 0.8 \text{ mm}$$

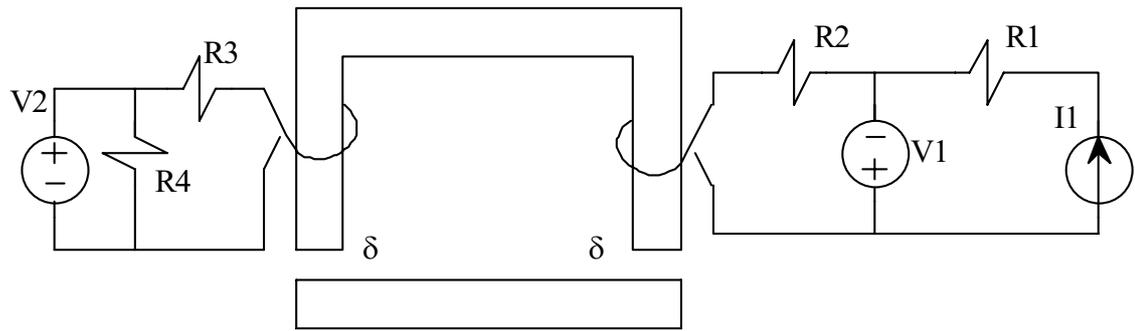


Fig. 8.3

Determinare i valori di auto e mutua induttanza e l'energia magnetica immagazzinata

$$[L_2 = 157 \text{ mH}, L_1 = 6.283 \text{ mH}, L_m = 31 \text{ mH}, W_m = 0.079 \text{ J}]$$

{Si procede con il calcolo dell'auto e mutua induttanza. L'auto induttanza  $L_1$  è data da  $L_1 = N_1^2 / (2 * \theta \delta) = 6.283 \text{ mH}$ , dove  $\theta \delta = d / (\mu_0 * A_{fe})$ . L'auto induttanza  $L_2$  è data da  $L_2 = N_2^2 / (2 * \theta \delta) = 157 \text{ mH}$ . La mutua induttanza  $L_m$  è data da  $L_m = N_1 * N_2 / (2 * \theta \delta) = 31 \text{ mH}$ . I morsetti corrispondenti sono i due superiori dei due avvolgimenti. Per calcolare l'energia magnetica immagazzinata è necessario calcolare le correnti  $I_a$  e  $I_b$  che percorrono i due avvolgimenti. Sostituendo le induttanze con dei corto circuiti si ottiene  $I_a = V_2 / R_3 = 10 \text{ A}$  (entrante nel morsetto contrassegnato),  $I_b = V_1 / R_2 = 3 \text{ A}$  uscente dal morsetto contrassegnato. L'energia immagazzinata ha quindi la seguente espressione:  $W = \frac{1}{2} * L_1 * I_a^2 + \frac{1}{2} * L_2 * I_b^2 - L_m * I_a * I_b = 0.079 \text{ J}$ }

### Ex8.4

Dato il circuito in figura 8.4 funzionante in regime stazionario, sono noti:

$$R1 = 3 \Omega, R2 = 6 \Omega$$

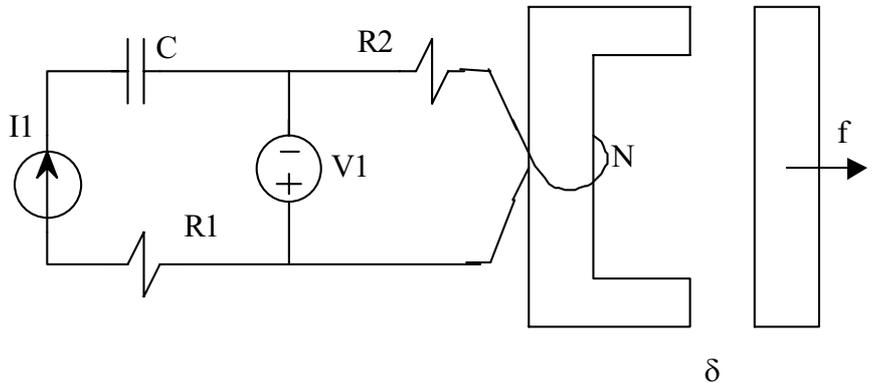
$$N = 100,$$

$$V1 = 18 \text{ V}, A_{fe} = 100 \text{ cm}^2,$$

$$\delta = 1 \text{ mm},$$

$$C = 6 \mu\text{F}$$

$\mu_{fe}$  infinita



Determinare la forza f

Fig. 8.4

$$[f = - 282.74 \text{ N}]$$

{Per il calcolo della forza è necessario calcolare il flusso  $\phi$  che si ha nei traferri. Si procede quindi con il calcolo della corrente che percorre l'avvolgimento di N spire e poi si risolve la rete magnetica. Ricordando che in regime stazionario le capacità si comportano come circuiti aperti e le induttanze come cortocircuiti, tale corrente è data da  $I = V1/R2 = 3 \text{ A}$ . Se si disegna la rete magnetica, si ottiene una sola maglia e il calcolo del flusso nei traferri porta a  $\phi = (N \cdot I) / (2 \cdot \theta \delta) = 1.885 \text{ mWb}$ . La forza f si calcola come  $f = 2 \cdot \phi^2 / (2 \cdot \mu_0 \cdot A_{fe}) = 282.74 \text{ N}$  (è una forza attrattiva)}

### Esercizi proposti

### Ex8.5

Dato il circuito in figura 8.5 funzionante in regime stazionario, sono noti:

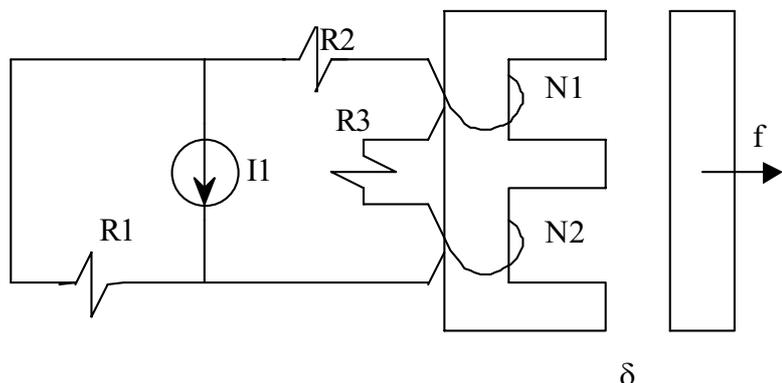
$$R1 = 3 \Omega, R2 = 6 \Omega, R3 = 8 \Omega$$

$$N1 = 100, N2 = 150$$

$$I1 = 18 \text{ A}, A_{fe} = 100 \text{ cm}^2,$$

$$\delta = 1 \text{ mm},$$

$\mu_{fe}$  infinita



Determinare la forza f

$$[f = - 898.126 \text{ N}]$$

{ Per il calcolo della forza è necessario calcolare il flusso  $f$  che si ha nei traferri. Si procede quindi con il calcolo della corrente che percorre l'avvolgimento di N spire e poi

Fig. 8.5

si risolve la rete magnetica. Tale corrente si calcola utilizzando la regola del apertore di corrente ed è data da  $I = I1 \cdot G23 / (G23 + G1) = 3.176 \text{ A}$ , dove  $G23 = 1 / (R2 + R3) = 0.071 \text{ S}$ . Se si disegna la rete magnetica, si ottengono due maglie, trasformando i due bipoli serie  $M1 - \theta \delta$  e  $M2 - \theta \delta$

nell'equivalente parallelo si ottiene la tensione magnetica ai capi della riluttanza del ramo centrale  $U = ((N1*I/\theta\delta) - (N2*I/\theta\delta))/(3/\theta\delta) = -52.94$  Asp diretta verso sinistra. I flussi nei tre traferri sono espressi nel seguente modo  $\phi1 = (U - N1*I)/\theta\delta = -4.657$  mWb,  $\phi2 = (U)/\theta\delta = -0.6653$  mWb  $\phi3 = (U + N2*I)/\theta\delta = 5.322$  mWb. La forza  $f$  si calcola come  $f = (\phi1^2 + \phi2^2 + \phi3^2)/(2*mo*Afe) = 898.12$  N (è una forza attrattiva)}

### Ex8.6

Dato il circuito in figura 8.4 funzionante in regime stazionario, sono noti:

$R1 = 3 \Omega$ ,  $R2 = 5 \Omega$   
 $N1 = 100$ ,  $N2 = 500$ ,  
 $V1 = 20$  V,  $Afe = 8$  cm<sup>2</sup>,  
 $L = 2$  mH,  $C = 8$   $\mu$ F  
 $\mu fe$  infinita  
 $\delta = 1.5$  mm

Determinare l'energia magnetica immagazzinata

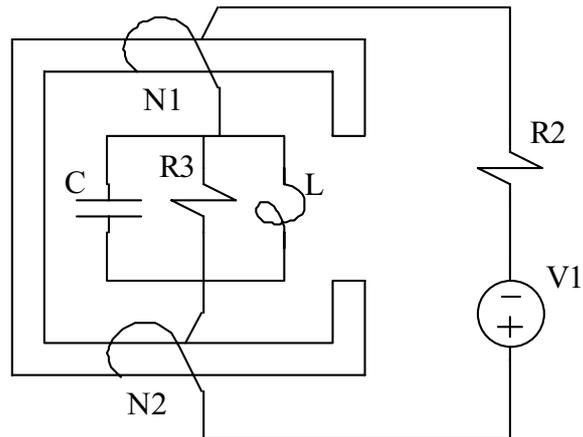


Fig. 8.6

[ $W_L = 0.8579$  J,  $W = 0.016$  J,  $W_{tot} = 0.874$  J]

{Per il calcolo delle auto e mutue induttanze è necessario tracciare la rete magnetica. Si ottiene quindi che  $L1 = N1^2/(\theta\delta) = 6.702$  mH,  $L2 = N2^2/(\theta\delta) = 168$  mH. Il coefficiente di mutua induttanza è pari a  $Lm = N2*N1/(\theta\delta) = 34$  mH. I morsetti corrispondenti sono quello inferiore dell'avvolgimento N1 e quello superiore dell'avvolgimento N2. Per calcolare la totale energia magnetica immagazzinata è necessario calcolare la corrente che percorre l'induttanza L e la corrente del mutuo induttore. Poiché il condensatore in regime stazionario equivale ad un circuito aperto, la resistenza R3 risulta corto circuitata e il circuito elettrico è costituito da una sola maglia che comprende V1 e R2. Tale corrente è pari a  $I = V1/R2 = 4$  A. L'energia immagazzinata nell'induttanza L è quindi pari a  $W_L = \frac{1}{2}*L*I^2 = 0.016$  J e l'energia immagazzinata nel mutuo induttore è pari a  $W = \frac{1}{2}*L1*I^2 + \frac{1}{2}*L2*I^2 - Lm*I^2 = 0.8579$  J. Quindi la totale energia immagazzinata è data dalla somma dei due contributi ed è pari a  $W_{tot} = 0.874$  J }

**Ex8.7**

Dato il circuito in figura 8.7 funzionante in regime stazionario, sono noti:

$$R1 = 5 \Omega, R2 = 7 \Omega,$$

$$N1 = 100, N2 = 250$$

$$L = 3 \text{ mH}, C = 4 \mu\text{F},$$

$$A_{fe} = 18 \text{ cm}^2,$$

$$\delta = 1.75 \text{ mm},$$

$\mu_{fe}$  infinita

$$V1 = 20 \text{ V}$$

Determinare la forza  $f$  agente sulla struttura di sinistra

$$[f = 384.045 \text{ N}]$$

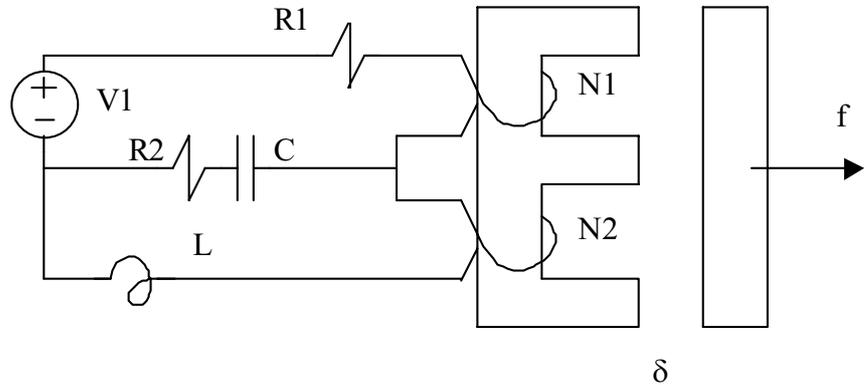


Fig. 8.7

{ Per il calcolo della forza è necessario calcolare i flussi nei traferri. Essendo il regime stazionario si ha che la corrente  $I$  è pari a  $I = V1/R1 = 4 \text{ A}$ . La rete magnetica è costituita da 2 maglie, e trasformando tutti i bipoli nel loro equivalente parallelo è possibile calcolare la tensione magnetica tra i due nodi della rete magnetica. Questa vale  $U = ((N1 \cdot I / \theta \delta) - (N2 \cdot I / \theta \delta)) / (3 / \theta \delta) = -200 \text{ Asp}$ . Da cui è possibile calcolare i flussi  $\phi1 = (N1 \cdot I - U) / \theta \delta = 0.77552 \text{ mWb}$ ,  $\phi2 = -(U) / \theta \delta = -0.2585 \text{ mWb}$ ,  $\phi3 = (U + N2 \cdot I) / \theta \delta = 1.034 \text{ mWb}$ . La forza  $f$  di natura attrattiva è allora pari a come  $f = (\phi1^2 + \phi2^2 + \phi3^2) / (2 \cdot \mu0 \cdot A_{fe}) = 384.045 \text{ N}$  }

**ESERCITAZIONE 9**

Esercizi svolti durante l'esercitazione.

**Ex9.1**

Dato il circuito trifase in figura 9.1, sono noti:  
 $Z = 30 + j15 \Omega$   $V_{f1} = V_{f2} = V_{f3} = 100$  V (in modulo)

Determinare le correnti  $I_1$ ,  $I_2$  e  $I_3$  in modulo e fase.

$$\begin{aligned} I_1 &= 8 - j4 \text{ A} = 8.944 * e^{-j0.464} \text{ A}, \\ I_2 &= -7.464 - j4.928 \text{ A} = 8.944 * e^{-j2.558} \text{ A}, \\ I_3 &= -0.536 + j8.928 \text{ A} = 8.944 * e^{j1.631} \text{ A} \end{aligned}$$

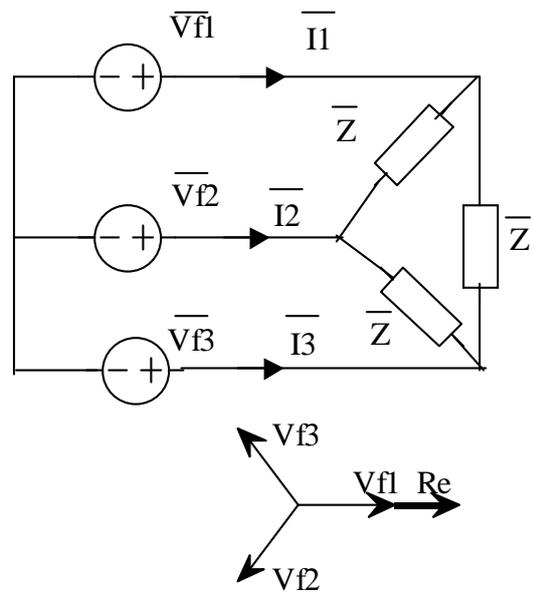


Fig. 9.1

*{Poichè il sistema è simmetrico ed equilibrato conviene risolvere il circuito monofase equivalente. E' necessario trasformare il carico a triangolo nel suo equivalente a stella; ricordando che per carichi equilibrati*

*l'impedenza della stella è un terzo di quella del triangolo si ottiene  $Z_{tr} = 10 + j5 \Omega$ . Risolvendo si ottiene che la corrente della fase 1 è pari a  $I_1 = V_{f1}/Z_1 = 8 - j4$  A. Le correnti delle altre due fasi si ottengono da  $I_1$  introducendo gli sfasamenti in ritardo e in anticipo di  $2\pi/3$ . In particolare  $I_2 = I_1 * e^{-j2\pi/3}$ ,  $I_3 = I_1 * e^{j2\pi/3}$ }*

**Ex9.2**

Dato il circuito trifase in figura 9.2,  
sono noti:

$V_{f1} = V_{f2} = V_{f3} = 220 \text{ V}$  (in modulo)

$R = 10 \text{ } \Omega$ ,  $R_2 = 15 \text{ } \Omega$

$L = 6 \text{ mH}$ ,  $L_2 = 4 \text{ mH}$

$C = 5 \text{ } \mu\text{F}$

$f = 50 \text{ Hz}$

Determinare le tre correnti  $I_1$ ,  $I_2$ ,  $I_3$  in  
modulo e fase

$$\begin{aligned} [I_1 &= 20.28 - j2.539 \text{ A}, \\ I_2 &= -13.21 - j31.16 \text{ A}, \\ I_3 &= -7.072 + j33.70 \text{ A} ] \end{aligned}$$

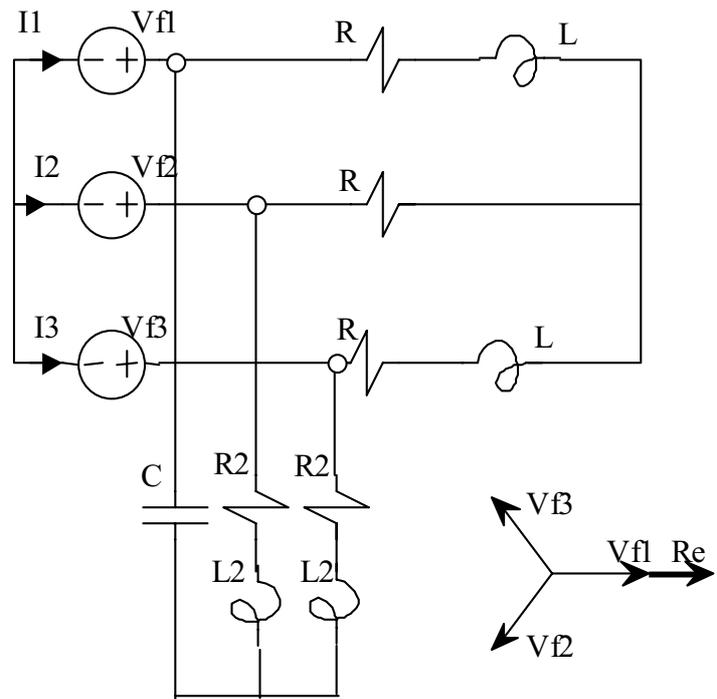


Fig. 9.2

*{La terna di tensioni è data da  $V_{f1} = 220 \text{ V}$ ,  $V_{f2} = 220 \cdot e^{-j2\pi/3} \text{ V}$ ,  $V_{f3} = 220 \cdot e^{j2\pi/3} \text{ V}$ . Chiamiamo le tre impedenze longitudinali  $Z_1 = R + j\omega L = 10 + j1.885 \text{ } \Omega$ ,  $Z_2 = R = 10 \text{ } \Omega$ ,  $Z_3 = R + j\omega L = 10 + j1.885 \text{ } \Omega$ , ( $Y_1$ ,  $Y_2$ ,  $Y_3$  sono le rispettive ammettenze) e le tre impedenze trasversali  $Z_a = -j/(\omega C) = -j636.61 \text{ } \Omega$ ,  $Z_b = R_2 + j\omega L_2 = Z_c = 15 + j1.257 \text{ } \Omega$ . ( $Y_a$ ,  $Y_b$  e  $Y_c$  sono le rispettive ammettenze).*

*Si calcola la tensione tra il centro stella della terna di tensioni e quello delle impedenze  $Z_1$ ,  $Z_2$  e  $Z_3$*   
 $V_{00} = (V_{f1} \cdot Y_1 + V_{f2} \cdot Y_2 + V_{f3} \cdot Y_3) / (Y_1 + Y_2 + Y_3) = 11.49 - j7.634 \text{ V}$ .

*La tensione tra il centro stella delle tensioni e quello delle impedenze  $Z_a$ ,  $Z_b$  e  $Z_c$  è pari a*  
 $V_{001} = (V_{f1} \cdot Y_a + V_{f2} \cdot Y_b + V_{f3} \cdot Y_c) / (Y_a + Y_b + Y_c) = -110.3 + j3.895 \text{ V}$ .

*Le tre correnti richieste si possono calcolare con una legge al nodo considerando il contributo nei due carichi. Le tre correnti  $I_{z1}$ ,  $I_{z2}$  e  $I_{z3}$  che percorrono le tre impedenze  $Z_1$ ,  $Z_2$  e  $Z_3$  si calcolano con una legge alla maglia e sono pari a  $I_{z1} = (V_{f1} - V_{00}) / Z_1 = 20.27 - j3.058 \text{ A}$ ,  $I_{z2} = (V_{f2} - V_{00}) / Z_2 = -12.15 - j18.29 \text{ A}$ ,  $I_{z3} = (V_{f3} - V_{00}) / Z_3 = -8.125 + j21.35 \text{ A}$ . Le tre correnti  $I_{za}$ ,  $I_{zb}$  e  $I_{zc}$  che percorrono le tre impedenze  $Z_a$ ,  $Z_b$  e  $Z_c$  si calcolano con una legge alla maglia e sono pari a  $I_{za} = (V_{f1} - V_{00}) / Z_a = 0.006 + j0.519 \text{ A}$ ,  $I_{zb} = (V_{f2} - V_{00}) / Z_b = -1.06 - j12.87 \text{ A}$ ,  $I_{zc} = (V_{f3} - V_{00}) / Z_c = 1.054 + j12.35 \text{ A}$ . Le tre correnti richieste si calcolano con una legge al nodo nel seguente modo:*  
 $I_1 = I_{z1} + I_{za} = 20.28 - j2.539 \text{ A}$ ,  $I_2 = I_{z2} + I_{zb} = -13.21 - j31.16 \text{ A}$ ,  $I_3 = I_{z3} + I_{zc} = -7.072 + j33.70 \text{ A}$  }

**Ex 9.3**

Dato il circuito trifase in figura 9.3, sono noti:

$V_{f1} = V_{f2} = V_{f3} = 220 \text{ V}$  (in modulo),

$Z_1 = 30 + j10 \Omega$ ,

$Z_2 = 15 + j5 \Omega$ ,

I morsetti  $a$  e  $b$  designano i morsetti contrassegnati amperometrico e voltmetrico

Determinare l'indicazione del wattmetro

[ $P_w = 12.62 \text{ kW}$ ]

*{Il wattmetro fornisce un'indicazione di potenza attiva. Nel caso dell'esercizio per calcolare tale potenza attiva è necessario calcolare la corrente*

*nella fase 1 entrante nel morsetto amperometrico contrassegnato e la tensione  $V_w$ . In particolare tale tensione è la tensione di linea  $V_{12} = V_{f1} - V_{f2} = 330 + j190.526 \text{ V}$ . Per calcolare la corrente  $I_w$  misurata dal wattmetro conviene considerare il circuito monofase equivalente essendo la rete simmetrica ed equilibrata. E' necessario trasformare il carico trasversale nel suo equivalente a stella, si ottiene quindi  $Z_{2s} = Z_2/3 = 5 + j1.667 \Omega$ . La rete monofase equivalente è costituita dal generatore di tensione  $V_{f1}$  e dal parallelo di  $Z_1$  e  $Z_{2s}$ . La corrente richiesta è quindi data da  $I_w = V_{f1} * (Y_1 + Y_{2s}) = 46.2 - j15.4 \text{ A}$  dove  $Y_1$  e  $Y_{2s}$  sono le ammettenze corrispondenti a  $Z_1$  e  $Z_{2s}$  rispettivamente. La potenza attiva misurata dal wattmetro è data da  $P_w = \text{Re}(V_w * \underline{I}_w) = 12.31 \text{ kW}$ }*

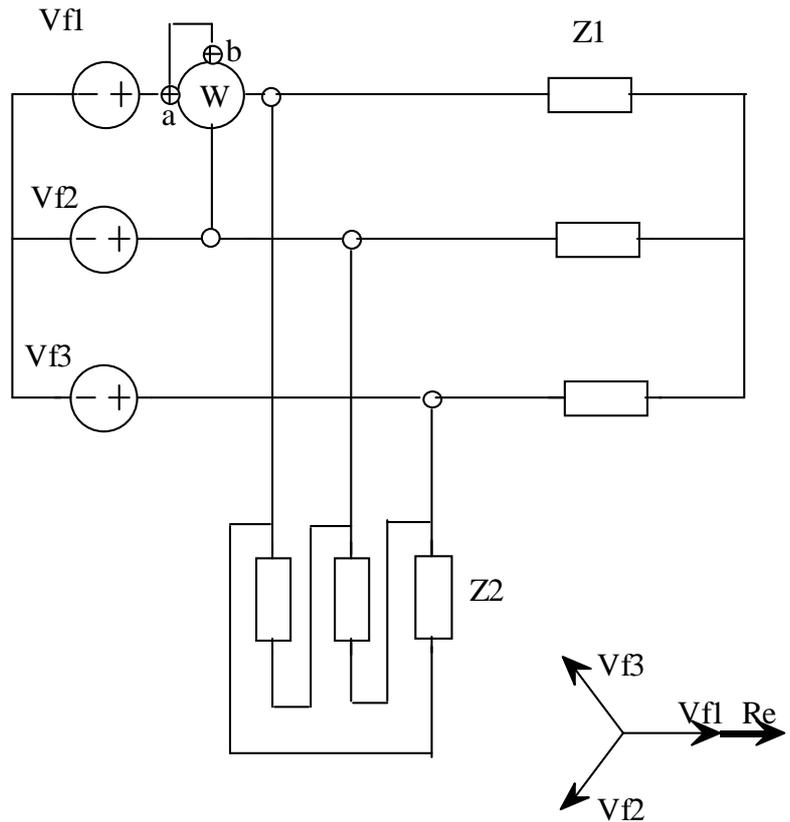


Fig. 9.3

**Ex9.4**

Dato il circuito trifase in figura

9.4, sono noti:

$$V_{f1} = 100 \text{ V}, V_{f2} = 200 \text{ V},$$

$$V_{f3} = 150 \text{ V}$$

$$R = 30 \Omega, X_L = 10 \Omega$$

I morsetti *a* e *b* designano i morsetti contrassegnati amperometrico e voltmetrico. Determinare l'indicazione del wattmetro.

$$[P_w = 1.875 \text{ kW}]$$

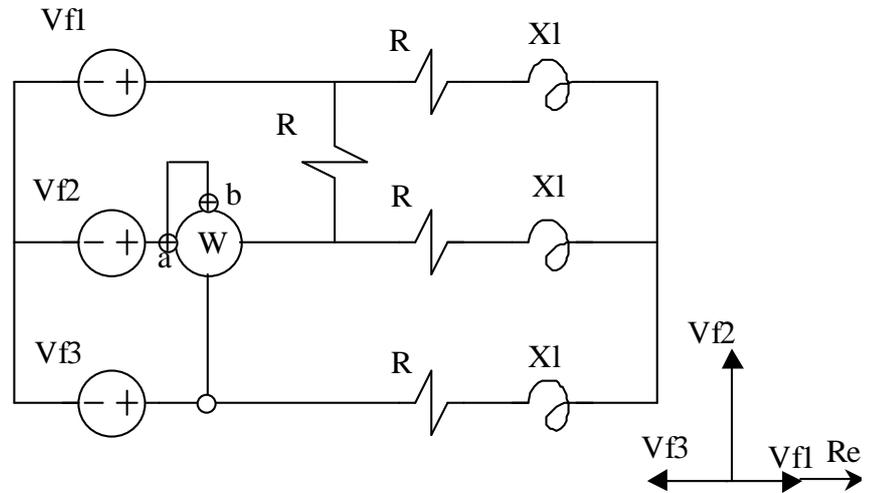


Fig. 9.4

*{Per calcolare la potenza attiva misurata dal wattmetro è necessario calcolare la corrente  $I_w$  entrante nel morsetto amperometrico contrassegnato e la tensione  $V_w$ . Tale tensione è pari a  $V_w = V_{f2} - V_{f3} = 150 + j200 \text{ V}$ , dove  $V_{f1} = 100 \text{ V}$ ,  $V_{f2} = j200 \text{ V}$ ,  $V_{f3} = -150 \text{ V}$ .*

*La corrente  $I_w$  è data dalla somma algebrica di due contributi: quello che percorre l'impedenza  $Z_2 = R + jX_L$  e quello che percorre la resistenza trasversale  $R$ . Chiamiamo  $Z_1$  l'impedenza della fase 1 pari a  $Z_1 = R + jX_L$ ,  $Z_2$  quella della fase 2 pari a  $Z_2 = R + jX_L$  e  $Z_3$  quella della fase 3, pari a  $Z_3 = R + jX_L$ . La tensione tra il centro stella delle tensioni e quello delle tre impedenze  $Z_1$ ,  $Z_2$  e  $Z_3$  è pari a  $V_{00} = (V_{f1} \cdot Y_1 + V_{f2} \cdot Y_2 + V_{f3} \cdot Y_3) / (Y_1 + Y_2 + Y_3) = -16.667 + j66.667 \text{ V}$ , essendo  $Y_1$ ,  $Y_2$  e  $Y_3$  le tre ammettenze delle tre impedenze  $Z_1$ ,  $Z_2$  e  $Z_3$ . La corrente che percorre l'impedenza  $Z_2$  verso destra è pari a  $I_2 = (V_{f2} - V_{00}) / Z_2 = 1.833 + j3.833 \text{ A}$ . La corrente che percorre la resistenza  $R$  trasversale è pari a  $I_r = (V_{f2} - V_{f1}) / R = -3.33 + j6.667 \text{ A}$  diretta verso l'alto. La corrente entrante nel morsetto amperometrico del wattmetro è pari a  $I_w = I_r + I_2 = -1.5 + j10.5 \text{ A}$ . La potenza misurata è pari a  $P_w = \text{Re}(V_w \cdot \underline{I}_w) = 1.875 \text{ kW}$*

*}*

**Ex9.5**

Dato il circuito trifase in figura 9.5, sono noti:

$V = 380\text{ V}$  (valore efficace della terna simmetrica di tensioni di linea)

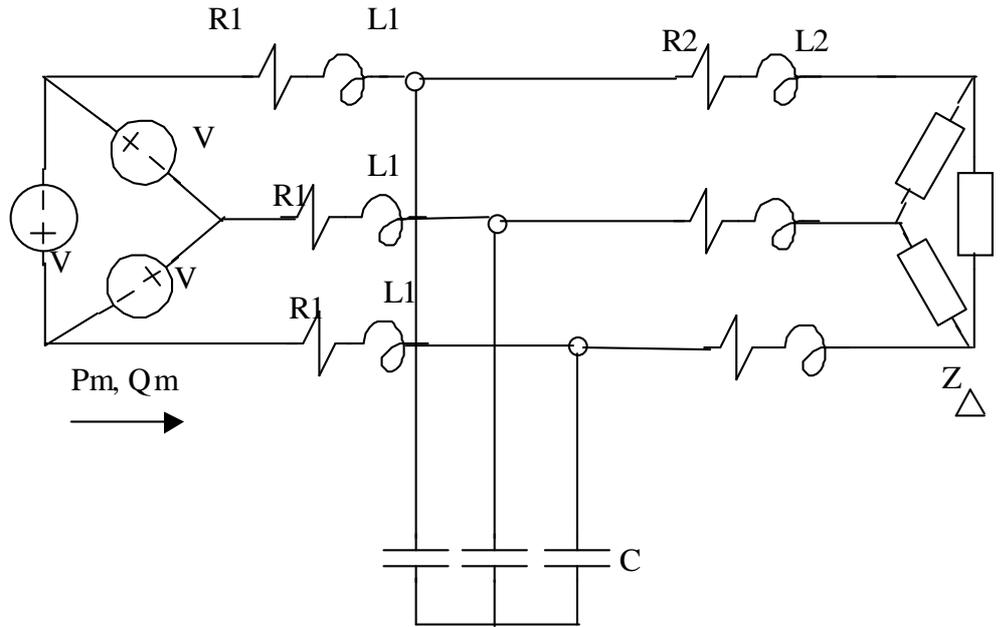
$R_1 = R_3 = 10\ \Omega$

$L_1 = L_2 = 31.83\text{ mH}$

$C = 100\ \mu\text{F}$

$P_m = 2266\text{ W}$ ,

$Q_m = -1632\text{ Var}$



Determinare l'impedenza  $Z$  del carico a triangolo a valle

$[Z = 58.978 + j88.848\ \Omega]$

*{Il sistema è simmetrico e equilibrato, conviene quindi considerare il circuito monofase*

Fig. 9.5

*equivalente. Per fare questo è necessario trasformare le tensioni di linea nelle corrispondenti tensioni di fase e trasformare tutti i carichi a triangolo nel loro equivalente a stella. Si ottiene un circuito monofase costituito dal parallelo di tre rami: il primo è costituito da un generatore di tensione con in serie l'impedenza  $Z_1 = R_1 + j\omega L_1$ , il secondo da una impedenza  $Z_c = -jX_c$  e il terzo dalla serie di  $Z_2 = R_2 + j\omega L_2$  e dall'equivalente a stella del carico incognito.*

*Nel circuito monofase la potenza attiva e reattiva fornite dal generatore sono pari a un terzo di quella relativa al circuito trifase. Si divide ora il circuito monofase in sezioni e si utilizza il metodo di Boucherot per la risoluzione. Si hanno le seguenti sezioni:*

*Sez A:  $V_f I$*

*Sez B:  $Z_1$*

*Sez. C:  $Z_c$*

*Sez. D:  $Z_2$*

*Sez E:  $Z$  incognita.*

*Per la sez. A sono note la tensione  $V_f I = V/\sqrt{3} = 219.393\text{ V}$ ,  $P_a = P_m/3 = 755.333\text{ W}$ ,  $Q_a = Q_m/3 =$*

*$-544\text{ Var}$ . La corrente  $I_a$  si calcola nel seguente modo:  $I_a = \sqrt{P_a^2 + Q_a^2} / V_f I = 4.243\text{ A}$ . Per la*

*sezione B si ha  $P_b = P_a - R_1 \cdot I_a^2 = 575.32\text{ W}$ ,  $Q_b = Q_a - X_{L1} \cdot I_a^2 = -724.008\text{ Var}$ .  $I_b = I_a$  e  $V_b$*

*$= \sqrt{P_b^2 + Q_b^2} / I_b = 217.96\text{ V}$ . Per la sezione C si ha  $P_c = P_b$ ,  $V_c = V_b$ ,  $Q_c = Q_b + V_b^2 / X_c = 768.452$*

*Var e  $I_c = \sqrt{P_c^2 + Q_c^2} / V_c = 4.404\text{ A}$ . Per la sezione D si ha  $I_d = I_c$ ,  $P_d = P_c - R_2 \cdot I_d^2 = 381.344\text{ W}$ ,*

*$Q_d = Q_c - X_{L2} \cdot I_d^2 = 574.482\text{ Var}$ ,  $V_d = \sqrt{P_d^2 + Q_d^2} / I_d = 156.56\text{ V}$ . La corrente che interessa la*

*sezione D è pari a  $I_c$ , di conseguenza si ricava che la resistenza e la reattanza del carico a stella*

*equivalente risultano pari a  $R_s = P_d / I_c^2 = 19.659\ \Omega$ ,  $X_s = Q_d / I_c^2 = 29.616\ \Omega$ . Ritornando al carico*

*a triangolo si ottiene  $R_t = 3 \cdot R_s = 58.978\ \Omega$ ,  $X_t = 3 \cdot X_s = 88.848\ \Omega$ . }*

**Ex9.6**

Dato il circuito trifase in figura 9.6 sono noti:

$$v_1(t) = \sqrt{2} 220 \cos(\omega t)$$

$$v_2(t) = \sqrt{2} 220 \cos(\omega t + \pi/2)$$

$$v_3(t) = \sqrt{2} 220 \cos(\omega t - \pi/3)$$

$$R = 10 \Omega \quad L_1 = 5 \text{mH},$$

$$L_2 = 10 \text{mH}. \quad L_3 = 15 \text{mH}$$

$$f = 50 \text{ Hz}$$

Determinare la corrente  $I$ .

$$[I = 7.748 + j0.866 \text{ A}]$$

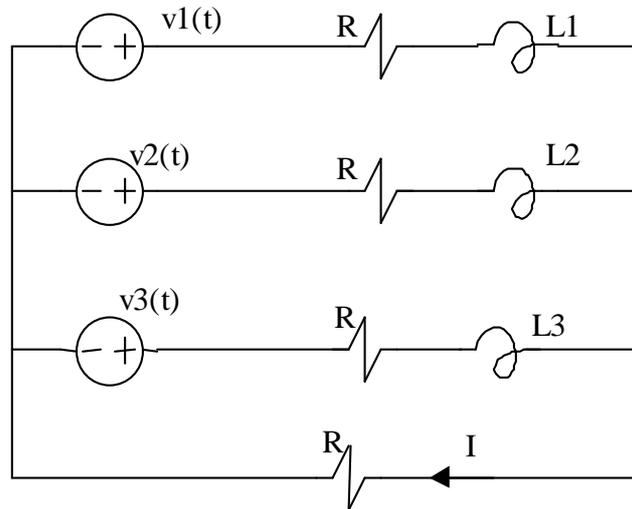


Fig. 9.6

{Per prima cosa è necessario passare dal dominio del tempo a quello fasoriale e si

ottiene  $V_{f1} = 220 \text{ V}$ ,  $V_{f2} = 220 e^{j\pi/2} \text{ V}$ ,

$V_{f3} = 220 e^{-j\pi/3} \text{ V}$ . Chiamiamo  $Z_1, Z_2, Z_3$  le impedenze delle tre fasi e  $Z_0 = R$ . La tensione tra i due

centri stella è data da  $V_{00} = (V_{f1} Y_1 + V_{f2} Y_2 + V_{f3} Y_3) / (Y_1 + Y_2 + Y_3 + Y_0) = 77.477 + j8.665 \text{ V}$  dove

$Y_1, Y_2, Y_3, Y_0$  sono le ammettenze corrispondenti alle impedenze  $Z_1, Z_2, Z_3$  e  $Z_0$ . La corrente

richiesta è pari a  $I = V_{00} / R = 7.748 + j0.866 \text{ A}$ }

**Ex9.7**

Dato il circuito trifase in figura 9.7, sono noti:

$V_{f1} = 80 \text{ V}$ ,  $V_{f2} = 100 \text{ V}$ ,  $V_{f3} = 120 \text{ V}$

$R = 7 \text{ } \Omega$ ,  $Z_1 = 10+j20 \text{ } \Omega$

$Z_2 = 30 \text{ } \Omega$ ,  $Z_3 = -j15 \text{ } \Omega$

$Z_0 = 3+j \text{ } \Omega$

I morsetti *a* e *b* designano i morsetti contrassegnati amperometrico e voltmetrico

Determinare l'indicazione del wattmetro

[ $P = 218.908 \text{ W}$ ]

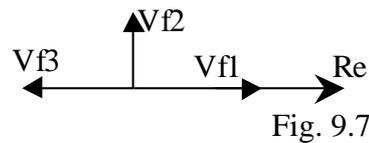
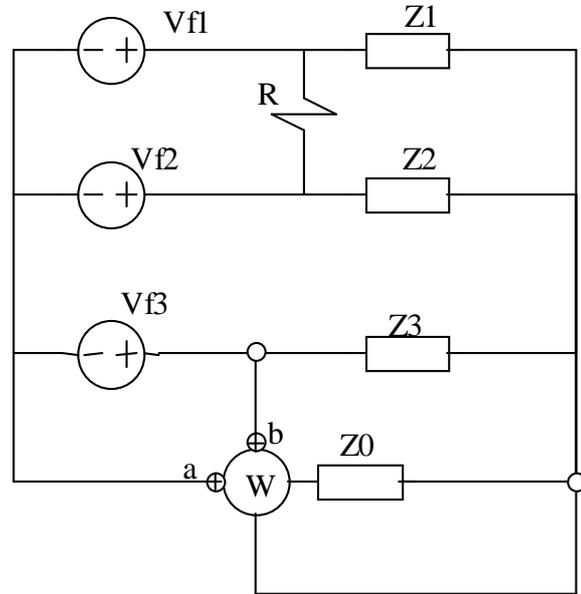


Fig. 9.7

{E' necessario calcolare la corrente  $I_w$  e La tensione  $V_w$  entranti nei morsetti contrassegnati. La tensione  $V_w$  è quella che si ha ai capi di  $Z_3$  diretta verso sinistra, la corrente  $I_w$  è quella che percorre l'impedenza  $Z_0$  verso destra.

La tensione tra il centro stella delle tensioni e il centro stella di  $Z_1, z_2, Z_3$  e  $Z_0$  è data

dalla seguente espressione:  $V_{00} = (V_{f1} * Y_1 + V_{f2} * Y_2 + V_{f3} * Y_3) / (Y_1 + Y_2 + Y_3 + Y_0) = 8.772 - j20.444 \text{ V}$  dove  $Y_1, Y_2, Y_3, Y_0$  sono le ammettenze corrispondenti. LA tensione  $V_w$  è pari a  $V_w = V_{f3} - V_{00} = -128.771 + j20.444 \text{ V}$ . La corrente  $I_w$  è pari a  $I_w = -V_{00} / Z_0 = -0.587 + j7.01 \text{ A}$ . La potenza è allora pari a  $P_w = \text{Re}(V_w * \underline{I_w}) = 218.908 \text{ W}$

**Ex9.8**

Dato il circuito trifase in figura 9.8, alimentato da una terna simmetrica di tensioni, sono noti:

$$V_f = 100 \text{ V}$$

$$R = 20 \text{ } \Omega, Z_1 = 2 + j5 \text{ } \Omega$$

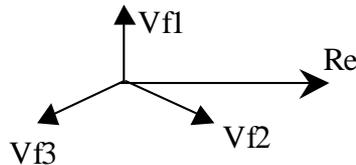
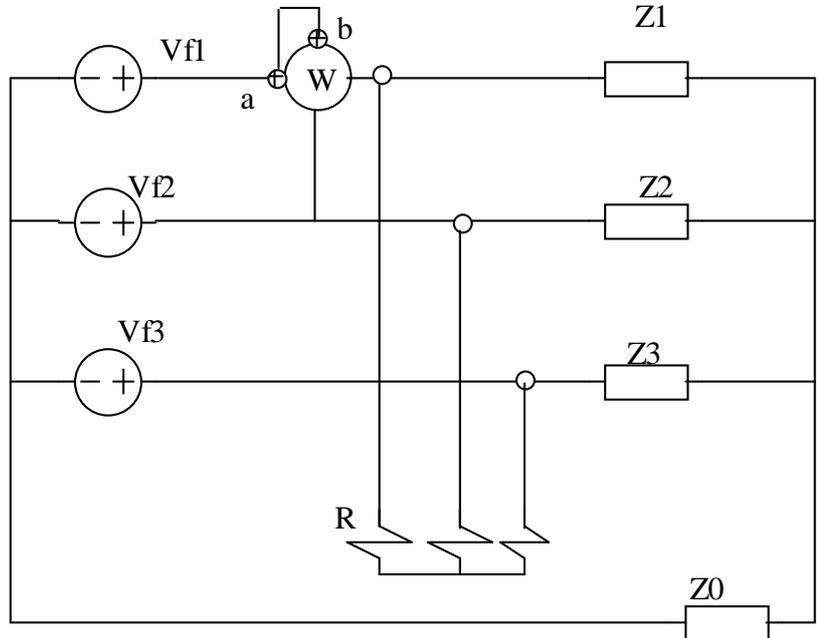
$$Z_2 = 3 - j7 \text{ } \Omega, Z_3 = 4 \text{ } \Omega$$

$$Z_0 = j9 \text{ } \Omega$$

I morsetti *a* e *b* designano i morsetti contrassegnati amperometrico e voltemetrico del wattmetro.

Determinare l'indicazione del wattmetro

$$[P = 710.537 \text{ W}]$$



{E' necessario calcolare la corrente  $I_w$  e la tensione  $V_w$  entranti nei morsetti contrassegnati. La corrente  $I_w$  è

quella relativa alla fase 1, la tensione è pari a  $V_w = V_{f1} - V_{f2} = -86.603 + j150 \text{ V}$ . Per calcolare  $I_w$  è

necessario calcolare i due contributi di corrente che percorrono  $Z_1$  e il carico trasversale  $R$ . La corrente che percorre  $Z_1$  può essere calcolata una volta che sia nota la tensione tra il centro stella delle tensioni e quello dei carichi longitudinali. Tale tensione è pari a  $V_{00} =$

$(V_{f1} * Y_1 + V_{f2} * Y_2 + V_{f3} * Y_3) / (Y_1 + Y_2 + Y_3 + Y_0) = 11.557 + j11.18 \text{ V}$ . La corrente che percorre  $Z_1$  è

data da  $I_{z1} = (V_{f1} - V_{00}) / Z_1 = 14.517 + j8.118 \text{ A}$  (diretta verso sinistra). La tensione tra il centro stella delle tensioni e quello del carico trasversale è nulla essendo la terna simmetrica e il carico

equilibrato, tale corrente è allora pari a  $I_r = V_{f1} / R = j5 \text{ A}$ . La corrente  $I_w$  si ottiene con una legge al nodo  $I_w = I_r + I_{z1} = 14.517 + j13.118 \text{ A}$ . La potenza è allora pari a  $P_w = \text{Re}(V_w * \underline{I_w}) = 710.537 \text{ W}$

}

Esercizi proposti

**Ex9.9**

Dato il circuito trifase in figura 9.9, alimentato da una terna simmetrica di tensioni, sono noti:

$$V_f = 150 \text{ V}$$

$$Z_1 = 20 + j15 \ \Omega$$

$$Z_2 = 5 - j8 \ \Omega, \ Z_3 = 10 + j2 \ \Omega$$

I morsetti *a* e *b* designano i morsetti contrassegnati amperometrico e voltmetrico del wattmetro.

Determinare l'indicazione del wattmetro

$$[P_w = 3.132 \text{ kW}]$$

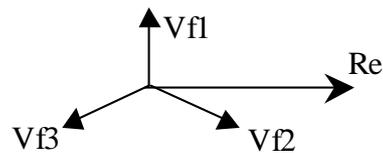
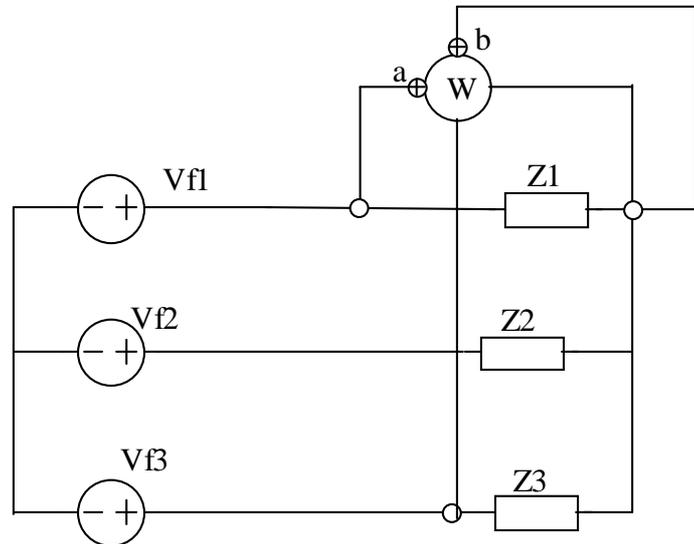


Fig. 9.9

{ E' necessario calcolare la corrente  $I_w$  e la tensione  $V_w$  entranti nei morsetti contrassegnati.

La corrente  $I_w$  è pari alla corrente che percorre il corto circuito in parallelo

all'impedenza  $Z_1$ . La tensione  $V_w$  è data da  $V_w = V_{f1} - V_{f3} = 129.904 + j225 \text{ V}$ . La corrente  $I_w$  si può calcolare con una legge al nodo come somma algebrica dei due contributi relativi alle fasi 2 e 3. La tensione tra i due centri stella è infatti pari a  $V_{f1}$ , essendo cortocircuitata l'impedenza  $Z_1$ . Si ottiene allora  $I_2 = (V_{f1} - V_{f2}) / Z_2 = -27.523 + j0.964 \text{ A}$ , diretta verso sinistra e  $I_3 = (V_{f1} - V_{f3}) / Z_3 = 16.818 + j19.136 \text{ A}$ , diretta verso sinistra. La corrente  $I_w$  è data da  $I_w = I_2 + I_3 = -10.705 + j20.1 \text{ A}$ . La potenza è allora pari a  $P_w = \text{Re}(V_w * \underline{I_w}) = 3.132 \text{ kW}$  }

**Ex9.10**

Dato il circuito trifase  
simmetrico ed equilibrato  
in figura 9.10, sono noti:

$V_2 = 500 \text{ V}$ ,  
 $P_2 = 10 \text{ kW}$  (potenza  
attiva del carico  $Z_2$ )  
 $Q_2 = 8 \text{ kVar}$  (potenza  
reattiva del carico  $Z_2$ )  
 $P_3 = 20 \text{ kW}$  (potenza  
attiva del carico  $Z_3$ ),  
 $\cos\phi_3 = 0.809 \text{ ind.}$   
 $Z_1 = 0.4 + j0.3 \ \Omega$   
 $f = 50 \text{ Hz}$

Determinare il modulo  
della tensione  $V$  e la  
capacità  $C$  dei tre  
condensatori affinché il  
 $\cos\phi$  totale sia pari a 0.9.

[ $V = 537.519 \text{ V}$ ,  $C =$   
 $31.580 \ \mu\text{F}$ ]

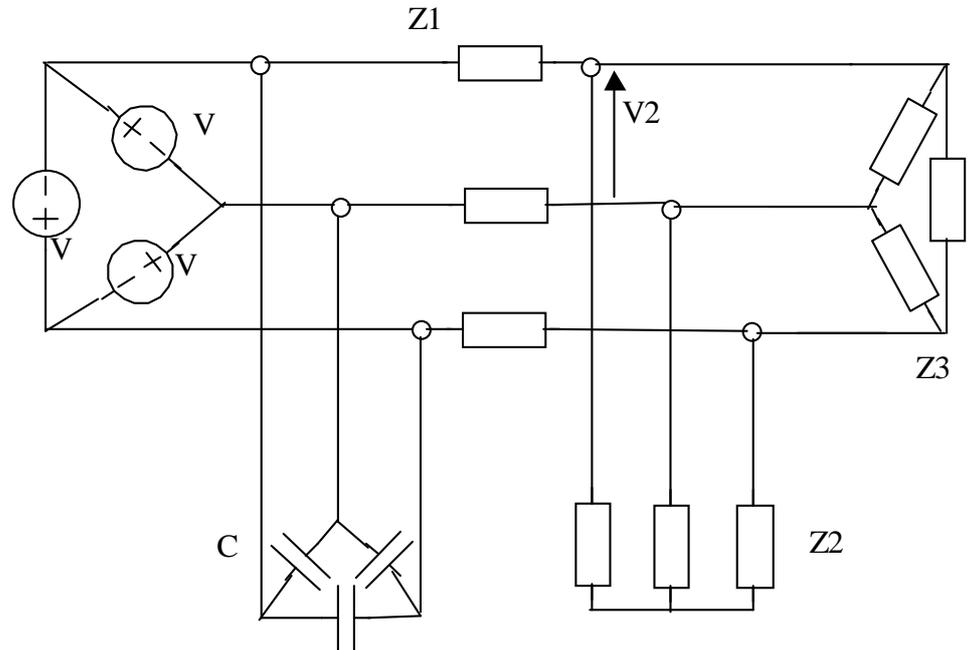


Fig. 9.10

{Si procede utilizzando il metodo di Boucherot. Si divide la rete nelle seguenti sezioni:

sez A: carico  $Z_3$

Sez B: carico  $Z_2$

Sez C: carico  $Z_1$

Sez. D condensatori C.

Alla sezione B la potenza attiva totale  $P_b$  è data dalla somma dei due contributi  $P_2$  e  $P_3$ ; stesso discorso vale per la potenza reattiva. In particolare la potenza reattiva del carico  $Z_3$  si può ricavare da  $P_3$  e da  $\cos\phi_3$  nel seguente modo:  $Q_3 = P_3 \cdot \tan\phi_3 = 14.53 \text{ kVar}$ . Risulta quindi  $P_b = P_3 + P_2 = 30 \text{ kW}$ ,  $Q_b = Q_2 + Q_3 = 22.53 \text{ kVar}$ . Il modulo della corrente che interessa le impedenze  $Z_1$  è pari a  $I_b = (\sqrt{P_b^2 + Q_b^2}) / (V_2 \cdot \sqrt{3}) = 43.323 \text{ A}$ . Alla sez. C la potenza attiva vale  $P_c = P_b + \text{Re}(Z_1) \cdot I_b^2 \cdot 3 = 32.25 \text{ kW}$  e la potenza reattiva vale  $Q_c = Q_b + \text{Im}(Z_1) \cdot I_b^2 \cdot 3 = 24.22 \text{ kVar}$ . La tensione  $V$  richiesta vale allora  $V = (\sqrt{P_c^2 + Q_c^2}) / (I_b \cdot \sqrt{3}) = 537.519 \text{ V}$ .

Nella sez. D la potenza attiva è pari a quella che si ha nella sez. C, la potenza reattiva è data da  $Q_d = P_d \cdot \tan\phi = 15.62 \text{ kVar}$ . I tre condensatori devono allora fornire un contributo di potenza reattiva pari a  $Q_{con} = Q_c - Q_d = 8.6 \text{ kVar}$ . Poiché i tre condensatori sono connessi a triangolo  $Q_{con} = 3V^2/X_c$ , di conseguenza la reattanza di ciascuno di essi è pari a  $X_c = 100.793 \ \Omega$  e la capacità di ciascuno è pari a  $C = 1/(\omega \cdot X_c) = 31.58 \ \mu\text{F}$

## ESERCIZIO 1

Un trasformatore monofase ha i seguenti dati di targa:

$$A_n = 30 \text{ kVA} \quad V_{1n} = 10000 \text{ V} \quad f = 50 \text{ Hz}$$

Della macchina sono noti:

$$\begin{array}{ll} \text{numero di spire dell'avvolgimento primario :} & N_1 = 2500 \\ \text{numero di spire dell'avvolgimento secondario :} & N_2 = 250 \\ \text{sezione del nucleo magnetico :} & S = 200 \text{ cm}^2 \end{array}$$

Determinare :

- 1) il valore massimo dell'induzione nel nucleo magnetico
- 2) la corrente secondaria nominale
- 3) la tensione con la quale si deve alimentare il primario del trasformatore perché lavori con il valore di induzione precedente, ma con frequenza della tensione di alimentazione di 60 Hz.

## Soluzione

1) Trascurando le cadute di tensione dovute alla resistenza ed alla reattanza di dispersione dell'avvolgimento primario ed ammettendo la tensione  $V_{1n}$  sinusoidale, si ha:

$$V_{1n} = E_1 = 4.44 \cdot f \cdot N_1 \cdot \phi_{\text{Max}}$$

Da cui essendo  $\phi_{\text{Max}} = B_{\text{Max}} S$  possiamo ricavare il valore massimo dell'induzione:

$$B_{\text{Max}} = \frac{V_{1n}}{4.44 \cdot f \cdot N_1 \cdot S} = 0.9 \frac{\text{Wb}}{\text{m}^2}$$

2) La corrente nominale secondaria vale:

$$I_{2n} = \frac{A_n}{V_{20}}$$

Dove  $V_{20} = \frac{V_{1n}}{K_0} = \frac{10000}{10} = 1000 \text{ V}$  e con  $K_0$  si intende il rapporto di trasformazione a vuoto che è praticamente coincidente con il rapporto spire). Da cui si ricava

$$I_{2n} = 30 \text{ A}$$

3) La nuova tensione di alimentazione è naturalmente data da

$$V_1' = 4.44 \cdot f \cdot N_1 \cdot B_{\text{Max}} \cdot S = 12000 \text{ V}$$

## ESERCIZIO 2

Di un trasformatore monofase, alimentato alla tensione nominale primaria di 6000 V,  $f = 50 \text{ Hz}$ , si conoscono i seguenti dati:

rapporto di trasformazione a vuoto  $K_0 = \frac{V_{1n}}{V_{20}} = 30$   
 resistenza dell'avvolgimento primario  $R_1 = 8 \Omega$   
 resistenza dell'avvolgimento secondario  $R_2 = 0.01 \Omega$   
 induttanza di dispersione dell'avvolgimento primario  $L_{d1} = 0.06 \text{ H}$   
 induttanza di dispersione dell'avvolgimento secondario  $L_{d2} = 0.13 \cdot 10^{-3} \text{ H}$

La corrente assorbita nel funzionamento a vuoto, alimentando la macchina con la tensione e frequenza nominali è  $I_0 = 0.25 \text{ A}$  ed il fattore di potenza corrispondente  $\cos \varphi_0 = 0.2$ .

Il trasformatore, alimentato alla tensione e frequenza nominali, alimenta al secondario un carico ohmico induttivo: in queste condizioni assorbe dalla rete una potenza  $P_1 = 24 \text{ kW}$  con  $\cos \varphi_1 = 0.8$  (lato primario).

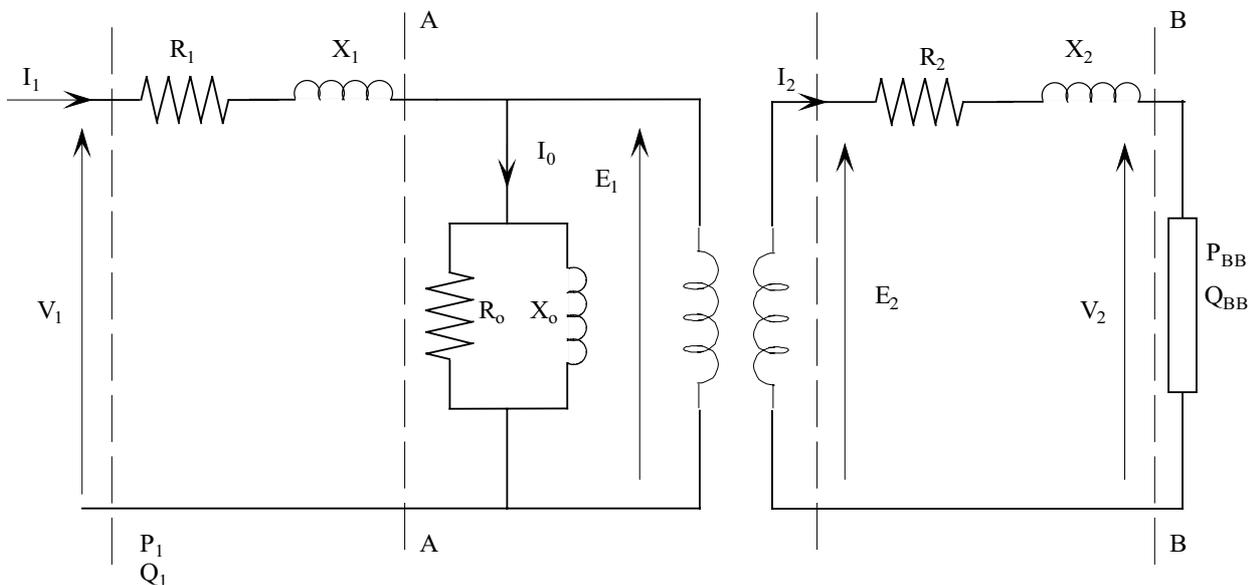
Determinare:

- 1) tensione, corrente e fattore di potenza del carico
- 2) i valori della resistenza e della reattanza equivalenti primarie del trasformatore

### Soluzione

1) Possiamo risolvere il problema applicando il teorema di Boucherot.

La rete equivalente completa si presenta come in figura:



Il trasformatore assorbe la potenza attiva  $P_1$  e reattiva  $Q_1$  :

$$\begin{aligned}
 P_1 &= 24000 \text{ W (dal testo)} \\
 Q_1 &= P_1 \cdot \operatorname{tg} \varphi_1 = 18000 \text{ VAR} \\
 A_1 &= 30000 \text{ W}
 \end{aligned}$$

La corrente  $I_1$  assorbita dalla rete è pari a:

$$I_1 = \frac{A_1}{V_1} = 5 \text{ A}$$

La potenza attiva e reattiva dell'avvolgimento primario sono pari a:

$$P_{cu1} = R_1 I_1^2 = 200 \text{ W}$$

$$Q_{x1} = X_1 I_1^2 = 18.84 \cdot 5^2 = 470 \text{ VAR}$$

La potenza attiva e reattiva transitanti attraverso AA sono:

$$P_{AA} = P_1 - P_{cu1} = 23800 \text{ W}$$

$$Q_{AA} = Q_1 - Q_{x1} = 17530 \text{ VAR}$$

$$A_{AA} = 29559 \text{ VA}$$

La f.e.m. primaria  $E_1$  è quindi pari a:  $E_1 = \frac{A_{AA}}{I_1} = 5912 \text{ V}$

La forza elettromotrice secondaria è quindi pari a:

$$E_2 = \frac{E_1}{K_0} = 197 \text{ V}$$

Le potenze attive e reattive assorbite a vuoto sono pari a:

$$P_0 = V_{in} I_0 \cos \varphi_0 = 300 \text{ W}$$

$$Q_0 = P_0 \operatorname{tg} \varphi_0 = 1470 \text{ VAR}$$

Da cui le potenze secondarie valgono:

$$P_2 = P_{AA} - P_0 = 23500 \text{ W}$$

$$Q_2 = Q_{AA} - Q_0 = 16060 \text{ VAR}$$

$$A_2 = 28464 \text{ VA}$$

Da cui

$$I_2 = \frac{A_2}{E_2} = 144.5 \text{ A}$$

Le potenze attiva e reattiva impegnate dall'avvolgimento secondario valgono:

$$P_{cu2} = R_2 I_2^2 = 209 \text{ W}$$

$$Q_{x2} = X_2 I_2^2 = 855 \text{ VAR}$$

Quindi la potenza attiva e reattiva del carico valgono:

$$P_{BB} = P_2 - P_{cu2} = 23291 \text{ W}$$

$$Q_{BB} = Q_2 - Q_{x2} = 15205 \text{ VAR}$$

L'angolo di sfasamento tra la tensione e la corrente del carico vale:

$$\cos \varphi_{BB} = \cos \left( \operatorname{arctg} \frac{Q_{BB}}{P_{BB}} \right) = 0.83$$

La tensione ai capi del carico è quindi pari a:

$$V_2 = \frac{P_{BB}}{I_2 \cos \varphi_{BB}} = 194 \text{ V}$$

2) Le reattanze e resistenze equivalenti primarie valgono:

$$R'_{eq} = R_1 + R_2 K_o^2 = 17 \text{ } \Omega$$

$$X'_{eq} = X_1 + X_2 K_o^2 = 55.56 \text{ } \Omega$$

### ESERCIZIO 3

I dati di targa di un trasformatore monofase sono:

$$A_n = 40 \text{ kVA} \quad V_{1n} = 12000 \text{ V} \quad V_{20} = 260 \text{ V} \quad f = 50 \text{ Hz}$$

Sulla macchina si sono eseguite le seguenti prove:

a) Prova a vuoto alimentando la macchina a tensione e frequenza nominali:

$$P_o = 0.4 \% \quad \cos \varphi_0 = 0.2$$

b) Prova di corto circuito eseguita a corrente e frequenza nominali:

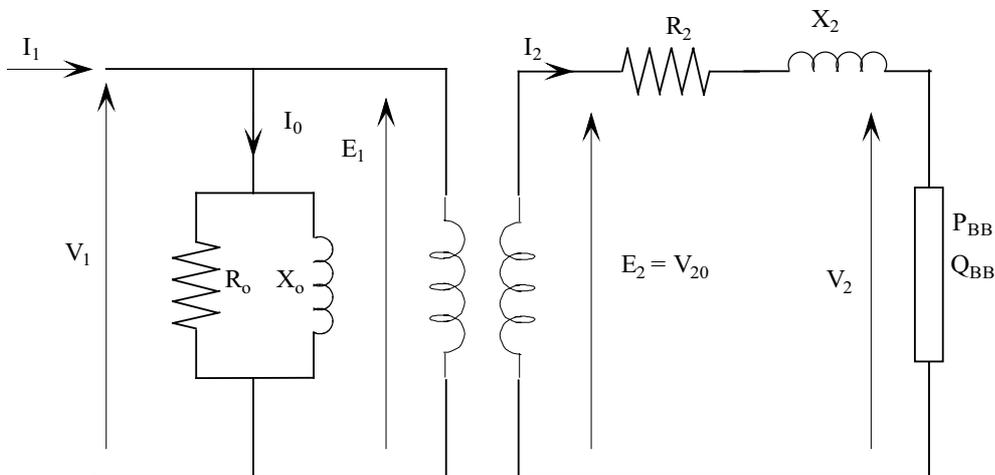
$$P_c \% = 1.8 \% \quad V_{cc} = 4 \%$$

Determinare

Impedenze, resistenze, reattanze dei circuiti equivalenti semplificati riferiti agli avvolgimenti primario e secondario.

### Soluzione

Consideriamo il circuito equivalente semplificato riportato in figura:



Dalla prova in corto circuito possiamo ricavare i parametri equivalenti  $R_2$  e  $X_2$ , abbiamo:

$$P_c = \frac{P_c \% \cdot A_n}{100} = 720 \text{ W}$$

$$I_{2n} = \frac{A_n}{V_{20}} = 154 \text{ A}$$

$$V_c = \frac{V_c \% \cdot V_{2n}}{100} = 10,4$$

$$\cos \varphi_{cc} = \frac{P_c}{V_c I_{2n}} = 0.45$$

da cui:

$$R_2 = \frac{P_c}{I_{2n}^2} = 3.04 \cdot 10^{-2} \Omega$$

$$X_2 = R_2 \cdot \operatorname{tg} \varphi_c = 6 \cdot 10^{-2} \Omega$$

La resistenza  $R_0$  e  $X_0$  si ricavano dalla prova a vuoto:

$$P_0 = \frac{P_0 \% \cdot A_n}{100} = 160 \text{ W}$$

$$Q_0 = P_0 \operatorname{tg} \varphi_0 = 784 \text{ VAR}$$

da cui:

$$R_{o1} = \frac{V_{1n}^2}{P_0} = 9 \cdot 10^5 \Omega$$

$$X_{o1} = \frac{V_{1n}^2}{Q_0} = 1.84 \cdot 10^5 \Omega$$

Il rapporto di trasformazione a vuoto è:

$$K_0 = \frac{V_{1n}}{V_{20}} = 46.2$$

da cui:

$$R_{o2} = \frac{R_{o1}}{K_0^2} = 423 \Omega$$

$$X_{o2} = \frac{X_{o1}}{K_0^2} = 86.4 \Omega$$

$$R_1 = R_2 \cdot K_0^2 = 64.8 \Omega$$

$$X_1 = X_2 \cdot K_0^2 = 128 \Omega$$

#### ESERCIZIO 4

Ad un trasformatore monofase, alimentato alla tensione e frequenza nominali, è allacciato un carico ohmico induttivo che, sotto la tensione  $V_2 = 380$  V, assorbe  $I_2 = 40$  A con fattore di potenza  $\cos \varphi_2 = 0.707$ .

Il rapporto di trasformazione a vuoto è  $K_0 = \frac{V_{1n}}{V_{20}} = 4$

Con una prova a vuoto, effettuata alla tensione e frequenza nominali ( $f_n = 50$  Hz) si è trovato che la corrente assorbita è  $I_0 = 0.3$  A ed il fattore di potenza  $\cos \varphi_0 = 0.15$

La prova di corto circuito, eseguita alla frequenza e corrente nominali alimentando la macchina dal lato bassa tensione, ha fornito i seguenti risultati:

$$V_{c2} = 19 \text{ V} \quad I_{c2} = 50 \text{ A} \quad \cos \varphi_c = 0.45$$

Determinare:

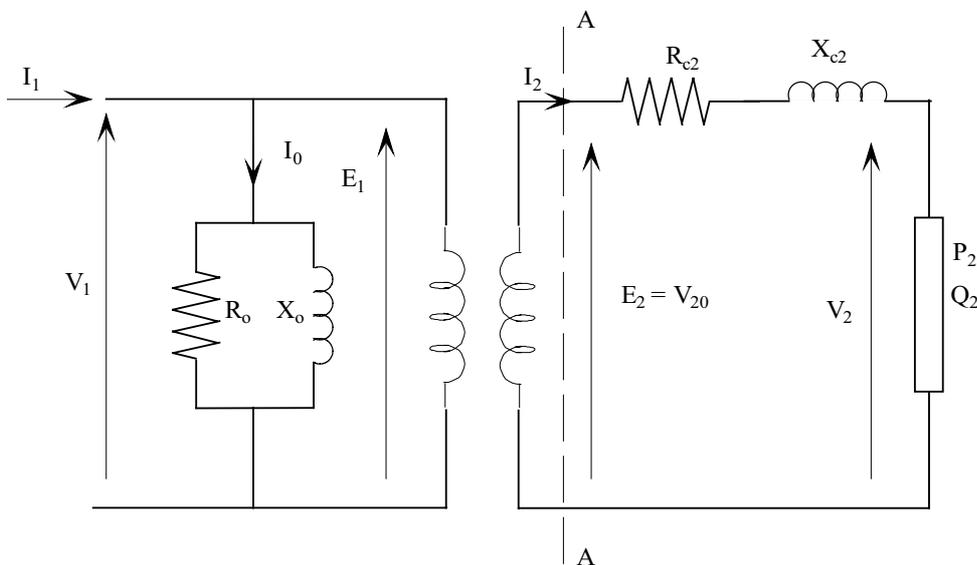
- 1) tensione, corrente e fattore di potenza primari nelle condizioni di carico specificate
- 2) la potenza e la tensione di corto circuito percentuali

#### Soluzione

1) Con il teorema di Boucherot. La potenza attiva  $P_2$  e reattiva  $Q_2$  del carico sono:

$$P_2 = V_2 I_2 \cos \varphi_2 = 10746 \text{ W}$$

$$Q_2 = P_2 \tan \varphi_2 = 10720 \text{ VAR}$$



Le potenze attiva e reattiva impegnate dalla resistenza e reattanza equivalenti sono pari a:

$$P_{cu} = R_{c2} I_2^2 = 274 \text{ W}$$

$$Q_x = X_{c2} I_2^2 = 542 \text{ VAR}$$

La potenza trasmessa al secondario (sez. AA) è quindi pari a:

$$P_{AA} = P_2 + P_{cu} = 11020 \text{ W}$$

$$Q_{AA} = Q_2 + Q_{cu} = 11262 \text{ VAR}$$

Da cui :  $\cos \varphi_{AA} = 0.695$

La f.e.m. secondaria è pari a:

$$E_2 = \frac{P_2}{I_2 \cos \varphi_{AA}} = 395 \text{ V}$$

Dal rapporto di trasformazione ricaviamo la tensione di alimentazione:

$$\boxed{V_{1n} = E_2 K_0 = 1580 \text{ V}}$$

Le potenze attiva  $P_0$  e reattiva  $Q_0$  sono pari a:

$$P_0 = V_{1n} I_0 \cos \varphi_0 = 71 \text{ W}$$

$$Q_0 = P_0 \tan \varphi_0 = 466 \text{ VAR}$$

Il trasformatore assorbe quindi:

$$P_1 = P_{BB} + P_0 = 11091 \text{ W}$$

$$Q_1 = Q_{BB} + Q_0 = 11728 \text{ VAR}$$

Da cui (essendo  $\tan \varphi_1 = \frac{Q_1}{P_1}$ )

$$\boxed{\cos \varphi_1 = 0.683}$$

la corrente assorbita vale:

$$\boxed{I_1 = \frac{P_1}{V_{1n} \cos \varphi_1} = 10.25 \text{ A}}$$

2) La potenza nominale del trasformatore vale:

$$A_n = V_{20} I_{2n} = 19800 \text{ VA}$$

Da cui:

$$\boxed{P_c \% = \frac{P_c}{A_n} 100 = 2.16\%}$$

dove  $P_c = R_{c2} \cdot I_{c2}^2 = 427 \text{ W}$

$$\boxed{v_c \% = \frac{V_{c2}}{V_{20}} 100 = 4.8\%}$$

oppure  $v_c \% = \frac{P_c \%}{\cos \varphi_c}$

## ESERCIZIO 5

Due trasformatori monofasi A e B sono collegati in parallelo ed alimentano un carico che assorbe una corrente di  $I_2 = 150 \text{ A}$  con fattore di potenza  $\cos \varphi_2 = 0.8$  in ritardo. Dei due trasformatori alimentati alla tensione nominale di  $1000 \text{ V}$  e alla frequenza nominale  $f = 50 \text{ Hz}$  si conoscono i seguenti dati:

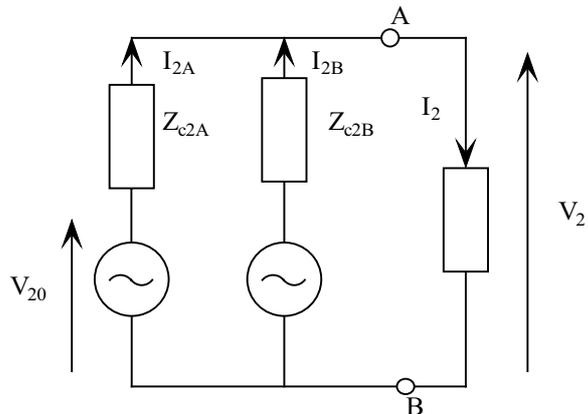
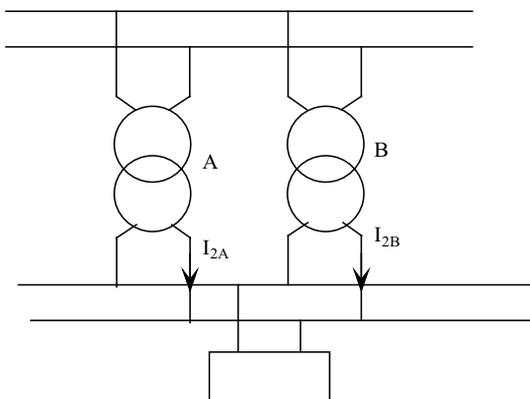
Trasformatore A:  $A_n = 30 \text{ kVA}$        $K_0 = 4$        $P_{fe} = \frac{1}{2} P_c$   
 $V_c \% = 5 \%$        $\cos \varphi_c = 0.5$

Trasformatore B:  $A_n = 15 \text{ kVA}$        $K_0 = 4$        $P_{fe} = \frac{2}{3} P_c$   
 $V_c \% = 5 \%$        $\cos \varphi_c = 0.5$

Determinare per le condizioni di carico considerate:

- 1) la tensione  $V_2$  ai capi del carico
- 2) il carico percentuale di ciascun trasformatore
- 3) il rendimento di ciascun trasformatore e quello complessivo
- 4) la massima corrente che possono erogare i due trasformatori senza sovraccaricarsi

### Soluzione



1) I due trasformatori, avendo lo stesso rapporto di trasformazione a vuoto  $K_0$ , hanno identica tensione a vuoto  $V_{20}$ , che vale:

$$V_{20} = \frac{V_{1n}}{K_0} = 250 \text{ V}$$

La corrente nominale di ciascun trasformatore vale:

$$I_{2nA} = \frac{A_{nA}}{V_{20A}} = 120 \text{ A} \quad I_{2nB} = \frac{A_{nB}}{V_{20B}} = 60 \text{ A}$$

Possiamo quindi determinare le resistenze e reattanze equivalenti secondarie:

$$V_{c2A} = \frac{V_c \% \cdot V_{20}}{100} = 12.5 \text{ V} \quad V_{c2B} = \frac{V_c \% \cdot V_{20}}{100} = 12.5 \text{ V}$$

da cui:

$$Z_{c2A} = \frac{V_{c2A}}{I_{2nA}} = 0.104 \text{ } \Omega \quad Z_{c2B} = \frac{V_{c2B}}{I_{2nB}} = 0.208 \text{ } \Omega$$

$$R_{c2A} = Z_{c2A} \cdot \cos \varphi_{cA} = 5.2 \cdot 10^{-2} \text{ } \Omega \quad R_{c2B} = Z_{c2B} \cdot \cos \varphi_{cB} = 10.4 \cdot 10^{-2} \text{ } \Omega$$

$$X_{c2A} = Z_{c2A} \cdot \sin \varphi_{cA} = 9 \cdot 10^{-2} \text{ } \Omega \quad X_{c2B} = Z_{c2B} \cdot \sin \varphi_{cB} = 18 \cdot 10^{-2} \text{ } \Omega$$

Considerando il circuito equivalente secondario e applicando Thevenin ai nodi AB:

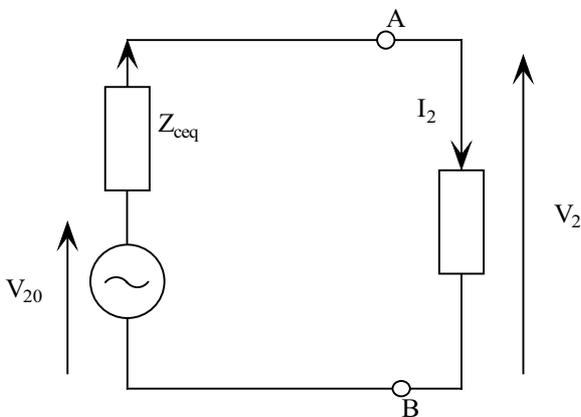
$$Z_{eq} = Z_{2cA} // Z_{2cB}$$

$$Z_{eq} = \frac{(R_{c2A} + jX_{c2A})(R_{c2B} + jX_{c2B})}{(R_{c2A} + jX_{c2A}) + (R_{c2B} + jX_{c2B})} = 3.46 \cdot 10^{-2} + j6 \cdot 10^{-2} \text{ } \Omega$$

$$R_{eq2} = 3.46 \cdot 10^{-2} \text{ } \Omega$$

$$X_{eq2} = 6.0 \cdot 10^{-2} \text{ } \Omega$$

$$E_{eq} = V_{20}$$



Utilizzando la formula della caduta di tensione approssimata possiamo ricavare la tensione  $V_2$

$$\Delta V = R_{c2eq} \cdot I_2 \cos \varphi_2 + X_{c2eq} \cdot I_2 \sin \varphi_2 = 9.55 \text{ V}$$

da cui

$$\boxed{V_2 = V_{20} - \Delta V = 240.45 \text{ V}}$$

2) Applicando le leggi di Kirchhoff delle tensioni al circuito equivalente secondario abbiamo:

$$\bar{V}_2 = \bar{V}_{20} - \bar{Z}_{c2A} \cdot \bar{I}_{2A}$$

$$\bar{V}_2 = \bar{V}_{20} - \bar{Z}_{c2B} \cdot \bar{I}_{2B}$$

E considerando l'equivalente di Thevenin

$$\bar{V}_2 = \bar{V}_{20} - \bar{Z}_{ceq2} \cdot \bar{I}_2$$

Da cui:

$$\bar{Z}_{ceq2} \cdot \bar{I}_2 = \bar{Z}_{c2A} \cdot \bar{I}_{2A} = \bar{Z}_{c2B} \cdot \bar{I}_{2B}$$

ed è possibile ricavarne il modulo:

$$I_{2A} = \frac{Z_{c2eq} I_2}{Z_{c2A}} = 100 \text{ A} \quad I_{2B} = \frac{Z_{c2eq} I_2}{Z_{c2B}} = 50 \text{ A}$$

il carico percentuale per ogni trasformatore è:

$$carico\% = \frac{I_2}{I_{2n}} 100 \quad \text{da cui } \boxed{carico\%_A = 83.4\%} \quad \boxed{carico\%_B = 83.4\%}$$

3) Le potenze erogate da ciascun trasformatore valgono

$$P_{2A} = V_2 I_{2A} \cos \varphi_{2A} = 19250 \text{ W}$$

$$P_{2B} = V_2 I_{2B} \cos \varphi_{2B} = 9625 \text{ W}$$

Le perdite nel rame:

$$P_{cuA} = R_{c2A} I_{2A}^2 = 520 \text{ W} \quad P_{cuB} = 260 \text{ W}$$

Le perdite nel ferro (dal legame espresso nei dati):

$$P_{feA} = 375 \text{ W}$$

$$P_{feB} = 250 \text{ W}$$

Da cui il rendimento

$$\eta_A = \frac{P_{2A}}{P_{2A} + P_{cuA} + P_{feA}} = 0.965$$

$$\eta_B = \frac{P_{2B}}{P_{2B} + P_{cuB} + P_{feB}} = 0.96$$

4) Avendo le due macchine il medesimo carico percentuale possono lavorare contemporaneamente a pieno carico e perciò la corrente massima erogabile è pari alla somma delle correnti nominali:

$$\boxed{I_{2MAX} = I_{2nA} + I_{2nB} = 180 \text{ A}}$$

## ESERCIZIO 6

I dati di targa di un trasformatore trifase sono:

$$A_n = 50 \text{ kVA} \quad K_0 = \frac{V_{1n}}{V_{20}} = \frac{30000}{500} \quad f = 50 \text{ Hz}$$

La prova di corto circuito, eseguita a corrente e frequenza nominali, ha fornito i seguenti valori:

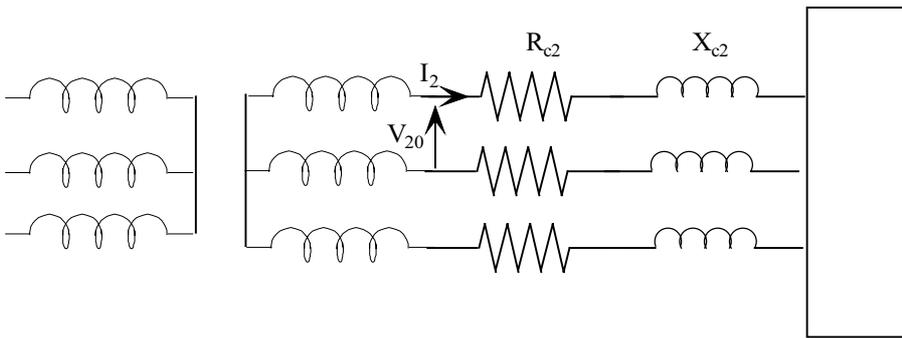
$$V_c \% = 5 \% \quad \cos \varphi_c = 0.5$$

Determinare

La resistenza, reattanza e impedenza di corto circuito equivalenti secondarie.

### Soluzione

Supponiamo gli avvolgimenti primari e secondari collegati a stella.



La corrente nominale del trasformatore vale:

$$I_{2n} = \frac{A_n}{\sqrt{3}V_{20}} = 57.8 \text{ A}$$

La tensione di corto circuito secondaria tra due morsetti vale:

$$V_{c2} = \frac{V_c \% \cdot V_{20}}{100} = 25 \text{ V}$$

I parametri di corto circuito sono pari a :

$$Z_{c2} = \frac{V_{c2}}{\sqrt{3}I_{2n}} = 0.25 \Omega$$

$$R_{c2} = Z_{c2} \cdot \cos \varphi_c = 0.125 \Omega$$

$$X_{c2} = Z_{c2} \cdot \sin \varphi_c = 0.216 \Omega$$

## ESERCIZIO 7

I dati di targa di un trasformatore trifase sono:

$$A_n = 5 \text{ kVA} \quad V_{1n} = 260 \text{ V} \quad f = 50 \text{ Hz}$$

$$K_s = \frac{N_1}{N_2} = 17.3 \quad \text{collegamento } \Delta/Y$$

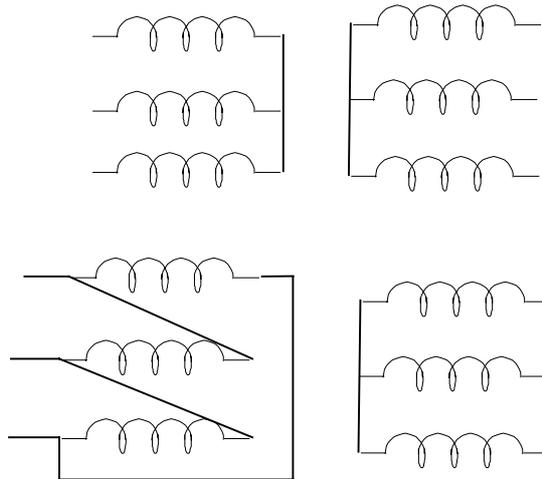
La prova di corto circuito, eseguita alla corrente e frequenza nominali, ha fornito i seguenti risultati:

$$V_{c1} = 20 \text{ V} \quad \cos \varphi_c = 0.5$$

Determinare:

- 1) La resistenza ( $R_{c2}$ ), la reattanza ( $X_{c2}$ ) e l'impedenza di corto circuito secondarie.
- 2) Sapendo che  $R_2 = \frac{1}{2} R_{c2}$  e che  $X_2 = \frac{3}{5} X_{c2}$  determinare la resistenza e reattanza dell'avvolgimento primario

## Soluzione



Sostituiamo al trasformatore con collegamento  $\Delta/Y$  un trasformatore equivalente con collegamento  $Y/Y$ . I due trasformatore devono avere lo stesso rapporto di trasformazione  $K_0$ . Per il trasformatore  $\Delta/Y$  abbiamo:

$$K_0 = \frac{K_s}{\sqrt{3}} = 10 \quad \text{che coinciderà con il rapporto spire del trasformatore } Y/Y.$$

La tensione di corto circuito secondaria vale:

$$V_{c2} = \frac{V_{c1}}{K_0} = 2 \text{ V}$$

La corrente nominale

$$I_{2n} = \frac{A_n}{\sqrt{3}V_{20}} = 111 \text{ A} \quad \text{dove } V_{20} = \frac{V_{1n}}{K_0} = 26 \text{ V}$$

I parametri di corto circuito risultano:

$$Z_{c2} = \frac{V_{c2}}{\sqrt{3}I_{2n}} = 1.04 \cdot 10^{-2} \Omega$$

$$R_{c2} = Z_{c2} \cos \varphi_c = 0.52 \cdot 10^{-2} \Omega$$

$$X_{c2} = Z_{c2} \sin \varphi_c = 0.89 \cdot 10^{-2} \Omega$$

2) dai dati ricaviamo

$$R_2 = 0.26 \cdot 10^{-2} \Omega$$

$$X_2 = 0.535 \cdot 10^{-2} \Omega$$

Dato che:

$$R_{c2} = R_2 + \frac{R_{1Y}}{K_o^2} \quad X_{c2} = X_2 + \frac{X_{1Y}}{K_o^2}$$

si ricava

$$R_{1Y} = 0.26 \Omega$$

$$X_{1Y} = 0.355 \Omega$$

Per trovare la resistenza e la reattanza di ogni avvolgimento primario collegato a triangolo basta moltiplicare per 3 i precedenti risultati.

$$R_1 = 3 R_{1Y} = 0.78 \Omega$$

$$X_1 = 3 X_{1Y} = 1.065 \Omega$$

## ESERCIZIO 8

Ad un trasformatore trifase, alimentato alla tensione nominale e alla frequenza di 50 Hz, è allacciato un carico trifase equilibrato ohmico induttivo che sotto la tensione  $V_2 = 960 \text{ V}$  assorbe la corrente  $I_2 = 100 \text{ A}$  con un fattore di potenza  $\cos \varphi_2 = 0.8$ .

Il rapporto di trasformazione a vuoto è  $K_0 = \frac{V_{1n}}{V_{20}} = 15$

Con una prova a vuoto effettuata alla tensione nominale e alla frequenza di 50 Hz, si è trovato che la corrente assorbita è  $I_0 = 0.4 \text{ A}$  ed il fattore di potenza a vuoto è  $\cos \varphi_0 = 0.15$ . La prova di corto circuito eseguita a corrente nominale alimentando la macchina dal lato basso tensione, ha fornito i seguenti dati:

$$V_{c2} = 46 \text{ V} \quad \cos \varphi_c = 0.45 \quad I_{c2} = 115.8 \text{ A}$$

Determinare :

- 1) tensione, corrente, fattore di potenza primari nelle condizioni di carico riportate
- 2) la potenza e la tensione di corto circuito percentuali

### Soluzione

Le potenze attiva e reattiva del carico sono:

$$P_2 = \sqrt{3} \cdot V_2 \cdot I_2 \cdot \cos \varphi_2 = 132840 \text{ W}$$

$$Q_2 = P_2 \cdot \tan \varphi_2 = 99650 \text{ VAR}$$

Le potenze attiva e reattiva impegnate dagli avvolgimenti sono:

$$P_{cu} = 3R_{c2}I_2^2 = 3090 \text{ W}$$

$$Q_x = 3X_{c2}I_2^2 = 6150 \text{ VAR}$$

Le potenze attiva e reattiva trasmesse al secondario del circuito equivalente sono:

$$P' = P_2 + P_{cu} = 135930 \text{ W}$$

$$Q' = Q_2 + Q_x = 105800 \text{ VAR}$$

Da cui :

$$\cos \varphi' = 0.789$$

la tensione secondaria a vuoto vale :

$$V_{20} = \frac{P'}{\sqrt{3}I_2 \cos \varphi'} = 1000 \text{ V}$$

Dal rapporto di trasformazione è possibile ricavare la tensione di alimentazione  $V_{1n}$ :

$$\boxed{V_{1n} = V_{20} \cdot K_0 = 15000 \text{ V}}$$

La potenza attiva  $P_0$  e reattiva  $Q_0$  a vuoto sono:

$$P_0 = \sqrt{3}V_{1n}I_0 \cos \varphi_0 = 1560 \text{ W}$$

$$Q_0 = P_0 \cdot \tan \varphi_0 = 10230 \text{ VAR}$$

La potenza assorbita dal trasformatore vale:

$$P_1 = P' + P_0 = 137490 \text{ W}$$

$$Q_1 = Q' + Q_0 = 116030 \text{ VAR}$$

$$\boxed{\cos \varphi_1 = 0.765}$$

La corrente assorbita del trasformatore vale :

$$I_1 = \frac{P_1}{\sqrt{3}V_{1n} \cos \varphi_1} = 6.91 \text{ A}$$

2) La potenza nominale del trasformatore vale

$$A_n = \sqrt{3}V_{20}I_{2n} = 200000 \text{ VA}$$

$$P_c \% = \frac{P_c}{A_n} 100 = 2.07\%$$

dove  $P_c = \sqrt{3}V_{c2}I_{c2} \cos \varphi_c = 4140 \text{ W}$

$$v_c \% = \frac{V_{c2}}{V_{20}} 100 = 4.6\%$$

### ESERCIZIO 9

Due trasformatori A e B sono collegati in parallelo ed alimentano un carico che assorbe una corrente  $I_2 = 300 \text{ A}$  con fattore di potenza  $\cos \varphi_2 = 0.8$  in ritardo. Dei due trasformatori alimentati alla tensione nominale di  $10000 \text{ V}$  e alla frequenza nominale si conoscono i seguenti dati:

Trasformatore A:	$A_n = 200 \text{ kVA}$ $K_0 = 20$	$I_0 \% = 2 \%$ $V_c \% = 4 \%$	$P_{fe} = 1/5 P_c$ $P_c \% = 1.25 \%$
Trasformatore B:	$A_n = 60 \text{ kVA}$ $K_0 = 20$	$I_0 \% = 2.4 \%$ $V_c \% = 4 \%$	$P_{fe} = 1/4 P_c$ $P_c = 1.25 \%$

Determinare:

- 1) la tensione  $V_2$  ai capi del carico
- 2) il carico percentuale di ciascun trasformatore
- 3) il rendimento di ciascun trasformatore e quello complessivo

### Soluzione

I due trasformatori avendo lo stesso rapporto di trasformazione a vuoto hanno identica tensione a vuoto  $V_{20}$  che vale:

$$V_{20} = \frac{V_{1n}}{K_0} = 500 \text{ V}$$

la corrente nominale di ciascun trasformatore è:

$$I_{2n} = \frac{A_n}{\sqrt{3}V_{20}} \quad \text{da cui :} \quad I_{2nA} = 231 \text{ A} \quad I_{2nB} = 69,4 \text{ A}$$

Supponendo i trasformatori collegati a stella si possono determinare la resistenza e la reattanza di corto circuito.

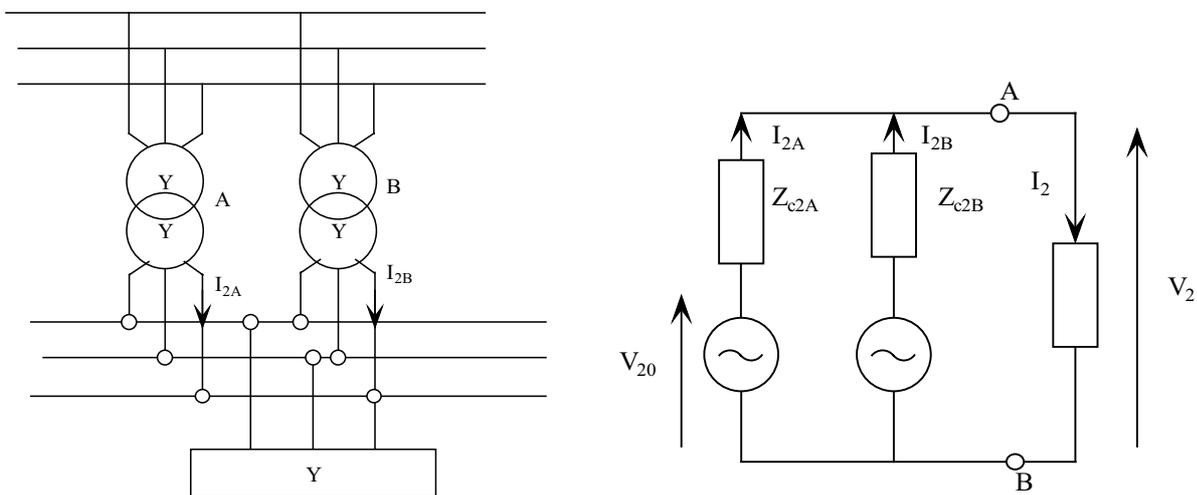
$$\cos \varphi_{cc} = \cos \varphi_{ccA} = \cos \varphi_{ccB} = \frac{P_c \%}{v_c \%} = 0.313$$

$$P_c = \frac{P_c \% \cdot A_n}{100} \quad P_{cA} = 2.5 \text{ kW} \quad P_{cB} = 0.75 \text{ kW}$$

$$R_{c2} = \frac{P_c}{3I_{2n}^2} \quad R_{c2A} = 1.56 \cdot 10^{-2} \Omega \quad R_{c2B} = 5.2 \cdot 10^{-2} \Omega$$

$$X_{c2} = R_{c2} \cdot \tan \varphi_c \quad X_{c2A} = 4.73 \cdot 10^{-2} \Omega \quad X_{c2B} = 15.8 \cdot 10^{-2} \Omega$$

Poiché il sistema è simmetrico equilibrato posso passare al circuito monofase equivalente:



E' possibile ora risolvere con Thevenin

$$Z_{c2eq} = Z_{c2A} // Z_{c2B} = 1.2 \cdot 10^{-2} + j 3.65 \cdot 10^{-2} \Omega$$

Utilizzando la caduta di tensione approssimata otteniamo:

$$\Delta V = R_{c2eq} \cdot I_2 \cos \varphi_2 + X_{c2eq} \cdot I_2 \sin \varphi_2 = 16.35 \text{ V}$$

e quindi

$$\boxed{V_2 = V_{20} - \Delta V = 483.65 \text{ V}}$$

2) Applicando le leggi di Kirchhoff delle tensioni al circuito equivalente secondario abbiamo:

$$\bar{V}_2 = \bar{V}_{20} - \bar{Z}_{c2A} \cdot \bar{I}_{2A}$$

$$\bar{V}_2 = \bar{V}_{20} - \bar{Z}_{c2B} \cdot \bar{I}_{2B}$$

E considerando l'equivalente di Thevenin

$$\bar{V}_2 = \bar{V}_{20} - \bar{Z}_{c2eq} \cdot \bar{I}_2$$

Da cui:

$$\bar{Z}_{c2eq} \cdot \bar{I}_2 = \bar{Z}_{c2A} \cdot \bar{I}_{2A} = \bar{Z}_{c2B} \cdot \bar{I}_{2B}$$

ed è possibile ricavarne il modulo:

$$I_{2A} = \frac{Z_{c2eq} I_2}{Z_{c2A}} = 231 \text{ A} \quad I_{2B} = \frac{Z_{c2eq} I_2}{Z_{c2B}} = 69 \text{ A}$$

il carico percentuale per ogni trasformatore è:

$$\text{carico}\% = \frac{I_2}{I_{2n}} 100 \quad \text{da cui } \boxed{\text{carico}\%_A = 100\%} \quad \boxed{\text{carico}\%_B = 100\%}$$

3) Le potenze erogate da ciascun trasformatore valgono

$$P_{2A} = V_2 I_{2A} \cos \varphi_{2A} = 154500 \text{ W}$$

$$P_{2B} = V_2 I_{2B} \cos \varphi_{2B} = 46200 \text{ W}$$

Le perdite nel rame:

$$P_{cuA} = P_{cA} = 2.5 \text{ kW} \quad P_{cuB} = 0.75 \text{ kW}$$

Le perdite nel ferro (dal legame espresso nei dati):

$$P_{feA} = 0.5 \text{ kW}$$

$$P_{feB} = 0.1875 \text{ kW}$$

Da cui il rendimento

$$\eta_A = \frac{P_{2A}}{P_{2A} + P_{cuA} + P_{feA}} = 0.982$$

$$\eta_B = \frac{P_{2B}}{P_{2B} + P_{cuB} + P_{feB}} = 0.98$$

la potenza assorbita dal carico vale  $P_2 = P_{2A} + P_{2B} = 200,7 \text{ kW}$

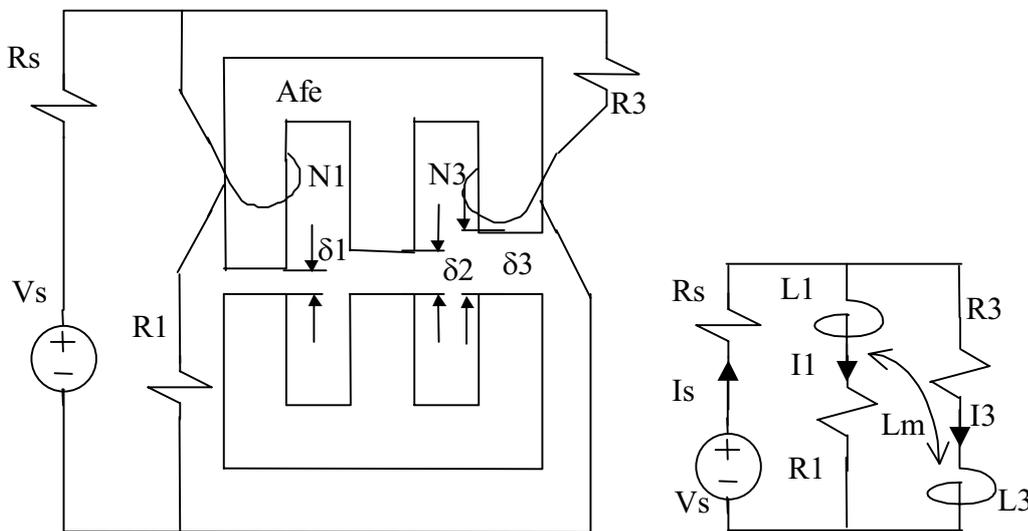
il rendimento complessivo è quindi pari a :

$$\eta_B = \frac{P_2}{P_2 + P_{cuA} + P_{feA} + P_{cuB} + P_{feB}} = 0.98$$

Dato il circuito in figura funzionante in regime stazionario, sono noti:  $R_s = 7.333 \Omega$ ,  $R_1 = 2 \Omega$ ,  $R_3 = 7 \Omega$ ,  $\delta_1 = 1 \text{ mm}$ ,  $\delta_2 = 1.3 \text{ mm}$ ,  $\delta_3 = 1.5 \text{ mm}$ ,  $A = 8 \text{ cm}^2$ ,  $N_1 = 100$ ,  $N_3 = 500$ ,  $V_1 = 30 \text{ V}$ . Si consideri la permeabilità del ferro infinita. Determinare: 1) le correnti in cc, 2) la forza e l'energia nel traferro, 3) i parametri elettrici auto e mutua induttanza, 4) i morsetti corrispondenti, 5) l'energia degli induttori.

### 1. DETERMINAZIONE DELLE CORRENTI IN CC

Innanzitutto, bisogna considerare che una bobina avvolta su un tronco ferromagnetico è un'induttanza, per cui la rete in esame va vista come 3 rami in parallelo: generatore  $V_s$  con in serie resistenza  $R_s$ ; resistenza  $R_1$  con in serie induttanza  $L_1$ ; resistenza  $R_3$  con in serie induttanza  $L_3$ . Inoltre, da come è fatto il circuito magnetico, si vede che esiste un flusso che concatena entrambi gli avvolgimenti: ciò significa che gli avvolgimenti sono accoppiati magneticamente, quindi non si hanno due semplici induttanze indipendenti, ma si ha un mutuo induttore, e dunque esiste anche una mutua induttanza  $L_m$  (se invece non esistesse un flusso mutuo, gli avvolgimenti sarebbero disaccoppiati, le induttanze sarebbero indipendenti, e non ci sarebbe mutua induttanza).



Ora, in cc gli induttori a regime si comportano come dei corto circuiti, per cui la corrente dipende solo dalle resistenze. La corrente  $I_s$  si trova dividendo la tensione  $V_s$  per la resistenza equivalente del circuito:  $I_s = V_s / (R_s + R_1 // R_3)$ .  $I_1$  ed  $I_3$  si trovano col partitore di corrente:

$$I_1 = I_s * G_1 / (G_1 + G_3) \quad I_3 = I_s * G_3 / (G_1 + G_3)$$

### 2. FORZA ED ENERGIA NEL TRAFERRO

In un traferro, si definisce densità di energia magnetica (energia per unità di volume) la quantità  $w = B^2 / (2\mu_0)$  ( $B$  = induzione nel traferro,  $\mu_0 = 4\pi * 10^{-7}$  = permeabilità del vuoto).

Tale quantità coincide anche con la pressione magnetica (forza / superficie).

Per ciascun traferro, la forza è espressa dal prodotto della pressione per la superficie

$$F = A_{fe} * B^2 / (2\mu_0)$$

e l'energia è il prodotto della densità di energia per il volume del traferro

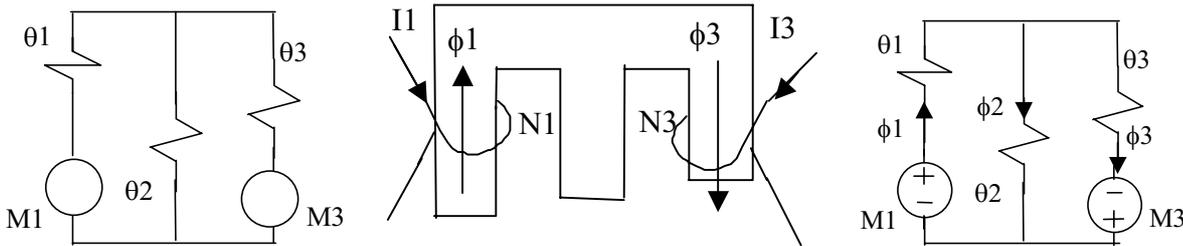
$$W = \delta * A_{fe} * B^2 / (2\mu_0).$$

Dato che l'induzione  $B$  si trova dal rapporto flusso / sezione, occorre calcolare per ciascun traferro il flusso magnetico. Per far questo bisogna risolvere la rete magnetica.

## TRACCIAMENTO DELLA RETE MAGNETICA.

- Per ipotesi la permeabilità del ferro è infinita => tutti i tronchi in ferro corrispondono a dei corto circuiti magnetici;
- dove c'è un traferro si mette una resistenza magnetica, detta riluttanza, ed indicata con  $\theta$ ;
- in corrispondenza delle bobine si mette un generatore di tensione magnetica, detta forza magneto motrice M, di valore pari al prodotto della corrente che passa nella bobina per il numero di spire della bobina stessa. Quindi  $M1 = N1 \cdot I1$ ,  $M3 = N3 \cdot I3$ .

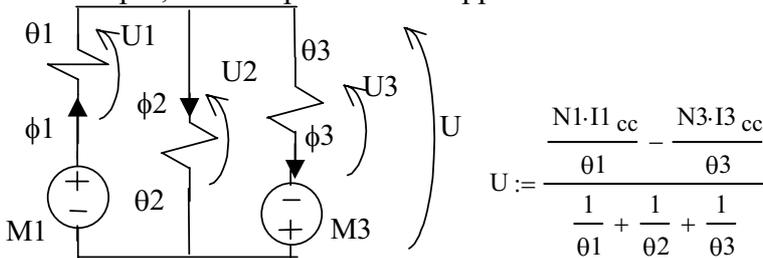
Per quanto riguarda il verso dei generatori M1 ed M3, esso corrisponde al verso dei flussi nel circuito magnetico, ed il verso del flusso si stabilisce con la regola della mano destra: usando la mano destra, se le dita della mano girano come gira la corrente nella bobina, il verso del pollice indica il verso del flusso.



Per quanto riguarda le espressioni delle riluttanze, esse sono semplicemente legate alla geometria del traferro, cioè alla sezione  $A_{fe}$  e alla lunghezza  $\delta$  del traferro:  $\theta = \delta / \mu_o \cdot A_{fe}$ .

A questo punto, la rete magnetica va vista come una rete elettrica, e si risolve come tale.

Ad esempio, il modo più veloce è applicare Millmann ai capi dei tre rami in parallelo.



$$U1 := N1 \cdot I1_{cc} - U$$

$$\phi1 := \frac{U1}{\theta1}$$

$$B1 := \frac{\phi1}{A}$$

$$F1 := \frac{1}{2 \cdot \mu_o} \cdot B1^2 \cdot A$$

$$W1 := F1 \cdot \delta1$$

$$F := F1 + F2 + F3$$

$$U2 := U$$

$$\phi2 := \frac{U2}{\theta2}$$

$$B2 := \frac{\phi2}{A}$$

$$F2 := \frac{1}{2 \cdot \mu_o} \cdot B2^2 \cdot A$$

$$W2 := F2 \cdot \delta2$$

$$W := W1 + W2 + W3$$

$$U3 := N3 \cdot I3_{cc} + U$$

$$\phi3 := \frac{U3}{\theta3}$$

$$B3 := \frac{\phi3}{A}$$

$$F3 := \frac{1}{2 \cdot \mu_o} \cdot B3^2 \cdot A$$

$$W3 := F3 \cdot \delta3$$

NOTA BENE: le R sono resistenze elettriche, del circuito elettrico. Le  $\theta$  sono resistenze magnetiche, del circuito magnetico. **Fra le due non vi è alcuna relazione.**

## 3. PARAMETRI ELETTRICI AUTO E MUTUA INDUTTANZA

Si definisce “flusso concatenato con una bobina” il prodotto del numero di spire della bobina per il flusso magnetico che passa nel tronco su cui è avvolta la bobina.

L'induttanza è il rapporto fra flusso concatenato con una bobina e la corrente che genera tale flusso.

Se la bobina concatenata col flusso è la stessa che genera il flusso, si parla di auto induttanza.

Se la bobina concatenata col flusso è diversa da quella che genera il flusso, si parla di mutua induttanza.

CASO 1:  $I_3 = 0, I_1 \neq 0$ . In questo caso si ha che  
 l'auto induttanza della bobina 1 è  
 la mutua induttanza fra la bobina 1 e la bobina 3 è

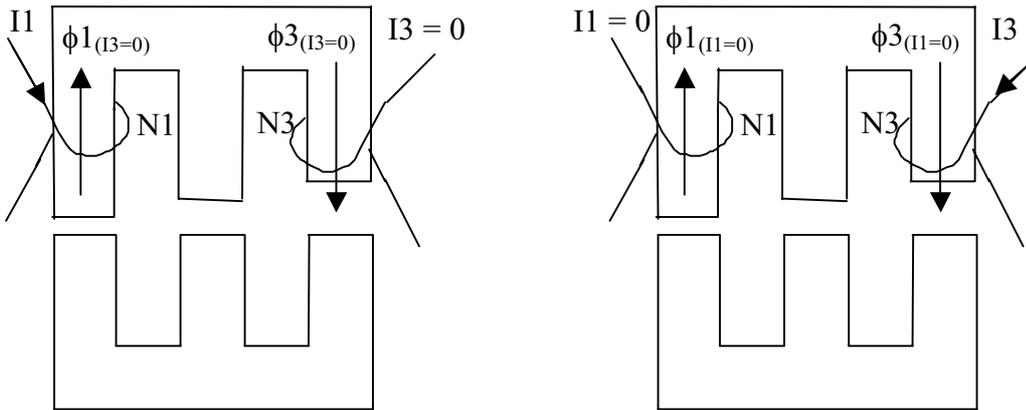
$$L_{11} = N_1 \cdot \phi_{1(I_3=0)} / I_1,$$

$$L_{13} = N_3 \cdot \phi_{3(I_3=0)} / I_1.$$

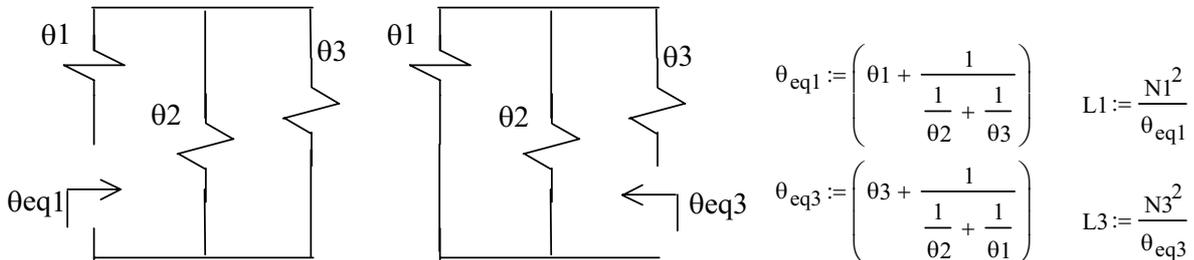
CASO 2:  $I_1 = 0, I_3 \neq 0$ . In questo caso si ha che  
 l'auto induttanza della bobina 3 è  
 la mutua induttanza fra la bobina 1 e la bobina 3 è

$$L_{33} = N_3 \cdot \phi_{3(I_1=0)} / I_3,$$

$$L_{31} = N_1 \cdot \phi_{1(I_1=0)} / I_3.$$



D'altra parte, si vede che calcolare l'auto induttanza corrisponde a calcolare la riluttanza equivalente della rete magnetica (come se si stesse calcolando la resistenza equivalente della rete elettrica), quindi il calcolo dell'auto induttanza si riduce al calcolo della Req di una rete magnetica.



Per il calcolo della mutua bisogna invece risolvere necessariamente una delle due reti viste prima (annullando una delle due correnti). Ad esempio si considera il caso  $I_1 = 0$ , si calcola il flusso  $\phi_{3(I_1=0)}$  come rapporto fra la fmm  $M_3$  e la riluttanza equivalente  $\theta_{eq3}$ , e poi si trova il flusso  $\phi_{1(I_1=0)}$  tramite un partitore di corrente; da ultimo, si calcola la mutua induttanza.

$$\phi_{3(I_1=0)} := \frac{N_3 \cdot I_{3cc}}{\theta_{eq3}} \quad \phi_{1(I_1=0)} := \phi_{3(I_1=0)} \cdot \frac{\frac{1}{\theta_1}}{\left( \frac{1}{\theta_2} + \frac{1}{\theta_1} \right)} \quad L_m := N_1 \cdot \frac{\phi_{1(I_1=0)}}{I_{3cc}} \quad \text{quindi} \quad L_m := \frac{N_1 \cdot N_3}{\theta_{eq3}} \cdot \frac{\frac{1}{\theta_1}}{\left( \frac{1}{\theta_2} + \frac{1}{\theta_1} \right)}$$

NOTA: per la reciprocità dei circuiti magnetici,  $L_{13} = L_{31}$ ; se non è così, si sono sbagliati i conti.

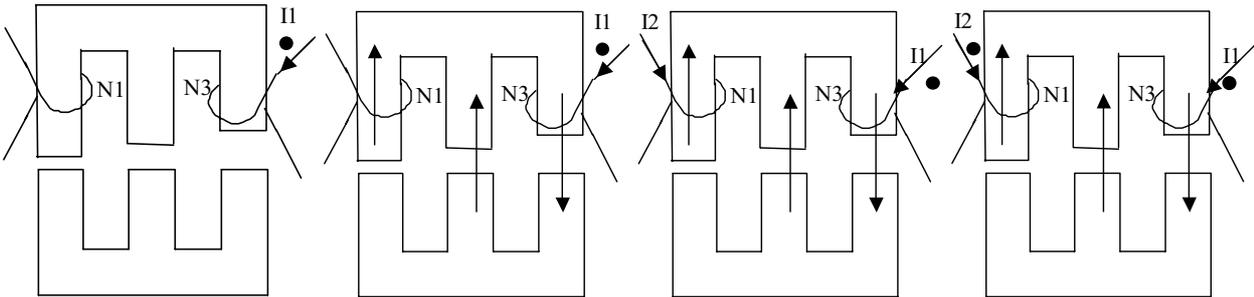
NOTA BENE: i flussi calcolati al punto 2 sono diversi da quelli calcolati ora, perché prima entrambe le correnti erano NON nulle, mentre ora una delle due è alternativamente nulla.

#### 4. DETERMINAZIONE DEI MORSETTI CORRISPONDENTI

I morsetti corrispondenti sono quelli da cui deve entrare la corrente in modo che i flussi magnetici generati dalle due bobine siano equiversi. Tali morsetti dipendono unicamente dal circuito magnetico, non dal circuito elettrico esterno, per cui per determinarli bisogna considerare SOLO il circuito magnetico, dimenticandosi temporaneamente del circuito elettrico esterno.

Il procedimento per la determinazione è il seguente:

- 1) si fa entrare una corrente da una bobina, e si marca il morsetto da cui tale corrente entra;
- 2) si disegna il flusso fatto circolare da tale corrente (in base alla regola della mano destra);
- 3) si determina (sempre con la regola della mano destra) da dove deve entrare la corrente nella seconda bobina per far sì che il flusso sia concorde;
- 4) il morsetto da cui deve entrare la corrente è il morsetto corrispondente di quello già marcato, per cui viene marcato anch'esso.



NOTA BENE: si vede che in tutto il procedimento non si è fatto alcun riferimento al circuito elettrico esterno; il fatto che le correnti siano equiverse con quelle del circuito elettrico esterno è solo casuale.

#### 5. ENERGIA DEGLI INDUTTORI

L'energia immagazzinata in un mutuo induttore risulta  $\frac{1}{2} L_1 \cdot I_1^2 + \frac{1}{2} L_2 \cdot I_2^2 + L_m \cdot I_1 \cdot I_2$ , e quindi nel nostro caso diventa  $\frac{1}{2} L_{11} \cdot I_1^2 + \frac{1}{2} L_{33} \cdot I_3^2 + L_{13} \cdot I_1 \cdot I_3$ . Bisogna però decidere il segno della mutua induttanza. Dal circuito elettrico esterno, si vede che le correnti  $I_1$  ed  $I_3$  sono ENTRAMBI entranti nella bobina dai morsetti corrispondenti, per cui il segno della mutua induttanza è positivo; se invece una corrente entra e l'altra esce (rispetto ai morsetti corrispondenti), il segno della mutua è negativo. Quindi nel nostro caso l'energia è effettivamente  $\frac{1}{2} L_{11} \cdot I_1^2 + \frac{1}{2} L_{33} \cdot I_3^2 + L_{13} \cdot I_1 \cdot I_3$ . Si DEVE ottenere lo stesso valore precedentemente calcolato come energia del traferro, perché l'induttore è il modello elettrico del circuito magnetico, ma il fenomeno fisico è lo stesso, quindi i risultati devono necessariamente coincidere.

$$R_s := \frac{22}{3} \quad R_1 := 2 \quad R_3 := 7 \quad V_{s_{cc}} := 30$$

$$\mu_o := 4 \cdot \pi \cdot 10^{-7} \quad \delta_1 := 1 \cdot 10^{-3} \quad \delta_2 := 1.3 \cdot 10^{-3} \quad \delta_3 := 1.5 \cdot 10^{-3} \quad A := 8 \cdot 10^{-4} \quad N_1 := 100 \quad N_3 := 500$$

Soluzione della rete in cc per avere le correnti nelle bobine

$$I_s := \frac{V_{s_{cc}}}{R_s + \frac{R_1 \cdot R_3}{R_1 + R_3}} \quad I_s = 3.375 \quad I_{1_{cc}} := I_s \cdot \frac{R_1^{-1}}{R_1^{-1} + R_3^{-1}} \quad I_{1_{cc}} = 2.625 \quad I_{3_{cc}} := I_s \cdot \frac{R_3^{-1}}{R_1^{-1} + R_3^{-1}} \quad I_{3_{cc}} = 0.75$$

Soluzione della rete magnetica per avere flusso, induzione, forza, energia

$$U := \frac{\frac{N_1 \cdot I_{1_{cc}}}{\theta_1} - \frac{N_3 \cdot I_{3_{cc}}}{\theta_3}}{\frac{1}{\theta_1} + \frac{1}{\theta_2} + \frac{1}{\theta_3}} \quad U = 5.132 \quad \theta_1 := \frac{\delta_1}{\mu_o \cdot A} \quad \theta_2 := \frac{\delta_2}{\mu_o \cdot A} \quad \theta_3 := \frac{\delta_3}{\mu_o \cdot A}$$

$$\theta_1 = 9.947 \times 10^5 \quad \theta_2 = 1.293 \times 10^6 \quad \theta_3 = 1.492 \times 10^6$$

$$U_1 := N_1 \cdot I_{1_{cc}} - U \quad U_1 = 257.368 \quad U_2 := U \quad U_2 = 5.132 \quad U_3 := N_3 \cdot I_{3_{cc}} + U \quad U_3 = 380.132$$

$$\phi_1 := \frac{U_1}{\theta_1} \quad \phi_1 = 2.587 \times 10^{-4} \quad \phi_2 := \frac{U_2}{\theta_2} \quad \phi_2 = 3.968 \times 10^{-6} \quad \phi_3 := \frac{U_3}{\theta_3} \quad \phi_3 = 2.548 \times 10^{-4}$$

$$B_1 := \frac{\phi_1}{A} \quad B_1 = 0.323 \quad B_2 := \frac{\phi_2}{A} \quad B_2 = 4.96 \times 10^{-3} \quad B_3 := \frac{\phi_3}{A} \quad B_3 = 0.318$$

$$F_1 := \frac{1}{2 \cdot \mu_o} \cdot B_1^2 \cdot A \quad F_1 = 33.295 \quad F_2 := \frac{1}{2 \cdot \mu_o} \cdot B_2^2 \cdot A \quad F_2 = 7.832 \times 10^{-3} \quad F_3 := \frac{1}{2 \cdot \mu_o} \cdot B_3^2 \cdot A \quad F_3 = 32.282$$

$$W_1 := F_1 \cdot \delta_1 \quad W_1 = 0.033 \quad W_2 := F_2 \cdot \delta_2 \quad W_2 = 1.018 \times 10^{-5} \quad W_3 := F_3 \cdot \delta_3 \quad W_3 = 0.048$$

$$F := F_1 + F_2 + F_3 \quad F = 65.585 \quad W := W_1 + W_2 + W_3 \quad W = 0.082$$

Calcolo dei parametri elettrici

$$\theta_{eq1} := \left( \theta_1 + \frac{1}{\frac{1}{\theta_2} + \frac{1}{\theta_3}} \right) \quad \theta_{eq1} = 1.687 \times 10^6 \quad L_1 := \frac{N_1^2}{\theta_{eq1}} \quad L_1 \cdot 1000 = 5.926$$

$$\theta_{eq3} := \left( \theta_3 + \frac{1}{\frac{1}{\theta_2} + \frac{1}{\theta_1}} \right) \quad \theta_{eq3} = 2.054 \times 10^6 \quad L_3 := \frac{N_3^2}{\theta_{eq3}} \quad L_3 \cdot 1000 = 121.695$$

$$\phi^3_{I_{1_{nulla}}} := \frac{N_3 \cdot I_{3_{cc}}}{\theta_{eq3}} \quad \phi^1_{I_{1_{nulla}}} := \phi^3_{I_{1_{nulla}}} \cdot \frac{1}{\left( \frac{1}{\theta_2} + \frac{1}{\theta_1} \right)} \quad L_m := N_1 \cdot \frac{\phi^1_{I_{1_{nulla}}}}{I_{3_{cc}}}$$

$$\phi^3_{I_{1_{nulla}}} = 1.825 \times 10^{-4} \quad \phi^1_{I_{1_{nulla}}} = 1.032 \times 10^{-4} \quad L_m \cdot 1000 = 13.757 \quad \frac{N_1 \cdot N_3}{\theta_{eq3}} \cdot \frac{1}{\left( \frac{1}{\theta_2} + \frac{1}{\theta_1} \right)} \cdot 1000 = 13.757$$

NOTA: si vede che i flussi calcolati qui sono diversi da quelli calcolati prima. Inoltre si vede che nell'espressione dell'induttanza non compare la corrente.

$$\frac{1}{2} \cdot L_1 \cdot I_{1_{cc}}^2 = 0.02 \quad \frac{1}{2} \cdot L_3 \cdot I_{3_{cc}}^2 = 0.034 \quad L_m \cdot I_{1_{cc}} \cdot I_{3_{cc}} = 0.027 \quad \frac{1}{2} \cdot L_1 \cdot I_{1_{cc}}^2 + \frac{1}{2} \cdot L_3 \cdot I_{3_{cc}}^2 + L_m \cdot I_{1_{cc}} \cdot I_{3_{cc}} = 0.082$$